UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CAMPUS FLORIANÓPOLIS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL-PROFMAT

Juliano Kazapi

CONTRIBUIÇÕES PARA O ENSINO-APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA: CÁLCULO DA ÁREA DO CÍRCULO E DO COMPRIMENTO DA CIRCUNFERÊNCIA PELO MÉTODO DE EXAUSTÃO

Florianópolis

2023

Juliano Kazapi

CONTRIBUIÇÕES PARA O ENSINO-APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA: CÁLCULO DA ÁREA DO CÍRCULO E DO COMPRIMENTO DA CIRCUNFERÊNCIA PELO MÉTODO DE EXAUSTÃO

Dissertação submetida ao Programa de Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática. Com área de concentração no Ensino de Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Eliezer Batista

Florianópolis

2023

Juliano Kazapi

CONTRIBUIÇÕES PARA O ENSINO-APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA: CÁLCULO DA ÁREA DO CÍRCULO E DO COMPRIMENTO DA CIRCUNFERÊNCIA PELO MÉTODO DE EXAUSTÃO

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Dr. Felipe Lopes Castro
UFSC

Prof. Dr. Francisco Carlos Caramello Junior
UFSC

Prof. Dr. Sérgio Tadao Martins
UFSC

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestre em Matemática.

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Maria Inez Cardoso Goncalves
Data: 26/06/2023 08:21:21-0300
CPF: ***.897.119-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Profª. Drª. Maria Inez Cardoso Gonçalves
Coordenadora do Programa

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Eliezer Batista
Data: 26/06/2023 11:23:02-0300
CPF: ***.541.288-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Dr. Eliezer Batista
Orientador

Florianópolis, 23 de junho 2023.

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Kazapi, Juliano
   Contribuições para o Ensino-Aprendizagem de Geometria:
cálculo da área do círculo e do comprimento da
circunferência pelo método de exaustão / Juliano Kazapi ;
orientador, Eliezer Batista, 2023.
   99 p.

   Dissertação (mestrado profissional) - Universidade
Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e
Matemáticas, Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Florianópolis, 2023.

   Inclui referências.

   1. l em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. 2.
Geometria Plana. 3. História da Matemática. 4. Limites. 5.
Ensino Básico. I. Batista, Eliezer. II. Universidade
Federal de Santa Catarina. Programa de Mestrado
Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT.
III. Título.

RESUMO

Neste trabalho são abordadas as proposições geométricas que levam ao cálculo da área de um círculo e ao comprimento de uma circunferência usando o método da exaustão. Originalmente proposto por Eudoxo, o método da exaustão é uma forma geométrica primitiva de se lidar com limites em matemática. Para enriquecer a discussão mencionamos tópicos da história da matemática relacionados ao conteúdo. Também são propostas atividades dirigidas ao ensino fundamental, ao médio e ao superior.
Palavras-chave: Geometria. Áreas. Método da Exaustão. Ensino de Matemática. História da Matemática.

ABSTRACT

In this work, the geometric propositions that lead to the calculation of the area of a circle and the length of a circumference using the method of exhaustion are approached. Originally proposed by Eudoxus, the method of exhaustion is an early geometric way of dealing with limits in mathematics. To enrich the discussion we mention topics from the history of mathematics related to the content. Activities aimed at primary, secondary and higher education are also proposed.
Keywords: Geometry. Areas. Exhaustion Method. Mathematics Teaching. History of Mathematics.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Com 10 anos de experiência profissional, trabalhando como professor efetivo de matemática na rede municipal e estadual de ensino básico, observo que as aulas, na maioria das vezes, são dadas através da aplicação de fórmulas, regras e algoritmos, inclusive muitas das minhas aulas são dadas dessa maneira.

Ao aplicarmos algoritmos conhecidos que consiga resolver uma determinada situação, não estamos necessariamente resolvendo um problema.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais, (PCN, 1998), resolver um problema pressupõe que o aluno:

- elabore um ou vários procedimentos de resolução (como por exemplo, realizar simulações, fazer tentativas, formular hipóteses);
- compare seus resultados com os de outros alunos;
- valide seus procedimentos.

No meu entender, para usar a estratégia de ensino de resolução de problemas em uma sala de aula, tendo o professor como mediador, é necessário que os alunos saibam algumas técnicas de álgebra, aritmética e geometria, ferramentas fundamentais para atacar os problemas propostos com alguma possibilidade de sucesso (que é a resolução do problema), e que permitam à eles elaborar procedimentos, comparar e validar seus resultados.

Normalmente, na escola, essas técnicas são ensinadas através de algorítmos e receituários desconectados dos problemas que iremos propor aos alunos e também da história da matemática relacionada, o que causa a falta de sentido nos conteúdos ministrados e a consequente desmotivação por parte dos alunos para aprender.

Ensinar matemática é um grande desafio, onde muitas vezes o professor só conta com o apoio do livro didático, que segundo minha experiência profissional, não é suficiente. A contínua formação e capacitação do professor é que faz a diferença no ensino básico. Formação como essa do PROFMAT.

Pensando nisso tudo, vamos disponibilizar para a impressão, 5 atividades de estudo dirigido em geometria, nas quais o aluno possa compreender de forma histórica, a maneira que os antigos gregos usavam para calcular a área de um círculo e o comprimento de uma circunferência. Os alunos poderão realizar procedimentos, experimentos e descobertas de forma autônoma, com o auxílio de seu professor.

Situando o leitor em relação ao ensino básico (fundamental e médio), a Base Nacional Comum Curricular, BNCC, classifica o ensino de matemática em 5 unidades temáticas, são elas:

- Álgebra
- Geometria
- Grandezas e medidas
- Números
- Probabilidade e estatística

Diante desse quadro, nas unidades temáticas Geometria e Grandezas e medidas, podemos dizer que esta dissertação tem por objetivo discutir o princípio da exaustão, associado ao cálculo de áreas e comprimentos de polígonos regulares inscritos e circunscritos na circunferência, tornando possível o cálculo da área de um círculo e o comprimento de uma circunferência.

De acordo com a BNCC, esse assunto pode ser abordado a partir do sétimo e oitavo ano do ensino fundamental, dentro da unidade temática Grandezas e medidas:

- (EF07MA33) Estabelecer o número π como a razão entre a medida de uma circunferência e seu diâmetro, para compreender e resolver problemas, inclusive os de natureza histórica.
- (EF08MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.

Também pode ser abordado a partir do sexto ano do ensino fundamental, dentro da unidade temática de Geometria:

- (EF06MA18) Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e classificá-los em regulares e não regulares, tanto em suas representações no plano como em faces de poliedros.
- (EF06MA19) Identificar características dos triângulos e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos.
- (EF06MA20) Identificar características dos quadriláteros, classificá-los em relação a lados e a ângulos e reconhecer a inclusão e a intersecção de classes entre eles.

- (EF07MA22) Construir circunferências, utilizando compasso, reconhecê-las como lugar geométrico e utilizá-las para fazer composições artísticas e resolver problemas que envolvam objetos equidistantes.

- (EF07MA28) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular (como quadrado e triângulo equilátero), conhecida a medida de seu lado.

Realizamos também uma discussão do método da exaustão com o uso de limites, usando progressões geométricas e aritméticas, assunto abordado no ensino médio. Na BNCC, esse tema aparece da seguinte forma:

- (EM13MAT507) Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

- (EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

Em relação ao ensino superior, esse trabalho também é útil para todos os alunos de graduação em matemática, e também aos alunos do PROFMAT que estejam fazendo a disciplina de geometria, pois aborda todas as proposições com suas respectivas demonstrações que concluem que a área do círculo é πr^2 e que o comprimento da circunferência é $2\pi r$.

Esse trabalho conta com muitas figuras para apoiar o entendimento das proposições, e todas foram construídas por mim no Geogebra: software livre de geometria dinâmica, no Gimp: software livre de ilustração vetorial, no Librecad: software livre de desenho técnico e o uso do Tex Studio: software livre para editar textos matemáticos em LaTeX.

O trabalho está organizado nos seguintes capítulos: capítulo 1 é feita a introdução. No capítulo 2 é contado uma breve história da matemática relacionado ao método da exaustão. No capítulo 3 estudamos o método da exaustão e fazemos um paralelo com limites de sequências, em especial a progressões geométricas. No capítulo 4 são demonstrados todas as proposições que levam a conclusão de que o comprimento da circunferência é $2\pi r$ e a área do círculo é πr^2. No capítulo 5, são descritas sugestões de atividades para o professor realizar estudos dirigidos, em que o aluno seja um sujeito mais ativo no processo de ensino aprendizagem (mais autônomo), na resolução de problemas, e no capítulo 6 são feitas as considerações finais.

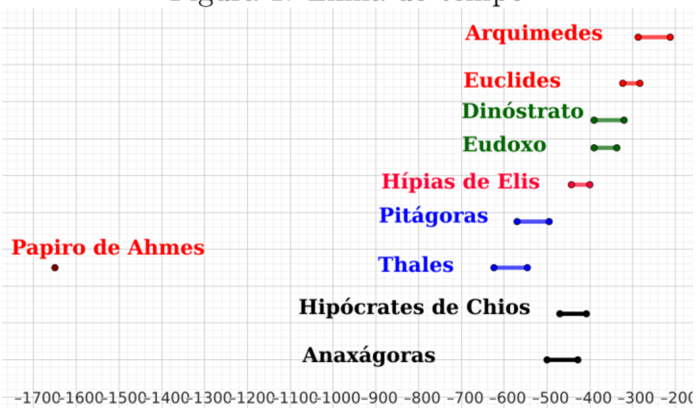
2 UMA BREVE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Falar da história da matemática é muito difícil, porque os fatos aconteceram há muito tempo, muitas vezes são anedóticos, outras vezes, ficamos sabendo pelo relato dos comentaristas que são muito posteriores aos acontecimentos. Além disso, o progresso matemático muitas vezes acontece devagar, são muitas pessoas trabalhando no mesmo problema para resolvê-lo em épocas diferentes e em locais diferentes. Essa percepção do tempo e do espaço no desenvolvimento da matemática é muito complicada.

Por outro lado, a matemática ainda está em pleno desenvolvimento, portanto sua história continua a ser escrita, o que mostra que não são todos os fatos muito antigos.

Para ajudar na compreensão dos fatos relacionados a esse breve histórico, e situar o leitor no texto, a figura 1, exibe em uma escala de tempo, os principais pensadores com suas prováveis datas de nascimento e morte. É possível perceber os personagens que viveram na mesma época.

Figura 1: Linha do tempo



Fonte: Elaborado pelo autor

2.1 EGITO ANTIGO

As informações obtidas sobre os egípcios vieram apenas na segunda metade do século 19, quando em 1858, Henry Rhind, comprou um pergaminho datado de 1650 antes de Cristo. Esse pergaminho é conhecido como papiro de Rhind. O escriba egípcio que o copiou se chamava Ahmes e por isso, também é conhecido como papiro de Ahmes.

Esse pergaminho contém um total de 85 problemas de matemática que os egípcios conheciam e, dentre outros fatos, explicava como os egípcios antigos calculavam a área de um círculo. A regra prática: Subtraia $\frac{1}{9}$ do diâmetro e o resultado eleve ao quadrado. Assim, se d é o diâmetro do círculo, e queremos sua área, faça:

$$A_\circ = \left(d - \frac{1}{9}d\right)^2.$$

Simplificando a equação temos que:

$$A_\circ = \left(\frac{8}{9}d\right)^2$$

Comparando com a fórmula que conhecemos $A_\circ = \pi r^2$, temos que:

$$\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 \approx \left(\frac{8}{9}d\right)^2$$

Desenvolvendo e simplificando, a aproximação de π para os egípcios era:

$$\pi \approx 4 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^2 \approx 3,1605$$

Nesse papiro, o problema 50, diz o seguinte: a área de um campo circular com diâmetro de 9 unidades é a mesma de um quadrado com lado de 8 unidades.

Segundo os egípcios, a área de um quadrado era de:

$$A_\square = 8^2 = 64$$

E a área de uma circunferência:

$$A_\circ = \left(9 - \frac{1}{9}\cdot 9\right)^2 = 8^2 = 64$$

Hoje sabemos que o valor da área é um pouco diferente:

$$A_\circ = \pi\left(\frac{9}{2}\right)^2 \approx 63,617$$

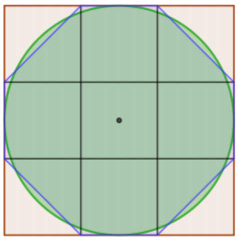
No problema 48, temos uma ideia de como os egípcios pensaram nessa regra, o problema compara a área do círculo com a área de um quadrado circunscrito de lado 9, como mostra a figura 2.

Divida os lados do quadrado em três partes iguais. Depois remova ou desconte os 4 triângulos dos cantos. Então o octógono se aproxima da área do círculo:

$$A_\circ = 9 \cdot 9 - 4 \cdot \frac{3 \cdot 3}{2} = 63 \approx 64$$

Para Ahmes, a área do círculo estava para seu comprimento assim como a área do quadrado circunscrito a essa circunferência estava para seu perímetro, em outras palavras:

Figura 2: Área do círculo

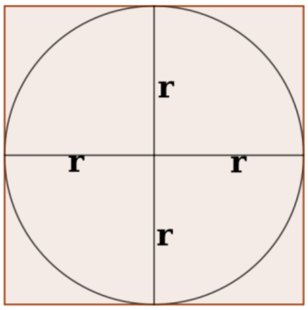


Fonte: Elaborado pelo autor

$$\frac{A_\circ}{C_\circ} = \frac{A_\square}{P_\square}$$

Usando figura 3,

Figura 3: Área do círculo



Fonte: Elaborado pelo autor

Temos que:

$$\frac{A_\circ}{C_\circ} = \frac{\pi \cdot r^2}{2\pi r} = \frac{(2r)^2}{4 \cdot 2r} = \frac{r}{2}$$

Por outro lado,

$$\frac{A_\square}{P_\square} = \frac{(2r)^2}{4 \cdot 2r} = \frac{4r^2}{8r} = \frac{r}{2}$$

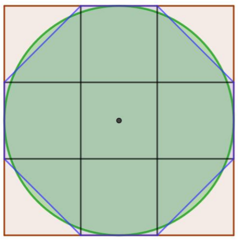
O que justifica a regra escrita no papiro de Ahmes.

Calculando o perímetro do polígono, somando seus lados, aproximamos o perímetro da circunferência, na figura 4, temos: $C_\circ = 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3\sqrt{2} \approx 28,97$.

Usando a fórmula que conhecemos para o comprimento da circunferência: $C_\circ = 2 \cdot \pi \cdot 4,5 \approx 28,26$.

E finalmente, usando o método egípcio temos:

Figura 4: Área do círculo



Fonte: Elaborado pelo autor

$$\frac{64}{C_\circ} = \frac{81}{36} \implies C_\circ \approx 28,44$$

A aproximação está boa para a época que estamos tratando, 1650 antes de Cristo.

Os egípcios também conheciam, o que foi chamado 1000 anos depois, pela civilização grega, de teoremas de Thales e de Pitágoras. Os egípcios não se importavam em saber o porquê das regras darem certo, bastava que ao aplicá-las funcionassem.

2.2 GRÉCIA ANTIGA

Nessa sessão, são abordados problemas de matemática, relacionados ao cálculo da área do círculo e do comprimento da circunferência, pelas técnicas dos antigos gregos que nos deixaram além de sua fantástica literatura, um modelo no qual a matemática é feita até os dias de hoje.

A principal diferença entre a matemática grega e a egípcia é o uso da lógica e do raciocínio dedutivo para justificar as muitas receitas matemáticas que já existiam. A inclusão desse tipo de raciocínio na matemática é incerta, existem muitas hipóteses para a explicar. O fato concreto é que em 400 antes de Cristo a matemática grega já tinha sido completamente transformada e o uso da lógica para justificar as proposições foi completamente absorvida (Boyer, 1974).

2.2.1 Curvas Euclidianas

Anaxágoras de Clazomene morreu em 428 antes de Cristo, foi preso por ensinar que o Sol não era um Deus e sim uma bola de pedra incandescente e que a Lua era uma terra habitada que refletia a luz do Sol. Na prisão pensou no problema da quadratura do círculo (BOYER, 1974).

A quadratura do círculo consiste em construir um segmento, com régua e compasso, cujo quadrado construído sobre ele fosse igual a área desejada. Sabiam quadrar triângulos e polígonos e achavam que era possível quadrar o círculo.

A quadratura do círculo é um dos três problemas clássicos da matemática grega. Os outros dois problemas são a trissecção do ângulo e a duplicação do cubo. Esses três problemas devem ser resolvidos com uma régua não graduada e um compasso que a cada construção deve ser fechado.

Régua e compasso são os instrumentos Euclidianos da matemática e da geometria gregas, nome dado em homenagem ao matemático grego Euclides de Alexandria, que escreveu Os elementos por volta do ano 300 antes de Cristo. Esse livro continha toda a matemática conhecida até aquele momento.

Os gregos tinham números e grandezas (ou magnitudes). As grandezas eram comprimentos, áreas e volumes portanto sempre valores positivos. Algumas operações, com essas grandezas podiam ser realizadas: soma, subtração, multiplicação, divisão e o cálculo do lado do quadrado, se conhecido sua área, é o equivalente a extração de raíz quadrada em nossos dias atuais. Essas operações são obtidas do uso de razões e proporções e do teorema de Thales e eram realizadas com régua e compasso.

Apenas em 1882 Carl Louis Ferdinand von Lindemann, matemático alemão, provou que o problema da quadratura do círculo era impossível de ser realizado com os instrumentos Euclidianos. Ele provou que π é um número transcendente, o que significa que π não é raiz de nenhum polinômio de coeficientes racionais. Os detalhes da demonstração de Lindemann não são nosso foco de estudo, por isso não o abordaremos, apesar de ser possível entender a ideia principal de seu argumento, que usa cálculo e álgebra, ferramentas que os antigos gregos não tinham (BOYER, 1974).

2.2.2 Curvas não Euclidianas

O matemático Hipócrates de Chios, trabalhou na quadratura de Lunas. Luna é uma figura limitada por dois arcos circulares de raios diferentes. O problema de quadrar lunas, se resolvido poderia ser usado para resolver o problema da quadratura do círculo usando régua e compasso, como exigia a matemática grega. Hipócrates de Chios [1] obteve algum sucesso na solução desse problema.

Hípias de Elis, outro matemático grego, que morreu em 399 a.C. construiu uma curva mecânica para quadrar a circunferência e trissectar um ângulo, ele construiu uma nova curva chamada de trissectriz de Hípias. Usava essa curva para resolver o problema da trissecção do ângulo, mas pelas regras da matemática grega, essa forma de resolução

[1] Não confundir com Hipócrates de Cos que é considerado o pai da medicina.

não era permitida. Também pode ser chamada de quadratriz de Hípias, pois também resolve o problema da quadratura do círculo.

Hípias sabia que sua curva, podia ser usada para trissectar um ângulo, mas não temos certeza de que ele sabia quadrar o círculo com ela. Dinóstrato, outro matemático grego, descreveu o processo para quadrar o círculo usando a curva de Hípias, viveu por volta do ano de 350 a.C.

Eudoxo, que viveu entre 390 a.C. e 337 a.C. já sabia que para calcular a área do círculo deveria inscrever e circunscrever polígonos e ir duplicando o número de lados muitas e muitas vezes. Ao aumentar o número de lados dos polígonos inscritos e circunscritos, ele aproximava o valor da área do círculo. Também era obtido o valor do comprimento da circunferência, pelo cálculo do perímetro dos polígonos.

Mas uma pergunta ainda ficava: quando parar de realizar a duplicação dos lados dos polígonos? Esse processo era infinito? Os gregos não sabiam lidar com o infinito, por isso não sabiam como resolver essa questão. Esse problema é o equivalente a trabalhar com limites, que só foram formalizados no final do século 19, junto com os números reais por Dedekind e Cantor: quase 2000 anos depois de Eudoxo.

Eudoxo resolveu esse problema com o seguinte axioma: *dadas duas grandezas que têm uma razão, nenhuma delas sendo zero, pode-se achar um múltiplo de qualquer uma delas que seja maior que a outra.*

Dessa forma é possível demonstrar o princípio de exaustão: no livro Os Elementos de Euclides, essa proposição é a primeira do livro 10. O método da exaustão permite calcular a área do círculo e o comprimento da circunfeência com o uso de argumentos que usam o infinito,é uma maneira primitiva de se lidar com limites.

Arquimedes de Siracusa nasceu em 287 a.C. e morreu 212 a.C. Escreveu muitos trabalhos, entre os quais destacamos O livro dos lemas, em que resolve vários problemas de áreas de figuras curvas. Também calculou $\pi \approx \frac{22}{7}$, usando um polígono de 96 lados e calculou aproximadamente o comprimento e a área da circunferência. No livro O método, descoberto no início do século 20, existem 15 proposições em que Arquimedes prova, usando balanças, diversos teoremas geométricos que eram desconhecidos em sua época. Ele também criou a espiral de Arquimedes, que resolve a quadratura do círculo e a trissecção do ângulo, sendo a espiral uma curva transcendente.

Muito do trabalho de Arquimedes foi realizado usando o princípio da exaustão, que será tratado no próximo capítulo.

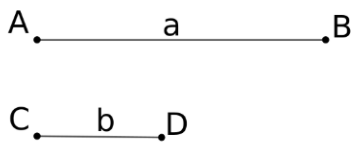
3 O MÉTODO DA EXAUSTÃO

O princípio da exaustão se encontra nos Elementos de Euclides, no livro X. Euclides o demonstra como a Proposição 1, mas só vai usá-la novamente no livro XII. Para provar esse princípio é necessário um axioma, que geralmente é atribuído a Eudoxo, mas sobre o qual nada temos de documentação concreta. Seu enunciado moderno diz o seguinte: Sejam x e y dois números positivos quaisquer, então existe um número inteiro positivo n tal que $nx > y$.

Proposição 1. ***Princípio da Exaustão.*** *Se de uma grandeza retirarmos mais que a sua metade, e do restante retirarmos mais que a sua metade e assim repetidamente prosseguirmos, retirando sempre mais do que a metade da grandeza restante, então esta grandeza ficará menor que qualquer grandeza positiva de mesma natureza.*

Demonstração. Sejam dois segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. Sem perda de generalidade, assumamos $\overline{AB} > \overline{CD}$. Para ajudar na simplificação, vamos chamar de a a medida do segmento $\overline{AB}$ e de b a medida do segmento $\overline{CD}$, como mostra a figura 5.

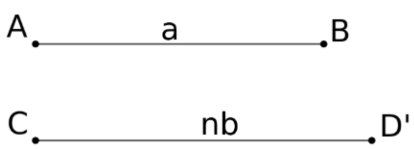
Figura 5: Segmentos



Fonte: Elaborado pelo autor

Em seguida, usando o axioma de Eudoxo, temos que existe $n \in N$ tal que $CD \cdot n > AB$, ou seja, $n \cdot b > a$, isto é, fizemos n cópias de $\overline{CD}$, como mostra a figura 6.

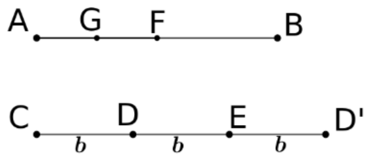
Figura 6: Segmentos



Fonte: Elaborado pelo autor

Para ilustrar, vamos fazer o caso em que o segmento é dividido em 3 partes. Dividamos $\overline{CD'}$ nas partes $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{ED'}$ iguais a b. De $\overline{AB}$ subtraia $\overline{BF}$ maior que sua metade, e de $\overline{AF}$ subtraia $\overline{FG}$ maior que sua metade, e repita esse processo continuamente até que as divisões em AB sejam iguais em número às divisões em $\overline{CD'}$. Então o segmento $\overline{AB}$, fica dividido em três partes a saber: $\overline{AG}$, $\overline{GF}$, $\overline{FB}$. Em nosso caso, sem perder a generalidade fizemos três divisões tal qual Euclides fez em seu livro Os elementos, como mostra a figura 7.

Figura 7: Segmentos



Fonte: Elaborado pelo autor

Agora, como $\overline{CD'}$ é maior do que $\overline{AB}$, e de $\overline{CD'}$ foi subtraído $\overline{D'E}$ menos que sua metade, e de $\overline{AB}$, foi subtraído $\overline{BF}$ maior que sua metade, temos que $\overline{CE}$ é maior do que $\overline{AF}$.

E como $\overline{CE}$ é maior do que $\overline{AF}$, e de $\overline{CE}$ foi subtraído a metade $\overline{ED}$, e de $\overline{AF}$ foi subtraído $\overline{FG}$ que é maior que sua metade, temos que $\overline{CD}$ é maior do que $\overline{AG}$.

Mas $\overline{CD}$ é igual a b que é maior do que $\overline{AG}$. Portanto $\overline{AG}$ é menor do que $\overline{CD}$.

Portanto, resta de $\overline{AB}$, o segmento $\overline{AG}$ que é menor do que $\overline{CD}$, segmento pré-estabelecido. $\square$

Podemos trabalhar com o princípio da exaustão do seguinte modo. Tome um número x_1, e ao tomar o número x_2, ele deve ser menor do que a metade de x_1. E ao pegar o número x_3 ele deve ser menor do que a metade de x_2 e assim por diante. então teremos:

$$x_{n+1} < \frac{1}{2}x_n \ , \qquad \forall n \geq 1$$

Uma vez que estamos tirando de x_1 certas quantidades até que ele fique menor do que uma certa quantidade dada que chamamos de ϵ. Em outras palavras, para todo $\epsilon > 0$, vai existir um número $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n < \epsilon$ para todo $n > n_0$. Significa que a partir de um certo momento, os números da sequência ficarão menor do ϵ.

A sequência $\left(x_1,\ \frac{1}{2}x_1,\ \frac{1}{2^2}x_1,\ \frac{1}{2^3}x_1,\ \ldots\right)$ é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$, e converge para zero.

Em geral, temos que o limite da sequência x_n, quando $n \to \infty 0$ é 0. Isso porque essa sequência é uma progressão geométrica cuja razão está entre 0 e 1, isto é, $0 < q < 1$. Em outras palavras, se a razão q está entre 0 e 1, temos que

$$\lim_{x \to \infty} q^n \cdot x = 0$$

Os gregos usavam a metade por ser visual. Assim estamos estabelecendo uma relação entre progressão geométrica e o princípio da exaustão.

Para continuarmos, precisaremos definir limite de uma sequência.

Definição 1. ***Limite de sequência.*** *Dados (a_n) uma sequência de números reais e $L \in \mathbb{R}$, dizemos que $L = \lim a_n$, se para qualquer $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_0$, temos que $|a_n - L| < \epsilon$.*

Proposição 2. ***Desigualdade de Bernoulli.*** *Se $h > -1$, então é verdadeira a inequação a seguir: $(1 + h)^n \geq 1 + nh$ para todo natural n.*

Demonstração. Provaremos a desigualdade por indução.
Se $n = 0$, temos que $(1 + h)^0 = 1$ e $1 + 0 \cdot h = 1$. Ambos os lados da desigualdade são iguais a 1, portanto, $1 \geq 1$ é verdadeiro.
Suponha que a desigualdade vale para algum natural k, isto é, $(1 + h)^k \geq 1 + kh$. Mostraremos que a desigualdade é verdadeira para $k + 1$, isto é, $(1 + h)^{k+1} \geq 1 + (k + 1) h$.

Partindo da hipótese de indução, temos:

$$(1 + h)^k \geq 1 + kh$$

Multiplicando a desigualdade por $(1 + h)$ não muda o sentido da desigualdade pois, $h > -1$ logo $h + 1 > 0$, então fica:

$$(1 + h)^k \cdot (1 + h) \geq (1 + kh) \cdot (1 + h)$$

Segue que:

$$(1 + h)^{k+1} \geq h + 1 + kh^2 + kh = kh^2 + h (k + 1) + 1$$

Observe que a parcela kh^2, é um número positivo, pois k é natural e $h > 0$ está elevado ao quadrado, então:

$$(1 + h)^{k+1} \geq kh^2 + h (k + 1) + 1 > h (k + 1) + 1$$

Logo,

$$(1+h)^{k+1} > h\,(k+1)+1$$

Portanto, $(1+h)^n \geq 1+nh$ para todo natural n. $\square$

Proposição 3. *Dado $q \in \mathbb{R}$, Se $|q| < 1$ então* $\lim q^n = 0$

Demonstração. Escolhido ϵ, temos que se $q = 0$, então $|q^n - 0| = 0 < \epsilon$, para todo $n > 0$. Se $0 < q < 1$, podemos escrever q como: $q = \dfrac{1}{(1+x)^n}$, onde $x > 0$.

Sabemos que $(1+h)^n \geq 1+hn$, pela desigualdade de Bernoulli. Em particular, $(1+h)^n > hn$. Invertendo a desigualdade, fica:

$$\frac{1}{(1+h)^n} < \frac{1}{hn} < \epsilon$$

Portanto,

$$hn > \frac{1}{\epsilon}$$

Assim escolhendo,

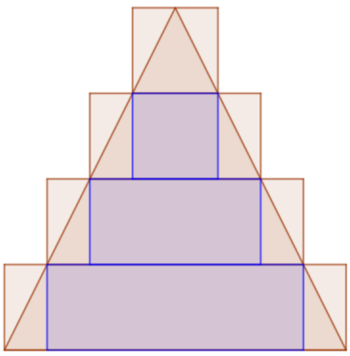
$$n_0 = \lceil \frac{1}{\epsilon h} \rceil$$

Teremos que $q^n < \epsilon$, $\quad \forall n \geq n_0$ $\square$

3.1 EXEMPLO DE USO DO PRINCÍPIO DA EXAUSTÃO

Queremos fazer uma aplicação do método da exaustão. Iremos calcular a área de um triângulo sabendo apenas calcular a área de retângulos. Nossa ideia é cobrirmos o triângulo por dentro e por fora com retângulos. Como mostra a figura 8.

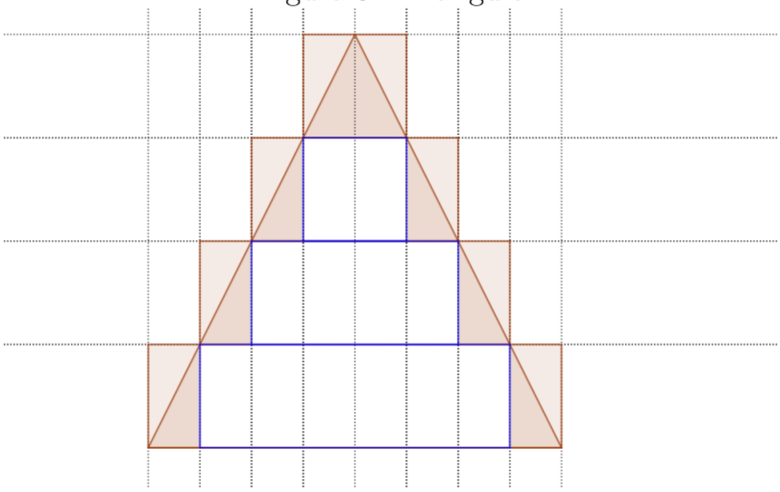
Figura 8: Triângulo



Fonte: Elaborado pelo autor

Dividimos a altura do triângulo em 4 partes iguais, gerando os retângulos. A diferença entre os retângulos de fora (vermelhos) e os retângulos de dentro (em azul), será os retângulos das extremidades de cada andar do triângulo (retângulos de duas cores). Como mostra a figura 9.

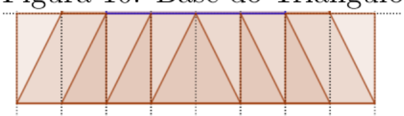
Figura 9: Triângulo



Fonte: Elaborado pelo autor

Esses retângulos de duas cores ao caírem até a base do triângulo, irão preenche-lo totalmente, como mostra a figura 10.

Figura 10: Base do Triângulo



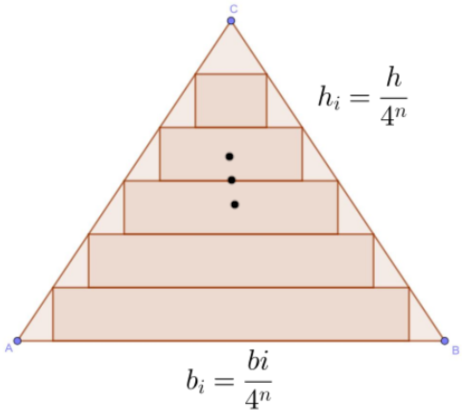
Fonte: Elaborado pelo autor

Quando aumentarmos o número de retângulos ao infinito, seguindo uma progeressão geométrica, a diferença entre os retângulos de fora e os de dentro tenderá a zero, isto é, a altura do retângulo tenderá a zero, e ficaremos apenas com a base do triângulo que mede b, em outras palavras, quando $n \to \infty$ a altura de cada retângulo pode ser dada por $\dfrac{h}{4^n} \to 0$.

Começaremos com um triângulo $\triangle ABC$ cuja base é b e sua altura h. E aproximaremos sua área por $4^n - 1$ retângulos internos, como mostra a figura 11. A altura de cada retângulo é $h_i = \dfrac{h}{4^n}$ e a base de cada retângulo é dada por $b_i = \dfrac{b \cdot i}{4^n}$.

A área do triângulo $\triangle ABC$ é aproximada pela soma das áreas de todos os retângulos que estão preenchendo internamente o triângulo. Chamaremos essa área de $A(R')$. Então:

Figura 11: Triângulo



Fonte: Elaborado pelo autor

$$A(R') \leq A(\triangle ABC)$$

$$A(R') = A(R_1) + A(R_2) + A(R_3) + \cdots + A(R_{4^n-1})$$

$$A(R') = \frac{b}{4^n} \cdot \frac{h}{4^n} + \cdots + \frac{h}{4^n} \cdot \frac{b \cdot (4^n - 1)}{4^n}$$

$$A(R') = \frac{bh}{4^{2n}} \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + (4^n - 1))$$

Nos parênteses está uma progressão aritmética, então temos:

$$A(R') = \frac{bh}{4^{2n}} \cdot \left[(1 + 4^n - 1) \cdot \frac{(4^n - 1)}{2}\right]$$

$$A(R') = \frac{bh}{4^{2n}} \cdot \left[4^n \cdot \frac{4^n - 1}{2}\right]$$

Simplificando o 4^n, temos:

$$A(R') = \frac{bh}{4^n} \cdot \frac{4^n - 1}{2}$$

$$A(R') = \frac{bh}{2} \cdot \frac{4^n - 1}{4^n}$$

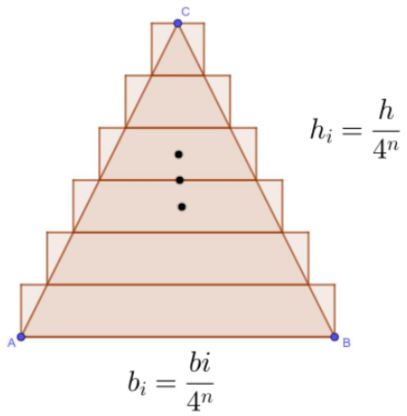
$$A(R') = \frac{bh}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{4^n}\right)$$

Chegamos que:

$$A(R') = \frac{bh}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{4^n}\right) \leq A\left(\triangle ABC\right) \tag{3.1}$$

Agora iremos calcular a área do triângulo usando retângulos externamente ao triângulo, como mostra a figura 12. A altura de cada retângulo é $h_i = \dfrac{h}{4^n}$ e a base de cada retângulo é dada por $b_i = \dfrac{b \cdot i}{4^n}$, com $0 < i < 4^n$.

Figura 12: Triângulo



Fonte: Elaborado pelo autor

A área do triângulo ABC é aproximada pela soma das áreas de todos os retângulos que estão preenchendo externamente o triângulo. Chamaremos essa área de $A(R)$. Então:

$$A(\triangle ABC) \leq A(R)$$

$$A(R) = A(R_1) + A(R_2) + A(R_3) + \cdots + A(R_{4^n})$$

$$A(R) = \frac{b}{4^n} \cdot \frac{h}{4^n} + \cdots + \frac{h}{4^n} \cdot \frac{b \cdot (4^n)}{4^n}$$

$$A(R) = \frac{bh}{4^{2n}} \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 4^n)$$

Nos parênteses está uma progressão aritmética, então temos:

$$A(R) = \frac{bh}{4^{2n}} \cdot \left[(1 + 4^n) \cdot \frac{(4^n)}{2}\right]$$

$$A(R) = \frac{bh}{4^{2n}} \cdot \left[(4^n + 1) \cdot \frac{4^n}{2}\right]$$

Simplificando o 4^n, temos:

$$A(R) = \frac{bh}{4^n} \cdot \left[\frac{4^n + 1}{2}\right]$$

$$A(R) = \frac{bh}{2} \cdot \frac{4^n + 1}{4^n}$$

$$A(R) = \frac{bh}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{4^n}\right)$$

Chegamos que:

$$A\left(\triangle ABC\right) \leq A(R) = \frac{bh}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{4^n}\right) \tag{3.2}$$

Juntando as desigualdades 3.1 e 3.2, temos:

$$\frac{bh}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{4^n}\right) \leq A\left(\triangle ABC\right) \leq \frac{bh}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{4^n}\right)$$

Quando o número de retângulos cresce até o infinito, ou seja, $n \to \infty$, temos que $\frac{1}{4^n} \to 0$ e portanto $A\left(\triangle ABC\right) = \frac{bh}{2}$ ·

A conclusão que chegamos é que conhecendo apenas a área de retângulos ainda assim é possível calcular a área de um triângulo que era desconhecida.

No próximo capítulo calcularemos a área de um círculo usando o método da exaustão, conhecendo apenas áreas de polígonos regulares inscritos e circunscritos. E finalmente calcularemos o comprimento da circunferência pelo método da exaustão.

4 O COMPRIMENTO E A ÁREA DA CIRCUNFERÊNCIA

Polígonos regulares são aqueles que tem todos os lados com mesma medida e todos seus ângulos internos de mesma medida. Polígonos regulares são equiângulos (ângulos congruentes) e também equiláteros (lados congruentes).

O uso de polígonos regulares inscritos e circunscritos na circunferência é fundamental para calcular a área do círculo e o comprimento da circunferência, porque usando os polígonos regulares, podemos encontrar uma cota superior e uma inferior para sua área, isto é, a área do círculo está determinada entre esses dois números, e ao aumentarmos o número de lados desses polígonos diminuímos o intervalo das duas áreas.

Se p_n é a área de um polígono regular de n lados inscrito na circunferência e P_n é a área de um polígono regular de n lados circunscrito na circunferência, e seja $A_\circ$ a área do círculo que queremos determinar, temos $p_n \leq A_\circ \leq q_n$. Quando $n \to \infty$ a diferença $q_n - p_n$ tende a 0 e a área do círculo pode ser determinada.

Nesse procedimento temos duas ideias centrais: o cálculo de limites e o de número real, essenciais no cálculo diferencial e integral. Essas ideias que foram sendo formalizadas matematicamente a partir do século 18 e portanto são muito recentes. Os gregos da antiguidade, não sabiam lidar com o infinito então a sua versão do cálculo era o uso do método da exaustão e a dupla redução ao absurdo para chegar às suas conclusões. Mas para que pudessem usar essas duas técnicas tinham que de algum modo inferir o resultado que queriam demonstrar.

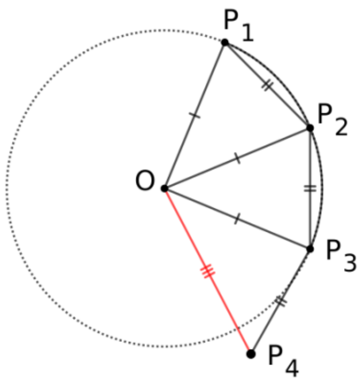
Nesse capítulo vamos demonstrar todas as proposições necessárias para usar o método da exaustão no cálculo da área do círculo e no comprimento da circunferência, usando apenas conceitos da geometria e da lógica que é a redução dupla do absurdo.

Proposição 4. *Todos os polígonos regulares são inscritíveis e circunscritíveis em uma circunferência.*

Demonstração. Primeiro o caso do polígono regular inscrito na circunferência.
Sabemos que por três pontos distintos passa uma única circunferência. Seja a circunferência de centro O passando por P_1, P_2 e P_3, três vértices consecutivos, de tal maneira que $\overline{P_1P_2} \equiv \overline{P_2P_3}$. Tomamos o ponto P_4 tal que $\overline{P_1P_2} \equiv \overline{P_2P_3} \equiv \overline{P_3P_4}$, e também que $\angle OP_3P_2 \equiv \angle OP_3P_4$, queremos mostrar que $\overline{OP_4}$ é o raio da circunferência, daí o ponto P_4 estará na circunferência, conforme a figura 13.

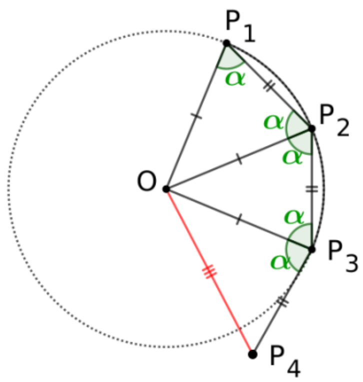
Os triângulos $\triangle OP_1P_2$ e $\triangle OP_2P_3$ são congruentes pelo caso LLL e isósceles, tendo os ângulos da base medindo α, conforme a figura 14.

Figura 13: Caso do polígono regular inscrito



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 14: Caso do polígono regular inscrito



Fonte: Elaborado pelo autor

Os triângulos $\triangle OP_3P_2$ e $\triangle OP_3P_4$ também são congruentes pelo caso LAL, pois:

- $\overline{OP_3} \equiv \overline{OP_3}$, lados comuns;
- $\angle OP_3P_2 \equiv \angle OP_3P_4$, por construção;
- $\overline{P_3P_2} \equiv \overline{P_3P_4}$, pela definição de polígono regular.

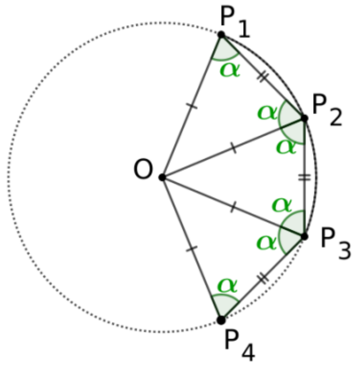
Portanto, $\overline{OP_4} \equiv \overline{OP_2}$, são raios da circunferência e P_4 está na circunferência. Também o ângulo $\angle OP_4P_3 = \alpha$, como mostra a figura 15.

Dessa forma, seguindo esse processo para os pontos P_5, P_6, etc, podemos dar a volta na circunferência inteira, onde concluímos que todo polígono regular é inscritível na circunferência.

Agora veremos o caso do polígono regular ser circunscritível.

Sejam quatro lados consecutivos de um polígono regular, são eles: $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, $\overline{P_3P_4}$ e $\overline{P_4P_5}$.

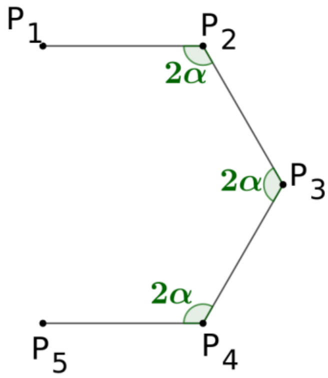
Figura 15: Caso do polígono regular inscrito



Fonte: Elaborado pelo autor

Podemos dizer que: $\overline{P_1P_2} \equiv \overline{P_2P_3} \equiv \overline{P_3P_4} \equiv \overline{P_4P_5}$, pois o polígono é regular, então seus ângulos internos são congruentes, isto é: $\angle P_1P_2P_3 \equiv \angle P_2P_3P_4 \equiv \angle P_3P_4P_5$, medem 2α, como mostra a figura 16.

Figura 16: Caso do polígono regular circunscrito

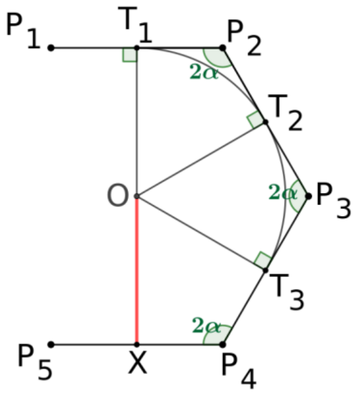


Fonte: Elaborado pelo autor

Sabemos que é sempre possível inscrever uma circunferência em três lados consecutivos, e chamaremos de T_1, T_2 e T_3 seus pontos de tangência. Nesse caso, $\overline{OT_1}$, $\overline{OT_2}$, $\overline{OT_3}$ são raios da circunferência de centro O, e fazem um ângulo reto com os lados do polígono circunscrito. Seja um ponto X no lado $\overline{P_4P_5}$, tal que $\overline{T_3P_4} \equiv \overline{P_4X}$. Queremos determinar a distância de O até X e mostrar que $\overline{OX}$ é um raio da circunferência, como mostra a figura 17.

Chegaremos a conclusão de que se uma circunferência é tangente a três lados consecutivos e também é tangente ao próximo lado, $\overline{P_4P_5}$ no ponto X, então continuando o mesmo raciocínio, de três em três lados se percorre toda a circunferência.

Figura 17: Caso do polígono regular circunscrito



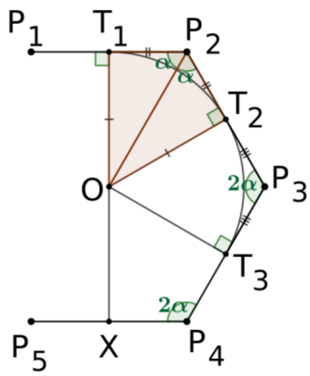
Fonte: Elaborado pelo autor

Considere os triângulos $\triangle OT_1P_2$ e $\triangle OT_2P_2$, temos:

- $\overline{OT_1} \equiv \overline{OT_2}$ raios da circunferência
- $\overline{OP_2} \equiv \overline{OP_2}$ lados em comum
- $\angle OT_1P_2 \equiv \angle OT_2P_2$ ângulo reto

Pelo caso especial de congruência de triângulos retângulos, temos que: $\triangle OT_1P_2 \equiv \triangle OT_2P_2$ e em particular $\overline{T_1P_2} \equiv \overline{T_2P_2}$ e que $\angle T_1P_2O \equiv \angle T_2P_2O$, então chegamos a conclusão de que $\overline{OP_2}$ é bissetriz do ângulo $\angle P_1P_2P_3$, como mostra a figura 18.

Figura 18: Caso do polígono regular circunscrito



Fonte: Elaborado pelo autor

Por outro lado, vamos considerar os triângulos $\triangle OT_2P_3$ e $\triangle OT_3P_3$, assim temos:

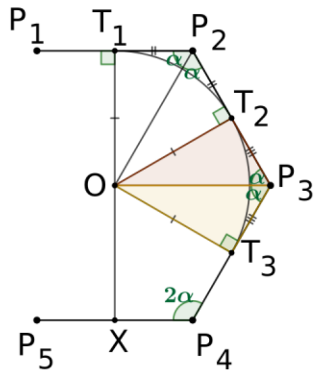
- $\overline{OT_2} \equiv \overline{OT_3}$ raios da circunferência

- $\overline{OP_3} \equiv \overline{OP_3}$ lados em comum

- $\angle OT_2P_3 \equiv \angle OT_3P_3$ ângulo reto

Assim, pelo caso especial de congruência de triângulos retângulos, temos que: $\triangle OT_2P_3 \equiv \triangle OT_3P_3$ e em particular $\overline{T_2P_3} \equiv \overline{T_3P_3}$ e que $\angle T_2P_3O \equiv \angle T_3P_3O$, então chegamos a conclusão de que $\overline{OP_3}$ é bissetriz do ângulo $\angle P_2P_3P_4$, como mostra a figura 19.

Figura 19: Caso do polígono regular circunscrito



Fonte: Elaborado pelo autor

Queremos mostrar que T_2 é ponto médio do lado $\overline{P_2P_3}$, para isso vamos considerar os triângulos $\triangle OT_2P_2$ e $\triangle OT_2P_3$, assim temos:

- $\overline{OT_2} \equiv \overline{OT_2}$ lado comum

- $\angle OT_2P_2 \equiv \angle OT_2P_3$ ângulo reto

- $\angle OP_2T_2 \equiv \angle OP_3P_2$ metade do ângulo interno do polígono regular

Pelo caso de congruência de triângulos LAA_0, temos que $\triangle OT_2P_2 \equiv \triangle OT_2P_3$ e em particular $\overline{T_2P_2} \equiv \overline{T_2P_3}$, como mostra a figura 20.

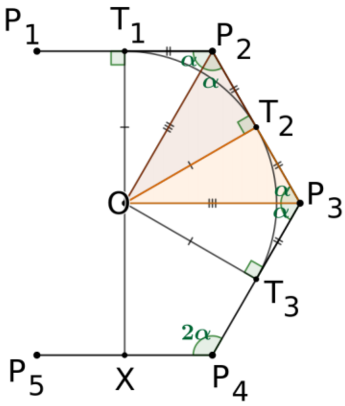
Queremos mostrar que T_3 é ponto médio do lado $\overline{P_3P_4}$, para isso vamos considerar os triângulos $\triangle OT_3P_3$ e $\triangle OT_3P_4$, assim temos:

- $\overline{OT_3} \equiv \overline{OT_3}$ lado comum

- $\angle OT_3P_3 \equiv \angle OT_3P_4$ ângulo reto

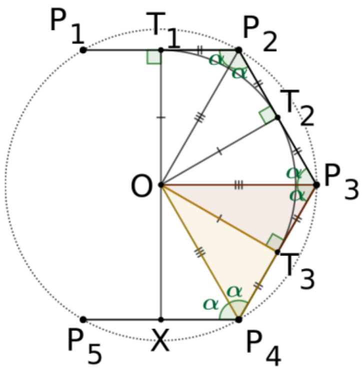
- $\overline{OP_4} \equiv \overline{OP_3}$ raio do poígono regular inscrito na circunferência de centro O e raio $\overline{OP_3}$

Figura 20: Caso do polígono regular circunscrito



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 21: Caso do polígono regular circunscrito



Fonte: Elaborado pelo autor

Pelo caso especial de congruência de triângulos retângulos, temos que $\triangle OT_3P_3 \equiv \triangle OT_3P_4$ e em particular $\overline{T_3P_3} \equiv \overline{T_3P_4}$, como mostra a figura 21.

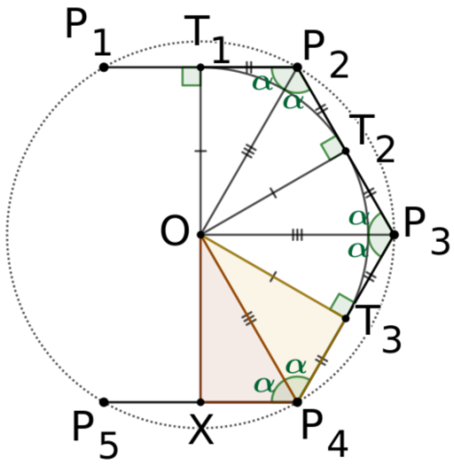
Finalmente vamos mostrar que o ponto X está na circunferência. Seja X um ponto no lado $\overline{P_4P_5}$ do polígono, tal que $\overline{T_3P_4} \equiv \overline{P_4X}$.

Queremos mostrar que X está na circunferência, então temos que mostrar que $\overline{OX}$ é raio, para isso vamos considerar os triângulos $\triangle OT_3P_4$ e $\triangle OXP_4$, assim temos:

- $\overline{OP_4} \equiv \overline{OP_4}$ lado comum
- $\overline{T_3P_4} \equiv \overline{XP_4}$ por construção
- $\angle OP_4T_3 \equiv \angle OP_4X$ pois $\overline{OP_4}$ é bissetriz

Pelo caso de congruência de triângulos LAL, temos que $\triangle OT_3P_4 \equiv \triangle OXP_4$ e em particular $\overline{OT_3} \equiv \overline{OX}$, também os ângulos $\angle OT_3P_4 \equiv \angle OXP_4$, ângulos retos, como mostra a figura 22.

Figura 22: Caso do polígono regular circunscrito



Fonte: Elaborado pelo autor

Dessa forma, mostramos que X está na circunferência inscrita no polígono regular considerado, pois $\overline{OX}$ é um raio da circunferência. Em outras palavras, a circunferência que passa pelos pontos T_1, T_2, T_3 também passa pelo ponto X.

Seguindo esse raciocínio, de três em três lados, percorremos a circunferência inteira. Dessa maneira concluímos que todo polígono regular é circunscritível.

Portanto a conclusão que chegamos é que todo polígono regular é inscritível e circunscritível na circunferência. □

Proposição 5. *Dois polígonos regulares com o mesmo número de lados são semelhantes e a razão de semelhança é igual a razão entre os raios das circunferências inscritas, que é igual à razão dos raios das circunferências circunscritas.*

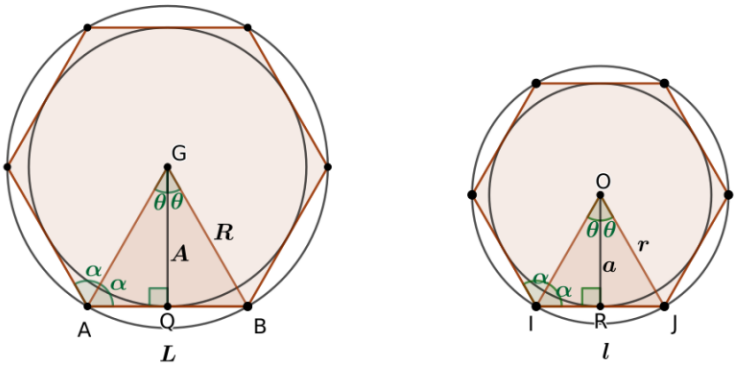
Demonstração. Veremos o caso do polígono regular circunscrito e inscrito à circunferência no mesmo desenho. Sabemos que R e r são os raios das circunferências circunscritas ao polígono e que A e a são os raios das circunferências inscritas ao polígono. Sem perda de generalidade, ilustraremos a demonstração com um hexágono regular.

Os ângulos internos do polígono regular são iguais a 2α, ao dividirmos em n triângulos isósceles, os ângulos internos permanecem iguais, mas pela metade são iguais a α. Portanto, os triângulos são semelhantes e vale que:

$$\frac{L}{l} = \frac{R}{r} = \frac{A}{a}$$

Como mostra a figura 23:

Figura 23: Polígonos regulares



Fonte: Elaborado pelo autor

□

Proposição 6. *Todas as circunferências são semelhantes, e a razão de semelhança é a razão de seus raios.*

Demonstração. Dadas duas circunferências de raios R e r, efetuando uma translação para colocá-las no mesmo centro e em seguida efetuando uma homotetia (redução ou ampliação das figuras) para que elas coincidam, conclui a demonstração dessa proposição. □

Proposição 7. *A razão das áreas de dois triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.*

Demonstração. A área do triângulo T_1 igual a $S_1 = \dfrac{1}{2} \cdot b_1 \cdot h_1$ e a área do triângulo T_2 igual a $S_2 = \dfrac{1}{2} \cdot b_2 \cdot h_2$. Como os triângulos são semelhantes vale que $\dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{h_1}{h_2} = k$.

Calculando a razão de suas áreas:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot b_1 \cdot h_1}{\frac{1}{2} \cdot b_2 \cdot h_2} = k \cdot k = k^2$$

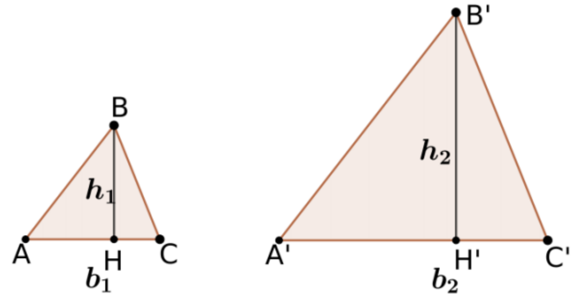
Como mostra a figura 24,

□

Proposição 8. *A razão das áreas de dois polígonos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, vamos ilustrar essa demonstração com dois polígonos de 5 lados semelhantes de razão k, decompostos em 3 triângulos. A área do polígono menor é dada por $A(ABCDE) = S_1$ e a área do polígono maior é dada por $A(A'B'C'D'E') = S_2$.

Figura 24: Triângulos semelhantes



Fonte: Elaborado pelo autor

A razão de semelhança dos lados do polígono será definida como k. então os lados dos polígonos serão definidos como: $AB = \lambda_1$ e $A'B' = k\lambda_1$, $BC = \lambda_2$ e $B'C' = k\lambda_2$, $CD = \lambda_3$ e $C'D' = k\lambda_3$, $DE = \lambda_4$ e $D'E' = k\lambda_4$ e finalmente $EA = \lambda_5$ e $E'A' = k\lambda_5$.

Sabemos pela proposição 7 que:

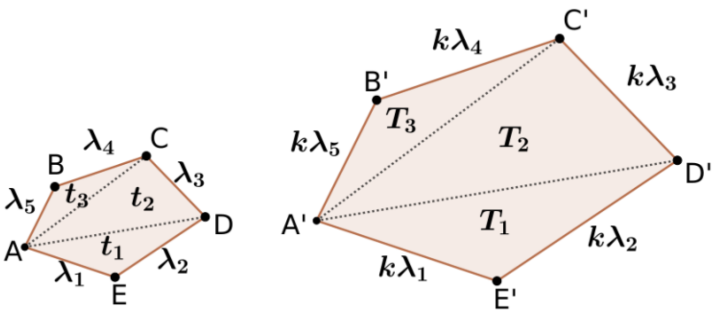
$$\frac{t_1}{T_1} = \frac{t_2}{T_2} = \frac{t_3}{T_3} = k^2$$

então, calculando a razão das áreas dos dois polígonos temos:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{t_1 + t_2 + t_3}{T_1 + T_2 + T_3} = \frac{k^2T_1 + k^2T_2 + k^2T_3}{T_1 + T_2 + T_3} = \frac{k^2\left(T_1 + T_2 + T_3\right)}{T_1 + T_2 + T_3} = k^2$$

Como mostra a figura 25,

Figura 25: Área de polígonos semelhantes



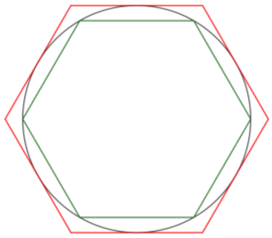
Fonte: Elaborado pelo autor

□

Com as proposições anteriores nada podemos dizer sobre a área do círculo. Mas para calcular a área do círculo podemos usar polígonos regulares inscritos e circunscritos. Ao aumentarmos o número de lados desses polígonos, estaremos nos aproximando da área do círculo.

Na figura 26, podemos ver um polígono regular de 6 lados aproximando a área do círculo por dentro e por fora.

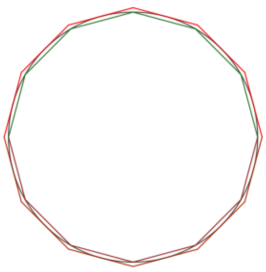
Figura 26: Polígono regular de 6 lados



Fonte: Elaborado pelo autor

A medida que vamos duplicando o número de lados do polígono, é feita uma aproximação melhor do que a anterior para a área do círculo. Ao aumentarmos de 6 lados para 12 lados a aproximação é melhor, como mostra a figura 27.

Figura 27: Polígono regular de 12 lados



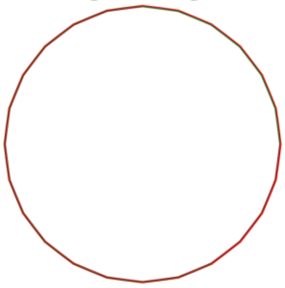
Fonte: Elaborado pelo autor

Ao aumentarmos de 12 lados para 24 lados a aproximação é melhor ainda, fica até difícl de ver alguma diferença entre a circunferência e os polígonos, como mostra a figura 28.

Arquimedes usou esse processo para calcular π com polígonos regulares de 96 lados, nem se diferencia o círculo dos polígonos, como mostra a figura 29.

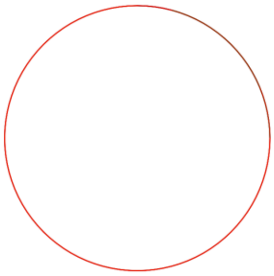
Relembrando o princípio da exaustão, **Proposição 1:** se de uma grandeza retirarmos mais que a sua metade, e do restante retirarmos mais que a sua metade e assim repetidamente prosseguirmos, retirando sempre mais do que a metade da grandeza restante, então esta grandeza ficará menor que qualquer grandeza positiva de mesma natureza.

Figura 28: Polígono regular de 24 lados



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 29: Polígono regular de 96 lados



Fonte: Elaborado pelo autor

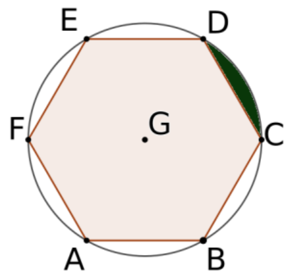
Proposição 9. *É possível construir uma sequência de polígonos regulares inscritos na circunferência, de tal forma que a sequência das diferenças entre a área do círculo e a área do polígono regular inscrito satisfaça a condição do princípio da exaustão.*

Demonstração. Vamos considerar, sem perda de generalidade, apenas como uma ilustração, um polígono regular de 6 lados inscritos na circunferência. Podemos ver que a área do círculo menos a área do polígono regular é igual a 6 segmentos circulares. Então para um polígono regular de n lados inscrito na circunferência, a diferença entre a área do círculo e a área desse polígono regular será de n segmentos circulares. O que vale para um desses segmentos circulares, valerá para todos os outros n segmentos circulares, bastando trabalhar com um deles, como mostra a figura 30.

Seja um desses segmentos circulares de lado l_n, de área x, como mostra a figura 31. Por comodidade, vamos usar um segmento circular em outra posição.

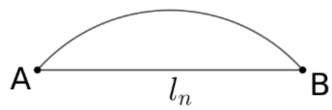
Dobrando o número de lados, teremos um triângulo isósceles de lados l_{2n} e dois segmentos circulares, a área dos segmentos circulares será definida como y. O segmento circular de lado l_n tem área definida por x, quando retirarmos desse segmento circular a área do triângulo $\triangle AE'B$ definida por T, teremos: $x - T = y$ que é a área dos dois segmentos circulares de lado l_{2n}. Queremos mostrar que $y < \dfrac{1}{2}x$, ou seja, a área dos dois segmentos circulares de lado l_{2n} é menor do que a metade da área do segmento circular de

Figura 30: Polígono regular de 6 lados inscritos na circunferência



Fonte: Elaborado pelo autor

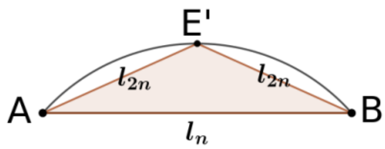
Figura 31: Segmento circular



Fonte: Elaborado pelo autor

lado l_n, pois dessa forma caracterizamos o princípio da exaustão. Como mostra a figura 32.

Figura 32: Segmento circular



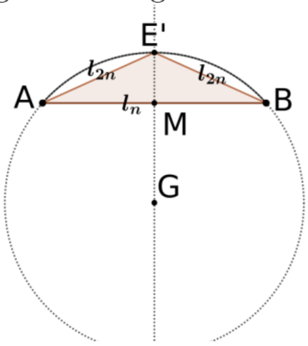
Fonte: Elaborado pelo autor

Considere o segmento circular $AE'B$, onde E' é o ponto médio do arco $AE'B$, obtido da intersecção da reta GM, onde G é o centro da circunferência e M é o ponto médio do segmento AB que é o lado do polígono regular. Como mostra a figura 33.

Por E', traçamos uma reta s paralela à reta AB, e pelos pontos A e B conduzimos perpendiculares que cortam a reta s, nos pontos A_1 e B_1. Com isso obtemos um retângulo ABB_1A_1, Como mostra a figura 34.

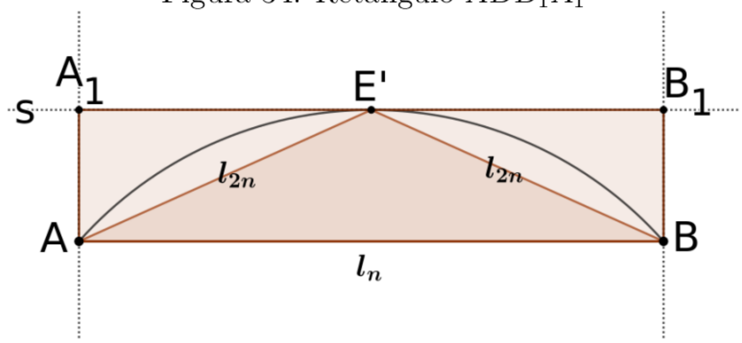
Para facilitar, vamos reproduzir a figura 34 novamente, onde cada região colorida tem suas áreas definidas como: $A(I)$, $A(II)$, $A(III)$, $A(IV)$ e $A(V)$, como mostra a figura 35.

Figura 33: Segmento circular



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 34: Retângulo ABB_1A_1



Fonte: Elaborado pelo autor

Queremos mostrar que $A(II) + A(III) < \frac{1}{2}\left(A(I) + A(II) + A(III)\right)$.

A área do triângulo $\triangle AE'B$, é igual a metade da área do retângulo ABB_1A_1, e também que $A(I) > A(II) + A(III)$. Podemos justificar esse fato do seguinte modo:

Pelo ponto E' traçamos uma perpendicular em relação à reta AB, cortando-a no ponto E''. Então $A(I) = A(I') + A(I'')$. Como os triângulos $\triangle AE''E'$ e $\triangle AA_1E'$ são congruentes pelo caso LLL, podemos escrever que: $A(I') = A(IV) + A(II)$. E como os triângulos $\triangle E''BE'$ e $\triangle B_1BE'$ são congruentes pelo caso LLL, podemos escrever que: $A(I'') = A(V) + A(III)$. Como mostra a figura 36.

Desse modo,

$$A(I') > A(II)$$

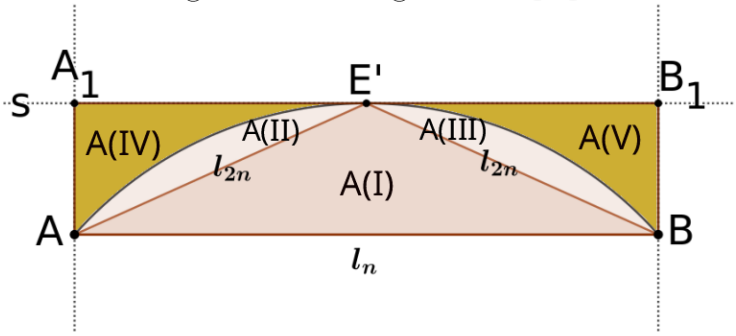
$$A(I'') > A(III)$$

Portanto,

$$A(I') + A(I'') = A(I) > A(II) + A(III)$$

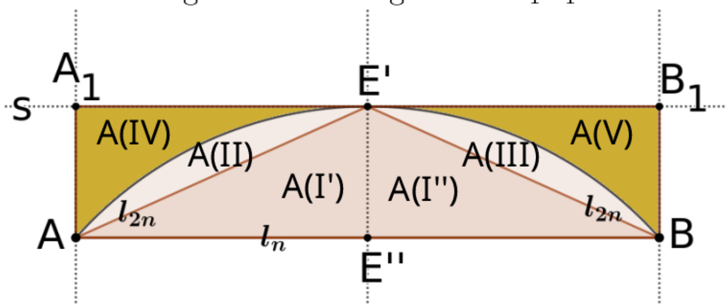
Por outro lado, a área $A(R)$ do retângulo ABB_1A_1 pode ser escrita como:

Figura 35: Retângulo ABB_1A_1



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 36: Retângulo ABB_1A_1



Fonte: Elaborado pelo autor

$$A(R) = A(I) + A(II) + A(III) + A(IV) + A(V)$$
$$A(R) = A(I) + A(II) + A(IV) + A(III) + A(V)$$
$$A(R) = A(I) + A(I') + A(I'')$$
$$A(R) = A(I) + A(I')$$
$$A(R) = 2A(I)$$
$$A(I) = \frac{1}{2}A(R)$$

Isto é:

$$I = \frac{1}{2}(I + II + III + IV + V)$$

Portanto a área do triângulo $A(I)$ é metade do retângulo ABB_1A_1.

Finalmente podemos escrever que: $A(II) < A(I')$ e $A(III) < A(I'')$. Somando as desigualdades temos que: $A(II) + A(III) < A(I') + A(I'') = A(I)$.

Então temos que: $A(II)+A(III) < A(I)$. Somando $A(II)+A(III)$ aos dois lados da desigualdade, temos que: $2\,(A(II) + A(III)) < A(I) + A(II) + A(III)$.

Portanto concluímos que:

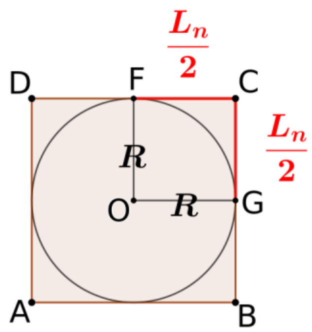
$$A(II) + A(III) < \frac{1}{2}\left(A(I) + A(II) + A(III)\right)$$

E vale o princípio da exaustão. $\square$

Proposição 10. *É possível construir uma sequência de polígonos regulares circunscritos na circunferência, de tal maneira que a sequência das diferenças entre as áreas do polígono regular circunscrito e a área do círculo satisfaça a condição do princípio da exaustão.*

Demonstração. Vamos considerar um polígono regular de n lados circunscrito na circunferência, o ponto O é o centro da circunferência e os lados do polígono medem L_n. Os pontos F e G, são pontos médios dos lados do polígono, então $\overline{CF}$ e $\overline{CG}$ medem $\frac{L_n}{2}$. A diferença entra a área do polígono regular circunscrito de n lados e a circunferência é igual a n gomos iguais, é um triângulo com um lado curvo, podemos chamar de triângulo curvilíneo FCG ou simplesmente gomo FCG. O que vale para um desses gomos, vale também para os outros. Portanto iremos considerar um desses gomos e a região do quadrilátero $OFCG$, como mostra a figura 37, ilustrada por um polígono regular de 4 lados.

Figura 37: Polígono regular de 4 lados



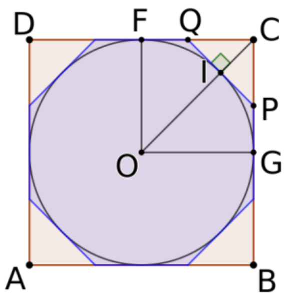
Fonte: Elaborado pelo autor

Agora vamos duplicar o lado do polígono regular de 4 lados e formar um polígono regular de 8 lados circunscrito na circunferência. A área do triângulo curvilíneo FCG será definida como x, isto é, $A(\triangle\text{curv } FCG) = x$. Chamaremos a área do triângulo QCP de T, isto é, $A(\triangle QCP) = T$. E chamaremos de y soma das áreas dos triângulos curvilíneos FQI e GPI, isto é, $A(\triangle\text{curv } FQI) + A(\triangle\text{curv } GPI) = y$. O ponto de tangência I é obtido da interseccção dos segmentos $\overline{OC}$ e $\overline{QP}$.

Assim queremos mostrar que, se $x - T = y$ então $y < \frac{1}{2}x$, satisfazendo o princípio de exaustão, como mostra a figura 38.

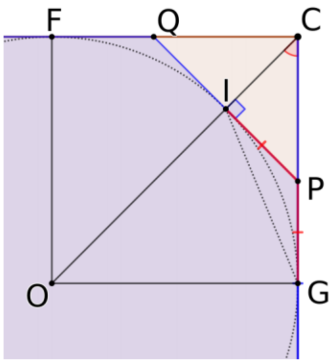
O triângulo $\triangle CIP$ é retângulo em I e também que $\overline{IP} \equiv \overline{PG}$ pois I e G são pontos de tangência, além disso, ao maior ângulo opõem-se o maior lado, $\angle CIP > \angle ICP$ então $\overline{CP} > \overline{IP} \equiv \overline{PG}$ logo, $\overline{CP} > \overline{PG}$, como mostra a figura 39.

Figura 38: Polígono regular de 8 lados



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 39: Triângulo $\triangle CIP$



Fonte: Elaborado pelo autor

Queremos mostrar que a área do triângulo curvilíneo GPI é menor do que a metade da área do triângulo $\triangle ICP$, como mostra a figura 40.

Para facilitar, vamos modificar um pouco o desenho, queremos mostrar que:

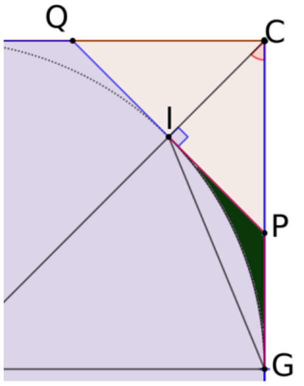
$$A(II) < \frac{1}{2}\left(A(I) + A(II)\right)$$

Pode ser visto na figura 41.

Ainda pela figura anterior, podemos escrever que: o triângulo curvilíneo GPI, região $A(II)$, está inteiramente contido no triângulo $\triangle IPG$, região de área $A(II) + A(III)$, portanto a área do triângulo curvilíneo GPI é menor do que a área do triângulo $\triangle IPG$, ou seja, $A(II) < A(II) + A(III)$.

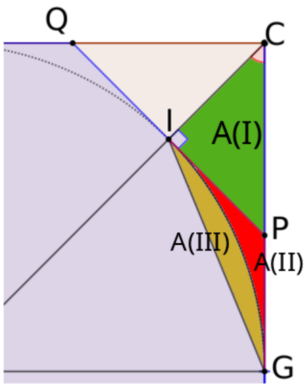
Por I traçamos uma paralela ao segmento $\overline{CG}$. O segmento $\overline{IT}$ é a altura dos triângulos $\triangle ICP$ e $\triangle IPG$, mas a base $\overline{CP}$ do triângulo $\triangle ICP$ é maior do que a base do triângulo $\triangle IPG$. Portanto, concluímos que a área do triângulo $\triangle ICP$ é maior do que a área do triângulo $\triangle IPG$, como mostra a figura 42.

Figura 40: Triângulo curvilíneo GPI



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 41: Figura em outras cores



Fonte: Elaborado pelo autor

Então podemos escrever que:

$$A(\triangle ICP) > A(\triangle IPG)$$
$$A(I) > A(II) + A(III)$$

Somando $A(II) + A(III)$ à ambos os lados da desigualdade, temos que:

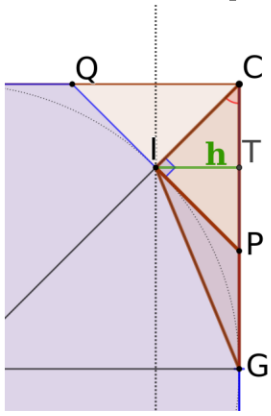
$$A(I) > A(II) + A(III)$$
$$A(I) + A(II) + A(III) > 2 \cdot A(II) + 2 \cdot A(III)$$

Subtraindo $A(III)$, temos que:

$$A(I) + A(II) > 2 \cdot A(II) + A(III)$$
$$A(I) + A(II) > 2 \cdot A(II) + A(III) > 2 \cdot A(II)$$

E portanto,

Figura 42: Triângulo $\triangle ICP$ é maior do que a área do triângulo $\triangle IPG$



Fonte: Elaborado pelo autor

$$A(II) < \frac{1}{2}\left(A(I) + A(II)\right)$$

Logo mostramos que existe uma sequência onde vale o princípio da exaustão.

□

Proposição 11. *A razão entre as áreas de dois círculos dados é igual ao quadrado da razão entre seus raios.*

Demonstração. A área do círculo de raio r será denotada por $A(r)$ e a área do círculo de raio R será denotada por $A(R)$. Queremos provar que:

$$\frac{A(r)}{A(R)} = \frac{r^2}{R^2}$$

Podem acontecer três casos:

$$\frac{A(r)}{A(R)} = \frac{r^2}{R^2} \qquad \text{ou} \qquad \frac{A(r)}{A(R)} > \frac{r^2}{R^2} \qquad \text{ou} \qquad \frac{A(r)}{A(R)} < \frac{r^2}{R^2}$$

Suponha, por absurdo que:

$$\frac{A(r)}{A(R)} > \frac{r^2}{R^2}$$

Então:

$$A(r) > \frac{r^2}{R^2} \cdot A(R) \implies \epsilon = A(r) - \frac{r^2}{R^2} \cdot A(R) > 0$$

Pelo método da exaustão, existe um polígono regular de n lados p_n, inscrito na circunferência de raio r tal que:

$$A(r) - A(p_n) < \epsilon$$

Ou seja,

$$A(r) - A(p_n) < A(r) - \frac{r^2}{R^2} \cdot A(R)$$

Calculando, temos que:

$$A(p_n) > \frac{r^2}{R^2} \cdot A(R) \tag{4.1}$$

Por outro lado, seja P_n um polígono regular de n lados inscrito na circunferência de raio R, portanto semelhante ao polígono p_n. então podemos escrever que:

$$\frac{A(p_n)}{A(P_n)} = \left(\frac{r}{R}\right)^2 = \frac{r^2}{R^2}$$

Então

$$A(p_n) = \frac{r^2}{R^2} \cdot A(P_n) \tag{4.2}$$

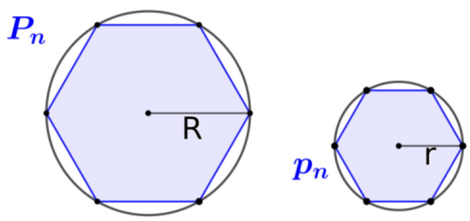
Substituindo a equação 4.2 na desigualdade 4.1, temos que:

$$\frac{r^2}{R^2} \cdot A(P_n) > \frac{r^2}{R^2} \cdot A(R)$$

$$A(P_n) > A(R)$$

Mas P_n é um polígono inscrito na circunferência de raio R, logo $A(P_n) < A(R)$. O que nos leva a uma contradição e portanto, nossa hipótese de absurdo não pode ocorrer, pode ser visto na figura 43.

Figura 43: Polígonos inscritos na circunferência



Fonte: Elaborado pelo autor

Por outro lado, suponha por absurdo que:

$$\frac{A(r)}{A(R)} < \frac{r^2}{R^2}$$

Então,

$$A(r) < \frac{r^2}{R^2} \cdot A(R) \implies \epsilon = \frac{r^2}{R^2} \cdot A(R) - A(r) > 0$$

Pelo princípio da exaustão existe um polígono q_n, regular de n lados, circunscrito a circunferência de raio r, tal que:

$$A(q_n) - A(r) < \epsilon$$

Ou seja,

$$A(q_n) - A(r) < \frac{r^2}{R^2} \cdot A(R) - A(r)$$

Calculando temos que:

$$A(q_n) < \frac{r^2}{R^2} \cdot A(R) \tag{4.3}$$

Por outro lado, seja Q_n um polígono regular de n lados, semelhante ao polígono q_n, circunscrito a circunferência de raio R, podemos escrever que:

$$\frac{A(q_n)}{A(Q_n)} = \frac{r^2}{R^2}$$

Assim, temos que:

$$A(q_n) = \frac{r^2}{R^2} \cdot A(Q_n) \tag{4.4}$$

Substituindo a equação 4.4 na desigualdade 4.3, temos que:

$$A(Q_n) < A(R)$$

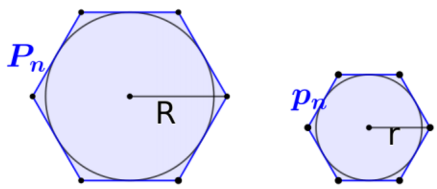
Contradição! O polígono Q_n é circunscrito então vale que $A(R) < A(Q_n)$. Portanto, a hipótese de absurdo não se verifica, pode ser visto na figura 44.

Se um número não é maior e nem menor do que outro, ele só pode ser igual, ou seja:

$$\frac{A(r)}{A(R)} = \frac{r^2}{R^2}$$

□

Figura 44: Polígonos circunscritos na circunferência



Fonte: Elaborado pelo autor

Se compararmos dois círculos, um de raio r e outro de raio 1, podemos escrever que:

$$\frac{A(r)}{A(1)} = \left(\frac{r}{1}\right)^2 = \frac{r^2}{1} = r^2$$

Então,

$$A(r) = A(1) \cdot r^2$$

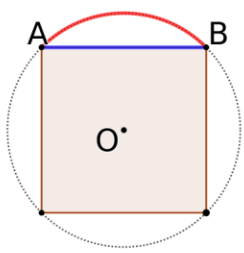
E chamamos de $\pi = A(1)$, então a conclusão é que: $A(r) = \pi \cdot r^2$.

Calcular o valor de π é um outro problema. Arquimedes fez esse cálculo com um polígono regular de 96 lados, onde chegou a uma aproximação para π que é $\dfrac{22}{7}$.

Proposição 12. *O perímetro de um polígono inscrito em uma circunferência é sempre menor do que o comprimento da circunferência.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, vamos considerar um polígono regular de 4 lados inscrito na circunferência, queremos provar que o lado $\overline{AB} < \text{arco}\,(AB)$, como mostra a figura 45.

Figura 45: queremos provar que o lado $\overline{AB} < \text{arco}\,(AB)$



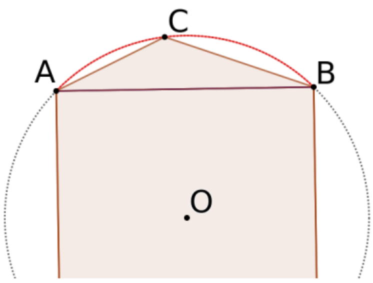
Fonte: Elaborado pelo autor

Marcamos um ponto C no arco e construímos o triângulo $\triangle ABC$, pela desigualdade triangular temos que:

$$\overline{AB} < \overline{AC} + \overline{CB}$$

Como mostra a figura 46.

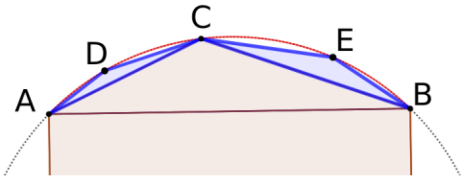
Figura 46: Ponto C no arco AB



Fonte: Elaborado pelo autor

Repetindo o procedimento anterior, marcamos os pontos D e E no arco de circunferência, tal que o ponto D esteja entre os pontos A e C e o ponto E esteja entre os pontos C e B. Construímos dois triângulos $\triangle ADC$ e $\triangle CEB$, pode ser visto na figura 47.

Figura 47: Marcamos os pontos D e E no arco AB



Fonte: Elaborado pelo autor

Então pela desigualdade triangular vale que:

$$\overline{AC} < \overline{AD} + \overline{DC}$$

$$\overline{CB} < \overline{CE} + \overline{EB}$$

Resultando em:

$$\overline{AB} < \overline{AC} + \overline{CB} < \overline{AD} + \overline{DC} + \overline{CE} + \overline{EB}$$

Continuando esse processo, teremos que o comprimento dos segmentos no arco de circunferência serão sempre menores do que o comprimento do segmento $\overline{AB}$, portanto, podemos escrever finalmente que:

$$\overline{AB} < \text{arco}\,(AB)$$

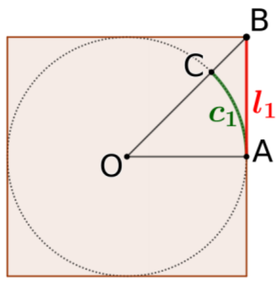
$\square$

Proposição 13. *O perímetro de um polígono circunscrito a uma circunferência é sempre maior ou igual do que o comprimento da circunferência.*

Demonstração. Sem perda de generalidade vamos considerar, apenas para efeito ilustrativo a figura na qual exibe um polígono regular de 4 lados circunscrito à circunferência. Queremos provar que o perímetro de qualquer polígono circunscrito à circunferência, é maior do que o comprimento da circunferência. E esse polígono não precisa ser regular.

Queremos provar que o arco c_1 é menor do que a metade do lado do polígono l_1, daí é só aplicar o mesmo raciocínio para os outros lados e damos a volta na circunferência mostrando que seu comprimento é menor do que o perímetro do polígono. Em outras palavras, queremos provar que $c_1 < l_1$, como mostra a figura 48.

Figura 48: Queremos provar que $c_1 < l_1$

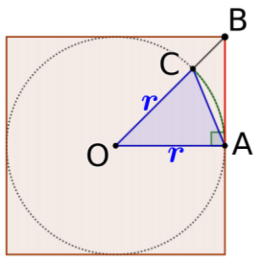


Fonte: Elaborado pelo autor

Vamos trabalhar apenas no triângulo retângulo $\triangle OAB$, reto em A. O centro da circunferência é o ponto O, seus raios são os segmentos de reta $\overline{OB}$ e $\overline{OA}$. Portanto o triângulo $\triangle OAC$ é isósceles, como mostra a figura 49.

Chamando:

Figura 49: Triângulo $\triangle OAC$ é isósceles



Fonte: Elaborado pelo autor

$$\angle OAC = \angle OCA = \alpha$$

$$\angle ABC = \beta$$

$$\angle BCA = \gamma$$

$$\angle BAC = \delta$$

$$\angle BOA = \theta$$

Considerando o triângulo $\triangle ABC$, pelo teorema do ângulo externo, temos:

$$\gamma = \theta + \alpha \implies \gamma > \alpha$$

E também que

$$\alpha = \beta + \delta \implies \alpha > \beta$$

Portanto, temos que:

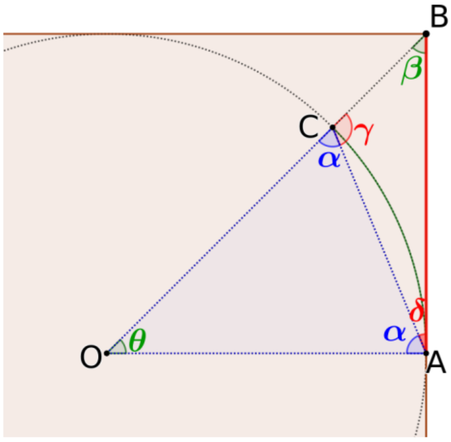
$$\gamma > \beta$$

E como ao maior ângulo se opõe o maior lado concluímos que $\overline{AB} > \overline{AC}$, como mostra a figura 50.

Agora vamos acrescentar um ponto D no arco (AC), e mostrar que

$$\overline{AB} > \overline{AD} + \overline{DC}$$

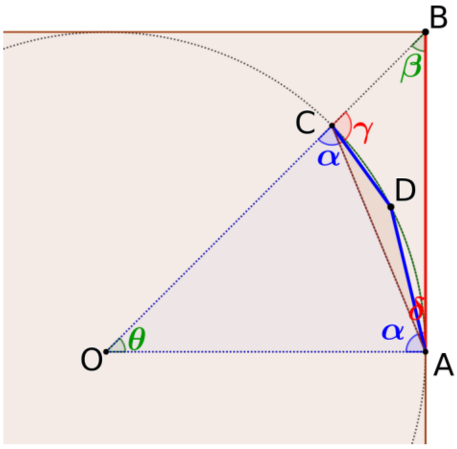
Figura 50: Concluímos que $\overline{AB} > \overline{AC}$



Fonte: Elaborado pelo autor

Como mostra a figura a seguir 51.

Figura 51: Concluímos que $\overline{AB} > \overline{AC}$



Fonte: Elaborado pelo autor

A ideia é adicionar pontos no arco AC para que o comprimento da poligonal assim formada, se aproxime do comprimento do arco AC. Uma vez que saibamos trabalhar com dois pontos, podemos ir adicionando mais e mais pontos até obtermos uma aproximação tão boa quanto quisermos, mas essa poligonal será menor ou igual a esse arco.

O ponto D_1 é obtido da intersecção da semi-reta $\overrightarrow{OD}$ com o lado $\overline{AB}$. Queremos demonstrar que $\overline{AB} > \overline{AD} + \overline{DC}$, mas sabemos que

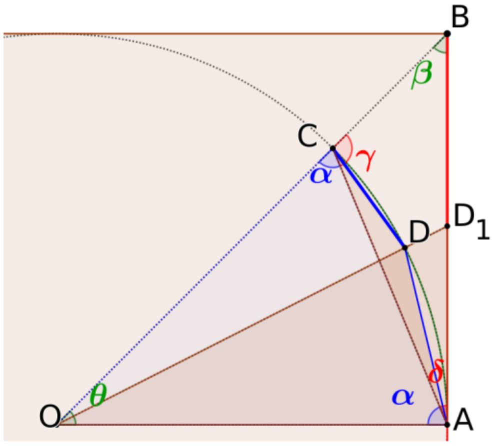
$$\overline{AB} = \overline{AD_1} + \overline{D_1B} > \overline{AD} + \overline{DC}$$

Do triângulo $\triangle OAD_1$, temos que $\overline{AD_1} > \overline{AD}$, caso anterior já estudado. Portanto resta-nos provar que:

$$\overline{D_1B} > \overline{DC}$$

Como mostra a figura 52.

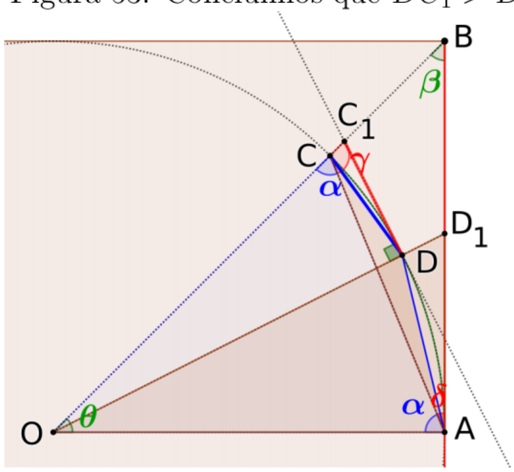
Figura 52: Queremos provar que: $\overline{D_1B} > \overline{DC}$



Fonte: Elaborado pelo autor

Por D traçamos uma tangente ao arco que corta o lado $\overline{OB}$ no ponto C_1. Pelo caso anterior já estudado consideramos o triângulo $\triangle OD_1B$ e concluímos que $\overline{DC_1} > \overline{DC}$, o ângulo $\angle ODC_1$ é reto. Como mostra a figura 53.

Figura 53: Concluímos que $\overline{DC_1} > \overline{DC}$



Fonte: Elaborado pelo autor

Portanto se mostrarmos que:

$$\overline{D_1B} > \overline{DC_1}$$

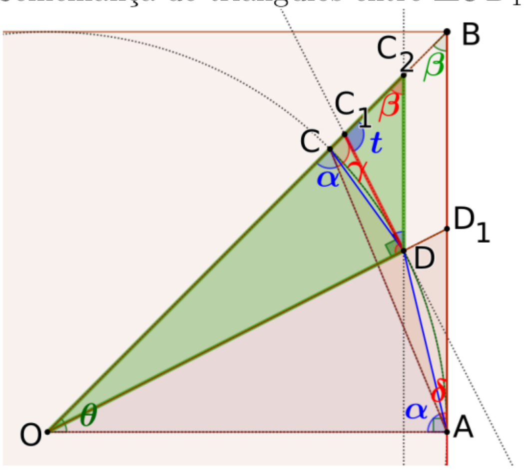
Poderemos concluir que:

$$\overline{D_1B} > \overline{DC}$$

.

Então vamos considerar uma reta paralela à $\overline{BD_1}$ passando pelo ponto D. E essa reta paralela intersecta $\overline{OB}$ em C_2. Considerando a semelhança de triângulos entre $\triangle OD_1B$ e $\triangle ODC_2$, pelo caso ângulo ângulo, pois $\angle OC_2D \equiv \angle OBD_1$ porque $\overline{BD_1}$ e $\overline{C_2D}$ são paralelas, e o ângulo comum aos dois triângulos $\angle BOD_1$, como mostra a figura 54.

Figura 54: Semelhança de triângulos entre $\triangle OD_1B$ e $\triangle ODC_2$



Fonte: Elaborado pelo autor

Assim podemos escrever que:

$$\frac{OD_1}{OD} = \frac{D_1B}{DC_2}$$

Mas $OD_1 > OD$ e portanto, temos que:

$$\frac{OD_1}{OD} = \frac{D_1B}{DC_2} > 1$$

Então chegamos a conclusão que $\overline{D_1B} > \overline{DC_2}$.

Nosso objetivo é mostrar que $\overline{D_1B} > \overline{DC_1}$, porém acabamos de mostrar que $\overline{D_1B} > \overline{DC_2}$, portanto temos que mostrar apenas que $\overline{DC_2} > \overline{DC_1}$, onde vai implicar que $\overline{D_1B} > \overline{DC_1}$.

Queremos mostrar então que:

$$\overline{DC_2} > \overline{DC_1}$$

Para fazer isso, vamos analisar os ângulos da figura 55, onde teremos:

$$\angle ODC_1 = \angle D_1DC_1 = 90^\circ$$

$$\angle ODC = \phi$$

$$\angle C_1DC = \psi$$

$$\angle D_1OB = \theta_1$$

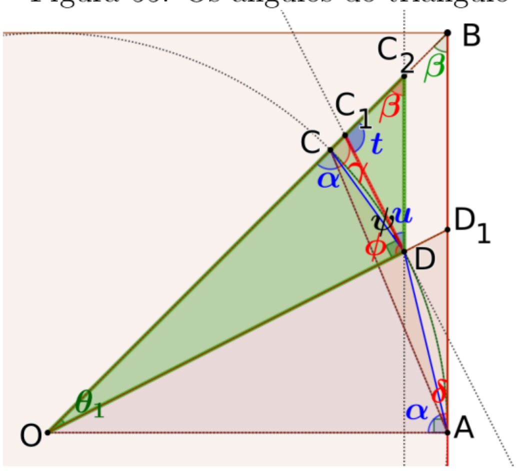
$$\angle D_1BC_2 = \angle DC_2C_1 = \beta$$

$$\angle C_2C_1D = t$$

$$\angle C_2DC_1 = u$$

$$\angle ODC_2 = v$$

Figura 55: Os ângulos do triângulo



Fonte: Elaborado pelo autor

O ângulo $\angle ODC_2 = v$ é obtuso pois é maior do que 90°, e em um triângulo só pode ter um ângulo obtuso. Portanto no triângulo $\triangle ODC_2$ os ângulos β e θ_1 são agudos.

O ângulo t é externo ao triângulo $\triangle ODC_1$, então podemos escrever que:

$$t = \theta_1 + \phi + \psi = v$$

E portanto, temos que o ângulo t é obtuso, o que implica que $t > \beta$. Em um triângulo ao maior ângulo se opõe o maior lado, então no triângulo $\triangle C_1DC_2$ temos que $\overline{DC_2} > \overline{DC_1}$.

Assim, podemos escrever que:

$$\overline{AB} = \overline{AD_1} + \overline{D_1B}$$

E como $\overline{AD_1} > \overline{AD} \implies \overline{AD_1} + \overline{D_1B} > \overline{AD} + \overline{D_1B}$, resulta em:

$$\overline{AB} > \overline{AD} + \overline{D_1B}$$

Sabemos que $\overline{D_1B} > \overline{DC} \implies \overline{AD} + \overline{D_1B} > \overline{AD} + \overline{DC}$, o que resulta em:

$$\overline{AB} > \overline{AD} + \overline{DC}$$

E agora que sabemos dividir em duas partes, o arco pode ser dividido novamente em várias partes até que a linha poligonal se aproxime do comprimento do arco. Essa poligonal será sempre menor ou igual ao arco que por sua vez será menor do que o segmento $\overline{AB}$.

E repetindo o processo para a circunferência inteira, temos que o perímetro do polígono circunscrito à circunferência será sempre maior ou igual do que o comprimento da circunferência. □

Proposição 14. *A área de um círculo de raio r é igual a área de um triângulo retângulo cuja base é igual ao comprimento de uma circunferência e cuja altura é igual ao raio.*

Demonstração. Uma ideia do que Arquimedes imaginou pode ser obtida tomando um círculo de raio r e um triângulo retângulo de altura r e base C, que é o comprimento da circunferência de raio r, podemos escrever que:

$$\pi \cdot r^2 = \frac{1}{2} \cdot r \cdot C \implies C = 2\pi r$$

Como na ilustrado na figura 56.

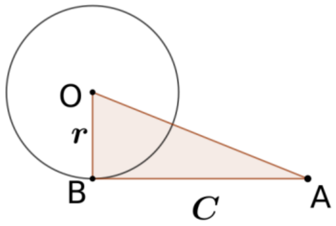
A área do círculo de raio r será denotada por $A(r)$. Vamos demonstrar a proposição pelo princípio de exaustão, podem ocorrer três casos, são eles:

$$A(r) = \frac{1}{2}rC \qquad \text{ou} \qquad A(r) > \frac{1}{2}rC \qquad \text{ou} \qquad A(r) < \frac{1}{2}rC$$

Suponha por absurdo que:

$$A(r) > \frac{1}{2}rC$$

Figura 56: Uma ideia de Arquimedes



Fonte: Elaborado pelo autor

Então, podemos escrever que:

$$\epsilon = A(r) - \frac{1}{2}rC > 0$$

Pelo princípio da exaustão, existe um polígono regular de n lados p_n inscrito na circunferência de raio r, tal que $A(r) - A(p_n) < \epsilon$.

Ou seja,

$$A(r) - A(p_n) < A(r) - \frac{1}{2}rC$$

Calculando, temos:

$$A(p_n) > \frac{1}{2}rC \tag{4.5}$$

Por outro lado, a área de um polígono regular inscrito em uma circunferência é igual ao seu perímetro $n \cdot l$, o comprimento do lado é l, multiplicado pelo apótema h (que é a altura de um triângulo retângulo) e dividido por 2, ou seja,

$$A(p_n) = \frac{1}{2}n \cdot l \cdot h$$

Substituindo na desigualdade 4.5, temos:

$$\frac{1}{2}n \cdot l \cdot h > \frac{1}{2}rC$$

Calculando, temos que:

$$nlh > rC$$

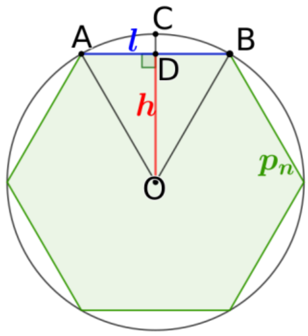
Por outro lado, a medida do apótema h é menor do que a medida do raio da circunferência de raio r, isto é, $r > h$ então, podemos escrever que:

$$nlr > nlh > rC \implies nlr > rC \implies nl > C$$

Significa que o perímetro do polígono regular inscrito p_n é maior do que a circunferência de raio r, o que é uma contradição, pois o comprimento de uma circunferência é maior ou igual do que o perímetro de qualquer polígono regular inscrito nessa circunferência.

Logo, a suposição de absurdo não se verifica, como pode ser visto na figura 57.

Figura 57: Polígono regular inscrito p_n



Fonte: Elaborado pelo autor

Suponha por absurdo que,

$$A(r) < \frac{1}{2}rC$$

Podemos escrever que:

$$\epsilon = \frac{1}{2}rC - A(r) > 0$$

Então pelo princípio da exaustão, existe um polígono regular q_n, circunscrito à circunferência de raio r, tal que $A(q_n) - A(r) < \epsilon$.

Ou seja,

$$A(q_n) - A(r) < \frac{1}{2}rC - A(r)$$

Calculando, temos que:

$$A(q_n) < \frac{1}{2}rC \tag{4.6}$$

Mas a área de um polígono regular circunscrito à uma circunferência é dado pelo seu perímetro $n \cdot l$ multiplicado pelo raio da circunferência r dividido por 2, ou seja,

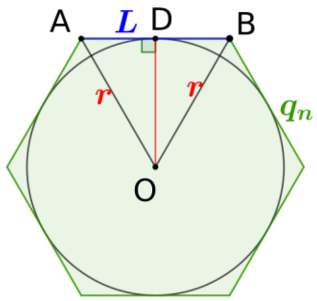
$$A(q_n) = \frac{nLr}{2}$$

Substituindo na desigualdade 4.6, temos que:

$$\frac{nLr}{2} < \frac{1}{2}rC \implies nL < C$$

Ou seja, que o perímetro do polígono regular circunscrito à circunferência de raio r é menor do que o comprimento da circunferência. Contradição! O perímetro de q_n é maior ou igual ao comprimento da circunferência. Logo a suposição de absurdo não se verifica, como pode ser visto na figura 58.

Figura 58: Polígono regular circunscrito q_n



Fonte: Elaborado pelo autor

Portanto, se um número não é maior ou menor do que outro número, ele só pode ser igual, e então vale que:

$$A(r) = \frac{1}{2}rC$$

□

5 SUGESTÕES PARA O ENSINO DO MÉTODO DA EXAUSTÃO

Nesse capítulo, iremos sugerir algumas atividades para o professor aplicar em sala de aula. As propostas de atividades podem ser desenvolvidas com alunos do ensino fundamental, médio e superior e também na educação de jovens e adultos. Foram pensadas para que o professor seja um facilitador ou mediador do processo de ensino aprendizagem.

As atividades propostas nesse capítulo podem ser dadas sem uma ordem específica pois são pensadas para atender a demanda e a necessidade de cada turma, seja do ensino regular ou de educação de jovens e adultos. A proposta é que os alunos tenham liberdade para experimentar as ideias em pequenos grupos e, se possível fazendo o uso de tecnologias, como o uso do geogebra, software de geometria dinâmica.

As aulas devem ser realizadas levando em consideração a experimentação e o diálogo, a fim de possibilitar um ambiente de amizade e descoberta. O nível de abstração de cada aula proposta é aumentado progressivamente.

Para avaliar cada atividade realizada, o professor pode pedir que os alunos entreguem, registros das suas medidas e de seus cálculos e também considere o envolvimento da turma com as atividades desenvolvidas, porque o objetivo de todas as atividades é o aprendizado do aluno, respeitando cada sujeito e não buscando promover o ranqueamento por notas, pois pode ocorrer em um outro momento.

5.1 ATIVIDADE: MÉTODO DA EXAUSTÃO

Roteiro para o professor.

O objetivo desta atividade é verificar na prática que o princípio da exaustão funciona. Os materiais necessários para essa atividade são régua, lápis, borracha e a folha modelo, que disponibilizamos ao professor no final dessa descrição. O segmento $\overline{AB}$ tem 10 cm e o segmento $\overline{CD}$ tem 2 cm. Os alunos deverão medir esses segmentos para constatar isso.

Depois os alunos devem medir o ponto E médio do segmento $\overline{AB}$ e construir um novo segmento $\overline{FG}$ com a metade do tamanho do segmento $\overline{AB}$ ou um pouquinho menos do que sua metade. Medir o ponto H médio do segmento $\overline{FG}$ e construir um novo segmento $\overline{IJ}$ com a metade do tamanho do segmento $\overline{FG}$ ou com um pouquinho menos do que a metade. Prosseguir até que o segmento obtido, seja menor do que o segmento pré-estabelecido $\overline{CD}$.

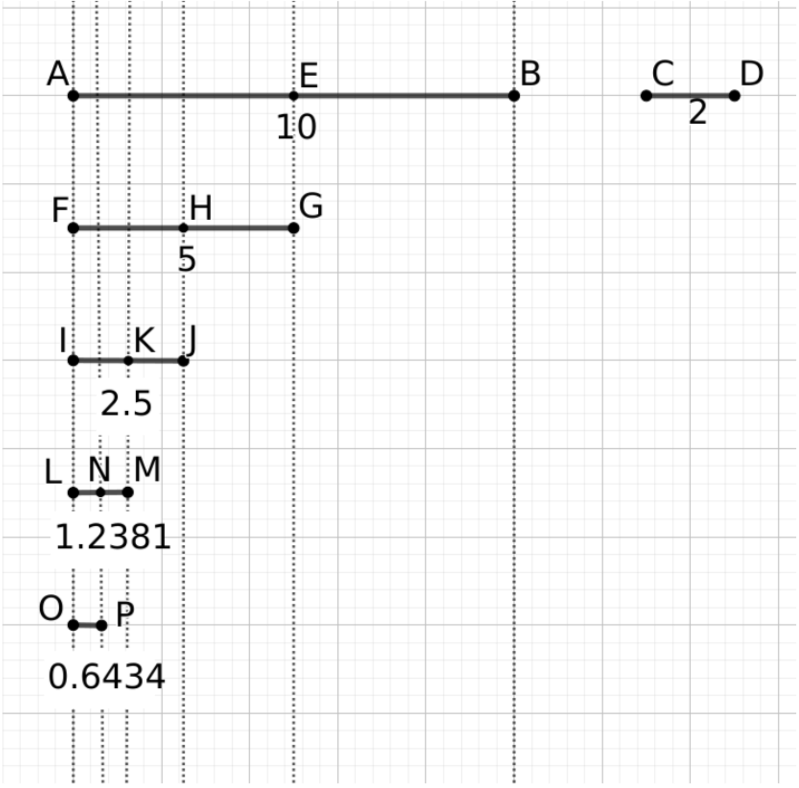
Em nosso exemplo, figura 59, o segmento $\overline{OP}$ é menor do que o segmento $\overline{CD}$.

Um fato interessante é dicutir com os alunos, para o número de casas decimais para a aproximação.

Atividade: princípio da exaustão

Instruções ao aluno: Divida o segmento maior pela metade diversas vezes,
até constatar que o segmento obtido é menor do que o segmento menor dado.

Figura 59: Segmento $\overline{OP}$ é menor do que o segmento $\overline{CD}$



Fonte: Elaborado pelo autor

5.2 ATIVIDADE: RAZÃO DO COMPRIMENTO PELO DIÂMETRO DA CIRCUNFERÊNCIA

Roteiro para o professor.

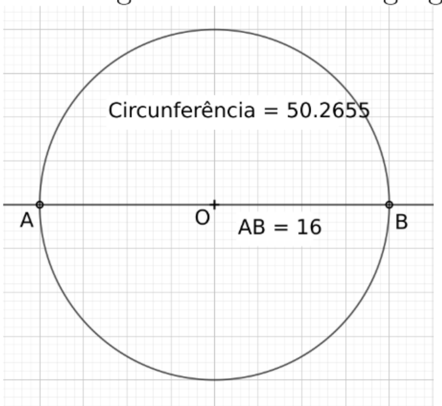
O objetivo desta atividade é verificar que ao dividirmos o comprimento da circunferência pelo seu diâmetro, o resultado é π. Os materiais necessários para essa atividade são régua, lápis, borracha, calculadora, fita métrica e a folha modelo que disponibilizamos ao professor no final dessa descrição.

Os alunos devem medir o diâmetro da circunferência com a régua. Em seguida, usando a fita métrica devem medir o comprimento da circunferência, que será um desafio à parte. Pode ser feito medindo a semi-circunferência e depois multiplicado o valor do comprimento encontrado por 2, também pode-se dividir a circunferência em mais partes, e medir cada arco. Ao final das medições soma-se os valores dos arcos e teremos o comprimento da circunferência.

Ao se dividir a circunferência em vários arcos, estamos intuitivamente trabalhando com polígonos na circunferência, como mostra a figura 60.

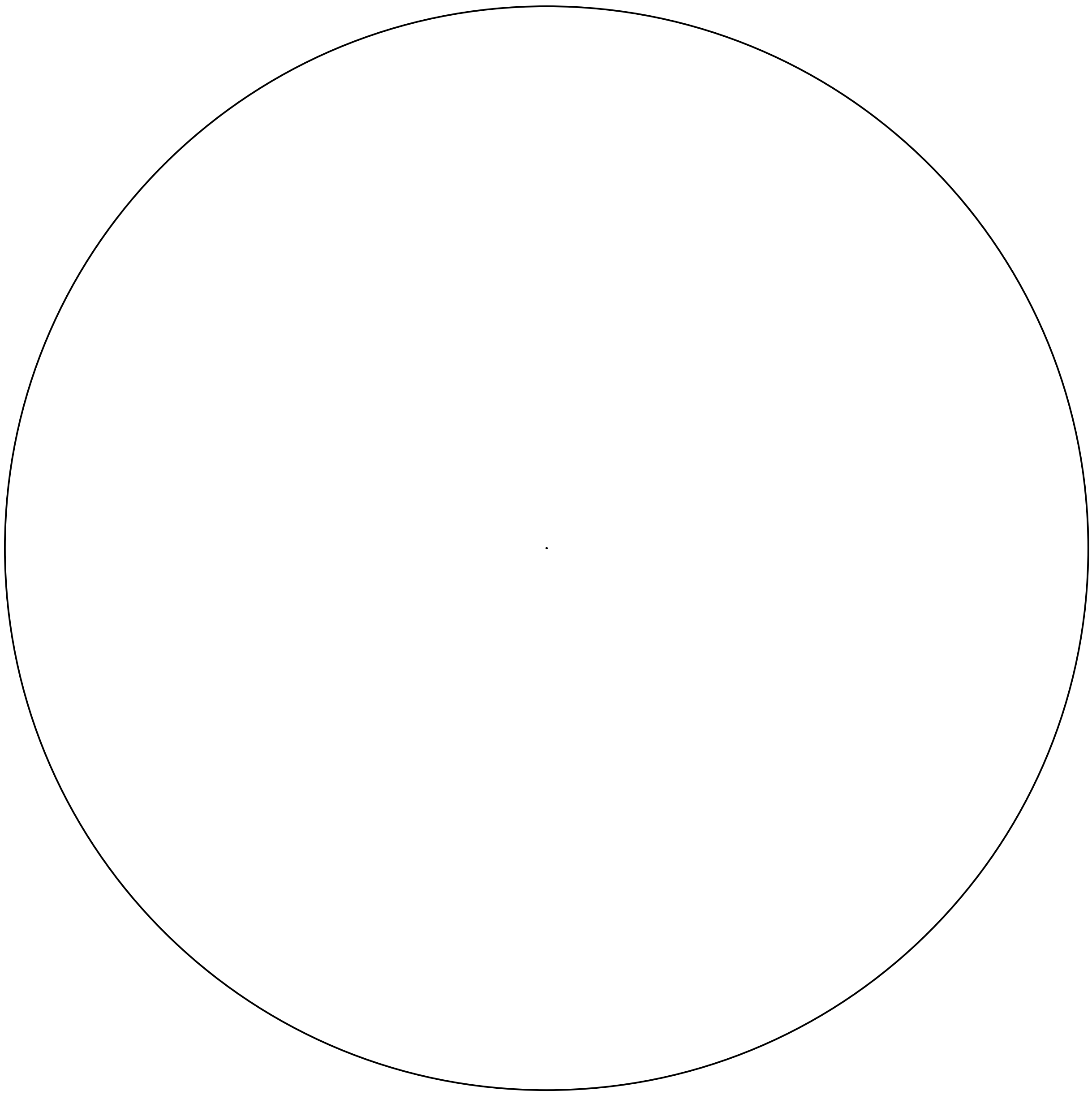
Na figura construída no geogebra, o valor do comprimento é de $50,2655$ cm e o diâmetro é de 16 cm, calculando a razão do comprimento pelo diâmetro é de $3,14159375$, como mostra a figura 61.

Figura 61: Figura construída no geogebra



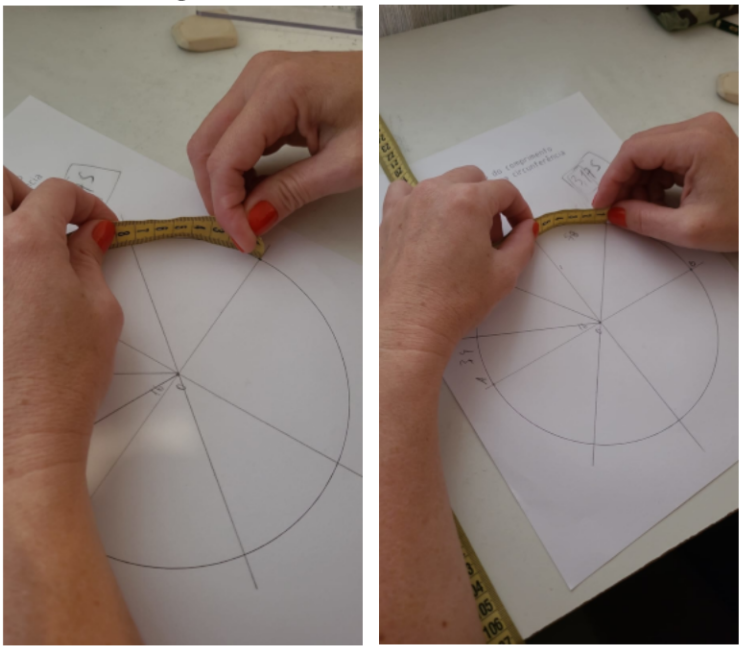
Fonte: Elaborado pelo autor

Atividade: razão do comprimento pelo diâmetro de uma circunferência



Instruções ao aluno: Meça o comprimento e o diâmetro da circunferência.
Calcule a razão do comprimento pelo diâmetro.

Figura 60: Atividades de medida



Fonte: Elaborado pelo autor

5.3 ATIVIDADE: RAZÃO DO COMPRIMENTO PELO DIÂMETRO DA CIRCUNFERÊNCIA COM OBJETOS DO DIA A DIA

Roteiro para o professor.

O objetivo dessa atividade é calcular a razão do comprimento pelo diâmetro de vários objetos circulares usados no dia a dia. Os materiais necessários para a atividade são: papel, lápis, borracha, calculadora, fita métrica, fita adesiva e pelo menos 10 objetos circulares de uso diário que podem ser revesados entre os grupos de alunos. A fita adesiva serve para fixar melhor a fita métrica se os alunos acharem conveniente.

Os estudantes devem medir o comprimento e o diâmetro de cada objeto e calcular sua razão para verificar uma aproximação para o valor de π. Colocar os dados obtidos em uma tabela para que depois possam comparar suas medidas. Os diversos valores encontrados são dados devido às medidas imprecisas que fazemos e não por causa da imprecisão da matemática.

Segue o quadro 1 com os dados obtidos de uma das medições que foram feitas, todas as medidas estão em centímetros.

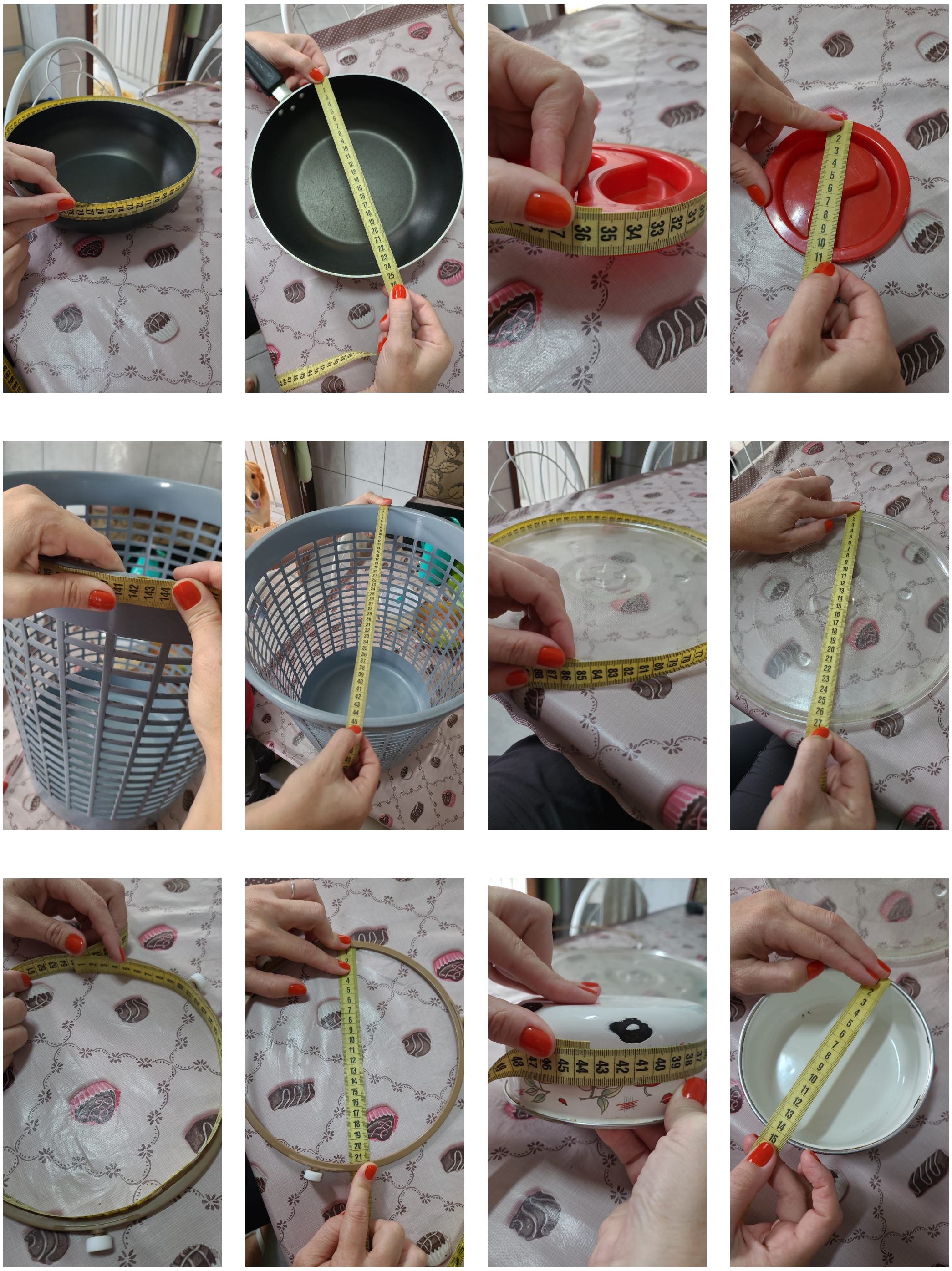
Quadro 1: Lista de atividades com as medidas

	Comprimento (C)	**Diâmetro (D)**	**C/D**
Prato marrom	61	19	3,2105
Pires	44	14	3,1428
Copo vidro	20,9	6,5	3,2153
Tampa de panela	54,3	17	3,1941
Panela	76,8	24,3	3,1604
Tampa vermelha	34,9	10,7	3,2616
Cesto de roupa	141,5	44,2	3,2013
Prato microondas	84,7	27	3,1370
Suporte microondas	64,7	21	3,0809
Pote de metal	43,3	14,4	3,0069

Fonte: Elaborado pelo autor

Segue na figura 60b, uma foto montagem feita pelo autor, da medição desses objetos.

Figura 60b: foto montagem feita pelo autor



Fonte: Elaborado pelo autor

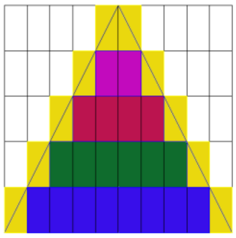
5.4 ATIVIDADE: O MÉTODO DA EXAUSTÃO NO CÁLCULO DE UM TRIÂNGULO

Roteiro para o professor.

O objetivo dessa atividade é constatar que ao aumentar a quantidade de retângulos, por dentro e por fora, que usamos para calcular a área de um triângulo a diferença entre os retângulo de dentro e de fora do triângulo, resulta em apenas ao comprimento de sua base. O cálculo da área do triângulo nessas condições já foi feita no capítulo 3. Os materiais necessários para essa atividade são lápis, borracha, lápis de cor e a folha modelo que está no final da descrição dessa atividade.

A primeira página da atividade é necessário em pintar as áreas de dentro e de fora do triângulo, como mostra a figura 62.

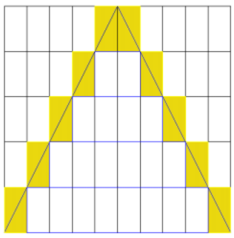
Figura 62: Área de um triângulo



Fonte: Elaborado pelo autor

Depois pintar somente a área que sobra da deferença entre os retângulos de fora e os de dentro do triângulo, como mostra a figura 63.

Figura 63: Área de um triângulo



Fonte: Elaborado pelo autor

Quando então os retângulos que sobrarem irão cair na base do triângulo.

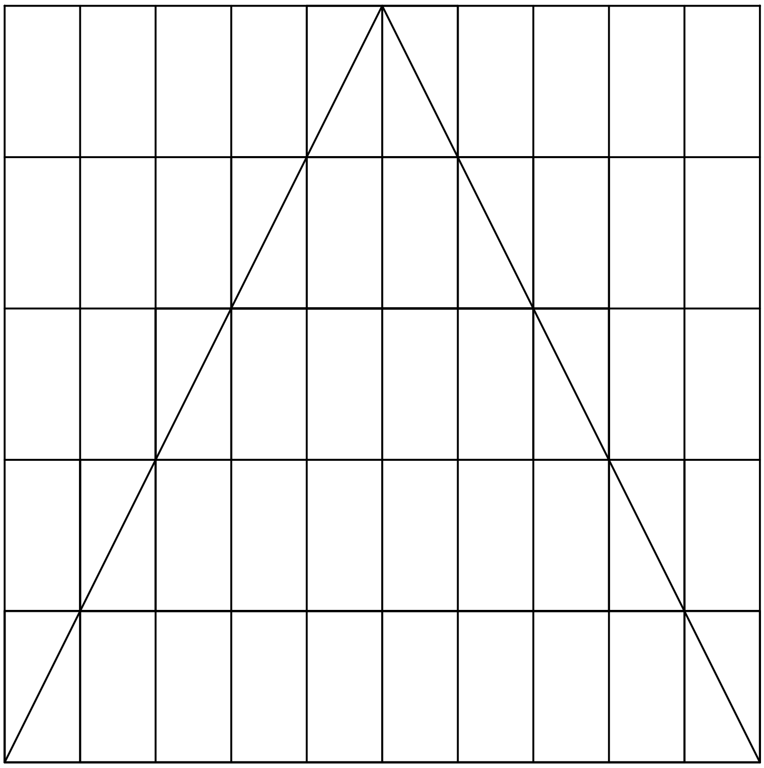
Para a segunda página da atividade, é necessário em pintar as áreas de dentro e de fora do triângulo, como mostra a figura 64.

Depois pintar somente a área que sobra da deferença entre os retângulos de fora e os de dentro do triângulo, como mostra a figura 65.

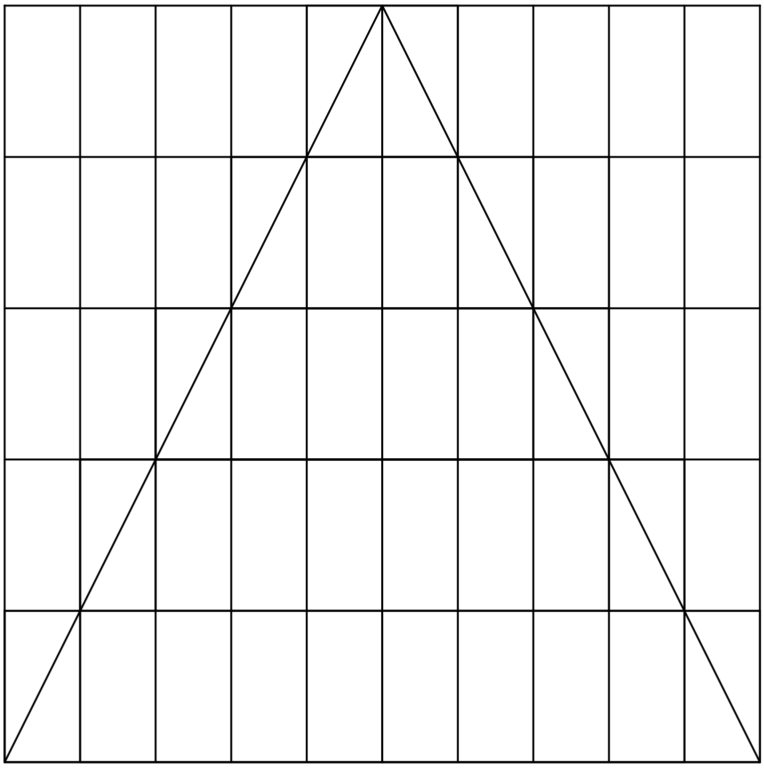
Quando então os retângulos que sobrarem irão cair na base do triângulo.

Atividade: princípio da exaustão no triângulo

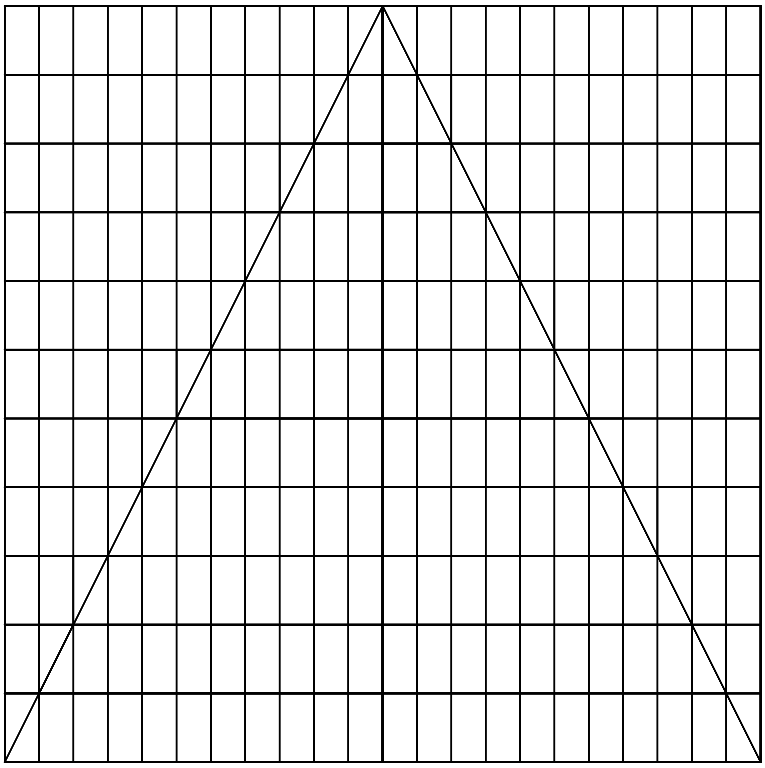
Instruções ao aluno: Pintar retângulos que cubram um andar do triângulo.



Instruções ao aluno: Pintar somente a região que sobra, da diferença entre os retângulos que estão fora e dentro do triângulo.



Instruções ao aluno: Pintar retângulos que cubram um andar do triângulo.



Instruções ao aluno: Pintar somente a região que sobra, da diferença entre os retângulos que estão fora e dentro do triângulo.

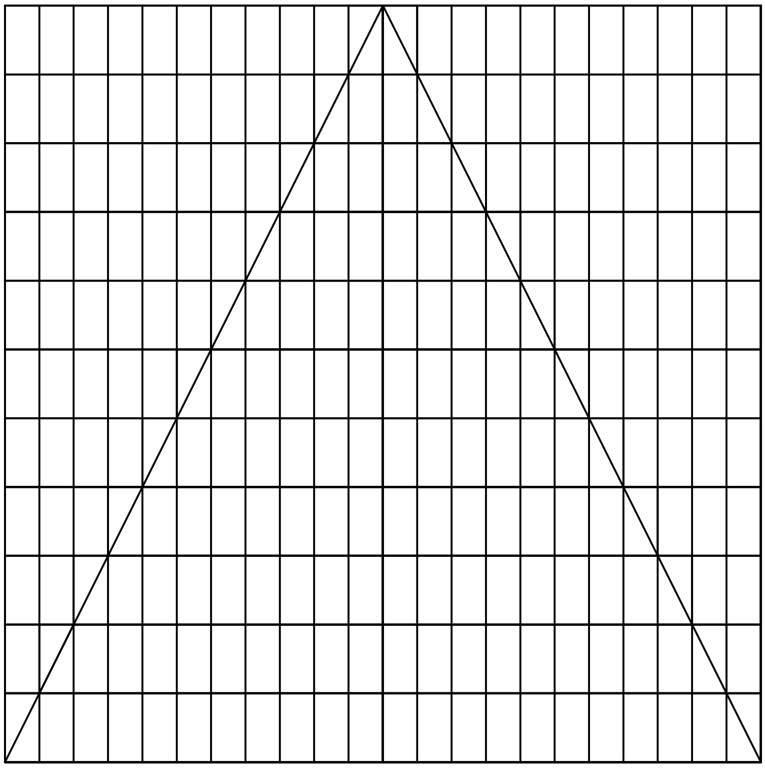
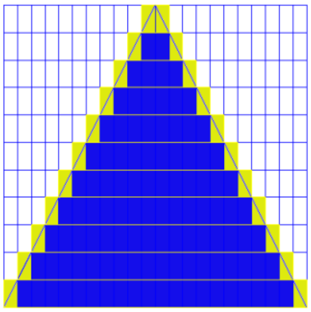
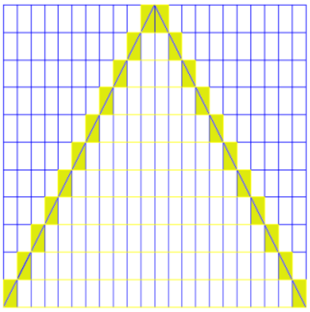


Figura 64: Área de um triângulo



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 65: Área de um triângulo



Fonte: Elaborado pelo autor

5.5 ATIVIDADE: CÁLCULO DA ÁREA E DO COMPRIMENTO DE UMA CIRCUNFERÊNCIA DE RAIO 5 CM

O objetivo da atividade é calcularmos o comprimento e a área de uma circunferência de raio 5 cm, por meio de polígonos regulares inscritos e circunscritos. A área de um círculo de raio 5 cm é de aproximadamente $78,53$ cm^2 e o comprimento é de $31,41$ cm.

Para essa atividade vamos precisar de: lápis, régua, borracha, calculadora e as folhas que disponibilizamos ao final das descrições.

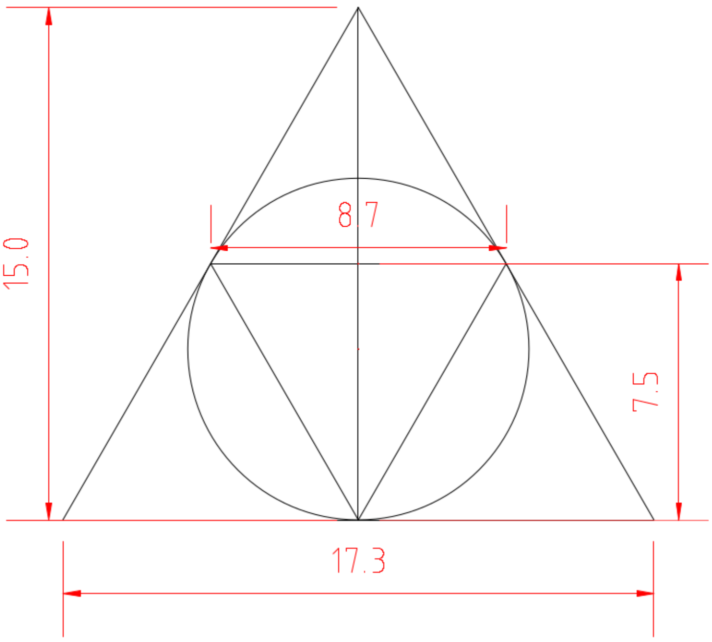
Uma discussão interessante a fazer com os alunos, é a ideia da precisão das medidas e de seu valor com um número de casas decimais suficientes para obter uma solução adequada. Na escola, temos apenas a régua com 1 casa decimal para a aproximar as medidas, talvez no máximo duas casas decimais.

5.5.1 Aproximação por polígono regular de 3 lados

Roteiro para o professor.

A primeira aproximação é feita calculando a área e o perímetro do polígono regular de 3 lados circunscrito à circunferência e calculando a área e o perímetro do polígono regular inscrito à circunferência, as medidas obtidas podem ser vistas na figura 66.

Figura 66: Área e o perímetro do polígono regular de 3 lados



Fonte: Elaborado pelo autor

Chamando A_3 a área do polígono regular circunscrito, P_3 o perímetro do polígono regular circunscrito, de B_3 a base do polígono regular circunscrito, H_3 a altura do polígono regular circunscrito e a_3 a área do polígono regular inscrito, p_3 o perímetro do polígono regular inscrito, b_3 a base do polígono regular inscrito e h_3 a altura do polígono regular inscrito temos que:

A área do polígono regular circunscrito é:

$$A_3 = \frac{B_3 \cdot H_3}{2} = \frac{15 \cdot 17,3}{2} = 129,75 \text{ cm}^2$$

O perímetro do polígono regular circunscrito é:

$$P_3 = B_3 \cdot 3 = 17,3 \cdot 3 = 51,9 \text{ cm}$$

A área do polígono regular inscrito é:

$$a_3 = \frac{b_3 \cdot h_3}{2} = \frac{8,7 \cdot 7,5}{2} = 32,625 \text{ cm}^2$$

O perímetro do polígono regular inscrito é:

$$p_3 = b_3 \cdot 3 = 8,7 \cdot 3 = 26,1 \text{ cm}$$

Assim podemos concluir que a área do círculo $A_\circ$ é:

$$32,625 \leq A_\circ \leq 129,75$$

E podemos concluir que o comprimento da circunferência $C_\circ$ é:

$$26,1 \leq C_\circ \leq 51,9$$

Dividindo a desigualdade por 10 cm, estamos dividindo o comprimento da circunferência pelo seu diâmetro e calculando um valor aproximado para π, no caso é:

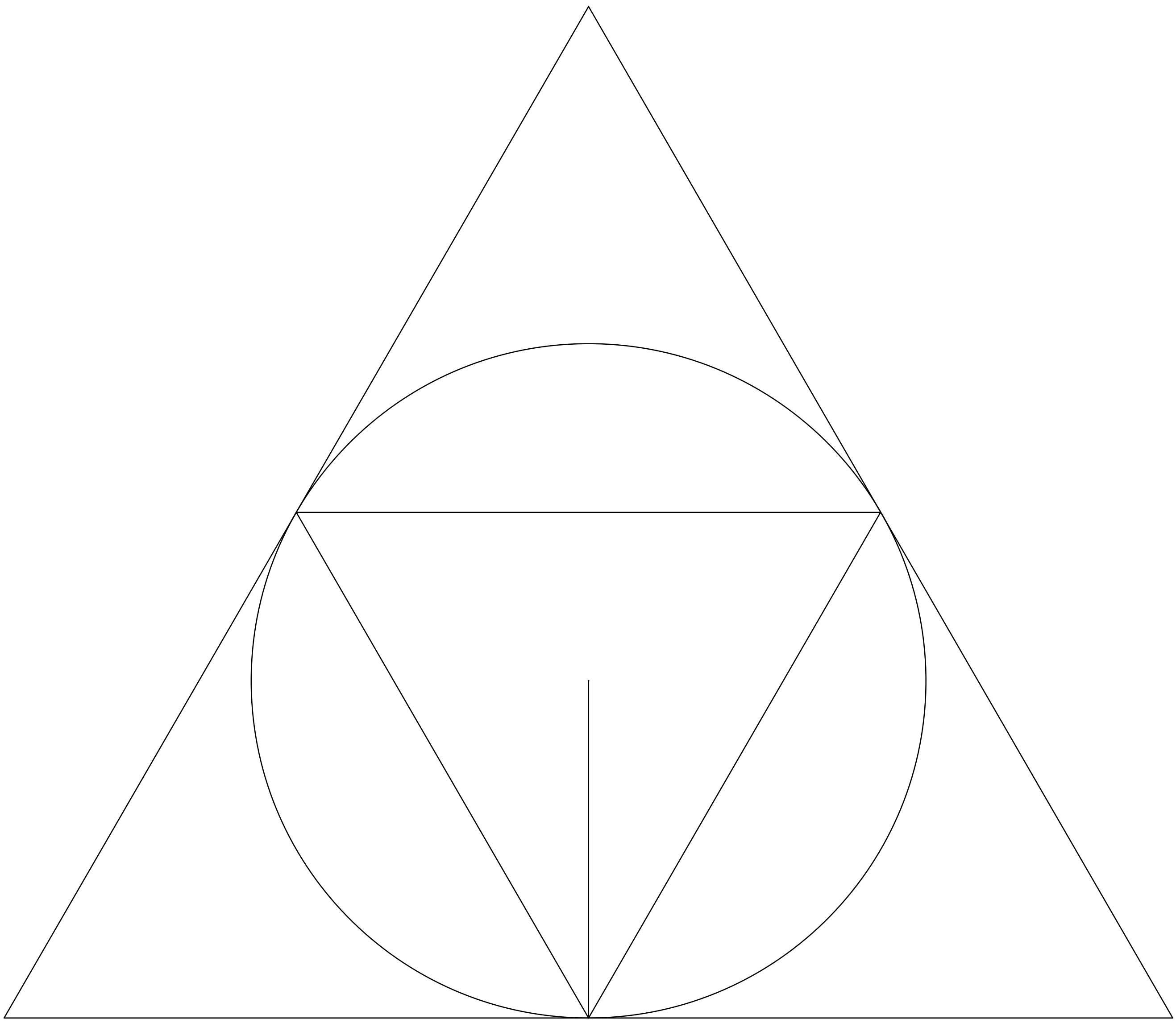
$$\frac{26,1}{10} \leq \frac{C_\circ}{d} \leq \frac{51,9}{10}$$

Resultando que π é um valor entre:

$$2,61 \leq \frac{C_\circ}{d} \leq 5,19$$

A atividade descrita nessa sessão se encontra na próxima página.

Atividade: Cálculo de área e comprimento de circunferência



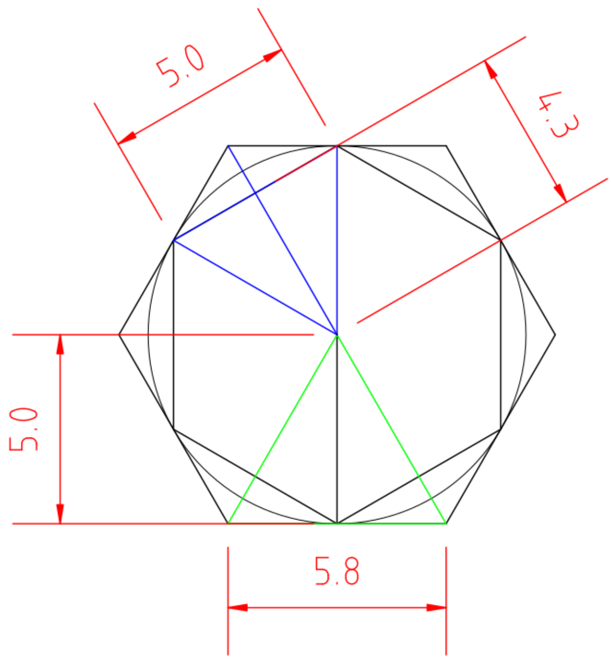
Instrução ao aluno: calcular a área do triângulo inscrito e circunscrito à circunferência.

5.5.2 Aproximação por polígono regular de 6 lados

Roteiro para o professor.

A aproximação é feita calculando a área e o perímetro do polígono regular de 6 lados circunscrito à circunferência e calculando a área e o perímetro do polígono regular inscrito à circunferência, as medidas obtidas podem ser vistas na figura 67.

Figura 67: Área e o perímetro do polígono regular de 6 lados



Fonte: Elaborado pelo autor

A área do polígono regular circunscrito é:

$$A_6 = 6 \cdot \frac{B_6 \cdot H_6}{2} = 6 \cdot \frac{5,8 \cdot 5}{2} = 87 \text{ cm}^2$$

O perímetro do polígono regular circunscrito é:

$$P_6 = B_6 \cdot 6 = 5,8 \cdot 6 = 34,8 \text{ cm}$$

A área do polígono regular inscrito é:

$$a_6 = \frac{b_6 \cdot h_6}{2} = 6 \cdot \frac{5 \cdot 4,3}{2} = 64,5 \text{ cm}^2$$

O perímetro do polígono regular inscrito é:

$$p_6 = b_6 \cdot 6 = 5 \cdot 6 = 30 \text{ cm}$$

Assim podemos concluir que a área do círculo $A_\circ$ é:

$$64,5 \leq A_\circ \leq 87$$

E podemos concluir que o comprimento da circunferência $C_\circ$ é:

$$30 \leq C_\circ \leq 34,8$$

Dividindo a desigualdade por 10 cm, estamos dividindo o comprimento da circunferência pelo seu diâmetro e calculando um valor aproximado para π, no caso é:

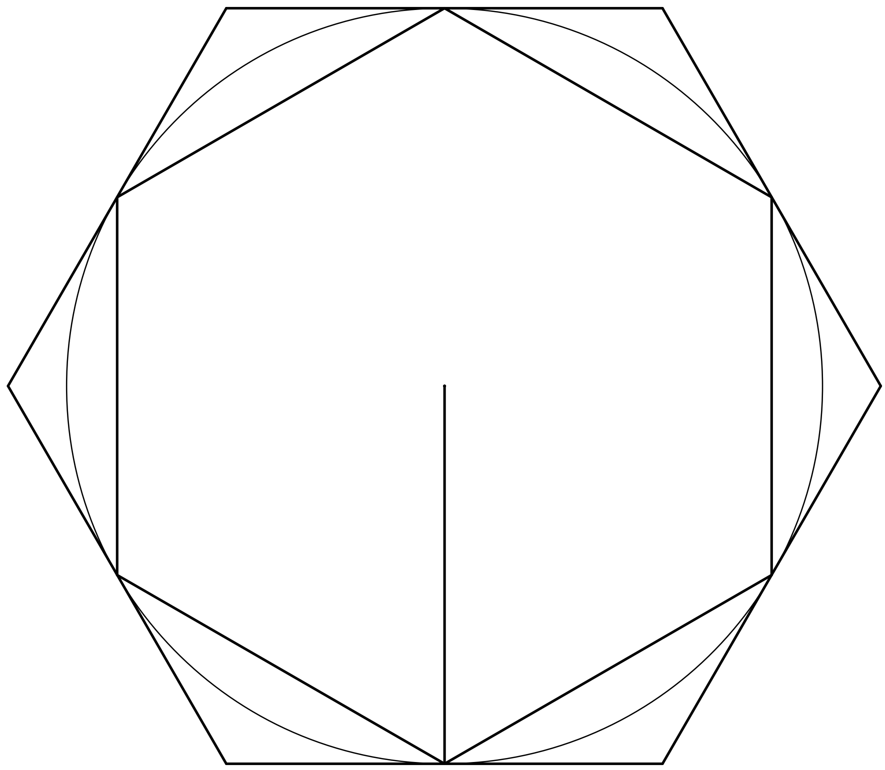
$$\frac{30}{10} \leq \frac{C_\circ}{d} \leq \frac{34,8}{10}$$

Resultando que π é um valor entre:

$$3 \leq \frac{C_\circ}{d} \leq 3,48$$

A atividade descrita nessa sessão se encontra na próxima página.

Atividade: Cálculo de área e comprimento de circunferência



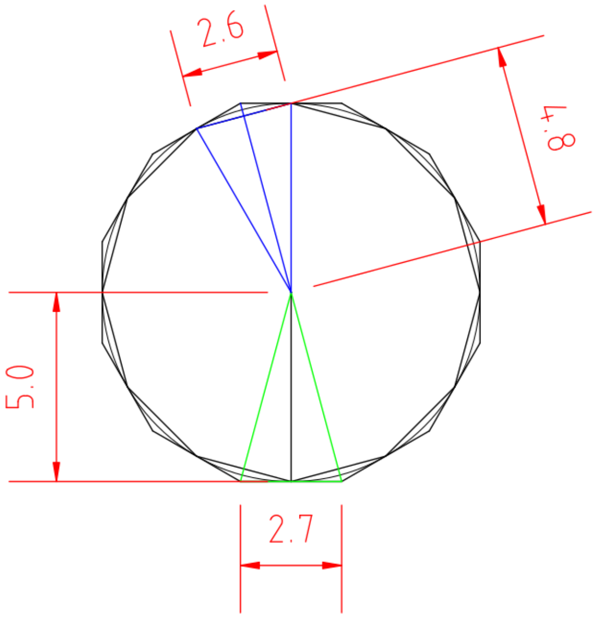
Instrução ao aluno: calcular a área do polígono regular inscrito e circunscrito à circunferência.

5.5.3 Aproximação por polígono regular de 12 lados

Roteiro para o professor.

A aproximação é feita calculando a área e o perímetro do polígono regular de 12 lados circunscrito à circunferência e calculando a área e o perímetro do polígono regular inscrito à circunferência, as medidas obtidas podem ser vistas na figura 68.

Figura 68: Área e o perímetro do polígono regular de 12 lados



Fonte: Elaborado pelo autor

A área do polígono regular circunscrito é:

$$A_{12} = 12 \cdot \frac{B_{12} \cdot H_{12}}{2} = 12 \cdot \frac{2,7 \cdot 5}{2} = 81 \text{ cm}^2$$

O perímetro do polígono regular circunscrito é:

$$P_{12} = B_{12} \cdot 12 = 2,7 \cdot 12 = 32,4 \text{ cm}$$

A área do polígono regular inscrito é:

$$a_{12} = \frac{b_{12} \cdot h_{12}}{2} = 12 \cdot \frac{2,6 \cdot 4,8}{2} = 74,88 \text{ cm}^2$$

O perímetro do polígono regular inscrito é:

$$p_{12} = b_{12} \cdot 12 = 2,6 \cdot 12 = 31,2 \text{ cm}$$

Assim podemos concluir que a área do círculo $A_\circ$ é:

$$74,88 \leq A_\circ \leq 81$$

E podemos concluir que o comprimento da circunferência $C_\circ$ é:

$$31,2 \leq C_\circ \leq 32,4$$

Dividindo a desigualdade por 10 cm, estamos dividindo o comprimento da circunferência pelo seu diâmetro e calculando um valor aproximado para π, no caso é:

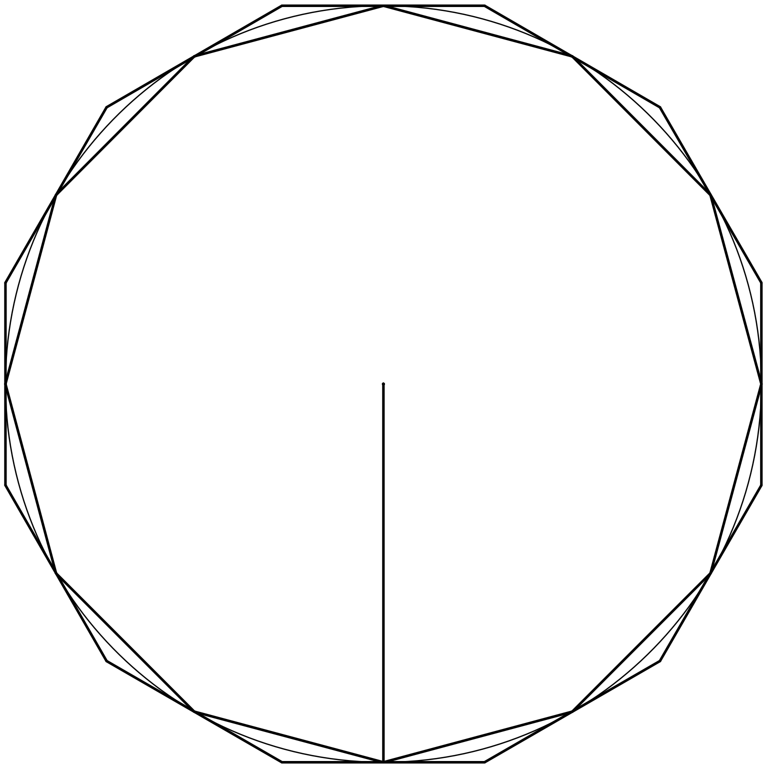
$$\frac{31,2}{10} \leq \frac{C_\circ}{d} \leq \frac{32,4}{10}$$

Resultando que π é um valor entre:

$$3,12 \leq \frac{C_\circ}{d} \leq 3,24$$

A atividade descrita nessa sessão se encontra na próxima página.

Atividade: Cálculo de área e comprimento de circunferência



Instrução ao aluno: calcular a área do polígono regular inscrito e circunscrito à circunferência.

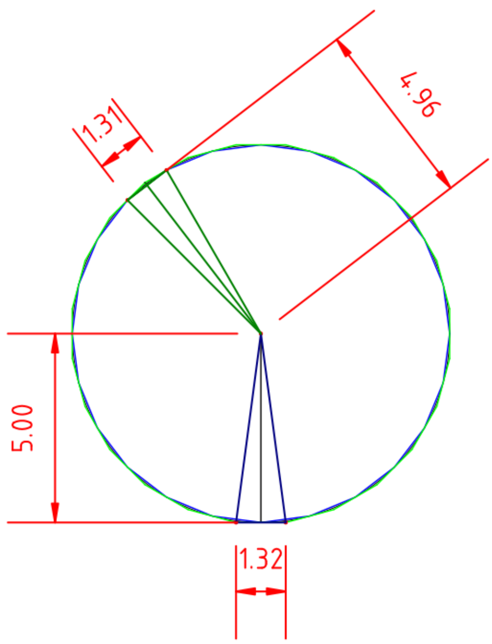
5.5.4 Aproximação por polígono regular de 24 lados

Roteiro para o professor.

A aproximação é feita calculando a área e o perímetro do polígono regular de 24 lados circunscrito à circunferência e calculando a área e o perímetro do polígono regular inscrito à circunferência, as medidas obtidas podem ser vistas na figura a seguir. Os alunos terão dificuldades em obter as medidas apresentadas, porque nossos instrumentos de medida, réguas escolares, não tem a precisão necessária para essa finalidade. Uma solução possível é fazer um desenho maior, que será tema da próxima atividade.

Na figura 69, para as atividades dos alunos, existem pontos em vermelho para ajudar a obter os triângulos circunscritos e inscritos.

Figura 69: Área e o perímetro do polígono regular de 24 lados



Fonte: Elaborado pelo autor

A área do polígono regular circunscrito é:

$$A_{24} = 24 \cdot \frac{B_{24} \cdot H_{24}}{2} = 24 \cdot \frac{1,32 \cdot 5}{2} = 79,2 \text{ cm}^2$$

O perímetro do polígono regular circunscrito é:

$$P_{24} = B_{24} \cdot 24 = 1,32 \cdot 24 = 31,68 \text{ cm}$$

A área do polígono regular inscrito é:

$$a_{24} = \frac{b_{24} \cdot h_{24}}{2} = 24 \cdot \frac{1,31 \cdot 4,96}{2} = 77,97 \text{ cm}^2$$

O perímetro do polígono regular inscrito é:

$$p_{24} = b_{24} \cdot 24 = 1,31 \cdot 24 = 31,44 \text{ cm}$$

Assim podemos concluir que a área do círculo $A_\circ$ é:

$$77,97 \leq A_\circ \leq 79,2$$

E podemos concluir que o comprimento da circunferência $C_\circ$ é:

$$31,44 \leq C_\circ \leq 31,68$$

Dividindo a desigualdade por 10 cm, estamos dividindo o comprimento da circunferência pelo seu diâmetro e calculando um valor aproximado para π, no caso é:

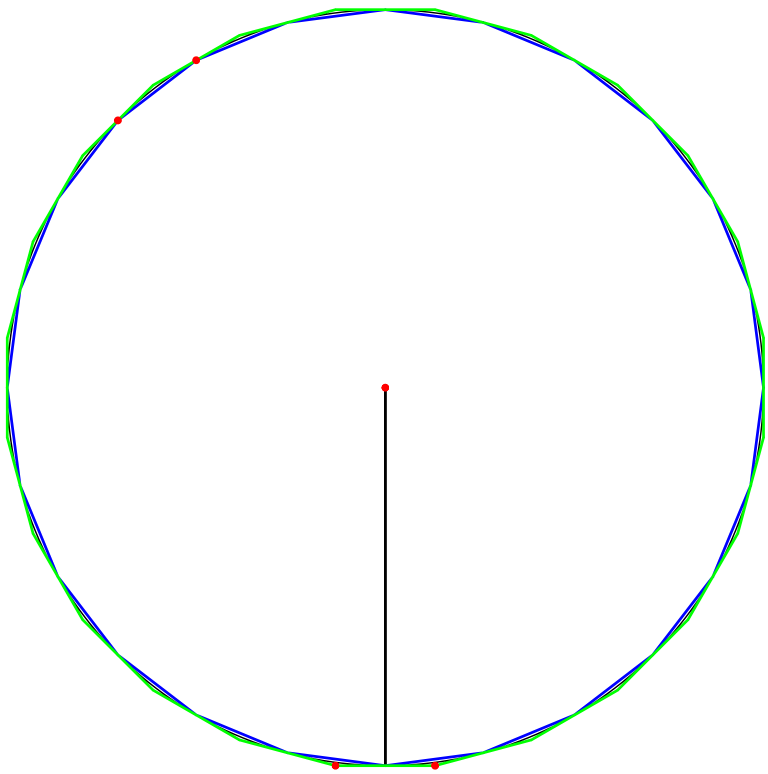
$$\frac{31,44}{10} \leq \frac{C_\circ}{d} \leq \frac{31,68}{10}$$

Resultando que π é um valor entre:

$$3,144 \leq \frac{C_\circ}{d} \leq 3,168$$

A atividade descrita nessa sessão se encontra na próxima página.

Atividade: Cálculo de área e comprimento de circunferência



Instrução ao aluno: calcular a área do polígono regular inscrito e circunscrito à circunferência. Dica: use os pontinhos vermelhos.

5.6 APROXIMAÇÃO POR POLÍGONO REGULAR DE 24 LADOS USANDO UMA CIRCUNFERÊNCIA DE RAIO 9 CM

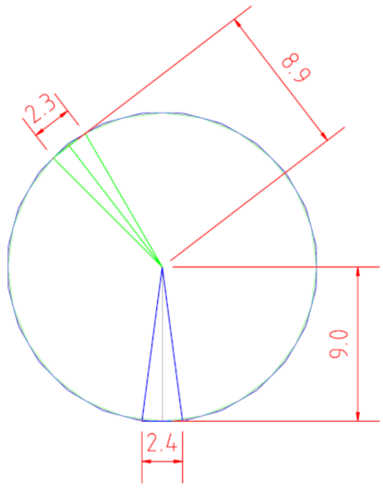
Roteiro para o professor.

Para complementar as atividades, vamos aumentar o raio da circunferência para 9 cm, a fim de facilitar a obtenção das medidas e do cálculo do valor de π.

A área do círculo de raio 9 cm é de $254,46$ cm^2 e seu perímetro é de $56,58$ cm.

Na figura 70, para as atividades dos alunos, existem pontos em vermelho para ajudar a obter os triângulos circunscritos e inscritos.

Figura 70: Área e o perímetro do polígono regular de 24 lados



Fonte: Elaborado pelo autor

A área do polígono regular circunscrito é:

$$A_{24} = 24 \cdot \frac{B_{24} \cdot H_{24}}{2} = 24 \cdot \frac{2,4 \cdot 9}{2} = 259,2 \text{ cm}^2$$

O perímetro do polígono regular circunscrito é:

$$P_{24} = B_{24} \cdot 24 = 2,4 \cdot 24 = 57,6 \text{ cm}$$

A área do polígono regular inscrito é:

$$a_{24} = \frac{b_{24} \cdot h_{24}}{2} = 24 \cdot \frac{2,3 \cdot 8,9}{2} = 250,98 \text{ cm}^2$$

O perímetro do polígono regular inscrito é:

$$p_{24} = b_{24} \cdot 24 = 2,3 \cdot 24 = 56,4 \text{ cm}$$

Assim podemos concluir que a área do círculo $A_\circ$ é:

$$250,98 \leq A_\circ \leq 259,2$$

E podemos concluir que o comprimento da circunferência é:

$$56,4 \leq C_\circ \leq 57,6$$

Dividindo a desigualdade por 18 cm, estamos dividindo o comprimento da circunferência pelo seu diâmetro e calculando um valor aproximado para π, no caso é:

$$\frac{56,4}{18} \leq \frac{C_\circ}{d} \leq \frac{57,6}{18}$$

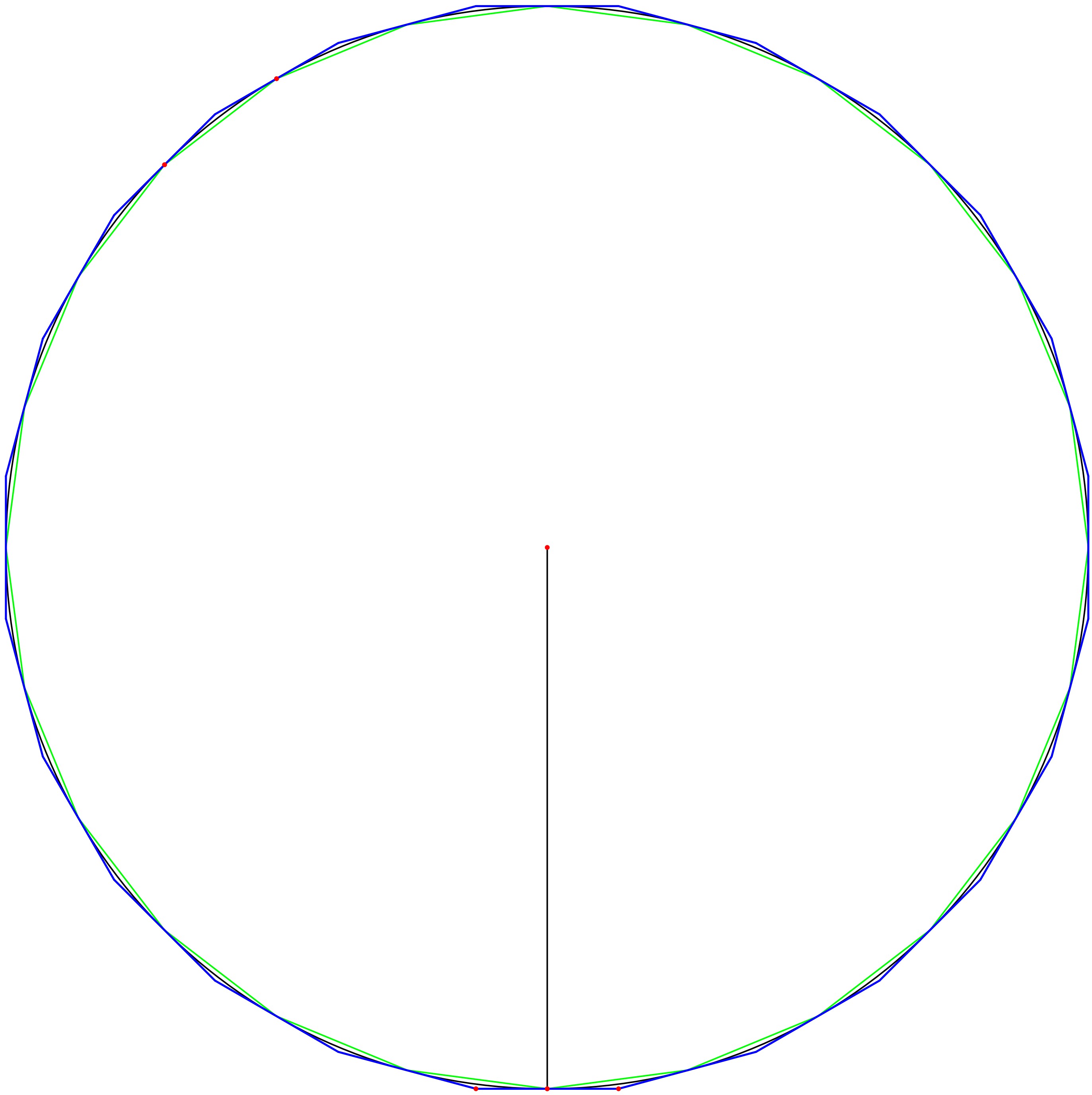
Resultando que π é um valor entre:

$$3,13 \leq \frac{C_\circ}{d} \leq 3,2$$

A atividade descrita nessa sessão se encontra na próxima página.

Atividade: Cálculo de área e comprimento de circunferência

Instrução ao aluno: calcular a área do polígono regular inscrito e circunscrito à circunferência.
Dica: use os pontinhos vermelhos.



5.7 APROXIMAÇÃO POR POLÍGONO REGULAR DE 48 LADOS USANDO UMA CIRCUNFERÊNCIA DE RAIO 9 CM

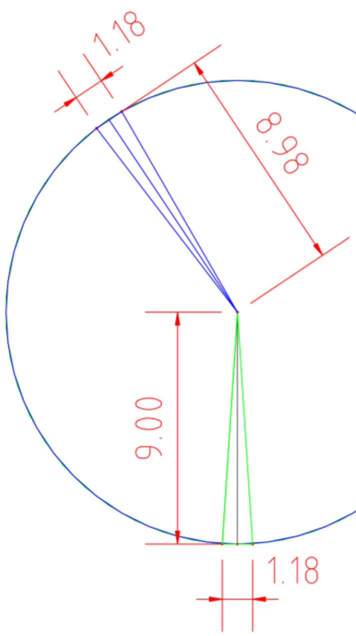
Roteiro para o professor.

A área do círculo de raio 9 cm é de $254,46$ cm^2 e seu perímetro é de $56,58$ cm.

Na figura 71, para as atividades dos alunos, existem pontos em vermelho para ajudar a obter os triângulos circunscritos e inscritos.

Novamente precisaremos de um desenho maior, porque nossos instrumentos não medem com precisão necessária essa circunferência. Agora, imagine no tempo de Arquimedes que ele fez isso, sem nenhum recurso tecnológico atual. E ainda por cima, fez com um polígono regular de 96 lados.

Figura 71: Área e o perímetro do polígono regular de 48 lados



Fonte: Elaborado pelo autor

A área do polígono regular circunscrito é:

$$A_{48} = 48 \cdot \frac{B_{48} \cdot H_{48}}{2} = 48 \cdot \frac{1,18 \cdot 9}{2} = 254,88 \text{ cm}^2$$

O perímetro do polígono regular circunscrito é:

$$P_{48} = B_{48} \cdot 48 = 1,18 \cdot 48 = 56,64 \text{ cm}$$

A área do polígono regular inscrito é:

$$a_{48} = \frac{b_{48} \cdot h_{48}}{2} = 48 \cdot \frac{1,18 \cdot 8,98}{2} = 254,31 \text{ cm}^2$$

O perímetro do polígono regular inscrito é:

$$p_{48} = b_{48} \cdot 48 = 1,18 \cdot 48 = 56,64 \text{ cm}$$

Assim podemos concluir que a área do círculo $A_\circ$ é:

$$254,31 \leq A_\circ \leq 254,88$$

E podemos concluir que o comprimento da circunferência $C_\circ$ é:

$$56,64 \leq C_\circ \leq 56,64$$

Dividindo a desigualdade por 18 cm, estamos dividindo o comprimento da circunferência pelo seu diâmetro e calculando um valor aproximado para π, no caso é:

$$\frac{56,64}{18} \leq \frac{C_\circ}{d} \leq \frac{56,64}{18}$$

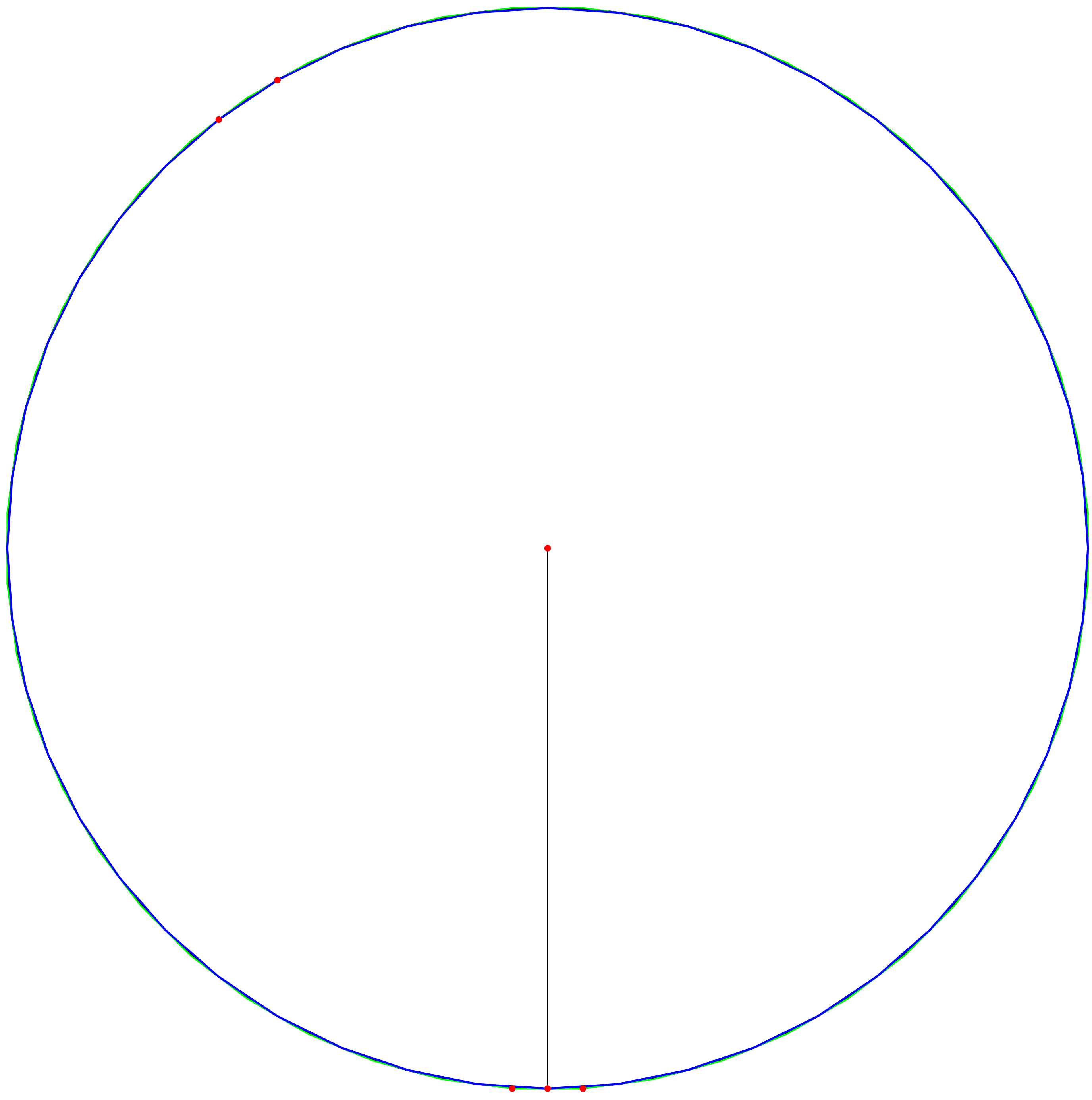
Resultando que π é um valor entre:

$$3,14666... \leq \frac{C_\circ}{d} \leq 3,14666...$$

A atividade descrita nessa sessão se encontra na próxima página.

Atividade: Cálculo de área e comprimento de circunferência

Instrução ao aluno: calcular a área do polígono regular inscrito e circunscrito à circunferência.
Dica: use os pontinhos vermelhos.



6 CONCLUSÃO

Com esse trabalho, foi demonstrado, usando o método da exaustão, que a área do círculo é πr^2 e que o comprimento da circunferência é $2\pi r$, complementando muitos livros de geometria plana. Podendo auxiliar os alunos de graduação em matemática, bem como os alunos do PROFMAT que estejam cursando a disciplina de geometria.

Uma preocupação muito grande que tive foi de construir muitas figuras no geogebra, software livre de geometria dinâmica, para que o entendimento das proposições fosse facilitado.

Foram abordados temas da história da matemática relacionados ao conteúdo e discutidos o uso do cálculo de limites no ensino médio em situações que tivessem relação com progressões geométricas no cálculo de áreas de figuras planas.

Também foram apresentados 5 sugestões de atividades, para o professor aplicar nas suas aulas de matemática, quando abordar o cálculo da área e do comprimento de uma circunferência, as atividades são:

- Constatar o princípio da exaustão em uma atividade exploratória.
- Medir o comprimento de uma circunferência usando uma fita métrica, dividindo a circunferência em polígonos para facilitar a tarefa. E calculando a razão do comprimento obtido pelo seu diâmetro a fim de aproximar o valor de π. Ainda é possível discutir com os alunos, as diferenças encontradas devido ao processo de medição.
- Medir o comprimento de circunferências de objetos do dia a dia e de seu diâmetro para aproximar o valor de π.
- Pintar o interior e o exterior de um triângulo com retângulos a fim de verificar que podemos calcular a área do triângulo constatando que a diferença entre as áreas dos retângulos externos em relação aos retângulos internos, quando a quantidade de retângulos tender ao infinito, é a própria base do triângulo, possibilitando assim, o cálculo de sua área.
- Cálculo da área e do comprimento da circunferência e aproximação do valor de π, usando polígonos regulares inscritos e circunscritos de 3, 6, 12, 24 e 48 lados, imitando o processo que Arquimedes usou para calcular o valor de π.

Esse trabalho me permitiu compreender uma maneira de criar e construir atividades de estudo dirigido para trabalhar com meus alunos em sala de aula, de forma independente do livro didático. O que me faz também querer trabalhar na capacitação e na formação de professores de matemática no sentido de desenvolver a resolução de problemas, o conhecimento em história da matemática e o uso de ferramentas computacionais para que o próprio professor se torne produtor de seus materiais didáticos e atenda da melhor forma as necessidades de seus alunos.

Para concluir, no futuro, pretendo estudar as proposições geométricas que permitam calcular, pelo método da exaustão, áreas e volumes de figuras espaciais curvas, como por exemplo: cilindros, cones e esferas, dando continuidade a esse trabalho, preparando novos materiais didáticos que possam ser usados em sala de aula, de modo a tornar o aluno mais ativo em seu processo de ensino aprendizagem.

REFERÊNCIAS

[1] BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.

[2] BOYER, Carl Benjamin. História da matemática; tradução: Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blücher, Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.

[3] DANTE, Luiz Roberto. Formulação e Resolução de problemas de Matemática: Teoria e prática. São Paulo: Ática, 1ª ed. 2010.

[4] IEZZI, G. et al. Fundamentos de Matemática Elementar, volume 3 (trigonometria), volume 9 (Geometria plana), volume 10 (Geometria espacial). Atual Editora, São Paulo.

[5] LIMA, Elon Lages. Medida e forma em geometria: comprimento, área, volume e semelhança. Sociedade Brasileira de Matematica. Coleção do Professor de Matemática, 2009.

[6] MORGADO, Augusto Cesar; WAGNER, Eduardo; ZANI, Sheila Cristina. Progressões e matemática financeira. Sociedade Brasileira de Matematica. Coleção do Professor de Matemática, 2005.

[7] PCN, Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática. Secretária de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

[8] PINHO, José Luiz Rosas; BATISTA, Eliezer; CARVALHO, Neri Terezinha Both. Geometria I. UFSC, 2005, https://mtm.grad.ufsc.br/livrosdigitais/.