



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CAMPUS FLORIANÓPOLIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

MÁRIO CÉSAR ALEXANDRE JÚNIOR

**CONFIABILIDADE ESTRUTURAL DE LAJES DIMENSIONADAS SEGUNDO AS
NORMAS BRASILEIRAS DE PROJETO ESTRUTURAL DE CONCRETO ARMADO**

Florianópolis
2024

Mário César Alexandre Júnior

**CONFIABILIDADE ESTRUTURAL DE LAJES DIMENSIONADAS SEGUNDO AS
NORMAS BRASILEIRAS DE PROJETO ESTRUTURAL DE CONCRETO ARMADO**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Wellison José de Santana Gomes, Dr.

Florianópolis
2024

Alexandre, Mário César

CONFIABILIDADE ESTRUTURAL DE LAJES DIMENSIONADAS
SEGUNDO AS NORMAS BRASILEIRAS DE PROJETO ESTRUTURAL DE
CONCRETO ARMADO / Mário César Alexandre ; orientador,
Wellison José de Santana Gomes, 2024.

82 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro Tecnológico, Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Civil, Florianópolis, 2024.

Inclui referências.

1. Engenharia Civil. 2. Confiabilidade estrutural . 3.
Estruturas de concreto armado. 4. Lajes de concreto
armado. I. Gomes, Wellison José de Santana. II.
Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-
Graduação em Engenharia Civil. III. Título.

Mário César Alexandre Júnior

**CONFIABILIDADE ESTRUTURAL DE LAJES DIMENSIONADAS SEGUNDO AS
NORMAS BRASILEIRAS DE PROJETO ESTRUTURAL DE CONCRETO ARMADO**

O presente trabalho em nível de Mestrado foi avaliado e aprovado, em 27 de março de 2024, pela banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Dr. Rafael Holdorf Lopez.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Ph.D. Leandro Fleck Fadel Miguel.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dr. André Jacomel Torii.
Universidade Federal da Integração Latino-Americana

Certificamos que esta é a versão original e final do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Profa. Dra. Fernanda Fernandes Marchiori
Coordenadora do Curso

Prof. Dr. Wellison José de Santana Gomes
Orientador

Florianópolis, 2024

Dedico este trabalho à minha família, em especial à minha esposa e meus filhos.

AGRADECIMENTOS

À minha família, em especial minha esposa e meus filhos, por toda a força e apoio, mesmo em momentos difíceis. Aos meus pais, sogros e cunhados, que me motivaram a iniciar e a concluir o curso de mestrado.

Ao professor Wellison José de Santana Gomes, orientador deste trabalho, pelos ensinamentos transmitidos nas aulas, pelas discussões quanto ao tema escolhido, pela paciência e dedicação na orientação, sem os quais certamente não seria possível concluir a pesquisa.

Aos amigos e colegas da turma de mestrado, pela companhia e apoio durante o curso.

A todos os professores do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC, que contribuíram para a formação e a todos os servidores, que sempre estiveram dispostos a auxiliar no que fosse preciso.

Ao Instituto Federal Catarinense Campus Rio do Sul, pelo afastamento das atividades para fins de especialização, o que fez ser possível me dedicar integralmente ao curso de mestrado.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

RESUMO

As incertezas estão presentes e têm um impacto significativo nos projetos estruturais. Estão relacionados com a resistência dos materiais utilizados, a geometria estrutural e os modelos de comportamento estrutural utilizados no projeto. Em muitos padrões atuais de projeto estrutural, os efeitos da carga são fatorados e as resistências dos materiais são fatoradas para considerar indiretamente essas incertezas, utilizando os chamados fatores de segurança. Os valores resultantes são utilizados para projetar estruturas com níveis de segurança aceitáveis. No entanto, não há indicação do nível de segurança alcançado. Neste contexto, a teoria da confiabilidade estrutural e seus métodos podem ser utilizados para quantificar e verificar se os níveis de segurança estão conforme os níveis-alvo recomendados em normas internacionais, por exemplo. O presente estudo pretende realizar análises de confiabilidade estrutural de lajes de concreto armado projetadas seguindo a norma brasileira NBR 6118, "Projeto de estruturas de concreto: procedimento". A simulação de Monte Carlo e o Método de Confiabilidade de Primeira Ordem são aplicados para calcular índices de confiabilidade, que são então comparados com os valores alvo. Verifica-se que os índices de confiabilidade obtidos estão abaixo dos valores recomendados na literatura em algumas situações de projeto. Além disso, verifica-se que ao substituir os valores dos fatores de segurança indicados na norma brasileira pelos obtidos pela calibração de confiabilidade, dada na literatura, a confiabilidade alvo é alcançada em todos os casos aqui estudados.

Palavras-chave: confiabilidade estrutural; estruturas de concreto armado, lajes de concreto armado;

ABSTRACT

Uncertainties are present and have a significant impact on structural designs. They are related, for example, to the strength of the materials used, the structural geometry, and the structural behavior models used for designing. In many current structural design standards, the load effects are factored up and the resistances of the materials are factored down to indirectly consider these uncertainties, using the so-called safety factors. The resulting values are used to design structures with acceptable safety levels. However, there is no indication of the safety level achieved. In this context, structural reliability theory and its methods can be used to quantify and verify if the safety levels are in accordance with target levels recommended in international standards, for example. The present study aims at performing structural reliability analyses of reinforced concrete slabs designed in accordance with the Brazilian standard NBR 6118, "Design of concrete structures: procedure". Monte Carlo simulation and the First Order Reliability Method are applied in order to compute reliability indices, which are then compared to target values. It is verified that the reliability indices obtained are below the values recommended in the literature in some design situations. Furthermore, it is seen that by replacing the safety factors values indicated in the Brazilian standard by those obtained by reliability calibration, given in the literature, the target reliability is achieved in all cases studied herein.

Keywords: structural reliability; reinforced concrete structures, reinforced concrete slabs;

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1	Discretização da laje em elementos de grelha.....	23
Figura 2.2	Representação da equação de estado de limite e domínios de falha e sobrevivência.....	30
Figura 2.3	Integração da função de densidade conjunta para obter a confiabilidade (esquerda) e probabilidade de falha (direita)	31
Figura 2.4	Representação gráfica do método FORM.....	33
Figura 2.5	Representação da Simulação de Monte Carlo.....	37
Figura 2.6	Gráfico de convergência em P_f e intervalo de confiança para SMC.....	41
Figura 3.1	Valores recomendados para os parâmetros da distribuição da variável aleatória f_c	47
Figura 3.2	Fator de forma da ação variável do tipo acidental.....	54
Figura 3.3	Distribuições das variáveis aleatórias q_{apt} e q_{50}	58
Figura 4.1	Tempo de processamento.....	66
Figura 4.2	Histograma de β CAAll	67
Figura 4.3	Histograma de β CAAlll	68
Figura 4.4	Histograma de β CAAllv.....	68
Figura 4.5	Histograma de β para todas as CAA.....	69
Figura 4.6	Histograma de β para CAAll com coeficientes calibrados.....	72

LISTA DE TABELAS

2.1 - Índice de confiabilidade alvo para o estado limite último e para o estado limite de serviço irreversível.....	43
3.1 - Variável aleatória f_c em função de diferentes classes de resistência do concreto.....	46
3.2 - Variável aleatória f_c recomendada para diferentes classes de resistência do concreto.....	47
3.3 - Variável aleatória f_y em função de diferentes diâmetros.....	48
3.4 - Variável aleatória f_y recomendada para qualquer diâmetro.....	49
3.5 - Variáveis aleatórias b e h recomendada para qualquer tipo de peça de concreto.....	49
3.6 - Variável aleatória d_s recomendada para qualquer tipo de peça de concreto.....	50
3.7 - Variável aleatória A_s recomendada para qualquer diâmetro de barras de aço.....	50
3.8 - Variável aleatória $E_{m,r}$ em função de diferentes situações de projeto em estruturas de concreto.....	51
3.9 - Variável aleatória g segundo diferentes fontes.....	53
3.10 - Parâmetros do processo estocástico relacionado com q	55
3.11 - Valores de referência de q_n	55
3.12 - Variável aleatória q_{apt} em função de diferentes tipos de edificação.....	56
3.13 - Variável aleatória q_{apt} segundo diferentes fontes.....	56
3.14 - Variável aleatória q_{50} em função de diferentes tipos de edificação.....	57
3.15 - Variável aleatória q_{50} segundo diferentes fontes.....	57

3.16 - Valores de q_{140}	57
3.17 - Variável aleatória $E_{m,s}$ em função de diferentes tipos de situação de projeto	59
3.18 - Variáveis para análise de confiabilidade.....	65
4.1 - Valores de β por CAA.....	69
4.2 - Valores de β para todas as CAA.....	70
4.3 - Coeficientes parciais de segurança de resistência ótimos para as estruturas metálicas e de concreto.....	71

LISTA DE ABREVIATURAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
ACI	American Concrete Institute
AISC	American Institute of Steel Construction
ANSI	American National Standard Institute
ASTM	American Society for Testing and Materials
CONFEA	Conselho Federal de Engenharia e Agronomia
CREA	Conselho Regional de Engenharia e Agronomia
DDO	Deterministic Design Optimization
DOE	Design Of Experiments
ESB	Escoamento da Seção Bruta
FORM	First Order Reliability Method
FLA	Flambagem Local da Alma
FLM	Flambagem Local da Mesa
FLT	Flambagem Local por Torção
HLRF	Hasofer, Lind, Rackwitz e Flessler
JCSS	Joint Committee on Structural Safety
LCRO	Life-Cycle Cost and Risk Optimization
NBR	Norma Brasileira Registrada
NM	Norma Mercosur
PSO	Particle Swarm Optimization
RBDO	Reliability-Based Design Optimization
RO	Risk Optimization
SMC	Simulação de Monte Carlo

LISTA DE SÍMBOLOS

$F_X(x)$	Função de distribuição acumulada de probabilidades
$f_X(x)$	Função de densidade de probabilidades
μ	Média
$Var[x]$	Variância
σ	Desvio-padrão
$C.V$	Coeficiente de variação
$g(x)$	Equação de estado limite
R	Variável aleatória de resistência
S	Variável aleatória de solicitação
P_f	Probabilidade de falha
β	Índice de confiabilidade
$f_{R,S}(r, s)$	Função conjunta de densidade de probabilidade
μ_R	Média da variável aleatória de resistência
μ_S	Média da variável aleatória de solicitação
$\phi()$	Função cumulativa normal padrão
$f_y(y)$	Função conjunta de probabilidades no espaço normal padrão
α	Coeficiente de sensibilidade
γ_i	Coeficiente de segurança interno
$\sigma_{m\acute{a}x}$	Tensão máxima
σ_r	Tensão de ruptura
γ_e	Coeficiente de segurança externo
σ_s	Tensão solicitante
$F.S.$	Fator de segurança
R_k	Resistência característica do material

γ_R	Coeficiente de segurança de minoração da resistência do material
S_{kj}	Solicitação característica
γ_j	Coeficiente de segurança de majoração da solicitação
γ_g	Coeficiente de segurança de majoração da ação permanente
γ_q	Coeficiente de segurança de majoração da ação acidental
γ_w	Coeficiente de segurança de majoração de ação do vento
Ψ_q	Coeficiente de ponderação da ação acidental secundária
Ψ_w	Coeficiente de ponderação da ação do vento secundária
f_c	Variável aleatória resistência à compressão do concreto
f_y	Variável aleatória resistência ao escoamento de barras de aço
f_{pt}	Variável aleatória resistência à tração de cabos de protensão
b	Variável aleatória base de peças de concreto
h	Variável aleatória altura de peças de concreto
d_s	Variável aleatória altura útil de peças de concreto armado
$E_{m,r}$	Variável aleatória erro de modelo de resistência
f_{ck}	Resistência característica à compressão do concreto
f_{yk}	Resistência característica ao escoamento de barras de aço
b_n	Dimensão nominal da base de peças de concreto
h_n	Dimensão nominal altura de peças de concreto
d_{sn}	Valor nominal da altura útil de peças de concreto armado
d_{pn}	Valor nominal da altura útil de peças de concreto protendido
Z	Variável aleatória módulo resistente plástico
W	Variável aleatória módulo resistente elástico
A_g	Variável aleatória área bruta

A_e	Variável aleatória área líquida efetiva
Z_n	Valor nominal do módulo resistente plástico
W_n	Valor nominal do módulo resistente elástico
A_{gn}	Valor nominal da área bruta
A_{en}	Valor nominal da área líquida efetiva
g	Variável aleatória ação permanente
g_r	Variável aleatória ação permanente revestimento
q_{apt}	Variável aleatória ação acidental em um ponto arbitrário no tempo
q_{50}	Variável aleatória ação acidental máxima de 50 anos
w_1	Variável aleatória ação do vento máximo anual
w_{50}	Variável aleatória ação do vento máximo de 50 anos
$E_{m,s}$	Variável aleatória erro de modelo de sollicitação
g_n	Valor nominal da ação permanente
q_n	Valor nominal da ação acidental
w_n	Valor nominal da ação do vento
γ_c	Coeficiente de segurança de minoração da resistência do concreto
γ_s	Coeficiente de segurança de minoração da resistência de barras de aço
γ_{a1}	Coeficiente de segurança de minoração da resistência ao escoamento de aço estrutural
γ_{a2}	Coeficiente de segurança de minoração da resistência à ruptura de aço estrutural e de parafuso
β_{alvo}	Índice de confiabilidade alvo
ξ_g	Peso de cada situação de projeto
w_{ij}	Peso que expressa a importância relativa de cada razão entre carregamentos
$S[.]$	Função de efeitos de sollicitações

$R[.]$	Função de resistência
ρ	Taxa geométrica de armadura longitudinal passiva
A_s	Área da armadura longitudinal
α_c	Parâmetro que representa a diminuição da resistência do concreto sob efeito de cargas de longa duração
λ_c	Relação entre a profundidade do diagrama retangular de compressão equivalente do concreto e a profundidade efetiva da linha neutra
e	Excentricidade da força normal
$e_{1,min}$	Excentricidade decorrente do momento mínimo de primeira ordem
μ	Momento adimensional
v	Força normal adimensional
ω	Taxa mecânica de armadura longitudinal
C_b	Fator modificador do diagrama de momento fletor
M_r	Momento elástico
M_{cr}	Momento crítico
λ	Parâmetro de esbeltez
λ_p	Parâmetro de esbeltez de plastificação
λ_r	Parâmetro de esbeltez elástico

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	19
1.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS.....	19
1.2	OBJETIVO.....	21
1.3	PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS.....	21
2	REVISÃO DE LITERATURA.....	23
2.1	ANALOGIA DE GRELHA.....	23
2.2	SEGURANÇA DAS ESTRUTURAS.....	24
2.2.1	MÉTODO DOS ESTADOS LIMITES.....	24
2.3	CONFIABILIDADE ESTRUTURAL.....	25
2.3.1	INCERTEZAS EM PROJETOS DE ENGENHARIA.....	26
2.3.2	VARIÁVEIS ALEATÓRIAS.....	27
2.3.2.1	FUNÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO ACUMULADA DE PROBABILIDADES E FUNÇÃO DE DENSIDADE DE PROBABILIDADES.....	27
2.3.2.2	VALOR ESPERADO E MOMENTOS DE UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA.....	28
2.3.3	FUNÇÕES DE ESTADO LIMITE.....	29
2.3.3.1	PROBABILIDADE DE FALHA.....	31
2.3.4	MÉTODO DE CONFIABILIDADE DE PRIMEIRA ORDEM.....	32
2.3.5	SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO.....	37
2.4	CALIBRAÇÃO DE NORMAS COM BASE EM CONFIABILIDADE ESTRUTURAL.....	41
2.4.1	OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL SOB INCERTEZAS.....	42
2.4.1.1	OTIMIZAÇÃO BASEADA EM CONFIABILIDADE (RBDO).....	42
2.4.2	ÍNDICE DE CONFIABILIDADE ALVO.....	43

3	DISTRIBUIÇÃO ESTATÍSTICA DAS VARIÁVEIS E ANÁLISE DE CONFIABILIDADE ESTRUTURAL.....	45
3.1	VARIÁVEIS DE RESISTÊNCIA.....	45
3.1.1	ESTRUTURAS DE CONCRETO.....	45
3.1.1.1	RESISTÊNCIA À COMPRESSÃO DO CONCRETO.....	45
3.1.1.2	RESISTÊNCIA AO ESCOAMENTO DAS BARRAS DE AÇO.....	48
3.1.1.3	DIMENSÃO DA SEÇÃO TRANSVERSAL DE PEÇAS DE CONCRETO.....	49
3.1.1.4	ALTURA ÚTIL DAS PEÇAS DE CONCRETO.....	50
3.1.1.5	ÁREA DE ARMADURA.....	50
3.1.1.6	ERRO DO MODELO DE RESISTÊNCIA.....	51
3.2	VARIÁVEIS DE SOLICITAÇÃO.....	52
3.2.1	AÇÃO PERMANENTE.....	52
3.2.2	AÇÃO VARIÁVEL DO TIPO ACIDENTAL.....	53
3.2.3	AÇÃO VARIÁVEL DO VENTO.....	58
3.2.4	ERRO DO MODELO DE SOLICITAÇÃO.....	58
3.3	EQUAÇÕES DE ESTADO LIMITE	59
3.4	SITUAÇÕES DE PROJETO.....	60
3.4.1	LAJES DE CONCRETO ARMADO.....	62
3.4.1.1	CARREGAMENTOS CONSIDERADOS.....	64
4	RESULTADOS OBTIDOS.....	66
4.1	CONSIDERAÇÕES ADICIONAIS.....	71
5	CONCLUSÕES.....	73
5.1	CONCLUSÕES GERAIS.....	73

5.2	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	74
	REFERÊNCIAS.....	75

1 - INTRODUÇÃO

1.1 Considerações Iniciais

O concreto armado é o sistema construtivo mais utilizado nas obras de engenharia no Brasil (Santos, 2008). Sua introdução como material de construção se deu no início do século XX, inicialmente como um produto patenteado distribuído por filiais de empresas estrangeiras. A partir da instalação das cimenteiras no Brasil, por volta de 1920, iniciou-se o processo de difusão da tecnologia no país, tendo ocorrido o período crítico da instalação da tecnologia ao longo dos anos 1930.

Na década de 1940 a tecnologia construtiva do concreto estava, de certa forma, estabilizada. Seu uso havia sido normalizado pela Associação Brasileira de Normas Técnicas - ABNT, estava regulado pelas atribuições profissionais do Conselho Federal de Engenharia e Agronomia e dos Conselhos Regionais de Engenharia e Agronomia, e fazia parte do currículo dos cursos de graduação em engenharia e arquitetura.

Levando em conta a hegemonia da utilização do concreto como sistema construtivo no Brasil, se torna necessária a garantia da segurança da sua utilização. Em qualquer projeto estrutural há incertezas associadas, sobretudo em relação à resistência dos materiais envolvidos e aos esforços solicitantes e ações aos quais a estrutura estará sujeita durante a construção e a operação. Essas incertezas podem ser consideradas, por exemplo, utilizando-se da análise da confiabilidade estrutural, processo que permite estimar o nível de segurança estrutural.

A teoria de segurança indicada na norma NBR 6118 é a chamada Teoria Semi-Probabilística de Segurança, que se utiliza do Método dos Estados Limites. Neste método as incertezas são consideradas por meio dos valores característicos inferiores e dos fatores de minoração das resistências dos materiais utilizados, além dos valores característicos superiores e dos fatores da majoração das solicitações (Paliga, 2008). Com este método se almeja evitar comportamentos estruturais indesejáveis, criando-se margens de segurança a partir do emprego dos fatores de segurança.

Contudo, o método semi-probabilístico não permite que se tenha clareza em relação aos níveis de segurança obtidos nos projetos, pois a segurança da estrutura depende do seu comportamento sob as ações solicitantes e envolve a

interdependência de diversas variáveis aleatórias (Araújo, 2010). Assim, a resposta da estrutura em uma determinada configuração de carregamentos é uma função de diversas variáveis aleatórias e, portanto, a própria resposta da estrutura também apresenta incertezas. Por conseguinte, deslocamentos, deformações, tensões e esforços solicitantes também são variáveis aleatórias (Real, 2000).

De maneira geral, o projeto das estruturas deve ser elaborado de forma que a mesma cumpra sua função com probabilidades de falha em níveis aceitáveis. A probabilidade da ocorrência de falha em estruturas pode ser quantificada aplicando a teoria da confiabilidade estrutural, cuja base são as teorias de probabilidade e estatística.

No contexto da análise de confiabilidade das estruturas de concreto armado vários trabalhos vêm sendo desenvolvidos nos últimos anos. Muitos destes trabalhos apresentam o foco em vigas e pilares de concreto armado. Quanto à confiabilidade estrutural em vigas, Santos et.al. (2014) e Scherer et. al. (2019) se destacam pelas pesquisas publicadas. Em relação à confiabilidade estrutural de pilares, as pesquisas publicadas por Pereira et. al. (2017) e Silva et. al. (2018) se destacam. Contudo, ao revisar a bibliografia na busca de trabalhos realizados em lajes de concreto armado, não foi possível encontrar trabalhos com o mesmo nível de detalhamento.

O presente trabalho apresenta análises de confiabilidade de lajes em concreto armado utilizadas em sistemas construtivos no Brasil. Levando em consideração que a ocorrência de uma falha estrutural pode levar a graves acidentes como o colapso da laje ou mesmo a ruína da estrutura, aplica-se a análise da confiabilidade para a verificação dos níveis de segurança obtidos para lajes dimensionadas segundo os métodos indicados nas instruções normativas brasileiras.

As normas americanas e europeias de projetos de estrutura em concreto armado passaram por processos de calibração dos fatores de segurança adotados em projetos, buscando obter níveis de confiabilidade aceitáveis e sem muita variabilidade. Contudo, para a norma brasileira esse procedimento não foi efetuado ainda, mesmo tendo sido desenvolvidas pesquisas no âmbito nacional, com destaque para a tese desenvolvida por Santiago (2019), em busca da padronização dos níveis de confiabilidade.

1.2 Objetivo

Este trabalho tem como objetivo principal a avaliação do nível de confiabilidade estrutural das lajes em concreto armado dimensionadas seguindo a NBR-6118:2014. Além disso, o mesmo apresenta como objetivo específico, a comparação dos níveis de confiabilidade obtidos com valores de referência encontrados em outras instruções normativas.

1.3 Procedimentos Metodológicos

A análise das lajes é efetuada com o uso do software AltoQi Eberick 2023, assim como o dimensionamento das mesmas, conforme as recomendações normativas da NBR 6118. O software em questão se utiliza dos modelos de pórticos para a estrutura e da analogia de grelha para a análise e dimensionamento das lajes.

A análise de confiabilidade é feita utilizando o UQLab (Marelli e Sudret, 2014), *framework* baseado em MATLAB, no qual são considerados os métodos de confiabilidade *FORM* (*First Order Reliability Method*) e de Simulação de Monte Carlo, para a obtenção dos índices de confiabilidade estrutural e das respectivas probabilidades de falha.

Para a análise de confiabilidade estrutural são consideradas lajes quadradas, com dimensões de 2,0 m por 2,0 m a 6,0 m por 6,0 m, com incrementos de 0,5 m nas dimensões. Adotou-se para as lajes as espessuras de 8,0 cm, 10,0 cm, 15,0 cm e 20,0 cm. As lajes são dimensionadas utilizando as classes de agressividade ambiental CAA II, CAA III e CAA IV. É importante destacar que para as diferentes classes de agressividade ambiental foram levadas em consideração as mudanças em cobrimentos e classes de resistência mínima do concreto, não sendo avaliados os efeitos do degrado ambiental.

Os carregamentos são considerados uniformemente distribuídos nos valores de 2,0 kN/m², 2,5 kN/m², 3,0 kN/m², 4,0 kN/m². A partir da área de aço calculada para as lajes é efetuada a análise de confiabilidade estrutural, obtendo o índice de confiabilidade para cada laje.

De posse dos índices de confiabilidade obtidos é possível compará-los com os valores de referência em outras instruções normativas e referência a fim de verificar

se os índices de confiabilidade obtidos a partir das instruções normativas brasileiras estão dentro dos intervalos recomendados.

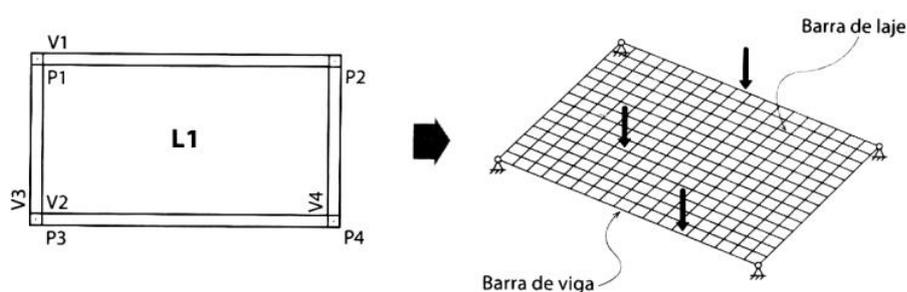
2 REVISÃO DE LITERATURA

2.1 Analogia de grelha

A analogia de grelha é um método de modelagem utilizado para a obtenção dos esforços nas lajes, que permite a análise global da estrutura. Segundo Araújo (2010), o método pode ser utilizado para análise de lajes poligonais de formas diversas, incluindo também as vigas de apoio. Assim, é possível calcular os esforços do pavimento na totalidade, levando em consideração a deformação das vigas.

A laje é discretizada através de dois conjuntos de linhas uniformemente espaçadas, como indicado na figura 2.1. Essas linhas formam uma grelha equivalente que substitui a laje maciça de maneira aproximada, segundo Araújo (2010).

Figura 2.1 – Discretização da laje em elementos de grelha.



Fonte: Kimura (2007)

Existem quatro esforços principais a serem considerados no cálculo pela analogia de grelha, sendo dois momentos (um torsor e um fletor) e dois esforços cortantes. Também são considerados na análise parâmetros como a rigidez à torção das lajes e vigas. Carvalho (1994) atenta para que, ao usar a analogia de grelha, deve-se ponderar as rigidezes das barras que compõem a grelha, visto que a rigidez à torção das barras da grelha equivalente tem influência direta nos esforços internos obtidos.

Ainda em relação à analogia de grelha, as lajes devem ser discretizadas em um número adequado de barras cujo espaçamento depende das dimensões e da geometria do pavimento. Como limitação do método de analogia de grelha, os parâmetros utilizados para redução da rigidez à torção e o espaçamento da grelha

apresentam influência direta nos resultados obtidos, devendo ser adequadamente analisados pelo projetista.

2.2 Segurança das Estruturas

Para cumprir o requisito de segurança, Beck (2019) afirma que uma estrutura deve suportar carregamentos extremos esporádicos e carregamentos repetitivos sem entrar em colapso ou apresentar danos severos permanentes.

A segurança de uma estrutura pode ainda ser quantificada de acordo com a probabilidade de falha associada com estados capazes de comprometer a sua capacidade de atender aos requisitos projetados. Ao longo do desenvolvimento dos métodos de dimensionamento estrutural, diversas metodologias foram adotadas para garantir os níveis de segurança.

2.2.1 Método dos Estados Limites

Entre os anos de 1947 e 1949 foi desenvolvido na Rússia o conceito de dimensionamento nos estados limites, que foi uma primeira tentativa em disciplinar os principais aspectos inerentes da análise de estruturas. Segundo Sales et.al (2005) os estados limites podem ser definidos como fronteiras entre o comportamento que se espera da estrutura e o comportamento indesejável da mesma, sendo representados matematicamente por uma função de estado limite.

O método dos estados limites passa pelo estabelecimento de limites acima dos quais a estrutura perde a sua utilidade ou funcionalidade, não entregando o desempenho definido em projeto. Neste método, a segurança de uma estrutura é determinada pela sua capacidade em suportar ações sem atingir qualquer estado limite último ou estado limite de serviço.

Os estados limites últimos estão associados ao colapso total ou parcial da estrutura, enquanto os estados limites de serviço estão relacionados com a interrupção do uso normal da estrutura.

Os estados limites últimos podem ter origem em diversos fenômenos, dentre os quais podemos exemplificar a perda de estabilidade de parte ou do conjunto da estrutura, ruptura de seções críticas, instabilidade por deformação, colapso progressivo e instabilidade global.

Os estados limites de serviço são originários em diversos fenômenos, como por exemplo: flechas ou rotações excessivas, deslocamentos excessivos sem perda de equilíbrio, fissuração excessiva com comprometimento da durabilidade da estrutura e vibrações excessivas.

Neste método a segurança é garantida pela minoração da resistência do material, assim como pela majoração das solicitações, conforme apresenta a equação a seguir:

$$\frac{R_k}{\gamma_R} \geq \sum_{j=1}^n \gamma_j \cdot S_{kj} \quad (1)$$

onde:

R_k representa a resistência característica do material,

γ_R representa o coeficiente parcial de segurança para minoração da resistência,

S_{kj} as solicitações características nominais do problema

γ_j os coeficientes parciais de segurança para majoração das respectivas solicitações.

A resistência característica corresponde ao valor que tem 95% de probabilidade de ser atingido ou superado quando da realização de ensaios em amostras pertencentes a lotes do material. No caso da ação permanente, a solicitação característica nominal compreende o valor médio.

No caso da ação variável, a solicitação característica nominal corresponde ao valor que apresenta 35% de chance de ser ultrapassado no sentido desfavorável durante um período de 50 anos, equivalente a um período de retorno de 140 anos.

Embora o método dos estados limites represente uma evolução dos métodos anteriormente tratados, incide sobre ele a crítica de que os parâmetros geométricos e de modelos são adotados de maneira determinística. O método leva em consideração, ao menos parcialmente, as imprevisibilidades de ações e resistências, porém ainda de uma maneira determinística, motivo pelo qual o método é considerado semi-probabilístico.

2.3 Confiabilidade Estrutural

De acordo com Beck (2019), a confiabilidade de um sistema de engenharia pode ser definida como a possibilidade de que este sistema não falhe, num período

de projeto especificado, desde que respeitadas as condições de operação e de projeto do mesmo. Sorensen (2004) afirma que se pode definir a confiabilidade de sistemas estruturais como a probabilidade de que a estrutura em questão o desempenho adequada ao longo de sua vida útil.

No campo da teoria de confiabilidade estrutural, a elaboração de projeto estrutural considerando as incertezas não é novidade, como afirma Beck (2019). Alguns dos primeiros artigos relacionados à confiabilidade estrutural, elaborados na década de 1950, já apresentavam a sugestão da utilização de métricas quantitativas da segurança, tais como probabilidades de falha, a fim de balancear os custos iniciais ou de construção com os custos esperados de falha. Ao final dos anos 90, e início deste século, segundo Beck (2019), a teoria de confiabilidade estrutural amadureceu e começou a chamar atenção de pesquisadores.

2.3.1 Incertezas em Projetos de Engenharia

De acordo com Sorensen (2004), incertezas são inerentes a qualquer projeto de engenharia e são decorrentes do conhecimento incompleto que temos sobre o funcionamento e natureza dos sistemas projetados e operados, além da aleatoriedade natural nos processos envolvidos.

Ações ambientais e resistência de materiais são processos naturalmente aleatórios, e que não podem ser descritos completamente de forma determinista. Os modelos utilizados nos sistemas de engenharia são aproximados, pois não conseguem descrever com exatidão a resposta do sistema em estudo. Beck (2019) afirma que quando há incerteza nos parâmetros de entrada de um sistema de engenharia, a mesma irá se propagar para a resposta.

Dessa forma, a resposta de sistemas de engenharia também é afetada pelas incertezas, e não há como garantir, de maneira determinista, que a resposta real do sistema será sempre a resposta desejada. Assim, uma consequência importante das incertezas é que haverá possibilidades de que o sistema não responda da maneira esperada.

De acordo com Beck (2019) algumas incertezas podem ser reduzidas ao ter uma melhoria na coleta de dados sobre os processos envolvidos ou por um melhor entendimento do comportamento da estrutura. Ou seja, a melhor disponibilidade de

dados e a utilização de modelos de engenharia mais aprimorados podem reduzir alguns tipos de incertezas.

2.3.2 Variáveis Aleatórias

De acordo com Beck (2019), uma variável aleatória é uma função real que atribui a cada ponto amostral, de um espaço amostral, um valor real. Uma variável aleatória é uma função que associa um valor real a cada resultado de um experimento aleatório.

As variáveis aleatórias podem ser classificadas como discretas ou contínuas. Uma variável é considerada discreta quando o seu domínio é formado por um número finito ou infinito contável de pontos, ou seja, quando apresenta uma quantidade enumerável de valores possíveis. Por outro lado, a variável é considerada contínua quando o domínio é formado por um número infinito de pontos, quando ela apresenta um número infinito de valores possíveis em um intervalo de números reais.

Em relação à representação de variáveis aleatórias, é comum representar uma variável aleatória por uma letra maiúscula e a realização desta variável por uma letra minúscula. Desse modo o evento $\{X = x\}$ pode ser descrito como “a variável aleatória X assume o valor x ”.

2.3.2.1 Função de distribuição acumulada de probabilidades e função de densidade de probabilidades

Segundo Beck (2019), dado um número real qualquer x , o conjunto $\{X = x\}$ formado por todos os pontos amostrais w_i tais que $x(w_i) \leq x$ representa um evento. A probabilidade de ocorrência deste evento é um número que depende de $F_X(x)$, e que é dado pela função também conhecida como função de distribuição acumulada de probabilidades.

Resumidamente, o valor $F_X(x)$ corresponde à probabilidade de que a variável aleatória X assumo qualquer valor menor do que x :

$$F_X(x) = P[\{X \leq x\}] \quad (2)$$

A função de densidade de probabilidades, ($f_X(x)$), representa a derivada em relação a x da função de distribuição acumulada de probabilidades:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \quad (3)$$

2.3.2.2 Valor esperado e momentos de uma variável aleatória

O valor esperado, ou média de uma variável aleatória é obtido através da seguinte integral:

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx \quad (4)$$

onde $f_X(x)$ é a função de densidade de probabilidade da variável aleatória X .

Outra quantidade utilizada para descrever variáveis aleatórias é a variância, $Var [X]$ que representa a dispersão de uma variável aleatória em torno da média, e pode ser obtida por meio da seguinte integral:

$$Var [X] = E [(x - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f_X(x) dx = \sigma^2 \quad (5)$$

Na expressão acima σ é chamada de desvio-padrão e equivale à raiz quadrada da variância:

$$\sigma = \sqrt{Var[X]} \quad (6)$$

Adicionalmente, o coeficiente de variação representa a razão entre o desvio padrão e a média e é obtido pela expressão:

$$C.V. = \frac{\sigma}{\mu} \quad (7)$$

2.3.3 Funções de Estado Limite

Os requisitos básicos de sistemas estruturais podem ser equacionados por meio de estados limites, de acordo com Sorensen (2004). O não atendimento de um requisito de serviço ou de segurança representa um estado de comportamento indesejável da estrutura. Cada distinta configuração que possa levar a um estado indesejável é chamada de um modo de falha.

Cada modo de falha dá origem a um estado limite e o termo falha, nesta situação é utilizado no sentido mais amplo, representando um comportamento estrutural indesejável em relação a qualquer um dos requisitos básicos estabelecidos. Os modos de falha e os estados limites correspondentes representam modelos idealizados de falha estrutural.

Os estados limites podem ser divididos em duas categorias principais, sendo estes estados limites últimos e estados limites de serviço. Os estados limites últimos, (ELU), correspondem aos requisitos de segurança e envolvem, por exemplo, a capacidade máxima de carga ou de deslocamentos da estrutura e que levam ao colapso ou dano grave e permanente da mesma. A ocorrência de ultrapassar um estado limite último é de modo geral irreversível. Assim, a primeira ocorrência deste evento é caracterizada como falha da estrutura.

Os estados limites de serviço (ELS) correspondem aos requisitos de serviço da estrutura e a condições normais de uso, por exemplo, deformações em níveis não aceitáveis ou vibrações excessivas. Os limites de serviço podem ser reversíveis ou irreversíveis. Quando irreversíveis, a primeira ultrapassagem do estado limite caracteriza a falha. Quando reversíveis, a falha pode ser caracterizada quando a passagem ao estado indesejável acontecer em momento inoportuno, por período muito prolongado, um número excessivo de vezes ou ainda qualquer combinação destes.

É possível perceber que, de modo geral, é mais fácil a caracterização da falha em ELU, enquanto que a determinação da ocorrência da falha em ELS pode apresentar maior grau de complexidade.

Os estados limites e os modos de falha de estruturas e elementos estruturais podem ser quantificados com uso das equações de estado limite. Seja $X \in R^n$ um vetor-coluna que reúne todas as variáveis aleatórias do problema. Para cada um dos modos de falha, uma equação de estado limite $g(x)$ é escrita como:

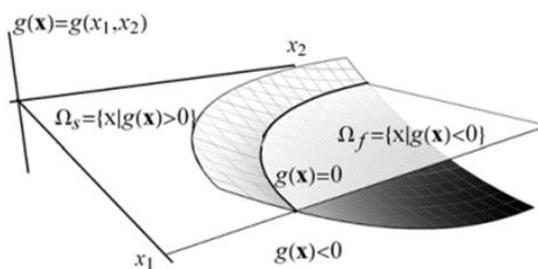
$$g(\mathbf{x}) = g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (8)$$

Estas equações são escritas de tal forma que valores negativos ou nulos representam falha e valores positivos representam não falha ou sobrevivência. As equações de estado limite estabelecem, para cada modo de falha, a fronteira entre os domínios de falha e não falha, ou a fronteira entre o comportamento desejável e indesejável da estrutura (BECK 2019):

$$\begin{aligned} \Omega_f &= \{\mathbf{x} | g(\mathbf{x}) \leq 0\} \text{ (domínio de falha)} \\ \Omega_s &= \{\mathbf{x} | g(\mathbf{x}) \geq 0\} \text{ (domínio de segurança)} \end{aligned} \quad (9)$$

O domínio de falha Ω_f é formado pelos pontos do espaço amostral de \mathbf{X} que levam à falha da estrutura, conforme representado na Figura 2.2. O domínio de sobrevivência Ω_s é o conjunto complementar ao domínio de falha. Por convenção, se inclui a equação de estado limite $g(\mathbf{x}) = 0$ no domínio de falha; no entanto, o conteúdo de probabilidade correspondente à igualdade é nulo, segundo Beck (2019).

Figura 2.2 – Representação da equação de estado de limite e domínios de falha e sobrevivência.



Fonte: Beck (2019)

A equação de estado limite mais simples é função linear, independente do tempo, e que envolve apenas duas variáveis aleatórias: resistência e solicitação $\mathbf{X} = \{R, S\}^t$; ou capacidade e demanda $\mathbf{X} = \{C, D\}^t$:

$$\begin{aligned} g(\mathbf{X}) &= R - S = 0 \\ g(\mathbf{X}) &= C - D = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

2.3.3.1 Probabilidade de falha

A probabilidade de falha, de acordo com Beck (2019), pode ser entendida como uma medida da propensão à violação de estados limites:

$$\begin{aligned} P_f &= P[\{\mathbf{X} \in \Omega_f\}] \\ P_f &= P[\{g(\mathbf{X}) \leq 0\}] \end{aligned} \quad (11)$$

A probabilidade de falha pode ser avaliada a partir da função conjunta de densidade de probabilidades $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ através da integral multi-dimensional:

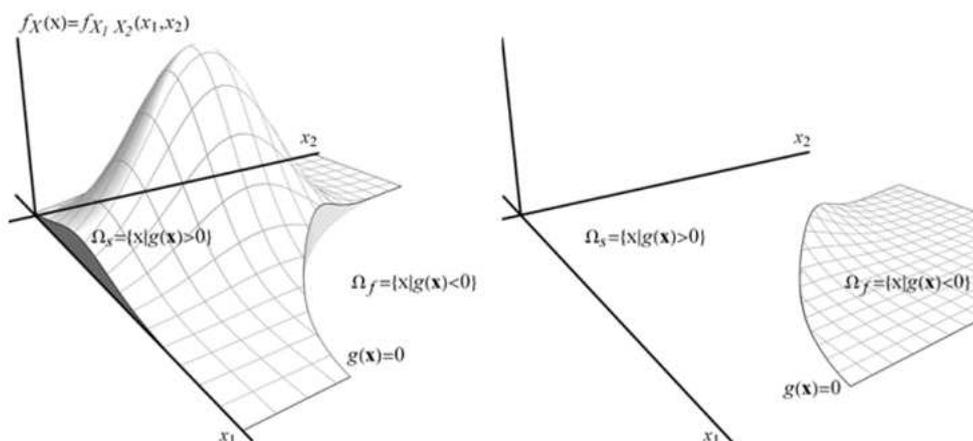
$$P_f = \int_{\Omega_f} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (12)$$

De maneira análoga, integrando sobre o domínio de sobrevivência obtemos a probabilidade de sobrevivência:

$$P_s = 1 - P_f = \int_{\Omega_s} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (13)$$

Estas integrais estão representadas na Figura 2.3, para a equação de estado limite representada na Figura 2.2.

Figura 2.3 – Integração da função de densidade conjunta para obter a confiabilidade e probabilidade de falha.



Fonte: Beck (2019)

2.3.4 Método de Confiabilidade de Primeira Ordem

O *FORM* é um método que pode ser utilizado na determinação da confiabilidade de uma estrutura ou sistema estrutural. De acordo com Beck (2019), no *FORM* é feita a construção de uma função conjunta de distribuição de probabilidades, $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$, com base nas distribuições de probabilidades de cada uma das variáveis aleatórias do problema e na matriz de correlação, composta por coeficientes de correlação entre pares de variáveis. O método utiliza tanto as distribuições de probabilidades das variáveis quanto as possíveis correlações entre as mesmas.

O *FORM* envolve também a transformação do vetor de variáveis aleatórias \mathbf{X} , com distribuição qualquer em um conjunto \mathbf{Y} de variáveis aleatórias normais que têm média nula e desvio-padrão unitário, denominadas variáveis aleatórias normais padrão.

Segundo Beck (2019), o ponto sobre o domínio de falha com maior probabilidade de ocorrência é chamado de ponto de projeto ou ponto mais provável de falha. O índice de confiabilidade corresponde à distância entre o ponto de projeto e a origem do espaço normal padrão, e é também a menor distância entre a origem do espaço das variáveis reduzidas e a superfície de falha.

Em função das variáveis normais padrão \mathbf{Y} como $g(\mathbf{Y})$ e a superfície de falha $g(\mathbf{Y}) = 0$, a equação de estado limite $g(\mathbf{X})$ é reproduzida e aproximada por um hiperplano no ponto de projeto \mathbf{Y}^* . A distância entre \mathbf{Y}^* e a origem representa o índice de confiabilidade do sistema. Com isso, a probabilidade de falha pode ser calculada usando a função de probabilidade cumulativa normal padrão, Φ :

$$p_f = \Phi(-\beta) \quad (14)$$

onde β é a distância do ponto \mathbf{Y}^* até a origem e é definido na Equação (15), como:

$$\beta = \|\mathbf{Y}^*\| \quad (15)$$

Temos, na Equação (16) que:

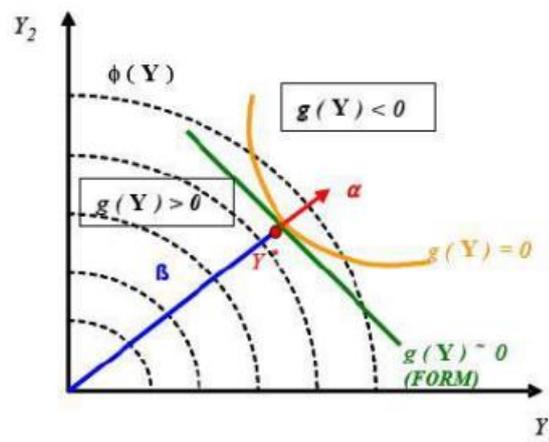
$$\mathbf{Y}^* = -\alpha\beta$$

$$g(Y) = \beta - \sum \alpha_i \beta_i \quad (16)$$

onde α é o vetor normal à superfície de falha no ponto de projeto.

O método calcula a probabilidade de falha de forma aproximada. Quando $g(Y)$ for convexa em torno do ponto de projeto, a aproximação será a favor da segurança, caso contrário, será contra a segurança. A obtenção da confiabilidade pelo método *FORM* é mostrada na Figura 2.4.

Figura 2.4 – Representação gráfica do método *FORM*



Fonte: Adaptada de Hasofer e Lind (1974)

A transformação das variáveis aleatórias X em aleatórias Y normais padrão e estatisticamente independentes, pode ser feita de diversas maneiras. A transformação de Nataf é a metodologia com maior uso em confiabilidade estrutural e baseia-se na transformação de variáveis normais correlacionadas em variáveis normais estatisticamente independentes (Der Kiureghian e Liu, 1986).

Pela Equação (17), um conjunto de variáveis normais padrão estaticamente independentes pode ser obtida se X apresentar apenas variáveis normais. Estas podem ser correlacionadas entre si ou não:

$$Y = \Gamma \sigma^{-1}(X - m) \quad (17)$$

onde:

m é o vetor das médias das variáveis X ;

σ é uma matriz diagonal contendo os desvios-padrão das variáveis X ;

$\Gamma = L^{-1}$, sendo L é a matriz triangular inferior obtida da Decomposição de Cholesky da matriz dos coeficientes de correlação de X , e é expressa pela Equação (18), por:

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 & 0 \\ L_{12} & L_{22} & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ L_{1n} & L_{2n} & \cdot & L_{nn} \end{bmatrix} \quad (18)$$

onde n é o número de variáveis aleatórias envolvidas na transformação; os termos L_{ij} são definidos na Equação (19) como:

$$\begin{aligned} L_{11} &= 1 \\ L_{i1} &= \rho_{i1} \\ i &= 1, 2, \dots, n \\ L_{ik} &= \frac{1}{L_{kk}} (\rho_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} L_{ij} L_{kj}), 1 < k < i \\ L_{ii} &= \sqrt{1 - \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij}^2}, i > 1 \end{aligned} \quad (19)$$

onde ρ_{ij} é o coeficiente de correlação entre as variáveis X_i e X_j .

Para a determinação do ponto de projeto é necessária a definição do Jacobiano da transformação, como:

$$\begin{aligned} J &= \frac{\partial Y}{\partial X} \\ J &= \Gamma \sigma^{-1} \end{aligned} \quad (20)$$

Para os casos em que as variáveis não são normais, pode ser empregada uma transformação em normal equivalente. Quando não há correlação entre variáveis, ou seja, as variáveis aleatórias são independentes, a matriz L torna-se uma matriz identidade ou matriz diagonal unitária.

Caso as variáveis X apresentem distribuição de probabilidade normal, a transformação de Nataf é possível. Segundo Alves (2014), quando uma variável apresenta distribuição de probabilidade que não seja normal, é necessário fazer primeiramente sua “normalização”, que consiste em substituir cada distribuição de probabilidade não normal por uma distribuição normal equivalente.

As Equações (21) e (22) podem ser aplicadas diretamente para distribuições quaisquer não correlacionadas, caso contrário é necessário fazer sua correção com um coeficiente de correlação equivalente entre as variáveis. Der Kiureghian e Liu (1986) apresentam expressões analíticas para tal coeficiente para muitas distribuições de probabilidade:

$$\sigma_u^N = \phi \left\{ \frac{\phi^{-1}(F_{ui}(X^*))}{f_{ui}(X_i^*)} \right\} \quad (21)$$

$$\mu_u^N = X_i^* - \sigma_u^N \phi^{-1}(F_{ui}(X^*)) \quad (22)$$

onde:

σ_u^N e μ_u^N são desvio padrão e média da distribuição normal equivalente para variável X_i ;

$F_{ui}(X^*)$ é a função de distribuição acumulada original da variável X_i ;

$f_{ui}(X_i^*)$ é a função distribuição de probabilidade original da variável X_i ;

ϕ é a função distribuição de probabilidade acumulada normal padrão.

O ponto de projeto pode ser definido usando um algoritmo de otimização ou programação não linear cuja restrição pode ser expressa por: mínimo $|Y|$ com $g(Y) = 0$. Existem vários algoritmos para a análise em questão e o mais utilizado foi desenvolvido por Hasofer e Lind (1974) e aprimorado por Rackwitz e Fiessler (1978). Este é comumente identificado como HLRF e é resumido pela Equação (23):

$$Y^{k+1} = \frac{1}{|\nabla g(Y^k)|^2} [\nabla g(Y^k)^T Y^k - g(Y^k)] \nabla g(Y^k)^T \quad (23)$$

onde:

$\nabla(Y^k)$ é o gradiente da função de falha no espaço reduzido;

$g(Y^k)$ é o valor da função de falha, avaliado no ponto Y^k .

As relações da Equação (24) para a utilização do método HLRF, são de extrema utilidade, sendo:

$$g(Y) = G(X) \quad (24)$$

$$Y = \Gamma \sigma^{-1}(X - m)$$

$$\nabla g(Y) = (J^{-1})^T \nabla G(X)$$

onde $\nabla G(X)$ é o gradiente da função de falha no espaço original avaliado no ponto X .

Haldar e Mahadevam (2000) apud Alves (2014) obtém a probabilidade de falha usando o método FORM, através do seguinte algoritmo:

a) inicialmente, escolhe-se um ponto de partida Y^k e $k = 0$ no espaço original (geralmente o vetor das médias) e calcula-se a matriz dos coeficientes de correlação normais equivalentes;

b) calculam-se as médias e desvios padrões normais equivalentes no ponto de partida pelas Equações (21) e (22) e monta-se a matriz σ , com os desvios padrões e o vetor m , com as médias normais equivalentes;

c) avalia-se a função de falha $G(U)$, o Jacobiano e o gradiente de $G(X)$ no espaço reduzido com as equações (20) e (24);

d) transforma-se o ponto de partida para espaço reduzido usando a transformação de Nataf, na forma:

$$Y^k = J(X^k - m) \quad (25)$$

e) avalia-se o novo ponto de Y^{k+1} através do algoritmo HRLF, conforme definido anteriormente;

f) avalia-se o índice de confiabilidade com a equação (26) na forma:

$$\beta = \|Y^{k+1}\| \quad (26)$$

g) avalia-se o novo ponto Y^{k+1} no espaço original usando a equação (27):

$$X^{k+1} = (J^{-1})^T(Y^{k+1}) + m \quad (27)$$

h) toma-se X^{k+1} como novo ponto de partida e repetem-se os passos de b a h até que seja obtida a convergência em uma determinada tolerância, pela Equação (28):

$$\frac{|X^{k+1} - X^k|}{|X^{k+1}|} \leq Tol \quad (28)$$

i) após a convergência, ou seja, quando a tolerância predefinida for satisfeita, pode-se então calcular a probabilidade de falha pela Equação (14).

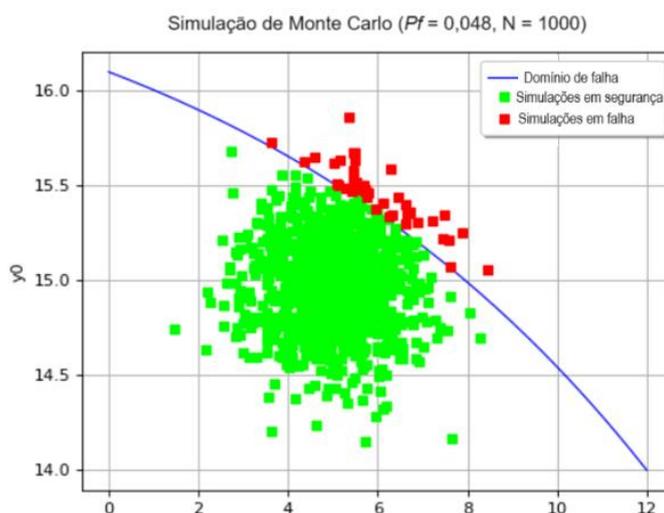
2.3.5 Simulação de Monte Carlo

O método de simulação de Monte Carlo envolve a utilização de números aleatórios. Segundo Beck (2019), na área da engenharia, a simulação numérica permite resolver em computador, de forma aproximada e por meio de técnicas de discretização do domínio, equações diferenciais e integrais. Por envolver soluções repetitivas, a simulação de Monte Carlo é própria para solução computadorizada.

Fazendo um resgate histórico, nas décadas de 70 e 80 diversos avanços foram feitos nas teorias de confiabilidade. Em função da limitada capacidade computacional na época, segundo Beck (2019), a ênfase era desenvolver métodos analíticos como o FORM, SORM e limites para a probabilidade de falha de sistemas. A simulação de Monte Carlo era entendida como uma maneira de verificar a solução dos métodos analíticos, ou um último recurso, quando os métodos analíticos falhavam.

Com o aumento na capacidade de processamento dos computadores, e com a possibilidade de processamento em paralelo, as técnicas de simulação de Monte Carlo conquistaram cada vez mais espaço. Dentre as vantagens do método temos a facilidade de implementação, a capacidade de resolver problemas diversos e a robustez dos resultados encontrados com o método.

Figura 2.5 – Representação da Simulação de Monte Carlo.



Fonte: adaptado de Robert et. al (2004)

A figura 2.5 ilustra a simulação de Monte Carlo, onde a curva azul representa a separação entre o domínio de falha e o domínio de segurança. Os pontos em vermelho representam as amostras no domínio da falha, enquanto os pontos verdes representam as amostras no domínio de segurança.

De acordo com Beck (2019) a probabilidade de falha de um elemento ou de um sistema estrutural envolve uma integral da função de densidade de probabilidade conjunta $f_X(\mathbf{x})$ sobre o domínio de falha Ω_f .

O domínio de falha Ω_f pode ser dado por uma única equação de estado limite ou por qualquer combinação de estados limites em série, em paralelo ou mista:

$$\Omega_f = \{ \mathbf{x} \mid \cup_k [\cap_{i \in C_k} (g_i(\mathbf{x}) \leq 0)] \} \quad (29)$$

sendo $g_i(\mathbf{x})$ a equação de estado limite para o i -ésimo modo de falha. Utilizando uma função indicadora $I[\mathbf{x}]$ tal que:

$$I = \begin{cases} 1 & \text{se } \mathbf{x} \in D_f \text{ (falha)} \\ 0 & \text{se } \mathbf{x} \notin D_f \text{ (sobrevivência)} \end{cases} \quad (30)$$

Assim, é possível integrar a Eq. 29 sobre todo o domínio:

$$P_f = \int_{\Omega} I[\mathbf{x}] f_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = E[I[\mathbf{X}]] \quad (31)$$

De acordo com Beck (2019), cada avaliação da função indicadora implica em uma avaliação das equações de estado limite do problema. Esta expressão representa o valor esperado da função indicadora $I[\mathbf{X}]$. Este valor esperado pode ser estimado, com base em uma amostra de tamanho finito, através de:

$$p_f \approx \widehat{p}_f = \frac{1}{n_s} \sum_{k=1}^{n_s} I[\mathbf{x}_k] = \frac{n_f}{n_s} \quad (32)$$

onde o símbolo $(\widehat{})$ indica uma estimativa;

n_f é o número de pontos no domínio de falha;

n_s é o número de amostras.

A Eq. (32) representa um estimador não-tendencioso da probabilidade de falha, pois seu valor esperado é igual ao que ele tenta estimar.

O estimador na Eq. (32) está baseado em uma amostra de tamanho finito, e está sujeito a uma incerteza estatística, correspondente à variância do estimador \widehat{p}_f :

$$Var [\widehat{p}_f] = Var \left[\frac{1}{n_s} \sum_{k=1}^{n_s} I[\mathbf{x}_k] \right] = \frac{1}{n_s^2} Var [\sum_{k=1}^{n_s} I[\mathbf{x}_k]] = \frac{1}{n_s^2} \sum_{k=1}^{n_s} (I[\mathbf{x}_k] - \widehat{p}_f)^2 \quad (33)$$

A variância de \widehat{p}_f corresponde à incerteza na estimativa de p_f , ou incerteza estatística da simulação. A Eq. (33) mostra que esta incerteza diminui à medida que aumenta o número de simulações n_s . Como o estimador na Eq. (32) é não-tendencioso, resulta que $Var [\widehat{p}_f]$ também é igual ao erro quadrático médio (Rubinstein & Kroese 2016):

$$Var [\widehat{p}_f] = E[(\widehat{p}_f - p_f)^2] \quad (34)$$

A identidade de Bienaymé mostra que a variância da soma de variáveis aleatórias não-correlacionadas é igual à soma das variâncias; portanto, a partir da Eq. (33) pode-se escrever (Ang & Tang 2007, Rubinstein & Kroese 2016):

$$Var [\widehat{p}_f] = \frac{1}{n_s^2} Var [\sum_{k=1}^{n_s} I[\mathbf{x}_k]] = \frac{1}{n_s^2} \sum_{k=1}^{n_s} Var I[\mathbf{x}_k] \quad (35)$$

$$Var [\widehat{p}_f] = \frac{1}{n_s^2} \sum_{k=1}^{n_s} Var I[\mathbf{X}] = \frac{1}{n_s} Var I[\mathbf{X}]$$

$$Var [\widehat{p}_f] = \frac{1}{n_s} \left(E[I[\mathbf{X}^2]] - E[I[\mathbf{X}]]^2 \right)$$

$$Var [\widehat{p}_f] = \frac{p_f - p_f^2}{n_s} = \frac{p_f(1-p_f)}{n_s}$$

O coeficiente de variação de \widehat{p}_f é obtido por :

$$\delta_{\widehat{p}_f} = \frac{\sqrt{Var[\widehat{p}_f]}}{E[\widehat{p}_f]} = \sqrt{\frac{p_f(1-p_f)}{n_s}} \frac{1}{p_f} = \sqrt{\frac{1-p_f}{n_s p_f}} \approx \frac{1}{\sqrt{n_s p_f}} \therefore n_s \approx \frac{1}{p_f \delta_{\widehat{p}_f}^2} \quad (36)$$

Beck (2019) afirma que, a partir da Eq. 36 se pode observar que a avaliação de uma probabilidade de falha da ordem de 10^{-p} com $\delta_{\widehat{p}_f} \approx 0,1 = 10^{-1}$, requer aproximadamente 10^{p+2} amostras. Para avaliar uma probabilidade de falha com um precisão de $\varepsilon_{p_f} = (\widehat{p}_f - p_f)/p_f = 0,1$, e um intervalo de confiança de 95%, o número mínimo de amostras é $4 \times 10^{p+2}$. Para probabilidades de falha típicas em confiabilidade estrutural (da ordem de 10^{-3} a 10^{-6}), o número de amostras pode se tornar proibitivo, quando cada avaliação da função indicadora implica na resolução de modelos numéricos com muitos graus de liberdade. Beck (2019) afirma também que poucos pontos no domínio de falha levam a uma grande variação dos resultados.

A partir das Eqs. (32 e 33), podemos determinar o intervalo de confiança (I.C.) do resultado da simulação:

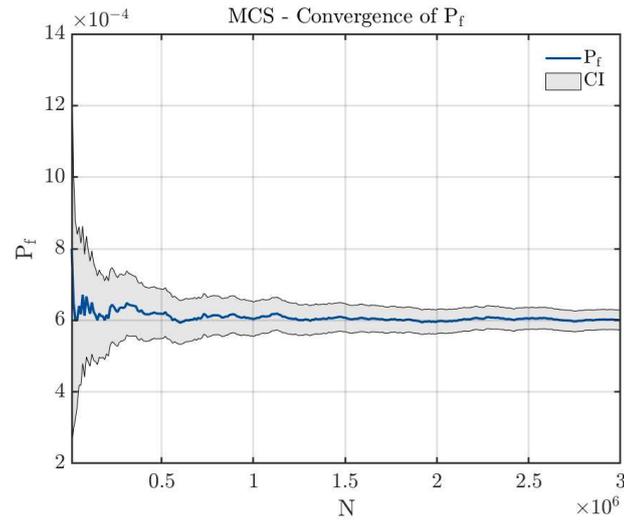
$$\widehat{p}_f - k \sqrt{\text{Var}[\widehat{p}_f]} \leq p_f \leq \widehat{p}_f + k \sqrt{\text{Var}[\widehat{p}_f]} \quad (37)$$

onde o parâmetro k está relacionado com o nível de confiança desejado, segundo uma distribuição normal. A Eq. (37) presume uma distribuição normal dos dados, o que sempre deve ser verificado.

Uma forma prática de verificar se o número de amostras empregados é suficiente para resolver determinado problema com precisão é observar gráficos de convergência de \widehat{p}_f e dos intervalos de confiança (Eq. 37), em função do número de amostras n_s .

A Figura 2.6 ilustra um gráfico de convergência, obtido na solução via SMC de uma análise de confiabilidade estrutural de lajes. O comportamento demonstrado na figura é típico: observamos oscilação da média e da variância, que ocorre por influência dos números aleatórios, e que diminui à medida que n_s aumenta. O intervalo de confiança se torna mais estreito com aumento de n_s , em função da redução da variância, mas depois se estabiliza. O número de amostras deve ser suficiente para se observar convergência na média, com intervalo de confiança aceitável, de acordo com Beck (2019).

Figura 2.6 - Gráfico de convergência em P_f e intervalo de confiança para SMC



Fonte: elaborada pelo autor

O resultado direto das simulações de Monte Carlo são probabilidades de falha. No entanto, é possível determinar um índice de confiabilidade equivalente para SMC:

$$\beta_{MC} = \Phi^{-1}(1 - \widehat{p}_f) \quad (38)$$

Beck (2019) afirma que este índice pode ser determinado em termos da probabilidade média (\widehat{p}_f) ou em termos dos intervalos (Eq. 37).

2.4 Calibração de Normas com Base em Confiabilidade Estrutural

A calibração das normas apresenta como objetivo ajustar os coeficientes de segurança utilizados para que os projetos estruturais obtenham resultados compatíveis com um nível de confiabilidade alvo predeterminado, segundo Nowak e Szerszen (2003).

Desta maneira, a calibração dos coeficientes parciais de segurança é o processo de encontro do conjunto dos fatores $\{\gamma_g, \gamma_q, \gamma_w, \Psi_q, \Psi_w \text{ e } \gamma_R\}$, que minimiza as variações dos índices de confiabilidade das mais diversas estruturas projetadas dentro do escopo de uma determinada norma, em relação a um índice de confiabilidade alvo.

2.4.1 Otimização Estrutural Sob Incertezas

A otimização estrutural pode ser entendida como um processo numérico cujo objetivo é maximizar a performance de um problema de engenharia de estruturas frente a alguma medida de desempenho previamente estabelecida, seja ela custo de construção, custo de operação, deslocamentos máximos, níveis de vibração, níveis de confiabilidade, dentre outros.

Beck (2019) define problemas de otimização como a determinação do valor ótimo de um vetor de variáveis de projeto \mathbf{d} , que minimiza uma função objetivo $f(\mathbf{d})$, sujeito a restrições de igualdade $h(\mathbf{d}) = 0$, de desigualdade $h(\mathbf{d}) \leq 0$ e restrições ditas laterais, com relação aos possíveis valores do vetor de projeto: $\{\mathbf{d}_{min} \leq \mathbf{d} \leq \mathbf{d}_{max}\}$.

2.4.1.1 Otimização baseada em confiabilidade (RBDO)

A otimização baseada em confiabilidade (em inglês Reliability Based Design Optimization, ou RBDO), tem como foco a minimização de uma função objetivo de um problema sujeito a restrições probabilísticas envolvendo condições de falha de uma estrutura ou sistema estrutural, conforme as seguintes expressões:

$$\begin{cases} d^* = \min [f(d) \mid Pf_i(d) \leq P_{falvo}, i = 1, \dots, n] \\ d^* = \min [f(d) \mid \beta_i(d) \geq \beta_{alvo}, i = 1, \dots, n] \end{cases} \quad (39)$$

Neste modo de otimização estrutural, as incertezas em termos de resistências e solicitações são modeladas de maneira probabilística, enquanto as restrições de projeto são representadas através de probabilidades de falhas ou índices de confiabilidade associados aos possíveis modos de falha da estrutura, ou sistema.

Os principais objetivos nos projetos estruturais são a obtenção de estruturas com níveis de confiabilidade aceitáveis com o menor custo possível. Assim, no processo de otimização estrutural, a robustez do sistema obtido depende do índice de confiabilidade adotado ou da probabilidade de falha que foi utilizada como restrição.

2.4.2 Índice de Confiabilidade Alvo

De acordo com Santiago (2019), o processo de calibração dos índices normativos envolve a escolha de um índice de confiabilidade alvo para refletir a segurança das estruturas projetadas segundo a norma objeto de calibração.

Uma maneira de determinar o índice de confiabilidade alvo é por meio da análise do nível de segurança das estruturas projetadas pela norma avaliada antes da sua calibração. Estruturas projetadas pela norma americana ANSI A58, por exemplo, apresentavam índice de confiabilidade entre 2,5 e 3,5 antes da calibração, de acordo com estudo feito por Ellingwood et al. (1982).

Melchers & Beck (2018) indicam o uso de um índice de confiabilidade para edificações residenciais e comerciais entre 3,0 e 3,5 para um período de referência igual a 50 anos. O Eurocode EN 1990 (CEN, 2001) recomenda para edifícios residenciais e comerciais um valor de índice de confiabilidade igual a 3,8 para um período de 50 anos.

O JCSS (2001) propõe diferentes valores para o índice de confiabilidade alvo para o estado limite último e para o estado limite de serviço irreversível, conforme apresenta a Tabela 2.1.

Tabela 2.1 – Índice de confiabilidade alvo para o estado limite último e para o estado limite de serviço irreversível.

Custo relativo da medida de segurança	Estado Limite Último			Estado limite de serviço
	Consequências de Falha			
	Mínimas	Moderadas	Elevadas	
Alto	3,1	3,3	3,7	1,3
Normal	3,7	4,2	4,4	1,7
Pequeno	4,2	4,4	4,7	2,3

Fonte: Adaptado de JCSS, 2001.

A consequência mínima de falha é aquela em que o risco de morte é pequeno a ponto de poder ser negligenciado, tendo como exemplo silos, estruturas agrícolas e postes de redes elétricas (JCSS, 2001).

A consequência moderada de falha é aquela em que o risco de morte é mediano e já não pode ser negligenciado, como exemplo temos edifícios residenciais e comerciais (JCSS, 2001).

A consequência elevada de falha é aquela em que o risco de morte é verdadeiramente alto, a exemplo de edifícios hospitalares, pontes e teatros (JCSS, 2001).

É possível ainda avaliar a consequência de falha em função do modo de ruína dos componentes estruturais. Elementos que possuem modo de ruptura frágil apresentam maior consequência de falha que aqueles que possuem modo de ruptura dúctil, em função da velocidade e da influência que o modo de ruptura gera no restante da estrutura.

O custo alto da medida de segurança é aquele cuja incorporação da medida no projeto pode impactar na viabilidade econômica em decorrência do aumento no custo final da construção.

O custo normal da medida de segurança é aquele cuja adoção da medida no projeto não impacta de maneira efetivamente significativa no orçamento final da edificação.

O custo pequeno da medida de segurança é aquele cuja incorporação da medida no projeto não costuma repercutir em aumentos no custo final da construção.

Assim, podemos observar que não há somente um valor de confiabilidade, mas diversos valores que devem ser avaliados em função da estrutura, da sua utilização e das consequências dos modos de falha.

3 - DISTRIBUIÇÃO ESTATÍSTICA DAS VARIÁVEIS E ANÁLISE DE CONFIABILIDADE ESTRUTURAL

Neste capítulo são apresentadas as variáveis de resistência e variáveis de solicitação utilizadas, indicando o valor médio, desvio-padrão e distribuição de cada uma das variáveis. Apresentam-se, também, as equações de estado limite, as combinações de ações consideradas e as diferentes classes de agressividade ambiental e seções transversais consideradas.

3.1 - Variáveis de Resistência

As variáveis de resistência utilizadas neste trabalho estão apresentadas em função da tipologia da estrutura, tendo os dados sido obtidos com base na literatura, especialmente o trabalho desenvolvido por Santiago (2019), que realizou uma ampla coleta de dados acerca das estruturas no Brasil, realizando a análise estatística dos valores obtidos.

3.1.1 Estruturas de Concreto

Com base na revisão da literatura foi feito um levantamento acerca das seguintes variáveis relacionadas com a resistência das estruturas de concreto construídas no Brasil: resistência à compressão do concreto (f_c), resistência ao escoamento de barras de aço (f_y), dimensão da seção transversal de peças de concreto (b e h), altura útil de peças de concreto (d_s e d_p), e erro de modelo de resistência (E_{mr}).

3.1.1.1 Resistência à compressão do concreto (f_c)

A variável aleatória f_c foi construída, em estudo realizado por Santiago (2019) a partir de resultados de ensaios de resistência à compressão axial aos 28 dias realizados em mais de 39 mil corpos de prova cilíndricos moldados in loco em obras das cinco regiões do Brasil entre os anos de 2011 e 2016.

O autor, então, classificou os dados obtidos em sete classes de resistência – C20, C25, C30, C35, C40, C45 e C50 – a partir das informações disponibilizadas nos relatórios de controle tecnológico e nas cartas de traço.

Visando obter descrições estatísticas que representassem o conjunto de concretos produzidos no país, Santiago (2019) agrupou os dados provenientes de diferentes obras e lotes e analisou os mesmos em blocos.

Desta maneira, as estatísticas nacionais foram obtidas a partir de ponderações das estatísticas regionais, onde o peso empregado na ponderação foi dado em função do número de amostras disponível para cada classe em cada uma das regiões do país. Um resumo dos resultados referentes à variável aleatória f_c está presente na Tabela 3.1, elaborada a partir de Santiago (2019). É importante, ainda, ressaltar que a média está escrita em função da resistência característica do concreto (f_{ck}).

Tabela 3.1 – Variável aleatória f_c em função de diferentes classes de resistência do concreto.

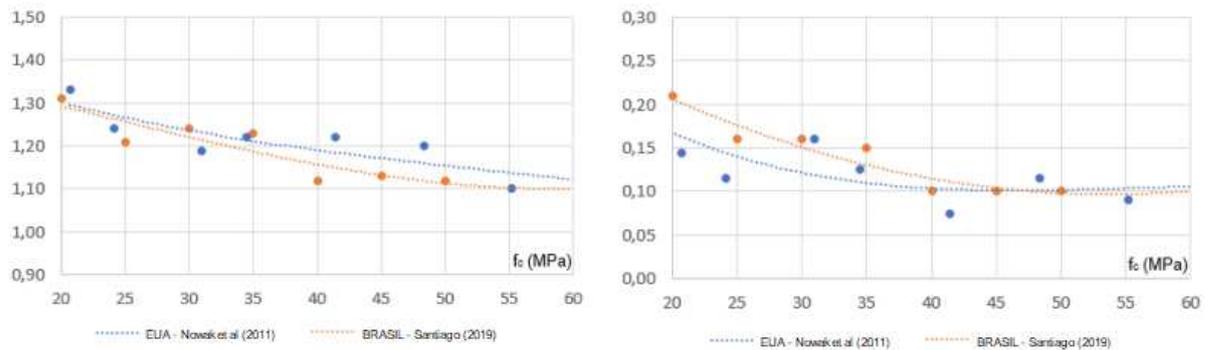
Variável	Classe	Amostras	μ	C.V.
f_c	C20	4511	1,31. f_{ck}	0,21
	C25	1053	1,21. f_{ck}	0,16
	C30	6685	1,24. f_{ck}	0,16
	C35	7804	1,23. f_{ck}	0,15
	C40	3982	1,12. f_{ck}	0,10
	C45	2527	1,13. f_{ck}	0,10
	C50	13272	1,12. f_{ck}	0,10

Fonte: Santiago (2019)

Conforme pode ser observado pelos dados obtidos pelo autor, a média variou entre 1,12 e 1,31 em relação à resistência característica, enquanto o coeficiente de variação alternou de 0,10 a 0,21. Para concretos com resistências similares fabricados nos Estados Unidos da América, estudos feitos por Nowak et al. (2011) apresentaram uma variação da média de 1,10 a 1,33 em função da resistência característica do concreto e uma variação do coeficiente de variação de 0,09 a 0,16.

A Figura 3.1 apresenta os valores recomendados para os parâmetros das curvas de distribuição de probabilidades da variável f_c a partir do ajuste de curvas de tendência.

Figura 3.1 – Valores indicados para os parâmetros da distribuição da variável f_c .



a) μ Em relação ao f_{ck}

b) C.V.

Fonte: Santiago 2019

No caso dos concretos brasileiros, a média variou de 1,10 a 1,30 relacionada à resistência característica e o coeficiente de variação oscilou entre 0,10 e 0,20. No caso dos concretos estadunidenses, a média variou de 1,11 a 1,31 em relação à resistência característica e o coeficiente de variação girou entre 0,11 e 0,17. A partir destes resultados, é possível verificar que os concretos produzidos no Brasil apresentam valores médios e variações semelhantes aos produzidos nos Estados Unidos da América.

As médias e os coeficientes de variação das curvas de distribuição de probabilidades da variável f_c que foram empregados nas análises de confiabilidade das lajes constam na Tabela 3.2, tendo os seus respectivos parâmetros sido extraídos da Figura 3.1

Tabela 3.2 – Variável aleatória f_c recomendada para diferentes classes de resistência do concreto (continua)

Variável	Classe	Distribuição	μ	C.V.
f_c	C20	Normal	1,30. f_{ck}	0,20
	C25	Normal	1,25. f_{ck}	0,17
	C30	Normal	1,22. f_{ck}	0,15

Tabela 3.2 – Variável aleatória f_c recomendada para diferentes classes de resistência do concreto (conclusão)

Variável	Classe	Distribuição	μ	C.V.
f_c	C35	Normal	1,19. f_{ck}	0,13
	C40	Normal	1,16. f_{ck}	0,11
	C45	Normal	1,13. f_{ck}	0,10
	C50	Normal	1,11. f_{ck}	0,10
	C55	Normal	1,10. f_{ck}	0,09
	C60	Normal	1,10. f_{ck}	0,09

Fonte: Santiago 2019

3.1.1.2 Resistência ao escoamento de barras de aço (f_y)

No estudo realizado por Santiago (2019), a variável aleatória f_y foi elaborada a partir dos resultados de ensaios de resistência à tração realizados com mais de 8,7 mil barras de aço CA-50 retiradas de diferentes lotes produzidos no Brasil ao longo do ano de 2016. Conforme o diâmetro, os dados foram classificados em cinco grupos: 8 mm, 12,5 mm, 16 mm, 20 mm e 25 mm.

A partir dos resultados obtidos, o autor montou um resumo dos valores relacionados com a variável aleatória f_y , que está representado na Tabela 3.3. É importante indicar que a média está escrita em função da resistência característica de escoamento (f_{yk}).

Tabela 3.3 – Variável aleatória f_y em função de diferentes diâmetros.

Variável	\varnothing (mm)	Amostras	Distribuição	μ	C.V.
f_y	8	3352	Normal	1,29. f_{yk}	0,04
	12,5	2416	Normal	1,19. f_{yk}	0,04
	16	1441	Normal	1,17. f_{yk}	0,03
	20	571	Normal	1,18. f_{yk}	0,04
	25	961	Normal	1,20. f_{yk}	0,05

Fonte: Santiago 2019

Com base nos resultados obtidos por Santiago (2019), podemos verificar que a média variou entre 1,17 e 1,29 em relação à resistência característica de escoamento, ao tempo que o coeficiente de variação orbitou entre 0,03 e 0,05. Para os Estados Unidos da América, Nowak et al. (2011 apud Santiago 2019) encontraram uma variação da média de 1,12 a 1,18 em função da resistência característica de escoamento e uma variação do coeficiente de variação entre 0,02 e 0,04. A Tabela 3.4, elaborada por Santiago (2019), apresenta os parâmetros da distribuição ajustada para qualquer diâmetro. Embora existam diferenças nas características das barras de aço produzidas em diferentes países, esta tabela ainda apresenta as distribuições indicadas por diferentes autores.

Tabela 3.4 – Variável aleatória f_y recomendada para qualquer diâmetro

Variável	Distribuição	μ	C.V.	Fonte
f_y	Normal	1,22. f_{yk}	0,04	Santiago (2019)
	Normal	1,13. f_{yk}	0,03	Nowak et al. (2011)
	Normal	1,145. f_{yk}	0,05	Nowak & Szerszen (2003)
	Normal	1,12. f_{yk}	0,05	JCSS (2001)

Fonte: Santiago 2019

3.1.1.3 Dimensão da seção transversal de peças de concreto (b e h)

A partir da revisão da literatura, optou-se por utilizar, neste trabalho, a prescrição da NBR 14931:2004 e a distribuição proposta pelo JCSS (2001) para as variáveis aleatórias base (b) e altura (h) da seção transversal de peças de concreto, conforme utilizado por Santiago (2019). Os parâmetros da distribuição de probabilidades das variáveis, b e h , usados no trabalho estão apresentados a seguir.

Tabela 3.5 – Variáveis aleatórias b e h para qualquer tipo de peça de concreto.

Variável	Distribuição	μ	σ	Fonte
b	Normal	b_n	$4\text{mm}+0,006.b_n$	JCSS (2001)
h	Normal	h_n	$4\text{mm}+0,006.h_n$	JCSS (2001)

Fonte: Santiago 2019

3.1.1.4 Altura útil das peças de concreto (d_s)

De maneira análoga ao caso da dimensão da seção transversal, para a variável aleatória altura útil da peça de concreto armado (d_s) foi adotada a prescrição da NBR 14931 associada com a distribuição proposta pelo JCSS (2001).

Os parâmetros da distribuição de probabilidades da variável d_s empregados na calibração estão apresentados na Tabela 3.6. É importante indicar que a média está escrita em função do valor, em milímetros, da altura útil nominal (d_{sn}).

Tabela 3.6 – Variável aleatória d_s recomendada para qualquer tipo de peça de concreto

Variável	Distribuição	μ	σ	Fonte
d_s	Normal	d_{sn}	10,0 mm	JCSS (2001)

Fonte: Santiago 2019

Conforme explicado por Santiago (2009), de maneira alternativa se pode considerar as incertezas relacionadas com a altura útil através do cobrimento da armadura. O autor justifica a escolha pelo fato de ser mais usual encontrar resultados estatísticos relacionados com o cobrimento do que com a altura útil efetivamente.

3.1.1.5 Área de armadura (A_s)

Para a variável aleatória área de armadura, foi adotada a prescrição apresentada pelo JCSS (2001) para a área das barras de aço analisadas, utilizando a distribuição normal para esta variável aleatória.

Tabela 3.7 – Variável aleatória A_s recomendada para qualquer diâmetro de barras de aço

Variável	Distribuição	μ	σ	Fonte
A_s	Normal	A_{sn}	$0,02 \cdot A_{sn}$	JCSS (2001)

Fonte: Santiago 2019

3.1.1.6 Erro de modelo de resistência (E_{mr})

Esta variável aleatória está relacionada com a diferença entre o comportamento real de um elemento estrutural e o comportamento previsto para ele a partir do modelo de cálculo empregado em seu dimensionamento. Os modelos adotados para o comportamento das estruturas são simplificações do comportamento real e, portanto, sujeitos a falhas.

A Tabela 3.8, efetuada a partir do estudo de Santiago (2019), apresenta os resultados relativos à variável adotados no processo de análise de confiabilidade e levantados a partir de trabalhos disponíveis na literatura alinhados com os modelos de dimensionamento utilizados no Brasil.

Fürst (2020), desenvolveu uma pesquisa acerca do assunto utilizando método de elementos finitos comparados com estudos físicos, porém indicou a dificuldade de se utilizar um valor único para a variável de erro de modelo.

Tabela 3.8 – Variável aleatória E_{mr} em função de diferentes situações de projeto em estruturas de concreto

Variável	Situação de Projeto	Distribuição	μ	C.V.	Fonte
E_{mr}	Vigas de concreto armado sujeitas à flexão	Normal	1,02	0,06	Nowak et al. (2011)
	Lajes de concreto armado sujeitas à flexão	Normal	1,02	0,06	Nowak et al. (2011)

Fonte: Santiago 2019

Santiago (2019), afirma que os modelos de cálculo para dimensionamento de vigas fletidas de concreto armado são semelhantes no Brasil e nos Estados Unidos da América e, portanto, é possível adotar os parâmetros da variável indicados por Nowak et al. (2011).

Ainda, de maneira semelhante ao das vigas sob flexão, as lajes sujeitas à flexão no Brasil são dimensionadas segundo modelos que são semelhantes aos utilizados nos Estados Unidos da América. Assim, novamente é possível adotar os parâmetros da variável indicados por Nowak et al. (2011)

De modo geral, atualmente ainda há muito desconhecimento acerca da variável erro de modelo, seja pela escassez de resultados experimentais ou pela falta de padronização nos resultados disponíveis.

3.2 - Variáveis de Solicitação

Com base nos trabalhos já realizados referente a confiabilidade estrutural e calibração de normas, foi feito um levantamento com as seguintes variáveis de solicitação relacionadas com as estruturas erguidas no Brasil: ação permanente (g), ação variável do tipo acidental (q), ação variável do vento (w) e erro de modelo de solicitação (Ems). As distribuições destas variáveis foram obtidas diretamente da literatura.

3.2.1 Ação permanente (g)

A ação permanente está relacionada às solicitações que ocorrem com valores constantes ou de pequena variabilidade em uma estrutura ao longo da sua vida útil (peso próprio, alvenaria, revestimento, contra piso, forro, etc.).

De acordo com Santiago (2019), ainda que a variável aleatória g esteja relacionada com os desvios decorrentes dos processos construtivos no peso próprio da edificação, a mesma pode ser ajustada a partir da percepção dos projetistas a respeito da questão, metodologia adotada pelo autor.

Assim, a variável g foi construída com base em resultados enviados por diferentes engenheiros calculistas que determinaram o peso próprio de uma mesma edificação com base no retorno dado pelo mercado para o qual eles desenvolvem projetos estruturais.

O trabalho realizado por Santiago (2019) contou com uma compilação de dados enviados por diversos projetistas, de forma a buscar uma generalização dos edifícios mais comumente construídos no Brasil, levando em consideração tanto o aspecto arquitetônico quanto os acabamentos e materiais utilizados.

A Tabela 3.9 apresenta um resumo dos resultados relativos à variável aleatória g , onde a média foi expressa em função da ação permanente nominal (g_n) determinada com base nos pesos dos materiais estabelecidos na NBR 6120:2019.

Para fins de comparação, também são apresentados os resultados divulgados por Ellingwood et al. (1980).

Tabela 3.9 – Variável aleatória g segundo diferentes fontes

Variável	Distribuição	μ	C.V.	Fonte
g	Normal	$1,06.g_n$	0,12	Santiago (2019)
	Normal	$1,05.g_n$	0,10	Ellingwood et al. (1980)

Fonte: Santiago 2019

Ainda, segundo Santiago (2019), não é possível realizar uma comparação com o modelo proposto pelo JCSS (2001) pois este apenas considera o peso próprio da estrutura, enquanto o modelo realizado pelo autor, assim como o proposto por Ellingwood et al. (1980) consideram o peso próprio da edificação.

3.2.2 Ação variável do tipo acidental (q)

A ação variável do tipo acidental está relacionada com as cargas que costumam apresentar significativas variações ao longo da vida útil da estrutura, visto que estão associadas à ocupação da edificação (móveis, pessoas, equipamentos, dentre outros).

Com base no estudo elaborado por Santiago (2019), foi construída a variável aleatória q com base no modelo estocástico proposto pelo JCSS (2001), que modelo contempla a soma entre duas parcelas independentes de carregamentos: contínua e intermitente.

A intensidade de cada uma das duas parcelas de carregamentos foi representada por um campo estocástico cujos parâmetros variaram em função da tipologia da edificação, conforme pode ser visualizado na expressão a seguir:

$$W(x, y) = m + V + U(x, y) \quad (40)$$

onde:

$W(x, y)$ representa a intensidade do carregamento, m é a média geral da intensidade do carregamento;

V é a distribuição que descreve a variabilidade da parcela contínua do carregamento relacionada com duas áreas diferentes em um mesmo pavimento ou em pavimentos diferentes;

$U(x, y)$ é a distribuição que descreve a variabilidade das parcelas contínua e independente em função da área e da forma do carregamento.

Levando em consideração uma resposta elástico-linear da estrutura, os efeitos de cada parcela de carregamento sobre áreas pré-estabelecidas foram determinados, por Santiago (2019), com base seguinte expressão:

$$q = \frac{\int_A W(x,y).i(x,y)dA}{\int_A i(x,y)dA} \quad (41)$$

onde $i(x, y)$ representa a função de influência para o efeito do carregamento sobre uma área previamente estabelecida.

Conseqüentemente, os parâmetros das parcelas contínua e intermitente que compõem o carregamento foram encontrados segundo as expressões a seguir:

$$E[q] = m \quad (42)$$

$$Var[q] = \sigma_V^2 + \sigma_U^2 \cdot \frac{A_0}{A} \cdot K \quad (43)$$

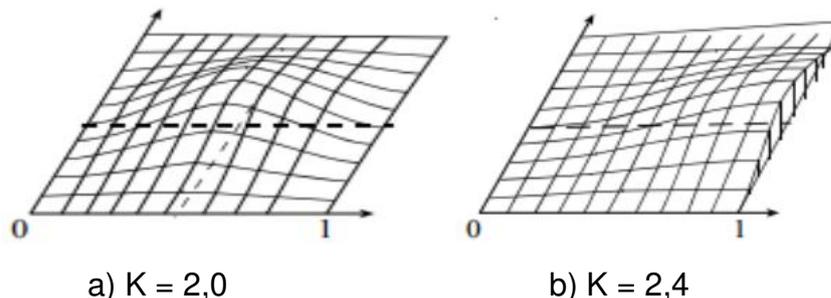
onde:

A_0 é a área tributária de referência;

A é a área adotada na análise;

K o fator de forma que compreende a maneira como o carregamento se distribui sobre a área avaliada (Figura 3.2).

Figura 3.2– Fator de forma da ação variável do tipo acidental



Fonte: Adaptado do JCSS, 2001

O tempo entre as mudanças de ambas as parcelas de carregamento é representado por uma distribuição exponencial dependente da taxa de ocorrência (λ). Já o número de mudanças dessas duas parcelas foi representado por um processo de pulso de Poisson também dependente da taxa de ocorrência, cabendo destacar que a duração da parcela intermitente assumiu um valor fixo (d_p).

Por fim, a tabela 3.10 apresenta os parâmetros utilizados na simulação do processo estocástico da ação accidental em função das tipologias de edificações consideradas neste trabalho.

Tabela 3.10 – Parâmetros do processo estocástico relacionado com q (baseado em JCSS, 2001).

Tipologia	A_0 (m ²)	A (m ²)	K (adm.)	Parcela Contínua				Parcela Intermitente			
				m (KN/m ²)	σ_V (KN/m ²)	σ_U (KN/m ²)	$1/\lambda$ (adm.)	m (KN/m ²)	σ_U KN/m ²	$1/\lambda$ (adm.)	d_p (dias)
Escritório	20	20	2,0	0,5	0,30	0,6	5	0,2	0,4	0,3	1
Residência	20	20	2,4	0,3	0,15	0,3	7	0,3	0,4	1	1
Hospital	20	20	2,4	0,4	0,40	0,6	10	0,2	0,4	1	1
Escola	100	100	2,4	0,6	0,15	0,4	11	0,5	1,4	0,3	5
Biblioteca	20	30	2,0	1,7	0,50	1,0	11	-	-	-	-

Fonte: Santiago 2019

Onde o máximo carregamento é a maior das somas entre as parcelas contínua e intermitente em um período de referência, assim sendo possível ajustar uma distribuição de extremos para a ação accidental em um ponto arbitrário no tempo (q_{apt}) e em um período de 50 anos (q_{50}). A Tabela 3.11 apresenta os valores de referência da ação accidental nominal (q_n) extraídos da norma NBR 6120:2019.

Tabela 3.11 – Valores de referência de q_n (continua)

Tipologia	q_n (KN/m ²)
Escritório	2,0
Residência	2,0
Hospital	2,0

Tabela 3.11 – Valores de referência de q_n (conclusão)

Tipologia	q_n (KN/m ²)
Escola	3,0
Biblioteca	4,0

Fonte: Santiago 2019

A Tabela 3.12 apresenta um resumo dos resultados referentes à variável aleatória q_{apt} , onde a média está expressa em função da ação acidental nominal q_n .

Tabela 3.12 – Variável aleatória q_{apt} em função de diferentes tipos de edificação.

Variável	Tipologia	Distribuição	μ	C.V.
q_{apt}	Escritório	Gamma	$0,26.q_n$	0,55
	Residência	Gamma	$0,26.q_n$	0,55
q_{apt}	Hospital	Gamma	$0,23.q_n$	0,55
	Escola	Gamma	$0,24.q_n$	0,53
	Biblioteca	Gamma	$0,27.q_n$	0,53

Fonte: Santiago 2019

A Tabela 3.13 apresenta uma distribuição ajustada para a variável q_{apt} válida para todas as situações, da mesma forma que ela também ilustra os resultados divulgados por Ellingwood et al. (1980).

Tabela 3.13 – Variável aleatória q_{apt} segundo diferentes fontes

Variável	Distribuição	μ	C.V.	Fonte
q_{apt}	Gamma	$0,25.q_n$	0,55	Santiago (2019)
	Gamma	$0,25.q_n$	0,55	Ellingwood et al. (1980)

Fonte: Santiago 2019

A Tabela 3.14 apresenta um resumo dos resultados relativos à variável aleatória q_{50} , estando a média mais uma vez expressa em função da ação acidental nominal (q_n).

Tabela 3.14 – Variável aleatória q_{50} em função de diferentes tipos de edificação

Variável	Tipologia	Distribuição	μ	C.V.
q_{50}	Escritório	Gumbel	$1,00. q_n$	0,37
	Residência	Gumbel	$1,03. q_n$	0,41
	Hospital	Gumbel	$1,01. q_n$	0,42
	Escola	Gumbel	$1,02. q_n$	0,43
	Biblioteca	Gumbel	$0,98. q_n$	0,40

Fonte: Santiago 2019

A Tabela 3.15 apresenta uma distribuição ajustada para a variável q_{50} válida para quaisquer tipos de ocupação. Para efeito de comparação, ela também ilustra os resultados divulgados por outras fontes.

Tabela 3.15 – Variável aleatória q_{50} segundo diferentes fontes

Variável	Distribuição	μ	C.V.	Fonte
q_{50}	Gumbel	$1,00. q_n$	0,40	Santiago (2019)
	Gumbel	$0,60. q_n$	0,35	Holicky & Sykora (2011)
	Gumbel	$1,00. q_n$	0,25	Ellingwood et al. (1980)

Fonte: Santiago 2019

A Tabela 3.16 apresenta os valores da ação accidental para o período de retorno de 140 anos, tendo estes valores sido determinados com base nas distribuições da variável q construídas a partir de q_n unitário.

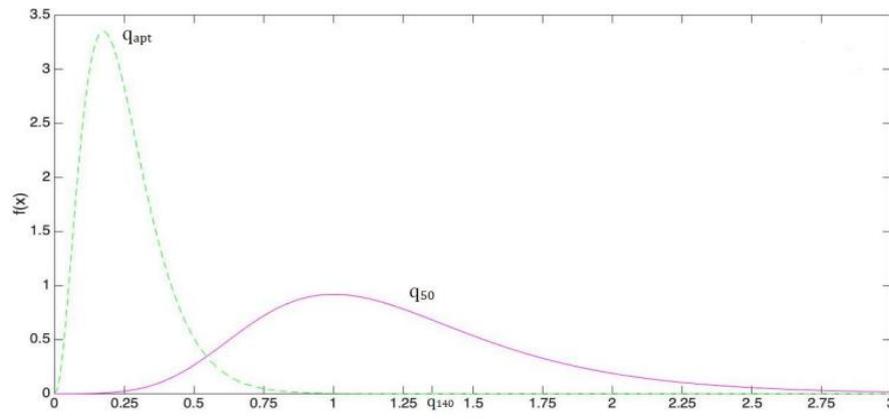
Tabela 3.16 – Valores de q_{140} (continua)

Tipologia	q_{140} (KN/m ²)
Escritório	2,7
Residência	2,7
Hospital	2,7
Escola	4,0

Tabela 3.16 – Valores de q_{140} (conclusão)

Tipologia	q_{140} (KN/m ²)
Biblioteca	5,3

Fonte: Santiago 2019

Figura 3.3 – Distribuições das variáveis aleatórias q_{apt} e q_{50} .

Fonte: Santiago 2019

3.2.3 Ação variável do vento (w)

A ação do vento é um fenômeno natural que possui grande variabilidade, sendo assim uma variável aleatória de difícil consideração nos projetos estruturais. A velocidade, a geometria da edificação e a vizinhança são fatores que influenciam o efeito que o vento terá sobre a estrutura.

No caso específico das lajes, foco principal neste trabalho, a ação do vento acaba por não ter tanta influência nos esforços deste elemento estrutural, visto que o núcleo de rigidez é o principal responsável pela resistência aos esforços oriundos da ação do vento. Assim, a ação variável do vento não foi considerada na análise de confiabilidade estrutural realizada neste trabalho.

3.2.4 Erro do modelo de solicitação (E_{ms})

A variável aleatória E_{ms} foi levantada, por Santiago (2019) a partir das informações disponibilizadas pelo JCSS (2001), levando em conta o pequeno número de trabalhos sobre as incertezas na determinação das ações associadas a um projeto.

A Tabela 3.17 apresenta um resumo dos resultados da variável para diferentes tipos de situações de projeto.

Tabela 3.17 – Variável aleatória E_{ms} em função de diferentes tipos de situação de projeto.

Variável	Solicitação de Projeto	Distribuição	μ	C.V.	Fonte
E_{ms}	Lajes Sujeitas a Flexão	Log-normal	1,00	0,20	JCSS (2001)

Fonte: Santiago 2019

3.3 – Equações de estado limite

As equações de estado limite utilizadas na avaliação dos índices de confiabilidade durante o processo estão expressas nas seguintes equações:

$$g_1(X) = E_{m,r} \cdot R(f_y, f_c, \dots) - E_{m,s} \cdot S(g + q_{50} + w_1) = 0 \quad (44)$$

$$g_2(X) = E_{m,r} \cdot R(f_y, f_c, \dots) - E_{m,s} \cdot S(g + q_{apt} + w_{50}) = 0 \quad (45)$$

As equações acima são válidas para as combinações de carregamentos derivadas da equação geral de combinações, representada a seguir:

$$S [\gamma_g \cdot g_n + \gamma_i \cdot q_{ni} + \sum_{j \neq i}^n \gamma_j \cdot \psi_j \cdot q_{\psi j}] \leq R \left[\frac{r_k}{\gamma_R} \right], \quad (46)$$

onde:

$S[.]$ é uma função de efeitos de solicitações;

$R[.]$ é uma função de resistência;

r_k representa a resistência característica do elemento estrutural;

γ_R representa o coeficiente parcial de segurança de minoração da resistência do material ou do elemento estrutural;

γ_i e γ_j representam os coeficientes parciais de segurança de majoração das ações;

ψ_j os fatores de combinação das ações.

Em uma situação de análise de confiabilidade com combinações de ações permanentes, acidentais e de vento, a equação geral de combinação normal origina outras cinco, conforme apresentado abaixo:

$$\left\{ \begin{array}{l} S_D = [\gamma_g \cdot g] \\ S_D = [\gamma_g \cdot g + \gamma_q \cdot q_{50}] \\ S_D = [\gamma_g \cdot g + \gamma_w \cdot w_{50}] \\ S_D = [\gamma_g \cdot g + \gamma_q \cdot q_{50} + \gamma_w \cdot \Psi_w \cdot w_1] \\ S_D = [\gamma_g \cdot g_n + \gamma_w \cdot w_{50} + \gamma_q \cdot \Psi_q \cdot q_{apt}] \end{array} \right. \quad (47)$$

Onde as três primeiras expressões são situações particulares em que ao menos uma ação variável é nula, ao passo que as duas equações finais representam combinações de três ações onde nenhuma delas é nula.

Em relação à combinação de ações, levando em consideração que em relação à ação do vento, os núcleos rígidos são os maiores responsáveis por absorver as ações do vento, com menor importância das lajes. Assim, para a determinação dos esforços solicitantes foi utilizada a segunda combinação de ações dentre as acima apresentadas.

3.4 Situações de Projeto

Ao realizar a análise de confiabilidade de elementos estruturais dimensionados a partir de um conjunto normativo, deve-se considerar diferentes situações de projetos, de modo que os valores obtidos durante a análise representem adequadamente as situações reais dos sistemas estruturais.

Para realizar esta análise, foi feito, inicialmente, o dimensionamento dos elementos estruturais seguindo a norma NBR 6118 e NBR 6120, com a utilização de *software* Eberick 23 para análise e dimensionamento estrutural. A escolha pela utilização do referido *software* para as etapas de análise e dimensionamento das lajes se deu em função da tentativa de melhor representar a realidade dos projetos estruturais elaborados comercialmente.

O *software* Eberick, segundo Guessi (2017), é um programa que pode auxiliar no desenvolvimento de projetos de estruturas em concreto armado. O mesmo abrange as etapas de lançamento, análise da estrutura, dimensionamento e

detalhamento final dos elementos. O Eberick apresenta um sistema gráfico de entrada de dados associado à análise da estrutura com um modelo de pórtico tridimensional, além de diversos recursos de dimensionamento e detalhamento dos elementos, em conformidade com a NBR 6118:2014, e permite uma visualização tridimensional da estrutura.

As lajes são modeladas, no *software*, a partir da analogia de grelha, em que as lajes são discretizadas em uma série de faixas com determinada largura. Levando em consideração que as faixas podem ser substituídas por elementos estruturais de barras exatamente nos seus eixos, é obtida uma grelha de barras planas. As grelhas podem, então, ser consideradas como um conjunto de vigas individuais, interconectadas nos seus nós. É válido, ainda, ressaltar que a própria NBR 6118:2014 utiliza, para o dimensionamento das armaduras, considerações semelhantes entre lajes e vigas, indicando a proximidade do comportamento de ambos os elementos, sendo assim razoável a utilização de analogia de grelha para análise das lajes.

Por fim, o software utiliza o método dos deslocamentos, também conhecido como método da rigidez, para a partir da rigidez dos elementos montar um sistema de equações relacionando os deslocamentos com as cargas que atuam na estrutura. A partir do campo de deslocamentos são obtidos os esforços internos utilizados nas demais verificações e dimensionamento.

Após realizar o dimensionamento das lajes, pelo método semi-probabilístico, é possível verificar o momento resistente da seção transversal resultante e compará-lo com o solicitante. A probabilidade de falha relacionada consiste na probabilidade que o momento solicitante seja maior que o resistente. Esta probabilidade pode ser estimada utilizando os métodos de confiabilidade estrutural

A análise de confiabilidade é feita utilizando o UQLab (Marelli e Sudret, 2014) como ferramenta. De acordo com Paula (2023), O UQLab é um *framework* baseado em *MATLAB* desenvolvido com o objetivo de atuar na quantificação de incertezas de problemas. O *framework* apresenta diversos módulos relacionados à quantificação de incertezas, sendo a análise de confiabilidade um dos módulos, incluindo os métodos *FORM* e de simulação de Monte Carlo.

3.4.1 Lajes de Concreto armado

Para considerar a importância da resistência à compressão na confiabilidade das lajes de concreto armado sujeitas à flexão foram consideradas as seguintes classes de resistência do concreto: C25, C30 e C40, combinadas com as classes de agressividade ambiental II, III e IV.

Visando verificar a influência da altura em faixas métricas de lajes de concreto armado sujeitas à flexão, foram empregadas as seguintes alturas: 8 cm, 12 cm, 15 cm e 20 cm.

Cabe observar que foram consideradas lajes armadas nas duas direções para determinação das taxas mínimas e máximas de armadura, sendo a primeira também função da resistência característica à compressão do concreto e a segunda do limite da altura da linha neutra na seção da laje.

A partir do dimensionamento das lajes feito com o auxílio de software computacional podemos calcular o momento resistente daquela laje, utilizado na análise de confiabilidade. A formulação, sugerida por Prata e Real (2018), em estudo sobre confiabilidade em estruturas portuárias, representa a parcela de resistência da equação de estado limite, relacionada com as lajes de concreto armado sujeitas à flexão:

$$R = E_{mr} * \left[(A_s) \cdot f_y \cdot \left(d_s - \frac{0,5 \cdot (A_s) \cdot f_y}{b \cdot f_c} \right) \right] \quad (48)$$

onde: d_s representa a altura útil da laje, distância entre a borda mais comprimida e o centro de gravidade da armadura positiva;

b é igual a 100cm, visto que a avaliação foi feita com base em faixas métricas de lajes planas de concreto armado.

Obtida a parcela de momento resistente das lajes dimensionadas, para fins da equação usada para análise de confiabilidade, ainda é necessária a parcela referente ao momento solicitante. Para a obtenção destes valores existem diversas metodologias disponíveis. Dentre estas metodologias, Albuquerque e Pitangueira (2018) afirmam que a utilização do método de elementos finitos (MEF) passou a ser prática corrente na análise de estruturas de geometria arbitrária, constituídas por múltiplos materiais e sujeitas a qualquer tipo de carregamento.

Contudo, a implementação e utilização deste método apresenta maior custo computacional e tempo de processamento, e considerando o elevado número de configurações a serem analisadas, se optou pelo uso de um método simplificado.

Neste estudo as lajes serão analisadas individual e isoladamente, sendo considerado que seus apoios são rígidos e indeformáveis. Assim, dentre os métodos disponíveis para a obtenção dos esforços, adota-se o método simplificado das linhas de ruptura. Segundo Araújo (2010), a NBR 6118 permite o emprego da teoria das linhas de ruptura.

Para fins de facilidade de implementação e velocidade de processamento, a laje foi considerada como simplesmente apoiada em todos os bordos, ainda que esta não seja a situação de projeto mais usualmente observada. Para uma laje com dimensões planas l_x e l_y , altura d_s e com carregamento uniformemente distribuído p , Araújo (2010), sugere a seguinte formulação para obtenção dos momentos fletores máximos no centro da laje:

$$M_x = p * l_x^2 \left[\frac{3l_y - l_x}{24 (l_y + kl_x)} \right] \quad (49)$$

Para o coeficiente adimensional k é apresentada a seguinte formulação, para lajes quadradas:

$$k = \left(\frac{l_x}{l_y} \right)^2 \quad (50)$$

Já para a obtenção do valor de M_y , o mesmo é obtido com a multiplicação de M_x pelo coeficiente k .

Supondo uma laje quadrada de dimensões l_x e l_y , carregamento uniformemente distribuído p obtemos a seguinte formulação:

$$\begin{cases} k = \left(\frac{l_x}{l_y} \right)^2 = 1 \\ M_x = p * l_x^2 \left[\frac{3l_y - l_y}{24 (l_y + kl_y)} \right] = p * l_x^2 \left[\frac{2l_y}{24 (l_y)} \right] = \frac{1}{24} * p * l_x^2 \\ M_y = M_x \end{cases} \quad (51)$$

Como esperado, por se tratar de uma laje quadrada e com apoios iguais em todos as laterais, os momentos máximos obtidos nas direções x e y são iguais.

Assim, a formulação adotada para o esforço solicitante será a seguinte:

$$S = E_{ms} * \frac{(g + g_r + q)}{24} * lx^2 \quad (52)$$

Acerca do método apresentado por Araújo (2010), Prata e Real (2018), em trabalho sobre confiabilidade de lajes em situação portuária, realizaram a validação deste modelo com os valores obtidos em ensaios realizados por Taylor et. Al (1966) e Campos et. al (2012) comparando os valores obtidos neste ensaio real com os valores teóricos e obtendo resultados muito próximos, concluindo que a utilização do método foi satisfatória.

Considera-se, portanto, que o método apresentado, embora não seja o método com a maior precisão disponível, produz resultados suficientemente precisos para o estudo que se pretende realizar.

3.4.1.1 Carregamentos considerados

Para a consideração dos esforços aos quais as lajes estarão submetidas, temos basicamente três carregamentos diferentes. O primeiro é o peso próprio da laje, decorrente da densidade do próprio concreto armado.

Além do peso próprio da laje será considerado também a carga decorrente do revestimento, para edifícios residenciais e comerciais com uma espessura de 5,0 centímetros, que seguindo a NBR 6120/2019 resulta em um carregamento de 1,0kN/m².

Ainda, será considerado o carregamento acidental, consoante às prescrições da norma NBR 6120/2019. Considerando os ambientes mais comuns, tanto em áreas comerciais quanto residenciais, serão considerados os carregamentos uniformemente distribuídos nos valores de 2,0 kN/m², 2,5 kN/m², 3,0 kN/m² e 4,0 kN/m².

Para algumas das situações consideradas, pode ocorrer de as dimensões resultarem insuficientes para o dimensionamento. Nestes casos as análises de confiabilidade não são efetuadas.

Para verificar a confiabilidade estrutural de lajes em situações diversas condizentes com a prática de engenharia considera-se um total de 307 casos, que levam em conta nove dimensões, três classes de agressividade ambiental, quatro alturas e quatro carregamentos diferentes. As funções de estado limite consideradas neste trabalho dizem respeito à falha por flexão, comparando o momento resistente com o solicitante.

Na tabela abaixo são apresentadas as variáveis aleatórias consideradas para a análise de uma laje em CAA-II, com vão de 4,0 metros, 10 cm de espessura, e carregamento de 3,0 kN/m². Para este exemplo é considerado o concreto de classe C25 e a área de aço foi obtida a partir do dimensionamento das lajes no software Eberick.

Tabela 3.18 – Variáveis para análise de confiabilidade

Variável	μ	σ	Distribuição
E_{mr}	1,02	0,0612	Normal
$\frac{A_s}{m}$	0,00026	0,00000520	Normal
f_y	610000	18300	Normal
d_s	0,07185	0,01	Normal
b	1,00	0,0046	Normal
f_c	31250	5312,5	Normal
E_{ms}	1,00	0,04	Lognormal
g	2,65	0,318	Normal
g_r	1,06	0,1272	Normal
q	3,0	1,2	Gumbel
lx	4,0	0,04	Normal

Fonte: elaborado pelo autor

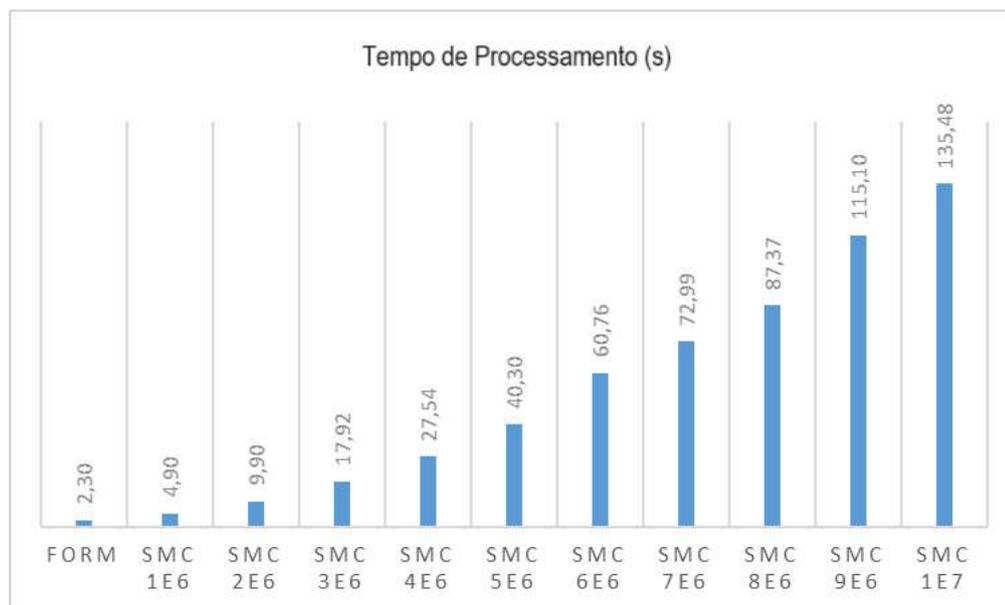
4 RESULTADOS OBTIDOS

No presente capítulo os resultados são apresentados e discutidos por classe de agressividade ambiental. Para cada classe são indicados os valores obtidos para o índice β , apresentados por meio de histogramas e organizados em tabelas.

Quanto aos métodos utilizados para a análise estrutural, os valores obtidos pelos métodos *FORM* e SMC ficaram bastante próximos, com a diferença acontecendo na segunda casa decimal. Quando os valores de β resultaram acima de 5,0, o número de simulações necessárias para atingir um bom nível de confiabilidade aumentava significativamente, aumentando também o tempo de processamento. Assim, nestas situações foi utilizado o método *FORM* para obter o índice de confiabilidade e a probabilidade de falha.

A figura 4.1 ilustra o tempo de processamento necessário para o método *FORM*, bem como para o método de Simulação de Monte Carlo, variando de 10^6 simulações até 10^7 simulações.

Figura 4.1 – Tempo de processamento



Fonte: elaborada pelo autor

Como se pode observar, o tempo de processamento de 10^7 simulações é mais de cinquenta vezes superior ao tempo de processamento pelo método *FORM*. Para este exemplo específico, pelo método SMC o valor obtido para o índice de confiabilidade foi de 3,80, enquanto utilizando o *FORM* o valor obtido foi de 3,82.

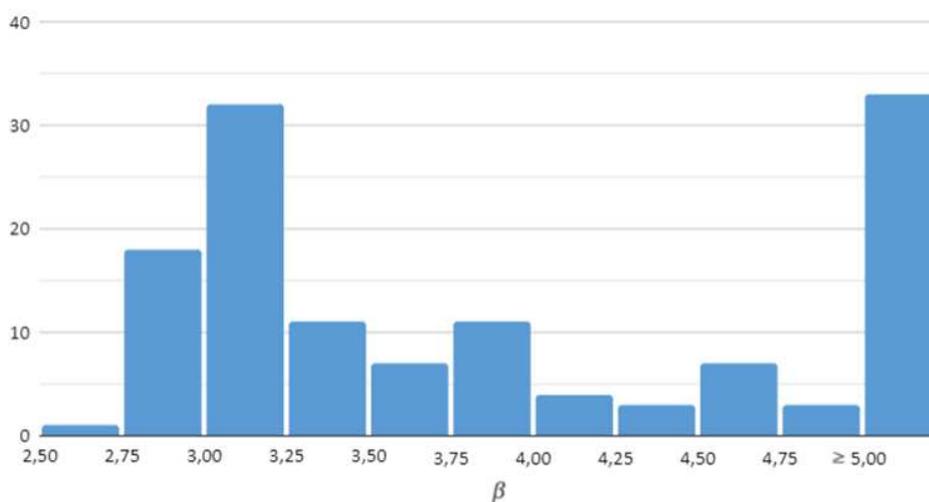
Considerando a pequena diferença no valor obtido para o índice de confiabilidade e a grande diferença no tempo de processamento, justifica-se a escolha do *FORM* nas situações onde o índice de confiabilidade é elevado.

Em determinadas situações os valores obtidos para o índice de confiabilidade resultam muito acima do indicado como objetivo nas referências. Tal situação é decorrente da área mínima de aço estipulada pela NBR 6118, que depende tanto da área da seção transversal da laje quanto da classe de resistência do concreto.

Nestas lajes analisadas, a área mínima de aço estipulada pela instrução normativa é superior à necessária para os esforços atuantes. Como consequência da área de aço adotada ser maior do que a necessária, o índice de confiabilidade também é superior ao que seria obtido com a área de aço calculada.

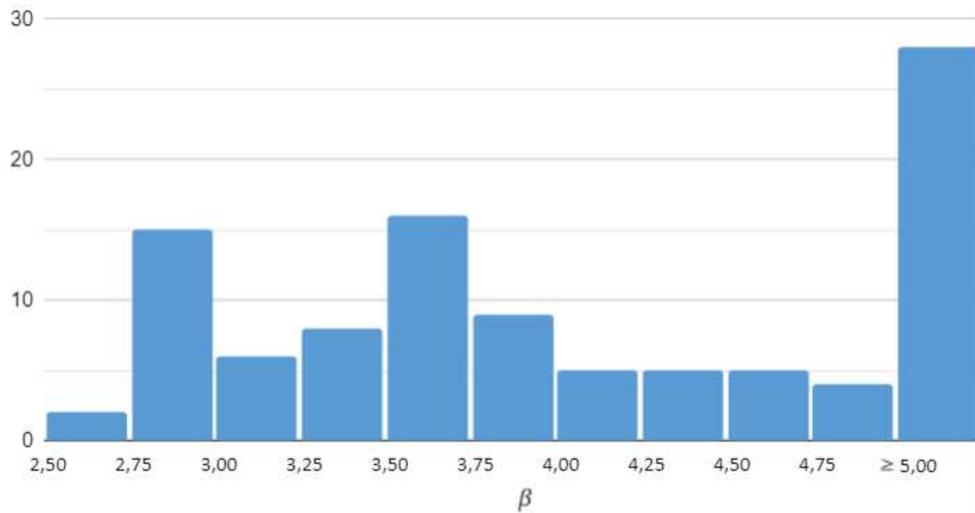
Essa situação foi verificada nas três classes de agressividade ambiental consideradas. Para a classe de agressividade ambiental II, o menor valor obtido para o índice β foi de 2,7, enquanto o maior valor obtido para β foi de 14,8, conforme ilustrado na figura 4.2. A probabilidade de falha, por sua vez, ficou entre $3,0 \times 10^{-3}$, para β de 2,70 e $1,4 \times 10^{-6}$ para β de 14,8.

Figura 4.2 – Histograma de β CAII



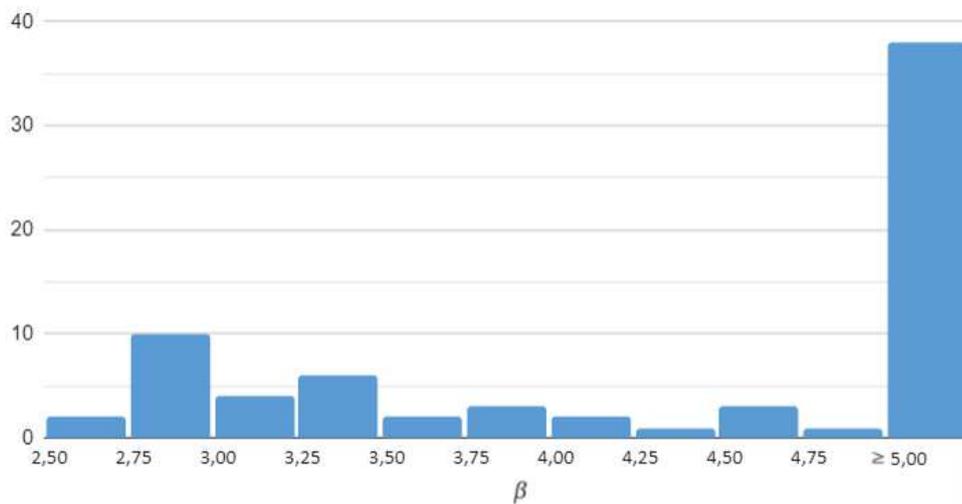
Fonte: elaborado pelo autor

Na classe de agressividade ambiental III, o menor valor obtido para o índice β foi de 2,7, enquanto o maior valor obtido para β foi de 13,1, como demonstrado na figura 4.3. A probabilidade de falha, por sua vez, ficou entre $3,0 \times 10^{-3}$, para β de 2,70 e $2,2 \times 10^{-39}$ para β de 13,1.

Figura 4.3 – Histograma de β CAAIII

Fonte: elaborado pelo autor

Na classe de agressividade ambiental IV o menor valor obtido para o índice β foi de 2,7, enquanto o maior valor obtido para β foi de 13,7, conforme figura 4.4. A P_f ficou entre $3,0 \times 10^{-3}$, para β de 2,70 e $2,9 \times 10^{-43}$ para β de 13,7.

Figura 4.4 – Histograma de β CAAIV

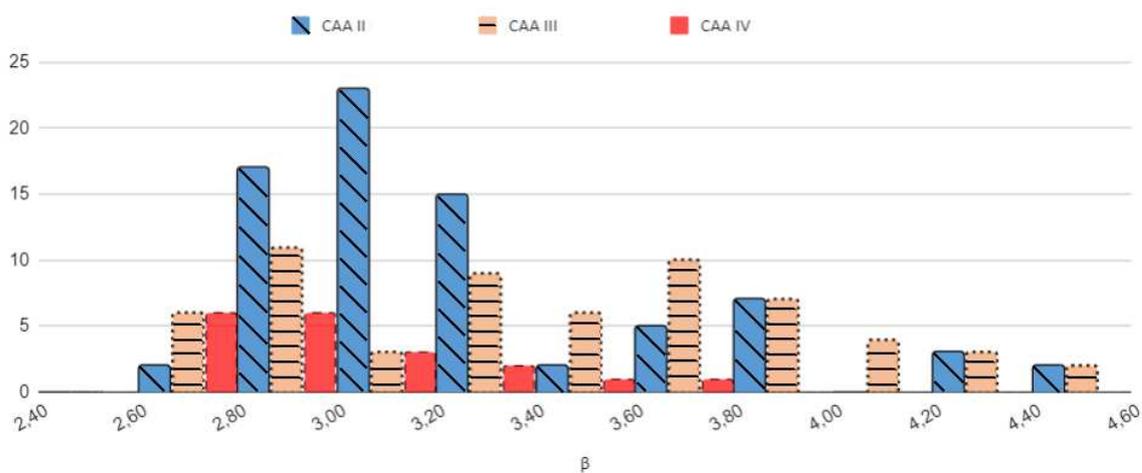
Fonte: elaborado pelo autor

Adicionalmente foi feita uma análise considerando somente as lajes onde a taxa de armadura obtida foi decorrente do dimensionamento da laje e não das prescrições de área mínima.

Nas lajes analisadas em cada classe de agressividade ambiental verifica-se que a maioria dos valores obtidos se encontram dentro dos intervalos recomendados por Melchers e Beck (2018), entre 3,0 e 3,5.

Contudo, em algumas das lajes analisadas o índice de confiabilidade calculado resultou abaixo de 3,0, valor proposto como limite mínimo. Ou seja, para algumas das lajes dimensionadas segundo as prescrições normativas, o índice de confiabilidade resultou abaixo do recomendado na literatura, como pode ser visualizado na figura 4.5.

Figura 4.5 – Histograma de β para todas as CAA



Fonte: elaborado pelo autor

É apresentada, também, uma tabela contendo os valores máximos e mínimos obtidos para o índice de confiabilidade obtido nas diferentes classes de agressividade ambiental e espessuras.

Tabela 4.1 – Valores de β por CAA (continua)

CAA	Espessura Laje	Menor valor obtido	Maior valor obtido
II	8	2,7	3,0
	10	3,0	3,9
	15	3,0	3,8
	20	3,8	4,6
III	10	2,7	3,6
	15	3,3	4,6

Tabela 4.1 – Valores de β por CAA (conclusão)

CAA	Espessura Laje	Menor valor obtido	Maior valor obtido
III	20	3,6	4,5
IV	15	2,7	3,8
	20	3,0	3,3

Fonte: elaborado pelo autor

Na classe de agressividade ambiental II, ao considerar as lajes onde a taxa de armadura obtida foi decorrente do dimensionamento da laje, o menor valor obtido continuou sendo 2,7, porém o valor máximo obtido foi reduzido para 4,6, como demonstrado na tabela 4.1. Assim, a P_f ficou entre $3,0 \times 10^{-3}$ e $2,1 \times 10^{-6}$.

Para a classe de agressividade III, o menor valor obtido para β continuou resultando 2,7, porém o valor máximo obtido foi reduzido para 4,6. Assim, a P_f ficou entre $3,0 \times 10^{-3}$ e $2,1 \times 10^{-6}$.

Na classe de agressividade IV o menor valor obtido para β também resultou em 2,7, porém o valor máximo obtido foi reduzido para 3,8. Deste modo, a P_f ficou entre $3,0 \times 10^{-3}$ e $7,4 \times 10^{-5}$.

É possível observar que nas três classes de agressividade ambiental, os menores índices de confiabilidade obtidos foram nas lajes com menor altura útil. Estes resultados indicam que o desvio padrão atribuído a altura útil (d_s), que é constante, se torna muito influente no caso das lajes com menor altura útil.

A tabela 4.2 apresenta os valores máximo e mínimo obtidos para o índice de confiabilidade estrutural nas três classes de agressividade ambiental consideradas.

Tabela 4.2 – Valores de β para todas as CAA

CAA	Maior valor obtido	Menor valor obtido
CAA II	2,7	4,6
CAA III	2,7	4,6
CAA IV	2,7	3,8

Fonte: elaborado pelo autor

O menor valor obtido para β foi de 2,7, enquanto o maior valor obtido foi de 4,6. A partir dos dados obtidos podemos concluir que a hipótese inicial se confirma, visto que para a maioria das lajes analisadas, os valores obtidos para o índice de

confiabilidade se encontram dentro dos intervalos recomendados. Também foi verificado que em algumas das configurações analisadas o índice de confiabilidade obtido ficou abaixo do valor de 3,0.

Levando em consideração que esta ocorrência já havia sido verificada em análises semelhantes realizadas em vigas de concreto armado, os resultados obtidos ficaram dentro do que já era esperado. A ocorrência desta situação levou a pesquisas acerca da necessidade de calibração dos coeficientes de segurança, a fim de diminuir a variação dos resultados e garantir a segurança das estruturas.

4.1 – Considerações Adicionais

A fim de verificar o impacto que uma calibração dos fatores de segurança pode ter nos índices de confiabilidade das lajes aqui analisadas, são considerados os fatores conforme calibração feita por Santiago(2019), para valor alvo de 3,0 para β .

Tabela 4.3 - Coeficientes parciais de segurança de resistência ótimos para as estruturas metálicas e de concreto.

Coeficientes	Sem Calibração	Com calibração $\beta_{alvo} = 3,0$
γ_c	1,40	1,38 (1,40)*
γ_s	1,15	1,17 (1,20)*
γ_g	1,40	1,27 (1,25)*
γ_q	1,40	1,70 (1,70)*
γ_w	1,40	1,65 (1,65)*
Ψ_q	0,50 / 0,70 / 0,80	0,36 (0,35)*
Ψ_w	0,60	0,33 (0,30)*
$\gamma_g \cdot \Psi_q$	0,70 / 0,98 / 1,12	0,61 (0,60)*
$\gamma_w \cdot \Psi_w$	0,84	0,54 (0,50)*

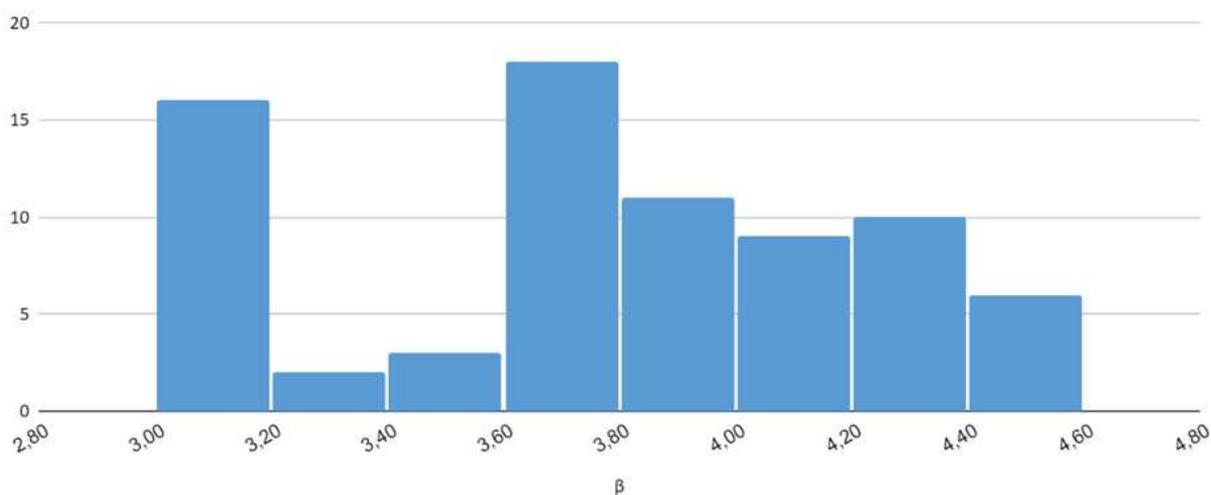
*Valores arredondados entre parênteses

Fonte: Santiago 2019

No trabalho realizado por Santiago (2019) considerou-se a classe de agressividade ambiental II no processo de calibração dos coeficientes de segurança. Assim, utilizando os valores acima sugeridos foi feito o dimensionamento das lajes

na CAAll e, posteriormente, foi refeita a análise de confiabilidade para as lajes cuja área de aço foi determinada a partir dos esforços solicitantes, e não de taxas mínimas de armadura. Concluída a etapa de análise de confiabilidade, o menor valor obtido para o índice β foi de 3,0, enquanto o maior valor obtido para β foi de 4,6, conforme se pode verificar na figura 4.6.

Figura 4.6 – Histograma de β para CAAll com coeficientes calibrados



Fonte: elaborado pelo autor

Podemos afirmar, portanto, que utilizando os coeficientes calibrados propostos por Santiago (2019), foi possível obter, nas lajes submetidas a CAAll valores para o índice β no intervalo dos valores recomendados.

5 – CONCLUSÕES

5.1 – CONCLUSÕES GERAIS

Neste trabalho foi apresentado um estudo sobre os índices de confiabilidade e probabilidades de falha de lajes de concreto armado dimensionadas segundo as normas técnicas brasileiras vigentes.

O estudo foi feito com base em variáveis aleatórias de resistência e solicitação obtidas em pesquisas feitas a partir de resultados experimentais e numéricos alinhados com a realidade dos materiais e ações no Brasil. O estudo confirmou a hipótese de que em certas situações de projeto, o índice de confiabilidade das lajes resulta abaixo das recomendações na literatura e em recomendações normativas internacionais.

Essa necessidade já havia sido verificada sobretudo em análises de confiabilidade estrutural realizadas em vigas e pilares em concreto armado, sendo aqui constatada necessidade semelhante para o caso das lajes.

Foi verificado ainda, conforme esperado, que nas situações de projeto onde a área de aço é definida a partir das taxas mínimas de armadura o índice de confiabilidade calculado resulta significativamente mais alto do que os recomendados.

Além disso, ao se utilizar fatores parciais de segurança calibrados por Santiago (2019) considerando um índice de confiabilidade alvo $\beta = 3,0$ para a classe de agressividade ambiental II, notou-se que os índices de confiabilidade das lajes aqui analisadas resultaram todos eles acima do valor alvo. Notou-se também um nível de confiabilidade mais uniforme para as diversas combinações de carregamentos e dimensões consideradas.

Verifica-se, assim, que a utilização dos coeficientes parciais de segurança calibrados conduz a uma confiabilidade mais uniforme para as diversas combinações de carregamentos e situações de projeto estrutural.

Esse resultado indica que os valores calibrados sugeridos por Santiago levam ao resultado proposto, de maneira que as lajes projetadas utilizando os valores calibrados apresentam a confiabilidade dentro dos limites desejados.

Os resultados apresentados neste trabalho reforçam a necessidade de revisão das normas brasileiras, para reavaliar os coeficientes em vigência ou que seja indicada a utilização de índices de confiabilidade alvo.

5.2 – SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Uma sugestão para trabalhos futuros é a realização do estudo de confiabilidade estrutural para elementos em concreto armado pré-moldados, especificamente lajes, tanto durante a utilização quanto durante as etapas de transporte e montagem da estrutura.

Outra sugestão é a utilização de modelos mais avançados de modelagem e análise estrutural como, por exemplo, o método de elementos finitos, associados ao estudo de confiabilidade das lajes.

Sugere-se, ainda, a realização da análise de confiabilidade estrutural aplicada a lajes considerando o comportamento não-linear, com o uso do método de elementos finitos, por exemplo.

REFERÊNCIAS

Albuquerque, R. N. M., Pitangueira, R. L. S. **Sistema gráfico interativo para ensino de análise estrutural através do método dos elementos finitos**, Revista de Ensino de Engenharia v.37, n.1, p77, ABENGE. Brasília, 2018.

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. **ACI 318. Building Code Requirements for Structural Concrete**. Farmington Hills, 2014.

Ang, A.H-S.; Tang, W.H., 2007. **Probability Concepts in Engineering: Emphasis on Applications to Civil and Environmental Engineering**. 2nd Edition. John Wiley & Sons.

Araújo, J. M. **Curso de Concreto Armado, Vol. 2**, Editora Dunas, Rio Grande, 2010.

AMERICAN NATIONAL STANDARD INSTITUTE / AMERICAN INSTITUTE OF STEEL ANSI/AISC 360. *Specification for Structural Steel Buildings*. Chicago, Illinois, 2005.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6120**. Cargas para o cálculo de estruturas de edificações. Rio de Janeiro, 2019.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 8681**: Ações e Segurança nas Estruturas - Procedimento. Rio de Janeiro, 2003.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 14931**. Execução de estruturas de concreto - Procedimento. Rio de Janeiro, 2004.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118** Projeto e execução de estruturas de concreto armado e protendido. Rio de Janeiro, 2014.

Beck, A.T. **Curso de Confiabilidade Estrutural**, Programa de Pós-graduação em Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2014.

Beck, A.T. **Confiabilidade e Segurança das Estruturas**, Elsevier, ISBN 978-85-352-8895-7, 2019

Benjamin J.R. **Probabilistic Structural Analysis and Design**, *Journal of the Structural Division (ASCE)* 94, 1665-1679, 1968.

Biondini, F.; Frangopol, D. **Lifetime reliability-based optimization of reinforced concret cross-section under corrosion**. *Structural Safety*, V. 31, p. 483-489, 2009

Campos, C.O.; Rocha, A.P.; Gomes, R.B.; Melo, G.S. 2012. **Reforço em lajes de concreto armado**. *Revista Eletrônica de Engenharia Civil*, nº2, 69-81.

Carvalho, R. C. **Análise não linear de pavimentos de edifícios de concreto através da analogia de grelha**. Tese (doutorado) – Universidade de São Paulo, Escola de Engenharia de São Carlos, SP, São Carlos., 1994.

Cornell C.A. **Bayesian Statistical Decision Theory and Reliability-Based Design**, *Proceedings of the Int. Conference on Structural Safety and Reliability*, Washington DC, 47-66, 1969.

Cornell C.A. **A probability-based structural code**. *Journal of the American Concrete Institute* 66(12), 974—985, 1969.

Ellingwood, B.; Galambos, T.V.; MacGregor, J.G.; Cornell, C.A., 1980. **Development of a Probability Based Load Criterion for American National Standard A58**. *Us National Bureau of Standard Special Publication 577*. Washington, D.C, 1980.

Ellingwood, B.; Galambos, T.V., 1982. **Probability-based criteria for structural design**, *Structural Safety* 1, p. 15-26.

Enevoldsen I., Sorensen J.D. **Reliability-based optimization in structural engineering**, *Structural Safety* 15, 169- 196, 1994.

Ferry-Borges J. **O Dimensionamento de Estruturas, Publication 54**, Ministério das Obras Públicas, Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisboa, Portugal, 1954.

Forsell, C. **Ekonomioch byggnadsvasen. Sunt Formoft**, p. 74-77, 1924.

Frangopol D.M. **Structural optimization using reliability concepts**, *Journal of Structural Engineering* 111, 2288— 2301, 1985.

Freudenthal, A.M. **The Safety of structures**. *Transactions of ASCE*, V. 112, p. 1255-180, 1947.

Freudenthal A.M. **Safety and the probability of structural failure**. *ASCE Transactions* 121, 1337—1397, 1956.

Fürst A. **Erro de modelo e confiabilidade estrutural de vigas de concreto armado**. Dissertação de mestrado, Engenharia Civil, Universidade Federal de Santa Catarina, 2020.

Ghista, D. **Structural optimization with probability of failure constraints**. [S.l.], p. 1-15, 1966.

Hasofer, A.M.; Lind, N.C. **Exact and invariant second moment code format**. *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, V. 100, n. EM1, p. 111- 121, 1974

Hilton H.H., Feigen M. **Minimum Weight Analysis Based on Structural Reliability**, *Journal of the Aerospace Sciences* 27, 641-653, 1960.

Holicky, M. **Probabilistic risk optimization of road tunnels**. *Structural Safety*, V. 31, p. 260-266, 2009.

Holicky, M; Sykora, M. **Conventional probabilistic models for calibration of codes**. *Applications of Statistics and Probability in Civil Engineering (ICASP11)*, London, 2011.

JCSS, 2001. **Probabilistic Model Code, Joint Committee on Structural Safety**, disponível em http://www.jcss.byg.dtu.dk/Publications/Probabilistic_Model_Code.aspx, acessado em 15/12/2023.

Joanni, A.; Rackwitz, R. **Cost benefit optimization for maintained structures by renewal model**. *Reliability Engineering and System Safety*. V. 93, p. 489-499, 2008.

Johnson A. I. **Strength, Safety and Economical Dimensions of Structures, Division of Building Statistics and Structural Engineering Bulletin 12**, Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden, 1953.

Johnson A.I. **Strength, safety and economical dimensions of structures, 2nd ed.**, Nat. Swedish Building Research Inst, 1971.

Kabala, R.E. **Design of minimal – weight structures given reliability and cost**. *J. Aerospace Sciences*, V. 29, p. 355-356, 1962.

Kennedy, J.; Eberhart, R. **Particle Swarm Optimization**. *Proceedings of IEEE International Conference on Neural Networks*. p. 1942–1948, 1995.

Kimura, A. **Informática aplicada em estruturas de concreto armado Cálculo de edifícios com o uso de sistemas computacionais**. 1ª ed. São Paulo: Pini, 2007.

Kiner, D.E. **Elastic minimum weight design with a probability of failure constraint**. *Tese de doutorado, Case Inst. Of Technology*, 1966.

Li, M.; Bai, G.; Wang, Z. **Time-variant reliability-based design optimization using sequential kriging modeling**. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, V. 58, n. 3, p. 1051-1065, 2018.

Lind N.C. **Approximate analysis and economics of structures**, *J. Struct. Div.*, 102, 1177-1196, 1976.

Liu S.C., Neghabat F., Dougherty M.R. ***Optimal aseismic design of building and equipment***, Engrg. Mech. ASCE 102, 395—414, 1976.

R.H. Lopez, **Notas de aula de otimização e métodos heurísticos para engenharia**, Universidade Federal de Santa Catarina, 2020.

Maxwell, J.C. ***The scientific papers of James Clerk Maxwell***. [S.l.]: Dover Publications, INC. New York, 1952.

Melchers, R.E., Beck, A.T. ***Structural Reliability Analysis and Prediction***. 3rd edition, John Wiley and Sons, 2018.

Michell, A.G.M. ***The limits of economy of material in frame structures***. *Philosophical Magazine*, V. 81, p. 1087-1092, 1904.

Moses F. ***Approaches to Structural Reliability and Optimization, in: An Introduction to Structural Optimization***, Conn MZ (ed.), Solid Mechanics Division, University of Waterloo, Study No. 1, 81-120, 1969.

Moses F. ***Structural system reliability and optimization***, *Computers & Structures* 7, 283-290, 1977.

Nowak, A.S.; Szerszen, M.M. ***Calibration of design codes for buildings (ACI 318): Part 1 – Statistical model for resistance***. *ACI Structural Journal*, V. 100, n. 3, p. 377-391. New York, 2003.

Nowak, A.S., Rakoczy, A.M., Szeliga, E. ***Revised Statistical Resistance Models for R/C Structural Components***, *ACI SP honoring Andy Scanlon*, 2011

Paliga, C.M. **Análise probabilística de vigas de concreto armado recuperadas à flexão, através do método de Monte Carlo utilizando um modelo de elementos finitos**, tese de doutorado, Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2008

Paula, E. H. **Otimização de projeto baseada em confiabilidade aplicada a sistemas rotativos**, dissertação de mestrado, Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2023.

Pereira, M. F.; Beck, A. T.; El Debs, A. L. H. C. **Confiabilidade de pilares mistos aço-concreto parcialmente revestidos em flexo-compressão**, Revista Ibracon de Estruturas e Materiais, Volume 10, Número 2, São Paulo 2017.

Rackwitz, R.; Fiessler, B. **Structural reliability under combined random load sequences**. *Computers & Structures*, V. 9, p. 489-494, 1978.

Real, M. V. **Análise probabilística de estruturas de concreto armado, sob estado plano de tensão, através do método dos elementos finitos**, tese de doutorado, Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2000.

Robert C.P., Casella G. **Monte-Carlo Statistical Methods**, Springer, ISBN 0-387-21239-6, 2nd ed, 2004

Rosenblueth E. **Optimum design for infrequent disturbances**, *J. Struct. Div. ASCE* 102, 1807—1825,1976.

Rosenblueth E. **Towards optimum design through building codes**, *J. Struct. Div. ASCE*, 102, 591—607,1976.

Saad, L et al. **Reliability-based optimization of direct and indirect LCC of RC bridge elements under coupled fatigue-corrosion deterioration processes**. *Eng. Fail. Anal.*, V. 59, p. 570-587, 2016.

Sales, J.J.; Munair Neto, J.; Malite, M. **Segurança nas estruturas**. 2nd.edição. Elsevier Editora Ltda., 2015

Santos, R. E. **A armação do concreto no Brasil: história da difusão da tecnologia do concreto armado e da construção de sua hegemonia**, tese de doutorado, História da Educação, Universidade Federal de Minas Gerais, 2008.

Santiago, W. C. **Calibração baseada em confiabilidade dos coeficientes parciais de segurança das principais normas brasileiras de projeto estrutural**, Tese de doutorado, Engenharia Civil, Universidade de São Paulo, 2019.

Santos, D. M.; Stucchi, F. R.; Beck, A. T. **Confiabilidade de vigas projetadas de acordo com as normas brasileiras**, Revista Ibracon de Estruturas e Materiais, Volume 7, Número 5, São Paulo 2014.

Scherer, M.; Morsch, I.B.; Real, M. V. **Confiabilidade de vigas de concreto armado dimensionadas de acordo com a NBR-6118:**, Revista Ibracon de Estruturas e Materiais, Volume 12, Número 5, São Paulo 2019.

Silva, G.R. **Análise da confiabilidade da ligação laje-pilar interno sob punção de acordo com a NBR 6118:2014**, dissertação de mestrado, Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2017.

Silva, G.R.; Campos Filho, A.; Real, M.V. **Confiabilidade da ligação laje-pilar interno sob punção de acordo com a NBR 6118:2014**, Revista Ibracon de Estruturas e Materiais, Volume 11, Número 5, São Paulo 2018.

Sorensen, J.D.; Kroon, I.B.; Faber, M.H. ***Optimal reliability-based code calibration***, *Structural Safety* 15, 1994.

Sorensen, J. D. ***Notes in Structural Reliability Theory and Risk Analysis***. Aalborg University, 2004.

Souza Junior, A.C. de. **Aplicação de confiabilidade na calibração de coeficientes parciais de segurança de normas brasileiras de projeto estrutural**, dissertação de mestrado, Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2009.

Switsky, H. ***Minimum weight with structural reliability***. *J. of Aircraft*, V. 2, p. 228-232, 1965.

Taylor, R.; Maher, D.R.H.; Hayes, B. 1966. ***Effect of the arrangement of reinforcement on the behaviour of reinforced concrete slabs.*** *Magazine of Concrete Research*, 18, 85-94

Turkstra C.J. ***Theory of Structural Design Decisions, Study No. 2, Solid Mechanics Division, University of Waterloo, Waterloo, Ontario, 1970.***

Valdebenito, M.A.; Schuëller, G.I. ***A survey on approaches for reliability-based optimization.*** *Structural and Multidisciplinary Optimization*, V. 42, n. 5, p. 645-663, 2010.