



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA – *CAMPUS* BLUMENAU
CENTRO TECNOLÓGICO, DE CIÊNCIAS EXATAS E EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE
NACIONAL — PROFMAT

Ruy Piehowiak

Noções de Equações Diferenciais Ordinárias: algumas aplicações propostas por
professores do Instituto Federal Catarinense – *Campus* Rio do Sul

Blumenau
2024

Ruy Piehowiak

Noções de Equações Diferenciais Ordinárias: algumas aplicações propostas por
professores do Instituto Federal Catarinense – *Campus* Rio do Sul

Dissertação submetida ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional — PROF-MAT do Centro Tecnológico, de Ciências Exatas e Educação da Universidade Federal de Santa Catarina – *Campus* Blumenau como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.
Orientador: Prof. André Vanderlinde da Silva, Dr.

Blumenau
2024

Ficha catalográfica gerada por meio de sistema automatizado gerenciado pela BU/UFSC.
Dados inseridos pelo próprio autor.

Piehowiak, Ruy

Noções de Equações Diferenciais Ordinárias : algumas aplicações propostas por professores do Instituto Federal Catarinense - Campus Rio do Sul / Ruy Piehowiak ; orientador, André Vanderlinde da Silva, 2024.

108 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Campus Blumenau, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Blumenau, 2024.

Inclui referências.

1. Matemática. 2. Equação diferencial ordinária. 3. Modelos matemáticos. 4. Ensino superior. 5. Dificuldades no ensino. I. Silva, André Vanderlinde da. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. III. Título.

Ruy Piehowiak

Noções de Equações Diferenciais Ordinárias: algumas aplicações propostas por
professores do Instituto Federal Catarinense – *Campus* Rio do Sul

O presente trabalho em nível de Dissertação foi avaliado e aprovado, em Blumenau, 02 de
fevereiro de 2024, pela banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Eleomar Cardoso Júnior, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

Prof. Rafael dos Reis Abreu, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

Certificamos que esta é a versão original e final do trabalho de conclusão que foi
julgado adequado para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Prof. Felipe Delfini Caetano Fidalgo, Dr.
Coordenador do Programa de Pós-
Graduação

Prof. André Vanderlinde da Silva, Dr.
Orientador

Blumenau, 2024.

Com gratidão, dedico este trabalho a Deus por ter me dado forças para concluir este estudo de forma satisfatória. E aos meus queridos pais, esposa, filha e filhos.

AGRADECIMENTOS

A presente dissertação de mestrado não poderia chegar a bom porto sem o precioso apoio de várias pessoas.

Em primeiro lugar, agradeço ao meu orientador, Professor Dr. André Vanderlinde da Silva pela sua postura impecável que ele manteve ao meu lado diante das adversidades ao longo dessa caminhada. Sou grato por tudo.

Minha gratidão especial ao Professor MSc. Antônio João Fidélis, meu colega de trabalho e de mestrado, um querido e grande amigo.

Aos colaboradores da pesquisa que enriqueceram os estudos desenvolvidos com suas propostas, sou grato!

Aos professores convidados para a banca, Dr. Eleomar Cardoso Júnior, Dr. Rafael dos Reis Abreu, Dr. Francis Felix Cordova Puma e Dr. Milton Procópio de Borba que se dedicaram a ler este trabalho e a trazer contribuições valiosas não só para o devido momento, mas que me acompanharão em trabalhos futuros.

Também sou grato às políticas públicas desenvolvidas para aprimorar o ensino, em particular ao programa PROFMAT, que proporciona o aperfeiçoamento em matemática para professores da Educação Básica.

O meu sincero e enorme agradecimento a todos os professores do PROFMAT, da UFSC Blumenau, que ministraram as aulas para a turma de 2021 e que se dedicam a oferecer uma educação pública, gratuita e de qualidade. Em especial, gostaria de agradecer ao Professor Dr. Márcio de Jesus Soares, por todos os seus ensinamentos e por disponibilizar seu tempo nos preparativos para o exame de qualificação. Sua ajuda e incentivo foi fundamental.

Aos colegas do mestrado com os quais a discussão e partilha de saberes e experiências fizeram parte desse percurso.

Ao Instituto Federal Catarinense – *Campus* Rio do Sul que me proporcionou fazer parte desses estudos em afastamento integral.

Ao meu amigo e “sócio” cervejeiro caseiro Edison Luiz Benites Pedelhes pela sua sincera amizade.

Às minhas irmãs Renate Piehowiak, Reginil Piehowiak e Rosemery Piehowiak por todo carinho e apoio mesmo distantes.

Aos meus pais Regina Célis Piehowiak e Raul Piehowiak e aos meus sogros Margot Ern Lenzi e Armando José Lenzi, pelas orações, incentivo e carinho.

Às minhas fontes de inspiração e alegria, meus filhos Alessandro Piehowiak e Cristian Piehowiak, à minha filha Yasmin Magalhães Linhares Piehowiak e às minhas netas Eleonora Cardoso Piehowiak e Clara Cardoso Piehowiak que sempre tinham um sorriso e um afago carinhoso.

À minha esposa Ana Lucia Lenzi Piehowiak pelo apoio incondicional oferecido em todos os aspectos e pelo profundo apoio, me estimulando nos momentos mais difíceis. Sobretudo, por sua infinita sabedoria e cumplicidade. Muito obrigado pela sua presença em minha vida meu amor!

Por fim, gostaria de agradecer a todos que de alguma forma estiveram envolvidos direta ou indiretamente nessa caminhada.

*“O correr da vida embrulha tudo,
a vida é assim: esquenta e esfria,
aperta e daí afrouxa, sossega depois desorienta,
o que ela quer da gente é coragem.”*
(Guimarães Rosa)

*“A mente que se abre a uma nova ideia
jamais voltará ao seu tamanho original.”*
(Albert Einstein)

RESUMO

Os conteúdos relacionados às Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) estão presentes em quatro dos seis cursos superiores do Instituto Federal Catarinense – *Campus* Rio do Sul (IFC – Rio do Sul), onde desenvolveu-se esta investigação e que é onde o pesquisador responsável por este trabalho leciona. Por conta de inquietações, no que se refere ao ensino de Equações Diferenciais Ordinárias, mais especificamente ao uso de modelos matemáticos nas aulas, este trabalho pretende responder ao seguinte problema de pesquisa: Quais modelos matemáticos envolvendo equações diferenciais ordinárias podem ser pensados para aplicação nos cursos superiores oferecidos pelo IFC – Rio do Sul? Para tanto, propôs-se entrevistar docentes vinculados aos cursos superiores oferecidos pelo IFC – Rio do Sul; mapear, por meio de pesquisa na literatura e de entrevistas, as dificuldades que marcam o ensino e aplicações de EDOs; identificar os modelos matemáticos, envolvendo EDOs, demandados pelos cursos superiores oferecidos pelo IFC – Rio do Sul e, apresentar e discutir os modelos identificados. Realiza-se, então, uma pesquisa qualitativa e descritiva, que propôs discutir três modelos matemáticos sugeridos por docentes do IFC – Rio do Sul, que lecionam nos cursos de Agronomia, Engenharia Mecatrônica e Licenciatura em Física, sendo realizadas três entrevistas com os professores desta instituição. Para análise dos resultados utiliza-se Análise Textual Discursiva. Diante disso, verifica-se que os modelos matemáticos propostos podem contribuir para os professores apresentarem aos estudantes aplicações envolvendo as EDOs que sejam relacionadas ao curso, e os docentes entrevistados destacam que as dificuldades que marcam o ensino e aplicações de EDOs são: entender a motivação das equações diferenciais, não entender o significado das mesmas e não conseguir dar sentido a elas. Isso conduz à constatação de que os questionamentos nas aulas de matemática sobre o uso das EDOs possam ser minimizados, de modo que os estudantes possam perceber a aplicação desta ferramenta matemática em diversas áreas do conhecimento.

Palavras-chave: Equações diferenciais ordinárias. Modelos matemáticos. Ensino superior. Dificuldades no ensino.

ABSTRACT

The contents related to Ordinary Differential Equations (ODEs) are in the syllabus of four from six of the higher education courses at Instituto Federal Catarinense – *Campus* Rio do Sul (IFC – Rio do Sul), where this investigation took place and is the researcher's workplace. Due to concerns on teaching ODEs, more specifically on mathematical modeling, this work has the objective of answering the question: Which mathematical modeling using ODEs can be used as applications in the higher education courses at IFC – Rio do Sul? It was proposed to interview teachers who give classes to the higher education courses at IFC – Rio do Sul; map, by literature's researchs and interviews, the difficulties on teaching ODEs, identify the mathematical modelings using ODEs, present and discuss the proposed models. It was made a qualitative and descriptive research where were available three mathematical models suggested by teachers that work on Agronomy, Mechatronics Engineering and Physics. The interviews were analyzed throw Discursive Text Analysis. The mathematical models proposed can contribute to teachers present to students applications ODEs related to the course. In the interviews we got the difficulties that are around teaching ODEs: students don't understand the reason to use ODEs, their meaning and they can't see the sense of them. This can allow us to conclude that students don't feel comfortable with ODEs, losing the sight of this powerful mathematical tool in several areas of the knowledge.

Keywords: Ordinary Differential Equations. Mathematical models. Higher Education. Difficulties on teaching.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Circuito RC.	23
Figura 2 – Corpo em queda livre com massa M	23
Figura 3 – Movimento de um pêndulo simples.	24
Figura 4 – Bloco da Transformada de Laplace.	34
Figura 5 – Esvaziamento de um reservatório cilíndrico.	62
Figura 6 – Característica estática do sistema de controle de pH – relação entre as variáveis u_E e y_E	69
Figura 7 – Característica estática do sistema de controle de pH – relação entre as variáveis q_E e y_E	70
Figura 8 – Chute na bola sem resistência do ar.	78
Figura 9 – Decomposição do vetor \vec{v}_0	78
Figura 10 – Lançamento oblíquo sem resistência do ar.	81
Figura 11 – Lançamento oblíquo considerando a resistência do ar.	82
Figura 12 – Diagrama de forças atuando sobre uma bola em movimento.	83
Figura 13 – Trajetória da bola, conforme (5.45).	89
Figura 14 – Comparação entre as trajetórias dos dois tipos de lançamentos oblíquos (com e sem resistência do ar) e da trajetória como aproximação linear.	93

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Cursos de graduação oferecidos pelo IFC.	47
Quadro 2 – Distribuição das unidades de significado e categorias, quanto aos conhecimentos em Equação Diferencial Ordinária (EDO)s demandados pelos cursos.	56

LISTA DE TABELAS

Tabela 3 – Tabela de algumas Transformadas de funções básicas.	35
Tabela 4 – Tabela de algumas Transformadas inversas de funções básicas.	38

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ATD	Análise Textual Discursiva
CDI	Cálculo Diferencial e Integral
CEPSH	Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos
DCN	Diretrizes Curriculares Nacionais
EAFRS	Escola Agrotécnica Federal de Rio do Sul
ED	Equações Diferenciais
EDO	Equação Diferencial Ordinária
EDP	Equação Diferencial Parcial
IFC	Instituto Federal Catarinense
IFC – Rio do Sul	Instituto Federal Catarinense – <i>Campus</i> Rio do Sul
M.R.U.	Movimento Retilíneo Uniforme
M.R.U.V.	Movimento Retilíneo Uniformemente Variado
NPK	nitrogênio, fósforo e potássio
pH	potencial hidrogeniônico
PPC	Projeto Pedagógico de Curso
PVI	Problema de Valor Inicial
SI	Sistema Internacional de Unidades
TCLE	Termo de Consentimento Livre e Esclarecido
UFSC	Universidade Federal de Santa Catarina

LISTA DE SÍMBOLOS

M	massa
c	constante arbitrária
s	variável frequência
\mathcal{L}	Transformada de Laplace
\mathcal{L}^{-1}	Transformada Inversa de Laplace
\mathcal{H}	Função Degrau Unitário ou Função de Heaviside
$G(s)$	Função de Transferência
R	raio de um círculo maior
r	raio de um círculo menor
h	altura
V	volume
d	diâmetro de um círculo de raio menor
t	tempo
v	velocidade
ϕ	vazão
P_A	pressão no ponto A
P_B	pressão no ponto B
g	aceleração gravitacional
ρ	massa específica
A	área de um círculo
π	número pi
t_e	tempo de esvaziamento do reservatório
D	diâmetro de um círculo de raio maior
P_E	ponto de equilíbrio de coordenadas $(u_E; q_E; y_E)$
τ	constante de tempo do sistema
v_0	velocidade inicial
θ	ângulo teta
v_x	velocidade horizontal
v_y	velocidade vertical
a	aceleração
a_x	aceleração horizontal
v_m	velocidade média
Δx	deslocamento horizontal
Δt	variação do tempo
T	tempo final
x	posição horizontal
a_y	aceleração vertical

a_m	aceleração média
Δv	variação da velocidade
y	posição vertical
L	alcance
L_{max}	alcance máximo
b	constante de resistência do ar
F_{res}	força resultante
k	constante da força de retardo
F_{rar}	força da resistência do ar
ζ	valor limitante do alcance
P	força peso
v_T	velocidade terminal

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	18
2	TÓPICOS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS	21
2.1	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE ORDEM ARBITRÁRIA	21
2.1.1	Classificação por tipo	24
2.1.2	Classificação por ordem	24
2.1.3	Classificação por linearidade	24
2.1.4	Soluções e problema de valor inicial	25
2.2	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS SEPARÁVEIS	29
2.2.1	Método de resolução da equação diferencial	29
2.3	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS LINEARES DE 1ª ORDEM	31
2.3.1	Método de resolução da equação diferencial linear de 1ª ordem	32
2.4	TRANSFORMADA DE LAPLACE	33
3	SOBRE O ENSINO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS	44
3.1	ENSINO E APRENDIZAGEM DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS EM CURSOS SUPERIORES	44
3.2	OS CURSOS DE ENSINO SUPERIOR DO INSTITUTO FEDERAL CATARINENSE	46
3.3	AS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS NOS CURSOS DE ENSINO SUPERIOR DO INSTITUTO FEDERAL CATARINENSE – <i>CAMPUS</i> RIO DO SUL	48
4	PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	51
4.1	DELINEAMENTO DO TRABALHO	51
4.2	PARTICIPANTES	53
4.3	COLETA DE DADOS	54
4.4	ANÁLISE DE DADOS	55
5	RESULTADOS E DISCUSSÕES	58
5.1	DEMANDAS PARA O ENSINO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS MANIFESTADAS PELAS ENTREVISTAS	58
5.2	DIFICULDADES QUE MARCAM O ENSINO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS MANIFESTADAS PELAS ENTREVISTAS	59
5.3	PROPOSTAS DE MODELOS MATEMÁTICOS PARA O ENSINO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS MANIFESTADAS PELAS ENTREVISTAS	61
5.3.1	Proposta 1 – Esvaziamento de um reservatório	61
5.3.2	Proposta 2 – Controle de pH da fertirrigação da cultura da mangueira	66
5.3.3	Proposta 3 – Lançamento oblíquo de um objeto	76
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	95

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	97
APÊNDICE A – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ES- CLARECIDO (TCLE)	101
APÊNDICE B – ROTEIRO PARA ENTREVISTA	104
ANEXO A – LANÇAMENTO VERTICAL DE UM OBJETO . .	106

1 INTRODUÇÃO

Em Matemática, uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) é uma equação que envolve as derivadas ordinárias de uma função (de uma variável) desconhecida. Segundo Zill (2011), um dos principais problemas no estudo de uma dada EDO está relacionado à determinação da respectiva solução, isto é, determinar uma função que satisfaça a equação.

O surgimento das EDOs está intimamente relacionado ao surgimento do Cálculo Diferencial e Integral (CDI), ainda no Século XVII, motivados por problemas físicos (Figueiredo; Neves, 2012). Desde então, as EDOs têm sido um campo ativo de pesquisa em Matemática e uma importante ferramenta para a formulação de problemas oriundos da Física, Astronomia, entre outras áreas do conhecimento, estabelecendo profundas conexões entre a Matemática Pura e Aplicada.

A existência de tais conexões oferece uma primeira resposta ao seguinte questionamento: “Por que estudar EDOs nos cursos superiores em que sejam demandados conhecimentos matemáticos?”. Perguntas desta natureza apontam para a preocupação docente com o ensino de matemática em cursos que não se propõem à formação de matemáticos. Ao fixar a atenção aos cursos de Engenharia, por exemplo, no contexto das disciplinas de CDI, Pinto e Lima destacam que

Possibilitar ao futuro engenheiro as interpretações das soluções de EDO e a aplicação de modelos matemáticos em suas áreas específicas de conhecimento são ações tão importantes quanto muni-los de técnicas de resolução desse tipo de equações, uma vez que tais ações podem favorecer o desenvolvimento de habilidades de análise e interpretação que são inegavelmente essenciais aos engenheiros (2017, p. 22).

E, além disso, Pinto e Lima (2017) observam que a desconexão entre os conceitos relacionados ao CDI e as aplicações na Engenharia e a falta de esclarecimento dos objetivos destes estudos na formação do Engenheiro conduzem a um conflito diário e contribuem para o fracasso dos estudantes nestas disciplinas. Entende-se que as observações de Pinto e Lima (2017) ficam ainda mais evidentes no contexto do estudo de EDOs e, conseqüentemente, trabalhos de pesquisa que tenham por objetivo demonstrar estas conexões, relacionadas ao estudo de EDOs, facilitando o acesso às linguagens, tanto da Matemática quanto das áreas específicas, tornam-se naturalmente relevantes.

Esta demanda por esclarecimentos dos objetivos e conexões pode aparecer em cursos de graduação em áreas profissionais, científicas e tecnológicas. Particularmente, tais cursos são o foco de atuação dos Institutos Federais. De acordo com a LEI N° 11.892, de 29 de dezembro de 2008, que institui, no âmbito do sistema federal de ensino, a Rede Federal de Educação Profissional, Científica e Tecnológica, vinculada ao Ministério da Educação,

Os Institutos Federais são instituições de educação superior, básica e profissional, pluricurriculares e multicampi, especializados na oferta de educação

profissional e tecnológica nas diferentes modalidades de ensino, com base na conjugação de conhecimentos técnicos e tecnológicos com as suas práticas pedagógicas, nos termos desta Lei (Brasil, 2008).

No caso do Instituto Federal Catarinense (IFC), são oferecidos 43 cursos de graduação em 15 *campi*. Em particular, o Instituto Federal Catarinense – *Campus* Rio do Sul (IFC – Rio do Sul), *campus* de atuação do pesquisador responsável por este trabalho, oferta seis cursos de graduação: Agronomia (Bacharelado), Ciências da Computação (Bacharelado), Física (Licenciatura), Matemática (Licenciatura), Pedagogia (Licenciatura) e Engenharia Mecatrônica (Bacharelado). Nota-se, de acordo com os respectivos Projetos Pedagógicos, que cinco destes cursos possuem disciplinas obrigatórias relacionadas ao CDI cuja ementa indica o estudo de EDOs ou, embora não abordado nas disciplinas de Cálculo, o conhecimento de EDOs é demandado nas disciplinas de formação específica.

A partir da experiência pessoal de atuação docente e das demandas cotidianas no exercício da docência nos cursos superiores do IFC – Rio do Sul, verifica-se a necessidade do estudo, discussão e exposição de modelos matemáticos, envolvendo EDOs, que permitam estabelecer conexões com as aplicações específicas de cada curso do IFC – Rio do Sul. Como o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) tem como objetivo qualificar o exercício da docência visando o aprofundamento da formação Matemática do egresso (PROFMAT, 2020), a partir deste contexto, esta investigação pretende responder ao seguinte problema de pesquisa: Quais modelos matemáticos envolvendo equações diferenciais ordinárias podem ser pensados para aplicação nos cursos superiores oferecidos pelo IFC – Rio do Sul?

Com base nisso, o objetivo geral deste estudo é propor modelos matemáticos envolvendo equações diferenciais ordinárias que podem ser pensados para aplicação nos cursos superiores oferecidos pelo IFC – Rio do Sul. O estudo estabeleceu quatro objetivos específicos: entrevistar docentes vinculados aos cursos superiores oferecidos pelo IFC – Rio do Sul; mapear, por meio de pesquisa na literatura e de entrevistas, as dificuldades que marcam o ensino e aplicações de EDOs; identificar os modelos matemáticos, envolvendo EDOs, demandados pelos cursos superiores oferecidos pelo IFC – Rio do Sul e, apresentar e discutir os modelos identificados.

Esta investigação torna-se relevante, uma vez que apresenta uma alternativa pedagógica, por meio de modelos matemáticos, que possibilite ao professor de matemática atuar de modo a mostrar para os estudantes como as ferramentas matemáticas, em particular, as EDOs, relacionam-se com áreas específicas dos cursos superiores do IFC – Rio do Sul.

Este trabalho está estruturado em seis capítulos. O Capítulo 1, trata-se da Introdução. No Capítulo 2, abordam-se os temas que dão suporte ao estudo realizado por meio de uma abordagem bibliográfica. Faz-se uma breve revisão dos conceitos dos estudos sobre as Equações Diferenciais Ordinárias de ordem arbitrária. Ainda, expõem-se algumas aplicações; define-se e mostra-se a resolução de EDOs do tipo: Separável e Linear de 1^a

ordem. Finalizando com uma introdução à Transformada de Laplace. Esta revisão serve de base para o leitor compreender as resoluções dos modelos matemáticos propostos nas Seções 5.3.1, 5.3.2 e 5.3.3.

No Capítulo 3, discorre-se, brevemente, sobre ensino e aprendizagem de EDO. Em seguida, apresenta-se uma caracterização e uma síntese do IFC e de seus cursos. Na parte final do capítulo, contextualiza-se a presença das EDOs nos cursos superiores.

No Capítulo 4, apresenta-se o caminho metodológico realizado ao longo da investigação, por meio das seguintes etapas: delineamento do trabalho, participantes, coleta de dados e análise de dados. Desenvolve-se a investigação, a partir da pesquisa qualitativa e descritiva, fazendo uso do estudo bibliográfico e documental. E, tendo os dados coletados, por meio de entrevistas, realizadas com três professores. Finalmente, discorre-se, brevemente, sobre a Análise Textual Discursiva, com base em Moraes e Galiazzi (2011).

No Capítulo 5, faz-se a análise das entrevistas, com base nos princípios da Análise Textual Discursiva, considerando a perspectiva fenomenológica-hermenêutica, discutindo os resultados obtidos. Por fim, apresentam-se as propostas de modelos matemáticos fazendo a resolução e discussão dos mesmos.

No Capítulo 6, apresentam-se as contribuições teóricas e práticas atingidas pela investigação e as limitações identificadas. Ademais, apontam-se sugestões de futuras pesquisas.

Neste trabalho, adota-se o texto em modo itálico na escrita das resoluções dos exemplos e das aplicações propostas para diferenciar do restante do texto, assim, destacando as resoluções.

2 TÓPICOS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

A História da Matemática mostra que por, aproximadamente, três séculos (XVII a XIX), o estudo das equações diferenciais instigou a curiosidade dos maiores matemáticos do mundo. A partir da descoberta do CDI, devido a Newton e Leibniz, percebeu-se que muitas das leis da Física (leis que descrevem o mundo à nossa volta) podem ser escritas como relações entre uma função e as suas derivadas.

Essas equações são usadas para investigar uma grande variedade de problemas na Engenharia, Química, Biologia, Agronomia, Economia e tem aplicações diretas na Física. Além disso, elas também fazem parte do currículo educacional dessas e de muitas outras áreas.

Neste capítulo, abordaremos a teoria das equações diferenciais, em especial, os conceitos fundamentais, a classificação das Equações Diferenciais (ED), o Teorema da Existência e Unicidade, o Problema de Valor Inicial, alguns exemplos, métodos de resolução e a Transformada de Laplace. Como referências para a escrita deste capítulo, utilizamos os livros “*Equações diferenciais com aplicações em modelagem, por Dennis G. Zill*”, “*Equações diferenciais aplicadas, por Djairo Guedes de Figueiredo e Aloisio Freiria Neves*” e “*Equações diferenciais, por R. Kent Nagle, Edward B. Saff e Arthur David Snider*”. Estes livros constam nas referências bibliográficas desta dissertação.

2.1 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE ORDEM ARBITRÁRIA

Uma equação que relaciona uma função desconhecida a uma ou mais de suas derivadas é chamada de uma **equação diferencial**.

Definição 2.1.1. Uma **equação diferencial ordinária de ordem n** é uma igualdade em que as funções incógnitas são funções de somente uma variável e há presença das derivadas de até n -ésima ordem. Assim, uma forma geral para a equação de ordem n , com x como variável independente e y como variável dependente, pode ser escrita na forma

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (2.1)$$

em que F é uma função¹ de valores reais de $n + 2$ variáveis, $x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ e sendo $y^{(n)}$ a n -ésima derivada de y em relação à x . Em muitos casos, é conveniente escrever a equação (2.1) isolando o termo de mais alta ordem $y^{(n)}$, como

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}), \quad (2.2)$$

que normalmente é preferível à equação (2.1) para fins teóricos e computacionais. A equação (2.2) é denominada de forma normal da EDO.

¹ Na Seção 2.1.4, vamos especificar o domínio de definição das variáveis $x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}$.

Por exemplo, a equação

$$\frac{dy}{dx} = g(x)$$

pode ser escrita na forma da equação (2.1) tomando

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = g(x) - \frac{dy}{dx} = 0.$$

E na equação $y' + 3x^2y = e^{-x^3+x}$ tem-se a correspondência com $F(x, y, y') = e^{-x^3+x} - y' - 3x^2y = 0$.

A fim de exemplificar o uso das EDOs, apresentamos quatro aplicações que descrevem fenômenos naturais e físicos: decaimento radioativo, circuito RC, queda livre de um corpo considerando a resistência do ar e movimento de um pêndulo simples.

Exemplo 2.1 (Decaimento radioativo). Os cientistas sabem que elementos radioativos emitem espontaneamente partículas ou ondas, assim é possível modelar a velocidade em que os átomos decaem. A equação que modela² este fenômeno de como uma determinada massa M de um determinado material radioativo evolui com o tempo t , em que $\lambda > 0$ é uma constante de proporcionalidade³, é

$$\frac{dM}{dt} = -\lambda M. \quad (2.3)$$

Note que (2.3) possui um sinal negativo à frente da constante de proporcionalidade λ e que esta, por sua vez, deve ser considerada positiva para garantir que o modelo represente o decaimento da massa M ao longo do tempo. Este modelo é semelhante ao modelo que descreve o crescimento populacional humano⁴.

Ainda, com este mesmo modelo (equação), diversos cientistas realizam medidas de idade de objetos, através da chamada datação por carbono 14. Isso pode ser usado para determinar a idade de fósseis encontrados por arqueólogos.

Exemplo 2.2 (Circuito RC). Seja a equação de um circuito elétrico RC⁵, ilustrado na Figura 1,

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E, \quad (2.4)$$

em que R é a resistência, q é a carga, C é a capacitância e E é a fonte de tensão do circuito.

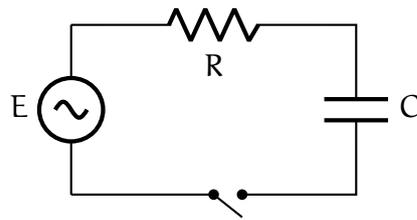
² Este fenômeno foi observado pela primeira vez em 1896 pelo físico francês Henri Becquerel. Por esta observação e por sua explicação física e matemática do problema, Becquerel e o casal Marie e Pierre Curie foram agraciados com o prêmio Nobel de física do ano de 1903.

³ Se duas quantidades u e v forem proporcionais, isto significa que uma quantidade é um múltiplo escalar da outra, isto é, $u = kv$ para algum $k \in \mathbb{R}$.

⁴ Este modelo foi criado por Thomas Malthus, em 1798, dado por $\frac{dP}{dt} = kP$, sendo P a população.

⁵ Esta equação é deduzida a partir das leis de Kirchhoff, que permitem que um circuito elétrico seja modelado por EDO.

Figura 1 – Circuito RC.



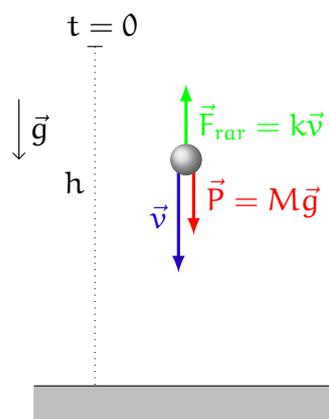
Fonte: O autor (2023).

Exemplo 2.3 (Queda livre de um corpo considerando a resistência do ar). Consideremos a equação de um corpo em queda livre, tomando a direção positiva como orientada para baixo, conforme ilustrado na Figura 2. A atuação das forças sobre o corpo é dada por

$$M \frac{d^2h}{dt^2} = M g - k \frac{dh}{dt}, \quad k > 0, \quad (2.5)$$

em que M é a massa do corpo, h é a altura (distância) do corpo ao chão, g é a aceleração gravitacional e k é uma constante (da força de resistência do ar) que depende da geometria do corpo e das propriedades do ar. Esta constante especifica a intensidade da força de retardo \vec{F}_{rar} , em que \vec{F}_{rar} age na direção oposta ao movimento.

Figura 2 – Corpo em queda livre com massa M .



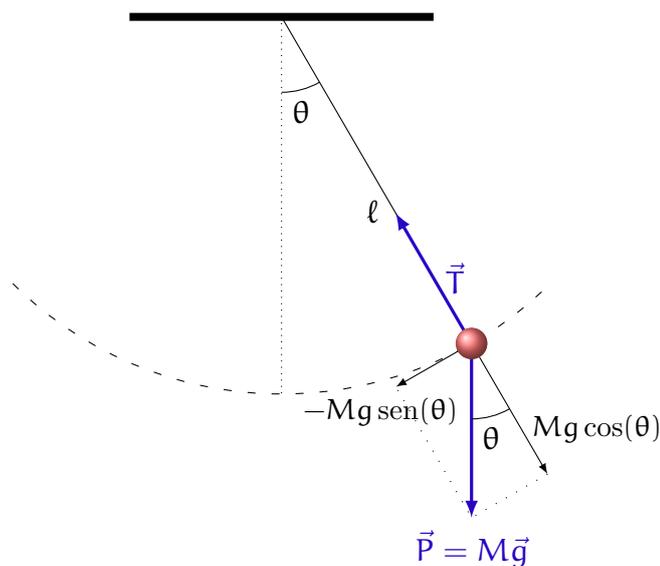
Fonte: O autor (2023).

Exemplo 2.4 (Movimento de um pêndulo simples). A equação que representa o movimento de pêndulo, conforme ilustrado na Figura 3, é

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \text{sen}\theta = 0. \quad (2.6)$$

Temos um objeto de massa desprezível M na ponta de uma haste de comprimento ℓ e g é a aceleração gravitacional. O movimento do pêndulo descreve um arco de uma circunferência de comprimento ℓ e a posição do pêndulo é representada pelo ângulo θ que a haste faz com o eixo vertical.

Figura 3 – Movimento de um pêndulo simples.



Fonte: O autor (2023).

As equações diferenciais são classificadas quanto ao **tipo**, à **ordem** e à **linearidade** como veremos a seguir.

2.1.1 Classificação por tipo

Uma equação diferencial pode ser classificada como **ordinária** ou **parcial**⁶. Se a função envolvida for uma função de somente uma variável independente, dizemos que a equação é ordinária (EDO). De acordo com os exemplos acima, temos que as equações (2.3), (2.4), (2.5) e (2.6) são EDOs. Note que estas equações dependem uma única variável independente.

2.1.2 Classificação por ordem

Quanto à ordem, uma equação diferencial ordinária pode ser de 1^a, 2^a, ..., n-ésima ordem, dependendo da derivada de maior ordem presente na equação. Retomando as quatro aplicações acima, as equações (2.3) e (2.4) são de primeira ordem, já as equações (2.5) e (2.6) são equações de segunda ordem.

2.1.3 Classificação por linearidade

De modo mais formal, uma EDO é **linear** se ela tiver o formato

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_2(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x),$$

⁶ Se uma equação diferencial contém, pelo menos, uma derivada parcial é denominada de Equação Diferencial Parcial (EDP). A equação $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, em que $u = u(x, t)$, é uma EDP que representa o movimento de uma corda vibrante.

em que $\mathbf{a}_n(x)$, $\mathbf{a}_{n-1}(x)$, \dots , $\mathbf{a}_2(x)$, $\mathbf{a}_1(x)$, $\mathbf{a}_0(x)$ e $\mathbf{g}(x)$ dependem apenas da variável independente x . Caso contrário, dizemos que é uma EDO não linear.

De forma mais simplificada, podemos dizer que uma EDO é linear quando nela não aparecem produtos entre a variável \mathbf{y} e suas derivadas, nem produtos entre suas derivadas e nem mesmo funções não lineares em que \mathbf{y} seja a variável.

Nas quatro aplicações acima, as equações (2.3), (2.4) e (2.5) são equações diferenciais lineares, já a equação (2.6) é uma equação diferencial não linear.

Vejamos mais alguns exemplos de equações estudando as classificações:

$$\frac{dy}{dx} + 6xy = 4e^x \quad \text{EDO, 1ª ordem, linear}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \text{sen } y = 5t^2 \quad \text{EDO, 2ª ordem, não linear}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 6\frac{d^2y}{dx^2} + 11y = 3x + e^{2x} \quad \text{EDO, 3ª ordem, linear}$$

$$\frac{d^4y}{dt^4} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \quad \text{EDO, 4ª ordem, não linear}$$

2.1.4 Soluções e problema de valor inicial

A partir deste ponto, vamos estudar apenas as equações diferenciais ordinárias que fazem parte do nosso objeto de pesquisa.

Dada uma função contínua $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, definida em um conjunto aberto $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n+1}$, a equação (2.2) é denominada equação diferencial ordinária de ordem n , em que $x \in \mathbb{R}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y}' \in \mathbb{R}^n$, \dots , $\mathbf{y}^{(n)} \in \mathbb{R}^n$. As versões da equação (2.2) para representar equações diferenciais de primeira e segunda ordem, são descritas como:

$$\mathbf{y}' = f(x, \mathbf{y}) \quad \text{e} \quad \mathbf{y}'' = f(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}'),$$

respectivamente.

Uma função $\varphi(x)$ é **solução** de uma equação diferencial ordinária em um dado intervalo aberto A , se a equação (2.1) ou (2.2) for satisfeita para todo $x \in A$, ou seja, se $\varphi(x)$ e suas derivadas satisfizerem a equação diferencial neste intervalo, para todo $x \in A$, lembrando que $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}$.

Exemplo 2.5. A função $\varphi(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{-x^2}$ é solução da equação $\mathbf{y}' + 2xy = x$.

Resolução. De fato, as funções $\varphi(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{-x^2}$, $\varphi'(x) = -3xe^{-x^2}$ são definidas para $x \in \mathbb{R}$. Assim, as substituições de \mathbf{y} por $\varphi(x)$ e de \mathbf{y}' por $\varphi'(x)$ na equação $\mathbf{y}' + 2xy = x$ geram

$$-3xe^{-x^2} + x + 3xe^{-x^2} = x,$$

uma identidade que é válida para qualquer x real. Então, a função $\varphi(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{-x^2}$ satisfaz a equação diferencial, portanto $\varphi(x)$ é solução da equação $\mathbf{y}' + 2xy = x$.

O gráfico de uma solução $\varphi(x)$ de uma equação diferencial ordinária é denominado de **curva integral**.

Considerando o que foi abordado no início deste capítulo, em que as ED são aplicações de modelos matemáticos que regem o mundo à nossa volta, observamos que os modelos matemáticos são construídos através de um ponto de partida, o que nos leva a utilizar equações diferenciais com estas condições que chamaremos de valor inicial.

Definição 2.1.2 (Problema de Valor Inicial (PVI)). O problema de valor inicial de uma equação diferencial ordinária de ordem n é dado por:

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}), \\ y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_1, \\ y''(x_0) = y_2, \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}, \end{cases}$$

em que $x_0 \in A$, $A \subset \mathbb{R}$ é um intervalo e $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ são constantes dadas.

Cabe destacar que o propósito desta pesquisa é estudar as aplicações de EDOs de primeira e segunda ordem. Assim, por consequência, trataremos apenas com PVI para EDO de primeira ordem da forma

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

e com PVI para EDO de segunda ordem da forma,

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), \\ y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_1. \end{cases}$$

Exemplo 2.6. A função $\varphi(x)$ apresentada no Exemplo 2.5, é solução do PVI:

$$\begin{cases} y' + 2xy = x \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Resolução. Considerando a função $\varphi(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{-x^2}$, dada no Exemplo 2.5, calculamos $\varphi'(x) = -3xe^{-x^2}$. E, note que, a função $\varphi(x)$ satisfaz a condição $y(0) = 2$.

De fato, $\varphi(0) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{-0^2} = 2$.

Grande parte das equações diferenciais que surgem nas aplicações têm uma propriedade de existência e unicidade. A seguir, apresentamos o teorema que afirma existir, para o problema de valor inicial, uma única solução, sob certas condições. Tal teorema é chamado de **Teorema de Existência e Unicidade**.

Teorema 2.1 (Teorema de Existência e Unicidade). *Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ num função contínua definida num aberto Ω do plano (x, y) . Suponhamos que a derivada parcial com relação à segunda variável, $f_y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, seja contínua também. Então, para cada $(x_0, y_0) \in \Omega$, existem um intervalo aberto I contendo x_0 e uma única função diferenciável $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ com $(x, \phi(x)) \in \Omega$, para todo $x \in I$, que é solução do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (2.7)$$

A demonstração do teorema não será apresentada, pois não faz parte do escopo deste trabalho, mas ela pode ser encontrada no livro de Figueiredo e Neves (2012), na Seção 3.2 Existência, Unicidade e Dependência Contínua, p. 51, citado nas referências. Porém, a demonstração do Teorema da Existência e Unicidade de uma EDO utiliza o Método das Aproximações Sucessivas de Picard⁷. Contudo, a seguir, resolveremos um PVI (Exemplo 2.7) aplicando o Método das Aproximações Sucessivas de Picard para obter a solução da EDO que passa pelo ponto dado e ilustraremos a estratégia proposta por Picard. Antes, apresentamos um teorema que mostra a equivalência entre duas equações.

Teorema 2.2. *Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua num aberto Ω do plano (x, y) . Então, uma função diferenciável $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma solução do problema de valor inicial (2.7) se e somente se for uma solução da equação integral*

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds, \quad x \in I. \quad (2.8)$$

Logo, o Teorema 2.2 diz que solucionar o PVI (2.7) é equivalente a resolver (2.8).

Exemplo 2.7. O PVI

$$\begin{cases} y' = 1 + y, \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

é solucionado pelo Método das Aproximações Sucessivas de Picard.

Resolução. *Primeiramente, aplicaremos o Teorema 2.2 no PVI dado*

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt. \quad (2.9)$$

Então, para resolver (2.9), aplicaremos o Método das Aproximações Sucessivas de Picard. Assim, dado $y_0(x) = 0$, consideramos como ponto de partida uma função contínua que

⁷ Segundo Simmons, Émile Picard (1856–1941), um dos mais eminentes matemáticos franceses do século passado, fez duas contribuições notáveis para a análise: seu método de aproximações sucessivas, o que lhe permitiu aperfeiçoar a teoria das equações diferenciais que Cauchy havia iniciado na década de 1820; e seu famoso teorema (chamado Grande Teorema de Picard) sobre os valores assumidos por uma função analítica complexa próxima de uma singularidade essencial, que estimulou muito pesquisas importantes até os dias atuais (2017, p. 623).

corresponde a uma aproximação inicial à solução de (2.9). Considere a sequência

$$y_n(x) = y_0 + \int_0^x f(t, y_{n-1}(t)) dt. \quad (2.10)$$

Neste caso, $f(t, y_{n-1}(t)) = 1 + y_{n-1}(t)$. Agora, partimos da aproximação $y_0(x) = 0$ no lado direito de (2.10) para obter uma nova e, talvez, melhorar a aproximação $y_1(x)$ como segue:

$$y_n(x) = \int_0^x 1 + y_{n-1}(t) dt,$$

$$y_n(x) = x + \int_0^x y_{n-1}(t) dt.$$

Iniciando o processo de iteração, para $n = 1$, temos:

$$y_1(x) = x + \int_0^x y_0(t) dt, \quad y_0(t) = 0,$$

$$y_1(x) = x + 0 = x.$$

Segue a iteração para $n = 2$:

$$y_2(x) = x + \int_0^x y_1(t) dt, \quad y_1(x) = x,$$

$$y_2(x) = x + \int_0^x t dt,$$

$$y_2(x) = x + \frac{x^2}{2}.$$

Segue a iteração para $n = 3$:

$$y_3(x) = x + \int_0^x y_2(t) dt, \quad y_2(x) = x + \frac{x^2}{2},$$

$$y_3(x) = x + \int_0^x \left(t + \frac{t^2}{2} \right) dt,$$

$$y_3(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3 \cdot 2}.$$

Segue a iteração para $n = 4$:

$$y_4(x) = x + \int_0^x y_3(t) dt, \quad y_3(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3 \cdot 2},$$

$$y_4(x) = x + \int_0^x \left(t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3 \cdot 2} \right) dt,$$

$$y_4(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3 \cdot 2} + \frac{x^4}{4 \cdot 3 \cdot 2}.$$

Com isso, inferimos que

$$y_n(x) = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!}.$$

Note que $\mathbf{y}_n(\mathbf{t})$ é um somatório associado a n parcelas. Assim, inferimos novamente que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{y}_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Recordando as aproximações em série de Taylor, tem-se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{y}_n(x) = e^x - 1 = \tilde{\mathbf{y}}(x)$. Portanto, $\tilde{\mathbf{y}}(x) = e^x - 1$ é solução do PVI, para $I = \mathbb{R}$.

Finalizando esta seção sobre soluções de EDOs, podemos afirmar, baseado nos autores da área de Equações Diferenciais, como em Figueiredo e Neves (2012) e Zill (2011), as EDOs possuem solução, desde que cumpram as exigências do Teorema da Existência e Unicidade. A maioria das equações diferenciais encontradas nas aplicações não possuem solução analítica, porém, podem ser encontradas soluções numéricas, recorrendo a métodos de aproximação numérica para equações diferenciais. Na Seção 5.3.3, fazemos uma discussão envolvendo esta temática.

2.2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS SEPARÁVEIS

Definição 2.2.1. A equação $\mathbf{y}' = f(x, \mathbf{y})$ será **separável** se f puder ser expressa como um produto de uma função dependente de x e uma outra função dependente de \mathbf{y} . Assim, a equação diferencial terá a forma

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{y}}{dx} &= p(x) \cdot q(\mathbf{y}), \text{ ou} \\ \frac{1}{q(\mathbf{y})} \mathbf{y}' &= p(x), \end{aligned} \quad (2.11)$$

em que $p(x)$ e $q(\mathbf{y})$ são funções contínuas em seus domínios para \mathbf{y} tal que $q(\mathbf{y}) \neq 0$.

Observação. Em vista da notação de Leibniz, é comum escrevermos uma equação de variáveis separáveis na forma

$$M(x) dx + N(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = 0, \quad (2.12)$$

uma vez que \mathbf{y}' é visto como a razão das diferenciais $d\mathbf{y}$ e dx . A equação (2.12) é denominada de forma diferencial da EDO.

2.2.1 Método de resolução da equação diferencial

Consideramos (2.11), dividindo-a pela função $q(\mathbf{y})$ quando $q(\mathbf{y}) \neq 0$. Temos as funções em \mathbf{y} e em x , uma de cada lado da igualdade (separadas),

$$\frac{1}{q(\mathbf{y})} \frac{d\mathbf{y}}{dx} = p(x).$$

Integrando em relação a x ambos os membros, tem-se

$$\int \frac{1}{q(y)} \frac{dy}{dx} dx = \int p(x) dx.$$

Formalmente, temos $\frac{dy}{dx} dx = dy$. Segue que a igualdade acima pode ser reescrita como

$$\int \frac{1}{q(y)} dy = \int p(x) dx.$$

Note que as variáveis y e x estão separadas, ou seja, uma de cada lado da igualdade. Logo, chega-se ao método de resolução. Supondo que p e q são funções contínuas, as integrais existem. Calculando as integrais de ambos os lados, obtém-se a solução geral da equação. E, sempre que for possível, escreve-se a função (solução geral da EDO) na forma explícita.

Veremos a seguir um exemplo mostrando a utilização desse método de resolução.

Exemplo 2.8. Resolveremos a equação diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y^2}$ utilizando o método de EDO separável.

Resolução. Dada a equação diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y^2}$, note que ela já está na forma de (2.11). Conforme o método de resolução, devemos separar as funções, uma em cada lado da igualdade:

$$y^2 \frac{dy}{dx} = x.$$

Agora, vamos integrar em relação a x ambos os lados da igualdade:

$$\int y^2 \frac{dy}{dx} dx = \int x dx,$$

$$\int y^2 dy = \int x dx,$$

$$\frac{y^3}{3} + c_1 = \frac{x^2}{2} + c_2.$$

Então, temos que isolar a variável y .

$$\frac{y^3}{3} = \frac{x^2}{2} + c_2 - c_1,$$

$$y^3 = \frac{3x^2}{2} + 3(c_2 - c_1).$$

Para deixar uma única constante na função, fazemos $c = 3(c_2 - c_1)$:

$$y^3 = \frac{3x^2}{2} + c,$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{3x^2}{2} + c}.$$

Portanto, $y = \sqrt[3]{\frac{3x^2}{2} + c}$ é a solução geral da equação diferencial dada.

Observação. Não há necessidade de usar duas constantes na integração de uma equação separável, pois escrevendo $Q(y) + c_1 = P(x) + c_2$, a diferença $c_2 - c_1$ poderá ser substituída por uma única constante c , de modo que $Q(y) = P(x) + c$. Em outras ocasiões, ao longo deste trabalho, renomearemos constantes de forma conveniente para uma equação. Por exemplo, múltiplos de constantes ou combinações de constantes podem, algumas vezes, ser substituídos por uma única constante.

2.3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS LINEARES DE 1ª ORDEM

Definição 2.3.1. Uma equação diferencial ordinária de primeira ordem da forma

$$\begin{aligned} y' + p(x) \cdot y &= q(x), \text{ ou} \\ \frac{dy}{dx} + p(x) \cdot y &= q(x), \end{aligned} \quad (2.13)$$

é chamada de **equação diferencial linear de primeira ordem**. Assume-se que, $p(x)$ e $q(x)$ sejam funções contínuas em algum intervalo aberto. A equação (2.13) está escrita na forma padrão.

Teorema 2.3. A solução da equação diferencial $\frac{dy}{dx} + p(x) \cdot y = q(x)$ é dada por

$$y = \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x) \cdot q(x) dx,$$

em que $\mu(x) = e^{\int p(x) dx}$. E $\mu(x)$ é chamado **fator integrante**.

Demonstração. A ideia que apresentaremos agora foi desenvolvida por Leibniz. Considerando (2.13) que está na forma padrão, queremos encontrar uma função μ conveniente, de modo que, ao multiplicarmos em (2.13), a transformaremos numa equação diferencial separável. Assim, multiplicando ambos os membros de (2.13) por uma função $\mu(x)$, encontramos:

$$\mu(x) \frac{dy}{dx} + \mu(x) p(x) y = \mu(x) q(x). \quad (2.14)$$

Admitindo que o lado direito da igualdade seja a derivada do produto $\mu(x) \cdot y$, segue que:

$$\frac{d}{dx}(\mu(x) \cdot y) = \mu(x) q(x). \quad (2.15)$$

Então, igualando (2.14) e (2.15), temos:

$$\frac{d}{dx}(\mu(x) \cdot y) = \mu(x) \frac{dy}{dx} + \mu(x) p(x) y.$$

Como $\frac{d}{dx}(\mu(x) \cdot y) = \frac{dy}{dx} \mu(x) + y \frac{d\mu(x)}{dx}$, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} \cancel{\mu(x)} + y \frac{d\mu(x)}{dx} &= \cancel{\mu(x)} \frac{dy}{dx} + \mu(x) p(x) y, \\ \frac{d\mu(x)}{dx} &= \mu(x) p(x). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Isso exige que μ satisfaça (2.16). Para encontrar a função μ , observemos que (2.16) é uma equação diferencial separável e, portanto,

$$\frac{1}{\mu(x)} \cdot \frac{d\mu(x)}{dx} = p(x).$$

Integrando os dois lados da última igualdade, temos:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\mu(x)} \cdot \frac{d\mu(x)}{dx} dx &= \int p(x) dx, \\ \ln |\mu(x)| &= \int p(x) dx, \\ \mu(x) &= e^{\int p(x) dx}. \end{aligned}$$

Com essa escolha para $\mu(x)$, (2.14) torna-se (2.15), que integrando-se os dois lados de (2.15), obtém-se:

$$\begin{aligned} \mu(x) y &= \int \mu(x) \cdot q(x) dx, \\ y &= \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x) \cdot q(x) dx. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Com isso, conclui-se a demonstração obtendo a solução dada por (2.17), tendo a função $\mu(x) = e^{\int p(x) dx}$ como fator integrante.

2.3.1 Método de resolução da equação diferencial linear de 1ª ordem

A seguir, vamos descrever os passos para resolver uma equação diferencial linear de primeira ordem, a qual utilizaremos o fator integrante.

- Primeiramente, escreva a equação diferencial na forma padrão $\frac{dy}{dx} + p(x) \cdot y = q(x)$.
- Determine o fator integrante $\mu(x) = e^{\int p(x) dx}$.
- Multiplique ambos os lados da equação diferencial na forma padrão pelo fator integrante $\mu(x) = e^{\int p(x) dx}$.
- Identifique do lado esquerdo da igualdade a derivada do produto.
- Para finalizar, integre a última equação e, se possível, resolva para y , e dê a solução na forma explícita.

Veremos a seguir um exemplo mostrando a utilização desse método de resolução com o fator integrante.

Exemplo 2.9. Encontraremos a solução geral da equação diferencial $\frac{dy}{dx} + 4x^3 y = 20x^3$ por meio do fator integrante.

Resolução. Observamos que a equação diferencial dada já está na forma padrão $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$. De acordo com o método de resolução, o próximo passo é calcular o fator integrante, $\mu(x) = e^{\int p(x) dx}$. Segue,

$$\mu(x) = e^{\int 4x^3 dx} \implies \mu(x) = e^{x^4}.$$

Multiplicamos a equação diferencial dada pelo fator integrante:

$$\frac{dy}{dx} e^{x^4} + 4x^3 e^{x^4} y = 20x^3 e^{x^4}.$$

Note que o lado esquerdo deve ser identificado com a derivada do produto. Assim, perceba que,

$$\frac{dy}{dx} e^{x^4} + 4x^3 e^{x^4} y = \frac{d}{dx}(e^{x^4} y).$$

Então,

$$\frac{d}{dx}(e^{x^4} y) = 20x^3 e^{x^4}. \quad (2.18)$$

Desse modo, (2.18) é uma equação diferencial separável. Logo, integrando ambos os lados da equação, temos:

$$e^{x^4} y = \int 20x^3 e^{x^4} dx.$$

A integral $\int 20x^3 e^{x^4} dx$ é resolvida pelo método da substituição, donde:

$$e^{x^4} y = 5e^{x^4} + c.$$

Isolamos a variável y , multiplicando ambos os lados da igualdade por e^{-x^4} , segue:

$$y = 5 + c e^{-x^4}. \quad (2.19)$$

Portanto, a função obtida em (2.19) é a solução geral da EDO.

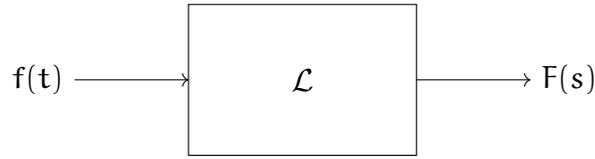
2.4 TRANSFORMADA DE LAPLACE

Esta seção é dedicada ao estudo de uma operação matemática chamada de Transformada de Laplace. Trata-se de um método para a resolução de problemas de valor inicial, que, por sua vez, envolvem EDO e condições iniciais.

Inicialmente, vamos ver a Transformada de Laplace⁸ como um operador que modifica o domínio da função $f(t)$, como ilustrado na Figura 4. Assim, quando fazemos a Transformada de uma função $f(t)$, estamos saindo do domínio do tempo (t) para representar a função $F(s)$ num outro domínio, neste caso, a frequência (s). A variável s é uma variável complexa em que $s = \alpha + \beta i$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, utilizada nos estudos de Engenharia, porém, neste trabalho, consideramos apenas com a parte real de s .

⁸ Pierre Simon de Laplace (1749-1827), matemático francês com grandes contribuições à Matemática, à Mecânica Celeste e à Teoria das Probabilidades.

Figura 4 – Bloco da Transformada de Laplace.



Fonte: O autor (2023).

A Transformada de Laplace é definida a partir de uma integral imprópria, como será visto a seguir.

Definição 2.4.1. Seja f uma função definida para $t \geq 0$. A integral

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\} &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-st} f(t) dt, \\ \mathcal{L}\{f(t)\} &:= \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt,\end{aligned}\tag{2.20}$$

é chamada de **Transformada de Laplace** de f , desde que a integral convirja.

Representaremos a função original (de entrada) por uma letra minúscula e a sua variável por t , e a sua Transformada de Laplace⁹ por uma letra maiúscula ou pela letra \mathcal{L} e a sua variável por s . Por exemplo, as Transformadas de Laplace das funções $f(t)$ e $g(t)$ serão representadas por $F(s)$ e $G(s)$, respectivamente. Ou ainda, podemos escrever $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ e $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$.

Exemplo 2.10. Seja $f(t) = 1$, para todo $t \geq 0$. Determinaremos a Transformada de Laplace da função f , ou seja, determinaremos $\mathcal{L}\{1\}$.

Resolução. Para resolver esta Transformada de Laplace, utilizaremos (2.20). Segue que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{1\} &= \int_0^{+\infty} e^{-st} (1) dt = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-st} dt, \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left. \frac{-e^{-st}}{s} \right|_0^b, \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{-e^{-sb} + 1}{s} = \frac{1}{s}, \quad \forall s > 0.\end{aligned}$$

Exemplo 2.11. Seja $f(t) = e^{at}$, para todo $t \geq 0$. Encontraremos a Transformada de Laplace da função f , ou seja, encontraremos $\mathcal{L}\{e^{at}\}$.

⁹ Para entender melhor o que é a Transformada de Laplace, ela representa a função $f(t)$ por suas exponenciais na forma e^{-st} , ou seja, a Transformada de Laplace soma infinitas exponenciais para obter uma nova função, a $F(s)$.

Resolução. Novamente, para resolver esta Transformada de Laplace, utilizaremos (2.20).
 Segue que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{at}\} &= \int_0^{+\infty} e^{-st} e^{at} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t} dt, \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-(s-a)t} dt = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left. \frac{-e^{-(s-a)t}}{s-a} \right|_0^b, \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{-e^{-(s-a)b} + 1}{s-a} = \frac{1}{s-a}, \quad \forall s > a. \end{aligned}$$

A Tabela 3¹⁰ lista as transformadas de Laplace de algumas funções básicas, sendo $a, b \in \mathbb{R}$.

$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
1	$\frac{1}{s}, s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}, s > a$
$t^n, n = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}, s > a$
$\text{sen}(bt)$	$\frac{b}{s^2 + b^2}, s > 0$
$\text{cos}(bt)$	$\frac{s}{s^2 + b^2}, s > 0$
$e^{at}t^n, n = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, s > a$
$\text{senh}(bt)$	$\frac{b}{s^2 - b^2}, s > b$
$\text{cosh}(bt)$	$\frac{s}{s^2 - b^2}, s > b$

Tabela 3 – Tabela de algumas Transformadas de funções básicas.

Vamos discutir, brevemente, condições suficientes para a existência da Transformada de Laplace. Para a existência da Transformada é preciso que a integral convirja, conforme a Definição 2.4.1. Se a função $f(t)$ crescer muito rápido, ela pode não ter a Transformada de Laplace $F(s)$, para $s > 0$.

Definição 2.4.2 (Ordem exponencial). Dizemos que f é de ordem exponencial em c se existirem constantes $c, N > 0$ e $T > 0$ tal que

$$|f(t)| \leq N e^{ct}, \quad \forall t > T.$$

Seguem alguns exemplos de funções de ordem exponencial: $f(t) = N$, $f(t) = t^n$, $f(t) = e^{at}$, $f(t) = \text{sen}(bt)$ e $f(t) = e^{at} \text{cos}(bt)$.

¹⁰ Extraída do livro Nagle, Saff e Snider (2012, p. 281).

Teorema 2.4 (Condições suficientes para a existência de \mathcal{L}). *Se f for contínua por partes¹¹ no intervalo $[0, +\infty)$ e de ordem exponencial c , então $\mathcal{L}f(t)$ existe para $s > c$.*

Demonstração. Veja a demonstração do Teorema 2.4, em Zill (2011). \square

Proposição 2.4.1 (Linearidade). *Se as transformadas de f e g existirem para $s > c$, então, para quaisquer escalares α e β ,*

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha \mathcal{L}\{f(t)\} + \beta \mathcal{L}\{g(t)\}, s > c.$$

A discussão e o contexto da Proposição 2.4.1 podem ser encontrados na Seção 7.1 em Zill (2011).

Esta propriedade da Transformada de Laplace, decorre da linearidade da integral. E, conseqüentemente, a Transformada de Laplace é um operador linear.

Teorema 2.5 (1º Teorema de deslocamento). *Se a Transformada de Laplace $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ e a for um número real qualquer, então*

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s - a).$$

Demonstração. Veja a demonstração do Teorema 2.5, em Zill (2011). \square

Exemplo 2.12. Segundo o Teorema 2.5, a Transformada de Laplace de $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(t) = e^{3t} \cos(5t)$, é

$$F(s) = \frac{s - 3}{(s - 3)^2 + 25}, s > 3.$$

Teorema 2.6 (Transformada de Laplace da derivada de primeira ordem). *Seja f contínua em $[0, +\infty)$ tal que f' existe e é contínua por partes em $[0, +\infty)$, com ambas de ordem exponencial c . Então, para $s > a$,*

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0). \quad (2.21)$$

Demonstração. Veja a demonstração do Teorema 2.6, em Nagle, Saff e Snider (2012). \square

Exemplo 2.13. Usando o Teorema 2.6 e o fato de que $\mathcal{L}\{\cosh(4t)\} = \frac{s}{s^2 - 16}$, determinaremos $\mathcal{L}\{\sinh(4t)\}$.

Resolução. *Lembre que cosseno hiperbólico: $\cosh(\alpha t) := \frac{e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}}{2}$ e seno hiperbólico: $\sinh(\alpha t) := \frac{e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}}{2}$. Desse modo, temos que $f(t) = \cosh(4t) = \frac{e^{4t} + e^{-4t}}{2}$. Então,*

¹¹ Uma função é contínua por partes em $[0, +\infty)$ se em qualquer intervalo $0 \leq a \leq t \leq b$ há no máximo um número finito de pontos t_k , $k = 1, 2, \dots, n$ ($t_{k-1} < t_k$) nos quais f é descontínua e é contínua em cada intervalo aberto $t_{k-1} < t < t_k$.

$f(0) = 1$ e $f'(t) = 4 \sinh(4t)$. Substituindo em (2.21), temos:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f'(t)\} &= s \mathcal{L}\{f(t)\} - f(0), \\ \mathcal{L}\{4 \sinh(4t)\} &= s \mathcal{L}\{\cosh(4t)\} - 1, \\ 4\mathcal{L}\{\sinh(4t)\} &= \frac{16}{s^2 - 16}, \\ \mathcal{L}\{\sinh(4t)\} &= \frac{4}{s^2 - 16}.\end{aligned}$$

Teorema 2.7 (Transformada de Laplace da derivada de segunda ordem). *Sejam f e f' contínuas em $[0, +\infty)$ tais que f'' existe e é contínua por partes em $[0, +\infty)$, tais que f, f', f'' sejam de ordem exponencial c . Então, para $s > a$,*

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2 F(s) - s f(0) - f'(0).$$

A discussão e o contexto do Teorema 2.7 podem ser encontrados na Seção 7.2.2 em Zill (2011).

Note que os Teoremas 2.6 e 2.7 esclarecem o motivo pelo qual a Transformada de Laplace é uma ferramenta útil na resolução dos problemas de valores iniciais.

Observação. Quando aplicamos a Transformada de Laplace em uma EDO, ela é uma operação que faz a mudança da função e suas derivadas no domínio da variável tempo t , para outra função no domínio da variável frequência s ¹².

Agora, podemos generalizar a Transformada de Laplace da derivada de ordem n .

Teorema 2.8 (Transformada de Laplace da derivada de ordem n). *Sejam $f, f', f'', \dots, f^{(n-1)}$ contínuas em $[0, +\infty)$ tais que $f^{(n)}$ existe e é contínua por partes em $[0, +\infty)$, em que $f, f', f'', \dots, f^{(n)}$ são de ordem exponencial c . Então, para $s > a$,*

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

Demonstração. Veja a demonstração do Teorema 2.8, em Nagle, Saff e Snider (2012). \square

Definição 2.4.3. Dada uma função $F(s)$, se houver uma função $f(t)$ que seja contínua em $[0, +\infty)$ e satisfaça $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, dizemos que $f(t)$ é a **Transformada Inversa de Laplace** de $F(s)$ e denotamos por $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ ou $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$.

A Tabela 4¹³ lista as transformadas inversas de Laplace de algumas funções básicas, sendo $a, b \in \mathbb{R}$.

¹² Em geral, nos estudos em matemática, é de interesse trabalhar apenas com a parte real de s .

¹³ Extraída do livro Zill (2011, p. 273).

$F(s)$	$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$
$\frac{1}{s}, s > 0$	1
$\frac{1}{s-a}, s > a$	e^{at}
$\frac{n!}{s^{n+1}}, s > a$	$t^n, n = 1, 2, 3, \dots$
$\frac{b}{s^2 + b^2}, s > 0$	$\text{sen}(bt)$
$\frac{s}{s^2 + b^2}, s > 0$	$\text{cos}(bt)$
$\frac{b}{s^2 - b^2}, s > b$	$\text{senh}(bt)$
$\frac{s}{s^2 - b^2}, s > b$	$\text{cosh}(bt)$

Tabela 4 – Tabela de algumas Transformadas inversas de funções básicas.

Proposição 2.4.2 (Linearidade da Transformada Inversa). *Se $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ e $\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$ existirem e forem contínuas em $[0, +\infty)$, então, para quaisquer escalares α e β ,*

$$\mathcal{L}^{-1}\{\alpha F(s) + \beta G(s)\} = \alpha \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + \beta \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}, s > a.$$

A discussão e o contexto da Proposição 2.4.2 podem ser encontrados na Seção 7.2 em Zill (2011).

Exemplo 2.14. Se a Transformada de Laplace de uma função $f(t)$ for $F(s) = \frac{s-3}{s^2+4s+4}$, é possível encontrar a função $f(t)$ tal que $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$.

Resolução. Para encontrar $f(t)$, vamos aplicar a Transformada Inversa de Laplace, porém, antes é necessário decompor $F(s)$ em frações parciais¹⁴. É fácil verificar que o denominador de $F(s)$ tem apenas uma raiz real de multiplicidade dois, sendo $s = -2$. Desse modo, escrevemos:

$$F(s) = \frac{s-3}{s^2+4s+4} = \frac{s-3}{(s+2)^2}.$$

Pelo Método das Frações Parciais, temos:

$$\frac{s-3}{s^2+4s+4} = \frac{A_1}{s+2} + \frac{A_2}{(s+2)^2}, \quad (2.22)$$

em que A_1 e A_2 são constantes a determinar. Multiplicando (2.22) por $(s+2)^2$, obtemos:

$$s-3 = A_1(s+2) + A_2. \quad (2.23)$$

¹⁴ O Método das Frações Parciais é estudado em CDI. Para revisar a teoria, sugerimos consultar o livro: FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Mirian Buss. **Cálculo A: funções, limite, derivação, integração**. 5. ed. São Paulo: Makron, 1992. p. 425-443.

Tomando $s = -2$ e substituindo em (2.23), temos: $A_2 = -5$. Comparando os coeficientes de s na equação (2.23), obtemos: $A_1 = 1$.

Logo,

$$F(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{5}{(s+2)^2}. \quad (2.24)$$

Agora, aplica-se a Transformada Inversa de Laplace em (2.24) para obter a função $f(t)$. Conforme a Tabela 4 e de forma conjunta, usa-se a Proposição 2.4.2, donde:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} - 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2}\right\}, \\ f(t) &= e^{-2t} - 5e^{-2t}t. \end{aligned}$$

A Transformada Inversa de Laplace é a última etapa do processo de resolução de uma EDO aplicando o método da Transformada de Laplace. Aplicaremos este método oportunamente ao longo desta seção.

A partir deste ponto, dispomos de todos os conceitos e ferramentas necessárias para a aplicação da Transformada de Laplace na solução de algumas equações diferenciais ordinárias lineares.

Exemplo 2.15. Utilizando a Transformada de Laplace, vamos resolver o seguinte PVI:

$$\begin{cases} y'' - 5y' + 4y = e^{2t} \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = -1. \end{cases}$$

Resolução. A título de esclarecimento, para ser coerente com a escrita do enunciado do problema, escrevemos $Y(s)$ como a Transformada de Laplace da função $y(t)$. Aplicando a Transformada de Laplace na equação diferencial dada, temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y''\} - 5\mathcal{L}\{y'\} + 4\mathcal{L}\{y\} &= \mathcal{L}\{e^{2t}\}, && \text{pela linearidade da } \mathcal{L}, \\ s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0) - 5(s Y(s) - y'(0)) + 4 Y(s) &= \frac{1}{s-2}, \\ s^2 Y(s) - 5s Y(s) + 4 Y(s) - s - 4 &= \frac{1}{s-2}, \\ (s^2 - 5s + 4) Y(s) &= \frac{1}{s-2} + s + 4, \\ Y(s) &= \frac{1}{(s-2) \cdot (s^2 - 5s + 4)} + \frac{s+4}{s^2 - 5s + 4}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Para poder aplicar a Transformada Inversa de Laplace na última equação, é necessário escrever as frações de forma conveniente. Desse modo, faremos a decomposição dessas frações, em (2.25), aplicando o Método das Frações Parciais. Primeiramente, calculamos as raízes dos polinômios dos denominadores das frações. Assim,

$$\begin{aligned} s - 2 = 0 &\iff s = 2, \\ s^2 - 5s + 4 = 0 &\iff s = 1 \text{ ou } s = 4. \end{aligned}$$

Aplicando o Método das Frações Parciais na primeira fração de (2.25), temos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(s-2) \cdot (s^2-5s+4)} &= \frac{1}{(s-1) \cdot (s-2) \cdot (s-4)}, \\ \frac{1}{(s-2) \cdot (s^2-5s+4)} &= \frac{A_1}{s-1} + \frac{A_2}{s-2} + \frac{A_3}{s-4}, \\ 1 &= A_1(s-2) \cdot (s-4) + A_2(s-1) \cdot (s-4) + A_3(s-1) \cdot (s-2).\end{aligned}\tag{2.26}$$

Para calcular os coeficientes A_1 , A_2 e A_3 , utilizaremos o seguinte procedimento:

- tomando $s = 1$, temos $1 = A_1 \cdot (-1) \cdot (-3) \implies A_1 = \frac{1}{3}$,
- tomando $s = 2$, temos $1 = A_2 \cdot 1 \cdot (-2) \implies A_2 = -\frac{1}{2}$,
- tomando $s = 4$, temos $1 = A_3 \cdot 3 \cdot 2 \implies A_3 = \frac{1}{6}$.

Substituindo estes coeficientes em (2.26), segue que:

$$\frac{1}{(s-2) \cdot (s^2-5s+4)} = \frac{1}{3(s-1)} - \frac{1}{2(s-2)} + \frac{1}{6(s-4)}.\tag{2.27}$$

Na segunda fração, de (2.25), fazemos de forma análoga. Assim,

$$\begin{aligned}\frac{s+4}{s^2-5s+4} &= \frac{s-4-2}{(s-1) \cdot (s-4)} = \frac{1}{s-1} - \frac{2}{(s-1) \cdot (s-4)}, \\ \frac{-2}{(s-1) \cdot (s-4)} &= \frac{B_1}{s-1} + \frac{B_2}{s-4}, \\ -2 &= B_1(s-4) + B_2(s-1).\end{aligned}\tag{2.28}$$

Para calcular os coeficientes B_1 e B_2 , utilizaremos o seguinte procedimento:

- tomando $s = 1$, temos $-2 = B_1 \cdot (-3) \implies B_1 = \frac{2}{3}$,
- tomando $s = 4$, temos $-2 = B_2 \cdot 3 \implies B_2 = -\frac{2}{3}$.

Substituindo estes coeficientes em (2.28), segue que:

$$\begin{aligned}\frac{-2}{(s-1) \cdot (s-4)} &= \frac{2}{3(s-1)} - \frac{2}{3(s-4)}, \\ \frac{s-6}{s^2-5s+4} &= \frac{1}{s-1} + \frac{2}{3(s-1)} - \frac{2}{3(s-4)}.\end{aligned}\tag{2.29}$$

Substituindo (2.27) e (2.29) em (2.25), temos:

$$\begin{aligned}Y(s) &= \frac{1}{3(s-1)} - \frac{1}{2(s-2)} + \frac{1}{6(s-4)} + \frac{1}{s-1} + \frac{2}{3(s-1)} - \frac{2}{3(s-4)}, \\ Y(s) &= \frac{2}{s-1} - \frac{1}{2(s-2)} - \frac{1}{2(s-4)}.\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} &= 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}\right\}, \\ y(t) &= 2e^t - \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{4t}.\end{aligned}\tag{2.30}$$

Portanto, a função dada em (2.30) é a solução do PVI proposto no Exemplo 2.15.

Em muitos problemas de engenharia, modelados por equações diferenciais como, por exemplo, em um PVI de segunda ordem com coeficientes constantes,

$$\begin{cases} a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = f(t) \\ y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0, \end{cases}$$

para $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$, em que $f(t)$, o termo não homogêneo é uma função descontínua, uma função impulso ou uma função periódica. Pois, encontramos com frequência funções que podem estar “ligadas” ou “desligadas”, como em circuitos elétricos, sistemas mecânicos e sistemas de controle. Então, para estudar sistemas em que uma função age como um impulso ou começa a agir como um impulso a partir de um instante de tempo, é preciso obter a Transformada de Laplace de funções impulsos e de funções descontínuas em geral. Nessas situações, podemos fazer uso de uma função particular, chamada Função Degrau Unitário.

Definição 2.4.4. A Função Degrau Unitário (ou Função Heaviside) é definida por

$$\mathcal{H}(t - a) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < a \\ 1, & t \geq a, \text{ sendo } a \geq 0. \end{cases}$$

A Transformada de Laplace da Função Degrau Unitário, $\mathcal{H}(t - a)$, é dada por

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}\{\mathcal{H}(t - a)\} = \int_a^{+\infty} e^{-st} \mathcal{H}(t - a) dt, \\ &= \int_a^{+\infty} e^{-st} dt, \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b e^{-st} dt, \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left. \frac{-e^{-st}}{s} \right|_a^b, \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{-sb} + e^{-s \cdot a}}{s} \right), \\ &= \frac{e^{-as}}{s}, \quad s > 0. \end{aligned}$$

Teorema 2.9 (2º Teorema de deslocamento). *Considere que a Transformada de Laplace $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ exista, para $s > c \geq 0$. Se a for uma constante positiva, então*

$$\mathcal{L}\{f(t - a) \mathcal{H}(t - a)\} = e^{-as} F(s), \quad s > c.$$

Demonstração. Veja a demonstração do Teorema 2.9, em Nagle, Saff e Snider (2012). \square

Exemplo 2.16. Calcularemos a Transformada de Laplace para a função $f(t)$ dada por

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 2, & 0 \leq t < 4 \\ 5, & t \geq 4. \end{cases}$$

Resolução. Para facilitar o cálculo da Transformada de Laplace, vamos, primeiramente, escrever a função $f(t)$ com o auxílio da Função Degrau. Assim, escreve-se

$$f(t) = 2\mathcal{H}(t) + 3\mathcal{H}(t - 4).$$

Em seguida, calcula-se a Transformada de Laplace de $f(t)$, usando o Teorema 2.9, temos:

$$F(s) = \frac{2e^{-0 \cdot s}}{s} + \frac{3e^{-4s}}{s} = \frac{2 + 3e^{-4s}}{s}.$$

Finalizando esta seção, apresentamos a definição de convolução e Função de Transferência que são conceitos bastante utilizados nas engenharias, isto é, nas aplicações envolvendo a Transformada de Laplace.

Definição 2.4.5. Considere que as funções f e g sejam contínuas por partes em $[0, +\infty)$. Define-se a operação de convolução entre f e g , denotada por $f * g$, calculada pela seguinte integral

$$f * g = \int_0^t f(\eta) g(t - \eta) d\eta.$$

A convolução $f * g$ é uma função de t . E, ainda, tem-se que por $f * g = g * f$. Algumas vezes é possível identificar uma Transformada de Laplace como o produto de duas outras transformadas $F(s)$ e $G(s)$, correspondendo a funções conhecidas f e g , respectivamente.

Teorema 2.10 (Teorema da convolução). *Se f e g forem contínuas por partes em um intervalo $[0, +\infty)$ e de ordem exponencial, então*

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \cdot \mathcal{L}\{g(t)\} = F(s) \cdot G(s).$$

Demonstração. Veja a demonstração do Teorema 2.10, em Zill (2011). □

Vamos apresentar uma relação interessante entre as funções $x(t)$ e $y(t)$, e entre as funções $X(s)$ e $Y(s)$, com base nas notas de aula de Camino (2023) e no livro de Ogata (1998). Para ilustrar a situação, consideramos a EDO dada por

$$\frac{dy}{dt} + y(t) = 3x(t).$$

Note que temos duas funções nessa EDO, $x(t)$ e $y(t)$, que podem, nas aplicações, serem consideradas sinal de entrada e sinal de saída, respectivamente, e isso define um sistema de primeira ordem. Neste caso, considerando que o sinal de saída $y(t)$ é uma convolução

do sinal de entrada $x(t)$ com a resposta de uma excitação qualquer $g(t)$, desse modo, $y(t) = x(t) * g(t)$, e assim, temos um sistema de primeira ordem.

Então, aplicando a Transformada de Laplace na integral de convolução, pelo Teorema 2.10, temos:

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{x(t) * g(t)\} = \mathcal{L}\{x(t)\} \cdot \mathcal{L}\{g(t)\} \implies Y(s) = X(s) \cdot G(s).$$

Logo, isso nos mostra que, no domínio s temos o sinal de saída como o produto do sinal de entrada pela função $G(s)$, a qual é denominada de função transferência. Ou seja, a Função de Transferência é a Transformada de Laplace da função de resposta ao impulso. Por outro lado, a função $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ relaciona a Transformada de Laplace do sinal de saída $y(t)$ com a Transformada de Laplace do sinal de entrada $x(t)$. A Função de Transferência é útil para a obtenção da resposta ao estado nulo (considerando as condições iniciais nulas).

Exemplo 2.17. Determine a Função de Transferência $G(s)$ para o seguinte PVI:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} + y(t) = 3x(t) \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Resolução. Para escrever a EDO no domínio s , aplicamos a Transformada de Laplace:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} + \mathcal{L}\{y(t)\} &= 3\mathcal{L}\{x(t)\} \\ sY(s) - y(0) + Y(s) &= 3X(s), & y(0) &= 0, \\ Y(s)(s+1) &= 3X(s), \\ G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} &= \frac{3}{s+1}. \end{aligned}$$

Portanto, a Função de Transferência é $G(s) = \frac{3}{s+1}$.

Alguns dos conceitos apresentados nesta seção, por serem objeto de estudo de diversas disciplinas de cursos de engenharia, serão imprescindíveis na Seção 5.3.2 desse trabalho.

3 SOBRE O ENSINO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Neste capítulo discorreremos de forma breve sobre ensino e aprendizagem de EDOs em cursos superiores baseado em algumas pesquisas de autores como Dullius, Veit e Araujo (2013), Macêdo e Gregor (2020), Pinto e Lima (2017) e Oliveira e Iglioni (2013). Em seguida, apresentamos uma caracterização e uma síntese do IFC e seus cursos. Na parte final do capítulo, contextualizamos a presença das EDOs nos cursos superiores do IFC – Rio do Sul.

3.1 ENSINO E APRENDIZAGEM DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS EM CURSOS SUPERIORES

O estudo das Equações Diferenciais Ordinárias está diretamente relacionado com o estudo do Cálculo Diferencial e Integral e este, por sua vez, faz parte de um ramo da Matemática. Não é de hoje, que o ensino e a aprendizagem da Matemática têm mostrado carência, haja vista os baixos desempenhos nas avaliações. O Ministério da Educação (MEC), em seu portal, apresenta os dados e a análise do desempenho dos estudantes brasileiros no maior estudo sobre educação do mundo, o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA). Foi feita uma comparação do desempenho do Brasil com os países membros da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), “Em termos de escolarização, os estudantes brasileiros estão três anos e meio atrás dos países da OCDE quando o assunto é proficiência em Matemática”.

Posto isso, diversos estudos sobre ensino de CDI e EDO, como Dullius, Veit e Araujo (2013), Macêdo e Gregor (2020) e Domingos e Bordeira (2001) sinalizam para o mesmo cenário, estudantes ingressando no ensino superior com defasagem no conhecimento de matemática da Educação Básica. Segundo Macêdo e Gregor, “de uma forma geral, os alunos apresentam dificuldades nos conteúdos de Matemática Básica, mostrando a realidade do ensino público atual” (2020, p. 21).

Como professor atuante no ensino superior, lecionando a disciplina de EDO e outras disciplinas que se relacionam com as EDOs, em minha prática pedagógica, observo de forma empírica dificuldades relacionadas à aprendizagem e aplicação das EDOs. Ademais, por meio de leituras (de teses, dissertações, artigos), cursos e palestras, pôde-se constatar que o ensino e a aprendizagem de equações diferenciais têm sido objeto de preocupação de vários pesquisadores no Brasil.

Mesmo que a disciplina de EDO ou disciplinas que fazem uso das ED estejam em fases mais avançadas dos cursos, os estudantes ainda apresentam algumas dificuldades de conhecimento matemático (operacional, conceitual, de interpretação e aplicações em problemas contextualizados). Existem algumas pesquisas sobre dificuldades no ensino e aprendizagem de EDOs que apontam para esta direção, tais como: Dullius, Veit e Araujo (2013), Lopes (2021), Oliveira e Iglioni (2013) e Pinto e Lima (2017).

Na pesquisa realizada por Dullius, Veit e Araujo (2013), são apresentados os resultados de uma investigação sobre as dificuldades dos estudantes na aprendizagem de EDO, em que na revisão da literatura é feito um levantamento de onze artigos científicos sobre esta temática, além de entrevistas com estudantes e professores. Como consequência, destacam-se alguns indicativos obtidos nesta pesquisa:

Os alunos não sabem os conteúdos de matemática básica, como por exemplo, trigonometria, frações, sistemas lineares, frações algébricas, números complexos, derivadas e integrais, entre outros [...] Os alunos possuem problemas conceituais, principalmente no que se refere à interpretação da derivada, que é a base das ED (p. 223 – 224).

Noutro estudo, as autoras Oliveira e Iliori apresentam um levantamento bibliográfico realizado acerca de pesquisas sobre ensino e aprendizagem de equações diferenciais. Apontaram as dificuldades dos estudantes na aprendizagem de EDO e o que elas sugerem como alternativas para esse ensino para amenizar tais dificuldades.

De modo geral, as pesquisas levantadas relataram que o ensino das Equações Diferenciais vem acontecendo de modo a concentrar uma maior atenção nas soluções analíticas a partir de manipulações algébricas de resolução e, nesse processo, relataram dificuldades de aprendizagem dos alunos referentes à matemática básica, à aplicação dos conceitos de derivada e integral e à interpretação de taxas de variação instantânea. [...] Para amenizar essas dificuldades, a maioria dos autores consultados apontou como possibilidade para o ensino de Equações Diferenciais o enfoque qualitativo do assunto, de forma contextualizada, a partir de situações-problema e favorecendo o equilíbrio entre a abordagem analítica, numérica e gráfica, por meio da utilização de recursos computacionais que auxiliem e agilizem o processo (2013, p. 21).

Nas últimas décadas, o ensino de EDO está passando por algumas modificações no que diz respeito às estratégias de ensino, afirmam Pinto e Lima (2017). Assim, esses pesquisadores investigaram, recentemente, o seguinte problema de pesquisa: “Quais as contribuições trazidas para a aprendizagem de graduandos em Engenharia Mecânica por uma sequência de ensino constituída por atividades que contextualizam as EDO nessa modalidade de Engenharia?” (Pinto; Lima, 2017, p. 23). Os autores discutem o ensino e aprendizagem de EDOs lineares de 1^a e 2^a ordens em um curso de Engenharia Mecânica, sob a ótica da Matemática no Contexto das Ciências.

Atualmente, em artigos científicos, dissertações e teses abordando o ensino ou a aprendizagem de EDO, nota-se uma tendência em apresentarem o uso de novas estratégias e metodologias de ensino, como por exemplo, o uso de modelagem matemática, sequências didáticas, mapa conceitual e ferramentas tecnológicas, com propósito de oferecer novas abordagens ao ensino de EDO. Conforme mostram Pinto e Lima (2019), em sua pesquisa em que verificaram o uso de teorias e metodologias diversas nos estudos levantados, é buscada a contextualização do ensino e a valorização das interações entre enfoques algébricos, gráficos e analíticos.

3.2 OS CURSOS DE ENSINO SUPERIOR DO INSTITUTO FEDERAL CATARINENSE

Os Institutos Federais de Educação, Ciência e Tecnologia, criados por meio da Lei nº 11.892, de 29 de dezembro de 2008, constituem um novo modelo de instituição de educação profissional e tecnológica que visa responder de forma eficaz, às demandas crescentes por formação profissional, por difusão de conhecimentos científicos e tecnológicos e de suporte aos arranjos produtivos locais.

Presentes em todos os estados, os Institutos Federais contêm a reorganização da rede federal de educação profissional, oferecendo formação inicial e continuada, ensino médio integrado, cursos superiores de tecnologia, bacharelado em engenharias, licenciaturas e pós-graduação – *lato e stricto sensu*.

O Instituto Federal Catarinense é uma instituição de ensino público federal com sede na cidade de Blumenau, em Santa Catarina, que possui uma ampla rede de *campi* em todo o estado. Atualmente, no IFC são oferecidos 43 cursos de graduação em 15 *campi* distribuídos em diferentes municípios de Santa Catarina. São eles: Abelardo Luz, Araquari, Blumenau, Brusque, Camboriú, Concórdia, Fraiburgo, Ibirama, Luzerna, Rio do Sul, Santa Rosa do Sul, São Bento do Sul, São Francisco do Sul, Sombrio e Videira.

Os cursos oferecidos pelo IFC são bastante diversificados, atendendo às necessidades de diferentes perfis de estudantes. Oferece cursos técnicos nas áreas de Administração, Agropecuária, Alimentos, Edificações, Eletromecânica, Informática, Meio Ambiente, Química, entre outras. Também são oferecidos cursos de formação inicial e continuada, com curta duração, para capacitar profissionais em áreas específicas, como Eletricista Industrial, Desenho Técnico, Cervejeiro Artesanal, entre outros.

Além disso, o IFC também oferece cursos de ensino superior como Agronomia, Ciência da Computação, Engenharia de Alimentos, Engenharia de Controle e Automação, Engenharia Elétrica, Engenharia Mecânica, Engenharia Mecatrônica, Licenciatura em Física, Licenciatura em Matemática, Licenciatura em Química, Pedagogia, Tecnologia em Redes de Computadores, entre outros. No *Campus* Rio do Sul são oferecidos os cursos de graduação em Agronomia, Ciência da Computação, Engenharia Mecatrônica, Licenciatura em Física, Licenciatura em Matemática e Pedagogia.

Verifica-se no Quadro 1 uma apresentação de todos os cursos de ensino superior oferecidos em cada um dos 15 *campi* do IFC.

Quadro 1 – Cursos de graduação oferecidos pelo IFC.

Campus	Cursos de Graduação	Grau de Formação
Abelardo Luz	Pedagogia	Licenciatura
Araquari	Agronomia *	Bacharelado
	Medicina Veterinária Sistemas de Informação	
	Ciências Agrícolas * Química *	Licenciatura
Blumenau	Redes de Computadores	Tecnólogo
	Ciência da Computação Engenharia Elétrica *	Bacharelado
	Pedagogia	Licenciatura
Brusque	Análise e Desenvolvimento de Sistemas	Tecnólogo
	Química *	Licenciatura
Camboriú	Redes de Computadores	Tecnólogo
	Agronomia * Sistemas de Informação	Bacharelado
	Matemática * Química * Pedagogia	Licenciatura
Concórdia	Negócios Imobiliários Sistemas para Internet	Tecnólogo
	Agronomia * Medicina Veterinária Engenharia de Alimentos *	Bacharelado
Fraiburgo	Física * Matemática *	Licenciatura
	Análise e Desenvolvimento de Sistemas	Tecnólogo
Luzerna	Engenharia de Controle e Automação * Engenharia Mecânica *	Bacharelado
Rio do Sul	Agronomia * Ciência da Computação * Engenharia Mecatrônica *	Bacharelado
	Física * Matemática * Pedagogia	Licenciatura
Santa Rosa do Sul	Agronomia * Zootecnia	Bacharelado
São Bento do Sul	Engenharia de Computação * Engenharia de Controle e Automação *	Bacharelado
São Francisco do Sul	Engenharia Elétrica *	Bacharelado
	Logística Redes de Computadores	Tecnólogo
Sombrio	Matemática *	Licenciatura
	Gestão de Turismo Redes de Computadores	Tecnólogo
Videira	Agronomia * Ciência da Computação Engenharia Elétrica *	Bacharelado
	Pedagogia	Licenciatura

Fonte: Construído pelo autor (2023).

Nota: * Cursos que demandam de Cálculo Diferencial e Integral e possuem aplicações em EDOs.

3.3 AS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS NOS CURSOS DE ENSINO SUPERIOR DO INSTITUTO FEDERAL CATARINENSE – CAMPUS RIO DO SUL

O Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Catarinense, *Campus* Rio do Sul, como é constituído atualmente, por três unidades, na cidade de Rio do Sul, é originário da Escola Agrotécnica Federal de Rio do Sul (EAFRS), criada pela Lei nº 8.670 de 30 de junho de 1993. A EAFRS foi construída na Estrada do Redentor, na Serra Canoas, e iniciou suas atividades de ensino com o curso de Técnico em Agropecuária, com duração de três anos, no sistema de Escola-Fazenda.

Em dezembro de 2008, com o advento da Lei nº 11.892/2008, a EAFRS transformou-se em Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia, pertencendo ao Instituto Federal Catarinense, *Campus* Rio do Sul, sendo denominada de Unidade Sede, a área localizada na Estrada do Redentor. Atualmente, esta unidade oferta os cursos Técnicos Integrados ao Ensino Médio em Agropecuária e Agroecologia, o curso Superior de Agronomia e o curso de Pós-graduação de Sistemas Agrícolas Regionais.

No ano de 2010 ocorreu uma expansão, sendo instalada a Unidade Urbana, localizada no Bairro Jardim América. A Unidade Urbana iniciou a oferta de curso superior com a graduação em Licenciatura em Matemática. Atualmente, esta unidade oferta os cursos superiores de Licenciatura em Matemática, Física e Pedagogia, o Bacharelado em Ciência da Computação, o curso Técnico Integrado ao Ensino Médio de Informática e o curso Técnico em Agrimensura subsequente ao Ensino Médio.

No ano de 2015, o IFC – Rio do Sul teve mais uma expansão, quando firmou uma parceria com o Centro de Educação Profissional do Estado de Santa Catarina (CEDUP), transformando este espaço na denominada Unidade Tecnológica. Na unidade em questão atualmente, é ofertado o curso de Engenharia Mecatrônica.

Para desenvolver esta seção, optamos por uma metodologia de pesquisa com viés qualitativo na modalidade documental, ou seja, trata-se de uma pesquisa aberta a análises subjetivas, a partir de uma amostra de documentos utilizados como suporte. Os documentos analisados foram os Projetos Pedagógicos de Cursos de ensino superior do IFC – Rio do Sul nos seis cursos ofertados por esta instituição.

Iniciamos o levantamento dos dados a partir do Projeto Pedagógico de Curso (PPC) mais recente de cada curso e foram feitas leituras investigando aqueles cursos que sinalizavam algo ao ensino e/ou aplicação das equações diferenciais ordinárias. Em seguida, observamos a relação das EDOs com os respectivos cursos.

O PPC do curso de Pedagogia não apresentou nenhuma menção ou relação com as EDOs. Tal afirmação é feita analisando as ementas das duas disciplinas de matemática, nomeadas como: Fundamentos em Matemática [Ementa: conceitos básicos da matemática para Anos Iniciais e noções para Educação Infantil: sistematização dos conhecimentos matemáticos relacionados à aritmética, álgebra, geometria, medidas e de tratamento de informação] e Fundamentos Metodológicos da Matemática (estudo de documentos norte-

adores para ao currículo e ensino de matemática nos Anos Iniciais e Educação Infantil; concepções de conhecimento matemático; noções das tendências fundamentais em Educação Matemática; processo de Ensino e de aprendizagem de matemática: pressupostos teórico-metodológicos e possibilidades educativas para o ensino de matemática; planejamento e processos avaliativos em matemática).

Por outro lado, não foi constatado nenhuma menção ou relação com as EDOs no PPC do curso de Bacharelado em Ciência da Computação, apesar de o curso dispor, em sua matriz curricular, de duas disciplinas afins com as EDOs, a saber: Cálculo Diferencial e Integral I, Cálculo Diferencial e Integral II e Métodos Numéricos [Ementa: aritmética de ponto flutuante; zeros de funções reais; sistemas lineares; métodos de fatoração de matrizes; métodos de interpolação numérica; interpolação polinomial; ajuste de curvas; diferenciação e integração numérica]. As demais da área da matemática são: Pré-Cálculo; Fundamentos Matemáticos da Computação; Matemática Discreta; Álgebra Linear; Probabilidade e Estatística. Posto isso, não fica perceptível aplicações com EDOs neste curso.

Na leitura do PPC do curso de Agronomia também não foi encontrada nenhuma menção direta às EDOs. No curso são oferecidas três disciplinas na área de matemática, dentre elas, a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, no 2º semestre. No item 6 – Princípios filosóficos e pedagógicos do curso, no PPC, aparece a expressão ‘resolução e discussão de problemas’, que é bastante comum nos textos que relacionam o uso da matemática, ou seja, aplicação da matemática. Contudo, na ementa da disciplina de Drenagem e Irrigação, do 7º semestre, [Ementa: introdução à irrigação e drenagem; usos e qualidade da água para irrigação; sistema água-solo-planta-atmosfera; dinâmica da água no solo e necessidade de água das culturas; métodos, avaliação e manejo de sistemas de irrigação; projetos de irrigação; sistemas e manejo da drenagem dos solos], no tópico ‘projetos de irrigação’ é factível explorar aplicações com as EDOs.

Na análise do PPC do curso de Engenharia Mecatrônica não foi encontrada qualquer menção direta às EDOs. Porém, o curso tem em sua matriz curricular três disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral – Cálculo I (2º semestre), Cálculo II (3º semestre), Cálculo III (4º semestre) e a disciplina de Controle de Processos, no 7º semestre, que tem um tópico na ementa – modelo matemático dos sistemas físicos, em que abarca aplicações de EDOs. Além disso, na Resolução CNE/CES nº 11, de 11 de março de 2002, de acordo com Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN) do curso de graduação em Engenharia, lista-se as habilidades e competências na formação do engenheiro que destaca: aplicar conhecimentos matemáticos, científicos, tecnológicos e instrumentais à engenharia. Os pontos acima levantados, em conjunto, sugerem que pode ser utilizada a modelagem matemática com aplicações das equações diferenciais ordinárias no curso de Engenharia Mecatrônica.

Através da leitura do PPC do curso de Licenciatura em Física, observa-se que são oferecidas quatro disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral – Cálculo I (2º semestre), Cálculo II (3º semestre), Cálculo III (4º semestre) e Cálculo IV (5º semestre). No Cálculo

IV, boa parte da ementa é sobre equações diferenciais ordinárias. Sabe-se que diversos fenômenos da física são modelados matematicamente, em particular, por EDOs. A disciplina de Mecânica Clássica, no 5º semestre, [Ementa: mecânica Newtoniana; trabalho e energia; oscilações; cálculo das variações; mecânica Lagrangeana; mecânica Hamiltoniana] estuda o ‘cálculo de variações’ em que os estudantes abordam modelos físicos através da modelagem matemática de EDO.

Além disso, o PPC traz no perfil do egresso do curso de Física, habilidades que devem ser desenvolvidas que remetem o uso da matemática como uma linguagem para a expressão dos fenômenos naturais. Também foi identificada, no Parecer CNE/CES nº 1304, de 06 de novembro de 2001, e nas DCN para os cursos de Física, a exigência do estudo de Equações Diferenciais. Portanto, pelo conjunto de pontos levantados, fica caracterizado nesse curso a necessidade do ensino das equações diferenciais ordinárias, assim como, das aplicações envolvendo as EDOs.

Atualmente, no PPC do curso de Licenciatura em Matemática, são oferecidas três disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral – Cálculo I (4º semestre), Cálculo II (5º semestre), Cálculo III (6º semestre) e a disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias (7º semestre). Estando presente o ensino e aplicações de EDOs. Não será analisado como as aplicações com EDOs ocorrem no curso, uma vez que, o foco deste trabalho é olhar para os cursos que não atuam com a formação de professores de matemática.

Diante deste levantamento, percebe-se a presença do ensino (enquanto disciplina) de EDO nos cursos de Licenciatura em Física e Matemática e, também, constata-se o uso de EDO em aplicações nos cursos de Agronomia, Engenharia Mecatrônica, Física e Matemática. Por conseguinte, optou-se por investigar os docentes que atuam nos cursos de Agronomia, Engenharia Mecatrônica e Licenciatura em Física.

4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo, descrevemos a metodologia empregada na investigação sobre aplicações propostas por professores do IFC – Rio do Sul, com foco nas equações diferenciais ordinárias. Apresentamos o caminho metodológico escolhido com todas as suas etapas: delineamento do trabalho, participantes, coleta de dados e análise de dados.

4.1 DELINEAMENTO DO TRABALHO

De acordo com os objetivos desta investigação, este trabalho caracteriza-se por ser uma pesquisa do tipo descritiva, em que buscou-se conhecer alguns modelos matemáticos e entender suas aplicações nos cursos superiores do Instituto Federal Catarinense, *Campus Rio do Sul*. Como também, apresentar e estabelecer relações entre as demandas percebidas pelos docentes e as dificuldades dos estudantes quanto às aplicações dos conhecimentos referentes às equações diferenciais ordinárias. Assim, de acordo com Prodanov e Freitas (2013), a pesquisa descritiva tem como características o registro, a descrição e a interpretação de fatos ou fenômenos observados. E, na coleta de dados, utiliza-se com mais destaque, a entrevista, o formulário, o questionário, o teste e a observação.

Utilizamos da pesquisa bibliográfica para fazer o embasamento do Capítulo 2. Assim, foi realizada a consulta bibliográfica em três livros didáticos (dados secundários) de Equações Diferenciais Ordinárias, utilizados como livros-texto para a escrita da revisão bibliográfica, sendo os livros: *Equações diferenciais com aplicações em modelagem*, por Dennis G. Zill; *Equações diferenciais aplicadas*, por Djairo Guedes de Figueiredo e Aloisio Freiria Neves; *Equações diferenciais*, por R. Kent Nagle, Edward B. Saff e Arthur David Snider.

E ainda, foi feito um levantamento em onze livros (dados secundários), entre eles, livros didáticos de Equações Diferenciais Ordinárias, de Cálculo Diferencial e Integral e de Modelagem Matemática com aplicações de EDOs, com o objetivo de identificar os modelos matemáticos presentes nas obras: *Equações diferenciais*, por R. Kent Nagle, Edward B. Saff e Arthur David Snider; *Equações diferenciais com aplicações em modelagem*, por Dennis G. Zill; *Cálculo. v. 2*, por Jon Rogawski; *Cálculo: um novo horizonte. v. 1 e 2*, por Howard Anton; *Cálculo. v. 1*, por James Stewart; *O cálculo com geometria analítica. v. 1*, por Louis Leithold.

As pesquisas científicas fazem uso, como procedimento, segundo Prodanov e Freitas, do “estudo bibliográfico, pois todas as pesquisas necessitam de um referencial teórico” (2013, p. 55). Sendo que a pesquisa bibliográfica é baseada em material já publicado como, por exemplo: revistas, livros, artigos, dissertações, teses, e outros. Para mapear as dificuldades que marcam o ensino e aplicações de EDOs foi feita pesquisa bibliográfica em artigos científicos (dados secundários): Dullius, Veit e Araujo (2013), Macêdo e Gregor (2020), Pinto e Lima (2017) e Oliveira e Iglioni (2013).

Além do caráter bibliográfico, a investigação conta com procedimento da pesquisa documental que tem como fonte documentos institucionais do IFC (dados secundários), como: DCN e PPCs dos cursos superiores do IFC – Rio do Sul, consulta essa que se fez necessária para apontar os cursos aos quais deveríamos direcionar as atenções e auxiliar no selecionamento dos docentes a entrevistar. Lüdke e André (2018) dizem que a pesquisa documental pode ser empregada como um procedimento de dados qualitativos complementar a outros procedimentos metodológicos.

De acordo com as autoras Lüdke e André (2018) e Prodanov e Freitas (2013), na abordagem qualitativa, os dados são obtidos no ambiente natural em que são coletados de forma descritiva, oriundos do contato direto do pesquisador com o problema estudado, dando mais ênfase ao processo do que ao produto, e ocupa-se em retratar a visão dos participantes. Como o problema deste trabalho é encontrar modelos matemáticos que envolvam EDOs aplicadas nos cursos superiores oferecidos pelo IFC – Rio do Sul, tivemos que ir ao ambiente natural, neste caso, à instituição e conversar com os professores, para buscar estes dados. A escolha do ambiente foi motivada por ser a instituição na qual o pesquisador leciona como professor de disciplinas cujos tópicos incluem o estudo de EDOs, bem como, a própria disciplina de EDO, dentre outras disciplinas.

Esta pesquisa também busca examinar evidências das dificuldades dos estudantes apontadas pelos docentes nas entrevistas, o que justifica dizer que a investigação tem abordagem qualitativa. Esse tipo de abordagem prioriza o processo que envolve os atores e variados fatores considerados na pesquisa. Permite contato direto do pesquisador com a situação investigada e o aprofundamento das informações coletadas. Segundo Lüdke e André, são características básicas da pesquisa qualitativa:

1. A pesquisa qualitativa tem o ambiente natural como sua fonte direta de dados e o pesquisador como seu principal instrumento.
2. Os dados coletados são predominantemente descritivos.
3. A preocupação com o processo é muito maior do que com o produto.
4. O “significado” que as pessoas dão às coisas e à sua vida são focos de atenção especial pelo pesquisador.
5. A análise dos dados tende a seguir um processo indutivo. (2018, p. 12-14).

Entendemos ser suficiente, conforme o propósito desta pesquisa, entrevistar três professores vinculados, respectivamente, aos três cursos de graduação considerados no Capítulo 3, para ter diversidade nos modelos matemáticos envolvendo as equações diferenciais ordinárias. Para a escolha dos entrevistados, levou-se em conta: o curso em que leciona e a experiência na docência das disciplinas que possuem alguma relação com as EDOs.

Dessa forma, a abordagem qualitativa com esses procedimentos permite aprofundar as informações coletadas, por meio de descrição, análise e reflexões, configurando-se como um caminho por onde buscamos atingir os objetivos da pesquisa.

4.2 PARTICIPANTES

O presente trabalho tem um olhar voltado para cursos que não se propõem à formação de matemáticos, conforme exposto no Capítulo 3, nos três cursos superiores do IFC – Rio do Sul - Agronomia, Engenharia Mecatrônica e Licenciatura em Física, discutem-se aplicações envolvendo equações diferenciais ordinárias. Dessa forma, escolhemos três professores experientes em suas disciplinas ministradas, nos respectivos cursos. Esta escolha também é justificada pela relação existente entre o pesquisador com a instituição.

Começamos pelo professor do curso de Agronomia, identificando-o como **Professor 1**. Em ordem cronológica, sua formação é: graduação em Engenharia Agrônoma, especialização em Irrigação e Drenagem, mestrado em Máquinas Agrícolas, doutorado em Irrigação e Drenagem, especialização em Educação Profissional e Tecnológica e também possui Licenciatura em Matemática, tendo vinte e três anos de docência. Como professor do IFC – Rio do Sul ingressou em 2008 (são quinze anos no *campus*) sendo em regime de dedicação exclusiva, atuando nos cursos técnicos de: Agropecuária, Agroecologia, Agrimensura e no curso de graduação em Agronomia. No curso de Agronomia, leciona duas disciplinas que têm relação com EDO: AGD0541 Hidráulica e AGD0550 Irrigação e Drenagem.

O segundo professor é do curso de Engenharia Mecatrônica, identificado como **Professor 2**. Sua formação, em ordem cronológica, é: graduação em Engenharia de Controle e Automação, mestrado em Engenharia de Automação e Sistemas, doutorando em Engenharia de Automação e Sistemas, tendo cinco anos de docência. Como docente do IFC – Rio do Sul, ingressou em 2023 e está trabalhando na condição de professor substituto em regime de 40 horas, atuando somente no curso de graduação em Engenharia Mecatrônica, em que leciona três disciplinas que têm relação com EDO: EMB0528 Análise de Circuitos Elétricos, EMB0541 Controle de Processos e EMB0549 Robótica Industrial.

O terceiro professor é do curso de Licenciatura em Física, identificado como **Professor 3**. Em ordem cronológica, sua formação é: graduação em Licenciatura em Física e Licenciatura em Matemática, mestrado em Física em Sistemas Dinâmicos e Dinâmica Não-Linear, tendo dezenove anos de docência. Como professor do IFC, são nove anos de trabalho em regime de dedicação exclusiva. Leciona em diversos cursos, entre eles, no curso técnico de Agropecuária e nos cursos de graduação em: Agronomia, Ciência da Computação, Engenharia Mecatrônica, Licenciatura em Física e Licenciatura em Matemática. No curso de Licenciatura em Física leciona duas disciplinas que têm relação com EDO: LFG0631 Mecânica Clássica e LFG0662 Sistemas Dinâmicos na Física.

A partir deste ponto do trabalho, chamaremos, respectivamente, de **Professor 1**, **Professor 2** e **Professor 3** os professores que foram entrevistados e sugeriram as propostas de modelos matemáticos.

4.3 COLETA DE DADOS

Por se tratar de uma pesquisa que, também, busca apresentar vivências de como o professor utiliza aplicações relacionadas ao curso que leciona e como percebe as dificuldades dos estudantes no ensino envolvendo as EDOs, adotou-se a perspectiva fenomenológica-hermenêutica nesta pesquisa. Na abordagem fenomenológica-hermenêutica, segundo Fiorentini e Lorenzato (2012), o sujeito ocupa lugar de destaque nessa abordagem que objetiva interpretar fenômenos e discursos através do uso de técnicas qualitativas de pesquisa, a saber, entrevistas, observações, análise de discurso, entre outras.

A fim de perceber como o fenômeno acontece para cada docente, quer dizer, a vivência é singular e subjetiva, Fiorentini e Lorenzato (2012) consideram que a solução dos problemas da educação passa inicialmente pela busca de interpretação e entendimento dos significados atribuídos pelos envolvidos. Assim, fazemos uso de entrevista (dados primários), para obter informações da essência de cada docente que, também reflita aspectos, do meio no qual ele está inserido. Uma vez que, de acordo com Lüdke e André, nas entrevistas

De início, é importante atentar para o caráter de interação que permeia a entrevista. [...] A grande vantagem da entrevista sobre outras técnicas é que ela permite a captação imediata e corrente da informação desejada, praticamente com qualquer tipo de informante e sobre os mais variados tópicos. [...] pode permitir o tratamento de assuntos de natureza estritamente pessoal e íntima, assim como temas de natureza complexa e de escolhas nitidamente individuais (2018, p. 39).

Como instrumento de coleta de dados, utilizamos a entrevista com docentes do IFC – Rio do Sul. Por se tratar de uma pesquisa envolvendo seres humanos, foi elaborado projeto de pesquisa, submetido ao Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos (CEPSH), da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), através da Plataforma Brasil, protocolado com CAAE 66934323.0.0000.0121 e aprovado. Também foi elaborado o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE), disponível no Apêndice A, instrumento necessário para realização das entrevistas, no qual os participantes comprometem-se com a pesquisa e autorizam o procedimento da entrevista.

Ademais, optou-se por aplicar entrevista do tipo semiestruturada, com perguntas elaboradas a partir de um roteiro de entrevista, disponível no Apêndice B. Quando necessário, foram incluídas novas perguntas no decorrer do processo. Fiorentini e Lorenzato apontam para alguns aspectos positivos da entrevista semiestruturada.

Essa modalidade é muito utilizada nas pesquisas educacionais, pois o pesquisador, pretendendo aprofundar-se sobre um fenômeno ou questão específica, organiza um roteiro de pontos a serem contemplados durante a entrevista, podendo, de acordo com o desenvolvimento da entrevista, alterar a ordem deles e, até mesmo, formular questões não previstas inicialmente (2012, p. 121).

O roteiro de entrevista está organizado em dois blocos. O primeiro bloco refere-se à formação acadêmica e o relacionamento (vínculo) profissional com o IFC – Rio do Sul, de acordo com os objetivos desta pesquisa. O segundo bloco contém duas perguntas relacionadas às demandas e às dificuldades percebidas pelos docentes dos estudantes no processo de ensino e aprendizagem e aplicações de EDOs, e as outras duas perguntas estão relacionadas aos modelos matemáticos de EDOs.

As entrevistas foram realizadas individualmente em um único encontro, no local e horário agendado com cada um dos participantes, durante o mês de março de 2023. Cada entrevista com duração média de 35 minutos. Uma delas foi feita de modo remoto, na plataforma *Google Meet*. Mediante leitura e assinatura do TCLE, as conversas foram gravadas em áudio e salvas em arquivos digitais. Posteriormente, o conteúdo das entrevistas foi transcrito e armazenado em arquivos digitais para garantir uma maior fidelidade em seu registro.

O material está armazenado em local seguro, a saber, em pasta restrita hospedada no serviço de armazenamento e sincronização de arquivos *Google Drive* vinculado à conta do pesquisador, priorizando a preservação da identidade dos entrevistados. Cabe destacar que após as entrevistas foram feitos, pelo menos, mais dois contatos entre o pesquisador e cada um dos entrevistados para receber as propostas de aplicações e discutir suas resoluções.

4.4 ANÁLISE DE DADOS

Com relação à análise dos dados, este estudo fez uso dos princípios da Análise Textual Discursiva (ATD) para análise das entrevistas, haja visto que a pesquisa teve uma perspectiva fenomenológica-hermenêutica. Segundo Moraes e Galiazzi (2011), a ATD busca compreender o fenômeno, sem julgamentos de querer saber o que é certo ou errado. Esse processo exige do pesquisador envolvimento intenso e rigoroso na análise dos textos do *corpus* e da construção do metatexto.

Acrescentando-se que, para os autores Moraes e Galiazzi (2011), as pesquisas de abordagem qualitativas têm, cada vez mais, feito uso da Análise Textual Discursiva, em que os pesquisadores são chamados a desconstruírem e reconstruírem conceitos e/ou textos. Segundo Moraes e Galiazzi, o processo da ATD é constituído de quatro etapas principais: “1 – Desmontagem dos textos; 2 – Estabelecimento de relações; 3 – Captando o novo emergente; 4 – Um processo auto-organizado” (2011, p. 11-12). Em outras palavras, as quatro etapas da ATD são: unitarização, categorização, metatexto e auto-organização.

Desse modo, seguindo estas etapas, iniciou-se pela desmontagem dos textos *corpus* de forma artesanal e levou-se em consideração a profundidade dos discursos para melhor compreensão do fenômeno. Então, foram feitas as análises das entrevistas, realizando uma leitura minuciosa e interpretativa das transcrições para extrair os excertos e palavras relevantes, que constituíram as unidades de significado. Por conseguinte, cada uma das

unidades de significado recebeu um título, o qual representa sua ideia central, conforme pode ser verificado no Quadro 2.

Em seguida, fez-se a segunda etapa, a categorização das unidades de significado. Aqui foi feita uma análise, reunindo as unidades de significado semelhantes com a comparação de uma com a outra, buscando o agrupamento em conjuntos que possuem características próprias. De acordo com Moraes e Galiuzzi, “este é um processo indutivo, de caminhar do particular para o geral, resultando no que se denomina de categorias emergentes.” (2011, p. 24).

Ainda na etapa de categorização, define-se cada categoria. Apresentamos as categorias relacionadas com o ensino das EDOs, a partir do olhar dos três professores entrevistados. A seguir, apresentamos o Quadro 2 em que consta as unidades de significado e as categorias quanto aos conhecimentos em EDOs demandados pelos cursos.

Quadro 2 – Distribuição das unidades de significado e categorias, quanto aos conhecimentos em EDOs demandados pelos cursos.

Unidades de significado	Categorias
Saber o que é a EDO Saber de onde vem as equações diferenciais. Qual que é a origem delas? Discussão de como a equação é construída, o que representa cada termo? A ordem?	conceitual
Saber aplicar as EDOs	aplicação
Identificar a linearidade de uma EDO Identificar como são os parâmetros (constantes ou variáveis) da EDO Classificar o tipo de EDO	classificação
Entendimento do significado da EDO em termos da representação matemática	significado
Para diferentes tipos de entrada de sinal que são aplicados no sistema, como que é seu comportamento? Saber analisar intuitivamente a solução da EDO, da relação física e das grandezas envolvidas Se a gente troca um sinal, ou se acrescenta um termo, um expoente, alguma grandeza. O que isso pode afetar?	interpretação
EDO separáveis EDO por fator integrante Resolução de EDO com técnicas básicas	resolução analítica
Resolução numérica de EDO por um método numérico mais simples, por exemplo, o método de Euler	resolução numérica
Linearização - aproximação linear por série de Taylor truncada de primeira ordem Quais são os pontos de equilíbrio que existem, onde as derivadas são iguais a zero? Determinar as curvas estáticas que são geradas por esses diversos pontos de equilíbrio	conteúdo de CDI
Simular numericamente no computador o comportamento da EDO	conteúdo de Cálculo Numérico

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Terminado o processo de categorização, seguimos para a terceira etapa da ATD que compreende a construção do metatexto e a sua estruturação textual, por meio da descrição e interpretação buscando relações entre as categorias, quando possível e a argumentação. Para Lüdke e André, nessa etapa, o pesquisador “[...] terá que fazer um esforço de abstração, ultrapassando os dados, tentando estabelecer conexões e relações que possibilitem a proposição de novas explicações e interpretações” (2018, p. 58). O metatexto é, portanto, formado de novas estruturas de entendimento dos fenômenos investigados, sob o modo de produção escrita, resultado de processos intuitivos e auto-organizados.

No final deste processo, para os autores Moraes e Galiazzi, “[...] a análise textual discursiva pode ser compreendida como um processo auto-organizado de construção de novos significados em relação a determinados objetos de estudo, a partir de materiais textuais referentes a esses fenômenos” (2011, p. 45). Assim sendo, como resultado deste processo de análise, apresentamos no Capítulo 5 as seguintes Seções 5.1 e 5.2. Fazendo a análise das entrevistas, com base nos princípios da Análise Textual Discursiva, considerando a perspectiva fenomenológica-hermenêutica, discutindo os resultados obtidos das demandas para o ensino de EDOs e as dificuldades que marcam o ensino de EDOs.

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

5.1 DEMANDAS PARA O ENSINO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS MANIFESTADAS PELAS ENTREVISTAS

Como professor que leciona a disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias, em minha prática pedagógica, observo de forma empírica dificuldades relacionadas à aprendizagem e à aplicação das EDOs. Inclusive, eu mesmo sinto um pouco de dificuldades em trabalhar com as aplicações na aulas. Diante desse cenário, um ponto de investigação que elencamos para esta pesquisa foi levantar com os professores entrevistados de três cursos (Agronomia, Engenharia Mecatrônica e Licenciatura em Física) do Instituto Federal Catarinense *Campus* Rio do Sul o seguinte questionamento: *No seu entendimento, quais são os conhecimentos referentes às equações diferenciais ordinárias demandados pelo seu curso de atuação?*

Habre (2000) faz uma apreciação inicial sobre os cursos introdutórios de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO), afirmando que consistem, principalmente, de uma sequência de técnicas para encontrar fórmulas para as soluções, sendo muitos exercícios adaptados para que soluções possam ser encontradas com algumas das formas de solução ensinadas, e para que a variável dependente possa ser expressa explícita ou implicitamente em termos da variável independente. Os alunos finalizam os cursos clássicos de EDO com pouca compreensão sobre o que representam as soluções de EDO numa situação aplicada. Segundo o autor, muitos educadores estão acreditando que um curso de EDO, para ser útil, precisa ter uma abordagem qualitativa do assunto (Habre, 2000 *apud* Dullius; Veit; Araujo, 2013, p. 210-211).

Um ponto de convergência entre os três docentes sobre os conhecimentos referentes às EDOs é o entendimento do significado delas. Como relatou o **Professor 1**

Acho que os conhecimentos são fundamentais, porque a gente [professores da área de Agronomia] só trabalha com fórmulas prontas e as equações diferenciais te mostram a dinâmica dos fenômenos que estão acontecendo em relação as variáveis e explicam, ajudam a entender essa dinâmica. Então, eu acho que seria muito pertinente se realmente pudesse ser visualizado pelos estudantes essa aplicação (2023, entrevista).

O **Professor 2**, na sua fala, complementa:

[...] o entendimento do significado da equação diferencial. Eu digo isso tanto matematicamente, em termos da representação matemática, quanto da questão do significado dela. Conceitual no sentido do que ela significa. Outra coisa que é extremamente importante dos cursos é de onde vêm as equações diferenciais. Qual que é (*sic*) a origem delas? Como surge a representação da equação diferencial? Vamos lá, vem das leis da física e que a gente tem da representação do somatório de força, (*sic*) da Lei de Newton, todas essas leis básicas em termos, quando você aplica essas leis no sistema, você consegue obter as equações diferenciais. Então, aí é um dos pontos (2023, entrevista).

Quanto aos métodos de resolução das EDOs, a análise dos entrevistados **Professor 2** e **Professor 3** coloca como essencial o domínio dos métodos mais básicos, tais como:

separação de variáveis, fator integrante e EDO linear de primeira ordem e alguns métodos para as EDOs de segunda ordem. E ainda que o estudante seja capaz de fazer uma discussão intuitiva de resolução de EDOs. Na visão do **Professor 2**, é necessário que o acadêmico saiba identificar se é uma equação diferencial ordinária, se é uma equação diferencial ordinária linear, não linear, com parâmetros constantes, parâmetros variáveis, isto é, saber, classificar o tipo da equação diferencial.

Um apontamento interessante destacado abarca as relações (ou talvez melhor, as transposições) conceituais das áreas afins com a matemática, como: vazão, cota, diferença de altura, sinal de entrada e ponto de equilíbrio. No caso da disciplina de Controle e Sistemas, do curso de Engenharia Mecatrônica, é saber aplicar a linearização, quando se tem uma equação diferencial ordinária não linear, dito de outra forma, é preciso fazer uma aproximação linear, aplicar uma Série de Taylor apropriada e truncá-la de forma a linearizar o termo.

Finalizando as demandas apontadas pelos docentes entrevistados **Professor 2** e **Professor 3**, é sugerida a necessidade de trabalhar com os estudantes uma resolução numérica de equações diferenciais, um método numérico mais simples, por exemplo, o método de Euler. Sugere o **Professor 3**, seria bom fazer uma

[...] discussão de como a equação é construída, do que representa cada termo, a ordem. Se a gente troca um sinal. Ou se acrescenta um termo, um expoente, alguma grandeza. O que isso pode afetar? Não digo na solução. Porque não necessariamente pode ter uma solução em funções conhecidas, mas que a gente pudesse fazer numericamente isso e analisar o que acontece com essas alterações. Isso já deixaria mais rico o conhecimento para as equações diferenciais, para o uso das equações diferenciais (2023, entrevista).

Portanto, os professores entrevistados apontam como demandas para o ensino de equações diferenciais ordinárias que os estudantes sejam capazes de saber e entender o significado e as interpretações das equações diferenciais e, também saber aplicá-las para, no passo seguinte, interpretar os resultados. Além de conseguir aplicar alguns conteúdos de Cálculo Diferencial e Integral nas resoluções das EDOs.

5.2 DIFICULDADES QUE MARCAM O ENSINO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS MANIFESTADAS PELAS ENTREVISTAS

O estudo das Equações Diferenciais Ordinárias está intrinsecamente relacionado com o estudo do Cálculo Diferencial e Integral, sendo a base para as EDOs. Na pesquisa realizada por Macêdo e Gregor, no Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Norte de Minas Gerais (IFNMG), *Campus* Januária, é relatada uma realidade que infelizmente também ocorre no IFC – Rio do Sul,

Os alunos chegam ao Ensino Superior com um conhecimento superficial dos conteúdos matemáticos, o que dificulta a compreensão e absorção dos teoremas,

conceitos e cálculos desta disciplina. Portanto, faz-se necessário dar mais atenção às dificuldades dos alunos na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral e buscar meios de resolver esta questão (2020, p. 6).

Mesmo que a disciplina de EDO ou disciplinas relacionadas a ela estejam em fases mais avançadas dos cursos, os estudantes ainda apresentam algumas dificuldades de conhecimento matemático (operacional, conceitual, de interpretação e aplicações em problemas contextualizados). Existem algumas pesquisas sobre dificuldades no ensino e aprendizagem de EDOs que apontam para esta direção, tais como: Dullius, Veit e Araujo (2013), Pinto e Lima (2017) e Lopes (2021).

Nesta seção, apresentamos alguns apontamentos feitos pelos professores nas suas entrevistas e algumas citações deles. Então, fizemos o seguinte questionamento: *Quanto às aplicações dos conhecimentos referentes às equações diferenciais ordinárias, quais são as dificuldades manifestadas pelos estudantes?* Em relação às principais dificuldades dos estudantes na aprendizagem das EDOs, os professores entrevistados foram unânimes em dizer que boa parte dos estudantes possuem problemas conceituais, principalmente no que se refere à interpretação da derivada, que é a base das equações diferenciais, e conseqüentemente, impactam na falta de significado das EDOs.

Os professores **Professor 2** e **Professor 3** destacam mais incisivamente que os acadêmicos têm dificuldades em entender de onde vêm as equações diferenciais, não entendem o significado das equações diferenciais e não conseguem dar sentido a elas. Sobre isso, enfatizamos a seguinte fala:

De onde vem a equação diferencial? E o significado da equação diferencial? Esses são os dois grandes pontos, que eu diria que são mais importantes. Porque esses não são pontos matemáticos, são pontos conceituais, e para mim esses são mais problemáticos do que os matemáticos, porque a matemática você passa de novo e ensina novamente, mas esses conceitos que falham, é muito problemático, (*sic*) porque sem conceito não adianta se fazer conta porque não sabe o que está fazendo (PROFESSOR 2, 2023, entrevista).

Já para o **Professor 1**, as dificuldades percebidas por ele, são mais de caráter operacionais, como se diz de ‘matemática básica’. Inclusive relata que “São todas, eu diria, porque os estudantes, eles já trabalham com essas disciplinas, da área da matemática ... física, matemática. Eles já chegam com uma aversão gratuita” (2023, entrevista). Talvez essa situação seja acentuada pelo perfil dos acadêmicos do curso de Agronomia, e culturalmente é reforçada no âmbito escolar como afirma Macêdo e Gregor, “A Matemática é vista, e muitas vezes repassada, como sendo uma disciplina de alto nível de dificuldade, em que poucos conseguem aprendê-la” (2020, p. 5). Ademais, relata que muitos estudantes não conseguem enxergar a aplicação, não conseguem entender o que é uma aplicação e não vinculam a matemática nas aplicações.

Por fim, o **Professor 3** sente dificuldades dos estudantes em fazer análises mais aprofundadas das aplicações na Física, e outro ponto de dificuldade é em fazer uma discussão sobre resolução numérica. Relata o **Professor 3**

[...] falta é uma análise intuitiva de resolução de equações diferenciais, o entendimento da equação, da relação física e das grandezas envolvidas não necessariamente física, pode ser de economia ou outra coisa, mas como é que os termos das equações diferenciais se relacionam. [...] Por isso, eu comentei antes da resolução numérica. Porque a gente consegue ter uma visualização do que aquilo representa [...] equações diferenciais acopladas ou conjuntos de equações diferenciais que fica (*sic*) um pouco mais difícil a gente visualizar, mas graficamente a gente consegue analisar bem mais facilmente e objetivamente (2023, entrevista).

Das entrevistas, podemos perceber claramente que muitos estudantes têm dificuldades sobre o aspecto conceitual das equações diferenciais, assim como, de interpretá-las, isso porque não entendem o significado da derivada como uma taxa de variação. Inclusive, estas dificuldades foram apontadas nas pesquisas realizadas pelos autores citados anteriormente. Ainda, acrescenta-se a identificação de um outro grupo de estudantes apontados com dificuldades nas operações matemáticas, o que acarreta problemas na montagem e resolução das EDOs.

5.3 PROPOSTAS DE MODELOS MATEMÁTICOS PARA O ENSINO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS MANIFESTADAS PELAS ENTREVISTAS

Foi feito um levantamento bibliográfico em onze livros, entre eles, livros didáticos de Equações Diferenciais Ordinárias, de Cálculo Diferencial e Integral, e de Modelagem Matemática com aplicações de EDOs para identificar as aplicações abordadas. Ressalta-se que parte desses livros consta nas referências bibliográficas de disciplinas oferecidas pelo IFC – Rio do Sul.

Os modelos que serão apresentados são resultantes das entrevistas e do levantamento feito junto aos livros supracitados, com o propósito de trazer aplicações que são trabalhadas em disciplinas do IFC – Rio do Sul, e que, preferencialmente, não constam nos livros pesquisados. Ademais, a nossa intenção é apresentar as propostas de aplicações sugeridas pelos professores entrevistados, com um olhar e uma linguagem matemática objetivando o uso destas aplicações nas aulas de EDO. Com isso, fizemos adequações didáticas nas propostas do esvaziamento de um reservatório, do controle de pH da fertirrigação da cultura da mangueira e do lançamento oblíquo de um objeto.

5.3.1 Proposta 1 – Esvaziamento de um reservatório

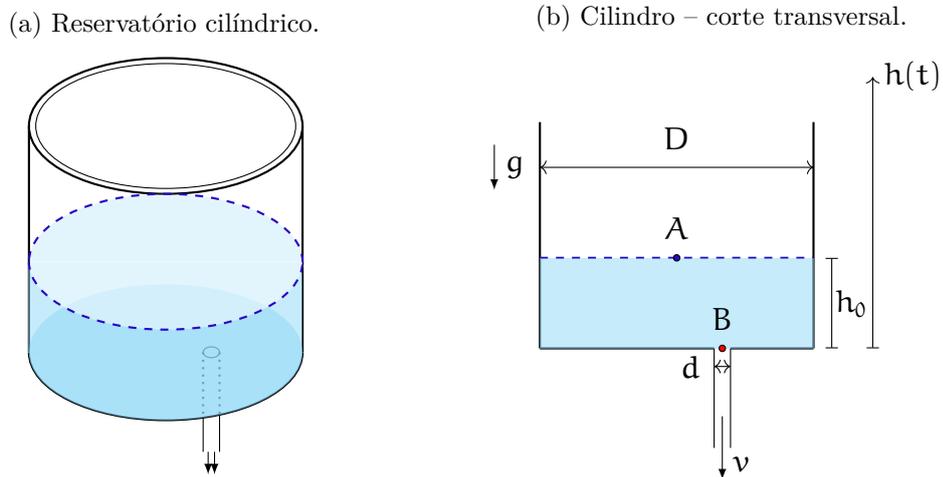
Durante a entrevista realizada com o **Professor 1**, houve a troca de ideias sobre os problemas reais apresentados aos acadêmicos do curso de Agronomia do IFC – Rio do Sul, e que têm relação com as EDOs. São problemas que aparecem em duas disciplinas: Hidráulica e Irrigação e Drenagem. Na irrigação e, até mesmo, na mecanização, é comum que a água seja armazenada em algum recipiente, por exemplo, uma caixa d'água ou pulverizador. Se pensarmos em um processo de fertirrigação, em que os fertilizantes são

aplicados junto com a água de irrigação, um dos procedimentos que podem ser realizados seria diluir o fertilizante, conforme o volume do reservatório, muitas vezes sem a utilização de uma bomba centrífuga, apenas utilizando a energia gravitacional para gerar a pressão necessária no sistema. Com isso, uma situação que é estudada na sala de aula é o cálculo do tempo de esvaziamento de um reservatório com uma determinada quantidade de água. Assim, foi esta a aplicação escolhida para o estudo e será apresentada a seguir.

Aplicação genérica: Pensando em um sistema de irrigação por gotejamento com uma caixa d'água cheia e que não apresenta alimentação durante o esvaziamento, percebe-se que o esvaziamento tem vazão variável devido à carga hidráulica (altura de água ou coluna de água) sobre a área de saída. Assim, para o problema proposto, consideremos uma caixa d'água cilíndrica com raio R e uma torneira de saída do raio r , no fundo da caixa d'água. Considere que o reservatório tem um volume de líquido para irrigação que atinge uma altura h_0 . Modele matematicamente e calcule o tempo de esvaziamento do reservatório.

Resolução. Temos um reservatório cilíndrico que possui um orifício no fundo (uma torneira), tendo este orifício uma abertura bem pequena¹ comparada à abertura do reservatório, conforme pode ser verificado na Figura 5(a). Inicialmente, resolveremos o problema genérico, e em seguida, calcularemos o tempo de esvaziamento do reservatório cilíndrico de acordo com os dados fornecidos pelo **Professor 1**.

Figura 5 – Esvaziamento de um reservatório cilíndrico.



Fonte: O autor (2023).

Como o reservatório é cilíndrico e desejamos calcular o tempo de esvaziamento, partiremos da ideia do volume do cilindro (V), sabemos que:

$$V = A_{\text{base}} \cdot h, \tag{5.1}$$

¹ Estamos considerando que este orifício é pequeno. De acordo com Porto (2006), um orifício é classificado pequeno se d (diâmetro do orifício) é menor que um terço de h_0 (distância vertical entre o fundo do reservatório e o nível do líquido).

derivando a igualdade em relação ao tempo t , temos:

$$\frac{dV}{dt} = A_{\text{base}} \cdot \frac{dh}{dt}. \quad (5.2)$$

Vamos recorrer ao conceito de vazão, estudado na hidrodinâmica. Segundo Porto (2006), em problemas envolvendo esvaziamento de reservatórios, em que a taxa de variação da vazão é pequena e praticamente constante com o tempo, dizemos que o escoamento é estacionário. Com estas condições, é possível aplicar da Equação de Bernoulli² para determinar a velocidade teórica no orifício de saída do reservatório³, modelado como um tubo curto, donde chega-se no Teorema de Torricelli⁴. Considerando que o líquido flua continuamente entre os pontos A (topo – superfície do líquido do reservatório) e B (orifício no fundo do reservatório), podemos empregar a Equação de Bernoulli para escoamentos, situação representada na Figura 5(b). Segue do Teorema de Torricelli que a velocidade (v) do fluido no orifício no fundo do reservatório é dado por⁵

$$v = \sqrt{2gh}. \quad (5.5)$$

Ainda, na hidrodinâmica, temos o conceito de vazão (Φ), em que a vazão é calculada como o produto da área pela velocidade, neste caso, a área do orifício e a velocidade de saída

² A obra mais marcante de Daniel Bernoulli (1700 - 1782) foi Hidrodinâmica – importante estudo em dinâmica dos fluidos. A Equação de Bernoulli descreve o comportamento de um fluido que se move ao longo de um tubo ou conduto.

³ Na hidrodinâmica, temos a Equação de Bernoulli que compara as grandezas pressão, velocidade e altura em dois pontos distintos numa tubulação podendo ter diâmetros diferentes nos dois pontos:

$$\frac{P_A}{\rho g} + \frac{v_A^2}{2g} + y_1 = \frac{P_B}{\rho g} + \frac{v_B^2}{2g} + y_2, \quad (5.3)$$

em que

P_A : pressão no ponto A (N/m^2);

P_B : pressão no ponto B (N/m^2);

v_A : velocidade no ponto A (velocidade de aproximação) (m/s);

v_B : velocidade no ponto B (velocidade de saída) (m/s);

y_1 : distância do ponto A até o referencial (chão) (m);

y_2 : distância do ponto B até o referencial (chão) (m);

g : aceleração da gravidade (m/s^2);

ρ : massa específica do fluido (kg/m^3).

Reescrevendo a equação (5.3) e isolando v_B , obtemos:

$$v_B = \sqrt{2g \left(h + \frac{v_A^2}{2g} + \frac{P_A - P_B}{\rho g} \right)}, \quad (5.4)$$

sendo h a diferença entre y_1 e y_2 .

⁴ Este teorema é uma das mais antigas leis da Hidráulica, estabelecida no século XVII por Evangelista Torricelli (1608 - 1647), físico e matemático italiano.

⁵ Note que o raio do orifício de saída é muito pequeno comparado ao raio do reservatório, de modo que a velocidade do líquido que passa pelo orifício no fundo do reservatório é alta, uma vez que a área da seção é bem pequena se comparada à área da seção do nível do líquido no reservatório onde a velocidade neste ponto é muito pequena, como representado na Figura 5(b). Assim, pode-se desprezar a velocidade no ponto A, $v_A \cong 0$. Outro fato a considerar, é que a pressão exercida sobre o líquido no reservatório nos pontos A e B é a pressão atmosférica, $P_A = P_B$. Logo, a equação (5.4) pode ser reescrita como $v_B = \sqrt{2gh}$.

que consideraremos negativa. Assim,

$$\phi = A_B \cdot v. \quad (5.6)$$

Por outro lado, como a vazão é também a taxa de variação do volume (V) em relação ao tempo (t), temos:

$$\phi = \frac{dV}{dt}. \quad (5.7)$$

Como está ocorrendo o esvaziamento do reservatório, ou seja, o seu volume está diminuindo ao longo do tempo, adotaremos o sinal negativo para a velocidade, e igualando (5.6) e (5.7), temos:

$$\frac{dV}{dt} = -A_B \cdot v. \quad (5.8)$$

Agora, igualando (5.2) derivada do volume do cilindro, ponto A, com (5.8) a derivada do volume da saída do orifício, ponto B, obtemos:

$$\begin{aligned} A_A \cdot \frac{dh}{dt} &= -A_B \cdot v, \\ \frac{dh}{dt} &= -\frac{A_B}{A_A} \cdot v. \end{aligned} \quad (5.9)$$

A equação (5.9) é uma EDO que modela matematicamente⁶ a variação da altura do fluido em relação ao tempo. Sabemos que a área do círculo de raio R é $A = \pi R^2$. Assim, como temos duas áreas circulares, vamos identificá-las como:

$$A_A = \pi R^2, \text{ sendo } R \text{ o raio do reservatório,}$$

$$A_B = \pi r^2, \text{ sendo } r \text{ o raio do orifício no fundo do reservatório.}$$

Segue que:

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= -\frac{\pi r^2}{\pi R^2} \cdot v, && \text{substituindo (5.5),} \\ \frac{dh}{dt} &= -\frac{r^2}{R^2} \cdot \sqrt{2gh}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Agora, integra-se (5.10) e determinamos os limites de integração, conforme o problema foi proposto com as condições iniciais, enquanto o tempo varia de 0 a t_e (tempo de esvaziamento do reservatório), a altura do líquido varia de h_0 a 0. Então:

$$\begin{aligned} \int_0^{t_e} \frac{dh}{dt} dt &= -\frac{r^2}{R^2} \cdot \sqrt{2gh} \int_0^{t_e} dt, \\ \int_{h_0}^0 \frac{dh}{\sqrt{h}} &= -\frac{r^2}{R^2} \cdot \sqrt{2g} \int_0^{t_e} dt, \end{aligned}$$

⁶ A equação (5.9) permanece válida mesmo em reservatórios onde a área da superfície superior do fluido não é constante, ou seja, onde o formato do reservatório não seja um cilindro, como neste problema.

$$\begin{aligned}
2\sqrt{h} \Big|_{h_0}^0 &= -\frac{r^2}{R^2} \cdot \sqrt{2g} \cdot t \Big|_0^{t_e}, \\
2(\sqrt{0} - \sqrt{h_0}) &= -\frac{r^2}{R^2} \cdot \sqrt{2g} (t_e - 0), \\
-2\sqrt{h_0} &= -\frac{r^2}{R^2} \cdot \sqrt{2g} \cdot t_e, \\
t_e &= \frac{R^2 \cdot 2\sqrt{h_0}}{r^2 \sqrt{2g}}, \\
t_e &= \frac{R^2}{r^2} \cdot \sqrt{\frac{2h_0}{g}}. \tag{5.11}
\end{aligned}$$

Aplicação numérica: Um sistema de irrigação por gotejamento é alimentado por uma caixa d'água cheia que não é alimentada. Considerando que o esvaziamento tem vazão variável devido à carga hidráulica (altura de água ou coluna de água) sobre a área de saída. Consideremos uma caixa d'água cilíndrica com 6,4 cm de diâmetro e uma torneira de saída no fundo do reservatório com diâmetro de 0,5 cm, sendo que o volume de líquido para irrigação atinge 0,2 m de altura no reservatório. Modele matematicamente e calcule o tempo de esvaziamento do reservatório.

Resolução. Conforme foi proposto pelo **Professor 1**, o reservatório é uma caixa d'água cilíndrica de diâmetro $D = 6,4$ cm, uma torneira que possui um diâmetro de $d = 0,5$ cm, a altura do líquido para a irrigação é de $h_0 = 0,2$ m e adotaremos $g = 9,81$ m/s². Aqui devemos ter cuidado com as unidades de medidas, uma vez que a pressão, velocidade, força gravitacional, distância e massa específica têm a unidade de medida metro relacionada. Assim, temos que converter os diâmetros para metro, sendo $D = 0,064$ m e $d = 0,005$ m. Desta forma, vamos calcular o tempo substituindo estes dados em (5.11):

$$t = \frac{0,064^2}{0,005^2} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 0,2}{9,81}} \Rightarrow t = 33,101 \approx 33 \text{ s.}$$

Portanto, o tempo de esvaziamento da caixa d'água é de 33 segundos.

Em resumo, no problema do esvaziamento de um reservatório, destacam-se os seguintes tópicos.

Dados: O problema envolve conceitos de hidrodinâmica no qual desejou-se obter um modelo matemático para o tempo de esvaziamento de um reservatório cilíndrico. Sabendo que o líquido encontrava-se a uma altura h_0 , do volume V do cilindro, com raio R e que possui uma torneira de raio r no fundo do reservatório. Com os dados numéricos: $D = 6,4$ cm, $d = 0,5$ cm e $h_0 = 0,2$ m, deseja-se calcular o tempo de esvaziamento t_e do reservatório.

Considerações: Optamos em fazer a resolução da aplicação proposta por meio de uma estratégia que partisse do conceito de volume de cilindro e, no decorrer, usássemos os conceitos de hidrodinâmica no intuito de produzir uma resolução mais didática para a compreensão do leitor.

Leis e princípios da hidrodinâmica e da matemática: Volume do cilindro; Regras de derivação; Equação de Bernoulli e Teorema de Torricelli – dinâmica dos fluidos; vazão; integração; EDO separável.

Resultados: Modelo matemático $t_e = \frac{R^2}{r^2} \cdot \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$ e $t_e \approx 33$ s.

Discussão: É possível explorar outros cálculos neste problema como, por exemplo, determinar o nível de líquido no reservatório no instante t . Outra questão interessante que surge é aplicar um sistema de controle (parecido com o que será explorado na proposta 2) para manter o nível do líquido na caixa d'água para a irrigação.

5.3.2 Proposta 2 – Controle de pH da fertirrigação da cultura da mangueira

A partir da entrevista realizada com o **Professor 2**, surgiram algumas sugestões de aplicações das EDOs na área de controle da Engenharia de Controle de Automação/Mecatrônica. Uma delas é apresentada na disciplina de Controle de Processos, em que se realiza a modelagem de um sistema de controle de potencial hidrogeniônico (pH)⁷ em uma indústria. Contudo, no *Campus* Rio do Sul, os cursos de Engenharia Mecatrônica e de Agronomia desenvolvem alguns projetos em parceria. Diante desta situação, a modelagem citada foi adaptada para o problema de um sistema de controle de pH da fertirrigação⁸ da cultura da mangueira, como veremos a seguir.

Aplicação numérica: Um dos principais fatores na horticultura é a disponibilidade de macro e micronutrientes que estão diretamente relacionados tanto aos valores de pH da água de irrigação quanto ao pH do solo. Por exemplo, o nitrogênio (N) é o nutriente mais aplicado via água de irrigação, pois apresenta alta mobilidade no solo, principalmente na forma de nitrato (NO_3). Também, elementos como Zinco, Boro e Ferro dependem muito do valor ideal do pH para sua aplicação. O controle do pH é um aliado para que haja um equilíbrio entre as quantidades dos macro e micronutrientes garantindo que a mangueira possa absorver os nutrientes necessários para seu melhor desenvolvimento. No processo de fertirrigação da cultura da mangueira, deseja-se controlar o pH da água de fertirrigação, que é constituído a partir de uma mistura de nitrogênio, fósforo e potássio (NPK) com um ácido. O sistema de controle é projetado para regular a vazão do ácido que é adicionado na mistura de NPK e, assim regular o pH e a vazão da mistura de NPK resultante. A vazão da mistura de NPK pode variar. Após observação da planta, coleta dos dados e análise da sua dinâmica, a planta para controle de pH foi modelada matematicamente por

⁷ Em química, pH é uma escala numérica adimensional utilizada para especificar a acidez ou basicidade de uma solução aquosa. A rigor, o pH é definido como o logaritmo da atividade de íons hidrônio. Podemos aproximar o cálculo do pH usando a concentração molar o íon hidrônio ao invés da atividade hidrogeniônica.

⁸ Conforme Pinto *et al.*, “Fertirrigação é a aplicação de fertilizantes via água de irrigação. Essa prática se constitui numa técnica de aplicação simultânea de fertilizantes e água, por meio de um sistema de irrigação” (2002, p. 225).

meio da seguinte equação diferencial ordinária:

$$2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = -0,4 u(t)^3 + 1,2 q(t), \quad (5.12)$$

em que $y(t) \in [0, 14]$ representa o pH da água de fertirrigação (variável de processo), $u(t) \in [0, 2]$ m³/min é a vazão de ácido usada para controlar o pH (variável manipulada) e $q(t)$ é a vazão da mistura de NPK (perturbação) que pode variar dentro do intervalo $[5, 7]$ m³/min. Para este modelo, a variável t é real e denota o tempo medido em minutos. De posse dessas informações, deseja-se:

- Encontrar as características estáticas do sistema, considerando todas as relações entre as variáveis que são julgadas importantes.
- Encontrar um modelo linearizado para o sistema operando nas vizinhanças do ponto de equilíbrio dado por $u_E = 1$, $q_E = 6$.
- Para a fertirrigação, o parâmetro na medição do pH gira em torno de 6, podendo ficar entre 5,5 e 6,5, que são os índices toleráveis numa escala que possui valor máximo de 14. Abaixo de 5,5, é preciso agir para buscar o equilíbrio; o mesmo se o pH for superior a 6,5. Diante disso, deseja-se encontrar a função variação do pH da água de fertirrigação de um modelo linear que aproxima o comportamento dinâmico do processo regulatório do pH da água de fertirrigação.

Resolução. *Antes de iniciarmos a resolução propriamente dita, vamos analisar a equação (5.12) a partir da situação apresentada no item (a) sobre modelo linearizado. De acordo com a Teoria de Sistemas de Controle, o conceito de linearidade⁹ é bastante útil nesta área. Sobre isso, Normey-Rico e Morato escrevem:*

Este conceito nos permite, com uma aproximação suficientemente realista, descrever muitos comportamentos [...]. Ademais, as soluções matemáticas associadas aos sistemas lineares são bem mais simples que as soluções obtidas para sistemas não lineares (2021, p. 112).

Dito isso, passamos à resolução:

- Para iniciar a resolução desse problema, vamos encontrar o modelo estático do sistema considerando $\frac{dy_E}{dt} = 0$, pois estamos preocupados apenas com a resposta forçada, ou seja, a resposta causada pelo sinal de entrada. E, assim, analisar as relações entre as variáveis do processo (u_E com y_E) e (q_E com y_E) em pontos de equilíbrio. Então, obtemos a equação estática do sistema:*

$$y_E = -0,4(u_E)^3 + 1,2 q_E, \quad (5.13)$$

⁹ Conceito apresentado Normey-Rico e Morato, no livro sobre controle de processos, “Um sistema é dito linear se uma combinação linear de entradas $u = au_1 + bu_2$ (a, b constantes) gera uma saída y que é descrita como uma combinação linear das saídas y_1 e y_2 obtidas pela aplicação das entradas u_1 e u_2 de forma independente, isto é, $y = ay_1 + by_2$ ” (2021, p. 113).

em que y_E , u_E e q_E são os valores das variáveis no ponto de equilíbrio. Vamos calcular o ponto de equilíbrio do sistema, sabendo que $u_E = 1$ e $q_E = 6$:

$$y_E = -0,4 \cdot (1)^3 + 1,2 \cdot 6 = 6,8.$$

Logo, $P_E = (u_E; q_E; y_E) = (1; 6; 6,8)$.

Para encontrar a característica estática do sistema, faremos uma análise de (5.13) nos intervalos definidos considerando as duas relações entre as variáveis, encontrando assim o ponto de operação do sistema.

Relação entre as variáveis u_E e y_E : Vamos considerar as relações entre as variáveis u_E e y_E . Admitindo q_E com um parâmetro fixo, temos:

$$\begin{aligned} y_E &= -0,4(u_E)^3 + 1,2 \cdot 5 = -0,4(u_E)^3 + 6 & (q_E = 5), \\ y_E &= -0,4(u_E)^3 + 1,2 \cdot 6 = -0,4(u_E)^3 + 7,2 & (q_E = 6), \\ y_E &= -0,4(u_E)^3 + 1,2 \cdot 7 = -0,4(u_E)^3 + 8,4 & (q_E = 7). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Como $y = f(u, q)$ é uma função de duas variáveis, de (5.13), derivando parcialmente f em relação a variável u e calculando em $u_E = 1$, obtemos:

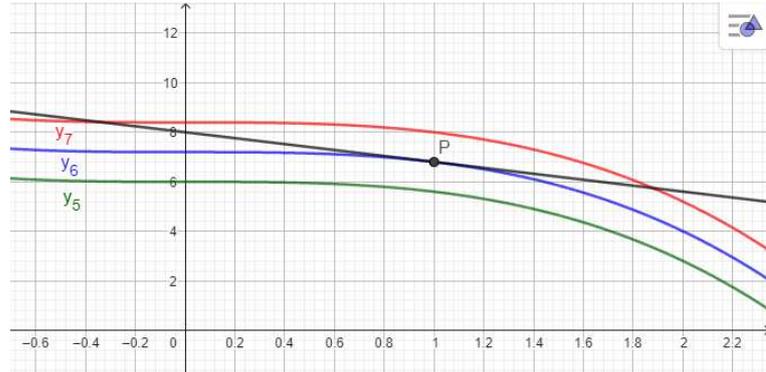
$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u}(u_E) &= -1,2(u_E)^2, \\ \frac{\partial f}{\partial u}(1) &= -1,2(1)^2 = -1,2. \end{aligned}$$

Então, podemos encontrar a equação da reta tangente à curva dada por (5.14) no ponto $P_E = (1; 6,8)$, fazendo:

$$\begin{aligned} (y - y_E) &= \frac{\partial f}{\partial u}(u_E)(u - u_E), \\ (y - 6,8) &= (-1,2)(u - 1), \\ y &= -1,2u + 8. \end{aligned} \quad (5.15)$$

A Figura 6 apresenta a característica estática do sistema de controle de pH do processo de fertirrigação da mangueira, através de (5.14) para os pontos $(u_E; y_E)$, considerando q_E como um parâmetro fixo, conforme mostrado nos cálculos acima. Observe que y_5 (curva em verde) corresponde à substituição em que $q_E = 5$, o y_6 (curva em azul) corresponde a $q_E = 6$ e o y_7 (curva em vermelho) corresponde a $q_E = 7$. Como também destaca-se a reta tangente dada em (5.15) no ponto $P_E = (1; 6,8)$.

Figura 6 – Característica estática do sistema de controle de pH – relação entre as variáveis u_E e y_E .



Fonte: Elaborado pelo autor com uso do software Geogebra (2023).

Relação entre as variáveis q_E e y_E : Vamos considerar as relações entre as variáveis q_E e y_E . Admitindo u_E com um parâmetro fixo, temos:

$$\begin{aligned} y_E &= -0,4 \cdot 0^3 + 1,2 q_E = 1,2 q_E & (u_E = 0), \\ y_E &= -0,4 \cdot 1^3 + 1,2 q_E = -0,4 + 1,2 q_E & (u_E = 1), \\ y_E &= -0,4 \cdot 2^3 + 1,2 q_E = -3,2 + 1,2 q_E & (u_E = 2). \end{aligned} \quad (5.16)$$

Como $y = f(u, q)$ é uma função de duas variáveis, de (5.13), derivando f parcialmente em relação a variável q e calculando em $q_E = 6$, obtemos:

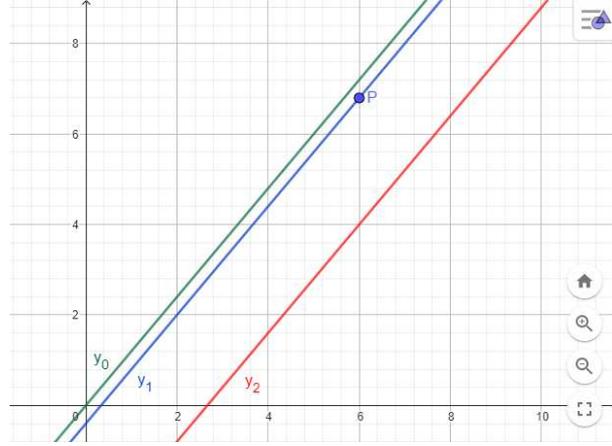
$$\frac{\partial f}{\partial q}(q_E) = 1,2 = \frac{\partial f}{\partial q}(6).$$

Então, podemos encontrar a equação da reta tangente à curva dada em (5.16) no ponto $P_E = (6; 6,8)$, fazendo:

$$\begin{aligned} (y - y_E) &= \frac{\partial f}{\partial q}(q_E)(q - q_E), \\ (y - 6,8) &= 1,2(q - 6), \\ y &= -0,4 + 1,2 q. \end{aligned}$$

Note que, neste caso, a reta tangente coincide com a equação da característica estática do sistema de controle de pH com $u_E = 1$. A Figura 7 apresenta a característica estática do sistema de controle de pH do processo de fertirrigação da mangueira, encontrada através de (5.16), para os pontos $(q_E; y_E)$, considerando u_E como um parâmetro fixo, conforme mostrado nos cálculos acima. Observe que y_0 (reta em verde) corresponde à substituição em que $u_E = 0$, o y_1 (reta em azul) corresponde a $u_E = 1$ e o y_2 (reta em vermelho) corresponde a $q_E = 2$. Ainda, destaca-se o ponto $P_E = (6; 6,8)$ pelo qual passa a função (5.16).

Figura 7 – Característica estática do sistema de controle de pH – relação entre as variáveis q_E e y_E .



Fonte: Elaborado pelo autor com uso do software Geogebra (2023).

- b) Vamos linearizar o modelo nas vizinhanças do ponto de equilíbrio $P_E = (1; 6; 6, 8)$. Para isso, reescrevemos as variáveis do processo com novas variáveis incrementais Δu , Δq , Δy como:

$$u = u_E + \Delta u, \quad q = q_E + \Delta q, \quad y = y_E + \Delta y,$$

com o objetivo de escrever o modelo linearizado neste novo sistema de coordenadas que está centrado em $P_E = (u_E; q_E; y_E)$, admitindo que este processo opera, em grande parte do tempo, com valores das variáveis nas vizinhanças do ponto de operação. No novo referencial, a reta que passa pela origem do novo sistema de coordenadas é linear, do tipo $\Delta y = k_e \Delta u + k_q \Delta q$, sendo, neste caso, $k_e = \frac{\partial f}{\partial u}(u_E)$ o coeficiente angular da reta tangente a P_E no plano $u \times y$ e $k_q = \frac{\partial f}{\partial q}(q_E)$ o coeficiente angular da reta tangente a P_E no plano $q \times y$. Agora, encontraremos o modelo linear incremental substituindo as relações entre as variáveis absolutas e incrementais no modelo da equação (5.12), fazendo:

$$2 \frac{d(y_E + \Delta y(t))}{dt} + y_E + \Delta y(t) = -0,4 (u_E + \Delta u(t))^3 + 1,2 (q_E + \Delta q(t)),$$

$$2 \frac{dy_E}{dt} + 2 \frac{d\Delta y(t)}{dt} = -y_E - \Delta y(t) - 0,4 (u_E + \Delta u(t))^3 + 1,2 q_E + 1,2 \Delta q(t).$$

Como y_E é constante, então $\frac{dy_E}{dt} = 0$. E, dado que no ponto de equilíbrio P_E , temos a relação entre as variáveis no modelo estático dada em (5.13), ou seja, $1,2 q_E - y_E = 0,4 (u_E)^3$, então:

$$2 \frac{d\Delta y(t)}{dt} + \Delta y(t) = 0,4 (u_E)^3 - 0,4 (u_E + \Delta u(t))^3 + 1,2 \Delta q(t). \quad (5.17)$$

Note que a equação acima possui um termo não linear, então aplicamos a aproximação de uma função não linear através de uma Expansão de Taylor¹⁰ de primeira ordem, assim vamos obter um modelo linear aproximado do termo não linear para a função $-0,4(\mathbf{u}_E + \Delta\mathbf{u}(t))^3$.

Escrevemos o termo não linear como $f(\mathbf{u}(t)) = -0,4(\mathbf{u}(t))^3 = -0,4(\mathbf{u}_E + \Delta\mathbf{u}(t))^3$. Aplicando a Expansão de Taylor, temos:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{u}(t)) &\approx f(\mathbf{u}_E) + \left(\frac{df}{d\mathbf{u}} \Big|_{\mathbf{u}_E} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_E) \right), \\ &\approx -0,4(\mathbf{u}_E)^3 - 1,2(\mathbf{u}_E)^2 \Delta\mathbf{u}(t). \end{aligned}$$

Substituindo em (5.17), obtemos:

$$\begin{aligned} 2 \frac{d\Delta\mathbf{y}(t)}{dt} + \Delta\mathbf{y}(t) &= 0,4(\mathbf{u}_E)^3 - 0,4(\mathbf{u}_E)^3 - 1,2(\mathbf{u}_E)^2 \Delta\mathbf{u}(t) + 1,2 \Delta\mathbf{q}(t), \\ 2 \frac{d\Delta\mathbf{y}(t)}{dt} + \Delta\mathbf{y}(t) &= -1,2(\mathbf{u}_E)^2 \Delta\mathbf{u}(t) + 1,2 \Delta\mathbf{q}(t). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Portanto, esta é a EDO linearizada em função das variáveis incrementais. Esta EDO está escrita em termos das variáveis incrementais (variações de \mathbf{u} e variações de \mathbf{q}) e que apresenta o modelo linearizado, a partir do estado estacionário, que aproxima o comportamento dinâmico do processo regulatório do pH gerando as variações em \mathbf{y} .

Note que, conforme Normey-Rico e Morato (2021), a equação (5.18) se apresenta no mesmo formato do modelo linearizado:

$$\tau \frac{d\Delta\mathbf{y}}{dt} + \Delta\mathbf{y}(t) = \mathbf{k}_e \Delta\mathbf{u}(t) + \mathbf{k}_q \Delta\mathbf{q}(t), \quad (5.19)$$

sendo τ a constante de tempo do sistema que indica o tempo que o sistema leva para atingir 63,2% da resposta final, \mathbf{y} , na equação (5.19). Logo, a constante de tempo do nosso sistema de controle de pH é de 2 minutos, sinalizando a “velocidade”, ou seja, que neste tempo o sistema atinge 63,2% da resposta final.

Aproveitamos para mostrar de onde vem o valor 63,2%.

Vamos considerar o sistema de 1ª ordem e com condições iniciais nulas $\mathbf{y}(0) = 0$, ou seja, um PVI. Assim,

$$\tau \mathbf{y}'(t) + \mathbf{y}(t) = \mathbf{u}(t), \quad (5.20)$$

¹⁰ Anton (2000b) apresenta a definição do polinômio de Taylor: Se f puder ser diferenciada n vezes em x_0 , então definimos o **n-ésimo polinômio de Taylor para f em torno de $x = x_0$** como sendo

$$p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{(3)!}(x - x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

sendo que \mathbf{y} é a função de saída e \mathbf{u} a função de entrada do sistema. A ideia é obter um modelo matemático que relacione de forma única a entrada com a saída. Para isso, aplicamos a Transformada de Laplace na equação (5.20), temos:

$$\begin{aligned}\tau \mathcal{L}\{\mathbf{y}'(t)\} + \mathcal{L}\{\mathbf{y}(t)\} &= \mathcal{L}\{\mathbf{u}(t)\}, \\ \tau (sY(s) - \mathbf{y}(0)) + Y(s) &= U(s), & \mathbf{y}(0) = 0, \\ (\tau s + 1)Y(s) &= U(s), \\ Y(s) &= \frac{1}{\tau s + 1} \cdot U(s),\end{aligned}\tag{5.21}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{\tau s + 1} = G(s).\tag{5.22}$$

Note que (5.22) é a Função de Transferência $G(s)$ do sistema que representa a relação entre a saída e a entrada do sistema. Desse modo, podemos analisar a resposta do sistema, mediante a entrada a que será submetido. Neste caso, utilizaremos a Função Degrau Unitário¹¹ na função de entrada. Então, vamos obter a resposta ao degrau unitário. Em (5.21), consideramos $U(s)$ um degrau unitário, $\mathcal{H}(s)$, então

$$Y(s) = \frac{1}{\tau s + 1} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s \cdot (\tau s + 1)}.$$

Aplicando o Método das Frações Parciais em $Y(s)$, obtém-se:

$$Y(s) = \frac{1}{s \cdot (\tau s + 1)} = \frac{1}{s} - \frac{\tau}{\tau s + 1} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}}.$$

Aplicando a Transformada Inversa de Laplace na função $Y(s)$, tem-se:

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + \frac{1}{\tau}}\right\} \implies \mathbf{y}(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Analisando a função $\mathbf{y}(t)$, nota-se que inicialmente, no tempo $t = 0$, ela tem valor zero e no fim ($t \rightarrow +\infty$) torna-se unitária. Logo, quando $t = \tau$, obtém-se:

$$\mathbf{y}(t) = 1 - e^{-1} = 0,632.$$

Portanto, no tempo $t = \tau$ a resposta atinge o valor de 0,632 para uma entrada degrau unitário, ou seja, 63,2% da resposta final de $\mathbf{y}(t)$.

c) Antes de iniciar a resolução do modelo linearizado, cabe um questionamento: Por que linearizar modelos não lineares? Conforme Normey-Rico e Morato (2021), Nise (2016), apontamos três justificativas, a saber:

(i) Sistemas não lineares geralmente não possuem soluções analíticas. Pois, para analisar o comportamento dinâmico do sistema é preciso resolver o modelo desse

¹¹ A função degrau unitário ou função Heaviside é definida por $\mathcal{H}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$.

sistema. Tendo uma solução analítica, a resolução do sistema é mais simples haja vista que, neste caso, temos ferramentas matemáticas conhecidas aplicáveis aos modelos lineares.

(ii) Ademais, grande parte das teorias de projeto de sistemas de controle são eficientes para modelos de sistemas lineares.

(iii) Além disso, o esforço computacional para resolver um sistema linear é significativamente menor do que a resolução de um sistema não linear. Complementando, a linearização de um modelo não linear na vizinhança de um ponto de operação é factível. Uma possibilidade é a condição de linearização ser um ponto de equilíbrio do sistema. Logo, o sistema linear é válido para operação na vizinhança da condição de linearização. Como no item (b) já linearizamos o modelo, agora é possível resolver a EDO encontrando $\Delta\mathbf{y}(t)$, usando a Transformada de Laplace (\mathcal{L}) que foi apresentada no Capítulo 2, na Seção 2.4. Para isso, consideramos o sistema em estado estacionário, ou seja, com condições iniciais nulas, ou seja, $\Delta\mathbf{y}(0) = 0$ e $\frac{d\Delta\mathbf{y}(0)}{dt} = 0$. Para resolver a EDO dada pela equação (5.18), separamos em dois casos: primeiro fazendo $\Delta\mathbf{u}(t) = 0$ e depois fazendo $\Delta\mathbf{q}(t) = 0$.

Caso 1: Considerando $\Delta\mathbf{u}(t) = 0$ e $\Delta\mathbf{q}(t) = \mathcal{H}(t)$, em que $\mathcal{H}(t)$ é a Função Degrau Unitário. Segue que:

$$\begin{aligned}
 2 \frac{d\Delta\mathbf{y}(t)}{dt} + \Delta\mathbf{y}(t) &= -1, 2(\mathbf{u}_E)^2 \Delta\mathbf{u}(t) + 1, 2 \Delta\mathbf{q}(t), \\
 2 \frac{d\Delta\mathbf{y}(t)}{dt} + \Delta\mathbf{y}(t) &= \frac{6}{5} \mathcal{H}(t), && \text{com as condições acima,} \\
 \mathcal{L} \left[2 \frac{d\Delta\mathbf{y}(t)}{dt} + \Delta\mathbf{y}(t) \right] &= \mathcal{L} \left[\frac{6}{5} \mathcal{H}(t) \right], && \text{pela linearidade da } \mathcal{L}, \\
 2 \mathcal{L} \left[\frac{d\Delta\mathbf{y}(t)}{dt} \right] + \mathcal{L}[\Delta\mathbf{y}(t)] &= \frac{6}{5} \mathcal{L}[\mathcal{H}(t)], && \mathcal{H}(t) = 1, t \geq 0, \\
 2(s \Delta Y(s) - \Delta\mathbf{y}(0)) + \Delta Y(s) &= \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{s}, && \Delta\mathbf{y}(0) = 0, \\
 \Delta Y(s)(2s + 1) &= \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{s}, \\
 \Delta Y(s) &= \frac{6}{5(2s + 1)} \cdot \frac{1}{s}, \\
 \Delta Y(s) &= \frac{6}{5s(2s + 1)}. && (5.23)
 \end{aligned}$$

Em (5.23), aplicando o Método das Frações Parciais, temos:

$$\begin{aligned}
 \frac{6}{5s(2s + 1)} &= \frac{A_1}{5s} + \frac{A_2}{2s + 1}, && (5.24) \\
 \frac{6}{5s(2s + 1)} &= \frac{A_1(2s + 1) + A_2 \cdot 5s}{5s(2s + 1)}, \\
 6 &= A_1(2s + 1) + A_2 \cdot 5s.
 \end{aligned}$$

Para calcular os coeficientes A_1 e A_2 , utilizaremos o seguinte procedimento:

- tomando $s = 0$, temos $6 = A_1(2 \cdot 0 + 1) + A_2 \cdot 5 \cdot 0 \Rightarrow A_1 = 6$,
- tomando $s = -\frac{1}{2}$, temos $6 = A_1 \left[2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 \right] + A_2 \cdot 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow A_2 = -\frac{12}{5}$.

Substituindo estes coeficientes em (5.24), segue que:

$$\frac{6}{5s(2s+1)} = \frac{6}{5s} - \frac{12}{5(2s+1)}, \quad \text{dividindo o último termo por 2,}$$

$$\Delta Y(s) = \frac{6}{5s} - \frac{6}{5(s+\frac{1}{2})}.$$

Para finalizar, aplicamos a Transformada Inversa de Laplace (\mathcal{L}^{-1}) para encontrar $\Delta y(t)$ sob a variação de q . Assim, obtemos:

$$\mathcal{L}^{-1}[\Delta Y(s)] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{6}{5s} - \frac{6}{5(s+\frac{1}{2})} \right],$$

$$\mathcal{L}^{-1}[\Delta Y(s)] = \frac{6}{5} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \right] - \frac{6}{5} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s+\frac{1}{2})} \right],$$

$$\Delta y(t) = \frac{6}{5} \mathcal{H}(t) - \frac{6}{5} e^{-\frac{1}{2}t}, \quad \text{como } \mathcal{H}(t) = 1,$$

$$\Delta y(t) = \frac{6}{5} - \frac{6}{5} e^{-\frac{1}{2}t}.$$

Portanto, $\Delta y_q(t) = \frac{6}{5}(1 - e^{-\frac{1}{2}t})$ e $\Delta u = 0$.

Caso 2: Considerando $\Delta q(t) = 0$ e $\Delta u(t) = \mathcal{H}(t)$, de forma análoga, segue que:

$$2 \frac{d\Delta y(t)}{dt} + \Delta y(t) = -1, 2(u_E)^2 \Delta u(t) + 1, 2 \Delta q(t),$$

$$2 \frac{d\Delta y(t)}{dt} + \Delta y(t) = -1, 2(u_E)^2 \mathcal{H}(t), \quad \text{com as condições acima,}$$

$$\mathcal{L} \left[2 \frac{d\Delta y(t)}{dt} + \Delta y(t) \right] = \mathcal{L} \left[-\frac{6}{5}(u_E)^2 \mathcal{H}(t) \right], \quad \text{pela linearidade da } \mathcal{L},$$

$$2 \mathcal{L} \left[\frac{d\Delta y(t)}{dt} \right] + \mathcal{L}[\Delta y(t)] = -\frac{6}{5}(u_E)^2 \mathcal{L}[\mathcal{H}(t)], \quad \mathcal{H}(t) = 1, t \geq 0,$$

$$2(s \Delta Y(s) - \Delta y(0)) + \Delta Y(s) = -\frac{6}{5} \cdot \frac{1}{s}, \quad \Delta y(0) = 0 \text{ e tomando } u_E = 1$$

$$\Delta Y(s)(2s+1) = -\frac{6}{5} \cdot \frac{1}{s},$$

$$\Delta Y(s) = -\frac{6}{5(2s+1)} \cdot \frac{1}{s},$$

$$\Delta Y(s) = -\frac{6}{5s(2s+1)}. \quad (5.25)$$

Em (5.25), aplicando o Método das Frações Parciais, temos:

$$-\frac{6}{5s(2s+1)} = \frac{B_1}{5s} + \frac{B_2}{2s+1}, \quad (5.26)$$

$$-\frac{6}{5s(2s+1)} = \frac{B_1(2s+1) + B_2 \cdot 5s}{5s(2s+1)},$$

$$-6 = B_1(2s+1) + B_2 \cdot 5s.$$

Para calcular os coeficientes B_1 e B_2 faremos o seguinte procedimento:

- tomando $s = 0$, temos $-6 = B_1(2 \cdot 0 + 1) + B_2 \cdot 5 \cdot 0 \Rightarrow B_1 = -6$,
- tomando $s = -\frac{1}{2}$, temos $-6 = B_1 \left[2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 \right] + B_2 \cdot 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow B_2 = \frac{12}{5}$.

Substituindo estes coeficientes em (5.26), segue que:

$$-\frac{6}{5s(2s+1)} = -\frac{6}{5s} + \frac{12}{5(2s+1)}, \quad \text{dividindo o último termo por 2,}$$

$$\Delta Y(s) = -\frac{6}{5s} + \frac{6}{5(s+\frac{1}{2})}.$$

Para finalizar, aplicamos a Transformada Inversa de Laplace (\mathcal{L}^{-1}) para encontrar $\Delta \mathbf{y}(t)$ sob a variação de \mathbf{u} . Assim, obtemos:

$$\mathcal{L}^{-1}[\Delta Y(s)] = \mathcal{L}^{-1} \left[-\frac{6}{5s} + \frac{6}{5(s+\frac{1}{2})} \right],$$

$$\mathcal{L}^{-1}[\Delta Y(s)] = -\frac{6}{5} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \right] + \frac{6}{5} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s+\frac{1}{2})} \right],$$

$$\Delta \mathbf{y}(t) = -\frac{6}{5} \mathcal{H}(t) + \frac{6}{5} e^{-\frac{1}{2}t}, \quad \text{como } \mathcal{H}(t) = 1,$$

$$\Delta \mathbf{y}(t) = -\frac{6}{5} + \frac{6}{5} e^{-\frac{1}{2}t}.$$

Portanto, $\Delta \mathbf{y}_u(t) = -\frac{6}{5}(1 - e^{-\frac{1}{2}t})$ e $\Delta \mathbf{q} = 0$.

Logo, a solução do modelo linearizado dado pela equação (5.18) é dada pelas duas funções $\Delta \mathbf{y}_u(t) = -\frac{6}{5}(1 - e^{-\frac{1}{2}t})$ e $\Delta \mathbf{y}_q(t) = \frac{6}{5}(1 - e^{-\frac{1}{2}t})$ em vista das imposições feitas previamente.

Em resumo, no problema de um sistema de controle de pH da fertirrigação da cultura da mangueira destacam-se os tópicos abaixo.

Dados: Modelo do sistema de controle de pH por meio da EDO:

$$2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = -0,4 u(t)^3 + 1,2 q(t),$$

em que $y(t) \in [0, 14]$ representa o pH da água de fertirrigação (variável de processo), $u(t) \in [0, 2] \text{ m}^3/\text{min}$ é a vazão de ácido usada para controlar o pH (variável manipulada) e $q(t)$ é a vazão da mistura de NPK (perturbação) que pode variar dentro do intervalo $[5, 7] \text{ m}^3/\text{min}$. Desejou-se encontrar: (a) as características estáticas do sistema, considerando todas as relações entre as variáveis; (b) um modelo linearizado para o sistema operando nas vizinhanças do ponto de equilíbrio dado; (c) a função variação do pH da água de fertirrigação de um modelo linear.

Considerações: Escolhemos a resolução dessa forma, pois há muitos conceitos da área de sistemas de controle, além de ter sido sugerido pelo **Professor 2** por ficar próximo da abordagem feita na sala de aula. Para mais detalhes, veja Normey-Rico e Morato (2021, p. 203-210), onde encontra-se o problema original no qual fizemos adaptação para esta

aplicação.

Leis e princípios de sistemas de controle e matemática: Linearidade de funções; modelo estático do sistema; derivada parcial; Expansão de Taylor; constante de tempo (τ); Função Degrau Unitário; resolução de EDO por Transformada de Laplace; Método das Frações Parciais.

Resultados: Este problema apresenta uma modelagem em EDO para controlar o pH da água de fertirrigação que é produzida a partir da mistura de NPK com um ácido, encontramos: (a) a característica estática do sistema de controle de pH $y_E = -0,4(u_E)^3 + 1,2 \cdot 6 = -0,4(u_E)^3 + 7,2$ ($q_E = 6$) e, também $y_E = -0,4 \cdot 1^3 + 1,2 q_E = -0,4 + 1,2 q_E$ ($u_E = 1$), na vizinhança do ponto de equilíbrio; (b) $2 \frac{d\Delta y(t)}{dt} + \Delta y(t) = -1,2(u_E)^2 \Delta u + 1,2 \Delta q(t)$ é o modelo linearizado na vizinhança de P_E ; (c) solução do modelo linearizado condicionado a certas/determinadas exigências é dada pelas duas funções $\Delta y_u(t) = -\frac{6}{5}(1 - e^{-\frac{1}{2}t})$ e $\Delta y_q(t) = \frac{6}{5}(1 - e^{-\frac{1}{2}t})$.

Discussão: Do ponto de vista da matemática, cabe destacar que o pH utiliza escala logarítmica, que é não linear. Isso significa dizer que quando o pH aumenta de 5 para 6 isso é equivalente a um aumento de 10 vezes e, não de apenas 1 ponto. Como consequência, isso reforça o quanto o pH influencia no processo de absorção de nutrientes e o cuidado que se deve ter no controle da fertirrigação. Esse modelo de controle pode ser aplicado em outros processos, como em lavanderias industriais para jeans.

5.3.3 Proposta 3 – Lançamento oblíquo de um objeto

Vamos contextualizar a escolha por essa aplicação e parte do caminho percorrido até chegar neste ponto da apresentação. No início desta seção foi comentado acerca dos levantamentos junto às aplicações observadas nos onze livros e, partir da entrevista realizada com o **Professor 3**, nos foram sugeridas três aplicações que são interessantes para o objetivo deste trabalho. Direcionamos as buscas em alguns livros de física e artigos científicos sobre tais aplicações, donde despertou o interesse no estudo do lançamento oblíquo de um objeto com resistência do ar. Aliado ao comentário do **Professor 3**, que disse:

“no desenvolvimento das equações que caracterizam este movimento, chega-se em algumas equações que não possuem soluções algébricas. Sendo necessário utilizar métodos numéricos ou partindo para funções mais complicadas. E, possivelmente, por isso que muitos livros não fazem essa abordagem, uma vez que necessitaria uma discussão, limitando-se apenas na apresentação do conteúdo” (Professor 3, 2023, entrevista).

Ainda que, em materiais, a saber, nos livros: Thornton e Marion (2014), Tipler e Mosca (2006), Neto (2004)¹² e nos artigos: Freire *et al.* (2016), Maceti, Levada e Lautenschleguer

¹² NETO, João Barcelos. **Mecânica Newtoniana, Lgrangiana e Hamiltoniana**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2004.

(2012)¹³, Silva *et al.* [s.d.]¹⁴, apresentem o lançamento oblíquo com abordagem através de EDO, nosso objetivo é fazer o estudo da modelagem e discussão sobre o lançamento oblíquo de um objeto sem e com resistência do ar, sob o ponto de vista de um professor de matemática enfatizando o conhecimento de matemática aplicada.

Aplicação genérica: No futebol, o tiro de meta é um lançamento oblíquo. Sabe-se da física básica que a trajetória da bola pode ser representada por uma parábola, pois não se considera a resistência do ar. Entretanto, em qualquer partida de futebol, se observarmos da lateral do campo, é fácil perceber que esta trajetória feita pela bola numa cobrança de tiro de meta não é uma parábola. Consideremos que o jogador de futebol chuta a bola de massa M lançada obliquamente com velocidade v_0 onde forma um ângulo θ com a horizontal, sendo $\theta \in (0^\circ, 90^\circ)$. Neste contexto, propomos fazer uma discussão sobre este movimento, o lançamento oblíquo de uma bola, para obter as equações de movimento, encontrar uma aproximação da trajetória descrita pela bola num tiro de meta num jogo de futebol e a análise discutindo sobre o alcance da bola.

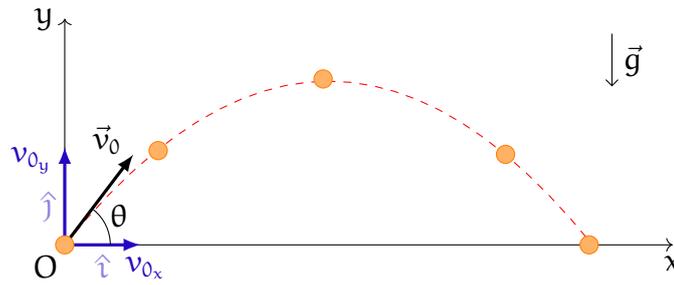
Resolução. *Faremos as deduções das equações de movimento do lançamento oblíquo de uma bola e algumas discussões em duas partes, a saber: primeiro desprezando a resistência do ar e, em seguida, considerando o efeito da resistência do ar. Para isso, convencionaremos que o fenômeno discutido ocorra no primeiro quadrante do plano cartesiano, seguindo as orientações dos eixos coordenados (o eixo das abscissas é positivo para a direita e possui versor \hat{i} nesse sentido, e o das ordenadas é positivo para cima e possui versor \hat{j} nesse sentido) e os vetores em módulo.*

Sem resistência do ar: *Primeiramente, faremos a discussão do movimento (trajetória da bola) desprezando a resistência do ar e, para isso, faremos algumas considerações. Do enunciado do problema, temos que um objeto é lançado obliquamente, ou seja, uma bola é chutada com uma determinada força que conseqüentemente imprime uma velocidade inicial (\vec{v}_0) à bola, e que esta faz um determinado ângulo (θ) em relação ao chão, conforme está ilustrado na Figura 8. Desejamos encontrar as equações que descrevem o movimento, uma aproximação da trajetória da bola e a expressão que representa o alcance da bola. Analisando o movimento a partir das leis da física, a saber, se um objeto possui um movimento composto, cada um deles se realiza como se o outro não existisse - princípio da independência dos movimentos simultâneos, segundo Thornton e Marion (2014). Ainda, a grandeza velocidade (\vec{v}) é um vetor e este possui duas componentes (v_x) e (v_y). E sabemos que este movimento sofre ação da aceleração gravitacional (\vec{g}) que está atuando apenas na direção vertical.*

¹³ MACETI, Huemerson; LEVADA, Celso Luis; LAUTENSCHLEGUER, Ivan José. Considerações sobre o alcance no lançamento oblíquo. **Caderno de Física da UEFS**, v.10, p.7–17, 2012.

¹⁴ SILVA, M.B. da *et al.* Modelagem matemática: movimento com resistência do ar proporcional à velocidade. **Semana Acadêmica UTFPR**, [s.d.].

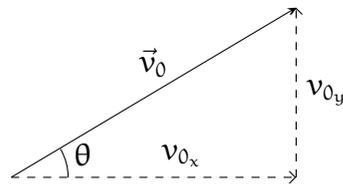
Figura 8 – Chute na bola sem resistência do ar.



Fonte: O autor (2023).

Mais uma consideração que devemos avaliar é que a altura (deslocamento vertical) inicial e final é a mesma, pois o campo de futebol é um terreno plano e estamos tomando como referencial o sistema de coordenadas cartesianas, onde a bola está posicionada na origem, sendo que para $t = 0$, temos $x = 0$ e $y = 0$.

Neste movimento da bola é possível analisarmos dois deslocamentos (vetores), um na horizontal (para frente – direção do eixo x) e outro na vertical (para cima – direção do eixo y). Assim, vamos analisar cada um desses movimentos separadamente. Decompondo o vetor \vec{v}_0 , por meio da trigonometria, temos:

Figura 9 – Decomposição do vetor \vec{v}_0 .

Fonte: O autor (2023).

$$v_{0x} = v_0 \cos(\theta), \quad (5.27)$$

$$v_{0y} = v_0 \sin(\theta). \quad (5.28)$$

Movimento horizontal (eixo x) desprezando a resistência do ar: Note que neste movimento, na direção horizontal, não temos aceleração (\vec{a}), uma vez que não há nenhuma força atuando sobre a bola nesta direção, isto é, $\mathbf{a}_x = 0$, então a velocidade horizontal (\mathbf{v}_x) é constante, $\mathbf{v}_x = \mathbf{v}_{0x}$. Desta forma, temos um Movimento Retilíneo Uniforme (M.R.U.) e sabemos que $\mathbf{v}_m = \frac{\Delta \mathbf{x}}{\Delta t}$, em que $\Delta \mathbf{x}$ é o deslocamento horizontal e Δt é a variação do tempo. Aplicando o limite, temos:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{x}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}_{0x}.$$

Integrando em relação a t em ambos os lados da última igualdade acima, com a condição inicial $t = 0$ e tomando T como tempo final, segue que:

$$\int_0^T \frac{dx}{dt} dt = \int_0^T v_{0x} dt,$$

$$x(t) \Big|_0^T = v_{0x} \cdot t \Big|_0^T,$$

$$\begin{aligned}x(\Gamma) - x(0) &= v_{0x} \cdot (\Gamma - 0), & \text{tomando } x(0) &= x_0, \\x(\Gamma) &= x_0 + v_{0x} \Gamma.\end{aligned}\tag{5.29}$$

Sendo (5.29) conhecida como função horária da posição horizontal.

Logo, considerando que $x_0 = 0$, temos:

$$\begin{aligned}x(t) &= v_{0x} t, & \text{substituindo por (5.27)} \\x(t) &= v_0 \cos(\theta) t.\end{aligned}\tag{5.30}$$

Movimento vertical (eixo y) desprezando a resistência do ar: Agora neste movimento temos aceleração (\vec{a}) que corresponde à aceleração gravitacional (\vec{g}). Há aceleração vertical apontando para baixo e adotamos o referencial onde o eixo y cresce para cima. Assim, \mathbf{a}_y é constante sendo $\mathbf{a}_y = -g$. Por conta disto, a velocidade vertical (v_y) varia. Desta forma, temos um Movimento Retilíneo Uniformemente Variado (M.R.U.V.) e sabemos que $\mathbf{a}_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$. Aplicando o limite ($\Delta t \rightarrow 0$), tem-se que:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_y}{\Delta t} = \frac{dv_y}{dt} = a_y.$$

Integrando em relação a t em ambos os lados da última igualdade, com a condição inicial $t = 0$ e tomando Γ como tempo final, segue:

$$\begin{aligned}\int_0^\Gamma \frac{dv_y}{dt} dt &= \int_0^\Gamma a_y dt, \\v_y(t) \Big|_0^\Gamma &= a_y \cdot t \Big|_0^\Gamma, \\v_y(\Gamma) - v_y(0) &= a_y \cdot (\Gamma - 0), & \text{tomando } v(0) &= v_{0y}, \\v_y(\Gamma) &= v_{0y} + a_y \Gamma.\end{aligned}\tag{5.31}$$

Obtendo (5.31) que é conhecida como função horária da velocidade.

Por hipótese $\mathbf{a}_y = -g$, decorrendo que:

$$\begin{aligned}v_y(t) &= v_{0y} - g t, & \text{substituindo por (5.28)} \\v_y(t) &= v_0 \text{sen}(\theta) - g t,\end{aligned}\tag{5.32}$$

onde (5.32) é a função horária da velocidade na direção vertical.

Seguindo o raciocínio de trabalhar com a derivada, $v_y = \frac{dy}{dt}$, substituindo em (5.31), temos:

$$\frac{dy}{dt} = v_{0y} + a_y t.$$

Integra-se ambos os lados da igualdade em relação a t . Daí,

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{dy}{dt} dt &= \int_0^T (v_{0y} + a_y t) dt, \\ y(t) \Big|_0^T &= \int_0^T v_{0y} dt + \int_0^T a_y t dt, \\ y(T) - y(0) &= v_{0y} t \Big|_0^T + \frac{a_y \cdot t^2}{2} \Big|_0^T, \\ y(T) &= y(0) + v_{0y} \cdot (T - 0) + \left(\frac{a_y \cdot T^2}{2} - \frac{a_y \cdot 0^2}{2} \right), \quad \text{tomando } y(0) = y_0, \\ y(T) &= y_0 + v_{0y} T + \frac{a_y T^2}{2}. \end{aligned} \quad (5.33)$$

A posição vertical (y) é o correspondente à altura que a bola atinge ao longo do movimento. Logo, (5.33) é conhecida como função horária da altura.

Aplicando a condição inicial, $y_0 = 0$ em (5.28), segue:

$$\begin{aligned} y(t) &= v_{0y} t - \frac{g t^2}{2}, \\ y(t) &= v_0 \sin(\theta) t - \frac{g t^2}{2}. \end{aligned} \quad (5.34)$$

A função (5.34) têm características de uma curva parabólica. De fato, fazendo: $\alpha = v_0 \sin(\theta)$ e $\beta = \frac{g}{2}$, segue-se $y = \alpha t - \beta t^2 = t(\alpha - \beta t)$, sendo uma parábola de concavidade voltada para baixo ($-\beta < 0$), uma raiz em $t = 0$ e a outra em $t = \frac{\alpha}{\beta}$.

Ainda é possível fazermos outra análise: o campo de futebol é plano, logo, quando o jogador chuta a bola, ela subirá até uma determinada altura e, em seguida, descera, atingindo o chão. E, neste caso, o tempo de subida será o mesmo que o de descida, pois não estamos considerando a resistência do ar. Consequentemente, a trajetória descrita pela bola será simétrica na subida e na descida, descrevendo uma parábola, conforme Figura 10, que deduziremos a seguir. Também é interessante observarmos que as funções (5.29), (5.31) e (5.33) são as mesmas funções já conhecidas nos estudos do M.R.U. e M.R.U.V. no ensino médio.

Note que as funções (5.29) e (5.33) são funções parametrizadas em t , no referencial adotado. Então, podemos encontrar a função que descreve a trajetória do movimento em termos de x e y , sem evidenciar o parâmetro tempo t . Para atingirmos este objetivo, faremos manipulações algébricas com as equações (5.30) e (5.34). Isolando o parâmetro t na primeira equação, temos:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos(\theta)},$$

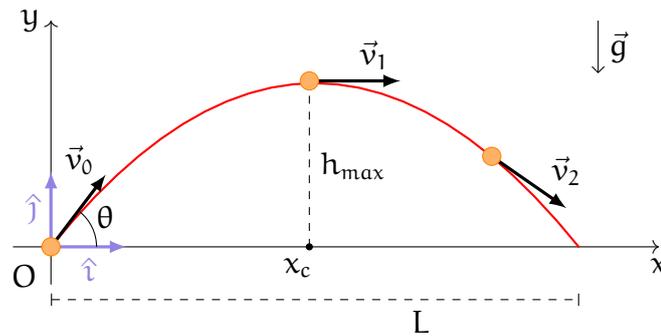
e substituímos t , em seguida, na segunda equação:

$$\begin{aligned} y &= v_0 \sin(\theta) \left(\frac{x}{v_0 \cos(\theta)} \right) - \frac{g}{2} \left(\frac{x}{v_0 \cos(\theta)} \right)^2, \\ y &= \left(\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \right) x - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2(\theta)} x^2, \\ y &= \tan(\theta) x - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2(\theta)} x^2, \end{aligned} \quad (5.35)$$

assim deduzimos a altura y em termos do deslocamento horizontal x .

Como já era esperado, esta função que representa a trajetória do lançamento oblíquo corresponde graficamente à curva parabólica. Assim, fazendo: $\alpha = \tan(\theta)$ e $\beta = \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2(\theta)}$, segue-se $y = \alpha x - \beta x^2 = x(\alpha - \beta x)$, sendo uma parábola, semelhante a que deduzimos anteriormente. O gráfico da trajetória está mostrado na Figura 10.

Figura 10 – Lançamento oblíquo sem resistência do ar.



Fonte: O autor (2023).

Agora vamos obter a expressão do alcance horizontal da bola. Alcance este considerando desde o momento que o jogador chuta a bola até ela cair no campo, sendo $y = 0$. Desse modo, chamamos de alcance (L) a distância entre $x(0) = x_0 = 0$ e o ponto de queda da bola em $x(T)$, tal que $y(x(T)) = 0$. A partir de (5.35), igualamos y a zero:

$$\begin{aligned} \tan(\theta) x - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2(\theta)} x^2 &= 0, \\ x \cdot \left(\tan(\theta) - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2(\theta)} x \right) &= 0. \end{aligned}$$

Uma solução imediata para a equação é $x = 0$, que na nossa problemática corresponde ao ponto onde o jogador chuta a bola, porém queremos determinar o ponto onde a bola cairá no campo após o chute. Então, este valor é determinado tomando a expressão que está entre parênteses e igualando a zero:

$$\tan(\theta) - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2(\theta)} x = 0.$$

Após algumas manipulações algébricas, encontramos:

$$\begin{aligned}x &= \frac{2v_0^2 \cos(\theta) \sin(\theta)}{g}, & 2 \sin(\theta) \cos(\theta) &= \sin(2\theta), \\x &= \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g} = L. & & (5.36)\end{aligned}$$

Logo, a equação (5.36) permite calcular o alcance no lançamento da bola, dados v_0 e θ . Ora, para esta situação o alcance máximo (L_{\max}) ocorre para $\theta = 45^\circ$, dado que $0^\circ < \theta < 90^\circ$, daí, $0 < \sin(2\theta) \leq 1$. Dessa forma:

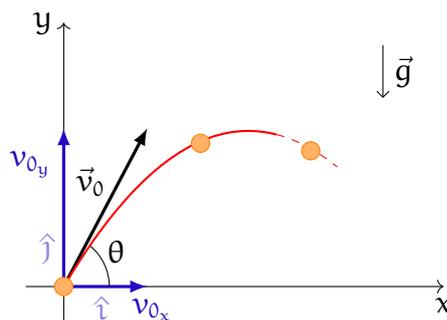
$$L_{\max} = \frac{v_0^2 \sin(2 \cdot 45^\circ)}{g} = \frac{v_0^2}{g}.$$

Portanto, o alcance máximo ocorre em $x = L_{\max} = \frac{v_0^2}{g}$.

Podemos destacar mais algumas propriedades da parábola nesse fenômeno. Uma vez que a parábola é simétrica ao seu eixo de simetria que passa por x_c , assim $x_c = \frac{L}{2} = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{2g}$. Além disso, o tempo de subida é igual ao tempo de descida.

Com resistência do ar: A seguir, vamos analisar este movimento considerando a resistência do ar, separando no movimento horizontal e no vertical, e faremos uma aproximação da trajetória nestas condições. Neste fenômeno com resistência do ar, temos a força da resistência do ar¹⁵ (\vec{F}_{rar}) que é proporcional à velocidade (\vec{v}), sendo a constante de resistência do ar (\mathbf{b}) uma constante de proporcionalidade: $\vec{F}_{\text{rar}} = -\mathbf{b}\vec{v}$. E ainda, a força da resistência do ar (ou força de arrasto) caracteriza-se por ser na mesma direção e no sentido oposto ao da velocidade.

Figura 11 – Lançamento oblíquo considerando a resistência do ar.

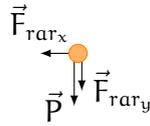


Fonte: O autor (2023).

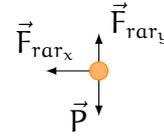
¹⁵ Em alguns livros de física, como em Thornton e Marion (2014), a força da resistência do ar é denominada arrasto e é oposta à velocidade do objeto (partícula).

Figura 12 – Diagrama de forças atuando sobre uma bola em movimento.

(a) Bola subindo.



(b) Bola descendo.



Fonte: O autor (2023).

Movimento horizontal (eixo x) considerando a resistência do ar: Neste lançamento com resistência do ar (b) atuando na direção x , teremos a variação de velocidade, logo teremos aceleração contrária ao movimento do corpo, conforme ilustrado na Figura 11. A resistência do ar é uma força (\vec{F}_{rar_x}) contrária ao deslocamento horizontal da bola, conforme pode ser observado na Figura 12(a) e na Figura 12(b). Como \vec{F}_{rar} que é proporcional à velocidade \vec{v} , neste caso, temos que: $F_{\text{rar}_x} = -b v_x$. Então, pela segunda lei de Newton, temos:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n F_i &= F_{\text{res}} = M a, \\ M a_x &= F_{\text{rar}_x}, \\ M \cdot \frac{d^2x}{dt^2} &= -b v_x \\ M \cdot \frac{dv_x}{dt} &= -b v_x \\ \frac{1}{v_x} \cdot \frac{dv_x}{dt} &= -\frac{b}{M}, \end{aligned}$$

integra-se em relação a t ambos os lados da última igualdade, com as mesmas condições iniciais:

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{1}{v_x} \cdot \frac{dv_x}{dt} dt &= -\frac{b}{M} \int_0^T dt, \\ \ln |v_x(t)| \Big|_0^T &= -\frac{b}{M} t \Big|_0^T, \\ \ln |v_x(T)| - \ln |v_x(0)| &= -\frac{b}{M} \cdot (T - 0), \\ \ln |v_x(T)| &= \ln |v_{0x}| - \frac{b}{M} T. \end{aligned}$$

Aplica-se a função exponencial em ambos os lados da última igualdade, tem-se:

$$\begin{aligned} e^{\ln |v_x(T)|} &= e^{\ln |v_{0x}| - \frac{b}{M} T}, \\ v_x(T) &= e^{\ln |v_{0x}|} \cdot e^{-\frac{b}{M} T}, \\ v_x(T) &= v_{0x} \cdot e^{-\frac{b}{M} T}. \end{aligned}$$

Substituindo com (5.27) na regra imediatamente acima e fazendo $k = \frac{b}{M}$, segue:

$$v_x(T) = v_0 \cos(\theta) \cdot e^{-kT}, \quad (5.37)$$

com k sendo a constante da força de retardo. Logo, (5.37) é a função horária da velocidade na direção horizontal.

Vamos discutir o que ocorre na função horária da velocidade (5.37), quando fazemos T crescer indefinidamente:

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} v_x(T) = \lim_{T \rightarrow +\infty} v_0 \cos(\theta) \cdot e^{-kT} = 0.$$

Consequentemente, a velocidade na direção horizontal vai para zero devido à ação da força da resistência do ar, F_{rar} , isso dá um indício que existirá uma distância máxima que a bola vai atingir, chamada de alcance máximo L_{max} . À frente retomaremos a essa discussão.

Pelo cálculo diferencial, sabemos que $\frac{dx}{dt} = v_x$. Substituindo em (5.37), temos:

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos(\theta) \cdot e^{-kt},$$

integra-se ambos os lados da última igualdade em relação a t :

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{dx}{dt} dt &= v_0 \cos(\theta) \int_0^T e^{-kt} dt, \\ x(t) \Big|_0^T &= v_0 \cos(\theta) \cdot \left(-\frac{1}{k} \right) \cdot e^{-k \cdot t} \Big|_0^T, \\ x(T) - x(0) &= v_0 \cos(\theta) \cdot \left(-\frac{1}{k} \right) \cdot (e^{-kT} - e^{-k \cdot 0}), \quad \text{tomando } x(0) = 0, \\ x(T) &= v_0 \cos(\theta) \cdot \left(-\frac{1}{k} \right) \cdot (e^{-kT} - 1), \\ x(T) &= \frac{v_0 \cos(\theta)}{k} \cdot (1 - e^{-kT}). \end{aligned} \quad (5.38)$$

Assim, em (5.38) deduzimos a função horária da posição horizontal ou do alcance.

Vamos discutir o que ocorre na função horária da posição horizontal em (5.38), quando fazemos T crescer indefinidamente:

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow +\infty} x(T) &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{v_0 \cos(\theta)}{k} \cdot (1 - e^{-kT}), \\ &= \frac{v_0 \cos(\theta)}{k} = \zeta. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Consequentemente, a bola tende a cair no campo na posição ζ , que chamaremos de valor limitante para o alcance. Isso significa que existirá um alcance máximo para o lançamento. À frente, também retomaremos a essa discussão.

Movimento vertical (eixo y) considerando a resistência do ar: Note que ao consideramos a resistência do ar, o movimento tem aceleração, logo a velocidade varia, como ilustrado na Figura 11. Agora, a força da resistência do ar (\vec{F}_{rar_y}) atua na direção y , com a constante de resistência do ar (b) onde consideraremos o vetor força da resistência do ar contrário ao vetor velocidade, conforme pode ser observado na Figura 12(a) e na

Figura 12(b). Neste caso, temos que: $F_{\text{rar}_y} = -b v_y$. Utilizamos a segunda lei de Newton:

$\sum_{i=1}^n F_i = F_{\text{res}} = M a$. Em notação do cálculo diferencial, escrevemos $a_y = \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{dv_y}{dt}$:

$$\begin{aligned}
 M a_y &= F_{\text{res}_y}, \\
 M \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} &= -F_{\text{rar}_y} + P, \\
 M \cdot \frac{dv_y}{dt} &= -b v_y - M g, \\
 \frac{dv_y}{dt} &= -\left(\frac{b}{M} \cdot v_y + g\right), && \text{fazendo } k = \frac{b}{M}, \\
 \frac{dv_y}{dt} &= -(k v_y + g), \\
 \frac{1}{k v_y + g} \cdot \frac{dv_y}{dt} &= -1. && (5.40)
 \end{aligned}$$

Vamos fazer uma mudança de variável para integração em (5.40). Seja $\psi = k v_y + g$. Derivando, temos $\frac{d\psi}{dv_y} = k$, após algumas manipulações algébricas $dv_y = \frac{1}{k} d\psi$. Então:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\psi} \cdot \frac{1}{k} \frac{d\psi}{dt} &= -1, \\
 \int_0^T \frac{1}{\psi} \cdot \frac{d\psi}{dt} dt &= -k \int_0^T dt, \\
 \ln |\psi(t)| \Big|_0^T &= -k \cdot t \Big|_0^T, \\
 \ln |\psi(T)| - \ln |\psi(0)| &= -k \cdot (T - 0), \\
 \ln |\psi(T)| &= \ln |\psi(0)| - k T,
 \end{aligned}$$

aplica-se a função exponencial em ambos os lados da última igualdade, e tem-se:

$$\begin{aligned}
 e^{\ln |\psi(T)|} &= e^{\ln |\psi(0)| - k T}, \\
 \psi(T) &= e^{\ln |\psi(0)|} \cdot e^{-k T}, \\
 \psi(T) &= \psi(0) \cdot e^{-k T}, && \text{retornando para } v_y, \\
 k v_y(T) + g &= (k v_{0y} + g) \cdot e^{-k T}, \\
 k v_y(T) &= (k v_{0y} + g) \cdot e^{-k T} - g, \\
 v_y(T) &= \left(\frac{k v_{0y} + g}{k}\right) \cdot e^{-k T} - \frac{g}{k}, \\
 v_y(T) &= \left(v_{0y} + \frac{g}{k}\right) \cdot e^{-k T} - \frac{g}{k}, \\
 v_y(T) &= v_{0y} \cdot e^{-k T} + \frac{g}{k} \cdot e^{-k T} - \frac{g}{k}, \\
 v_y(T) &= v_{0y} \cdot e^{-k T} - \frac{g}{k} \cdot (1 - e^{-k T}).
 \end{aligned}$$

Pelas condições iniciais, temos que para $t = 0$, $v_{0y} = v_0 \sin(\theta)$, então:

$$v_y(T) = v_0 \sin(\theta) \cdot e^{-kT} - \frac{g}{k} \cdot (1 - e^{-kT}). \quad (5.41)$$

Então, (5.41) é a função horária da velocidade na direção vertical.

Vamos discutir o que ocorre na função horária da velocidade em (5.41), quando fazemos T crescer indefinidamente:

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow +\infty} v_y(T) &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \left[v_0 \sin(\theta) \cdot e^{-kT} - \frac{g}{k} \cdot (1 - e^{-kT}) \right], \\ &= -\frac{g}{k} = v_T. \end{aligned}$$

Consequentemente, a velocidade na direção vertical vai para v_T , que chamaremos de velocidade terminal. Quando v_T é atingida, a aceleração passa a ser zero, o que ocorre quando a força peso e a força de resistência do ar se igualam. No entanto, muito provavelmente, a bola tocará o campo com uma velocidade menor que v_T . Note ainda que v_T tem sinal negativo que é correto, pois, conforme o referencial adotado, nessa situação, a bola está orientada no sentido negativo do eixo y .

Como v_y é a velocidade, podemos escrever a velocidade em termos da derivada do deslocamento y em relação ao tempo t , $v_y = \frac{dy}{dt}$, e substituímos em (5.41), seguindo:

$$\frac{dy}{dt} = v_0 \sin(\theta) \cdot e^{-kt} - \frac{g}{k} \cdot (1 - e^{-kt}).$$

Agora, integramos em relação a t ambos os lados da última igualdade imediatamente acima:

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{dy}{dt} dt &= \int_0^T \left[v_0 \sin(\theta) \cdot e^{-kt} - \frac{g}{k} \cdot (1 - e^{-kt}) \right] dt, \\ y(t) \Big|_0^T &= \int_0^T v_0 \sin(\theta) \cdot e^{-kt} dt - \int_0^T \frac{g}{k} \cdot (1 - e^{-kt}) dt, \\ y(T) - y(0) &= v_0 \sin(\theta) \int_0^T e^{-kt} dt - \frac{g}{k} \int_0^T (1 - e^{-kt}) dt, & y(0) = 0, \\ y(T) &= v_0 \sin(\theta) \cdot \left(-\frac{1}{k} \right) e^{-kt} \Big|_0^T - \frac{g}{k} \cdot \left(t + \frac{1}{k} e^{-kt} \right) \Big|_0^T, \\ y(T) &= v_0 \sin(\theta) \cdot \left(-\frac{1}{k} \right) \cdot (e^{-kT} - e^{-k \cdot 0}) - \frac{g}{k} \cdot \left[T + \frac{1}{k} e^{-kT} - \left(0 + \frac{1}{k} e^{-k \cdot 0} \right) \right], \\ y(T) &= v_0 \sin(\theta) \cdot \left(\frac{1}{k} \right) \cdot (1 - e^{-kT}) - \frac{g}{k} \cdot \left(T + \frac{1}{k} e^{-kT} - \frac{1}{k} \right), \\ y(T) &= v_0 \sin(\theta) \cdot \left(\frac{1}{k} \right) \cdot (1 - e^{-kT}) + \frac{g}{k} \cdot \left(\frac{1}{k} \right) \cdot (1 - e^{-kT}) - \frac{g}{k} T, \\ y(T) &= \frac{1}{k} \cdot \left(v_0 \sin(\theta) + \frac{g}{k} \right) \cdot (1 - e^{-kT}) - \frac{g}{k} T. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Portanto, em (5.42) obtemos a função horária da altura com resistência do ar.

Vamos discutir o que ocorre na função horária da altura em (5.42), quando fazemos T

crescer indefinidamente. A fim de facilitar a discussão, vamos separar a função em duas partes (conforme seus termos) fazendo: $y(T) = \alpha - \beta$, em que

$$\alpha = \frac{1}{k} \cdot \left(v_0 \sin(\theta) + \frac{g}{k} \right) \cdot (1 - e^{-kT})$$

$$\beta = \frac{g}{k} T.$$

Daí, calcula-se os limites,

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \alpha = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{k} \cdot \left(v_0 \sin(\theta) + \frac{g}{k} \right) \cdot (1 - e^{-kT}) \right] = \frac{1}{k} \cdot \left(v_0 \sin(\theta) + \frac{g}{k} \right),$$

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \beta = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{g}{k} T = +\infty.$$

Dessa forma, não temos um valor de convergência para a altura quando T cresce indefinidamente.

Podemos discutir mais sobre este problema encontrando a função que representa a trajetória do movimento da bola com resistência do ar, por meio de (5.38) e (5.42). Para isolar o parâmetro t na primeira equação, fazemos:

$$x = v_0 \cos(\theta) \cdot \left(\frac{1 - e^{-kt}}{k} \right),$$

$$1 - e^{-kt} = \frac{x k}{v_0 \cos(\theta)}, \quad (5.43)$$

$$e^{-kt} = 1 - \frac{x k}{v_0 \cos(\theta)},$$

aplica-se a função logarítmica natural em ambos os lados da última igualdade, tem-se:

$$\ln(e^{-kt}) = \ln \left(1 - \frac{x k}{v_0 \cos(\theta)} \right),$$

$$-k t = \ln \left(1 - \frac{x k}{v_0 \cos(\theta)} \right),$$

$$t = - \left(\frac{1}{k} \right) \cdot \ln \left(1 - \frac{x k}{v_0 \cos(\theta)} \right). \quad (5.44)$$

Daí, basta substituir (5.44) na segunda equação.

$$y = \frac{1}{k} \cdot \left(v_0 \sin(\theta) + \frac{g}{k} \right) \cdot (1 - e^{-kt}) - \frac{g}{k} t, \quad \text{substituindo por (5.43)}$$

$$y = \frac{1}{k} \cdot \left(v_0 \sin(\theta) + \frac{g}{k} \right) \cdot \left[1 - e^{-\frac{k}{k} \cdot \ln \left(1 - \frac{x k}{v_0 \cos(\theta)} \right)} \right] - \frac{g}{k \cdot (-k)} \cdot \ln \left(1 - \frac{k x}{v_0 \cos(\theta)} \right),$$

$$y = \frac{1}{k} \cdot \left(v_0 \sin(\theta) + \frac{g}{k} \right) \cdot \left[1 - e^{\ln \left(1 - \frac{x k}{v_0 \cos(\theta)} \right)} \right] + \frac{g}{k^2} \cdot \ln \left(1 - \frac{k x}{v_0 \cos(\theta)} \right),$$

$$y = \frac{1}{k} \cdot \left(v_0 \sin(\theta) + \frac{g}{k} \right) \cdot \left(1 - 1 + \frac{x k}{v_0 \cos(\theta)} \right) + \frac{g}{k^2} \cdot \ln \left(1 - \frac{k x}{v_0 \cos(\theta)} \right),$$

$$y = \frac{1}{k} \cdot \left(v_0 \sin(\theta) + \frac{g}{k} \right) \cdot \left(\frac{x k}{v_0 \cos(\theta)} \right) + \frac{g}{k^2} \cdot \ln \left(1 - \frac{k x}{v_0 \cos(\theta)} \right), \quad k = \frac{b}{M},$$

$$y = \left(\tan(\theta) + \frac{M g}{b v_0 \cos(\theta)} \right) x + \frac{M^2 g}{b^2} \cdot \ln \left(1 - \frac{b x}{M v_0 \cos(\theta)} \right). \quad (5.45)$$

Logo, em (5.45) deduzimos a altura y em termos da posição horizontal x .

Ora, devido à ação da resistência do ar, esta função que representa a trajetória do lançamento oblíquo não corresponde graficamente à curva de uma parábola. Este seria o gráfico mostrado com detalhes na Figura 13.

Para finalizar esta modelagem, vamos discutir sobre o alcance que a bola pode atingir. De (5.45) que descreve a trajetória da bola, em que y está em função de x , temos quatro parâmetros que influenciam na trajetória, a saber: v_0 , θ , M e b que são constantes. Assim, esta discussão não se torna nada simples de ser feita, pois envolve uma equação transcendental e, portanto, não podemos encontrar uma expressão analítica para T , exigindo uso de outros métodos¹⁶ (como método da perturbação ou método numérico, que não é o objetivo neste trabalho). Então, direcionaremos a discussão para o estudo de um valor limitante para o alcance. Chamaremos este valor limitante de ζ , onde $L_{\max} \in (x_c, \zeta)$, x_c sendo o ponto crítico¹⁷ da trajetória, ou seja, o valor de x em que a bola atinge a altura máxima. Pelas ferramentas do cálculo diferencial, de (5.37) pode-se notar que a posição horizontal $x(t)$ dada em (5.38) é uma função estritamente crescente, pois,

$$\frac{dx(t)}{dt} = v_x(t) = v_0 \cos(\theta) \cdot e^{-\frac{b}{M}t} > 0.$$

Ademais, do cálculo do limite de $x(t)$ para t tendendo a $+\infty$, em que obtivemos (5.39) e substituindo $\frac{b}{M} = k$, temos que

$$\zeta = \frac{M v_0 \cos(\theta)}{b}.$$

Segue que os valores da coordenada x estão no intervalo $0 \leq x < \zeta$. Além disso, a condição $x < \zeta = \frac{M v_0 \cos(\theta)}{b}$ é necessária para a condição de existência do logaritmo¹⁸ em (5.45). Para completar esse raciocínio, verificaremos que ζ é uma assíntota vertical¹⁹ para a trajetória da bola. De fato:

$$\lim_{x \rightarrow \zeta^-} y(x) = \lim_{x \rightarrow \zeta^-} \left(\tan(\theta) + \frac{M g}{b v_0 \cos(\theta)} \right) x + \frac{M^2 g}{b^2} \cdot \ln \left(1 - \frac{b x}{M v_0 \cos(\theta)} \right) = -\infty.$$

A função trajetória possui uma assíntota vertical dada por $x = \zeta$, sendo este o valor limitante para o alcance, como apresentado na Figura 13. Sendo o gráfico construído com valores arbitrários para melhor visualização.

Portanto, após o tiro de meta, a bola atinge o campo em L onde $x_c < L < \zeta$. Com isso,

¹⁶ Para ver o uso destes métodos pode ser consultado o livro Thornton e Marion (2014, p. 59).

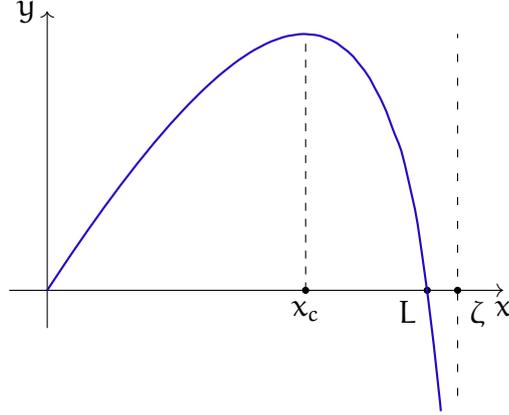
¹⁷ O ponto crítico x_c é obtido calculando a derivada da função dada por (5.45) e igualando-a a zero, onde localiza-se altura máxima da trajetória da bola (ou quando (5.41)).

¹⁸ Para que o logaritmo exista a sua base tem que ser um número maior do que zero e diferente de um, e outra condição é para o logaritmando, que deve ser maior do que zero. No caso do logaritmo natural, basta verificar a condição de existência para o logaritmando, uma vez que a base já atende a condição. Em notação, $\ln(a)$ existe, se e somente se, $a > 0$.

¹⁹ A reta $x = a$ é uma assíntota vertical do gráfico de $y = f(x)$, se pelo menos uma das seguintes afirmações for verdadeira: (i) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$; (ii) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$; (iii) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$; (iv) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$ (FLEMMING; GONÇALVES, 1992, p. 282).

vimos que não temos uma expressão em termos de funções conhecidas que nos dê o alcance L , e menos ainda o alcance máximo L_{\max} . O que podemos dizer é que o alcance máximo é próximo a ζ , ou seja, $L_{\max} \approx \frac{M v_0 \cos(\theta)}{b}$.

Figura 13 – Trajetória da bola, conforme (5.45).



Fonte: O autor (2023).

Entretanto, note que a curva que representa a trajetória da bola no início do lançamento, $y(0)$ assemelha-se a uma parábola, como é possível observar na Figura 13. Então, vamos explicar porquê isso acontece retornando à função da trajetória da bola, $y(x)$. Assim, vamos chamar a expressão $\frac{bx}{M v_0 \cos(\theta)} = z$. Daí, faremos uma aproximação para a função logaritmo natural $\ln(1 - z)$, por meio de uma Expansão em Série de Taylor na vizinhança de zero. Como x é pequeno, então z também é pequeno, próximo de zero. Sabemos que a Expansão em Série de Taylor para o $\ln(1 - z)$ é dada por:

$$\begin{aligned} \ln(1 - z) &= -z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \dots - \frac{z^n}{n}, \\ \ln\left(1 - \frac{bx}{M v_0 \cos(\theta)}\right) &= -\frac{bx}{M v_0 \cos(\theta)} - \frac{b^2 x^2}{2 M^2 v_0^2 \cos^2(\theta)} - \\ &\quad - \dots - \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{bx}{M v_0 \cos(\theta)}\right)^n. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Daí, substituímos (5.46) em (5.45):

$$\begin{aligned} y &= \left(\tan(\theta) + \frac{Mg}{b v_0 \cos(\theta)}\right) x + \frac{M^2 g}{b^2} \cdot \left[-\frac{bx}{M v_0 \cos(\theta)} - \frac{b^2 x^2}{2 M^2 v_0^2 \cos^2(\theta)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{b^3 x^3}{3 M^3 v_0^3 \cos^3(\theta)} - \dots - \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{bx}{M v_0 \cos(\theta)}\right)^n \right], \\ y &= \tan(\theta) x - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2(\theta)} x^2 - \frac{b g}{3 M v_0^3 \cos^3(\theta)} x^3 - \dots - \frac{b^{n-2} g}{n M^{n-2} v_0^n \cos^n(\theta)} x^n. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Podemos notar que, se x for suficientemente pequeno em (5.47), o termo com x^3 torna-se desprezível em relação aos dois termos que o antecedem, o mesmo ocorre com os termos

de grau maior do que 3. Dessa forma temos uma aproximação para a função y :

$$y \approx \tan(\theta) x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\theta)} x^2, \quad (5.48)$$

comportando-se como uma função quadrática, cujo gráfico resulta numa curva parabólica para valores próximos de zero. Por conseguinte, mostramos que a trajetória da bola, no início do lançamento, assemelha-se a uma parábola para valores de x próximos a zero, por meio de uma aproximação em Taylor.

Já discutimos anteriormente que não é possível encontrar uma expressão para o alcance, mas com o mesmo raciocínio anterior, ou seja, utilizando a Expansão em Série de Taylor não seria possível obter uma expressão que forneça uma aproximação para o alcance?

Vamos verificar que isso é possível tomando (5.48) e olhando para esta expansão de primeira ordem em b , escrevendo com a variável x em evidência:

$$\begin{aligned} y &\approx \tan(\theta) x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\theta)} x^2 - \frac{b g}{3 M v_0^3 \cos^3(\theta)} x^3, \\ y &\approx x \cdot \left(\tan(\theta) - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\theta)} x - \frac{b g}{3 M v_0^3 \cos^3(\theta)} x^2 \right), \end{aligned} \quad (5.49)$$

para determinar o alcance L , devemos igualar (5.49) a zero,

$$x \cdot \left(\tan(\theta) - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\theta)} x - \frac{b g}{3 M v_0^3 \cos^3(\theta)} x^2 \right) = 0.$$

Uma solução imediata para a equação é $x = 0$, que na nossa problemática corresponde ao ponto onde o jogador chuta a bola. Mas queremos determinar o ponto em que a bola cai no campo após o chute. Então, este valor é determinado tomando a expressão que está dentro dos parênteses e igualando a zero novamente. Note que temos uma equação de segundo grau. Assim podemos resolver utilizando a fórmula de Bhaskara:

$$\begin{aligned} \tan(\theta) - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\theta)} x - \frac{b g}{3 M v_0^3 \cos^3(\theta)} x^2 &= 0, \\ x &= \frac{\frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\theta)} \pm \sqrt{\left(\frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\theta)}\right)^2 + 4 \cdot \frac{b g}{3 M v_0^3 \cos^3(\theta)} \cdot \tan(\theta)}}{-2 \cdot \frac{b g}{3 M v_0^3 \cos^3(\theta)}}. \end{aligned}$$

Após algumas manipulações algébricas, encontramos:

$$\begin{aligned} x &= \frac{3 M v_0 \cos(\theta)}{4 b} \left(\mp \sqrt{1 + \frac{16 b v_0 \sin(\theta)}{3 M g}} - 1 \right), \\ x_1 &= \frac{3 M v_0 \cos(\theta)}{4 b} \left(-\sqrt{1 + \frac{16 b v_0 \sin(\theta)}{3 M g}} - 1 \right), \\ x_2 &= \frac{3 M v_0 \cos(\theta)}{4 b} \left(\sqrt{1 + \frac{16 b v_0 \sin(\theta)}{3 M g}} - 1 \right) = L. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Note que x_1 resulta num valor negativo, o que não faz sentido para o problema. Entretanto, (5.50) pode ser melhor apresentada: vamos chamar a expressão $\frac{16bv_0 \sin(\theta)}{3Mg} = w$. Daí, faremos uma aproximação para a função em w dada por $\sqrt{1+w}$ por meio de uma Expansão em Série de Taylor na vizinhança de zero, para obter um polinômio:

$$\begin{aligned}\sqrt{1+w} &= 1 + \frac{w}{2} - \frac{w^2}{8} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{w^n}{(n+1)!}, \\ \sqrt{1 + \frac{16bv_0 \sin(\theta)}{3Mg}} &= 1 + \frac{\frac{16bv_0 \sin(\theta)}{3Mg}}{2} - \frac{\frac{16^2 b^2 v_0^2 \sin^2(\theta)}{3^2 M^2 g^2}}{8} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{\left(\frac{16bv_0 \sin(\theta)}{3Mg}\right)^n}{(n+1)!}, \\ &= 1 + \frac{8bv_0 \sin(\theta)}{3Mg} - \frac{32b^2 v_0^2 \sin^2(\theta)}{3^2 M^2 g^2} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{\left(\frac{16bv_0 \sin(\theta)}{3Mg}\right)^n}{(n+1)!}.\end{aligned}\quad (5.51)$$

Para utilizar essa expansão, devemos observar a ordem da expansão de y em b , que foi de primeira ordem, mantendo a mesma ordem na expansão de $\sqrt{1 + \frac{16bv_0 \sin(\theta)}{3Mg}}$. Então, usamos os três primeiros termos de (5.51) para termos x_2 em primeira ordem de b . Daí, substituímos (5.51) em (5.50):

$$\begin{aligned}L &\approx \frac{3Mv_0 \cos(\theta)}{4b} \left(\chi + \frac{8bv_0 \sin(\theta)}{3Mg} - \frac{32b^2 v_0^2 \sin^2(\theta)}{3^2 M^2 g^2} - \chi \right), \\ L &\approx \frac{3Mv_0 \cos(\theta)}{4b} \cdot \frac{8bv_0 \sin(\theta)}{3Mg} \left(1 - \frac{4bv_0 \sin(\theta)}{3Mg} \right), \quad 2 \sin(\theta) \cos(\theta) = \sin(2\theta), \\ L &\approx \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g} \cdot \left(1 - \frac{4bv_0 \sin(\theta)}{3Mg} \right).\end{aligned}\quad (5.52)$$

Portanto, com (5.52), determinamos uma expressão que fornece um valor aproximado para o alcance.

Perceba que se fizermos $b = 0$ a expressão resultará em (5.36), que é o alcance sem resistência do ar. Logo, a aproximação encontrada para o alcance, com resistência do ar, faz sentido. Ademais, comparando-se as duas expressões obtidas para o alcance, (5.36) e (5.52), note que a segunda diferencia-se pelo fator $1 - \frac{4bv_0 \sin(\theta)}{3Mg}$, tornando esse alcance menor que o alcance sem resistência do ar. Com isso se conclui a resolução dessa aplicação.

Análise dimensional: Mediante as conversas com o **Professor 3** no decorrer da resolução desta aplicação, percebemos a necessidade de acrescentar uma breve discussão sobre a análise dimensional e pontuar uma diferença dos pontos de vista entre a Física e a Matemática. Na Física trabalha-se com as medidas (os números e as suas unidades), enquanto que na Matemática trabalha-se, em geral, com os números, sem levar em consideração as unidades envolvidas nos cálculos, colocando as unidades apenas no resultado final. Faremos a análise dimensional de alguns termos e equações, conforme o Sistema Internacional de Unidades (SI). A notação adotada para indicar a unidade de medida de uma grandeza ou equação são os colchetes. Por exemplo, para indicar a unidade de medida da aceleração, faz-se: $[a] = m/s^2$.

i) Análise dimensional da constante de resistência do ar \mathbf{b} : Sabemos que $\vec{F}_{\text{rar}} = -\mathbf{b} \vec{v}$, donde:

$$[\mathbf{b}] = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2}{\text{m}/\text{s}} = \text{kg}/\text{s},$$

com a análise dimensional dessa equação, conclui-se que $[\mathbf{b}] = \text{kg}/\text{s}$.

Conseqüentemente, conclui-se que $[\mathbf{k}] = \text{s}^{-1}$. Pois, $\mathbf{k} = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{M}}$ e $[\mathbf{k}] = \frac{\text{kg}/\text{s}}{\text{kg}}$.

ii) Análise dimensional da função horária da posição na direção horizontal: Dada a função

$$x(t) = \frac{v_0 \cos(\theta)}{\mathbf{k}} \cdot (1 - e^{-\mathbf{k}t}),$$

vamos analisar a dimensão, termo a termo:

$$\left[\frac{v_0 \cos(\theta)}{\mathbf{k}} \right] = \frac{\text{m}/\text{s}}{1/\text{s}} = \text{m}, \text{ sendo que } \cos(\theta) \text{ é adimensional,}$$

$$(1 - e^{-\mathbf{k}t}) \text{ é adimensional, pois } [\mathbf{k} \cdot t] = \frac{1}{\text{s}} \cdot \text{s}.$$

Portanto, concluímos que $[x(t)] = \text{m}$, uma vez que ambos os termos possuem unidades consistentes dimensionalmente.

iii) Análise dimensional do termo $\ln\left(1 - \frac{\mathbf{b}x}{\mathbf{M}v_0 \cos(\theta)}\right)$: Neste caso, basta analisar a dimensão de

$$\left[\frac{\mathbf{b}x}{\mathbf{M}v_0 \cos(\theta)} \right] = \frac{\text{kg}/\text{s} \cdot \text{m}}{\text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}} = 1,$$

é adimensional. Logo, $\ln\left(1 - \frac{\mathbf{b}x}{\mathbf{M}v_0 \cos(\theta)}\right)$ é adimensional, como deve ser um logaritmando.

Acreditamos que, para os leitores que não são da área de Física, com essas explicações e análises, já seja possível uma melhor compreensão deste tipo de discussão.

Aplicação numérica: Considere uma partida de futebol, onde o goleiro vai cobrar um tiro de meta. A bola está em repouso no campo de futebol a 5,5 m da linha de fundo, e o goleiro faz um chute em direção ao campo adversário. O chute do goleiro tem velocidade de 32 m/s que faz um ângulo de 40° com o solo. Determine a posição que a bola cai no campo considerando o movimento com resistência do ar e também o alcance da bola. Admita a constante de resistência do ar $\mathbf{b} = 0,2158 \text{ kg}/\text{s}$, sendo que $0 < \mathbf{b} < 1$ e a massa da bola de 430 g.

Resolução. Para resolver este problema, precisamos fazer algumas considerações. Considere os dados a seguir: a massa da bola de 430 g e que o campo de futebol tem 110 m de comprimento, vamos admitir a aceleração da gravidade $\mathbf{g} = 9,81 \text{ m}/\text{s}^2$ e a constante de resistência do ar $\mathbf{b} = 0,2158 \text{ kg}/\text{s}$ que foi dada. Devemos ter atenção às unidades de medida, é necessário que todos os valores estejam com as unidades de medida do SI.

Assim, $M = 0,43 \text{ kg}^{20}$ e $k = \frac{b}{M} = \frac{0,2158 \text{ kg/s}}{0,43 \text{ kg}} = 0,502 \text{ s}^{-1}$.

Para determinar o ponto onde a bola cai no campo após o chute do goleiro, devemos calcular o alcance com resistência do ar.

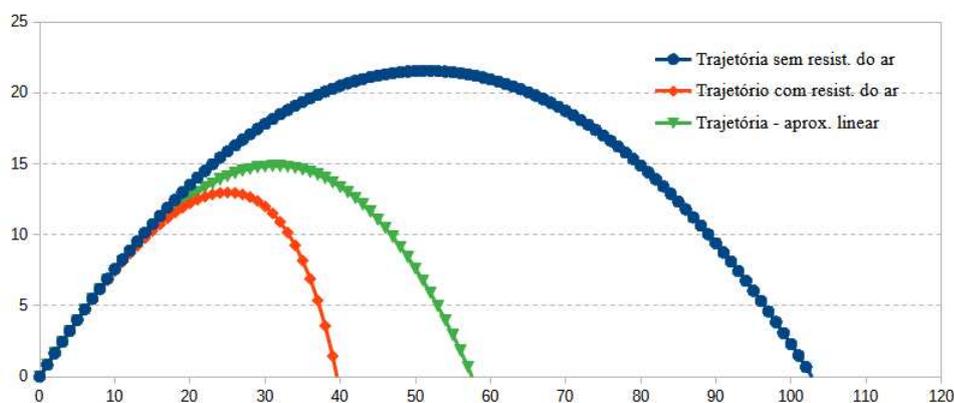
$$L = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g} \cdot \left(1 - \frac{4k v_0 \sin(\theta)}{3g}\right)$$

$$L = \frac{(32 \text{ m/s})^2 \cdot \sin(2 \cdot 40^\circ)}{9,81 \text{ m/s}^2} \cdot \left(1 - \frac{4 \cdot 0,502 \text{ s}^{-1} \cdot 32 \text{ m/s} \cdot \sin 40^\circ}{3 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2}\right) = 41,47 \text{ m}.$$

Como o goleiro chutou a bola a 5,5 m da linha de fundo e a bola teve um alcance (aproximado) de 41,47 m, então a bola caiu no campo a 46,97 m da linha de fundo de onde o goleiro bateu o tiro de meta, pois $5,5 \text{ m} + 41,47 \text{ m} = 46,97 \text{ m}$. Também, podemos dizer que a bola caiu 8,03 m antes do meio do campo, pois $55 \text{ m} - (5,5 \text{ m} + 41,47 \text{ m}) = 8,03 \text{ m}$. Portanto, a bola cai no campo a 46,97 m da linha de fundo de onde o goleiro bateu o tiro de meta, tendo um alcance de 41,47 m.

A Figura 14 mostra graficamente a comparação entre as duas trajetórias e os respectivos alcances.

Figura 14 – Comparação entre as trajetórias dos dois tipos de lançamentos oblíquos (com e sem resistência do ar) e da trajetória como aproximação linear.



Fonte: Construído pelo autor, com uso no software Excel (2023).

Pode-se verificar, com os dados numéricos substituídos em (5.35), que a trajetória descrita pela bola sem resistência do ar corresponde a uma parábola, curva na cor azul. Enquanto, a curva na cor vermelha, representa a trajetória da bola sofrida à ação da resistência do ar, ficando evidente que esta trajetória não corresponde graficamente à curva de uma parábola. Os cálculos para gerar a curva foram feitos utilizando (5.45). A curva na cor verde, foi gerada utilizando (5.49), correspondente a aproximação linear.

²⁰ Cabe uma explicação sobre as unidades de medida de massa: 430 g é diferente de 0,43 kg porque são medidas obtidas de instrumentos diferentes. Essa problemática vem da teoria de erros: toda a medida obtida tem uma incerteza envolvida chamada erro. Para uma leitura um pouco mais aprofundada, sugerimos o livro TAYLOR, John R. **Introdução à análise de erros: o estudo de incertezas em medições físicas**. 2. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.

Em resumo, destaca-se no problema da cobrança de tiro de meta numa partida de futebol os seguintes elementos.

Dados: O problema trata do lançamento oblíquo de um objeto com massa M , velocidade inicial v_0 , ângulo de lançamento $\theta \in (0^\circ, 90^\circ)$, aceleração gravitacional g e constante de resistência do ar b conhecidos. Foi proposto obter as equações de movimento e fazer uma discussão junto da trajetória e do alcance da bola.

Considerações: Após pesquisar em alguns livros de física e artigos científicos com a finalidade de entender como esses materiais abordam o problema, procuramos explorar os conceitos e teoremas do Cálculo Diferencial e Integral, sem deixar de lado os conceitos da Física.

Leis e princípios da física e da matemática: Utilizamos: o princípio da independência dos movimentos simultâneos; plano cartesiano com referencial do movimento; decomposição de vetores; velocidade média no M.R.U.; derivação pelo limite; integração em t ; EDO separável; aceleração média no M.R.U.V.; equações paramétricas; segunda Lei de Newton; força da resistência do ar; otimização de função; cálculo de limite e aproximação de função por Expansão em Série de Taylor.

Resultados: Equações de movimento sem e com resistência do ar: função horária do deslocamento horizontal; função horária da velocidade; função horária da altura; função da altura em relação ao deslocamento horizontal. As trajetórias diferem-se nas duas situações estudadas: sem resistência do ar, a trajetória é parabólica e com resistência do ar, a curva sobre uma ‘deformação’ possuindo uma assíntota vertical em $x = \zeta$. Sobre o alcance, no lançamento oblíquo sem a resistência do ar, deduzimos uma expressão para o alcance e também para o alcance máximo, que ocorre para $\theta = 45^\circ$. Por outro lado, no lançamento oblíquo com resistência do ar, discutimos que não é possível obter uma expressão para o alcance, devido à equação da trajetória ser transcendental (não possui solução analítica) e, do mesmo modo, para o alcance máximo. Dessa forma, o caminho adotado nesta aplicação, foi de fazer uma discussão baseada nas ferramentas do CDI a partir da equação da trajetória $y(x)$. Como elementos analisados destacam-se: crescimento da função, ponto crítico e assíntota vertical.

Discussão: Um outro procedimento que poderia ter sido feito é, a partir das equações de movimento com resistência do ar deduzidas, calcular o limite das funções fazendo b se aproximar de zero ($b \rightarrow 0$). Dessa forma encontraríamos as mesmas equações deduzidas em (5.29), (5.33), (5.31) e (5.45). Também, no ANEXO A, é apresentada outra abordagem para um problema parecido que evidencia a resolução por equações diferenciais ordinárias lineares. O estudo do lançamento oblíquo tem importância em engenharia, por exemplo, em lançamento de foguetes, em balística e até no atletismo no lançamento de dardo.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente investigação almejou, por meio de uma pesquisa qualitativa e descritiva, e via entrevistas realizadas com três professores que lecionam em cursos superiores do Instituto Federal Catarinense, *Campus* Rio do Sul, descrever e propor modelos matemáticos envolvendo equações diferenciais ordinárias que podem ser pensados para a aplicação nos cursos superiores oferecidos pelo IFC – Rio do Sul. Com este trabalho, procurou-se apresentar propostas didáticas auxiliares de aplicações, ilustrando como conceitos e teoremas matemáticos podem ser utilizados para deduzir fenômenos relacionados aos cursos dos estudantes.

Em relação aos principais resultados sobre a proposição de modelos matemáticos, tendo a contribuição dos três docentes entrevistados, destacam-se as resoluções e discussões, a partir do olhar de um professor de matemática, dos seguintes modelos matemáticos: esvaziamento de um reservatório – baseado na dinâmica de fluidos usando a Equação de Bernoulli e Teorema de Torricelli, além da EDO separável; controle de pH da fertirrigação da cultura da mangueira – baseado na área de sistemas de controle, utilizando a Transformada de Laplace e outras ferramentas do CDI; lançamento oblíquo de um objeto – baseado na segunda Lei de Newton e na EDO separável.

Ademais, foram realizadas discussões, com certa profundidade, como podemos enfatizar, na proposta do controle de pH da fertirrigação da cultura da mangueira acerca da aplicação das Transformadas de Laplace para resolver EDO e da necessidade de linearização de funções. Cabe também destacar as discussões realizadas sobre o movimento do lançamento oblíquo de um objeto, principalmente, considerando a resistência do ar, num ponto em que alguns livros da área da Física não discutem: a ausência de uma ‘fórmula’ que permita encontrar o alcance máximo do objeto. E, ainda, fizemos as análises dimensionais de três expressões que, em geral, os livros de Matemática não fazem.

Em relação ao mapeamento das dificuldades que marcam o ensino e aplicações de EDOs nos cursos superiores oferecidos pelo IFC – Rio do Sul, os professores entrevistados foram unânimes em dizer que boa parte dos estudantes possuem problemas conceituais, principalmente, no que se refere à interpretação da derivada, que é a base das equações diferenciais, e conseqüentemente, na falta de significado das mesmas. E, tendo um outro grupo de estudantes apontado com dificuldades nas operações matemáticas.

O presente estudo apresenta contribuições teóricas e práticas. Quanto às contribuições teóricas, destaca-se sobre os estudos de ensino de EDO, que trazem apontamentos das dificuldades que os estudantes continuam demonstrando em sala de aula, indicando um olhar mais atento sobre o ensino de matemática. Outra contribuição teórica levantada neste estudo foi a discussão da equação da trajetória da bola com resistência do ar, equação (5.45), que não possui solução algébrica. Desta forma foi necessário utilizar métodos numéricos ou trabalhar com funções mais complexas.

Referente à contribuição prática, a investigação propôs modelos matemáticos que podem servir de inspiração para uso na sala de aula aos professores que lecionam disciplinas que abordam conceitos de EDO. Desse modo, estão evidenciadas as relações da matemática com outras áreas do conhecimento, conforme apresentado no segundo parágrafo desta seção.

Acerca das limitações presentes neste estudo, é importante ressaltar que foi restrita aos cursos superiores do IFC – Rio do Sul. Assim, talvez, os dados obtidos em outras instituições de ensino superior poderiam produzir resultados diferentes destes. Outra limitação constada foi que poderíamos ter explorado outros elementos em cada uma das propostas. Como, no esvaziamento de um reservatório, poderíamos determinar o nível de líquido no reservatório no instante t . Por outro lado, na proposta do lançamento oblíquo, poderíamos explorar: a altura máxima atingida pela bola e o tempo total do movimento. Pois, o objetivo dado nesta proposta foi, principalmente, de analisar a trajetória e encontrar uma aproximação para ela e ficamos restrito à essa situação.

Posto isso, em relação às futuras investigações, recomenda-se a exploração de outros elementos e análises no lançamento oblíquo de um objeto com resistência do ar. Sugere-se, portanto, que seja analisado a altura máxima atingida pela bola, o tempo total do movimento e, também, a comparação da trajetória da bola com outros valores para a constante de resistência do ar (**b**). Suspeitamos que pode ser possível fazer investigações usando, por exemplo, Equações de Diferenças Finitas relacionadas ao ensino médio.

Espera-se que as informações coletadas nas entrevistas possam auxiliar os docentes na reflexão das estratégias e planejamento nas aulas sobre os estudos de EDO, e principalmente, de apresentar e discutir aplicações envolvendo equações diferenciais ordinárias em cursos como Agronomia, Engenharia Mecatrônica e Física. Além disso, do ponto de vista pedagógico, as discussões expostas nas propostas de modelos matemáticos apontam para alguns tópicos matemáticos que algumas vezes são deixadas de lado (ou não é dada a devida importância e significado) em aulas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANTON, Howard. **Cálculo: um novo horizonte**, v. 1. 6. ed. São Paulo: Bookman, 2000.

_____. **Cálculo: um novo horizonte**, v. 2. 6. ed. São Paulo: Bookman, 2000.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática: uma nova estratégia**. Rio de Janeiro: Editora Contexto, 2002.

BRASIL. Lei nº 11.892, de 29 de dezembro de 2008, 2008. Disponível em:
https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2007-2010/2008/lei/l11892.htm.
Acesso em: 27 jan. 2023.

CAMINO, Juan Francisco. **Análise Linear de Sistemas**. Campinas: [s.n.], 2023.
Disponível em:
https://www.fem.unicamp.br/~camino/CourseNotes/Apostila_ES601_Camino.pdf/.
Acesso em: 20 set. 2023.

CHIACCHIO, Ary; OLIVEIRA, Eduardo Capela de. **Exercícios Resolvidos em Equações Diferenciais Ordinárias – incluindo transformadas de Laplace e séries**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2014.

DOERING, Claus I.; LOPES, Artur O. **Equações Diferenciais Ordinárias**. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

DOMINGOS, Jorge R. V.; BORDEIRA, Jose Antonio S. Novas abordagens para o ensino de equações diferenciais em cursos básicos de engenharia. **CEP**, v. 25651, p. 070, 2001.

DULLIUS, Maria Madalena; VEIT, Eliane Angela; ARAUJO, Ives Solano. Dificuldades dos alunos na aprendizagem de Equações Diferenciais Ordinárias. **Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), v. 6, n. 2, p. 207–228, 2013.

FIGUEIREDO, Djairo Guedes de; NEVES, Aloisio Freiria. **Equações Diferenciais Aplicadas**. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. **Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos**. 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2012.

FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Mirian Buss. **Cálculo A: funções, limite, derivação, integração**. 5. ed. São Paulo: Makron, 1992.

FREIRE, Wilson Hugo C. *et al.* Lançamento oblíquo com resistência do ar: Uma análise qualitativa. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, SciELO Brasil, v. 38, p. 1306, 2016.

INSTITUTO FEDERAL CATARINENSE–CAMPUS RIO DO SUL. **Projeto Pedagógico do Curso Superior de Bacharelado em Ciência da Computação**. Rio do Sul, 2022. Disponível em: http://bcc.ifc-riodosul.edu.br/docs/ppc_2022.pdf. Acesso em: 20 abr. 2023.

_____. **Projeto Pedagógico do Curso Superior de Licenciatura em Física**. Rio do Sul, 2021. Disponível em: <https://www.ifc-riodosul.edu.br/site/fisica/projeto-politico-pedagogico/>. Acesso em: 14 mar. 2023.

_____. **Projeto Pedagógico do Curso Superior de Pedagogia**. Rio do Sul, 2018. Disponível em: E-mail. Acesso em: 15 mai. 2023.

_____. **Projeto Pedagógico do Curso Superior em Agronomia**. Rio do Sul, 2020. Disponível em: <http://agronomia.ifc-riodosul.edu.br/wp-content/uploads/2021/03/PPC-AGRONOMIA-FINAL.pdf>. Acesso em: 27 mar. 2023.

_____. **Projeto Pedagógico do Curso Superior em Engenharia Mecatrônica – Bacharelado**. Rio do Sul, 2016. Disponível em: <https://www.ifc-riodosul.edu.br/site/wp-content/uploads/2022/05/PPCEngMecatronica2017.pdf>. Acesso em: 16 mar. 2023.

LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com Geometria Analítica**. 3. ed. Rio de Janeiro: Harbra, 1994. v. 1.

LOPES, Aldo Peres Campos. Modelagem Matemática e Equações Diferenciais: um mapeamento das pesquisas em Educação Matemática. **REnCiMa. Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 12, n. 4, p. 1–25, 2021.

LÜDKE, Menga; ANDRÉ, Marli. **Pesquisa em Educação: abordagens qualitativas**. 2. ed. Rio de Janeiro: E.P.U., 2018.

MACÊDO, Josué Antunes de; GREGOR, Isabela Cristina Soares. Dificuldades nos processos de ensino e de aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral. **Educação Matemática Debate**, Universidade Estadual de Montes Claros, v. 4, p. 1–24, 2020.

MORAES, Roque; GALIAZZI, Maria do Carmo. **Análise Textual Discursiva**. 2. ed. Ijuí: Editora Ijuí, 2011.

NAGLE, R. Kent; SAFF, Edward B.; SNIDER, Arthur David. **Equações Diferenciais**. 8. ed. São Paulo: Person Education do Brasil, 2012.

NISE, Norman S. **Engenharia de Sistemas de Controle**. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

NORMEY-RICO, Julio Elias; MORATO, Marcelo Menezes. **Introdução ao Controle de Processos**. São Paulo: Blucher, 2021.

OGATA, K. **Engenharia de Controle Moderno**. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1998.

OLIVEIRA, Eliane Alves de; IGLIORI, Sonia Barbosa Camargo. Ensino e aprendizagem de equações diferenciais: um levantamento preliminar da produção científica. **EM TEIA-Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, Universidade Federal de Pernambuco, v. 4, n. 2, p. 1–24, 2013.

PINTO, José M. *et al.* Fertirrigação. *In*: Brasília: GENU, P.J. de C.; PINTO, A.C. de Q. (Ed.). **A cultura da mangueira**. Brasília, DF: Embrapa Informação Tecnológica, 2002. cap. 11, p. 223–241.

PINTO, Rieuse Lopes; LIMA, Gabriel Loureiro de. Ensino de Equações Diferenciais Ordinárias em Cursos de Engenharia Mecânica. **Revista de Produção Discente em Educação Matemática**, v. 6, n. 2, 2017.

_____. Pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem de equações diferenciais ordinárias. **Revista de Produção Discente em Educação Matemática**, v. 8, n. 2, 2019.

PORTO, Rodrigo de Melo. **Hidráulica Básica**. 4. ed. São Carlos: EESC-USP, 2006.

PRODANOV, Cleber Cristiano; FREITAS, Ernani Cesar de. **Metodologia do Trabalho Científico: métodos e técnicas de pesquisa e do trabalho acadêmico**. 2. ed. Novo Hamburgo: Feevale, 2013.

ROGAWSKI, Jon. **Cálculo**. São Paulo: Bookman, 2009. v. 2.

SIMMONS, George F. **Differential Equations with Applications and Historical Notes**. 3. ed. Boca Raton: CRC Press, 2017.

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA. **Regimento do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional**. Rio de Janeiro, 2020. Disponível em: <https://profmat-sbm.org.br/regimento/>. Acesso em: 23 jan. 2023.

STEWART, James. **Cálculo**. 5. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006. v. 1.

THORNTON, Stephen T.; MARION, Jerry B. **Dinâmica Clássica de Partículas e Sistemas**. São Paulo: Cengage Learning, 2014.

ZILL, Dennis G. **Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem**. 2. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

APÊNDICE A – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TCLE)

Você está sendo convidado a participar da pesquisa “**Noções de Equações Diferenciais Ordinárias**”: algumas aplicações propostas por professores do Instituto Federal Catarinense – *Campus* Rio do Sul”, desenvolvida por Ruy Piehowiak, discente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal de Santa Catarina, *Campus* Blumenau (UFSC), sob orientação do Professor Dr. André Vanderlinde da Silva.

Mais especificamente, você está sendo convidado a participar de uma entrevista que versará sobre sua experiência em sala de aula com as aplicações de Equações Diferenciais Ordinárias. Este convite também se deve à pesquisa estar voltada aos cursos superiores do Instituto Federal Catarinense, *Campus* Rio do Sul (IFC - Rio do Sul), a qual você está vinculado como docente, que possuem disciplinas que fazem uso de Equações Diferenciais Ordinárias.

Este documento se chama Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE). Nele estão contidas as principais informações sobre o estudo, objetivos, metodologias, riscos e benefícios, dentre outras informações. Este TCLE se refere ao projeto de pesquisa acima mencionado, cujo objetivo é propor modelos matemáticos envolvendo Equações Diferenciais Ordinárias que podem ser pensados para aplicação nos cursos superiores oferecidos pelo IFC - Rio do Sul. A pesquisa atende todas as especificações da Resolução CNS nº 510/16.

Esta pesquisa caracteriza-se por uma pesquisa qualitativa, em que a coleta de dados será feita por meio de entrevistas. A entrevista será do tipo semiestruturada, com perguntas elaboradas a partir de um roteiro de entrevista. Se necessário, serão incluídas novas perguntas no decorrer da entrevista. Estima-se que você precisará de aproximadamente 30 minutos para responder as perguntas. A entrevista somente será gravada (registro audiovisual) se houver autorização do entrevistado. A entrevista será realizada em um único encontro, no local e horário que você determinar, durante o mês de março ou abril de 2023. A propósito, tem uma pergunta da entrevista que pode não ter resposta imediata. Neste caso, será dado um prazo de 20 dias para sua formulação e devolutiva ao pesquisador.

Os riscos envolvidos nesta pesquisa são de constrangimento durante a entrevista e de sigilo de dados. Pode haver algum desconforto durante a entrevista, constrangimento perante o pesquisador e ocorre, involuntariamente, a violação do sigilo de seus dados e informações. No entanto, o entrevistador (pesquisador) teve todo o cuidado na elaboração do roteiro de entrevista que passou por aprovação prévia do orientador, evitando eventuais desconfortos ao participante. É garantido que o seu nome não será divulgado, sendo mantido o mais rigoroso sigilo mediante a omissão de informações que permitam identificá-lo. Os dados da entrevista serão transcritos e armazenados em arquivos digitais, para garantir uma

maior fidelidade em seu registro, e o material será armazenado em local seguro, a saber, em pasta restrita hospedada no serviço de armazenamento e sincronização de arquivos “Google Drive” vinculado à conta do pesquisador. Da mesma forma, o tratamento dos dados coletados seguirá as determinações da Lei Geral de Proteção de Dados (LGPD – Lei 13.709/18) e o uso destes dados será única e exclusivamente para a pesquisa. Ao final da pesquisa, todo material será mantido em arquivo, por pelo menos 5 anos, conforme Resolução CNS nº 510/16. Você poderá receber esclarecimentos antes, durante e após a finalização do processo.

Ao participar desta pesquisa, você não terá nenhum benefício direto. Entretanto, esperamos que este estudo traga informações importantes das aplicações das Equações Diferenciais Ordinárias, de forma que o conhecimento que será construído a partir desta pesquisa possa contribuir com os professores e os estudantes no frequente uso de equações diferenciais nos cursos diretamente envolvidos nesta pesquisa. Desta forma, há benefício indireto relacionado com a sua colaboração nesta pesquisa.

Sua participação é voluntária e livre de qualquer benefício financeiro. Você tem plena autonomia para decidir se quer ou não participar, bem como retirar sua participação a qualquer momento. Você não será penalizado de nenhuma maneira caso decida não consentir sua participação, ou desistir da mesma. Contudo, ela é muito importante para a execução da pesquisa. Para confirmar sua participação, você precisará ler todo este documento e depois assinar no final dele.

Os resultados da pesquisa serão divulgados em palestras dirigidas ao público participante, relatórios individuais para os entrevistados, artigos científicos e na dissertação.

O Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos (CEPSH) da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) é um órgão colegiado interdisciplinar, deliberativo, consultivo e educativo, vinculado à UFSC, mas independente na tomada de decisões, criado para defender os interesses dos participantes da pesquisa em sua integridade e dignidade e para contribuir no desenvolvimento da pesquisa dentro de padrões éticos.

Esta pesquisa foi aprovada pelo Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos (CEPSH) da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). Caso persistam dúvidas sobre o estudo, ou em caso de denúncias e/ou sugestões, o Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos está disponível para atender você no Prédio Reitoria II, 7º andar, sala 701, localizado na Rua Desembargador Vitor Lima, nº 222, CEP: 88040-400, Trindade, Florianópolis-SC. Telefone para contato: (48)3721-6094, no horário das 08h às 12h e das 14h às 18h, de segunda a sexta-feira. Você poderá também encaminhar um e-mail para: cep.propesq@contato.ufsc.br.

Para contatar um dos pesquisadores da pesquisa, você poderá encaminhar um e-mail, ligar ou mandar mensagem pelo WhatsApp, a qualquer momento: Ruy Piehowiak, (47)98818-

1733 e ruy.piehowiak@posgrad.ufsc.br.

Esse Termo foi elaborado em duas vias, que devem ser rubricadas em todas as suas páginas e assinadas ao seu término.

Eu, concordo em participar voluntariamente da presente pesquisa como participante. O pesquisador me informou sobre tudo o que vai acontecer na pesquisa, o que terei que fazer, inclusive sobre os possíveis riscos e benefícios envolvidos na minha participação. O pesquisador me garantiu que eu poderei sair da pesquisa a qualquer momento, sem dar nenhuma explicação, e que esta decisão não me trará nenhum tipo de penalidade ou interrupção de meu tratamento.

() Autorizo a gravação da entrevista.

() Não autorizo a gravação da entrevista.

Nome do participante

Assinatura do participante

Local e data

Eu, Ruy Piehowiak, declaro cumprir as exigências contida no Art. 17, da Resolução CNS nº 510/16.

Assinatura do pesquisador

Assinatura do orientador

Local e data

APÊNDICE B – ROTEIRO PARA ENTREVISTA**Metadados e orientações**

Nome do entrevistado: _____

Nome do pesquisador presente: _____

Data: ____/____/____ Local da entrevista: _____

Contato inicial:

- Agradecer pela disponibilidade em receber o pesquisador.
- Apresentar, de forma breve, os objetivos da pesquisa.
- Explicar as informações contidas no termo de consentimento de entrevista.
- Solicitar a assinatura do termo de consentimento de entrevista.
- Entregar uma via assinada pelo pesquisador para o entrevistado.

Procedimentos iniciais:

- Preparar o gravador.
- Iniciar a gravação.

Características socioeconômicas dos entrevistados:

- Idade:

- Descrição da formação docente (Titulações e as respectivas áreas):

- Tempo de serviço de docência:

- Tempo de serviço no Instituto Federal Catarinense:

- Regime de trabalho no Instituto Federal Catarinense:

- Curso(s) em que atua no Instituto Federal Catarinense:

- Curso considerado para esta entrevista:

- Quais são as disciplinas que leciona no curso considerado para esta entrevista:

Questões para entrevista

Observação: Após fazer cada pergunta explicar rapidamente quais são os objetivos desta pergunta.

1. No seu entendimento, quais são os conhecimentos referentes às equações diferenciais ordinárias demandados pelo seu curso de atuação?
2. Quanto às aplicações dos conhecimentos referentes às equações diferenciais ordinárias, quais são as dificuldades manifestadas pelos estudantes?
3. Quanto às aplicações dos conhecimentos referentes às equações diferenciais ordinárias, apresente/proponha um modelo matemático envolvendo EDOs com aplicação no seu curso de atuação.
4. Na sua percepção, a compreensão do modelo citado acima é fundamental para a formação profissional do egresso? Justifique.

Considerações finais:

- Perguntar ao entrevistado se há alguma informação adicional que gostaria de acrescentar em relação aos assuntos abordados durante a entrevista.
- Perguntar se o entrevistado ficou com alguma dúvida.

Finalização e agradecimento:

- Agradecer a disponibilidade do entrevistado em fornecer as informações.
- Salientar que os resultados da pesquisa estarão à disposição dele e, se tiver interesse, deverá entrar em contato com o pesquisador.

ANEXO A – LANÇAMENTO VERTICAL DE UM OBJETO

Aula 15 – Complemento

Lista de Exercícios Resolvidos

Exercício 15.1¹

(i) Determine a equação de movimento para uma massa M que é atirada verticalmente para cima a partir de um ponto do solo, sabendo que a resistência do ar é proporcional à sua velocidade. (ii) Resolva a equação diferencial obtida no item anterior, sabendo que a massa foi lançada com velocidade inicial v_0 . (iii) Encontre a altura máxima atingida pela massa.

Solução:

(i) Consideremos o ponto de lançamento, no solo, como a origem de nosso sistema de coordenadas. Orientemos para cima a trajetória e consideremos a ordenada $x(t)$ como sendo a distância entre a massa e o ponto de origem, num tempo t . A massa M sofre a ação de duas forças, a saber: a força gravitacional de magnitude $-Mg$, onde g é a aceleração da gravidade, e a resistência do ar, de magnitude $-\alpha v$ onde v é a velocidade da massa na direção x e α é uma constante de proporcionalidade. Como o corpo é lançado de baixo para cima, ambas as forças estão dirigidas para baixo.

Utilizando a segunda lei de Newton, temos que *massa* \times *aceleração* = *resultante das forças*. Então,

$$\begin{aligned} M \frac{d^2}{dt^2}x(t) &= -Mg - \alpha v \\ &= -Mg - \alpha \frac{d}{dt}x(t). \end{aligned}$$

Dividindo os membros da equação acima por M , obtém-se

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + k \frac{d}{dt}x(t) = -g,$$

onde definimos $k = \alpha/M$; esta é a equação desejada.

(ii) Esta é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem, linear e não-homogênea, com coeficientes constantes. Para resolvê-la podemos utilizar o método de variação dos parâmetros, mas como os coeficientes são constantes empregaremos o método dos coeficientes a determinar.

¹ Este exercício resolvido foi retirado do material didático de Equações Diferenciais (Módulo 2 – Aula 15 – Complemento), do Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro (CEDERJ).

Primeiramente, resolvemos a equação diferencial homogênea a ela associada, ou seja

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + k \frac{d}{dt}x(t) = 0.$$

Então, sendo $\frac{dx}{dt} \equiv v(t)$ temos

$$\frac{d}{dt}v(t) + kv(t) = 0,$$

que é separável, com solução

$$v(t) = c_1 e^{-kt},$$

onde c_1 é uma constante de integração. Integrando novamente temos

$$x(t) = -\frac{c_1}{k} e^{-kt} + c_2,$$

onde c_2 é uma outra constante de integração. Esta é a solução geral da equação homogênea, uma vez que contém duas constantes arbitrárias.

Passemos agora a obter a solução particular da equação não-homogênea utilizando o método de coeficientes a determinar. O termo não-homogêneo é a função constante $f(x) = g$, que é um polinômio de grau zero em x . Por isso, procuramos uma solução particular na forma de um polinômio de primeiro grau,

$$x_p(t) = d_1 t + d_2,$$

onde d_1 e d_2 devem ser determinados. Substituindo a equação acima na equação diferencial obtemos

$$k d_1 = -g \Rightarrow d_1 = -\frac{g}{k},$$

o que quer dizer que uma solução particular é

$$x_p(t) = -\frac{g}{k} t + d_2,$$

onde d_2 é uma constante. Finalmente, a solução geral da equação não-homogênea é obtida somando a solução da equação homogênea com a solução particular,

$$x(t) = -\frac{c_1}{k} e^{-kt} - \frac{g}{k} t + d_3,$$

onde $d_3 = c_2 + d_2$ é uma constante.

Passemos agora a determinar as constantes c_1 e d_3 por meio das condições dadas. Sabemos que $x(0) = 0$, uma vez que escolhemos a origem dos espaços no ponto de lançamento, a velocidade inicial é $v(0) = v_0$. Introduzindo estas condições na solução geral obtemos

$$\begin{aligned} x(0) &= -\frac{c_1}{k} + d_3 = 0; \\ v(0) &= c_1 - \frac{g}{k} = v_0. \end{aligned}$$

Resolvendo este sistema para c_1 e d_3 e substituindo o resultado na solução geral encontramos finalmente

$$x(t) = -\frac{1}{k^2} (g + k v_0) [1 - e^{-kt}] - \frac{g}{k} t,$$

que é a solução procurada.

(iii) Para determinar a altura máxima devemos, primeiramente, obter o tempo de subida, ou seja, o tempo que o corpo leva até atingir a velocidade zero (quando ocorre a inversão do sentido do movimento). Derivando a solução encontramos a expressão para a velocidade:

$$v(t) = \frac{1}{k} (g + k v_0) e^{-kt} - \frac{g}{k}.$$

Logo, devemos encontrar o valor de t que satisfaz a seguinte equação:

$$\frac{1}{k} (g + k v_0) e^{-kt} - \frac{g}{k} = 0,$$

que é dado por

$$t = \frac{1}{k} \ln \left(\frac{g + k v_0}{g} \right).$$

Substituindo este valor de t na equação para $x(t)$ encontramos o valor da altura máxima, a saber

$$\begin{aligned} x_{\max} &= -\frac{1}{k^2} (g + k v_0) \left(1 - \frac{g}{g + k v_0} \right) - \frac{g}{k} \cdot \frac{1}{k} \ln \left(\frac{g + k v_0}{g} \right), \\ &= -\frac{1}{k} \left[v_0 + \frac{g}{k} \ln \left(\frac{g + k v_0}{g} \right) \right]. \end{aligned}$$