



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CENTRO TECNOLÓGICO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

RODRIGO HENRIQUE SCHERNOVSKI

**INFLUÊNCIA DO FATOR  $k$  DE CISALHAMENTO TRANSVERSAL EM  
LAMINADOS MODELADOS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS  
GENERALIZADOS**

Florianópolis

2024

RODRIGO HENRIQUE SCHERNOVSKI

**INFLUÊNCIA DO FATOR  $k$  DE CISALHAMENTO TRANSVERSAL EM  
LAMINADOS MODELADOS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS  
GENERALIZADOS**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação  
em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de  
Santa Catarina como requisito parcial para a obtenção  
do título de Mestre em Engenharia Mecânica.  
Orientador: Paulo de Tarso R. de Mendonça, Ph.D.

Florianópolis

2024

Ficha catalográfica gerada por meio de sistema automatizado gerenciado pela BU/UFSC.  
Dados inseridos pelo próprio autor.

Schernovski, Rodrigo Henrique  
Influência do fator k de cisalhamento transversal em laminados modelados pelo método dos elementos finitos generalizados / Rodrigo Henrique Schernovski ; orientador, Paulo de Tarso Rocha de Mendonça, 2024.  
110 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Florianópolis, 2024.

Inclui referências.

1. Engenharia Mecânica. 2. Fator de correção de cisalhamento. 3. Materiais compostos laminados. 4. Teoria de deformação de cisalhamento de primeira ordem. 5. Método dos elementos finitos generalizados. I. Mendonça, Paulo de Tarso Rocha de. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. III. Título.

Rodrigo Henrique Schernovski

**Influência do fator  $k$  de cisalhamento transversal em laminados modelados pelo método dos elementos finitos generalizados**

O presente trabalho em nível de Mestrado foi avaliado e aprovado, em 24 de abril de 2024, pela banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Felício Bruzzi Barros, Ph.D.  
Universidade Federal de Minas Gerais

Prof. Ivan Moura Belo, Dr.Eng.  
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Eduardo Alberto Fancello, Ph.D.  
Universidade Federal de Santa Catarina

Certificamos que está é a versão original e final do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.



Prof. Henrique Simas, Ph.D.  
Coordenador do Programa de Pós-Graduação



Prof. Paulo de Tarso Rocha de Mendonça, Ph.D.  
Orientador

Florianópolis, 2024

## RESUMO

Este trabalho tem como objetivo analisar a influência dos fatores de correção de cisalhamento em laminados modelados pelo Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) e desenvolver um novo procedimento para determinar esses fatores, visando à obtenção de resultados mais precisos pela Teoria de Deformação de Cisalhamento de Primeira Ordem (FSDT), especialmente nas etapas de pós-processamento. Essa teoria, amplamente empregada em softwares comerciais de elementos finitos para a análise de placas laminadas, requer a definição de fatores de correção de cisalhamento para compensar a estimativa inicial de valores constantes para as deformações cisalhantes transversais ao longo da espessura. No entanto, é comum que os valores de correção originalmente obtidos para placas ortotrópicas homogêneas sejam arbitrariamente aplicados em placas laminadas, sem considerar as propriedades individuais das lâminas e as condições de empilhamento, o que resulta em imprecisões nos resultados. Nesse contexto, a abordagem proposta visa estimar fatores de correção individualizados, que levem em consideração essas características específicas dos laminados. O procedimento começa com a solução do problema pelo MEFG, formulado pela FSDT sem correção, ou seja, com  $k_s^0 = 1$ . Em seguida, nas etapas de pós-processamento, utilizam-se as derivadas das tensões coplanares para obter uma estimativa mais realista da distribuição das tensões cisalhantes transversais,  $\tau_{xz}^i$  e  $\tau_{yz}^i$ , em um processo que envolve a integração das equações de equilíbrio tridimensional. Posteriormente, os fatores de correção são determinados pela comparação da densidade de energia de cisalhamento transversal calculada diretamente pela FSDT ( $\bar{E}_{2D}$ ) com aquela obtida pelo processo de integração ( $\bar{E}_{3D}^i$ ), que é considerada uma estimativa da densidade de energia tridimensional ( $\bar{E}_{3D}$ ). Assim, o MEFG pode ser reaplicado para obter resultados mais precisos usando os novos fatores de correção  $k_s^1$  na FSDT. Uma vantagem desse procedimento consiste na capacidade de determinar valores de correção pontuais ao longo da superfície da placa laminada, ou seja,  $k_s^i(x, y)$ , característica particularmente útil para a aplicação em métodos numéricos de solução, como o MEFG, já que os valores podem ser determinados individualmente para cada ponto de integração. Além disso, o método apresenta uma natureza iterativa, pois o procedimento pode ser repetido para estimar valores de  $k_s^i$ . Para validação dos resultados, diversos métodos de determinação de fatores de correção são comparados com a abordagem proposta. Além disso, os valores para os deslocamentos e tensões são confrontados com aqueles obtidos pela solução exata tridimensional. Nos dois problemas analisados, o procedimento apresenta resultados aceitáveis logo na primeira iteração, aprimorando os resultados determinados pela FSDT em placas laminadas finas e semiespessas, principalmente nas etapas de pós-processamento.

**Palavras-chave:** Fator de correção de cisalhamento; Materiais compostos laminados; Teoria de deformação de cisalhamento de primeira ordem; Método dos elementos finitos generalizados.

## ABSTRACT

This work aims to analyze the influence of shear correction factors in laminates modeled by the Generalized Finite Element Method (GFEM) and to develop a new procedure for determining these factors, aiming to obtain more accurate results through the First-Order Shear Deformation Theory (FSDT), especially in the post-processing stages. This theory, widely employed in commercial finite element software for the analysis of laminated plates, requires the definition of shear correction factors to compensate for the initial estimate of constant values for transverse shear deformations along the thickness. However, it is common for correction values originally obtained for homogeneous orthotropic plates to be arbitrarily applied to laminated plates, without considering the individual properties of the layers and stacking conditions, resulting in inaccuracies in the results. In this context, the proposed approach aims to estimate individualized correction factors that take these specific characteristics of laminates into account. The procedure begins with solving the problem using GFEM, formulated by FSDT without correction, i.e., with  $k_s^0 = 1$ . Next, in the post-processing stages, the derivatives of the coplanar stresses are used to obtain a more realistic estimate of the distribution of transverse shear stresses,  $\tau_{xz}^i$  and  $\tau_{yz}^i$ , in a process that involves the integration of the three-dimensional equilibrium equations. Subsequently, the correction factors are determined by comparing the transverse shear energy density calculated directly by FSDT ( $\bar{E}_{2D}$ ) with that obtained through the integration process ( $\bar{E}_{3D}^i$ ), which is considered an estimate of the three-dimensional energy density ( $\bar{E}_{3D}$ ). Thus, GFEM can be reapplied to obtain more accurate results using the new correction factors  $k_s^1$  in FSDT. One advantage of this procedure is the ability to determine pointwise correction values along the surface of the laminated plate, i.e.,  $k_s^i(x, y)$ , a feature particularly useful for the application in numerical solution methods like GFEM, as the values can be determined individually for each integration point. Additionally, the method has an iterative nature, allowing the procedure to be repeated to estimate  $k_s^i$  values. To validate the results, various methods for determining correction factors are compared with the proposed approach. Furthermore, the values for displacements and stresses are compared with those obtained by the exact three-dimensional solution. In the two analyzed problems, the procedure presents acceptable results in the first iteration, improving the results determined by FSDT in thin and moderately thick laminated plates, mainly in the post-processing stages.

**Keywords:** Shear correction Factor; Layered composite structures; First-order shear deformation theory; Generalized finite element method.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Ilustração de um laminado de três lâminas. . . . .	18
Figura 2: Perfil de deformações pressuposto pela FSDT. . . . .	21
Figura 3: Exemplo de nuvens $\omega_\alpha$ convexa e não-convexa em um malha triangular. . . . .	35
Figura 4: Inconsistências (picos) para $k_x(x, y)$ , $k_y(x, y)$ e $k_s(x, y)$ em regiões onde $E_{3D}^i \approx 0$ . . . . .	66
Figura 5: Fluxograma para a determinação de fatores de correção de cisalhamento nos pontos de integração do MEFG pelo método iterativo. . . . .	70
Figura 6: Ilustração da placa laminada simétrica ortotrópica $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ . . . . .	72
Figura 7: Deslocamento transversal no meio da placa $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ , $w(x, y, 0)$ , calculado pela Teoria de Elasticidade Tridimensional com $H/a = 0, 1$ . . . . .	73
Figura 8: Influência do fator de cisalhamento $k_s$ em $w$ e em $\sigma_x$ no centro da placa $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ com $H/a = 0, 1$ . . . . .	74
Figura 9: Influência do fator de cisalhamento $k_s$ para $\tau_{xz}$ e $\tau_{yz}$ , ambas em MPa, calculadas nas bordas da placa laminada $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ com $H/a = 0, 1$ . . . . .	75
Figura 10: Fatores de correção, $k_s^a(x, y)$ , determinados analiticamente na placa $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ com $H/a = 0, 1$ . . . . .	76
Figura 11: Comparação entre o fator de correção único $k_s^a$ e os fatores ortotrópicos $k_x^a$ e $k_y^a$ por meio do deslocamento normalizado $\bar{w}$ no centro da placa $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ , em diferentes razões de espessura $H/a$ . . . . .	77
Figura 12: Variação de $k_x^a$ e $k_y^a$ com $H/a$ para a placa $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ , determinadas analiticamente. . . . .	78
Figura 13: Deslocamento transversal normalizado $\bar{w}$ no centro da placa em função da razão $H/a$ pela FSDT com a correção ortotrópica de Whitney $k_x^w$ e $k_y^w$ . . . . .	80
Figura 14: Malha $M16P4$ utilizada no MEFG para a placa $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ . . . . .	81
Figura 15: $k_x^1$ , $k_y^1$ e $k_s^1$ calculados nos pontos de integração para a placa $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ com $H/a = 0, 1$ . . . . .	81
Figura 16: Pontos de integração ajustados para $k_x^1$ e $k_y^1$ com tolerância de $\epsilon_K = 10^{-3}$ , conforme descrito no procedimento da seção 5.5.3. . . . .	82
Figura 17: $k_x^1$ , $k_y^1$ e $k_s^1$ após correção dos valores acentuados com $\epsilon_K = 10^{-3}$ . . . . .	82
Figura 18: Comparação de $\tau_{xz}^i(0, b/2)$ e $\tau_{yz}^i(a/2, 0)$ ao longo da espessura com os resultados da FSDT obtidos para a placa $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ com $H/a = 0, 1$ , utilizando $k_x^0 = k_y^0 = 1$ e os valores ajustados $k_x^1$ e $k_y^1$ . . . . .	83

Figura 19: Valores médios de $k_x^i$ e $k_y^i$ ao longo de nove iterações para a placa $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ , com $H/a = 0, 1$ . . . . .	84
Figura 20: Variação de $k_x^i$ e $k_y^i$ com $H/a$ , calculados na primeira e segunda iteração do método iterativo para a placa laminada $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ . . . . .	85
Figura 21: Deslocamento transversal máximo, $\bar{w}(a/2, b/2, 0)$ , em função de $H/a$ , para os diferentes métodos de correção apresentados - placa laminada $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ . . . . .	86
Figura 22: Tensões coplanares normalizadas para a placa laminada $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ , com $H/a = 0, 1$ , determinadas pela FSDT com $k_s = 5/6$ e pela primeira iteração do método iterativo $(k_x^1, k_y^1)$ . . . . .	88
Figura 23: Tensões transversais normalizadas para a placa laminada $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ , com $H/a = 0, 1$ , determinadas pela FSDT com a aplicação de diferentes fatores de correção de cisalhamento. . . . .	90
Figura 24: Deslocamentos normalizados para a placa laminada $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ , com $H/a = 0, 1$ , determinados pela FSDT com a aplicação de diferentes fatores de correção de cisalhamento. . . . .	91
Figura 25: Comparação das tensões coplanares normalizadas para o problema de placa laminada simétrica $[0^\circ/90^\circ/0]$ com as razões de espessura $H/a = 0, 01$ (à esquerda) e $H/a = 0, 25$ (à direita). . . . .	95
Figura 26: Comparação das tensões transversais normalizadas para o problema de placa laminada simétrica $[0^\circ/90^\circ/0]$ com as razões de espessura $H/a = 0, 01$ (à esquerda) e $H/a = 0, 25$ (à direita). . . . .	96
Figura 27: Comparação dos deslocamentos normalizados para o problema de placa laminada simétrica $[0^\circ/90^\circ/0]$ com as razões de espessura $H/a = 0, 01$ (à esquerda) e $H/a = 0, 25$ (à direita). . . . .	97
Figura 28: Dependência de $k_x^a$ e $k_y^a$ analíticos com a largura $b$ da placa laminada $[0^\circ/90^\circ]$ com $H/a = 0, 1$ . . . . .	99
Figura 29: Tensões coplanares normalizadas para a placa laminada retangular não simétrica $[0^\circ/90^\circ]$ , com $H/a = 0, 1$ , determinadas pela FSDT com a aplicação de diferentes fatores de correção de cisalhamento. . . . .	103
Figura 30: Tensões transversais normalizadas para a placa laminada retangular não simétrica $[0^\circ/90^\circ]$ , com $H/a = 0, 1$ , determinadas pela FSDT com a aplicação de diferentes fatores de correção de cisalhamento. . . . .	104

Figura 31: Deslocamentos normalizados para a placa laminada retangular não simétrica [0°/90°], com  $H/a = 0, 1$ , determinados pela FSDT com a aplicação de diferentes fatores de correção de cisalhamento. . . . . 105

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Propriedades dos materiais das lâminas para a placa laminada simétrica $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ . . . . .	73
Tabela 2: Valores médios de $k_x^i$ , $k_y^i$ e $k_s^i$ nas primeiras sete iterações do método para a placa $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ , com $H/a = 0, 1$ . . . . .	84
Tabela 3: Tensões coplanares normalizadas para a placa laminada $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ , com $H/a = 0, 1$ , determinadas pela FSDT com a aplicação de diferentes fatores de correção de cisalhamento. . . . .	88
Tabela 4: Tensões transversais normalizadas para a placa laminada $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ , com $H/a = 0, 1$ , determinadas pela FSDT com a aplicação de diferentes fatores de correção de cisalhamento. . . . .	89
Tabela 5: Deslocamentos normalizados para a placa laminada $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ , com $H/a = 0, 1$ , determinados com diferentes métodos de correção de cisalhamento. . . . .	89
Tabela 6: Tensões e deslocamentos para a placa laminada $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ , com $H/a = 0, 01$ , determinados pela FSDT com a aplicação de diferentes fatores de correção de cisalhamento. . . . .	93
Tabela 7: Tensões e deslocamentos para a placa laminada $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ , com $H/a = 0, 25$ , determinados pela FSDT com a aplicação de diferentes fatores de correção de cisalhamento. . . . .	94
Tabela 8: Valores médios de $k_x^i$ , $k_y^i$ e $k_s^i$ nas primeiras cinco iterações do método iterativo para a placa laminada $[0^\circ/90^\circ]$ com $H/a = 0, 1$ . . . . .	100
Tabela 9: Tensões e deslocamentos normalizados para a placa laminada $[0^\circ/90^\circ]$ , com $H/a = 0, 1$ , determinados pela FSDT com a aplicação de diferentes fatores de correção de cisalhamento. . . . .	101
Tabela 10: Fatores de correção de cisalhamento para a placa laminada retangular não simétrica $[0^\circ/90^\circ]$ , com $H/a = 0, 1$ , por diferentes métodos. . . . .	102

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	12
1.1	OBJETIVOS	16
1.1.1	Objetivo geral	16
1.1.2	Objetivos específicos	16
<b>2</b>	<b>MATERIAIS COMPOSTOS</b>	18
2.1	MATERIAIS LAMINADOS	18
2.2	TEORIA DE PLACAS LAMINADAS	19
2.2.1	Teoria Clássica da Laminação	19
2.2.2	Teoria de Reissner-Mindlin	20
2.2.3	Teorias de ordem superior	22
2.3	EQUAÇÕES DO MOVIMENTO	22
2.4	RELAÇÕES CINEMÁTICAS	23
2.5	RELAÇÕES CONSTITUTIVAS	25
2.6	FATOR DE CORREÇÃO DE CISALHAMENTO	27
2.7	EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO E FORMA FRACA	29
<b>3</b>	<b>MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS</b>	32
3.1	PARTIÇÃO DA UNIDADE E FUNÇÕES DE APROXIMAÇÃO	34
3.2	ENRIQUECIMENTO DAS FUNÇÕES DE APROXIMAÇÃO	35
<b>4</b>	<b>RECUPERAÇÃO DAS TENSÕES E DESLOCAMENTOS</b>	38
4.1	TENSÕES CISALHANTES TRANSVERSAIS	39
4.2	TENSÃO NORMAL TRANSVERSAL	41
4.3	MÉTODO DE CORREÇÃO DAS TENSÕES	42
4.4	DESLOCAMENTO TRANSVERSAL	44
4.4.1	Procedimento de integração para os deslocamentos	46
4.5	DESLOCAMENTOS COPLANARES	47
<b>5</b>	<b>MÉTODOS PARA DETERMINAÇÃO DOS FATORES DE CORREÇÃO</b>	50
5.1	ENERGIA DE DEFORMAÇÃO DE CISALHAMENTO	52
5.2	MÉTODO DE TIMOSHENKO	53

5.3	MÉTODO DE REISSNER . . . . .	54
5.4	MÉTODO DE WHITNEY . . . . .	55
5.5	MÉTODO DE CORREÇÃO ITERATIVO . . . . .	58
5.5.1	Correção isotrópica . . . . .	59
5.5.2	Correção ortotrópica . . . . .	64
5.5.3	Ajustes nos fatores de correção . . . . .	66
5.5.4	Correção anisotrópica . . . . .	67
5.5.5	Determinação dos fatores pelo método de Newton-Raphson . . . . .	68
5.5.6	Fluxograma do método iterativo . . . . .	69
<b>6</b>	<b>RESULTADOS . . . . .</b>	<b>71</b>
6.1	PLACA LAMINADA SIMÉTRICA ORTOTRÓPICA [0°/90°/0°] . . . . .	71
6.1.1	Método analítico para a determinação de $k_s^a$ . . . . .	74
6.1.2	Método analítico para a determinação de $k_x^a$ e $k_y^a$ . . . . .	76
6.1.3	Método de Whitney para a determinação de $k_x^w$ e $k_y^w$ . . . . .	79
6.1.4	Método iterativo para a determinação de $k_x^i$ e $k_y^i$ . . . . .	79
6.1.5	Comparação entre os métodos de correção . . . . .	86
6.1.6	Deslocamentos e tensões para diferentes razões de espessura $H/a$ . . . . .	93
6.2	PLACA LAMINADA NÃO SIMÉTRICA ORTOTRÓPICA [0°/90°] . . . . .	98
<b>7</b>	<b>CONCLUSÃO . . . . .</b>	<b>106</b>
7.1	TRABALHOS FUTUROS . . . . .	107
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>108</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Os laminados, estruturas compostas por múltiplas camadas de materiais, desempenham um papel fundamental na indústria devido à sua capacidade de combinar propriedades mecânicas para moldar as características do componente resultante. Eles podem ser projetados para oferecer resistência e rigidez específicas elevadas, alta resistência à corrosão, baixa densidade, entre outras propriedades importantes (MENDONÇA, 2019). Assim como para os demais materiais empregados em engenharia, a análise do comportamento mecânico dessa classe é essencial para viabilizar a sua aplicação segura e eficiente em projetos. No entanto, devido à complexidade da estrutura formada por camadas, a modelagem numérica enfrenta desafios que não são encontrados na análise dos materiais homogêneos convencionais.

Na maioria das aplicações, os laminados possuem a espessura significativamente menor que suas dimensões coplanares, o que permite o uso de teorias de placas para a modelagem matemática por meio de elementos finitos bidimensionais (JONES, 1999). Além disso, essas teorias são mais adequadas para a análise numérica devido à complexidade computacional elevada associada à modelagem tridimensional desses materiais, uma vez que a discretização individual das camadas, que geralmente são muito finas e empilhadas em grandes quantidades, pode resultar em instabilidades numéricas, dificuldades de convergência e alto custo computacional (REDDY, 2004).

Nesse sentido, várias teorias bidimensionais foram desenvolvidas para a modelagem de placas laminadas, tais como a Teoria Clássica de Laminação (TCL), a Teoria de Deformação Cisalhante de Primeira Ordem (FSDT) e as teorias de ordem superior, como a Teoria de Terceira Ordem de Reddy. Dentre essas, a FSDT se destaca no âmbito das análises computacionais de engenharia, sendo amplamente utilizada em softwares comerciais de elementos finitos devido à sua capacidade de fornecer uma estimativa inicial para o cisalhamento transversal que atua na estrutura e à excelente relação entre precisão dos resultados e custo computacional, especialmente em placas finas e semiespessas (MENDONÇA, 2019).

No entanto, a FSDT é desenvolvida com base na hipótese de que os segmentos inicialmente retos e normais à superfície de referência da placa permanecem retos após a estrutura passar por um processo de deformação. Isso implica em medidas de deformações cisalhantes transversais constantes em cada seção transversal e, conseqüentemente, em tensões cisalhantes transversais descontínuas na interface das lâminas. Esse efeito contradiz o modelo físico real

e os resultados obtidos por teorias mais refinadas. Assim, para contornar a influência dessa suposição inconsistente, fatores de correção de cisalhamento  $k_s$  são utilizados ao se modelar o problema pela FSDT, buscando ajustar a rigidez ao cisalhamento do modelo (MENDONÇA, 2019).

Entretanto, ao contrário do observado em placas homogêneas, os fatores de correção,  $k_s$ , são inicialmente desconhecidos e difíceis de determinar em placas laminadas (KARAMA, 2002). O procedimento convencional para obtê-los consiste na equivalência entre características específicas de resposta global da FSDT e suas correspondentes na Teoria de Elasticidade Tridimensional. Isso inclui a energia de deformação por cisalhamento transversal, a frequência natural associada ao modo de vibração por cisalhamento transversal, bem como as tensões cisalhantes e os deslocamentos transversais (NOOR; PETERS, 1989). Porém, essa abordagem torna-se bastante limitada quando a análise envolve placas laminadas arbitrárias, devido à dependência do número de lâminas, das condições de empilhamento e das propriedades individuais das camadas que compõem o laminado para a resposta global da estrutura (MENDONÇA, 2019).

Apesar desses desafios, várias técnicas têm sido exploradas na literatura para obter esses fatores em laminados. Algumas seguem o procedimento padrão, apoiando-se na solução analítica tridimensional para casos específicos, enquanto outras adotam abordagens alternativas. Por exemplo, Whitney (1973) desenvolveu um procedimento para laminados ortotrópicos, simétricos ou não, fundamentado na solução analítica tridimensional de Pagano (1969) para flexão cilíndrica. Esse procedimento resultou na obtenção de expressões para dois valores de  $k_s$ , os quais dependem unicamente das propriedades de rigidez do laminado. Por outro lado, Noor e Peters (1989) e Noor, Burton e Peters (1990) apresentaram dois métodos preditores-corretores. Na fase preditora, utiliza-se a Teoria de Primeira Ordem com um valor arbitrário de correção,  $k_s^0$ , para prever a resposta característica grosseira da placa ao longo da espessura. Já na fase de correção, são empregadas as equações de equilíbrio tridimensional e as relações constitutivas para corrigir elementos importantes do modelo formulado, possibilitando uma estimativa a posteriori mais precisa para a resposta global. Além disso, Pai (1994) introduziu um método a priori para determinar três fatores de correção em laminados anisotrópicos, por meio da análise prévia e utilização de funções que retratam a distorção causada pelo cisalhamento transversal na placa laminada.

Mesmo que os fatores de correção adequados sejam determinados e devidamente aplicados ao problema modelado pela FSDT, a estimativa direta das tensões cisalhantes transversais,

dada pelas relações constitutivas, ainda se mantém uniforme em cada lâmina e descontínua na interface das camadas. Portanto, uma etapa de pós-processamento geralmente é necessária para uma análise precisa da distribuição do cisalhamento transversal que atua na estrutura. Isso é especialmente importante porque até mesmo pequenos valores de cisalhamento na região interlaminar podem desencadear falhas por delaminação no componente, comprometendo a segurança do projeto (PAI, 1994).

No procedimento apresentado por Mendonça e Lemos (2024), algumas técnicas de pós-processamento são utilizadas para recuperar os deslocamentos e as tensões transversais ao longo da espessura de placas laminadas. No caso das tensões, o processo envolve a integração das equações tridimensionais de equilíbrio, seguindo o desenvolvimento proposto por Chaudhuri (1986). Já para os deslocamentos, utilizam-se as relações constitutivas e todo o campo de tensões disponível, incluindo as tensões integradas. Nos resultados obtidos, verifica-se uma dependência das etapas de pós-processamento em relação ao fator de correção, principalmente para os deslocamentos transversais em placas semiespessas. Destaca-se também que a eficácia e precisão das técnicas utilizadas dependem fortemente da qualidade dos resultados previamente calculados para as tensões coplanares.

Nesse contexto, o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) se destaca como uma ferramenta poderosa para a modelagem e análise de laminados pela FSDT, pois, além de proporcionar resultados precisos para a superfície de referência da placa na estimativa inicial, especialmente para as tensões coplanares, o MEFG facilita a obtenção de polinômios de ordem superior na aproximação, garantindo todas as diferenciações necessárias para a execução das etapas de pós-processamento. Dessa forma, a combinação do MEFG com as técnicas de recuperação resulta em uma abordagem eficiente para determinar efeitos complexos em placas laminadas pela Teoria de Primeira Ordem, como o cisalhamento interlaminar e a variação não linear dos deslocamentos na espessura (MENDONÇA; LEMOS, 2024).

Neste trabalho, além de apresentar alguns métodos usuais de obtenção dos fatores de correção em laminados, desenvolve-se uma abordagem iterativa semelhante ao procedimento apresentado por Noor e Peters (1989). A abordagem desenvolvida visa determinar fatores de correção adequados para placas laminadas arbitrárias e obter resultados mais precisos pela FSDT nas etapas de pós-processamento. A fundamentação principal está na qualidade superior da distribuição das tensões transversais alcançada pelas técnicas de recuperação, especialmente quando obtida em conjunto com métodos avançados, como o MEFG. Essa distribuição mais

precisa permite calcular uma aproximação da densidade de energia de cisalhamento transversal tridimensional, que serve como referência para o cálculo dos fatores de correção por meio da equivalência das densidades de energia. Com isso, torna-se possível obter fatores de correção pontuais ao longo da superfície de referência da placa, levando em consideração todas as características do problema formulado. Para facilitar a incorporação do método no processo de solução, são escolhidos os pontos da integração numérica usados no MEEG. Todo o procedimento pode ser repetido para calcular novos valores de  $k_s$ , explicitando a natureza iterativa do método.

Ressalta-se que, embora o MEEG tenha sido escolhido nesta dissertação, não há uma relação de dependência exclusiva com a abordagem desenvolvida. Assim, outras técnicas semelhantes podem ser utilizadas para obter a solução das equações diferenciais envolvidas e extrair os resultados preliminares para as etapas de pós-processamento, desde que a qualidade da aproximação seja mantida. Pode-se citar, por exemplo, o Método de Análise Isogeométrica apresentado por Hughes, Cottrell e Bazilevs (2005), que consiste em uma combinação entre o Método dos Elementos Finitos (MEF) e funções matemáticas denominadas NURBS (Non-Uniform Rational B-Splines), comumente utilizadas para modelar curvas e superfícies em geometria computacional. Nesse método, as funções NURBS não apenas representam o domínio do problema, mas também definem a base do espaço no qual a solução da equação diferencial é aproximada.

Para validar os resultados, dois problemas lineares envolvendo laminados ortotrópicos com lâminas orientadas nas configurações  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$  e  $[0^\circ/90^\circ]$ , em diferentes espessuras, foram resolvidos e analisados. Os resultados para as tensões e deslocamentos foram comparados com a solução analítica tridimensional disponível na literatura em Pagano (1969), bem como com os fatores de correção tipicamente aplicados na análise desses laminados, mostrando boa correlação com a solução tridimensional. Além disso, estudou-se a razão analítica entre as densidades de energia da FSDT e da solução tridimensional como fator de correção para os problemas analisados, evidenciando suas características e limitações.

## 1.1 OBJETIVOS

### 1.1.1 Objetivo geral

O objetivo deste trabalho é analisar a influência dos fatores de correção de cisalhamento em laminados modelados pela Teoria de Deformação de Cisalhamento de Primeira Ordem (FSDT) e resolvidos pelo Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG). Além disso, propõe-se desenvolver um procedimento iterativo para determinar fatores adaptados ao MEFG, ou método numérico semelhante, calculando-os nos pontos de integração numérica utilizados no processo de solução da forma fraca das equações diferenciais envolvidas. Por se tratar de uma técnica a posteriori, que leva em consideração as características do problema analisado para cálculo das correções, espera-se obter resultados mais consistentes, especialmente nas etapas de pós-processamento, em problemas formulados pela FSDT envolvendo placas laminadas finas e semiespessas arbitrárias.

### 1.1.2 Objetivos específicos

Os objetivos específicos, necessários para alcançar o objetivo geral, são os seguintes:

- a) implementar computacionalmente e analisar diferentes técnicas para obtenção de fatores de correção em placas laminadas;
- b) incorporar técnicas convencionais de correção em um algoritmo voltado para resolver problemas de placas laminadas utilizando o MEFG;
- c) estudar o uso da razão analítica das densidades de energia de cisalhamento como método de correção em problemas com solução exata conhecida;
- d) formular e implementar o procedimento computacional para calcular a densidade de energia de cisalhamento transversal relacionada às tensões cisalhantes transversais obtidas nas etapas de pós-processamento;
- e) desenvolver o procedimento computacional para calcular os fatores de correção nos pontos de integração do MEFG, considerando materiais isotrópicos, ortotrópicos e anisotrópicos;
- f) analisar os fatores de correção calculados pelo método proposto e desenvolver téc-

nicas para evitar valores inconsistentes; e

g) calcular e aplicar os fatores de correção em laminados com diferentes configurações de empilhamento para testar o método implementado e validar os resultados obtidos.

## 2 MATERIAIS COMPOSTOS

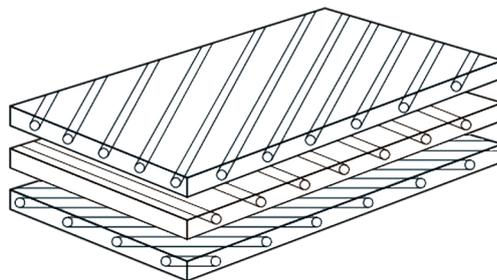
### 2.1 MATERIAIS LAMINADOS

Materiais compostos consistem na combinação de dois ou mais materiais em escala macroscópica de tal maneira que o resultado apresente um conjunto de propriedades que não são observadas em seus constituintes isolados (REDDY, 2004).

Na forma de fibras, os materiais demonstram experimentalmente possuir propriedades mecânicas, especialmente na direção principal, superiores às do mesmo material em forma de bloco. Esse fenômeno é explorado pelos compostos modernos, geralmente produzidos em lâminas, onde as fibras são agrupadas e fixadas por uma matriz, tipicamente polimérica (MENDONÇA, 2019). Nessa configuração, a matriz apresenta baixa resistência e é encarregada principalmente de transferir os esforços para as fibras e de protegê-las contra o ambiente. O material composto resultante exibe um comportamento macroscópico intermediário entre aqueles observados por seus constituintes (REDDY, 2004).

Normalmente, as lâminas são muito finas e apresentam propriedades atraentes apenas na direção principal de orientação das fibras que as compõem. Por isso, elas são frequentemente combinadas em camadas para formar estruturas laminadas. Esse processo permite o controle de importantes variáveis de projeto, pois, por meio da escolha da quantidade de lâminas e orientação das fibras, pode-se moldar a resposta estrutural do componente resultante (MENDONÇA, 2019). A Figura 1 ilustra um laminado formado pelo empilhamento de três lâminas.

Figura 1: Ilustração de um laminado de três lâminas.



Fonte: Adaptado de Mendonça (2019).

Devido às suas propriedades ajustáveis e adaptáveis, como resistência específica, rigi-

dez, resistência à corrosão e densidade, os laminados são considerados ideais para uma ampla gama de aplicações, desde aeroespacial até automotiva e esportiva (MENDONÇA, 2019).

## 2.2 TEORIA DE PLACAS LAMINADAS

Os laminados são frequentemente tratados como placas laminadas devido à sua configuração estrutural plana. Formados por múltiplas camadas finas, sua espessura resultante é geralmente muito pequena em relação às outras dimensões, tornando-os adequados para análises e modelagem com base em teorias de placas (JONES, 1999).

Essas teorias bidimensionais são amplamente empregadas em engenharia para prever o comportamento de estruturas planas sob diferentes tipos de carga. Elas derivam de simplificações no modelo de elasticidade tridimensional, partindo de hipóteses relacionadas à variação dos deslocamentos ou tensões ao longo da espessura da placa (OCHOA; REDDY, 1992).

### 2.2.1 Teoria Clássica da Laminação

A Teoria Clássica da Laminação (TCL) é uma extensão da Teoria Clássica de Placas, também conhecida como Teoria de Kirchhoff, para materiais laminados. Nessa abordagem, pressupõe-se a existência de uma superfície de referência que não sofre deformação por flexão, enquanto os deslocamentos coplanares,  $u$  e  $v$ , variam linearmente ao longo da espessura. Já o deslocamento transversal,  $w$ , independe da cota  $z$ , sendo considerado constante em cada seção transversal da placa (OCHOA; REDDY, 1992).

A TCL é fundamentada nas hipóteses de Kirchhoff e inclui algumas suposições adicionais específicas (MENDONÇA, 2019). Em resumo, as seguintes hipóteses são consideradas:

- a) o laminado é formado por lâminas perfeitamente coladas, sem deslizamento;
- b) a camada de resina usada para unir as lâminas é infinitesimalmente fina e não deformável por cisalhamento, garantindo que os deslocamentos sejam contínuos através das lâminas;
- c) a estrutura é considerada delgada, ou seja, possui espessura muito menor do que as demais dimensões da superfície;
- d) os segmentos retos, inicialmente normais à superfície de referência, permanecem

retos e perpendiculares à mesma após a deformação. Como consequência, as deformações cisalhantes transversais são nulas ( $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ ); e

e) os segmentos normais à superfície de referência são considerados inextensíveis, resultando em deformações normais transversais nulas ( $\varepsilon_z = 0$ ) em todos os pontos.

Essas hipóteses permitem definir o seguinte campo de deslocamentos para a TCL:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u^0(x, y) - z \left( \frac{\partial w^0(x, y)}{\partial x} \right), \\ v(x, y, z) &= v^0(x, y) - z \left( \frac{\partial w^0(x, y)}{\partial y} \right), \\ w(x, y, z) &= w^0(x, y), \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde  $(u_0, v_0, w_0)$  são as componentes do vetor deslocamento na superfície de referência ( $z = 0$ ), ao longo dos três eixos principais  $(x, y, z)$ .

### 2.2.2 Teoria de Reissner-Mindlin

A aplicação da TCL produz bons resultados somente em placas laminadas significativamente finas, em que os efeitos de deformação fora do plano são muito pequenos. Ao remover a hipótese de que os segmentos permanecem normais à superfície média após a deformação na TCL, chega-se à Teoria de Reissner-Mindlin, também conhecida como Teoria de Deformação Cisalhante de Primeira Ordem (FSDT). A sigla FSDT é derivada do correspondente em inglês: *First-order Shear Deformation Theory (FSDT)*.

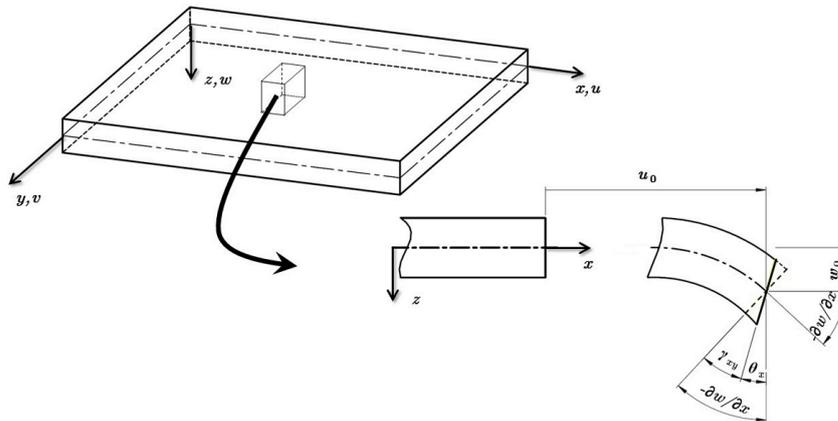
Comparada à TCL, a FSDT tem a vantagem de prever, ainda que de maneira simplificada, os efeitos do cisalhamento transversal na análise mecânica, tornando-a mais adequada para modelar placas laminadas, especialmente aquelas de espessura moderada, onde esses efeitos são mais significativos. Por esse e outros motivos, como a excelente relação entre precisão dos resultados e custo computacional, a FSDT é amplamente adotada em análises computacionais de engenharia, sendo utilizada por diversos softwares comerciais de elementos finitos para prever o comportamento mecânico de placas laminadas (REDDY, 2004).

O campo de deslocamentos para a Teoria de Reissner-Mindlin é dado por:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u^0(x, y) + z\psi_x(x, y), \\ v(x, y, z) &= v^0(x, y) + z\psi_y(x, y), \\ w(x, y, z) &= w^0(x, y), \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde  $\psi_x$  e  $\psi_y$  denotam as rotações em torno dos eixos  $y$  e  $x$ , respectivamente. Esses termos são fundamentais para incorporar a deformação angular dos segmentos inicialmente perpendiculares à superfície de referência, tornando possível a estimativa do cisalhamento transversal. A Figura 2 ilustra o perfil de deformações assumido pela teoria.

Figura 2: Perfil de deformações pressuposto pela FSDT.



Fonte: Adaptado de Mendonça (2019).

O modelo de Reissner-Mindlin, apesar de amplamente aplicado na análise de placas laminadas, apresenta algumas limitações significativas. A principal é a previsão de valores constantes para as deformações cisalhantes transversais ao longo da espessura da placa laminada, o que não reflete com precisão o comportamento real. Além disso, para obter resultados consistentes, o modelo exige a definição de fatores de correção de cisalhamento, os quais são difíceis de determinar para placas laminadas arbitrárias (KARAMA, 2002). Ademais, teorias mais sofisticadas, como a da elasticidade tridimensional, mostram que a variação dos deslocamentos coplanares ao longo da espessura, mesmo nos casos mais simples, não segue um modelo linear, em contraste com o assumido (PAGANO, 1969). No entanto, os resultados são semelhantes para uma faixa específica de valores, que depende da relação entre espessura e comprimento da estrutura analisada (MENDONÇA, 2019).

### 2.2.3 Teorias de ordem superior

Diante das limitações da FSDT e visando obter resultados mais precisos sem a necessidade de aplicar fatores de correção, foram desenvolvidas diversas teorias de ordem superior para a análise de placas laminadas. Essas teorias comumente utilizam polinômios de alta ordem para modelar a variação dos deslocamentos coplanares ao longo da espessura, em vez das funções lineares empregadas na FSDT e TCL (KARAMA, 2002).

Conforme pode ser visto em Levison (1980), Reddy (1984) e Touratier (1991), as teorias de ordem superior apresentam resultados satisfatórios na maioria dos casos e eliminam a necessidade de aplicação dos fatores de correção. No entanto, essas teorias também costumam apresentar algumas inconsistências físicas, similarmente à FSDT, como a descontinuidade das tensões cisalhantes transversais na interface entre as lâminas. Além disso, em comparação com a teoria de primeira ordem, elas apresentam várias desvantagens, como a complexidade na resolução do problema formulado, complicações na modelagem por elementos finitos e um aumento significativo no tempo de processamento computacional (KARAMA, 2002; MENDONÇA, 2019).

Abordagens mais recentes têm sido propostas na literatura para aprimorar as teorias de alta ordem convencionais, como demonstrado nos trabalhos de Karama (2002) e Shi (2007), visando contornar suas limitações. No entanto, o modelo de Reissner-Mindlin continua sendo o mais utilizado para a análise de placas laminadas, principalmente em softwares comerciais de elementos finitos. Isso se deve à sua facilidade de implementação, aos resultados satisfatórios e à dispensa de derivadas contínuas das funções de aproximação, o que resulta em tempos de processamento consideravelmente menores (MENDONÇA, 2019). Além disso, a FSDT mostra-se suficientemente precisa para a modelagem de placas finas e semiespessas, particularmente em relação aos deslocamentos e tensões coplanares.

## 2.3 EQUAÇÕES DO MOVIMENTO

Considerando um corpo tridimensional composto por partículas grandes o suficiente para que possa ser tratado pela teoria do contínuo, a seleção de um elemento diferencial de volume,  $dV$ , e a aplicação da conservação do momento linear levam às conhecidas equações do

movimento (REDDY, 2008):

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt}, \quad (2.3)$$

em que apenas os efeitos mecânicos estão sendo considerados.  $\rho$  é a densidade do material,  $\mathbf{b}$  é o vetor com as forças de corpo,  $\mathbf{v}$  é o vetor velocidade e  $\boldsymbol{\sigma}$  é o tensor tensão.

As equações em (2.3) são escritas na forma vetorial e são válidas para qualquer configuração de referência. Quando o corpo deformado é considerado, a descrição é definida como espacial e o tensor tensão, com componentes nas direções normais e tangenciais à superfície deformada, representa corretamente as tensões normais e cisalhantes que atuam no momento da observação (REDDY, 2008). Embora o modelo físico seja consistente, em problemas sólidos, a configuração normalmente escolhida é a do corpo original, sem deformação, sendo a descrição definida como material (REDDY, 2008). Essa escolha introduz complicações no modelo matemático, uma vez que a análise do comportamento mecânico da estrutura torna-se não linear.

No entanto, em muitos problemas de engenharia, as deformações são relativamente pequenas e a mudança na geometria é desprezível. Nesses casos, a distinção entre a descrição espacial e material para a configuração de referência não é necessária, pois os termos não lineares em (2.3), que surgem ao utilizar a configuração não deformada, podem ser negligenciados (REDDY, 2004). Assim, as equações do movimento (2.3) tornam-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho b_x &= \rho \frac{d^2 u}{dt^2}, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho b_y &= \rho \frac{d^2 v}{dt^2}, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \rho b_z &= \rho \frac{d^2 w}{dt^2}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

O sistema de equações em (2.4), por si só, não pode ser resolvido, pois envolve três equações e nove incógnitas: seis componentes de tensão e três de deslocamento. Para viabilizar a solução, é necessário também definir as relações cinemáticas e constitutivas (REDDY, 2004).

## 2.4 RELAÇÕES CINEMÁTICAS

O método convencional para medir a deformação em mecânica dos sólidos consiste em calcular a diferença entre o quadrado do comprimento de um segmento deformado (espacial) e o quadrado do comprimento de um segmento não deformado (material) (REDDY, 2004). Como

resultado, obtém-se o tensor de deformação Green-Lagrange ( $\mathbf{E}$ ):

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} [\nabla_0 \mathbf{u} + (\nabla_0 \mathbf{u})^T + (\nabla_0 \mathbf{u}) \cdot (\nabla_0 \mathbf{u})^T]. \quad (2.5)$$

Essa é uma medida de deformação não linear. No caso mais simples, linear, amplamente utilizado em análises de engenharia, assume-se que as deformações são pequenas o suficiente para que os termos de ordem superior,  $(\nabla_0 \mathbf{u}) \cdot (\nabla_0 \mathbf{u})^T$ , sejam negligenciáveis em (2.5). Isso simplifica o cálculo das deformações, reduzindo o tensor de Green-Lagrange ao tensor de deformação infinitesimal ( $\epsilon$ ):

$$\epsilon = \frac{1}{2} [\nabla_0 \mathbf{u} + (\nabla_0 \mathbf{u})^T]. \quad (2.6)$$

Como  $\epsilon$  é simétrico, pode-se usar a notação de Voigt para representá-lo por um vetor com seis componentes independentes, denotado por  $\epsilon$ . Nas direções cartesianas, essas componentes são expressas por:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Substituindo o campo de deslocamentos da Teoria de Reissner-Mindlin, conforme definido em (2.2), nas equações (2.7), as componentes transformam-se em:

$$\epsilon(x, y, z) = \epsilon^0(x, y) + z\kappa^0(x, y), \quad \gamma(x, y, z) = \gamma_c(x, y), \quad (2.8)$$

em que  $\epsilon^0$  corresponde às deformações coplanares da superfície média da placa laminada, expressas por:

$$\epsilon^0 = \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u^0}{\partial x} \\ \frac{\partial v^0}{\partial y} \\ \frac{\partial u^0}{\partial y} + \frac{\partial v^0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad (2.9)$$

enquanto  $\kappa^0$  corresponde às curvaturas da superfície de referência, que definem o comportamento de flexão da placa e são representadas pelas componentes abaixo:

$$\kappa^0 = \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad (2.10)$$

já  $\gamma_c$  é o vetor das deformações cisalhantes transversais, uniformes ao longo da espessura do laminado na formulação da FSDT:

$$\gamma_c = \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \end{Bmatrix}. \quad (2.11)$$

## 2.5 RELAÇÕES CONSTITUTIVAS

As equações que descrevem como um material responde à aplicação de esforços externos são denominadas equações constitutivas (REDDY, 2004). Para materiais elástico-lineares, essa relação pode ser expressa utilizando a notação de Voigt da seguinte forma:

$$\sigma_i = C_{ij}\varepsilon_j, \quad (2.12)$$

onde as componentes da matriz de rigidez  $\mathbf{C}$  são definidas ao longo de três eixos ortogonais e correspondem às constantes elásticas do material, determinadas por meio de ensaios de engenharia. Dependendo dos termos não-nulos presentes, o material pode ser classificado como isotrópico, ortotrópico ou anisotrópico (MENDONÇA, 2019)

A relação inversa, ou seja, deformação-tensão, é expressa pela matriz de flexibilidade,  $\mathbf{S} = \mathbf{C}^{-1}$ , do seguinte modo:

$$\varepsilon = \mathbf{S}\sigma. \quad (2.13)$$

Para uma lâmina qualquer  $k$  pertencente a um laminado, a relação tensão-deformação, definida em (2.12), pode ser expressa por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} C_{11}^x & C_{12}^x & C_{13}^x & C_{14}^x & C_{15}^x & C_{16}^x \\ & C_{22}^x & C_{23}^x & C_{24}^x & C_{25}^x & C_{26}^x \\ & & C_{33}^x & C_{34}^x & C_{35}^x & C_{36}^x \\ & & & C_{44}^x & C_{45}^x & C_{46}^x \\ & & & & C_{55}^x & C_{56}^x \\ & & & & & C_{66}^x \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^k, \quad (2.14)$$

onde  $\mathbf{C}^k$  é a matriz de rigidez que descreve o comportamento mecânico da lâmina  $k$ , após esta ter sido rotacionada do seu sistema principal 0123 para um sistema de referência 0xyz. Essa rotação é realizada por meio de uma matriz de transformação ( $\mathbf{T}$ ) e deve ser aplicada a todas

as lâminas que compõem o laminado, permitindo assim a construção de uma única matriz de rigidez que represente o material composto resultante (MENDONÇA, 2019).

No modelo de placa de Reissner-Mindlin, como as deformações foram separadas em coplanares e transversais em (2.8), o mesmo ocorre para as relações constitutivas:

$$\boldsymbol{\sigma}^k = \overline{\mathbf{Q}}^k \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\tau}^k = \mathbf{C}_c^k \boldsymbol{\gamma}_c, \quad (2.15)$$

onde  $\overline{\mathbf{Q}}^k$  é a matriz de rigidez reduzida transformada, associada às deformações coplanares, enquanto  $\mathbf{C}_c^k$  é a matriz de rigidez ao cisalhamento transversal transformada.

Para estruturas que podem ser aproximadas por teorias de placas, como as placas laminadas, é necessária a utilização de relações constitutivas independentes de  $z$  para representar a rigidez do modelo tridimensional no plano. O procedimento inicia-se com a definição dos esforços generalizados  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{Q}_c$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \{N_x, N_y, N_{xy}\}^T = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}^T dz, \\ \mathbf{M} &= \{M_x, M_y, M_{xy}\}^T = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}^T z dz, \\ \mathbf{Q}_c &= \{Q_y, Q_x\}^T = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \{\tau_{yz}, \tau_{xz}\}^T dz, \end{aligned} \quad (2.16)$$

os quais representam, respectivamente, esforços normais, fletores e cortantes por unidade de comprimento.

Observa-se que os esforços generalizados em (2.16) correspondem ao lado esquerdo integrado em  $z$  das equações em (2.15), de modo que a integração em ambos os lados resulta nas relações constitutivas para a placa laminada:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^0 \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{Q}_c = \mathbf{A}_c \boldsymbol{\gamma}_c, \quad (2.17)$$

em que  $\mathbf{A}$  é a matriz de rigidez extensional,  $\mathbf{B}$  é a matriz de rigidez de acoplamento entre flexão e extensão,  $\mathbf{D}$  é a matriz de rigidez à flexão, e  $\mathbf{A}_c$  é a matriz de rigidez cisalhante transversal. Em conjunto, essas matrizes representam a rigidez total do laminado.

As componentes em (2.17) são calculadas com base nas propriedades das lâminas individuais. Para as matrizes  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{D}$ , associadas à parcela coplanar das relações constitutivas,

os termos são determinados por:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^k (z_k - z_{k-1}), \\ B_{ij} &= \frac{1}{2} \left[ \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \right], \\ D_{ij} &= \frac{1}{3} \left[ \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \right], \end{aligned} \quad (2.18)$$

enquanto a matriz  $\mathbf{A}_c$  é obtida da seguinte forma:

$$\mathbf{A}_c = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} C_{44}^x & C_{45}^x \\ C_{45}^x & C_{55}^x \end{bmatrix} dz = \sum_{k=1}^N h_k \begin{bmatrix} C_{44}^x & C_{45}^x \\ C_{45}^x & C_{55}^x \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

onde  $z_k$  é a cota superior da lâmina  $k$ ,  $z_{k-1}$  é a cota inferior da lâmina  $k$  ou superior da lâmina  $k-1$ ,  $h_k$  é a espessura da lâmina  $k$  e  $N$  é o número total de lâminas que compõem o laminado.

## 2.6 FATOR DE CORREÇÃO DE CISALHAMENTO

A análise do vetor  $\gamma_c$  em (2.11) mostra que a Teoria de Reissner-Mindlin resulta em deformações de cisalhamento transversais,  $\gamma_{yz}$  e  $\gamma_{xz}$ , uniformes ao longo da espessura do laminado. Consequentemente, isso conduz a tensões cisalhantes transversais,  $\tau_{yz}$  e  $\tau_{xz}$ , que são descontínuas na região interlaminar, devido às diferentes propriedades mecânicas de cada lâmina, conforme expresso pelas relações constitutivas em (2.15). Esse comportamento contrasta com o modelo físico real e com os resultados obtidos por teorias tridimensionais, que mostram que as tensões cisalhantes são contínuas e variam, pelo menos, quadraticamente ao longo da espessura (REDDY, 2004).

Nesse contexto, um fator de correção de cisalhamento ( $k_s$ ) é definido visando ajustar os valores calculados para os esforços cortantes nas integrais em (2.16):

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = k_s \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz. \quad (2.20)$$

Das equações (2.15), (2.16) e (2.17), observa-se que o fator de correção também pode ser interpretado como um ajuste na rigidez ao cisalhamento transversal da placa laminada, isto

é:

$$\mathbf{Q}_c = \mathbf{E}\boldsymbol{\gamma}_c, \quad (2.21)$$

em que  $\mathbf{E}$  é a matriz de rigidez de cisalhamento corrigida, dada por:

$$\mathbf{E} = k_s \mathbf{A}_c = k_s \sum_{k=1}^N h_k \begin{bmatrix} C_{44} & C_{45} \\ C_{45} & C_{55} \end{bmatrix}^k, \quad (2.22)$$

onde, por conveniência, o sobrescrito  $(\bullet)^x$ , que indica a rotação dos termos da matriz  $\mathbf{C}$ , foi omitido.

Assim, considera-se ideal o fator de correção de cisalhamento que ajusta precisamente os esforços cortantes generalizados da FSDT aos valores calculados pela Teoria da Elasticidade Tridimensional. De acordo com a equação (2.21), isso pode ser obtido por meio de um ajuste na rigidez ao cisalhamento transversal da placa laminada. No entanto, esse procedimento requer a solução analítica tridimensional do problema associado para comparação, sendo limitado a casos simples e possuindo pouca escalabilidade em análises de estruturas laminadas arbitrárias.

Ao contrário do observado para placas homogêneas, em que existem métodos simples para determinar fatores de correção, a obtenção de uma correção adequada em laminados é frequentemente desafiadora (KARAMA, 2002). Isso se deve à dependência de diversas características específicas da estrutura em camadas, como a sequência de empilhamento das lâminas, as propriedades mecânicas das camadas individuais e a orientação das fibras nas lâminas. Essa complexidade muitas vezes requer a aplicação de múltiplos fatores de correção, em vez de um único fator (MENDONÇA, 2019).

Para placas laminadas ortotrópicas, onde a sequência de empilhamento das lâminas resulta em coeficientes nulos fora da diagonal principal da matriz de rigidez em (2.19), é possível definir dois fatores de correção,  $k_x$  e  $k_y$ , um para cada eixo de ortotropia do material laminado. Esses fatores costumam ser distintos entre si, conforme demonstrado por Whitney (1973).

$$\mathbf{E} = \sum_{k=1}^N h_k \begin{bmatrix} k_y C_{44} & 0 \\ 0 & k_x C_{55} \end{bmatrix}^k. \quad (2.23)$$

Uma abordagem semelhante, porém mais abrangente, pode ser desenvolvida para a análise de laminados anisotrópicos, envolvendo a definição de três fatores de correção:  $k_x$ ,  $k_y$  e

$k_{xy}$ , assim como realizado por Pai (1994).

$$\mathbf{E} = \sum_{k=1}^N h_k \begin{bmatrix} k_y C_{44} & k_{xy} C_{45} \\ k_{xy} C_{45} & k_x C_{55} \end{bmatrix}^k. \quad (2.24)$$

Esse método é especialmente importante em análises envolvendo laminados anisotrópicos, pois, segundo Noor e Burton (1990), os efeitos da deformação por cisalhamento transversal costumam ser mais relevantes em placas anisotrópicas do que em estruturas isotrópicas ou ortotrópicas com a mesma geometria, sendo a correção específica para cada eixo mais efetiva.

Além disso, é possível aplicar correções individuais nas coordenadas  $(x, y)$  da superfície de referência da placa, ou seja,  $k_s(x, y)$ ,  $k_x(x, y)$ ,  $k_y(x, y)$  e  $k_{xy}(x, y)$ . Essa característica é particularmente vantajosa na implementação de métodos numéricos para solução que exigem a discretização do domínio, como o Método dos Elementos Finitos (MEF) e o MEEG. Isso ocorre porque esses métodos necessitam da construção de matrizes através do cálculo de valores em múltiplos pontos do domínio, nos quais os fatores de correção podem ser aplicados.

Uma vez que a aplicação dos fatores de correção pode ser vista como um ajuste na rigidez ao cisalhamento transversal da placa laminada, não apenas os resultados dos esforços cortantes são afetados, mas também toda a resposta global da estrutura, incluindo algumas grandezas em menor escala. Portanto, a determinação desses fatores mostra-se fundamental para garantir a precisão dos resultados obtidos pela FSDT.

## 2.7 EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO E FORMA FRACA

Para um sistema sem aceleração, as equações do movimento em (2.4) tornam-se as equações de equilíbrio:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \quad (2.25)$$

em que as forças de corpo ( $\mathbf{b}$ ) foram desconsideradas.

Para a placa modelada pela Teoria de Reissner-Mindlin, as equações de equilíbrio em (2.25) são integradas ao longo da espessura e expressas em termos dos esforços generalizados definidos em (2.16). Além disso, como o campo de deslocamentos em (2.2) possui cinco des-

locamentos generalizados,  $\{u_0, v_0, w_0, \psi_x, \psi_y\}$ , são necessárias duas equações adicionais. Estas são obtidas ao multiplicar as duas primeiras equações em  $z$  e realizar o processo de integração, conforme detalhado em Mendonça (2019). Como resultado, obtêm-se:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} + (q_x^s - q_x^i) &= 0, \\
\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + (q_y^s - q_y^i) &= 0, \\
\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + (q_z^s - q_z^i) &= 0, \\
\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x + \frac{H}{2}(q_x^s - q_x^i) &= 0, \\
\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y + \frac{H}{2}(q_y^s - q_y^i) &= 0.
\end{aligned} \tag{2.26}$$

onde  $q_x, q_y$  e  $q_z$  são os carregamentos distribuídos nas direções  $x, y$  e  $z$ , respectivamente, e  $H$  corresponde à espessura total da placa. Os sobrescritos  $(\bullet)^s$  e  $(\bullet)^i$  indicam que o carregamento é aplicado na superfície superior e inferior do laminado, respectivamente.

Por meio das relações constitutivas em (2.17) e (2.22), juntamente com as deformações infinitesimais em (2.7), as cinco equações de equilíbrio definidas em (2.26) podem ser expressas em termos dos cinco deslocamentos generalizados da FSDT, conforme pode ser visto em Mendonça (2019). A imposição das condições de contorno completa a formulação do problema, conhecida como forma forte.

Por outro lado, existe a chamada forma fraca, ou variacional, que é mais adequada para a aplicação do Método dos Elementos Finitos e suas variações (MENDONÇA; FANCELLO, 2019). Ela consiste em uma expressão integral das equações diferenciais de equilíbrio apresentadas em (2.26). Em mecânica dos sólidos, a forma fraca é frequentemente formulada como o Princípio dos Trabalhos Virtuais, que declara que um corpo contínuo está em equilíbrio se, e somente se, o trabalho virtual de todas as forças, internas e externas, agindo sobre o corpo for nulo para um deslocamento virtual qualquer,  $\delta \mathbf{u}$  (REDDY, 2017). Matematicamente, considerando um corpo ocupando uma região  $\Omega$  no espaço tridimensional, limitado por um contorno  $\Gamma$ , isso pode ser expresso como:

$$\delta W = \delta W_I + \delta W_E = 0, \tag{2.27}$$

em que  $\delta W_I$  e  $\delta W_E$  representam os trabalhos virtuais internos e externos, respectivamente, os

quais podem ser calculados da seguinte forma:

$$\delta W_E = - \left( \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Gamma \right), \quad \delta W_I = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega, \quad (2.28)$$

com  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$  representando as deformações virtuais e  $\bar{\mathbf{t}}$  o vetor tensão atuando no contorno.

Para o modelo de Reissner-Mindlin, desconsiderando as forças de corpo  $\mathbf{b}$  e considerando uma placa de espessura uniforme  $H$ , com domínio definido por  $\bar{\Omega} = \{\Omega \times [-\frac{H}{2}, \frac{H}{2}]\} \cup \Gamma$ , onde  $\Omega$  corresponde à região da superfície de referência e  $\Gamma$  ao seu contorno, o Princípio dos Trabalhos Virtuais pode ser expresso da seguinte forma:

$$\int_{\Omega} \begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^0 \\ \delta \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix} \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{Q}_c \cdot \delta \boldsymbol{\gamma} \, d\Omega - \int_{\Omega} \delta w q \, d\Omega - \int_{\Gamma} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Gamma = 0, \quad (2.29)$$

ou ainda, por meio das relações constitutivas para o material laminado em (2.17) e (2.22):

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \begin{Bmatrix} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^0 \\ \delta \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^0 \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix} \, d\Omega + \int_{\Omega} \begin{Bmatrix} \delta \gamma_{yz} \\ \delta \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} E_{44} & E_{45} \\ E_{45} & E_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \, d\Omega \\ & - \int_{\Omega} \delta w q \, d\Omega - \int_{\Gamma} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Gamma = 0. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Essa é a expressão normalmente utilizada pelo MEF ou métodos numéricos semelhantes para determinar a resposta estrutural da placa laminada formulada pela FSDT. É evidente que os fatores de correção de cisalhamento influenciam toda a solução do problema, uma vez que estão incorporados nos termos da matriz de rigidez de cisalhamento corrigida ( $\mathbf{E}$ ) e nos esforços cortantes ( $\mathbf{Q}_c$ ).

### 3 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS

O Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG), assim como o Método dos Elementos Finitos (MEF) convencional, é uma técnica numérica utilizada para gerar soluções aproximadas de problemas de valores de contorno (PVC), formulados em forma fraca, ou seja, em expressões integrais de equações diferenciais que governam fenômenos físicos, como aquelas definidas na seção anterior para a placa laminada de Reissner-Mindlin, em (2.30). De acordo com Torres (2008), o MEFG pode ser interpretado como um método híbrido entre o MEF e o Método das Nuvens hp.

No MEF convencional, a aproximação depende da definição de uma malha, na qual o domínio do problema real é discretizado em elementos de geometria simples, como triângulos ou quadriláteros, interconectados por nós. A construção da solução aproximada para os campos de interesse é então obtida no interior dessas entidades elementares, por meio da interpolação dos valores nodais utilizando funções de forma. Assim, o problema global passa a ser representado pela soma das contribuições dos elementos adjacentes a cada um dos nós, respeitando a indexação de conectividade pré-definida (TORRES, 2008).

A aplicabilidade do MEF é irrefutável, sendo utilizado em diversas áreas da engenharia e das ciências aplicadas para uma ampla variedade de análises. Ele se mostra como uma ferramenta consistente para projetos em mecânica dos sólidos, mecânica dos fluidos, transferência de calor, eletromagnetismo, entre outros. No entanto, o MEF convencional, comumente implementado em pacotes comerciais, apresenta algumas limitações. Por exemplo, em análises de estruturas, segundo Liu (2003), há a necessidade de criação de uma malha bem definida para o domínio, a estimativa grosseira e descontínua das tensões entre os elementos, a baixa precisão em análises que envolvem grandes deformações devido às distorções dos elementos, a dificuldade em simular ruptura de materiais, entre outras.

Nesse contexto, para contornar algumas dessas limitações e eliminar inconvenientes decorrentes da associação dos domínios das funções de interpolação à malha, são apresentadas metodologias voltadas para construir aproximações da solução do PVC que sejam independentes, ou quase independentes, da definição de uma malha de elementos finitos (BARROS, 2002). Essa é a característica principal dos Métodos Sem Malha, onde, segundo Barros (2002), a aproximação é construída utilizando um conjunto de pontos do domínio global, sem que a conectividade entre eles seja pré-estabelecida.

De acordo com Torres (2008), em grande parte desses métodos, a aproximação das funções que representam o campo de interesse é obtida por meio do Método dos Mínimos Quadrados Móveis (MMQM). Exemplos desses métodos incluem: o Método dos Elementos Difusos (MED), introduzido por Nayroles, Touzot e Villon (1992); o Método de Galerkin Livre de Elementos (MGLE), apresentado por Belytschko, Lu e Gu (1994); o Método dos Pontos Finitos (MPF), desenvolvido por Onate, Idelsohn e Zienkiewicz (1995), Onate (1996a) e Onate (1996b); e o Método das Nuvens hp, apresentado em Duarte e Oden (1995) e Duarte (1996).

O Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG), proposto por Oden, Duarte e Zienkiewicz (1998) e fundamentado por Strouboulis, Babuska e Copps (2000), poderia até ser mencionado dentro do contexto dos métodos sem malha (BARROS, 2002). Combinando conceitos do Método das Nuvens hp, que propõe o enriquecimento sem a adição de novos pontos nodais no domínio e do MEF convencional, a malha é empregada apenas para definir as Partições da Unidade (PU) e delimitar o domínio para a integração numérica, enquanto as funções de enriquecimento são utilizadas para aprimorar a precisão da representação na região de influência de cada PU.

Esse método oferece uma maior flexibilidade para a modelagem de problemas complexos, permitindo uma representação mais precisa e eficaz de uma grande variedade de fenômenos físicos, se comparado ao MEF convencional. Em mecânica dos sólidos, por exemplo, destaca-se em análises que envolvem descontinuidades, singularidades, deformações localizadas ou geometrias complexas (MENDONÇA; LEMOS, 2024). Além disso, o MEFG também é recomendado para análise de tensões, devido à ordem superior das funções necessárias para satisfazer as equações diferenciais de equilíbrio envolvendo essas grandezas.

No contexto da análise de placas laminadas pela FSDT, o MEFG oferece facilmente uma base de maior ordem para a aproximação, permitindo a obtenção de derivadas de ordem superior dos deslocamentos generalizados. Essas derivadas são fundamentais para assegurar a qualidade das etapas de pós-processamento apresentadas na próxima seção.

Segundo Ribeiro (2016), o desenvolvimento matemático do MEFG pode ser resumido em duas etapas:

- a) Criação numérica das Funções PU: as PU são construídas com base na malha de elementos finitos pré-definida, levando em consideração as coordenadas nodais, o tamanho dos elementos e, principalmente, a influência dos nós em um mesmo elemento. Essa influência depende da nuvem  $\omega$ , que consiste em um subdomínio formado pela

união dos elementos associados ao nó de construção da PU.

- b) Enriquecimento: cada grau de liberdade é enriquecido pela aplicação do Método das Nuvens hp, através da multiplicação das funções de PU por um conjunto de funções linearmente independentes.

### 3.1 PARTIÇÃO DA UNIDADE E FUNÇÕES DE APROXIMAÇÃO

Para construir as funções de aproximação do MEFG em um problema formulado pela FSDT, pode-se considerar a superfície média de uma placa como um domínio aberto  $\Omega \subset \mathbb{R}^2(\mathbf{x})$ . A essa superfície é atribuída uma malha de elementos triangulares, composta por  $N_e$  elementos e  $N$  nós definidos pelas coordenadas  $\{\mathbf{x}_\alpha\}_{\alpha=1}^N$ . Em cada nó, é estabelecida uma nuvem,  $\omega_\alpha$ ,  $\alpha = 1, \dots, N$ , formada pela união dos elementos triangulares que compartilham esse nó. Dessa forma, o fechamento  $\bar{\Omega}$  do domínio aberto  $\Omega$  deve estar contido na união do fechamento dessas nuvens  $\bar{\omega}_\alpha$  (BARCELLOS; MENDONÇA; DUARTE, 2009). Matematicamente, isso pode ser expresso por:

$$\mathfrak{S}_N = \{\omega\}_{\alpha=1}^N, \quad \bar{\Omega} \subset \cup_{\alpha=1}^N \bar{\omega}_\alpha, \quad (3.1)$$

onde  $\mathfrak{S}_N$  representa a cobertura aberta do domínio formado pelo conjunto das  $N$  nuvens  $\omega_\alpha$ .

Logo, as nuvens  $\omega_\alpha$ , associadas a um nó  $\alpha$ , são formadas pela união dos elementos individuais pertencentes à malha de elementos finitos pré-estabelecida que estão conectados ao nó  $\alpha$ . A Figura 3 mostra duas dessas nuvens,  $\omega_1$  e  $\omega_2$ , associadas aos nós 1 e 2, respectivamente. A nuvem  $\omega_1$ , que é convexa, é composta pelos elementos  $\{a, b, c, d, e\}$ , enquanto a nuvem  $\omega_2$ , não-convexa, é formada pela união dos elementos  $\{c, d, g, h, k, l, m\}$ .

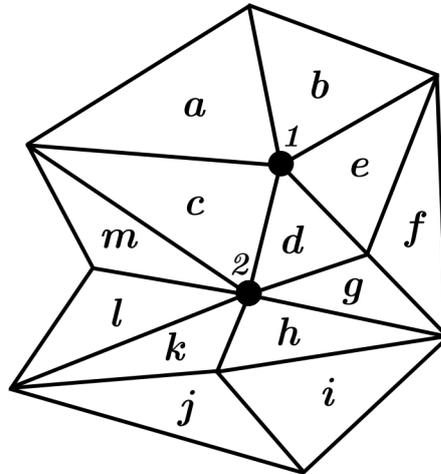
De acordo com Babuska, Banerjee e Osborn (2004), um conjunto de  $N$  funções  $\{\varphi_\alpha(\mathbf{x})\}_{\alpha=1}^N$ , tendo como suporte compacto a correspondente nuvem  $\omega_\alpha$ , é caracterizado como uma Partição de Unidade (PU) caso apresente as seguintes propriedades:

- a) A soma de seus valores é igual à unidade em qualquer ponto do suporte, isto é:

$$\sum_{\alpha=1}^N \varphi_\alpha(\mathbf{x}) = 1, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega. \quad (3.2)$$

- b) Todo suporte compacto de  $\Omega$  intersecciona apenas um número finito de outros suportes.

Figura 3: Exemplo de nuvens  $\omega_\alpha$  convexa e não-convexa em um malha triangular.



Fonte: Adaptado de Ribeiro (2016).

c) A função  $\varphi_\alpha$  é diferente de zero apenas sobre sua nuvem e possui pelo menos  $k$  derivadas contínuas em  $\omega_\alpha$ , isto é:

$$\varphi_\alpha(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\omega_\alpha), k \geq 0. \quad (3.3)$$

A principal característica da PU explorada no MEFG é a de que qualquer função,  $\varphi(x)$ , pode ser reproduzida localmente dentro do suporte da PU, com ou sem perda de continuidade, viabilizando assim o enriquecimento do subespaço responsável pela aproximação por funções polinomiais (RIBEIRO, 2016).

O MEFG convencional, com regularidade  $C^0$ , consiste em utilizar as funções de forma convencionais do método dos elementos finitos como PU e realizar o enriquecimento da aproximação por meio do método das nuvens  $hp$  (RIBEIRO, 2016). Embora as funções de forma Lagrangianas  $C^0$  não satisfaçam todas as propriedades descritas acima para definição da PU, elas podem ser consideradas por meio de uma interpretação relaxada, devido à soma de seus valores resultar na unidade em qualquer ponto de seu suporte (BARROS, 2002).

### 3.2 ENRIQUECIMENTO DAS FUNÇÕES DE APROXIMAÇÃO

O objetivo do enriquecimento consiste em melhorar a qualidade dos resultados numéricos por meio da ampliação da base do subespaço de aproximação. Como alternativa, para o

enriquecimento da PU consiste em multiplicar o conjunto de funções  $\{\varphi_\alpha(\mathbf{x})\}_{\alpha=1}^N$  por outras, que podem ser funções polinomiais, harmônicas ou ainda parte da solução do problema de valor no contorno (BARCELLOS; MENDONÇA; DUARTE, 2009).

No procedimento convencional, a ampliação do subespaço é realizada multiplicando-se a função de base correspondente a cada nó  $\alpha$  da discretização do MEF por um conjunto de funções linearmente independentes  $\{L_{ij}\}$ , adicionando assim novos graus de liberdade à formulação tradicional do MEF (BARROS, 2002).

A abordagem de enriquecimento por meio de funções polinomiais resulta uma família de funções de enriquecimento,  $\mathfrak{S}_N^p$ :

$$\mathfrak{S}_N^p = \begin{Bmatrix} \varphi_1 L_{01} & \varphi_2 L_{02} & \dots & \varphi_N L_{0N} \\ \varphi_1 L_{11} & \varphi_2 L_{12} & \dots & \varphi_N L_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1 L_{p1} & \varphi_2 L_{p2} & \dots & \varphi_N L_{pN} \end{Bmatrix}, \quad (3.4)$$

com  $N$  sendo o número de nuvens e  $p$  o grau do maior polinômio da família  $\mathfrak{S}_N^p$ .

Por exemplo, os seguintes conjuntos de polinômios de grau máximo  $p$  podem ser utilizados para o aprimoramento (MENDONÇA; LEMOS, 2024):

- Enriquecimento linear  $p = 1$ :  $L_{i\alpha} = [1, \bar{x}, \bar{y}]$ ;
- Enriquecimento quadrático  $p = 2$ :  $L_{i\alpha} = [1, \bar{x}, \bar{y}, \bar{x}^2, \bar{x}\bar{y}, \bar{y}^2]$ ;
- Enriquecimento cúbico  $p = 3$ :  $L_{i\alpha} = [1, \bar{x}, \bar{y}, \bar{x}^2, \bar{x}\bar{y}, \bar{y}^2, \bar{x}^3, \bar{x}^2\bar{y}, \bar{x}\bar{y}^2, \bar{y}^3]$ ;
- Enriquecimento quártico  $p = 4$ :

$$L_{i\alpha} = [1, \bar{x}, \bar{y}, \bar{x}^2, \bar{x}\bar{y}, \bar{y}^2, \bar{x}^3, \bar{x}^2\bar{y}, \bar{x}\bar{y}^2, \bar{y}^3, \bar{x}^4, \bar{x}^3\bar{y}, \bar{x}^2\bar{y}^2, \bar{x}\bar{y}^3, \bar{y}^4].$$

As coordenadas são normalizadas por:

$$\bar{x} = \frac{x - x_\alpha}{h_\alpha}, \quad \bar{y} = \frac{y - y_\alpha}{h_\alpha}, \quad (3.5)$$

com  $\mathbf{x}_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha)$  sendo as coordenadas do nó  $\alpha$  e  $h_\alpha$  o raio representativo da nuvem  $\omega_\alpha$ .

Com o enriquecimento, conforme Ribeiro (2016), a aproximação para os deslocamentos no elemento  $e$  é dada por:

$$u_i^e(x, y) = \sum_{j=1}^{nnoe} \varphi_{ij} \left\{ u_{ij} + \sum_{k=1}^{nfu_i} L_{ijk}(x, y) b_{ijk} \right\}, \quad (3.6)$$

onde  $i$  é a direção de cada grau de liberdade,  $k$  o número do monômio enriquecedor,  $\varphi_j$  as funções PU associadas ao nó  $j$ ,  $nnoe$  o número de nós no elemento,  $nfu$  o número de funções de enriquecimento,  $u_j$  os deslocamentos nodais e  $b_{jk}$  os coeficientes associados a cada função de enriquecimento  $L_{jk}$ .

Nessa abordagem, os coeficientes  $b_{ijk}$  são determinados da mesma forma que os deslocamentos nodais  $u_{ij}$  no MEF, mas não possuem um significado físico associado, contribuindo apenas para o refinamento dos valores de deslocamentos nodais.

## 4 RECUPERAÇÃO DAS TENSÕES E DESLOCAMENTOS

Após a solução da forma fraca em (2.30) por um método numérico adequado, como o MEFM, o procedimento mais simples para a determinação das tensões consiste, primeiramente, em calcular as deformações infinitesimais em (2.7) e, em seguida, usar as relações constitutivas em (2.14). Para formulações tridimensionais, esse procedimento apresenta resultados fisicamente consistentes, que satisfazem as três equações de equilíbrio tridimensionais para as tensões em (2.25). Contudo, no modelo de placa laminada de Reissner-Mindlin, as equações de equilíbrio satisfeitas são aquelas em (2.26), com o campo de deformações definido em (2.8) e as respectivas relações constitutivas para o laminado em (2.15). De modo que algumas inconsistências surgem nos resultados, dentre as quais se destacam:

- a) A inextensibilidade dos segmentos inicialmente normais à superfície de referência implica em deslocamentos transversais,  $w(x, y)$ , uniformes em cada seção transversal, tornando a tensão normal transversal nula em todos os pontos do domínio ( $\sigma_z = 0$ ).
- b) As deformações cisalhantes transversais,  $\gamma_{xz}$  e  $\gamma_{yz}$ , são constantes ao longo da espessura do laminado, o que resulta em tensões cisalhantes,  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$ , descontínuas na interface das lâminas. Isso contraria o modelo físico, que exige a continuidade das tensões em toda a espessura, inclusive na região interlaminar.

Além disso, existem erros relacionados à suposição do comportamento linear em  $z$  para os deslocamentos e tensões coplanares na FSDT, cujo formato da resposta depende da estrutura final do laminado, dos esforços aplicados e das condições de contorno. Em geral, esses erros e inconsistências podem ser negligenciados em análises envolvendo placas significativamente finas, mas se tornam mais relevantes à medida que a espessura da placa aumenta.

Nesta seção, apresentam-se as técnicas de pós-processamento normalmente utilizadas para melhorar a estimativa inicial da FSDT. O procedimento consiste na integração das equações de equilíbrio tridimensionais em (2.25), a fim de obter resultados mais precisos para as tensões transversais  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$  e  $\sigma_z$ . Além disso, seguindo a abordagem apresentada por Mendonça e Lemos (2024), ajustam-se as tensões para que satisfaçam as condições de contorno na superfície superior do laminado. Por fim, utilizando todo o campo de tensões recuperado, estimativas mais consistentes podem ser obtidas para a variação dos deslocamentos  $u$ ,  $v$  e  $w$  ao longo da espessura da placa, por meio da integração das relações constitutivas tridimensionais.

#### 4.1 TENSÕES CISALHANTES TRANSVERSAIS

Em análises mecânicas de placas laminadas, normalmente, os valores calculados para as tensões cisalhantes transversais são consideravelmente menores do que aqueles calculados para as tensões coplanares. Entretanto, uma estimativa precisa do cisalhamento transversal é tão fundamental quanto a análise de flexão nessas estruturas. Isso ocorre porque até mesmo pequenos valores de cisalhamento podem desencadear falhas por delaminação no material empregado, devido à baixa resistência ao cisalhamento na região interlaminar (PAI, 1994). Portanto, compreender a distribuição das tensões cisalhantes ao longo da espessura do laminado é um requisito importante de projeto, permitindo a adoção de medidas adequadas para prevenir a delaminação e otimizar o desempenho do material laminado utilizado.

O procedimento apresentado por Chaudhuri (1986) para a determinação das tensões transversais aprimoradas,  $\tau_{xz}^i$ ,  $\tau_{yz}^i$  e  $\sigma_z^i$ , consiste em utilizar os resultados coplanares obtidos pela FSDT para integrar ao longo da espessura as três equações de equilíbrio tridimensionais em (2.25), conforme mostrado abaixo:

$$\begin{aligned}\tau_{xz}^i(x, y, z) &= \int_{-H/2}^z \left[ \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right] dz + \tau_{xz}(x, y, -H/2), \\ \tau_{yz}^i(x, y, z) &= \int_{-H/2}^z \left[ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right] dz + \tau_{yz}(x, y, -H/2), \\ \sigma_z^i(x, y, z) &= \int_{-H/2}^z \left[ \frac{\partial \tau_{xz}^i}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^i}{\partial y} \right] dz + \sigma_z(x, y, -H/2),\end{aligned}\tag{4.1}$$

em que o índice  $i$  é usado para destacar que o resultado é obtido pelo método de integração, em contraste aos valores calculados pelas relações constitutivas.

Observa-se que a determinação de  $\sigma_z^i$  está condicionada à obtenção prévia das tensões cisalhantes transversais,  $\tau_{xz}^i$  e  $\tau_{yz}^i$ , enquanto as duas primeiras equações dependem exclusivamente das tensões coplanares, mais especificamente de suas primeiras derivadas em  $x$  e  $y$ . Portanto, a precisão da estimativa inicial para as tensões  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$  na superfície de referência e ao longo da espessura da placa é fundamental para garantir a qualidade do método de recuperação das tensões transversais (MENDONÇA; LEMOS, 2024). Essa precisão é naturalmente proporcionada pelo MEEG, que oferece uma base de alta ordem para a aproximação.

Devido às descontinuidades das tensões coplanares na interface das lâminas, o processo de integração em (4.1) deve ser feito de forma segmentada. Assim, para  $z$  no interior de uma

lâmina qualquer  $k$ , isto é,  $z_{k-1} \leq z \leq z_k$ , a integral da primeira equação torna-se:

$$\int_{-H/2}^z \left[ \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right] dz = \sum_{k=1}^k \int_{z_{k-1}}^z (\sigma_{x,x}^k + \tau_{xy,y}^k) dz, \quad (4.2)$$

em que a notação de subíndice  $(\bullet)_{,x}$  é utilizada para indicar as derivadas parciais.

As derivadas das tensões coplanares são obtidas pelas relações constitutivas definidas em (2.15), juntamente com as deformações infinitesimais para o modelo de Reissner-Mindlin em (2.8):

$$\sigma_{,x}^k = \bar{\mathbf{Q}}^k (\boldsymbol{\varepsilon}_{,x}^0 + z \boldsymbol{\kappa}_{,x}) \quad \text{e} \quad \sigma_{,y}^k = \bar{\mathbf{Q}}^k (\boldsymbol{\varepsilon}_{,y}^0 + z \boldsymbol{\kappa}_{,y}). \quad (4.3)$$

Substituindo (4.3) em (4.2), resolvendo a integral e agrupando os termos, obtém-se a seguinte expressão para a tensão cisalhante no plano  $xz$  em uma lâmina arbitrária  $k$ :

$$\tau_{xz}^i(z) = \tau_{xz}^i(z_{k-1}) + a^k [z - z_{k-1}] + b^k [z^2 - z_{k-1}^2], \quad (4.4)$$

onde  $a(x, y)^k$  e  $b(x, y)^k$  são funções das coordenadas  $(x, y)$  da superfície de referência da placa, definidas por:

$$\begin{aligned} a(x, y)^k &= \bar{Q}_{11}^k \varepsilon_{x,x}^0 + \bar{Q}_{12}^k \varepsilon_{y,x}^0 + \bar{Q}_{16}^k \gamma_{xy,x}^0 + \bar{Q}_{61}^k \varepsilon_{x,y}^0 + \bar{Q}_{62}^k \varepsilon_{x,y}^0 + \bar{Q}_{66}^k \gamma_{xy,y}^0, \\ b(x, y)^k &= \frac{1}{2} \left( \bar{Q}_{11}^k \kappa_{x,x} + \bar{Q}_{12}^k \kappa_{y,x} + \bar{Q}_{16}^k \kappa_{xy,x} + \bar{Q}_{61}^k \kappa_{x,y} + \bar{Q}_{62}^k \kappa_{y,y} + \bar{Q}_{66}^k \kappa_{xy,y} \right). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Na superfície inferior do laminado, em  $z_0 = -H/2$ , pertencente à primeira lâmina, o valor de  $\tau_{xz}^i(z_0)$  em (4.4) é atribuído pelas condições de contorno.

Se o MEEG for utilizado no processo de solução, as deformações coplanares e suas derivadas em (4.5) são determinadas pela matriz de deformação membrana-flexão  $(\mathbf{B}_f^e)$ , que contém as derivadas das funções enriquecidas associadas ao elemento  $e$ . O cálculo é feito da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{,x}^e = \mathbf{B}_{f,x}^e \mathbf{U}^e, \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{,y}^e = \mathbf{B}_{f,y}^e \mathbf{U}^e, \quad (4.6)$$

onde  $\mathbf{U}^e$  é o vetor de deslocamentos e coeficientes nodais do elemento.

Toda a formulação pode ser repetida a partir da segunda equação em (4.1), resultando em uma expressão semelhante àquela definida em (4.4) para a tensão cisalhante no plano  $yz$ :

$$\tau_{yz}^i(z) = \tau_{yz}^i(z_{k-1}) + c^k [z - z_{k-1}] + d^k [z^2 - z_{k-1}^2], \quad (4.7)$$

em que:

$$\begin{aligned} c^k(x, y) &= \bar{Q}_{21}^k \varepsilon_{x,y}^0 + \bar{Q}_{22}^k \varepsilon_{y,y}^0 + \bar{Q}_{26}^k \gamma_{xy,y}^0 + \bar{Q}_{61}^k \varepsilon_{x,x}^0 + \bar{Q}_{62}^k \varepsilon_{x,x}^0 + \bar{Q}_{66}^k \gamma_{xy,x}^0, \\ d^k(x, y) &= \frac{1}{2} \left( \bar{Q}_{21}^k \kappa_{x,y} + \bar{Q}_{22}^k \kappa_{y,y} + \bar{Q}_{26}^k \kappa_{xy,y} + \bar{Q}_{61}^k \kappa_{x,x} + \bar{Q}_{62}^k \kappa_{y,x} + \bar{Q}_{66}^k \kappa_{xy,x} \right). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Neste trabalho, essa abordagem é implementada como uma etapa de pós-processamento para o MEFM na análise de placas laminadas pela FSDT. Como resultado, obtêm-se funções quadráticas contínuas para a representação das tensões cisalhantes transversais ao longo da espessura do laminado, conforme (4.4) e (4.7), contornando, assim, a inconsistência física da estimativa inicial do cisalhamento transversal.

## 4.2 TENSÃO NORMAL TRANSVERSAL

A terceira equação em (4.1) pode ser utilizada para obter uma estimativa da variação da tensão normal transversal ao longo da espessura da placa laminada. O ponto de partida consiste em substituir as tensões cisalhantes transversais pelas expressões definidas em (4.4) e (4.7). Dessa forma, os termos referentes à lâmina  $k$  que precisam ser integrados em (4.1) são os seguintes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{xz}^i}{\partial x} &= \frac{\partial \tau_{xz}^i}{\partial x} \Big|_{z_{k-1}} + \frac{\partial a^k}{\partial x} (z - z_{k-1}) + \frac{\partial b^k}{\partial x} (z^2 - z_{k-1}^2), \\ \frac{\partial \tau_{yz}^i}{\partial y} &= \frac{\partial \tau_{yz}^i}{\partial y} \Big|_{z_{k-1}} + \frac{\partial c^k}{\partial y} (z - z_{k-1}) + \frac{\partial d^k}{\partial y} (z^2 - z_{k-1}^2). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Inserindo (4.9) na última equação de (4.1), integrando e agrupando os termos, chega-se à seguinte expressão para a tensão normal transversal em  $z$ , com  $z \in (z_{k-1}; z_k)$ :

$$\begin{aligned} \sigma_z^i(z) &= \sigma_z(z_{k-1}) \\ &+ (z - z_{k-1}) \left( \frac{\partial \tau_{xz}^i}{\partial x} \Big|_{z_{k-1}} + \frac{\partial \tau_{yz}^i}{\partial y} \Big|_{z_{k-1}} \right) \\ &+ \frac{1}{2} (z - z_{k-1})^2 \left( \frac{\partial a^k}{\partial x} + \frac{\partial c^k}{\partial y} \right) \\ &+ \frac{1}{3} (z - z_{k-1})^2 (z + 2z_{k-1}) \left( \frac{\partial b^k}{\partial x} + \frac{\partial d^k}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (4.10)$$

A partir de (4.4), (4.7) e (4.10), observa-se que as tensões transversais integradas dependem do valor calculado na lâmina anterior. Portanto, torna-se possível impor novas condições de contorno para a primeira lâmina na superfície inferior do laminado, ou seja, pode-se escolher

$$\tau_{xz}^i(x, y, -\frac{H}{2}), \tau_{yz}^i(x, y, -\frac{H}{2}) \text{ e } \sigma_z^i(x, y, -\frac{H}{2}).$$

### 4.3 MÉTODO DE CORREÇÃO DAS TENSÕES

Na maioria das vezes, segundo Mendonça e Lemos (2024), quando as tensões são obtidas pelo procedimento de integração das equações tridimensionais de equilíbrio, o resultado final em  $z = H/2$  é fisicamente incompatível com as condições de contorno na superfície superior da placa. Isso ocorre porque, devido ao tipo de equações diferenciais envolvidas em  $z$ , ordinárias de primeira ordem, só é possível impor uma condição de contorno em cada componente de tensão transversal, que é definida na superfície inferior do laminado.

A abordagem utilizada por Mendonça e Lemos (2024) consiste em determinar funções  $f_x(z)$ ,  $f_y(z)$  e  $f_z(z)$  que, somadas às componentes de tensão transversal, resultem em expressões que satisfaçam as condições de contorno para as respectivas tensões na superfície superior do laminado, isto é:

$$\begin{aligned} \sigma_z^c(z) &= \sigma_z^i(z) + f_z(z), \\ \tau_{xz}^c(z) &= \tau_{xz}^i(z) + f_x(z) \quad \text{e} \\ \tau_{yz}^c(z) &= \tau_{yz}^i(z) + f_y(z). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Essas funções de correção são escolhidas como polinômios cúbicos, apresentando o seguinte formato:

$$f(z) = a + bz + cz^2 + dz^3. \quad (4.12)$$

Ao definir as seguintes restrições para função  $f(z)$ :

- $f(-H/2) = 0$ ; e
- $f(H/2) = A(x, y)$ ;

com  $A(x, y)$  sendo a grandeza conhecida na superfície superior da placa, os coeficientes ficam restritos de tal forma que o polinômio em (4.12) torna-se:

$$f(z) = A \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{H} \right) + c \left( z^2 - \frac{H^2}{4} \right) + d \left( z^3 - \frac{H^2}{4} z \right). \quad (4.13)$$

A imposição das condições de contorno para as tensões possibilita determinar os coeficientes  $A$ ,  $c$  e  $d$  para cada uma das funções  $f_x(z)$ ,  $f_y(z)$  e  $f_z(z)$ , responsáveis pelas correções em (4.11). Assim, conhecidas as cargas distribuídas  $q_x^s$ ,  $q_y^s$  e  $q_z^s$  na superfície superior do laminado,

em  $z = H/2$ , as condições podem ser definidas por:

$$\begin{cases} \sigma_z^c(H/2) = q_z^s, \\ \tau_{xz}^c(H/2) = q_x^s, \\ \tau_{yz}^c(H/2) = q_y^s, \\ \int_{-H/2}^{H/2} \{\tau_{xz}^c, \tau_{yz}^c\} dz = \{Q_x, Q_y\}, \end{cases} \quad (4.14)$$

onde  $Q_x$  e  $Q_y$  são as forças cortantes no ponto  $(x, y)$ , calculadas a partir das relações constitutivas e utilizadas para garantir uma melhor distribuição das tensões cisalhantes corrigidas (MENDONÇA; LEMOS, 2024).

A primeira condição em (4.14) pode ser utilizada para determinar o coeficiente  $A_z$  na função de correção associada à tensão normal transversal,  $\sigma_z^c$ :

$$\sigma_z^c\left(\frac{H}{2}\right) + \underbrace{f_z\left(\frac{H}{2}\right)}_{A_z} = q_z^s \quad \rightarrow \quad A_z = q_z^s - \underbrace{\sigma_z^i\left(\frac{H}{2}\right)}_{q_z^{is}}, \quad (4.15)$$

onde  $q_z^{is}$  é o valor da tensão normal transversal integrada na superfície superior do laminado. Além disso, como essa é a única condição de contorno disponível para  $\sigma_z^c$ ,  $c_z = d_z = 0$ .

Um procedimento semelhante pode ser aplicado para determinar  $A_x$  e  $A_y$ , a partir da segunda e da terceira condição de contorno em (4.14), resultando em:

$$\begin{aligned} A_x &= q_x^s - q_x^{is}, \\ A_y &= q_y^s - q_y^{is}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

onde  $q_x^{is}$  e  $q_y^{is}$  são os valores das tensões cisalhantes integradas na superfície superior do laminado, isto é,  $\tau_{xz}^i(H/2)$  e  $\tau_{yz}^i(H/2)$ , respectivamente.

O desenvolvimento da última condição em (4.14), considerando o primeiro termo referente à tensão  $\tau_{xz}^c$ , resulta em:

$$\begin{aligned} \int_{-H/2}^{H/2} \tau_{xz}^i(z) dz + \int_{-H/2}^{H/2} f_x(z) dz &= Q_x \\ Q_x + \frac{H}{2} \left( A_x - c_x \frac{H^2}{3} \right) &= Q_x, \end{aligned} \quad (4.17)$$

em que  $Q_x^i$  corresponde à força cisalhante associada à tensão integrada  $\tau_{xz}^i$ .

Substituindo  $A_x$  de (4.16) em (4.17):

$$\underbrace{\left[ Q_x^i - \frac{H}{2} q_x^{is} \right]}_{q_{x1}} - c_x \underbrace{\frac{H^3}{6}}_{q_{x2}} = \underbrace{\left[ Q_x - \frac{H}{2} q_x^s \right]}_{q_{x3}} \quad (4.18)$$

$$q_{x1} - c_x q_{x2} = q_{x3} \quad \rightarrow \quad c_x = \frac{q_{x1} - q_{x3}}{q_{x2}}.$$

Analogamente, um procedimento semelhante pode ser realizado para a direção  $y$ , resultando em uma equação parecida para  $c_y$ .

Observa-se que as condições em (4.14) ativam apenas as constantes  $A_z$ ,  $A_x$ ,  $c_x$ ,  $A_y$  e  $c_y$ , ou seja,  $c_z = d_z = d_x = d_y = 0$  e as funções de correção em (4.11) tornam-se:

$$\begin{aligned} f_x(z) &= A_x \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{H} \right) + c_x \left( z^2 - \frac{H^2}{4} \right), \\ f_y(z) &= A_y \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{H} \right) + c_y \left( z^2 - \frac{H^2}{4} \right), \\ f_z(z) &= A_z \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{H} \right). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Essas são as funções de correção utilizadas em Mendonça e Lemos (2024) para as tensões transversais integradas. No entanto, os fatores de correção de cisalhamento têm como objetivo fornecer estimativas mais precisas para os esforços cortantes. Assim, a quarta condição de contorno em (4.14) pode ser relaxada se o fator for adequado, resultando em funções de correção lineares:

$$\begin{aligned} f_x(z) &= A_x \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{H} \right), \\ f_y(z) &= A_y \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{H} \right), \\ f_z(z) &= A_z \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{H} \right). \end{aligned} \quad (4.20)$$

#### 4.4 DESLOCAMENTO TRANSVERSAL

Em muitas situações práticas, é importante obter uma estimativa da variação do deslocamento transversal,  $w$ , ao longo da espessura do material laminado. Isso é especialmente relevante em aplicações que envolvem painéis espessos, estruturas tipo sanduíche, laminados com lâminas de baixo módulo de elasticidade transversal, ou ainda em laminados sujeitos a cargas

térmicas e com alto coeficiente de dilatação térmica (MENDONÇA; LEMOS, 2024). No entanto, o modelo cinemático de Reissner-Mindlin assume que os deslocamentos transversais são uniformes na espessura, isto é,  $w = w(x, y)$ . Para contornar essa limitação, de modo semelhante ao realizado para tensões transversais, uma etapa de pós-processamento pode ser implementada para uma estimativa mais realista.

A abordagem envolve a integração da equação de deformação infinitesimal normal em relação a  $z$ , expressa por  $\varepsilon_z = \partial w / \partial z$  em (2.7):

$$w^i(z) = \int_{-H/2}^z \varepsilon_z dz. \quad (4.21)$$

A deformação  $\varepsilon_z$  em (4.21), por sua vez, pode ser obtida da relação tensão-deformação tridimensional para um material elástico linear:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \bar{\mathbf{S}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z^i \\ \tau_{yz}^i \\ \tau_{xz}^i \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (4.22)$$

onde  $\bar{\mathbf{S}}$  é a matriz de flexibilidade transformada do material. Verifica-se que:

$$\varepsilon_z(z) = \bar{S}_{3j} \sigma_j. \quad (4.23)$$

Logo, a estimativa para a deformação normal transversal e, conseqüentemente, para o deslocamento transversal,  $w(z)$ , depende dos resultados de todas as componentes de tensão disponíveis, incluindo as tensões transversais integradas  $\tau_{xz}^i$ ,  $\tau_{yz}^i$  e  $\sigma_z^i$ .

Devido às diferentes propriedades das lâminas, a integração em (4.21) deve ser feita de forma cumulativa, lâmina a lâmina. Porém, o valor para o deslocamento transversal na superfície inferior do laminado, em  $z_0 = -H/2$ , é inicialmente desconhecido e precisa ser arbitrado para obter a primeira constante de integração. Assim, o procedimento é iniciado com a imposição de  $w(-H/2) = 0$  e ao final da integração os valores são ajustados.

Para uma lâmina qualquer  $k$ , com  $z \in (z_{k-1}; z_k)$ , o processo cumulativo é expresso

por:

$$w^i(z) = w^i(z_{k-1}) + \int_{z_{k-1}}^z \varepsilon_z dz. \quad (4.24)$$

Ao término da integração, realiza-se um ajuste translacional da curva de modo que o deslocamento transversal integrado na superfície de referência da placa,  $w_0 = w^i(0)$ , coincida com a estimativa inicial da FSDT calculada pelo MEFM:

$$\begin{aligned} \delta w &= w_o - w_{FSDT}, \\ w^i(z) &= w^i(z) - \delta w, \end{aligned} \quad (4.25)$$

em que  $w_{FSDT}$  é o valor do deslocamento transversal determinado pela FSDT.

#### 4.4.1 Procedimento de integração para os deslocamentos

Nesta subseção, considera-se um procedimento eficiente, utilizado por Mendonça e Lemos (2024), para realizar o processo de integração cumulativa em (4.24). Inicialmente, admite-se que as componentes de tensão foram determinadas em um certo conjunto de  $P$  pontos ao longo de toda a espessura da lâmina  $k$ . Em outras palavras, os seguintes valores de tensão são conhecidos:

$$\sigma^p \quad p = 1, \dots, P. \quad (4.26)$$

O número de pontos pode ser escolhido de acordo a espessura e a quantidade de lâminas que formam o material laminado, os quais devem ser preferencialmente igualmente espaçados. Mendonça e Lemos (2024) recomendam usar uma quantidade pequena para laminados com muitas lâminas finas, por exemplo  $P = 2$ , e uma quantidade maior para laminados espessos com poucas lâminas, como  $P = 4$ .

Em seguida, considera-se um conjunto de funções Lagrangianas unidimensionais  $L_p^{P-1}(r)$ , de grau  $P - 1$ , como funções de coordenadas intrínsecas  $r \in [-1; 1]$ . Com isso, o mapeamento de  $r$  a  $z$  na lâmina  $k$  é feito linearmente por:

$$r = \frac{2(z - \bar{z}_k)}{h_k}, \quad (4.27)$$

onde  $h_k$  e  $\bar{z}_k$  são a espessura e a coordenada  $z$  da superfície média da lâmina.

Essas funções podem ser usadas para interpolar em  $z$  as tensões na lâmina  $k$  da seguinte

forma:

$$\sigma^k(z) = \sum_{p=1}^P \sigma^p L_p^{P-1}(r(z)) \quad (4.28)$$

Portanto, o deslocamento transversal integrado em (4.24), com  $\varepsilon_z$  de (4.23) e as tensões interpoladas de (4.28), pode ser calculado por:

$$w^i(z) = w^i(z_{k-1}) + \bar{S}_{3j}^k \sum_{p=1}^P \sigma_j^p \int_{z_{k-1}}^z L_p^{P-1}(z) dz. \quad (4.29)$$

As integrais em (4.29) são facilmente calculadas, ao contrário das integrais em (4.24), uma vez que as funções de interpolação são previamente conhecidas. Por exemplo, ao escolher  $P = 4$  pontos para as tensões em cada lâmina, as funções Lagrangianas de grau 3 são as seguintes:

$$\begin{aligned} L_1^3 &= -\frac{9}{16} (r-1) \left(r - \frac{1}{3}\right) \left(r + \frac{1}{3}\right), \\ L_2^3 &= \frac{27}{16} (r-1) (r+1) \left(r - \frac{1}{3}\right), \\ L_3^3 &= -\frac{27}{16} (r-1) (r+1) \left(r + \frac{1}{3}\right), \\ L_4^3 &= \frac{9}{16} (r+1) \left(r - \frac{1}{3}\right) \left(r + \frac{1}{3}\right). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Enquanto as integrais associadas são dadas por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1^3 &= \frac{h_k}{2} \left( -\frac{9}{64} r^4 + \frac{3}{16} r^3 + \frac{1}{32} r^2 - \frac{1}{16} r + \frac{15}{64} \right), \\ \mathcal{L}_2^3 &= \frac{h_k}{2} \left( \frac{27}{64} r^4 - \frac{3}{16} r^3 - \frac{27}{32} r^2 + \frac{9}{16} r + \frac{51}{64} \right), \\ \mathcal{L}_3^3 &= \frac{h_k}{2} \left( -\frac{27}{64} r^4 - \frac{3}{16} r^3 + \frac{27}{32} r^2 + \frac{9}{16} r - \frac{3}{64} \right), \\ \mathcal{L}_4^3 &= \frac{h_k}{2} \left( \frac{9}{64} r^4 + \frac{3}{16} r^3 - \frac{1}{32} r^2 - \frac{1}{16} r + \frac{1}{64} \right). \end{aligned} \quad (4.31)$$

#### 4.5 DESLOCAMENTOS COPLANARES

Teorias mais avançadas, como a Teoria da Elasticidade Tridimensional, mostram que o comportamento dos deslocamentos coplanares,  $u$  e  $v$ , não é linear em  $z$ , em contraste com o pressuposto pela FSDT. Essa característica é evidente em análises de laminados mais espessos, mas também pode ser observada em placas de pequena espessura, dependendo da configuração de empilhamento. Esse aspecto serve como argumento para o desenvolvimento de outras teorias

bidimensionais para a análise de placas laminadas, como as de ordem superior, que consideram variações cúbicas, harmônicas, entre outras, para os deslocamentos. No entanto, mesmo com a FSDT, é possível obter uma estimativa mais realista do que aquela inicial em (2.2) para  $u(z)$  e  $v(z)$ , mediante a implementação de etapas de pós-processamento semelhantes às apresentadas para  $w(z)^i$ , conforme detalhado em Mendonça e Lemos (2024).

A abordagem começa com as deformações infinitesimais cisalhantes,  $\gamma_{xz}$  e  $\gamma_{yz}$ , definidas em (2.7):

$$\begin{aligned}\gamma_{xz}^i &= \frac{\partial u^i}{\partial z} + \frac{\partial w^i}{\partial x}, \\ \gamma_{yz}^i &= \frac{\partial v^i}{\partial z} + \frac{\partial w^i}{\partial y}.\end{aligned}$$

Ambas equações podem ser manipuladas e integradas lâmina a lâmina para determinação dos deslocamentos coplanares aprimorados:

$$\begin{aligned}u^i(z) &= u^i(z_{k-1}) + \int_{z_{k-1}}^z \left( \gamma_{xz}^i - \frac{\partial w^i}{\partial x} \right) dz, \\ v^i(z) &= v^i(z_{k-1}) + \int_{z_{k-1}}^z \left( \gamma_{yz}^i - \frac{\partial w^i}{\partial y} \right) dz,\end{aligned}\tag{4.32}$$

onde  $\gamma_{xz}^i$  e  $\gamma_{yz}^i$  são calculadas a partir de  $\tau_{xz}^i$  e  $\tau_{yz}^i$ , por meio da relação deformação-tensão local de cada lâmina (4.22), e as derivadas  $\partial w^i/\partial x$  e  $\partial w^i/\partial y$  são obtidas derivando a equação associada aos deslocamentos transversais integrados em (4.29):

$$\begin{aligned}\frac{\partial w^i}{\partial x}(z) &= \frac{\partial w^i}{\partial x}(z_{k-1}) + S_{3j}^k \sum_{p=1}^P \frac{\partial \sigma_j^p}{\partial x} \int_{z_{k-1}}^z L_p^{P-1}(z) dz, \\ \frac{\partial w^i}{\partial y}(z) &= \frac{\partial w^i}{\partial y}(z_{k-1}) + S_{3j}^k \sum_{p=1}^P \frac{\partial \sigma_j^p}{\partial y} \int_{z_{k-1}}^z L_p^{P-1}(z) dz.\end{aligned}\tag{4.33}$$

Novamente, os valores iniciais são assumidos como nulos em  $z = -H/2$ , ou seja,  $\partial w^i/\partial x = \partial w^i/\partial y = 0$ . Ao final do processo, as curvas são ajustadas para coincidir com os valores da FSDT na superfície de referência, de maneira semelhante ao realizado em (4.25) para os deslocamentos transversais. Por exemplo, para  $\partial w^i/\partial x$ :

$$\begin{aligned}\delta \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) &= \left( \frac{\partial w^i}{\partial x} \right)_o - \left( \frac{\partial w^i}{\partial x} \right)_{FSDT}, \\ \frac{\partial w^i}{\partial x}(z) &= \frac{\partial w^i}{\partial x}(z) - \delta \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right).\end{aligned}\tag{4.34}$$

O resultado, juntamente com  $\gamma_{xz}^i$ , completa o integrando da primeira equação em (4.32).

Com os termos definidos, a integração pode ser realizada seguindo um procedimento semelhante ao usado para  $w$  em (4.28), utilizando as funções de interpolação de Lagrange  $L_p^{P-1}(r)$  e os valores de  $(\partial w^i/\partial x)^p$  e  $(\gamma_{xz}^i)^p$  calculados em  $P$  pontos pré-definidos. Assim, para  $z \in (z_{k-1}; z_k)$ , o deslocamento coplanar  $u$  em (4.32) torna-se:

$$u^i(z) = u^i(z_{k-1}) + \sum_{p=1}^P \left[ \left( \frac{\partial w^i}{\partial x} \right)^p - (\gamma_{xz}^i)^p \right] \int_{z_{k-1}}^z L_p^{P-1}(z) dz. \quad (4.35)$$

Mais uma vez, assume-se  $u^i(-H/2) = 0$  na superfície inferior e após a integração até a cota  $z$  escolhida, o perfil é deslocado para coincidir com valor calculado pela FSDT na superfície média da placa:

$$\begin{aligned} \delta(u) &= u_o^i - u_{FSDT}, \\ u^i(z) &= u^i(z) - \delta u, \end{aligned}$$

em que  $u_{FSDT}$  é o valor determinado pela FSDT em  $z = 0$ , enquanto  $u_o^i$  é o valor obtido pelo processo de integração no mesmo ponto.

Um procedimento semelhante pode ser feito para obtenção de  $v^i(z)$ , desenvolvendo os termos relacionados na segunda equação em (4.32):

$$v^i(z) = v^i(z_{k-1}) + \sum_{p=1}^P \left[ \left( \frac{\partial w^i}{\partial y} \right)^p - (\gamma_{yz}^i)^p \right] \int_{z_{k-1}}^z L_p^{P-1}(z) dz. \quad (4.36)$$

Ressalta-se que  $u(z)^i$  e  $v(z)^i$  dependem de toda a resposta global do laminado, incluindo os termos obtidos pelos processos de integração anterior descritos para  $\tau_{xz}^i, \tau_{yz}^i, \sigma_z^i$  e  $w^i$ .

## 5 MÉTODOS PARA DETERMINAÇÃO DOS FATORES DE CORREÇÃO

Diversos métodos têm sido apresentados na literatura para determinar fatores de correção de cisalhamento, tanto para placas homogêneas quanto laminadas. Contudo, a importância de aplicar os fatores corretos é frequentemente negligenciada em análises de laminados, devido à dificuldade em obtê-los e à necessidade de escolher previamente o método apropriado. Como resultado, os valores inicialmente determinados para placas homogêneas são muitas vezes utilizados de maneira inadequada em análises de placas laminadas (MENDONÇA, 2019).

Segundo Birman e Genin (2018), em geral, existem dois procedimentos de referência para obtenção desses fatores em problemas estáticos envolvendo estruturas no formato de placas, os quais basicamente consistem em:

- a) Comparar os valores determinados para as tensões cisalhantes transversais,  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$ , pela Teoria da Elasticidade Tridimensional em uma placa ortotrópica homogênea com aqueles calculados pela FSDT para a mesma estrutura, estendendo a abordagem de Timoshenko desenvolvida inicialmente para vigas isotrópicas delgadas.
- b) Comparar as energias de deformação de cisalhamento transversal em uma placa ortotrópica homogênea, utilizando como referência o resultado determinado pela Teoria da Elasticidade Tridimensional e como aproximação o resultado calculado pela FSDT, estendendo a abordagem de Reissner desenvolvida inicialmente para vigas isotrópicas delgadas.

Evidentemente, estender qualquer um dos dois procedimentos para a análise de placas laminadas sem modificar o modelo de referência resulta em erros que tendem a aumentar à medida que o comportamento do material se afasta do modelo homogêneo. Por essa razão, métodos específicos foram desenvolvidos para a obtenção de fatores de correção de cisalhamento em laminados. No entanto, as características fundamentais dos dois métodos, que envolvem a comparação das tensões cisalhantes transversais ou das energias de deformação, geralmente são mantidas mesmo em problemas que abrangem estruturas laminadas complexas.

Na abordagem apresentada por Whitney (1973), são obtidas expressões para dois fatores de correção de cisalhamento,  $k_1^w$  e  $k_2^w$ , voltados para aplicação em laminados ortotrópicos, que podem ser simétricos ou não, por meio da comparação analítica das energias de deformação de cisalhamento nos eixos de ortotropia do material. O resultado de referência é obtido a partir

da solução analítica tridimensional de Pagano (1969) para um problema de flexão cilíndrica, enquanto a solução analítica do mesmo problema pela FSDT é obtida de Whitney e Pagano (1970). As expressões resultantes dependem unicamente das propriedades de rigidez do laminado.

Por sua vez, Noor e Peters (1989) e Noor, Burton e Peters (1990) apresentaram dois métodos preditores-corretores de natureza iterativa, embora tenha sido demonstrado que uma única iteração seja suficiente na maioria dos casos. Por se tratar de procedimentos a posteriori, eles apresentam a vantagem de dispensar a definição de fatores de correção a priori na análise de laminados pela Teoria de Primeira Ordem, em contrapartida há a necessidade de implementação de etapas adicionais. Na fase preditora, a FSDT é utilizada para calcular estimativas iniciais da resposta estrutural e das tensões coplanares, com fatores de correção arbitrários  $k_1^0$  e  $k_2^0$ . Em seguida, as equações de equilíbrio tridimensional e as relações constitutivas são empregadas para calcular as tensões e deformações transversais por um processo de integração semelhante ao descrito na seção anterior. No primeiro método, apresentado em Noor e Peters (1989), os resultados desses cálculos são utilizados para corrigir os fatores de correção iniciais, podendo ser interpretado como um ajuste na rigidez ao cisalhamento transversal do laminado, que é alcançado pela equivalência das densidades de energia de cisalhamento transversal. Já no segundo método, os resultados são utilizados para corrigir a distribuição dos deslocamentos ao longo da espessura da placa, conforme descrito em Noor, Burton e Peters (1990). Em ambos os casos, o sistema pode ser reanalisado utilizando o modelo modificado para obter resultados ainda melhores.

No trabalho desenvolvido por Pai (1994), apresenta-se uma derivação a priori para três fatores de correção,  $k_1^p$ ,  $k_2^p$  e  $k_3^p$ , e uma interpretação geral dos fatores de correção de cisalhamento em laminados anisotrópicos. A abordagem envolve a estimativa de funções que representam a distorção por cisalhamento ao longo da espessura do laminado. Essas funções são derivadas ao impor condições de cisalhamento nulo nas superfícies superior e inferior da placa, além de garantir a continuidade dos deslocamentos coplanares e das tensões ao longo da espessura. Tais condições são as mesmas usadas no desenvolvimento da teoria de ordem superior proposta por Pai e Nayfeh (1994) para modelagem de placas laminadas. Conforme ressaltado em Pai (1994), a precisão dos fatores de correção calculados pelo método proposto depende da qualidade da estimativa das funções de distorção de cisalhamento.

Há ainda abordagens mais recentes na literatura para a determinação de fatores de correção em materiais compostos com gradiente funcional (FGM, do inglês *Functionally Graded Materials*), que são normalmente modelados pela FSDT. Essas abordagens não se limitam ape-

nas à análise estática, mas também consideram respostas térmicas e dinâmicas. Por exemplo, nos trabalhos apresentados por Shariyat e Alipour (2014) e Lee et al. (2022), foram exploradas técnicas para aprimorar a precisão das previsões pela FSDT ao se considerar diferentes aspectos do comportamento do material composto, como gradiente de propriedades, distribuição de temperatura e frequências de vibração para a determinação dos fatores de correção de cisalhamento.

Paralelamente às abordagens convencionais voltadas à obtenção de fatores de correção de cisalhamento para a FSDT, existem estudos direcionados para o refinamento da própria Teoria de Primeira Ordem com o objetivo de eliminar a necessidade da aplicação desses fatores. Por exemplo, em Najafipour e Shariyat (2023), o modelo de análise de placas hiperelásticas é aprimorado para capturar de forma mais precisa o comportamento de materiais com grandes deformações. Já em Tanov e Tabiei (2000), são apresentadas propostas para melhorar a formulação da FSDT em elementos finitos de cascas convencionais, buscando resultados mais precisos sem a definição de fatores de correção.

Nesta seção, são apresentados alguns métodos convencionais utilizados para a obtenção de fatores de correção de cisalhamento em placas homogêneas e laminadas. Além disso, é desenvolvido um método iterativo semelhante ao proposto por Noor e Peters (1989) para determinar fatores pontuais em placas laminadas arbitrárias. Esse método mostra-se adequado para incorporação ao MEF3D, ou método similar, pois permite a determinação e aplicação direta das correções nos pontos de integração utilizados no processo de solução. São desenvolvidas três técnicas de forma individualizada, voltadas para aplicação em placas laminadas isotrópicas, ortotrópicas e anisotrópicas, utilizando um, dois e três fatores de correção, respectivamente.

## 5.1 ENERGIA DE DEFORMAÇÃO DE CISALHAMENTO

A energia total de deformação armazenada em um corpo tridimensional ( $E_{3D}$ ) pode ser dividida em duas parcelas, sendo uma correspondente às tensões coplanares (membrana-flexão), designada por  $E_{3D}^f$ , e outra associada às tensões cisalhantes transversais, designada por  $E_{3D}^s$ , conforme expresso na equação (5.1) abaixo.

$$\begin{aligned} E_{3D} &= E_{3D}^f + E_{3D}^s \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \, dz d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\gamma} \, dz d\Omega. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Por sua vez, a densidade de energia ( $\overline{E}_{3D}$ ), útil para a análise de estruturas no formato de placas, pode ser obtida integrando a equação (5.1) somente ao longo da espessura, em vez de integrar sobre todo o domínio tridimensional:

$$\begin{aligned}\overline{E}_{3D}(x, y) &= \overline{E}_{3D}^f(x, y) + \overline{E}_{3D}^s(x, y) \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \, dz d\Omega + \frac{1}{2} \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\gamma} \, dz d\Omega,\end{aligned}\quad (5.2)$$

considerando a relação constitutiva linear:  $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{S}\boldsymbol{\tau}$ , é possível desenvolver e decompor o termo associado ao cisalhamento transversal:

$$\begin{aligned}\overline{E}_{3D}^s &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\gamma} \, dz = \frac{1}{2} \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{S}\boldsymbol{\tau} \, dz \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_{44} & S_{45} \\ S_{45} & S_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} \, dz \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} S_{44} \tau_{yz}^2 \, dz}_{E_{3D}^y} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} S_{55} \tau_{xz}^2 \, dz}_{E_{3D}^x} + \underbrace{\int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} S_{45} \tau_{yz} \tau_{xz} \, dz}_{E_{3D}^{xy}},\end{aligned}\quad (5.3)$$

ou seja:

$$\overline{E}_{3D}^s = \overline{E}_{3D}^y + \overline{E}_{3D}^x + \overline{E}_{3D}^{xy}, \quad (5.4)$$

em que  $\overline{E}_{3D}^x$ ,  $\overline{E}_{3D}^y$  e  $\overline{E}_{3D}^{xy}$  correspondem, respectivamente, às densidades de energia nos planos  $xz$  e  $yz$  e ao acoplamento entre esses dois planos.

## 5.2 MÉTODO DE TIMOSHENKO

Ao se considerar que a placa laminada é composta por uma única camada, pode-se utilizar a formulação de Timoshenko (1940), originalmente desenvolvida para placas ortotrópicas homogêneas, em placas laminadas, a fim de obter um valor para fator de correção  $k_s$ . Esse método envolve a comparação de duas expressões para as tensões cisalhantes transversais: a primeira é obtida diretamente pela FSDT, por meio das relações constitutivas, enquanto a segunda é derivada pela integração das equações de equilíbrio tridimensionais, utilizando os resultados da FSDT para as tensões coplanares.

Na primeira expressão, obtida pelas relações constitutivas, um único valor constante de tensão cisalhante transversal é atribuído para cada ponto da superfície de referência  $(x, y)$ , pois

o laminado é considerado como sendo formado por uma única camada e as deformações cisalhantes pela FSDT são uniformes. Segundo Mendonça (2019), esse valor representa a estimativa mais básica do cisalhamento em uma estrutura laminada:

$$\tau_{xz} = \frac{Q_x(x, y)}{k_s H} \quad \text{e} \quad \tau_{yz} = \frac{Q_y(x, y)}{k_s H}, \quad (5.5)$$

em que  $H$  é a espessura total da placa.

Já para a segunda expressão, o processo consiste em integrar as duas primeiras equações de equilíbrio em (2.3) utilizando os resultados analíticos da FSDT para as tensões coplanares em um problema de placa conhecido. O desenvolvimento detalhado pode ser encontrado em Mendonça (2019). Como resultado desse processo, obtêm-se:

$$\tau_{xz} = \left[ 1 - 4 \left( \frac{z}{H} \right)^2 \right] \frac{3Q_x}{2H} \quad \text{e} \quad \tau_{yz} = \left[ 1 - 4 \left( \frac{z}{H} \right)^2 \right] \frac{3Q_y}{2H}. \quad (5.6)$$

Em Timoshenko (1940), a equivalência foi estabelecida nos valores máximos para as tensões, de modo que as expressões (5.6) e (5.5) são comparadas no meio da espessura, em  $z = 0$ , resultando em  $k_s = 2/3$  para o fator de correção.

### 5.3 MÉTODO DE REISSNER

De forma semelhante à abordagem de Timoshenko, o método proposto por Reissner (1945) considera que o laminado é composto por uma única lâmina ortotrópica homogênea. No entanto, a equivalência é estabelecida na energia total de deformação de cisalhamento transversal, em vez das tensões, calculada pela seguinte expressão:

$$E_{3D}^s = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_z (\tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) dz d\Omega. \quad (5.7)$$

Utilizando as relações constitutivas (2.14) e os esforços generalizados (2.16), chega-se à expressão para o valor de energia que requer o fator de correção:

$$E_{2D}^s = \frac{1}{2k_s H} \int_{\Omega} \left[ \frac{Q_x^2}{C_{55}} + \frac{Q_y^2}{C_{44}} \right] d\Omega, \quad (5.8)$$

onde o índice  $2D$  destaca que a energia é aproximada pela FSDT e calculada diretamente pelas relações constitutivas.  $C_{55}$  e  $C_{44}$  são independentes da cota  $z$  nesse caso, tendo em vista que é considerado que o laminado é formado por uma única lâmina.

A expressão de referência, necessária para comparação com a aproximação em (5.8), é determinada calculando a energia total de deformação cisalhante usando as tensões cisalhantes definidas em (5.6), obtidas pelo processo de integração das equações tridimensionais de equilíbrio:

$$E_{3D}^s = \frac{1}{2} \frac{6}{5H} \int_{\Omega} \left[ \frac{Q_x^2}{C_{55}} + \frac{Q_y^2}{C_{44}} \right] d\Omega. \quad (5.9)$$

Ao comparar (5.9) com (5.8), verifica-se que  $k_s = 5/6$ . Este valor de correção é amplamente utilizado em problemas modelados pela FSDT para ajustar a rigidez ao cisalhamento transversal de placas homogêneas e laminadas. No entanto, para laminados, muitas vezes um único fator não é suficiente, sendo recomendados métodos específicos devido à complexidade de corrigir efetivamente o efeito de cisalhamento em estruturas compostas por camadas.

#### 5.4 MÉTODO DE WHITNEY

Segundo Mendonça (2019), geralmente não é suficiente utilizar um único fator de correção para placas laminadas, diferentemente do que se observa em placas de material homogêneo. Isso ocorre porque a correção adequada depende do número de lâminas, das propriedades específicas de cada camada e de suas orientações.

Ao contrário dos dois procedimentos anteriormente apresentados, que se fundamentam em placas homogêneas para o desenvolvimento, o método proposto por Whitney (1973) é formulado a partir de soluções analíticas para uma placa laminada ortotrópica. Além disso, o método resulta em expressões para dois fatores de correção,  $k_1^w$  e  $k_2^w$ , em vez de apenas um, associados às direções principais da placa analisada.

O método de Whitney (1973) começa a partir de um problema formulado pela FSDT, envolvendo uma placa laminada ortotrópica infinitamente longa na direção  $y$ , simplesmente apoiada e submetida a uma carga transversal  $q(x)$ . A solução analítica desse problema de flexão cilíndrica mostra que a tensão normal  $\sigma_x^k$  em uma lâmina qualquer  $k$  é dada pela seguinte expressão:

$$\sigma_x^k(x, z) = -\frac{\bar{Q}_{11}^k}{\Delta} (B_{11} - A_{11}z) M_x \quad \text{com} \quad \Delta = A_{11}D_{11} - B_{11}^2. \quad (5.10)$$

Nesse caso, como a placa é considerada infinitamente longa em  $y$ , a primeira equação

de equilíbrio em (2.4) pode ser simplificada para:

$$\frac{\partial \sigma_x^k}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}^k}{\partial z} = 0. \quad (5.11)$$

Integrando (5.11) ao longo da espessura e isolando  $\tau_{xz}^k$ , obtém-se:

$$\tau_{xz}^k = - \int_{-H/2}^z \frac{\partial \sigma_x^k}{\partial x} dz. \quad (5.12)$$

O termo integrado ( $\sigma_{x,x}^k$ ), pode ser determinado com uso da equação (5.10):

$$\sigma_{x,x}^k(x, z) = - \frac{\bar{Q}_{11}^k}{\Delta} (B_{11} - A_{11}z) Q_x \quad \text{com} \quad \Delta = A_{11}D_{11} - B_{11}^2, \quad (5.13)$$

onde utiliza-se a seguinte relação extraída das equações diferenciais de equilíbrio:  $Q_x = \partial M_x / \partial x$ .

Dessa forma, desenvolve-se (5.12) com (5.13), resultando em:

$$\tau_{xz}^k = \left[ a^k + \frac{\bar{Q}_{11}^k z}{2\Delta} (2B_{11} - A_{11}z) \right] Q_x, \quad (5.14)$$

onde  $a^k$  corresponde a um conjunto de  $N$  constantes de integração, uma para cada lâmina, que devem ser determinadas pelas condições de continuidade de tensões nas  $N - 1$  interfaces, somadas à condição de cisalhamento nulo nas faces (MENDONÇA, 2019).

Para a primeira lâmina,  $k = 1$ , a condição de cisalhamento nulo na face inferior, ou seja,  $\tau_{xz}^{l_1}(x, y, -H/2) = 0$ , aplicada em (5.14), conduz a:

$$a^1 = \frac{\bar{Q}_{11}^1 H}{4\Delta} \left( 2B_{11} + A_{11} \frac{H}{2} \right). \quad (5.15)$$

Para a próxima coordenada de interesse,  $z = z_1$ , correspondente à face superior da lâmina 1, ou inferior da lâmina 2, as tensões são dadas por:

$$\begin{aligned} \tau_{xz}^1(z_1) &= \left[ a^1 + \frac{\bar{Q}_{11}^1 z_1}{2\Delta} (2B_{11} - A_{11}z_1) \right] Q_x, \\ \tau_{xz}^2(z_1) &= \left[ a^2 + \frac{\bar{Q}_{11}^2 z_1}{2\Delta} (2B_{11} - A_{11}z_1) \right] Q_x. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Pela condição de continuidade das tensões cisalhantes transversais:  $\tau_{xz}^1(z_1) = \tau_{xz}^2(z_1)$ .

Sendo assim, pode-se criar uma fórmula de recorrência para os termos  $a^k$ :

$$a^k = a^{k-1} + \frac{(\overline{Q}_{11}^{k-1} - \overline{Q}_{11}^k)}{2\Delta} z_{k-1} (2B_{11} - A_{11} z_{k-1}). \quad (5.17)$$

Dessa forma, a distribuição de  $\tau_{xz}$  ao longo da espessura de cada lâmina pode ser calculada a partir de (5.14). Além disso, como a placa é infinitamente longa em  $y$ , a tensão cisalhante no plano  $yz$  é considerada nula. Portanto, a energia de deformação cisalhante total pode ser calculada considerando somente o termo referente a  $\tau_{xz}$  em (5.8):

$$\begin{aligned} E_{3D}^s &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{-H/2}^{H/2} \frac{(\tau_{xz}^k)^2}{C_{55}^k} dz d\Omega \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} Q_x^2 \int_{-H/2}^{H/2} \frac{1}{C_{55}^k} \left[ a^k + \frac{\overline{Q}_{11}^k}{2\Delta} z (2B_{11} - A_{11} z) \right]^2 dz d\Omega. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Essa é a energia de deformação cisalhante de referência, calculada pelas tensões obtidas do equilíbrio tridimensional.

Por outro lado, com base nos dois valores propostos para os fatores de correção por Whitney, a relação constitutiva que envolve os esforços cortantes generalizados é estabelecida como:

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_2 A_{44} & 0 \\ 0 & k_1 A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}, \quad (5.19)$$

em que  $A_{44}$  e  $A_{55}$  são componentes da matriz  $\mathbf{A}_c$  em (2.19), relacionados à rigidez de cada lâmina por:

$$\begin{Bmatrix} A_{44} \\ A_{55} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N h_k \begin{Bmatrix} C_{44} \\ C_{55} \end{Bmatrix}^k. \quad (5.20)$$

Portanto, a energia de deformação aproximada que precisa ser corrigida no plano  $xz$  é:

$$E_{2D}^s = \frac{1}{2k_1} \int_{\Omega} \frac{Q_x^2}{A_{55}} d\Omega. \quad (5.21)$$

Assim como foi realizado no método de Reissner na subseção anterior, iguala-se essa parcela de energia com a energia de deformação cisalhante ( $E_{3D}^s$ ) em (5.18), resultando em:

$$\frac{1}{k_1} = A_{55} \int_{-H/2}^{H/2} \frac{1}{C_{55}^k} \left[ a^k + \frac{\overline{Q}_{11}^k}{2\Delta} z (2B_{11} - A_{11} z) \right]^2 dz. \quad (5.22)$$

O processo de integração deve ser realizado de forma cumulativa, lâmina a lâmina,

chegando à seguinte expressão para o fator de correção  $k_1$ :

$$\frac{1}{k_1} = A_{55} \sum_{k=1}^N \left[ (a^k)^2 z + \frac{a^k B_{11} \bar{Q}_{11}^k z^2}{\Delta} + \frac{\bar{Q}_{11}^k z^3}{3\Delta^2} (B_{11}^2 \bar{Q}_{11}^k - A_{11} \Delta a^k) - \frac{A_{11} B_{11} (\bar{Q}_{11}^k)^2 z^4}{4\Delta^2} + \frac{A_{11}^2 (\bar{Q}_{11}^k)^2 z^5}{20\Delta^2} \right]_{z_{k-1}}^{z_k} \quad (5.23)$$

Verifica-se que  $k_1$  varia de acordo com a configuração de empilhamento do laminado. Isso ocorre porque o cálculo depende não apenas de termos relacionados às propriedades globais, mas também de termos associados à rigidez e à posição individual das lâminas. Logo, qualquer alteração nessas características afeta o valor de correção calculado.

Da mesma forma, toda a dedução pode ser repetida para obter o segundo fator de correção  $k_2$ , alterando o plano do problema de flexão cilíndrica de  $xz$  para  $yz$ .

## 5.5 MÉTODO DE CORREÇÃO ITERATIVO

Dado que as tensões cisalhantes,  $\tau_{xz}^i$  e  $\tau_{yz}^i$  em (4.4) e (4.7), obtidas pela integração das equações de equilíbrio tridimensional, proporcionam uma estimativa mais precisa da distribuição do cisalhamento na espessura do laminado, conforme mostrado por Mendonça e Lemos (2024), é possível utilizá-las para calcular uma aproximação da energia de deformação de cisalhamento da teoria de elasticidade, denotada por  $E_{3D}^i$ . Com base nisso, seguindo o mesmo conceito apresentado por Noor e Peters (1989), torna-se possível desenvolver um método iterativo para determinar fatores de correção a posteriori em placas laminadas arbitrárias.

Esse procedimento utiliza toda a resposta global da FSDT, incluindo as etapas de pós-processamento, para estimar fatores específicos para o problema sob análise. São consideradas várias características para o cálculo dos fatores de correção, como a geometria, a quantidade de lâminas, as propriedades mecânicas das lâminas individuais, as condições de contorno, os esforços aplicados, entre outras.

Além disso, ao utilizar a densidade de energia de deformação  $\bar{E}_{3D}^i$  no procedimento, em vez da energia total  $E_{3D}^i$ , torna-se possível estimar fatores de correção para pontos individuais da placa. Em outras palavras, é possível definir correções pontuais de cisalhamento  $k_s(x, y)$ . Essa abordagem revela-se útil para implementação em métodos numéricos de solução de problemas de valor de contorno (PVC), formulados em forma fraca, especialmente aqueles que envolvem a

discretização espacial do domínio, pois os fatores podem ser calculados nos pontos de integração numérica utilizados no processo. Neste trabalho, utiliza-se o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG).

### 5.5.1 Correção isotrópica

Inicialmente, assume-se que o problema de placa laminada foi modelado pela FSDT e resolvido pelo MEFG sem a correção de cisalhamento, ou seja, com  $k_s^0 = 1$ .

Em seguida, calcula-se a densidade de energia de deformação de cisalhamento pela equação (5.3), utilizando as tensões cisalhantes transversais constantes em cada lâmina, determinadas diretamente pelas relações constitutivas em (2.15):

$$\overline{E}_{2D}^s = \frac{1}{2} \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\gamma} \, dz = \frac{1}{2} \left( \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \boldsymbol{\tau} \, dz \right) \cdot \boldsymbol{\gamma} = \frac{1}{2} \mathbf{A}_c \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}. \quad (5.24)$$

No MEFG, as deformações cisalhantes transversais em cada elemento são obtidas por meio da matriz de deformação de cisalhamento ( $\mathbf{B}_c^e$ ) da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\gamma}^e = \mathbf{B}_c^e \mathbf{U}^e, \quad (5.25)$$

a qual basicamente contém as derivadas das funções enriquecidas usadas na aproximação.  $\mathbf{U}^e$  representa os deslocamentos e coeficientes nodais associados ao elemento.

Logo, a partir de (5.24), para um elemento  $e$  qualquer, a densidade de energia de deformação de cisalhamento pode ser calculada como:

$$\overline{E}_{2D}^0 = \frac{1}{2} \mathbf{A}_c \mathbf{B}_c \mathbf{U} \cdot \mathbf{B}_c \mathbf{U}. \quad (5.26)$$

Ressalta-se que  $\overline{E}_{2D}^0$  é obtida com  $k_s^0 = 1$ , representando a densidade de energia de deformação de cisalhamento sem correção. Seguindo um procedimento semelhante ao descrito por Noor e Peters (1989), busca-se a equivalência dessa densidade com a aproximação do valor tridimensional,  $\overline{E}_{3D}^i$ , que é calculado utilizando as tensões obtidas pela integração das equações tridimensionais de equilíbrio.

Define-se como correção isotrópica aquela que consiste em utilizar um único fator de correção de cisalhamento em cada ponto  $(x, y)$ . Para determinar como ela deve ser aplicada,

parte-se da relação inversa para os esforços cortantes ( $\mathbf{Q}_c = k_s \mathbf{A}_c \boldsymbol{\gamma}$ ), expressa por:

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{1}{k_s} \mathbf{S}_c \mathbf{Q}_c, \quad (5.27)$$

onde  $\mathbf{S}_c = \mathbf{A}_c^{-1}$ .

Assim, com a aplicação do fator de correção  $k_s$ , a densidade de energia corrigida, denotada por  $\overline{E}_K^s$ , é obtida por:

$$\overline{E}_K^s = \frac{1}{2} \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\gamma} \, dz = \frac{1}{2} \mathbf{Q}_c \cdot \boldsymbol{\gamma} = \frac{1}{k_s} \left( \frac{1}{2} \mathbf{Q}_c \cdot \mathbf{S}_c \mathbf{Q}_c \right) = \frac{1}{k_s} \overline{E}_{2D}^0. \quad (5.28)$$

Salienta-se que, para essa expressão ser válida, os esforços cortantes generalizados,  $\mathbf{Q}_c$ , precisam ser calculado sem os fatores de correção, tornando o termo entre parênteses igual a  $\overline{E}_{2D}^0$  em (5.26).

Fazendo a equivalência de  $\overline{E}_K^s$  com a parcela de energia considerada uma aproximação daquela obtida pela solução elástica tridimensional,  $\overline{E}_{3D}^i$ , e desenvolvendo:

$$\begin{aligned} \overline{E}_K^s &= \overline{E}_{3D}^i \\ \frac{1}{k_s} \overline{E}_{2D}^0 &= \overline{E}_{3D}^s, \end{aligned} \quad (5.29)$$

chega-se à expressão para o fator de correção isotrópico  $k_s$ :

$$k_s(x, y) = \frac{\overline{E}_{2D}^0(x, y)}{\overline{E}_{3D}^i(x, y)}. \quad (5.30)$$

Observa-se que, ao contrário dos métodos anteriores que utilizam a energia total, o fator de correção calculado não é independente das coordenadas  $(x, y)$  da superfície de referência da placa, devido ao uso da densidade de energia. Assim, o método mostra-se vantajoso para aplicação no MEF3D, pois é possível estimar fatores de correção individuais para cada ponto de integração no processo de construção das matrizes.

Dando sequência à formulação, o termo  $\overline{E}_{3D}^i(x, y)$  é determinado substituindo as tensões integradas,  $\tau_{xz}^i$  e  $\tau_{yz}^i$ , na equação para a densidade de energia de cisalhamento em (5.3):

$$\begin{aligned} \overline{E}_{3D}^i &= \underbrace{\frac{1}{2} \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} S_{44} (\tau_{yz}^i)^2 \, dz}_{E_{3D}^{yi}} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} S_{55} (\tau_{xz}^i)^2 \, dz}_{E_{3D}^{xi}} + \underbrace{\int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} S_{45} \tau_{yz}^i \tau_{xz}^i \, dz}_{E_{3D}^{xyi}} \\ \overline{E}_{3D}^i &= \overline{E}_{3D}^{yi} + \overline{E}_{3D}^{xi} + \overline{E}_{3D}^{xyi}. \end{aligned} \quad (5.31)$$

O desenvolvimento dessa equação é apresentado termo a termo. Inicia-se com  $\overline{E}_{3D}^{yi}$ , que corresponde à parcela de energia associada ao plano  $yz$ . Substituindo a tensão cisalhante transversal  $\tau_{yz}^i$  pela sua expressão definida em (4.7), obtém-se:

$$\begin{aligned}\overline{E}_{3D}^{yi} &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} S_{44} (\tau_{yz}^i)^2 dz \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N S_{44}^k \int_{z_{k-1}}^{z_k} [c^k(z - z_{k-1}) + d^k(z^2 - z_{k-1}^2) + \tau_{yz}^{k-1}]^2 dz \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N S_{44}^k [a_5 z^5 + a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0]_{z_{k-1}}^{z_k},\end{aligned}\quad (5.32)$$

em que  $\tau_{yz}^{k-1} = \tau_{yz}^i(z_{k-1})$  e:

$$\begin{aligned}a_5 &= \frac{d^2}{5}, \\ a_4 &= \frac{cd}{4}, \\ a_3 &= \frac{2\tau_{yz}^{k-1}d}{3} - \left( \frac{2d^2 z_{k-1}^2 + 2cdz_{k-1} - c^2}{3} \right), \\ a_2 &= \tau_{yz}^{k-1}c - z_{k-1}c(c + dz_{k-1}), \\ a_1 &= z_{k-1}^2(c + dz_{k-1})^2 + (\tau_{yz}^{k-1})^2 - 2\tau_{yz}^{k-1}cz_{k-1} - 2\tau_{yz}^{k-1}dz_{k-1}^2, \\ a_0 &= z_{k-1}^3 \left[ \frac{4\tau_{yz}^{k-1}dz_{k-1}^3}{3} + (\tau_{yz}^{k-1})^2 cz_{k-1}^2 - (\tau_{yz}^{k-1})^2 z_{k-1} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(10c^2 + 25cdz_{k-1} + 16d^2 z_{k-1}^2)}{30} \right],\end{aligned}\quad (5.33)$$

onde omite-se o superíndice  $k$  em  $c^k$  e  $d^k$  para evitar o excesso de notação.

Em algumas situações, conforme detalhado por Mendonça e Lemos (2024), a tensão integrada  $\tau_{yz}^i$  precisa ser corrigida para satisfazer as condições de contorno em  $z = H/2$ , o que pode ser realizado utilizando as equações definidas (4.11). Assim, a função de correção associada,  $f_y(z)$ , pode ser incorporada no cálculo da densidade de energia aproximada,  $\overline{E}_{3D}^{yi}$ ,

resultando em:

$$\begin{aligned}
\overline{E}_{3Dc}^{yi} &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} S_{44} (\tau_{yz}^i + f_y)^2 dz \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} S_{44} [(\tau_{yz}^i)^2 + 2f_y \tau_{yz}^i + f_y^2] dz, \\
&= \overline{E}_{3D}^{yi} + \underbrace{\int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} S_{44} \tau_{yz}^i f_y dz}_{I_y^0} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} S_{44} f_y^2 dz}_{I_y^1},
\end{aligned} \tag{5.34}$$

então,

$$\overline{E}_{3Dc}^{yi} = \overline{E}_{3D}^{yi} + I_y^0 + I_y^1, \tag{5.35}$$

com  $I_y^0$  e  $I_y^1$  contendo os resultados das integrais que envolvem a função de correção  $f_y(z)$ .

O segundo termo em (5.31), referente à tensão cisalhante transversal no plano  $xz$ , possui desenvolvimento semelhante, com  $\tau_{xz}^i$  sendo obtido de (4.4):

$$\begin{aligned}
\overline{E}_{3D}^{xi} &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} S_{55} (\tau_{xz}^i)^2 dz \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N S_{55}^k \int_{z_{k-1}}^{z_k} [a^k(z - z_{k-1}) + b^k(z^2 - z_{k-1}^2) + \tau_{xz}^{k-1}]^2 dz \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N S_{55}^k [b_5 z^5 + b_4 z^4 + b_3 z^3 + b_2 z^2 + b_1 z + b_0]_{z_{k-1}}^{z_k}
\end{aligned} \tag{5.36}$$

em que:

$$\begin{aligned}
b_5 &= \frac{b^2}{5}, \\
b_4 &= \frac{ab}{4}, \\
b_3 &= \frac{2\tau_{xz}^{k-1}b}{3} - \left( \frac{2b^2 z_{k-1}^2 + 2abz_{k-1} - a^2}{3} \right) \\
b_2 &= \tau_{xz}^{k-1}a - z_{k-1}a(a + bz_{k-1}), \\
b_1 &= z_{k-1}^2(a + bz_{k-1})^2 + (\tau_{xz}^{k-1})^2 - 2\tau_{xz}^{k-1}az_{k-1} - 2\tau_{xz}^{k-1}bz_{k-1}^2, \\
b_0 &= z_{k-1}^3 \left[ \frac{4\tau_{yz}^{k-1}bz_{k-1}^3}{3} + (\tau_{yz}^{k-1})^2 az_{k-1}^2 - (\tau_{xz}^{k-1})^2 z_{k-1} \right. \\
&\quad \left. - \frac{(10a^2 + 25abz_{k-1} + 16b^2 z_{k-1}^2)}{30} \right],
\end{aligned} \tag{5.37}$$

onde o superíndice  $k$  é omitido em  $a^k$  e  $b^k$ .

Do mesmo modo que em (5.34), é possível a inserção da função de correção  $f_x(z)$ ,

definida em (4.20), para calcular a densidade de energia corrigida:

$$\begin{aligned}
\overline{E}_{3Dc}^{xi} &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} S_{55} (\tau_{xz}^i + f_x)^2 dz \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} S_{55} \left[ (\tau_{xz}^i)^2 + 2f_x \tau_{xz}^i + f_x^2 \right] dz \\
&= \overline{E}_{3D}^{xi} + I_x^0 + I_x^1,
\end{aligned} \tag{5.38}$$

com  $I_x^0$  e  $I_x^1$  correspondendo aos resultados das integrais que possuem no integrando a função de correção  $f_x(z)$ .

Por fim, desenvolve-se a terceira parcela de energia em (5.31):

$$\begin{aligned}
\overline{E}_{3D}^{xyi} &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} S_{45} \tau_{yz}^i \tau_{xz}^i dz \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N S_{45}^k \int_{z_{k-1}}^{z_k} \left( c^k(z - z_{k-1}) + d^k(z^2 - z_{k-1}^2) + \tau_{yz}^{k-1} \right) \\
&\quad \cdot \left( a^k(z - z_{k-1}) + b^k(z^2 - z_{k-1}^2) + \tau_{xz}^{k-1} \right) dz \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N S_{45}^k \left[ c_5 z^5 + c_4 z^4 + c_3 z^3 + c_2 z^2 + c_1 z \right]_{z_{k-1}}^{z_k}
\end{aligned} \tag{5.39}$$

onde:

$$\begin{aligned}
c_5 &= \frac{da}{5} \\
c_4 &= \frac{ca + d^2}{4} \\
c_3 &= \frac{1}{3} (\tau_{xz}^{k-1} b + \tau_{yz}^{k-1} c + cd - ca z_{k-1} - d^2 z_{k-1} - 2da z_{k-1}^2) \\
c_2 &= \frac{1}{2} (\tau_{xz}^{k-1} a + \tau_{yz}^{k-1} b - 2cd z_{k-1} - ca z_{k-1}^2 - d^2 z_{k-1}^2) \\
c_1 &= \tau_{xz}^{k-1} (\tau_{yz}^{k-1} - cz_{k-1} - dz_{k-1}^2) - \tau_{yz}^{k-1} (dz_{k-1} - az_{k-1}^2) \\
&\quad + cd z_{k-1}^2 + (ca + d^2) z_{k-1}^3 + da z_{k-1}^4
\end{aligned} \tag{5.40}$$

A inclusão das funções de correção,  $f_x(z)$  e  $f_y(z)$ , resulta em:

$$\begin{aligned}
\overline{E}_{3Dc}^{xyi} &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} S_{45} (\tau_{yz}^i + f_y) (\tau_{xz}^i + f_x) dz \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} S_{45} [\tau_{yz}^i \tau_{xz}^i + f_x \tau_{yz}^i + f_y \tau_{xz}^i + f_y f_x] dz \\
&= \overline{E}_{3D}^{xyi} + I_{xy}^0 + I_{xy}^1,
\end{aligned} \tag{5.41}$$

com  $I_{xy}^0$  e  $I_{xy}^1$  sendo os valores das integrais envolvendo as funções  $f_x(z)$  e  $f_y(z)$ .

Com a determinação de  $\bar{E}_{3D}^i$ , ou ainda  $\bar{E}_{3Dc}^i$ , os fatores de correção isotrópicos  $k_s^1$  pode ser calculado a partir de (5.30). Com esse novo valor de correção, espera-se que os resultados, principalmente para as tensões cisalhantes transversais, sejam melhores do que aqueles fornecidos pela estimativa inicial com  $k_s^0$ . Dessa forma, o método demonstra uma natureza iterativa, permitindo reanalisar o problema para obter um fator de correção ainda melhor.

Embora essa estratégia resulte na necessidade de resolver novamente o problema pelo MEFG em análises lineares, o que aumenta consideravelmente o custo computacional, em análises não lineares — que são iterativas por natureza — essa característica não resulta em um grande aumento no processamento computacional. Isso se deve ao fato de que os fatores de correção podem ser recalculados a cada iteração do método de Newton-Raphson, as quais são naturalmente necessárias para o processo de solução.

A abordagem é considerada adequada para placas laminadas arbitrárias porque resulta em fatores de correção individuais que levam em conta as diferentes configurações de empilhamento, os esforços aplicados e as condições de contorno específicas do problema. A precisão dos resultados depende dos valores obtidos na superfície de referência da placa e da capacidade de melhoria proporcionada pelas etapas de pós-processamento implementadas, além das limitações convencionais da FSDT e da técnica de equivalência das parcelas de energia para realizar a correção dos efeitos de cisalhamento.

### 5.5.2 Correção ortotrópica

É possível seguir o mesmo conceito de Whitney (1973) e calcular dois valores distintos de correção em cada coordenada, correspondentes às direções principais  $x$  e  $y$  do laminado. Nesse caso, a correção se adapta à ortotropia da placa laminada, de modo que a seguinte relação constitutiva é arbitrada para o cisalhamento transversal:

$$\mathbf{Q}_c = \begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_y A_{44} & 0 \\ 0 & k_x A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}. \quad (5.42)$$

A relação inversa, deformação-tensão, é dada por:

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_y / (A_{44} k_y) \\ Q_x / (A_{55} k_x) \end{Bmatrix}. \quad (5.43)$$

Para um laminado ortotrópico, a densidade de energia de deformação de cisalhamento em (5.3), calculada por meio das deformações constantes do modelo de Reissner-Mindlin em (5.43), é a seguinte:

$$\begin{aligned}\bar{E}_K^s &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\gamma} \, dz = \frac{1}{2} \mathbf{Q}_c \cdot \boldsymbol{\gamma} \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{Q_y^2}{A_{44}k_y} + \frac{Q_x^2}{A_{55}k_x} \right] = E_K^y + E_K^x.\end{aligned}\quad (5.44)$$

Para determinar expressões para os fatores de correção,  $k_x$  e  $k_y$ , igualam-se as parcelas de energia em cada plano com as correspondentes na aproximação da solução tridimensional em (5.31):

$$E_K^y = E_{3D}^{yi} \rightarrow \frac{Q_y^2}{2A_{44}k_y} = E_{3D}^{yi} \rightarrow k_y = \frac{Q_y^2}{2A_{44}E_{3D}^{yi}}, \quad (5.45)$$

$$E_K^x = E_{3D}^{xi} \rightarrow \frac{Q_x^2}{2A_{55}k_x} = E_{3D}^{xi} \rightarrow k_x = \frac{Q_x^2}{2A_{55}E_{3D}^{xi}}. \quad (5.46)$$

Ainda, pode-se expressar os fatores de correção em termos da densidade de energia de cisalhamento sem correções,  $E_{2D}^0$ , definida em (5.26), a partir da relação abaixo:

$$\bar{E}_{2D}^0 = \underbrace{\frac{1}{2}Q_y\gamma_{yz}}_{\bar{E}_{2D}^y} + \underbrace{\frac{1}{2}Q_x\gamma_{xz}}_{\bar{E}_{2D}^x} + \underbrace{\frac{1}{2}[Q_y\gamma_{xz} + Q_x\gamma_{yz}]}_{\bar{E}_{2D}^{xy}}. \quad (5.47)$$

Em um laminado ortotrópico, a parcela referente ao acoplamento é nula e somente os dois primeiros termos são mantidos:

$$\bar{E}_{2D}^0 = \frac{1}{2} \left[ \frac{Q_y^2}{A_{44}} + \frac{Q_x^2}{A_{55}} \right] = \bar{E}_{2D}^y + \bar{E}_{2D}^x. \quad (5.48)$$

Assim, os fatores de correção,  $k_y$  em (5.45) e  $k_x$  em (5.46), podem também ser escritos como:

$$k_y(x, y) = \frac{\bar{E}_{2D}^y(x, y)}{\bar{E}_{3D}^{yi}(x, y)} \quad \text{e} \quad k_x(x, y) = \frac{\bar{E}_{2D}^x(x, y)}{\bar{E}_{3D}^{xi}(x, y)}. \quad (5.49)$$

Nota-se que, se essa estratégia for aplicada em um laminado anisotrópico, a correção associada à energia de acoplamento,  $E_{3D}^{xyi}$ , será desprezada.

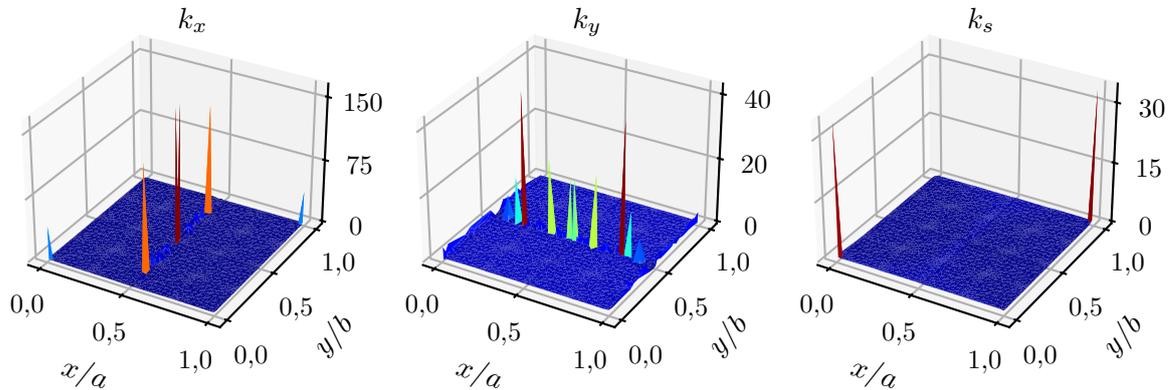
É importante destacar que os fatores  $k_x$  e  $k_y$  compartilham das mesmas características observadas para  $k_s$ , permitindo seu cálculo em vários pontos  $(x, y)$  na superfície de referência da placa. Além disso, é possível reanalisar o problema iterativamente para obter novos fatores de correção melhorados. Ademais, pode-se utilizar as densidades de energia calculadas com as

tensões integradas corrigidas,  $\tau_{xz}^c$  e  $\tau_{yz}^c$ , no lugar de  $\bar{E}_{3D}^{xi}$  e  $\bar{E}_{3D}^{yi}$  em (5.49).

### 5.5.3 Ajustes nos fatores de correção

Observando as expressões em (5.30) e (5.49), devido à possibilidade de a densidade de energia de deformação por cisalhamento ser nula, percebe-se que existem pontos onde os valores dos fatores  $k_s$ ,  $k_x$  ou  $k_y$  são indeterminados. Além disso, mesmo em regiões onde a densidade de energia não é nula, mas próxima de zero, valores inconsistentes para os fatores são calculados, devido aos erros inerentes à aproximação fornecida pelo MEFM. Esses erros tendem a ser maiores no processo de integração em relação à resposta inicial da FSDT, afetando significativamente os fatores de correção calculados nessas regiões. A Figura 4 exemplifica isso com a ilustração dos fatores  $k_x$ ,  $k_y$  e  $k_s$  calculados para um problema envolvendo uma placa laminada.

Figura 4: Inconsistências (picos) para  $k_x(x, y)$ ,  $k_y(x, y)$  e  $k_s(x, y)$  em regiões onde  $E_{3D}^i \approx 0$ .



Fonte: Elaboração própria.

Embora esses pontos estejam associados a baixas deformações por cisalhamento transversal, ao considerar a forma fraca em (2.30), percebe-se que a imprevisibilidade dos picos pode resultar em um excesso de rigidez em alguns pontos, alterando significativamente o comportamento mecânico da placa laminada. Portanto, é estabelecida uma tolerância para a densidade de energia,  $\epsilon_K$ . Se  $E_{3D}^i \leq \epsilon_K$ , os valores calculados para  $k_s$  são desconsiderados e substituídos pela mediana da correção calculada no elemento, antes de serem incorporados à matriz de rigidez de cisalhamento transversal  $\mathbf{E}$ , definida em (2.22). Um procedimento semelhante pode ser adotado para  $k_x$  e  $k_y$ , caso a densidade de energia associada seja inferior à tolerância estabelecida  $\epsilon_K$ .

### 5.5.4 Correção anisotrópica

Pode-se desenvolver uma abordagem similar às realizadas nas seções anteriores para determinar um terceiro fator de correção adaptado à anisotropia do laminado. Para isso, é estabelecida uma relação constitutiva com três fatores de correção:  $k_x$ ,  $k_y$  e  $k_{xy}$ , conforme realizado por Pai (1994):

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_y A_{44} & k_{xy} A_{45} \\ k_{xy} A_{45} & k_x A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}. \quad (5.50)$$

A relação inversa, deformação-tensão, é obtida pela inversão da matriz que contém os fatores de correção:

$$\gamma = \mathbf{Z}\mathbf{Q}_c, \quad (5.51)$$

onde:

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} k_y A_{55} & -k_{xy} A_{45} \\ -k_{xy} A_{45} & k_x A_{44} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Delta = k_y k_x E_{44} E_{55} - k_{xy}^2 E_{45}^2. \quad (5.52)$$

Nesse caso, a densidade de energia cisalhante (5.3) no modelo de Reissner-Mindlin é:

$$\bar{E}_K^s = \frac{1}{2} \int_{-H/2}^{H/2} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\gamma} \, dz = \frac{1}{2} \mathbf{Q}_c \cdot \mathbf{Z}\mathbf{Q}_c = \underbrace{\frac{1}{2} Q_y^2 Z_{11}}_{\bar{E}_K^y} + \underbrace{\frac{1}{2} Q_x^2 Z_{22}}_{\bar{E}_K^x} + \underbrace{Q_x Q_y Z_{12}}_{\bar{E}_K^{xy}}, \quad (5.53)$$

onde  $\bar{E}_K^y$ ,  $\bar{E}_K^x$  e  $\bar{E}_K^{xy}$  são as aproximações de primeira ordem corrigidas para as parcelas de energia em cada plano, baseadas no campo de deformações cisalhantes uniformes na espessura.

Nota-se que cada termo de  $\bar{E}_K^y$ ,  $\bar{E}_K^x$  e  $\bar{E}_K^{xy}$ , assim como cada termo de  $\mathbf{Z}$  em (5.52), depende de todos os três fatores  $k_y$ ,  $k_x$  e  $k_{xy}$  de forma não linear.

As parcelas de densidade em cada direção podem ser igualadas à aproximação da densidade de energia 3D correspondente em (5.31):

$$\bar{E}_K^x = \bar{E}_{3D}^{xi}, \quad \bar{E}_K^y = \bar{E}_{3D}^{yi} \quad \text{e} \quad \bar{E}_K^{xy} = \bar{E}_{3D}^{xyi}, \quad (5.54)$$

fornecendo assim uma expressão para cada fator de correção:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} Q_y^2 Z_{11} &= \bar{E}_{3D}^{yi}, \\ \frac{1}{2} Q_x^2 Z_{22} &= \bar{E}_{3D}^{xi}, \\ Q_x Q_y Z_{12} &= \bar{E}_{3D}^{xyi}. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Esse é um sistema não linear de três equações acopladas, em termos de  $k_y$ ,  $k_x$  e  $k_{xy}$ . A solução só pode ser obtida por um método adequado, como o de Newton-Raphson, descrito na próxima seção.

### 5.5.5 Determinação dos fatores pelo método de Newton-Raphson

Utiliza-se o método de Newton-Raphson para encontrar as raízes  $k_y$ ,  $k_x$  e  $k_{xy}$  do sistema não linear de equações em (5.55). Para isso, os termos relacionados à matriz  $\mathbf{Z}$  em (5.52) são inicialmente substituídos no sistema de equações (5.55). Após reordenar esses termos, chega-se à seguinte forma explícita:

$$\begin{aligned} G_1 &= k_x k_y F_{11} - k_{xy}^2 F_{12} - k_y F_{13} = 0, \\ G_2 &= k_x k_y F_{21} - k_{xy}^2 F_{22} - k_{xy} F_{23} = 0, \\ G_3 &= k_x k_y F_{31} - k_{xy}^2 F_{32} - k_x F_{33} = 0, \end{aligned} \quad (5.56)$$

onde  $F_{ij}$  são valores conhecidos, definidos por:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} E_{44} E_{55} \bar{E}_{3D}^y & E_{45}^2 \bar{E}_{3D}^y & \frac{1}{2} Q_y^2 E_{55} \\ E_{44} E_{55} \bar{E}_{3D}^{xy} & E_{45}^2 \bar{E}_{3D}^{xy} & Q_x Q_y E_{45} \\ E_{44} E_{55} \bar{E}_{3D}^x & E_{45}^2 \bar{E}_{3D}^x & \frac{1}{2} Q_x^2 E_{44} \end{bmatrix}. \quad (5.57)$$

Deve-se buscar os valores de  $\mathbf{k} = \{k_y, k_{xy}, k_x\}$  que anulam as funções:  $G_j(k_y, k_{xy}, k_x)$  em (5.56). O método de Newton-Raphson considera que esteja disponível uma estimativa da solução, denominada  $\mathbf{k}^{r-1}$ , correspondente a uma iteração anterior  $r - 1$ . Dessa forma, o valor da função  $\mathbf{G}$  em um ponto próximo, separado a uma distância  $\Delta\mathbf{k}$ , ou seja  $\mathbf{G}(\mathbf{k}^{r-1} + \Delta\mathbf{k})$ , pode ser aproximado pela seguinte relação linear:

$$\begin{aligned} G_1(\mathbf{k}^{r-1} + \Delta\mathbf{k}) &= G_1(\mathbf{k}^{r-1}) + \left( \frac{\partial G_1}{\partial k_y}, \frac{\partial G_1}{\partial k_{xy}}, \frac{\partial G_1}{\partial k_x} \right) \cdot \Delta\mathbf{k}, \\ G_2(\mathbf{k}^{r-1} + \Delta\mathbf{k}) &= G_2(\mathbf{k}^{r-1}) + \left( \frac{\partial G_2}{\partial k_y}, \frac{\partial G_2}{\partial k_{xy}}, \frac{\partial G_2}{\partial k_x} \right) \cdot \Delta\mathbf{k}, \\ G_3(\mathbf{k}^{r-1} + \Delta\mathbf{k}) &= G_3(\mathbf{k}^{r-1}) + \left( \frac{\partial G_3}{\partial k_y}, \frac{\partial G_3}{\partial k_{xy}}, \frac{\partial G_3}{\partial k_x} \right) \cdot \Delta\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (5.58)$$

De (5.56),  $G_i(\mathbf{k}^{r-1} + \Delta\mathbf{k}) = 0$ , para  $i = 1, \dots, 3$ , nos pontos correspondentes às raízes.

Sendo assim, obtém-se uma expressão matricial para  $\Delta \mathbf{x}$ :

$$\mathbf{K}_T|_{\mathbf{k}^{r-1}} \Delta \mathbf{k} = - \mathbf{F}|_{\mathbf{k}^{r-1}}, \quad (5.59)$$

onde  $\mathbf{K}_T$  é a matriz tangente do método de Newton-Raphson, dada por:

$$\mathbf{K}_T = \begin{bmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial k_y} & \frac{\partial G_1}{\partial k_{xy}} & \frac{\partial G_1}{\partial k_x} \\ \frac{\partial G_2}{\partial k_y} & \frac{\partial G_2}{\partial k_{xy}} & \frac{\partial G_2}{\partial k_x} \\ \frac{\partial G_3}{\partial k_y} & \frac{\partial G_3}{\partial k_{xy}} & \frac{\partial G_3}{\partial k_x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_x F_{11} - F_{13} & -2k_{xy} F_{12} & k_y F_{11} \\ k_x F_{21} & -2k_{xy} F_{22} - F_{23} & k_y F_{21} \\ k_x F_{31} & -2k_{xy} F_{32} & k_y F_{31} F_{33} \end{bmatrix}. \quad (5.60)$$

Resolvendo o sistema em (5.59), obtém-se a nova estimativa de  $\mathbf{k}^r$ , pois:

$$\mathbf{k}^r = \mathbf{k}^{r-1} + \Delta \mathbf{k}. \quad (5.61)$$

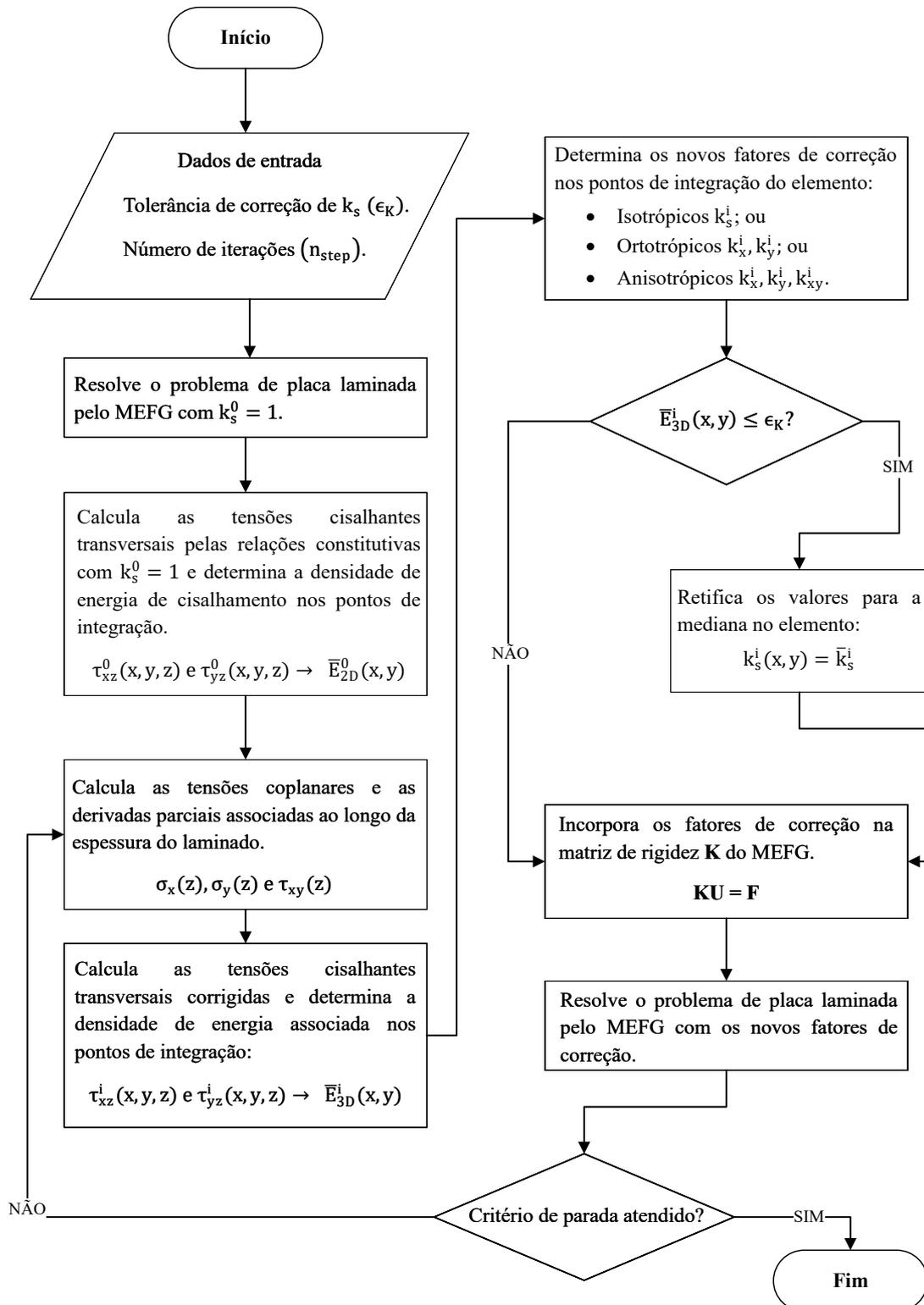
O processo pode ser repetido até que haja a convergência do resultado, que é assumida quando a precisão predefinida  $\epsilon$  é atingida:

$$\frac{\|\Delta \mathbf{k}\|_{L_2}}{\|\mathbf{k}^{r-1}\|_{L_2}} < \epsilon. \quad (5.62)$$

### 5.5.6 Fluxograma do método iterativo

O fluxograma apresentado na Figura 5 descreve o processo iterativo utilizado para obter os fatores de correção de cisalhamento em problemas lineares de placas laminadas. A modelagem do problema é feita pela FSDT, enquanto os resultados são obtidos através do MEFG. O cálculo dos fatores de correção é realizado nos pontos de integração de cada elemento, com um ajuste para evitar valores inconsistentes em pontos onde a densidade de energia de cisalhamento é próxima de zero.

Figura 5: Fluxograma para a determinação de fatores de correção de cisalhamento nos pontos de integração do MEFG pelo método iterativo.



Fonte: Elaboração própria.

## 6 RESULTADOS

Para apresentar os resultados e características dos métodos de correção implementados, são utilizados dois problemas de placas laminadas:

- a) placa laminada simétrica ortotrópica com três lâminas  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ ; e
- b) placa laminada ortotrópica não simétrica com duas lâminas  $[0^\circ/90^\circ]$ ;

os quais são formulados pela FSDT e resolvidos pelo MEFG, por meio de um algoritmo implementado em FORTRAN.

Por meio dos métodos especificados a seguir, diferentes valores para os fatores de correção de cisalhamento são determinados e aplicados na análise dessas placas, com o objetivo de verificar a influência da correção na resposta estrutural:

- a) Método de Reissner:  $k_s = 5/6$ , consistindo em um único valor de correção para toda a placa;
- b) Método analítico:  $k_x^a$ ,  $k_y^a$  e  $k_z^a$ , em que as razões das densidades de energia de cisalhamento,  $\bar{E}_{2D}^s/\bar{E}_{3D}^s$ , são calculadas a partir de soluções analíticas disponíveis na literatura. Whitney e Pagano (1970) apresentam a solução da FSDT, enquanto Pagano (1969) fornece os resultados da Teoria de Elasticidade Tridimensional;
- c) Método de Whitney:  $k_x^w$  e  $k_y^w$ , em que dois valores de correção são obtidos para os eixos de ortotropia do laminado. Essa técnica é apresentada por Whitney (1973); e
- d) Método iterativo:  $k_x^i$  e  $k_y^i$ , onde  $i$  corresponde ao número da iteração. A abordagem consiste em utilizar os resultados obtidos nas etapas de pós-processamento para estimar fatores de correção de forma iterativa nos pontos de integração usados no método numérico de solução.

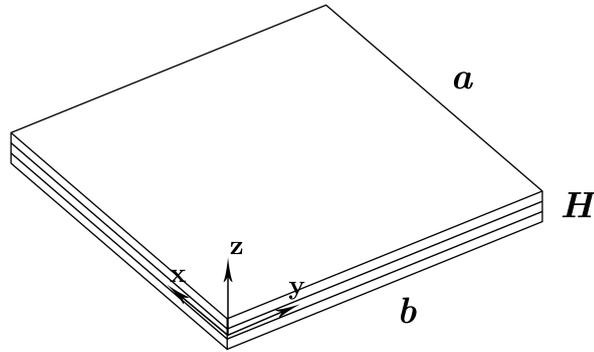
Ambos os problemas analisados possuem soluções analíticas tridimensionais conhecidas, obtidas por Pagano (1969). Dessa forma, é possível comparar os valores de deslocamentos e tensões para verificar a precisão dos métodos de correção apresentados.

### 6.1 PLACA LAMINADA SIMÉTRICA ORTOTRÓPICA $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$

O primeiro problema analisado consiste em uma placa laminada simplesmente apoiada, sujeita a um carregamento senoidal transversal, composta por três lâminas empilhadas na

configuração  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ , de modo que o laminado apresente simetria em torno do eixo  $z$  e comportamento ortotrópico. A Figura 6 ilustra a placa analisada.

Figura 6: Ilustração da placa laminada simétrica ortotrópica  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ .



Fonte: Elaboração própria.

As dimensões coplanares são dadas por:

$$a = 1000 \text{ mm} \quad \text{e} \quad b = 1000 \text{ mm}, \quad (6.1)$$

enquanto  $H$  corresponde à altura total da placa laminada e  $h_k = H/3$  representa a altura individual de cada lâmina. A razão  $H/a$  influencia significativamente os resultados obtidos pela Teoria de Primeira Ordem, afetando também a aplicação dos fatores de correção  $k_s$ . Em placas muito finas, por exemplo, a resposta estrutural se aproxima da Teoria de Elasticidade Tridimensional, independentemente do valor de correção escolhido, devido à negligenciável contribuição dos efeitos de cisalhamento. Por outro lado, para placas mais espessas, a FSDT não se aplica corretamente, gerando resultados discrepantes em relação à solução tridimensional exata. Assim, inicialmente, a razão  $H/a = 0,1$  é adotada para apresentar os resultados, correspondendo a  $H = 100$  mm, caracterizando a placa como semiespessa.

O fato da placa estar simplesmente apoiada resulta nas seguintes condições de contorno envolvendo os deslocamentos generalizados nas bordas:

$$\begin{aligned} u(x, b) = 0, \quad u(a, y) = 0, \\ v(x, b) = 0, \quad v(a, y) = 0, \\ w(x, b) = 0, \quad w(a, y) = 0, \\ \theta_x(x, b) = 0, \quad \theta_y(a, y) = 0. \end{aligned} \quad (6.2)$$

A carga senoidal aplicada na direção  $z$  é dada por (6.3), com  $q_0 = 10$  N/mm.

$$q(x, y) = q_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right). \quad (6.3)$$

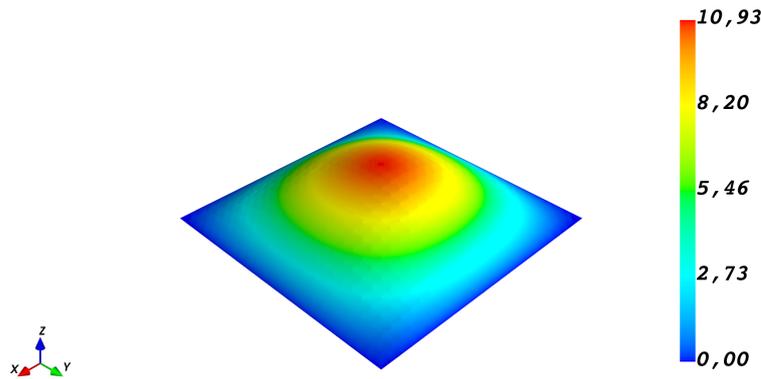
Para completar a definição do problema, considera-se que as lâminas são confeccionadas do mesmo material. A Tabela 1 apresenta os valores para os módulos de elasticidade e coeficientes de Poisson do material empregado.

Tabela 1: Propriedades dos materiais das lâminas para a placa laminada simétrica  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ .

$E_1 = 172,25$ GPa	$E_2 = 6,890$ GPa	$E_3 = 6,890$ GPa
$G_{12} = 3,445$ GPa	$G_{13} = 3,445$ GPa	$G_{23} = 1,378$ GPa
$\nu_{12} = 0,25$	$\nu_{13} = 0,25$	$\nu_{23} = 0,25$

Pagano (1969), utilizando a Teoria de Elasticidade Tridimensional, obteve uma solução analítica para esse problema. Assim, os resultados exatos podem ser usados para confrontar a eficácia e as limitações dos métodos de correção implementados para a FSDT. A Figura 7 apresenta os valores determinados para os deslocamentos transversais na superfície de referência da placa ( $z = 0$ ).

Figura 7: Deslocamento transversal no meio da placa  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ ,  $w(x, y, 0)$ , calculado pela Teoria de Elasticidade Tridimensional com  $H/a = 0,1$ .



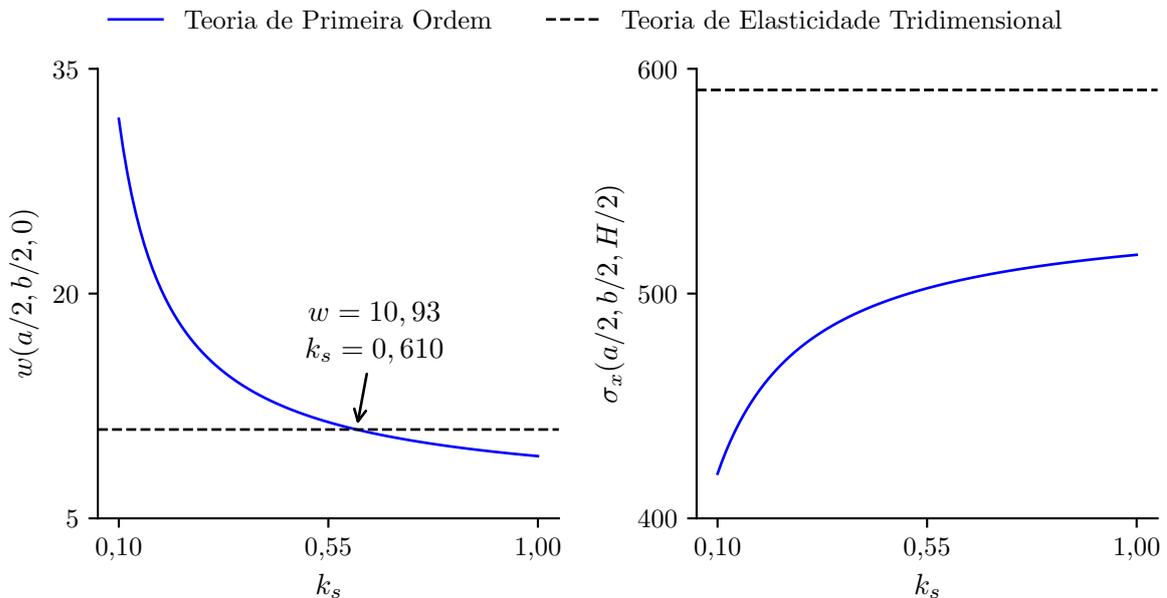
Por meio da figura, verifica-se que a deflexão máxima da superfície média ocorre no centro da placa laminada, dada por:

$$w(a/2, b/2, 0) = 10,93 \text{ mm}. \quad (6.4)$$

### 6.1.1 Método analítico para a determinação de $k_s^a$

O mesmo problema pode ser aproximado pela teoria bidimensional de primeira ordem, que requer a definição de um ou mais fatores de correção  $k_s$  para obter resultados adequados em modelos de placas laminadas, no máximo, semiespessas. Em geral, toda a resposta estrutural depende dessa correção, mesmo em análises lineares, mas a influência é mais pronunciada nos resultados transversais. Por exemplo, a Figura 8 ilustra o comportamento de  $w$ , uma variável transversal, e  $\sigma_x$ , uma variável coplanar, no centro da placa para diferentes valores de  $k_s$ . Os deslocamentos são dados em milímetros (mm) e as tensões em megapascal (MPa).

Figura 8: Influência do fator de cisalhamento  $k_s$  em  $w$  e em  $\sigma_x$  no centro da placa  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$  com  $H/a = 0,1$ .

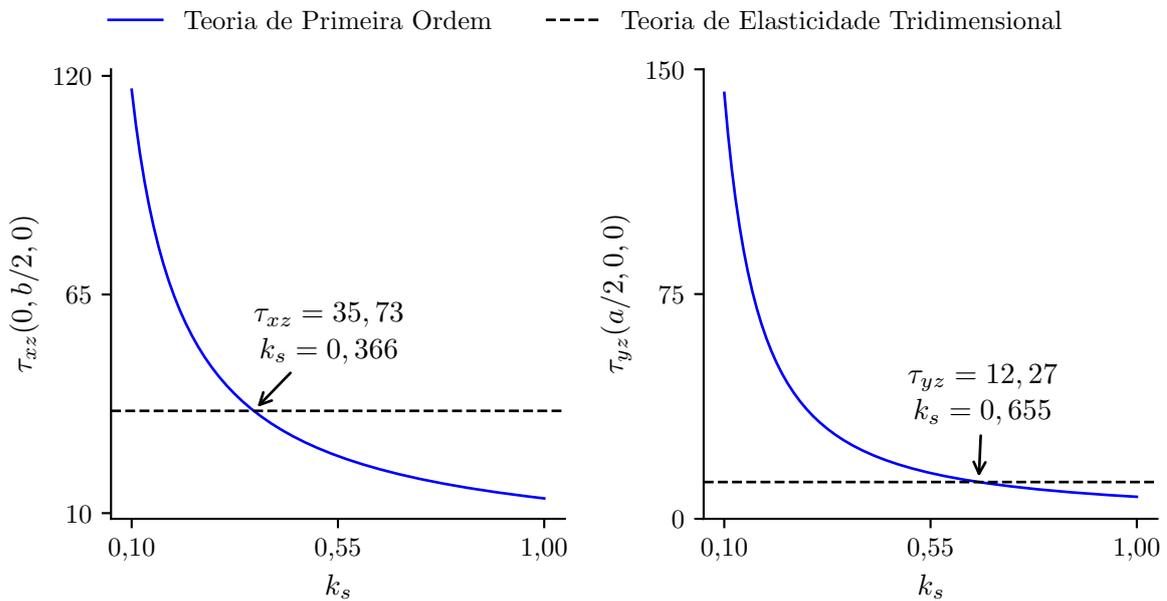


Em ambos os casos, verifica-se que o fator de correção afeta os valores determinados, destacando a importância de métodos para obter valores de correção adequados. Além disso, nota-se que a amplitude de correção para os deslocamentos transversais ( $w$ ) é mais significativa do que para as tensões coplanares ( $\sigma_x$ ). No problema analisado, inclusive, não é possível escolher  $k_s$  de modo que  $\sigma_x$  corresponda exatamente ao valor calculado pela Teoria de Elasticidade Tridimensional na superfície superior do laminado. Em contraste,  $w$  é mais sensível à correção, e a utilização de  $k_s = 0,610$  resulta na deflexão máxima determinada por Pagano na Figura 7.

Ao seguir o mesmo procedimento para outras grandezas em diferentes pontos, como  $\tau_{xz}$  em  $(a/2, 0, 0)$  e  $\tau_{yz}$  em  $(0, b/2, 0)$ , são obtidos valores distintos de  $k_s$  para alcançar equivalência com a solução exata. Nestes casos,  $k_s = 0,366$  para  $\tau_{xz}$  e  $k_s = 0,655$  para  $\tau_{yz}$ , conforme

destacado na Figura 9. Isso indica que não é possível escolher um único fator de correção que faça com que todos os resultados da FSDT coincidam com a solução tridimensional. Além disso, pode-se mostrar que, para uma mesma grandeza, o mesmo valor de  $k_s$  é determinado em todos os pontos  $(x, y)$ . Em outras palavras, no problema linear em análise, a comparação direta de deslocamentos e tensões resulta em fatores de correção que são independentes do ponto avaliado.

Figura 9: Influência do fator de cisalhamento  $k_s$  para  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$ , ambas em MPa, calculadas nas bordas da placa laminada  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$  com  $H/a = 0,1$ .



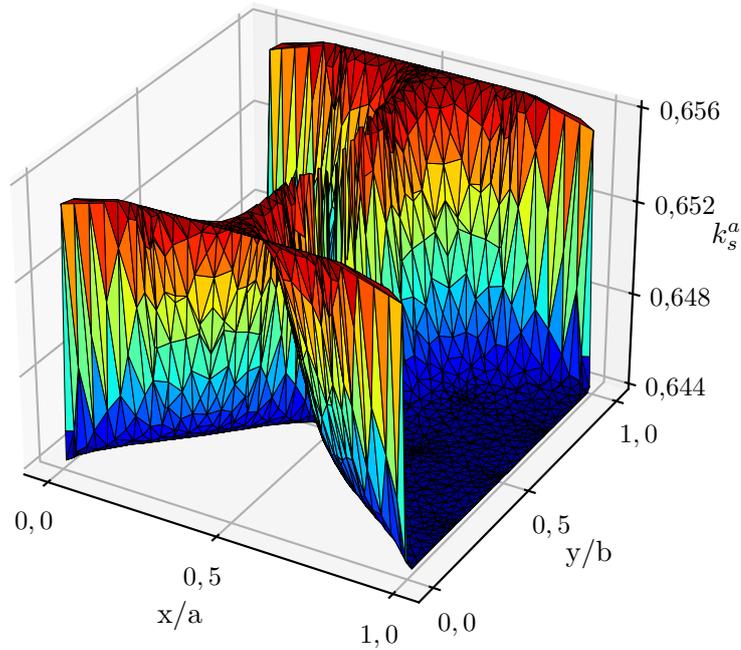
Embora a abordagem de definir valores de correção individuais para cada grandeza seja útil para visualizar a influência do fator de correção nos resultados, é importante destacar que isso pode resultar em melhorias apenas para o item analisado. Nesse sentido, é mais apropriado comparar as densidades de energia de cisalhamento transversal para determinar correções mais abrangentes, uma vez que elas estão diretamente relacionadas à rigidez ao cisalhamento transversal do laminado, como pode ser visto na forma fraca em (2.30).

$$k_s^a(x, y) = \frac{\overline{E}_{2D}(x, y)}{\overline{E}_{3D}(x, y)}. \quad (6.5)$$

Observa-se que ao utilizar a densidade de energia no cálculo de  $k_s^a$ , em vez da energia cisalhante total, torna-se possível obter múltiplos fatores de correção, um para cada ponto  $(x, y)$  de interesse. Na equação (6.5),  $\overline{E}_{3D}$  é calculado por meio da solução analítica da Teoria de Elasticidade Tridimensional de Pagano (1969), enquanto  $\overline{E}_{2D}$  é obtido pela solução analítica da

Teoria de Primeira Ordem, disponível em Whitney e Pagano (1970), inicialmente resolvida com  $k_s = 1$ . Os valores determinados analiticamente para  $k_s^a$  ao longo da superfície de referência da placa são apresentados graficamente na Figura 10.

Figura 10: Fatores de correção,  $k_s^a(x, y)$ , determinados analiticamente na placa  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$  com  $H/a = 0,1$ .



Verifica-se que o resultado apresenta uma variação, embora pequena, ao longo do intervalo  $[0,644; 0,656]$ . Além disso, a função bidimensional de correção  $k_s^a(x, y)$  exibe uma descontinuidade em  $(a/2, b/2)$ , pois  $\bar{E}_{3D} = 0$  nesse ponto.

### 6.1.2 Método analítico para a determinação de $k_x^a$ e $k_y^a$

Como a placa laminada analisada é ortotrópica, é possível calcular dois fatores de correção em cada ponto  $(x, y)$  da superfície de referência, um para cada direção de ortotropia:

$$k_x^a(x, y) = \frac{\bar{E}_{2Dx}(x, y)}{\bar{E}_{3Dx}(x, y)} \quad \text{e} \quad k_y^a(x, y) = \frac{\bar{E}_{2Dy}(x, y)}{\bar{E}_{3Dy}(x, y)}. \quad (6.6)$$

Nesse caso, ao contrário do resultado observado para  $k_s^a$ , os valores obtidos analiticamente são uniformes na superfície de referência:

$$k_x^a(x, y) = 0,644 \quad \text{e} \quad k_y^a(x, y) = 0,656. \quad (6.7)$$

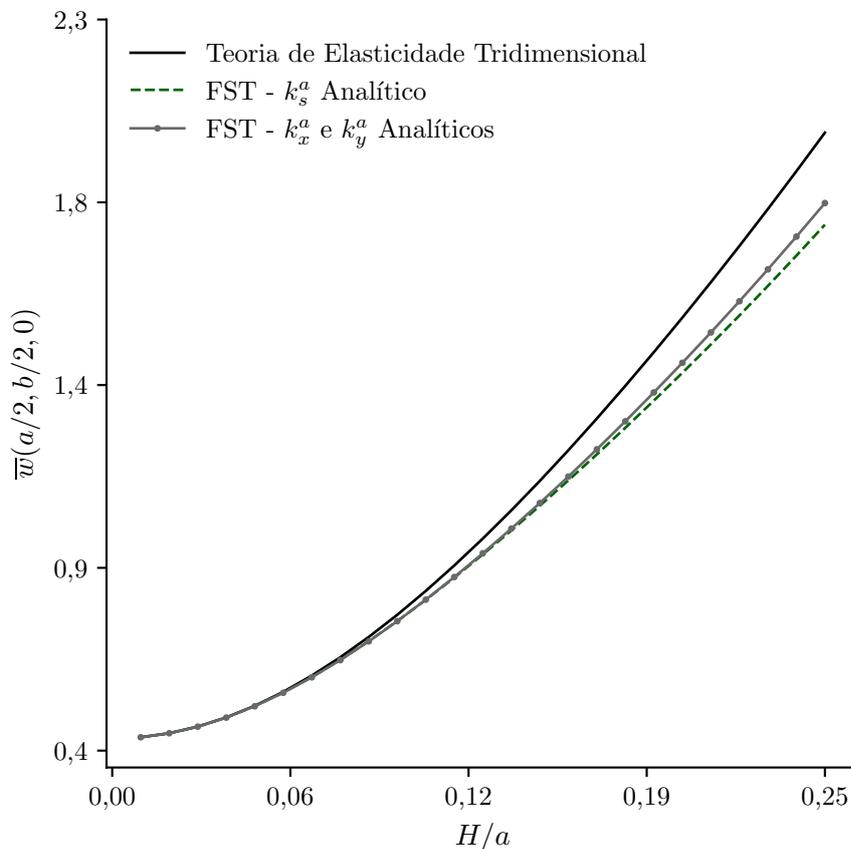
Pode-se mostrar que, para um problema ortotrópico, a seguinte relação é estabelecida para os fatores de correção:

$$k_s^a = \frac{\overline{E}_{3Dx}k_x^a + \overline{E}_{3Dy}k_y^a}{\overline{E}_{3D}}, \quad (6.8)$$

isso explica como  $k_s^a$  varia com  $(x, y)$  enquanto  $k_x^a$  e  $k_y^a$  permanecem constantes. Além disso, observa-se que os pontos de mínimo e máximo, ilustrados na Figura 10, correspondem aos valores de  $k_x^a$  e  $k_y^a$ , respectivamente, e ocorrem em regiões onde há predominância de uma direção no cálculo da densidade de energia de deformação, ou seja, onde  $\overline{E}_{3Dx} \approx 0$  ou  $\overline{E}_{3Dy} \approx 0$ .

Compreende-se que a aplicação de dois fatores de correção,  $k_x^a$  e  $k_y^a$ , em vez de apenas um único  $k_s^a$ , é mais vantajosa, pois as densidades de energia em cada eixo dependem das tensões cisalhantes transversais,  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$ , e a Figura 9 exibe uma tendência de valores de correção distintos para essas variáveis. Além disso, mesmo com a pequena diferença entre os valores de  $k_x^a$ ,  $k_y^a$  e  $k_s^a$ , os resultados permanecem mais próximos da solução exata para  $\overline{w}$  no centro da placa quando são utilizados os fatores de correção ortotrópicos, conforme ilustrado na Figura 11.

Figura 11: Comparação entre o fator de correção único  $k_s^a$  e os fatores ortotrópicos  $k_x^a$  e  $k_y^a$  por meio do deslocamento normalizado  $\overline{w}$  no centro da placa  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ , em diferentes razões de espessura  $H/a$ .



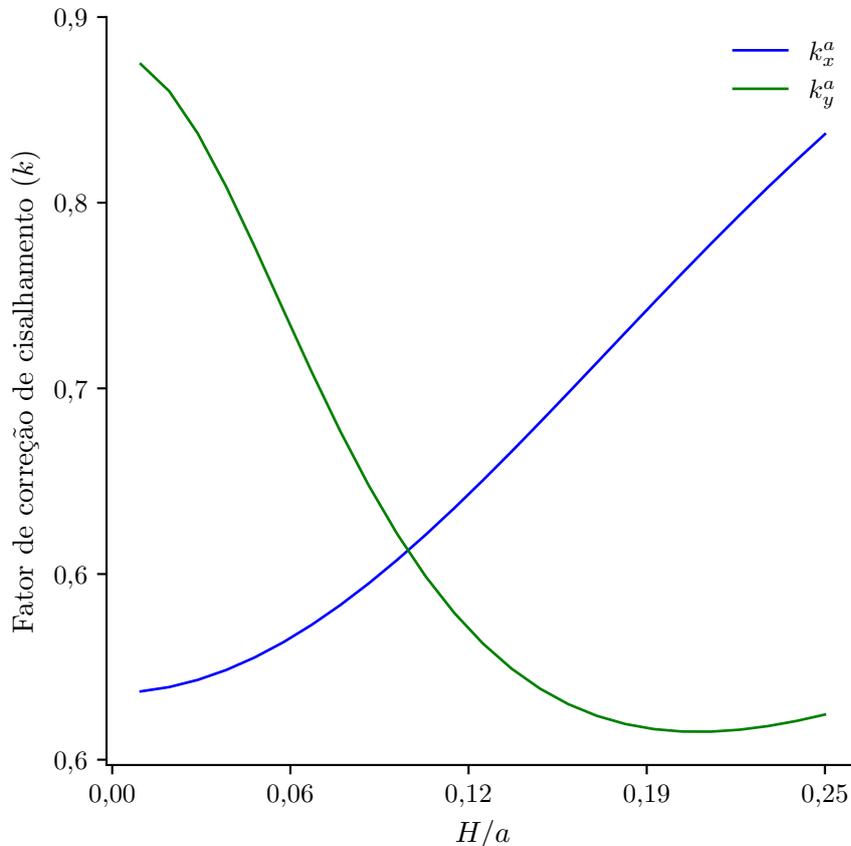
Nesse gráfico,  $\bar{w}$  é o deslocamento transversal normalizado, útil para visualização e comparação dos resultados, sendo calculado por:

$$\bar{w} = \frac{wH^3 E_2 10^2}{q_0 a^4}. \quad (6.9)$$

Analisando a Figura 11, nota-se que, à medida que a razão  $H/a$  aumenta, os deslocamentos calculados pela FSDT tendem a se afastar da solução tridimensional, o que é uma consequência natural da modelagem bidimensional. No entanto, ao empregar dois fatores de correção,  $k_x^a$  e  $k_y^a$ , os resultados permanecem mais próximos da solução exata para espessuras maiores, em comparação com a utilização de um único fator  $k_s^a$ .

Além disso, ao contrário de grande parte dos métodos de correção encontrados na literatura, o uso das soluções analíticas mostra que a razão das densidades de energia resulta em valores de  $k_x^a$  e  $k_y^a$  que dependem da espessura  $H$  da placa. A Figura 12 ilustra essa variação para o problema analisado.

Figura 12: Variação de  $k_x^a$  e  $k_y^a$  com  $H/a$  para a placa  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ , determinadas analiticamente.



Destaca-se que as abordagens apresentadas até o momento dependem do conhecimento prévio da solução analítica tridimensional do problema. Portanto, não há escalabilidade e os

resultados apresentados servem apenas para visualização do comportamento e das limitações do modelo de correção, além de subsidiar comparações com outros métodos.

### 6.1.3 Método de Whitney para a determinação de $k_x^w$ e $k_y^w$

O método apresentado por Whitney (1973) também se apoia em uma solução analítica durante a formulação, porém resulta em expressões para  $k_x^w$  e  $k_y^w$ , que dependem apenas das matrizes de rigidez do laminado, conforme equações definidas em (5.23).

Ao substituir os dados do problema analisado em (5.23) e realizar os cálculos, obtém-se o primeiro fator de correção  $k_x^w$ . O segundo,  $k_y^w$ , relacionado ao plano  $yz$ , pode ser obtido seguindo um processo semelhante. Assim, os resultados são:

$$k_x^w = 0,5828 \quad \text{e} \quad k_y^w = 0,8028. \quad (6.10)$$

Esses valores são constantes na superfície de referência e não dependem do ponto de análise  $(x, y)$ . Além disso, embora o cálculo das matrizes de rigidez em (5.23) seja influenciado pela espessura  $H$  do laminado, os fatores de correção determinados não se alteram com a espessura, apresentando um comportamento diferente do ilustrado na Figura 12.

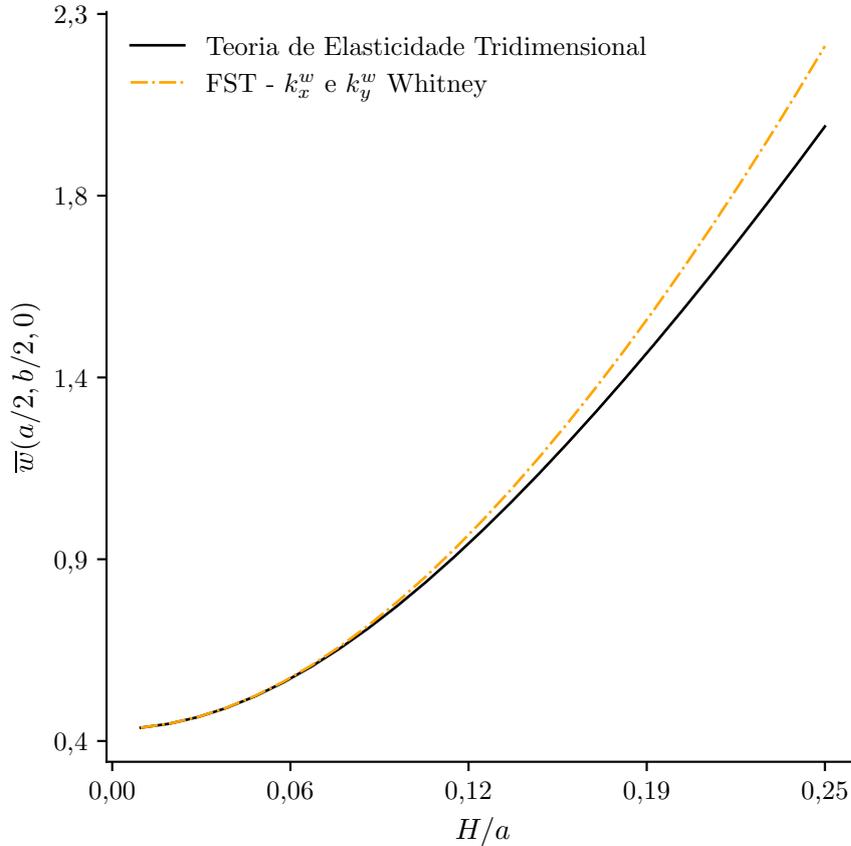
Além disso, ao analisar a Figura 12, observa-se que os valores de  $k_x^w$  e  $k_y^w$  são próximos daqueles obtidos pelo método analítico para placas finas, onde a razão  $H/a$  é próxima de zero. Essa proximidade se deve ao fato do método de Whitney ser baseado nos resultados analíticos da FSDT, em conjunto com as equações tridimensionais de equilíbrio, que apresentam boa correlação com a teoria tridimensional em placas de pouca espessura.

Apesar dos valores distintos, os deslocamentos transversais calculados pelo método de Whitney tendem a permanecer próximos da solução tridimensional para diferentes razões de espessura  $H/a$ , conforme ilustrado na Figura 13.

### 6.1.4 Método iterativo para a determinação de $k_x^i$ e $k_y^i$

Essa abordagem consiste em utilizar os resultados precisos fornecidos pelo MEEG para a superfície de referência da placa laminada, em conjunto com as etapas de pós-processamento, para estimar fatores de correção de forma iterativa, seguindo um conceito semelhante ao proposto por Noor e Peters (1989).

Figura 13: Deslocamento transversal normalizado  $\bar{w}$  no centro da placa em função da razão  $H/a$  pela FSDT com a correção ortotrópica de Whitney  $k_x^w$  e  $k_y^w$ .



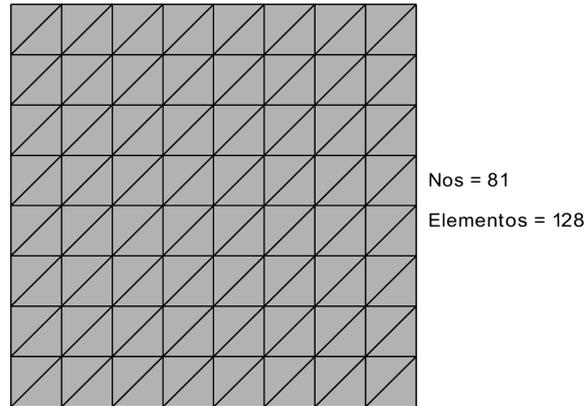
Nesse método, o cálculo dos fatores ortotrópicos é realizado pelas expressões definidas em (5.49):

$$k_x^i(x, y) = \frac{\bar{E}_{2Dx}(x, y)}{\bar{E}_{3Dx}^i(x, y)} \quad \text{e} \quad k_y^i(x, y) = \frac{\bar{E}_{2Dy}(x, y)}{\bar{E}_{3Dy}^i(x, y)}. \quad (6.11)$$

Para minimizar os erros inerentes ao MEFG, emprega-se uma malha refinada denominada *M16P4*. Essa malha é composta por elementos triangulares retangulares, com 16 unidades em cada borda e grau de enriquecimento polinomial  $p = 4$ . Ao todo, 128 elementos são utilizados para representar o domínio quadrado. Além disso, adota-se a regra proposta por Wandzurat e Xiao (2003) na integração numérica, utilizando 54 pontos em cada elemento. A Figura 14 ilustra essa configuração de malha.

Inicialmente, o problema é resolvido pelo MEFG com os fatores iniciais  $k_x^0 = k_y^0 = 1$  e os resultados para os deslocamentos generalizados e coeficientes de enriquecimento são armazenados no vetor  $\mathbf{U}$ . Posteriormente, são calculadas as densidades de energia de cisalhamento  $\bar{E}_{2D}^0(x, y)$  e  $\bar{E}_{3D}^i(x, y)$  nos pontos de integração de cada elemento, utilizando as tensões  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$  fornecidas pelas relações constitutivas em (2.15), bem como as tensões melhoradas calculadas

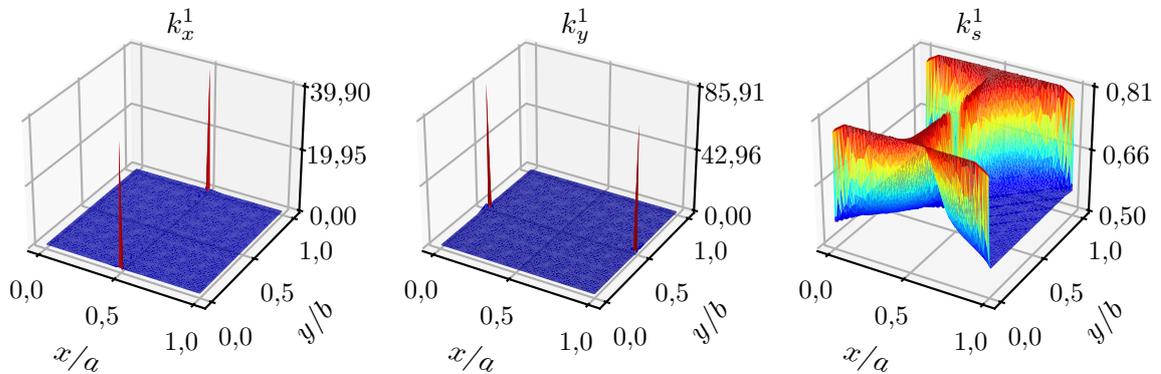
Figura 14: Malha  $M16P4$  utilizada no MEFG para a placa  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ .



nas etapas de pós-processamento:  $\tau_{xz}^i$  e  $\tau_{yz}^i$  em (4.7) e (4.4).

Assim, pode-se calcular os fatores de correção de cisalhamento de (5.49) em todos os pontos de integração. O resultado para a primeira iteração,  $k_s^1$ ,  $k_x^1$  e  $k_y^1$ , é apresentado graficamente na Figura 15.

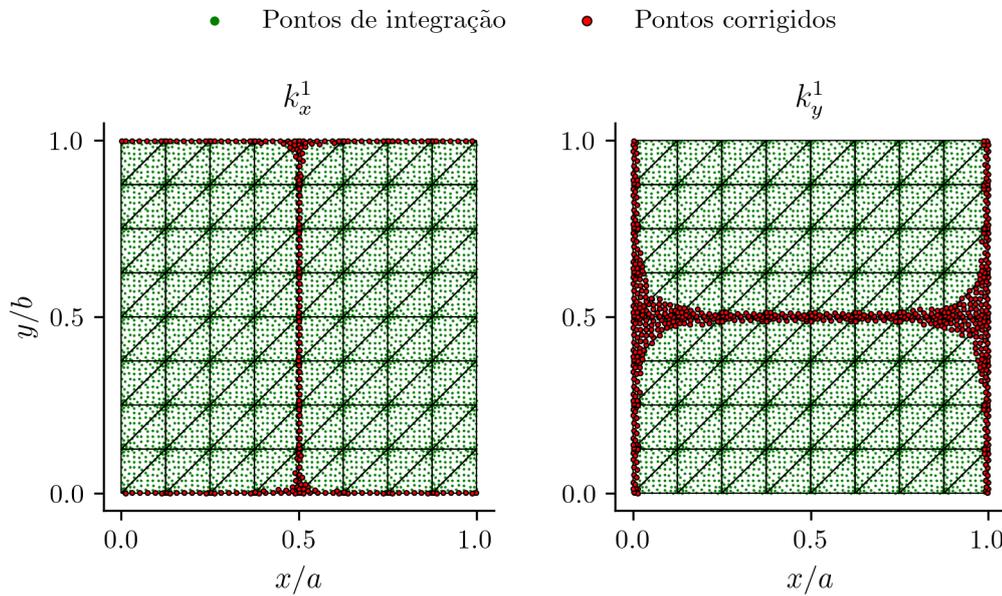
Figura 15:  $k_x^1$ ,  $k_y^1$  e  $k_s^1$  calculados nos pontos de integração para a placa  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$  com  $H/a = 0,1$ .



Visualmente, observam-se picos nos gráficos de  $k_x^1$  e  $k_y^1$ , localizados onde  $E_{3Dx}^i \approx 0$  ou  $E_{3Dy}^i \approx 0$ . Além disso, há picos de menor magnitude que não são visíveis na figura. Esses valores têm pouco impacto no resultado final, pois são multiplicados pela energia associada na forma fraca em (2.30), resolvida pelo MEFG. No entanto, como precaução, esses valores são ajustados para evitar um excesso de rigidez localizada na análise. Dessa forma, seguindo o procedimento detalhado na seção 5.5.3, com uma tolerância de  $\epsilon_K = 10^{-3}$ , os resultados discrepantes são ajustados para coincidir com a mediana de  $k_x^1$  ou  $k_y^1$ , no elemento. Os pontos de integração afetados são destacados na Figura 16.

Mesmo após o ajuste dos valores de correção, ainda são observados alguns picos e vales

Figura 16: Pontos de integração ajustados para  $k_x^1$  e  $k_y^1$  com tolerância de  $\epsilon_K = 10^{-3}$ , conforme descrito no procedimento da seção 5.5.3.



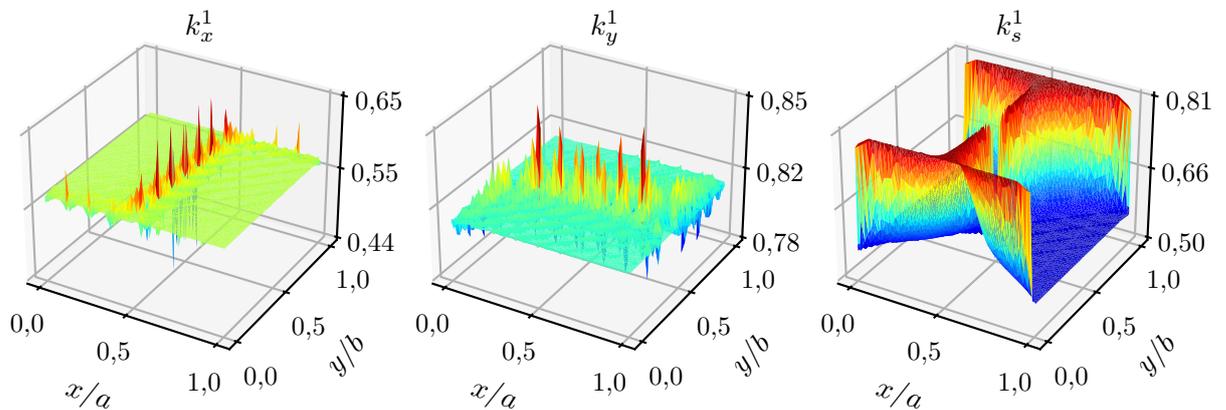
de menor magnitude em  $k_x^1(a/2, y)$  e em  $k_y^1(x, b/2)$ , conforme ilustrado na Figura 17.

Além disso, mesmo ao desconsiderar os valores acentuados, observa-se que  $k_x^1$  e  $k_y^1$  apresentam uma variação com  $(x, y)$ , embora pequena, em contraste com os valores constantes determinados pelo método analítico em (6.7). Por exemplo, ao excluir os valores extremos situados à esquerda do 5º percentil e à direita do 95º percentil, ou seja,  $P_5 \leq k_x^1 \leq P_{95}$  para  $k_x^1$  e  $k_y^1$ , obtêm-se:

$$\begin{aligned} 0,5598 &\leq k_x^1(x, y) \leq 0,5672, \\ 0,8045 &\leq k_y^1(x, y) \leq 0,8136, \end{aligned} \quad (6.12)$$

O resultado em (6.12) mostra que a mediana de  $k_x^1$  e  $k_y^1$  poderia ser utilizada para corrigir

Figura 17:  $k_x^1$ ,  $k_y^1$  e  $k_s^1$  após correção dos valores acentuados com  $\epsilon_K = 10^{-3}$ .

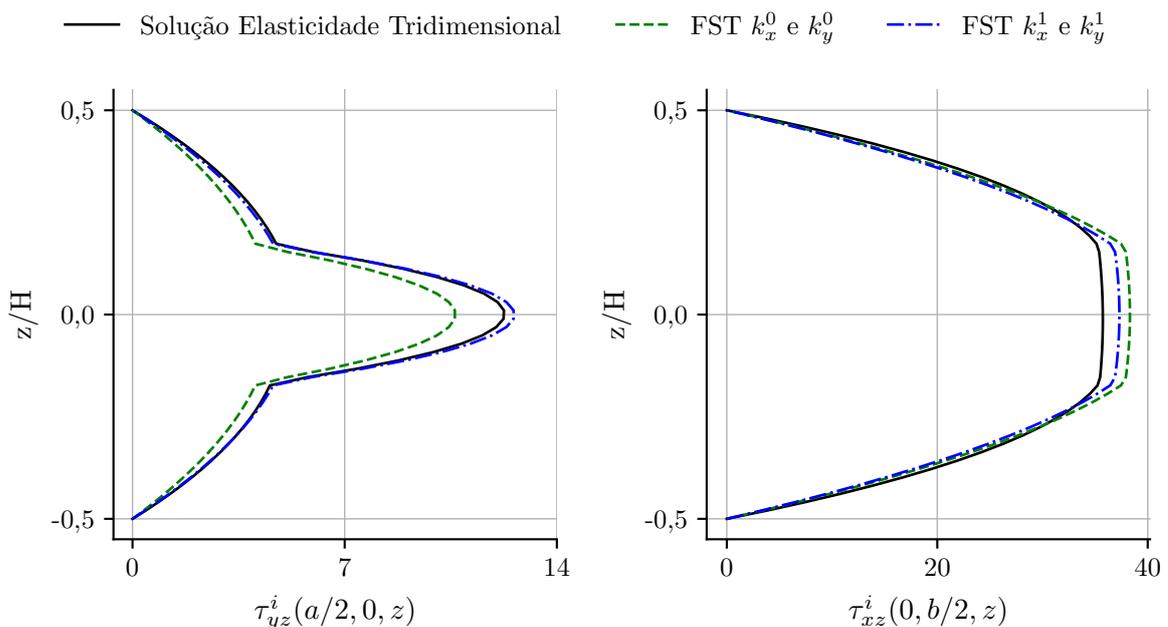


toda a placa, resultando em uma resposta estrutural semelhante para o laminado. No entanto, a variação é mantida na análise para potencialmente melhorar a efetividade da correção. Essa variação é atribuída aos erros associados à aproximação da solução pelo MEEG, que se somam aos erros das etapas de pós-processamento, e, conseqüentemente, afetam os fatores de correção. É importante ressaltar que esses picos não são observados no método analítico em (6.7).

Verifica-se que os valores médios de  $k_x^1$  e  $k_y^1$  são muito próximos daqueles obtidos pelo método de Whitney em (6.10), mas diferem um pouco dos calculados pelo método analítico em (6.7), especialmente para  $k_y^1$ . Isso ocorre porque a abordagem de Whitney utiliza a mesma razão de  $\bar{E}_{2D}^s/\bar{E}_{3D}^s$  que o método iterativo na primeira iteração, porém com a energia total determinada de forma analítica. Além disso, observa-se que a distribuição do fator de correção isotrópico  $k_s^1$  é semelhante àquela do método analítico, mas com uma amplitude de variação maior:  $0,5 \leq k_s^1 \leq 0,81$ .

A Figura 18 mostra que os resultados para as tensões integradas,  $\tau_{xz}^i$  e  $\tau_{yz}^i$ , se aproximam da solução tridimensional com a aplicação dos fatores de correção determinados por (6.11) na primeira iteração do método ( $k_x^1$  e  $k_y^1$ ). Esse comportamento evidencia a natureza iterativa da abordagem. Dessa forma, espera-se que o cálculo de  $\bar{E}_{3D}^i$  seja ainda mais preciso na segunda iteração do MEEG, resultando em melhorias nos fatores de correção subsequentes.

Figura 18: Comparação de  $\tau_{xz}^i(0, b/2)$  e  $\tau_{yz}^i(a/2, 0)$  ao longo da espessura com os resultados da FSDT obtidos para a placa  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$  com  $H/a = 0,1$ , utilizando  $k_x^0 = k_y^0 = 1$  e os valores ajustados  $k_x^1$  e  $k_y^1$ .



Sendo assim, os resultados nas iterações subsequentes são explorados. A Tabela 2

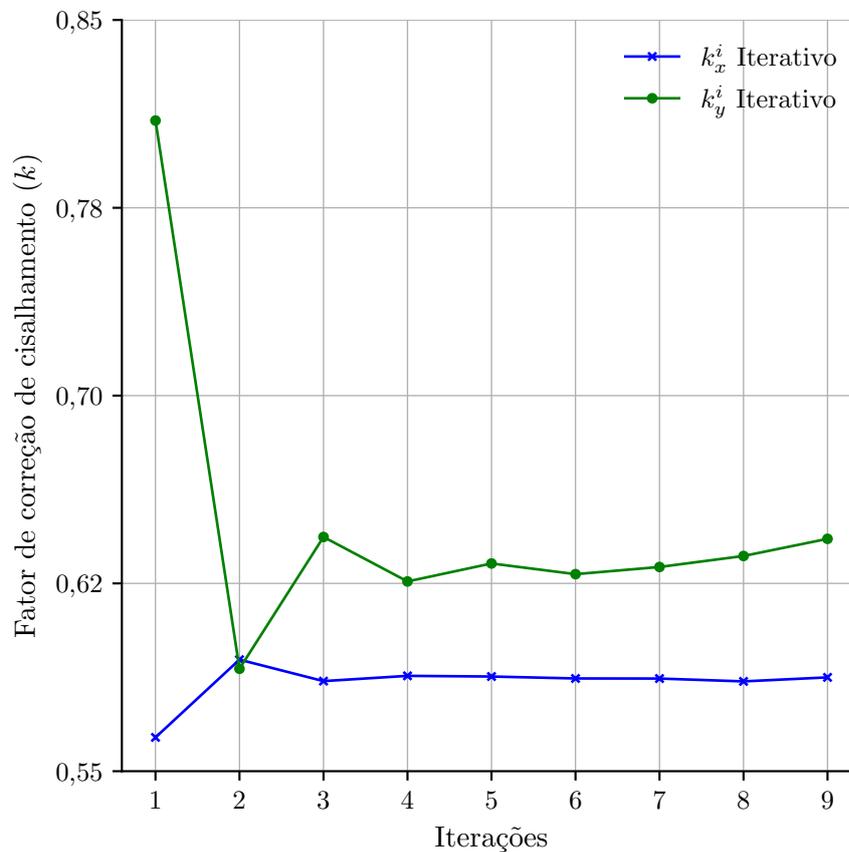
apresenta os valores médios de  $k_x^i$ ,  $k_y^i$  e  $k_s^i$  nas sete primeiras iterações do método.

Tabela 2: Valores médios de  $k_x^i$ ,  $k_y^i$  e  $k_s^i$  nas primeiras sete iterações do método para a placa  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ , com  $H/a = 0,1$ .

Iteração	$\bar{k}_x^i$	$\bar{k}_y^i$	$\bar{k}_s^i$
1	0,5635	0,8099	0,6161
2	0,5945	0,5909	0,5940
3	0,5860	0,6435	0,5990
4	0,5881	0,6258	0,5973
5	0,5878	0,6330	0,5981
6	0,5870	0,6287	0,5973
7	0,5870	0,6316	0,5978

Adicionalmente, os resultados para  $\bar{k}_x^i$  e  $\bar{k}_y^i$  são ilustrados na Figura 19 para as nove primeiras iterações.

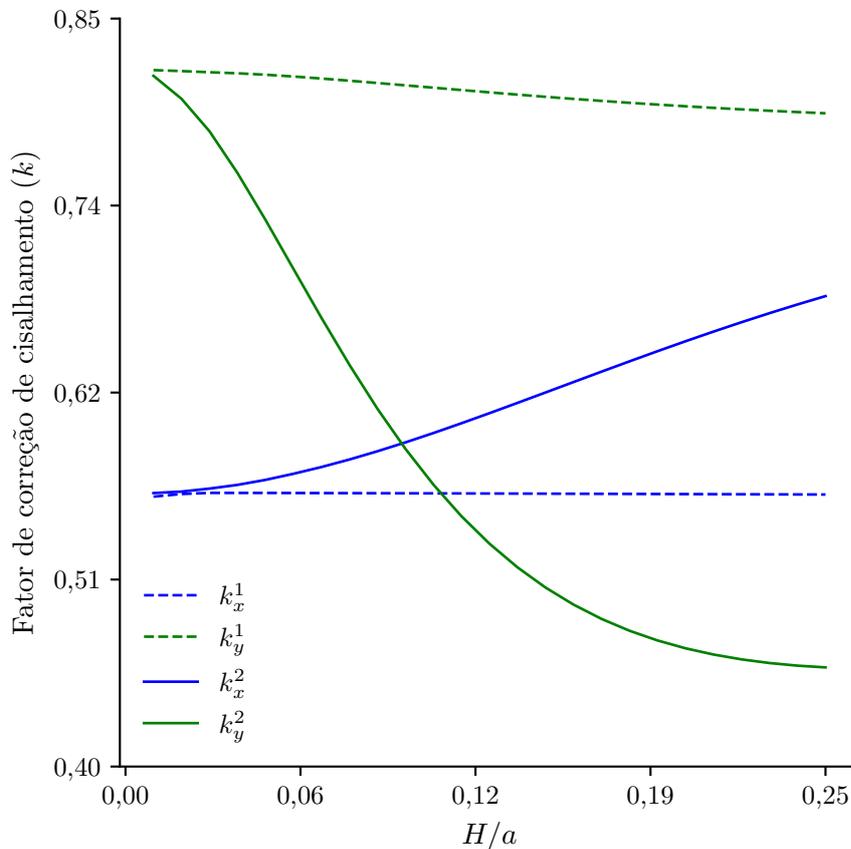
Figura 19: Valores médios de  $k_x^i$  e  $k_y^i$  ao longo de nove iterações para a placa  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ , com  $H/a = 0,1$ .



Observa-se que os valores médios começam a oscilar dentro de um pequeno intervalo após a terceira iteração, aproximando-se dos resultados obtidos pelo método analítico em (6.7). Além disso, nota-se uma variação significativa para  $k_y^i$  já a partir da segunda iteração

Pode-se também avaliar o comportamento de  $k_x^i$  e  $k_y^i$  com o aumento da espessura da placa,  $H$ . A Figura 20 revela que, na primeira iteração do método com  $k_x^1$  e  $k_y^1$ , os valores são praticamente constantes e independentes da razão  $H/a$ , semelhantemente ao método de Whitney. No entanto, na segunda iteração com  $k_x^2$  e  $k_y^2$ , observa-se uma variação significativa, similar ao comportamento apresentado na Figura 12 gerada pelo método analítico.

Figura 20: Variação de  $k_x^i$  e  $k_y^i$  com  $H/a$ , calculados na primeira e segunda iteração do método iterativo para a placa laminada  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ .

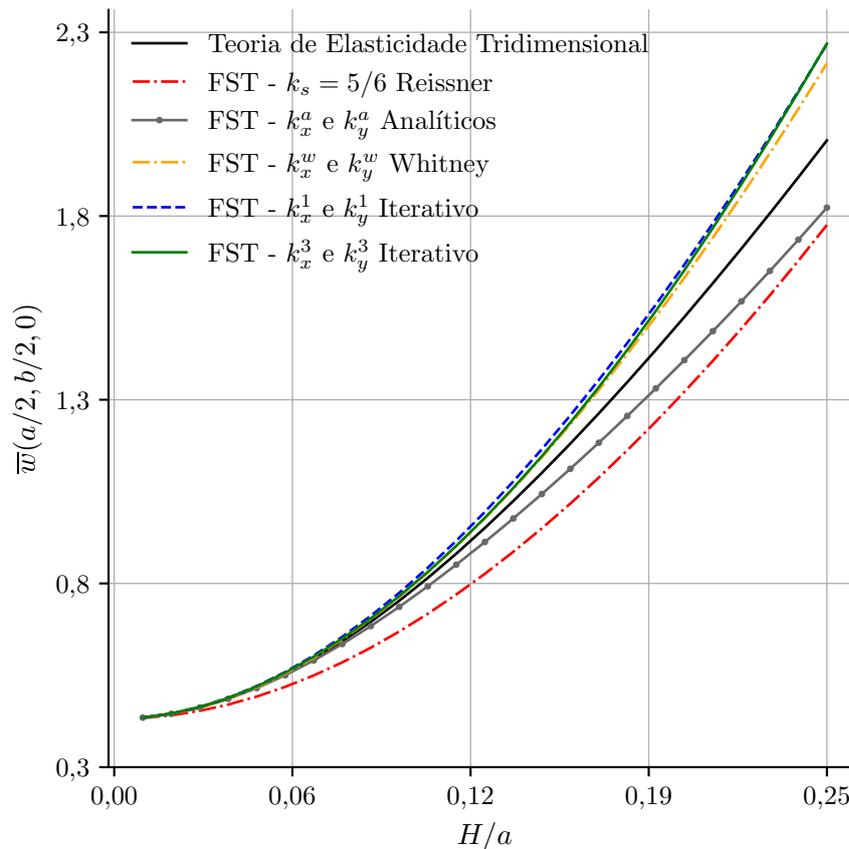


Embora do ponto de vista do custo computacional a execução de iterações não seja vantajosa para análises lineares, devido à necessidade de resolver um novo problema a cada iteração, sua utilização mostra-se interessante em análises não lineares. Nessas situações, a natureza iterativa do processo permite obter fatores de correção sem aumentar significativamente o processamento computacional, já que os cálculos podem ser realizados em conjunto com as etapas do método de Newton-Raphson.

### 6.1.5 Comparação entre os métodos de correção

A Figura 21 compara os resultados para as deflexões máximas normalizadas na superfície de referência,  $\bar{w}(a/2, b/2, 0)$ , obtidas pela FSDT com os valores de correção determinados pelos métodos apresentados para diferentes razões de espessura  $H/a$ .

Figura 21: Deslocamento transversal máximo,  $\bar{w}(a/2, b/2, 0)$ , em função de  $H/a$ , para os diferentes métodos de correção apresentados - placa laminada  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ .



Para placas muito finas ( $H/a \approx 0$ ), a Figura 21 mostra que os resultados para  $\bar{w}$  são semelhantes em todos os métodos, devido aos pequenos efeitos de cisalhamento em placas delgadas, tornando a correção pouco significativa. Conforme a razão  $H/a$  aumenta, observa-se a desvantagem da utilização de  $k_s = 5/6$  em relação aos métodos específicos para placas laminadas. Enquanto o procedimento de Reissner começa a se afastar da solução logo no início do gráfico, em  $H/a \approx 0,05$ , os outros métodos permanecem próximos à curva até  $H/a \approx 0,15$ . Além disso, nota-se que os resultados apresentam pouca melhoria com as iterações no método iterativo, uma vez que os valores calculados na primeira iteração são suficientemente bons e mostram pouca variação em relação aos valores calculados na terceira. Em geral, a abordagem

de Whitney apresenta os valores mais próximos da solução tridimensional. No entanto, é importante destacar que seu desenvolvimento é baseado em um laminado ortotrópico semelhante ao problema em análise e não se espera obter o mesmo resultado em laminados com diferentes graus de anisotropia.

A seguir, para facilitar a comparação dos valores, os resultados para os deslocamentos e tensões são normalizados nos respectivos pontos apresentados, seguindo o procedimento adotado por Pagano (1969):

$$\begin{aligned}
\bar{w} &= w \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0 \right) \frac{H^3 E_2 10^2}{q_0 a^4}, & \bar{u} &= u \left( 0, \frac{b}{2}, \frac{H}{2} \right) \frac{H^2 E_2}{q_0 a^3}, \\
\bar{v} &= v \left( \frac{a}{2}, 0, \frac{H}{2} \right) \frac{H^2 E_2}{q_0 a^3}, & \bar{\sigma}_x &= \sigma_x \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{H}{2} \right) \frac{H^2}{q_0 a^2}, \\
\bar{\sigma}_y &= \sigma_y \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{H}{6} \right) \frac{H^2}{q_0 a^2}, & \bar{\tau}_{xy} &= \tau_{xy} \left( 0, 0, -\frac{H}{2} \right) \frac{H^2}{q_0 a^2}, \\
\bar{\tau}_{xz} &= \tau_{xz} \left( 0, \frac{b}{2}, 0 \right) \frac{H}{q_0 a}, & \bar{\tau}_{yz} &= \tau_{yz} \left( \frac{a}{2}, 0, 0 \right) \frac{H}{q_0 a}, \\
\bar{\sigma}_z &= \sigma_z \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{H}{2} \right) \frac{1}{q_0}.
\end{aligned} \tag{6.13}$$

Os valores que aparecem como  $(\bullet)^e$  nas tabelas abaixo representam o erro relativo em percentual, calculados em relação à solução tridimensional, conforme a equação:

$$(\bullet)^e = 100 \left| \frac{(\bullet)_{approx} - (\bullet)_{3D}}{(\bullet)_{3D}} \right|. \tag{6.14}$$

A Tabela 3 apresenta a comparação dos resultados para as tensões coplanares normalizadas nos pontos definidos em (6.13), acompanhados dos respectivos erros relativos. Esses resultados são obtidos por meio da solução da FSDT, alcançada pelo MEEG, com a aplicação dos diversos fatores de correção de cisalhamento determinados anteriormente.

Nos pontos analisados, observa-se uma melhora significativa para  $\bar{\sigma}_y$  e  $\bar{\tau}_{xy}$  em todos os métodos de correção específicos para laminados, em comparação com a simples imposição de  $k_s = 5/6$ . Em alguns casos, os erros foram reduzidos de cerca de 11% para menos de 1%.

No entanto, a tensão  $\bar{\sigma}_x$  se afasta um pouco da solução tridimensional. Isso pode ser explicado com ajuda da Figura 8, que ilustra que valores maiores de  $k_s$  tendem a reduzir o erro para  $\bar{\sigma}_x$ . Assim, a utilização de  $k_s = 5/6$  apresenta resultados um pouco melhores para essa

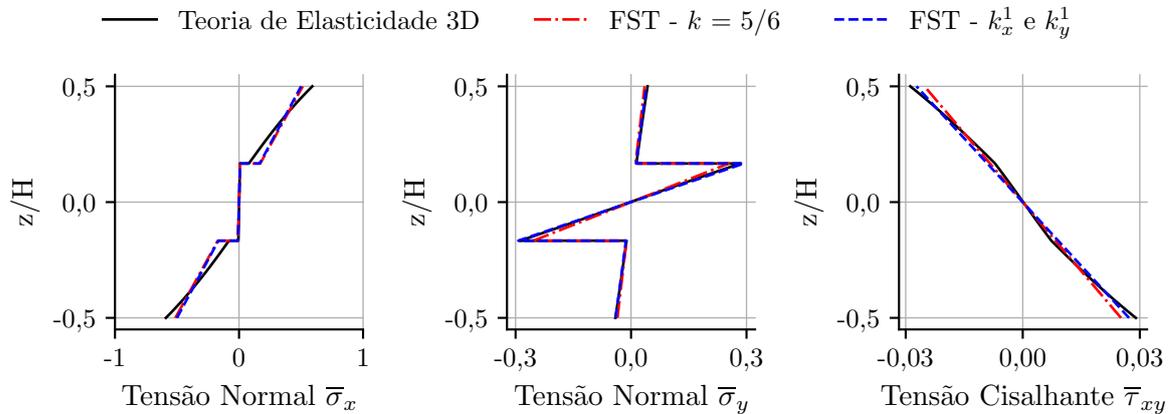
Tabela 3: Tensões coplanares normalizadas para a placa laminada  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ , com  $H/a = 0, 1$ , determinadas pela FSDT com a aplicação de diferentes fatores de correção de cisalhamento.

	Elast. 3D	Reissner ( $k_s = 5/6$ )	Whitney ( $k_x^w$ e $k_y^w$ )	2D/3D Analítico ( $k_x^a$ e $k_y^a$ )	2D/3D <sup>i</sup> MEFG ( $k_x^1$ e $k_y^1$ )	2D/3D <sup>i</sup> MEFG ( $k_x^3$ e $k_y^3$ )
$\bar{\sigma}_x$	0,5906	0,5134 (13,06) <sup>e</sup>	0,5014 (15,10) <sup>e</sup>	0,5068 (14,19) <sup>e</sup>	0,4999 (15,34) <sup>e</sup>	0,5034 (14,76) <sup>e</sup>
$\bar{\sigma}_y$	0,2845	0,2536 (10,84) <sup>e</sup>	0,2888 (1,527) <sup>e</sup>	0,2729 (4,051) <sup>e</sup>	0,2929 (2,986) <sup>e</sup>	0,2829 (0,559) <sup>e</sup>
$\bar{\tau}_{xy}$	0,0290	0,0252 (13,14) <sup>e</sup>	0,0270 (6,758) <sup>e</sup>	0,0262 (9,633) <sup>e</sup>	0,0272 (6,028) <sup>e</sup>	0,0267 (7,860) <sup>e</sup>

componente de tensão, mas isso ocorre por coincidência, não por um aprimoramento sistemático do método.

Além da comparação fornecida pela Tabela 3, os resultados para as tensões coplanares são apresentados graficamente ao longo da espessura  $H$  do laminado na Figura 22. Como os valores são muito próximos em todos os métodos, apenas os resultados para as curvas envolvendo a aplicação de  $k_s = 5/6$  e  $(k_x^1, k_y^1)$  são plotados.

Figura 22: Tensões coplanares normalizadas para a placa laminada  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ , com  $H/a = 0, 1$ , determinadas pela FSDT com  $k_s = 5/6$  e pela primeira iteração do método iterativo  $(k_x^1, k_y^1)$ .



A diferença mínima nos gráficos deve-se à influência pouco expressiva do fator de correção nos resultados coplanares. No entanto, é perceptível uma melhoria em toda a espessura para  $\bar{\sigma}_y$  e  $\bar{\tau}_{xy}$ . Além disso, a qualidade das derivadas parciais dessas tensões é fundamental para o cálculo das tensões transversais integradas em (4.1). Dessa forma, mesmo pequenas alterações podem ter um impacto significativo nos resultados transversais.

A Tabela 4 compara os resultados das tensões transversais,  $\bar{\tau}_{xz}$ ,  $\bar{\tau}_{yz}$  e  $\bar{\sigma}_z$ , calculadas pelo processo de integração das equações de equilíbrio tridimensional. Destaca-se que os valores de  $\bar{\sigma}_z$  são apresentados sem as correções de (4.11) na superfície superior do laminado, em  $z = H/2$ , para viabilizar a comparação nesse ponto, enquanto as tensões cisalhantes incorporam as funções

de correção  $f_x$  e  $f_y$ .

Tabela 4: Tensões transversais normalizadas para a placa laminada  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ , com  $H/a = 0, 1$ , determinadas pela FSDT com a aplicação de diferentes fatores de correção de cisalhamento.

	Elast. 3D	Reissner ( $k_s = 5/6$ )	Whitney ( $k_x^w$ e $k_y^w$ )	2D/3D Analítico ( $k_x^a$ e $k_y^a$ )	2D/3D <sup>i</sup> MEFG ( $k_x^1$ e $k_y^1$ )	2D/3D <sup>i</sup> MEFG ( $k_x^3$ e $k_y^3$ )
$\bar{\tau}_{xz}$	0,3573	0,3809 (6,596) <sup>e</sup>	0,3734 (4,665) <sup>e</sup>	0,3770 (5,535) <sup>e</sup>	0,3731 (4,401) <sup>e</sup>	0,3751 (4,975) <sup>e</sup>
$\bar{\tau}_{yz}$	0,1227	0,1109 (9,651) <sup>e</sup>	0,1244 (1,379) <sup>e</sup>	0,1183 (3,595) <sup>e</sup>	0,1260 (2,660) <sup>e</sup>	0,1221 (0,550) <sup>e</sup>
$\bar{\sigma}_z$	1,0000	1,0456 (4,557) <sup>e</sup>	1,0448 (4,478) <sup>e</sup>	1,0449 (4,492) <sup>e</sup>	1,0400 (4,004) <sup>e</sup>	1,0439 (4,394) <sup>e</sup>

Assim como nas tensões coplanares, os resultados mostram uma precisão superior ao serem obtidos pela aplicação dos fatores de correção adaptados para laminados, em comparação com o valor fixo de  $k_s = 5/6$ . O erro relativo para  $\bar{\tau}_{yz}$  teve a maior redução, diminuindo de 9,65% com  $k_s = 5/6$  para 0,55% na terceira iteração do método iterativo, com  $k_x^3$  e  $k_y^3$ . Observa-se também uma melhoria para  $\bar{\tau}_{xz}$ , embora menos acentuada, com a redução de cerca de 2% no erro relativo. Enquanto isso,  $\bar{\sigma}_z$  praticamente não apresentou variação entre os métodos, mantendo os erros em torno de 4%.

A Figura 23 ilustra os resultados para a distribuição das tensões transversais em  $z$ . Observa-se que a seleção adequada dos fatores de correção não apenas melhora pontos específicos, mas também beneficia a distribuição ao longo de toda a espessura da placa laminada. Como os valores determinados para  $\bar{\tau}_{xz}$  e  $\bar{\sigma}_z$  são muito próximos em todos os métodos, apenas as curvas associadas à correção de Reissner, com  $k_s = 5/6$ , e à primeira iteração do método iterativo, com  $k_x^1$  e  $k_y^1$ , são ilustradas para essas tensões.

A Tabela 5 compara os deslocamentos normalizados ( $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$  e  $\bar{w}$ ) calculados pela FSDT, aplicando diferentes fatores de correção, com os valores determinados pela solução tridimensional. Esses deslocamentos são calculados utilizando as etapas de pós-processamento, conforme as expressões em (4.32) e (4.29), nos pontos escolhidos para as normalizações em (6.13).

Tabela 5: Deslocamentos normalizados para a placa laminada  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ , com  $H/a = 0, 1$ , determinados com diferentes métodos de correção de cisalhamento.

	Elast. 3D	Reissner ( $k_s = 5/6$ )	Whitney ( $k_x^w$ e $k_y^w$ )	2D/3D Analítico ( $k_x^a$ e $k_y^a$ )	2D/3D <sup>i</sup> MEFG ( $k_x^1$ e $k_y^1$ )	2D/3D <sup>i</sup> MEFG ( $k_x^3$ e $k_y^3$ )
$\bar{u}$	-0,00735	-0,00590 (19,7) <sup>e</sup>	-0,00747 (1,57) <sup>e</sup>	-0,00700 (4,77) <sup>e</sup>	-0,00764 (3,91) <sup>e</sup>	-0,00747 (1,59) <sup>e</sup>
$\bar{v}$	-0,01099	-0,00982 (10,7) <sup>e</sup>	-0,01122 (2,10) <sup>e</sup>	-0,01083 (1,48) <sup>e</sup>	-0,01138 (3,49) <sup>e</sup>	-0,01125 (2,36) <sup>e</sup>
$\bar{w}$	0,7530	0,6699 (11,1) <sup>e</sup>	0,7640 (1,43) <sup>e</sup>	0,7369 (2,17) <sup>e</sup>	0,7743 (2,80) <sup>e</sup>	0,7651 (1,57) <sup>e</sup>

Figura 23: Tensões transversais normalizadas para a placa laminada  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ , com  $H/a = 0,1$ , determinadas pela FSDT com a aplicação de diferentes fatores de correção de cisalhamento.

- Elasticidade 3D
- FST -  $k_x^w$  e  $k_y^w$
- · - FST -  $k_s = 5/6$
- · - FST -  $k_x^1$  e  $k_y^1$
- FST -  $k_x^a$  e  $k_y^a$
- FST -  $k_x^3$  e  $k_y^3$

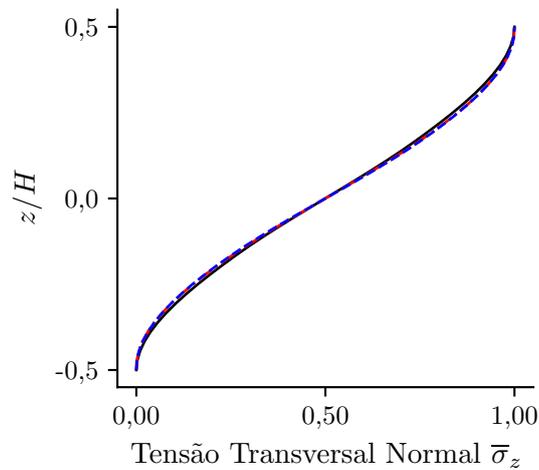
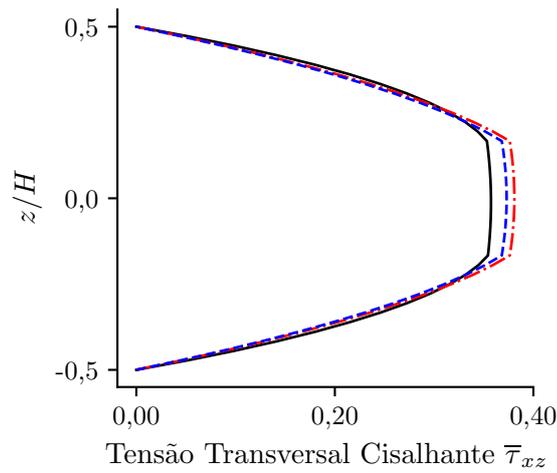
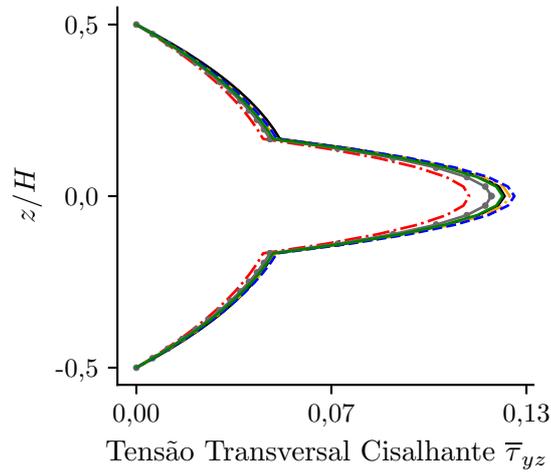
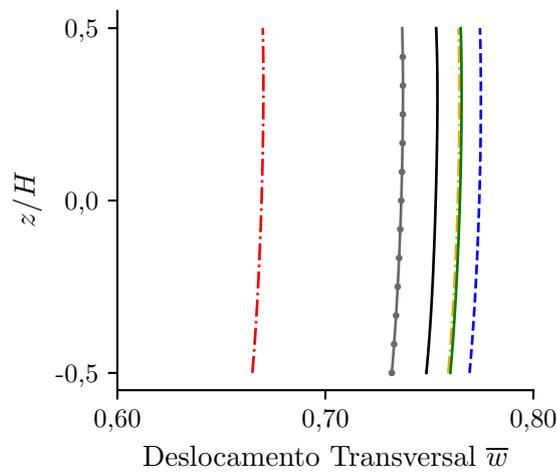
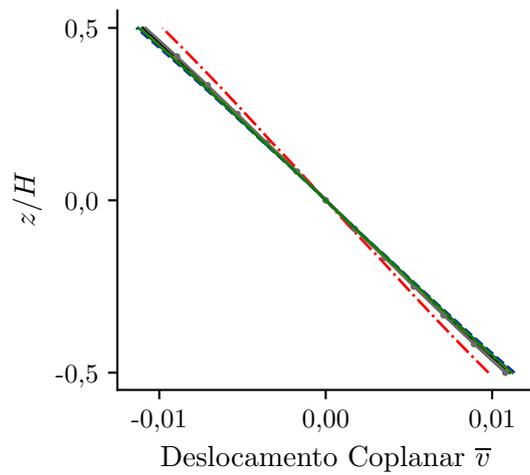
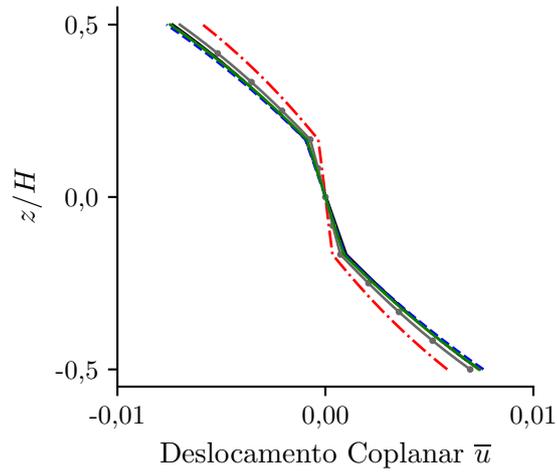
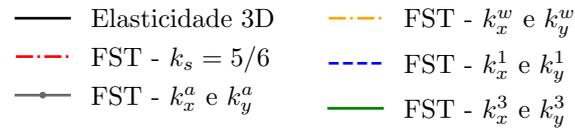


Figura 24: Deslocamentos normalizados para a placa laminada  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ , com  $H/a = 0,1$ , determinados pela FSDT com a aplicação de diferentes fatores de correção de cisalhamento.



Os resultados apresentados na Tabela 5 destacam a importância dos fatores de correção na precisão dos deslocamentos calculados pela FSDT. A aplicação dos valores determinados pelo método iterativo na terceira iteração, assim como os fatores determinados por Whitney, apresentam os melhores resultados nos pontos avaliados. Por exemplo, o erro relativo de quase 20% para o deslocamento coplanar  $\bar{u}$ , obtido pela FSDT no topo da placa, calculado com o fator de correção fixo das placas homogêneas ( $k_s = 5/6$ ), é reduzido para aproximadamente 1.6% com a aplicação desses métodos. O deslocamento  $\bar{v}$  também apresenta uma redução significativa de erro, de 10.7% para 2.1% na abordagem de Whitney, enquanto o método analítico, de referência, alcança uma precisão ainda maior, de 1.48%. O deslocamento transversal  $\bar{w}$  na superfície média também se aproxima da solução tridimensional, com a redução do erro de 11% para cerca de 1.5%.

A Figura 24 mostra a variação dos deslocamentos normalizados ao longo da espessura do laminado nos pontos  $(x, y)$  definidos pelas normalizações em (6.13). Observa-se que o padrão de resultados da Tabela 5 se repete em todos os pontos ao longo de  $z$ , com os métodos específicos para laminados apresentando uma excelente proximidade com a solução analítica tridimensional, especialmente quando comparados com a correção uniforme proporcionada pela aplicação de  $k_s = 5/6$ .

Além disso, nota-se que os valores de  $\bar{u}$  e  $\bar{v}$  na superfície de referência da placa, em  $z = 0$ , são idênticos em todos os métodos. Assim, a diferença dos resultados se manifesta exclusivamente nas etapas de pós-processamento para os deslocamentos coplanares, definidas nas equações em (4.32) e (4.29). Por outro lado, observa-se uma melhora generalizada para  $\bar{w}$  em todos os pontos, inclusive na superfície média. Isso é evidenciado pela translação da curva no terceiro gráfico da Figura 24 em direção à solução tridimensional conforme os valores de correção são aprimorados.

Outrossim, o gráfico para  $\bar{w}$  revela que o método iterativo proposto gera resultados próximos, porém não idênticos, ao método analítico mesmo na terceira iteração. Essa discrepância se deve aos erros associados ao MEEG e à aproximação da densidade de energia tridimensional utilizada no método iterativo, enquanto o método analítico emprega a solução exata. Adicionalmente, o método iterativo aplica correções específicas nos pontos de integração, ao invés de utilizar os mesmos valores em toda a placa, o que também contribui para essa diferença. Essa mesma explicação justifica as diferenças nos resultados entre a primeira iteração do método e o método de Whitney, apesar de ambos seguirem ideias semelhantes durante o desenvolvimento.

### 6.1.6 Deslocamentos e tensões para diferentes razões de espessura $H/a$ .

Nesta subsecção, são apresentados os resultados envolvendo os deslocamentos e tensões para a mesma placa laminada  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ , porém com diferentes razões de espessura  $H/a$ .

Inicialmente, considera-se a razão  $H/a = 0,01$  ( $H = 10$  mm), que corresponde a uma placa fina, onde os efeitos de cisalhamento são pequenos. Os valores normalizados para os deslocamentos e tensões são apresentados na Tabela 6.

Tabela 6: Tensões e deslocamentos para a placa laminada  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ , com  $H/a = 0,01$ , determinados pela FSDT com a aplicação de diferentes fatores de correção de cisalhamento.

	Elast. 3D	Reissner ( $k_s = 5/6$ )	Whitney ( $k_x^w$ e $k_y^w$ )	2D/3D Analítico ( $k_x^a$ e $k_y^a$ )	2D/3D <sup>i</sup> MEFG ( $k_x^1$ e $k_y^1$ )	2D/3D <sup>i</sup> MEFG ( $k_x^3$ e $k_y^3$ )
$\bar{\sigma}_x$	0,5392	0,5384 (0,16) <sup>e</sup>	0,5383 (0,18) <sup>e</sup>	0,5383 (0,18) <sup>e</sup>	0,5382 (0,18) <sup>e</sup>	0,5382 (0,19) <sup>e</sup>
$\bar{\sigma}_y$	0,1808	0,1804 (0,22) <sup>e</sup>	0,1808 (0,01) <sup>e</sup>	0,1808 (0,02) <sup>e</sup>	0,1809 (0,03) <sup>e</sup>	0,1809 (0,04) <sup>e</sup>
$\bar{\tau}_{xy}$	0,0214	0,0213 (0,20) <sup>e</sup>	0,0213 (0,09) <sup>e</sup>	0,0213 (0,09) <sup>e</sup>	0,0213 (0,08) <sup>e</sup>	0,0213 (0,09) <sup>e</sup>
$\bar{\tau}_{xz}$	0,3947	0,3955 (0,20) <sup>e</sup>	0,3953 (0,18) <sup>e</sup>	0,3954 (0,18) <sup>e</sup>	0,3950 (0,08) <sup>e</sup>	0,3950 (0,09) <sup>e</sup>
$\bar{\tau}_{yz}$	0,0828	0,0826 (0,22) <sup>e</sup>	0,0828 (0,01) <sup>e</sup>	0,0828 (0,02) <sup>e</sup>	0,0827 (0,07) <sup>e</sup>	0,0828 (0,05) <sup>e</sup>
$\bar{\sigma}_z$	1,0000	1,0735 (7,35) <sup>e</sup>	1,0771 (7,71) <sup>e</sup>	1,0775 (7,75) <sup>e</sup>	1,0856 (8,54) <sup>e</sup>	1,0826 (8,26) <sup>e</sup>
$\bar{u}$	-0,00678	-0,00676 (0,23) <sup>e</sup>	-0,00678 (0,01) <sup>e</sup>	-0,00678 (0,01) <sup>e</sup>	-0,00678 (0,03) <sup>e</sup>	-0,00678 (0,03) <sup>e</sup>
$\bar{v}$	-0,00682	-0,00681 (0,23) <sup>e</sup>	-0,00682 (0,01) <sup>e</sup>	-0,00682 (0,01) <sup>e</sup>	-0,00682 (0,04) <sup>e</sup>	-0,00682 (0,04) <sup>e</sup>
$\bar{w}$	0,43472	0,43370 (0,23) <sup>e</sup>	0,43474 (0,01) <sup>e</sup>	0,43474 (0,01) <sup>e</sup>	0,43485 (0,03) <sup>e</sup>	0,43485 (0,03) <sup>e</sup>

Em alguns métodos, os valores determinados para os fatores de correção não são os mesmos do problema de placa semiespessa ( $H/a = 0,1$ ), pois, conforme revelado nas Figuras 12 e 20, a correção varia com a espessura. Para o método analítico, obtêm-se:

$$k_x^a(x, y) = 0,582 \quad \text{e} \quad k_y^a(x, y) = 0,878, \quad (6.15)$$

enquanto os valores eram:  $k_x^a(x, y) = 0,644$  e  $k_y^a(x, y) = 0,656$  para a razão  $H/a = 0,1$ .

Já para a terceira iteração do método iterativo, em vez de  $\bar{k}_x^3 = 0,586$  e  $\bar{k}_y^3 = 0,643$ , os valores médios dos fatores de correção são dados por:

$$\bar{k}_x^3 = 0,563 \quad \text{e} \quad \bar{k}_y^3 = 0,810. \quad (6.16)$$

Avaliando a Tabela 6, verifica-se que os resultados para os deslocamentos e tensões são muito próximos da solução analítica, independentemente do fator de correção aplicado. Isso ocorre devido ao comportamento praticamente linear da resposta estrutural para os deslocamen-

tos  $\bar{u}$  e  $\bar{v}$ , apresentando boa correlação com a aproximação da FSDT, além da baixa influência dos efeitos de cisalhamento em placas finas.

Em um primeiro momento, destacam-se os erros elevados para  $\bar{\sigma}_z$  na superfície superior do laminado. Porém, esses valores são ajustados para satisfazer as condições de contorno por meio das funções de correção definidas em (4.11), sendo possível ignorá-los. Além disso, apesar da pequena influência dos fatores de correção em placas finas, é evidente que a escolha adequada dos fatores é capaz enriquecer a análise.

Em contraste aos excelentes resultados alcançados para a placa fina, a Tabela 7 apresenta os valores determinados para uma placa espessa formulada pela FSDT, com a razão  $H/a = 0,25$ , ou seja,  $H = 250$  mm. Novamente, os valores são normalizados e calculados nos pontos definidos em (6.13) para comparação.

Tabela 7: Tensões e deslocamentos para a placa laminada  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ , com  $H/a = 0,25$ , determinados pela FSDT com a aplicação de diferentes fatores de correção de cisalhamento.

	Elast. 3D	Reissner ( $k_s = 5/6$ )	Whitney ( $k_x^w$ e $k_y^w$ )	2D/3D Analítico ( $k_x^a$ e $k_y^a$ )	2D/3D <sup>i</sup> MEFG ( $k_x^1$ e $k_y^1$ )	2D/3D <sup>i</sup> MEFG ( $k_x^3$ e $k_y^3$ )
$\bar{\sigma}_x$	0,8008	0,4370 (45,4) <sup>e</sup>	0,3977 (50,3) <sup>e</sup>	0,4567 (43,0) <sup>e</sup>	0,3939 (50,8) <sup>e</sup>	0,3934 (50,9) <sup>e</sup>
$\bar{\sigma}_y$	0,5341	0,4774 (10,6) <sup>e</sup>	0,5925 (10,9) <sup>e</sup>	0,4195 (21,4) <sup>e</sup>	0,6035 (12,3) <sup>e</sup>	0,6049 (13,3) <sup>e</sup>
$\bar{\tau}_{xy}$	0,0505	0,0369 (26,9) <sup>e</sup>	0,0430 (14,9) <sup>e</sup>	0,0339 (32,9) <sup>e</sup>	0,0435 (13,8) <sup>e</sup>	0,0436 (13,6) <sup>e</sup>
$\bar{\tau}_{xz}$	0,2559	0,3370 (31,7) <sup>e</sup>	0,3144 (22,9) <sup>e</sup>	0,3483 (36,1) <sup>e</sup>	0,3122 (22,0) <sup>e</sup>	0,3120 (21,9) <sup>e</sup>
$\bar{\tau}_{yz}$	0,2172	0,1970 (9,29) <sup>e</sup>	0,2413 (11,1) <sup>e</sup>	0,1747 (19,5) <sup>e</sup>	0,2454 (13,0) <sup>e</sup>	0,2460 (13,3) <sup>e</sup>
$\bar{\sigma}_z$	1,0000	1,0405 (4,05) <sup>e</sup>	1,0386 (3,86) <sup>e</sup>	1,0414 (4,14) <sup>e</sup>	1,0331 (3,31) <sup>e</sup>	1,0345 (3,45) <sup>e</sup>
$\bar{u}$	-0,0097	-0,0033 (65,4) <sup>e</sup>	-0,0120 (23,7) <sup>e</sup>	-0,0032 (66,8) <sup>e</sup>	-0,0129 (33,4) <sup>e</sup>	-0,0130 (33,8) <sup>e</sup>
$\bar{v}$	-0,0228	-0,0214 (5,95) <sup>e</sup>	-0,0268 (17,5) <sup>e</sup>	-0,0230 (0,74) <sup>e</sup>	-0,0274 (20,3) <sup>e</sup>	-0,0274 (20,3) <sup>e</sup>
$\bar{w}$	2,0059	1,7757 (11,5) <sup>e</sup>	2,2160 (10,5) <sup>e</sup>	1,8229 (9,12) <sup>e</sup>	2,2656 (12,9) <sup>e</sup>	2,2664 (13,0) <sup>e</sup>

Nesse caso, os fatores de correção determinados pelo método analítico e iterativo na terceira iteração são os seguintes:

$$\begin{aligned} k_x^a &= 0,845 & \text{e} & \quad k_y^a &= 0,571, \\ \bar{k}_x^3 &= 0,563 & \text{e} & \quad \bar{k}_y^3 &= 0,810. \end{aligned} \tag{6.17}$$

A análise da Tabela 7 revela que os erros são significativos para a maioria dos resultados, não apresentando um padrão consistente de melhoria com a aplicação dos fatores de correção. Em alguns casos, o erro é reduzido, enquanto em outros ele aumenta em relação à aplicação do valor convencional  $k_s = 5/6$ . Esse comportamento também é observado com os fatores de correção analíticos, explicitando que os erros estão associados às próprias limitações da FSDT.

Figura 25: Comparação das tensões coplanares normalizadas para o problema de placa laminada simétrica [0°/90°/0] com as razões de espessura  $H/a = 0,01$  (à esquerda) e  $H/a = 0,25$  (à direita).

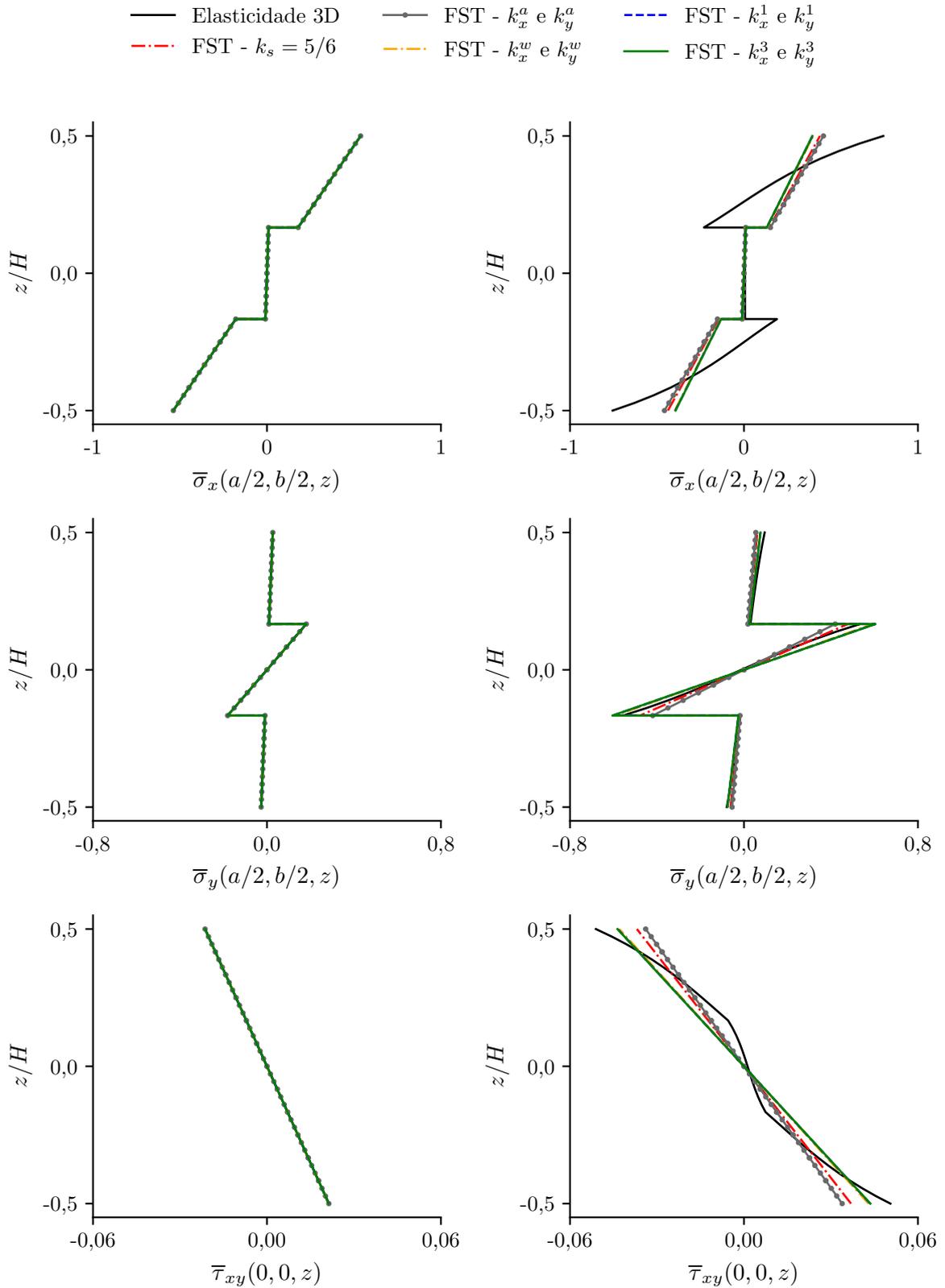


Figura 26: Comparação das tensões transversais normalizadas para o problema de placa laminada simétrica  $[0^\circ/90^\circ/0]$  com as razões de espessura  $H/a = 0,01$  (à esquerda) e  $H/a = 0,25$  (à direita).

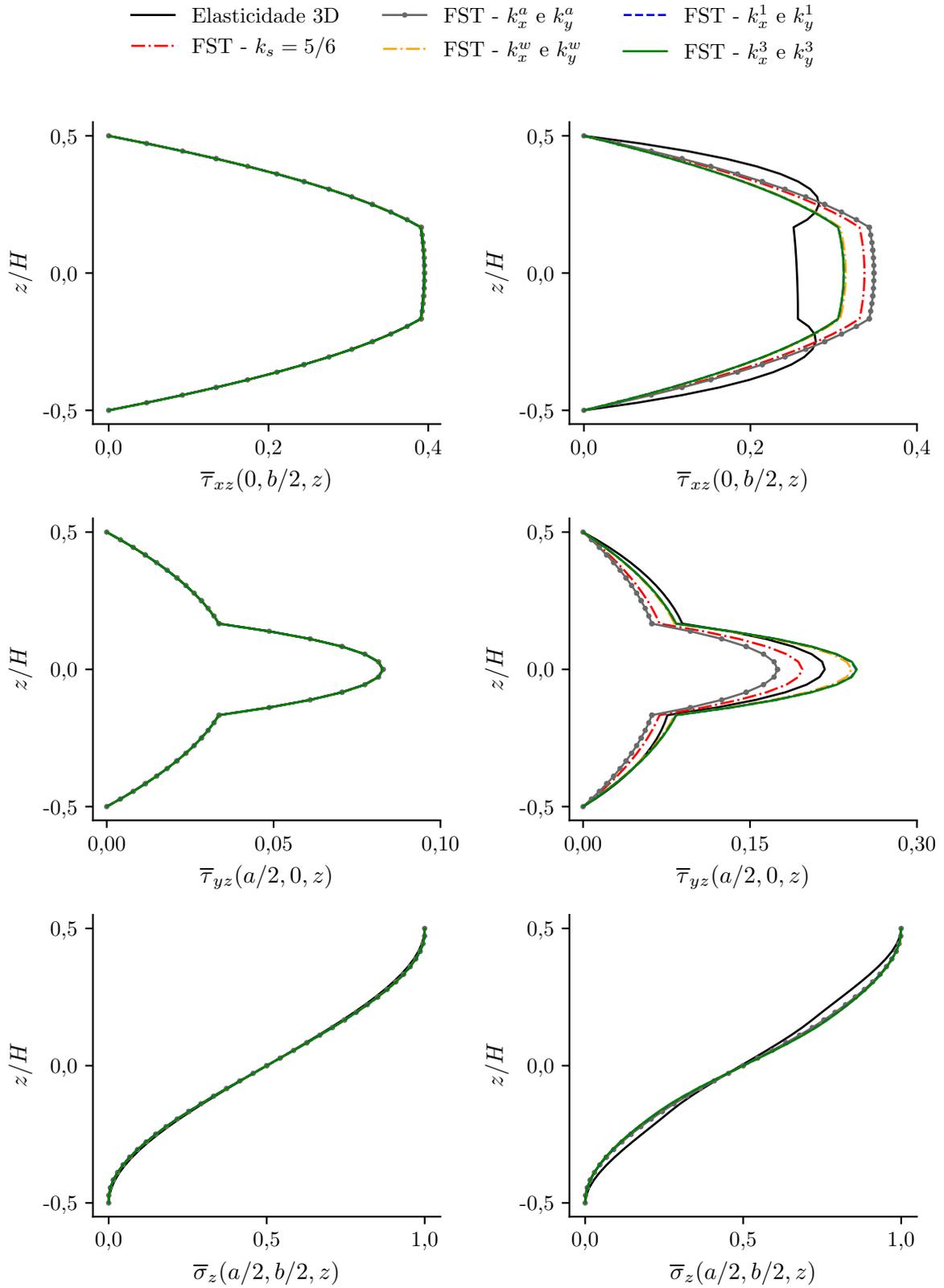
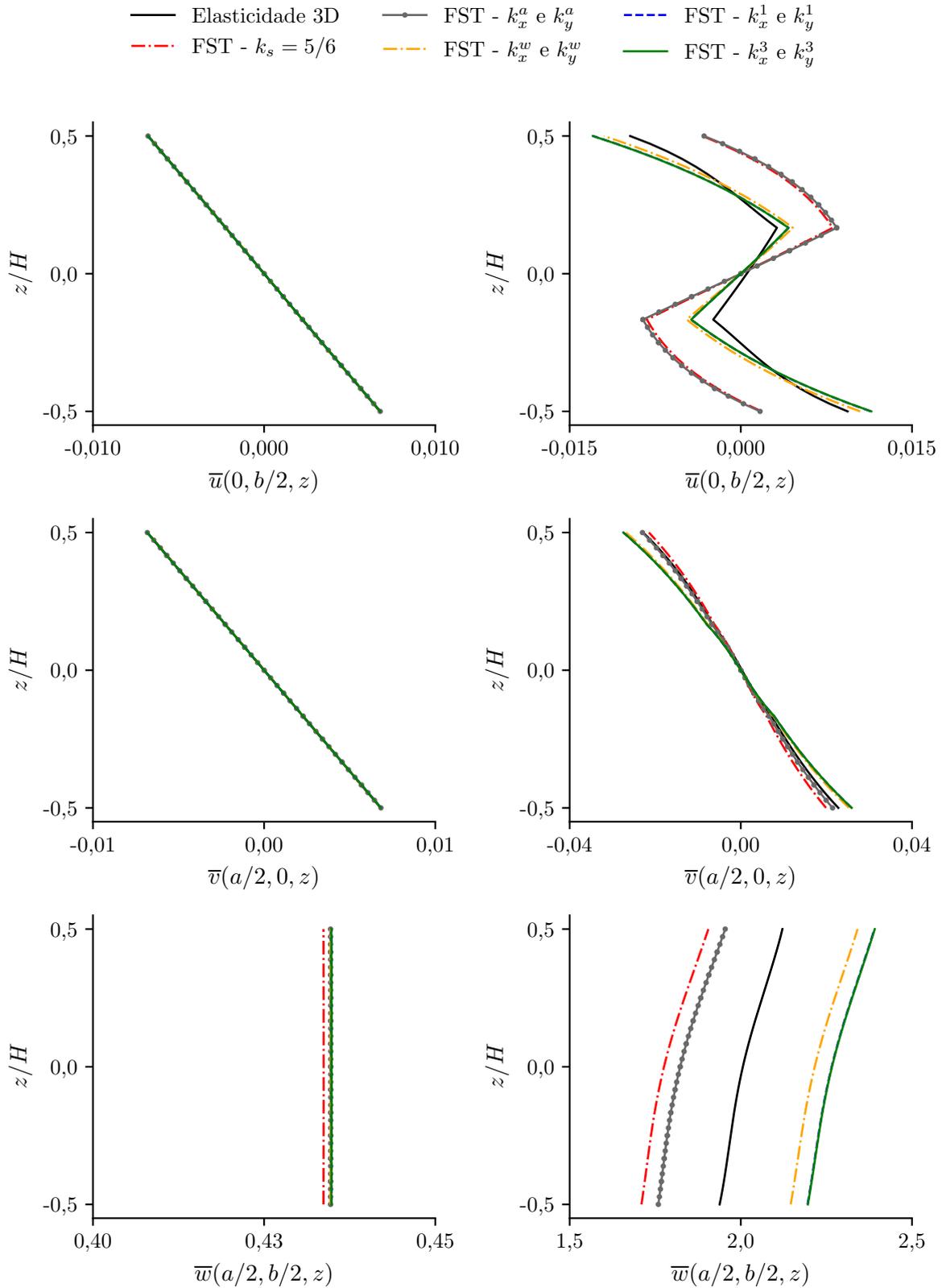


Figura 27: Comparação dos deslocamentos normalizados para o problema de placa laminada simétrica [0°/90°/0] com as razões de espessura  $H/a = 0,01$  (à esquerda) e  $H/a = 0,25$  (à direita).



As Figuras 25, 26 e 27 comparam, ao longo da espessura, os resultados para as tensões coplanares, tensões transversais e deslocamentos, respectivamente, obtidos para a placa fina ( $H/a = 0,01$ ) e para a placa espessa ( $H/a = 0,25$ ).

A Figura 27 mostra que a resposta estrutural para os deslocamentos coplanares,  $\bar{u}$  e  $\bar{v}$ , na placa com a razão  $H/a = 0,25$  não segue um modelo linear em  $z$ . Isso ressalta a limitação do modelo cinemático utilizado pela FSDT para a análise de placas espessas. Tal limitação explica os valores de erros acentuados obtidos na Tabela 7, nos quais os efeitos da correção aplicada para o cisalhamento transversal são ofuscados pelos erros associados ao próprio modelo de placa pressuposto.

Para a placa fina, com razão  $H/a = 0,01$ , ao analisar as Figuras 25, 26 e 27, verifica-se que os resultados são muito próximos da solução analítica em todos os métodos ao longo de toda a espessura da placa laminada. Além disso, visualmente, os fatores de correção adaptados para materiais laminados proporcionam uma melhor estimativa para o deslocamento transversal. Isso é evidenciado pelo afastamento da curva de  $\bar{w}$ , calculada com  $k_s = 5/6$ , na Figura 27, em relação às demais.

Portanto, as Figuras 25, 26 e 27 evidenciam as limitações da FSDT na análise de placas espessas, onde os efeitos tridimensionais têm maior impacto e os fatores de correção não são suficientes para ajustar completamente os resultados. Por outro lado, elas destacam os excelentes resultados obtidos para placas finas, que mostram pouca dependência dos fatores de correção, embora sua aplicação apropriada possa aprimorar ainda mais a precisão.

## 6.2 PLACA LAMINADA NÃO SIMÉTRICA ORTOTRÓPICA [0°/90°]

Nesse caso, uma placa ortotrópica não simétrica é analisada, composta por duas lâminas orientadas a [0°/90°], sujeita ao mesmo carregamento definido para o laminado simétrico em (6.3). É considerado que a placa está simplesmente apoiada, resultando nas mesmas condições de contorno descritas em (6.2). Além disso, as lâminas, feitas do mesmo material, possuem as propriedades mecânicas listadas na Tabela 1

A placa possui geometria retangular, com dimensões coplanares dadas por:

$$a = 1000 \text{ mm} \quad \text{e} \quad b = 500 \text{ mm.} \quad (6.18)$$

A espessura é a mesma do problema simétrico para a placa semiespessa:  $H = 100 \text{ mm}$ ,

o que corresponde a razão  $H/a = 0,1$ .

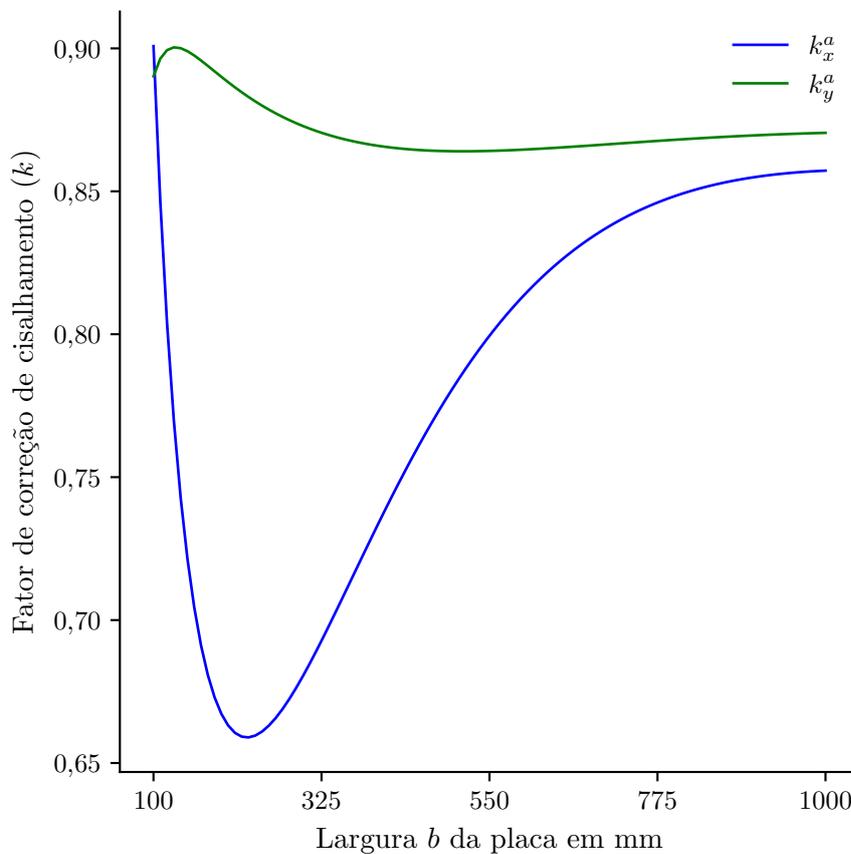
Novamente, a relação das densidades de energia é obtida de forma analítica para ser utilizada como método de correção de referência, sendo  $\bar{E}_{3D}$  determinada pela solução tridimensional de Pagano (1969) e  $\bar{E}_{2D}$  pela solução da FSDT de Whitney e Pagano (1970). Como resultado, os seguintes fatores de correção ortotrópicos são obtidos:

$$k_x^a(x, y) = 0,781 \quad \text{e} \quad k_y^a(x, y) = 0,864. \quad (6.19)$$

Assim como na placa laminada simétrica  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ , esses valores são uniformes na superfície de referência.

A Figura 28 ilustra a dependência dos fatores de correção determinados pelo método analítico com a largura  $b$  da placa laminada retangular, mantendo o comprimento  $a$  fixo. Observa-se que o fator de correção para o eixo  $x$  varia significativamente com a alteração da largura  $b$ , ao passo que  $k_y^a$  permanece praticamente constante.

Figura 28: Dependência de  $k_x^a$  e  $k_y^a$  analíticos com a largura  $b$  da placa laminada  $[0^\circ/90^\circ]$  com  $H/a = 0,1$ .



Por sua vez, a aplicação do método de Whitney, conforme as equações em (6.10), resulta

nos seguintes fatores de correção de cisalhamento:

$$k_x^w = 0,8212 \quad \text{e} \quad k_y^w = 0,8212, \quad (6.20)$$

apresentando a mesma correção para ambos os eixos de ortotropia do laminado. Além disso, ao contrário do método analítico, o método de Whitney independe da relação à relação comprimento/largura da placa.

No método iterativo, o domínio retangular é discretizado pelo MEFM com uma malha semelhante à ilustrada na Figura 14, denominada *M16P4*, composta por 16 elementos em cada borda e com grau de refinamento  $p = 4$ . Além disso, são utilizados os 54 pontos de integração definidos pela regra de Wandzurat e Xiao (2003). A tolerância para a correção dos valores calculados de  $k_x^i$  e  $k_y^i$ , conforme abordagem definida na seção 5.5.3, é estabelecida como  $\epsilon_K = 10^{-3}$ .

Da mesma forma que no caso do laminado simétrico, os fatores calculados pelo método iterativo não são uniformes, variando ligeiramente ao longo dos pontos de integração na superfície de referência. Isso ocorre devido aos erros associados ao MEFM, os quais não são idênticos para todos os pontos. Portanto, os valores médios obtidos nas primeiras cinco iterações são apresentados na Tabela 8.

Tabela 8: Valores médios de  $k_x^i$ ,  $k_y^i$  e  $k_s^i$  nas primeiras cinco iterações do método iterativo para a placa laminada  $[0^\circ/90^\circ]$  com  $H/a = 0,1$ .

Iteração	$\bar{k}_x^i$	$\bar{k}_y^i$	$\bar{k}_s^i$
1	0,7513	0,7824	0,7743
2	0,7159	0,7897	0,7684
3	0,7324	0,7840	0,7707
4	0,7279	0,7905	0,7718
5	0,7406	0,7804	0,7742

Pequenas variações são observadas nos valores calculados para os fatores de correção ao longo das iterações, mostrando que apenas uma iteração é suficiente para corrigir o problema linear em análise. Os resultados também são próximos aos obtidos pelo método analítico em (6.19) e pelo método de Whitney em (6.20). Além disso, os fatores não diferem significativamente dos valores determinados por Pai (1994) em seu estudo, dados por  $k_x = k_y = 0.8538$ .

Ainda da Tabela 8, nota-se que os valores de  $k_x^i$  e  $k_y^i$  não são iguais, assim como determinado pelo método analítico. Adicionalmente, pode-se mostrar que existe uma dependência no cálculo desses fatores em relação à proporção comprimento/largura da placa laminada.

A Tabela 9 apresenta os resultados normalizados para as tensões coplanares, tensões transversais corrigidas na superfície superior, conforme as equações em (4.11), e deslocamentos integrados para a placa laminada retangular  $[0^\circ/90^\circ]$ , nos pontos definidos em (6.13). A exceção é para  $\bar{\sigma}_z$ , que é obtida na superfície de referência, em  $z = 0$ . Os valores são calculados pela FSDT, utilizando as correções fornecidas pelos métodos de Reissner ( $k_s = 5/6$ ), Whitney ( $k_x^w$  e  $k_y^w$ ), método analítico ( $k_x^a$  e  $k_y^a$ ), e método iterativo com uma e três iterações. Além disso, os resultados são comparados com a solução analítica tridimensional utilizando o erro relativo, indicado como  $(\bullet)^e$ .

Tabela 9: Tensões e deslocamentos normalizados para a placa laminada  $[0^\circ/90^\circ]$ , com  $H/a = 0, 1$ , determinados pela FSDT com a aplicação de diferentes fatores de correção de cisalhamento.

	Elast. 3D	Reissner ( $k_s = 5/6$ )	Whitney ( $k_x^w$ e $k_y^w$ )	2D/3D Analítico ( $k_x^a$ e $k_y^a$ )	2D/3D <sup>i</sup> MEFG ( $k_x^1$ e $k_y^1$ )	2D/3D <sup>i</sup> MEFG ( $k_x^3$ e $k_y^3$ )
$\bar{\sigma}_x$	0,0187	0,0159 (14,7) <sup>e</sup>	0,0160 (14,5) <sup>e</sup>	0,0157 (16,1) <sup>e</sup>	0,0159 (14,6) <sup>e</sup>	0,0159 (15,0) <sup>e</sup>
$\bar{\sigma}_y$	-0,0753	-0,0870 (15,5) <sup>e</sup>	-0,0869 (15,5) <sup>e</sup>	-0,0872 (15,8) <sup>e</sup>	-0,0869 (15,5) <sup>e</sup>	-0,0870 (15,6) <sup>e</sup>
$\bar{\tau}_{xy}$	0,0156	0,0142 (9,27) <sup>e</sup>	0,0142 (9,22) <sup>e</sup>	0,0141 (9,84) <sup>e</sup>	0,0142 (9,36) <sup>e</sup>	0,0142 (9,26) <sup>e</sup>
$\bar{\tau}_{xz}$	0,0408	0,0396 (2,88) <sup>e</sup>	0,0397 (2,70) <sup>e</sup>	0,0388 (4,89) <sup>e</sup>	0,0400 (1,82) <sup>e</sup>	0,0399 (2,02) <sup>e</sup>
$\bar{\tau}_{yz}$	0,0959	0,0919 (4,18) <sup>e</sup>	0,0918 (4,20) <sup>e</sup>	0,0921 (3,93) <sup>e</sup>	0,0917 (4,39) <sup>e</sup>	0,0917 (4,37) <sup>e</sup>
$\bar{\sigma}_z$	0,2691	0,2440 (9,32) <sup>e</sup>	0,2442 (9,27) <sup>e</sup>	0,2425 (9,91) <sup>e</sup>	0,2447 (9,05) <sup>e</sup>	0,2478 (7,91) <sup>e</sup>
$\bar{u}$	-0,00391	-0,00399 (1,96) <sup>e</sup>	-0,00401 (2,42) <sup>e</sup>	-0,00394 (0,81) <sup>e</sup>	-0,00404 (3,25) <sup>e</sup>	-0,00399 (1,93) <sup>e</sup>
$\bar{v}$	-0,00243	-0,00246 (1,46) <sup>e</sup>	-0,00250 (2,88) <sup>e</sup>	-0,00239 (1,69) <sup>e</sup>	-0,00262 (7,72) <sup>e</sup>	-0,00262 (7,75) <sup>e</sup>
$\bar{w}$	0,2093	0,2117 (1,16) <sup>e</sup>	0,2128 (1,67) <sup>e</sup>	0,2097 (0,18) <sup>e</sup>	0,2165 (3,44) <sup>e</sup>	0,2164 (3,38) <sup>e</sup>

Observa-se que os erros são relativamente pequenos para a maioria dos resultados, mesmo para a placa retangular semiespessa definida com  $H/a = 0, 1$ , onde a largura foi reduzida pela metade em comparação com o problema de laminado simétrico analisado anteriormente.

As tensões coplanares  $\bar{\sigma}_x$  e  $\bar{\sigma}_y$  apresentam os maiores erros, chegando a 16% no método analítico. Por outro lado, esse mesmo método apresenta os resultados mais precisos para os deslocamentos coplanar  $\bar{u}$  e transversal  $\bar{w}$ , com erros inferiores a 1%. Assim, verifica-se que não há um padrão geral de melhoria nos resultados, já que os fatores de correção determinados refinam as estimativas para algumas grandezas, enquanto podem afastar-se da solução exata para outras. Esse comportamento pode ser explicado pelos resultados expressos nas Figuras 8 e 9, que indicam fatores de correção distintos para os deslocamentos e tensões transversais no laminado simétrico.

A partir da Tabela 9, observa-se que os resultados são consistentes em todos os métodos

de correção, incluindo o baseado no fator uniforme  $k_s = 5/6 = 0,8333$ , considerado inadequado para laminados. Isso ocorre porque a maioria das abordagens produz valores semelhantes para ambos os eixos,  $k_x \approx k_y$ , e esses valores estão próximos de  $5/6$ . No entanto, essa proximidade é uma coincidência e não invalida os métodos de correção específicos para placas laminadas, que oferecem uma abordagem mais versátil e abrangente.

A Tabela 10 compara os valores obtidos para os fatores de correção nos diferentes métodos analisados, apresentando o erro relativo em relação aos resultados analíticos para  $k_x^a$  e  $k_y^a$  em (6.19).

Tabela 10: Fatores de correção de cisalhamento para a placa laminada retangular não simétrica  $[0^\circ/90^\circ]$ , com  $H/a = 0,1$ , por diferentes métodos.

	$k_x$	$k_y$
Reissner	0,8333 (6,73) <sup>e</sup>	0,8333 (3,55) <sup>e</sup>
Whitney	0,8212 (5,18) <sup>e</sup>	0,8212 (4,96) <sup>e</sup>
$2D/3D^i$ MEFG - 1 iter	0,7513 (3,77) <sup>e</sup>	0,7824 (9,44) <sup>e</sup>
$2D/3D^i$ MEFG - 3 iter	0,7324 (6,20) <sup>e</sup>	0,7840 (9,26) <sup>e</sup>

Verifica-se que os maiores desvios em relação ao método de correção analítico são encontrados para  $k_y^1$  e  $k_y^3$ , o que explica os erros de quase 8% para  $\bar{v}$  na Tabela 9. Além disso, nesse problema em específico, o valor uniforme  $k_s = 5/6$  mostra uma proximidade considerável com o método analítico, especialmente para  $k_y^a$ .

As Figuras 29, 30 e 31 apresentam os resultados ao longo da espessura para as tensões coplanares, tensões transversais corrigidas e deslocamentos, respectivamente. Observa-se que os resultados da Tabela 9 são consistentes em toda a espessura, com as curvas de todas as abordagens de correção analisadas visualmente muito próximas e apresentando pequenas variações em relação à solução elástica tridimensional.

Figura 29: Tensões coplanares normalizadas para a placa laminada retangular não simétrica  $[0^\circ/90^\circ]$ , com  $H/a = 0,1$ , determinadas pela FSDT com a aplicação de diferentes fatores de correção de cisalhamento.

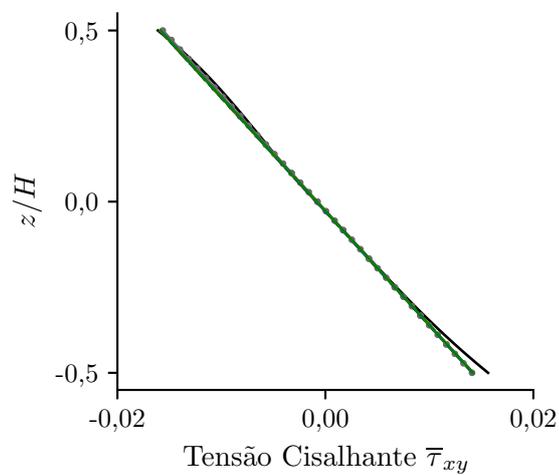
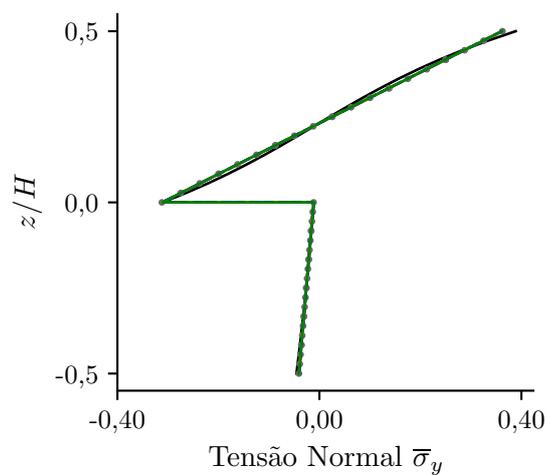
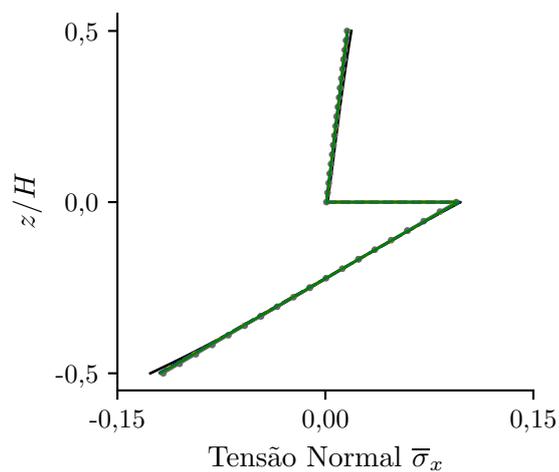
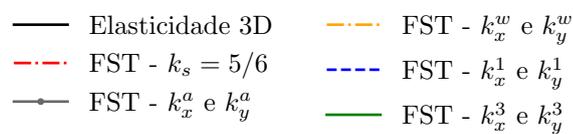


Figura 30: Tensões transversais normalizadas para a placa laminada retangular não simétrica  $[0^\circ/90^\circ]$ , com  $H/a = 0,1$ , determinadas pela FSDT com a aplicação de diferentes fatores de correção de cisalhamento.

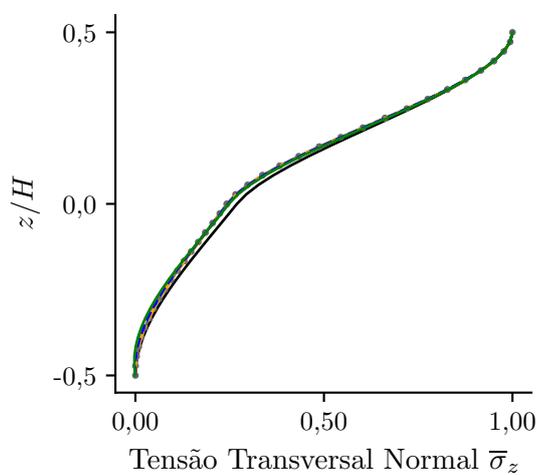
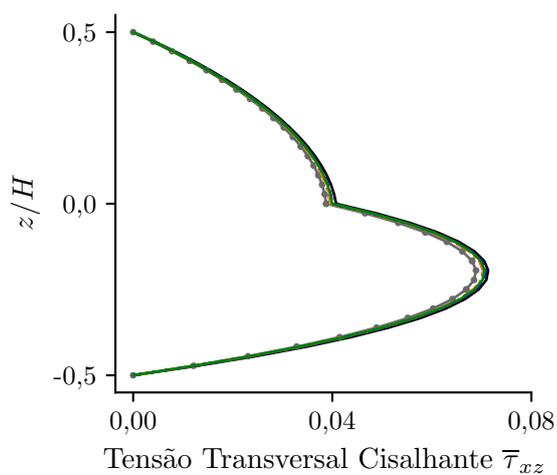
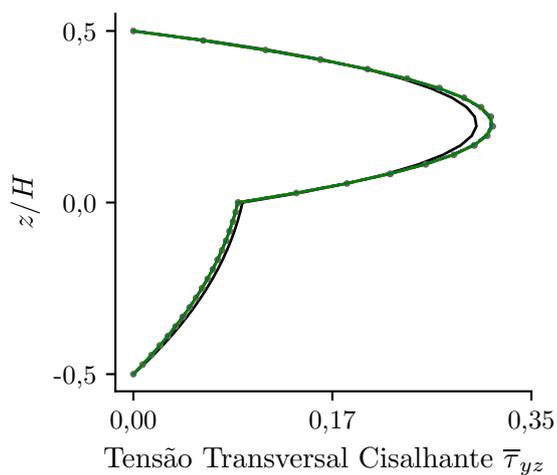
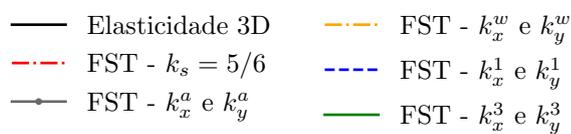
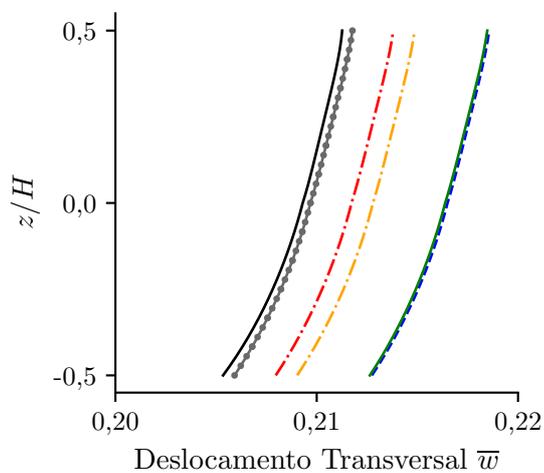
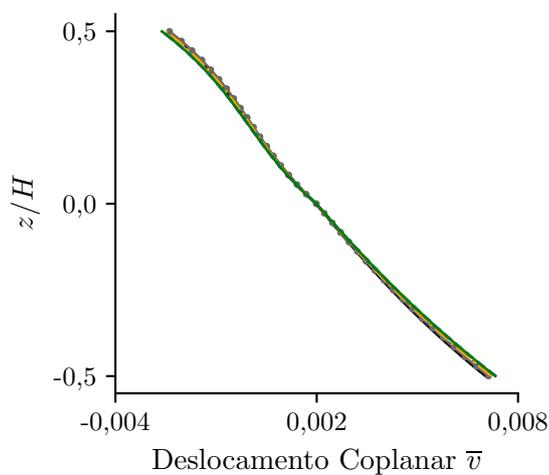
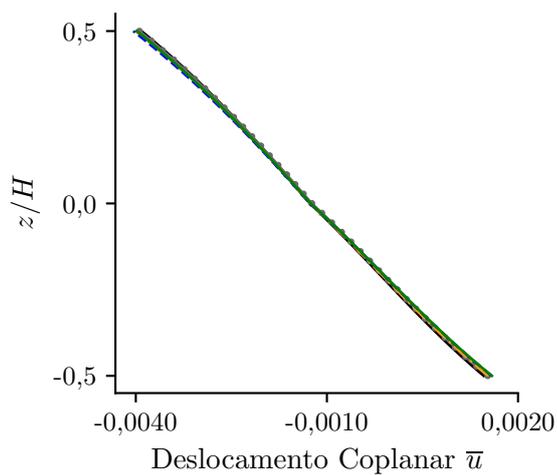
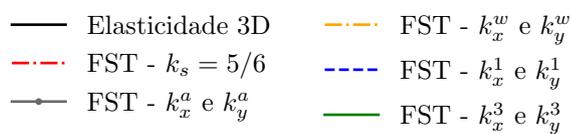


Figura 31: Deslocamentos normalizados para a placa laminada retangular não simétrica  $[0^\circ/90^\circ]$ , com  $H/a = 0,1$ , determinados pela FSDT com a aplicação de diferentes fatores de correção de cisalhamento.



## 7 CONCLUSÃO

O objetivo deste trabalho foi analisar a influência dos fatores de correção de cisalhamento transversal em laminados modelados pela Teoria de Deformação de Cisalhamento de Primeira Ordem (FSDT) e resolvidos pelo Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG). Foram implementadas diferentes técnicas para a determinação dos fatores de correção em laminados. Para testá-las, foram analisados dois problemas lineares envolvendo placas laminadas ortotrópicas: uma simétrica, composta por três lâminas na configuração  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ , e outra não simétrica, composta por duas lâminas na configuração  $[0^\circ/90^\circ]$ . Além disso, utilizando soluções analíticas disponíveis na literatura, foi estudada a razão das energias de cisalhamento transversal como correção nos problemas analisados. Adicionalmente, foi desenvolvido um procedimento iterativo para determinar os fatores de correção nos pontos de integração do processo de solução, combinando os resultados precisos do MEFG com as melhorias proporcionadas pelas etapas de pós-processamento.

Os resultados revelam que:

- a) A aplicação arbitrária dos fatores de correção determinados para placas homogêneas em laminados é inadequada na maioria dos casos, pois não considera as particularidades das estruturas laminadas, como as diferentes propriedades das lâminas individuais e a sequência de empilhamento.
- b) A razão analítica das densidades de energia de cisalhamento transversal mostra que a correção depende de múltiplas variáveis nos laminados, incluindo as dimensões espaciais da placa.
- c) Os métodos específicos para a correção de cisalhamento em laminados ortotrópicos podem atingir resultados precisos, desde que a espessura da estrutura permita considerar a placa como fina ou, no máximo, semiespessa.
- d) Fatores de correção distintos são obtidos para laminados com diferentes configurações, como demonstrado nos laminados  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$  e  $[0^\circ/90^\circ]$ .
- e) As melhorias proporcionadas pelos fatores de correção de cisalhamento e pelas etapas de pós-processamento são limitadas pelo próprio modelo cinemático da FSDT, especialmente quando a espessura da placa aumenta.
- f) O método iterativo desenvolvido demonstrou resultados suficientemente aceitáveis

para os laminados ortotrópicos analisados; além disso, o procedimento pode ser facilmente estendido para a análise de laminados com diferentes graus de anisotropia.

g) Foram obtidos valores distintos para os fatores de correção nos pontos de integração do MEFG através do método iterativo. No entanto, não foram observadas melhorias significativas nos problemas analisados.

h) Ao comparar os resultados obtidos para o laminado simétrico e para o laminado não simétrico, observa-se que o primeiro é mais sensível à correção proporcionada pelo fator de cisalhamento,  $k_g$ .

Esses resultados enfatizam a importância de considerar os fatores de correção de cisalhamento transversal de forma adequada ao modelar laminados pela FSDT, especialmente para garantir a precisão dos resultados em diferentes configurações de laminados. Além disso, destacam algumas limitações da FSDT na análise de placas laminadas.

## 7.1 TRABALHOS FUTUROS

A partir das abordagens realizadas neste trabalho, algumas sugestões para trabalhos futuros incluem:

- a) Implementação de um procedimento semelhante ao desenvolvido para considerar os efeitos das deformações não lineares no cálculo dos fatores de correção de cisalhamento.
- b) Expansão da abordagem para incluir a determinação de fatores de correção em análises dinâmicas.
- c) Exploração de outros resultados das etapas de pós-processamento para utilizar como correção, como, por exemplo, a distribuição dos deslocamentos ao longo da espessura.
- d) Análise de laminados mais complexos, com diferentes graus de anisotropia.

## REFERÊNCIAS

- BABUSKA, I.; BANERJEE, U.; OSBORN, J. E. Generalized finite element methods: main ideas, results and perspective. *International Journal of Computational Methods*, p. 67–103, 2004.
- BARCELLOS, C. S.; MENDONÇA, P. T. R.; DUARTE, C. A. A  $c^k$  continuous generalized finite element formulation applied to laminated kirchhoff plate model. *Computational Mechanics*, p. 377–393, 2009.
- BARROS, F. B. *Métodos Sem Malha e Método dos Elementos Finitos Generalizados em Análise Não Linear de Estruturas*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2002.
- BELYTSCHKO, T.; LU, Y.; GU, L. Element-free galerkin methods. *International journal for numerical methods in engineering*, v. 37, p. 229–256, 1994.
- BIRMAN, V.; GENIN, G. M. *Comprehensive Composite Materials II*. Cambridge: Elsevier, 2018.
- CHAUDHURI, R. A. R. a. an equilibrium method for prediction of transverse shear stresses in a thick laminated plate. *Computers and Structures*, v. 23, n. 2, p. 139–146, 1986.
- DUARTE, C. A. *The hp-cloud method*. Tese (Doutorado) — The University of Texas, Austin, Dezembro 1996.
- DUARTE, C. A.; ODEN, J. T. Hp clouds - a meshless method to solve boundary-value problem. *Technical Report*, 1995.
- HUGHES, T. J. R.; COTTRELL, J. A.; BAZILEVS, Y. Isogeometric analysis: Cad, finite elements, nurbs, exact geometry and mesh refinement. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, p. 4135–4195, 2005.
- JONES, R. M. *Mechanics Of Composite Materials*. 2. ed. New York: CRC press, 1999.
- KARAMA, M. Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity. *International Journal of Solids and Structures* 40, p. 1525–1546, 2002.
- LEE, S. et al. Temperature-dependent shear correction factor with heat transfer based on micromechanical properties for fgm plates. *Thin-Walled Structures* 181, 2022.
- LEVISON, M. An accurate, simple theory of the statics and dynamics of elastic plates. *Mechanics Research Communications*, p. 343–350, 1980.
- LIU, G. R. *Mesh free methods: moving beyond the finite element method*. CRC Press, 2003.
- MENDONÇA, P. T. R. *Materiais compostos e estruturas sanduíche: projeto e análise*. 2. ed. Florianópolis: Editora Orsa Maggiore, 2019.
- MENDONÇA, P. T. R.; FANCELLO, E. A. *O Método dos Elementos Finitos aplicado à Mecânica dos Sólidos*. Florianópolis: Editora Orsa Maggiore, 2019.
- MENDONÇA, P. T. R.; LEMOS, W. R. A simple recovery post-processing of stresses and displacements in reissner–mindlin analysis of anisotropic laminated plates. *Composite Structures* 331, 2024.

- NAJAFIPOUR, M.; SHARIYAT, M. A refined first-order shear deformation theory for large dynamic and static deflection investigations of abruptly/harmonically pressurized/blasted incompressible circular hyperelastic plates. *Ocean Engineering* 289, 2023.
- NAYROLES, B.; TOUZOT, G.; VILLON, P. Generalizing the finite element method: Diffuse approximation and diffuse elements. *Computational Mechanics* 10, p. 307–318, 1992.
- NOOR, A.; BURTON, W. S. Three-dimensional solutions for antisymmetrically laminated anisotropic plates. *J. Appl. Mech.*, p. 182–188, 1990.
- NOOR, A. K.; BURTON, S.; PETERS, M. Predictor-corrector procedures for stress and free vibration analyses of multilayered composite plates and shells. *COMPUTER METHODS IN APPLIED MECHANICS AND ENGINEERING*, p. 341–363, 1990.
- NOOR, A. K.; PETERS, M. A posteriori estimates for shear correction factors in multilayered composite cylinders. *ASCE J. Engrg. Mech.*, p. 1225–1244, 1989.
- OCHOA, O. O.; REDDY, J. N. *Finite Element Analysis of Composite Laminates*. Dordrecht: Kluwer, 1992.
- ODEN, J. T.; DUARTE, C. A.; ZIENKIEWICZ, O. C. A new cloud-based hp finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 153, p. 117–126, 1998.
- ONATE, E.; IDELSOHN, S.; ZIENKIEWICZ, O. C. Finite point methods in computational mechanics. *Report 67*, 1995.
- ONATE, E. e. a. A finite point method in computational mechanics. applications to convective transport and fluid flow. *International journal for numerical methods in engineering*, v. 39, p. 3839–3866, 1996.
- ONATE, E. e. a. A stabilized finite point method for analysis of fluid mechanics problems. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, v. 139, p. 315–346, 1996.
- PAGANO, N. Exact solutions for composite laminates in cylindrical bending. *J of Compos Mater*, p. 20–35, 1969.
- PAI, P. F. A new look at shear correction factors and warping functions of anisotropic laminates. *International Journal Solids Structures*, p. 2295–2313, 1994.
- PAI, P. F.; NAYFEH, A. H. A unified nonlinear formulation for plate and shell theories. *Nonlinear Dynamics*, p. 459–500, 1994.
- REDDY, J. A simple higher-order theory for laminated composite plates. *Asme, Transactions, Journal of Applied Mechanics*, 1984.
- REDDY, J. *An Introduction to Continuum Mechanics*. New York: Cambridge University Press, 2008.
- REDDY, J. N. *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*. 2. ed. New York: CRC press, 2004.
- REDDY, J. N. *Energy principles and variational methods in applied mechanics*. New York: Wiley, 2017.

REISSNER, E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *J of Apl Mech*, p. 69–77, 1945.

RIBEIRO, M. *Método dos elementos finitos generalizados aplicados a placas laminadas com não-linearidade geométrica*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, 2016.

SHARIYAT, A.; ALIPOUR, M. A novel shear correction factor for stress and modal analyses of annular fgm plates with non-uniform inclined tractions and non-uniform elastic foundations. *International Journal of Mechanical Sciences* 87, p. 60–71, 2014.

SHI, G. A new simple third-order shear deformation theory of plates. *International Journal of Solids and Structures*, p. 4399–4417, 2007.

STROUBOULIS, T.; BABUSKA, I.; COPPS, K. The design and analysis of the generalized finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 181, p. 43–69, 2000.

TANOV, R.; TABIEI, A. A simple correction to the first-order shear deformation shell finite element formulations. *Finite Elements in Analysis and Design* 35, p. 189–197, 2000.

TIMOSHENKO, S. *Strenght of materials*. New York: D. VAN NOSTRAND COMPANY, 1940. (Composite materials series).

TORRES, D. A. F. *Método dos elementos finitos generalizados aplicado à análise de placas laminadas compostas inteligentes*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, 2008.

TOURATIER, M. An efficient standard plate theory. *International Journal of Engineering Science*, p. 901–916, 1991.

WANDZURAT, S.; XIAO, H. Symmetric quadrature rules on a triangle. *Computers and Mathematics with Applications*, v. 45, n. 12, p. 1829–1840, 2003.

WHITNEY, J. M. Shear correction factors for orthotropic laminates under static load. *J of Appl Mech*, p. 302–304, 1973.

WHITNEY, J. M.; PAGANO, N. *Shear Deformation in Heterogeneous Anisotropic Plates*. [S.l.: s.n.], 1970.