Análise de atividades didáticas segundo a teoria semiocognitiva de aprendizagem matemática de Raymond Duval

Méricles Thadeu Moretti

2024

GPEEM/PPGECT/UFSC

Análise de atividades didáticas segundo a teoria semiocognitiva de aprendizagem matemática de Raymond Duval

Méricles Thadeu Moretti

Edição GPEEM/PPGECT/UFSC
Florianópolis

2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Moretti, Méricles Thadeu
Análise de atividades didáticas segundo a teoria semiocognitiva de aprendizagem matemática de Raymond Duval [livro eletrônico] / Méricles Thadeu Moretti.
—
1. ed. -- Florianópolis, SC : Ed. do Autor, 2024.
PDF

Bibliografia.

ISBN 978-65-01-04157-5 1
DOI: 10.5281/zenodo.11387394

Aprendizagem cognitiva 2. Aprendizagem - Metodologia 3. Matemática 4. Semiótica I. Título.

24-209395 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Ensino 510.7

Aline Graziele Benitez - Bibliotecária - CRB-1/3129

Disponível em:
https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/203982
https://zenodo.org/records/11387394

Como citar (ABNT):
MORETTI, Méricles T. Análise de atividades didáticas segundo a teoria semiocognitiva de aprendizagem matemática de Raymond Duval. Florianópolis: GPEEM/PPGECT/UFSC, 2024.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

As discussões de Raymond Duval sobre a aprendizagem matemática nos remetem a dois aspectos fundamentais relacionados às atividades docentes e discentes: um aspecto diz respeito às condições semiocognitivas para que a aprendizagem possa ocorrer; o outro, que é decorrente dessas condições, também semiocognitivo, nos remete a uma análise das atividades didáticas que possam ser desenvolvidas e análise da produção discente em relação a essas atividades. No que segue, procurou-se dar elementos teóricos em relação ao segundo aspecto, da análise de atividades didáticas e da produção discente em atividades propostas.

Duval (1995, 2004A)[1] consubstancia no primeiro capítulo do livro a sua ideia de aprendizagem matemática de cunho cognitivo e semiótico. Para tanto, ele criou uma noção de representação semiótica que denominou de registro para diferenciar de diversos autores que têm como base também a representação semiótica. Para entender a proposta de aprendizagem matemática desse autor será necessário entender o que significa registro e outros elementos que acompanham essa noção. Esse será o primeiro ponto que analisaremos a seguir.

Em um segundo ponto trataremos das funções discursivas que decorrem do uso da língua natural na aprendizagem matemática.

Outro momento será dedicado à aprendizagem da geometria que guarda uma série de operações semiocognitivas específicas.

Cada capítulo contará com algumas referências para complementar e aprofundar os assuntos discutidos.

Finalmente, analisaremos os elementos apresentados nos itens anteriores e proporemos uma forma de refletir a preparação de aulas e analisar a produção discente como em uma análise *a priori* e *a posteriori* nos termos da engenharia didática de Douady (1986).

---

[1] Anotaremos dessa forma o livro de Duval publicado em 1995 em sua versão original em francês e a versão em espanhol de 2004A.

CAPÍTULO 1

REGISTRO E HIPÓTESE FUNDAMENTAL DE APRENDIZAGEMM MATEMÁTICA

O **registro de representação semiótica**, ou simplesmente, registro, segundo Duval (1995, p. 21; 2004A, p. 30) é um conjunto de representações que apresentam três atividades fundamentais: **formação** e duas operações semiocognitivas que denominou **tratamento** e **conversão**. O que significa dizer que o registro não é um conjunto qualquer de representações, deve apresentar essas três atividades. Para Duval (1995, p. 21; 2004A, p. 30),

> A questão da relação entre *semiose* e *noesis* diz respeito apenas aos sistemas que permitem essas três atividades de representação, e não a todos os sistemas semióticos.

Duval refere-se à ***semiose*** como a “apreensão ou produção de uma representação semiótica; e ***noesis*** aos atos cognitivos como a apreensão conceitual de um objeto...” (1995, p. 2-3; 2004A, p. 14-15). Com isso ele enfatiza a importância da noção de registros. Veremos mais adiante o porquê disso.

A formação de um registro diz respeito à maneira como esse conjunto de representações semióticas é constituído. Por exemplo, o conjunto dos números racionais Q é bem formado: $Q = \{p/q, \text{ sendo p inteiro e } q \neq 0 \text{ inteiro}\}$. Por essa definição, os racionais contemplam a atividade de formação.

O tratamento refere-se a uma operação semiocognitiva no interior do conjunto Q. É bem fácil de ver que se pode operar com as quatro operações básicas dois elementos quaisquer de Q. Além disso, o resultado dessa operação é outro elemento desse mesmo conjunto Q.

A conversão diz respeito à possibilidade de um registro relacionar-se com outro registro. No caso dos racionais há muitas possibilidades: citemos por exemplo a relação dos racionais com áreas em figuras geométricas.

Um outro registro, o mais importante de todos, é o registro da linguagem natural: contempla essas três atividades, sendo a atividade de formação uma constante aprendizagem. A paráfrase é uma das operações internas a esse registro, é um tratamento, mas existem outros tipos tratamentos. A conversão pode ser dar, por exemplo, entre o enunciado de um problema e a equação ou expressão matemática equivalente ao enunciado.

Alguns registros exigem muito da aprendizagem da sua formação como é o caso, por exemplo, do sistema de numeração decimal posicional: os problemas de “empresta um” ou “vai um” são bastante problemáticos em operações básicas com esse sistema e para superá-los será também necessário a aprendizagem da formação do registro e não só do tratamento em si mesmo.

O tratamento está intimamente ligado à atividade cognitiva de formação, como consequência disso, a conversão também tem forte dependência da formação do registro.

Alguns conjuntos semióticos não chegam a ser um registro, e podem ser classificados em sistemático ou assistemático. Em Moretti (a ser publicado) há um estudo sobre esses tipos de conjuntos e mostra que reconhecê-los têm implicações didáticas importantes.

O Quadro 1 apresenta uma pluralidade de registros, não são apenas quatro, outros podem ser pensados no interior de cada um deles.

A partir desse quadro, fazemos as seguintes observações:

- os elementos dos registros são representações que podem ser classificadas como discursivos ou não discursivos, e algoritmizáveis ou não: “os registros discursivos permitem descrever, inferir, raciocinar, calcular, enquanto os registros não discursivos permitem visualizar o que não é dado de maneira visível (Duval, 2004B, p. 51);

- os registros multifuncionais (tratamentos não algoritmizáveis) têm uma larga utilização até na vida cultural e social, prestam-se a uma gama muito grande de operações de tratamento que, em geral não se prestam à transformação em algoritmo. Já os registros monofuncionais (tratamentos algoritmizáveis) são especializados em algum tipo de tratamento – possuem um caráter iminentemente técnico.

Quadro 1: classificação de diferentes tipos de registros utilizados em matemática.

Registros	Tipos de tratamentos	Característica dos tratamentos	Características das representações
Língua natural	Associações verbais (conceituais) Descrição, definição, explicação. Raciocínio: - argumentação a partir de observações, de crenças... - dedução válida a partir de definição ou de teoremas.	Não são algoritmizáveis.	Discursiva. Multifuncional.
Figuras geométricas planas ou em perspectivas de formas em 0D, 1D, 2D, 3D	Apreensão operatória e não somente perceptiva. Construção com instrumento. Modelização de estruturas física: (exemplo: cristais, moléculas...)	Não são algoritmizáveis.	Não discursiva. Multifuncional.
Sistema algébrico. Sistemas de escrita: numéricas (binária, decimal, fracionária); algébricas, simbólicas (línguas formais)	Cálculo literal, algébrico, formal...	São principalmente algoritmizáveis.	Discursiva. Monofuncional.
Gráficos cartesianos (visualização de variações)	Mudança de sistema de coordenadas. Interpolação, extrapolação.	São principalmente algoritmizáveis.	Não discursiva Monofuncional.

Fonte: do autor a partir de Duval (2004B, p. 52).

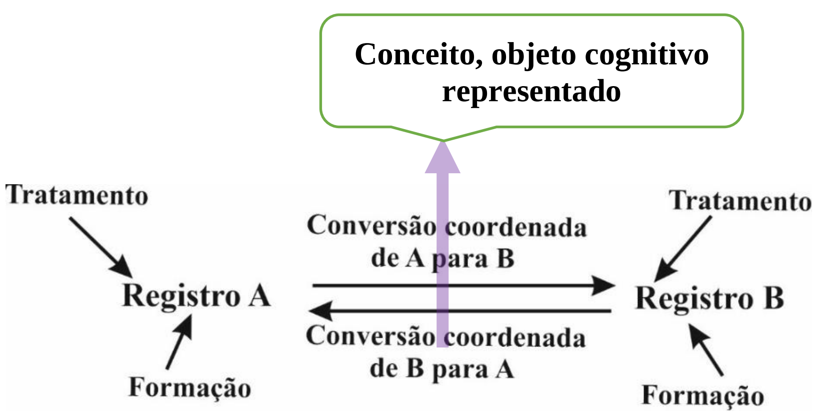
1.1 Por que o uso de representação em matemática? A hipótese fundamental de aprendizagem.

O uso de representações semióticas em matemática é obrigatório, por uma razão bastante simples, os objetos matemáticos são ideais. Diferente de outras disciplinas em que a criação de instrumentos, que permitem ter acesso aos objetos real de estudo, como foi o caso, por exemplo, do microscópio na biologia que deu o acesso aos elementos de uma célula, e a luneta na astronomia inventada por Galileu Galilei que lhe permitiu ver com proximidade os objetos celestes e estudar seus movimentos. Já a matemática cria os seus próprios registros como foi o caso do sistema cartesiano de Descartes.

No entanto, não podemos nos esquecer, conforme afirma Granger, que "... muitas vezes os conceitos matemáticos foram forjados *a propósito* de questões colocadas pela observação empírica;" (1994, p. 59).

O esquema da figura abaixo retrata a proposta de aprendizagem matemática segundo Duval.

Figura 1: Modelo de representação centrado na função de objetivação.



Fonte: do autor a partir de Duval (1995, p. 67; 2004A, p. 68).

A Figura 1 apresenta dois registros, e por serem registros possuem as atividades de formação, tratamento e conversão. Não é uma relação de conversão simples entre esses dois registros para que a aprendizagem possa ocorrer, essa relação deve ser coordenada, e para isso, é preciso reconhecer os elementos significantes em cada registros (formação), como operam (tratamento) e como essa operação em um dos registros se relaciona com os elementos e operação no outro registro (conversão). Veremos, a seguir, um exemplo dessa situação.

Exemplo 1. Equação e gráfico da reta.

Consideremos as retas de equação $y = ax + b$, sendo a e b números reais. Esse conjunto de representações é um registro? Vejamos:

- formação. Esse conjunto é bem formado exatamente pela apresentação das retas de equação $y = ax + b$, a e b números reais;
- tratamento. As retas $y = ax + b$ que estão na forma reduzida, podem ser transformadas em outras formas como a equação geral, equação segmentária etc. Com a equação da reta é possível, por exemplo, determinar algum ponto, o ponto de intersecção entre duas retas etc.
- conversão. As retas $y = ax + b$ podem serem relacionadas com retas no plano cartesiano. De fato, a gente pode pensar uma reta no plano cartesiano ou a equação dela.

Consideremos as retas $y = ax + b$, sendo a e b números reais, posicionadas no plano cartesiano. Esse conjunto das retas no plano cartesiano é um registro? Vejamos:

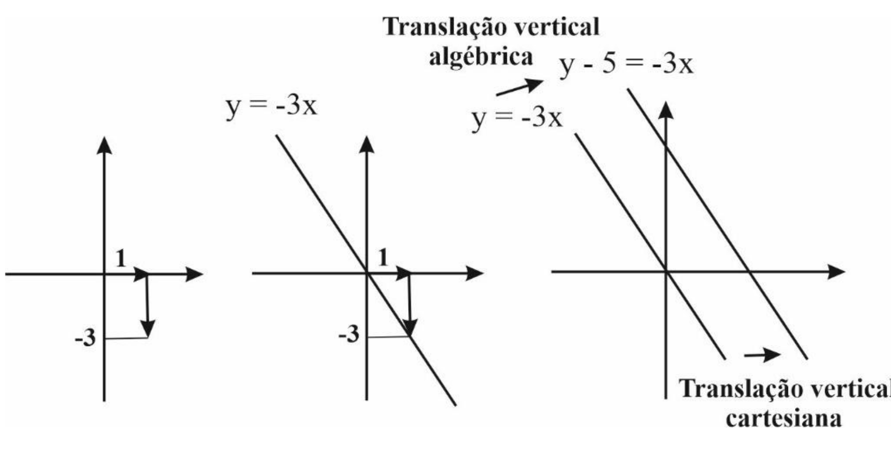
- formação. Esse conjunto é bem formado com as retas posicionadas no plano cartesiano;
- tratamento. Com uma reta no plano cartesiano é possível determinar a intersecção dela com o eixo das abscissas; pode sofrer uma mudança de posição como em uma translação etc.;
- conversão. As retas no plano cartesiano podem estar relacionadas com as retas de equação $y = ax + b$ do sistema algébrico.

Além das operações que cada um desses registros pode efetuar, uma vez que o conjunto das retas de equação y = ax + b é um sub-registro do “Sistema algébrico” e o conjunto das retas no plano cartesiano é também um sub-registro dos “Gráficos cartesianos” (ver Quadro 1), destacaremos a operação de translação. Consideremos a reta na forma $y - b = ax$ obtida a partir da reta na forma reduzida $y = ax + b$, teremos no plano cartesiano:

- translação vertical de $y = ax$ para cima em b unidades, caso $b > 0$;
- translação vertical de $y = ax$ para baixo em b unidades, caso $b < 0$.
- no caso em que $b = 0$, a reta se mantém na origem do sistema.

Além das possibilidades que essas retas podem operar no interior de cada registro, algébrico ou geométrico-cartesiano, há uma operação que guia esses dois sub-registros que é a translação vertical. Observemos o exemplo a seguir:

Figura 2: esboço do gráfico de $y = -3x + 5$ a partir de $y = -3x$



Fonte: do autor.

No sistema algébrico, a equação reta $y = -3x + 5$ é transformada em $y - 5 = -3x$. A reta $y = -3x$ é posicionada no plano cartesiano e sofre translação vertical em 5 unidades que transforma $y = -3x$ em $y - 5 = -3x$ no sistema algébrico, e no plano cartesiano, o deslocamento para cima em 5 unidades.

Essa ideia de esboço de curvas baseia-se essencialmente na operação de translação. Diferentemente de Duval (2011A)[2] que tratou do esboço de retas analisando as variações dos coeficientes *a* e *b* da equação $y = ax + b$ concomitante à variação posicional da reta no plano cartesiano. São perspectivas diferentes para o mesmo problema:

- o uso da translação pode ser facilmente estendido para outras funções ou equações. Equações com mais de dois coeficientes, como é o caso por exemplo das funções quadráticas, o estudo das variações dos coeficientes pode se tornar muito confuso: para o caso de dois coeficientes da reta, Duval (2011A) estudou 18 posições qualitativas diferentes o que tornaria essa análise impraticável para um estudo com três ou mais coeficientes. No entanto, a partir desse estudo, ele estabeleceu uma possibilidade de esboço de curvas que valoriza as variações dos elementos significantes em cada registro e a caracterizou como sendo "interpretação global de propriedades figurais", mais adiante em Duval (2004B, p. 66) passou a denominar simplesmente de "apreensão global qualitativa";
- o uso da translação como se pode observar no exemplo da Figura 2, valoriza o **coeficiente angular *a***, que nada mais é do que a taxa de variação (derivada de primeira ordem) de y = ax + b, coeficiente muito importante na interpretação de muitos problemas práticos. Sobre o uso da translação e outros elementos no esboço de curvas, consultar o e-book Moretti e Sabel (2023).

1.2 A noção de congruência semântica e equivalência referencial

Na transformação de uma representação a outra pode surgir um fenômeno semiocognitivo que Duval denominou **congruência semântica**. Este fenômeno pode ser ainda mais sensível em transformações de representações do tipo conversão, ou seja, transformações que ocorrem entre dois sistemas semióticos distintos:

---

[2] Este artigo é uma tradução do artigo denominado "Graphiques et équations: L´articulation de deux registres" publicado por Duval em 1988.

> A passagem de uma representação a outra se faz de forma espontânea quando as três condições seguintes são preenchidas: (1) correspondência semântica entre as unidades significantes que as constituem; (2) a mesma ordem possível de apreensão dessas unidades nas duas representações; (3) e para converter uma unidade significante da representação de partida em uma só unidade significante na representação de chegada (DUVAL, 1995, p. 5-6; 1004A, p. 17).

Duas representações podem ser congruentes, mas podem não possuir a mesma referência, ou seja, o objeto a que elas se referem não são os mesmos. É bom destacar também que duas representações podem ser congruentes quando da passagem em um sentido e não serem congruentes no sentido inverso.

Exemplo 2. Problema das bolinhas de gude

Consideremos o seguinte enunciado de um problema:

> Francisco tem 20 bolinhas de gude a mais do que Mariana. Francisco e Mariana têm juntos 230 bolinhas. Determine a quantidade de bolinhas que cada um deles tem.

Se designarmos F a quantidade de bolinhas de Francisco e M a de Mariana,

$$F + 20 = M,$$

é congruente com a frase "Francisco tem 20 bolinhas de gude **a mais** do que Mariana", mas o valor verdade mudou, ou seja, não há equivalência referencial. Já a expressão matemática,

$$F - 20 = M$$

não é congruente, mas mantém a equivalência referencial, ou seja, o valor verdade, em ambos os casos, mantém-se o mesmo.

A expressão algébrica

$$F + M = 230,$$

é congruente e mantém a equivalência referencialmente com a frase “Francisco e Mariana têm juntos 230 bolinhas.”.

A noção de congruência semântica é parte de um estudo maior, está inserida no estudo da compreensão de texto (ver capítulo VI em Duval (1995; 2004A) e Moretti (2022B)):

- diz respeito à organização redacional do texto. Esse aspecto está relacionado aos três critérios da congruência semântica já mencionados anteriormente;
- relativo ao conteúdo cognitivo que o texto pretende expressar. A isso relaciona-se, nos critérios de congruência semântica, as **unidades significantes** em cada registro (MORETTI; BRANDT; ALMOULOUD, 2022A). No entanto essas unidades podem não ser suficientes para espelhar o conteúdo cognitivo como um todo. No caso das bolinhas de gude de Francisco e Mariana, consideramos “F + M = 230” congruente com a frase “Francisco e Mariana têm juntos 230 bolinhas.” mesmo que o critério de ordem de aparição das unidades significantes não é mantido. A razão disso é que a frase em língua natural é bastante comum e não acarretaria algum problema na conversão para a equação algébrica.

Os critérios de noção congruência elaborados por Duval (1995, 2004A) pressupõe dois registros, um de partida e outro de chegada. Em geral, se sabe o que se quer e a avaliação do resultado fica mais evidente, basta verificar se a mudança de representação foi feita a contento. No caso do problema do Francisco e da Mariana, o registro de partida é a língua natural, e o de chegada é o algébrico, e quando o aluno chega às formulações corretas das equações, supõe-se que ele tenha compreendido o enunciado. Mas, a situação não é a mesma quando não se pode usar esses critérios e, neste caso, precisamos ir além e consultar a ideia de compreensão de texto.

1.3 Resumo do capítulo 1

Conceitos básicos da teoria semiocognitiva

Nessa primeira parte, temos algumas palavras-chave importantes na análise da produção dos alunos e na preparação de atividades de ensino:

- registro; as atividades de formação, tratamento, conversão coordenada; unidades significantes; congruência semântica e equivalência referencial.

Ainda no Exemplo 2 aparecem dois tipos de **designação:** *F* para Francisco, *M* para Mariana; $F – 20 = M$ e $F + M + 230$ que são operações da **função referencial**, e que trataremos a seguir com mais profundidade no estudo das funções discursivas da língua.

1.4 leituras complementares

(A ordem de apresentação dos onze primeiros textos científicos é uma sugestão de leitura).

1 - DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Trad. Méricles T. Moretti. REVEMAT, v. 7, n. 2, 2012.
2 - MORETTI, Méricles T. O papel dos registros de representação na aprendizagem de matemática. Contrapontos (Online), v.1, 2002.
3 - MORETTI, Méricles T. A Noção de Registro em Raymond Duval *In*: Moretti, Florilégio de pesquisas que envolvem a teoria semiocognitiva de aprendizagem matemática de Raymond Duval - parte 2. (Orgs. Méricles T. Moretti; E. Sabel). Florianópolis: GPEEM/UFSC, 2023.
Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/203982
4 - DUVAL, R. “Quel cognitif retenir em didactiques des mathématiques?”. RDM, v. 16.3, 1996.
5 - Introdução e capítulo 1 em DUVAL (1995, 2004A).
6 - DUVAL, R. Gráficos e equações: a articulação de dois registros. Trad. de Méricles T. Moretti. REVEMAT, v. 6, n. 2, 2011.
7 - DUVAL, R. Diferenças semânticas e coerência matemática. Trad. Méricles T. Moretti. REVEMAT, v. 7, n.1, 2012.

8 - MORETTI, Méricles T.; BRANDT, C. F.; ALMOULOUD, Saddo Ag. Congruência semântica: um fenômeno semiótico e cognitivo a ser levado em conta na aprendizagem matemática. Quadrante. v. 31, n. 1, 2022.
9 - MORETTI, Méricles T.; BAERLE, L. D. M. O uso de Representações Auxiliares na Aprendizagem Matemática: Um Olhar Semiocognitivo segundo Raymond Duval. Educação Matemática Pesquisa. v. 24, 2022.
10 - MORETTI, Méricles T.; BRANDT, Celia F. Dificuldades na resolução de problemas aditivos a uma operação: ponto de encontro esclarecedor à luz da noção de congruência semântica. Revista Acta Scientiae, v. 16, 2014.
11 - MORETTI, Méricles T. A Translação como recurso no esboço de curvas por meio da interpretação global de propriedades figurais *In*: Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica. (Org. S. D. A. Machado). Campinas: Papirus, 2011.
- MORETTI, Méricles T. A Regra dos Sinais para a Multiplicação: ponto de encontro com a noção de congruência semântica e o princípio de extensão em matemática. Bolema - Boletim de Educação Matemática, v. 26, 2012.
- HILLESHEIM, SELMA F.; MORETTI, Méricles t. Congruência Semântica: implicações didáticas no ensino da regra dos sinais. INTERMATHS: Revista de Matemática Aplicada e Interdisciplinar, v. 1, 2020.
- MORETTI, Méricles T.; A. A. THIEL. O ensino de matemática hermético: um olhar crítico a partir dos registros de representação semiótica. Práxis Educativa, v. 7, 2012.
- MORETTI, Méricles T.; FERRAZ, A. G.; FERREIRA, Verônica G. G. Estudo da conversão de funções entre registros simbólico e gráfico no ensino universitário. Quadrante (Lisboa), v. 17, 2008.
- MORETTI, Méricles T.; BRANDT, Celia F. (Orgs.) *In* Florilégio de pesquisas que envolvem a teoria semiocognitiva de aprendizagem matemática de Raymond Duval. Florianópolis: Revemat/UFSC, 2020.
Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/203982

CAPÍTULO 2

AS FUNÇÕES DISCURSIVAS DE UMA LÍNGUA

O Capítulo II em Duval (1995; 2004A) é dedicado às funções discursivas de uma língua. Fixaremos o nosso olhar nas funções discursivas relacionadas principalmente à aprendizagem matemática. Duval (1995, p. 91; 2004B, p. 88-89) elenca quatro funções discursivas que resumidamente são:

- a **função referencial** que permite a designação de objetos;
- a **função apofântica** que permite, sob a forma de uma proposição dizer alguma coisa dos objetos que são designados;
- a **função de expansão discursiva** que permite a ligação de uma proposição com outras proposições;
- a **função de reflexividade** que permite, por aquele que enuncia, estabelecer o valor, o modo ou estatuto de uma expressão.

Neste trabalho iremos tratar das funções apofântica, referencial e expansão discursiva.

2.1 A função apofântica (enunciados completos)

Uma expressão que preenche a função apofântica deve proporcionar sentido completo em que "a expressão produzida toma um valor determinado no universo cognitivo, representacional ou relacional dos interlocutores (DUVAL, 1995, p. 111-112; 2004A, p. 105). Este valor pode ser lógico (falso, verdade), epistêmico (certeza, possibilidade, absurdidade etc.) e social que obriga a uma resposta, uma ordem a ser executada etc.

Figura 3: a função apofântica e operações.

Fonte: o autor a partir de Duval (1995, p. 111-120; 2004A, p. 104-113).

Uma das operações dessa função é a **predicação** que permite ligar uma propriedade, de uma relação à designação de algum objeto. A segunda operação refere-se ao **ato ilocutório** que “por meio da produção de um enunciado confere a este enunciado um valor social de algum ato que engaja o locutor ou o destinatário (DUVAL, 1995, p. 113; 2004A, p. 107). São exemplos de ato ilocutório, solicitar, ordenar, aconselhar, questionar, prometer etc.

Em relação as operações de predicação e ilocução, Duval (1995, 2004A) apresenta diversas formas de expressões em língua natural associadas a estas duas operações:

- para a predicação a forma associada é a proposição;
- para a ilocução, podem ser frases verbais ou nominais, uma só palavra, que tomam um valor social de ordem, interpelação etc.;
- para a predicação e ilocução, frase simples ou composta que prendem um valor social de ordem, interpelação etc.

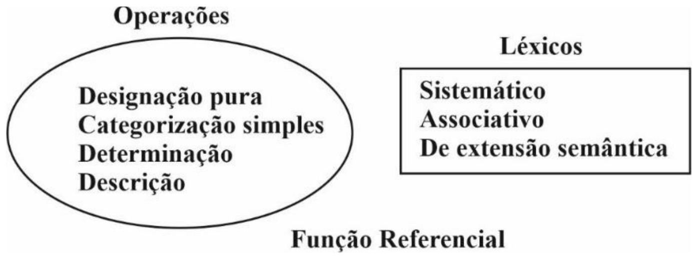
2.2 A função referencial - designação de objetos

Duval (1995; 2004A), a partir dos trabalhos de Frege (1892) e Russel (1905), nomeia quatro tipos de operações da função referencial e três léxicos dessas operações, conforme apresentamos na Figura 4 a seguir.

- As operações de designação

A designação pura é um ato de identificação de um objeto. Quando eu designo *M* como sendo a quantidade de bolinhas de gude que Mariana possui, estou atribuindo a letra *M* uma identificação que a letra escolhida não possui nenhuma significação, apenas, nesse caso, tem uma característica mnemônica por ser a letra inicial do nome Mariana.

Figura 4: a função discursiva referencial, operações e léxicos.



Fonte: o autor a partir de Duval (1995, p. 98-105, 2004A, p. 94-104) e Duval (2020, p. 40-41).

Em algumas situações se pode recorrer a diversas nomeações em uma mesma expressão, como por exemplo, "seja ***h*** a altura relativa ao lado AB do triângulo ABC": o triângulo possui três alturas, essa designação identifica uma delas. Essa mesma frase pode ser enquadrada também como uma operação de **categorização simples** uma vez que identifica o objeto por uma de suas qualidades que é o fato de ser uma das alturas, àquela relativa ao lado AB.

A operação de **determinação** é um tipo de designação em que o objeto é precisamente identificado pela operação de categorização, como por exemplo, "seja p **um** número par". Já a **operação de descrição**, identifica um objeto por meio de diversas categorizações como por exemplo "seja P o ponto de intersecção das medianas de triângulo". No caso, esse ponto tem um nome que é baricentro. No entanto, uma língua nem sempre tem nome para todos os seus objetos, por essa razão é importante recorrer à operação de descrição para designar um objeto. Isso ocorre também na vida social em que alguém não lembra o nome do objeto, mas o identifica por uma série de características funcionais ou propriedades desse objeto: "eu não me lembro do nome, mas fala que serve para apertar parafusos" por esquecer do nome "chave-de-fenda".

Além dessas quatro operações de designação que muitas vezes se confundem, Duval (2020) acrescenta uma outra, a operação de **designação**

funcional. para equacionar um problema, muitas vezes será necessário saber apresentar duas expressões simbólicas com sentidos distintos:

> ... uma letra sendo escolhida para designar um dos dados do problema, a segunda, um sintagma operatório[3] construído com essa letra para designar funcionalmente o outro dado do problema. Equacionar os dados de um problema consiste em alterar o registro de representação, no qual os dados são apresentados (DUVAL, 2020, p. 40-41).

No Exemplo 2, tratado anteriormente, designamos por F a quantidade de bolinhas que Francisco tem, M a quantidade de Mariana e a designação funcional $F - 20 = M$ ou ($F = M + 20$) para a frase "Francisco tem 20 bolinhas de gude a mais do que Mariana.".

- Os léxicos das operações de designação

Os léxicos referem-se as palavras, símbolos ou signos utilizados para permitir que uma das operações de designação possa ser efetivada. Para a operação de designação pura basta uma um signo (uma letra, uma palavra), a única restrição é de que não se pode usar o mesmo signo para mais de uma designação. Já os **léxicos sistemáticos** são constituídos da seguinte maneira: "considera-se um conjunto de objetos elementares e suas designações a partir de símbolos arbitrários, os objetos complexos são então designados a partir desses últimos" (GRANGER (1979, p. 24)[4] citado por DUVAL (1995, p. 101; 2004A, p. 97)). A escrita de um número na base decimal é um exemplo, qualquer um desses números comporta apenas signos de *0* a *9* da base decimal. Para indicar outro número que não seja natural, será preciso adicionar outros signos como um traço horizontal, por exemplo, para o caso de um número negativo. O que mostra que para os racionais será preciso

[3] DUVAL (2020, p. 26) chama de **sintagmas operatórios** os escritos simbólicos (expressões numéricas ou algébricas).
[4] GRANGER, G-G. Langages et épistémologie. Paris: Klinksiek, 1979.

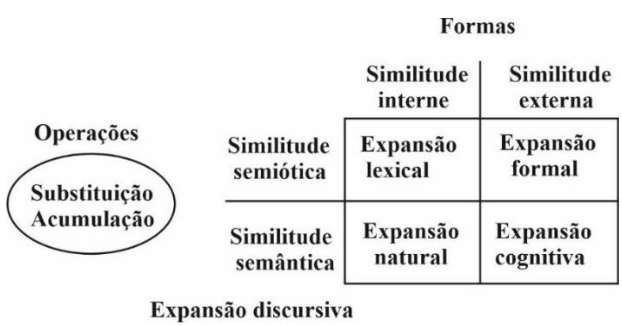
acrescentar outros objetos elementares de base: traço horizontal para o caso dos racionais negativos, barra de fração ou outro signo para representar a divisão, vírgula para indicar um número decimal e algum signo para indicar um racional na forma de uma dízima periódica ou em notação científica.

2.3 A função de expansão discursiva de um enunciado completo

São duas as operações da expansão discursiva e diversas formas, conforme apresentamos na Figura 5. O cálculo, a argumentação e a dedução são decorrências do papel dessa função: na resolução de problemas, as funções discursivas referencial e apofântica desempenham um papel semiocognitivo; a ponte com os elementos puramente matemáticos de resolução só virá com a função de expansão discursiva. No Exemplo 2, das bolinhas de gude da Mariana e do Francisco, a resolução do sistema formado é papel da expansão discursiva: veremos mais a diante como classificar esse tipo de expansão.

A Figura 5 a seguir apresenta as operações e formas da função discursiva que é completada pelo Quadro 2 mostrada mais adiante.

Figura 5: Operações e formas da função de expansão discursiva



Fonte: do autor a partir de Duval (1995, p. 129; 2004A, p. 117).

A **operação de substituição** funciona como no cálculo, por exemplo, na resolução de uma equação: o passo seguinte se faz em função do passo anterior e assim sucessivamente.

Já na operação discursiva de **expansão por acumulação**, como o próprio nome diz, tomando por base o discurso, "requer uma compreensão sinóptica de todas as frases assim como todas as relações existentes entre elas (Duval, 1995, p. 354-355; 2004A, p. 303). É por essa razão que muitas vezes um gráfico, uma tabela que sintetiza todos os elementos presentes em um discurso permite com mais facilidade a sua compreensão.

O quadro a seguir sintetiza grande parte dos mecanismos da função de expansão:

Quadro 2: mecanismos de expansão.

	Similitude **semiótica** ou **semântica**?	Similitude **interna** ou **externa**?	Algumas características	Situações encontradas
Expansão **lexical**	**Semiótica**: certos significantes são retomados	**Interna**: continuidade sem enunciado alvo	Retomada de uma mesma unidade lexical sob a forma fonética-auditiva ou gráfico visual.	Associações verbais, gracejo, linguagem do inconsciente
Expansão **formal**	**Semiótica**: certos significantes são retomados	**Externa**: continuidade com enunciado alvo	Recurso exclusivo aos símbolos: notações, escrita algébrica etc.	Raciocínio dedutivo, cálculo proposicional. Cálculo de predicados
Expansão **natural**	**Semântica**: significantes diferentes, mas o mesmo objeto	**Interna**: continuidade sem enunciado alvo	Só o conhecimento da língua é suficiente.	Descrição, narração, argumentação retórica (silogismo aristotélico). (Proposição de estrutura remática predicativa). Raciocínio por absurdo.
Expansão **cognitiva**	**Semântica**: significantes diferentes, mas o mesmo objeto	**Externa**: continuidade com enunciado alvo	Exige conhecimentos de definições, regras para um domínio de conhecimento.	Explicação Raciocínio dedutivo (Proposição de estrutura remática condicional). Raciocínio por absurdo

Fonte: a partir de Duval (1995, p. 129, 2004A, p. 117).

Em uma sequência de frases, as formas associadas à função de expansão discursiva são aquelas que permitem que se reconheça uma unidade de propósito. “O princípio de uma relação de continuidade entre duas unidades apofânticas [unidades de frases completas] é simples, repousa sobre a existência de uma similitude entre as duas frases.” (Duval, 1995, p. 126; 2004A, p. 125):

- similitude semiótica quando há uma repetição de palavras, símbolos etc., repetição dos mesmos significantes. No caso do problema das bolinhas de gude, o nome das crianças “Francisco” e “Mariana” desempenha esse papel;

- similitude semântica quando frases, expressões matemáticas que possuem sentidos diferentes, mas que remetem a um referencial equivalente. Por exemplo, 1, 10^0, 6/6, 5 – 4.

Em geral, essas duas similitudes (semiótica e semântica) não são suficientes para garantir a continuidade do discurso, pode ser que essa continuidade exija um enunciado alvo. A isso, Duval (1995, p. 128-129, 2004A, p. 116-117) se refere a **similitude externa**, que ocorre quando a passagem de uma frase a outra é feita de forma indireta, é preciso um enunciado alvo. São desse tipo as expansões na aplicação de teoremas, definições, regras de substituição etc.

A similitude interna, é o caso mais simples em que uma frase passa para outra sem a necessidade de uma frase alvo, isso ocorre na situação em que são suficientes conhecimentos da língua para que essa passagem possa ser efetuada. É o caso, por exemplo, das frases:

Choveu hoje. Vários carros derraparam.

O **termo chuva**, que deixa a **pista molhada**, causa a derrapagem dos carros, é um exemplo de **expansão natural**: similitude semântica, por conta dos termos “chuva” e “pista molhada”, associada à similitude interna uma vez que é suficiente conhecer a língua corrente, ou seja, não há exigência de conhecimentos especializados.

Na **expansão formal** o recurso se dá exclusivamente por meio de símbolos como no cálculo proposicional e cálculo de predicados. Já na

expansão cognitiva, há exigência de conhecimentos, definições e regras de um domínio em particular de conhecimento.

Uma diferença radical entre a expansão natural e a cognitiva: é que a expansão natural se caracteriza pelo emprego comum da língua enquanto a cognitiva exige conhecimentos especializados da língua.

A **expansão lexical** ocorre por similitude interna, ou seja, não envolve enunciado alvo e acontece com a retomado de um mesmo léxico fonético/auditivo ou gráfico/visual.

A diferença crucial entre a similitude semiótica e similitude semântica é que na similitude semiótica há a presença de significantes enquanto na semântica são os sentidos diferentes para o mesmo objeto que tomam importância. Já as similitudes interna e externa diferenciam-se pela presença ou ausência de um enunciado alvo.

Sobre essas formas da expansão discursiva, Duval (1995, p. 129; 2004A, p. 117) ressalta que há uma forte oposição, duas a duas entre as formas mostradas nas diagonais do quadro apresentada na Figura 5, ou seja, lexical versus cognitiva e formal versus natural, não havendo ponto em comum entre elas: esse tipo de oposição acontece por conta da similitude interna ou externa, ou seja, se há ou não um enunciado alvo. No entanto, se olharmos em coluna, essas formas podem ocorrer também de forma combinada.

2.4 As funções discursivas e o raciocínio

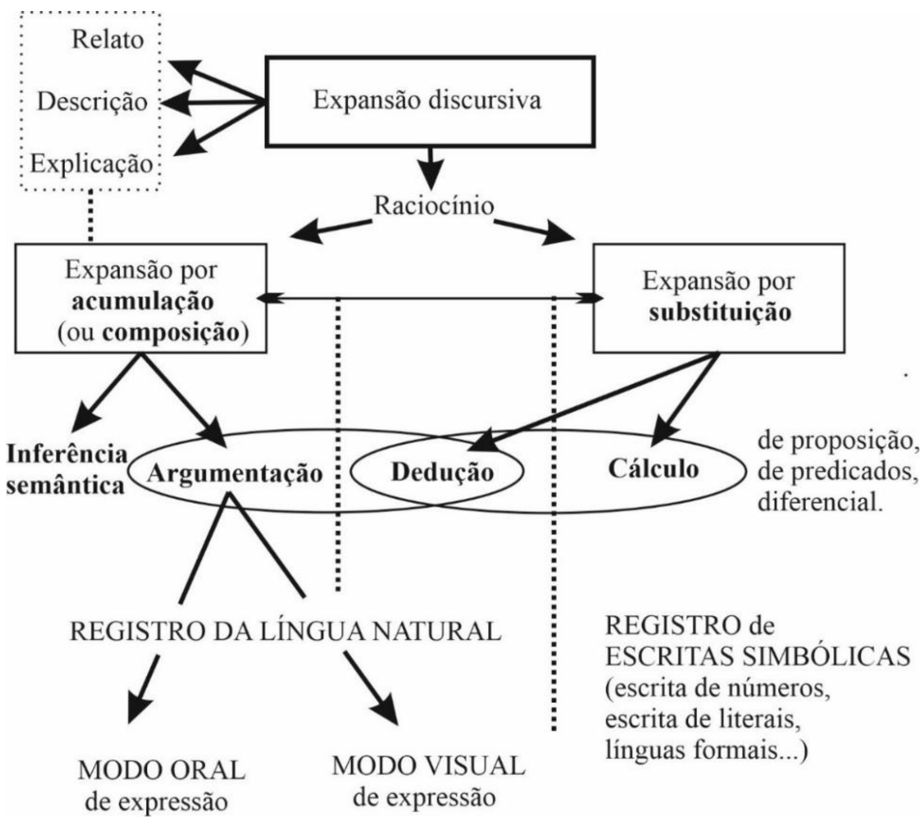
O raciocínio, na atividade em matemática, faz uso decisivo da linguagem. Para Duval (1995, 2004A) o raciocínio diz respeito ao caminho que, **a partir de uma ou mais proposições, chega-se a uma outra proposição como conclusão** (p. 211; p. 187).

A demonstração em matemática é o raciocínio por excelência, "e somente os raciocínios válidos é que tem força de demonstração" (DUVAL, 1995, p. 212; 2004A, p. 188). Já argumentação não obedece, necessariamente, aos critérios de validade, mas aos critérios de pertinência uma vez que a **argumentação tem como objetivo convencer** alguém de alguma coisa.

A Figura 6 mostra claramente que o raciocínio segue dois caminhos, o da expansão discursiva por acumulação (ou composição) e da expansão por substituição que é característica do cálculo. Já a dedução pode ocorrer tanto por substituição quanto por acumulação. A argumentação quando obedece aos critérios de validade, se torna dedução.

A figura a seguir, Duval apresenta o raciocínio em função da expansão discursiva:

Figura 6: raciocínio e expansão discursiva.



Fonte: Duval (2004B, p. 106).

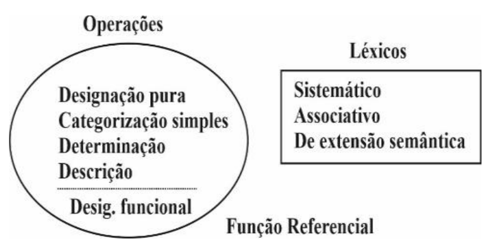
Segundo Duval "O raciocínio pode ser definido como a forma de expansão discursiva orientada para um enunciado alvo..." (1995, p. 233;

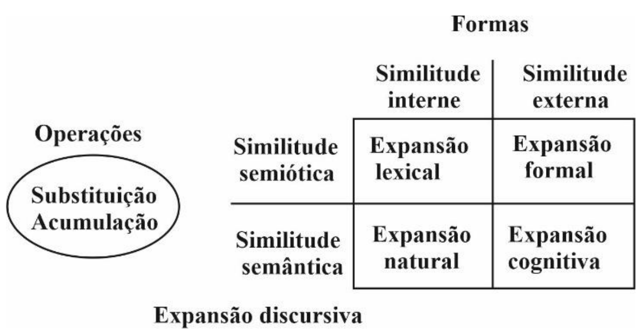
2004A; p. 204-205), que é o caso da demonstração em matemática em que o enunciado está sempre explícito, enquanto no caso da argumentação pode estar implícito.

2.5 Resumo do capítulo 2

As funções discursivas fornecem elementos importantes no detalhamento da análise *a priori* e *a posteriori*. Sintetizamos no quadro abaixo esses elementos-chave:

Quadro 3: palavras-chave relacionadas às funções discursivas





Fonte: a partir de Duval (1995, p. 88-132, 2004A, p. 86-121).

No caso ainda da expansão discursiva, considerar o Quadro 2. Sobre o raciocínio, a Figura 6 sintetiza os elementos-chave relacionados à expansão discursiva no raciocínio.

2.6 Leituras complementares

(A ordem de apresentação dos seis primeiros textos científicos é uma sugestão de leitura).

1 - SABEL, Eduardo; MORETTI, Méricles T. Para além da comunicação em sala de aula: o papel das funções discursivas na aprendizagem matemática. educação matemática em foco (UFPB). v. 10, 2022.

2 - SABEL, Eduardo; BRANDT, Celia F.; MORETTI, Méricles T. As Funções Discursivas na aprendizagem matemática segundo Raymond Duval In: Florilégio de pesquisas que envolvem a teoria semiocognitiva de aprendizagem matemática de Raymond Duval - parte 2. (Orgs. Méricles T. Moretti e E. Sabel). Florianópolis: GPEEM/UFSC, 2023.
Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/203982

3 - MORETTI, Méricles T. Um estudo sobre a função de expansão discursiva e operações que caracterizam o raciocínio segundo Raymond Duval ReBECEM, v. 7, n. 4, 2023.

4 - DIONIZIO, Fátima Q.; BRANDT, Celia F.; MORETTI, Méricles T. Emprego das funções discursivas da linguagem na compreensão de erros de alunos em uma atividade que envolve noções de trigonometria. Perspectivas da Educação Matemática. v. 7, 2014.

5 - Segundo capítulo em DUVAL (1995, 2004A).

6 - Quinto capítulo em DUVAL (1995, 2004A).

- DUVAL, R. L'apprentissage de l'algèbre et le problème cognitif de la désignation des objets. Actes du SFIDA, IV, n°13-16. IREM de Nice, 2002.
- BRANDT, Celia F.; MORETTI, Méricles T.; SCHEIFER, Carine; DIONIZIO, Fátima A. Q. A importância da função discursiva de designações de relações algébricas para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Educação Matemática Pesquisa. v. 20, 2018.

CAPÍTULO 3

APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA

A aprendizagem da geometria é pautada, segundo a teoria de Duval (1995; 2004A), em diversas operações semiocognitivas. Aqui, iremos nos referir ao caso dos problemas de geometria que envolvem enunciado com figuras. São três os conjuntos de operações: - as apreensões em geometria; - os tipos de olhares; - a desconstrução geométrica – mudança de dimensão. Há ainda a apreensão sequencial que é requerida na construção geométrica que não vamos nos referir aqui. uma vez que os estudos sobre essa apreensão ainda são muitos tímidos.

3.1 As apreensões em geometria

A **apreensão perceptiva** é a mais importante das apreensões uma vez que todas as outras dela dependem. Há duas delas, conforme destaque de Duval (2012B), uma que é imediata que depende com bastante exclusividade da organização dos elementos visuais e outra controlada que leva em conta o que consta no enunciado, ou seja, ela se junta à **apreensão discursiva**:

> Estas duas atitudes encontram-se geralmente em conflito porque a figura mostra objetos que se destacam independentemente do enunciado e que os objetos nomeados no enunciado das hipóteses não são necessariamente aqueles que aparecem espontaneamente (DUVAL, 2012B, p. 120, 121).

Em muitas situações, uma figura ainda não está pronta para que a resolução possa ser implementada. Nesse caso, entra em jogo a **apreensão operatória** que permite diversos tipos modificações imaginadas na figura como mostra o Quadro 4 a seguir. Entre essas modificações em uma figura, a mais comum é a reconfiguração intermediária.

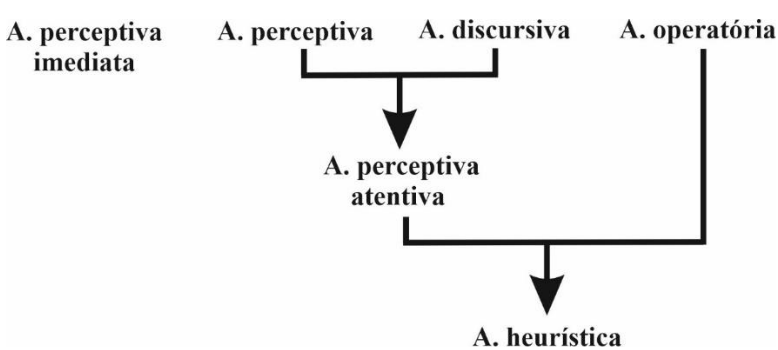
Quadro 4: tipos de modificações em uma figura geométrica.

Tipo de modificação figural	**Operações que constituem a produtividade heurística**	**Fatores que interferem na visibilidade**
MODIFICAÇÃO MEREOLÓGICA (decomposição da figura em subfiguras)	- Reconfiguração intermediária - Imersão	- Característica convexa ou não convexa das partes elementares
MODIFICAÇÃO ÓTICA	- Superposibilidade - Anamorfose	- Recobrimento parcial - Orientação
MODIFICAÇÃO DE POSIÇÃO	- Rotação - Translação	- Estabilidade das referências do campo perceptivo para o suporte das figuras

Fonte: Duval (2012B, p. 127).

Moretti e Cans (2024) propõem uma releitura de algumas operações semiocognitivas desenvolvidas por Duval (1995, 2004A) para a aprendizagem da geometria conforme mostra a figura a seguir:

Figura 7: as apreensões em geometria



Fonte: Moretti e Cans (2023, p. 309).

Dividimos a apreensão perceptiva em duas: uma que segue as leis da psicologia da forma, **apreensão perceptiva imediata**, algumas vezes mencionada por Duval (1995, 2004A). Outra que denominamos de **perceptiva atentiva** que se organiza de forma simultânea em volta da figura e do enunciado do problema e ainda tem o papel fundamental de identificação (veremos mais adiante exemplos dessa situação). Finalmente, a **apreensão heurística** que surge da sinergia entre **apreensão atentiva** e a **apreensão operatória**.

3.2 Princípios gestáltico na organização de figuras

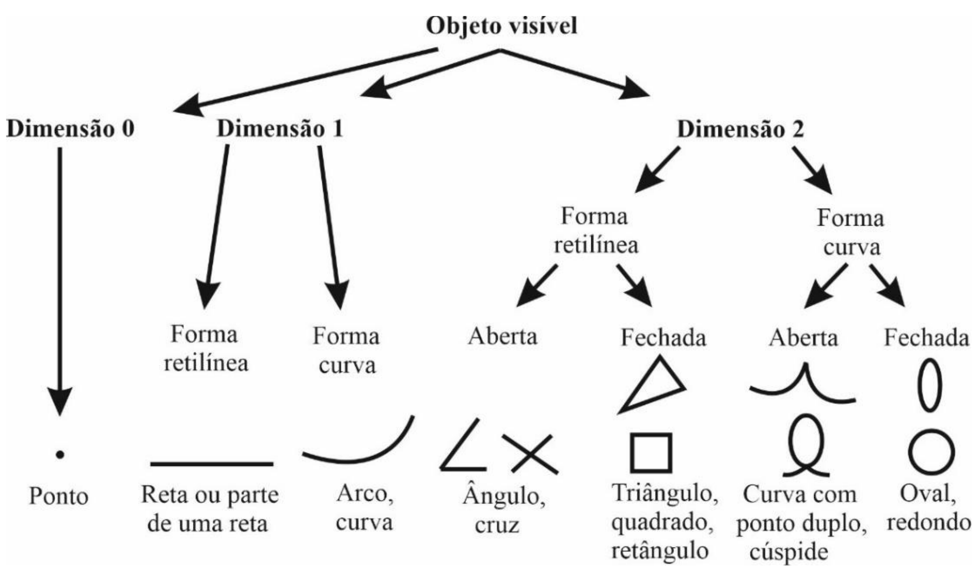
Gomes Filho (2004) aponta diversos elementos de uma figura que podem ser determinantes na organização quando a apreensão se dá de forma espontânea, como é o caso da apreensão perceptiva imediata: **Segregação e unificação** são forças mais simples que regem o processo de percepção da forma visual (GOMES FILHO, 2004, p. 20); **Descontinuidade** na formação de unidades figurais é necessário que haja descontinuidade de estimulação (ou contraste); **Fechamento** em que "As forças de organização dirigem-se, espontaneamente, para uma ordem espacial que tende para a unidade em todos fechados, segregando uma superfície, tão completamente, quanto possível do resto do campo" (GOMES FILHO, 2004, p. 21); **Boa continuação** "...é a impressão visual de como as partes se sucedem através da organização perceptiva de forma coerente, sem quebras ou interrupções na sua trajetória ou na sua fluidez visual (GOMES FILHO, 2004, p. 33); **Proximidade** que "Em condições iguais, os estímulos mais próximos entre si, seja de forma, cor, tamanho, textura, brilho, peso, direção, e outros, terão maior tendência a serem agrupados e a constituírem unidades (GOMES FILHO, 2004, p. 34); **Semelhança** em que "A igualdade de forma e de cor desperta também a tendência de se construir unidades, isto é, de estabelecer agrupamentos de partes semelhantes (GOMES FILHO, 2004, p. 35). Em uma figura, a proximidade e semelhança concorrem para formação de subunidades figurais; **Pregnância de forma ou força estrutural** é uma lei básica da Gestalt, tendência de uma estrutura resultante tão simples quanto as condições permitirem, no sentido da harmonia e do equilíbrio visual.

Outros elementos gestálticos podem influir na organização de figuras ou imagens, como as cores, simetrias, perspectiva geométrica, ilusão ótica, harmonia etc. Maiores aprofundamentos podem ser encontrados no livro clássico de Koffka (1936), em Guillaume (1979) e Gomes Filho (2004).

3.3 Desconstrução geométrica e mudança de dimensão

As mudanças de dimensão são possibilidades bastante comuns na resolução de problemas em geometria com figuras:

Figura 8: Unidades significantes figurais



Fonte: Duval (1995, p. 177; 2004A, p. 159).

É interessante pensar na heterogeneidade dessas unidades figurais, por exemplo, um ponto (0D) pode aparecer, por exemplo, em um triângulo (2D) no encontro de duas de suas alturas (1D). Para Duval:

> A percepção visual impõe sistematicamente o reconhecimento de unidades figurais 2D contra todo

reconhecimento de unidades figurais 1D, independentemente de pertencerem às unidades figurais 2D reconhecidas. *É essa desconstrução dimensional que é requerida pelo discurso matemático nas definições, por exemplo, assim como naquelas unidades figurais 1D em conjuntos de unidades 0D* (DUVAL, 2011B, p. 94, grifos do autor).

3.4 Tipos de olhares em geometria

Duval (2022) classifica quatro tipos de olhares que vão desde o olhar icônico ao não icônico, conforme tabela a seguir:

Quadro 5: tipos de olhares em geometria

VISUALIZAÇÂO ICÔNICA
Botanista – aquele que permite reconhecer o contorno de formas, diferenciar por semelhança um triângulo de um quadrilátero ou um círculo de uma figura oval. É um "olhar qualitativo".
Agrimensor – aquele que faz medidas no terreno e consegue passar essas medidas para o papel ou para o monitor. As atividades que exigem este tipo de olhar são aquelas que passam de uma escala de grandeza a outra.
VISUALIZAÇÃO NÃO ICÔNICA
Construtor – aquele que se forma no uso de instrumentos de desenho. Verdadeiramente o aluno pode tomar consciência que uma operação geométrica não é apenas uma característica perceptiva, mais uma verdade justificada na teoria da geometria.
Inventor – aquele que, para resolver um problema, adiciona traços na figura dada, opera sobre a figura e a modifica para descobrir um procedimento que resolva o problema.

Fonte: a partir de Duval (2022)

O que se pode perceber nessa classificação dos tipos de olhares, há dois olhares que são mais facilmente caracterizados que são os olhares icônicos em contraposição aos olhares não icônicos:

Quadro 6: olhares icônicos versus olhares não icônicos

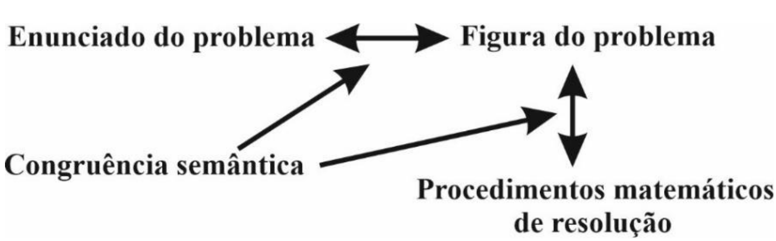
VISUALIZAÇÃO ICÔNICA		**VISUALIZAÇÃO NÃO ICÔNICA**	
ISSO SE PARECE ao perfil de um objeto real ou se parece com um conjunto de itinerários ou um deslocamento sobre um terreno ou um modelo típico (**padrão**). **A figura mantém-se um objeto independente das operações que se pode efetuar sobre ela**.		É uma SEQUÊNCIA DE OPERAÇÕES que permite que se reconheça as propriedades geométricas pela impossibilidade de obter certas configurações ou pela invariância das configurações obtidas. **A figura é uma configuração contextualmente destacada de uma rede de uma organização mais complexa.**	
Olhar botanista	Olhar agrimensor	Olhar construtor	Olhar inventor

Fonte: Duval (2022, p. 12)

3.5 Congruência semântica e geometria

Sobre a congruência semântica em problemas de geometria que envolvem figuras, são ao menos dois momentos que são necessários avaliar, conforme mostra a figura a seguir:

Figura 9: congruência semântica em problemas de geometria com figura.



Fonte: do autor.

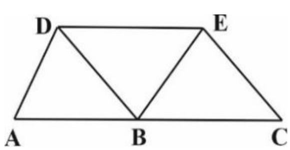
O primeiro momento para olhar a congruência semântica é a passagem do enunciado para a figura, e outro momento é se a combinação enunciado/figura favorece ou não algum procedimento matemático de resolução.

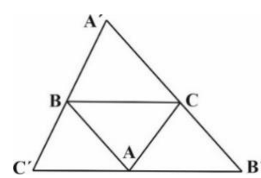
EXEMPLO 3. Problemas LIV OU e CHAP.

Dois problemas propostos por Dupuis; Pluvinage Duval (1978) em uma pesquisa envolvendo 116 alunos de 15 a 16 anos.

<table>
<tr><th>Versão LIV OU</th><th>Versão CHAP</th></tr>
<tr><td>ABED e BCED são paralelogramos.

Provar que B é meio de AC.


</td><td>A´C´ e AC são paralelos e
A´B´ e AB são paralelos e
B´C´ e BC são paralelos.
Provar que A é o meio
de B´C´.


</td></tr>
</table>

A versão LIV OU, que fala em “paralelogramos”, palavra importante por conta do procedimento matemático que deve usar propriedades do paralelogramo para deslanchar o processo de resolução. Já a versão CHAP não fala em “paralelogramos”, mas dá todas as condições para que na figura sejam localizados os paralelogramos que são essenciais para a resolução do problema como na versão LIV OU. Por conta dessa diferença, em que um fala explicitamente de “paralelogramos” enquanto a outra versão deixa implícito, há uma diferença significativa de aproveitamento na versão LIV OU com 34% de acerto enquanto na versão CHAP o aproveitamento cai para 11%. Por conta dessa diferença de aproveitamento, podemos afirmar que a versão LIV OU do problema é mais congruente do que a versão CHAP.

Pensamos que há um terceiro ponto a ser considerado na questão da congruência semântica em um problema, é a natureza semiocognitiva do procedimento a ser implementado na resolução desses dois problemas: em ambos os casos, temos demonstrações matemáticas que se revelam complexas uma vez que precisam utilizar elementos semiocognitivas e diversas passagens nos registros em língua natural, geométrico e algébrico. É bem possível que isso explique também o baixo nível de acerto de 34% na versão mais congruente.

3.6 Resumo do capítulo 3

A aprendizagem da geometria

As apreensões em geometria (Figura 7); mudanças de dimensão (figura 8); tipos de olhares (Quadros 5 e 6).

3.7 Leituras complementares

(A ordem de apresentação dos textos científicos é uma sugestão de leitura).

1 - Capítulo IV em DUVAL (1995, 2004A).
2 - DUVAL, R. As condições cognitivas da aprendizagem da geometria: desenvolvimento da visualização, diferenciação dos raciocínios e coordenação de seus funcionamentos. (Trad. C. R. M. ARINOS, J. L. M. FREITAS, Méricles T. MORETTI). REVEMAT, v. 17, 2022.
3 - DUVAL, R. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. (Trad. Méricles T. Moretti). REVEMAT, v. 7, n. 1, 2012.
4 - MORETTI, Méricles T. Semiosfera do olhar: um espaço possível para a aprendizagem da geometria. Revista Acta Scientiae, v. 15, 2013.
5 - MORETTI, Méricles T.; BRANDT, Celia F. Construção de um desenho metodológico de análise semiótica e cognitiva de problemas de geometria que envolvem figuras. Educação Matemática Pesquisa (Online). v. 17, 2015.
6 - MORETTI, Méricles T.; CANS, A. Releitura das apreensões em geometria e a ideia de expansão figural a partir dos estudos de Raymond Duval. Jornal internacional de estudos em educação matemática (JIEEM), v. 16, 2024.

CAPÍTULO 4

ANÁLISE DE ALGUMAS SITUAÇÕES ENCONTRADAS NA APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

A seguir faremos análise de algumas situações encontradas na aprendizagem matemática. As questões foram analisadas de forma isolada, mas em contexto de uma atividade de aprendizagem matemática é fundamental também reconhecer ser as conversões entre os sistemas semióticos são tratados de modo que haja coordenação entre eles. Portanto, a análise semiocognitiva precisa se dar não só nas atividades de forma isolada, mas de forma global para reconhecer os elementos significantes nos sistemas utilizados e verificar a coordenação nas operações de conversões.

4.1 - Atividade 1: problema das bolinhas de gude de Francisco e Mariana

> Francisco tem 20 bolinhas de gude a mais do que Mariana. Francisco e Mariana têm juntos 230 bolinhas. Determine a quantidade de bolinhas que cada um deles tem.

Retomemos o caso das bolinhas de gude de Francisco e Mariana. A análise se dará retomando os aspectos que consideramos mais importante nos Resumos dos capítulos 1 e 2 já estabelecidos anteriormente.

4.1.1 Análise semiocognitiva da atividade 1

- Conceitos básicos da teoria semiocognitiva (capítulo 1):

- que há dois registros envolvidos nesse problema, língua natural e algébrico;
- que a conversão exigida se dá apenas no sentido do enunciado do problema ao da escrita algébrica;
- as unidades significantes no enunciado do problema estão assinaladas a seguir:

<u>Francisco tem 20 bolinhas</u> de gude **a mais** <u>do que Mariana</u>. <u>Francisco e Mariana têm juntos</u> **230 bolinhas**. Determine a quantidade de bolinhas que cada um deles tem.

O problema contém 3 frases:

Frase 1: Francisco tem 20 bolinhas de gude a mais do que Mariana.
Frase 2: Francisco e Mariana têm juntos 230 bolinhas.
Frase 3: Determine a quantidade de bolinhas que cada um deles tem.

- há congruência semântica entre a frase “Francisco tem 20 bolinhas de gude a mais do que Mariana.” e a expressão matemática “$F + 20 = M$”, sendo F a quantidade de bolinhas de Francisco e M a quantidade de Mariana. No entanto, não há equivalência referencial.
- Diferentemente da equação $F – 20 = M$ que não mantém a congruência semântica com a frase, mas a frase e equação são referencialmente equivalentes;
- a frase “Francisco e Mariana têm juntos 230 bolinhas.” com a expressão $F + M = 230$, são congruentes e referencialmente equivalentes. Pensamos que esta frase é bastante comum e supera o segundo critério de congruência que exige a mesma sequência dos elementos significantes. Como falamos anteriormente, a noção de congruência semântica está inserida em um estudo mais amplo que é a compreensão de texto, e o aspecto cognitivo pode superar a questão da organização do texto (sequência de elementos significantes) e se tornar determinante na sua compreensão.

- As funções discursivas (capítulo 2):

- há duas designações puras, F para a quantidade de bolinhas de Francisco e M para Mariana e duas designações funcionais que são $F – 20 = M$ e $F + M = 230$;
- as três frases do problema são apofânticas, ou seja, são completas pois possuem sentido, o que é de se esperar na formulação de um problema pelo docente;

- a frase “Determine a quantidade de bolinhas que cada um deles tem.” é apofântica predicativa e ilocutória, pois remete a uma ordem direcionada aos alunos quando pede para determinar a quantidade de bolinhas que cada um tem;
- o problema exige a expansão discursiva por acumulação para que as duas frases apofânticas sejam consideradas: a segunda frase “Francisco e Mariana têm juntos 230 bolinhas.” acrescenta novas informações ao problema sem a qual ficaria incompleto.

A Frase 1 já inicia o tema do problema que se completa com as outras duas frases. As frases 1 e 2 possuem uma estrutura remática predicativa, os remas acrescentam informações aos sujeitos: na frase 1, o sujeito é “Francisco” e na frase 2 o sujeito composto é “Francisco e Mariana”. Por conta da presença dos termos “Francisco” e “Mariana” nas frases, a expansão, que é o que liga as duas frases, se dá principalmente por similitude semiótica na forma lexical (ver Quadro 2).

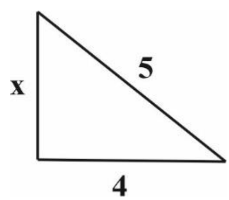
No entanto, também poderíamos pensar em uma expansão natural uma vez que bastariam conhecimentos da língua natural para estabelecer a relação entre **as duas frases que se referem globalmente ao mesmo objeto** algébrico. O que pesou para a classificação das duas primeiras frases é o fato de que elas **não têm um enunciado alvo**, o que vai acontecer somente com a terceira frase que é bem diferente, ela possui uma estrutura remática condicional uma vez que estão colocadas condições implícitas para o cálculo das quantidades de bolinhas de gude do Francisco e da Mariana. A frase condicional poderia ser a seguinte:

> “Uma vez que Francisco tem 20 bolinhas de gude a mais do que Mariana, e que Francisco e Mariana têm juntos 230 bolinhas, determine, então, a quantidade de bolinhas que cada um deles tem.”

Portanto, a segunda frase tem estrutura remática, mas ela é condicional, uma vez que o cálculo se dá levando em conta as condições colocadas nas duas frases anteriores. Por esta razão, a expansão é cognitiva, é ela que faz a ligação com os elementos algébricos, no caso em tela, com o sistema de equação $F - 20 = M$ e $F + M = 230$ tendo em vista o enunciado alvo que é a determinação da quantidade de bolinhas que cada um deles possui (ver Quadro 2). Já a solução desse sistema $F = 125$ e $M = 105$, é papel da expansão discursiva por substituição (Ver Figura 6).

4.2 - Situação 2: O problema do triângulo "retângulo".

> Calcule os valores possíveis de x na figura, dados os comprimentos na mesma unidade de medida.



Fonte: Mello (1999, p. 65).

4.2.1 Análise semiocognitiva da atividade 2

- Conceitos básicos da teoria semiocognitiva (capítulo 1):

- há dois registros envolvidos nesse problema, língua natural e geométrico;
- a unidade significante no enunciado do problema "valores possíveis de x" não encontra na figura o significante equivalente. Assim, enunciado e figura não são congruentes, os "valores possíveis de x" não aparecem de forma explícita na figura que é estática.

- Operações semiocognitivas na aprendizagem da geometria (capítulo 2):

- o princípio gestáltico do fechamento contribui para que a figura seja vista como um triângulo, mas ela será percebida como um triângulo retângulo devido ao mau hábito didático de privilegiar as posições vertical e horizontal. Assim, a apreensão perceptiva imediata leva o aluno a considerar a figura de um triângulo retângulo, negligenciando o enunciado do problema, e tentar calcular um único valor para x;

- a conversão exigida se dá considerando o enunciado do problema e a figura, que é o papel da apreensão perceptiva atentiva obedecer a essa exigência. Uma vez reconhecido que o triângulo é um triângulo qualquer - papel da apreensão discursiva atentiva, a busca por elementos para resolver o problema é papel da função de expansão discursiva.

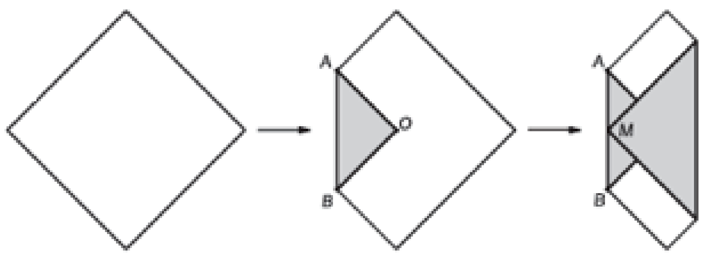
- As funções discursivas:

- uma vez reconhecido que o triângulo é um triângulo qualquer - papel da apreensão discursiva atentiva, a busca por elementos teóricos para resolver o problema é papel da função expansão discursiva por expansão cognitiva uma vez que regras próprias de um domínio de objetos são exigidas. Moretti e Cans (2023) observaram esse tipo de expansão em problemas de geometria e que foi denominado de **expansão figural cognitiva**;
- no caso, essas regras são as desigualdades triangular que podem ser resumidas para um triângulo de lados a, b, c da seguinte forma $|b - c| < a < b + c$;
- uma vez chegado à desigualdade triangular como domínio do objeto a ser aplicado, a solução se dará por conta da expansão por substituição cognitiva, o que vai resultar $1 < x < 9$. Notemos que a solução $x = 3$ acorre apenas quando o triângulo se torna um triângulo retângulo.

Esta questão aplicada a 169 alunos da 8a série em duas escolas (uma pública e outra particular), produziu o seguinte resultado: nenhum aluno acertou a questão e 40 alunos, todos eles da escola pública, não fizeram a questão (Mello, 1999). Esta autora observa ainda:
- que 2 alunos reconheceram que o triângulo não é retângulo e que 87 alunos (67% daqueles que responderam, todos da escola particular) tentaram resolver usando o teorema de Pitágoras. Isso só reforça o que foi comentado anteriormente na análise, a não congruência entre enunciado e figura e, mais ainda, na identificação, por boa parte dos alunos, do triângulo como sendo um triângulo retângulo.

4.3 - Atividade 3: O problema da folha de papel dobrada.

> Uma folha de papel quadrada de área 16 cm^2, branca de um lado e cinza de outro, foi dobrada como indicado na figura abaixo. O ponto O é o centro do quadrado (ponto de encontro das diagonais) e M é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$.



a) Qual é a área da região branca na figura I?
b) Qual é a área da região branca na figura II?

Fonte: Campos e Moretti (2022, p. 43).

4.3.1 Análise semiocognitiva da atividade 3

- Conceitos básicos da teoria semiocognitiva (capítulo 1), as funções discursivas (capítulo 2) e operações semiocognitivas na aprendizagem da geometria (capítulo 3):

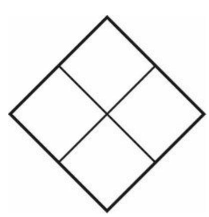
- Trata-se de um problema que envolve os registros geométrico e algébrico;
- há congruência semântica entre o enunciado e a figura - os elementos significantes em ambos os registros são facilmente identificáveis;
- A apreensão heurística entra em jogo para efetuar modificações possíveis sobre a figura;
- a questão exige o olhar inventor;
- há possibilidade de diversas mudanças de dimensão: 2D (dimensão 2 - área) para 1D (dimensão 1 - segmento de reta) e vice-versa - segmento AB

(dimensão 1D) e dois pontos (dimensão 0D) que são os pontos O e M em um ambiente 2D;
- o enunciado contempla diversos tipos de designações de categorização simples;
- as frases do problema proposto têm a propriedade de serem apofânticas, ou seja, são completas, algumas delas são apofânticas e referenciais como, por exemplo, as frases "O ponto O é o centro do quadrado" e "M é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$";
- as perguntas propostas a) e b) são apofânticas predicativas e ilocutórias, pois remetem ordens direcionadas aos alunos. Poderíamos também pensar que cada questão tem estrutura remática condicional, uma vez que para atender o que está sendo pedido, será necessário considerar as condições colocadas no problema (enunciado e figura). Por esta razão, a expansão pode ser considerada também como cognitiva (ver Quadro 2);
- o problema exige a expansão discursiva por acumulação para que as várias frases apofânticas do enunciado sejam consideradas.

- Resposta de Gustavo à atividade proposta

Essa questão faz parte de um estudo empreendido por Campos e Moretti (2022) que envolveu dois alunos medalhistas das séries finais do ensino fundamental que participaram de um curso de extensão de iniciação científica preparatório para a olimpíada da OBMEP.

Gustavo (nome fictício de um dos alunos participantes) segue um caminho mais geométrico de resolução ao item I da questão e produz a seguinte modificação no primeiro quadrilátero da figura fornecida:

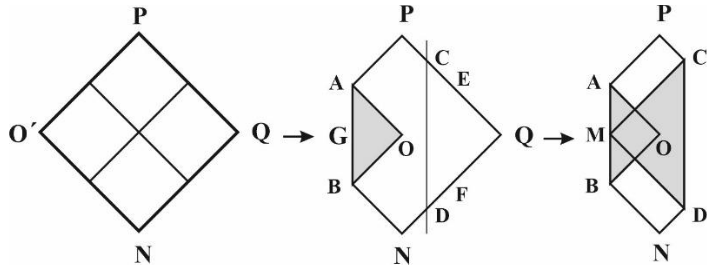


- tal modificação mereológica por reconfiguração intermediária vai repercutir na solução do item I da questão;
- essa modificação é papel da apreensão heurística (apreensão atentiva em sinergia com a apreensão operatória);
- para efetuar as modificações há várias mudanças de dimensão, a figura do quadrado (2D) exige que Gustavo tome os pontos médios de cada lado do quadrilátero (OD) para traçar os dois segmentos de reta (1D).

> Sobre a solução que empreendeu, Gustavo escreve:
> "Dividimos a folha em quatro quadrados iguais como na figura [mostrada anteriormente]. Então percebemos que a área da região branca corresponde a 3/4 da área do quadrado original, ou seja, 16 x 3/4 = 12 cm^2".

Gustavo apresenta várias frases apofântica que justificam a solução apresentada em um processo de expansão por acumulação pois cada frase acrescenta novas informações que objetivam descrever a solução utilizada. Finalmente quando ele percebe (papel da apreensão atentiva) que a área que procura corresponde a uma parte da área da folha, ele reconhece por um processo de expansão cognitiva que a área vale 16 x 3/4, e por um processo de expansão por substituição, que é característica do cálculo, produz a resposta 16 x 3/4 = 12 cm^2 (observamos que ele coloca a unidade de medida em apenas um dos lados da igualdade).

Para a resolução do item II da questão, Gustavo não segue a mesma linha apresentada no item I, mas constrói uma solução por um processo fortemente argumentativo baseada na figura que ele trabalha acrescentando letras para algumas designações. Na figura original só constavam as designações por categorizações simples pelas letras *A*, *B*, *O* (centro do quadrado) e *M* (ponto médio do segmento *AB*.



“Como a área do quadrado é *16 cm²*, um lado mede $\sqrt{16} = 4$.
Como A é ponto médio de $PO´$, PA mede $4 \times \frac{1}{2} = 2cm^2$. Do mesmo modo *BN* mede $2cm^2$ também.
Agora vamos ver onde foi feita a segunda dobra.
Chamamos o ponto médio de *AB* de *G*. A segunda dobra deve ser perpendicular a *GQ* e deve passar pelo ponto médio de *GQ*. Logo a dobra está no segmento *CD*. E *MC* é perpendicular a *PC*, assim como *MD* é perpendicular a *ND*. (*E* e *F* são pontos médios dos segmentos *PQ* e *NQ*, respectivamente). *C* e *D* são pontos médios de PE e NF, respectivamente.
Como *PC* e *ND* medem $2 \times \frac{1}{2} = 1cm$ temos dois retângulos brancos de área *1 × 2* na figura II. Portanto, a área da região branca na figura II é $(2 \times 1) \times 2 = 4\ cm^2$.”

- Análise semiocogntiva da resposta de Gustavo:

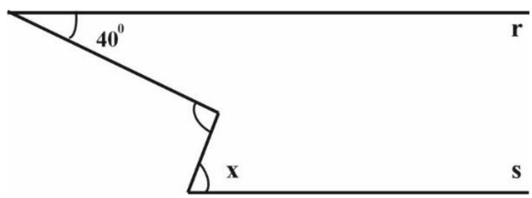
- a apreensão heurística é visível nessa solução em vários momentos;
- a questão exibe o olhar inventor que acrescenta traços (*CD*) e reconhece elementos da figura;
- há várias mudanças de dimensão entre *2D*, *1D* e *0D*;
- as figuras funcionam como suporte heurístico - representação auxiliar, seja por decisões que possam ser tomadas ou por modificações a serem acrescentadas;
- a argumentação apresentada por Gustavo inclui diversas frases apofânticas, alguma delas também referenciais, como por exemplo “Chamamos o ponto médio de *AB* de *G*”, que caracteriza designação por categorização simples;
- a argumentação se dá por expansão discursiva cumulativa (ver Figura xx);

- finalmente, a solução *4 cm²* se dá por expansão cognitiva por substituição (ver Figura 6).

Observação: a demonstração de Gustavo não justifica plenamente algumas afirmações, como por exemplo, que "*E* e *F* são pontos médios dos segmentos *PQ* e *NQ*, respectivamente".

4.4 - Atividade 4: O problema da determinação de um ângulo.

Calcule o valor de *x*, sendo r // s.



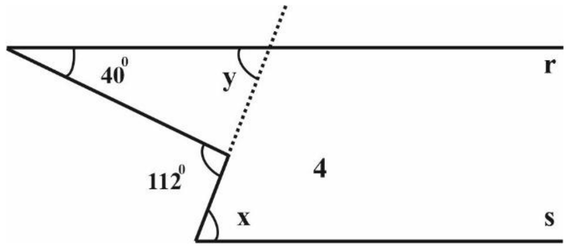
Fonte: Dolce e Pompeu (1993, p. 73).

4.4.1 Análise semiocognitiva da atividade 3

- Conceitos básicos da teoria semiocognitiva (capítulo 1), as funções discursivas (capítulo 2) e operações semiocognitivas na aprendizagem da geometria (capítulo 3):

- o enunciado e figura são congruentes, as informações trazidas pelo enunciado são bastante visíveis na figura. Além disso, a figura é bastante autônoma, até o fato de que as retas *r* e *s* se parecem paralelas são bastante visíveis;
- o problema é apresentado em uma única frase composta que é apofântica de natureza predicativa e ilocutória, também referencial ao mesmo tempo;
- a compreensão do problema não traz dificuldades, a dificuldade poderá residir nos procedimentos matemáticos de resolução que vão exigir

modificações na figura como por exemplo a modificação apresentada na figura que segue.



Para o caso da solução que apresenta essa reconfiguração na figura:

- há uma mudança de dimensão importante em um ambiente 2D – prolongamento apresentado pela linha pontilhada (1D) e descoberta do ângulo y, com retorno ao 2D;
- o olhar do inventor é requerido na solução desse problema;
- a letra y é designada para o ângulo obtido após o prolongamento do segmento de reta;
- a expressão x = y, é uma designação funcional (ângulos alternos internos) fruto da expansão discursiva cognitiva;
- a expressão 112° = 40° + y, é designação funcional (112º é ângulo externo do triângulo formado pelo prolongamento do segmento de reta) também fruto da expansão discursiva cognitiva;
- com as equações $x = y$ e $112° = 40°$ + y a solução do sistema se concretiza no valor x = 72º por meio da operação de substituição da expansão discursiva.

A Figura 9 a seguir reflete um quadro sinóptico de vários elementos já apontados nessa discussão.

Os procedimentos matemáticos só se tornaram aparentes após o prolongamento ser apresentado na figura (linha pontilhada): a apreensão perceptiva atentiva (seta 1) em conjunto com a apreensão operatória (seta 2) propicia o prolongamento do segmento de reta e a identificação do ângulo designado por *y*, e de *112º* como sendo ângulo externo ao triângulo assim formado. A seta 3 mostra a expansão figural cognitiva para a formação do sistema de equações, e a seta 4 a expansão discursiva por substituição para a solução $x = 72^o$ desse sistema.

Figura 9: Apreensão e expansão para a solução apresentada

Fonte: MORETTI; SCAN (2023, p. 306).

CONCLUSÕES

Os elementos da teoria semiocognitiva desenvolvidos por Duval (1995, 2004A) são suficientes para uma análise de atividades didáticas em matemática. As várias situações apresentadas no capítulo IV confirmam isso. O Capítulo 1 (Registro e hipótese fundamental de aprendizagem matemática) e o Capítulo 2 (As funções discursivas de uma língua), que trataram dessa teoria sem especificar um campo específico da matemática, permite que se possa analisar as mais diversas situações de ensino e aprendizagem encontradas em matemática. É fato que os assuntos desenvolvidos em matemática possuem uma certa organização hierárquica, mas o mesmo não ocorre com as operações semiocognitivas desenvolvidas por Raymond Duval. Isto quer dizer que um tema que se desenvolve, por exemplo, na geometria encontra elementos de aprendizagem mais específicos à geometria (Capítulo 3) e outros elementos semiocognitivos desenvolvidos também nos Capítulos 1 e 2. No caso da aprendizagem da álgebra, não há elementos semiocognitivos tão específicos como na geometria, mas se serve de forma bastante fundamental dos elementos semiocognitivos desenvolvidos no Capítulo 1, e no Capítulo 2, em particular, do caso da função referencial.

Sempre é bom lembrar que a teoria de aprendizagem matemática desenvolvida por Duval (1995, 2004A) tem como base, principalmente, o nível de ensino fundamental. Isto não quer dizer que não se possa ir além desse nível, mas é importante ter isso em mente. Uma razão para esse cuidado é que o trabalho desenvolvido por Duval não possui pré-requisitos, mas uma certa ordem no desenvolvimento semiocognitivo: veja por exemplo, a desenvolvimento do olhar em geometria que passa de um olhar botanista para o olhar inventor, o que leva a uma certa organização nas atividades para promover esse desenvolvimento.

Enfim, os textos trabalhados nos quatro capítulos e as leituras complementares apresentadas fornecem elementos para as análises *a priori* e *a posteriori* nos termos da noção de engenharia didática desenvolvida por Douady (1986).

BIBLIOGRAFIA

CAMPOS, A.; MORETTI, Méricles T. Operações semiocognitivas mobilizadas em tarefas de geometria: uma análise com alunos medalhistas do 8º ano. EMR-RS, v.1, n. 23, 2022.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. Fundamentos de matemática elementar: geometria plana. São Paulo: Atual Editora, 1993.

DUPUIS, C.; DUVAL, R.; PLUVINAGE, F. Étude sur la stabilité de la géométrie en fin de troisième. In Géométrie au premier cycle. Tomme II. Publication de l´A.P.M.E.P., n. 22, 1978.

DOUADY, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. Recherches en didactique des mathématiques, 7 (2), 1986.

DUVAL, R. As condições cognitivas da aprendizagem da geometria: desenvolvimento da visualização, diferenciação dos raciocínios e coordenação de seus funcionamentos. Tradução de: Cleide R. M. Arinos; José L. M. de Freitas; e Méricles T. Moretti; REVEMAT, v. 17, 2022.

DUVAL, R. Escritos simbólicos e operações heterogêneas de substituição de expressões: as condições de compreensão em álgebra elementar. *In* Florilégio de pesquisas que envolvem a teoria semiocognitiva de aprendizagem matemática de Raymond Duval (Méricles T. Moretti; C. F. Brandt Orgs.), 2020.

DUVAL, R. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. Trad. Méricles T. Moretti. REVEMAT, v. 7, n. 1, 2012B.

DUVAL, R. Gráficos e equações: a articulação de dois registros, Revemat, v. 6, n. 2, 2011A.

DUVAL, R. Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. Org. Tânia M. M. Campos. Trad. Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011B.

DUVAL, R. Semiosis e pensamiento humano: registros semióticos y aprendizages intelectuales. Trad. Myriam V. Restrepo. Santiago de Cali: Universidad del Valle, 2004A.

DUVAL, R. Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo. Trad. Myrian V. Restrepo. Santiago de Cali: Merlín I. D., 2004B, 121p.

DUVAL, R. Sémiosis et pensée humaine : registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Berne: Peter Lang, 1995, 395p.

FREGE, G. Lógica e filosofia da linguagem. Trad. Paulo Alcoforado. São Paulo: Editora Cultrix, 1978.
GOMES FILHO J. Gestalt do objeto: sistema de leitura visual. São Paulo: Escrituras, 2004.
GRANGER, G-G. A ciência e as ciências. São Paulo: Editora da Unesp, 1994. 123p.
GUILLAUME, P. (1979). La Psychologie de la forme. Paris: Flamarion.
KOFFKA, K. (1936). Principles of Gestalt psychology. Londres: KEgAN PAUL, TRFNCH. TRUBNER & CO., LTD.
MELLO, E. G. S. Demonstração: uma sequência didática para a introdução de seu aprendizado no ensino da geometria. Dissertação de mestrado, PUC-SP, 1999.
MORETTI, Méricles T.; CANS, A. Releitura das Apreensões em Geometria e a Ideia de Expansão Figural a Partir dos Estudos de Raymond Duval. JIEEM v. 16, n. 4, 2023
MORETTI, Méricles T.; BRANDT, C. F.; ALMOULOUD, Saddo Ag. Congruência semântica: um fenômeno semiótico e cognitivo a ser levado em conta na aprendizagem matemática. Quadrante. v. 31, n. 1, 2022A.
MORETTI, Méricles T. A compreensão de texto segundo Raymond Duval: um olhar mais exclusivo direcionado à aprendizagem matemática. Educação Matemática sem Fronteiras. v. 4, n. 2, 2022B.
MORETTI, Méricles T. A noção de conjunto de representação semiótica sistemático e assistemático: perspectivas didáticas. (A ser publicado).
RUSSELL, B. On denoting. Mind, 14, 1905.

ANEXO

A NOÇÃO DE REGISTRO EM RAYMOND DUVAL[5]

INTRODUÇÃO

A ideia de registro é chave na proposta semiocognitiva de aprendizagem intelectual de Duval (1995) que compreende três polos constitutivos (ver Figura 1C): significante, significado, objeto (referência). Tal construção mostra a influência direta de três autores que abordaremos a seguir. Também traremos para discussão até que ponto um conjunto de elementos semióticos pode ser considerado como sendo um registro no sentido em que Duval (1995) define.

1 AS INFLUÊNCIAS

1.1 – Ferdinand de Saussure

Saussure, em seu curso de linguística, afirma que:

> Chamamos de *signo* a combinação do conceito e da imagem acústica: mas no uso corrente, esse termo designa geralmente a imagem acústica apenas, por exemplo uma palavra (*arbor* etc.). Esquece-se que se chamarmos a *arbor* signo, é somente porque exprime o conceito “árvore”, de tal maneira que a ideia da parte sensorial implica a do total (SAUSSURE, 2008, p. 81)

[5] Publicado em MORETTI, Méricles T. A Noção de Registro em Raymond Duval *In*: Moretti, Florilégio de pesquisas que envolvem a teoria semiocognitiva de aprendizagem matemática de Raymond Duval - parte 2. (Orgs. Méricles T. Moretti; E. Sabel). Florianópolis: GPEEM/UFSC, 2023.

A partir dessa ideia de signo, a influência de Saussure (2008) na elaboração por Duval (1995) do termo registro provém de outras afirmações tais como:

(1) o conteúdo da representação depende da forma, ou seja, muda a forma muda o conteúdo. Assim, 1, 3 – 2, 10^0 representam a mesma coisa, mas possuem conteúdos (sentidos) diferentes;

(2) uma representação só é importante no seio de um sistema de representação.

A forma e conteúdo da forma são inseparáveis como diz Saussure na citação seguinte em seu curso de linguística.

> A língua é também comparável a uma folha de papel: o pensamento é o anverso e o som é o verso; não se pode cortar um sem cortar, ao mesmo tempo, o outro; ... (SAUSSURE, 2008, p. 132)

Saussure (2008, p. 34) afirma que “A língua e escrita são dois sistemas diferentes de signo”, e ainda para mostrar a importância de um signo no seio de um sistema de signo afirma que

> ... é uma grande ilusão considerar um termo simplesmente com a união de certo som com um certo conceito. Defini-lo assim seria isolá-lo do sistema do qual faz parte; seria acreditar que é possível começar pelos termos e construir o sistema fazendo a soma deles, quando pelo contrário, cumpre partir da totalidade solidária para obter, por análise, os elementos que encerra (além SAUSSURE, 2008, p. 132)

Saussure sobre o significado de um signo, avança o conceito de valor do signo: os valores dos signos são constituídos: “1.º por uma coisa *dessemelhante*, suscetível de ser *trocada* por outra cujo valor resta determinar; 2.º por coisas *semelhantes* que se podem comparar com aquela cujo valor está em causa." (SAUSSURE, 2008, p. 134).

O conceito de valor do signo reforça a ideia de sistema de representação, uma vez que o valor só é comparável aos valores de outros signos no interior do mesmo sistema, no caso em tela, da língua: "[a palavra] fazendo parte de um sistema, está revestida não só de uma significação, como também, e sobretudo, de um valor, e isso é coisa muito diferente." (SAUSSURE, 2008, p. 134). Para Duval, em concordância com Saussure, afirma que:

> O significante e o significado são, cada um deles, valores no seio de uma rede de oposição, estas redes constituindo sistemas semióticos. Isto quer dizer que um significante é um significante não em razão das características perceptíveis, de sua forma material, mas em razão do valor que toma em oposição a entidades com as quais forma um conjunto (DUVAL, 1999, p. 21)

Esta citação de Duval frisa bem, tendo em vista a utilização do signo, a diferença entre o modo fenomenológico de produção (características perceptíveis) e o seu aspecto estrutural (valor que toma em oposição a entidades com as quais forma um conjunto).

"O ´famoso´ Curso [de Linguística geral] acabou por guardar a perspectiva de linguagem saussuriana, que ficou conhecida como estruturalismo (apesar de Saussure nunca ter usado tal termo, mas ter falado de um sistema de signos linguísticos)" (EL-JAIK, 2016, p. 205).

1.2 - Charles Sanders Peirce

Para Peirce o signo é composto de três polos: o signo (ou *representamen*), o interpretante e o objeto:

> [228] Um *signo*, ou *representâmen*, é aquilo que, sob certo aspecto ou modo, representa algo para alguém. Dirige-se a alguém, isto é, cria na mente dessa pessoa, um signo equivalente, ou talvez um signo mais desenvolvido. Ao signo assim criado denomino *interpretante* do primeiro signo. O signo representa alguma coisa, seu *objeto* (PEIRCE, 2000, p. 46)

Este autor destaca, ainda, que o signo "Representa esse objeto não em todos os seus aspectos, mas com referência a um tipo de ideia que eu, por vezes, denominei *fundamento* do representâmen" (PEIRCE, 2000, p. 46).

Essa última observação de Peirce (2000) em sua definição de signo mostra o papel do objeto e ainda mais qualifica que o objeto representado pode não ser um objeto em toda a sua totalidade, forma essa como Duval utiliza em sua noção de registro:

> ... a natureza do registro semiótico que é escolhido para representar um conteúdo (objeto, conceito ou situação) impõe uma seleção de elementos significativos ou informacionais do conteúdo que representa. Esta escolha é feita em função das possibilidades e dos inconvenientes semióticos do registro escolhido. Uma linguagem não oferece as mesmas possibilidades de representação que uma figura ou um diagrama. Isto quer dizer que **toda representação é cognitivamente parcial em relação ao que ela representa,** e que de um registro a outro não estão os mesmos aspectos do conteúdo de

> uma situação que estão representados (DUVAL, 2012, p. 280)

Para Peirce (2000) além do signo não representar um objeto em sua totalidade, “Um signo pode ter mais de um objeto.” (p. 47). Isso é bastante patente em matemática, um mesmo signo pode pertencer a objetos e noções distintas, como por exemplo, 6/4 é um número racional que pode pertencer tanto à noção de divisão quanto à noção de proporção.

Para Duval (1995, p. 64) a estrutura diádica do signo linguístico como Saussure (2008) descreve é ambíguo uma vez que apresenta duas limitações: (1) não considera a existência de diversos sistemas semióticos e nem a coordenação entre eles; (2) tal definição do signo linguístico não considera os tratamentos ou conversões que mostram a potência e interesses cognitivos.

> De forma breve, uma tal definição significa considerar as representações unicamente em relação a uma única função, a função de expressão, e a ignorar que as representações preenchem igualmente as funções de objetivação e de tratamento, que são essenciais à atividade cognitiva (DUVAL, 1995, p. 64)

Os tratamentos de que fala Duval nessa citação, são as operações internas que podem ser efetuadas em um sistema semiótico (um registro) e a função de objetivação refere-se à tomada de consciência pelo sujeito de algo que descobre e não suspeitava, mesmo que já haviam explicado; algumas vezes são externalizadas por expressões do tipo “Ah! agora entendi”.

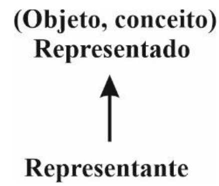
A Figura 1 a seguir apresenta o signo em duas estruturas, diádica e triádica.

Figura 1A, 1B e 1C: o signo em sua estrutura diádica ou triádica.

Representação diádica do signo

A

B



Representação triádica do signo

C

Fonte: a partir de Saussure (2008, p. 79 – 84) e Duval (1995, p. 62 – 63).

A Figura 1A apresenta o signo linguístico de estrutura diádica em Saussure (2008, p. 81) que preferiu usar os termos “Significado” e “Significante” no lugar dos termos que usava até então: “conceito” e “imagem acústica”.

Na Figura 1B, também de estrutura diádica, o representado retrata um objeto, ocupa o seu lugar. Esse tipo de representação também ocorre em matemática, caracterizada pelos símbolos e notações, como por exemplo, a representação do vetor $\vec{u}$ que tem uma referência instituída. Em geral podem ser enquadrados como diádico elementos do ensino do tipo declarativo, como por exemplo, 8 x 7 é igual ao número de casas de uma grade quadrangular com 8 linhas e 7 colunas, ou simplesmente, 8 x 7 = 56.

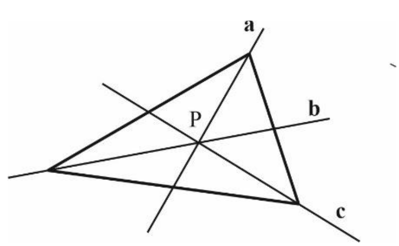
A Figura 1C é uma relação triádica, é como Duval (1995) retrata o registro semiótico que utiliza em sua teoria, e que afirma que na estrutura triádica a relação de referência é subordinada "ao sentido que é dado entre significante e significado." (p. 63). Notemos que o significante e significado estão assinaladas sobre uma folha de papel, da forma como Saussure cita (ver a segunda citação de Saussure acima).

1.3 - Gottlob Frege

Esse elemento na estrutura chamado referência foi uma contribuição de Frege (1978, p. 61-86) e desempenha um papel fundamental na teoria semiocogntiva de Duval (1995).

Um exemplo tratado por Frege (1978) mostra bem a importância dessa noção: consideremos um triângulo em que linhas *a*, *b* e *c* ligam os vértices aos pontos médios dos lados opostos, conforme mostra a figura a seguir.

Figura 2: o exemplo de Frege para a ideia de sentido.



Fonte: a partir de Frege (1978, p. 62)

Observando a figura, podemos dizer que:

> Temos, assim, diferentes designações para o mesmo ponto, e estes nomes ("o ponto de intersecção de *a* com *b*" e "o ponto de intersecção de *b* com *c*") indicam, simultaneamente, um modo de apresentação e, em consequência, a sentença contém um conhecimento real (FREGE, 1978, p. 62).

Concluiu, ainda, que a referência a essas diferentes designações para o mesmo ponto é a mesma, mas não os seus sentidos (p. 62).

Pensemos um outro exemplo! Com o número 6/4 podemos imaginar:

- um número racional como em um problema do tipo "dividir 6 laranjas para 4 indivíduos, o que dá, 1,5 laranja para cada um". A referência do assunto em matemática é NÚMERO RACIONAL;
- uma divisão euclidiana como em um problema do tipo "distribuir 6 laranjas para 4 indivíduos, o que dá, uma para cada pessoa uma laranja e ainda sobram duas". A referência do assunto em matemática é a DIVISÃO EUCLIDIANA;
- uma proporção como em um problema do tipo "a produção de maçã na região A, em relação à produção na região B, está na proporção de 6 para 4". A referência do assunto em matemática é RAZÃO E PROPORÇÃO.

Assim, dependendo do sentido que damos ao significante/significado, podemos apontar para referências diferentes, objetos diferentes em matemática, e que cada um deles pode ter o seu próprio sistema semiótico. Afirmação essa que, em alguns casos, são cercadas de controvérsias: em que condições um conjunto de elementos pode formar um sistema semiótico? Mais adiante discutiremos essa questão e descobriremos consequências didáticas importantes.

2 O REGISTRO EM DUVAL

O registro em Duval (1995) tem três polos (Figura 1C), o significante (forma), significado e objeto (referência). O significante/significado possui conteúdo que pode não retratar o objeto em sua totalidade. Esse fato, está na origem da recomendação didática de Duval (2023/2012, p. 13): “A que corresponde a existência de muitos registros de representação e qual é o interesse de sua coordenação para o funcionamento do pensamento humano?”. Ao que responde:

> ... a natureza do registro semiótico que é escolhido para representar um conteúdo (objeto, conceito ou situação) impõe uma seleção de elementos significativos ou informacionais do conteúdo que representa (DUVAL, 2023/2012, p. 13)

Ainda, sobre isso, Duval (2023/2012) comenta que “**toda representação é cognitivamente parcial em relação ao que ela representa,** e que de um registro a outro não estão os mesmos aspectos do conteúdo de uma situação que estão representados.” (p. 13).

2.1 - Objeto e conteúdo da representação

Das três tricotomias do signo em Peirce (2000, p. 51), uma refere-se à relação do signo com o seu objeto e que gerou três signos que ele denominou ícone, índice e símbolo:

> Um *Ícone* é um signo que se refere ao Objeto que denota apenas em virtude de seus caracteres próprios, caracteres que ele igualmente possui quer um tal Objeto exista ou não.

> Um *Índice* é um signo que se refere ao objeto que denota em virtude de ser realmente afetado por ele. Na medida em que o Índice é afetado pelo Objeto, tem ele necessariamente alguma qualidade em comum com o Objeto, e é com respeito a estas qualidades que ele se refere ao Objeto.
> Um *Símbolo* é um signo que se refere ao objeto que denota em virtude de uma lei, normalmente uma associação de ideias gerais que opera no sentido de fazer com que o Símbolo seja interpretado como sendo àquele Objeto (PEIRCE, 2000, p. 51)

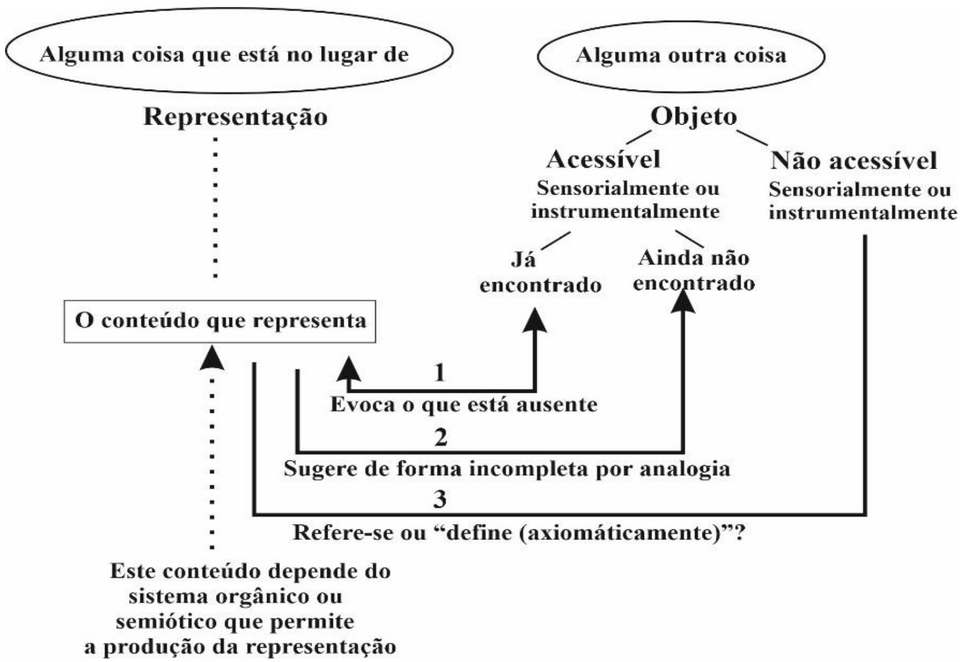
No ícone há uma semelhança material com o objeto. Assim, quando levantamos pela manhã e vemos que a rua está molhada, logo pensamos que choveu à noite. Já o Índice sugere uma relação indicativa com o objeto tal qual, como por exemplo, certos sintomas apontam para uma doença. O símbolo é bem diferente desses dois signos, a relação que tem com o objeto é uma relação puramente convencional (BENVENISTE, 2014, p. 96).

Sobre essa classificação dos signos de Peirce, Benveniste comenta:

> Não se vê, de modo algum, o que une umas às outras, essas classes de signos, nem os princípios nos quais estaria fundamentada a classificação (BENVENISTE, 2014, p. 98)

A classificação de Peirce baseia-se no fato de que a representação se assemelha ou não com o objeto representado. No entanto, as relações são muito mais complexas se se levar em conta o fato de que **há muitos objetos que só são acessíveis a partir de uma representação semiótica** (DUVAL, 2004, p. 36), conforme podemos constatar na figura a seguir.

Figura 3: Relações cognitivas possíveis entre um conteúdo de uma representação e o objeto.



Fonte: Duval (2004, p. 36).

- a relação 1, é uma relação de mão dupla, os objetos podem ser diretamente percebidos ou percebidos por meio de instrumentos, como por exemplo, o microscópio na biologia. Não há como confundir objeto e representação.

Duval (2004) comenta que é nessa relação que Piaget baseou os seus trabalhos "com objetos já vistos, familiares, mas momentaneamente ausentes, uma vez que se encontram distantes..." (p. 37);

- a relação 2, é uma relação com um único sentido que vai da representação ao objeto, "O conteúdo da representação, antes que tenha descoberto o objeto, é interpretado por meio de analogias com objetos já conhecidos pelo sujeito" (DUVAL, 2004, p. 37). Marca aqui os tipos de conhecimentos a partir de documentos como, por exemplo, em geografia e botânica. No momento que o sujeito tem acesso ao objeto, ele se encontra na relação 1;

- a relação 3 indica que o sujeito não tem acesso ao objeto em si mesmo, a não ser por meio das representações que a ele se referem. É a situação dos **objetos ideais** que encontramos em matemática. O ponto geométrico é um desses objetos, não tem dimensão. Então como ter acesso a um objeto desse tipo a não ser por meio de uma representação?

2.2 - Émile Benveniste

Émile Benveniste foi também um dos influenciadores da obra de Duval, em suas "Últimas aulas no *Collège* de France" afirma:

> 1) Que há, no mundo, na natureza, no comportamento humano, nas obras do homem, uma quantidade de signos de espécie muito diversas (vocais, gestuais, naturais), *coisas que significam, que têm sentido*;
> 2) por consequência, que há lugar para pensar que esses signos se assemelham de alguma maneira, que constituem conjuntos;
> 3) que é possível estabelecer relações entre esses conjuntos de signos;
> 4) que o estudo dos signos resulta em uma disciplina particular: *a semiologia* (BENVENISTE, 2014, p. 92)

A observação 2 reforça a ideia de sistema semiótico e a observação 3 alimenta a ideia de que se pode estabelecer uma operação que pode marcar a relação entre sistemas diferentes, que Duval (1995) estabeleceu para os registros e denominou de **conversão**. De forma mais extensiva, Benveniste aponta para essa possiblidade no Capítulo 4 de PROBLEMAS DE

LINGUÍSTICA GERAL I (BENVENISTE, 2005, p. 53 – 67). Na observação 4, de fato criou-se uma disciplina que foi denominada “semiótica”.

2.3 - Representação semiótica e registro

Um registro é um sistema estruturado, e como tal, possui elementos como em um conjunto matemático. Para Duval,

> ...os sistemas semióticos devem cumprir três atividades cognitivas fundamentais. Primeiro [**formação**], constituir um traço ou uma combinação de traços perceptíveis que sejam identificados como uma representação de alguma coisa em um sistema determinado. Em seguida [**tratamento**], transformar as representações pelas regras próprias ao sistema de modo a obter outras representações podendo constituir um aporte de conhecimento em relação às representações iniciais. Finalmente [**conversão**], converter as representações produzidas em um sistema em representações de um outro sistema de tal modo que estas últimas possam explicitar outras significações relativas ao que é representado (DUVAL, 1995, p. 20-21)

Como se pode observar nessa citação, são três as características para que um conjunto de elementos possa formar um registro. O tratamento e a conversão são duas operações semiocognitivas não só para formar um registro, mas como integrantes da hipótese fundamental de aprendizagem de Duval (ver Figura 5).

O tratamento é um tipo de operação específica de um registro realizada internamente a ele. Já a conversão é uma operação que envolve dois registros por vez, ela é muito mais complexa, uma vez que o trânsito se dá em conformidade com as características de cada registro envolvido. Essa complexidade possibilita o surgimento de um fenômeno denominado por Duval (1995) de congruência semântica[1] que exibe, segundo alguns critérios, o grau de transparência entre duas representações de um mesmo objeto. Há muitas situações que caracterizam a operação de conversão, veremos mais adiante algumas delas. São exemplos, a tradução, a transcrição para o braile, o equacionamento de um problema em língua natural etc.

A variedade de registros é enorme, o quadro da Figura 4 a seguir é uma síntese dessa variedade para o caso da matemática. Mostra um quadro com quatro células de grandes tipos de registros. No interior de cada uma dessas células, outros sistemas podem se formar uma vez que conforme aponta Benveniste (2014) "Um sistema semiológico é sempre, em princípio, capaz de gerar um ou vários outros sistemas semiológicos." (p. 108). Os sistemas da célula 1 estão presentes em toda a atividade matemática, seja no papel de função meta discursiva (comunicação, tratamento e objetivação) ou de função discursiva (referencial, apofântica, expansão discursiva e reflexividade)[2].

---

[1] Sobre esse assunto, consultar: DUVAL, R. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. Trad. Méricles T. Moretti. REVEMAT, v. 7, n. 1, p.118-138, 2012; MORETTI, Méricles T; BRANDT, C. F.; ALMOULOUD, S. A. Congruência semântica: um fenômeno semiótico e cognitivo a ser levado em conta na aprendizagem matemática. Quadrante v. 31.1, Lisboa: 2022. p. 92-112.

[2] Sobre esse assunto, consultar:
Capítulo II de DUVAL, R. Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Tradução de Myriam Vega Restrepo. Universidad del Valle, Instituto de Educacion y Pedagogia, Santiago de Cali, 2004. 328 p.;
DIONIZIO, Fátima Q.; BRANDT, Celia F. MORETTI, Méricles T. Emprego das funções discursivas da linguagem na compreensão de erros de alunos em uma atividade que envolve noções de trigonometria. Perspectiva da Educação Matemática. v. 7, 2014;
SABEL, E. O papel das funções discursivas na análise da produção de alunos na resolução de problemas. (Dissertação de Mestrado). Florianópolis: UFSC/PPGECT, 2021.

Figura 4: classificação dos diferentes registros mobilizados em matemática.

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	**REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA**
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS Os tratamentos não são algoritmizáveis	**(1) Língua natural** **Operações** *associais verbais (conceituais), descrição, definição, explicação;* *raciocínio:* *- argumentação a partir de observações, de crenças;* *- dedução válida a partir de definição ou de teoremas*	**(2) Figuras geométricas** planas ou em perspectiva (configuração de formas 0D, 1D, 2D, 3D) **Operações** *- apreensão operatória e não somente perceptiva;* *- Construção com instrumentos;* *- modelização de estruturas físicas (exemplos: cristas, moléculas)*
REGISTROS MONOFUNCIONAIS Os tratamentos são principalmente algoritmizáveis	**(3) Sistemas de escrita:** numéricas (binária, decimal, fracionária); algébricas; simbólicas; (Línguas formais) **Operações** *cálculo literal, formal, ...*	**(4) Gráficos cartesianos** (visualização de variações) **Operações** *- mudança de sistema de coordenadas;* *- interpolação, extrapolação*

Fonte: elaborado a partir de Duval (2004, p. 52).

A célula 4 mostra registros que estão muitas vezes relacionados aos registros da célula 3 como ocorre, por exemplo, no esboço de curvas[3],

[3] Sobre esse assunto, consultar:
DUVAL, R. Gráficos e equações: a articulação de dois registros. Trad. Méricles T. Moretti. Revemat, v. 6, n. 2, p. 96-112, 2011;
MORETTI, Méricles T. A translação como recurso no esboço de curvas através da interpretação global de propriedades figurais. In MACHADO, Silvia D. A. de (org.). Aprendizagem em matemática: Registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003, 160p;
MORETTI, Méricles T. SABEL, E. Gráficos e equações: abordagem global qualitativa segundo Raymond Duval. Florianópolis: GPEEM/UFSC, 2022, 202p. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/203982

comporta registros tão complexos que Duval (1995) os caracteriza como um de hiper registro. As células 3 e 4 apresentam registros em que as operações de tratamento podem ser efetuadas por meio de algum algoritmo. Por exemplo, é possível dada uma equação de primeiro grau, obter a solução por um processo automatizado. De forma diferente, isso não é possível com os registros da célula 1, veja por exemplo, a tentativa frustrada de traduções automatizadas.

Discutiremos, a seguir, um exemplo de criação de registros no interior da célula 3.

2.4 - Registros algébricos.

Apresentaremos dois exemplos de registros algébricas (Célula 3) que suscitam discussões acaloradas se de fato constituem registros distintos. Cada um decida por si!

Consideremos Q o conjunto dos números racionas. Do conjunto dos racionais, pensemos dois conjuntos com os mesmos elementos, mas com formas distintas:

- Qf o conjunto dos números racionais na forma fracionária. São exemplos desse conjunto os números 9/4, 0/5, 1/3;
- Qv o conjunto dos números racionais na forma decimal com vírgula. Esses exemplos apresentados de números que pertencem ao conjunto Qf, podem ser escritos também como números que pertencem a Qv, como, 2,25; 0,0; $0{,}33\overline{3}$.

Algumas questões devemos impor para que consideremos separadamente dois registros.

(1) as quatro operações elementares se dão do mesmo modo em Qf e em Qv? A resposta a esta questão é não, basta ver um exemplo da soma de dois elementos em cada conjunto:

- no sistema Qf, $\frac{3}{4} + \frac{1}{5} = \frac{15}{20} + \frac{4}{20} = \frac{19}{20}$;
- no sistema Qv, 0,75 + 0,2 = 0,95.

A soma de dois elementos em cada conjunto, mostra processos completamente diferentes;

(2) É possível transitar de Qf para Qv e vice-versa?

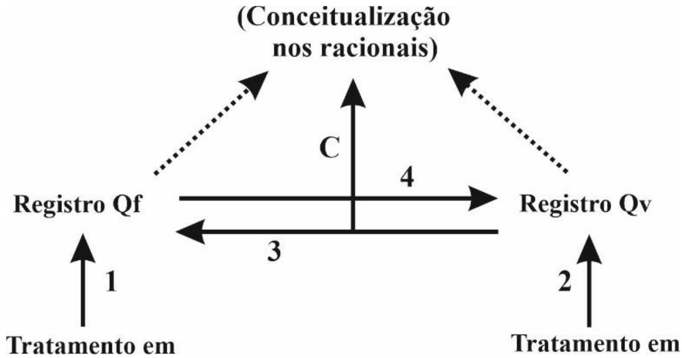
São os mesmos tipos de processos envolvidos? Novamente, a resposta é não. As transições entre eles são bem diferentes.

Cada um dos significantes em Qf e Qv de um mesmo número, possuem significados operatórios distintos, apesar de que representam o mesmo número o que poderia nos levar a considerar um único sistema semiótico Q (dos números racionais)?

> Mais especificamente, o problema é saber se a aprendizagem visando a aquisição das atividades de conversão tem a mesma natureza que uma aprendizagem que visa a aquisição das atividades de tratamento (DUVAL, 1995, p. 42)

Portanto, a resposta proposta por Duval é uma resposta didática, uma vez que é parte da formação dos alunos a aprendizagem dos tratamentos em cada um dos conjuntos Qf e Qv, tanto quanto a conversão entre eles. Fazer essa escolha, significa dar importância aos tratamentos que também fazem parte da hipótese de aprendizagem de Duval:

Figura 5: Hipótese fundamental de aprendizagem centrado na função de objetivação.



Fonte: a partir de Duval (1995, p. 67).

O que podemos observar nesse esquema de aprendizagem matemática proposto por Duval, tanto os tratamentos (setas 1 e 2), assim como as conversões (setas 3 e 4) estão na base da hipótese fundamental de aprendizagem de Duval. Para o caso de Qf e Qv, se quisermos reforçar também aos tratamentos (operações com números decimais na forma fracionária e com números decimais com vírgula), é importante, do ponto de vista didático, que se considere sistemas semióticos distintos. No entanto, precisamos nos atentar para o seguinte fato:

> Para não confundir um objeto e sua representação, quando a intuição direta do objeto em si mesma não é possível, é necessário dispor de diversas representações semióticas heterogêneas deste objeto e coordená-las (DUVAL, 1995, p. 69)

Representações heterogêneas nessa citação, leia-se, sistemas semióticos distintos.

A aprendizagem em Qf e Qv não esgota a aprendizagem em Q, outros conjuntos podem ser considerados (como por exemplo, o conjunto das dízimas periódicas? Os racionais em notação científica?). Essa análise passa pela ideia de Frege (1978) quando destacou a importância do sentido que é dado ao significante/significado no interior de um mesmo sistema semiótico, de onde surge a questão fundamental: esses diferentes sentidos são suficientes para que se considere, atendendo ao menos a um ponto de vista didático, sistemas semióticos distintos?

3 CONCLUSÕES

O que se pode perceber, neste texto bastante resumido da trajetória de Duval na construção de uma ideia de aprendizagem intelectual, é que ele imprimiu um lado cognitivista, que não havia, nos estudos de diferentes semiólogos, entre eles, Saussure, Peirce, Benveniste e Frege. Portanto, ler e compreender Duval, será preciso ter em mente sempre esses dois aspectos, o semiótico e o cognitivo. Foi principalmente o aspecto cognitivo que nos levou a considerar Qf e Qv sistemas semióticos distintos (dar importância também aos tratamentos em cada um desses sistemas) sustentados na noção de sentido e referência em Frege.

REFERÊNCIAS

BENVENISE, E. **Últimas aulas no Collège de France (1968 e 1969).** São Paulo: Editora da Unesp, 2014.

BENVENISTE, E. **Problemas de linguística geral I**. Trad. M. G. Novak e M. L. Neri. Campinas: Pontes editores, 2005.

DUVAL, R. **Sémiosis et pensée humaine : registres sémiotiques et apprentissages intellectuels**. Berne : Peter Lang, 1995.

DUVAL, R. **Les problemas fundamentales en el aprendizaje matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo**. Trad. de M. V. Restrepo. Cali: Universidade del Valle, 2004.

EL-JAIK, A. P. **Saussure: [ ] um estruturalista**. *In* A palavra de Saussure. Lucília Maria Abrahão e Sousa; Glaucia Nagem de Souza; Lauro Baldini (Organizadores). 369p. São Carlos: Pedro & João Editores, 2016.

FREGE, G. **Lógica e filosofia da linguagem**. Trad. Paulo Alcoforado. São Paulo: Editora Cultrix, 1978.

PEIRCE, C. S. **Semiótica**. Trad. J. T. C. Netto. 338p. São Paulo: Editora Perspectiva, 2000.

SAUSSURE, F. **Curso de linguística Geral**. Trad. A. Chelini, J. P. Paes, I. Blikstein. São Paulo: Ed. Cultrix, 2008.