UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Fabiano Pereira

Estabilidade estrutural topológica para semigrupos impulsivos e superfícies impulsivas

Florianópolis
2023

Fabiano Pereira

Estabilidade estrutural topológica para semigrupos impulsivos e superfícies impulsivas

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de doutor em Matemática.
Orientador: Prof. Matheus Cheque Bortolan, Dr.
Coorientador: Prof. Everaldo de Mello Bonotto, Dr.

Florianópolis
2023

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Pereira, Fabiano
Estabilidade estrutural topológica para semigrupos impulsivos e superfícies impulsivas / Fabiano Pereira ; orientador, Matheus Cheque Bortolan, coorientador, Everaldo de Mello Bonotto, 2023.
127 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, Florianópolis, 2023.

Inclui referências.

1. Matemática Pura e Aplicada. 2. Semigrupos impulsivos e atratores globais. 3. Semigrupos impulsivos gradientes. 4. Semigrupos impulsivos dinamicamente gradientes. 5. Superfícies impulsivas. I. Bortolan, Matheus Cheque. II. Bonotto, Everaldo de Mello. III. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada. IV. Título.

Fabiano Pereira

Estabilidade estrutural topológica para semigrupos impulsivos e superfícies impulsivas

O presente trabalho em nível de doutorado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Alexandre Nolasco de Carvalho, Dr.
Universidade de São Paulo - ICMC/USP

Prof. Paulo Mendes de Carvalho Neto, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Alexandre do Nascimento Oliveira Sousa, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de doutor em Matemática.

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Daniel Goncalves
Data: 03/08/2023 17:11:48-0300
CPF: ***.022.459-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Coordenação do Programa de
Pós-Graduação

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Matheus Cheque Bortolan
Data: 03/08/2023 16:10:54-0300
CPF: ***.007.338-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Matheus Cheque Bortolan, Dr.
Orientador

Florianópolis, 2023.

À Jessica, esposa amada, que sempre me apoiou.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus pelo dom da vida e por estar comigo durante toda a minha caminhada acadêmica até o doutorado, sem Ele não teria conseguido chegar até aqui.

Agradeço à minha esposa Jessica que me deu apoio incondicional, principalmente no âmbito emocional, para que este trabalho fosse concluído, obrigado por tudo, te amo!

Agradeço à minha família, em especial, aos meus pais Nagibe e Santina que desde que eu decidi estudar matemática eles sempre estiveram ao meu lado, muito obrigado! amo vocês. Aos meus segundos pais, João Oscar e Simone, pelas orações que fizeram por mim, muito obrigado, amo vocês!

Agradeço ao meu orientador professor Matheus Bortolan, que me ajudou a trilhar esse caminho do doutorado e me mostrou o que é fazer pesquisa em matemática. Agradeço também ao professor Everaldo Bonotto pelas conversas e sugestões que elevaram o nível deste trabalho.

Agradeço a todos os amigos que fiz durante o curso de doutorado, em especial à Alessandra e ao Ever, que foram parceiros de disciplinas.

Agradeço à UFFS pela oportunidade de qualificação docente e à UFSC pela oportunidade de crescimento profissional e intelectual.

"Seja forte e corajoso! não se apavore, nem
se desanime, pois o Senhor, o seu Deus,
estará com você por onde você andar."
(Josué capítulo 1 versículo 9)

RESUMO

Neste trabalho, inspirados pela literatura sobre perturbações de semigrupos gradientes, introduzimos as noções de *semigrupos impulsivos gradientes* e *semigrupos impulsivos dinamicamente gradientes*. Para este fim, tivemos que realizar uma pequena alteração na definição previamente existente de *atrator global* para semigrupos impulsivos, a fim de que os resultados envolvendo tais semigrupos para o caso sem impulsos se mantivessem no cenário com impulsos. Mostramos que estes conceitos, sob certas condições, são equivalentes e, com resultados de robusteza de perturbações de semigrupos dinamicamente gradientes, mostramos a permanência da estrutura gradiente para semigrupos impulsivos gradientes. Além disso, apresentamos um capítulo sobre superfícies impulsivas em dimensão finita, que é particularmente importante para a obtenção de exemplos concretos de semigrupos impulsivos.

Palavras-chave: Semigrupos impulsivos. Atratores globais. Semigrupos impulsivos gradientes. Semigrupos impulsivos dinamicamente gradientes. Função de Lyapunov. Superfícies impulsivas.

ABSTRACT

In this work, inspired by the literature on perturbations of gradient semigroups, we introduce the notions of *impulsive gradient semigroups* and *dynamically impulsive gradient semigroups*. To this end, we had to make a small modification to the previously existing definition of *global attractor* for impulsive semigroups, in order to ensure that the results involving such semigroups in the case without impulses remained valid in the scenario with impulses. We show that these concepts, under certain conditions, are equivalent, and with results on the robustness of perturbations of dynamically gradient semigroups, we demonstrate the persistence of the gradient structure for impulsive gradient semigroups. In addition, we present a chapter on impulsive surfaces in finite dimensions, which is particularly important for obtaining concrete examples of impulsive semigroups.

Keywords: impulsive semigroups. Global attractors. Impulsive gradient semigroups. Dynamically impulsive gradient semigroups. Lyapunov function. Impulsive surfaces.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Sabemos que nas aplicações reais, ao modelarmos matematicamente um problema, introduzimos simplificações, uma vez que nosso mundo é bastante complicado para levarmos todas as possíveis variáveis em consideração. Seja pelo uso de leis empíricas, por termos dados escassos, ou pelo descarte de algumas interações físicas e/ou biológicas muito difíceis de modelar, o modelo matemático de um problema presente no mundo real é, quase sempre, uma aproximação (ou o que chamamos de uma *perturbação*). A pergunta que aparece é: se trabalharmos com um modelo perturbado, como garantir que as propriedades quantitativas obtidas podem ser transportadas ao modelo real? Dito de outra maneira, quão fiel o nosso modelo aproximado é em relação ao problema real?

Dentro da matemática, costumamos chamar essa propriedade de *robusteza da estrutura sob perturbações*. Isto é, ao perturbarmos um modelo, que seria a modelagem "fiel" do problema (obtida se tivéssemos levado em conta todas as possíveis variáveis), e obtermos o modelo aproximado, como podemos garantir que as estruturas presentes no aproximado representam, a menos de um erro muito pequeno, as estruturas do modelo não-perturbado?

Tal pergunta, abordada em muitos trabalhos da literatura (vide, por exemplo, (BORTOLAN; CARVALHO, Alexandre N.; LANGA, 2020) e as referências nele contidas) é complexa e pode ser estudada em vários níveis de profundidade. O primeiro deles, a *semicontinuidade superior de atratores*, estudado por exemplo em (BORTOLAN; CARVALHO, Alexandre N.; LANGA, 2020) para o caso sem impulso e em (BONOTTO, E. M. *et al.*, 2016b; BORTOLAN; UZAL, José Manuel, 2021) para o caso impulsivo, diz respeito à não-explosão das soluções globais limitadas. Falando informalmente, isto quer dizer que as soluções globais limitadas do problema perturbado ficam próximas das soluções globais limitadas do problema limite (isto é, o problema real sem perturbação).

O segundo nível de dificuldade, a *semicontinuidade inferior de atratores*, diz respeito à não-implosão das soluções globais limitadas. Isso quer dizer que, grosseiramente falando, as soluções globais limitadas do problema perturbado têm, pelo menos, a mesma complexidade das soluçõs globais do problema limite. Esses dois níveis, quando ocorrem simultaneamente, nos dão a *continuidade dos atratores*. Nesse ponto, as soluções globais limitadas do problema aproximado estão próximas das do problema limite, e são pelo menos tão complexas quanto.

Neste trabalho abordaremos não só esses dois primeiros níveis, como focaremos principalmente no terceiro nível: *a estabilidade estrutural topológica*. Aqui está a maior contribuição do nosso trabalho: o Teorema 4.28. De maneira simplificada, provamos que ao perturbarmos adequadamente um modelo com impulsos, o problema resultante tem um atrator com "a mesma dinâmica" que o atrator do problema limite. Para dar um melhor sentido a esses termos, vamos explicar mais detalhadamente, e matematicamente, o problema com o qual lidamos neste trabalho.

SEMIGRUPOS IMPULSIVOS E ATRATORES GLOBAIS

Seja X um espaço métrico, com métrica d. Um *semigrupo* em X é uma família $\pi = \{\pi(t)\colon t \geqslant 0\}$, de aplicações $\pi(t)\colon X \to X$ para cada $t \geqslant 0$, satisfazendo:

- $\pi(0)x = x$ para todo $x \in X$;
- $\pi(t+s) = \pi(t)\pi(s)$ para todos $t, s \geqslant 0$;
- a aplicação $[0,\infty) \times X \ni (t,x) \mapsto \pi(t)x \in X$ é contínua.

Um conjunto não vazio e compacto $\mathcal{A} \subset X$ é dito um *atrator global* para π se:

- $\mathcal{A}$ é *π-invariante*, isto é, $\pi(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}$ para todo $t \geqslant 0$;
- $\mathcal{A}$ *π-atrai limitados de X*, isto é, se $B \subset X$ é um limitado de X então

$$\lim_{t\to\infty} d_H(\pi(t)B, \mathcal{A}) = 0, \tag{1.1}$$

sendo d_H a *semidistância de Hausdorff*, isto é,

$$d_H(C,D) = \sup_{x\in C}\inf_{y\in D} d(x,y),$$

para $C, D \subset X$ não vazios.

Observação. Note que podemos escrever (1.1) da seguinte maneira: para cada $B \subset X$ limitado, dado $\epsilon > 0$ existe $t_0 = t_0(\epsilon) \geqslant 0$ tal que

$$\pi(t)B \subset \mathcal{O}_\epsilon(\mathcal{A}) := \{x \in X\colon d(x,\mathcal{A}) < \epsilon\} \quad \text{para } t \geqslant t_0. \tag{1.2}$$

Não é difícil ver que, um atrator global, quando existe, é único, e define o comportamento assintótico do semigrupo π, uma vez que atrai todas as trajetórias $[0,\infty) \ni t \mapsto \pi(t)x \in X$. Mais ainda, o atrator global é constituído por todas as trajetórias globalmente definidas (isto é, definidas para todo $t \in \mathbb{R}$) e limitadas. Formalmente, dizemos que uma função $\xi\colon \mathbb{R} \to X$ é uma *solução global de* π se $\pi(t)\xi(s) = \xi(t+s)$ para todos $t \geqslant 0$ e $s \in \mathbb{R}$. Dizemos que uma solução global ξ de π é *limitada* se $\xi(\mathbb{R})$ é um subconjunto limitado de X. Vê-se que, quando π possui um atrator global $\mathcal{A}$, o que descrevemos acima se escreve matematicamente como

$$\mathcal{A} = \{\xi(0)\colon \xi \text{ é uma solução global limitada de } \pi\}.$$

A grosso modo, isto significa que o atrator global é formado por todas as trajetórias relevantes do ponto de vista prático. Portanto, tal objeto desempenha um papel fundamental na compreensão da dinâmica do semigrupo π. Para um estudo mais detalhado sobre atratores globais para semigrupos o leitor interessado pode consultar (LADYZHENSKAYA, 2022; CARVALHO, Alexandre N.; LANGA; ROBINSON, 2013; BORTOLAN; CARVALHO, Alexandre N.; LANGA, 2020; HALE, 1988; TEMAM, 1997; ARAGÃO-COSTA; CARVALHO, A. N, 2012) e suas referências.

Com isso em mente, vários autores nas últimas duas décadas têm tentado replicar essa noção para *semigrupos impulsivos*. Combinando os trabalhos de (BONOTTO, Everaldo M. *et al.*, 2017; BONOTTO, Everaldo Mello; KALITA, 2020; BONOTTO, E. M. *et al.*, 2015; BORTOLAN; UZAL, José Manuel, 2020), apresentaremos abaixo a nossa versão das noções de semigrupos impulsivos e seus atratores globais.

Definição. Um **sistema dinâmico impulsivo** (ou **sistema dinâmico autônomo impulsivo**), consiste de uma tripla (π, M, I), sendo:

- π um semigrupo em um espaço métrico (X, d);
- M um subconjunto fechado de X, chamado de **conjunto impulsivo**, que deverá satisfazer uma certa condição (veja Definição 2.1);
- $I\colon M \to X \setminus M$ uma função contínua, chamada **função impulso**, e o seu papel será apresentado mais adiante (ver Definição 2.5).

Observação. Nos trabalhos anteriores, como por exemplo em (BONOTTO, Everaldo M. *et al.*, 2017; BONOTTO, Everaldo Mello; KALITA, 2020; BORTOLAN; UZAL, José Manuel, 2020), ainda se pedia que para cada $x \in M$ existisse $\epsilon = \epsilon(x) > 0$ tal que

$$\{z \in X\colon \pi(t)z = x \text{ para algum } t \in (0, \epsilon)\} \cap M = \varnothing. \tag{1.3}$$

Isto quer dizer que era necessária também a hipótese de que, dado $x \in M$, para chegar em x por um ponto de M, precisaríamos andar pelo menos um intervalo de tempo maior do que $\epsilon(x)$. A condição (1.3), apesar de ter apresentação simples, não é facilmente verificada em aplicações e, portanto, o desenvolvimento da teoria dos semigrupos impulsivos sem essa condição representa um avanço significativo que já foi observado nos trabalhos de (BONOTTO, Everaldo M *et al.*, 2021; DASHKOVSKIY *et al.*, 2021; CARABALLO; UZAL, José M., 2023), e também nesta tese não necessitamos dessa condição e conseguimos com isso introduzir uma noção melhor de atratores globais para semigrupos impulsivos.

Com as condições necessárias (veja o Capítulo 2 para a construção detalhada), usando o sistema dinâmico (π, M, I), podemos definir uma família $\widetilde{\pi} = \{\widetilde{\pi}(t)\colon t \geqslant 0\}$ de aplicações $\widetilde{\pi}\colon \Omega \to \Omega$, onde $\Omega := X \setminus M$, satisfazendo:

- $\widetilde{\pi}(0)x = x$ para todo $x \in \Omega$;
- $\widetilde{\pi}(t+s) = \widetilde{\pi}(t)\widetilde{\pi}(s)$ para todos $t, s \geqslant 0$;

que é chamada de **semigrupo impulsivo**.

O próximo passo é introduzir uma noção apropriada de *atrator global* para o semigrupo impulsivo $\widetilde{\pi}$. Poderíamos trabalhar com a mesma noção de atrator global de (BONOTTO, E. M. *et al.*, 2015), porém por motivos que detalharemos abaixo, ela (por muito pouco) não se encaixa em nossos propósitos. Assim, a definição que utilizamos para este trabalho é a seguinte:

Definição. Um conjunto não vazio $\mathcal{A} \subset \Omega$ é um **atrator global** para $\widetilde{\pi}$ se:

- $\mathcal{A}$ é precompacto em X e $\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}} \cap \Omega$ (aqui o fecho é tomado em X);

- $\mathcal{A}$ é $\widetilde{\pi}$-invariante, isto é, $\widetilde{\pi}(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}$ para todo $t \geqslant 0$;
- $\mathcal{A}$ $\widetilde{\pi}$-atrai todos os subconjuntos limitados de Ω; isto é, dados $B \subset \Omega$ um limitado e

U uma vizinhança aberta de $\mathcal{A}$ em Ω, existe $t_0 = t_0(U) \geqslant 0$ tal que

$$\widetilde{\pi}(t)B \subset U \quad \text{para todo } t \geqslant t_0. \tag{1.4}$$

Observação. Como dissemos acima, essa definição é inspirada e muito parecida com a presente em (BONOTTO, E. M. *et al.*, 2015). A diferença é no conceito de *atração*. Em (BONOTTO, E. M. *et al.*, 2015) os autores usam a *semidistância de Hausdorff* (em (1.2)), considerando apenas ϵ-vizinhanças de $\mathcal{A}$, ao invés de vizinhanças arbitrárias de $\mathcal{A}$ em Ω, como em (1.4). Apesar de ser uma boa definição, ela faz com que os resultados apresentados no Capítulo 3 sejam falsos. Por essa razão, optamos por introduzir e trabalhar com a noção de (1.4).

Como no caso sem impulsos, quando um atrator global de $\widetilde{\pi}$ existe, ele é único e pode ser caracterizado como a união das soluções globais limitadas de $\widetilde{\pi}$ (que têm definição análoga ao caso sem impulso). Como nada é tão simples assim, essa mudança na definição veio com um preço. A fim de obter os mesmos resultados de (BONOTTO, E. M. *et al.*, 2015), inspirados em (BONOTTO, Everaldo Mello; KALITA, 2020; BORTOLAN; UZAL, José Manuel, 2020), precisamos introduzir uma condição adicional que nos trabalhos anteriores não era necessária, a qual nomeamos de condição (Z). Quando nos restringimos ao cenário presente em (BONOTTO, E. M. *et al.*, 2015), a condição (Z) é trivialmente satisfeita. No Capítulo 2, a teoria de semigrupos impulsivos e seus atratores globais, usando as definições acima apresentadas, é descrita em detalhes.

Um dos grandes desafios da teoria de semigrupos impulsivos é encontrar exemplos concretos não-triviais, principalmente os aplicados à equações diferenciais parciais, isto é, semigrupos impulsivos e seus respectivos atratores globais em espaços infinito-dimensionais. Mesmo em dimensão finita, encontrar tais exemplos não é simples, quanto mais verificar todas as condições necessárias para que os resultados sejam aplicados. Pensando nisso, apresentamos alguns exemplos mais simples para ilustrar a teoria apresentada neste trabalho e, adicionalmente, apresentamos o Capítulo 5. Os resultados de tal capítulo não compõe o cerne principal desta tese, porém apresentam uma grande classe de exemplos de conjuntos impulsivos para semigrupos em espaços de dimensão finita satisfazendo algumas (não todas) das condições necessárias para a aplicação de nossos resultados, e são uma generalização dos resultados de (BONOTTO, E. M. *et al.*, 2016a).

SEMIGRUPOS GRADIENTES, DINAMICAMENTE GRADIENTES E A ESTABILIDADE ESTRUTURAL TOPOLÓGICA

Gostaríamos agora de olhar dentro do atrator, isto é, queremos analisar suas estruturas internas, para tentar descrevê-lo de maneira mais simples. Mais especificamente, queremos descrever o atrator global de um sistema dinâmico impulsivo como a união dos conjuntos instáveis de seus invariantes isolados. Motivados pelos resultados de (ARAGÃO-COSTA *et al.*, 2011), para o caso não-impulsivo, as estruturas principais que nos dão essa caracterização são os *semigrupos gradientes*. Porém, mostrar que os semigrupos gradientes são estáveis quando perturbados não é uma tarefa simples. Em (CARVALHO, Alexandre N.; LANGA, 2009), os autores trabalham com a classe auxiliar dos *semigrupos gradient-like* que posteriormente recebeu o nome de *semigrupos dinamicamente gradientes*, que são os semigrupos cujas propriedades dinâmicas dentro do atrator se assemelham àquelas dos semigrupos gradientes, e provam que:

- a classe dos semigrupos dinamicamente gradientes é estável por perturbações.

Em seguida em (ARAGÃO-COSTA *et al.*, 2011), os autores utilizam a classe dos semigrupos dinamicamente gradientes, e provam que:

- um semigrupo é dinamicamente gradiente se, e somente se, é gradiente.

Isto mostra, de maneira incrivelmente elegante, que os semigrupos gradientes são estáveis quando perturbados de maneira adequada.

O nosso objetivo no Capítulo 3 é definir as classes dos *semigrupos impulsivos gradientes* e *semigrupos impulsivos dinamicamente gradientes*, e mostrar que, sob determinadas condições, um semigrupo impulsivo é gradiente se, e somente se, ele é dinamicamente gradiente. As demonstrações seguem as ideias do caso não-impulsivo presentes em (ARAGÃO-COSTA *et al.*, 2011), porém os impulsos apresentam uma dificuldade técnica considerável (ver, por exemplo, os resultados da Subseção 3.2.2: Proposições 3.28, 3.31, 3.32, Lema 3.27, Teorema 3.37. Subseção 3.2.3: Lema 3.40. Subseção 3.2.4: Lemas 3.51, 3.54), que foram contornadas pedindo as hipóteses corretas.

Observação. É nesse ponto da teoria que a nossa definição modificada para o atrator global entra em cena. Um dos principais objetos na demonstração de que um semigrupo impulsivo dinamicamente gradiente é gradiente é o conceito de *atrator local*, e o fato de que um conjunto com conjunto instável trivial é um atrator local. Para definir o atrator local, usamos o mesmo conceito de atração usado para o atrator global. Com a definição de (BONOTTO, E. M. *et al.*, 2015), um conjunto poderia ter conjunto instável trivial e não ser um atrator local, veja o Exemplo 3.3.1 e o conjunto $(1, 2]$.

Com essa equivalência, mostramos, no Capítulo 4, os três níveis de robusteza sob perturbações discutidos anteriormente: a semicontinuidade superior, a semicontinuidade inferior e a estabilidade estrutural topológica. A presença de impulsos dificulta os processos de passagem ao limite, que precisam ser cuidadosamente detalhados, para garantir que as convergências necessárias são mantidas. Como mencionamos anteriormente, todo o trabalho culmina no Teorema 4.28, que garante que perturbações adequadas de um semigrupo impulsivo dinamicamente gradiente dão origem a semigrupos impulsivos que também são dinamicamente gradientes.

PRINCIPAIS CONTRIBUIÇÕES DO TRABALHO

As principais contribuições são:

∘ provar, de maneira sistemática, a existência de atrator global, com essa nova definição, para um semigrupo impulsivo, estendendo a teoria já desenvolvida em (BONOTTO, E. M. *et al.*, 2015; BORTOLAN; UZAL, José Manuel, 2020; BONOTTO, Everaldo Mello; KALITA, 2020), dentre outros;

∘ definir os semigrupos impulsivos gradientes e dinamicamente gradientes, e provar a equivalência entre esses dois conceitos, estendendo os resultados de (ARAGÃO-COSTA *et al.*, 2011) para o caso impulsivo;

∘ provar a estabilidade estrutural topológica de semigrupos impulsivos dinamicamente gradientes, estendendo o Teorema de Carvalho e Langa encontrado em (CARVALHO, Alexandre N.; LANGA, 2009, Theorem 1.5) para o caso impulsivo;

∘ estender os resultados de (BONOTTO, E. M. *et al.*, 2016a) para obter exemplos de conjuntos impulsivos de semigrupos em espaços de dimensão finita.

2 TEORIA DE SEMIGRUPOS IMPULSIVOS E SEUS ATRATORES

Como vimos na introdução, sabemos a definição de um semigrupo π num espaço métrico (X, d) e, agora, definimos formalmente o conceito de *sistema dinâmico impulsivo* que usaremos no restante do trabalho.

Definição 2.1 (Sistema dinâmico impulsivo)**.** Um **sistema dinâmico impulsivo** (ou **sistema dinâmico autônomo impulsivo**), consiste de uma tripla (π, M, I), sendo

- π um semigrupo em um espaço métrico (X, d);
- M um subconjunto fechado de X, chamado de **conjunto impulsivo**, com a propriedade de que para cada $x \in M$ existe $\epsilon = \epsilon(x) > 0$ tal que

$$\pi(t)x \notin M \quad \text{para todo} \quad 0 < t < \epsilon; \tag{2.1}$$

- $I\colon M \to X \setminus M$ uma função contínua, chamada **função impulso**, e o seu papel será apresentado mais adiante (ver Definição 2.5).

Observação 2.2. A condição (2.1) nos diz que trajetórias que começam em M devem sair *imediatamente* de M e permanecer um pequeno intervalo de tempo fora de M, antes de possivelmente retornar a M. Note que, além disso, juntamente com a continuidade do semigrupo π, (2.1) implica que M deve ter interior vazio.

Para continuarmos, definimos

$$\Omega := X \setminus M,$$

que é um aberto de X, já que M é fechado.

Proposição 2.3. *Seja (π, M, I) um sistema dinâmico impulsivo. Para cada $x \in X$, uma e somente uma das seguintes afirmações é verdadeira:*

- *$\pi(t)x \notin M$ para todo $t > 0$ e, neste caso, definimos $\phi(x) = \infty$;*
- *existe um único $s > 0$ tal que $\pi(s)x \in M$ e $\pi(t)x \notin M$ para $0 < t < s$ e, neste caso, definimos $\phi(x) = s$.*

Demonstração. Assumimos que $\pi(t)x \in M$ para algum $t > 0$. Quando $x \in \Omega$, existe $r > 0$ tal que

$$B_r(x) := \{z \in X\colon d(z, x) < r\} \subset \Omega$$

e, usando a continuidade do semigrupo π, existe $\epsilon > 0$ tal que $\pi(t)x \in B_r(x)$ para $0 \leqslant t < \epsilon$, implicando, em particular, que $\pi(t)x \notin M$ para $0 < t < \epsilon$. Se $x \in M$, a condição (2.1) implica na existência de um $\epsilon > 0$ tal que $\pi(t)x \notin M$ para todo $0 < t < \epsilon$.

Em qualquer caso podemos definir $s = \inf\{t > 0\colon \pi(t)x \in M\}$. É simples ver que $s \geqslant \epsilon > 0$ e $\pi(t)x \notin M$ para $0 < t < s$. Além disso, note que $\pi(s)x \in M$. De fato, seja

$\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (0,\infty)$ tal que $t_n \to s$ e $\pi(t_n)x \in M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sendo M fechado e usando a continuidade do semigrupo π temos $M \ni \pi(t_n)x \to \pi(s)x \in M$. $\square$

Definição 2.4 (Função tempo de impacto)**.** A função $\phi\colon X \to (0,\infty]$, definida na Proposição 2.3, é chamada de **função tempo de impacto** e, para cada $x \in X$, $\phi(x)$ é chamado de **tempo de impacto** de x.

Uma propriedade simples, porém importante, da função tempo de impacto ϕ é a seguinte:

$$\text{se } t > 0 \text{ e } \pi(t)x \in M \text{ então } \phi(x) \leqslant t. \tag{2.2}$$

Podemos agora definir a *trajetória impulsiva* e o papel da função impulso I ficará claro.

Definição 2.5. A **trajetória impulsiva** de $x \in X$ pelo sistema dinâmico impulsivo (π, M, I), denotada por $\widetilde{\pi}(\cdot)x$ e definida em um intervalo $[0, \ell(x))$, é dada indutivamente pela seguinte regra:

Passo 1: Se $\phi(x) = \infty$ definimos $\ell(x) = \infty$ e $\widetilde{\pi}(t)x = \pi(t)x$ para todo $t \in [0,\infty)$. Neste caso o processo termina aqui.

Contudo, se $s_1 = \phi(x) < \infty$, tomamos $s_0 := \lambda_0 := 0$, $\lambda_1 := s_0 + s_1$, $x_0^+ := x$, $x_1 := \pi(s_1)x_0^+$, $x_1^+ := I(x_1)$ e definimos $\widetilde{\pi}(\cdot)x$ em $[\lambda_0, \lambda_1]$ por

$$\widetilde{\pi}(t)x = \begin{cases} \pi(t)x_0^+ & \text{se } \lambda_0 \leqslant t < \lambda_1, \\ x_1^+ & \text{se } t = \lambda_1. \end{cases}$$

Neste caso, passamos para o *Passo 2.*

Passo 2: Se $\phi(x_1^+) = \infty$ definimos $\ell(x) = \infty$ e $\widetilde{\pi}(t)x = \pi(t-\lambda_1)x_1^+$ para $t \geqslant \lambda_1$. Neste caso o processo termina aqui.

Contudo, se $s_2 := \phi(x_1^+) < \infty$, tomamos $\lambda_2 := \lambda_1 + s_2$, $x_2 := \pi(s_2)x_1^+$, $x_2^+ := I(x_2)$ e definimos $\widetilde{\pi}(\cdot)x$ em $[\lambda_1, \lambda_2]$ por

$$\widetilde{\pi}(t)x = \begin{cases} \pi(t-\lambda_1)x_1^+ & \text{se } \lambda_1 \leqslant t < \lambda_2, \\ x_2^+ & \text{se } t = \lambda_2. \end{cases}$$

Neste caso, passamos para o próximo passo.

Passo Indutivo: Assuma que $\widetilde{\pi}(\cdot)x$ está definida no intervalo $[\lambda_{n-1}, \lambda_n]$.

Se $\phi(x_n^+) = \infty$ definimos $\ell(x) = \infty$ e $\widetilde{\pi}(t)x = \pi(t-\lambda_n)x_n^+$ para todo $t \geqslant \lambda_n$. Neste caso, o processo termina aqui.

Contudo, se $\phi(x_n^+) < \infty$, tomamos $s_{n+1} := \phi(x_n^+)$, $\lambda_{n+1} := \lambda_n + \phi(x_n^+)$, $x_{n+1} := \pi(s_{n+1})x_n^+$, $x_{n+1}^+ := I(x_{n+1})$ e definimos $\widetilde{\pi}(\cdot)x$ em $[\lambda_n, \lambda_{n+1}]$ por

$$\widetilde{\pi}(t)x = \begin{cases} \pi(t-\lambda_n)x_n^+ & \text{se } \lambda_n \leqslant t < \lambda_{n+1}, \\ x_{n+1}^+ & \text{se } t = \lambda_{n+1}. \end{cases}$$

Passo de Conclusão: O processo descrito acima pode:

- terminar após um número finito de passos, a saber se $\phi(x_n^+) = \infty$ para algum $n \in \mathbb{N}$ e neste caso a trajetória impulsiva $\widetilde{\pi}(\cdot)x$ está definida no intervalo $[0, \infty)$;
- ou continuar indefinidamente se $\phi(x_n^+) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e, neste caso $\widetilde{\pi}(\cdot)x$ está definida no intervalo $[0, \ell(x))$, sendo $\ell(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n$, que pode ser finito ou infinito.

Os números positivos finitos da coleção estritamente crescente $\{\lambda_n\}_n$ são chamados de **tempos de salto** de x. A Figura 1 abaixo ilustra a trajetória impulsiva de um ponto $x \in X$.

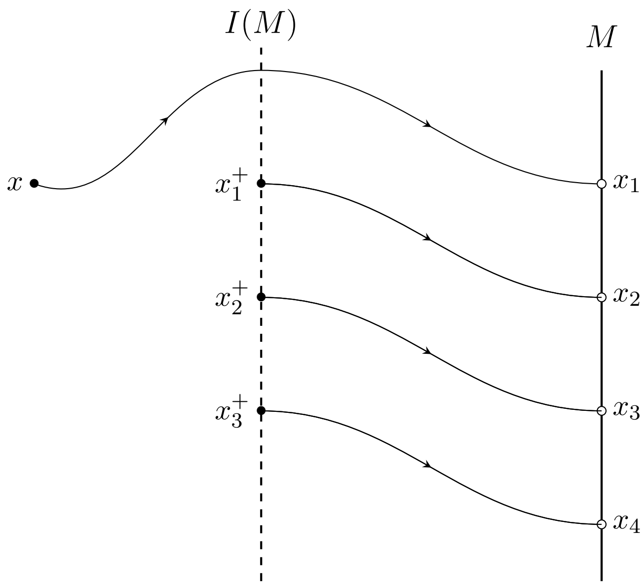


Figura 1 – Exemplo de trajetória impulsiva $\widetilde{\pi}(\cdot)x$.

Observação 2.6. Note que a coleção $\{\lambda_n\}_n$, dada acima, depende de cada ponto $x \in X$, isto é, $\lambda_n = \lambda_n(x)$, sendo

$$\lambda_0(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lambda_n(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \phi(x_j^+), \quad n \geqslant 1.$$

Usaremos λ_n ou $\lambda_n(x)$ indistintamente durante o texto.

Diretamente da definição de trajetória impulsiva, temos $\widetilde{\pi}(0)x = x$ para todo $x \in X$, e também obtemos a seguinte propriedade: para cada $x \in X$ e $t \in (0, \ell(x))$, como $I(M) \subset \Omega$, temos

$$\widetilde{\pi}(t)x \in \Omega,$$

isto é, temos o seguinte resultado:

Proposição 2.7. *Seja (π, M, I) um sistema dinâmico impulsivo. Então para cada $x \in X$ e $t \in (0, \ell(x))$ temos $\widetilde{\pi}(t)x \in \Omega$.*

A prova da próxima proposição é uma adaptação de (BONOTTO, E. M., 2007, Proposition 2.1).

Proposição 2.8. *Se (π, M, I) é um sistema dinâmico impulsivo, então*

$$\widetilde{\pi}(t+s)x = \widetilde{\pi}(t)\widetilde{\pi}(s)x \quad \text{para todos } t, s \in [0, \ell(x)) \text{ tal que } t+s \in [0, \ell(x)).$$

Demonstração. Fixados $x \in X$ e $t, s \in [0, \ell(x))$ com $t+s \in [0, \ell(x))$. Considere $\{\lambda_n\}_n$ os tempos de salto de x (incluindo $\lambda_0 = 0$ e, no caso da sequência ser finita $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$ incluímos $\lambda_{p+1} = \infty$). Claramente $\lambda_n \leqslant t < \lambda_{n+1}$ para algum n, e vamos analisar os seguintes casos:

Caso 1. $0 \leqslant s < \lambda_{n+1} - t$.

Neste caso, note que $\phi(\pi(t-\lambda_n)x_n^+) = \lambda_{n+1} - t$, pois

$$\pi(\lambda_{n+1} - t)\pi(t-\lambda_n)x_n^+ = \pi(\lambda_{n+1} - \lambda_n)x_n^+ = x_{n+1} \in M,$$

e, para $0 < \beta < \lambda_{n+1} - t$, temos $\lambda_n < \beta + t < \lambda_{n+1}$ e

$$\pi(\beta)\pi(t-\lambda_n)x_n^+ = \pi(\beta + t - \lambda_n)x_n^+ \notin M.$$

Logo, $\widetilde{\pi}(s)\pi(t-\lambda_n)x_n^+ = \pi(s)\pi(t-\lambda_n)x_n^+$ e, portanto,

$$\widetilde{\pi}(s)\widetilde{\pi}(t)x = \widetilde{\pi}(s)\pi(t-\lambda_n)x_n^+ = \pi(s)\pi(t-\lambda_n)x_n^+ = \pi(t+s-\lambda_n)x_n^+ = \widetilde{\pi}(t+s)x,$$

sendo que a última igualdade segue do fato de que $t+s-\lambda_n < \lambda_{n+1} - \lambda_n$ (lembrando que $\lambda_{n+1} - \lambda_n = \phi(x_n^+)$), e da definição de $\widetilde{\pi}(\cdot)x$.

Caso 2. $s \geqslant \lambda_{n+1} - t$.

Neste caso, temos $\lambda_{n+k} - t \leqslant s < \lambda_{n+k+1} - t$ para algum inteiro positivo k, isto é, $\lambda_{n+k} \leqslant t+s < \lambda_{n+k+1}$. Então, $\widetilde{\pi}(t+s)x = \pi(t+s-\lambda_{n+k})x_{n+k}^+$.

Defina $y := \pi(t-\lambda_n)x_n^+$. Tomando $y_0^+ := y$, segue que $\phi(y) = \lambda_{n+1} - t$ e

$$\begin{aligned} y_1^+ &= I(\pi(\phi(y)y)) = I(\pi(\lambda_{n+1}-t)\pi(t-\lambda_n)x_n^+) = I(\pi(\lambda_{n+1}-\lambda_n)x_n^+) = I(\pi(\phi(x_n^+))x_n^+) \\ &= I(x_{n+1}) = x_{n+1}^+. \end{aligned}$$

Indutivamente obtemos $y_j^+ = x_{n+j}^+$ para $j = 2, \ldots, k$. Tomando $m_1 := \phi(y) = \lambda_{n+1} - t$ e $m_k := \sum_{j=0}^{k-1} \phi(y_j^+)$, temos

$$m_{j+1} - m_j = \phi(y_j^+) = \lambda_{n+j+1} - \lambda_{n+j} \quad \text{para} \quad j = 1, \ldots, k-1.$$

Além disso,

$$\lambda_{n+k} - t = \sum_{j=2}^{k}(\lambda_{n+j} - \lambda_{n+j-1}) + \lambda_{n+1} - t = \sum_{j=2}^{k}(m_j - m_{j-1}) + m_1 = m_k$$

e

$$\lambda_{n+k+1} - t = \sum_{j=2}^{k+1} (\lambda_{n+j} - \lambda_{n+j-1}) + \lambda_{n+1} - t = \sum_{j=2}^{k+1} (m_j - m_{j-1}) + m_1 = m_{k+1}.$$

Como $\lambda_{n+k} \leqslant t + s < \lambda_{n+k+1}$, obtemos $m_k \leqslant s < m_{k+1}$ e, portanto, $\widetilde{\pi}(s)y = \pi(s - m_k)y_n^+$. Também, uma vez que

$$\begin{aligned} s - m_k &= s - (m_k - m_1) - m_1 = s - (\lambda_{n+k} - \lambda_{n+1}) - m_1 \\ &= s - \lambda_{n+k} + \lambda_{n+1} - (\lambda_{n+1} - t) = t + s - \lambda_{n+k}, \end{aligned}$$

temos $\pi(s - m_k)y_n^+ = \pi(t + s - \lambda_{n+k})x_{n+k}^+$. Portanto,

$$\begin{aligned} \widetilde{\pi}(s)\widetilde{\pi}(t)x &= \widetilde{\pi}(s)\pi(t - \lambda_n)x_n^+ = \widetilde{\pi}(s)y = \pi(s - m_k)y_n^+ \\ &= \pi(t + s - \lambda_{n+k})x_{n+k}^+ = \widetilde{\pi}(t + s)x, \end{aligned}$$

e a prova está completa. $\square$

A seguinte proposição será útil mais adiante.

Proposição 2.9. *Seja (π, M, I) um sistema dinâmico impulsivo. Então para cada $x \in X$ e $\tau \in [0, \ell(x))$, o conjunto $\{\widetilde{\pi}(t)x \colon t \in [0, \tau]\}$ é limitado.*

Demonstração. Dividimos a demonstração em três casos.

Caso 1. $0 \leqslant \tau < \phi(x)$.

Neste caso, temos $\widetilde{\pi}(t)x = \pi(t)x$ para todo $t \in [0, \tau]$, e a continuidade do semigrupo π garante que $\{\pi(t) \colon t \in [0, \tau]\}$ é compacto e, portanto, limitado.

Caso 2. $\tau = \phi(x)$.

Neste caso,

$$\{\widetilde{\pi}(t)x \colon t \in [0, \tau]\} \subset \{\pi(t)x \colon t \in [0, \tau]\} \cup \{I(\pi(\tau))x\},$$

e o segundo conjunto, novamente pela continuidade de π é compacto e, portanto, limitado.

Caso Geral. Considerando os tempos de salto $\{\lambda_n\}_n$ de x (incluindo $\lambda_0 = 0$ e, no caso da coleção ser finita $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_p\}$ incluímos $\lambda_{p+1} = \infty$), temos $\tau \in [\lambda_n, \lambda_{n+1})$ para algum $n = 0, \ldots, p$. Assim

$$\{\widetilde{\pi}(t)x \colon t \in [0, \tau]\} \subset \left(\bigcup_{j=0}^{n-1} \{\widetilde{\pi}(t - \lambda_j)x_j^+ \colon t \in [0, \lambda_{j+1} - \lambda_j]\} \right) \cup \{\widetilde{\pi}(t)x_n^+ \colon t \in [0, \tau - \lambda_n]\}.$$

Segue dos Casos 1 e 2 que cada um dos conjuntos do termo da direita é limitado e, portanto, o resultado está demonstrado. $\square$

Uma vez que nosso objetivo é estudar o comportamento das soluções para tempo suficientemente grande, vamos assumir que todas as trajetórias impulsivas estão definidas em $[0,\infty)$, isto é, vamos assumir que

$$\ell(x) = \infty \qquad \text{para todo } x \in X. \tag{2.3}$$

Observação 2.10. Uma condição suficiente para garantir que um sistema dinâmico impulsivo satisfaça (2.3) é assumir que

$$\text{existe } \delta > 0 \text{ tal que } \phi(x) \geqslant 2\delta \text{ para todo } x \in I(M). \tag{H}$$

Essa condição será crucial para alguns resultados. Note que, quando $I(M)$ é compacto obtemos (H), (ver Observação 2.19).

Definição 2.11. Um **semigrupo impulsivo** é um sistema dinâmico impulsivo (π, M, I) satisfazendo (2.3). Para um semigrupo impulsivo (π, M, I), quando não houver confusão de quem são M e I, denotamos somente por $\{\widetilde{\pi}(t) \colon t \geqslant 0\}$, ou simplesmente por $\widetilde{\pi}$.

> Sabemos que $\widetilde{\pi}(t)\Omega \subset \Omega$ para todo $t \geqslant 0$, e assim podemos considerar $\widetilde{\pi}$ como um semigrupo impulsivo em Ω, e é precisamente isso que faremos daqui por diante.

Para $\widetilde{\pi}$ um semigrupo impulsivo em Ω, dizemos que um conjunto $A \subset \Omega$ é **$\widetilde{\pi}$-invariante** se $\widetilde{\pi}(t)A = A$ para todo $t \geqslant 0$. Além disso, dados $A, B \subset \Omega$ não vazios, dizemos que A **$\widetilde{\pi}$-atrai** B se para cada vizinhança aberta U de A em Ω existe $t_0 = t_0(B,U) \geqslant 0$ tal que

$$\widetilde{\pi}(t)B \subset U \qquad \text{para todo } t \geqslant t_0.$$

Dizemos também que A **$\widetilde{\pi}$-absorve** B se existe $t_0 = t_0(B) \geqslant 0$ tal que

$$\widetilde{\pi}(t)B \subset A \qquad \text{para todo } t \geqslant t_0.$$

Agora relembramos a nossa definição de *atrator global* para um semigrupo impulsivo $\widetilde{\pi}$.

Definição 2.12. Um conjunto não vazio $\mathcal{A} \subset \Omega$ é um **atrator global** para $\widetilde{\pi}$ se:

- $\mathcal{A}$ é precompacto em X e $\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}} \cap \Omega$ (aqui o fecho é tomado em X);
- $\mathcal{A}$ é $\widetilde{\pi}$-invariante;
- $\mathcal{A}$ $\widetilde{\pi}$-atrai todos os subconjuntos limitados de Ω.

Observação 2.13. A definição acima é inspirada em (BONOTTO, E. M. *et al.*, 2015), com a diferença no conceito de atração. Em (BONOTTO, E. M. *et al.*, 2015) os autores usam a *semidistância de Hausdorff* e, apesar de ser uma boa definição, quando usada ela introduz dificuldades adicionais nos resultados do Capítulo 3. Mais especificamente no Lema 3.51 precisamos que um conjunto que tenha conjunto instável trivial seja um atrator local, porém se usássemos a definição de (BONOTTO, E. M. *et al.*, 2015) isso não aconteceria, veja o Exemplo 3.3.1 e o conjunto $(1, 2]$.

Como no caso contínuo, obtemos a unicidade do atrator global.

Lema 2.14. *Se $\widetilde{\pi}$ é um semigrupo impulsivo com atrator global $\mathcal{A}$ e $B \subset \Omega$ é limitado e $\widetilde{\pi}$-invariante então $B \subset \mathcal{A}$.*

Demonstração. Seja U uma vizinhança aberta de $\mathcal{A}$ em Ω. Como B é invariante e $\mathcal{A}$ $\widetilde{\pi}$-atrai B, existe $t_0 \geqslant 0$ tal que

$$B = \widetilde{\pi}(t_0)B \subset U.$$

Com isso, mostramos que $B \subset U$ para toda vizinhança aberta U de $\mathcal{A}$. Afirmamos que $B \subset \mathcal{A}$. De fato, se esse não é o caso, existe $x \in B$ com $x \notin \mathcal{A}$. Note que $x \notin \overline{\mathcal{A}}$, pois do contrário, $x \in \overline{\mathcal{A}} \cap \Omega = \mathcal{A}$. Como $x \notin M$, M é fechado, e $\mathcal{A}$ é compacto em X podemos escolher vizinhanças abertas V de x em Ω e W de $\overline{\mathcal{A}}$ em X tais que $V \cap W = \varnothing$. Mas assim, definindo $U = W \cap \Omega$, temos U uma vizinhança aberta de $\mathcal{A}$ em Ω com $x \notin U$, o que nos dá uma contradição e completa a prova. □

Diretamente do Lema 2.14 temos o seguinte resultado:

Proposição 2.15. *Seja $\widetilde{\pi}$ um semigrupo impulsivo em Ω. Se $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ são atratores globais para $\widetilde{\pi}$ então $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$.*

Antes de continuarmos, faremos a definição de *soluções globais* para um semigrupo impulsivo.

Definição 2.16. Uma função $\xi\colon \mathbb{R} \to \Omega$ é uma **solução global** de $\widetilde{\pi}$ se

$$\widetilde{\pi}(t)\xi(s) = \xi(t+s),$$

para todos $s \in \mathbb{R}$ e $t \geqslant 0$. Além disso, se $x = \xi(0)$ diremos que ξ é uma **solução global** de $\widetilde{\pi}$ **por** x. Observe que ξ não é necessariamente contínua (veja o Exemplo 3.3.1).

Na teoria de semigrupos contínuos sabemos que o atrator global é formado pelo conjunto dos pontos pelos quais passa uma solução global limitada, ver (CARVALHO, Alexandre N.; LANGA; ROBINSON, 2013; ARAGÃO-COSTA; CARVALHO, A. N, 2012). No caso impulsivo temos a mesma caracterização, que é dada pela próxima proposição e sua prova é semelhante ao caso contínuo, pois só precisamos das propriedades de invariância e limitação do atrator global.

Proposição 2.17. *Seja $\widetilde{\pi}$ um semigrupo impulsivo com atrator global $\mathcal{A}$. Então*

$$\mathcal{A} = \{\xi(0)\colon \xi \text{ é uma solução global limitada de } \widetilde{\pi}\}.$$

Demonstração. Se ξ é uma solução global limitada de $\widetilde{\pi}$ por x, então o conjunto $B = \xi(\mathbb{R}) \subset \Omega$ é limitado e $\widetilde{\pi}$-invariante, e segue do Lema 2.14 que $B \subset \mathcal{A}$. Em particular, $\xi(0) \in B \subset \mathcal{A}$.

Reciprocamente, seja $x \in \mathcal{A}$. Sendo $\mathcal{A}$ $\widetilde{\pi}$-invariante, sabemos que

$$\mathcal{A} = \widetilde{\pi}(1)\mathcal{A},$$

logo existe $x_{-1} \in \mathcal{A}$ tal que $x = \widetilde{\pi}(1)x_{-1}$. Como $x_{-1} \in \mathcal{A}$ existe $x_{-2} \in \mathcal{A}$ tal que $x_{-1} = \widetilde{\pi}(1)x_{-2}$. Indutivamente construímos uma sequência $\{x_{-n}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$, com $x_0 = x$, satisfazendo

$$\widetilde{\pi}(1)x_{-n} = x_{-n+1} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Defina $\xi \colon \mathbb{R} \to \Omega$ por

$$\xi(t) = \begin{cases} \widetilde{\pi}(t)x_0 & \text{se } \ t \geqslant 0 \\ \widetilde{\pi}(t+n)x_{-n} & \text{se } \ t \in [-n, -n+1). \end{cases}$$

Mostremos que ξ é uma solução global de $\widetilde{\pi}$. Para $t, s \geqslant 0$ temos $\xi(t+s) = \widetilde{\pi}(t+s)x_0 = \widetilde{\pi}(t)\widetilde{\pi}(s)x_0 = \widetilde{\pi}(t)\xi(s)$. Agora, se $t \geqslant 0$ e $s \in [-n, -n+1)$, tomamos $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \leqslant t < m+1$. Quando $m \geqslant n$ temos $t + s \geqslant 0$, e assim

$$\begin{aligned} \widetilde{\pi}(t)\xi(s) &= \widetilde{\pi}(t)\widetilde{\pi}(s+n)x_{-n} = \widetilde{\pi}(t-n)\widetilde{\pi}(n)\widetilde{\pi}(s+n)x_{-n} \\ &= \widetilde{\pi}(t-n)\widetilde{\pi}(s+n)\widetilde{\pi}(n)x_{-n} = \widetilde{\pi}(t+s)x_0 = \xi(t+s). \end{aligned}$$

Quando $0 \leqslant m < n$ temos $-n + m \leqslant t + s < -n + m + 1$ e

$$\begin{aligned} \widetilde{\pi}(t)\xi(s) &= \widetilde{\pi}(t)\widetilde{\pi}(s+n)x_{-n} = \widetilde{\pi}(t-m)\widetilde{\pi}(m)\widetilde{\pi}(s+n)x_{-n} \\ &= \widetilde{\pi}(t-m)\widetilde{\pi}(s+n)\widetilde{\pi}(m)x_{-n} = \widetilde{\pi}(t+s+n-m)x_{-m} = \xi(t+s), \end{aligned}$$

o que mostra que ξ é solução global de $\widetilde{\pi}$ por x. Além disso, segue da $\widetilde{\pi}$-invariância de $\mathcal{A}$ que $\xi(t) \in \mathcal{A}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Em particular, ξ é limitada, o que conclui a prova. □

2.1 PROPRIEDADES DE CONTINUIDADE DE ϕ E RESULTADOS DE CONVERGÊNCIA

Para estudar o comportamento assintótico de um semigrupo impulsivo, precisaremos de algumas propriedades da função tempo de impacto e de alguns resultados de convergência que apresentaremos a seguir.

Lema 2.18. *Seja $\widetilde{\pi}$ um semigrupo impulsivo, e consideremos $x_n \to x \in \Omega$. Então:*

(a) $\liminf\limits_{n\to\infty} \phi(x_n) \geqslant \phi(x)$, *isto é, ϕ é semicontínua inferiormente em Ω;*

(b) *se $[0, \infty) \ni \epsilon_n \to 0$ então $\widetilde{\pi}(\epsilon_n)x_n \to x$.*

Demonstração. **(a)** Seja $s := \liminf\limits_{n\to\infty} \phi(x_n)$. Se $s = \infty$, nada temos a fazer. Suponha então que $s < \infty$. A menos de subsequências, podemos assumir que $\phi(x_n) \to s$. Da definição de ϕ temos $\pi(\phi(x_n))x_n \in M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Da continuidade do semigrupo π temos $\pi(\phi(x_n))x_n \to \pi(s)x$, e como M é fechado obtemos $\pi(s)x \in M$. Se $s = 0$ teríamos $x \in M$, o que é uma contradição. Portanto, $s > 0$ e de (2.2), segue que $\phi(x) \leqslant s$.

(b) Usando o item **(a)**, para n suficientemente grande obtemos $0 \leqslant \epsilon_n < \frac{\phi(x)}{2} < \phi(x_n)$. Portanto, $\tilde{\pi}(\epsilon_n)x_n = \pi(\epsilon_n)x_n \to \pi(0)x = x$. $\square$

Observação 2.19. Usando a semicontinuidade inferior da função tempo de impacto é simples verificar que, quando $I(M)$ é compacto obtemos (H). De fato, suponha que não vale (H) então para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in I(M)$ tal que $\phi(x_n) < \frac{1}{n}$. Como $I(M)$ é compacto, existe um ponto $x \in I(M)$ e uma subsequência $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $x_{n_k} \to x$, e do Lema 2.18 obtemos $\phi(x) \leqslant 0$ o que é uma contradição.

O primeiro passo é provar a semicontinuidade superior de ϕ em X. Para isso, introduziremos uma condição de *bom comportamento* do semigrupo π perto de M. Tal condição é a seguinte:

$$\begin{cases} \text{dado } t > 0,\ x \in M, \text{e uma sequência convergente } \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ em } X \\ \text{tal que } \pi(t)z_n \to x, \text{existe uma sequência } \{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \\ \text{com } \alpha_n \to 0 \text{ e } t+\alpha_n > 0 \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ tal que, a menos de} \\ \text{subsequências, temos } \pi(t+\alpha_n)z_n \in M. \end{cases} \tag{T}$$

Lema 2.20. *Suponha que $\tilde{\pi}$ seja um semigrupo impulsivo satisfazendo a condição* (T). *Consideremos $x_n \to x \in X$. Então $\limsup_{n\to\infty} \phi(x_n) \leqslant \phi(x)$, isto é, ϕ é semicontínua superiormente em X.*

Demonstração. Se $s := \phi(x) = \infty$ não há nada a provar. Agora, se $s < \infty$ temos $\pi(s)x \in M$. Definindo $\beta := \limsup_{n\to\infty} \phi(x_n)$, podemos supor, a menos de subsequências, que $\phi(x_n) \to \beta$. Da continuidade do semigrupo π obtemos $\pi(s)x_n \to \pi(s)x$. Usando (T) existe $\alpha_n \to 0$ com $s+\alpha_n > 0$ tal que $\pi(s+\alpha_n)x_n \in M$, a menos de subsequências. Usando (2.2) temos

$$\phi(x_n) \leqslant s + \alpha_n = \phi(x) + \alpha_n,$$

e fazendo $n \to \infty$ obtemos $\beta \leqslant \phi(x)$, o que conclui a prova. $\square$

Combinando os Lemas 2.18 e 2.20 obtemos o seguinte resultado:

Teorema 2.21. *Se $\tilde{\pi}$ é um semigrupo impulsivo satisfazendo a condição* (T), *então a função $X \ni x \mapsto \phi(x)$ é semicontínua superiormente em X e contínua em Ω.*

Usando o Teorema 2.21 obtemos o seguinte resultado de convergência para o semigrupo impulsivo $\tilde{\pi}$.

Proposição 2.22. *Seja $\tilde{\pi}$ um semigrupo impulsivo satisfazendo* (T). *Então dados $t \geqslant 0$ e $x_n \to x \in \Omega$, existe uma sequência $[0,\infty) \ni \epsilon_n \to 0$ tal que*

$$\tilde{\pi}(t+\epsilon_n)x_n \to \tilde{\pi}(t)x.$$

Demonstração. Do Teorema 2.21 sabemos que $\lim_{n\to\infty} \phi(x_n) = \phi(x)$. Com isso, se $s := \phi(x) = \infty$, temos $\phi(x_n) > t$ para todo n suficientemente grande, e assim

$$\widetilde{\pi}(t)x_n = \pi(t)x_n \to \pi(t)x = \widetilde{\pi}(t)x,$$

e o resultado segue tomando $\epsilon_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Nos resta então provar o resultado para $s < \infty$. Para isso, analisaremos três casos distintos.

Caso 1. $0 \leqslant t < s$.

Neste caso, segue da continuidade de ϕ em Ω, para n suficientemente grande temos $t < \phi(x_n)$. Tomando $\epsilon_n = 0$ para $n \in \mathbb{N}$ obtemos

$$\widetilde{\pi}(t+\epsilon_n)x_n = \widetilde{\pi}(t)x_n = \pi(t)x_n \to \pi(t)x = \widetilde{\pi}(t)x,$$

e este caso está provado.

Para os dois casos restantes vamos provar, primeiramente, que existe $\mathbb{R} \ni \alpha_n \to 0$ tal que $\widetilde{\pi}(t+\alpha_n)x_n \to \widetilde{\pi}(t)x$.

Caso 2. $t = s$.

Tomando $t_n = \phi(x_n)$ temos $t_n \to s = t$, e da continuidade do semigrupo π obtemos $\pi(t_n)x_n \to \pi(t)x$. Assim,

$$\widetilde{\pi}(t_n)x_n = I(\pi(t_n)x_n) \to I(\pi(t)x) = \widetilde{\pi}(t)x.$$

Definindo $\alpha_n := \phi(x_n) - s = t_n - t$ para $n \in \mathbb{N}$, este caso está provado.

Caso 3. $t > s$.

Neste caso, lembrando da definição de trajetória impulsiva, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $t = \sum_{i=0}^{m-1} \phi((x_0)_i^+) + t'$ com $0 \leqslant t' < \phi((x_0)_m^+)$, onde $(x_0)_0^+ := x$. Como no Caso 2, obtemos

$$(x_n)_1^+ = I(\pi(\phi(x_n)x_n)) \to I(\pi(s)x) = (x_0)_1^+.$$

Sabemos que $(x_0)_1^+ \in \Omega$ e, do Teorema 2.21, segue que $\phi((x_n)_1^+) \to \phi((x_0)_1^+)$. Aplicando novamente os mesmos argumentos do Caso 2, obtemos

$$(x_n)_2^+ = I(\pi(\phi((x_n)_1^+))(x_n)_1^+) \to I(\pi(\phi((x_0)_1^+))(x_0)_1^+) = (x_0)_2^+ \in \Omega.$$

Continuando com esse processo obtemos $\phi((x_n)_i^+) \to \phi((x_0)_i^+)$ e

$$(x_n)_i^+ = I(\pi(\phi(x_n)_{i-1}^+)(x_n)_{i-1}^+) \to I(\pi(\phi((x_0)_{i-1}^+))(x_0)_{i-1}^+) = (x_0)_i^+ \in \Omega,$$

para $i = 1, \dots, m-1$. Tomando $t_n = \sum_{i=0}^{m-1} \phi((x_n)_i^+)$, então $t_n \to \sum_{i=0}^{m-1} \phi_0((x_0)_i^+) = t - t'$, e assim definimos $\alpha_n := t_n + t' - t$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Claramente $\alpha_n \to 0$ e $t + \alpha_n = t_n + t' \geqslant 0$. Como para n suficientemente grande temos $t' < \phi((x_n)_m^+)$, então

$$\begin{aligned}\widetilde{\pi}(t+\alpha_n)x_n =& \widetilde{\pi}(t'+t_n)x_n = \widetilde{\pi}(t')\widetilde{\pi}(t_n)x_n = \widetilde{\pi}(t')(x_n)_m^+ \\ =& \pi(t')(x_n)_m^+ \to \pi(t')(x_0)_m^+ = \widetilde{\pi}(t)x,\end{aligned}$$

e este caso está provado.

Para os CASOS 2 e 3, provamos que existe uma sequência $\mathbb{R} \ni \alpha_n \to 0$ com $y_n := \widetilde{\pi}(t+\alpha_n)x_n \to \widetilde{\pi}(t)x := y$. Temos $y \in \Omega$ e, definindo $\epsilon_n := \alpha_n + |\alpha_n|$ para cada $n \in \mathbb{N}$ temos $\epsilon_n \geqslant 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e, pelo Lema 2.18, temos

$$\widetilde{\pi}(t+\epsilon_n)x_n = \widetilde{\pi}(|\epsilon_n|)y_n \to y = \widetilde{\pi}(t)x,$$

e o resultado está provado. □

Precisaremos de resultados de convergência um pouco mais precisos do que somente o dado na Proposição 2.22. Tais resultados, adaptados de (BONOTTO, Everaldo M.; GIMENES; SOUTO, 2017, Lemma 2.4), são apresentados a seguir. O primeiro deles nos diz que não precisamos de nenhuma correção quando fazemos a convergência para um tempo que não é um tempo de salto do ponto $x \in \Omega$.

Proposição 2.23. *Seja $\widetilde{\pi}$ um semigrupo impulsivo satisfazendo (T). Sejam também $x \in \Omega$ e $t \geqslant 0$ tal que $t \neq \lambda_k(x)$ para todo k. Se $t_n \to t$, com $t_n \geqslant 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e $x_n \to x$ então*

$$\widetilde{\pi}(t_n)x_n \to \widetilde{\pi}(t)x.$$

Demonstração. O caso $t = 0$ é o resultado do Lema 2.18 **(b)**. Assuma então $t > 0$ e escolha k tal que $\lambda_k(x) < t < \lambda_{k+1}(x)$. Como $\phi((x_n)_j^+) \to \phi(x_j^+)$ para cada j, e $t_n \to t$, podemos assumir que $\lambda_k(x_n) < t_n < \lambda_{k+1}(x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então

$$\widetilde{\pi}(t_n)x_n = \pi(t_n - \lambda_k(x_n))(x_n)_k^+ \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \pi(t-\lambda_k(x))x_k^+ = \widetilde{\pi}(t)x,$$

e o resultado está completo. □

Definimos a **semiórbita impulsiva de** x como o conjunto

$$\widetilde{\gamma}^+(x) = \{\widetilde{\pi}(t)x\colon t \in [0, \ell(x))\}.$$

O próximo resultado, que será extremamente útil mais adiante, lida com o caso quando t é exatamente um ponto de salto de $x \in \Omega$.

Proposição 2.24. *Seja $\widetilde{\pi}$ um semigrupo impulsivo satisfazendo (T). Sejam também $x \in \Omega$ e $t = \lambda_k(x)$ para algum $k > 0$. Se $t_n \to t$, com $t_n \geqslant 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e $x_n \to x$ então $\{\widetilde{\pi}(t_n)x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente para algum ponto ou em $\widetilde{\gamma}^+(x)$ ou em $\overline{\widetilde{\gamma}^+(x)} \cap M$.*

Demonstração. Separamos a demonstração em dois casos.

CASO 1. A menos de subsequências, $t_n < t$ para $n \in \mathbb{N}$.

Como $\lambda_{k-1}(x) < \lambda_k(x) = t$, $t_n < t$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $t_n \to t$ então para n suficientemente grande, temos $\lambda_{k-1}(x_n) < t_n$. Dividimos essa prova em dois subcasos.

Subcaso 1.1. A menos de subsequências, $t_n < \lambda_k(x_n)$ para $n \in \mathbb{N}$.

Neste subcaso, podemos definir $s_n := t_n - \lambda_{k-1}(x_n)$. Note que $0 \leqslant s_n < \lambda_k(x_n) - \lambda_{k-1}(x_n) = \phi((x_n)^+_{k-1})$ e $\lambda_{k-1}(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_{k-1}(x)$ e, portanto, $s_n \to \lambda_k(x) - \lambda_{k-1}(x) = \phi(x^+_{k-1})$. Logo,

$$\begin{aligned}\widetilde{\pi}(t_n)x_n &= \widetilde{\pi}(s_n)\widetilde{\pi}(\lambda_{k-1}(x_n))x_n = \widetilde{\pi}(s_n)(x_n)^+_{k-1}\\ &= \pi(s_n)(x_n)^+_{k-1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \pi(\phi(x^+_{k-1}))x^+_{k-1} = x_k \in \overline{\widetilde{\gamma}^+(x)} \cap M.\end{aligned}$$

Subcaso 1.2. A menos de subsequências, $t_n \geqslant \lambda_k(x_n)$ para $n \in \mathbb{N}$.

Aqui, como $t_n \to t = \lambda_k(x)$ e $\lambda_k(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_k(x)$, para n suficientemente grande, temos $t_n < \lambda_{k+1}(x_n)$. Assim, definimos $r_n := t_n - \lambda_k(x_n)$ e vemos que $0 \leqslant r_n < \lambda_{k+1}(x_n)$ e $r_n \to 0$. Além disso,

$$\widetilde{\pi}(t_n)x_n = \widetilde{\pi}(r_n)(x_n)^+_k = \pi(r_n)(x_n)^+_k \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x^+_k \in \widetilde{\gamma}^+(x).$$

Caso 2. A menos de subsequências, $t_n \geqslant t$ para $n \in \mathbb{N}$.

Como $t_n \geqslant t$ para todo $n \in \mathbb{N}$, definimos $s_n := t_n - t$, e com isso $s_n \geqslant 0$ e $s_n \to 0$. Como $\lambda_k(x_n) \to \lambda_k(x)$, definindo $T_n := \lambda_k(x_n) - \lambda_k(x)$ para $n \in \mathbb{N}$ temos $t_n = \lambda_k(x_n) + s_n - T_n$, e separamos nos seguintes subcasos:

Subcaso 2.1. A menos de subsequências, $s_n - T_n \geqslant 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como $(x_n)^+_k \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x^+_k$ e $s_n - T_n \to 0$, usando o Lema 2.18 **(b)**, obtemos

$$\widetilde{\pi}(t_n)x_n = \widetilde{\pi}(s_n - T_n)\widetilde{\pi}(\lambda_k(x_n))x_n = \widetilde{\pi}(s_n - T_n)(x_n)^+_k \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x^+_k \in \widetilde{\gamma}^+(x).$$

Subcaso 2.2. A menos de subsequências, $s_n - T_n < 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como $\lambda_{k-1}(x_n) \to \lambda_{k-1}(x) < t$, então para n suficientemente grande $\lambda_{k-1}(x_n) < t$, e assim $\phi((x_n)^+_{k-1}) > T_n$ e, consequentemente, $\phi((x_n)^+_{k-1}) - T_n + s_n > 0$. Escrevendo $t_n = \lambda_{k-1}(x_n) + \phi((x_n)^+_{k-1}) - T_n + s_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, e notando que $\phi((x_n)^+_{k-1}) - T_n + s_n < \phi((x_n)^+_{k-1})$ e $s_n - T_n \to 0$, temos

$$\begin{aligned}\widetilde{\pi}(t_n)x_n &= \widetilde{\pi}(\phi((x_n)^+_{k-1}) - T_n + s_n)\widetilde{\pi}(\lambda_{k-1}(x_n))x_n = \widetilde{\pi}(\phi((x_n)^+_{k-1}) - T_n + s_n)(x_n)^+_{k-1}\\ &= \pi(\phi((x_n)^+_{k-1}) - T_n + s_n)(x_n)^+_{k-1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \pi(\phi(x^+_{k-1}))x^+_{k-1} = x_k \in \overline{\widetilde{\gamma}^+(x)} \cap M,\end{aligned}$$

o que completa a demonstração. $\square$

O seguinte resultado, é original de nossa autoria e será necessário mais a frente.

Proposição 2.25. *Seja $\widetilde{\pi}$ um semigrupo impulsivo satisfazendo* (H) *e* (T). *Dados $t_0 \geqslant 0$, $x \in \Omega$ e $x_n \to x$, se $\lambda_k(x)$ é o último tempo de salto de x no intervalo $[0, t_0]$ então existe $\eta > 0$ tal que para n suficientemente grande $\lambda_k(x_n)$ é o último tempo de salto de x_n no intervalo $[0, t_0 + \eta]$. Além disso, $(x_n)^+_i \to x^+_i$ e $\phi((x_n)^+_i) \to \phi(x^+_i)$ para $i = 0, \dots, k$.*

Demonstração. Sabemos do Teorema 2.21 que $\phi(x_n) \to \phi(x)$ e, se $\phi(x) < \infty$ temos

$$(x_n)_1^+ = I(\pi(\phi(x_n)x_n) \to I(\pi(\phi(x))x) = x_1^+.$$

Disso é claro que $\phi((x_n)_i^+) \to \phi(x_i^+)$ e, enquanto $\phi(x_i^+) < \infty$, temos $(x_n)_{i+1}^+ \to x_{i+1}^+$.

Como $\lambda_k(x)$ é o último tempo de salto de x em $[0, t_0]$ então $\lambda_{k+1}(x) > t_0$ e podemos escolher $\eta > 0$ suficientemente pequeno tal que $\lambda_{k+1}(x) > t_0 + \eta$.

Assim, para n suficientemente grande temos pelo menos k tempos de salto de x_n em $[0, t_0 + \eta]$ e, além disso, $(x_n)_i^+ \to x_i^+$ e $\phi((x_n)_i^+) \to \phi(x_i^+)$ para $i = 0, \ldots, k$.

Assim, da convergência que provamos acima, para n suficientemente grande temos $\lambda_{k+1}(x_n) > t_0 + \eta$, mostrando que $\lambda_k(x_n)$ é o úlimo tempo de salto de x_n em $[0, t_0 + \eta]$. □

Para darmos continuidade, precisaremos das seguintes definições:

Definição 2.26. Seja $\widetilde{\pi}$ um semigrupo impulsivo. Diremos que $\widetilde{\pi}$ é:

(a) **assintoticamente compacto** se dadas sequências $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Omega$ limitada e $t_n \to \infty$ tais que a sequência $\{\widetilde{\pi}(t_n)x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, então $\{\widetilde{\pi}(t_n)x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ possui subsequência convergente em X;

(b) **dissipativo** se existe um subconjunto não vazio, limitado e fechado B_0 de Ω que $\widetilde{\pi}$-absorve todos os conjuntos limitados de Ω. Neste caso, o conjunto B_0 é chamado de **conjunto absorvente** para $\widetilde{\pi}$.

Note que se $\widetilde{\pi}$ é dissipativo, a compacidade assintótica pode ser escrita como: dadas sequências $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Omega$ limitada e $t_n \to \infty$ então $\{\widetilde{\pi}(t_n)x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ possui subsequência convergente em X.

O próximo resultado nos dá a convergência da função ϕ em situações nas quais o limite está em M, e sua prova é uma adaptação de (BORTOLAN; UZAL, José Manuel, 2021, Lemma 4.3).

Proposição 2.27. *Seja $\widetilde{\pi}$ um semigrupo impulsivo assintoticamente compacto e dissipativo, satisfazendo* (H) *e* (T). *Se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em X, $t_n \to \infty$ e $x \in M$ são tais que $\widetilde{\pi}(t_n)x_n \to x$, então $\phi(\widetilde{\pi}(t_n)x_n) \to 0$.*

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotamos por τ_n o último tempo de salto de x_n no intervalo $[0, t_n + \frac{\delta}{2}]$, onde $\delta > 0$ vem da condição (H). Se não existe nenhum tempo de salto nesse intervalo, tomamos $\tau_n = 0$. Temos os seguintes casos:

Caso 1. Existe $0 < \epsilon < \frac{\delta}{2}$ tal que, a menos de subsequências, $\tau_n \leqslant t_n - \epsilon$.

Neste caso, temos $\tau_n < t_n - \frac{\epsilon}{2}$ e como τ_n é o último tempo de salto de x_n no intervalo $[0, t_n + \frac{\delta}{2}]$, obtemos

$$\widetilde{\pi}(t_n)x_n = \widetilde{\pi}(\tfrac{\epsilon}{2})\widetilde{\pi}(t_n - \tfrac{\epsilon}{2})x_n = \pi(\tfrac{\epsilon}{2})y_n,$$

sendo $y_n := \widetilde{\pi}(t_n - \frac{\epsilon}{2})x_n$. Da compacidade assintótica de $\widetilde{\pi}$, existe $y \in X$ tal que $y_n \to y$, a menos de subsequências.

Como $\pi(\frac{\epsilon}{2})y_n = \widetilde{\pi}(t_n)x_n \to x \in M$, da condição (T) existe $\alpha_n \to 0$ com $\frac{\epsilon}{2} + \alpha_n > 0$ tal que $\pi(\frac{\epsilon}{2} + \alpha_n)y_n \in M$, a menos de subsequências. Para n suficientemente grande temos $\alpha_n < \frac{\delta}{2}$ e assim

$$\widetilde{\pi}(t_n + \alpha_n)x_n = \widetilde{\pi}(\tfrac{\epsilon}{2} + \alpha_n)y_n = \pi(\tfrac{\epsilon}{2} + \alpha_n)y_n,$$

o que nos dá $\widetilde{\pi}(t_n + \alpha_n)x_n \in M$, o que é uma contradição. Portanto, este caso não pode ocorrer.

Caso 2. Existe $0 < \epsilon < \frac{\delta}{2}$ tal que, a menos de subsequências, $\tau_n \geqslant t_n + \epsilon$.

Neste caso, temos $t_n + \epsilon \leqslant \tau_n \leqslant t_n + \frac{\delta}{2}$ e podemos assumir, sem perda de generalidade, que $\tau_n - t_n \to s \in [\epsilon, \frac{\delta}{2}]$. Considere $y_n := \widetilde{\pi}(t_n - \delta)x_n$, e da compacidade assintótica de $\widetilde{\pi}$ segue que $y_n \to y$, a menos de subsequência. Como $(t_n + \frac{\delta}{2}) - (t_n - \delta) = \frac{3\delta}{2} < 2\delta$, a condição (H) implica que τ_n é o único tempo de salto de x_n no intervalo $[t_n - \delta, t_n + \frac{\delta}{2}]$.

Note que $\phi(y_n) = \tau_n - t_n + \delta$, então

$$M \ni \pi(\tau_n - t_n + \delta)y_n \to \pi(s + \delta)y \in M.$$

Vamos mostrar agora que $\pi(t)y \notin M$ para $t \in (0, s+\delta)$. De fato, se para algum $t \in (0, s+\delta)$ isso não ocorresse, como $y_n \to y$ e $\pi(t)y_n \to \pi(t)y \in M$, a condição (T) implica na existência de uma sequência $\alpha_n \to 0$ com $t + \alpha_n > 0$ tal que $\pi(t + \alpha_n)y_n \in M$, a menos de subsequências. Tomando $\beta > 0$ de modo que $t + \beta < s + \delta$, e para n suficientemente grande obtemos que $t + \alpha_n < t + \beta < \tau_n - t_n + \delta$, o que contraria o fato de que $\tau_n - t_n + \delta$ é tempo de impacto de y_n, e assim segue que $\pi(t)y \notin M$ para $t \in (0, s + \delta)$. Isso prova que $\phi(y) = s + \delta$.

Agora, como

$$\widetilde{\pi}(t_n)x_n = \widetilde{\pi}(\delta)\widetilde{\pi}(t_n - \delta)x_n = \widetilde{\pi}(\delta)y_n = \pi(\delta)y_n,$$

e fazendo $n \to \infty$, obtemos $M \ni x = \pi(\delta)y$, o que é uma contradição, pois $\phi(y) = s + \delta$ e $\delta < s + \delta$. Portanto, este caso não pode ocorrer.

Caso 3. $t_n - \tau_n \to 0$.

Subcaso 3.1. $\tau_n \leqslant t_n$, a menos de subsequências.

Definindo as sequências $z_n := \widetilde{\pi}(\tau_n)x_n \in I(M)$ e $y_n := \widetilde{\pi}(t_n - \delta)x_n$, da compacidade assintótica podemos assumir que, a menos de subsequências, $z_n \to z$ e $y_n \to y$. Para n suficientemente grande temos $\tau_n - t_n + \delta > 0$ e, da condição (H), τ_n é o único tempo de salto de x_n em $[t_n - \delta, t_n + \frac{\delta}{2}]$. Isso nos dá que $\phi(y_n) = \tau_n - t_n + \delta$, e assim

$$z_n = \widetilde{\pi}(\tau_n - t_n + \delta)\widetilde{\pi}(t_n - \delta)x_n = \widetilde{\pi}(\tau_n - t_n + \delta)y_n = I(\pi(\tau_n - t_n + \delta)y_n) \to I(\pi(\delta)y).$$

Então $z = I(\pi(\delta)y) \in \Omega$.

Por outro lado, da condição (H) temos

$$\widetilde{\pi}(t)z_n = \pi(t)z_n, \text{ para todo } t \in [0, 2\delta).$$

Para n suficientemente grande temos $t_n - \tau_n < 2\delta$ e assim

$$\widetilde{\pi}(t_n)x_n = \widetilde{\pi}(t_n - \tau_n)\widetilde{\pi}(\tau_n)x_n = \widetilde{\pi}(t_n - \tau_n)z_n = \pi(t_n - \tau_n)z_n \to z,$$

logo $M \ni x = z$ e temos uma contradição. Portanto este subcaso não pode ocorrer.

Subcaso 3.2. $\tau_n > t_n$, a menos de subsequências.

Seja τ_{n-1} o penúltimo tempo de salto de x_n no intervalo $[0, t_n + \frac{\delta}{2}]$. Se não existe tal tempo de salto nesse intervalo, tomamos $\tau_{n-1} = 0$. Da condição (H) podemos assumir que $\tau_{n-1} < t_n$, e usando a definição de trajetória impulsiva para $t \in [\tau_{n-1}, \tau_n)$ temos

$$\widetilde{\pi}(t)x_n = \pi(t - \tau_{n-1})z_n^+,$$

com $z_n^+ \in I(M)$ e $\tau_n = \tau_{n-1} + \phi(z_n^+)$.

Em particular,

$$\widetilde{\pi}(t_n)x_n = \pi(t_n - \tau_{n-1})z_n^+.$$

Para $s \in (0, \tau_n - t_n)$ temos $0 < s + t_n - \tau_{n-1} < \tau_n - \tau_{n-1} = \phi(z_n^+)$ e assim

$$\pi(s)\widetilde{\pi}(t_n)x_n = \pi(s + t_n - \tau_{n-1})z_n^+ \notin M$$

e

$$\pi(\tau_n - t_n)\widetilde{\pi}(t_n)x_n = \pi(\tau_n - \tau_{n-1})z_n^+ = \pi(\phi(z_n^+))z_n^+ \in M.$$

Concluímos então que $\phi(\widetilde{\pi}(t_n)x_n) = \tau_n - t_n \to 0$, e o resultado está provado. □

A seguir apresentamos uma proposição que será útil em aplicações, e é uma adaptação de (BONOTTO, Everaldo Mello; KALITA, 2020, Lemma 6.3)

Proposição 2.28. *Seja $\widetilde{\pi}$ um semigrupo impulsivo dissipativo com um conjunto absorvente B_0, satisfazendo* (H)*. Assuma que $\pi(t)\colon X \to X$ é um operador compacto para cada $t > 0$. Então $\widetilde{\pi}$ é assintoticamente compacto.*

Demonstração. Sejam $t_n \to \infty$ e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ uma sequência limitada e, para cada $n \in \mathbb{N}$, denotamos por τ_n o último tempo de salto de x_n no intervalo $[0, t_n + \frac{\delta}{2}]$, onde $\delta > 0$ vem da condição (H). Se não existe nenhum tempo de salto nesse intervalo, tomamos $\tau_n = 0$. Temos os seguintes casos:

Caso 1. Existe $0 < \epsilon < \frac{\delta}{2}$ tal que, a menos de subsequências, $\tau_n \leqslant t_n - \epsilon$.

Neste caso, temos $\tau_n < t_n - \frac{\epsilon}{2}$ e como τ_n é o último tempo de salto de x_n no intervalo $[0, t_n + \frac{\delta}{2}]$, obtemos

$$\widetilde{\pi}(t_n)x_n = \widetilde{\pi}(\tfrac{\epsilon}{2})\widetilde{\pi}(t_n - \tfrac{\epsilon}{2})x_n = \pi(\tfrac{\epsilon}{2})y_n,$$

sendo $y_n := \widetilde{\pi}(t_n - \frac{\epsilon}{2})x_n$. Uma vez que $\widetilde{\pi}$ é dissipativo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B_0$ para todo $n \geqslant n_0$, ou seja, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada e como $\pi(\frac{\epsilon}{2})\colon X \to X$ é um operador compacto, existe $y \in X$ tal que $\pi(\frac{\epsilon}{2})y_n \to y$, a menos de subsequências.

Caso 2. Existe $0 < \epsilon < \frac{\delta}{2}$ tal que, a menos de subsequências, $\tau_n \geqslant t_n + \epsilon$.

Considere $y_n := \widetilde{\pi}(t_n - \delta)x_n$, e da dissipatividade segue que $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada. Note que $\tau_n - t_n + \delta \geqslant \delta + \epsilon > 0$ e como $(t_n + \frac{\delta}{2}) - (t_n - \delta) = \frac{3\delta}{2} < 2\delta$, a condição (H) implica que τ_n é o único tempo de salto de x_n no intervalo $[t_n - \delta, t_n + \frac{\delta}{2}]$, o que nos dá $\phi(y_n) = \tau_n - t_n + \delta$.

Assim,

$$\widetilde{\pi}(t_n)x_n = \widetilde{\pi}(\delta)\widetilde{\pi}(t_n - \delta)x_n = \widetilde{\pi}(\delta)y_n = \pi(\delta)y_n,$$

e uma vez que $\pi(\delta)\colon X \to X$ é um operador compacto, existe $y \in X$ tal que $\pi(\delta)y_n \to y$, a menos de subsequências.

Caso 3. $t_n - \tau_n \to 0$.

Subcaso 3.1. $\tau_n \leqslant t_n$, a menos de subsequências.

Definindo as sequências $z_n := \widetilde{\pi}(\tau_n)x_n \in I(M)$ e $y_n := \widetilde{\pi}(t_n - \delta)x_n$, da dissipatividade $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada e como $\pi(\frac{\delta}{2}) : X \to X$ é compacto, existe $y \in X$ tal que, a menos de subsequências, $\pi(\frac{\delta}{2})y_n \to y$. Para n suficientemente grande temos $\tau_n - t_n + \frac{\delta}{2} > 0$ e, da condição (H), τ_n é o único tempo de salto de x_n em $[t_n - \delta, t_n + \frac{\delta}{2}]$. Isso nos dá $\phi(y_n) = \tau_n - t_n + \delta$, e assim

$$z_n = \widetilde{\pi}(\tau_n - t_n + \delta)\widetilde{\pi}(t_n - \delta)x_n = \widetilde{\pi}(\tau_n - t_n + \delta)y_n = I(\pi(\tau_n - t_n + \tfrac{\delta}{2})\pi(\tfrac{\delta}{2})y_n) \to I(\pi(\tfrac{\delta}{2})y).$$

Por outro lado, da condição (H) temos

$$\widetilde{\pi}(t)z_n = \pi(t)z_n, \text{ para todo } t \in [0, 2\delta).$$

Para n suficientemente grande, temos $t_n - \tau_n < 2\delta$ e assim

$$\widetilde{\pi}(t_n)x_n = \widetilde{\pi}(t_n - \tau_n)\widetilde{\pi}(\tau_n)x_n = \widetilde{\pi}(t_n - \tau_n)z_n = \pi(t_n - \tau_n)z_n \to I(\pi(\tfrac{\delta}{2})y).$$

Subcaso 3.2. $\tau_n > t_n$, a menos de subsequências.

Considere $y_n := \widetilde{\pi}(t_n - \delta)x_n$, novamente da dissipatividade obtemos que $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada. Sabemos que $t_n - \delta < \tau_n \leqslant t_n + \frac{\delta}{2}$ e como $(t_n + \frac{\delta}{2}) - (t_n - \delta) = \frac{3\delta}{2} < 2\delta$, a condição (H) nos diz que τ_n é o único tempo de salto de x_n no intervalo $[t_n - \delta, t_n + \frac{\delta}{2}]$. Isso nos dá $\phi(y_n) = \tau_n - t_n + \delta$, logo

$$\widetilde{\pi}(t_n)x_n = \widetilde{\pi}(\delta)y_n = \pi(\delta)y_n,$$

e sendo $\pi(\delta)\colon X \to X$ compacto, existe $y \in X$ tal que $\pi(\delta)y_n \to y$, a menos de subsequências, e o resultado está provado. □

2.2 EXISTÊNCIA DO ATRATOR GLOBAL

Como sabemos, na teoria de atratores globais para semigrupos, o conjunto ω-*limite* tem um papel fundamental. Aqui, não esperaríamos que as coisas fossem diferentes e, assim, definimos a noção de *conjunto ω-limite impulsivo*.

Definição 2.29. Seja $\widetilde{\pi}$ um semigrupo impulsivo. Para $B \subset \Omega$ e $t \geqslant 0$ definimos

$$\widetilde{\gamma}_t^+(B) = \{\widetilde{\pi}(s)x \colon s \geqslant t \text{ e } x \in B\},$$

e o **conjunto ω-limite impulsivo** de B como

$$\widetilde{\omega}(B) = \Big(\bigcap_{t \geqslant 0} \overline{\widetilde{\gamma}_t^+(B)}\Big) \cap \Omega.$$

Analogamente ao caso de semigrupos, obtemos o seguinte resultado de caracterização para conjunto ω-limite impulsivo.

Lema 2.30. *Temos*

$$\widetilde{\omega}(B) = \{x \in \Omega \colon \text{ existem } \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B \text{ e } t_n \to \infty \text{ com } \widetilde{\pi}(t_n)x_n \to x\}.$$

Demonstração. Se $x \in \widetilde{\omega}(B)$ então $x \in \Omega$ e $x \in \overline{\widetilde{\gamma}_n^+(B)}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, e assim existem $x_n \in B$ e $t_n \geqslant n$ tais que $d(x, \widetilde{\pi}(t_n)x_n) < \frac{1}{n}$. Portanto, $t_n \to \infty$ e $\widetilde{\pi}(t_n)x_n \to x$.

Reciprocamente, se $x \in \Omega$ é tal que $\widetilde{\pi}(t_n)x_n \to x$, onde $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ e $t_n \to \infty$, então dado $t \geqslant 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_n \geqslant t$ para todo $n \geqslant n_0$ e, portanto, $\widetilde{\pi}(t_n)x_n \in \widetilde{\gamma}_t^+(B)$ para todo $n \geqslant n_0$. Como $\widetilde{\pi}(t_n)x_n \to x$ temos $x \in \overline{\widetilde{\gamma}_t^+(B)}$. Uma vez que $t \geqslant 0$ é arbitrário, obtemos $x \in \widetilde{\omega}(B)$. □

Um resultado útil que usaremos mais adiante é o seguinte:

Proposição 2.31. *Se $B \subset \Omega$ e $t \geqslant 0$ temos $\widetilde{\omega}(\widetilde{\pi}(t)B) = \widetilde{\omega}(B)$.*

Demonstração. Seja $x \in \widetilde{\omega}(B)$ com $t_n \to \infty$ e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ tais que $\widetilde{\pi}(t_n)x_n \to x$. Podemos assumir que $t_n \geqslant t$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e, portanto,

$$\widetilde{\pi}(t_n - t)\widetilde{\pi}(t)x_n = \widetilde{\pi}(t_n)x_n \to x,$$

o que nos dá $x \in \widetilde{\omega}(\widetilde{\pi}(t)B)$, uma vez que $\{\widetilde{\pi}(t)x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \widetilde{\pi}(t)B$ e $t_n - t \to \infty$.

Reciprocamente, se $x \in \widetilde{\omega}(\widetilde{\pi}(t)B)$ existem $t_n \to \infty$ e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ tais que

$$\widetilde{\pi}(t_n + t)x_n = \widetilde{\pi}(t_n)\widetilde{\pi}(t)x_n \to x.$$

Como $t_n + t \to \infty$, obtemos $x \in \widetilde{\omega}(B)$. □

Iremos agora procurar condições sob as quais o semigrupo impulsivo $\widetilde{\pi}$ possui um atrator global. Para esse propósito, apresentaremos alguns resultados auxiliares.

Lema 2.32. *Seja $\widetilde{\pi}$ um semigrupo assintoticamente compacto, satisfazendo* (H) *e* (T)*. Se $B \subset \Omega$ é não vazio e limitado e $x \in M$ é tal que existem $t_n \to \infty$ e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ tal que $\widetilde{\pi}(t_n)x_n \to x$, então $I(x) \in \widetilde{\omega}(B)$.*

Demonstração. Da Proposição 2.27, $s_n = \phi(\widetilde{\pi}(t_n)x_n) \to 0$ e assim $z_n := \pi(s_n)\widetilde{\pi}(t_n)x_n \in M$ é tal que $z_n \to x$, e $z_n^+ := \widetilde{\pi}(s_n)\widetilde{\pi}(t_n)x_n = I(z_n) \to I(x)$. Por outro lado, $z_n^+ = \widetilde{\pi}(t_n + s_n)x_n$ e como $t_n + s_n \to \infty$, segue que $I(x) \in \widetilde{\omega}(B)$. □

Proposição 2.33. *Seja $\widetilde{\pi}$ um semigrupo impulsivo assintoticamente compacto e dissipativo, satisfazendo (H) e (T). Se $B \subset \Omega$ é limitado e não vazio então $\widetilde{\omega}(B)$ é não vazio e relativamente compacto em X.*

Demonstração.
$*$ $\widetilde{\omega}(B)$ é não vazio.

Sejam $t_n \to \infty$ e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ sequências quaisquer. Como $\widetilde{\pi}$ é assintoticamente compacto, a sequência $\{\widetilde{\pi}(t_n)x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é relativamente compacta em X e, portanto, existe $x \in X$ tal que, a menos de subsequências, $\widetilde{\pi}(t_n)x_n \to x$. Se $x \in \Omega$ então $x \in \widetilde{\omega}(B)$. Se $x \in M$, segue do Lema 2.32 que $I(x) \in \widetilde{\omega}(B)$. Em qualquer cenário, $\widetilde{\omega}(B) \neq \varnothing$.

$*$ $\widetilde{\omega}(B)$ é relativamente compacto em X.

Considere $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \widetilde{\omega}(B)$, logo existem sequências $t_n^k \to \infty$ quando $k \to \infty$ e $\{x_n^k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset B$ tais que $\widetilde{\pi}(t_n^k)x_n^k \to y_n$ quando $k \to \infty$, assim para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $t_{n_k}^k > k$ e $d(\widetilde{\pi}(t_{n_k}^k)x_{n_k}^k, y_n) < 1/k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Tomando $s_k = t_{n_k}^k$ e $z_k = x_{n_k}^k$ obtemos $s_k \to \infty$ e $\{z_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset B$. Da compacidade assintótica, a sequência $\{\widetilde{\pi}(s_k)z_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ possui subsequência convergente, que denotamos igual, para um ponto $x \in X$, isso implica que $y_k \to x$ e mostra que $\widetilde{\omega}(B)$ é relativamente compacto. □

Proposição 2.34. *Seja $\widetilde{\pi}$ um semigrupo impulsivo assintoticamente compacto, satisfazendo (H) e (T). Se $B \subset \Omega$ é não vazio, limitado e $x \in M$ é tal que existem $t_n \to \infty$ e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ tal que $\widetilde{\pi}(t_n)x_n \to x$, então $x \in \overline{\widetilde{\omega}(B)}$.*

Demonstração. Usando a Proposição 2.27 segue que $s_n := \phi(\widetilde{\pi}(t_n)x_n) \to 0$, e podemos assumir sem perda de generalidade que $0 < s_n < \frac{\delta}{4}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Tomando $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{m_0} < \frac{\delta}{2}$ e fixando $m \geqslant m_0$, definimos $w_{n,m} := \widetilde{\pi}(t_n - \frac{1}{m})x_n$. Da compacidade assintótica de $\widetilde{\pi}$ existem uma subsequência de $\{w_{n,m}\}_{n\in\mathbb{N}}$, que denotamos a mesma, e um ponto w_m tal que $w_{n,m} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} w_m$, para cada $m \geqslant m_0$.

Afirmamos que para cada $m \geqslant m_0$ existe $n_1 = n_1(m) \in \mathbb{N}$ tal que $\phi(w_{n,m}) > \frac{1}{m}$ para todo $n \geqslant n_1$. De fato, se isso não for verdade, para algum $m \geqslant m_0$ existe uma subsequência de $\{w_{n,m}\}_{n\in\mathbb{N}}$, que denotamos igual, tal que $\phi(w_{n,m}) \leqslant \frac{1}{m}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Portanto, a menos de subsequência, podemos assumir que $\phi(w_{n,m}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha \in [0, \frac{1}{m}]$ e definindo $z_{n,m} := \pi(\phi(w_{n,m}))w_{n,m} \in M$ temos $z_{n,m} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \pi(\alpha)w_m := z_m \in M$. Considerando $v_{n,m} := \widetilde{\pi}(\phi(w_{n,m}))w_{n,m} = I(z_{n,m})$, obtemos $v_{n,m} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} I(z_m) := v_m$. Da condição (H), $\phi(v_m) \geqslant 2\delta$ e, do Teorema 2.21, para n suficientemente grande temos

$$\phi(v_{n,m}) \geqslant \frac{1}{2}\phi(v_m) \geqslant \delta > \frac{1}{m}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\pi(s_n + \tfrac{1}{m} - \phi(w_{n,m}))v_{n,m} &= \pi(s_n)\pi(\tfrac{1}{m} - \phi(w_{n,m}))v_{n,m} \\ &\overset{(*)}{=} \pi(s_n)\widetilde{\pi}(\tfrac{1}{m} - \phi(w_{n,m}))v_{n,m} = \pi(s_n)\widetilde{\pi}(\tfrac{1}{m})w_{n,m} = \pi(s_n)\widetilde{\pi}(t_n)x_n \in M,\end{aligned}$$

onde em $(*)$ usamos o fato de que $\frac{1}{m} - \phi(w_{n,m}) < \frac{1}{m} < \delta$ e $v_{n,m} \in I(M)$. Isso implica que

$$\phi(v_{n,m}) \leqslant s_n + \frac{1}{m} - \phi(w_{n,m}) < s_n + \frac{1}{m} < \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{2} = \frac{3\delta}{4} < \delta,$$

o que contraria $\phi(v_{n,m}) \geqslant 2\delta$, e a afirmação está provada.

Da afirmação, para $n \geqslant n_1$ temos

$$\pi(\tfrac{1}{m})w_{n,m} = \widetilde{\pi}(\tfrac{1}{m})w_{n,m} = \widetilde{\pi}(\tfrac{1}{m})\widetilde{\pi}(t_n - \tfrac{1}{m})x_n = \widetilde{\pi}(t_n)x_n,$$

e fazendo $n \to \infty$ temos

$$\pi(\tfrac{1}{m})w_m = x, \text{ para } m \geqslant m_0.$$

Se tivéssemos $w_m \in M$, como $w_{n,m} = \widetilde{\pi}(t_n - \frac{1}{m})x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} w_m$, seguiria da Proposição 2.27 que $\phi(w_{n,m}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, o que contradiz a afirmação de que $\phi(w_{n,m}) > \frac{1}{m}$ para todo $n \geqslant n_1$. Portanto, $w_m \in \widetilde{\omega}(B)$ para todo $m \geqslant m_0$.

Da Proposição 2.33, segue que $\widetilde{\omega}(B)$ é relativamente compacto em X e, portanto, podemos supor que, a menos de subsequências, $w_m \to w$. Logo $w \in \overline{\widetilde{\omega}(B)}$ e

$$x = \lim_{m\to\infty} \pi(\tfrac{1}{m})w_m = w,$$

o que nos dá $x \in \overline{\widetilde{\omega}(B)}$ e completa a prova. □

Corolário 2.35. *Seja $\widetilde{\pi}$ um semigrupo impulsivo assintoticamente compacto, satisfazendo* (H) *e* (T). *Se $B \subset \Omega$ é não vazio e limitado então*

$$\overline{\widetilde{\omega}(B)} = \{x \in X\colon \ \textit{existem } \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B \textit{ e } t_n \to \infty \textit{ com } \widetilde{\pi}(t_n)x_n \to x\}.$$

Em particular, $\widetilde{\omega}(B) = \overline{\widetilde{\omega}(B)} \cap \Omega$.

Demonstração. Usando a Proposição 2.34 vemos facilmente que

$$\{x \in X\colon \ \text{existem } \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B \text{ e } t_n \to \infty \text{ com } \widetilde{\pi}(t_n)x_n \to x\} \subset \overline{\widetilde{\omega}(B)}.$$

Reciprocamente, se $x \in \overline{\widetilde{\omega}(B)}$ e $\widetilde{\omega}(B) \ni y_n \to x$ então existem $t_k^n \to \infty$ quando $k \to \infty$ e $\{x_k^n\}_{k\in\mathbb{N}} \subset B$ tais que $\widetilde{\pi}(t_k^n)x_k^n \to y_n$ quando $k \to \infty$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $k_n > n$ tal que $d(\widetilde{\pi}(t_{k_n}^n)x_{k_n}^n, y_n) < \frac{1}{n}$. Tomando $s_n := t_{k_n}^n$ e $z_n := x_{n_k}^n$, temos $s_n \to \infty$, $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ e $\widetilde{\pi}(s_n)z_n \to x$. A última afirmação é trivial e, assim, a prova está completa. □

Proposição 2.36. *Seja $\widetilde{\pi}$ um semigrupo impulsivo dissipativo com um conjunto absorvente B_0. Então para cada $B \subset X$ temos*

$$\widetilde{\omega}(B) \subset \widetilde{\omega}(B_0) \subset B_0.$$

Demonstração. Se $x \in \widetilde{\omega}(B_0)$, existem sequências $t_n \to \infty$ e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B_0$ com $\widetilde{\pi}(t_n)x_n \to x$. Sendo $\widetilde{\pi}$ dissipativo e B_0 limitado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\widetilde{\pi}(t_n)x_n \in B_0$ para todo $n \geqslant n_0$. Como B_0 é fechado em Ω e $x \in \Omega$, obtemos $x \in B_0$. Assim $\widetilde{\omega}(B_0) \subset B_0$.

Agora, se $x \in \widetilde{\omega}(B)$ então existem sequências $t_n \to \infty$ e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ com $\widetilde{\pi}(t_n)x_n \to x$ quando $n \to \infty$. Da dissipatividade, existe $t_0 \geqslant 0$ tal que $\widetilde{\pi}(t_0)B \subset B_0$, implicando que $y_n = \widetilde{\pi}(t_0)x_n \in B_0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $t_n \to \infty$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_n \geqslant t_0$ para todo $n \geqslant n_0$ e, portanto,

$$\widetilde{\pi}(t_n - t_0)y_n = \widetilde{\pi}(t_n - t_0)\widetilde{\pi}(t_0)x_n = \widetilde{\pi}(t_n)x_n \to x.$$

Uma vez que $t_n - t_0 \to \infty$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B_0$, obtemos $x \in \widetilde{\omega}(B_0)$ e o resultado está completo. $\square$

Proposição 2.37. *Seja $\widetilde{\pi}$ um semigrupo assintoticamente compacto e dissipativo, satisfazendo (H) e (T). Se $B \subset \Omega$ é não vazio e limitado, então $\widetilde{\omega}(B)$ é $\widetilde{\pi}$-invariante.*

Demonstração. Seja $x \in \widetilde{\omega}(B)$, então existem $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$, $t_n \to \infty$ tal que $\widetilde{\pi}(t_n)x_n \to x$. Da Proposição 2.22, dado $t \geqslant 0$ existe $\epsilon_n \geqslant 0$ com $\epsilon_n \to 0$ de modo que

$$\widetilde{\pi}(t+\epsilon_n)\widetilde{\pi}(t_n)x_n \to \widetilde{\pi}(t)x,$$

e como $t_n + t + \epsilon_n \to \infty$, então $\widetilde{\pi}(t)x \in \widetilde{\omega}(B)$ e obtemos a invariância positiva.

Para a invariância negativa tome $x \in \widetilde{\omega}(B)$, então $\widetilde{\pi}(t_n)x_n \to x$. Seja $t \geqslant 0$ fixo, e uma vez que $\widetilde{\pi}$ é assintoticamente compacto podemos assumir, passando a uma subsequência se necessário, que $\{\widetilde{\pi}(t_n - t)x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente para algum ponto $y \in X$, isto é, $y_n := \widetilde{\pi}(t_n - t)x_n \to y$ e temos os seguintes casos:

Caso 1. $y \in \Omega$.

Neste caso, $y \in \widetilde{\omega}(B)$. Além disso, da Proposição 2.22, existe $\epsilon_n \geqslant 0$ com $\epsilon_n \to 0$ tal que $\widetilde{\pi}(t+\epsilon_n)y_n \to \widetilde{\pi}(t)y$. Por outro lado, $\widetilde{\pi}(t+\epsilon_n)y_n = \widetilde{\pi}(\epsilon_n + t_n)x_n = \widetilde{\pi}(\epsilon_n)\widetilde{\pi}(t_n)x_n$, e do Lema 2.18 **(b)**, segue que

$$\widetilde{\pi}(\epsilon_n)\widetilde{\pi}(t_n)x_n \to x,$$

e assim $x = \widetilde{\pi}(t)y$ com $y \in \widetilde{\omega}(B)$.

Caso 2. $y \in M$.

Neste caso, $y \in \overline{\widetilde{\omega}(B)} \cap M$. Como $y_n \to y$, usando a Proposição 2.27 temos $s_n = \phi(y_n) \to 0$ e, do Lema 2.32, segue que $I(y) \in \widetilde{\omega}(B)$. Assim, $z_n = \pi(s_n)y_n \in M$ é tal que $z_n \to y$ e $z_n^+ = \widetilde{\pi}(s_n)y_n = I(z_n) \to I(y) := z$. Da Proposição 2.22 existe $\epsilon_n \geqslant 0$ com $\epsilon_n \to 0$ tal que

$$\widetilde{\pi}(t+\epsilon_n)z_n^+ \to \widetilde{\pi}(t)z,$$

e, por outro lado,

$$\widetilde{\pi}(t+\epsilon_n)z_n^+ = \widetilde{\pi}(t+\epsilon_n)\widetilde{\pi}(s_n)y_n = \widetilde{\pi}(s_n+\epsilon_n)\widetilde{\pi}(t_n)x_n,$$

e uma vez que $s_n + \epsilon_n \to 0$, do Lema 2.18 **(b)** segue que $\widetilde{\pi}(s_n + \epsilon_n)\widetilde{\pi}(t_n)x_n \to x$ e assim $x = \widetilde{\pi}(t)z$ com $z \in \widetilde{\omega}(B)$, e o resultado segue. $\square$

Neste ponto, alguns resultados se tornam diferentes. Uma vez que estamos usando uma noção diferente de atração para definir o atrator global, os resultados que envolvem essa propriedade precisam ser provados de maneira cuidadosa novamente, pois não são análogos aos existêntes na literatura. Para esse propósito, introduzimos a seguinte condição técnica:

$$\begin{cases} \text{dados } B \subset \Omega \text{ não vazio e limitado, } \{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (0,\infty) \text{ com } \liminf\limits_{n\to\infty} t_n > 0, \\ \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Omega \text{ limitada, com } \widetilde{\pi}(t_n)x_n \to x \in \overline{\widetilde{\omega}(B)} \cap M, \text{ e } U \text{ uma vizinhança} \\ \text{aberta de } \widetilde{\omega}(B) \text{ então } \widetilde{\pi}(t_{n_0})x_{n_0} \in U \text{ para algum } n_0 \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{Z}$$

Observação 2.38. Dado $C \subset \Omega$, se nos restringíssemos às vizinhanças abertas da forma

$$\mathcal{O}_r^{\Omega}(C) = \{x \in \Omega \colon d(x,C) < r\}$$

para $r > 0$, a condição (Z) estaria satisfeita. De fato, se $r > 0$ então

$$\overline{\widetilde{\omega}(B)} \subset \mathcal{O}_r^X(\widetilde{\omega}(B)) := \{y \in X \colon d(y, \widetilde{\omega}(B)) < r\},$$

e como $x \in \overline{\widetilde{\omega}(B)} \cap M \subset \overline{\widetilde{\omega}(B)}$ e $\widetilde{\pi}(t_n)x_n \to x$, então para n suficientemente grande teríamos $\widetilde{\pi}(t_n)x_n \in \mathcal{O}_r^X(\widetilde{\omega}(B))$. Portanto, como $\widetilde{\pi}(t_n)x_n \in \Omega$ obtemos $\widetilde{\pi}(t_n)x_n \in \mathcal{O}_r^{\Omega}(\widetilde{\omega}(B))$.

Entretanto, não queremos nos restringir a esse cenário, uma vez que ele não é o mais adequado para desenvolver a teoria do Capítulo 3.

Proposição 2.39. *Seja $\widetilde{\pi}$ um semigrupo impulsivo assintoticamente compacto e dissipativo, satisfazendo as condições* (H), (T) *e* (Z). *Se $B \subset \Omega$ é não vazio e limitado então $\widetilde{\omega}(B)$ $\widetilde{\pi}$-atrai B.*

Demonstração. Se isto não ocorre, existem uma vizinhança aberta U_0 de $\widetilde{\omega}(B)$ em Ω e sequências $t_n \to \infty$ e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ tal que

$$\widetilde{\pi}(t_n)x_n \notin U_0.$$

Usando a compacidade assintótica, a menos de subsequências, existe $x \in X$ tal que $\widetilde{\pi}(t_n)x_n \to x$. Como U_0 é aberto em Ω, existe um aberto V_0 em X tal que $U_0 = V_0 \cap \Omega$. Agora, uma vez que $\widetilde{\pi}(t_n)x_n \notin U_0$ e $\widetilde{\pi}(t_n)x_n \in \Omega$, obtemos $\widetilde{\pi}(t_n)x_n \notin V_0$. Portanto, $x \notin V_0$. Se $x \in \Omega$, então teríamos $x \in \widetilde{\omega}(B) \subset V_0$, o que é uma contradição. Assim $x \in \overline{\widetilde{\omega}(B)} \cap M$. Dessa forma, segue de (Z) que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\widetilde{\pi}(t_{n_0})x_{n_0} \in U_0$, o que nos dá uma contradição e conclui a prova. $\square$

Com isso podemos enunciar e provar o principal resultado desta seção.

Teorema 2.40 (Existência do atrator global)**.** *Seja $\widetilde{\pi}$ um semigrupo impulsivo assintoticamente compacto e dissipativo com conjunto absorvente B_0, satisfazendo* (H), (T) *e* (Z)*. Então $\mathcal{A} = \widetilde{\omega}(B_0)$ é o atrator global de $\widetilde{\pi}$.*

Demonstração. Já sabemos que $\mathcal{A} = \widetilde{\omega}(B_0)$ é não vazio, relativamente compacto em X e, do Corolário 2.35, segue que $\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}} \cap \Omega$. Da Proposição 2.37, sabemos que $\mathcal{A}$ é $\widetilde{\pi}$-invariante. Agora, dados $B \subset \Omega$ limitado e U vizinhança aberta de $\mathcal{A}$ em Ω, como $\mathcal{A} = \widetilde{\omega}(B_0)$ $\widetilde{\pi}$-atrai B_0, existe $t_1 \geqslant 0$ tal que $\widetilde{\pi}(t)B_0 \subset U$ para todo $t \geqslant t_1$. Além disso, existe $t_2 \geqslant 0$ tal que $\widetilde{\pi}(t)B \subset B_0$ para todo $t \geqslant t_2$. Para $t \geqslant t_0 := t_1 + t_2$ temos $t - t_2 \geqslant t_1$ e

$$\widetilde{\pi}(t)B = \widetilde{\pi}(t-t_2)\widetilde{\pi}(t_2)B \subset \widetilde{\pi}(t-t_2)B_0 \subset U,$$

o que mostra que $\mathcal{A}$ $\widetilde{\pi}$-atrai B. Portanto, $\mathcal{A}$ é o atrator global de $\widetilde{\pi}$. □

Observação 2.41. Faremos frequentemente o uso da Proposição 2.27 no seguinte cenário: se $\widetilde{\pi}$ é um semigrupo impulsivo, assintoticamente compacto e dissipativo, satisfazendo (H), (T) e (Z), com atrator global $\mathcal{A}$, então se $\mathcal{A} \ni x_n \to x \in M$ temos $\phi(x_n) \to 0$. Isso segue diretamente do fato de que existe $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ tal que $\widetilde{\pi}(n)y_n = x_n$, e a Proposição 2.27 se aplica.

No que segue, para encerrar este capítulo, apresentaremos um exemplo de um semigrupo impulsivo com atrator global, em dimensão finita.

Exemplo 2.42 (Adaptado de (BONOTTO, E. M. *et al.*, 2015))**.** Considere a equação

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), & t > 0, \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{2.4}$$

onde $f \in C(\mathbb{R}^n)$ é localmente Lipschitz contínua. Supondo que todas as soluções de (2.4) estão definidas para $t \geqslant 0$ e que dependam continuamente de (t, x_0), esse problema define um semigrupo $\pi = \{\pi(t) \colon t \geqslant 0\}$ em $\mathbb{R}^n$, onde $[0,\infty) \times \mathbb{R}^n \ni (t, x_0) \to \pi(t)x_0 \in \mathbb{R}^n$ denota a única solução de (2.4) no tempo $t \geqslant 0$.

Sejam $M \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto impulsivo compacto e $I \colon M \to \mathbb{R}^n \setminus M$ uma função impulso (assim, (H) está satisfeita e o sistema dinâmico impulsivo (π, M, I) define um semigrupo impulsivo $\widetilde{\pi} = \{\widetilde{\pi}(t) \colon t \geqslant 0\}$ em $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus M$). Assuma ainda que (T) e (Z) estejam satisfeitas[1] e consideremos $g \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ uma função que satisfaz as seguintes condições:

(i) $\nabla g(x) \cdot f(x) \leqslant \alpha_1 - \alpha_2 g(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$;

(ii) $g(I(x)) \leqslant \mu$, para todo $x \in M$;

[1] No Capítulo 5 veremos condições que garantem que M satisfaz (T). Infelizmente, no momento, ainda não conseguimos obter condições que garantam que $\widetilde{\pi}$ satisfaça (Z) e, portanto, assumimos que ela é válida. Porém, tendo em vista a Observação 2.38, poderíamos omitir a condição (Z) e obteríamos um atrator global cuja propriedade de atração se restringe à vizinhanças da forma $\mathcal{O}_r^{\Omega}(C)$.

(iii) $g^{-1}\left((-\infty, \mu + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}]\right)$ é limitado;
onde $\alpha_1, \alpha_2, \mu > 0$ são constantes positivas.

É simples ver que, em dimensão finita, a existência de um conjunto absorvente para $\widetilde{\pi}$ implica na compacidade assintótica de $\widetilde{\pi}$, já que limitados são relativamente compactos. Assim, tendo em vista o Teorema 2.40, para mostrar que $\widetilde{\pi}$ tem um atrator global, basta provar a existência de um conjunto absorvente B_0 para $\widetilde{\pi}$.

Lema 2.43. *Se $z \in I(M)$ então $g(\widetilde{\pi}(t)z) \leqslant \mu + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ para todo $t \geqslant 0$.*

Demonstração. Sejam $z \in I(M)$ e $0 \leqslant t \leqslant \phi(z)$ (se $\phi(z) = \infty$ tomamos $0 \leqslant t < \phi(z)$). Então, por (i) temos

$$\frac{d}{dt} g(\pi(t)z) = \nabla g(x(t)) \cdot \dot{x}(t) = \nabla g(\pi(t)z) \cdot f(\pi(t)z) \leqslant \alpha_1 - \alpha_2 g(\pi(t)z).$$

Logo, se $y(t) = g(\pi(t)z)$ temos

$$\dot{y}(t) + \alpha_2 y(t) \leqslant \alpha_1 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(e^{\alpha_2 t} y(t)) \leqslant \alpha_1 e^{\alpha_2 t} \Leftrightarrow y(t) \leqslant e^{-\alpha_2 t} y(0) + \frac{\alpha_1}{\alpha_2},$$

e por (ii) temos $g(\pi(t)z) \leqslant \mu + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ para todo $0 \leqslant t \leqslant \phi(z)$, o que nos dá

$$g(\widetilde{\pi}(t)z) \leqslant \mu + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \quad \text{para todo} \quad 0 \leqslant t \leqslant \phi(z).$$

Se $\phi(z) = \infty$, a prova acaba aqui. Caso contrário, como $z_1^+ = \widetilde{\pi}(\phi(z)z) \in I(M)$, podemos repetir o processo acima iniciando em z_1^+ e indutivamente obtemos o resultado. □

Teorema 2.44. *O semigrupo impulsivo $\widetilde{\pi}$ é dissipativo e, portanto, possui um atrator global $\mathcal{A}$.*

Demonstração. Seja $B_0 = g^{-1}\left((-\infty, \mu + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}]\right) \setminus M$. De (iii), $B_0 \subset \Omega$ é limitado e, como $B_0 = \overline{B_0} \cap \Omega$, então B_0 é fechado em Ω. Nos resta mostrar que B_0 $\widetilde{\pi}$-absorve todos os conjuntos limitados de Ω e, para isso, é suficiente provar que para cada $x \in \Omega$ existem $\delta_x > 0$ e $t_0 = t_0(x, \delta_x) \geqslant 0$ tais que

$$\widetilde{\pi}(t)y \in B_0, \text{ para todo } y \in B_{\delta_x}(x) \text{ e } t \geqslant t_0.$$

Temos dois casos para analisar.

Caso 1. $\phi(x) < \infty$.

Pelo Teorema 2.21 sabemos que ϕ é contínua em Ω e, portanto, para $x \in \Omega$ existe $\delta_x > 0$ tal que $|\phi(y) - \phi(x)| < 1$ se $y \in B_{\delta_x}(x)$, então $\phi(y) < 1 + \phi(x)$ para todo $y \in B_{\delta_x}(x)$. Tomando $t_0 = \sup\{\phi(y) \colon y \in B_{\delta_x}(x)\} \leqslant 1 + \phi(x) < \infty$, segue que para todo $t \geqslant t_0$ e $y \in B_{\delta_x}(x)$ temos $\widetilde{\pi}(t)y = \widetilde{\pi}(t - \phi(y))\widetilde{\pi}(\phi(y)y) = \widetilde{\pi}(t - \phi(y))z$, sendo $z = \widetilde{\pi}(\phi(y)y) \in I(M)$. Logo, pelo Lema 2.43, obtemos

$$g(\widetilde{\pi}(t)y) \leqslant \mu + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \text{ para todo } t \geqslant t_0.$$

CASO 2. $\phi(x) = \infty$.

Considere $B \subset \Omega$, uma bola centrada em x. Da continuidade de g, existe $\beta = \max_{y \in \overline{B}} g(y)$. Seja $k > \max\left\{0, -\alpha_2^{-1} \ln\left(\frac{\mu}{1+|\beta|}\right)\right\}$ e, pela continuidade de ϕ em $x \in \Omega$, existe $\delta = \delta(x,k) > 0$ tal que $\phi(y) > k$ para todo $y \in B_\delta(x) \subset \overline{B}$. Agora, podemos separar $B_\delta(x) = B_1 \cup B_2$ sendo $B_1 = \{y \in B_\delta(x) \colon \phi(y) = \infty\}$ e $B_2 = \{y \in B_\delta(x) \colon k < \phi(y) < \infty\}$.

Seja $y \in B_1$ e, usando argumentos análogos aos da prova do Lema 2.43 temos

$$g(\pi(t)y) \leqslant e^{-\alpha_2 t} g(y) + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \leqslant \beta e^{-\alpha_2 t} + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}.$$

Seja $t_0 := \max\left\{0, -\alpha_2^{-1} \ln\left(\frac{\mu}{1+|\beta|}\right)\right\}$. Se $t_0 = 0$, então $\ln\left(\frac{\mu}{1+|\beta|}\right) \geqslant 0$ o que nos dá $\frac{\mu}{1+|\beta|} \geqslant 1$, ou seja, $\mu \geqslant 1 + |\beta| > |\beta|$ e, assim para todo $t \geqslant t_0$ e $y \in B_1$ temos

$$g(\pi(t)y) \leqslant \beta e^{-\alpha_2 t} + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \leqslant |\beta| e^{-\alpha_2 t_0} + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} < \mu + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}.$$

Se $t_0 = -\alpha_2^{-1} \ln\left(\frac{\mu}{1+|\beta|}\right)$, então para todo $t \geqslant t_0$ e $y \in B_1$ temos

$$g(\pi(t)y) \leqslant \beta e^{-\alpha_2 t} + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \leqslant |\beta| e^{-\alpha_2 t_0} + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{|\beta|}{1+|\beta|}\mu + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} < \mu + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}.$$

Como $\widetilde{\pi}(t)y = \pi(t)y$ para todo $y \in B_1$ e $t \geqslant 0$ temos

$$g(\widetilde{\pi}(t)y) \leqslant \mu + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}, \tag{2.5}$$

para todo $t \geqslant t_0$ e $y \in B_1$.

Agora, considere $y \in B_2$. Por cálculos análogos, para todo $k \leqslant t < \phi(y)$ e $y \in B_2$ temos (2.5). Caso $t \geqslant \phi(y)$, então $t - \phi(y) \geqslant 0$ e o Lema 2.43 nos dá (2.5) para todo $t \geqslant \phi(y)$ e $y \in B_2$. Portanto, obtemos (2.5) para todo $t \geqslant \phi(y)$ e $y \in B_\delta(x)$. $\square$

3 SEMIGRUPOS IMPULSIVOS GRADIENTES E DINAMICAMENTE GRADIENTES

3.1 SEMIGRUPOS IMPULSIVOS GRADIENTES

Nesta seção, inspirados por (ARAGÃO-COSTA; CARVALHO, A. N, 2012), vamos definir a noção de *semigrupos impulsivos gradientes*, introduzida por nós nesta tese. Para tanto, no que segue, a menos que dito explicitamente o contrário, assumiremos que:

> $\tilde{\pi}$ é um semigrupo impulsivo assintoticamente compacto, dissipativo, satisfazendo (H), (T) e (Z), e com atrator global $\mathcal{A}$.

Definição 3.1. Um conjunto $\tilde{\pi}$-invariante $E \subset \mathcal{A}$ é um **invariante isolado** se $E = \overline{E} \cap \Omega$ e existe uma vizinhança aberta U de E em Ω tal que se F é um conjunto $\tilde{\pi}$-invariante com $E \subset F \subset U$, então $F = E$.

A coleção $\mathbf{E} = \{E_1, \ldots, E_p\}$ é uma **família separada de invariantes isolados** se E_i é um invariante isolado para cada $i = 1, \ldots, p$ e existe $\epsilon_0 > 0$ tal que

$$\mathcal{O}_{\epsilon_0}(E_i) \cap \mathcal{O}_{\epsilon_0}(E_j) = \varnothing \quad \text{para } 1 \leqslant i < j \leqslant p. \tag{3.1}$$

No caso contínuo o termo utilizado é o de *família disjunta*. Nesse caso os invariantes já são compactos e, sendo disjuntos, estão separados por uma distância positiva. No caso impulsivo, como os invariantes não são necessariamente fechados eles poderiam ser disjuntos sem estarem separados por uma distância positiva. Por esse motivo utilizamos o termo *família separada* ao considerarmos a condição (3.1).

Lema 3.2. *Se $E \subset \Omega$ é um conjunto $\tilde{\pi}$-invariante com $E = \overline{E} \cap \Omega$, então $E = \tilde{\omega}(E)$.*

Demonstração. Como $E \subset \Omega$ é $\tilde{\pi}$-invariante, dado $x \in E$ existe $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ tal que $\tilde{\pi}(n)x_n = x$ e, trivialmente, temos $x \in \tilde{\omega}(E)$. Reciprocamente, se $x \in \tilde{\omega}(E)$ então $x \in \Omega$ e existem $t_n \to \infty$ e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ com $\tilde{\pi}(t_n)x_n \to x$. Da $\tilde{\pi}$-invariância de E, sabemos que $\pi(t_n)x_n \in E$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o que implica $x \in \overline{E} \cap \Omega = E$, e o resultado está provado. $\square$

Lema 3.3. *Seja E um conjunto limitado e $\tilde{\pi}$-invariante com $E = \overline{E} \cap \Omega$. Dadas solução global limitada ξ de $\tilde{\pi}$, $s_n \to -\infty$ com $\xi(s_n) \to z \in \overline{E} \cap M$, e U vizinhança aberta de E em Ω, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\xi(s_{n_0}) \in U$.*

Demonstração. Defina $n_1 = 1$. Existe $n_2 > 1$ tal que $s_{n_2} + 2 < s_{n_1}$. Indutivamente, escolhemos n_k tal que $s_{n_k} + k < s_{n_{k-1}}$. Assim $\xi(s_{n_{k-1}}) = \tilde{\pi}(s_{n_{k-1}} - s_{n_k})\xi(s_{n_k})$ para cada $k \in \mathbb{N}$, com $s_{n_{k-1}} - s_{n_k} > k$. A conclusão segue diretamente do Lema 3.2 e da condição (Z). $\square$

Definição 3.4 (Semigrupo impulsivo gradiente)**.** Dizemos que $\tilde{\pi}$ é um **semigrupo impulsivo gradiente** com respeito à uma família separada de invariantes isolados $\mathbf{E} = \{E_1, \dots, E_p\}$ se existe uma função contínua $V \colon \Omega \to \mathbb{R}$, tal que:

(i) $[0, \infty) \ni t \mapsto V(\tilde{\pi}(t)x) \in \mathbb{R}$ é decrescente, para cada $x \in \Omega$;

(ii) V é constante em cada E_i, $i = 1, \dots, p$;

(iii) Se $x \in \Omega$ é tal que $V(\tilde{\pi}(t)x) = V(x)$ para todo $t \geqslant 0$, então $x \in E_i$ para algum $i = 1, \dots, p$.

Tal função é chamada de **função de Lyapunov** para $\tilde{\pi}$ relativa à $\mathbf{E}$.

Definição 3.5 (α-limite impulsivo)**.** Se ξ é uma solução global de $\tilde{\pi}$ por $x \in X$, definimos a **órbita global de** x **relativa a** ξ por $\gamma_\xi(x) = \{\xi(t) \colon t \in \mathbb{R}\}$. Neste caso, para $t \in \mathbb{R}$ escrevemos $(\gamma_\xi)_t^-(x) = \{\xi(s) \colon s \in (-\infty, t]\}$ e definimos o conjunto α-**limite de** x **relativo a** ξ por

$$\tilde{\alpha}_\xi(x) = \Big(\bigcap_{t \leqslant 0} \overline{(\gamma_\xi)_t^-(x)} \Big) \cap \Omega.$$

Daqui por diante assumiremos que $\tilde{\pi}$ é um semigrupo impulsivo gradiente com respeito à $\mathbf{E} = \{E_1, \dots, E_p\}$, com função de Lyapunov V.

Como no caso contínuo, temos a seguinte caracterização do conjunto α-limite:

Proposição 3.6. *Se ξ é uma solução global limitada de $\tilde{\pi}$ por x, então*

$$\tilde{\alpha}_\xi(x) = \{y \in \Omega \colon \text{ existe } t_n \to \infty \text{ com } \xi(-t_n) \to y\}.$$

Demonstração. Se $y \in \tilde{\alpha}_\xi(x)$ então $y \in \Omega$ e $y \in \overline{\{\xi(s) \colon s \in (-\infty, t]\}}$ para todo $t \leqslant 0$. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $t_n \geqslant n$ tal que $d(y, \xi(-t_n)) < \frac{1}{n}$ e, portanto, $\xi(-t_n) \to y$.

Reciprocamente, sejam $y \in \Omega$, $t_n \to \infty$ com $\xi(-t_n) \to y$ e $t \leqslant 0$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $-t_n \leqslant t$ para todo $n \geqslant n_0$. Portanto, $\xi(-t_n) \in \{\xi(s) \colon s \in (-\infty, t]\}$, e como $\xi(s_n) = \xi(-t_n) \to y$, então $y \in \overline{(\gamma_\xi)_t^-(x)}$. Da arbitrariedade de $t \leqslant 0$ obtemos $y \in \tilde{\alpha}_\xi(x)$. □

Lema 3.7. *Se ξ é uma solução global limitada de $\tilde{\pi}$ por x e $y \in M$ é tal que existe $t_n \to \infty$ com $\xi(-t_n) \to y$, então $I(y) \in \tilde{\alpha}_\xi(x)$.*

Demonstração. Da Observação 2.41 $s_n = \phi(\xi(-t_n)) \to 0$ e assim $z_n := \pi(s_n)\xi(-t_n) \in M$ é tal que $z_n \to y$, e $z_n^+ := \tilde{\pi}(s_n)\xi(-t_n) = I(z_n) \to I(y)$. Por outro lado, $z_n^+ = \xi(-t_n + s_n)$ e como $-t_n + s_n \to \infty$, segue que $I(y) \in \tilde{\alpha}_\xi(x)$. □

Proposição 3.8. *Se ξ é uma solução global limitada de $\tilde{\pi}$ por x então $\tilde{\alpha}_\xi(x) \subset \mathcal{A}$, $\tilde{\alpha}_\xi(x)$ é não vazio e relativamente compacto em X.*

Demonstração. Sejam $y \in \tilde{\alpha}_\xi(x)$ e $t_n \to \infty$ com $\xi(-t_n) \to y$. Sabemos que $\xi(\mathbb{R}) \subset \mathcal{A}$, logo $y \in \overline{\mathcal{A}} \cap \Omega = \mathcal{A}$. Disso segue que $\tilde{\alpha}_\xi(x) \subset \mathcal{A}$ e, diretamente, obtemos $\tilde{\alpha}_\xi(x)$ relativamente compacto em X, já que $\mathcal{A}$ o é.

Como $\{\xi(-n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$, existe $y \in X$ tal que, a menos de subsequências, $\xi(-n) \to y$. Se $y \in \Omega$ então $y \in \widetilde{\alpha}_\xi(x)$. Se $y \in M$, do Lema 3.7 obtemos $I(y) \in \widetilde{\alpha}_\xi(x)$. Em qualquer cenário, mostramos que $\widetilde{\alpha}_\xi(x) \neq \varnothing$. □

Proposição 3.9. *Se ξ é uma solução global limitada de $\widetilde{\pi}$ por x e $y \in M$ é tal que existe $t_n \to \infty$ com $\xi(-t_n) \to y$ então $y \in \overline{\widetilde{\alpha}_\xi(x)}$.*

Demonstração. Usando a Observação 2.41 segue que $s_n := \phi(\xi(-t_n)) \to 0$ e podemos assumir, sem perda de generalidade, que $0 < s_n < \frac{\delta}{4}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Tomando $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{m_0} < \frac{\delta}{2}$ e fixando $m \geqslant m_0$, definimos $w_{n,m} := \xi(-t_n - \frac{1}{m})$. Da compacidade assintótica de $\widetilde{\pi}$ existem uma subsequência de $\{w_{n,m}\}_{n\in\mathbb{N}}$, que denotamos a mesma, e um ponto w_m tal que $w_{n,m} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} w_m$, para cada $m \geqslant m_0$.

Afirmamos que para cada $m \geqslant m_0$ existe $n_1 = n_1(m) \in \mathbb{N}$ tal que $\phi(w_{n,m}) > \frac{1}{m}$ para todo $n \geqslant n_1$. De fato, se isso não for verdade, para algum $m \geqslant m_0$ existe uma subsequência de $\{w_{n,m}\}_{n\in\mathbb{N}}$, que denotamos igual, tal que $\phi(w_{n,m}) \leqslant \frac{1}{m}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Portanto, a menos de subsequências, podemos assumir que $\phi(w_{n,m}) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha \in [0, \frac{1}{m}]$ e definindo $z_{n,m} := \pi(\phi(w_{n,m}))w_{n,m} \in M$ temos $z_{n,m} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \pi(\alpha)w_m := z_m \in M$. Considerando $v_{n,m} := \widetilde{\pi}(\phi(w_{n,m}))w_{n,m} = I(z_{n,m})$, obtemos $v_{n,m} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} I(z_m) := v_m$. Da condição (H), $\phi(v_m) \geqslant 2\delta$ e, do Teorema 2.21, para n suficientemente grande temos

$$\phi(v_{n,m}) \geqslant \frac{1}{2}\phi(v_m) \geqslant \delta > \frac{1}{m}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \pi(s_n + \tfrac{1}{m} - \phi(w_{n,m}))v_{n,m} &= \pi(s_n)\pi(\tfrac{1}{m} - \phi(w_{n,m}))v_{n,m} \\ &\stackrel{(*)}{=} \pi(s_n)\widetilde{\pi}(\tfrac{1}{m} - \phi(w_{n,m}))v_{n,m} = \pi(s_n)\widetilde{\pi}(\tfrac{1}{m})w_{n,m} = \pi(s_n)\xi(-t_n) \in M, \end{aligned}$$

onde em $(*)$ usamos o fato de que $\frac{1}{m} - \phi(w_{n,m}) < \frac{1}{m} < \delta$ e $v_{n,m} \in I(M)$. Isso implica que

$$\phi(v_{n,m}) \leqslant s_n + \frac{1}{m} - \phi(w_{n,m}) < s_n + \frac{1}{m} < \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{2} = \frac{3\delta}{4} < \delta,$$

o que contraria $\phi(v_{n,m}) \geqslant 2\delta$, e a afirmação está provada.

Da afirmação, para $n \geqslant n_1$ temos

$$\pi(\tfrac{1}{m})w_{n,m} = \widetilde{\pi}(\tfrac{1}{m})w_{n,m} = \widetilde{\pi}(\tfrac{1}{m})\xi(-t_n - \tfrac{1}{m}) = \xi(-t_n),$$

e fazendo $n \to \infty$ temos

$$\pi(\tfrac{1}{m})w_m = y, \text{ para } m \geqslant m_0.$$

Se tivéssemos $w_m \in M$, como $w_{n,m} = \widetilde{\pi}(t_n - \frac{1}{m})x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} w_m$, seguiria da Proposição 2.27 que $\phi(w_{n,m}) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, o que contradiz a afirmação de que $\phi(w_{n,m}) > \frac{1}{m}$ para todo $n \geqslant n_1$. Portanto $w_m \in \widetilde{\alpha}_\xi(x)$ para todo $m \geqslant m_0$.

Da Proposição 3.8, segue que $\widetilde{\alpha}_\xi(x)$ é relativamente compacto em X e assim podemos supor, a menos de subsequências, que $w_m \to w$. Logo $w \in \overline{\widetilde{\alpha}_\xi(x)}$ e

$$y = \lim_{m\to\infty} \pi(\tfrac{1}{m})w_m = w,$$

o que mostra que $y \in \overline{\widetilde{\alpha}_\xi(x)}$ e completa a prova. □

Corolário 3.10. *Se ξ é uma solução global limitada de $\widetilde{\pi}$ por x então*

$$\overline{\widetilde{\alpha}_\xi(x)} = \{y \in X\colon \text{ existe } t_n \to \infty \text{ com } \xi(-t_n) \to y\}.$$

Em particular, $\widetilde{\alpha}_\xi(x) = \overline{\widetilde{\alpha}_\xi(x)} \cap \Omega$.

Demonstração. Usando a Proposição 3.9 vemos facilmente que

$$\{y \in X\colon \text{ existe } t_n \to \infty \text{ com } \xi(-t_n) \to y\} \subset \overline{\widetilde{\alpha}_\xi(x)}.$$

Reciprocamente, se $x \in \overline{\widetilde{\alpha}_\xi(x)}$ e $\widetilde{\alpha}_\xi(x) \ni y_n \to x$ então existem $t_k^n \to \infty$ quando $k \to \infty$ tais que $\xi(-t_k^n)x_k^n \to y_n$ quando $k \to \infty$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $k_n > n$ tal que $d(\xi(-t_{k_n}^n), y_n) < \frac{1}{n}$. Tomando $s_n := t_{k_n}^n$ temos $s_n \to \infty$ e $\xi(-s_n) \to y$. A última afirmação é trivial e, assim, a prova está completa. □

Como no caso contínuo, obtemos o seguinte resultado:

Proposição 3.11. *As seguintes afirmações são válidas:*

(a) *se ξ é uma solução global limitada de $\widetilde{\pi}$ por x e $y \in \widetilde{\alpha}_\xi(x)$ então $V(\xi(-t)) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} V(y)$;*

(b) *se $x \in \Omega$ e $y \in \widetilde{\omega}(x)$ então $V(\widetilde{\pi}(t)x) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} V(y)$.*

Demonstração. **(a)** É simples verificar que a aplicação $\mathbb{R} \ni t \mapsto V(\xi(t))$ é decrescente. Se $y \in \widetilde{\alpha}_\xi(x)$ existe $t_n \to \infty$ tal que $\xi(-t_n) \to y$ e, como V é contínua temos $V(\xi(-t_n)) \to V(y)$. Agora, se $s_n \to \infty$ for uma sequência qualquer, podemos construir subsequências $\{s_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{t_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$t_{n_k} < s_{n_k} < t_{n_{k+1}} \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Assim,

$$V(\xi(-t_{n_k})) \leqslant V(\xi(-s_{n_k})) \leqslant V(\xi(-t_{n_{k+1}})),$$

e, portanto, $V(\xi(-s_{n_k})) \to V(y)$, o que conclui a demonstração desse item.

(b) Sabemos que existe $t_n \to \infty$ tal que $\widetilde{\pi}(t_n)x \to y$. Da continuidade de V obtemos $V(\widetilde{\pi}(t_n)x) \to V(y)$. Como acima, é possível mostrar que para qualquer sequência $s_n \to \infty$ existe uma subsequência $\{s_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $V(\widetilde{\pi}(s_{n_k})x) \to V(y)$, o que conclui a demonstração. □

Proposição 3.12. *Valem as seguintes afirmações:*

(a) *se ξ é uma solução global limitada de $\widetilde{\pi}$ por x então $\widetilde{\alpha}_\xi(x) \subset \cup_{i=1}^{p} E_i$;*

(b) *se $x \in \Omega$ então $\widetilde{\omega}(x) \subset \cup_{i=1}^{p} E_i$.*

Demonstração. **(a)** Sejam $y \in \widetilde{\alpha}_\xi(x)$ e $t_n \to \infty$ tal que $\xi(-t_n) \to y$. Dado $t \geqslant 0$, da Proposição 2.22 existe $\epsilon_n \geqslant 0$ com $\epsilon_n \to 0$ tal que

$$\widetilde{\pi}(t+\epsilon_n)\xi(-t_n) \to \widetilde{\pi}(t)y,$$

ou seja, $\xi(-(t_n - t - \epsilon_n)) \to \widetilde{\pi}(t)y$. Como $t_n - t - \epsilon_n \to \infty$, da Proposição 3.11 **(a)**, temos

$$\begin{aligned} V(y) &= \lim_{n\to\infty} V(\xi(-(t_n - t - \epsilon_n))) = \lim_{n\to\infty} V(\xi(-t_n + t + \epsilon_n)) \\ &= \lim_{n\to\infty} V(\widetilde{\pi}(t+\epsilon_n)\xi(-t_n)) \\ &\overset{(*)}{=} V\left(\lim_{n\to\infty} \widetilde{\pi}(t+\epsilon_n)\xi(-t_n)\right) = V(\widetilde{\pi}(t)y), \end{aligned}$$

onde em $(*)$ utilizamos a continuidade de V. Assim, mostramos que $V(\widetilde{\pi}(t)y) = V(y)$ para todo $t \geqslant 0$, mostrando que $y \in E_i$ para algum $i \in \{1, \dots, p\}$, e o resultado segue.

(b) Se $y \in \widetilde{\omega}(x)$ e $t_n \to \infty$ é tal que $\widetilde{\pi}(t_n)x \to y$, então para $t \geqslant 0$ existe $\epsilon_n \to 0$ tal que $\widetilde{\pi}(t+\epsilon_n+t_n)x \to \widetilde{\pi}(t)y$. Assim, da continuidade de V, obtemos

$$V(y) = \lim_{n\to\infty} V(\widetilde{\pi}(t+\epsilon_n+t_n)x) = V\left(\lim_{n\to\infty} \widetilde{\pi}(t+\epsilon_n+t_n)x\right) = V(\widetilde{\pi}(t)y),$$

e o resultado segue como no caso acima. □

Antes de nós apresentarmos o principal resultado desta seção precisaremos da definição de conjunto instável. Aqui, se seguíssemos como em (BONOTTO, E. M. *et al.*, 2016b) e usássemos a distância para definir a convergência nos conjuntos instáveis, teríamos um problema mais adiante (invariantes com conjuntos instáveis triviais não seriam necessariamente atratores locais). Por essa razão, escolhemos trabalhar com a convergência dada por vizinhanças abertas quaisquer em Ω.

Definição 3.13 (Conjuntos instáveis)**.** Seja E um conjunto $\widetilde{\pi}$-invariante. O **conjunto instável de** E é definido por

$$W^u(E) = \{\xi(0) \colon \xi \text{ é uma solução global de } \widetilde{\pi} \text{ e } \xi(s) \to E \text{ quando } s \to -\infty\},$$

onde a convergência $\xi(s) \to E$ quando $s \to -\infty$ deve ser entendida como: dada vizinhança aberta U de E em Ω existe $s_0 \leqslant 0$ tal que $\xi(s) \in U$ para todo $s \leqslant s_0$.

Como no caso contínuo, obtemos o seguinte resultado:

Proposição 3.14. *Se E é um cojunto $\widetilde{\pi}$-invariante e limitado então $W^u(E)$ é $\widetilde{\pi}$-invariante e $E \subset W^u(E) \subset \mathcal{A}$.*

Demonstração.

$*$ $W^u(E)$ é $\widetilde{\pi}$-invariante.

Se $x \in W^u(E)$, então existe uma solução global de $\widetilde{\pi}$ com $\xi(0) = x$ tal que $\xi(s) \to E$ quando $s \to -\infty$. Fixado $t \geqslant 0$, defina $\eta(s) = \xi(s+t)$. Então η é uma solução global de $\widetilde{\pi}$ com $\eta(0) = \widetilde{\pi}(t)x$ e $\eta(s) \to E$ quando $s \to -\infty$, mostrando assim que $\widetilde{\pi}(t)x \in W^u(E)$. Para a $\widetilde{\pi}$-invariância negativa, fixado $t \geqslant 0$, definimos $\xi(-t) = y$ e, portanto, $x = \widetilde{\pi}(t)y$. Definindo $\psi(s) = \xi(s-t)$, segue que ψ é uma solução global de $\widetilde{\pi}$ com $\psi(0) = y$ e $\psi(s) \to E$ quando $s \to -\infty$ o que nos dá $y \in W^u(E)$ e o resultado está completo.

$*$ $E \subset W^u(E) \subset \mathcal{A}$.

Seja $x \in E$. Como E é $\widetilde{\pi}$-invariante, seguindo os argumentos da demonstração da Proposição 2.17, podemos construir uma solução global ξ por x tal que $\xi(t) \in E$ para todo $t \in \mathbb{R}$, o que nos dá $E \subset W^u(E)$. Agora, seja ξ uma solução global de $\widetilde{\pi}$ com $\xi(s) \to E$ quando $s \to -\infty$. Como E é limitado, podemos considerar U uma vizinhança aberta e limitada de E em Ω e, para tal vizinhança, existe $s_0 \leqslant 0$ tal que $\xi(s) \in U$ para todo $s \leqslant s_0$. Como $\mathcal{A}$ é a atrator global de $\widetilde{\pi}$, podemos escolher uma vizinhança aberta e limitada V de $\mathcal{A}$ em Ω e $t_0 \geqslant 0$ tal que $\xi(t) \in V$ para todo $t \geqslant t_0$. Como $\{\xi(t) \colon t \in [s_0, t_0]\} = \{\widetilde{\pi}(t)\xi(s_0) \colon t \in [0, t_0 - s_0]\}$, segue da Proposição 2.9 que $\{\xi(t) \colon t \in [s_0, t_0]\}$ é limitado. Com isso segue que ξ é uma solução global limitada de $\widetilde{\pi}$ e, da Proposição 2.17, obtemos $\xi(t) \in \mathcal{A}$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e o resultado está provado. $\square$

No caso contínuo sabemos que o atrator global de um semigrupo gradiente é a união dos conjuntos instáveis de cada invariante. No caso impulsivo obtemos a mesma caracterização para $\mathcal{A}$ em termos dos conjuntos instáveis dos invariantes isolados, porém com prova diferente.

Teorema 3.15. *Se $\widetilde{\pi}$ é um semigrupo impulsivo gradiente relativo à $\mathbf{E} = \{E_1, \ldots, E_p\}$, então*

$$\mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^{p} W^u(E_i).$$

Demonstração. Da Proposição 3.14 segue que $\bigcup_{i=1}^{p} W^u(E_i) \subset \mathcal{A}$. Agora, se $x \in \mathcal{A}$ e $x \notin \bigcup_{i=1}^{p} W^u(E_i)$ então existem uma solução global limitada ξ de $\widetilde{\pi}$ por x, uma vizinhança U de $\cup_{i=1}^{p} E_i$, e $s_n \to -\infty$ tal que $\xi(s_n) \in \Omega \setminus U$. Como $\{\xi(s_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ podemos assumir, a menos de subsequências, que existe y tal que $\xi(s_n) \to y$.

Caso 1. $y \in \Omega$.

Como $\Omega \setminus U$ é fechado e $\{\xi(s_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Omega \setminus U$, temos $y \in \Omega \setminus U$. Também, neste caso, temos $y \in \widetilde{\alpha}_\xi(x)$ e, da Proposição 3.12 **(a)**, segue que $y \in E_i$ para algum $i \in \{1, \ldots, p\}$. Assim $y \in U$, o que nos dá uma contradição.

Caso 2. $y \in M$.

Neste caso, segue do Corolário 3.10 que $y \in \overline{\widetilde{\alpha}_\xi(x)}$. Assim, dado $k \in \mathbb{N}$ existe $y_k \in \widetilde{\alpha}_\xi(x)$ tal que $d(y_k, y) < \frac{1}{k}$. Da Proposição 3.12 **(a)**, segue que $y_k \in E_{i_k}$ para algum

$i_k \in \{1, \dots, p\}$. Como temos uma quantidade finita de índices, um deles deve se repetir infinitas vezes e podemos assumir que, a menos de subsequências, $i_k = i$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Portanto, $y \in \overline{E_i} \cap M$. Como U é uma vizinhança aberta de E_i em Ω, segue de (Z) que deve existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\xi(s_{n_0}) \in U$ e obtemos uma contradição. $\square$

3.2 SEMIGRUPOS IMPULSIVOS DINAMICAMENTE GRADIENTES

No caso sem impulso surge a seguinte questão: quais são as propriedades dinâmicas de um semigrupo que o tornam um semigrupo gradiente? Inspirados por (CARVALHO, Alexandre N.; LANGA, 2009; ARAGÃO-COSTA *et al.*, 2011), nós fazemos a mesma pergunta para semigrupos impulsivos. Para responder a essa questão vamos agora introduzir a noção de *semigrupos impulsivos dinamicamente gradientes*, definida por nós neste trabalho, a fim de provar a estabilidade estrutural topológica para semigrupos impulsivos. No que segue, como antes, assumimos que:

> $\tilde{\pi}$ é um semigrupo impulsivo assintoticamente compacto, dissipativo, satisfazendo (H), (T) e (Z), e com atrator global $\mathcal{A}$.

Definição 3.16 (Estrutura homoclínica)**.** Considere uma família separada de invariantes isolados $\mathbf{E} = \{E_1, \dots, E_p\}$. Uma **estrutura homoclínica** em $\mathcal{A}$ é um subconjunto $\{E_{\ell_1}, \dots, E_{\ell_k}\}$ de $\mathbf{E}$, com $1 \leqslant k \leqslant p$, e um conjunto de soluções globais $\{\xi_1, \dots, \xi_k\}$ de $\tilde{\pi}$ em $\mathcal{A}$ tais que, definindo $E_{\ell_{k+1}} := E_{\ell_1}$, temos

$$E_{\ell_i} \overset{t\to-\infty}{\longleftarrow} \xi_i(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} E_{\ell_{i+1}} \quad \text{para} \quad 1 \leqslant i \leqslant k,$$

e também para cada $i = 1, \dots, k$ existe $t_{0,i} \in \mathbb{R}$ tal que

$$\xi_i(t_{0,i}) \notin \cup_{i=1}^{p} E_i.$$

Definição 3.17 (Semigrupo impulsivo dinamicamente gradiente)**.** Diremos que $\tilde{\pi}$ é um **semigrupo impulsivo dinamicamente gradiente** com respeito à $\mathbf{E} = \{E_1, \dots, E_p\}$ se:

(G1) dada uma solução global ξ de $\tilde{\pi}$ em $\mathcal{A}$ existem $i, j \in \{1, \dots, p\}$ tais que

$$E_i \overset{t\to-\infty}{\longleftarrow} \xi(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} E_j.$$

(G2) $\mathcal{A}$ não possui estruturas homoclínicas.

3.2.1 Semigrupos impulsivos gradientes são dinamicamente gradientes

Seja $\tilde{\pi}$ um semigrupo impulsivo gradiente com respeito à uma família separada de invariantes isolados $\mathbf{E} = \{E_1, \dots, E_p\}$, e com função de Lyapunov $V \colon \Omega \to \mathbb{R}$.

Lema 3.18. *Se ξ é uma solução global de $\widetilde{\pi}$ em $\mathcal{A}$ satisfazendo (G1) então uma, e somente uma, das hipóteses abaixo ocorre:*

(i) *$i = j$ e $\xi(t) \in E_i$ para todo $t \in \mathbb{R}$;*

(ii) *$i \neq j$ e $V(E_j) < V(E_i)$.*

Demonstração. Antes de provarmos o resultado, considere $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [0, \infty)$ com $r_n \to \infty$. Da compacidade assintótica de $\widetilde{\pi}$ sabemos que, a menos de subsequências, $\xi(r_n) \to z$ e temos os seguintes casos:

Caso 1. $z \in \Omega$.

Neste caso, observando que $\xi(r_n) = \widetilde{\pi}(r_n)\xi(0)$, obtemos $z \in \widetilde{\omega}(\xi(0))$. Assim, da Proposição 3.12, sabemos que $z \in \bigcup_{\ell=1}^{p} E_\ell$. Mas, de (G1), segue que $z \in \overline{E_j}$ e, portanto, $z \in E_j$.

Caso 2. $z \in M$.

Neste caso, do Lema 2.32, sabemos que $I(z) \in \widetilde{\omega}(\xi(0))$. Além disso, da Proposição 2.34 sabemos que $s_n := \phi(\xi(r_n)) \to 0$ e

$$\xi(t_n) = \xi(s_n + r_n) = \widetilde{\pi}(s_n)\xi(r_n) = I(\pi(s_n)\xi(r_n)) \to I(z). \tag{3.2}$$

Como acima, da Proposição 3.12, sabemos que $I(z) \in \bigcup_{\ell=1}^{p} E_\ell$. Mas, de (G1) e (3.2), segue que $I(z) \in \overline{E_j}$ e, portanto, $I(z) \in E_j$.

Em qualquer caso, provamos que existe $y \in E_j$ e $t_n \to \infty$ tal que $\xi(t_n) \to y$. Analogamente, provamos que existe $w \in E_i$ e uma sequência $s_n \to -\infty$ tal que $\xi(s_n) \to w$. Procedemos agora com a prova do resultado que é semelhante a prova do caso contínuo.

(i) Assuma $i = j$ e seja α o valor constante de V em E_i. Com as sequências definidas anteriormente e lembrando que a função $\mathbb{R} \ni t \mapsto V(\xi(t))$ é decrescente, a menos de subsequências, obtemos

$$V(\xi(t_n)) \leqslant V(\xi(t)) \leqslant V(\xi(s_n)).$$

Fazendo $n \to \infty$, segue da continuidade de V que $V(\xi(t)) = \alpha$ para cada $t \in \mathbb{R}$. Assim, para $r \geqslant 0$ temos

$$\alpha = V(\xi(t + r)) = V(\widetilde{\pi}(r)\xi(t)),$$

logo $V(\xi(t)) = V(\widetilde{\pi}(r)\xi(t))$ para todo $r \geqslant 0$, e das propriedades de V segue que $\xi(t) \in E_k$ para algum $1 \leqslant k \leqslant p$. Da $\widetilde{\pi}$-invariância de E_k, segue que $\xi(t) \in E_k$ para todo $t \in \mathbb{R}$. De (G1) obtemos $k = i$ e, portanto, $\xi(t) \in E_i$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

(ii) Suponha agora $i \neq j$. Novamente, usando as sequências construídas acima obtemos

$$V(E_j) \leqslant V(\xi(t)) \leqslant V(E_i)$$

e, portanto, $V(E_j) \leqslant V(E_i)$. Se $V(E_i) = V(E_j)$ então $V(\xi(t)) = V(E_i)$, e como feito no caso anterior segue que $\xi(t) \in E_k$ para algum $1 \leqslant k \leqslant p$ e para todo $t \in \mathbb{R}$, o que nos dá uma contradição. Portanto, $V(E_j) < V(E_i)$. $\square$

Teorema 3.19. *Se $\widetilde{\pi}$ é um semigrupo impulsivo gradiente então $\widetilde{\pi}$ é um semigrupo impulsivo dinamicamente gradiente.*

Demonstração. Vamos mostrar que valem (G1) e (G2).

(G1) Seja $\xi\colon \mathbb{R} \to X$ uma solução global limitada de $\widetilde{\pi}$ por $x = \xi(0)$. Vamos mostrar primeiramente que $\xi(t) \to E_j$ quando $t \to \infty$, para algum $j \in \{1, \dots, p\}$. De fato, se isso não ocorre, existem uma vizinhança aberta U de $\cup_{i=1}^{p} E_i$ e $t_n \to \infty$ tal que

$$\xi(t_n) \in \Omega \setminus U, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Da compacidade asintótica de $\widetilde{\pi}$, a menos de subsequências, podemos assumir que $\xi(t_n) \to y$. Note que $\xi(t_n) = \widetilde{\pi}(t_n)\xi(0) = \widetilde{\pi}(t_n)x$. Consideramos os seguintes casos:

Caso 1. $y \in \Omega$.

Como $\Omega \setminus U$ é fechado em Ω, temos $y \in \Omega \setminus U$. Neste caso, da Proposição 3.12 **(b)**, segue que $y \in E_j$ para algum $j = 1, \dots, p$, o que nos dá $y \in U$, e temos uma contradição.

Caso 2. $y \in M$.

Neste caso, da Proposição 2.34 temos $y \in \overline{\widetilde{\omega}(x)}$. Assim para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $y_k \in \widetilde{\omega}(x)$ tal que $d(y_k, y) < \frac{1}{k}$. Da Proposição 3.12 **(b)** segue que $y_k \in E_{j_k}$ para algum $j_k \in \{1, \dots, n\}$. Como temos uma quantidade finita de índices, um deles deve se repetir infinitas vezes, isto é, $j_k = j$ ao longo de uma subsequência. Fazendo $k \to \infty$ ao longo dessa subsequência obtemos $y \in \overline{E_j}$. Assim $y \in \overline{E_j} \cap M$ e, da condição (Z), existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\xi(t_{n_0}) \in U$, e também obtemos uma contradição.

A prova de que $\xi(t) \to E_i$ quado $t \to -\infty$, para algum $i = 1, \dots, p$ é análoga e, portanto, vale (G1).

(G2) Primeiramente note que não existe estrutura homoclínica com um único E_i, pois do Lema 3.18 **(i)** segue que $\xi(t) \in E_i$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Suponha que existem $\{E_{\ell_1}, \dots, E_{\ell_k}, E_{\ell_{k+1}}\}$ com $E_{\ell_{k+1}} = E_{\ell_1}$ e um conjunto de soluções globais limitadas $\{\xi_1, \dots, \xi_k\}$ de $\widetilde{\pi}$ em $\mathcal{A}$ com

$$E_{\ell_i} \overset{t\to-\infty}{\longleftarrow} \xi_i(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} E_{\ell_{i+1}} \quad \text{para } 1 \leqslant i \leqslant k.$$

Obtemos assim

$$V(E_{\ell_1}) = V(E_{\ell_{k+1}}) \leqslant V(E_{\ell_k}) \leqslant V(E_{\ell_{k-1}}) \leqslant \dots \leqslant V(E_{\ell_2}) \leqslant V(E_{\ell_1}).$$

Nessa cadeia, existe $\ell_i \neq \ell_{i+1}$ para algum $i = 1, \dots, k$, e do Lema 3.18 **(ii)** segue que algumas dessas desigualdades é estrita, o que nos dá uma contradição, logo vale (G2) e o resultado está provado. □

3.2.2 Semigrupos impulsivos dinamicamente gradientes são gradientes

Seguindo as ideias da teoria para o caso contínuo conforme (ARAGÃO-COSTA *et al.*, 2011; ARAGÃO-COSTA; CARVALHO, A. N, 2012), para provar que um semigrupo impulsivo dinamicamente gradiente é gradiente, começaremos com o estudo dos *pares atratores-repulsores*. No que segue, a menos que dito o contrário, assumimos que:

> $\tilde{\pi}$ é um semigrupo impulsivo assintoticamente compacto e dissipativo, satisfazendo (H), (T) e (Z).

Definição 3.20 (Atrator Local, Repulsor e Par Atrator-Repulsor)**.** Um conjunto limitado não vazio E de Ω é chamado de **atrator local** para $\tilde{\pi}$ se existe uma vizinhança aberta e limitada U de E em Ω tal que

$$E = \tilde{\omega}(U).$$

Para um atrator local E, seu **repulsor** E^* é o conjunto definido por

$$E^* = \{x \in \mathcal{A} \colon \tilde{\omega}(x) \cap E = \varnothing\}.$$

O par (E, E^*) é chamado de **par atrator-repulsor** para $\tilde{\pi}$.

Temos a seguinte caracterização para um atrator local.

Proposição 3.21. *Um conjunto não vazio e limitado E de Ω é um atrator local para $\tilde{\pi}$ se, e somente se, E é $\tilde{\pi}$-invariante, $\overline{E} \cap \Omega = E$ e existe uma vizinhança aberta e limitada U de E em Ω tal que E $\tilde{\pi}$-atrai U.*

Demonstração. Assuma que E é um atrator local para $\tilde{\pi}$. Como U é limitada, segue da Proposição 2.37 que $E = \tilde{\omega}(U)$ é $\tilde{\pi}$-invariante. Além disso, segue da Proposição 2.34 que

$$\overline{E} \cap \Omega = \overline{\tilde{\omega}(U)} \cap \Omega = \tilde{\omega}(U) = E.$$

Por fim, da Proposição 2.39 sabemos que $E = \tilde{\omega}(U)$ $\tilde{\pi}$-atrai U.

Agora, para a recíproca, mostraremos que $E = \tilde{\omega}(U)$. Se $x \in \tilde{\omega}(U)$ existem $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset U$ e $t_n \to \infty$ tais que $\tilde{\pi}(t_n)x_n \to x$. Como E $\tilde{\pi}$-atrai U, afirmamos que $x \in \overline{E}$. De fato, se $x \notin \overline{E}$ então existem vizinhanças abertas V de x em Ω e W de $\overline{E}$ em X tais que $V \cap W = \varnothing$. Deste modo $W_1 = W \cap \Omega$ é uma vizinhança aberta de $E = \overline{E} \cap \Omega$ em Ω. Como $\tilde{\pi}(t_n)x_n \to x$, existe n_0 tal que para $n \geqslant n_0$ temos $\tilde{\pi}(t_n)x_n \in V$. Como E $\tilde{\pi}$-atrai U, deve existir n_1 tal que para $n \geqslant n_1$ temos $\tilde{\pi}(t_n)x_n \in W_1$, o que nos dá uma contradição. Assim $x \in \overline{E} \cap \Omega = E$, isto é, $\tilde{\omega}(U) \subset E$. Por outro lado, como E é $\tilde{\pi}$-invariante e $E \subset U$ temos $E = \tilde{\omega}(E) \subset \tilde{\omega}(U)$, e o resultado está provado. □

Observação 3.22. Note que o atrator global $\mathcal{A}$ de $\tilde{\pi}$ é também um atrator local para $\tilde{\pi}$.

Antes de mais nada, faremos alguns resultados gerais que nos ajudarão mais adiante.

Lema 3.23. *Sejam X um espaço métrico, W um aberto e V um subconjunto qualquer de X. Então $\overline{V} \cap W \neq \varnothing$ se, e somente se, $V \cap W \neq \varnothing$.*

Demonstração. De fato, seja $x \in \overline{V} \cap W$. Como $x \in W$ e W é aberto, existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset W$. Como $x \in \overline{V}$, existe $y \in V$ tal que $y \in B_r(x)$. Portanto, $y \in V \cap W$ mostrando que $V \cap W \neq \varnothing$.

A outra implicação é trivial, e o resultado está provado. □

Proposição 3.24. *Se $B \subset \Omega$ é $\widetilde{\pi}$-invariante e relativamente compacto em X então $\overline{B} \cap \Omega$ é $\widetilde{\pi}$-invariante.*

Demonstração. Sejam $x \in \overline{B} \cap \Omega$ e $t > 0$. Existe $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ tal que $x_n \to x$ e, da Proposição 2.22, existe $\epsilon_n := \epsilon_n^t \geqslant 0$ com $\epsilon_n \to 0$ tal que $\widetilde{\pi}(t + \epsilon_n)x_n \to \widetilde{\pi}(t)x$. Da $\widetilde{\pi}$-invariância de B segue que $\widetilde{\pi}(t+\epsilon_n)x_n \in B$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e, portanto, $\widetilde{\pi}(t)x \in \overline{B} \cap \Omega$.

Nos resta mostrar a invariância negativa. Sabemos que $B \subset \mathcal{A}$. Como acima, fixados $x \in \overline{B} \cap \Omega$ e $t > 0$, existe $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ com $x_n \to x$. Da $\widetilde{\pi}$-invariância de B, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $y_n \in B$ tal que $x_n = \widetilde{\pi}(t)y_n$. Da compacidade de $\overline{B}$ podemos supor, a menos de subsequências, que $y_n \to y \in \overline{B}$. Separamos a prova em dois casos.

Caso 1. $y \in \Omega$.

Neste caso, $y \in \overline{B} \cap \Omega$ e $y_n \to y$. Da Proposição 2.22, existe $\epsilon_n := \epsilon_n^t \geqslant 0$ com $\epsilon_n \to 0$ tal que $\widetilde{\pi}(t+\epsilon_n)y_n \to \widetilde{\pi}(t)y$. Por outro lado, $\widetilde{\pi}(t+\epsilon_n)y_n = \widetilde{\pi}(\epsilon_n)x_n$, e como $x_n \to x \in \Omega$ e $\epsilon_n \to 0$, segue do Lema 2.18 **(b)** que $\widetilde{\pi}(\epsilon_n)x_n \to x$, e assim $x = \widetilde{\pi}(t)y$ com $y \in \overline{B} \cap \Omega$.

Caso 2. $y \in M$.

Neste caso, $y_n \in B \subset \mathcal{A}$ e $y_n \to y \in M$. A Proposição 2.27 nos dá $s_n = \phi(y_n) \to 0$ e, assim, $z_n := \pi(s_n)y_n \in M$ e $z_n^+ := \widetilde{\pi}(s_n)y_n = I(z_n)$ são tais que

$$z_n \to y \quad \text{e} \quad z_n^+ \to I(y) =: z \in \Omega.$$

Sendo B um conjunto $\widetilde{\pi}$-invariante, segue que $z_n^+ \in B$. Logo $z \in \overline{B}$ e, assim, $z \in \overline{B} \cap \Omega$. Uma vez que $z_n^+ \to z \in \Omega$, da Proposição 2.22, existe $\epsilon_n := \epsilon_n^t \geqslant 0$ com $\epsilon_n \to 0$ tal que

$$\widetilde{\pi}(t+\epsilon_n)z_n^+ \to \widetilde{\pi}(t)z.$$

Por outro lado, $\widetilde{\pi}(t+\epsilon_n)z_n^+ = \widetilde{\pi}(s_n+\epsilon_n)x_n$, e visto que $x_n \to x \in \Omega$ e $s_n + \epsilon_n \to 0$ então do Lema 2.18 **(b)** obtemos $\widetilde{\pi}(s_n+\epsilon_n)x_n \to x$ e, portanto, $x = \widetilde{\pi}(t)z$, e o resultado está completo. □

Com isso, temos as seguintes propriedades:

Proposição 3.25. *Sejam (E, E^*) um par atrator-repulsor para $\widetilde{\pi}$ e U uma vizinhança aberta e limitada de E em Ω tal que $E = \widetilde{\omega}(U)$. Então:*

(a) *$E \subset \mathcal{A}$ é $\widetilde{\pi}$-invariante isolado;*

(b) *$U \cap \overline{E^*} = \varnothing$;*

(c) *E^* é $\widetilde{\pi}$-invariante;*

(d) *$\overline{E^*} \cap \Omega = E^*$.*

Demonstração. **(a)** Já sabemos que E é $\tilde{\pi}$-invariante e $E \subset \mathcal{A}$. Para mostrar que E é $\tilde{\pi}$-invariante isolado vamos considerar F um conjunto $\tilde{\pi}$-invariante com $E \subset F \subset U$. Assim F é limitado e, portanto, $F \subset \mathcal{A}$. Agora, se $x \in F \subset \mathcal{A}$, novamente da $\tilde{\pi}$-invariância de F, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in F$ com $x = \tilde{\pi}(n)x_n$. Assim

$$x \in \tilde{\omega}(F) \subset \tilde{\omega}(U) = E.$$

Logo $F \subset E$, o que mostra que $F = E$.

(b) Se $x \in U$ então $\tilde{\omega}(x) \subset \tilde{\omega}(U) = E$, e assim $x \notin E^*$. Isso mostra que $U \cap E^* = \varnothing$, ou equivalentemente, $E^* \subset \Omega \setminus U$. Como U é aberto em Ω e Ω é aberto em X, temos U aberto em X. Logo $E^* \subset X \setminus U$ e $X \setminus U$ é fechado, portanto, $\overline{E^*} \subset X \setminus U$, ou seja, $U \cap \overline{E^*} = \varnothing$.

(c) Para ver que E^* é $\tilde{\pi}$-invariante, observemos que $\tilde{\omega}(x) = \tilde{\omega}(\tilde{\pi}(t)x)$ para cada $t \geqslant 0$ e $x \in X$. Assim, se $x \in E^*$ então $\tilde{\omega}(\tilde{\pi}(t)x) \cap E = \tilde{\omega}(x) \cap E = \varnothing$. Reciprocamente, se $x \in E^*$ e $t > 0$, uma vez que $E^* \subset \mathcal{A}$, existe $y \in \mathcal{A}$ tal que $x = \tilde{\pi}(t)y$. Mas $\tilde{\omega}(y) \cap E = \tilde{\omega}(\tilde{\pi}(t)y) \cap E = \tilde{\omega}(x) \cap E = \varnothing$, e assim $y \in E^*$, o que conclui a $\tilde{\pi}$-invariância de E^*.

(d) Note que $E^* \subset \overline{E^*} \cap \Omega$. Agora, da Proposição 3.24, sabemos que $\overline{E^*} \cap \Omega$ é $\tilde{\pi}$-invariante, assim dado $x \in \overline{E^*} \cap \Omega$ temos $\tilde{\omega}(x) \subset \overline{E^*} \cap \Omega$, o que nos dá $\tilde{\omega}(x) \cap E = \varnothing$ pelo item **(b)**. Portanto, $x \in E^*$. $\square$

Lema 3.26. *Se E é um atrator local para $\tilde{\pi}$ então $W^u(E) = E$.*

Demonstração. Da Proposição 3.14 temos $E \subset W^u(E)$. Seja U uma vizinhança aberta e limitada de E em Ω com $E = \tilde{\omega}(U)$. Com isso, dado $x \in W^u(E)$ existe ξ solução global de $\tilde{\pi}$ por x com $\xi(s) \to E$ quando $s \to -\infty$. Assim, existe $s_0 \leqslant 0$ tal que $\xi(s) \in U$ para todo $s \leqslant s_0$. Afirmamos que $\xi(s_0) \in E$. De fato, veja que para $t \geqslant 0$ temos $\xi(s_0) = \tilde{\pi}(t)\xi(s_0 - t)$. Como E $\tilde{\pi}$-atrai U e $\xi(s_0 - t) \in U$ para todo $t \geqslant 0$, temos $\xi(s_0) \in \overline{E} \cap \Omega = E$. Assim, da $\tilde{\pi}$-invariância de E, obtemos

$$x = \xi(0) = \tilde{\pi}(-s_0)\xi(s_0) \in E.$$

Portanto, $W^u(E) \subset E$ e a prova está completa. $\square$

Para obter mais algumas propriedades dos pares atratores-repulsores, precisamos de mais alguns resultados técnicos.

Lema 3.27. *Se $x \in \overline{\mathcal{A}} \cap M$ então existe $z \in \mathcal{A}$ com $\phi(z) = \delta$, $\pi(\delta)z = x$ e $\pi(t)z \to x$ quando $t \to \delta^-$ (consequentemente, $\tilde{\pi}(t)z \to x$ quando $t \to \delta^-$), onde $\delta > 0$ é dado pela condição (H).*

Demonstração. Considere $\delta > 0$ da condição (H). Como $x \in \overline{\mathcal{A}}$, existe $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ com $x_n \to x$. Segue da Proposição 2.27 que $s_n = \phi(x_n) \to 0$ e podemos assumir, sem perda de generalidade, que $0 < s_n < \frac{\delta}{8}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $x_n \in \mathcal{A}$, da $\widetilde{\pi}$-invariância de $\mathcal{A}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $z_n \in \mathcal{A}$ com $\widetilde{\pi}(\delta)z_n = x_n$.

Afirmação. $\phi(z_n) = \delta + s_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

De fato, assuma que $\pi(r)z_n \in M$ para algum $r \in (0, \delta + s_n)$. Assim $r_0 := \inf\{r \in (0, \delta+s_n) \colon \pi(r)z_n \in M\} > 0$ e $\widetilde{\pi}(s)z_n = \pi(s)z_n$ para $0 \leqslant s < r_0$. Definimos $y_n := \pi(r_0)z_n \in M$ e $y_n^+ := I(y_n) = \widetilde{\pi}(r_0)z_n \in I(M)$. Da condição (H), obtemos $\phi(y_n^+) \geqslant 2\delta$ e, portanto,

$$\widetilde{\pi}(t)y_n^+ = \pi(t)y_n^+ \text{ para } 0 \leqslant t < 2\delta.$$

Temos dois casos para analisar.

Caso 1. $\delta < r_0 < \delta + s_n$.

Neste caso, $x_n = \widetilde{\pi}(\delta)z_n = \pi(\delta)z_n$ e

$$\pi(r_0 - \delta)x_n = \pi(r_0 - \delta)\pi(\delta)z_n = \pi(r_0)z_n \in M,$$

e de (2.2) obtemos $s_n = \phi(x_n) \leqslant r_0 - \delta < s_n$, o que nos dá uma contradição.

Caso 2. $0 < r_0 \leqslant \delta$.

Neste caso, $\delta - r_0 < \delta$ e assim

$$x_n = \widetilde{\pi}(\delta)z_n = \widetilde{\pi}(\delta - r_0)\widetilde{\pi}(r_0)z_n = \widetilde{\pi}(\delta - r_0)y_n^+ = \pi(\delta - r_0)y_n^+.$$

Como $0 < s_n < \frac{\delta}{8}$, temos $s_n + \delta - r_0 < \frac{\delta}{8} + \delta = \frac{9\delta}{8} < 2\delta$, logo

$$M \ni \pi(s_n)x_n = \pi(s_n)\pi(\delta - r_0)y_n^+ = \pi(s_n + \delta - r_0)y_n^+ \notin M,$$

obtendo uma contradição e, portanto, $\pi(t)z_n \notin M$ para todo $0 \leqslant t < \delta + s_n$.

Uma vez que $\delta < \delta + s_n$, então $\widetilde{\pi}(\delta)z_n = \pi(\delta)z_n$ e assim obtemos

$$\pi(\delta + s_n)z_n = \pi(s_n)\pi(\delta)z_n = \pi(s_n)\widetilde{\pi}(\delta)z_n = \pi(s_n)x_n \in M,$$

o que nos dá $\phi(z_n) = \delta + s_n$ e a prova da afirmação está completa.

Com isso obtemos

$$\widetilde{\pi}(t)z_n = \pi(t)z_n \quad \text{para} \quad t \in [0, \delta + s_n),$$

e da condição (H) sabemos que $\delta + s_n$ é o único tempo de salto de z_n no intervalo $[0, \frac{9\delta}{8}]$.

Como $z_n \in \mathcal{A}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, podemos assumir, passando para subsequências se necessário, que $z_n \to z \in \overline{\mathcal{A}}$. Note que $z \in \Omega$, pois se $z \in M$ seguiria da Proposição 2.27 que $\phi(z_n) \to 0$, mas $\phi(z_n) \to \delta > 0$ e teríamos uma contradição. Portanto, $z \in \mathcal{A}$. Assim, o Teorema 2.21 nos dá $\phi(z) = \delta$ e, assim, $\pi(t)z \notin M$ para $t \in [0, \delta)$. Dado que

$$\pi(\delta + s_n)z_n = \pi(s_n)\pi(\delta)z_n = \pi(s_n)\widetilde{\pi}(\delta)z_n = \pi(s_n)x_n,$$

fazendo $n \to \infty$ obtemos $\pi(\delta)z = x \in M$ e, portanto, $\widetilde{\pi}(\delta)z = I(\pi(\delta)z) = I(x)$.

Veja que $\pi(t)z \to \pi(\delta)z = x$ quando $t \to \delta^-$, e como $\widetilde{\pi}(t)z = \pi(t)z$ para $t \in [0, \delta)$, segue que $\widetilde{\pi}(t)z \to \pi(\delta)z = x$ quando $t \to \delta^-$. $\square$

Proposição 3.28. *Se (E, E^*) é um par atrator-repulsor para $\tilde{\pi}$ e $x \in \overline{\mathcal{A}} \cap M$ então $x \in \overline{E^*} \cap M$ se, e somente se, $I(x) \in E^*$.*

Demonstração. Se $x \in \overline{E^*} \cap M$, existe $x_n \in E^*$ tal que $x_n \to x$. Segue da Proposição 2.27 que $s_n = \phi(x_n) \to 0$ e, assim,

$$\tilde{\pi}(s_n)x_n = I(\pi(s_n)x_n) \to I(x).$$

Como E^* é $\tilde{\pi}$-invariante, segue que $\tilde{\pi}(s_n)x_n \in E^*$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o que nos dá $I(x) \in \overline{E^*}$. Portanto, $I(x) \in \overline{E^*} \cap \Omega = E^*$.

Para a recíproca, veja que do lema acima existe $z \in \mathcal{A}$ tal que $\phi(z) = \delta$, $\pi(\delta)z = x$ e $\pi(t)z \to x$ quando $t \to \delta^-$. Para concluir a prova do resultado basta apenas notar que $\tilde{\pi}(t)z \in E^*$ para $t \in [0, \delta)$, pois $\tilde{\omega}(\tilde{\pi}(t)z) = \tilde{\omega}(I(x))$ e $I(x) \in E^*$. Logo $x \in \overline{E^*}$ e a prova está completa. □

Observação 3.29. Veja que, da demonstração do resultado acima segue que se $x \in \overline{\mathcal{A}} \cap M$ temos $I(x) \in \mathcal{A}$.

Um resultado que nos será útil mais adiante, e está relacionado com a proposição acima, é o seguinte:

Proposição 3.30. *Assuma que E satisfaz a seguinte condição:*

$$\textit{se } z \in \mathcal{A} \textit{ e } \tilde{\pi}(t)z \in E \textit{ para algum } t > 0 \textit{ então } z \in E. \tag{3.3}$$

Se $x \in \overline{\mathcal{A}} \cap M$ então $x \in \overline{E} \cap M$ se, e somente se, $I(x) \in E$.

Demonstração. Análoga à da Proposição 3.28. □

Com a Proposição 3.28, somos capazes de provar mais uma propriedade dos pares atratores-repulsores.

Proposição 3.31. *Se (E, E^*) é um par atrator-repulsor para $\tilde{\pi}$ então $\overline{E} \cap \overline{E^*} = \varnothing$. Mais ainda, E^* é um invariante isolado para $\tilde{\pi}$.*

Demonstração. Primeiramente, notemos que se $x \in \overline{E} \cap \overline{E^*}$ então $x \in M$. De fato, se $x \in \overline{E} \cap \overline{E^*}$ e $x \in \Omega$ então $x \in \overline{E} \cap \Omega = E$ e $x \in \overline{E^*} \cap \Omega = E^*$, o que nos dá $x \in E \cap E^* = \varnothing$, e temos uma contradição.

Agora, se $x \in \overline{E} \cap \overline{E^*}$ e $x \in M$, temos $x \in \overline{E} \cap M$. Segue do Lema 2.32 que $I(x) \in \overline{E} \cap \Omega = E$. Também $x \in \overline{E^*} \cap M$, e a Proposição 3.28 nos dá $I(x) \in E^*$. Portanto, $I(x) \in E \cap \overline{E^*} \subset U \cap \overline{E^*} = \varnothing$, e obtemos também uma contradição. Assim, $\overline{E} \cap E^* = \varnothing$.

Uma vez que $\overline{E}$ e $\overline{E^*}$ são compactos em X e $\overline{E} \cap \overline{E^*} = \varnothing$, existem abertos V_1 e V_2 de X com $V_1 \cap V_2 = \varnothing$ tais que $\overline{E} \subset V_1$ e $\overline{E^*} \subset V_2$. Defina $W = V_2 \cap \Omega$, que é uma vizinhança aberta de E^* em Ω. Seja F um conjunto $\widetilde{\pi}$-invariante tal que $E \subset F \subset W$. Dado $x \in F$ temos $\widetilde{\omega}(x) \subset \overline{F} \subset \overline{W} \subset \overline{V_2}$. Assim,

$$\widetilde{\omega}(x) \cap E \subset \overline{V_2} \cap V_1 = \varnothing,$$

onde a última igualdade segue do Lema 3.23. Logo $x \in E^*$. Portanto, $F = E^*$ e E^* é um $\widetilde{\pi}$-invariante isolado. □

Também com a Proposição 3.28 obtemos o próximo resultado, que é uma adaptação de (RYBAKOWSKI, 1987, Proposition 1.3).

Proposição 3.32. *Sejam (E, E^*) um par atrator-repulsor para $\widetilde{\pi}$ e U uma vizinhança aberta e limitada de E em Ω tal que $E = \widetilde{\omega}(U)$.*

(a) *Se V é uma vizinhança aberta de E em Ω, então existe $t_0 = t_0(V) \geqslant 0$ tal que $\widetilde{\pi}(t)x \in V$ para todo $x \in U$ e $t \geqslant t_0$.*

(b) *Se $K \subset \mathcal{A}$ é tal que $K \cap E = \varnothing$ e $K = \overline{K} \cap \Omega$ então para toda vizinhança aberta W de E^* em Ω existe $t_0 = t_0(W) \geqslant 0$ tal que para todo $x \in \mathcal{A}$ e $t \geqslant t_0$ com $\widetilde{\pi}(t)x \in K$ temos $x \in W$.*

Demonstração. **(a)** Suponha, por absurdo, que essa propriedade não é válida. Então existem uma vizinhança V de E em Ω, uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset U$ e uma sequência $t_n \to \infty$ com $\widetilde{\pi}(t_n)x_n \notin V$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Da compacidade assintótica de $\widetilde{\pi}$, existe $x \in X$ tal que $\widetilde{\pi}(t_n)x_n \to x$. Como V é aberto também em X, $x \notin V$. Além disso, claramente temos $x \in \overline{\widetilde{\omega}(U)} = \overline{E}$. Se $x \in \Omega$ então $x \in \overline{E} \cap \Omega = E$, o que nos dá uma contradição. Se $x \in \overline{E} \cap M$ então, por (Z), existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\widetilde{\pi}(t_{n_0})x_{n_0} \in V$, e também obtemos uma contradição.

(b) Suponha que essa propriedade não é válida. Então existem $K \subset \mathcal{A}$ com $K \cap E = \varnothing$ e $K = \overline{K} \cap \Omega$, vizinhança aberta W de E^* em Ω, uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$, e uma sequência $t_n \to \infty$ tal que $\widetilde{\pi}(t_n)x_n \in K$ e $x_n \notin W$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\mathcal{A}$ é relativamente compacto em X, podemos assumir, sem perda de generalidade, que $x_n \to x \in \overline{\mathcal{A}}$. Como W é também aberto em X obtemos $x \notin W$ e, em particular, $x \notin E^*$. Analisamos os seguintes casos:

Caso 1. $x \in \Omega$.

Neste caso, $x \in \mathcal{A}$ e $x \notin E^*$, logo $\widetilde{\omega}(x) \cap E \neq \varnothing$ e, portanto, $\widetilde{\pi}(s)x \in U$ para algum $s > 0$. Da Proposição 2.22 existe $\epsilon_n := \epsilon_n^s \geqslant 0$ com $\epsilon_n \to 0$ tal que $\widetilde{\pi}(s + \epsilon_n)x_n \to \widetilde{\pi}(s)x$, logo $\widetilde{\pi}(s + \epsilon_n)x_n \in U$ para n suficientemente grande. Como $K \cap E = \varnothing$ e $K = \overline{K} \cap \Omega$, então tomando $V = (X \setminus \overline{K}) \cap \Omega$ segue que V é uma vizinhança de E em Ω, e do item (a), existe $t_0 = t_0(V) \geqslant 0$ tal que $\widetilde{\pi}(t)z \in V$ para todo $t \geqslant t_0$ e $z \in U$ e, em particular, $\widetilde{\pi}(t+s+\epsilon_n)x_n \notin K$ para todo $t \geqslant t_0$ e n suficientemente grande. Se n é grande o suficiente de modo que $t_n - s - \epsilon_n \geqslant t_0$ temos $\widetilde{\pi}(t_n)x_n \notin K$, o que nos dá uma contradição.

Caso 2. $x \in M$.

Se $x \in \overline{E^*}$, como $\mathcal{A} \ni x_n \to x \in \overline{E^*} \cap M$, segue de (Z) que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_0} \in W$, o que nos dá uma contradição. Portanto, $x \notin \overline{E^*}$ e, da Proposição 3.28, devemos ter $I(x) \notin E^*$. Além disso, da Observação 3.29 sabemos que $I(x) \in \mathcal{A}$. Com isso, temos $y := I(x) \in \mathcal{A}$ e $y \notin E^*$. Procedendo como no CASO 1 obtemos uma contradição, e o resultado está provado. $\square$

O próximo resultado nos dá as ferramentas necessárias para afirmar que se (E, E^*) é um par atrator-repulsor para $\tilde{\pi}$, então $\tilde{\pi}$ é um semigrupo impulsivo dinamicamente gradiente com respeito à família $\mathbf{E} = \{E, E^*\}$.

Proposição 3.33. *Seja (E, E^*) um par atrator-repulsor para $\tilde{\pi}$. Se $x \in \mathcal{A} \setminus (E \cup E^*)$ e ξ é uma solução global limitada de $\tilde{\pi}$ por x então*

$$E^* \overset{t\to-\infty}{\longleftarrow} \xi(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} E.$$

Demonstração. Primeiramente notemos que $\tilde{\omega}(x) \cap E \neq \varnothing$, pois caso contrário teríamos $x \in E^*$. Seja U uma vizinhança aberta e limitada de E em Ω tal que $\tilde{\omega}(U) = E$. Afirmamos que existe $t_0 \geqslant 0$ tal que $\tilde{\pi}(t_0)x \in U$. De fato, sejam $t_n \to \infty$ e $y \in \tilde{\omega}(x) \cap E$ tal que $\xi(t_n) \to y$. Como U é aberto em Ω e $\xi(t_n) \to y$ existe n_0 tal que $\xi(t_{n_0}) \in U$, isto é, $\tilde{\pi}(t_{n_0})x \in U$. Disso obtemos $\tilde{\omega}(x) = \tilde{\omega}(\tilde{\pi}(t_0)x) \subset \tilde{\omega}(U) = E$.

Assumindo então que a primeira afirmação não é válida, existem $t_n \to \infty$ e uma vizinhança aberta e limitada $V \subset U$ de E em Ω tal que $\tilde{\pi}(t_n)x = \xi(t_n) \notin V$. Da compacidade assintótica de $\tilde{\pi}$, podemos assumir que $\tilde{\pi}(t_n)x \to z$. Temos $z \in \overline{E}$ e $z \notin V$. Se $z \in \Omega$ obtemos $z \in \overline{E} \cap \Omega = E$, o que nos dá uma contradição. Se $z \in M$ então $z \in \overline{E} \cap M$ e por (Z) existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\xi(t_{n_0}) \in V$, e obtemos uma contradição.

Para a segunda afirmação, procedemos da seguinte maneira: tomando $K = \{x\}$ temos $K \cap E = \varnothing$ e $K = \overline{K} \cap \Omega$, uma vez que $x \notin E$ e $x \in \Omega$. Da Proposição 3.32 **(b)**, dada vizinhança aberta W de E^* em Ω existe $t_0 = t_0(W) \geqslant 0$ tal que se $z \in \mathcal{A}$ e $t \geqslant t_0$ são tais que $\tilde{\pi}(t)z = x$, então $z \in W$. Notando que $\xi(-t) \in \mathcal{A}$ e $\tilde{\pi}(t)\xi(-t) = x$, obtemos $\xi(-t) \in W$ para todo $t \geqslant t_0$, o que completa a prova.

$\square$

Observação 3.34. Segue diretamente da Proposição 3.33, sob suas condições, que para $x \in \mathcal{A} \setminus (E \cup E^*)$ temos

$$\tilde{\omega}(x) \subset E \quad \text{e} \quad \tilde{\alpha}_\xi(x) \subset E^*.$$

Corolário 3.35. *Seja (E, E^*) um par atrator-repulsor para $\tilde{\pi}$. Então $\tilde{\pi}$ é um semigrupo impulsivo dinamicamente gradiente com respeito à família separada de invariantes isolados* $\mathbf{E} = \{E, E^*\}$.

Demonstração. Das Proposições 3.25 e 3.31, segue que $\mathbf{E}$ é uma família separada de invariantes isolados. Para mostrar que vale (G1), considere ξ uma solução global de $\tilde{\pi}$ em

$\mathcal{A}$ por $x = \xi(0)$. Se $x \in E$ ou $x \in E^*$, o resultado segue da $\widetilde{\pi}$-invariância dos conjuntos E e E^*. Agora, se $x \notin E \cup E^*$ o resultado segue da Proposição 3.33.

Vamos mostrar (G2), isto é, mostraremos que $\mathcal{A}$ não possui estruturas homoclínicas relativamente à família separada de invariantes isolados $\mathbf{E} = \{E, E^*\}$. Primeiramente suponha, por absurdo, que exista uma solução global ξ de $\widetilde{\pi}$ em $\mathcal{A}$ tal que

$$\xi(t) \to E \text{ quando } t \to \pm\infty,$$

e que existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\xi(t_0) \notin E$. Definimos $\eta(t) = \xi(t + t_0)$ para $t \in \mathbb{R}$. Claramente η é uma solução global de $\widetilde{\pi}$ por $\eta(0) = \xi(t_0) \notin E$ em $\mathcal{A}$ satisfazendo $\eta(t) \to E$ quando $t \to \pm\infty$. Note que $\eta(0) \notin E^*$, já que $\omega(\eta(0)) \in \overline{E}$. Logo $\eta(0) \notin E \cup E^*$ e, da Proposição 3.33, temos

$$\eta(t) \to E^* \text{ quando } t \to -\infty,$$

e obtemos uma contradição.

Analogamente, provamos que não existe uma solução global ξ de $\widetilde{\pi}$ em $\mathcal{A}$ tal que

$$\xi(t) \to E^* \text{ quando } t \to \pm\infty$$

e que existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\xi(t_0) \notin E^*$.

Finalmente suponha, por absurdo, que exista uma solução global ξ de $\widetilde{\pi}$ em $\mathcal{A}$ tal que

$$E \overset{t\to-\infty}{\longleftarrow} \xi(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} E^*$$

e $\xi(t_0) \notin E \cup E^*$ para algum $t_0 \in \mathbb{R}$. Definindo $\eta(t) = \xi(t + t_0)$ para $t \in \mathbb{R}$, então η é uma solução global de $\widetilde{\pi}$ por $\eta(0) = \xi(t_0) \notin E \cup E^*$ em $\mathcal{A}$ com

$$E \overset{t\to-\infty}{\longleftarrow} \eta(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} E^*.$$

Mas, da Proposição 3.33, temos

$$E^* \overset{t\to-\infty}{\longleftarrow} \eta(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} E,$$

o que nos dá uma contradição. Essas três afirmações mostram que não pode haver uma estrutura homoclínica em $\mathcal{A}$, e a demonstração está completa. □

Lema 3.36. *Sejam (E, E^*) um par atrator-repulsor para $\widetilde{\pi}$ e U uma vizinhança aberta e limitada de E em Ω tal que E $\widetilde{\pi}$-atrai U. Se $x \in \Omega \setminus \mathcal{A}$ e $\widetilde{\gamma}^+(x) \cap U \neq \varnothing$ então*

$$\widetilde{\pi}(t)x \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} E.$$

Demonstração. Tomemos $t_0 \geqslant 0$ tal que $\widetilde{\pi}(t_0)x \in U$. Assim, dada uma vizinhança aberta V de E em Ω, existe $t_1 \geqslant 0$ tal que $\widetilde{\pi}(t + t_0)x \in V$ para todo $t \geqslant t_1$, ou seja, $\widetilde{\pi}(t)x \in V$ para todo $t \geqslant t_0 + t_1$, e a prova está completa. □

O próximo teorema é fundamental para estudar a equivalência entre os semigrupos impulsivos gradientes e os semigrupos impulsivos dinamicamente gradientes.

Teorema 3.37. *Assuma que $t_n \to \infty$ e que $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em X tal que $\widetilde{\pi}(t_n)z_n \to x_0$ para algum $x_0 \in \overline{\mathcal{A}}$.*

(a) *Assuma que $x_0 \in \Omega$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ defina $\xi_n \colon [-t_n, \infty) \to X$ por*

$$\xi_n(t) = \widetilde{\pi}(t + t_n)z_n \qquad \text{para } t \geqslant -t_n.$$

Então existe uma solução global limitada ξ de $\widetilde{\pi}$ por x_0 e uma subsequência $\{\xi_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que para cada $s \in \mathbb{R}$ existe $[0,\infty) \ni \epsilon_k^s \to 0$ de modo que

$$\xi_{n_k}(s + \epsilon_k^s) \to \xi(s).$$

(b) *Assuma que $x_0 \in M$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ defina $\xi_n \colon [-t_n, \infty) \to X$ por*

$$\xi_n(t) = \widetilde{\pi}(t + t_n + \phi(\widetilde{\pi}(t_n)z_n))z_n \qquad \text{para } t \geqslant -t_n - \phi(\widetilde{\pi}(t_n)z_n).$$

Então existe uma solução global limitada ξ de $\widetilde{\pi}$ por $I(x_0)$ e uma subsequência $\{\xi_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que para cada $s \in \mathbb{R}$ existe $[0,\infty) \ni \epsilon_k^s \to 0$ de modo que

$$\xi_{n_k}(s + \epsilon_k^s) \to \xi(s).$$

Demonstração. **(a)** Temos $\xi_n(0) = \widetilde{\pi}(t_n)z_n$ e, da hipótese, $\xi_n(0) \to x_0$. Claramente $x_0 \in \overline{\mathcal{A}} \cap \Omega = \mathcal{A}$. Podemos ainda, sem perda de generalidade, assumir que $t_n \geqslant 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Assim ξ_n está definida em $t = -1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Da compacidade assintótica de $\widetilde{\pi}$, existe $x_{-1} \in \overline{\mathcal{A}}$ e uma subsequência $\{n_k^1\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{N}$ tal que $\xi_{n_k^1}(-1) \to x_{-1}$. Claramente $\xi_{n_k^1}(0) \to x_0$. Além disso, sem perda de generalidade, podemos escolher n_1^1 tal que $t_n \geqslant 2$ para $n \geqslant n_1^1$.

Com esse procedimento, conseguimos definir uma subsequência $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ e uma sequência de pontos $\{x_{-m}\}_{m=0}^{\infty} \subset \overline{\mathcal{A}}$ tal que para cada $m \geqslant 0$ temos

$$\xi_{n_k}(-m) \to x_{-m} \qquad \text{quando } k \to \infty.$$

Note que para cada $m \geqslant 0$ existe $k_0 = k_0(m) \in \mathbb{N}$ tal que $t_{n_k} \geqslant m$ para todo $k \geqslant k_0$. Assim, para $k \geqslant k_0$ e $s \geqslant 0$, obtemos

$$\widetilde{\pi}(s)\xi_{n_k}(-m) = \widetilde{\pi}(s)\widetilde{\pi}(-m + t_{n_k})z_{n_k} = \widetilde{\pi}(-m + s + t_{n_k})z_{n_k} = \xi_{n_k}(-m + s). \tag{3.4}$$

Para simplificar a notação, renomeamos a sequência $\{n_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, se necessário, e assumimos que para cada $m \in \mathbb{N}$ temos

$$(u_n)_{-m} := \xi_n(-m) \to x_{-m} \quad \text{quando } n \to \infty. \tag{3.5}$$

Definimos $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ e separamos a prova em dois casos.

CASO 1. Existe uma sequência estritamente crescente $\{m_j\}_{j\in\mathbb{N}_0}$ de inteiros não negativos, com $m_0 = 0$, tal que $x_{-m_j} \in \Omega$ para todo $j \in \mathbb{N}_0$.

Fixemos $j \in \mathbb{N}_0$. Usando (3.5) e o fato de que $x_{-m_j} \in \Omega$, segue da Proposição 2.22 que existe uma sequência $[0,\infty) \ni \epsilon_n^j \to 0$ tal que

$$\widetilde{\pi}(m_{j+1} - m_j + \epsilon_n^j)(u_n)_{-m_{j+1}} \to \widetilde{\pi}(m_{j+1} - m_j)x_{-m_{j+1}}.$$

Por outro lado, de (3.4) sabemos que $\widetilde{\pi}(m_{j+1} - m_j)(u_n)_{-m_{j+1}} = (u_n)_{-m_j}$, e do Lema 2.18, obtemos

$$\widetilde{\pi}(m_{j+1} - m_j + \epsilon_n^j)(u_n)_{-m_{j+1}} = \widetilde{\pi}(\epsilon_n^j)(u_n)_{-m_j} \to x_{-m_j},$$

e concluímos que $\widetilde{\pi}(m_{j+1} - m_j)x_{-m_{j+1}} = x_{-m_j}$.

Deste modo definimos $\xi \colon \mathbb{R} \to \Omega$ por

$$\xi(t) = \begin{cases} \widetilde{\pi}(t)x_0 & \text{se } \ t \geqslant 0 \\ \widetilde{\pi}(t + m_{j+1})x_{-m_{j+1}} & \text{se } \ t \in [-m_{j+1}, -m_j), \ j \in \mathbb{N}_0. \end{cases}$$

A verificação de que ξ é uma solução global de $\widetilde{\pi}$ por x_0 é análoga ao que foi feito na Proposição 2.17. Para $s \geqslant 0$, da Proposição 2.22, existe uma sequência $[0,\infty) \ni \epsilon_n^s \to 0$ tal que

$$\xi_n(s + \epsilon_n^s) = \widetilde{\pi}(s + \epsilon_n^s + t_n)z_n = \widetilde{\pi}(s + \epsilon_n^s)(u_n)_0 \to \widetilde{\pi}(s)x_0 = \xi(s).$$

Agora, se $s \in [-m_{j+1}, -m_j]$ para algum $j \in \mathbb{N}_0$, então $\xi(s) = \widetilde{\pi}(s + m_{j+1})x_{-m_{j+1}}$, e da Proposição 2.22, existe uma sequência $[0,\infty) \ni \epsilon_n^j \to 0$ tal que

$$\xi_n(s + \epsilon_n^j) = \widetilde{\pi}(s + m_{j+1} + \epsilon_n^j)(u_n)_{-m_{j+1}} \to \widetilde{\pi}(s + m_{j+1})x_{-m_{j+1}} = \xi(s).$$

Finalmente, como $x_{-m_j} \in \mathcal{A}$ para todo $j \in \mathbb{N}_0$, segue da $\widetilde{\pi}$-invariância de $\mathcal{A}$ que $\xi(t) \in \mathcal{A}$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

CASO 2. Existe um inteiro positivo m_1 tal que $x_{-m} \in M$ para todo $m \geqslant m_1$.

Segue da Proposição 2.27, que para $m \geqslant m_1$ temos $s_{n,m} := \phi((u_n)_{-m}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Definindo $w_{n,m} := \pi(s_{n,m})(u_n)_{-m} \in M$, segue da continuidade de π que $w_{n,m} \to x_{-m} \in M$ e, usando a continuidade da função I obtemos

$$I(w_{n,m}) \to I(x_{-m}) \in \Omega.$$

Assim, do Teorema 2.21 obtemos $\phi(I(w_{n,m})) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \phi(I(x_{-m}))$, para cada $m \geqslant m_1$. Seja $\delta > 0$ da condição (H), e tomando $\beta \in (0, \min\{2\delta, 1\})$, como $\phi(I(x_{-m})) \geqslant 2\delta > \beta$, obtemos

$$\phi(I(w_{n,m})) > \beta > s_{n,m} \qquad \text{para } n \text{ suficientemente grande.}$$

Renomeando os índices, assumimos que a desigualdade acima vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para cada $m \geqslant m_1$ e $n \in \mathbb{N}$ (usando o procedimento análogo ao do início da demonstração) definimos

$$(y_n)_{-m} := \xi_n(\beta - m) \quad \text{e} \quad y_{-m} := \widetilde{\pi}(\beta)I(x_{-m}).$$

Como $\beta - s_{n,m} < \phi(I(w_{n,m}))$ obtemos

$$\begin{aligned}(y_n)_{-m} &= \xi_n(\beta - m) = \widetilde{\pi}(\beta)\xi_n(-m) = \widetilde{\pi}(\beta)(x_n)_{-m} = \widetilde{\pi}(\beta - s_{n,m})\widetilde{\pi}(s_{n,m})(x_n)_{-m} \\ &= \widetilde{\pi}(\beta - s_{n,m})I(\pi(s_{n,m})(x_n)_{-m}) = \pi(\beta - s_{n,m})I(w_{n,m}),\end{aligned}$$

o que nos dá

$$(y_n)_{-m} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \pi(\beta)I(x_{-m}) = \widetilde{\pi}(\beta)I(x_{-m}) = y_{-m} \in \Omega.$$

Fixado $m > m_1$, veja que $\widetilde{\pi}(1)(y_n)_{-m} = (y_n)_{-m+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ e, portanto, segue da Proposição 2.22 que existe $[0, \infty) \ni \epsilon_n \to 0$ tal que $\widetilde{\pi}(1+\epsilon_n)(y_n)_{-m} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \widetilde{\pi}(1)y_{-m}$. Por outro lado, se usarmos o Lema 2.18, obtemos

$$\widetilde{\pi}(1 + \epsilon_n)(y_n)_{-m} = \widetilde{\pi}(\epsilon_n)\widetilde{\pi}(1)(y_n)_{-m} = \widetilde{\pi}(\epsilon_n)(y_n)_{-m+1} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} y_{-m+1},$$

e, assim, $\widetilde{\pi}(1)y_{-m} = y_{-m+1}$ para cada $m > m_1$.

Como $\beta < 1 \leqslant m_1$, segue da Proposição 2.22 que existe $[0, \infty) \ni \epsilon_n \to 0$ tal que

$$\widetilde{\pi}(m_1 - \beta + \epsilon_n)(y_n)_{-m_1} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \widetilde{\pi}(m_1 - \beta)y_{-m_1}.$$

Por outro lado, usando o Lema 2.18, obtemos

$$\begin{aligned}\widetilde{\pi}(m_1 - \beta + \epsilon_n)(y_n)_{-m_1} &= \widetilde{\pi}(m_1 - \beta + \epsilon_n)\xi_n(\beta - m_1) \\ &= \xi_n(\epsilon_n) = \widetilde{\pi}(\epsilon_n)\xi_n(0) \to x_0,\end{aligned}$$

ou seja, $\widetilde{\pi}(m_1 - \beta)y_{-m_1} = x_0$. Com essas considerações, podemos definir $\xi\colon \mathbb{R} \to X$ por

$$\xi(t) = \begin{cases} \widetilde{\pi}(t)x_0 & \text{se } \ t \geqslant 0, \\ \widetilde{\pi}(t + m_1 - \beta)y_{-m_1} & \text{se } \ t \in [\beta - m_1, 0), \\ \widetilde{\pi}(t + m - \beta)y_{-m} & \text{se } \ t \in [\beta - m, \beta - m + 1), \ m > m_1. \end{cases}$$

A prova de que ξ é uma solução global limitada de $\widetilde{\pi}$ por x_0 para a qual vale a convergência afirmada é análoga ao caso anterior.

Nos resta provar que ξ é limitada. Veja que $\{x_{-m}\}_{m\geqslant m_1} \subset \overline{\mathcal{A}} \cap M$. Como $\overline{\mathcal{A}} \cap M$ é compacto, da continuidade de I e $\pi(\beta)$ segue que $\pi(\beta)I(\mathcal{A} \cap M)$ é compacto. Assim $K := \{(y_{-m})\}_{m\geqslant m_1}$ é compacto, e a continuidade de π nos dá que $\pi([0, s_0])K$ é compacto, onde $s_0 = \max\{1, m_1 - \beta\}$. Como $\xi((-\infty, 0]) \subset \pi([0, s_0])K$ temos, em particular, $\xi((-\infty, 0])$ limitado. Da Proposição 2.9 e do fato de que $\widetilde{\pi}$ possui um atrator global segue que $\xi([0, \infty))$ é limitado, o que nos dá ξ limitada.

A prova do item **(b)** é análoga, trocando t_n por $t_n + \phi(\widetilde{\pi}(t_n)z_n)$ (lembrando que, da Proposição 2.27, temos $\phi(\widetilde{\pi}(t_n)z_n) \to 0$) e x_0 por $I(x_0)$ (que está em Ω). □

Proposição 3.38. *Sejam (E, E^*) um par atrator-repulsor para $\widetilde{\pi}$ e $x \in \Omega \setminus \mathcal{A}$. Então*

$$\widetilde{\pi}(t)x \xrightarrow{t\to\infty} E \quad \text{ou} \quad \widetilde{\pi}(t)x \xrightarrow{t\to\infty} E^*.$$

Demonstração. Considere $x \in \Omega\setminus\mathcal{A}$. Se $\widetilde{\gamma}^+(x)\cap U \neq \varnothing$, o Lema 3.36 nos diz que $\widetilde{\pi}(t)x \to E$ quando $t \to \infty$.

Por outro lado, se $\widetilde{\gamma}^+(x) \cap U = \varnothing$ afirmamos que $\widetilde{\pi}(t)x \to E^*$ quando $t \to \infty$. Se a afirmação é falsa, existem vizinhança V de E^* em Ω e sequência $t_n \to \infty$ tal que $\widetilde{\pi}(t_n)x \notin V$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Da compacidade assintótica de $\widetilde{\pi}$ existe $x_0 \in \overline{\mathcal{A}}$ tal que, a menos de subsequências, $\widetilde{\pi}(t_n)x \to x_0$. Note que $x_0 \in X \setminus V$. Separamos o restante da prova em dois casos.

Caso 1. $x_0 \in \Omega$.

Considerando $\xi_n \colon [-t_n, \infty) \to X$ definida por $\xi_n(s) = \widetilde{\pi}(s+t_n)x$, segue do Teorema 3.37 que existe uma solução global limitada ξ de $\widetilde{\pi}$ por x_0 e uma subsequência $\{\xi_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que para cada $s \in \mathbb{R}$ existe $[0,\infty) \ni \epsilon_k^s \to 0$ de modo que $\xi_{n_k}(s+\epsilon_k^s) \to \xi(s)$.

Como $x_0 = \xi(0) \in \mathcal{A} \setminus V$, sabemos que $\xi(0) \notin E^*$. Note que para todo $s \geqslant 0$ e $k \in \mathbb{N}$ temos $\xi_{n_k}(s+\epsilon_k^s) \in \widetilde{\gamma}^+(x)$, o que nos dá $\xi_{n_k}(s+\epsilon_k^s) \in \Omega \setminus U$ e fazendo $k \to \infty$ obtemos $\xi(s) \in \Omega \setminus U$ para todo $s \geqslant 0$. Com isso obtemos $\widetilde{\omega}(x_0) \subset \Omega \setminus U$ o que nos dá $\widetilde{\omega}(x_0) \cap E = \varnothing$, e mostra que $x_0 \in E^*$ e temos uma contradição.

Caso 2. $x_0 \in M$.

Neste caso, da Proposição 2.27 segue que $s_n = \phi(\widetilde{\pi}(t_n)x) \to 0$. Tomando $r_n = t_n + s_n$, temos $r_n \to \infty$ e $\widetilde{\pi}(r_n)x \to I(x_0) \in \Omega$. Considerando $\psi_n \colon [-r_n, \infty) \to X$ definida por $\psi_n(s) = \widetilde{\pi}(s+r_n)x$, do Teorema 3.37 existe uma solução global limitada ψ de $\widetilde{\pi}$ por $I(x_0)$ e uma subsequência $\{\psi_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que para cada $s \in \mathbb{R}$ existe $[0,\infty) \ni \beta_k^s \to 0$ de modo que $\psi_{n_k}(s+\beta_k^s) \to \psi(s)$.

Afirmamos que existem uma vizinhança W de E^* em Ω e $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\widetilde{\pi}(r_{n_k} + \beta_k^0)x \notin W$ para todo $k \geqslant k_0$. De fato, se isso não ocorresse, a menos de subsequências, como

$$\widetilde{\pi}(r_{n_k} + \beta_k^0)x = \psi_{n_k}(0+\beta_k^0) \to \psi(0) = I(x_0),$$

teríamos $I(x_0) \in \overline{E^*} \cap \Omega = E^*$. Assim, da Proposição 3.28, obtemos $x_0 \in \overline{E^*} \cap M$. Portanto da condição (Z), existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\widetilde{\pi}(t_{n_0})x \in V$, o que é uma contradição e prova a afirmação. Com isso, em particular, obtemos $I(x_0) \notin W$. Note que para todo $s \geqslant 0$ e $k \in \mathbb{N}$ temos $\psi_{n_k}(s) \in \widetilde{\gamma}^+(x)$, e assim $\psi_{n_k}(s+\beta_k^s) \in \Omega \setminus U$ e, fazendo $k \to \infty$, obtemos $\psi(s) \in \Omega \setminus U$ para todo $s \geqslant 0$ e, como no Caso 1, $\widetilde{\omega}(I(x_0)) \cap E = \varnothing$, ou seja, $I(x_0) \in E^*$, e chegamos a uma contradição. □

3.2.3 Construção da função de Lyapunov para um par atrator-repulsor

Nesta subseção o nosso objetivo é a construção de uma função de Lyapunov com respeito a um par atrator-repulsor (E, E^*) de $\widetilde{\pi}$.

Observação 3.39. Para esse propósito no caso contínuo em (ARAGÃO-COSTA *et al.*, 2011), os autores utilizam o Lema 2.11. Porém no caso impulsivo se usássemos vizinhanças da forma $\mathcal{O}_r(E)$ em Ω para definir o atrator local, então o Lema 2.11 de (ARAGÃO-COSTA *et al.*, 2011) não seria verdadeiro conforme observado no Exemplo 3.3.1 e o conjunto $(1, 2]$.

Para começar, apresentamos alguns resultados técnicos que visam contornar esse problema.

Lema 3.40. *Se E é um atrator local para $\widetilde{\pi}$, dadas vizinhança aberta V de E em Ω e $x \in E$ existe $\eta = \eta_{x,V} > 0$ tal que $\widetilde{\pi}(t)y \in V$ para todo $t \geqslant 0$ e $y \in X$ com $d(x, y) < \eta$.*

Demonstração. Seja U uma vizinhança aberta e limitada de E em Ω tal que $E = \widetilde{\omega}(U)$ e suponha que a propriedade não é válida. Então existem $x \in E$, $x_n \to x$, $t_n \geqslant 0$ e V vizinhança aberta de E em Ω tal que $\widetilde{\pi}(t_n)x_n \notin V$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Uma vez que $x_n \to x$ podemos supor que, para n suficientemente grande, $x_n \in V \cap U$. Se $t_n \to \infty$, da compacidade assintótica de $\widetilde{\pi}$, existe $z \in \overline{\mathcal{A}}$ de modo que

$$\widetilde{\pi}(t_n)x_n \to z.$$

Note que $z \notin V$ e, portanto, $z \notin E$. Se $z \in \Omega$ então $z \in \widetilde{\omega}(U) = E$, e obtemos uma contradição. Se $z \in M$ então $z \in \overline{E} \cap M$ e a condição (Z) nos dá $\widetilde{\pi}(t_{n_0})x_{n_0} \in V$ para algum $n_0 \in \mathbb{N}$, e obtemos também uma contradição.

Se a sequência $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, a menos de subsequências, podemos assumir que $t_n \to s \geqslant 0$. Se s não é tempo de salto de x, isto é, $s \neq \lambda_k(x)$, do Lema 2.23 e da $\widetilde{\pi}$-invariância de E temos

$$\widetilde{\pi}(t_n)x_n \to \widetilde{\pi}(s)x \in E,$$

e obtemos uma contradição. Agora, se s é um tempo de salto de x, isto é, se $s = \lambda_k(x)$, segue do Lema 2.24 que a sequência $\{\widetilde{\pi}(t_n)x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência que converge para um ponto $z \in \overline{\widetilde{\gamma}^+(x)} \subset \overline{E}$. Como $z \notin E$, devemos ter $z \in \overline{E} \cap M$, e a contradição novamente vem da condição (Z) (note que 0 nunca é um tempo de salto, assim $s > 0$). □

Corolário 3.41. *Se E é um atrator local para $\widetilde{\pi}$ então dada vizinhança aberta V de E em Ω existe uma vizinhança aberta W de E em Ω tal que $\widetilde{\gamma}^+(W) \subset V$.*

Demonstração. Basta tomar $W := \bigcup_{x\in E} B_{\eta_{x,V}}(x)$. □

Lema 3.42. *Defina $h \colon X \to \mathbb{R}$ por*

$$h(x) = \sup_{t\geqslant 0} d(\widetilde{\pi}(t)x, \mathcal{A}) \text{ para cada } x \in X.$$

Então

(i) *h está bem definida;*

(ii) *$\mathcal{A} \subset h^{-1}(0) \subset \overline{\mathcal{A}}$;*

(iii) *a aplicação* $[0,\infty) \ni t \mapsto h(\tilde{\pi}(t)x) \in \mathbb{R}$ *é não crescente para cada* $x \in X$*;*

(iv) h *é contínua em* Ω*.*

Demonstração. (i) Seja $x \in X$. Como $\tilde{\pi}(t)x \to \mathcal{A}$ quando $t \to \infty$, existe $t_0 \geqslant 0$ tal que $\tilde{\pi}(t)x \in \mathcal{O}_1(\mathcal{A})$ para todo $t \geqslant 0$. Além disso, segue da Proposição 2.9 que $\{\tilde{\pi}(t)x \colon t \in [0,t_0]\}$ é limitado e, portanto, existe $R > 0$ tal que $\tilde{\pi}(t)x \in \mathcal{O}_R(\mathcal{A})$ para todo $t \in [0,t_0]$. Logo

$$d(\tilde{\pi}(t)x, \mathcal{A}) \leqslant R+1 \qquad \text{para todo } t \geqslant 0,$$

e mostra que $h(x) < \infty$ para cada $x \in X$.

(ii) Se $x \in \mathcal{A}$, da $\tilde{\pi}$-invariância de $\mathcal{A}$ temos $\tilde{\pi}(t)x \in \mathcal{A}$ para todo $t \geqslant 0$, logo $d(\tilde{\pi}(t)x, \mathcal{A}) = 0$ para todo $t \geqslant 0$ o que nos dá $h(x) = 0$ e, portanto, $x \in h^{-1}(0)$.

Agora, se $x \in h^{-1}(0)$ temos $h(x) = 0$, isto é, $\sup\limits_{t\geqslant 0} d(\tilde{\pi}(t)x, \mathcal{A}) = 0$, o que nos dá $d(\tilde{\pi}(t)x, \mathcal{A}) = 0$ para todo $t \geqslant 0$ e, em particular, $d(x, \mathcal{A}) = 0$ e assim $x \in \overline{\mathcal{A}}$.

(iii) Sejam $t_1, t_2 \in [0,\infty)$ com $t_2 \geqslant t_1$. Temos

$$h(\tilde{\pi}(t_2)x) = \sup_{t\geqslant t_2} d(\tilde{\pi}(t)x, \mathcal{A}) \leqslant \sup_{t\geqslant t_1} d(\tilde{\pi}(t)x, \mathcal{A}) = h(\tilde{\pi}(t_1)x).$$

(iv) Sejam $x \in \Omega$ e $x_n \to x$. Como Ω é aberto em X, podemos assumir que $x_n \in \Omega$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Se $x \in \mathcal{A}$ (logo $h(x) = 0$) então do Lema 3.40, dado $\mu > 0$ existe $\eta > 0$ tal que $\tilde{\pi}(t)y \in \mathcal{O}_\mu(\mathcal{A})$ para todo $t \geqslant 0$ e $y \in X$ com $d(y,x) < \eta$. Seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x) < \eta$ para $n \geqslant n_0$. Assim, para todo $t \geqslant 0$ e $n \geqslant n_0$ temos

$$d(\tilde{\pi}(t)x_n, \mathcal{A}) \leqslant \mu,$$

o que mostra que $h(x_n) \leqslant \mu$ para $n \geqslant n_0$, e a continuidade de h em $x \in \mathcal{A}$ está provada.

Se $x \in \Omega \setminus \mathcal{A}$, como $\mathcal{A}$ é precompacto e $\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}} \cap \Omega$, então $h(x) \geqslant d(x, \mathcal{A}) > 0$ e podemos escolher $\mu > 0$ tal que $0 < \mu < d(x, \mathcal{A})$. Logo, podemos escolher uma vizinhança aberta e limitada U de x em Ω tal que $d(y, \mathcal{A}) > \mu$ para todo $y \in U$. Para essa vizinhança, sendo $\mathcal{A}$ o atrator global, existe $t_0 \geqslant 0$ tal que $\tilde{\pi}(t)U \subset \mathcal{O}_\mu(\mathcal{A})$ para todo $t \geqslant t_0$ e, portanto,

$$h(y) = \sup_{t\in[0,t_0]} d(\tilde{\pi}(t)y, \mathcal{A}) \qquad \text{para cada } y \in U. \tag{3.6}$$

De fato, claramente $h(y) \geqslant \sup\limits_{s\in[0,t_0]} d(\tilde{\pi}(s)y, \mathcal{A})$. Agora, se $0 \leqslant t < t_0$ então $d(\tilde{\pi}(t)y, \mathcal{A}) \leqslant \sup\limits_{s\in[0,t_0]} d(\tilde{\pi}(s)y, \mathcal{A})$, e se $t \geqslant t_0$ temos

$$d(\tilde{\pi}(t)y, \mathcal{A}) < \mu < d(y, \mathcal{A}) = d(\tilde{\pi}(0)y, \mathcal{A}) \leqslant \sup_{s\in[0,t_0]} d(\tilde{\pi}(s)y, \mathcal{A}),$$

o que completa a prova de (3.6).

Para completar a prova da continuidade em $\Omega \setminus \mathcal{A}$, separaremos a demonstração em dois casos.

Caso 1. $\phi(x) > t_0$.

Neste caso, do Lema 2.18, podemos assumir que $\phi(x_n) > t_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para n suficientemente grande, temos $x_n \in U$ e, portanto,

$$h(x_n) = \sup_{t\in[0,t_0]} d(\pi(t)x_n, \mathcal{A}) \quad \text{e} \quad h(x) = \sup_{t\in[0,t_0]} d(\pi(t)x, \mathcal{A}).$$

Da continuidade do semigrupo π sabemos que dado $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que para $n \geqslant n_0$ temos $\sup_{t\in[0,t_0]} d(\pi(t)x_n, \pi(t)x) < \epsilon$. Assim, para qualquer $t \in [0, t_0]$ e $n \geqslant n_0$ temos

$$d(\pi(t)x_n, \mathcal{A}) \leqslant d(\pi(t)x_n, \pi(t)x) + d(\pi(t)x, \mathcal{A}) < \epsilon + h(x),$$

e, portanto, $h(x_n) < \epsilon + h(x)$. Analogamente mostramos que $h(x) < \epsilon + h(x_n)$, o que nos dá $|h(x_n) - h(x)| < \epsilon$ se $n \geqslant n_0$, e a continuidade neste caso está provada.

Caso 2. $\phi(x) \leqslant t_0$.

Do que já vimos, é simples ver que para n suficientemente grande temos

$$h(x_n) = \sup_{t\in[0,t_0+\delta]} d(\widetilde{\pi}(t)x_n, \mathcal{A}) \quad \text{e} \quad h(x) = \sup_{t\in[0,t_0+\delta]} d(\widetilde{\pi}(t)x, \mathcal{A}),$$

onde $\delta > 0$ vem da condição (H). Da continuidade de ϕ, podemos assumir que $\phi(x_n) < t_0+\delta$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Denotando

$$g(z) := \sup_{t\in[0,\phi(z))} d(\pi(t)z, \mathcal{A}) \quad \text{para } z \in X,$$

afirmamos que $g(x_n) \to g(x)$. De fato, se isso não ocorre, existe $\epsilon_0 > 0$ tal que $|g(x_n) - g(x)| > \epsilon_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assumimos primeiro que, a menos de subsequências, tenhamos $g(x_n) - g(x) > \epsilon_0$. Da definição de $g(x_n)$ existe $s_n \in [0, \phi(x_n))$ tal que

$$d(\pi(s_n)x_n, \mathcal{A}) > \epsilon_0 + g(x) \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Se, a menos de subsequências, $s_n \to s \in [0, \phi(x))$, temos

$$d(\pi(s)x, \mathcal{A}) \geqslant \epsilon_0 + g(x),$$

e, da definição de $g(x)$, obtemos uma contradição. Agora se, a menos de subsequências, $s_n \to \phi(x)$, temos

$$d(\pi(\phi(x))x, \mathcal{A}) \geqslant \epsilon_0 + g(x).$$

Mas, como $d(\pi(t)x, \mathcal{A}) \leqslant g(x)$ para todo $t \in [0, \phi(x))$, fazendo $t \to \phi(x)^-$, obtemos $d(\pi(\phi(x))x, \mathcal{A}) \leqslant g(x)$, o que também nos dá uma contradição.

Se, a menos de subsequências, tivermos $g(x) - g(x_n) > \epsilon_0$, obtemos

$$g(x) > \epsilon_0 + d(\pi(s)x_n, \mathcal{A}) \quad \text{para todos } n \in \mathbb{N} \text{ e } s \in [0, \phi(x_n)).$$

Assim, se $t \in [0, \phi(x))$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t \in [0, \phi(x_n))$ para todo $n \geqslant n_0$, pois $\phi(x_n) \to \phi(x)$. Obtemos, portanto,

$$g(x) \geqslant \epsilon_0 + d(\pi(t)x, \mathcal{A}) \qquad \text{para } t \in [0, \phi(x)),$$

e tomando o supremo para $t \in [0, \phi(x))$ obtemos $g(x) \geqslant \epsilon_0 + g(x)$, o que nos dá uma contradição e prova a afirmação de que $g(x_n) \to g(x)$.

Seja $\lambda_k(x)$ o último tempo de salto de x no intervalo $[0, t_0]$. Assim existe $\eta > 0$ tal que para n suficientemente grande $\lambda_k(x_n)$ é o último tempo de salto de x_n em $[0, t_0 + \eta]$, pela Proposição 2.25. Assim, da afirmação acima e da Proposição 2.25, segue que

$$g((x_n)_i^+) = \sup_{s \in [0, \phi((x_n)_i^+)} d(\pi(s)(x_n)_i^+, \mathcal{A}) \to g(x_i^+) = \sup_{s \in [0, \phi(x_i^+))} d(\pi(s)x_i^+, \mathcal{A}) = g(x_i^+),$$

para cada $i = 0, \ldots, k-1$. Analogamente ao Caso 1, podemos mostrar também que

$$\begin{aligned} \Delta((x_n)_k^+) &:= \sup_{s \in [0, t_0 + \eta - \lambda_k(x_n)]} d(\pi(s)(x_n)_k^+, \mathcal{A}) \\ &\to \sup_{s \in [0, t_0 + \eta - \lambda_k(x)]} d(\pi(s)x_k^+, \mathcal{A}) =: \Delta(x_k^+), \end{aligned}$$

o que nos dá $h(x_n) \to h(x)$, uma vez que

$$h(x_n) = \max\left\{g((x_n)_0^+),\ \ldots,\ g((x_n)_{k-1}^+),\ \Delta((x_n)_k^+)\right\}$$

e

$$h(x) = \max\left\{g(x_0^+),\ \ldots,\ g(x_{k-1}^+),\ \Delta(x_k^+)\right\},$$

e a demonstração está completa.

□

Queremos provar o seguinte resultado:

Proposição 3.43. *Se (E, E^*) é um par atrator-repulsor para $\widetilde{\pi}$, então existe uma função $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes propriedades:*

(i) $[0, \infty) \ni t \mapsto f(\widetilde{\pi}(t)x) \in \mathbb{R}$ *é não crescente, para cada* $x \in \Omega$*;*

(ii) $f^{-1}(0) = E$ *e* $f^{-1}(1) \cap \mathcal{A} = E^*$*;*

(iii) *dado* $x \in \Omega$*, se* $f(\widetilde{\pi}(t)x) = f(x)$ *para todo* $t \geqslant 0$*, então* $x \in E \cup E^*$*;*

(iv) f *é contínua em* Ω*.*

Tal função é chamada de ***função de Lyapunov do par atrator-repulsor*** (E, E^*).

Antes de provarmos essa proposição faremos alguns resultados preliminares que nos ajudarão na demonstração.

Lema 3.44. *Seja (E, E^*) um par atrator-repulsor para $\widetilde{\pi}$. Com a convenção de que $d(x, \varnothing) = 1$ para cada $x \in X$, consideramos a função de Urysohn canônica $u \colon X \to [0, 1]$ associada ao par de fechados disjuntos $(\overline{E}, \overline{E^*})$ de X, dada por*

$$u(x) := \frac{d(x, \overline{E})}{d(x, \overline{E}) + d(x, \overline{E^*})} = \frac{d(x, E)}{d(x, E) + d(x, E^*)}.$$

Então

(i) *u está bem definida;*

(ii) *u é Lipschitz contínua em X e, portanto, é uniformemente contínua em X;*

(iii) *$u^{-1}(0) = \overline{E}$ e $u^{-1}(1) = \overline{E^*}$.*

Demonstração. (i) Como $\overline{E}$ e $\overline{E^*}$ são fechados e, $\overline{E} \cap \overline{E^*} = \varnothing$, a função u está bem definida.

(ii) Considere $d_0 = d(\overline{E}, \overline{E^*}) > 0$. Então

$$u(x) - u(y) = \frac{d(y, E^*)[d(x, E) - d(y, E)] + d(y, E)[d(y, E^*) - d(x, E^*)]}{[d(x, E) + d(x, E^*)][d(y, E + d(y, E^*))]},$$

e lembrando que $d(x, E) - d(y, E) \leqslant d(x, y)$ e $d_0 \leqslant d(x, E) + d(x, E^*)$ temos

$$u(x) - u(y) \leqslant \frac{1}{d_0} d(x, y).$$

Analogamente obtemos

$$u(y) - u(x) \leqslant \frac{1}{d_0} d(x, y),$$

logo $|u(x) - u(y)| \leqslant \frac{1}{d_0} d(x, y)$, e o resultado segue.

(iii) $x \in \overline{E} \Leftrightarrow d(x, E) = 0 \Leftrightarrow u(x) = 0 \Leftrightarrow x \in u^{-1}(0)$ e, assim, $u^{-1}(0) = \overline{E}$.

Agora, se $E^* \neq \varnothing$ temos

$$x \in \overline{E^*} \Leftrightarrow d(x, E^*) = 0 \Leftrightarrow u(x) = 1 \Leftrightarrow x \in u^{-1}(1),$$

e nesse caso temos $u^{-1}(1) = \overline{E^*}$. Por outro lado, se $E^* = \varnothing$ temos

$$u(x) = \frac{d(x, E)}{d(x, E) + 1} < 1 \text{ para cada } x \in X,$$

logo $u^{-1}(1) = \varnothing = \overline{E^*}$, e o resultado segue. □

Com a ajuda da função u, podemos construir outra função.

Lema 3.45. *Assuma que (E, E^*) é um par atrator-repulsor para $\widetilde{\pi}$ e u a função definida no Lema 3.44. Defina $k \colon \Omega \to [0, 1]$ por*

$$k(x) = \sup_{t \geqslant 0} u(\widetilde{\pi}(t)x) \qquad \textit{para todo } x \in \Omega.$$

Temos

(i) $[0,\infty) \ni t \mapsto k(\widetilde{\pi}(t)x)$ é não crescente para cada $x \in \Omega$;

(ii) $k(E) = \{0\}$ e $k(E^*) = k(\overline{E^*}) = \{1\}$;

(iii) $k^{-1}(0) = E$ e $k^{-1}(1) \cap \mathcal{A} = E^*$;

(iv) se $x \in \mathcal{A}$ e $k(\widetilde{\pi}(t)x) = k(x)$ para todo $t \geqslant 0$, então $x \in E \cup E^*$;

(v) k é contínua em Ω.

Demonstração. (i) Sejam $t_1, t_2 \in [0,\infty)$ com $t_2 \geqslant t_1$. Temos

$$k(\widetilde{\pi}(t_2)x) = \sup_{t \geqslant t_2} u(\widetilde{\pi}(t)x) \leqslant \sup_{t \geqslant t_1} u(\widetilde{\pi}(t)x) = k(\widetilde{\pi}(t_1)x).$$

(ii) Se $x \in E$, então $\widetilde{\pi}(t)x \in E \subset \overline{E} = u^{-1}(0)$ para todo $t \geqslant 0$, ou seja, $u(\widetilde{\pi}(t)x) = 0$ para todo $t \geqslant 0$, que nos leva a $k(x) = \sup\limits_{t \geqslant 0} u(\widetilde{\pi}(t)x) = 0$. Agora, se $x \in \overline{E^*} = u^{-1}(1)$ temos

$$1 = u(x) = u(\widetilde{\pi}(0)x) \leqslant \sup_{t \geqslant 0} u(\widetilde{\pi}(t)x) = k(x) \leqslant 1,$$

o que nos dá $k(x) = 1$.

(iii) Para a primeira parte notamos que $E \subset k^{-1}(0)$, uma vez que $k(E) = \{0\}$. Agora, se $x \in k^{-1}(0)$ então $k(x) = 0$ e, assim, $u(\widetilde{\pi}(t)x) = 0$ para todo $t \geqslant 0$. Em particular, $u(x) = 0$, o que nos dá $x \in u^{-1}(0) = \overline{E}$ e, portanto, $x \in \overline{E} \cap \Omega = E$.

Para a segunda parte, claramente $E^* \subset k^{-1}(1) \cap \mathcal{A}$ uma vez que $k(E^*) = 1$. Agora, se $x \in k^{-1}(1) \cap \mathcal{A}$ então $x \notin E$, pois $k(x) = 1$. Suponha, por absurdo, que $x \notin E^*$, com isso a Proposição 3.33 nos dá $\widetilde{\pi}(t)x \to E$ quando $t \to \infty$ e, em particular, obtemos

$$\widetilde{\omega}(x) \subset E. \tag{3.7}$$

Segue da continuidade de u que $u(\widetilde{\pi}(t)x) \xrightarrow{t\to\infty} 0$. Assim, dado $\mu > 0$ existe $t_0 \geqslant 0$ tal que $u(\widetilde{\pi}(t)x) < \mu$ para todo $t \geqslant t_0$. Note que $0 < u(x) < 1$ (pois $x \notin E \cup E^*$) e, portanto, tomando $\mu < u(x)$ afirmamos que

$$k(x) = \sup_{t \in [0,t_0]} u(\widetilde{\pi}(t)x).$$

De fato, claramente temos $k(x) \geqslant \sup\limits_{s \in [0,t_0]} u(\widetilde{\pi}(s)x)$. Agora, se $0 \leqslant t < t_0$ então $u(\widetilde{\pi}(t)x) \leqslant \sup\limits_{s \in [0,t_0]} u(\widetilde{\pi}(s)x)$, e se $t \geqslant t_0$ temos

$$u(\widetilde{\pi}(t)x) < \mu < u(x) = u(\widetilde{\pi}(0)x) \leqslant \sup_{s \in [0,t_0]} u(\widetilde{\pi}(s)x),$$

o que mostra que $k(x) \leqslant \sup\limits_{t \in [0,t_0]} u(\widetilde{\pi}(t)x)$ e completa a prova da afirmação.

Separamos o restante da prova em dois casos.

Caso 1. $\phi(x) > t_0$.

Neste caso, temos
$$1 = k(x) = \sup_{t\in[0,t_0]} u(\pi(t)x),$$
e da continuidade de u e π existe $t_1 \in [0, t_0]$ tal que $u(\widetilde{\pi}(t_1)x) = u(\pi(t_1)x) = 1$, com isso $\widetilde{\pi}(t_1)x \in u^{-1}(1) = \overline{E^*}$ e, portanto, $\widetilde{\pi}(t_1)x \in \overline{E^*} \cap \Omega = E^*$ o que nos dá
$$\widetilde{\omega}(x) = \widetilde{\omega}(\widetilde{\pi}(t_1)x) \subset E^*,$$
e contradiz (3.7).

Caso 2. $\phi(x) \leqslant t_0$.

Seja $\lambda_k(x)$ o último tempo de salto de x no intervalo $[0, t_0]$. Existe $r \geqslant 0$ tal que $\lambda_k(x)$ é o último tempo de salto de x no intervalo $[0, t_0 + r]$ com $\lambda_k(x) < t_0 + r$ (de fato $r = 0$ se $\lambda_k(x) < t_0$ e $r = \delta$, da condição (H), se $\lambda_k(x) = t_0$). Do que vimos acima, temos
$$k(x) = \sup_{t\in[0,t_0+r]} u(\widetilde{\pi}(t)x).$$
Se $\sup_{t\in[0,\phi(x_i^+))} u(\pi(t)x_i^+) = 1$ para algum $i = 0, \ldots, k-1$, então ou existe $s \in [0, \phi(x_i^+))$ tal que $u(\pi(s)x_i^+) = 1$ ou $u(\pi(\phi(x_i^+)x_i^+)) = 1$. Se $u(\pi(s)x_i^+) = 1$ então $\widetilde{\pi}(s)x_i^+ = \pi(s)x_i^+ \in u^{-1}(1) = \overline{E^*}$ e, portanto,
$$\widetilde{\pi}(s)x_i^+ \in \overline{E^*} \cap \Omega = E^*,$$
o que nos dá $\widetilde{\omega}(x) = \widetilde{\omega}(\widetilde{\pi}(s)x_i^+) \subset \overline{E^*}$, o que contradiz (3.7). Agora, se $u(\pi(\phi(x_i^+)x_i^+)) = 1$ então $\pi(\phi(x_i^+)x_i^+) \in u^{-1}(1) = \overline{E^*}$ e, portanto,
$$\pi(\phi(x_i^+)x_i^+) \in \overline{E^*} \cap M.$$
Da Proposição 3.28, temos $\widetilde{\pi}(\phi(x_i^+)x_i^+) = I(\pi(\phi(x_i^+)x_i^+)) \in E^*$, o que nos dá $\widetilde{\omega}(x) = \widetilde{\omega}(\widetilde{\pi}(\phi(x_i^+)x_i^+)) \subset \overline{E^*}$, o que também contradiz (3.7).

Por fim, se $\sup_{t\in[0,t_0+r-\lambda_k(x)]} u(\pi(t)x_k^+) = 1$, da continuidade de u e π existe $s \in [0, t_0 + r - \lambda_k(x)]$ tal que $u(\widetilde{\pi}(s)x_k^+) = u(\pi(s)x_k^+) = 1$. Analogamente ao Caso 1 obtemos uma contradição, e a prova deste item está completa.

(iv) Suponha, por contradição, que essa propriedade não é válida, ou seja, existe $x \in \mathcal{A} \setminus (E \cup E^*)$ com $k(\widetilde{\pi}(t)x) = k(x)$ para todo $t \geqslant 0$. Então, novamente pela Proposição 3.33 e da continuidade de u, obtemos $u(\widetilde{\pi}(t)x) \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Com isso, segue que
$$k(x) = \lim_{t\to\infty} k(\widetilde{\pi}(t)x) = \lim_{t\to\infty} \sup_{s\geqslant t} u(\widetilde{\pi}(s)x) = 0,$$
o que mostra que $x \in k^{-1}(0) = E$, o que é uma contradição.

(v) Para mostrar a continuidade da função k separamos a prova em três casos:

Caso 1. Continuidade de k em E^*.

Note que para todo $x \in X$ temos
$$0 \leqslant u(x) = u(\widetilde{\pi}(0)x) \leqslant \sup_{t\geqslant 0} u(\widetilde{\pi}(t)x) = k(x) \leqslant 1.$$

Assim, dados $x_0 \in E^*$ e $x \in X$ temos

$$|k(x) - k(x_0)| = |k(x) - 1| = 1 - k(x) \leqslant 1 - u(x),$$

e, portanto, a continuidade de k em x_0 segue diretamente da continuidade de u em x_0.

Caso 2. Continuidade de k em E.

Sejam $x \in X$ e $x_0 \in E$. Como u é uniformemente contínua, dado $\epsilon > 0$ existe $\eta > 0$ tal que se $d(x, E) \leqslant d(x, x_0) < \eta$ então $u(x) < \epsilon$, pois $u(x_0) = 0$, ou seja, $u(\mathcal{O}_\eta(E)) \subset [0, \epsilon)$. Para este η, do Lema 3.40 existe $\eta' = \eta'(x_0, \eta) > 0$ tal que se $d(x, x_0) < \eta'$ temos $\widetilde{\pi}(t)x \in \mathcal{O}_\eta(E)$ para todo $t \geqslant 0$. Assim, se $d(x, x_0) < \eta'$ temos $u(\widetilde{\pi}(t)x) < \epsilon$ para todo $t \geqslant 0$, o que nos dá $k(x) \leqslant \epsilon$. Uma vez que $k(x_0) = 0$, isso prova a continuidade de k em cada $x_0 \in E$.

Caso 3. Continuidade de k em $\Omega \setminus (E \cup E^*)$.

Dado $x_0 \in \Omega \setminus (E \cup E^*)$, das Proposições 3.33 e 3.38 obtemos

$$\widetilde{\pi}(t)x_0 \to E \quad \text{ou} \quad \widetilde{\pi}(t)x_0 \to E^* \quad \text{quando } t \to \infty.$$

Com isso, separamos a demonstração em dois subcasos:

Subcaso 3.1. $\widetilde{\pi}(t)x_0 \to E^*$ quando $t \to \infty$.

Neste subcaso, note primeiramente que $k(x_0) = 1$, pois $\widetilde{\pi}(t)x_0 \to E^*$ e sendo u contínua temos $u(\widetilde{\pi}(t)x_0) \to 1$ quando $t \to \infty$, e uma vez que

$$u(\widetilde{\pi}(t)x_0) \leqslant k(x_0) \leqslant 1,$$

obtemos $k(x_0) = 1$.

Da continuidade de u em E^*, dado $\epsilon > 0$ existe uma vizinhança aberta V de E^* em X tal que $u(V) \subset (1 - \epsilon, 1]$. Como $\widetilde{\pi}(t)x_0 \to E^*$ quando $t \to \infty$, existe $t_0 \geqslant 0$ tal que $\widetilde{\pi}(t)x_0 \in V$ para todo $t \geqslant t_0$. Tomando $t_1 \geqslant t_0$ tal que $t_1 \neq \lambda_k(x_0)$ para todo k, temos $\widetilde{\pi}(t_1)x_0 \in V$. Agora, seja $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega$ uma sequência tal que $x_n \to x_0 \in \Omega$, com isso da Proposição 2.23, obtemos

$$\widetilde{\pi}(t_1)x_n \to \widetilde{\pi}(t_1)x,$$

e assim existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\widetilde{\pi}(t_1)x_n \in V$ para todo $n \geqslant n_0$, e da continuidade de u temos $u(\widetilde{\pi}(t_1)x_n) \to u(\widetilde{\pi}(t_1)x)$ e, portanto, para $n \geqslant n_0$ obtemos

$$u(\widetilde{\pi}(t_1)x_n) \subset (1 - \epsilon, 1],$$

e como $u(\widetilde{\pi}(t_1)x_n) \leqslant k(x_n) \leqslant 1$, obtemos

$$1 - \epsilon \leqslant k(x_n) \leqslant 1 < 1 + \epsilon.$$

Portanto $|k(x_n) - k(x_0)| < \epsilon$ para todo $n \geqslant n_0$, e temos a continuidade de k em x_0.

Subcaso 3.2. $\widetilde{\pi}(t)x_0 \to E$ quando $t \to \infty$.

Como $x_0 \in \Omega \setminus (E \cup E^*)$ então $x_0 \notin \overline{E^*}$, pois $\overline{E^*} \setminus E^* \subset M$, e com isso $u(x_0) > 0$. Uma vez que u é contínua existe $\mu > 0$ tal que se $x \in \mathcal{O}_\mu(E)$ então $u(\mathcal{O}_\mu(E)) \subset [0, \frac{u(x_0)}{2})$ e, do Corolário 3.41, existe uma vizinhança aberta V de E em Ω tal que $\widetilde{\gamma}^+(V) \subset \mathcal{O}_\mu(E)$. Como $\widetilde{\pi}(t)x_0 \to E$ quando $t \to \infty$, existe $t_0 \geqslant 0$ tal que $\widetilde{\pi}(t_0)x_0 \in V$ e podemos supor, sem perda de generalidade, que $t_0 \neq \lambda_k(x_0)$ para todo k. Com isso a Proposição 2.23, nos diz que $\widetilde{\pi}(t_0)$ é contínua em uma vizinhança de x_0 em Ω e, portanto, existe uma vizinhança aberta U_1 de x_0 em Ω tal que $\widetilde{\pi}(t_0)U_1 \subset V$. Então, para todo $x \in U_1$ e $t \geqslant t_0$ temos $\widetilde{\pi}(t_0)x \in V$ o que nos dá $\widetilde{\pi}(t)x \in \mathcal{O}_\mu(E)$ para todo $t \geqslant t_0$ e, assim, $u(\widetilde{\pi}(t)x) < \frac{u(x_0)}{2}$ para todo $t \geqslant t_0$. Novamente, da continuidade de u existe uma vizinhança aberta U_2 de x_0 em Ω tal que $u(\widetilde{\pi}(0)x) = u(x) > \frac{u(x_0)}{2}$ para todo $x \in U_2$. Com todas essas considerações, tomando $U = U_1 \cap U_2$, obtemos para todo $x \in U$,

$$k(x) = \sup_{t \in [0, t_0]} u(\widetilde{\pi}(t)x).$$

Argumentando como no Lema 3.42 **(iv)**, apenas trocando a função distância $d(\cdot, \mathcal{A})$ pela função u (que também é contínua), obtemos a continuidade de k em x_0, o que completa a demonstração da continuidade de k em Ω. □

Com isso, apresentamos a demonstração da Proposição 3.43.

Demonstração da Proposição 3.43. Definimos $f \colon \Omega \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = h(x) + k(x) \quad \text{para cada } x \in \Omega,$$

onde h é dada no Lema 3.42 e k é dada no Lema 3.45.

(i) Segue diretamente dos Lemas 3.42 **(iii)** e 3.45 **(i)**.

(ii) Claramente $f(E) = \{0\}$, logo $E \subset f^{-1}(0)$. Por outro lado, se $x \in f^{-1}(0)$ então $h(x) = k(x) = 0$. Logo, $x \in k^{-1}(0) = E$ e, portanto, $f^{-1}(0) \subset E$. Assim $f^{-1}(0) = E$.

Como $h|_{\mathcal{A}} = 0$, temos $f|_{\mathcal{A}} = k|_{\mathcal{A}}$, e assim

$$f^{-1}(1) \cap \mathcal{A} = k^{-1}(1) \cap \mathcal{A} = E^*.$$

(iii) Se $x \in \Omega$ é tal que $f(\widetilde{\pi}(t)x) = f(x)$ para todo $t \geqslant 0$, utilizando os Lemas 3.42 **(iii)** e 3.45 **(i)** temos

$$0 \leqslant h(x) - h(\widetilde{\pi}(t)x) = k(\widetilde{\pi}(t)x) - k(x) \leqslant 0 \quad \text{para todo } t \geqslant 0.$$

Então $h(\widetilde{\pi}(t)x) = h(x)$ e $k(\widetilde{\pi}(t)x) = k(x)$ para todo $t \geqslant 0$. Sabemos que $\widetilde{\omega}(x) \subset \mathcal{A}$ e também, do Lema 2.32, que existe $y \in \widetilde{\omega}(x)$. Assim, seja $t_n \to \infty$ tal que $\widetilde{\pi}(t_n)x \to y$. Da continuidade de h em Ω obtemos

$$h(x) = h(\widetilde{\pi}(t_n)x) \to h(y) = 0 \text{ quando } n \to \infty.$$

Portanto $h(x) = 0$, o que nos dá $x \in \mathcal{A}$. Uma vez que $x \in \mathcal{A}$ e $k(\widetilde{\pi}(t)x) = k(x)$, obtemos do Lema 3.45 **(iv)** que $x \in E \cup E^*$.

(iv) Claramente f é contínua em Ω, pois h e k o são, o que completa a prova. □

3.2.4 Decomposição de Morse

Para mostrarmos que um semigrupo impulsivo dinamicamente gradiente é gradiente, o conceito fundamental é o de *decomposição de Morse*. Tal conceito, como no caso sem impulso, nos ajudará a construir uma sequência adequada de pares atratores-repulsores e, com isso, exibir uma função de Lyapunov para um semigrupo impulsivo dinamicamente gradiente.

Notemos que se A_1 e A_2 são atratores locais para $\widetilde{\pi}$, com $A_1 \subset A_2$, então utilizando a definição de repulsor obtemos $A_2^* \subset A_1^*$.

Definição 3.46. Dada uma família crescente

$$\varnothing =: A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_p := \mathcal{A}, \tag{3.8}$$

de $p+1$ atratores locais com respectivos repulsores

$$\varnothing = A_p^* \subset A_{p-1}^* \subset \ldots \subset A_1^* \subset A_0^* = \mathcal{A},$$

defina $E_j = A_j \cap A_{j-1}^*$ para cada $j = 1, \ldots, p$. A família ordenada $\mathbf{E} = \{E_1, \ldots, E_p\}$ é chamada de uma **decomposição de Morse** de $\mathcal{A}$.

No que segue, mostraremos que dado um semigrupo impulsivo dinamicamente gradiente $\widetilde{\pi}$ com respeito à $\mathbf{E} = \{E_1, \ldots, E_p\}$ e com atrator global $\mathcal{A}$, existe uma reordenação de $\mathbf{E}$ que a torna uma decomposição de Morse de $\mathcal{A}$. Para isso, precisaremos de vários resultados, e começaremos com um lema.

Lema 3.47. *Seja $E \subset \mathcal{A}$ um conjunto $\widetilde{\pi}$-invariante, com $E = \overline{E} \cap \Omega$. Dadas vizinhança aberta V de E em Ω, $t \geqslant 0$ e $x \in E$, existe $\mu > 0$ tal que $\widetilde{\pi}(s)y \in V$ para todo $s \in [0, t]$ e $y \in B_\mu(x)$.*

Demonstração. Se o resultado é falso, existem $x_n \to x \in E$, $t_0 \geqslant 0$, $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [0, t_0]$ e uma vizinhança aberta V de E em Ω tais que $\widetilde{\pi}(t_n)x_n \notin V$. Como $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, a menos de subsequências, podemos assumir que $t_n \to s \in [0, t_0]$. Se s não é tempo de salto de x, isto é, $s \neq \lambda_k(x)$, usando a Proposição 2.23 e a $\widetilde{\pi}$-invariância de E temos

$$\widetilde{\pi}(t_n)x_n \to \widetilde{\pi}(s)x \in E.$$

Como V é aberto, temos $\widetilde{\pi}(s)x \notin V$, e obtemos uma contradição. Agora, se s é um tempo de salto de x, isto é, se $s = \lambda_k(x)$, segue da Proposição 2.24 que a sequência $\{\widetilde{\pi}(t_n)x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência que converge para um ponto $z \in \overline{\widetilde{\gamma}^+(x)} \subset \overline{E}$. Se $z \in \Omega$, temos $z \in \overline{E} \cap \Omega = E$ e, como $z \notin V$, obtemos uma contradição. Se $z \in M$, a condição (Z) nos dá uma contradição e a prova do resultado está completa. □

Lema 3.48. *Seja $E \subset \mathcal{A}$ um conjunto $\widetilde{\pi}$-invariante, com $E = \overline{E} \cap \Omega$ e satisfazendo (3.3). Então dados $\mu > 0$, $t \geqslant 0$ e $x \in E$, existe $\eta > 0$ tal que para todo $y \in B_\eta(x) \subset \Omega$ com $y \in \mathcal{A}$ e solução global limitada ξ de $\widetilde{\pi}$ por y, temos $d(\xi(s), E) < \mu$ para todo $s \in [-t, 0]$.*

Demonstração. Se o resultado é falso, existem $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ com $x_n \to x \in E$, $t_0 \geqslant 0$, $\{-t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [-t_0, 0]$, soluções globais ξ_n por x_n, e $\mu > 0$ tal que $d(\xi_n(-t_n), E) \geqslant \mu$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\{-t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, a menos de subsequências, podemos assumir que $-t_n \to -s \in [-t_0, 0]$. Também, como $\{\xi(-t_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ podemos assumir, a menos de subsequências, que $z_n := \xi_n(-t_n) \to z \in \overline{\mathcal{A}}$. Note que $d(z, E) \geqslant \mu$.

Caso 1. $z \in \Omega$ e s não é tempo de salto de z.

Neste caso, da Proposição 2.24, temos

$$x_n = \widetilde{\pi}(t_n)z_n \to \widetilde{\pi}(s)z,$$

o que nos dá $\widetilde{\pi}(s)z = x \in E$. Portanto, de (3.3), obtemos $z \in E$, o que nos dá uma contradição.

Caso 2. $z \in \Omega$ e s é tempo de salto de z.

Neste caso, da Proposição 2.24, temos $x_n = \widetilde{\pi}(t_n)z_n \to w$ para algum w que está ou em $\widetilde{\gamma}^+(z)$ ou que está em $\overline{\widetilde{\gamma}^+(z)} \cap M$. Uma vez que $x_n \to x \in E \subset \Omega$, devemos ter $x = w \in \widetilde{\gamma}^+(z)$, isto é, $\widetilde{\pi}(r)z = x$ para algum $r \geqslant 0$. Novamente, de (3.3), obtemos $z \in E$ e temos uma contradição.

Caso 3. $z \in M$.

Neste caso, da Observação 2.41, $r_n := \phi(z_n) \to 0$. Afirmamos que existe $0 < \mu_1 < \mu$ tal que $d(\widetilde{\pi}(r_n)z_n, E) \geqslant \mu_1$ para todo n suficientemente grande. Se esse não fosse o caso, como $\widetilde{\pi}(r_n)z_n \to I(z)$, teríamos $I(z) \in \overline{E} \cap \Omega = E$. Da Proposição 3.30, temos $z \in \overline{E}$, o que nos dá uma contradição. Note então que $d(I(z), E) \geqslant \mu_1$. Defina $w_n := \widetilde{\pi}(r_n)z_n$ e veja que

$$\widetilde{\pi}(r_n)x_n = \widetilde{\pi}(t_n)w_n.$$

Como $x \in \Omega$ temos $\widetilde{\pi}(r_n)x_n \to x$.

Subcaso 3.1. s não é tempo de salto de $I(z)$.

Neste subcaso, temos $\widetilde{\pi}(t_n)w_n \to \widetilde{\pi}(s)I(z)$, assim $\widetilde{\pi}(s)I(z) = x \in E$ e, da Proposição 3.30, obtemos $I(z) \in E$, o que é uma contradição.

Subcaso 3.2. s é tempo de salto de $I(z)$.

Neste subcaso, como no Caso 2 acima, mostramos que x está em $\widetilde{\gamma}^+(I(z))$ e, novamente obtemos $I(z) \in E$, o que é uma contradição.

Com isso, a prova está completa. □

Corolário 3.49. *Seja $E \subset \mathcal{A}$ um conjunto $\widetilde{\pi}$-invariante, com $E = \overline{E} \cap \Omega$ e satisfazendo* (3.3). *Então dados $\mu > 0$ e $t \geqslant 0$, existe uma vizinhança U de E em Ω tal que para todo $y \in U \cap \mathcal{A}$ e solução global limitada ξ de $\widetilde{\pi}$ por y temos $d(\xi(s), E) < \mu$ para todo $s \in [-t, 0]$.*

Demonstração. Basta tomar $U := \bigcup_{x\in E} B_\eta(x)$ onde $\eta = \eta(x) > 0$ é dado no lema acima. □

Lema 3.50. *Seja $\widetilde{\pi}$ um semigrupo impulsivo com atrator global $\mathcal{A}$ e uma família separada de invariantes isolados $\mathbf{E} = \{E_1, \ldots, E_p\}$ em $\mathcal{A}$. Se (G1) está satisfeita então*

$$\mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^{p} W^u(E_i).$$

Demonstração. A Proposição 3.14 nos dá $\bigcup_{i=1}^{n} W^u(E_i) \subset \mathcal{A}$. Agora, se $x \in \mathcal{A}$ então existe uma solução global limitada ξ de $\widetilde{\pi}$ por x e, como vale (G1), existem $i, j \in \{1, \ldots, p\}$ tal que

$$E_i \xleftarrow{t \to -\infty} \xi(t) \xrightarrow{t \to \infty} E_j,$$

o que nos dá, em particular, $x \in W^u(E_i)$ e o resultado está provado. □

Para continuar a decomposição de Morse precisamos do seguinte resultado:

Lema 3.51. *Seja $\widetilde{\pi}$ um semigrupo impulsivo dinamicamente gradiente com respeito à uma família separada de invariantes isolados $\mathbf{E} = \{E_1, \ldots, E_p\}$. Assuma ainda que cada $E_i \in \mathbf{E}$ satisfaz (3.3) para $i = 1, \ldots, p$.*

(a) Para $i = 1, \ldots, p$, se $W^u(E_i) = E_i$ então E_i é um atrator local.

(b) Existe $k \in \{1, \ldots, p\}$ tal que E_k é um atrator local para $\widetilde{\pi}$.

Demonstração. **(a)** Considere $\epsilon_0 > 0$ como em (3.1) e escolha $0 < \delta_0 < \epsilon_0$. Para $i \in \{1, \ldots, p\}$ fixado, escolha uma vizinhança aberta U_i de E_i em Ω com $U_i \subset \mathcal{O}_{\delta_0}(E_i)$.

Afirmação. Dado $x \in E_i$, existe $\eta > 0$ tal que $\widetilde{\gamma}^+(y) \subset U_i$ para todo $y \in B_\eta(x)$.

De fato, se a afirmação é falsa existe $x_n \to x$ com $\widetilde{\pi}(t_n)x_n \in \Omega \setminus U_i$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $x \in E_i$ e $x_n \to x$ podemos assumir, sem perda de generalidade, que $x_n \in U_i$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, existe $s_n \in (0, t_n]$ tal que $\widetilde{\pi}(s)x_n \in U_i$ para $s \in [0, s_n)$ e $\widetilde{\pi}(s_n)x_n \in \Omega \setminus U_i$. Afirmamos que $s_n \to \infty$. Caso contrário, se $t_0 > \sup_{n \in \mathbb{N}} s_n$, segue do Lema 3.47 que $\widetilde{\pi}(s)x_n \in U_i$ para todo $s \in [0, t_0]$ e n suficientemente grande. Como $s_n < t_0$ teríamos $\widetilde{\pi}(s_n)x_n \in U_i$ para n grande, o que é uma contradição. Além disso, a menos de subsequências, $\widetilde{\pi}(s_n)x_n \to x_0$ para algum $x_0 \in \overline{\mathcal{A}}$. Claramente $x_0 \notin U_i$.

Caso 1. $x_0 \in \Omega$.

Neste caso, considerando $\xi_n(t) = \widetilde{\pi}(t + s_n)x_n$ para $t \geqslant -s_n$, segue do Teorema 3.37, a menos de subsequências, que existe uma solução global limitada ξ de $\widetilde{\pi}$ por x_0 tal que para cada $s \in \mathbb{R}$ existe $[0, \infty) \ni \epsilon_n^s \to 0$ de modo que $\xi_n(s + \epsilon_n^s) \to \xi(s)$. Note que $x_0 = \xi(0) \notin E_i$. Além disso, para $s < 0$ e $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, temos $s + \epsilon_n^s < 0$ e $s + \epsilon_n^s + s_n > 0$ e, portanto,

$$\xi_n(s + \epsilon_n^s) = \widetilde{\pi}(s + \epsilon_n^s + s_n)x_n \in U_i.$$

Logo $\xi(s) \in \overline{U_i} \subset \mathcal{O}_{\epsilon_0}(E_i)$ e, de (G1), obtemos $\xi(s) \to E_i$ quando $s \to -\infty$, e mostramos que $x_0 \in W^u(E_i) \setminus E_i$, o que é uma contradição.

Caso 2. $x_0 \in M$.

Considerando $\xi_n(t) = \widetilde{\pi}(t + s_n + \phi(\widetilde{\pi}(s_n)x_n))x_n$ para $t \geqslant -s_n - \phi(\widetilde{\pi}(s_n)x_n)$, segue do Teorema 3.37, a menos de subsequências, que existe uma solução global limitada ξ de $\widetilde{\pi}$ por $I(x_0)$ tal que para cada $s \in \mathbb{R}$ existe $[0, \infty) \ni \epsilon_n^s \to 0$ de modo que $\xi_n(s + \epsilon_n^s) \to \xi(s)$.

Afirmamos que $\xi(0) = I(x_0) \notin E_i$, pois se $I(x_0) \in E_i$ segue da Proposição 3.30 que $x_0 \in \overline{E_i} \cap M$, e a condição (Z) dá uma contradição com o fato de que $\widetilde{\pi}(s_n)x_n \in \Omega \setminus U_i$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Além disso, se $s < 0$, para n suficientemente grande temos $s + \epsilon_n^s + \phi(\widetilde{\pi}(s_n)x_n) < 0$, e assim $\xi_n(s + \epsilon_n^s) \in U_i$. Como fizemos acima, isso prova que $\xi(s) \to E_i$ quando $s \to -\infty$, o que nos dá $I(x_0) \in W^u(E_i) \setminus E_i$. Essa contradição conclui a prova da nossa afirmação.

Agora, defina $U = \bigcup_{x \in E_i} B_\eta(x)$. Do que provamos acima, temos $\widetilde{\gamma}^+(U) \subset U_i$. Mostremos que $\widetilde{\omega}(U) = E_i$. Claramente, uma vez que $E_i \subset U$ e E_i é $\widetilde{\pi}$-invariante, temos $E_i \subset \widetilde{\omega}(E_i) \subset \widetilde{\omega}(U)$ e, portanto, $E_i \subset \widetilde{\omega}(U)$. Para a recíproca, seja $x_0 \in \widetilde{\omega}(U) \setminus E_i$ e considere $t_n \to \infty$ e $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset U$ tal que $\widetilde{\pi}(t_n)x_n \to x_0$. Como $\widetilde{\gamma}^+(U) \subset U_i$, temos $\widetilde{\pi}(s)x_n \in U_i$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $s \geqslant 0$. Do Teorema 3.37, considerando $\xi_n(t) = \widetilde{\pi}(t + t_n)x_n$ para $t \geqslant -t_n$, a menos de subsequências, existe uma solução global limitada ξ de $\widetilde{\pi}$ por x_0 tal que para cada $s \in \mathbb{R}$ existe $[0, \infty) \ni \epsilon_n^s \to 0$ com $\xi_n(s + \epsilon_n^s) \to \xi(s)$. Assim,

$$x_0 = \xi(0) \notin E_i \quad \text{e} \quad \xi(s) \in \overline{U_i} \subset \mathcal{O}_{\epsilon_0}(E_i) \text{ para todo } s \in \mathbb{R}.$$

De (G1) obtemos $\xi(s) \to E_i$ para $s \to \pm\infty$, o que contradiz (G2) e completa a demonstração.

(b) Assuma que nenhum elemento de E é um atrator local, isto é, $E_i \subsetneq W^u(E_i)$ para cada $i = 1, \ldots, p$. Se $x_1 \in W^u(E_1) \setminus E_1$ então existe uma solução global ξ_1 de $\widetilde{\pi}$ por x_1 tal que $\xi_1(t) \to E_1$ quando $t \to -\infty$. De (G1) e (G2), $\xi(t) \to E_i$ quando $t \to \infty$ para algum $i \neq 1$. Para esse i, existem $x_i \in W^u(E_i) \setminus E_i$ e uma solução global ξ_i de $\widetilde{\pi}$ por x_i com $\xi(t) \to E_i$ quando $t \to -\infty$. De (G1) e (G2) existe $j \neq 1$ e $j \neq i$ tal que $\xi_i(t) \to E_j$ quando $t \to \infty$. Em um número finito de passos, chegaremos a uma contradição com (G2), e a prova está completa. □

Os próximos resultados nos garantem, no caso de um semigrupo impulsivo dinamicamente gradiente $\widetilde{\pi}$, que se um conjunto E é um atrator local para a restrição de $\widetilde{\pi}$ em $\mathcal{A}$, então E também é um atrator local para $\widetilde{\pi}$. Aqui vale relembrar a Observação 3.39, pois no caso contínuo o Lema 2.11 de (ARAGÃO-COSTA *et al.*, 2011) é utilizado para o propósito citado acima.

Lema 3.52. *Seja $\widetilde{\pi}$ um semigrupo impulsivo dinamicamente gradiente com respeito à uma família separada de invariantes isolados $\mathbf{E} = \{E_1, \ldots, E_p\}$ e com atrator global $\mathcal{A}$. Suponha que para cada $i \in \{1, \ldots, p\}$ existe uma vizinhança aberta e limitada U de E_i em Ω tal que E_i $\widetilde{\pi}$-atrai $U \cap \mathcal{A}$. Assuma ainda que cada E_i satisfaz (3.3). Então dada uma vizinhança aberta V de E_i em Ω com $V \subset U$ e $x \in E$, existe $\eta = \eta_{x,V} > 0$ tal que $\widetilde{\gamma}^+(y) \subset V$ para todo $y \in B_\eta(x)$.*

Demonstração. Considere $\epsilon_0 > 0$ como em (3.1) e escolha $0 < \delta_0 < \epsilon_0$. Com isso, podemos supor, sem perda de generalidade, que $U \subset \mathcal{O}_{\delta_0}(E_i)$. Se o resultado é falso, existem $x \in E$ e $x_n \to x$ com $\widetilde{\pi}(t_n)x_n \in \Omega \setminus V$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Podemos assumir também, sem perda de generalidade, que $x_n \in V$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, existe $s_n \in (0, t_n]$ tal que $\widetilde{\pi}(s)x_n \in V$ para $s \in [0, s_n)$ e $\widetilde{\pi}(s_n)x_n \in \Omega \setminus V$. Segue do Lema 3.47 que $s_n \to \infty$ e, da compacidade assintótica de $\widetilde{\pi}$ podemos assumir, a menos de subsequências, que $\widetilde{\pi}(s_n)x_n \to x_0 \in \overline{\mathcal{A}}$.

CASO 1. $x_0 \in \Omega$.

Considerando $\xi_n(t) = \widetilde{\pi}(t + s_n)x_n$ para $t \geqslant -s_n$, segue do Teorema 3.37, a menos de subsequências, que existe uma solução global limitada ξ de $\widetilde{\pi}$ por x_0 tal que para cada $s \in \mathbb{R}$ existe $[0, \infty) \ni \epsilon_n^s \to 0$ de modo que $\xi_n(s + \epsilon_n^s) \to \xi(s)$. Nesse caso, sabemos que $x_0 = \xi(0) \notin V$. Além disso, para $s < 0$ e $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, temos $s + \epsilon_n^s < 0$ e $s + \epsilon_n^s + s_n > 0$ e, assim,

$$\xi_n(s + \epsilon_n^s) = \widetilde{\pi}(s + \epsilon_n^s + s_n)x_n \in V \subset U,$$

o que nos dá $\xi(s) \in \overline{U} \subset \mathcal{O}_{\epsilon_0}(E_i)$. Segue de (G1) que $\xi(s) \to E_i$ quando $s \to -\infty$. Logo, existe $s_0 \leqslant 0$ tal que $\xi(s) \in U \cap \mathcal{A}$ para todo $s \leqslant s_0$. Como E_i $\widetilde{\pi}$-atrai $U \cap \mathcal{A}$, existe $t_0 \geqslant 0$ tal que $\widetilde{\pi}(t)\xi(s) \in V$ para todo $t \geqslant t_0$ e $s \leqslant s_0$. Assim, para n suficientemente grande, temos $\widetilde{\pi}(n)\xi(-n) \in V$ o que nos dá

$$V \ni \widetilde{\pi}(n)\xi(-n) = \xi(0) = x_0 \notin V,$$

e temos uma contradição.

CASO 2. $x_0 \in M$.

Considerando $\xi_n(t) = \widetilde{\pi}(t + s_n + \phi(\widetilde{\pi}(s_n)x_n))$ para $t \geqslant -s_n - \phi(\widetilde{\pi}(s_n)x_n)$, segue do Teorema 3.37, a menos de subsequências, que existe uma solução global limitada de $\widetilde{\pi}$ por $I(x_0)$ tal que para cada $s \in \mathbb{R}$, existe $[0, \infty) \ni \epsilon_n^s \to 0$ de modo que $\xi_n(s + \epsilon_n^s) \to \xi(s)$.

Afirmamos que existem uma vizinhança aberta V_1 de E_i em Ω e $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $\widetilde{\pi}(s_n + \phi(\widetilde{\pi}(s_n)x_n) + \epsilon_n^0)x_n \notin V_1$ para todo $n \geqslant n_0$. De fato, se isso não ocorresse, a menos de subsequências, como

$$\widetilde{\pi}(s_n + \phi(\widetilde{\pi}(s_n)x_n) + \epsilon_n^0)x_n = \xi_n(0 + \epsilon_n^0) \to \xi(0) = I(x_0),$$

teríamos $I(x_0) \in \overline{E_i}$, ou seja, $I(x_0) \in \overline{E_i} \cap \Omega = E_i$. Da Proposição 3.30, teríamos $x_0 \in \overline{E_i} \cap M$ e, de (Z), existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\widetilde{\pi}(s_{n_1})x_{n_1} \in V$, o que nos dá uma contradição.

Para a vizinhança V_1, temos $I(x_0) = \xi(0) \notin V_1$. Além disso, para $s < 0$ e $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, temos $s + \phi(\widetilde{\pi}(s_n)x_n) + \epsilon_n^s < 0$ e, assim, $\xi(s + \epsilon_n^s) \in V \subset U$. Como fizemos acima, temos $\xi(s) \in U \cap \mathcal{A}$ para todo $s \leqslant s_0$ e uma vez que E $\widetilde{\pi}$-atrai $U \cap \mathcal{A}$ existe $t_0 \geqslant 0$ tal que $\widetilde{\pi}(t)\xi(s) \in V_1$ para todo $t \geqslant t_0$ e $s \leqslant s_0$. Assim, para n suficientemente grande, temos $\widetilde{\pi}(n)\xi(-n) \in V_1$ o que nos dá

$$V_1 \ni \widetilde{\pi}(n)\xi(-n) = \xi(0) = I(x_0) \notin V_1,$$

e temos uma contradição.

Como $x \in E \subset \Omega$ e Ω é aberto em X, diminuindo $\eta > 0$, se necessário, podemos supor que $B_\eta(x) \subset \Omega$. $\square$

Corolário 3.53. *Nas hipóteses do lema anterior, dada uma vizinhança aberta V de E_i em Ω existe uma vizinhança aberta W de E_i em Ω tal que $\widetilde{\gamma}^+(W) \subset V$.*

Demonstração. Basta tomar $W := \bigcup_{x \in E_i} B_{\eta_{x,V}}(x)$. $\square$

Lema 3.54. *Seja $\widetilde{\pi}$ um semigrupo impulsivo dinamicamente gradiente com respeito à uma família separada de invariantes isolados $\mathbf{E} = \{E_1, \ldots, E_p\}$ e com atrator global $\mathcal{A}$. Considere $\widetilde{\pi}_1$ a restrição de $\widetilde{\pi}$ a $\mathcal{A}$, isto é, $\widetilde{\pi}_1(t) = \widetilde{\pi}(t)|_{\mathcal{A}}$ para cada $t \geqslant 0$. Assuma que E_i é um atrator local de $\widetilde{\pi}_1$ em $\mathcal{A}$ e $K \subset \mathcal{A}$ satisfaz as seguintes condições: $\overline{K}$ é compacto, $K = \overline{K} \cap \Omega$, $K \cap E_i^* = \varnothing$ e se $x_0 \in \overline{K}$ então $I(x_0) \in K$. Então E_i $\widetilde{\pi}$-atrai K e, além disso, E_i é um atrator local de $\widetilde{\pi}$.*

Demonstração. Como E_i é um atrator local de $\widetilde{\pi}_1$ em $\mathcal{A}$, existe uma vizinhança aberta e limitada U de E_i em Ω tal que E_i $\widetilde{\pi}$-atrai $U \cap \mathcal{A}$. Suponha, por absurdo, que E_i não atrai K, então existem uma vizinhança aberta V de E_i em Ω, $t_k \to \infty$ e $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset K$ tais que $\widetilde{\pi}(t_k)x_k \notin V$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Podemos supor que $x_k \to x_0 \in \overline{K}$ e como E_i $\widetilde{\pi}$-atrai $U \cap \mathcal{A}$, segue do Corolário 3.53 que existe uma vizinhança aberta W de E_i em Ω tal que $\widetilde{\gamma}^+(W) \subset V$. Uma vez que $\widetilde{\pi}(t_k)x_k \notin V$ então $\widetilde{\pi}(t)x_k \notin W$ para todo $t \in [0, t_k]$. Separamos o restante da demonstração em dois casos.

Caso 1. $x_0 \in \Omega$.

Dado $t \geqslant 0$, da Proposição 2.22, existe $[0, \infty) \ni \epsilon_k^t \to 0$ tal que $\widetilde{\pi}(t+\epsilon_k^t)x_k \to \widetilde{\pi}(t)x_0$. Para k suficientemente grande, temos $t + \epsilon_k^t < t_k$ o que nos dá $\widetilde{\pi}(t + \epsilon_k^t)x_k \notin W$. Logo $\widetilde{\pi}(t)x_0 \notin W$ para todo $t \geqslant 0$ e, com isso, $\widetilde{\omega}(x_0) \cap E_i = \varnothing$. Uma vez que $x_0 \in \overline{K} \cap \Omega = K$ e $K \subset \mathcal{A}$ então $x_0 \in \mathcal{A}$ e, portanto, $x_0 \in E_i^*$. Isso contradiz a hipótese de que $K \cap E_i^* = \varnothing$.

Caso 2. $x_0 \in M$.

Da Observação 2.41 segue que $s_k := \phi(x_k) \to 0$. Assim $\widetilde{\pi}(s_k)x_k \to I(x_0) \in \Omega$. Novamente, para $t \geqslant 0$ segue da Proposição 2.22 que existe $[0, \infty) \ni \epsilon_k^t \to 0$ tal que $\widetilde{\pi}(t+\epsilon_k^t)\widetilde{\pi}(s_k)x_k \to \widetilde{\pi}(t)I(x_0)$. Para k suficientemente grande, temos $t+\epsilon_k^t+s_k < t_k$, o que nos dá $\widetilde{\pi}(t)I(x_0) \notin W$ para todo $t \geqslant 0$ e, com isso, $\widetilde{\omega}(I(x_0)) \cap E = \varnothing$. Como $x_0 \in \overline{K} \cap M$, segue da hipótese que $I(x_0) \in K$ e, como anteriormente, obtemos $I(x_0) \in E_i^* \cap K$, o que é uma contradição. Com isso concluímos a prova de que E_i $\widetilde{\pi}$-atrai K.

Nos resta mostrar que E_i é um atrator local de $\widetilde{\pi}$. Como E_i é um atrator local de $\widetilde{\pi}_1$, existe uma vizinhança aberta U de E_i em Ω tal que E_i $\widetilde{\pi}$-atrai $U \cap \mathcal{A}$. Tomando uma vizinhança aberta V de E_i em Ω com $V \subset U$, do Corolário 3.53 existe uma vizinhança aberta W de E_i em Ω tal que $\widetilde{\gamma}^+(W) \subset V$. Afirmamos que E $\widetilde{\pi}$-atrai W. De fato, definindo $K_1 := \widetilde{\omega}(W)$ então $K_1 \subset \mathcal{A}$ é tal que $\overline{K_1}$ é compacto, $\overline{K_1} \cap \Omega = K_1$ e, do Lema 2.32, se

$x_0 \in \overline{K_1} \cap M$ então $I(x_0) \in K_1$. Portanto, do que provamos acima, E_i $\tilde{\pi}$-atrai K_1. Note que K_1 é $\tilde{\pi}$-invariante, e como E_i $\tilde{\pi}$-atrai K_1 obtemos $K_1 \subset \overline{E_i}$ e, assim, $K_1 \subset \overline{E_i} \cap \Omega = E_i$. Agora, uma vez que K_1 $\tilde{\pi}$-atrai W e $K_1 \subset E_i$, segue que E_i $\tilde{\pi}$-atrai W, o que completa a prova deste lema. $\square$

Construção de uma sequência crescente de atratores locais

Seguindo as ideias de (ARAGÃO-COSTA *et al.*, 2011, 2013) para o caso contínuo, apresentaremos um método para reordenar $\mathbf{E} = \{E_1, \dots, E_p\}$ e construir uma sequência de atratores locais como em (3.8) de modo que $\mathbf{E}$ seja uma decomposição de Morse de $\mathcal{A}$. Isso será feito em alguns passos que resultarão no Teorema 3.60.

Seja $\tilde{\pi}$ um semigrupo impulsivo dinamicamente gradiente com respeito a uma família separada de invariantes isolados $\mathbf{E} = \{E_1, \dots, E_p\}$ e com atrator global $\mathcal{A}$. Usando o Lema 3.51, podemos reordenar os índices, se necessário, para que E_1 seja um atrator local para $\tilde{\pi}$, com repulsor associado $E_1^* = \{x \in \mathcal{A} \colon \tilde{\omega}(x) \cap E_1 = \varnothing\}$.

Afirmação 1. $E_j \subset E_1^*$ para $j = 2, \dots, p$.

De fato, fixado $j = 2, \dots, p$, considere $x \in E_j$. Como cada E_j é $\tilde{\pi}$-invariante temos $\tilde{\pi}(t)x \in E_j$ para todo $t \geqslant 0$. Isso nos dá $\tilde{\omega}(x) \subset E_j$ e, portanto,

$$\tilde{\omega}(x) \cap E_1 \subset E_j \cap E_1 = \varnothing,$$

ou seja, $x \in E_1^*$ e a afirmação está provada.

Denotemos por $\tilde{\pi}_1$ a restrição de $\tilde{\pi}$ ao conjunto $\tilde{\pi}$-invariante E_1^*, isto é,

$$\tilde{\pi}_1(t) = \tilde{\pi}(t)|_{E_1^*} \colon E_1^* \to E_1^*,$$

para cada $t \geqslant 0$.

Afirmação 2. $\tilde{\pi}_1$ é um semigrupo impulsivo dinamicamente gradiente em E_1^* com respeito à família separada de invariantes isolados $\mathbf{E}_2 = \{E_2, \dots, E_p\}$, com atrator global E_1^*.

Com efeito, seja ξ uma solução global de $\tilde{\pi}_1$ em E_1^*. Então ξ é uma solução global de $\tilde{\pi}$ em $\mathcal{A}$, e da Afirmação 1 temos $E_j \subset E_1^*$ para $j = 2, \dots, p$, e sendo $\tilde{\pi}$ dinamicamente gradiente existem $i, k \in \{2, \dots, p\}$ tais que

$$E_i \xleftarrow{t \to -\infty} \xi(t) \xrightarrow{t \to \infty} E_k,$$

e, portanto, (G1) está satisfeita. Agora, se existisse uma estrutura homoclínica em E_1^* para os conjuntos $\{E_2, \dots, E_p\}$, então teríamos uma estrutura homoclínica em $\mathcal{A}$, mas isso não é possível, pois $\tilde{\pi}$ é dinamicamente gradiente e, portanto, (G2) está satisfeita e a afirmação está provada.

Aplicando o Lema 3.51 para $\tilde{\pi}_1$, e reordenando se necessário, podemos assumir que E_2 é um atrator local para $\tilde{\pi}_1$ em E_1^*. Definindo $E_{1,0}^* := E_1^*$, e consideramos $E_{2,1}^*$ o repulsor associado à E_2 para o semigrupo impulsivo $\tilde{\pi}_1$ em $E_{1,0}^*$, isto é,

$$E_{2,1}^* = \{x \in E_{1,0}^* \colon \tilde{\omega}(x) \cap E_2 = \varnothing\}.$$

Como na AFIRMAÇÃO 1, $E_j \subset E^*_{2,1}$ para $j = 3, \dots, p$, e como na AFIRMAÇÃO 2, a restrição $\widetilde{\pi}_2$ de $\widetilde{\pi}_1$ ao conjunto invariante $E^*_{2,1}$ é um semigrupo impulsivo dinamicamente gradiente com respeito à família separada de invariantes isolados $\mathbf{E}_3 = \{E_3, \dots, E_p\}$, e algum deles é um atrator local para $\widetilde{\pi}_2$. Reordenando, podemos supor que E_3 é um atrator local para $\widetilde{\pi}_2$, com repulsor associado $E^*_{3,2} = \{x \in E^*_{2,1} : \widetilde{\omega}(x) \cap E_3 = \varnothing\}$.

Continuando com esse procedimento até que se esgotem todos os elementos de $\mathbf{E}$, obtemos uma reordenação de $\mathbf{E} = \{E_1, \dots, E_p\}$ tal que E_j é um atrator local para $\widetilde{\pi}_{j-1}$, sendo $\widetilde{\pi}_j$ a restrição de $\widetilde{\pi}_{j-1}$ ao invariante $E^*_{j,j-1}$ com $\widetilde{\pi}_0 := \widetilde{\pi}$ e $E^*_{0,-1} := \mathcal{A}$.

AFIRMAÇÃO 3. Com essa construção, se $\xi \colon \mathbb{R} \to \mathcal{A}$ é uma solução global de $\widetilde{\pi}$ que satisfaz

$$E_i \overset{t\to-\infty}{\longleftarrow} \xi(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} E_k, \tag{3.9}$$

então $i \geqslant k$.

De fato, note primeiramente que se (E, E^*) é um par atrator-repulsor para $\widetilde{\pi}$, então para toda solução global $\psi \colon \mathbb{R} \to \mathcal{A}$ com $\psi(0) \in E^*$, tem-se $\psi(t) \in E^*$ para todo $t \in \mathbb{R}$, pois para todo $t \in \mathbb{R}$ vale $\widetilde{\omega}(\psi(0)) = \widetilde{\omega}(\psi(t))$. Veremos agora que $\xi(0) \in E^*_{k-1,k-2}$ para $k = 1, \dots, p$. Se $k = 1$, então claramente $\xi(0) \in E^*_{0,-1} = \mathcal{A}$ e se $k \neq 1$, como $\xi(t) \to E_k$ quando $t \to \infty$ então $\widetilde{\omega}(\xi(0)) \subset E_k$, o que nos dá

$$\widetilde{\omega}(\xi(0)) \cap E_{k-j} = \varnothing \quad \text{para} \quad j = 1, \dots, k-1. \tag{3.10}$$

Uma vez que $\xi(0) \in \mathcal{A}$ e $\widetilde{\omega}(\xi(0)) \cap E_1 = \varnothing$, temos $\xi(0) \in E^*_{1,0}$. Analogamente, usando (3.10) e o fato de que $\xi(0) \in E^*_{1,0}$, obtemos $\xi(0) \in E^*_{2,1}$. Podemos continuar com esse processo até $j = 1$ e, usando (3.10) e os passos anteriores, obtemos $\xi(0) \in E^*_{k-1,k-2}$.

Isso nos dá $\xi(t) \in E^*_{k-1,k-2}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Da AFIRMAÇÃO 1, temos $E_i \subset E^*_{k-1,k-2}$ para $i = k, \dots, p$ e uma vez que $\xi(t) \to E_i$ quando $t \to -\infty$ e $\xi(t) \in E^*_{k-1,k-2}$ para todo $t \in \mathbb{R}$, então $E_i = E_j$ para algum $j = k, \dots, p$, o que nos dá $i \geqslant k$ e a AFIRMAÇÃO 3 está provada.

Podemos agora, depois dessa reordenação, construir uma sequência de $p+1$ atratores locais para $\widetilde{\pi}$ como em (3.8) da seguinte maneira: defina $A_0 = \varnothing$, $A_1 = E_1$ e para $j = 2, \dots, p$, definimos

$$A_j = A_{j-1} \cup W^u(E_j) = \bigcup_{i=1}^{j} W^u(E_i). \tag{3.11}$$

Segue do Lema 3.50 que

$$\varnothing = A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_p = \bigcup_{i=1}^{p} W^u(E_i) = \mathcal{A}.$$

Temos como objetivo mostrar que esses conjuntos são atratores locais para $\widetilde{\pi}$ e que eles realmente constituem uma decomposição de Morse de $\mathcal{A}$. No que segue, a menos que dito o contrário, assumimos que:

$\tilde{\pi}$ é um semigrupo impulsivo dinamicamente gradiente com respeito à família separada de invariantes isolados $\mathbf{E} = \{E_1, \dots, E_p\}$, reordenados como acima de modo a satisfazer (3.9), com atrator global $\mathcal{A}$ e tal que cada $E_i \in \mathbf{E}$ satisfaz (3.3).

Lema 3.55. *Assuma que $x_k \to x$ em $\mathcal{A}$, e que existem soluções globais ξ_k de $\tilde{\pi}$ por x_k em $\mathcal{A}$ para cada $k \in \mathbb{N}$, e $1 \leqslant j < i \leqslant p$, tais que*

$$E_i \overset{t\to-\infty}{\longleftarrow} \xi_k(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} E_j \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Então existem $1 \leqslant p_0 \leqslant p$, soluções globais $\zeta_1, \dots, \zeta_{p_0}$ de $\tilde{\pi}$ em $\mathcal{A}$, e $E_{\ell_1}, \dots, E_{\ell_{p_0+1}} \in \mathbf{E}$ com $E_{\ell_1} = E_i$, $E_{\ell_{p_0+1}} = E_j$, $\ell_i > \ell_{i+1}$ para cada $i = 1, \dots, p_0$, tais que $\zeta_{i_0}(0) = x$ para algum $1 \leqslant i_0 \leqslant p_0$ e

$$E_{\ell_r} \overset{t\to-\infty}{\longleftarrow} \zeta_r(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} E_{\ell_{r+1}} \quad \text{para } r = 1, \dots, p_0.$$

Demonstração. Para $k \in \mathbb{N}$ e $t \geqslant -k$, temos $\xi_k(t) = \tilde{\pi}(t+k)\xi_k(-k)$. Como $x \in \Omega$, segue do Teorema 3.37, que existem uma solução global η_1 de $\tilde{\pi}$ em $\mathcal{A}$ por x e uma subsequência de $\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ (que denotamos a mesma, por simplicidade) tal que para cada $s \in \mathbb{R}$ existe $[0,\infty) \ni \epsilon_k^s \to 0$ de modo que $\xi_k(s+\epsilon_k^s) \to \eta_1(s)$. Como $\tilde{\pi}$ é dinamicamente gradiente com respeito à $\mathbf{E}$, existem $a, b \in \{1, \dots, p\}$ tais que

$$E_a \overset{t\to-\infty}{\longleftarrow} \eta_1(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} E_b.$$

De (3.9), temos $a \geqslant b$. Assuma que $a \neq i$ e fixemos $\delta_0 < \epsilon_0$, sendo ϵ_0 dado em (3.1).

Como $\eta_1(t) \overset{t\to-\infty}{\longrightarrow} E_a$ e $\overline{E_a}$ é compacto em X, existem $x_0 \in \overline{E_a}$ e uma sequência estritamente crescente $\{t_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ com $t_m \to \infty$ e $t_{m+1} - t_m > m$, para cada $m \in \mathbb{N}$, tal que $\eta_1(-t_m) \to x_0$. Como $\xi_k(t+\epsilon_k^t) \to \eta_1(t)$ para cada $t \in \mathbb{R}$, podemos obter para cada $m \in \mathbb{N}$ um número natural $k_m \in \mathbb{N}$ tal que $\epsilon_m := \epsilon_{k_m}^{-t_m} < \frac{1}{m}$ e $\xi_{k_m}(-t_m + \epsilon_m) \to x_0$.

Por hipótese, $a \neq i$ e $\xi_{k_m}(t) \overset{t\to-\infty}{\longrightarrow} E_i$. Assim, para cada $m \in \mathbb{N}$, existe $\tau_m \geqslant 0$ tal que

$$d(\xi_{k_m}(-t_m + \epsilon_m - \tau_m), E_a) \geqslant \delta_0 \;\text{ e }\; d(\xi_{k_m}(-t_m + \epsilon_m - t), E_a) < \delta_0 \;\text{ para todo } t \in [0, \tau_m).$$

Afirmamos que $\tau_m \to \infty$. Se esse não fosse o caso, do Corolário 3.49, para $\delta_0 > 0$ e $t_0 > \sup_{m\in\mathbb{N}} \tau_m$, existiria uma vizinhança aberta U de E_a em Ω tal que para todo $z \in U \cap \mathcal{A}$, $s \in [-t_0, 0]$ e solução global limitada η de $\tilde{\pi}$ por z teríamos $d(\eta(s), E_a) < \delta_0$. Separamos a prova dessa afirmação em dois casos.

Caso 1. $x_0 \in \Omega$.

Neste caso, como $x_0 \in \overline{E_a} \cap \Omega = E_a$, U é uma vizinhança aberta de E_a em Ω e $\xi_{k_m}(-t_m + \epsilon_m) \to x_0$, teríamos $\xi_{k_m}(-t_m + \epsilon_m) \in U$ para m suficientemente grande. Assim, do que vimos acima, deveríamos ter $\xi_{k_m}(-t_m + \epsilon_m - \tau_m) \in \mathcal{O}_{\delta_0}(E_a)$, o que nos dá uma contradição.

Caso 2. $x_0 \in M$.

Neste caso, como $x_0 \in \overline{E_a} \cap M$ e $\xi_{k_m}(-t_m+\epsilon_m) \to x_0$, do Lema 3.3, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\xi_{k_{m_0}}(-t_{m_0}+\epsilon_{m_0}) \in U$. Assim, do que vimos acima, teríamos $\xi_{k_{m_0}}(-t_{m_0}+\epsilon_{m_0}-\tau_{m_0}) \in \mathcal{O}_{\delta_0}(E_a)$, o que também nos dá uma contradição. Com isso, completamos a prova de que $\tau_m \to \infty$.

Como $\{\xi_{k_m}(-t_m+\epsilon_m-\tau_m)\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ podemos supor, a menos de subsequências, que $\xi_{k_m}(-t_m+\epsilon_m-\tau_m) \to w \in \overline{\mathcal{A}}$. Note que $w \notin \overline{E_a}$. Separamos o restante da prova nos seguintes casos:

Caso $w \in \Omega$.

Neste caso, para $s \geqslant -t_m-\epsilon_m$, definimos

$$\psi_m(s) = \xi_{k_m}(s-t_m+\epsilon_m-\tau_m) = \widetilde{\pi}(s+t_m+\epsilon_m)\xi_{k_m}(-2t_m-\tau_m).$$

Do Teorema 3.37, existem η_2 solução global de $\widetilde{\pi}$ por w e uma subsequência de $\{\psi_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ (que denotamos a mesma) tal que para cada $s \in \mathbb{R}$ existe $[0,\infty) \ni \beta_m^s \to 0$ de modo que $\psi_m(s+\beta_m^s) \to \eta_2(s)$.

Agora, para $t > 0$ temos $0 \leqslant \tau_m - t - \beta_m^t < \tau_m$ para m suficientemente grande. Logo,

$$d(\psi_m(t+\beta_m^t), E_a) = d(\xi_{k_m}(-t_m+\epsilon_m-(\tau_m-t-\beta_m^t)), E_a) < \delta_0,$$

e, assim, $d(\eta_2(t), E_a) \leqslant \delta_0$ para todo $t > 0$. Portanto, $\eta_2(t) \to E_a$ quando $t \to \infty$ e, de (G1), (G2) e (3.9) existe $a_1 > a$ tal que $\eta_2(t) \to E_{a_1}$ quando $t \to -\infty$. Portanto,

$$E_{a_1} \overset{t\to-\infty}{\longleftarrow} \eta_2(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} E_a \overset{t\to-\infty}{\longleftarrow} \eta_1(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} E_b, \tag{3.12}$$

com $a_1 > a > b$.

Caso $w \in M$.

Neste caso, definindo $r_m := \phi(\xi_{k_m}(-t_m+\epsilon_m-\tau_m))$, sabemos da Proposição 2.27 que $r_m \to 0$ quando $m \to \infty$. Para $s \geqslant -t_m-\epsilon_m-r_m$, definimos

$$\psi_m(s) = \xi_{k_m}(s-t_m+\epsilon_{k_m}-\tau_m+r_m) = \widetilde{\pi}(s+t_m+\epsilon_m+r_m)\xi_{k_m}(-2t_m-\tau_m).$$

Do Teorema 3.37, existem η_2 solução global de $\widetilde{\pi}$ por $I(w)$ e subsequência de $\{\psi_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ (que denotamos a mesma) tal que para cada $s \in \mathbb{R}$ existe $[0,\infty) \ni \beta_m^s \to 0$ de modo que $\psi_m(s+\beta_m^s) \to \eta_2(s)$. Afirmamos que existe $\mu > 0$ tal que para m suficientemente grande, temos

$$d(\psi_m(\beta_m^0), E_a) \geqslant \mu.$$

Se isso não ocorresse, a menos de subsequências, teríamos $\psi_m(\beta_m^0) \to z$ para algum $z \in \overline{E_a}$. Veja, pelo Lema 2.18, que

$$\psi_m(\beta_m^0) = \widetilde{\pi}(\beta_m^0)\widetilde{\pi}(r_m)\xi_{k_m}(-t_m+\epsilon_m-\tau_m) \to I(w),$$

uma vez que $\widetilde{\pi}(r_m)\xi_{k_m}(t_m+\epsilon_m-\tau_m) \to I(w) \in \Omega$ e $\beta_m^0 \to 0$. Assim, obtemos $I(w) = z \in \overline{E_a}$, o que nos dá, por hipótese, $w \in \overline{E_a}$. Obtemos assim uma contradição e a existência de $\mu > 0$ está provada. Portanto, $\eta_2(0) \notin \overline{E_a}$. Com o mesmo raciocínio do caso anterior, obtemos $d(\eta_2(t), E_a) \leqslant \delta_0$ para todo $t > 0$ e, assim, existe $a_1 > a > b$ tal que vale (3.12).

Com estes casos provados, segue a existência de uma solução global η_2 de $\widetilde{\pi}$ em $\mathcal{A}$ (por w ou $I(w)$, dependendo do caso) que satisfaz (3.12). Se $a_1 \neq i$, podemos continuar o processo até chegarmos em i (pois, do contrário, teríamos uma contradição). O processo análogo pode ser feito se $b \neq j$, e a prova está completa. □

Lema 3.56. *Os conjuntos A_j definidos em (3.11) satisfazem $\overline{A_j} \cap \Omega = A_j$.*

Demonstração. Para $j = 0$ ou $j = 1$ o resultado é claro, então vamos considerar $j \geqslant 2$. Precisamos apenas mostrar que $\overline{A_j} \cap \Omega \subset A_j$ e para isso considere $x \in \overline{A_j} \cap \Omega$. Assim, existe $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset A_j$ com $x_k \to x$.

Da definição de A_j, existe $1 \leqslant i \leqslant j$ tal que $x_k \in W^u(E_i)$, a menos de subsequências. Com o mesmo raciocínio, podemos assumir que existem $b \leqslant i$ e soluções globais limitadas ξ_k de $\widetilde{\pi}$ por x tais que

$$E_i \overset{t\to-\infty}{\longleftarrow} \xi_k(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} E_b \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Do Lema 3.55, existem $1 \leqslant p_0 \leqslant p$, soluções globais $\zeta_1, \ldots, \zeta_{p_0}$ de $\widetilde{\pi}$ em $\mathcal{A}$, e conjuntos $E_{\ell_1}, \ldots, E_{\ell_{p_0+1}} \in \mathbf{E}$ com $E_{\ell_1} = E_i$, $E_{\ell_{p_0+1}} = E_b$ tal que $\zeta_{i_0}(0) = x$ para algum $1 \leqslant i_0 \leqslant p_0$ e

$$E_{\ell_r} \overset{t\to-\infty}{\longleftarrow} \zeta_r(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} E_{\ell_{r+1}} \quad \text{para } r = 1, \ldots, p_0.$$

Em particular, $x \in W^u(E_{\ell_{i_0}})$ e, de (3.9), temos $\ell_{i_0} \leqslant i \leqslant j$, o que nos dá $x \in A_j$ e conclui o resultado. □

Lema 3.57. *Existe $d > 0$ tal que $\mathcal{O}_d(A_j) \cap (\bigcup_{i=j+1}^p E_i) = \varnothing$.*

Demonstração. Afirmação 1. $A_j \cap E_i = \varnothing$ para todo $i = j+1, \ldots, p$.

De fato, considere $x \in A_j \cap E_i$ com $j+1 \leqslant i \leqslant p$. Como $x \in A_j = \cup_{k=1}^j W^u(E_k)$, existe uma solução global limitada ξ de $\widetilde{\pi}$ com $\xi(0) = x$ e $\xi(s) \to E_k$ quando $s \to -\infty$ para algum $1 \leqslant k \leqslant j$. Dado que $x \in E_i$, e sendo E_i $\widetilde{\pi}$-invariante, temos $\widetilde{\pi}(s)x = \xi(s) \in E_i$ para todo $s \geqslant 0$, o que nos dá $\xi(s) \to E_i$ quando $s \to \infty$. Portanto,

$$E_k \overset{s\to-\infty}{\longleftarrow} \xi(s) \overset{s\to\infty}{\longrightarrow} E_i.$$

De (3.9), temos $k \geqslant i \geqslant j+1$, o que nos dá uma contradição, e a afirmação está provada.

Afirmação 2. $\overline{A_j} \cap \overline{E_i} = \varnothing$ para todo $i = j+1, \ldots, p$.

Se $x \in \overline{A_j} \cap \overline{E_i}$ então $x \in M$, pois caso contrário teríamos $x \in \overline{A_j} \cap \Omega = A_j$ e $x \in \overline{E_i} \cap \Omega = E_i$ o que é uma contradição. Com isso temos $x \in \overline{A_j} \cap M$ e $x \in \overline{E_i} \cap M$, logo existem $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A_j$ e $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E_i$ tais que $x_n \to x$ e $z_n \to x$. Da Observação 2.41, temos $s_n := \phi(x_n) \to 0$ e $r_n := \phi(z_n) \to 0$ e, uma vez que $\widetilde{\pi}(s_n)x_n \to I(x)$, $\widetilde{\pi}(r_n)z_n \to I(x)$ e A_j, E_i são $\widetilde{\pi}$-invariantes, obtemos $I(x) \in \overline{A_j} \cap \Omega = A_j$ e $I(x) \in \overline{E_i} \cap \Omega = E_i$ o que é uma contradição, e a afirmação está provada.

Como $\overline{A_j}$ é compacto, $\overline{E_i}$ é compacto e $\overline{A_j} \cap \overline{E_i} = \varnothing$ para $i = j+1, \dots, p$, então existe $d > 0$ tal que $\mathcal{O}_d(A_j) \cap (\cup_{i=j+1}^{p} E_i) = \varnothing$ e o resultado está provado. □

Observação 3.58. Para os próximos resultados será necessária a hipótese de que A_j satisfaz (3.3), para cada $j = 1, \dots, p$. Quando $E_i \in \mathbf{E}$ satisfaz (3.3) para cada $i = 1, \dots, p$ e $W^u(E_i) \cap W^u(E_j) = \varnothing$ para $1 \leqslant i < j \leqslant p$ então afirmamos que cada A_j satisfaz (3.3). De fato, seja $z \in \mathcal{A}$ tal que $\widetilde{\pi}(t_0)z \in A_j$ para algum $t_0 > 0$. Como $z \in \mathcal{A}$, existe uma solução global limitada ξ de $\widetilde{\pi}$ por z. De (G1) sabemos que $\xi(s) \to E_k$ quando $s \to -\infty$ para algum $k = 1, \dots, p$. Mas $\psi(t) := \xi(t + t_0)$ é uma solução global limitada de $\widetilde{\pi}$ por $\widetilde{\pi}(t_0)z \in A_j$ e $\psi(s) \to E_k$ quando $s \to -\infty$, o que nos dá $\widetilde{\pi}(t_0)z \in W^u(E_k)$. Como $\widetilde{\pi}(t_0)z \in A_j$, devemos ter $\widetilde{\pi}(t_0)z \in W^u(E_\ell)$ para algum $1 \leqslant \ell \leqslant j$. Assim, $\widetilde{\pi}(t_0)z \in W^u(E_k) \cap W^u(E_\ell)$, o que pela hipótese nos dá $k = \ell$ e mostra que $z \in A_j$.

Lema 3.59. *Dado $0 < \delta_0 < d$, existe uma vizinhança aberta V de A_j em Ω tal que $\widetilde{\gamma}^+(V \cap \mathcal{A}) \subset \mathcal{O}_{\delta_0}(A_j) \cap \mathcal{A}$.*

Demonstração. Provemos primeiro o seguinte:

Afirmação. Dados $0 < \delta_0 < d$ e $x \in A_j$, existe $\mu > 0$ tal que $\widetilde{\gamma}^+(y) \subset \mathcal{O}_{\delta_0}(A_j) \cap \mathcal{A}$ para todo $y \in B_\mu(x) \cap \mathcal{A}$.

De fato, se o resultado é falso existem $x_n \to x$ e $t_n > 0$ com $\widetilde{\pi}(t_n)x_n \in \Omega \setminus \mathcal{O}_{\delta_0}(A_j)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $x \in A_j$ e $x_n \to x$ podemos assumir, sem perda de generalidade, que $x_n \in \mathcal{O}_{\delta_0}(A_j)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, existe $s_n \in (0, t_n]$ tal que $\widetilde{\pi}(s)x_n \in \mathcal{O}_{\delta_0}(A_j)$ para $s \in [0, s_n)$ e $\widetilde{\pi}(s_n)x_n \in \Omega \setminus \mathcal{O}_{\delta_0}(A_j)$. Segue do Lema 3.47, que $s_n \to \infty$ e da compacidade assintótica de $\widetilde{\pi}$ podemos assumir, a menos de subsequências, que $\widetilde{\pi}(s_n)x_n \to x_0 \in \overline{\mathcal{A}}$. Note que $d(x_0, A_j) \geqslant \delta_0$.

Caso 1. $x_0 \in \Omega$.

Neste caso, considere $\xi_n(t) = \widetilde{\pi}(t + s_n)x_n$ para $t \geqslant -s_n$. Pelo Teorema 3.37, existe uma solução global limitada ξ de $\widetilde{\pi}$ por x_0 tal que, a menos de subsequências, para cada $s \in \mathbb{R}$ existe $[0, \infty) \ni \epsilon_n^s \to 0$ de modo que $\xi_n(s + \epsilon_n^s) \to \xi(s)$. Sabemos que $x_0 = \xi(0) \notin \mathcal{O}_{\delta_0}(A_j)$. Além disso, para $s < 0$ e $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, temos $s + \epsilon_n^s < 0$ e $s + \epsilon_n^s + s_n > 0$, assim

$$\xi_n(s + \epsilon_n^s) = \widetilde{\pi}(s + \epsilon_n^s + s_n)x_n \in \mathcal{O}_{\delta_0}(A_j).$$

Logo, $\xi(s) \in \overline{\mathcal{O}_{\delta_0}(A_j)} \subset \mathcal{O}_d(A_j)$ para todo $s < 0$. Segue de (G1) que $\xi(s) \to E_i$ quando $s \to -\infty$ para algum $1 \leqslant i \leqslant p$, e como $\mathcal{O}_d(A_j) \cap (\cup_{i=j+1}^{p} E_i) = \varnothing$, obtemos $i \leqslant j$. Uma vez que $\xi(0) = x_0$, então $x_0 \in W^u(E_i)$ para algum $1 \leqslant i \leqslant j$, ou seja, $x_0 \in A_j \subset \mathcal{O}_{\delta_0}(A_j)$ e temos uma contradição.

Caso 2. $x_0 \in M$.

Neste caso, considere $\xi_n(t) = \tilde{\pi}(t + s_n + \phi(\tilde{\pi}(s_n)x_n))x_n$ para $t \geqslant -s_n - \phi(\tilde{\pi}(s_n)x_n)$. Pelo Teorema 3.37, existe uma solução global limitada ξ de $\tilde{\pi}$ por $I(x_0)$ tal que, a menos de subsequências, para cada $s \in \mathbb{R}$ existe $[0,\infty) \ni \epsilon_n^s \to 0$ de modo que $\xi_n(s + \epsilon_n^s) \to \xi(s)$.

Afirmamos que existe $\lambda > 0$ tal que para n suficientemente grande, temos

$$d(\xi_n(\epsilon_n^0), A_j) \geqslant \lambda.$$

De fato, se esse não fosse o caso, como $\xi_n(\epsilon_n^0) \to I(x_0)$ teríamos $I(x_0) \in \overline{A_j} \cap \Omega = A_j$ e, uma vez que A_j satisfaz (3.3), segue da Proposição 3.30 que $x_0 \in \overline{A_j}$ e, portanto, $d(x_0, A_j) = 0$ o que é uma contradição. Com a existência deste $\lambda > 0$, obtemos $I(x_0) \notin \mathcal{O}_\lambda(A_j)$.

Para $s < 0$ e n suficientemente grande, temos $s + \epsilon_n^s + \phi(\tilde{\pi}(s_n)x_n) < 0$, e assim $\xi_n(s + \epsilon_n^s) \in \mathcal{O}_{\delta_0}(A_j)$. Como no Caso 1 acima, isso prova que $\xi(s) \to E_i$ quando $s \to -\infty$ para algum $1 \leqslant i \leqslant j$, o que nos dá $I(x_0) \in W^u(E_i)$ para algum $1 \leqslant i \leqslant j$ e, portanto, $I(x_0) \in A_j \subset \mathcal{O}_\lambda(A_j)$ o que é uma contradição. Essa contradição conclui a prova da nossa afirmação.

Para concluir a prova do lema basta definir $V = \bigcup_{x \in A_j} B_\mu(x)$. □

O próximo teorema nos garante que $\mathbf{E}$ é uma decomposição de Morse de $\mathcal{A}$.

Teorema 3.60. *Seja $\tilde{\pi}$ um semigrupo impulsivo dinamicamente gradiente com respeito à uma família separada de invariantes isolados $\mathbf{E} = \{E_1, \ldots, E_p\}$ reordenada de maneira que E_j é um atrator local para a restrição de $\tilde{\pi}$ a $E^*_{j-1,j-2}$. Assuma que cada $E_i \in \mathbf{E}$ e cada A_j definido em (3.11) satisfazem (3.3) para cada $i, j = 1, \ldots, p$. Então A_j é um atrator local para $\tilde{\pi}$ e*

$$E_j = A_j \cap A^*_{j-1} \quad \textit{para todo} \quad j = 1, \ldots, p.$$

Assim, $\mathbf{E}$ é uma decomposição de Morse de $\mathcal{A}$.

Demonstração. Sabemos que $A_1 = E_1$ e $A_p = \mathcal{A}$ são atratores locais para $\tilde{\pi}$. Para $j = 2, \ldots, p-1$, o Lema 3.54 nos garante que é suficiente provar que A_j é um atrator local para a restrição de $\tilde{\pi}$ ao atrator global $\mathcal{A}$.

Seja V a vizinhança de A_j dada no Lema 3.59, e afirmamos que $A_j = \tilde{\omega}(V \cap \mathcal{A})$. De fato, como $A_j \subset V$ e A_j é $\tilde{\pi}$-invariante, temos $A_j \subset \tilde{\omega}(A_j) \subset \tilde{\omega}(V \cap \mathcal{A})$. Por outro lado, se $x_0 \in \tilde{\omega}(V \cap \mathcal{A})$ existem $t_n \to \infty$ e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset V \cap \mathcal{A}$, tal que $\tilde{\pi}(t_n)x_n \to x_0 \in \Omega$. Do Lema 3.59, temos $\tilde{\pi}(s)x_n \in \mathcal{O}_{\delta_0}(A_j) \cap \mathcal{A}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $s \geqslant 0$. Do Teorema 3.37, com $\xi_n(t) = \tilde{\pi}(t + t_n)x_n$ definida para todo $t \geqslant -t_n$, existe uma solução global limitada ξ de $\tilde{\pi}$ por x_0 tal que, a menos de subsequências, para cada $s \in \mathbb{R}$ existe $[0,\infty) \ni \epsilon_n^s \to 0$ de modo que $\xi_n(s + \epsilon_n^s) \to \xi(s)$. Assim,

$$\xi(s) \in \overline{\mathcal{O}_{\delta_0}(A_j)} \subset \mathcal{O}_d(A_j) \text{ para todo } s \in \mathbb{R}.$$

De (G1), obtemos $\xi(s) \to E_i$ quando $s \to -\infty$ para algum $1 \leqslant i \leqslant p$ e, uma vez que $\mathcal{O}_d(A_j) \cap (\cup_{i=j+1}^p E_i) = \varnothing$ temos $i \leqslant j$. Logo, $x_0 \in W^u(E_i)$ para algum $1 \leqslant i \leqslant j$, ou seja,

$x_0 \in A_j$ e o resultado está provado. Essa afirmação nos diz que A_j é um atrator local para $\widetilde{\pi}$ em $\mathcal{A}$, e a primeira parte do teorema está provada.

Nos resta provar que $E_j = A_j \cap A^*_{j-1}$ para cada $j = 1, \ldots, n$. Por definição, temos $\bigcup_{i=1}^{j} E_i \subset A_j$ e $\bigcup_{i=j}^{p} E_i \subset A^*_{j-1} = \{z \in \mathcal{A} : \widetilde{\omega}(z) \cap A_{j-1} = \varnothing\}$, logo $E_j \subset A_j \cap A^*_{j-1}$. Por outro lado, seja $x \in A_j \cap A^*_{j-1}$. Como $x \in A_j$, existe $\xi : \mathbb{R} \to \mathcal{A}$ solução global de $\widetilde{\pi}$ por x tal que $\xi(s) \to E_\ell$ quando $s \to -\infty$, disso temos $\ell \leqslant j$. Por (G1), $\xi(s) \to E_k$ quando $s \to \infty$ para algum $1 \leqslant k \leqslant p$, e de (3.9) obtemos $\ell \geqslant k$. Dado que $x \in A^*_{j-1}$ temos $\widetilde{\omega}(x) \cap A_{j-1} = \varnothing$ e, também visto que $\xi(s) \to E_k$ quando $s \to \infty$, então $\widetilde{\omega}(x) \subset E_k$ e, como $E_i \subset A_{j-1}$ para $i = 1, \ldots, j-1$ temos $k \geqslant j$, pois caso contrário teríamos $\widetilde{\omega}(x) \subset A_{j-1}$ o que é uma contradição. Portanto, $k = \ell = j$ e $\xi(s) \to E_j$ quando $s \to \pm\infty$. De (G2), obtemos $\xi(t) \in E_j$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e, em particular, $x \in E_j$ e a prova está completa. $\square$

Corolário 3.61. *Sob as hipóteses do Teorema 3.60, temos*

$$\bigcap_{j=0}^{p} (A_j \cup A^*_j) = \bigcup_{j=1}^{p} E_j.$$

Demonstração. Se $x \in \bigcup_{j=1}^{p} E_j$ então $x \in E_k = A_k \cap A^*_{k-1}$ para algum $1 \leqslant k \leqslant p$. Como $A_k \subset A_{k+1} \subset \ldots \subset A_p$, temos $x \in A_j$ se $j \geqslant k$ e, uma vez que $A^*_k \subset A^*_{k-1} \subset \ldots \subset A_0$ temos $x \in A^*_j$ se $j < k$. Portanto, $x \in (A_j \cup A^*_j)$ para todo $0 \leqslant j \leqslant p$.

Agora, se $x \in \bigcap_{j=0}^{p} (A_j \cup A^*_j)$ então $x \in A_j \cup A^*_j$ para todo $j = 0, \ldots, p$. Seja $k = \{$o primeiro índice j tal que $x \in A_j\}$. Usando o fato de que $A_k \subset A_{k+1} \subset \ldots \subset A_p$, segue que $x \in A_j$ para $k \leqslant j \leqslant p$ e $x \in A^*_j$ para $0 \leqslant j \leqslant k-1$. Do Teorema 3.60, obtemos $x \in A_k \cap A^*_{k-1} = E_k$, o que completa demonstração. $\square$

Para finalizar esta seção apresentaremos a equivalência entre semigrupos impulsivos gradientes e semigrupos impulsivos dinamicamente gradientes.

Teorema 3.62. *Sejam $\widetilde{\pi}$ um semigrupo impulsivo com atrator global $\mathcal{A}$ e uma família separada de invariantes isolados $\mathbf{E} = \{E_1, \ldots, E_p\}$. Assuma que cada $E_i \in \mathbf{E}$ e cada A_j definido em (3.11) satisfazem (3.3) para cada $i, j = 1, \ldots, p$. Então $\widetilde{\pi}$ é um semigrupo impulsivo gradiente com respeito à $\mathbf{E}$ se, e somente se, $\widetilde{\pi}$ é um semigrupo impulsivo dinamicamente gradiente com respeito à $\mathbf{E}$. Além disso, a função de Lyapunov $V : \Omega \to \mathbb{R}$ de um semigrupo impulsivo dinamicamente gradiente com respeito à $\mathbf{E}$ pode ser tomada de modo que $V(E_m) = m - 1$, para $m = 1, \ldots, p$.*

Demonstração. Do Teorema 3.19, sabemos que um semigrupo impulsivo gradiente com respeito a uma família separada de invariantes isolados limitada $\mathbf{E}$ é um semigrupo impulsivo dinamicamente gradiente com respeito à $\mathbf{E}$.

Suponha que $\widetilde{\pi}$ é um semigrupo impulsivo dinamicamente gradiente com respeito à $\mathbf{E}$, reordenada de modo a ser uma decomposição de Morse para $\mathcal{A}$. Sejam $\varnothing = A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_p = \mathcal{A}$ a sequência de atratores locais definida em (3.11), e $\varnothing = A^*_p \subset$

$A^*_{p-1} \subset \ldots \subset A^*_0 = \mathcal{A}$ os repulsores associados de modo que para cada $j = 1, \ldots, p$, temos $E_j = A_j \cap A^*_{j-1}$. Considere $h\colon X \to \mathbb{R}$ a função definida no Lema 3.42 e, para cada $j = 1, \ldots, p$, a função $k_j\colon \Omega \to [0, 1]$ construída no Lema 3.44 para o par atrator-repulsor (A_j, A^*_j). Defina a função $V\colon \Omega \to \mathbb{R}$ por

$$V(x) = h(x) + \sum_{j=1}^{p} k_j(x) \quad \text{para cada } x \in \Omega.$$

Afirmamos que V é uma função de Lyapunov para $\widetilde{\pi}$ relativa à $\mathbf{E}$. De fato, dado $x \in \Omega$, como $[0, \infty) \ni t \mapsto h(\widetilde{\pi}(t)x) \in \mathbb{R}$ e cada $[0, \infty) \ni t \mapsto k_j(\widetilde{\pi}(t)x) \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant j \leqslant p$, são decrescentes, segue que $[0, \infty) \ni t \mapsto V(\widetilde{\pi}(t)x) \in \mathbb{R}$ é decrescente.

Agora, seja $x \in \Omega$ tal que $V(\widetilde{\pi}(t)x) = V(x)$ para todo $t \geqslant 0$. Para cada $j = 0, \ldots, p$, defina $f_j\colon \Omega \to \mathbb{R}$ por $f_j(x) = h(x) + k_j(x)$. Sendo $[0, \infty) \ni t \mapsto h(\widetilde{\pi}(t)x)$ decrescente, temos $h(x) - h(\widetilde{\pi}(t)x) \geqslant 0$ para todo $t \geqslant 0$ e, também sendo $[0, \infty) \ni t \mapsto k_j(\widetilde{\pi}(t)x)$ decrescente para cada $j = 1, \ldots, p$, temos $k_j(\widetilde{\pi}(t)x) - k_j(x) \leqslant 0$ para cada $t \geqslant 0$. Dado que $V(\widetilde{\pi}(t)x) = V(x)$, temos

$$h(x) - h(\widetilde{\pi}(t)x) = \sum_{j=1}^{p} (k_j(\widetilde{\pi}(t)x) - k_j(x)),$$

e usando as considerações acima obtemos $k_j(\widetilde{\pi}(t)x) = k_j(x)$ e $h(x) = h(\widetilde{\pi}(t)x)$, para todo $t \geqslant 0$ e, portanto, $f_j(\widetilde{\pi}(t)x) = f_j(x)$ para todo $t \geqslant 0$. Da Proposição 3.43, temos $x \in A_j \cup A^*_j$ para cada $j = 0, 1, \ldots, p$, e segue do Corolário 3.61 que $x \in E_j$ para algum $j = 1, \ldots, p$.

Para a última afirmação, se $m \in \{1, \ldots, p\}$ e $x \in E_m = A_m \cap A^*_{m-1}$, segue que $x \in A_m \subset A_{m+1} \subset \ldots \subset A_p = \mathcal{A}$ e $x \in A^*_{m-1} \subset A^*_{m-2} \subset \ldots \subset A^*_0 = \mathcal{A}$. Como a função k_j associada ao par (A_j, A^*_j) satisfaz $k_j^{-1}(0) = A_j$ e $k_j^{-1}(1) \cap \mathcal{A} = A^*_j$, obtemos

$$k_j(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } \ 1 \leqslant j \leqslant m-1 \\ 0 & \text{se } \ m \leqslant j \leqslant p. \end{cases}$$

Uma vez que $x \in E_m \subset \mathcal{A}$, e em $\mathcal{A}$ temos $h(x) = 0$, segue que

$$V(x) = h(x) + \sum_{j=1}^{p} k_j(x) = \sum_{i=1}^{p} k_j(x) = \sum_{j=1}^{m-1} k_j(x) + \sum_{j=m}^{p} k_j(x) = m - 1,$$

e a prova está completa. □

3.3 APLICAÇÕES

Nesta seção apresentamos alguns exemplos que ilustram a teoria de semigrupos impulsivos dinamicamente gradientes.

3.3.1 O exemplo simples que nos inspirou

Como o próprio nome desta subseção já descreve, escolhemos começar com esse exemplo que, apesar de bastante simples, nos ajudou a desvendar os mistérios desta teoria e nos motivou a encontrar as condições certas para demonstrarmos os resultados abstratos.

Considere o grupo π em $\mathbb{R}$ dado por $\pi(t)x_0 = x_0 e^{-t}$ para todos $x_0, t \in \mathbb{R}$. Defina $M = \{1\}$ e $I(1) = 2$. Note que $\pi(t)1 \neq 1$ para todo $t \neq 0$, logo a tripla (π, M, I) define um sistema dinâmico impulsivo. Como $\phi(2) = \ln 2 > 0$, o sistema (π, M, I) satisfaz a condição (H) e, portanto, define um semigrupo impulsivo $\widetilde{\pi}$ em $\Omega = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. As trajetórias impulsivas são dadas por:

Caso 1. $x_0 \in (-\infty, 1]$.

Neste caso temos $\phi(x_0) = \infty$ e, portanto, $\widetilde{\pi}(t)x_0 = \pi(t)x_0 = x_0 e^{-t}$.

Caso 2. $x_0 \in (1, \infty)$.

Neste caso $\phi(x_0) = \ln x_0$ e $x_n^+ = 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e, portanto,

$$\widetilde{\pi}(t)x_0 = \begin{cases} x_0 e^{-t}, & 0 \leqslant t < \ln x_0 \\ 2^n x_0 e^{-t}, & \ln x_0 + (n-1)\ln 2 \leqslant t < \ln x_0 + n \ln 2, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Como os conjuntos $\{0\}$ e $(1, 2]$ são $\widetilde{\pi}$-invariantes segue que $\mathcal{A} = \{0\} \cup (1, 2]$ é o atrator global para este semigrupo impulsivo e a Figura 2 a seguir ilustra as trajetórias impulsivas e o atrator global.

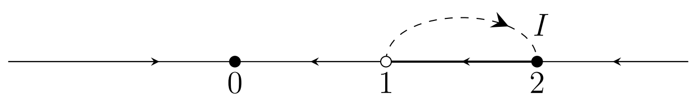


Figura 2 – Tajetória impulsiva e atrator global

Vamos verificar que as condições (T) e (Z) estão satisfeitas.

$*$ Vale (T).

Sejam $t_0 > 0$ e $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ com $z_n \to z$ tal que $\pi(t_0)z_n \to 1$. Assim $z = e^{t_0}$ e, tomando subsequências, se necessário, podemos supor que $z_n > 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Com isso podemos definir $\alpha_n := \ln(z_n e^{-t_0})$ e, portanto, obtemos $\alpha_n \to 0$, $t_0 + \alpha_n > 0$ e

$$\pi(t_0 + \alpha_n)z_n = z_n e^{-(t_0 + \alpha_n)} = z_n e^{-t_0} e^{-\alpha_n} = 1.$$

$*$ Vale (Z).

Como o semigrupo impulsivo $\widetilde{\pi}$ possui atrator global $\mathcal{A}$, para mostrar a condição (Z) basta apenas mostrar para o ponto $1 \in \overline{\mathcal{A}} \cap M$. Para isso, considere $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset (0, \infty)$ com $\liminf_{n \to \infty} t_n > 0$ e $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega$ limitada tais que $\widetilde{\pi}(t_n)x_n \to 1$. Agora, basta mostrar que existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\widetilde{\pi}(t_{n_0})x_{n_0} \in U$ sendo U uma vizinhança aberta de $(1, 2]$. Separamos nos seguintes casos:

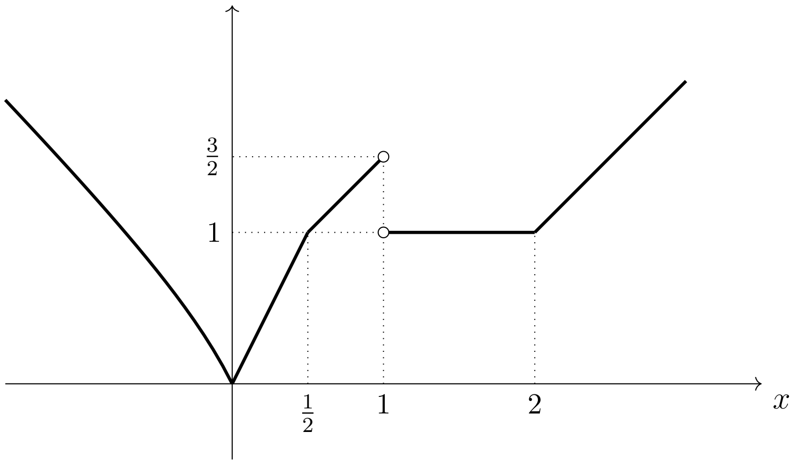


Figura 3 – Gráfico da função de Lyapunov relativa ao par (E, E^*), com $E = \{0\}$ e $E^* = (1, 2]$.

Caso 1. $x_n \in (-\infty, 0]$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como $(-\infty, 0]$ é $\widetilde{\pi}$-invariante então este caso não pode ocorrer, uma vez que $\widetilde{\pi}(t_n)x_n \to 1$.

Caso 2. $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência tal que $x_n \in (0, 1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Neste caso, $x_n \to x \in [0, 1]$. Se $t_n \to \infty$ então $\widetilde{\pi}(t_n)x_n = \pi(t_n)x_n \to 0$ o que é uma contradição. Caso $t_n \to t > 0$ temos $\pi(t_n)x_n \to \pi(t)x$ e, por outro lado $\pi(t_n)x_n = \widetilde{\pi}(t_n)x_n \to 1$ o que nos dá $1 = xe^{-t}$ o que é um absurdo, pois isso só ocorre se $x > 1$ ou $x = 1$ e $t = 0$ o que não acontece e, portanto, este caso não ocorre.

Caso 3. $x_n \in (1, \infty)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Note que somente este caso ocorre, pois $1 \in U$ e $\widetilde{\pi}(t_n)x_n \to 1$. Logo existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\widetilde{\pi}(t_{n_0})x_{n_0} \in U$ e, a condição (Z) está satisfeita.

Considerando $E = \{0\}$, então E é um atrator local para $\widetilde{\pi}$ com repulsor associado $E^* = (1, 2]$ e, do Corolário 3.35, segue que $\widetilde{\pi}$ é um semigrupo impulsivo dinamicamente gradiente com respeito à família $\mathbf{E} = \{E, E^*\}$. A seguir vamos calcular a função de Lyapunov para $\widetilde{\pi}$ relativa à $\mathbf{E}$ dada pela Proposição 3.43. Calculando as funções $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (dada pelo Lema 3.42) e $k\colon \mathbb{R} \to [0, 1]$ (dada pelo Lema 3.45) temos:

- $h(x) = -x$ e $k(x) = \frac{x}{2x-1}$ para $x \in (-\infty, 0)$;
- $h(x) = x$ e $k(x) = x$ para $x \in [0, \frac{1}{2}]$;
- $h(x) = \frac{1}{2}$ e $k(x) = x$ para $x \in (\frac{1}{2}, 1]$;
- $h(x) = 0$ e $k(x) = 1$ para $x \in (1, 2]$;
- $h(x) = x - 2$ e $k(x) = 1$ para $x \in (2, \infty)$.

Logo a função de Lyapunov $V\colon \Omega \to \mathbb{R}$ é dada por $V(x) = h(x) + k(x)$ e seu gráfico é apresentado na Figura 3.

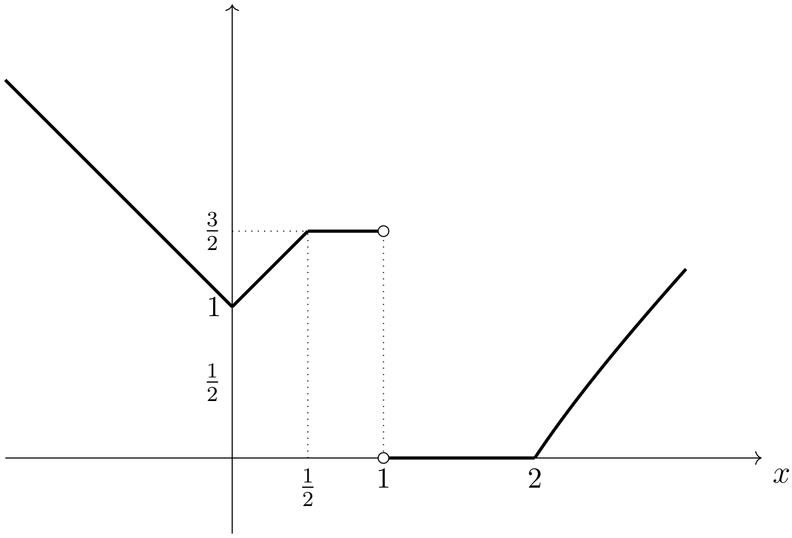


Figura 4 – Gráfico da função de Lyapunov relativa ao par (E, E^*), com $E = (1, 2]$ e $E^* = \{0\}$.

Note que o conjunto $(1, 2]$ também é um atrator local para $\widetilde{\pi}$, logo podemos trocar os papéis de E e E^*, isto é, podemos considerar $E = (1, 2]$ e $E^* = \{0\}$. Assim a função de Lyapunov relativa à $\mathbf{E} = \{E, E^*\}$ é dada por $V(x) = h(x) + k(x)$, sendo

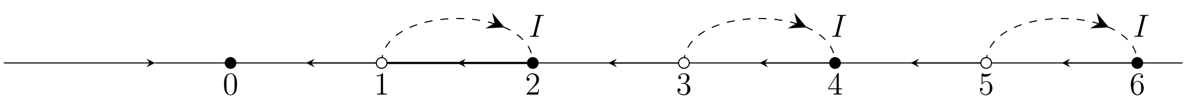
- $h(x) = -x$ e $k(x) = 1$ para $x \in (-\infty, 0)$;
- $h(x) = x$ e $k(x) = 1$ para $x \in [0, \frac{1}{2}]$;
- $h(x) = \frac{1}{2}$ e $k(x) = 1$ para $x \in (\frac{1}{2}, 1]$;
- $h(x) = x - 2$ e $k(x) = \frac{x-2}{2x-2}$ para $x \in (2, \infty)$;
- $h(x) = 0$ e $k(x) = 0$ para para $x \in (1, 2]$,

e seu gráfico é dado na Figura 4.

Note, neste exemplo, que se usássemos a semidistância de Hausdorff para definirmos o conceito de atração teríamos que o conjunto $E = (1, 2]$ seria tal que $W^u(E) = E$, porém E não seria um atrator local para $\widetilde{\pi}$.

3.3.2 Um exemplo com mais invariantes

Para ilustrar a decomposição de Morse consideramos, como no exemplo acima, o grupo $\pi(t)x_0 = x_0 e^{-t}$. Definimos $M = \{1, 3, 5\}$ e $I(1) = 2$, $I(3) = 4$ e $I(5) = 6$.



Vamos considerar os conjuntos $E_1 = \{0\}$, $E_2 = (1, 2]$, $E_3 = (3, 4]$ e $E_4 = (5, 6]$. Note que E_1 é um atrator local para $\widetilde{\pi}$ com repulsor associado $E_1^* = E_2 \cup E_3 \cup E_4$ e, em E_1^* escolhemos E_2 como um atrator local para $\widetilde{\pi}$ com repulsor associado $E_2^* = E_3 \cup E_4$. Novamente em E_2^* escolhemos E_3 como um atrator local para $\widetilde{\pi}$ com repulsor associado

$E_3^* = E_4$. Como cada E_i é um atrator local para $\widetilde{\pi}$, temos $W^u(E_i) = E_i$ para $1 \leqslant i \leqslant 4$, logo podemos definir os conjuntos $A_j = \cup_{i=1}^{j} E_i$ e veja que $E_1 = A_1$, $A_4 = \mathcal{A}$ e $E_j = A_j \cap A_{j-1}^*$ para todo $j = 1, \ldots, 4$ e, portanto, a família separada e ordenada de invariantes isolados $\mathbf{E} = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ constitui uma decomposição de Morse para $\mathcal{A}$. Segue do Teorema 3.62 que existe uma função de Lyapunov V para $\widetilde{\pi}$ tal que $V(E_m) = m - 1$ para $m = 1, 2, 3, 4$.

3.3.3 Um exemplo em $\mathbb{R}^2$

Apresentamos agora um exemplo adaptado de (BONOTTO, E. M. *et al.*, 2015). Considere o problema de valor inicial em $X = \mathbb{R}^2$, com a norma euclidiana usual denotada por $\|\cdot\|$, dado por

$$\begin{cases} \dot{x} = -x, & t > 0, \\ \dot{y} = -y, & t > 0, \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}, \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{3.13}$$

que gera o grupo $\pi = \{\pi(t) \colon t \in \mathbb{R}\}$ em $\mathbb{R}^2$ definido por

$$\pi(t)(x_0, y_0) = (x_0 e^{-t}, y_0 e^{-t}) \quad \text{para } t \in \mathbb{R}.$$

Consideremos $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\}$ e $I \colon M \to \mathbb{R}^2 \setminus M$ definida por $I(x, y) = (\sqrt{x^2 + 8}, y)$. Note que $I(M) \subset \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \colon u \geqslant 0 \text{ e } u^2 + v^2 = 9\} \subset \mathbb{R}^2 \setminus M$.

Como

$$\|\pi(t)(x, y)\| = e^{-t}\sqrt{x^2 + y^2} \text{ para todo } t \geqslant 0, \tag{3.14}$$

vemos que se $(x, y) \in M$ então $\pi(t)(x, y) \notin M$ para todo $t \neq 0$. Logo a tripla (π, M, I) define um sistema dinâmico impulsivo em $\mathbb{R}^2$.

Observe que de (3.14), temos $\phi(x, y) = \infty$ se $x^2 + y^2 < 1$, e $\phi(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$ se $x^2 + y^2 > 1$. Note ainda que vale (H) já que $\phi(x, y) = \ln 3$ se $(x, y) \in I(M)$, ou seja, basta tomar $\delta = \frac{\ln 3}{2} > 0$. Portanto, (π, M, I) dá origem a um semigrupo impulsivo $\widetilde{\pi}$ em $\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus M$.

Calculemos a trajetória impulsiva de cada ponto $(x, y) \in \Omega$. Claramente $\widetilde{\pi}(t)(x, y) = \pi(t)(x, y)$ se $x^2 + y^2 < 1$. Quando $x^2 + y^2 > 1$ temos $s_1 := \phi(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$ e, assim,

$$(x, y)_1 = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y) \quad \text{e} \quad (x, y)_1^+ = I((x, y)_1) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\left(\sqrt{9x^2 + 8y^2}, y\right).$$

Logo

$$\widetilde{\pi}(t)(x, y) = \begin{cases} \pi(t)(x, y) & \text{se } \ 0 \leqslant t < s_1, \\ (x, y)_1^+ & \text{se } \ t = s_1. \end{cases}$$

Como $s_2 = \phi((x, y)_1^+) = \ln 3$, temos

$$(x, y)_2 = \frac{1}{3}(x, y)_1^+ \quad \text{e} \quad (x, y)_2^+ = I((x, y)_2) = \frac{1}{3\sqrt{x^2 + y^2}}\left(\sqrt{81x^2 + 80y^2}, y\right),$$

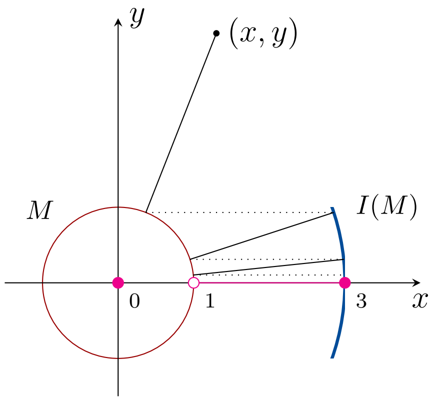


Figura 5 – Trajetória impulsiva para $\widetilde{\pi}$.

logo

$$\widetilde{\pi}(t)(x,y) = \begin{cases} e^{-t}(\sqrt{9x^2+8y^2}, y) & \text{se } \ s_1 \leqslant t < s_1 + \ln 3, \\ (x,y)_2^+ & \text{se } \ t = s_1 + \ln 3. \end{cases}$$

Continuando esse processo, para $n > 1$ obtemos $s_{n+1} := \phi((x,y)_n^+) = \ln 3$ e também

$$(x,y)_{n+1} = \frac{1}{3}(x,y)_n^+ \ \text{ e } \ (x,y)_n^+ = \frac{1}{3^{n-1}\sqrt{x^2+y^2}}\left(\sqrt{9^n x^2 + (9^n-1)y^2}, y\right),$$

e, portanto,

$$\widetilde{\pi}(t)(x,y) = e^{-t}\left(\sqrt{9^n x^2 + (9^n-1)y^2}, y\right),$$

se $\lambda_n := s_1 + (n-1)\ln 3 \leqslant t < \lambda_{n+1} := s_1 + n\ln 3$. As trajetórias impulsivas são dadas na Figura 5.

Note que $\mathcal{A} = \{0,0\} \cup \{(x,0)\colon 1 < x \leqslant 3\}$ é o atrator global para $\widetilde{\pi}$ e que ambas (T) e (Z) estão satisfeitas.

$*$ Vale (T).

Sejam $t > 0$, $(u,v) \in M$, e uma sequência convergente $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^2$ tal que $\pi(t)z_n \to (u,v)$. Podemos assumir que $z_n = (x_n, y_n) \to z = (x,y)$ (logo $(u,v) = \pi(t)(x,y)$) e $z_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Note que

$$1 = u^2 + v^2 = \|\pi(t)(x,y)\|^2 = \|z\|^2 e^{-2t},$$

assim $\|z\| = e^t$. Definindo $\alpha_n = \ln(\|z_n\|e^{-t})$, então $\alpha_n \to 0$ e $\pi(t+\alpha_n)z_n \in M$, pois

$$\|\pi(t+\alpha_n)z_n\|^2 = \|z_n\|^2 e^{-2t} e^{-2\alpha_n} = \|z_n\|^2 e^{-2t}\frac{e^{2t}}{\|z_n\|^2} = 1.$$

$*$ Vale (Z).

Claramente, se $B \subset \Omega$ é limitado, então $\overline{\widetilde{\omega}(B)} \cap M \subset \{(1,0)\}$. Assumindo então que $\overline{\widetilde{\omega}(B)} \cap M = \{(1,0)\}$, sejam $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (0,\infty)$ com $\liminf\limits_{n\to\infty} t_n > 0$ e $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ limitada com $\widetilde{\pi}(t_n)z_n \to (1,0)$, e U vizinhança aberta de $\widetilde{\omega}(B)$. Claramente devemos ter $\|z_n\| > 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e, também, $\{(x,0)\colon 1 < x \leqslant 3\} \subset \widetilde{\omega}(B)$. Portanto, é simples ver que $\widetilde{\pi}(t_n)z_n \in U$ para algum $n \in \mathbb{N}$.

Veja que $E = \{(0,0)\}$ é um atrator local para o semigrupo impulsivo $\widetilde{\pi}$, com repulsor associado $E^* = \{(x,0)\colon 1 < x \leqslant 3\}$, e com isso $\widetilde{\pi}$ é um semigrupo impulsivo gradiente relativo ao par (E, E^*).

3.3.4 Um exemplo em dimensão infinita

Considere o seguinte problema de valor inicial com condições de fronteira de Dirichlet:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{para} \quad (x,t) \in \Gamma \times (0,\infty), \\ u(x,t) = 0, & \text{para} \quad (x,t) \in \partial\Gamma \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), & \text{para} \quad x \in \Gamma, \end{cases} \tag{3.15}$$

sendo Γ um domínio limitado de $\mathbb{R}^n$ com fronteira suave $\partial\Gamma$ e Δ o operador Laplaciano em Γ. O operador $-\Delta$ com as condições de fronteira de Dirichlet admite uma sequência ortonormal completa de autofunções $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $L^2(\Gamma)$ com autovalores correspondentes $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que satisfazem $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n \leqslant \ldots$, e $\lambda_n \to \infty$ quando $n \to \infty$.

Sabemos que (veja (BREZIS, 2010; EVANS, 2010) para mais detalhes) para cada $u_0 \in L^2(\Gamma)$, existe uma única solução u de (3.15) satisfazendo $u \in C([0,\infty), L^2(\Gamma))$ tal que a aplicação $u_0 \mapsto u(t)$ é contínua em $L^2(\Gamma)$. Além disso, se $u_0 \in L^2(\Gamma)$ então

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(u_0)v_n \quad \text{e} \quad u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(u_0)e^{-\lambda_n t}v_n, \quad t \geqslant 0,$$

sendo $\alpha_n(u_0) = (u_0, v_n)$ o n-ésimo coeficiente de Fourier de u_0 e $(\cdot,\cdot)$ denota o produto interno usual de $L^2(\Gamma)$. A família $\pi = \{\pi(t)\colon t \geqslant 0\}$, onde $\pi(t)\colon L^2(\Gamma) \to L^2(\Gamma)$ é dado por $\pi(t)u_0 = u(t)$, define um semigrupo em $L^2(\Gamma)$. Além disso, a aplicação $\pi(t)\colon L^2(\Gamma) \to L^2(\Gamma)$ é um operador compacto para cada $t > 0$. Usando a identidade de Parseval, obtemos

$$\|\pi(t)u_0\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n(u_0)|^2 e^{-2\lambda_n t} \leqslant \|u_0\|_2^2 e^{-2\lambda_1 t}, \quad \text{para todo } t \geqslant 0. \tag{3.16}$$

Além disso, $\mathcal{A}_1 = \{0\}$ é o atrator global para π em $L^2(\Gamma)$. Considere o conjunto $M = \{u \in L^2(\Gamma)\colon \|u\|_2 = 1\}$, onde $\|\cdot\|_2$ denota a norma usual em $L^2(\Gamma)$, e defina $I(u) = u + 4v_1$ para todo $u \in M$. Note que para $u \in M$ temos $|\alpha_1(u)| \leqslant 1$ e

$$\|I(u)\|_2^2 = (\alpha_1(u) + 4)^2 + \sum_{j=2}^{\infty} \alpha_n(u)^2 = \underbrace{\|u\|_2^2}_{=1} + 8\alpha_1(u) + 16 = 8\alpha_1(u) + 17, \tag{3.17}$$

assim $3 \leqslant \|I(u)\|_2 \leqslant 5$.

Lema 3.63. *M é um conjunto impulsivo e I é uma função impulso.*

Demonstração. Claramente M é um subconjunto fechado em $L^2(\Gamma)$ e, para cada $x \in M$, segue de (3.16) que $\pi(t)x \notin M$ para todo $t > 0$. A aplicação I é claramente contínua em M e como $\|I(u)\|_2 \geqslant 3$, temos $I(M) \subset \Omega := L^2(\Gamma) \setminus M$. Portanto, M é um conjunto impulsivo e I é uma função impulso. $\square$

Usando (3.16), temos $\phi(u) = \infty$ se $\|u\|_2 < 1$ e $\phi(u) \leqslant \frac{1}{\lambda_1} \ln \|u\|_2$ se $\|u\|_2 > 1$. Por isso, para todo $t > 0$ e $u \in \Omega$ com $\|u\|_2 < 1$, temos $\widetilde{\pi}(t)u = \pi(t)u$. Para $\|u\|_2 > 1$, podemos descrever $\widetilde{\pi}(t)u$ em termos dos seus coeficientes de Fourier:

- $\alpha_n(\widetilde{\pi}(t)u) = \alpha_n(\pi(t)u) = \alpha_n(u)e^{-\lambda_n t}$ para todo $t > 0$ e $n \geqslant 2$;
- $\alpha_1(\widetilde{\pi}(t)u) = \alpha_1(\pi(t)u) = \alpha_1(u)e^{-\lambda_1 t}$ para $0 \leqslant t < \phi(u)$;
- $\alpha_1(\widetilde{\pi}(\phi(u))u) = \alpha_1(\pi(\phi(u))u + 4v_1) = \alpha_1(\pi(\phi(u))u) + 4 = \alpha_1(u)e^{-\lambda_1 \phi(u)} + 4$.

Tomando $u_1^+ = 4v_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(u)e^{-\lambda_n \phi(u)} v_n$, podemos proceder indutivamente para todo $t > \phi(u)$. Note que o anel

$$A_{1,5} := \{u \in L^2(\Gamma) \colon 1 < \|u\|_2 \leqslant 5\}$$

é $\widetilde{\pi}$-positivamente invariante.

Lema 3.64. *Para $u \in I(M)$ e $t \geqslant 0$, temos $\alpha_1(\pi(t)u) > 0$.*

Demonstração. Seja $u = I(v)$ com $v \in M$. Portanto, $\alpha_1(u) = \alpha_1(v) + 4$, o que nos dá $\alpha_1(u) \geqslant 3$. Uma vez que $\alpha_1(\pi(t)u) = \alpha_1(u)e^{-\lambda_1 t}$, o resultado está provado. $\square$

Lema 3.65. *O sistema dinâmico impulsivo (π, M, I) satisfaz (H).*

Demonstração. Sejam $u \in M$ e $v = I(u)$, se $t > 0$ é tal que $\pi(t)v \in M$ então

$$1 = \|\pi(t)v\|_2 \geqslant |\alpha_1(u) + 4|e^{-\lambda_1 t} \geqslant 3e^{-\lambda_1 t},$$

isto é, $t \geqslant \frac{1}{\lambda_1} \ln 3$. Portanto, $\phi(v) \geqslant \frac{1}{\lambda_1} \ln 3$ para todo $v \in I(M)$, e a condição (H) vale com $\delta = \frac{1}{2\lambda_1} \ln 3$. $\square$

Uma vez que a condição (H) é satisfeita, a tripla (π, M, I) define um semigrupo impulsivo $\widetilde{\pi} = \{\widetilde{\pi}(t) \colon t \geqslant 0\}$ em Ω.

Lema 3.66. *$\widetilde{\pi}$ satisfaz (T).*

Demonstração. Sejam $t > 0$, $w \in M$, e uma sequência convergente $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ com limite u em $L^2(\Gamma)$ tal que $\|\pi(t)u_n - w\|_2 \to 0$. Seja $K > 0$ tal que $\|u_n\|_2 \leqslant K$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Agora, escolha $s > t$ de modo que $Ke^{-\lambda_1 s} < 1$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos a função $h_n \colon [0, s] \to \mathbb{R}$ por $h_n(t) = \|\pi(t)u_n\|_2^2 - 1$, $t \in [0, s]$. Veja que,

$$h_n(s) + 1 = \|\pi(s)u_n\|_2^2 \leqslant \|u_n\|_2^2 e^{-2\lambda_1 s} \leqslant K^2 e^{-2\lambda_1 s} < 1.$$

Por outro lado, temos $w = \pi(t)u$, e consequentemente,

$$1 = \|w\|_2^2 = \|\pi(t)u\|_2^2 \leqslant \|u\|_2^2 e^{-2\lambda_1 t} < \|u\|_2^2.$$

Assim, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1 < \|u_n\|_2^2$ para todo $n \geqslant n_0$, e

$$h_n(0) + 1 = \|u_n\|_2^2 > 1, \quad n \geqslant n_0.$$

Logo,

$$h_n(s) < 0 < h_n(0) \quad \text{para todo} \quad n \geqslant n_0.$$

Usando a continuidade de h_n, existe $r_n \in [0, s]$ tal que $\|\pi(r_n)u_n\|_2^2 = 1$, ou seja, $\pi(r_n)u_n \in M$ sempre que $n \geqslant n_0$. Podemos supor, a menos de subsequências, que $r_n \to r \in [0, s]$. Assim, $\pi(r)u \in M$ e, portanto, $r = t$ quando $\|u\|_2 > 1$ e a trajetória $\gamma^+(u) = \{\pi(t)u\colon t \geqslant 0\}$ toca o conjunto impulsivo apenas uma vez. Tomando $\alpha_n = r_n - t$, para $n \geqslant n_0$, obtemos $\pi(t + \alpha_n)u_n = \pi(r_n)u_n \in M$. □

Observe que $\widetilde{\pi}$ é um semigrupo impulsivo dissipativo com um conjunto absorvente dado por $B_0 = \{v \in L^2(\Gamma)\colon \|v\|_2 \leqslant \frac{1}{2}\} \cup \{v \in L^2(\Gamma)\colon 1 < \|v\|_2 \leqslant 5\}$. Também, da Proposição 2.28, segue que $\widetilde{\pi}$ é assintoticamente compacto.

Lema 3.67. *Sejam*

$$(1, 5]v_1 = \{v \in L^2(\Gamma)\colon v = \alpha v_1, \ \text{com } 1 < \alpha \leqslant 5\}$$

e $B \subset \Omega$ um conjunto não vazio e limitado.

(a) *Se $\|u\|_2 < 1$ para todo $u \in B$ então $\widetilde{\omega}(B) = \{0\}$.*

(b) *Se existe $u \in B$ com $\|u\|_2 < 1$ então $0 \in \widetilde{\omega}(B)$.*

(c) *$\widetilde{\omega}(B) \subset \{0\} \cup (1, 5]v_1$.*

(d) *Se existe $u \in B$ com $\|u\|_2 > 1$ então $(1, 5]v_1 \subset \widetilde{\omega}(B)$.*

Demonstração. **(a)** Como $\phi(u) = \infty$ para todo $u \in \Omega$ com $\|u\|_2 < 1$, e de (3.16) para qualquer $t_n \to \infty$ e $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$, obtemos

$$\|\widetilde{\pi}(t_n)u_n\|_2 \leqslant \|u_n\|_2 e^{-\lambda_1 t} \to 0 \quad \text{quando } t \to \infty,$$

e, portanto, $\widetilde{\omega}(B) \subset \{0\}$. Como $\widetilde{\pi}(t)0 = 0$ para todo $t \geqslant 0$, concluímos que $\widetilde{\omega}(B) = \{0\}$.

(b) Segue diretamente do item **(a)**, pois $\{0\} = \widetilde{\omega}(u) \subset \widetilde{\omega}(B)$.

(c) Sejam $B^- = B \cap \{u \in L^2(\Gamma)\colon \|u\|_2 < 1\}$ e $B^+ = B \cap \{u \in L^2(\Gamma)\colon \|u\|_2 > 1\}$. Se $w \in \widetilde{\omega}(B)$, então existem $t_n \to \infty$ e $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ tais que $\widetilde{\pi}(t_n)u_n \to w$. Se, a menos de subsequências, $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B^-$, obtemos $w = 0$. Então, precisamos somente tratar do caso quando $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B^+$. Neste caso, obtemos

$$\|\widetilde{\pi}(t_n)u_n - w\|_2^2 = (\alpha_1(\widetilde{\pi}(t_n)u_n) - \alpha_1(w))^2 + \sum_{j=2}^{\infty}(\alpha_j(u_n)e^{-\lambda_j t_n} - \alpha_j(w))^2.$$

Com isso, obtemos que $\alpha_j(w) = 0$ para todo $j \geqslant 2$ e também $\alpha_1(\widetilde{\pi}(t_n)u_n) \to \alpha_1(w)$. Usando o Lema 3.64 juntamente com o fato de que o anel $A_{1,5}$ é $\widetilde{\pi}$-postitivamente invariante, obtemos $1 < \alpha_1(\widetilde{\pi}(t_n)u_n) \leqslant 5$ para n suficientemente grande. Isso nos dá $\alpha_1(w) \in [1, 5]$. Se $\alpha_1(w) = 1$ então $w = v_1 \in M$, o que é uma contradição e, portanto, $\alpha_1(w) \in (1, 5]$. Assim, $w = \alpha_1(w)v_1 \in (1, 5]v_1$.

(d) Seja $u \in B$ tal que $\|u\|_2 > 1$. Então, a sequência $\{\widetilde{\pi}(n)u\}_{n\in\mathbb{N}}$ não converge para 0 (uma vez que ela permanece no anel $A_{1,5}$ para todo n suficientemente grande). Como $\widetilde{\pi}$ é assintoticamente compacto, existe $w \in \widetilde{\omega}(u) \setminus \{0\} \subset \widetilde{\omega}(B) \setminus \{0\}$. Mas $\widetilde{\omega}(B) \setminus \{0\} \subset (1, 5]v_1$, o que nos dá $w = \alpha v_1$ para algum $\alpha \in (1, 5]$. Dado que $\widetilde{\omega}(B)$ é $\widetilde{\pi}$-invariante, obtemos $(1, 5]v_1 \subset \widetilde{\omega}(B)$. □

Lema 3.68. *$\widetilde{\pi}$ satisfaz (Z).*

Demonstração. Seja $B \subset \Omega$ um conjunto não vazio e limitado. Se $\|u\|_2 < 1$ para todo $u \in B$, então $\widetilde{\omega}(B) = \{0\}$. Portanto, neste caso, $\widetilde{\omega}(B) \cap M = \varnothing$ e não temos nada a provar.

Podemos assumir que $B \cap \{u \in L^2(\Gamma) \colon \|u\|_2 > 1\} \neq \varnothing$. Do lema acima, temos $\overline{\widetilde{\omega}(B)} \cap M = \{v_1\}$. Sejam $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (0, \infty)$ tal que $\liminf_{n\to\infty} t_n > 0$, $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ e $\widetilde{\pi}(t_n)u_n \to v_1$. Usando (3.16) podemos assumir que $\|u_n\|_2 > 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e, consequentemente, a sequência $\{\widetilde{\pi}(t_n)u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ entra em qualquer vizinhança aberta U de $\widetilde{\omega}(B)$ em Ω para n suficientemente grande. □

Como consequência do Teorema 2.40 e do Lema 3.67, $\mathcal{A} = \widetilde{\omega}(B_0) = \{0\} \cup (1, 5]v_1$ é o atrator global de $\widetilde{\pi}$. O conjunto $E = \{0\}$ é um atrator local para $\widetilde{\pi}$ com repulsor associado $E^* = (1, 5]v_1$. Usando o Teorema 3.62, podemos enunciar o seguinte resultado:

Teorema 3.69. *$\widetilde{\pi}$ é um semigrupo impulsivo gradiente relativo à $\mathbf{E} = \{E, E^*\}$ com função de Lyapunov $V \colon \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $V(E) = 0$ e $V(E^*) = 1$.*

4 SEMIGRUPOS IMPULSIVOS SOB PERTURBAÇÕES

Nosso objetivo agora é começar a trabalhar com perturbações de semigrupos impulsivos, e estudar como os atratores globais para tais semigrupos se comportam. Para este fim, para cada $\eta > 0$ consideraremos um sistema dinâmico impulsivo $(\pi_\eta, M_\eta, I_\eta)$ e assumiremos que ele satisfaz (2.3), isto é, temos um semigrupo impulsivo $\widetilde{\pi}_\eta$ em $\Omega_\eta = X \setminus M_\eta$. De agora em diante, quando nos referirmos ao semigrupo impulsivo $\widetilde{\pi}_\eta$, a menos que explicitamente dito o contrário, estaremos considerando M_η seu conjunto impulsivo e I_η sua função de impulso associados. Além disso, nos referiremos também às famílias $\{\pi_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ de semigrupos, $\{M_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ de conjuntos impulsivos e $\{I_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ de funções de impulso, separadamente. Os resultados apresentados aqui foram adaptados de (BONOTTO, E. M. *et al.*, 2016b; BORTOLAN; UZAL, José Manuel, 2021).

Definição 4.1. Nas condições acima diremos que:

(a) a família $\{\pi_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ de semigrupos é **contínua em** $\eta = 0$ se para cada $J \subset [0,\infty)$ e $K \subset X$ compactos temos

$$\sup_{(t,x)\in J\times K} d(\pi_\eta(t)x, \pi_0(t)x) \to 0 \quad \text{quando } \eta \to 0;$$

(b) a família $\{M_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ de conjuntos impulsivos é **coletivamente fechada em** $\eta = 0$ se dadas $\eta_k \to 0$, $x_k \in M_{\eta_k}$ e $x \in X$ com $x_k \to x$, então $x \in M_0$;

(c) se $\{M_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ é coletivamente fechada em $\eta = 0$, diremos que a família de funções de impulso $\{I_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ é **coletivamente contínua em** $\eta = 0$ se dadas $\eta_k \to 0$, $x_k \in M_{\eta_k}$ e $x \in X$ com $x_k \to x$, então $I_{\eta_k}(x_k) \to I_0(x)$.

Além de todas as definições acima, para cada $\eta \in [0,1]$, podemos considerar a função tempo de impacto ϕ_η.

Lema 4.2. *Assuma que*

- $\{\pi_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ *é contínua em* $\eta = 0$*;*
- $\{M_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ *é coletivamente fechada em* $\eta = 0$*;*

e consideremos $x_0 \in \Omega_0$*,* $x_k \to x_0$ *e* $\eta_k \to 0$*. Então*

(a) $x_k \in \Omega_{\eta_k}$ *para* k *suficientemente grande;*

(b) $\liminf_{k\to\infty} \phi_{\eta_k}(x_k) \geqslant \phi_0(x_0)$*;*

(c) *se* $[0,\infty) \ni \alpha_k \to 0$ *então* $\widetilde{\pi}_{\eta_k}(\alpha_k)x_k \to x_0$*.*

Demonstração. **(a)** Se a afirmação é falsa, existe uma subsequência $\{x_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ de $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ com $x_{k_j} \in M_{\eta_{k_j}}$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Como $x_{k_j} \to x_0$ quando $j \to \infty$ e $\{M_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ é coletivamente fechada então $x_0 \in M_0$, o que nos dá uma contradição.

(b) Seja $\alpha := \liminf_{k\to\infty} \phi_{\eta_k}(x_k)$. Se $\alpha = \infty$, nada temos a fazer. Suponha então que $\alpha < \infty$. A menos de subsequências, podemos assumir que $\phi_{\eta_k}(x_k) \to \alpha$. Da definição de

ϕ_{η_k} temos $\pi_{\eta_k}(\phi_{\eta_k}(x_k))x_k \in M_{\eta_k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Da continuidade de $\{\pi_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ em $\eta = 0$ temos $\pi_{\eta_k}(\phi_{\eta_k}(x_k))x_k \to \pi_0(\alpha)x_0$, e como $\{M_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ é coletivamente fechada em $\eta = 0$ obtemos $\pi_0(\alpha)x_0 \in M_0$. Se $\alpha = 0$ teríamos $x_0 \in M_0$, o que é uma contradição. Portanto, $\alpha > 0$ e de (2.2), segue que $\phi_0(x_0) \leqslant \alpha$.

(c) Usando o item **(b)**, para k suficientemente grande obtemos $0 \leqslant \alpha_k < \frac{\phi_0(x_0)}{2} < \phi_{\eta_k}(x_k)$. Portanto, segue que $\widetilde{\pi}_{\eta_k}(\alpha_k)x_k = \pi_{\eta_k}(\alpha_k)x_k \to \pi_0(0)x_0 = x_0$. □

Para continuarmos, precisaremos de uma *versão coletiva* da condição (T), que é apresentada abaixo.

$$\begin{cases} \text{Sejam } t > 0,\ x \in M_0, \text{uma sequência convergente } \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ em } X \\ \text{e } \eta_k \to 0 \text{ tais que } \pi_{\eta_k}(t)z_k \to x, \text{então existe uma sequência } \{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \\ \text{com } \alpha_k \to 0 \text{ e } t+\alpha_k > 0 \text{ para todo } k \in \mathbb{N} \text{ tal que, a menos de} \\ \text{subsequências, temos } \pi_{\eta_k}(t+\alpha_k)z_k \in M_{\eta_k}. \end{cases} \tag{CT}$$

Lema 4.3. *Assuma que*

- $\{\pi_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ *é contínua em* $\eta = 0$*;*
- *vale* (CT)*;*

e consideremos $x_0 \in X$*,* $x_k \to x_0$ *e* $\eta_k \to 0$*. Então* $\limsup_{k\to\infty} \phi_{\eta_k}(x_k) \leqslant \phi_0(x_0)$*.*

Demonstração. Se $\phi_0(x_0) = \infty$ não há nada a provar. Agora, se $s = \phi_0(x_0) < \infty$ temos $\pi_0(s)x_0 \in M_0$. Definindo $\beta := \limsup_{k\to\infty} \phi_{\eta_k}(x_k)$, podemos supor, a menos de subsequências, que $\phi_{\eta_k}(x_k) \to \beta$. Da continuidade de $\{\pi_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ em $\eta = 0$, obtemos $\pi_{\eta_k}(s)x_k \to \pi_0(s)x_0$. Podemos usar a condição (CT) para garantir a existência de $\alpha_k \to 0$ com $s + \alpha_k > 0$ tal que $\pi_{\eta_k}(s+\alpha_k)x_k \in M_{\eta_k}$, a menos de subsequências. Usando (2.2) temos

$$\phi_{\eta_k}(x_k) \leqslant s + \alpha_k = \phi_0(x_0) + \alpha_k,$$

e fazendo $k \to \infty$, obtemos $\beta \leqslant \phi_0(x_0)$ o que conclui a prova. □

Como consequência direta dos dois lemas anteriores temos o seguinte resultado:

Teorema 4.4. *Assuma que*

- $\{\pi_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ *é contínua em* $\eta = 0$*;*
- $\{M_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ *é coletivamente fechada em* $\eta = 0$*;*
- *vale* (CT)*.*

Então a função $[0,1] \times X \ni (\eta, x) \mapsto \phi_\eta(x)$ *é semicontínua superiormente em* $\{0\} \times X$ *e contínua em* $\{0\} \times \Omega_0$*.*

Usando o Teorema 4.4, obtemos o seguinte resultado de convergência para a família de semigrupos impulsivos $\{\widetilde{\pi}_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$.

Proposição 4.5. *Assuma que*

- $\{\pi_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ *é contínua em* $\eta = 0$*;*
- $\{M_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ *é coletivamente fechada em* $\eta = 0$*;*
- $\{I_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ *é coletivamente contínua em* $\eta = 0$*;*
- *vale* (CT).

Dados $t \geqslant 0$*,* $x_0 \in \Omega_0$ *e* $x_k \to x_0$*, existe uma sequência* $[0,\infty) \ni \epsilon_k \to 0$ *tal que*

$$\widetilde{\pi}_{\eta_k}(t+\epsilon_k)x_k \to \widetilde{\pi}_0(t)x_0.$$

Demonstração. Do Teorema 4.4, sabemos que $\lim\limits_{k\to\infty} \phi_{\eta_k}(x_k) = \phi_0(x_0)$. Com isso, se $\phi_0(x_0) = \infty$ temos $\phi_{\eta_k}(x_k) > t$ para k suficientemente grande e, assim,

$$\widetilde{\pi}_{\eta_k}(t)x_k = \pi_{\eta_k}(t)x_k \to \pi_0(t)x_0 = \widetilde{\pi}_0(t)x_0,$$

e o resultado segue tomando $\epsilon_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Nos resta então provar o caso quando $\phi_0(x_0) < \infty$. Para isso, analisaremos três casos.

Caso 1. $0 \leqslant t < \phi_0(x_0)$.

Neste caso, para k suficientemente grande, temos $t < \phi_{\eta_k}(x_k)$. Tomando $\epsilon_k = 0$ para $k \in \mathbb{N}$ temos

$$\widetilde{\pi}_{\eta_k}(t+\epsilon_k)x_k = \widetilde{\pi}_{\eta_k}(t)x_k = \pi_{\eta_k}(t)x_k \to \pi_0(t)x_0 = \widetilde{\pi}_0(t)x_0,$$

e este caso está provado.

Para os dois casos restantes vamos provar, primeiramente, que existe $\mathbb{R} \ni \alpha_k \to 0$ tal que $\widetilde{\pi}_{\eta_k}(t+\alpha_k)x_k \to \widetilde{\pi}_0(t)x_0$.

Caso 2. $t = \phi_0(x_0)$.

Tomando $t_k = \phi_{\eta_k}(x_k)$ temos $t_k \to t$, e assim $\pi_{\eta_k}(t_k)x_k \to \pi_0(t)x_0$ pela continuidade de $\{\pi_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ em $\eta = 0$. Como $\{M_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ é coletivamente fechada em $\eta = 0$ e $\{I_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ é coletivamente contínua em $\eta = 0$, obtemos

$$\widetilde{\pi}_{\eta_k}(t_k)x_k = I_{\eta_k}(\pi_{\eta_k}(t_k)x_k) \to I_0(\pi_0(t)x_0) = \widetilde{\pi}_0(t)x_0.$$

Definindo $\alpha_k = \phi_{\eta_k}(x_k) - \phi_0(x_0) = t_k - t$ para $k \in \mathbb{N}$, este caso está demonstrado.

Caso 3. $t > \phi_0(x_0)$.

Neste caso, lembrando da definição de trajetória impulsiva, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $t = \sum\limits_{i=0}^{m-1} \phi_0((x_0)_i^+) + t'$ com $0 \leqslant t' < \phi_0((x_0)_m^+)$, onde $(x_0)_0^+ = x_0$. Como no Caso 2, obtemos

$$(x_k)_1^+ = I_{\eta_k}(\pi_{\eta_k}(\phi_{\eta_k}(x_k)x_k)) \to I_0(\pi_0(\phi_0(x_0))x_0) = (x_0)_1^+.$$

Como $(x_0)_1^+ \in \Omega_0$, do Teorema 4.4 segue que $\phi_{\eta_k}((x_k)_1^+) \to \phi_0((x_0)_1^+)$. Aplicando novamente os mesmos argumentos do Caso 2, obtemos

$$(x_k)_2^+ = I_{\eta_k}(\pi_{\eta_k}(\phi_{\eta_k}((x_k)_1^+))(x_k)_1^+) \to I_0(\pi_0(\phi_0((x_0)_1^+))(x_0)_1^+) = (x_0)_2^+ \in \Omega_0.$$

Continuando com esse processo, obtemos $\phi_{\eta_k}((x_k)_i^+) \to \phi_0((x_0)_i^+)$ e

$$(x_k)_i^+ = I_{\eta_k}(\pi_{\eta_k}(\phi_{\eta_k}(x_k)_{i-1}^+)(x_k)_{i-1}^+) \to I_0(\pi_0(\phi_0((x_0)_{i-1}^+))(x_0)_{i-1}^+) = (x_0)_i^+ \in \Omega_0,$$

para $i = 1, \ldots, m-1$. Tomando $t_k = \sum_{i=0}^{m-1} \phi_{\eta_k}((x_k)_i^+)$, então $t_k \to \sum_{i=0}^{m-1} \phi_0((x_0)_i^+) = t - t'$, e assim definimos $\alpha_k = t_k + t' - t$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Claramente $\alpha_k \to 0$ e $t + \alpha_k = t_k + t' \geqslant 0$. Como para k suficientemente grande $t' < \phi_{\eta_k}((x_k)_m^+)$, obtemos

$$\begin{aligned}\widetilde{\pi}_{\eta_k}(t+\alpha_k) =& \widetilde{\pi}_{\eta_k}(t'+t_k)x_k = \widetilde{\pi}_{\eta_k}(t')\widetilde{\pi}_{\eta_k}(t_k)x_k = \widetilde{\pi}(t')(x_k)_m^+ \\ =& \pi_{\eta_k}(t')(x_k)_m^+ \to \pi_0(t')(x_0)_m^+ = \widetilde{\pi}_0(t)x_0,\end{aligned}$$

e este caso está provado.

Para os Casos 2 e 3, provamos que existe $\mathbb{R} \ni \alpha_k \to 0$ com $y_k := \widetilde{\pi}_{\eta_k}(t+\alpha_k)x_k \to \widetilde{\pi}_0(t)x_0 := y_0$. Temos $y_0 \in \Omega_0$, e definindo $\epsilon_k := \alpha_k + |\alpha_k|$ para cada $k \in \mathbb{N}$, obtemos $\epsilon_k \geqslant 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e, usando o Lema 4.2 **(c)**, temos

$$\widetilde{\pi}_{\eta_k}(t+\epsilon_k)x_k = \widetilde{\pi}_{\eta_k}(|\alpha_k|)y_k \to y_0 = \widetilde{\pi}_0(t)x_0,$$

e o resultado está provado. □

Observação 4.6. Note que se t não é nenhum tempo de salto de x_0 então podemos tomar $\epsilon_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. De fato, se t não for nenhum tempo de salto de x_0, podemos assumir que $t = \sum_{i=0}^{m-1} \phi_0((x_0)_i^+) + t'$ com $0 < t' < \phi_0((x_0)_m^+)$. Usando o fato de que $t > \sum_{i=0}^{m-1} \phi_0((x_0)_i^+)$ e $t_k = \sum_{i=0}^{m-1} \phi_{\eta_k}((x_k)_i^+) \to \sum_{i=0}^{m-1} \phi_0((x_0)_i^+)$, temos $t_k < t$ para k suficientemente grande. Assim $0 \leqslant t - t_k = \sum_{i=0}^{m-1} \phi_0((x_0)_i^+) + t' - t_k$ e, portanto, $t - t_k < \phi_{\eta_k}((x_k)_m^+)$. Logo,

$$\begin{aligned}\widetilde{\pi}_{\eta_k}(t)x_k =& \widetilde{\pi}_{\eta_k}(t-t_k)\widetilde{\pi}_{\eta_k}(t_k)x_k = \widetilde{\pi}_{\eta_k}(t-t_k)(x_k)_m^+ \\ =& \pi_{\eta_k}(t-t_k)(x_k)_m^+ \to \pi_0(t')(x_0)_m^+ = \widetilde{\pi}_0(t)x_0.\end{aligned}$$

4.1 SEMICONTINUIDADE SUPERIOR

Veremos condições para obter a semicontinuidade superior para os atratores globais de uma família de semigrupos impulsivos. Os resultados apresentados aqui foram adaptados de (BONOTTO, E. M. *et al.*, 2016b; BORTOLAN; UZAL, José Manuel, 2021).

Começaremos com a definição de semicontinuidade superior para o caso impulsivo. No que segue, a menos que dito o contrário, assumiremos que:

> Para cada $\eta \in [0,1]$, o semigrupo $\widetilde{\pi}_\eta$ em Ω_η possui um atrator global $\mathcal{A}_\eta$.

Definição 4.7. Dizemos que a família de atratores globais $\{\mathcal{A}_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ é **semicontínua superiormente em** $\eta = 0$ se

$$\lim_{\eta\to 0} d_H(\mathcal{A}_\eta, \mathcal{A}_0) = 0.$$

Lema 4.8. *As seguintes condições são equivalentes:*

- *a família* $\{\mathcal{A}_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ *é semicontínua superiormente em* $\eta = 0$*;*
- *dadas* $\eta_k \to 0$ *e* $x_k \in \mathcal{A}_{\eta_k}$ *para cada* $k \in \mathbb{N}$*, existe uma subsequência de* $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *que converge para um ponto de* $\overline{\mathcal{A}_0}$*.*

Demonstração. Suponha que $\{\mathcal{A}_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ é semicontínua superiormente em $\eta = 0$. Se $\eta_k \to 0$ e $x_k \in \mathcal{A}_{\eta_k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, então

$$d(x_k, \mathcal{A}_0) \leqslant d_H(\mathcal{A}_{\eta_k}, \mathcal{A}_0) \to 0.$$

Como $\overline{\mathcal{A}_0}$ é compacto, obtemos facilmente que $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ possui subsequência convergente para algum ponto de $\overline{\mathcal{A}_0}$.

Reciprocamente, assuma por contradição que $\{\mathcal{A}_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ não é semicontínua superiormente em $\eta = 0$. Desta maneira, existem $\epsilon > 0$, $\eta_k \to 0$, $x_k \in \mathcal{A}_{\eta_k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_k, \mathcal{A}_0) \geqslant \epsilon \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Assim, nenhuma subsequência de $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ poderia ter uma subsequência convergente para algum ponto de $\overline{\mathcal{A}_0}$. □

Para obter a propriedade de semicontinuidade superior, precisaremos da seguinte definição:

Definição 4.9. Seja $\{\widetilde{\pi}_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ uma família de semigrupos impulsivos. Diremos que $\{\widetilde{\pi}_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ é:

(a) **coletivamente assintoticamente compacta em** $\eta = 0$ se para quaisquer sequências $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ limitada, $\eta_k \to 0$ e $t_k \to \infty$, com $\{\widetilde{\pi}_{\eta_k}(t_k)x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ limitada em X, temos a sequência $\{\widetilde{\pi}_{\eta_k}(t_k)x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ possuindo uma subsequência convergente em X;

(b) **uniformemente dissipativa** se existe um subconjunto não vazio e limitado B_0 de X que $\widetilde{\pi}_\eta$-absorve todos os conjuntos limitados de X para cada $\eta \in [0, 1]$.

Note que se $\{\widetilde{\pi}_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ é uniformemente dissipativa e $\mathcal{A}_\eta$ é o atrator global de $\widetilde{\pi}_\eta$ para cada $\eta \in [0, 1]$, então segue diretamente que $\cup_{\eta\in[0,1]}\mathcal{A}_\eta$ é limitada em X.

Lema 4.10. *Assuma que*

- $\{\widetilde{\pi}_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ *é coletivamente assintoticamente compacta em* $\eta = 0$*;*
- $\cup_{\eta\in[0,1]}\mathcal{A}_\eta$ *é limitada em* X*.*

Então dadas $\eta_k \to 0$ *e* $x_k \in \mathcal{A}_{\eta_k}$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$*, a sequência* $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *possui subsequência convergente em* X*.*

Demonstração. Como $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \cup_{\eta\in[0,1]}\mathcal{A}_\eta$, ela é limitada. Além disso, da $\widetilde{\pi}_\eta$-invariância de $\mathcal{A}_\eta$, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $y_k \in \mathcal{A}_{\eta_k}$ tal que $\widetilde{\pi}_{\eta_k}(k)y_k = x_k$. Note que $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ também é limitada e, usando a compacidade assintótica coletiva em $\eta = 0$ de $\{\widetilde{\pi}_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$, a sequência $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} = \{\widetilde{\pi}_{\eta_k}(k)y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ possui subsequência convergente em X. □

Proposição 4.11. *Assuma que*

- $\{\pi_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ *é contínua em* $\eta = 0$*;*
- $\{\widetilde{\pi}_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ *é coletivamente assintoticamente compacta em* $\eta = 0$ *e uniformemente dissipativa;*
- $\{M_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ *é coletivamente fechada em* $\eta = 0$*;*
- $\{I_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ *é coletivamente contínua em* $\eta = 0$*;*
- *suponha ainda que vale* (CT) *e que*

$$\text{existe } \delta > 0 \text{ tal que } \phi_\eta(x) \geqslant 2\delta \text{ para todo } x \in I_\eta(M_\eta) \text{ e } \eta \in [0,1]. \tag{CH}$$

Assim, dados $\eta_k \to 0$*,* $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ *limitada e* $t_k \to \infty$ *com* $\widetilde{\pi}_{\eta_k}(t_k)x_k \to x_0 \in M_0$*, temos* $\phi_{\eta_k}(\widetilde{\pi}_{\eta_k}(t_k)x_k) \to 0$.

Demonstração. Para cada $k \in \mathbb{N}$, denotamos por τ_k o último tempo de salto de x_k relativo a π_{η_k} no intervalo $[0, t_k + \frac{\delta}{2}]$, sendo $\delta > 0$ dado pela condição (CH). Se não existe tempo de salto tomamos $\tau_k = 0$. Temos os seguintes casos:

Caso 1. Existe $0 < \epsilon < \frac{\delta}{2}$ tal que, a menos de subsequências, $\tau_k \leqslant t_k - \epsilon$.

Neste caso, temos $\tau_k < t_k - \frac{\epsilon}{2}$ e como τ_k é o último tempo de salto de x_k relativo a π_{η_k} no intervalo $[0, t_k + \frac{\delta}{2}]$, obtemos

$$\widetilde{\pi}_{\eta_k}(t_k)x_k = \widetilde{\pi}_{\eta_k}(\tfrac{\epsilon}{2})\widetilde{\pi}_{\eta_k}(t_k - \tfrac{\epsilon}{2})x_k = \pi_{\eta_k}(\tfrac{\epsilon}{2})y_k,$$

sendo $y_k := \widetilde{\pi}_{\eta_k}(t_k - \frac{\epsilon}{2})x_k$. Da dissipatividade uniforme segue que $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada e a compacidade assintótica coletiva nos garante a existência de um ponto $y_0 \in X$ tal que $y_k \to y_0$, a menos de subsequências.

Como $\pi_{\eta_k}(\frac{\epsilon}{2})y_k = \widetilde{\pi}_{\eta_k}(t_k)x_k \to x_0 \in M_0$, da condição (CT), existe $\alpha_k \to 0$ com $\frac{\epsilon}{2} + \alpha_k > 0$ tal que $\pi_{\eta_k}(\frac{\epsilon}{2} + \alpha_k)y_k \in M_{\eta_k}$, a menos de subsequências. Para k suficientemente grande, temos $\alpha_k < \frac{\delta}{2}$ e, assim,

$$\widetilde{\pi}_{\eta_k}(t_k + \alpha_k)x_k = \widetilde{\pi}_{\eta_k}(\tfrac{\epsilon}{2} + \alpha_k)y_k = \pi_{\eta_k}(\tfrac{\epsilon}{2} + \alpha_k)y_k \in M_{\eta_k},$$

o que é uma contradição. Portanto, este caso não pode ocorrer.

Caso 2. Existe $0 < \epsilon < \frac{\delta}{2}$ tal que, a menos de subsequências, $\tau_k \geqslant t_k + \epsilon$.

Neste caso, temos $t_k + \epsilon \leqslant \tau_k \leqslant t_k + \frac{\delta}{2}$ e podemos assumir, sem perda de generalidade, que $\tau_k - t_k \to s \in [\epsilon, \frac{\delta}{2}]$. Considere $y_k := \widetilde{\pi}_{\eta_k}(t_k - \delta)x_k$ e assim, como no Caso 1, segue que $y_k \to y_0$, a menos de subsequências. Como $(t_k + \frac{\delta}{2}) - (t_k - \delta) = \frac{3\delta}{2} < 2\delta$, a condição (CH) implica que τ_k é o único tempo salto de x_k relativo a π_{η_k} no intervalo $[t_k - \delta, t_k + \frac{\delta}{2}]$.

Note que $\phi_{\eta_k}(y_k) = \tau_k - t_k + \delta$ é o tempo de impacto de y_k, então

$$M_{\eta_k} \ni \pi_{\eta_k}(\tau_k - t_k + \delta)y_k \to \pi_0(s + \delta)y_0,$$

e sendo $\{M_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ coletivamente fechada em $\eta = 0$, obtemos $\pi_0(s+\delta)y_0 \in M_0$. Vamos mostrar agora que $\pi_0(t)y_0 \notin M_0$ para $t \in (0, s+\delta)$. De fato, se para algum $t \in (0, s+\delta)$ isso não ocorresse, como $y_k \to y_0$ e $\pi_{\eta_k}(t)y_k \to \pi_0(t)y_0 \in M_0$, a condição (CT) implica na existência de uma sequência $\alpha_k \to 0$ com $t+\alpha_k > 0$ tal que $\pi_{\eta_k}(t+\alpha_k)y_k \in M_{\eta_k}$, a menos de subsequências. Tomando $\beta > 0$ de modo que $t+\beta < s+\delta$, segue para k suficientemente grande, que $t+\alpha_k < t+\beta < \tau_k - t_k + \delta$, o que contraria o fato de que $\tau_k - t_k + \delta$ é tempo de impacto de y_k, e assim segue que $\pi_0(t)y_0 \notin M_0$ para $t \in (0, s+\delta)$. Isso prova a nossa afirmação e, portanto, obtemos que o tempo de impacto de y_0 é $\phi_0(y_0) = s+\delta$.

Agora,

$$\widetilde{\pi}_{\eta_k}(t_k)x_k = \widetilde{\pi}_{\eta_k}(\delta)\widetilde{\pi}_{\eta_k}(t_k-\delta)x_k = \widetilde{\pi}_{\eta_k}(\delta)y_k = \pi_{\eta_k}(\delta)y_k,$$

e fazendo $k \to \infty$, obtemos $M_0 \ni x_0 = \pi_0(\delta)y_0$, o que é uma contradição, pois $\phi_0(y_0) = s+\delta$ e $\delta < s+\delta$. Portanto, este caso não pode ocorrer.

Caso 3. $t_k - \tau_k \to 0$.

Subcaso 3.1. $\tau_k \leqslant t_k$, a menos de subsequências.

Definindo as sequências $z_k := \widetilde{\pi}_{\eta_k}(\tau_k)x_k \in I_{\eta_k}(M_{\eta_k})$ e $y_k := \widetilde{\pi}_{\eta_k}(t_k-\delta)x_k$, da dissipatividade uniforme segue que $\{z_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ e $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ são limitadas e, portanto, da compacidade assintótica coletiva podemos assumir que, a menos de subsequências, $z_k \to z_0$ e $y_k \to y_0$. Além disso, para k grande o suficiente $\tau_k - t_k + \delta > 0$ e, da condição (CH), τ_k é o único tempo de salto de x_k relativo a π_{η_k} em $[t_k - \delta, t_k + \frac{\delta}{2}]$. Isso nos dá que o tempo de impacto de y_k é $\phi_{\eta_k}(y_k) = \tau_k - t_k + \delta$. Logo

$$z_k = \widetilde{\pi}_{\eta_k}(\tau_k - t_k + \delta)y_k = I_{\eta_k}(\pi_{\eta_k}(\tau_k - t_k + \delta)y_k) \to I_0(\pi_0(\delta)y_0).$$

Então, $z_0 = I_0(\pi_0(\delta)y_0)$ e assim $z_0 \in \Omega_0$.

Por outro lado, da condição (CH) temos

$$\widetilde{\pi}_{\eta_k}(t)z_k = \pi_{\eta_k}(t)z_k, \text{ para todo } t \in [0, 2\delta).$$

Para k suficientemente grande, temos $t_k - \tau_k < 2\delta$ e assim

$$\widetilde{\pi}_{\eta_k}(t_k)x_k = \widetilde{\pi}_{\eta_k}(t_k - \tau_k)z_k = \pi_{\eta_k}(t_k - \tau_k)z_k \to z_0,$$

logo $M_0 \ni x_0 = z_0$ e temos uma contradição e, portanto, este subcaso não pode ocorrer.

Subcaso 3.2. $\tau_k > t_k$, a menos de subsequências.

Seja τ_{k-1} o penúltimo tempo de salto de x_k relativo a π_{η_k} no intervalo $[0, t_k + \frac{\delta}{2}]$, se não existe tal tempo de salto tomamos $\tau_{k-1} = 0$. Da condição (CH) podemos assumir que $\tau_{k-1} < t_k$, e usando a definição de trajetória impulsiva para $t \in [\tau_{k-1}, \tau_k)$, temos

$$\widetilde{\pi}_{\eta_k}(t)x_k = \pi_{\eta_k}(t - \tau_{k-1})z_k^+,$$

com $z_k^+ \in I_{\eta_k}(M_{\eta_k})$ e $\tau_k = \tau_{k-1} + \phi_{\eta_k}(z_k^+)$.

Em particular,

$$\widetilde{\pi}_{\eta_k}(t_k)x_k = \pi_{\eta_k}(t_k - \tau_{k-1})z_k^+.$$

Para $s \in (0, \tau_k - t_k)$, temos $0 < s + t_k - \tau_{k-1} < \tau_k - \tau_{k-1} = \phi_{\eta_k}(z_k^+)$ e assim

$$\pi_{\eta_k}(s)\widetilde{\pi}_{\eta_k}(t_k)x_k = \pi_{\eta_k}(s + t_k - \tau_{k-1})z_k^+ \notin M_{\eta_k},$$

e

$$\pi_{\eta_k}(\tau_k - t_k)\widetilde{\pi}_{\eta_k}(t_k)x_k = \pi_{\eta_k}(\tau_k - \tau_{k-1})z_k^+ = \pi_{\eta_k}(\phi_{\eta_k}(z_k^+))z_k^+ \in M_{\eta_k}.$$

Concluímos então que $\phi_{\eta_k}(\widetilde{\pi}_{\eta_k}(t_k)x_k) = \tau_k - t_k \to 0$, e o resultado está provado. □

Corolário 4.12. *Nas mesmas hipóteses da Proposição 4.11. Dadas sequências $\eta_k \to 0$ e $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}_{\eta_k}$ tal que $x_k \to x_0 \in M_0$ então $\phi_{\eta_k}(x_k) \to 0$.*

Demonstração. Basta notar que existe $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}_{\eta_k}$ tal que $\widetilde{\pi}_{\eta_k}(k)y_k = x_k$, e a Proposição 4.11 se aplica. □

Provaremos agora a continuidade superior em $\eta = 0$ para uma coleção de atratores globais de uma família de semigrupos impulsivos.

Teorema 4.13. *Assuma que:*

- $\{\pi_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ *é contínua em* $\eta = 0$*;*
- $\{\widetilde{\pi}_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ *é coletivamente assintoticamente compacta em* $\eta = 0$ *e uniformemente dissipativa;*
- $\{M_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ *é coletivamente fechada em* $\eta = 0$*;*
- $\{I_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ *é coletivamente contínua em* $\eta = 0$*;*
- *valem* (CT) *e* (CH).

Então a família $\{\mathcal{A}_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ *é semicontínua superiormente em* $\eta = 0$.

Demonstração. Considere as sequências $\eta_k \to 0$ e $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ com $x_k \in \mathcal{A}_{\eta_k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Vamos mostrar que existe uma subsequência de $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ que converge para um ponto de $\overline{\mathcal{A}_0}$, e assim de acordo com o Lema 4.8 o resultado segue.

Como $x_k \in \mathcal{A}_{\eta_k}$, do Lema 4.10 existe $x_0 \in X$ e uma subsequência de $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, que denotamos a mesma, tal que $x_k \to x_0$. Precisamos mostrar que $x_0 \in \overline{\mathcal{A}_0}$.

Seja $\xi_k \colon \mathbb{R} \to \mathcal{A}_{\eta_k}$ a solução global limitada de $\widetilde{\pi}_{\eta_k}$ por x_k e, para cada inteiro positivo m, defina $(x_k)_{-m} := \xi_k(-m)$. Tomando $(x_k)_0 := x_k$, para cada inteiro positivo m temos

$$\widetilde{\pi}_{\eta_k}(1)(x_k)_{-m} = \widetilde{\pi}(1)\xi_k(-m) = \xi_k(-m+1) = (x_k)_{-m+1}.$$

Como $(x_k)_{-m} \in \mathcal{A}_{\eta_k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$, usando o Lema 4.10 e um processo de diagonalização, para cada inteiro positivo m existe $(x_0)_{-m} \in X$ tal que

$$(x_k)_{-m} \xrightarrow{k\to\infty} (x_0)_{-m}. \tag{4.1}$$

Definindo $(x_0)_0 := x_0$, a convergência acima vale também para $m = 0$.

CASO 1. $x_0 \in \Omega_0$.

Subcaso 1.1. Existe uma sequência estritamente crescente $\{m_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de inteiros não-negativos, com $m_0 = 0$, tal que $(x_0)_{-m_j} \in \Omega_0$ para todo $j \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Fixemos $j \in \mathbb{N}_0$. Usando (4.1) e o fato de que $(x_0)_{-m_j} \in \Omega_0$, segue da Proposição 4.5 que existe uma sequência $\epsilon_k \to 0$ tal que

$$\widetilde{\pi}_{\eta_k}(m_{j+1} - m_j + \epsilon_k)(x_k)_{-m_{j+1}} \to \widetilde{\pi}_0(m_{j+1} - m_j)(x_0)_{-m_{j+1}}.$$

Por outro lado, como $\widetilde{\pi}_{\eta_k}(m_{j+1} - m_j)(x_k)_{-m_{j+1}} = (x_k)_{-m_j}$, obtemos do Lema 4.2 que

$$\widetilde{\pi}_{\eta_k}(m_{j+1} - m_j + \epsilon_k)(x_k)_{-m_{j+1}} = \widetilde{\pi}_{\eta_k}(\epsilon_k)(x_k)_{-m_j} \to (x_0)_{-m_j},$$

e concluímos que $\widetilde{\pi}_0(m_{j+1} - m_j)(x_0)_{-m_{j+1}} = (x_0)_{-m_j}$.

Com isso definimos $\xi_0 \colon \mathbb{R} \longrightarrow X$ por

$$\xi_0(t) = \begin{cases} \widetilde{\pi}_0(t)x_0 & \text{se } \ t \geqslant 0 \\ \widetilde{\pi}_0(t + m_{j+1})(x_0)_{-m_{j+1}} & \text{se } \ t \in [-m_{j+1}, -m_j], \ j \in \mathbb{N}_0. \end{cases}$$

É simples verificar que ξ_0 é uma solução global de $\widetilde{\pi}_0$ por x_0 (o argumento é análogo ao utilizado na prova da Proposição 2.17). Para garantir que $x_0 \in \mathcal{A}_0$ basta mostrar que ξ_0 é limitada (pela Proposição 2.17) e, para isso, vamos verificar que $\xi_0(\mathbb{R}) \subset \overline{\bigcup_{\eta\in[0,1]} \mathcal{A}_\eta}$. Para $s \geqslant 0$, da Proposição 4.5, obtemos $\gamma_k \to 0$ tal que

$$\xi_k(s + \gamma_k) = \widetilde{\pi}_{\eta_k}(s + \gamma_k)x_k \to \widetilde{\pi}_0(s)x_0 = \xi_0(s),$$

e como $\xi_k(s + \gamma_k) \in \mathcal{A}_{\eta_k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$, obtemos $\xi_0(s) \in \overline{\bigcup_{\eta\in[0,1]} \mathcal{A}_\eta}$. Agora, se $s \in [-m_{j+1}, -m_j]$ para algum $j \in \mathbb{N}$, então $\xi_0(s) = \widetilde{\pi}_0(s+m_{j+1})(x_0)_{-m_{j+1}}$, e da Proposição 4.5 existe uma sequência $\theta_k \to 0$ de modo que

$$\xi_k(s + m_{j+1} + \theta_k) = \widetilde{\pi}_{\eta_k}(s + m_{j+1} + \theta_k)(x_k)_{-m_{j+1}} \to \widetilde{\pi}_0(s + m_{j+1})(x_0)_{-m_{j+1}} = \xi_0(s),$$

e como acima, obtemos $\xi_0(s) \in \overline{\bigcup_{\eta\in[0,1]} \mathcal{A}_\eta}$. Portanto, ξ_0 é uma solução global limitada de $\widetilde{\pi}_0$ por x_0 e, assim, $x_0 \in \mathcal{A}_0$.

Subcaso 1.2. Existe um inteiro positivo m_1 tal que $(x_0)_{-m} \in M_0$ para todo $m \geqslant m_1$.

Segue do Corolário 4.12 que para $m \geqslant m_1$ temos

$$s_{k,m} := \phi_{\eta_k}((x_k)_{-m}) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

e definindo $w_{k,m} := \pi_{\eta_k}(s_{k,m})(x_k)_{-m} \in M_{\eta_k}$, temos $w_{k,m} \to (x_0)_{-m} \in M_0$ e

$$I_{\eta_k}(w_{k,m}) \to I_0((x_0)_{-m}) \in \Omega_0,$$

usando a continuidade coletiva de $\{I_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$.

Segue do Teorema 4.4 que $\phi_{\eta_k}(I_{\eta_k}(w_{k,m})) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \phi_0(I_0((x_0)_{-m}))$ para cada $m \geqslant m_1$. Assim, para $\beta \in (0, \min\{2\delta, 1\})$, como $\phi_0(I_0((x_0)_{-m})) \geqslant 2\delta > \beta$ (pela condição (CH)), obtemos

$$\phi_{\eta_k}(I_{\eta_k}(w_{k,m})) > \beta > s_{k,m} \quad \text{para } k \text{ suficientemente grande.}$$

Renomeando os índices, assumimos que a desigualdade acima vale para todo $k \in \mathbb{N}$.

Para cada $m \geqslant m_1$ e $k \in \mathbb{N}$, definimos

$$(y_k)_{-m} := \xi_k(\beta - m) \quad \text{e} \quad (y_0)_{-m} := \widetilde{\pi}(\beta) I_0((x_0)_{-m}).$$

Como $\beta - s_{k,m} < \phi_{\eta_k}(I_{\eta_k}(w_{k,m}))$ obtemos

$$\begin{aligned}(y_k)_{-m} &= \xi_k(\beta - m) = \widetilde{\pi}(\beta)\xi_k(-m) = \widetilde{\pi}(\beta)(x_k)_{-m} = \widetilde{\pi}_{\eta_k}(\beta - s_{k,m})\widetilde{\pi}_{\eta_k}(s_{k,m})(x_k)_{-m} \\ &= \widetilde{\pi}_{\eta_k}(\beta - s_{k,m}) I_{\eta_k}(\pi_{\eta_k}(s_{k,m})(x_k)_{-m}) = \pi_{\eta_k}(\beta - s_{k,m}) I_{\eta_k}(w_{k,m}),\end{aligned}$$

o que nos dá

$$(y_k)_{-m} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \pi_0(\beta) I_0((x_0)_{-m}) = \widetilde{\pi}(\beta) I_0((x_0)_{-m}) = (y_0)_{-m} \notin M_0.$$

Fixado $m > m_1$, veja que $\widetilde{\pi}_{\eta_k}(1)(y_k)_{-m} = (y_k)_{-m+1}$ para cada $k \in \mathbb{N}$ e, portanto, segue da Proposição 4.5 que existe $\epsilon_k \to 0$ tal que $\widetilde{\pi}(1 + \epsilon_k)(y_k)_{-m} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \widetilde{\pi}(1)(y_0)_{-m}$. Por outro lado, se usarmos o Lema 4.2, obtemos

$$\widetilde{\pi}(1 + \epsilon_k)(y_k)_{-m} = \widetilde{\pi}(\epsilon_k)\widetilde{\pi}(1)(y_k)_{-m} = \widetilde{\pi}(\epsilon_k)(y_k)_{-m+1} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} (y_0)_{-m+1},$$

e, assim, $\widetilde{\pi}(1)(y_0)_{-m} = (y_0)_{-m+1}$ para cada $m > m_1$.

Como $\beta < 1 \leqslant m_1$, segue da Proposição 4.5 que existe $\gamma_k \to 0$ tal que

$$\widetilde{\pi}(m_1 - \beta + \gamma_k)(y_k)_{-m_1} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \widetilde{\pi}(m_1 - \beta)(y_0)_{-m_1}.$$

Por outro lado, usando o Lema 4.2, obtemos

$$\widetilde{\pi}(m_1 - \beta + \gamma_k)(y_k)_{-m_1} = \widetilde{\pi}(m_1 - \beta + \gamma_k)\xi_k(\beta - m_1) = \xi_k(\gamma_k) = \widetilde{\pi}(\gamma_k)x_k \to x_0,$$

ou seja, $\widetilde{\pi}(m_1 - \beta)(y_0)_{-m_1} = x_0$.

Definimos então $\xi_0 \colon \mathbb{R} \to X$ por

$$\xi_0(t) = \begin{cases} \widetilde{\pi}_0(t)x_0 & \text{se } t \geqslant 0, \\ \widetilde{\pi}_0(t + m_1 - \beta)(y_0)_{-m_1} & \text{se } t \in [\beta - m_1, 0], \\ \widetilde{\pi}_0(t + m - \beta)(y_0)_{-m} & \text{se } t \in [\beta - m, \beta - m + 1],\ m > m_1. \end{cases}$$

Como no *Subcaso 1.1*, vemos que ξ_0 é uma solução global limitada de $\widetilde{\pi}$ por x_0, mostrando que $x_0 \in \mathcal{A}_0$, e este caso está provado.

Caso 2. $x_0 \in M_0$.

Usando o Corolário 4.12, temos $\phi_{\eta_k}(x_k) \to 0$ e podemos assumir, sem perda de generalidade, que $0 < \phi_{\eta_k}(x_k) < \frac{\delta}{4}$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Tomando $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{m_0} < \frac{\delta}{2}$ e fixando $m \geqslant m_0$, definimos $w_{k,m} := \xi_k(-\frac{1}{m}) \in \mathcal{A}_{\eta_k}$. Do Lema 4.10, existem uma subsequência de $\{w_{k,m}\}_{k\in\mathbb{N}}$, que denotamos a mesma, e um ponto $w_m^0 \in X$ tal que $w_{k,m} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} w_m^0$, para cada $m \geqslant m_0$.

Afirmamos que para cada $m \geqslant m_0$ existe $k_1 = k_1(m) \in \mathbb{N}$ tal que $\phi_{\eta_k}(w_{k,m}) > \frac{1}{m}$ para todo $k \geqslant k_1$. De fato, se isso não for verdade, para algum $m \geqslant m_0$ existe uma subsequência de $\{w_{k,m}\}_{k\in\mathbb{N}}$, que denotamos igual, tal que $\phi_{\eta_k}(w_{k,m}) \leqslant \frac{1}{m}$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Portanto, a menos de subsequências, podemos assumir que $\phi_{\eta_k}(w_{k,m}) \to \alpha \in [0, \frac{1}{m}]$ e definindo $z_{k,m} := \pi_{\eta_k}(\phi_{\eta_k}(w_{k,m}))w_{k,m} \in M_{\eta_k}$, temos $z_{k,m} \to \pi_0(\alpha)w_m^0 := z_m^0 \in M_0$ e considerando $v_{k,m} := \tilde{\pi}_{\eta_k}(\phi_{\eta_k}(w_{k,m}))w_{k,m} = I_{\eta_k}(z_{k,m})$, então $v_{k,m} \to I_0(z_m^0) := v_m^0$. Por hipótese, $\phi_0(v_m^0) \geqslant 2\delta$ e do Teorema 4.4 para k suficientemente grande temos

$$\phi_{\eta_k}(v_{k,m}) \geqslant \frac{1}{2}\phi_0(v_m^0) \geqslant \delta > \frac{1}{m}.$$

Logo para k suficientemente grande, temos

$$\begin{aligned}
\pi_{\eta_k}(\phi_{\eta_k}(x_k) + \tfrac{1}{m} - \phi_{\eta_k}(w_{k,m}))v_{k,m} &= \pi_{\eta_k}(\phi_{\eta_k}(x_k))\pi_{\eta_k}(\tfrac{1}{m} - \phi_{\eta_k}(w_{k,m}))v_{k,m} \\
&\overset{(*)}{=} \pi_{\eta_k}(\phi_{\eta_k}(x_k))\tilde{\pi}_{\eta_k}(\tfrac{1}{m} - \phi_{\eta_k}(w_{k,m}))v_{k,m} \\
&= \pi_{\eta_k}(\phi_{\eta_k}(x_k))\tilde{\pi}_{\eta_k}(\tfrac{1}{m})w_{k,m} \\
&= \pi_{\eta_k}(\phi_{\eta_k}(x_k))x_k \in M_{\eta_k},
\end{aligned}$$

onde em $(*)$ usamos o fato de que $\frac{1}{m} - \phi_{\eta_k}(w_{k,m}) < \frac{1}{m} < \delta$ e $v_{k,m} \in I_{\eta_k}(M_{\eta_k})$. Isso implica que

$$\phi_{\eta_k}(v_{k,m}) \leqslant \phi_{\eta_k}(x_k) + \frac{1}{m} - \phi_{\eta_k}(w_{k,m}) < \phi_{\eta_k}(x_k) + \frac{1}{m} < \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{2} = \frac{3\delta}{4} < \delta,$$

o que contraria $\phi_{\eta_k}(v_{k,m}) \geqslant \delta$, e a afirmação está provada.

Da afirmação, para $k \geqslant k_1$ temos

$$\pi_{\eta_k}(\tfrac{1}{m})w_{k,m} = \tilde{\pi}_{\eta_k}(\tfrac{1}{m})w_{k,m} = \tilde{\pi}_{\eta_k}(\tfrac{1}{m})\xi_k(-\tfrac{1}{m}) = x_k,$$

e fazendo $k \to \infty$, temos

$$\pi_0(\tfrac{1}{m})w_m^0 = x_0, \text{ para } m \geqslant m_0.$$

Se $w_m^0 \in M_0$, como $\mathcal{A}_{\eta_k} \ni w_{k,m} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} w_m^0$, segue do Corolário 4.12 que $\phi_{\eta_k}(w_{k,m}) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, o que contradiz a afirmação de que $\phi_{\eta_k}(w_{k,m}) > \frac{1}{m}$ para todo $k \geqslant k_1$. Agora, sabendo que $w_{k,m} \in \mathcal{A}_{\eta_k}$ e $w_{k,m} \to w_m^0 \in \Omega_0$, fazendo a mesma prova do Caso 1, podemos construir uma solução global limitada de $\tilde{\pi}_0$ por w_m^0 e, portanto, $w_m^0 \in \mathcal{A}_0$ para todo $m \geqslant m_0$. Da compacidade de $\overline{\mathcal{A}_0}$ podemos supor que, a menos de subsequências, $w_m^0 \to w^0 \in \overline{\mathcal{A}_0}$. Logo,

$$x_0 = \lim_{m\to\infty} \pi_0(\tfrac{1}{m})w_m^0 = w^0,$$

e, assim, $x_0 \in \overline{\mathcal{A}_0}$, e a prova está completa. □

4.2 SEMICONTINUIDADE INFERIOR

Seguindo a teoria usual de continuidade desenvolvida para o caso de semigrupos sem impulso, o próximo passo é a *semicontinuidade inferior*, que definimos a seguir. Os resultados apresentados aqui foram adaptados de (BONOTTO, E. M. *et al.*, 2016b), que apresentam a semicontinuidade inferior quando a família de invariantes é formada por pontos de equilíbrio.

Definição 4.14 (Semicontinuidade inferior)**.** Dizemos que a família de atratores globais $\{\mathcal{A}_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ é **semicontínua inferiormente em** $\eta = 0$ se

$$\lim_{\eta\to 0} d_H(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_\eta) = 0.$$

Analogamente à semicontinuidade superior, temos a seguinte caracterização via sequências:

Lema 4.15. *As seguintes condições são equivalentes:*

- $\{\mathcal{A}_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ *é semicontínua inferiormente em* $\eta = 0$*;*
- *dados* $x_0 \in \overline{\mathcal{A}_0}$ *e* $\eta_k \to 0$*, existem uma subsequência* $\{\eta_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ *de* $\{\eta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *e* $x_j \in \mathcal{A}_{\eta_{k_j}}$ *para cada* $j \in \mathbb{N}$ *tal que* $x_j \to x_0$*.*

Demonstração. Assuma primeiramente que $\mathcal{A}_0$ não é semicontínua inferiormente em $\eta = 0$. Então existem $\eta_k \to 0$, $\epsilon > 0$ e uma sequência $\{z_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}_0$ tal que

$$d(z_k, \mathcal{A}_{\eta_k}) \geqslant \epsilon \quad \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Como $\overline{\mathcal{A}_0}$ é compacto podemos assumir, sem perda de generalidade, que $z_k \to x_0 \in \overline{\mathcal{A}_0}$. Assim, por hipótese para esse $x_0 \in \overline{\mathcal{A}_0}$, existe subsequência $\{\eta_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ de $\{\eta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ e existem $x_j \in \mathcal{A}_{\eta_{k_j}}$ para cada $j \in \mathbb{N}$ com $x_j \to x_0$. Temos então

$$\epsilon \leqslant d(z_{k_j}, \mathcal{A}_{\eta_{k_j}}) \leqslant d(z_{k_j}, x_j) \leqslant d(z_{k_j}, x_0) + d(x_0, x_j) \to 0,$$

o que nos dá uma contradição.

Reciprocamente, se $\{\mathcal{A}_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ é semicontínua inferiormente em $\eta = 0$, $x_0 \in \overline{\mathcal{A}_0}$ e $\eta_k \to 0$, então podemos construir uma subsequência $\{\eta_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ de $\{\eta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que

$$d_H(x_0, \mathcal{A}_{\eta_{k_j}}) \leqslant d_H(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_{\eta_{k_j}}) < \frac{1}{j} \quad \text{ para todo } j \in \mathbb{N}.$$

Assim, para cada $j \in \mathbb{N}$ existe $x_j \in \mathcal{A}_{\eta_{k_j}}$ com $d(x_0, x_j) < \frac{1}{j}$ e, portanto, $x_j \to x_0$, o que conclui a demonstração. □

A semicontinuidade inferior, apesar de admitir uma definição simétrica com a da semicontinuidade superior, é significativamente mais complicada de se demonstrar. Para tanto, se faz necessário o conhecimento das estruturas internas de $\mathcal{A}_0$, para que seja possível reproduzi-las nos atratores perturbados $\mathcal{A}_\eta$ e garantir a *não-implosão*, que é a interpretação da semicontinuidade inferior.

No que segue abordaremos o estudo de tais estruturas internas e, para isso, consideremos $\widetilde{\pi}$ um semigrupo impulsivo, com conjunto impulsivo M e função impulso I associados.

Definição 4.16 (Conjunto instável local)**.** Seja E um conjunto $\widetilde{\pi}$-invariante. Fixada uma vizinhança aberta V de E em Ω, o **conjunto instável V-local** de E é definido por

$$\begin{aligned} W^u_V(E) = \{\xi(0)\colon \xi \text{ é uma solução global de } \widetilde{\pi} \text{ com } \xi(s) \in V \text{ para todo } s \leqslant 0 \\ \text{e } \xi(s) \to E \text{ quando } s \to -\infty\}. \end{aligned}$$

Proposição 4.17. *Sejam $\widetilde{\pi}$ um semigrupo impulsivo em Ω com atrator global $\mathcal{A}$ e $E \subset \mathcal{A}$ um conjunto $\widetilde{\pi}$-invariante. Então $W^u_V(E) \subset \mathcal{A}$.*

Demonstração. A demonstração é análoga à da Proposição 3.14. □

Lema 4.18. *Sejam $E \subset \mathcal{A}$ um conjunto $\widetilde{\pi}$-invariante isolado e $x \in W^u(E)$. Então dada V uma vizinhança aberta de E em Ω, existem $\tau > 0$ e $y \in W^u_V(E)$ tal que $\widetilde{\pi}(\tau)y = x$.*

Demonstração. Como $x \in W^u(E)$ existe solução global ξ de $\widetilde{\pi}$ por x com $\xi(s) \to E$ quando $s \to -\infty$. Assim, existe $s_0 \leqslant 0$ tal que $\xi(s) \in V$ para todo $s \leqslant s_0$. Tomando $\tau = -s_0$ e definindo $y := \xi(-\tau)$ e $\psi(s) := \xi(s-\tau)$ para todo $s \in \mathbb{R}$, então ψ é uma solução global de $\widetilde{\pi}$ por y e satisfaz $\psi(s) \in V$ para todo $s \leqslant 0$ e $\psi(s) \to E$ quando $s \to -\infty$. Logo, $y \in W^u_V(E)$ e $\widetilde{\pi}(\tau)y = \widetilde{\pi}(\tau)\xi(-\tau) = \xi(0) = x$, o que completa a demonstração. □

Teorema 4.19. *Assuma que:*

- $\{\pi_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ *é contínua em* $\eta = 0$*;*
- $\{M_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ *é coletivamente fechada em* $\eta = 0$*;*
- $\{I_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ *é coletivamente contínua em* $\eta = 0$*;*
- *vale* (CT).

Além disso, suponha que:

(a) *existe $p \in \mathbb{N}$ tal que para cada $\eta \in [0,1]$ existe uma família separada de $\widetilde{\pi}_\eta$-invariantes isolados $\mathbf{E}_\eta = \{E_{1,\eta}, \cdots, E_{p,\eta}\} \subset \mathcal{A}_\eta$ e uma vizinhança aberta $V_{i,\eta}$ de $E_{i,\eta}$ em Ω_η para cada $i = 1, \ldots, p$ tal que*

$$\lim_{\eta\to 0} \max_{i=1,\cdots,p} d_H(W^u_{V_{i,0}}(E_{i,0}), W^u_{V_{i,\eta}}(E_{i,\eta})) = 0;$$

(b) $\mathcal{A}_0 = \cup_{i=1}^p W^u(E_{i,0})$.

Então a família $\{\mathcal{A}_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ é semicontínua inferiormente em $\eta = 0$.

Demonstração. Sejam $x_0 \in \overline{\mathcal{A}_0}$ e $\eta_k \to 0$. Fixado $j \in \mathbb{N}$, de **(b)** existem $i \in \{1, \cdots, p\}$ e $x_j \in W^u(E_{i,0})$ com $d(x_0, x_j) < \frac{1}{j}$. Como $x_j \in W^u(E_{i,0})$, do Lema 4.18 existem $\tau > 0$ e $y_j \in W^u_{V_{i,0}}(E_{i,0})$ com $\widetilde{\pi}_0(\tau)y_j = x_j$.

De **(a)** segue que existem $z^j_k \in W^u_{V_{i,\eta_k}}(E_{i,\eta_k})$ com $z^j_k \to y_j$ quando $k \to \infty$. Da Proposição 4.17 temos $z^j_k \in \mathcal{A}_{\eta_k}$ e, da Proposição 4.5, existe $\epsilon_k \geqslant 0$ com $\epsilon_k \to 0$ tal que

$$d(\widetilde{\pi}_{\eta_k}(\tau + \epsilon_k)z^j_k, \widetilde{\pi}_0(\tau)y_j) \to 0.$$

Fixamos $k_j > j$ tal que $d(\widetilde{\pi}_{\eta_{k_j}}(\tau+\epsilon_{k_j})z^j_{k_j}, \widetilde{\pi}_0(\tau)y_j) < \frac{1}{j}$. Assim, para $w_j := \widetilde{\pi}_{\eta_{k_j}}(\tau+\epsilon_{k_j})z^j_{k_j} \in \mathcal{A}_{\eta_{k_j}}$, obtemos

$$d(w_j, x_0) \leqslant d(w_j, x_j) + d(x_j, x_0) < \frac{2}{j}.$$

Portanto, construímos $w_j \in \mathcal{A}_{\eta_{k_j}}$ com $w_j \to x_0$ quando $j \to \infty$. Do Lema 4.15, $\{\mathcal{A}_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ é semicontínua inferiormente em $\eta = 0$. $\square$

Com isso, juntando as semicontinuidades superior e inferior, obtemos a *continuidade* da família de atratores globais $\{\mathcal{A}_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ em $\eta = 0$.

Corolário 4.20. *Assuma que:*

- $\{\pi_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ *é contínua em* $\eta = 0$*;*
- $\{\widetilde{\pi}_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ *é coletivamente assintoticamente compacta em* $\eta = 0$ *e uniformemente dissipativa;*
- $\{M_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ *é coletivamente fechada em* $\eta = 0$*;*
- $\{I_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ *é coletivamente contínua em* $\eta = 0$*;*
- *valem* (CH) *e* (CT)*.*

Além disso, suponha que:

(a) *existe* $p \in \mathbb{N}$ *tal que para cada* $\eta \in [0, 1]$ *existe uma família separada de* $\widetilde{\pi}_\eta$*-invariantes isolados* $\mathbf{E}_\eta = \{E_{1,\eta}, \cdots, E_{p,\eta}\} \subset \mathcal{A}_\eta$ *e uma vizinhança aberta* $V_{i,\eta}$ *de* $E_{i,\eta}$ *em* Ω_η *para cada* $i = 1, \ldots, p$ *tais que*

$$\lim_{\eta\to 0} \max_{i=1,\cdots,p} d_H(W^u_{V_{i,0}}(E_{i,0}), W^u_{V_{i,\eta}}(E_{i,\eta})) = 0;$$

(b) $\mathcal{A}_0 = \cup_{i=1}^p W^u(E_{i,0})$.

Então a família $\{\mathcal{A}_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ *é* ***contínua em*** $\eta = 0$*, isto é,*

$$\lim_{\eta\to 0} \left[d_H(\mathcal{A}_\eta, \mathcal{A}_0) + d_H(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_\eta)\right] = 0.$$

4.3 ESTABILIDADE ESTRUTURAL TOPOLÓGICA

Nesta seção, iremos provar a estabilidade estrutural topológica para semigrupos impulsivos, isto é, veremos que a propridade de ser dinamicamente gradiente é estável por perturbação, estendendo assim o Teorema de Carvalho e Langa encontrado em (CARVALHO, Alexandre N.; LANGA, 2009, Theorem 1.5) para o caso impulsivo. Iniciaremos adaptando alguns resultados e o primeiro é uma adaptação coletiva da Proposição 2.23. Lembrando que $\lambda_n(x)$ representa os tempos de salto do ponto x.

Proposição 4.21. *Assuma que:*

- $\{\pi_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ *é contínua em* $\eta = 0$*;*
- $\{M_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ *é coletivamente fechada em* $\eta = 0$*;*
- $\{I_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ *é coletivamente contínua em* $\eta = 0$*;*
- *vale* (CT)*,*

e consideremos $x \in \Omega_0$*,* $t \geqslant 0$ *tal que* $t \neq \lambda_n(x)$ *para todo* n*. Se* $t_k \to t$*, com* $t_k \geqslant 0$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$*,* $x_k \to x$ *e* $\eta_k \to 0$ *então*

$$\widetilde{\pi}_{\eta_k}(t_k)x_k \to \widetilde{\pi}_0(t)x.$$

Demonstração. O caso $t = 0$ é o resultado do Lema 4.2 **(c)**. Assuma então $t > 0$ e escolha n tal que $\lambda_n(x) < t < \lambda_{n+1}(x)$. Como $\phi_{\eta_k}((x_k)_j^+) \to \phi_0(x_j^+)$ para cada j, e $t_k \to t$, podemos assumir que $\lambda_n(x_k) < t_k < \lambda_{n+1}(x_k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Então

$$\widetilde{\pi}_{\eta_k}(t_k)x_k = \pi_{\eta_k}(t_k - \lambda_n(x_k))(x_k)_n^+ \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \pi_0(t - \lambda_n(x))x_n^+ = \widetilde{\pi}_0(t)x.$$

□

O próximo resultado é uma adaptação da Proposição 2.24 e trata do caso quando t é exatamente um ponto de salto de $x \in \Omega_0$. Aqui $\widetilde{\gamma}^{+,0}(x) := \{\widetilde{\pi}_0(t)x \colon t \geqslant 0\}$ denota a semiórbita impulsiva de x pelo semigrupo impulsivo $\widetilde{\pi}_0$.

Proposição 4.22. *Assuma que:*

- $\{\pi_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ *é contínua em* $\eta = 0$*;*
- $\{M_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ *é coletivamente fechada em* $\eta = 0$*;*
- $\{I_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ *é coletivamente contínua em* $\eta = 0$*;*
- *vale* (CT)*,*

e consideremos $x \in \Omega_0$ *e* $t = \lambda_n(x)$ *para algum* $n > 0$*. Se* $t_k \to t$*, com* $t_k \geqslant 0$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$*,* $x_k \to x$ *e* $\eta_k \to 0$ *então* $\{\widetilde{\pi}_{\eta_k}(t_k)x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *possui uma subsequência convergente para algum ponto ou em* $\widetilde{\gamma}^{+,0}(x)$ *ou em* $\overline{\widetilde{\gamma}^{+,0}(x)} \cap M_0$*.*

Demonstração. Separamos a demonstração em dois casos.

Caso 1. A menos de subsequências, $t_k < t$ para $k \in \mathbb{N}$.

Como $\lambda_{n-1}(x) < \lambda_n(x) = t$, $t_k < t$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e $t_k \to t$ então para k suficientemente grande, temos $\lambda_{n-1}(x_k) < t_k$. Dividimos essa prova em dois subcasos.

Subcaso 1.1. A menos de subsequências, $t_k < \lambda_n(x_k)$ para $k \in \mathbb{N}$.

Neste subcaso, podemos definir $s_k := t_k - \lambda_{n-1}(x_k)$. Note que $0 \leqslant s_k < \lambda_n(x_k) - \lambda_{n-1}(x_k) = \phi_{\eta_k}((x_k)^+_{n-1})$ e $\lambda_{n-1}(x_k) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_{n-1}(x)$ e, portanto, $s_k \to \lambda_n(x) - \lambda_{n-1}(x) = \phi_0(x^+_{n-1})$. Logo,

$$\begin{aligned}\widetilde{\pi}_{\eta_k}(t_k)x_k &= \widetilde{\pi}_{\eta_k}(s_k)\widetilde{\pi}_{\eta_k}(\lambda_{n-1}(x_k))x_k = \widetilde{\pi}_{\eta_k}(s_k)(x_k)^+_{n-1} \\ &= \pi_{\eta_k}(s_k)(x_k)^+_{n-1} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \pi_0(\phi_0(x^+_{n-1}))x^+_{n-1} = x_n \in \overline{\widetilde{\gamma}^{+,0}(x)} \cap M_0.\end{aligned}$$

Subcaso 1.2. A menos de subsequências, $t_k \geqslant \lambda_n(x_k)$ para $k \in \mathbb{N}$.

Aqui, como $t_k \to t = \lambda_n(x)$ e $\lambda_n(x_k) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_n(x)$ para k suficientemente grande, temos $t_k < \lambda_{n+1}(x_k)$. Assim, definimos $r_k := t_k - \lambda_n(x_k)$ e vemos que $0 \leqslant r_k < \lambda_{n+1}(x_k)$ e $r_k \to 0$. Além disso,

$$\widetilde{\pi}_{\eta_k}(t_k)x_k = \widetilde{\pi}_{\eta_k}(r_k)(x_k)^+_n = \pi_{\eta_k}(r_k)(x_k)^+_n \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} x^+_n \in \widetilde{\gamma}^{+,0}(x).$$

Caso 2. A menos de subsequências, $t_k \geqslant t$ para $k \in \mathbb{N}$.

Como $t_k \geqslant t$ para todo $k \in \mathbb{N}$, definimos $s_k := t_k - t$, e com isso $s_k \geqslant 0$ e $s_k \to 0$. Como $\lambda_n(x_k) \to \lambda_n(x)$, definindo $T_k := \lambda_n(x_k) - \lambda_n(x)$ para $k \in \mathbb{N}$, temos $t_k = \lambda_n(x_k) + s_k - T_k$, e separamos nos seguintes casos:

Subcaso 2.1. A menos de subsequências, $s_k - T_k \geqslant 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Como $(x_k)^+_n \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} x^+_n$ e $s_k - T_k \to 0$, usando o Lema 4.2 **(c)**, obtemos

$$\widetilde{\pi}_{\eta_k}(t_k)x_k = \widetilde{\pi}_{\eta_k}(s_k - T_k)\widetilde{\pi}_{\eta_k}(\lambda_n(x_k))x_k = \widetilde{\pi}_{\eta_k}(s_k - T_k)(x_k)^+_n \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} x^+_n \in \widetilde{\gamma}^{+,0}(x).$$

Subcaso 2.2. A menos de subsequências, $s_k - T_k < 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Como $\lambda_{n-1}(x_k) \to \lambda_{n-1}(x) < t$, então para k suficientemente grande $\lambda_{n-1}(x_k) < t$, e assim $\phi_{\eta_k}((x_k)^+_{n-1}) > T_k$ e, consequentemente, $\phi_{\eta_k}((x_k)^+_{n-1}) - T_k + s_k > 0$. Escrevendo $t_k = \lambda_{n-1}(x_k) + \phi_{\eta_k}((x_k)^+_{n-1}) - T_k + s_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$, e notando que $\phi_{\eta_k}((x_k)^+_{n-1}) - T_k + s_k < \phi_{\eta_k}((x_k)^+_{n-1})$ e $s_k - T_k \to 0$, temos

$$\begin{aligned}\widetilde{\pi}_{\eta_k}(t_k)x_k &= \widetilde{\pi}_{\eta_k}(\phi_{\eta_k}((x_k)^+_{n-1}) - T_k + s_k)\widetilde{\pi}_{\eta_k}(\lambda_{n-1}(x_k))x_k \\ &= \widetilde{\pi}_{\eta_k}(\phi_{\eta_k}((x_k)^+_{n-1}) - T_k + s_k)(x_k)^+_{n-1} \\ &= \pi_{\eta_k}(\phi_{\eta_k}((x_k)^+_{n-1}) - T_k + s_k)(x_k)^+_{n-1} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \pi_0(\phi_0(x^+_{n-1}))x^+_{n-1} = x_n,\end{aligned}$$

e uma vez que $x_n \in \overline{\widetilde{\gamma}^{+,0}(x)} \cap M_0$, a demonstração está completa. □

Para continuarmos, precisaremos da *versão coletiva* da condição (Z), que é apresentada abaixo.

$$\left\{\begin{array}{l}\text{dados } B \subset \Omega_0 \text{ não vazio e limitado, } \{t_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset (0,\infty) \text{ com } \liminf\limits_{k\to\infty} t_k > 0, \\ \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \Omega_{\eta_k} \text{ limitada, com } \widetilde{\pi}_{\eta_k}(t_k)x_k \to x \in \overline{\widetilde{\omega}(B)} \cap M_0, \text{ e } U \text{ uma vizi-} \\ \text{nhança aberta de } \widetilde{\omega}(B) \text{ então } \widetilde{\pi}_{\eta_{k_0}}(t_{k_0})x_{k_0} \in U \text{ para algum } k_0 \in \mathbb{N}.\end{array}\right. \tag{CZ}$$

Apresentamos também a versão coletiva do Lema 3.47.

Lema 4.23. *Seja $E_0 \subset \mathcal{A}_0$ um conjunto limitado e $\widetilde{\pi}_0$-invariante, com $E_0 = \overline{E_0} \cap \Omega_0$. Dadas vizinhança aberta V de E_0 em Ω_0, $t \geqslant 0$ e $x \in E_0$, existem $\mu > 0$ e $\eta_0 \in (0,1]$ tal que $\widetilde{\pi}_\eta(s)y \in V$ para todos $s \in [0,t]$, $y \in B_\mu(x)$ e $\eta \in [0,\eta_0]$.*

Demonstração. Se o resultado é falso, existem $x_k \to x \in E_0$, $t_0 \geqslant 0$, $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset [0,t_0]$, $\eta_k \to 0$ e uma vizinhança aberta V de E_0 em Ω_0 tal que $\widetilde{\pi}_{\eta_k}(t_k)x_k \notin V$. Como $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada, a menos de subsequências, podemos assumir que $t_k \to s \in [0,t_0]$. Se s não é tempo de salto de x, isto é, $s \neq \lambda_n(x)$, usando Proposição 4.21 e a $\widetilde{\pi}_0$-invariância de E_0 temos

$$\widetilde{\pi}_{\eta_k}(t_k)x_k \to \widetilde{\pi}_0(s)x \in E_0.$$

Como V é aberto, temos $\widetilde{\pi}_0(s)x \notin V$, e obtemos uma contradição. Agora, se s é um tempo de salto de x, isto é, se $s = \lambda_n(x)$, segue da Proposição 4.22 que a sequência $\{\widetilde{\pi}_{\eta_k}(t_k)x_k\}$ possui uma subsequência que converge para um ponto $z \in \overline{\widetilde{\gamma}^{+,0}(x)} \subset \overline{E_0}$. Se $z \in \Omega_0$, temos $z \in \overline{E_0} \cap \Omega_0 = E_0$ e, como $z \notin V$, obtemos uma contradição. Se $z \in M_0$, a condição (CZ) nos dá uma contradição e a prova do resultado está completa. □

Corolário 4.24. *Seja $E_0 \subset \mathcal{A}_0$ um conjunto limitado e $\widetilde{\pi}_0$-invariante, com $E_0 = \overline{E_0} \cap \Omega_0$. Dadas vizinhança aberta V de E_0 em Ω_0 e $t \geqslant 0$, existem uma vizinhança aberta U de E_0 em Ω_0 e $\eta_0 \in (0,1]$ tal que $\widetilde{\pi}_\eta(s)y \in V$ para todos $s \in [0,t]$, $y \in U$ e $\eta \in [0,\eta_0]$.*

Demonstração. Basta tomar $U := \bigcup_{x\in E_0} B_{\mu_x}(x)$, onde $\mu_x > 0$ é dado no lema acima. □

Lema 4.25. *Seja $E_0 \subset \mathcal{A}_0$ um conjunto limitado e $\widetilde{\pi}_0$-invariante, com $E_0 = \overline{E_0} \cap \Omega_0$ e satisfazendo (3.3). Então dados $\mu > 0$, $t \geqslant 0$ e $x \in E_0$, existem $\nu > 0$ e $\eta_0 \in (0,1]$ tal que para todo $y \in B_\nu(x)$ com $y \in \mathcal{A}_\eta$ para algum $\eta \in [0,\eta_0]$ e solução global limitada ξ_η de $\widetilde{\pi}_\eta$ por y, temos $d(\xi_\eta(s), E_0) < \mu$ para todos $s \in [-t,0]$ e $\eta \in [0,\eta_0]$.*

Demonstração. Se o resultado é falso, existem $\eta_k \to 0$, $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}_{\eta_k}$ com $x_k \to x \in E_0$, $t_0 \geqslant 0$, $\{-t_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset [-t_0,0]$, soluções globais ξ_k de $\widetilde{\pi}_{\eta_k}$ por x_k, e $\mu > 0$ tal que $d(\xi_k(-t_k), E_0) \geqslant \mu$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Como $\{-t_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada, a menos de subsequências, podemos assumir que $-t_k \to -s \in [-t_0,0]$. Também, como $\{\xi_k(-t_k)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}_{\eta_k}$ e estamos nas hipóteses da semicontinuidade superior podemos assumir, a menos de subsequências, que $z_k := \xi_k(-t_k) \to z \in \overline{\mathcal{A}_0}$. Note que $d(z, E_0) \geqslant \mu$.

Caso 1. $z \in \Omega_0$ e s não é tempo de salto de z.

Neste caso, da Proposição 4.21, temos

$$x_k = \widetilde{\pi}_{\eta_k}(t_k)z_k \to \widetilde{\pi}_0(s)z,$$

o que nos dá $\widetilde{\pi}_0(s)z = x \in E_0$. Portanto, de (3.3), obtemos $z \in E_0$, o que nos dá uma contradição.

Caso 2. $z \in \Omega_0$ e s é tempo de salto de z.

Neste caso, da Proposição 4.22, temos $x_k = \widetilde{\pi}(t_k)z_k \to w$ para algum w que está ou em $\widetilde{\gamma}^{+,0}(z)$ ou em $\overline{\widetilde{\gamma}^{+,0}(z)} \cap M_0$. Uma vez que $x_k \to x \in E_0 \subset \Omega_0$, devemos ter $x = w \in \widetilde{\gamma}^{+,0}(z)$, isto é, $\widetilde{\pi}_0(r)z = x$ para algum $r \geqslant 0$. Novamente, de (3.3), obtemos $z \in E_0$ e temos uma contradição.

Caso 3. $z \in M_0$.

Neste caso, do Corolário 4.12, $r_k := \phi_{\eta_k}(z_k) \to 0$. Afirmamos que existe $0 < \mu_1 < \mu$ tal que $d(\widetilde{\pi}_{\eta_k}(r_k)z_k, E_0) \geqslant \mu_1$ para todo k suficientemente grande. Se esse não fosse o caso, como $\widetilde{\pi}_{\eta_k}(r_k)z_k \to I_0(z)$, teríamos $I_0(z) \in \overline{E_0} \cap \Omega_0 = E_0$. Da Proposição 3.30, temos $z \in \overline{E_0}$, o que nos dá uma contradição. Note então que $d(I_0(z), E_0) \geqslant \mu_1$. Defina $w_k := \widetilde{\pi}_{\eta_k}(r_k)z_k$ e veja que

$$\widetilde{\pi}_{\eta_k}(r_k)x_k = \widetilde{\pi}_{\eta_k}(t_k)w_k.$$

Como $x \in \Omega_0$, do Lema 4.2 **(c)** temos $\widetilde{\pi}_{\eta_k}(r_k)x_k \to x$.

Subcaso 3.1. s não é tempo de salto de $I_0(z)$.

Neste subcaso, temos $\widetilde{\pi}_{\eta_k}(t_k)w_k \to \widetilde{\pi}_0(s)I_0(z)$, assim $\widetilde{\pi}_0(s)I_0(z) = x \in E_0$ e, de (3.3), obtemos $I_0(z) \in E_0$, o que é uma contradição.

Subcaso 3.2. s é tempo de salto de $I_0(z)$.

Neste subcaso, como no Caso 2 acima, mostramos que x está em $\widetilde{\gamma}_0^{+}(I_0(z))$ e, novamente, obtemos que $I_0(z) \in E_0$, o que é uma contradição.

Com isso, a prova está completa. □

Corolário 4.26. *Seja $E_0 \subset \mathcal{A}$ um conjunto limitado e $\widetilde{\pi}_0$-invariante, com $E_0 = \overline{E_0} \cap \Omega_0$ e satisfazendo (3.3). Então dados $\mu > 0$ e $t \geqslant 0$, existem uma vizinhança U de E_0 em Ω_0 e $\eta_0 \in (0,1]$ tal que para todo $y \in U$ com $y \in \mathcal{A}_\eta$ para algum $\eta \in [0,\eta_0]$ e solução global limitada ξ_η de $\widetilde{\pi}_\eta$ por y, temos $d(\xi_\eta(s), E_0) < \mu$ para todo $s \in [-t, 0]$ e $\eta \in [0,\eta_0]$.*

Demonstração. Basta tomar $U := \bigcup_{x \in E_0} B_{\nu_x}(x)$, sendo $\nu_x > 0$ dado no lema acima. □

Teorema 4.27. *Assuma que $t_k \to \infty$, $\eta_k \to 0$ e que $\{z_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em X tal que $\widetilde{\pi}_{\eta_k}(t_k)z_k \to x_0$ para algum $x_0 \in \overline{\mathcal{A}_0}$.*

(a) *Assuma que $x_0 \in \Omega_0$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ defina $\xi_k \colon [-t_k, \infty) \to X$ por*

$$\xi_k(t) = \widetilde{\pi}_{\eta_k}(t + t_k)z_k \quad \text{para } t \geqslant -t_k,$$

e assuma também que $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \xi_k([-t_k,\infty))$ é limitada. Então existe uma solução global limitada ξ_0 de $\widetilde{\pi}_0$ por x_0 e uma subsequência $\{\xi_{k_\ell}\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ de $\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que para cada $s \in \mathbb{R}$ existe $[0,\infty) \ni \epsilon_\ell^s \to 0$ de modo que

$$\xi_{k_\ell}(s + \epsilon_\ell^s) \to \xi_0(s).$$

(b) *Assuma que $x_0 \in M_0$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ defina $\xi_k\colon [-t_k, \infty) \to X$ por*

$$\xi_k(t) = \widetilde{\pi}_{\eta_k}(t + t_k + \phi_{\eta_k}(\widetilde{\pi}_{\eta_k}(t_k)z_k))z_k \qquad \textit{para } t \geqslant -t_k - \phi_{\eta_k}(\widetilde{\pi}_{\eta_k}(t_k)z_k),$$

e assuma também que $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \xi_k([-t_k, \infty))$ é limitada. Então existe uma solução global limitada ξ_0 de $\widetilde{\pi}_0$ por $I_0(x_0)$ e uma subsequência $\{\xi_{k_\ell}\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ de $\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que para cada $s \in \mathbb{R}$ existe $[0, \infty) \ni \epsilon_\ell^s \to 0$ de modo que

$$\xi_{k_\ell}(s + \epsilon_\ell^s) \to \xi_0(s).$$

Demonstração. **(a)** Temos $\xi_k(0) = \widetilde{\pi}_{\eta_k}(t_k)z_k$ e, da hipótese, $\xi_k(0) \to x_0$. Claramente $x_0 \in \overline{\mathcal{A}_0} \cap \Omega_0 = \mathcal{A}_0$. Podemos ainda, sem perda de generalidade, assumir que $t_k \geqslant 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Assim ξ_k está definida em $t = -1$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Da compacidade assintótica coletiva de $\widetilde{\pi}_{\eta_k}$, existe $x_{-1} \in X$ e uma subsequência $\{k_\ell^1\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{N}$ tal que $\xi_{k_\ell^1}(-1) \to x_{-1}$. Claramente $\xi_{k_\ell^1}(0) \to x_0$. Além disso podemos, sem perda de generalidade, escolher k_1^1 tal que $t_k \geqslant 2$ para $k \geqslant k_1^1$.

Com esse procedimento, conseguimos definir uma subsequência $\{k_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ e uma sequência de pontos $\{x_{-m}\}_{m=0}^{\infty} \subset X$ tais que para cada $m \geqslant 0$ temos

$$\xi_{k_\ell}(-m) \to x_{-m} \quad \text{quando } \ell \to \infty.$$

Note que para cada $m \geqslant 0$ existe $\ell_0 = \ell_0(m) \in \mathbb{N}$ tal que $t_{k_\ell} \geqslant m$ para todo $\ell \geqslant \ell_0$. Assim para $\ell \geqslant \ell_0$ e $s \geqslant 0$ obtemos

$$\widetilde{\pi}_{\eta_{k_\ell}}(s)\xi_{k_\ell}(-m) = \widetilde{\pi}_{\eta_{k_\ell}}(s)\widetilde{\pi}_{\eta_{k_\ell}}(-m + t_{k_\ell})z_{k_\ell} = \widetilde{\pi}_{\eta_{k_\ell}}(-m + s + t_{n_k})z_{k_\ell} = \xi_{k_\ell}(-m + s). \tag{4.2}$$

Para simplificar a notação, renomeamos a sequência $\{k_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, se necessário, e assumimos que para cada $m \in \mathbb{N}$ temos

$$(u_k)_{-m} := \xi_k(-m) \to x_{-m} \quad \text{quando } k \to \infty. \tag{4.3}$$

Definimos $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ e separamos a prova em dois casos.

Caso 1. Existe uma sequência estritamente crescente $\{m_j\}_{j\in\mathbb{N}_0}$ de inteiros não negativos, com $m_0 = 0$, tal que $x_{-m_j} \in \Omega_0$ para todo $j \in \mathbb{N}_0$.

Fixemos $j \in \mathbb{N}_0$. Usando (4.3) e o fato de que $x_{-m_j} \in \Omega_0$, segue da Proposição 4.5 que existe uma sequência $[0, \infty) \ni \epsilon_k^j \to 0$ tal que

$$\widetilde{\pi}_{\eta_k}(m_{j+1} - m_j + \epsilon_k^j)(u_k)_{-m_{j+1}} \to \widetilde{\pi}_0(m_{j+1} - m_j)x_{-m_{j+1}}.$$

Por outro lado, de (4.2), sabemos que $\widetilde{\pi}_{\eta_k}(m_{j+1} - m_j)(u_k)_{-m_{j+1}} = (u_k)_{-m_j}$, e do Lema 4.2, obtemos

$$\widetilde{\pi}_{\eta_k}(m_{j+1} - m_j + \epsilon_k^j)(u_k)_{-m_{j+1}} = \widetilde{\pi}_{\eta_k}(\epsilon_k^j)(u_k)_{-m_j} \to x_{-m_j},$$

e concluímos que $\widetilde{\pi}_0(m_{j+1} - m_j)x_{-m_{j+1}} = x_{-m_j}$.

Definimos então $\xi_0 \colon \mathbb{R} \to \Omega_0$ por

$$\xi_0(t) = \begin{cases} \widetilde{\pi}_0(t)x_0 & \text{se } \ t \geqslant 0, \\ \widetilde{\pi}_0(t + m_{j+1})x_{-m_{j+1}} & \text{se } \ t \in [-m_{j+1}, -m_j), \ j \in \mathbb{N}_0. \end{cases}$$

A verificação de que ξ_0 é uma solução global de $\widetilde{\pi}_0$ por x_0 é análoga ao que foi feito na Proposição 2.17. Para $s \geqslant 0$, da Proposição 4.5, obtemos $[0, \infty) \ni \epsilon_k^s \to 0$ tal que

$$\xi_k(s + \epsilon_k^s) = \widetilde{\pi}_{\eta_k}(s + \epsilon_k^s + t_k)z_k = \widetilde{\pi}_{\eta_k}(s + \epsilon_k^s)(u_k)_0 \to \widetilde{\pi}_0(s)x_0 = \xi_0(s).$$

Agora, se $s \in [-m_{j+1}, -m_j]$ para algum $j \in \mathbb{N}_0$ então $\xi_0(s) = \widetilde{\pi}_0(s + m_{j+1})x_{-m_{j+1}}$, e da Proposição 4.5, existe uma sequência $[0, \infty) \ni \epsilon_k^j \to 0$ tal que

$$\xi_k(s + \epsilon_k^j) = \widetilde{\pi}_{\eta_k}(s + m_{j+1} + \epsilon_k^j)(u_k)_{-m_{j+1}} \to \widetilde{\pi}_0(s + m_{j+1})x_{-m_{j+1}} = \xi_0(s).$$

Em qualquer um dos casos acima, temos $\xi_k(s+\epsilon_k^s) \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \xi_k([-t_k, \infty))$ e, portanto, $\xi_0(\mathbb{R}) \subset \overline{\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \xi_k([-t_k, \infty))}$ o que nos dá ξ_0 limitada.

Caso 2. Existe um inteiro positivo m_1 tal que $x_{-m} \in M_0$ para todo $m \geqslant m_1$.

Segue do Lema 4.12, que para $m \geqslant m_1$ temos $s_{k,m} := \phi_{\eta_k}((u_k)_{-m}) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Definindo $w_{k,m} := \pi_{\eta_k}(s_{k,m})(u_k)_{-m} \in M_{\eta_k}$ temos $w_{k,m} \to x_{-m} \in M_0$ e, assim,

$$I_{\eta_k}(w_{k,m}) \to I_0(x_{-m}) \in \Omega_0,$$

onde usamos a continuidade coletiva da função I_{η_k} em $\eta = 0$. Assim, do Teorema 4.4 obtemos $\phi_{\eta_k}(I_{\eta_k}(w_{k,m})) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \phi_0(I_0(x_{-m}))$, para cada $m \geqslant m_1$. Considerando $\delta > 0$ da condição (CH), para $\beta \in (0, \min\{2\delta, 1\})$, como $\phi_0(I_0(x_{-m})) \geqslant 2\delta > \beta$, obtemos

$$\phi_{\eta_k}(I_{\eta_k}(w_{k,m})) > \beta > s_{k,m} \quad \text{para } k \text{ suficientemente grande.}$$

Renomeando os índices, assumimos que a desigualdade acima vale para todo $k \in \mathbb{N}$.

Para cada $m \geqslant m_1$ e $k \in \mathbb{N}$ (usando o procedimento análogo ao do início da demonstração) definimos

$$(y_k)_{-m} := \xi_k(\beta - m) \quad \text{e} \quad y_{-m} := \widetilde{\pi}_0(\beta)I_0(x_{-m}).$$

Como $\beta - s_{k,m} < \phi_{\eta_k}(I_{\eta_k}(w_{k,m}))$, obtemos

$$\begin{aligned} (y_k)_{-m} = \xi_k(\beta - m) = \widetilde{\pi}_{\eta_k}(\beta)\xi_k(-m) &= \widetilde{\pi}_{\eta_k}(\beta)(u_k)_{-m} = \widetilde{\pi}_{\eta_k}(\beta - s_{k,m})\widetilde{\pi}_{\eta_k}(s_{k,m})(u_k)_{-m} \\ &= \widetilde{\pi}_{\eta_k}(\beta - s_{k,m})I_{\eta_k}(\pi_{\eta_k}(s_{k,m})(u_k)_{-m}) = \pi_{\eta_k}(\beta - s_{k,m})I_{\eta_k}(w_{k,m}), \end{aligned}$$

o que nos dá

$$(y_k)_{-m} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \pi_0(\beta)I_0(x_{-m}) = \widetilde{\pi}_0(\beta)I_0(x_{-m}) = y_{-m} \in \Omega_0.$$

Fixado $m > m_1$, veja que $\widetilde{\pi}_{\eta_k}(1)(y_k)_{-m} = (y_k)_{-m+1}$ para cada $k \in \mathbb{N}$ e, portanto, segue da Proposição 4.5 que existe $[0,\infty) \ni \epsilon_k \to 0$ tal que $\widetilde{\pi}_{\eta_k}(1+\epsilon_k)(y_k)_{-m} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \widetilde{\pi}_0(1)y_{-m}$. Por outro lado, se usarmos o Lema 4.2, obtemos

$$\widetilde{\pi}_{\eta_k}(1+\epsilon_k)(y_k)_{-m} = \widetilde{\pi}_{\eta_k}(\epsilon_k)\widetilde{\pi}_{\eta_k}(1)(y_k)_{-m} = \widetilde{\pi}_{\eta_k}(\epsilon_k)(y_k)_{-m+1} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} y_{-m+1},$$

e, assim, $\widetilde{\pi}_0(1)y_{-m} = y_{-m+1}$ para cada $m > m_1$.

Como $\beta < 1 \leqslant m_1$, segue da Proposição 4.5 que existe $[0,\infty) \ni \epsilon_k \to 0$ tal que

$$\widetilde{\pi}_{\eta_k}(m_1 - \beta + \epsilon_k)(y_k)_{-m_1} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \widetilde{\pi}_0(m_1-\beta)y_{-m_1}.$$

Por outro lado, usando o Lema 4.2, obtemos

$$\begin{aligned}\widetilde{\pi}_{\eta_k}(m_1 - \beta + \epsilon_k)(y_k)_{-m_1} &= \widetilde{\pi}_{\eta_k}(m_1 - \beta + \epsilon_k)\xi_k(\beta - m_1)\\ &= \xi_k(\epsilon_k) = \widetilde{\pi}_{\eta_k}(\epsilon_k)\xi_k(0) \to x_0,\end{aligned}$$

ou seja, $\widetilde{\pi}_0(m_1-\beta)y_{-m_1} = x_0$. Com essas considerações, podemos definir $\xi_0\colon \mathbb{R} \to X$ por

$$\xi_0(t) = \begin{cases} \widetilde{\pi}_0(t)x_0 & \text{se } \ t \geqslant 0,\\ \widetilde{\pi}_0(t+m_1-\beta)y_{-m_1} & \text{se } \ t \in [\beta - m_1, 0),\\ \widetilde{\pi}_0(t+m-\beta)y_{-m} & \text{se } \ t \in [\beta - m, \beta - m + 1), \ m > m_1.\end{cases}$$

A prova de que ξ_0 é uma solução global limitada de $\widetilde{\pi}_0$ por x_0 para a qual vale a convergência afirmada é análoga ao caso anterior.

A prova do item **(b)** é análoga, trocando t_k por $t_k + \phi_{\eta_k}(\widetilde{\pi}_{\eta_k}(t_k)z_k)$ (lembrando que, da Proposição 4.11, temos $\phi_{\eta_k}(\widetilde{\pi}_{\eta_k}(t_k)z_k) \to 0$) e x_0 por $I_0(x_0)$ (que está em Ω_0). □

Podemos enunciar e provar o principal resultado desta seção.

Teorema 4.28. *Assuma que:*

- $\{\pi_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ *é contínua em* $\eta = 0$*;*
- $\{\widetilde{\pi}_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ *é coletivamente assintoticamente compacta em* $\eta = 0$ *e uniformemente dissipativa;*
- $\{M_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ *é coletivamente fechada em* $\eta = 0$*;*
- $\{I_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ *é coletivamente contínua em* $\eta = 0$*;*
- *valem* (CH), (CT) *e* (CZ).

Além disso, suponha que:

(a) *para cada* $\eta \in [0,1]$, *o semigrupo impulsivo* $\widetilde{\pi}_\eta$, *definido em* Ω_η, *possui atrator global* $\mathcal{A}_\eta$*;*

(b) *existe* $p \in \mathbb{N}$ *tal que para cada* $\eta \in [0,1]$, *o atrator global* $\mathcal{A}_\eta$ *contém uma família separada de conjuntos invariantes isolados* $\mathbf{E}_\eta = \{E_{1,\eta}, \ldots, E_{p,\eta}\}$ *de maneira que*

$$\lim_{\eta\to 0}\max_{i=1,\ldots,p}\left\{d_H(E_{i,\eta}, E_{i,0}) + d_H(E_{i,0}, E_{i,\eta})\right\} = 0;$$

(c) *existem $\delta_0 > 0$ e $\eta_0 \in (0,1]$ tal que $E_{i,\eta}$ é o invariante maximal de $\widetilde{\pi}_\eta$ em $\mathcal{O}_{\delta_0}(E_{i,\eta})$ para cada $1 \leqslant i \leqslant p$ e $0 \leqslant \eta \leqslant \eta_0$;*

(d) *$\widetilde{\pi}_0$ é um semigrupo impulsivo dinamicamente gradiente relativamente à $\mathbf{E}_0$, e todos os elementos de $\mathbf{E}_0$ satisfazem (3.3).*

Então existe η_1 tal que para todo $\eta \in (0,\eta_1]$, $\widetilde{\pi}_\eta$ é um semigrupo impulsivo dinamicamente gradiente com respeito à $\mathbf{E}_\eta$.

Demonstração. Primeiramente iremos mostrar que para $\eta > 0$ suficientemente pequeno, $\widetilde{\pi}_\eta$ satisfaz (G1). Suponha que isso não ocorra, então existem $0 < \delta' < \delta_0$, uma sequência $\eta_k \to 0$ e soluções globais ξ_k de $\widetilde{\pi}_{\eta_k}$ em $\mathcal{A}_{\eta_k}$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$ e $s \in \mathbb{R}$ temos ou

$$\sup_{t \geqslant s} d(\xi_k(t), \cup_{i=1}^p E_{i,\eta_k}) > \delta', \tag{4.4}$$

ou

$$\sup_{t \leqslant s} d(\xi_k(t), \cup_{i=1}^p E_{i,\eta_k}) > \delta'. \tag{4.5}$$

Como $\xi_k(t) = \widetilde{\pi}_{\eta_k}(t+k)\xi_k(-k)$, temos $\xi_k(0) \to z \in \overline{\mathcal{A}_0}$ e, do Teorema 4.27 em qualquer um dos casos existe uma solução global limitada ξ_0 de $\widetilde{\pi}_0$ tal que para cada $s \in \mathbb{R}$ existe $[0,\infty) \ni \epsilon_k^s \to 0$ tal que $\xi_k(s+\epsilon_k^s) \to \xi_0(s)$. Uma vez que $\widetilde{\pi}_0$ é dinamicamente gradiente com respeito à $\mathbf{E}_0$, existem $1 \leqslant i, r \leqslant p$, com $i \neq r$, tal que

$$E_{r,0} \xleftarrow{t \to -\infty} \xi_0(t) \xrightarrow{t \to \infty} E_{i,0}.$$

Assumimos primeiro que vale (4.4). Como $\overline{E}_{i,0}$ é compacto, existem $x_0 \in \overline{E_{i,0}}$ e uma sequência crescente $\{t_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}}$ com $t_\ell \to \infty$ e $t_{\ell+1} - t_\ell > \ell$ para cada $\ell \in \mathbb{N}$ tal que $\xi_0(t_\ell) \to x_0$. Como $\xi_k(s+\epsilon_k^s) \to \xi_0(s)$ então para cada $\ell \in \mathbb{N}$ existe $k_\ell \in \mathbb{N}$ tal que $\epsilon_\ell := \epsilon_{k_\ell}^{t_\ell} < \frac{1}{\ell}$ e $\xi_{k_\ell}(t_\ell + \epsilon_{k_\ell}) \to x_0$. De (4.4) e da hipótese **(b)**, para cada ℓ suficientemente grande existe $\tau_\ell \geqslant 0$ tal que

$$d(\xi_{k_\ell}(t_\ell + \epsilon_\ell + \tau_\ell), E_{i,0}) \geqslant \delta' \ \text{ e } \ d(\xi_{k_\ell}(t_\ell + \epsilon_\ell + t), E_{i,0}) < \delta' \ \text{ para } t \in [0,\tau_\ell). \tag{4.6}$$

Afirmamos que $\tau_\ell \to \infty$. Se esse não fosse o caso, do Corolário 4.24, para $\delta' > 0$ e $t_0 > \sup_{\ell \in \mathbb{N}} \tau_\ell$, existiria uma vizinhança U de $E_{i,0}$ em Ω_0 e $\eta_0 \in (0,1]$ tal que $\widetilde{\pi}_\eta(s)y \in \mathcal{O}_{\delta'}(E_{i,0})$ para todos $y \in U$, $s \in [0,t_0]$ e $\eta \in [0,\eta_0]$. Separamos aqui em dois casos.

Caso 1. $x_0 \in \Omega_0$.

Neste caso, como $x_0 \in \overline{E_{i,0}} \cap \Omega_0 = E_{i,0}$, U é uma vizinhança aberta de $E_{i,0}$ em Ω_0 e $\xi_{k_\ell}(t_\ell + \epsilon_{k_\ell}) \to x_0$, teríamos $\xi_{k_\ell}(t_\ell + \epsilon_{k_\ell}) \in U$ para ℓ suficientemente grande. Assim, do que vimos acima, deveríamos ter $\widetilde{\pi}_{\eta_{k_\ell}}(\tau_\ell)\xi_{k_\ell}(t_\ell + \epsilon_{k_\ell}) = \xi_{k_\ell}(t_\ell + \epsilon_{k_\ell} + \tau_\ell) \in \mathcal{O}_{\delta'}(E_{i,0})$, o que nos dá uma contradição.

Caso 2. $x_0 \in M_0$.

Neste caso, como $\widetilde{\pi}_{\eta_{k_\ell}}(t_\ell + \epsilon_\ell)\xi_{\eta_{k_\ell}}(0) = \xi_{k_\ell}(t_\ell + \epsilon_\ell) \to x_0 \in \overline{E_{i,0}} \cap M_0 = \overline{\widetilde{\omega}(E_{i,0})} \cap M_0$ e U é uma vizinhança aberta de $E_{i,0}$ em Ω_0, segue da condição (CZ) que existe $\ell_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\xi_{\ell_0}(t_{\ell_0}+\epsilon_{\ell_0}) \in U$. Assim, do que vimos acima, teríamos $\xi_{\ell_0}(t_{\ell_0}+\epsilon_{\ell_0}+\tau_{\ell_0}) \in \mathcal{O}_{\delta'}(E_{i,0})$ o que nos dá uma contradição. Assim, completamos a prova de que $\tau_\ell \to \infty$.

Como $\{\xi_{k_\ell}(t_\ell+\epsilon_\ell+\tau_\ell)\}_{\ell\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}_{\eta_{k_\ell}}$ e a família $\{\mathcal{A}_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ é semicontínua superiormente em $\eta = 0$ podemos supor, a menos de subsequências, que $\xi_{k_\ell}(t_\ell+\epsilon_\ell+\tau_\ell) \to w \in \overline{\mathcal{A}_0}$. Note que $w \notin \overline{E_{i,0}}$. Separamos o restante da prova nos seguintes casos:

Caso $w \in \Omega_0$.

Neste caso, para $s \geqslant -t_\ell - \epsilon_\ell$ definimos

$$\psi_\ell(s) = \xi_{k_\ell}(s+t_\ell+\epsilon_\ell+\tau_\ell) = \widetilde{\pi}_{\eta_{k_\ell}}(s+t_\ell+\epsilon_\ell)\xi_{k_\ell}(\tau_\ell).$$

Do Teorema 4.27, existem solução global limitada ξ_1 de $\widetilde{\pi}_0$ por w e uma subsequência de $\{\psi_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ (que denotamos a mesma) tal que para cada $s \in \mathbb{R}$ existe $[0,\infty) \ni \beta_\ell^s \to 0$ de modo que $\psi_\ell(s+\beta_\ell^s) \to \xi_1(s)$.

Agora, para $t < 0$ e ℓ suficientemente grande temos $t + \beta_\ell^t < 0$ e, portanto, $0 \leqslant \tau_\ell + t + \beta_\ell^t < \tau_\ell$. Logo,

$$d(\psi_\ell(t+\beta_\ell^t), E_{i,0}) = d(\xi_{k_\ell}(t_\ell+\epsilon_\ell+(\tau_\ell+t+\beta_\ell^t), E_{i,0}) < \delta',$$

e assim $d(\xi_1(t), E_{i,0}) \leqslant \delta'$ para todo $t < 0$. Portanto $\xi_1(t) \to E_{i,0}$ quando $t \to -\infty$ e, de (G1) e (G2) para $\widetilde{\pi}_0$, existe $j \in \{1\ldots,p\}$, com $j \neq i$, tal que $\xi_1(t) \to E_{j,0}$ quando $t \to \infty$. Portanto,

$$E_{r,0} \overset{t\to-\infty}{\longleftarrow} \xi_0(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} E_{i,0} \overset{t\to-\infty}{\longleftarrow} \xi_1(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} E_{j,0}. \tag{4.7}$$

Caso $w \in M_0$.

Neste caso, definindo $r_\ell := \phi_{\eta_{k_\ell}}(\xi_{k_\ell}(t_\ell+\epsilon_\ell+\tau_\ell))$, sabemos do Corolário 4.12 que $r_\ell \to 0$ quando $\ell \to \infty$. Para $s \geqslant -t_\ell - \epsilon_\ell - r_\ell$ definimos

$$\psi_\ell(s) = \xi_{k_\ell}(s+t_\ell+\epsilon_\ell+r_\ell+\tau_\ell) = \widetilde{\pi}_{\eta_{k_\ell}}(s+t_\ell+\epsilon_\ell+r_\ell)\xi_{k_\ell}(\tau_\ell).$$

Do Teorema 4.27, existem solução global limitada ξ_1 de $\widetilde{\pi}_0$ por $I(w)$ e subsequência de $\{\psi_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ (que denotamos a mesma) tal que para cada $s \in \mathbb{R}$ existe $[0,\infty) \ni \beta_\ell^s \to 0$ de modo que $\psi_\ell(s+\beta_\ell^s) \to \xi_1(s)$. Afirmamos que existe $\mu > 0$ tal que para ℓ suficientemente grande, temos

$$d(\psi_\ell(\beta_\ell^0), E_{i,0}) \geqslant \mu.$$

Se isso não ocorresse, a menos de subsequências, teríamos $\psi_\ell(\beta_\ell^0) \to z$ para algum $z \in \overline{E_{i,0}}$. Veja que pelo Lema 4.2 **(c)**,

$$\psi_\ell(\beta_\ell^0) = \widetilde{\pi}_{\eta_{k_\ell}}(\beta_\ell^0)\widetilde{\pi}_{\eta_{k_\ell}}(r_\ell)\xi_{k_\ell}(t_\ell+\epsilon_\ell+\tau_\ell) \to I_0(w),$$

uma vez que $\widetilde{\pi}(r_\ell)\xi_{k_\ell}(t_\ell+\epsilon_\ell+\tau_\ell) \to I_0(w) \in \Omega_0$ e $\beta_\ell^0 \to 0$. Assim, temos $I_0(w) = z \in \overline{E_{i,0}}$, ou seja, $I_0(w) \in \overline{E_{i,0}} \cap \Omega_0 = E_{i,0}$, e dado que $E_{i,0}$ satisfaz (3.3) obtemos $w \in \overline{E_{i,0}}$. Chegamos em uma contradição e a existência de $\mu > 0$ está provada. Obtemos então $\xi_1(0) \notin \overline{E_{i,0}}$.

Com o mesmo raciocínio do caso anterior obtemos $d(\xi_1(t), E_{i,0}) \leqslant \delta'$ para todo $t < 0$ e, portanto, vale (4.7).

Com esses casos provados, segue a existência de uma solução global limitada ξ_1 de $\widetilde{\pi}_0$ em $\mathcal{A}_0$ (por w ou $I(w)$, dependendo do caso) e uma subsequência de $\{\psi_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ tal que para cada $s \in \mathbb{R}$ existe $[0,\infty) \ni \beta_\ell^s \to 0$ de modo que $\psi_\ell(s+\beta_\ell^s) \to \xi_1(s)$, e que satisfaz (4.7). Repetindo esse processo um número finito de vezes, iremos encontrar uma estrutura homoclínica em $\mathcal{A}_0$, uma vez que $\mathbf{E}_0$ é finito, o que contradiz o fato de $\widetilde{\pi}_0$ ser dinamicamente gradiente.

Assumindo agora que vale (4.5), como $\overline{E_{r,0}}$ é compacto existem $x_0 \in \overline{E_{r,0}}$ e uma sequência decrescente $s_\ell \to -\infty$ com $s_{\ell+1} - s_\ell < -\ell$ para cada $\ell \in \mathbb{N}$ tal que $\xi_0(s_\ell) \to x_0$. Como $\xi_k(s+\epsilon_k^s) \to \xi_0(s)$ então para cada $\ell \in \mathbb{N}$ existe $k_\ell \in \mathbb{N}$ tal que $\epsilon_\ell := \epsilon_{k_\ell}^{s_\ell} < \frac{1}{\ell}$ e $\xi_{k_\ell}(s_\ell+\epsilon_\ell) \to x_0$. De (4.5) e da hipótese **(b)**, para cada ℓ suficientemente grande existe $\tau_\ell \geqslant 0$ tal que

$$d(\xi_{k_\ell}(s_\ell+\epsilon_\ell-\tau_\ell), E_{r,0}) \geqslant \delta' \quad \text{e} \quad d(\xi_{k_\ell}(s_\ell+\epsilon_\ell-t), E_{r,0}) < \delta' \text{ para } t \in [0,\tau_\ell).$$

Analogamente ao que fizemos acima (usando o Corolário 4.26, mostramos que $\tau_\ell \to \infty$) conseguimos construir uma estrutura homoclínica em $\mathcal{A}_0$, o que novamente contradiz o fato de $\widetilde{\pi}_0$ ser dinamicamente gradiente.

Agora provaremos que $\widetilde{\pi}_\eta$ satisfaz (G2) para $\eta > 0$ suficientemente pequeno. Suponha, por contradição, que existem $1 \leqslant p_0 \leqslant p$, uma sequência $\eta_k \to 0$, conjuntos $\{E_{\ell_1,\eta_k}, \ldots, E_{\ell_{p_0},\eta_k}\}$ e soluções globais $\{\xi_k^1, \ldots, \xi_k^i\}$, $1 \leqslant i \leqslant p_0$, de $\widetilde{\pi}_{\eta_k}$ em $\mathcal{A}_{\eta_k}$ de maneira que para cada $k \in \mathbb{N}$ e $i = 1, \ldots, p_0$,

$$E_{\ell_i,\eta_k} \overset{t\to-\infty}{\longleftarrow} \xi_k^i(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} E_{\ell_{i+1},\eta_k}, \tag{4.8}$$

onde $E_{\ell_{p_0+1},\eta_k} := E_{\ell_1,\eta_k}$, com

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} d(\xi_k^i(t), \cup_{i=1}^{p_0} E_{\ell_i,\eta_k}) > 0,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ e $i = 1, \ldots, p_0$.

Fixado $i = 1, \ldots, p_0$, do Teorema 4.27 existem ξ_i solução global limitada de $\widetilde{\pi}_0$ e uma subsequência de $\{\xi_k^i\}_{k\in\mathbb{N}}$ (que denotamos a mesma) tal que para cada $s \in \mathbb{R}$ existe $[0,\infty) \ni \epsilon_k^s \to 0$ de modo que $\xi_k^i(s+\epsilon_k^s) \to \xi_i(s)$. De (4.8) para cada $k \in \mathbb{N}$, existem $s_k := s_k(i) \leqslant 0$ e $t_k := t_k(i) \geqslant 0$ tais que

$$d(\xi_k^i(s_k+\epsilon_k^{s_k}), E_{\ell_i,\eta_k}) < \frac{1}{2k} \quad \text{e} \quad d(\xi_k^i(t_k+\epsilon_k^{t_k}), E_{\ell_{i+1},\eta_k}) < \frac{1}{2k}.$$

Como $\eta_k \to 0$, segue de **(b)** que para k suficientemente grande temos

$$d(\xi_k^i(s_k+\epsilon_k^{s_k}), E_{\ell_i,0}) < \frac{1}{k} \quad \text{e} \quad d(\xi_k^i(t_k+\epsilon_k^{t_k}), E_{\ell_{i+1},0}) < \frac{1}{k}.$$

Com isso, existe $\tau_k \geqslant 0$ tal que para $\delta'' < \delta_0$ temos

$$d(\xi_k^i(s_k+\epsilon_k^{s_k}-\tau_k), E_{\ell_i,0}) \geqslant \delta'' \quad \text{e} \quad d(\xi_k^i(s_k+\epsilon_k^{s_k}-t), E_{\ell_i,0}) < \delta'' \text{ para } t \in [0,\tau_k).$$

Analogamente ao que fizemos para (G1), usando o Corolário 4.26, mostramos que $\tau_k \to \infty$, e construímos, após um número finito de passos, uma estrutura homoclínica para $\widetilde{\pi}_0$, o que nos dá uma contradição e completa a demonstração. $\square$

NOTAS

Devido à restrição de tempo para desenvolver a pesquisa, deixaremos as aplicações para trabalhos futuros. Poderíamos apresentar aplicações simples, mas nesses casos o Teorema 4.28 possivelmente não seria necessário, e seríamos capazes de verificar que os semigrupos impulsivos perturbados são dinamicamente gradientes diretamente pela definição. Um dos principais pontos a ser estudado para aplicar o Teorema 4.28 é conseguir dar condições sob as quais valham as hipóteses **(b)** e **(c)**.

5 SUPERFÍCIES IMPULSIVAS EM DIMENSÃO FINITA

Seguindo (HIRSCH, 2012), começamos este capítulo com a seguinte definição:

Definição 5.1. Um subconjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ é chamado de uma **hipersuperfície** C^1 se para cada ponto $x \in M$ existe uma vizinhança aberta V de x em $\mathbb{R}^n$ e uma aplicação continuamente diferenciável $g\colon V \to \mathbb{R}$ tal que

$$V \cap M = g^{-1}(0)$$

e tal que $\nabla g(p) \neq 0$ para cada $p \in V \cap M$, onde $\nabla g(p)$ representa o vetor gradiente de g no ponto p. Podemos sempre tomar V de maneira que $V \cap M$ seja um conjunto conexo. A dupla (V, g) satisfazendo essas condições será chamada de um **mapa local de M em x**. Nessa situação, definimos um **vetor normal a M em x** por

$$n_x = \nabla g(x).$$

Se $x \in M$ e (V, g) é um mapa local de M em x, definimos os **lados positivo e negativo** do mapa (V, g) como sendo os conjuntos

$$L_P = L_P(V, g) = \{y \in V : g(y) > 0\} \quad \text{e} \quad L_N = L_N(V, g) = \{y \in V : g(y) < 0\},$$

respectivamente.

Note, na definição acima, que apesar de usarmos a notação n_x, um vetor normal a M em x depende de g, mas todos os possíveis vetores têm a mesma direção. Em (BONOTTO, E. M. *et al.*, 2016a) os autores consideraram a equação diferencial ordinária

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \tag{5.1}$$

em $\mathbb{R}^n$, assumindo que para cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$, a equação acima possui uma única solução definida em toda a reta (o que define um grupo em $\mathbb{R}^n$). Com isso, mostraram que se $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma hipersuperfície fechada de classe C^1 satisfazendo

$$\langle n_x, f(x) \rangle \neq 0 \quad \text{para cada } x \in M, \tag{5.2}$$

onde n_x é um vetor normal de M em x e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto escalar usual de $\mathbb{R}^n$, então M é um conjunto impulsivo (e possui propriedades ainda mais fortes) para o grupo gerado pela equação dada.

Nosso objetivo nesta seção é melhorar o resultado de (BONOTTO, E. M. *et al.*, 2016a) descrito acima, isto é, vamos mostrar que se $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma hipersuperfície fechada C^1 e satisfaz a condição de transversalidade (5.2), então M é um conjunto impulsivo para o **semigrupo** gerado pela equação diferencial (5.1) e, além disso, M satisfaz a condição (T). Para isso, assumiremos que $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma função contínua, e que a equação

(5.1) gera um semigrupo em $\mathbb{R}^n$, isto é, para cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$ existe uma única função continuamente diferenciável $x(\cdot, x_0)\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ satisfazendo $x(0,x_0) = x_0$ e

$$\frac{d}{dt}x(t,x_0) = f(x(t,x_0)) \quad \text{para cada } t \geqslant 0,$$

de maneira que a aplicação $[0,\infty) \times \mathbb{R}^n \ni (t,x_0) \mapsto x(t,x_0) \in \mathbb{R}^n$ é contínua. O semigrupo definido por (5.1) é dado por

$$\pi(t)x_0 = x(t,x_0) \quad \text{para cada } x_0 \in \mathbb{R}^n \text{ e } t \geqslant 0.$$

De (5.2) obtemos diretamente o seguinte resultado:

Lema 5.2. *Assuma que $M \subset \mathbb{R}^n$ seja uma hipersuperfície e assuma que vale* (5.2)*. Então para cada $x \in M$, se (V,g) é um mapa local de M em x, temos $\langle \nabla g(x), f(x)\rangle \neq 0$.*

Com isso, provamos o seguinte resultado:

Proposição 5.3. *Assuma que $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma hipersuperfície C^1 satisfazendo* (5.2)*. Então para cada $x \in M$ existem $\epsilon > 0$ e $\delta > 0$ tais que*

$$\pi(t)y \notin M \quad \textit{para todo } 0 < t < \epsilon \textit{ e } y \in B_\delta^{\mathbb{R}^n}(x) \cap M,$$

onde $B_\delta^{\mathbb{R}^n}(x)$ denota a bola aberta em $\mathbb{R}^n$ centrada em x e de raio δ.

Demonstração. Fixemos $x \in M$. Se a conclusão da proposição é falsa, existem sequências $t_n \to 0^+$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ com $y_n \to x$ e $\pi(t_n)y_n \in M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Fixemos um mapa local (V,g) de M em x. Mostremos agora que existem $\eta > 0$ e $\lambda > 0$ tais que $B_\eta^{\mathbb{R}^n}(x) \subset V$ e $\pi(t)y \in V$ para todo $y \in B_\eta^{\mathbb{R}^n}(x) \cap M$ e $t \in [0,\lambda]$. De fato, se esse não é o caso, existem $\{z_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V \cap M$, com $z_k \to x$, e $s_k \to 0^+$ tal que $\pi(s_k)z_k \notin V$. Da continuidade de π e do fato de que V é aberto, fazendo $k \to \infty$, obtemos $x \notin V$, o que é uma contradição.

Podemos assumir, sem perda de generalidade, que $y_n \in B_\eta^{\mathbb{R}^n}(x)$ e $t_n < \lambda$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos definir $h_n\colon [0,\lambda] \to \mathbb{R}$ por $h_n(s) = g(\pi(s)y_n)$. Note que h_n é contínua em $[0,\lambda]$, continuamente diferenciável em $(0,\lambda)$, e $h_n(0) = h_n(t_n) = 0$, já que $y_n \in V \cap M$ e $\pi(t_n)y_n \in V \cap M$. Portanto, do Teorema de Rolle, segue que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\tau_n \in (0,t_n)$ tal que $h_n'(\tau_n) = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Mas para cada $n \in \mathbb{N}$ e $s \in (0,\lambda)$ temos

$$h_n'(s) = \langle \nabla g(\pi(s)y_n, f(\pi(s)y_n)\rangle,$$

o que nos dá

$$0 = h_n'(\tau_n) = \langle \nabla g(\pi(\tau_n)y_n, f(\pi(\tau_n)y_n)\rangle.$$

Fazendo $n \to \infty$ e sendo g, f e π contínuas, obtemos

$$\langle \nabla g(x), f(x)\rangle = 0,$$

o que contradiz o Lema 5.2, e o resultado está provado. □

O resultado acima mostra que, em particular, se M é uma hipersuperfície C^1 fechada satisfazendo (5.2), então M satisfaz a condição (2.1) de um sistema dinâmico impulsivo. Além disso, na demonstração vimos que se (V, g) é um mapa local de M em x, $\epsilon > 0$ e $\delta > 0$ podem ser escolhidos de maneira que $B_\delta^{\mathbb{R}^n}(x) \subset V$ e que

$$\pi(t)y \in V \setminus M \quad \text{para todo } 0 < t < \epsilon \text{ e } y \in B_\delta^{\mathbb{R}^n}(x) \cap M.$$

Para simplificar a nomenclatura, nessas condições diremos que (V, g) é um (ϵ, δ)**-mapa local de** M **em** x.

Lema 5.4. *Sejam M uma hipersuperfície C^1, $x \in M$ e (V, g) um mapa local de M em x. Se $A \subset V \setminus M$ é conexo então ou $A \subset L_P$ ou $A \subset L_N$. Em particular, se (V, g) é um (ϵ, δ)-mapa local de M em x então para cada $y \in B_\delta^{\mathbb{R}^n}(x) \cap M$ temos*

$$\pi((0, \epsilon))y \subset L_P \quad \textit{ou} \quad \pi((0, \epsilon))y \subset L_N.$$

Demonstração. Assuma que $A_P := A \cap L_P \neq \varnothing$ e $A_N := A \cap L_N \neq \varnothing$. Note que $A = A_P \cup A_N$, com A_P e A_N abertos em A. Portanto obtemos uma cisão não-trivial de A, o que é uma contradição, pois A é conexo. O restante da demonstração segue do fato de que $\pi((0, \epsilon))y \subset V \setminus M$ é conexo, para cada $y \in B_\delta^{\mathbb{R}^n}(x) \cap M$. □

Lema 5.5. *Assuma que M é uma hipersuperfície C^1 satisfazendo (5.2), $x \in M$ e (g, V) é um (ϵ, δ)-mapa local de M em x. Se $\pi((0, \epsilon))x \subset L_P$ então dado $0 < \mu < \epsilon$, existe $0 < \eta < \delta$ tal que para cada $y \in B_\eta^{\mathbb{R}^n}(x) \cap L_N$ temos $\pi(s)y \in M$ para algum $0 < s < \mu$.*

Demonstração. Considere $h\colon V \to \mathbb{R}$ dada por $h(z) = g(\pi(\mu)z)$. Por hipótese, temos $h(x) > 0$. Sendo g e π contínuas, existe $\eta > 0$ tal que se $y \in B_\eta^{\mathbb{R}^n}(x)$ então $h(y) > 0$. Para cada $y \in B_\eta^{\mathbb{R}^n}(x) \cap L_N$, definimos $\beta\colon [0, \mu] \to \mathbb{R}$ por $\beta(t) = g(\pi(t)y)$ e, assim, $\beta(0) = g(y) < 0$ e $\beta(\mu) = h(y) > 0$. Do Teorema do Anulamento, existe $s \in (0, \mu)$ tal que $\beta(s) = 0$, isto é, $g(\pi(s)y) = 0$ e, portanto, $\pi(s)y \in M$ para algum $0 < s < \mu$. □

O resultado acima continua válido intercambiando L_P e L_N.

Teorema 5.6. *O conjunto fechado $M \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto impulsivo e satisfaz* (T).

Demonstração. Da Proposição 5.3 segue que M é um conjunto impulsivo. Agora vamos mostrar que M satisfaz a condição (T). Sejam $t > 0$, $x \in M$, e uma sequência $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ convergente tal que $\pi(t)z_n \to x$. Podemos supor que $z_n \to z$ e, portanto, $\pi(t)z = x$. Da Proposição 5.3 existe um (ϵ, δ)-mapa local (V, g) de M em x e podemos assumir que $\pi(t)z_n \in V$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se, ao longo de uma subsequência, $\pi(t)z_n \in V \cap M$ então podemos tomar $\alpha_n = 0$ e, portanto, $\pi(t + \alpha_n)z_n \in M$ e o resultado está provado. Agora, se $\pi(t)z_n \in V \setminus M$, podemos supor, sem perda de generalidade, que $g(\pi((0, \epsilon))x) > 0$ e note que, se existe uma subsequência $\{\pi(t)z_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ de $\{\pi(t)z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $g(\pi(t)z_{n_k}) < 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, então do Lema 5.5 para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $0 < s_k < \frac{1}{k}$ tal que

$\pi(s_k)\pi(t)z_{n_k} \in M$, o que nos dá $\pi(t+s_k)z_{n_k} \in M$, e o resultado está provado. Supomos então que $g(\pi(t)z_n) > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e analisamos os seguintes casos:

CASO 1. Existe $\eta > 0$ suficientemente pequeno de modo que $g(\pi(s)z) > 0$ para todo $0 < |s-t| < \eta$.

Neste caso, $h(s) = g(\pi(s)z)$ é tal que $h(s) > 0$ para todo $0 < |s-t| < \eta$ e $h(t) = g(x) = 0$. Logo,

$$0 = h'(t) = \langle \nabla g(\pi(t)z), f(\pi(t)z)\rangle = \langle \nabla g(x), f(x)\rangle,$$

e temos uma contradição com o Lema 5.2 e, portanto, este caso não pode ocorrer.

CASO 2. Existe $\beta_k \to 0^+$ de modo que $g(\pi(t-\beta_k)z) \leqslant 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Separamos a prova em dois subcasos.

Subcaso 2.1. $g(\pi(t-\beta_k)z) = 0$ ao longo de uma subsequência.

Neste subcaso, como $\pi(t-\beta_k)z \to \pi(t)z = x$, então para k suficientemente grande temos $d(x, \pi(t-\beta_k)z) < \delta$, e assim temos $\pi(s)\pi(t-\beta_k)z \notin M$ para todo $0 < s < \epsilon$, mas para k suficientemente grande, temos $\beta_k < \epsilon$ e, portanto,

$$M \ni x = \pi(t)z = \pi(\beta_k)\pi(t-\beta_k)z \notin M,$$

e temos uma contradição. Logo este subcaso não pode ocorrer.

Subcaso 2.2. $g(\pi(t-\beta_k)z) < 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Neste subcaso, para cada $k \in \mathbb{N}$ fixo temos $\pi(t-\beta_k)z_n \xrightarrow{n\to\infty} \pi(t-\beta_k)z$, logo existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $g(\pi(t-\beta_k)z_{n_k}) < 0$ e, por hipótese $g(\pi(t)z_{n_k}) > 0$, assim existe $\alpha_k \in [-\beta_k, 0)$ tal que $g(\pi(t+\alpha_k)z_{n_k}) = 0$, isto é, $\pi(t+\alpha_k)z_{n_k} \in M$ e o resultado está provado. $\square$

Corolário 5.7. *Sejam $M \subset \mathbb{R}^n$ uma hipersuperfície C^1 fechada satisfazendo (5.2) e $I\colon M \to \mathbb{R}^n \setminus M$ uma função contínua. Então (π, M, I) é um sistema dinâmico impulsivo com M satisfazendo (T).*

Note que, nas condições acima, quando M é limitado (e, portanto, compacto) obtemos facilmente a propriedade (H) e, portanto, $\ell(x) = \infty$ para todo $x \in X$. Nesse caso (π, M, I) define um semigrupo impulsivo $\widetilde{\pi}$ em $\Omega := \mathbb{R}^n \setminus M$. Isso não é verdade, em geral, quando M não é limitado. Considere, por exemplo, o semigrupo em $\mathbb{R}^2$ dado por $\pi(t)(x,y) = (x, y-t)$ para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e $t \geqslant 0$. Defina $M = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in \mathbb{R}\}$ e, para $x > 1$, defina $I((x,0)) = (x+1, \frac{1}{(x+1)^2})$ e, se $x \leqslant 1$ defina $I((x,0)) = (x+1, \frac{1}{4})$. Veja que para $x > 1$ temos $\phi(x+1, \frac{1}{(x+1)^2}) = \frac{1}{(x+1)^2}$, o que nos dá, por exemplo, $\ell((2,1)) = 1 + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$. Na verdade, temos $\ell((x,y)) < \infty$ sempre que $x \in \mathbb{R}$ e $y > 0$.

PROBLEMAS EM ABERTO

Como em toda pesquisa matemática, tentamos desenvolver a teoria na nossa melhor capacidade, e introduzimos as condições necessárias para que os resultados pudessem ser provados. Porém, sempre é possível melhorar e muitas questões ficam em aberto. Abaixo, listamos algumas dessas questões, que ainda precisam de mais estudo para serem respondidas.

∘ É possível obter a condição (Z) sem ter que pedi-la como hipótese? Ou ainda, é possível obter a condição (Z) com hipóteses que sejam mais simplesmente verificáveis?

∘ É possível, no Capítulo 5, mostrar que vale a condição (Z)?

∘ É possível obter exemplos de semigrupos impulsivos dinamicamente gradientes nos quais hajam soluções com impulsos que conectam dois invariantes distintos? Ou será que todas as soluções globais limitadas de um semigrupo impulsivo dinamicamente gradientes que têm impulso estarão automaticamente dentro de algum dos invariantes separados?

∘ Como verificar, em aplicações, as hipóteses **(b)** e **(c)** do Teorema 4.28?

∘ É possível encontrar exemplos concretos mais complexos, particularmente no caso infinito-dimensional?

∘ É possível, como no capítulo 5, encontrar condições sob as quais um subconjunto $M \subset H$ é um conjunto impulsivo, satisfazendo a condição (T), para o semigrupo gerado pela equação de evolução

$$\frac{du}{dt} = Au + f(u)$$

em H. Sendo f uma função satisfazendo condições adequadas, H um espaço de Hilbert e $A\colon D(A) \subset H \to H$ um operador autoadjunto, positivo, com resolvente compacto, de maneira que exista um conjunto ortonormal completo $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ formado por autovetores de A, associados respectivamente aos autovalores $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, onde $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots$, $\lambda_n \to \infty$?

REFERÊNCIAS

ARAGÃO-COSTA, E. R.; CARABALLO, T.; CARVALHO, A. N.; LANGA, J. A. Non-autonomous Morse-decomposition and Lyapunov functions for gradient-like processes. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 365, p. 5277–5312, 2013.

ARAGÃO-COSTA, E. R.; CARABALLO, T.; CARVALHO, A. N.; LANGA, J. A. Stability of gradient semigroups under perturbations. **Nonlinearity**, v. 24, n. 7, p. 2099–2117, 2011. ISSN 0951-7715.

ARAGÃO-COSTA, E. R.; CARVALHO, A. N. **Sistemas gradientes, decomposição de Morse e funções de Lyapunov sob perturbação**. 2012. Universidade de São Paulo.

BONOTTO, E. M. Flows of characteristic 0^+ in impulsive semidynamical systems. **J. Math. Anal. Appl.**, v. 332, n. 1, p. 81–96, 2007. ISSN 0022-247X.

BONOTTO, E. M.; BORTOLAN, M. C.; CARABALLO, T.; COLLEGARI, R. Impulsive surfaces on dynamical systems. **Acta Math. Hungar.**, v. 150, n. 1, p. 209–216, 2016. ISSN 0236-5294.

BONOTTO, E. M.; BORTOLAN, M. C.; CARVALHO, A. N.; CZAJA, R. Global attractors for impulsive dynamical systems - a precompact approach. **J. Differential Equations**, v. 259, n. 7, p. 2602–2625, 2015. ISSN 0022-0396.

BONOTTO, E. M.; BORTOLAN, M. C.; COLLEGARI, R.; CZAJA, R. Semicontinuity of attractors for impulsive dynamical systems. **J. Differential Equations**, v. 261, n. 8, p. 4338–4367, 2016. ISSN 0022-0396.

BONOTTO, Everaldo M; BORTOLAN, Matheus Cheque; COLLEGARI, Rodolfo; UZAL, José Manuel. Impulses in driving semigroups of nonautonomous dynamical systems: application to cascade systems. **Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B**, v. 26, n. 9, p. 4645–4661, 2021. ISSN 1531-3492.

BONOTTO, Everaldo M.; BORTOLAN, Matheus C.; CARABALLO, Tomás; COLLEGARI, Rodolfo. Impulsive non-autonomous dynamical systems and impulsive cocycle attractors. **Math. Methods Appl. Sci.**, v. 40, n. 4, p. 1095–1113, 2017. ISSN 0170-4214.

BONOTTO, Everaldo M.; GIMENES, Luciene P.; SOUTO, Ginnara M. Asymptotically almost periodic motions in impulsive semidynamical systems. **Topol. Methods Nonlinear Anal.**, v. 49, n. 1, p. 133–163, 2017. ISSN 1230-3429.

BONOTTO, Everaldo Mello; KALITA, Piotr. On attractors of generalized semiflows with impulses. **J. Geom. Anal.**, v. 30, n. 2, p. 1412–1449, 2020. ISSN 1050-6926.

BORTOLAN, Matheus C.; CARVALHO, Alexandre N.; LANGA, José A. **Attractors under autonomous and non-autonomous perturbations**. [*S.l.*]: American Mathematical Soc., 2020. v. 246.

BORTOLAN, Matheus C.; UZAL, José Manuel. Pullback attractors to impulsive evolution processes: applications to differential equations and tube conditions. **Discrete Contin. Dyn. Syst.**, v. 40, n. 5, p. 2791–2826, 2020. ISSN 1078-0947.

BORTOLAN, Matheus C.; UZAL, José Manuel. Upper and weak-lower semicontinuity of pullback attractors to impulsive evolution processes. **Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B**, v. 26, n. 7, p. 3667–3692, 2021. ISSN 1531-3492.

BREZIS, Haim. **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations**. [*S.l.*]: Springer-Verlag, 2010.

CARABALLO, Tomás; UZAL, José M. Dynamics of nonautomous impulsive multivalued processes. **Set-Valued Var. Anal.**, v. 31, n. 1, paper no. 7, 20, 2023. ISSN 1877-0533.

CARVALHO, Alexandre N.; LANGA, José A. An extension of the concept of gradient semigroups which is stable under perturbation. **J. Differential Equations**, v. 246, n. 7, p. 2646–2668, 2009. ISSN 0022-0396.

CARVALHO, Alexandre N.; LANGA, José A.; ROBINSON, James C. **Attractors for infinite-dimensional non-autonomous dynamical systems**. [*S.l.*]: Springer, New York, 2013. v. 182, p. xxxvi+409. (Applied Mathematical Sciences). ISBN 978-1-4614-4580-7; 978-1-4614-4581-4.

DASHKOVSKIY, S.; KAPUSTIAN, O. A.; KAPUSTYAN, O. V.; GORBAN, N. V. Attractors for Multivalued Impulsive Systems: Existence and Applications to Reaction-Diffusion System. **Mathematical Problems in Engineering**, v. 2021, p. 7, 2021.

EVANS, Lawrence C. **Partial Differential Equations**. [*S.l.*]: American Mathematical Society, 2010.

HALE, Jack K. **Asymptotic behavior of dissipative systems**. [*S.l.*]: American Mathematical Society, Providence, RI, 1988. v. 25, p. x+198. (Mathematical Surveys and Monographs). ISBN 0-8218-1527-X.

HIRSCH, Morris W. **Differential topology**. [*S.l.*]: Springer Science & Business Media, 2012. v. 33.

LADYZHENSKAYA, Olga A. **Attractors for semigroups and evolution equations**. [*S.l.*]: Cambridge university press, 2022.

RYBAKOWSKI, Krzysztof P. **The homotopy index and partial differential equations**. [*S.l.*]: Springer-Verlag, Berlin, 1987. (Universitext).

TEMAM, Roger. **Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics**. Second. [*S.l.*]: Springer-Verlag, New York, 1997. v. 68, p. xxii+648. (Applied Mathematical Sciences). ISBN 0-387-94866-X.

ÍNDICE