

Monica Maria Funk Drechsler

**Teorema de Gauss–Bonnet
sob um olhar diferenciado**

Florianópolis

2023

Monica Maria Funk Drechsler

Teorema de Gauss–Bonnet sob um olhar diferenciado

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
ao Curso de Matemática, do Departamento
de Matemática da Universidade Federal de
Santa Catarina, para obtenção de grau de
bacharel em matemática.

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

Orientador: Prof. Francisco Carlos Caramello Junior

Florianópolis

2023

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Drechsler , Monica Maria Funk
Teorema de Gauss--Bonnet : sob um olhar diferenciado /
Monica Maria Funk Drechsler ; orientador, Francisco
Carlos Caramello Junior, 2023.
75 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) -
Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências
Físicas e Matemáticas, Graduação em Matemática -
Bacharelado, Florianópolis, 2023.

Inclui referências.

1. Matemática - Bacharelado. 2. Teorema de Gauss-
Bonnet . 3. Superfícies . 4. Característica de Euler. 5.
Geometria diferencial. I. Caramello Junior, Francisco
Carlos. II. Universidade Federal de Santa Catarina.
Graduação em Matemática - Bacharelado. III. Título.

MONICA MARIA FUNK DRECHSLER
**Teorema de Gauss–Bonnet
sob um olhar diferenciado**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
ao Curso de Matemática, do Departamento
de Matemática da Universidade Federal de
Santa Catarina, para obtenção de grau de
bacharel em matemática.

Trabalho aprovado. Florianópolis, 2023.

Prof. Felipe Lopes Castro (UFSC)
Coordenador do Curso

Banca Examinadora:

Prof. Francisco Carlos Caramello Junior
– Orientador –
–Universidade Federal de Santa Catarina –

Profa. Marianna Ravara Vago
– Universidade Federal de Santa Catarina –

Prof. Ivan Pontual Costa e Silva
– Universidade Federal de Santa Catarina –

Florianópolis
2023

Para a infinitude de pontos que formaram este trabalho.

Agradecimentos

Aos meus pais, Mauricio e Marcilene, que formaram quem sou e que por tantas e tantas vezes me levantaram os ombros e me levaram nos ombros. A minha irmã, Mariana, minha saudade diária e inspiração maior. A meu irmão, Maikol, que foi exemplo e me deu todos os empurrões que conseguiu para me colocar nessa vida acadêmica.

A meu orientador, que teve a paciência de lidar com uma aluna quando ela não sabia o que era a função “identidade” e que foi a minha maior motivação para continuar na matemática, mostrando como ela pode ser linda, inspiradora e curiosa. Aos professores que sempre acreditaram em mim e fizeram parte desta jornada. Em especial, a diretora Zuleica que acreditou em mim lá no começo, e a todos os meus professores de matemática: professoras Edna e Janaína e o professor Jardel no fundamental, professoras Caroline, Tatiane e Maysa no PIC, professoras Rosecler, Jaqueline e Cilene no ensino médio, e aos professores do Departamento de Matemática da UFSC com quem tive o prazer de ter aulas ou conhecer pelos projetos afora. Um agradecimento mais que especial aos já professores aposentados Antônio Vladimir Martins e José Luiz das Rosas Pinho, que me encantaram com o mundo da geometria e da matemática em primeiro lugar. Agradecimento também a Giana e a Silvia, secretária e coordenadora do curso da matemática, que sempre foram uns amores e fizeram o possível para me ajudar.

Aos amigos, minha família aqui em Florianópolis. Ao Binny e Samuel, irmãos de outras mães, parceiros desde o início do campo de batalha, que me mantiveram sã e salva (ou tanto quanto possível) durante esses 4 anos e meio. Ao Marcondes, em sua serenidade e amizade que fui feliz em cultivar ao longo do caminho. Ao “calouro” Alex, pelas vezes que cuidou de mim e que compartilhamos a paixão por geometria. Ao Renan e sua chatice adorável. A Sofia e sua dedicação admirável. Ao Saulo em sua empolgação contagiante. Ao Lucas e sua parceria de café e de rolê. Ao Alésio pelos conselhos e amizade de alma. Ao Inácio e seu carinho e cuidado. A Lívia e seu coração de Ivete Sangalo. A Amanda e seu jeitinho doce. Ao Léo Dias e o Cerutti, que me deram alguns bons conselhos (embora não tenha seguido todos, caso contrário, estaria na programação agora). A Samara e os belos momentos que compartilhamos. A Beatriz, que foi quem me ensinou Latex no início de tudo e que foi companheira nas matérias e nas não-matérias. Ao Gustavo (e a mãe dele também) que me ajudaram sem piscar quando mais precisei. Ao “mineiro” Maykon Douglas e sua alegria, parceria e dancinhas de comemoração. Ao Ricardo, Bernardo e Lebole que faziam as tardes no PET mais divertidas (e caóticas). Ao Arthur e sua família, pelo apoio no início da graduação, e ao Felipe e sua família, pelo apoio durante. Ao Carlinhos, por me mandar uma barra de doce de leite de Minas Gerais e por me dar ‘Aquela força’ (e também por esse template de TCC e pelas ajudas

no Overleaf). Ainda estendo o sentimento de gratidão a todos que não estão listados aqui (porque caso contrário, seria necessária uma quantidade enumerável de folhas) mas que convivi durante este tempo em todos os projetos que participei, sejam da UFSC ou de fora, e que formaram essa rede de apoio que me encorajou a continuar, seja por compartilhar o amor pela matemática ou por admirá-lo.

Aos amigos de longa data, que acompanharam essa história de camarote e sempre estiveram presentes de alguma forma: Ana Claudia Lemos, Ariane Karin de Paula, Gabriel Muchau dos Santos, Gisele Cristina dos Anjos Santos e Fernanda Moro Fürst. Também ao Ted, conhecido como Gustavo, por todas às vezes que perdoou minha ausência no seu aniversário e no dia da toalha, porque eu estava metida com algo na faculdade.

Aos meus empregadores, que me ajudaram a juntar dinheiro desde jovem para conseguir realizar esse sonho. Em especial a Grasiela Hilgenstieler e ao Pedro, é muito bom acompanhar seu crescimento e ter feito parte da sua base. Ao pessoal da Catarinense de São Bento, em especial a Marga, que me fizeram sentir acolhida e me incentivaram no meu caminho. Ao PET Matemática e o LED da UFSC, que me proporcionaram experiências profissionais incríveis e relações pessoais mais incríveis ainda. A UFSC, em especial a PRAE, pela bolsa de permanência que permitiu a essa aluna de escola pública de baixa renda que saiu de São Bento do Sul para realizar o sonho de se tornar bacharel em matemática em Florianópolis.

E a você que por algum motivo, abriu esse TCC. Lhe desejo uma boa leitura!

*“Sabe o que é mais legal que magia?
Matemática.”
(Homem Aranha: Sem volta para casa)*

*“A distância mais curta entre dois pontos pode ser a linha reta,
mas é nos caminhos curvos que se encontram as melhores coisas.”
(Lygia Fagundes Telles)*

*“... no, Aunt Em, this was a real, truly, live place.
And I remember that some of it wasn't very nice.
But most of it was beautiful.”
(Dorothy, O Mágico de Oz)*

Resumo

O teorema de Gauss–Bonnet é um dos resultados mais importantes da geometria diferencial clássica. Sua importância e relevância advêm do resultado, que relaciona dois invariantes de naturezas distintas: geométrica local e topológica geral. Para chegar ao resultado, percorremos uma série de resultados necessários e caracterizações curiosas. Damos início com algumas noções da geometria de superfícies, entendendo o conceito e o ferramental imbuído em seu estudo, como as parametrizações, aplicações entre superfícies, o campo normal e a segunda forma fundamental. Isto nos permite chegar ao primeiro invariante: a curvatura gaussiana. Logo após, nos dedicamos a parte topológica, utilizando simplexos na construção de complexos de cadeia a fim de obtermos os grupos de homologia, de onde conseguimos descobrir a característica de Euler de uma superfície. Tal resultado nos permite chegar a resultados interessantes, como a teoria de classificação de superfície de acordo com sua característica. Tendo tais invariantes, partimos para a parte analítica do estudo da integral de superfícies utilizando formas diferenciais, para tal, passando por tensores alternados, pela pullback, pelo estudo da diferencial exterior e a forma volume para, por fim, obtermos a integral de formas diferenciais bem como em simplexos. Voltamos então a geometria, utilizando do colchete de lie para a construção da derivada covariante e obtermos o tensor curvatura, mostrando que a curvatura seccional de uma superfície coincide com a curvatura gaussiana a fim de demonstrarmos o teorema egregium de Gauss. Por fim, através do teorema do índice de Rotação, obtemos o teorema de Gauss–Bonnet em sua forma local e global. O resultado, inovador para a época, gera corolários elegantes e generalizações interessantes como o teorema de Gauss–Bonnet–Chern e o teorema de Gauss–Bonnet para hipersuperfícies.

Palavras-chave: Teorema de Gauss–Bonnet; Superfícies; Característica de Euler; Curvatura; Geometria diferencial.

Abstract

The Gauss–Bonnet theorem is one of the most important results in classical differential geometry. The importance and relevance came from the result, which relates two invariants of different natures: local geometric and general topology. To arrive at the result, we go through a series of results and curious characterizations. Beginning with some notions of surface geometry, understanding the concept and the tools imbued in the study, such as parameters, differentiable functions between surfaces, the normal field and the second fundamental form. This allows us to arrive at the first invariant: the Gaussian curvature. Soon after, we dedicate ourselves to the topological part, using simplex in the construction of chain complexes in order to obtain the homology groups, from which we can discover the Euler characteristic of a surface. Such a result allows us to arrive at interesting results, such as the theory of surface classification according to the characteristic number of the surface. We move on to the analytical part of the study of integral in surfaces. For this, going through alternating tensors, the pullback, the study of the exterior derivative and the volume form to, finally, obtain the integral of differential forms as well as in simplex. We then return to geometry, using the lie derivative to construct the covariant derivative and obtain the curvature tensor, showing that the sectional curvature of a surface coincides with the Gaussian curvature in order to demonstrate Gauss’s theorem egregium. Finally, through the Rotation Index Theorem, we obtain the Gauss–Bonnet Theorem in local and global form. The result, innovative for the time, generates elegant corollaries and interesting generalizations such as the Gauss–Bonnet–Chern theorem and the Gauss–Bonnet Theorem for hypersurfaces.

Keywords: Gauss–Bonnet theorem; Surfaces; Euler charecteristic; Curvature; Differential geometry.

Sumário

	Lista de ilustrações	12
	NOTAÇÕES	13
	INTRODUÇÃO	14
1	GEOMETRIA DAS SUPERFÍCIES	17
1.1	Superfície no espaço euclidiano	17
1.2	Mudança de parametrização	21
1.3	Aplicações diferenciáveis	23
1.4	Plano tangente	26
1.5	Diferencial de aplicações diferenciáveis	28
1.6	Campo Normal e Orientação	32
1.7	Aplicação Normal de Gauss e Curvatura Gaussiana	34
1.8	Segunda forma fundamental	37
2	CARACTERÍSTICA DE EULER	40
2.1	Simplexos	40
2.2	Homologia Simplicial	42
2.3	A característica de Euler	44
2.4	Classificação de superfícies através da característica de Euler	45
3	INTEGRAIS	47
3.1	Tensores	47
3.2	Formas diferenciais	50
3.3	Pullbacks	52
3.4	A diferencial exterior	53
3.5	A forma volume	53
3.6	Integração de formas	56
3.7	Integral via simplexos	57
4	GEOMETRIA INTRÍNSECA	59
4.1	O colchete de Lie	59
4.2	Derivada Covariante	61
4.3	Geodésicas	62
4.4	O tensor de curvatura	63
4.5	A curvatura seccional	64

5	TEOREMA DE GAUSS-BONNET	66
5.1	Teorema do Índice de Rotação	66
5.2	Teorema de Gauss–Bonnet local	67
5.3	Teorema de Gauss–Bonnet global	71
5.4	Teorema de Chern–Gauss–Bonnet	72
	REFERÊNCIAS	75

Lista de ilustrações

Figura 1.1.1–Esfera como gráfico de função.	18
Figura 1.1.2–Toro de revolução	20
Figura 1.2.1–Mudança de parametrização	23
Figura 1.3.1–Aplicação diferenciável	24
Figura 1.7.1–Esfera e seu plano tangente	34
Figura 1.7.2–Aplicação Normal de Gauss em um Hiperboloide de uma folha	35
Figura 1.7.3–Aplicação Normal de Gauss em uma Esfera	35
Figura 1.7.4–Curvatura positiva e negativa no Toro	36
Figura 2.1.1–Toro identificado	41
Figura 2.1.2–Decomposição do Toro em simplexos	41
Figura 2.4.1–Soma conexa	45
Figura 4.1.1–Fluxo	59
Figura 4.1.2–Colchete de Lie	60
Figura 4.1.3–Falha na comutação dos fluxos	61

Notações

- $\langle -, - \rangle$ - Produto interno usual
- $\| - \|$ - Norma euclidiana
- $\text{grad } f_p$ - Gradiente da função f no ponto p
- ∂_1, ∂_2 - Derivada da parametrização com relação a primeira e segunda coordenada
- $T_p S$ - Plano tangente a superfície S no ponto p
- $(df)_p(v)$ - Diferenciável de f em p
- $\mathfrak{X}(S)$ - Espaço vetorial dos campos suaves a S
- N_p - Aplicação normal à superfície no ponto p
- $K(p)$ - Curvatura Gaussiana no ponto p
- II_p - Segunda forma fundamental de S no ponto p
- $\kappa(p)$ - Curvatura da curva no ponto p
- $\chi(S)$ - Característica de Euler de S
- $[-1, \dots, -n]$ - Vértices do n -simplexos
- $[-1, \dots, \hat{-}_k, \dots, -n]$ - Vértices do simplexo retirando o k vértice
- ∂_n - Morfismo de bordo
- $\otimes_k(V)$ - k cópias de V
- $\otimes^k(V)$ - k cópias do espaço dual de V
- $\Lambda^k(V)$ - Subespaço dos tensores alternados
- d - Diferencial exterior
- ∇ - Derivada covariante

Introdução

O teorema de Gauss–Bonnet é um dos mais famosos resultados da geometria Diferencial clássica das curvas e superfícies. O teorema nos diz que a integral da curvatura gaussiana de uma superfície é igual à sua característica de Euler multiplicado por 2π . Isto surpreende uma vez que relaciona um conceito que depende da sua posição e vizinhança em uma superfície com um número resultante de uma caracterização topológica, inerente a uma superfície e às suas superfícies homeomorfas. Para chegar até o resultado e realizarmos a demonstração, optamos por seguir um caminho diferente do usual, passando por conceitos mais amplos e utilizando ferramental mais recente.

O histórico deste estudo remonta ao próprio desenvolvimento do cálculo, no século XVII, por Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz, que já investigavam curvas bidimensionais (BOYER; MERZBACH, 2019). Leonhard Euler e Gaspard Monge resolveram ampliar estes conceitos para as superfícies, mas somente com Carl Friedrich Gauss em seu “*Disquisitiones circa superficies curvas*” que o mundo obteve um livro que compilou e se dedicou apenas a tal tema. Neste livro, Gauss discute a obra de Christiaan Huygens e Alexis Claude de Clairaut sobre a curvatura de uma curva e a transfere para a curvatura de uma superfície, utilizando o conceito de curvatura normal, que chamamos também de curvatura gaussiana. Além disso, Gauss foi o responsável pelo início do uso de equações paramétricas introduzidas por Euler. Através delas, ele consegue chegar, utilizando segundas derivadas, em propriedades que não dependem da parametrização escolhida e apenas da geometria intrínseca da superfície. Dentre as propriedades invariantes descobertas, se destaca a já mencionada curvatura gaussiana. Neste livro ainda é publicado a primeira versão do resultado em sua forma local, traduzido de maneira livre como “*A soma total da curvatura de um triângulo geodésico é igual ao excesso sobre π da soma de seus ângulos.*” (GAUSS, 1828). A noção de que a curvatura é intrínseca à superfície ficou famosa como o *Theorema Egregium* de Gauss. Bernhard Riemann, orientando de Gauss, consegue posteriormente generalizar as noções iniciadas por Gauss e fundamenta o que hoje é conhecido como geometria Riemanniana, provendo uma linguagem matemática mais apropriada para tratar tais objetos intrínsecos, inclusive, em dimensões maiores.

Por outro lado, apesar de obter seu nome, a característica de Euler não foi completamente compreendida pelo próprio. Ele notou essa característica para poliedros e falou sobre ela em uma carta dirigida a seu amigo Christian Goldbach em 1750. Em 1813, Simon Antoine Jean L’Huillier chama a atenção que para poliedros não convexos, a característica de Euler não valia 2 como aos outros poliedros. A noção mais concreta do que seria essa característica e como ela estava vinculada a cada superfície só veio anos depois, com Jules Henri Poincaré. Mais tarde, esse invariante foi relacionado ao trabalho

de Amalie Emmy Noether, que foi responsável por introduzir os grupos de homologia e cohomologia, fundamentando uma parte importante da topologia algébrica.

O nosso principal resultado, o teorema de Gauss-Bonnet, também não foi resultado único e exclusivo de Gauss. Gauss de fato escreveu uma versão geral de tal teorema, mas nunca chegou a publicá-lo. Pierre Ossian Bonnet, com quem Gauss divide o título do teorema, generalizou-o para uma área conectada da região da superfície em 1848. Por sua vez, a criação do conceito de formas diferenciais e sua inclusão à geometria se deve a Élie Joseph Cartan, já no final do século XIX e início do XX, sendo ele responsável pela modernização e generalização da geometria diferencial, em um trabalho que influenciou e ainda influencia vários matemáticos até os dias atuais.

Para uma melhor leitura, recomendamos que o leitor já esteja familiarizado com noções de cálculo, álgebra linear e álgebra. No entanto, esperamos que os conceitos básicos estejam acessíveis a alunos de matemática e interessados ao tema. Nos desenhos e gravuras presentes neste trabalho utilizamos as paletas encontradas na plataforma *Colorbrewer* que permite a distinção de cores para daltônicos e em impressões.

Para compreendermos o teorema em sua extensão precisamos passar por várias definições e resultados. Começamos definindo o objeto sobre o qual o teorema versa: a superfície. Para isto, o primeiro capítulo trata da definição e discorre sobre como definir parametrizações e aplicações entre superfícies, bem como derivá-las, apresentamos o conceito de plano tangente, retas e campos normais, culminando na definição da curvatura gaussiana. Cabe ressaltar que uma função ser diferenciável, neste trabalho, é sinônimo de ser C^∞ . Para tal, utilizamos como principais referências (MONTIEL; ROS, 2009) e (CARMO, 2010).

Chegando ao segundo capítulo, voltamos os olhos à característica de Euler, apresentando de maneira simples e depois decorrendo sobre a sua obtenção utilizando complexos de cadeia e grupos de homologia, conforme (HATCHER, 2002). Além disso, apresentamos a tabela de classificação de superfícies através de seu número de Euler. Aos que se interessarem sobre o assunto indicamos (UENO et al., 2003) e (BARROS, 2010).

No capítulo seguinte discutimos a noção de integral sobre uma superfície. Ocorre que os objetos adequados a integrar não são simples funções reais, e sim objetos mais sofisticados: as formas diferenciais. Introduzimos esses objetos nesse capítulo de discutimos seus aspectos principais. Em particular, definimos a chamada forma volume, permitindo a definição da integral via formas diferenciais e a integral restrita a simplexes. As principais referências se encontram em (LIMA, 2004), (LEE, 2012) e (GUILLEMIN; HAINE, 2019).

Já no quarto capítulo, continuamos estudando a parte da geometria intrínseca, isto é, propriedades calculadas sem sair da superfície. A partir disto, definimos o colchete de Lie, a derivada covariante, de modo a obter o tensor curvatura e encontramos

a curvatura seccional, chegando ao *Theorema Egregium de Gauss*, tendo como principal referência (LEE, 2012).

No quinto e último capítulo, apresentamos o teorema do Índice de Rotação e reunimos todas as noções anteriores, chegando ao esperado teorema de Gauss–Bonnet em sua versão local e global e realizando suas demonstrações. Isto permite obtermos corolários dignos de atenção e logo após discutimos sobre generalizações do teorema, em particular, para hipersuperfícies e a de Chern–Gauss–Bonnet. Um dos corolários obtidos do teorema é hoje conhecido como *Theorema Elegantissimum de Gauss*, o que Gauss considerava “*ao que há de mais elegante na teoria das superfícies curvas.*” (GAUSS, 1828).

1 Geometria das superfícies

Para entendermos o teorema de Gauss–Bonnet em toda a sua extensão, se faz necessária a construção de uma série de conceitos e resultados, que faremos neste trabalho. Começamos nossa aventura buscando compreender o objeto no qual o teorema está definido: a superfície.

1.1 Superfície no espaço euclidiano

Uma superfície é um conjunto de pontos de \mathbb{R}^3 que, localmente, se parecem com o \mathbb{R}^2 . Podemos também pensá-lo como o resultado de uma união de pedaços de planos deformados e colados, de modo que não haja pontas ou arestas. Olhando ainda de maneira intuitiva, podemos entender que uma superfície se trata do conjunto de pontos em \mathbb{R}^3 onde uma formiguinha poderia andar tranquilamente, sem precisar fazer pulos e sem cair (supondo que exista gravidade neste objeto).

Definição 1.1.1 (Superfície). Uma *superfície* no \mathbb{R}^3 é um conjunto não vazio $S \subset \mathbb{R}^3$ onde, para cada $p \in S$, existe um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$, uma vizinhança aberta V de p em S e uma função diferenciável $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ com X sendo C^∞ , chamada de *parametrização*, tal que os seguintes itens são satisfeitos:

1. $X(U) = V$;
2. $X : U \rightarrow V$ é um homeomorfismo;
3. $(dX)_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetiva, para todo $q \in U$.

Observação 1.1.2. Podemos ainda escrever $X(x_1, x_2)$ em termos de suas componentes, isto é, $X(x_1, x_2) = (X_1(x_1, x_2), X_2(x_1, x_2), X_3(x_1, x_2))$. Neste caso, dizemos que X é diferenciável se, e somente se, cada componente possui derivadas parciais de todas as ordens contínuas, ou seja, é de classe C^∞ .

Observação 1.1.3. Se X é diferenciável e satisfaz o primeiro item, então $X : U \rightarrow V$ é contínua e sobrejetora. Logo, para checar que X é um homeomorfismo, basta verificar que ela é injetiva e que possui inversa contínua.

Observação 1.1.4. O fato que $(dX)_q$ é injetiva para todo $q \in U$ é equivalente a dizer que os vetores a seguir são linearmente independentes:

$$\partial_1(q) = \frac{\partial X}{\partial x_1}(q) \text{ e } \partial_2(q) = \frac{\partial X}{\partial x_2}(q).$$

Veja que cada item determina alguma propriedade intrínseca do objeto. O item 1 determina que, caso uma formiga esteja na superfície, ela possui um “mapa” para

guiá-la em sua proximidade. O item 2 nos garante que, deste mapa, conseguimos nos localizar na superfície e vice-versa, e que seu caminho é realizado de maneira suave e que ela não possui, localmente, autointersecções. Já o item 3 determina não haver pontas ou arestas na superfície: um caminho suave da formiga na superfície corresponde a uma curva suave no mapa. Isso servirá para assegurar a existência dos chamados planos tangentes à superfície. Tendo isto definido, podemos verificar alguns exemplos de superfícies que encontramos em nosso cotidiano matemático.

Exemplo 1.1.5 (Gráficos de funções diferenciáveis). Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto, e seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. O gráfico de f se trata do conjunto de \mathbb{R}^3 :

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in U, z = f(x, y)\}.$$

Nessa situação, a função $X : U \rightarrow S$ dada por $X(x_1, x_2) = (x_1, x_2, f(x_1, x_2))$ é uma parametrização com $X(U) = S$. Como a função em si é diferenciável, e, portanto, contínua, X é contínua. A sua inversa é dada pela projeção $f^{-1}(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) = (x_1, x_2)$, apenas retirando a terceira coordenada, também contínua. Logo, X é homeomorfismo. Além disso, como f é diferenciável, então $(dX)_q$ é injetiva. Portanto, gráficos de funções diferenciáveis são superfícies.

Exemplo 1.1.6 (União de superfícies). Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ tal que $S = \bigcup_{i \in I} S_i$, onde cada S_i é um conjunto aberto de S . Se S_i é uma superfície, para todo $i \in I$, então S é uma superfície.

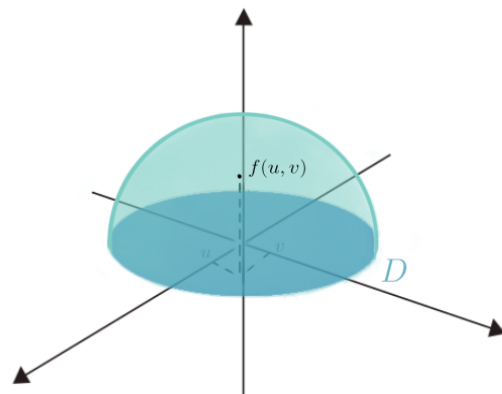
Exemplo 1.1.7 (Esferas). Seja $\mathbb{S}^2 = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid |p|^2 = 1\}$, ou seja, a esfera centrada na origem cujo raio é uma unidade. Denotemos por $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 < 1\}$ o disco unitário do plano euclidiano e por $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ a função diferenciável definida por $f(u, v) = \sqrt{1 - u^2 - v^2}$.

Para $w \in \mathbb{S}^2$, considere a vizinhança aberta de w em \mathbb{S}^2 dada por

$$V_w = \{p \in \mathbb{S}^2 \mid \langle p, w \rangle > 0\}.$$

Escolhendo o sistema de coordenadas de \mathbb{R}^3 de forma que o vetor w tenha componentes $(0, 0, 1)$, temos que V_w é gráfico da função f , então, pelo exemplo 1.1.5, V_w é superfície. Veja ainda que a esfera é resultado da união de tais conjuntos, $\mathbb{S}^2 = \bigcup_{w \in \mathbb{S}^2} V_w$, segue pelo exemplo 1.1.6 que a esfera é uma superfície.

Figura 1.1.1 – Esfera como gráfico de função.



Fonte: Autora, 2023

Exemplo 1.1.8 (Cone sem a origem). Se retiramos o ponto de origem $O = \{0, 0, 0\}$, o cone, descrito por $C^* = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{O\} \mid z^2 = x^2 + y^2\}$ se torna uma superfície.

Seguindo o exemplo da esfera, a parte positiva de um cone pode ser descrita como:

$$C^+ = \left\{ (x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \mid f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \right\}$$

enquanto a parte negativa:

$$C^- = \left\{ (x, y, -f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \mid f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \right\}$$

Nesse caso, o cone C^* é resultado da união de dois gráficos de funções, logo, união de duas superfícies, que pelo exemplo 1.1.6 é uma superfície.

Para não verificarmos todos os passos e obtermos exemplos mais interessantes, desenvolvamos um pouco mais a teoria.

Definição 1.1.9 (Imagens inversas de um valor regular). Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^3$ um conjunto aberto, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação diferenciável e $a \in \mathbb{R}$. Dizemos que a é um valor regular de f se para cada $p \in U$ com $f(p) = a$, $(df)_a$ é sobrejetiva. Podemos ainda dizer que isso é equivalente a $(df)_p \neq 0$ ou ainda $\text{grad } f(p) \neq 0$.

Teorema 1.1.10 (Teorema da função implícita). *Seja A um conjunto aberto de \mathbb{R}^3 , o ponto $p = (x, y, z) \in A$ e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Suponha que $f(p) = a$ e $\frac{\partial f}{\partial z}(p) \neq 0$. Então, existe uma vizinhança aberta U tal que (x_1, x_2) em \mathbb{R}^2 , uma vizinhança aberta V de x_3 em \mathbb{R} e uma função diferenciável $g : U \rightarrow V$ tal que $(U \times V) \subset A$, com $g(x, y) = z$.*

Em outras palavras, o que o teorema nos afirma é que, se $f(p) = a$ e $\frac{\partial f}{\partial z}(p) \neq 0$, então podemos resolver a equação $f(x, y, z) = a$ para um ponto z próximo de p .

Proposição 1.1.11. *Seja $a \in \mathbb{R}$ um valor regular de uma função diferenciável $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, onde A é um conjunto aberto de \mathbb{R}^3 . Então, se $S = f^{-1}(\{a\})$ difere de vazio, S é uma superfície.*

Ideia da prova. Segue diretamente do teorema da função implícita e da definição de imagem inversa de valor regular.

Exemplo 1.1.12 (Hiperbolóide de duas folhas). O hiperbolóide de duas folhas, descrito usualmente pela equação $-x^2 + y^2 + z^2 = 1$ é uma superfície, uma vez que é valor regular da função diferenciável $f(x, y, z) = -x^2 - y^2 + z^2 - 1$, conforme a proposição 1.1.11. Podemos ainda escrever a superfície em seu formato matricial:

$$S = \left\{ p \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 1 & x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

Exemplo 1.1.13 (Quádricas). Generalizando o exemplo 1.1.12, seja A uma matriz simétrica de ordem 4. Consideramos a quádrlica associada:

$$S = \left\{ p \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 1 & p^t \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 \\ p \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

Suponhamos que S é não vazio e que, para cada $p \in \mathbb{R}^3$, nós temos $\begin{pmatrix} 1 & p^t \end{pmatrix} A \neq 0$. Então, nesse caso, S é uma superfície. Para ver isso, definimos a função diferenciável $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(p) = \begin{pmatrix} 1 & p^t \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 \\ p \end{pmatrix}$$

Para cada $p, v \in \mathbb{R}^3$, nós temos

$$(df)_p(v) = 2 \begin{pmatrix} 1 & p^t \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}.$$

Queremos verificar que 0 é valor regular de f , ou seja, que a diferencial $(df)_p$ é sempre diferente de zero para $p \in S$. De fato, se $(df)_p = 0$ para algum $p \in S$, então para todo $v \in \mathbb{R}^3$, $2 \begin{pmatrix} 1 & p^t \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = 0$. Logo, para que tal equação se verifique para todo vetor v , é necessário e suficiente que $2 \begin{pmatrix} 1 & p^t \end{pmatrix} A$ seja da forma $(\lambda_0 \ 0)$, para algum $\lambda_0 \in \mathbb{R}$. Como, porém, para $p \in S$, $f(p) = 0$ então

$$\begin{pmatrix} 1 & p^t \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ p \end{pmatrix} = 0.$$

Sendo assim, $\lambda_0 = 0$, o que implica que $\begin{pmatrix} 1 & p^t \end{pmatrix} A = 0$, contradizendo nossa hipótese. Portanto, pela proposição 1.1.11, S é uma superfície, e lembramos que as quádrlicas reais são formadas por elipsóides, hiperbolóides, parabolóides e cilindros.

Exemplo 1.1.14 (Toro de revolução). Seja $\mathbb{S}^1(r)$ um círculo de raio $r > 0$. Se rotacionarmos este círculo em torno de uma reta no mesmo plano ao qual ele pertence e a uma distância R (com $R > r$) do centro do círculo, nós geramos um lugar geométrico chamado de *toro de revolução*, denotado por \mathbb{T}^2 .

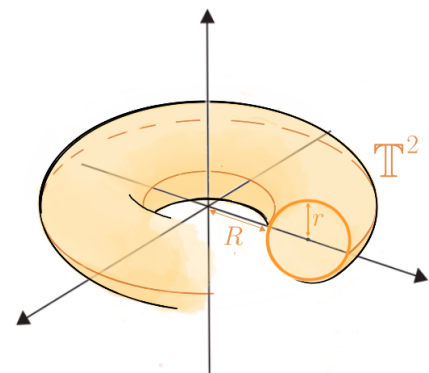
Mais explicitamente, consideremos que, em \mathbb{R}^3 , o círculo $\mathbb{S}^1(r)$ se encontra no plano $x = 0$ com centro no ponto $(0, R, 0)$ e que o eixo de rotação é o eixo Oz , então o toro de revolução será dado por

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = r^2 \right\}.$$

Considere a função diferenciável $f : \mathbb{R}^3 - \{\text{eixo } z\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y, z) = (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2.$$

Figura 1.1.2 – Toro de revolução



Fonte: Autora, 2023.

Então $S = f^{-1}(\{r^2\})$. Além disso,

$$\text{grad } f = \left(\frac{2x(\sqrt{x^2+y^2}-R)}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \frac{2y(\sqrt{x^2+y^2}-R)}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad 2z \right)$$

Como a única forma de zerar todas as entradas seria se $x = y = z = 0$, sendo assim, $r^2 > 0$ é valor regular, e, pela proposição 1.1.11, \mathbb{T}^2 é uma superfície.

Definição 1.1.15 (Curvas simples). Utilizamos o termo *curva simples* para objetos unidimensionais no espaço euclidiano \mathbb{R}^3 (ou do plano \mathbb{R}^2) análogos à superfície. Ou seja, um subconjunto não vazio C de \mathbb{R}^3 é uma curva simples quando, para cada ponto $p \in C$ existe uma vizinhança aberta V em C de forma que exista uma aplicação diferenciável $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ onde $\alpha'(t) \neq 0$, para todo $t \in S$, $\alpha(I) = V$.

Teorema 1.1.16. *Qualquer componente de uma curva simples de \mathbb{R}^3 ou \mathbb{R}^2 é um homeomorfismo ou para um círculo ou para o \mathbb{R} , dependendo se é ou não compacto.*

Ideia da prova. Toda curva simples C é a imagem de uma curva $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ utilizando a parametrização correta. Se a curva é compacta, α pode ser escolhida de modo a ser periódica. Se não for, α pode ser escolhida de modo a ser um homeomorfismo de I para C .

Assim, linhas retas e círculos são os “únicos” exemplos de curvas simples.

1.2 Mudança de parametrização

Se um ponto p de uma dada superfície pertence à imagem de duas parametrizações, existem dois sistemas de coordenadas próximo a este ponto. Haveria alguma forma de transitarmos entre as parametrizações?

Lema 1.2.1. *Seja S uma superfície e $X : U \rightarrow S$ uma parametrização. Seja $p_0 \in U$ $p = X(p_0)$. Então, existe uma vizinhança aberta V de p_0 e uma projeção ortogonal $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ com relação a uma das três coordenadas de \mathbb{R}^3 de modo que $W := (\pi \circ X)(V)$ é um aberto em \mathbb{R}^2 e $\pi \circ X : V \rightarrow W$ é um difeomorfismo.*

Demonstração. Escrevamos explicitamente as componentes da parametrização X como

$$X(x_1, x_2) = (X_1(x_1, x_2), X_2(x_1, x_2), X_3(x_1, x_2)).$$

Então, pela hipótese de que dX é injetiva em todo ponto, obtemos que a matriz

$$\begin{pmatrix} \partial_1 X_1(p_0) & \partial_2 X_1(p_0) \\ \partial_1 X_2(p_0) & \partial_2 X_2(p_0) \\ \partial_1 X_3(p_0) & \partial_2 X_3(p_0) \end{pmatrix}$$

tem posto 2. Sendo assim, ela admite uma submatriz 2×2 inversível, que supomos, sem perda de generalidade, ser formada pelas duas primeiras linhas. Seja então $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a projeção ortogonal para o plano xy , a qual é dada por $\pi(x, y, z) = (x, y)$. Assim, a composta $\pi \circ X$ é uma função diferenciável de U para \mathbb{R}^2 e

$$d(\pi \circ X)_{p_0} = \begin{pmatrix} \partial_1 X_1(p_0) & \partial_2 X_1(p_0) \\ \partial_1 X_2(p_0) & \partial_2 X_2(p_0) \end{pmatrix}$$

é inversível. Aplicando o teorema da função inversa¹, encontramos um conjunto aberto $V \subset U$ verificando o enunciado. \square

Observação 1.2.2. Veja que $Y = X \circ (\pi \circ X)^{-1} : W \rightarrow S$ é uma parametrização de S que cobre p e em que $\pi \circ Y$ é a função identidade de W . Isto é, você sempre consegue cobrir um dado ponto de uma superfície por uma parametrização que é a função inversa de uma projeção ortogonal para um plano de coordenadas.

Proposição 1.2.3. *Seja S uma superfície e tome um ponto $p \in S$. Podemos encontrar uma parametrização de S perto de p cuja imagem é o gráfico de uma função diferenciável definida em um dos três planos de coordenadas de \mathbb{R}^3 .*

Exemplo 1.2.4 (Cone). O cone descrito por $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 = x^2 + y^2\}$ não é uma superfície. De fato, se C fosse uma superfície, poderíamos tomar uma vizinhança qualquer da origem $O = (0, 0, 0)$ que seria o gráfico de uma função $x = f(y, z)$, $y = g(x, z)$ ou $z = h(x, y)$. No entanto, todas as projeções de C nos planos não são injetivos.

Seja S uma superfície e $X : U_1 \rightarrow S$, $Y : U_2 \rightarrow S$ duas parametrizações tais que $A = X(U_1) \cap Y(U_2)$ seja diferente de vazio. Então a função

$$h = Y^{-1} \circ X : X^{-1}(A) \rightarrow Y^{-1}(A)$$

é um homeomorfismo que leva coordenadas com respeito a X em coordenadas com respeito a Y . Dizemos que h é uma mudança de parâmetros ou mudança de coordenadas. Intuitivamente, seria como se a formiga que habita a superfície trocasse de mapa.

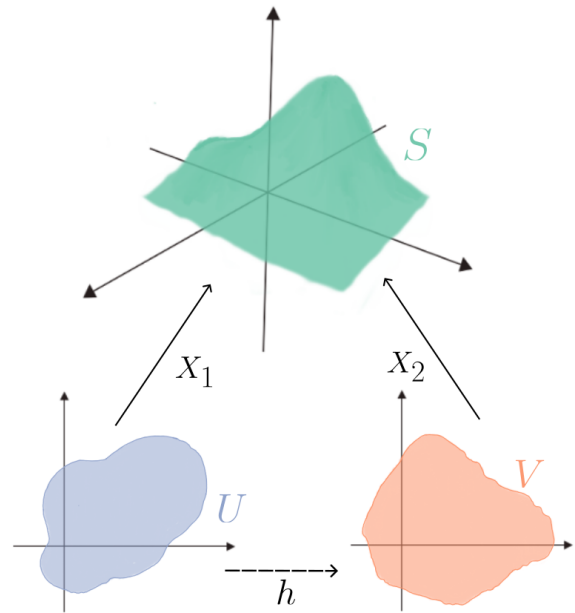
Exemplo 1.2.6 (Toro de revolução). Como vimos, o toro de revolução de raio r pode ser descrito como foi feito no exemplo 1.1.14, mas existem outras formas de descrevê-lo. Uma das mais famosas se trata da mudança de parametrização para funções trigonométricas, utilizando as coordenadas paramétricas. Para isto, a circunferência de raio r pode ser descrita por $x = r \cos(\theta)$ e $y = r \sin(\theta)$. Em seguida, rotacionamos esta circunferência a uma distância R do eixo z , com $R - r > 0$ e assim, para $-\pi \leq \theta \leq \pi$ e $-\pi \leq \phi \leq \pi$, o toro de revolução é descrito como

$$X(\theta, \phi) = \left([R + r \cos(\theta)] \cos(\phi), [R + r \cos(\theta)] \sin(\phi), r \sin(\theta) \right).$$

¹ Disponível em (LIMA, 2004)

Teorema 1.2.5. *Mudanças de parâmetros são difeomorfismos.* Figura 1.2.1 – Mudança de parametrização

Demonstração. Seja a mudança de parâmetros h uma função bijetiva em que sua inversa é outra mudança de parâmetros, para mostrar o teorema é suficiente ver que h é diferenciável em cada ponto do seu domínio $X^{-1}(A)$. Seja $p \in S$, $q_1 \in X^{-1}(A)$ e $q_2 \in X^{-1}(A)$ tais que $X(q_1) = p$ e $Y(q_2) = p$. Aplicando o lema 1.2.1, nós encontramos o conjunto aberto $V \subset Y^{-1}(A)$ e a projeção π , a qual assumimos ser sobre o plano xy , tal que $\pi \circ Y : V \rightarrow (\pi \circ Y)(V)$ é um difeomorfismo. Então $h^{-1}(V)$ é uma vizinhança aberta de q_1 e, em sua vizinhança, $h = (\pi \circ Y)^{-1} \circ \pi \circ X$. Assim, h é diferenciável em $h^{-1}(V)$ desde que a composição $X : h^{-1}(V) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, e $(\pi \circ Y)^{-1} : (\pi \circ Y)(V) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \subset \mathbb{R}^2$ faça sentido. □



Fonte: Autora, 2023

1.3 Aplicações diferenciáveis

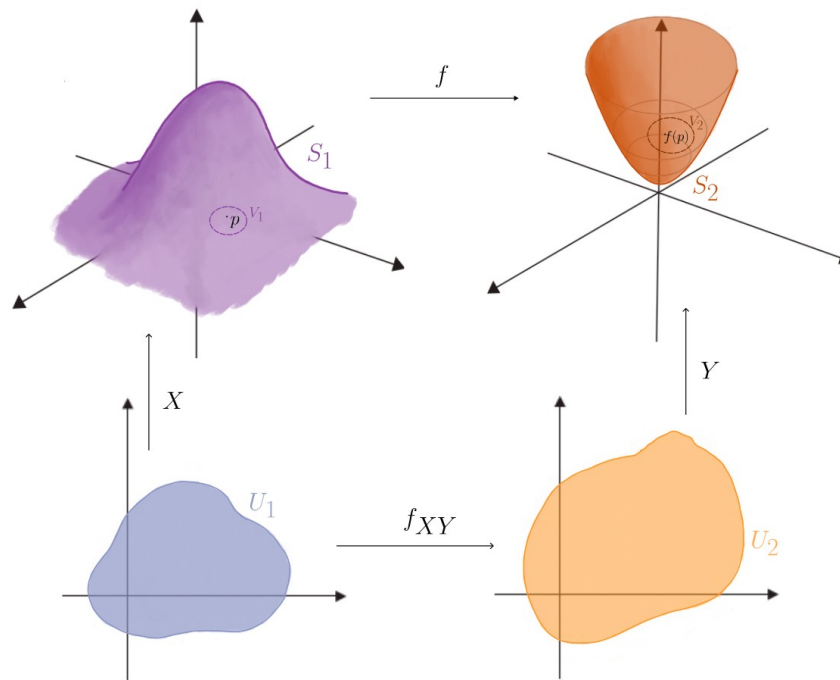
Vimos que as parametrizações levam conjuntos abertos do \mathbb{R}^2 para o \mathbb{R}^3 de maneira contínua e diferenciável. No entanto, pode ser de nosso interesse definir aplicações em uma superfície para descobrirmos mais coisas a seu respeito. Como poderíamos determinar se uma aplicação é contínua e diferenciável?

Definição 1.3.1 (Aplicação diferenciável). Sejam S_1 e S_2 duas superfícies, uma função $f : S_1 \rightarrow S_2$ é dita uma *aplicação diferenciável* se, para quaisquer duas parametrizações $X : U_1 \rightarrow V_1$ e $Y : U_2 \rightarrow V_2$, com $f(V_1) \subset V_2$ a função $f_{XY} : U_1 \rightarrow U_2$ dada por $Y^{-1} \circ f \circ X$ é diferenciável.

Observação 1.3.2. Podemos ainda definir aplicações diferenciáveis entre \mathbb{R}^n e uma superfície S . Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto.

1. A aplicação $f : S \rightarrow \mathbb{R}^m$ é dita diferenciável se, para qualquer parametrização, $X : U \rightarrow S$ de S , a composição $f \circ X : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ é diferenciável.
2. A aplicação $f : A \rightarrow S$ será diferenciável se $i \circ f : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ é diferenciável, onde $i : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ é a função inclusão, ou seja, sua imagem fica identificada com seu domínio.
3. A aplicação $f : S_1 \rightarrow S_2$ é diferenciável se $i \circ f : S_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é diferenciável, no sentido do item 1, sendo $i : S_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a inclusão.

Figura 1.3.1 – Aplicação diferenciável



Fonte: Autora, 2023.

Observação 1.3.3. Se $f, g : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ são funções diferenciáveis e temos $\lambda \in \mathbb{R}$, então $f + g$, $f - g$, $\lambda f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\langle f, g \rangle : S \rightarrow \mathbb{R}$ são diferenciáveis, e se, $g : S \rightarrow \mathbb{R}$ com $g(p) \neq 0$ para todo p , então $\frac{f}{g}$ é também diferenciável.

Podemos encontrar abaixo alguns exemplos de funções diferenciáveis definidas em (ou que tomam os valores de) uma superfície e que aparecem com frequência.

Exemplo 1.3.4 (Restrições). Seja $A \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto aberto e seja $F : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função diferenciável no sentido do cálculo. Se $S \subset A$ é uma superfície, nós imediatamente vemos que o mapa $f : S \rightarrow \mathbb{R}^m$ definido por $f = F|_S$ é diferenciável pela própria definição que fizemos acima. Com isso obtemos que a função inclusão $i : S \rightarrow \mathbb{R}^3$, a função identidade $\text{id}|_S : S \rightarrow S$, e a função constante definida em S são diferenciáveis, já que são restrições de funções diferenciáveis.

Exemplo 1.3.5 (Quadrado da distância). Se p_0 é um ponto qualquer em \mathbb{R}^3 e S é uma superfície, então a função $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$f(p) = \|p - p_0\|^2, \quad \forall p \in S,$$

dado o quadrado da distância euclidiana dos pontos de S para p_0 . Como é restrição de S para uma função diferenciável definida no \mathbb{R}^3 , f é diferenciável.

Exemplo 1.3.6 (Função distância). Pegue $p_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus S$, onde S é uma superfície. Então a função $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$f(p) = \|p - p_0\|, \quad \forall p \in S$$

mede a distância euclidiana dos pontos da superfície S para o ponto p_0 e é diferenciável, uma vez que é uma restrição da superfície S para a função diferenciável $\|p - p_0\|$ definida no conjunto aberto $\mathbb{R}^3 \setminus \{p_0\}$ incluindo S .

Exemplo 1.3.7 (Curva diferenciável em uma superfície). Se $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma curva diferenciável em \mathbb{R}^3 cujo traço pertence a uma superfície S , então o mapa $\alpha : I \rightarrow S$ é diferenciável, pelo item 2 da definição. Dizemos que $\alpha : I \rightarrow S$ é uma curva diferenciável na superfície S .

Lema 1.3.8. *Seja S uma superfície e $f : S \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função definida em S . Se, para cada $p \in S$, existe uma parametrização $X_p : U_p \rightarrow S$ tal que $p \in X_p(U_p)$ onde $f \circ X_p : U_p \rightarrow \mathbb{R}^m$ é diferenciável, então, f é diferenciável conforme a definição 1.3.2.*

Demonstração. Seja $X : U \rightarrow S$ uma parametrização qualquer de S . Queremos provar que $f \circ X : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ é diferenciável. Mostraremos então que a composta é derivável em qualquer ponto $q \in U$. Por hipótese, para o ponto $p = X(q) \in S$, existe uma parametrização $X_p : U_p \rightarrow S$ tal que $p \in X_p(U_p)$ e $f \circ X_p : U_p \rightarrow \mathbb{R}^m$ é diferenciável. Seja $A = X(U) \cap X_p(U_p)$, que não é vazio, uma vez que contém p . Sendo assim, a mudança de parametrização $h : X^{-1}(A) \rightarrow X_p^{-1}(A)$ é um difeomorfismo. Logo, temos que $f \circ X = (f \circ X_p) \circ h$, em $X^{-1}(A)$, e acabamos. \square

Teorema 1.3.9. *Suponha que $f : S_1 \rightarrow S_2$ e $g : S_2 \rightarrow S_3$ são aplicações diferenciáveis, onde S_1, S_2, S_3 , são ou superfícies, ou conjuntos abertos de espaços euclidianos. Então, a aplicação composta $g \circ f : S_1 \rightarrow S_3$ é também diferenciável.*

Demonstração. Se S_2 é um conjunto aberto euclidiano, o resultado é uma consequência direta da definição 1.3.2. Se, porém, S_2 é uma superfície, basta mostrar que, no caso onde $S_1 = A$ é um conjunto aberto de \mathbb{R}^n e $S_3 = \mathbb{R}^m$ é um espaço euclidiano. Os casos restantes podem ser derivados desta ou de outras definições já feitas anteriormente. Seja $q \in A$ e $X : U \rightarrow S_2$ uma parametrização cobrindo $p = f(q)$ tal que $\pi \circ X = I|_U$, onde $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é a projeção ortogonal para algum plano de coordenadas. Então, $f^{-1}(X(U))$ é uma vizinhança aberta de q onde

$$g \circ f = (g \circ X) \circ \pi \circ f,$$

é uma composição de aplicações diferenciáveis entre conjuntos abertos euclidianos. Portanto, $g \circ f$ é diferenciável para cada ponto $q \in A$ e, portanto, chegamos no resultado desejado. \square

Este teorema diz ainda que a coleção de todas as superfícies forma uma categoria. Nesse caso, os objetos são as superfícies, os morfismos são dados pelas aplicações diferenciáveis, a identidade constitui-se da aplicação identidade id_S e, conforme vimos, as aplicações respeitam a composição.

Exemplo 1.3.10 (Curva entre superfícies). Seja $\alpha : I \rightarrow S_1$ é uma curva em uma superfície S_1 e seja $f : S_1 \rightarrow S_2$ seja uma aplicação diferenciável de S_1 para uma superfície ou um conjunto aberto euclidiano S_2 . Então $f \circ \alpha : I \rightarrow S_2$ é uma curva diferenciável em S_2 .

Exemplo 1.3.11 (Restrição de domínio). Se $f : S \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma aplicação diferenciável definida em uma superfície S e $S_1 \subset S$ é aberto, então $f|_{S_1} : S_1 \rightarrow \mathbb{R}^m$ é diferenciável.

Exemplo 1.3.12 (União de superfícies). Suponha que a superfície S é a união $S = \bigcup_{i \in I} S_i$, onde S_i é aberto. Se $f : S \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma função tal que para cada $f|_{S_i} : S_i \rightarrow \mathbb{R}^m$ é diferenciável, então f é diferenciável.

Exemplo 1.3.13. Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto do plano. Identificando o \mathbb{R}^2 como um plano do \mathbb{R}^3 , nós podemos pensar no \mathbb{R}^2 como uma superfície, bem como U . Tomando a função $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, então, f é diferenciável, no sentido da 1.3.2 e no sentido usual.

Conhecida a noção de uma aplicação diferenciável entre superfícies, podemos definir ainda o conceito de “equivalência” diferenciável. A noção de aplicações contínuas entre espaços topológicos determina que exista um homeomorfismo entre eles. De maneira parecida, um difeomorfismo entre duas superfícies S_1 e S_2 será, por definição, uma aplicação bijetiva e diferenciável $\phi : S_1 \rightarrow S_2$ cuja aplicação inversa $\phi^{-1} : S_2 \rightarrow S_1$ também é diferenciável.

Por exemplo, a aplicação identidade $\text{id}|_S : S \rightarrow S$ de uma dada superfície é um difeomorfismo, e, se $\phi : S_1 \rightarrow S_2$ é um difeomorfismo entre superfícies, então sua inversa, $\phi^{-1} : S_2 \rightarrow S_1$ é um difeomorfismo de igual modo. Duas superfícies são ditas *difeomorfas* quando existe um difeomorfismo entre elas. Nesse caso, nós imediatamente vemos que elas são homeomorfas. De fato, um resultado profundo da topologia diferencial afirma que duas superfícies homeomorfas devem ser, necessariamente, difeomorfas².

1.4 Plano tangente

Queremos agora definir, para qualquer ponto de uma dada superfície, o melhor objeto para aproximar linearmente a superfície próxima a um certo ponto. Como podemos tornar mais precisa esta noção utilizando nosso conhecimento do cálculo?

² Aos leitores interessados, sugerimos a leitura do capítulo 1 do (HIRSCH, 1994)

Definição 1.4.1 (Plano tangente). Seja S uma superfície e seja $p \in S$ um ponto. Diremos que um vetor $v \in \mathbb{R}^3$ é *tangente* a S passando por p se podemos encontrar uma curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$, $\varepsilon > 0$, tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. O conjunto que consiste em todos os vetores tangentes a S no ponto p será representado por $T_p S$.

Lema 1.4.2. *Seja S uma superfície e $p \in S$, e $X : U \rightarrow S$ a parametrização de S com $p \in X(U)$. Então*

$$T_p S = (dX)_{X^{-1}(p)}(\mathbb{R}^2).$$

Demonstração. Tomemos $w \in \mathbb{R}^2$. Considere o segmento $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$, para um ε pequeno, dado por $\beta(t) = q + tw$, onde $q = X^{-1}(p)$. A curva β satisfaz $\beta(0) = q$ e $\beta'(0) = w$. Então, se definirmos $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ como a composta $\alpha = X \circ \beta$, obtemos que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = (X \circ \beta)'(0) = (dX)_q(w)$. Então, $(dX)_q(\mathbb{R}^2) \subset T_q S$, já que α toma valores em S . Por outro lado, tome um vetor v tangente a S por p . Por definição, existe uma curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Tomando ε pequeno o suficiente, podemos assumir, pela continuidade de α , que o traço está contido em $X(U)$. Definimos então a curva em U por $\beta = X^{-1} \circ \alpha$. Temos que $\beta(0) = q$ e $\alpha = X \circ \beta$. Então, $v = \alpha'(0) = (X \circ \beta)'(0) = (dX)_q(\beta'(0))$, isto é, qualquer vetor tangente a S por p se projeta na imagem de $(dX)_q$. \square

Observação 1.4.3. Uma primeira consequência do Lema 1.4.2 é que o conjunto $T_p S$ formado por todos os vetores tangentes a um dado ponto é um subespaço linear de dimensão 2 de \mathbb{R}^3 é o que chamaremos de plano tangente a superfície S ao ponto p .

Observação 1.4.4. Se $X : U \rightarrow S$ é uma parametrização de S que cobre p e $q = X^{-1}(p)$, então, pelo Lema 1.4.2, vimos que $(dX)_q(\mathbb{R}^2)$ não depende de X e então $\{\partial_1(q), \partial_2(q)\}$ é base de $T_p S$.

Exemplo 1.4.5. (Imagens inversas). Se $A \subset \mathbb{R}^3$ é aberto, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, e a é um valor regular de f pertencendo a sua imagem, então sabemos, pelo exemplo 1.1.9 que $S = f^{-1}(\{a\})$ é uma superfície. Para todo $p \in S$, nós vemos que

$$T_p S = \text{Ker}((df)_p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}).$$

De fato, se $v \in T_p S$, então existe uma curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Por isso, $(f \circ \alpha)(t) = a$ para todo t e, ao derivarmos no ponto $t = 0$, $(df)_p(v) = (f \circ \alpha)'(0) = 0$. Então, v está no núcleo de $(df)_p$. Uma vez que $T_p S$ e $\text{Ker}(df)_p$ são subespaços lineares de dimensão dois e um deles inclui o outro, eles devem coincidir, como queríamos.

Exemplo 1.4.6 (Planos). Seja $P = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid \langle p - p_0, a \rangle = 0\}$, com $p_0, a \in \mathbb{R}^3$ e $|a| = 1$, isto é, o plano que passa pelo ponto p_0 e é normal a a . Se definimos $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(p) = \langle p - p_0, a \rangle = 0$, então temos que, para cada $p \in P$,

$$T_p P = \text{Ker}(df)_p = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \langle p - p_0, v \rangle = 0\}.$$

Ou seja, o plano tangente de P a qualquer ponto coincide com seu plano diretor.

Exemplo 1.4.7 (Esferas). Seja $\mathbb{S}^2(r) = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid \|p - p_0\|^2 = r^2\}$ a esfera de centro p_0 e raio $r > 0$. Então $\mathbb{S}^2(r) = f^{-1}(\{r^2\})$ para a função $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(p) = \|p - p_0\|^2$. Portanto, $T_p\mathbb{S}^2(r) = \text{Ker}(df)_p = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \langle p - p_0, v \rangle = 0\}$. Assim $T_p\mathbb{S}^2(r)$ é um plano linear ortogonal ao vetor posição $p - p_0$ relativo a p_0 .

Exemplo 1.4.8 (Conjuntos abertos). Se S_1 é um conjunto aberto de uma superfície S e $p \in S_1$, então $T_pS_1 = T_pS$.

1.5 Diferencial de aplicações diferenciáveis

Vimos que uma superfície está definida por meio de uma parametrização diferenciável e que podemos descrever aplicações diferenciáveis sob essa superfície. Nos resta perguntar: como calcular a diferencial de uma função entre superfícies? Quais regras de diferenciação valem?

Definição 1.5.1 (Diferenciável de f). Seja S uma superfície e seja $f : S \rightarrow \mathbb{R}^m$ seja uma função diferenciável vetorial. Para um ponto $p \in S$, nós definimos a *diferenciável de f em p* , a qual denotaremos por $(df)_p$. Dado $v \in T_pS$, escolha uma curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$, e então temos:

$$(df)_p(v) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ \alpha)(t) = (f \circ \alpha)'(0).$$

Se $f : S_1 \rightarrow S_2$ é diferenciável, então é claro que $(df)_p(v) \in T_{f(p)}S_2$, e definimos a diferencial de f como a restrição (no contradomínio) $(df)_p : T_pS_1 \rightarrow T_{f(p)}S_2$.

Para o caso de uma aplicação $f : A \rightarrow S$, entre um aberto $A \subset \mathbb{R}^n$ e uma superfície S , dados $p \in A$ e $v \in \mathbb{R}^n$, a curva $\alpha(t) = p + tv$, para $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, satisfaz $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Então $f \circ \alpha$ é uma curva em $S \subset \mathbb{R}^3$ com $f \circ \alpha(0) = f(p)$ e $(f \circ \alpha)'(0) = (df)_p(v)$, ou seja, $(df)_p(v) \in T_{f(p)}S$, e veremos também a diferencial de f como a restrição no contradomínio $(df)_p : \mathbb{R}^n \rightarrow T_{f(p)}S$.

Lema 1.5.2. $(df)_p : T_pS \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma função bem definida, isto é, $(df)_p(v)$ não depende da curva escolhida e, mais ainda, é uma aplicação linear.

Demonstração. Seja $X : U \rightarrow S$ uma parametrização com $p \in X(U)$. Nós sabemos que $T_pS = (dX)_q(\mathbb{R}^2)$, onde $q = X^{-1}(p)$ e então $(dX)_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow T_pS$ é um isomorfismo linear. Pegando ε pequeno o suficiente, nós podemos assumir que $\alpha((-\varepsilon, \varepsilon)) \subset X(U)$. A curva $X^{-1} \circ \alpha$ satisfaz $(X^{-1} \circ \alpha)(0) = q$. Então $X \circ (X^{-1} \circ \alpha) = \alpha$, diferenciável em $t = 0$, nós temos $d(X)_q[(X^{-1} \circ \alpha)'(0)] = v$, isto é, $(X^{-1} \circ \alpha)'(0) = (dC)_q^{-1}(v)$. Então, usando a regra da cadeia, obtemos que:

$$(f \circ \alpha)'(0) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ \alpha)(t) = (f \circ X) \circ (X^{-1} \circ \alpha)$$

$$= d(f \circ X)_q((X^{-1} \circ \alpha)'(0)) = d(f \circ X)_q \circ (dX)_q^{-1}(v),$$

de onde segue a igualdade

$$(df)_p = d(f \circ X)_q \circ (dX)_q^{-1},$$

que é o resultado desejado. \square

Exemplo 1.5.3. Seja S uma superfície contida em um conjunto aberto $A \subset \mathbb{R}^3$ e seja $F : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação diferenciável. Denotamos por $f : S \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma restrição $f = F|_S$. Dado um $p \in S$ e seja $v \in T_p S$, para cada curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$, nós temos

$$(df)_p(v) = (f \circ \alpha)'(0) = (F \circ \alpha)'(0) = (dF)_p(v).$$

Então $(df)_p$ é uma restrição a $T_p S$ de $(dF)_p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Exemplo 1.5.4. Seja S uma superfície, $p \in S$, $v \in T_p S$, e seja $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ uma curva tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$.

1. (Função altura) Se $p_0 \in \mathbb{R}^3$ e $a \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$, então a diferencial da altura $h : S \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(p) = \langle p - p_0, a \rangle$ é

$$(dh)_p(v) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \langle \alpha(t) - p_0, a \rangle = \langle v, a \rangle.$$

2. (Função do quadrado da distância) Se $p_0 \in \mathbb{R}^3$, então a função $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ que é o quadrado da distância do ponto p_0 , tem como diferencial

$$(df)_p(v) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \|\alpha(t) - p_0\|^2 = 2 \langle \alpha'(0), \alpha(0) - p_0 \rangle = 2 \langle v, p - p_0 \rangle.$$

3. (Função distância) Se $p_0 \in \mathbb{R}^3 - S$, então a diferencial da função distância $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ para o ponto p_0 é dada por

$$(df)_p(v) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \|\alpha(t) - p_0\| = \frac{\langle v, p - p_0 \rangle}{|p - p_0|}.$$

4. (Quadrado da distância a uma linha reta) Para cada $p_0, a \in \mathbb{R}^3$ com $|a| = 1$, a diferencial da função $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por $f(p) = |p - p_0|^2 - \langle p - p_0, a \rangle^2$ é dado por:

$$(df)_p(v) = 2[\langle v, p - p_0 \rangle - \langle p - p_0, a \rangle \langle v, a \rangle].$$

Teorema 1.5.5 (Regra da cadeia). *Sejam $f : S_1 \rightarrow S_2$ e $g : S_2 \rightarrow S_3$ aplicações diferenciáveis, onde S_1, S_2, S_3 são ou superfícies ou conjuntos euclidianos abertos. Dado $p \in S_1$, nos temos*

$$d(g \circ f)_p = (dg)_{f(p)} \circ (df)_p.$$

Demonstração. Primeiramente, pontuemos que as aplicações $(df)_p : T_p S_1 \rightarrow T_{f(p)} S_2$, $(dg)_{f(p)} : T_{f(p)} S_2 \rightarrow T_{(g \circ f)(p)} S_3$ e $d(g \circ f)_p : T_p S_1 \rightarrow T_{(g \circ f)(p)} S_3$, onde $T_q S_i = \mathbb{R}^n$, onde S_i é um conjunto aberto de \mathbb{R}^n , temos domínios e intervalos os quais nos permitem fazer as composições necessárias. Se $v \in T_p S_1$, escolhamos a curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S_1$ satisfazendo $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Então $f \circ \alpha$ é uma curva em S_2 com $(f \circ \alpha)(0) = f(p)$ e $(f \circ \alpha)'(0) = (df)_p(v)$. Mais ainda,

$$d(g \circ f)_p(v) = [(g \circ f) \circ \alpha]'(0) = [g \circ (f \circ \alpha)]'(0) = (dg)_{f(p)}((df)_p(v)). \quad \square$$

Dada uma função diferenciável $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ definida em uma superfície e um ponto $p \in S$, nós diremos que p é um *ponto crítico de f* quando $(df)_p$ não é sobrejetiva. Em especial, quando \mathbb{R} é o nosso contradomínio, temos $(df)_p = 0$. A proposição abaixo relaciona algumas propriedades de funções diferenciáveis relativas a seus pontos críticos.

Proposição 1.5.6. *Seja S uma superfície. As duas afirmações a seguir são verdadeiras:*

1. *Se $f : S \rightarrow \mathbb{R}^m$ é diferenciável, S é conexa e $(df)_p = 0$ para todo $p \in S$, então f é constante.*
2. *Se $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável e em $p \in S$ temos um extremo local de f , então p é um ponto crítico de f .*

Demonstração. De acordo com cada item:

1. Tomemos $a \in f(S)$. Então o conjunto $A = \{p \in S \mid f(p) = a\}$ é um conjunto não vazio fechado de S . Checamos também que ele é aberto. Escolhemos $p \in A$ e seja $X : U \rightarrow S$ uma parametrização tal que $p \in X(U)$ para um U conexo. Para cada $q \in U$ temos, pela regra da cadeia (teorema 1.5.5), $d(f \circ X)_q = (df)_{X(q)} \circ (dX)_q = 0$. Então, do cálculo, $f \circ X$ é constante em U e, portanto, $f = (f \circ X) \circ X^{-1}$ é constante em $X(U)$. Então $f(p) = a$ e $p \in X(U)$, nós temos que $X(U) \subset A$, isto é, A é aberto. Uma vez que S é conexa, nós deduzimos que $A = S$, i.e., f é constante.
2. Seja p um ponto em S tal que f contém um ponto de extremo local. Então $v \in T_p S$ e $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ é uma curva tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$, então, a aplicação diferencial $t \rightarrow (f \circ \alpha)(t)$ tem um extremo local em $t = 0$. Consequentemente, $(df)_p(v) = (f \circ \alpha)'(0) = 0$, Então, p é um ponto crítico de f . \square

A noção entre a diferencial e uma função diferencial definida em uma superfície e a regra da cadeia nos permitem obter um teorema da função implícita no contexto de teoria das superfícies.

Teorema 1.5.7. *Seja S uma superfície, $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável, $p \in S$ e $a \in \mathbb{R}$. Suponhamos que $f(p) = a$ e $(df)_p \neq 0$, isto é, p não é um ponto crítico de f . Então, existe uma vizinhança aberta V de p em S e um número real $\varepsilon > 0$ e uma curva injetiva e regular $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$ que é um homeomorfismo com sua imagem tal que*

$$\alpha(0) = p \text{ e } f^{-1}(\{a\}) \cap V = \alpha((-\varepsilon, \varepsilon)).$$

Então, se a pertence a imagem de f , então o conjunto $f^{-1}(\{a\})$ é uma curva simples.

Demonstração. Seja U um conjunto aberto do \mathbb{R}^2 contendo a origem e seja $X : U \rightarrow S$ uma parametrização de S com $X(0,0) = p$. Defina $\bar{f} : U \rightarrow \mathbb{R}$ por $\bar{f} = f \circ X$, então \bar{f} é diferenciável com $\bar{f}(0,0) = f(X(0,0)) = f(p) = a$ assim, pela regra da cadeia, $(d\bar{f})_{(0,0)} \neq 0$, isto é, $(\partial_1 \bar{f}, \partial_2 \bar{f})(0,0) \neq (0,0)$. Assumindo que $\partial_2 \bar{f}(0,0) \neq 0$. Aplicando o teorema da função implícita, temos a existência de dois números reais $\varepsilon, \delta > 0$ e uma função diferenciável $h : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow (-\delta, \delta)$ tal que

$$(-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\delta, \delta) \subset U, \quad h(0) = 0,$$

e mais ainda,

$$\{(x_1, x_2) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\delta, \delta) \mid \bar{f}(x_1, x_2) = a\} = \{(x_1, h(x_1)) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \in (-\varepsilon, \varepsilon)\}. \quad (1.5.1)$$

Mantendo isso em mente, considere a vizinhança $V = X((-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\delta, \delta))$ de $(0,0)$ e a curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\alpha(t) = X(t, h(t))$, sendo um homeomorfismo em sua imagem. Então $\alpha(0) = X(0, h(0)) = p$, $\alpha'(t) = (dX)_{(t, h(t))}(1, h'(t))$, o qual não é nulo, uma vez que $(dX)_{(t, h(t))}$ é injetiva. Além disso, se usarmos a aplicação X a igualdade (1.5.1), obtemos

$$\{p \in V \mid f(p) = a\} = \{\alpha(t) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in (-\varepsilon, \varepsilon)\},$$

que é $f^{-1}(\{a\}) \cap V$ é também o traço de α . □

Uma aplicação geométrica imediata é o teorema da função implícita aplicado na intersecção de superfícies próximas a um ponto comum. Se S_1 e S_2 são duas superfícies e $p \in S_1 \cap S_2$ é um ponto de intersecção, nós diremos que S_1 e S_2 são tangentes em p quando os planos tangentes $T_p S_1$ e $T_p S_2$ coincidem. Ou seja, isto é, quando $T_p S_1 \neq T_p S_2$ diremos que as duas superfícies se intersectam transversalmente ou que elas são transversais em p . Nessa última situação, nós podemos afirmar que a intersecção é o traço de uma curva.

Proposição 1.5.8. *Se as superfícies S_1 e S_2 intersectam transversalmente em um ponto p então há uma vizinhança aberta V de p em \mathbb{R}^3 , um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ e uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, que é um homeomorfismo em sua imagem, tal que $\alpha(I) = V \cap S_1 \cap S_2$.*

Demonstração. Pelo teorema ??, sabemos que existe uma vizinhança aberta A de p em \mathbb{R}^3 e uma função diferenciável $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ tal que 0 é um valor regular de g e tal que $S_2 \cap A = g^{-1}(\{0\})$. Definimos $f : S_1 \cap A \rightarrow \mathbb{R}$ por $f = g|_{S_1 \cap A}$, a qual é diferenciável na superfície $S_1 \cap A$ contendo o ponto p . Mais ainda, $f(p) = g(p) = 0$ e $(df)_p = (dg)_p|_{T_p S_1}$. Se p é um ponto crítico de f , então devemos ter $T_p S_1 \subset \text{Ker}(dg)_p = T_p S_2$. Mas isso é impossível, já que S_1 e S_2 se encontram transversalmente. Logo, podemos aplicar o teorema 1.5.7. □

1.6 Campo Normal e Orientação

Agora, a formiga que habita a superfície já sabe caminhar por ela e mudar de mapas, calcular a sua velocidade no caminho que está percorrendo e também encontrar todos os caminhos que ela poderia seguir. Como será que a formiga perceberia “o céu” nesta superfície?

Definição 1.6.1 (Reta normal). Dado um ponto p em uma superfície S , nós chamaremos a reta que passa por p e que é perpendicular a $T_p S$ de *reta normal a S por p* .

Exemplo 1.6.2 (Reta normal ao plano). Através da definição, é intuitivo perceber que todas as retas normais a um plano são paralelas. Basta voltarmos ao exemplo 1.4.6 para ver que para qualquer ponto p em um plano, teremos a mesma reta normal.

Definição 1.6.3 (Campo tangente e campo normal). Seja S uma superfície. Um *campo vetorial suave* em S é uma aplicação diferenciável $\xi : S \rightarrow \mathbb{R}^3$. Em especial, dizemos que um campo é:

- *tangente a uma superfície* se os valores tomados por ξ pertencem ao plano tangente de S , isto é, $\xi(p) \in T_p S$, para todo $p \in S$;
- *normal a uma superfície* se os valores de $\xi : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ pertencem às retas normais a S , isto é, $\xi(p) \perp T_p S$, para todo $p \in S$.

O espaço vetorial dos campos suaves tangentes a S será denotado por $\mathfrak{X}(S)$.

Definição 1.6.4 (Campo normal N). Seja V um campo normal à superfície S . Se $\|V(p)\| = 1$ para cada ponto p de S , V será chamado de *campo normal unitário* e será denotado por N . Por sua vez, a aplicação normal vai tomar um ponto p e associá-lo a um

É intuitivo ver que, para qualquer ponto $p \in S$, existem exatos dois vetores unitários de \mathbb{R}^3 perpendiculares ao plano tangente $T_p S$. Mais precisamente, localmente temos campos normais suaves unitários. Para construí-los, vamos precisar do seguinte: Seja $X : U \rightarrow V$ uma parametrização de S . Para cada $q \in U$, os vetores $\partial_1(q)$ e $\partial_2(q)$ formam uma base para o plano tangente $T_{X_q} S$. De fato, ∂_1 e ∂_2 são campos suaves tangentes, definidos localmente (em $U \subset S$). Pelo processo de Gram-Schmidt, podemos ainda obter, localmente, campos suaves E_1 e E_2 que formam uma base ortonormal em cada $T_p S$, para $p \in U$. Campos com essa propriedade são usualmente chamados de *referenciais ortonormais*.

Lema 1.6.5. *Seja S uma superfície e $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma parametrização de S . Então, existe um campo normal unitário definido em um conjunto aberto $V = X(U)$.*

Demonstração. Se $q \in U$, o vetor $N^X(q)$ de \mathbb{R}^3 , dada por

$$N^X(q) = \frac{\partial_1(q) \wedge \partial_2(q)}{\|\partial_1(q) \wedge \partial_2(q)\|} = \frac{\partial_1 \wedge \partial_2}{\|\partial_1 \wedge \partial_2\|}(q),$$

é um vetor normal e único a superfície no ponto $X(q)$. Então, podemos definir a aplicação diferenciável $N^X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$N^X(q) \perp T_{X(q)}S \quad \text{e} \quad \|N^X(q)\|^2 = 1$$

para todo $q \in U$. Finalmente, nós denotamos por $N : V = X(U) \rightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação composta $N = N^X \circ X^{-1}$. Então, N é o campo normal unitário. \square

Lema 1.6.6. *Se S é uma superfície conexa onde N_1 e N_2 são dois campos unitários em S , então $N_1 = N_2$ ou $N_1 = -N_2$.*

Demonstração. De fato, se $p \in S$ temos que $N_1(p)$ e $N_2(p)$ são dois vetores unitários perpendiculares ao mesmo plano T_pS . Então eles coincidem, ou eles são contrários. Então, $S = A \cup B$, onde $A = \{p \in S \mid N_1(p) = N_2(p)\}$ e $B = \{p \in S \mid N_1(p) = -N_2(p)\}$, com A e B conjuntos disjuntos de S que são fechados, uma vez que N_1 e N_2 são contínuos. Então, se S é conexo, temos que ou $A = S$ e $B = \emptyset$ ou $A = \emptyset$ e $B = S$. \square

Definição 1.6.7 (Superfícies orientáveis). Se, em uma dada superfície S , existe um campo normal unitário definido em toda a superfície diremos que S é orientável. Cada campo normal unitário em uma superfície orientável S será chamado orientação de S .

O Lema 1.6.5 nos mostra que qualquer superfície é localmente orientável e, quando a superfície é conexa e orientável e o Lema 1.6.6 garante que existem apenas duas orientações possíveis. A superfície orientável S será dita *orientada* quando uma orientação tiver sido escolhida.

Relembremos que, em um espaço vetorial de dimensão finita qualquer V , uma *orientação* consiste de uma escolha de uma classe de equivalência de bases ordenadas, sendo que duas bases (v_1, \dots, v_n) e (w_1, \dots, w_n) são declaradas equivalentes quando a aplicação linear induzida por $v_i \mapsto w_i$ *preserva orientação*, isto é, a sua matriz correspondente nessas bases (a matriz mudança de base) tem determinante positivo.

No caso de uma superfície com uma escolha de um campo normal, temos uma orientação induzida em cada plano tangente T_pS de S , isto é, podemos definir que uma base ordenada (e_1, e_2) de T_pS é declarada positivamente orientada quando $(e_1, e_2, N(p))$ for base de \mathbb{R}^3 com a orientação canônica. Isso captura a ideia de estarmos orientando cada T_pS de forma contínua (em relação a p). Se S tem uma orientação, podemos então escolher sempre parametrizações orientadas para S , isto é, parametrizações tais que a diferencial $dX_q : T_qU \rightarrow T_{X(q)}V$ preserva orientação. De fato, começando com uma parametrização qualquer Y , se Y não satisfaz isso, podemos compô-la com uma reflexão em uma das suas coordenadas para obter uma parametrização orientada.

1.7 Aplicação Normal de Gauss e Curvatura Gaussiana

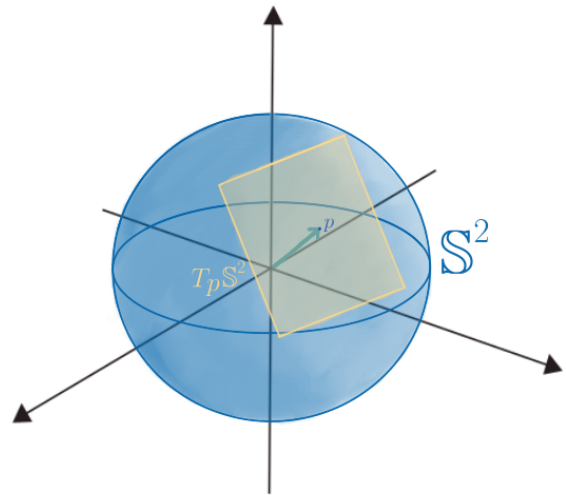
Quando pensamos em geometria, logo pensamos em ângulos, figuras e áreas. No entanto, no mundo das superfícies, um conceito importante que interfere nestes aspectos é o da curvatura. Intuitivamente, não é razoável imaginar que, por exemplo, as propriedades de um triângulo na esfera sejam as mesmas de um triângulo no plano euclidiano.

Definição 1.7.1 (Aplicação Normal de Gauss). Seja S uma superfície e N o campo normal unitário de S . Veja que $\|N(p)\|^2 = 1$ para todo $p \in S$. Seja \mathbb{S}^2 a esfera centrada na origem de \mathbb{R}^3 com raio 1. Temos que $N(S) \subset \mathbb{S}^2$ e, conseqüentemente, cada campo normal unitário N em S pode ser pensado como uma aplicação diferenciável $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ da superfície na esfera de raio unitário \mathbb{S}^2 . Esta aplicação que leva cada ponto da superfície a um único vetor ortogonal a superfície é chamada *Aplicação Normal da Gauss* em S .

Exemplo 1.7.2 (Normal da Esfera). Seja $\mathbb{S}^2(r)$ a esfera com centro em p_0 e raio $r > 0$. Seja $p \in \mathbb{S}^2$ arbitrário. Então, como vimos em 1.4.7, $T_p\mathbb{S}^2$ é um plano ortogonal ao vetor posição $p - p_0$. Logo, por construção, um vetor perpendicular a $T_p\mathbb{S}^2$ é o próprio vetor posição, $v(p) = (p - p_0)$. Encontramos em vetor normal à esfera que passa no ponto p , basta o normalizarmos para encontramos a aplicação normal da esfera no ponto. Para isto, basta dividimos o vetor pela sua norma, isto é,

$$N(p) = \frac{p - p_0}{\|p - p_0\|} = \frac{1}{r}(p - p_0).$$

Figura 1.7.1 – Esfera e seu plano tangente



Fonte: Autora, 2023.

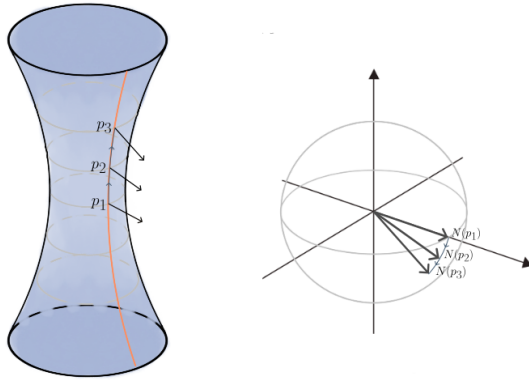
É natural esperarmos que a aplicação Gaussiana N varie na superfície S conforme nos movemos em uma vizinhança de um dado ponto, sendo de nosso interesse entender como se dá essa variação e medi-la. Para calcular este valor, podemos utilizar a diferencial $(dN)_p : T_pS \rightarrow T_{N(p)}\mathbb{S}^2$. No entanto, veja que o plano tangente a esfera \mathbb{S}^2 no ponto $N(p)$ é o complemento ortogonal do vetor $N(p)$, ou seja, podemos fazer a identificação $T_{N(p)}\mathbb{S}^2 = T_pS$. Sendo assim, $(dN)_p : T_pS \rightarrow T_pS$ é um endomorfismo do plano tangente.

Sendo o endomorfismo de um espaço vetorial de duas dimensões, $(dN)_p$ tem duas variáveis associadas: seu determinante e o seu traço. Uma forma natural de considerar as duas funções definidas na superfície se trata de, para $p \in S$,

$$K(p) = \det(dN)_p \text{ e } H(p) = -\frac{1}{2} \text{tr}(dN)_p,$$

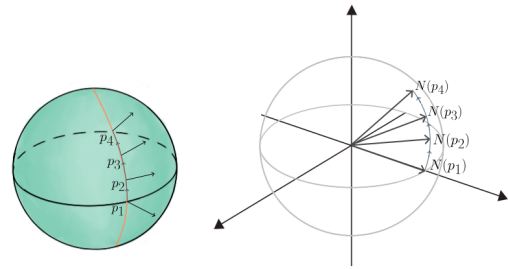
onde \det é o determinante e tr é o traço da aplicação linear. Estes valores são chamados, respectivamente, a *Curvatura de Gauss* e a *Curvatura Média* de uma superfície neste ponto. Como estamos em um mundo bidimensional, e por se tratar do determinante,

Figura 1.7.2 – Aplicação Normal de Gauss em um Hiperboloide de uma folha



Fonte: Autora, 2023.

Figura 1.7.3 – Aplicação Normal de Gauss em uma Esfera



Fonte: Autora, 2023.

a Curvatura de Gauss (K) não muda seu valor quando mudamos a orientação da superfície e assim, será definida globalmente até em superfícies não orientáveis. Entretanto, a Curvatura Média (H) depende da orientação escolhida na superfície e muda o seu sinal conforme a invertemos. Intuitivamente, quando a curvatura gaussiana é negativa, existe uma curva γ em S tal que a curva $N \circ \gamma$ tem “sentido inverso” ao de γ como vemos em 1.7.2. Já quando a curvatura é positiva, γ e $N \circ \gamma$ têm o “mesmo sentido”, como vemos em 1.7.3.

Exemplo 1.7.3 (Curvatura gaussiana do Toro). Seja $\mathbb{T}^2(r)$ o Toro de Revolução de raio r . Considere a parametrização apresentada em 1.2.6. Nesse caso, para o ponto $p = (\theta, \phi)$, conforme a observação 1.4.4, o plano tangente pode ser descrito em termos da base

$$\begin{aligned} \partial_1(p) &= \frac{\partial X}{\partial \theta}(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} -r \cos(\phi) \text{sen}(\theta) \\ -r \text{sen}(\phi) \text{sen}(\theta) \\ r \cos(\theta) \end{pmatrix}, \\ \partial_2(p) &= \frac{\partial X}{\partial \phi}(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} -[R + r \cos(\theta)] \text{sen}(\phi) \\ [R + r \cos(\theta)] \cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nesse caso, a reta normal ao toro de revolução em p é resultado do produto vetorial

$$\partial_1 \wedge \partial_2(p) = \begin{pmatrix} i & j & k \\ [- (R + r \cos(\theta)) \text{sen}(\phi) & [R + r \cos(\theta)] \cos(\phi) & 0 \\ -r \cos(\phi) \text{sen}(\theta) & -r \text{sen}(\phi) \text{sen}(\theta) & r \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{pmatrix} [R + r \cos(\theta)] \cos(\phi) r \cos(\theta) \\ [R + r \cos(\theta)] \operatorname{sen}(\phi) r \cos(\theta) \\ [R + r \cos(\theta)] \operatorname{sen}(\phi)^2 r \operatorname{sen}(\theta) + [R + r \cos(\theta)] \cos(\phi)^2 r \operatorname{sen}(\theta) \end{pmatrix} \\
 &= (R + r \cos(\theta)) r \begin{pmatrix} \cos(\phi) \cos(\theta) \\ \operatorname{sen}(\phi) \cos(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Basta então normalizarmos o vetor de modo a obtermos a aplicação $N(p)$,

$$\begin{aligned}
 N(p) = N \circ X(\theta, \phi) &= \frac{\partial_1(p) \wedge \partial_2(p)}{\|\partial_1(p) \wedge \partial_2(p)\|} \\
 &= [R + r \cos(\theta)] r \begin{pmatrix} \cos(\phi) \cos(\theta) \\ \operatorname{sen}(\phi) \cos(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{[R + r \cos(\theta)] r} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos(\phi) \cos(\theta) \\ \operatorname{sen}(\phi) \cos(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Como queremos saber o quanto ela varia, basta diferenciarmos a aplicação N ,

$$\frac{\partial N}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -\cos(\phi) \operatorname{sen}(\theta) \\ -\operatorname{sen}(\phi) \operatorname{sen}(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial N}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}(\phi) \cos(\theta) \\ \cos(\phi) \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Veja então que

$$\frac{\partial N}{\partial \theta}(p) = \frac{\partial N \circ X}{\partial \theta}(\theta, \phi) = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial X}{\partial \theta}(p) = \frac{1}{r} \cdot \partial_1(p),$$

enquanto

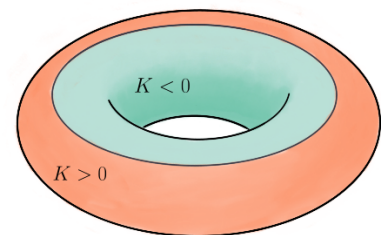
$$\frac{\partial N}{\partial \phi} = \frac{\partial N \circ X}{\partial \phi}(\theta, \phi) = \frac{\cos(\theta)}{R + r \cos(\theta)} \cdot \frac{\partial X}{\partial \phi}(p) = \frac{\cos(\theta)}{R + r \cos(\theta)} \cdot \partial_2(p).$$

Unindo os resultados, temos a curvatura,

$$\begin{aligned}
 K(p) = \det(dN)_p &= \begin{vmatrix} \frac{\cos(\theta)}{r \cos(\theta) + R} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{vmatrix} \\
 &= \frac{\cos(\theta)}{r[R + r \cos(\theta)]}.
 \end{aligned}$$

Note ainda que, se $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, então $\cos(\theta) \geq 0$. Logo, para tal intervalo, a curvatura K é positiva. No entanto, se $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, então $\cos(\theta) \leq 0$. Nesse caso, a curvatura K é negativa.

Figura 1.7.4 – Curvatura positiva e negativa no Toro



Fonte: Autora, 2023

1.8 Segunda forma fundamental

Utilizaremos agora uma nova ferramenta para encontrar propriedades em nossa superfície: o produto interno do \mathbb{R}^3 . No \mathbb{R}^3 é conhecido que o produto interno entre dois vetores pode nos dizer o tamanho dos vetores e também o ângulo formado por eles. Outra utilização será para dualizar aplicações lineares.

Definição 1.8.1 (Segunda forma fundamental). Seja $(dN)_p$ o endomorfismo em T_pS e $p \in S$. Considerando o produto escalar euclidiano em espaços tangentes, podemos escrever a forma bilinear

$$\begin{aligned} \Pi_p : T_pS \times T_pS &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (v, w) &\longmapsto -\langle (dN)_p(v), w \rangle. \end{aligned}$$

Esta é a chamada *segunda forma fundamental da superfície S no ponto p* .

O nome da “segunda forma” surgiu historicamente. Era usual chamar a restrição do produto interno canônico de \mathbb{R}^3 a T_pS como “Primeira forma fundamental”. Veremos isso mais adiante na definição 3.2.1.

Lema 1.8.2. *A segunda forma fundamental Π_p de uma superfície em qualquer ponto $p \in S$ é uma forma bilinear simétrica no plano tangente T_pS . Isto pode também ser expresso por dizer que a diferencial $(dN)_p$ de uma aplicação Gaussiana em cada ponto é um endomorfismo autoadjunto de um plano tangente a este ponto.*

Demonstração. Seja U um conjunto aberto de \mathbb{R}^2 e seja $X : U \rightarrow S$ uma parametrização de S . Então, como sabemos, em cada ponto $(x_1, x_2) \in U$, os vetores $\partial_1(x_1, x_2)$ e $\partial_2(x_1, x_2)$ estão sobre o plano tangente $T_{X(x_1, x_2)}S$, e o vetor $(N \circ X)(x_1, x_2)$ é perpendicular a este plano. Obtemos então as seguintes igualdades de funções definidas em $U \subset \mathbb{R}^2$

$$\langle N \circ X, \partial_1 \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle N \circ X, \partial_2 \rangle = 0.$$

Diferenciando com respeito a variável x_2 na primeira igualdade e com respeito a x_1 na segunda e subtraindo os resultados das duas expressões resultantes obtemos

$$\langle (N \circ X)_{x_2}, \partial_1 \rangle = \langle (N \circ X)_{x_1}, \partial_2 \rangle.$$

Considerando a igualdade das derivadas mistas $\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial X}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial X}{\partial x_1}$, pelo teorema 1.5.5,

$$\begin{aligned} \frac{\partial(N \circ X)}{\partial x_1}(x_1, x_2) &= d(N \circ X)_{(x_1, x_2)}(1, 0) \\ &= (dN)_{X(x_1, x_2)}[(dX)_{(x_1, x_2)}] = (dN)_{X(x_1, x_2)}[\partial_1(x_1, x_2)] \end{aligned}$$

para todo $(x_1, x_2) \in U$ e, similarmente,

$$\frac{\partial N \circ X}{\partial x_2}(x_1, x_2) = (dN)_{(X(x_1, x_2))}[\partial_2(x_1, x_2)].$$

Então, pela definição da segunda forma fundamental, nós vemos que

$$\Pi_{X(q)}(\partial_1(q), \partial_2(q)) = \Pi_{X(q)}(\partial_2(q), \partial_1(q))$$

para todo $q \in U$. Como $\{\partial_1(q), \partial_2(q)\}$ forma uma base para $T_{X(q)}S$, a forma bilinear $\Pi_{X(q)}$ é simétrica. \square

Um fato importante sobre aplicações autoadjuntas é que elas podem ser diagonalizadas. Isto nos diz que cada ponto p na superfície S vincula a si, pelo endomorfismo $-(dN)_p$, dois autovalores que denotamos por $\kappa_1(p)$ e $\kappa_2(p)$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $\kappa_1(p) \leq \kappa_2(p)$. Esses são chamados *Curvaturas Principais de S no ponto p* e são as raízes do polinômio característico de $-(dN)_p$. As funções κ_1 e κ_2 definidas na superfície devem satisfazer

$$K = \kappa_1\kappa_2, \quad H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2), \quad \text{e} \quad \kappa_i^2 - 2H\kappa_i + K = 0, \quad i = 1, 2.$$

Uma vez que o discriminante do segundo grau deve ser não negativo, para que as duas raízes reais existam, nós temos que $K(p) \leq H(p)^2$, $\forall p \in S$, chegando a igualdade em um dado ponto se, e somente se, as duas principais curvaturas coincidirem neste ponto. Tais valores, κ_1 e κ_2 , são também resultado do valor máximo e mínimo da curvatura das curvas obtidas através da interseção de um plano contendo o vetor normal no ponto com a superfície em uma vizinhança compacta.

Quando correlacionamos os dois autovalores do endomorfismo $-(dN)_p$ temos os espaços correspondentes, sendo duas retas no plano tangente T_pS ortogonais entre si quando $\kappa_1(p) \neq \kappa_2(p)$. Nesse caso, nós diremos que as direções correspondentes dessas duas retas tangentes são *as direções principais de S no ponto p* .

Exemplo 1.8.3 (Esferas). Se $\mathbb{S}^2(r)$ é uma esfera com centro $p_0 \in \mathbb{R}^3$ e possui raio $r > 0$, como vimos em 1.7.2,

$$N(p) = \frac{1}{r}(p - p_0), \quad \forall p \in \mathbb{S}^2(r).$$

Logo, pela definição de diferencial, segue que

$$(dN)_p(v) = \frac{1}{r}v, \quad \forall v \in T_p\mathbb{S}^2(r),$$

e, portanto

$$\Pi_p(v, w) = -\frac{1}{r}\langle v, w \rangle \quad \forall v, w \in T_p\mathbb{S}^2(r).$$

Sendo assim, usando as definições, obtemos que:

$$K(p) = \frac{1}{r^2} \text{ e } H(p) = -\frac{1}{r}, \quad p \in \mathbb{S}^2(r).$$

Isto é, a curvatura gaussiana de uma esfera é constante e o seu valor é o inverso do quadrado do raio, enquanto a Curvatura média da esfera relativa ao seu campo normal é constante e seu valor é exatamente o oposto da inversa do seu raio. Além disso, as curvaturas principais são iguais em cada ponto.

2 Característica de Euler

Neste capítulo faremos um interlúdio topológico e apresentaremos, sob diferentes perspectivas, o segundo invariante que aparece no teorema de Gauss–Bonnet: a característica de Euler.

Façamos uma brincadeira. Cada objeto que pegarmos (S), vamos dividi-lo em vários triângulos. As únicas regras são que estes triângulos não podem se sobrepujar e os seus vértices não devem tocar a lateral de um triângulo. Depois disto, contemos o número de faces (F), o número de arestas (A) e de vértices (V). Então, realizamos a seguinte operação: somamos as faces, diminuímos as arestas e somamos os vértices. O número obtido é chamado *Característica de Euler*, também sendo chamado de χ .

$$\chi(S) = V - A + F$$

Podemos triangular de várias formas uma mesma figura, mas a característica de Euler atribuída a mesma é sempre o mesmo número.

2.1 Simplexos

O processo que fizemos acima é normalmente realizado no estudo de poliedros, caso em que consideramos o número característica de Euler como 2. Essa inocente brincadeira, no entanto, nos diz importantes informações topológicas de uma figura. Como podemos triangularizar uma figura utilizando ferramentas mais precisas?

Chamaremos de simplexos os objetos geométricos “mais simples” em cada dimensão. Isto é, um 0-simplexo é um ponto. Já os 1-simplexos são intervalos fechados. Um 2-simplexo é um triângulo (com seu interior). Na terceira dimensão, um tetraedro (com seu interior), e assim por diante. Mais precisamente:

Definição 2.1.1 (k -simplexo). Um k -simplexo é o fecho convexo de $k+1$ pontos v_0, \dots, v_k do \mathbb{R}^n tais que os vetores $v_1 - v_0, \dots, v_k - v_0$ são linearmente independentes. Nesse caso os pontos v_0, \dots, v_k são chamados de *vértices*.

Nesse caso, ponto será representado por $[v_0]$, o segmento de reta por $[v_0, v_1]$, o triângulo por $[v_0, v_1, v_2]$, e assim por diante. O n -simplexo canônico é o simplexo

$$\Delta^k = \{(t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{k+1} \mid \sum_i t_i = 1 \text{ e } t_i \geq 0, \text{ para todo } i\}.$$

Qualquer outro simplexo $[v_0, \dots, v_k]$ é a imagem de Δ^k por uma aplicação linear, precisamente aquela definida na base canônica por $e_i \mapsto v_i$, que chamaremos de *aplicação linear canônica* de $[v_0, \dots, v_k]$.

Veja que se retirarmos um dos $k + 1$ vértices de um k -simplexo $[v_0, \dots, v_k]$, formamos um $k - 1$ -simplexo, o qual chamamos de *face* de $[v_0, \dots, v_k]$. A união das faces é chamada de *bordo* de $[v_0, \dots, v_k]$, que denotamos por $\partial[v_0, \dots, v_k]$. Já o *simplexo aberto* corresponde ao interior de $[v_0, \dots, v_k]$, isto é, $[v_0, \dots, v_k] \setminus \partial[v_0, \dots, v_k]$ será denotado por $\text{int}([v_0, \dots, v_k])$.

Para transportamos a ideia de “objeto geométrico simples” para um espaço topológico qualquer, utilizamos a seguinte noção: um n -simplexo singular em um espaço topológico S é uma aplicação contínua $\sigma_\alpha : \Delta^n \rightarrow S$. Isso nos permite deixar mais precisa a ideia de decompor S em partes simples, como segue.

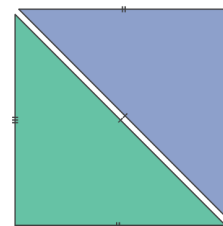
Definição 2.1.2 (Triangulação). Uma *triangulação* Δ em um espaço topológico S é uma coleção enumerável de simplexos singulares $\sigma_\alpha : \Delta^n \rightarrow S$, com n dependendo do índice α , tal que:

1. A restrição $\sigma_\alpha|_{\text{int}(\Delta^n)}$ é injetiva, e cada ponto de S está na imagem de exatamente uma restrição $\sigma_\alpha|_{\text{int}(\Delta^n)}$.
2. Cada restrição de σ_α a uma face de Δ^n é uma das aplicações $\sigma_\beta : \Delta^{n-1} \rightarrow S$. Aqui identificamos cada face de Δ^n com Δ^{n-1} pela aplicação linear canônica.
3. Um conjunto $A \subset S$ é aberto se, e somente se, $\sigma_\alpha^{-1}(A)$ é aberto em Δ^n para cada σ_α .

Observação 2.1.3. Os familiarizados com o tema poderão perceber que a triangulação se trata de uma estrutura de Δ -complexo.

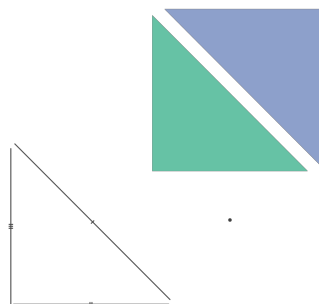
Exemplo 2.1.4 (Toro). O toro pode ser obtido por meio de um quadrado identificado, conforme a figura 2.1.1. Mas um quadrado, por sua vez, é resultado da junção de dois triângulos. Porém, como buscamos simplexos abertos, além do interior do triângulo, também precisaremos das arestas que os compõem e, além disso, dos vértices, uma vez que o ponto é um simplexo da dimensão 0.

Figura 2.1.1 – Toro identificado



Fonte: Autora, 2023

Figura 2.1.2 – Decomposição do Toro em simplexos



Fonte: Autora, 2023

Note ainda que, pela própria construção do toro, não contamos com 6 segmentos de reta como é esperado, uma vez que os segmentos estão identificados. Sendo assim, contamos, na verdade, apenas 3 segmentos. O mesmo vale para os pontos, que pelas identificações, sendo apenas um único ponto, conforme a Figura 2.1.2.

2.2 Homologia Simplicial

Já aprendemos a desconstruir uma figura em formas mais simples e como indicar as relações entre elas precisamente, mostrando como podemos colar de modo a obter o objeto. Que propriedades podemos obter desta relação?

Definição 2.2.1 (*n*-cadeias simpliciais). Seja $\Delta = \{\sigma_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uma triangulação de S . Definimos, para $n \geq 0$, o grupo das *n*-cadeias simpliciais desta triangulação como o grupo abeliano livre gerado pelos simplexes singulares de dimensão n ocorrendo na triangulação, ou seja:

$$C_n(S) := \bigoplus_{\alpha \in L_n} \mathbb{Z},$$

sendo $L_n \subset A$ a família de índices α cujos respectivos simplexes são de dimensão n . Isto é, $C_n(S)$ tem uma cópia de \mathbb{Z} para cada simplexo singular de dimensão n que aparece na triangulação. Se $n < 0$ definimos apenas que $C_n(S) := 0$.

Exemplo 2.2.2 (Cadeias simpliciais do Toro de revolução). Conforme a separação em simplexes que fizemos no exemplo 2.1, na dimensão 0, que conta só com o vértice v_0 , temos apenas um \mathbb{Z} , resultando em: $C_0(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z}$. Já na dimensão 1, temos $C_1(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Por fim, na dimensão 2, temos $C_2(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Note que para $n > 2$ temos $C_n \mathbb{T}^2 = 0$.

Definição 2.2.3 (Morfismo de bordo). Definimos o morfismo ∂ , uma aplicação linear que recebe um n -simplexo e realiza a soma alternada retirando o i -ésimo vértice em cada interação. Chamaremos esta aplicação de *morfismo de bordo*:

$$\begin{aligned} \partial_n : C_n(S) &\rightarrow C_{n-1}(S) \\ \partial[v_0, \dots, v_n] &:= \sum_{i=0}^n (-1)^i [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n] \end{aligned}$$

Note que ∂ associa a um simplexo Δ seu bordo, descrito como soma dos $n - 1$ simplexes que o formam, mas também considerando uma espécie de orientação (o sinal.)

Exemplo 2.2.4 (Bordos no Toro de Revolução). Usando o exemplo 2.2.2 visto acima, podemos tomar um dos triângulos de $C_2(\mathbb{T}^2)$. Veja então que o operador bordo aplicado $\partial_2([v_0, v_1, v_2]) = [v_1, v_2] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1]$ resulta em segmentos de reta, pertencentes a C_1 . Podemos fazer também o mesmo processo para o outro triângulo e obteremos $\partial_2([w_0, w_1, w_2]) = [w_1, w_2] - [w_0, w_2] + [w_0, w_1]$. Então, $\partial_1([v_0, v_1]) = v_1 - v_0$ mas como possuímos apenas um ponto, essa diferença é nula.

Sendo assim, temos uma sequência de homomorfismos de grupos abelianos, chamada *complexo de cadeias*:

$$\dots \longrightarrow C_{n+1}(S) \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(S) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(S) \cdots \longrightarrow C_1(S) \xrightarrow{\partial_1} C_0(S) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

Lema 2.2.5. A composição $C_n(S) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(S) \xrightarrow{\partial_{n-1}} C_{n-2}(S)$ zera, isto é, $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$.

Demonstração. Seja a composição $C_n(S) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(S) \xrightarrow{\partial_{n-1}} C_{n-2}(S)$. Veja que

$$\begin{aligned} \partial_{n-1} \circ \partial_n[v_0, \dots, v_n] &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_{n-1}[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n] \\ &= \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{i+j} [v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n] \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=i+1}^n (-1)^{i+j-1} [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_n] \right) \\ &= \sum_{i < j} (-1)^{i+j} [v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n] \\ &\quad + \sum_{i > j} (-1)^{i+j-1} [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_n] \\ &= 0, \end{aligned}$$

uma vez que, trocando os papéis de i e j , obteremos os mesmos termos de soma, mas com sinal invertido. \square

Exemplo 2.2.6. Como já calculamos ∂_2 e ∂_1 do toro, façamos a composição para verificar se o lema é satisfeito:

$$\begin{aligned} \partial_1 \circ \partial_2 &= \partial_1 \circ \partial_2([w_0, w_1, w_2]) = \partial_1([w_1, w_2] - [w_0, w_2] + [w_0, w_1]) \\ &= w_2 - w_1 - (w_2 - w_0) + w_1 - w_0 = w_2 - w_1 - w_2 + w_0 + w_1 - w_0 = 0. \end{aligned}$$

Uma consequência direta desta propriedade é que $\text{Im}(\partial_{n+1}) \subset \text{Ker}(\partial_n)$. Isto nos permite definir o n -ésimo grupo de homologia deste complexo de cadeia como o grupo quociente

$$H_n(S) = \frac{\text{Ker}(\partial_n)}{\text{Im}(\partial_{n+1})}.$$

Os elementos de $\text{Ker}(\partial_n)$ são chamados de *ciclos* e os elementos de $\text{Im} \partial_{n+1}$ são *bordos*. Desta forma, transferimos o trabalho de compreender todo um complexo de cadeias $C_n(S)$ para compreender seus grupos de homologia simplicial.

Os grupos de homologia são naturalmente \mathbb{Z} -módulos, então, pelo teorema da Decomposição,

$$H_n(S) \cong \mathbb{Z}_{p_1} \oplus \mathbb{Z}_{p_2} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{p_k} \dots \mathbb{Z}^r$$

onde este \mathbb{Z}^r é um resto que não encaixou nos \mathbb{Z}_{p_i} anteriores. Definimos então o *rank* de $H_n(S)$ como $\text{rank } H(S) = r$. Podemos fazer essa mesma construção usando \mathbb{R} ao

invés de \mathbb{Z} , neste caso, toda a parte de $\mathbb{Z}_{p_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_k}$ seria nula, uma vez que \mathbb{R} é um corpo, portanto, não tem torção. $H_n(S)$ é então um espaço vetorial, sendo o rank $H_n(S)$ simplesmente sua dimensão.

Exemplo 2.2.7 (Grupos homológicas do toro). No caso do Toro, os seus grupos homológicas são dados por

$$\begin{aligned} H_0(\mathbb{T}^2) &= \text{Ker}(\partial_0)/\text{Im}(\partial_1) \cong \mathbb{Z} & H_2(\mathbb{T}^2) &= \text{Ker}(\partial_2)/\text{Im}(\partial_3) \cong \mathbb{Z} \\ H_1(\mathbb{T}^2) &= \text{Ker}(\partial_1)/\text{Im}(\partial_2) \cong \mathbb{Z}^2 & H_3(\mathbb{T}^2) &= \text{Ker}(\partial_3)/\text{Im}(\partial_4) \cong 0 \end{aligned}$$

2.3 A caraterística de Euler

Como constatamos no início do capítulo, a característica de Euler é resultado da soma alternada $F - A + V$. Podemos generalizar isso diretamente para uma triangulação finita definindo $\sum_n (-1)^n C_n$, onde C_n é a quantia de n -simplexos abertos em S . Como podemos reescrever isto em termos da homologia?

Teorema 2.3.1. $\chi(S) = \sum_n (-1)^n \text{rank } H_n(S)$.

Demonstração. Essa demonstração é puramente algébrica. Seja

$$0 \longrightarrow C_k \xrightarrow{d_k} \cdots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \longrightarrow 0$$

uma cadeia complexa de grupos abelianos gerada finitamente, com ciclos $Z_n = \text{Ker}(d_n)$, bordos $B_n = \text{Im}(d_{n+1})$ e homologia $H_n = Z_n/B_n$. Então, temos as seguintes sequências exatas $0 \rightarrow Z_n \rightarrow C_n \rightarrow B_{n-1} \rightarrow 0$ e $0 \rightarrow B_n \rightarrow Z_n \rightarrow H_n \rightarrow 0$, logo

$$\begin{aligned} \text{rank } C_n &= \text{rank } Z_n + \text{rank } B_{n-1}, \\ \text{rank } Z_n &= \text{rank } B_n + \text{rank } H_n. \end{aligned}$$

Substituindo a primeira equação na segunda, multiplicando o resultado por $(-1)^n$ e somando até k chegamos que

$$\sum_n (-1)^n \text{rank } C_n = \sum_n (-1)^n \text{rank } H_n.$$

□

Exemplo 2.3.2. Seja \mathbb{T}^2 o toro de revolução. Já calculamos os seus grupos de homologia no Exemplo 2.2.7, bastando apenas realizarmos a sua soma alternada

$$\chi(\mathbb{T}^2) = 1 - 2 + 1 = 0.$$

2.4 Classificação de superfícies através da característica de Euler

Já vimos a origem da Característica de Euler, como calculá-la através de seus grupos de homologia. Agora veremos mais resultados que podemos obter com tal invariante.

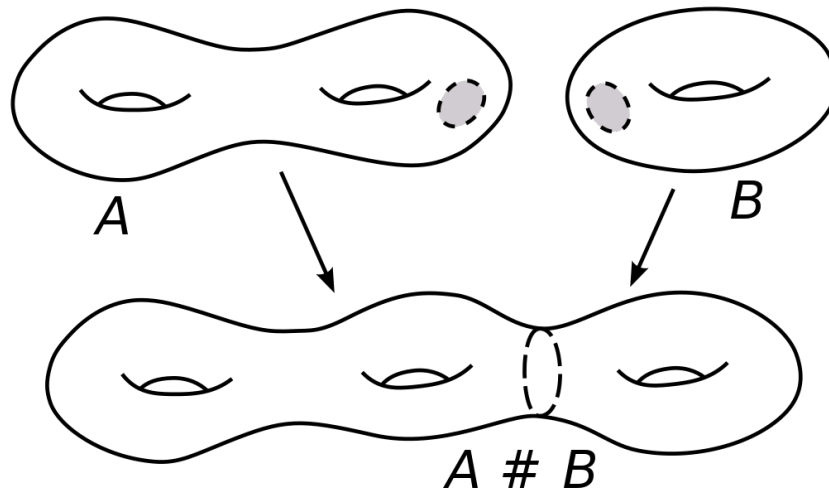
Definição 2.4.1 (Soma conexa). Sejam S_1 e S_2 duas superfícies disjuntas. Tomemos um disco D aberto que contido em duas parametrizações de S_1 e S_2 , respectivamente, e consideremos D_1 e D_2 suas imagens em S_1 e S_2 . Então

$$S_1 \# S_2 = \frac{S_1 \setminus D_1 \cup S_2 \setminus D_2}{\sim}$$

sendo que \sim é a relação de equivalência que identifica os bordos de D_1 e D_2 .

De maneira intuitiva, dadas duas superfícies disjuntas S_1 e S_2 , a soma conexa entre elas $S_1 \# S_2$ constitui-se de cortar um disco em ambas e colar as superfícies ao longo da fronteira destes buracos.

Figura 2.4.1 – Soma conexa



Fonte: Oleg Alexandrov, 2008

Lema 2.4.2. Sejam S_1 e S_2 duas superfícies compactas, então

$$\chi(S_1 \# S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2.$$

Demonstração. Sejam T_1 e T_2 triangulações de S_1 e S_2 respectivamente. Considere então $\chi(S_1) = v_1 - a_1 + f_1$ e $\chi(S_2) = v_2 - a_2 + f_2$. Seja $T'_1 = T_1 - \Delta\{b_0b_1b_2\}$ a triangulação de $S_1 - \text{int}D^2$, onde $\{b_0b_1b_2\}$ são os vértices de um triângulo e $T'_2 = T_2 - \Delta\{d_0d_1d_2\}$ é uma triangulação de $S_2 - \text{int}D^2$, onde $\{d_0d_1d_2\}$ são os vértices de um triângulo. Tomemos $T = \frac{T'_1 \cup T'_2}{\sim}$ onde $b_i \sim d_i$, $i = 0, 1, 2$ e $\overline{b_i b_j} \sim \overline{d_i d_j}$, $i, j = 0, 1, 2$. Como T é uma triangulação para $\chi(S_1 \# S_2)$, então

$$\chi(S_1 \# S_2) = (v_1 + v_2 - 3) - (a_1 + a_2 - 3) + (f_1 + f_2 - 2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2. \quad \square$$

Definição 2.4.3 (Gênero). O *gênero* ou o *genus* de uma superfície S , que denotamos por g , se trata do maior número de curvas fechadas e simples em S que não se intersectam de modo que o complementar de suas imagens em S é conexo.

Ou seja, o que o gênero nos diz se trata do número de “círculos” (topológicos) que podemos remover de S sem desconectá-la. Intuitivamente, se trata da quantidade de “buracos” que ela possui.

Exemplo 2.4.4. A esfera possui gênero 0. O toro, possui gênero 1, uma vez que possui um buraco central. Um bitoro, isto é, dois toros colados lado a lado, como uma boia salva-vidas para duas pessoas, possui gênero 2. Podemos seguir este pensamento até um $\mathbb{T}^2 \# \dots \# \mathbb{T}^2$ n vezes, a boia de salva-vidas para n pessoas.

Teorema 2.4.5. *Seja S_g uma superfície fechada com número de genus g . Então,*

$$\chi(S_g) = 2 - 2g.$$

Um fato fundamental da teoria de superfícies fechadas é que a característica de Euler e a orientabilidade são suficientes para classificá-las a menos de homeomorfismo¹.

Tabela 1 – Classificação das Superfícies Orientáveis

Objeto	Símbolo	Característica de Euler	Gênero
Esfera	\mathbb{S}^2	2	0
Toro	\mathbb{T}^2	0	1
Bitoro	$\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2$	-2	2
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
Enésimo toro	$\mathbb{T}^2 \# \dots \# \mathbb{T}^2$	$2 - 2n$	n

¹ Para mais detalhes e demonstrações, sugerimos a leitura dos capítulos 13 até 15 de (BREDON, 2013)

3 Integrais

Ao falarmos sobre integrais estamos falando, na verdade, em medir volumes orientados. Uma forma de realizar esta medida para blocos é utilizando determinantes. Por exemplo, em \mathbb{R}^2 , tendo definida uma base $\{e_1, e_2\}$, dados dois vetores $v = (v_1, v_2)$ e $w = (w_1, w_2)$, ao calcularmos o determinante

$$\det(\vec{v}, \vec{w}) = \det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix}$$

encontramos o volume (neste caso, área) do paralelogramo cujos lados são v e w . Além disso, uma vez que respeita a soma e o produto por escalar, o determinante é uma transformação linear em cada entrada. No caso de \mathbb{R}^2 , dizemos que ele é bilinear, no caso \mathbb{R}^3 , trilinear e no caso \mathbb{R}^n , multilinear.

3.1 Tensores

Generalizemos a ideia do parágrafo anterior para aplicações quaisquer entre espaços vetoriais.

Definição 3.1.1 (Aplicações k -multilineares). Sejam V_1, \dots, V_k e G espaços vetoriais reais. Uma aplicação $f : V_1 \times \dots \times V_k \rightarrow G$ é dita *k -multilinear* quando, para cada $i \in \{1, \dots, k\}$,

$$f(v_1, \dots, \alpha v_i + \beta y_i, \dots, v_k) = \alpha f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_k) + \beta f(v_1, \dots, y_i, \dots, v_k),$$

isto é, respeita soma e multiplicação por escalares.

Denotamos o conjunto das aplicações k -lineares por $\mathcal{L}(V_1, \dots, V_k; G)$. Por sua vez, definimos a soma e o produto por escalar em $\mathcal{L}(V_1, \dots, V_k; G)$ por,

$$\begin{aligned} (f + g)(v_1, \dots, v_k) &= f(v_1, \dots, v_k) + g(v_1, \dots, v_k) \\ (\lambda f)(v_1, \dots, v_k) &= \lambda f(v_1, \dots, v_k) \end{aligned}$$

desse modo, $\mathcal{L}(V_1, \dots, V_n; G)$ se torna um espaço vetorial.

Definição 3.1.2 (Tensor covariante). No caso em que $G = \mathbb{R}$ denotamos $\mathcal{L}(V_1, \dots, V_k; \mathbb{R})$ por $V_1^* \otimes \dots \otimes V_k^*$. Chamaremos um elemento deste espaço de *k -tensor* (covariante).

Exemplo 3.1.3. Como já mencionamos anteriormente, o determinante é um exemplo de aplicação multilinear. Além dele, no \mathbb{R}^n , temos o produto vetorial \times e o produto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Definição 3.1.4 (Produto Tensorial). Para $f \in V_1^* \otimes \cdots \otimes V_k^*$ e $g \in W_1^* \otimes \cdots \otimes W_l^*$, o produto tensorial $f \otimes g$ com $f \otimes g \in (V_1^* \otimes \cdots \otimes V_k^*) \otimes (W_1^* \otimes \cdots \otimes W_l^*)$ é dado por

$$f \otimes g(v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_k) = f(v_1, \dots, v_k)g(w_1, \dots, w_k).$$

Suponha que $\dim(V_i) = n_i$ e que $(e_1^{(i)}, \dots, e_{n_i}^{(i)})$ é uma base de V_i , com base dual $(\varepsilon_{(i)}^1, \dots, \varepsilon_{(i)}^{n_i})$. É possível demonstrar que uma base $V_1^* \otimes \cdots \otimes V_k^*$ é dada por

$$\left\{ \varepsilon_{(1)}^{i_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon_{(k)}^{i_k} \mid 1 \leq i_1 \leq n_1, \dots, 1 \leq i_k \leq n_k \right\}.$$

Ou seja, uma base para o espaço das funções multilineares é formada por todas as possíveis combinações de produtos tensoriais de elementos das bases duais (isto é, co-vetores básicos).

Definição 3.1.5 (Produto tensorial). Definimos o produto tensorial dos espaços vetoriais V_1, \dots, V_k por

$$\mathcal{L}(V_1^*, \dots, V_k^*; \mathbb{R}) = V_1^{**} \otimes \cdots \otimes V_k^{**}.$$

No entanto, como $V_i^{**} \simeq V_i$ canonicamente, denotaremos $V_1^{**} \otimes \cdots \otimes V_k^{**} = V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$.

Exemplo 3.1.6. Em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ tomando como base $\{e_1, e_2\} = \{(1, 0), (0, 1)\}$, base canônica do \mathbb{R}^2 . É usual denotar os produtos tensoriais desses elementos como matrizes

$$e_1 \otimes e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_1 \otimes e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 \otimes e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } e_2 \otimes e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quando todos os V_i s são cópias do mesmo espaço V denotamos

$$V \otimes \cdots \otimes V = \bigotimes_k V.$$

Exemplo 3.1.7. A base dual canônica de \mathbb{R}^n geralmente é denotada por (dx^1, \dots, dx^n) , pois, de fato, é fácil ver que o funcional dual e_i^* coincide com a diferencial da “função coordenada” $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$. Podemos então expressar o produto interno usual por

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = \sum_{i=1}^n dx^i \otimes dx^i.$$

De fato, se $v, w \in \mathbb{R}^n$, temos

$$\left(\sum_{i=1}^n dx^i \otimes dx^i \right) (v, w) = \sum_{i=1}^n dx^i(v)dx^i(w) = \sum_{i=1}^n v_i w_i.$$

Definição 3.1.8 (Tensor alternado). Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Dizemos que $\omega \in \bigotimes_k(V^*)$ é um *tensor alternado* quando $\omega(v_1, \dots, v_n) = 0$ sempre que $x_i = x_j$ para algum par de índices (i, j) .

Podemos ainda dizer que essa definição é equivalente a ω ser antissimétrico, ou seja, $\omega(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) = -\omega(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n)$, uma vez que,

$$\begin{aligned}\omega(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) &= -\omega(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n) \\ \omega(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) + \omega(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n) &= 0 \\ \omega(v_1 + v_1, \dots, v_i + v_j, \dots, v_j + v_i, \dots, v_n + v_n) &= 0,\end{aligned}$$

que zera, tendo $v_i + v_j = v_j + v_i$.

Denotamos o subespaço de $\bigotimes_k(V^*)$ dos tensores alternados por $\bigwedge^k(V)$, alterando o asterisco que denota o dual por k sobrescrito. Segue diretamente da definição que, se $\dim(V) < k$, então $\bigwedge^k(V) = \{0\}$.

Estamos agora interessados em variar os k elementos para determinar os possíveis tensores alternados em um espaço, para isto, utilizaremos dos grupos de permutações. O grupo S_k de permutações de k elementos age em $\bigotimes^k(V)$ de forma que, para $\sigma \in S_k$ e $\phi \in \bigotimes^k(V)$, definimos $\sigma\phi \in \bigotimes^k(V)$ por

$$\sigma\phi(v_1, \dots, v_k) = \phi(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}).$$

Isso induz uma projeção $\text{alt} : \bigotimes^k(V) \rightarrow \bigwedge^k(V)$ definida por

$$\text{alt}(\phi) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn}(\sigma) \sigma\phi$$

onde $\text{sgn}(\sigma)$ se trata do sinal da permutação, ou seja, $\text{sgn}(\sigma) = 1$ se σ é decomposta como um número par de transposições e $\text{sgn}(\sigma) = -1$ se σ é decomposta em um número ímpar de transposições. O subespaço $\bigwedge^k(V)$ não é fechado em relação a \otimes . Para tanto, precisaremos uma “versão alternada” desta operação, conhecida como *produto exterior*.

Definição 3.1.9 (Produto exterior). Sejam $\omega \in \bigwedge^k(V)$ e $\eta \in \bigwedge^l(V)$. Definimos então $f \wedge g \in \bigwedge^{k+l}(V)$, o produto exterior de ω e η por

$$\omega \wedge \eta = \frac{(k+l)!}{k!l!} \text{alt}(\omega \otimes \eta)$$

O coeficiente que aparece na definição acima visa simplificar algumas fórmulas que veremos à frente e que surgem devido às combinações de permutações. É possível mostrar que \wedge é bilinear, associativo e anticomutativo, isto é,

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega.$$

Dessa forma, $(\bigoplus_k \bigwedge^k(V), \wedge)$ se torna uma álgebra graduada, conhecida como *álgebra de Grassmann* sobre V .

Lembremos que se e_1, \dots, e_n é base de V , com base dual $\{\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n\}$, então uma base de $\bigotimes_k(V^*)$ é dada por

$$\{\varepsilon^{i_1} \otimes \dots \otimes \varepsilon^{i_k} \mid 1 \leq i_1 \leq n_1, \dots, 1 \leq i_k \leq n_k\}.$$

É possível demonstrar também que $\{\varepsilon^{i_1} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{i_k} \mid i_1 < \cdots < i_k, i_j \in \{1, \dots, n\}\}$ é uma base para $\wedge^k(V)$. Note que podemos assumir $i_1 < \cdots < i_k$ pois, se $i_j > i'_j$

$$\varepsilon^{i_j} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{i_j} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{i_{j'}} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{i_k} = \pm \varepsilon^{i_1} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{i_{j'}} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{i_j} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{i_k}$$

Sendo assim, em particular, $\dim \wedge^k(V) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Nosso interesse nos tensores alternados está na sua ligação direta com determinantes, uma vez que, se $\dim V = n$, então $\dim \wedge^n(V^*) = \binom{n}{n} = 1$ e assim

$$\varepsilon^{i_1} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{i_n}(v_1, \dots, v_n) = \det \begin{bmatrix} \varepsilon^{i_1}(v_1) & \cdots & \varepsilon^{i_1}(v_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon^{i_n}(v_1) & \cdots & \varepsilon^{i_n}(v_n) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} v_1^{i_1} & \cdots & v_n^{i_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1^{i_n} & \cdots & v_n^{i_n} \end{bmatrix}.$$

Portanto, se $p = \{\lambda^1 v_1 + \cdots + \lambda^k v_k \mid 0 \leq \lambda^i \leq 1, \sum_i \lambda^i = 1\}$ é o paralelogramo k dimensional em V , com $0 \leq k \leq n = \dim V$, gerado pelos vetores v_1, \dots, v_k , o número $\varepsilon^{i_1} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{i_n}(v_1, \dots, v_k)$ é, a menos de sinal, o volume da projeção de P no subespaço gerado por e_{i_1}, \dots, e_{i_k} . Ou seja, os elementos de $\wedge^k(V)$ devem ser pensados como ferramentas algébricas para cálculo de volumes orientados.

3.2 Formas diferenciais

Transportaremos agora a construção dos tensores (alternados) ao contexto das superfícies. Assim como o caso de vetores, nesse contexto estaremos interessados em “campos suaves” desses objetos, ou seja, tensores em $T_p S$ que variam suavemente quando variamos o ponto em S . Sejam mais precisos. Seja S uma superfície e considere

$$\otimes^k S = \bigsqcup_{p \in S} \otimes^k T_p S.$$

Temos uma projeção canônica $\pi : \otimes^k S \rightarrow S$ que associa um elemento em $\otimes^k T_p S$ a p . Veja ainda que os campos coordenados associados a uma parametrização ∂_1, ∂_2 formam uma base de $T_p S$ para cada $p \in U$. Sejam dx^1, dx^2 os seus respectivos campos duais. Então, pelo que vimos na Seção 3.1, qualquer elemento $\zeta_p \in \otimes^k T_p S$ se escreve como

$$\zeta_p = \sum_{i_1, \dots, i_k} \zeta_{i_1, \dots, i_k}(p) dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_k}.$$

Uma aplicação $\zeta : S \rightarrow \otimes^k S$ satisfazendo $\pi \circ \zeta = \text{id}_M$, é um *campo de k -tensores* em S quando as funções coordenadas $\zeta_{i_1 \dots i_k}$ são suaves, em cada parametrização de S .

Definição 3.2.1 (Tensor da primeira forma fundamental). Com essa linguagem, podemos “estender” construções e objetos da álgebra linear a superfícies. Por exemplo, o produto

interno usual $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em \mathbb{R}^3 se restringe a um produto interno em cada $T_p S$. Como vimos, produtos internos são bilineares, então podemos encarar tais restrições como um campo de tensores em S , que denotaremos por g .

Se $X : U \rightarrow V$ é parametrização de S , temos, em V ,

$$g = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i \otimes dx^j,$$

para $i, j = 1, 2$. É usual pensar em g como uma matriz, que classicamente também é denotada por

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

Os coeficientes, é claro, são dados por $g_{11} = g(\partial_1, \partial_1) = \langle \partial_1, \partial_1 \rangle$, $g_{12} = g(\partial_1, \partial_2) = \langle \partial_1, \partial_2 \rangle$, $g_{21} = g(\partial_2, \partial_1) = \langle \partial_2, \partial_1 \rangle$ e $g_{22} = g(\partial_2, \partial_2) = \langle \partial_2, \partial_2 \rangle$.

Um campo de tensores ω é um k -forma diferencial, quando $\omega(p)$ é um tensor k -alternado em cada $T_p S$. O espaço vetorial das k -formas diferenciais em S é usualmente denotado por $\Omega^k(S)$. Pelo que vimos, qualquer elemento $\omega \in \Omega^k(S)$ se escreve, em coordenadas $X : U \rightarrow V$, como

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

com funções coordenadas ω_{i_1, \dots, i_k} suaves.

Exemplo 3.2.2. Formas diferenciais também fazem sentido em objetos de outras dimensões, por exemplo:

- Uma forma em \mathbb{R}^0 se trata de uma função $f : \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ (ou seja, um número real).
- 1-formas em \mathbb{R}^0 não existem, uma vez que dependeria da existência de ao menos uma dimensão, mas estamos em \mathbb{R}^0 .
- Uma 0-forma em \mathbb{R}^1 é uma função suave $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
- Uma 1-forma em \mathbb{R}^1 é uma aplicação que, a cada ponto, associa uma transformação linear $\omega(p)$ de \mathbb{R} em \mathbb{R} . Uma vez que estamos em \mathbb{R}^1 , temos uma base canônica e_1 , que por sua vez, é levada para o seu dual $(e_1)^* = dx^1$. Logo, $\omega(p) : \mathbb{R} \rightarrow \bigwedge^1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ é tal que $\omega(p) = \lambda(p)dx$, sendo $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ função suave.
- Note que

$$\bigwedge^0(T_p \mathbb{R}^2) \cong \bigwedge^0 \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}.$$

Ou seja, uma 0-forma diferencial em \mathbb{R}^2 é uma função suave $\omega : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, ou ainda, $\Omega^0(\mathbb{R}^2) \cong C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

- Fixando $\{e_1, e_2\}$ a base canônica de \mathbb{R}^2 , temos $\{dx^1, dx^2\}$ como base dual correspondente, uma 1-forma no \mathbb{R}^2 se dá por $\omega(p) = \omega_1(p)dx^1 + \omega_2(p)dx^2$, sendo ω_1 e ω_2 um par de funções suaves.

- Veja que $\dim(\wedge^2 \mathbb{R}^2) = \dim \binom{2}{2} = 1$, então, uma 2-forma em \mathbb{R}^2 se trata de uma função suave que possui $dx^1 \wedge dx^2$ como base.

A importância de utilizarmos tensores ao falarmos de formas diferenciais e integração está na naturalidade com que é feita a alterações de parametrizações, já que a noção de volume se encontra imbuída em sua própria constituição.

Exemplo 3.2.3. Seja $\omega = dx \wedge dy$ em \mathbb{R}^2 . Pensando na transformação polar das coordenadas: $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$ como uma expressão para uma função identidade com respeito as diferentes coordenadas no domínio e no co-domínio, obtemos:

$$\begin{aligned} dx \wedge dy &= d(r \cdot \cos(\theta)) \wedge d(r \cdot \sin(\theta)) \\ &= \left(\frac{\partial r \cos \theta}{\partial r} dr + \frac{\partial r \cos \theta}{\partial \theta} d\theta \right) \wedge \left(\frac{\partial r \sin \theta}{\partial r} dr + \frac{\partial r \sin \theta}{\partial \theta} d\theta \right) \\ &= (\cos(\theta) dr - r \cdot \sin(\theta) d\theta) \wedge (\sin(\theta) dr + r \cdot \cos(\theta) d\theta) \\ &= r \cos^2 \theta dr \wedge d\theta + r \sin^2 \theta d\theta \wedge dr \\ &= r(\cos^2 \theta dr \wedge d\theta + \sin^2 \theta dr \wedge d\theta) \\ &= r dr \wedge d\theta \end{aligned}$$

Em analogia com os exemplos anteriores, estando em uma superfície, uma 0-forma se trata de uma função suave. Uma 1-forma se trata de uma combinação do tipo $w_1 dx^1 + w_2 dx^2$, enquanto 2-formas são do tipo $w_{12} dx^1 \wedge dx^2$. Além disto, não existem k -formas com $k > 2$ devido à dimensão, uma vez que isto requiriria $dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$, com $i_1, i_2, i_3 \in \{1, 2\}$ com $i_1 < i_2 < i_3$, o que é impossível.

O seguinte conceito será útil posteriormente.

Definição 3.2.4 (Suporte). O *suporte* $\text{supp}(\omega)$ de uma k -forma ω é o fecho do conjunto $\{p \in S \mid \omega_p \neq 0\}$.

3.3 Pullbacks

É possível “transportar” formas via funções suaves. Mais precisamente, seja $f : S_1 \rightarrow S_2$ função diferenciável e $\omega \in \Omega^k(S_2)$. Definimos $f^* \omega \in \Omega^k(S_1)$, chamada de *forma pullback* de ω por f , por

$$f^* \omega_p(v_1, \dots, v_k) = \omega_{f(p)}(df_x v_1, \dots, df_x v_k).$$

Abaixo vemos algumas proposições da pullback que nos interessam.¹

Proposição 3.3.1. *Sejam $f : S_1 \rightarrow S_2$ e $\omega \in \Omega(S_2)$, então $f^* \omega \in \Omega(S_1)$*

¹ As demonstrações podem ser vistas em (LEE, 2012)

Proposição 3.3.2. *Sejam $f : S_1 \rightarrow S_2$ e $g : S_2 \rightarrow S_3$ funções suaves e $\omega \in \Omega(S_3)$. Então $f^*g^*\omega = (g \circ f)^*\omega$. Além disso, $\text{id}^*\omega = \omega$.*

3.4 A diferencial exterior

A diferencial usual de funções se estende convenientemente para o caso de formas diferenciais. Mais precisamente, seja S uma superfície e $X : U \rightarrow V$ uma parametrização. Já vimos que uma forma diferencial $\omega \in \Omega^k(S)$ se escreve como

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

Definimos $d\omega \in \Omega^{k+1}(S)$, nessas coordenadas, por

$$d\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sum_j \frac{\partial \omega_{i_1, \dots, i_k}}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

É possível mostrar que essa expressão em coordenadas de fato define um elemento global em $\Omega^{k+1}(S)$. Além disso, vale o seguinte.

Proposição 3.4.1. *A diferencial exterior tem as seguintes propriedades.*

1. *A diferencial exterior $d : \omega^0(S) \rightarrow \omega^1(S)$ coincide com a diferencial usual;*
2. *$d \circ d = 0$;*
3. *d comuta com pullbacks.*

A título de curiosidade, a propriedade $d^2 = 0$ que vimos acima nos mostra que

$$0 \longrightarrow \Omega^2(S) \longrightarrow \Omega^1(S) \longrightarrow \Omega^0(S) \longrightarrow 0$$

é um complexo de cadeias, chamado de *complexo de De Rham* de S . Mais precisamente, esse trata-se de um complexo de *cocadeias*, pois as setas vão no sentido oposto. Assim como no caso da homologia, temos então grupos de *cohomologia*

$$H^k(S) = \frac{\text{Ker } d_k}{\text{Im } d_{k-1}}.$$

Surpreendentemente, é possível mostrar que $H^k(S)$, assim definido, é isomorfo a $(H_k(S))^*$, desde que usemos coeficientes em \mathbb{R} (no lugar \mathbb{Z}) para obter a homologia. Aos leitores interessados, indicamos como referência para tal assunto, indicamos (JUNIOR, 2011).

3.5 A forma volume

Nessa seção obteremos uma forma que determina o volume de uma superfície S , a sua forma volume vol. Isso nos permitirá, mais tarde, integrar funções $S \rightarrow \mathbb{R}$, além de formas.

Proposição 3.5.1 (Forma volume). *Seja S uma superfície orientada. Há uma única forma diferencial $\text{vol} \in \Omega^2(S)$, chamada forma do volume, que satisfaz*

$$\text{vol}(E_1, E_2) = 1 \quad (3.5.1)$$

para qualquer referencial ortonormal orientado $\{E_1, E_2\}$.

Demonstração. Suponha que tal forma vol exista. Seja $\{E_1, E_2\}$ referencial ortonormal orientado em um conjunto aberto $U \subset S$ e $\{dx^1, dx^2\}$ as suas 1-formas duais. Podemos então escrever $\text{vol} = f dx^1 \wedge dx^2$ em U . Mas pela equação 3.5.1, $f = 1$, então

$$\text{vol} = dx^1 \wedge dx^2. \quad (3.5.2)$$

Isto prova que a forma é determinada unicamente. Para sua existência, defina vol conforme 3.5.2 em uma vizinhança de cada ponto. Basta checarmos que esta definição independe do referencial ortonormal. Seja $\{\overline{E}_1, \overline{E}_2\}$ outro referencial ortonormal orientado, com formas duais $\{\overline{dx}^1, \overline{dx}^2\}$. Seja

$$\overline{\text{vol}} = \overline{dx}^1 \wedge \overline{dx}^2.$$

Podemos escrever $\overline{E}_j = \sum_i A_i^j E_j$, para alguma matriz A_i^j de funções diferenciáveis. O fato de ambas as bases serem ortonormais nos diz que $A_i^j(p) \in O(n)$, isto é, A_i^j pertence ao grupo das matrizes ortogonais. Então, $\det(A_i^j) = \pm 1$. No entanto, ambas as bases são orientadas, forçando o determinante a ser positivo. Dessa forma,

$$\text{vol}(\overline{E}_1, \overline{E}_2) = \det(dx^j(\overline{E}_i)) = \det(A_i^j) = 1 = \overline{\text{vol}}(\overline{E}_1, \overline{E}_2).$$

Então $\text{vol} = \overline{\text{vol}}$. □

A forma volume ainda pode ser expressa através dos campos coordenados ∂_1 e ∂_2 (não necessariamente ortonormais)

Proposição 3.5.2. *Seja S uma superfície orientada. Então, para cada parametrização $X : U \rightarrow V$, a forma do volume tem expressão local*

$$\text{vol} = \sqrt{\det(g_{ij})} dx^1 \wedge dx^2,$$

onde g_{ij} são componentes da forma volume g nessas coordenadas.

Demonstração. Escrevamos, em coordenadas positivamente orientadas,

$$\text{vol} = f dx^1 \wedge dx^2$$

para alguma função de coeficientes positivos f . Para calcular f , seja $\{E_1, E_2\}$ um referencial ortonormal orientado em U e seja $\{dx^1, dx^2\}$ o seu referencial de 1-formas dual. Escrevamos

$$\partial_i = \sum_j A_i^j E_j.$$

Então podemos computar

$$f = \text{vol}(\partial_1, \partial_2) = \varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2(\partial_1, \partial_2) = \det(\varepsilon^j(\partial_i)) = \det A_i^j.$$

Por outro lado,

$$g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j) = g\left(\sum_k A_i^k E_k, \sum_l A_j^l E_l\right) = \sum_{k,l} A_i^k A_j^l.$$

Note que a última expressão é a (i, j) -ésima entrada da matriz $A^\top A$, portanto

$$\det(g_{ij}) = \det(A^\top A) = \det(A^\top) \det(A) = (\det(A))^2,$$

donde $f = \pm\sqrt{\det(g_{ij})}$. O sinal deve ser positivo, pois ambos os referenciais ∂_1, ∂_2 e E_1, E_2 são positivamente orientados. \square

Isto nos permite retornar a uma velha conhecida, a curvatura gaussiana, utilizando agora os coeficientes da segunda forma.

Lema 3.5.3. *A Curvatura Gaussiana K (1.7) pode ser reescrita em termos da segunda forma, como*

$$K(p) = \frac{\det \Pi_p}{\det dX_p}. \quad (3.5.3)$$

Demonstração. Seja $\{e_1, e_2\}$ base de $T_p S$ e $v_1, v_2 \in T_p S$, então $\Pi_p(v_1, v_2) = \langle dN_p v_1, v_2 \rangle$. Para facilitar os cálculos, chamaremos $A = dN_p$, $E = \langle e_1, e_1 \rangle$, $F = \langle e_1, e_2 \rangle$ e $G = \langle e_2, e_2 \rangle$. Sendo assim,

$$\begin{aligned} \det \Pi_p &= \begin{vmatrix} \langle -Ae_1, e_1 \rangle & \langle -Ae_1, e_2 \rangle \\ \langle -Ae_2, e_1 \rangle & \langle -Ae_2, e_2 \rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \langle Ae_1, e_1 \rangle & \langle Ae_1, e_2 \rangle \\ \langle Ae_2, e_1 \rangle & \langle Ae_2, e_2 \rangle \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} A_{11} \langle e_1, e_1 \rangle + A_{12} & A_{11} \langle e_1, e_2 \rangle + A_{22} \langle e_2, e_2 \rangle \\ A_{21} \langle e_1, e_1 \rangle + A_{22} \langle e_2, e_1 \rangle & A_{21} \langle e_1, e_2 \rangle + A_{22} \langle e_2, e_2 \rangle \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} A_{11}E + A_{12}F & A_{11}F + A_{12}G \\ A_{21}E + A_{22}F & A_{21}F + A_{22}G \end{vmatrix} \\ &= A_{11}EA_{21}F + A_{11}EA_{22}G + A_{12}FA_{21}F + A_{12}FA_{22}G \\ &\quad - A_{11}FA_{21}E - A_{11}FA_{22}F - A_{12}GA_{21}E - A_{12}GA_{22}F \\ &= \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} = \det(dN(p)) \cdot \det(dX_p). \end{aligned}$$

Ou seja, $K = \det(dN(p)) = \frac{\det \Pi_p}{\det(dX_p)}$, como queríamos. \square

3.6 Integração de formas

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $\omega \in \Omega^n(U)$ uma forma diferencial. Pelo que vimos na Seção 3.2 ω se escreve como

$$\omega = \omega_{1\dots n} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n,$$

Se $K \subset U$ é compacto, definimos a integral de ω em K por

$$\int_K \omega = \int_K \omega_{1\dots n} dx^1 \dots dx^n.$$

Estamos interessados principalmente no caso $n = 2$, para integrarmos formas em superfícies. Seja então S uma superfície orientada e $\omega \in \Omega^2(S)$. Suponhamos que $\text{supp}(\omega)$ é compacto e fica contido em $V \subset S$, que por sua vez admite uma parametrização orientada $X : U \rightarrow V$. Definimos $K = X^{-1}(\text{supp}(\omega))$ e

$$\int_S \omega = \int_K X^* \omega.$$

Para generalizarmos isso para uma forma com suporte compacto mas não necessariamente contido em um aberto parametrizado, podemos proceder de duas maneiras: ou dividimos $\text{supp}(\omega)$ em várias partes com a referida propriedade, integramos em cada uma delas, e depois somamos o resultado (veremos como fazer isso sistematicamente na próxima seção), ou então usamos o seguinte artifício teórico.

Definição 3.6.1 (Partições da unidade). Seja S superfície de modo que $S = \cup_{i=1}^n V_i$ com (V_i, X_i) parametrizações. Uma partição da unidade subordinada a essa cobertura V_i é uma coleção $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ de funções suaves $\xi_i : V_i \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo:

1. $0 \leq \xi_i \leq 1$;
2. $\text{supp}(\xi_i) \subset V_i$

Agora, dada $\omega \in \Omega^2(S)$ com $\text{supp}(\omega) \subset S$ compacto. Então podemos escolher uma cobertura localmente finita (V_i, X_i) de $\text{supp}(\omega)$ por abertos parametrizados com orientação positiva. Pelas propriedades da partição da unidade, para cada i , o produto $\xi_i \omega$ é forma diferencial com suporte em uma parametrização. Definimos então

$$\int_S \omega = \sum_i \int_S \xi_i \omega.$$

Definição 3.6.2 (Área da Superfície). A área de uma superfície compacta orientável S é

$$\text{vol}(S) = \int_S d\text{vol}.$$

3.7 Integral via simplexos

Vejam agora como integrar uma 2-forma ω em S usando uma triangulação Δ em S . Se $\sigma : \Delta^k \rightarrow S$ é suave (isto é, admite uma extensão suave a um aberto de \mathbb{R}^k contendo Δ^k), e $\omega \in \Omega^k(S)$, definimos

$$\int_{\sigma} \omega = \int_{\Delta^k} \sigma^* \omega.$$

Estendemos essa definição para uma combinação $n_1\sigma_1 + \cdots + n_l\sigma_l \in C_k(S)$ linearmente:

$$\int_{n_1\sigma_1 + \cdots + n_l\sigma_l} \omega = n_1 \int_{\sigma_1} \omega + \cdots + n_l \int_{\sigma_l} \omega.$$

Em particular, fica assim bem definida a integral de uma $(k-1)$ -forma sobre um bordo $\partial\sigma$.

É possível demonstrar que sempre podemos assumir que cada $\sigma : \Delta^2 \rightarrow S$ de uma triangulação para S é uma aplicação suave. Em outras palavras, qualquer superfície admite uma triangulação *suave*. Além disso, podemos também supor que cada σ preserva orientação. Assim, se $\text{supp}(\omega)$ é compacto, podemos então definir

$$\int_S \omega = \sum_{\alpha} \int_{\sigma_{\alpha}} \omega, \quad (3.7.1)$$

em que α percorre todos os 2-simplexos singulares da triangulação, sem nos preocuparmos com questões de convergência. De fato, mesmo que obtenhamos uma quantidade infinita de termos não-nulos, a série converge, já que seu valor precisa coincidir com o obtido via a definição da integral por partição da unidade. De qualquer modo, sendo $\text{supp}(\omega)$ compacto, podemos sempre encontrar uma triangulação de modo a obter uma soma finita em (3.7.1).

Como o valor de $\int_S \omega$ deve coincidir com aquele obtido via partições da unidade, temos:

Proposição 3.7.1. $\int_S \omega$ não depende da triangularização escolhida².

O próximo resultado, o qual é uma generalização do teorema fundamental do cálculo, será de suma importância para nós.

Teorema 3.7.2 (Teorema de Stokes em triângulos). *Seja $\sigma : \Delta^k \rightarrow S$ um triângulo de uma triangulação suave para S e seja $\omega \in \Omega^{k-1}(S)$. Então*

$$\int_{\sigma} d\omega = \int_{\partial\sigma} \omega.$$

² A demonstração pode ser encontrada na Proposição 16.8 de (LEE, 2012, p. 408)

A demonstração de tal resultado pode ser vista em (LEE, 2012)³. Veja, no entanto, que podemos ver um intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ como um “triângulo” em \mathbb{R} , via a restrição da identidade $\sigma = \text{id} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. O teorema 3.7.2⁴ nesse caso se resume ao teorema fundamental do cálculo, já que $\partial[a, b] = -a + b$, logo a integral do lado direito se resume a

$$\omega(b) - \omega(a).$$

Mais geralmente, o teorema 3.7.2 também abarca em si os teoremas de Green e Stokes do cálculo vetorial clássico.

³ Teorema 18.12 de (LEE, 2012, p. 481)

⁴ Mais precisamente, sua versão levemente diferente que abarca também o caso $S = \mathbb{R}$, que não é de fato uma superfície.

4 Geometria intrínseca

Neste capítulo mudaremos o ponto de vista e procuraremos uma maneira de calcular a curvatura de uma superfície orientada S sem usar elementos que não fazem parte dela. Mais precisamente, nossa definição de K usou a aplicação de Gauss, e, portanto, o campo normal unitário N . Perceba que, do ponto de vista da nossa formiguinha habitante de S , o campo N é algo que está “fora do seu universo”, algo que ela não conseguiria medir. Seria possível ela chegar a essa medida K de outra maneira? Como veremos, a resposta é sim, e para isso os protagonistas agora serão os campos tangentes a S .

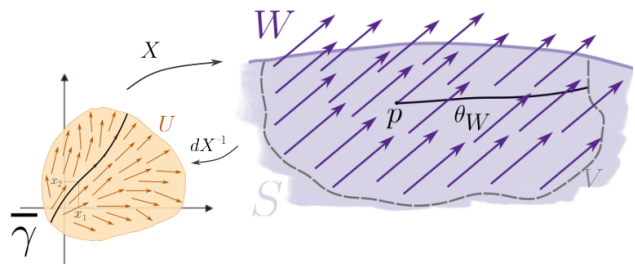
Esse ponto de vista de se fazer geometria diferencial, chamado de intrínseco, está interessado em invariantes que dependem apenas da superfície S em si, e não da maneira como ela esteja mergulhada em \mathbb{R}^3 . Mais precisamente, estaremos interessados em estudar as quantidades geométricas em S que são invariantes por isometrias (que chamaremos de *intrínsecas*). Nosso objetivo principal é mostrar que a curvatura gaussiana K é intrínseca.

4.1 O colchete de Lie

Seja $W \in \mathfrak{X}(S)$. Dado $p \in S$, queremos ver que existe uma curva integral para W , isto é, uma curva suave $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(t) = W(\gamma(t))$ para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. De fato, se $X : U \rightarrow V$ é uma parametrização local com $p \in V$, então a diferencial dX^{-1} transporta $W|_V$ a um campo de vetores suave em U . Em $U \subset \mathbb{R}^2$, esse problema se traduz em um sistema de duas equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, com condição inicial determinada por $\gamma(0) = p$. Usando o teorema de Existência e Unicidade de soluções, obtemos uma curva integral $\bar{\gamma}$ para o campo em U , e assim $\gamma = X \circ \bar{\gamma}$ é a curva integral para W . Feito isso, podemos estender $(-\varepsilon, \varepsilon)$ colando soluções locais, como é geralmente feito no estudo de EDOs, para o maior intervalo de definição possível.

Mais ainda, usando o fato das soluções variarem suavemente em relação aos dados iniciais, é possível construir uma aplicação $\theta_W : \mathcal{D} \rightarrow S$, sendo $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times S$ um aberto contendo $\{0\} \times S$, tal que, para cada $p \in S$ fixo, $\theta_W(t, p)$ é a curva integral de W passando por p no tempo $t = 0$ e definida em seu intervalo máximo. Chamamos θ_W de *fluxo* de W .

Figura 4.1.1 – Fluxo



Fonte: Autora, 2023

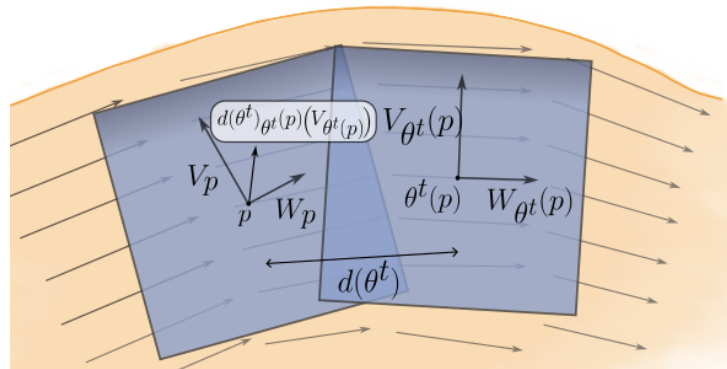
O domínio \mathcal{D} do fluxo é, em geral, diferente de $\mathbb{R} \times S$. Por exemplo, se tivermos um campo W para o qual isso vale, e retirarmos de S um ponto p por onde passa uma curva integral não constante de W , então o novo fluxo não estará definido em todo o $\mathbb{R} \times S$, já que, para os pontos sobre a curva integral cortada pela remoção de p , as novas curvas integrais precisarão “terminar” em p . Para simplificar nossa exposição, no entanto, trataremos apenas de campos W para os quais $\mathcal{D} = \mathbb{R} \times S$. Esse é o caso, por exemplo, de qualquer campo suave em uma superfície compacta (isto é, com $S \subset \mathbb{R}^3$ fechado e limitado).

Para cada $t \in \mathbb{R}$ fixo, temos um difeomorfismo $\theta_W^t = \theta_W(t, \cdot) : S \rightarrow S$. Isso nos permite definir o seguinte conceito. Se $V \in \mathfrak{X}(S)$ é outro campo, colocamos

$$[V, W]_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(d\theta_W^{-t})_{\theta_W^t(p)}(V_{\theta_W^t(p)}) - V_p}{t}.$$

Perceba que essa definição tenta imitar a definição de derivada de campos de vetores em \mathbb{R}^n , mas desvia do fato que, para campos em uma superfície S , quase sempre não será possível definir incrementos lineares (como se faz em \mathbb{R}^n), pois, em geral, isso resulta em um ponto que não pertence mais a S . A solução, como vemos acima, é definir um incremento na direção das curvas integrais de outro campo em S . Então $[V, W]_p$ é um novo vetor em $T_p S$, e de fato, com algum trabalho é possível mostrar que $[V, W] \in \mathfrak{X}(S)$. Chamaremos $[V, W]$ de *colchete de Lie* de V em W .

Figura 4.1.2 – Colchete de Lie



Fonte: Autora, 2023

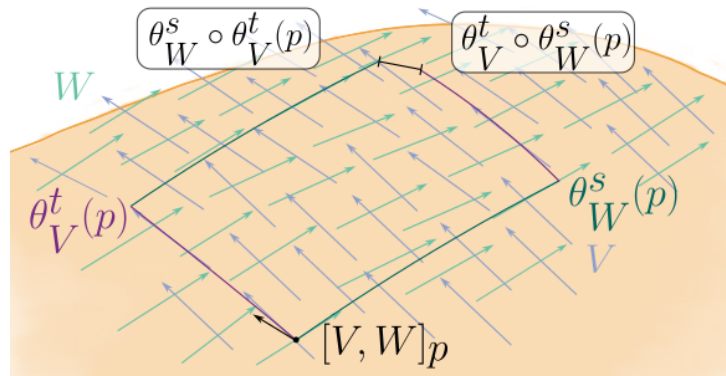
Proposição 4.1.1. *O colchete de Lie satisfaz as seguintes propriedades¹:*

1. $[V, W] = -[W, V]$,
2. $[W_1 + W_2, V] = [W_1, V] + [W_2, V]$,
3. $[[W, V], Z] + [[V, Z], W] + [[Z, W], V] = 0$.

Podemos interpretar $[V, W]_p$ geometricamente, conforme visualizamos na figura 4.1.3, como uma medida de o quanto os fluxos de V e W falham em comutar em p , ou seja, satisfazer $\theta_W^t \circ \theta_V^s(p) = \theta_V^s \circ \theta_W^t(p)$.

¹ Corolário 9.39 (LEE, 2012, p 230)

Figura 4.1.3 – Falha na comutação dos fluxos



Fonte: Autora, 2023

4.2 Derivada Covariante

Já vimos uma possibilidade de transportar a noção de derivada de campos de \mathbb{R}^n para o caso de campos em superfícies. No entanto, em \mathbb{R}^n podemos derivar um campo na direção de um vetor, e não de outro campo, como fizemos acima (e de fato, $[V, W]_p$ depende dos valores dos campos em toda uma vizinhança de p). Teria como obtermos alguma noção de derivada de campos na direção de vetores? A resposta também é sim. Vejamos com mais detalhes.

Seja $W \in \mathfrak{X}(S)$ e $v \in T_pS$. Então podemos escolher $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ com $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$. Assim, consideremos $W|_\gamma(t) = W(\gamma(t))$ como função $(-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$ e derivemos, obtendo

$$\frac{dW|_\gamma}{dt}(0) \in \mathbb{R}^3.$$

O único problema é que o vetor obtido pode não ser tangente a S em p . Para sanar isso, façamos a projeção ortogonal a T_pS , definindo

$$\frac{\nabla W}{dt}(0) = \left(\frac{dW|_\gamma}{dt}(0) \right)^\top \in T_pS.$$

Esse vetor é chamado de *derivada covariante* de W na direção de v .

Apesar de termos usado o \mathbb{R}^3 e a projeção ortogonal na definição acima, é possível provar que $\frac{\nabla W}{dt}$ não depende desses elementos, isto é, é algo que depende apenas da geometria intrínseca de S . De fato, consideremos uma parametrização $X : U \rightarrow V$ e os referenciais ∂_1 e ∂_2 . Com N , temos uma base $(\partial_1, \partial_2, N)$ em cada ponto de V . Escrevamos $\partial_{ij} = \partial^2 X / \partial x_i \partial x_j$ nessa base, como

$$\partial_{ij} = \Gamma_{ij}^1 \partial_1 + \Gamma_{ij}^2 \partial_2 + \nu_{ij} N. \tag{4.2.1}$$

Os coeficientes Γ_{ij}^k são chamados de *símbolos de Christoffel* de S na parametrização X . O nosso interesse neles é que podemos calculá-los apenas com os dados de S , pois os

obtemos em função dos coeficientes da métrica g . De fato, tomando o produto interno com ∂_1 e ∂_2 em (4.2.1), obtemos o sistema

$$\begin{cases} \langle \partial_{ij}, \partial_1 \rangle = \Gamma_{ij}^1 g_{11} + \Gamma_{ij}^2 g_{21} \\ \langle \partial_{ij}, \partial_2 \rangle = \Gamma_{ij}^1 g_{12} + \Gamma_{ij}^2 g_{22} \end{cases}$$

e, como g é não degenerada (logo $\det g_{ij} \neq 0$), podemos resolver esse sistema para Γ_{ij}^k .

Sabendo que os símbolos de Christoffel são intrínsecos, mostremos que a derivada covariante também é. Escrevamos $\gamma(t) = X(x_1(t), x_2(t))$ e

$$W|_{\gamma(t)} = a[x_1(t), x_2(t)]\partial_1 + b[x_1(t), x_2(t)]\partial_2 = a(t)\partial_1 + b(t)\partial_2$$

nas coordenadas X . Então, pela regra da cadeia,

$$\frac{dW|_{\gamma}}{dt} = a(\partial_{11}x'_1 + \partial_{12}x'_2) + b(\partial_{21}x'_1 + \partial_{22}x'_2) + a'\partial_1 + b'\partial_2.$$

Substituindo as expressões que obtivemos para ∂_{ij} em termos dos símbolos de Christoffel acima, e fazendo a projeção ortogonal (isto é, ignorando a componente N), obtemos então

$$\frac{\nabla W}{dt} = [a' + a(\Gamma_{11}^1 x'_1 + \Gamma_{12}^1 x'_2) + b(\Gamma_{12}^1 x'_1 + \Gamma_{22}^1 x'_2)] \partial_1 \quad (4.2.2)$$

$$+ [b' + a(\Gamma_{11}^2 x'_1 + \Gamma_{12}^2 x'_2) + b(\Gamma_{12}^2 x'_1 + \Gamma_{22}^2 x'_2)] \partial_2. \quad (4.2.3)$$

Isso mostra que $\nabla W/dt(0)$ é intrínseco e depende apenas de $v \in T_p S$, e não da curva γ escolhida.

4.3 Geodésicas

É interessante considerarmos, em particular, $\frac{\nabla}{dt}\gamma'$, ou seja, a derivada covariante do próprio campo γ' sobre γ (apesar de γ' não ser um campo definido em toda a S , a expressão (4.2.2) acima ainda faz sentido, e escolhemos ela como definição nesse caso). As curvas γ satisfazendo $\frac{\nabla}{dt}\gamma' = 0$ têm um papel importantíssimo na geometria de S , pois elas são as “linhas retas” da superfície, chamadas de *geodésicas*. Perceba a interpretação geométrica: $\frac{\nabla}{dt}\gamma'$, pensado como uma derivada segunda, é a aceleração de γ . Então γ é uma geodésica quando ela não “acelera” (lembrando que virar para os lados também é acelerar), a menos da quantidade que a própria curvatura da superfície S a força a fazer (isto é, na componente normal, ignorada por $\frac{\nabla}{dt}\gamma'$). Então uma geodésica é o caminho que a nossa formiguinha habitante de S percorreria se não “virasse para os lados” em seu trajeto.

Exemplo 4.3.1. Seja $S = \mathbb{R}^2$ com a sua métrica usual. Neste caso, como já vimos, ∇ é simplesmente a diferenciação de campos de vetores e a derivada covariante é a derivada direcional usual. Assim, as geodésicas de \mathbb{R}^2 são curvas c satisfazendo $\gamma'' = 0$, ou seja, retas $\gamma(t) = at + b$.

Exemplo 4.3.2. Considere $S = \mathbb{S}^2$. Fazendo a projeção ortogonal da segunda derivada, temos que γ é geodésica se, e somente se, $\gamma''(t) \perp T_{\gamma(t)}\mathbb{S}^2$ para todo t . Com isso, vemos que, as geodésicas traçam círculos máximos em \mathbb{S}^2 . Mais precisamente, não é difícil checar que a geodésica determinada por $v \in T_p\mathbb{S}^2$ com $\|v\| = 1$ é

$$\gamma_v(t) = (\cos t)p + (\sin t)v.$$

A expressão (4.2.2) igualada a 0 nos mostra que determinar as geodésicas de S corresponde a resolver um sistema de equações diferenciais ordinárias nas coordenadas. Em particular, sabemos que, dadas condições iniciais $p \in S$ e $v \in T_pS$, existe uma única geodésica γ_v satisfazendo $\gamma_v(0) = p$ e $\gamma'_v(0) = v$, definida num intervalo maximal $I \subset \mathbb{R}$.

4.4 O tensor de curvatura

Podemos agora definir também a *Conexão de Levi-Civita* de S como sendo a aplicação $\nabla : \mathfrak{X}(S) \times \mathfrak{X}(S) \rightarrow \mathfrak{X}(S)$ dada por

$$(\nabla_V W)_p = \frac{\nabla W}{dt}(0),$$

sendo que a derivada covariante é em relação à curva integral de V passando por p em $t = 0$. Não vamos nos estender aqui mostrando que $\nabla_V W$ é de fato um campo de vetores suave em S , mas cabe ressaltar que já sabemos que $\nabla_V W$ depende apenas do valor de V no ponto p e do valor de W sobre a curva integral de V por esse ponto. Essa é, portanto, a noção de derivada de campos que mais se aproxima a uma generalização da derivada usual D que conhecemos do cálculo. De fato, no caso $S = \mathbb{R}^2$ vemos facilmente, pela definição, que $D = \nabla$. É através dessa noção que mostraremos que a curvatura gaussiana é intrínseca.

De fato, sabemos que a derivada usual D de campos de vetores em \mathbb{R}^2 comuta, isso é, $D_V D_W = D_W D_V$. O essencial e surpreendente para nós aqui é que a curvatura de uma superfície S se manifesta como uma obstrução para essa comutatividade. Ou seja, D comuta justamente porque \mathbb{R}^2 tem curvatura zero. No caso de uma superfície S qualquer, definimos o campo de tensores R dado por

$$R(W, V)Z = \nabla_W \nabla_V Z - \nabla_V \nabla_W Z - \nabla_{[W, V]} Z,$$

chamado de *tensor de curvatura* de S , em que $W, V, Z \in \mathfrak{X}(S)$. Mostra-se que R é um campo de tensores misto, isto é, R_p é um elemento de um produto tensorial envolvendo três cópias de T_pS e uma de $(T_pS)^*$ (já que o seu resultado $R(W, V)Z$ é novamente um vetor tangente). Perceba que $R(W, V)Z$ é uma medida de o quanto a conexão ∇ falha em comutar: ele é exatamente o comutador $\nabla_W \nabla_V - \nabla_V \nabla_W$, menos $\nabla_{[W, V]}$, que deve ser subtraído para considerarmos o quanto os próprios campos W e V falham em comutar.

4.5 A curvatura seccional

Estamos interessados em relacionar R com a curvatura gaussiana K . Para tanto, tomaremos uma medida derivada de R , dada da seguinte maneira, para $p \in S$, considere

$$\text{sec}_S(p) = g(R(E_1, E_2)E_2, E_1) \in \mathbb{R}$$

sendo E_1, E_2 um referencial ortonormal qualquer em p . Com alguns cálculos se mostra que $\text{sec}_S(p)$ não depende da escolha do referencial ortonormal, e que de fato pode ser obtido via uma base qualquer e_1, e_2 de $T_p S$, como

$$\text{sec}_S(p) = \frac{g(R(e_1, e_2)e_2, e_1)}{\|e_1\|^2\|e_2\|^2 - \langle e_1, e_2 \rangle^2}.$$

Tal número é a *curvatura seccional* de S em p . Isso determina uma função $\text{sec}_S : S \rightarrow \mathbb{R}$, e queremos agora compará-la com K . Para tanto, precisaremos do seguinte.

Lema 4.5.1. *Se W, V são campos em um aberto $U \subset S$, então*

$$\text{II}(W, V) = \langle D_V W, N \rangle.$$

onde D é a derivada usual de campos em \mathbb{R}^3 .

Demonstração. Temos $\langle V, N \rangle = 0$, logo $W \langle V, N \rangle = \langle D_W V, N \rangle + \langle V, D_W N \rangle = 0$. Ou seja, $\langle D_W V, N \rangle = -\langle D_W N, V \rangle = -\langle dNW, V \rangle = \text{II}(W, V)$. \square

A equação provida pelo do teorema a seguir, conhecida como *equação de Gauss*, também nos ajudará a relacionar sec_S com K .

Teorema 4.5.2 (Equação de Gauss). *Vale a equação*

$$g(R(W, V)Y, Z) = \text{II}(W, Z) \text{II}(V, Y) - \text{II}(W, Y) \text{II}(V, Z)$$

para quaisquer campos V, W, Y, Z num aberto $U \subset S$.

Demonstração. Verifica-se que $D_W D_V Y - D_V D_W Y = D_{[V, W]} Y$. Portanto, usando a bilinearidade do produto interno,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle D_W D_V Y, Z \rangle - \langle D_V D_W Y, Z \rangle - \langle D_{[V, W]} Y, Z \rangle \\ &= W \langle D_V Y, Z \rangle - \langle D_V Y, D_W Z \rangle - V \langle D_W Y, Z \rangle + \langle D_W Y, D_V Z \rangle - \langle D_{[W, V]} Y, Z \rangle \end{aligned}$$

Como $\nabla_W V = (\nabla_V W)^\top = \nabla_V W - \text{II}(W, V)N$, obtemos,

$$\begin{aligned} 0 &= W \langle \nabla_V Y + \text{II}(Y, V)N, Z \rangle - \langle \nabla_V Y + \text{II}(V, Y)N, \nabla_W Z + \text{II}(W, Z)N \rangle \\ &\quad - V \langle \nabla_W Y + \text{II}(Y, W)N, Z \rangle + \langle \nabla_W Y + \text{II}(W, Y)N, \nabla_V Z + \text{II}(V, Z)N \rangle \\ &\quad - \langle \nabla_{[W, V]} Y + \text{II}([W, V], Y)N, Z \rangle \\ &= W \langle \nabla_V Y, Z \rangle - \langle \nabla_V Y, \nabla_W Z \rangle - \text{II}(V, Y) \text{II}(W, Z) - V \langle \nabla_W Y, Z \rangle \\ &\quad + \langle \nabla_W Y, \nabla_V Z \rangle + \text{II}(W, Y) \text{II}(V, Z) - \langle \nabla_{[W, V]} Y, Z \rangle \\ &= \langle \nabla_W \nabla_V Y, Z \rangle - \text{II}(V, Y) \text{II}(W, Z) - \langle \nabla_V \nabla_W Y, Z \rangle + \text{II}(W, Y) \text{II}(V, Z) - \langle \nabla_{[W, V]} Y, Z \rangle \end{aligned}$$

Ou seja, $\langle R(W, V)Y, Z \rangle = \Pi(V, Y)\Pi(W, Z) - \Pi(W, Y)\Pi(V, Z)$. \square

Por fim, vamos ao nosso objetivo dessa seção.

Teorema 4.5.3. $K = \sec_S$.

Demonstração. Seja $\{\partial_1, \partial_2\}$ referencial de uma parametrização $X : U \rightarrow S$. Nessa base Π é representada pela matriz

$$\begin{pmatrix} \Pi(\partial_1, \partial_1) & \Pi(\partial_1, \partial_2) \\ \Pi(\partial_2, \partial_1) & \Pi(\partial_2, \partial_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

De fato, temos que $\Pi(\partial_1, \partial_1) = \langle D_{\partial_1}\partial_1, N \rangle = \left\langle \frac{\partial(\partial_1)}{\partial x_1}, N \right\rangle =: e$ e analogamente para os outros casos. Portanto,

$$\begin{aligned} K \det dX_p &= \Pi(\partial_1, \partial_1)\Pi(\partial_2, \partial_2) - \Pi(\partial_1, \partial_2)\Pi(\partial_2, \partial_1) \\ &= \langle R(\partial_1, \partial_2)\partial_2, \partial_1 \rangle \\ &= (|\partial_1|^2|\partial_2|^2 - \langle \partial_1, \partial_2 \rangle^2) \sec_S \\ &= \sec_S \det dX_p \end{aligned}$$

Logo, $K = \sec$. \square

Como corolário, segue o famoso resultado que K é intrínseca a S .

Corolário 4.5.4 (Teorema egregium de Gauss). *A curvatura gaussiana K de uma superfície S é intrínseca.*

5 Teorema de Gauss-Bonnet

Após uma longa jornada, chegamos finalmente ao nosso destino: o famoso teorema de Gauss-Bonnet. Uma última parada é requerida, utilizando o teorema do Índice de Rotação, ou *Umlaufsatz*. Tal teorema foi nomeado e demonstrado inicialmente por Heinz Hopf, famoso por ser um dos pioneiros da topologia algébrica.

5.1 Teorema do Índice de Rotação

Seja S superfície e considere C uma curva simples e fechada e C^1 por partes $\gamma : [a, b] \rightarrow S$. Definimos seu campo tangente unitário por $T(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|_g}$. Num vértice, (isto é, num ponto de não diferenciabilidade) $\gamma(t_i)$, teremos apenas uma das possibilidades:

- $T(t_i^-) \neq \pm T(t_i^+)$
- $T(t_i^-) = T(t_i^+)$
- $T(t_i^-) = -T(t_i^+)$

Dizemos que γ é um *polígono curvo* em S quando não ocorrem vértices do terceiro tipo e a imagem de γ coincide com a fronteira de um aberto pré-compacto $\omega \subset S$ cujo fecho fica inteiramente contido numa vizinhança coordenada orientada (U, X) . Neste caso definimos o *ângulo externo* ε_i como sendo 0 se $\gamma(t_i)$ é um vértice do segundo tipo. Já no caso de um vértice do primeiro tipo, $-\pi < \varepsilon_i < \pi$ será o *ângulo orientado* formado por $T(t_i^-)$ e $T(t_i^+)$. O *ângulo interno* em $\gamma(t_i)$ é $\theta_i := \pi - \varepsilon_i$ em qualquer caso.

Considere o referencial ortonormal (E_1, E_2) que obtemos em U aplicando o processo de Gram-Schmidt aos campos coordenados (∂_1, ∂_2) . Uma função **angular** para γ é uma função contínua por partes $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$T(t) = \cos \theta(t) E_1(\gamma(t)) + \operatorname{sen} \theta(t) E_2(\gamma(t))$$

para todo t onde $\gamma'(t)$ é contínua pela direita em cada t_i , com $\theta(t_i) = \lim_{t \rightarrow t_i} \theta(t) + \varepsilon_i$. Podemos então definir o *índice de rotação* de γ por

$$\rho(\gamma) = \frac{1}{2\pi} [\theta(b) - \theta(a)]$$

Podemos dizer que $\rho(\gamma)$ conta o número de voltas que γ completa antes de se fechar. Mas, para tal, precisamos levar em conta a orientação. Dizemos que γ é *positivamente orientada* quando γ' , sempre que definida, é positivamente orientada com a orientação de Stokes. Isto é, se N é um campo sobre γ que aponta para dentro de Ω então (γ', N) forma uma base orientada γ (com respeito a orientação de S). Intuitivamente, pensando em uma

superfície em \mathbb{R}^3 , se V é um campo normal em U ser positivamente orientado significa que sua parametrização é no sentido anti-horário com relação a um relógio posicionado sobre a superfície e virado para a mesma direção que V .

Teorema 5.1.1. (*Umlaufsatz*) *O índice de rotação de um polígono curvo positivamente orientado é +1.*

Apesar da simplicidade do enunciado e da intuição nos inclinar a seu favor, a demonstração do teorema é longa e pouco elementar¹.

5.2 Teorema de Gauss–Bonnet local

De agora em diante assumiremos que o polígono curvo γ é parametrizado por comprimento de arco, e portanto $\gamma'(t) = T(t)$. Para um ponto suave $\gamma(t)$ definimos a *curvatura orientada* de γ em t por

$$\kappa_N(t) = g(\nabla_t \gamma'(t), N(t)),$$

sendo que $\nabla_t \gamma'(t)$ denota a derivada covariante de $\gamma'(t)$ sobre γ e $N(t)$ o campo unitário que aponta para dentro de Ω e é normal a γ' . Como γ é parametrizado por comprimento de arco vemos, derivando $\|\gamma'(t)\|_g^2 = 1$, que $\nabla_t \gamma'(t)$ é sempre ortogonal a $\gamma'(t)$. Logo, podemos escrever

$$\nabla_t \gamma'(t) = \kappa_N(t)N(t)$$

o que elucidada o significado geométrico de $\kappa_N(t)$: esta quantidade mede o quanto γ se curva, sendo positiva quando a curvatura é na direção do interior de Ω e negativa caso contrário.

Teorema 5.2.1. (*Fórmula de Gauss-Bonnet local*). *Seja S uma superfície e γ um polígono curvo positivamente orientado em S , com interior Ω . Então*

$$\int_{\Omega} K d\text{vol} + \int_{\gamma} \kappa_N(t) dt + \sum_{i=1}^k \alpha_i = 2\pi,$$

onde K é curvatura Gaussiana (isto é, seccional) de S , $d\text{vol}$ a forma de volume em S e $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ os ângulos externos de γ .

Demonstração. Usando o teorema 5.1.1 e o teorema fundamental do cálculo, podemos escrever usando θ a função ângulo:

$$2\pi = \theta(b) - \theta(a) = \sum_{i=1}^k \alpha_i + \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} \theta'(t) dt \tag{5.2.1}$$

¹ Uma versão para uma região homeomorfa a um plano pode ser encontrada no capítulo 4.5 do (CARMO, 2010, p 320). Ali também é indicado a demonstração para o caso geral.

Vamos agora relacionar $\theta'(t)$ com $\kappa_N(t)$ e K . Seja (E_1, E_2) o referencial ortonormal definido anteriormente. Por definição, temos, para t onde γ é suave,

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= \cos \theta(t)E_1(\gamma(t)) + \sen \theta(t)E_2(\gamma(t)), \\ N(t) &= -\sen \theta(t)E_1(\gamma(t)) + \cos \theta(t)E_2(\gamma(t)).\end{aligned}$$

No que segue omitiremos a dependência em t para simplificar a notação. Derivando γ' obtemos

$$\begin{aligned}\nabla_t \gamma' &= -(\sen \theta)\theta' E_1 + (\cos \theta)\nabla_{\gamma'} E_1 + (\cos \theta)\theta' E_2 + (\sen \theta)\nabla_{\gamma'} E_2 \\ &= \theta' N + (\cos \theta)\nabla_{\gamma'} E_1 + (\sen \theta)\nabla_{\gamma'} E_2.\end{aligned}$$

Como (E_1, E_2) é ortonormal, temos, para qualquer vetor v ,

$$\begin{aligned}0 &= \nabla_v |E_1|^2 = 2g(\nabla_v E_1, E_1), \\ 0 &= \nabla_v |E_2|^2 = 2g(\nabla_v E_2, E_2), \\ 0 &= \nabla_v g(E_1, E_2) = g(\nabla_v E_1, E_2) + g(\nabla_v E_2, E_1).\end{aligned}$$

Em particular $\nabla_v E_1$ é múltiplo de E_2 e $\nabla_v E_2$ é múltiplo de E_1 . Definindo a 1-forma

$$\omega(v) := g(\nabla_v E_2, E_1) = -g(\nabla_v E_1, E_2)$$

podemos então escrever

$$\begin{aligned}\nabla_v E_1 &= -\omega(v)E_2 \\ \nabla_v E_2 &= \omega(v)E_1\end{aligned}$$

Note que ω define completamente a conexão em U . Usando o que obtivemos podemos calcular

$$\begin{aligned}\kappa_N &= g(\nabla_t \gamma'(t), N(t)) \\ &= g(\omega' N, N) + g(\nabla_{\gamma'} E_1, N) \cos \theta + g(\nabla_{\gamma'} E_2, N) \sen \theta \\ &= \theta' - g(\omega(\gamma') E_2, N) \cos \theta + g(\omega(\gamma') E_1, N) \sen \theta \\ &= \theta' - \omega(\gamma') \cos^2 \theta - \omega(\gamma') \sen^2 \theta \\ &= \theta' - \omega(\gamma')\end{aligned}$$

Substituindo em 5.2.1 temos:

$$\begin{aligned}2\pi &= \sum_{i=1}^k \alpha_i + \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} \kappa_N(t) dt + \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} \omega(\gamma'(t)) dt \\ &= \sum_{i=1}^k \alpha_i + \int_{\gamma} \kappa_N dt + \int_{\gamma} \omega.\end{aligned}$$

Resta apenas mostramos que $\int_{\gamma} \omega = \int_{\Omega} K d\text{vol}$. Pelo teorema de Stokes temos $\int_{\gamma} \omega dt = \int_{\Omega} d\omega$. Concluiremos, portanto, se demonstrarmos que $d\omega = K d\text{vol}$.

Como (E_1, E_2) é referência ortonormal, temos $d\text{vol}(E_1, E_2) = 1$. Assim,

$$\begin{aligned} K d\text{vol}(E_1, E_2) &= K = g((R(E_1, E_2)E_2), E_1) \\ &= g(\nabla_{E_1} \nabla_{E_2} E_2 - \nabla_{E_2} \nabla_{E_1} E_2 - \nabla_{[E_1, E_2]} E_2, E_1) \\ &= g(\nabla_{E_1}(\omega(E_2)E_1) - \nabla_{E_2}(\omega(E_1)E_1) - \nabla_{[E_1, E_2]} E_2 E_1) \\ &= g(E_1(\omega(E_2))E_1 + \omega(E_2)\nabla_{E_1} E_1 - E_2(\omega(E_1))E_1 \\ &\quad - \omega(E_1)\nabla_{E_2} E_1 - \omega([E_1, E_2])E_1, E_1) \\ &= E_1(\omega(E_2)) - E_2(\omega(E_1)) - \omega([E_1, E_2]) \\ &= d\omega(E_1, E_2). \end{aligned} \quad \square$$

Vários corolários imediatos são dignos de menção.

Corolário 5.2.2. *A soma dos ângulos internos de um triângulo euclidiano é π .*

Demonstração. No caso euclidiano, o triângulo está contido em um plano. Sendo assim, $K = 0$. Além disso, as retas não possuem curvatura, por construção, logo, $\kappa = 0$. Sendo assim, pelo teorema de Gauss-Bonnet,

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_i = 2\pi.$$

Ou seja, a soma dos ângulos externos α_i é 2π . Mas como um ângulo interno θ_i do triângulo euclidiano é igual a $\pi - \alpha_i$, temos que

$$2\pi = \sum_{i=1}^3 \alpha_i = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = (\pi - \theta_1) + (\pi - \theta_2) + (\pi - \theta_3) = 3\pi - \sum_{i=1}^3 \theta_i.$$

Ou seja,

$$\sum_{i=1}^3 \theta_i = 3\pi - 2\pi = \pi. \quad \square$$

Corolário 5.2.3. *O comprimento de um círculo euclidiano de raio R é $2\pi R$.*

Demonstração. Como ainda estamos no caso euclidiano, $K = 0$. No entanto, como estamos considerando um círculo, $\kappa_N = \frac{1}{R}$. Além disto, a soma dos ângulos externos de um círculo resulta em 0. Unindo todas essas informações e, pelo teorema, chegamos que

$$\int_{\gamma} \kappa_n(t) dt = 2\pi \int_{\gamma} \frac{1}{R} dt = 2\pi \frac{1}{R} \int_{\gamma} dt = 2\pi \int_{\gamma} dt = 2\pi R. \quad \square$$

Corolário 5.2.4 (Theorema Elegantissimum de Gauss). *Se temos um triângulo geodésico B , então*

$$\int_{\gamma(B)} K d\text{vol} = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \pi$$

onde $\theta_i = \pi - \alpha_i$ é o ângulo interior.

Demonstração. Como B é um triângulo geodésico, isto é, ∂B são segmentos geodésicos, temos que $\nabla_y \gamma' = 0$, ou seja, κ_n é nula. Ainda temos que $\theta_i = \pi - \alpha_i$. Sendo assim,

$$\begin{aligned} 2\pi &= \int_{\gamma(B)} K d\text{vol} + \sum_{i=1}^3 \alpha_i \\ &= \int_{\gamma(B)} K d\text{vol} + \sum_{i=1}^3 (\pi - \theta_i) \\ &= \int_{\gamma(B)} K d\text{vol} + \pi - \theta_1 + \pi - \theta_2 + \pi - \theta_3. \end{aligned}$$

Isto é,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma(B)} K d\text{vol} &= 2\pi + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - 3\pi \\ &= \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \pi. \end{aligned} \quad \square$$

Corolário 5.2.5. *A soma dos ângulos internos de um triângulo geodésico é:*

$$\sum_{i=1}^3 \theta_i \begin{cases} > \pi, & \text{se } K > 0 \\ = \pi, & \text{se } K = 0 \\ < \pi, & \text{se } K < 0 \end{cases}$$

Demonstração. Se $K > 0$, então $\int_{\gamma(B)} K d\text{vol} > 0$, logo, do Corolário 5.2.4, $\sum_{i=1}^3 \theta_i - \pi > 0$, ou seja, $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 > \pi$.

Por outro lado, se $K = 0$, então $\int_{\gamma(B)} K d\text{vol} = 0$, logo $\sum_{i=1}^3 \theta_i - \pi = 0$. Sendo assim, $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \pi$.

Ainda, se $K < 0$, então $\int_{\gamma(B)} K d\text{vol} < 0$, portanto, $\sum_{i=1}^3 \theta_i - \pi < 0$. Assim, $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 < \pi$. □

Corolário 5.2.6. *Se a soma dos ângulos internos de um triângulo B é tal que*

$$\sum_{i=1}^3 \theta_i \begin{cases} > \pi, & \text{então, para algum } p \in B, K(p) > 0 \\ = \pi, & \text{então, para algum } p \in B K(p) = 0 \\ < \pi, & \text{então, para algum } p \in B K(p) < 0 \end{cases}$$

Demonstração. Se a soma dos ângulos é maior do que π , então, pelo teorema, segue que $\int_B K dA > 0$. Sendo assim, pela continuidade da integral e pelo teorema do valor intermediário, em algum ponto $p \in B$, $K(p) > 0$. Se, no entanto, a soma dos ângulos é igual a zero, então, pelo teorema de Gauss-Bonnet, $\int_B K dA = 0$. Novamente, pelo mesmo argumento anterior, em algum ponto $p \in B$, $K(p) = 0$. Se, por outro lado, a soma dos ângulos é menor que zero, então a integral da curvatura é menor que zero, logo, em algum ponto $p \in B$, $K(p) < 0$. \square

5.3 Teorema de Gauss-Bonnet global

Podemos triangular uma superfície como fizemos já anteriormente e utilizar o teorema de Gauss-Bonnet localmente para cada triângulo, obtendo o resultado de uma maneira generalizada.

Teorema 5.3.1 (Gauss-Bonnet). *Seja S uma superfície compacta e triangularizada. Então*

$$\int_S K d\text{vol} = 2\pi\chi(S)$$

Demonstração. Podemos supor, sem perda de generalidade, que S é conexa (pois caso contrário, basta somar o resultado para cada componente conexa). Denotemos por $\{\Omega_i\}_{i=1}^F$ o conjunto das faces da triangulação e, para cada i , por $\{\gamma_{ij}\}_{j=1,2,3}$ e $\{\theta_{ij}\}_{j=1,2,3}$ o conjunto das arestas e dos ângulos internos de Ω_i , respectivamente. Aplicando o teorema 5.2.1 em cada triângulo e somando em i temos que

$$\sum_{i=1}^F \int_{\Omega_i} K d\text{vol} + \sum_{i=1}^F \sum_{j=1}^3 \int_{\gamma_{ij}} \kappa_N dt + \sum_{i=1}^F \sum_{j=1}^3 (\pi - \theta_{ij}) = \sum_{i=1}^F 2\pi,$$

tendo escolhido cada triângulo de maneira a se tornar positivamente orientado. Então, a integral sobre cada aresta γ_{ij} aparece exatamente duas vezes na expressão acima, mas com direções opostas. Sendo assim, as integrais de κ_N se cancelam. Ficamos então com

$$\int_S K d\text{vol} + 3\pi F - \sum_{i=1}^F \sum_{j=1}^3 (\theta)_{ij} = 2\pi F.$$

Além disso, como cada ângulo interno aparece exatamente uma vez e, em cada vértice a soma dos ângulos que se formam neste vértice é 2π , a soma dos θ_{ij} totaliza $2\pi V$, onde V é o número de vértices.

$$\int_S K d\text{vol} = 2\pi V - \pi F. \tag{5.3.1}$$

Ainda, como cada aresta aparece em dois triângulos e cada triângulo tem três arestas, temos que, sendo A o número de arestas e F o número de faces,

$$F = \frac{2A}{3}$$

Ou seja, $2A = 3F$. Mais ainda, podemos escrever $F = 2A - 2F$, substituindo em 5.3.1,

$$\int_S K d\text{vol} = 2\pi V - \pi(2A - 2F) = 2\pi V - 2\pi A + 2\pi F = 2\pi\chi(S).$$

□

Corolário 5.3.2. *Seja S uma superfície compacta e K sua curvatura gaussiana. Então*

1. *Se S é homeomorfa à \mathbb{S}^2 , então $K > 0$ em algum ponto.*
2. *Se S é homeomorfa à \mathbb{T}^2 , então $K = 0$ ou K atinge valores positivos e negativos.*
3. *Se S é qualquer outra superfície, então $K < 0$ em algum ponto.*

Demonstração. Veja que, se uma superfície é homeomorfa a esfera, então, como percebemos na tabela 2.4, $\chi(S) = 2$. Pelo teorema, $\int_S K d\text{vol} = 2\pi\chi(S) = 2\pi \cdot 2 = 4\pi > 0$. Então, como a superfície é compacta, pelo teorema do valor intermediário, em pelo menos um ponto $p \in S$, $K(p) > 0$.

Por outro lado, se uma superfície S é homeomorfa ao toro, $\chi(S) = 0$. Logo, pelo teorema, $\int_S K d\text{vol} = 2\pi\chi(S) = 0$, e, portanto, deve ter curvatura gaussiana nula em pelo menos um ponto $p \in S$.

Como qualquer outra superfície restante é homeomorfa a uma soma conexa de toros, sua característica de Euler será negativa, conforme discussão do capítulo 2.4, segue que a integral da curvatura deve ser negativa, o que implica que a sua curvatura é negativa em algum ponto na superfície. □

Exemplo 5.3.3 (Toro de revolução). Seja \mathbb{T}^2 o Toro de revolução. Pelo Exemplo 2.3.2, sabemos que a característica de Euler no toro é zero. Por outro lado, pelo Exemplo 1.7.3, a curvatura gaussiana no toro é conhecida. Isto nos permite dizer que

$$\int_{\mathbb{T}^2} \frac{\cos(\theta)}{r(R + r \cos(\theta))} d\text{vol} = \int_{\mathbb{T}^2} K d\text{vol} = 2\pi\chi(\mathbb{T}^2) = 2\pi \cdot 0 = 0.$$

5.4 Teorema de Chern–Gauss–Bonnet

Nesta seção vamos ver, a título de curiosidade, generalizações do teorema de Gauss-Bonnet.

Para começar, existem versões mais gerais para o teorema de Gauss–Bonnet para superfícies não compactas. Um exemplo encontrado no famoso livro *Geometria diferencial de curvas e superfícies* (CARMO, 2010) só requer que as curvas que formam a fronteira sejam fechadas, simples e regulares por partes, além de orientadas positivamente. Isto implica que tenhamos mais cuidado com os vértices das triangulações da superfície.

Outra generalização possível se trata para hipersuperfícies, isto é, versões n -dimensionais de superfícies, como subconjuntos de \mathbb{R}^{n+1} . Para tanto, é conveniente denotarmos por $\text{vol}(\mathbb{S}^n)$ o volume da esfera n -dimensional $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. É possível verificar

que

$$\text{vol}(\mathbb{S}^n) = \frac{(n+1)\sqrt{\pi^n}}{(n/2)!},$$

sendo que, para qualquer $x \in [0, \infty)$, estendemos a definição usual do fatorial por

$$x! = \int_0^\infty t^x e^{-t} dt.$$

Assim como no caso $n = 2$, uma hipersuperfície $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é orientável quando admite um campo normal unitário (aqui está uma dos elementos que simplificam esse caso: temos apenas uma dimensão sobrando em \mathbb{R}^{n+1} . Um tal campo N provê então uma aplicação de Gauss, de maneira inteiramente análoga, e definimos a curvatura Gaussiana por $K(p) = \det(dN)_p$. Já a característica de Euler $\chi(S)$ pode ser obtida também via triangulações (com triângulos n -dimensionais Δ^n), fazendo-se

$$\chi(S) = V - A + F - \dots,$$

em que a soma prossegue alternadamente percorrendo todas as “faces” k -dimensionais da triangulação.

Teorema 5.4.1 (Gauss–Bonnet para Hipersuperfícies). *Se S é uma hipersuperfície compacta orientável e de dimensão par n , então*

$$\int_S K d\text{vol} = \frac{1}{2} \text{vol}(\mathbb{S}^n) \chi(S)$$

A demonstração deste teorema se encontra em (GUILLEMIN; POLLACK, 2010, p. 196). Por fim, cabe citar aqui que existe uma versão ainda mais geral do teorema de Gauss–Bonnet para variedades compactas M de dimensão maiores n . Esses objetos são generalizações de superfícies que não ficam necessariamente contidas em algum espaço Euclidiano de dimensão $n + 1$, como o caso das hipersuperfície. Em 1943 houve uma demonstração para o caso específico de variedades extrínsecas e então em 1944 Shiing-Shen Chern provou o teorema com maior generalização. Há ainda outros dois teoremas que são generalizações do teorema de Gauss–Bonnet: o de Riemann–Roch e o de Atiyah–Singer.

Uma primeira observação se trata que no caso de dimensões ímpares não há como esperar esta generalização, já que, para tais casos $\chi(M)$ é nula, pela chamada dualidade de Poincaré. Seus elementos são demasiado complexos para comentarmos aqui, de modo que nos contentaremos apenas com o enunciado.

Teorema 5.4.2 (Chern–Gauss–Bonnet). *Seja M uma variedade orientável compacta de dimensão par. Para a forma de curvatura $e(\Omega)$ da conexão de Levi-Civita de qualquer métrica Riemanniana em M , vale*

$$\int_M e(\Omega) = \chi(M).$$

Apesar de parecer mais simples, o integrando $e(\Omega)$ é muito mais complicado que na versão bidimensional. Por exemplo, em 4 dimensões o teorema pode ser escrito em termo das normas dos tensores de curvatura de Ricci e da curvatura escalar de M como

$$\int_M |R|^2 - 4|\text{Ric}|^2 + |\text{Scal}|^2 d\text{vol} = 32\pi^2 \chi(M).$$

Referências

- BARROS, R. L. de. *Classificação das superfícies compactas sem bordo*. Monografia (TCC) — UFSCar, 2010.
- BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. *História da matemática*. [S.l.]: Editora Blucher, 2019.
- BREDON, G. E. *Topology and geometry*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 139.
- CARMO, M. P. D. *Geometria diferencial de curvas e superfícies*. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 2010.
- GAUSS, C. F. *Disquisitiones generales circa superficies curvas*. [S.l.]: Typis Dieterichianis, 1828. v. 1.
- GUILLEMIN, V.; HAINE, P. *Differential forms*. [S.l.]: World Scientific, 2019.
- GUILLEMIN, V.; POLLACK, A. *Differential topology*. [S.l.]: American Mathematical Soc., 2010. v. 370.
- HATCHER, A. *Algebraic Topology*. New York, NY: Cabridge University Press, 2002.
- HIRSCH, M. W. *Differential Topology*. 2nd. ed. [S.l.]: Springer, 1994. v. 33.
- JUNIOR, F. C. C. *Tensores, Teorema de Stokes e Cohomologia de De Rham*. 155 p. Monografia (TCC) — UFSCar, São Carlos, 2011.
- LEE, J. M. *Introduction to Smooth Manifolds*. [S.l.]: Springer, 2012. v. 2.
- LIMA, E. L. *Elementos de Topologia Geral, 2a edição*. [S.l.: s.n.], 1976.
- LIMA, E. L. *Curso de Análise, volumes 1 e 2*. [S.l.: s.n.], 2004.
- MONTIEL, S.; ROS, A. *Curves and surfaces*. [S.l.]: American Mathematical Soc., 2009. v. 69.
- UENO, K. et al. *A Mathematical Gift, III: The Interplay Between Topology, Functions, Geometry, and Algebra*. [S.l.]: American Mathematical Soc., 2003. v. 3.