



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Francieli Triches

**Um estudo do divisor excepcional de
folheações de codimensão um em \mathbb{C}^3**

Florianópolis
2023

Francieli Triches

**Um estudo do divisor excepcional de
folheações de codimensão um em \mathbb{C}^3**

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de doutora em Matemática Pura e Aplicada, com área de concentração Geometria e Topologia. Orientadora: Profa. Marianna Ravara Vago, Dra.

Florianópolis
2023

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Triches, Francieli

Um estudo do divisor excepcional de folheações de codimensão um em C^3 / Francieli Triches ; orientadora, Marianna Ravara Vago, 2023.

96 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, Florianópolis, 2023.

Inclui referências.

1. Matemática Pura e Aplicada. 2. Folheações holomorfas singulares. 3. Componentes nodais. 4. Divisor excepcional. I. Vago, Marianna Ravara. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada. III. Título.

Francieli Triches

**Um estudo do divisor excepcional de
folheações de codimensão um em \mathbb{C}^3**

O presente trabalho em nível de doutorado foi avaliado e aprovado por banca
examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. André Luiz Pires Guedes, Dr.
Instituição Universidade Federal do Paraná

Prof. Arturo Fernández Péres, Dr.
Instituição Universidade Federal de Minas Gerais

Prof. Francisco Carlos Caramello Junior, Dr.
Instituição Universidade Federal de Santa Catarina

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi
julgado adequado para obtenção do título de doutora em Matemática Pura e Aplicada,
com área de concentração Geometria e Topologia.

Prof. Daniel Gonçalves, Dr.
Coordenador do Programa de
Pós-Graduação

Profa. Marianna Ravara Vago, Dra.
Orientadora

Florianópolis, 2023.

Dedico este trabalho aos meus pais que são meu maior exemplo de coragem. Dedico também a todas as mulheres que antes de mim traçaram este caminho e me mostraram que era possível, e a todas as mulheres que vierem depois de mim para que tenham forças e coragem para encarar essa jornada.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio financeiro da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

A Deus por ter me fortalecido e me mostrado os caminhos para a chegar a conclusão deste trabalho.

Aproveito para agradecer algumas pessoas familiares e amigos próximos que estiveram presentes ao meu lado durante esse processo, são elas;

Prof Marianna Ravara Vago, minha orientadora que me ensinou tudo o que sei sobre folheações holomorfas, e que também me ajudou a manter o psicológico saudável o que possibilitou a conclusão deste trabalho, muito obrigada por embarcar nessa viagem comigo!

Helder Geovane Gomes de Lima, meu amigo, companheiro e incentivador incondicional, que esteve ao meu lado durante todo o tempo ouvindo meus desabafos e divagações sobre a pesquisa, muito obrigada por estar em minha vida e me fazer acreditar e sonhar que era possível! Agradeço também pela leitura minuciosa de boa parte do texto, durante a qual você conseguiu indicar vários pontos que pude ir melhorando já durante o processo de elaboração do texto.

Meus pais, Maria Lurdes De Bona Triches e Ari Triches, que sempre incentivaram minha irmã e eu a estudar, vocês são minha inspiração diária! Muito obrigada por acreditarem e sonharem este sonho louco comigo e com a Fabi! Graças ao apoio de vocês nós conseguimos!

Minha irmã Fabiani Fernanda Triches (Fabi), por existir na minha vida e por sempre me apoiar nas minhas loucuras. Agradeço também pela nossa nova parceria de trabalho que tem rendido bons frutos. Aproveito para deixar registrado que na terça dia 27/06/2023, a Fabi defendeu seu mestrado em farmacologia, com uma maestria que me inspirou para a minha defesa que aconteceu na quinta dia 29/06/2023, mana o orgulho que sinto em dizer que você é minha irmã e o quanto você é importante pra mim, não consigo descrever em palavras.

Jocemara Triches (Tia Joce), foi a primeira de nossa família a concluir o mestrado e o doutorado, com isso ela mostrou para minha irmã e para mim que também podemos e temos direito a esta educação, além disso, nos apresentou a UFSC que nos recebeu de braços abertos, muito obrigada por tudo isso e por todo o apoio nesse período!

Rosângela De Bona (Tia Rose), conviver diariamente com você durante a sua graduação me fez entender a importância de cursar o ensino superior e acreditar que isso poderia mudar a minha, como de fato mudou, não só a minha mas de muitas pessoas próximas a mim, agradeço por ter tido esta oportunidade e também pelos papos, pelas risadas, pelo apoio incondicional e principalmente pelos vídeos das crianças,

que por muitas vocês foram a distração que eu precisava para desligar da matemática por uns minutos, e lembrar que o doutorado é só um pedaço da vida, e não a vida toda, além de me lembrar quase diariamente da inocência da infância.

Candinho Della Brida Junior e Eneli Gomes de Lima, agradeço a parceria e a paciência com as minhas loucuras!

Aos colegas Everton Boos, Rafaela Filippozzi, Bruna Arielly Schulz, Helena Gunther, agradeço a parceria neste período árduo de estudos, que tornou esta fase mais leve.

Gostaria de deixar registrado aqui o meu agradecimento as escolas públicas de ensino fundamental e médio na qual fiz a minha formação inicial. Agradeço as cotas para estudantes oriundos de escolas públicas, que possibilitaram a minha entrada na graduação. Agradeço as políticas públicas que garantem a permanência dos estudantes nas universidades públicas durante seus cursos de graduação, das quais eu usufruí durante toda a minha graduação, morando na casa da estudantes da UFPR, usando o RU todos os dias, além claro das bolsas de permanência e projeto de pesquisas, sem estes auxílios eu não teria terminado a graduação. E agradeço ainda as bolsas de estudo do mestrado e do doutorado, que foram minha única fonte de renda durante esse período e possibilitaram a minha formação. Enfim, deixo aqui registrado isso como prova da importância destas políticas para a minha formação, e para o avanço da ciência no Brasil.

*“segura as pontas
que você dá conta, mulher
você não cogitou ir tão longe
e mesmo assim conseguiu
é arrebatador
traçar o próprio roteiro”
(LEÃO, Ryane, 2017)*

RESUMO

Neste trabalho estudamos a conexidade do divisor excepcional total oriundo da redução de singularidades de uma folheação holomorfa singular não dicrítica de codimensão um em $(\mathbb{C}^3, 0)$, após retirarmos do divisor as chamadas componentes nodais não interrompidas. Descrevemos o divisor excepcional através do conjunto de listas \mathcal{H} , o qual podemos estudar utilizando grafos, homologia simplicial e resultados de paridade. As componentes nodais do conjunto singular de uma folheação são objetos de interesse pois localmente provocam uma separação no espaço de folhas. Em dimensão três, tratam-se de uniões de curvas cujos pontos genéricos são singularidades nodais em dimensão dois, e cujos pontos triplos são também nodais. O divisor excepcional total é obtido fazendo uma sucessão de blow-ups em centros permitidos; ao final da redução de singularidades, será uma união de hipersuperfícies invariantes. Mostramos que se o conjunto das componentes nodais não interrompidas tem n elementos, então o complementar deste conjunto no divisor possui $n + 1$ componentes conexas.

Palavras-chave: Folheações holomorfas singulares. Componentes nodais. Divisor excepcional.

ABSTRACT

In this work we study the connectivity of the total exceptional divisor obtained from the reduction of singularities of a nondicritical holomorphic singular codimension one foliation in $(\mathbb{C}^3, 0)$, after we exclude the so called uninterrupted nodal components. We describe the exceptional divisor through the set of lists \mathcal{H} , which we can study using graphs, simplicial homology and parity results. The nodal components in the singular locus of a foliation are objects of interest because they locally cause a separation in the set of leaves. In dimension three, they are unions of curves whose generic points are nodal singularities in dimension two, and whose triple points are also nodal. The total exceptional divisor is obtained by performing a succession of blow-ups at permissible centers; at the end of the reduction of singularities, it will be a union of invariant hypersurfaces. We show that if the set of uninterrupted nodal components has n elements, then the complement of this set in the divisor has $n + 1$ connected components.

Keywords: Singular holomorphic foliation. Nodal components. Exceptional divisor.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Singularidade de tipo sela	24
Figura 2 – Singularidade nodal	24
Figura 3 – Blow-up da origem de \mathbb{C}^3	27
Figura 4 – Blow-up do eixo x	28
Figura 5 – Blow-up do eixo y	28
Figura 6 – Blow-up do eixo z	29
Figura 7 – Número de componentes do divisor	30
Figura 8 – $D_1 = \pi_1^{-1}(0)$	34
Figura 9 – $D_2 = \pi_2^{-1}(P_1)$ ou $D_2 = \pi_2^{-1}(\Gamma)$	35
Figura 10 – $D_3 = \pi_3^{-1}(P_1)$	35
Figura 11 – $D_3 = \pi_3^{-1}(P_2)$	36
Figura 12 – $D_3 = \pi_3^{-1}(P_{12})$	36
Figura 13 – $D_3 = \pi_3^{-1}(\Gamma_{12})$	36
Figura 14 – $D_4 = \pi_4^{-1}(Q_{123})$	37
Figura 15 – $D_4 = \pi_4^{-1}(\Gamma_{12})$	38
Figura 16 – $D_4 = \pi_4^{-1}(\Gamma_{13})$	38
Figura 17 – $D_4 = \pi_4^{-1}(\Gamma_{23})$	39
Figura 18 – Simplexos	60
Figura 19 – Simplexos orientados	61
Figura 20 – Representação local do divisor com dois pontos triplos	67
Figura 21 – Componente nodal em um ponto triplo	69
Figura 22 – Complexo simplicial em um ponto triplo	70
Figura 23 – Componente nodal após blow-up da origem	72
Figura 24 – Complexo simplicial após explosão da origem	73
Figura 25 – Divisores e componente nodal após blow-up do eixo x , uma possibilidade	75
Figura 26 – Complexo simplicial após o blow-up do eixo x , uma possibilidade	76
Figura 27 – Divisores e componente nodal após blow-up do eixo x , outra possibilidade	78
Figura 28 – Complexo simplicial após o blow-up do eixo x , outra possibilidade	78
Figura 29 – Divisores e componente nodal após blow-up do eixo z	80
Figura 30 – Complexo simplicial após o blow-up do eixo z	80
Figura 31 – Representação local do divisor e \mathcal{N} com dois pontos triplos nodais, uma possibilidade	82
Figura 32 – Representação local do divisor e \mathcal{N} com dois pontos triplos nodais, outra possibilidade	83
Figura 33 – Representação local do divisor e \mathcal{N} com um ponto triplo nodal	85

Figura 34 – Representação local do divisor com duas componentes nodais . . . 86

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
2	FOLHEAÇÕES HOLOMORFAS SINGULARES DE CODIMENSÃO UM	16
2.1	CONCEITOS BÁSICOS	16
2.2	PRELIMINARES: DIMENSÃO DOIS	17
2.2.1	Blow-up da origem $\underline{0}$ de \mathbb{C}^2	17
2.2.2	Folheações em \mathbb{C}^2	18
2.2.3	Singularidades de Folheações em \mathbb{C}^2	20
2.2.4	Redução de singularidades em \mathbb{C}^2	25
2.3	PRELIMINARES: DIMENSÃO TRÊS	25
2.3.1	Blow-up da origem $\underline{0}$ de \mathbb{C}^3	25
2.3.2	Blow-up do eixo x de \mathbb{C}^3	27
2.3.3	Folheações em \mathbb{C}^3	29
2.3.4	Componentes Nodais	33
2.3.5	A construção do Divisor de uma folheação holomorfa \mathcal{F} em \mathbb{C}^3 .	34
3	LISTAS	40
3.1	O CONJUNTO \mathcal{H}	40
3.2	COMPONENTES NODAIS EM \mathcal{H}	45
4	GRAFOS	48
4.1	CONCEITOS BÁSICOS	48
4.2	MATRIZ DE INCIDÊNCIA	49
4.3	REDUÇÃO DE SINGULARIDADES E GRAFOS	50
4.4	$G_{\mathcal{H}}$ É SIMPLEMENTE CONEXO	54
5	HOMOLOGIA SIMPLICIAL DO DIVISOR	59
5.1	COMPLEXOS SIMPLICIAIS	59
5.2	O COMPLEXO SIMPLICIAL DE \mathcal{H}	62
5.3	GRUPOS DE HOMOLOGIA DA VIZINHANÇA DE UM PONTO TRIPLO	63
5.4	COLAGEM UTILIZANDO A SEQUÊNCIA DE MAYER-VIETORIS . .	66
6	COMPONENTES NODAIS NO GRAFO $G_{\mathcal{H}}$ E NO COMPLEXO SIM- PLICIAL $K_{\mathcal{H}}$	69
6.1	A COMPONENTE NODAL EM UMA VIZINHANÇA DE UM PONTO TRIPLO	69
6.2	GRUPOS DE HOMOLOGIA DO COMPLEMENTAR DE UMA COM- PONENTE NODAL	70
6.3	O COMPLEMENTAR DA COMPONENTE NODAL APÓS BLOW-UP	72
6.4	COLAGEM DAS COMPONENTES CONEXAS DE $K_{\mathcal{H}} \setminus \mathcal{N}$	82
6.5	COMPONENTES CONEXAS DE $K_{\mathcal{H}} \setminus \text{Nod } \mathcal{F}$	85
7	COMPONENTES NODAIS E PARIDADE	89

7.1	PARIDADE DE 0-CAMINHOS EM \mathcal{H}	89
7.2	COMPONENTES CONEXAS DE $\mathcal{H} \setminus \text{Nod}\mathcal{F}$	93
	REFERÊNCIAS	95

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho estudamos a conexidade do divisor excepcional oriundo da redução de singularidades de uma folheação holomorfa singular de codimensão um em $(\mathbb{C}^3, 0)$, após retirarmos do divisor as chamadas componentes nodais não interrompidas.

Considerando uma folheação holomorfa singular \mathcal{F} em dimensão dois, sabe-se que as singularidades nodais de \mathcal{F} atuam localmente como separadores das folhas. Em dimensão três, o objeto correspondente é chamado *componente nodal não interrompida*: trata-se de uma união de curvas cujos pontos genéricos são singularidades nodais em dimensão dois, e cujos pontos triplos são também nodais. Estes objetos foram descritos pela primeira vez em (7). Pelo fato de gerarem localmente uma separação no espaço de folhas, estes objetos são também chamados de *separadores nodais*.

Em (18), os autores trabalham em dimensão dois e apresentam propriedades da folheação após as singularidades nodais serem retiradas do divisor excepcional. Este estudo é feito utilizando grafos de tipo árvore com peso nas arestas.

Em (5) é feita uma generalização para dimensão n dos resultados apresentados em (18). Os autores mostram que uma folheação não dicrítica e sem selas-nó em \mathbb{C}^n possui uma redução de singularidades especial (que coloca as singularidades nodais em esquinas do divisor) e a partir disto, um estudo sobre o *stratum* do divisor excepcional (que substitui o grafo em dimensão dois) dá resultados sobre a não-conexidade do complementar do conjunto separador nodal no divisor. Grande parte deste artigo é dedicado a definir e dar propriedades deste *stratum* do divisor, um objeto abstrato e de difícil compreensão.

Nesta tese simplificamos a definição deste *stratum* do divisor para folheações não dicríticas e sem selas-nó em $(\mathbb{C}^3, 0)$. Ao introduzir no Capítulo 3 o conjunto \mathcal{H} , que chamamos *lista*, mostramos que é possível associar a ele um grafo e um complexo simplicial, o que nos permite utilizar resultados e ferramentas já conhecidos destes dois objetos e trazê-los para o estudo de \mathcal{H} . Isso foi feito em detalhe nos Capítulos 4 e 5.

No Capítulo 4 fazemos um estudo da conexidade do divisor excepcional utilizando grafos. Usamos a matriz de incidência para confirmar a conexidade do grafo $G_{\mathcal{H}}$ associado a \mathcal{H} , e usamos o Teorema de Seifert - Van Kampen para concluir que $G_{\mathcal{H}}$ é simplesmente conexo.

No Capítulo 5 construímos o complexo simplicial $K_{\mathcal{H}}$. Calculamos o grupo de homologia $H_0(K_{\mathcal{H}})$ da vizinhança de um ponto triplo, e utilizando a sequência de Mayer - Vietoris, fazemos a colagem dos complexos simpliciais na vizinhança de dois pontos triplos.

Com os resultados destes três capítulos mostramos o seguinte

TEOREMA A: *\mathcal{H} é conexo e simplesmente conexo.*

Uma outra parte relevante deste trabalho é transportar a informação nodal do conjunto singular da folheação para \mathcal{H} e seus grafo e complexo simplicial associados; isso é feito no Capítulo 6. Neste capítulo mostramos, via grupos de homologia e matriz de incidência, que se \mathcal{N} é uma componente nodal então $\mathcal{H} \setminus \mathcal{N}$ possui duas componentes conexas. Usando a sequência de Mayer - Vietoris, mostramos também que se o conjunto das componentes nodais não interrompidas tem n elementos, então o complementar deste conjunto em \mathcal{H} possui $n + 1$ componentes conexas.

Finalmente, no Capítulo 7, retomamos a linguagem utilizada em (5) para o estudo de $\mathcal{H} \setminus \mathcal{N}$ através da *paridade* de 0-caminhos em \mathcal{H} : mostramos que \mathcal{H} pode ser dividido na união disjunta dos 0-caminhos que cruzam \mathcal{N} um número par e o dos 0-caminhos que cruzam \mathcal{N} um número ímpar de vezes. Fechamos o texto apresentando uma outra demonstração, utilizando a paridade, do fato de que o complementar no divisor do conjunto de componentes nodais não interrompidas tem $n + 1$ componentes conexas.

Com os resultados destes últimos dois capítulos, mostramos o seguinte

TEOREMA B: *Se o conjunto singular de \mathcal{F} tem n componentes nodais não interrompidas $\mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_n$, então $\mathcal{H} \setminus \{\mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_n\}$ tem $n + 1$ componentes conexas.*

2 FOLHEAÇÕES HOLOMORFAS SINGULARES DE CODIMENSÃO UM

Neste Capítulo apresentamos resultados sobre folheações holomorfas singulares de codimensão um.

Na Seção 2.2 apresentamos definições e resultados básicos sobre folheações em $(\mathbb{C}^2, \underline{0})$. Esta revisão é necessária pois estes conceitos são utilizados no estudo em dimensão três, que fazemos na Seção 2.3. Nesta seção também apresentamos os dois objetos centrais do nosso trabalho: o conjunto $Nod \mathcal{F}$, das *componentes nodais não interrompidas*, e o divisor excepcional. Neste capítulo apresentamos também os teoremas que garantem a existência de redução de singularidades de folheações em \mathbb{C}^2 e \mathbb{C}^3 .

2.1 CONCEITOS BÁSICOS

Um *germe de folheação holomorfa singular* \mathcal{F} de codimensão um em $(\mathbb{C}^n, \underline{0})$ é dada pelos zeros de uma 1-forma diferencial

$$\omega = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + \cdots + a_n dx_n \quad (1)$$

satisfazendo a condição de integrabilidade de Frobenius $\omega \wedge d\omega = 0$ (em que \wedge denota o produto exterior), e tal que os coeficientes a_j são germes de funções holomorfas em $(\mathbb{C}^n, \underline{0})$ sem fator comum. Denotamos \mathcal{F} por $\omega = 0$. O conjunto singular $Sing \mathcal{F}$ é o subespaço de $(\mathbb{C}^n, \underline{0})$ definido por

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0 .$$

Este é um germe de conjunto analítico em $(\mathbb{C}^n, \underline{0})$ de codimensão maior ou igual a 2.

A *multiplicidade* da folheação $v = v_p(\mathcal{F})$ é dada pelo grau do polinômio homogêneo de menor grau que aparece nas expansões de Taylor das funções a_j .

Uma *separatriz* é um germe de conjunto analítico H contendo $\underline{0}$ de modo que $H \setminus Sing(\mathcal{F})$ é localmente uma reunião de folhas de \mathcal{F} . Naturalmente, H deve ter codimensão um. Se H for localmente dada por $f = 0$ (f função holomorfa), então H é uma separatriz de \mathcal{F} se e somente se for invariante por ω ; em outras palavras, existe uma 2-forma α tal que

$$\omega \wedge df = f \alpha .$$

Uma folheação é *dicrítica* se existe uma imersão holomorfa não invariante $\sigma : (\mathbb{C}^2, \underline{0}) \rightarrow (\mathbb{C}^n, \underline{0})$ tal que $\sigma(y = 0)$ é invariante por \mathcal{F} e o pullback $\sigma^* \mathcal{F}$ coincide com a folheação $dx = 0$ em $(\mathbb{C}^2, \underline{0})$.

Em \mathbb{C}^2 , uma folheação dicrítica possui infinitas separatrizes passando pela origem. Em \mathbb{C}^3 (e dimensões superiores) a situação é bem diferente. De fato, uma folheação dicrítica pode não ter nenhuma separatriz (germe de hipersuperfície analítica)

passando pela origem. É o que ocorre no exemplo de Jouanolou abaixo; mais detalhes sobre este exemplo podem ser encontrados em (11) e (17).

Exemplo 1 (Exemplo de Jouanolou). Em \mathbb{C}^3 , $\forall m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, considere a 1-forma

$$\omega = (z^{m+1} - x^m y)dx + (x^{m+1} - y^m z)dy + (y^{m+1} - z^m x)dz, \quad (2)$$

que descreve uma folheação $\mathcal{F} = \{\omega = 0\}$. Após blow-up da origem, o divisor excepcional obtido é isomorfo a $\mathbb{C}P^2$ e é não invariante pelo transformado estrito de \mathcal{F} (dizemos então que o blow-up é dicrítico). Além disso, o transformado estrito de \mathcal{F} possui $m^2 + m + 1$ singularidades sobre o divisor e não possui nenhuma hipersuperfície invariante.

Porém, para germes de folheações em $(\mathbb{C}^3, \underline{0})$ temos alguns resultados de existência de separatriz (3, 17). Neste trabalho, consideraremos apenas folheações *não dicríticas*.

Além de pedir que \mathcal{F} seja não dicrítica, pediremos também que \mathcal{F} não tenha/não produza singularidades de tipo sela-nó. Como veremos mais adiante, uma folheação em $(\mathbb{C}^2, \underline{0})$ é do tipo sela-nó se é dada localmente por

$$\omega = xdy + (\text{termos de ordem } \geq 2).$$

Em dimensão $n \geq 3$, dizemos que \mathcal{F} não é do tipo sela-nó se não existe morfismo $\varphi : (\mathbb{C}^2, \underline{0}) \rightarrow (\mathbb{C}^n, \underline{0})$ tal que $\varphi^* \mathcal{F}$ é uma sela-nó.

2.2 PRELIMINARES: DIMENSÃO DOIS

Nesta seção recordaremos alguns fatos básicos sobre folheações, singularidades e redução de singularidades em \mathbb{C}^2 . O intuito é preparar o terreno para nosso objeto de interesse de fato, que são folheações de codimensão um em \mathbb{C}^3 .

2.2.1 Blow-up da origem $\underline{0}$ de \mathbb{C}^2

Uma das principais ferramentas utilizadas no estudo de folheações é o *blow-up*, ou *explosão*; iniciamos a exposição por ele. Em dimensão qualquer, utiliza-se como centro de blow-up subconjuntos analíticos de codimensão ≥ 2 . Em \mathbb{C}^2 , isto se resume a pontos.

Considere duas cópias de \mathbb{C}^2 , denotadas por U_1 , U_2 com coordenadas locais (x, t) e (u, y) , respectivamente. Definimos uma variedade complexa $\tilde{\mathbb{C}}^2$ através da seguinte identificação:

$$\begin{aligned} \alpha : U_1 \setminus \{t = 0\} &\rightarrow U_2 \setminus \{u = 0\} \\ (x, t) &\mapsto \left(\frac{1}{t}, tx \right) \end{aligned}$$

donde obtemos que $(u, y) = \left(\frac{1}{t}, tx\right)$.

A subvariedade $D = \pi^{-1}(0)$ é chamada *divisor*, e é tal que $U_1 \cap D = \{x = 0\}$ e $U_2 \cap D = \{y = 0\}$. Note que como $y = tx$, D está bem definida e é biholomorfa a $\mathbb{C}P(1)$ (a reta projetiva complexa). Além disto, podemos definir uma submersão $P : \tilde{\mathbb{C}}^2 \rightarrow D$ por $P|_{U_1}(x, t) = t$ e $P|_{U_2}(u, y) = u$.

Consideremos agora a aplicação holomorfa $\pi : \tilde{\mathbb{C}}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ definida por

$$\pi|_{U_1}(x, t) = (x, tx) ; \quad \pi|_{U_2}(u, y) = (uy, y) .$$

Uma vez que em $U_1 \cap U_2$ temos $y = tx$ e $x = uy$, π está bem definida. Chamamos $\tilde{\mathbb{C}}^2$ de *blow-up da origem de \mathbb{C}^2* (com aplicação de blow-down π). Dizemos que $\pi|_{U_1}(x, t)$ é a primeira carta do blow-up, e $\pi|_{U_2}(u, y)$ a segunda carta.

Podemos generalizar a construção acima para definir o blow-up de um ponto p qualquer em uma superfície complexa M . Para tanto, consideramos coordenadas locais em uma vizinhança de p , e um morfismo $\varphi : W \rightarrow \mathbb{C}^2$, tais que $\tilde{W} = \pi^{-1}(\varphi(W)) \subset \tilde{\mathbb{C}}^2$ e $\varphi(p) = \underline{0}$. Com isso construímos uma superfície complexa \tilde{M} colando $M \setminus p$ e \tilde{W} através da identificação

$$W \setminus \{p\} \subset M \leftrightarrow \tilde{W} \setminus \pi^{-1}(\underline{0}) \subset \tilde{\mathbb{C}}^2 , \tag{3}$$

usando o biholomorfismo $\pi^{-1} \circ \varphi$. Isto é, um ponto $q \in W \setminus \{p\}$ identifica-se com $\pi^{-1}(\varphi(q)) \in \tilde{W} \setminus \pi^{-1}(\underline{0})$ e, analogamente um ponto $Q \in \tilde{W} \setminus \pi^{-1}(\underline{0})$ identifica-se com $\varphi^{-1}(\pi(Q)) \in W \setminus \{p\}$.

Como antes, denotamos esta aplicação holomorfa por $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$. Note que $\pi^{-1}(p)$ é a reta projetiva $\mathbb{C}P^1$ e além disso

$$\pi : \tilde{M} \setminus \pi^{-1}(p) \rightarrow M \setminus \{p\}$$

é um biholomorfismo.

Esta nova aplicação π nos permite fazer o blow-up de pontos sobre o divisor $\pi^{-1}(0)$ obtido com a explosão da origem de \mathbb{C}^2 . Observamos que:

- i) Em cada nova explosão o divisor excepcional resultante é uma reta projetiva $\mathbb{C}P^1$ transversal aos divisores “mais antigos”;
- ii) O único ponto alterado é o centro da explosão.

Podemos assim fazer a composição de blow-ups; voltaremos a falar disto futuramente.

2.2.2 Folheações em \mathbb{C}^2

Em $(\mathbb{C}^2, \underline{0})$, um germe de folheação holomorfa singular \mathcal{F} de codimensão um é dado localmente em uma vizinhança da origem pelos zeros de uma 1-forma ω ,

$$\omega = a(x, y)dx + b(x, y)dy$$

em que $a(x, y)$, $b(x, y)$ são germes de funções holomorfas sem fator comum. O conjunto singular $Sing \mathcal{F}$ é dado por $a(x, y) = b(x, y) = 0$ (que neste caso consiste apenas na própria origem). Seja v a multiplicidade de \mathcal{F} . Podemos então escrever

$$a(x, y) = a_v(x, y) + a'(x, y); \quad b(x, y) = b_v(x, y) + b'(x, y)$$

onde a_v e b_v são polinômios homogêneos de grau v , e a' e b' germes de funções holomorfas de ordem superior.

Queremos avaliar como fica a folheação \mathcal{F} após a explosão da origem. Escrevendo

$$\omega = (a_v(x, y) + a'(x, y))dx + (b_v(x, y) + b'(x, y))dy,$$

obtemos, na primeira carta:

$$\begin{aligned} \pi^* \omega(x, tx) &= (a_v(x, tx) + a'(x, tx))dx + (b_v(x, tx) + b'(x, tx))(tdx + xdt) \\ &= x^v[(a_v(1, t) + tb_v(1, t) + x(\dots))dx + x(b_v(1, t) + x(\dots))dt]. \end{aligned}$$

Aqui precisamos considerar duas possibilidades. Se $a_v(1, t) + tb_v(1, t)$ não é identicamente nulo, podemos dividir $\pi^* \omega$ por x^v . A 1-forma $\tilde{\omega} = \frac{1}{x^v} \pi^* \omega$ é chamada o *transformado estrito* de ω , e a folheação $\tilde{\mathcal{F}}$ dada por $\tilde{\omega} = 0$ é o *transformado estrito* de \mathcal{F} . O divisor $\pi^{-1}(0)$ tem expressão $x = 0$ e é invariante por $\tilde{\mathcal{F}}$ (ou seja, uma separatriz de $\tilde{\mathcal{F}}$). De fato, basta observar que $\tilde{\omega} \wedge dx = x(b_v(1, t) + x(\dots))dt \wedge dx$. Neste caso, dizemos que o blow-up é *não dicrítico*.

Agora, se $a_v(1, t) + tb_v(1, t) \equiv 0$, podemos colocar mais um x em evidência na expressão de $\pi^* \omega$, e portanto podemos dividi-la por x^{v+1} . Neste caso, $\tilde{\omega} = \frac{1}{x^{v+1}} \pi^* \omega$ é o transformado estrito de ω . O divisor $\pi^{-1}(0)$ continua tendo expressão $x = 0$, naturalmente; porém agora ele não é mais invariante por $\tilde{\mathcal{F}}$, ou seja, não é mais uma separatriz de $\tilde{\mathcal{F}}$ (basta observar que $\omega \wedge dx$ não é $x\alpha$ para uma 2-forma α). Dizemos então que o blow-up é *dicrítico*.

Para a segunda carta obtemos resultados similares. Vejamos dois exemplos simples mas que exibem bem estas situações.

Exemplo 2. Considere a 1-forma

$$\omega = ydx + xdy = d(xy).$$

Na primeira carta, temos

$$\pi^* \omega(x, tx) = txdx + x(tdx + xdt) = x(2tdx + xdt);$$

obtemos que $\omega_1(x, t) = \frac{1}{x} \pi^* \omega = 2tdx + xdt$ é o transformado estrito de ω , e $\pi^{-1}(0) = D = \{x = 0\}$ é o divisor. Note que o divisor é invariante por $\tilde{\mathcal{F}}$; é de fato uma folha de $\tilde{\mathcal{F}}$.

Para a segunda carta, temos

$$\pi^*\omega = y(udy + ydu) + udy = y(ydu + 2udy) ;$$

obtemos que $\omega_2(u,y) = \frac{1}{y}\pi^*\omega = ydu + 2udy$ é o transformado estrito de ω , e $\pi^{-1}(0) = D = \{y = 0\}$ é o divisor. □

Exemplo 3. Considere a 1-forma

$$\omega = ydx - xdy = y^2 d(y/x) .$$

A folheação gerada por ω é muitas vezes chamada folheação *radial* (devido ao fato de que suas separatrizes são retas passando pela origem).

Na primeira carta, temos

$$\pi^*\omega = txdx - x(tdx + xdt) = -x^2 dt .$$

Note que o transformado estrito $\omega_1 = \frac{1}{x^2}\pi^*\omega = dt$ (após uma troca de sinal, que em nada altera a folheação) é não singular após explosão; além disso, o divisor $D = \pi^{-1}(0) = \{x = 0\}$ é transversal à folheação, e portanto não invariante.

Na segunda carta,

$$\pi^*\omega = y(udy + ydu) - udy = y^2 du .$$

Novamente (naturalmente) obtemos que o transformado estrito $\omega_2 = \frac{1}{y^2}\pi^*\omega = du$ é não singular, e o divisor $D = \pi^{-1}(0) = \{y = 0\}$ é transversal à folheação. Este é o caso de um blow-up dicrítico. □

2.2.3 Singularidades de Folheações em \mathbb{C}^2

Em dimensão dois, um germe de folheação de codimensão um pode ser dado por uma 1-forma diferencial, como vimos na seção anterior, mas também pode ser obtido através do campo de vetores associado à esta 1-forma. Visualizar a folheação como o conjunto de trajetórias de um campo em $(\mathbb{C}^2, \underline{0})$ nos permite classificar os pontos singulares.

Seja então \mathcal{F} um germe de folheação holomorfa singular de codimensão um em $(\mathbb{C}^2, \underline{0})$ dado pela 1-forma

$$\omega = a(x, y)dx + b(x, y)dy; \quad a, b \in \mathcal{O}_2 .$$

O campo vetorial (holomorfo) associado a ω é dado por

$$X_\omega = b(x, y)\frac{\partial}{\partial x} - a(x, y)\frac{\partial}{\partial y} .$$

A matriz Jacobiana do campo X na origem é portanto

$$DX(0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial b}{\partial x}(0) & \frac{\partial b}{\partial y}(0) \\ -\frac{\partial a}{\partial x}(0) & -\frac{\partial a}{\partial y}(0) \end{pmatrix}.$$

Sejam λ_1, λ_2 os autovalores da matriz $DX(0)$. Estes autovalores tem papel importante na classificação das singularidades irredutíveis como mostra a seguinte definição:

Definição 2.2.1. (17, 1) *Nas condições anteriores, dizemos que a origem é singularidade reduzida de \mathcal{F} do tipo*

1. *Sela-nó, se $\lambda_1\lambda_2 = 0$ (mas um deles é não nulo);*
2. *Simplex, se $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$ e $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbb{Q}_{>0}$. Neste caso, dizemos que a origem é*
 - 2.1 *Sela complexa, se $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$;*
 - 2.2 *Sela real, se $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \in \mathbb{R}_{<0}$;*
 - 2.3 *Nodal, se $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \mathbb{Q}$.*

Exemplo 4. Considerando novamente a folheação do Exemplo 2 temos que o campo vetorial associado a $\omega = ydx + xdy$ será

$$X_\omega = x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y},$$

cuja matriz Jacobiana na origem é:

$$DX(0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial b}{\partial x}(0) & \frac{\partial b}{\partial y}(0) \\ \frac{\partial a}{\partial x}(0) & \frac{\partial a}{\partial y}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

com autovalores $\{1, -1\}$. Chamando $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$ obtemos $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -1 \in \mathbb{Q}_{<0}$, portanto a origem é uma singularidade simples de tipo sela real.

Vejamos o que acontece após o blow-up da origem. Como já vimos no Exemplo 2 após o blow-up da origem na primeira carta obtemos $D = \{x = 0\}$ como divisor, $\omega_1(x, t) = 2tdx + xdt$, e $\mathcal{F}_1 = \{\omega_1(x, t) = 0\}$ é o transformado estrieto de \mathcal{F} . O campo vetorial associado é

$$X_{\omega_1} = x \frac{\partial}{\partial x} - 2t \frac{\partial}{\partial t} \implies DX_{\omega_1}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix},$$

que possui autovalores $\lambda'_1 = 1$ e $\lambda'_2 = -2 = -1 - 1$. Logo $\frac{\lambda'_1}{\lambda'_2} = \frac{-1}{2} \in \mathbb{Q}_{<0}$, e portanto a origem da primeira carta é uma singularidade simples de tipo sela real.

Na segunda carta, obtemos: $D = \{y = 0\}$ como divisor, $\omega_2(u, y) = ydu + 2udy$ e $\mathcal{F}_2 = \{\omega_2(u, y) = 0\}$ é o transformado estrieto de \mathcal{F} . O campo vetorial associado é

$$X_{\omega_2} = 2u \frac{\partial}{\partial u} - y \frac{\partial}{\partial y} \implies DX_{\omega_2}(0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

que possui autovalores $\lambda_1'' = 2$ e $\lambda_2'' = -1$, donde $\frac{\lambda_1''}{\lambda_2''} = -2 \in \mathbb{Q}_{<0}$. Segue que a origem da segunda carta também é uma singularidade simples de tipo sela real. \square

Exemplo 5. Considere agora a folheação radial do Exemplo 3, dada pela 1-forma $\omega = ydx - xdy$. Após troca de sinal, o campo vetorial associado é

$$X_{\omega} = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y},$$

cuja matriz Jacobiana é

$$DX(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

que possui autovalores $\{1, 1\}$. Com isso obtemos $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 1 \in \mathbb{Q}_{>0}$, portanto a origem não é uma singularidade reduzida. Após o blow-up da origem, vimos que não há pontos singulares sobre o divisor excepcional. \square

O Exemplo 4 nos mostra que o blow-up de uma singularidade simples dá origem a duas singularidades sobre o divisor excepcional, ambas simples, enquanto que o Exemplo 5 nos mostra que após o blow-up de uma singularidade cujos autovalores são iguais, não aparecem pontos singulares sobre o divisor excepcional. Abaixo listamos uma série de resultados que dizem que esta é a situação no caso geral.

Proposição 2.2.1. (4) *Seja p é uma singularidade de uma folheação $\mathcal{F} = \{\omega = 0\}$ definida em uma superfície complexa. Sejam X_{ω} o campo vetorial associado e $DX_{\omega}(0)$ a matriz jacobiana na origem.*

1. *Se*

$$DX_{\omega}(0) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

com $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\pi^ \mathcal{F}$ possui duas singularidades sobre o divisor excepcional: a origem da primeira carta, com autovalores $\{\lambda_1, \lambda_2 - \lambda_1\}$; e a origem da segunda carta, com autovalores $\{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2\}$.*

2. *Se*

$$DX_{\omega}(0) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

com $\lambda \neq 0$, então $\pi^(\mathcal{F})$ não possui singularidades sobre o divisor excepcional.*

3. Se

$$DX_{\omega}(0) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

para $\lambda \in \mathbb{C}^*$, então $\pi^* \mathcal{F}$ possui uma única singularidade do tipo sela-nó sobre o divisor excepcional.

O resultado a seguir decorre de aplicar a Proposição 2.2.1 repetidamente:

Corolário 2.2.1. (4) Se

$$DX_{\omega}(0) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

e λ_1, λ_2 são tais que $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \in \mathbb{Q}_{>0}$, então após um número finito de explosões os autovalores “transformados” serão iguais ou o quociente será um racional negativo, isto é, $\frac{\tilde{\lambda}_1}{\tilde{\lambda}_2} \in \mathbb{Q}_{<0}$.

Podemos resumir esta discussão como segue:

Proposição 2.2.2 (Estabilidade por explosões). *Seja p uma singularidade simples de \mathcal{F} e seja $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ a explosão de p . Se \mathcal{F}' é o transformado estrito de \mathcal{F} por π , então:*

- i) *A explosão é não-dicrítica;*
- ii) *A folheação \mathcal{F}' possui duas singularidades sobre o divisor excepcional que são também simples.*

Façamos um breve comentário sobre o comportamento das folhas na vizinhança de singularidades do tipo sela e nodal. Suponha que \mathcal{F} seja dada por $\alpha y dx + \beta x dy = 0$; neste caso os autovalores são $\lambda_1 = -\alpha$ e $\lambda_2 = \beta$, e suponha $\frac{-\alpha}{\beta} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}_{>0}$.

Vamos primeiramente considerar o caso $\frac{-\alpha}{\beta} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{>0}$; temos então que a origem é um ponto de sela complexa. Considere as curvas invariantes $\{x = 0\}$ e $\{y = 0\}$ e tome Δ um pequeno disco transversal a $\{y = 0\}$ em um ponto $(x_0, 0)$ próximo da origem. Seja $p = (x_0, y_0)$ um ponto em Δ e seja \mathcal{L}_p a folha de \mathcal{F} que passa por p . É possível mostrar que existem um ponto $(0, y_0)$ em $\{x = 0\}$ e um pequeno disco Δ' tal que \mathcal{L}_p intersecta Δ' no ponto $q = (x_q, y_0) \in \Delta'$. Então se nós tomarmos a união de tais folhas \mathcal{L}_p , e adicionarmos as curvas $\{x = 0\}$ e $\{y = 0\}$ a esta união, obteremos uma vizinhança da origem. A Figura 1 ilustra esta situação.

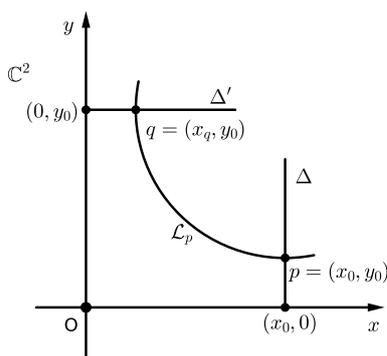


Figura 1 – Singularidade de tipo sela

Agora suponha $\frac{-\alpha}{\beta} \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \mathbb{Q}$; neste caso a origem é uma singularidade nodal. Temos as mesmas curvas invariantes de antes, mas agora as folhas \mathcal{L}_p não alcançam (localmente) Δ' . Então nós encontramos, localmente, três conjuntos de folhas: as folhas próximas de $\{y = 0\}$ (que cruzam Δ); as folhas próximas de $\{x = 0\}$ (que cruzam Δ'); e as folhas que se acumulam na origem mas não cruzam Δ nem Δ' . Por isto os pontos nodais são muitas vezes chamados de *separadores*. Esta situação está ilustrada na Figura 2.

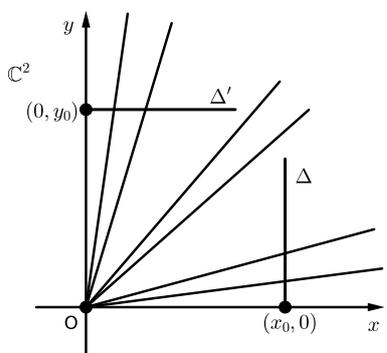


Figura 2 – Singularidade nodal

Como veremos futuramente, os eixos invariantes que aparecem na discussão acima serão substituídos (localmente) pelos divisores resultantes de explosões de pontos singulares. Por isto, podemos ampliar um pouco a definição de singularidade simples para incluir o posicionamento com respeito aos divisores. O número de componentes de um divisor D passando por um ponto singular P é denotado $e(D, P)$; em dimensão dois, podemos ter $e(D, P) = 1$ ou $e(D, P) = 2$. Se $e(D, P) = 1$ e P é um ponto simples, existe uma outra curva passando por P invariante pela folheação; neste caso, dizemos que P é um ponto tipo *traça*. Se $e(D, P) = 2$, não há outra curva invariante pela folheação passando por P ; temos uma situação de “dois eixos invariantes”, como acima. Dizemos que P é um ponto tipo *esquina*.

2.2.4 Redução de singularidades em \mathbb{C}^2

Inspirados pela seção anterior, vemos que o objetivo é obter uma folheação que só possua singularidades reduzidas (isto é, simples ou sela-nó).

Uma redução de singularidades de \mathcal{F} é um morfismo $\pi : M_N \rightarrow M_0 = (\mathbb{C}^2, \underline{0})$ que é composição de blow-ups, $\pi = \pi_N \circ \dots \circ \pi_1$, tais que o centro Y_s de π_{s+1} é um ponto singular de $\mathcal{F}_s = \pi^* \mathcal{F}_{s-1}$, e todas as singularidades de \mathcal{F}_N são reduzidas (simples ou sela-nó). Em cada etapa temos $D_{s+1} = \pi_{s+1}^{-1}(Y_s) \simeq \mathbb{C}P(1)$ e o conjunto $D^{s+1} = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_s \cup D_{s+1}$ é chamado divisor total (note que os D_1, D_2, \dots, D_s foram obtidos em blow-ups anteriores). Um resultado central diz que qualquer folheação holomorfa singular de codimensão um em $(\mathbb{C}^2, \underline{0})$ admite uma redução de singularidades (3).

Teorema 2.2.1. (3, 1)[Teorema de redução de singularidades] *Seja \mathcal{F} uma folheação holomorfa singular de codimensão um em $(\mathbb{C}^2, \underline{0})$. Então existe uma sequência finita π de blow-ups*

$$M_N \xrightarrow{\pi_N} \dots \xrightarrow{\pi_2} M_1 \xrightarrow{\pi_1} M_0 = (\mathbb{C}^2, \underline{0})$$

tal que todas as singularidades de \mathcal{F}_N são reduzidas (simples ou sela-nó).

O Teorema 2.2.1 tem como consequência o seguinte fato: se p é uma singularidade simples de \mathcal{F} , então por p passam exatamente duas separatrizes de \mathcal{F} , que são suaves e transversais.

Sejam \mathcal{F} uma folheação e π a redução de singularidades de \mathcal{F} . Suponha que não há singularidades tipo sela-nó após redução de singularidades. Ainda que as singularidades de $\tilde{\mathcal{F}}$ estejam já reduzidas, é possível fazer blow-up adicionais apenas nas singularidades de tipo nodal de forma que as singularidades nodais que surgem após explosão sejam eventualmente esquinas do divisor excepcional (isto é, interseção de duas componentes invariantes). Esta composição de blow-ups é chamada uma *redução de singularidades refinada*. Em (18) os autores demonstram a existência de uma redução de singularidades refinada em dimensão dois.

2.3 PRELIMINARES: DIMENSÃO TRÊS

Passamos agora à dimensão 3. Começamos falando sobre a nossa principal ferramenta, o blow-up. O centro Y de um blow-up é um subconjunto analítico de codimensão ≥ 2 ; em dimensão três, Y será portanto um ponto ou um germe de curva analítica “bem posicionado” (essencialmente, um dos eixos). Primeiro definiremos o blow-up da origem de \mathbb{C}^3 , para depois falar do blow-up dos eixos.

2.3.1 Blow-up da origem $\underline{0}$ de \mathbb{C}^3

Começamos considerando três cópias de \mathbb{C}^3 , digamos U_1, U_2, U_3 com coordenadas locais (x, t, u) , (s, y, r) e (l, j, z) , respectivamente. Definimos uma variedade

complexa $\tilde{\mathbb{C}}^3$ através das seguintes identificações:

Em $U_1 \cap U_2$ considere a bijeção α_1 dada por

$$\begin{aligned} \alpha_1 : U_1 \setminus \{t = 0\} &\rightarrow U_2 \setminus \{s = 0\} \\ (x, t, u) &\mapsto \left(\frac{1}{t}, tx, u \right) = (s, y, r) ; \end{aligned}$$

Em $U_2 \cap U_3$, a bijeção α_2 dada por

$$\begin{aligned} \alpha_2 : U_2 \setminus \{r = 0\} &\rightarrow U_3 \setminus \{j = 0\} \\ (s, y, r) &\mapsto \left(s, \frac{1}{r}, ry \right) = (l, j, z) ; \end{aligned}$$

E em $U_3 \cap U_1$ a bijeção α_3 dada por

$$\begin{aligned} \alpha_3 : U_1 \setminus \{u = 0\} &\rightarrow U_3 \setminus \{l = 0\} \\ (x, t, u) &\mapsto \left(\frac{1}{u}, t, ux \right) = (l, j, z) . \end{aligned}$$

A subvariedade D de $\tilde{\mathbb{C}}^3$ tal que

$$U_1 \cap D = \{x = 0\}; \quad U_2 \cap D = \{y = 0\}; \quad U_3 \cap D = \{z = 0\}$$

é chamada *divisor*. Observe que em $U_1 \cap U_2$ temos $y = tx$, em $U_2 \cap U_3$ temos $z = ry$ e em $U_1 \cap U_3$ temos $z = ux$. Estas identificações nos mostram que D está bem definido e é biholomorfo a $\mathbb{C}P(2)$. Além disso podemos definir uma submersão $P : \tilde{\mathbb{C}}^3 \rightarrow D$ satisfazendo

$$P|_{U_1}(x, t, u) = (t, u)$$

$$P|_{U_2}(s, y, r) = (s, r)$$

$$P|_{U_3}(l, j, z) = (l, j)$$

Considere agora a aplicação holomorfa $\pi : \tilde{\mathbb{C}}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ definida por

$$\pi|_{U_1}(x, t, u) = (x, tx, ux)$$

$$\pi|_{U_2}(s, y, r) = (sy, y, ry)$$

$$\pi|_{U_3}(l, j, z) = (lz, jz, z) .$$

Note que, pelas relações entre as variáveis nas interseções $U_i \cap U_j$, π está bem definida. Chamamos $\tilde{\mathbb{C}}^3$ de *blow-up da origem de \mathbb{C}^3* . Observe que $\pi^{-1}(0) = D \simeq \mathbb{C}P(2)$. Dizemos que $\pi|_{U_1}$ é a primeira carta do blow-up, $\pi|_{U_2}$ a segunda carta, e $\pi|_{U_3}$ a terceira carta.

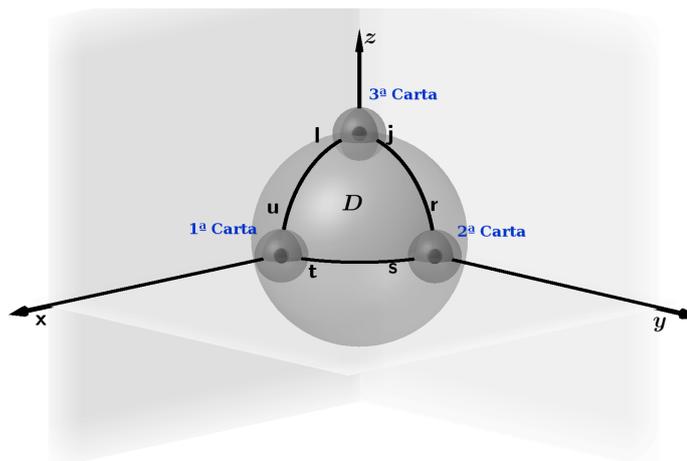


Figura 3 – Blow-up da origem de \mathbb{C}^3

2.3.2 Blow-up do eixo x de \mathbb{C}^3

Para definir o blow-up do eixo x de \mathbb{C}^3 , começamos considerando as cópias U_1 e U_2 de \mathbb{C}^3 definidas na seção anterior, com coordenadas (x, y, t) e (x, s, z) respectivamente. Obtemos uma variedade complexa $\tilde{\mathbb{C}}^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{C}P^2$ através da identificação

$$\alpha : U_1 \setminus \{t = 0\} \rightarrow U_2 \setminus \{s = 0\}$$

$$(x, y, t) \rightarrow \left(x, \frac{1}{t}, ty\right) = (x, s, z).$$

A subvariedade D de $\tilde{\mathbb{C}}^3$ tal que

$$U_1 \cap D = \{y = 0\}; \quad U_2 \cap D = \{z = 0\}$$

é novamente chamada *divisor*. Note que em $U_1 \cap U_2$, temos que $y = sz$, ou ainda, $z = ty$ logo, D está bem definido e é biholomorfo a $\mathbb{C}P^2 = \mathbb{C} \times \mathbb{C}P(1)$. Além disto, podemos definir um submersão $P : \tilde{\mathbb{C}}^3 \rightarrow D$ dada por

$$P|_{U_1}(x, y, t) = (x, t)$$

$$P|_{U_2}(x, s, z) = (x, s).$$

Considere agora a aplicação holomorfa $\pi : \tilde{\mathbb{C}}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ definida por

$$\pi|_{U_1}(x, y, t) = (x, y, ty)$$

$$\pi|_{U_2}(x, s, z) = (x, sz, z).$$

Chamamos π de *blow-up do eixo x de \mathbb{C}^3* . Pela relações entre as variáveis, temos que π está bem definida e $\pi^{-1}(\text{eixo } x) = D$. Note que $D \cap \{x = 0\} = \mathbb{C}P(1)$.

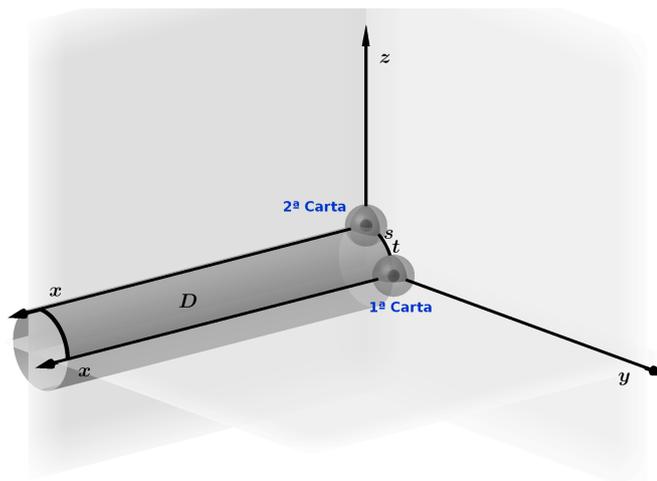


Figura 4 – Blow-up do eixo x

Os blow-ups dos eixos y e z são definidos de forma inteiramente análoga, e estão ilustrados nas Figuras 5 e 6.

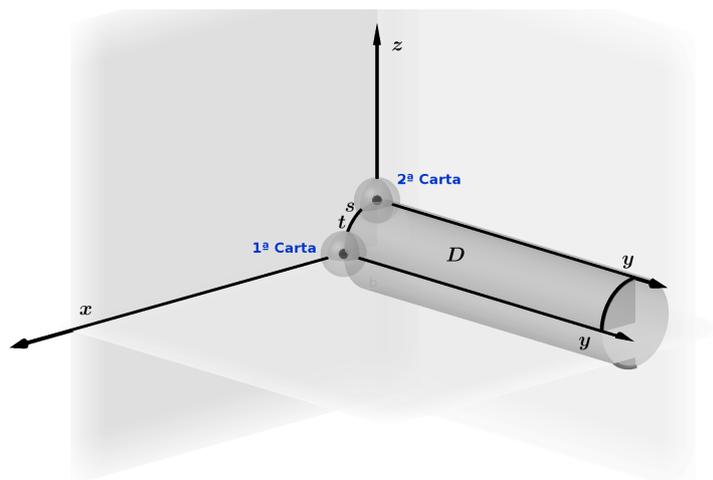


Figura 5 – Blow-up do eixo y

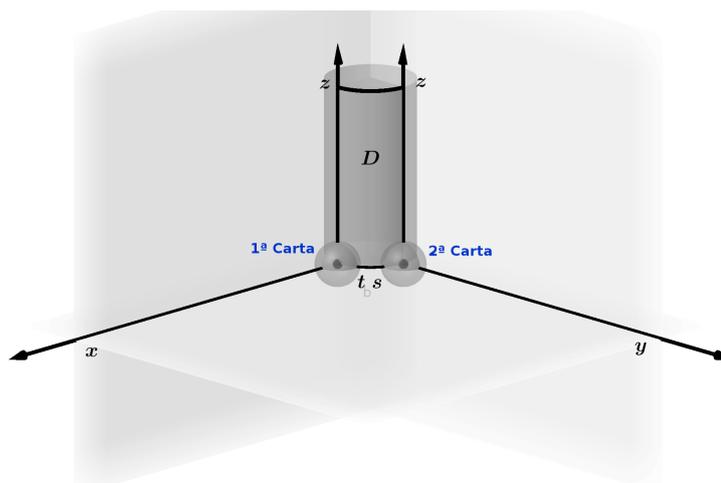


Figura 6 – Blow-up do eixo z

2.3.3 Folheações em \mathbb{C}^3

Em $(\mathbb{C}^3, \underline{0})$, um germe de folheação holomorfa singular \mathcal{F} de codimensão um é dado localmente em uma vizinhança da origem pelos zeros de uma 1-forma diferencial não-nula

$$\omega = a(x, y, z)dx + b(x, y, z)dy + c(x, y, z)dz \quad (4)$$

satisfazendo a condição de integrabilidade $\omega \wedge d\omega = 0$, aqui novamente $\omega \wedge d\omega$ é o produto exterior de formas, e tal que a, b, c são germes de funções holomorfas sem fator comum. O conjunto singular $Sing \mathcal{F}$, dado por $a(x, y, z) = b(x, y, z) = c(x, y, z) = 0$, é um germe analítico de codimensão 2.

Em vista do resultado principal de (2), uma folheação em $(\mathbb{C}^3, \underline{0})$ admite uma redução de singularidades

$$\pi : (M, \pi^{-1}(0)) \rightarrow (\mathbb{C}^3, \underline{0})$$

tais que todos os pontos de $\pi^* \mathcal{F}$ são simples. Não entraremos aqui em muitos detalhes sobre este processo em dimensão 3; em suma, o morfismo π é uma composição de blow-ups como os descritos na seção anterior, onde os centros de explosão são pontos isolados ou eixos, e a pré-imagem de cada centro dá origem a uma componente do divisor $D = \pi^{-1}(0)$. Neste trabalho, estamos supondo que \mathcal{F} é não dicrítica, e portanto cada componente do divisor é invariante; e também estamos supondo que o centro do primeiro blow-up é a origem de \mathbb{C}^3 . Ao final do processo, o objetivo é que os pontos singulares de $\pi^* \mathcal{F}$ sejam “o mais simples possível” (uma certa condição técnica sobre os autovalores da parte linear de $\pi^* \omega$ é satisfeita) e estejam “bem posicionados” dentro do divisor excepcional. Expliquemos o que queremos dizer por “bem posicionados”.

O tipo dimensional de um ponto $P \in D$, τ , é o número de variáveis necessárias para descrever $\pi^* \mathcal{F}$ localmente em P ; temos $\tau = 1, 2$ ou 3 . Observe que se $\tau = 1$, então

P é um ponto não singular. Um ponto tal que $\tau = 2$ é chamado um *ponto genérico*, e um ponto com $\tau = 3$ é chamado um *ponto triplo*. Seja agora $e = e(D, P)$ o número de componentes do divisor passando pelo ponto P ; temos então que $e(D, P) = 1, 2$ ou 3 . Na Figura 7 ilustramos as três possibilidades.

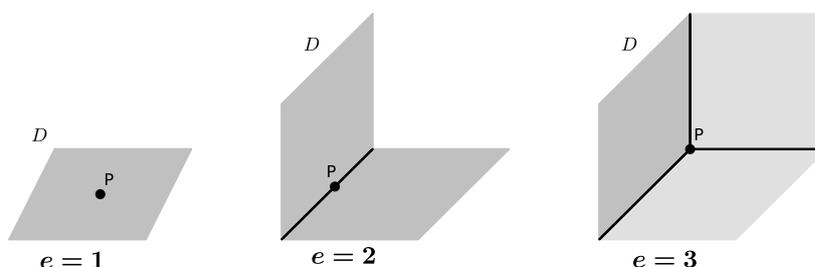


Figura 7 – Número de componentes do divisor

Dizemos que P é de tipo *esquina* se $e = \tau$; e de tipo *traça* se $e = \tau - 1$. Na Figura 7 estão ilustrados pontos de tipo esquina. Um ponto traça de tipo dimensional 2 será como o ponto esquina com $e = 2$, mas no lugar de uma das componentes do divisor, coloque um germe de hipersuperfície invariante. E um ponto traça de tipo dimensional 3 será como o ponto esquina com $e = 3$, mas novamente, substitua uma das componentes do divisor por um germe de hipersuperfície invariante. Antes de prosseguir, vejamos um exemplo.

Exemplo 6. Considere a folheação dada por

$$\omega = xyz \left(\alpha \frac{dx}{x} + \beta \frac{dy}{y} + \gamma \frac{dz}{z} \right) = 0$$

onde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ e $\alpha\beta\gamma \neq 0$. O conjunto singular é composto pelos três eixos e pela origem, e o divisor é dado por $D = \{xyz = 0\}$. Os pontos singulares ao longo dos eixos são genéricos, isto é, essencialmente singularidades em dimensão 2. Para entender melhor como se comporta a folheação próximo à origem, que é um ponto não genérico, vejamos o que pode acontecer em cada eixo.

Seja $P_x = (k_x, 0, 0)$ um ponto genérico do eixo x , com $k_x \neq 0$, e considere o plano $\Delta_x = \{x = k_x\}$. Então $\mathcal{F}|_{\Delta_x}$ é dada por:

$$k_x yz \left(\beta \frac{dy}{y} + \gamma \frac{dz}{z} \right) = 0.$$

Os autovalores do campo vetorial associado a esta 1-forma são $\lambda_1 = -\beta$ e $\lambda_2 = \gamma$, e portanto a natureza do ponto P_x é determinada pelo quociente $\frac{-\beta}{\gamma}$, de acordo com a Definição 2.2.1.

Seja agora $P_y = (0, k_y, 0)$ um ponto genérico do eixo y , com $k_y \neq 0$, e considere o plano $\Delta_y = \{y = k_y\}$. Então $\mathcal{F}|_{\Delta_y}$ é dada por:

$$xk_yz \left(\alpha \frac{dx}{x} + \gamma \frac{dz}{z} \right) = 0 .$$

Os autovalores agora são $\lambda_1 = -\alpha$ e $\lambda_2 = \gamma$, e como antes determinamos a natureza de P_y analisando o quociente $\frac{-\alpha}{\gamma}$ segundo a Definição 2.2.1.

Por último, seja $P_z = (0, 0, k_z)$ um ponto genérico do eixo z , com $k_z \neq 0$, e considere o plano $\Delta_z = \{z = k_z\}$. Então $\mathcal{F}|_{\Delta_z}$ é dada por:

$$xyk_z \left(\alpha \frac{dx}{x} + \beta \frac{dy}{y} \right) = 0 .$$

Os autovalores são $\lambda_1 = -\alpha$ e $\lambda_2 = \beta$, o quociente é dado por $\frac{-\alpha}{\beta}$ e prosseguimos como antes.

É claro que os quocientes $\frac{-\beta}{\gamma}$, $\frac{-\alpha}{\gamma}$ e $\frac{-\alpha}{\beta}$ se relacionam entre si. Vejamos as possibilidades. Para simplificar, vamos considerar os quocientes $\frac{\beta}{\gamma}$, $\frac{\alpha}{\gamma}$ e $\frac{\alpha}{\beta}$; observe que isto troca o sinal dos itens 2.2 e 2.3 na Definição 2.2.1.

A primeira possibilidade é que os três quocientes sejam reais. Se $\frac{\beta}{\gamma}$, $\frac{\alpha}{\gamma}$ e $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{R}_{>0}$, então de acordo com a Definição 2.2.1, os pontos P_x , P_y e P_z são de tipo sela-real, e dizemos que os eixos x , y e z são *genericamente sela-real*. Neste caso, a origem é um ponto triplo de sela. Agora, suponha que um dos quocientes seja negativo (não racional), por exemplo $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{R}_{<0} \setminus \mathbb{Q}$. Isto significa que o ponto genérico P_z é nodal; dizemos então que o eixo z é *genericamente nodal*. Então um dos outros quocientes será negativo, e o terceiro será necessariamente positivo. Por exemplo, suponha $\frac{\beta}{\gamma} \in \mathbb{R}_{<0} \setminus \mathbb{Q}$; isto significa que o ponto P_x é nodal, e portanto o eixo x é genericamente nodal. Ademais $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\alpha/\beta}{\gamma/\beta} \in \mathbb{R}_{>0}$, o que implica que o ponto P_y é sela-real, e o eixo y é genericamente sela-real. Neste caso, diremos que a origem é um *ponto triplo nodal*.

A segunda possibilidade é que um dos quocientes seja um número complexo não real; por exemplo, suponha $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Isto significa que o ponto P_z é uma sela complexa, e o eixo z é genericamente sela-complexa. Segue que pelo menos um dos outros dois quocientes será também um número complexo não real, por exemplo, $\frac{\beta}{\gamma} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$; e o terceiro quociente pode ser um número complexo ou real: $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\alpha/\beta}{\gamma/\beta} \in \mathbb{C}$. Concluimos então que o eixo x será genericamente sela-complexa, e o eixo y pode ser genericamente sela-complexa, sela-real ou nodal. Mesmo se o eixo y for genericamente nodal, *não dizemos* que a origem é um ponto triplo nodal. E se o eixo y

for genericamente sela-complexa ou sela-real, dizemos que a origem é um ponto triplo sela.

Resumindo: se a origem pertence a dois eixos genericamente nodais (o que implica que o terceiro eixo é genericamente sela-real), então dizemos que a origem é um *ponto triplo nodal*. Caso contrário, a origem é um ponto triplo de sela (mesmo que um - e apenas um - dos eixos seja genericamente nodal). Esta classificação é justificada pelo comportamento das folhas em uma vizinhança da origem. Não entraremos aqui em muitos detalhes; de maneira sucinta, se tivermos um ponto triplo de sela, as folhas próximas a um divisor (um dos planos coordenados) podem “passar” aos outros dois divisores; não há uma barreira ao trânsito das folhas. Por outro lado, se a origem é um ponto triplo nodal, então ocorre uma separação (localmente) no espaço de folhas. Esta situação foi descrita em (6).

Vamos tentar generalizar a situação vista no Exemplo 6. Seja P um ponto singular de uma folheação \mathcal{F} , e sejam e e τ como antes. Vejamos primeiro o caso $\tau = 2$. Se $e = \tau = 2$ (isto é, P é uma esquina), então o divisor é dado localmente em P por $D = \{xy = 0\}$ e \mathcal{F} será dada por

$$\omega = xy \left(a \frac{dx}{x} + b \frac{dy}{y} \right)$$

onde a e b são polinômios sem fator comum. Já se $e = \tau - 1 = 1$ (isto é, P é de tipo traça), temos $D = \{x = 0\}$ e

$$\omega = x \left(a \frac{dx}{x} + b dy \right) .$$

Agora suponha $\tau = 3$. Se $e = 3$ (P esquina), $D = \{xyz = 0\}$ e

$$\omega = xyz \left(a \frac{dx}{x} + b \frac{dy}{y} + c \frac{dz}{z} \right) ,$$

onde a, b, c são polinômios sem fator comum. Já se $e = \tau - 1 = 2$ (P traça), temos $D = \{xy = 0\}$ e

$$\omega = xy \left(a \frac{dx}{x} + b \frac{dy}{y} + c dz \right) .$$

Para os casos P esquina, definimos o vetor residual como segue:

$$\begin{cases} \tau = 2 \Rightarrow \tilde{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2) = (a(0), b(0)) \\ \tau = 3 \Rightarrow \tilde{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (a(0), b(0), c(0)) . \end{cases}$$

Se P é um ponto *simples*, o vetor residual está definido também para pontos de tipo traça, e é não-nulo (5). Usamos este vetor para classificar P de acordo com a Definição 2.2.1, como fizemos no exemplo acima. Se um dos quocientes λ_i/λ_j é um complexo não real, o ponto P é de tipo sela complexa. Se os quocientes λ_i/λ_j são todos reais, temos as seguintes possibilidades:

1. $\lambda_i/\lambda_j > 0$, para qualquer i, j ; neste caso P é de tipo sela-real;
2. existe um quociente $\lambda_i/\lambda_j < 0$. Neste caso, P é nodal.

Uma vez realizada a redução de singularidades de uma folheação obtemos que todos os pontos de $\pi^* \mathcal{F}$ são simples de acordo com a descrição anterior. Em (5) os autores mostram o seguinte

Teorema 2.3.1. *Uma folheação holomorfa \mathcal{F} admite uma redução de singularidades refinada.*

Isto é, podemos admitir que os pontos nodais de $Sing \pi^* \mathcal{F}$ são pontos de tipo esquina. O interesse por separar os pontos singulares entre “nodais” e “não nodais” é justificado pelo objeto que chamamos *componentes nodais*, que descrevemos a seguir.

2.3.4 Componentes Nodais

Sejam \mathcal{F} folheação holomorfa em $(\mathbb{C}^3, \underline{0})$, e $\pi : (M, \pi^{-1}(0)) \rightarrow (\mathbb{C}^3, \underline{0})$ uma redução de singularidades para \mathcal{F} . Como antes, denotamos $D = \pi^{-1}(0)$ o divisor excepcional. O conjunto singular de $\pi^* \mathcal{F}$ é uma união conexa de curvas cujos pontos são todos simples:

$$Sing \pi^* \mathcal{F} = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_m .$$

Os pontos genéricos de cada Γ_i são de tipo dimensional dois, portanto podemos dizer que Γ_i é genericamente traça, esquina, nodal, ou sela (como feito na Seção 2.2.3) de acordo com a natureza dos pontos genéricos.

Seja

$$Nod^* \mathcal{F} = \{ \Gamma \in Sing \pi^* \mathcal{F} ; \Gamma \text{ é genericamente nodal} \} .$$

Note que como visto no Exemplo 6, nem todos os pontos de uma curva $\Gamma \in Nod^* \mathcal{F}$ são nodais. Note também que, pelo Teorema 2.3.1, todos os pontos das curvas em $Nod^* \mathcal{F}$ são de tipo esquina; ou seja, uma curva $\Gamma \subset Nod^* \mathcal{F}$ é a interseção de dois divisores.

Definição 2.3.1. *Uma componente conexa de $Nod^* \mathcal{F}$ é chamada uma componente nodal.*

Definição 2.3.2. *Seja \mathcal{N} uma componente nodal. Se todos os pontos triplos de \mathcal{N} são nodais, dizemos que \mathcal{N} é uma componente nodal não interrompida.*

Denotamos

$$Nod \mathcal{F} = \{ \mathcal{N} \subset Nod^* \mathcal{F} ; \mathcal{N} \text{ componente nodal não interrompida} \} .$$

A importância das componentes nodais não interrompidas é que elas atuam como os separadores nodais em dimensão três. Além disso, como veremos, elas estão

relacionadas com a conexidade do divisor excepcional, cujo estudo é o foco deste trabalho. De fato, nos Capítulos 6 e 7 veremos que se $\#Nod\mathcal{F} = n$ então $D \setminus Nod\mathcal{F}$ possui $n + 1$ componentes conexas.

2.3.5 A construção do Divisor de uma folheação holomorfa \mathcal{F} em \mathbb{C}^3

Como observado anteriormente, a redução de singularidades de \mathcal{F} é uma composição de blow-ups e a formação do divisor excepcional total D é crucial para a definição dos objetos com os quais trabalharemos. Por esta razão, nesta seção listamos os blow-ups possíveis para dar uma ideia de como D é construído a partir destes morfismos. Apresentamos figuras que ilustram este procedimento; ressaltamos que apesar de serem apenas ilustrações dos divisores, elas são úteis para ajudar na compreensão do que está acontecendo.

Seja \mathcal{F} uma folheação holomorfa de codimensão um em $(\mathbb{C}^3, \underline{0})$.

O **primeiro blow-up**, $\pi_1 : M_1 \rightarrow (\mathbb{C}^3, \underline{0})$ tem como centro a origem; obtemos a primeira componente do divisor, $D_1 = \pi_1^{-1}(0)$; como dito na Seção 2.3.1, $D_1 \simeq \mathbb{C}P(2)$, veja a Figura 8. Neste momento temos $D = D_1$.

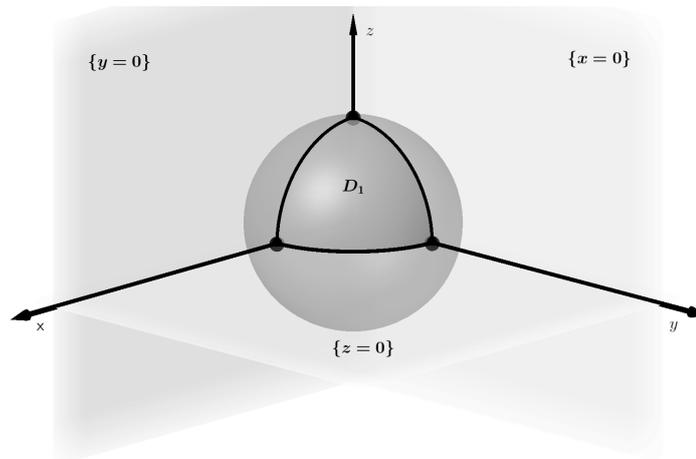


Figura 8 – $D_1 = \pi_1^{-1}(0)$

O **segundo blow-up** $\pi_2 : M_2 \rightarrow M_1$ tem como centro Y_1 que pode ser um ponto $P_1 \in D_1$ ou uma curva Γ transversal a D_1 ; obtemos o divisor $D_2 = \pi_2^{-1}(Y_1)$ tal que $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$, veja a Figura 9. Conforme observado na Seção 2.3.2 temos $D_1 \cap D_2 = \mathbb{C}P(1)$. Neste momento, temos $D = D_1 \cup D_2$.

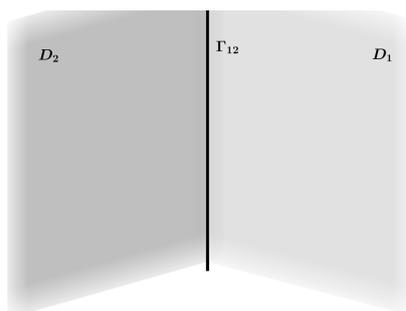


Figura 9 – $D_2 = \pi_2^{-1}(P_1)$ ou $D_2 = \pi_2^{-1}(\Gamma)$

Como $D_1 \cap D_2 = \mathbb{C}P(1)$ não importa se Y_1 é um ponto em D_1 ou uma curva transversal a D_1 , em ambos os casos a alteração causada no divisor total é a mesma: o acréscimo de uma componente que só intersecta D_1 . Por este motivo a partir de agora trataremos estes dois casos apenas através do blow-up de pontos.

O **terceiro blow-up** $\pi_3 : M_3 \rightarrow M_2$ tem como centro Y_2 , que pode ser um ponto $P \in D_1 \cup D_2$ ou a curva $\Gamma_{12} = D_1 \cap D_2$. Em ambos os casos obtemos $D_3 = \pi_3^{-1}(Y_2)$ como nova componente do divisor. Aqui temos $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$. Porém, a posição de D_3 com relação aos divisores antigos D_1 e D_2 depende do centro escolhido, por isso vamos analisar separadamente cada caso.

1. Seja Y_2 um ponto $P_1 \in (D_1 \cup D_2)$. Após explosão teremos ainda $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$. Temos três situações a considerar:

[1.1] $Y_2 = P_1 \in D_1 \setminus (D_1 \cap D_2)$. Neste caso $D_3 \cap D_1 \neq \emptyset$ mas $D_3 \cap D_2 = \emptyset$, veja a Figura 10.

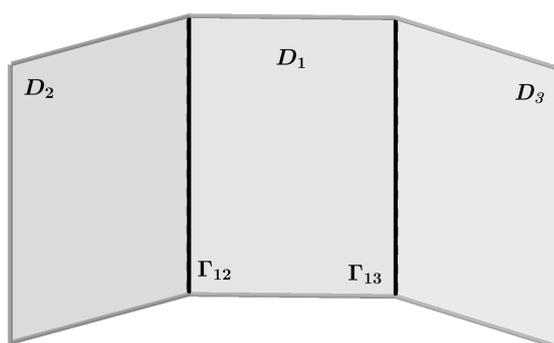


Figura 10 – $D_3 = \pi_3^{-1}(P_1)$

[1.2] $Y_2 = P_2 \in D_2 \setminus (D_1 \cap D_2)$. Neste caso $D_3 \cap D_1 = \emptyset$ e $D_3 \cap D_2 \neq \emptyset$, veja a Figura 11.

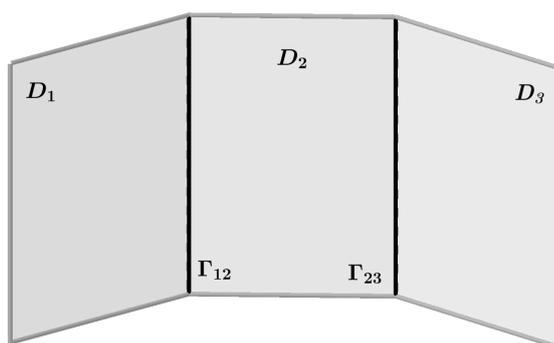


Figura 11 – $D_3 = \pi_3^{-1}(P_2)$

[1.3] $Y_2 = P_{12} \in D_1 \cap D_2$. Neste caso $D_3 \cap D_1 \neq \emptyset$ e $D_3 \cap D_2 \neq \emptyset$, veja a Figura 12.

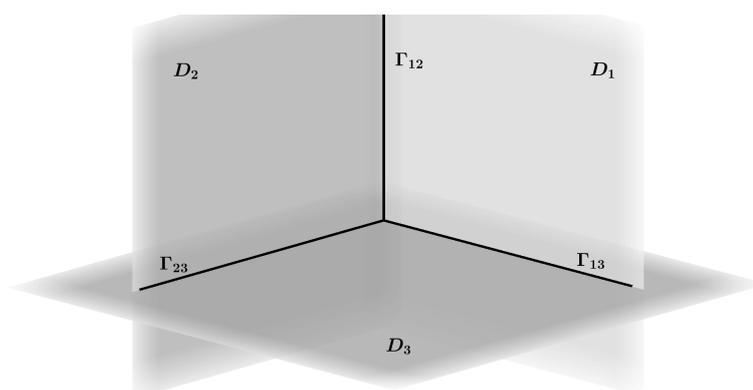


Figura 12 – $D_3 = \pi_3^{-1}(P_{12})$

2. Seja agora Y_2 a curva $\Gamma_{12} = D_1 \cap D_2$. Após explosão temos $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, $D_3 \cap D_1 \neq \emptyset$ e $D_3 \cap D_2 \neq \emptyset$, veja a Figura 13.

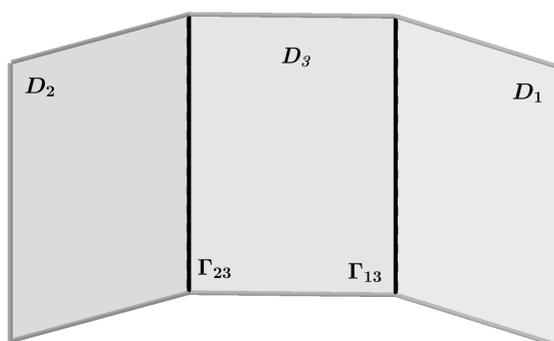


Figura 13 – $D_3 = \pi_3^{-1}(\Gamma_{12})$

Observe que nos casos 1.1, 1.2 e 2 não temos pontos tripos; o ponto triplo aparece pela primeira vez na situação 1.3.

O **quarto blow-up** $\pi_4 : M_4 \rightarrow M_3$ tem como centro Y_3 que pode ser um ponto $P \in D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$ ou uma curva $\Gamma_{ij} = D_i \cap D_j$, com $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Como nossas análises são sempre locais, quando $D_1 \cap D_2 \cap D_3 = \emptyset$ a situação local é uma repetição dos casos já listados no terceiro blow-up; apresentaremos então somente os casos novos, que aparecem quando $D_1 \cap D_2 \cap D_3 \neq \emptyset$ e envolvem a explosão do ponto triplo, partindo de uma configuração como temos na Figura 12.

Supondo então que $D_1 \cap D_2 \cap D_3 = \{Q_{123}\}$, temos duas possibilidades: $Y_3 = \{Q_{123}\}$ ou $Y_3 = \Gamma_{ij}$ (uma das curvas de interseção). Em ambos os casos obtemos $D_4 = \pi_4^{-1}(Y_3)$ e $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$. Como antes, a posição de D_4 depende de Y_3 ; vejamos cada caso.

Começamos considerando $Y_3 = \{Q_{123}\}$; como Y_3 é um ponto não alteramos as interseções entre divisores antigos. Além disso temos $D_4 \cap D_i \neq \emptyset$, para todo $i \in \{1, 2, 3\}$, veja a Figura 14.

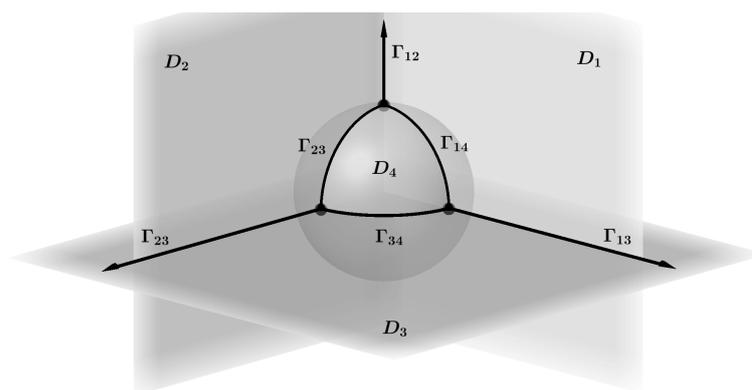


Figura 14 – $D_4 = \pi_4^{-1}(Q_{123})$

Considere agora $Y_3 = \Gamma_{12} = D_1 \cap D_2$; como Y_3 é a curva de interseção dos divisores D_1 e D_2 , que contém o ponto triplo, ocorre que após blow-up estes divisores não se intersectam mais e que $D_4 \cap D_i \neq \emptyset$, para todo $i \in \{1, 2, 3\}$. No entanto ainda temos $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$, e $D_2 \cap D_3 \neq \emptyset$, veja a Figura 15.

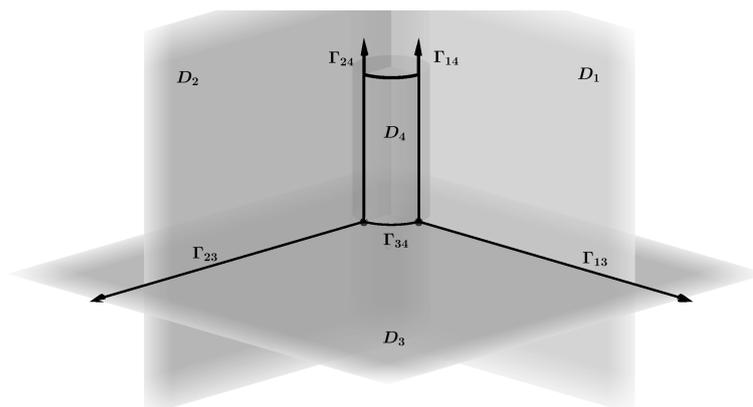


Figura 15 – $D_4 = \pi_4^{-1}(\Gamma_{12})$

Se considerarmos $Y_3 = \Gamma_{13} = D_1 \cap D_3$; da mesma forma que no caso anterior passamos a ter $D_1 \cap D_3 = \emptyset$, e $D_4 \cap D_i \neq \emptyset$, para todo $i \in \{1, 2, 3\}$. Mas neste caso continuamos tendo $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$ e $D_2 \cap D_3 \neq \emptyset$, veja a Figura 16.

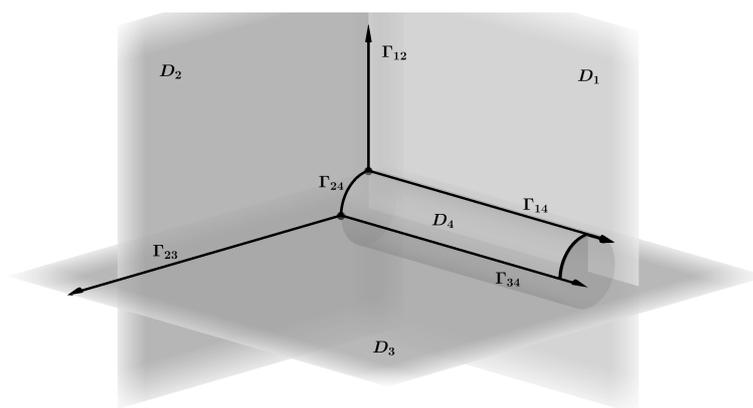


Figura 16 – $D_4 = \pi_4^{-1}(\Gamma_{13})$

E para o caso $Y_3 = \Gamma_{23} = D_2 \cap D_3$, passamos a ter $D_2 \cap D_3 = \emptyset$ e $D_4 \cap D_i \neq \emptyset$, para todo $i \in \{1, 2, 3\}$. Mas continuamos tendo $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$ e $D_1 \cap D_3 \neq \emptyset$, veja a Figura 17.

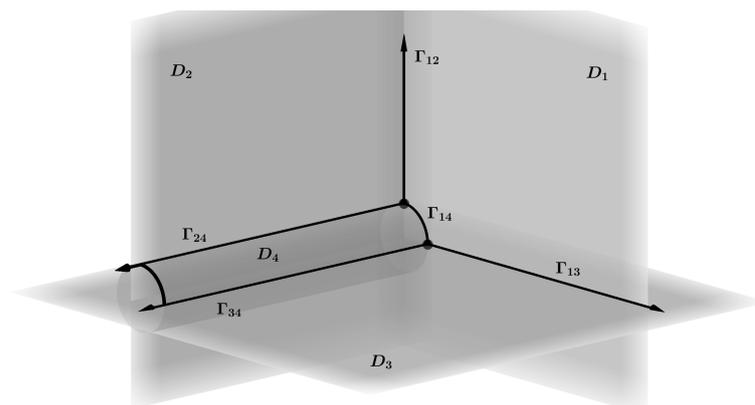


Figura 17 – $D_4 = \pi_4^{-1}(\Gamma_{23})$

Nos blow-ups subsequentes $\pi_k : M_k \rightarrow M_{k-1}$ o centro Y_{k-1} será um ponto $P_k \in D$ ou uma curva $\Gamma_{ij} = D_i \cap D_j$; desta forma recuperamos uma das situações locais descritas anteriormente.

3 LISTAS

Neste capítulo introduzimos o conjunto \mathcal{H} , um objeto central para estudarmos o divisor excepcional proveniente da redução de singularidades. A definição de \mathcal{H} é apresentada na Seção 3.1, na qual mostramos também que \mathcal{H} é simplesmente conexo. Na Seção 3.2, introduzimos as componentes nodais no estudo de \mathcal{H} .

3.1 O CONJUNTO \mathcal{H}

Como vimos no Capítulo 2, uma folheação holomorfa \mathcal{F} em $(\mathbb{C}^3, \underline{0})$ admite uma redução de singularidades dada por

$$\pi : (M, \pi^{-1}(0)) \rightarrow (\mathbb{C}^3, \underline{0}), \quad (5)$$

sendo $\pi = \pi_1 \circ \pi_2 \circ \cdots \circ \pi_n$ uma composição finita de morfismos π_i (os primeiros blow-ups estão descritos na Seção 2.3.5). Cada morfismo π_i tem como centro Y_{i-1} que é um ponto ou uma curva "bem posicionada", sendo $Y_0 = 0 \in \mathbb{C}^3$. A pré-imagem de cada centro pelo morfismo correspondente dá origem a uma componente $D_i = \pi_i^{-1}(Y_{i-1})$ do divisor total D . Ao final do processo de redução de singularidades, o divisor D será dado pela união destas componentes conexas:

$$D = \bigcup_{i \in I} D_i \quad \text{onde } I = \{1, 2, \dots, n\}.$$

Seja $\mathcal{P}(I)$ o conjunto das partes de I . Definimos uma topologia em $\mathcal{P}(I)$ onde os abertos são as uniões dos conjuntos de tipo $\mathcal{P}(J)$ tais que $J \subset I$. Denotamos \mathcal{H} , e o chamamos *lista*, o subconjunto de $\mathcal{P}(I)$ formado por:

- $\mathcal{H}(1) = \{\{i\} \mid i \in I\}$
- $\mathcal{H}(2) = \{\{i, j\} \mid D_i \cap D_j \neq \emptyset\}$
- $\mathcal{H}(3) = \{\{i, j, k\} \mid D_i \cap D_j \cap D_k \neq \emptyset\}$

Note que $\mathcal{H}(2)$ lista as interseções entre duas componentes do divisor e $\mathcal{H}(3)$ lista os *pontos triplos* (interseções de três componentes do divisor). Note também que $\mathcal{H}(k) = \emptyset$, para $k > 3$.

Nosso objetivo neste capítulo é estudar a conexidade do divisor D , e faremos isso estudando a conexidade do conjunto $\mathcal{H} = \mathcal{H}(1) \cup \mathcal{H}(2) \cup \mathcal{H}(3)$.

Definição 3.1.1. Um 0-caminho em \mathcal{H} de comprimento $s > 0$, é uma sequência finita

$$\gamma = (\{i_1\}, \{i_2\}, \dots, \{i_s\}) \quad (6)$$

de elementos de $\mathcal{H}(1)$ tais que para $p = 1, \dots, s-1$, $\{i_p, i_{p+1}\} \in \mathcal{H}(2)$. Dizemos que γ liga $\{i_1\}$ a $\{i_s\}$ e denotamos $\gamma : \{i_1\} \leftrightarrow \{i_s\}$.

O suporte $Sup(\gamma)$ e o subsuporte $Sub(\gamma)$ do 0-caminho $\gamma = (\{i_1\}, \{i_2\}, \dots, \{i_s\})$ são respectivamente dados por:

$$Sup(\gamma) := \{\{i_1\}, \{i_2\}, \dots, \{i_s\}\} \quad (7)$$

e

$$Sub(\gamma) := \{\{i_1, i_2\}, \{i_2, i_3\}, \dots, \{i_{s-1}, i_s\}\}. \quad (8)$$

Definição 3.1.2. Um 1-caminho em \mathcal{H} de comprimento $r - 1 \geq 2$, é uma sequência finita

$$\gamma = (\{i_1, i_2\}, \{i_2, i_3\}, \dots, \{i_{r-1}, i_r\}) \quad (9)$$

de elementos de $\mathcal{H}(2)$, tais que para $q = 2, \dots, r - 1$, $\{i_{q-1}, i_q, i_{q+1}\} \in \mathcal{H}(3)$. Dizemos que γ liga $\{i_1, i_2\}$ a $\{i_{r-1}, i_r\}$ e denotamos $\gamma : \{i_1, i_2\} \leftrightarrow \{i_{r-1}, i_r\}$.

O suporte $Sup(\gamma)$ e o subsuporte $Sub(\gamma)$ do 1-caminho

$$\gamma = (\{i_1, i_2\}, \{i_2, i_3\}, \dots, \{i_{r-1}, i_r\})$$

são respectivamente dados por:

$$Sup(\gamma) := \{\{i_1, i_2\}, \{i_2, i_3\}, \dots, \{i_{r-1}, i_r\}\} \quad (10)$$

e

$$Sub(\gamma) := \{\{i_1, i_2, i_3\}, \{i_2, i_3, i_4\}, \dots, \{i_{r-2}, i_{r-1}, i_r\}\}. \quad (11)$$

Dados dois 0-caminhos $\gamma : \{i_1\} \leftrightarrow \{i_\alpha\}$ e $\gamma' : \{i_\alpha\} \leftrightarrow \{i_\beta\}$ em \mathcal{H} , a justaposição de γ e γ' é o 0-caminho $\gamma * \gamma' : \{i_1\} \leftrightarrow \{i_\beta\} = (\{i_1\}, \dots, \{i_\alpha\}, \dots, \{i_\beta\})$ em \mathcal{H} . E dados dois 1-caminhos $\gamma : \{i_1, i_2\} \leftrightarrow \{i_{\alpha-1}, i_\alpha\}$ e $\gamma' : \{i_{\alpha-1}, i_\alpha\} \leftrightarrow \{i_{\beta-1}, i_\beta\}$ em \mathcal{H} , a justaposição de γ e γ' é o 1-caminho $\gamma * \gamma' : \{i_1, i_2\} \leftrightarrow \{i_{\beta-1}, i_\beta\} = (\{i_1, i_2\}, \dots, \{i_{\alpha-1}, i_\alpha\}, \dots, \{i_{\beta-1}, i_\beta\})$ em \mathcal{H} . Exemplificamos abaixo a justaposição de dois 0-caminhos.

Exemplo 7. Consideremos os 0-caminhos $\gamma = (\{i_1\}, \{i_2\}, \{i_3\})$ e $\gamma' = (\{i_3\}, \{i_4\}, \{i_5\})$, ligando i_1 a i_3 e i_3 a i_5 respectivamente; Então a justaposição destes caminhos é um 0-caminho ligando i_1 a i_5 , dado por $\gamma * \gamma' = (\{i_1\}, \{i_2\}, \{i_3\}, \{i_4\}, \{i_5\})$.

Dado um 0-caminho $\gamma = (\{i_1\}, \{i_2\}, \dots, \{i_s\})$ em \mathcal{H} , o 0-caminho inverso em \mathcal{H} é por definição $\gamma^{-1} = (\{i_s\}, \{i_{s-1}\}, \dots, \{i_1\})$, obtido invertendo a ordem dos elementos da sequência γ . De forma análoga, obtemos a inversão de um 1-caminho. Apresentamos a seguir um exemplo de inversão de 0-caminho.

Exemplo 8. O 0-caminho $\gamma = (\{i_1\}, \{i_2\}, \{i_3\}, \{i_4\})$ em \mathcal{H} , tem como inverso o 0-caminho $\gamma^{-1} = (\{i_4\}, \{i_3\}, \{i_2\}, \{i_1\})$ em \mathcal{H} .

Definição 3.1.3. Um 0-caminho $\gamma = (\{i_1\}, \{i_2\}, \dots, \{i_s\})$ em \mathcal{H} é fechado se $\{i_1\} = \{i_s\}$.

Se $\gamma = (\{i_1\}, \{i_2\}, \dots, \{i_s\})$ é um 0-caminho qualquer em \mathcal{H} , então $\sigma = \gamma * \gamma^{-1}$ é um 0-caminho fechado; neste caso dizemos que σ é um 0-caminho fechado trivial.

Estamos então aptos a apresentar o conceito de conexidade em \mathcal{H} .

Definição 3.1.4. Dizemos que \mathcal{H} é 0-conexo se para quaisquer dois elementos $\{i\}$ e $\{j\}$ de $\mathcal{H}(1)$ existir um 0-caminho em \mathcal{H} ligando $\{i\}$ e $\{j\}$. E dizemos que \mathcal{H} é 1-conexo se para quaisquer dois elementos $\{i_1, i_2\}$ e $\{j_1, j_2\}$ de $\mathcal{H}(2)$ existir um 1-caminho em \mathcal{H} ligando $\{i_1, i_2\}$ e $\{j_1, j_2\}$.

Segue imediatamente da construção anterior que após redução de singularidades, o divisor D é conexo se, e somente se, o conjunto de listas \mathcal{H} é 0-conexo.

Considere agora um subconjunto $A \subset \mathcal{H}$ e decomponha A na forma

$$A = A(1) \cup A(2) \cup A(3) ,$$

para $A(1) = A \cap \mathcal{H}(1)$, $A(2) = A \cap \mathcal{H}(2)$, $A(3) = A \cap \mathcal{H}(3)$. Um 0-caminho em A é um 0-caminho γ em \mathcal{H} tal que $Sup(\gamma)$ e $Sub(\gamma)$ estão em A ; analogamente para um 1-caminho em A . Dizemos que A é 0-conexo se para quaisquer dois elementos de $A(1)$ existe um 0-caminho em A ligando-os. Analogamente, A é 1-conexo se para quaisquer dois elementos de $A(2)$ existe um 1-caminho em A ligando-os.

Dados dois subconjuntos $A_1, A_2 \subset \mathcal{H}$. Se A_1 e A_2 são subconjuntos 0-conexos tais que $A_1(1) \cap A_2(1) \neq \emptyset$, então $A_1 \cup A_2$ é 0-conexo; analogamente, se A_1 e A_2 são subconjuntos 1-conexos tais que $A_1(2) \cap A_2(2) \neq \emptyset$, então $A_1 \cup A_2$ é 1-conexo.

Observe que 1-conexidade implica 0-conexidade: de fato, se existe um 1-caminho $\gamma : (\{i, j\}, \{j, k\})$, então existe o 0-caminho $\gamma' : (\{i\}, \{j\}, \{k\})$. Por outro lado, 0-conexidade não implica a 1-conexidade, uma vez que existem conjuntos de listas 0-conexo $\mathcal{H} = \mathcal{H}(1) \cup \mathcal{H}(2) \cup \mathcal{H}(3)$, com $\mathcal{H}(3) = \emptyset$, implicando que \mathcal{H} não é 1-conexo; por exemplo o conjunto de listas que representa do divisor obtido após o 3º blow-up, representado na figura 10.

Um *par homotópico elementar* $(\varepsilon, \varepsilon')$ em \mathcal{H} é um par de 0-caminhos em \mathcal{H} tal que, a menos de uma reordenação de ε e ε' , temos uma das seguintes situações:

1. $\varepsilon = \varepsilon'$;
2. $\varepsilon = (\{i_1\}, \{i_2\}, \{i_1\})$ e $\varepsilon' = (\{i_1\})$;
3. $\varepsilon = (\{i_1\}, \{i_2\})$ e $\varepsilon' = (\{i_1\}, \{i_3\}, \{i_2\})$, onde $(\{i_1, i_3\}, \{i_3, i_2\})$ é um 1-caminho em \mathcal{H} (isto é, $\{i_1, i_2, i_3\} \in \mathcal{H}(3)$).

Dados 0-caminhos γ_1 e γ_2 em \mathcal{H} , dizemos que γ_2 pode ser obtido de γ_1 por uma homotopia elementar (e denotamos $\gamma_1 \sim \gamma_2$) se existe um par homotópico elementar $(\varepsilon, \varepsilon')$ e 0-caminhos δ e ρ em \mathcal{H} , tais que

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \delta * \varepsilon * \rho \\ \gamma_2 &= \delta * \varepsilon' * \rho . \end{aligned}$$

Considere um subconjunto $A \subset \mathcal{H}(1)$. Dois 0-caminhos $\gamma, \gamma' \in \mathcal{H}$ são *homotopicamente equivalentes* em \mathcal{H} com suporte em A , se existe uma sequência finita de homotopias elementares

$$\gamma = \gamma_0 \sim \gamma_1 \sim \cdots \sim \gamma_s = \gamma',$$

tal que $\text{Sup}(\gamma_r) \subset A$ para $r = 0, 1, \dots, s$.

Definição 3.1.5. *Considere $A \subset \mathcal{H}$ um subconjunto 0-conexo. Dizemos que A é simplesmente conexo se quaisquer dois 0-caminhos em A são homotopicamente equivalentes em \mathcal{H} com suporte em A .*

Teorema 3.1.1. *O conjunto de listas \mathcal{H} é simplesmente conexo.*

Demonstração: Faremos esta demonstração analisando os conjuntos \mathcal{H} obtidos após cada blow-up.

Considere uma folheação holomorfa $\mathcal{F} \in (\mathbb{C}^3, \underline{0})$. Após aplicarmos o blow-up π_1 de centro na origem de \mathbb{C}^3 , obtemos o divisor $D_1 = \pi_1^{-1}(0)$; neste caso $\mathcal{H} = \mathcal{H}(1) = \{\{1\}\}$ é simplesmente conexo pois é um único ponto.

Para o segundo blow-up π_2 com centro um ponto $P \in D_1$, obtemos um novo divisor $D_2 = \pi_2^{-1}(P)$, tal que $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$; desta forma $\mathcal{H} = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$. Como os 0-caminhos $\gamma_1 = (\{1\})$, e $\gamma_2 = (\{1\}, \{2\}, \{1\})$ formam o par homotópico elementar (2), obtemos \mathcal{H} simplesmente conexo.

No terceiro blow-up π_3 , considere inicialmente como centro um ponto $P \in D_2$. O divisor $D_3 = \pi_3^{-1}(P)$ satisfaz $D_1 \cap D_3 = \emptyset$ e $D_2 \cap D_3 \neq \emptyset$ (e mantemos $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$). Assim $\mathcal{H} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}\}$. Caso $P \in D_1$, a situação será análoga. Note que esta situação repete o ocorrido no segundo blow-up, e obtemos \mathcal{H} simplesmente conexo.

Se tomarmos como centro do terceiro blow-up a curva $\Gamma_{12} = D_1 \cap D_2$, então o divisor $D_3 = \pi_3^{-1}(\Gamma)$ terá interseção não vazia com D_1 e D_2 e a interseção $D_1 \cap D_2$ deixa de existir (pois foi usada como centro do blow-up). Obtemos então $\mathcal{H} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$. Os 0-caminhos que aparecem são homotópicos: basta aplicar localmente o par homotópico elementar (2). Portanto \mathcal{H} é simplesmente conexo.

Ainda no terceiro blow-up, podemos tomar como centro um ponto $P \in D_1 \cap D_2$; nesta situação, o divisor $D_3 = \pi_3^{-1}(P)$ terá interseção não vazia com D_1 e D_2 , e continuamos tendo $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$. Portanto $\mathcal{H} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$. Neste caso, aparecem os 0-caminhos $\gamma_1 = (\{1\}, \{2\})$ e $\gamma_2 = (\{1\}, \{3\}, \{2\})$, e o 1-caminho $\gamma'_2 = (\{1, 3\}, \{3, 2\})$. Como (γ_1, γ_2) formam o par homotópico elementar (3), concluímos que \mathcal{H} é simplesmente conexo.

Para o quarto blow-up, algumas situações já apresentadas podem se repetir: é o que acontece se tomamos como centro um ponto em um divisor D_j ; uma curva

de interseção de dois divisores que não contém um ponto triplo; ou um ponto na interseção de apenas dois divisores. Portanto, precisamos apenas analisar o que acontece quando o centro de π_4 é o ponto triplo $D_1 \cap D_2 \cap D_3$ ou uma curva de interseção de dois divisores que contém este ponto triplo.

Começamos supondo que o centro de π_4 é o ponto triplo $Q = D_1 \cap D_2 \cap D_3$; então o divisor $D_4 = \pi_4^{-1}(Q)$ tem interseção não vazia com os três divisores D_1, D_2 e D_3 e não alteramos as interseções entre D_1, D_2, D_3 já existentes. Temos, portanto,

$$\mathcal{H} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\} .$$

Neste caso, temos quatro 0-caminhos de natureza distintas que precisamos mostrar que são homotopicamente equivalentes; são eles:

$$\gamma_1 = (\{1\}, \{3\}) ;$$

$$\gamma_2 = (\{1\}, \{4\}, \{3\}), \text{ onde } \gamma'_2 = (\{1, 4\}, \{4, 3\}) \text{ é 1-caminho;}$$

$$\gamma_3 = (\{1\}, \{2\}, \{3\}), \text{ onde } \gamma'_3 = (\{1, 2\}, \{2, 3\}) \text{ não é 1-caminho;}$$

$$\gamma_4 = (\{1\}, \{4\}, \{2\}, \{3\}), \text{ onde } \gamma'_4 = (\{1, 4\}, \{4, 2\}, \{2, 3\}) \text{ é 1-caminho.}$$

Note que γ_1 e γ_2 formam o par homotópico elementar (3); portanto $\gamma_1 \sim \gamma_2$.

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} \gamma_3 &= (\{1\}, \{2\}, \{3\}) = (\{1\}, \{2\}) * (\{2\}, \{3\}) \\ &= (\{1\}, \{4\}, \{2\}) * (\{2\}, \{4\}, \{3\}) \\ &= (\{1\}, \{4\}) * (\{4\}, \{2\}, \{4\}) * (\{4\}, \{3\}) \\ &= (\{1\}, \{4\}) * (\{4\}) * (\{4\}, \{3\}) \\ &= (\{1\}, \{4\}, \{3\}) = \gamma_2 , \end{aligned}$$

portanto $\gamma_2 \sim \gamma_3$. Por último,

$$\begin{aligned} \gamma_4 &= (\{1\}, \{4\}, \{2\}, \{3\}) = (\{1\}, \{4\}, \{2\}) * (\{2\}, \{3\}) \\ &= (\{1\}, \{2\}) * (\{2\}, \{3\}) \\ &= (\{1\}, \{2\}, \{3\}) = \gamma_3 , \end{aligned}$$

portanto $\gamma_3 \sim \gamma_4$. Concluimos então que \mathcal{H} é simplesmente conexo.

Agora, consideramos como centro uma das curvas de interseção entre dois divisores; sem perda de generalidade, suponha que seja $\Gamma_{13} = D_1 \cap D_3$. Neste caso, após blow-up passamos a ter $D_1 \cap D_3 = \emptyset$ e o divisor $D_4 = \pi_4^{-1}(\Gamma_{13})$ tem interseção não vazia com D_1, D_2 e D_3 , e continuamos tendo $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$ e $D_2 \cap D_3 \neq \emptyset$. Obtemos então

$$\mathcal{H} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 4\}, \{2, 3, 4\}\} .$$

Aqui, temos os seguintes 0-caminhos de natureza distintas que precisamos mostrar que são homotopicamente equivalentes:

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= (\{1\}, \{2\}, \{3\}), \text{ onde } \gamma'_1 = (\{1, 2\}, \{2, 3\}) \text{ não é 1-caminho;} \\ \gamma_2 &= (\{1\}, \{4\}, \{3\}), \text{ onde } \gamma'_2 = (\{1, 4\}, \{4, 3\}) \text{ não é 1-caminho;} \\ \gamma_3 &= (\{1\}, \{2\}, \{4\}, \{3\}), \text{ onde } \gamma'_3 = (\{1, 2\}, \{2, 4\}, \{4, 3\}) \text{ é 1-caminho.}\end{aligned}$$

Temos

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= (\{1\}, \{2\}, \{3\}) = (\{1\}, \{2\}) * (\{2\}, \{3\}) \\ &= (\{1\}, \{4\}, \{2\}) * (\{2\}, \{4\}, \{3\}) \\ &= (\{1\}, \{4\}) * (\{4\}, \{2\}, \{4\}) * (\{4\}, \{3\}) \\ &= (\{1\}, \{4\}) * (\{4\}) * (\{4\}, \{3\}) \\ &= (\{1\}, \{4\}, \{3\}) = \gamma_2 ,\end{aligned}$$

portanto, $\gamma_1 \sim \gamma_2$. Além disso,

$$\begin{aligned}\gamma_3 &= (\{1\}, \{2\}, \{4\}, \{3\}) = (\{1\}, \{2\}) * (\{2\}, \{4\}, \{3\}) \\ &= (\{1\}, \{2\}) * (\{2\}, \{3\}) \\ &= (\{1\}, \{2\}, \{3\}) = \gamma_1 ,\end{aligned}$$

portanto, $\gamma_1 \sim \gamma_3$. Logo, \mathcal{H} é simplesmente conexo.

Para os blow-ups subsequentes, as situações locais apresentadas anteriormente se repetirão. Qualquer 0-caminho em \mathcal{H} é uma combinação de justaposições e inversões dos 0-caminhos listados acima; Como cada uma destas análises locais resulta em pares homotópicos, ao “quebrar” um 0-caminho nesta combinação passamos para uma análise local, que nos leva a concluir que \mathcal{H} é simplesmente conexo. ■

Observação 1. Nos Capítulos 4 e 5 iremos introduzir o grafo e o complexo simplicial relacionados a \mathcal{H} . Veremos que existe uma forte identificação entre os três objetos: a lista \mathcal{H} , o grafo $G_{\mathcal{H}}$ e o complexo simplicial $K_{\mathcal{H}}$. Neste sentido, poderíamos estudar o conjunto \mathcal{H} a partir destas três perspectivas. Optamos por separar em três conjuntos diferentes para podermos utilizar as ferramentas específicas de cada um deles, porém esta escolha torna por vezes os argumentos repetitivos.

3.2 COMPONENTES NODAIS EM \mathcal{H}

Nesta seção, iremos adicionar à lista \mathcal{H} as informações das componentes nodais.

Decorre do Teorema 2.3.1 que, após um número finito de blow-ups, é possível posicionar as componentes nodais da folheação nas esquinas do divisor D ; com isto,

uma componente nodal, que é formada pela união de interseções de dois e três divisores, será um subconjunto de $\mathcal{H}(2) \cup \mathcal{H}(3)$. Sejam $Nod^*\mathcal{F} \subset Sing\mathcal{F}$ o conjunto das componentes nodais e $Nod\mathcal{F} \subset Sing\mathcal{F}$ o conjunto das componentes nodais não interrompidas.

Seja $\mathcal{N} \in Nod\mathcal{F}$ uma componente nodal não interrompida e seja P um ponto triplo de \mathcal{N} . Então existem índices i, j, k tais que $P = D_i \cap D_j \cap D_k$; portanto, podemos visualizar P em \mathcal{H} através do elemento $J = \{i, j, k\} \in \mathcal{H}(3)$. A menos de uma reordenação dos índices, a folheação \mathcal{F} é dada localmente em P pela 1-forma

$$\omega = \lambda_i \frac{dx_i}{x_i} + \lambda_j \frac{dx_j}{x_j} - \lambda_k \frac{dx_k}{x_k},$$

em que $\lambda_i, \lambda_j, \lambda_k \in \mathbb{R}_{>0}$. Assim, $\frac{-\lambda_k}{\lambda_i} < 0$ e $\frac{-\lambda_k}{\lambda_j} < 0$ implicam que $D_i \cap D_k, D_j \cap D_k$ são curvas genericamente nodais e portanto estão em \mathcal{N} ; visualizando em \mathcal{H} , diremos que $\{i, k\}, \{j, k\} \in \mathcal{N}$. Além disso, como $\frac{\lambda_i}{\lambda_j} > 0$, então $D_i \cap D_j$ é uma curva não genericamente nodal; diremos que $\{i, j\} \notin \mathcal{N}$.

Mostramos com isso que para cada $J = \{i, j, k\} \in \mathcal{N} \cap \mathcal{H}(3)$, temos

$$\mathcal{N} \supset \{\{i, j, k\}, \{i, k\}, \{j, k\}\} \text{ e } \{i, j\} \notin \mathcal{N}. \quad (12)$$

Com isso, obtemos que a componente nodal não interrompida \mathcal{N} é um 1-caminho em \mathcal{H} .

Observamos que na 1-forma ω , temos $\lambda_i > 0, \lambda_j > 0$, e $-\lambda_k < 0$, o que nos permite particionar o elemento $J = \{i, j, k\} \in \mathcal{N} \cap \mathcal{H}(3)$ em $J = J_+ \cup J_-$ para:

$$\begin{aligned} J_+ = \{i, j\} &\Rightarrow P(J_+) = \{\{i\}, \{j\}, \{i, j\}\}; \\ J_- = \{k\} &\Rightarrow P(J_-) = \{\{k\}\}. \end{aligned}$$

Seja $\mathcal{H}_J = \mathcal{N} \cup P(J_+) \cup P(J_-)$. Queremos ver que o ato de retirar a informação de \mathcal{N} de \mathcal{H}_J dá origem a duas componentes conexas do divisor (localmente). O 0-caminho $\gamma_1 = (\{i\}, \{j\}) \subset P(J_+)$ é tal que $\gamma_1 \cap \mathcal{N} = \emptyset$, ou seja, este é um 0-caminho ligando $\{i\}$ a $\{j\}$ “fora de \mathcal{N} ”. Portanto, $P(J_+)$ é localmente um componente conexa de $\mathcal{H}_J \setminus \mathcal{N}$. Como em $P(J_-)$ só temos o 0-caminho constante $\gamma_2 = (\{k\})$, decorre que localmente $P(J_-)$ é a outra componente conexa de $\mathcal{H}_J \setminus \mathcal{N}$. Vamos verificar que esta situação local se repete no caso global.

Recorde que, como \mathcal{N} é uma componente nodal não interrompida temos a seguinte propriedade: Se $L \in \mathcal{N} \cap \mathcal{H}(2)$, dado por $L = \{i, j\}$, então para cada $k \in I$ tal que $\{i, j, k\} \in \mathcal{H}(3)$ temos que $\{i, j, k\} \in \mathcal{N}$.

Apresentamos a seguir um resultado que mostra que as componentes nodais “se colam” nos pontos triplos.

Teorema 3.2.1. *Se $\mathcal{N}, \tilde{\mathcal{N}}$ são duas componentes nodais não interrompidas, então $\mathcal{N} = \tilde{\mathcal{N}}$ ou $\mathcal{N} \cap \tilde{\mathcal{N}} = \emptyset$.*

Demonstração: Suponha que exista $\{i, j, k\} \in \mathcal{N} \cap \tilde{\mathcal{N}}$. Como vimos no estudo local acima (ver equação (12)), se $\{i, j, k\} \in \mathcal{N}$ então

$$\mathcal{N} \supset \{\{i, j, k\}, \{i, k\}, \{j, k\}\} \text{ e } \{i, j\} \notin \mathcal{N}.$$

Na verdade, vimos que $\{i, j\}$ não é genericamente nodal; portanto $\{i, j\} \notin \tilde{\mathcal{N}}$.

Agora, sendo $\tilde{\mathcal{N}}$ uma componente nodal não interrompida e $\{i, j, k\} \in \tilde{\mathcal{N}}$, também pela análise local da qual resulta a equação (12), só resta uma possibilidade:

$$\tilde{\mathcal{N}} \supset \{\{i, j, k\}, \{i, k\}, \{j, k\}\} \text{ e } \{i, j\} \notin \tilde{\mathcal{N}}.$$

Portanto, na vizinhança deste ponto triplo $\{i, j, k\}$ temos que \mathcal{N} e $\tilde{\mathcal{N}}$ são a mesma componente nodal não interrompida.

Suponha agora existe $\{i, j\} \in \mathcal{N} \cap \tilde{\mathcal{N}}$. Assim, para todo $k \in I$ tal que $\{i, j, k\} \in \mathcal{H}(3)$, como \mathcal{N} e $\tilde{\mathcal{N}}$ são componentes nodais não interrompidas, temos que $\{i, j, k\} \in \mathcal{N}$ e $\{i, j, k\} \in \tilde{\mathcal{N}}$, e voltamos à situação anterior.

Se percorremos as componentes nodais \mathcal{N} e $\tilde{\mathcal{N}}$ replicando esta análise local para cada ponto triplo nodal, obtemos que nas vizinhanças de todos os pontos triplos estas componentes nodais coincidem, portanto $\mathcal{N} = \tilde{\mathcal{N}}$. ■

Com isso concluímos que se \mathcal{N} é uma componente nodal não interrompida e $\{i, j\} \in \mathcal{N}$, então para todo $k \in I$, tal que $\{i, j, k\} \in \mathcal{H}(3)$ temos que $\{i, j, k\} \in \mathcal{N}$. Mas se $\{i, j, k\} \in \mathcal{N}$ então \mathcal{N} contém, além de $\{i, j, k\}$ e $\{i, j\}$, uma das curvas $\{i, k\}$ ou $\{j, k\}$ (e não contém a outra); suponha $\{i, k\}$ em \mathcal{N} . Agora, se existe um $j' \in I$ tal que $\{i, j', k\} \in \mathcal{N}$, repetimos o argumento: uma das curvas $\{i, j'\}$ ou $\{j', k\}$ está em \mathcal{N} , e a outra não; suponha $\{j', k\}$ em \mathcal{N} . Sejam $J = \{i, j, k\}$ e $J' = \{i, j', k\}$. As 1-formas que definem a folheação localmente em cada um destes pontos triplos são:

$$\omega_J = -\lambda_i \frac{dx_J}{x_J} + \lambda_j \frac{dy_J}{y_J} + \lambda_k \frac{dz_J}{z_J}$$

e

$$\omega_{J'} = -\lambda'_i \frac{dx_{J'}}{x_{J'}} - \lambda'_{j'} \frac{dy_{J'}}{y_{J'}} + \lambda'_k \frac{dz_{J'}}{z_{J'}},$$

em que todos os coeficientes são números reais positivos não racionais e $-\frac{\lambda_i}{\lambda_k} = -\frac{\lambda'_i}{\lambda'_k}$.

Desta forma, temos

$$P(J_+) = \{j, k\} \quad , \quad P(J_-) = \{i\} \quad , \quad P(J'_+) = \{k\} \quad \text{e} \quad P(J'_-) = \{i, j'\}.$$

Obtemos então

$$P((J \cup J')_+) = \{j, k\} \quad \text{e} \quad P((J \cup J')_-) = \{i, j'\}$$

e estas são as componentes conexas de $\mathcal{H} \setminus \mathcal{N}$. De fato, \mathcal{N} é o 1-caminho $(\{i, j\}, \{i, k\}, \{j', k\})$ e portanto os 0-caminhos $\gamma_1 = (\{j\}, \{k\})$ e $\gamma_2 = (\{i\}, \{j'\})$ unem os respectivos divisores sem atravessar \mathcal{N} .

4 GRAFOS

Neste capítulo fazemos um estudo da conexidade do divisor excepcional utilizando grafos. Nas Seções 4.1 e 4.2, apresentamos uma revisão da literatura sobre grafos e matriz de incidência, nos baseando principalmente na referência (8), e introduzimos o conceito do grafo associado a uma redução de singularidades de uma folheação holomorfa \mathcal{F} . Na Seção 4.3 mostramos, usando a matriz de incidência de um grafo, que o grafo do divisor excepcional oriundo de uma redução de singularidades é conexo. Na Seção 4.4 mostramos, utilizando o Teorema de Seifert - Van Kampen, que o conjunto \mathcal{H} é simplesmente conexo, se e somente se, o grafo $G_{\mathcal{H}}$ é simplesmente conexo. Em face do Teorema 3.1.1, concluímos que $G_{\mathcal{H}}$ é simplesmente conexo.

4.1 CONCEITOS BÁSICOS

Um *grafo* é um par $G = (V, A)$ em que $V \neq \emptyset$, dado por, $V = \{v_1, \dots, v_k\}$ é um conjunto finito e A é um subconjunto de $(V, 2) = \{\{v_i, v_j\}; v_i, v_j \in V \text{ distintos}\}$ (com a propriedade que $\{v_i, v_j\} = \{v_j, v_i\}$). Os elementos de V são os *vértices*, e os elementos de A são as *arestas* do grafo G .

O número de vértices de um grafo G é a sua *ordem*, denotada por $|G|$, o número de arestas do grafo será denotado por $||G||$. O grafo de ordem 1 é chamado grafo trivial.

Sejam $G = (V, A)$ e $G' = (V', A')$ dois grafos. Dizemos que G e G' são isomorfos, e escrevemos $G \simeq G'$, se existe uma bijeção

$$\varphi : V \rightarrow V' \text{ com } \{x, y\} \in A \Leftrightarrow \{\varphi(x), \varphi(y)\} \in A',$$

para todo $x, y \in V$. A função φ é chamada de *isomorfismo*; no caso particular $G = G'$, chamamos *automorfismo*.

Definimos $G \cup G' := (V \cup V', A \cup A')$ e $G \cap G' := (V \cap V', A \cap A')$. Se $G \cap G' = \emptyset$ então G e G' são disjuntos. Se $V' \subseteq V$ e $A' \subseteq A$, então G' é um *subgrafo* de G e escrevemos $G' \subseteq G$. Neste caso, dizemos que G contém G' . Se $G' \subseteq G$ e $G' \neq G$, então G' é um *subgrafo próprio* de G .

Um *caminho* em um grafo é um subgrafo não vazio $\xi = (V', A')$ da forma

$$V' = \{v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_m}\} \text{ e } A' = \{\{v_{i_1}, v_{i_2}\}, \{v_{i_2}, v_{i_3}\}, \dots, \{v_{i_{m-1}}, v_{i_m}\}\}$$

em que os v_{i_j} são todos distintos. Um caminho é dito *fechado* se $v_{i_1} = v_{i_m}$. O comprimento de um caminho é o número $m \geq 0$ de arestas que o compõe (se $m = 0$, temos o grafo trivial). Um grafo conexo sem caminhos fechados é chamado uma *árvore*.

Um grafo não-vazio G é *conexo* se quaisquer dois de seus vértices são ligados por um caminho ξ em G . Sejam $U \subseteq V$, e $B = A \cap (U, 2)$, onde $(U, 2) = \{\{u_i, u_j\}; u_i, u_j \in U \text{ distintos}\}$, neste caso o grafo $G[U] = (U, B)$ é um subgrafo de G . Se $G[U]$ é conexo, dizemos que U é *conexo em G*.

Proposição 4.1.1. (8) *Os vértices de um grafo conexo G podem sempre ser enumerados v_1, \dots, v_n , de forma que os subgrafos $G_i = G[v_1, \dots, v_i]$ são conexos, $\forall i$.*

Considere $I = \{1, \dots, n\}$ o conjunto mínimo de índices para uma redução de singularidades $\pi = \pi_1 \circ \dots \circ \pi_n$ de uma folheação holomorfa $\mathcal{F} \in (\mathbb{C}^3, \underline{0})$. Dada a construção feita no Capítulo 3, obtemos um grafo associado a \mathcal{H} :

$$G_{\mathcal{H}} = (\mathcal{H}(1), \mathcal{H}(2)).$$

Obtemos imediatamente o resultado a seguir:

Proposição 4.1.2. *O grafo $G_{\mathcal{H}}$ é conexo se, e somente se, \mathcal{H} é 1-conexo.*

Segue que, para mostrar a conexidade de \mathcal{H} , é suficiente mostrar a conexidade do grafo $G_{\mathcal{H}}$, o que faremos utilizando sua matriz de incidência. Na próxima Seção, apresentamos a definição e propriedades desta matriz, e nas seções posteriores mostramos como obtê-la durante a redução de singularidades.

4.2 MATRIZ DE INCIDÊNCIA

A matriz de incidência $B = (b_{ij})_{n \times m}$ de um grafo $G = (V, A)$ com $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ é definida por

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } v_i \in a_j, \\ 0, & \text{se } v_i \notin a_j. \end{cases} \quad (13)$$

Proposição 4.2.1. (19) *Propriedades da matriz de incidência B :*

- I) *Cada coluna de B possui exatamente duas entradas unitárias;*
- II) *Uma linha que tem todas as entradas nulas corresponde a um vértice isolado (que não está ligado a nenhum outro vértice do grafo);*
- III) *Se uma linha possui uma única entrada unitária, então ao excluir do grafo a única aresta que incide neste vértice ele se torna isolado.*
- IV) *A permutação de quaisquer duas linhas (quaisquer duas colunas) de B corresponde a uma rerrotulagem de vértices (arestas) de G .*
- V) *Dois grafos são isomorfos se, e somente se, eles correspondem a matrizes de incidência que diferem somente por uma permutação de linhas e/ou colunas.*

De acordo com (10), os conceitos de conexidade e caminhos sobre um grafo G são traduzidos para a matriz de incidência do grafo G através da seguinte definição:

Definição 4.2.1. *Dois linhas (colunas) i, j da matriz de incidência são diretamente conectadas se existe uma coluna (linha) da matriz que tem entradas não nulas em ambas*

as linhas (colunas). Duas linhas (colunas) i, j da matriz de incidência são indiretamente conectadas se existe uma sequência de linhas (colunas) começando na i -ésima linha (coluna) e terminando na j -ésima linha (coluna), dada por $(i, k_1, k_2, \dots, k_l, j)$ na qual cada duas linhas (colunas) adjacentes estão diretamente conectadas. Duas linhas (colunas) i, j da matriz de incidência são ditas conectadas se elas forem direta ou indiretamente conectadas.

Definição 4.2.2. Uma componente conexa de uma matriz de incidência é uma submatriz que consiste em um conjunto de linhas e colunas satisfazendo

(i) Cada par de linhas é conectado;

(ii) Nenhuma das linhas está conectada com linhas fora do conjunto;

(iii) As colunas possuem exatamente duas entradas não nulas nas linhas do conjunto.

Uma matriz de incidência é dita conexa se ela possui somente uma componente conexa; caso contrário ela é dita separável.

Segue da definição que uma matriz de incidência separável pode ser trazida, por trocas adequadas de linhas e colunas, para a forma

$$B_G = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_k \end{pmatrix}$$

onde B_i , para $i = 1, 2, \dots, k$ é a matriz da i -ésima componente conexa.

4.3 REDUÇÃO DE SINGULARIDADES E GRAFOS

Agora faremos a construção do grafo a partir da redução de singularidades.

Assim como fizemos na Seção 2.3.5, começamos considerando uma folheação holomorfa \mathcal{F} de codimensão um em $(\mathbb{C}^3, \underline{0})$; como ainda não aplicamos nenhum blow-up, não temos divisor e portanto $\mathcal{H} = \emptyset$ e nesta situação não temos um grafo associado.

O primeiro blow-up da redução de singularidades é $\pi_1 : M_1 \rightarrow (\mathbb{C}^3, \underline{0})$ cujo centro é a origem; obtemos assim o divisor $D_1 = \pi_1^{-1}(0)$. Neste caso, $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_1(1) = \{\{1\}\}$ (note que $\mathcal{H}_1(2), \mathcal{H}_1(3) = \emptyset$). Portanto o grafo $G_{\mathcal{H}_1} = (\{1\}, \emptyset)$, é o grafo trivial. Nesta etapa não temos ainda a matriz de incidência.

O segundo blow-up $\pi_2 : M_2 \rightarrow M_1$ tem como centro Y_1 , que pode ser um ponto $P_1 \in D_1$ ou uma curva Γ transversal a D_1 ; em ambos os casos obtemos um divisor $D_2 = \pi_2^{-1}(Y_1)$ tal que $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$. Nesta situação temos $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_2(1) \cup \mathcal{H}_2(2)$ em que $\mathcal{H}_2(1) = \{\{1\}, \{2\}\}$ e $\mathcal{H}_2(2) = \{\{1, 2\}\}$ (note que $\mathcal{H}_2(3) = \emptyset$). Assim, temos

$G_{\mathcal{H}_2} = (\{\{1\}, \{2\}\}, \{\{1, 2\}\})$ e a matriz de incidência é dada por

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Note que as duas linhas desta matriz são diretamente conectadas, mostrando que o grafo é conexo.

O terceiro blow-up $\pi_3 : M_3 \rightarrow M_2$ tem como centro Y_2 , que pode ser um ponto $P \in D_1 \cup D_2$ ou a curva $\Gamma_{12} = D_1 \cap D_2$. Em ambos casos, obtemos $D_3 = \pi_3^{-1}(Y_2)$ como nova componente do divisor e $\mathcal{H}_3(1) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$. Porém, os conjuntos $\mathcal{H}_3(2)$ e $\mathcal{H}_3(3)$ dependem do centro escolhido; vamos analisar separadamente cada caso e verificar qual a matriz de incidência do grafo obtido.

1. Caso Y_2 seja um ponto $P_1 \in (D_1 \cup D_2)$, após explosão teremos ainda $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$, logo $\{1, 2\} \in \mathcal{H}_3(2)$. Temos três situações a considerar:

[1.1] $Y_2 = P_1 \in D_1 \setminus (D_1 \cap D_2)$. Neste caso $D_3 \cap D_1 \neq \emptyset$ mas $D_3 \cap D_2 = \emptyset$, portanto $\mathcal{H}_3(2) = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}\}$; logo a matriz de incidência do grafo $G_{\mathcal{H}_3} = (\mathcal{H}_3(1), \mathcal{H}_3(2))$ é dada por:

$$B_3(P_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

[1.2] $Y_2 = P_2 \in D_2 \setminus (D_1 \cap D_2)$. Neste caso $D_3 \cap D_1 = \emptyset$ e $D_3 \cap D_2 \neq \emptyset$, portanto $\mathcal{H}_3(2) = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$ e a matriz de incidência de $G_{\mathcal{H}_3} = (\mathcal{H}_3(1), \mathcal{H}_3(2))$ é dada por:

$$B_3(P_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

[1.3] $Y_2 = P_{12} \in D_1 \cap D_2$. Neste caso $D_3 \cap D_1 \neq \emptyset$ e $D_3 \cap D_2 \neq \emptyset$, portanto $\mathcal{H}_3(2) = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$ e a matriz de incidência de $G_{\mathcal{H}_3} = (\mathcal{H}_3(1), \mathcal{H}_3(2))$ é dada por:

$$B_3(P_{12}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Caso Y_2 seja a curva $\Gamma_{12} = D_1 \cap D_2$, após explosão temos $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, $D_3 \cap D_1 \neq \emptyset$ e $D_3 \cap D_2 \neq \emptyset$. Obtemos $\mathcal{H}_3(2) = \{\{1, 3\}, \{2, 3\}\}$ e $\mathcal{H}_3(3) = \emptyset$. Utilizando a ordem lexicográfica no conjunto de arestas $A = \mathcal{H}_3(2)$, a matriz de incidência de $G_{\mathcal{H}_3} = (\mathcal{H}_3(1), \mathcal{H}_3(2))$ é dada por:

$$\mathbf{B}_3(\Gamma_{12}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aqui, como estamos fazendo um blow-up cujo centro é a curva de interseção entre dois divisores, no divisor obtido após blow-up não existe mais a interseção entre D_1 e D_2 ; nestes casos podemos registrar na matriz de incidência qual aresta foi eliminada zerando a coluna referente a esta aresta, obtendo com isso a segunda matriz abaixo:

$$\mathbf{B}_3(\Gamma_{12}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Faremos isto todas as vezes que for interessante registrar na matriz o antes e depois do blow-up cujo centro é uma aresta.

Note que nos casos 1.1, 1.2 e 2 obtemos matrizes de incidência isomorfas: de fato, basta trocar as duas primeiras linhas de $\mathbf{B}_3(P_1)$ para obter $\mathbf{B}_3(P_2)$ e trocar as duas últimas linhas de $\mathbf{B}_3(P_2)$ para obter $\mathbf{B}_3(\Gamma_{12})$. Dessa forma, a matriz de incidência nestes três cenários, difere da matriz a seguir apenas por uma permutação de linhas e/ou colunas

$$\mathbf{B}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Além disso, nos casos 1.1, 1.2 e 2 temos $\mathcal{H}_3(3) = \emptyset$, enquanto na situação 1.3 temos, pela primeira vez, $\mathcal{H}_3(3) = \{\{1,2,3\}\}$. Com isso, o grafo $G_{\mathcal{H}_3}$ é uma árvore nas situações 1.1, 1.2 e 2, e possui um caminho fechado de comprimento 3 apenas na situação 1.3. Isto se deve à existência do ponto triplo, fato que é evidenciado também na matriz de incidência nesta situação:

$$\mathbf{B}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Em todos os casos, vemos que a matriz de incidência representa um grafo *conexo*.

O quarto blow-up $\pi_4 : M_4 \rightarrow M_3$ tem como centro Y_3 que pode ser um ponto $P \in D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$ ou uma curva $\Gamma_{ij} = D_i \cap D_j$, com $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Como nossas análises são sempre locais, quando $D_1 \cap D_2 \cap D_3 = \emptyset$ a situação local é uma repetição dos casos já listados no terceiro blow-up; apresentaremos então somente os casos novos, que aparecem quando $D_1 \cap D_2 \cap D_3 \neq \emptyset$ e envolvem a explosão do ponto triplo.

Supondo então que $D_1 \cap D_2 \cap D_3 = \{Q_{123}\}$, temos duas possibilidades: $Y_3 = \{Q_{123}\}$ ou $Y_3 = \Gamma_{ij}$. Em ambos os casos, obtemos $D_4 = \pi_4^{-1}(Y_3)$ e $\mathcal{H}_4(1) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$. Como antes, analisaremos separadamente cada caso para encontrar $\mathcal{H}_4(2)$ e $\mathcal{H}_4(3)$.

Para facilitar a compreensão do movimento que está sendo causado no divisor pelo blow-up π_4 listamos em $\mathcal{H}_4(2)$ primeiro os elementos que já existiam antes do blow-up e que continuam existindo após, em ordem lexicográfica, como anteriormente; depois acrescentamos os novos elementos que resultam deste blow-up, também obedecendo à ordem lexicográfica. Esta ordenação é estratégica, pois nos permite ver na matriz de incidência do grafo $G_{\mathcal{H}_4}$ a submatriz que corresponde ao grafo $G_{\mathcal{H}_3}$.

Começamos considerando $Y_3 = \{Q_{123}\}$; como Y_3 é um ponto, não alteramos as interseções entre divisores. Além disso, temos $D_4 \cap D_i \neq \emptyset$, para todo $i \in \{1, 2, 3\}$, e portanto $\mathcal{H}_4(2) = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$. Assim, matriz de incidência de $G_{\mathcal{H}_4}$ é

$$B_4(Q_{123}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Note que quaisquer duas linhas desta matriz são diretamente conectadas, portanto o grafo $G_{\mathcal{H}_4}$ é conexo e conseqüentemente o divisor $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$ é também conexo.

Considere agora $Y_3 = \Gamma_{12} = D_1 \cap D_2$; como Y_3 é a curva de interseção dos divisores D_1 e D_2 ocorre que, após blow-up, estes divisores não se intersectam mais e portanto $\{1, 2\} \notin \mathcal{H}_4(2)$. Todavia, ainda temos $\{1, 3\}, \{2, 3\} \in \mathcal{H}_4(2)$. E como $D_4 \cap D_i \neq \emptyset$, para todo $i \in \{1, 2, 3\}$, obtemos $\mathcal{H}_4(2) = \{\{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$. Assim a matriz de incidência de $G_{\mathcal{H}_4}$ é

$$B_4(\Gamma_{12}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Os casos $Y_3 = \Gamma_{13}$ e $Y_3 = \Gamma_{23}$ resultam em grafos e matrizes de incidência isomorfos aos da situação que acabamos de descrever. De fato, se $Y_3 = \Gamma_{13}$, temos $\mathcal{H}_4(2) = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$ e a matriz de incidência de $G_{\mathcal{H}_4}$ é

$$B_4(\Gamma_{13}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

e se $Y_3 = \Gamma_{23}$ temos $\mathcal{H}_4(2) = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$ e a matriz de incidência de $G_{\mathcal{H}_4}$ é

$$B_4(\Gamma_{23}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

De fato, trocando as linhas 2 e 3 de $B_4(\Gamma_{12})$, e depois as colunas 4 e 5 da matriz resultante, obtemos a matriz $B_4(\Gamma_{13})$, portanto estas matrizes são semelhantes, e seus grafos isomorfos. Lembramos que a troca de linhas na matriz de incidência equivale a uma rerrotulagem dos vértices, enquanto que a troca de colunas é uma reordenação do conjunto de arestas. De forma similar, vemos que $B_4(\Gamma_{13})$ e $B_4(\Gamma_{23})$ são semelhantes. Em todos os casos, a matriz de incidência indica que o grafo é conexo.

Nos blow-ups subsequentes $\pi_k : M_k \rightarrow M_{k-1}$ o centro Y_{k-1} será um ponto $P_k \in D$ ou uma curva $\Gamma_{ij} = D_i \cap D_j$; desta forma, recuperamos uma das situações locais descritas anteriormente. Note que em cada blow-up adicionamos uma linha à matriz de incidência - sempre na última posição, uma vez que os vértices nascem ordenados pela ordem dos blow-ups - e adicionamos também uma, duas ou três colunas, a depender da posição de Y_{k-1} em D ; para manter na matriz a memória do blow-up, colocamos estas novas colunas em ordem lexicográfica e ao final da matriz anterior. Em qualquer caso, esta última linha terá entrada igual a 1 em cada uma das novas colunas e 0 no resto, e as colunas que são adicionadas à matriz neste processo indicam a quais vértices o novo vértice estará diretamente conectado. Assim, a cada etapa nasce um vértice conectado ao grafo anterior, que já era conexo.

Acabamos de ver que o grafo $G_{\mathcal{H}_k}$ obtido após blow-up é sempre conexo, e portanto o divisor que ele representa é conexo. Como o processo de redução de singularidades de uma folheação $\mathcal{F} \in (\mathbb{C}^3, 0)$ é finito, obtemos por indução que o grafo do divisor excepcional final é conexo. Portanto, pela Proposição 4.1.2, obtemos que $\mathcal{H}(1)$ é 1-conexo.

4.4 $G_{\mathcal{H}}$ É SIMPLEMENTE CONEXO

Nesta seção, mostramos que o grafo $G_{\mathcal{H}}$ é simplesmente conexo. Para isso precisamos do Teorema de Seifert - Van Kampen, cujo enunciado para o caso mais simples apresentamos abaixo; os enunciados e demonstrações para o caso geral podem ser vistos nos livros (9) e (12).

A seguir, dado um espaço topológico X e um ponto $x_0 \in X$, denotaremos por $\pi_1(X, x_0)$ o grupo fundamental de X com ponto base x_0 .

Teorema 4.4.1 (Teorema de Seifert - Van Kampen). *Sejam X um espaço topológico e U e V conjuntos abertos conexos por caminhos tais que $X = U \cup V$, e seja $x_0 \in U \cap V$*

um ponto base de X . Se $U \cap V$ é conexo por caminhos, então o homomorfismo

$$\Phi : \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

é sobrejetivo e seu núcleo $\text{Ker}(\Phi)$ é um subgrupo normal gerado por todos os elementos da forma $i_{*U}(w)i_{*V}(w)^{-1}$, para $w \in \pi_1(U \cap V, x_0)$, onde $i_{*U} : \pi_1(U \cap V, x_0) \rightarrow \pi_1(U, x_0)$ e $i_{*V} : \pi_1(U \cap V, x_0) \rightarrow \pi_1(V, x_0)$ são os homomorfismos de grupos induzidos pelas funções de inclusão $i_U : U \cap V \hookrightarrow U$ e $i_V : U \cap V \hookrightarrow V$. Consequentemente, Φ induz um isomorfismo

$$\pi_1(X, x_0) \cong \frac{\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)}{\text{Ker}(\Phi)}. \quad (14)$$

Se $j_U : \pi_1(U, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ e $j_V : \pi_1(V, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ são os homomorfismos induzidos pelas inclusões $U \hookrightarrow X$ e $V \hookrightarrow X$, respectivamente. Podemos visualizar o enunciado no seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(U \cap V, x_0) & \xrightarrow{i_{*U}} & \pi_1(U, x_0) \\ i_{*V} \downarrow & & \downarrow j_U \\ \pi_1(V, x_0) & \xrightarrow{j_V} & \pi_1(X, x_0) \cong \frac{\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)}{\text{Ker}(\Phi)} \end{array} \quad (15)$$

Para mostrar que o grafo $G_{\mathcal{H}}$ é simplesmente conexo, começamos com a seguinte proposição:

Proposição 4.4.1. *Sejam I um conjunto mínimo de índices e $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(I)$ um conjunto de listas dado por*

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(1) \cup \mathcal{H}(2) \cup \mathcal{H}(3).$$

Então \mathcal{H} é simplesmente conexo se, e somente se, o grafo $G_{\mathcal{H}}$ é simplesmente conexo.

A demonstração desta proposição será feita por indução na cardinalidade dos conjuntos $(\#I, \#\mathcal{H})$ e envolve vários resultados, como veremos a seguir. Para a maioria dos casos mostramos que ambos \mathcal{H} e $G_{\mathcal{H}}$ têm grupo fundamental trivial. Para o caso $\#I > 3$ e $\mathcal{H}(3) \neq \emptyset$, usamos o Teorema de Seifert-Van Kampen 4.4.1 para mostrar que os grupos fundamentais são isomorfos.

Caso 1: $(\#I, \#\mathcal{H}) = (1, 1)$. Neste caso, $\mathcal{H} = \mathcal{H}(1) = \{\{1\}\}$ e $G_{\mathcal{H}} = (\{\{1\}\}, \emptyset)$ é o grafo trivial, logo

$$\pi_1(\mathcal{H}, \{1\}) = \pi_1(G_{\mathcal{H}}, \{1\}) = \{e\}.$$

Caso 2: $\#I = 2$. Já vimos no Capítulo 3 que $\mathcal{H} = \{\{\{1\}, \{2\}\}, \{\{1, 2\}\}\}$ é simplesmente conexo: de fato, além dos 0-caminhos constantes $\gamma_1 = (\{1\})$ e $\gamma_2 = (\{2\})$, os

outros dois caminhos fechados são $\tilde{\gamma}_1 = (\{1\}, \{2\}, \{1\})$ e $\tilde{\gamma}_2 = (\{2\}, \{1\}, \{2\})$, que são homotopicamente equivalentes a γ_1 e γ_2 , respectivamente (ver Seção 3.1). Por outro lado, $G_{\mathcal{H}} = (\{\{1\}, \{2\}\}, \{\{1,2\}\})$ é uma árvore finita, logo contrátil, e como tal simplesmente conexa (13). Assim

$$\pi_1(\mathcal{H}, \{i\}) = \pi_1(G_{\mathcal{H}}, \{i\}) = \{e\}.$$

Para o restante da etapa de indução, vamos separar os casos $\mathcal{H}(3) = \emptyset$ e $\mathcal{H}(3) \neq \emptyset$.

Caso 3: $\#I \geq 3$ e $\mathcal{H}(3) = \emptyset$. Intuitivamente, nesta situação \mathcal{H} e $G_{\mathcal{H}}$ são essencialmente o mesmo conjunto, e já sabemos do Capítulo 3 que \mathcal{H} é simplesmente conexo. Abaixo enunciaremos alguns lemas que transportam propriedades de \mathcal{H} para o grafo. Consideraremos caminhos fechados *não triviais*, segundo a Definição 3.1.3.

Lema 4.4.1. *Se $\#I \geq 3$ e $\mathcal{H}(3) = \emptyset$, então não há caminho fechado não trivial em \mathcal{H} .*

Demonstração: Suponha que exista um 0-caminho fechado não trivial γ em \mathcal{H} ; note que isso implica que o comprimento de γ é $s \geq 3$. Suponha primeiro $s = 3$; então $\gamma = (\{i_1\}, \{i_2\}, \{i_3\}, \{i_1\})$. Isso implica que $\{i_1, i_2\}$, $\{i_2, i_3\}$ e $\{i_1, i_3\}$ são elementos de $\mathcal{H}(2)$. Pela construção de \mathcal{H} proveniente da redução de singularidades vista no Capítulo 3, isto implica que $\mathcal{H}(3) \neq \emptyset$, o que nos dá uma contradição. O mesmo argumento se repete no caso $s > 3$. ■

Dado $i \in I$, denote por $Star(\mathcal{H}, i)$ o conjunto

$$Star(\mathcal{H}, i) = \{j \in I \mid \{i\}, \{i, j\} \in \mathcal{H}\}.$$

Lema 4.4.2. *Se $\#I \geq 3$ e $\mathcal{H}(3) = \emptyset$, existe $i \in I$ tal que $\#Star(\mathcal{H}, i) = 1$.*

Demonstração: Começemos com um conjunto $J_1 = \{j_0, j_1\} \in \mathcal{H}(2)$, com $\{j_0\}, \{j_1\} \in \mathcal{H}(1)$. Se $\#Star(\mathcal{H}, j_1) = 1$, acabamos. Se $\#Star(\mathcal{H}, j_1) \neq 1$, então $\{j_1\}$ pertence a outro conjunto $J_2 = \{j_1, j_2\} \in \mathcal{H}(2)$. Caso $\#Star(\mathcal{H}, j_2) = 1$ acabamos. Se $\#Star(\mathcal{H}, j_2) \neq 1$, então $\{j_2\}$ pertence a outro conjunto $J_3 = \{j_2, j_3\} \in \mathcal{H}(2)$, e assim por diante. Como \mathcal{H} é finito, devemos chegar a um $j_n \in I$ com $\#Star(\mathcal{H}, j_n) = 1$ ou a um conjunto $J_n = \{j_{n-1}, j_n\}$, no qual $\{j_n\}$ coincide com um dos $\{j_s\}$ anteriores (suponha, sem perda de generalidade, que seja $j_n = j_0$). Obtemos assim um 0-caminho fechado não trivial $\gamma = (\{j_0\}, \{j_1\}, \dots, \{j_{n-1}\}, \{j_0\})$, o que contradiz o Lema 4.4.1. ■

Lema 4.4.3. *Se $\#I \geq 2$ e $\mathcal{H}(3) = \emptyset$, então todo 0-caminho fechado em \mathcal{H} é homotópico a um caminho constante.*

Demonstração: Como $2 \leq \#I < \infty$ temos que $1 \leq \#\mathcal{H}(2) < \infty$; vamos então usar a indução no número de elementos de $\mathcal{H}(2)$. O caso $\#\mathcal{H}(2) = 1$ é imediato, como observamos no Caso 2 da Proposição 4.4.1. Suponha o resultado válido para todo conjunto $\mathcal{H} = \mathcal{H}(1) \cup \mathcal{H}(2)$, com $\#\mathcal{H}(2) = n$.

Considere um conjunto $\mathcal{H} = \mathcal{H}(1) \cup \mathcal{H}(2)$, com $\#\mathcal{H}(2) = n+1$. Pelo Lema 4.4.2, existe $i \in I$ tal que $\#\text{Star}(\mathcal{H}, i) = 1$, logo existe um único $j \in I$ tal que $\{i, j\} \in \mathcal{H}(2)$. Escreva $\mathcal{H}(1) = \{\{i\}\} \cup \mathcal{H}'(1)$, para $\mathcal{H}'(1) = \mathcal{H}(1) \setminus \{\{i\}\}$ e $\mathcal{H}(2) = \{\{i, j\}\} \cup \mathcal{H}'(2)$, para $\mathcal{H}'(2) = \mathcal{H}(2) \setminus \{\{i, j\}\}$. Então $\#\mathcal{H}'(2) = n$ e portanto, por hipótese de indução, o resultado vale para o conjunto $\mathcal{H}' = \mathcal{H}'(1) \cup \mathcal{H}'(2)$.

Dado qualquer 0-caminho fechado γ em \mathcal{H} que contém $\{i\}$, γ necessariamente contém o subcaminho fechado $(\{j\}, \{i\}, \{j\})$, que é homotopicamente equivalente ao caminho constante $(\{j\})$; portanto γ é homotopicamente equivalente a um caminho fechado $\tilde{\gamma}$ em \mathcal{H}' que contém $\{j\}$. Por indução, o resultado segue. ■

O Lema 4.4.3 mostra que \mathcal{H} é contrátil, logo simplesmente conexo. Portanto, $\pi_1(\mathcal{H}, \{i\}) = \{e\}$. Os Lemas 4.4.1 e 4.4.2 implicam que $G_{\mathcal{H}}$ é uma árvore finita e o Lema 4.4.3 implica que $G_{\mathcal{H}}$ é contrátil, logo simplesmente conexo. Portanto, $\pi_1(G_{\mathcal{H}}, \{i\}) = \{e\}$.

Caso 4: $\#I \geq 3$ e $\mathcal{H}(3) \neq \emptyset$.

Caso 4.1: $\#I = 3$. Então $I = \{1, 2, 3\}$,

$$\mathcal{H} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Já vimos no Capítulo 3 que \mathcal{H} é simplesmente conexo, mas repetiremos aqui o argumento para a completude desta demonstração.

Temos que $\gamma' = (\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1\})$ é um 0-caminho fechado não trivial em \mathcal{H} . Mostraremos que γ' é homotópico ao 0-caminho constante $\gamma = (\{1\})$ (sem perda de generalidade, este argumento vale para os demais caminhos fechados). Basta considerar em \mathcal{H} o par homotópico elementar $(\varepsilon, \varepsilon') = ((\{1\}, \{2\}), (\{1\}, \{3\}, \{2\}))$. Tomando 0-caminhos $\delta = (\{1\})$ e $\rho = (\{2\}, \{1\})$, vemos que

$$\begin{aligned} \gamma &= \delta * \varepsilon * \rho \Rightarrow (\{1\}) = (\{1\}) * (\{1\}, \{2\}) * (\{2\}, \{1\}), \\ \gamma' &= \delta * \varepsilon' * \rho \Rightarrow (\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1\}) = (\{1\}) * (\{1\}, \{3\}, \{2\}) * (\{2\}, \{1\}). \end{aligned}$$

Com isso obtemos $\pi_1(\mathcal{H}, \{i_1\}) = \{e\}$.

Agora, o grafo associado à \mathcal{H} é

$$G_{\mathcal{H}} = (\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}, \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}).$$

Sejam i_1, i_2, i_3 pontos linearmente independentes em \mathbb{R}^2 relacionados aos índices 1, 2, 3. Uma realização geométrica (desenho) de $G_{\mathcal{H}}$ é dada (via homeomorfismo) por:

$$|G_{\mathcal{H}}| = \{i_1 + v \cdot (i_2 - i_1) + u \cdot (i_3 - i_1) \mid v, u \in [0, 1] \text{ e } v + u = 1\}.$$

Considere a função contínua $\varphi : |G_{\mathcal{H}}| \times [0, 1] \rightarrow G_{\mathcal{H}}$, tal que para cada $x = i_1 + v \cdot (i_2 - i_1) + u \cdot (i_3 - i_1)$ em $|G_{\mathcal{H}}|$, e cada $t \in [0, 1]$ temos

$$\varphi(x, t) = (1 - t) \cdot i_1 + t \cdot [i_1 + v \cdot (i_2 - i_1) + u \cdot (i_3 - i_1)].$$

Note que $\varphi(x, 0) = i_1$ e $\varphi(x, 1) = i_1 + v \cdot (i_2 - i_1) + u \cdot (i_3 - i_1)$.

Assim φ é uma homotopia entre a função $Id : |G_{\mathcal{H}}| \rightarrow |G_{\mathcal{H}}|$ e a aplicação constante $f : |G_{\mathcal{H}}| \rightarrow \{i_1\}$. Portanto $|G_{\mathcal{H}}|$ é contrátil (13) e como consequência $\pi_1(G_{\mathcal{H}}, \{i_1\}) = \{e\}$.

Caso 4.2: $\#I > 3$.

Como $\mathcal{H}(3) \neq \emptyset$, existe um conjunto $J = \{i_1, i_2, i_3\} \in \mathcal{H}(3)$. Considere os conjuntos $U = \mathcal{P}(J)$ e $V = \mathcal{H} \setminus \{J\}$. Note que $U \cap V = \{\{i_1\}, \{i_2\}, \{i_3\}, \{i_1, i_2\}, \{i_1, i_3\}, \{i_2, i_3\}\}$, à qual podemos relacionar o 0-caminho fechado $\gamma = (\{i_1\}, \{i_2\}, \{i_3\}, \{i_1\})$ em \mathcal{H} . Note também que $\mathcal{H} = U \cup V = (\mathcal{P}(J)) \cup (\mathcal{H} \setminus \{J\})$.

Como U e V são 0-conexos, podemos aplicar o Teorema de Seifert-Van Kampen 4.4.1: se $i_1 \in U \cap V$ temos

$$\pi_1(\mathcal{H}, \{i_1\}) \cong \frac{\pi_1(U, \{i_1\}) * \pi_1(V, \{i_1\})}{\langle \gamma \rangle}.$$

Pelo Caso 4.1, $\pi_1(U, \{i_1\}) = \{e\}$. Logo

$$\pi_1(\mathcal{H}, \{i_1\}) \cong \frac{\pi_1(V, \{i_1\})}{\langle \gamma \rangle}.$$

Passando para grafos temos que $G_{\mathcal{H}} = G_U \cup G_V$. Como G_U e G_V são conexos, são também conexos por caminhos; ademais, $G_{U \cap V}$ é um subgrafo de $G_{\mathcal{H}}$ e o grafo do caminho fechado γ , logo é conexo.

Podemos novamente aplicar o Teorema de Seifert-Van Kampen 4.4.1: se $i_1 \in G_U \cap G_V$, temos

$$\pi_1(G_{\mathcal{H}}, \{i_1\}) \cong \frac{\pi_1(G_U, \{i_1\}) * \pi_1(G_V, \{i_1\})}{\langle G_{U \cap V} \rangle}.$$

Pelo Caso 4.1 $\pi_1(G_U, \{i_1\}) = \{e\}$, logo,

$$\pi_1(G_{\mathcal{H}}, \{i_1\}) \cong \frac{\pi_1(G_V, \{i_1\})}{\langle G_{U \cap V} \rangle}.$$

Agora, como $V \cong G_V$ e $\langle \gamma \rangle \cong G_{U \cap V}$, decorre que

$$\frac{\pi_1(G_V, \{i_1\})}{\langle G_{U \cap V} \rangle} \cong \frac{\pi_1(V, \{i_1\})}{\langle \gamma \rangle} \Rightarrow \pi_1(G_{\mathcal{H}}, \{i_1\}) \cong \pi_1(\mathcal{H}, \{i_1\}).$$

Isso conclui a demonstração da Proposição 4.4.1.

Segue do Teorema 3.1.1 que $G_{\mathcal{H}}$ é simplesmente conexo.

5 HOMOLOGIA SIMPLICIAL DO DIVISOR

Neste capítulo construímos o complexo simplicial $K_{\mathcal{H}}$ relacionado à Lista \mathcal{H} . Na Seção 5.1, apresentamos uma breve revisão de literatura sobre homologia simplicial, incluindo resultados sobre a conexidade de um complexo simplicial. Na Seção 5.2, apresentamos a definição e propriedades iniciais do complexo simplicial $K_{\mathcal{H}}$. Na Seção 5.3, calculamos o grupo de homologia $H_0(K_{\mathcal{H}})$ da vizinhança de um ponto triplo, e na Seção 5.4, fazemos a colagem dos complexos simpliciais na vizinhança de dois pontos triplos utilizando a sequência de Mayer-Vietoris.

5.1 COMPLEXOS SIMPLICIAIS

Apresentamos nesta seção os resultados que relacionam a conexidade do complexo simplicial K com seu grupo de homologia $H_0(K)$. Usamos estes resultados nas seções seguintes para estudar a conexidade do complexo simplicial que representa o divisor total D , oriundo de uma redução de singularidades. Para mais detalhes, verificar as referências (9), (14) e (16).

Dizemos que os pontos $V_1, \dots, V_m, V_{m+1} \in \mathbb{R}^n$ são *linearmente independentes* quando os vetores $V_2 - V_1, V_3 - V_1, \dots, V_{m+1} - V_1 \in \mathbb{R}^n$ são linearmente independentes.

Dados os pontos linearmente independentes V_1, \dots, V_m, V_{m+1} de \mathbb{R}^n , o *simplexo m -dimensional* (ou simplesmente *m -simplexo*) que tem estes pontos como vértices é o conjunto

$$S = \langle V_1, V_2, \dots, V_m, V_{m+1} \rangle$$

de todas as combinações afins $p = \sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i V_i$, com $\alpha_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i = 1$.

Fixado um subconjunto $\{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, m+1\}$, o simplexo $\langle V_{i_1}, \dots, V_{i_k} \rangle$ é chamado *face de S* . Um 0-simplexo $\langle V_i \rangle$ é um ponto (ou vértice), um 1-simplexo $\langle V_i, V_j \rangle$ é um segmento de reta (ou aresta), e um 2-simplexo $\langle V_i, V_j, V_k \rangle$ é um triângulo de vértices V_i, V_j, V_k , com seu interior incluído.

Considere $V_1 = (0,0)$, $V_2 = (1,0)$ e $V_3 = (0,1)$ pontos linearmente independentes em \mathbb{R}^2 . Temos, por exemplo, o 0-simplexo $\langle V_1 \rangle$ que é um ponto (ou vértice), o 1-simplexo $\langle V_1, V_2 \rangle$ que é um segmento de reta (ou aresta), e o 2-simplexo $\langle V_1, V_2, V_3 \rangle$ que é um triângulo de vértices V_1, V_2, V_3 , com seu interior incluído, como mostra a figura 18. Observe que o 2-simplexo $\langle V_1, V_2, V_3 \rangle$ tem como faces os 1-simplexos $\langle V_1, V_2 \rangle$, $\langle V_1, V_3 \rangle$ e $\langle V_2, V_3 \rangle$ e cada 1-simplexo $\langle V_i, V_j \rangle$ tem como faces os 0-simplexos $\langle V_i \rangle$ e $\langle V_j \rangle$.

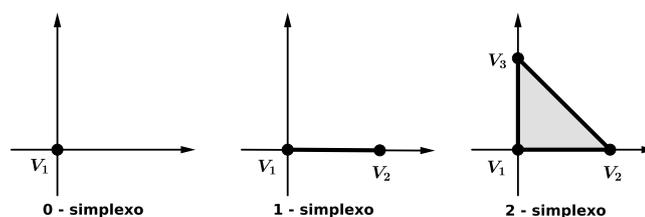


Figura 18 – Simplexos

Definição 5.1.1. Um complexo simplicial K é uma coleção finita de simplexos de \mathbb{R}^n com as seguintes propriedades: i) cada face de um simplexo de K é um simplexo de K ; ii) a interseção de dois simplexos de K é vazia ou uma face de ambos.

O complexo simplicial mais simples é um simplexo juntamente com suas faces. A dimensão de um complexo simplicial é a maior dimensão de um dos seus simplexos. Observe que um grafo é um *complexo simplicial* 1-dimensional.

Seguindo as notações de (9), definimos uma orientação sobre um complexo simplicial como segue: se $m > 0$, uma *orientação* em $S = \langle V_1, V_2, \dots, V_m, V_{m+1} \rangle$ é uma escolha de uma classe de equivalência na ordem dos vértices de S , onde duas ordens são equivalentes se diferem por uma permutação par, no sentido da álgebra, isto é, se para obter uma ordem a partir da outra é necessário fazer um número par de transposições. Considerando a ordem $V_1 < V_2 < \dots < V_m < V_{m+1}$, para o conjunto de pontos linearmente independentes $V_1, V_2, \dots, V_m, V_{m+1} \in \mathbb{R}^n$, denotaremos por $S = [V_1, V_2, \dots, V_m, V_{m+1}]$ o m -simplexo orientado com esta ordem. Se $m = 0$, um 0-simplexo orientado é um par (S, ε) onde S é um 0-simplexo $S = (V_j)$, e $\varepsilon = \pm 1$.

Dada uma face S_i de um m -simplexo $S = \langle V_1, V_2, \dots, V_m, V_{m+1} \rangle$, a orientação $S = [V_1, V_2, \dots, V_m, V_{m+1}]$ induz uma orientação em $S_i = \langle V_1, V_2, \dots, \widehat{V}_i, \dots, V_m, V_{m+1} \rangle$, dada por $S_i = (-1)^{i-1} [V_1, V_2, \dots, \widehat{V}_i, \dots, V_m, V_{m+1}]$, aqui \widehat{V}_i significa que estamos excluindo o vértice V_i do m -simplexo S , e olhando para o $(m - 1)$ -simplexo restante.

Considere um complexo simplicial K . Dado o grupo abeliano livre gerado pelos r -simplexos orientados de K , $\overline{C}_r(K) = \{ \sum_S n_S S \mid S = [V_1, V_2, \dots, V_r, V_{r+1}], n_S \in \mathbb{Z} \}$, definimos o grupo gerado pelas r -cadeias simpliciais K , orientadas positivamente, como o conjunto $C_r(K) = \overline{C}_r(K) / \sim$, onde $(-1)S = -S$. Um elemento de $C_r(K)$ é chamado uma r -cadeia. Se $r > \dim K$, definimos $C_r(K) = 0$.

Como $C_r(K)$ é um grupo abeliano livre, se $\dim C_r(K) = d$, então

$$C_r(K) \cong \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_d .$$

Para cada r -simplexo orientado $S = [V_1, \dots, V_{r+1}]$ de $C_r(K)$, definimos o opera-

dor bordo $\partial_r : C_r(K) \rightarrow C_{r-1}(K)$ por

$$\partial_r([V_1, \dots, V_{r+1}]) = \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i-1} [V_1, \dots, \widehat{V}_i, \dots, V_{r+1}].$$

Por exemplo, um 0-simplexo orientado $S = [V]$ não possui bordo: $\partial_0([V]) = 0$. Para um 1-simplexo orientado $S = [V_1, V_2]$ temos $\partial_1([V_1, V_2]) = V_2 - V_1$. Enquanto que, para um 2-simplexo, $S = [V_1, V_2, V_3]$ temos que, $\partial_2([V_1, V_2, V_3]) = [V_2, V_3] - [V_1, V_3] + [V_1, V_2]$; veja a Figura 19:

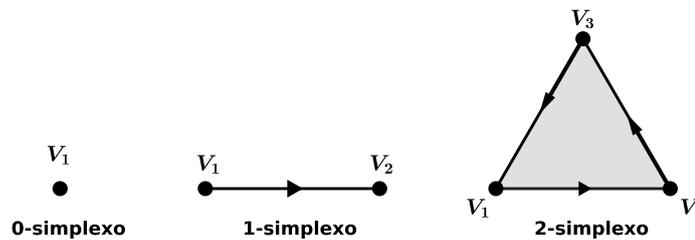


Figura 19 – Simplexos orientados

Seja K um complexo simplicial de dimensão m . A sequência de grupos abelianos livres e homomorfismos,

$$0 \xrightarrow{\iota} C_m(K) \xrightarrow{\partial_m} C_{m-1}(K) \xrightarrow{\partial_{m-1}} \dots \xrightarrow{\partial_2} C_1(K) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

onde $\iota : 0 \hookrightarrow C_m(K)$ é a função inclusão, é um *complexo de cadeias*.

O lema a seguir mostra que um complexo de cadeias é uma sequência exata.

Lema 5.1.1. (9) A composição $C_{r+1}(K) \xrightarrow{\partial_{r+1}} C_r(K) \xrightarrow{\partial_r} C_{r-1}(K)$ é o homomorfismo nulo, isto é, $\partial_r(\partial_{r+1}(c)) = 0$, para todo $c \in C_{r+1}(K)$.

Disto decorre que $Im(\partial_{r+1}) \subset Ker(\partial_r)$. Assim, definimos o *grupo de homologia simplicial* $H_r(K)$ de K como o grupo quociente

$$H_r(K) = \frac{Ker(\partial_r)}{Im(\partial_{r+1})}.$$

Os resultados abaixo, retirados de (16), mostram que para estudar a conexidade de um complexo simplicial K é suficiente encontrar o grupo de homologia $H_0(K)$. Por este motivo, nas seções a seguir iremos calcular o grupo de homologia $H_0(K_{\mathcal{H}})$, do complexo simplicial $K_{\mathcal{H}}$ associado ao conjunto \mathcal{H} .

Teorema 5.1.1. Se K é um complexo simplicial conexo, então $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$.

Teorema 5.1.2. *Se K é um complexo simplicial não conexo cujas componentes conexas disjuntas são K_1, \dots, K_n , então*

$$H_r(K) = H_r(K_1) \oplus H_r(K_2) \oplus \dots \oplus H_r(K_n) .$$

Corolário 5.1.1. *Se K é um complexo simplicial, são válidas:*

- Se K_1, \dots, K_n são componente conexas disjuntas de K , então

$$H_0(K) \cong \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_n$$

- Se $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$, K é conexo.

Assim concluímos que $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$ se e somente se K é conexo.

5.2 O COMPLEXO SIMPLICIAL DE \mathcal{H}

Por meio de uma função φ , associamos a cada elemento $\{i\}$ de $\mathcal{H}(1)$ um ponto $\langle V_i \rangle$ em \mathbb{R}^2 , a cada elemento $\{i, j\}$ de $\mathcal{H}(2)$ um segmento de reta $\langle V_i, V_j \rangle$ em \mathbb{R}^2 , e a cada elemento $\{i, j, k\} \in \mathcal{H}(3)$ um triângulo de vértices $\langle V_i, V_j, V_k \rangle$ em \mathbb{R}^2 , isto é,

$$\varphi : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$J \mapsto \langle J \rangle = \begin{cases} \langle V_i \rangle; & \text{se } J = \{i\}, \\ \langle V_i, V_j \rangle; & \text{se } J = \{i, j\}, \\ \langle V_i, V_j, V_k \rangle; & \text{se } J = \{i, j, k\}. \end{cases}$$

Assim, para $J \in \mathcal{H}(r+1)$, com $r = 0, 1, 2$, temos que $\varphi(J) = \langle J \rangle = S^J \in \mathbb{R}^2$ é um r -simplexo. Logo $\varphi(\mathcal{H}(1)) = \Delta_0$ é o conjunto dos 0-simplexos, $\varphi(\mathcal{H}(2)) = \Delta_1$ é o conjunto dos 1-simplexos e $\varphi(\mathcal{H}(3)) = \Delta_2$ é o conjunto dos 2-simplexos, todos eles associados ao conjunto de listas \mathcal{H} . As faces $S^{J'}$ de S^J são imagens de subconjuntos $J' \subset J$ pela função φ .

Dado um subconjunto $A \subset \mathcal{H}$, denotamos por K_A o complexo simplicial definido por $K_A = \bigcup_{J \in A} S^J$, considerado como subespaço topológico de \mathbb{R}^2 . Em particular,

$$Im(\varphi) = K_{\mathcal{H}} = \bigcup_{J \in \mathcal{H}} S^J .$$

Portanto, $K_{\mathcal{H}} = \Delta_0 \cup \Delta_1 \cup \Delta_2 \in \mathbb{R}^2$ é o complexo simplicial associado a \mathcal{H} .

Dada a definição de $K_{\mathcal{H}}$, obtemos a seguinte

Proposição 5.2.1. *O complexo simplicial $K_{\mathcal{H}}$ é conexo se, e somente se, \mathcal{H} é 0-conexo.*

Demonstração: O complexo simplicial $K_{\mathcal{H}}$ é conexo se dados quaisquer dois 0-simplexos $\langle V_j \rangle, \langle V_{j'} \rangle$ existe uma sequência de 1-simplexos

$$\Gamma : (\langle V_i, V_{i_2} \rangle, \langle V_{i_2}, V_{i_3} \rangle, \dots, \langle V_{i_n}, V_{i'} \rangle) .$$

Por outro lado, \mathcal{H} é 0-conexo se dados quaisquer dois índices $\{i\}, \{i'\} \in \mathcal{H}(1)$, existe um 0-caminho

$$\gamma = (\{i\}, \{i_2\}, \{i_3\}, \dots, \{i_n\}, \{i'\})$$

em \mathcal{H} ligando-os.

Como $\varphi(\{j\}) = \langle V_j \rangle$ e $\varphi(\{j, k\}) = \langle V_j, V_k \rangle$ temos $\{j\} \in \mathcal{H}(1)$ se e só se $\langle V_j \rangle$ é um 0-simplexo de $K_{\mathcal{H}}$ e $\{j, k\} \in \mathcal{H}(2)$ se e só se $\langle V_j, V_k \rangle$ é um 1-simplexo de $K_{\mathcal{H}}$. Portanto, segue que $K_{\mathcal{H}}$ é conexo se e só se \mathcal{H} é 0-conexo. ■

Repetindo os argumentos da Proposição 4.4.1, obtemos também a seguinte

Proposição 5.2.2. *O complexo simplicial $K_{\mathcal{H}}$ é simplesmente conexo se, e somente se, \mathcal{H} é simplesmente conexo.*

Para um complexo simplicial $K \neq \emptyset$, considere a seguinte sequência de grupos de r -cadeias $C_r(K)$ e morfismos ∂_r

$$0 \xrightarrow{\iota} C_2(K) \xrightarrow{\partial_2} C_1(K) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

em que ι é o operador inclusão e ∂_2, ∂_1 e ∂_0 são os operadores bordo. Então $\partial_0 \circ \partial_1 = 0$, e $\partial_1 \circ \partial_2 = 0$, implicando $Im(\partial_1) \subset Ker(\partial_0)$ e $Im(\partial_2) \subset Ker(\partial_1)$, respectivamente.

O grupo de homologia simplicial é portanto

$$H_0(K) = \frac{Ker(\partial_0)}{Im(\partial_1)} .$$

Se $H_0(K) \neq \mathbb{Z}$, temos que K não é conexo (ver Corolário 5.1.1).

Além disso, o segundo grupo de homologia simplicial,

$$H_1(K) = \frac{Ker(\partial_1)}{Im(\partial_2)} ,$$

intuitivamente conta o número de buracos de dimensão 1 em K .

Como estamos considerando um complexo simplicial $K_{\mathcal{H}}$ relacionado à lista \mathcal{H} oriunda de um divisor excepcional, temos que $H_1(K_{\mathcal{H}}) \cong \{0\}$. De fato, a presença de um ponto triplo em \mathcal{H} implica na presença de um 2-simplexo correspondente em $K_{\mathcal{H}}$.

5.3 GRUPOS DE HOMOLOGIA DA VIZINHANÇA DE UM PONTO TRIPLO

Considere um ponto triplo $P = D_1 \cap D_2 \cap D_3$, cuja vizinhança é descrita pelo conjunto $\mathcal{H} = \mathcal{H}(1) \cup \mathcal{H}(2) \cup \mathcal{H}(3)$ dado por:

$$\mathcal{H}(1) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\} ;$$

$$\mathcal{H}(2) = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}\} ;$$

$$\mathcal{H}(3) = \{\{1, 2, 3\}\} ,$$

para o qual obtemos o complexo simplicial $K_{\mathcal{H}} = \Delta_0 \cup \Delta_1 \cup \Delta_2 \in \mathbb{R}^2$;

$$\begin{aligned}\Delta_0(K_{\mathcal{H}}) &= \{[V_1], [V_2], [V_3]\} ; \\ \Delta_1(K_{\mathcal{H}}) &= \{[V_1, V_2], [V_2, V_3], [V_1, V_3]\} ; \\ \Delta_2(K_{\mathcal{H}}) &= \{[V_1, V_2, V_3]\} .\end{aligned}$$

Vamos calcular os grupos de homologia $H_0(K_{\mathcal{H}})$ e $H_1(K_{\mathcal{H}})$. Considerando os simplexos $\Delta_i(K_{\mathcal{H}})$ como grupos nos quais cada um dos elementos é um gerador, temos

$$\begin{aligned}C_0(K_{\mathcal{H}}) &= \mathbb{Z}[V_1] \oplus \mathbb{Z}[V_2] \oplus \mathbb{Z}[V_3] ; \\ C_1(K_{\mathcal{H}}) &= \mathbb{Z}[V_1, V_2] \oplus \mathbb{Z}[V_2, V_3] \oplus \mathbb{Z}[V_1, V_3] ; \\ C_2(K_{\mathcal{H}}) &= \mathbb{Z}[V_1, V_2, V_3] .\end{aligned}$$

Considere a seguinte sequência exata

$$\cdots \longrightarrow C_2(K_{\mathcal{H}}) \xrightarrow{\partial_2} C_1(K_{\mathcal{H}}) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K_{\mathcal{H}}) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

na qual ∂_2 , ∂_1 e ∂_0 são os operadores bordo. Temos:

$$\partial_0 : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \{0\}$$

e portanto $\text{Ker}(\partial_0) = \text{Dom}(\partial_0) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \mathbb{Z}[V_1] \oplus \mathbb{Z}[V_2] \oplus \mathbb{Z}[V_3]$.

Agora,

$$\begin{aligned}\partial_1 : \mathbb{Z}[V_1, V_2] \oplus \mathbb{Z}[V_2, V_3] \oplus \mathbb{Z}[V_1, V_3] &\rightarrow \mathbb{Z}[V_1] \oplus \mathbb{Z}[V_2] \oplus \mathbb{Z}[V_3] \\ (i, j, k) &\mapsto (-k - i, i - j, j + k)\end{aligned}$$

Temos

$$i\partial_1[V_1, V_2] = i(V_2 - V_1) ; \quad j\partial_1[V_2, V_3] = j(V_3 - V_2) ; \quad k\partial_1[V_1, V_3] = k(V_3 - V_1) .$$

Assim, o bordo de $K_{\mathcal{H}}$ é

$$\begin{aligned}\partial_1(K_{\mathcal{H}}) &= i\partial_1[V_1, V_2] + j\partial_1[V_2, V_3] + k\partial_1[V_1, V_3] \\ &= iV_2 - iV_1 + jV_3 - jV_2 + kV_3 - kV_1 \\ &= (-k - i)V_1 + (i - j)V_2 + (j + k)V_3\end{aligned}$$

Observe que $\text{Im}(\partial_1)$ é gerada por

$$\sigma_1 = V_2 - V_1 ; \quad \sigma_2 = V_3 - V_2 ; \quad \sigma_3 = V_3 - V_1$$

e temos que

$$\sigma_3 = V_3 - V_1 = V_3 - V_2 + V_2 - V_1 = \sigma_2 - \sigma_1 .$$

Logo $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ é linearmente dependente, e como $\sigma_3 = \sigma_2 - \sigma_1$, decorre que $\{\sigma_1, \sigma_2\}$ é linearmente independente e uma base para a $Im(\partial_1)$. Assim

$$Im(\partial_1) = \mathbb{Z}[\sigma_1] \oplus \mathbb{Z}[\sigma_2]$$

Um elemento (i, j, k) pertence ao $Ker(\partial_1)$ se, e somente se, $\partial_1((i, j, k)) = 0$, ou seja, se

$$\begin{cases} -k - i = 0 \\ i - j = 0 \\ j + k = 0 . \end{cases}$$

Logo $Ker(\partial_1) = \{(i, i, -i) \mid i \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}([V_1, V_2] + [V_2, V_3] - [V_1, V_3]) \cong \mathbb{Z}$.

Finalmente,

$$\begin{aligned} \partial_2 : \mathbb{Z}[V_1, V_2, V_3] &\rightarrow \mathbb{Z}[V_1, V_2] \oplus \mathbb{Z}[V_2, V_3] \oplus \mathbb{Z}[V_1, V_3] \\ i &\mapsto (i, i, -i) \end{aligned}$$

Vamos verificar que o conjunto imagem de ∂_2 é de fato gerado por $(i, i, -i)$ e que o operador está bem definido dessa forma. Temos pela definição que

$$\partial_2([V_1, V_2, V_3]) = [V_1, V_2] + [V_2, V_3] - [V_1, V_3] ,$$

e sabemos que

$$\begin{aligned} \partial_1(K_{\mathcal{H}}) &= i\partial_1([V_1, V_2]) + j\partial_1([V_2, V_3]) - k\partial_1([V_1, V_3]) \\ &= (-k - i)V_1 + (i - j)V_2 + (j + k)V_3 . \end{aligned}$$

Assim obtemos

$$\begin{aligned} \partial_1(\partial_2(K_{\mathcal{H}})) &= \partial_1([V_1, V_2]) + \partial_1([V_2, V_3]) - \partial_1([V_1, V_3]) \\ &= (V_2 - V_1) + (V_3 - V_2) - (V_3 - V_1) = 0 \end{aligned}$$

o que mostra que o operador está bem definido, e que

$$Im(\partial_2) \cong \mathbb{Z}([V_1, V_2] + [V_2, V_3] - [V_1, V_3]) \cong \mathbb{Z} .$$

Portanto,

$$H_0(K_{\mathcal{H}}) = \frac{Ker(\partial_0)}{Im(\partial_1)} = \frac{\mathbb{Z}[V_1] \oplus \mathbb{Z}[V_2] \oplus \mathbb{Z}[V_3]}{\mathbb{Z}[\sigma_1] \oplus \mathbb{Z}[\sigma_2]}$$

Vamos mostrar que $H_0(K_{\mathcal{H}}) \cong \mathbb{Z}$; para isso vamos verificar quais são as classes de equivalência de H_0 . Como o $Ker(\partial_0)$ é gerado por $\{[V_1], [V_2], [V_3]\}$, basta calcular

as classes de equivalência de cada um desses elementos. Por definição temos, para $i = 1, 2, 3$, $[V_i] = V_i + \mathbb{Z}[\sigma_1] \oplus \mathbb{Z}[\sigma_2]$. Além disso,

$$V_2 - V_1 = 1(V_2 - V_1) + 0(V_3 - V_2) \Rightarrow V_2 - V_1 \in \mathbb{Z}[V_1, V_2] \oplus \mathbb{Z}[V_2, V_3],$$

$$V_3 - V_2 = 0(V_2 - V_1) + 1(V_3 - V_2) \Rightarrow V_3 - V_2 \in \mathbb{Z}[V_1, V_2] \oplus \mathbb{Z}[V_2, V_3],$$

$$V_3 - V_1 = 1(V_2 - V_1) + 1(V_3 - V_2) \Rightarrow V_3 - V_1 \in \mathbb{Z}[V_1, V_2] \oplus \mathbb{Z}[V_2, V_3].$$

Pela transitividade da relação de equivalência, obtemos

$$V_1 \sim V_2 \sim V_3 \Rightarrow [V_1] = [V_2] = [V_3].$$

Com isso, mostramos o seguinte

Lema 5.3.1. $H_0(K_{\mathcal{H}}) \cong \mathbb{Z}$.

Isto confirma que $K_{\mathcal{H}}$ tem uma única componente conexa. Além disso, temos que

$$H_1(K_{\mathcal{H}}) = \frac{\text{Ker}(\partial_1)}{\text{Im}(\partial_2)} = \frac{\mathbb{Z}([V_1, V_2] + [V_2, V_3] - [V_1, V_3])}{\mathbb{Z}([V_1, V_2] + [V_2, V_3] - [V_1, V_3])} \cong \{0\}$$

mostrando que $K_{\mathcal{H}}$ não possui buracos unidimensionais.

5.4 COLAGEM UTILIZANDO A SEQUÊNCIA DE MAYER-VIETORIS

Nesta seção queremos colar o complexo simplicial de dois pontos triplos. Para fazer isto utilizamos a *Sequência de Mayer-Vietoris* como apresentada em (9), que expomos a seguir.

Sejam X um espaço topológico e A e B subespaços de X tais que X é a união dos interiores de A e B . A seguinte sequência exata longa é conhecida como *sequência de Mayer-Vietoris*:

$$\begin{aligned} \dots \longrightarrow H_n(A \cap B) \xrightarrow{\Phi} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{\Psi} H_n(X) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A \cap B) \longrightarrow \\ \dots \longrightarrow H_0(X) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Em particular a sequência

$$\dots \longrightarrow H_1(X) \xrightarrow{\partial} H_0(A \cap B) \xrightarrow{\Phi} H_0(A) \oplus H_0(B) \xrightarrow{\Psi} H_0(A \cup B) \longrightarrow 0$$

é exata.

Consideraremos o espaço topológico X como sendo o complexo simplicial $K_{\mathcal{H}}$ associado ao divisor D de uma redução de singularidades, e tomamos um par de subespaços $A, B \subset X$ tais que $X = \text{int}(A) \cup \text{int}(B)$. Como o grupo de homologia

$H_1(X) = 0$, obtemos que a sequência de Mayer-Vietoris para X passa a ser a sequência exata curta dada por

$$0 \xrightarrow{\partial_1} H_0(A \cap B) \xrightarrow{\Phi} H_0(A) \oplus H_0(B) \xrightarrow{\Psi} H_0(A \cup B) \xrightarrow{\partial_2} 0 .$$

Disto decorre que

- $Im(\partial_1) = Ker(\Phi) \Rightarrow Ker(\Phi) = \{0\}$. Logo Φ é um monomorfismo de grupos;
- $Im(\Phi) = Ker(\Psi)$. Mas pela sequência de Mayer-Vietoris, $\Phi = (i_*, j_*)$, para $i_* : H_0(A \cap B) \rightarrow H_0(A)$, e $j_* : H_0(A \cap B) \rightarrow H_0(B)$ funções induzidas nos grupos de homologia pelas funções de inclusão $i : A \cap B \rightarrow A$ e $j : A \cap B \rightarrow B$. Portanto, $Im(\Phi) = H_0(A \cap B)$;
- $Im(\Psi) = Ker(\partial_2) \Rightarrow Im(\Psi) = H_0(A \cup B)$. Logo Ψ é um epimorfismo de grupos.

Agora, como $\Psi : H_0(A) \oplus H_0(B) \rightarrow H_0(A \cup B)$ é um epimorfismo de grupos, pelo Primeiro Teorema do Isomorfismo para grupos (15) temos que

$$H_0(A \cup B) \cong \frac{H_0(A) \oplus H_0(B)}{Ker(\Psi)} \cong \frac{H_0(A) \oplus H_0(B)}{Im(\Phi)} \cong \frac{H_0(A) \oplus H_0(B)}{H_0(A \cap B)} . \quad (16)$$

Suponha que se tenha localmente o divisor representado na Figura 20, que pode ser descrito pelo conjunto de listas $\mathcal{H} = \mathcal{H}(1) \cup \mathcal{H}(2) \cup \mathcal{H}(3)$ em que $\mathcal{H}(1) = \{\{i\}, \{j\}, \{k\}, \{l\}\}$, $\mathcal{H}(2) = \{\{i,j\}, \{i,k\}, \{j,k\}, \{j,l\}, \{k,l\}\}$ e $\mathcal{H}(3) = \{\{i,j,k\}, \{j,k,l\}\}$. Para este conjunto obtemos o complexo simplicial $K_{\mathcal{H}} = \Delta_0 \cup \Delta_1 \cup \Delta_2 \in \mathbb{R}^2$ em que

$$\begin{aligned} \Delta_0(K_{\mathcal{H}}) &= \{[V_i], [V_j], [V_k], [V_l]\} ; \\ \Delta_1(K_{\mathcal{H}}) &= \{[V_i, V_j], [V_i, V_k], [V_j, V_k], [V_j, V_l], [V_k, V_l]\} ; \\ \Delta_2(K_{\mathcal{H}}) &= \{[V_i, V_j, V_k], [V_j, V_k, V_l]\} . \end{aligned}$$

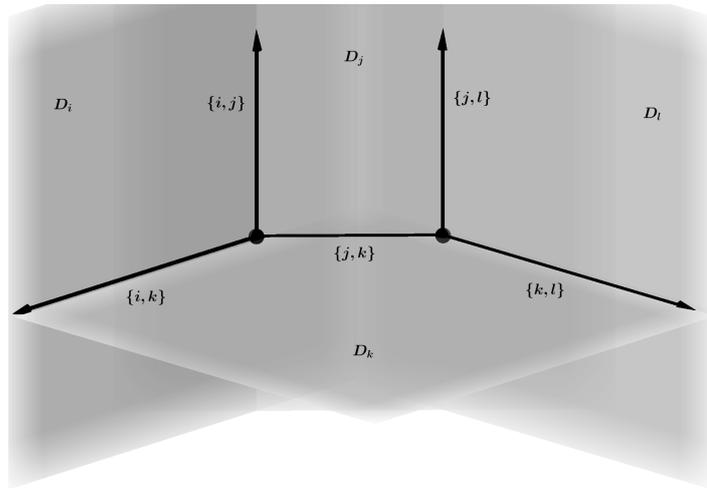


Figura 20 – Representação local do divisor com dois pontos triplôs

Para esta situação local temos a seguinte

Proposição 5.4.1. $K_{\mathcal{H}}$ é conexo.

Demonstração:

Considere os subconjuntos abertos de \mathcal{H} dados por

$$A = \{\{i\}, \{j\}, \{k\}, \{i,j\}, \{i,k\}, \{j,k\}, \{i,j,k\}\}$$

$$B = \{\{j\}, \{k\}, \{l\}, \{j,k\}, \{j,l\}, \{k,l\}, \{j,k,l\}\}$$

e sejam K_A, K_B os complexos simpliciais associados:

$$K_A = \{[V_i], [V_j], [V_k]\} \cup \{[V_j, V_j], [V_j, V_k], [V_j, V_k]\} \cup \{[V_j, V_j, V_k]\},$$

$$K_B = \{[V_j], [V_k], [V_l]\} \cup \{[V_j, V_k], [V_j, V_l], [V_k, V_l]\} \cup \{[V_j, V_k, V_l]\}.$$

Note que $\mathcal{H} = A \cup B$, logo $K_{\mathcal{H}} = K_A \cup K_B$. Além disso,

$$A \cap B = \{\{j\}, \{k\}, \{j,k\}\}$$

o que implica

$$K_A \cap K_B = \{[V_j], [V_k]\} \cup \{[V_j, V_k]\}.$$

Por contas análogas às já feitas anteriormente, como $[V_j, V_k] \in K_A \cap K_B$ temos que $\mathbb{Z}[V_j] = \mathbb{Z}[V_k]$, logo $H_0(K_A \cap K_B) = \mathbb{Z}[V_j]$. Como K_A e K_B são complexos simpliciais de uma vizinhança de um ponto triplo, decorre do Lema 5.3.1, que $H_0(K_A) = H_0(K_B) = \mathbb{Z}[V_j]$.

Decorre da Equação (16), obtida através da sequência de Mayer-Vietoris, que

$$H_0(K_A \cup K_B) \cong \frac{H_0(K_A) \oplus H_0(K_B)}{H_0(K_A \cap K_B)},$$

assim substituindo os grupos de homologia acima, obtemos que

$$H_0(K_A \cup K_B) \cong \frac{\mathbb{Z}[V_j] \oplus \mathbb{Z}[V_j]}{\mathbb{Z}[V_j]} = \mathbb{Z}[V_j] \cong \mathbb{Z}$$

Portanto, pelo Corolário 5.1.1, $K_{\mathcal{H}} = K_A \cup K_B$ é conexo. ■

6 COMPONENTES NODAIS NO GRAFO $G_{\mathcal{H}}$ E NO COMPLEXO SIMPLICIAL $K_{\mathcal{H}}$

Neste capítulo, introduzimos a informação nodal de uma folheação \mathcal{F} , no grafo $G_{\mathcal{H}}$ e no complexo simplicial $K_{\mathcal{H}}$. Na Seção 6.1, apresentamos a situação local que gera o conjunto \mathcal{H} , com a qual iremos trabalhar neste capítulo. Na Seção 6.2, mostramos, via grupos de homologia e matriz de incidência, que $\mathcal{H} \setminus \mathcal{N}$ possui duas componentes conexas. Na Seção 6.3, mostramos que o conjunto de listas \mathcal{H}' obtido após blow-up ainda mantém a propriedade que \mathcal{H}' menos a componente nodal possui duas componentes conexas. Na Seção 6.4, utilizamos a Sequência de Mayer-Vietoris para mostrar que $K_{\mathcal{H}} \setminus \mathcal{N}$ possui duas componentes conexas. Finalmente, na Seção 6.5, mostramos via Sequência de Mayer-Vietoris que se $\#Nod \mathcal{F} = n$ então $K_{\mathcal{H}} \setminus Nod \mathcal{F}$ possui $n + 1$ componentes conexas.

6.1 A COMPONENTE NODAL EM UMA VIZINHANÇA DE UM PONTO TRIPLO

As componentes nodais (Capítulo 2.3.4) são objetos cuja informação pode ser incluída em \mathcal{H} (e conseqüentemente, no grafo $G_{\mathcal{H}}$ e no complexo simplicial $K_{\mathcal{H}}$) e que podem causar uma separação no divisor; nosso objetivo é estudar esta situação. Devido ao Teorema 3.2.1 (que nos permite colar informações locais de uma componente nodal), faremos o estudo sempre local.

Desta maneira, neste capítulo consideraremos a folheação $\mathcal{F} = \{\omega = 0\}$ dada localmente pela 1-forma

$$\omega = \alpha \frac{dx}{x} + \beta \frac{dy}{y} - \gamma \frac{dz}{z}$$

em que α, β e $\gamma \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \mathbb{Q}$. Então $\frac{\beta}{\gamma}$ e $\frac{\alpha}{\gamma} \in \mathbb{R}_{\leq 0} \setminus \mathbb{Q}$ e portanto os eixos x e y são genericamente nodais e o eixo z não é genericamente nodal (de fato, um ponto genérico do eixo z é de tipo sela); veja a Figura 21.

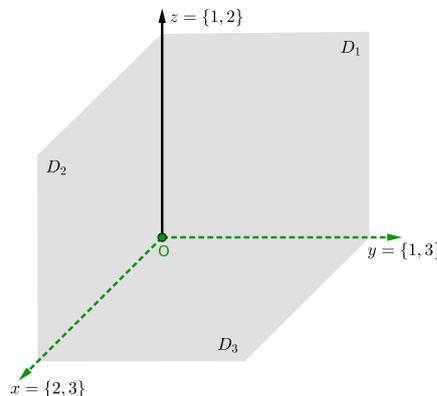


Figura 21 – Componente nodal em um ponto triplo

Denote os divisores $D_1 = \{x = 0\}$, $D_2 = \{y = 0\}$ e $D_3 = \{z = 0\}$. Com esta notação obtemos o conjunto $\mathcal{H} = \mathcal{H}(1) \cup \mathcal{H}(2) \cup \mathcal{H}(3)$ formado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(1) &= \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}; \\ \mathcal{H}(2) &= \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}\}; \\ \mathcal{H}(3) &= \{\{1, 2, 3\}\} \end{aligned}$$

que possui como subconjunto nodal

$$\mathcal{N} = \{\{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\} = \{\text{eixo } x, \text{eixo } y, \text{origem}\}.$$

Nosso objetivo é mostrar que o complementar da componente nodal no divisor tem duas componentes conexas. Veremos o que acontece quando se retira a informação de \mathcal{N} dos conjuntos \mathcal{H} , $G_{\mathcal{H}}$ e $K_{\mathcal{H}}$.

6.2 GRUPOS DE HOMOLOGIA DO COMPLEMENTAR DE UMA COMPONENTE NODAL

O complexo simplicial relativo a \mathcal{H} é $K_{\mathcal{H}} = \Delta_0 \cup \Delta_1 \cup \Delta_2$ em que

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= \{[V_1], [V_2], [V_3]\}, \\ \Delta_1 &= \{[V_1, V_2], [V_2, V_3], [V_1, V_3]\}, \\ \Delta_2 &= \{[V_1, V_2, V_3]\}. \end{aligned}$$

Sabemos pela Seção 5.3 que este complexo simplicial é conexo; o representamos geometricamente na Figura 22.

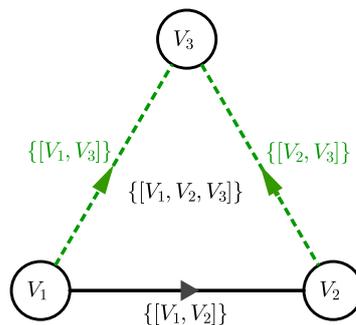


Figura 22 – Complexo simplicial em um ponto triplo

Vamos agora estudar a conexidade de $\mathcal{H} \setminus \mathcal{N}$. Obtemos

$$\mathcal{H}' = \mathcal{H} \setminus \mathcal{N} = \mathcal{H}'(1) \cup \mathcal{H}'(2)$$

em que $\mathcal{H}'(1) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ e $\mathcal{H}'(2) = \{\{1, 2\}\}$ (note que $\mathcal{H}'(3) = \emptyset$).

Temos associado a \mathcal{H}' o complexo simplicial $K_{\mathcal{H}'} = \Delta'_0 \cup \Delta'_1$ em que

$$\Delta'_0 = \{[V_1], [V_2], [V_3]\}; \quad \Delta'_1 = \{[V_1, V_2]\};$$

considerando-os como grupos nos quais cada elemento é um gerador, obtemos

$$C'_0(K_{\mathcal{H}'}) = \mathbb{Z}[V_1] \oplus \mathbb{Z}[V_2] \oplus \mathbb{Z}[V_3]; \quad C'_1(K_{\mathcal{H}'}) = \mathbb{Z}[V_1, V_2].$$

Com estes grupos construímos a sequência exata

$$\cdots \longrightarrow C'_1(K_{\mathcal{H}'}) \xrightarrow{\partial_1} C'_0(K_{\mathcal{H}'}) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

em que ∂_1 e ∂_0 são os operadores bordo.

O operador $\partial_0 : C'_0(K_{\mathcal{H}'}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \{0\}$ é tal que

$$\text{Ker}(\partial_0) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \mathbb{Z}[V_1] \oplus \mathbb{Z}[V_2] \oplus \mathbb{Z}[V_3].$$

O operador $\partial_1 : C'_1(K_{\mathcal{H}'}) \rightarrow C'_0(K_{\mathcal{H}'})$ é dado por

$$\begin{aligned} \partial_1 : \mathbb{Z}[V_1, V_2] &\rightarrow \mathbb{Z}[V_1] \oplus \mathbb{Z}[V_2] \oplus \mathbb{Z}[V_3] \\ i &\mapsto (-i, i, 0) \end{aligned}$$

uma vez que $(-i, i, 0)$ gera o conjunto $\text{Im}(\partial_1)$. De fato,

$$i\partial_1[V_1, V_2] = i(V_2 - V_1) = iV_2 - iV_1 = (-i, i, 0).$$

Dito de outra forma, $\text{Im}(\partial_1)$ é gerada por $\sigma_1 = V_2 - V_1 : \text{Im}(\partial_1) = \mathbb{Z}[\sigma_1]$.

Assim,

$$H_0(K_{\mathcal{H}'}) = \frac{\text{Ker}(\partial_0)}{\text{Im}(\partial_1)} = \frac{\mathbb{Z}[V_1] \oplus \mathbb{Z}[V_2] \oplus \mathbb{Z}[V_3]}{\mathbb{Z}[\sigma_1]}.$$

Como $\text{Ker}(\partial_0)$ é gerado por $\{[V_1], [V_2], [V_3]\}$ basta entender as classes de equivalência $[V_i] = V_i + \mathbb{Z}[\sigma_1]$ ($i = 1, 2, 3$) em $H_0(K_{\mathcal{H}'})$ destes elementos:

$$\begin{aligned} V_1 - V_2 &= -1(V_2 - V_1) \in \mathbb{Z}[\sigma_1] \Rightarrow V_1 \sim V_2 \\ V_3 - V_2 &\neq k(V_2 - V_1), \quad \forall k \in \mathbb{Z} \Rightarrow V_2 \approx V_3 \\ V_3 - V_1 &\neq k(V_2 - V_1), \quad \forall k \in \mathbb{Z} \Rightarrow V_1 \approx V_3. \end{aligned}$$

Logo, $[V_1] = [V_2] \neq [V_3]$. Acabamos de demonstrar a seguinte

Proposição 6.2.1. $H_0(K_{\mathcal{H}'}) \cong \mathbb{Z}[V_1] \oplus \mathbb{Z}[V_3] = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Disto decorre que $K_{\mathcal{H}'}$, e consequentemente $\mathcal{H} \setminus \mathcal{N}$, possui duas componentes conexas.

Este estudo de conexidade pode ser feito também considerando os grafos $G_{\mathcal{H}} = (\mathcal{H}(1), \mathcal{H}(2))$ e $G_{\mathcal{H}'} = (\mathcal{H}'(1), \mathcal{H}'(2))$, cujas matrizes de incidência são respectivamente as matrizes B e B' abaixo. A fim manter o registro de quais são as componentes nodais que serão excluídas, convencionamos neste texto zerar as colunas da matriz B que representam estas arestas nodais, obtendo assim a matriz B' para o grafo $G_{\mathcal{H}'}$.

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Note que quaisquer duas linhas de \mathbf{B} são diretamente conectadas, portanto $G_{\mathcal{H}}$ é conexo. Por outro lado, \mathbf{B}' possui a linha 3 nula, o que implica que o vértice $\{3\}$ deste grafo é isolado, e portanto o grafo $G_{\mathcal{H}'}$ não é conexo.

6.3 O COMPLEMENTAR DA COMPONENTE NODAL APÓS BLOW-UP

Considerando inicialmente a situação local exposta acima, vamos analisar o efeito de excluir a componente nodal após o blow-up. Em todos os casos, se Y denota o centro do blow-up, chamamos $D_4 = \pi^{-1}(Y)$. Com isso após blow-up temos $\mathcal{H}(1) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$; portanto o conjunto Δ_0 dos 0-simplexos e o grupo de 0-cadeias $C_0(K)$ são

$$\Delta_0 = \{[V_1], [V_2], [V_3], [V_4]\} \cong C_0(K) = \mathbb{Z}[V_1] \oplus \mathbb{Z}[V_2] \oplus \mathbb{Z}[V_3] \oplus \mathbb{Z}[V_4].$$

Como $\mathcal{N} \subset \mathcal{H}(2) \cup \mathcal{H}(3)$, temos que $\mathcal{H}(1) \cap \mathcal{N} = \emptyset$ logo, $\mathcal{H}(1) = \mathcal{H}(1) \setminus \mathcal{N}$ e $\Delta_0 \setminus \mathcal{N} = \Delta_0$. Assim o operador bordo $\partial_0 : C_0(K) \rightarrow \{0\}$ será o mesmo em todos os casos e dado por $\partial_0 : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \{0\}$. Assim

$$\text{Ker}(\partial_0) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \mathbb{Z}[V_1] \oplus \mathbb{Z}[V_2] \oplus \mathbb{Z}[V_3] \oplus \mathbb{Z}[V_4].$$

Vejamos caso a caso.

Caso 1: $Y = \{0\}$. Neste caso temos

$$\mathcal{H}(2) = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\};$$

$$\mathcal{H}(3) = \{\{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}.$$

E a componente nodal é $\mathcal{N} = \{\{1, 3\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$, veja a Figura 23.

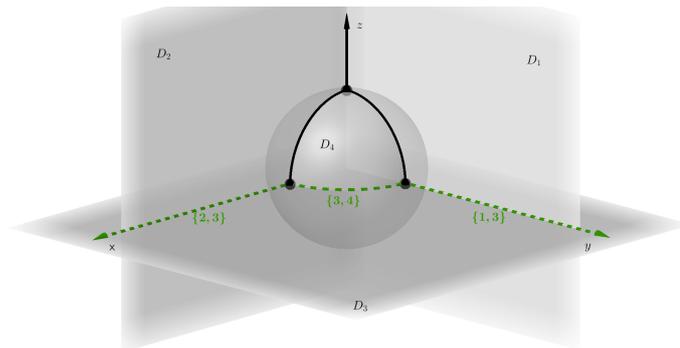


Figura 23 – Componente nodal após blow-up da origem

Obtemos o complexo simplicial $K_{\mathcal{H}} = \Delta_0 \cup \Delta_1 \cup \Delta_2$ em que

$$\Delta_1 = \{[V_1, V_2], [V_1, V_3], [V_1, V_4], [V_2, V_3], [V_2, V_4], [V_3, V_4]\}$$

$$\Delta_2 = \{[V_1, V_2, V_4], [V_1, V_3, V_4], [V_2, V_3, V_4]\} .$$

Além disso, o grupo de 1-cadeias é

$$C_1(K_{\mathcal{H}}) = \mathbb{Z}[V_1, V_2] \oplus \mathbb{Z}[V_1, V_3] \oplus \mathbb{Z}[V_1, V_4] \oplus \mathbb{Z}[V_2, V_3] \oplus \mathbb{Z}[V_2, V_4] \oplus \mathbb{Z}[V_3, V_4] .$$

A representação geométrica de $K_{\mathcal{H}}$ é dada na Figura 24:

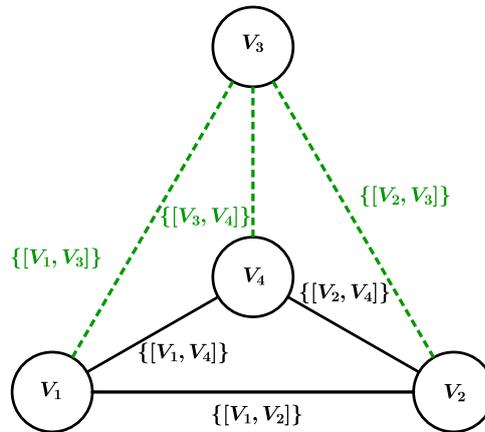


Figura 24 – Complexo simplicial após explosão da origem

Agora, retirando a componente nodal obtemos $\mathcal{H}' = \mathcal{H} \setminus \mathcal{N} = \mathcal{H}(1) \cup \mathcal{H}'(2) \cup \mathcal{H}'(3)$ em que

$$\mathcal{H}'(2) = \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}\} ;$$

$$\mathcal{H}'(3) = \{\{1, 2, 4\}\} .$$

Por sua vez, o complexo simplicial $K_{\mathcal{H}'} = \Delta'_0 \cup \Delta'_1 \cup \Delta'_2$ é tal que $\Delta'_0 = \Delta_0$,

$$\Delta'_1 = \{[V_1, V_2], [V_1, V_4], [V_2, V_4]\}$$

$$\Delta'_2 = \{[V_1, V_2, V_4]\}$$

e o grupo de 1-cadeias é

$$C'_1(K_{\mathcal{H}'}) = \mathbb{Z}[V_1, V_2] \oplus \mathbb{Z}[V_1, V_4] \oplus \mathbb{Z}[V_2, V_4] .$$

Considere a sequência

$$\cdots \longrightarrow C'_1(K_{\mathcal{H}'}) \xrightarrow{\partial_1} C'_0(K_{\mathcal{H}'}) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

onde ∂_1 e ∂_0 são os operadores bordo. Note que o operador $\partial_1 : C'_1(K_{\mathcal{H}'}) \rightarrow C'_0(K_{\mathcal{H}'})$ por:

$$\begin{aligned} \partial_1 : \mathbb{Z}[V_1, V_2] \oplus \mathbb{Z}[V_1, V_4] \oplus \mathbb{Z}[V_2, V_4] &\rightarrow \mathbb{Z}[V_1] \oplus \mathbb{Z}[V_2] \oplus \mathbb{Z}[V_3] \oplus \mathbb{Z}[V_4] \\ (i, j, k) &\mapsto (-i + j, i - k, 0, j + k). \end{aligned}$$

Vamos mostrar que a imagem de ∂_1 é gerada por $(-i + j, i - k, 0, j + k)$. Aplicando o operador a cada um dos geradores de $C'_1(K_{\mathcal{H}'})$ obtemos:

$$\begin{aligned} i\partial_1[V_1, V_2] &= iV_2 - iV_1 \\ j\partial_1[V_1, V_4] &= jV_1 - jV_4 \\ k\partial_1[V_2, V_4] &= kV_4 - kV_2. \end{aligned}$$

Com isso vemos que o bordo de $K_{\mathcal{H}'}$ é:

$$\begin{aligned} \partial_1(K_{\mathcal{H}'}) &= i\partial_1[V_1, V_2] + j\partial_1[V_1, V_4] + k\partial_1[V_2, V_4] \\ &= iV_2 - iV_1 + jV_4 - jV_1 + kV_4 - kV_2 \\ &= (-i + j)V_1 + (i - k)V_2 + (j + k)V_4. \end{aligned}$$

Note que $Im(\partial_1)$ é gerada por $\sigma_1 = V_2 - V_1$, $\sigma_2 = V_1 - V_4$ e $\sigma_3 = V_4 - V_2$. Temos ainda $\sigma_3 = \sigma_2 - \sigma_1$, pois $V_4 - V_2 = (V_4 - V_1) - (V_2 - V_1)$; o conjunto $\{\sigma_1, \sigma_2\}$ é linearmente independente e portanto base para $Im(\partial_1)$. Assim,

$$Im(\partial_1) = \mathbb{Z}[\sigma_1] \oplus \mathbb{Z}[\sigma_2]$$

e portanto

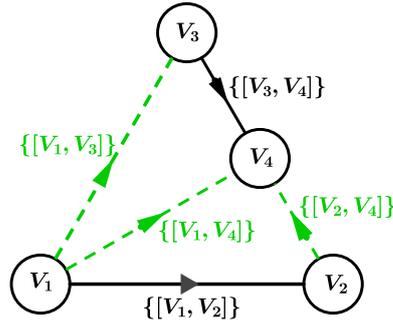
$$H_0(K_{\mathcal{H}'}) = \frac{Ker(\partial_0)}{Im(\partial_1)} = \frac{\mathbb{Z}[V_1] \oplus \mathbb{Z}[V_2] \oplus \mathbb{Z}[V_3] \oplus \mathbb{Z}[V_4]}{\mathbb{Z}[\sigma_1] \oplus \mathbb{Z}[\sigma_2]}.$$

Vejamos agora as classes de equivalência de $H_0(K_{\mathcal{H}'})$:

$$\begin{aligned} V_1 - V_2 &= -1(V_2 - V_1) + 0(V_1 - V_4) \Rightarrow V_1 \sim V_2 \\ V_1 - V_3 &\neq \alpha(V_2 - V_1) + \beta(V_1 - V_4) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z} \Rightarrow V_1 \not\sim V_3 \\ V_1 - V_4 &= 0(V_2 - V_1) + 1(V_1 - V_4) \Rightarrow V_1 \sim V_4 \\ V_2 - V_3 &\neq \alpha(V_2 - V_1) + \beta(V_1 - V_4) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z} \Rightarrow V_2 \not\sim V_3 \\ V_2 - V_4 &= 1(V_2 - V_1) + 1(V_1 - V_4) \Rightarrow V_2 \sim V_4 \\ V_3 - V_4 &\neq \alpha(V_2 - V_1) + \beta(V_1 - V_4) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z} \Rightarrow V_3 \not\sim V_4. \end{aligned}$$

Logo $[V_1] = [V_2] = [V_4] \neq [V_3]$. Portanto, $H_0(K_{\mathcal{H}'}) \cong \mathbb{Z}[V_1] \oplus \mathbb{Z}[V_3] = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, o que mostra que $K_{\mathcal{H}'}$ não é conexo. Além disso, concluímos que $K_{\mathcal{H}'}$ possui duas componentes conexas.

Assim como antes, o estudo da conexidade pode ser feito também considerando os grafos $G_{\mathcal{H}} = (\mathcal{H}(1), \mathcal{H}(2))$ e $G_{\mathcal{H}'} = (\mathcal{H}'(1), \mathcal{H}'(2))$, cujas matrizes de incidência são respectivamente as matrizes B e B' abaixo.


 Figura 26 – Complexo simplicial após o blow-up do eixo x , uma possibilidade

Por sua vez, o grupo de 1-cadeias é

$$C_1(K_{\mathcal{H}}) = \mathbb{Z}[V_1, V_2] \oplus \mathbb{Z}[V_1, V_3] \oplus \mathbb{Z}[V_1, V_4] \oplus \mathbb{Z}[V_2, V_4] \oplus \mathbb{Z}[V_3, V_4].$$

O conjunto $\mathcal{H}' = \mathcal{H} \setminus \mathcal{N} = \mathcal{H}'(1) \cup \mathcal{H}'(2) \cup \mathcal{H}'(3)$ é tal que

$$\mathcal{H}'(2) = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}; \quad \mathcal{H}'(3) = \emptyset.$$

Obtemos o complexo simplicial $K_{\mathcal{H}'} = \Delta'_0 \cup \Delta'_1$ em que $\Delta'_0 = \Delta_0$ e $\Delta'_1 = \{[V_1, V_2], [V_3, V_4]\}$. O grupo de 1-cadeias é portanto

$$C'_1(K_{\mathcal{H}'}) = \mathbb{Z}[V_1, V_2] \oplus \mathbb{Z}[V_3, V_4].$$

Considere a sequência

$$\cdots \longrightarrow C'_1(K_{\mathcal{H}'}) \xrightarrow{\partial_1} C'_0(K_{\mathcal{H}'}) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

onde ∂_0 é o operador definido no início da seção e ∂_1 é, por definição,

$$\begin{aligned} \partial_1 : \mathbb{Z}[V_1, V_2] \oplus \mathbb{Z}[V_3, V_4] &\rightarrow \mathbb{Z}[V_1] \oplus \mathbb{Z}[V_2] \oplus \mathbb{Z}[V_3] \oplus \mathbb{Z}[V_4] \\ (i, j) &\mapsto (-i, i, -j, j). \end{aligned}$$

Temos $i\partial_1[V_1, V_2] = iV_2 - iV_1$, e $j\partial_1[V_3, V_4] = jV_4 - jV_3$, portanto o bordo de $K_{\mathcal{H}'}$ é

$$\begin{aligned} \partial_1(K_{\mathcal{H}'}) &= i\partial_1[V_1, V_2] + j\partial_1[V_3, V_4] \\ &= i(V_2 - V_1) + j(V_4 - V_3) \\ &= (-i, i, -j, j). \end{aligned}$$

Com isto obtemos que $\text{Im}(\partial_1)$ é gerado por $\sigma_1 = V_2 - V_1$ e $\sigma_2 = V_4 - V_3$, que formam uma base para $\text{Im}(\partial_1)$. Logo,

$$\text{Im}(\partial_1) = \mathbb{Z}[\sigma_1] \oplus \mathbb{Z}[\sigma_2].$$

Assim,

$$H_0(K_{\mathcal{H}'}) = \frac{\text{Ker}(\partial_0)}{\text{Im}(\partial_1)} = \frac{\mathbb{Z}[V_1] \oplus \mathbb{Z}[V_2] \oplus \mathbb{Z}[V_3] \oplus \mathbb{Z}[V_4]}{\mathbb{Z}[\sigma_1] \oplus \mathbb{Z}[\sigma_2]}.$$

Vejam as classes de equivalência de $H_0(K_{\mathcal{H}'})$:

$$\begin{aligned} V_1 - V_2 &= -1(V_2 - V_1) + 0(V_4 - V_3) \Rightarrow V_1 \sim V_2 \\ V_1 - V_3 &\neq \alpha(V_2 - V_1) + \beta(V_4 - V_3), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z} \Rightarrow V_1 \not\sim V_3 \\ V_1 - V_4 &\neq \alpha(V_2 - V_1) + \beta(V_4 - V_3), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z} \Rightarrow V_1 \not\sim V_4 \\ V_2 - V_3 &\neq \alpha(V_2 - V_1) + \beta(V_4 - V_3), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z} \Rightarrow V_2 \not\sim V_3 \\ V_2 - V_4 &\neq \alpha(V_2 - V_1) + \beta(V_4 - V_3), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z} \Rightarrow V_2 \not\sim V_4 \\ V_3 - V_4 &= 0(V_2 - V_1) - 1(V_4 - V_3) \Rightarrow V_3 \sim V_4. \end{aligned}$$

Obtemos então $[V_1] = [V_2]$, $[V_3] = [V_4]$ e $[V_1] \neq [V_3]$, logo $H_0(K_{\mathcal{H}'}) = \mathbb{Z}[V_1] \oplus \mathbb{Z}[V_3]$, mostrando que $K_{\mathcal{H}'}$ possui duas componentes conexas.

Assim como antes o estudo de conexidade pode ser feito também considerando os grafos $G_{\mathcal{H}} = (\mathcal{H}(1), \mathcal{H}(2))$ e $G'_{\mathcal{H}'} = (\mathcal{H}'(1), \mathcal{H}'(2))$, cujas matrizes de incidência são respectivamente as matrizes B e B' abaixo

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Note que todas as linhas de B são conectadas, o que mostra que $G_{\mathcal{H}}$ é conexo. Por outro lado, a matriz B' possui dois blocos conexas: as linhas 1 e 2 são diretamente conectadas, assim como as linhas 3 e 4, mas o bloco de linhas $\{1, 2\}$ não está conectado ao bloco de linhas $\{3, 4\}$; com isso concluímos que o grafo $G'_{\mathcal{H}'}$ não é conexo. Note também que cada um destes blocos de linhas conectadas corresponde a uma componente conexa de $G_{\mathcal{H}'}$.

Caso 2.2: $Y = \{\text{eixo } x\}$.

Aqui, o conjunto \mathcal{H} é o mesmo do Caso 2.1; a diferença é o posicionamento da componente nodal no divisor. Suponha agora que $\mathcal{N} = \{\{1, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}\}$, veja a Figura 27:

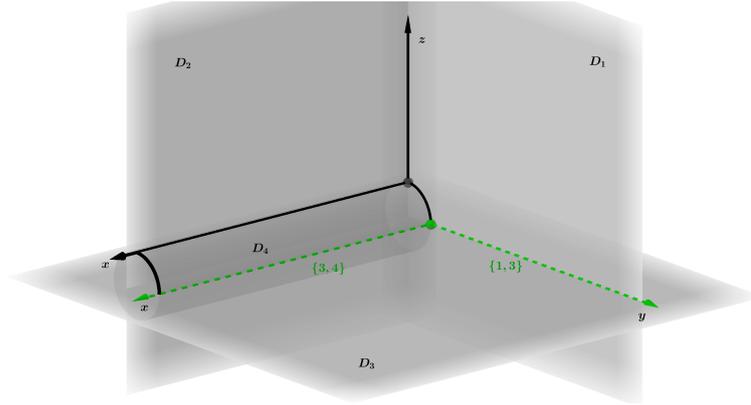


Figura 27 – Divisores e componente nodal após blow-up do eixo x , outra possibilidade

Como \mathcal{H} é o mesmo do Caso 2.1, o complexo simplicial $K_{\mathcal{H}}$ é também o mesmo do Caso 2.1. Na Figura 28 vemos a representação geométrica de $K_{\mathcal{H}}$ com a componente nodal \mathcal{N} destacada:

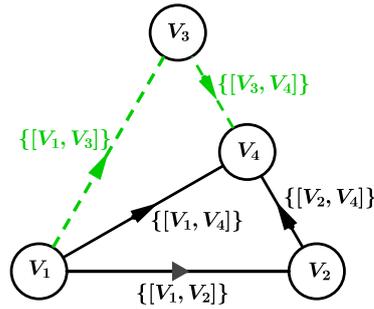


Figura 28 – Complexo simplicial após o blow-up do eixo x , outra possibilidade

O conjunto $\mathcal{H}' = \mathcal{H} \setminus \mathcal{N} = \mathcal{H}(1) \cup \mathcal{H}'(2) \cup \mathcal{H}'(3)$ é dado por

$$\mathcal{H}'(2) = \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}\};$$

$$\mathcal{H}'(3) = \{\{1, 2, 4\}\}.$$

Obtemos assim o complexo simplicial $K_{\mathcal{H}'} = \Delta'_0 \cup \Delta'_1 \cup \Delta'_2$ em que $\Delta'_0 = \Delta_0$,

$$\Delta'_1 = \{[V_1, V_2], [V_1, V_4], [V_2, V_4]\},$$

$$\Delta'_2 = \{[V_1, V_2, V_4]\}.$$

Assim, o grupo de 1-cadeias é

$$C'_1(K_{\mathcal{H}'}) = \mathbb{Z}[V_1, V_2] \oplus \mathbb{Z}[V_1, V_4] \oplus \mathbb{Z}[V_2, V_4]$$

o que nos dá a seqüência

$$\cdots \longrightarrow C'_1(K_{\mathcal{H}'}) \xrightarrow{\partial_1} C'_0(K_{\mathcal{H}'}) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

onde, como antes, ∂_0 é o operador já definido e ∂_1 é

$$\begin{aligned} \partial_1 : \mathbb{Z}[V_1, V_2] \oplus \mathbb{Z}[V_1, V_4] \oplus \mathbb{Z}[V_2, V_4] &\rightarrow \mathbb{Z}[V_1] \oplus \mathbb{Z}[V_2] \oplus \mathbb{Z}[V_3] \oplus \mathbb{Z}[V_4] \\ (i, j, k) &\mapsto (-i - j, i - k, 0, j + k) . \end{aligned}$$

Aplicando ∂_1 nos elementos da base de $C'_1(K_{\mathcal{H}'})$ temos $i\partial_1[V_1, V_2] = iV_2 - iV_1$, $j\partial_1[V_1, V_4] = jV_4 - jV_1$, e $k\partial_1[V_2, V_4] = kV_4 - kV_2$. Portanto o bordo de $K_{\mathcal{H}'}$ é

$$\begin{aligned} \partial_1(K_{\mathcal{H}'}) &= i\partial_1[V_1, V_2] + j\partial_1[V_1, V_4] + k\partial_1[V_2, V_4] \\ &= i(V_2 - V_1) + j(V_4 - V_1) + k(V_4 - V_2) \\ &= (-i - j, i - k, 0, j + k) . \end{aligned}$$

Observe que $Im(\partial_1)$ é gerado por $\sigma_1 = V_2 - V_1$, $\sigma_2 = V_4 - V_1$ e $\sigma_3 = V_4 - V_2$, e que $\sigma_3 = V_4 - V_2 = (V_4 - V_1) - (V_2 - V_1) = \sigma_2 - \sigma_1$; assim $\{\sigma_1, \sigma_2\}$ é uma base de $Im(\partial_1)$. Logo,

$$Im(\partial_1) = \mathbb{Z}[\sigma_1] \oplus \mathbb{Z}[\sigma_2] .$$

Portanto,

$$H_0(K_{\mathcal{H}'}) = \frac{Ker(\partial_0)}{Im(\partial_1)} = \frac{\mathbb{Z}[V_1] \oplus \mathbb{Z}[V_2] \oplus \mathbb{Z}[V_3] \oplus \mathbb{Z}[V_4]}{\mathbb{Z}[\sigma_1] \oplus \mathbb{Z}[\sigma_2]} .$$

Quanto às classes de equivalência, temos:

$$\begin{aligned} V_1 - V_2 &= -1(V_2 - V_1) + 0(V_4 - V_1) \Rightarrow V_1 \sim V_2 \\ V_1 - V_3 &\neq \alpha(V_2 - V_1) + \beta(V_4 - V_1) , \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z} \Rightarrow V_1 \approx V_3 \\ V_1 - V_4 &= 0(V_2 - V_1) - 1(V_4 - V_1) \Rightarrow V_1 \sim V_4 \\ V_2 - V_3 &\neq \alpha(V_2 - V_1) + \beta(V_4 - V_1) , \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z} \Rightarrow V_2 \approx V_3 \\ V_2 - V_4 &= 1(V_2 - V_1) - 1(V_4 - V_1) \Rightarrow V_2 \sim V_4 \\ V_3 - V_4 &\neq \alpha(V_2 - V_1) + \beta(V_4 - V_1) , \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z} \Rightarrow V_3 \approx V_4 . \end{aligned}$$

Logo $[V_1] = [V_2] = [V_4]$ e $[V_1] \neq [V_3]$ e portanto $H_0(K_{\mathcal{H}'}) = \mathbb{Z}[V_1] \oplus \mathbb{Z}[V_3]$ possui duas componentes conexas.

Considerando os grafos $G_{\mathcal{H}} = (\mathcal{H}(1), \mathcal{H}(2))$ e $G_{\mathcal{H}'} = (\mathcal{H}'(1), \mathcal{H}'(2))$, cujas matrizes de incidência são B e B' abaixo:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} , \quad B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Pela matriz B vemos que $G_{\mathcal{H}}$ é conexo; já a matriz B' possui a linha 3 nula, o que como sabemos implica que o vértice $\{3\}$ é isolado, e portanto $G_{\mathcal{H}'}$ não é conexo.

Caso 3: $Y = \{\text{eixo } z\}$.

Aqui \mathcal{H} é tal que

$$\mathcal{H}(2) = \{\{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\};$$

$$\mathcal{H}(3) = \{\{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$$

e $\mathcal{N} = \{\{1, 3\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$, veja a Figura 29.

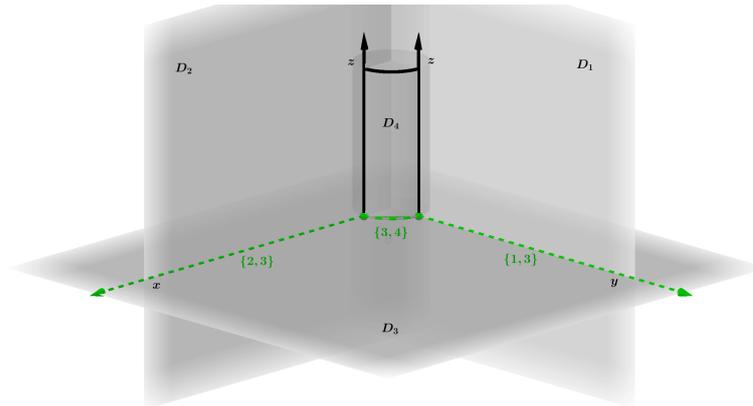


Figura 29 – Divisores e componente nodal após blow-up do eixo z

Obtemos o complexo simplicial $K_{\mathcal{H}} = \Delta_0 \cup \Delta_1 \cup \Delta_2$ (veja Figura 30) em que

$$\Delta_1 = \{[V_1, V_3], [V_1, V_4], [V_2, V_3], [V_2, V_4], [V_3, V_4]\}$$

$$\Delta_2 = \{[V_1, V_3, V_4], [V_2, V_3, V_4]\}$$

e o grupo de 1-cadeias é

$$C_1(K_{\mathcal{H}}) = \mathbb{Z}[V_1, V_3] \oplus \mathbb{Z}[V_1, V_4] \oplus \mathbb{Z}[V_2, V_3] \oplus \mathbb{Z}[V_2, V_4] \oplus \mathbb{Z}[V_3, V_4].$$

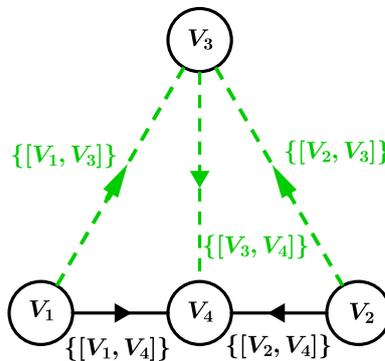


Figura 30 – Complexo simplicial após o blow-up do eixo z

O conjunto $\mathcal{H}' = \mathcal{H} \setminus \mathcal{N} = \mathcal{H}(1) \cup \mathcal{H}'(2) \cup \mathcal{H}'(3)$ é tal que

$$\mathcal{H}'(2) = \{\{1, 4\}, \{2, 4\}\}; \quad \mathcal{H}'(3) = \emptyset.$$

Obtemos assim o complexo simplicial $K_{\mathcal{H}'} = \Delta_0 \cup \Delta'_1$ em que $\Delta'_1 = \{[V_1, V_4], [V_2, V_4]\}$. O grupo de 1-cadeias é $C'_1(K_{\mathcal{H}'}) = \mathbb{Z}[V_1, V_4] \oplus \mathbb{Z}[V_2, V_4]$, que como antes gera a sequência

$$\cdots \longrightarrow C'_1(K_{\mathcal{H}'}) \xrightarrow{\partial_1} C'_0(K_{\mathcal{H}'}) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

onde ∂_0 é o mesmo de antes e ∂_1 é

$$\begin{aligned} \partial_1 : \mathbb{Z}[V_1, V_4] \oplus \mathbb{Z}[V_2, V_4] &\rightarrow \mathbb{Z}[V_1] \oplus \mathbb{Z}[V_2] \oplus \mathbb{Z}[V_3] \oplus \mathbb{Z}[V_4] \\ (i, j) &\mapsto (-i, -j, 0, i + j) . \end{aligned}$$

Assim $i\partial_1[V_1, V_4] = iV_4 - iV_1$ e $j\partial_1[V_2, V_4] = jV_4 - jV_2$, portanto

$$\begin{aligned} \partial_1(K_{\mathcal{H}'}) &= i\partial_1[V_1, V_4] + j\partial_1[V_2, V_4] \\ &= i(V_4 - V_1) + j(V_4 - V_2) \\ &= (-i, -j, 0, i + j) . \end{aligned}$$

Observe que $Im(\partial_1)$ tem como base $\sigma_1 = V_4 - V_1$ e $\sigma_2 = V_4 - V_2$. Logo,

$$Im(\partial_1) = \mathbb{Z}[\sigma_1] \oplus \mathbb{Z}[\sigma_2] .$$

Assim

$$H_0(K_{\mathcal{H}'}) = \frac{Ker(\partial_0)}{Im(\partial_1)} = \frac{\mathbb{Z}[V_1] \oplus \mathbb{Z}[V_2] \oplus \mathbb{Z}[V_3] \oplus \mathbb{Z}[V_4]}{\mathbb{Z}[\sigma_1] \oplus \mathbb{Z}[\sigma_2]} .$$

Quanto às classes de equivalência de $H_0(K_{\mathcal{H}'})$, temos

$$\begin{aligned} V_1 - V_2 &= -1(V_4 - V_1) + 1(V_4 - V_2) \Rightarrow V_1 \sim V_2 \\ V_1 - V_3 &\neq \alpha(V_4 - V_1) + \beta(V_4 - V_2) , \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z} \Rightarrow V_1 \not\sim V_3 \\ V_1 - V_4 &= -1(V_4 - V_1) + 0(V_4 - V_2) \Rightarrow V_1 \sim V_4 \\ V_2 - V_3 &\neq \alpha(V_4 - V_1) + \beta(V_4 - V_2) , \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z} \Rightarrow V_2 \not\sim V_3 \\ V_2 - V_4 &= 0(V_4 - V_1) - 1(V_4 - V_2) \Rightarrow V_2 \sim V_4 \\ V_3 - V_4 &\neq \alpha(V_4 - V_1) + \beta(V_4 - V_2) , \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z} \Rightarrow V_3 \not\sim V_4 \end{aligned}$$

logo $[V_1] = [V_2] = [V_4]$ e $[V_1] \neq [V_3]$. Portanto $H_0(K_{\mathcal{H}'}) = \mathbb{Z}[V_1] \oplus \mathbb{Z}[V_3]$ e $K_{\mathcal{H}'}$ possui duas componentes conexas.

Finalmente, os grafos $G_{\mathcal{H}} = (\mathcal{H}(1), \mathcal{H}(2))$ e $G'_{\mathcal{H}'} = (\mathcal{H}'(1), \mathcal{H}'(2))$, cujas matrizes de incidência são B e B' abaixo:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} , \quad B' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Através de B e B' vemos que $G_{\mathcal{H}}$ é conexo e $G_{\mathcal{H}'}$ não.

6.4 COLAGEM DAS COMPONENTES CONEXAS DE $K_{\mathcal{H}} \setminus \mathcal{N}$

Com o argumento da seção anterior vemos que em uma vizinhança de um ponto triplo a curva nodal separa o divisor excepcional em duas componentes conexas. A Proposição 6.4.1 a seguir sintetiza estas situações locais e mostra, utilizando grupos de homologia, que estas componentes conexas “se colam” quando passamos de um ponto triplo a outro (dentro da componente nodal). Para demonstrá-la utilizamos Sequência de Mayer-Vietoris, como visto na Seção 5.4.

Suponha que se tenha localmente o conjunto de listas $\mathcal{H} = \mathcal{H}(1) \cup \mathcal{H}(2) \cup \mathcal{H}(3)$ em que $\mathcal{H}(1) = \{\{i\}, \{j\}, \{k\}, \{l\}\}$, $\mathcal{H}(2) = \{\{i,j\}, \{i,k\}, \{j,k\}, \{j,l\}, \{k,l\}\}$ e $\mathcal{H}(3) = \{\{i,j,k\}, \{j,k,l\}\}$. Temos duas possibilidades para \mathcal{N} nesta configuração:

i) $\mathcal{N} = \{\{i,k\}, \{j,k\}, \{l,k\}, \{i,j,k\}, \{j,k,l\}\}$, veja a Figura 31:

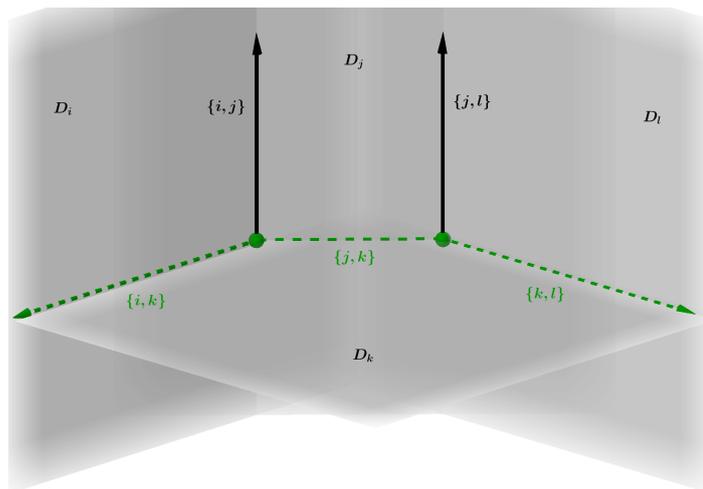


Figura 31 – Representação local do divisor e \mathcal{N} com dois pontos triplos nodais, uma possibilidade

ii) $\mathcal{N} = \{\{i,k\}, \{j,k\}, \{j,l\}, \{i,j,k\}, \{j,k,l\}\}$, veja a Figura 32:

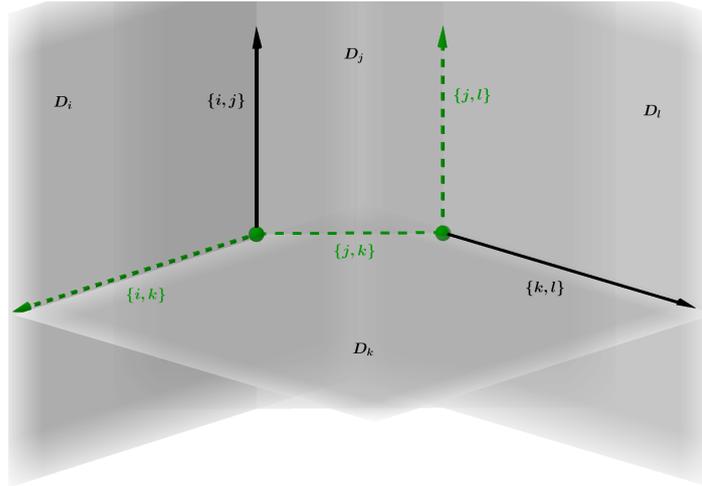


Figura 32 – Representação local do divisor e \mathcal{N} com dois pontos triplos nodais, outra possibilidade

Proposição 6.4.1. $\mathcal{H} \setminus \mathcal{N}$ possui duas componentes conexas.

Demonstração: O objetivo desta proposição é “colar” as situações locais de cada ponto triplo utilizando a sequência de Mayer-Vietoris para o complexo simplicial $K_{\mathcal{H} \setminus \mathcal{N}}$. Considere os conjuntos abertos de \mathcal{H} dados por

$$A = \{\{i\}, \{j\}, \{k\}, \{i,j\}, \{i,k\}, \{j,k\}, \{i,j,k\}\}$$

$$B = \{\{j\}, \{k\}, \{l\}, \{j,k\}, \{j,l\}, \{k,l\}, \{j,k,l\}\}$$

e sejam K_A, K_B os complexos simpliciais associados:

$$K_A = \{[V_i], [V_j], [V_k]\} \cup \{[V_i, V_j], [V_i, V_k], [V_j, V_k]\} \cup \{[V_i, V_j, V_k]\}$$

$$K_B = \{[V_j], [V_k], [V_l]\} \cup \{[V_j, V_k], [V_j, V_l], [V_k, V_l]\} \cup \{[V_j, V_k, V_l]\}$$

Note que $\mathcal{H} = A \cup B$, logo $K_{\mathcal{H}} = K_A \cup K_B$. Além disso,

$$A \cap B = \{\{j\}, \{k\}, \{j,k\}\}$$

o que implica

$$K_A \cap K_B = \{[V_j], [V_k]\} \cup \{[V_j, V_k]\}.$$

No caso (i) temos $\mathcal{N} = \{\{i, k\}, \{j, k\}, \{l, k\}, \{i, j, k\}, \{j, k, l\}\}$ e portanto

$$A' = A \setminus \mathcal{N} = \{\{i\}, \{j\}, \{k\}, \{i,j\}\},$$

$$B' = B \setminus \mathcal{N} = \{\{j\}, \{k\}, \{l\}, \{j,l\}\}.$$

Isso nos dá $\mathcal{H}' = \mathcal{H} \setminus \mathcal{N} = A' \cup B'$,

$$K_{A'} = \{[V_i], [V_j], [V_k]\} \cup \{[V_i, V_j]\} \quad \text{e} \quad K_{B'} = \{[V_j], [V_k], [V_l]\} \cup \{[V_j, V_l]\}.$$

Logo

$$K_{A' \cup B'} = K_{\mathcal{H}'} = K_{A'} \cup K_{B'} \quad \text{e} \quad K_{A' \cap B'} = K_{A'} \cap K_{B'} = \{[V_j], [V_k]\}.$$

Por contas análogas às realizadas anteriormente, como $[V_i, V_j] \in K_{A'}$ decorre que $\mathbb{Z}[V_i] = \mathbb{Z}[V_j]$, e como $[V_j, V_l] \in K_{B'}$ temos que $\mathbb{Z}[V_j] = \mathbb{Z}[V_l]$; obtemos assim

$$H_0(K_{A'}) = \mathbb{Z}[V_i] \oplus \mathbb{Z}[V_k],$$

$$H_0(K_{B'}) = \mathbb{Z}[V_j] \oplus \mathbb{Z}[V_k],$$

$$H_0(K_{A' \cap B'}) = \mathbb{Z}[V_j] \oplus \mathbb{Z}[V_k].$$

Usando a Equação (16) obtemos

$$H_0(K_{A' \cup B'}) \cong \frac{H_0(K_{A'}) \oplus H_0(K_{B'})}{H_0(K_{A' \cap B'})}.$$

Substituindo os grupos de homologia já calculados chegamos a

$$H_0(K_{A' \cup B'}) \cong \frac{\mathbb{Z}[V_i] \oplus \mathbb{Z}[V_k] \oplus \mathbb{Z}[V_j] \oplus \mathbb{Z}[V_k]}{\mathbb{Z}[V_j] \oplus \mathbb{Z}[V_k]} = \mathbb{Z}[V_i] \oplus \mathbb{Z}[V_k].$$

Portanto, pelo Corolário 5.1.1, $K_{\mathcal{H}} \setminus \mathcal{N} = K_{A'} \cup K_{B'}$ possui duas componentes conexas disjuntas, dadas por $C_1 = \{[V_i], [V_j], [V_l]\}$ e $C_2 = \{[V_k]\}$.

No caso (ii) temos $\mathcal{N} = \{\{i, k\}, \{j, k\}, \{j, l\}, \{i, j, k\}, \{j, k, l\}\}$ e portanto

$$A' = A \setminus \mathcal{N} = \{\{i\}, \{j\}, \{k\}, \{i, j\}\}$$

$$B' = B \setminus \mathcal{N} = \{\{j\}, \{k\}, \{l\}, \{k, l\}\}$$

note que $\mathcal{H}' = \mathcal{H} \setminus \mathcal{N} = A' \cup B'$,

$$K_{A'} = \{[V_i], [V_j], [V_k]\} \cup \{[V_i, V_j]\} \quad \text{e} \quad K_{B'} = \{[V_j], [V_k], [V_l]\} \cup \{[V_k, V_l]\}$$

Logo

$$K_{A' \cup B'} = K_{\mathcal{H}'} = K_{A'} \cup K_{B'} \quad \text{e} \quad K_{A' \cap B'} = K_{A'} \cap K_{B'} = \{[V_j], [V_k]\}.$$

Como $[V_i, V_j] \in K_{A'}$, em $K_{A'}$ temos que $\mathbb{Z}[V_i] = \mathbb{Z}[V_j]$, e como $[V_k, V_l] \in K_{B'}$, em $K_{B'}$ temos $\mathbb{Z}[V_k] = \mathbb{Z}[V_l]$, e portanto

$$H_0(K_{A'}) = \mathbb{Z}[V_i] \oplus \mathbb{Z}[V_k]$$

$$H_0(K_{B'}) = \mathbb{Z}[V_j] \oplus \mathbb{Z}[V_k]$$

$$H_0(K_{A' \cap B'}) = \mathbb{Z}[V_j] \oplus \mathbb{Z}[V_k].$$

Novamente, usando a Equação (16) obtemos

$$H_0(K_{A' \cup B'}) \cong \frac{H_0(K_{A'}) \oplus H_0(K_{B'})}{H_0(K_{A' \cap B'})}$$

e substituindo os grupos de homologia já calculados chegamos a

$$H_0(K_{A'} \cup K_{B'}) \cong \frac{\mathbb{Z}[V_j] \oplus \mathbb{Z}[V_k] \oplus \mathbb{Z}[V_j] \oplus \mathbb{Z}[V_k]}{\mathbb{Z}[V_j] \oplus \mathbb{Z}[V_k]} = \mathbb{Z}[V_j] \oplus \mathbb{Z}[V_k]$$

Portanto, pelo Corolário 5.1.1, $K_{\mathcal{H}} \setminus \mathcal{N} = K_{A'} \cup K_{B'}$ possui duas componentes conexas disjuntas: $C_1 = \{[V_j], [V_j]\}$ e $C_2 = \{[V_k], [V_j]\}$.

Com isso concluímos que $\mathcal{H} \setminus \mathcal{N}$ não é conexo. ■

A Proposição 6.4.1 nos diz que, da mesma maneira que vamos colando uma componente nodal através dos pontos triplos (como mostra o Teorema 3.2.1), podemos também colar as componentes conexas de $\mathcal{H} \setminus \mathcal{N}$ ao longo dos pontos triplos.

Uma última observação sobre a colagem das componentes conexas de $\mathcal{H} \setminus \mathcal{N}$ é que poderíamos ter a seguinte situação: seja \mathcal{H} como anteriormente e considere $\mathcal{N} = \{\{i,j\}, \{i,k\}, \{i,j,k\}\}$ (veja a Figura 33). Então neste caso \mathcal{N} possui apenas um ponto triplo. Entretanto, como temos $\{j,k\}, \{j,l\}, \{k,l\} \in \mathcal{H}(2) \setminus \mathcal{N}$, por cálculos análogos aos anteriores conclui-se que $\mathbb{Z}[V_j] = \mathbb{Z}[V_k] = \mathbb{Z}[V_l]$ e portanto $\{j\}, \{k\}, \{l\}$ estão na mesma componente conexa de $\mathcal{H} \setminus \mathcal{N}$.

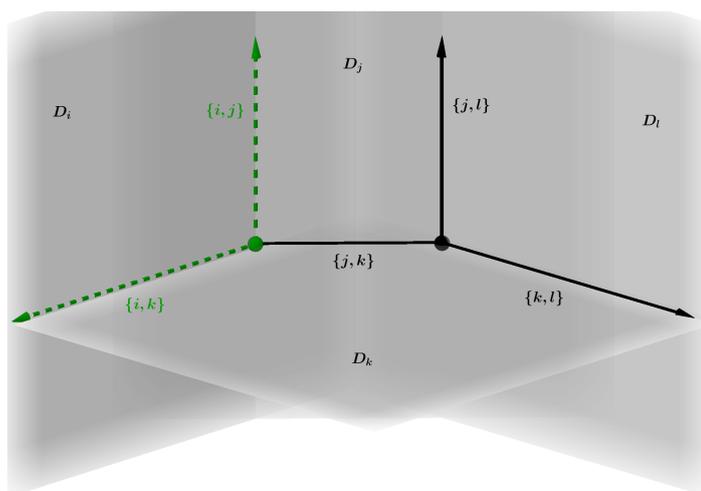


Figura 33 – Representação local do divisor e \mathcal{N} com um ponto triplo nodal

6.5 COMPONENTES CONEXAS DE $K_{\mathcal{H}} \setminus \text{Nod } \mathcal{F}$

O Teorema a seguir é o objetivo deste trabalho, e devido à sua importância apresentamos duas possíveis demonstrações para ele: a primeira utiliza os resultados de homologia simplicial descritos neste capítulo, e a segunda utiliza resultados de paridade, que serão descritos no Capítulo 7. Ambas as demonstrações seguem por indução no número n de elementos do conjunto $\text{Nod } \mathcal{F}$.

Seja $\text{Nod } \mathcal{F} = \{\mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_n\} \subset \mathcal{H}$ o conjunto das componentes nodais não interrompidas distintas e seja $K_{\text{Nod } \mathcal{F}}$ o complexo simplicial associado. Com os resultados das seções anteriores, vamos mostrar o seguinte

Teorema 6.5.1. $\mathcal{H} \setminus \text{Nod}\mathcal{F}$ tem $n + 1$ componentes conexas.

Demonstração:

Se $n = 1$ temos $\text{Nod}\mathcal{F} = \{\mathcal{N}\}$ e pela Proposição 6.4.1 o conjunto $\mathcal{H} \setminus \mathcal{N}$ possui duas componentes conexas.

Se $n = 2$ temos $\text{Nod}\mathcal{F} = \{\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2\}$, com $\mathcal{N}_1 \cap \mathcal{N}_2 = \emptyset$. Pela Proposição 6.4.1, $\mathcal{H} \setminus \mathcal{N}_1$ tem duas componentes conexas, C e C' . Como $\mathcal{N}_1 \cap \mathcal{N}_2 = \emptyset$ temos que \mathcal{N}_2 está inteiramente contida em uma destas componentes, suponha $\mathcal{N}_2 \subset C'$. Considere dois pontos triplos, um em cada componente nodal. É possível encontrar um subconjunto $\mathcal{H}' = \mathcal{H}'(1) \cup \mathcal{H}'(2) \cup \mathcal{H}'(3)$ de \mathcal{H} formado por

$$\begin{aligned} \mathcal{H}'(1) &= \{\{i_1\}, \{i_2\}, \{k_1\}, \{k_2\}, \{j\}, \{l\}\}; \\ \mathcal{H}'(2) &= \{\{i_1, k_1\}, \{i_1, j\}, \{k_1, j\}, \{i_2, k_2\}, \{i_2, l\}, \{k_2, l\}\}; \\ \mathcal{H}'(3) &= \{\{i_1, k_1, j\}, \{i_2, k_2, l\}\}. \end{aligned}$$

Isto é, $J_1 = \{i_1, k_1, j\} \in \mathcal{N}_1$ e $J_2 = \{i_2, k_2, l\} \in \mathcal{N}_2$ são os pontos triplos e observamos que entre os divisores D_{i_1}, D_{i_2} podem existir outros divisores que tem interseção vazia com o conjunto $\text{Nod}\mathcal{F}$; veja a Figura 34.

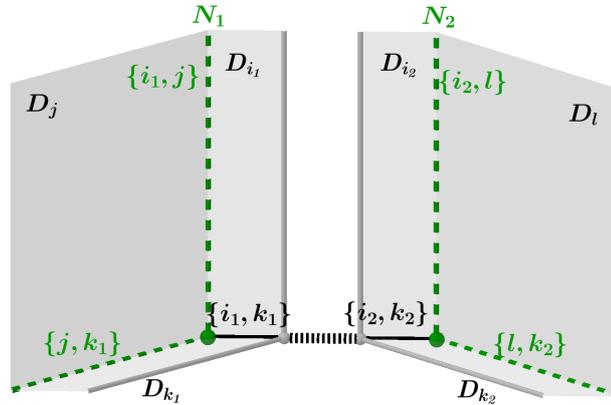


Figura 34 – Representação local do divisor com duas componentes nodais

Como o conjunto \mathcal{H} é conexo, existe um 1-caminho $\gamma : \{i_1, k_1\} \leftrightarrow \{i_2, k_2\}$ em \mathcal{H} , de comprimento $r \geq 1$ tal que $\gamma \cap \text{Nod}\mathcal{F} = \emptyset$. Note que γ liga os pontos triplos J_1 e J_2 . Seja S_γ o conjunto dos elementos de $\mathcal{H}(1)$ pelos quais γ "passa", isto é, o conjunto dos índices que aparecem em $\text{Sup}(\gamma)$ (ver Definição 3.1.2). Pela Proposição 5.4.1 obtemos que S_γ é conexo. Portanto, basta considerar a situação em que r , o comprimento de γ , é 1. Isto implica $i_1 = i_2 = i$ e $k_1 = k_2 = k$, $\gamma = (\{i, k\})$. Como $\mathcal{N}_1 \cap \mathcal{N}_2 = \emptyset$, decorre que

$\{i, k\} \notin \mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2$. Portanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_1 &= \{\{i, j\}, \{j, k\}, \{i, j, k\}\} \subset \mathcal{N}_1 ; \\ \mathcal{N}_2 &= \{\{i, l\}, \{k, l\}, \{i, k, l\}\} \subset \mathcal{N}_2 . \end{aligned}$$

Ao conjunto \mathcal{H}' associamos o complexo simplicial $K_{\mathcal{H}'} = \Delta_0 \cup \Delta_1 \cup \Delta_2$, com

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= \{[V_i], [V_j], [V_k], [V_l]\} ; \\ \Delta_1 &= \{[V_i, V_k], [V_i, V_j], [V_k, V_j], [V_i, V_l], [V_k, V_l]\} ; \\ \Delta_2 &= \{[V_i, V_k, V_j], [V_i, V_k, V_l]\} . \end{aligned}$$

Temos que $K_{\mathcal{H}'} = K_A \cup K_B$ em que

$$\begin{aligned} K_A &= \{[V_i], [V_j], [V_k]\} \cup \{[V_i, V_k], [V_i, V_j], [V_k, V_j]\} \\ K_B &= \{[V_i], [V_k], [V_l]\} \cup \{[V_i, V_k], [V_i, V_l], [V_k, V_l]\} . \end{aligned}$$

Note que, $K_A \cap K_B = \{[V_i], [V_k], [V_i, V_k]\}$.

Desta forma, $K_{N_1} \subset K_A$ e $K_{N_2} \subset K_B$. A Proposição 6.2.1 implica que $H_0(K_A \setminus K_{N_1}) = \mathbb{Z}[V_i] \oplus \mathbb{Z}[V_j]$ e $H_0(K_B \setminus K_{N_2}) = \mathbb{Z}[V_i] \oplus \mathbb{Z}[V_l]$, e a Proposição 5.3.1 implica $H_0(K_A \cap K_B) = \mathbb{Z}[V_i]$.

Então pela sequência de Mayer-Vietoris

$$\begin{aligned} H_0(K_{\mathcal{H}'} \setminus \text{Nod } \mathcal{F}) &= \frac{H_0(K_A \setminus K_{N_1}) \oplus H_0(K_B \setminus K_{N_2})}{H_0(K_A \cap K_B)} \\ &= \frac{\mathbb{Z}[V_i] \oplus \mathbb{Z}[V_j] \oplus \mathbb{Z}[V_i] \oplus \mathbb{Z}[V_l]}{\mathbb{Z}[V_i]} \\ &= \mathbb{Z}[V_i] \oplus \mathbb{Z}[V_j] \oplus \mathbb{Z}[V_l] \end{aligned}$$

e obtemos que $\mathcal{H}' \setminus \text{Nod } \mathcal{F}$ possui três componentes conexas.

Suponha, por indução, que se o conjunto $\text{Nod } \mathcal{F}$ possui $n - 1$ elementos então

$$H_0(\mathcal{H} \setminus \text{Nod } \mathcal{F}) = \mathbb{Z}[V_1] \oplus \mathbb{Z}[V_2] \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}[V_n] ,$$

isto é, $\mathcal{H} \setminus \text{Nod } \mathcal{F}$ possui n componentes conexas.

Consideremos agora $\text{Nod } \mathcal{F} = \{\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \dots, \mathcal{N}_n\}$, em que $\mathcal{N}_i \cap \mathcal{N}_j = \emptyset$ para todo $i, j, \in \{1, 2, \dots, n\}$. Repetindo o argumento anterior, tome dois pontos triplos $J_1 = \{i, j, k\} \in \bigcup_{i=1}^{n-1} \mathcal{N}_i$ e $J_2 = \{i, k, l\} \in \mathcal{N}_n$, para os quais o 1-caminho $\gamma : (\{i, k\})$ não cruza o conjunto nodal.

Considere o complexo simplicial $K_{\mathcal{H}} = K_A \cup K_B$ tal que $\bigcup_{i=1}^{n-1} \mathcal{N}_i \subset K_A$ e $\mathcal{N}_n \subset K_B$; desta forma, $K_A \cap K_B = \{[V_i], [V_k], [V_i, V_k]\}$ e portanto $H_0((K_A \cap K_B) \setminus \text{Nod } \mathcal{F}) = \mathbb{Z}[V_i]$.

Pela Proposição 6.2.1, temos que $H_0(K_B \setminus \text{Nod } \mathcal{F}) = \mathbb{Z}[V_i] \oplus \mathbb{Z}[V_l]$. Pela hipótese de indução $H_0(K_A \setminus \text{Nod } \mathcal{F}) = \mathbb{Z}[V_i] \oplus \mathbb{Z}[V_1] \oplus \mathbb{Z}[V_2] \oplus \cdots \oplus \widehat{\mathbb{Z}[V_i]} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}[V_n]$. Então

pela sequência de Mayer-Vietoris,

$$\begin{aligned}
 H_0(K_{\mathcal{H}} \setminus \text{Nod}\mathcal{F}) &= \frac{H_0(K_A \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} \mathcal{N}_i) \oplus H_0(K_B \setminus \mathcal{N}_n)}{H_0(K_A \cap K_B)} \\
 &= \frac{\mathbb{Z}[V_j] \oplus \mathbb{Z}[V_1] \oplus \mathbb{Z}[V_2] \oplus \cdots \oplus \widehat{\mathbb{Z}[V_j]} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}[V_n] \oplus \mathbb{Z}[V_j] \oplus \mathbb{Z}[V_j]}{\mathbb{Z}[V_j]} \\
 &= \mathbb{Z}[V_j] \oplus \mathbb{Z}[V_1] \oplus \mathbb{Z}[V_2] \oplus \cdots \oplus \widehat{\mathbb{Z}[V_j]} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}[V_n] \oplus \mathbb{Z}[V_j]
 \end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{H} \setminus \text{Nod}\mathcal{F}$ possui $n + 1$ componentes 0-conexas. ■

7 COMPONENTES NODAIS E PARIDADE

Neste capítulo final faremos o estudo de $\mathcal{H} \setminus \mathcal{N}$ através da *paridade* de 0-caminhos em \mathcal{H} com respeito a uma componente nodal fixada \mathcal{N} . Na Seção 7.1 mostramos que o conjunto de 0-caminhos em \mathcal{H} pode ser dividido na união disjunta de dois subconjuntos: o dos 0-caminhos que cruzam \mathcal{N} um número par e o dos 0-caminhos que cruzam \mathcal{N} um número ímpar de vezes. Como consequência obtemos que $\mathcal{H} \setminus \mathcal{N}$ tem exatamente duas componentes conexas. E para fechar, na Seção 7.2, mostramos que se $\#Nod\mathcal{F} = n$ então $\mathcal{H} \setminus Nod\mathcal{F}$ possui $n + 1$ componentes conexas.

7.1 PARIDADE DE 0-CAMINHOS EM \mathcal{H}

Seja \mathcal{N} uma componente nodal não interrompida em \mathcal{H} e considere γ um 0-caminho em \mathcal{H} dado por $\gamma = (\{i_0\}, \{i_1\}, \dots, \{i_s\})$, com

$$Sub(\gamma) = \{\{i_0, i_1\}, \{i_1, i_2\}, \dots, \{i_{s-1}, i_s\}\}.$$

Definimos $\mu_{\mathcal{N}}(\gamma) = \#(Sub(\gamma) \cap \mathcal{N})$, isto é, $\mu_{\mathcal{N}}(\gamma)$ é o número de vezes que γ cruza \mathcal{N} . Note que se γ, γ' são 0-caminhos então

$$\mu_{\mathcal{N}}(\gamma * \gamma') = \mu_{\mathcal{N}}(\gamma) + \mu_{\mathcal{N}}(\gamma').$$

Dado $i \in I$, considere os conjuntos

$$P_{\mathcal{N}}(i) = \{\{j\} \in \mathcal{H}(1) \mid \exists \text{ um 0-caminho } \gamma : \{i\} \leftrightarrow \{j\} \text{ em } \mathcal{H} \text{ com } \mu_{\mathcal{N}}(\gamma) \text{ par}\};$$

$$I_{\mathcal{N}}(i) = \{\{j\} \in \mathcal{H}(1) \mid \exists \text{ um 0-caminho } \gamma : \{i\} \leftrightarrow \{j\} \text{ em } \mathcal{H} \text{ com } \mu_{\mathcal{N}}(\gamma) \text{ ímpar}\}.$$

Lema 7.1.1. $P_{\mathcal{N}}(i) \neq \emptyset$ e $I_{\mathcal{N}}(i) \neq \emptyset$.

Demonstração: Para ver que $P_{\mathcal{N}}(i) \neq \emptyset$, basta observar que $\{i\} \in P_{\mathcal{N}}(i)$. De fato, o caminho constante $\gamma = e = \{i\} \leftrightarrow \{i\}$ é tal que $\mu_{\mathcal{N}}(\gamma) = 0$.

Finalmente, para ver que $I_{\mathcal{N}}(i) \neq \emptyset$ precisamos considerar dois casos. Se existe $j \in I$ tal que $\{i, j\} \in \mathcal{N}$, então o 0-caminho $\gamma = (\{i\}, \{j\})$ é tal que $\mu_{\mathcal{N}}(\gamma) = 1$, isto é, $\{j\} \in I_{\mathcal{N}}(i)$. Se não existe $j \in I$ tal que $\{i, j\} \in \mathcal{N}$, tome $\{j', j''\} \in \mathcal{N}$. Então temos que ou $j' \in I_{\mathcal{N}}(i)$ ou $j'' \in I_{\mathcal{N}}(i)$. De fato, se $j' \in I_{\mathcal{N}}(i)$, acabou, (basta considerar o 0-caminho $\gamma : \{i\} \leftrightarrow \{j'\}$). Se $j' \notin I_{\mathcal{N}}(i)$, tome os 0-caminhos $\gamma = (\{j'\}, \{j''\})$ e $\gamma' = (\{i\}, \dots, \{j'\})$ em que $Sub(\gamma') \cap \mathcal{N} = \emptyset$. Observe que $\mu_{\mathcal{N}}(\gamma) = 1$ e $\mu_{\mathcal{N}}(\gamma') = 0$. Então o 0-caminho $\gamma' * \gamma = (\{i\}, \dots, \{j'\}, \{j''\})$ é tal que $Sub(\gamma' * \gamma) \cap \mathcal{N} = \{j', j''\}$, o que implica $\mu_{\mathcal{N}}(\gamma' * \gamma) = 1$. Portanto, $\{j''\} \in I_{\mathcal{N}}(i)$. ■

Lema 7.1.2. Sejam γ e γ' dois 0-caminhos em \mathcal{H} unindo $\{i\}$ e $\{j\}$. Então, o número $\mu_{\mathcal{N}}(\gamma) - \mu_{\mathcal{N}}(\gamma')$ é par. Em particular, para todo $i \in I$, $P_{\mathcal{N}}(i) \cap I_{\mathcal{N}}(i) = \emptyset$.

Demonstração: Sejam γ e γ' dois 0-caminhos em \mathcal{H} unindo $\{i\}$ e $\{j\}$. Como \mathcal{H} é simplesmente conexo, existe uma sequência finita de homotopias elementares que transformam γ em γ' . Portanto basta considerar o caso que $\gamma \rightsquigarrow \gamma'$ é uma homotopia elementar. Isto é, podemos assumir que $\gamma = \delta * \varepsilon * \rho$ e $\gamma' = \delta * \varepsilon' * \rho$ onde $(\varepsilon, \varepsilon')$ é um par homotópico elementar. Como

$$\begin{aligned}\mu_{\mathcal{N}}(\gamma) &= \mu_{\mathcal{N}}(\delta * \varepsilon * \rho) = \mu_{\mathcal{N}}(\delta) + \mu_{\mathcal{N}}(\varepsilon) + \mu_{\mathcal{N}}(\rho) \\ \mu_{\mathcal{N}}(\gamma') &= \mu_{\mathcal{N}}(\delta * \varepsilon' * \rho) = \mu_{\mathcal{N}}(\delta) + \mu_{\mathcal{N}}(\varepsilon') + \mu_{\mathcal{N}}(\rho)\end{aligned}$$

temos que, $\mu_{\mathcal{N}}(\gamma) - \mu_{\mathcal{N}}(\gamma') = \mu_{\mathcal{N}}(\varepsilon) - \mu_{\mathcal{N}}(\varepsilon')$, portanto é suficiente mostrar que $\mu_{\mathcal{N}}(\varepsilon) - \mu_{\mathcal{N}}(\varepsilon')$ é um número par. Lembre-se que $(\varepsilon, \varepsilon')$ é um par homotópico elementar nas seguintes situações:

1. $\varepsilon = \varepsilon'$;
2. $\varepsilon = (\{i_1\}, \{i_2\}, \{i_1\})$ e $\varepsilon' = (\{i_1\})$;
3. $\varepsilon = (\{i_1\}, \{i_2\})$ e $\varepsilon' = (\{i_1\}, \{i_3\}, \{i_2\})$ em que onde $(\{i_1, i_3\}, \{i_3, i_2\})$ é um 1-caminho em \mathcal{H} .

Vamos analisar cada uma delas separadamente. O caso $\varepsilon = \varepsilon'$ é evidente.

Suponha $\varepsilon = (\{i_1\}, \{i_2\}, \{i_1\})$ e $\varepsilon' = (\{i_1\})$. Então $\mu_{\mathcal{N}}(\varepsilon') = 0$ (já que ε' é um caminho constante) e

$$\mu_{\mathcal{N}}(\varepsilon) = \begin{cases} 0, & \text{se } \{i_1, i_2\} \notin \mathcal{N}; \\ 2, & \text{se } \{i_1, i_2\} \in \mathcal{N}; \end{cases}$$

Assim, $\mu_{\mathcal{N}}(\varepsilon) - \mu_{\mathcal{N}}(\varepsilon') = 0$ ou 2 , e terminamos.

Suponha agora $\varepsilon = (\{i_1\}, \{i_2\})$ e $\varepsilon' = (\{i_1\}, \{i_3\}, \{i_2\})$. Denote $J = \{i_1, i_2, i_3\} \in \mathcal{H}(3)$. Nos interessa a situação na qual $J \in \mathcal{N}$, pois se $J \notin \mathcal{N}$ temos $\mu_{\mathcal{N}}(\varepsilon) = 0 = \mu_{\mathcal{N}}(\varepsilon')$. Temos dois casos a considerar:

- A) $\{i_1, i_2\} \in \mathcal{N}$. Neste caso, $\mu_{\mathcal{N}}(\varepsilon) = 1$. Além disso, como \mathcal{N} é uma componente nodal, temos que

$$\{i_1, i_3\} \in \mathcal{N} \Rightarrow \{i_2, i_3\} \notin \mathcal{N}$$

ou

$$\{i_2, i_3\} \in \mathcal{N} \Rightarrow \{i_1, i_3\} \notin \mathcal{N}.$$

Em ambos os casos temos $\mu_{\mathcal{N}}(\varepsilon') = 1$. Assim, $\mu_{\mathcal{N}}(\varepsilon) - \mu_{\mathcal{N}}(\varepsilon') = 0$.

- B) $\{i_1, i_2\} \notin \mathcal{N}$. Neste caso $\mu_{\mathcal{N}}(\varepsilon) = 0$ e $\{i_1, i_3\}$ e $\{i_2, i_3\}$ estão em \mathcal{N} , implicando que $\mu_{\mathcal{N}}(\varepsilon') = 2$. Assim, $\mu_{\mathcal{N}}(\varepsilon') - \mu_{\mathcal{N}}(\varepsilon) = 2$.

■

Lema 7.1.3. Dados $i, j \in I$ temos:

1. se $\{j\} \in P_{\mathcal{N}}(i)$ então $P_{\mathcal{N}}(j) = P_{\mathcal{N}}(i)$ e $I_{\mathcal{N}}(j) = I_{\mathcal{N}}(i)$;
2. se $\{j\} \in I_{\mathcal{N}}(i)$ então $P_{\mathcal{N}}(j) = I_{\mathcal{N}}(i)$ e $I_{\mathcal{N}}(j) = P_{\mathcal{N}}(i)$.

Demonstração: Isto decorre dos fatos que $\mu_{\mathcal{N}}(\gamma * \gamma') = \mu_{\mathcal{N}}(\gamma) + \mu_{\mathcal{N}}(\gamma')$ e que a soma de pares é par, a soma de ímpares é par e a soma de par e ímpar é ímpar. ■

Note que a recíproca do item 1 do Lema 7.1.3 é, evidentemente, válida: de fato, se $P_{\mathcal{N}}(j) = P_{\mathcal{N}}(i)$ então $j \in P_{\mathcal{N}}(i)$, uma vez que $j \in P_{\mathcal{N}}(j)$.

O resultado a seguir nos diz que dados dois índices $i, j \in I$ tais que $P_{\mathcal{N}}(i) = P_{\mathcal{N}}(j)$, existe um 1-caminho β ligando $\{i\}$ a $\{j\}$ que não cruza \mathcal{N} . Portanto, $\{i\}$ e $\{j\}$ estão na mesma componente conexa de $\mathcal{H} \setminus \mathcal{N}$. Antes, um pouco de notação.

Considere dois índices $i, j \in I$ tais que $P_{\mathcal{N}}(i) = P_{\mathcal{N}}(j)$. Suponha que existam $i', j' \in I$ tais que $\{i, i'\}, \{j', j\} \in \mathcal{N}$. Seja W_{ij} o conjunto dos 1-caminhos $\omega = (k_0, k_1, \dots, k_u)$ de comprimento u tais que $k_0 = \{i, i'\}$, $k_u = \{j', j\}$ e $k_m \in \mathcal{N} \cap \mathcal{H}(2)$ para todo $m = 0, \dots, u$. Note que nestas condições temos $u \geq 1$: de fato, se $u = 0$ então existe o 1-caminho $\omega = (\{i, j\}) \in W_{ij}$, ou seja, $\omega \subset \mathcal{N}$. Então o 0-caminho $\gamma = (\{i\}, \{j\})$ é tal que $\mu_{\mathcal{N}}(\gamma) = 1$, o que implica $j \in I_{\mathcal{N}}(i)$. Absurdo pois estamos supondo $j \in P_{\mathcal{N}}(i)$ e pelo Lema 7.1.2 temos $P_{\mathcal{N}}(i) \cap I_{\mathcal{N}}(i) = \emptyset$.

Lema 7.1.4. *Na situação anterior, existe um 0-caminho β em \mathcal{H} ligando $\{i\}$ e $\{j\}$ tal que $\mu_{\mathcal{N}}(\beta) = 0$.*

Demonstração: Procedemos por indução no comprimento $u \geq 1$ de um elemento $\omega \in W_{ij}$. Suponha que $u = 1$: existe o 1-caminho $\omega = (k_0, k_1) \in W_{ij}$ em que $k_0 = \{i, i_1\}$ e $k_1 = \{i_1, j\}$. Lembre que k_0, k_1 estão em \mathcal{N} . Isso implica que $\{i, j, i_1\} \in \mathcal{N}$ e portanto $\{i, j\}$ está em $\mathcal{H}(2)$ mas não está em \mathcal{N} . Então $\beta = (\{i\}, \{j\})$ é um 0-caminho tal que $\mu_{\mathcal{N}}(\beta) = 0$.

Suponha $u > 1$ e seja $\omega = (k_0, k_1, k_2, \dots, k_u) = (\{i, i_1\}, \{i_1, i_2\}, \{i_2, i_3\}, \dots, \{i_u, j\})$. Como $\{i, i_1\}, \{i_1, i_2\} \in \mathcal{N}$, isso implica $\{i, i_1, i_2\} \in \mathcal{H}(3) \cap \mathcal{N}$ e também $\{i, i_2\}$ não está em \mathcal{N} . Portanto existe o 0-caminho $\alpha = (\{i\}, \{i_2\})$ e $\mu_{\mathcal{N}}(\alpha) = 0$. Considere agora o 1-caminho $\omega' = (k_2, \dots, k_u) = (\{i_2, i_3\}, \dots, \{i_u, j\})$ de comprimento $u - 2$. Por indução, existe um 0-caminho $\beta' : (\{i_2\}, \{i_3\}, \dots, \{i_u\}, \{j\})$ tal que $\mu_{\mathcal{N}}(\beta') = 0$. Assim, o 0-caminho

$$\beta = \alpha * \beta' = (\{i\}, \{i_2\}, \{i_3\}, \dots, \{i_u\}, \{j\})$$

é tal que $\mu_{\mathcal{N}}(\beta) = \mu_{\mathcal{N}}(\alpha) + \mu_{\mathcal{N}}(\beta') = 0$. ■

O resultado a seguir tem o enunciado muito similar ao do Lema 7.1.4, porém a sutileza é que na situação do Lema 7.1.4 a componente nodal \mathcal{N} passa pelos divisores $\{i\}, \{j\}$ (de fato, estamos supondo que $\{i, i'\}, \{j', j\} \in \mathcal{N}$). Para a Proposição abaixo abrimos mão desta hipótese.

Proposição 7.1.1. *Para qualquer $\{j\} \in P_{\mathcal{N}}(i)$, existe um 0-caminho γ em \mathcal{H} ligando $\{i\}$ e $\{j\}$ tal que $\mu_{\mathcal{N}}(\gamma) = 0$.*

Demonstração: Dado que $\{j\} \in P_{\mathcal{N}}(i)$, existe um 0-caminho $\gamma : \{i\} \leftrightarrow \{j\}$ tal que $\mu_{\mathcal{N}}(\gamma) = 2n$, para $n \in \mathbb{N}$. Procedemos por indução em n . Se $n = 0$, temos $\mu_{\mathcal{N}}(\gamma) = 0$, não há nada a fazer, γ já é o caminho buscado e o resultado segue.

Se $n = 1$, o 0-caminho $\gamma : \{i\} \leftrightarrow \{j\}$, tem $\mu_{\mathcal{N}}(\gamma) = 2$. Portanto, γ pode ser decomposto nos seguintes em três sub-caminhos:

$$\begin{aligned} \delta : \{i\} \leftrightarrow \{i_1\} & \text{ com } \mu_{\mathcal{N}}(\delta) = 0 ; \\ \alpha : \{i_1\} \leftrightarrow \{i_4\} = (\{i_1\}, \{i_2\}, \dots, \{i_3\}, \{i_4\}) & \text{ com } \mu_{\mathcal{N}}(\alpha) = \#\{\{i_1, i_2\}, \{i_3, i_4\}\} = 2 ; \\ \rho : \{i_4\} \leftrightarrow \{j\} & \text{ com } \mu_{\mathcal{N}}(\rho) = 0 . \end{aligned}$$

Pelo Lema 7.1.4, existe um 0-caminho $\alpha' : \{i_1\} \leftrightarrow \{i_4\}$ tal que $\mu_{\mathcal{N}}(\alpha') = 0$. Tome o 0-caminho $\gamma' : \{i\} \leftrightarrow \{j\} = \delta * \alpha' * \rho$. Assim

$$\mu_{\mathcal{N}}(\gamma') = \mu_{\mathcal{N}}(\delta) + \mu_{\mathcal{N}}(\alpha') + \mu_{\mathcal{N}}(\rho) = 0 .$$

Se $n > 1$, o 0-caminho $\gamma : \{i\} \leftrightarrow \{j\}$ é tal que $\mu_{\mathcal{N}}(\gamma) > 2$. Escreva

$$\gamma = (\{i\}, \{i_1\}, \{i_2\}, \dots, \{i_3\}, \{i_4\}, \{i_5\}, \dots, \{i_6\}, \{i_7\}, \{j\})$$

em que $\{\{i_1, i_2\}, \{i_3, i_4\}\} \in \mathcal{N}$. Como antes, decompomos γ em três sub-caminhos:

$$\begin{aligned} \delta : \{i\} \leftrightarrow \{i_1\} & \text{ com } \mu_{\mathcal{N}}(\delta) = 0 ; \\ \alpha : (\{i_1\}, \{i_2\}, \dots, \{i_3\}, \{i_4\}, \{i_5\}, \dots, \{i_6\}, \{i_7\}) & \text{ com } \mu_{\mathcal{N}}(\alpha) = 2n > 2 ; \\ \rho : \{i_7\} \leftrightarrow \{j\} & \text{ com } \mu_{\mathcal{N}}(\rho) = 0 . \end{aligned}$$

Agora, podemos decompor α em dois sub-caminhos, $\alpha = \alpha_1 * \alpha_2$, em que

$$\begin{aligned} \alpha_1 : (\{i_1\}, \{i_2\}, \dots, \{i_3\}, \{i_4\}) & \text{ com } \mu_{\mathcal{N}}(\alpha_1) = 2 ; \\ \alpha_2 : (\{i_4\}, \{i_5\}, \dots, \{i_6\}, \{i_7\}) & \text{ com } \mu_{\mathcal{N}}(\alpha_2) = 2n - 2 = 2(n - 1) . \end{aligned}$$

Pelo Lema 7.1.4, existe 0-caminho $\alpha'_1 : \{i_1\} \leftrightarrow \{i_4\}$ tal que $\mu_{\mathcal{N}}(\alpha'_1) = 0$, e por hipótese de indução existe um 0-caminho $\alpha'_2 : \{i_4\} \leftrightarrow \{i_7\}$ tal que $\mu_{\mathcal{N}}(\alpha'_2) = 0$. Portanto o 0-caminho $\alpha' = \alpha'_1 * \alpha'_2 : \{i_1\} \leftrightarrow \{i_7\}$ não cruza a componente nodal, isto é, $\mu_{\mathcal{N}}(\alpha') = 0$. Finalmente, $\gamma' = \delta * \alpha' * \rho : \{i\} \leftrightarrow \{j\}$ é um 0-caminho ligando $\{i\}$ a $\{j\}$ tal que

$$\mu_{\mathcal{N}}(\gamma') = \mu_{\mathcal{N}}(\delta) + \mu_{\mathcal{N}}(\alpha') + \mu_{\mathcal{N}}(\rho) = 0 .$$

■

Observação 2. Como consequência da Proposição 7.1.1 temos que se $\{j\} \in I_{\mathcal{N}}(i)$, existe um 0-caminho $\gamma : \{i\} \leftrightarrow \{j\}$ em \mathcal{H} tal que $\mu_{\mathcal{N}}(\gamma) = 1$.

De fato, para verificar isso considere $J = \{i_1, i_2\} \in \mathcal{N}$ qualquer. Assuma sem perda de generalidade que $\{i_1\} \in P_{\mathcal{N}}(i)$, então $\{i_2\} \in I_{\mathcal{N}}(i) = P_{\mathcal{N}}(j)$ e existem dois 0-caminhos $\sigma : \{i\} \leftrightarrow \{i_1\}$ com $\mu_{\mathcal{N}}(\sigma) = 0$, e $\rho : \{i_2\} \leftrightarrow \{j\}$ com $\mu_{\mathcal{N}}(\rho) = 0$. Portanto, $\gamma = \sigma * (\{i_1\}, \{i_2\}) * \rho$ é um 0-caminho ligando $\{i\}$ a $\{j\}$ com

$$\mu_{\mathcal{N}}(\gamma) = \mu_{\mathcal{N}}(\sigma) + \mu_{\mathcal{N}}(\{\{i_1\}, \{i_2\}\}) + \mu_{\mathcal{N}}(\rho) = 1 .$$

Corolário 7.1.1. *Dado qualquer $i \in I$, $P_{\mathcal{N}}(i)$ e $I_{\mathcal{N}}(i)$ são 0-conexos em $\mathcal{H} \setminus \mathcal{N}$.*

Demonstração: Dados $\{i\}, \{j\} \in P_{\mathcal{N}}(i)$, pela Proposição 7.1.1 existe um 0-caminho $\gamma : \{i\} \leftrightarrow \{j\}$ tal que $\mu_{\mathcal{N}}(\gamma) = 0$; isso mostra que $P_{\mathcal{N}}(i)$ é 0-conexo e não cruza \mathcal{N} , ou seja, é 0-conexo em $\mathcal{H} \setminus \mathcal{N}$.

Por outro lado, do Lema 7.1.1 temos que $I_{\mathcal{N}}(i) \neq \emptyset$; tome $\{j\} \in I_{\mathcal{N}}(i)$. Do Lema 7.1.3 temos que $I_{\mathcal{N}}(i) = P_{\mathcal{N}}(j)$ e portanto, como visto acima, $I_{\mathcal{N}}(i)$ é 0-conexo em $\mathcal{H} \setminus \mathcal{N}$. ■

Corolário 7.1.2. *Dado qualquer $i \in I$,*

$$\mathcal{H}(1) = P_{\mathcal{N}}(i) \cup I_{\mathcal{N}}(i) .$$

Demonstração: Dado $j \in \mathcal{H}(1)$ distinto de i , existe 0-caminho $\gamma : \{i\} \leftrightarrow \{j\}$ (pois $\mathcal{H}(1)$ é 0-conexo). Então se $\mu_{\mathcal{N}}(\gamma) = 2n$, temos $j \in P_{\mathcal{N}}(i)$ e se $\mu_{\mathcal{N}}(\gamma) = 2n + 1$, temos $j \in I_{\mathcal{N}}(i)$. ■

Note que, como pelo Lema 7.1.1 $P_{\mathcal{N}}(i)$ e $I_{\mathcal{N}}(i)$ são não vazios, e pelo Lema 7.1.2 $P_{\mathcal{N}}(i) \cap I_{\mathcal{N}}(i) = \emptyset$, concluímos do Corolário 7.1.2 que estes conjuntos são componentes conexas de $\mathcal{H}(1)$.

Dado $i \in I$, sejam

$$\mathcal{P}(P_{\mathcal{N}}(i)) = \text{o conjunto das partes de } P_{\mathcal{N}}(i)$$

$$\mathcal{P}(I_{\mathcal{N}}(i)) = \text{o conjunto das partes de } I_{\mathcal{N}}(i)$$

e denote

$$P'_{\mathcal{N}}(i) = \mathcal{P}(P_{\mathcal{N}}(i)) \cap \mathcal{H} ,$$

$$I'_{\mathcal{N}}(i) = \mathcal{P}(I_{\mathcal{N}}(i)) \cap \mathcal{H} .$$

Como consequência do Lema 7.1.1 temos que $P'_{\mathcal{N}}(i) \neq \emptyset$ e $I'_{\mathcal{N}}(i) \neq \emptyset$, e pelo Lema 7.1.2 obtemos $P'_{\mathcal{N}}(i) \cap I'_{\mathcal{N}}(i) = \emptyset$. Além disso, pelo Corolário 7.1.1 temos o

Corolário 7.1.3. *Dado qualquer $i \in I$, $P'_{\mathcal{N}}(i)$ e $I'_{\mathcal{N}}(i)$ são 0-conexos em $\mathcal{H} \setminus \mathcal{N}$.*

Finalmente, como consequência do Corolário 7.1.3 obtemos o

Teorema 7.1.1. *Dado qualquer $i \in I$, $P'_{\mathcal{N}}(i)$ e $I'_{\mathcal{N}}(i)$ são as componentes conexas de $\mathcal{H} \setminus \mathcal{N}$.*

7.2 COMPONENTES CONEXAS DE $\mathcal{H} \setminus \text{Nod}\mathcal{F}$

Seja $\text{Nod}\mathcal{F} = \{\mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_n\}$ o conjunto das componentes nodais não interrompidas (distintas). Com os resultados da seção anterior, vamos mostrar o seguinte

Teorema 7.2.1. *$\mathcal{H} \setminus \text{Nod}\mathcal{F}$ tem $n + 1$ componentes conexas.*

Demonstração: Se $n = 1$, $Nod\mathcal{F} = \{\mathcal{N}\}$ então pelo Teorema 7.1.1 $\mathcal{H} \setminus \mathcal{N}$ possui duas componentes conexas, a saber, $P'_{\mathcal{N}}(i)$ e $I'_{\mathcal{N}}(i)$ para algum $i \in I$.

Se $n = 2$, $Nod\mathcal{F} = \{\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2\}$; note que pelo Teorema 3.2.1 temos $\mathcal{N}_1 \cap \mathcal{N}_2 = \emptyset$, como na Figura 34. Tome $i \in I$ qualquer; pelo Teorema 7.1.1 os conjuntos $P'_{\mathcal{N}_1}(i)$ e $I'_{\mathcal{N}_1}(i)$ são componentes conexas de $\mathcal{H} \setminus \mathcal{N}_1$.

Agora, temos que $\mathcal{N}_2 \subset \mathcal{H} \setminus \mathcal{N}_1$; suponhamos sem perda de generalidade que $\mathcal{N}_2 \subset I'_{\mathcal{N}_1}(i)$. Pelo Teorema 7.1.1, temos que $P'_{\mathcal{N}_2}(i)$ e $I'_{\mathcal{N}_2}(i)$ são as componentes conexas de $\mathcal{H} \setminus \mathcal{N}_2$. Logo, os conjuntos

$$P^2_{\mathcal{N}_2}(i) = P'_{\mathcal{N}_2}(i) \cap I'_{\mathcal{N}_1}(i)$$

$$I^2_{\mathcal{N}_2}(i) = I'_{\mathcal{N}_2}(i) \cap I'_{\mathcal{N}_1}(i)$$

são as componentes conexas de $I'_{\mathcal{N}_1}(i) \setminus \mathcal{N}_2$.

Assim,

$$\mathcal{H} \setminus Nod\mathcal{F} = P'_{\mathcal{N}_1}(i) \cup P^2_{\mathcal{N}_2}(i) \cup I^2_{\mathcal{N}_2}(i)$$

possui três componentes conexas.

O argumento por indução funciona da mesma forma. Suponha que $Nod\mathcal{F} = \{\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \dots, \mathcal{N}_{n-1}\}$ em que $\mathcal{N}_i \cap \mathcal{N}_j = \emptyset$, para todo $i, j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Dado um $i \in I$ temos que

$$\mathcal{H} \setminus Nod\mathcal{F} = P'_{\mathcal{N}_1}(i) \cup P^2_{\mathcal{N}_2}(i) \cup \dots \cup P^{n-1}_{\mathcal{N}_{n-1}}(i) \cup I^{n-1}_{\mathcal{N}_{n-1}}(i). \quad (17)$$

Seja agora $Nod\mathcal{F} = \{\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \dots, \mathcal{N}_n\}$ (como antes, disjuntas) e tome $i \in I$. Pelo Teorema 7.1.1, $P'_{\mathcal{N}_n}(i)$ e $I'_{\mathcal{N}_n}(i)$ são as componentes conexas de $\mathcal{H} \setminus \mathcal{N}_n$. Suponha que para $\mathcal{H} \setminus \{\mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_{n-1}\}$ tenhamos a partição como em (17) e suponha também, sem perda de generalidade, que $\mathcal{N}_n \subset I^{n-1}_{\mathcal{N}_{n-1}}(i)$. Então,

$$\mathcal{H} \setminus Nod\mathcal{F} = P'_{\mathcal{N}_1}(i) \cup P^2_{\mathcal{N}_2}(i) \cup \dots \cup P^{n-1}_{\mathcal{N}_{n-1}}(i) \cup P^n_{\mathcal{N}_n}(i) \cup I^n_{\mathcal{N}_n}(i)$$

possui $n + 1$ componentes conexas. ■

REFERÊNCIAS

- 1 CAMACHO, César; SAD, Paulo. **Pontos singulares de equações diferenciais analíticas**. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA)., 1987. v. 16.
- 2 CANO, Felipe. Reduction of the singularities of codimension one singular foliations in dimension three. **Annals of mathematics**, JSTOR, v. 160, n. 3, p. 907–1011, 2004.
- 3 CANO, Felipe; CERVEAU, Dominique. Desingularization of non-dicritical holomorphic foliations and existence of separatrices. **Acta Mathematica**, Institut Mittag-Leffler, v. 169, p. 1–103, 1992.
- 4 CANO, Felipe; CERVEAU, Dominique; DÉSERTEI, Julie. **Théorie élémentaire des feuilletages holomorphes singuliers**. [S.l.]: Belin, 2013.
- 5 CANO, Felipe; MATTEI, Jean François; RAVARA-VAGO, Marianna. Invariant hypersurfaces and nodal components for codimension one singular foliations. **Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas**, Springer, [S.l.], v. 114, n. 4, p. 1–35, 2020. Acesso em: 22 jan. 2022.
- 6 CANO, Felipe; RAVARA-VAGO, Marianna. Local Brunella's alternative II. Partial Separatrices. **International Mathematics Research Notices**, Oxford University Press, v. 2015, n. 23, p. 12840–12876, 2015.
- 7 CANO, Felipe; RAVARA-VAGO, Marianna; SOARES, Marcio. Local Brunella's alternative I. Rich Foliation. **International Mathematics Research Notices**, Oxford University Press, v. 2015, n. 9, p. 2525–2575, 2015.
- 8 DIESTEL, Reinhard. **Graph theory 3rd ed.** [S.l.]: Graduate texts in mathematics, 2005. v. 173.
- 9 HATCHER, Allen. **Algebraic Topology**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2002.
- 10 IJIRI, Yuji. On the generalized inverse of an incidence matrix. **Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics**, SIAM, v. 13, n. 3, p. 827–836, 1965.

- 11 JOUANOLOU, Jean-Pierre. **Equations de Pfaff algébriques**. [S.l.]: Springer, 2006. v. 708. (Lecture Notes in Mathematics).
- 12 KOZLOV, Dimitry. **Combinatorial algebraic topology**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2008. v. 21.
- 13 LIMA, Elon Lages. **Grupo fundamental e espaços de recobrimento**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA)., 2012. (Projeto Euclides).
- 14 LIMA, Elon Lages. **Homologia básica**. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA)., 2009.
- 15 MILIES, César Polcino; SEHGAL, Sudarshan K; SEHGAL, Sudarshan. **An introduction to group rings**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2002. v. 1.
- 16 NAKAHARA, Mikio. **Geometry, topology and physics**. [S.l.]: IOP Publishing, 1990.
- 17 NETO, Alcides Lins; SCÁRDUA, Bruno. **Folheações algébricas complexas**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA)., 2015. (Projeto Euclides).
- 18 ORTIZ-BOBADILLA, L; ROSALES-GONZÁLEZ, E; VORONIN, SM. On Camacho-Sad's theorem about the existence of a separatrix. **International Journal of Mathematics**, World Scientific, v. 21, n. 11, p. 1413–1420, 2010.
- 19 VASUDEV, C. **Graph theory with applications**. [S.l.]: New Age International, 2006.