



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Eduardo Oliveira Pinho

Bósons de Spin-0 no Espaço-Tempo de Estrelas em Rotação Lenta

Florianópolis
2023

Eduardo Oliveira Pinho

Bósons de Spin-0 no Espaço-Tempo de Estrelas em Rotação Lenta

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito para a obtenção do título de mestre em física.

Orientador: Prof. Celso de Camargo Barros Jr., Dr.

Florianópolis

2023

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Pinho, Eduardo Oliveira

Bósons de spin-0 no espaço-tempo de estrelas em rotação
lenta / Eduardo Oliveira Pinho ; orientador, Celso de
Camargo Barros Junior, 2023.

98 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas,
Programa de Pós-Graduação em Física, Florianópolis, 2023.

Inclui referências.

1. Física. 2. Mecânica quântica em espaços-tempos curvos.
I. Barros Junior, Celso de Camargo. II. Universidade
Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em
Física. III. Título.

Eduardo Oliveira Pinho

Bósons de Spin-0 no Espaço-Tempo de Estrelas em Rotação Lenta

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Felipe Arretche, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Paulo Juliano Liebgott, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. André da Silva Schneider, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestre em física.

Prof. Paulo Henrique Souto Ribeiro, Dr.
Coordenador do Programa

Prof. Celso de Camargo Barros Jr., Dr.
Orientador

Florianópolis, 2023.

AGRADECIMENTOS

Agradecimentos aos meus pais, ao prof. Celso pela orientação e, pelo apoio moral que me foi essencial, ao meu namorado Antônio e aos meus amigos dentro e fora da física, principalmente Luís, Cheryl e Rafael.

*“Je vous remercie, mais je crois que j’ai assez voyagé:
il faut maintenant que je rentre en France.”
(Jean-Paul Sartre)*

RESUMO

Uma descrição do espaço-tempo de estrelas relativísticas em rotação “lenta” foi construída durante os anos 1960 por James B. Hartle e Kip S. Thorne [1] [2], tanto para a região externa quanto para a região interna a uma estrela, através de perturbações rotacionais, determinando, deste modo, uma métrica para esse tipo de sistema. Neste trabalho, iremos obter e resolver uma equação da mecânica quântica no contexto de um espaço-tempo curvo, mais especificamente a equação de Klein-Gordon, que descreve o comportamento de bósons de spin-0 como o pión e o bóson de Higgs, porém em uma região próxima a uma estrela em rotação. Este tipo de estudo pode ser considerado um primeiro passo para o entendimento da mecânica da gravitação quântica, uma descrição quântica da gravidade muitas vezes formulada em termos da teoria da relatividade geral. Neste trabalho estudaremos a métrica de Hartle-Thorne para uma região externa à estrela, dada por [2], através de uma expansão em potências de M/r , bem como introduziremos pequenas correções apresentadas em [3], e então usaremos as expansões resultantes para resolver a equação de Klein-Gordon em espaços-tempos curvos. Utilizando em primeiro lugar a métrica de Hartle-Thorne, chegaremos a um grupo de soluções escritas em termos de funções especiais, e depois utilizando a métrica corrigida obteremos outro resultado, agora dado a partir da solução usual para uma partícula livre com correções de massa e momento angular. As soluções resultantes serão estudadas e aferidas em vários sistemas físicos diferentes e depois também comparadas a fim de mostrarmos que elas possuem similaridades intrínsecas, embora tenham sido obtidas a partir de métodos dissimilares.

ABSTRACT

A description of the spacetime of “slowly” rotating relativistic stars was constructed during the 1960s by James B. Hartle and Kip S. Thorne [1] [2], for regions both interior and exterior to a star, by means of rotational perturbations which determine thereby a metric for that type of system. In this work, we will obtain and solve a quantum mechanical equation in the context of a curved spacetime, more specifically the Klein-Gordon equation, which describes the behavior of spin-0 bosons such as the pion and the boson Higgs, though in a region near a rotating star. This type of study can be considered a first step toward an understanding of the mechanics of quantum gravity, a quantum description of gravity that is often formulated in terms of the theory of general relativity. In this work we will expand the Hartle-Thorne metric in a region exterior to a given star, as found in [2] in terms of powers of M/r , introduce small corrections supplied by [3], and then use the resulting expansions to solve the Klein-Gordon equation in curved spacetime. By first using the original Hartle-Thorne metric, we will arrive at a group of solutions written in terms of special functions, and then by using the corrected metric we will obtain another result, now given in terms of the usual free particle solution, plus mass and angular momentum corrections. The resulting solutions will be studied and assessed in various physical systems, and then they will also be compared so as to show that they have intrinsic similarities, despite having been obtained in different ways.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
2	ELEMENTOS DA TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL	19
2.1	IDEIA BÁSICA DA TEORIA DA RELATIVIDADE	19
2.2	RESULTADOS ÚTEIS DA RELATIVIDADE RESTRITA	20
2.2.1	Coordenadas e tratamento indicial	20
2.2.2	Tempo próprio e dilatação temporal	22
2.2.3	Velocidade, energia e momento	23
2.3	RELATIVIDADE GERAL E EQUAÇÕES DE EINSTEIN	25
2.3.1	Origem da Relatividade Geral	25
2.3.2	Escalares, vetores, tensores e variedades	26
2.3.3	Curvatura, derivada covariante e equação da geodésica	28
2.3.4	Equações de Einstein	31
2.3.5	Solução de Schwarzschild	32
3	A EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON	33
3.1	OBTENDO A EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON	33
3.2	SOLUÇÃO PARA UMA PARTÍCULA LIVRE	37
3.3	EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON EM ESPAÇOS-TEMPOS CURVOS	38
4	A MÉTRICA DE HARTLE-THORNE	41
4.1	VISÃO GLOBAL DO PROCEDIMENTO DE OBTENÇÃO DA MÉTRICA DE HARTLE-THORNE	41
4.2	ELEMENTO DE LINHA EXTERNO	44
4.3	A EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON NO ESPAÇO-TEMPO DE HARTLE-THORNE	45
4.3.1	Descobrimo e desvendando a equação confluyente de Heun	48
4.3.2	A solução escrita como outras funções especiais	50
4.3.2.1	A equação de Whittaker	50
4.3.2.2	A equação de Kummer	52
5	A MÉTRICA DE BERTI ET AL.	55
5.1	OBTENDO E EXPANDINDO A MÉTRICA	55
5.2	UM ANSATZ PARA A SOLUÇÃO	60
5.2.1	Aplicando o ansatz	60
5.2.2	Resolvendo a equação	61
6	RESULTADOS	65
6.1	COMPARANDO SOLUÇÕES DIFERENTES	65
6.2	A FUNÇÃO DE ONDA	67
6.3	CORREÇÕES DE MASSA E DA ROTAÇÃO	68
6.3.1	Valores numéricos das contribuições no expoente $F(r)$	70

6.4	ESTUDANDO A ESTRELA DE NÊUTRONS DE PERTO	73
6.4.1	Gráficos de f_1	75
6.4.2	Gráficos de f_2	80
6.4.3	Gráficos de f_3	82
7	CONCLUSÃO	89
	REFERÊNCIAS	93

1 INTRODUÇÃO

Até o início do século passado, o espaço e o tempo, através das coordenadas espaciais e do parâmetro temporal, eram considerados duas peças distantes nas descrições das leis físicas. O espaço descrevia o meio onde tudo existia e o tempo era um parâmetro misterioso com um sentido fixo, sempre seguindo em frente, nunca para trás, e tinha caráter absoluto, de tal forma que ele era o mesmo, independente de onde o experimento estivesse sendo feito. Devido à unificação da eletricidade e do magnetismo e do advento das equações de Maxwell na segunda metade do século XIX, descobriu-se que, ao invés do que se pensava, o espaço e o tempo estão intimamente ligados [4]. Como disse Hermann Minkowski [5] ao abrir um colóquio dado no 80º Encontro de Cientistas Naturais em Köln no dia 21 de setembro de 1908:

“As visões de espaço e tempo que almejo propor perante os senhores surgiram do terreno da física experimental e é lá que jaz o seu forte. Elas são radicais. A partir de agora, o espaço por si só, e o tempo por si só, estão fadados a tornarem-se meras sombras e somente uma espécie de união entre os dois preservará uma realidade independente.”

A teoria desenvolvida chamou-se teoria da relatividade restrita (ou especial), construída a partir de descobertas feitas por cientistas como Hendrik Lorentz e Henri Poincaré e desenvolvida principalmente por Albert Einstein e com contribuições subsequentes de outros físicos como Hermann Minkowski, Max Born e Paul Ehrenfest. A teoria da relatividade restrita postula que as leis da física devem ser as mesmas para qualquer observador em um referencial inercial e que a velocidade da luz seja a mesma para qualquer observador, independente das velocidades do observador e da fonte de luz. O primeiro destes postulados denomina-se de princípio da relatividade especial. Segundo a teoria da relatividade especial, é possível construir um objeto quadridimensional que representa o espaço-tempo, o nome dado a tal união entre o espaço e o tempo.

Logo Einstein propôs uma generalização do princípio de relatividade especial, que diz que todas as leis da física devem ser as mesmas em referências arbitrários. Foi através disto, do chamado princípio da equivalência, e através de outras considerações teóricas que Einstein derivou uma equação tensorial que descreve o espaço-tempo e como objetos com energia interagem usando-o como meio — isto é, interagem gravitacionalmente [6]. Essa é a sua teoria da relatividade geral [7], que é uma teoria onde a descrição da interação gravitacional tem um caráter geométrico. As equações de campo de Einstein, frutos de anos de sua pesquisa, além da contribuição de diversos outros pesquisadores como Tullio Levi-Civita, Marcel Grossmann e Karl Schwarzschild, relacionam a curvatura e a geometria do espaço-tempo com a matéria e energia presentes na região em pauta através do tensor de energia-momento:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}.$$

Segundo estas equações, a própria estrutura do próprio espaço-tempo é afetada pela presença de matéria e energia e portanto o movimento de partículas é alterado e a trajetória que ela passa

a seguir tem caráter curvilíneo. Até mesmo a propagação da luz é afetada por objetos massivos. Tais resultados e previsões que a teoria de Einstein propõe são inusitados, revolucionários, e até hoje obtêm-se mais e mais confirmações de que o seu modelo possui uma descrição certa do nosso universo.

Além da relatividade geral, uma outra teoria física foi elaborada no início do século XX. A mecânica quântica [8] teve início principalmente nos trabalhos de Max Planck sobre radiação de corpo negro e de Albert Einstein [9] sobre o efeito fotoelétrico, evoluiu ao longo dos anos seguintes com o trabalho de Bohr [10] e Rutherford [11], entre outros, e depois tomou uma forma mais concreta nos anos 20 e 30 com o trabalho de diversos cientistas notáveis como Paul Dirac, Erwin Schrödinger, Louis de Broglie, Max Born e Werner Heisenberg.

A mecânica quântica descreve cenários opostos aos da física clássica e da relatividade geral, a dizer, o mundo subatômico de partículas como o próton e o elétron, que se comporta de forma diferente ao mundo macroscópico dos seres humanos e dos planetas e estrelas. De acordo com o princípio de incerteza de Heisenberg, não é possível conhecer com precisão absoluta a posição de uma partícula e a sua velocidade ao mesmo tempo. Ademais, em muitos casos só é possível saber a probabilidade de que um certo fenômeno aconteça e portanto o comportamento de uma partícula específica não pode ser individuado, somente o comportamento de um número significativo de partículas, para que o resultado probabilístico tenha algum sentido físico e mensurável.

Esse desenvolvimento teórico foi um sucesso tão grande que ao longo das décadas seguintes surtiu frutos tecnológicos que mudaram a face da humanidade de forma irrevogável, pois sem os conhecimentos sobre mecânica quântica adquiridos ao longo do século XX não seria possível existirem tecnologias como computadores, celulares, lasers, microscópios eletrônicos, GPS, transistores e microchips e aparelhos de ressonância magnética. Além disso, a partir de teorias e experimentos originários na mecânica quântica, desenvolveu-se a mais moderna teoria quântica de campos, que descreve, através do modelo padrão, três das quatro interações fundamentais da natureza: o eletromagnetismo, a interação nuclear fraca e a interação nuclear forte. O eletromagnetismo e a interação nuclear fraca foram posteriormente unificadas em uma só interação chamada teoria eletrofraca, e os cientistas Sheldon Glashow, Abdus Salam e Steven Weinberg receberam o Prêmio Nobel em Física de 1979 pelas suas contribuições para essa unificação, que surge experimentalmente ao trabalhar com energias altas. Certos modelos preveem também que, acima de energias mais altas ainda, deve haver uma unificação dessas três interações fundamentais.

Desde o século passado, têm-se utilizado diversos métodos para trabalhar com a mecânica quântica e a relatividade em um mesmo problema. A mecânica quântica relativística surgiu da unificação da mecânica quântica com a teoria da relatividade restrita, e a partir daí, tomando campos os objetos da teoria ao invés de partículas, obtiveram-se as teorias quânticas de campo. Sobre a incorporação da relatividade geral em um mundo regido por princípios quânticos, entretanto, não há um consenso. De fato, dois dos maiores obstáculos [12] [13] nesta área

são a não-renormalizabilidade de teorias quânticas que incluem a gravitação e a dificuldade em obter resultados experimentais, pois efeitos gravitacionais nesta escala necessitam de energias bastante altas para se manifestarem em muitas situações, além de serem, de modo geral, muito pequenos. Com esse tipo de formulação, espera-se que seja possível estudar a quantização do próprio efeito gravitacional — a gravitação quântica. Contudo, atualmente existem vários problemas teóricos que impedem que essa teoria possa ser desenvolvida. Existem várias áreas de pesquisa cujo foco é na tal gravitação quântica, como por exemplo a teoria de cordas [14] [15] e a gravitação quântica de loop [16], que são teorias que estão sendo ativamente estudadas, porém ainda não o suficiente para poderem dar resultados que se possam medir em laboratório.

O presente trabalho de mestrado lança mão de uma das várias possibilidades atuais de unificação das duas teorias, um primeiro passo para que a comunidade científica em geral possa compreender melhor o comportamento de partículas fundamentais na presença de campos gravitacionais fortes, um método que chamamos de mecânica quântica em espaços-tempo curvos [17] [18], em que usamos o espaço-tempo relativístico como um plano de fundo fixo na descrição de partículas quânticas que se propagam através dele, a partir de modificações geométricas nas equações da mecânica quântica. É uma área em crescimento e que já teve vários resultados importantes, como a proposta do efeito Unruh [19] e também a elaboração da teoria de evaporação de buracos negros e da radiação Hawking [20], [21]. Devemos ressaltar que neste trabalho não pretendemos estudar a gravitação quântica, mas sim o comportamento de sistemas quânticos em espaços-tempos curvos.

Este método de junção da mecânica quântica com a relatividade geral possui vários proponentes e trabalhos que estudam efeitos diversos em uma pluralidade de espaços-tempos. Damos os seguintes exemplos: fenômenos variados em espaços-tempo curvos [22], [23]; um estudo sobre a fase hadrônica do universo a partir da métrica de Robertson-Walker [24]; bósons de spin-0 no espaço-tempo de cordas cósmicas [25]; estrelas em rotação utilizando teoria de gravitação modificada, a gravidade de Rastall [26]; estudo do átomo de hidrogênio em uma métrica generalizada [27] e em métricas de efeitos topológicos como cordas cósmicas e monopolos [28]; efeitos de rotação no espaço-tempo de uma corda cósmica [29]; efeito Casimir [30], [31], [32].

Deste modo, utilizaremos ao longo desta dissertação a relatividade geral e a mecânica quântica conjuntamente para tentar descrever o comportamento de partículas elementares (bósons) em um certo espaço-tempo escolhido e encontrar efeitos observáveis. Daremos agora um resumo de cada capítulo da dissertação.

No segundo capítulo, faremos um breve resumo da teoria da relatividade geral e dos passos que levaram até ela. Forneceremos o conhecimento necessário para entender os cálculos nos próximos capítulos.

No terceiro capítulo, faremos um breve resumo sobre a mecânica quântica e introduziremos a equação de Klein-Gordon, uma das estrelas deste trabalho, que descreve bósons de

spin-0 como o pión e o bóson de Higgs. Também neste capítulo mostraremos que a equação de Klein-Gordon pode ser modificada para que ela leve em conta efeitos de campos gravitacionais, capacitando-a com o poder de descrever o comportamento de tais bósons em um espaço-tempo escolhido.

No quarto capítulo, mostraremos a nossa escolha de espaço-tempo, uma métrica complexa derivada por J. Hartle e K. Thorne em [1] e [2], que descreve objetos massivos em rotação “lenta” e descreveremos a nossa primeira solução da equação de Klein-Gordon aplicada neste espaço-tempo. Daremos uma visão de uma possibilidade de como trabalhar com equações nesse contexto, que aproximações se podem fazer e as funções, já conhecidas na literatura, que solucionam a equação diferencial obtida. No final, faremos mais aproximações na parte radial da equação de Klein-Gordon para mostrar que a sua solução está relacionada também com funções especiais mais usuais.

No quinto capítulo, apresentaremos uma correção à métrica original de J. Hartle e K. Thorne e uma segunda solução para a equação de Klein-Gordon, agora aplicada neste espaço-tempo, utilizando expansões e aproximações diferentes. Neste capítulo, mostraremos os passos para a obtenção de nossa solução por série de potências e também formas de melhorar os cálculos futuramente.

No sexto capítulo, disporremos e descreveremos a solução final, incluindo a função de onda por completo. Separaremos as diferentes contribuições (de massa e momento angular) da solução obtida no quinto capítulo e mostraremos o valor numérico de cada um de seus termos em várias situações físicas diferentes com o objetivo de aferir a dimensão numérica de cada contribuição. Escolheremos, então, uma configuração física específica e faremos variações de quantidades como a energia, o momento angular e o ângulo polar com o intuito de entender os limites e as capacidades da solução. Além disso, compararemos a solução obtida no quarto capítulo com a obtida no quinto capítulo e mostraremos que elas possuem similaridades intrínsecas, embora as tenhamos obtido de formas dissimilares.

Finalmente, encerraremos este trabalho com um último capítulo sobre as conclusões ponderadas e as perspectivas e possibilidades futuras acerca deste projeto.

2 ELEMENTOS DA TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL

Neste capítulo, faremos um breve resumo da teoria da relatividade especial de Einstein e de certos elementos da teoria da relatividade geral que nos serão úteis ao longo deste trabalho. Daremos uma visão geral da relatividade restrita como uma forma de unir as coordenadas espaciais e o tempo em um só objeto físico e como eles estão intimamente ligados, afora uma descrição básica da cinemática e dinâmica relativísticas. Depois disso, apresentaremos a teoria da relatividade geral: sua origem, os objetos matemáticos necessários para a sua formulação, a noção de curvatura que lhe é imprescindível, a equação de Einstein e a sua solução mais simples para um espaço-tempo curvo.

Tanto o estudo para o desenvolvimento desta dissertação de forma geral quanto o conteúdo específico deste capítulo foram implementados com base na seguinte literatura: [33], [34], [35], [36], [37], [38] e [39].

2.1 IDEIA BÁSICA DA TEORIA DA RELATIVIDADE

Na segunda metade do século XIX, foi descoberto que as equações de Maxwell não eram invariantes segundo as transformações de Galileu, um conjunto de equações que determinam relações entre quantidades físicas definidas em diferentes referenciais inerciais. Considerando por exemplo um referencial S em repouso e outro S' que se move na direção x , por exemplo, com velocidade constante v em relação a S , as coordenadas de S e S' podem ser relacionadas pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned}t' &= t \\x' &= x - vt \\y' &= y \\z' &= z.\end{aligned}\tag{1}$$

É interessante observar que esta transformação de coordenadas foi definida imaginando a existência de um espaço e de um tempo — um referencial — absolutos, e a ideia de movimento ou não era definida com relação a esse sistema de referência. Apesar de a segunda lei de Newton ser invariante por esta transformação, as equações de Maxwell não são, contudo, elas são invariantes sob outro conjunto de relações que misturam as coordenadas espaciais e temporais. Essa relação entre referenciais inerciais se chama transformação de Lorentz:

$$\begin{aligned}t' &= \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right) \\x' &= \gamma (x - vt) \\y' &= y \\z' &= z,\end{aligned}\tag{2}$$

onde $\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ é o chamado fator de Lorentz. Para velocidades muito menores que a velocidade da luz c , $\gamma \approx 1$, e a transformação de Lorentz recai na transformação de Galileu. Observando estas expressões, verifica-se que o tempo e o espaço estão intimamente conectados, o que levou à definição de um único objeto de nome espaço-tempo a partir do trabalho de H. Minkowski [40]. Essa representação pode então induzir à interpretação de que o nosso mundo não é necessariamente um mundo “plano” e tridimensional e que ele pode ser descrito por uma variedade quadridimensional pseudo-Euclidiana descrita pelo elemento de linha

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \quad (3)$$

um invariante segundo as transformações de Lorentz. O espaço-tempo descrito por este elemento de linha é chamado de espaço de Minkowski. A teoria da relatividade restrita (ou especial) de Einstein postula que, no vácuo, a velocidade da luz (ou, equivalentemente, a velocidade de qualquer partícula sem massa) deva ser a mesma independente do referencial e utiliza (3) para descrever um universo onde o espaço e o tempo não são mais conceitos independentes um do outro. Segundo ela, a expressão de qualquer lei da física não pode depender do referencial escolhido, contanto que ele seja inercial, e a invariância sob a transformação de Lorentz deve ser uma propriedade local do espaço-tempo. A relatividade geral generaliza esses conceitos para referenciais acelerados em um universo onde a gravidade existe e é um elemento fundamental no tecido do espaço-tempo, não uma força a priori que existe entre objetos.

2.2 RESULTADOS ÚTEIS DA RELATIVIDADE RESTRITA

2.2.1 Coordenadas e tratamento indicial

A partir desta seção, usaremos um sistema de unidades onde $c = 1$, chamado de unidades naturais por colocar em pé de igualdade as coordenadas espaciais e a coordenada temporal. Assim, o elemento de linha do espaço de Minkowski em coordenadas cartesianas pode ser escrito como

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (4)$$

Vamos agora apresentar algumas propriedades das transformações de Lorentz e, para isso, vamos utilizar uma transformação de Lorentz específica, embora esses resultados sejam mais gerais e valham para outras transformações [41]. Uma transformação de Lorentz pura, ou seja, sem rotação, (também conhecida como boost de Lorentz), de uma coordenada em um referencial inercial S para uma coordenada em um outro referencial inercial S' pode ser escrita como

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}, \quad (5)$$

onde o índice μ possui valores inteiros entre 0 e 3, e as coordenadas são definidas por

$$x^0 = t, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z. \quad (6)$$

Neste trabalho, utilizaremos a notação de Einstein para somas com índices repetidos, além de definir a notação usual onde índices gregos representam objetos quadridimensionais, e índices latinos objetos tridimensionais. A forma matricial da transformação de Lorentz $\Lambda^\mu{}_\nu$ é definida tal que a transformação de coordenadas resultante recaia na transformação descrita pela equação (2). Para um boost de Lorentz na direção x , ou seja, uma translação sem rotação, a forma matricial da transformação de Lorentz nesta representação é definida como

$$[\Lambda^\mu{}_\nu] = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Qualquer objeto matemático de quatro dimensões A^μ que se transforma mediante a matriz de transformação (7) é dito covariante de Lorentz. As suas componentes contravariantes, que se transformam da mesma maneira que as coordenadas x^μ , são dadas por

$$A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu. \quad (8)$$

A partir destas definições, podemos escrever o elemento de linha de Minkowski (4) como

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (9)$$

onde $\eta_{\mu\nu}$ é a forma covariante do tensor métrico de Minkowski, definido como

$$[\eta_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

O tensor métrico de Minkowski é um invariante de Lorentz, pois $\eta_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta$, ou seja, ele não varia segundo uma mudança de referencial caracterizada por uma transformação de Lorentz.

Definimos as componentes covariantes do quadri vetor A a partir das componentes contravariantes A^μ e da métrica de Minkowski:

$$A_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\nu. \quad (11)$$

Podemos escrever também as componentes contravariantes a partir das componentes covari-

antes,

$$A^\mu = \eta^{\mu\nu} A_\nu, \quad (12)$$

onde as componentes contravariantes da métrica $\eta^{\mu\nu}$ são relacionadas às covariantes pela seguinte equação:

$$\eta^{\alpha\mu} \eta_{\mu\beta} = \delta_\beta^\alpha. \quad (13)$$

O símbolo δ_β^α é chamado de delta de Kronecker e ele vale 1 quando $\mu = \nu$ e 0 para qualquer outra combinação. Esta é uma representação simbólica da matriz identidade, portanto, identificamos as versões contravariante e covariante da métrica, respectivamente $\eta^{\mu\nu}$ e $\eta_{\mu\nu}$, como inversas uma da outra. Este é um resultado geral que é válido para qualquer métrica. No nosso caso, para a métrica de Minkowski, temos que, para valores fixos de μ e ν ,

$$\eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}. \quad (14)$$

Podemos então definir o produto escalar entre dois quadrivetores A e B a partir de

$$A \cdot B = A^\mu B^\nu \eta_{\mu\nu} = A^\mu B_\nu = A_\mu B^\nu \quad (15)$$

e este produto é um invariante de Lorentz, pois

$$A' \cdot B' = A'^\mu B'^\nu \eta_{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\alpha A^\alpha \Lambda^\nu_\beta B^\beta \eta_{\mu\nu} = A^\alpha B^\beta \eta_{\alpha\beta} = A \cdot B. \quad (16)$$

Podemos também escrever esta expressão em termos de suas componentes temporal e espaciais:

$$A \cdot B = A^0 B^0 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}. \quad (17)$$

2.2.2 Tempo próprio e dilatação temporal

Imaginemos dois referenciais diferentes, S e S' . Em S , observamos um objeto movendo-se a uma velocidade v com relação a ele. Vamos considerar que o referencial S' é o referencial de repouso do próprio objeto, onde ele tem velocidade zero. Assim, devido à invariância de Lorentz do intervalo de espaço-tempo ds^2 , relacionamos os elementos de linha correspondentes a esses dois referenciais:

$$lds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = ds'^2 = d\tau^2. \quad (18)$$

Lembrando que estamos utilizando um sistema natural de unidades, vemos que $ds^2 = d\tau^2$, onde $d\tau$ é definido como o tempo próprio de um objeto, ou seja, o tempo levado entre dois

eventos cujo intervalo espaço-temporal é ds , medido no próprio referencial de repouso S' . Um intervalo de tempo finito em S' é dado por

$$\Delta\tau = \int ds' = \int d\tau'. \quad (19)$$

Utilizando agora a invariância do intervalo, temos que o intervalo de tempo finito é dado por

$$\begin{aligned} \Delta\tau &= \int ds = \int \sqrt{dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} \\ &= \int dt \sqrt{1 - \mathbf{v}^2} \\ &= \int \frac{dt}{\gamma} = \frac{\Delta t}{\gamma}. \end{aligned} \quad (20)$$

Encontramos assim a expressão para a dilatação temporal medida em referenciais inerciais diferentes. Já para intervalos de tempo infinitesimais, vê-se a partir de (18) que

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \mathbf{v}^2} = \frac{dt}{\gamma}, \quad (21)$$

lembrando que os dois referenciais S e S' estão relacionados por meio de uma transformação de Lorentz.

2.2.3 Velocidade, energia e momento

Definimos a quadrivelocidade de um objeto como o quadrivetor

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad (22)$$

que é um vetor contravariante de Lorentz porque dx^μ também é um vetor contravariante e $d\tau$ é um invariante de Lorentz. Como vimos na seção anterior, podemos escrever de forma geral o intervalo espaço-temporal como

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma} = dt \sqrt{1 - |\mathbf{v}|^2}, \quad (23)$$

identificando assim os componentes contravariantes da quadrivelocidade:

$$[u^\mu] = \left(\frac{dt}{d\tau}, \frac{dx^i}{dt} \frac{dt}{d\tau} \right) = (\gamma, \gamma v^i). \quad (24)$$

Tomando o produto escalar da quadrivelocidade com ela mesma, obtemos

$$u \cdot u = u^\mu u_\mu = 1, \quad (25)$$

que é um invariante de Lorentz, ou seja, é válido em qualquer referencial inercial. Note que estamos utilizando um sistema natural de unidades; em sistemas onde a velocidade da luz possui um valor arbitrário c , temos que $u \cdot u = c^2$.

Definimos o quadrimomento de uma partícula a partir da quadrivelocidade de forma análoga ao formalismo clássico e ele toma a forma

$$p^\mu = mu^\mu = m \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad (26)$$

cujas componentes temporal e espaciais são dadas por

$$[p^\mu] = (p^0, p^i) = (m\gamma, m\gamma v^i). \quad (27)$$

A componente temporal $m\gamma$ é definida como sendo a energia total de uma partícula, e as componentes espaciais $m\gamma v^i$ correspondem ao momento tridimensional. A energia total e o momento tridimensional são, portanto, redefinidos no contexto da relatividade por meio do fator de Lorentz γ . Como a energia e o momento tridimensional possuem separadamente leis de conservação, o quadrimomento também deve ser conservado. Podemos encontrar um invariante de Lorentz a partir do produto escalar (16):

$$p \cdot p = p^\mu p_\mu = E^2 - |\mathbf{p}|^2 = m^2. \quad (28)$$

Esta é a famosa relação de energia relativística, que nos será útil no próximo capítulo na nossa tarefa de obter uma equação relativística para a função de onda de uma partícula. A segunda lei de Newton na relatividade restrita pode ser escrita a partir da seguinte definição de força:

$$f^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau} = m \frac{d^2 u}{d\tau^2}. \quad (29)$$

Estas equações são úteis em se tratando de partículas, no entanto, elas são insuficientes quando precisamos descrever o sistema como um fluido, por exemplo, ou seja, um sistema contínuo caracterizado por quantidades macroscópicas como densidade e pressão. Neste caso, a área da física mais apropriada é a dinâmica de fluidos relativística, que pode ser usada para caracterizar situações diversas, desde colisões entre partículas a altas energias até o interior de estrelas [42]. No caso de um sistema contínuo, é necessário encontrar uma quantidade mais elaborada para descrever o sistema. Com este objetivo, constrói-se o tensor de energia-momento [43] a partir de quantidades dinâmicas como a quadrivelocidade e também de quantidades macroscópicas como a energia, a densidade e a pressão. Para um fluido perfeito no contexto da teoria da relatividade, o tensor de energia-momento é dado por

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu + p\eta^{\mu\nu} \quad (30)$$

onde ρ é a densidade do fluido e p é a pressão. Além de ser simétrico, o tensor de energia-

momento é uma quantidade conservada:

$$\partial_{\mu} T^{\mu\nu} = 0 \quad (31)$$

Esta equação dá origem, dentre outras expressões, à equação de continuidade para a densidade de energia, já que na relatividade a energia e a massa de um objeto estão relacionadas através da relação de equivalência massa-energia.

2.3 RELATIVIDADE GERAL E EQUAÇÕES DE EINSTEIN

Nesta seção faremos uma breve introdução à teoria de relatividade geral de Einstein, definindo as quantidades físicas necessárias para o entendimento dos tópicos presentes neste trabalho e fornecendo como exemplo a solução mais simples para as equações de campo de Einstein.

2.3.1 Origem da Relatividade Geral

Em seu artigo seminal de 1916, “Os Fundamentos da Teoria da Relatividade Geral” [7], Einstein explicou que a generalização da sua teoria da relatividade especial se respaldou em vários argumentos com o objetivo de estender o postulado da relatividade. Dentre eles temos o fato de que “as leis da física devem constituir-se de tal forma que elas se mantenham válidas em sistemas de coordenadas movendo-se de qualquer maneira” e o fato experimental já conhecido desde o século XVII dos trabalhos de Galileu Galilei e Isaac Newton que, na ausência de forças de resistência, corpos com massas diferentes, e nos quais atua o mesmo campo gravitacional, sentem a mesma aceleração — a dizer, a equivalência entre a massa gravitacional e a massa inercial, chamado de princípio de equivalência fraco. Como escreveu Einstein:

“Destas discussões, vemos que a elaboração de uma teoria geral da relatividade nos deve conduzir, em algum momento, a uma teoria da gravitação, pois pode-se ‘criar’ um campo gravitacional através de uma simples variação do sistema de coordenadas.”

Einstein percebeu a partir desta equivalência que a gravidade não é uma força de interação análoga à força eletromagnética, e sim uma manifestação da estrutura — ou seja, da geometria — do próprio espaço-tempo, cuja forma local depende dos objetos lá inseridos. Em outras palavras, a trajetória de corpos livres é gerida pela geometria do espaço-tempo ao seu redor e esta geometria é afetada não só pelos objetos próximos, mas também pelo próprio corpo em movimento.

O princípio da equivalência fraco equivale a dizer que não é possível distinguir os efeitos de um campo gravitacional sobre um objeto dos efeitos de um referencial acelerado, que se manifesta nas chamadas forças de inércia. Portanto, para regiões pequenas do espaço-tempo que possuam a mesma geometria, as trajetórias de um objeto em um campo gravitacional e em um referencial acelerado são as mesmas e não é possível diferenciá-las.

A generalização deste princípio é chamada de princípio da equivalência forte: em regiões pequenas do espaço-tempo, as leis da física são as mesmas em qualquer referencial em queda livre, de sua velocidade e de sua localização no espaço-tempo; não é possível detectar a existência de campos gravitacionais localmente.

Na próxima seção, vamos então verificar como estas ideias se relacionam com a geometria de um dado espaço-tempo e levam às equações de Einstein.

2.3.2 Escalares, vetores, tensores e variedades

Nesta seção iremos mostrar alguns resultados semelhantes aos da seção (2.2), porém agora utilizaremos espaços-tempos genéricos e não necessariamente o espaço-tempo de Minkowski.

Começamos com a definição básica de um campo escalar de Lorentz $S(x)$: uma função da posição que é sempre a mesma independente de mudanças de referencial, ou seja,

$$S'(x') = S(x). \quad (32)$$

Um escalar de Lorentz que vimos anteriormente é o elemento de linha ds , que, por exemplo, é dado no espaço de Minkowski por

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (33)$$

e possui o mesmo valor em qualquer referencial inercial.

Outro conceito importante para a formulação da teoria da relatividade geral é o de variedade. Tomando uma visão não muito rigorosa, podemos dizer que uma variedade é um conjunto de pontos que pode ser parametrizado continuamente e que localmente se parece com um espaço Euclidiano ao redor de cada ponto. O número de coordenadas necessárias para localizar um ponto em uma variedade é chamado de dimensão desta variedade. Uma característica notável desta formulação é que não é preciso que um único sistema de coordenadas descreva uma dada variedade por inteiro. Exemplos de variedades simples são retas e curvas (unidimensionais) e superfícies como planos e esferas (bidimensionais). Descreveremos o espaço-tempo como uma variedade diferenciável quadridimensional.

Supondo que uma certa variedade n -dimensional seja descrita por coordenadas $\{x^a\}$, onde $a = 1, \dots, n$, podemos fazer uma transformação de coordenadas

$$x'^a = x'^a(x^1, \dots, x^n) \quad (34)$$

e, tomando o diferencial da coordenada transformada x'^a , temos que

$$\begin{aligned} dx'^a &= \frac{\partial x'^a}{\partial x^1} dx^1 + \dots + \frac{\partial x'^a}{\partial x^n} dx^n \\ &= \frac{\partial x'^a}{\partial x^b} dx^b. \end{aligned} \quad (35)$$

Podemos então identificar a derivada $\frac{\partial x'^a}{\partial x^b}$ como sendo uma das n^2 componentes da matriz de transformação entre as coordenadas.

Em uma variedade onde se pode definir uma métrica, o elemento de linha ds^2 , cuja definição depende da própria variedade e de sua dimensionalidade, representa a “distância” entre dois pontos sobre a variedade infinitesimalmente próximos e pode tomar a forma de qualquer função razoável. No nosso caso, como estamos tratando da relatividade geral, vamos nos limitar a variedades quadridimensionais, onde cada ponto no espaço-tempo descrito pela variedade é chamado de “evento”, e elementos de linha possuem a seguinte forma:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (36)$$

em que $g_{\mu\nu}$ são as coordenadas do chamado tensor métrico. O elemento de linha é invariante sob transformações de coordenadas:

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} dx'^\alpha dx'^\beta \\ &= g'_{\alpha\beta} dx'^\alpha dx'^\beta. \end{aligned} \quad (37)$$

Assim, o tensor métrico no novo sistema de coordenadas é dado por

$$g'_{\alpha\beta}(x') = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} g_{\mu\nu}(x(x')). \quad (38)$$

A variedade que utilizamos para descrever o espaço-tempo é do tipo pseudo-Riemanniana, pois ds^2 pode ser positivo, zero ou negativo, diferente de um sistema de coordenadas cartesiano tradicional onde ds^2 é sempre maior ou igual a zero. Ao redor de um ponto qualquer no espaço-tempo é possível encontrar uma mudança de coordenadas tal que a métrica após tal transformação seja aproximadamente dada pela métrica de Minkowski, ou seja,

$$g'_{\alpha\beta}(x') \approx \eta_{\alpha\beta}. \quad (39)$$

O elemento de volume relativo a uma métrica arbitrária $g_{\alpha\beta}$ que descreve uma variedade n -dimensional é dado por

$$d^n V = \sqrt{|g|} dx^1 \dots dx^n, \quad (40)$$

onde g é o determinante do tensor métrico. Esta equação pode ser demonstrada a partir da transformação da métrica por uma mudança de sistemas de coordenadas dada pela equação (38). Definindo a matriz de transformação como M , podemos escrever essa equação na forma matricial, equivalente a uma mudança de base:

$$[g'_{\alpha\beta}] = M^T [g_{\alpha\beta}] M. \quad (41)$$

Tomando o determinante dos dois lados, temos

$$g' = (\det M)^2 g = \frac{1}{J^2} g, \quad (42)$$

onde

$$J = \det \left[\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \right] \quad (43)$$

é o jacobiano da matriz de transformação M . Supondo que o sistema de coordenadas transformado fosse cartesiano ou equivalente ao espaço de Minkowski, então o determinante g' de $[g'_{\alpha\beta}]$ deveria ser dado por ± 1 . Assim, temos que $g = \pm J^2$, e a equação (40) demonstra-se pelo resultado bem conhecido de que o elemento de volume de dois sistemas de coordenada podem ser relacionados por

$$dx'^1 \cdots dx'^n = J dx^1 \cdots dx^n. \quad (44)$$

2.3.3 Curvatura, derivada covariante e equação da geodésica

A curvatura de um espaço-tempo, denotado matematicamente por uma variedade Riemanniana, está intimamente ligada a um objeto chamado conexão afim, construído unicamente a partir da métrica e que relaciona vetores em diferentes pontos de uma certa variedade. Como estamos tratando de variedades Riemannianas, que são dotadas de uma métrica, a conexão é denominada uma conexão métrica e pode ser descrita por uma série de números chamados de símbolos de Christoffel,

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_{\mu} g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu} g_{\sigma\mu} - \partial_{\sigma} g_{\mu\nu}), \quad (45)$$

que, apesar da aparência, não são componentes de um tensor, pois é possível mostrar que $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ não se transforma como um tensor de terceira ordem, o que faremos em breve. A partir da conexão, construímos a derivada covariante, a generalização da derivada parcial para espaços-tempos genéricos que leva em conta a curvatura do espaço-tempo. Dado um campo vetorial qualquer V^{μ} , a sua derivada covariante é

$$\nabla_{\mu} V^{\nu} = \partial_{\mu} V^{\nu} + \Gamma_{\mu\sigma}^{\nu} V^{\sigma}. \quad (46)$$

A derivada covariante definida desta forma transforma-se como um tensor usual, ao contrário da derivada parcial original que não leva em conta a curvatura da variedade. Assim, a lei de transformação para a derivada covariante deve ser tensorial e ter a forma

$$\nabla'_\mu V'^\nu = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \nabla_\alpha V^\beta. \quad (47)$$

Segundo essa lei de transformação, obtemos a lei de transformação para a conexão, a qual, como dito, não se transforma como um tensor por conta do termo com uma derivada parcial de segunda ordem.

$$\Gamma'^\mu_{\nu\lambda} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\lambda} \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} + \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\nu \partial x'^\lambda}. \quad (48)$$

É simples mostrar que a derivada covariante de um covetor ω_ν se dá por

$$\nabla_\mu \omega_\nu = \partial_\mu \omega_\nu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \omega_\lambda. \quad (49)$$

Estamos agora prontos para justificar a definição dos símbolos de Christoffel correspondentes à conexão dada em (45). Supondo que o tensor de torção relativo à conexão, definido como

$$T^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu}, \quad (50)$$

seja simétrico nos índices inferiores, ou seja, que todas as componentes do tensor de torção sejam nulas, e que a derivada covariante seja compatível com a métrica, ou seja

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0, \quad (51)$$

é simples demonstrar a equação (45), uma relação útil para calcular todos os símbolos de Christoffel relativos a uma certa métrica previamente conhecida.

Usamos também a conexão para escrever a equação da geodésica, que representa, grosso modo, a curva de menor “distância” possível entre dois pontos sobre uma variedade, ou seja, uma generalização da linha reta para variedades curvas. Uma curva definida em termos de um parâmetro λ é uma geodésica se ela obedece a seguinte equação

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0 \quad (52)$$

e, quando as componentes da conexão usada são dadas pelos símbolos de Christoffel, a geodésica reproduz a noção usual de linha reta a que aludimos. Por exemplo, em coordenadas cartesianas, onde todos os componentes da conexão se anulam, a equação da geodésica recai

na equação

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} = 0 \quad (53)$$

que nada mais é, pensando em termos físicos, que a equação de movimento para um corpo livre que se move em linha reta parametrizada pelo parâmetro λ .

A curvatura de uma variedade, descrita pelo chamado tensor de curvatura de Riemann (ou de Riemann-Christoffel), é definida a partir da conexão por

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}, \quad (54)$$

de modo que as informações a respeito da curvatura desta variedade estejam contidas no tensor de Riemann e nos tensores definidos a partir dele. Ele é um tensor nulo somente quando a métrica descreve um espaço-tempo plano. Obtemos este tensor calculando o comutador da derivada covariante aplicado a um vetor qualquer V^λ :

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]V^\rho = R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}V^\sigma - T^\lambda{}_{\mu\nu}\nabla_\lambda V^\rho, \quad (55)$$

que vale mesmo para variedades onde o tensor de torção $T^\lambda{}_{\mu\nu}$ não é nulo. A partir de uma contração feita com o tensor de Riemann, produz-se o tensor de Ricci

$$R_{\mu\nu} = R^\lambda{}_{\mu\lambda\nu}, \quad (56)$$

que possui esta forma porque para um tensor de Riemann construído a partir de uma conexão cujos coeficientes sejam dados pelos símbolos de Christoffel, somente esta contração de índices é não nula. Podemos, além disso, tomar o traço do tensor de Ricci, obtendo assim o chamado escalar de Ricci, ou escalar de curvatura

$$R = R^\mu{}_\mu, \quad (57)$$

que é outra quantidade utilizada para mensurar a curvatura de uma variedade. A partir do tensor de Riemann, definimos o tensor de Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}, \quad (58)$$

um tensor simétrico cujas simetrias advêm das simetrias do tensor de Ricci e da métrica, com a seguinte propriedade de conservação:

$$\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0. \quad (59)$$

Após esta breve exposição de alguns resultados matemáticos relevantes, partimos para a

derivação das equações de Einstein.

2.3.4 Equações de Einstein

Vamos agora considerar o princípio de acoplamento mínimo gravitacional, segundo o qual, se uma lei da física for escrita tensorialmente numa forma válida num espaço-tempo plano, ela será válida num espaço-tempo curvo simplesmente mudando as quantidades básicas pelas quantidades equivalentes que levam em conta a curvatura do espaço-tempo. Por exemplo, a conservação do tensor de energia-momento (31) em espaços-tempos curvos é simplesmente escrita como

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0. \quad (60)$$

Na relatividade geral, as equações relevantes descrevem como a curvatura do espaço-tempo age na matéria para manifestar-se como a gravidade e como o conteúdo energético de corpos influencia o espaço-tempo para gerar uma curvatura. Para encontrar uma equação que descreve este efeito, uma possibilidade é usar a lei de conservação do tensor de energia-momento (60) e a lei de conservação do tensor de Einstein (59). A expressão que Einstein propôs é

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (61)$$

que diz que o tensor de Einstein e o tensor de energia-momento são proporcionais, e a constante de proporcionalidade κ pode ser calculada utilizando o limite Newtoniano da teoria, que diz que, para sistemas com velocidades baixas e campos gravitacionais estáticos e fracos (ou praticamente estáticos), a interação gravitacional pode ser aproximada pela lei de gravitação universal de Newton. Assim, obtêm-se as equações de campo de Einstein para a relatividade geral

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (62)$$

onde G é a constante gravitacional. Note que, nestas equações, encontra-se do lado esquerdo toda a parte geométrica da teoria e, do lado direito, a parte que descreve a matéria, a energia e o momento. Deste modo, podemos concluir que estas equações relacionam a estrutura geométrica do espaço-tempo com o seu conteúdo de matéria e energia, ou seja, como a curvatura do espaço-tempo reage à presença de energia e momento. Podemos escrever também esta equação como

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right) \quad (63)$$

onde $T = T^{\mu}_{\mu}$ é o traço do tensor de energia-momento. As duas equações são completamente equivalentes, mas por vezes uma é mais útil que a outra.

2.3.5 Solução de Schwarzschild

A primeira solução conhecida para as equações de campo de Einstein foi formulada por Karl Schwarzschild em 1916 e é uma solução que descreve um campo gravitacional exterior a um objeto esfericamente simétrico e portanto também é esfericamente simétrica. Descreveremos aqui uma visão global de sua obtenção.

Como não há matéria no espaço ao redor deste objeto, o seu tensor de energia-momento é nulo e portanto as equações de Einstein dadas na forma (63) tomam a forma

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (64)$$

O ansatz utilizado por Schwarzschild para o elemento de linha foi

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)} dt^2 + e^{2\beta(r)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (65)$$

pois procura-se uma solução para as equações de campo em regiões estáticas e isotrópicas do espaço-tempo. Assim, o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ não deve depender da coordenada temporal $x^0 = 0$ e deve ser uma matriz diagonal. Além disso, devemos observar que a escolha de coordenadas espaciais esféricas é a mais natural já que o campo gravitacional que procuramos deve ser esfericamente simétrico. Calculando todos os coeficientes não nulos do tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ a partir da contração do tensor de Riemann $R^\rho{}_{\mu\nu\lambda}$, que utiliza também os símbolos de Christoffel, e substituindo os valores encontrados na equação de campo exterior (64), podemos derivar a solução de Schwarzschild. O elemento de linha de Schwarzschild é dado por

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (66)$$

O coeficiente $2GM$, escrito assim em unidades naturais, é o chamado raio de Schwarzschild, um valor que corresponde ao raio que define o horizonte de eventos de um buraco negro de Schwarzschild. Ocasionalmente denota-se o raio de Schwarzschild por $r_s = 2GM$. Caso o raio do objeto cujas propriedades usamos para calcular os valores numéricos da teoria seja menor que o raio de Schwarzschild, o objeto descrito deve ser um buraco negro, pois o raio de Schwarzschild definiria um horizonte de eventos externo a esse objeto.

Tendo feito esta breve exposição de conceitos básicos da teoria da relatividade geral, estamos então capacitados a estudar os sistemas de interesse para este trabalho (objetos astronômicos como estrelas, anãs brancas e estrelas de nêutrons em rotação), o que será feito nos próximos capítulos.

3 A EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON

Neste capítulo derivaremos os resultados de mecânica quântica relativística que serão necessários ao longo desta dissertação. Obteremos a equação de Klein-Gordon e faremos uma rápida descrição de sua solução para uma partícula livre; após isso, obteremos a forma de equação de Klein-Gordon para espaços-tempos curvos através de uma lagrangiana apropriada e é esta equação que será estudada nos próximos capítulos.

A elaboração deste capítulo foi baseada na seguinte literatura: [44], [45], [46], [47], [48], [49] e [50].

3.1 OBTENDO A EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON

O conceito de operadores é a base para a formulação da mecânica quântica. No contexto desta teoria, quantidades físicas a serem medidas em um laboratório — chamadas de observáveis — são caracterizadas por operadores hermitianos, ou seja, possuem autovalores reais. Inicialmente, vamos definir três operadores que nos serão úteis: o operador de momento, o operador Hamiltoniano e operador de energia.

$$\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla, \quad \hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2\mu} + V(\mathbf{x}), \quad \hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}. \quad (67)$$

Observe que temos dois operadores relacionados à energia total. Aplicando estes dois operadores a uma função de onda ψ , obtemos a equação de Schrödinger, que descreve quanticamente a evolução temporal de sistemas físicos:

$$\hat{H}\psi(t, \mathbf{x}) = \hat{E}\psi(t, \mathbf{x}). \quad (68)$$

Podemos escrever esta equação como

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V(\mathbf{x}) \right] \psi(t, \mathbf{x}) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(t, \mathbf{x}), \quad (69)$$

que pode ser classificada como uma equação de onda não relativística.

O nosso propósito é obter uma equação de onda relativística a partir da equação de Schrödinger. Para fazer isso, vamos utilizar a definição de quadrimomento relativístico obtida no capítulo anterior.

$$[p^\lambda] = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right), \quad (70)$$

onde

$$p^\lambda p_\lambda = \mu^2 c^2. \quad (71)$$

A partir das duas equações acima, e usando os resultados da teoria da relatividade especial, tomamos como a Hamiltoniana de uma partícula livre a seguinte expressão:

$$H = \sqrt{\mathbf{p}^2 c^2 + \mu^2 c^4}. \quad (72)$$

Assim, substituindo o momento tridimensional pelo operador momento em (67), escrevemos o análogo relativístico da equação de Schrödinger dependente do tempo (69) para o caso de uma partícula livre, ou seja, $V(\mathbf{x}) = 0$:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, \mathbf{x}) = \sqrt{-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + \mu^2 c^4} \psi(t, \mathbf{x}). \quad (73)$$

No lado direito da equação podemos observar a raiz quadrada de um operador, o que nos causa certa dificuldade, pois para resolver esta equação diferencial uma possibilidade de solução seria expandir a raiz em séries de potências, no entanto, a equação resultante, não mais local, seria complicada demais de resolver. Para simplificar este problema, utilizamos o fato de que para dois operadores A e B que comutam, ou seja, $[A, B] = 0$:

$$A\psi = B\psi \quad \Rightarrow \quad A^2\psi = B^2\psi. \quad (74)$$

Portanto, ao tomarmos

$$H^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + \mu^2 c^4, \quad (75)$$

podemos escrever

$$-\hbar^2 \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, \mathbf{x}) = (-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + \mu^2 c^4) \psi(t, \mathbf{x}). \quad (76)$$

Rearranjando os termos desta equação, podemos observar que ela possui a mesma forma de uma equação de onda clássica:

$$\left[\partial_\lambda \partial^\lambda + \left(\frac{\mu c}{\hbar} \right)^2 \right] \psi(t, \mathbf{x}) = 0, \quad (77)$$

e ela é chamada de equação de Klein-Gordon. Note que ao introduzirmos o termo quadrático (75) obtemos duas soluções para a energia da partícula, uma positiva e uma negativa:

$$H = \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 c^2 + \mu^2 c^4}. \quad (78)$$

Historicamente, a equação de Klein-Gordon havia sido descartada de sua candidatura para uma descrição relativística de partículas quânticas por conta desta energia negativa e porque associada a ela estavam soluções com densidades de probabilidade negativas, o que se pensava não corresponder a uma situação física real. No entanto, foi descoberto que as soluções com

energia e probabilidade negativas estavam ligadas a antipartículas — de início uma conjectura proposta por Dirac, sua realidade foi mais tarde comprovada por experimentos. A antipartícula de uma certa partícula possui as mesmas características da “original”, porém com a carga oposta.

Queremos que a equação de Klein-Gordon, por ser uma equação de onda derivada de modo similar à equação de Schrödinger, possua uma lei de conservação para uma corrente de probabilidade j_ν a ser definida e que, analogamente, por ser a equação de Schrödinger uma equação probabilística, a corrente j_ν também tenha uma interpretação probabilística. Para encontrar uma definição apropriada, começamos tomando o complexo conjugado da equação (77):

$$\left(\partial_\lambda \partial^\lambda + \frac{\mu^2 c^2}{\hbar^2}\right) \psi^* = 0. \quad (79)$$

Tendo em vista que estamos trabalhando com operadores e portanto devemos respeitar a ordem de operação entre eles, multiplicamos a equação (77) por ψ^* e a equação (79) por ψ . Subtraindo (77) de (79), temos

$$\psi^* \left(\partial_\lambda \partial^\lambda + \frac{\mu^2 c^2}{\hbar^2}\right) \psi - \psi \left(\partial_\lambda \partial^\lambda + \frac{\mu^2 c^2}{\hbar^2}\right) \psi^* = 0, \quad (80)$$

e assim, definindo um quadrivetor de densidade de corrente

$$j_\nu = \frac{i\hbar}{2\mu} (\psi^* \partial_\nu \psi - \psi \partial_\nu \psi^*), \quad (81)$$

podemos reescrever (80) para obtermos a equação abaixo, uma equação de continuidade para a densidade de corrente:

$$\partial_\nu j^\nu = 0. \quad (82)$$

Expandindo as componentes dos quadrivetores, escrevemos a equação acima como

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{i\hbar}{2\mu c} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) \right] - \nabla \cdot \left[\frac{i\hbar}{2\mu} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) \right] = 0. \quad (83)$$

e, ao definirmos uma densidade de probabilidade e uma corrente de probabilidade apropriadas, a equação acima representa uma equação de continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (84)$$

onde

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{i\hbar}{2\mu c^2} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) \\ \mathbf{j} &= -\frac{i\hbar}{2\mu} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*).\end{aligned}\tag{85}$$

Integrando os dois lados a equação (84), verificamos que

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho d^3\mathbf{x} = 0.\tag{86}$$

e portanto ρ poderia ser considerada uma densidade de probabilidade, pois a sua integral em todo o espaço se conserva no tempo. Como mencionamos anteriormente, todavia, um problema que teve esta interpretação de ρ como uma densidade de probabilidade era que, por causa do sinal negativo na sua expressão em (85) e também do fato os valores numéricos de ψ , ψ^* e de suas derivadas serem arbitrários, ρ pode representar tanto probabilidades positivas quanto negativas, e probabilidades negativas eram consideradas inaceitáveis. Nos anos iniciais da mecânica quântica, quando muito pouco se conhecia a respeito do grande número de partículas elementares existentes, não havia nenhuma justificativa física para utilizar o conceito peculiar de uma probabilidade negativa e por isso a equação de Klein-Gordon (77) foi de início descartada, e foi justamente devido a estes problemas que Dirac procurou uma equação de onda relativística alternativa, o que ele conseguiu fazer com sucesso. Ao resolver a sua equação, Dirac atribuiu às soluções de energia negativa partículas equivalentes ao elétron, porém com cargas positivas, os chamados pósitrons, que ainda não haviam sido observados na época, interpretando fisicamente esses resultados ao invés de simplesmente descartá-los como havia sido feito anteriormente. Mais tarde, essas partículas acabaram sendo observadas, bem como antipartículas para outras partículas conhecidas. O resultado de que cada partícula tem a sua própria antipartícula é um dos maiores sucessos da física teórica. Quanto à questão das probabilidades negativas, em 1934, Wolfgang Pauli e Victor Weisskopf reinterpretaram ρ e j_ν simplesmente multiplicando estas quantidades por e , assim fazendo com que ρ e j_ν pudessem ser consideradas, respectivamente, como a densidade de carga e a densidade de corrente, cujos valores positivos ou negativos se tornam totalmente aceitáveis.

Hoje em dia, a equação de Klein-Gordon é então considerada uma equação de onda relativística de segunda ordem no tempo e no espaço e suas soluções são campos quânticos escalares ou pseudo-escalares, que representam bósons de spin zero. (Bósons são partículas que possuem spin inteiro.) Alguns exemplos de bósons de spin zero são o bóson de Higgs (a única partícula elementar de spin zero) e mésons como o pión e káon.

Já a equação de Dirac, sua parente não tão distante, tem como soluções spinores, objetos que como vetores geométricos são elementos de um certo espaço vetorial complexo, mas que se transformam de forma diferente aos vetores com os quais estamos mais acostumados, e tais spinores representam férmions de spin meio ($\frac{1}{2}$). Férmions são partículas que possuem

spin semi-inteiro (ou seja, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$ etc). Como exemplos de férmions damos três das partículas mais importantes e conhecidas, o próton, o nêutron e o elétron.

3.2 SOLUÇÃO PARA UMA PARTÍCULA LIVRE

Nesta seção, delinearíamos a solução da equação de Klein-Gordon (77) para partículas livres — uma idealização cujo objetivo no momento é alavancar o estudo de problemas similares que serão abordados nos próximos capítulos. Voltando à definição da densidade de corrente dada em (81) e em (85), sabemos que não podemos considerá-la uma densidade de probabilidade pois ela não é positiva definida, contudo, se a multiplicarmos pela carga elementar e , podemos obter o quadrvetor de densidade de corrente de carga

$$j'_\nu = \frac{ie\hbar}{2\mu}(\psi^* \partial_\nu \psi - \psi \partial_\nu \psi^*). \quad (87)$$

e a partir dele escrevemos a densidade de carga e a densidade de corrente elétrica:

$$\begin{aligned} \rho' &= \frac{ie\hbar}{2\mu c^2} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) \\ \mathbf{j}' &= -\frac{ie\hbar}{2\mu} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) \end{aligned} \quad (88)$$

Podemos então propor uma solução ondulatória para a equação (77) na forma de uma exponencial complexa

$$\begin{aligned} \psi(t, \mathbf{x}) &= A e^{-\frac{i}{\hbar} x_\nu p^\nu} \\ &= A e^{\frac{i}{\hbar} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{p} - Et)} \end{aligned} \quad (89)$$

e assim verificamos que esta proposição simples é uma solução simplesmente substituindo em (77). A energia é dada por

$$E = \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4} \quad (90)$$

ou, equivalentemente,

$$\omega = \pm c^2 \sqrt{\mathbf{k}^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}}. \quad (91)$$

Esses resultados foram interpretados tais que as soluções da equação de Klein-Gordon tivessem energia positiva ou negativa, contudo, hoje em dia são vistos como modos de frequência positiva ou negativa. Como foi explicado na seção anterior, este resultado pode ser interpretado de forma que estas soluções representem fisicamente tanto partículas quanto as suas antipartículas.

Essas duas soluções podem ser escritas como

$$\psi_{\pm} = A_{\pm} e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{p} \mp |E(\mathbf{p})|t)}, \quad (92)$$

A_{\pm} são constantes de normalização. Aplicando este resultado na definição da densidade de carga, obtemos

$$\rho_{\pm} = \pm \frac{e|E(\mathbf{p})|}{\mu c^2} \psi_{\pm}^* \psi_{\pm} \quad (93)$$

e interpretamos este resultado como sendo ψ_+ a função de onda de uma partícula de carga $+e$ e ψ_- a função de onda de uma partícula de carga $-e$, ambas com a mesma massa μ . A solução geral da equação de onda é sempre uma combinação linear das duas soluções já que a equação de Schrödinger é linear na função de onda.

Já para partículas de carga zero, podemos observar a partir da definição da densidade de carga em (88) que $\psi = \psi^*$ e portanto a solução tem a forma de um campo real. Assim, podemos constar três tipos de solução para a equação de Klein-Gordon: uma para cargas negativas, uma para cargas positivas e uma para carga nula; todas elas dependem do momento \mathbf{p} da partícula.

3.3 EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON EM ESPAÇOS-TEMPOS CURVOS

Nesta seção, generalizaremos a equação de Klein-Gordon, uma equação de onda relativística, para um espaço-tempo arbitrário, descrito pela métrica genérica $g^{\alpha\beta}$. Com este objetivo utilizaremos o formalismo lagrangiano.

Sabemos da física clássica que dada uma lagrangiana $L = T - V$, que depende somente das coordenadas canônicas $\{q_k, \dot{q}_k\}$, podemos encontrar uma equação de movimento para este sistema a partir da ação definida por

$$S[L] = \int dt L(q_k, \dot{q}_k, t). \quad (94)$$

Segundo o princípio variacional, o movimento descrito pelo sistema é dado a partir de um ponto estacionário da ação, que se pode obter impondo que a variação da ação seja zero, ou seja, $\delta S = 0$. Para uma lagrangiana L qualquer, este procedimento dá origem à conhecida equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0. \quad (95)$$

Note que existem um total de k equações similares, uma para cada par de coordenada (q_k, \dot{q}_k) . Na teoria de campos, temos que modificar ligeiramente as equações que acabamos de demonstrar, pois agora em vez de coordenadas generalizadas $\{q_k, \dot{q}_k\}$ vamos trabalhar com um

conjunto de campos escalares contínuos $\{\phi_k, \partial\phi_k\}$ composto por cada ϕ_k e todas as suas derivadas espaço-temporais. Pelo resto deste capítulo, usaremos as unidades Planck, onde $c = \hbar = G = 1$.

Definimos uma densidade lagrangiana \mathcal{L} tal que $L = \int d^3x \mathcal{L}$ e a ação seja dada por

$$S[\mathcal{L}] = \int dt L = \int d^4x \mathcal{L}. \quad (96)$$

Procedendo da mesma forma, fazemos a variação da ação e a igualamos a zero para encontrar o ponto estacionário e o resultado é a equação de Euler-Lagrange para campos:

$$\partial_\alpha \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \phi_k)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_k} = 0 \quad (97)$$

Para ilustrar o processo de obtenção da equação (97) a partir da variação da ação, vamos pertinentemente utilizar a densidade lagrangiana para campos escalares

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\beta \phi \partial^\beta \phi - \mu^2 \phi^2), \quad (98)$$

que dará origem à equação de Klein-Gordon tradicional. Assim, a ação S e a sua δS variação são dadas por

$$S = \int d^4x \frac{1}{2} (\partial_\beta \phi \partial^\beta \phi - \mu^2 \phi^2),$$

$$\delta S = \int d^4x \frac{1}{2} [\delta(\partial_\beta \phi \partial^\beta \phi) - \delta(\mu^2 \phi^2)].$$

e as variações que aparecem dentro da integral de δS são dadas, respectivamente, por

$$\delta(\partial_\beta \phi \partial^\beta \phi) = 2[\partial_\beta(\delta\phi \partial^\beta \phi) - \delta\phi \partial_\beta \partial^\beta \phi],$$

$$\delta(\mu^2 \phi^2) = 2\mu^2 \phi \delta\phi.$$

Juntando todos estes resultados e anulando a variação da ação δS , temos que

$$\delta S = \int d^4x \partial_\beta(\delta\phi \partial^\beta \phi) - \int d^4x \delta\phi(\partial_\beta \partial^\beta \phi + \mu^2 \phi) = 0. \quad (99)$$

Para que a primeira integral convirja é necessário que $\delta\phi$ vá a zero para $r \rightarrow \infty$, ou seja, na borda da esfera de raio infinito onde estamos integrando. Assim, por argumentos de contorno, podemos anular o primeiro termo.

$$\int d^4x \delta\phi(\partial_\beta \partial^\beta \phi + \mu^2 \phi) = 0. \quad (100)$$

Para que a integral se anule para valores arbitrários das variáveis, é necessário que o integrando

se anule independentemente. Assim, obtemos a equação de Klein-Gordon, neste caso para um campo ϕ :

$$\partial_\beta \partial^\beta \phi + \mu^2 \phi = 0. \quad (101)$$

Faremos agora o que havíamos proposto desde o início: calcular a equação de Klein-Gordon para uma métrica arbitrária $g^{\alpha\beta}$ que descreve um espaço-tempo qualquer ao invés de simplesmente usar o espaço-tempo de Minkowski, descrito pelo tensor métrico $\eta^{\alpha\beta}$. Para tanto, utilizaremos diretamente a equação de Euler-Lagrange (97), porém com duas mudanças no procedimento. A primeira delas é uma redefinição da densidade lagrangiana como o seguinte produto

$$\mathcal{L} = \sqrt{g} \mathcal{L}_0, \quad (102)$$

onde g é o determinante corresponde à métrica $g^{\alpha\beta}$ e \mathcal{L}_0 é dada por

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} (g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi - \mu^2 \phi^2). \quad (103)$$

Aqui fazemos proveito do fato de que para campos escalares como ϕ a derivada covariante recai na derivada parcial usual, ou seja, $\nabla_\mu \phi = \partial_\mu \phi$. Assim, com todas estas modificações, a ação pode ser escrita da mesma forma descrita anteriormente:

$$S = \int d^4x \mathcal{L}. \quad (104)$$

Anular a variação da ação, $\delta S = 0$, nos dá novamente as mesmas equações de Euler-Lagrange. Agora, no entanto, a própria Lagrangiana está modificada. Vamos calcular os dois termos da equação de Euler-Lagrange (97) separadamente abaixo:

$$\begin{aligned} \partial_\lambda \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\lambda \phi)} \right] &= \sqrt{g} g^{\lambda\rho} \partial_\rho \phi, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} &= -\sqrt{g} \mu^2 \phi \end{aligned} \quad (105)$$

Para calcular o primeiro dos termos acima utilizamos o resultado fundamental da relatividade geral de que a conexão seja compatível com a métrica (51), ou seja, $\nabla_\alpha g_{\beta\gamma} = 0$, o que significa que a derivada covariante do tensor métrico sempre se anula por definição. Somando os resultados, obtemos a equação de Klein-Gordon para espaços-tempos curvos, relativamente a uma certa métrica arbitrária $g^{\alpha\beta}$, a qual usaremos ao longo deste estudo.

$$\left[\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\alpha (\sqrt{g} g^{\alpha\beta} \partial_\beta) + \mu^2 \right] \phi = 0 \quad (106)$$

Nos próximos capítulos, escreveremos esta equação em regiões próximas à de estrelas com rotação e estudaremos suas soluções.

4 A MÉTRICA DE HARTLE-THORNE

O presente estudo tem como objetivo incorporar o efeito gravitacional de estrelas em rotação no comportamento de bósons de spin-0 que se encontram próximos a estas estrelas, e para tanto um procedimento razoável é considerarmos uma métrica com rotação. Deste modo, investigaremos preliminarmente a métrica proposta nos artigos [1] e [2] de James B. Hartle e Kip S. Thorne, uma métrica famosa na literatura e proposta por dois físicos de renome. A forma final da métrica, por meio da qual descreveremos o comportamento de bósons, encontra-se no apêndice de [2], assim como sua expansão em potências de M/r . Essa métrica, chamada daqui em diante de métrica de Hartle-Thorne, descreve estrelas que giram “lentamente” na estrutura da relatividade geral de acordo com o critério proposto pelos autores, e o tensor métrico correspondente possui um termo fora da diagonal devido ao momento angular da estrela, em contraste, por exemplo, com a métrica de Minkowski (10) descrita no segundo capítulo, que contém somente termos em sua diagonal principal. A expansão em potências de M/r descreve, segundo os autores, estrelas “não muito relativísticas”, como o nosso próprio Sol.

A ideia a ser desenvolvida neste capítulo é escrever a equação de Klein-Gordon para espaços-tempos curvos (106) na métrica de Hartle-Thorne a fim de estudar os efeitos da rotação nas partículas descritas por essa equação, bósons de spin-0, bem como obter soluções para essa equação. Mostrou-se em [51] e [3] que a métrica de Hartle-Thorne original (121) possuía pequenos erros em sua expansão e portanto foram propostas correções. Desta forma, é interessante comparar os cálculos feitos na métrica de Hartle-Thorne original, descritos neste capítulo, com os realizados na versão corrigida de Berti et al. dada em [3] e verificar até que ponto tais correções mudam o procedimento e os resultados, o que será feito nos próximos capítulos.

4.1 VISÃO GLOBAL DO PROCEDIMENTO DE OBTENÇÃO DA MÉTRICA DE HARTLE-THORNE

Nesta seção, faremos uma breve revisão do procedimento de obtenção da métrica de Hartle-Thorne, que será reproduzida na seção 4.2, a partir dos resultados desenvolvidos nos artigos originais de James Hartle e Kip Thorne, [1] e [2].

Em [1], a métrica foi calculada para regiões internas e externas à estrela, concebida como um fluido perfeito, e levava em conta seus parâmetros físicos, como por exemplo a pressão. Neste trabalho, porém, estamos interessados apenas no elemento de linha externo, ou seja, que descreve o espaço-tempo fora da estrela, pois queremos estudar os efeitos em partículas observáveis próximas à sua superfície. Portanto, relataremos somente os resultados e equações relevantes a esta região do espaço.

A “rotação lenta” à qual aludimos no início do capítulo refere-se à velocidade angular Ω do fluido, que deve ser lenta o suficiente para que mudanças fracionárias na pressão, na

densidade de energia e no campo gravitacional devido à rotação sejam muito pequenas. Por argumentos de análise dimensional, o critério considerado pelos autores é

$$\Omega^2 \ll \left(\frac{c}{R}\right)^2 \frac{GM}{Rc^2}. \quad (107)$$

Observamos, todavia, que este critério é bastante abrangente, diferente do que se pensava na época em que o artigo foi publicado pela primeira vez, e não corresponde necessariamente a uma rotação lenta, já que estrelas com Ω maior que o dado pela equação (107) na maioria das vezes não são estáveis.

Para o estudo de uma métrica com rotação, um elemento de linha é inicialmente proposto. Ele descreve um sistema estacionário axialmente simétrico e a sua forma geral é

$$ds^2 = -H^2 dt^2 + Q^2 dr^2 + r^2 K^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta (d\phi - Ldt)^2], \quad (108)$$

onde H , Q , K e L são funções de r e θ . A matéria neste estudo é caracterizada como um fluido perfeito, cujo tensor de energia-momento é dado por

$$T_{\mu}^{\nu} = (\mathcal{E} + P)u^{\nu}u_{\mu} + P\delta_{\mu}^{\nu}, \quad (109)$$

onde \mathcal{E} é a densidade de energia e P a pressão. Quando iniciamos uma rotação “lenta” a partir da configuração de equilíbrio da estrela, surgem perturbações cuja origem está justamente em sua rotação. A geometria perturbada é descrita aproximadamente por

$$ds^2 = -e^{\nu} [1 + 2(h_0 + h_2 P_2)] dt^2 + \left[1 + 2\frac{m_0 + m_2 P_2}{r - 2M}\right] \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 \\ + r^2 [1 + 2(v_2 - h_2) P_2] [d\theta^2 + \sin^2 \theta (d\phi - \omega dt)^2] + \mathcal{O}(\Omega^3), \quad (110)$$

onde $e^{\nu} = 1 - \frac{2M}{r}$; $P_2 = P_2(\cos \theta) = \frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1)$ é o polinômio de Legendre de ordem 2; ω , a velocidade angular adquirida por um observador caindo em direção ao fluido até a primeira ordem em Ω , é uma função de r e é proporcional à velocidade angular da estrela Ω ; e h_0 , h_2 , m_0 , m_2 e v_2 são funções de r com origem nas expansões que são feitas nas funções H , Q , K e L e que são de ordem máxima Ω^2 . Definimos também a quantidade

$$\tilde{\omega} = \Omega - \omega \quad (111)$$

que é velocidade angular do fluido relativa à do referencial local, já que temos como objetivo estudar partículas próximas à estrela. Não nos preocuparemos aqui em expor as equações obtidas a partir da equação de Einstein para o interior da estrela, que dependem da sua pressão e energia, contudo, é evidente que esses resultados são vitais para o cálculo das perturbações h_0 , h_2 , m_0 , m_2 e v_2 e para que possamos escrever o elemento de linha por completo. Para mais detalhes dos cálculos, as referências fornecidas no início da capítulo podem ser consultadas.

Apresentaremos agora os resultados necessários para a determinação da métrica. Fora da estrela a velocidade angular relativa ao referencial local é dada por

$$\tilde{\omega} = \Omega - \frac{2J}{r^3}, \quad (112)$$

a partir da qual condições de contorno na superfície da estrela, uma região em que $r = R$, determinam

$$J = \frac{1}{6}R^4 \left(\frac{d\tilde{\omega}}{dr} \right)_{r=R}, \quad \Omega = \tilde{\omega}(R) + \frac{2J}{R^3}. \quad (113)$$

O fator de perturbação de massa m_0 para o exterior da estrela, onde $r > R$, é dado por

$$m_0 = \delta M - \frac{J^2}{r^3}, \quad (114)$$

onde δM é uma constante. A partir deste resultado, obtemos a função $h_0(r)$ para $r > R$:

$$h_0 = -\frac{\delta M}{r - 2M} + \frac{J^2}{r^3(r - 2M)}. \quad (115)$$

Os fatores de deformação da estrela devido ao momento de quadrupolo de massa para $r > R$ são dados por

$$h_2 = J^2 \left(\frac{1}{Mr^3} + \frac{1}{r^4} \right) + KQ_2^2 \left(\frac{r}{M} - 1 \right) \quad (116)$$

$$v_2 = -\frac{J^2}{r^4} + K \frac{2M}{\sqrt{r(r - 2M)}} Q_2^1 \left(\frac{r}{M} - 1 \right) \quad (117)$$

onde K é uma constante e Q_n^m é a função de Legendre associada de segundo tipo. O fator de perturbação não radial para a massa é dado por

$$m_2 = (r - 2M) \left[-h_2 - \frac{1}{3}r^3 \left(\frac{dj^2}{dr} \right) \tilde{\omega}^2 + \frac{1}{6}r^4 j^2 \left(\frac{d\tilde{\omega}}{dr} \right)^2 \right], \quad (118)$$

onde

$$j(r) = e^{-\nu(r)/2} \sqrt{1 - \frac{2M(r)}{r}}, \quad (119)$$

e o momento de quadrupolo de massa da estrela é dado por

$$Q = \frac{8}{5}KM^3 + \frac{J^2}{M}, \quad (120)$$

onde se define a constante K usada em h_2 e v_2 .

4.2 ELEMENTO DE LINHA EXTERNO

Considerando os resultados obtidos na seção anterior, de acordo com [1] e [2], o campo gravitacional externo a uma estrela em rotação, com precisão em até segunda ordem na velocidade angular, pode ser descrito pelo elemento de linha

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & - \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{2J^2}{r^4} \right) \times \\
 & \left\{ 1 + 2 \left[\frac{J^2}{Mr^3} \left(1 + \frac{M}{r} \right) + \frac{5Q - \frac{J^2}{M}}{8M^3} Q_2^2 \left(\frac{r}{M} - 1 \right) \right] P_2(\cos \theta) \right\} dt^2 + \\
 & + \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{2J^2}{r^4} \right)^{-1} \times \\
 & \left\{ 1 - 2 \left[\frac{J^2}{Mr^3} \left(1 - \frac{5M}{r} \right) + \frac{5Q - \frac{J^2}{M}}{8M^3} Q_2^2 \left(\frac{r}{M} - 1 \right) \right] P_2(\cos \theta) \right\} dr^2 + \\
 & + r^2 \left\langle 1 + 2 \left\{ - \frac{J^2}{Mr^3} \left(1 + \frac{M}{r} \right) + \frac{5Q - \frac{J^2}{M}}{8M^3} \left[\frac{2M}{\sqrt{r(r-2M)}} Q_2^1 \left(\frac{r}{M} - 1 \right) + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. - Q_2^2 \left(\frac{r}{M} - 1 \right) \right] \right\} P_2(\cos \theta) \right\rangle \left[d\theta^2 + \sin^2 \theta \left(d\phi - \frac{2J}{r^3} dt \right)^2 \right]. \tag{121}
 \end{aligned}$$

As constantes neste elemento de linha são a massa total da estrela $M = m + \delta m$, o seu momento angular total J e o momento de quadrupolo de massa da estrela Q . As funções $Q_2^1 \left(\frac{r}{m} - 1 \right)$ e $Q_2^2 \left(\frac{r}{m} - 1 \right)$ são as seguintes funções de Legendre associadas de segundo tipo:

$$Q_2^1(\zeta) = \sqrt{\zeta^2 - 1} \left[\frac{3\zeta^2 - 2}{\zeta^2 - 1} - \frac{3}{2}\zeta \ln \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} \right] \tag{122}$$

$$Q_2^2(\zeta) = -\frac{3\zeta^3 - 5\zeta}{\zeta^2 - 1} + \frac{3}{2}(\zeta^2 - 1) \ln \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1}. \tag{123}$$

Fazemos uma expansão em potências de M/r conforme o procedimento realizado no apêndice de [2], o que corresponde a sistemas não muito relativísticos. O elemento de linha expandido toma a forma

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & - \left[1 - \frac{2M}{r} + \frac{2Q}{r^3} P_2(\cos \theta) \right] dt^2 + \left[1 - \frac{2M}{r} + \frac{2Q}{r^3} P_2(\cos \theta) \right]^{-1} dr^2 \\
 & + r^2 \left[1 - \frac{2Q}{r^3} P_2(\cos \theta) \right] \left[d\theta^2 + \sin^2 \theta \left(d\phi - \frac{2J}{r^3} dt \right)^2 \right], \tag{124}
 \end{aligned}$$

sendo que, para dados numéricos do Sol, ele tem precisão da ordem de 10^{-15} . Observamos que este elemento de linha é calculado até a primeira potência do momento angular J da estrela, o qual aparece somente uma vez no elemento de linha em um termo fora da diagonal responsável pelo arrastamento de referenciais inerciais.

Na próxima seção, obteremos então a equação de Klein-Gordon para esta métrica e

descobriremos que a parte radial da equação diferencial resultante é uma equação conhecida na literatura, chamada de equação confluyente de Heun.

4.3 A EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON NO ESPAÇO-TEMPO DE HARTLE-THORNE

Como foi mostrado no terceiro capítulo, os efeitos da curvatura do espaço tempo podem ser incluídos na equação de Klein-Gordon substituindo as derivadas parciais por derivadas covariantes. Como vimos, a equação de Klein-Gordon é dada por

$$\left[-\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \partial_\nu) + \mu^2 \right] \psi = 0.$$

O procedimento que iremos seguir é substituir o elemento de linha (124) na equação de Klein-Gordon para espaços-tempos curvos. Como podemos observar na equação (124), muitos termos são extremamente pequenos e por isso podemos desprezá-los, e ainda assim obter resultados numéricos bastante precisos. Por meio deste procedimento, podem-se obter equações mais simples que possuem mais chance de ser resolvidas analiticamente. Nestas aproximações desprezamos termos da ordem de J^2 e superiores, bem como tomamos $Q = 0$, pois estamos estudando o efeito da rotação da esfera e portanto não levamos em conta efeitos de distribuição de massa quadrupolares. Fazendo estas aproximações, o elemento de linha a ser usado na equação de Klein-Gordon é

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 - \frac{4J}{r} \sin^2 \theta dt d\phi + \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (125)$$

Como podemos ver, ele é bastante similar ao da métrica de Schwarzschild (66), com exceção do termo em $dt d\phi$, que não é nulo, mas leva em conta a rotação da estrela através do seu momento angular J .

O tensor métrico relativo ao elemento de linha (125) em sua forma matricial é

$$[g_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) & 0 & 0 & -\frac{2J}{r} \sin^2 \theta \\ 0 & \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ -\frac{2J}{r} \sin^2 \theta & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}, \quad (126)$$

e a sua forma inversa, correspondente à forma contravariante da métrica, é dada por

$$[g^{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} - \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} & 0 & 0 & -\frac{2J}{r^3} \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} \\ 0 & \left(1 - \frac{2M}{r} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ -\frac{2J}{r^3} \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} & 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{bmatrix}. \quad (127)$$

No cálculo do determinante, novamente desprezamos os termos de ordem J^2 e superiores por

serem muito pequenos. Deste modo, o determinante da métrica é dado por

$$\det([g_{\mu\nu}]) = \frac{1}{\det([g^{\mu\nu}])} = g = -r^4 \sin^2 \theta \quad (128)$$

Estamos prontos para escrever a equação de Klein-Gordon na métrica (127). Desenvolvendo as expressões, temos

$$g^{tt} \partial_t^2 \psi + 2g^{t\phi} \partial_t \partial_\phi \psi + g^{\phi\phi} \partial_\phi^2 \psi + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_r (\sqrt{-g} g^{rr} \partial_r \psi) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\theta (\sqrt{-g} g^{\theta\theta} \partial_\theta \psi) - \mu^2 \psi = 0 \quad (129)$$

e substituindo os valores a partir da métrica invertida, a equação toma a forma

$$\mu^2 \psi + A \partial_t^2 \psi + \frac{4JA}{r^3} \partial_t \partial_\phi \psi - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\phi^2 \psi - \frac{1}{r^2} \partial_r \left(\frac{r^2}{A} \partial_r \psi \right) - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta \psi) = 0, \quad (130)$$

onde $A = (1 - 2M/r)^{-1}$. Podemos aplicar o ansatz

$$\psi(t, r, \theta, \phi) = e^{im\phi} e^{-i\omega t} \Theta(\theta) R(r) \quad (131)$$

para obtermos uma equação resultante que depende de r e θ e onde podemos usar o método de separação de variáveis para obter uma equação para a parte angular $\Theta(\theta)$:

$$\left[\frac{d^2}{d\theta^2} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} + \lambda' - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta(\theta) = 0. \quad (132)$$

Esta é a equação associada de Legendre, cujas soluções são os polinômios associados de Legendre $P_l^m(\cos \theta)$. Sabemos, portanto, que a constante de separação λ' deve ser dada por números inteiros $l(l+1)$ e que a constante m do ansatz tem valores também inteiros que podem variar desde $-l$ até l .

Por outro lado, a equação radial é um pouco mais complicada:

$$\left(\mu^2 - \omega^2 A + \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{4m\omega JA}{r^3} \right) R - \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{A} \frac{dR}{dr} \right) = 0 \quad (133)$$

Vamos simplificar esta equação fazendo uma substituição para eliminar o termo de primeira derivada. Para tanto, fazemos a substituição $R(r) = \frac{u(r)}{h(r)}$ na equação acima, onde $h(r)$ é uma função a ser descoberta, o que resulta em

$$\frac{1}{r^2} \left(\frac{r^2}{A} R' \right)' = \frac{1}{A} \left[R'' + \left(\frac{2}{r} - \frac{A'}{A} \right) R' \right]. \quad (134)$$

Desenvolvendo esta expressão e igualando o termo com a primeira derivada de R a zero,

obtém-se uma equação diferencial de primeira ordem simples para $h(r)$ e descobre-se que é necessário que $h(r) = r/\sqrt{A}$. Portanto, a expressão para a solução radial deve ser do tipo

$$R(r) = \frac{\sqrt{A}}{r}u(r) \quad (135)$$

e assim a equação radial toma a forma

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \left[\frac{M^2}{r^4 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2} - \frac{\mu^2}{1 - \frac{2M}{r}} - \frac{l(l+1)}{r^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)} + \frac{\omega^2}{\left(1 + \frac{2M}{r}\right)^2} - \frac{4m\omega J}{r^3 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2} \right] u = 0. \quad (136)$$

Podemos decompor esta equação em frações parciais e escrevê-la como

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \left[k^2 + \frac{a'}{r^2} + \frac{b'}{r} + \frac{c'}{(r-2M)^2} + \frac{d'}{r-2M} \right] u = 0 \quad (137)$$

onde

$$\begin{aligned} a' &= \frac{1}{4} \\ b' &= \frac{1}{4M} + \frac{l(l+1)}{2M} - \frac{Jm\omega}{M^2} \\ c' &= \frac{1}{4} + 4M^2\omega^2 - \frac{2Jm\omega}{M} \\ d' &= -\frac{1}{4M} - 2M\mu^2 - \frac{l(l+1)}{2M} + 4M\omega^2 + \frac{Jm\omega}{M^2} \\ k^2 &= \omega^2 - \mu^2 \end{aligned} \quad (138)$$

Fazendo então a substituição $x = \frac{r}{2M}$, a equação pode ser escrita como

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \left[a + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x} + \frac{d}{(x-1)^2} + \frac{e}{x-1} \right] u = 0 \quad (139)$$

onde

$$\begin{aligned} a &= 4M^2(\omega^2 - \mu^2) \\ b &= \frac{1}{4} \\ c &= \frac{1}{2} + l(l+1) - \frac{4m\omega J}{M} \\ d &= \frac{1}{4} + 4M^2\omega^2 - \frac{4m\omega J}{M} \\ e &= -\frac{1}{2} - 4M^2\mu^2 - l(l+1) + 8M^2\omega^2 + \frac{4m\omega J}{M} \end{aligned} \quad (140)$$

A equação (139) tem a forma de uma equação diferencial parcial de segunda ordem bem conhecida na literatura, a chamada equação confluyente de Heun, que será descrita na próxima

subseção.

4.3.1 Descobrimo e desvendando a equação confluyente de Heun

Nesta seção, reconhecemos uma equação já conhecida na literatura, uma das chamadas equações de Heun. Durante este período do projeto, nós nos baseamos principalmente no artigo [31] e na correspondente tese de doutorado [52]. Para mais informações sobre as funções de Heun, ver [53], [54], [55] e [56]. Considere a seguinte equação diferencial ordinária escrita em uma forma geral:

$$\frac{d^2 H}{dx^2} + p(x) \frac{dH}{dx} + q(x)H = 0. \quad (141)$$

Utilizando um procedimento semelhante ao que fizemos anteriormente para anular o termo com a primeira derivada a partir do fator integrante, podemos modificar a função $H(x)$ usando a relação

$$H(x) = u(x)e^{-\frac{1}{2} \int p(x) dx} \quad (142)$$

e deste modo a equação (141) adquire a sua chamada forma normal, dada por

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + I(x)u = 0 \quad (143)$$

onde

$$I(x) = q(x) - \frac{1}{2} \frac{dp(x)}{dx} - \frac{1}{4} [p(x)]^2. \quad (144)$$

Tendo estas informações preliminares, estamos prontos para apresentar a equação confluyente de Heun, dada por

$$\frac{d^2 H}{dx^2} + \left(\alpha + \frac{\beta + 1}{x} + \frac{\gamma + 1}{x + 1} \right) \frac{dH}{dx} + \left(\frac{\sigma}{x} + \frac{\tau}{x - 1} \right) H = 0, \quad (145)$$

onde as funções $H(x) = HeunC(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta, x)$, definidas em termos de cinco parâmetros α , β , γ , δ , η e de uma variável x , são as chamadas funções confluentes de Heun e os coeficientes σ e τ são dados a partir dos outros cinco parâmetros:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{2}(\alpha - \beta - \gamma - \alpha\beta - \beta\gamma) - \eta \\ \tau &= \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma + \alpha\gamma + \beta\gamma) + \delta + \eta. \end{aligned} \quad (146)$$

Dispondo do procedimento descrito acima, é possível reescrever esta equação utilizando o fator integrante como

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \left[B_1 + \frac{B_2}{x^2} + \frac{B_3}{x} + \frac{B_4}{(x-1)^2} + \frac{B_5}{x-1} \right] u = 0, \quad (147)$$

onde

$$\begin{aligned} B_1 &= -\frac{1}{4}\alpha^2 & B_4 &= \frac{1}{4}(1 - \gamma^2) \\ B_2 &= \frac{1}{4}(1 - \beta^2) & B_5 &= \frac{1}{2}(-1 + 2\delta + 2\eta). \\ B_3 &= \frac{1}{2}(1 - 2\eta) \end{aligned} \quad (148)$$

Como podemos ver, as equações (139) e (147) são completamente equivalentes e, deste modo, (147) é uma equação equivalente à equação confluyente de Heun (145), cujas soluções são bem conhecidas. Assim, a solução para $u(x)$ neste caso é dada por

$$u(x) = HeunC(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta, x) e^{\frac{1}{2} \int dx (\alpha + \frac{\beta+1}{x} + \frac{\gamma+1}{x-1})}, \quad (149)$$

o que nos possibilita escrever uma solução para a equação (139) e conseqüentemente para a parte radial da função de onda. Comparando os coeficientes e parâmetros de cada equação, encontramos as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \alpha &= \pm 4M \sqrt{\mu^2 - \omega^2} & \delta &= 8M^2(2\omega^2 - \mu^2) \\ \beta &= 0 & \eta &= \frac{4m\omega J}{M} - l(l+1). \\ \gamma &= \pm 4 \sqrt{\frac{m\omega J}{M} - M^2\omega^2} \end{aligned} \quad (150)$$

A solução geral sobre todo o intervalo $0 \leq x \leq \infty$ é obtida por meio de (149). Substituindo em (135) a expressão obtida para $u(r)$ em (149) e resolvendo a integral elementar nessa expressão, podemos escrever a solução como

$$R(x) = \frac{\lambda}{2M} e^{\frac{\alpha x}{2}} x^{\frac{\beta}{2}-1} (x-1)^{\frac{\gamma}{2}+1} HeunC(\alpha, \beta=0, \gamma, \delta, \eta, x), \quad (151)$$

onde λ é a constante de integração da integral em (149) e $x = \frac{r}{2M}$ representa a coordenada radial.

Com os resultados obtidos neste capítulo, encontramos então uma solução para a equação de Klein-Gordon para espaços-tempo curvos na métrica de Hartle-Thorne com ordem máxima em J . Na próxima subseção, faremos aproximações adicionais na parte radial da equação de Klein-Gordon em sua forma dada por (139) com o intuito de fornecer soluções que tomem a forma de funções especiais melhor conhecidas na literatura.

4.3.2 A solução escrita como outras funções especiais

Nesta seção, apresentaremos os cálculos que mostram que a solução para a parte radial $R(r)$ da função de onda na equação de Klein-Gordon dada no espaço-tempo de Hartle-Thorne, em boa aproximação, pode ser dada a partir da função hipergeométrica ${}_1F_1$, também conhecida como função de Kummer. Na primeira subseção, mostraremos que a equação resultante toma a forma da chamada equação de Whittaker. Já na segunda subseção, após outra aproximação, mostraremos que a solução da equação resultante pode ser dada em termos da função de Kummer, a qual, após outras aproximações ainda razoáveis, pode ser escrita em termos de uma função de Bessel. Escreveremos, também, a forma assintóticas de todas estas funções especiais. As informações nesta subseção foram retiradas das seguintes referências: [57], [58] e [59].

4.3.2.1 A equação de Whittaker

Retornamos aqui à equação (137), escrita em termos da variável r . Uma observação momentosa: as potências $a'/(r-2M)^2$ e $b'/(r-2M)$, para valores fixos dos parâmetros e da variável r , são várias ordens de grandeza menores que os outros três termos que multiplicam a função $u(r)$ diretamente. Por isso, é uma aproximação razoável ignorá-las em benefício dos outros termos. Após esta aproximação, a equação é dada por

$$u''(r) + \left[k^2 + \frac{c'}{(r-2M)^2} + \frac{d'}{r-2M} \right] u(r) = 0. \quad (152)$$

Através da mudança de variáveis $z = 2ik(r-2M)$, a equação toma a forma

$$u''(z) + \left[-\frac{1}{4} + \frac{1/4 - \lambda^2}{z^2} + \frac{\varepsilon}{z} \right] u(z) = 0, \quad (153)$$

onde $\varepsilon = d'/(2ik)$ e $\lambda = \sqrt{1/4 - c'}$. A equação acima é chamada de equação de Whittaker e ela é uma forma modificada da equação hipergeométrica confluyente, também conhecida como equação de Kummer, obtida a partir dessa utilizando uma substituição. Existem duas soluções para essa equação, as funções de Whittaker $M_{\varepsilon,\lambda}(z)$ e $W_{\varepsilon,\lambda}(z)$, dadas, respectivamente, a partir da função de Kummer $M(A, B, z)$ e da função de Tricomi $U(A, B, z)$, que são soluções da equação hipergeométrica confluyente.

$$M_{\varepsilon,\lambda}(z) = e^{-\frac{1}{2}z} z^{\frac{1}{2}+\lambda} M\left(\frac{1}{2} + \lambda - \varepsilon, 1 + 2\lambda, z\right) \quad (154)$$

$$W_{\varepsilon,\lambda}(z) = e^{-\frac{1}{2}z} z^{\frac{1}{2}+\lambda} U\left(\frac{1}{2} + \lambda - \varepsilon, 1 + 2\lambda, z\right). \quad (155)$$

A função de Kummer, que também pode ser denotada pelo símbolo ${}_1F_1$, é uma função especial bastante conhecida na literatura. Como pode ser visto em [58], ela possui várias formas dependendo do valor de seus parâmetros A e B e de sua variável e recai, em casos

especiais, nas mais diversas funções elementares como exponenciais e funções trigonométricas, além de função especiais como funções de Bessel, polinômios de Hermite e a função erro. Na próxima subseção apresentaremos uma solução em forma de série de potências para a função de Kummer.

Observamos que, como a métrica que utilizamos para obter essas equações se refere à região externa ao objeto em questão (seja uma estrela ou uma estrela de nêutrons), é interessante verificar a forma assintótica da solução, correspondente a regiões distantes da superfície do objeto. Podemos fazer isso, pois, ao considerarmos $r \approx R$ ou $r > R$, onde R é o raio da estrela, já estamos no limite onde a variável z é grande o suficiente para viabilizar o uso da forma assintótica. Conforme as referências, as formas assintóticas das funções de Whittaker para z muito grande são

$$M_{\varepsilon,\lambda}(z) \sim \frac{\Gamma(1+2\lambda)}{\Gamma(\frac{1}{2}+\lambda-\varepsilon)} e^{\frac{1}{2}z} z^{-\varepsilon} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}-\lambda+\varepsilon)_s (\frac{1}{2}+\lambda+\varepsilon)_s}{s!} z^{-s} \\ + \frac{\Gamma(1+2\lambda)}{\Gamma(\frac{1}{2}+\lambda+\varepsilon)} e^{-\frac{1}{2}z} e^{(\frac{1}{2}+\lambda-\varepsilon)\pi i} z^{\varepsilon} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}+\lambda-\varepsilon)_s (\frac{1}{2}-\lambda-\varepsilon)_s}{s!} (-z)^{-s} \quad (156)$$

e

$$W_{\varepsilon,\lambda}(z) \sim e^{-\frac{1}{2}z} z^{\varepsilon} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}+\lambda-\varepsilon)_s (\frac{1}{2}-\lambda-\varepsilon)_s}{s!} (-z)^{-s}, \quad (157)$$

onde $(x)_n$ é o símbolo de Pochhammer, representando o fatorial ascendente, que é definido para $n \in \mathbb{N}$ por

$$(x)_n \equiv \prod_{s=0}^{n-1} (x+s). \quad (158)$$

Observamos que a referência [58] fornece várias condições para a variável z e para os parâmetros ε e λ , no entanto, como no nosso caso os parâmetros são arbitrários e a variável z é puramente imaginária, todas condições são satisfeitas, e, portanto, optamos por não especificá-las aqui. Para mais informações, consultar as três referências dadas no início desta subseção.

Além dessas formas assintóticas, [58] também fornece a forma limitante das funções de Whittaker para o caso onde $z \rightarrow \infty$, que está obviamente conectada com as formas assintóticas dadas em (156) e (157). Elas são

$$M_{\varepsilon,\lambda}(z) \sim \frac{\Gamma(1+2\lambda)}{\Gamma(\frac{1}{2}+\lambda-\varepsilon)} e^{\frac{1}{2}z} z^{-\varepsilon} \quad (159)$$

$$W_{\varepsilon,\lambda}(z) \sim e^{-\frac{1}{2}z} z^{\varepsilon}. \quad (160)$$

Retornaremos a estas formas limitantes das funções de Whittaker no sexto capítulo, onde as compararemos com a solução para a equação obtida no quinto capítulo a partir de uma exponencial complexa com uma série de potências como o seu argumento.

4.3.2.2 A equação de Kummer

Partindo da equação (152) novamente, observamos que para certos objetos físicos como o Sol, uma estrela não muito relativística, a potência $c'/(r-2M)^2$ é várias ordens de grandeza menor que os outros dois termos que multiplicam diretamente $u(r)$. Além disso, $r \gg 2M$, portanto, fazemos uma segunda aproximação $r \approx r - 2M$. A equação resultante é

$$u''(r) + \left[k^2 + \frac{d'}{r} \right] u(r) = 0. \quad (161)$$

Fazemos duas mudanças de coordenadas nesta equação. Através do ansatz

$$u(r) = e^{-ikr} r w(r) \quad (162)$$

e da mudança de variável $z = 2ikr$, chegamos à equação

$$z w''(z) + (2 - z) w'(z) - \left(1 - \frac{d'}{2ik} \right) w(z) = 0, \quad (163)$$

chamada de equação de Kummer, ou equação hipergeométrica confluyente, cuja solução geral é dada por

$$w(z) = c_1 M \left(1 - \frac{d'}{2ik}, 2, z \right) + c_2 U \left(1 - \frac{d'}{2ik}, 2, z \right), \quad (164)$$

onde M e U são, respectivamente, as funções de Kummer e de Tricomi. Note que estes resultados foram escritos de acordo com a nossa equação, ou seja, com $z = 2ikr$ e os dois parâmetros $1 - d'/(2ik)$ e 2 fixos. De forma mais geral, as funções de Kummer e Tricomi possuem parâmetros e variáveis arbitrários: $M(A, B, z)$ e $U(A, B, z)$.

Daqui em diante até o final do capítulo trabalharemos apenas com a função de Kummer a fim de mostrar que, para o nosso caso, ela pode ser escrita em termos de funções mais simples. De acordo com [58], a função de Kummer pode ser definida utilizando a seguinte série de potências:

$$M \left(1 - \frac{d'}{2ik}, 2, z \right) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\left(1 - \frac{d'}{2ik} \right)_s}{(2)_s s!} z^s. \quad (165)$$

Note que $d'/(2ik) \gg s$, portanto, como

$$\left(1 - \frac{d'}{2ik} \right)_s = \left(1 - \frac{d'}{2ik} \right) \left(2 - \frac{d'}{2ik} \right) \cdots \left(s - \frac{d'}{2ik} \right), \quad (166)$$

é razoável fazer a aproximação $(1 - d'/(2ik))_s \approx (-d'/(2ik))^s$. Além disso, $(2)_s = (s + 1)!$. Desta forma, podemos escrever a série (165) aproximadamente por

$$M\left(1 - \frac{d'}{2ik}, 2, z\right) \approx \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(s+1)! s!} \left(\frac{d'}{2ik} z\right)^s \quad (167)$$

Esta série é proporcional à função de Bessel $J_\nu(z)$ para $\nu = 1$ e $z \rightarrow 2\sqrt{\frac{d'}{2ik}}z$. De modo geral, a função de Bessel de primeiro tipo $J_\nu(z)$ é dada por

$$J_\nu(z) = \left(\frac{1}{2}z\right)^\nu \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{1}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{1}{4}z^2\right)^s, \quad (168)$$

então, comparando as duas expressões, escrevemos a relação entre a função de Kummer e a função de Bessel J_1 como

$$M\left(1 - \frac{d'}{2ik}, 2, z\right) \approx \sqrt{\frac{2ik}{d'z}} J_1\left(2\sqrt{\frac{d'}{2ik}}z\right). \quad (169)$$

Agora, ao invés de escrevermos uma série de potências para a função de Kummer, assim como foi feito para a função de Whittaker anteriormente, vamos escrever a forma assintótica para z muito grande da função de Kummer a partir da forma assintótica da função de Bessel J_1 , que é bem mais conhecida. Para um z geral, a forma assintótica de $J_1(z)$ é

$$J_1(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{3\pi}{4}\right). \quad (170)$$

Assim, usando a relação entre a função de Bessel e a função de Kummer, obtemos que a forma assintótica da função de Kummer, neste caso, é dada por

$$M\left(1 - \frac{d'}{2ik}, 2, z\right) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2ik}{d'z}\right)^{\frac{3}{4}} \cos\left(2\sqrt{\frac{d'}{2ik}}z - \frac{3\pi}{4}\right) \quad (171)$$

Nesse capítulo, encontramos então uma solução analítica exata para a equação (139) em termos de funções de Heun, contudo, muitos termos na equação (139) são experimentalmente pequenos, podendo-se assim desprezá-los porém ao mesmo tempo obter aproximações bastante razoáveis para a solução, como as apresentadas nesta seção.

5 A MÉTRICA DE BERTI ET AL.

Neste capítulo, apresentaremos a métrica de Berti et al., obtida como a proposta de corrigir a métrica de Hartle-Thorne apresentada no quarto capítulo. Pretendemos estudar a equação de Klein-Gordon de um modo análogo ao que fizemos no capítulo anterior e, para tanto, expandiremos a métrica em potências de M/r e a aplicaremos na equação de Klein-Gordon em espaços-tempos curvos após certas simplificações para que seja possível trabalhar com ela analiticamente. Proporemos um ansatz com a forma de uma exponencial complexa cujo expoente possui uma série de potências, de modo que ele resolva a equação radial resultante. Diante disso, encontraremos uma forma analítica para os seus primeiros coeficientes.

5.1 OBTENDO E EXPANDINDO A MÉTRICA

Conforme foi apresentado em [3], tendo-se baseado em um artigo anterior [51], foram constatados pequenos erros na expansão da métrica de Hartle-Thorne original, dada pela equação (121). Deste modo, é interessante tomar a métrica corrigida, dada em [3], e verificar se essas correções apresentam um efeito significativo nos resultados. A partir desses resultados, iremos fazer uma expansão no elemento de linha em potências de M/r análoga à expansão feita no quarto capítulo, porém mantendo mais termos da expansão para que os termos necessários para estudarmos o efeito da rotação estejam presentes. Ignorando termos de ordem maior ou igual a ϵ^3 , sendo que $\epsilon = \Omega/\Omega^*$, onde Ω é a velocidade angular da estrela e $\Omega = \sqrt{M/R^3}$ é uma escala rotacional, e temos portanto que as componentes da métrica de Hartle-Thorne corrigida apresentadas em [3] são

$$\begin{aligned}
 g_{rr} &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} [1 + j^2 G_1 + q F_2] + \mathcal{O}(\epsilon^3) \\
 g_{tt} &= - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) [1 + j^2 F_1 + q F_2] + \mathcal{O}(\epsilon^3) \\
 g_{\theta\theta} &= r^2 [1 + j^2 H_1 - q H_2] + \mathcal{O}(\epsilon^3) \\
 g_{\phi\phi} &= g_{\theta\theta} \sin^2 \theta + \mathcal{O}(\epsilon^3) \\
 g_{t\phi} &= \left(\frac{2jM^2}{r}\right) \sin^2 \theta + \mathcal{O}(\epsilon^3)
 \end{aligned} \tag{172}$$

onde

$$\begin{aligned}
 F_1 &= -pW + A_1 \\
 F_2 &= 5r^3 p(3u^2 - 1)(r - M)(2M^2 + 6Mr - 3r^2) - A_1 \\
 A_1 &= \frac{15r(r - 2M)(1 - 3u^2)}{16M^2} \ln \frac{r}{r - 2M} \\
 A_2 &= \frac{15r(r - 2M^2)(3u^2 - 1)}{16M^2} \ln \frac{r}{r - 2M}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_1 &= p[(L - 72M^5r) - 3u^2(L - 56M^5r)] - A_1 \\
H_1 &= A_2 + \frac{(1 - 3u^2)(16M^5 + 8M^4r - 10M^2r^3 + 15Mr^4 + 15r^5)}{8Mr^4} \\
H_2 &= -A_2 + \frac{5(1 - 3u^2)(2M^2 - 3Mr - 3r^2)}{8Mr} \\
L &= 80M^6 + 8M^4r^2 + 10M^3r^3 + 20M^2r^4 - 45Mr^5 + 15r^6 \\
p &= \frac{1}{8Mr^r(r - 2M)} \\
W &= (r - M)(16M^5 + 8M^4r - 10M^2r^3 - 30Mr^4 + 15r^5) \\
&\quad + u^2(48M^6 - 8M^5r - 24M^4r^2 - 30M^3r^3 - 60M^2r^4 + 135Mr^5 - 45r^6)
\end{aligned}$$

com $u = \cos \theta$. As quantidades adimensionais j e q são definidas, respectivamente, a partir do momento angular e do momento de quadrupolo:

$$j = \frac{J}{M^2}, \quad q = \frac{Q}{M^3}. \quad (173)$$

Considerando termos até a primeira ordem de j , e tomando $Q = 0$, a métrica (172) adquire exatamente a mesma forma da equação (125), dada no capítulo anterior, o que valida o procedimento adotado e os resultados obtidos anteriormente. As correções mencionadas no início do capítulo aparecem em termos da ordem de j^2 e mais altas. Vamos então, neste capítulo, estudar as correções que podem ocorrer nos nossos resultados, utilizando mais termos da métrica determinada pela equação (172), embora sejam a princípio muito pequenos, e tentar verificar quando essas correções são mais importantes.

Podemos escrever a equação de Klein-Gordon (106) na métrica (172), assim como foi feito no quarto capítulo para a métrica de Hartle-Thorne original, utilizando uma suposição similar a (131) para reduzir a equação diferencial a somente duas variáveis, r e θ . No entanto, a separação de variáveis da equação obtida não é simples, pois ao fazermos a expansão em M/r aparecem vários termos que misturam as variáveis r e θ de formas não triviais, e por conta disso decidimos resolver a equação apenas para determinados valores do ângulo θ fixos. Chamaremos a partir de agora a parte radial da função de onda de $f(r)$. Assim, a equação que vamos resolver ao longo deste capítulo é dada por

$$\left[g^{rr} \frac{d^2}{dr^2} + \tilde{g} \frac{d}{dr} + (-\omega^2 g^{tt} - m^2 g^{\phi\phi} + m\omega g^{t\phi} - \mu^2) \right] f(r) = 0 \quad (174)$$

onde

$$\tilde{g} = \partial_r g^{rr} + \frac{1}{2g} g^{rr} \partial_r g. \quad (175)$$

Expandimos cada termo da equação acima com o auxílio do software Mathematica até a primeira potência de M/r que contém termos contendo o momento angular J e calculamos

o valor numérico (para valores específicos relativos ao Sol) de cada um desses termos com o intuito de verificar se era razoável desprezar algum deles. Os fatores que multiplicam a segunda derivada de $f(r)$ e a primeira derivada de $f(r)$, respectivamente, são aproximadamente dados por

$$g^{rr} \approx 1 - 2 \left(\frac{M}{r} \right) - \frac{2J^2(12u^2 - 5)}{M^4} \left(\frac{M}{r} \right)^4 \quad (176)$$

$$\tilde{g} \approx \frac{2}{M} \left(\frac{M}{r} \right) - \frac{2}{M} \left(\frac{M}{r} \right)^2 \quad (177)$$

Já o fator que multiplica a função diretamente na equação 174 é dado por

$$\begin{aligned} (-\omega^2 g^{tt} - m^2 g^{\phi\phi} + m\omega g^{t\phi} - \mu^2) &\approx (\mu^2 + \omega^2) + 2\omega^2 \left(\frac{M}{r} \right) \\ &+ \left[\frac{m^2}{M^2(u^2 - 1)} + 4\omega^2 \right] \left(\frac{M}{r} \right)^2 \\ &+ \left(\frac{2Jm\omega}{M^3} + 8\omega^2 \right) \left(\frac{M}{r} \right)^3 \\ &+ \left[\frac{4Jm\omega}{M^3} + 16\omega^2 - \frac{2J^2\omega^2}{M^4}(3u^2 - 2) \right] \left(\frac{M}{r} \right)^4. \end{aligned} \quad (178)$$

No artigo original de Hartle e Thorne, [2], fez-se a expansão até a primeira ordem de M/r que continha um termo que dependia do momento angular J e, como podemos ver em (178), o momento angular aparece pela primeira vez na terceira potência de M/r . Aqui, utilizamos uma potência a mais para que a equação dependa não somente de J , mas também de J^2 . Além disso, escolhemos não desprezar nenhuma das parcelas resultantes da expansão em (178), apesar de predominarem certos termos sobre outros, para que o resultado seja uma equação mais generalizada que possa ter outras utilidades.

Escrevemos agora a equação de Klein-Gordon para espaços-tempos curvos nesta métrica expandida:

$$\begin{aligned} &\left(A_0 + \frac{A_1}{r} + \frac{A_4}{r^4} \right) f''(r) + \left(\frac{B_1}{r} + \frac{B_2}{r^2} \right) f'(r) \\ &+ \left(C_0 + \frac{C_1}{r} + \frac{C_2}{r^2} + \frac{C_3}{r^3} + \frac{C_4}{r^4} \right) f(r) = 0. \end{aligned} \quad (179)$$

A definição dos coeficientes das potências na equação acima pode ser facilmente adquirida a partir das expansões (176), (177) e (178), comparando os coeficientes de cada potência.

$$\begin{aligned} A_0 &= 1 \\ A_1 &= -2M \\ A_4 &= -2J^2(12u^2 - 5) \end{aligned} \quad (180)$$

$$\begin{aligned}
B_1 &= 2 \\
B_2 &= -2M \\
C_0 &= \mu^2 + \omega^2 \\
C_1 &= 2\omega^2 M \\
C_2 &= \frac{m^2}{u^2 - 1} + 4\omega^2 M^2 \\
C_3 &= 2Jm\omega + 8\omega^2 M^3 \\
C_4 &= 4JMm\omega + 16\omega^2 M^4 - 2J^2\omega^2(3u^2 - 2).
\end{aligned}$$

Inicialmente pode parecer bastante razoável procurarmos uma solução para a equação (179) através do método de Frobenius, no entanto, o problema se complica rapidamente e acaba se tornando mais interessante buscar outro método para resolver esta equação. É possível então tentar fazer algo parecido com o que foi feito no quarto capítulo para reduzir a equação radial (179) a uma forma sem a primeira derivada da função usando um fator integrante, a sua chamada forma normal.

Com este objetivo, reescreveremos a equação (179) de uma forma mais geral:

$$H_2 f''(r) + H_1 f'(r) + H_0 f(r) = 0 \quad (181)$$

onde

$$\begin{aligned}
H_2 &= A_0 + \frac{A_1}{r} + \frac{A_4}{r^4} \\
H_1 &= \frac{B_1}{r} + \frac{B_2}{r^2} \\
H_0 &= C_0 + \frac{C_1}{r} + \frac{C_2}{r^2} + \frac{C_3}{r^3} + \frac{C_4}{r^4}.
\end{aligned} \quad (182)$$

Além disso, procuraremos uma solução da forma

$$f(r) = h(r)g(r) \quad (183)$$

onde $h(r)$ é uma função qualquer que depende da coordenada radial. A equação diferencial resultante é

$$(H_2 h)g''(r) + (2H_2 h' + H_1 h)g'(r) + (H_2 h'' + H_1 h' + H_0 h)g(r) = 0 \quad (184)$$

Queremos anular os termos contendo a primeira derivada $g'(r)$. Para que isso aconteça, é necessário que

$$2H_2 h'(r) + H_1 h(r) = 0, \quad (185)$$

ou seja,

$$h(r) = A \exp\left(-\frac{1}{2} \int \frac{H_2}{H_1} dr\right). \quad (186)$$

Observamos, porém, que conforme as definições de H_2 e H_1 em (182), a integral resultante não é simples. De fato, o integrando é dado por

$$I = r^2 \frac{B_1 r + B_2}{A_0 r^4 + A_1 r^2 + A_4}. \quad (187)$$

Fazemos aqui uma aproximação por meio da qual dispensamos os termos que não multiplicam r , já que são muito menores que os outros. Assim, o integrando é dado por

$$I = \frac{a}{r + b} \quad (188)$$

onde

$$\begin{aligned} a &= \frac{B_1}{A_0} = 2 \\ b &= \frac{A_1}{A_0} = -2M. \end{aligned} \quad (189)$$

O fator integrante (186), usando a aproximação dada por (188), toma a forma

$$h(r) = A(b + r)^{-\frac{a}{2}} \quad (190)$$

que, no nosso caso, é então $h = A/(r - 2M)$. Substituindo este resultado em (184) e multiplicando esta equação por $(r - b)^2/r^2$, o coeficiente do termo $g''(r)$ tem termos até a sexta potência de $1/r$, enquanto que o coeficiente do termo $g(r)$ tem termos até a oitava potência de $1/r$. Fazendo mais uma aproximação na qual descartamos todas as potências de $1/r$ acima da primeira potência que contém J^2 , a equação final é dada por

$$\left(M_0 + \frac{M_1}{r} + \frac{M_2}{r^2} + \frac{M_3}{r^3} + \frac{M_4}{r^4}\right) g''(r) + \left(N_0 + \frac{N_1}{r} + \frac{N_2}{r^2} + \frac{N_3}{r^3} + \frac{N_4}{r^4}\right) g(r) = 0 \quad (191)$$

onde

$$\begin{aligned} M_0 &= 1 \\ M_1 &= -6M \\ M_2 &= 12M^2 \\ M_3 &= -8M^3 \\ M_4 &= 2J^2(5 - 12u^2) \end{aligned} \quad (192)$$

$$\begin{aligned}
N_0 &= \omega^2 - \mu^2 \\
N_1 &= 4M\mu^2 - 2M\omega^2 \\
N_2 &= \frac{m^2}{u^2 - 1} - 4M^2\mu^2 \\
N_3 &= \frac{4m^2M}{u^2 - 1} + 2Jm\omega + 2M \\
N_4 &= -4M^2 + \frac{4m^2M^2}{u^2 - 1} - 4JmM\omega + 2J^2\omega^2(3u^2 - 2)
\end{aligned}$$

5.2 UM ANSATZ PARA A SOLUÇÃO

Nesta seção, vamos propor um ansatz específico para tentar resolver a equação radial inspirado no artigo [60] de E. Elizalde.

5.2.1 Aplicando o ansatz

Para resolver a equação (191), vamos utilizar um ansatz inspirado nas soluções para a equação de Klein-Gordon no espaço-tempo de Schwartzschild obtidas em [60]. Supomos, então, uma solução da forma

$$g(r) = \alpha e^{\pm iF(r)} \quad (193)$$

onde

$$F(r) = kr + a_0 \ln \frac{r}{2M} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{2M}{r} \right)^n, \quad (194)$$

ou seja, uma exponencial com um termo padrão kr no expoente, além de uma correção logarítmica e uma série de potências, cujos coeficientes devem ser determinados. Observamos que a correção logarítmica também pode ser entendida como uma potência (complexa) de $r/2M$ multiplicando a exponencial em (193).

As derivadas de (194) são dadas por

$$\begin{aligned}
g'(r) &= \pm iF'(r)g(r) \\
g''(r) &= (\pm iF''(r) - F'(r)^2)g(r)
\end{aligned} \quad (195)$$

onde

$$\begin{aligned}
F'(r) &= k + \frac{a_0}{r} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{na_n}{2M} \left(\frac{2M}{r} \right)^{n+1} \\
F''(r) &= -\frac{a_0}{r^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)a_n}{(2M)^2} \left(\frac{2M}{r} \right)^{n+2}.
\end{aligned} \quad (196)$$

A equação (191), portanto, pode ser escrita como

$$\begin{aligned} & \left(M_0 + \frac{M_1}{r} + \frac{M_2}{r^2} + \frac{M_3}{r^3} + \frac{M_4}{r^4} \right) (\pm i F''(r) - F'(r)^2) \\ & + \left(N_0 + \frac{N_1}{r} + \frac{N_2}{r^2} + \frac{N_3}{r^3} + \frac{N_4}{r^4} \right) = 0. \end{aligned} \quad (197)$$

Para encontrar a solução dessa equação, precisamos desenvolver todos os termos, congregando as potências de $1/r$ e igualá-las a zero (pois o lado direito da equação é simplesmente zero). Assim, poderemos encontrar os coeficientes k , a_0 e a_n , $n > 0$, em $F(r)$ e obter uma solução para a equação radial.

5.2.2 Resolvendo a equação

Uma solução completa para todos os coeficientes a_n da série de potências na equação (194) é determinada por um número muito grande de termos, e, já que estamos procurando uma solução aproximada, vamos nos limitar a incluir apenas termos suficientes para que o momento angular na forma J^2 apareça em nossa solução final. De fato, o momento angular J está contido nessa forma no coeficiente a_3 da série de potências em (193), portanto a nossa solução final em para o fator (194) do ansatz (193) contém cinco termos, três dos quais advém da série de potência. Deixaremos uma solução contendo mais termos, e por consequência expressões muito maiores, para futuros estudos, sempre lembrando que esses cálculos suplementares forneceriam contribuições totalmente desprezíveis em muitas situações, de acordo com a ordem de grandeza desejada para as correções.

Para calcular os coeficientes k , a_0 e a_n , $n > 0$, em (194), devemos agrupar os termos semelhantes na equação (197) para que no final possamos igualar cada potência de $1/r$ separadamente a zero. Estes cálculos, por serem bastante extensos, foram feitos com o auxílio do software Mathematica. Primeiramente, desenvolvemos todas as séries de potência e escrevemos as funções polinomiais as quais elas multiplicam. Assim, a equação onde trabalharemos diretamente para isolar os coeficientes da série de potências é dada por

$$\begin{aligned} & C_0 + \frac{C_1}{r} + \frac{C_2}{r^2} + \frac{C_3}{r^3} + \frac{C_4}{r^4} + \frac{C_5}{r^5} + \frac{C_6}{r^6} \\ & + \left(D_0 + \frac{D_1}{r} + \frac{D_2}{r^2} + \frac{D_3}{r^3} + \frac{D_4}{r^4} + \frac{D_5}{r^5} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{na_n}{2M} \left(\frac{2M}{r} \right)^{n+1} \\ & - \left(M_0 + \frac{M_1}{r} + \frac{M_2}{r^2} + \frac{M_3}{r^3} + \frac{M_4}{r^4} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{na_n}{2M} \left(\frac{2M}{r} \right)^{n+1} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{sa_s}{2M} \left(\frac{2M}{r} \right)^{s+1} \\ & \pm i \left(M_0 + \frac{M_1}{r} + \frac{M_2}{r^2} + \frac{M_3}{r^3} + \frac{M_4}{r^4} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)a_n}{(2M)^2} \left(\frac{2M}{r} \right)^{n+2} = 0 \end{aligned} \quad (198)$$

onde as constantes $C_0, \dots, C_6, D_0, \dots, D_5$ são dadas por

$$\begin{aligned}
C_0 &= -k^2 M_0 + N_0 \\
C_1 &= -2a_0 k M_0 - k^2 M_1 + N_1 \\
C_2 &= -a_0^2 M_0 - 2a_0 k M_1 - k^2 M_2 + N_2 \mp ia_0 M_0 \\
C_3 &= -a_0^2 M_1 - 2a_0 k M_2 - k^2 M_3 + N_3 \mp ia_0 M_1 \\
C_4 &= -a_0^2 M_2 - 2a_0 k M_3 - k^2 M_4 + N_4 \mp ia_0 M_2 \\
C_5 &= -a_0^2 M_3 - 2a_0 k M_4 \mp ia_0 M_3 \\
C_6 &= -a_0^2 M_4 \mp ia_0 M_4 \\
D_0 &= 2k M_0 \\
D_1 &= 2a_0 M_0 - 2k M_1 \\
D_2 &= 2a_0 M_1 - 2k M_2 \\
D_3 &= 2a_0 M_2 - 2k M_3 \\
D_4 &= 2a_0 M_3 - 2k M_4 \\
D_5 &= 2a_0 M_4.
\end{aligned} \tag{199}$$

Como foi explicado, este resultado vem através do agrupamento e comparação de potências semelhantes a partir da equação (198). Os primeiro cinco coeficientes, os quais caracterizam a equação (194), escritos a partir das constantes $M_0, \dots, M_4, N_0, \dots, N_4$ e dos coeficientes anteriores são dados por

$$\begin{aligned}
k &= \sqrt{\frac{N_0}{M_0}} \\
a_0 &= \frac{-k^2 M_1 + N_1}{2k M_0} \\
a_1 &= \frac{1}{4MkM_0} \left(a_0^2 + 2a_0 k M_1 + k^2 M_2 - N_2 \pm ia_0 M_0 \right) \\
a_2 &= \frac{1}{4(2M)^2 k M_0} \left(a_0^2 M_1 + 2a_0 k M_2 + k^2 M_3 - N_3 - 4M a_0 M_0 a_1 \right. \\
&\quad \left. - 4MkM_1 a_1 \pm ia_0 M_1 \mp i4MM_0 a_1 \right) \\
a_3 &= \frac{1}{6(2M)^3 k M_0} \left(a_0^2 M_2 + 2a_0 k M_3 + k^2 M_4 - N_4 - 4M a_0 M_1 a_1 \right. \\
&\quad \left. - 4MkM^2 a_1 + 4M^2 M_0 a_1^2 - 16M^2 a_0 M_0 a_2 - 16M^2 k M_1 a_2 + \right. \\
&\quad \left. \pm ia_0 M_2 \mp i4MM_1 a_1 \mp i24M^2 M_0 a_2 \right),
\end{aligned} \tag{200}$$

o que finalmente determina a solução da equação que vínhamos estudando. Observamos

também que a partir da definição de N_0 e M_0 recuperamos a relação de energia (na descrição de momento) usual da relatividade restrita (28) a partir do coeficiente k .

No próximo capítulo, calcularemos os valores numéricos destes coeficientes para várias situações físicas, e assim ficará claro como cada um deles se altera à medida que variamos as quantidades relativas ao sistema físico, como a massa e o momento angular.

6 RESULTADOS

Neste capítulo, estudaremos as soluções da parte radial da equação de Klein-Gordon para sistemas com rotação, considerando as métricas descritas nos capítulos quatro e cinco. Mais especificamente, efetuaremos cálculos com a solução da equação de Klein-Gordon na métrica de Hartle-Thorne (125) e na métrica de Berti (172) e deste modo poderemos determinar os efeitos dos nossos cálculos em diversos sistemas físicos.

6.1 COMPARANDO SOLUÇÕES DIFERENTES

Nesta seção, iremos comparar a forma assintótica da solução (159), obtida no quarto capítulo para a parte radial da função de onda, com a solução obtida no quinto capítulo e descrita no quarto capítulo. Observamos que, na realidade, esta é uma aproximação muito boa, pois para $r > R$, onde r é a coordenada radial, uma condição que representa a região externa à estrela, já podemos tomar a forma assintótica da solução. Embora haja pequenos erros na construção da métrica (121), assim como apercebido em [3], eles devem ser de ordem muito pequena, pois ao menos ao longo deste trabalho os parâmetros físicos em questão (massa e energia) são extremos, vide os valores numéricos dados em (214), e em geral as correções apresentados são pequenas. De fato, nas tabelas vê-se que a maior contribuição, no caso do Sol, em $F(r)$ é de longe o termo ikr , correspondente à primeira “aproximação” para uma partícula livre. Após esse termo, surgem pequenas correções devido à massa e, mais tarde, devido à rotação, que são exatamente os efeitos que estamos buscando.

Devemos observar que, até a primeira ordem em J/R^2 , uma das magnitudes relativas que aparece na métrica expandida em [2], as duas métricas são iguais, e diferenças passam a ocorrer apenas para termos de ordem $(J/R^2)^2$ e maiores. Na tabela abaixo, mostraremos valores de J/R^2 para alguns tipos de estrelas, podendo então verificar que J/R^2 é de modo geral um valor pequeno e portanto se justifica o nosso procedimento. Por exemplo, para o Sol, ele é da ordem de 10^{-13} , enquanto para uma estrela de nêutrons ele é da ordem de 10^{-5} .

	$J(J_P)$	$R(l_P)$	J/R^2
Sol	1.82×10^{75}	4.33084×10^{43}	9.70×10^{-13}
Estrela de nêutrons	5.4054×10^{72}	6.49625×10^{38}	1.2809×10^{-5}
Anã branca	2.60624×10^{74}	8.05535×10^{41}	4.01648×10^{-10}
Supergigante vermelha	8.56351×10^{80}	2.94497×10^{46}	9.87393×10^{-13}

Tabela 1 – Ordens de grandeza no momento angular para objetos celestes diversos.

Os dados numéricos acima foram obtidos em [61], [62], [63], [64], [65] e [66] e estão sendo dados em unidades de Planck, onde $c = G = \hbar = 1$, obtidas a partir da definição da massa e do comprimento de Planck

$$l_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \approx 1.616255 \times 10^{-35} \text{ m} \quad (201)$$

$$m_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \approx 2.176434 \times 10^{-8} \text{ kg.}$$

já o equivalente ao momento angular de Planck seria simplesmente $J_P = \hbar$.

Para comparar as duas soluções, usaremos a aproximação de que, para o Sol, $r \approx r - 2M$. Podemos fazer esta aproximação porque $r/2M$ é da ordem de 10^5 na superfície da estrela, ou seja, pode-se considerar que r seja muito maior que $2M$. Além disso, tomaremos apenas a primeira correção além de ikr . A solução para a parte radial da equação de Klein-Gordon no espaço-tempo de Berti et al., como foi dado em (208) e com as devidas aproximações, é proporcional a

$$R_1(r) \sim \frac{e^{i[kr + a_0 \ln r]}}{r}. \quad (202)$$

Voltamos agora à solução adquirida no quarto capítulo, utilizando a função de Whittaker. Lembrando que a nossa variável é $z = 2ikr$ e que chegamos a essa equação através de algumas mudanças de variáveis, escrevemos a parte radial da solução, para z muito grande, como sendo proporcional a

$$R_2(r) \sim \frac{e^{\frac{1}{2}z(r)} z(r)^{-\varepsilon}}{r} = \frac{e^{i[kr + \frac{d'}{2k} \ln r]}}{r}. \quad (203)$$

Escrevemos essas soluções a menos de uma constante de proporcionalidade, relaciona à sua normalização e às constantes de integração empregadas ao longo do trabalho. Observa-se que as duas soluções $R_1(r)$ e $R_2(r)$, em suas formas limitantes, são bastante parecidas, contendo uma exponencial e^{ikr} em comum, que é o termo dominante, e uma correção a mais. Basta agora comparar a_0 com $d'/(2k)$.

De acordo com (200) e (192), temos

$$a_0 = \frac{1}{2k} 2M(2\omega^2 - \mu^2), \quad (204)$$

e de acordo com (138) $d'/(2k)$ é dado por

$$\frac{d'}{2k} = \frac{1}{2k} \left[-\frac{1}{4M} + 2M(2\omega^2 - \mu^2) - \frac{l(l+1)}{2M} + \frac{Jm\omega}{M^2} \right], \quad (205)$$

onde um termo idêntico a a_0 aparece. Se o analisarmos numericamente para valores fixos dos parâmetros físicos, constatamos que esse termo é muitas ordens de grandeza maior que os outros termos em $d'/(2k)$. Entende-se também que a variável r para o caso do Sol possui um valor enorme, pois estamos apenas interessados em regiões exteriores à estrela, onde o menor valor possível da variável r é justamente sobre a superfície da estrela.

Portanto, é claro ver que as duas soluções para um valor grande da variável r são iguais e que as soluções mais gerais estão intimamente conectadas. As diferenças devem surgir devido

ao fato de que as equações foram obtidas usando expansões diferentes e os métodos usados para descobrir as suas soluções foram diferentes. Apesar dessas discrepâncias, ainda é possível apontar similaridades analíticas entre as duas soluções. Numericamente, estas diferenças são muito pequenas, pois os outros termos na expressão para $d'/2k$ são mais de vinte ordens de grandeza menores que o termo idêntico a a_0 .

Deste modo, obtivemos o comportamento geral das soluções bem como os efeitos gravitacionais da solução em ordem mais baixa, que é uma excelente aproximação. Para ordens mais altas em j , as métricas de Berti et al. e de Hartle-Thorne apresentam pequenos desvios e vamos então estudar estas correções, considerando a métrica de Berti, nas próximas seções. Com esse intuito, verificaremos a solução tanto para partículas com altas energias, quanto com baixas energias.

6.2 A FUNÇÃO DE ONDA

Como vimos no terceiro capítulo (89), a função de onda de uma partícula livre tem a seguinte forma

$$\psi(t, \mathbf{x}) \propto e^{i(\mathbf{x} \cdot \mathbf{k} - \omega t)}. \quad (206)$$

O ansatz utilizado para solucionar a equação de Klein-Gordon (193) possui uma forma similar, supondo uma função exponencial com uma série de potências no expoente e um termo proporcional a $\ln r$:

$$\psi(t, r) \propto \exp \left\{ i \left[-\omega t + kr + a_0 \ln \frac{r}{2M} + \sum_n a_n \left(\frac{2M}{r} \right)^n \right] \right\}. \quad (207)$$

O que pretendemos fazer é verificar o efeito desses termos de correção na solução final e em quais sistemas físicos o efeito é maior ou menor.

Partindo da equação de Klein-Gordon para espaços-tempos curvos determinada em termos do elemento de linha descrito em (172), a função de onda com todos os seus componentes é escrita da seguinte forma:

$$\psi_\theta(t, r, \phi) = \frac{\beta}{r - 2M} e^{im\phi} e^{-i\omega t} e^{iF(r)}, \quad (208)$$

onde

$$F(r) \approx kr + a_0 \ln \frac{r}{2M} + a_1 \frac{2M}{r} + a_2 \left(\frac{2M}{r} \right)^2 + a_3 \left(\frac{2M}{r} \right)^3 + \dots \quad (209)$$

Temos cinco observações a fazer a respeito dessas definições. Primeiramente, o fator $1/(r-2M)$ tem origem no fator integrante utilizado para eliminar o termo de primeira derivada da equação diferencial. Em segundo lugar, escrevemos o ângulo θ como um parâmetro, pois ele é fixado

logo de início devido à complexidade da equação diferencial parcial dependente de r e θ ; a dependência em θ da função de onda, portanto, pode ser encontrada dentro dos coeficientes da série de potências em $F(r)$. Em terceiro lugar, o nosso ansatz para a parte radial da equação admitia originalmente o par de soluções $e^{\pm iF(r)}$; escolhemos descrever apenas a solução com o termo e^{+ikr} para partículas emergentes, levando em consideração que a análise para uma solução do tipo e^{-ikr} é totalmente análoga. Em quarto lugar, como explicamos no quinto capítulo, decidimos levar a série em $F(r)$ somente até a terceira potência, pois é aí onde aparece a primeira contribuição do momento angular J com maior relevância para partículas de energia alta. Por último, é útil lembrar que os coeficientes a_j são de modo geral números complexos, e portanto a própria função $F(r)$ é complexa.

Seguindo na análise da solução, é claro perceber que, em $t = 0$, tanto $\psi(t, r, \phi)$ quanto $|\psi(t, r, \phi)|^2$ vão a zero com $r \rightarrow \infty$. Vemos isso, pois

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{e^{iF(r)}}{r - 2M} = 0, \quad (210)$$

e este fato ocorre também para qualquer tempo $t > 0$. Portanto, a função de onda pode, a princípio, ser normalizada. É possível obter a constante de normalização, que no nosso caso chamamos de β , integrando a densidade de carga em todo o espaço e igualando o resultado, a carga total, a 1 [48] [67]:

$$\int d^3x \sqrt{g} \psi^* \overleftrightarrow{\partial}_t \psi = 1. \quad (211)$$

onde, para funções A e B que dependem das coordenadas espaço-temporais x^μ ,

$$A \overleftrightarrow{\partial}_\mu B = [A, \partial_\mu] B = A \partial_\mu B - (\partial_\mu A) B.$$

A explicação para a forma da integral de normalização acima para a função de onda de Klein-Gordon, que difere de forma marcante da integral utilizada na mecânica quântica convencional, pode ser encontrada em qualquer livro de mecânica quântica relativística, incluindo os citados no início do terceiro capítulo. Em nosso trabalho, a constante depende de vários parâmetros físicos como a massa da estrela e a da partícula, e até mesmo da coordenada angular θ , já que decidimos fixá-la de início. A integral acima, levando em conta o fato de já conhecermos a solução, é extremamente complicada. Já que esse resultado não possui importância para a análise que pretendemos fazer, decidimos simplesmente não calcular (numericamente) a constante de normalização. Observamos, entretanto, que é possível fazê-lo.

6.3 CORREÇÕES DE MASSA E DA ROTAÇÃO

A função $F(r)$ (209) que aparece na nossa solução contém cinco coeficientes: k , a_0 , a_1 , a_2 e a_3 . Os seus valores foram apresentados em (200) e definidos a partir de constantes já

definidas anteriormente. Os primeiros dois coeficientes são reais e os outros três são complexos, portanto $F(r)$ é uma função complexa, com uma parte real e uma parte imaginária. Além disso, somente a_2 e a_3 dependem do momento angular J da estrela, sendo que em a_2 ele aparece em sua primeira potência e em a_3 ele aparece elevado ao quadrado. Sabendo disso tudo, podemos separar o expoente $F(r)$ em quatro partes:

$$F(r) = A(r) + B(r) + \Gamma(r) + \Delta(r), \quad (212)$$

onde $A(r)$ ($B(r)$) é a parte real (imaginária) de $F(r)$ e que não depende do momento angular, e $\Gamma(r)$ ($\Delta(r)$) é a parte real (imaginária) de $F(r)$ e que depende do momento angular, seja da forma J ou J^2 .

Essas funções são dadas por

$$\begin{aligned} A(r) &= kr + a_0 \ln \frac{r}{2M} + \alpha_1 \frac{2M}{r} + \alpha_2 \left(\frac{2M}{r} \right)^2 + \alpha_3 \left(\frac{2M}{r} \right)^3 \\ B(r) &= \beta_1 \frac{2M}{r} + \beta_2 \left(\frac{2M}{r} \right)^2 + \beta_3 \left(\frac{2M}{r} \right)^3 \\ \Gamma(r) &= \gamma_2 \left(\frac{2M}{r} \right)^2 + \gamma_3 \left(\frac{2M}{r} \right)^3 \\ \Delta(r) &= \delta_3 \left(\frac{2M}{r} \right)^3, \end{aligned} \quad (213)$$

sendo que a definição dos coeficientes contidos nelas podem ser obtidas separando os coeficientes (200) em suas partes reais e imaginárias e destacando os que dependem do momento angular.

Tendo obtido nossos resultados, com a função de onda sendo determinada até os termos de ordem menor onde se pode observar o efeito do momento angular, vamos aplicá-los em sistemas físicos de interesse.

Selecionamos três corpos celestiais para verificar os valores das correções de massa e do momento angular: o Sol, a estrela de nêutrons PSR B1257+12 [63] [64] [65] e a anã branca PG 2131+066 [66]. Mantendo o padrão seguido anteriormente, todos os valores numéricos são dados em unidades de Planck. Nestas unidades, os valores da massa, do momento angular e do raio do sol são dados por

$$\begin{aligned} M_{\odot} &= 9.136 \times 10^{37} m_P \\ J_{\odot} &= 1.82 \times 10^{75} J_P \\ R_{\odot} &= 4.30835481 \times 10^{43} l_P. \end{aligned} \quad (214)$$

Os valores dessas quantidades para a estrela de nêutrons e para a anã branca consideradas,

definidos a partir dos valores respectivos do Sol, são dados por

$$\begin{aligned}
 M_{ns} &= 1.4M_{\odot} & M_{wd} &= 0.608M_{\odot} \\
 J_{ns} &= 0.00297J_{\odot} & J_{wd} &= 0.1432J_{\odot} \\
 R_{ns} &= 0.000015R_{\odot}, & R_{wd} &= 0.0186R_{\odot}.
 \end{aligned} \tag{215}$$

Originalmente os números das quantidades físicas relacionadas à rotação, obtidos experimentalmente e fornecidos nas referências citadas acima, eram dados em termos da rotação estelar de cada objeto (da estrela de nêutrons e da anã branca). A partir deles, pôde-se então calcular um valor aproximado para o momento angular dos objetos, supondo como seus formatos esferas.

Além disso, selecionamos dois tipos de partículas de spin-0 para os nossos testes: o pión e o bóson de Higgs. As suas massas (em unidades de Planck) são dadas por

$$\begin{aligned}
 \mu_{\pi} &= 1.1056 \times 10^{-20} \\
 \mu_{Higgs} &= 1.0245 \times 10^{-17}
 \end{aligned} \tag{216}$$

Para propósitos de referência, a massa do pión carregado π^{\pm} , em unidades usuais, é 139.57039 MeV/ c^2 , a do pión π^0 é 134.9768 MeV/ c^2 e a do bóson de Higgs é 125.25 GeV/ c^2 .

6.3.1 Valores numéricos das contribuições no expoente $F(r)$

Tendo apresentado os sistemas físicos que iremos estudar e também explicado a estrutura do expoente $F(r)$ (212), mostraremos o valor numérico de cada uma das contribuições, assim como definido na equação (213), em certos casos específicos.

Cada linha das tabelas abaixo corresponde a uma das quatro funções $A(r)$, $B(r)$, $\Gamma(r)$ e $\Delta(r)$. Para as colunas, separamos as contribuições conforme a sua dependência em r , ou seja, a primeira coluna corresponde às contribuições de $F(r)$ que são proporcionais a r e assim por diante. Tomando como exemplo a Tabela 2, o valor 8.25031×10^{23} da primeira célula na primeira coluna e primeira linha corresponde ao termo kr . Lembramos também que os valores numéricos nas linhas A e Γ são reais e os valores nas linhas B e Δ são imaginários, sendo que $A(r)$ e $B(r)$ correspondem às contribuições puramente de massa, enquanto que $\Gamma(r)$ e $\Delta(r)$ possuem contribuição do momento angular.

Além dos valores numéricos sobre cada estrela e partícula já especificados de antemão, também fixamos valores numéricos para as outras quantidades físicas: o ângulo θ escolhido foi de $\theta = 45^\circ$; a coordenada radial r usada para exemplificação foi de $r = R$, onde R é o respectivo raio da estrela usada na tabela (além de ser também o menor valor possível para r já que a presente métrica só vale fora da estrela); a energia ω escolhida foi de $\omega = 2\mu$, onde μ é a massa da partícula usada na tabela; e $m = 1$. Observamos que a energia escolhida pode ser considerada como uma energia alta.

Abaixo estão os resultados:

	r	$\ln r$	$1/r$	$1/r^2$	$1/r^3$
A	8.25031×10^{23}	5.04993×10^{19}	-1.71066×10^{13}	-3.6348×10^7	-1.02727×10^2
B	0	0	2.47395×10^{-6}	4.24684×10^{-12}	1.29492×10^{-17}
Γ	0	0	0	-5.66093×10^{-13}	-8.81302×10^{-2}
Δ	0	0	0	0	6.86148×10^{-37}

Tabela 2 – Objeto celeste: Sol. Partícula: Píon.

	r	$\ln r$	$1/r$	$1/r^2$	$1/r^3$
A	7.64512×10^{26}	4.6795×10^{22}	-1.58518×10^{16}	-3.36818×10^{10}	-9.51912×10^4
B	0	0	2.47395×10^{-6}	4.24684×10^{-12}	1.29492×10^{-17}
Γ	0	0	0	-5.66093×10^{-13}	-8.16655×10
Δ	0	0	0	0	7.40464×10^{-40}

Tabela 3 – Objeto celeste: Sol. Partícula: Bóson de Higgs.

	r	$\ln r$	$1/r$	$1/r^2$	$1/r^3$
A	1.23755×10^{19}	5.2965×10^{18}	-2.23527×10^{18}	-4.43284×10^{17}	-1.16929×10^{17}
B	0	0	2.30902×10^{-1}	3.69947×10^{-2}	1.05281×10^{-2}
Γ	0	0	0	-7.48238×10^{-6}	-2.30951×10^8
Δ	0	0	0	0	6.04614×10^{-25}

Tabela 4 – Objeto celeste: Estrela de nêutrons. Partícula: Píon.

	r	$\ln r$	$1/r$	$1/r^2$	$1/r^3$
A	1.14677×10^{22}	4.90798×10^{21}	-2.0713×10^{21}	-4.10768×10^{20}	-1.08352×10^{20}
B	0	0	2.30902×10^{-1}	3.69947×10^{-2}	1.05281×10^{-2}
Γ	0	0	0	-7.48238×10^{-6}	-2.1401×10^{11}
Δ	0	0	0	0	6.52476×10^{-28}

Tabela 5 – Objeto celeste: Estrela de nêutrons. Partícula: Bóson de Higgs.

	r	$\ln r$	$1/r$	$1/r^2$	$1/r^3$
A	1.53456×10^{22}	2.2049×10^{19}	-3.39985×10^{14}	-2.36138×10^{10}	-2.18152×10^6
B	0	0	8.0869×10^{-5}	4.53782×10^{-9}	4.52286×10^{-13}
Γ	0	0	0	-2.34386×10^{-10}	-2.81012×10^2
Δ	0	0	0	0	1.52739×10^{-32}

Tabela 6 – Objeto celeste: Anã branca. Partícula: Píon.

	r	$\ln r$	$1/r$	$1/r^2$	$1/r^3$
A	1.42199×10^{25}	2.04316×10^{22}	$-3.15 - 45 \times 10^{17}$	-2.18816×10^{13}	-2.02149×10^9
B	0	0	8.0869×10^{-5}	4.53782×10^{-9}	4.52286×10^{-13}
Γ	0	0	0	-2.34386×10^{-10}	-2.60399×10^2
Δ	0	0	0	0	1.64829×10^{-35}

Tabela 7 – Objeto celeste: Anã branca. Partícula: Bóson de Higgs.

Faremos algumas observações importantes. Primeiramente, para altas energias, observamos que de todos os sistemas físicos o que mais sente efeito das contribuições de diferentes potências ao compararmos com o termo kr é a estrela de nêutrons, seja com o pión ou com o bóson de Higgs; o efeito é um pouco maior com o pión, no entanto. Nas outras quatro tabelas, nota-se que as outras contribuições diminuem rapidamente. Para o Sol, elas são várias ordens de grandeza menores. Para a anã branca, a diferença não é tanto grande, mas é ainda significativa. Em segundo lugar, notamos o resultado esperado de que o momento angular, e portanto a rotação do objeto celeste, não causa efeito considerável na solução final para a função de onda segundo todas as expansões que fizemos para altas energias. De fato, como vemos por exemplo na Tabela 4, a diferença de ordem de grandeza entre a contribuição proporcional a $1/r^3$ nas linhas A e Γ é de 10^9 , e a diferença nas ordens de grandeza entre a contribuição proporcional a $1/r^3$ na linha Γ e o termo kr — o qual, como já vimos, é a contribuição proporcional a r na linha A — é de 10^{11} . Nos outros sistemas físicos a diferença é ainda mais apreciável: para o Sol, a diferença nas ordens de grandeza entre a contribuição proporcional a $1/r^3$ na linha Γ e o termo kr é de 10^{25} .

Além disso, apontamos um resultado que parece estranho à primeira vista, mas que é um artefato da estrutura dos coeficientes. Em cada par de tabelas referentes ao mesmo objeto celeste, a linha B, que representa as contribuições de massa imaginárias em (209), são iguais. Isso acontece por causa da forma que decidimos escolher a energia, escolhendo-a sempre como $\omega = k\mu$, ou seja, proporcional à massa da respectiva partícula. No nosso caso, usamos $k = 2$, uma energia alta. Por coincidência os termos que compõem $B(r)$ são tais que ao substituirmos $\omega = k\mu$, μ é cancelado e o que sobra é apenas a constante de proporcionalidade k . Assim, os termos da linha B “independem” da massa da partícula μ — desde que a energia e a massa sejam proporcionais da mesma forma, ou seja, a constante de proporcionalidade k seja a mesma. Caso houvéssimos escolhido energias com proporcionalidades diferentes para os dois casos, este fenômeno não teria acontecido. No entanto, escolhemos a energia desta forma, pois queríamos que ela representasse uma energia com valor numérico maior do que a massa da partícula, não importando qual partícula fosse.

Para concluir esta seção, vamos mostrar duas tabelas adicionais relacionadas às tabelas 2 e 4, que se referem, respectivamente, a valores numéricos para o Sol e para a estrela de nêutrons, com a partícula escolhida sendo o pión. Neste caso, porém, utilizamos uma energia baixa $\omega = 1.00001\mu$.

	r	$\ln r$	$1/r$	$1/r^2$	$1/r^3$
A	2.13023×10^{21}	2.79415×10^{21}	1.19725×10^{19}	-6.34725×10^{17}	5.60816×10^{16}
B	0	0	0.0530151	-0.00562076	0.000794596
Γ	0	0	0	-1.09624×10^{-10}	17.0659
Δ	0	0	0	0	5.14613×10^{-32}

Tabela 8 – Objeto celeste: Sol. Partícula: Pión. Energia baixa.

	r	$\ln r$	$1/r$	$1/r^2$	$1/r^3$
A	3.19534×10^{16}	2.93057×10^{20}	1.56441×10^{24}	-7.74082×10^{27}	6.3835×10^{31}
B	0	0	4948.08	-4.89631×10^7	6.46036×10^{11}
Γ	0	0	0	-0.00144897	4.47225×10^{10}
Δ	0	0	0	0	4.53463×10^{-20}

Tabela 9 – Objeto celeste: Estrela de nêutrons. Partícula: Píon. Energia baixa.

Como podemos ver nas duas tabelas acima, para partículas de energia baixa as correções possuem valores mais altos que para partículas de energia alta. Pode-se explicar esse fenômeno ao considerar que as partículas de energia baixa possuem velocidades da ordem da velocidade angular das estrelas, e portanto sentem com mais força o efeito de seus campos gravitacionais, enquanto partículas de energia alta percorrem o espaço-tempo em torno dessas estrelas com tanta velocidade que os efeitos acabam se tornando reduzidos.

Na Tabela 9 ainda é possível ver que as contribuições aparentam crescer cada vez mais. Deste modo, para partículas de energia baixa e estrelas bastante relativísticas (segundo o critério em [2], que diz que $R/2M \ll 1$) como estrelas de nêutrons, a aproximação tomada não é suficiente e são necessários mais termos na série proposta. A partir do resultados apresentados, não é possível determinar quantos termos a mais seriam necessários para determinar a solução, e esta verificação é deixada para ser feita em futuros estudos. Contudo, o que é mais importante é que com esses resultados podemos concluir que para baixas energias obtemos os efeitos mais relevantes da estrutura do espaço-tempo no comportamento dos sistemas estudados.

6.4 ESTUDANDO A ESTRELA DE NÊUTRONS DE PERTO

Conforme os resultados obtidos na tabela 4 e explicados na seção anterior, o caso onde a estrela escolhida é uma estrela de nêutrons e a partícula é o píon é o que apresenta efeitos gravitacionais mais relevantes nas correções tanto de massa quanto da rotação. Vamos escolher este caso para estudar mais a fundo, variando as outras quantidades físicas envolvidas e verificando as suas contribuições, limitando a nossa análise ao caso de partículas com energias altas.

As três quantidades que vamos variar são a energia ω , o ângulo θ e o momento angular J . Quanto ao momento angular, variamos o seu valor para evidenciar a sua contribuição no valor total do expoente (209).

Para a energia, escolhemos oito valores diferentes, que vão desde valores próximos aos da massa da partícula até energias altas:

$$\begin{aligned}
 \omega_1 &= 1.00001\mu & \omega_5 &= 1.1\mu \\
 \omega_2 &= 1.0001\mu & \omega_6 &= 1.5\mu \\
 \omega_3 &= 1.001\mu & \omega_7 &= 2\mu \\
 \omega_4 &= 1.01\mu & \omega_8 &= 10\mu
 \end{aligned} \tag{217}$$

Para o momento angular, escolhamos seis valores diferentes:

$$\begin{aligned}
 J_1 &= 0 & J_4 &= J \\
 J_2 &= 0.0001J & J_5 &= 100J \\
 J_3 &= 0.01J & J_6 &= 10000J
 \end{aligned} \tag{218}$$

onde J é o momento angular da estrela de nêutrons dado em (215). Para o ângulo θ , escolhamos cinco valores

$$\begin{aligned}
 \theta_1 &= 1^\circ & \theta_4 &= 135^\circ \\
 \theta_2 &= 45^\circ & \theta_5 &= 179^\circ \\
 \theta_3 &= 90^\circ
 \end{aligned} \tag{219}$$

Vamos definir aqui três funções, cujos gráficos mostraremos mais para frente, que proporcionam informações sobre como a solução que construímos se comporta ao variarmos parâmetros como energia, o momento angular e o ângulo polar. Chamaremos estas funções de f_1 , f_2 e f_3 . A função f_1 é definida a partir de (209):

$$f_1 = iF \tag{220}$$

Escolhemos fazer o gráfico desta função, e não somente de (209), porque esta é a expressão completa que aparece dentro do expoente em (208). Vale notar que não escrevemos, por exemplo, (209) como $F(r)$. O motivo disso é que em certos gráficos nós fixamos a variável angular r para certos valores e utilizamos outras quantidades como a variável em questão da função. Continuando, vamos definir a função f_2 como

$$f_2 = \frac{e^{iF}}{r - 2M} \tag{221}$$

para que possamos obter mais informações a respeito da parte radial da função de onda. Definimos finalmente a função f_3 como

$$f_3 = \frac{\Gamma + \Delta}{|A + B + \Gamma + \Delta|} \tag{222}$$

e, como podemos observar, ele é definido a partir das diferentes contribuições dadas por (213) e pode ser interpretado como uma “diferença”, pois ele é dado pela diferença entre os termos em (209) que contêm o momento angular J e os que não o contêm, dividido pelo valor absoluto de $F(r)$. Este termo é útil para podermos visualizar de forma mais clara a contribuição do momento angular em diversas situações físicas. É importante lembrar também que, como foi visto anteriormente, as soluções não funcionam muito bem para energias baixas e, portanto, deve-se tomar cuidado ao interpretar os gráficos em tais situações.

6.4.1 Gráficos de f_1

Plotamos a função f_1 de três maneiras: como função da coordenada radial r , variando a energia ω para os oito casos descritos na seção anterior e fixando o ângulo polar θ ; como função de ω , variando r e fixando θ ; e como função de θ , variando r e fixando ω . Além disso, dependendo da situação, escolhemos plotar ou a parte real ou a parte imaginária de f_1 . Em cada figura, explicitamos a função exata no gráfico.

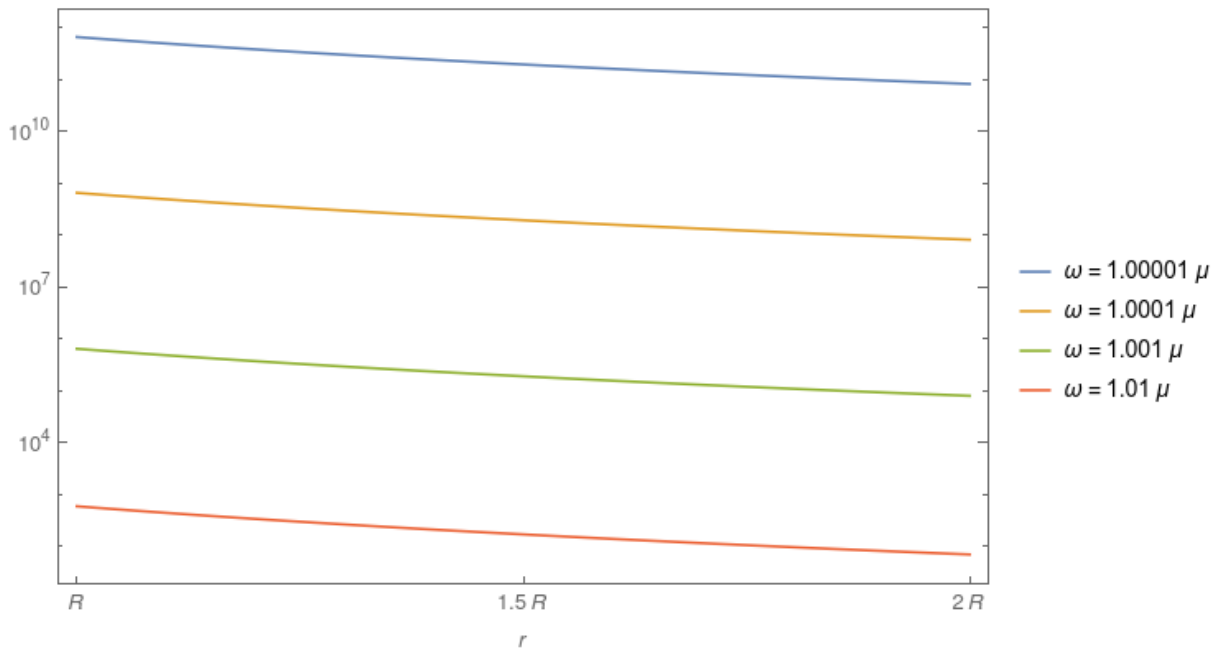


Figura 1 – Gráfico logarítmico do módulo da parte real de f_1 para energias baixas

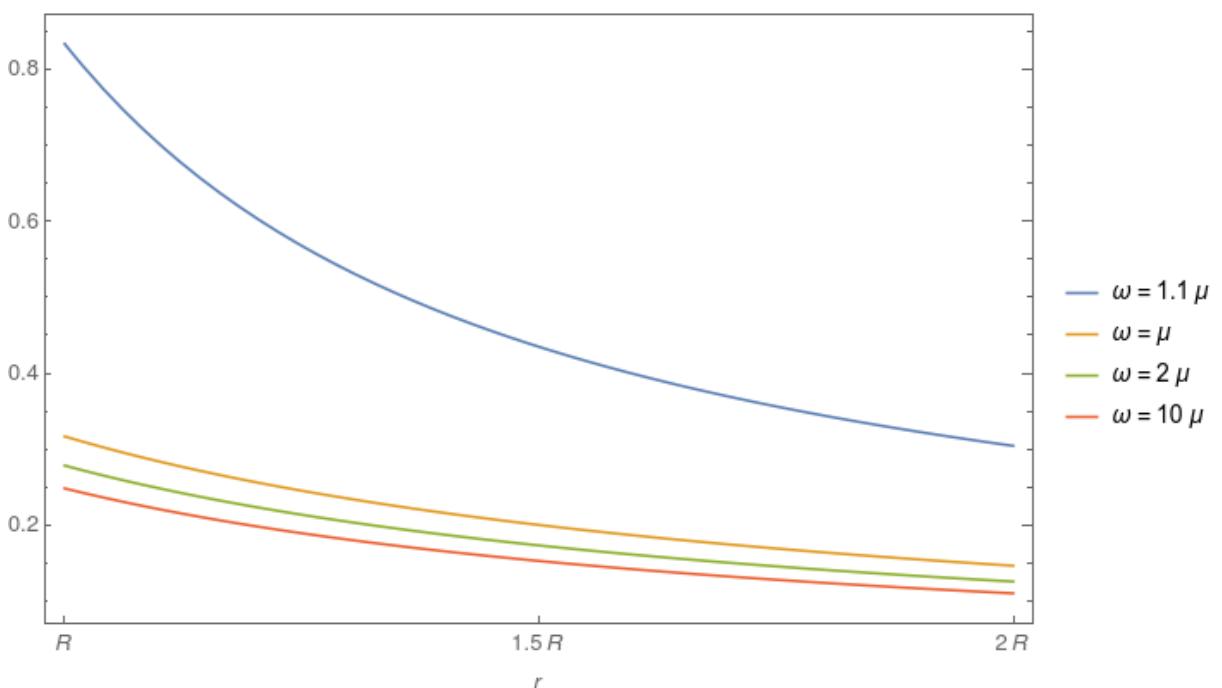


Figura 2 – Gráfico linear do módulo da parte real de f_1 para energias altas

Nos gráficos representados nas figuras 1 e 2 vemos o comportamento da parte real da função f_1 , respectivamente, para energias baixas e altas. Escolhemos fazer o gráfico da parte real, pois é este termo que aparece ao calcularmos o módulo quadrado da função de onda; a parte imaginária tem módulo unitário e portanto é descartada.

Para uma melhor visualização dos dados, os gráficos acima foram feitos em escala logarítmica, e isso mostra que a diferença do valor de f_1 para energias baixas é muito alto, enquanto que para energias mais altas, a diferença não é tão grande. Vemos isso no fato de que o gráfico na figura 2 pôde ter sido feito numa escala linear simples e todas as curvas foram acomodadas.

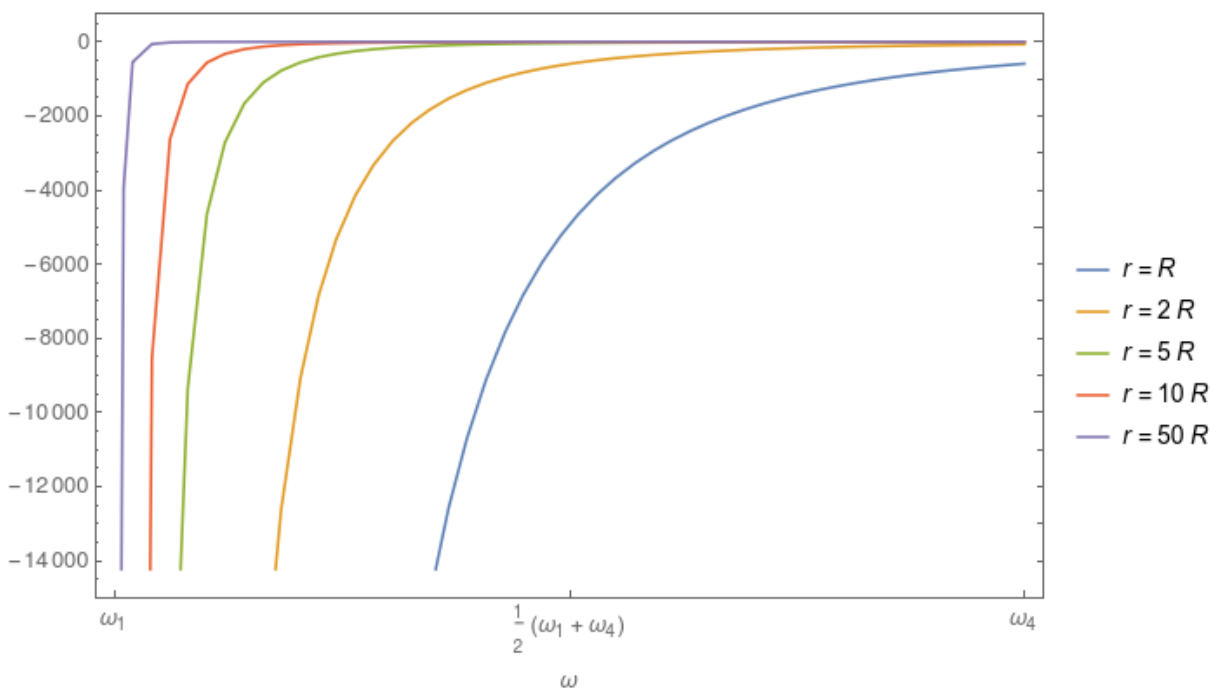


Figura 3 – Gráfico linear da parte real de f_1 para cinco distâncias diferentes e como função da energia (energias baixas)

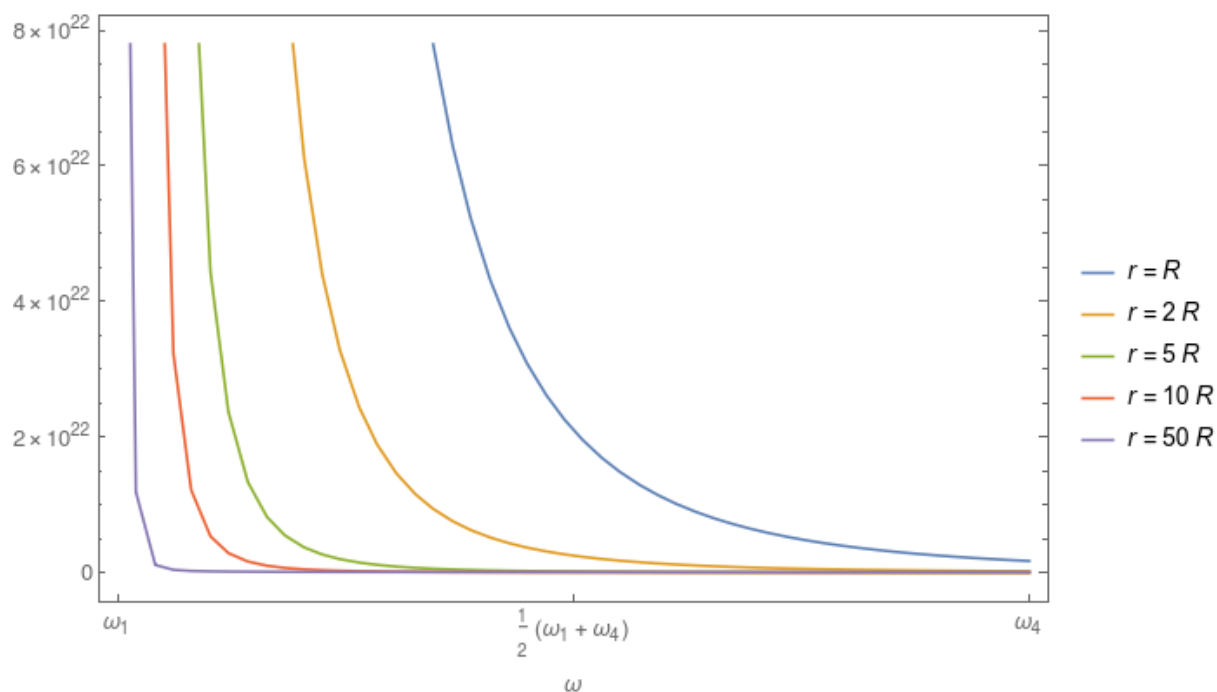


Figura 4 – Gráfico linear da parte imaginária de f_1 para cinco distâncias diferentes e como função da energia (energias baixas)

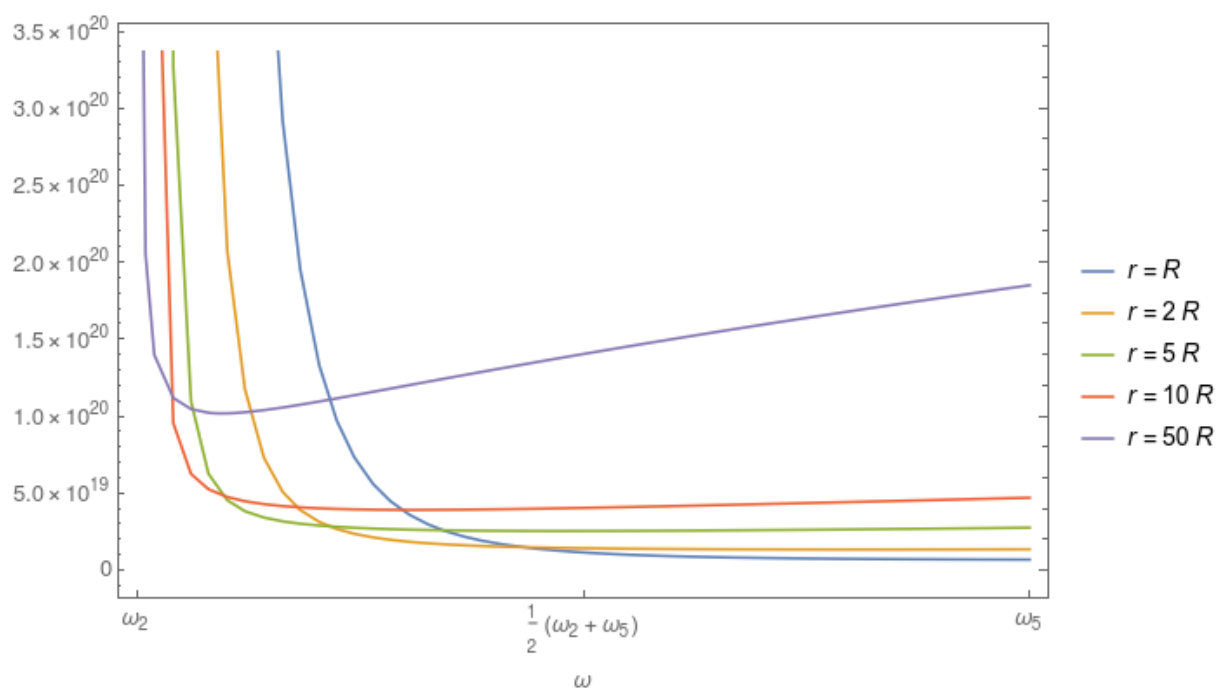


Figura 5 – Gráfico linear da parte imaginária de f_1 para cinco distâncias diferentes e como função da energia (energias baixas e médias)

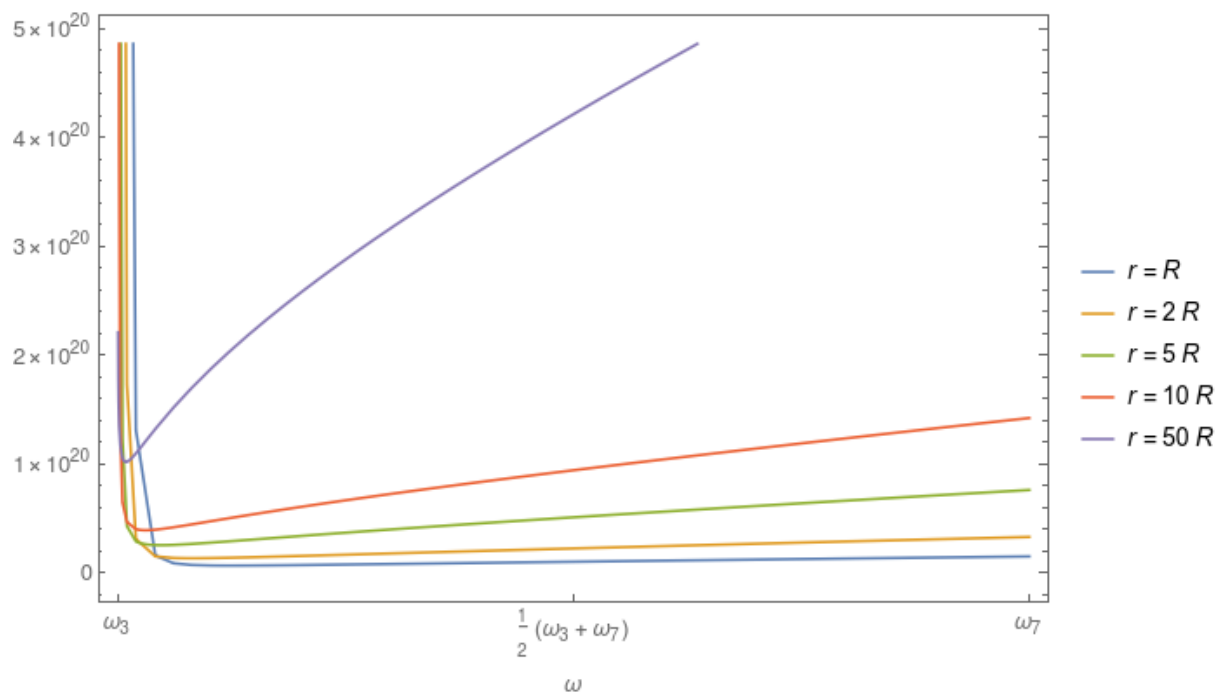


Figura 6 – Gráfico linear da parte imaginária de f_1 para cinco distâncias diferentes e como função da energia (energias médias e altas)

Na figura 3 vemos os gráficos da parte real da função f_1 para valores fixos de r (em cada curva) como função da energia ω , para energias baixas. Por mais que esta função seja importante devido à sua aparição no cálculo do módulo quadrado da função de onda, como explicado anteriormente, só mostramos gráficos para valores baixos da energia, pois não há nenhuma mudança de comportamento para energias altas. De fato, a função plotada simplesmente tende a zero e, como podemos ver, aproxima-se do eixo x mais depressa para valores altos do raio r .

Já nas figuras 4, 5 e 6 vemos os gráficos da parte imaginária da função de f_1 para valores fixos de r como função da energia ω . Os gráficos da figura 4 correspondem a energias baixas, os da figura 5 a energias baixas e médias e os da figura 6 a energias médias e altas. Vemos que para energias baixas a função plotada parece se aproximar de zero, porém ao aumentarmos a energia percebemos que começa a crescer a partir de um certo limite, e que este crescimento é mais manifesto para distâncias grandes. O fato de ele crescer não é imediatamente um problema já que, como deve ser lembrado, a função f_1 é um expoente e o exponencial de números puramente imaginários são funções periódicas de valor absoluto unitário.

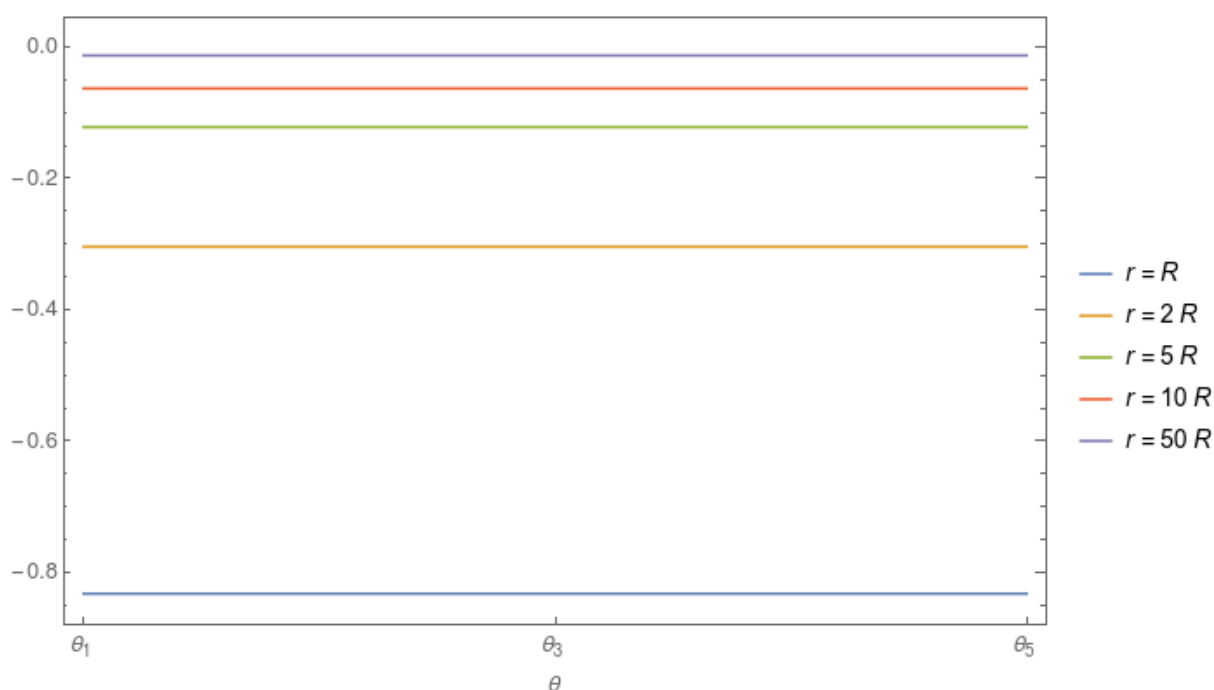


Figura 7 – Gráfico linear da parte real de f_1 para cinco distâncias diferentes em função de θ .

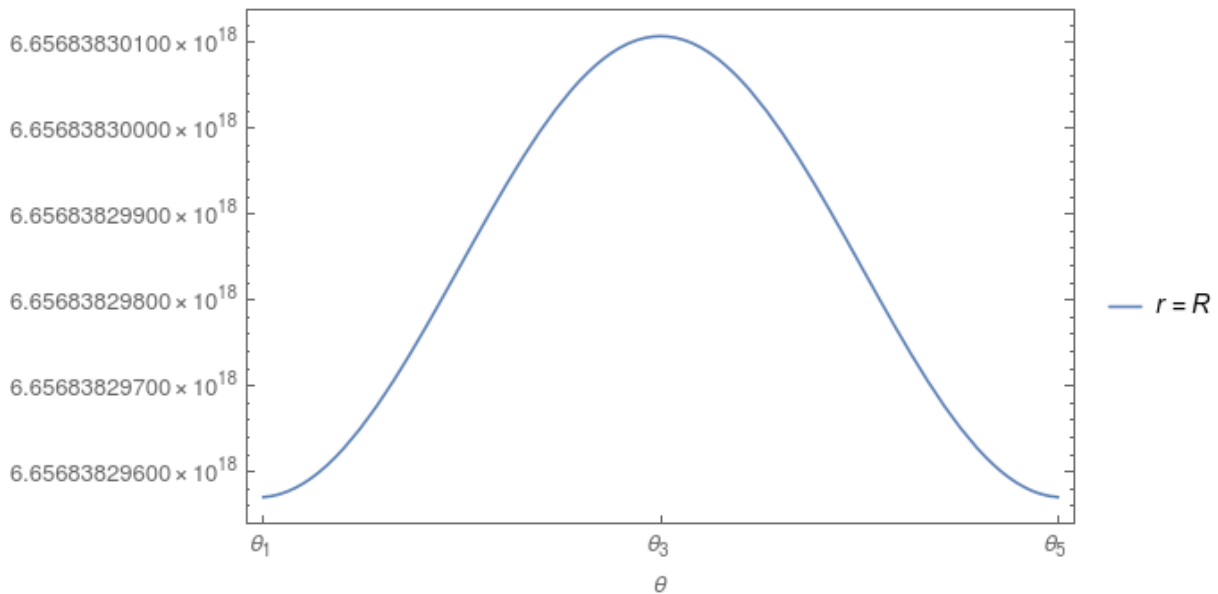


Figura 8 – Gráfico logarítmico da parte imaginária de f_1 em função de θ com a distância $r = R$ fixa.

Nas figuras 7 e 8 vemos os gráficos, respectivamente, das partes real e imaginária de f_1 , sendo que na Fig. 7 temos a representação dos gráficos para cinco distâncias fixadas e na Fig. 8 só vemos o gráfico para uma distância, $r = R$.

Na Fig. 7, a parte real de f_1 , como se pode ver, é praticamente constante ao variarmos a coordenada polar θ como um parâmetro. De fato, escolhemos apresentar a curva para cinco distâncias diferentes e mostrar que o que muda entre elas é somente a altura no eixo y , mas que elas continuam sendo funções praticamente constantes. No entanto, se houvéssimos escolhido representar cada uma destas curvas em gráficos diferentes, como fizemos inicialmente para a parte imaginária, os gráficos não diriam mais do que isso: que praticamente não há variação com relação à coordenada θ .

Levando isso em conta, observamos que escolhemos plotar somente uma curva para a parte imaginária de f_1 na Fig. 8. Fizemos isso porque, novamente, a forma da função não se alterava de acordo com a distância para distâncias baixas.

6.4.2 Gráficos de f_2

Nesta seção, iremos apresentar gráficos para a função f_2 , que representa a parte radial da função de onda, de duas maneiras: como função da coordenada radial r e variando a energia ω com os valores descritos anteriormente e fixando o ângulo polar θ ; e como função de ω , variando r em cinco distâncias diferentes e fixando θ .

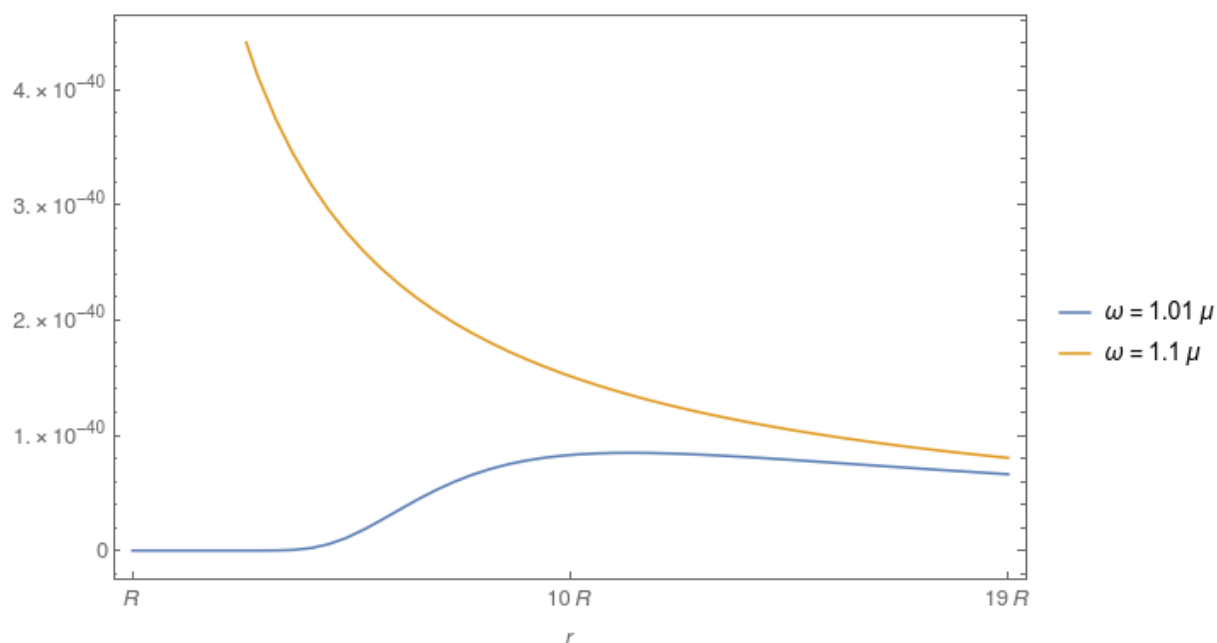


Figura 9 – Gráfico linear da parte real de f_2 para duas energias médias como função de r .

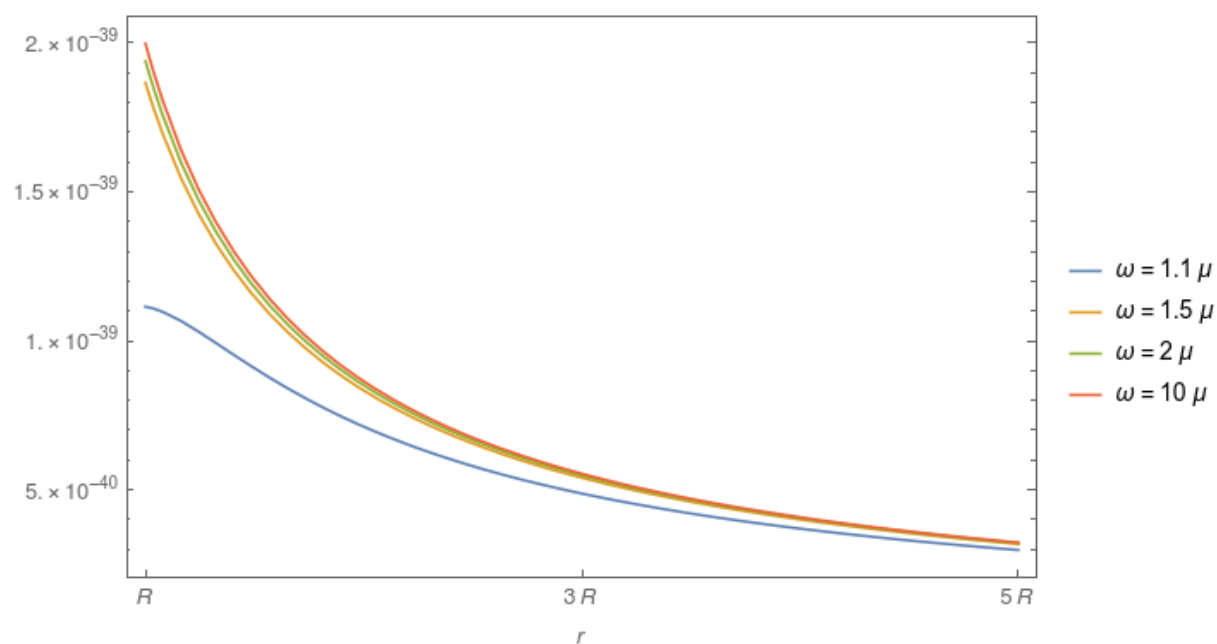


Figura 10 – Gráfico linear da parte real de f_2 para energias médias e altas como função de r .

Nas figuras 9 e 10 vemos os gráficos da parte real de f_2 para energias médias e energias médias/altas, respectivamente. Na Fig. 9 estão reproduzidos somente os gráficos para duas energias (ω_4 e ω_5 , como definidos em (217)); as energias mais baixas não foram representadas, pois os valores numéricos de f_2 considerando energias mais baixas que ω_4 foram comparativamente muito pequenos.

Pode-se observar que a curva relativa à energia mais baixa, ω_4 , tem um comportamento um pouco diferente das curvas relativas a energias mais altas. Além disso, observamos na figura

10 que a partir de uma certa energia (no nosso caso, a energia ω_6), as curvas se tornam muito parecidas e quase se sobrepõem, principalmente quando r cresce.

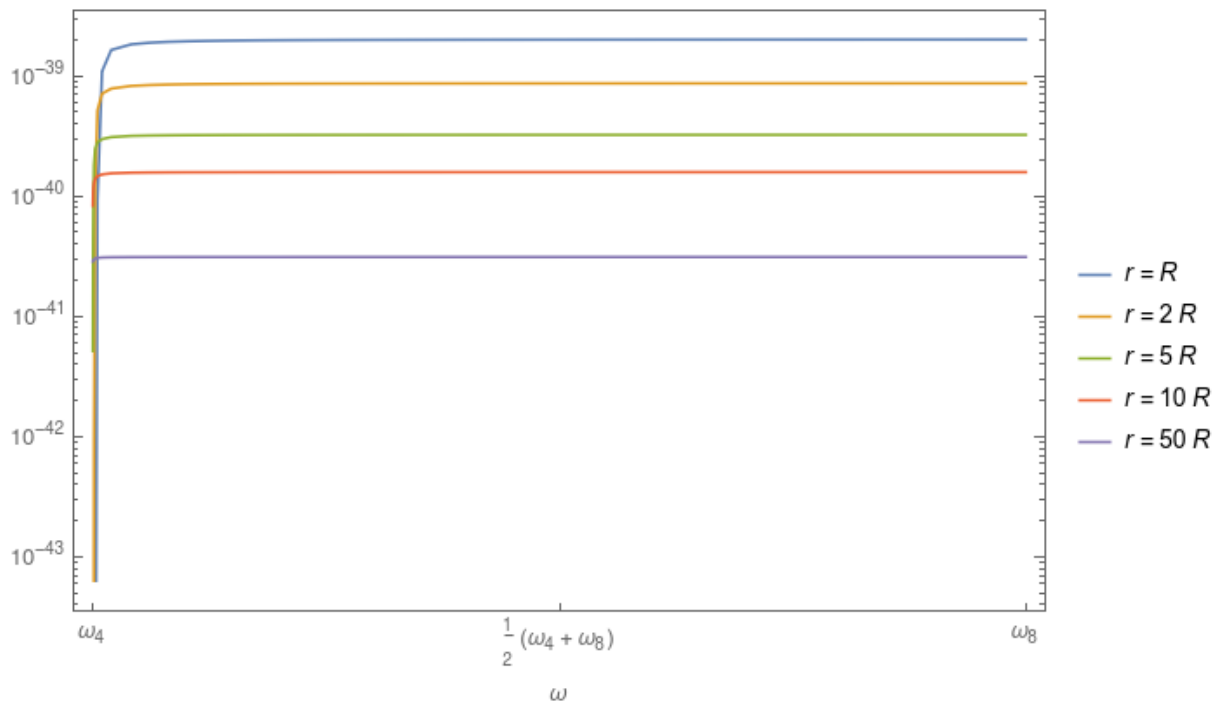


Figura 11 – Gráfico logarítmico da parte real de f_2 como função de ω e variando a distância r .

Na figura 11 vemos os gráficos da parte real de f_2 para valores diferentes do raio r e como função da energia ω , para energias médias e altas. Como podemos ver na figura, para cada distância diferente, as curvas rapidamente se estabilizam e passam a (pelo menos aproximadamente) a independem da energia, adquirindo um valor constante que varia com a distância.

6.4.3 Gráficos de f_3

Produzimos cinco figuras correspondentes à função f_3 , a dizer, a função "diferença" que representa a contribuição do momento angular J para a função $F(r)$ definida em (209) e (212). Duas das figuras se referem à função f_3 projetada em função de r para cinco valores diferentes do momento angular J ; as outras três se referem à função f_3 também como função de r , porém a diferença é que variamos tanto o momento angular J (um valor baixo, o valor próprio da estrela de nêutrons e um valor alto) quanto a energia ω (um valor baixo, um valor médio e um valor alto).

Estes gráficos foram feitos com o intuito de aferir a contribuição do momento angular na nossa solução final e, se o valor dele fosse menor ou maior, quais seriam os efeitos concernentes.

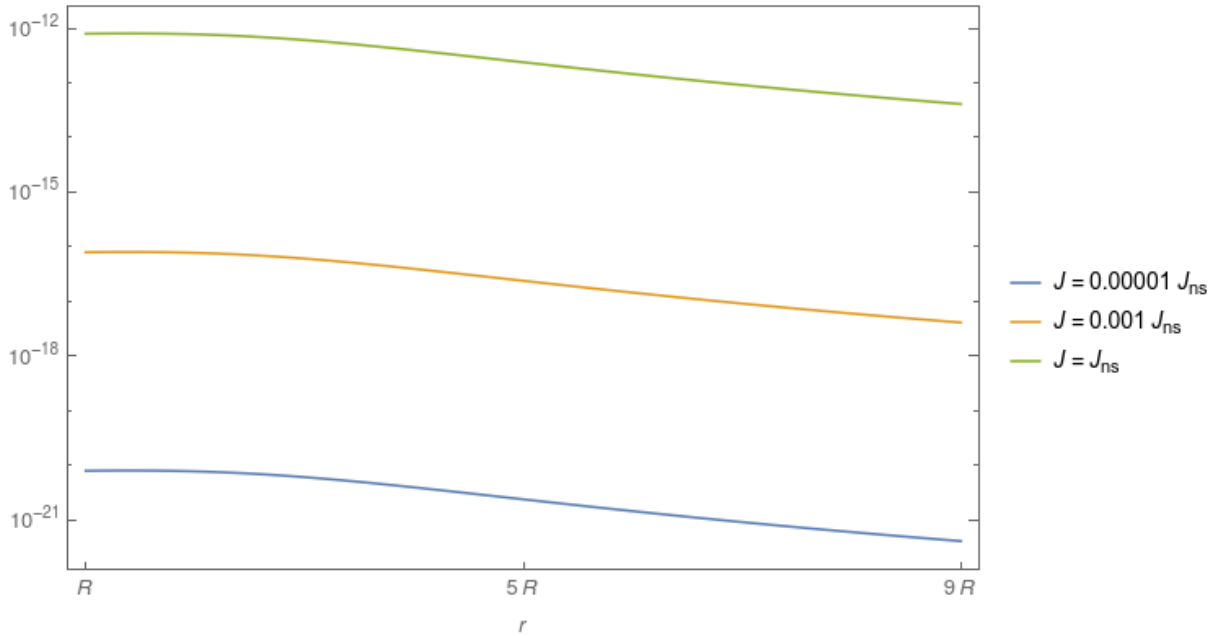


Figura 12 – Gráfico logarítmico da parte imaginária de f_3 como função de r para valores baixos do momento angular J e para o valor próprio do momento angular da estrela.

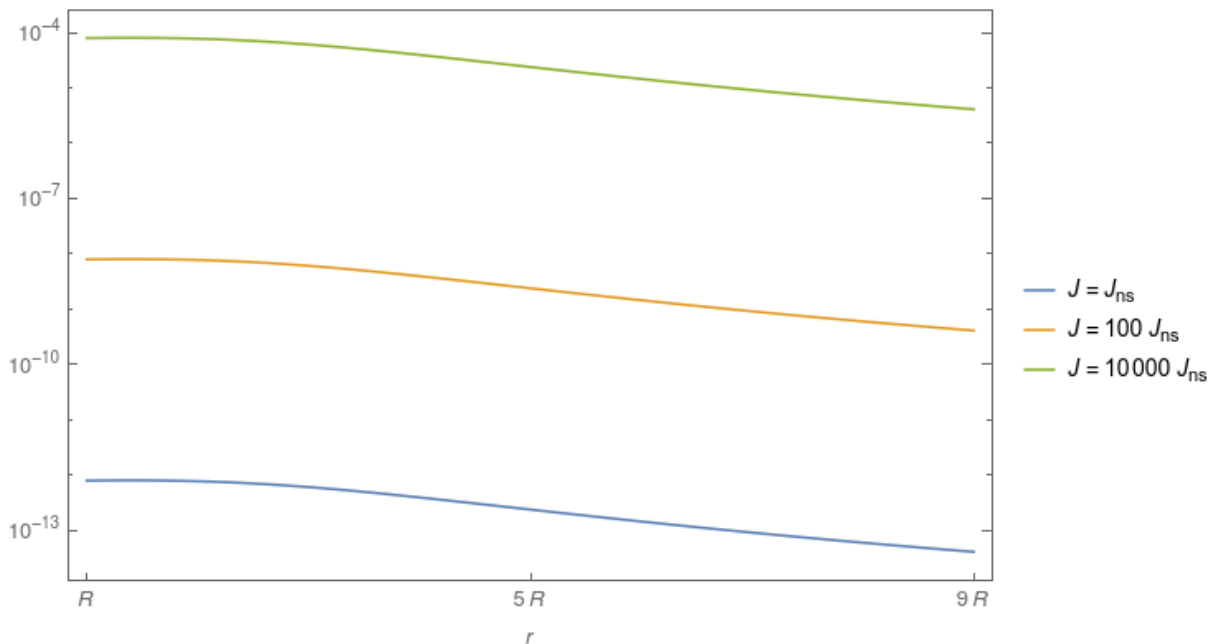


Figura 13 – Gráfico logarítmico da parte imaginária de f_3 como função de r para valores altos do momento angular J e para o valor próprio do momento angular da estrela.

Nas figuras 12 e 13 vemos as curvas referentes à função f_3 para cinco valores diferentes do momento angular, sendo que na Fig. 12 temos valores baixos e na Fig. 13 valores alto.

Como podemos ver, as curvas nos gráficos acima possuem comportamentos semelhantes para valores diferentes do momento angular. De fato, a contribuição do momento angular para $F(r)$, quando consideramos o momento angular da estrela de nêutrons, é da ordem de 10^{-12} para valores baixos de r . Para que a contribuição se torne relevante, temos de aumentar

consideravelmente o valor do momento angular, contudo este valor nem sempre é fisicamente razoável. De fato, quando tomamos $J = J_6$, a contribuição para valores baixos de r é da ordem de 10^{-14} .

Devemos observar que o valor mais alto do momento angular definido em (218), J_6 , não corresponde a um valor de momento angular fisicamente válido para estrelas. Várias possibilidades para o valor máximo da frequência angular de estrelas de nêutrons e quasares podem ser encontrados na literatura [3] [68] [69], mas algo que todos eles têm em comum é que tal valor limite está acima de 700 Hz. Utilizando o momento angular simples de uma esfera para modelar a estrela de nêutrons, considerando que J é o momento angular da estrela que descrevemos neste trabalho, podemos calcular o valor máximo do momento angular possível de acordo com o valor máximo da frequência. A partir de uma frequência angular máxima de $f = 716$ Hz, temos que o valor máximo possível para o momento angular é de

$$J_{max} = 958J \quad (223)$$

o que é menor que J_6 . Para outros valores possíveis de frequência angular limite o resultado é similar, da ordem de $1000J$. A justificativa para termos usado este valor é que esse é um número teste para verificar o que acontece com as contribuições do momento angular para valores muito altos. Como esperado, quanto maior o momento angular, maior é a sua contribuição para os coeficientes (200). Observamos que, como já foi discutido anteriormente, o que realmente importa é que a velocidade de rotação da estrela seja da ordem da velocidade da partícula. Para partículas com velocidade alta, a rotação da estrela deverá ser alta também.

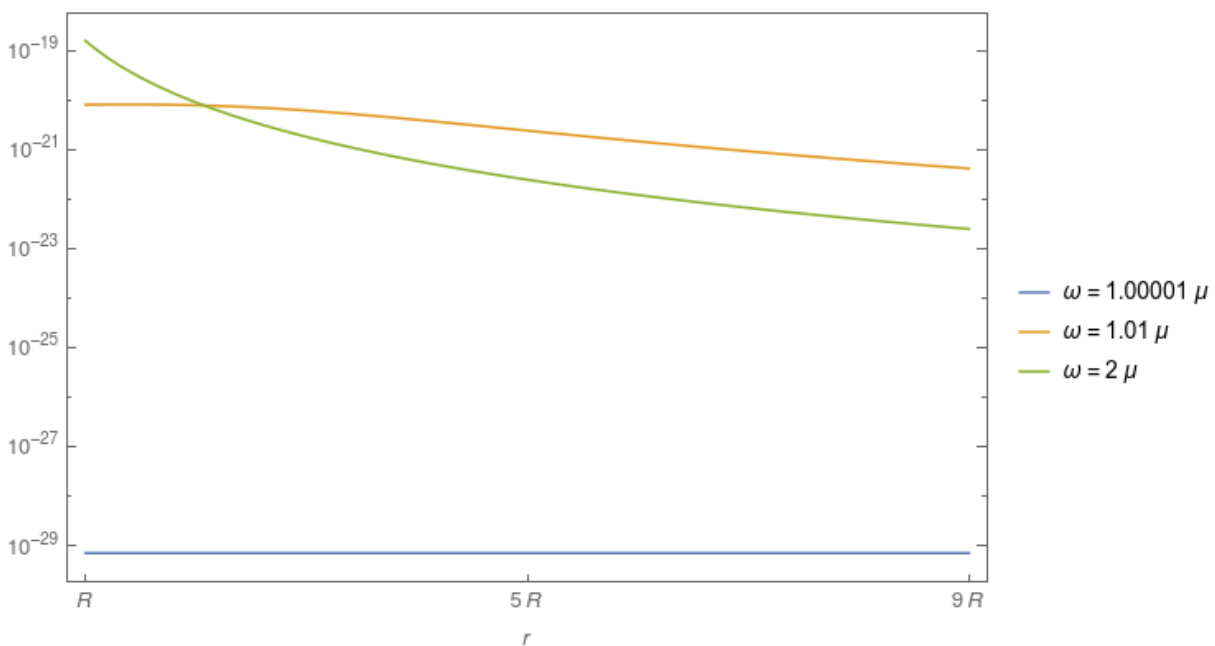


Figura 14 – Gráfico logarítmico do valor absoluto da parte imaginária de f_3 em função do raio r para três valores diferentes de ω e $J = J_2$.

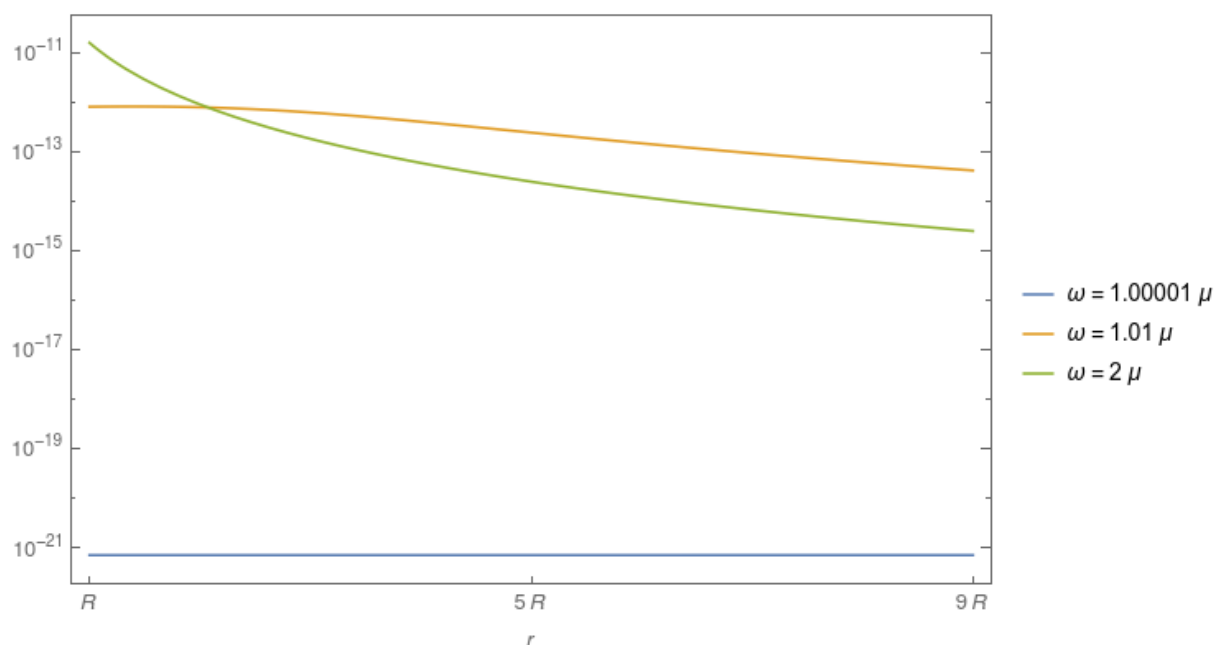


Figura 15 – Gráfico logarítmico do valor absoluto da parte imaginária de f_3 em função do raio r para três valores diferentes de ω e $J = J_4$.

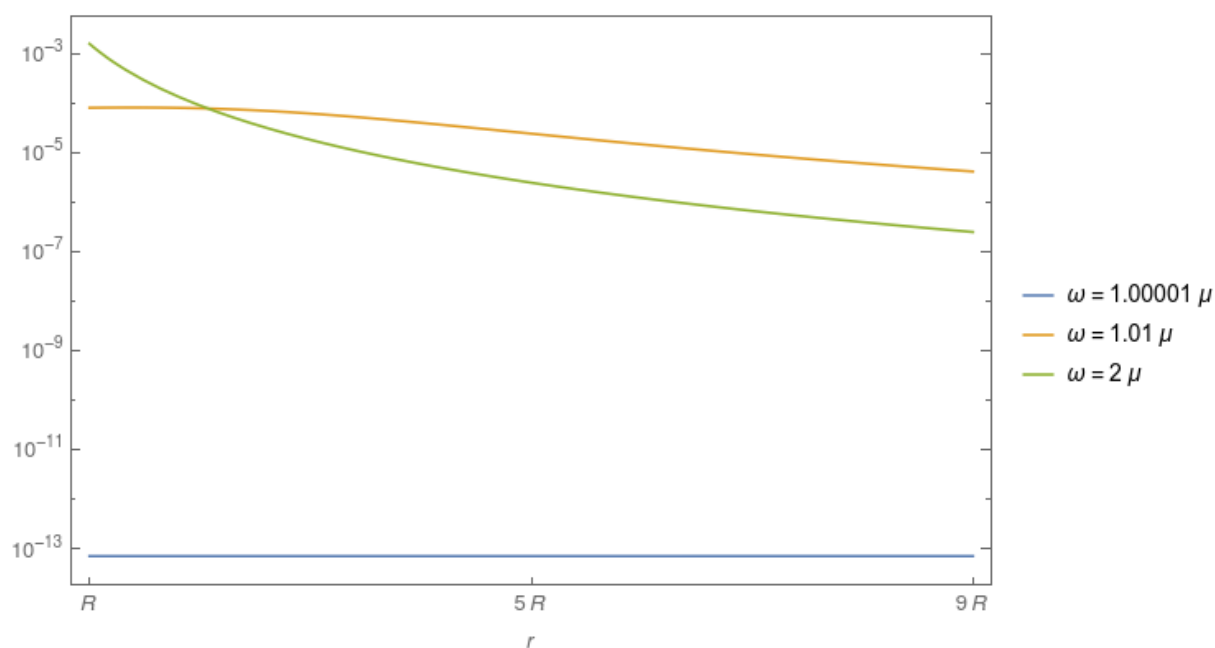


Figura 16 – Gráfico logarítmico do valor absoluto da parte imaginária de f_3 em função do raio r para três valores diferentes de ω e $J = J_6$.

Nas figuras 14, 15 e 16, vemos os gráficos de do valor absoluto da parte imaginária de f_3 em função do raio r para três valores de energia, sendo que a Fig. 14 corresponde a um valor baixo do momento angular, a Fig. 15 ao próprio momento angular da estrela de nêutrons e a Fig. 16 a um momento angular alto. Fizemos o gráfico do valor absoluto de modo a obter resultados mais visíveis de f_3 .

Como podemos ver, a forma das curvas se mantém a mesma não importa o valor do momento angular, porém os valores numéricos mudam, e as curvas para a menor energia parecem constantes; isto acontece porque o valor numérico delas é muito menor do que os das outras curvas. Além disso, ao analisarmos as três figuras vemos que quanto maior o valor da energia e quanto maior o valor do momento angular, maior é a contribuição deste. Os maiores valores se dão para $J = J_6$ e energia $\omega = \omega_7$, como definidos em (218) e (217). Para tal energia, a contribuição é da ordem de 10^{-3} .

Para elucidar o significado desses últimos gráficos — a contribuição do momento angular para a solução em série — construímos três tabelas com os valores numéricos da parte imaginária de f_1 com $r = R$. Estas tabelas mostrarão não o tamanho da contribuição do momento angular, mas o próprio valor de f_1 para cada momento angular e como ele muda conforme o momento angular muda. Cada uma das tabelas possui seis valores numéricos, correspondentes a cada um dos seis momentos angulares que definimos em (218); além disso, cada uma das três tabelas possui um valor diferente para a energia: a Tabela (10) possui uma energia baixa $\omega = \omega_1$, a Tabela (11) uma energia média $\omega = \omega_4$ e a Tabela (12) uma energia alta $\omega = \omega_7$. Lembrando que $J_1 = 0$, ou seja, a primeira linha de cada tabela corresponde ao caso onde não há rotação.

	ω_1
J_1	$6.382723003549568 \times 10^{31}$
J_2	$6.382723003549568 \times 10^{31}$
J_3	$6.382723003549568 \times 10^{31}$
J_4	$6.382723003549568 \times 10^{31}$
J_5	$6.382723003549568 \times 10^{31}$
J_6	$6.3827230035500155 \times 10^{31}$

Tabela 10 – Parte imaginária de f_1 com $r = R$ e $\omega = \omega_1$, variando o momento angular.

	ω_4
J_1	$1.7451243587123232 \times 10^{21}$
J_2	$1.7451243587123232 \times 10^{21}$
J_3	$1.7451243587123235 \times 10^{21}$
J_4	$1.7451243587137055 \times 10^{21}$
J_5	$1.7451243725363387 \times 10^{21}$
J_6	$1.7452625988672847 \times 10^{21}$

Tabela 11 – Parte imaginária de f_1 com $r = R$ e $\omega = \omega_4$, variando o momento angular.

	ω_7
J_1	$1.4876477174026936 \times 10^{19}$
J_2	$1.4876477174026936 \times 10^{19}$
J_3	$1.4876477174026914 \times 10^{19}$
J_4	$1.4876477173795987 \times 10^{19}$
J_5	$1.4876474864516915 \times 10^{19}$
J_6	$1.4853382073800413 \times 10^{19}$

Tabela 12 – Parte imaginária de f_1 com $r = R$ e $\omega = \omega_7$, variando o momento angular.

Na Tabela 10, onde a energia é baixa, vemos que a contribuição do momento angular para o valor total representado é muito pequena. Lembrando da Tabela 9, onde mostramos que a série parece não convergir tão rapidamente como no caso onde a energia é mais alta, podemos observar a Tabela 10 principalmente o resultado de que, para tais partículas de energia baixa, as correções de massa são proporcionalmente maiores que as da rotação.

Na Tabela 11, onde $\omega = \omega_4$, já é possível verificar em f_1 a contribuição de J para valores baixos do momento angular, a dizer, no caso onde $J = J_3$. É uma mudança pequena, mas visível. Assim como no caso anterior, a variação é maior quando $J = J_6$, e ela acontece no quinto algarismo significativo.

Na Tabela 12, onde $\omega = \omega_7$, ou seja, a energia é alta, a contribuição de J em f_1 no caso onde $J = J_3$ aparece mais cedo, mas a mudança em seu valor numérico é bem maior que na tabela anterior, e quando o momento angular é o maior possível a mudança acontece no quarto algarismo significativo. Isso é próximo ao resultado que obtivemos na Fig. 16, onde podemos ver que o tamanho da contribuição do momento angular para o caso de energia alta é da ordem de 10^{-3} . No caso de partículas com energia alta, as correções de massa são menores, e por isso é possível identificar mais facilmente as correções devido à rotação.

Ao longo deste capítulo, comparamos as duas soluções obtidas na dissertação, uma com a forma de uma exponencial contendo uma série de potência e a outra em termos de funções especiais, e mostramos que elas estão relacionadas. Também verificamos a utilidade e capacidade de uma das nossas soluções em diversas situações físicas. Considerando que o objetivo inicial era levar em conta a rotação da estrela na solução final, com todos os resultados numéricos e gráficos apresentados ao longo deste capítulo, concluímos que, nos casos onde a energia da partícula é mais alta, o efeito das correções de massa e de rotação é bastante pequeno, mas a nossa solução consegue mostrar que ele existe e que ele aparece mais distintamente em objetos compactos como estrelas de nêutrons do que em estrelas não tão relativísticas como o Sol. No entanto, a solução não é adequada para os casos onde a energia da partícula é muito baixa, (ou seja, possui uma velocidade com um valor próximo do da velocidade angular da estrela), porque é nesses casos em que os efeitos físicos são mais evidentes, e por isso são necessárias mais correções ou aproximações melhores para expressá-los.

7 CONCLUSÃO

No desenvolvimento desta dissertação, escolhemos uma métrica já estabelecida na literatura, a métrica de Hartle-Thorne [1] [2], e a partir de uma expansão feita a partir da expressão apresentada, considerando potências de M/r , encontramos uma solução analítica para a equação de Klein-Gordon nesse espaço-tempo (106). Além disso, estudamos a métrica de Berti et al. (172) e como esta se relaciona com a métrica de Hartle-Thorne para valores de J/R^2 pequenos. Incluindo termos da próxima ordem $(J/R^2)^2$, encontramos uma nova equação de Klein-Gordon, cuja solução foi obtida com base em um ansatz (193) composto por uma série de potências no expoente de uma exponencial complexa para a parte radial da função de onda. Substituindo o ansatz na equação diferencial, obtida após sucessivos cálculos e substituições, pudemos encontrar o valor dos primeiros coeficiente da série de potências mencionada e assim a forma da solução final. Após isso, estudamos o valor numérico das soluções obtidas em diversas configurações físicas.

No segundo e terceiro capítulos, fizemos uma breve revisão dos conteúdos específicos necessários para uma boa compreensão deste trabalho. Tratamos a respeito da teoria da relatividade especial e geral, de seu desenvolvimento histórico e das ferramentas práticas de que utilizamos. Discutimos também sobre tópicos de mecânica quântica e teoria quântica de campos para que pudéssemos usar a equação de Klein-Gordon com propriedade.

No quarto capítulo, introduzimos a métrica de Hartle-Thorne (121), como utilizá-la na equação de Klein-Gordon em espaços-tempo curvos e encontramos uma solução levando em consideração termos na métrica até a primeira ordem em J/R^2 , a qual escrevemos de diversas maneiras usando funções especiais. A primeira solução foi dada em termos das funções confluentes de Heun, e as próximas soluções aproximadas foram dadas em termos de outras funções especiais (função de Whittaker, função de Whittaker, função de Bessel de primeira ordem), que se aproximam da solução para valores assintóticos da variável.

No quinto capítulo, discutimos outra solução para uma métrica similar à métrica de Hartle-Thorne (172), no entanto, ligeiramente diferente após uma série de correções no trajeto de sua construção. As métricas apresentadas possuem a mesma forma até a primeira ordem em J/R^2 , e as diferenças ocorrem quando são levados em conta termos de ordem $(J/R^2)^2$ ou maior. Apresentamos as dificuldades em resolver a equação resultante e, depois disso, o ansatz que utilizamos, definido como uma exponencial de kr e termos de correção. Mostramos finalmente o nosso método de solução e obtenção dos coeficientes que definem o ansatz.

No sexto capítulo, descrevemos a solução para a parte radial da função de onda obtida nos capítulos anteriores e a função de onda final que descreve bósons de spin-0. Fizemos uma comparação entre as soluções obtidas no quarto e no quinto capítulo, pois numa primeira aproximação elas devem ser similares, e no restante do capítulo estudamos a solução do quinto capítulo, considerando partículas de altas e baixas energias. Para tanto, separamos a solução em suas contribuições de massa e momento angular e mostramos o valor numérico de

cada uma de suas contribuições e de cada potência respectiva a elas em várias configurações físicas diferentes. Escolhemos a configuração onde as potências altas de M/r têm valores mais significantes, ou seja, o caso onde o objeto escolhido é uma estrela de nêutrons, e variamos os parâmetros físicos para entender melhor como eles se relacionam com a solução. Mais importante, variamos o momento angular em seis valores diferentes e verificamos o resultado de que, para partículas de energias altas, quanto maior a rotação, maior é o efeito dela na solução final, e que este efeito também é exacerbado quando a partícula possui energia alta, principalmente porque para partículas de energia alta as correções de massa não são expressivas. Além disso, disponibilizamos tabelas numéricas para uma melhor observação dos efeitos do momento angular, que são na maioria dos casos pequenos, porém muitas vezes ainda mensuráveis.

Observamos que, para partículas de energia baixa, a solução não funciona muito bem e demos a interpretação de que é justamente nos casos onde a energia da partícula é baixa e próxima da frequência angular da superfície da estrela que os efeitos gravitacionais de massa e de rotação são maiores. Já para partículas de energia alta, os efeitos são menores e por isso as correções devido à rotação aparentam ter um valor maior. No caso onde a energia da partícula é baixa, devem ser necessários mais termos na solução.

A partir dos resultados obtidos, existem vários caminhos que se podem seguir. Primeiramente, podemos melhorar a nossa solução final de diversas formas. Por exemplo, é teoricamente possível encontrar uma forma geral para os coeficientes da série de potência no ansatz, o que não foi feito devido ao tempo disponível para o desenvolvimento do projeto. Em segundo lugar, pode-se melhorar a forma do fator integrante (186), ou encontrando uma expressão analítica porém exata para a integral extremamente complicada dentro da exponencial, ou fazendo uma expansão melhor. Pode-se também deixar de fixar o ângulo polar θ e tentar solucionar a equação diferencial parcial que depende de r e θ diretamente, talvez encontrando uma forma de separá-la em suas duas partes. Uma característica importante da métrica de Hartle-Thorne e de Berti et al. é a inclusão da distribuição de massa de estrela através do momento de quadrupolo Q , o que é uma vantagem em relação à métrica de Kerr, outra métrica bem conhecida da literatura que descreve estrelas em rotação e que está relacionada à métrica de Hartle-Thorne (121), como descrito no apêndice de [2]. Em futuros trabalhos é interessante estudar este efeito, tomando $Q \neq 0$. É interessante também elaborar um estudo mais profundo das equações de Heun, já que há uma escassez de recursos sobre essas equações que têm aparecido cada vez mais em trabalhos de pesquisa da área da relatividade geral.

Progredindo além do presente trabalho, o caminho mais natural que esta pesquisa pode seguir é repetir o estudo da métrica de Hartle-Thorne em outra equação que descreve partículas em um espaço-tempo curvo: neste caso, a equação de Dirac [70], [48], [49]. A equação de Dirac descreve partículas de spin- $\frac{1}{2}$, como o elétron e os diversos quarks, e portanto escancara o leque de possibilidades de estudo. Pode-se também fazer uma comparação das soluções com casos mais básicos, como quando $J = 0$ e a métrica recai na métrica de Schwarzschild

(66). Além disso, métricas descrevendo outras perturbações do status quo caracterizado pela métrica de Schwarzschild, não apenas a rotação, podem ser utilizadas, adicionando no nosso sistema físico quantidades como um campo eletromagnético.

Além do aprimoramento da nossa solução para a equação de Klein-Gordon usando melhores (ou menos) aproximações e expansões, o estudo da função de onda de outras partículas em outros sistemas físicos e o cálculo de observáveis como o espectro de energia são caminhos naturais para a nossa pesquisa.

REFERÊNCIAS

- [1] J. B. Hartle. "Slowly rotating relativistic stars. 1. Equations of structure". *Astrophys. J.* 150 1967, p. 1005–1029. DOI: 10.1086/149400.
- [2] J. B. Hartle e K. S. Thorne. "Slowly Rotating Relativistic Stars. II. Models for Neutron Stars and Supermassive Stars". *Astrophys. J.* 153 1968, p. 807. DOI: 10.1086/149707.
- [3] E. Berti, F. White, A. Maniopoulou e M. Bruni. "Rotating neutron stars: an invariant comparison of approximate and numerical space–time models". *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 358.3 2005, p. 923–938. ISSN: 0035-8711. DOI: 10.1111/j.1365-2966.2005.08812.x.
- [4] A. Einstein. "On the electrodynamics of moving bodies". *Annalen Phys.* 17 1905, p. 891–921. DOI: 10.1002/andp.200590006.
- [5] H. Minkowski. *Space and Time: Minkowski's papers on relativity*. English. Paperback. Minkowski Institute Press, 6 de dez. de 2012, p. 134.
- [6] S. Chandrasekhar. "The general theory of relativity: Why "It is probably the most beautiful of all existing theories"". *Journal of Astrophysics and Astronomy* 5.1 1984, p. 3–11. ISSN: 0973-7758. DOI: 10.1007/BF02714967.
- [7] A. Einstein. "The Foundation of the General Theory of Relativity". *Annalen Phys.* 49.7 1916, p. 769–822. DOI: 10.1002/andp.19163540702.
- [8] P. A. M. Dirac. *The Principles of Quantum Mechanics*. Clarendon Press, 1930.
- [9] A. Einstein. "Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt". *Annalen der Physik* 322.6 1905, p. 132–148. DOI: <https://doi.org/10.1002/andp.19053220607>.
- [10] N. Bohr. "I. On the constitution of atoms and molecules". *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 26.151 1913, p. 1–25. DOI: 10.1080/14786441308634955.
- [11] E. Rutherford. "LXXIX. The scattering of α particles by matter and the structure of the atom". *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 21.125 1911, p. 669–688. DOI: 10.1080/14786440508637080.
- [12] A. Shomer. *A pedagogical explanation for the non-renormalizability of gravity*. 2007. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.0709.3555>. arXiv: 0709.3555 [hep-th].
- [13] A. Macías e A. Camacho. "On the incompatibility between quantum theory and general relativity". *Physics Letters B* 663.1 2008, p. 99–102. ISSN: 0370-2693. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2008.03.052>.

- [14] B. Zwiebach. *A First Course in String Theory, 2nd Edition*. English. Hardcover. Cambridge University Press, 26 de jan. de 2009, p. 694.
- [15] M. B. Green, J. H. Schwarz e E. Witten. *Superstring Theory: 25th Anniversary Edition (Cambridge Monographs on Mathematical Physics) (Volume 1)*. English. Hardcover. Cambridge University Press, 12 de nov. de 2012, p. 482.
- [16] C. Rovelli. *Quantum Gravity (Cambridge Monographs on Mathematical Physics)*. English. Paperback. Cambridge University Press, 17 de dez. de 2007, p. 488.
- [17] R. M. Wald. *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics (Chicago Lectures in Physics)*. English. Paperback. University of Chicago Press, 15 de nov. de 1994, p. 220.
- [18] L. Parker e D. Toms. *Quantum Field Theory in Curved Spacetime: Quantized Fields and Gravity (Cambridge Monographs on Mathematical Physics)*. English. Kindle Edition. Cambridge University Press, 20 de ago. de 2009, p. 472.
- [19] L. C. B. Crispino, A. Higuchi e G. E. A. Matsas. "The Unruh effect and its applications". *Reviews of Modern Physics* 80.3 2008, p. 787–838. DOI: 10.1103/revmodphys.80.787. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/revmodphys.80.787>.
- [20] S. W. Hawking. "Particle Creation by Black Holes". *Commun. Math. Phys.* 43 1975. [Erratum: *Commun.Math.Phys.* 46, 206 (1976)], p. 199–220. DOI: 10.1007/BF02345020.
- [21] D. N. Page. "Hawking radiation and black hole thermodynamics". *New Journal of Physics* 7 2005, p. 203–203. DOI: 10.1088/1367-2630/7/1/203.
- [22] L. C. N. dos Santos. "Alguns resultados no estudo de férmions e bósons em espaços curvos: soluções das equações de Dirac e Klein-Gordon". Tese de Doutorado. 2015.
- [23] O. A. Roldán García. "Estudo de fenômenos em espaços curvos". Dissertação de Mestrado. 2012.
- [24] I. E. Cunha e C. C. Barros. *Hadronic Matter in the Robertson-Walker Metric and the Early Universe*. 2015. DOI: 10.48550/ARXIV.1504.07314.
- [25] L. C. N. Santos e C. C. Barros. "Relativistic quantum motion of spin-0 particles under the influence of noninertial effects in the cosmic string spacetime". *The European Physical Journal C* 78.1 2018. DOI: 10.1140/epjc/s10052-017-5476-3.
- [26] F. M. da Silva, L. C. N. Santos e C. C. Barros. "Rapidly rotating compact stars in Rastall's gravity". *Classical and Quantum Gravity* 38.16 2021, p. 165011. DOI: 10.1088/1361-6382/ac129d.
- [27] L. Parker. "One-Electron Atom in Curved Space-Time". *Phys. Rev. Lett.* 44.23 1980, p. 1559. DOI: 10.1103/PhysRevLett.44.1559.

- [28] G. de A. Marques e V. B. Bezerra. "Hydrogen atom in the gravitational fields of topological defects". *Physical Review D* 66.10 2002. DOI: 10.1103/physrevd.66.105011.
- [29] R. L. L. Vitória e K. Bakke. "Rotating effects on the scalar field in the cosmic string spacetime, in the spacetime with space-like dislocation and in the spacetime with a spiral dislocation". *The European Physical Journal C* 78.3 2018. DOI: 10.1140/epjc/s10052-018-5658-7.
- [30] V. B. Bezerra, M. S. Cunha, L. F. F. Freitas, C. R. Muniz e M. O. Tahim. "Casimir effect in the Kerr spacetime with quintessence". *Modern Physics Letters A* 32.01 2016, p. 1750005. DOI: 10.1142/s0217732317500055.
- [31] V. Bezerra, H. Mota e C. Muniz. "Casimir effect due to a slowly rotating source in the weak-field approximation". *Physical Review D* 89.4 2014. DOI: 10.1103/physrevd.89.044015.
- [32] F. Sorge. "Casimir effect in a weak gravitational field: Schwinger's approach". *Classical and Quantum Gravity* 36.23 2019, p. 235006. DOI: 10.1088/1361-6382/ab4def.
- [33] B. F. Schutz. *A First Course in General Relativity*. second. Cambridge University Press, 2009.
- [34] C. W. Misner, K. S. Thorne e J. A. Wheeler. *Gravitation*. English. Hardcover. Princeton University Press, 24 de out. de 2017, p. 1280.
- [35] S. M. Carroll. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. English. Hardcover. Cambridge University Press, 12 de set. de 2019, p. 516.
- [36] J. B. Hartle. *Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity*. English. Hardcover. Cambridge University Press, 2 de set. de 2021, p. 602.
- [37] M. P. Hobson, G. P. Efstathiou e A. N. Lasenby. *General Relativity: An Introduction for Physicists*. English. Hardcover. Cambridge University Press, 27 de mar. de 2006, p. 592.
- [38] N. K. Glendenning. *Special and General Relativity: With Applications to White Dwarfs, Neutron Stars and Black Holes (Astronomy and Astrophysics Library)*. English. Hardcover. Springer, 20 de abr. de 2007, p. 240.
- [39] W. Rindler. *Introduction to Special Relativity (Oxford Science Publications)*. English. Paperback. Clarendon Press, 11 de jul. de 1991, p. 184.
- [40] S. Walter. "The Historical Origins of Spacetime". *The Springer Handbook of Spacetime*. Springer, 2014, p. 27–38. DOI: 10.1007/978-3-662-46035-1_2. Disponível em: <https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-01234449>.
- [41] S. Başkal, Y. S. Kim e M. E. Noz. *Physics of the Lorentz Group*. 2053-2571. Morgan Claypool Publishers, 2015. DOI: 10.1088/978-1-6817-4254-0.

- [42] N. Andersson e G. L. Comer. “Relativistic fluid dynamics: physics for many different scales”. *Living Reviews in Relativity* 24.1 2021. ISSN: 1433-8351. DOI: 10.1007/s41114-021-00031-6.
- [43] L. D. Landau e E. Lifshitz. “The energy-momentum tensor”. English. *The Classical Theory of Fields: Volume 2*. Paperback. Butterworth-Heinemann, 15 de jan. de 1980, p. 77–80.
- [44] R. D. Lehn, S. S. Chabysheva e J. R. Hiller. “Klein–Gordon equation in curved space-time”. *European Journal of Physics* 39.4 2018, p. 045405. DOI: 10.1088/1361-6404/aabdde.
- [45] H. NIKOLIĆ. “PROBABILITY IN RELATIVISTIC QUANTUM MECHANICS AND FOLIATION OF SPACE–TIME”. *International Journal of Modern Physics A* 22.32 2007, p. 6243–6251. DOI: 10.1142/s0217751x07038438.
- [46] J. Gibbons. “Infrared problem in the Faddeev–Popov sector in Yang–Mills Theory and Perturbative Gravity”. Tese de Doutorado. York U., England, 2015.
- [47] H. Pilkuhn. *Relativistic Quantum Mechanics (Theoretical and Mathematical Physics)*. English. Hardcover. Springer, 3 de ago. de 2005, p. 288.
- [48] J. D. Bjorken e S. D. Drell. *Relativistic Quantum Mechanics (International Series in Pure Applied P)*. English. Hardcover. McGraw-Hill College, 1 de jun. de 1965, p. 304.
- [49] W. Greiner. *Relativistic Quantum Mechanics. Wave Equations*. English. Paperback. Springer, 15 de jun. de 2000, p. 443.
- [50] W. Greiner. *Quantum Mechanics: An Introduction*. English. Paperback. Springer, 2001, p. 485.
- [51] M. A. Abramowicz, G. J. E. Almergren, W. Kluzniak e A. V. Thampan. *The Hartle–Thorne circular geodesics*. 2003. DOI: 10.48550/ARXIV.GR-QC/0312070.
- [52] H. S. Vieira. “Alguns resultados acerca de campos escalares em buracos negros, cosmologia quântica e flutuações quânticas da geometria”. Tese de Doutorado. 2018.
- [53] M. Hortaçsu. “Heun Functions and Some of Their Applications in Physics”. *Advances in High Energy Physics* 2018 2018, p. 1–14. ISSN: 1687-7365. DOI: 10.1155/2018/8621573.
- [54] E. S. Cheb-Terrab. “Solutions for the general, confluent and biconfluent Heun equations and their connection with Abel equations”. *Journal of Physics A: Mathematical and General* 37.42 2004, p. 9923–9949. ISSN: 1361-6447. DOI: 10.1088/0305-4470/37/42/007.

- [55] R. S. Maier. "The 192 solutions of the Heun equation". *Mathematics of Computation* 76.258 2006, p. 811–843. ISSN: 1088-6842. DOI: 10.1090/s0025-5718-06-01939-9.
- [56] *Heun's Differential Equations (Oxford Science Publications)*. English. Hardcover. Clarendon Press, 7 de dez. de 1995, p. 384.
- [57] *Handbook of Mathematical Functions: with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables (Dover Books on Mathematics)*. English. Dover Publications, 1965, p. 1046.
- [58] *NIST Handbook of Mathematical Functions Paperback and CD-ROM*. English. Cambridge University Press, 17 de mai. de 2010, p. 968.
- [59] H. Buchholz. *The Confluent Hypergeometric Function: with Special Emphasis on its Applications (Springer Tracts in Natural Philosophy, 15)*. English. Trad. por H. Lichtblau e K. Wetzel. Springer, 18 de abr. de 2014, p. 257.
- [60] E. Elizalde. "Series solutions for the Klein-Gordon equation in Schwarzschild space-time". *Physical review D: Particles and fields* 36 1987, p. 1269–1272. DOI: 10.1103/PhysRevD.36.1269.
- [61] D. Hoffleit e J. Warren W. H. "VizieR Online Data Catalog: Bright Star Catalogue, 5th Revised Ed. (Hoffleit+, 1991)". *VizieR Online Data Catalog*, V/50, 1995, p. V/50.
- [62] K. Ohnaka, K.-H. Hofmann, D. Schertl, G. Weigelt, C. Baffa, A. Chelli, R. Petrov e S. Robbe-Dubois. "High spectral resolution imaging of the dynamical atmosphere of the red supergiant Antares in the CO first overtone lines with VLTI/AMBER". *Astronomy & Astrophysics* 555 2013, A24. DOI: 10.1051/0004-6361/201321063.
- [63] H. Zheng, K.-J. Sun e L.-W. Chen. "OLD NEUTRON STARS AS PROBES OF ISOSPIN-VIOLATING DARK MATTER". *The Astrophysical Journal* 800.2 2015, p. 141. DOI: 10.1088/0004-637x/800/2/141.
- [64] M. Kutschera, J. Jałocha, S. Kubis e Ł. Bratek. *SQM stars around pulsar PSR B1257+12*. 2010. DOI: 10.48550/ARXIV.1010.2056.
- [65] A. Wolszczan e D. A. Frail. "A planetary system around the millisecond pulsar PSR1257 + 12". *Nature* 355.6356 1992, p. 145–147. ISSN: 1476-4687. DOI: 10.1038/355145a0.
- [66] M. D. Reed, S. D. Kawaler e M. S. O'Brien. "PG 2131066: A Test of Pre-White Dwarf Asteroseismology". *The Astrophysical Journal* 545.1 2000, p. 429–434. DOI: 10.1086/317781.
- [67] N. D. Birrell e P. C. W. Davies. *Quantum Fields in Curved Space (Cambridge Monographs on Mathematical Physics)*. English. Paperback. Cambridge University Press, 27 de abr. de 1984, p. 352.

- [68] P. G. Krastev, B.-A. Li e A. Worley. “Constraining Properties of Rapidly Rotating Neutron Stars Using Data from Heavy-Ion Collisions”. *The Astrophysical Journal* 676.2 2008, p. 1170–1177. DOI: 10.1086/528736.
- [69] P. Haensel, J. L. Zdunik, M. Bejger e J. M. Lattimer. “Keplerian frequency of uniformly rotating neutron stars and strange stars”. *Astronomy & Astrophysics* 502.2 2009, p. 605–610. DOI: 10.1051/0004-6361/200811605.
- [70] “The quantum theory of the electron”. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character* 117.778 1928, p. 610–624. DOI: 10.1098/rspa.1928.0023.
- [71] V. B. Bezerra, H. S. Vieira e A. A. Costa. “The Klein–Gordon equation in the spacetime of a charged and rotating black hole”. *Classical and Quantum Gravity* 31.4 2014, p. 045003. ISSN: 1361-6382. DOI: 10.1088/0264-9381/31/4/045003.