Arithmetica Pratica

Martins Ribeiro
Cart.

Materias que constituem esta Bibliotheca

Elementos Geraes

1 — Desenho linear, exercicios praticos.
2 — Elementos de Physica.
3 — Desenho de solidos, projecções e perspectiva.
4 — Arithmetica.
5 — Geometria.
6 — Elementos de Mecanica.
7 — Elementos de Chimica.

Mecanica

1 — Desenho de Machinas.
2 — Nomenclatura e Technologia de Caldeiras e Machinas de vapor.
3 — Physica Industrial.
4 — Chimica Industrial.
5 — Construcção de Machinas de vapor e Caldeiras.
6 — Motores especiaes.

Construcção Civil

1 — Elementos de Architectura.
2 — Nomenclatura e Materiaes de Construcção.
3 — Construcção Civil.
4 — Arte decorativa e Estylos.
5 — Estylisação, composição e ornamentação.

Construcção naval

1 - Definições. Representação das fórmas de navios. Plano geometrico. Sala do Risco. Lançamento á casa.
2 — Materiaes de construcção e processos de ligação. Planos inclinados. Carreiras de construcção.
3 — Construcção de navios. Descripção e nomenclatura.
4 — Historia da construcção naval.

Indicações praticas e Nomenclatura de officios

Manual do:

1 — Serralheiro Civil.
2 — Serralheiro Mecanico.
3 — Torneiro.
4 — Forjador.
5 — Fundidor.
6 — Conductor de Machinas.
7 — Electricista.
8 — Tintureiro.
9 — Fiandeiro e tecelão.
10 — Modelador, formador e estucador.

Manual do:

11 — Carpinteiro Civil.
12 — Carpinteiro de Moldes.
13 — Marceneiro.
14 — Entalhador.
15 — Pintor e Decorador.
16 — Pedreiro.
17 — Sapateiro.
18 — Funileiro.
19 — Encadernador.
20 — Tanoeiro.

Descripção de Industrias

1 — Hulha.
2 — Metallurgia.
3 — Tecidos e Fiação de Seda, Linho, Algodão, e Lã.
4 — Ceramica.
5 — Estampagens e Tinturarias.
6 — Papel
7 — Vidro.
8 — Azeite, Oleos, Sabão, Adubos.
9 — Industrias de alimentação: Pão, Queijo, Manteiga, Farinha, Assucar, Confeitaria, e Chocolate.
10 — Alcool, licores, cerveja.
11 — Galvanoplastia.
12 — Relojoaria
13 — Borracha.
14 — Artes graphicas.
15 — Photographia Industrial.
16 — Industrias de Illuminação: Stearina, Gaz Acetylene e Electricidade.
17 — Chapelaria.

Conhecimentos geraes de:

18 — Hygiene das officinas.
19 — Escripturação de officinas, orçamentos.
20 — Inventos Modernos.
21 — Leis do trabalho, ensino industrial.

Manual do Operario

BIBLIOTHECA
de
Instrucção e Educação profissional

ARITHMETICA PRATICA

LISBOA
Bibliotheca de Instrucção e Educação Profissional
CALÇADA DO FERREGIAL, 6, 1.º
1905

Typographia, Rua Ivens, 45 e 47—Lisboa

MANUAL DO OPERARIO

ARITHMETICA PRATICA

PREFACIO

Não é nosso intento publicar um tratado de Arithmetica, mas simplesmente os elementos necessarios e indispensaveis que facilitem o estudo das differentes materias que constituem o ensino profissional.

Para attingir o fim a que nos propômos dividiremos o presente livro em duas partes: a primeira denominada **Arithmetica pura**, contendo a *numeração e operações sobre numeros inteiros, quebrados e decimaes, comparação dos numeros e equações numericas;* a segunda denominada **Arithmetica applicada**, contendo *numeros complexos, systema metrico, regras de tres* e *applicações.*

Addicionaremos ainda a cada uma d'aquellas duas divisões, variados problemas, muitos d'elles de immediata applicação na vida pratica.

A. Cunha Rosa
Professor da Escola Industrial Affonso Domingues
Xabregas

ARITHMETICA PRATICA

NOÇÕES PRELEMINARES

1 — Grandeza *é tudo o que póde augmentar ou diminuir*. Assim, o comprimento d'uma linha, o volume ou o peso d'um corpo, a capacidade d'um vaso, um intervallo de tempo, bem como as dôres, os vicios, as paixões, etc., podem augmentar ou diminuir, e constituem por isso diversos generos de grandezas.

Distinguem-se, porém, estes diversos generos de grandezas uns dos outros, porque em uns é possivel verificar se duas grandezas são eguaes, e em outros, é completamente impossivel verificar essa egualdade.

E' facil conhecer, por exemplo, se duas linhas teem o mesmo comprimento, se dois corpos teem o mesmo volume, o mesmo pezo, ou a mesma capacidade, etc.; mas não ha meio de verificar a egualdade entre duas dôres, dois vicios, duas paixões, etc.

Dos dois generos de grandezas que acabamos de considerar, só as do primeiro são *quantidades* e só ellas são do dominio das mathematicas, por isso que as do segundo genero, não podendo ser medidas, não podem ser representadas por numeros.

Quantidades *são as grandezas que pódem ser medidas*. As quantidades podem ser *continuas* ou *discontinuas*. Dizem-se continuas as que podem augmentar ou diminuir por graus insensiveis, como, por exemplo, o comprimento de uma linha ou o peso de um corpo, e discontinuas ou *discretas* as que só podem augmentar ou diminuir por determinados graus, como por exemplo, os livros de uma bibliotheca, as arvores d'um jardim, os soldados d'um regimento, etc.

2 — Medir *uma quantidade é comparal-a com outra da mesma especie, e que seja bem conhecida*. Assim, quando queremos medir o comprimento d'uma casa, tomâmos outro comprimento conhecido, por exemplo, o metro, e comparâmos com elle o comprimento da

casa, examinando quantas vezes o primeiro contém o segundo; o comprimento *metro*, de que nos servimos para medida, é a *unidade*.

Do mesmo modo, para medir o peso d'um copo, tomâmos outro peso, o kilogramma, por exemplo, e examinâmos quantos kilogrammas é necessario reunir para egualar o peso do corpo; n'este caso o kilogramma é a *unidade*.

Unidade *é uma quantidade conhecida que serve para com ella se medirem as quantidades da sua especie.*

A unidade, quando a quantidade a medir é continua, é *arbitraria*, embora haja utilidade em preferir a que fôr geralmente adoptada.

Para as quantidades discretas a unidade é imposta pela natureza da quantidade que se quer medir.

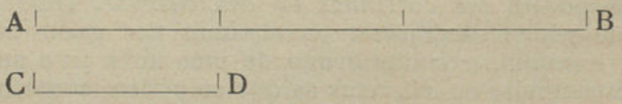
Assim, para saber as arvores que ha n'um jardim ou os livros que tem uma bibliotheca, a unidade natural será a arvore ou o livro. N'estes casos a medição reduz-se a *contar* os objectos similhantes que constituem a quantidade.

3 — **Numero** *é o resultado da comparação da quantidade com a unidade.* Assim, se, quando comparamos o comprimento d'uma casa com o metro, averiguamos que esse comprimento contém o metro cinco vezes, *cinco* é o numero que exprime a relação entre o comprimento da casa e o metro, ou que representa o comprimento da casa expresso na unidade metro.

A mesma quantidade póde ser representada por diversos numeros, segundo a unidade que fôr adoptada. Assim o comprimento d'uma casa, que, medida com o *metro* fosse representado pelo numero *vinte e cinco,* medido com o *decimetro* seria representado pelo numero *duzentos e cincoenta.*

Os numeros podem ser de varias especies. Para os conhecer e determinar, estudaremos os casos que se podem dar na medição d'uma quantidade, suppondo, para facilidade da exemplificação, que se trata de medir o comprimento de uma recta A B, tomando para unidade o de outra recta C D.

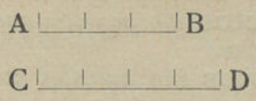
1.º caso. Se, applicando a unidade C D sobre a recta



A B, esta a contiver um numero exacto de vezes, tres, por exemplo, sem ficar resto algum, o numero **tres**, que representa a linha A B, diz-se **inteiro**.

Numero inteiro *é o que representa uma quantidade que contém exactamente a unidade uma ou mais vezes.*

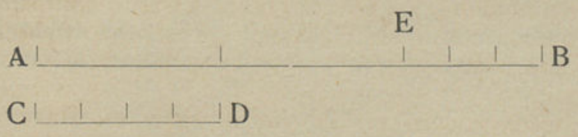
2.º caso. Supponhamos que a recta A B é menor que a unidade. N'este caso podemos dividir a unidade C D n'um numero qualquer de partes iguaes (por isso denominadas *partes aliquotas)*, quatro,



por exemplo, e, tomando uma d'essas partes como *unidade subsidiaria*, vêr quantas vezes ella se contem em A B. Se se contivesse tres vezes exactamente, diriamos que A B é *tres quartos* da unidade, numero a que se dá o nome de *fracção* ou *quebrado*.

Fracção ou **quebrado** *é o numero que representa uma quantidade, na qual se contém uma parte aliquota da unidade uma ou mais vezes exactamente.* Só é com propriedade empregado para representar quantidades menores que a unidade, ainda que as iguaes á unidade ou maiores do que a unidade possam ser medidas ou representadas por esta fórma, como adiante se verá.

3.º caso. Se a recta A B contiver a unidade duas vezes, por exemplo, e ficar ainda um resto E B menor que C D, medimos este resto, dividindo a unidade C D em partes iguaes, e applicando uma d'essas partes sobre o resto E B. Suppondo que a unidade C D foi dividida em quatro partes iguaes e que uma d'ellas se contém tres vezes no resto E B, diremos então que a grandeza A B é igual a *dois*



e tres quartos da unidade. E este numero, assim formado de inteiro e fracção, diz-se *mixto*, e tambem *fraccionario*, porque, como adiante se verá é possivel reduzil-o á fórma de fracção.

Numero mixto ou **fraccionario** *é o que representa uma quantidade, que contém uma ou mais vezes a unidade, e além d'isto uma ou mais vezes uma parte aliquota da unidade.*

4.º caso. — Theoricamente poderiamos ainda considerar o caso em que a recta não contivesse exactamente em si uma unidade nem nenhuma parte aliquota da unidade. Quando tal succede, a grandeza denomina-se *incommensuravel*, e só pode ter uma representação numerica *approximada*.

Podemos pois dividir os numeros em duas especies: *commensuraveis* e *incommensuraveis*.

Numeros commensuraveis, *são os inteiros, quebrados e mixtos, porque exprimem grandezas que têem relação exacta com a unidade.*

Numeros incommensuraveis *são os que não contêem unidades nem fracção alguma da unidade exactamente.*

4 — Os numeros podem ainda ser *abstractos* ou *concretos*.

Numeros abstractos *são aquelles que não designam a especie de unidade a que se referem.*

Numeros concretos *são aquelles que designam a especie de unidade a que se referem.*

Assim, quando enunciâmos o numero *tres*, sem o applicarmos a nenhuma collecção de objectos, tres é n'este caso numero *abstracto*; mas se dizemos: *tres pipas*, ou *tres homens*, tres é então numero *concreto*.

5 — **Arithmetica** *é a sciencia que trata dos numeros, ensinando as suas propriedades e as combinações que com elles se podem fazer.*

Ora como os numeros podem ser, ou *abstractos*, ou *concretos*, a arithmetica divide-se naturalmente em duas partes que são: a **arithmetica pura**, cujo objecto são os numeros *abstractos*; a **arithmetica applicada**, que trata dos numeros *concretos*.

PRIMEIRA PARTE

ARITHMETICA PURA

I

Numeração de inteiros

6—**Numeração** *é a arte que ensina a enunciar e escrever os numeros.*

Divide-se em *fallada* e *escripta*.

Numeração fallada *é a que ensina a enunciar methodicamente os numeros.*

Numeração escripta *é a que ensina a escrever os numeros abreviadamente por meio de signaes proprios.*

I — Numeração fallada

7—**Os numeros inteiros formam-se pela addição successiva de unidades.** Assim, convencionou-se chamar *um* á unidade simples; *dois* ao numero composto de uma unidade e mais outra unidade; *tres* ao numero composto de duas unidades e mais uma unidade, e assim successivamente *quatro*, *cinco*, *seis*, *sete*, *oito*, *nove* e *dez* aos primeiros numeros que se vão formando, juntando ao anterior uma unidade.

Juntando ainda uma unidade ao numero *dez* e depois outra ao numero resultante, e continuando sempre a juntar uma unidade ao ultimo numero formado, tem se, evidentemente, a *serie dos numeros inteiros, que é illimitada*, porque, por maior que seja um numero inteiro, ainda se póde formar um outro maior addicionando-lhe *um* ou *uma unidade*.

Sendo a *serie dos numeros inteiros* illimitada, é impossivel dar a cada numero um nome especial. Póde, porém, empregar-se o mesmo nome para designar numeros diversos, comtanto que elle se refira a unidades de differente grandeza.

Adoptaram-se portanto, novas unidades com as denominações de *dezenas* ou unidades de segunda ordem, *centenas* ou unidades de terceira ordem, *milhares* ou unidades de quarta ordem, *dezenas de milhar* ou unidades de quinta ordem, etc. Cada uma d'estas unidades é dez vezes maior, que a de ordem immediatamente inferior, de modo que a *dezena* ou unidade de *segunda ordem*, contem dez unidades de *primeira ordem*, ou unidades principaes, a *centena*, ou unidade de *terceira ordem*, contem dez dezenas, e assim por diante, como se vê no seguinte quadro:

1.ª Unidade	vale	um
2.ª *Dezena* (ou *dez*)	»	dez unidades
3.ª *Centena* (ou *cem*, ou *cento*)	»	dez dezenas
4.ª Milhar (ou *mil*)	»	dez centenas
5.ª *Dezena de milhar* (ou *dez mil*)	»	dez milhares
6.ª *Centena de milhar* (ou *cem mil*)	»	dez dezenas de milhar
7.ª Milhão (ou *mil milhares*)	»	dez centenas de milhar
8.ª *Dezena de milhão* (ou *dez mil milhares*) ...	»	dez milhões
9.ª *Centena de milhão* (ou *cem mil milhares*) ..	»	dez dezenas de milhão
10.ª Bilião (ou *mil milhões*)	»	dez centenas de milhão

etc., etc.

Com cada grupo de tres ordens de unidades formam-se differentes classes, a saber:

Unidades .... Dezenas .... Centenas	*1.ª classe* (das unidades)
Milhar .... Dezena de milhar .... Centena de milhar ...	*2.ª classe* (dos milhares)
Milhão .... Dezena de milhão ... Centena de milhão ..	*3.ª classe* (dos milhões)
Billlião .... Dezena de billião .... Centena de billião	*4.ª classe* (dos billiões)

etc., etc.

Vê-se, portanto, que cada uma d'estas classes se fórma de mil unidades da classe immediatamente inferior; assim com mil unidades fórma-se o milhar; com mil milhares fórma-se o milhão; com mil milhões o bilião, etc.

Com os nomes dos nove primeiros numeros inteiros e com as palavras dezena ou dez, centena ou cem, milhar ou mil, etc., póde enunciar se não a serie illimitada dos numeros inteiros, mas uma sufficiente quantidade d'elles.

Na pratica porém é costume uzar-se as seguintes denominações:

Onze.....	em vez de	dez e um
Doze....	» » »	dez e dois
Treze....................	» » »	dez e tres
Quatorze..................	» » »	dez e quatro
Quinze....	» » »	dez e cinco
Dezeseis..................	» » »	dez e seis
Dezesete............	» » »	dez e sete
Dezoito...................	» » »	dez e oito
Dezenove..................	» » »	dez e nove
Vinte.....................	» » »	duas dezenas
Trinta....................	» » »	tres dezenas
Quarenta..................	» » »	quatro dezenas
Cincoenta.................	» » »	cinco dezenas
Sessenta..................	» » »	seis dezenas
Setenta...................	» » »	sete dezenas
Oitenta...................	» » »	oito dezenas
Noventa...................	» » »	nove dezenas
Duzentos..................	» » »	duas centenas
Quinhentos................	» » »	cinco centenas
Novecentos................	» » »	nove centenas

Tendo em attenção as convenções apontadas, um numero formado de oito unidades de setima ordem, tres de quinta, quatro de terceira e duas de segunda, enunciar-se-ha *oito milhões, trinta mil, quatrocentos e vinte unidades*, em vez de *oito milhões, tres dezenas de milhar, quatrocentas e duas dezenas.*

II — Numeração escripta

9 — Os algarismos ou os signaes com que se representam os numeros são:

0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9.
zero,	um,	dois,	tres,	quatro,	cinco,	seis,	sete,	oito,	nove.

O zero não tem valor algum e os outros nove, que são chamados *significativos*, têem cada um dois valores: *absoluto* e *relativo*.

Valor absoluto *é o indicado pelo proprio nome do algarismo.*

Valor relativo *é o indicado pelo logar que elle occupa no numero.*

Assim, no numero 666 todos os algarismos têem o mesmo valor absoluto *seis*, mas todos têem valores relativos diversos: *seis unidades, seis dezenas e seis centenas*.

A funcção do zero é dar aos outros algarismos o devido valor de posição, quando no numero ha falta de unidades de alguma ordem.

10 — Para com estes dez algarismos representar todos os numeros, basta estabelecer a seguinte convenção:

Quando muitos algarismos estão escriptos ao lado uns dos outros, o primeiro da direita representa unidades de 1.ª ordem, o immediato unidades de 2.ª ordem e assim por deante.

Supponhamos, por exemplo, que pretendemos representar o numero *vinte e tres mil sete centos cincoenta e seis*. Este numero compõe-se de *duas* dezenas de milhar, *tres* milhares, *sete* centenas, *cinco* dezenas e *sete* unidades. As dezenas de milhar serão representadas pelo algarismo 2, os milhares pelo algarismo 3, as centenas por 7, as dezenas por 5 e as unidades por 6.

Como, porém, o algarismo das unidades deve collocar-se á direita de todos, o das dezenas immediatamente á esquerda do das unidades, o das centenas á esquerda do das dezenas e assim por deante, segue-se que aquelles algarismos dever-se-hão escrever do modo seguinte: 23756.

11 — Quando em um numero faltam uma ou mais ordens de unidades, escreve-se o algarismo zero (0) no logar das unidades que faltam. Pretendemos, por exemplo, escrever o numero *vinte mil seis centos e quatro*.

Este numero compõe-se de *duas* dezenas de milhar, *seis* centenas e *quatro* unidades; faltam portanto os milhares e as dezenas, e como, segundo a convenção estabelecida, o algarismo 4 das unidades deve escrever-se á direita de todos, o algarismo 6 das centenas deve occupar o 3.º logar da direita e o algarismo 2 das dezenas de milhar o 5.º logar, segue-se que devemos pôr um zero na casa das dezenas e outro na casa dos milhares e assim aquelle numero representar-se-ha do modo seguinte: 20604.

Diz-se numero *digito* aquelle que se escreve com um só algarismo, e *composto* o que se escreve com mais de um.

III — Regra para lêr e escrever os numeros

12 — **Para ler um numero de tres ou menos algarismos**, *enuncia-se cada um d'estes a começar da esquerda dando-lhe a designação propria da ordem que representa.* Assim, 324 lê-se trezentos e vinte e quatro.

13 — **Para ler um numero de mais de tres algarismos**, *divide-se em classes de tres algarismos a partir da direita, podendo a ultima classe da esquerda constar somente de um ou dois algarismos. Lê-se cada classe a começar da esquerda, como se estivesse só, dizendo em seguida a cada classe o nome das unidades que ella representa.* Assim o numero 74'805'340'983, consta de 4 classes e lê-se: 74 *billiões*, 805 *milhões*, 340 *mil* e 983 *unidades.*

14 — **Para escrever um numero dictado**, *escrevem-se successivamente os algarismos que exprimem quantas centenas, dezenas e unidades de cada classe o numero contém, pela ordem que vão sendo enunciados, escrevendo zeros nos logares para que não haja algarismos significativos.* Assim para representar por algarismos o numero *trinta e quatro billiões, vinte e cinco mil sete centos e nove*, começaremos por escrever 34, que representa a classe dos billiões; em seguida 000, visto faltar a classe dos milhões; depois 025, para exprimir os milhares, e finalmente 709, para representar a classe das unidades; e teremos o numero enunciado representado pela seguinte fórma: 34'000'025'709.

15 — Quando um numero representa uma quantia de dinheiro, expressa em réis, o milhão diz-se *conto*, e o billião *milhar de conto*.

Usa-se tambem collocar o signal $ (que se denomina cifrão) á direita da classe dos milhares, e *dois pontos* á direita da classe dos contos. Assim, a quantia 23:194$815, lê-se: vinte e tres contos cento noventa e quatro mil oito centos e quinze réis.

IV — Numeração romana

16 — **Numeração romana** *é a arte de representar os numeros inteiros por meio das sete letras:*

I V X L C D M

que representam os numeros:

1 5 10 50 100 500 1000

Era o systema seguido pelos romanos e ainda hoje muito empregado nos mostradores dos relogios, nos capitulos em que se divide um livro e nas inscripções dos monumentos.

Para representar duas ou tres unidades de uma das quatro primeiras ordens, escreve-se duas ou tres vezes a letra correspondente.

Assim, 2 = II; 3 = III; 20 = XX; 30 = XXX; 200 = CC; 300 = CCC; 2:000 = MM; 3:000 = MMM.

Para representar quatro unidades d'uma ordem qualquer, *escreve-se cinco unidades d'essa ordem menos uma*, collocando a unidade a subtrahir á esquerda da letra que representa cinco unidades. Assim, 4 = IV; 40 = XL; 400 = CD.

Para representar seis, sete e oito unidades de uma das tres ordens *escreve-se cinco unidades mais uma*, *mais duas*, *mais tres*, collocando á direita de cinco o numero de unidades da mesma ordem que se quer juntar. Assim, 6 = VI; 7 = VII; 8 = VIII; 60 = LX; 70 = LXX; 80 = LXXX; 600 = DC; 700 = DCC; 800 = DCCC.

Para representar nove unidades de qualquer ordem *escreve-se dez menos uma*, collocando a unidade a subtrahir á esquerda de dez. Assim, 9 = IX; 90 = XC; 900 = CM.

Para escrever qualquer numero inteiro, collocam-se as letras umas ao lado das outras, começando pelas de maior valor, tendo em attenção a seguinte regra:—*uma letra escripta á esquerda de outra que tenha maior valor, significa que esta deve ser diminuida de tantas unidades, quantas as que são representadas pela primeira.*

Exemplos:

IV	XL	DCCXLI	MDCII
4	40	741	1602

Exercicios

1.º—Enunciar todos os numeros desde um a noventa e desde noventa até um.

2.º—Qual é a unidade de 5.ª ordem? de 6.ª? de 3.ª? de 2.ª? de 8.ª?

3.º—Qual é a unidade de 3.ª classe? de 5.ª? de 2.ª?

4.º—Quantos milhares são necessarios para prefazer um milhão? quantas dezenas para prefazer uma dezena de milhar?

5.º—Quantas unidades das diversas classes ha no seguinte numero: 679843219876?

6.º—Quantas unidades das diversas ordens contém o numero 978528397?

7.º — Qual é o maior e o menor numero de um algarismo? de dois? de tres?

8.º — Quantos numeros ha de dois algarismos? de tres algarismos? de quatro algarismos?

9.º — Enunciar os numeros 372512604, 2250737, 2000500004, 3564:827$800 réis.

10.º — Escrever por algarismos o numero, cento e quatro biliões, quatro mil quinhentos e tres unidades.

11.º — Ler os seguintes numeros romanos: XII, LXVI, CCIX, DIIL, DCCCXC, MXXI.

12.º — Escrever no systema romano os seguintes numeros:

17, 38, 86, 99, 113, 570, 1046, 1858, 9818

II

Operações de inteiros

17 — **Operações** *são os diversos modos de combinar numeros dados para formar novos numeros.*

São seis: *addição, subtracção, multiplicação, divisão, elevação a potencias e extracção de raizes.*

As duas primeiras (addição e subtracção) denominam-se *operações fundamentaes*, as quatro restantes *operações derivadas*. Assim, a multiplicação é derivada da somma e a divisão da subtracção; a elevação á potencia da multiplicação, e a extracção de raiz da divisão.

As operações, cujo conjuncto constitue o *calculo arithmetico*, são *directas* quando o resultado é obtido pela *composição* dos numeros dados, e *inversas* quando se obteem pela *decomposição*. São directas a addição, a multiplicação e a elevação á potencia, e inversas as tres restantes.

I — Addição

18 — **Addição** *é uma operação pela qual se reunem n'um só numero, as unidades e partes da unidade de dois ou mais numeros dados.*

Os numeros dados denominam-se *parcellas* e o resultado *somma* ou *total.*

Por exemplo addicionar os numeros 5, 4 e 2 é formar o numero 11, que reune em si as unidades dos numeros 5, 4 e 2. O numero 11 é a *somma;* 5, 4 e 2 as *parcellas.*

Indica-se a addição escrevendo o signal +, que se lê *mais*, entre as parcellas.

A egualdade de duas quantidades, indica-se separando-as pelo signal $=$, que se lê *egual*.

As quantidades separadas pelo signal $=$, fórmam os dois *membros* da *egualdade*.

A expressão escripta á esquerda d'aquelle signal, chama-se *primeiro membro* da *egualdade*, e a expressão escripta á direita do mesmo signal, *segundo membro*. Assim, para exprimir que a somma dos tres numeros 7, 2 e 3 é 12, escreve-se $7 + 2 + 3 = 12$ e enuncia-se: 7 mais 2 mais 3 egual a 12.

O primeiro membro d'esta egualdade é $7 + 2 + 3$ e o segundo é 12.

Addição de numeros digitos

19 — *Faz-se a addição de dois ou mais numeros de um só algarismo, sommando ao primeiro successivamente, uma a uma, todas as unidades do segundo, e ao resultado ajuntando tambem, uma a uma, todas as unidades do terceiro e assim por deante, até ao ultimo numero*. Assim: para addicionar os tres numeros 5, 4 e 3 ajuntaremos a 5 todas as unidades do numero 4, dizendo: 5 e 1, 6; e 1, 7; e 1, 8; e 1, 9; e será o numero 9 a somma das duas primeiras parcellas.

A este resultado ajuntamos as unidades do numero 3 dizendo: 9 e 1, 10; e 1, 11; e 1, 12. Será portanto 12 a somma dos tres numeros dados, isto é: $5 + 4 + 3 = 12$

Com a pratica consegue-se dizer a somma de dois ou mais numeros digitos sem recorrer á addição successiva de unidade.

Addição de numeros compostos

20 — *Para addicionar dois ou mais numeros compostos, escrevem-se uns por baixo dos outros, de modo que as unidades da mesma ordem fiquem na mesma columna vertical e traça-se uma linha por baixo da ultima parcella. Sommam-se successivamente, começando pela direita, os numeros contidos em cada columna; se a somma não excede 9, escreve-se por baixo da respectiva columna o numero achado, mas se contém dezenas escrevem-se sómente as unidades, reservando as dezenas para addicionar á columna seguinte, sobre a qual se opéra pelo mesmo modo e assim até á ultima da esquerda, cujo resultado se escreverá, tal qual fôr.*

Por exemplo, para addicionar os numeros 328, 5632, 7894 e 89 dispôr-se-ha a operação do modo seguinte:

$$\begin{array}{r} 328 \\ 5632 \\ 7894 \\ 89 \\ \hline 13943 \end{array}$$

A somma da columna das unidades (8 + 2 + 4 + 9) produz 23 unidades, ou 3 unidades (que se escrevem) e 2 dezenas (que se addicionam á columna seguinte).

A das dezenas (2 + 2 + 3 + 9 + 8) produz 24 dezenas, ou 4 dezenas e 2 centenas.

A das centenas (2 + 3 + 6 + 8) produz 19 centenas, ou 9 centenas e um milhar.

Finalmente a dos milhares (1 + 5 + 7) produz 13 milhares.

A somma é pois constituida por 3 unidades, 4 dezenas, 9 centenas e 13 milhares, e é portanto representada pelo numero 13943.

21 — Se as parcellas forem muitas, podemos dividil-as em grupos, obter a somma de cada grupo, e depois addicionar estas sommas parciaes, sendo indifferente a ordem das parcellas para o valor da somma.

22 — Quando os numeros a sommar forem concretos, convem ter em vista que *não é possivel sommar senão numeros referidos á mesma especie de unidade.* Assim, não é possivel sommar um numero referido a metros com outro referido a litros.

Exercicios

1.º — Fazer mentalmente as seguintes addições:

8 + 7, 15 + 7, 14 + 21, 68 + 93, 222 + 222, 425 + 175,
12 + 12, 180 + 190, 438 + 554

2.º — Effectuar, sem dispôr as parcellas umas por baixo das outras, a seguinte somma:

5634 + 2087 + 73948 + 512 + 25 + 3624584

3.º — Qual é o numero que excede em 8536 a somma dos numeros 3472, 8239, 7836, 493?

4.º — Um alquilador comprou um cavallo por 98$000 réis, por quanto deverá vendel-o para ganhar 38$750 réis?

5.º — Empregaram-se 1248 kilogrammas (o kilogramma vale mil grammas) de cobre e 352 de estanho na fundição d'um sino. Qual é o seu peso?

6.º — Um individio nasceu em 1848. Em que anno terá elle 25 annos?

7.º — Um operario fez em 8 dias 24 metros d'obra que lhe foram pagos por 9$800 réis; em 15 dias, fez 58 metros, recebendo 16$240 réis; em 27 dias, 75 metros, recebendo 26$960. Pergunta-se qual o numero de dias de trabalho, o numero de metros de obra e a totalidade da quantia que o operario recebeu?

8.º — Tres pessoas repartiram entre si uma somma: a primeira recebeu 738$640 réis, a segunda recebeu tanto como a primeira mais 175$560 réis, a terceira recebeu tanto como as duas primeiras e mais 107$800 réis. Deseja-se saber a parte que pertenceu a cada pessoa e a somma repartida?

9.º — Um certo peso d'alcool compõe-se de 3316 grammas de carbone, 830 grammas de hydrogeneo e 2211 grammas d'oxygenio. Pergunta-se qual é esse peso?

II — Subtracção

23 — Subtracção ou diminuição *é a operação que tem por fim tirar d'um numero dado as unidades e partes de unidade de outro numero tambem dado*; ou ainda *a operação que tem por fim, conhecendo-se a somma de dois numeros e um d'esses numeros, determinar o outro.*

Ao numero do qual se tiram as unidades do outro chama-se *additivo* ou *diminuendo*; ao numero de unidades que se tiram *subtractivo* ou *diminuidor*, e ao resultado *resto*, *excesso* ou *differença.*

A subtracção indica-se pelo signal —, que se lê *menos.*

Assim 7 — 4 quer dizer que de 7 se deve subtrahir 4, ou ainda, que devemos achar um numero tal, 3, que sommado com 4 produza 7. Os numeros 7 e 4 são os dois *termos da differença.* O diminuendo é 7, o diminuidor é 4 e 3 o *resto* ou *excesso* de 7 sobre 3 ou emfim a *differença* entre 7 e 4.

A subtracção é, portanto, uma *operação inversa* da *addição*; pela addição compõe-se em um só, dois ou mais numeros; pela subtracção decompõe-se um numero dado em outros dois, dos quaes um é conhecido.

Subtracção de um numero digito

24 — O resto da subtracção de um numero digito de um outro qualquer, póde obter-se de duas maneiras:

1.º *Tiram-se do additivo successivamente uma a uma as unidades do subtractivo.* Assim, para subtrahir 4 de 13 dizemos: 13 menos 1, 12; menos 1, 11; menos 1, 10; menos 1, 9. O resto é portanto 9.

2.º — *Contam-se uma a uma as unidades que é preciso ajuntar ao subtractivo para produzir o additivo.*

Assim para subtrahir 4 de 13, diremos: 4 e 1, 5; e 1, 6; e 1, 7; e 1, 8; e 1, 9; e 1, 10; e 1, 11; e 1, 12; e 1, 13. Juntaram-se 9 unidades para completar 13, logo 9 é a differença entre 13 e 4.

Com a pratica adquire-se a facilidade de dizer immediatamente a differença de dois numeros digitos.

Subtracção de numeros compostos

25 — *Para subtrair dois numeros compostos, escreve-se o subtractivo por baixo do additivo, por fórma que as unidades da mesma ordem se correspondam, dando um traço por baixo do subtractivo e escrevendo por baixo d'esse traço os algarismos que representam as differenças parciaes entre as unidades das mesmas ordens no additivo e no subtractivo. Quando algum dos algarismos do additivo for menor do que o que lhe corresponde no subtractivo, sommam-se mentalmente 10 ao algarismo do additivo, opera se depois a subtracção parcial, e, para neutralisar este erro, na subtracção parcial seguinte addiciona-se mentalmente 1 ao algarismo do subtractivo.*

1.º Exemplo: De 869 subtrahir 543. Disporiamos a operação pela fórma seguinte:

$$\begin{array}{r} 869 \\ 543 \\ \hline 326 \end{array}$$

A differença das unidades, 9 — 3, produz 6 unidades; a das dezenas, 6 — 4, produz 2 dezenas; e finalmente a das centenas, 8 — 5, produz 3 centenas. A differença é, pois, constituida por 6 unidades, 2 dezenas e 3 centenas, ou 326.

2.º Exemplo: De 780483 subtrahir 42925.

$$\begin{array}{r} 780483 \\ 42925 \\ \hline 737558 \end{array}$$

A differença das unidades[1] é (10 + 3) — 5; a das dezenas é 8 — (2 + 1); a das centenas é (10 + 4) — 9; a dos milhares é (10 + 0) — (2 + 1); a das dezenas de milhar é 8 — (4 + 1); e a das centenas de milhar é 7 — 0.

Ao additivo addicionaram se, para tornar possiveis as subtracções parciaes, 10 unidades, 10 centenas e 10 milhares, e ao subtractivo 1 dezena, 1 milhar e 1 dezena de milhar, o que equivale ao mesmo.

26 — *Quando houver uma expressão composta de numeros additivos, isto é precedidos do signal +, e de numeros subtractivos, isto é precedidos do signal —, podemos obter o seu valor, ou effectuando suc-*

[1] Quando uma expressão está dentro de um parenthesis, deve considerar-se como já effectuada. Assim, 9 — (4 + 3) é como se estivesse 9 — 7, porque antes de effectuar a subtracção teria de realisar-se a somma encerrada no parenthesis.

cessivamente as operações pela ordem em que estão indicadas, ou fazendo separadameute a somma de todos os additivos e a de todos os subtractivos, e subtrahindo depois a segunda da primeira. Este segundo processo é mais rapido do que o primeiro e deve por isso ser de preferencia empregado.

Exemplo: Achar o valor de

$$2879 - 325 + 1042 - 976 - 2024 + 1986$$

Pelo primeiro processo:

$$\begin{array}{rl}
\left.\begin{array}{r}2879\\325\end{array}\right\} & \text{subtracção}\\
\hline
\left.\begin{array}{r}2554\\1042\end{array}\right\} & \text{addição}\\
\hline
\left.\begin{array}{r}3596\\976\end{array}\right\} & \text{subtracção}\\
\hline
\left.\begin{array}{r}2620\\2024\end{array}\right\} & \text{subtracção}\\
\hline
\left.\begin{array}{r}596\\1986\end{array}\right\} & \text{addição}\\
\hline
2582 & \text{resultado}
\end{array}$$

Pelo segundo processo:

additivos		subtractivos
2879		325
1042		976
1986		2024
5907		3325
3325	subtracção das duas sommas	
2582	resultado	

Se acontecer que a somma dos subtractivos seja superior á dos additivos, o resultado ainda será o excesso da somma maior sobre a menor, mas precedido do signal —.

Nos problemas praticos isto quererá dizer que o resultado se deve entender no sentido contrario do que procuravamos. Assim, se se tratasse de *credito*, deveria entender-se como *debito* e reciprocamente.

Exemplo: Calcular o valor de

2346 — 724 + 102 — 4025

additivos	subtractivos	
2346	4025	
102	724	
2448	4749	subtracção das duas sommas
	2448	
	— 2301	

O resultado seria pois — 2301.

27 — Nas subtracções de numeros concretos é preciso que tanto o diminuendo como o diminuidor estejam referidos á mesma unidade.

Exercicios

1.º — Fazer mentalmente as seguintes subtracções:

224 — 24, 200 — 4, 289 — 32, 183 — 56, 842 — 343

2.º — Effectuar, sem dispor os numeros um por baixo do outro, as seguintes subtracções:

7420356 — 289439; 1000010 — 7789

3.º — Achar o valor das seguintes expressões:

3948 — 234 + 1085 — 813 — 1504 + 4635
2714 + 128 — 3524 + 25 — 4633 + 218

4.º — No balanço de uma conta figuram os seguintes creditos: 4$800 réis, 3$725 réis, 195 réis, e os seguintes debitos: 205 réis, 1$340 réis, 11$400 réis, 3$975 réis. Pergunta-se: ha debito ou credito e de quanto?

5.º — O raio da terra é de 6376984 metros ao equador e de 6356324 metros ao pólo. Qual é a differença dos dois raios?

6.º — Um vaso pesa vazio 38 kilogrammas, e, cheio de azeite, pesa 287 kilogrammas. Qual é o peso do azeite?

7.º — Um individuo entra n'uma loja com 36$850 réis na algibeira; faz diversas compras e sahe com 8$725 réis. Quanto despendeu?

8.º — O cofre d'uma associação tinha em metal 1:225$315. Pagou as seguintes quantias: 25$800 réis, 105$890 réis e 230$080 réis. Com quanto ficou?

9.º — Em que anno nasceu um individuo que conta hoje 27 annos?

III — Multiplicação

28 — Multiplicação *é uma operação pela qual, sendo dados dois numeros, se procura um terceiro, que se forme do primeiro, como o segundo se formou da unidade.*

O primeiro dos numeros dados chama-se *multiplicando*, o segundo *multiplicador* e o resultado da operação *producto.*

O multiplicando e o multiplicador têem o nome de *factores do producto.*

Assim, multiplicar 4 por 3, quer dizer que se procura um numero chamado *producto* que se ha de formar de 4 *(multiplicando)*, como 3 *(multiplicador)* se formou da unidade. Ora 3 formou-se da unidade repetindo-a 3 vezes, como parcella, isto é $3 = 1 + 1 + 1$, logo o producto deve formar-se de 4 repetindo 4 como parcella 3 vezes, isto é $4 + 4 + 4 = 12$.

Vê-se pois que, no caso do multiplicador ser um numero inteiro, a *multiplicação é uma somma de parcellas eguaes*, e que o producto se obtém repetindo o multiplicando tantas vezes como parcella, quantas forem as unidades do multiplicador.

A multiplicação designa-se pelo signal $\times$, que se lê *multiplicado por*, collocado entre os factores.

Assim, 4×3 significa 4 multiplicado por 3.

Multiplicação de dois numeros digitos

29 — O producto de dois numeros digitos póde obter-se pela addicção successiva do multiplicando.

Assim para multiplicar 4 por 3 diremos 4 e 4, 8 e 4, 12, logo $4 \times 3 = 12$.

Póde tambem recorrer-se á seguinte *taboa*, chamada *de Pythagoras*, que, com muita facilidade fornece o producto de dois numeros digitos. E' innegavel, porém, que o melhor meio de facilitar o processo da multiplicação é ter de cór o que vulgarmente se chama *taboada de multiplicar.*

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Para construir esta *taboada* escrevem-se os nove primeiros numeros na 1.ª linha horisontal, os dobros d'estes na seguinte, os triplos na terceira e assim por deante, de sorte que na ultima linha figuram os productos dos da primeira linha, multiplicados por 9.

Querendo achar o producto de dois numeros digitos, por exemplo 6 $\times$ 8, procura-se um dos factores (6) na 1.ª linha horisontal e o outro (8) na 1.ª columna vertical da esquerda, o producto (48) encontrar-se-ha no cruzamento da linha horizontal, que começa em 8, com a columna vertical que começa em 6.

Multiplicação d'um numero composto por um numero digito

30 — Multiplica-se um numero formado de dois ou mais algarismos por um numero digito do modo seguinte:

Escreve-se o multiplicador por baixo do multiplicando e passa-se uma linha. Multiplicam-se successivamente as unidades, dezenas, centenas, etc., do multiplicando pelo multiplicador e escrevem-se só as unidades de cada producto parcial assim obtido, por baixo da linha, e reservam-se as dezenas para addicionar ao producto parcial seguinte, com excepção do ultimo, que se escreve tal qual se acha, depois de lhe haver addicionado as dezenas que se reservaram do producto parcial antecedente.

Exemplo: multiplicar 6425 por 7.

Disposta a operação do seguinte modo:

$$\begin{array}{rl} 6425 & \textit{multiplicando} \\ 7 & \textit{multiplicador} \\ \hline 44975 & \textit{producto total} \end{array}$$

Diz-se 7 vezes 5 são 35 (escreve-se 5) e vão 3, 7 vezes 2 são 14 e 3 que iam são 17 (escreve-se 7) e vae 1; 7 vezes 4 são 28 e 1 são 29 (escreve-se 9) e vão 2; 7 vezes 6 são 42 e 2 são 44 que se escreve exactamente. E d'este modo o producto será 44975.

Multiplicação de dois numeros compostos

31 — *Para multiplicar dois numeros compostos, escreve-se o multiplicador debaixo do multiplicando. Multiplica-se successivamente o multiplicando, por cada algarismo significativo do multiplicador, tendo o cuidado de escrever os productos parciaes uns por baixo dos outros, e de modo que o primeiro algarismo da direita de cada producto parcial fique debaixo do algarismo do multiplicador que o produziu. Sommam-se todos os productos parciaes, e obtem-se assim o producto total.*

Exemplo: multiplicar 8729 por 3746.

Disposta a operação pelo modo seguinte:

```
    8729
    3746
  ------
   52374
  34916
 61103
26187
--------
32698834
```

Multiplicâmos 8729 por 6, segundo a regra da multiplicação d'um numero composto por um numero digito, e o producto 52374 escreve-se por baixo do traço, de modo que o algarismo 4 fique correspondendo ás unidades do multiplicador. Depois multiplicamos 8729 por 4 dezenas e escrevemos o producto, 34916 dezenas, de modo que o algarismo 6 fique correspondendo ás dezenas do multiplicador. Em seguida multiplicamos 8729 por 7 centenas e escrevemos o producto, 61103 centenas, de modo que o algarismo 3 fique correspondendo ás centenas do multiplicador. Finalmente multiplicamos 8729 por 3 milhares, e o producto, 26187 milhares, escrevemol-o por fórma que o 7 fique correspondendo aos milhares do multiplicador. Sommando estes diversos productos parciaes obtemos o producto final 32698834.

32 — **Caso particular.** *Quando um dos factores, ou ambos são terminados por zeros, faz-se a multiplicação como se os não houvesse, e escrevem-se á direita do producto obtido tantos zeros, quantos os que tiverem os factores.*

Exemplo: Multiplicar 3700 por 4600.

```
   3700
   4600
 -------
   222
  148
--------
17020000
```

Multiplica-se 37 por 46, e á direita do producto 1702 escrevem-se quatro zeros, que tantos são os que existem á direita, dos dois factores.

33 — *Para multiplicar um numero inteiro por 10, 100, 1000, etc., basta escrever á direita d'esse numero, um, dois, tres. etc., zeros.*

Assim: $724 \times 1000 = 724000$.

Multiplicação successiva

34 — *Quando uma expressão é composta de muitos numeros separados pelo signal* $\times$, *o seu valor obtem-se por* multiplicações successivas, *isto é, multiplicando o primeiro factor pelo segundo, o producto obtido pelo terceiro e assim por deante até ao ultimo.*

Assim, o valor de $8 \times 4 \times 3 \times 2$ obtem-se multiplicando 8 por 4, o producto obtido por 3, e o novo producto por 2. O valor procurado será pois 192.

35 — O producto é sempre da mesma especie que o multiplicando, e portanto nas questões praticas é preciso tomar por multiplicando o numero que fôr da especie de que deve ser o producto, e considerar o multiplicador como numero abstracto.

Todavia, para a execução da operação convém que fique no logar do multiplicando (o superior) o numero de maior parte significativa, embora na questão desempenhe a funcção de multiplicador.

Assim, se se pretendesse saber *qual é o custo de 24512 litros de azeite a 140 réis o litro*, o multiplicando seria 140 réis, porque o producto deve exprimir réis, e o multiplicador seria o numero abstracto 24512; mas para effectuar a multiplicação collocariamos 24512 no logar superior.

$$\begin{array}{r} 24512 \\ 120 \\ \hline 49024 \\ 24512 \\ \hline 2941440 \end{array} \text{ réis.}$$

Exercicios

1.° — Fazer mentalmente as seguintes multiplicações:

$$232 \times 3;\ 512 \times 1000;\ 333 \times 11:\ 36 \times 999;\ 58 \times 40$$

2.° — Effectuar as seguintes multiplicações successivas:

$$314 \times 8 \times 7;\ 624 \times 32 \times 14 \times 8;\ 4200 \times 350 \times 6000$$

3.° — Obter o producto 589×42 decompondo o multiplicador em dois fractores digitos e effectuando depois a multiplicação successiva.

4.° — Representar sobre a fórma de producto a somma

$$27 + 27 + 27 + 27$$

5.º — Representar sobre a fórma de somma o producto 17 + 7.

6.º — O producto de dois numeros é 36. Quaes podem ser esses numeros?

7.º — Um metro de fazenda custa 600 réis. Qual é o custo de 12 metros?

8.º — Qual é o custo d'um terreno de 648 metros quadrados á razão de 1$500 réis o metro quadrado?

9.º — O dia tem 24 horas, a hora 60 minutos e o minuto 60 segundos. Quantas horas têem 58 dias? Quantos minutos têem 64 horas? Quantos segundos teem 24 minutos? Quantas horas, minutos e segundos tem um anno suppondo-o de 365 dias?

10.º — Uma locomotiva percorre 784 metros por minuto. Que distancia percorrerá em 2 horas e 27 minutos?

11.º — Medeiam 9 segundos entre a apparição da explosão e o momento em que se ouve a detonação de um tiro de artilharia. A que distancia está a peça, sabendo-se que a transmissão da luz se póde considerar instantanea e que o som percorre 340 metros por segundo?

12.º — Compraram-se 1748 kilogrammas de batatas, sendo 658 kilogrammas a 25 réis e a restante a 32 réis; 240 kilogrammas d'arroz a 105 réis o kilogramma e 125 litros d'azeite a 327 réis o litro. Qual é a importancia total?

13.º — Uma véla electrica, systhema Jablockoff, illumina tanto como 125 bicos de gaz dos quaes cada um equivale a 16 vélas ordinarias; quantas serão necessarias d'estas ultimas, para substituir uma véla electrica?

14.º — Sete operarios trabalhando 8 horas por dia gastaram 49 dias em fazer uma obra. Quantas horas empregaram n'esse trabalho?

IV — Divisão

36 — **Divisão** *é uma operação pela qual sendo dados dois numeros, se determina um terceiro, que multiplicado pelo segundo produza o primeiro.*

O primeiro dos numeros dados chama-se *dividendo*, o segundo *divisor* e o resultado da operação *quociente*.

O dividendo e o divisor denominam-se *termos* da divisão.

A divisão indica-se pelo signal : que se lê *dividido por*. Assim 35 : 7 quer dizer que 35 *(dividendo)* se tem de dividir por 7 *(divisor)*. O *quociente* é 5, por isso que 5×7 produz 35.

Tambem se costuma indicar a divisão escrevendo o dividendo por cima de um traço horizontal e o divisor por baixo, o que é preferivel, por se representar assim já o valor do quociente, como adeante veremos quando se tratar das fracções.

Assim $\frac{35}{7}$ é a notação que deve ser preferida para representar a divisão de 35 por 7.

E' claro que o quociente tem tantas unidades quantas forem as vezes que no dividendo se contiver o divisor, e póde, portanto, ser determinado por subtracções successivas em que o divisor servirá de subtractivo ou diminuidor.

Assim, no caso considerado, subtrahindo successivamente 7

$$\begin{array}{r} 35 \\ 7 \\ \hline 28 \\ 7 \\ \hline 21 \\ 7 \\ \hline 14 \\ 7 \\ \hline 7 \\ 7 \\ \hline 0 \end{array}$$

veriamos que em 35 se contém 7 cinco vezes, e, portanto, o quociente seria 5.

Consideremos agora a divisão de 34 por 7. Procedendo do mesmo modo

$$\begin{array}{r} 34 \\ 7 \\ \hline 27 \\ 7 \\ \hline 20 \\ 7 \\ \hline 13 \\ 7 \\ \hline 6 \end{array}$$

veriamos que 34 contém 7 quatro vezes e que ainda fica o resto 6, necessariamente inferior ao divisor. O quociente exacto devendo ser superior a 4, porque 4×7 produz 28, e superior a 5, porque 5×7 produz 35, não póde ter a fórma inteira. N'este caso diz-se que a divisão é *inexacta*; isto é que se faz com *resto*, e o quociente inteiro, a que tambem se dá o nome de *incompleto*, apenas indica o *maximo numero de vezes que no dividendo se contém o divisor*. Na divisão inexacta de 34 por 7 obteriamos o quociente incompleto 4 e o resto 6.

Nas divisões exactas o dividendo é igual ao producto do divisor pelo quociente, e nas inexactas é igual a este producto augmentado com o resto. Nas duas divisões precedentemente consideradas seria:

$$24 = 8 \times 3$$

$$34 = 7 \times 4 + 6$$

37 — Na divisão dos numeiros interos ha a considerar 3 casos:

1.º Quando o divisor fôr digito e o quociente o houver de ser tambem.

2.º Quando o divisor fôr composto e o quociente digito.

3.º Quando o divisor e o quociente são compostos.

38 — O *quociente será digito*, quando escrevendo um zero á direita do divisor resultar um numero maior que o dividendo; será *composto* se o numero obtido fôr egual ou menor que o dividendo.

Por exemplo, na divisão de 312 por 54 o quociente será digito, porque escrevendo um zero á direita do divisor, resulta um numero 540, maior que o dividendo 312.

Na divisão de 312 por 24 o quociente será composto, porque escrevendo um zero á direita do divisor 24, resulta um numero 240 menor que o dividendo.

39 — 1. caso. *Quando o divisor fôr digito e o quociente tambem o houver de ser, determina-se o quociente procurando por meio da ta-*

boada qual é o numero digito que multiplicado pelo divisor, produz exactamente o dividendo, ou o que dá o producto mais proximo do dividendo para menos, se a divisão fôr inexacta.

Assim, se se quizer determinar o quociente de 29 : 6, observaremos que é

$$1 \times 6 = 6,\ 2 \times 6 = 12,\ 3 \times 6 = 18,\ 4 \times 6 = 24,\ 5 \times 6 = 30,$$

e sendo este o primeiro producto superior a 29, o quociente incompleto já não poderia ser 5, mas sim 4. O resto seria a differença entre 29 e o producto de 4 por 6, isto é 5. Se se quizesse determinar o quociente de 30 : 6, a observação dos mesmos productos acima considerados mostraria que é exactamente 5.

Com a pratica póde em taes casos dizer-se immediatamente o quociente, exacto ou incompleto, e o resto.

40 — **2.º caso.** *Quando o divisor fôr composto e o quociente digito, toma-se o algarismo das unidades mais elevadas do divisor, e procura-se quantas vezes esse algarismo é contido nas unidades da mesma ordem do dividendo. Obtem-se d'este modo o quociente verdadeiro ou um quociente muito forte, por isso que na sua determinação não contamos com os restantes algarismos do divisor. Para verificar se o quociente é o verdadeiro, multiplical-o-hemos pelo divisor. Se o producto obtido fôr egual ao dividendo, ou menor, o quociento achado é verdadeiro; se esse producto for maior que o dividendo o quociente é muito forte. N'este caso, diminue-se uma unidade ao algarismo escolhido e procede-se a nova verificação, e assim se continua até encontrar o verdadeiro quociente.*

Exemplo: Dividir 4673 por 524.

Depois de observarmos que o quociente deve ser digito, porque escrevendo um zero á direita do divisor, resulta um numero 5420, maior que o dividendo, disporiamos a operação pela seguinte fórma.

$$\begin{array}{r|l} 4673 & 524 \\ \cline{2-2} 4192 & 8 \\ \cline{1-1} 481 & \end{array}$$

Para obter o quociente, tomariamos o algarismo 5 das centenas do divisor, que são as unidades mais elevadas, e procurariamos quantas vezes esse algarismo se continha em 46, que são as centenas do dividendo, o que nos daria 8. Depois multiplicariamos 524 por 8 e o producto obtido 4192 subtrahil-o hiamos de 4673, obtendo assim o resto 481 menor que o divisor, o que prova ser bem escolhido o quociente 8.

Costuma effectuar-se simultaneamente a multiplicação do quociente pelo divisor e a subtracção, não sendo portanto preciso escrever o producto por baixo do dividendo.

No exemplo considerado, o typo do calculo seria o seguinte:

$$\begin{array}{r|l} 4673 & 524 \\ \cline{2-2} 481 & 8 \end{array}$$

41 — 3.º caso. *Quando o divisor e o quociente são compostos, separa-se á esquerda do dividendo um numero de algarismos egual aos do divisor, ou a esses mais um, se os primeiros constituirem um numero menor que o divisor. O numero assim formado constiue o primeiro dividendo parcial, que dividido pelo divisor, conforme a regra do numero antecedente, dá o primeiro algarismo do quociente.*

A' direita do resto obtido n'esta primeira divisão parcial, escreve-se o algarismo do dividendo, que se segue ao primeiro dividendo parcial, e assim se constitue o segundo dividendo parcial, que igualmente se divide pelo divisor, escrevendo o algarismo determinado para o quociente á direita do anteriormente obtido. Continua-se do mesmo modo, até se ter escripto á direita do resto o ultimo algarismo do dividendo, e o resto da ultima divisão parcial será o resto da divisão total.

Exemplo: Dividir 37658 por 273.

1.º typo

$$\begin{array}{r|l} 37658 & 273 \\ \cline{2-2} 273 & 137 \\ \cline{1-1} 1035 & \\ 819 & \\ \cline{1-1} 2168 & \\ 1911 & \\ \cline{1-1} 257 & \end{array}$$

2.º typo (usual)

$$\begin{array}{r|l} 37658 & 273 \\ \cline{2-2} 1035 & 137 \\ 2168 & \\ 257 & \end{array}$$

O primeiro dividendo parcial é 376 centenas, que, divididas por 273 produzem o quociente 1 centena e o resto 103 centenas. O segundo é 1035 dezenas, que, divididas por 273, produzem o quociente 3 dezenas e o resto 216 dezenas. O terceiro é 2168 unidades, que divididas por 273, produzem o quociente 7 unidades e o resto 257. O quociente total (incompleto) é 137 e o resto da divisão 257.

42 — Quando algum dividendo parcial é menor que o divisor, escreve-se um zero no quociente e abaixa-se o algarismo seguinte do dividendo.

Exemplo: Dividir 152358 por 376.

152358	376
1958	405
78	

Sendo o primeiro resto 19, o segundo dividendo parcial será 195. e, como é menor que o divisor, escreve-se um zero no quociente á direita de 4 e abaixa-se o algarismo 8 do dividendo, e só assim se constituirá o segundo dividendo parcial, 1958, que, dividido por 376, produz o quociente 5 e o resto 78.

43 — Quando o dividendo tem muitos algarismos e o divisor é digito, póde-se reter na memoria os restos e os dividendos parciaes e escrever apenas os algarismos do quociente e o resto final.

Exemplo:

Dividir 35624 por 9, ou tomar a nona parte de 35624.

35624 : 9

quociente 3958 e 2 de resto.

Diremos: a nona parte de 35 são 3 e restam 8, a nona parte de 86 são 9 e restam 5, a nona parte de 52 são 5 e restam 7, finalmente a nona parte de 74 são 8 e restam 2. O quociente será pois 3958 e o resto 2.

44 — Na divisão ordinaria ou simples, ha um só divisor. Quando ha mais d'um divisor, a divisão chama-se successiva, porque para se obter o quociente é necessario effectuar tantas divisões ordinarias quantos são os divisores; ou uma só divisão ordinaria, na qual o divisor seja o producto de todos os divisores da divisão successiva.

Exemplo:

Effectuar a divisão successiva:

72 : 2 : 3 : 4

72	2	36	3	12	4
12	36	06	12	0	3
0		0			

ou ainda:

72	24	*producto dos divisores*
0	3	

45 — **Caso particular.** *Quando o divisor terminar em zeros, supprimem-se, e cortam-se á direita do dividendo tantos algarismos,*

quantos os zeros supprimidos no divisor. Dividindo os numeros resultantes, obtem-se o verdadeiro quociente, e um resto á direita do qual será preciso escrever os algarismos cortados no dividendo, para assim obter o verdadeiro resto

Exemplo:

Dividir 846580 por 4800

```
8465(80 | 48)00
366       176
 305
  1780
```

Supprimindo os dois zeros do divisor, teremos de cortar no dividendo os dois algarismos da direita (80). Dividindo 8465 por 48 obteremos para quociente 176 e para resto 17; portanto o quociente da operação proposta será 176 e o resto 1780.

46 — *Para dividir um numero por 10, 100, 1000, etc. supprimem-se á direita d'esse numero um, dois, tres, etc. algarismos. A parte conservada representará o quociente e a parte supprimida o resto.*

Assim 37894 dividido por 1000 dá para quociente 37 e para resto 894.

47 — Nas questões praticas, quando o dividendo e o divisor são referidos a uma mesma especie de unidade, o *quociente será um numero abstracto*, que exprimirá quantas vezes o dividendo contém o divisor: e quando o quociente tiver de ser *concreto*, então toma-se para dividendo o numero que seja da mesma especie, e considera-se o divisor como abstracto, para designar o numero de partes iguaes em que se deve dividir o dividendo e uma das quaes constitue o quociente.

1.º exemplo: *Compraram-se 147 metros de panno em peças de 21 metros cada uma. Quantas peças se compraram?*

O quociente será o numero abstracto 7, que representa as vezes que em 147 metros se contem uma das suas partes 21 metros.

2.º exemplo: *Compraram-se 7 peças de panno de egual comprimento tendo ao todo 147 metros. Quantos metros tem cada uma?*

O quociente (21 metros) será uma das 7 partes eguaes em que se suppõe que 147 metros foram divididos.

Exercicios

1.º — Effectuar as seguintes divisões ordinarias: 9000 : 3624; 94658 : 3; 7658 : 1000; 9368000 : 74000; 76300 : 5000; 1000000 : 10000; 7943768 : 3452.

2.º — Effectuar as seguintes divisões successivas: 275 : 5 : 11; 17160 : 3 : 5 : 11 : 13.

3.º — Tomar a terça parte, a setima parte, e a duodecima parte dos numeros 252; 756; 20412; 1000188; 73497.

4.º — Um operario faz 7 metros d'obra por dia. Quantos dias gastará para fazer 343 metros?

5 — 72 kilogrammas d'assucar custaram 15$840 réis. Qual é o custo do kilogramma?

6.º — Uma bala de artilheria percorreria 450 leguas por hora, se conservasse sempre a velocidade que tem á sahida da peça. Quantas horas gastaria em ir da terra ao sol, sendo a distancia d'estes dois astros 37800000 de leguas?

7.º — Uma torneira lança 58 litros d'agua por minuto. Emquanto tempo enche um deposito que tem 34 metros cubicos de capacidade, sabendo-se que o metro cubico equivale a 1000 litros?

8.º — Quantas horas ha em 587 minutos?

9.º — Um pae deixou em testamento 5:825$000 réis para dividir egualmente por 8 filhos. Qual é o quinhão de cada filho?

10.º — Precisa-se de canalisar para um quintal a agua d'uma nascente, empregando tubos de 3 metros de comprimento. Quantos tubos serão necessarios, sabendo-se que a distancia da nascente ao quintal é de 524 metros?

11.º — Um individuo comprou 3 propriedades, a primeira por 3:250$000 réis; a segunda por 2:830$000 réis e a terceira por 4:500$000 réis. Pagou no acto da compra 4:200$000 réis e convencionou pagar o resto em 3 prestações.

Pergunta-se quanto fica devendo, e qual o valor de cada prestação que tem de pagar?

12.º — Custando uma peça de panno 42$680 réis, á razão de 1$120 réis cada metro, quantss metros tem a peça?

13.º — N'um alinhamento de 438 metros de extensão, plantaram-se 73 arvores, igualmente espaçadas umas das outras. Qual é a distancia que as separa?

14.º — Um typograppho gasta 1 hora para compôr 25 linhas de texto. Quantas horas lhe são precisas para compôr um livro de 420 paginas de 32 linhas cada pagina?

15.° — O bronze das estatuas obtem-se fundindo 11 kilogrammas de estanho com 100 kilogrammas de cobre. Suppondo que o kilogramma de cobre vale 425 réis e o de estanho 485 réis, qual é o preço de 1 kilogramma de bronze?

16.° — Uma escola é frequentada por 72 alumnos tendo:

A 1.ª turma...........	32 alumnos.
A 2.ª »	24 »
A 3.ª »	o resto.

Houve no anno 227 dias lectivos, e os alumnos deram as seguintes faltas:

1.ª turma.............	526
2.ª »	305
3.ª »	70

Qual foi a frequencia média diaria d'esta escola?

17.° — Um mercador comprou 4 peças de panno por 367$200 réis, sendo 3$400 réis o preço de cada metro.

A 1.ª peça tinha	28	metros.
A 2.ª » »	24	»
A 3.ª » »	30	»

Quantos metros deveria ter a 4.ª?

18.° — Quantas moedas de 2$000 réis serão precisas para comprar 120 metros de fazenda, custando cada metro 1$500 réis?

19.° — Para multiplicar um numero por

5, 25, 125, 625. etc.

escreve se á direita do multiplicando

1 2 3 4 etc., zeros;

em seguida divide-se por

2 4 8 16 etc.:

o quociente que se encontra é o producto pedido.

Effectuar as seguintes multiplicações:

8513×5 ; 6853×125 ; 3624×25 ; 97576×625

20.º — Para dividir um numero por

5, 25, 125, 625, etc.

multiplica-se este numero por

2, 4, 8, 16, etc.

em seguida suprime-se á direita do producto

1, 2, 3, 4, etc., algarismos:

a parte que resta é o quociente, a parte supprimida é o resto da divisão multiplicado por 2, 4, 8, 16, etc.

Effectuar as seguintes divisões:

8697432 : 125; 178432 : 25; 37694 : 5; 379816 : 625

V — Elevação a potencias

48 — **Potencia de um numero** *é um producto de factores iguaes a esse numero.*

Assim

3×3 ou 9 é a 2.ª potencia de 3
$3 \times 3 \times 3$ ou 27 é a 3.ª potencia de 3
$3 \times 3 \times 3 \times 3$ ou 81 é a 4.ª potencia de 3

Para representar uma potencia bastam dois numeros: um, chamado *base* ou *raiz*, para designar qual é o factor, e outro, chamado *expoente* ou *grau*, para designar qual é o numero de factores. Assim, a potencia $3 \times 3 \times 3 \times 3$ póde representar-se mais simplesmente só com a base 3 e o expoente 4, escrevendo o expoente á direita e um pouco superiormente á base, da fórma seguinte: 3^4

Para lêr uma potencia lê-se primeiro a base e depois o expoente precedido das palavras *elevado a*; assim 3^4 lê-se 3 elevado a 4. A' 2.ª potencia dá-se o nome de *quadrado* e á 3.ª o de *cubo*; assim 4^2 lê-se *quadrado de* 4 em vez de ler-se 4 elevado a 2, e 7^3 lê-se *cubo de* 7 em vez de se lêr elevado a 3.

Tambem se diz, em vez de 2.ª potencia, potencia do 2.º grau, em vez de 3.ª potencia, potencia do 3.º grau, etc.

Quando um numero não tem expoente, subentende-se-lhe o expoente unidade.

49 — **Elevar um numero a uma potencia é achar o valor d'essa potencia.** Obtem-se por multiplicações successivas

de factores iguaes á base. Assim, para elevar 5 á quarta potencia multiplica-se 5 por 5, e o seu producto (25) ainda por 5, e o novo producto (125) ainda por 5. Este ultimo producto (625) é o valor da potencia 5^4.

50 — Pela definição da potencia é

$$10^2 = 10 \times 10 = 100$$
$$100^2 = 100 \times 100 = 10000$$
$$100^3 = 100 \times 100 \times 100 = 1000000$$
$$1000^4 = 1000 \times 1000 \times 1000 \times 1000 = 1000000000000$$

d'onde se conclue a seguinte regra: *qualquer potencia da unidade seguida de zeros, é igual a 1 seguido de tantos zeros, quantas são as unidades do producto do expoente da potencia pelo numero de zeros da base.*

51 — *A potencia de um numero terminado em zeros, forma-se achando o valor da potencia, da parte significativa, e accrescentando-lhe á direita tantos zeros, quantas forem as unidades do producto do expoente pelo numero de zeros.*

$$\text{Exemplos:}\left\{\begin{array}{l} 40^2 = 40 \times 40 = 1600 \\ 400^2 = 400 \times 400 = 160000 \\ 400^3 = 400 \times 400 \times 400 = 64000000 \\ 1500^2 = 1500 \times 1500 = 2250000 \\ 15000^3 = 15000 \times 15000 \times 15000 = 3375000000000 \end{array}\right.$$

52 — *O producto de duas ou mais potencias da mesma base obtem-se, elevando a base á somma dos expoentes dos factores.*

Exemplo:

$$3^2 \times 3^3 \times 3^4 = 3^{2+3+4} = 3^9 = 19683$$
$$5^2 \times 5^4 \times 5^3 = 5^{2+4+3} = 5^9 = 1953125$$

53 — *O producto de duas ou mais potencias do mesmo grau obtem-se, elevando o producto das bases ao grau commum.*

Exemplo:

$$3^2 \times 4^2 \times 5^2 = (3 \times 4 \times 5)^2 = 60^2 = 3600$$
$$6^3 \times 3^3 \times 4^3 = (6 \times 3 \times 4)^3 = 72^3 = 373248$$

54 — *A potencia de qualquer potencia obtem-se, elevando a base ao producto dos expoentes das duas potencias.* Assim, para obter a terceira potencia de 5^2, elevaremos a base 5 ao expoente 2×3, producto dos dois expoentes, isto é

$$(5^2)^3 = 5^{2 \times 3} = 5^6 = 15625$$

55 — *O quociente de duas potencias da mesma base obtem-se, elevando a base á differença dos expoentes.*

Exemplo:

$$2^5 : 2^2 = 2^{5-2}\ 2^3 = 8$$

56 — *O quociente de duas potencias do mesmo grau obtem-se, elevando o quociente das bases ao grau commum.*

Exemplo:

$$16^3 : 8^3 = (16 : 8)^3 = 2^3 = 8$$

Exercicios

1.º — Calcular mentalmente o cubo de 4, o quadrado de 12 e a quarta potencia de 2c.

2.º — Quaes são as potencias successivas de 10?

3.º Qual é o valor de 1^{14}?

4.º — Representar sob a fórma de potencia o producto

$$8 \times 8 \times 8 \times 8$$

5.º — Representar sob a fórma de producto a potencia 9^7.

6.º — Achar o valor das potencias

$$100^4,\ 1000^3,\ 10^5,\ 1000^8,\ 2500^2,\ 324000^2,\ 51000^5,\ 32^7,\ 54^3,\ 825^2$$

7.º — Formar as seguintes potencias indicadas:

$$(220^2)^3\ ;\ (832^4)^3\ ;\ (1000^3)^5$$

8.º — Calcular os valores de

$$(3^2 \times 3^4 \times 3^5)\ ;\ (2^2 \times 2^3 \times 2^4)\ ;\ (4^7 \times 5^7 \times 3^7)$$

$$(8^5 : 8^3)\ ;\ (5^6 : 5^2 : 5)\ ;\ (18^4 : 3^4)\ ;\ (27^5 : 3^5)$$

9.º — Semeando um grão de trigo podem colher-se 41 grãos. Quantos grãos póde produzir um grão no fim de 4 annos, suppondo que se semeiam sempre os grãos produzidos em cada anno?

III

Divisibilidade. Provas das operações

I — Caracteres da divisibilidade

57 — Quando a divisão de um numero por outro se faz com resto zero, diz-se que o primeiro é *divisivel* pelo segundo, ou é *multiplo* do segundo, e que o segundo é *divisor*, *submultiplo* ou *factor* do primeiro. Assim, 35 é divisivel por 7 ou é multiplo de 7, e 7 é divisor, ou submultiplo, ou factor de 35, porque 35 dividido por 7 dá um quociente 5 e o resto zero. O numero 34 não é divisivel por 7, porque 34 dividido por 7 dá um quociente 4 e o resto 6; e 7 não é divisor de 34. *Um numero diz-se portanto multiplo de outro numero, quando o primeiro é producto do segundo por outro numero inteiro.* Por exemplo 24 é multiplo de 8, porque 24 é o producto de 8 multiplicado por um numero inteiro, 3.

Mas 25 não é multiplo de 8, porque não ha numero inteiro que multiplicado por 8 produza 25.

A determinação dos restos, que se obteem na divisão de um numero por outro, é importante e constitue o que se chama a divisibilidade.

Casos ha em que, sem effectuar a divisão, é facil determinar esses restos, e portanto conhecer se um numero é ou não divisivel por outro.

58 — *O resto da divisão de um numero por 2 ou por 5 obtem-se dividindo por 2 ou por 5 o algarismo das unidades.* Por exemplo, o resto da divisão de 579 por 2 é 1, porque dividindo por 2 o algarismo 9 das unidades obtem-se o resto 1.

O resto da divisão do mesmo numero 579 por 5 é 4, porque dividindo por 5 o algarismo 9 das unidades obtem-se o resto 4. Portanto

59 — *Um numero será divisivel por 2 quando o algarismo das unidades fôr 0, 2, 4, 6 ou 8.* Exemplo: 340 e 438. E não será divisivel por 2, quando o algarismo das unidades fôr 1, 3, 5, 7 ou 9.

Chama-se numero *par* aquelle que é divisivel por 2, e *impar* o que não é divisivel por 2.

60 — *Um numero será divisivel por 5, quando o algarismo das unidades fôr 0 ou 5.* Exemplos: 340 e 225.

61 — O resto da divisão de um numero por 3 ou por 9 *obtem-se dividindo por 3 ou por 9 a somma dos seus algarismos.*

Assim, dado o numero 7658, a somma dos seus algarismos é 7 + 6 + 5 + 8 ou 26; esta somma dividida por 3 dá o resto 2; o numero 7658 dividido por 3 dá tambem o resto 2. O resto divisão do mesmo numero 7608 por 9 é 8, porque 26 dividido por 9 dá o resto 8. Portanto

62 — *Um numero é divisivel por 3 quando a somma dos valores absolutos dos seus algarismos o fôr*. Exemplos: 345 e 291.

63 — *Um numero é divisivel por 9 quando a somma dos valores absolutos dos seus algarismos o fôr*. Exemplos: 7245 e 1089.

64 — *O resto da divisão de um numero por 4 obtem-se dividindo por 4 o nnmero formado pelos seus dois algarismos da direita*. Por exemplo, para obtermos o resto da divisão de 8738 por 4, dividimos por 4 o numero 38 formado pelos dois algarismos da direita do numero dado; cuja divisão dá o resto 2; o numero 8738 dividido por 4 dá tambem o resto 2. Logo

64 — *Um numero será divisivel por 4, quando o numero formado pelos seus dois algarismos da direita o fôr*. Exemplos: 7912 e 4560.

66 — *Um numero será divisiuel por 6 quando n'elle se verifiquem ao mesmo tempo as condições de divisibilidade por 2 e 3*. Exemplos: 324 e 510.

67 — *O resto da divisão de nm numero por 11 obtem-se subtrahindo da somma dos algarismos das casas impares, a contar da direita, ou d'esta somma augmentada de um multiplo de 11, a somma dos algarismos das casas pares*. Por exemplo, para obtermos o resto da divisão de 756934 por 11, sommamos os algarismos das casas impares 4 + 9 + 5, e os das casas pares 3 + 6 + 7; subtrahiremos esta somma da primeira; o resultado 2 é o resto de 756934 dividido por 11. Da mesma fórma o resto de 58392 dividido por 11 obtem se fazendo as sommas 2 + 3 + 5 e 9 + 8; e como a segunda somma é maior que a primeira, accrescentaremos a esta 11; e teremos 11 + 2 + 3 + 5 ou 21, subtrahindo agora a segunda somma 17, obtemos o resultado 4. Este numero 4 é o resto da divisão de 58392 por 11. Portanto

68 — *Um numero será divisivel por 11, quando a somma dos algarismos das casas impares menos a somma dos algarismos das casas pares fôr zero, 11 ou multiplo de 11*. Exemplos: 7238 e 3729.

69 — *O resto da divisão de um numero por 10 é o ultimo algarismo da direita; por 100 é o numero formado pelos dois algarismos*

da direita; por 1000 é o numero formado pelos tres ultimos algarismos da direita, e assim por deante. Por exemplo, o resto de 7625 dividido por 1000 é 625. Logo

70 — *Um numero é divisivel por 10, 100, 1000, etc., quando termina em um, dois, tres, etc., zeros.* Exemplos: 3420 é divisivel por 10, 3700 é divisivel por 100 e 58000 é divisivel por 1000.

II—Provas das operações

50 — Prova *de uma operação é uma nova operação, que tem por fim verificar se a primeira está certa.*

Quando o resultado de uma operação póde ser achado por dois meios differentes, qualquer d'elles póde servir de prova ao outro.

Ha duas especies de provas que se denominam *prova real* e *prova por um divisor.*

Os divisores que em geral se empregam nas provas são 9 e 11, e por isso as provas por um divisor dividem se de ordinario em *prova dos noves* e *prova dos onzes*. Podem, comtudo, empregar-se outros divisores faceis de extrahir, como são 2, 3, 4 e 5.

Provas reaes das operações

51 — Addição. *A prova real da addição póde tirar-se addicionando as columnas de baixo para cima e vendo se assim se obtem um resultado igual ao primeiro.*

Assim no exemplo do n.º 20 sommando a columna das unidades 9 + 4 + 2 + 8, encontrariamos para resultado 3 unidades, como na operação, e 2 dezenas; sommando a das dezenas, 2 + 8 + 9 + 3 + 2, encontrariamos 4 dezenas e 2 centenas; sommando a das centenas, 2 + 8 + 6 + 3, encontrariamos 9 centenas e 1 milhar; e sommando finalmente a dos milhares, 1 + 7 + 5, encontrariamos 13 milhares. A operação estava, pois, certa, porque o resultado agora encontrado, 13943, é igual ao que já se havia obtido.

E' claro que uma prova só poderá dar a certeza quando na sua execução não tenha havido erro.

Tambem se emprega algumas vezes outra prova real á addição que consiste em *sommar todas as parcellas, menos uma, subtrahir a segunda somma da primeira e o resto deve ser igual á parcella excluida.*

Exemplo:

37485	*parcella excluida*
43632	
4905	
8764	
9876	
104662	*primeira somma*
67177	*segunda somma*
37485	*parcella excluida*

52 — **Subtracção.** *A prova real da subtracção faz-se addicionando o subtractivo com o resto. A somma deve ser igual ao additivo se a operação estiver bem feita.*

Exemplo:

32106	
4028	*addição*
28078	
32106	

53 — **Multiplicação.** *A prova real da multiplicação tira-se invertendo a ordem dos factores; isto é, tomando o multiplicando para multiplicador e vice-versa, e formando outra vez o producto; os dois resultados devem ser iguaes se a operação estiver bem feita.*

Exemplo:

648	375
375	648
3240	3000
4536	1500
1944	2250
243000	233000

Tambem se tira a prova real da multiplicação dividindo o producto por um dos dois factores, e para a operação estar certa, o quociente deve ser igual ao outro factor.

Exemplo:

648	243000	375
375	1800	648
3240	3000	
4536	0	
1944		
243000		

54 — Divisão. *A prova real da divisão effectua-se, multiplicando o quociente pelo divisor e juntando a este producto o resto, o resultado deve ser igual ao dividendo.*

Exemplo:

			Prova
38645	27		27
116	1431		1431
84			27
35			81
8			108
			27
			38637
			8
			38645

Prova dos noves e dos onzes

55 — Para tirar a prova dos noves a qualquer operação é preciso primeiro saber *tirar os noves* [1] a um numero, o que se faz *addicionando successivamente todos os algarismos significativos d'esse numero, differentes de nove, e diminuindo de cada somma 9, sempre que isso seja possivel.*

Para tirar os noves ao numero 56835493, dir-se-hia 5 e 6, 11, *nove* fóra 2; e 8, 10, *nove* fóra 1; e 3, 4 e 5, 9, *nove* fóra 0; 4 e 3, 7. Portanto, tirando os noves ao numero proposto, obtem-se o resto 7.

56 — Addição. *Para tirar a* prova dos noves *a uma addição, tiram-se os noves ás parcellas como se todos os algarismos constituissem um unico numero, e depois tiram-se os noves á somma.*

Se os restos obtidos n'estas duas extracções forem iguaes, haverá probabilidade da operação estar certa.

Exemplo:

865		
387	2	*resto das parcellas*
694	2	*resto da somma*
1946		

Extrahimos os noves ás parcellas dizendo: 8 e 6, 14, nove fóra 5; e 5, 10, nove fóra 1, e 3, 4, e 8, 12, nove fóra 3; e 7, 10, nove fóra 1; e 6, 7 e 4, 11, nove fóra 2.

---

[1] Tirar os noves a um numero equivale a achar o resto que se obtem quando se divide esse numero por 9.

Extrahindo os noves á somma, obter-se-ha tambem o resto 2.

E' de uso escrever os restos por cima e por baixo de um pequeno traço horisontal.

Contrariamente á prova *real*, a prova dos noves, tanto n'esta como nas outras operações, não accusa, mesmo sendo bem feita, os erros de 9, 18, 27, 36, etc., como póde ver-se na seguinte somma que, estando errada para mais em 72, é todavia dada como certa pela prova dos noves.

Exemplo:

$$\begin{array}{r} 976 \\ 4023 \\ 346 \\ 9308 \\ \hline 14725 \end{array} \qquad \frac{1}{1}$$

57 — **Subtracção.** *Para tirar a* prova dos noves *á subtracção, extrahem-se os noves ao subtractivo e ao resto, como se fossem parcellas de uma somma, depois extrahem-se tambem os noves ao additivo, devendo os dois restos ser iguaes, se a operação estiver certa.*

Exemplo:

$$\begin{array}{r} 32106 \\ 4028 \\ \hline 28078 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \dfrac{3}{3} \end{array} \quad \begin{array}{l} \textit{resto do subtractivo e differença} \\ \textit{resto do additivo} \end{array}$$

Diremos começando pelo subtractivo, 4 e 2, 6 e 8, 14, nove fóra 5; e 2, 7 e 8, 15, nove fóra 6; e 7, 13, nove fóra 4, e 8, 12, nove fóra 3.

Extrahindo agora os noves ao additivo acharemos o mesmo resto 3.

58 — **Multiplicação.** *Para tirar a* prova dos noves *á multiplicação, extrahem-se os noves ao multiplicando e ao multiplicador, multiplicam-se os dois restos obtidos e extrahem-se os noves ao seu producto, se fôr igual ou superior a nove, e deve este resto ser igual ao que se obtem extrahindo os noves ao producto da multiplicação.*

Exemplo:

$$\begin{array}{r} 8756 \\ 248 \\ \hline 70048 \\ 35024 \\ 17512 \\ \hline 2171488 \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} 8 & 4 \\ \hline 5 & 4 \end{array} \quad \textit{resto do producto}$$

Extrahindo os noves ao multiplicando obtem-se o resto 8; extrahindo-os ao multiplicador, obtemos o resto 5; multiplicando 8 por 5 e ao producto (40) extrahindo os noves, obtemos o resto 4; finalmente, extrahindo os noves ao producto 2171488, obtemos igualmente o resto 4, é portanto provavel que a operação esteja certa.

Costuma-se escrever os restos obtidos nos quatro angulos formados por duas rectas cruzadas.

59 — **Divisão.** *Para tirar a prova dos noves á divisão, extrahem-se os noves ao divisor e ao quociente, multiplicam-se os dois restos, extrahem-se os noves ao producto obtido, junta-se este ultimo resto ao resto da divisão, a esta somma extrahem-se os noves, e finalmente extrahem se os noves ao dividendo.*

Os dois ultimos restos devem ser iguaes para a divisão estar certa.

Exemplo:

58673	25	7	2	
86	2346	6	2	*resto do dividendo*
117				
173				
23				

Extrahindo os noves ao divisor obtemos o resto 7, extrahindo-os ao quociente obtemos o resto 6. Multiplicando estes dois restos, e extrahindo os noves ao producto (42) obtemos o resto 6, que addicionado ao resto (23) da divisão e excluidos os noves, produz 2. Extrahindo os noves ao dividendo 58673 obtemos egualmente 2, o que dá probabilidade da operação estar certa.

60 — A prova dos onzes tira-se por modo em tudo similhante á dos noves, com a differença de se extrahirem os onzes [1] em vez dos noves.

Para verificar, por exemplo, pela prova dos onzes a multiplicação:

874	5	10
68	2	10
6992		
5244		
59432		

Tiram-se os onzes ao multiplicando, o que se faz sommando os algarismos das casas impares $4 + 8$, tirando a esta somma a somma dos algarismos das casas pares 7, e dividindo a differença $12 - 7$,

[1] Extrahir os onzes a um numero equivale a achar o resto que se obtem quando se divide esse numero por 11. (67).

ou 5 por 11, e obtem-se o resto 5. Tiram se do mesmo modo os onzes ao multiplicador, e achamos o resto 2; multiplicam-se os dois restos 5×2, e obtemos o resultado 10. Tirando agora os onzes ao producto, obtemos tambem o resto 10, d'onde se vê que a operação está provavelmente certa.

61 — A prova dos onzes tem o mesmo inconveniente que a prova dos noves; não accusa o erro, quando este é 11 ou um multiplo de 11.

Exercicios

1.º — Effectuar as seguintes operações e tirar as provas dos noves e dos onzes:

$$8217 + 4683 + 246 + 382$$
$$56638 + 4275 + 3827 + 643$$
$$8545 - 3453;\ 8246 - 5367;\ 8342 - 681.$$
$$346 \times 521;\ 43835 \times 364;\ 8237 \times 3645;\ 26296 \times 596.$$
$$8345 : 64;\ 32647 : 647;\ 21938 : 24;\ 8239647 : 534.$$

2.º — Entre os seguintes numeros, quaes são divisiveis por 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11:

8725; 67814; 738; 820; 43872; 7451; 84359; 8724;
7500; 4284357; 3684.

3.º — Quaes são os restos das divisões por 3, por 9 e por 11, dos numeros 2081079; 232; 354; 297381; 11976; 68014; 74054; 5604939; 224224; 34255; 1253475?

IV

Maximo divisor commum

62 — Todo o numero inteiro tem sempre dois divisores, a unidade e o proprio numero, e póde ter ainda mais divisores.

Numero primo *é o numero inteiro, que só tem por divisores a unidade e o proprio numero.*

O numero 5, por exemplo, é primo, porque só é divisivel por 1 e por 5; o numero 6 não é primo, porque além de ser divisivel por 1 e por 6, admitte os divisores 2 e 3.

Numero multiplo *é aquelle que além de ser divisivel pela unidade e pelo proprio numero, admitte outros divisores.*

O numero 6 é multiplo de 2 e de 3.

Diz-se que um numero é *divisor commum* de dois ou mais numeros, quando os divide exactamente.

Maximo divisor commum *de dois ou mais numeros inteiros é o maior numero que os divide a todos exactamente.*

Consideremos os numeros 18 e 24.

Os divisores de 18 são 1, 2, 3, 6, 9, 18.

Os divisores de 24 são 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.

Os divisores communs de 18 e 24, são 1, 2, 3, 6.

O *maximo divisor commum* de 18 e 24, é 6.

Numeros primos entre si *são aquelles que só admittem para divisor commum de todos a unidade.* Taes são os numeros 14 e 25; o primeiro é divisivel por 2 e 7, numeros que não dividem 25, e o segundo é divisivel por 5, numero que não divide 14; só a unidade é que divide ao mesmo tempo 14 e 25.

Note-se que dois cu mais numeros podem ser *primos entre si*, sem serem numeros *primos* absolutos; assim 15 e 25 são primos entre si, mas nenhum d'elles é numero primo.

63 — **Regra para calcular o maximo divisor commum de dois numeros.** *Para achar o maximo divisor commum de dois numeros, divide-se o maior pelo menor, se o resto d'esta divisão fôr nullo, o numero menor será o maximo divisor commum procurado; mas se o resto não fôr nullo, divide-se o menor dos dois numeros dados pelo primeiro resto; depois divide-se o primeiro resto pelo segundo resto; em seguida o segundo pelo terceiro, e assim por deante, até se obter um resto nullo; o penultimo resto, ou o ultimo divisor empregado, será o maximo divisor commum dos dois numeros propostos.*

Exemplo. Achar o maximo divisor commum de 324 e 27.

Dividindo o numero maior pelo menor,

	12
324	27
54	
0	

acha-se o quociente 12, que se costuma escrever por cima do divisor, para mais facilidade na pratica, visto que os divisores vão successivamente passando a dividendos, e o resto zero. E' portanto o numero maior divisivel pelo menor, e por conseguinte 27 será o maximo divisor commum dos dois numeros dados.

Eis um outro exemplo com a disposição do calculo:

Pretende-se calcular o maximo divisor commum dos dois numeros 621 e 184:

	3	2	1	2
621	184	69	46	23
69	46	23	0	

Divide-se o numero maior 621 pelo menor 184, o quociente 3 escreve-se por cima do divisor, e o resto 69 passa para segundo divisor. Dividindo o numero menor 184 pelo primeiro resto 69, acha-se o quociente 2, que se escreve por cima do divisor, e o resto 46. Dividindo o primeiro resto 69 pelo segundo 46, obtem-se o quociente 1 e o resto 23. Dividindo ainda o segundo resto 46 pelo terceiro 23, acha-se o quociente 2 e o resto 0. O ultimo divisor ou o penultimo resto, isto é 23, é o maximo divisor commum dos numeros 621 e 184.

64 — Quando por ventura entre os numeros dados houver um divisor commum, póde simplificar-se a operação do maximo divisor commum, dividindo-os por esse divisor, pocurando o maximo divisor commum dos quocientes resultantes e multiplicando finalmente o maximo divisor commum obtido pelo divisor supprimido.

Para achar, por exemplo, o maximo divisor commum dos numeros 1750000 e 58000, dividem-se ambos estes numeros pelo divisor commum 1000 e procura-se em seguida o maximo divisor commum dos quocientes 1750 e 58.

	3	5	1	4
1750	58	10	8	2
10	8	2	0	

Multiplicando por 1000 o maximo divisor commum 2, dos numeros 1750 e 58, acha-se 2000 para maximo divisor commum dos numeros propostos 1750000 e 58000.

65 — **Regra para calcular o maximo divisor commum de mais de dois numeros.** *Para achar o maximo divisor commum de tres ou mais numeros, procura-se em primeiro logar o maximo divisor commum dos dois primeiros; depois procura-se o maximo divisor commum do numero obtido e do terceiro numero dado; em seguida o maximo divisor commum do numero novamente obtido e do quarto numero dado, e assim successivamente até se terem empregado todos os numeros propostos. O ultimo maximo divisor commum obtido, é o maximo divisor commum dos numeros dados.*

Sejam 324, 876, 512 e 714 quatro numeros inteiros, cujo maximo divisor commum se procura.

Começamos por procurar o maximo divisor commum de 324 e 876, segundo a regra já indicada no n.º 63.

	2	1	2	2	1	2
876	324	228	96	36	24	12
228	96	36	24	12	0	

e achamos 12.

Procuramos em seguida o maximo divisor commum entre este numero 12 e o terceiro numero 512

	42	1	2
512	12	8	4
32	4	0	
8			

e encontramos 4.

Calculando finalmente o maximo divisor commum entre este numero 4 e o ultimo numero 714, obtemos 2. Este ultimo maximo divisor encontrado é o maximo divisor commum dos numeros dados.

Exercicios

1.° Achar o maximo divisor commum dos numeros:

$$\begin{cases}148\\777\end{cases}\quad\begin{cases}138\\768\end{cases}\quad\begin{cases}1212\\108\end{cases}\quad\begin{cases}13503\\462\end{cases}\quad\begin{cases}288000\\539000\end{cases}$$

2.° Calcular o maximo divisor commum dos numeros:

$$\begin{cases}17640\\31500\\420\end{cases}\quad\begin{cases}178200\\196560\\3825\end{cases}\quad\begin{cases}9800\\27440\\385160\\12250\end{cases}\quad\begin{cases}2079\\1089\\17811\\20403\end{cases}$$

3.° O maximo divisor commum de dois numeros é 504, quaes são estes dois numeros, sabendo-se que a serie dos quocientes que se obtem procurando o maximo divisor commum dos numeros pedidos é 1, 2, 1, 3 e 2.

4.° Qual é a maior medida commum entre tres linhas que teem respectivamente 450^m, 360^m e 270^m de comprimento?

V

Menor multiplo commum

65 — **Multiplo commum de dois ou mais numeros** *é o numero divisivel por cada um d'esses numeros.*

Menor multiplo commum de dois ou mais numeros *é o menor numero divisivel por cada um dos numeros dados.*

Consideremos os numeros 6 e 8.
Os multiplos de 6 são 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, etc.
Os multiplos de 8 são 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, etc.
Os multiplos communs de 6 e 8 são 24, 48, etc.
O *menor multiplo commum* d'estes numeros é 24.

66 — **Regra para achar o menor multiplo commum de dois numeros.** *Para achar o menor multiplo commum de dois numeros, divide-se um dos numeros propostos pelo maximo divisor commum dos dois, e multiplica-se o quociente obtido pelo segundo numero.*

Exemplo: Pretende-se achar o menor multiplo commum dos numeros 276 e 84.

Procurando primeiramente o maximo divisor commum d'estes dois numeros

$$\begin{array}{r|r|r|r} & 3 & 3 & 2 \\ \hline 276 & 84 & 24 & 12 \\ 24 & 12 & 0 & \end{array}$$

acha-se 12: dividindo agora um dos numeros—276—por este maximo divisor commum e multiplicando o quociente resultante 23 pelo outro numero—84—, obtem-se o producto 1932, que será o menor multiplo commum dos numeros dados.

$$\begin{array}{r|r} 276 & 12 \\ \cline{2-2} 36 & 23 \\ 0 & 84 \\ \cline{2-2} & 92 \\ & 184 \\ \cline{2-2} & 1932 \end{array}$$

67 — *Quando os dois numeros são primos entre si, o seu menor multiplo commum é o producto d'esses dois numeros.*

Assim, os numeros 8 e 15 tendo por maximo divisor commum a unidade, o seu menor multiplo commum é $8 : 1 \times 15 = 8 \times 15 = 120$

68 — *Quando os numeros dados são divisiveis um pelo outro, o menor multiplo commum d'elles, é o maior dos dois.*

Supponhamos os numeros 304 e 76; como 304 é divisivel por 76, o maximo divisor commum é o menor, 76; dividindo agora um dos numeros dados, 304 por exemplo, pelo maximo divisor commum 76, obtem-se o quociente 4, que multiplicado pelo outro numero 76, reproduz 304; portanto será 304, isto é, o maior dos numeros dados, o menor multiplo commum dos dois numeros 304 e 76.

69 — **Regra para achar o menor multiplo commum de mais de dois numeros.** *Para achar o menor multiplo commum de tres ou mais numeros, procura-se o menor multiplo commum dos dois primeiros; depois o menor multiplo commum d'este numero resultante e do terceiro numero dado; e assim successivamente até se terem empregado todos os numeros dados. O ultimo menor multiplo commum obtido será o menor multiplo commum dos numeros propostos.*

Exemplo: achar o menor multiplo commum dos numeros 8, 12, 18 e 30.

Maximo divisor commum de 8 e 12, 4;
menor multiplo commum de 8 e 12, $8 : 4 \times 12 = 24$.

Maximo divisor commum de 24 e 18, 6;
menor multiplo commum de 24 e 18, $24 : 6 \times 18 = 72$.

Maximo divisor commum de 72 e 30, 6;
menor multiplo commum de 72 e 30, $30 : 6 \times 72 = 360$.

O menor multiplo commum dos numeros dados é 360.

Exercicios

1.° Determinar o menor multiplo commum dos numeros:

48 e 36; 54 e 72; 39 e 52

2.° Calcular o menor multiplo commum dos numeros:

450, 1500 e 900; 270000 e 1800

3.° Calcular o menor multiplo commum dos numeros:

240, 300, 350 e 8400; 2016, 720, 4032 e 6048

4.° Deseja-se construir uma barrica, tão pequena quanto possivel, mas que se possa encher com um numero exacto de garrafas de cada uma das capacidades seguintes:

4^{cl} 75^{cl} e 180^{cl}

Qual deverá ser a capacidade da barrica e quantas garrafas poderá conter de cada especie?

5.° Tres rodas dão por minuto, a primeira 360 voltas, a segunda 450 voltas e a terceira 600 voltas. Põem-se em movimento ao mesmo tempo; no fim de quanto tempo terão as tres rodas executado simultaneamente um numero inteiro de voltas?

6.º Um artifice fabrica tres especies de cartuchos contendo respectivamente, 25^g, 32^g e 40^g de polvora; emprega para esse fim caixas contendo 160^g de polvora cada uma. Qual será o menor numero de caixas precisas, para que elle fabrique um numero exacto de cartuchos de cada especie?

7.º Com que quantia, tão pequena quanto possivel, se poderá pagar um numero exacto de jornaes a operarios ganhando 1200, 1400 e 1600 réis por dia? e quantos jornaes de cada especie se poderá pagar com aquella quantia?

VI

Numeros primos

70 — Já dissemos (n.º 62), que numero primo é aquelle que só tem por divisores a unidade e o proprio numero.

Excluindo da serie natural dos numeros inteiros todos os numeros multiplos contidos n'ella, obtem-se uma tabua de numeros primos. O processo empregado para fazer essa exclusão é conhecido pelo nome de *crivo de Eratosthenes*, geometra que viveu na Alexandria no começo do seculo segundo antes da era christã.

71 — **Formação de uma tabua de numeros primos— Crivo de Eratosthenes.** Entre os numeros pares, sómente o numero 2 é primo; basta pois procurar os numeros primos entre os numeros impares.

Escreve-se em seguida a 1, 2, todos os numeros impares.

1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21,
23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45,
47, 49, 51, 53, 55, 57, 59, 61, 63, 65 .. ..
.. ..

Os numeros 1 e 2 são primos.

O numero 3 não sendo divisivel por 2 é tambem um numero primo.

Ora, a differença entre dois numeros consecutivos do quadro é 2; dois d'estes numeros separados por outros dois, differem de 3 vezes dois, isto é, d'um multiplo de 3. D'onde todos os numeros de tres em tres, a partir de 3, são divisiveis por 3, e não são primos; riscam-se.

O numero 5, não sendo divisivel pelos factores primos 2 e 3, mais pequenos do que elle, é um numero primo; vê-se da mesma fórma, como para o numero 3, que a partir de 5, todos os numeros de cinco em cinco são multiplos de 5 e devem ser riscadcs.

Pela mesma razão, a partir de 7, todos os numeros de sete em sete são multiplos de 7, e a partir de 11, todos os numeros de onze em onze são multiplos de 11, etc.

Notamos todavia que o primeiro numero riscado, como sendo um multiplo de 3, é 9, quadrado de 3; como multiplo de 5, é 25, quadrado de 5, como multiplo de 7, é 49, quadrado de 7, etc.

Tem-se pois a seguinte regra:

Regra.—*Para achar todos os numeros primos entre 1 e um numero da o, escreve-se a seguir aos numeros 1, e 2, todos os numeros impares inferiores ao limite indicado, e riscam-se, a partir de 9, quadrado de 3, todos os numeros de 3 em 3; a partir de 25, quadrado de 5, todos os numeros de 5 em 5; de 49, quadrado de 7, todos os numeros de 7 em 7; de 121, quadrado de 11, todos os numeros de 11 em 11, etc. Os numeros não riscados serão os numeros primos procurados.*

Tabua dos numeros primos de 1 a 100

1	11	29	47	71
2	13	31	53	73
3	17	37	59	79
5	19	41	61	83
7	23	43	67	89
				97

72—**Regra para conhecer se um numero é primo.** *Reconhece-se que um numero é primo quando, dividindo o pela serie dos numeros primos, não encontramos em nenhuma das divisões resto zero, podendo suspender a averiguação logo que se obtenha um quociente já menor que o divisor empregado.*

Applicando a regra ao numero 793, concluiriamos que não é primo, porque ao dividil-o por 13 encontramos o resto zero.

Applicando-a ao numero 347, dividil-o-iamos successivamente por 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 e 19 sem encontrar resto zero, e como na ultima d'estas divisões encontramos já o quociente 18, menor que o divisor, concluiriamos que o numero é primo.

73—Todo o numero que não é primo póde *decompôr-se n'um producto de factores primos.* Basta para isso applicar-se a seguinte regra:

Regra para decompôr um numero em factores primos. *Divide-se o numero dado por 2 ou pelo primeiro numero da serie dos numeros primos pelo qual seja divisivel, faz-se o mesmo ao quociente obtido, e assim por deante, até chegar a um quociente que,* *por ser primo, já não admitte outro divisor senão elle mesmo.* O producto dos divisores empregados deverá dar o numero proposto.

Suppondo que queriamos decompôr 84 em factores primos, dividil-o-iamos por 2; o quociente (42) ainda por 2; o novo quociente (21) por 3, visto já não admittir o divisor 2; e com esta divisão obteriamos o quociente 7, que só seria divisivel por 7. Teriamos, pois,

$$84 = 2 \times 2 \times 3 \times 7 = 2^2 \times 3 \times 7$$

E' uso, para melhor disposição do calculo, traçar-se uma linha vertical á direita do numero dado, e escrever os divisores successivamente uns por baixo dos outros á direita do traço, e os diversos quocientes á esquerda do traço e por baixo dos respectivos dividendos. Exemplo:

$$\begin{array}{r|l} 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad 360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$$

74 — A decomposição de um numero em factores primos, permitte descobrir immediattmente os seus divisores, que serão todos aquelles que se formam multiplicando quaesquer factores primos que entram na sua composição. Assim, por exemplo, o numero 360 será divisivel por 5, por 8 (isto é por $2 \times 2 \times 2$), por 12 (isto é por $2 \times 2 \times 3$), por 45 (isto é por $3 \times 3 \times 5$), por 36 (isto é por $2 \times 2 \times 3 \times 3$), etc.

Do mesmo modo póde utilisar-se, como abaixo se verá, a decomposição em factores primos, para determinar o *maximo divisor commum* e o *menor multiplo commum* de dois ou mais numeros.

75 — **Regra para calcular o maximo divisor commum pela decomposição em factores primos.** *Decompõem-se os numeros dados em factores primos e depois forma-se um producto composto apenas por cada um dos factores primos iguaes que entram na composição de todos os numeros, tomados cada um com o menor expoente.*

Exemplo 1.º Calcular o maximo divisor commum dos numeros 756, 600, 252.

Decompondo os numeros em factores primos teremos:

$$\left.\begin{array}{l} 756 = 2^2 \times 3^3 \times 7 \\ 600 = 2^3 \times 3 \times 5^2 \\ 252 = 2^2 \times 3^2 \times 7 \end{array}\right\} \text{m. d. c.} = 2^2 \times 3 = 12$$

Os factores iguaes que entram na composição dos tres numeros são 2 e 3. O menor expoente de 2 é 2, e o de 3 é 1. Portanto o maximo divisor commum dos numeros dados será o producto $2^2 \times 3$ ou 12.

Exemplo 2.° Qual é o maximo divisor commum dos numeros 72, 1225 e 378?

$$\left.\begin{aligned} 72 &= 2^3 \times 3^2 \\ 1225 &= 5^2 \times 7^2 \\ 378 &= 2 \times 3^3 \times 7 \end{aligned}\right\} \text{m. d. c.} = 1$$

Não havendo nenhum factor commum a todos os tres numeros, o maximo divisor commum será apenas 1, isto é, os numeros dados *são primos entre si* (62).

76 — **Regra para achar o menor multiplo commum pela decomposição em factores primos.** *Decompõem-se os numeros dados em factores primos e depois forma-se um producto composto por cada um dos factores differentes que entram na composição dos numeros, tomados cada um com o maior expoente.*

Exemplo: Calcular o menor multiplo commum dos numeros 8, 12, 21 e 63.

Decompondo os numeros dados em factores primos, teremos:

$$\left.\begin{aligned} 8 &= 2^3 \\ 12 &= 2^2 \times 3 \\ 21 &= 3 \times 7 \\ 63 &= 3^2 \times 7 \end{aligned}\right\} \text{m. m. c.} = 2^2 \times 3^2 \times 7 = 504$$

Os factores primos differentes que entram na composição dos tres numeros são 2, 3 e 7. O maior expoente de 2 é 3, o de 3 é 2 e o de 7 é 1. Portanto o menor multiplo commum dos numeros dados será $2^3 \times 3^2 \times 7$ ou 504.

Exercicios

1.° — Verificar quaes dos seguintes numeros são primos:

23, 137, 271, 153, 393, 761, 221, 943, 1697, 2311, 21887.

2.° — Decompôr em factores primos os numeros:

756, 350, 6435, 9075, 494, 44370, 2160, 402325, 190463, 259811.

3.º — Calcular o maximo divisor commum e o menor multiplo commum de alguns dos numeros indicados no exercicio 2.º combinados dois a dois ou tres a tres, por exemplo:

$$\left\{\begin{array}{r}756\\350\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{r}756\\6435\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{r}350\\6435\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{r}350\\9075\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{r}756\\350\\6435\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{r}756\\350\\9075\end{array}\right.$$

VII

Quebrados

1.º — Numeração

77 — Dissemos nas noções preliminares (3) que, quando uma quantidade a medir não era multipla da unidade, isto é, não a continha uma ou mais vezes exactamente, era necessario dividir a unidade em partes iguaes, e tomar uma d'essas partes, denominada parte aliquota, como *unidade subsidiaria*, sendo então a quantidade representada por um quebrado ou por um numero mixto, conforme fosse menor ou maior do que a unidade.

E' comtudo evidente, que poderiamos empregar a *unidade subsidiaria* para medir toda a quantidade, quer ella fosse maior, quer multipla da unidade. Assim n'uma quantidade em que a unidade se continha tres vezes e mais duas vezes a quinta parte da unidade *(fórma do numero mixto)*, conter-se-ia quatorze vezes essa quarta parte da unidade *(fórma fraccionaria)*.

Visto poder-se representar sob a fórma fraccionaria todas as quantidades menores, maiores, ou iguaes a uma ou mais unidades, isto é, todas as quantidades *commensuraveis*, daremos agora uma definição unica de fracção que abrange todos os casos, e não exclusivamente aquelle em que a quantidade é menor do que a unidade.

Fracção *ou* **quebrado** *é o numero que representa uma quantidade multipla de uma parte aliquota da unidade.*

78 — Assim como, decompondo em partes iguaes a grandeza, que se toma para unidade, e repetindo uma d'essas partes, se obtem uma grandeza que póde exprimir-se por um quebrado; assim tambem, de-

compondo em partes iguaes uma grandeza differente da que se tomou para unidade e repetindo similhantemente uma d'essas partes, se obtem uma nova grandeza, que póde ainda representar-se por um quebrado.

Podemos portanto distinguir os quebrados em:

Quebrados da unidade ou simplesmente **quebrados**.

Exemplo: $\frac{2}{5}$ do metro é um quebrado da unidade, porque representa 2 das 5 partes iguaes em que o metro se imagina decomposto.

Quebrados de inteiros. Exemplo: $\frac{2}{5}$ de 20 metros é um quebrado de inteiro, porque consta de 2 partes das quaes são precisas 5 para perfazer 20 metros.

Quebrados de quebrados. Exemplo: $\frac{2}{5}$ de $\frac{4}{6}$ do metro é um quebrado de quebrado, porque é formado de 2 partes das quaes são precisas 5 para produzir $\frac{4}{6}$ do metro.

Os quebrados de inteiros e os quebrados de quebrados podem reduzir-se a quebrados da unidade; para o que basta saber effectuar as operações sobre quebrados da unidade, como adeante se verá.

79 — Para representar um quebrado são precisos dois numeros: um chamado *denominador*, para mostrar em quantas partes iguaes foi dividida a unidade, e outro chamado *numerador*, para designar quantas vezes uma d'essas partes se conteve na quantidade medida.

O *denominador* determina a especie da fracção e o *numerador* a sua grandeza.

Tanto o *numerador* como o *denominador* são chamados *termos da fracção*.

Assim para representar o quebrado *dois quintos* são precisos o numero 5 (*denominador*), para mostrar que se dividiu a unidade em cinco partes iguaes, e o numero dois *(numerador)* para mostrar que a quantidade conteve duas vezes uma d'essas partes.

80 — *Representa-se um quebrado escrevendo por cima d'um traço horizontal o numerador e por baixo o denominador.*

Assim, se dividirmos a unidade em 8 partes iguaes e reunirmos 5 d'essas partes, formaremos uma fracção cujo denominador é 8 e o numerador 5, e esta fracção será representada da seguinte fórma: $\frac{5}{8}$

81 — *Lê-se um quebrado enunciando primeiramente o numerador e depois o denominador seguido da terminação* **avos**.

Assim a fracção $\frac{18}{32}$ lê-se: *dezoito, trinta e dois avos.*

Quando o denominador é 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 100, 1000, etc., lê-se o numerador e em seguida as palavras, *meios*, *terços*, *quartos*, *quintos*, *sextos*, *setimos*, *oitavos*, *nonos*, *decimos*, *centessimos*, *millesimos*, *etc.*

Assim as fracções $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{6}$ e $\frac{13}{100}$ lêem se respectivamente — *tres quartos*, *dois sextos*, e *treze centesimos*.

2.º — Propriedades dos quebrados

82 — O numerador d'uma fracção, póde ser *menor*, *igual*, ou *maior* que o denominador

Um quebrado diz-se *proprio* quando o numerador é menor que o denominador.

N'este caso, a quantidade por elle representada é menor que a unidade.

Assim $\frac{4}{7}$ representa uma quantidade menor do que a unidade.

Quando o numerador é igual ou maior que o denominador, o quebrado denomina-se **improprio.**

Quando os dois termos *são iguaes* o quebrado representa a unidade.

Assim $\frac{4}{4}$ equivale á unidade.

Quando o numerador é maior que o denominador, o quebrado representa uma quantidade maior que a unidade. Assim $\frac{8}{3}$ representa uma quantidade maior que a unidade.

83 — **Para extrahir o numero inteiro** *contido n'um quebrado improprio, divide-se o numerador pelo denominador, o quociente representa o inteiro, e para obter o valor total do quebrado proposto, addiciona-se a esse inteiro um quebrado cujo numerador seja o resto e denominador o divisor.*

Assim para extrahir o numero inteiro contido em $\frac{39}{7}$, divide-se 39 por 7, e, como o quociente é 5, e o resto 4, o quebrado proposto será igual a 5 unidades mais 4 setimos, ($5 + \frac{4}{7}$, ou $5\frac{4}{7}$, porque é uso supprimir aos numeros mixtos o signal +).

84 — *Um quebrado representa uma divisão indicada, sendo o numerador o dividendo e o denominador o divisor.*

Assim $\frac{35}{8}$ representa o verdadeiro quociente da divisão de 35 por 8, e como $\frac{35}{8} = 4\frac{3}{8}$, conclue-se que *nas divisões iuexactas o quociente completo se fórma addicionando ao quociente inteiro uma fracção, tendo por numerador o resto e por denominador o divisor.*

85 — *Para reduzir um numero mixto á fôrma fraccionaria, multiplica-se o inteiro pelo denominador do quebrado, addiciona-se ao producto o numerador e dá-se á somma o denominador do quebrado.*

Assim para reduzir $5\frac{3}{8}$ á fórma fraccionaria, diremos:

5 vezes 8, 40 e 3 são 43; e dando a esta somma o denominador 8, teremos: $5\frac{3}{8} = \frac{5 \times 8 + 3}{8} = \frac{43}{8}$

86 — *Para reduzir um inteiro menos um quebrado á fórma fraccionaria, multiplica-se o intéiro pelo denominador do quebrado, subtrahe-se ao producto o numerador e dá-se á differença o denominador do quebrado.*

Assim:

$$7 - \frac{3}{8} = \frac{7 \times 8 - 3}{8} = \frac{53}{8}$$

87 — *Quando o numerador do quebrado é divisivel pelo denominador, o quebrado representa um numero inteiro.*

Assim: $\frac{72}{8}$ representa o numero inteiro 9, que é o quociente da divisão exacta de 72 por 8.

D'aqui se deprehende que:

Todo o inteiro se póde escrever sob a fórma fraccionaria dando-lhe por denominador a unidade.

Assim 5 é egual a $\frac{5}{1}$

Igualmente se vê que:

Todo o inteiro se póde representar sob a fórma de quebrado com um denominador qualquer, multiplicando por elle o inteiro e dando ao producto o denominador proposto. Assim para *exprimir 5 em oitavos basta multiplicar 5 por 8, e dar ao producto 40 o denominador 8, isto é:*

$$5 = \frac{5 \times 8}{8} = \frac{40}{8}$$

Da mesma fórma seria:

$$5 = \frac{5 \times 2}{2} = \frac{10}{2},\ 5 = \frac{5 \times 3}{3} = \frac{15}{3},\ \text{etc.}$$

88 — *Se dois quebrados tiverem denominadores iguaes, será maior aquelle que tiver maior nnmerador, porque tem maior numero de partes da unidade.*

Assim será: [1]

$$\frac{8}{9} > \frac{5}{9}$$

89 — *Se dois quebrados tiverem numeradores iguaes, será maior aquelle que tiver menor denominador, porque contendo ambos o mesmo numero de partes da unidade, será maior aquelle cujas partes da unidade forem maiores, isto é o que tiver menor denominador.*

Assim será:

$$\frac{5}{4} > \frac{5}{7}$$

90 — *Quando se multiplica o numerador d'um quebrado, ou se divide o denominador por um numero inteiro, o quebrado torna-se tantas vezes maior, quantas são as unidades d'esse numero.*

Assim multiplicando por 8 o numerador do quebrado $\frac{5}{24}$ resulta o quebrado $\frac{40}{24}$ o qual é 8 vezes maior que $\frac{5}{24}$

Do mesmo modo dividindo por 8 o denominador de $\frac{5}{24}$ resulta $\frac{5}{3}$ que é 8 vezes maior que $\frac{5}{24}$

91 — *Quando se divide o numerador d'um quebrado ou se multiplica o denominador por um numero inteiro, o quebrado torna-se tantas vezes menor, quantas são as unidades d'esse numero.*

Assim dividindo por 5 o numerador de $\frac{30}{42}$ resulta o quebrado $\frac{6}{42}$, o qual é 5 vezes menor que $\frac{30}{42}$

Do mesmo modo multiplicando por 5 o denominador do quebrado $\frac{30}{42}$, resulta $\frac{30}{210}$, que é 5 vezes menor que $\frac{30}{42}$

92 — *Um quebrado não muda de valor quando se multiplicam ou se dividem ambos os seus termos pelo mesmo numero.*

---

[1] Para designar que um numero é maior que outro escreve-se entre o primeiro e o segundo o signal $>$ que se lê *maior que*: e para designar que um numero é menor que outro, escreve-se entre o primeiro e o segundo o signal $<$ que se lê *menor que*: Em qualquer dos dois casos a expressão tem o nome de *desigualdade.*

Assim será:

$$\frac{15}{24} = \frac{15 \times 3}{24 \times 3} = \frac{45}{72}$$

$$\frac{15}{24} = \frac{15 : 3}{24 : 3} = \frac{5}{8}$$

3.º — Simplificação dos quebrados

93 — Visto que o valor d'um quebrado não se altera dividindo ambos os seus termos pelo mesmo numero, podemos representar a mesma quantidade, por uma infinidade de quebrados $\frac{12}{28}$, $\frac{6}{14}$, $\frac{3}{7}$, etc., referidos todos á mesma unidade, e differindo uns dos outros nos valores dos seus termos. De todos estes quebrados o *mais simples*, é aquelle, cujos termos são numeros menores. Podemos portanto aproveitar esta propriedade para simplificar os quebrados.

Simplificar um quebrado é substituil-o por outro do mesmo valor, mas de termos menores.

Quebrado irreductivel, *ou reduzido á sua expressão mais simples, é aquelle que já não póde simplificar-se.*

94 — *Para simplificar um quebrado, dividem-se ambos os seus termos por 2, se forem divisiveis; os termos do novo quebrado resultante dividem-se ainda por 2, e assim por deante tantas vezes, quantas seja possivel. Depois procede-se do mesmo modo com os divisores 3, 5, 7, 11, etc., podendo levar-se a operação, até chegar a um quebrado para cujos termos não se encontre já divisor commum. Se os termos forem terminados em zeros, começa-se por supprimir em ambos um igual numero de zeros.*

Exemplo: Simplificar o quebrado $\frac{11880}{92400}$. Supprimindo em ambos os termos um zero, (*o que equivale a dividir ambos os termos por 10,*) obtemos o quebrado $\frac{1188}{9240}$. Dividindo ambos os termos por 2 resultará $\frac{594}{4620}$. Dividindo ainda por 2 resultará $\frac{297}{2310}$. Dividindo ambos os termos por 3 (*visto já não serem divisiveis por 2*), resultará $\frac{99}{770}$, Dividindo ambos os termos por 11 (*visto não serem divisiveis por 5 e por 7*) resultará $\frac{9}{70}$. Como já não ha nenhum numero que divida simultaneamente o numerador e o denominador d'este quebrado, não será possivel levar mais longe a simplificação, dir-se-ha então que elle está *irreductivel*, ou reduzido á sua expressão mais simples.

Querendo simplificar o quebrado $\frac{3780}{4620}$ *applicariamos o mesmo processo e obteriamos*:

$$\frac{3780}{4120} = \frac{378}{463} = \frac{189}{231} = \frac{63}{77} = \frac{9}{11}$$

95 — E' geralmente por estas simplificações successivas que se costuma dar a um quebrado uma fórma mais manejavel; podia-se, porém, reduzil-o logo de uma vez á sua expressão mais simples, procurando o maximo divisor commum dos dois termos (63), e dividindo-os depois por elle. Os quocientes obtidos seriam primos entre si, e portanto o unico divisor commum dos dois termos do quebrado assim obtido seria a unidade.

No 1.º exemplo acima dado, o maximo divisor commum dos dois termos seria 1320, e portanto teriamos:

$$\frac{11880}{92400} = \frac{11880 : 1320}{92400 : 1320} = \frac{9}{70}$$

No 2.º exemplo o maximo divisor commum seria 420, e por conseguinte teriamos:

$$\frac{3780}{4620} = \frac{3780 : 420}{4620 : 420} = \frac{9}{11}$$

96 — Sempre que seja possivel, é conveniente simplificar os quebrados, antes de effectuar sobre elles quaesquer operações.

97 — *Para formar todas as fracções iguaes a uma fracção dada basta reduzil-a á sua expressão mais simples, e depois multiplicar os dois termos da fracção obtida por 1, 2, 3, etc.*

Exemplo:

Formar todas as fracções iguaes á fracção $\frac{1008}{1512}$

Reduzindo este quebrado á sua expressão mais simples, obtemos $\frac{2}{3}$

Multiplicando ambos os termos por 1, 2, 3 etc. fica:

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \frac{10}{15} \text{ etc.} \ldots\ldots \frac{1008}{1512}$$

4.º — Reducção ao mesmo denominador

98 — *Reduzir quebrados ao mesmo denominador é achar outros quebrados do mesmo valor, mas tendo todos o mesmo denominador.*

1.º — *Para reduzir dois quebrados ao mesmo denominador, multiplicam-se os dois termos de cada um pelo denominador do outro.*

Exemplo:

Reduzir ao mesmo denominador os quebrados $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{8}$.

Multiplicando os dois termos do primeiro quebrado por 8, obtemos o novo quebrado $\frac{16}{40}$, e multiplicando ambos os termos do segundo por 5 obtemos $\frac{15}{40}$. Os dois quebrados $\frac{16}{40}$ e $\frac{15}{40}$ são respectivamente iguaes a $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{8}$ e teem o mesmo denominador.

2.º — *Para reduzir tres ou mais quebrados ao mesmo denominador, multiplicam-se os dois termos de cada um pelo producto dos denominadores de todos os outros.*

Exemplo:

Reduzir ao mesmo denominador os quebrados $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{6}{9}$, $\frac{7}{4}$,

Multiplicando os dois termos do primeiro por $8 \times 9 \times 4$, os do segundo por $5 \times 9 \times 4$, os do terceiro por $5 \times 8 \times 4$ e os do quarto por $5 \times 8 \times 9$, resultam os seguintes quebrados, respectivamente iguaes aos propostos:

$$\frac{2 \times 8 \times 9 \times 4}{5 \times 8 \times 9 \times 4}, \quad \frac{3 \times 5 \times 9 \times 4}{8 \times 5 \times 9 \times 4}, \quad \frac{6 \times 5 \times 8 \times 4}{9 \times 5 \times 8 \times 4}, \quad \frac{7 \times 5 \times 8 \times 9}{4 \times 5 \times 8 \times 9}$$

ou:

$$\frac{576}{1440}, \quad \frac{540}{1440}, \quad \frac{960}{1440}, \quad \frac{2520}{1440}$$

99 — *O menor denominador commum que se póde dar a dois ou mais quebrados, é igual ao menor multiplo commum dos denominadores dos quebrados irreductiveis iguaes aos quebrados propostos.*

Assim, o menor denominador commum que pódem ter os quebrados irreductiveis $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{12}$, é 24, por ser este numero o menor multiplo commum dos denominadores 8, 6 e 12 dos quebrados dados.

Se os quebrados porém forem $\frac{4}{9}$, $\frac{14}{24}$, $\frac{10}{16}$, $\frac{11}{14}$, não se poderia concluir que o menor multiplo commum dos denominadores 9, 24, 16 e 14 era o menor denominador commum, visto os quebrados não serem irreductiveis.

Para reduzir dois ou mais quebrados ao menor denominador commum, tornam-se primeiramente os quebrados irreductiveis, depois procura-se o menor multiplo commum dos denominadores, em seguida divide-se este menor multiplo por cada um dos denominadores e multiplicam-se pelos respectivos quocientes os dois termos de cada quebrado.

Exemplo : Sejam as fracções acima indicadas :

$$\frac{4}{9}, \frac{14}{24}, \frac{10}{16}, \frac{11}{14}$$

Simplificando a segunda e a terceira, vem :

$$\frac{4}{9}, \frac{7}{12}, \frac{5}{8}, \frac{11}{14}$$

Achando o menor multiplo commum dos quatro denominadores, pela decomposição em factores primos obtem-se

$$9 = 3^2, \quad 12 = 2^2 \times 3, \quad 8 = 2^3, \quad 14 = 2 \times 7$$
$$\text{m. m. c.} = 2^3 \times 3^2 \times 7 = 504$$

Dividindo o menor multiplo commum, 504, por cada um dos denominadores, os quocientes serão;

$$2^3 \times 7, \quad 2 \times 3 \times 7, \quad 3^2 \times 7, \quad 2^2 \times 3^2$$

ou ainda $\quad 56, \quad 42, \quad 63, \quad 36.$

Multiplicando respectivamente os dois termos de cada fracção por cada um d'estes numeres e fazendo o calculo vem:

$$\frac{224}{504}, \frac{304}{504}, \frac{315}{504}, \frac{396}{504}$$

100 — A reducção de quebrados ao mesmo denominador é o meio que geralmente se emprega, quando se deseja saber qual é o maior de dois, ou mais quebrados (88). Querendo por exemplo escrever os quatro quebrados $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{6}{9}$ e $\frac{7}{4}$ por ordem decrescente de grandeza, reduzem-se ao mesmo denominador e escreve-se depois :

$$\frac{2520}{1440} > \frac{960}{1440} > \frac{576}{1440} > \frac{540}{1440}$$

e por consequencia $\frac{7}{4} > \frac{6}{9} > \frac{2}{5} > \frac{3}{8}$.

5.º — Addição

101 — 1.º *Para addicionar quebrados que teem o mesmo denominador, sommam-se os numeradores e dá-se á somma por denominador o denominador commum dos quebrados propostos.*

Exemplo:

$$\frac{3}{5} + \frac{2}{5} + \frac{1}{5} + \frac{4}{5} = \frac{3+2+1+4}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

2.º *Para addicionar quebrados que não teem o mesmo denominador, reduzem-se ao mesmo denominador, sommam-se os numeradores e dá-se á somma o denominador commum que se obteve.*

Exemplo:

$$\frac{2}{3} + \frac{6}{8} + \frac{5}{7} = \frac{2 \times 8 \times 7}{3 \times 8 \times 7} + \frac{6 \times 3 \times 7}{8 \times 3 \times 7} + \frac{5 \times 3 \times 8}{7 \times 3 \times 8} =$$

$$\frac{112}{168} + \frac{126}{168} + \frac{120}{168} = \frac{112 + 126 + 120}{168} = \frac{358}{168} = 2\,\frac{22}{168} = 2\,\frac{11}{84}$$

102 — *Se algumas das parcellas forem numeros mixtos ou inteiros, faz-se separadamente a somma das partes inteiras, e a esta somma addiciona-se o resultado obtido na addição das partes fraccionarias.*

Exemplo:

$$5\,\frac{3}{4} + \frac{2}{7} + 8 = 13 + \frac{3}{4} + \frac{2}{7} = 13 + \frac{3 \times 7}{4 \times 7} + \frac{2 \times 4}{4 \times 7} =$$

$$13 + \frac{21}{28} + \frac{8}{28} = 13 + \frac{29}{28} = 14\,\frac{1}{28}$$

6.º — Subtracção

103 — 1.º *Para subtrahir quebrados que teem o mesmo denominador, subtrahem-se os numeradores e dá-se á differença o denominador commum dos quebrados.*

Exemplo:

$$\frac{18}{5} - \frac{6}{5} - \frac{3}{5} = \frac{18-6-3}{5} = \frac{9}{5} = 1\,\frac{4}{5}$$

2.° *Para subtrahir quebrados que não teem o mesmo denominador, reduzem se primeiro ao mesmo denominador, e depois procede-se como no primeiro caso.*

Exemplo:

$$\frac{14}{6} - \frac{5}{7} = \frac{14 \times 7}{6 \times 7} - \frac{5 \times 6}{7 \times 6} = \frac{98}{42} - \frac{30}{42} = \frac{98-30}{42} =$$

$$\frac{68}{42} = 1\frac{26}{42} = 1\frac{13}{21}$$

104 — *Se algum dos termos da subtracção fôr numero mixto, ou o subtractivo fôr inteiro, reduz-se primeiro á forma fraccionaria e applica-se depois a regra antecedente.*

Analogamente se procederá quando se tiver de calcular uma expressão em que entrem addições e subtracções de quebrados, numeros mixtos e inteiros.

1.° exemplo:

$$\frac{18}{4} - 2 = \frac{18}{4} - \frac{2}{1} = \frac{18 \times 1}{4 \times 1} - \frac{2 \times 4}{1 \times 4} = \frac{18}{4} - \frac{8}{4} = \frac{10}{4} = 2\,\frac{2}{4} = 2\,\frac{1}{2}$$

2.° exemplo:

$$5\,\frac{3}{8} - 2\,\frac{4}{6} = \frac{43}{8} - \frac{16}{6} = \frac{43 \times 6}{8 \times 6} - \frac{16 \times 8}{6 \times 8} = \frac{258}{48} - \frac{128}{48} =$$

$$= \frac{130}{48} = \frac{34}{48} = 2\,\frac{17}{24}$$

3.° exemplo:

$$7\,\frac{2}{5} - 4 + \frac{3}{6} - \frac{1}{8} = \frac{37}{5} - \frac{4}{1} + \frac{3}{6} - \frac{1}{8} =$$

$$= \frac{37 \times 1 \times 6 \times 8}{5 \times 1 \times 6 \times 8} - \frac{4 \times 5 \times 6 \times 8}{1 \times 5 \times 6 \times 8} + \frac{3 \times 5 \times 1 \times 8}{6 \times 5 \times 1 \times 8} -$$

$$- \frac{1 \times 5 \times 1 \times 6}{8 \times 5 \times 1 \times 6} = \frac{1776}{240} - \frac{960}{240} + \frac{120}{240} - \frac{30}{240} = \frac{1776 - 960 + 120 - 30}{240} =$$

$$= \frac{906}{240} = 3\,\frac{186}{240} = 3\,\frac{93}{120} = 3\,\frac{31}{40}$$

7.º — Multiplicação

105. — Segundo a definição geral de multiplicação dada no n.º 28, *multiplicar um numero qualquer por uma fracção,* $\frac{5}{7}$ por exemplo, é *operar sobre o multiplicando para formar o producto, como se opéra sobre a unidade para formar o multiplicador* $\frac{5}{7}$; é pois tomar $\frac{1}{7}$ do multiplicando e repetil-o 5 vezes, da mesma fórma que se toma $\frac{1}{7}$ da unidade e se repete 5 vezes para formar o multiplicador $\frac{5}{7}$. Quer dizer, *multiplicar um numero por* $\frac{5}{7}$, *é tomar* $\frac{5}{7}$ *d'esse numero.*

Seja proposta a questão seguinte: *Um metro de obra custa 500 réis; qual é o preço de* $\frac{5}{7}$ *do metro?*

E' claro que $\frac{5}{7}$ do metro sendo 5 vezes $\frac{1}{7}$ do metro, custarão 5 vezes o preço de $\frac{1}{7}$ do metro; além d'isso, $\frac{1}{7}$ do metro custará $\frac{1}{7}$ do preço do metro; por conseguinte, $\frac{5}{7}$ do metro custarão 5 vezes $\frac{1}{7}$ do preço do metro ou $\frac{5}{7}$ de 500 réis. Vê-se portanto, que fica *resolvida a questão* tomando $\frac{5}{7}$ de 500 réis; isto é, operando sobre 500 réis, preço do metro, como se opéra sobre 1 metro para formar $\frac{5}{7}$ do metro. Conclue-se da definição precedente que a multiplicação de um numero por uma fracção é uma operação composta d'uma divisão e d'uma multiplicação propriamente dita.

106 — *Para multiplicar dois ou mais quebrados, multiplicam se termo a termo; isto é, forma-se o producto de todos os numeradores, e dá-se-lhe por denominador o producto de todos os denominadores.*

Exemplo:

$$\frac{3}{2} \times \frac{7}{5} \times \frac{6}{9} = \frac{3 \times 7 \times 6}{2 \times 5 \times 9} = \frac{126}{90} = 1\frac{36}{90} = 1\frac{18}{45} = 1\frac{6}{15} = 1\frac{2}{5}$$

Antes de effectuar os dois productos, convem observar se ha factores communs a ambos os termos, porque então supprimindo-os, o que não altera o valor ao quebrado (92), simplifica-se o resultado. Assim no exemplo precedente, é facil de ver que no numerador ha os factores 6 e 3, cujo producto é igual ao dos dois factores 9 e 2 do denominador. Supprimindo-os, obteriamos immediatamente por producto $\frac{7}{5}$ ou $1\frac{2}{5}$

107 —Todos as vezes que o multiplicador seja um quebrado proprio, o producto será mais pequeno que o multiplicando, porque representa uma fracção do mesmo multiplicando; d'aqui resulta chamar-se ao producto de duas fracções um quebrado de quebrado.

108 — *Quando algum factor for inteiro, representa-se sob a forma de quadrado, dando-lhe por denominador a unidade, e applica-se a regra antecedente; ou multiplica-se o inteiro pelo numerador e dá-se ao producto o denominador do quebrado.*

Exemplo:

$$3 \times \frac{7}{8} = \frac{3}{1} \times \frac{7}{8} = \frac{3 \times 7}{8} = \frac{21}{8} = 2\frac{5}{8}$$

109 — *Se algum factor fôr numero mixto, reduz-se primeiro á fórma fraccionaria, e applica-se a regra* da multiplicação de quebrados.

Exemplo:

$$2\frac{3}{5} \times 4\frac{6}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{13}{5} \times \frac{38}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{13 \times 38 \times 2}{5 \times 8 \times 7}$$

$$= \frac{988}{280} = 3\frac{148}{280} = 3\frac{74}{140} = 3\frac{37}{70}$$

8.º — Divisão

110 — *Para dividir quebrados póde proceder se de dois modos.*

1.º — *Dividindo os termo a termo, isto é, numerador por numerador e denominador por denominador.*

Exemplo:

$$\frac{16}{15} : \frac{8}{5} = \frac{16:8}{15:5} = \frac{2}{3}$$

2.º — *Invertendo os termos ao quebrado divisor e praticando a regra da multiplicação.*

Exemplo:

$$\frac{6}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{6}{8} \times \frac{7}{5} = \frac{6 \times 7}{8 \times 5} = \frac{42}{40} = 1\frac{2}{40} = 1\frac{1}{20}$$

A primeira regra só é praticavel quando os dois termos do quebrado dividendo forem divisiveis, pelos termos correspondentes do quebrado divisor.

111—Todas as vezes que o divisor seja um quebrado proprio, o quociente será maior que o dividendo; porque é igual ao dividendo multiplicado por uma expressão fraccionaria maior que a unidade.

112 — *Quando algum dos termos da divisão for inteiro, escreve-se, sob a fórma de quebrado, tendo por denominador a unidade, e applica se a regra* antecedente.

1.º exemplo:

$$5 : \frac{2}{3} = \frac{5}{1} : \frac{2}{3} = \frac{5}{1} \times \frac{3}{2} = \frac{5 \times 3}{2} = \frac{15}{2} = 7\ \frac{1}{2}$$

2.º exemplo:

$$\frac{18}{15} : 3 = \frac{18}{15} : \frac{3}{1} = \frac{18 : 3}{15} = \frac{6}{15}$$

113 — Antes de effectuar uma divisão de quebrados convem reduzir tanto o dividendo como o divisor á expressão mais simples.

Póde comtudo acontecer, que sendo irreductiveis os dois quebrados, o quociente admitta simplificação.

Isto só póde succeder quando dois termos do mesmo nome, ambos os numeradores ou ambos os denominadores, admittam algum divisor commum, como se reconhece no seguinte exemplo:

$$\frac{45}{56} : \frac{27}{88} = \frac{45}{56} \times \frac{88}{27} = \frac{3960}{1512}$$

no qual os dois quebrados dados são irreductiveis, podendo comtudo simplificar-se o quociente, visto que entre 45 e 27 ou entre 56 e 88 ha divisor commum.

114 — *Para dividir numeros mixtos, reduzem se primeiro á fórma fraccionaria, e applica-se a regra da* divisão de quebrados.

Exemplo:

$$4\ \frac{2}{5} : 3\ \frac{1}{6} = \frac{22}{5} : \frac{19}{6} = \frac{22}{5} \times \frac{6}{19} = \frac{132}{95} = 1\ \frac{37}{95}$$

115 — Viu-se (84) que o quociente de dois numeros inteiros podia ser representado por uma fracção tendo por numerador o dividendo e por denominador o divisor; o quociente de duas fracções póde igual-

mente ser representado por uma fracção tendo por numerador a fracção dividendo, e por denominador a fracção divisor.

Exemplo:

$$\frac{3}{4} : \frac{5}{7} = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)}{\left(\frac{5}{7}\right)} = \frac{3}{4} \times \frac{7}{5} = \frac{21}{20}$$

9.º — Elevação a potencias

116 — *Para elevar um quebrado a uma potencia, basta elevar a essa potencia ambos os termos do quebrado.*

Exemplos:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3 \times 3 \times 3}{4 \times 4 \times 4} = \frac{3^3}{4^3} = \frac{27}{64}$$

$$\left(1\,\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{5}{3}\right)^3 = \frac{5}{3} \times \frac{5}{3} \times \frac{5}{3} = \frac{5^3}{3^3} = \frac{125}{27} = 4\,\frac{17}{27}$$

Exercicios

1.º — Extrahir os inteiros aos seguintes quebrados:

$$\frac{5}{2};\ \frac{21}{7};\ \frac{32}{6};\ \frac{39}{10};\ \frac{158}{100};\ \frac{1274}{15};\ \frac{93}{11};\ \frac{84}{5};\ \frac{19}{17};\ \frac{77}{26};\ \frac{192}{15}$$

2.º — Reduzir á fórma fraccionaria os seguintes numeros mixtos:

$$2\,\frac{1}{3};\ 3\,\frac{2}{5};\ 4\,\frac{7}{8};\ 15\,\frac{11}{12};\ 18\,\frac{3}{4};\ 4\,\frac{1}{4};\ 5\,\frac{2}{5};$$

$$3\,\frac{4}{7};\ 23\,\frac{11}{12};\ 9\,\frac{3}{7};\ 2\,\frac{3}{5}$$

3.º — Exprimir em meios, quartos, e oitavos os seguintes numeros:

$$1;\ 7;\ 3;\ 6;\ \frac{3}{2};\ \frac{5}{4}$$

4.º — Reduzir os quebrados $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$ e $\frac{11}{17}$ a outros de igual valor com o denominador 105.

5.° — Simplificar os quebrados:

$$\frac{16}{32};\ \frac{18}{27};\ \frac{12}{20};\ \frac{21}{49};\ \frac{247}{391};\ \frac{608}{864};\ \frac{21000}{290000}$$

6.° — Reduzir á expressão mais simples os seguintes quebrados:

$$\frac{40}{65};\ \frac{72}{120};\ \frac{504}{1260};\ \frac{4200}{3960};\ \frac{3240}{36288};\ \frac{11760}{2016}$$

$$\frac{16}{32};\ \frac{18}{27};\ \frac{12}{20};\ \frac{21}{49};\ \frac{45}{72};\ \frac{60}{144};\ \frac{247}{391};\ \frac{608}{864}$$

7.° — Escrever uma série de quebrados de valor igual a cada uma das seguintes fracções:

$$\frac{2}{5};\ \frac{7}{8};\ \frac{12}{25};\ \frac{6}{13}$$

8.° — Reduzir ao mesmo denominador os quebrados:

$$\frac{3}{8},\ \frac{6}{9},\ \frac{7}{16};\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{5}{8},\ \frac{15}{18};\ \frac{5}{8},\ \frac{4}{15},\ \frac{17}{19};\ \frac{5}{8},\ \frac{41}{45},\ \frac{26}{77},\ \frac{75}{247};$$

$$\frac{11}{40},\ \frac{33}{700},\ \frac{91}{810},\ \frac{15}{192},\ \frac{20}{2112}$$

9.° — Reduzir ao menor denominador commum as fracções:

$$\frac{3}{4},\ \frac{5}{6},\ \frac{7}{8},\ \frac{11}{12};\ \frac{3}{54},\ \frac{2}{12},\ \frac{7}{15},\ \frac{3}{28}$$

10.° — Dispôr por ordem de grandeza os seguintes quebrados:

$$\frac{3}{5},\ \frac{7}{8},\ \frac{11}{15},\ \frac{6}{9};\ \frac{3}{8},\ \frac{11}{20},\ \frac{17}{30},\ \frac{23}{45},\ \frac{7}{12};$$

$$\frac{2}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{7}{10},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{8},\ \frac{14}{27}$$

11.° — Se $\frac{2}{3}$ de um objecto pesam 40 kilogrammas, quanto pesará esse objecto?

12.° — Quanto é $\frac{3}{10}$ de 40?

13.º — Quanto é $\frac{3}{5}$ de 20? $\frac{4}{6}$ de 18? $\frac{2}{3}$ de 30?

14.º — Se $\frac{5}{6}$ de um barril de vinho são 65 litros, quantos litros terá $\frac{1}{3}$ do barril? e qual será a capacidade do barril?

15.º — Se $\frac{15}{80}$ de uma porção de café pesam 45 kilogrammas, qual é o peso total d'essa porção de café?

16.º — Effectuar as seguintes addições:

$$\left(\frac{3}{7}+\frac{2}{7}\right);\ \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right);\ \left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}+\frac{5}{4}\right);\ \left(\frac{3}{12}+\frac{5}{12}+\frac{9}{12}\right).$$

$$\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\right);\ \left(\frac{5}{6}+\frac{7}{9}+\frac{3}{5}\right);\ \left(\frac{8}{21}+\frac{3}{14}+\frac{5}{12}\right);\ \left(\frac{7}{8}+\frac{5}{9}+\frac{17}{27}\right)$$

$$\left(2\ \frac{3}{4}+5\ \frac{7}{8}+7\ \frac{2}{3}\right);\ \left(3\ \frac{4}{5}+6\ \frac{8}{9}+5\ \frac{7}{11}\right);$$

$$\left(4\ \frac{3}{6}+\frac{8}{12}+5\ \frac{5}{7}+\frac{16}{20}\right)$$

17.º — De uma peça de seda cortaram-se 5 $\frac{3}{7}$ metros, e ficaram 8 $\frac{5}{6}$ metros. Qual era o comprimento da peça?

18.º — Um viajante tem que percorrer uma certa distancia: no primeiro dia percorre $\frac{1}{5}$; no segundo dia, $\frac{1}{4}$; e no terceiro, $\frac{2}{3}$. Qual é a distancia total percorrida?

19.º — Um operario fez certa obra em 10 horas, um outro póde fazel-a em 7 horas. Que porção d'obra fariam os dois n'uma hora, trabalhando juntos?

20.º — Uma fonte deita 2 litros d'agua em 3 minutos, outra, 6 litros em 5 minutos, e uma terceira, 7 litros em 2 minutos. Quanto deitam todas tres n'um minuto?

21.º — Dois correios caminham n'uma estrada, em sentido contrario: um faz 7 leguas em 2 horas; o outro, 10 leguas em 3 horas. Quanto se afastam ou se approximam um do outro, em cada hora?

22.° — Uma fonte enche um tanque em 9 horas, e uma outra póde enchel-o em 3 horas. Em quanto tempo encherão o tanque, correndo juntas?

23.° — Uma obra póde ser feita em 8 horas por um homem, em 10 por uma mulher e em 12 por uma creança. Que porção de obra fariam n'uma hora trabalhando juntos?

24.° — Collocaram-se tres reguas em linha recta. Uma com $\frac{2}{8}$ do metro, outra com $\frac{3}{5}$, e a terceira com $\frac{5}{9}$. Qual é o comprimento formado pelas tres reguas?

25.° — Compraram-se tres pacotes de stearina. Um pesa $\frac{2}{4}$ de kilogramma, outro $\frac{3}{7}$, e o terceiro $\frac{2}{5}$. Qual é o peso total dos pacotes de stearina?

26.° — Effectuar as seguintes subtracções:

$$\left(\frac{8}{11} - \frac{3}{11}\right); \left(\frac{9}{10} - \frac{3}{10}\right); \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right); \left(\frac{7}{8} - \frac{3}{4}\right);$$

$$\left(\frac{54}{179} - \frac{38}{389}\right); \left(4\ \frac{5}{7} - 2\ \frac{3}{7}\right); \left(5\ \frac{2}{9} - 3\ \frac{7}{9}\right); \left(5\ \frac{2}{3} - \frac{7}{8}\right);$$

$$\left(4 - \frac{3}{5}\right); \left(7 - 3\ \frac{2}{5}\right); \left(5\ \frac{2}{3} - 2 - \frac{4}{6}\right)$$

27.° — Quanto fica da unidade subtrahindo-lhe $\frac{2}{7}$?

28.° — Quanto fica d'um pão tirando-lhe $\frac{3}{5}$?

29.° — Que parte fica d'um objecto de que se tirou metade, um terço e um setimo?

30.° — De quanto excede a maior da menor, as fracções $\frac{3}{5}$ e $\frac{7}{9}$?

31.º — Effectuar as seguintes operações

$$\left(2+\frac{3}{5}-\frac{1}{3}+4\,\frac{1}{6}\right);\ \left(4\,\frac{1}{2}+3-\frac{7}{8}-1\,\frac{3}{5}-2\right)$$

$$\left(3\,\frac{4}{5}+8-2\,\frac{3}{4}+7-\frac{8}{6}\right);\ \left(2\,\frac{1}{5}-\frac{2}{3}+6+3\,\frac{7}{8}\right)$$

32.º—Um alfaiate precisa de 5 $\frac{7}{10}$ metros de fazenda; tem já 2 $\frac{3}{100}$ metros. Quantos metros lhe faltam?

33.º—Um operario foi encarregado de fazer uma certa obra. N'um dia fez $\frac{2}{5}$ e no outro $\frac{3}{8}$. Quanto lhe resta fazer?

34.º—Um frasco vasio pesa 2 $\frac{1}{2}$ kilogrammas; cheio de agua pesa 6 $\frac{3}{4}$ kilogrammas. Qual é o peso da agua contida no frasco?

35.º—Um correio faz 11 kilometros em 3 horas, um outro faz 16 kilometros em 5 horas. Qual dos dois caminha com mais velocidade e percorre mais kilometros por hora?

36.º — Uma fonte enche um tanque em 3 horas, uma outra enche-o duas vezes em 5 horas e uma torneira despeja-o em 4 horas. Em quanto tempo as duas fontes, correndo juntas, encherão o tanque, suppondo aberta a torneira?

37.º—Quanto é necessario juntar a uma corda de 8 $\frac{2}{3}$ metros de comprimento, para prefazer 12 $\frac{2}{11}$ metros?

38.º—Effectuar as seguintes multiplicações:

$$\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\right);\ \left(\frac{3}{5}\times\frac{2}{7}\right);\ \left(\frac{4}{15}\times\frac{25}{28}\right);\ \left(\frac{3}{22}\times\frac{11}{21}\right);\ \left(\frac{12}{13}\times\frac{17}{4}\right);$$

$$\left(4\times\frac{5}{8}\right);\ \left(7\times\frac{3}{5}\right);\ \left(\frac{5}{6}\times 8\right);\ \left(\frac{7}{9}\times 12\right);\ \left(\frac{8}{7}\times 24\right);$$

$$\left(8\,\frac{5}{3}\times 7\,\frac{3}{4}\right);\ \left(6\,\frac{2}{3}\times 3\,\frac{5}{8}\right);\ \left(\frac{15}{8}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{21}\times\frac{14}{25}\right)$$

$$5\left(\frac{4}{8}+\frac{3}{6}\right)\frac{2}{5};\ \left(\frac{7}{8}-\frac{2}{5}\right)\left(\frac{7}{8}+\frac{2}{5}\right);$$

$$\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{6}\right)\left(2\ \frac{3}{8}-\frac{1}{4}\right)$$

39.º—Qual é a metade de $\frac{1}{4}$? a terça parte de 8? a quinta parte de 3? dois setimos de 9?

40.º — Quanto vale metade de um terço de tres quartos de $\frac{2}{5}$?

41.º — Qual é a fracção que representa dois setimos de cinco nonos de $3\ \frac{8}{11}$?

42.º — Existe alguma differença entre $\frac{3}{5}$ de $\frac{7}{8}$ e $\frac{7}{8}$ de $\frac{3}{5}$?

43.º — Effectuar as seguintes divisões:

$$\left(\frac{24}{35}:\frac{4}{7}\right);\ \left(\frac{8}{21}:\frac{2}{3}\right);\ \left(\frac{6}{13}:\frac{4}{5}\right);\ \left(18:\frac{3}{5}\right);\ \left(7:\frac{2}{3}\right);$$

$$\left(2\ \frac{3}{4}:5\ \frac{7}{8}\right);\ \left(6\ \frac{8}{9}:7\ \frac{1}{6}\right);\ \left(\frac{9}{4}:3\right);\ \left(\frac{5}{8}:3\right)$$

44.º — Effectuar as seguintes operações indicadas;

$$\left(7\times\frac{5}{3}-\frac{2}{4}\right)\ \frac{6}{8}:\frac{4}{10};$$

$$\left(9\times\frac{7}{8}-\frac{2}{3}-4\right):\left(6-\frac{1}{5}\right)\times\left(7+\frac{3}{2}\right)$$

45.º — Pede-se o quadrado, o cubo, a quarta e quinta potencias das seguintes fracções:

$$\frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{3}{4};\ \frac{5}{6};\ \frac{7}{8}.$$

46.º — Effectuar as seguintes operações indicadas:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^3 \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 \times \frac{3}{5};\ \left(\frac{7}{9}\right)^3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 \times \left(\frac{12}{5}\right)^3;\ \left(\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)^4 \times \left(\left(\frac{2}{3}\right)^3\right)^2;$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^4 : \left(\frac{2}{5}\right)^2 : \frac{2}{5};\ \left(\frac{6}{8}\right)^2 : \left(\frac{2}{7}\right)^2 : \left(\frac{4}{5}\right)^2;\ \left(\left(\frac{2}{6}\right)^3\right)^5 : \left(\left(\frac{2}{6}\right)^2\right)^7.$$

47.º — Custando um metro de fita 160 réis, quanto custam $\frac{3}{4}$ do metro? e $2\frac{3}{5}$ metros?

48.º — Qual é o preço de $6\frac{4}{5}$ metros de fazenda, á razão de 2$500 réis o metro?

49.º — Suppondo que um saco de arroz pesa $56\frac{1}{2}$ kilogrammas, quantos kilogrammas pesará a quinta parte? a setima parte? tres quartas partes?

50.º — Um operario ganha 800 réis por dia. Quanto ganhará em $9\frac{1}{4}$ dias?

51.º — Uma torneira deita $327\frac{1}{5}$ litros d'agua em uma hora. Que porção deitará em $\frac{6}{7}$ de hora? e em $7\frac{3}{4}$ horas?

52.º — Fundiram-se 4 kilogrammas de prata com 3 kilogrammas de cobre; pergunta-se qual o peso com que entra cada um d'estes metaes: 1.º n'um kilogramma da liga; 2.º em $\frac{3}{5}$ do kilogramma; 3.º em $2\frac{2}{3}$ kilogrammas?

53.º — Uma torneira deita 8 litros de agua em 3 minutos, outra 12 litros em 5 minutos. Quantos litros deitam as duas torneiras em uma hora?

54.º — Cem partes de polvora de guerra contém 75 de salitre, 10 de enxofre e 15 de carvão. Que porção d'estes corpos entram na composição de 15 kilogrammas de polvora?

55.º—Uma mulher ganha n'um anno $\frac{2}{3}$ do ganho do marido; este recebe 292$000 réis; qual é o ganho da mulher?

56.º—Cinco oitavos d'uma peça de panno custam 2$500 réis, qual o custo da peça?

57.º—Um operario deve fazer 70 metros de certa obra em 3 dias. No primeiro dia faz $\frac{1}{4}$ da obra, no segundo $\frac{1}{5}$. Quantos metros lhe faltam para fazer no terceiro dia?

58.º—Um deposito é alimentado por duas torneiras, e esgotado por uma terceira. A primeira torneira póde encher o deposito em 8 horas e $\frac{4}{9}$ da hora, a segunda em 6 horas e $\frac{2}{3}$ da hora e a terceira esgota-o em 5 horas e $\frac{5}{7}$ da hora. Abrindo só a primeira durante uma hora e $\frac{3}{5}$ da hora e em seguida todas tres, que tempo levarão para acabar de encher o deposito?

59.º—Um sujeito comprou uma propriedade pagando no acto da escriptura $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ de $\frac{8}{9}$ do preço por que a havia ajustado, e ficou depois a dever ao vendedor 12:125$000 réis. Por quanto foi vendida a propriedade?

60—Um minerio contém $\frac{3}{8}$ de chumbo. Que peso de chumbo se contém em 8614 kilogrammas e $\frac{1}{10}$ do kilogramma de minerio? E que porção de minerio é necessario tratar para obter 3215 kilogrammas e $\frac{1}{3}$ do kilogramma de chumbo?

61—Uma bola elastica saltou de uma altura igual aos $\frac{2}{3}$ da altura de onde cahiu; depois de ter saltado tres vezes, eleva-se a uma altura de 2 metros; de que altura cahiu primitivamente?

62—Um hectolitro de trigo pesa 78 kilogrammas; o trigo dá $\frac{11}{12}$ do seu peso de farinha, e a farinha $\frac{13}{10}$ do seu peso de pão. Um hectolitro de trigo quantos kilogrammas de pão produz?

63 — Um parafuso avança em cada volta um millimetro e $\frac{39}{128}$ do millimetro. Quantas voltas deverá dar para avançar 28 millimetros e $\frac{4}{7}$ do millimetro?

64.º — O mar occupa $\frac{11}{14}$ da superficie do globo. As superficies da Asia, Africa, America e Oceania são respectivamente de $\frac{121}{27}$, $\frac{22}{7}$, $\frac{111}{29}$, $\frac{31}{27}$, em relação á superficie da Europa. Suppondo que a superficie da Africa seja de 2970000000 de hectares, calcular a das outras partes do mundo e a superficie total do globo.

65.º — Um individuo dispõe da sua fortuna da fórma seguinte: deixa $\frac{5}{8}$ aos herdeiros; $\frac{1}{10}$ do resto a um hospicio; $\frac{2}{5}$ do novo resto, aos pobres da localidade, e finalmente 2:560$000 réis, que completam todos os seus haveres, para melhoramentos do material d'uma escola. Calcular a fortuna total do testador, a parte dos seus herdeiros, a dos pobres e a do hospicio.

66.º — Uma pessoa interrogada sobre a sua edade, responde: se eu tivesse 20 annos de menos, a minha edade seria $\frac{7}{12}$ da que actualmente tenho: quantos annos tem?

67.º — Um litro de azeite pesa $\frac{84}{100}$ do kilogramma. Quantos litros tem um barril de azeite que pesa 46 $\frac{1}{2}$ kilogrammas.

VIII

Numeros decimaes

1.º — Numeração

117 — Se, para a medição das quantidades que não são multiplas da unidade, tomarmos para unidade subsidiaria, não uma qualquer parte aliquota da unidade, o que produz a representação fraccionaria (84), mas sim partes decimaes, (decima, centesima, millesima, etc.), essas quantidades serão representadas por numeros chamados *decimaes.*

Diremos pois que:

Numero decimal *é o que representa quantas partes decimaes da unidade se contêem n'uma certa quantidade.* Quando fôr menor que a unidade, terá mais propriamente o nome de *fracção decimal.* Assim $\frac{248}{1000}$ e $\frac{24}{100}$ são numeros decimaes, e este ultimo é uma *fracção decimal.*

Vê-se que *os numeros decimaes podem ser considerados como quebrados, que têem por denominador a unidade seguida de zeros (potencias de 10).*

118 — Para se formarem os *numeros decimaes* imaginam-se, como para os numeros inteiros, unidades de diversas ordens, chamadas **decimas, centesimas, millesimas, decimas millesimas,** etc., cada uma das quaes contém 10 unidades da ordem immediatamente inferior.

Distinguem-se estas novas unidades, das que se admittiram para a numeração dos inteiros, chamando a umas *unidades decimaes* e a outras *unidades inteiras.*

119 — Os nomes e valores das differentes ordens de unidades decimaes são os seguintes:

1.ª **Unidade**	vale	10 *decimas*
2.ª **Decima**	»	10 *centesimas*
3.ª **Centesima**	»	10 *millesimas*
4.ª **Millesima**	»	10 *decimas-millesimas*
5.ª **Decima-millesima**	»	10 *centesimas-millesimas*
6.ª **Centesima-millesima** ...	»	10 *millionesimas*
7.ª **Millionesima**	»	10 *decimas millionesimas*

8.ª	Decima-millionesima...	vale	10 *centesimas-millionesimas*
9.ª	Centesima-millionesima	»	10 *billionesimas*
10.ª	Billionesima	»	10 *decimas-billionesimas*
11.ª	Decima-billionesima ...	»	10 *centesimas billionesimas*
12.ª	Centesima-billionesima	»	10 *trillionesimas*
13.ª	Trillionesima	»	10 *decimas-trillionesimas*
14.ª	Decima-trillionesima ..	»	10 *centesimas-trillionesimas*
	etc.		etc.

Empregando estas differentes unidades, bastam os dez algarismos para se escrever qualquer numero decimal, comtanto que haja algum meio por onde se conheça a especie de unidades, a que se refere cada um dos algarismos.

Os meios que se têem admittido por convensão, são:

1.º Collocar uma virgula á direita do algarismo que representa unidades de primeira ordem.

2.º Escrever o algarismo que se refere ás decimas á direita do que se refere ás *unidades*, o das *centesimas* á direita do das *decimas*, e assim successivamente, de modo que qualquer algarismo represente unidades 10 vezes maiores que as unidades a que se refere o algarismo que lhe fica á direita.

3.º Collocar zeros nos logares correspondentes a unidades que não existem no numero que se quer escrever, quando por ventura este contenha unidades da ordem inferior.

D'estas convenções resulta que os *numeros decimaes* equivalem a numeros fraccionarios, escriptos como os inteiros, isto é, sem denominadores.

O numero 627,839 é formado de 627 *unidades*, e de 8 *decimas*, 3 *centesimas* e 9 *millesimas*. O numero 0,583 consta de 5 *decimas*, 8 *centesimas* e 3 *millesimas*.

A grande vantagem que ha em representar as grandezas sob a fórma decimal, consiste em poder effectuar-se as operações por um modo analogo ás dos numeros inteiros.

120 — Para ler um numero decimal póde proceder-se de quatro modos:

1.º — *Dividir o numero em classes de tres algarismos a começar da virgula para ambos os lados, e ler depois a começar da esquerda, cada classe, seguida do nome da ordem apresentada pelo seu algarismo da direita.*

Assim, o numero 98753,21300475 ler-se-ía 98 *milhares*, 753 *unidades*, 213 *millesimas*, 4 *millionesimas* e 75 *centesimas millionesimas*.

2.º — *Ler todo o numero como se fosse inteiro, enunciando em seguida o nome da ordem representada pelo seu algarismo da direita.*

Assim, o mesmo numero ler-se-ía: 9 *trilliões*, 875 *billiões*, 321 *milhões*, 300 *mil* e 475 *centesimas millionesimas*.

3.º—*Ler primeiramente a parte inteira, segundo a regra ordinaria, e logo depois a parte decimal como se fosse inteira, seguida da designação da ordem decimal do ultimo algarismo.*

Assim, o mesmo numero ler-se-ía: noventa e oito mil sete centos e cincoenta e tres *unidades*, e vinte e um *milhões* tresentos mil e quatro centos e setenta e cinco *centesimas millionesimas.*

4.º—*Ler cada algarismo de per si com indicação da respectiva ordem.* Assim, o numero do exemplo precedente ler-se-ía: 9 dezenas de milhar, 8 milhares, 7 centenas, 5 dezenas, 3 unidades, 2 decimas, uma centesima, 3 millesimas, 4 millionesimas, 7 decimas millionesimas e 5 centesimas millionesimas. Este processo é só empregado no ensino, para fazer conhecer bem as diversas ordens decimaes.

121—Para **escrever um numero decimal** consideramos tambem quatro casos correspondentes aos quatro da enunciação:

1.º—*Se o numero fôr enunciado por classes, escreveremos as classes inteiras, á direita das unidades uma virgula, e seguidamente a esta as classes decimaes, preenchendo com zeros as classes ou partes de classe que faltarem.*

Assim, o numero *50 milhares, 32 unidades, 68 millesimas e 7 decimas millionesimas* escrever-se-ha:

50032,0680007

2.º—*Se o numero fôr enunciado á maneira dos numeros inteiros, com designação da ordem decimal do ultimo algarismo, escrever-se-ha como se fosse inteiro, e depois collocar-se-ha a virgula, de fórma que o algarismo da direita fique representando a ordem designada.*

Assim, para escrever o numero *seis mil quatro centos e setenta e oito centesimas*, escreveriamos 6478, e depois collocariamos uma virgula entre o 4 e o 7, para que o 8 ficasse representando *centesimas.* Do mesmo modo o numero *quatro mil seis centos e sete millionesimas* escrever-se-hia 0,004607.

3.º—*Se o numero fôr enunciado dizendo-se primeiro a parte inteira e depois a decimal, escrever-se-ha primeiro a parte inteira com uma virgula á direita, e depois a decimal, de modo que o algarismo da direita represente a ordem designada.*

Assim, para escrever o numero *quarenta e oito unidades e vinte e seis decimas millesimas* escreveriamos primeiro 48, e, como vinte e seis se escreve com dois algarismos, e decimas millesimas é a 4.ª ordem decimal, seria necessario escrever dois zeros entre a virgula e o primeiro algarismo significativo da dizima, ficando portanto o numero 48,0026.

4.º—*Se o numero fôr enunciado ordem a ordem, vão-se escrevendo os respectivos algarismos á direita uns dos outros, preenchendo com* *zeros as casas para as quaes não haja algarismos significativos.* Assim, para escrever 4 unidades, 8 centesimas e 5 millesimas, escreveriamos primeiro 4 com uma virgula, depois um zero para occupar o logar das decimas, depois um 8 e por ultimo um 5, resultando, portanto, o numero 4,085.

2.º — Propriedades dos numeros decimaes

122 — *Para representar sob a fórma de quebrado um numero decimal, escripto ao modo dos numeros inteiros, escreve-se no numerador o numero sem a virgula, e no denominador a unidade seguida de tantos zeros, quantas forem as casas decimaes do numero.*

Assim, os numeros 6,28, 0,0043, 0,023, representar-se-hão em fórma de quebrado do seguinte modo:

$$\frac{628}{100}, \quad \frac{43}{10000}, \quad \frac{23}{1000}$$

123 — *Dado um numero decimal em fórma de quebrado, para represental-o á maneira dos numeros inteiros, escreveremos o numerador e separaremos á direita, por meio da virgula, tantos algarismos quantos forem os zeros do denominador; e quando o numerador não tenha algarismos significativos sufficientes, collocaremos zeros á sua esquerda, afim de podermos separar os algarismos indicados pelo denominador.*

Assim, os numeros $\frac{648}{100}$, $\frac{93}{1000}$, $\frac{83}{100}$, representar-se-hão por:

$$6{,}48 \quad 0{,}093 \quad 0{,}83$$

124 — *Escrevendo ou supprimindo zeros á direita d'um numero decimal não se altera o seu valor.*

Assim, será:

$$5{,}32 = 5{,}32000 = 5{,}320$$

125 — *Para tornar um numero decimal, dez, cem, mil, etc., vezes maior, isto é, para o multiplicar por 10, 100, 1000, etc., basta mudar a virgula, uma, duas, tres, etc., casas para a direita.*

Assim:

$$5{,}674 \times 100 = 567{,}4.$$
$$32{,}8 \times 1000 = 32800.$$

N'este segundo caso como não havia algarismos significativos sufficientes, teve-se de escrever dois zeros á direita.

126 — *Para tornar um numero decimal, dez, cem, mil, etc., vezes menor, isto é, para o dividir por 10, 100, 1000, etc., basta mudar a virgula, uma, duas, tres, etc., casas para a esquerda.*

Assim:

$$62,87 : 10 = 6,287$$
$$32,8 : 1000 = 0,0328$$

N'este segundo caso foi preciso escrever um zero á esquerda, por não haver algarismos significativos bastantes.

127 – Considerando um numero inteiro como tendo a virgula á direita do seu algarismo das unidades, conclue-se que, *para determinar o quociente exacto de um numero inteiro dividido por 10, 100, 1000, etc., basta separar á direita d'esse numero por uma virgula, uma, duas, tres, etc., casas para dizima.* Assim, o numero 678 dividido por 100 tem para quociente exacto 6,78, em quanto que o seu quociente incompleto ou inteiro seria 6 (46).

128 — Diz-se que dois ou mais numeros *decimaes* são da **mesma especie numerica**, quando o numero de casas decimaes é o mesmo em todos.

Reduzem-se os numeros decimaes á mesma especie numerica accrescentando ou supprimindo zeros á direita d'elles, de modo que fiquem todos com igual numero de casas decimaes.

Os numeros 25,983, 0,89657 e 612,35, reduzidos á *mesma especie numerica* transformam-se em

25,98300 0,89657 e 612,35000

A reducção de numeros decimaes á *mesma especie numerica* corresponde á reducção de quebrados ao mesmo denominador.

3.º — Addição

129 — *Para addicionar numeros decimaes, dispõem-se uns por baixo dos outros, de modo que as virgulas fiquem na mesma columna para que as unidades da mesma ordem fiquem em correspondencia vertical, e depois faz-se a somma como se os numeros fossem inteiros, escrevendo na somma uma virgula debaixo das virgulas das parcellas.*

Exemplo:

$$38{,}68 + 25 + 0{,}0048 + 2{,}305$$

$$\begin{array}{r} 38{,}68 \\ 25{,} \\ 0{,}0048 \\ 2{,}305 \\ \hline 65{,}9898 \end{array}$$

Poder-se-ia tambem addicionar os numeros dados, reduzindo-os primeiramente á *mesma especie numerica* e effectuando a somma como se fossem numeros inteiros.

Assim teremos:

$$\begin{array}{r} 38{,}6800 \\ 25{,}0000 \\ 0{,}0048 \\ 2{,}3050 \\ \hline 65{,}9898 \end{array}$$

4.º — Subtracção

130 — *Para subtrahir numeros decimaes, reduzem-se, á mesma especie numerica, escreve-se o subtractivo por baixo do additivo de modo que as virgulas se correspondam, e pratica-se a operação como se fossem numeros inteiros, escrevendo no resultado uma virgula em correspondencia com os dois termos da subtracção.*

1.º Exemplo:

Effectuar a subtracção

$$83.614 - 5{,}68749$$

$$\begin{array}{r} 83{,}61400 \\ 5{,}68749 \\ \hline 77{,}92651 \end{array}$$

2.º Exemplo:

Effectuar a subtracção

$$93{,}825 - 18$$

$$\begin{array}{r} 93{,}825 \\ 18{,}000 \\ \hline 75{,}825 \end{array}$$

5.º — Multiplicação

131 — *Para multiplicar numeros decimaes multiplicam-se como se fossem inteiros, e no producto separam-se tantas casas para dizima, quantos forem os algarismos decimaes dos factores.*

1.º Exemplo:

Multiplicar 54, 7 por 6, 83.

```
   54,7
   6,83
 ------
   1641
  4376
 3282
-------
373,601
```

2.º Exemplo:

Multiplicar 54,7 por 25

```
  54,7
    25
 -----
  2735
 1094
------
1367,5
```

6.º — Divisão

132 — *Se algum dos numeros dados ou ambos forem decimaes, faz-se a divisão como se fossem inteiros, e á direita do quociente separa-se um numero de casas decimaes igual ao resto que se obtem, subtrahindo ao numero de casas do dividendo o numero de casas decimaes do divisor; e se por ventura o dividendo tiver menos casas decimaes que o divisor, accrescentam-se ao dividendo os zeros precisos, para que a subtracção se possa effectuar; e no resto da divisão colloca-se a virgula de modo que o algarismo da direita exprima unidades da mesma ordem do dividendo.*

1.º Exemplo:

Dividir 893,48 por 27,3

```
893,48 | 27,3
  744  |------
 1988  | 32,7
 0,77
```

2.º Exemplo:
Dividir 5874 por 0,023

5874,000	0,023
127	255391
124	
90	
210	
30	
0,007	

3.º Exemplo:
Dividir 72,54 por 28

72,54	28
165	2,59
254	
0,02	

7.º — Elevação a potencias

133 — *Eleva-se um numero decimal a uma potencia, formando a potencia do mesmo grau do numero sem a virgula, e dando depois ao resultado tantas casas de dizima, quantas são as unidades do producto do numero de casas decimaes do numero dado pelo expoente da potencia*, isto é

$$\left(0,4\right)^3 = \frac{4^3}{1000} = \frac{64}{1000} = 0,064$$

$$\left(0,05\right)^2 = \frac{5^2}{10000} = \frac{25}{10000} = 0,0025$$

8.º — Reducção dos quebrados a dizima

134 — *Reduzir um quebrado ou quociente indicado a dizima é determinar um numero decimal que seja exacta ou approximadamente igual ao quebrado ou quociente proposto.*

Em vista da grande facilidade do calculo dos numeros decimaes comparativamente com o das fracções ordinarias é de grande importancia esta reducção, que se executa do seguinte modo:

Para reduzir um quebrado a dizima *divide-se o numerador pelo denominador e colloca-se uma virgula á direita do quociente. Escreve-se um zero á direita do resto e divide-se o novo dividendo parcial pelo divisor; o quociente representa o primeiro algarismo de-*

cimal. Escreve se novamente um zero á direita do novo resto, e o resultado divide se pelo divisor; o quociente é o segundo algarismo decimal, e assim successivamente. Se alguma das divisões se faz sem resto, a fracção proposta póde representar-se exactamente em numero decimal, no caso contrario, sómente se podem obter valores mais ou menos approximados.

1.º Exemplo:

Reduzir a dizima o quebrado $\frac{23}{8}$

$$
\begin{array}{l|l}
23 & 8 \\ \hline
70 & 2{,}875 \\
\;\,60 & \\
\;\;\,40 & \\
\;\;\;\,0 &
\end{array}
$$

Effectuando a divisão de 23 por 8 obteremos para quociente 2 e para resto 7. Depois de collocar uma virgula á direita do algarismo das unidades do quociente, dividimos 70 (decimas) por 8 escrevendo o quociente 8 (decimas) á direita da virgula; dividimos ainda 60 (centesimas) por 8, e finalmente 40 (millesimas) por 8, terminando a operação por se chegar a resto zero, obtendo-se o quociente 2,875, que é o numero decimal equivalente ao quebrado proposto $\frac{23}{8}$.

2.º Exemplo:

Reduzir a dizima o quebrado $\frac{5}{37}$

$$
\begin{array}{l|l}
50 & 37 \\ \hline
130 & 0{,}135135 \\
\;\,190 & \\
\;\;\,50 & \\
\;\;\,130 & \\
\;\;\;\,190 & \\
\;\;\;\;\,5 &
\end{array}
$$

Segundo a regra dividimos 5 por 37, mas, como n'este caso o dividendo é inferior ao divisor, escrevemos um zero á direita de 5, e no quociente tambem um zero com uma virgula á direita. Effectuando a divisão de 50 por 37 obtemos para quociente uma decima e para resto 13. Continuando a operação achamos o quociente 0,135135, suppondo que nos basta obter a approximação até ás millionesimas; e como encontrámos para resto um numero que já tinha apparecido como tal, e o divisor se conserva o mesmo, é claro que os algarismos do quociente continuarão a reproduzir-se na mesma ordem e indefinidamente, sendo portanto a operação interminavel e a dizima denominar-se-ha então *periodica*.

Dizima periodica *é aquella em que os algarismos se repetem indefinidamente e na mesma ordem.*

O numero formado pelos algarismos que se repetem, denomina-se *periodo*.

A dizima periodica póde ser *simples* ou *mixta*. E' *simples* quando o *periodo* começa em seguida á virgula, é *mixta* quando entre o primeiro *periodo* e a virgula ha alguns algarismos, que constituem a parte não periodica. As dizimas periodicas 0,252525 etc., 0,805805 etc., são simples; as dizimas periodicas 0,246868 etc., 0,8304304 etc., são mixtas.

N'estes casos, que são os mais frequentes, não é possivel obter uma dizima exactamente igual ao quebrado, mas póde obter-se uma dizima que represente o quebrado com um erro tão pequeno quanto se quizer, prolongando a operação até uma ordem decimal conveniente, como vae ver-se.

3.º Exemplo:

Reduzir a dizima o quebrado $\frac{3}{11}$

$$\begin{array}{l|l} 30 & 11 \\ \hline \;\;80 & 0,2727 \\ \;\;\;\;30 & \\ \;\;\;\;\;\;80 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;3 & \end{array}$$

Como a operação é interminavel, se parassemos na terceira casa decimal obteriamos para quociente 0,272, e então o valor do quebrado $\frac{3}{11}$, sendo superior a este numero, seria já inferior a 0,273, de maneira que tomando 0,272 para valor do quebrado commetteriamos um erro inferior a uma millesima, Se parassemos na quarta casa o valor do quebrado estaria comprehendido entre 0,2727 e 0,2728, e portanto qualquer d'estes numeros representaria um valor approximado do quebrado proposto com um erro inferior a uma decima millesima, o primeiro por defeito, e o segundo por excesso, etc.

135 — Procedendo de modo analogo á reducção d'um quebrado a dizima, poderemos continuar a divisão dos numeros decimaes escrevendo um zero á direito de cada resto, todas as vezes que praticando a regra do n.º 110, não obtenhamos o resto zero. Em tal caso, a operação póde ou não ser terminavel, como succede na reducção a dizima.

1.º Exemplo:

Dividir 56,32 por 12,5

56,32	12,5
632	4,5056
700	
750	
0	

Effectuando a divisão de 56,32 por 12,5, obtemos para quociente incompleto 4,5 e para resto 7 centesimas. Continuando a operação encontramos o quociente exacto 4,5056.

2.º Exemplo:

Dividir 83,27 por 4,5

83,27.	4,5
382	18,50444
227	
200	
200	
200	
20	

Effectuando a divisão de 83,27 por 4,5, acha-se o quociente 18,5 com um erro inferior a uma decima, e o resto 2 (centesimas). Continuando a divisão até á quinta casa decimal, por exemplo, encontrariamos o quociente 18,50444 (dizima periodica mixta) com um erro inferior a uma centesima millesima.

136 — Quando nas divisões inexactas dos numeros inteiros se deseje obter o quociente com uma dada approximação, póde-se proceder de modo analogo.

Exemplo:

Determinar o quociente da divisão de 874 por 27 approximado até ás centesimas.

874	27
64	32,37
100	
190	
1	

Exercicios

1.º Lêr os seguintes numeros decimaes:

3,6; 0,07; 28,003; 9,1241; 0,05738; 7,234587

0,040007; 0,8005003002; 0,000100007; 256,38532418

2.º Escrever os seguintes numeros:
Trinta e oito *decimas*; vinte sete *centesimas*; tres *decimas*; trinta e sete *unidades* e cinco *millesimas*; oitenta e sete *millionesimas*; trezentas *millionesimas*; cincoenta *unidades* e duzentas e sete *millesimas*; quarenta *millionesimas* e vinte e tres *trillionesimas*.

3.º Transformar em fracções ordinarias irreductiveis os seguintes numeros decimaes:

0,07; 814,005; 0,3007; 0,8; 0,45; 0,75; 0,875;

92,625; 38,432; 42,875

4.º Escrever os seguintes decimaes á maneira dos numeros inteiros:

$$\frac{7084}{100};\quad \frac{325}{1000};\quad \frac{803}{1000000};\quad \frac{25}{10};\quad \frac{38}{100}.$$

5.º Multiplicar e dividir por 10, 100, 1000, os seguintes numeros:

35,40617; 0,32784; 0,008; 0,000006

6.º Reduzir á mesma especie numerica os numeros:

$$\left\{\begin{array}{r}0{,}34\\20{,}814\\3{,}2\end{array}\right.\qquad\left\{\begin{array}{l}0{,}253\\37{,}5\\4{,}25\end{array}\right.\qquad\left\{\begin{array}{r}12{,}5\\324{,}32\\0{,}814\end{array}\right.$$

7.º Effectuar as seguintes addições:

$(0{,}584 + 9{,}04 + 0{,}5)$; $(0{,}8 + 0{,}609 + 0{,}743)$;

$(0{,}0006804 + 6{,}4503 + 0{,}005314 + 76{,}04305)$.

8.º Ha tres reguas: a primeira tem $2^m{,}68$ (2 metros e 68 centesimas do metro): a segunda $3^m{,}8$, e a terceira $0^m{,}76$. Qual o comprimento em linha recta formado pelas tres reguas?

9.° Um ourives vendeu quatro objectos em ouro, pesando cada um d'elles o seguinte: o primeiro $26^g,09$ (26 grammas e 9 centesimas do gramma); o segundo $8^g,3$; o terceiro $6^g,645$; o quarto $18^g,609$. Pede-se o peso total dos quatro objectos.

10.° Effectuar as seguintes subtracções:

(34,72004 — 27,89108); (0,0138462 — 0,00285); (504,6 — 40,073)

11.° Calcular o valor das seguintes expressões:

$$36 + 0,38 + \frac{3}{5} + 14,817 + \frac{5}{8};$$

$$53 - 0,27 + \frac{2}{8} + 5 - 0,001 + 5,14$$

12.° De uma peça de panno que tinha $18^m,06$, venderam-se $9^m,75$. Quantos metros ficaram?

13.° Um corpo pesa $2^k,63$ (2 kilogrammas e 63 centesimas do kilogramma) no ar, e 814 grammas na agua. Qual é o peso que o corpo perde mergulhado na agua, ou melhor ainda, qual o peso do volume da agua deslocada?

14.° Um litro de ar pesa $1^g,3$ (um grammma e tres decimas do gramma); um litro d'agua pesa no vacuo 1 kilogramma. Quanto pesará no ar?

15.° O cobre fundido dilata-se de o a 100 graus, 0,001875; o ferro 0,00125833. Qual a differença de dilatação d'estes dois corpos?

16.° Um frasco vazio pesa $200^g,54$ (duzentas grammas e 54 centesimas do gramma), e cheio de agua 34 grammas. Qual é o peso da agua?

17.° Effectuar as seguintes multiplicações:

(893,078 × 48,67); (902,0027 × 0,654);

(0,008654 × 45,3); (0,000634 × 0,0597); (0,06978 × 697)

18.° Qual é o custo de $78^m,96$ (78 metros e 96 centesimas do metro), custando o metro 275 reis?

19.º Um litro de mercurio pesa 13 kilolitros e 598 millesimas do kilolitro. Qual é o peso de 8 litros e 79 centesimas do litro?

20.º O grau do thermometro de Réaumur vale $1^{\circ},25$ (um grau e 25 centesimas do grau) do thermometro centigrado. Reduzir $26^{\circ},7$ de Réaumur a graus centigrados.

21.º Uma regua de ferro de um metro, dilata-se de zero a 100 graus, $0^{m},00125833$. Quanto se dilatará um regua de $0^{m},493$?

22.º O diametro do sol é 112,06 o diametro da terra; este é igual a 12733590 metros. Qual é o diametro do sol?

23.º A densidade do ar secco a zero graus, sob uma pressão de $0^{m},76$, tomando para unidade, a densidade do hydrogenio á mesma temperatura e sob a mesma pressão é 0,0691. Qual é o peso d'um litro de hydrogenio, sabendo-se que o peso d'um litro de ar é de $1^{g},293187$?

24.º Um calice pesa $0^{kg},8796$ e contem 958 millesimas partes de prata pura. Qual é o peso da prata pura contida no calice?

25.º Effectuar as seguintes divisões:

$$(3450,67895 : 2,648);\quad (852,497 : 0,7834);$$

$$(753,24 : 18,75);\quad (203,4 : 25);\quad (874 : 0,27).$$

26.º Reduzir a dizima as seguintes fracções ordinarias:

$$\frac{13}{16};\quad \frac{327}{16};\quad \frac{5}{7};\quad \frac{13}{28};\quad \frac{3}{5};\quad \frac{11}{8};\quad \frac{11}{12};\quad \frac{17}{48};\quad \frac{23}{4}.$$

27.º Um correio percorreu uma distancia de 283 kilometros em $18^{h},56$. Que caminho terá percorrido n'uma hora?

28.º Um correio percorreu $12^{km}846$ n'uma hora. Em quanto tempo percorrerá uma distancia de $269^{km},817$?

29.º Uma locomotiva percorreu 875400 metros em $6^{h},32$. Quantos metros percorreu n'uma hora?

30.º Um frasco vazio pesa $6^{g},725$, e contendo $2^{g},38$ de alcool pesa 3,514. Qual é o peso do litro de alcool?

31.º Uma machina a vapor consumiu em 103 dias de trabalho 851050^{kg},328 de carvão. Um aperfeiçoamento feito na sua construcção permitte, obtendo a mesma força, queimar apenas 2530^{kg},38 em 37 horas. Qual é a economia annual devida a este aperfeiçoamento, suppondo 330 dias de trabalho por anno e o preço do carvão 605 réis por cada 100 kilogrammas?

32.º Calcular o valor mais simples das seguintes expresões:

$$x = \frac{0{,}00217}{0{,}09516} + \frac{47{,}58}{21{,}7} : \frac{3 + \frac{1}{4} + 0{,}02}{0{,}02 : \left(3 + \frac{1}{4}\right)};$$

$$x = \frac{\frac{0{,}01}{0{,}03} \times \left(0.02\right)^3 \times \left(100^3\right)^2}{1{,}5 \times \frac{12{,}3}{24{,}009} : \frac{4{,}1}{8{,}003} \times \frac{0{,}02}{0{,}02}}$$

$$x = \frac{3{,}8 \times (8{,}5 - 3{,}47)}{913{,}682}$$

$$x = \frac{(0{,}08 + 4{,}3)^3 \times 0{,}7}{46 \times 0{,}24 + 5{,}3}$$

IX

Extracção de raizes

137 — Para formar uma **potencia** dá-se a **base** e o **expoente**.

Sendo dada a **potencia** com o seu respectivo **expoente**, póde pedir-se a **base**.

E' uma operação inversa da elevação á potencia e que se denomina **extracção de raizes**.

Conhecendo, por exemplo, a *potencia* 2401 e o seu *expoente* 4, e querendo construir a *base* desconhecida 7, será necessario extrahir a **raiz quarta** de 2401. N'esta operação a potencia toma o nome generico de numero, ou quantidade, o expoente denomina-se **indice**, e a base pedida é a **raiz**.

A extracção de raizes indica-se com o signal $\sqrt{}$, que se chama *radical*; a quantidade a que se pretende extrahir a raiz, escreve-se debaixo do signal, e o indice escreve-se na abertura da parte superior, excepto quando é a raiz segunda ou quadrada que se subentende.

Exemplo:

$$\sqrt{43}\,;\quad \sqrt[3]{512}\,;\quad \sqrt[4]{674}\,;\quad \sqrt[15]{3764}\,;\quad \sqrt[18]{3583}$$

que se lêem respectivamente raiz quadrada de 43; raiz cubica de 512; raiz quarta de 674; raiz quinze de 3764; raiz dezoito de 3583, etc.

Extrahir a raiz a um numero é achar outro numero (base da raiz), que elevado a um expoente igual ao indice do radical, produza uma certa potencia (quantidade debaixo do radical).

Exemplo:

$$\sqrt{225} = 15$$

15 é a raiz quadrada de 225 porque $15^2 = 225$

$$\sqrt[3]{343} = 7 \text{ porque } 7^3 = 343$$

$$\sqrt[5]{1024} = 4 \text{ porque } 4^5 = 1024$$

Trataremos sómente dos processos pelos quaes se extrahem as raizes quadradas dos numeros inteiros, quebrados e decimaes.

Extracção das raizes quadradas

138 — **Raiz quadrada de um numero menor que 100.** Se o numero dado é menor que 100, a sua raiz quadrada, será menor que 10, isto é, um numero digito, e, portanto, para a determinar, basta saber o quadrado dos nove primeiros numeros:

Numeros....	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quadrados..	1	4	9	16	25	36	49	64	81

Por este quadro é facil obter a raiz quadrada de um numero menor que 100. Assim, ver-se-ha, que a raiz quadrada de 16 é 4, a de 49 é 7, a de 36 é 6, etc.

Como porém um numero qualquer, nem sempre é o producto de dois factores iguaes, isto é, quadrado perfeito, segue-se que é impossivel achar para todos os numeros menores que 100, uma raiz quadrada exacta.

Supponhamos que se pretendia determinar a $\sqrt{27}$. Como este numero não é quadrado perfeito de nenhum numero digito, a sua raiz quadrada não poderá ser exacta, mas como elle está comprehendido entre 25 e 36, a sua raiz quadrada estaria comprehendida entre 5 e 6; representando-a por 5 ou por 6, commetteriamos um erro inferior a uma unidade, no primeioo caso para menos e no segundo para mais. Geralmente costuma tomar-se a raiz inteira para menos, isto é, a raiz do maior quadrado contido no numero proposto. A extracção da raiz por este processo é o que se chama *raiz com um erro inferior a uma unidade*, ou abreviadamente, *a menos de uma unidade*. Assim diriamos que $\sqrt{27}$ *a menos de uma unidade* é 5, porque 5 é a raiz quadrada do maior quadrado inteiro contido em 27, que é 25

139 — **Raiz quadrada de um numero maior que 100.** *Para extrahir a raiz quadrada a um numero maior que 100, divide-se em classes de dois algarismos, a partir da direita. Extrahe-se a raiz quadrada ao maior quadrado contido na primeira classe da esquerda, e o algarismo resultante será o das unidades mais elevadas da raiz. Acha-se o quadrado d'esse algarismo e subtrahe-se da primeira classe da esquerda. Escreve-se á direita do resto a classe immediata, separam-se as dezenas das unidades e dividem-se as dezenas pelo dobro da raiz achada; o quociente será o limite superior do algarismo immediato da raiz. Escreve-se o dobro da raiz e á direita d'esta o quociente achado, multiplica-se pelo mesmo quociente o numero resultante, e subtrahe-se o producto, que se obtem, do numero formado pelo resto da primeira classe com a classe seguinte. Se o producto fosse maior, experimentava-se o algarismo immediatamente inferior. Obtido o segundo resto, escreve-se á sua direita a terceira classe, e continua-se a operação analogamente, até se haver determinado o algarismo das unidades. Se o ultimo resto é zero, o numero proposto é um quadrado perfeito e a raiz obtida é exacta. No caso contrario, a raiz achada é a raiz do numero proposto a menos de uma unidade, e o resto representa o excesso do numero dado sobre o maior quadrado n'elle contido.*

No caso em que o dividendo parcial é menor que o divisor correspondente, escreve-se um zero na raiz e baixa-se immediatamente a classe seguinte, para se continuar a operação.

1.º Exemplo:

Extrahir a $\sqrt{768245}$

Disporiamos a operação pelo modo seguinte:

76.82.45	876	
64	168	1746
	8	6
128.2		
116 9	1344	10476
	167	
11 34.5	7	
10 47 6		
	1169	
86 9		

Depois de dividido o numero em classes de dois algarismos, extrahimos a raiz quadrada a 76, e o numero resultante, 8, escrevemol-o no logar destinado á raiz, que é o que nas divisões costuma ser destinado ao divisor. Subtrahimos 64, que é o quadrado de 8, de 76, e á direita do resto, 12, escrevemos a 2.ª classe, 82. Separamos o algarismo das unidades, 2, e as dezenas, 128, dividimol-as por 16, dobro da raiz achada; o quociente, 8, representa o algarismo seguinte da raiz ou algum algarismo maior.

Para o verificar escrevemos por baixo do traço horisontal inferior á raiz, o dobro da raiz achada, 16, e á direita d'elle 8; multiplicando 168 por 8, obtemos o producto 1344, que, sendo superior a 1282, mostra que o segundo algarismo da raiz deve ser inferior a 8. Experimentando pelo mesmo modo o algarismo 7, encontrâmos o producto 1169, que, subtrahido de 1282, dá de resto 113. Escrevemos pois 7 na raiz á direita de 8, e a classe seguinte, 45, á direita do segundo resto 113. Separando as unidades das dezenas, e dividindo estas, 1134, por 174, dôbro da raiz até agora determinada, encontrâmos para quociente, 6, supposto terceiro algarismo da raiz. Escrevemol-o á direita do dobro da raiz, 174, e, multiplicando 1746 por 6, encontrâmos o producto 10476, que, subtrahido de 11345, dá de resto 869. A raiz procurada é pois 876, com erro inferior a uma unidade. Rigorosamente está comprehendida entre 876 e 877, e 876 representa a raiz quadrada do maior quadrado contido em 768245, que é 767376 ou 876^2. O resto é 869. isto é, a differença entre 768245 e 767376.

Na pratica, costumam fazer-se as subtrações ao mesmo tempo que as multiplicações. Assim, o typo da operação precedente seria

76.82.45	876	
1282	167	1746
1134.5	7	6
869		

2.º Exemplo:

Extrahir a $\sqrt{4058292051}$

40.58.29.20.51	63704		
45.8	123	1267	127404
892.9	3	7	4
602.05.1			
92 43 5			

O dividendo 602 sendo mais pequeno que o divisor 1274, escreve-se um zero na raiz e baixa-se a classe seguinte 51, continuando-se a operação pela mesma forma.

140. **Prova.** *Para tirar a prova real a uma extração de raiz quadrada, eleva-se a raiz ao quadrado, addiciona-se ao producto o resto se o houver, e o resultado deve ser igual á quantidade a que se extrahiu a raiz.*

Nos dois exemplos precedentes seria

$$876^2 + 869 = 768245$$

$$63704^2 + 92435 = 4058292051$$

Note-se ainda que, como meio de verificação, é necessario ir observando que os diversos restos, e sobretudo o ultimo, não excedam o dobro da raiz até então achada, augmentado de uma unidade. Assim no primeiro exemplo será:

$$12 < 2 \times 8 + 1$$
$$113 < 2 \times 87 + 1$$
$$869 < 2 \times 876 + 1$$

E no segundo será:

$$4 < 2 \times 6 + 1$$
$$89 < 2 \times 63 + 1$$
$$92435 < 2 \times 63704 + 1$$

141. **Para extrahir a raiz quadrada a um numero decimal,** *divide-se em classes de dois algarismos, contando da virgula para cada um dos extremos, completando com um zero a ultima classe decimal da direita, quando, em razão de ser impar o numero de algarismos decimaes, essa classe ficar com um unico algarismo. Extrahe-se*

depois a raiz ao numero, abstrahindo da virgula, isto é, exactamente como se fosse inteiro; e na raiz assim obtida separa-se para a dizima metade do numero das casas decimaes, do numero dado.

Exemplo:

Extrahir a $\sqrt{326{,}423}$

3.26,4230	18,06		
1	28	3606	
22.6	8	6	
22 4			
2423.0			
2163 6			
259 4			

A raiz quadrada do numero proposto está comprehendida entre 18,06 e 18,07, mas, como o resto 2594 excede 1806, 18,07 representa-a com menos erro do que 18,06.

142. *Quando na extacção da raiz quadrada a um numero inteiro, que não é quadrado perfeito, quizermos obter uma approximação maior do que uma unidade, podemos continuar a operação collocando uma virgula á direita da raiz já achada, e escrevendo dois zeros á direita do ultimo resto e dos seguintes.* Proceder-se-ha da mesma forma para continuar a extração da raiz quadrada aos numeros decimaes.

1.º Exemplo:

Extrahir a $\sqrt{7}$ com erro inferior a uma millesima

7	2,645		
4	46	524	5285
30.0	6	4	5
27 6			
240.0			
209 6			
3040.0			
2642 5			
397 5			

Por mais que se prolongue a operação, nunca se encontrará resto zero. $\sqrt{7}$ é pois, um numero *incommensuravel* (3). E' um symbolo destinado a indicar o numero que multiplicado por si mesmo dá 7, o qual não podemos constituir exactamente, mas sim apenas com a approximação que se quizer.

2.º Exemplo:

Extrahir a $\sqrt{0{,}715}$, com um erro inferior a uma millesima

```
0,7150     | 0,845
 64        |------------
-------    | 164 | 1685
  75.0     |   4 |    5
  656      |
-------
   950,0
   8425
-------
    975
```

Não havendo no numero parte inteira, tambem a não haverá na raiz, e por isso começar-se-ía por escrever na raiz um zero com a respectiva virgula, o que igualmente teriamos de fazer-se, conforme a regra (141), quizessemos separar na raiz, 845, tres casas para dizima.

143 — **Para extrahir a raiz quadrada a um quebrado** *reduz-se primeiro a dizima com um numero de casas decimaes duplo das que quizermos obter na raiz, e extrahimos a raiz á dizima resultante.*

1.º Exemplo:

Extrahir a $\sqrt{\frac{121}{25}}$

```
121  | 25
     |-----------
210  | 4,84 | 2,2
100    4    | 42
  0   ----
       84     2
       84
      ----
        0
```

Portanto é $\sqrt{\frac{121}{25}} = \sqrt{4{,}84} = 2{,}2.$

2.º Exemplo:

Extrahir a $\sqrt{\frac{246}{11}}$ com erro inferior a uma centesima

```
246      | 11
 26      ----------------
  40        22,3636   | 4,72
   70       16        ----------
    40      -----      87 | 942
     70     63.6          |   2
      4     60 9
            -----
            273.6
            188 4
            -----
             85 2
```

Tambem se poderia extrahir a raiz quadrada a um quebrado sem o reduzir a dizima. Bastaria para isso multiplicar o numerador pelo denominador, extrahir a raiz quadrada ao producto, e dar depois por denominador ao resultado o denominador do quebrado. Assim:

$$\sqrt{\frac{246}{11}} = \frac{\sqrt{246 \times 11}}{11} = \frac{\sqrt{2706}}{11} = \frac{52}{11}$$

Quando o denominador seja um quadrado perfeito, basta extrahir logo a raiz quadrada a ambos os termos. Assim: $\sqrt{\frac{48}{25}} = \frac{6}{5}$ com erro inferior a $\frac{1}{5}$.

Exercicios

1.º Extrahir a raiz quadrada aos numeros:

3462; 78245; 697402; 3850674827;

58787,635; 0,006325; 0,000314998

2.º Extrahir até millesimas a raiz quadrada aos seguintes numeros:

2; 3; 5; 10; 0,085; 0,047; 149;

$\frac{59}{19}$; $\frac{293,4578}{4,628356}$; $\frac{5}{7}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{16}{141}$; $\frac{4}{11}$

3.º Extrahir até centesimas as seguintes raizes:

$$\sqrt{2-\sqrt{2}};\quad \sqrt{10-2\sqrt{5}};\quad 2+\sqrt{3};\quad 5\sqrt{3}$$

$$\sqrt{2+\sqrt{2}};\quad \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}};$$

$$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2};\quad \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

X

1.º — Razões

144—A comparação de duas quantidades da mesma especie, póde effectuar-se de dois modos diversos, ou examinando quanto uma excede a outra, ou quantas vezes uma contem a outra. O primeiro modo de comparação dá origem á *razão por differença*, ou *arithmetica*; e o segundo á *razão por quociente*, ou *geometrica*.

Razão arithmetica, ou por differença, é a *expressão que indica, quanto um numero excede, ou é inferior, a outro*. Indica-se uma razão arithmetica escrevendo os dois numeros que a fórmam um em seguida ao outro e collocando entre elles o signal de subtracção. As expressões 8—5 e 5—8 são duas razões arithmeticas, das quaes a primeira mostra que 8 excede 5 em 3 unidades e a segunda que 5 é excedido por 8 em 3 unidades. Os dois numeros que constituem a razão chamam-se *termos da razão*. O additivo, denomina-se *antecedente* e o subtractivo, *consequente*.

145—A razão arithmetica póde ser de *maior desigualdade*, de *igualdade* ou de *menor desigualdade*, conforme o antecedente fôr superior, igual ou inferior ao consequente.

Assim, 12—5; 5—12, 12—12, são tres razões arithmeticas em que a primeira é de *maior desigualdade*, a segunda de *menor desigualdade* e a terceira de *igualdade*.

O valor effectivo do numero de unidades, que representa o excesso do maior dos dois termos das razões sobre o outro, denomina-se **expoente da razão**. No exemplo precedente, effectuando as subtracções $12-5=7$, $5-12=-7$, $12-12=0$, os restos 7, -7 e zero, representarão respectivamente os *expoentes* de cada uma das razões.

Estabelecemos que $5-12=-7$. O signal — indica que o numero á esquerda do qual elle está collocado, é subtractivo. Pois não sendo possivel subtrahir 12 de 5, das 12 unidades subtractivas somente 5 poderão ser diminuidas e ficarão ainda 7 subtractivas, ou — 7.

Os numeros, como — 7, e que exprimem a relação por differença entre dois numeros, em que o antecedente é menor que o consequente, são denominados **negativos**, em opposição aos que não têem signal, ou que têem o signal +, os quaes se denominam **positivos**.

146 — **Razão geometrica, por quociente,** *ou simplesmente* **razão,** *é a expressão que indica o quociente de dois numeros.*

O numero que serve de dividendo, chama-se **antecedente da razão**, o que serve de divisor **consequente da razão** e ambos elles têem o nome de **termos** da razão. O numero que se obtem quando se effectua a divisão, denomina-se **expoente da razão.**

Assim, $8 : 3$ ou $\frac{8}{3}$ representa uma razão, na qual 8 é o *antecedente*, 3 o *consequente*, 8 e 3 os termos da razão e o quebrado $\frac{8}{3}$ o *expoente.*

147—*Para lêr uma razão, enuncia-se primeiro o antecedente e depois o consequente, precedido da palavra* **para.** A razão $8 : 3$ ou $\frac{8}{3}$ lê-se *oito para tres.*

148 — Uma razão diz-se *inversa* ou *reciproca* de outra, quando o antecedente da primeira é o consequente da segunda, e o consequente da primeira é o antecedente da segunda; ou ainda, *quando o producto das duas razões é igual á unidade.*

Assim a razão *inversa* de $\frac{7}{5}$ é $\frac{5}{7}$, porque $\frac{7}{5} \times \frac{5}{7} = \frac{7 \times 5}{5 \times 7} = \frac{35}{35} = 1.$

Como todo o inteiro se póde escrever sob a fórma fraccionaria dando-lhe por denominador a unidade (87), diz-se que 9 é o numero **inverso** de $\frac{1}{9}$ e $\frac{1}{9}$ o **inverso** de 9.

149.—As razões são verdadeiros quebrados, e por conseguinte é-lhes applicavel tudo o que a respeito d'estes dissemos.

Convem sobretudo ter presente que o *expoente de uma razão geometrica não muda de valor quando se multiplica ou se divide, pelo mesmo numero tanto o antecedente como o consequente* —. Assim, a razão de 4 para 5 é igual á de 8 para 10, á de 12 para 15, etc., isto é, estes numeros estão entre si, dois a dois, na mesma razão.

150—**Razão composta** é a razão *que tem por antecedente o producto dos antecedentes de outras razões, e por consequente o producto dos consequentes das mesmas razões.*

As razões que entram na formação de uma razão composta, chamam-se *razões componentes* da razão composta.

A expressão $(3 \times 4 \times 5) : (7 \times 6 \times 9)$ ou $\frac{3 \times 4 \times 5}{7 \times 6 \times 9}$ é uma razão composta, cujas razões componentes pódem ser $3 : 7$, $4 : 6$ e $5 : 9$, ou $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{6}$ e $\frac{5}{9}$.

151 — *Póde sempre reduzir-se uma razão a ter termos inteiros.*

Seja por exemplo a razão $\frac{\left(2\frac{1}{3}\right)}{\left(\frac{4}{5}\right)}$, ou $\frac{\left(\frac{7}{3}\right)}{\left(\frac{4}{5}\right)}$, ou dividindo estes dois quebrados, $\frac{35}{12}$, razão ainda igual á primeira, mas com os termos inteiros.

2.º—Proporções

152—**Proporção arithmetica, por differença, ou ainda equidifferença** (igualdade de differenças), *é a expressão que mostra a igualdade de duas razões arithmeticas.*

A proporção arithmetica, consta de quatro termos, dos quaes o primeiro e ultimo se chamam **extremos**, e os outros **meios**. Chamam-se **antecedentes** da **proporção** aos antecedentes das duas razões, e **consequentes** da **proporção** aos consequentes das mesmas razões.

Assim,

$$9 - 5 = 7 - 3$$

é uma proporção arithmetica, porque mostra a igualdade das duas razões de maior desigualdade 9—5 e 7—3. Os *antecedentes* d'esta proporção são 6 e 7, e os *consequentes* 5 e 3. Os termos 9 e 3 são *extremos*, os termos 5 e 7 são *meios*.

153 — *Em qualquer proporção arithmetica a somma dos meios é igual á somma dos extremos.* Assim, no exemplo precedente será

$$5 + 7 = 9 + 3$$

Subtrahindo a ambos os membros d'esta igualdade um dos meios, 5 ou 7, resultam as novas igualdades

$$7 = 9 + 3 - 5 \quad \text{ou} \quad 5 = 9 + 3 - 7$$

o que mostra que:

Um meio é igual á somma dos extremos menos o outro meio.

Subtrahindo-lhes um dos extremos, 9 ou 3, resultam as igualdades

$$5 + 7 - 9 = 3 \quad \text{ou} \quad 5 + 7 - 3 = 9$$

as quaes mostram que:

Um extremo é igual á somma dos meios menos o outro extremo. Vê-se que não se póde formar proporção com quatro numeros quaesquer. E' preciso, que a somma de dois d'elles seja igual á dos outros dois, e, além d'isso, na disposição é preciso ainda attender a que as duas parcellas da mesma somma fiquem ambas em extremos ou ambas em meios. Assim, com os quatro seguintes numeros 8, 7, 4 e 3, póde formar-se uma proporção, por ser $8 + 3 = 7 + 4$, dispondo-os, por exemplo, do seguinte modo:

$$8 - 7 = 4 - 3$$

Não poderiam ser dispostos pela fórma

$$8 - 3 = 7 - 4$$

por já não ser então a somma dos extremos $(8 + 4)$ igual á dos meios $(3 + 7)$.

Para os tres primeiros termos da proporção serem 8, 3 e 7, o quarto deveria ser:

$$x = 3 + 7 - 8 = 2$$

e a proporção seria então

$$8 - 3 = 7 - 2$$

154—Em qualquer proporção arithmetica póde-se, sem a falsear, fazer no logar dos termos as seguintes mudanças: **alternar**, isto é, trocar o logar dos meios ou dos extremos; **inverter**, isto é, mudar os extremos para o logar dos meios e estes para o logar d'aquelles; e **transpôr**, isto é, trocar o logar ás duas razões. Assim, na proporção $9 - 7 = 5 - 3$ alternando os meios obtemos a nova proporção $9 - 5 = 7 - 3$, invertendo vem $7 - 9 = 3 - 5$, transpondo achamos $5 - 3 = 9 - 7$. Em qualquer dos casos resultam ainda proporções, porque é sempre a somma dos extremos igual á dos meios.

155—**Proporção arithmetica continua** *é a que tem iguaes entre si os dois meios ou os dois extremos.*

Invertendo ou transpondo uma proporção, cujos extremos são iguaes, obtem-se uma proporção com os meios iguaes.

Geralmente é assim que se apresentam as proporções continuas.

Os dois meios iguaes de uma proporção arithmetica contínua constituem um só meio termo, que se chama *meio arithmetico* ou *meio differencial dos outros dois numeros dados.*

Assim:

$$6 - 4 = 4 - 2$$

é uma proporção arithmetica **contínua**, e 4 é o **meio arithmetico** ou **differencial** dos numeros 6 e 2.

N'esta proporção, em vista do que dissemos no n.º 153 será:

$$4 + 4 = 6 + 2$$

e como a somma $4 + 4$ é igual ao producto 2×4, vem

$$2 \times 4 = 6 + 2$$

Dividindo ambos os membros d'esta igualdade por 2, resulta a nova igualdade

$$4 = \frac{6 + 2}{2}$$

o que mostra que:

O meio termo de uma proporção arithmetica continua é igual á semi-somma dos extremos.

156—**Proporção geometrica, por quociente,** *ou simplesmente* **proporção** é a expressão *que mostra a igualdade de duas razões geometricas.* Assim, sendo a razão $\frac{3}{5}$ igual á razão $\frac{6}{10}$ a igualdade

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$$

é uma proporção.

Tambem costuma escrever-se

$$3 : 5 :: 6 : 10$$

lendo-se em ambos os casos *3 para 5, como 6 para 10.*

Os quatro numeros que formam a proporção dizem-se termos; os dois primeiros constituem a primeira razão e os dois ultimos a segunda razão; o primeiro e terceiro termos denominam-se **antecedentes**, o segundo e quarto **consequentes**; o primeiro e quarto são chamados **extremos**, e o segundo e terceiro **meios**. No exemplo precedente a primeira razão é $\frac{3}{5}$, a segunda $\frac{6}{10}$, os antecedentes são 3 e 6, os consequentes 5 e 10, os extremos 3 e 10, e os meios 5 e 6.

157 — *Em qualquer proporção geometrica o producto dos extremos é igual ao producto dos meios.* Assim, no exemplo precedente será:

$$3 \times 10 = 5 \times 6$$

Dividindo ambos os membros d'esta igualdade por um dos extremos, 3 ou 10, resultam as novas igualdades

$$10 = \frac{5 \times 6}{3} \quad \text{ou} \quad 3 = \frac{5 \times 6}{10}$$

o que mostra que:

Um extremo é igual ao producto dos meios dividido pelo outro extremo.

Dividindo-os por um dos meios, 5 ou 6, resultam as igualdades

$$\frac{3 \times 10}{5} = 6 \quad \text{ou} \quad \frac{3 \times 10}{6} = 5$$

as quaes mostram que:

Um meio é igual ao producto dos extremos dividido pelo outro meio.

Vê-se que não se póde formar proporção com quatro numeros quaesquer. E' preciso que o producto de dois d'elles seja igual ao dos outros dois, e, alem d'isto, na disposicão é preciso ainda attender a que os dois factores do mesmo producto fiquem ambos em extremos ou ambos em meios. Assim, com os quatro seguintes numeros 9, 18, 6 e 12, póde formar-se uma proporção, por ser $9 \times 12 = 6 \times 18$, dispondo-os, por exemplo, do seguinte modo:

$$\frac{9}{6} = \frac{18}{12}$$

Não poderiam ser dispostos pela fórma

$$\frac{9}{12} = \frac{18}{6}$$

por já não ser então o producto dos extremos (9×6) igual ao dos meios (12×18).

Para os tres primeiros termos da proporção serem 9, 12 e 18, o quarto termo deveria ser:

$$x = \frac{12 \times 18}{9} = 24$$

e a proporção seria então

$$\frac{9}{12} = \frac{18}{24}$$

158 — Em qualquer proporção podem trocar-se os meios um pelo outro, ou os extremos; ao que se chama **alternar.**

Tambem se podem passar os meios para extremos e estes para meios; ao que se chama **inverter.**

Finalmente podem trocar-se as duas razões; ao que se chama **transpôr.**

Assim na proporção $\frac{8}{2} = \frac{12}{3}$ alternando os meios obtemos a nova proporção $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$, invertendo obtemos $\frac{2}{8} = \frac{3}{12}$, transpondo obtemos $\frac{12}{3} = \frac{8}{2}$. Em qualquer dos casos resultam ainda proporções, porque é sempre o producto dos extremos igual ao dos meios.

159 - **Proporção contínua** *ou* **proporção geometrica continua** *é aquella em que são iguaes os dois meios ou os dois extremos.*

Invertendo, ou transpondo (158) uma proporção, cujos extremos são iguaes, obtem-se uma proporção com os meios iguaes. E' debaixo d'esta ultima fórma, que geralmente se consideram as proporções continuas.

As proporções continuas escrevem-se algumas vezes sem o meio termo repetido, pondo á sua esquerda o signal $\div$ As expressões

$$8 : 4 :: 4 : 2; \quad \frac{8}{4} = \frac{4}{2}; \quad \div 8 : 4 : 2$$

são portanto diversos modos de representar a mesma proporção continua.

Os dois meios iguaes d'uma proporção geometrica continua constituem um só meio termo, que se chama **meio geometrico,** ou **meio proporcional** entre os dois numeros, que occupam os extremos.

Suppondo a proporção continua $\frac{4}{6} = \frac{6}{9}$ e tendo em vista o que dissemos no n.º 157, será:

$$6 \times 6 = 4 \times 9$$

ou (48) $$6^2 = 4 \times 9$$

Extrahindo a raiz quadrada a ambos os membros d'esta igualdade, resulta a nova igualdade

$$6 = \sqrt{4 \times 9}$$

o que mostra que:

Em qualquer proporção geometrica continua, o meio geometrico é igual á raiz quadrada do producto dos extremos.

160—**Meio geometrico,** *ou* **meio proporcional** *de muitos numeros é a raiz do producto d'esses numeros, que tem por indice um numero composto de tantas unidades, quantos são os ditos numeros.*

Assim, o meio geometrico dos numeros 2, 3, 4 e 5 será:

$$\sqrt[4]{2 \times 3 \times 4 \times 5}.$$

161 - *Em qualquer proporção geometrica a somma ou differença dos antecedentes está para a somma ou differença dos consequentes, como qualquer antecedente está para o seu consequente.*

Assim, da proporção $\frac{18}{24} = \frac{6}{8}$ tira-se:

$$\frac{18 + 6}{24 + 8} = \frac{6}{8} \text{ ou } \frac{24}{32} = \frac{6}{8}$$

e ainda est'outra:

$$\frac{18 - 6}{24 - 8} = \frac{6}{8} \text{ ou } \frac{12}{16} = \frac{6}{8}$$

nas quaes se verifica o principio fundamental (157).

162—*Em qualquer proporção geometrica a somma dos antecedentes está para a dos consequentes, como a differença dos antecedentes para a dos consequentes.*

Suppondo a proporção $\frac{18}{24} = \frac{6}{8}$ será:

$$\frac{18+6}{24+8} = \frac{18-6}{24-8} \text{ ou } \frac{24}{32} = \frac{12}{16}$$

163—*Em qualquer proporção geometrica a somma ou differença dos dois primeiros termos está para a somma, ou differença dos dois ultimos, assim como o primeiro está para o terceiro, ou o segundo para o quarto.*

Assim da proporção $\frac{24}{18} = \frac{8}{6}$ tira-se:

$$\frac{24+18}{8+6} = \frac{24}{8} = \frac{18}{6} \text{ ou } \frac{42}{14} = \frac{24}{8} = \frac{18}{6}.$$

ou ainda $$\frac{24-18}{8-6} = \frac{24}{8} = \frac{18}{6} \text{ ou } \frac{6}{2} = \frac{24}{8} = \frac{18}{6}$$

Note-se que, quando os antecedentes forem menores que os consequentes, deve-se primeiramente inverter (158) a proporção.

164—*Em qualquer proporção geometrica a somma dos dois primeiros termos está para a sua differença, como a somma dos dois ultimos está para a differença dos mesmos.*

Tomando ainda a mesma proporção

$$\frac{24}{18} = \frac{8}{6}$$

teremos:

$$\frac{24+18}{24-18} = \frac{8+6}{8-6} \text{ ou } \frac{42}{6} = \frac{14}{2}$$

165—Com o auxilio dos principios precedentes (n.os 161 a 164), é possivel em alguns casos a determinação do valor da quantidade desconhecida, quando ella entra em mais de um termo da proporção, reduzindo a um só os termos que a envolvem.

Suppondo, por exemplo, que é

$$\frac{6}{4} = \frac{8+x}{7-x}$$

ter-se-ha (163) $$\frac{6+4}{8+x+7-x} = \frac{6}{8+x}$$

ou $$\frac{10}{15} = \frac{6}{8 + x}$$

e por tanto (157) $$8 + x = \frac{15 \times 6}{10} = \frac{90}{10} = 9$$

e finalmente $$x = 9 - 8 = 1.$$

Exercicios

1.° Calcular o termo desconhecido em cada uma das seguintes proporções:

$$\left(\frac{3}{4} - \frac{5}{7}\right) - (0{,}58 - 0{,}0013) = 2^3 - x\,; \quad x - 7 = 15 - 12\,;$$

$$\left(\frac{6}{8} + 2\right) - \frac{1}{2} = 7 - \left(\frac{5}{6} + x\right); \; 14{,}5 - x = 0{,}25 - 8{,}3\,;$$

$$18 - x = x - 24\,; \; \frac{2}{3} - x = x - \frac{4}{8}\,; \; 0{,}248 - x = x - 0{,}35$$

2.° Quaes são as equidifferenças que se podem formar com os quatro numeros da igualdade $10 \div 5 = 9 + 6$?

3.° Perguntando-se a um sujeito quantas libras tinha, respondeu: o numero d'ellas é tal que o excesso d'esse numero sobre 7 é igual a quatro vezes o mesmo numero menos 52. Quantas libras tinha?

4.° A somma de dois numeros é 20, e o excesso do triplo do maior sobre o outro é igual ao excesso do quintuplo do menor sobre o primeiro. Quaes são os numeros?

5.° A edade de 4 individuos é tal, que a differença entre a dos dois primeiros é igual á differença entre a dos dois ultimos. Sabendo-se que os dois primeiros têem respectivamente 58 annos e 27 annos e o terceiro tem 64, qual é a edade do quarto?

6.° Quatro machinas consumiram durante um dia, uma determinada porção de carvão, sendo a differença do consumo das duas primeiras, igual á differença do consumo das duas ultimas. Sabe-se que duas d'ellas consumiram o mesmo e que as outras duas consumiram respectivamente 48 kg. e 36 kg. Qual a porção de carvão consumida por cada uma das outras?

7.º Formar uma proporção geometrica com os numeros 12, 15, 90 e 2.

8.º Dois numeros estão entre si como 7 para 19; o primeiro é 56; qual será o segundo?

9.º Determinar o quarto termo das seguintes proporções:

$$\frac{6}{2} = \frac{9}{x}; \quad \frac{5}{\left(2\,\frac{3}{4}\right)} = \frac{\frac{3}{4}}{x}; \quad \frac{0{,}25}{3{,}14} = \frac{x}{12{,}5}$$

$$\frac{\frac{3}{2}}{x} = \frac{x}{\frac{5}{8}}; \quad \frac{5+2x}{8} = \frac{7-2x}{5}$$

10.º Calcular a quarta proporcional aos numeros

$$3, \quad 5\,\frac{1}{4} \text{ e } 8\,\frac{2}{3}$$

11.º Calcular a quarta proporcional aos tres numeros

$$56\,\frac{3}{5},\ 18\,\frac{2}{7},\ 13\,\frac{4}{15}$$

12.º Calcular a terceira proporcional aos dois numeros 12 e 6.

13.º Calcular a terceira proporcional aos dois numeros

$$8\,\frac{2}{3} \text{ e } 5\,\frac{3}{4}$$

14 Calcular a meia proporcional aos dois numeros 12 e 48.

15.º Calcular a meia proporcional aos numeros

$$\frac{4}{275} \text{ e } 360\,\frac{9}{11}$$

16.º Uma fabrica em 1850 produziu 26.700 quintaes de porcelana, e em 1851 produziu 52.400 quintaes. Em 1850 consumiu 37000 quintaes de carvão e em 1851 consumiu 4.800 quintaes. Pergunta-se se as duas producções estão em proporção com os respectivos consumos de carvão, e qual deveria ser no segundo anno a producção, para que essa proporção se mantivesse.

17.º Sabe-se que 25 medidas de trigo custaram 9$000 réis. Qual será a importancla de 32 medidas do mesmo trigo, pelo mesmo preço?

18.º A somma de dois numeros é 27, e a razão d'elles é como 4 para 5. Determinar os numeros.

19.º A differença de dois numeros é 2, e a sua razão 9 para 8. Determinar os numeros.

3.º — Progressões

Progressões arithmeticas

166—**Progressão arithmetica** ou **progressão por differença** *é uma serie de numeros que vão crescendo ou diminuindo, de modo que a differença entre dois numeros consecutivos é a mesma em toda a serie.*

A esta differença constante entre dois numeros consecutivos chama-se *razão da progressão*, e os numeros que formam a progressão chamam-se **termos**.

Se os termos da progressão vão crescendo, a progressão diz-se **crescente** ou **ascendente**; e pois que a differença entre dois termos consecutivos (a razão) é constante, cada termo é igual ao anterior mais a razão.

Se os termos vão diminuindo, a progressão é **decrescente** ou **descendente**, e n'este caso é evidente que qualquer termo é igual ao anterior menos a razão.

Quer a progressão seja crescente, quer descrescente, cada termo é *meio arithmetico* entre o que o precede e o que o segue.

As progressões arithmeticas indicam-se escrevendo os termos seguidamente, separando-os por um ponto e collocando o signal ÷ á esquerda dos seus termos.

1.º exemplo: **Progressão arithmetica crescente**

÷ 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17.......

Razão 2.

2.º exemplo: **Progressão arithmetica decrescente**

÷ 43. 40. 37. 34. 31. 28. 25.......

Razão 3.

Uma progressão, (a primeira das duas precedentes por exemplo) lê-se do seguinte modo: 3 para 5, como 5 para 7, como 7 para 9, como 9 para 11, etc.

167—*N'uma progressão arithmetica crescente qualquer termo é igual ao primeiro mais tantas vezes a razão, quantos são os termos que o precedem.*

Exemplo: Assim na progressão crescente

$$\div\, 6.\ 8.\ 10.\ 12.\ 14.\ 16,\ 18.\ 20.\ 22.\ 24 \ldots\ldots$$

Razão 2.

O oitavo termo, por exemplo, é precedido de 7 termos, e, portanto:

$$8.^{\circ}\ \text{termo} = 6 + 7 \times 2 = 20$$

168—*Qualquer termo de uma progressão arithmetica decrescente é igual ao primeiro menos tantas vezes a razão quantos forem os termos que o precedem.*

Exemplo: Assim na progressão decrescente:

$$\div\, 30.\ 27.\ 24.\ 21.\ 18.\ 15.\ 12.\ 9 \ldots\ldots$$

Razão 3.

O sexto termo, por exemplo, é precedido de 5 termos e, portanto:

$$6.^{\circ}\ \text{termo} = 30 - 5 \times 3 = 15$$

169—*A somma de um grupo de termos de uma progressão arithmetica (crescente ou decrescente), é igual á semi-somma dos extremos, multiplicada pelo numero de termos.*

Assim, na progressão crescente

$$\div\, 2.\ 5.\ 8.\ 11.\ 14.\ 17.\ 20.\ 23.\ 26$$

que tem 9 termos e cujos extremos são 2 e 26, a somma de todos elles é

$$\frac{2 + 26}{2} \times 9 = 126$$

Do mesmo modo, na progressão

$$\div\ 18.\ 16.\ 14.\ 12.\ 10.\ 8$$

a somma de todos os termos será

$$\frac{18+8}{2} \times 6 = 78$$

Progressões geometricas

170 — **Progressão por quociente,** *ou* **progressão geometrica,** *é uma serie de numeros taes, que o quociente da divisão de qualquer d'elles pelo precedente tem o mesmo valor em toda a serie.*

Este quociente é a **razão,** e os numeros são os **termos** da progressão.

Da definição se conclue que qualquer *termo* é igual ao precedente multiplicado pela *razão.*

Se a razão é maior que a unidade, os termos vão augmentando, e a progressão diz-se **crescente.**

Se a razão é menor que a unidade, os termos vão diminuindo, e a progressão diz se **decrescente.**

As progressões geometricas indicam-se escrevendo os termos uns adeante dos outros, separando-os por dois pontos e collocando o signal $\div\div$ antes do primeiro termo.

1.º Exemplo: **Progressão geometrica crescente.**

$$\div\div 3 : 6 : 12 : 24 : 48 : 96 : 192 \ldots\ldots$$

Razão 2.

2.º Exemplo: **Progressão geometrica decrescente.**

$$\div\div 16 : 8 : 4 : 2 : 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{16}$$

Razão $\frac{1}{2}$.

As progressões geometricas lêem-se como as arithmeticas.

171 — *Em qualquer progressão geometrica qualquer termo é igual ao primeiro multiplicado pela razão elevada a uma potencia igual ao numero de termos que o precedem.*

1.º Exemplo:

$$\div\!\div\, 2 : 8 : 32 : 128 : 512 : 2048 \ldots\ldots$$

Razão 4.

O sexto termo, por exemplo, é precedido por 5 termos e portanto:

$$6.^{\circ} \text{ termo} = 2 \times 4^5 = 2048$$

2.º Exemplo:

$$\div\!\div\, 32 : 16 : 8 : 4 : 2 \ldots\ldots$$

Razão $\frac{1}{2}$.

Para o oitavo termo será:

$$8.^{\circ} \text{ termo} = 32 \times \left(\frac{1}{2}\right)^7 = 32 \times \frac{1}{128} = \frac{32}{128} = \frac{1}{4}$$

172 — *O producto dos termos de uma progressão geometrica é igual á raiz quadrada do producto do primeiro termo pelo ultimo, elevado á potencia cujo grau é igual ao numero dos termos.*

Assim na progressão

$$\div\!\div\, 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 \ldots\ldots$$

o producto dos 5 primeiros termos, que representaremos por P, será:

$$P = \sqrt{(2 \times 32)^5} = \sqrt{64^5} = 32768$$

173 — *A somma de um grupo de termos de uma progressão geometrica é igual a um quebrado, que tem por numerador o producto do ultimo termo pela razão, menos o primeiro, e por denominador a differença entre a razão e a unidade.*

1.º Exemplo:

Calcular a somma dos termos do seguinte grupo:

$$\div\!\div\, 8 : 24 : 72 : 216$$

Razão 3.

Representando a somma por S, teriamos:

$$S = \frac{216 \times 3 - 8}{3 - 1} = \frac{648 - 8}{2} = \frac{640}{2} = 320$$

Se a progressão é decrescente, o producto do ultimo termo pela razão é menor que o primeiro termo, e a razão menor que a unidade; as duas subtracções indicadas nos dois termos do quebrado, fazem-se então em sentido inverso.

Assim, por exemplo, a somma dos termos do seguinte grupo:

$$\div 16 : 8 : 4 : 2$$

Razão $\frac{1}{2}$.

será

$$S = \frac{16 - 2 \times \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{16 - \frac{2}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{16 - 1}{\frac{1}{2}} = \frac{15}{\frac{1}{2}} = 30$$

Exercicios

1.º Calcular o 21.º termo da progressão $\div$ 4. 7. 10.....

2.º Calcular o 32.º termo da progressão $\div$ 46,5. 45. 43,5.....

3.º Calcular o primeiro termo d'uma progressão arithmetica cuja razão é $3 \frac{1}{4}$ e o 12.º termo $38 \frac{3}{4}$.

4.º Calcular a somma dos 50 primeiros termos da progressão

$$\div 5 \frac{1}{2} . 7 . 8 \frac{1}{2} . 10 \ldots\ldots$$

5.º Achar a somma dos primeiros 50 numeros impares.

6.º Um viajante, que ha de percorrer certa estrada, avança cada dia 2000 passos mais que no dia precedente. Pergunta-se: qual é o comprimento da estrada, e quantos dias gastará a percorrel-a; sabendo-se que avança no primeiro dia 3000 passsos, e no ultimo 49000.

7.º Um sujeito pagou uma divida em 20 prestações mensaes; o primeiro pagamento foi de 290 réis; o ultimo de 860 réis, e o excesso de cada pagamento sobre o precedente era constante. Qual era este excesso?

8.º Um corpo na sua queda percorre no primeiro segundo 4^m,9044, no 2.º, tres vezes esta distancia, no 3.º cinco vezes, e assim successivamente. Qual será a distancia percorrida pelo corpo em 10 segundos.

9.º Um certo numero de operarios incumbidos de abrir um poço, pediram como remuneração do seu trabalho, 3$500 réis pelo primeiro metro, 3$700 pelo segundo, 3$900 pelo terceiro, etc., augmentando sempre 200 réis por metro. Quanto deverão receber, se o poço tiver 20 metros de profundidade?

10.º Calcular o nono termo da progressão geometrica

$$\div\div 15 : 45 : 135 \ldots\ldots$$

11.º O nono termo d'uma progressão geometrica é 2048; a razão 2; qual é o primeiro termo?

12.º O nono termo d'uma progressão geometrica crescente é 45927, o primeiro termo 7; qual é a razão?

13.º Calcular a somma de 20 termo da progressão

$$\div\div 8 : 24 : 72 \ldots\ldots$$

14.º Calcular a somma de 12 termos da progressão

$$\div\div 7 : \frac{14}{5} : \frac{28}{25} : \frac{52}{125} \ldots\ldots$$

15.º Sendo chamados dois pocêiros para abrir um poço, pediram 200 réis pelo primeiro metro de profundidade, 400 réis pelo segundo, 800 réis pelo terceiro e assim successivamente. Foi acceite a proposta. Quanto custará a abertura do poço, encontrando-se agua a 18 metros de profundidade?

16.º Dispondo 15 caixas em fileira, lançando um grão de trigo na primeira, dois na segunda, quatro na terceira, e dobrando successivamente o numero até á ultima, qual será a totalidade dos grãos de trigo contidos em todas as caixas?

17.º Um individuo procurou um proprietario d'uma typographia para que lhe imprimisse um folheto de 32 paginas.

O industrial propoz-lhe o levar 30 réis pela impressão e composição da primeira pagina, 60 pela segunda, 90 pela terceira e assim successivamente; o auctor não se conformou, sendo então a proposta modificada nos seguintes termos: levar 1 real pela primeira pagina, 2 réis pela segunda, 4 pela terceira e assim successivamente.

Calcule-se a importancia das duas propostas.

XI

Valor numerico das formulas

174—Quando haja uma questão a resolver sobre numeros, a arithmetica chega á solução, por meios que não deixam vestigio algum das operações effectuadas no decurso do calculo; de sorte que é necessario recomeçar toda a serie de raciocinios pela sua ordem, quando, por ventura, conservando o mesmo enunciado da questão, apenas se mudam os numeros.

O estudo das questões numericas consideradas sob o ponto de vista geral, pertence propriamente a uma sciencia chamada **algebra**. Apenas damos aqui, umas leves indicações sobre a notação litteral, necessarias para mais facil comprehensão d'este capitulo, do seguinte e da resolução de algumas questões de arithmetica applicada.

175—Quando desconhecemos o valor numerico de uma grandeza, e precisâmos de nos referir a ella, usa-se represental-a de um modo geral por uma letra do alphabeto, e assim, em vez de se raciocinar ou operar com os numeros 3, 7, 5, etc., raciocinâmos ou operâmos com os symbolos geraes a, b, c, etc., aos quaes se podem attribuir quaesquer valores particulares.

Póde tomar-se indistinctamente qualquer letra para representar uma quantidade, é porém uso empregar-se as primeiras letras do alphabeto, a, b, c, etc., ou a inicial da palavra que designa a especie da quantidade (p se é um peso, v se é um volume, etc.) para representar as quantidades conhecidas, reservando as ultimas letras do alphabeto, x, y, z, para a representação das quantidades desconhecidas ou incognitas, cujo valor se pretende determinar.

Quando n'uma questão figuram muitas quantidades da mesma natureza, podem todas ser representadas pela mesma letra, distinguindo-as porém umas das outras, ou accentuando-as á direita e um pouco superiormente com uma ou mais *peliculas*, ou escrevendo á direita e um pouco inferiormente um *indice* numerico. Assim, se n'uma questão entram diversos pesos, podem ser representados por $p, p', p'', \ldots$ (que se lêem *p*, *p linha*, *p duas linhas*,....) ou ainda por $p, p_1, p_2, \ldots$ (que se lêem *p*, *p indice um*, *p indice dois*,....)

176 — As relações entre as diversas quantidades litteraes representam-se escrevendo entre as letras signaes analogos áquelles de que nos temos servido para indicar as operações dos numeros. Assim, para indicar abreviadamente o principio de que, *o dividendo é igual ao producto do divisor pelo quociente e mais o resto*, escreve se

$$D = d \times q \div r$$

em que D representa o dividendo, d o divisor, q o quociente, e r o resto.

177 — Empregando as letras e os signaes convencionaes na resolução das questões numericas, os resultados veem representados, não por um numero já construido, como succede no calculo realisado com quantidades de valores determinados, mas sim por expressões chamadas formulas, que se limitam a indicar abreviadamente a serie de operações precisas para a resolução de uma dada questão. Assim, se pretendessemos saber qual o espaço e, que um movel percorre no tempo t, suppondo que a velocidade é v em cada unidade de tempo, a formula $e = vt$ mostra que esse espaço se determina multiplicando a velocidade pelo tempo.

178 — Conhecida a formula a empregar para a resolução de certa ordem de questões, e pretendendo-se applical-a a um problema com dados numericos particulares, bastará — *substituir as letras pelos valores numericos que lhes são attribuidos e effectuar depois as operações que estão indicadas.* O numero resultante diz-se *valor numerico* da formula.

1.º exemplo: Calcular o valor numerico da expressão:

$$x = \frac{5a + b}{c} + \frac{(3b + c^3)c}{2b}$$

na hypothese de ser $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$.

$$x = \frac{5 \times 2 + 3}{4} + \frac{(3 \times 3 + 4^3)4}{2 \times 3}$$

$$x = \frac{10 + 3}{4} + \frac{(9 + 64) \times 4}{6} = \frac{10 + 3}{4} + \frac{(9 + 64) \times 2}{3}$$

$$x = \frac{13}{4} + \frac{73 \times 2}{3}$$

$$x = \frac{13}{4} + \frac{146}{3} = \frac{39}{12} + \frac{584}{12} = \frac{39 + 584}{12}$$

$$x = \frac{623}{12} = 51\ \frac{11}{12}$$

2.º Exemplo: Calcular o valor numerico da expressão

$$x = \frac{a^2}{b^2} - \frac{1+a}{1-b} + \frac{1+a}{1+b}$$

na hypothese de ser $a = \frac{1}{4}$ $b = \frac{1}{5}$

$$x = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2}{\left(\frac{1}{5}\right)^2} - \frac{1+\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{5}} + \frac{1+\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{5}} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{25}} - \frac{\frac{5}{4}}{\frac{4}{5}} + \frac{\frac{5}{4}}{\frac{6}{5}}$$

$$x = \frac{25}{16} - \frac{25}{16} + \frac{25}{24} = \frac{25}{24} = 1\ \frac{1}{24}$$

XII

Equações numericas

179 — Denomina-se *equação* a igualdade (18) cujos dois membros só têem valores numericos iguaes, quando certas letras que n'ella entram, chamadas incognitas, têem determinados valores. Assim a igualdade

$$2\,x + 7 = 5\,(x - 1)$$

é uma equação, porque o primeiro membro só será igual ao segundo, quando x tiver o valor 4.

Uma equação diz-se *numerica* quando, além da incognita, nenhuma outra quantidade é representada por letras.

O numero que, posto na equação em vez da incognita, torna o valor numerico do primeiro membro igual ao do segundo, diz-se *solução* da equação. *Resolver* uma equação é achar a sua solução.

180 — Para resolver uma equação numerica procede-se do seguinte modo:

1.º *Desembaraça-se dos denominadores*, para o que basta determinar o menor multiplo commum dos denominadores (76), dividil-o pelos denominadores, considerando para isso as quantidades inteiras como tendo por denominador a unidade (87), e multiplicar depois os numeradores pelos quocientes respectivos.

2.º *Passam se para um membro os termos que tenham a incognita e para outro os que sejam conhecidos*, para o que basta attender a que uma quantidade positiva passa para o outro membro em negativa e reciprocamente.

3.º *Effectuam-se as operações indicadas.*

4.º *Dividem-se ambos os membros pelo numero que multiplica a incognita.* Este numero denomina-se *coeficiente* e indica quantas vezes a quantidade que elle multiplica se deve repetir como parcella.

1.º Exemplo: Resolver a equação:

$$3\,x - \frac{5}{6} = 32 - \frac{1}{2}\,x$$

Sendo 6 o menor multiplo commum dos denominadores, teremos successivamente:

$$18\,x - 5\,x = 192 - 3\,x$$

$$18\,x - 5\,x + 3\,x = 192$$

$$16\,x = 192$$

$$x = \frac{192}{16} = 12$$

2.º Exemplo: Resolver a equação

$$\frac{3\,x + 2}{4} + x = 5 + \frac{7}{18}\,x$$

Sendo 36 o menor multiplo commum dos denominadores teremos successivamente

$$27\,x + 18 + 36\,x = 180 + 14\,x$$

$$27\,x + 36\,x - 14\,x = 180 - 18$$

$$49\,x = 162$$

$$x = \frac{162}{49} = 3\,\frac{15}{49}$$

181 — Muitos problemas ha, que podem ser facilmente resolvidos pelo emprego das equações. Para isso basta conseguir *pôl-o em equação*, isto é, traduzir por meio dos signaes das operações as relações que no enunciado se estabelecem entre os numeros dados e a incognita, que será representada por x, e depois resolver essa equação.

1.º Exemplo: *Ha um numero cujo quadrupulo augmentado de 2, é precisamente igual á differença entre 74 e o seu dobro. Qual é esse numero?*

Representando por x o numero, a equação que corresponde ás condições formuladas no enunciado é

$$4x + 2 = 74 - 2x$$

e resolvendo esta equação obtemos

$$4x + 2x = 74 - 2$$

$$6x = 72$$

$$x = \frac{72}{6} = 12$$

Verificação

Substituindo na equação $4x + 2 = 74 - 2x$, o valor achado para x ter-se-ha

$$4 \times 12 + 2 = 74 - 2 \times 12$$

$$48 + 2 = 74 - 24$$

$$50 = 50$$

o que mostra que a igualdade estabelecida era verdadeira.

2.º Exemplo: *Um individuo tem actualmente 40 annos de idade, e um seu filho 22 annos; quantos annos será necessario decorrerem para que o filho tenha metade da idade do pae?*

Representando por x o numero de annos que se pede, a idade do pae será então $40 + x$ e a do filho $22 + x$, e como a d'este deve ser então metade da d'aquelle, teremos a equação

$$22 + x = \frac{40 \times x}{2}$$

que resolvida, dá successivamente

$$44 + 2x = 40 + x$$

$$2x - x = 40 - 44$$

$$x = -4$$

Esta solução negativa (14:) mostra que esse tempo deverá ser considerado como passado e não como futuro, contrariamente ao que no problema se havia estabelecido. E, com effeito, 4 annos antes da epocha considerada, o pae tinha 36 annos e o filho 18, isto é, metade da idade do pae.

3.º Exemplo: *Quanto devia um homem que, tendo pago por uma vez metade da divida e por outra a terça parte, ficou ainda devendo 630$000 réis?*

Representando por x a divida, a equação que corresponde ás condições formuladas no enunciado é

$$x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x = 630\$000$$

e resolvendo esta equação obtemos

$$6x - 3x - 2x = 3:780\$000$$

$$x = 3:780\$000$$

Será com effeito esta a divida, pois tendo-se pago por uma vez metade, isto é, 1:890$000 réis. e por outra vez a terça parte, isto é, 1:260$000 réis, ficou-se com effeito ainda a dever 630$000 réis.

Exercicios

1.º Calcular o valor numerico das seguintes expressões:

$$\frac{2a}{a-b} + \frac{5a^2 - 2b^2}{3ab}; \quad \frac{2(4a^2 - 3b^2)}{5b(a+b)} \times \frac{6a^2 - 3b}{4a} : \frac{5b^2}{2a^2}$$

na hypothese de ser $a = \frac{1}{2}$ e $b = \frac{1}{3}$

2.º Resolver as seguintes equações numericas:

$$\frac{4}{3}x - 9 + 2x = 5 - x;$$

$$\frac{7}{4}x - \frac{5}{12}x - 20 = \frac{2}{3}x - 8;$$

$$5{,}7x + 7{,}2 - 0{,}855x = 34{,}1885 + 3{,}45x - 18{,}2;$$

$$\frac{5}{6}x - \frac{5}{3} = \frac{4}{5}x + \frac{7}{3}$$

3.º Qual é o numero, do qual tirando 5 se obtem um resultado igual aos tres oitavos d'esse numero augmentados de 12?

4.º Qual é o numero cujos $\frac{2}{3}$, mais $\frac{5}{8}$, sommados com o triplo do mesmo numero dão 618?

5.º Um numero é igual a $\frac{4}{15}$ d'um outro; a somma d'elles é 437; quaes são os dois numeros?

6.º Um numero é $\frac{5}{11}$ d'um outro; a differença d'elles é 1302; quaes são estes numeros?

7.º Uma bica deita n'um tanque 5 litros de agua por segundo, mas ao mesmo tempo sáe por um orificio uma certa porção do mesmo liquido. Ao fim de 2 horas e meia o tanque tem $13^{mc},5$ (13 metros cubicos e 5 decimas do metro cubico) d'agua. Quanta agua sáe por segundo?

8.º Dividir 14$250 réis em tres quinhões, que estejam entre si como os numeros 3, 5 e 11, isto é: de modo que o segundo seja $\frac{5}{3}$ do primeiro, e o terceiro $\frac{11}{3}$ do mesmo primeiro.

XIII

Systema metrico

182 — O systema de pesos e medidas antigamente adoptado em Portugal apresentava graves inconvenientes.

1.º **Não era uniforme.** Cada provincia tinha o seu systema particular; certas medidas empregadas no norte do paiz, eram desconhecidas no sul, e reciprocamente; as medidas d'uma mesma provincia variavam d'uma cidade para outra e muitas vezes o mesmo nome designava grandezas differentes,

2.º **Não era estavel.** As unidades de medida, tendo sido escolhidas arbitrariamente e não assentando sobre uma base fixa, podiam variar com o tempo.

3.º **Era complicado**, porque as subdivisões das unidades principaes não se faziam seguindo a lei decimal; tal medida dividia-se em seis partes iguaes, uma outra em doze, dezeseis, vinte e quatro ou sessenta; além d'isso os calculos fornecidos por estas medidas eram longos e difficeis..

Comprehende-se sem duvida a confusão que um tal systema devia produzir no commercio.

A 8 de maio de 1790, sob proposta de Talleyrand, foi resolvido crear um systema de pesos e medidas, uniforme, estavel, simples e susceptivel de ser adoptado por todos os povos.

Uma commissão nomeada pela Academia das sciencias de Paris foi encarregada de preparar este importante trabalho.

Borda, Lagrange, Laplace, Monge e Condorcet, que compunham essa commissão, resolveram que o novo systema de medidas seguisse a lei decimal, que a unidade de comprimento, d'onde deviam derivar todas as outras medidas, estivesse ligada á grandeza da terra, e fosse uma fracção do meridiano terrestre.

Em 26 de março, de 1791, foi publicado um decreto em harmonia com as conclusões da commissão, sendo uma outra encarregada da medição do meridiano.

Um arco d'um gráu é um arco entre duas verticaes fazendo entre si um angulo d'um gráu.

Se a terra fosse rigorosamente espherica todas as verticaes concorreriam no centro e todos os gráus d'um meridiano seriam iguaes. Mas a terra é achatada nos pólos e mais grossa no equador; de sorte que os gráus são maiores junto aos pólos que nas proximidades do equa dor. Foi por isso que a commissão da Academia das sciencias resolveu medir o arco do meridiano de Paris comprehendido entre Dunkerque e Barcelona; este arco, situado pouco mais ou menos a igual distancia do pólo e do equador, dá approximadamente o comprimento d'um gráu terrestre.

A operação foi confiada aos geometras Méchain e Delambre. Os resultados que elles obtiveram, combinados com os que Bouguer, Gondin e Lacondamine, tinham encontrado no Perú, em 1734, forneceram para o comprimento do quarto do meridiano terrestre 5.130:740 toezas.

A decima millionesima parte d'este comprimento, designada sob o nome de *metro*, foi adoptada em França, como unidade fundamental, por decreto de 22 de junho de 1799.

Fixada a unidade de comprimento, deduziu-se d'ella os valores do *litro* e do *gramma*; applicou-se a estas medidas a divisão decimal.

O *systema metrico decimal* ou systema *legal* de pesos e medidas estava pois creado.

A lei de 4 de julho de 1837 tornou-o obrigatorio para toda a França a partir do 1.º de janeiro de 1840, e em Portugal só foi adoptado, em 1852, por decreto de 12 de dezembro do mesmo anno.

O novo systema de medidas é chamado *metrico*, porque todas as medidas de que se compõe são deduzidas do metro; *decimal*, porque as medidas da mesma especie são 10, 100, 1000 vezes maiores ou menores que a unidade principal d'essa especie, e *legal* porque é prescripto por lei.

183 — O systema metrico decimal fez desaparecer os inconvenientes das antigas medidas, e offerece as seguintes vantagens:

1.ª Tem uma base fixa, o *metro*.

2.ª Todas as medidas teem relação umas com as outras, porque todas derivam do metro.

3.ª As unidades secundarias, denominadas *multiplas* e *submultiplas*, formaram-se sempre na mesma razão, a decimal, e têem numenclatura methodica.

4.ª As grandezas são representadas por numeros decimaes.

5.ª E' invariavel e geralmente adoptado.

Differentes especies de medidas do systema metrico

184 — As grandezas que as mais das vezes se têem de medir são os comprimentos, as superficies, os volumes, as capacidades e os pesos.

Tambem as medidas do systema metrico se dividem em cinco classes, correspondendo a essas diversas grandezas. Além d'estas medidas ha ainda a considerar o tempo e o dinheiro como mais principaes.

Cada classe comprehende uma unidade **principal**, com os seus **multiplos** e **submultiplos**, 10, 100, 1000 vezes maiores ou menores que aquella unidade:

A unidade principal das medidas de comprimento é o metro (m.)
» » » » de superficie é o metro quadrado (mq.)
» » » » de volume é o metro cubico (mc.)
» » » » de capacidade é o litro (l.)
» » » » de peso é a gramma (g.)

Os signaes collocados á direita d'estas unidades, indicam a forma abreviada que ordinariamente se emprega para as designar.

185 — Os nomes dos multiplos da unidade principal tanto nas medidas lineaes como em todas as outras, formam-se antepondo ao nome d'essa unidade as palavras

deca, hecto, kilo, myria

tiradas do grego, e que significam respectivamente

dez, cem, mil, dez mil.

Os nomes dos submultiplos da unidade principal, formam-se antepondo ao nome d'essa unidade as palavras

deci, centi, milli

abreviaturas de palavras latinas, e que significam respectivamente

decima, centesima, millesima.

Asssim, decametro, significa dez metros; hectolitro, cem litros; kilogramma, mil grammas; myriametro, dez mil metros; decilitro, a decima parte do litro; centigramma, a centesima parte do gramma; millimetro, a millesima parte do metro.

186 — As unidades de medida que figuram no systema metrico, são **reaes** ou **imaginarias.**

As medidas **reaes** são representadas por objectos materiaes talhados segundo o fim a que se destinam, e usadas nas operações do commercio, da industria e da sciencia.

As medidas **imaginarias** servem nos calculos e na linguagem, mas não são representadas por objectos materiaes.

1.º — Medidas lineares

187 — A unidade principal das medidas de comprimento é o metro.

O *metro* é a decima millionesima parte do quarto do meridiano terrestre E N E′ N′, *fig. 1*.

Tendo o quarto do meridiano terrestre, 10.000.000^m de comprimento, o meridiano todo terá 40.000.000^m.

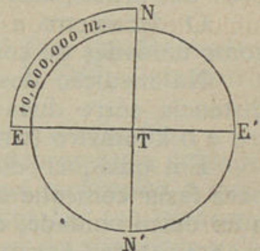


Fig. 1

Tomando o metro 10, 100, 1000 e 10000 vezes, formam-se os seus diversos multiplos. Dividindo o métro em 10, 100, 1000, etc., partes iguaes, formam-se os seus diversos submultiplos.

Os nomes e valores dos multiplos e submultiplos do metro, são os seguintes:

Multiplos
- **Decametro** (Dm), que vale 10 metros.
- **Hectometro** (Hm), que vale 100 metros, ou 10 decametros.
- **Kilometro** (Km), que vale 1000 metros, ou 10 hectometros.
- **Myriametro** (Mm), que vale 10000 metros, ou 10 kilometros.

Submultiplos
- **Decimetro** (dm), que vale $\frac{1}{10}$ do metro.
- **Centimetro** (cm), que vale $\frac{1}{100}$ do metro, ou $\frac{1}{10}$ do decimetro.
- **Millimetro** (mm), que vale $\frac{1}{1000}$ do metro, ou $\frac{1}{10}$ do centimetro.
- **Decimillimetro** (dmm), que vale $\frac{1}{10000}$ do metro, ou $\frac{1}{10}$ do millimetro.

Etc., etc.

Como os diversos multiplos e submultiplos se formam n'uma razão decupla, os numeros que representam comprimentos são decimaes, occupando o algarismo que representa metros o logar das unidades com a respectiva virgula á direita, o que representa decimetros o logar das decimas, etc, E'-lhes pois applicavel tudo o que a respeito de taes numeros se disse no capitulo VIII, com a differença porém de que na leitura a designação unidades é substituida por metros e a designação final decimas, centesimas, etc., é substituida por decimetros, centimetros, etc. Assim, o numero 803^m,0026 ler-se-ha 803 metros e 26 deci-millimetros.

188 — Com quanto o metro seja a unidade mais frequentemente usada, podemos, segundo os casos, tomar para unidade qualquer dos seus multiplos ou submultiplos; assim:

O centimetro e o millimetro são as unidades usadas para medir pequenos comprimentos, como são os diametros dos tubos, os calibres das armas, etc.

O decametro e o hectometro são empregados na topographia, como unidades de comprimento.

Na medição dos grandes comprimentos, como por exemplo, a distancia entre duas cidades, emprega-se como unidade o myriametro e o kilometro (**unidades itinerarias**).

Em qualquer dos casos basta uma simples mudança da virgula para fazer com que o numero fique expresso em metros ou em qualquer outra unidade, com a condição porém de que se mude tambem a abreviatura. Assim é:

$$34^{m},23 = 342^{dm},3 = 3423^{cm} = 34230^{mm} = 3^{Dm},423 = 0^{Mm},003423$$

2.º — Medidas de superficie

189 — Duas linhas que se encontram, formam um *angulo*. Quadrado é uma figura que tem quatro lados iguaes e quatro angulos iguaes.

As unidades de superficie são quadrados que têem os lados iguaes ás differentes unidades de comprimento.

A unidade principal das medidas de superficie é o **metro quadrado**, isto é, um quadro, cujos lados têem 1 metro linear.

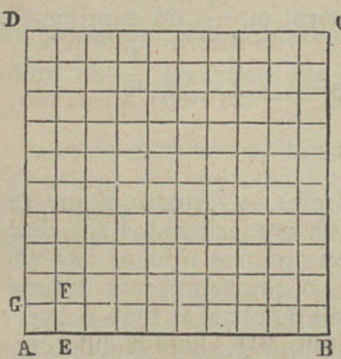


Fig. 2

189 — *A razão entre qualquer unidade de superficie e a que lhe é immediatamente superior é de 1 para 100* — — Seja A B C D (*fig. 2*) um quadrado qualquer.

Dividindo o lado A B em dez partes iguaes e tirando pelos pontos de divisão parallelas a A D, ficará o quadrado dado decomposto em dez rectangulos todos iguaes entre si.

Dividindo em seguida A D em dez partes iguaes e tirando pelos pontos de divisão, parallelas a A B, estas parallelas irão dividir cada rectangulo em dez quadrados iguaes a A E F G; mas como os rectangulos são em numero de dez, o quadrado dado conterá **cem** quadrados iguaes a A E F G.

Posto isto, se A B fôr igual a um metro, será A B C D um metro quadrado; bem como A E igual a um decimetro e A E F G a um decimetro quadrado.

D'onde se conclue que o metro quadrado vale 100 decimetros quadrados.

Se A B fôr igual a um decametro, A B C D será um decametro quadrado; bem como A E igual a um metro e A E F G a um metro quadrado.

D'onde o decametro quadrado vale 100 metros quadrados.

D'uma maneira geral; o quadrado A E F G representa a unidade de superficie immediatamente inferior áquella que representa o quadrado A B C D; e como o quadrado menor se contem 100 vezes no maior, póde-se dizer que uma unidade qualquer de superficie vale *cem* da ordem immediatamente inferior.

D'este modo, as palavras **deca, hecto, kilo, myria, deci, centi, milli,** quando se trata de medidas de superficie, significam respectivamente: 10^2; 100^2; 1000^2; 10000^2; $0{,}1^2$; $0{,}01^2$; $0{,}001^2$.

Os nomes e valores dos multiplos e submultiplos do metro quadrado são:

Multiplos
- **Decametro quadrado** (Dmq), que vale 100 metros quadrados.
- **Hectometro quadrado** (Hmq), que vale 10000 metros quadrados, ou 100 Dmq.
- **Kilometro quadrado** (Kmq) que vale 1000000 metros quadrados, ou 100 Hmq.
- **Myriametro quadrado** (Mmq), que vale 100000000 metros quadrados, ou 100 Kmq.

Submultiplos
- **Decimetro quadrado** (dmq), que vale $\frac{1}{100}$ do metro quadrado.
- **Centimetro quadrado** (cmq), que vale $\frac{1}{10000}$ do metro quadrado, ou $\frac{1}{100}$ do dmq.
- **Millimetro quadrado** (mmq), que vale $\frac{1}{1000000}$ do metro quadrado, ou $\frac{1}{100}$ do cmq.

D'onde se vê, tomando o metro quadrado para unidade, que:

os decimetros quadrados são **centesimas** (2.ª ordem de unidades á direita da virgula);
os centimetros quadrados — **decimas millesimas** (4.ª ordem);

os millimetros quadrados são **millionesimas** (6.ª ordem);
os decametros quadrados — **dezenas** (2.ª ordem de unidades á esquerda da virgula);
os hectometros quadrados — **dezenas de milhar** (4.ª ordem);
os kilometros quadrados — **milhões** (6.ª ordem);
os myriametros quadrados — **centenas de milhão** (8.ª ordem).

Como nas medidas de superficie as diversas ordens de unidades se formam de 100 em 100, póde haver n'um numero até 99 de cada ordem, e por isso cada uma d'ellas precisa de ser representada por dois algarismos. Assim, no numero $84693^{mq},42085$ (que se lê 84693 mq e 420850 mmq) ha 8 Hmq, 46 Dmq, 93 mq, 42 dmq, 8 cmq, e 50 mmq. Como o numero tinha cinco algarismos decimaes, teve de completar-se a classe dos millimetros com um zero (124).

190 — A escolha da unidade depende da natureza da superficie a avaliar. Ha a considerar as *pequenas superficies*, as *superficies ordinarias*, as *superficies agrarias* e as *superficies topographicas*.

1.º *Pequenas superficies*. Para as superficies de pequenas dimensões, taes como uma lamina de vidro, uma folha de papel ou de cartão, a secção d'um tubo barometrico, etc.; emprega-se como unidade o centimetro quadrado ou o millimetro quadrado.

2.º *Superficies ordinarias*. Entende-se por superficies ordinarias, as que se encontram no interior e nas proximidades das habitações, taes são as superficies das paredes, dos tectos, dos sobrados, dos telhados, dos pateos de entrada, dos jardins, etc. Avaliam-se em metros quadrados.

3.º *Superficies agrarias*. As superficies agrarias são as destinadas á agricultura.

A unidade principal das medidas agrarias é o decametro quadrado, que então toma o nome de **are** (a) tendo como unico multiplo o **hectare** (Ha), que vale 100 ares ou 1 hectometro quadrado, e como unico submultiplo o centiare (ca), que é a centesima parte do are ou 1 metro quadrado.

E' claro que:

$$345246^{mq},564 = 3452^{Dmq},46564 = 34^{Hmq},5246564 =$$

$$= 345246^{ca},564 = 3452^{a},46564 = 34^{Ha},5246564$$

4.º *Superficies topographicas*. As superficies topographicas são as superficies de grandes dimensões, taes como as d'uma cidade, d'uma provincia, d'uma das cinco partes do mundo, de toda a terra, e a unidade empregada na sua avaliação é o **kilometro quadrado** ou o **myriametro quadrado**.

3.º — Medidas de volume

191 — Chama-se *cubo* a um volume terminado por 6 quadrados iguaes. Estes quadrados são as faces do cubo, e as linhas em que as faces se encontram chamam-se *arestas* do cubo. Por exemplo, A B, D C, H G, são arestas; A B C D, B C H G são faces.

As unidades de volume são cubos, tendo por arestas as differentes unidades de comprimento.

A unidade principal das medidas de volume é o *metro cubico* (m c), isto é, um cubo, cujas arestas têem cada uma um metro linear ou cada face um metro quadrado.

192 — *A razão entre qualquer unidade de volume e a que lhe é immediatamente inferior é de 1 para 1000.*

Considere-se um cubo qualquer M *(fig, 3)*. Dividindo uma das suas faces A B C D em cem quadrados guaes tendo por lado $\frac{1}{10}$ da aresta A B d'aquella face, (como se ensinou no numero 189), e construindo sobre cada um d'estes quadrados um cubo N, tendo por aresta o lado do mesmo quadrado, obtem-se uma camada de 100 cubos iguaes a N, tendo cada um por altura $\frac{1}{10}$ de A B ou $\frac{1}{10}$ de B G.

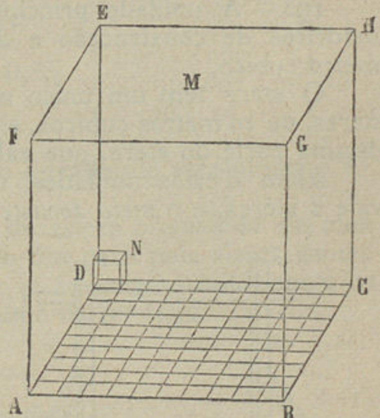


Fig. 3

O cubo dado conterá pois 10 camadas parallelas e por conseguinte, 100×10 ou 1000 cubos iguaes a N.

Posto isto, se a aresta do cubo M é um metro, a do cubo N é um decimetro; d'onde o metro cubico vale 1000 decimetros cubicos; se a aresta de M é um decimetro, a de N é um centimetro; por conseguinte o decimetro cubico vale 1000 centimetros cubicos, etc.

D'este modo as palavras *deca*, *hecto*, *kilo*, *myria*, *deci*, *centi* e *milli*, quando se trata das medidas de volume, significam respectivamente: 10^3; 100^3; 1000^3; 10000^3; $0{,}1^3$; $0{,}01^3$; $0{,}001^3$.

Os nomes e valores dos multiplos e submultiplos do metro cubico são:

Multiplos
- **Decametro cubico** (Dmc), que vale 1000 mc.
- **Hectometro cubico** (Hmc), que vale 1000000 mc, ou 1000 Dmc.
- **Kilometro cubico** (Kmc), que vale 1000000000 mc, ou 1000 Hmc.
- **Myriametro cubico** (Mmc), que vale 1000000000000 mc, ou 1000 Kmc.

Submultiplos

- Decimetro cubico (dmc), que vale $\frac{1}{1000}$ do mc.
- Centimetro cubico (cmc), que vale $\frac{1}{1000000}$ do mc, ou $\frac{1}{1000}$ do dmc.
- Millimetro cubico (mmc), que vale $\frac{1}{1000000000}$ do mc, ou $\frac{1}{1000}$ do cmc.

Como as diversas ordens de unidades, nas medidas de volume, se formam de 1000 em 1000, podendo n'um numero haver até 999 de cada ordem, cada uma d'ellas precisa de ser constituida por tres algarismos. Assim, no numero $30046225^{mc},3246$ (que se lê 30046225^{mc} e 324600 cmc), ha 30 Hmc, 46 Dmc, 225 mc, 324 dmc, e 600 cmc. Como a ultima classe só tinha um algarismo, foi preciso completal-a com dois zeros.

193 — A unidade principal adoptada para avaliar o volume das madeiras de construcção e da lenha é o *stere (st)*, que equivale ao metro cubico.

O *stere* tem um unico multiplo, o *decastere* (Dst.), que vale 10 steres, ou 10 metros cubicos, e um unico submultiplo, o *decistere* (dst.), decima parte do stere, que vale portanto 100 decimetros cubicos.

Além d'estas unidades, tambem se emprega o *duplo stere*, que vale 2 steres, e o *meio decastere*, que vale 5 steres.

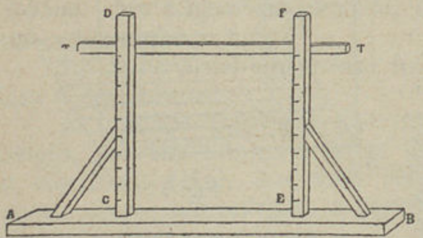


Fig. 4

O instrumento empregado para a medição tambem se chama *stere*, e compõe-se de uma soleira A B, *fig. 4*, sobre a qual se levantam dois prumos C D e E F, cada um dos quaes deve ter mais de um metro d'altura, separados um do outro na distancia exacta de um metro.

Estes prumos estão graduados em decimetros e centimetros, e sobre elles corre uma travessa T T, que se póde fixar em qualquer altura por meio de um parafuso de pressão.

O *duplo stere* e o *meio decastere* são construidos do mesmo modo, differindo apenas em que a distancia entre os prumos é de 2 metros para o duplo stere e de 3 metros para o meio decastere.

Com o stere só se póde medir o volume de paus que tenham comprimentos iguaes. Para fazer a medição collocam-se os paus sobre o estrado entre os prumos e uns por cima dos outros, de modo que deixem o menor espaço possivel vasio, e abaixa-se a travessa até pousarem nos paus. Conhece-se d'esta fórma a altura, lendo a graduação, e, como é fixa a largura (1 metro) e conhecido o comprimento, uma simples multiplicação dos tres numeros dará o volume, Assim, se os paus tiverem de comprimento 1,56 e o travessão ficar a $0^m,85$, o volume será $1,^m56 \times 1^m \times 0^m,85 = 1^{mc},3260 = 1^{st},3260$.

Se quizermos obter um stere de madeira, tendo esta um metro de comprimento, basta formar com ella uma pilha com um metro de altura. Se porém a madeira tem mais d'um metro, é necessario dar á pilha de madeira uma altura menor. Esta altura acha-se dividindo 1 pelo comprimento dos paus. Assim, se os paus tiverem 1,20 de comprimento, e representarmos por h a altura a que deve collocar-se a travessa; o producto das tres dimensões que são $1,^m$ $1,^m20$ e h, deverá dar 1^{mc} de volume; por consequencia, ter-se-ha a egualdade

$$1, \times 1,20 \times h = 1$$

d'onde se tira

$$h = \frac{1}{1,20} = 0,83$$

Collocando depois os paus sobre o estrado até esta altura 0,83, em-se um stere de madeira.

Com o duplo stere e com o meio decastere procede-se do mesmo modo. Multiplicando o comprimento dos paus pela altura da travessa e por 2 ou por tres, conforme se emprega o duplo stere ou meio decastere, o producto dará o volume da madeira.

4.° Medidas de capacidade

194—As medidas de capacidade são destinadas a medir o volume dos liquidos, taes como a agua, o vinho, o azeite, o vinagre, o leite, etc., e os seccos, como o trigo, o milho, o grão, o feijão, etc.

A unidade principal das medidas de capacidade é o *litro* que corresponde á capacidade de um decimetro cubico, isto é, de um cubo, tendo por aresta 1 decimetro linear.

Os nomes e valores dos multiplos e submultiplos do litro são:

Multiplos:
- **Decalitro** (Dl), que vale 10 litros.
- **Hectolitro** (Hl), que vale 100 litros, ou 10 Dl.
- **Kilolitro** (Kl), que vale 1000 litros, ou 10 Hl.
- **Myrialitro** (Ml), que vale 10000 litros, ou 10 Kl.

Submultiplos
- **Decilitro** (dl), que vale $\frac{1}{10}$ do litro.
- **Centilitro** (cl), que vale $\frac{1}{100}$ do litro, ou $\frac{1}{10}$ do dl.
- **Millilitro** (ml), que vale $\frac{1}{1000}$ do litro, ou $\frac{1}{10}$ do cl.

Etc.

Tanto o litro como os seus multiplos e submultiplos, variam de fórma e na substancia de que são construidos, conforme são para seccos, ou para liquidos.

Para seccos têem a fórma cubica ou cylindrica e são de madeira; para liquidos têem a fórma cylindrica e são de estanho, de vidro, de louça, etc., *figs.* 5, 6 e 7.

A lei tambem permitte, para facilidade das medições, o uso de

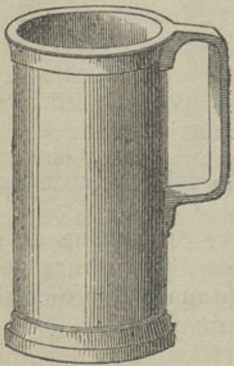


Fig. 5

Fig 6

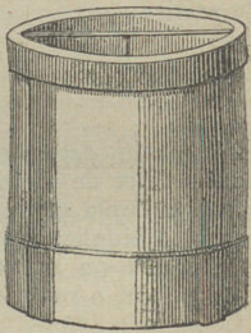


Fig. 7

medidas do duplo e de metade das unidades mais frequentes, taes são o duplo decilitro, o meio decilitro, o duplo decalitro, o meio centilitro, etc.

Como nas medidas de capacidade, as diversas ordens de medidas se formam de 10 em 10, as grandezas por ellas medidas são representadas por numeros decimaes, em que cada ordem é representada por um só algarismo. Assim no numero $875326^{l},915$, (que se lê 875326 litros e 915 millilitros) ha 87 Mm, 5 Kl, 3 Hl, 2 Dl, 6 l, 9 dc, 1 cl e 5 ml.

Correspondendo o litro ao decimetro cubico, corresponderá o kilolitro ao metro cubico e o millilitro ao centimetro cubico, e bastará portanto uma simples mudança de virgula para avaliar em litros um volume referido ao metro cubico. Assim:

$$34^{mc},3817 = 34381^{dmc},7 = 34381^{l},7 = 343^{Hl},817$$

5.º Medidas de peso

195—A unidade principal das medidas de peso é o *gramma*, isto é, o peso da agua, pura e no seu maximo grau de densidade, contida n'um centimetro cubico.

Escolheu-se a agua pura, porque o peso da agua ordinaria varia com a maior ou menor quantidade de substancias salinas que existem em dissolução.

Estabeleceu-se uma temperatura fixa, porque os corpos com o calor augmentam de volume, diminuindo, portanto, de densidade, e

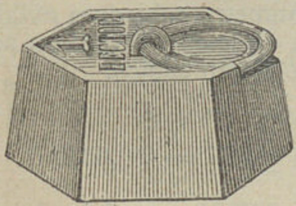


Fig. 8

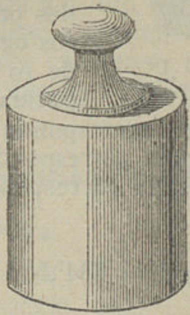


Fig. 9

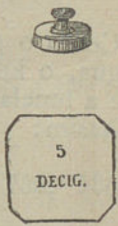


Fig. 10

teriamos então, que um centimetro cubico de agua pesaria mais ou menos, segundo a temperatura a que estivesse.

Fixou-se a temperatura 4,1 graus centigrados, que é a que corresponde ao estado mais denso da agua.

Os nomes e valores dos multiplos e submultiplos do gramma são:

Multiplos
- **Decagramma** (Dg), que vale 10 grammas.
- **Hectogramma** (Hg), que vale 100 grammas, ou 10 Dg.
- **Kilogramma** (Kg), que vale 1000 grammas, ou 10 Hg.
- **Myriagramma** (Mg), que vale 1000 grammas ou 10 Kg.

Submultiplos
- **Decigramma** (dg), que vale $\frac{1}{10}$ do gramma.
- **Centigramma** (cg). que vale $\frac{1}{100}$ do gramma, ou $\frac{1}{10}$ do dg.
- **Milligramma** (mg), que vale $\frac{1}{1000}$ do gramma, ou $\frac{1}{10}$ do cg.

Para facilidade das pesagens está auctorisado o uso de pesos do duplo e de metade das diversas unidades; taes são o meio hectogramma (50 grammas), o duplo hectogramma (200 grammas), etc. Tambem como o gramma é um peso muito pequeno, toma-se por *unidade usual* o kilogramma, e faz-se uso nas grandes pesagens de mais duas unidades superiores ao myriagramma: o **quintal metrico** (Q), que vale 100 kilogrammas e a **tonelada metrica** (T), que vale 1000 kilogrammas.

Fig. 11

Fig. 12

Os ourives empregam ainda um pequeno peso chamado **quilate**, para pesar diamantes, perolas e outras pedras preciosas. O quilate divide-se em 4 **grãos**, e é igual a 205,75 milligrammas.

Os corpos pesados com estas unidades podem ser representados por numeros decimaes, visto ellas serem formadas de 10 em 10, como nas medidas de capacidade e de comprimento.

Como o gramma corresponde ao centimetro cubico ou millilitro de agua, o kilogramma corresponderá ao decimetro cubico ou ao litro, e a tonelada metrica corresponderá ao metro cubico.

Assim:

$$634^{kg},567 \text{ de agua} = 634^{l},567 = 634^{dmc},567 = 0^{mc},634567.$$

As medidas de volume e de capacidade correspondem portanto ás de peso, quando o seu conteúdo fôr de agua distillada na temperatura da sua maxima densidade.

Fóra d'estas condições, para ter o peso de qualquer corpo, é necessario multiplicar o volume d'esse corpo pela sua densidade em relação á agua tomada como unidade.

196 — **Densidade, peso especifico dos corpos.** Chama-se *densidade d'um corpo* o quociente do peso d'um certo volume d'esse corpo pelo peso d'um igual volume d'agua.

Por exemplo, cinco decimetros cubicos de cobre, pesam 44 kilogrammas; sabe-se alem d'isso que 5 decimetros cubicos d'agua pesam 5 kilogrammas. A densidade do cobre é pois $\frac{44}{5} = 8,8$

Chama-se *peso especifico* d'um corpo, o peso da unidade de volume d'esse corpo.

O peso especifico é representado pelo mesmo numero que a densidade, porque dividindo, para obter a densidade, o peso d'um certo volume d'um corpo pelo peso d'um igual volume d'agua, divide-se realmente o peso d'esse corpo pelo numero d'unidades do seu volume; o que dá o peso da unidade de volume; sómente o peso especifico vem expresso em grammas, em kilogrammas, ou em toneladas, segundo a unidade de volume é o centimetro cubico, o decimetro cubico ou o metro cubico. Assim o peso especifico do cobre será, segundo os casos, $8^g,8$, $8^{kg},8$ $8^t,8$.

1.º exemplo:

Qual é o peso d'um pedaço de ferro cujo volume é $4^{dmc},5$ sendo a densidade do ferro 7,7?

Sendo a densidade do ferro 7,7 um decimetro cubico d'este metal pesa $7^{kg},7$; por consequencia, $4^{dmc},5$ pesarão $7^{kg},7 \times 4,5 = 34^{kg},65$.

2.º exemplo:

A densidade do marmore é 2,7; qual é o volume d'um pedaço de marmore que pesa $148^k,33$?

Sendo a densidade do marmore 2,7, um decimetro cubico d'esta substancia pesa $2^{kg},7$; por consequencia quantas vezes $2^{kg},7$ se contiver em $148^{kg},3$, quantos decimetros cubicos se conterão no volume; basta pois dividir 148,3 por 2,7, o que dá $54^{dmc},025$.

3.º exemplo:

Qual é a densidade do zinco, sabendo-se que $4^{cmc},6$ d'este metal pesam $33^g,220$?

Se $4^{cmc},6$ de zinco, pesam $33^g,22$

$$1^{cmc}, \text{ pesará } \frac{33^g,220}{4,6} = 7^g,2$$

O peso especifico do zinco sendo $7^g,2$, a densidade d'este metal é 7,2.

6.º — Moedas

197 — Denomina-se liga a combinação chimica de dois ou mais metaes.

No fabrico das moedas e de objectos de ourivesaria não se emprega o oiro puro ou a prata pura, mas sim ligas de cada um d'estes metaes com o cobre.

O grau de pureza de uma liga de oiro ou prata, isto é, o *titulo* ou *toque* d'essa liga, avalia-se dizendo quantos grammas ha de oiro ou prata em mil grammas de liga. Este numero tem o nome de *millesimos*. Assim, diz-se que um objecto de oiro tem 900 millesimos (0,900) de toque, quando em 1000 partes da liga de que foi feito, entraram 900 partes de oiro, e 100 de outras substancias, ou quando 900 millesimas partes do peso dos objectos são de oiro. Se a barra fosse toda de oiro ou de prata, isto é, sem liga alguma, o seu *toque* seria 1000 millesimos.

198 — A lei de 29 de julho de 1854 fixou em $916\frac{2}{3}$ millesimos o *toque* ou *titulo*, tanto das medidas de oiro como das de prata e em 2 millesimos, para mais ou para menos, a *tolerancia* do *toque*, de sorte que só deixa de ser legal o *toque* de qualquer moeda, quando o numero de millesimos é inferior a $914\frac{2}{3}$ ou superior a $918\frac{2}{3}$. A *tolerancia* no peso, segundo a mesma lei é igual a 0,002 do peso legal da moeda, quando esta é de oiro, e a 0,003 quando é de prata.

As moedas portuguezas têem por unidade monetaria o **real**, que é uma moeda simplesmente de *conta*; a unidade *principal* e real do systema monetario é a moeda de **mil réis**.

199 — As moedas de **oiro** são:

Corôa....................	que	vale	10$000	réis
Meia corôa..............	»	»	5$000	»
Quinto de corôa,........	»	»	2$000	»
Decimo de corôa........	»	»	1$000	»

São ainda consideradas legaes:

Peça.....................	que	vale	8$000	réis
Meia peça...............	»	»	4$000	»
Libra (moeda ingleza).....	»	»	4$500	»
Meia libra (moeda ingleza).	»	»	2$250	»

200 — As moedas de **prata** são:

Dez tostões.............	que	vale	1$000	»
Cinco tostões...........	»	»	500	»
Dois tostões............	»	»	200	»
Um tostão...............	»	»	200	»
Meio tostão.............	»	»	50	»

O peso d'estas é regulado á razão de $2^{gr},5$ por tostão, de sorte que a moeda de dez tostões pesa 25^{gr}, a de cinco tostões $12^{gr},5$ a de dois tostões 5^{gr} e a de meio tostão $1^{gr},25$.

A lei de 21 de julho de 1899 creou a moeda de prata de 1$000 réis e as de nickel de 100 réis e 50 réis, tendo respectivamente o peso de 4^{gr} e $2^{gr},5$.

201 — As moedas de cobre são:

Vintem......................	que vale	20	réis
Dez réis....................	»	10	»
Cinco réis..................	»	5	»

202—No archipelago da Madeira a moeda é a mesma que no continente.

Nos Açores a moeda portugueza que circula é a do continente, mas com um valor de mais a quarta parte. Assim, a moeda continental de 500 réis vale lá 625 réis.

Em Angola o dinheiro contava-se por **macutas**. A *macuta* era uma moeda de cobre de $38^{gr},25$ de peso e com o valor de 50 réis fracos ou 30 réis fortes. Ultimamente, porém, tem-se cunhado moeda de prata e cobre igual á do continente para correr pelo mesmo valor nas provincias portuguezas d'África occidental.

Em Moçambique as moedas de prata que mais circulavam até 1897, eram a **rupia indiana** e o **peso mexicano**, valendo respectivamente 380 réis e 860 réis. Esta prata foi toda mandada retirar da circulação, cunhando-se moeda igual á do continente.

Em Macau circula a moeda ingleza e a **pataca**, cujo valor official é de 640 réis, bem como as seguiutes subdivisões d'esta moeda, em prata e cobre:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Meia pataca}\\ \text{10 ávos}\\ \text{5 ávos}\end{array}\right\}\ \text{prata}$$

1 ávo — cobre

Um *ávo* corresponde a $\frac{1}{100}$ de pataca.

Tambem é admittida para trócos a moeda chineza **sapeca**, equivalente a $\frac{1}{10}$ do ávo.

A *sapeca* é de latão e furada a meio.

Circulam tambem notas multiplas da *pataca*.

203—As actuaes *moedas hespanholas* de prata, são:

Duro (5 pesetas).........	que vale	$920	réis
Duas pesetas...........	»	$368	»
Uma peseta.............	»	$184	»
50 centesimos...........	»	$092	»
20 centesimos...........	»	$037	»

Alem d'estas ha peças de oiro de 100, 50, 20, 10 e 5 pesetas, e moedas de bronze de 1, 2, 5 e 10 centesimos.

7.º — Medidas de tempo

204 — As unidades de tempo geralmente adoptadas em todos os paizes são o **seculo**, o **anno**, o **mez**, o **dia**, a **hora**, o **minuto**, e o **segundo**. Além d'estas unidades ha outras, que são o **lustro**, ou o periodo de 5 annos, de que principalmente fazem uso os poetas, e a **semana** ou periodo de 7 dias.

O seculo tem 100 annos e o anno 12 mezes. Os mezes têem alternadamente 31 e 30 dias, excepto o mez de fevereiro que tem 28 dias nos annos communs e 29 nos bissextos, e os mezes de julho e agosto que têem ambos 31 dias.

O anno commum tem 365 e o bissexto 366 dias. De 4 em 4 annos ha um anno bissexto, e como o primeiro anno da era vulgar se seguiu a um anno bissexto, é evidente que dividindo por 4 o numero de ordem de um anno qualquer, se obtem um resto 0, 1, 2 ou 3, que indica se o referido anno é bissexto, ou se é o primeiro, segundo ou terceiro depois de algum anno bissexto.

Ha comtudo annos que não são bissextos, apesar de serem divisiveis por 4 os seus numeros de ordem. São os annos que, sendo divisiveis por 100, não admittem comtudo o divisor 400.

O anno de 1600 foi bissexto, porque o seu numero de ordem é divisivel por 400, os annos 1700, 1800 e 1900 não são bissextos, porque nenhum d'estes tres numeros é divisivel por 400 e todos elles admittem o divisor 100

O dia tem 24 horas, ou antes dois periodos de 12 horas, um dos quaes é o dia propriamente dito e o outro a noite.

A hora tem 60 minutos e o minuto 60 segundos.

8.º — Medidas de circumferencia

205 — Quando se estabeleceu o systema metrico, pretendeu-se estendel-o á medida da circumferencia, dividindo esta em 4 partes iguaes, ou 4 quadrantes; o quadrante em 100 partes chamadas **grados**; o grado em 100 partes chamadas **minutos centesimaes**, e o minuto em 100 **segundos centesimaes**. Esta divisão, porém, cahiu em desuso, e a divisão da circumferencia geralmente seguida é a divisão **sexagesimal**, que consiste no seguinte:

Divide-se a circumferencia em 360 partes iguaes, a que se chama **graus**; o grau em 60 minutos e o minuto em 60 segundos.

Exercicios

1.º Resolver mentalmente as seguintes questões:

a) Um decametro quantos decimetros tem?
b) O are quantos decimetros quadrados tem?
c) O decistere quantos decimetros cubicos tem?
d) O decalitro quantos centimetros cubicos tem?
e) Quanto pesa a agua pura contida em dois decilitros?

2.º Escrever 7^{km}, 5^{m} e 2^{cm}, tomando o metro por unidade.

3.º Escrever 27^{km} e 43^{m}, tomando o decametro por unidade.

4.º Escrever 2^{Mm}, 7^{Dm} e 3^{m}, tomando o hectometro por unidade.

5.º Escrever 387^{Dm} e 5^{cm}, tomando o decimetro por unidade.

6.º Transformar $364^{m},25$ em decimetros.
» $6^{km},34$ em metros.
» $8^{Km},3987$ em decimetros.

7.º Effectuar a somma dos seguintes comprimentos:

4^{Dm} 3^{m} e 8^{cm}; 3^{Hm} 7^{m} e 2^{dm}; 9^{Km} 5^{Hm} 3^{m} 7^{cm}; 8^{Hm} 7^{Dm} 6^{m} e 5^{mm}

8.º Subtrahir 12^{Dm} e 48^{cm} de 7^{Hm}, 2^{Dm}, 5^{m} e 8^{dm}.

9.º Qual é o valor de uma propriedade que tem 12 hectares e 46 ares, sendo 85 réis o preço do metro quadrado?

10.º Escrever 3^{Hmq}, 5^{mq}, e 26^{dmq}, tomando o metro quadrado por unidade.

11.º Escrever 4^{kmq} e 3^{mq}, tomando o decametro quadrado por unidade.

12.º Lêr os numeros:

$34^{Dmq},263827$; $4^{mq},36829$; $5^{Hmq},263$; $4359^{Dmq},2683$; $4^{Hmq},43$.

13.º Transformar cada um dos numeros precedentes em decimetros quadrados, em centimetros quadrados, em decametros quadrados, em kilometros quadrados, em myriametros quadrados.

14.º Escrever em ares 4^{Ha}, 3^{a} e 56^{ca}.

15.º Escrever em hectares 8^{Ha}, 4^{a} e 2^{ca}.

16.º Escrever em centiares 17^{Ha}, 38^{a}, 2^{ca}.

17.º Transformar $426^{a},3$ em hectares e em centiares.

18.º O trigo produzido por uma propriedade que tem 12 hectares foi recolhido n'uma grande caixa, tendo $14^{m},35$ de comprimento, $4^{m},7$ de largo e $2^{m},42$ de altura. Quantos litros produziu cada are?

19.º Compraram-se 72 hectolitros de vinho a 2$800 réis cada 18 litros. Quanto custaram?

20.º Quantos hectolitros de batatas cabem n'uma tulha de 4 metros de comprimento, $2^{m},3$ de largo e $1^{m},3$ de altura?

21.º Uma cisterna de uma praça tem $49^{mc},46$ d'agua. Quantos litros devem dar-se a cada homem por dia, para que chegue para 19 dias, sendo a guarnição de 320 homens?

22.º Qual é o comprimento de uma linha recta representada no desenho, na escala de 0,25, por um traço de 2^{cm} e 5^{mm}?

23.º Na escala de $\frac{1}{1250}$, qual é a extensão linear que representa sobre o papel um comprimento de 100 metros no terreno?

24.º Uma torneira deita por minuto 12 litros d'agua. Em que tempo encherá um tanque que leva $4^{mc},265$?

25.º Um tanque tem de base $5^{mq},42$ e é alimentado por uma bica que deita 20 litros por minuto. Qual é a altura da agua no tanque ao fim de um quarto de hora?

26.º Escrever 4^{mc} 26^{dmc} e 349^{mmc}, tomando o metro cubico por unidade.

27.º Escrever 2^{dmc} e 56^{cmc}, tomando o decimetro cubico por unidade.

28.º Ler os numeros $4^{mc},38642$; $52^{dmc},83$; $849^{cmc},3$.

29.º Transformar cada um dos numeros precedentes em metros cubicos.

30.º Escrever em litros 8^{Hl} 2^{Dl} 5^{l} e 3^{dl}.

31.º Uma carroça está carregada com 4 vigas de madeira, cujos volumes são respectivamente 1^{mc} e 26^{dmc}, 2^{mc} 34^{dmc} e 165^{cmc}, 249^{dmc} e 38^{cm}, 728^{dmc} e 64^{cmc}. Qual é a carga, sabendo-se que um metro cubico d'essas vigas pesa 834 kilogrammas?

32.º Qual é o peso de uma tabua rectangular que tem $4^{m},50$ de comprimento, 3^{dm} de largo e 7^{cm} de espessura, pesando o decimetro cubico $0,^{kg}845$?

33.º Pergunta-se qual o peso do ar contido n'um compartimento que tem 3^{m} de comprimento, $2^{m},30$ de largura e $3^{m},50$ de altura; sabendo-se que o decimetro cubico de ar pesa $1^{g},3$?

34.º Quanto pesará 4^{st} e 3^{dst} de madeira, á razão de $0^{k},780$ por decimetro cubico?

35.º Que porção de madeira se obtem enchendo o meio decastere com paus de $1^{m},30$ de comprimento?

36.º Até que altura é necessario collocar paus de $1^{m},25$ no duplo stere, para ter um stere e meio de madeira?

37.º Que altura devem attingir no stere paus de $1^{m},14$, para perfazer 7 decisteres?

38.º Exprimir em litros 8^{H} 2^{Dl} 5^{l} e 3^{dl}.

39.º Exprimir em decilitros 8^{Dl} 5^{l} 3^{dl} 7^{cl}.

40.º Transformar $8^{Hl},248$ em litros.
» $7^{Dl},349$ em centilitros.
» $28^{l},6$ em hectolitros.

41.º Qual é em hectolitros a capacidade de um tanque que mede $3^{mc},54$?

42.º Quanto se deve pagar por 4^{Hl} e 3^{l} de trigo custando o duplo decalitro 825 réis?

43.º A' razão de 5$200 réis o hectolitro de trigo, quanto se deverá pagar por 9^{Dl} e 5^{l}?

44.º Quantos copos de $12^{cl},5$ haverá n'uma garrafa de $2^{l},3$?

45.º N'um barril de 228 litros, quantas garrafas haverá de 75 ^{cl}?

46.º Converter em metros cubicos e fracções decimaes do metro cubico os seguintes volumes: 187634^{l},3; 324 hectolitros, 5 decalitros e 8 decilitros.

47.º Converter em litros os seguintes volumes: 3^{mc},87; 3884^{mc},25; 0^{mc},784; 1^{mc},86357.

48.º Exprimir em grammas 8^{Hg} 7^{Dg} 7^{g} e 3^{dg}
» em decagrammas 4^{Kg} 2^{Dg} 7^{cg}

49.º Reduzir a decigrammas os seguintes pesos: 34^{gr},8; 0^{Hg},726; 9784^{Kg},286.

50.º Reduzir ao kilogramma os pesos: 96784^{gr},28; 0^{mg},37; 814^{Dg},24.

51.º Mergulhe-se um corpo n'um vaso cheio d'agua; seja 5^{g},2 o peso da agua que se escôa do vaso; qual será o volume do corpo mergulhado?

52.º Um vaso vazio pesa 243^{g}; cheio d'agua pesa 1549^{g}. Qual é a capacidade do vaso?

53.º A agua congelando augmenta de volume, de sorte que um decimetro cubico de gêlo não pesa mais que 918 grammas; posto isto, qual será o volume d'um hectolitro d'agua, depois de congelada?

54.º A densidade da faia secca é de 0,8; sabe-se tambem que os paus de faia empilhados no stere não occupam senão 0,60 do metro cubico; qual é, pois, o peso de um stere de faia?

55.º Qual é o peso d'uma regua de ferro que tem 25 centimetros de comprimento e cuja secção quadrada tem 1 centimetro e meio de lado? A densidade do ferro é 7,7.

56.º Qual é o volume d'um pedaço de pedra que pesa 234 kilogrammas, sendo a densidade da pedra 2,5?

57.º Um corpo pesa 450 grammas mergulhado na agua e desloca 90 grammas de liquido. Qual é a densidade d'esse corpo?

58.º A agua pesa 770 vezes mais que o ar tomado á pressão ordinaria e á temperatura zero. Qual é n'estas condições o peso d'um metro cubico d'ar?

59.º Qual é o peso d'uma folha de chumbo que tem de superficie 1 metro quadrado e cuja espessura é de 6 millimetros, sendo a densidade do chumbo 11,35?

60.º Qual é o peso da columna de mercurio contida n'um tubo barometrico que tem 1^{cmq} e meio de secção, sabendo-se que a altura d'esta columna é de $76^{cm},5$ e que a densidade do mercurio é 13,596?

61.º Qual é o peso do oiro contido n'uma barra, que pesa $0^{kg},274$ e cujo titulo é 0,915.

62.º A corôa de 10$000 réis pesa $17^{gr},735$, e tem de titulo $916\frac{2}{3}$ por mil. Qual é o peso de oiro puro que contem?

63.º Que porção de oiro ha em 346^{gr} de liga com o toque de 0,834?

64.º Quanto pesam 342$550 réis em moedas de prata?

65.º Para pesar um corpo posto n'um dos pratos de uma balança, pozeram-se no outro prato 35 moedas de prata de 500 réis e 9 de 200 réis. Qual é o peso do corpo?

66.º O gaz de illuminação pesa 0,97 do peso de igual volume de ar atmospherico, e este pesa 773 vezes menos que a agua. N'estas condições qual é o peso de $95^{mc},814$ de gaz de illuminação?

XIV

Numeros complexos

206 — Os numeros concretos podem ser *complexos* ou *incomplexos*.

Numero complexo *é o que consta de partes referidas a unidades de differente grandeza, mas da mesma especie e tendo entre si uma relação conhecida*. Assim é complexo o numero 6 dias, 14 horas e 24 minutos, que abreviadamente se escreve $6^{d}\ 14^{h}\ 24'$.

A' menor das unidades em que vem expresso um numero complexo chama-se *unidade da infima especie*. No exemplo precedente a unidade da infima especie é o *minuto*.

Numero incomplexo *é o que se refere a uma só especie de unidade*, como, por exemplo, 25 varas.

O calculo dos numeros complexos, indispensavel no antigo systema de medidas, torna-se ainda hoje necessario, porque as medidas da circumferencia e as do tempo não seguem uma divisão decimal.

1.º — Antigo systema de medidas

207 — **Medidas de comprimento ou lineares:**

Toeza, 6 pés.	*Braça*, 2 varas.
Pé, 12 pollegadas.	*Vara*, 5 palmos.
Pollegada, 12 linhas.	*Palmo*, 8 pollegadas.
Linha, 12 pontos.	*Covado*, 3 palmos.

Itinerarias:

Legua maritima de 20 ao grau, 3 milhas.	*Legua terrestre de 18 ao grau*, 2806 braças.
Milha, 842 braças.	

208 — **Medidas de superficie:** Eram as lineares quadradas. Assim:

Toeza quadrada, 36 pés quadrados.	*Pé quadrado*, 144 pollegadas quadradas.

Etc.

209 — **Medidas de volume:** Eram as lineares levadas ao cubo. Assim:

Toeza cubica, 216 pés cubicos.	*Pé cubico*, 1728 pollegadas cubicas.

Etc.

210 — **Medidas de capacidade:**

Para seccos:

Moio, 15 fangas.	*Quarta*, 2 oitavos.
Fanga, 4 alqueires,	*Oitavo*, 2 maquias.
Alqueire, 4 quartas.	*Maquia*, 2 selamins.

Para liquidos:

Tonel, 2 pipas.	*Pote*, 6 canadas.
Pipa, 25 almudes.	*Canada*, 4 quartilhos.
Almude, 2 potes.	*Quartilho*, 4 quarteirões.

211 — **Medidas de peso:**

Tonelada, 13 1/2 quintaes.
Quintal, 4 arrobas.
Arroba, 32 arrateis.
Arratel, 16 onças.

212 — **Medidas de tempo:** (que são ainda hoje adoptadas):

Seculo, 20 lustros.
Lustro, 5 annos.
Anno, 12 mezes.
Mez, 28, 29, 30 ou 31 dias.
Dia, 24 horas.
Hora, 60 minutos.
Minuto, 60 segundos.

213 — **Medidas de circumferencia** (que são ainda actualmente adoptadas):

Circumferencia, 360 graus, que se escreve 360°.
Grau, 60 minutos, que se escreve $60'$.
Minuto, 60 segundos, que se escreve $60''$.

2.º — Reducção de um numero complexo a incomplexo e reciprocamente

214 — **Para reduzir um numero complexo a incomplexo da infima especie,** *multiplicam-se as unidades da especie maior pela sua rasão com as da especie immediata e junta-se ao producto as d'essa dita especie immediata; procede-se da mesma fórma com a somma relativamente á especie seguinte, e assim por diante até chegar á infima especie.*

1.º exemplo: Reduzir a incomplexo da infima especie o numero $12^\circ\ 14'\ 26''$

$$\begin{array}{r} 12^\circ \\ 60 \\ \hline 720 \\ 14 \\ \hline 734' \\ 60 \\ \hline 44040 \\ 26 \\ \hline 44066'' \end{array}$$

Multiplicando 12° por 60, numero de minutos que ha em cada grau, obtemos os minutos de 12°, e addicionando ao producto $14'$ teremos a totalidade dos minutos contidos no numero dado, 734'. Multiplicando ainda este numero por 60, numero de segundos contidos em cada minuto, obtemos os segundos que ha em 734', e addicionando ao producto 26'' obteremos a totalidade dos segundos contidos no numero dado, 44066'', como se pretendia.

2.º exemplo: Reduzir á infima especie o numero 13^d 14^h $22''$

$$\begin{array}{r} 13^d \\ 24 \\ \hline 52 \\ 26 \\ \hline 312 \\ 14 \\ \hline 326^h \\ 3600 \\ \hline 1956 \\ 978 \\ \hline 1173600 \\ 22 \\ \hline 1173622'' \end{array}$$

Multiplicâmos 326^h por 3600, que é o numero de segundos contidos em cada hora (60×60). Se no numero proposto houvesse minutos multiplicariamos 326^h por 60, que é o numero de minutos contidos em cada hora e o producto sommado com os minutos que o numero tivesse seria novamente multiplicado por 60 para os reduzir a segundos.

215 — *Para reduzir um numero complexo a incomplexo referido a qualquer especie de unidade, reduzimol-o primeiro á infima especie, e depois dividimos o numero obtido pela relação entre a unidade pedida e a infima.*

Exemplo: Reduzir 13^d 4^h $18'$ a horas

$$\begin{array}{r} 13^d \\ 24 \\ \hline 52 \\ 26 \\ \hline 312 \end{array}$$

$$
\begin{array}{r}
312 \\
4 \\
\hline
316^{h} \\
60 \\
\hline
18960 \\
18 \\
\hline
18978'
\end{array}
$$

Logo $13^{d}\ 4^{h}\ 18' = \dfrac{18978'}{60}$

Dividimos 18978' por 60, relação entre a especie pedida (hora) e a infima especie (minuto), indicando a divisão sob a fórma de quebrado (84).

216 — *Para reduzir a complexo um numero incomplexo, divide-se este pela relação entre a unidade immediatamente superior e aquella a que está referido; o quociente representa unidades da dita especie superior e o resto as unidades da especie a que está referido o incomplexo, que deverão figurar no complexo. Do quociente extrahem-se analogamente as unidades da especie immediatamente superior, e assim por diante até chegar a um quociente que já não seja possivel decompôr. Esse ultimo quociente e os restos das divisões constituirão o numero complexo.*

1.º exemplo: Reduzir a complexo o numero 44066º (de circumferencia)

$$
\begin{array}{l|l}
4406(6'' & 6(0 \\
\cline{2-2}
\;\;20 & 73(4' \;\big|\; 6(0 \\
\;\;\;26 & 13 \qquad\;\; 12^{\circ} \\
\;\;\;\;26'' & 14'
\end{array}
$$

Será pois: $44066'' = 12^{\circ}\ 14'\ 26''$.

2.º exemplo: Reduzir a complexo o numero 1173622'' (de tempo)

$$
\begin{array}{l|l}
117362(2'' & 6(0 \\
\cline{2-2}
\;57 & 1956(0' \;\big|\; 6(0 \\
\;\;33 & \;\;15 \qquad\; 326^{h} \;\big|\; 24 \\
\;\;\;36 & \;\;36 \qquad\;\; 86 \quad 13^{d} \\
\;\;\;\;22'' & \;\;\;0 \qquad\;\;\, 14^{h}
\end{array}
$$

Será pois: $1173622'' = 13^{d}\ 14^{h}\ 22''$.

3.º — Addição

217 — *Para addicionar numeros complexos (22) escrevem-se as parcellas umas por baixo das outras, de modo que as unidades da mesma especie fiquem em correspondencia vertical, e depois somma-se cada columna a partir da direita, extrahindo de cada somma parcial as unidades da especie superior n'ella contidas para as addicionar á columna seguinte.*

Exemplo: Addicionar os numeros 13° 12′ 46″, 5° 42″, 12° 36′ e 19′ 50″

13°	12′	46″
5		42
12	36	
	19	50
31°	9′	18″

Sommando os segundos obtemos 138″, e como 120″ equivalem a 2′, escrevemos 18″ e reservâmos 2′ para addicionar com a segunda columna. D'este modo a somma da segunda columna será 69′, e, como 60′ equivalem a 1°, escrevemos 9′ e addicionâmos 1° com a columna da esquerda, obtendo para resultado 31°

A somma será pois 31° 9′ 18″ = 30° 69′ 138″.

4.º — Subtracção

218 — *Para subtrahir numeros complexos (27) escreve-se o diminuidor por baixo do diminuendo, de modo que as unidades da mesma especie fiquem em correspondencia vertical, e depois effectuam-se a diversas subtracções parciaes a começar pela direita. Se em alguma d'estas o diminuendo fôr inferior ao diminuidor, addicionam-se ao diminuendo as unidades equivalentes a uma unidade da especie immediatamente superior, e neutralisa-se este erro subtrahindo na subtracção parcial seguinte uma unidade ao diminuendo.*

1.º exemplo: Effectuar a subtracção 12° 13′ 14″ — 39′ 15″

12°	13′	14″
	39	15
11°	33′	59″

Na primeira subtracção parcial como é $14'' < 15''$ addicionâmos ao diminuendo $60''$, equivalentes a $1'$, e portanto o resultado será $74''-15''=59''$. Na segunda como é $12' < 39'$, addicionâmos $60'$, equivalente a 1°, ao diminuendo, e o resultado será $72'-39'=33'$.

O numero de graus ficou reduzido a 11 por se terem tirado os $60'$ precisos para se poder effectuar a segunda subtracção parcial.

2.º exemplo: Effectuar a subtraccão $180^{\circ}-47^{\circ}\ 18'\ 41''$

Como o diminuendo póde desdobrar-se em $179^{\circ}\ 59'\ 60''$, a differença pedida será $132^{\circ}\ 41'\ 19''$.

Esta operação é muito empregada na geometria para calcular o *supplemento* de um angulo.

5.º — Multiplicação

219 — *Para multiplicar um complexo por um inteiro, multiplicam-se as unidades de cada especie do multiplicando, a começar pela infima, pelo multiplicador, extrahindo de cada um d'estes productos parciaes as unidades da especie immediata* (216), *para serem addicionadas ao producto parcial seguinte.*

Exemplo: Multiplicar $3^d\ 5^h\ 14'$ por 6

$$\begin{array}{rrlrl}
 & 3^d\ 5^h & & 14' & \\
 & & & 6 & \\
\hline
19^d & 31^h & \underline{\mid 24} & 84' & \underline{\mid 60} \\
 & 7 & \ \ 1^d & 24 & \ \ 1^h
\end{array}$$

O producto é: $19^d\ 7^h\ 24'$, que evidentemente equivale a $18^d\ 30^h\ 84'$.

220 — *Para multiplicar dois numeros complexos reduz-se o multiplicando á infima especie e o multiplicador a incomplexo referido á sua unidade principal; multiplicam-se os numeros resultantes e reduz-se o producto a complexo.*

A natureza da questão (35) é que mostra qual dos dois numeros deve ser tomado por multiplicando, e qual é a unidade principal do multiplicador. Seja, por exemplo, o seguinte problema: *Qual é o custo de 3 quintaes, 2 arrobas e 18 arrateis de um genero, ao preço de 2 libras* *, *10 schillings e 8 pences a arroba?*

---

* Cada *libra esterlina* (moeda ingleza) tem 20 *schillings*, e cada *schilling* 12 *pences*.

Como o producto ha de exprimir moeda o multiplicando é 2 £ 10 ^{sch} 8 ^{p} e o multiplicador é 3 Q 2 @ 18 ℔, e, como o multiplicando é o custo de cada arroba, é esta a unidade principal do multiplicador. Teremos pois de reduzir 2 £ 10 ^{sch} 8 ^{p} e 3 Q 2 @ 18 ℔ a arrobas e multiplicar os numeros resultantes.

$$\begin{array}{r} 2\ £ \\ 20 \\ \hline 40 \\ 10 \\ \hline 50 \text{ sch.} \\ 12 \\ \hline 600 \\ 8 \\ \hline 608 \text{ p.} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 3\ Q \\ 4 \\ \hline 12 \\ 2 \\ \hline 14\ @ \\ 32 \\ \hline 28 \\ 42 \\ \hline 448 \\ 18 \\ \hline 466\ ℔ \end{array}$$

O producto será pois 608 ^{p} $\times \frac{466}{32}$, visto que para referir 466 ℔ a arrobas temos de dividir por 32 (215). Vem expresso em pences e portanto será preciso reduzil-o a complexo, como se segue.

$$\begin{array}{rrrr} 608 \text{ p.} & & & \\ 466 & & & \\ \hline 3648 & & & \\ 3648 & & & \\ 2432 & & & \\ \hline 283328 \text{ p.} & \multicolumn{1}{|l}{32} & & \\ \cline{2-4} 273 & 8854 \text{ p.} & \multicolumn{1}{|l}{12} & \\ \cline{3-4} 172 & 45 & 73(7 \text{ sch.} & \multicolumn{1}{|l}{2(0} \\ \cline{4-4} 128 & 94 & 13 & 36\ £ \\ 0 & 10 \text{ p.} & 17 \text{ sch.} & \end{array}$$

O custo pedido será 36 £ 17 ^{sch} 10 ^{p}.

6.° — Divisão

221 — *Para dividir um numero complexo por um inteiro, dividem-se as unidades de especie maior pelo divisor, e o resto reduz-se á especie immediata, addicionando-lhes as que d'essa especie haja no numero; divide-se a somma pelo inteiro, e assim por diante até á ultima especie.*

Exemplo: Dividir $13^{\circ}\ 17'\ 15''$ por 3

$13^{\circ}\ 17'\ 15''$ | 3
1 — $4^{\circ}\ 25'\ 45''$
60
60
17
$77'$
17
2
60
120
15
$135''$
15
0

13° divididos por 3 dão o quociente 3° e o resto 0.
$77'$ divididos por 3 dão o quociente $25'$ e o resto $2'$.
$135''$ divididos por 3 dão o quociente $45''$ e o resto 0.

O quociente é, pois, 4°,, $25'$,, $45''$.

222 — *Quando os dois numeros são ambos complexos, póde o divisor* (47) *designar o numero de partes iguaes em que se tem de dividir o dividendo ou uma d'essas partes.*

No primeiro caso reduz-se o dividendo á infima especie e o divisor á unidade principal, dividem-se um pelo outro e reduz-se o quociente a complexo. No segundo caso reduzem-se os dois numeros a incomplexos referidos ambos á menor unidade e dividem-se como se fossem abstractos.

1.° exemplo: *Comprou-se a 1 Q 3 @ 20 ℔ de certo genero por 45 £ 12 ^sch^ 5 ^p^. Qual foi o preço de cada arroba?*

O dividendo é 45 £ 12 sch 5 p, porque o quociente deve tambem exprimir moeda, e, para determinar este, deveremos dividir o dividendo em tantas partes iguaes quantas forem as arrobas contidas em 1 Q 3 @ 20 ℔. Procederemos, pois, como fica dito na primeira parte da regra, reduzindo primeiro o dividendo a pences e o divisor a arrobas.

45 £ — 20 — 900 — 12 — 912 sch. — 12 — 1824 — 912 — 10944 — 5 — 10949 p.

1 Q. — 4 — 4 — 3 — 7 @ — 32 — 224 — 20 — 244 ℔

O quociente será $10949^{p} : \frac{244}{32}$

Effectuando e reduzindo o numero resultante a complexo, teremos:

10949 p.
32
21898
32847
350368 p. | 244
1063 — 1435 p. | 12
876 — 23 — 119 sch. | 20
1448 — 115 — 19 — 5 £
228 — 7

O custo pedido seria $5\,£\ 19^{sch}\ 7^{p}\ \frac{228}{244}$

2.° exemplo: *Quantas caixas são precisas para transportar 13 Q 1 @ 19 ℔ de figos, levando cada caixa 1 @ 17 ℔?*

Tem de se dividir 13 Q 1 @ 19 ℔ em partes iguaes a 1 @ 17 ℔. O quociente (abstracto) designa o numero d'essas partes. Seguindo a segunda parte da regra teremos:

13 Q — 4 — 52 — 1 — 53 @ — 32 — 106 — 159 — 1696

1696 — 19 — 1715 ℔ | 49 ℔ — 245 — 35 — 0

1 @ — 32 — 32 — 17 — 49 ℔

Seriam pois precisas 35 caixas.

Exercicios

1.º Effectuar mentalmente as seguintes questões:

a) Reduzir a minutos $2^h,, 10'$; $4^h,, 15'$.
b) Reduzir a complexo $137'$.

2.º Reduzir á infima especie os seguintes numeros:

$(13^d,, 25^h,, 8',, 14'')$; $(25^{£},, 5^{sch},, 14^{p})$; $(18^{\circ},, 57',, 14'')$;

$(5^{@},, 7^{\text{ll}},, 9^{\text{onç.}})$; $(6^{\text{p.}},, 17^{\text{alm.}},, 7^{\text{can.}})$.

3.º Um relogio marca $3',, 18''$ da tarde quando são $11^h,, 56',, 24''$ da manhã. Quanto está adiantado?

4.º Um relogio adianta-se por dia $3',, 18''$. Quanto se adiantará em 26 dias?

5.º Um arco de $14^{\circ},, 46'$ tem de comprimento 122^m. Qual é o comprimento do arco de $1'$?

6.º Um arco de 1° tem 5^m de comprimento. Qual será o comprimento de um arco de $22^{\circ},, 16'$?

7.º Compraram-se 146 espingardas por 529 £,, $2^{sch},, 8^{p}$. Quanto custou cada uma?

8.º Andando uma locomotiva 48 kilometros por hora, quantos kilometros anda em $8^h,, 27',, 46''$?

9.º Valendo a somma dos tres angulos d'um triangulo 180°, determinar o valor do terceiro angulo, sabendo-se que os dois primeiros têem respectivamente $47^{\circ},, 35',, 46''$ e $36^{\circ},, 43',, 44''$.

10.º Converter em fracção decimal do grau o arco de 37° e $30''$.

11.º Sendo 2 £,, $8^{sch},, 7^{p}$ o custo de $1^{@},, 3^{\text{ll}}$ de certa mercadoria, qual será o custo de $18^{@},, 20^{\text{ll}}$?

12.º Gastando um movel $8^h,, 25',, 52''$ em percorrer uma circumferencia, que tempo precisará para descrever um arco de $26^{\circ},, 18',, 43'',60$ da mesma circumferencia?

XV

Reducção de medidas

223 — Para reduzir medidas antigas a modernas e reciprocamente, é preciso saber a correspondencia das medidas do antigo systema no systema decimal. Taes são as seguintes:

Tabua das antigas medidas de Portugal comparadas com as actuaes

Medidas lineares	*Legua de 20 ao grau*	$5^{Km},5555$
	Legua legal de 22,22 ao grau	5^{Km}
	Legua de 18 ao grau	$6^{Km},173$
	Braça	$2^{m},2$
	Palmo	$0^{m},22$
	Pollegada	$0^{m},0275$
	Linha	$0^{m},0023$
	Passo geometrico	$1^{m},65$
	Toeza	$1^{m},98$
	Vara	$1^{m},1$
	Pé	$0^{m},33$
	Covado	$0^{m},681$
Medidas de superficie	*Toeza quadrada*	$3^{mq},9204$
	Braça quadrada	$4^{mq},84$
	Vara quadrada	$1^{mq}.21$
	Palmo quadrado	$0^{mq},0484$
	Pé quadrado	$0^{mq},1089$
	Pollegada quadrada	$0^{mq},00075625$
Medidas de volume	*Toeza cubica*	$7^{mc},762392$
	Pé cubico	$0^{mc},035937$
	Palmo cubico	$0^{mc},010648$
	Pollegada cubica	$20^{cmc},796875$
Medidas de capacidade para seccos	*Moio*	$8^{Hl},28$
	Sacco	$82^{l},8$
	Fanga	$55^{l},2$
	Alqueire	$13^{l},8$
	Quarta	$3^{l}.45$
	Otiava	$1^{l},73$
	Maquia	$0^{l},86$
	Selamim	$0^{l},43$

Medidas de capacidade para liquidos		
	Tonel	840^l
	Pipa	420^l
	Almude	$16^l,8$
	Pote	$8^l,4$
	Canada	$1^l,4$
	Quartilho	$0^l,35$

Medidas de peso		
	Tonelada	$793^{kg},152$
	Quintal	$58^{kg},752$
	Arroba	$14^{kg},688$
	Arratel	459^{g}
	Libra de pharmacia	$344^{g},25$
	Onça	$28^{g},6875$
	Oitava	$3^{g},586$
	Escropulo	$1^{g},195$
	Grão	$0^{g},05$

Divisão da circumferencia		
	90°	100 grados
	$\frac{10}{9}$ de 1°	1 grado

224 — *Para reduzir uma medida do systema antigo para o moderno, reduz-se aquella á infima especie, e multiplica-se o numero resultante pelo valor d'essa infima especie no systema decimal.*

Exemplo: Reduzir a metros $3^V,\ 4^P,\ 6^p$.

$$
\begin{array}{r}
3^{V} \\
5 \\
\hline
15 \\
4 \\
\hline
19^{P} \\
8 \\
\hline
152 \\
6 \\
\hline
158^{p} \\
0^{m},0275 \\
\hline
790 \\
1106 \\
316 \\
\hline
4^{m},3450
\end{array}
$$

225 — *Para reduzir a qualquer unidade do antigo systema uma medida expressa no systema decimal, divide-se esta pela correspondencia da unidade do antigo systema no systema decimal.*

Exemplo: Reduzir a pollegadas $4^m,345$.

$$\begin{array}{r|llll}
4^m,3450 & 0,0275 & & & \\ \cline{2-5}
1595 & 158^p & \multicolumn{1}{|l}{8} & & \\ \cline{3-5}
2200 & 78 & 19^p & \multicolumn{1}{|l}{5} & \\ \cline{4-5}
0 & 6 & 4 & 3^v &
\end{array}$$

Será $4^m,345 = 158^p = 3^v\ 4^p\ 6^p$.

226 — Não tendo prevalecido contra a antiga, a divisão centesimal da circumferencia; mas, considerando-se em alguns livros, e achando-se em instrumentos mathematicos a circumferencia dividida segundo este novo systema, convém saber comparar os dois systemas e reduzir a cada um d'elles os arcos dados no outro.

227 — *Para converter um numero dado de graus, minutos e segundos do systema sexagesimal em graus, minutos e segundos centesimaes, basta multiplicar o primeiro por* $\frac{10}{9}$, *pois o producto será a expressão centesimal equivalente; e para converter um numero dado de graus, minutos e segundos centesimaes em graus, minutos e segundos sexagesimaes, basta multiplicar o primeiro por* $\frac{9}{10}$.

1.º exemplo: *Converter em graus centesimaes e suas subdivisões, um arco de* 43°,, $25'$,, $21''$.

Como $\frac{10}{9}$ é igual a $\frac{9+1}{9} = \frac{9}{9} + \frac{1}{9}$, segue-se que multiplicar o numero dado por $\frac{10}{9}$ é o mesmo que addicionar-lhe a sua *nona parte;* para isso reduzam-se os minutos e os segundos a fracção decimal do grau, reduzindo este numero complexo á infima especie e dividindo-o por 3600, o que dará $43^{\circ},4225$; cuja nona parte é $4^{\circ},824722$; e por consequencia, 43°,, $25'$,, $21''$ será equivalente a $48^{gr},247222$ ou a 48^{gr},, $24'$,, $72'',22$.

Typo do calculo

$$\begin{array}{r|l}
25' \quad 21'' & \\
60 & \\
\hline
1500 & \\
21 & \\
\hline
15210 & 3600 \\
\cline{2-2}
8100 & 0{,}4225 \\
9000 & \\
18000 & \\
0 &
\end{array}
\qquad 43^{\circ},,\ 25',,\ 21'' = 43^{\circ},4225$$

$$\begin{array}{lr|l}
 & 43{,}4225 & 9\ \textit{Divisor} \\
\cline{3-3}
\textit{Nona parte} & 4{,}824722 & 2\ \textit{resto} \\
\hline
 & 48{,}247222 & = 48^{gr}\ 24'\ 72'',22;
\end{array}$$

numero que se pedia.

2.º exemplo: *Converter $48^{gr}\ 24'\ 72'',22$ em graus sexagesimaes e suas svbdivisões.*

O processo é inverso do precedente. Eis o

Typo do calculo

$$\begin{array}{rl}
48^{gr}\ 24'\ 72'',22 & \\
48^{gr},247222 & \\
4,\ 8247222 & \text{Decima parte.} \\
\hline
43^{\circ},4224998 & \text{Producto por } \frac{9}{10} \\
60 & \\
\hline
25',349988 & \text{Minutos de } 0{,}4224998 \text{ de } 1^{\circ}. \\
60 & \\
\hline
20'',99928 & \text{Segundos de } 0{,}349988 \text{ de } 1'. \\
43^{\circ}\ 25'\ 21'' & \text{Numero equivalente de graus sexagesimaes, minutos} \\
 & \quad \text{e segundos.}
\end{array}$$

Exercicios

1.º Converter em metros 8^{T}, 5^{P}, 4^{p}.
» » 19^{T}, 3^{P}, 4^{p}, 8^{l}.
» » 26^{T}, 0^{P}, 3^{p}, 11^{l}.

2.º Avaliar em toezas, pés e pollegadas $43^{m},867$; $2^{m},62$; $5^{m},431$; $0^{m},65$.

3.º Avaliar em metros quadrados 26^{Tq}, 24^{Pq}, 17^{pq}.

4.º Avaliar em metros cubicos 27^{Tc}, 141^{Pc}, 1530^{pc}.

5.º Transformar $36^{mc},259$ em toezas cubicas.

6.º Avaliar em graus, minutos e segundos sexagesimaes os $\frac{5}{7}$ de um quadrante e converter em graus minutos, e segundos centesimaes o numero resultante.

7.º Avaliar em hectolitros 5 almudes, 1 pipa, 18 potes e 26 canadas.

8.º Avaliar em grammas $18^{@}$ e 25^{u}.

XVI

Regras de tres

1.º — Grandezas proporcionaes

228 — *Duas grandezas dizem-se* proporcionaes, *quando com dois valores quaesquer da primeira e os dois correspondentes da segunda se póde formar a proporção.*

Pódem ser *directamente proporcionaes* e *inversamente proporcionaes.*

229 — Conhece-se que duas grandezaz são directamente proporcionaes, *quando tornando-se uma d'ellas um qualquer numero de vezes maior ou menor, a outra se torna tambem o mesmo numero de vezes maior ou menor.* Assim:

O salario é proporcional ao trabalho, porque ao *dobro* ou ao *triplo* do trabalho deve corresponder o *dobro* ou o *triplo* do salario.

O espaço percorrido por uma locomotiva é porporcional á velocidade, porque, se a velocidade se tornar *dez ou vinte vezes maior*, o espaço será tambem *dez ou vinte vezes maior.*

Do mesmo modo são directamente proporcionaes: o espaço percorrido por uma locomotiva e o tempo gasto em percorrel-o; o tempo gasto com a construcção de uma obra e a grandeza d'essa obra; o preço do combustivel consumido por uma machina a vapor que funcciona d'uma maneira uniforme, e a duração da sua marcha; etc.

Deprehende-se da definição, que nas grandezas directamente proporcionaes se póde formar proporção, dispondo os dois valores da mesma grandeza na mesma ordem que os da primeira grandeza.

230. — Conhece-se que duas grandezas são inversamente proporcionaes *quando, tornando-so uma d'ellas um qualquer numero de vezes maior ou menor, a outra se torna esse numero de vezes menor ou maior*. Assim:

O tempo que se gasta com a construcção de uma obra, é inversamente proporcional ao numero dos operarios, porque quando se empregue o *dobro* ou o *triplo* dos operarios, a obra deve fazer-se em *metade* ou na *terça parte* do tempo.

O tempo gasto por uma locomotiva em percorrer uma distancia é inversamente proporcional á velocidade, porque, se a velocidade se torna por exemplo *dez vezes maior*, gastará *dez vezes menos* tempo.

São tambem inversamente proporcionaes: o tempo preciso para encher um tanque e os litros que uma torneira deita por minuto; o preço de cada metro de uma peça de panno e o numero de metros da peça, suppondo fixo o valor da peça; etc.

Deprehende-se da difinição, que nas grandezas inversamente proporcionaes se póde formar proporção, dispondo os dois valores da segunda grandeza em ordem inversa dos da primeira grandeza.

231. — O conhecimento da proporcionalidade directa ou inversa entre duas grandezas exige sempre que se considere que ellas estão em igualdade de circumstancias. Assim, o salario será proporcional ao tempo de trabalho, se este fôr de igual natureza, e o tempo gasto com a construcção de uma obra será inversamente proporcional ao numero de operarios, se estes forem igualmente activos.

2.º — Regra de tres simples

232 — Regra de tres simples *é uma questão na qual entram quatro quantidades, duas de uma especie e duas de outra, sendo as duas especies de grandezas proporcionaes directa ou inversamente, e uma das quatro quantidades desconhecida.*

Resolver uma regra de tres *é determinar o valor d'essa quantidade desconhecida.*

A regra de tres é *directa*, se as duas especies de grandezas forem directamente proporcionaes; e *inversa*, se forem inversamente proporcionaes.

Os dois termos da mesma especie, que são ambos conhecidos, dizem-se *principaes*, e os outros dois, um dos quaes é a incognita (x), dizem-se seus *relativos*. Cada principal com o seu relativo constitue um *periodo*, e d'estes diz-se *primeiro* aquelle em que não entra a incognita.

1.º exemplo:

Se 33 homens se vestiram com 126 metros de panno, com quantos metros se vestirão 77 homens?

Das quatro quantidades que entram na questão, duas são de uma especie (33^h e 77^h) e duas de outra (126^m e x^m), e as duas especies—homens a vestir e os metros de panno precisos para se vestirem—são directamente proporcionaes. A questão é pois, uma regra de tres simples e directa.

33^h e 77 são os dois principaes.
126^m e x^m são os seus relativos.
33^h e 126^m constituem o primeiro periodo.
77^h e x^m constituem o segundo periodo.

2.º exemplo:

Tendo 64 homens feito uma obra em 15 dias, quantos homens seriam precisos para fazel-a em 10 dias?

Das quatro quantidades que entram na questão, duas são de uma especie (15^d e 10^d) e duas de outra especie (64^h e x^h), e as duas especies—numero de operarios e numero de dias gastos n'uma obra—são inversamente proporcionaes. A questão é, pois, uma regra de tres simples inversa.

15^d e 10^d são os dois principaes.
64^h e x^m são os seus relativos.
15^d e 64^h constituem o primeiro periodo.
10^d e x^h constituem o segundo periodo.

233 — *Para resolver uma regra de tres simples, dispõem-se os numeros do primeiro periodo em linha, e por baixo d'elles os da mesma especie do segundo periodo. O valor da incognita obtem-se multiplicando o numero que está por cima de x pela razão entre as outras duas quantidades, na mesma ordem em que estão dispostas se a regra de tres é inversa, e em disposição inversa se a regra de tres é directa.*

Applicando a regra ao primeiro exemplo antecedente, teremos, visto a regra de tres ser directa:

$$\begin{array}{ll} 33^h & 126^m \\ 77 & x \end{array}$$

$$x = 126^m \times \frac{77}{33} = 294^m$$

Applicando-a ao segundo teremos, visto ser inversa:

$$\begin{array}{ll} 15^{d} & 64^{h} \\ 10 & x \end{array}$$

$$x = 64^{h} \times \frac{15}{10} = 96^{h}$$

E' este o processo mais rapido e mais simples especialmente quando applicado ás regras de tres compostas; seria porém, igualmente facil resolvel-as por meio das proporções.

No 1.º exemplo, como as grandezas são directamente proporcionaes, teriamos (229):

$$\frac{33}{77} = \frac{126}{x} \text{ d'onde } x = \frac{126 \times 77}{33} = 294^{m}$$

No 2.º exemplo, como as grandezas são inversamente proporcionaes, teriamos (230):

$$\frac{15}{10} = \frac{x}{64} \text{ d'onde } x = \frac{64 \times 15}{10} = 96^{h}$$

234 — Vamos ainda expôr outro modo de resolução, conhecido pelo nome de methodo de *reducção á unidade*, que consiste em calcular primeiramente o valor que deve ter o termo relativo, quando o principal fôr 1, e calcular depois o valor da incognita para o numero de unidades que tiver o principal do segundo periodo.

Applicando o methodo ao primeiro dos dois exemplos precedentes diriamos: Se 33 homens se vestiram com 126 metros, 1 homem vestir-se-hia com 33 vezes menos, isto é com $\frac{126}{33}$ metros, e como 77 homens se vestem com 77 vezes o panno preciso para vestir 1, o valor da incognita será $\frac{126}{33} \times 77$ ou 294. A disposição é a seguinte:

$$\begin{array}{lll} 33^{h} & & 126^{m} \\ 77 & & x \\ 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \frac{126}{33} \\ 77 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \frac{126}{33} \times 77 = 294^{m} \end{array}$$

Applicando-o ao segundo exemplo diriamos: Se 15 homens fazem a obra em 64 dias, só um homem precisaria de 15 vezes mais tempo, isto é, de 64×15 dias, e como 10 homens fariam a mesma obra em 10 vezes menos tempo que um só, o valor da incognita será $\frac{64 \times 15}{10}$ ou 96 homens.

A disposição é a seguinte:

$$
\begin{array}{lcl}
 & 15^{d} & 64^{h} \\
 & 10 & x \\
 & & \\
1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & 64 \times 15 \\
10 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \frac{64 \times 15}{10} = 96^{h}
\end{array}
$$

3.º — Regra de tres composta

235 — Diz-se **regra de tres composta** *uma questão em que entra um numero par de quantidades, duas a duas da mesma especie, sendo uma d'ellas incognita, com a condição de que a grandeza da especie da incognita seja proporcional directa ou inversamente a todas as outras.*

O enunciado fórma sempre dois *periodos*, sendo o *primeiro* aquelle que é formado pelo grupo de quantidades simultaneas todas conhecidas, e o *segundo* aquelle em que entra a incognita.

Exemplo: *Se 35 operarios gastaram 32 dias para fazerem um muro de 70 metros de comprimento, quantos operarios serão precisos, para fazerem, em 30 dias, um muro de 195 metros de comprimento e com as restantes condições iguaes?*

Entra n'esta questão um numero par de quantidades duas a duas da mesma especie, sendo uma incognita: 35^{op} e x^{op}, 32^{d} e 30^{d}, 70^{m} e 195^{m}. Além d'isso a especie a que pertence a incognita, operarios, é directamente proporcional ao comprimento do muro e inversamente proporcional ao numero de dias. A questão é, pois, uma regra de tres composta. O primeiro periodo é 35^{op}, 32^{d} e 70^{m}, e o seguddo é x^{op}, 30^{d} e 195^{m}.

236 — *Para resolver uma regra de tres composta dispõem-se os periodos como foi dito para a regra de tres simples* (233), *e o valor da incognita acha-se multiplicando o numero que fica por cima de x pelas rasões formadas pelos pares de quantidades da mesma especie, ficando em cada rasão os numeros na mesma ordem, se a especie de grandeza que representam fôr inversamente proporcional á que representa a incognita, e em ordem invertida se fôr directamente proporcional.*

Applicando a regra ao exemplo precedente, será:

$$\begin{array}{ccc} 35^{\text{op}} & 32^{\text{d}} & 70^{\text{m}} \\ x & 30 & 195 \end{array}$$

$$x = 35^{\text{op}} \times \frac{32}{30} \times \frac{195}{70} = 104^{\text{op}}$$

Como o numero de dias preciso para fazer uma obra é iversamente proporcional ao numero de operarios, a razão entre os dois numeros que representam dias deve ser disposta na mesma ordem em que estão, isto é, $\frac{32}{30}$, e, como o numero de operarios é directamente proporcional ao comprimento do muro, a rasão entre os dois numeros que representam metros de comprimento deve ser estabelecida ao contrario do modo como estão dispostos, isto é, $\frac{195}{70}$.

Outro exemplo: *Se 30 operarios, trabalhando 8 horas por dia, gastaram 15 dias para abrir um fosso de 290 metros de comprimento e $1^{\text{m}},5$ de largura; quantos dias serão precisos a 40 operarios, para, trabalhando 9 horas por dia, abrirem um fosso de 785 metros de comprimento e 3 metros de largura?*

$$\begin{array}{ccccc} 30^{\text{op}} & 8^{\text{h}} & 15^{\text{d}} & 290^{\text{c}} & 1,5^{\text{l}} \\ 40 & 9 & x & 785 & 3 \end{array}$$

$$x = 15^{\text{d}} \times \frac{8}{9} \times \frac{30}{40} \times \frac{785}{290} \times \frac{3}{1,5} = 54^{\text{d}}$$

237 — Poderiamos ainda empregar o methodo de *reducção* á unidade, procurando previamente, por mudanças successivas, o valor que teria a incognita, se as outras quantidades fossem a unidade, e passando depois successivamente para os valores que vae tomando, á medida que se consideram os numeros do segundo periodo.

Applicando-o ao primeiro dos exemplos precedentes diriamos: Se para fazer 70 metros de muro em 32 dias são precisos 35 operarios, para fazer os mesmos 70 metros em 1 dia seriam precisos 35×32 operarios; mas então para fazer só 1 metro em 1 dia seriam precisos $\frac{35 \times 32}{70}$. Se este valor é o numero de operarios que fazem 1 metro de muro em um dia, para fazer o mesmo metro em 30 dias apenas seriam precisos $\frac{35 \times 32}{70 \times 30}$ operarios, e se em vez de 1 metro fossem

195 seriam precisos $\frac{35 \times 32 \times 195}{70 \times 30}$, ou 104 operarios. A operação seria disposta assim:

$$\begin{array}{lll} 32^{d} & 70^{m} & 35^{op.} \\ 30 & 195 & x \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 35 \times 32 \\ 1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \frac{35 \times 32}{70} \\ 30\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \frac{35 \times 32}{70 \times 30} \\ 195\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \frac{35 \times 32 \times 195}{70 \times 30} = 104^{op.} \end{array}$$

Exercicios

1.º Para fazer uma certa porção de fato são precisos 230^{m} de panno com $1^{m},5$ de largura. Quantos metros são precisos sendo a largura $0^{m},86$?

2.º 19 operarios empregaram 53 dias para fazer uma certa obra; que tempo empregariam 24 operarios nas mesmas condições para fazer a mesma obra?

3.º Com 512 kilogrammas de fio faz-se uma teia de 2:320 metros de comprimento e $1^{m},8$ de largura. Qual será o comprimento de uma teia de $1^{m},5$ de largura fabricada com 238 kilogrammas de fio?

4.º Um hectolitro de trigo pesa, termo médio, 75 kilogrammas. Quanto pesam 140 saccos contendo cada um 140 litros de trigo?

5.º Sabe-se que 16 operarios, trabalhando 10 horas por dia, teceram, em 31 dias, 2:400 metros de fazenda com $1^{m},2$ de largo. Quantos dias gastarão 24 operarios, trabalhando 9 horas por dia, para tecerem 3:600 metros de fazenda com $1^{m},5$ de largo?

6.º Uma fabrica produz annualmente 1:200 quintaes de cobre, e gasta 4535 quintaes de carvão. Para produzir 4:080 quintaes de cobre annualmente, quantos quintaes de carvão deveria gastar?

7.º Um terreno rectangular de $131^{m},85$ de comprimento por $48^{m},27$ de largura, foi comprado por 13:028$000. Quanto custará outro em iguaes condições com o mesmo comprimento e o triplo da largura?

8.º Um tanque de $14^m,8$ de comprimento, $5^m,14$ de largura e $0^m,98$ de altura encheu-se em $4^h,25$. Quanto tempo levaria a agua que corre para este tanque a encher uma pipa de 640 litros?

9.º Uma locomotiva percorreu 64^{km} em $3^h,5$. Que distancia percorrerá em 8^h,, 53',, 18''?

10.º Sendo o preço de um diamante proporcional ao quadrado do seu peso, quanto vale um diamante de $0^g,814$, sabendo-se que outro de $0^g,411$ foi vendido por 36$000 réis?

11.º Uma machina a vapor trabalhando 14 horas por dia consumiu em 27 dias 10:350 kilogrammas de carvão. Qual será o custo do carvão consumido se ella trabalhar 300 dias e 12 horas por dia, custando 6$200 réis, 1:000 kilogrammas de carvão?

12.º 180 graus do thermometro Fahrenheit valem 100 graus centigrados ou 80 graus Réaumur; quanto marcam os thermometros centigrado e Réaumur quando o thermometro Fahrenheit marque 50 graus?

13.º Um operario póde transportar n'um carrinho de mão e por dia, 800 kilogrammas a 1 kilometro. O preço do transporte é de 520 réis. Quanto custarão 500 metros cubicos de terra transportados a 97 metros, sabendo-se que o metro cubico de terra pesa 1600 kilogrammas?

14.º 15 operarios trabalhando $8^h,5$ por dia levaram 20 dias e 6 horas para transportar n'um carrinho de mão, 1200 metros cubicos de terra a 50 metros de distancia. Quantos dias e horas levarão 12 d'estes operarios trabalhando 7 horas e $\frac{3}{4}$ por dia, para transportar 750 metros cubicos a 60 metros, sendo de 3 para 5 a relação entre as difficuldades do primeiro para o segundo transporte?

15. Se um arco de circulo de 39º tem de comprimento $5^m,6$, qual será o comprimento de um arco de 87º?

16.º Um parafuso avança $12^{mm},7$ em 19,58 voltas; quanto avançará em 48,76 voltas?

17.º Um navio que tem viveres só para 18 dias, deve andar no mar ainda 27 dias; a quanto se devem reduzir as rações da tripulação?

18.º Para obter 1 metro cubico de paus, que têem de comprimento $1^m,25$, é necessario pôr a travessa do stere á altura de $0^m,8$; a que altura se deve pôr a travessa, se os paus tiverem de comprimento $1^m,1$?

19.º Para forrar uma salla são necessarios 152 metros de papel de 0,48 de largura; quantos metros serão necessarios, se o papel tiver $0^m,54$ de largura?

XVII

Applicações

1.º — Regra de juro

238 — **Juro** é o lucro que recebe a pessoa que empresta a outra qualquer quantia.

Em geral quem cede a outro o direito, que tem a gosar alguma cousa que lhe pertence, recebe uma compensação, um premio, que, segundo os casos, se denomina *aluguer*. *renda*, *fôro*, etc. O premio ou compensação, correspondente ao caso em que a cousa cedida é o dinheiro chama-se especialmente *juro*.

A quantia emprestada ou *posta a render*, tem o nome de *capital*.

Taxa, preço, ou **razão de juro** é o que se convenciona pagar em cada unidade de tempo por cada 100 réis de capital. A unidade de tempo geralmente adoptada nas questões de juros é o anno que se suppõe ter 360 dias, e que se denomina *anno commercial*.

As expressões 5 %, 6 %, etc., que se lêem *cinco por cento*, *seis por cento*, etc., indicam abreviadamente que a *taxa* ou *preço* do juro, é 5, 6, etc.; isto é, que em cada anno se paga 5, 6, etc., réis por cada 100 réis que foram emprestados.

Juro ao dinheiro é o capital que vence o juro 1 na unidade de tempo. Quando o *juro ao dinheiro* é 20, o capital 20 vence o juro 1 n'um anno, e por consequencia o capital 20 $\times$ 5 ou 100 vence o juro 5 n'uma unidade de tempo.

Valor de um capital, ao fim de certo tempo, é o resultado que se obtem addicionando a esse capital o juro por elle vencido durante esse tempo.

A regra de juros serve para determinar o **juro**, sabido o **capital**, a **taxa** e o **tempo** que durou o emprestimo, ou ainda para determinar qualquer d'estas quantidades, conhecidas as outras tres.

As regras de juros podem resolver-se por meio de regras de tres compostas, porque o juro é directamente proporcional ao capital, á taxa e ao tempo; mas são mais facilmente resolvidas pelo emprego de *formulas* (177).

Se se representar por j o juro que o capital c rende em t annos, á taxa r, a formula que dá esse juro é:

$$j = \frac{c \times r \times t}{100} \qquad (1)$$

Mostra esta formula que para obter o juro se multiplica o capital pela taxa e o producto obtido pelo tempo (expresso em annos), dividindo depois por 100 este segundo producto.

Para determinar as outras quantidades teriamos igualmente as formulas seguintes, que facilmente se deduzam da formula (1).

$$c = \frac{j \times 100}{r \times t} \quad (2); \qquad r = \frac{j \times 100}{c \times t} \quad (3); \qquad t = \frac{j \times 100}{c \times r} \quad (4);$$

Se o tempo t, em vez de representar annos, representasse mezes ou dias, o numero 100 *(constante)*, que entra n'estas formulas seria substituido no primeiro caso por 1200 e no segundo por 36000.

1.º exemplo: *Qual é o juro que 650$000 réis rendem em 7 annos a 5 $^3/_4$ por cento?*

Substituindo estes numeros na formula (1) teremos:

$$j = \frac{650000 \times 5{,}75 \times 7}{100} = \frac{26162500}{100} = 261\$625 \text{ réis.}$$

O enunciado do problema corresponde a est'outro: *Sabendo-se que 100 réis em 1 anno rendem 5,75 réis, quanto renderá 650$000 réis em 7 annos?* e portanto poderiamos empregar a seguinte regra de tres:

$$\begin{array}{ccc} 100 & 1 & 5{,}75 \\ 650000 & 7 & x \end{array}$$

$$x = 5{,}75 \times \frac{7}{1} \times \frac{650000}{100} = 5{,}75 \times 7 \times 6500 = 261\$625 \text{ réis}$$

2.º exemplo: *Qual é o capital que em 2^a,, 4^m, a 6 por cento produz de juro 100$800 réis?*

Pela formula (2) será:

$$c = \frac{100800 \times 1200}{6 \times 28} = \frac{100800 \times 200}{28} = \frac{20160000}{28} = 720\$000 \text{ réis}$$

3.º exemplo: *Qual é a taxa precisa para que em 2^a,, 4^m,, 12^d,, o capital 720$000 réis produza o juro 102$240 réis?*

Pela formula (3) será:

$$r = \frac{102240 \times 36000}{720000 \times 852} = \frac{10224 \times 36}{72 \times 852} = \frac{10224}{2 \times 852} = \frac{5112}{852} = 6\ \%$$

4.° exemplo: *Que tempo é preciso para que o capital 720$000 réis a 6 por cento produza o juro 102$240 réis?*

Pela formula (4) será:

$$t = \frac{102240 \times 36000}{720000 \times 6} = \frac{10224 \times 36}{72 \times 6} = \frac{10224}{2 \times 6} = 852^{d} = 2^{a},, 4^{m},, 12^{d}$$

239 — A formula (1) pode tambem servir para calcular o juro j ou o capital c, quando se dá a somma $c + j$ do capital e juro, a taxa e o tempo.

Com effeito, sendo $j = \frac{c \times r \times t}{100}$ será $\frac{j}{c} = \frac{r \times t}{100}$ e (163) $\frac{j+c}{rt+100} = \frac{j}{rt}$ ou $\frac{j+c}{rt+100} = \frac{c}{100}$.

Da primeira d'estas duas formulas deduz-se $j = \frac{(j+c)\,rt}{rt+100}$ (5) e da segunda $c = \frac{(j+c)\,100}{rt+100}$ (6).

Exemplo: *Sendo 127$800 réis a somma de um capital com o juro de 1 anno á razão 6 ½ por cento, calcular o juro e o capital.*

Substituindo estes numeros nas formulas (5) e (6) teremos:

$$j = \frac{127800 \times 6{,}5}{6{,}5 + 100} = \frac{830700}{106{,}5} = 7\$800 \text{ réis.}$$

$$c = \frac{127800 \times 100}{6{,}5 + 100} = \frac{12780000}{106{,}5} = 120\$000 \text{ réis}$$

Depois de calculada uma das duas quantidades, j ou c, é facil calcular a outra sem recorrer á formula, por que sendo

$$j + c = 127\$800 \qquad j = 7\$800$$

será

$$c = 127\$800 - 7\$800 = 120\$000$$

240 — Esta especie de juro em que a pessoa que empresta o capital póde receber no fim de cada anno, diz-se **juro simples**.

Ha porém uma outra especie chamada **juro composto**, na qual o juro vencido no fim de cada anno, * em vez de ser entregue á pessoa que emprestou, se addiciona ao capital primitivo, formando assim um capital maior, ao qual no anno seguinte corresponderá tambem um juro maior.

Exemplo: *Qual é o capital accumulado no fim de 3 annos pelo capital primitivo 3:500$000 réis a juros compostos de 8 por cento?*

Capital primitivo......................	3:500$000
Juro no 1.º anno......................	280$000
Capital accumulado no fim do 1.º anno..	3:780$000
Juro no 2.º anno......................	302$400
Capital accumulado no fim do 2.º anno..	4:082$400
Juro no 3.º anno......................	436$592
Capital pedido......................	4:408$992

A juro simples a somma do capital e juros nos 3 annos seria apenas:

3:500$000 + 3 × 280$000 = 4:340$000 réis

Exercicios

1.º Qual é o juro produzido por 104£,, 8 sch,, 4 p a 7 1/2 por cento em 5 annos?

2.º Qual foi o capital que collocado a render juros simples a 5,5 % durante 2 mezes e 20 dias produziu 25$575 réis de juros?

3.º A que taxa é preciso estar a render 380$000 réis para no fim de 4 a,, 5 m,, 20 d ficar em 502$000 (capital e juro)?

4.º Que tempo deve um capital estar a juro de 6 1/2 por cento para produzir um juro igual ao capital?

5.º Um capital de 480$000 produziu 40$800 réis, collocado a juro simples a 6 %. Por quanto tempo esteve collocado aquelle capital?

6.º Sendo 750$000 réis a somma de um capital com o seu res-

* Nos problemas commerciaes considera-se o anno de 360 dias e mez de 30 dias.

pectivo juro, em 8 mezes e 20 dias, calcular o juro e o capital, suppondo que a taxa é 6 por cento ao anno.

7.º Que tempo deve estar o capital de réis 720$000 a 6 ½ por cento ao anno para vencer de juros 63$500 réis?

8.º Qual deve ser a razão do juro para que o capital 85$000 réis produza 325$000 réis de juros em 5 annos e 7 mezes?

2.º — Descontos

241 — No commercio quasi nunca se effectuam as compras a dinheiro contado. As mais das vezes o comprador dá ao vendedor um documento chamado **letra**, no qual se obriga a pagar no fim de certo tempo a quantia que fica devendo.

Se o possuidor da letra precisar de realizar dinheiro antes da epocha do *vencimento* da letra (dia em que tem de ser paga), póde transferil-a *(endossal-a)* a terceira pessoa, recebendo d'esta a sua importancia, deduzida certa quantia que tem o nome de desconto, e que é o juro do valor da letra a uma taxa convencionada ao tempo que falta para o vencimento.

Vê-se que uma letra tem dois valores: um *nominal*, que é o que n'ella está inscripto e que só é realmente o seu valor no dia do vencimento, e outro *actual*, que será tanto mais proximo do primeiro quanto mais proximo se esteja do dia do vencimento.

A regra de desconto *serve para achar a quantia que deve abater-se no valor nominal de uma letra, quando o possuidor d'esta não quer esperar pela epocha do vencimento para a cobrar.*

Ha dois modos de calcular o *desconto* de uma letra, que se chamam **desconto por fóra** e **desconto por dentro.** *Desconto por fóra* é o juro que vence o valor nominal da letra por todo o tempo que lhe falta para o vencimento, por exemplo: por uma letra de 100, descontada a 6 %, o descontante receberá 106, ao fim de um anno, e mais o juro de 6, que é 0,36, pois gira com os 6 durante esse prazo. *Desconto por dentro* é o juro correspondente ao tempo que falta para o vencimento da letra, e ao capital que junto com o mesmo juro, dá uma somma igual ao valor nominal da letra, por exemplo: por uma letra de 100 a 6 %, o descontante paga 94,34 e reserva para si o juro d'esta quantia igual a 5,6604; de modo que $94,34 + 5,6604 = 100,0004$. Eis a differença entre os dois modos de descontar: o primeiro é desigual, o segundo é perfeitamente equitativo para ambos os negociadores.

As questões de desconto são verdadeiras questões de juro, em que o valor nominal da letra é considerado, como *capital* no *desconto por fóra*, e como *somma de capital e juro* no *desconto por dentro*, e podem por isso ser resolvidas por meio das formulas já indicadas (1) e (5), tendo em vista que j representa o desconto, c ou $c + j$ o valor nominal da letra, t o tempo que falta para a data do vencimento, e r a taxa.

Exemplo: *Qual é o desconto de uma letra de 720$000 réis para cujo vencimento faltam 5 mezes, sendo a taxa 8 %?*

Applicando a formula do juro teremos:

Desconto por fóra........ $j = \frac{720000 \times 8 \times 5}{1200} = \frac{7200 \times 2 \times 5}{3} =$

$$= 2400 \times 10 = 24\$000 \text{ réis}$$

Sendo o desconto 24$000 réis, o possuidor da letra receberia réis 696$000.

Desconto por dentro..... $j = \dfrac{720000 \times 8 \times \frac{5}{12}}{100 \times \left(8 \times \frac{5}{12}\right)} = \dfrac{720000 \times 40}{\left(100 + \frac{40}{12}\right) 12} =$

$$= \frac{28800000}{1200 + 40} = \frac{2880000}{124} = 23\$225 \text{ réis}$$

Exercicios

1.º Uma letra de 860$000 réis que se vencia no dia 7 de fevereiro de certo anno foi descontada (por fóra) em 13 de outubro do anno precedente sendo a taxa do desconto 6 ¾ por cento. Qual foi o desconto?

2.º Uma letra de 1:600$000 réis para cujo vencimento faltam 7 mezes, tem de ser reformada de modo que fique a praso de um anno. Qual deve ser o valor nominal da nova letra, sendo a taxa 8 %?

3.º Uma letra de 450$000 réis a que faltavam 20 dias para o seu vencimento, foi descontada por fóra por 448$875 réis. Qual foi a taxa do desconto?

4.º Uma letra de 225$875 réis foi descontada por dentro á taxa de 6 % e teve de desconto 1$225 réis. Quanto tempo falta para o seu vencimento?

5.º Que desconto soffre uma letra de 640$000 réis á qual faltam 25 dias para o vencimento, suppondo que a taxa do descon (6 por cento?

3.º — Divisão em partes proporcionaes

242 — *Dividir um numero em partes proporcionaes a muitos numeros dados, é dividil-o em partes taes, que a razão da primeira parte para o primeiro numero dado seja igual á da segunda parte para o segundo numero, a da tercia parte para o terceiro numero, etc.* Assim, dividir 228 em partes proporcionaes a 3, 4 e 5 é dividil-o em tres partes, que designaremos por x, y e z, de modo que seja

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5}$$

243 — *Para dividir um numero em partes proporcionaes a muitos numeros dados, divide-se aquelle pela somma d'estes, e as diversas partes serão os productos do quociente obtido multiplicado por cada um d'esses numeros.* Assim, no caso precedente dividiriamos 228 por 12, somma de $3 + 4 + 5$, e o quociente obtido (19) multiplical-o-iamos por 3 para obter a primeira parte (57), por 4 para obter a segunda (76), e por 5 para obter a terceira (95). As tres partes pedidas são pois 57, 76 e 95, porque sommadas dão 228 e é

$$\frac{57}{3} = \frac{76}{4} = \frac{95}{5}$$

Quando a divisão se não possa fazer exactamente, será mais conveniente, para obter resultados mais approximados, fazer cada multiplicação antes da divisão.

1.º problema: * *Tres operarios associaram-se para fazerem uma obra por 12$320 réis. O primeiro trabalhou 4 dias, o segundo 5 e o terceiro 7. Quanto pertence a cada um?*

Dividindo 12$320 em partes proporcionaes a 4, 5, 7 e designando as tres partes por x, y e z, teremos:

$$x = \frac{12320}{16} \times 4 = 3\$080 \text{ réis}$$

$$y = \frac{12320}{16} \times 5 = 3\$850 \text{ réis}$$

$$z = \frac{12320}{16} \times 7 = 5\$390 \text{ réis}$$

12$320 réis (verificação)

---

* Este problema recebe geralmente no commercio o nome de *regra de companhia*.

2.º problema: *Ha a quantia de 277$200 réis para dividir por um mestre de fabrica, 2 contramestres e 24 artifices, proporcionalmente aos seus vencimentos. Quanto pertence a cada um, sabendo-se que o vencimento diario do mestre é de 1500 réis, o dos contramestres 1200 réis e o dos artifices 800 réis?*

A totalidade dos vencimentos é $1500 + 2 \times 1200 + 24 \times 800$ ou 23$100.

O quociente de 277200 dividido por 23100 é 12, e por tanto o mestre receberá 12×1500, cada contramestre receberá 12×1200 e cada artifice 12×800.

1 mestre...........................	18$000 réis
2 contramestres, a 14$400 réis........	28$800 »
24 artifices, a 9$600 réis.............	230$400 »
	277$200

244 — *Se pretendessemos dividir um numero em partes proporcionaes a fracções, reduzil-as-íamos ao mesmo denominador, e depois considerariamos apenas os numeradores.*

Exemplo: Dividir o numero 360 em partes proporcionaes a $\frac{1}{2}$ 1 e $\frac{2}{3}$.

Como estes tres numeros equivalem a $\frac{3}{6}$, $\frac{6}{6}$ e $\frac{4}{6}$, a questão reduz-se a dividir 360 em partes proporcionaes a 3, 6 e 4, o que dá

$$x = \frac{360}{13} \times 3 = 83\frac{1}{13}$$

$$y = \frac{360}{13} \times 6 = 166\frac{2}{13}$$

$$z = \frac{360}{13} \times 4 = 110\frac{10}{13}$$

Exercicios

1.º Dividir uma recta de 100 metros em partes proporcionaes aos numeros 3, $4\frac{1}{5}$ e $8\frac{2}{3}$.

2.º Dividir 56º,, 46',, 27'' proporcionalmente aos numeros $7\frac{1}{3}$, $4\frac{3}{4}$ e $8\frac{5}{8}$.

3.º Dividir um comprimento de 850 metros em partes proporcionaes aos arcos de 12º,, 26′; 15º,, 32′,, 46″ e 23º,, 54′,, 17″.

4.º Dividir o numero 800 em partes inversamente proporcionaes aos numeros 8, 6 e 5.

5.º Tres empreiteiros receberam pela construcção de uma obra 6:000$000 réis, para dividirem entre si segundo o numero de operarios que trouxeram. O primeiro trouxe 25 operarios durante 50 dias; o segundo trouxe 30 operarios durante mez e meio; e o terceiro 40 operarios durante 9 semanas. Quanto pertence a cada um?

4.º — Regra de liga *

245 — *Chama-se regra de liga ou de mistura á regra que ensina a resolver um dos seguintes problemas:*

1.º *Dadas as quantidades ou as relações dos simples, isto é, dos corpos que se misturaram, e os seus preços, calcular o preço do mixto.*

2.º *Dados os preços dos simples e o do mixto determinar as quantidades ou as relações em que se devem misturar.*

O primeiro problema diz-se de *liga directa* ou de *preço medio* e o segundo diz-se de *liga inversa*.

246 — *Para resolver uma regra de liga ou de mistura directa multiplica-se a quantidade de cada simples pelo seu respectivo preço, sommam-se os productos obtidos e divide-se a somma pela somma das quantidades dos simples.*

1.º exemplo: *Misturaram-se 3kg,6 de polvora de 1$140 réis o kilogramma, 5 kilogrammas de polvora de 860 réis e 8kg,2 de 920 réis. A como se deverá vender cada kilogramma de mistura?* E' uma regra de mistura directa.

3kg,6	×	1$140 réis	=	4$104	
5	×	$860 »	=	4$300	
8kg,2	×	$920 »	=	7$544	
16kg,8				15$9480	168
				828	949
				1560	
				48	

O preço de cada kilogramma de mistura é de $949 \frac{48}{168}$ réis.

---

* Com propriedade só se deveria chamar regra de liga, se o problema tratasse das combinações de metaes. Em todos os outros casos é melhor chamar-lhe regra de *mistura*. Nas regras propriamente de liga os preços são os *toques* dos metaes.

2.º exemplo: *Fundiram se duas barras de ouro; a primeira pesava 537 grammas e tinha de toque 0,840, a segunda pesava 972 grammas e tinha de toque 0,920. Qual é o toque da liga?* E' uma regra de liga directa.

$$
\begin{array}{rcl}
537 \times 0,840 & = & 451,080 \\
972 \times 0,920 & = & 894,240 \\
\hline
1509 & & 1345,320 \mid 1509 \\
 & & 13812 \quad 0,891 \\
 & & 2310 \\
 & & 801
\end{array}
$$

O toque da liga é 0,891 $\frac{801}{1509}$.

247 — *Para resolver uma regra de liga ou de mistura inversa, supponda que são dois os simples, acham-se as differenças entre o preço do mixto e os dos simples, e as porções dos simples que se devem tomar são inversamente proporcionaes a essas differenças.*

1.º problema: *Ha polvora de duas qualidades: uma de 960 réis o kilogramma e outra de 840 réis o kilogramma. Que porções devemos tomar de uma e de ontra para que a mistura possa vender-se a 940 réis?* E' uma regra de mistura inversa.

A differença entre 940 e 960 é 20, e entre 940 e 840 é 100. Portanto devemos misturar 20 partes da polvora de 840 réis e 100 da de 960 réis. Como não se diz a quantidade de mixto que se quer obter, apenas se determina a rasão entre as quantidades dos simples e não as quantidades.

Na pratica dá-se á operação uma disposição apropriada, para que as differenças entre o preço do mixto e um dos simples fiquem escriptas em frente do outro simples, visto que são esses os numeros que representam as partes que d'estes simples se devem tomar.

$$
\begin{array}{lcr}
\text{De 960 réis} & & 100 \text{ partes} \\
 & 940 & \\
\text{De 840 réis} & & 20 \text{ partes.}
\end{array}
$$

2.º problema: *Ha duas barras de oiro: uma de 0,850 de toque e outra de 0,940. Que porções se deve tomar de uma e de outra para fazer 558 grammas com o toque de 0,900?* E' uma regra de liga inversa.

Procedendo como no problema antecedente teriamos:

$$
\begin{array}{ccccc}
\text{De } 0,850 & \cdot & & \cdot & 0,040 \\
& & 0,900 & & \\
\text{De } 0,940 & \cdot & & \cdot & 0,050
\end{array}
$$

Teriamos pois de tomar 40 partes da primeira barra e 50 partes da segunda, ou 4 partes da primeira e 5 da segunda, o que é mais simples e exprime o mesmo (149).

Como porém no problema se pedem as quantidades, e não a rasão entre as quantidades, teriamos de dividir 558 grammas em partes proporcionaes a 4 e a 5 (243).

$$
\begin{array}{r|l}
 & 4 \\
 & 5 \\
\hline
558 & 9 \\
\hline
18 & 62 \\
0 &
\end{array}
$$

Da primeira barra teriamos de tomar $62 \times 4 = 248$ grammas.
Da segunda barra teriamos de tomar $62 \times 5 = 310$ grammas.

Exercicios

1.º Misturaram-se tres qualidades de batata na razão de 2 partes da primeira, para 3 da segunda e 4 da terceira. A como se ha de vender o kilogramma da mistura sendo os preços dos simples 24 réis, 32 réis e 41 réis?

2.º Fundiram-se 3 hectogrammas de oiro puro, 420 grammas de oiro de 840 millesimos e 120 grammas de cobre. Qual é o toque da liga?

3.º Que porção de agua se deve deitar em 145 litros de vinho de 120 réis o litro, para que a mistura possa vender-se a 95 réis?

5.º — Cambio

248 — Diz-se *cambio* a troca de dinheiro de um paiz por dinheiro de outro paiz.

A relação entre as moedas dos dois paizes *(preço do cambio)*, variavel segundo as circumstancias do mercado, regula-se suppondo que um dá sempre a mesma porção de moeda *(certo)* e outro a porção variavel *(incerto)* que lhe corresponde. D'este modo para indicar o preço do cambio entre duas praças commerciaes, basta enunciar o incerto, porque o certo é subentendido.

Quando se diz que o cambio de Lisboa sobre Londres está a 53, entende-se que 1$000 réis (certo) correspondem a 53 pences (incerto). Quando se diz que o cambio de Lisboa sobre Paris está a 540, entende-se que 3 francos (certo) correspondem a 540 réis. Quando se diz que o cambio de Lisboa sobre Madrid está a 820, entende-se que 5 pesetas (certo) correspondem a 820 réis (incerto).

As questões de cambio resolvem-se por meio de regras de tres simples.

1.º exemplo: *Estando o cambio de Lisboa sobre Madrid a 830, a quanto corresponde 156$040 réis?*

830 réis	5 pesetas
156$040	x

$$x = 5 \times \frac{156040}{830} = 940 \text{ pesetas}$$

2.º exemplo: *Estando o cambio de Lisboa sobre Londres a 52, quanto se tem de dar em Lisboa para remetter para Londres 140£ 7*^{sch}?

52 p	1000 réis
33684	x

$$x = 1000 \times \frac{33684}{52} = 647\$769 \text{ réis}$$

Exercicios

1.º Quer-se remetter para Paris 3245^{fr},70. Quanto se tem a dar em Lisboa suppondo que o cambio sobre Paris está a 528?

2.º Estando o cambio de Lisboa sobre Londres a 52 $^1/_4$, a quanto correspondem 496$000 réis?

6.º — Fundos publicos

249 — Os governos podem levantar dinheiro emprestado ou segundo o modo ordinario (letras), ou emittindo titulos com um certo *valor nominal* e *juro constante* fixado relativamente a esse valor, que são vendidos, segundo as circumstancias do mercado, por *valores effectivos variaveis*. No primeiro caso a divida diz-se *fluctuante* e no segundo *consolidada*.

Os titulos da nossa divida consolidada interna são denominados *inscripções*. Podem ser de *assentamento* ou de *coupons*. No primeiro caso os juros só podem ser recebidos pela pessoa a quem, segundo os registos da *junta do credito publico*, pertencem (titulos *nominativos*); no segundo caso os juros são pagos a qualquer pessoa que apresente o *coupon do semestre* (titulos *ao portador*).

Ha inscripções de assentamento dos seguintes valores nominaes: De 100$000 réis, 500$000 réis, 1:000$000 réis, 5:000$000 réis, 10:000$000 réis, 15:000$000 réis e 20:000$000 réis; e inscripções de coupons de 100$000 réis nominaes, 500$000 réis e 1:000$000 réis.

O juro annual é de 3 por cento do valor nominal e paga-se aos semestres. E' claro que o *juro effectivo* depende do preço pelo qual as inscripções foram compradas; assim se se comprasse uma inscripção de 100$000 réis nominaes por 30$000 réis em dinheiro, como se receberia 3$000 réis de juro annual, o juro effectivo seria de 10 por cento; ao passo que se se comprasse por 50$000 réis, como se receberia annualmente os mesmos 3$000 réis, o juro effectivo seria de 6 por cento.

As inscripções constituem uma *renda perpetua*, porque o thesouro apenas é obrigado a pagar o juro estabelecido e nunca o capital.

O preço da venda é estabelecido relativamente a 100 réis nominaes; assim quando se diz que as inscripções estão a 48,7, isto quer dizer que cada 100 réis nominaes se vendem por 48,7 em dinheiro, ou que uma inscripção de 100$000 se póde comprar com 48$700 réis em dinheiro.

As questões de fundos publicos são facilmente resolvidas com o emprego de regras de tres simples.

1.º exemplo: *Estando as inscrcripções a 51,2 quanto custam 5:600$000 réis nominaes?*

$$\begin{array}{cc} 51{,}2^{d} & 100^{n} \\ x & 5600000 \end{array}$$

$$x = 51{,}2 \times \frac{5600000}{100} = 2{:}867\$200 \text{ réis}$$

2.º exemplo: *Estando as inscripções a 51,2, que valor nominal se póde comprar com 4:200$000 réis em dinheiro?*

$$\begin{array}{cc} 51{,}2^{d} & 100^{n} \\ 4200000 & x \end{array}$$

$$x = 100 \times \frac{4200000}{51{,}2} = 8:203\$125 \text{ réis nominaes}$$

Como o minimo valor nominal das inscripções é 100$000 reis poder-se-ha dar por terminada a divisão logo que se obtiverem os dois primeiros algarismos do quociente, porque desde logo se ficará sabendo que se podem comprar 82 inscripções de 100$000 réis, isto é, 8:200$000 réis nominaes sobrando ainda 1$600 réis em dinheiro, o que é indicádo pelo resto (16), á direita do qual se devem escrever os dois zeros que de 4200000 ainda restava baixar.

3.º exemplo: *Estando as inscripções a 42,25, qual é o juro effectivo?*

Pretende-se saber quanto rende cada 100 réis em dinheiro sabendo-se que 42,25 réis rende 3 réis.

$$\begin{array}{cc} c & j \\ 42{,}25 & 3 \\ 100 & x \end{array}$$

$$x = 3 \times \frac{100}{42{,}25} = 7{,}1\ \%$$

Exercicios

1.º Um individuo comprou 7:200$000 réis nominaes de inscripções a 47,25. Quanto lhe custaram?

2.º Um individuo empregou 5:115$000 réis em inscripções compradas a 46,5. Quanto recebe de juros annualmente?

3.º Qual é o valor nominal que em inscripções produz o juro annual de 675$000 réis?

4.º A como devem estar as inscripções para que o seu juro effectivo seja de 7 ³/₄ por cento.

7.º — Acções e obrigações

250 — As *acções* são titulos emittidos pelas companhias e bancos e differem das inscripções em terem um juro *(dividendo)* dependente dos lucros que a companhia ou banco realizar. Assim as inscripções dão sempre 3 por cento de juro nominal, e as acções podem dar 2, 4, 5 e 6 ou mais por cento de dividendo, ou não dar dividendo algum, conforme os lucros que houver na companhia que as emittiu.

Quando os *accionistas* entram com um capital igual ao valor nominal da acção, diz-se que as *entradas* estão completas, e no caso contrario a importancia das entradas feitas é que constitue o valor effectivo da acção.

As acções dizem-se *ao par* quando no mercado são compradas ou vendidas pelo seu valor effectivo, *acima* ou *abaixo do par*, conforme dão mais ou menos que aquelle valor, o que depende dos maiores ou menores lucros que a companhia tenha tido.

251 — *Obrigações* são titulos que differem das acções em terem hypotheca sobre as propriedades e capitaes da companhia, em terem juro fixo e em serem amortizadas.

Exercicios

1.º Uma companhia cujo capital é representado por 3000 acções de 100$000 réis cada uma, distribuiu n'um anno pelos seus accionistas 20:700$000 réis. De quantos por cento foi o dividendo, e quanto recebeu um individuo que possue 25 acções?

2.º As obrigações do caminho de ferro do Minho são de 90$000 réis nominaes e vencem juro de 6 por cento ao anno. Quanto recebe em cada semestre um individuo que possue 25 obrigações?

FIM DA ARITHMETICA

INDICE

Segunda parte — Arithmetica applicada