

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CAMPUS FLORIANÓPOLIS  
BACHARELADO EM MATEMÁTICA

Vanderval Borges de Souza Junior

**A hierarquia causal de espaços-tempos**

Florianópolis  
2022

Vanderval Borges de Souza Junior

**A hierarquia causal de espaços-tempos**

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação em Bacharelado em Matemática do Campus Florianópolis da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de Bacharelado em Matemática.  
Orientador: Prof. Dr. Ivan Pontual Costa e Silva

Florianópolis

2022

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Junior, Vanderval Borges de Souza  
A hierarquia causal de espaços-tempos / Vanderval Borges  
de Souza Junior ; orientador, Ivan Pontual Costa e Silva,  
2022.  
88 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) -  
Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências  
Físicas e Matemáticas, Graduação em Matemática,  
Florianópolis, 2022.

Inclui referências.

1. Matemática. 2. geometria de Lorentz. 3. espaços  
tempos. 4. hierarquia causal. I. Costa e Silva, Ivan  
Pontual. II. Universidade Federal de Santa Catarina.  
Graduação em Matemática. III. Título.

Vanderval Borges de Souza Junior

**A hierarquia causal de espaços-tempos**

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado para obtenção do Título de Bacharelado em Matemática e aprovado em sua forma final pelo Curso de Bacharelado em Matemática.

Florianópolis, 15 de dezembro de 2022.

---

Coordenação do Curso

**Banca Examinadora:**

---

Prof. Dr. Ivan Pontual Costa e Silva  
Orientador

---

Prof. Dr. Eliezer Batista

---

Prof. Dr. Francisco Carlos Caramello Junior

## RESUMO

Essa monografia tem como propósito fazer uma revisão geral da geometria de Lorentz e de espaços-tempos a fim de classificá-los de acordo com sua causalidade através da chamada hierarquia causal. Essa classificação diz respeito ao comportamento da classe de curvas causais nos espaços-tempos, o que além de possuir um significado físico importante na Relatividade Geral, permite a obtenção de outros resultados de aspectos mais puramente geométricos. Também são apresentados exemplos de espaços-tempos em diferentes níveis dessa divisão, com um foco especial para o espaço-tempo de Misner, que ao mesmo tempo possui uma região com causalidade no primeiro e outra no último degrau de classificação da hierarquia.

**Palavras-chave:** geometria de Lorentz, espaços-tempos, hierarquia causal.

## **ABSTRACT**

This monography aims to do a general review of the Lorentzian and spacetimes geometry in order to classify them according to their causality through the so-called causal hierarchy. This classification concerns the behavior of the class of the causal curves in the spacetimes, which in addition to having an important physical meaning in General Relativity, allows the obtaining of other results of more purely geometric aspects. Examples of spacetimes in different levels of this division are also presented, with a special focus on the Misner spacetime, which at the same time has a region with causality in first and another with causality in last degree of classification of the causal hierarchy.

**Keywords:** Lorentzian geometry, spacetimes, causal hierarchy.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>GEOMETRIA SEMI-RIEMANNIANA</b>	<b>9</b>
2.1	ESPAÇOS SEMI-EUCLIDIANOS	9
2.2	VARIEDADES SEMI-RIEMANNIANAS	12
2.3	CONEXÃO DE LEVI-CIVITA	16
2.4	GEODÉSICAS	19
2.5	CURVATURA	20
2.6	IMERSÕES SEMI-RIEMANNIANAS	22
<b>2.6.1</b>	<b>Imersões semi-Riemannianas de codimensão 1</b>	<b>25</b>
2.7	A APLICAÇÃO EXPONENCIAL	27
2.8	PONTOS CONJUGADOS E PONTOS FOCAIS	29
<b>3</b>	<b>ESPAÇOS-TEMPOS E CAUSALIDADE</b>	<b>32</b>
3.1	ESPAÇOS-TEMPOS	32
3.2	EQUAÇÕES DE CAMPO DE EINSTEIN	34
3.3	RELAÇÕES DE CAUSALIDADE	38
3.4	O LEMA DA CURVA LIMITE	42
3.5	COMPRIMENTO DE ARCO LORENTZIANO	43
3.6	SEPARAÇÃO TEMPORAL	44
<b>4</b>	<b>A HIERARQUIA CAUSAL</b>	<b>47</b>
4.1	RESTRICÇÕES CAUSAIS BÁSICAS	48
4.2	FUNÇÕES VOLUME	49
4.3	REFLEXIVIDADE	53
4.4	ESPAÇOS-TEMPOS NÃO TOTALMENTE VICIOSOS	54
<b>4.4.1</b>	<b>O espaço-tempo de Gödel</b>	<b>55</b>
4.5	ESPAÇOS-TEMPOS CRONOLÓGICOS	60
4.6	ESPAÇOS-TEMPOS CAUSAIS	61
4.7	ESPAÇOS-TEMPOS DISTINGUIDORES	62
4.8	ESPAÇOS-TEMPOS FORTEMENTE CAUSAIS	67
4.9	ESPAÇOS-TEMPOS ESTAVELMENTE CAUSAIS	69
4.10	ESPAÇOS-TEMPOS CAUSALMENTE CONTÍNUOS	71
4.11	ESPAÇOS-TEMPOS CAUSALMENTE SIMPLES	72
4.12	ESPAÇOS-TEMPOS GLOBALMENTE HIPERBÓLICOS	73
<b>4.12.1</b>	<b>Desenvolvimento e superfícies de Cauchy</b>	<b>75</b>
<b>4.12.2</b>	<b>Compacidade do espaço das curvas causais</b>	<b>77</b>
<b>5</b>	<b>O ESPAÇO-TEMPO DE MISNER</b>	<b>78</b>
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>87</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>88</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Em 1905, foi publicado por Albert Einstein (1879 - 1955) o artigo *Sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento*, responsável por fazer com que a visão de espaço e tempo da física clássica fosse substituída pela teoria da relatividade. As previsões relativísticas diferem da física Newtoniana especialmente em grandes velocidades, cenário no qual a teoria antiga é menos precisa. Entretanto, o novo modelo fazia previsões desconsiderando a influência de forças gravitacionais, o que o levou a mais tarde ser conhecido como *Relatividade Restrita*. De fato, a inclusão da gravidade na teoria era um problema bastante complexo, o qual só foi solucionado em 1915 pelo próprio Einstein, que conseguiu adicionar esse elemento ao sofisticar drasticamente o modelo prévio, incorporando uma nova poderosa interpretação geométrica da Relatividade Especial, introduzida em 1908 por um artigo de Hermann Minkowski (1864 - 1909), um grande matemático que fora professor de Einstein. A relatividade geral se tornou um dos pilares da física moderna, possuindo uma impressionante concordância com a experiência.

Na Relatividade Geral, o universo é representado através de um modelo geométrico chamado *espaço-tempo*. Grosso modo, os pontos de um espaço-tempo descrevem todos os possíveis eventos físicos através de sua localização espacial juntamente com o instante de tempo em que ocorrem. A geometria dos espaços-tempos codifica a relação causal entre esses eventos, sendo assim, é possível modelar o universo em toda sua extensão temporal (isto é, passado, presente e futuro) ou apenas uma região, como a vizinhança de um buraco-negro ou planeta.

Em um espaço-tempo, uma classe especial de curvas, chamadas *curvas causais futuro-dirigidas*, descreve a troca de sinais físicos, isto é, informação entre eventos, e codifica assim a ideia de *causalidade*. Mais especificamente, se dois eventos  $p$  e  $q$  são tais que uma curval causal futuro-dirigida  $\alpha$  viaje de  $p$  até  $q$ , então isso é interpretado na física relativística como significando que o ponto  $p$  enviou um sinal físico para o ponto  $q$ . Nesse caso, é dito que  $p$  está no passado de  $q$  (e, como é de se esperar, que  $q$  está no futuro de  $p$ ), e que o evento  $p$  influenciou o evento  $q$ . Desse modo, é de bastante interesse estudar quando dois pontos de um espaço-tempo podem ser conectados por curvas causais futuro-dirigidas. Ainda mais, para além da valiosa interpretação física, essa inspeção é capaz de prover importantes resultados de interesse mais puramente geométrico a cerca do modelo.

Acontece que, na relatividade geral, não há nenhuma restrição a priori para a existência de curvas causais futuro-dirigidas fechadas, isto é, curvas dessa classe que partem de um certo ponto  $p$ , viajam pelo espaço-tempo e retornam para  $p$ . Uma curva como essa é o que pode ser interpretado fisicamente como um tipo de máquina do tempo, pois representa a ocorrência de um evento que influencia seu próprio passado. Embora isso seja muitas vezes rejeitado do ponto de vista da física, é uma possibilidade teórica, ainda que remota.



Em razão disso, um espaço-tempo pode ser classificado de acordo com o comportamento da classe de curvas causais nele definidas. Esta classificação é comumente chamada de *hierarquia causal*, que varia desde os minimamente bem comportados - os espaços-tempo ditos *não totalmente viciosos* - até aqueles em que valem as “melhores” propriedades com respeito à causalidade, que são os *globalmente hiperbólicos*.

O tema dessa monografia é uma descrição matematicamente rigorosa e detalhada da geometria dos espaços-tempos e sua causalidade, e, em especial, inspecionar e classificar diferentes níveis desses modelos através da mencionada hierarquia causal. O desenvolvimento do projeto de pesquisa se dará a fim de aprofundar os conhecimentos do autor na área de *geometria de Lorentz*, familiarizando-o com suas técnicas e resultados básicos, bem como alguns aspectos de sua aplicação em modelos físicos

Este trabalho está organizado da seguinte forma: no segundo capítulo, que segue depois da introdução, são descritas - com referências, mas sem demonstrações - as principais propriedades geométricas das chamadas *variedades semi-Riemannianas*, uma classe mais ampla da qual ambas variedades Riemannianas e de Lorentz são os principais subtipos. Em particular, os espaços-tempos são variedades de Lorentz com algumas características adicionais.

Já o terceiro capítulo discute mais de perto os espaços-tempos e descreve algumas de suas propriedades com respeito a causalidade. No quarto capítulo é introduzida a classificação por meio da hierarquia causal de espaços-tempos e estudadas as propriedades de cada um de seus degraus. Já o último capítulo é destinado a um exemplo especial de espaço-tempo que ilustra diferentes degraus da hierarquia causal em regiões distintas desse.

## 2 GEOMETRIA SEMI-RIEMANNIANA

A geometria semi-Riemanniana trata de estudar as *variedades semi-Riemannianas*, que são objetos geométricos que buscam generalizar as variedades Riemannianas. Várias propriedades e resultados vão ser análogos ao caso Riemanniano, mas naturalmente algumas importantes diferenças aparecem. A Relatividade Geral se utiliza das variedades de Lorentz para modelar os espaços-tempos, as quais são um caso particular dessa generalização.

As demonstrações deste capítulo estão omitidas e podem ser encontradas na literatura geral do assunto, como em [8].

### 2.1 ESPAÇOS SEMI-EUCLIDIANOS

Um *espaço semi-Euclidiano* de dimensão  $n$  é um par  $(\mathbb{V}, b)$  em que  $\mathbb{V}$  é um espaço vetorial de dimensão finita igual a  $n$  e  $b : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$  uma forma bilinear simétrica e não-degenerada. Esse conceito busca generalizar as noções presentes em um espaço Euclidiano, flexibilizando a condição de que a forma seja positiva-definida ao exigir que esta seja apenas não degenerada. A não degenerescência de  $b$  significa que seu *subespaço nulo*  $\mathcal{N}(b)$  é trivial, isto é,

$$\mathcal{N}(b) = \{v \in \mathbb{V} : b(v, w) = 0, \forall w \in \mathbb{V}\} = \{0_{\mathbb{V}}\}.$$

**Definição 2.1.1.** (Índice de uma forma bilinear) *O índice  $\nu$  de um espaço semi-Euclidiano  $(\mathbb{V}, b)$  é a maior dimensão de um subespaço restrito ao qual  $b$  é negativa-definida.*

**Proposição 2.1.2.** *Todo espaço semi-Euclidiano  $(\mathbb{V}, b)$  de dimensão  $n$  admite uma base ortonormal (também dita ser  $b$ -ortonormal), isto é, uma base  $\{e_1, \dots, e_n\}$  de  $\mathbb{V}$  tal que  $b(e_i, e_j) = 0, \forall i \neq j$ , e  $\varepsilon_i := b(e_i, e_i) = \pm 1$ . O número de  $\varepsilon_i$ 's que são iguais a  $-1$  é igual ao índice  $\nu$  de  $(\mathbb{V}, b)$  e portanto é o mesmo para qualquer outra base  $b$ -ortonormal.*

Se o índice de  $(\mathbb{V}, b)$  é igual a zero, então a forma bilinear é positivo-definida, e então se tem um espaço Euclidiano. Caso a dimensão de  $\mathbb{V}$  seja maior ou igual que dois e o índice seja um, então  $(\mathbb{V}, b)$  é dito ser um *espaço de Lorentz*. A partir de agora será fixado um espaço semi-Euclidiano  $(\mathbb{V}, b)$  de dimensão  $n$  e índice  $\nu$ . A *norma* de um vetor  $v \in \mathbb{V}$  é definida como

$$|v| := \sqrt{|b(v, v)|}.$$

Embora seja referida como norma, só satisfaz as condições para ser norma no sentido usual da Análise para o caso de índice zero, ou seja, em espaços Euclidianos. De fato, pode ocorrer que  $|v| = 0$ , mesmo se  $v \neq 0$ , e a desigualdade triangular não vale em geral, como ficará claro mais adiante.

Um subespaço  $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{V}$  é dito ser *degenerado* se o produto escalar  $b|_{\mathbb{W} \times \mathbb{W}}$  o for. É possível ainda definir a ideia de *vetores ortogonais*, isto é, dados  $v, w \in \mathbb{V}$ , é dito que  $v$  e

$w$  são ortogonais, e denotado  $v \perp w$ , se  $b(v, w) = 0$ . Com isso, para um subespaço  $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{V}$  qualquer, constrói-se a noção de *subespaço ortogonal* a  $W$  da seguinte maneira:

$$\mathbb{W}^\perp := \{v \in \mathbb{V} : b(v, w) = 0, \forall w \in \mathbb{W}\}.$$

Algumas propriedades são rapidamente obtidas:

**Proposição 2.1.3.** *Sejam  $(\mathbb{V}, b)$  um espaço semi-Euclidiano e  $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{V}$  um subespaço qualquer. Então, tem-se que  $\dim(\mathbb{W}) + \dim(\mathbb{W}^\perp) = \dim(\mathbb{V})$ ,  $(\mathbb{W}^\perp)^\perp = \mathbb{W}$  e  $\mathbb{V}$  é soma direta de  $\mathbb{W}$  e  $\mathbb{W}^\perp$  se, e somente se, o subespaço  $\mathbb{W}$  for não degenerado com respeito a  $b$ .*

**Definição 2.1.4.** (Caráter causal de vetores) *Seja  $(\mathbb{V}, b)$  um espaço semi-Euclidiano de dimensão  $n \geq 2$  cujo índice  $\nu$  é maior que zero e menor que  $n$ . Seja  $v \in \mathbb{V}$ , dizemos que o caráter causal de  $v$  é:*

- a) tipo-tempo (ou temporal), se  $b(v, v) < 0$ ;
- b) tipo-espaço (ou espacial), se  $b(v, v) > 0$  ou  $v = 0$ ;
- c) tipo-luz (ou luminoso), se  $b(v, v) = 0$  e  $v \neq 0$ ;
- d) causal (ou não-espacial) se é tipo-luz ou tipo-tempo.

*O conjunto dos vetores luminosos de  $\mathbb{V}$  é chamado cone de luz e denotado  $\Lambda$ . O conjunto dos vetores tipo-tempo, chamado cone de tempo, é um aberto, bem como o conjunto dos vetores tipo-espaço. O conjunto dos vetores causais é nomeado cone causal.*

O foco deste trabalho será majoritariamente em espaços de Lorentz, portanto será assumido daqui em diante que  $(\mathbb{V}, b)$  é um espaço de Lorentz. Estes possuem importância significativa devido a sua ligação com a relatividade geral e restrita. É possível definir o caráter causal de subespaços em um espaço vetorial de Lorentz:

**Definição 2.1.5.** *Seja  $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{V}$  um subespaço qualquer. Se  $\mathbb{W}$  for não degenerado, o seu índice é definido como o índice do espaço semi-Euclidiano  $(\mathbb{W}, b|_{\mathbb{W} \times \mathbb{W}})$ .  $\mathbb{W}$  é dito ser:*

- a) tipo-tempo (ou temporal), se é não-degenerado e tem índice 1;
- b) tipo-espaço (ou espacial), se é não-degenerado e tem índice 0;
- c) tipo-luz (ou luminoso), se é degenerado.

É possível provar que um subespaço  $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{V}$  é luminoso se, e somente se,  $\dim(\mathbb{W} \cap \mathbb{W}^\perp) = 1$ . Ainda mais, quaisquer dois vetores luminosos  $v$  e  $w$  em  $\mathbb{V}$  são ortogonais se, e somente se, são colineares. Também vale que um subespaço  $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{V}$  é tipo-tempo se, e somente se,  $\mathbb{W}^\perp$  é tipo-espaço. Logo, um vetor temporal  $v \in \mathbb{V}$  só pode ser ortogonal a um vetor  $w \in \mathbb{V}$  se  $w$  for espacial.

Fixado um vetor tipo-tempo qualquer  $v$ , o cone de tempo de  $v$ , denotado  $\mathcal{T}(v)$ , é o conjunto dos vetores temporais  $w$  tais que  $b(v, w) < 0$ . O conjunto  $\mathcal{T}$  dos vetores temporais

é exatamente a união disjunta entre os conjuntos conexos  $\mathcal{T}(v)$  e  $\mathcal{T}(-v)$ , pois dois vetores tipo-tempo nunca são ortogonais, como descrito no parágrafo acima.

Para qualquer outro vetor tipo-tempo  $v'$  os cones produzidos são os mesmos. Escolher um desses cones é *orientar temporalmente* (ou dar uma *orientação temporal* para)  $\mathbb{V}$ . É dito que o cone escolhido  $\mathcal{T}^+$  é o *cone de tempo futuro*, e o outro, denotado  $\mathcal{T}^-$ , é o *cone de tempo passado*. Vetores no cone futuro são ditos *futuro-dirigidos*, enquanto no cone passado são denominados *passado-dirigidos*. Dados  $v, w \in \mathbb{V}$ ,  $v$  e  $w$  estão no mesmo cone de tempo se, e somente se,  $b(v, w) < 0$ .

De maneira análoga, para  $v \in \mathcal{T}^+$  fixo, o conjunto dos vetores luminosos  $w \in \mathbb{V}$  pode ser decomposto na união daqueles em que  $b(v, w) < 0$  (futuro-dirigidos) e daqueles em que  $b(v, w) > 0$  (passado-dirigidos), que serão denotados  $\Lambda^+$  e  $\Lambda^-$ , respectivamente. Os cones causais são definidos como  $\mathcal{T}^\pm \cup \Lambda^\pm$ .

Abaixo, são descritas algumas propriedades satisfeitas por espaços de Lorentz que são dramaticamente distintas daquelas de espaços Euclidianos.

**Proposição 2.1.6.** *Em um espaço de Lorentz  $(\mathbb{V}, b)$ , quaisquer dois vetores tipo-tempo  $v, w \in \mathbb{V}$  satisfazem as duas desigualdades abaixo*

$$|v||w| \leq |b(v, w)|, \quad |v| + |w| \leq |v + w|,$$

e vale igualdade se, e somente se,  $v$  e  $w$  forem colineares. Essas inequações são chamadas, respectivamente, de desigualdade de Cauchy reversa e desigualdade triangular reversa.

**Definição 2.1.7.** (Isometria linear) *Sejam  $(\mathbb{V}, b_{\mathbb{V}})$  e  $(\mathbb{W}, b_{\mathbb{W}})$  dois espaços semi-Euclidianos. Uma aplicação  $F : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$  é dita ser uma isometria linear se é um isomorfismo linear entre os espaços vetoriais  $\mathbb{V}$  e  $\mathbb{W}$  que preserva o produto escalar, isto é, tal que*

$$b_{\mathbb{V}}(v, v') = b_{\mathbb{W}}(F(v), F(v')), \quad \forall v, v' \in \mathbb{V}.$$

Nesse caso,  $(\mathbb{V}, b_{\mathbb{V}})$  e  $(\mathbb{W}, b_{\mathbb{W}})$  são ditos serem linearmente isométricos.

**Exemplo 2.1.8.** Considere  $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$ , e o produto escalar definido como

$$b_{\nu} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (x, y) \mapsto -\sum_{i=1}^{\nu} x_i y_i + \sum_{i=\nu+1}^n x_i y_i \in \mathbb{R}.$$

Denota-se  $\langle x, y \rangle_{\nu} := b_{\nu}(x, y)$ . Então,  $\mathbb{R}_{\nu}^n := (\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\nu})$  é um espaço semi-Euclidiano de índice  $\nu$ . De fato, se  $\{e_1, \dots, e_n\}$  é a base canônica de  $\mathbb{R}^n$ , então  $\langle e_i, e_j \rangle_{\nu} = 0$ , se  $i \neq j$ ,  $\langle e_i, e_i \rangle_{\nu} = -1$  se  $1 \leq i \leq \nu$  e  $\langle e_i, e_i \rangle_{\nu} = 1$ , se  $\nu + 1 \leq i \leq n$ .

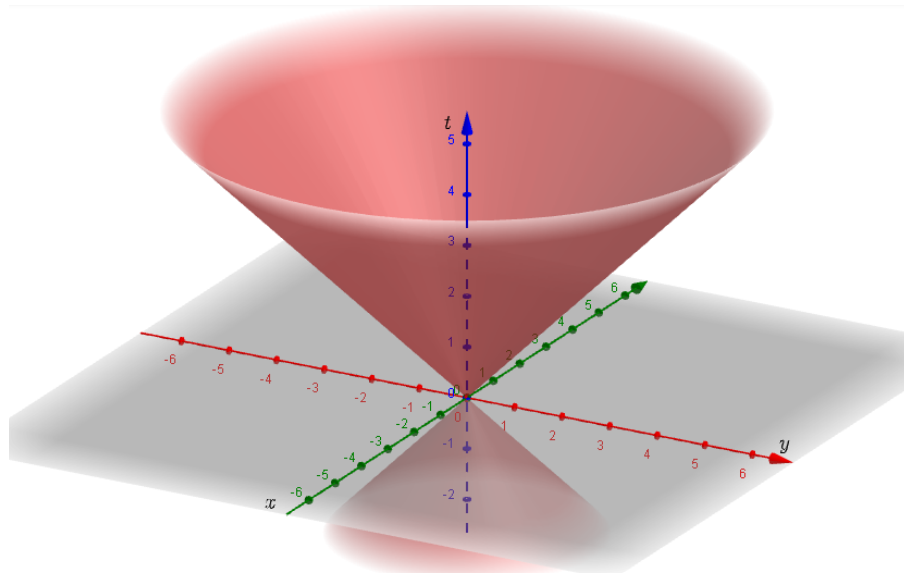
Qualquer espaço semi-Euclidiano de dimensão  $n$  e índice  $\nu$  é linearmente isométrico a  $\mathbb{R}_{\nu}^n$ . De fato, seja  $(\mathbb{V}, b)$  um tal, e  $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq \mathbb{V}$  uma base  $b$ -ortonormal. A função  $f : (\mathbb{V}, b) \rightarrow \mathbb{R}_{\nu}^n$  definida por  $f(v_i) = e_i$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ , é uma isometria linear. Em particular, todo espaço de Lorentz é linearmente isométrico a  $\mathbb{R}_1^n$ .

O cone de luz em  $\mathbb{R}_1^n$  é o conjunto dos pontos  $x \in \mathbb{R}_\nu^n - \{0\}$  tais que  $\langle x, x \rangle_\nu = 0$ , isto é,

$$\Lambda = \{x \in \mathbb{R}^n - \{0\} : x_1^2 = \sum_{i=2}^n x_i^2\}.$$

Ou seja,  $\Lambda$  consiste de dois cones disjuntos em  $\mathbb{R}_\nu^n$  (no primeiro  $x_1 > 0$  e no segundo  $x_1 < 0$ ). O interior de cada componente conexa desse cone duplo corresponde aos vetores tipo-tempo, enquanto o exterior aos vetores tipo-espaço. A figura abaixo ilustra  $\mathbb{R}_1^3$ .

Figura 1 – Na figura está representado  $\mathbb{R}_1^3$  com o cone de luz em vermelho. É usual denotar as coordenadas como  $(t, x, y)$ , colocando a variável  $t$  no eixo vertical.



## 2.2 VARIEDADES SEMI-RIEMANNIANAS

Esta seção é destinada a introduzir as variedades semi-Riemannianas a partir do conceito de espaços semi-Euclidianos previamente definido.

**Definição 2.2.1.** (Variedades semi-Riemannianas) *Uma variedade semi-Riemanniana de índice  $\nu$  e dimensão  $n$  é um par  $(M, g)$  em que  $M = M^n$  é uma variedade diferenciável<sup>1</sup> e  $g$  um  $(0, 2)$ -tensor que associa cada  $p \in M$  a uma forma bilinear simétrica e não degenerada  $g_p$  em  $T_p M$  cujo índice é  $\nu \in \{0, \dots, n\}$ .  $g$  é chamado de tensor métrico ou, se não há risco de confusão, simplesmente de métrica. Se  $\nu = 1$  e  $n \geq 2$ , então  $(M, g)$  é dita ser uma variedade de Lorentz.*

Com relação a um certo sistema de coordenadas locais  $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ , as componentes do tensor métrico são  $g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})$ . Os componentes da matriz inversa

<sup>1</sup> Aqui e doravante, diferenciável significará real e  $C^\infty$ . Além disso, toda variedade será assumida Hausdorff e segundo-contável.

de  $[g_{ij}]_{i,j=1,\dots,n}$  são denotados como  $g^{ij}$ . As noções de caráter causal são estendidas para curvas e campos vetoriais de acordo com a definição abaixo.

**Definição 2.2.2.** *Seja  $(M^n, g)$  uma variedade semi-Riemanniana de índice  $\nu \in \{1, \dots, n-1\}$ . Uma curva suave  $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M$  é dita tipo-tempo [resp. tipo-espaço, tipo-luz, causal] se,  $\forall t \in I$ ,  $\alpha'(t)$  é tipo-tempo [resp. tipo-espaço, tipo-luz, causal] em  $T_{\alpha(t)}M$ . Analogamente, um campo vetorial  $X \in \mathfrak{X}(M)$  é dito tipo-tempo [resp. tipo-espaço, tipo-luz, causal] se,  $\forall p \in M$ ,  $X_p$  tem o caráter causal correspondente em  $T_pM$ .*

Seja  $(M, g)$  uma variedade semi-Riemanniana de índice  $\nu$  e dimensão  $n$  fixa. O conjunto dos vetores tipo-luz de  $T_pM$  é chamado *cone de luz* em  $p$ , e denotado  $\Lambda_p$ . É conveniente do ponto de vista técnico estender o conceito do caráter causal de curvas suaves para curvas suaves por partes.

Vale recordar que uma curva  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  é dita ser *suave por partes* se existe uma partição  $\{a =: t_0 < t_1 < \dots < t_m < t_{m+1} := b\}$  do intervalo  $[a, b]$  de modo que  $\alpha|_{[t_i, t_{i+1}]}$  é uma curva suave, para  $0 \leq i \leq m$ . Denotando  $\alpha'(t_i^-)$  e  $\alpha'(t_i^+)$  os limites laterais pela esquerda e direita de  $\alpha'$  em  $t_i$ , dizemos que  $\alpha$  é tipo-tempo se o for em cada segmento suave e se

$$g(\alpha'(t_i^-), \alpha'(t_i^+)) < 0,$$

isto é,  $\alpha'$  não troca de cone de tempo nas quebras. É exigido analogamente para  $\alpha'$  causal/luminosa que não troque de cone causal/cone de luz. Generalizando para quaisquer intervalos,  $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M$  é suave por partes se  $\alpha|_{[a,b]}$  o é, para todo  $a < b \in I$ , e se define analogamente para tipo-tempo/causal/tipo-luz.

*A partir de agora, curva tipo-tempo/causal/tipo-luz se referirá, a menos de menção explícita, a uma curva suave por partes de mesmo tipo.*

**Definição 2.2.3.** (Comprimento Lorentziano) *O comprimento Lorentziano de uma curva causal suave por partes  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  é definido como*

$$L_g(\alpha) := \int_a^b |\alpha'(s)| ds.$$

**Exemplo 2.2.4.** Defina em  $\mathbb{R}^n$  o tensor  $\eta_\nu$  dado por

$$(\eta_\nu)_p(v_p, w_p) = \langle v, w \rangle_\nu, \quad \forall p \in \mathbb{R}^n, \forall v, w \in T_p\mathbb{R}^n.$$

Aqui  $v_p$  e  $v$  estão relacionados pelo isomorfismo canônico entre os espaços semi-Euclidianos  $T_p\mathbb{R}^n$  e  $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_\nu)$ . Será denotada por  $\mathbb{R}_\nu^n$  a variedade semi-Riemanniana  $(\mathbb{R}^n, \eta_\nu)$ , quando não houver risco de confusão com a notação usada para o espaço semi-Euclidiano. Se  $\nu = 1$  e  $n \geq 2$ , então a variedade é de Lorentz.

**Definição 2.2.5.** (Gradiente) *O gradiente em  $(M, g)$  de uma função  $f \in C^\infty(M)$ , denotado  $\nabla^g f$ , é o campo vetorial metricamente associado à 1-forma  $df$ , isto é, o campo que satisfaz*

$$g(\nabla^g f, X) = df(X), \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

Da definição acima, segue imediatamente que, em coordenadas locais,  $(\nabla^g f)^i = g^{ik} \frac{\partial f}{\partial x^k}$ .

Um *valor regular* para  $f$  é um  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $df_p \neq 0$ , para todo  $p \in f^{-1}(c)$ . Se  $c$  é um valor regular para  $f$ , então  $N := f^{-1}(c)$  é uma hipersuperfície de  $M$ . Analogamente ao caso Riemanniano, vale que, para todo  $p \in N$ ,

$$T_p N = (\nabla^g f(p))^\perp,$$

pois se  $\alpha : 0 \in I \rightarrow N$  é uma curva suave com  $\alpha'(0) = v \in T_p N$ , então  $(f \circ \alpha)(s) = c$ ,  $\forall s \in I$ , e, portanto,

$$0 = (f \circ \alpha)'(0) = df_p(v) = g_p(\nabla^g f(p), v),$$

isto é,  $v$  é ortogonal a  $\nabla^g f(p)$ .

**Exemplo 2.2.6.** (*Hiperquádricas*) Em  $\mathbb{R}_\nu^{n+1}$ , defina a função:

$$\mathcal{Q} : \mathbb{R}_\nu^{n+1} \ni p = (p^1, \dots, p^n) \mapsto \langle p, p \rangle_\nu \in \mathbb{R}$$

em que  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\nu$  é o produto escalar de índice  $\nu$  em  $\mathbb{R}_\nu^{n+1}$ . As *pseudoesferas* de raio  $r$ , denotadas  $\mathbb{S}_\nu^n(r)$ , são definidas como  $\mathcal{Q}^{-1}(r^2)$ , e os *pseudohiperbolóides* de raio  $r > 0$ , denotados  $\mathbb{H}_\nu^n(r^2)$ , são definidos como  $\mathcal{Q}^{-1}(-r^2)$ . Estas são ambas variedades de dimensão  $n$ . De fato, o *campo vetorial posição*, definido como

$$\mathcal{P} : \mathbb{R}_\nu^n \ni p := (p^1, \dots, p^{n+1}) \rightarrow \sum_{i=1}^n p^i \partial_i \Big|_p,$$

é tal que  $\nabla \mathcal{Q} = 2\mathcal{P}$ , pois

$$(g^{ik} \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial x^k})(p) = (\varepsilon_i \delta_{ik})(2\varepsilon_k p^k) = 2p^i = 2(\mathcal{P}(p))^i,$$

em que  $\delta_{ik}$  é o delta de Kronecker. Sendo assim, se  $p \neq 0$ ,  $(\nabla \mathcal{Q})_p = 2\mathcal{P}(p) = p_p \neq 0$ . Então  $c \neq 0$  é sempre um valor regular de  $\mathcal{Q}$ .

Considere agora a inclusão  $i : \mathcal{Q}^{-1}(\pm r^2) \rightarrow \mathbb{R}_\nu^{n+1}$ . É possível definir uma métrica nas hiperquádricas a partir do pullback de  $\eta_\nu$  pela inclusão, isto é:

$$(i^* \eta_\nu)_p(v, w) = (\eta_\nu)_{i(p)}(di_p(v), di_p(w)), \forall p \in \mathcal{Q}^{-1}(\pm r^2), \forall v, w \in T_p(\mathcal{Q}^{-1}(\pm r^2)).$$

Essa métrica é de fato uma métrica semi-Riemanniana, que possui índice  $\nu$  em  $\mathbb{S}_\nu^n(r)$  e índice  $\nu - 1$  em  $\mathbb{H}_{\nu-1}^n(r^2)$ , como será justificado em mais detalhes e de maneira mais geral na seção sobre imersões semi-Riemannianas.

As hiperquádricas  $\mathbb{S}_1^n(1)$  em  $\mathbb{R}_1^{n+1}$  e  $\mathbb{H}_1^{n+1}$  em  $\mathbb{R}_2^{n+1}$  são ambas variedades de Lorentz, cujos recobrimentos universais são chamados de *espaço de Sitter* e *anti-de Sitter*, respectivamente. A hiperquádrica  $\mathbb{S}^n := \mathbb{S}_0^n(1)$  é chamada de *n-esfera redonda*, ou simplesmente *esfera*, e a métrica induzida, denotada  $\omega_n$ , é a *métrica usual* ou *redonda*.

<sup>2</sup> Nesta equação, e sempre que for conveniente, será utilizada a *convenção de Einstein* para somatório, a qual determina a existência de uma soma nos índices superiores e inferiores repetidos, variando de 1 até a dimensão da variedade.

Se  $(M^m, g_M)$  e  $(N^n, g_N)$  são duas variedades semi-Riemannianas, então, é possível definir uma métrica na variedade produto  $M \times N$  de maneira bastante natural. De fato, se  $\pi_M$  e  $\pi_N$  são as projeções na primeira e segunda coordenadas, a métrica

$$h = \pi_M^* g_M + \pi_N^* g_N$$

faz com que  $(M \times N, h)$  seja uma variedade semi-Riemanniana. Observe que, identificando  $T_{(p,q)}(M \times N)$  com a soma direta de  $T_p M$  e  $T_q N$ , então para  $w = v_M + v_N, w' = v'_M + v'_N \in T_p M \oplus T_q N$ , vale que

$$h_{(p,q)}(w, w') = g_{M_p}(v_M, v'_M) + g_{N_q}(v_N, v'_N),$$

portanto, basta tomar  $\{w_1, \dots, w_m\}$  base ortonormal de  $T_p M$  e  $\{v_1, \dots, v_n\}$  base ortonormal de  $T_q N$  e observar que a união desses dois conjuntos dá uma base ortonormal para  $T_{(p,q)}(M \times N)$ . Em particular, esse argumento mostra que o índice de  $h$  é a soma dos índices de  $g_M$  e  $g_N$ .

A variedade  $(M \times N, h)$  é chamada de *produto semi-Riemanniano* entre  $(M, g_M)$  e  $(N, g_N)$ . É possível generalizar esse conceito para os chamados *produtos semi-Riemannianos torcidos*. Para isso, considere  $f \in C^\infty(M)$  uma função estritamente positiva, e a métrica

$$h = \pi_M^* g_N + (f \circ \pi_M)^2 \pi_N^* g_N,$$

definida em  $M \times N$ . Para verificar que  $h$  define em  $M \times N$  uma variedade semi-Riemanniana, basta observar que, agora, o conjunto

$$\left\{ v_1, \dots, v_n, \frac{w_1}{f(p)}, \dots, \frac{w_m}{f(p)} \right\}$$

é uma base  $h$ -ortonormal para  $T_{(p,q)}(M \times N)$ . Novamente, o índice de  $h$  é a soma dos outros dois índices.

Denota-se por  $M \times_f N := (M \times N, h)$  o *produto semi-Riemanniano torcido de base  $M$ , fibra  $N$  e função deformadora  $f$* . O produto definido anteriormente é um caso particular deste, no qual  $f = 1$ .

**Exemplo 2.2.7.** (*Cilindros de Einstein e Riemanniano*) O produto semi-Riemanniano entre  $(\mathbb{R}, \varepsilon \cdot dt^2)$  e  $(\mathbb{S}^n, \omega_n)$ , com  $\varepsilon = \pm 1$ , é uma variedade semi-Riemanniana chamada de *cilindro usual* (ou *cilindro Riemanniano*), se  $\varepsilon = 1$ , e chamada *cilindro de Einstein*, se  $\varepsilon = -1$ . No primeiro caso a variedade é Riemanniana, enquanto no segundo a variedade é de Lorentz.

**Exemplo 2.2.8.** (*Espaços de Robertson-Walker*) Seja  $(N, g_N)$  uma variedade Riemanniana,  $M = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$  um intervalo qualquer, e  $f \in C^\infty(N)$  uma função positiva. Um *espaço de Robertson-Walker generalizado*  $M \times_f N$  é da forma de um produto semi-Riemanniano torcido por  $f$  entre  $(M, -dt^2)$  e  $(N, h_N)$ . Se  $N$  for o espaço Euclidiano  $\mathbb{R}_0^n$ , a esfera redonda ou o espaço hiperbólico  $\mathbb{H}_0^n(1)$ , então o produto é dito ser um *espaço de Robertson-Walker simples*. Estes são exemplos bastante importantes para a Relatividade Geral.



### 2.3 CONEXÃO DE LEVI-CIVITA

Parte das noções mais importantes presentes na geometria Riemanniana podem ser definidas analogamente para o caso semi-Riemanniano através da noção apresentada nesta seção. Mais adiante se faz uma relação entre esta noção e a métrica da variedade.

**Definição 2.3.1.** (Conexão afim) *Uma conexão afim em uma variedade diferenciável  $M$  é uma aplicação*

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \ni (V, W) \mapsto \nabla_V W \in \mathfrak{X}(M)$$

que satisfaz:

- a)  $\mathbb{R}$ -bilinearidade;
- b)  $\nabla_{f \cdot V} W = f \cdot \nabla_V W$  ,  $\forall V, W \in \mathfrak{X}(M), \forall f \in C^\infty(M)$ ;
- c)  $\nabla_V f \cdot W = V(f) \cdot W + f \cdot \nabla_V W$  ,  $\forall V, W \in \mathfrak{X}(M), \forall f \in C^\infty(M)$ .

Uma variedade afim é um par  $(M, \nabla)$ , em que  $M$  é uma variedade diferenciável e  $\nabla$  uma conexão afim.

Note que essa definição independe de  $M$  ser uma variedade semi-Riemanniana. A partir da conexão se pode construir diversas noções geométricas na variedade  $M$ , como curvatura e geodésicas.

**Proposição 2.3.2.** (Localização) *Dados  $V, W, Z \in \mathfrak{X}(M)$ , vale que:*

1. Se  $V(p) = W(p)$ , para algum  $p \in M$ , então  $\nabla_V Z(p) = \nabla_W Z(p)$ ;
2. Se existe um aberto  $U \subseteq M$  tal que  $V|_U = W|_U$ , então

$$\nabla_Z V(q) = \nabla_Z W(q), \quad \forall q \in U.$$

Essa proposição garante que é possível calcular a conexão em campos vetoriais definidos localmente (em algum aberto  $U \subseteq M$ , por exemplo), estendendo-os para  $M$ , e no fim obter um campo vetorial cujos valores em  $U$  independem da extensão escolhida. Assim, a definição abaixo faz sentido:

**Definição 2.3.3.** (Símbolos de Christoffel) *Os coeficientes de uma conexão  $\nabla$ , ou símbolos de Christoffel, com relação a uma carta local  $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$  de  $M$ , são as funções  $\Gamma_{jk}^i : U \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$  dadas por*

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \Gamma_{jk}^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \forall j, k \in \{1, \dots, n\}.$$

Note que, como a conexão não é tensorial, o fato de que suas componentes se anulam em  $p$  com relação a uma certa carta local não implica que os componentes se anulam em  $p$  com respeito a todas as cartas locais.

Em sequência, define-se a noção de curvatura e torção, que a princípio aparecem apenas algebricamente, mas que posteriormente revelarão possuir importante significado geométrico.

**Definição 2.3.4.** (Torção e curvatura) *A torção e a curvatura de uma conexão  $\nabla$  em  $M$  são definidas, respectivamente, como*

$$\begin{aligned} T^\nabla(X, Y) &:= \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M), \\ R^\nabla(X, Y)Z &:= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z, \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M). \end{aligned}$$

*A conexão  $\nabla$  é dita simétrica [resp. flat] se sua torção [resp. curvatura] é identicamente nula.*

Como são obtidas através da conexão, também é possível definir a curvatura e torção localmente, logo faz sentido falar de suas coordenadas.

**Proposição 2.3.5.** *A torção e a curvatura possuem as seguintes componentes com respeito a um dado sistema de coordenadas*

$$\begin{aligned} T_{jk}^i &= \Gamma_{kj}^i - \Gamma_{jk}^i, \\ R_{jkl}^i &= \partial_k \Gamma_{jl}^i - \partial_l \Gamma_{jk}^i + \Gamma_{jl}^m \Gamma_{mk}^i - \Gamma_{jk}^m \Gamma_{ml}^i \end{aligned}$$

**Exemplo 2.3.6.** Em  $\mathbb{R}_\nu^n$ , a conexão plana usual é definida como

$$\nabla_V^{plana} W = V(W^i) \partial_i, \quad \forall V, W \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}_\nu^n).$$

Aqui  $W^i$  são as funções componente de  $W$  com relação aos campos coordenados  $\partial_i$ . É fácil verificar que  $\nabla^{plana}$  é uma conexão pois campos vetoriais induzem derivações no espaço das funções suaves em  $M$ , isto é,  $V(f \cdot W_i) = V(f)W^i + fV(W_i)$ .

Também é imediato que os símbolos de Christoffel da conexão plana  $\nabla^{plana}$  expressos nas coordenadas usuais de  $\mathbb{R}_\nu^n$  são todos nulos. Então a torção de  $\nabla^{plana}$  é zero, bem como sua curvatura, fazendo com que esta seja uma conexão simétrica e *flat*, justificando a nomenclatura adotada.

A seguir, estende-se a noção de conexão sobre uma variedade para uma conexão sobre uma aplicação. Isso será importante para a construção da derivada covariante ao longo de uma curva e para o estudo de subvariedades, o que será feito posteriormente.

**Definição 2.3.7.** *Uma conexão sobre uma aplicação entre variedades semi-Riemannianas  $F : N \rightarrow M$  é uma aplicação*

$$D : (V, W) \in \mathfrak{X}(N) \times \mathfrak{X}(F) \mapsto D_V W \in \mathfrak{X}(F)$$

que satisfaz:

- a)  $\mathbb{R}$ -bilinearidade;

$$b) D_{f \cdot X}V = f \cdot D_XV;$$

$$c) D_X(f \cdot V) = (Xf) \cdot V + f \cdot D_XV,$$

em que (b) e (c) devem valer para todos  $X \in \mathfrak{X}(N)$ ,  $V \in \mathfrak{X}(F)$  e  $f \in C^\infty(N)$ .

**Teorema 2.3.8.** (Conexão induzida) *Seja  $\nabla$  uma conexão afim em  $M$ ,  $N$  uma variedade diferenciável e  $F : N \rightarrow M$  uma aplicação diferenciável. Então, existe uma única conexão sobre  $F$ , denotada  $D^\nabla$ , dita conexão induzida em  $F$ , que satisfaz:*

$$D_X^\nabla(V \circ F)(p) = \nabla_{dF_p(X_p)}V(F(p)), \quad \forall p \in M, \forall X \in \mathfrak{X}(N), \forall V \in \mathfrak{X}(M)$$

A seguir será enunciado o teorema fundamental da geometria semi-Riemanniana, o qual mostra que uma métrica semi-Riemanniana determina uma única conexão que satisfaz certas propriedades importantes.

**Teorema 2.3.9.** (Conexão de Levi-Civita - Teorema fundamental da geometria semi-Riemanniana) *Seja  $(M, g)$  uma variedade semi-Riemanniana. Então, existe uma única conexão  $\nabla^g$  em  $M$ , chamada conexão de Levi-Civita, que satisfaz:*

$$a) \nabla^g \text{ é simétrica};$$

$$b) \nabla^g \text{ é compatível com } g, \text{ isto é:}$$

$$Z(g(X, Y)) = g(\nabla_Z^g X, Y) + g(X, \nabla_Z^g Y), \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$$

Além disso, a conexão  $\nabla^g$  fica totalmente caracterizada pela identidade de Koszul:

$$2g(\nabla_X^g Y, Z) = X(g(Y, Z)) + Y(g(X, Z)) - Z(g(X, Y)) - g(X, [Y, Z]) + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y]), \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

**Proposição 2.3.10.** *Os coeficientes de Christoffel da conexão de Levi-Civita de uma variedade semi-Riemanniana são dados em coordenadas locais pelas expressões*

$$(\Gamma^g)_{jk}^i = \frac{1}{2}g^{il} \left( \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right), \quad i, j \in \{1, \dots, n\}.$$

Além disso, a compatibilidade com a métrica  $g$  pode ser escrita em coordenadas como

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = g_{il}(\Gamma^g)_{jk}^l + g_{jl}(\Gamma^g)_{ik}^l, \quad i, j, k \in \{1, \dots, n\}.$$

Por exemplo, como os símbolos de Christoffel de  $\nabla^{plana}$  expressos nas coordenadas usuais de  $\mathbb{R}_\nu^n$  são todos nulos, e como  $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = 0$ ,  $\forall i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ , já que os  $g_{ij}$  são constantes, então a compatibilidade com a métrica é trivialmente satisfeita de acordo com a proposição anterior. Também já foi mencionado que essa conexão é simétrica, portanto, a conexão de Levi-Civita de  $\mathbb{R}_\nu^n$  é  $\nabla^{plana}$ , para toda dimensão  $n$  e para todo índice  $\nu$ .

**Definição 2.3.11.** (Derivada covariante) *Uma derivada covariante em uma curva suave  $\alpha : I \rightarrow M$  definida em uma variedade diferenciável  $M$  é uma aplicação  $D/dt : \mathfrak{X}(\alpha) \rightarrow \mathfrak{X}(\alpha)$  que satisfaz as seguintes condições:*

- a)  $D/dt$  é  $\mathbb{R}$ -linear;
- b)  $D/dt(h \cdot V) = h'V + h \cdot DV/dt, \quad \forall h \in C^\infty(I), \forall V \in \mathfrak{X}(\alpha).$

O conceito de derivada covariante está intrinsicamente ligado a conexão, como o teorema abaixo demonstra:

**Teorema 2.3.12.** *Seja  $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M$  uma curva suave e  $D$  uma conexão sobre  $\alpha$ . Vale que:*

- a)  $\frac{DX}{dt} := D_{\frac{d}{dt}}X, \forall X \in \mathfrak{X}(\alpha)$  define uma derivada covariante sobre  $\alpha$ , em que  $\frac{d}{dt}$  é o campo vetorial tangente canônico em  $I$ .
- b) Se  $D$  for a conexão induzida pela conexão de Levi-Civita de alguma métrica  $g$ , então vale que

$$g(V, W)' = g(DV/dt, W) + g(V, DW/dt), \quad \forall V, W \in \mathfrak{X}(\alpha).$$

## 2.4 GEODÉSICAS

**Definição 2.4.1.** (Geodésicas) *Seja  $(M, \nabla)$  uma variedade afim. Uma curva  $\alpha : I \rightarrow M$  é dita ser uma geodésica se satisfaz*

$$\alpha'' = D\alpha'/dt = 0,$$

em que  $D/dt$  é a derivada covariante sobre  $\alpha$  induzida por uma conexão  $\nabla$  (neste trabalho, sempre que estivermos em uma variedade semi-Riemanniana, será assumido que esta conexão é a de Levi-Civita).  $\alpha''$  é dita a aceleração de  $\alpha$ .

Segue da definição e do teorema 2.3.12 que se  $\alpha$  é uma geodésica em uma variedade semi-Riemanniana  $(M, g)$ , então  $g(\alpha', \alpha')$  é constante. Portanto basta conhecer o caráter causal de  $\alpha$  em um ponto para determinar seu caráter causal ao longo de todos os outros pontos.

**Proposição 2.4.2.** *Uma curva  $\alpha : I \rightarrow M$  é uma geodésica de uma variedade afim  $(M, \nabla)$  se, e somente se, satisfaz, em coordenadas locais, as equações abaixo.*

$$\frac{d^2(x^i \circ \alpha)}{dt^2} + (\Gamma_{kl}^i \circ \alpha) \frac{d(x^k \circ \alpha)}{dt} \frac{d(x^l \circ \alpha)}{dt} = 0,$$

em que  $i \in \{1, \dots, n\}$  e  $\Gamma_{kl}^i$  denotam os símbolos de Christoffel de  $\nabla$ .

A variedade semi-Riemanniana  $\mathbb{R}_v^n$  com a conexão de Levi-Civita  $\nabla^{plana}$  tem símbolos de Christoffel nulos para as coordenadas locais usuais, portanto as equações acima se tornam

$$\frac{d^2(x \circ \alpha)}{dt^2} = 0,$$

implicando que as geodésicas de  $\mathbb{R}_v^n$  são retas. De maneira grosseira, o conceito de geodésica busca generalizar essa ideia, representando o que seria uma curva “o mais reta possível” em uma variedade afim.

Perceba que as equações da última proposição formam um sistema não-linear de segunda ordem de EDO's. Utilizando teoria de EDO's, os seguintes resultados são obtidos em uma variedade afim  $(M, \nabla)$  qualquer.

**Proposição 2.4.3.** *Para qualquer  $p \in M$  e  $v \in T_p M$ , existe  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  geodésica tal que  $\alpha'(0) = v$ .*

**Proposição 2.4.4.** *Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  duas geodésicas em  $M$ . Se existe  $t_0$  na interseção dos domínios de ambas tal que  $\alpha'(t_0) = \beta'(t_0)$ , então as geodésicas coincidem em toda intersecção dos domínios.*

**Corolário 2.4.5.** *Seja  $v \in TM$ . Então, existe uma única geodésica maximal  $\gamma_v : I_v \rightarrow M$  tal que  $0 \in I_v$  é um intervalo aberto e  $\gamma'_v(0) = v$ .*

A maximalidade desse corolário significa que outra geodésica  $\alpha : I \rightarrow M$  com  $0 \in I$  satisfazendo  $\alpha'(0) = v$  é tal que  $I \subseteq I_v$  e  $\alpha = \gamma_v|_I$ . Uma variedade afim é dita *geodesicamente completa* se toda geodésica maximal está definida em todo o  $\mathbb{R}$ .

Uma curva suave pode admitir extensão contínua mas não admitir uma extensão suave. Entretanto, se tal curva é uma geodésica, essa curva é continuamente extensível para um ponto  $p \in M$  se, e somente se, admite uma extensão geodésica até  $p$  (cf. [8], Lema 5.8).

**Exemplo 2.4.6.** Considere a curva  $\alpha : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\alpha(s) = (s, \sqrt{s})$ . A curva claramente pode ser estendida continuamente para o 0, colocando  $\alpha(0) = (0, 0)$ . Entretanto, a curva não é diferenciável em 0, pois

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{\alpha(s) - \alpha(0)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0^+} \left(1, \frac{1}{\sqrt{s}}\right),$$

e a segunda coordenada do limite acima vai para infinito.

## 2.5 CURVATURA

Nesta seção serão estudadas algumas propriedades do tensor de curvatura e seu significado geométrico. A curvatura de uma variedade semi-Riemanniana fixada  $(M, g)$ , que

aqui será sempre tomada com respeito à conexão de Levi-Civita, induz o assim chamado *operador de curvatura* da seguinte maneira:

$$R(X, Y) : Z \in \mathfrak{X}(M) \longrightarrow R(X, Y)Z \in \mathfrak{X}(M), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Esse operador é  $C^\infty(M)$ -linear e tensorial, logo induz uma aplicação linear ponto-a-ponto. Para um vetor  $v \in T_pM$ , o *operador força de maré* associado a  $v$  é definido por

$$R_v : x \in T_pM \longrightarrow R(x, v)v \in T_pM.$$

Por vezes, calcular a curvatura será uma tarefa árdua, entretanto, algumas simetrias facilitam tal computação. No que segue, a notação  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  será usada no lugar de  $g(\cdot, \cdot)$ , caso não haja risco de confusão.

**Teorema 2.5.1.** (Simetrias do tensor curvatura) *Para  $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ , o tensor curvatura satisfaz:*

- a)  $R(X, Y) = -R(Y, X)$ ,
- b)  $\langle R(X, Y)Z, W \rangle = -\langle Z, R(X, Y)W \rangle$ ,
- c)  $\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle R(Z, W)X, Y \rangle$ ,
- d)  $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$ ,
- e)  $(\nabla_R X)(Y, Z) + (\nabla_R Y)(Z, X) + (\nabla_R Z)(X, Y) = 0$ .

Os itens (d) e (e) são chamados *primeira e segunda identidade de Bianchi*, respectivamente. Os seguintes resultados sobre o operador força de maré são obtidos imediatamente a partir do teorema acima.

**Corolário 2.5.2.** (Propriedades do operador força de maré) *Seja  $p \in M$ , e  $v \in T_pM$ , vale:*

- $R_v(v) = 0$ , e  $R_v(T_pM) \subseteq v^\perp$ , de modo que o operador força de maré pode ser visto como  $Rv : v^\perp \longrightarrow v^\perp$ ;
- $\langle R_v(x), y \rangle = \langle x, R_v(y) \rangle$ ,  $\forall x, y \in v^\perp$  ( $R_v$  é auto-adjunto com respeito a  $g_p$ ).

Em algumas ocasiões será mais conveniente trabalhar com a curvatura da seguinte maneira:

**Definição 2.5.3.** *O tensor (de curvatura) Riemanniano é o tensor de tipo  $(0, 4)$  definido por*

$$\tilde{R}(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y)Z, W \rangle, \quad \forall X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M).$$

Em coordenadas, seus componentes são  $R_{mkij} = g_{ml}R_{kij}^l$ , em que  $R_{kij}^l$  são os componentes da curvatura.

**Definição 2.5.4.** (Curvatura seccional) Para  $p \in M$ , define-se a curvatura seccional de um plano não degenerado  $\Pi \subseteq T_p M$  como:

$$K(\Pi) := \frac{g_p(R(w, v)v, w)}{g_p(v, v)g_p(w, w) - g_p(v, w)^2}$$

Em que  $\{v, w\}$  é uma base para o plano  $\Pi$ . É importante destacar que o denominador dessa expressão é sempre diferente de zero e o número  $K(\Pi)$  independe da base escolhida, devido a não-degenerescência do plano.

**Proposição 2.5.5.** (Curvatura constante) Se  $\exists c_0 \in \mathbb{R}$  tal que, para todo plano não-degenerado  $\Pi \subseteq TM$ , vale  $K(\Pi) = c_0$ , então a variedade semi-Riemanniana  $(M, g)$  é dita ter curvatura constante e vale:

$$R(X, Y)Z = c_0 \cdot [g(Y, Z)X - g(X, Z)Y], \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$$

Segue imediatamente da definição que, se  $\nabla^g$  é flat, então  $M$  tem curvatura constante  $c_0 = 0$ , em particular,  $\mathbb{R}_\nu^n$  são variedades semi-Riemannianas de curvatura constante zero.

**Definição 2.5.6.** (Tensor de Ricci) O tensor (de curvatura) de Ricci é dado por

$$Ric_g(X, Y) := \sum_{i=1}^n \varepsilon_i g(R_g(E_i, Y)X, E_i), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M),$$

em que os campos  $\{E_1, \dots, E_n\}$  são um referencial ortonormal e  $\varepsilon_i = g_p(E_i, E_i)$ . Além disso, a curvatura escalar é definida como

$$S_g = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i Ric_g(E_i, E_i),$$

ou seja, a curvatura escalar é o traço do tensor de Ricci.

Por serem traços de formas bilineares simétricas, ambos o tensor de Ricci e a curvatura escalar estão bem definidos, isto é, independem do referencial ortonormal escolhido.

Em coordenadas, os componentes do tensor Ricci e da curvatura escalar são, respectivamente,

$$R_{ij} := (Ric_g)_{ij} = \sum_{k=1}^n R_{ikj}^k, \quad S = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} R_{ij}.$$

## 2.6 IMERSÕES SEMI-RIEMANNIANAS

Essa seção irá apresentar uma classe de aplicações entre variedades que permite a introdução de uma série de exemplos interessantes de variedades semi-Riemannianas imersas em um espaço ambiente. Para além de ser uma imersão entre variedades, será necessário que essas aplicações preservem alguns comportamentos da métrica.

**Definição 2.6.1.** (Imersão semi-Riemanniana) *Dada uma variedade semi-Riemanniana  $(M, g)$ , uma imersão suave  $F : N \rightarrow M$  é dita ser uma imersão semi-Riemanniana se  $(N, F^*g)$  é uma variedade semi-Riemanniana.*

Lembre que  $F^*g$  é um tensor métrico do tipo  $(0, 2)$  em  $N$  definido da forma

$$(F^*g)_p(v, w) = g_{F(p)}(dF_p(v), dF_p(w)), \quad \forall p \in N, \forall v, w \in T_pN.$$

**Proposição 2.6.2.** *Dada  $F : N \rightarrow M$  uma imersão suave, em que  $(M, g)$  é uma variedade semi-Riemanniana de índice  $\nu$ , então  $F$  é uma imersão semi-Riemanniana se, e somente se,  $\forall p \in N$ ,  $dF_p(T_pN)$  é não-degenerado e, visto como subespaço vetorial de  $T_{F(p)}M$ , tem índice  $\mu$ , que é um inteiro  $0 \leq \mu \leq \nu$  fixo (i.e., independente de  $p$ ).  $(N, F^*g)$  nesse caso é uma variedade semi-Riemanniana de índice  $\mu$ .*

Fixemos, ao longo do resto desta seção,  $(M, g)$  como uma variedade semi-Riemanniana e  $F : N \rightarrow M$  uma imersão semi-Riemanniana. Se  $(M, g)$  é uma variedade de Lorentz, então  $(N, h = F^*g)$  só pode ou ser Riemanniana ou ser de Lorentz, e a imersão  $F$  é chamada, respectivamente, ou de *espacial*, ou de *temporal*.

Dado qualquer  $p \in N$ , é possível decompor cada vetor  $v \in T_{F(p)}M$  em  $v = v^\top + v^\perp$ , em que  $v^\top \in dF_p(T_pN)$  e  $v^\perp \in dF_p(T_pN)^\perp$  são ditas as partes *tangente* e *normal* de  $v$ , respectivamente. Assim, um campo vetorial  $V \in \mathfrak{X}(F)$  é dito *tangente* se  $V_p \in dF_p(T_pN)$ ,  $\forall p \in N$ , e *normal* se  $V_p \in dF_p(T_pN)^\perp$ ,  $\forall p \in N$ . Os conjuntos dos campos vetoriais suaves sobre  $F$  tangentes e normais a  $N$  são denotados  $\mathfrak{X}^\top(F)$  e  $\mathfrak{X}^\perp(F)$ , respectivamente.

**Proposição 2.6.3.** *Existe um isomorfismo de  $C^\infty(N)$ -módulos entre  $\mathfrak{X}(N)$  e  $\mathfrak{X}^\top(F)$ , que associa cada campo vetorial  $X$  ao campo vetorial sobre  $F$   $dF \circ X$ , dado por  $(dF \circ X)(p) = dF_p(X_p) \in T_{F(p)}M$ ,  $\forall p \in N$ .*

*Ainda mais, campos vetoriais sobre  $F$  podem ser escritos localmente como campos vetoriais em  $M$  compostos com  $F$ , isto é, dado  $V \in \mathfrak{X}(F)$  e  $p \in N$ , existe um aberto de  $N$  contendo  $p$  e um campo vetorial  $\tilde{V} \in \mathfrak{X}(M)$  tal que  $V = \tilde{V} \circ F$  nesse aberto.*

*Para finalizar, há uma decomposição ortogonal de  $\mathfrak{X}(F)$  entre os campos vetoriais normais e tangentes a  $F$ , isto é,  $\mathfrak{X}(F) = \mathfrak{X}^\top(F) \oplus \mathfrak{X}^\perp(F)$*

**Definição 2.6.4.** *Dados  $V, W \in \mathfrak{X}(F)$ , o produto  $\ll V, W \gg$  é definido como a função real que leva um ponto  $p \in N$  no número  $g_{F(p)}(V_p, W_p)$ .*

**Proposição 2.6.5.** *Dados  $X \in \mathfrak{X}(N)$ ,  $V, W \in \mathfrak{X}(F)$  e  $p \in N$ , um aberto  $U$  contendo  $p$  e campos em  $\mathfrak{X}(M)$  que satisfaçam, em  $U$ ,*

$$\tilde{V} \circ F = V \quad \tilde{W} \circ F = W, \quad \tilde{X} \circ F = dF \circ X,$$

então, vale que:

a)  $\ll V, W \gg = g(\tilde{V}, \tilde{W}) \circ F$ , em  $U$ ;



- b)  $D_X V = (\nabla_X^M \tilde{V}) \circ F$ , em  $U$ ;  
 c)  $X \ll V, W \gg = \ll D_x V, W \gg + \ll V, D_X W \gg$ .

Entender a geometria da subvariedade passa por entender sua geometria intrínseca e sua geometria extrínseca, isso é, a geometria da parte tangente a da parte normal a variedade. Um elemento fundamental desse estudo é o tensor forma.

**Definição 2.6.6.** A aplicação  $C^\infty(M)$ -bilinear  $II : \mathfrak{X}(N) \times \mathfrak{X}(N) \longrightarrow \mathfrak{X}^\perp(F)$  dado por

$$II(X, Y) := (D_X(dF \circ Y))^\perp, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(N),$$

é dito ser o tensor da segunda forma fundamental de  $F$  ou tensor forma de  $F$ .

**Proposição 2.6.7.** Se  $X, Y \in \mathfrak{X}(N)$ , então

$$D_X(dF \circ Y) = dF(\nabla_X^N Y) + II(X, Y).$$

Se o tensor da segunda forma fundamental for indeticamente nulo, então a imersão semi-Riemanniana  $F$  é dita ser *totalmente geodésica*. Essa nomenclatura se justifica através da proposição abaixo.

**Proposição 2.6.8.** Seja  $F : N \rightarrow M$  uma imersão semi-Riemanniana.  $F$  é *totalmente geodésica* se, e somente se, para qualquer geodésica  $\alpha$  em  $N$ ,  $F \circ \alpha$  for uma geodésica em  $M$ .

O teorema abaixo mostra que é possível compreender a curvatura extrínseca de uma subvariedade a partir apenas de sua curvatura intrínseca e do tensor forma.

**Teorema 2.6.9.** (Equações de Gauss-Codazzi) Para  $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(N)$ ,  $V \in \mathfrak{X}^\perp F$ , vale:

- a)  $\ll R^F(X, Y)dF \circ Z, dF \circ W \gg = g_N(R^N(X, Y)Z, W)$   
 $+ \ll II(X, Z), II(Y, W) \gg - \ll II(Y, Z), II(X, W) \gg$ ,  
 b)  $\ll R^F(X, Y)dF \circ Z, V \gg = \ll (D_X II)(Y, Z) - (D_Y II)(X, Z), V \gg$ ,  
 em que  $R^F$  representa a curvatura induzida pela conexão sobre  $F$ , e

$$(D_X II)(Y, Z) = D_X(II(Y, Z)) - II(\nabla_X^N Y, Z) - II(\nabla_X^N Z, Y).$$

As duas equações são chamadas, respectivamente, de equação de Gauss e equação de Codazzi.

**Definição 2.6.10.** (Campo vetorial de curvatura média) O campo vetorial de curvatura média  $\vec{H}$  de  $F$  é, ponto a ponto,

$$\vec{H}_p = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i II(e_i, e_i),$$

em que  $\{e_1, \dots, e_n\}$  é uma base ortonormal qualquer de  $T_p N$  e  $\varepsilon_i = g_p(e_i, e_i)$ . Um ponto  $p$  de  $N$  é dito ser umbílico se,  $\forall x, y \in T_p N$ , vale

$$II_p(x, y) = (g_N)_p(x, y) \cdot \vec{H}_p.$$

Uma subvariedade  $N$  é dita ser totalmente umbílica se todo ponto  $p \in N$  for umbílico.

### 2.6.1 Imersões semi-Riemannianas de codimensão 1

A codimensão de uma imersão semi-Riemanniana  $F : N^k \rightarrow M^n$  é a diferença  $n - k$  entre as dimensões das variedades. É interessante estudar o cenário em que essa diferença é 1, isto é, em que  $k + 1 = n$ , pois aqui há apenas uma direção normal a  $N$ . Nesse caso, as subvariedades são chamadas de *hipersuperfícies semi-Riemannianas*. Importantes operadores associados a segunda forma fundamental podem ser definidos:

**Definição 2.6.11.** (Operadores de Weingarten) *Sejam  $(N^n, h)$  e  $(M^{n+1}, g)$  variedades semi-Riemannianas e  $F : N \rightarrow M$  uma imersão semi-Riemanniana. Para um campo vetorial unitário  $U \in \mathfrak{X}^\perp(F)$ , define-se a segunda forma fundamental associada a  $U$  como o tensor de tipo  $(0, 2)$  em  $N$  dado pela expressão*

$$\mathcal{K}_U(X, Y) := \ll II(X, Y), U \gg, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(N).$$

O chamado operador de Weingarten associado a  $U$  é o tensor de tipo  $(1, 1)$  em  $N$  determinado através de

$$h(S_U(X), Y) = \mathcal{K}_U(X, Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(N).$$

Esses operadores são bastante úteis para entender a geometria das hipersuperfícies. Por exemplo, um fato importante é que, caso  $S_U$  seja escalar, a subvariedade em questão é totalmente umbílica.

**Proposição 2.6.12.** *Seja  $f \in C^\infty(M)$ ,  $c \in \mathbb{R}$  um valor regular para  $f$  e  $N := f^{-1}(c)$  conexa e não vazia. Então a inclusão  $i : N \hookrightarrow M$  é uma imersão semi-Riemanniana se, e somente se,  $\nabla^g f(p)$  não é luminoso, para todo  $p \in N$ .*

*Demonstração.* Basta lembrar que, se  $p \in N$ ,  $\nabla^g f(p)^\perp = T_p N$ , e  $T_p N$  é não degenerado se, e somente se,  $T_p N^\perp$  é não degenerado. Mas este é o espaço gerado por  $\nabla^g f(p)$ , então é não degenerado se  $\nabla^g f(p)$  não for luminoso. Ainda mais, por continuidade,  $\nabla^g f|_N$  é ou tipo-tempo ou tipo-espaço, o que mantém o índice fixo em cada  $T_p N$ .

Ademais, se  $\nabla^g f|_N$  é tipo tempo, então, para cada  $p \in N$ ,  $T_p N^\perp$  tem índice 1, logo,  $ind(N) = ind(M) - 1$ , e, por um raciocínio análogo, se  $\nabla^g f|_N$  é tipo-espaço, conclui-se que  $ind(N) = ind(M)$ .  $\square$

**Exemplo 2.6.13.** As hiperquádricas são um exemplo de subvariedades de  $\mathbb{R}_\nu^{n+1}$  de codimensão 1, pois a inclusão é uma imersão semi-Riemanniana de codimensão 1.

De fato, o gradiente de  $\mathcal{Q}$  é igual a  $2\mathcal{P}$ , logo é tipo-espaço nas pseudoesferas e tipo-tempo nos pseudohiperbolóides. Sendo assim,  $\mathbb{S}_\nu^n(r)$  tem realmente índice  $\nu$ , e  $\mathbb{H}_{\nu-1}^n(r)$  tem índice  $\nu - 1$ .

Fixe agora uma hiperquádrica  $N := Q^{-1}(\varepsilon r^2)$  em que  $\varepsilon = \pm 1$ . Se  $p = (p^1, \dots, p^{n+1})$ , então

$$g_p(\mathcal{P}(p), \mathcal{P}(p)) = (\eta_\nu)(p^i \partial_i, p^i \partial_i) = \langle p, p \rangle = \mathcal{Q}(p),$$

sendo assim, em  $N$ , vale

$$\frac{\nabla^g f}{|\nabla^g f|} = \frac{2\mathcal{P}}{2|\mathcal{P}|} = \frac{\mathcal{P}}{r},$$

ou seja,  $U := \mathcal{P}/r$  é um campo vetorial unitário normal às hiperquádricas. É imediato da definição da conexão plana que  $\nabla_V U = V/r$ , para todo  $V \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}_\nu^n)$ . Sejam agora  $V, W \in \mathfrak{X}(N)$  e computemos

$$\begin{aligned} -\frac{\eta_\nu(V, W)}{r} &= -\eta_\nu(\nabla_V U, W) = \eta_\nu(U, \nabla_V W) \\ &= \eta_\nu(U, (\nabla_V W)^\perp) = \eta_\nu(U, II(V, W)), \end{aligned} \quad (1)$$

por outro lado,

$$-\frac{\eta_\nu(V, W)}{r} = -\varepsilon \frac{\eta_\nu(V, W)\eta_\nu(U, U)}{r};$$

então segue que

$$II(V, W) = -\varepsilon \eta_\nu(V, W)U/r.$$

A expressão obtida para o tensor da segunda forma fundamental revela que as hiperquádricas são variedades totalmente umbílicas, com campo vetorial de curvatura média  $\vec{H} = -\varepsilon U/r$ . A equação 1 mostra que  $S_U(V) = -V/r$ , ou seja,  $S_U = -Id/r$ , em que  $Id$  é a identidade, portanto  $S_U$  é de fato escalar.

Ainda mais, como  $\mathbb{R}_\nu^{n+1}$  tem curvatura constante igual a zero, a equação de Gauss dá que:

$$\begin{aligned} (i^* \eta_\nu)(R^N(X, Y)Z, W) &= \eta_\nu(II(Y, Z), II(X, W)) - \eta_\nu(II(X, Z), II(Y, W)) \\ &= \frac{1}{r^2} \varepsilon \left( \eta_\nu(Y, Z)\eta_\nu(X, W) - \eta_\nu(X, Z)\eta_\nu(Y, W) \right) \end{aligned}$$

Portanto, as pseudoesferas de raio  $r$  possuem curvatura constante positiva igual a  $1/r^2$ , enquanto os pseudohiperbolóides possuem curvatura constante negativa igual a  $-1/r^2$ .

## 2.7 A APLICAÇÃO EXPONENCIAL

A aplicação exponencial provê uma relação importante entre a variedade e seus espaços tangentes, que possui aplicações diversas, como em resultados sobre *causalidade*<sup>3</sup> de variedades de Lorentz.

**Definição 2.7.1.** A aplicação exponencial de uma variedade afim  $(M, \nabla)$  é

$$\exp : v \in D \subseteq TM \longrightarrow \gamma_v(1) \in M,$$

em que  $\gamma_v$  é a geodésica maximal com velocidade inicial  $v$ , e o conjunto  $D$  é

$$D = \{v \in TM : 1 \in \text{dom}(\gamma_v)\}.$$

O conjunto  $D$  é um aberto de  $TM$  que contém  $0_p \in T_pM$ , para todo  $p \in M$ , e  $\exp$  é uma aplicação suave. Ainda mais, se  $t \in [0, 1]$  e  $v \in D$ , então  $t \cdot v \in D$  e  $\exp(t \cdot v) = \gamma_v(t)$ .

Também é definida a aplicação exponencial ponto a ponto: dado  $p \in M$ ,  $D_p := D \cap T_pM$  e  $\exp_p := \exp|_{D_p}$ . Note que  $D_p$  é um aberto estrelado.

**Proposição 2.7.2.** Seja  $(M, \nabla)$  uma variedade afim, e  $p \in M$ . Então, a aplicação  $d(\exp)_{0_p}$  coincide com o isomorfismo canônico entre  $T_{0_p}(T_pM)$  e  $T_pM$ .

Segue imediatamente do teorema da função inversa que, dado  $p \in M$ , existe um aberto  $U$  de  $M$  contendo  $p$  e um aberto  $V \subseteq D_p$  de  $T_pM$  contendo  $0_p$  de modo que a aplicação  $\exp|_V : V \longrightarrow U$  seja um difeomorfismo. Ainda mais, sempre é possível escolher o aberto  $V$  como sendo estrelado. Neste caso, a vizinhança  $U$  é dita ser uma *vizinhança normal* de  $p$ .

**Proposição 2.7.3.** (Geodésicas radiais) Dados  $(M, \nabla)$  uma variedade afim,  $p \in M$ ,  $U$  uma vizinhança normal de  $p$  e  $V := \exp_p^{-1}(U)$ , então, para todo  $q \in U$ , existe uma única geodésica  $\rho_q : [0, 1] \longrightarrow U$  tal que  $\rho_q(0) = p$  e  $\rho_q(1) = q$ . Essa geodésica, chamada geodésica radial, satisfaz

$$\rho'_q(0) = (\exp_p|_V)^{-1}(q).$$

**Corolário 2.7.4.** Quaisquer dois pontos em uma variedade afim e conexa  $(M, \nabla)$  podem ser conectados através de uma geodésica quebrada.

**Teorema 2.7.5.** (Sistema de coordenadas normais) Seja  $(M, \nabla)$  uma variedade afim. Para qualquer  $p \in M$  e qualquer base  $\{e_1, \dots, e_n\}$  de  $T_pM$ , existe um sistema de coordenadas  $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$  em que  $U$  é uma vizinhança normal,  $\frac{\partial}{\partial x^i}|_p = e_i$ , para cada  $i$ , e os símbolos de Christoffel se anulam em  $p$ .

Se  $\nabla$  for a conexão de Levi-civita relacionado a uma métrica semi-Riemanniana  $g$ , então o sistema de coordenadas do parágrafo anterior pode ser escolhido de modo que satisfaça  $g_{ij}(p) = \varepsilon_i \delta_{ij}$  e  $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}(p) = 0$ , para todo  $i, j$  e  $k$ .

<sup>3</sup> Essa ideia será definida com maior precisão a partir do capítulo seguinte.

Na relatividade geral, a existência de tal sistema de coordenadas normais dá uma implementação matematicamente precisa do princípio da equivalência de Einstein. Fixe agora  $(M, g)$  uma variedade semi-Riemanniana.

**Teorema 2.7.6.** (Lema de Gauss) *Sejam  $p \in M$  e  $x \in D_p$ , em que  $(M, g)$  é uma variedade semi-Riemanniana com conexão de Levi-Civita  $\nabla^g$ . Então, para qualquer  $v \in T_p M$ , vale que*

$$g_{\exp_p(x)}(d(\exp_p)_x(v_x), d(\exp_p)_x(x_x)) = g_p(v, x).$$

*Aqui,  $v_x$  e  $x_x$  são, respectivamente, os vetores  $v$  e  $x$  levados de  $T_p M$  até  $T_x(T_p M)$  via o isomorfismo canônico.*

**Teorema 2.7.7.** *Uma vizinhança convexa  $U$  de um ponto  $p \in M$  é uma vizinhança de  $p$  que é vizinhança normal de todo ponto  $q \in U$ . Dado um aberto  $V$  qualquer e um ponto  $p \in V$ , existe sempre uma vizinhança convexa  $W$  de  $p$  contida em  $V$ .*

**Definição 2.7.8.** *Uma vizinhança convexa  $U$  é dita simples se seu fecho é compacto e está contido em outra vizinhança convexa.*

Qualquer variedade diferenciável é localmente compacta, logo, a vizinhança  $W$  do teorema anterior pode sempre ser tomada simples.

**Definição 2.7.9.** *Em uma vizinhança convexa  $U$ , dados dois pontos  $p$  e  $q$ , o vetor deslocamento  $\vec{pq}$  de  $p$  a  $q$  é definido como  $\rho'_q(0)$ , em que  $\rho_q$  é a geodésica radial de  $p$  a  $q$ .*

**Proposição 2.7.10.** *Seja  $U$  uma vizinhança convexa em  $M$ . Então, a aplicação  $U \times U \ni (p, q) \rightarrow \vec{pq} \in TM$  é suave.*

A aplicação exponencial permite aproximar localmente a geometria de variedades à geometria de um espaço flat  $\mathbb{R}^n$ . Isso leva a alguns resultados interessantes, em especial, os seguintes, que tratam da geometria local de variedades de Lorentz. Considere agora  $(M, g)$  como uma variedade de Lorentz.

**Lema 2.7.11.** *Seja  $p \in M$  um ponto qualquer. Se uma curva suave  $\beta : [a, b] \rightarrow T_p M$  é tal que  $\exp_p \circ \beta$  é tipo-tempo, então  $\beta$  fica contida em um único cone de tempo. O resultado ainda vale se tipo-tempo for trocado por causal e cone de tempo por cone causal.*

**Proposição 2.7.12.** *Se em uma vizinhança convexa de  $p \in M$  existe uma curva tipo-tempo conectando  $p$  a um ponto  $q$ , então a geodésica radial de  $p$  a  $q$  é a única (a menos de reparametrização) dentre as curvas causais contidas em  $U$  e que conectam  $p$  a  $q$  que possui o comprimento Lorentziano máximo.*

## 2.8 PONTOS CONJUGADOS E PONTOS FOCAIS

Nesta seção são introduzidas as noções de pontos conjugados e pontos focais. O principal objetivo aqui é enunciar um teorema sobre causalidade que é de suma importância para os próximos capítulos deste trabalho. Fixe  $(M, g)$  variedade semi-Riemanniana ao longo desta seção.

**Definição 2.8.1.** *Um campo vetorial  $J \in \mathfrak{X}(\alpha)$ , em que  $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M$  é uma geodésica, é dito ser um campo de Jacobi se satisfaz*

$$J'' + R(J, \alpha')\alpha' = 0,$$

, em que é usada a notação  $V' = \frac{DV}{dt}$ , para  $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$ .

**Proposição 2.8.2.** *Dados  $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M$ ,  $t_0 \in I$ ,  $v, w \in T_{\alpha(t_0)}M$ , então existe um único campo de Jacobi  $J$  tal que  $J(t_0) = v$  e  $J'(t_0) = w$ .*

Esse resultado implica imediatamente que o espaço dos campos de Jacobi tem duas vezes a dimensão da variedade, devido ao isomorfismo entre esse e  $T_{\alpha(t_0)}M \oplus T_{\alpha(t_0)}M$ , quando fixado um  $t_0 \in I$ .

É importante destacar que reparametrizações afim preservam campos de Jacobi. Agora, é dada uma motivação geométrica para o estudo de campos de Jacobi:

**Teorema 2.8.3.** *Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  uma geodésica, e seja  $\sigma : [a, b] \times (-\delta, \delta)$  uma variação de  $\alpha$ , i.e., uma aplicação suave tal que  $\sigma(t, 0) = \alpha(t)$ . Suponha ainda que, para cada  $s \in (-\delta, \delta)$  fixo, a curva  $t \in [a, b] \rightarrow \sigma(t, s)$ , denotada  $\alpha^s$ , seja uma geodésica. Então, o campo variação  $V^\sigma$  de  $\sigma$ , dado por  $V(t) = (\beta^t)'(0)$ , em que  $\beta^t$  é a função  $s \in (-\delta, \delta) \rightarrow \sigma(t, s)$ , é um campo de Jacobi.*

**Definição 2.8.4.** *Um campo de Jacobi  $J \in \mathfrak{X}(\alpha)$  é tangente a  $\alpha : I \rightarrow M$  se  $V = h \cdot \alpha'$ , para algum  $h \in C^\infty(I)$ .  $J$  é dito perpendicular se  $\langle J, \alpha' \rangle = 0$  sempre.*

De fato, se  $J$  é tangente a  $\alpha$ , então  $J(t) = (c \cdot +d)(\alpha'(t))$ . Além disso, sempre vale que  $\langle J(t), \alpha'(t) \rangle = a \cdot t + b$ , para  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ .

**Definição 2.8.5.** *Pontos conjugados* *Seja  $\alpha : I \rightarrow M$ . Dados  $a, b \in I$ , diz-se que os pontos  $\alpha(a)$  e  $\alpha(b)$  são conjugados ao longo de  $\alpha$  se existe um campo de Jacobi  $J$  que satisfaz  $J(a) = 0 \in T_{\alpha(a)}M$  e  $J(b) = 0 \in T_{\alpha(b)}M$ .*

*O índice de conjugação do par de pontos  $\alpha(a)$  e  $\alpha(b)$  é a dimensão do espaço dos campos de Jacobi que satisfazem a propriedade descrita acima.*

Como reparametrizações afim preservam campos de Jacobi, sempre é possível considerar pontos conjugados como sendo extremos de segmentos geodésicos  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ , e até mesmo assumir que  $a = 0$  e  $b = 1$ .

**Teorema 2.8.6.** *Dada uma geodésica  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ . Equivalem:*

- a) *Os pontos  $\alpha(a)$  e  $\alpha(b)$  são conjugados ao longo de  $\alpha$ ;*
- b) *Existe uma variação geodésica  $\sigma : [a, b] \times (-\delta, \delta)$  de  $\alpha$  cujas curvas longitudinais começam no ponto  $\alpha(a)$  e o campo vetorial variação  $V^\sigma$  é não nulo e satisfaz  $V^\sigma(b) = 0 \in T_{\alpha(b)}M$ .*
- c) *O diferencial da aplicação exponencial em  $\alpha(a)$  é singular em  $(b - a)\alpha'(a)$ .*

*Se  $\alpha$  for luminosa, é possível tomar  $\sigma$  como no segundo item de modo que todas as curvas longitudinais sejam também luminosas.*

Note que o terceiro item significa que  $(b - a)\alpha'(a)$  é um ponto crítico da aplicação exponencial em  $\alpha(a)$ .

Esse teorema permite dar uma interpretação geométrica da existência de pontos conjugados ao longo de  $\alpha$ : pontos conjugados  $\alpha(a)$  e  $\alpha(b)$  devem ser entendidos através de uma família de geodésicas que sai de  $\alpha(a)$  e converge, ao menos em primeiro ordem, para  $\alpha(b)$ .

Esse conceito pode ser generalizado para uma família de geodésicas emanando de uma subvariedade da seguinte forma:

**Definição 2.8.7.** *Seja  $N \subseteq M$  uma subvariedade semi-Riemanniana da variedade semi-Riemanniana  $(M, g)$  e  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  uma geodésica normal a  $N$ , i.e.,  $\alpha(a) \in N$  e  $\alpha'(a) \in (T_{\alpha(a)}N)^\perp$ . Um  $N$ -campo de Jacobi sobre  $\alpha$  é um campo de Jacobi  $J$  que satisfaz*

- $J(a) \in T_{\alpha(a)}N$ ,
- $\frac{DJ}{dt}(a)^\top = -S_{\alpha'(a)}(J(a))$ .

*Se existe um  $P$ -campo de Jacobi  $J$  sobre  $\alpha$  tal que  $J(b) = 0 \in T_{\alpha(b)}N$ , então  $\alpha(b)$  é um ponto focal de  $N$  ao longo de  $\alpha$ .*

Aqui,  $S_{\alpha'(a)}$  é o operador forma de  $N$  com relação ao vetor normal  $\alpha'(a)$ . Reparametrizações afins de  $N$ -campos de Jacobi precisam ser crescentes para preservar pontos focais, uma vez que há uma antissimetria entre o ponto e a subvariedade, diferente do caso dos pontos conjugados.

Caracteriza-se pontos focais de maneira análoga a como se fez com pontos conjugados através do seguinte teorema:

**Teorema 2.8.8.** *Dada uma geodésica  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  normal a uma subvariedade  $P$ , equivalem:*

- a)  *$\alpha(b)$  é ponto focal de  $P$  ao longo de  $\alpha$ ;*
- b) *Existe uma variação geodésica  $\sigma : [a, b] \times (-\delta, \delta)$  de  $\alpha$  cujas curvas longitudinais são normais a  $P$  e o campo vetorial variação  $V^\sigma$  é não nulo e satisfaz  $V^\sigma(b) = 0 \in T_{\alpha(b)}M$ .*

*Se  $\alpha$  for luminosa, é possível tomar  $\sigma$  como no segundo item de modo que todas as curvas longitudinais sejam também luminosas.*

Finalmente, o estudo de pontos focais e pontos conjugados em conjunto com o estudo de aspectos variacionais de geodésicas fornece o seguinte teorema sobre causalidade em variedades de Lorentz ([8], Teorema 10.51).

**Teorema 2.8.9.** *Seja  $(M, g)$  uma variedade de Lorentz e  $N \subseteq M$  uma subvariedade tipo-espaço qualquer. Se  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  é uma curva causal partindo de  $N$  até  $q$  que não é uma geodésica luminosa com  $\alpha'(a)$  normal a  $N$  e sem pontos focais de  $N$  antes de  $q$ , então existe uma curva tipo-tempo de  $N$  a  $q$  arbitrariamente próxima a  $\alpha$ .*

O caso  $N = \{p\}$  se traduz para o fato de que toda curva causal de  $p$  a  $q$  pode sofrer uma deformação de ponto fixo para uma curva tipo-tempo a menos que seja uma geodésica luminosa sem pontos conjugados antes de  $q$ .



### 3 ESPAÇOS-TEMPOS E CAUSALIDADE

Na primeira seção desse capítulo é definido o modelo geométrico da Relatividade Geral, chamado *espaço-tempo*. A segunda seção trata das equações de Einstein, que determinam quando um espaço-tempo é fisicamente válido. As seções seguintes são reservadas ao estudo da *causalidade* dos espaços-tempos, isto é, o estudo das curvas causais neles presentes.

#### 3.1 ESPAÇOS-TEMPOS

Os espaços-tempos são definidos a partir da adição da noção de *orientação temporal* às variedades de Lorentz conexas.

**Definição 3.1.1.** (Orientação temporal) *Uma variedade de Lorentz  $(M, g)$  é dita ser temporalmente orientável se admite uma orientação temporal, i.e., uma função  $\tau$  que leva pontos  $p \in M$  em um dos dois cones de tempo  $\tau(p) \subseteq T_p M$ , e que é suave no sentido de que, para todo  $p \in M$ , existe uma vizinhança  $U$  de  $p$  e um campo vetorial temporal  $X \in \mathfrak{X}(U)$  tal que  $X_q \in \tau(q)$ ,  $\forall q \in U$ .*

*Uma variedade de Lorentz  $(M, g)$  munida de uma orientação temporal é dita ser temporalmente orientada.*

A orientação temporal serve, dentro da relatividade geral, para descrever matematicamente a diferença entre passado e futuro<sup>1</sup>.

**Proposição 3.1.2.** *Uma variedade de Lorentz  $(M, g)$  temporalmente orientável com  $M$  conexo admite exatamente duas orientações temporais.*

*Demonstração.* Fixe  $\tau$  uma orientação temporal em  $(M, g)$ . É possível definir uma segunda orientação temporal, dita  $-\tau$ , que associa, para cada  $p \in M$ , o cone oposto à  $\tau(p)$ , denotado  $-\tau(p)$ . Essa segunda orientação é claramente suave, pois para cada ponto  $p \in M$  existe um aberto  $U \subseteq M$  e  $X \in \mathfrak{X}(U)$  temporal tal que  $X_q \in \tau(q)$ , para todo  $q \in U$ , pela suavidade de  $\tau$ , e então o campo vetorial  $-X \in \mathfrak{X}(U)$  garante o mesmo para  $-\tau$ .

Portanto, pelo menos duas orientações temporais existem em  $M$ . Considere agora  $\tilde{\tau}$  outra orientação temporal. Defina os conjuntos

$$\{p \in M : \tilde{\tau}(p) = \tau(p)\}, \quad \{p \in M : \tilde{\tau}(p) = -\tau(p)\}.$$

Estes são disjuntos e sua união é todo o  $M$  e, por permanência de sinal de  $g(X, \tilde{X})$ , em que  $X, \tilde{X} \in \mathfrak{X}(U)$  são campos vetoriais temporais localmente definidos em um aberto  $U$ ,

<sup>1</sup> Um fato interessante é que a distinção entre passado e futuro, embora incorporada na Relatividade Geral por meio da noção geométrica de orientação temporal, fisicamente deve se originar fora dessa, possivelmente pela seta do tempo termodinâmica, como apontado pela primeira vez pelo astrônomo inglês Sir Arthur Eddington (1882-1944) em seu livro *The Nature of the Physical World*, de 1927.

segue que são ambos abertos, logo também são fechados, e, por conexidade, um deles deve ser vazio. Ou seja, ou  $\tilde{\tau} = \tau$ , ou  $\tilde{\tau} = -\tau$ .  $\square$

**Definição 3.1.3.** *Seja  $(M, g, \tau)$  uma variedade de Lorentz temporalmente orientada. Uma curva causal  $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M$  é dita ser futuro-dirigida se  $\alpha'(t) \in \overline{\tau(\alpha(t))}$ ,  $\forall t \in I$ . Dualmente,  $\alpha$  é dita ser passado-dirigida se  $\alpha'(t) \in \overline{-\tau(\alpha(t))}$ ,  $\forall t \in I$ .*

*Analogamente, diz-se que um campo vetorial  $X \in \mathfrak{X}(M)$  é futuro-dirigido [resp. passado-dirigido] se  $X_p \in \tau(p)$  [resp.  $-\tau(p)$ ].*

Relembre que  $\overline{\tau(\alpha(t))}$  é exatamente igual ao cone causal que contém  $\alpha(t)$ .

Na física, a noção de direção futura/passada em curvas causais permite interpretar quando um sinal enviado de um ponto até outro está indo para o passado ou para o futuro.

**Definição 3.1.4.** *Um extremo futuro de uma curva causal futuro-dirigida  $\alpha : [0, b) \rightarrow M$ , com  $b \leq \infty$ , é um ponto  $p \in M$  tal que, para toda sequência  $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq [0, b)$  com  $s_n \rightarrow b$ , vale  $\alpha(s_n) \rightarrow p$ . Nesse caso,  $\alpha$  é dita ser futuro-extensível. Caso  $\alpha$  não possua nenhum extremo futuro, tal curva é dita futuro-inextensível.*

Observe que uma curva causal futuro-dirigida ser futuro-extensível é o mesmo que possuir uma extensão contínua à direita de seu domínio. Passado-inextensibilidade e extremos passados são definidos dualmente. A noção de futuro e passado extensibilidade é invariante por reparametrização.

Em sequência se define o modelo geométrico base para a relatividade geral.

**Definição 3.1.5.** (Espaço-tempo) *Um espaço-tempo é uma variedade de Lorentz temporalmente orientada  $(M, g, \tau)$  com a variedade  $M$  conexa.*

**Definição 3.1.6.** (Isometria) *Dadas duas variedades semi-Riemannianas  $(N, g_N)$  e  $(M, g_M)$ , uma aplicação suave  $F : N \rightarrow M$  é uma isometria local se, para todo  $p \in N$ ,  $dF_p : T_p N \rightarrow T_{F(p)} M$  é um isomorfismo. Ainda, se  $F$  é um difeomorfismo e  $F^* g_M = g_N$ , então  $F$  é dita ser uma isometria.*

É imediato do teorema da função inversa que se  $F$  é uma isometria local, então, para cada  $p \in N$ , existe uma vizinhança  $U$  de  $p$  tal que  $F|_U$  é uma isometria de  $U$  a  $F(U)$ , estes vistos como variedades semi-Riemannianas com a métrica induzida.

As isometrias locais preservam todas as noções de caráter local na variedade semi-Riemanniana, como geodésicas, tensor de curvatura, tensor de Ricci e curvatura escalar.

**Definição 3.1.7.** *Dados dois espaços-tempos  $(N, g_N, \tau_N)$  e  $(M, g_M, \tau_M)$ , uma isometria  $F : N \rightarrow M$  é dita preservar [resp. reverter] a orientação temporal se*

$$dF_p(v) \in \tau_M(F(p)) \text{ [resp. } dF_p(v) \in -\tau_M(F(p)) \text{]}, \quad \forall p \in N, \forall v \in \tau_N(p).$$

Se existe uma isometria que preserva orientação temporal entre dois espaços-tempos, então estes são indistinguíveis na Relatividade.

Uma maneira de construir novos exemplos de espaços-tempos é através de quocientes por grupos de difeomorfismos.

**Definição 3.1.8.** (Grupo propriamente descontínuo) *Um grupo  $\Gamma$  de difeomorfismos em uma variedade  $M$  é propriamente descontínuo (e age livremente) se:*

- a) *para todo  $p \in M$ , existe uma vizinhança  $U_p$  de  $p$  de modo que se  $\phi(U_p) \cap U_p \neq \emptyset$ , para algum  $\phi \in \Gamma$ , então  $\phi = id$ ;*
- b) *se  $p, q \in M$  são tais que não existe  $\psi \in \Gamma$  com  $\psi(p) = q$ , então existem vizinhanças  $U_p$  e  $V_q$  de  $p$  e  $q$ , respectivamente, de modo que  $\phi(U_p) \cap V_q = \emptyset$ ,  $\forall \phi \in \Gamma$ .*

**Definição 3.1.9.** (Aplicação de recobrimento semi-Riemanniano) *Uma aplicação de recobrimento semi-Riemanniano é uma aplicação de recobrimento suave entre duas variedades semi-Riemannianas que é também uma isometria local.*

**Teorema 3.1.10.** *Se  $\Gamma$  é um grupo de isometrias de uma variedade semi-Riemanniana  $N$  que é propriamente descontínuo e age livremente sobre  $N$ , então existe uma única maneira de tornar  $N/\Gamma$  uma variedade semi-Riemanniana de modo que  $\pi$  seja uma aplicação de recobrimento semi-Riemanniano.*

*Demonstração.* ([8], Corolário 7.12). □

**Exemplo 3.1.11.** (Espaço-tempo de Minkowski)  $(\mathbb{R}_1^n, \eta_1, \tau)$ , com  $n \geq 2$  e  $\tau(p)$  selecionado o cone de tempo com primeira coordenada positiva em  $T_p M \cong \mathbb{R}_1^n$  é um exemplo de espaço-tempo, conhecido como *espaço-tempo padrão de Minkowski*.

É referido como *espaço-tempo de Minkowski de dimensão  $n$* , ( $n \geq 2$ ) qualquer espaço-tempo que admita uma isometria preservando orientação temporal para o espaço-tempo padrão de Minkowski  $\mathbb{R}_1^n$ .

Na física, se assume em geral que  $n = 4$ , mas essa restrição é desnecessária do ponto de vista geométrico, e, de qualquer modo, conceitualmente se faz importante considerar  $n \geq 2$  qualquer.

## 3.2 EQUAÇÕES DE CAMPO DE EINSTEIN

Para um espaço-tempo  $(M, g)$  ser considerado fisicamente possível sua métrica precisa satisfazer as *equações de campo de Einstein*

$$Ric_g - \frac{1}{2}S \cdot g + \Lambda \cdot g = 8\pi T, \quad (2)$$

em que  $Ric_g$  é o tensor de Ricci,  $S$  é a curvatura escalar,  $\Lambda \in \mathbb{R}$  é a chamada *constante cosmológica* e  $T$  um tensor do tipo  $(0, 2)$ , conhecido como *tensor energia-momento*.<sup>2</sup>

<sup>2</sup> Aqui são adotadas unidades em que a constante de Newton  $G$  e a velocidade da luz no vácuo  $c$  sejam ambas iguais a um.

O tensor energia-momento descreve a interação da matéria e energia do universo com o campo gravitacional, que é descrito pelo tensor métrico  $g$ , enquanto a constante cosmológica descreve o comportamento da gravitação em regiões do universo em que o conteúdo de matéria ou energia é desprezível. Essas regiões são chamadas de vácuo ou espaço vazio, embora necessariamente ainda contenham campo gravitacional, uma vez que  $g$  ainda está definida aí.

Evidentemente, qualquer espaço-tempo pode satisfazer as equações de campo de Einstein se for escolhido um tensor de energia-momento adequado, mas as possíveis escolhas são severamente restringidas por considerações físicas externas à Relatividade, por exemplo advindas do Eletromagnetismo ou da Física de Partículas.

O tensor de energia-momento pode assumir diversas formas, mas neste trabalho são consideradas apenas tensores das seguintes:

$$T = 0, \quad T = (\rho + p)(\tilde{U} \otimes \tilde{U}) + p \cdot g. \quad (3)$$

A primeira expressão para  $T$  representa uma *solução de vácuo*. A segunda expressão representa um *fluido ideal*, em que  $p, \rho \in C^\infty(M)$  são a pressão e densidade do fluido, respectivamente, e  $\tilde{U}$  é a 1-forma metricamente associada a um campo  $U$  cujas curvas integrais modelam as trajetórias no espaço-tempo de uma família de observadores movendo-se ao longo das curvas integrais do campo de velocidade do fluido, ou seja, que diferem destas apenas por uma reparametrização. Mais precisamente, se pede que  $g(U, U) = -1$ . A presença da métrica  $g$  no tensor energia-momento codifica a forma precisa como o campo gravitacional interage com este.

Se  $(M, g)$  é uma solução para as equações de campo de Einstein e  $M/\Gamma$  é o quociente de  $M$  por um grupo de isometrias  $\Gamma$ , então  $M/\Gamma$  é solução para as equações de Einstein se o tensor energia-momento se comporta bem sob a isometria local  $\pi : M \rightarrow M/\Gamma$ .

**Exemplo 3.2.1.** O espaço-tempo de Minkowski  $\mathbb{R}_1^n$  é flat, isto é, sua curvatura é zero. Sendo assim, as equações de Einstein são trivialmente satisfeitas para uma constante cosmológica  $\Lambda = 0$  e para  $T = 0$ . Logo, trata-se de uma solução de vácuo.

**Exemplo 3.2.2.** (*espaços-tempos de Sitter e anti-de Sitter*) Seja  $N := \mathcal{Q}^{-1}(\varepsilon) \subseteq \mathbb{R}_\nu^n$ , com  $\varepsilon = \pm 1$  e  $\nu = \frac{3-\varepsilon}{2}$ , em que  $\mathcal{Q}$  é a função definida no exemplo 2.2.6 sobre hiperquádricas. Denote  $i^*\eta_\nu =: g$ . Então, com a orientação temporal induzida em  $N$  pela orientação de  $\mathbb{R}_\nu^n$ ,  $(N, g)$  é um espaço-tempo. Relembre que  $N$  tem curvatura constante igual a  $\varepsilon$ , então, seu tensor de curvatura é

$$R^N(X, Y)Z = \varepsilon[g(Y, Z)X - g(X, Z)Y] \quad , \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(N).$$

Fixando  $\{E_1, \dots, E_n\}$  uma frame ortonormal em  $N$ , com  $\varepsilon_i = g(E_i, E_i)$ , e escrevendo

$X, Y \in \mathfrak{X}(N)$  como  $X^i E_i$  e  $Y^i E_i$ , obtém-se

$$\begin{aligned} Ric_g(X, Y) &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i g(R^N(E_i, Y)X, E_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \varepsilon [g(Y, X)g(E_i, E_i) - g(E_i, X)g(Y, E_i)] \\ &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \varepsilon g(Y, X) \varepsilon_i - \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \varepsilon X^i Y^i \\ &= \varepsilon(n-1)g(X, Y). \end{aligned}$$

Ou seja,  $Ric_g = \varepsilon(n-1) \cdot g$ . Por outro lado, a curvatura escalar  $S$  é

$$S = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i Ric_g(E_i, E_i) = \varepsilon n(n-1),$$

e portanto o tensor de Einstein  $G$  fica da forma

$$G = Ric_g - \frac{1}{2}S \cdot g = \varepsilon \left( (n-1) - \frac{n(n-1)}{2} \right) \cdot g = \varepsilon \frac{(n-1)(2-n)}{2} \cdot g.$$

Assim,  $(N, g)$  é uma solução de vácuo para as equações de Einstein com constante cosmológica

$$\Lambda = \varepsilon \frac{(n-1)(n-2)}{2},$$

e, portanto, o espaço de recobrimento de  $(N, g)$  também o é.

Em resumo, se  $\varepsilon = 1$ , então  $\nu = 1$  e  $N = \mathbb{S}_1^n \subseteq \mathbb{R}_1^n$ , logo o espaço de Sitter, que é recobrimento universal de  $N$ , é um espaço-tempo de curvatura constante igual a 1 que é solução das equações de Einstein com constante cosmológica

$$\Lambda = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Por outro lado, se  $\varepsilon = -1$ , então  $\nu = 2$  e  $N = \mathbb{H}_1^n \subseteq \mathbb{R}_2^n$ , logo o espaço anti-de Sitter, que é recobrimento universal de  $N$ , é um espaço-tempo de curvatura constante igual a  $-1$  e que é solução das equações de Einstein com constante cosmológica

$$\Lambda = -\frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Os espaços-tempos de Sitter e anti-de Sitter são modelos muito importante para a relatividade geral por possuírem curvatura constante positiva e negativa, respectivamente.

**Exemplo 3.2.3.** (*Espaços-tempos de Robertson-Walker*) Seja  $N$  um espaço de Robertson-Walker simples, isto é,  $N = I \times_f S$ , em que  $I \subseteq \mathbb{R}$  é um intervalo aberto,  $f \in C^\infty(I)$  é uma função estritamente positiva e  $S$  é igual a  $\mathbb{R}_0^n$ ,  $\mathbb{S}_0^n$  ou  $\mathbb{H}_0^n$ , e portanto  $S$  tem curvatura constante  $k$  igual a 0, 1 ou  $-1$ , respectivamente. Será denotado  $g$  para a métrica de  $N$ .

Seja  $U = \partial_t$  o levantamento do campo vetorial  $d/dt \in C^\infty(I)$ . Note que  $g(U, U) = -1$ , e que, para cada  $t_0 \in I$  fixo,

$$S_{t_0} := \{(t_0, p) \in I \times S\} = \{t_0\} \times S$$

é uma hipersuperfície ortogonal a  $U$ . A orientação temporal em  $N$  será aquela em que  $\partial_t$  está no cone de tempo futuro usual em cada  $T_p N$ . Então,  $(N, g)$  munido desta orientação temporal é um espaço-tempo, dito *espaço-tempo de Robertson-Walker simples*, no qual  $U$  modela uma família de observadores.

Será considerado o caso particular em que  $S$  tem dimensão igual a 3, o qual possui maior relevância física. Nesse caso, as fórmulas de curvatura obtidas em ([o'neill], Corolário 12.10) dizem que, para  $X, Y \in \mathfrak{X}(N)$  campos ortogonais a  $U$ , vale

$$Ric(U, U) = -3\frac{f''}{f}, \quad Ric(U, X) = 0,$$

$$Ric(X, Y) = \left(2\left(\frac{f'}{f}\right)^2 + \frac{2k}{f^2} + \frac{f''}{f}\right)g(X, Y),$$

e a curvatura escalar é

$$S = 6\left(\left(\frac{f'}{f}\right)^2 + \frac{k}{f^2} + \frac{f''}{f}\right).$$

Sendo assim, se for considerada uma solução sem constante cosmológica (isto é, com  $8\pi T = G = Ric_g - \frac{1}{2}S \cdot g$ ), obtém-se que

$$T(U, U) = \frac{3}{8\pi}\left(\left(\frac{f'}{f}\right)^2 + \frac{k}{f^2}\right),$$

$$\begin{aligned} T(X, Y) &= \frac{1}{8\pi}\left(\left(2\left(\frac{f'}{f}\right)^2 + \frac{2k}{f^2} + \frac{f''}{f}\right) - 3\left(\left(\frac{f'}{f}\right)^2 + \frac{k}{f^2} + \frac{f''}{f}\right)\right)g(X, Y) \\ &= \frac{-1}{8\pi}\left(\left(\frac{f'}{f}\right)^2 + \frac{k}{f^2} + \frac{2f''}{f}\right)g(X, Y), \end{aligned}$$

e, claramente,  $T(U, X) = 0$ . Então, definindo

$$\rho = T(U, U) = \frac{3}{8\pi}\left(\left(\frac{f'}{f}\right)^2 + \frac{k}{f^2}\right), \quad p = \frac{-1}{8\pi}\left(\left(\frac{f'}{f}\right)^2 + \frac{k}{f^2} + \frac{2f''}{f}\right),$$

se tem que

$$T = (\rho + p)(\tilde{U} \otimes \tilde{U}) + p \cdot g,$$

em que  $\tilde{U}$  é a 1-forma métricamente associada a  $U$  (observe que  $\tilde{U}(U) = -1$  e  $\tilde{U}(X) = 0$ ).

Ou seja, o espaço-tempo de Robertson-Walker é um solução para as equações de Einstein sem constante cosmológica com conteúdo de matéria representado por um fluido ideal.

### 3.3 RELAÇÕES DE CAUSALIDADE

Nesta seção, será introduzida e examinada uma das mais fundamentais e características noções da geometria de Lorentz, a *causalidade*, ou *estrutura causal* de espaços-tempos. As curvas causais futuro-dirigidas representam um sinal físico emitido de um evento a outro. Se existe uma curva causal futuro-dirigida  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  tal que  $\alpha(a) = p$  e  $\alpha(b) = q$ , então, do ponto de vista da física, isso significa que o evento  $q$  é influenciado pelo evento  $p$ , ou seja,  $q$  está no futuro de  $p$ . Em razão disso surge a importância de estudar como e quando eventos de um espaço-tempo podem ser assim conectados. Além disso, esses resultados podem fornecer informações importantes sobre a geometria do espaço-tempo.

Seja  $(M, g, \tau)$  um espaço-tempo arbitrário de dimensão  $n$ , mas fixado. No que segue, a menos de risco de confusão, esse espaço-tempo será referido como  $(M, g)$  ou simplesmente  $M$ . Define-se uma notação que será muito útil ao longo da monografia, e que é utilizada na maioria das referências.

**Definição 3.3.1.** *Dados dois pontos  $p$  e  $q$  em  $M$ , denotamos:*

- $p \ll q$  se existe uma curva tipo-tempo futuro-dirigida conectando  $p$  e  $q$ ;
- $p < q$  se existe uma curva causal futuro-dirigida conectando  $p$  e  $q$ ;
- $p \leq q$  se  $p < q$  ou  $p = q$ .

As relações acima são transitivas, via justaposição das curvas.

**Teorema 3.3.2.** (Pushup lemma) *Se  $p \ll q$  e  $q \leq r$  [resp.  $p \leq q$  e  $q \ll r$ ], então  $p \ll r$*

*Demonstração.* Sejam  $\alpha$  a curva causal [resp. tipo-tempo] futuro-dirigida que conecta  $q$  a  $r$  e  $\beta$  a curva tipo-tempo [resp. causal] futuro-dirigida que conecta  $p$  a  $q$ . Basta definir  $\gamma$  como a concatenação dessas duas e observar que  $\gamma$  não é uma geodésica luminosa, uma vez que seu segmento correspondente a  $\beta$  [resp.  $\alpha$ ] é todo tipo-tempo, então, pelo teorema 2.8.9,  $\gamma$  pode ser deformada para uma curva tipo-tempo futuro-dirigida, implicando  $p \ll r$ .  $\square$

Também são definidos os seguintes conjuntos:

- $I^+(p) = \{q \in M : p \ll q\}$ ,
- $J^+(p) = \{q \in M : p \leq q\}$ .

Esses são chamados, respectivamente, de *futuro cronológico* e *futuro causal* de  $p$ . Naturalmente, se define o *passado cronológico* e *passado causal* de  $p$  como:

- $I^-(p) = \{q \in M : q \ll p\}$ ,
- $J^-(p) = \{q \in M : q \leq p\}$ .

Observe que  $p \in J^+(p) \cap J^-(p)$ , por definição. Todas as definições e resultados daqui pra frente que venham a envolver as relações de causalidade com respeito ao futuro vão possuir uma versão temporalmente dual para o passado. Geralmente, fazer uma adaptação de futuro para passado é bastante simples, portanto esse trabalho será muitas vezes omitido.

Dado um conjunto  $U \subseteq M$  qualquer, definimos o futuro cronológico (causal) de  $U$ , denotado  $I^+(U)$  ( $J^+(U)$ ) como a união dos conjuntos  $I^+(p)$  ( $J^+(p)$ ) tais que  $p \in U$ .

Para um  $U \subseteq M$  aberto, denota-se  $p \ll_U q$ , para  $p, q \in U$ , se existe uma curva tipo-tempo futuro-dirigida que conecta  $p$  a  $q$ , isto é, a relação  $\ll_U$  é a relação cronológica em  $U$  visto como variedade de Lorentz com métrica e orientação temporal induzida pela de  $M$ . Se  $A \subseteq U$ , então  $I^+(A, U)$  denotará o conjunto dos pontos  $q \in U$  tais que  $p \ll_U q$ , para algum  $p \in A$ . Isso é definido analogamente para as relações  $<$  e  $\leq$ .

**Exemplo 3.3.3.** (*Causalidade em Minkowski*) Seja  $\mathbb{R}_1^n$  o espaço-tempo de Minkowski padrão. Para qualquer  $p \in \mathbb{R}_1^n$  e  $v_p \in T_p M$ , a geodésica maximal  $\gamma_{v_p}$  com velocidade inicial  $v_p$  está definida em todo o  $\mathbb{R}$ , mais especificamente, é da forma

$$\gamma_v(s) = s \cdot v + p,$$

em que  $v$  é a imagem do isomorfismo canônico do espaço de Lorentz  $T_p M$  até  $\mathbb{R}_1^n$  aplicado em  $v_p$ .

Dessa maneira, para cada  $p \in \mathbb{R}_1^n$ , a aplicação exponencial  $exp_p$  está definida em todo  $T_p \mathbb{R}_1^n$ , portanto todo o  $\mathbb{R}_1^n$  funciona como uma vizinhança normal de  $p$ , e, ainda mais, como  $p$  é arbitrário, vale que o espaço inteiro é uma vizinhança aberta convexa. Sendo assim, de acordo com a proposição 2.7.12, se  $p \leq q$ , então a geodésica radial (reta) que conecta os pontos  $p$  e  $q$  é a única, a menos de reparametrização, dentre as curvas causais que tem comprimento Lorentziano máximo.

Nesse espaço vale  $J^+(p) = \overline{I^+(p)}$ , para cada  $p$ , e se  $p, q$  podem ser conectados através de uma geodésica luminosa  $\alpha$ , então  $q \in J^+(p) - I^+(p)$ , o que implica que qualquer curva causal conectando  $p$  a  $q$  é uma reparametrização de  $\alpha$ , pois caso contrário o teorema 2.8.9 daria que  $p \ll q$ .

Essas propriedades, embora peculiares a Minkowski, continuam quase todas válidas para abertos convexos, isto é, valem localmente em um espaço-tempo qualquer.

**Proposição 3.3.4.** (Propriedades causais de abertos convexos) *Seja  $U$  um aberto convexo em  $M$ . Então, vale:*

- a)  $q \in J^+(p, U) \iff \vec{pq} \in T_p M$  é causal futuro-dirigido, e vale o análogo para  $I^+$ ;
- b)  $I^+(p, U)$  é aberto em  $U$ ;
- c)  $J^+(p, U) = \overline{I^+(p, U)}$  (fecho em  $U$ ).

*Demonstração.* Prova-se o item (a) apenas para o caso causal, pois o caso temporal é análogo.



$\Rightarrow$ ) Se  $q \in J^+(p, U)$ , então existe uma curva causal futuro-dirigida  $\alpha$  contida em  $U$  que, a menos de reparametrização, satisfaz  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha(1) = q$ . Então, considere a curva  $\beta := \exp_p^{-1} \circ \alpha$ . Pelo Lema 2.7.11, vale que  $\beta$  fica em um único cone causal no espaço vetorial de Lorentz  $T_pM$ , e isso implica que  $\beta(1) = \exp_p^{-1}(q) = \vec{pq}$  é causal.

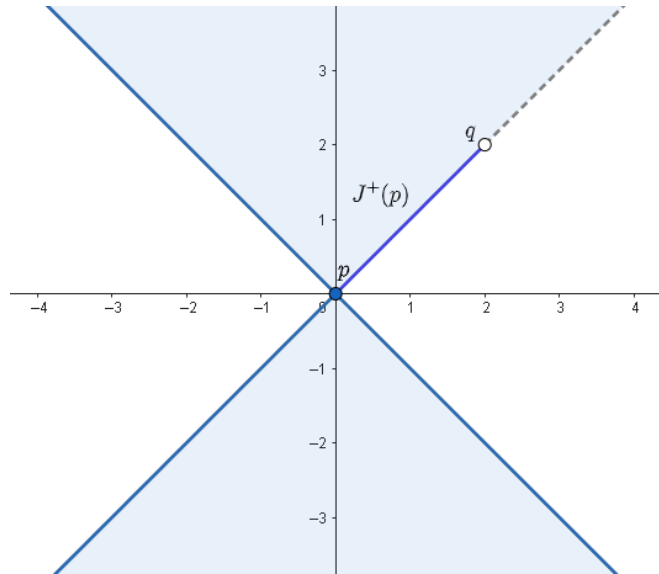
$\Leftarrow$ ) Se  $\vec{pq}$  é causal futuro-dirigido, isso quer dizer que  $\rho'_q(0)$  é causal e futuro-dirigido, portanto  $\rho_q$ , que é a geodésica radial em  $U$  que conecta  $p$  a  $q$ , é causal futuro-dirigida, implicando  $q \in J^+(p, U)$ .

Os itens (b) e (c) seguem imediatamente do fato de que a aplicação que associa um par ordenado  $(p, q) \in U \times U$  até  $\vec{pq} \in T_pM$  é suave (proposição 2.7.10) e do item (a).  $\square$

Dos resultados acima, somente o item 2 vale para  $M$  em geral.

**Exemplo 3.3.5.** Considere  $\mathbb{R}_1^2$  com o ponto  $q = (2, 2)$  removido. Então,  $J^+(p)$  não é fechado, para  $p = (0, 0)$ , pois a geodesicamente luminosa  $\alpha(s) = (s, s)$  para  $s > 2$  está no fecho de  $J^+(p)$ , mas não está em  $J^+(p)$ , como ilustra a figura abaixo.

Figura 2 – Espaço-tempo de Minkowski com ponto removido. A linha azul escuro acima do eixo horizontal está em  $J^+(p)$ , e a região azul clara representa  $I^+(p)$ . Similarmente  $I^-(p)$  e  $J^-(p)$  estão ilustrados abaixo desse eixo. A linha tracejada está, portanto, na fronteira topológica comum de  $I^+(p)$  e  $J^+(p)$ , mas não está em  $J^+(p)$ .



Isso demonstra que o item (c) da proposição anterior não vale globalmente.

**Proposição 3.3.6.** Para qualquer  $A \subseteq M$ , vale que:

- a)  $\text{int}J^+(A) = I^+(A)$ , e, em particular,  $I^+(A)$  é aberto em  $M$ ,
- b)  $\overline{J^+(A)} = \overline{I^+(A)}$ .

*Demonstração.* Primeiramente se prova o item (a). Seja  $q \in \text{int}J^+(A)$ , e tome  $V$  vizinhança convexa de  $q$  tal que  $V \subseteq \text{int}J^+(A)$ , e  $q' \in V \cap I^-(q)$ . Então  $q' \in J^+(A)$  e  $q' \ll q$ , e, pelo *pushup lemma*, vale que  $q \in I^+(A)$ , implicando  $\text{int}J^+(A) \subseteq I^+(A)$ .

Por outro lado, seja  $p \in I^+(A)$ . Então existe  $q \in A$  tal que  $q \ll p$ . Considere uma vizinhança aberta convexa qualquer  $U_p$  de  $p$  e uma curva tipo-tempo futuro-dirigida  $\gamma$  tal que  $\gamma(0) = q$  e  $\gamma(1) = p$ . Por continuidade, é possível tomar  $s_p \in (0, 1)$  de modo que  $\gamma(s_p, 1] \subseteq U_p$ . O conjunto  $I^+(\gamma(s_p), U_p)$  é aberto, pela proposição anterior, e se  $x \in I^+(\gamma(s_p), U_p)$ , vale que  $\gamma(s_p) \ll x$ , logo  $q \ll x$ . Portanto  $I^+(\gamma(s_p), U_p) \subseteq I^+(A)$ , e então  $I^+(A)$  é aberto. Em particular, como  $I^+(A) \subseteq J^+(A)$ , segue que  $I^+(A) \subseteq \text{int}J^+(A)$ .

Para o item (b), note que, como  $I^+(A) \subseteq J^+(A)$ , então  $\overline{I^+(A)} \subseteq \overline{J^+(A)}$ . Então basta mostrar que  $J^+(A) \subseteq \overline{I^+(A)}$ . De fato, seja  $q \in J^+(A)$ , e  $\alpha$  uma curva causal futuro-dirigida conectando algum  $p \in A$  e  $q$ . Tome  $V$  vizinhança convexa de  $q$  e  $q_1$  um ponto ao longo de  $\alpha$  de modo que  $q \in J^+(q_1, V)$ . Pela proposição anterior,  $q \in \overline{I^+(q_1, V)}$ . Como  $I^+(q_1, V) \subseteq I^+(J^+(p)) \subseteq I^+(p)$  (*pushup lemma* implica nesta última inclusão), então  $q \in \overline{I^+(p)} \subseteq \overline{I^+(A)}$ .  $\square$

Também são definidos os conjuntos  $I^+ = \{(p, q) \in M \times M : p \ll q\}$  e  $J^+ = \{(p, q) \in M \times M : p \leq q\}$ . O corolário abaixo segue da demonstração da proposição anterior.

**Corolário 3.3.7.**  $I^+$  é aberto em  $M \times M$  e a relação

$$J_U^+ \{(p, q) \in U \times U : p \leq q\}$$

é fechada em  $U \times U$ , para todo  $U$  aberto convexo de  $M$ .

**Definição 3.3.8.** (Conjuntos futuros e passados) *Um conjunto  $F \subseteq M$  é dito ser um conjunto futuro se  $I^+(F) = F$ . Por outro lado,  $P \subseteq M$  é dito ser um conjunto passado se  $I^-(P) = P$ .*

**Exemplo 3.3.9.** Para todo  $A \subseteq M$ , vale que  $I^+(A)$  é um conjunto futuro. De fato,  $I^+(I^+(A)) \subseteq I^+(A)$ , por transitividade da relação  $\ll$ , e se  $q \in I^+(A)$ , então existe uma curva tipo-tempo  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  com os extremos  $p \in A$  e  $q$ . Então,  $p \ll \gamma(1/2) \ll q$ , isto é,  $\gamma(1/2) \in I^+(A)$  e  $q \in I^+(\gamma(1/2))$ , logo  $q \in I^+(I^+(A))$ . Analogamente,  $I^-(A)$  é um conjunto passado.

**Proposição 3.3.10.** *Se  $X \subseteq M$  é um conjunto futuro, então  $\overline{X} = \{q \in M : I^+(q) \subseteq X\}$ , e o análogo vale para conjuntos passados.*

*Demonstração.* Já que sempre vale que  $p \in J^+(p) \subseteq \overline{I^+(p)}$ , então se  $I^+(p) \subseteq X$ , vale que  $\overline{I^+(p)} \subseteq \overline{X}$ , e portanto  $p \in \overline{X}$ . Por outro lado, se  $p \in \overline{X}$ , e  $q \in I^+(p)$ , então  $p \in I^-(q)$ , e como este conjunto é aberto, vale que  $I^-(q) \cap X \neq \emptyset$ , ou seja, existe um ponto  $r \in X$  tal que  $r \ll q$ , isto é,  $q \in I^+(X) = X$ . Logo  $I^+(p) \subseteq X$ , o que conclui a demonstração.  $\square$

**Corolário 3.3.11.**  $\overline{I^+(p)} = \{q \in M : I^+(q) \subseteq I^+(p)\}$ .

### 3.4 O LEMA DA CURVA LIMITE

Embora conveniente para definir os aspectos básicos da teoria causal, a utilização de curvas suaves por partes se torna uma restrição excessiva ao lidar com espaços de curvas causais e convergência nestes. Entretanto, estes últimos aspectos são muito importantes para a obtenção de alguns resultados mais sofisticados. A fim de lidar com limites de curvas é introduzida nessa seção a noção de curvas causais contínuas, e apresentado um teorema fundamental de convergência, conhecido como *Lema da Curva Limite*. Os resultados dessa e da próxima seção estão discutidos em mais detalhes em [6].

**Definição 3.4.1.** (Curva causal contínua) *É dito que uma curva contínua  $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M$  é uma curva  $C^0$  causal futuro-dirigida se para qualquer  $t_0 \in I$  existe uma vizinhança convexa  $U \subseteq M$  de  $\alpha(t_0)$  e um  $\epsilon > 0$  tal que  $\alpha(I \cap (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)) \subseteq U$  e  $s < t \Rightarrow \alpha(s) <_U \alpha(t)$ , quando  $s, t \in I \cap (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ .*

A definição para curvas  $C^0$  causais passado-dirigidas é feita dualmente. A proposição abaixo garante que as curvas  $C^0$  causais definem a mesma estrutura causal que curvas causais suaves por partes.

**Proposição 3.4.2.** *Dados dois pontos  $p, q \in M$ , vale que  $p < q$  se, e somente se, existe uma curva  $C^0$  causal futuro-dirigida  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  tal que  $\alpha(a) = p$  e  $\alpha(b) = q$ .*

*Demonstração.* A ida é trivial. A fim de provar a outra implicação, para cada  $t \in [a, b]$ , tome  $U_t \subseteq M$  vizinhança convexa de  $\alpha(t)$  e  $\epsilon_t > 0$  como na definição de curvas causais  $C^0$  futuro-dirigidas. Como  $\alpha[a, b]$  é compacto, é possível extrair uma subcobertura finita  $U_1, \dots, U_k$ . A menos de reduzir as vizinhanças convexas iniciais, é possível tomar uma partição  $P = \{a =: t_0 < \dots < t_m := b\}$  de  $[a, b]$  tal que, para todo  $i \in \{1, \dots, m\}$ , exista um  $j \in \{1, \dots, k\}$  tal que  $\alpha[t_i, t_{i+1}] \subseteq U_j$ , e  $\alpha(t_i) <_{U_j} \alpha(t_{i+1})$ . Então, existe uma única geodésica radial causal futuro-dirigida  $\sigma_i$  em  $U_j$  conectando  $\alpha(t_i)$  à  $\alpha(t_{i+1})$ , e, concatenando as curvas  $\sigma_i$ , se obtém uma curva suave por partes causal futuro-dirigida de  $p$  a  $q$ , isto é,  $p < q$ .  $\square$

Lembre que para uma métrica Riemanniana  $h$ , a distância associada a  $h$  entre dois pontos  $p, q$  é definida como

$$d_h(p, q) = \inf\{L_h(\alpha) : \alpha \in \Omega(p, q)\},$$

em que  $\Omega(p, q)$  é o conjunto das curvas suaves por partes conectando  $p$  a  $q$ , e  $L_h(\alpha)$ , para  $\alpha \in \Omega(p, q)$  com domínio  $[a, b]$ , é dada por

$$L_h(\alpha) := \int_a^b \sqrt{|h(\alpha'(s), \alpha'(s))|} ds.$$

**Definição 3.4.3.** *Seja  $(M, h)$  uma variedade Riemanniana. Uma curva  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  é dita ser  $h$ -retificável se  $L_h(\alpha) := \sup_P \{l_P(\alpha)\}$  é finito, em que  $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b\}$  denota uma partição qualquer de  $[a, b]$  e*

$$l_P(\alpha) = \sum_{k=1}^m d_h(\alpha(t_{k-1}), \alpha(t_k)).$$

**Teorema 3.4.4.** (Nomizu-Ozeki) *Toda variedade  $M$  admite uma métrica Riemanniana completa.*

*Demonstração.* Demonstrado em [7]. □

**Lema 3.4.5.** *Se  $h$  é métrica Riemanniana completa em uma variedade  $M$  e  $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M$  é uma curva  $C^0$  causal futuro-dirigida, então  $\gamma|_{[a,b]}$  é  $h$ -retificável, para cada  $a < b \in I$ .*

Se  $\alpha : I \rightarrow M$  é uma curva contínua que é  $h$ -retificável em cada intervalo fechado de  $I$ , então, fixado um ponto de referência  $t_0 \in I$ , é possível definir o seu  $h$ -comprimento de arco, dado por

$$S_{t_0}(t) = \begin{cases} L_h(\alpha|_{[t_0, t]}), & \text{se } t \geq t_0, \\ L_h(\alpha|_{[t, t_0]}), & \text{se } t \leq t_0. \end{cases}$$

**Lema 3.4.6.** *Para  $\alpha : I \rightarrow M$  curva causal  $C^0$  futuro-dirigida, a função  $S_{t_0}$  é contínua e crescente. Ainda mais, se  $\alpha$  é futuro-inextensível, então ao reparametrizar  $\alpha$  por  $h$ -comprimento de arco obtém-se uma curva cujo domínio é da forma  $[0, \infty)$ , e vale o análogo para curvas passado-inextensíveis.*

Fixe em  $M$  uma métrica Riemanniana completa  $h$ . Abaixo, se enuncia o principal resultado desta seção.

**Teorema 3.4.7.** (Lema da curva limite) *Se  $\{\alpha_k : [0, \infty) \rightarrow M\}_{k \in \mathbb{N}}$  é uma sequência de curvas  $C^0$  causais futuro-dirigidas e futuro-inextensíveis, parametrizadas por  $h$ -comprimento de arco, de modo que  $\alpha_k(0) \rightarrow p$ . Então existe uma curva  $C^0$  causal futuro-dirigida e futuro-inextensível  $\alpha : [0, \infty) \rightarrow M$  (não necessariamente parametrizada por  $h$ -comprimento de arco) tal que  $\alpha(0) = p$  e, a menos de subsequência,  $\alpha_k|_C$  converge  $d_h$ -uniformemente para  $\alpha|_C$  em cada compacto  $C \subseteq [0, \infty)$ . Vale o dual para curvas passado-dirigidas e passado-inextensíveis.*

### 3.5 COMPRIMENTO DE ARCO LORENTZIANO

A ideia desta seção é definir uma maneira de estender a noção de comprimento de Lorentz para a classe das curvas causais  $C^0$  a partir da métrica de Lorentz  $g$ .

**Definição 3.5.1.** *Seja  $(M, g)$  um espaço-tempo e  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  uma curva  $C^0$  causal futuro-dirigida. Uma partição  $P = \{a =: t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} =: b\}$  de  $[a, b]$  é dita ser admissível para  $\alpha$  se cada segmento  $\alpha|_{[t_i, t_{i+1}]}$  fica contido em um aberto convexo  $U_i$  e  $\alpha(s) <_{U_i} \alpha(t)$ , para todo  $s < t$  em  $[t_i, t_{i+1}]$ .*

Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  uma curva  $C^0$  causal futuro-dirigida e  $P$  partição admissível para  $\alpha$ , então é definida a seguinte quantidade

$$l_g(\alpha, P) := \sum_{i=0}^k |\overrightarrow{\alpha(t_i)\alpha(t_{i+1})}|,$$

em que  $\overrightarrow{\alpha(t_i)\alpha(t_{i+1})}$  é a velocidade inicial da única geodésica radial conectando  $\alpha(t_i)$  a  $\alpha(t_{i+1})$  em algum aberto convexo  $U_i$  contendo a imagem de  $\alpha|_{[t_i, t_{i+1}]}$  (observe que a norma desse vetor nada mais é que o comprimento Lorentziano da geodésica radial correspondente). O comprimento de arco Lorentziano de  $\alpha$  é definido como:

$$L_g(\alpha, P) := \inf\{l_g(\alpha, P) : P \text{ partição admissível para } \alpha\}.$$

O ínfimo está bem definido pois a quantidade  $l_g(\alpha, P)$  é sempre maior ou igual a zero. É possível provar que, para curvas suaves, o comprimento de arco Lorentziano coincide com o comprimento de arco usual. Além disso, é invariante por reparametrizações. Abaixo, uma proposição bastante útil que se utiliza dessa definição.

**Definição 3.5.2.** (Curva limite) *Dada uma sequência de curvas  $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  em  $M$ , é dito que um ponto  $p \in M$  é ponto de acumulação dessa sequência se existe alguma subsequência de  $\{\alpha_n\}$  que distingue o ponto  $p$ , isto é, uma subsequência  $\{\alpha_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  tal que exista uma sequência  $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  com cada  $p_k$  na imagem de  $\alpha_{n_k}$  e tal que  $p_k \rightarrow p$ . Uma curva  $\alpha$  é dita ser curva limite de  $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  se alguma subsequência  $\{\alpha_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  distingue todos os pontos da imagem de  $\alpha$ .*

**Proposição 3.5.3.** *Seja  $K$  compacto,  $p, q \in K$ , e  $\{\alpha_n : [a, b] \rightarrow M\}$  uma sequência de curvas causais futuro-dirigidas cujas imagens estão contidas em  $K$  e tais que  $\alpha_n(a) \rightarrow p$  e  $\alpha_n(b) \rightarrow q$ . Então, existe uma curva  $C^0$  causal futuro-dirigida  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  com imagem contida em  $K$  e tal que  $\alpha(a) = p$  e  $\alpha(b) = q$  que satisfaz:*

- a)  $\alpha$  é curva limite de  $\{\alpha_n\}$ ,
- b) existe uma subsequência  $\{\alpha_{n_m}\}$  de  $\{\alpha_n\}$  de modo que

$$L_g(\alpha) \geq \limsup L_g(\alpha_{n_m}).$$

### 3.6 SEPARAÇÃO TEMPORAL

Dado um espaço-tempo  $(M, g)$ , se denota por  $\hat{C}(p, q)$  conjunto das curvas causais futuro-dirigidas conectando  $p$  a  $q$ . Se define então um tipo de noção de distância entre pontos de  $M$ .

**Definição 3.6.1.** (Separação temporal) A (função de) separação temporal no espaço-tempo  $(M, g)$  é a função  $d : M \times M \longrightarrow [0, +\infty]$  definida como:

$$d(p, q) = \begin{cases} 0, & \text{se } \hat{C}(p, q) = \emptyset, \\ \sup\{L(\alpha) : \alpha \in \hat{C}(p, q)\}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Define-se a separação temporal entre dois conjuntos como  $d(A, B) = \sup\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$

**Proposição 3.6.2.** (Propriedades da separação temporal) Para a função de separação temporal em  $(M, g)$ , valem as seguintes propriedades,

1.  $d(p, q) > 0 \iff p \ll q$ ,
2.  $d(p, p) = 0$ , a menos que  $p \ll p$ , nesse caso,  $d(p, p) = \infty$ ,
3.  $0 < d(p, q) < \infty$  implica que  $d(q, p) = 0$ ,
4. Se  $p \leq q \leq r$ , então vale a desigualdade triangular reversa, isto é,  $d(p, q) + d(q, r) \leq d(p, r)$ .

*Demonstração.* 1) Para a ida, como  $d(p, q) > 0$ , existe ao menos uma curva causal futuro-dirigida conectando  $p$  a  $q$  que não é luminosa, logo, pelo teorema 2.8.9, vale  $p \ll q$ . Já se  $p \ll q$ , então  $\exists \alpha \in \hat{C}(p, q)$  tipo-tempo, e então  $L(\alpha) > 0 \Rightarrow d(p, q) > 0$ .

2) Se não vale  $p \ll p$ , então em  $\hat{C}(p, p)$  não pode haver nenhuma curva que não seja uma geodésica luminosa, as quais tem comprimento zero, logo  $d(p, p) = 0$ . Se  $p \ll p$ , basta justapor a curva tipo-tempo fechada conectando  $p$  a si mesma (devidamente reparametrizada) um número arbitrário de vezes para obter  $d(p, p) = \infty$ .

3) Como  $0 < d(p, q)$ ,  $p \ll q$ . Suponha  $d(q, p) > 0$ . Então,  $q \ll p$ , logo  $d(p, q) = \infty$  (basta ir e voltar de  $p$  a  $q$  infinitas vezes através de curvas tipo-tempo futuro-dirigidas).

4) Se  $d(p, r) = \infty$  ou  $d(q, r) = \infty$ , então claramente vale que  $d(p, q) = \infty$  e a desigualdade é trivialmente satisfeita, então será assumido que todas essas distâncias são finitas. Dado  $\delta > 0$  qualquer, existem curvas  $\alpha \in \hat{C}(p, q)$  e  $\beta \in \hat{C}(q, r)$  tais que  $L(\alpha) > d(p, q) - \delta/2$  e  $L(\beta) > d(q, r) - \delta/2$ . Então,

$$d(p, r) \geq L(\alpha * \beta) = L(\alpha) + L(\beta) > d(p, q) + d(q, r) - \delta,$$

em que  $\alpha * \beta$  denota a concanetação das curvas  $\alpha$  e  $\beta$ . Como  $\delta$  é arbitrário, a demonstração está concluída.  $\square$

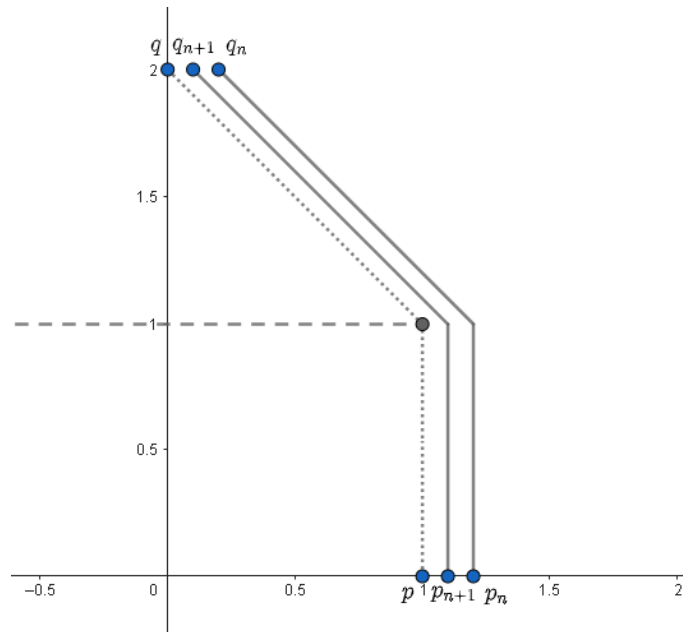
**Lema 3.6.3.** A função separação temporal  $d$  é semicontínua inferiormente. Isto é, se  $\{p_k\}, \{q_k\}$  são sequências de pontos em  $M$  convergindo, respectivamente, para  $p$  e  $q$ , então

$$\liminf_k d(p_k, q_k) \leq d(p, q).$$

Embora valha a semicontinuidade inferior, a separação temporal não necessariamente é contínua. De fato, isso só pode ser garantido para espaços-tempos no topo da hierarquia causal, como será visto adiante.

**Exemplo 3.6.4.** Considere  $\mathbb{R}_1^2$  com a linha  $\{(1, x) \in \mathbb{R}_1^2 : x \geq 1\}$  removida, e fixe os pontos  $p = (0, 1)$  e  $q = (2, 0)$ . Esses não podem ser conectados por nenhuma curva causal, então  $d(p, q) = 0$ , mas é possível tomar uma sequência  $p_n \rightarrow p$  e  $q_n \rightarrow q$  tal que  $d(p_n, q_n) \geq 1, \forall n$ , implicando que  $d$  não é contínua, como ilustra a imagem abaixo.

Figura 3 – Espaço-tempo de Minkowski com uma linha removida. Os pontos  $p$  e  $q$  não podem ser conectados, mas todo ponto  $p_n$  pode ser conectado a  $q_n$  por uma curva causal que tem comprimento Lorentziano igual a 1, como na ilustração (embora o segmento inclinado seja tipo-luz, o segmento vertical é tipo-tempo e tem comprimento Lorentziano 1).

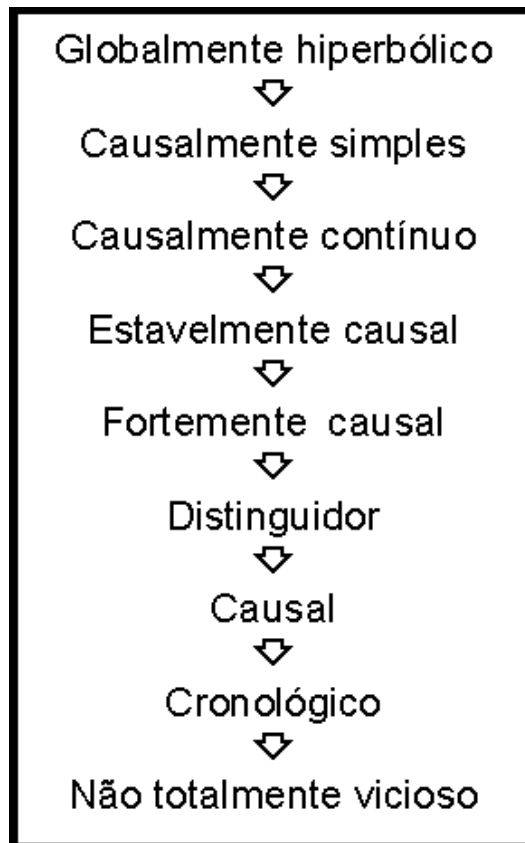


Considerando o ponto  $r = (2, 1)$  nesse espaço-tempo, vale que  $d(p, r) = 2$ , mas nenhuma curva maximiza essa distância.

## 4 A HIERARQUIA CAUSAL

Esse capítulo trata da construção da hierarquia causal, que é uma maneira de classificar os espaços-tempos de acordo com seu comportamento com relação a causalidade.

Figura 4 – A hierarquia causal dos espaços-tempos.



Os espaços-tempos globalmente hiperbólicos estão no topo da hierarquia causal, enquanto os não totalmente viciosos estão no degrau mais baixo. Os espaços-tempos de um degrau estão todos inclusos em degraus inferiores da hierarquia; por exemplo, um espaço-tempo estavelmente causal é também fortemente causal e distinguidor, mas não é necessariamente causalmente contínuo. Essa classificação hierárquica justifica a nomenclatura adotada.

A primeira seção desse capítulo busca introduzir as condições de causalidade em um espaço-tempo, necessárias para classificar os espaços-tempos, e a segunda e terceira definem ferramentas importantes para o estudo da hierarquia. As demais seções são destinadas cada uma ao estudo de um degrau específico da hierarquia causal.



## 4.1 RESTRIÇÕES CAUSAIS BÁSICAS

Nessa seção, serão introduzidas algumas condições com respeito a causalidade em espaços-tempos. Essas condições estão ligadas à existência de curvas causais fechadas, que, lembramos, serão sempre consideradas não constantes.

**Definição 4.1.1.** (Condição de cronologia e de causalidade) *Um espaço-tempo  $(M, g)$  é dito satisfazer a condição de cronologia (ou condição cronológica) em  $p \in M$  se não existe nenhuma curva tipo-tempo fechada passando por  $p$ . Por outro lado,  $(M, g)$  é dito satisfazer a condição de causalidade (ou condição causal) em  $p \in M$  se não existe nenhuma curva causal fechada passando por  $p$ .*

Como toda curva tipo-tempo é também causal, a condição causal implica na condição cronológica. Entretanto, é possível que a condição de cronologia seja satisfeita em  $p \in M$  mas a condição de causalidade não. Nesse caso, existe uma curva causal fechada em  $p$  que não pode ser deformada para uma curva tipo-tempo, então, pela proposição 2.8.9, vale que essa curva é, a menos de reparametrizações, uma geodésica luminosa fechada sem pares de pontos conjugados.

**Definição 4.1.2.** (Causalidade forte) *O espaço-tempo é dito satisfazer a condição forte de causalidade (ou condição de causalidade forte) em  $p \in M$  se, para toda vizinhança aberta  $p \in U \subseteq M$ , existe uma vizinhança  $V \subseteq U$  de  $p$  de modo que toda curva causal com extremos em  $V$  fique contida em  $U$ .*

A condição forte de causalidade indica que não existem curvas causais que “quase” se fecham em  $p$ . Com efeito, negar essa condição em  $p \in M$  significa que existe uma sequência  $\{\alpha_n : [a_n, b_n] \rightarrow M\}$  de curvas causais futuro-dirigidas e um aberto  $U \ni p$  tais que  $\alpha_n(a_n), \alpha_n(b_n) \rightarrow p$  mas cada  $\alpha_n$  sai e entra novamente em  $U$ . Observe que tal negação valeria imediatamente se a condição causal fosse violada em  $p$ . De fato, se não, tome  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  é uma curva causal fechada com  $\alpha(a) = \alpha(b) = p$ , e uma vizinhança  $U$  de  $p$  tal que  $Im(\alpha) \not\subseteq U$  (isso é possível pois  $M$  é Hausdorff e  $\alpha$  não é constante). Então a curva  $\alpha$  terá extremos em qualquer vizinhança  $V$  de  $p$  mas não fica inteiramente contida em  $U$ .

Uma outra maneira de caracterizar essa condição é através da definição abaixo.

**Definição 4.1.3.** (Vizinhança causalmente convexa) *Sejam  $U, V \subseteq M$  abertos.  $V$  é dito ser causalmente convexo em  $U$  se toda curva causal contida em  $U$  com extremos em  $V$  fica inteiramente contida em  $V$ .*

Note que, se  $V$  é causalmente convexo em  $U$ , vale que  $\leq_V = \leq_U$  entre pontos de  $V$ , em que o subscrito indica a relação de causalidade vista nos abertos  $V$  e  $U$  como espaços-tempos.

Observe que, se  $V \subseteq U$  é causalmente convexa em  $U$  e  $W \subseteq U$  é um aberto contendo  $V$ , então  $V$  é causalmente convexo em  $W$ .

**Proposição 4.1.4.** *Seja  $(M, g)$  um espaço-tempo,  $p \in M$  e  $U$  vizinhança de  $p$ . Então, existe  $V \subseteq U$  uma vizinhança de  $p$  causalmente convexa em  $U$ .*

*Demonstração.* Tome pontos  $s \ll_U p \ll_U r$  em  $U$ , e defina  $V := I^+(s, U) \cap I^-(r, U)$ , que é um aberto contendo  $p$  e contido em  $U$ . Seja agora  $\alpha : [a, b] \rightarrow U$  uma curva causal futuro-dirigida tal que  $\alpha(a) \in V$  e  $\alpha(b) \in V$ , e tome  $q = \alpha(t_0)$ , com  $a < t_0 < b$ . Então  $s \ll_U \alpha(a) \leq q \leq \alpha(b) \ll_U r$ , e, pelo *pushup lemma*, segue que  $q \in V$ . Portanto  $V \subseteq U$  é vizinhança de  $p$  causalmente convexa em  $U$ .  $\square$

Em particular, a proposição acima mostra que é sempre possível tomar uma sequência  $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de vizinhanças de  $p$  contidas em  $U$  e causalmente convexas em  $U$  tais que  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n = p$ .

**Proposição 4.1.5.** *Seja  $(M, g)$  um espaço-tempo. Esse espaço satisfaz a condição forte de causalidade em  $p$  se, e somente se, dado  $U$  vizinhança de  $p$ , existe uma vizinhança  $V \subseteq U$  de  $p$  que é causalmente convexa em  $M$ .*

*Demonstração.*  $\Leftarrow$ ) Trivial, pois se a vizinhança  $V \subseteq U$  é causalmente convexa em  $M$ , então toda curva causal com endpoints em  $V$  fica inteiramente contida em  $V$  e portanto inteiramente contida em  $U$ .

$\Rightarrow$ ) Seja  $p \in M$ , e  $U \subseteq M$  uma vizinhança qualquer. Por causalidade forte, é possível tomar  $U' \subseteq U$  vizinhança de  $p$  tal que toda curva causal com extremos em  $U'$  fique inteiramente contida em  $U$ . Tome agora, pelo resultado anterior, uma vizinhança  $V \subseteq U'$  de  $p$  causalmente convexa em  $U$ . Então, toda curva causal com extremos em  $V \subseteq U'$  fica inteiramente contida em  $U$ , e, por causalidade convexa de  $V$  em  $U$ , essa curva fica inteiramente contida em  $V$ . Portanto,  $V$  é causalmente convexa em  $M$ .  $\square$

## 4.2 FUNÇÕES VOLUME

Serão introduzidas nesta subseção certas ferramentas muito úteis para o estudo da estrutura causal dos espaços-tempos, as chamadas *funções volume*. Essa classe de funções computa o volume dos conjuntos da forma  $I^\pm(p)$  mediante a introdução de uma medida conveniente no espaço-tempo, que é descrita abaixo.

**Definição 4.2.1.** (Medida admissível) *Uma medida Boreliana  $m$  em um espaço-tempo  $(M, g)$  é dita admissível se:*

1.  $m$  é finita, isto é,  $m(M) < \infty$ ;
2.  $m(U) > 0$  para todo  $U \subseteq M$  aberto não vazio;

3.  $m(\partial I^\pm(p)) = 0$ , para todo  $p \in M$ .

É sempre possível construir tal medida utilizando um argumento de partição suave da unidade, de acordo com o trabalho em [3] ou ([2], p. 67). Note que o item (3) garante que  $m(I^\pm(p)) = m(J^\pm(p))$ , para todo  $p \in M$ .

**Definição 4.2.2.** (Funções volume) *Seja  $(M, g)$  um espaço-tempo e  $m$  uma medida admissível. Então:*

1.  $t^-(p) := m(I^-(p))$  é chamada função volume futuro associada a  $m$ .
2.  $t^+(p) := -m(I^+(p))$  é chamada função volume passado associada a  $m$ .

Note que, se  $\alpha : I \rightarrow M$  é uma curva causal futuro-dirigida, então, para qualquer  $t \leq s \in I$ , vale que  $\alpha(t) \leq \alpha(s)$ , e então  $I^+(\alpha(s)) \subseteq I^+(\alpha(t)) \Rightarrow m(I^+(\alpha(s))) \leq m(I^+(\alpha(t)))$  e, portanto,  $t^+(\alpha(t)) \leq t^+(\alpha(s))$ . Logo  $t^+$  é não decrescente em qualquer curva causal futuro-dirigida, e portanto fica justificado o sinal imposto em sua definição. O mesmo também vale para  $t^-$ .

As funções volume futuro e passado não são necessariamente contínuas; para compreender sua continuidade será estudada a continuidade das funções com valores em conjuntos  $I^\pm : M \rightarrow \mathcal{P}(M)$ , em que  $\mathcal{P}(M)$  é o conjunto das partes de  $M$ , que são as funções que associam  $p \in M$  ao subconjunto  $I^\pm(p) \subseteq M$ . Entretanto, o conjunto  $\mathcal{P}(M)$  carece de uma topologia pré-definida. Desse modo, o estudo dessas propriedades se dará através do seguinte conceito.

**Definição 4.2.3.** (Continuidade interior e exterior) *A função  $I^-$  é dita ser contínua interiormente em  $p \in M$  se para qualquer compacto  $K \subseteq I^-(p)$  existe uma vizinhança aberta  $U$  de  $p$  tal que  $K \subseteq I^-(q)$ ,  $\forall q \in U$ . Por outro lado,  $I^-$  é dita ser contínua exteriormente em  $p \in M$  se para qualquer compacto  $C \subseteq M - \overline{I^-(p)}$ , existe uma vizinhança aberta  $V$  de  $p$  tal que  $K \subseteq M - \overline{I^-(q)}$ , para todo  $q \in V$ .*

Dualmente se define continuidade interior e exterior para  $I^+$ . Se  $I^\mp$  forem contínuas interiormente (exteriormente) em todo  $p \in M$ , então são ditas interiormente (exteriormente) contínuas.

**Proposição 4.2.4.** *Seja  $(M, g)$  um espaço-tempo. Então  $I^\pm$  é sempre contínua interiormente.*

*Demonstração.* De fato, para qualquer  $K \subseteq I^-(p)$  compacto, tomando a cobertura aberta  $\{I^-(q) : q \in I^-(p)\}$  de  $K$ , é possível extrair uma subcobertura finita  $\{I^-(q_1), \dots, I^-(q_k)\}$ . Basta definir  $U := \bigcap_{i=1}^k I^+(q_i)$  e, então, se  $r \in U$  e  $x \in K$ , existe um  $i \in \{1, \dots, k\}$  tal que  $x \ll q_i$ , mas  $q_i \ll r$  logo  $x \in I^-(r)$  o que implica  $K \subseteq I^-(r)$ , concluindo a demonstração.  $\square$

Antes de prosseguir com a análise, alguns conceitos e resultados de teoria de medida precisam ser recapitulados.

**Definição 4.2.5.** *Seja  $X$  um conjunto qualquer e  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência de subconjuntos  $A_n \subseteq X$ . Defina-se*

- a)  $\liminf\{A_n\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=1}^{\infty} A_n$ ,
- b)  $\limsup\{A_n\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} A_n$ .

Um estudo mais aprofundado de teoria da medida pode ser encontrado em diversas referências, como em [1]. Um fato é que a medida  $m$ , por ser admissível (e portanto finita), satisfaz

$$m(\liminf\{A_n\}) \leq \liminf(m(\{A_n\})), \quad m(\limsup\{A_n\}) \geq \limsup(m(\{A_n\})).$$

**Definição 4.2.6.** *Seja  $X$  um espaço topológico e  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência de subconjuntos de  $X$ . Defina-se*

- a)  $LI\{A_n\} = \{x \in X : \forall U \ni x \text{ aberto, } U \text{ intersecta todos menos um conjunto finito de } A_n \text{ 's}\}$ ,
- b)  $LS\{A_n\} = \{x \in X : \forall U \ni x \text{ aberto, } U \text{ intersecta uma quantidade infinita de } A_n \text{ 's}\}$ .

É fácil observar que

$$\liminf\{A_n\} \subseteq LI\{A_n\}, \quad \limsup\{A_n\} \subseteq LS\{A_n\}.$$

**Lema 4.2.7.** *Seja  $(M, g)$  um espaço-tempo e  $\{p_n\}$  uma sequência em  $M$  convergindo para  $p \in M$ . Então  $I^\pm(p) \subseteq \liminf\{I^\pm(p_n)\}$ .*

*Demonstração.* Será feito para  $I^+(p)$ , pois o caso passado é temporalmente dual. Seja  $x \in I^+(p)$ , então,  $p \in I^-(x)$  e este é um aberto, logo, existe  $N \in \mathbb{N}$ , de modo que se  $n > N$ , então  $p_n \in I^-(x)$ , isto é,  $x \in I^+(p_n)$ . Então  $x \in \bigcap_{i=N}^{\infty} I^+(p_i)$ , e, portanto,  $x \in \liminf\{I^+(p_n)\}$ .  $\square$

**Corolário 4.2.8.** *A função  $t^+$  é semicontínua superiormente, enquanto a função  $t^-$  é semicontínua inferiormente.*

*Demonstração.* Seja  $p_n \rightarrow p$  uma sequência em  $M$ . Pelo lema anterior,  $I^+(p) \subseteq \liminf\{I^+(p_n)\}$ . Das propriedades da medida  $m$ , se tem que

$$m(I^+(p)) \leq m(\liminf\{I^+(p_n)\}) \leq \liminf m(I^+(p_n)),$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} t^+(p) &= -m(I^+(p)) \geq -\liminf m(I^+(p_n)) \\ &= \limsup -m(I^+(p_n)) = \limsup t^+(p_n). \end{aligned}$$

Para a semicontinuidade inferior de  $t^-$  é feito um raciocínio análogo, mas sem precisar inverter o sinal.  $\square$

**Teorema 4.2.9.** *Para um espaço-tempo  $(M, g)$  e  $p \in M$ , são equivalentes:*

- a)  $I^+$  [ $I^-$ ] é contínua exteriormente,
- b) Para toda sequência  $\{p_n\} \subseteq M$  tal que  $p_n \rightarrow p$ , vale que  $LS\{I^+(p_n)\} \subseteq \overline{I^+(p)}$  [ $LS\{I^-(p_n)\} \subseteq \overline{I^-(p)}$ ],
- c)  $t^+$  [ $t^-$ ] é contínua.

*Demonstração.* (1)  $\Rightarrow$  (2) Seja  $p_n \rightarrow p$  uma sequência em  $M$ ,  $x \in LS\{I^+(p_n)\}$ , e suponha que  $x \notin \overline{I^+(p)}$ . Então, como este conjunto é fechado e o  $M$  é localmente compacto é possível tomar um compacto  $K$  que não intersecta  $\overline{I^+(p)}$  e tal que  $x \in \text{int}K$ . Porém, pela continuidade exterior de  $I^+$  em  $p$ , existe um aberto  $U \ni p$  tal que, para todo  $p' \in U$ ,  $I^+(p') \cap K = \emptyset$ . Por convergência, existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que, se  $n > N$ , então  $p_n \in U$ , e portanto  $\overline{I^+(p_n)} \cap K = \emptyset$ . Em particular,  $I^+(p_n) \cap \text{int}K = \emptyset$ , para  $n > N$ , o que contradiz  $x \in LS\{I^+(p_n)\}$ .

(2)  $\Rightarrow$  (3) Seja  $p_n \rightarrow p$  uma sequência em  $M$ . Basta notar que, como  $\limsup\{I^\pm(p_n)\} \subseteq LS(I^\pm(p_n)) \subseteq \overline{I^\pm(p)}$ , então segue que

$$\limsup(m(I^\pm(p_n))) \leq m(\limsup\{I^\pm(p_n)\}) \leq m(\overline{I^\pm(p)}) = m(I^\pm(p)).$$

Fica provada a semicontinuidade superior de  $t^-$  e a inferior de  $t^+$ , e portanto suas continuidades em geral.

(3)  $\Rightarrow$  (1) Será provado para  $t^-$  e  $I^-$ . Suponha que  $t^-$  seja contínua mas  $I^-$  não seja contínua exteriormente em  $p$ . Nesse caso, é possível tomar  $K \subseteq M - \overline{I^-(p)}$  e vizinhanças abertas  $V_n$  de  $p$  tais que  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n = \{p\}$  e tomar  $p_n \in V_n$  de modo que  $\exists x_n \in K \cap \overline{I^-(p_n)}$ . Como  $K$  é compacto, a menos de subsequência  $x_n \rightarrow x \in K$ . Se  $I^-(x) \subseteq I^-(p)$ , então pela proposição 3.3.10  $x \in \overline{I^-(p)}$ , um absurdo pois  $K$  é disjunto deste último conjunto. Então existe um  $y \in M - \overline{I^-(p)}$  tal que  $y \ll x$ .

Usando o fato da relação  $I^+$  ser aberta em  $M \times M$ , tome duas vizinhanças  $U_x$  e  $U_y$  de  $x$  e  $y$  em  $M - \overline{I^-(p)}$  respectivamente, de modo que  $U_y \subseteq \bigcap_{x' \in U_x} I^-(x')$ . Mas existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $x_n \in U_x$ , para  $n \geq N$ , logo  $U_x \cap I^-(p_n) \neq \emptyset$ , o que nos permite concluir que  $U := U_y \subseteq I^-(p_n)$ , para  $n \geq N$ . Tome agora uma sequência  $q_j \rightarrow p$  tal que  $p \ll q_j k \ll q_{j-1}$ , para todo  $j$ .

Então, para  $n$  grande,  $U \subseteq I^-(p_n) \subseteq I^-(q_j)$ , e também  $\overline{I^-(p)} \subseteq I^-(q_j)$  para todo  $j$ . Concluimos que  $\overline{I^-(p)}$  e  $U$  são Borelianos disjuntos contidos em  $I^-(q_j)$ , para  $j$  grande. Portanto, sendo  $\varepsilon = m(U) > 0$ , para a medida admissível  $m$  tem-se

$$t^-(q_j) = m(I^-(q_j)) \geq m(\overline{I^-(p)}) + m(U) = m(I^-(p)) + m(U) = t^-(p) + \varepsilon,$$

em que foi usado novamente a admissibilidade de  $m$ , contradizendo a continuidade de  $t^-$ .  $\square$

### 4.3 REFLEXIVIDADE

Essa seção ficará reservada a obter uma importante caracterização alternativa da continuidade exterior de  $I^+$  e  $I^-$ . Uma das maneiras de caracterizar essa continuidade é através do conceito de *reflexividade*. Essa noção é dita ser *transversal*, pois não implica nem é implicada por nenhum dos degraus da hierarquia causal tradicional, mas, em adição a mais algumas hipóteses, pode gerar resultados interessantes. Antes de introduzir essa definição, são provadas as seguintes equivalências.

**Lema 4.3.1.** *Dados quaisquer  $p, q \in M$ , equivalem:*

- a)  $I^+(q) \subseteq I^+(p) \Rightarrow I^-(p) \subseteq I^-(q)$ ;
- b)  $q \in \overline{I^+(p)} \Rightarrow p \in \overline{I^-(q)}$ ;
- c)  $q \in \partial I^+(p) \Rightarrow p \in \partial I^-(q)$ ;

*Demonstração.* Note que a)  $\iff$  b) pois  $q \in \overline{I^+(p)} \iff I^+(q) \subseteq I^+(p)$ , de acordo com a proposição 3.3.10, e vale o dual para o passado.

b)  $\Rightarrow$  c): Se vale b) e  $q \in \partial I^+(p)$ , então  $q \in \overline{I^+(p)}$  mas  $q \notin I^+(p)$  pois este último é aberto. Então  $p \notin I^-(q)$  mas, por b)  $p \in \overline{I^-(q)}$ , portanto  $p \in \partial I^-(q)$ . Logo vale a implicação c).

c)  $\Rightarrow$  b): Se  $q \in \overline{I^+(p)}$ , ou  $q \in \partial I^+(p)$ , e por c)  $p \in \partial I^-(q) \subseteq \overline{I^-(q)}$ , ou  $q \in I^+(p)$  e portanto  $p \in I^-(q) \subseteq \overline{I^-(q)}$ .  $\square$

Vale também a versão dual do lema acima.

**Definição 4.3.2.** (Reflexividade) *Um espaço-tempo  $(M, g)$  é dito ser passado reflexivo em  $q \in M$  se, para todo  $p \in M$ ,  $p$  e  $q$  satisfazem uma das afirmações (e portanto todas) do lema anterior. Reflexividade futura é feita dualmente.  $(M, g)$  é dito passado [resp. futuro] reflexivo se o for em todo  $q \in M$ , e dito apenas reflexivo caso seja ambos.*

**Proposição 4.3.3.** *Um espaço-tempo  $(M, g)$  é passado reflexivo em  $q$  se, e somente se,  $(p, q) \in \overline{I^+}$  implica  $p \in \overline{I^-(q)}$ , e vale o dual.*

*Demonstração.*  $\Rightarrow$ ) Seja  $(p, q) \in \overline{I^+}$ . Então existem seqüências  $p_n \ll q_n$  com  $p_n \rightarrow p$  e  $q_n \rightarrow q$ . Tomando  $s_k \in I^-(p)$ . Então,  $p \in I^+(s_k)$ , e então para  $n$  grande o suficiente  $q_n \in I^+(s_k)$ . Sendo assim,  $q \in \overline{I^+(s_k)}$  e portanto  $s \in \overline{I^-(q)}$ , pela reflexividade ao passado. Tomando  $s_k$  cada vez mais próximo de  $p$  de modo que  $s_k \rightarrow p$ , obtém-se  $p \in \overline{I^-(q)}$

$\Leftarrow$ ) Seja  $p$  qualquer de modo que  $q \in \overline{I^+(p)}$ . Então  $(p, q) \in \overline{I^+}$  e daí saí que  $p \in \overline{I^-(q)}$ , o que implica que  $M$  é reflexivo ao passado em  $q$ .  $\square$

**Lema 4.3.4.**  *$I^-$  [resp.  $I^+$ ] é contínua exteriormente em  $q \in M$  se, e somente se, o espaço-tempo é passado [futuro] reflexivo em  $q$ .*

*Demonstração.* Prova-se o caso da reflexividade passada ( $I^-$ ), já que o outro segue desse dualmente.

$\Rightarrow$ ) Suponha  $q \in \overline{I^+(p)}$  e  $p \notin \overline{I^-(q)}$ , mas  $I^-$  seja contínua exteriormente em  $q$ . Então, existe uma vizinhança  $U$  de  $q$  tal que  $q' \in U \Rightarrow \{p\} \subseteq M - \overline{I^-(q')}$ , e portanto  $U \cap I^+(p) = \emptyset$ . Mas  $U$  deve ter pontos de  $I^+(p)$  pois  $q \in \overline{I^+(p)}$ , uma contradição.

$\Leftarrow$ ) Suponha reflexividade passada em  $q$  e  $I^-$  não contínua exteriormente nesse ponto. Portanto, existe um compacto  $K \subseteq M - \overline{I^-(q)}$  e uma sequência  $q_n \rightarrow q$  de modo que  $K \not\subseteq M - \overline{I^-(q_n)}$ . Para cada  $n$ , tome  $x_n \in K \cap \overline{I^-(q_n)}$ . A menos de subsequência,  $x_n \rightarrow x \in K$ , por compacidade. Se  $y \in I^-(x)$ , então  $x \in I^+(y) \Rightarrow x_n \in I^+(y)$ , para  $n$  grande, e portanto  $I^+(y) \cap \overline{I^-(q_n)} \neq \emptyset$ ; como  $I^+(y)$  é aberto,  $I^+(y) \cap I^-(q_n) \neq \emptyset$ , e portanto  $q_n \in I^+(y)$ , por transitividade da relação cronológica, para  $n$  grande. Logo  $q \in \overline{I^+(y)}$ . Por reflexividade passada em  $q$ ,  $y \in \overline{I^-(q)}$ . Agora,  $y \in I^-(x)$  é arbitrário, logo, tomando  $\{y_k\} \in I^-(x)$  sequência de modo que  $y_n \rightarrow x$ , tem-se  $x \in \overline{I^-(q)}$ , o que é uma contradição pois  $x$  é um elemento de  $K$ .  $\square$

Para finalizar, são definidas uma outra importante classe de funções:

**Definição 4.3.5.** (Funções tempo) *Seja  $(M, g)$  um espaço-tempo. Uma função  $t : M \rightarrow \mathbb{R}$  é dita ser:*

- a) *uma função tempo generalizada se  $t$  é estritamente crescente em toda curva causal futuro-dirigida;*
- b) *uma função tempo se for uma função tempo generalizada que também é contínua;*
- c) *uma função temporal se  $t$  é suave e se o gradiente  $\nabla t$  é passado-dirigido e tipo-tempo.*

Uma função temporal  $t$  é uma função tempo, pois é suave e portanto contínua, e, além disso, se  $\alpha$  é uma curva causal futuro-dirigida, vale que

$$\frac{d(t \circ \alpha)}{ds}(s_0) = dt_{\alpha(s_0)}(\alpha'(s_0)) = g_{\alpha(s_0)}(\nabla t(\alpha(s_0)), \alpha'(s_0)) > 0,$$

em que foi usado o fato de que o gradiente de  $t$  é o campo vetorial metricamente associado via  $g$  com a 1-forma  $dt$  e que  $\alpha'$  e  $\nabla t$  estão em cones de tempo opostos. A utilidade dessa definição e dos demais resultados obtidos nesta seção ficará mais clara no decorrer deste capítulo.

#### 4.4 ESPAÇOS-TEMPOS NÃO TOTALMENTE VICIOSOS

Espaços-tempos *totalmente viciosos* são os pior comportados com relação a causalidade. Para caracterizar esses espaços precisamente, será necessário o seguinte lema:

**Lema 4.4.1.** *Seja  $(M, g)$  um espaço-tempo. Então, equivalem:*

1.  $p \ll p, \forall p \in M$ ;

$$2. I^+(p) = I^-(p) = M, \forall p \in M;$$

$$3. d(p, q) = \infty, \forall p, q \in M.$$

*Demonstração.* (1)  $\Rightarrow$  (2): Seja  $p \in M$  e suponha  $q \in \overline{I^+(p)}$ . Então vale que  $I^+(q) \subseteq I^+(p)$ . Como  $q \ll q$ , vale que  $q \in I^+(q) \subseteq I^+(p)$ , logo  $I^+(p)$  é fechado. Sendo fechado e aberto e  $M$  sendo conexo,  $I^+(p) = M$ . Um raciocínio dual leva à conclusão de que  $I^-(p) = M$ .

(2)  $\Rightarrow$  (3): Sejam  $(p, q) \in M$ . Como  $I^+(p) = M$ , então  $p, q \in I^+(p)$ . Seja  $\gamma$  uma curva fechada tipo-tempo e futuro-dirigida em  $p$  e  $\alpha$  uma curva tipo-tempo futuro-dirigida que conecta  $p$  a  $q$ . Basta justapor as duas curvas e percorrer a curva  $\gamma$  várias vezes para obter uma curva tipo-tempo entre  $p$  e  $q$  de comprimento arbitrariamente grande. Logo,  $d(p, q) = \infty$ .

(3)  $\Rightarrow$  (1): Em particular  $d(p, p) = \infty > 0, \forall p \in M$ . Logo, o resultado segue da proposição 3.6.2.  $\square$

**Definição 4.4.2.** (Espaço-tempo totalmente vicioso) *Um espaço-tempo  $(M, g)$  é dito totalmente vicioso se satisfaz alguma (e portanto todas) as condições do Lema 4.4.1, e não totalmente vicioso caso contrário (isto é, caso exista algum  $p \in M$  tal que não vale  $p \ll p$ ).*

Em outras palavras, um espaço-tempo totalmente vicioso não satisfaz a condição de cronologia em nenhum de seus pontos, enquanto um espaço-tempo não totalmente vicioso satisfaz a condição de cronologia em pelo menos um ponto.

**Exemplo 4.4.3.** Considere o quociente de  $\mathbb{R}_1^2$  pelo grupo de isometrias gerado pela translação

$$T : \mathbb{R}_1^2 \ni (t, x) \rightarrow (t + 1, x) \in \mathbb{R}_1^2,$$

que é claramente propriamente descontínuo e age livremente. Para qualquer  $p = (t_p, x_p) \in \mathbb{R}_1^2$ , a curva  $\alpha(s) = (s, x_p)$  é tipo-tempo e passa por  $p$ , e claramente  $\pi \circ \alpha$  é uma curva tipo-tempo fechada em  $p$  no quociente, o que implica que este espaço-tempo é totalmente vicioso.

#### 4.4.1 O espaço-tempo de Gödel

A solução de Gödel, publicada em 1949 [4], representa um estímulo à procura de soluções mais complexas para as equações de campo de Einstein, e é um importante e não trivial exemplo de um espaço-tempo totalmente vicioso. O exemplo 4.4.3 pode ser facilmente adaptado para um solução de vácuo das equações de Einstein sem constante cosmológica. Entretanto, as curvas tipo-tempo deste espaço são obtidas graças a identificação feita justamente para obtê-las. O recobrimento universal dessa solução é o espaço-tempo de Minkowski, que possui o melhor comportamento possível com relação a causalidade, como será visto mais adiante neste trabalho. A solução de Gödel tem espaço



de fundo simplesmente conexo, e, mesmo assim, possui curvas tipo-tempo fechadas, as quais surgem puramente de sua geometria.

O tensor de momento-energia é da forma  $T = \rho(\tilde{U} \otimes \tilde{U})$ , ou seja, a matéria assume a forma de um fluido perfeito que é livre de pressão. Um conteúdo de matéria com essas propriedades é chamado de *poeira*. A construção do espaço-tempo começa com as coordenadas usuais  $(t, x, y, z)$  da variedade  $\mathbb{R}^4$ . Define-se a métrica a partir do elemento de linha como

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 - \frac{1}{2}e^{2ax}dy^2 + dz^2 - 2e^{ax}dtdy. \quad (4)$$

A matriz da métrica  $g$  fica da seguinte forma

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -e^{ax} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -e^{ax} & 0 & -\frac{1}{2}e^{2ax} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definindo o referencial global  $E_0 = \partial_t$ ,  $E_1 = \partial_x$ ,  $E_2 = \sqrt{2}(\partial_t - e^{-ax}\partial_y)$  e  $E_3 = \partial_z$ , vale que  $g(E_i, E_i) = 1$ , se  $i \in \{1, 2, 3\}$  e  $g(E_0, E_0) = -1$ . Como são linearmente independentes, segue que a métrica  $g$  é de Lorentz.

Denote o espaço-tempo obtido como  $(M, g)$ . O campo  $U$  que modela uma família de observadores será definido como o campo coordenado  $\partial_t = E_0$ , que é tipo-tempo, e cuja 1-forma metricamente associada será denotada  $\tilde{E}_0$ . Note que, para  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , vale

$$\begin{aligned} \tilde{E}_0(X) &= g(E_0, X) = X^i g_{ti} = -X^t - e^{ax} \cdot X^y = -(dt + e^{ax}dy)(X) \\ &\Rightarrow \tilde{E}_0 = -(dt + e^{ax}dy), \end{aligned}$$

em que  $X = X^i \partial_i$ , com  $i \in \{t, x, y, z\}$ . Então, o tensor momento-energia fica da forma  $T = \rho(\tilde{E}_0 \otimes \tilde{E}_0)$ , e sua representação por matriz é dada por

$$T = \rho \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & e^{ax} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ e^{ax} & 0 & e^{2ax} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Prossegue-se para mostrar que  $g$  satisfaz as equações de campo de Einstein. Para verificar se isto é solução, primeiro é computada a inversa da matriz  $g$ ,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2e^{-ax} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2e^{-ax} & 0 & 2e^{-2ax} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

A partir disso, obtém-se os símbolos de Christoffel, de acordo com 2.3.10. Os únicos diferentes de zero são:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{01}^0 &= \Gamma_{10}^0 = a, \\
\Gamma_{21}^0 &= \Gamma_{12}^0 = \frac{a}{2}e^{ax}, \\
\Gamma_{02}^1 &= \Gamma_{20}^1 = \frac{a}{2}e^{ax}, \\
\Gamma_{22}^1 &= \frac{a}{2}e^{2ax}, \\
\Gamma_{01}^2 &= \Gamma_{10}^2 = -ae^{-ax}.
\end{aligned}$$

Em seguida, são obtidos os componentes do tensor de Ricci, dentre os quais os não nulos são apenas:

$$\begin{aligned}
R_{00} &= a^2, \\
R_{02} &= R_{20} = a^2e^{ax}, \\
R_{22} &= a^2e^{2ax}.
\end{aligned}$$

Por último, a curvatura escalar é  $S = -a^2$ . A matriz do tensor de Einstein  $G = Ric_g - \frac{1}{2}S \cdot g$  toma a forma

$$\begin{aligned}
G &= \begin{pmatrix} a^2 & 0 & a^2e^{ax} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a^2e^{ax} & 0 & a^2e^{2ax} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot -a^2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & -e^{ax} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -e^{ax} & 0 & -\frac{1}{2}e^{2ax} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{a^2}{2} & 0 & \frac{a^2e^{ax}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{a^2}{2} & 0 & 0 \\ \frac{a^2e^{ax}}{2} & 0 & \frac{3a^2e^{2ax}}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a^2}{2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, a expressão  $8\pi T - \Lambda g$  é dada pela matriz

$$\begin{aligned}
8\pi T - \Lambda g &= 8\pi\rho \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & e^{ax} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ e^{ax} & 0 & e^{2ax} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \Lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & -e^{ax} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -e^{ax} & 0 & -\frac{1}{2}e^{2ax} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 8\pi\rho + \Lambda & 0 & (8\pi\rho + \Lambda)a^2e^{ax} & 0 \\ 0 & -\Lambda & 0 & 0 \\ (8\pi\rho + \Lambda)a^2e^{ax} & 0 & (8\pi\rho + \frac{\Lambda}{2})e^{2ax} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\Lambda \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Logo, as equações de Einstein são satisfeitas se a constante cosmológica  $\Lambda$  e a densidade da matéria  $\rho$  forem  $\Lambda = -\frac{a^2}{2}$  e  $\rho = \frac{a^2}{8\pi}$ .

A fim de simplificar a análise que se sucederá, vamos trabalhar com uma coordenada a menos, isto é, o espaço-tempo será decomposto na soma direta de  $(\mathbb{R}^3, g_1)$  e  $(\mathbb{R}, g_2)$ , em que a métrica  $g_1$  é obtida suprimindo a coordenada  $z$ ,

$$ds_1^2 = -dt^2 + dx^2 - \frac{1}{2}e^{2ax}dy^2 - 2e^{ax}dtdy,$$

e a métrica  $g_2$  é dada simplesmente por  $ds_2^2 = dz^2$ .

É possível se perguntar quando o campo de observadores  $U = \partial_t$  define um espaço de repouso em cada  $p \in M$ , isto é, se existe através de cada  $p \in M$  uma hipersuperfície  $S$  ortogonal a  $U$ . Para medir isso, é usada a noção de *rotacional*, que pode ser definido em uma variedade semi-Riemanniana  $(N, h)$  qualquer. Para um  $X \in \mathfrak{X}(N)$ , o rotacional de  $X$  é o tensor antissimétrico de tipo  $(0, 2)$  dado por

$$\text{rot}_X(V, W) = h(\nabla_V X, W) - h(\nabla_W X, V), \quad \forall V, W \in \mathfrak{X}(N).$$

De acordo com ([8], p. 363),  $U^\perp$  define um espaço de repouso em cada  $p$  se, e somente se,  $\text{rot}_U(X, Y) = 0$ , para todos campos vetoriais  $X, Y$  ortogonais a  $U$ . No caso em questão,  $U = E_0$  e as direções ortogonais relevantes são  $E_1$  e  $E_2$ . Então,

$$\begin{aligned} \text{rot}_{E_0}(E_1, E_2) &= \frac{1}{2} \left[ g(\nabla_{\partial_x} \partial_t, \sqrt{2}(\partial_t - e^{-ax} \partial_y)) \right. \\ &\quad \left. - g([\nabla_{\sqrt{2}(\partial_t - e^{-ax} \partial_y)}] \partial_t, \partial_x) \right] = \frac{\sqrt{2}a}{2} =: \omega. \end{aligned}$$

Ou seja, esse parâmetro  $\omega = \frac{a}{\sqrt{2}}$  é uma medida de quanto o referencial rotaciona com respeito a um referencial ortonormal transportado paralelamente ao longo das curvas integrais de  $U = E_0$ , as quais são geodésicas tipo-tempo de velocidade unitária. Nesse sentido, se considera o universo de Gödel como girando com respeito a uma família de observadores que se movem ao longo de curvas integrais de  $U$ .

Outro aspecto interessante desse espaço-tempo é sua *homogeneidade*, i.e., dados quaisquer dois pontos  $p, q \in M$ , existe uma isometria em  $M$  que leva  $p$  em  $q$ . Para provar esse fato, considera-se as quatro isometrias abaixo, definidas para um  $b \in \mathbb{R}$  qualquer.

$$\begin{aligned} T_1^b &: (t, x, y, z) \mapsto (t - b, x, y, z), \\ T_2^b &: (t, x, y, z) \mapsto (t, x - b, ye^{ab}, z), \\ T_3^b &: (t, x, y, z) \mapsto (t, x, y - b, z), \\ T_4^b &: (t, x, y, z) \mapsto (t, x, y, z - b). \end{aligned}$$

As funções  $T_1^b$ ,  $T_3^b$  e  $T_4^b$  são claramente isometrias, pois os coeficientes da métrica (4) não dependem de  $t, y, z$ . A aplicação  $T_2^b$  também o é pois, chamando de  $(t', x', y', z')$  as coordenadas transformadas por  $T_2^b$ , temos que

$$dt = dt', \quad dx = dx', \quad dye^{ab} = dy', \quad dz = dz'.$$

Assim, o elemento de linha fica

$$\begin{aligned} & - dt^2 + dx^2 - \frac{1}{2} e^{2ax} dy^2 + dz^2 - 2e^{ax} dt dy \\ &= - dt'^2 + dx'^2 - \frac{1}{2} e^{2a(x'+b)} dy'^2 e^{-ab} + dz'^2 - 2e^{a(x'+b)} dt' dy' e^{-ab} \\ &= - dt'^2 + dx'^2 - \frac{1}{2} e^{2ax'} dy'^2 + dz'^2 - 2e^{ax'} dt' dy'. \end{aligned}$$

Portanto  $T_2^b$  é realmente uma isometria. Ainda mais, é possível levar qualquer ponto  $p = (t_p, x_p, y_p, z_p) \in M$  em  $q = (t_q, x_q, y_q, z_q) \in M$  através da composição dessas quatro isometrias lineares escolhendo os  $b$ 's adequados, o que caracteriza  $M$  como um espaço-tempo homogêneo.

Para visualizar a existência de curvas tipo-tempo fechadas, se introduz a seguinte mudança de sistemas de coordenadas em  $(\mathbb{R}^3, g_1)$ :

$$\begin{aligned} e^{\sqrt{2}\omega x} &= \cosh(2r) + \cos(\phi) \sinh(2r), \\ \omega y e^{\sqrt{2}\omega x} &= \sin(\phi) \sinh(2r), \\ \tan\left(\frac{\phi + \omega t - \sqrt{2}t'}{2}\right) &= e^{-2r} \tan\left(\frac{\phi}{2}\right). \end{aligned}$$

As novas coordenadas  $(t', r, \phi)$  são definidas em  $(-\infty, \infty) \times (0, \infty) \times [0, 2\pi]$ , com  $\phi = 0$  e  $\phi = 2\pi$  sendo identificados. O parâmetro  $\omega$  é o rotacional do campo  $E_0$ , obtido anteriormente. Após um cálculo laborioso, obtém-se o elemento de linha, com relação às novas coordenadas

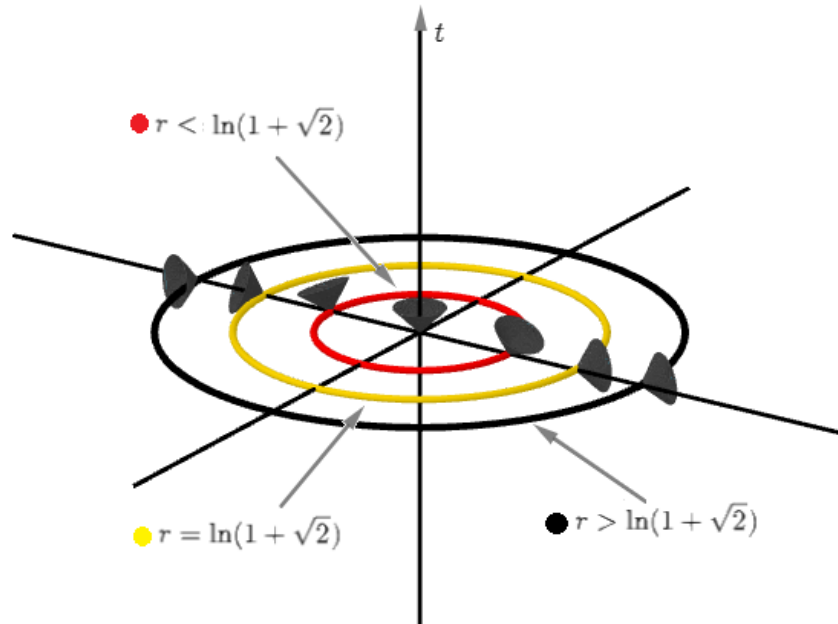
$$ds_1^2 = \frac{2}{\omega^2} (-dt'^2 + dr^2 - (\sinh^4(r) - \sinh^2(r))d\phi^2 + 2\sqrt{2} \sinh^2(r)d\phi dt'). \quad (7)$$

Pela periodicidade de  $\phi$ , o campo  $\partial_\phi$  tem curvas integrais fechadas. Usando (7), concluímos que

$$g_1(\partial_\phi, \partial_\phi) = -\frac{2}{\omega^2} (\sinh^2(r)(\sinh^2(r) - 1)).$$

Como  $\sinh(r) = 1$  se  $r = \log(1 + \sqrt{2})$ , então, estudando o sinal da expressão acima, se chega a conclusão de que se  $r < \log(1 + \sqrt{2})$ , a curva em questão é espacial, se  $r = \log(1 + \sqrt{2})$ , a curva é luminosa, e se  $r > \log(1 + \sqrt{2})$  a curva é tipo-tempo. Devido a homogeneidade do espaço-tempo, todos os pontos são equivalentes, logo, por cada ponto de  $M$  passa uma curva tipo-tempo fechada, o que caracteriza este espaço-tempo como totalmente vicioso.

Figura 5 – Espaço-tempo de Gödel com uma coordenada suprimida. Os círculos representam as curvas em que  $r$  e  $t$  estão constantes. Perceba que o círculo em vermelho fica fora do cone de luz, enquanto o círculo amarelo é tangente e o preto fica no interior dos cones de luz. De fato, esses círculos são, respectivamente, curvas espaciais, luminosas e temporais fechadas.



#### 4.5 ESPAÇOS-TEMPOS CRONOLÓGICOS

**Lema 4.5.1.** *Em um espaço-tempo  $(M, g)$ , equivalem:*

1. *Não existe uma curva tipo-tempo fechada, isto é, a condição cronológica vale em todo  $p \in M$ ;*
2. *A relação cronológica é irreflexiva ( $p \ll q \Rightarrow p \neq q$ );*
3.  *$d(p, p) = 0, \forall p \in M$ .*

*Demonstração.* (1)  $\Rightarrow$  (2) é imediato. (2)  $\Rightarrow$  (3) e (3)  $\Rightarrow$  (1) seguem da proposição 3.6.2. □

**Definição 4.5.2.** (Espaço-tempo cronológico) *Um espaço-tempo é dito cronológico se satisfaz alguma das equivalências do lema anterior.*

É imediato que todo espaço-tempo cronológico é não totalmente vicioso.

**Proposição 4.5.3.** *Qualquer espaço-tempo  $(M, g)$  compacto não é cronológico.*

*Demonstração.* Observe que  $\{I^-(p) : p \in M\}$  é uma cobertura aberta de  $M$ . Como  $M$  é compacto, pode ser extraída uma subcobertura finita, digamos  $I^-(p_1), \dots, I^-(p_n)$ .

Podemos assumir que nenhum desses conjuntos está contido em outro, pois caso contrário bastaria excluí-lo. Se  $p_1$  está contido em  $I^-(p_i)$ , para algum  $i \in \{2, \dots, n\}$ , então para todo  $q \in I^-(p_1)$ , vale que  $q \ll p_1 \ll p_i$ , isto é,  $q \in I^-(p_i)$  e então  $I^-(p) \subseteq I^-(p_i)$ , o que é uma contradição. Sendo assim,  $p_1 \in I^-(p_1)$ , logo  $M$  não é cronológico.  $\square$

A proposição abaixo demonstra uma das aplicações das funções volume:

**Proposição 4.5.4.** *Um espaço-tempo  $(M, g)$  é cronológico se, e somente se,  $t^-$  [resp. se, e somente se,  $t^+$ ] é estritamente crescente em qualquer curva tipo-tempo futuro-dirigida.*

*Demonstração.* (Será feito para  $t^-$ , o resultado para  $t^+$  é dual.)

$\Rightarrow$ ) Suponha que o espaço-tempo seja cronológico, e seja  $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma curva tipo-tempo qualquer. Tome  $p := \alpha(s_0) \ll \alpha(s_1) =: q$ , com  $s_0 < s_1 \in I$  quais. Defina  $A := I^+(p) \cap I^-(q)$ , que é um aberto não vazio, e portanto  $m(A) > 0$ . Note que  $A \cap I^-(p) \subseteq I^+(p) \cap I^-(p) = \emptyset$ , este último pois  $M$  é cronológico. Logo,  $A$  e  $I^-(p)$  são subconjuntos disjuntos contidos em  $I^-(q)$ , sendo assim,

$$m(I^-(p)) < m(I^-(p)) + m(A) \leq m(I^-(q)),$$

por monotonicidade e aditividade da medida  $m$ . Então  $t^-(p) < t^-(q)$ , de onde saí o crescimento estrito de  $t^-$ , devido a arbitrariedade dos pontos  $p \ll q$  e da curva tipo-tempo  $\alpha$ .

$\Leftarrow$ ) É trivial uma vez que se  $t^-$  é estritamente crescente em qualquer curva tipo-tempo e  $p \ll p$ , para algum  $p \in M$ , então  $t^-(p) < t^-(p)$ , absurdo.  $\square$

Um exemplo de espaço-tempo não cronológico e não totalmente vicioso será dado na última seção deste capítulo.

## 4.6 ESPAÇOS-TEMPOS CAUSAIS

**Definição 4.6.1.** (Espaço-tempo causal) *Um espaço-tempo  $(M, g)$  é dito causal se satisfaz a condição de causalidade em cada um de seus pontos.*

A definição implica que a relação estrita de causalidade é irreflexiva ( $p < q \Rightarrow p \neq q$ ). Como a condição causal em um ponto  $p$  implica na condição cronológica nesse mesmo ponto, todo espaço causal será também um espaço cronológico. É claro que, se um espaço-tempo é cronológico mas não causal, então nele existe uma geodésica luminosa fechada sem pares de pontos conjugados.

**Exemplo 4.6.2.** Considere  $\mathbb{R}_1^2$  com coordenadas cartesianas  $u$  e  $v$  e métrica

$$g = -du \otimes dv - dv \otimes du,$$

de modo que as coordenadas  $z_{\pm} := (u \pm v)/\sqrt{2}$  são tais que  $\{\partial_{z_{\pm}} = (\partial_u \pm \partial_v)/\sqrt{2}\}$  é uma base ortonormal, com um vetor temporal e outro espacial, o que implica que a métrica

em questão é de Lorentz. Oriente o espaço-tempo de maneira que o vetor temporal da base seja futuro-dirigido. Considere agora a isometria

$$F : (u, v) \rightarrow (u, v + 1),$$

e  $N$  o espaço-tempo obtido do quociente de  $\mathbb{R}_1^2$  pelo subgrupo gerado por  $F$  com métrica e orientação temporal induzidas.

Nesse quociente,  $v$  atua como uma coordenada global cíclica mas  $u$  ainda é uma coordenada global. Note que

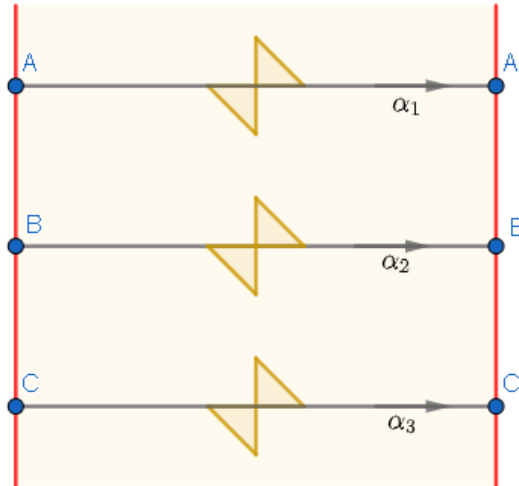
$$\nabla u = \frac{\partial_u}{\partial_{z_+}} \partial_{z_+} + \frac{\partial_u}{\partial_{z_-}} \partial_{z_-} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_{z_+} + \partial_{z_-}),$$

portanto,  $\nabla u$  é claramente tipo-luz, e também é passado-dirigido, já que

$$g(\nabla u, \partial_{z_-}) = du\left(\frac{\partial_u - \partial_v}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0.$$

Então,  $u \circ \alpha$  cresce estritamente ao longo de toda curva temporal futuro-dirigida, fazendo com que estas nunca possam se fechar em  $N$ , o que implica que o espaço-tempo é cronológico. Mas, em especial, suas curvas integrais  $\alpha(s) = (c, s)$ , para  $c \in \mathbb{R}$ , são tipo-luz, e portanto  $\pi \circ \alpha$  é uma curva causal que é fechada em  $N$ , mostrando que a condição de causalidade falha nesse espaço-tempo. A figura abaixo ilustra esse exemplo.

Figura 6 – Espaço-tempo cronológico mas não causal. As retas em vermelho estão identificadas entre si. As curvas  $\alpha_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , dadas por  $u$  constante, são luminosas e fechadas.



#### 4.7 ESPAÇOS-TEMPOS DISTINGUIDORES

**Lema 4.7.1.** *Em um espaço-tempo  $(M, g)$ , equivalem:*

1. Se  $p \neq q$ , então  $I^+(p) \neq I^+(q)$  (isto é, a aplicação  $I^+ : M \rightarrow \mathcal{P}(M)$  que leva  $p$  em  $I^+(p)$  é injetiva);

2. Dado um ponto  $p \in M$  e uma vizinhança  $U \subseteq M$  de  $p$ , existe uma vizinhança  $W \subseteq U$  tal que, para qualquer curva causal futuro-dirigida  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  com  $\alpha(a) = p$  e  $\alpha(b) \in W$ ,  $\alpha$  fica contida inteiramente em  $W$ ;
3. Dado um ponto  $p \in M$  e uma vizinhança  $U \subseteq M$ , existe uma vizinhança  $W \subseteq U$  tal que  $J^+(p, W) = J^+(p) \cap W$ .

A vizinhança  $W$  do item (2) é dita *distinguir  $p$  em  $U$  ao futuro*. Ainda é válida uma definição equivalente para o dual (passado).

*Demonstração.* (1)  $\Rightarrow$  (2) Suponha, para obter contradição, que (2) não valha. Então, é possível tomar  $p \in M$  e uma vizinhança  $U$  de  $p$  de modo que, para toda vizinhança  $W \subseteq U$ , existe uma curva  $\gamma$  que começa e termina em  $W$  mas não fica inteiramente contida em  $W$ . Reduzindo essa vizinhança o suficiente, é possível tomar  $U$  com fecho contido em uma vizinhança simples  $\tilde{U}$  (conforme definição 2.7.8). Considere então uma cadeia de vizinhanças  $\{V_n\}$  de  $p$  causalmente convexas em  $U$  (reduzindo  $U$  novamente, se necessário) e curvas causais futuro-dirigidas  $\gamma_n$  começando em  $p$  e terminando em um ponto de  $V_n$ , mas que não ficam inteiramente contidas em  $V_n$ . De fato, além de escapar de  $V_n$ , tais curvas escapam de  $U$ , pois cada  $V_n$  é causalmente convexo em  $U$ . Seja  $q_n$  um ponto em que  $\gamma_n$  intersecta  $\partial U$  quando está voltando para o conjunto  $U$ , e  $p_n$  um ponto de  $\gamma_n$  em  $V_n$  que esteja depois de  $q_n$  (i.e.,  $q_n \leq p_n$ ). Naturalmente,  $p_n \rightarrow p$ , e, como o fecho de  $U$  está contido em uma vizinhança simples, então a sequência  $q_n$  contida no fechado  $\partial U$  converge, a menos de subsequência, para um ponto  $q \in \partial U$ . Note que  $q_n \in J^-(p_n, \tilde{U})$ , e como  $\tilde{U}$  é aberto convexo,  $q \in J^-(p, \tilde{U})$  (pois  $J^-$  é fechado em vizinhanças convexas). Então, se  $r \in I^+(p)$ ,  $p \ll r$  e  $q \leq p \Rightarrow q \ll r$ , isto é,  $I^+(p) \subseteq I^+(q)$ . Por outro lado, se  $r \in I^+(q)$ , como  $I^-(r)$  é aberto, e  $q \in I^-(r)$ , para  $n$  grande o suficiente vale  $q_n \ll r$ , e como  $p \leq q_n$ , então  $p \ll r$ . Portanto  $I^+(q) \subseteq I^+(p)$ , logo há igualdade desses conjuntos, o que implica  $p = q$ . Mas  $p \in \text{int}U$  e  $q \in \partial U$ , contradição.

(2)  $\Rightarrow$  (1) Suponha, para obter contradição, que (2) seja verdade mas (1) não valha. Então, existem pontos  $p \neq q$  tais que  $I^+(p) = I^+(q)$ . Tome uma vizinhança  $U$  de  $p$  tal que  $q \notin \bar{U}$ , e outra vizinhança  $V \subseteq U$  qualquer. Tome  $p' \in V$  tal que  $p \ll_V p'$ . Então,  $q \ll p'$ . Seja  $\gamma$  uma curva tipo-tempo que conecta  $q$  e  $p'$ , e tome um ponto  $q'$  de  $\gamma$  entre esses outros dois tal que  $q' \notin U$  (isso é possível pois  $q \notin \bar{U}$ , e então  $\gamma$  precisa adentrar o interior de  $M - U$  para chegar em  $q$ , por continuidade). Como  $q \ll q'$ , então  $p \ll q'$ . Seja  $\alpha_1$  a curva tipo-tempo que conecta  $p$  e  $q'$ , e  $\alpha_2$  o segmento de  $\gamma$  que conecta  $q'$  e  $p'$ , então a curva  $\alpha$  obtida justaponto  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , é tal que começa em  $p$  e termina em  $p' \in V$ , mas viaja até  $q' \notin U$ , logo não fica inteiramente contida em  $V$ . Como  $V$  é arbitrário, obtém-se contradição.

(2)  $\Rightarrow$  (3). Seja  $p \in M$  e uma vizinhança  $U \subseteq M$  de  $p$ . Então, tome a vizinhança  $W$  como no item 2. Naturalmente,  $J^+(p, W) \subseteq J^+(p) \cap W$ . Agora, seja  $q \in J^+(p) \cap W$ .



Então, existe uma curva  $\gamma$  causal futuro-dirigida que conecta  $p$  a  $q$ . Então, como  $q \in W$ ,  $\gamma$  deve estar inteiramente contida em  $W$ , por (2). Logo  $p \leq_W q$ .

(3)  $\Rightarrow$  (2) Considere que (2) não valha. Então existe uma vizinhança  $U \subseteq M$  de  $p$  que, sem perda de generalidade, será assumida com fecho contido em uma vizinhança convexa simples  $\tilde{U}$ , e uma sequência de vizinhanças  $\{V_n\}$  de  $p$  causalmente convexas em  $U$  tais que  $\cap V_n = \{p\}$  e curvas causais futuro-dirigidas  $\alpha_n : [a_n, b_n] \rightarrow M$  com  $\alpha_n(a_n) = p$  e  $\alpha_n(b_n) = p_n \in V_n$ . Tome  $W \subseteq U$  vizinhança de  $p$  como no item (3), isto é, tal que  $J^+(p, W) = J^+(p) \cap W$ . Para  $n$  grande o suficiente,  $V_n \subseteq W$ , e então as curvas  $\alpha_n$  tem extremos em  $V_n$  mas saem de  $U$  e reentram (pela causalidade convexa de  $V_n$ ), e em particular voltam para  $W$  em um certo ponto  $r_n \in \partial W$ . Então  $r_n \rightarrow r$ , a menos de subsequência, e  $r_n \leq_{\tilde{U}} p_n$ , o que implica  $r \in J^-(p, \tilde{U})$ . Como cada  $r_n \in J^+(p) \cap \partial W$  segue que  $r \in \overline{J^+(p) \cap W} = \overline{J^+(p, W)} \subseteq \overline{J^+(p, \tilde{U})} = J^+(p, \tilde{U})$ , o que é uma contradição pois  $\tilde{U}$  é uma vizinhança convexa.  $\square$

**Definição 4.7.2.** (Espaço-tempo distinguidor) *Um espaço-tempo  $(M, g)$  é dito ser distinguidor ao futuro se uma das condições equivalentes do lema anterior for satisfeita. Se uma das condições duais para o passado for satisfeita, o espaço-tempo é dito distinguidor ao passado. Em caso de ambas condições duais serem satisfeitas,  $M$  é dito ser distinguidor.*

Note que um espaço-tempo distinguidor é também causal. De fato, se  $\gamma$  é uma curva causal futuro-dirigida fechada em  $p$  e  $q \neq p$  está na imagem de  $\gamma$ , então, dado  $r \in I^+(p)$ ,  $p \ll r$  e  $q \leq p$ , logo  $q \ll r$ , portanto  $r \in I^+(q)$ . Fazendo um raciocínio análogo para a outra inclusão, obtém-se  $I^+(p) = I^+(q)$ , uma contradição.

**Proposição 4.7.3.** *Se  $(M_1, g_1)$  e  $(M_2, g_2)$  são dois espaços-tempos, com  $M_1$  distinguidor, e  $f : M_1 \rightarrow M_2$  um homeomorfismo tal que  $f$  e sua inversa  $f^{-1}$  preservem a relação de causalidade  $\leq$ , então,  $(M_2, g_2)$  é distinguidor.*

*Demonstração.* Suponha que  $M_1$  seja distinguidor, tome  $p \in M_2$  e  $U_2 \subseteq M_2$  vizinhança qualquer. Defina  $q := f^{-1}(p)$  e  $U_1 := f^{-1}(U_2)$ . Naturalmente, por ser um homeomorfismo  $U_1$  é vizinhança de  $q$ , e como  $M_1$  é distinguidor, existe uma vizinhança  $W_1$  que distingue  $q$  em  $U_1$ . Então  $W_2 := f(W_1)$  é a vizinhança candidata a distinguir  $p$  em  $U_2$ .

É claro que  $p \in W_2$ . Suponha que  $W_2$  não distinga  $p$  ao futuro. Então existe uma curva causal  $\alpha_2 : [a, b] \rightarrow M$  tal que  $\alpha_2(a) = q$ ,  $\alpha_2(b) = x_2 \in W_2$  mas  $\alpha_2(s_2) =: y_2 \notin W_2$ , para algum  $s_2 \in (a, b)$ . Como  $f$  preserva  $\leq$  e  $f$  é homeomorfismo (e portanto bijeção), segue que  $q = f^{-1}(p) \leq f^{-1}(y_2) =: y_1 \leq f^{-1}(x_2) =: x_1$ . Mas  $x_1, q \in W_1$  e  $y_1 \notin W_1$ , uma contradição com o fato de  $W_1$  distinguir  $q$  em  $U_1$  ao futuro. A demonstração para a distinção ao passado é temporalmente dual.  $\square$

Agora, espaços-tempos distinguidores serão caracterizados a partir de funções volume. Para isso, faz-se necessário o seguinte lema, que também possui uma versão temporalmente dual.

**Lema 4.7.4.** *Se em um espaço-tempo  $(M, g)$ ,  $q \leq p$  e  $q \in \overline{J^+(p)}$  implique  $q = p$ , então o espaço-tempo é futuro distinguidor.*

*Demonstração.* De fato, assumamos que o espaço-tempo não seja distinguidor, e, portanto, que (2) do Lema 4.7.1 não valha. Fazendo a mesma construção da demonstração (1)  $\Rightarrow$  (2), temos que, como  $q_n \rightarrow q$  e  $q_n \in J^+(p)$ ,  $\forall n$ , então  $q \in \overline{J^+(p)}$ , e a demonstração explicita que  $q \in J^-(p, \tilde{U})$ ,  $\therefore q \leq p$ . Então  $q = p$ , por hipótese, mas  $p \in \text{int}U$  e  $q \in \partial U$ , uma contradição.  $\square$

**Proposição 4.7.5.** *Um espaço-tempo  $(M, g)$  é passado [resp. futuro] distinguidor se, e somente se,  $t^-$  [resp.  $t^+$ ] é uma função tempo generalizada.*

*Demonstração.*  $\Rightarrow$  (Será feito para o caso passado) Tome  $p < q$  em  $M$  quaisquer. O *pushup lemma* garante que  $I^-(p) \subseteq I^-(q)$ . Por ser passado distinguidor, é causal, então  $p \neq q$  e segue que  $I^-(p) \neq I^-(q)$ . Como  $I^-(q)$  é aberto é possível tomar  $x \in I^-(q) \setminus \overline{I^-(p)}$  e tomar  $U \subseteq I^-(q)$  aberto contendo  $x$  mas não intersectando  $\overline{I^-(p)}$ . Então,  $U$  e  $I^-(p)$  são abertos disjuntos contidos em  $I^-(q)$ , o que implica que

$$t^-(q) = m(I^-(q)) \geq m(U) + m(I^-(p)) > m(I^-(p)) = t^-(p),$$

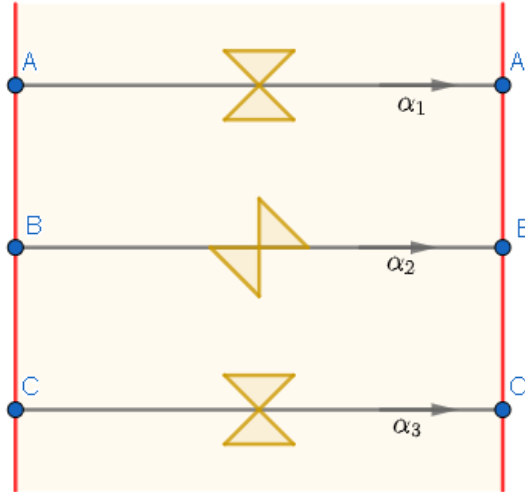
uma vez que  $U$  é aberto e tem medida positiva pois  $m$  é admissível.

$\Leftarrow$  (Será feito para o caso futuro) Note que se  $q \leq p$  e  $q \in \overline{J^+(p)}$ , então  $I^+(q) = I^+(p)$ , pois  $q \leq p \Rightarrow I^+(p) \subseteq I^+(q)$  e se  $x \in I^+(q)$ ,  $q \in I^-(x) \Rightarrow I^-(x) \cap J^+(p) \neq \emptyset$ , o que implica  $x \in I^+(p)$ . Mas então  $t^+(p) = t^+(q)$  e, portanto, se  $p \neq q$ , haveria uma curva causal futuro-dirigida  $\alpha$  de  $q$  a  $p$  na qual  $t^+$  não é estritamente crescente. Daí se tira que  $p = q$  e, pelo lema anterior, o espaço-tempo é futuro distinguidor.

A versão dual dessas implicações é análoga.  $\square$

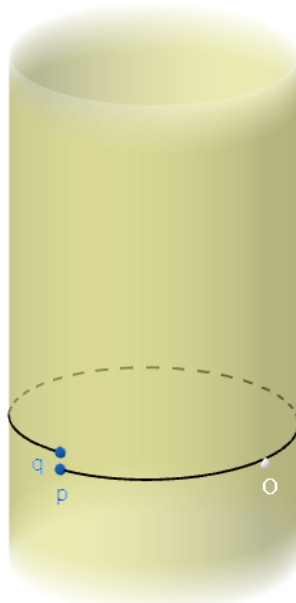
**Exemplo 4.7.6.** Considere  $\mathbb{R}_1^2$  com métrica  $g$  igual a métrica em 4.6.2 em  $t = 0$  mas se inclinando de modo até se tornar a métrica usual em algum momento da região  $t > 0$  e  $t < 0$ . Faça a identificação de maneira análoga como feito no exemplo 4.6.2 através da isometria  $(u, v) \mapsto (u, v + 1)$ . Portanto, a curva  $\alpha(s) = (0, s)$ ,  $s \in [0, 1]$  é fechada e luminosa, e não existem outras curvas causais fechadas além dessa, implicando que o espaço-tempo é cronológico mas não causal, como ilustra a figura abaixo.

Figura 7 – Espaço-tempo cronológico mas não causal. As retas em vermelho estão identificadas. Diferente do exemplo 4.6.2, as curvas  $\alpha_1$  e  $\alpha_3$  não são mais luminosas. De fato, a única geodésicamente luminosa fechada deste espaço-tempo  $\alpha_2$ .



Entretanto, considere agora removido o ponto  $O := (0, \frac{1}{2})$ . Nesse caso, não há mais curvas causais fechadas, e o espaço é agora causal. Porém, o espaço-tempo não é distinguível, pois, por exemplo, há curvas causais começando em vizinhanças próximas do ponto  $p = (0, 0)$  que saem dessa vizinhança e retornam, como ilustra a figura abaixo.

Figura 8 – Espaço-tempo causal mas não distinguível. A curva da figura parte de  $p$ , é causal futuro-dirigida e quase se fecha em  $p$ .



Remover a linha vertical acima do ponto  $O$  faria com que o espaço-tempo fosse futuro distinguível, mas não passado distinguível (de fato, todos os pontos abaixo da linha crítica

formariam o passado cronológico comum de cada ponto sobre a linha). Naturalmente, ocorre o dual para a remoção da linha vertical abaixo do ponto  $O$ .

#### 4.8 ESPAÇOS-TEMPOS FORTEMENTE CAUSAIS

**Definição 4.8.1.** (Espaço-tempo fortemente causal) *Um espaço-tempo  $(M, g)$  é dito ser fortemente causal se satisfaz a condição de causalidade forte em cada ponto  $p \in M$ .*

Um espaço-tempo fortemente causal é distinguidor, vide segundo item da caracterização de espaços-tempos distinguidores do Lema 4.7.1.

Uma das maneiras equivalentes de caracterizar espaços-tempos fortemente causais é através da dita *topologia de Alexandrov*. A topologia de Alexandrov é aquela gerada pela base cujos elementos são os conjuntos  $I^+(p) \cap I^-(q) =: I(p, q)$ , com  $p, q \in M$ . De fato, esse conjunto é base para alguma topologia pois

1.  $\cup_{p, q \in M} I(p, q) = M$ , claramente.
2. Se  $x \in I(p, q) \cap I(r, s) =: B$ , então como essa intersecção é um aberto, existe  $V \subseteq B$  vizinhança aberta de  $x$ , logo  $I^+(x, B) \neq \emptyset$  e o mesmo vale para o passado. Tomando pontos  $x_1 \ll_B x \ll_B x_2$  em  $B$ , é fácil ver que  $I(x_1, x_2) \subseteq B$ .

**Teorema 4.8.2.** *Seja  $(M, g)$  um espaço-tempo. Equivalem:*

1. *O espaço-tempo  $(M, g)$  é fortemente causal;*
2. *A topologia de Alexandrov é de Hausdorff;*
3. *A topologia de Alexandrov coincide com a topologia original da variedade.*

*Demonstração.* (1)  $\Rightarrow$  (3): Suponha que  $M$  seja fortemente causal. Como  $I^+(p) \cap I^-(q)$  é um aberto da topologia de  $M$ , então a topologia de  $M$  é mais fina que a topologia de Alexandrov (de fato, isso vale para qualquer espaço-tempo). Por outro lado, seja  $U$  um aberto de  $M$  e tome  $x \in U$ . Tome uma vizinhança  $V \subseteq U$  de  $x$  causalmente convexa em  $M$ , logo  $\ll_V = \ll$  em  $V$ . Basta, portanto, tomar  $p, q \in V$  tais que  $p \ll_V x$  e  $x \ll_V q$ . Desse modo, se  $r \in I^+(p) \cap I^-(q)$ , então  $p \ll r \ll q$ , logo  $r \in V \subseteq U$  pela causalidade convexa, e, portanto,  $x \in I^+(p) \cap I^-(q) \subseteq U$ , o que conclui a demonstração.

(3)  $\Rightarrow$  (2): Trivial uma vez que a topologia da variedade é de Hausdorff.

(2)  $\Rightarrow$  (1): Agora, suponha que a topologia de Alexandrov seja de Hausdorff e, a fim de obter contradição, suponha que o espaço-tempo não seja fortemente causal. Logo, existe  $p \in M$  e, como na demonstração do 4.7.1, conjuntos  $\{V_n\}$  causalmente convexos em  $U \subseteq \tilde{U} \subseteq M$  simples, e curvas  $\gamma_n$  com extremos  $p_n, p'_n$  em  $V_n$  mas que escapam de  $U$ , retornando em um ponto  $q_n \in \partial U$ , de modo que  $p_n, p'_n$  convergem pra  $p$  e  $q_n$  converge pra  $q \in \partial U$ . Com isso, obtém-se que  $q \leq_{\tilde{U}} p$  pois  $q_n \leq p'_n$  e  $J_+$  é fechado na vizinhança

convexa  $\tilde{U}$ , e portanto  $q \leq p$ . Para qualquer  $q_1 \ll q \ll q_2$ , vale que  $q_1 \ll p$  (já que  $q \leq p$ ). Como  $p_n \leq q_n$ , e  $q_n \rightarrow q$ , para  $n$  grande o suficiente,  $q_n \in I^-(q_2)$  e então  $p_n \ll q_2$ . Ou seja,  $p \in \overline{I^+(q_1) \cap I^-(q_2)}$  (fecho na topologia usual), então qualquer aberto da topologia de Alexandrov contendo  $p$  intersectará  $I^+(q_1) \cap I^-(q_2)$  (pois também é aberto da topologia da variedade). Como  $q_1$  e  $q_2$  eram arbitrários, fica impossível separar  $p$  e  $q$  com a topologia de Alexandrov, uma contradição.  $\square$

**Definição 4.8.3.** (Curvas aprisionadas) *Seja  $K \subseteq M$  um compacto. Uma curva  $C^0$  causal futuro-dirigida  $\alpha : [a, b) \rightarrow M$  é dita ser futuro-aprisionada em  $K$  se existe  $c_K \in [a, b)$  tal que  $\alpha[c_K, b) \subseteq K$ . Além disso, curva  $\alpha$  é dita ser parcialmente aprisionada em  $K$  se existe alguma sequência  $\{t_m\} \subseteq [a, b)$  convergindo para  $b$  tal que  $\alpha(t_m) \in K$ , para todo  $m \in \mathbb{N}$ .*

É claro que uma curva ser aprisionada em um compacto  $K$  implica que a curva é parcialmente aprisionada no mesmo compacto. Essas curvas não podem existir em espaços-tempos fortemente causais.

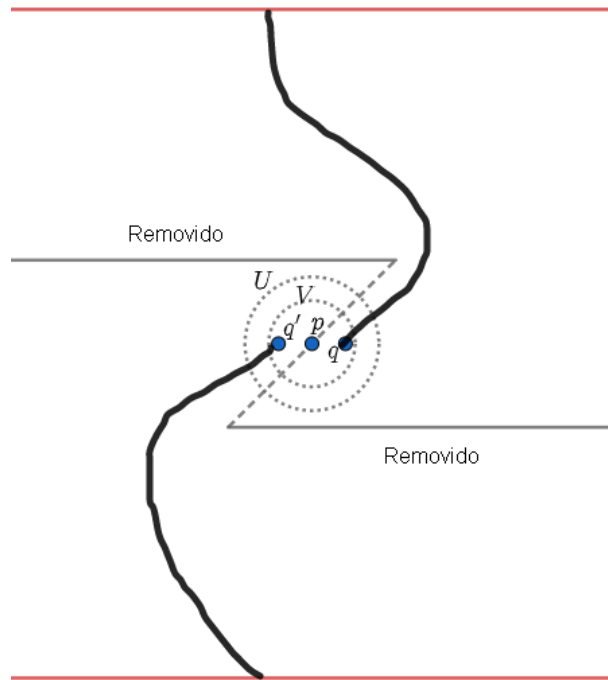
**Proposição 4.8.4.** *Seja  $K \subseteq M$  um conjunto compacto tal que a condição forte de causalidade valha em todo  $p \in K$ . Então, qualquer curva  $C^0$  causal futuro-dirigida e futuro-inextensível  $\alpha : [0, b) \rightarrow M$  com  $\alpha(0) \in K$  saí de  $K$  e não retorna mais (isto é, existe  $t_0 \in [0, b)$  tal que  $\alpha(t) \notin K$ , para todo  $t \in (t_0, b)$ ).*

*Demonstração.* Suponha que não valha a conclusão. Desse modo, existe uma sequência  $s_i \rightarrow b$  tal que  $\alpha(s_i) \in K$ ,  $\forall i$  (isto é  $\alpha$  fica parcialmente futuro-aprisionada em  $K$ ). A menos de subsequência,  $\alpha(s_i) \rightarrow p \in K$ . Como é futuro inextensível, então deve haver outra sequência  $t_i \rightarrow t$  tal que  $\alpha(t_i)$  não converge pra  $p$  (caso contrário seria possível estender  $\alpha$  continuamente para  $p$ ). Sendo assim, tome uma vizinhança  $U$  de  $p$  que, a menos de um número finito de pontos, não contém nenhum  $\alpha(t_i)$ . Como  $\{t_i\}$  e  $\{s_i\}$  convergem pra  $b$ , então, a menos de subsequência, é possível tomar  $s_1 < t_1 < s_2 < t_2 < \dots$  e  $\alpha(s_k) \in U$ ,  $\alpha(t_k) \notin U$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ . Definindo as curvas  $\gamma_k := \alpha|_{[s_k, s_{k+1}]}$ , segue do fato que  $\alpha(s_k) \rightarrow p$ , que para qualquer vizinhança  $V \subseteq U$  de  $p$ ,  $\gamma_k$  tem extremos em  $V$ , para  $k$  grande o suficiente, mas  $\gamma_k(t_k) \notin U$ , o que contradiz a condição forte de causalidade em  $p$ .  $\square$

**Exemplo 4.8.5.** Considere o retângulo aberto  $[1, -1] \times (-\infty, \infty)$  com coordenadas  $(t, x)$  e a métrica usual de Minkowski, e identifique  $\{1\} \times (-\infty, \infty)$  com  $\{-1\} \times (-\infty, \infty)$  (esse espaço-tempo pode ser obtido através da isometria  $(t, x) \rightarrow (t+2, x)$ , de maneira análoga a exemplos anteriores). Remova as retas  $\{(1/4, x) : -\infty < x \leq 1/4\}$  e  $\{(-1/4, x) : -1/4 \leq x < \infty\}$ .

Tome  $p = (0, 0)$  e  $U = B_r(p)$  a bola aberta de raio  $r = 1/6$  e centro  $p$ , por exemplo. Para qualquer vizinhança  $V \subseteq U$  de  $p$ , é possível conectar, para um  $\epsilon > 0$  pequeno suficiente,  $q = (0, \epsilon) \in V$  com  $q' = (0, -\epsilon) \in V$  através de uma curva causal que não fica inteiramente contida em  $U$ , como indica a imagem abaixo.

Figura 9 – Espaço-tempo distinguidor mas não fortemente causal. As linhas em vermelho estão identificadas



Entretanto, esse espaço-tempo é distinguidor uma vez que as curvas causais partindo de  $p$  não conseguem chegar até a parte identificada pois ficam contidas pela linha removida.

#### 4.9 ESPAÇOS-TEMPOS ESTAVELMENTE CAUSAIS

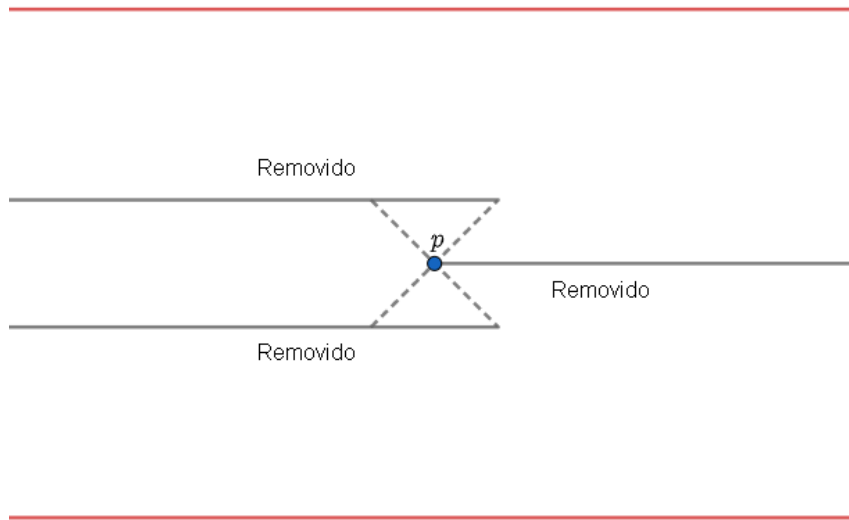
Fixada uma variedade  $M$ , denote  $Lor(M)$  o conjunto das métricas de Lorentz em  $M$ . Se  $g, g' \in Lor(M)$ , então denota-se  $g < g'$  caso todos os vetores causais com respeito a  $g$  sejam vetores tipo-tempo com respeito a  $g'$ . Ou seja,  $g'$  tem cones causais em cada espaço tangente “estritamente” mais abertos que os de  $g$ . Note que, grosso modo, isso tende a piorar a causalidade, já que curvas espaciais - que poderiam ser fechadas - podem se tornar curvas causais.

**Definição 4.9.1.** (Espaço-tempo estavelmente causal) *Um espaço-tempo  $(M, g)$  é estavelmente causal se existe uma métrica  $g' \in Lor(M)$  de modo que  $(M, g')$  seja causal e  $g < g'$ .*

A ideia aqui é que pequenas perturbações na métrica não violam a causalidade do espaço-tempo. Ou seja, é possível “abrir” ligeiramente os cones de luz e manter a causalidade. Um exemplo em que isso não ocorre é apresentado a seguir.

**Exemplo 4.9.2.** Novamente, considere o retângulo aberto  $[1, -1] \times (-\infty, \infty)$  com coordenadas  $(t, x)$  e a métrica usual de Minkowski. Identifique  $\{1\} \times (-\infty, \infty)$  com  $\{-1\} \times (-\infty, \infty)$ , e remova as retas  $\{(\pm 1/4, x) : -\infty < x \leq 1/4\}$  e  $\{(0, x) : 0 \leq x < \infty\}$ :

Figura 10 – Espaço-tempo fortemente causal mas não estavelmente causal. As linhas em vermelho estão identificadas



Note que, para uma vizinhança  $V$  de  $p$  pequena o suficiente, nenhuma curva causal partindo de um ponto  $q \in V$  pode sair e voltar a  $V$ . O espaço-tempo é portanto fortemente causal, mas não é estavelmente causal, uma vez que uma pequena abertura nos cones tornaria possível o aparecimento de curvas causais fechadas em  $p$ .

A caracterização abaixo de espaços-tempos estavelmente causais foi demonstrada com rigor somente recentemente, de acordo com [10].

**Teorema 4.9.3.** *Seja  $(M, g)$  um espaço-tempo.  $(M, g)$  é estavelmente causal  $\iff$  admite uma função tempo  $t \iff$  admite uma função temporal  $\tau$ .*

**Proposição 4.9.4.** *Um espaço-tempo estavelmente causal é também fortemente causal.*

*Demonstração.* Seja  $(M, g)$  um espaço-tempo estavelmente causal e  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função tempo. Suponha que a condição forte de causalidade não valha em algum  $p \in M$ . Tome então uma sequência de curvas causais futuro-dirigidas  $\alpha_n : [a_n, b_n] \rightarrow M$  tais que  $p_n := \alpha_n(a_n)$  e  $p'_n := \alpha_n(b_n)$  convirjam para  $p$  mas cada uma dessas curvas sai e reentra em  $U$ . Sem perda de generalidade é possível tomar  $U$  com fecho contido em uma vizinhança simples  $\tilde{U}$ . Seja  $q_n \in \partial U$  o último ponto em que  $\alpha_n$  reentra em  $U$ . Como  $\partial U \subseteq \tilde{U}$ , e este tem fecho compacto, a menos de subsequência vale  $q_n \rightarrow q \in \partial U$ . Então,  $\forall n$ ,  $f(p_n) < f(q_n) < f(p'_n)$ , e, por continuidade de  $f$ , segue que  $f(p) \leq f(q) \leq f(p)$ , ou seja,  $f(p) = f(q)$ . Mas como  $q_n <_{\tilde{U}} p'_n$ , para todo  $n$ , e  $\tilde{U}$  é convexo, segue que  $q <_{\tilde{U}} p$  implicando  $f(q) < f(p)$ , uma contradição.  $\square$

## 4.10 ESPAÇOS-TEMPOS CAUSALMENTE CONTÍNUOS

**Lema 4.10.1.** *Seja  $(M, g)$  um espaço-tempo. Então, equivalem:*

- a)  $I^\pm : M \rightarrow \mathcal{P}(M)$  são aplicações injetivas e  $(M, g)$  é reflexivo;
- b)  $(M, g)$  é distinguidor e as funções volume  $t^\pm$  são contínuas;
- c) As funções volume  $t^\pm$  são funções tempo.

*Demonstração.* Basta notar que:

- $I^\pm : M \rightarrow \mathcal{P}(M)$  são aplicações injetivas  $\iff (M, g)$  é distinguidor  $\iff$  as funções volume  $t^\pm$  são funções tempo generalizadas, como discutido na seção sobre espaços-tempos distinguidores;
- $(M, g)$  é reflexivo  $\iff$  as funções volume  $t^\pm$  são contínuas, de acordo com a discussão da seção sobre funções volume.

□

**Definição 4.10.2.** (Espaço-tempo causalmente contínuo) *Um espaço-tempo  $(M, g)$  é dito ser causalmente contínuo se satisfizer uma das condições equivalentes do lema anterior.*

É imediato de sua definição o fato de que os espaços-tempos causalmente contínuos são estavelmente causais, pela caracterização destes a partir da existência de funções tempo, mas a recíproca não é verdadeira, como ilustra o exemplo abaixo.

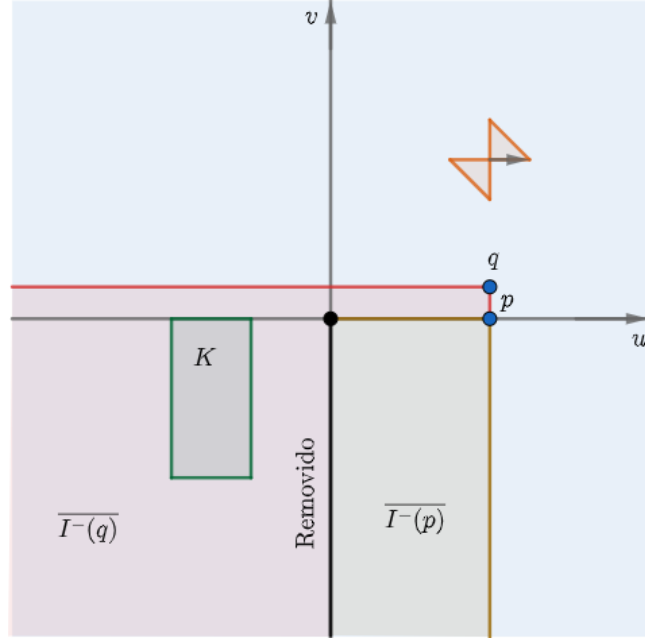
**Exemplo 4.10.3.** Considere o retângulo  $(-2, 2) \times (-2, 2)$  com coordenadas  $(u, v)$  e métrica  $g = -du \otimes dv - dv \otimes du$ . Perceba que, definindo  $t = (u + v)/\sqrt{2}$ ,  $x = (u - v)/\sqrt{2}$ , se tem que  $-dt^2 + dx^2 = -2dudv$ , logo  $(u, v)$  são na verdade apenas as coordenadas luminosas em Minkowski, e portanto os cones causais ficam inclinados.

Remova agora o segmento  $\{0\} \times (-2, 0]$ . Claramente não há curvas causais fechadas neste espaço-tempo, mesmo que você abra ligeiramente os cones causais, logo o espaço é estavelmente causal.

Denote  $p = (1, 0)$  e  $K = [-1, -1/2] \times [0, -1]$ .  $K$  é compacto e  $K \subseteq M - \overline{I^-(p)}$ , mas, para qualquer vizinhança  $U$  de  $p$ , existem pontos  $q \in U$  da forma  $(1, \epsilon)$ , para  $\epsilon > 0$  pequeno o suficiente, tais que  $\overline{I^-(q)} \cap K \neq \emptyset$ , como ilustra a figura abaixo:



Figura 11 – Espaço-tempo estavelmente causal mas não causalmente contínuo.



Note que  $\overline{I^-(p)}$  não chega em  $K$  devido a linha removida, mas  $\overline{I^-(q)}$  sim, logo  $I^-$  não é exteriormente contínua, e o espaço-tempo não é causalmente contínuo.

#### 4.11 ESPAÇOS-TEMPOS CAUSALMENTE SIMPLES

**Definição 4.11.1.** (Espaço-tempo causalmente simples) *Um espaço-tempo  $(M, g)$  é causalmente simples se é causal e  $J^+(p)$ ,  $J^-(p)$  são fechados,  $\forall p \in M$ .*

**Proposição 4.11.2.** *Um espaço-tempo  $(M, g)$  causalmente simples é distinguidor.*

*Demonstração.* Suponha que não seja distinguidor, isto é,  $\exists p, q \in M$  com  $p \neq q$  e  $I^+(p) = I^+(q)$ . Tome então uma sequência  $\{q_n\} \rightarrow q$  tal que  $q \ll q_n, \forall n$ . Então, a sequência está toda contida em  $I^+(q)$  o que implica  $q \in \overline{I^+(q)} = \overline{I^+(p)} = \overline{J^+(p)} = J^+(p)$  (a última igualdade valendo pois este conjunto é fechado). Então  $p < q$ , e, de maneira análoga, obtemos  $q < p$ , o que contradiz o fato do espaço ser causal.  $\square$

**Proposição 4.11.3.** *Se, em um espaço-tempo  $(M, g)$ , os conjuntos  $J^+(p)$  são fechados, para todo  $p \in M$ , então  $I^-$  é contínuo exteriormente, e vale o dual.*

*Demonstração.* Note que se  $p \in \overline{I^+(q)} = J^+(p)$ , então  $q \in J^-(p) \subseteq \overline{I^-(p)}$ , logo  $I^-$  é contínua exteriormente.  $\square$

Essas duas proposições garantem que um espaço-tempo causalmente simples é causalmente contínuo.

**Proposição 4.11.4.** *Se um espaço-tempo  $(M, g)$  é causal e satisfaz uma das condições equivalentes:*

- a)  $J^+(p)$  e  $J^-(p)$  são fechados,  $\forall p, q \in M$ ;
- b)  $J^+(C)$  e  $J^-(C)$  são fechados,  $\forall C \subseteq M$  compacto;
- c)  $J^+$  é fechado em  $M \times M$ .

então  $(M, g)$  é causalmente simples.

*Demonstração.* Basta mostrar que as equivalências realmente valem.

(a)  $\Rightarrow$  (b): Suponha que  $q \in \overline{J^+(C)}$  mas não valha que  $q \in J^+(C)$ . Como o fecho de  $J^+(C)$  e  $I^+(C)$  coincidem, é possível tomar uma sequência  $q_n \in I^+(C)$  tal que  $q_n \rightarrow q$  e, para todo  $n$ , existe  $p_n \in C$  de modo que  $p_n \ll q_n$ . Então, a menos de subsequência, vale que  $p_n \rightarrow p \in C$ . Desse modo,  $(p, q) \in \overline{I^+}$ . A proposição 4.3.3 garante que  $q \in \overline{I^+}(p) = J^+(p)$ , e  $J^+(p) \subseteq J^+(C)$ , o que é uma contradição.

(b)  $\Rightarrow$  (c): Seja  $(p, q) \in \overline{I^+}$ , então  $q \in \overline{I^+}(p)$ , pela mesma proposição usada acima. Então  $q \in J^+(p)$ , pois pontos sozinhos  $\{p\}$  são compactos, e segue que  $(p, q) \in J^+$ . Como a outra inclusão é trivial,  $J^+ = \overline{I^+}$ .

(c)  $\Rightarrow$  (a) é obtido trivialmente ao aplicar a projeção  $\pi_2$  em  $(\{p\} \times M \cap J^+)$  pois  $\{p\}$  é compacto.  $\square$

**Exemplo 4.11.5.** O espaço-tempo do exemplo 3.3.5 é tal que  $J^+(p)$  não é fechado, para  $p = (0, 0)$ , como já argumentado, mostrando não ser causalmente simples. Por outro lado, esse espaço é claramente fortemente causal, e portanto distinguidor, e é reflexivo (por exemplo,  $x \in \overline{I^-(y)} \iff y \in \overline{I^+(x)}$ ), portanto é causalmente contínuo.

## 4.12 ESPAÇOS-TEMPOS GLOBALMENTE HIPERBÓLICOS

**Definição 4.12.1.** (Espaço-tempo globalmente hiperbólico) *Um espaço-tempo  $(M, g)$  é dito ser globalmente hiperbólico se é causal e  $J^+(p) \cap J^-(q)$  é compacto,  $\forall p, q \in M$ .*

**Proposição 4.12.2.** *Um espaço-tempo  $(M, g)$  globalmente hiperbólico é causalmente simples<sup>1</sup>.*

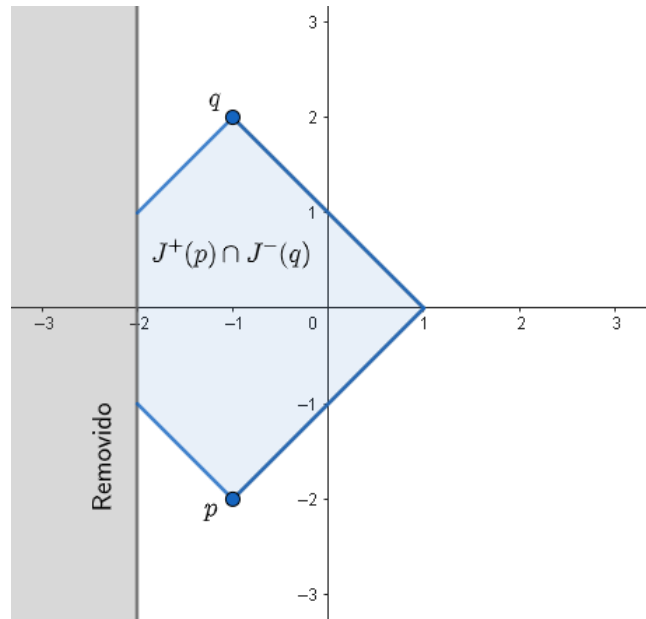
*Demonstração.* Suponha que  $J^+(p)$  não seja fechado, para algum  $p \in M$ . Tome então  $q \in \overline{J^+(p)} - J^+(p)$ ,  $r \in I^+(q)$ , e uma sequência  $\{q_n\} \rightarrow q$  inclusa em  $I^+(p)$  (tal sequência existe pois  $q \in \overline{J^+(p)} = \overline{I^+(p)}$ ). Então  $q_n \ll r$  para  $n$  grande o suficiente, já que  $q \in I^-(r)$  é aberto. Então, a menos de uma quantidade finita de elementos,  $\{q_n\} \in J^+(p) \cap J^-(r)$ , que é compacto, mas  $\{q_n\}$  converge para um elemento  $q$  fora desse conjunto, uma contradição.  $\square$

<sup>1</sup> Em particular, todo espaço-tempo globalmente hiperbólico como aqui definido é fortemente causal. Em diversas apresentações essa condição se impõe na definição no lugar da causalidade.

A recíproca não vale, como indica o exemplo abaixo.

**Exemplo 4.12.3.** Considere  $\mathbb{R}_1^2$  removendo os pontos  $\{(t, x) : x \leq -2\}$ . Esse espaço-tempo é claramente causal, e como cada  $J^+(x)$  é fechado, é causalmente simples. Porém  $J(p, q)$  não é compacto, pois a sequência  $\{(0, -2 + 1/n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  fica contida em  $J(p, q)$  mas não possui nenhuma subsequência convergente. Então esse espaço não é globalmente hiperbólico.

Figura 12 – Espaço-tempo causalmente simples mas não globalmente hiperbólico.



Um espaço-tempo globalmente hiperbólico satisfaz boas propriedades quando se trata da separação temporal.

**Proposição 4.12.4.** *Seja  $(M, g)$  um espaço-tempo globalmente hiperbólico. Então vale:*

1. *Quaisquer dois pontos causalmente relacionados podem ser conectados por uma geodésica causal que maximiza a separação temporal, em particular  $d$  é finita;*
2.  *$d$  é contínua;*

*Demonstração.* 1) Sejam  $p \leq q \in M$  e uma sequência de curvas causais futuro-dirigidas  $\alpha_n : [a, b] \rightarrow M$  com  $\alpha_n(a) = p$  e  $\alpha_n(b) = q$  de modo que  $L(\alpha_n)$  converge para  $d(p, q)$ . Todas  $\alpha_n$  estão contidas em  $J^+(p) \cap J^-(q)$ , que é compacto pela hiperbolicidade global. Pela proposição 4.4.2, existe uma curva  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$   $C^0$ , causal e futuro-dirigida com imagem em  $J^+(p) \cap J^-(q)$  tal que  $\alpha(a) = p$  e  $\alpha(b) = q$ , que satisfaz:

$$L_g(\alpha) \geq \limsup L_g(\alpha_{n_m})$$

Para alguma subsequência  $\{\alpha_{n_m}\}$ . Como  $L(\alpha_n) \rightarrow d(p, q)$ , segue que  $L_g(\alpha) \geq d(p, q)$ . Por outro lado, como  $[a, b]$  é compacto,  $\alpha[a, b]$  é compacto, logo é possível tomar uma cobertura finita desse conjunto por abertos convexos  $U_1, \dots, U_k$  e uma partição  $P$  de  $[a, b]$  de modo que  $\alpha|_{[t_i, t_{i+1}]} \subseteq U_i$ .

Considere  $\beta$  a concatenação das geodésicas radiais  $\overrightarrow{\alpha(t_i)\alpha(t_{i+1})}$  nos abertos convexos  $U_i$ . Pela definição do comprimento de arco lorentziano,  $L_g(\alpha) \leq L(\beta) \leq d(p, q)$ , o que implica  $L_g(\alpha) = d(p, q)$ .

Agora, já que os segmentos geodésicos radiais  $\overrightarrow{\alpha(t_i)\alpha(t_{i+1})}$  são maximizantes, e  $\alpha$  também o é, então  $\alpha|_{[t_i, t_{i+1}]} = \overrightarrow{\alpha(t_i)\alpha(t_{i+1})}$ , ou seja  $\alpha$  é uma geodésica quebrada. Mais ainda, considere um aberto convexo  $V_i$  no qual um segmento da forma  $\alpha|_{[s_i, s_{i+1}]}$  fique contido, para  $s_i < t_i < s_{i+1}$ ,  $i < k$ . Então, por  $\alpha$  ser maximizante, pode ser usado o mesmo argumento anterior para mostrar que  $\alpha|_{[s_i, s_{i+1}]} = \overrightarrow{\alpha(s_i)\alpha(s_{i+1})}$ . Ou seja,  $\alpha$  não é quebrada, e portanto é uma geodésica suave. Como  $L(\alpha) = d(p, q)$ , essa distância é finita, em particular.

2) Já se sabe que  $d$  é semicontínua inferiormente em qualquer espaço-tempo e que  $d$  é finita. Assuma que não seja semicontínua superiormente em algum  $(p, q) \in U$ . Então, existe  $\delta > 0$  e seqüências  $p_n \rightarrow p$  e  $q_n \rightarrow q$  tais que  $d(p_n, q_n) \geq d(p, q) + \delta$ .

Como vale que  $d(p_n, q_n) > 0$ , existe uma curva causal  $\alpha_n$  conectando os pontos  $p_n$  e  $q_n$  de modo que  $L(\alpha_n) > d(p_n, q_n) - 1/n$ . Como  $U$  é aberto, existem pontos  $q \ll_U q^+$  e  $p^- \ll_U p$  em  $U$ , e pode se supor que  $p_n \in I^+(p^-)$  e  $q_n \in I^-(q^+)$ , pois isso vale para  $n$  grande o suficiente devido a convergência. Desse modo, os segmentos de curva  $\alpha_n$  ficam contidos em  $J(p^-, q^+)$ , que é compacto, e portanto existe uma curva  $C^0$  causal futuro-dirigida  $\alpha$  tal que  $L_g(\alpha) \geq \limsup L(\alpha_n) \geq d(p, q) + \delta$ , uma contradição (construindo  $\beta$  como no item anterior, obtém-se  $L(\beta) \geq d(p, q) + \delta$ ).  $\square$

#### 4.12.1 Desenvolvimento e superfícies de Cauchy

Existem algumas definições alternativas de hiperbolicidade global. A primeira delas é dada através das hipersuperfícies de Cauchy. Um conjunto  $A$  é *acronal* se, para todo  $p, q \in A$ , não vale  $p \ll q$ , e é dito *acausal* se, não vale  $p < q$ ,  $\forall p, q \in A$ .

**Definição 4.12.5.** (Superfícies de Cauchy) *Um conjunto  $S \subseteq M$  é dito ser uma superfície de Cauchy se toda curva tipo-tempo inextensível intersecta  $S$  exatamente uma vez.*

Perceba que, em particular, uma superfície de Cauchy é um conjunto acronal. As hipersuperfícies  $t$  constante de  $\mathbb{R}_1^n$  são exemplos de hipersuperfícies de Cauchy.

**Definição 4.12.6.** (Desenvolvimento de Cauchy) *Seja  $A \subseteq M$  um conjunto acronal. O desenvolvimento de Cauchy futuro de  $A$ , denotado  $D^+(A)$ , é o conjunto dos pontos  $p \in M$  tais que toda curva causal passado-inextensível que passa por  $p$  intersecta  $A$ . É definido*

de maneira dual o desenvolvimento de Cauchy passado  $D^-(A)$ . O Desenvolvimento de Cauchy  $D(A)$  é definido como a união  $D^+(A) \cup D^-(A)$ .

De acordo com ([8], Lema 14.29), uma hipersuperfície de Cauchy  $S$  é intersectada ao menos uma vez por toda curva causal inextensível, e, em particular,  $D(S) = M$ . A demonstração do Lema abaixo pode ser encontrada em diversas referências, como ([8], Teorema 14.38).

**Lema 4.12.7.** *Se  $A$  é acronal, então  $\text{int}D(A)$  é globalmente hiperbólico.*

Aqui, a hiperbolicidade global de  $\text{int}D(A) \subseteq M$  equivale a dizer que esse aberto é globalmente hiperbólico quando visto como um espaço-tempo em si com a métrica e orientação temporal induzidas. Esse resultado, em combinação com o lema abaixo, dá uma importante caracterização de espaços-tempos globalmente hiperbólicos. A demonstração do Lema abaixo pode ser encontrada em [9].

**Lema 4.12.8.** *Se  $(M, g)$  é um espaço-tempo globalmente hiperbólico, então a função*

$$t(p) = \log \left( - \frac{t^-(p)}{t^+(p)} \right) = \log \left( \frac{m(I^-(p))}{m(I^+(p))} \right)$$

é contínua e, para qualquer  $\gamma : (a, b) \rightarrow M$ , vale que:

$$\lim_{s \rightarrow a} (t \circ \gamma)(s) = -\infty \quad \lim_{s \rightarrow b} (t \circ \gamma)(s) = \infty.$$

**Teorema 4.12.9.** *Um espaço-tempo  $(M, g)$  é globalmente hiperbólico se, e somente se, admite uma hipersuperfície de Cauchy  $S$ .*

*Demonstração.*  $\Leftarrow$ ) Segue imediatamente do Lema 4.12.7.

$\Rightarrow$ ) Como  $t$  é globalmente hiperbólico, é também distinguidor, logo ambas  $t^-$  e  $t^+$  são funções tempo. Sendo assim, se  $p < q \in M$ , vale que  $t^-(p) < t^-(q)$  e  $t^+(p) < t^+(q)$ , logo

$$-\frac{1}{t^+(p)} < -\frac{1}{t^+(q)} \quad \Rightarrow \quad -\frac{t^-(p)}{t^+(p)} < -\frac{t^-(q)}{t^+(q)}.$$

Como  $\log$  é uma função crescente, segue que  $t$  é estritamente crescente em curvas causais futuro-dirigidas, e, já que é também contínua, se trata de uma função tempo.

Então, para cada  $c \in \mathbb{R}$ ,  $S_c := t^{-1}(c)$  é uma hipersuperfície topológica pois  $t$  é contínua, e acausal (caso contrário, se existissem  $x, y \in S_c$  com  $x < y$  então  $t$  não seria estritamente crescente sobre a curva causal futuro-dirigida  $\gamma$  que conecta  $x$  a  $y$ ).

Basta, portanto, verificar que toda curva tipo-tempo inextensível intersecta  $S_c$ . De fato, se  $\alpha : (a, b) \rightarrow$  curva tipo-tempo futuro-dirigida e inextensível, então  $\tilde{\alpha} = \alpha \circ (t \circ \alpha)^{-1}$  está bem definida em todo  $\mathbb{R}$ , de acordo com o lema anterior, e do fato de que  $t$  é estritamente crescente sobre  $\alpha$ . Note que  $\tilde{\alpha}(c) \in t^{-1}(c)$ , logo  $\alpha((t \circ \alpha)^{-1}(c)) \in S_c$ , finalizando a demonstração.  $\square$

### 4.12.2 Compacidade do espaço das curvas causais

Uma outra maneira de descrever espaços-tempos globalmente hiperbólicos é através da compacidade do espaço das curvas  $C^0$  causais futuro-dirigidas. De fato, denote por  $C(p, q)$  o conjunto das curvas  $C^0$  causais futuro-dirigidas que conectam  $p$  à  $q$ , identificando aquelas que diferem apenas por uma reparametrização estritamente monótona.

Esse espaço será munido da topologia  $C^0$ , em que um sistema de vizinhanças em  $\alpha \in C(p, q)$  é dado pelos conjuntos da forma  $V_U^\alpha = \{\beta \in C(p, q) : \text{Im}(\beta) \subseteq U\}$ , para  $U$  um aberto contendo a imagem de  $\alpha$ .

**Proposição 4.12.10.** *Um espaço-tempo  $(M, g)$  é globalmente hiperbólico se, e somente se, é causal e  $C(p, q)$  é compacto, para todo  $p, q \in M$ .*

*Demonstração.*  $\Leftarrow$ ) Tome uma sequência  $\{x_n\} \in J^+(p) \cap J^-(q)$ , e  $\alpha_n$  uma curva em  $C(p, q)$  passando por  $x_n$ . Como  $C(p, q)$  é compacto,  $\alpha_n$  converge, a menos de subsequência, para alguma  $\alpha \in C(p, q)$ . Tome  $U$  um aberto contendo a imagem de  $\alpha$  tal que  $\bar{U}$  seja compacto. Por convergência, para um  $n$  grande suficiente a imagem de  $\alpha_n$  deve estar em  $U$ , e logo  $x_n$  está em  $\bar{U}$ , sendo assim  $x_n \rightarrow x \in \bar{U}$ , a menos de subsequência.

Basta então que  $x$  esteja na imagem de  $\alpha$ , pois esta fica contida em  $J^+(p) \cap J^-(q)$ , e então este conjunto será compacto. De fato, suponha que  $x$  não esteja na imagem de  $\alpha$ , e então tome um aberto  $V$  contendo a imagem de  $\alpha$  e não contendo  $x$ . Para um certo  $N \in \mathbb{N}$  vale que  $n > N \Rightarrow \text{Im}(\alpha_n) \subseteq V \Rightarrow x_n \in V$ , o que contradiz  $x_n \rightarrow x$ .

$\Rightarrow$ ): Demonstrado em ([5], p. 208-209). □

## 5 O ESPAÇO-TEMPO DE MISNER

Este capítulo será destinado a introduzir o espaço-tempo de Misner. Esse exemplo está tratado em um capítulo exclusivo não somente por ilustrar aspectos geométricos tratados na primeira parte do trabalho, mas também por possuir uma construção mais sofisticada e ilustrar de uma maneira bastante elegante a pior e melhor causalidade em regiões distintas dentro dele.

O espaço-tempo de Misner é um exemplo de espaço não cronológico e não totalmente vicioso, cuja construção é feita a partir do quociente de  $\mathbb{R}_1^2$  pela ação de um grupo. O chamado *grupo especial ortócrono de  $\mathbb{R}_1^2$*  é da seguinte forma:

$$SO^+(1, 1) = \left\{ A_\lambda := \begin{pmatrix} \cosh(\pi\lambda) & \sinh(\pi\lambda) \\ \sinh(\pi\lambda) & \cosh(\pi\lambda) \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Esse grupo é composto por isometrias lineares que preservam orientação na variedade e orientação temporal. É fácil verificar que  $A_\lambda \cdot A_\mu = A_{\lambda+\mu}$ , devido a fórmula de adição do seno e cosseno hiperbólico. O subgrupo

$$G := \langle A_1 \rangle = \left\{ A_k = \begin{pmatrix} \cosh(\pi k) & \sinh(\pi k) \\ \sinh(\pi k) & \cosh(\pi k) \end{pmatrix} : k \in \mathbb{N} \right\}$$

de  $SO^+(1, 1)$  é gerado por  $A_1$  e é isomorfo a  $\mathbb{Z}$ , portanto define uma ação em  $\mathbb{R}_1^2$  da forma

$$\Gamma : \mathbb{Z} \times \mathbb{R}_1^2 \ni (k, (t, x)) \mapsto A_k(t, x) \in \mathbb{R}_1^2(k, (t, x)) \mapsto A_k(t, x).$$

Essa ação não satisfaz nenhuma das duas condições dadas na definição de discontinuidade própria (3.1.8). De fato, a condição (a) não é satisfeita na origem, pois os pontos se acumulam ali, mas a condição fica satisfeita ao remover esse ponto. Denote  $M_0 := \mathbb{R}_1^2 - \{0, 0\}$ .

**Proposição 5.0.1.** *A ação  $\Gamma : \mathbb{Z} \times M_0 \rightarrow M_0$  satisfaz o item **a** da definição 3.1.8.*

*Demonstração.* Seja  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}_1^2 - \{(0, 0)\}$ . Para obter contradição, suponha que, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , exista  $(t_n, x_n)$  na bola aberta  $B_{1/n}(t_0, x_0)$  e  $k_n \in \mathbb{Z} - \{0\}$  tal que  $A_{k_n}(t_n, x_n) \in B_{1/n}(t_0, x_0)$ . Então  $(t_n, x_n) \rightarrow (t_0, x_0)$  e  $A_{k_n}(t_n, x_n) \rightarrow (t_0, x_0)$ , isto é,

$$(\cosh(k_n\pi)t_n + \sinh(k_n\pi)x_n, \sinh(k_n\pi)t_n + \cosh(k_n\pi)x_n) \rightarrow (t_0, x_0).$$

Se  $x_0 = -t_0$ , então, o limite da primeira coordenada fica:

$$\begin{aligned} & \cosh(k_n\pi)t_n + \sinh(k_n\pi)x_n \rightarrow t_0 \\ \implies & e^{k_n\pi}(t_n + x_n) + e^{-k_n\pi}(t_n - x_n) \rightarrow 2t_0. \end{aligned}$$

Se  $k_n \rightarrow \infty$ , então  $e^{-k_n\pi}$  vai pra zero, e para que  $e^{k_n\pi}(t_n + x_n)$  convirja é necessário que  $t_n + x_n$  vá para zero. Daí segue que  $t_0 = 0$ , e então  $x_0 = 0$ , uma contradição. Por

outro lado, se  $k_n \rightarrow -\infty$ , então  $e^{k_n\pi}$  converge para zero, e analogamente é necessário que  $t_n - x_n$  vá para 0, implicando  $t_0 = 0$ , o que leva à mesma contradição. Então  $k_n \rightarrow k \in \mathbb{Z}$ , e  $A_k(t_0, x_0) = (t_0, x_0)$ , implicando  $k = 0$ . Ainda mais, como  $k_n \rightarrow k = 0$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  de modo que  $k_N = 0$ , uma contradição.

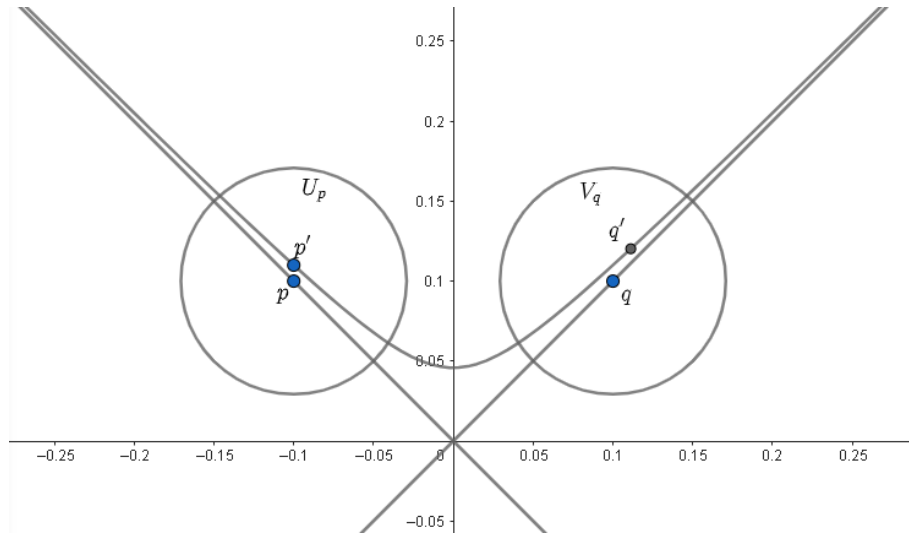
Por outro lado, se  $t_0 \neq -x_0$ , somando o limite da primeira coordenada com o da segunda, obtém-se:

$$\begin{aligned} & (\cosh(k_n\pi) + \sinh(k_n\pi))(t_n + x_n) \rightarrow (t_0 + x_0) \\ \implies & e^{k_n\pi}(t_n + x_n) \rightarrow (t_0 + x_0). \end{aligned}$$

Evidentemente  $k_n$  não pode ir para infinito, e se  $k_n$  vai para o infinito negativo, então  $t_0 + x_0 = 0$ , um absurdo. Sendo assim,  $k_n \rightarrow k$ , e então  $e^{k\pi}(t_0 + x_0) = (t_0 + x_0)$ , implicando  $k = 0$ , novamente uma contradição. Portanto, existe um  $n \in \mathbb{N}$  tal que, para todo  $(t, x) \in B_{1/n}(t_0, x_0)$  e para todo  $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$ , vale que  $A_k(t, x) \notin B_{1/n}(t_0, x_0)$ , o que conclui a demonstração.  $\square$

Por outro lado, a condição (b) da definição ainda não é satisfeita em  $M_0$ , pois há pontos  $p$  na diagonal  $t = -x$  e  $q$  na diagonal  $t = x$  que estão em órbitas diferentes mas de modo que qualquer vizinhança  $U_p$  de  $p$  e  $V_q$  de  $q$  vão ser tais que  $U_p$  contém pontos cuja órbita intersecta  $V_q$ , como ilustra a figura abaixo.

Figura 13 – Os pontos  $p$  e  $q$  não estão na mesma órbita, mas em quaisquer vizinhanças  $U_p$  de  $p$  e  $V_q$  de  $q$  há pontos  $p'$  e  $q'$  tais que  $A_k(p') = q'$  (na ilustração,  $q' = A_1(p')$ ).



A ação  $\Gamma$  leva a variedade  $\tilde{M} := \{(t, x) \in \mathbb{R}_1^2 : x - t > 0\}$  nela própria, como é possível verificar facilmente por inspeção.

**Proposição 5.0.2.** A ação  $\Gamma : \mathbb{Z} \times \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$  satisfaz a condição (b) da definição 3.1.8.



*Demonstração.* Sejam  $p = (t_p, x_p), q = (t_q, x_q) \in \tilde{M}$  tais que  $\forall k \in \mathbb{Z}, A_k(p) \neq q$  (em particular  $p \neq q$ ). Suponha, para obter contradição, que para todo  $n \in \mathbb{N}$  exista  $(t_n, x_n) \in B_{1/n}(p)$  e  $k_n \in \mathbb{Z}$  de modo que  $A_{k_n}(t_n, x_n) \in B_{1/n}(q)$ . Então  $(t_n, x_n) \rightarrow (t_p, x_p)$  e  $A_{k_n}(t_n, x_n) \rightarrow (t_q, x_q)$ , ou seja:

$$\cosh(k_n \pi) t_n + \sinh(k_n \pi) x_n \rightarrow t_q, \quad (8)$$

$$\sinh(k_n \pi) t_n + \cosh(k_n \pi) x_n \rightarrow x_q. \quad (9)$$

Subtraindo (9) de (8), e usando  $(t_n, x_n) \rightarrow (t_p, x_p)$ , obtém-se

$$\begin{aligned} & (\cosh(k_n \pi) - \sinh(k_n \pi))(t_p - x_p) \rightarrow (t_q - x_q) \\ \implies & e^{-k_n \pi} \rightarrow \frac{t_q - x_q}{t_p - x_p}. \end{aligned}$$

Observe que o denominador da última fração está bem definido pois os pontos estão em  $\tilde{M}$ , e pelo mesmo motivo essa fração é diferente de zero. Então, é necessário que  $k_n \rightarrow c \in \mathbb{Z}$ , portanto existe um  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $k_n = c$ , para todo  $n \geq N$ . Logo  $A_c(p) = q$ , uma contradição.  $\square$

Note que, caso a ação fosse definida na região em que  $t + x > 0$ , a demonstração acima seria análoga, mas nesse caso a contradição seria obtida somando (8) e (9).

Denote por  $\tilde{g}$  a métrica de  $\mathbb{R}_1^2$  restrita a  $\tilde{M}$ . A proposição 3.1.10 garante que  $M := \tilde{M}/\Gamma$  possui uma estrutura de variedade e topologia única que torna a projeção  $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$  uma aplicação de recobrimento suave e, já que a ação é por isometrias, induz uma única métrica de Lorentz  $g$  e orientação temporal em  $M$  de modo a tornar  $(M, g)$  um espaço-tempo e de modo que  $\pi : (\tilde{M}, \tilde{g}) \rightarrow (M, g)$  seja uma aplicação de recobrimento de Lorentz.

Como  $\tilde{M}$  tem curvatura constante igual a zero, segue que  $M$  também o tem, logo é uma solução de vácuo para as equações de Einstein sem constante cosmológica.

Fixe qualquer  $p = (t, x) \in \tilde{M}$ , e considere o segmento que conecta  $p$  a  $A_k(p)$  dado por

$$\alpha(s) = (1 - s) \cdot (t, x) + s \cdot A_k(t, x)$$

para  $s \in [0, 1]$  e  $k \neq 0$ . Então, a derivada de  $\alpha$  é

$$\alpha'(s) = (-t + \cosh(k\pi)t + \sinh(k\pi)x, -x + \sinh(k\pi)t + \cosh(k\pi)x),$$

e portanto, tem-se:

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\alpha'(s), \alpha'(s)) &= -[t^2 - 2t(\cosh(k\pi)t + \sinh(k\pi)x) \\ &\quad + (\cosh^2(k\pi)t^2 + 2tx \cosh(k\pi) \sinh(k\pi) + \sinh^2(k\pi)x^2)] \\ &\quad + [x^2 - 2x(\sinh(k\pi)t + \cosh(k\pi)x) \\ &\quad + (\sinh^2(k\pi)t^2 + 2tx \cosh(k\pi) \sinh(k\pi) + \cosh^2(k\pi)x^2)] \\ &= 2(-t^2 + x^2)(1 - \cosh(k\pi)). \end{aligned}$$

Denote por  $R_1$  a região de  $\tilde{M}$  em  $x + t > 0$  e  $R_2$  a região de  $\tilde{M}$  em que  $x + t < 0$ . Como  $\cosh(k\pi) > 1$  e  $x - t > 0$  em  $\tilde{M}$ , segue que  $\alpha$  é tipo-tempo, se  $p \in R_1$ , e  $\alpha$  é espacial, se  $p \in R_2$ . Se  $p$  está na diagonal  $D$  dada por  $t = -x$ , então  $\alpha$  é luminosa.

Por causa da identificação, existem curvas fechadas em  $M$ . De fato, o cálculo acima demonstra que  $\forall q \in \pi(R_1)$ , vale  $q \ll q$ . Por outro lado, para nenhum  $q \in \pi(R_2)$  isso vale. Por fim, por todo  $q \in \pi(D)$  passa uma geodésica luminosa fechada. Com isso conclui-se que  $M$  é não totalmente vicioso, embora viole a cronologia em uma certa região.

Considere a seguinte transformação de variáveis em  $\tilde{M}$ :

$$\psi = -2 \ln \frac{x - t}{2}, \quad T = \frac{x^2 - t^2}{4}.$$

Como em  $\tilde{M}$  vale  $x - t > 0$ , a variável  $\psi$  está bem definida. Já que vale

$$d\psi = -2 \frac{dx - dt}{x - t}, \quad dT = \frac{xdx - tdt}{2},$$

então, uma computação direta mostra que a métrica do espaço-tempo  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  nas coordenadas  $T$  e  $\psi$  fica da forma:

$$\tilde{g} = -dT \otimes d\psi - d\psi \otimes dT - Td\psi \otimes d\psi.$$

Seja  $(x_0, t_0) \in \tilde{M}$  e  $(x_k, t_k) = A_k(x_0, t_0)$ , com  $k \neq 0$ . Denotando  $\psi_0 = \psi(x_0, t_0) = -2 \ln \left( \frac{x_0 - t_0}{2} \right)$ , segue que

$$\begin{aligned} \psi_k = \psi(t_k, x_k) &= -2 \ln \left( \frac{x_k - t_k}{2} \right) \\ &= -2 \ln \left( \frac{e^{-\pi k} (x_0 - t_0)}{2} \right) = 2\pi k + \psi_0, \end{aligned}$$

e, se  $T_0 = T(x_0, t_0) = \frac{x_0^2 - t_0^2}{4}$ , vale:

$$\begin{aligned} T_k = T(t_k, x_k) &= \frac{x_k^2 - t_k^2}{4} \\ &= \frac{(\cosh^2(\pi k) - \sinh^2(\pi k))(x_0^2 - t_0^2)}{4} = \frac{x_0^2 - t_0^2}{4} = T_0. \end{aligned}$$

Isto é,  $A_k$  leva  $(T, \psi)$  em  $(T, \psi + 2\pi k)$ . Portanto, os pontos da forma  $(T, \psi + 2\pi k) \in \tilde{M}$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ , estão identificados em  $M$ .

Considere agora a seguinte função

$$\begin{aligned} F : \tilde{M} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (t, x) &\mapsto (T(t, x), \cos(\psi(t, x)), \sin(\psi(t, x))). \end{aligned}$$

$F$  é uma imersão, pois seu jacobiano possui colunas linearmente independentes:

$$J_F(t, x) = \begin{pmatrix} -\frac{t}{2} & \frac{x}{2} \\ -\frac{2}{x-t} \sin(\psi(t, x)) & \frac{2}{x-t} \sin(\psi(t, x)) \\ \frac{2}{x-t} \cos(\psi(t, x)) & -\frac{2}{x-t} \cos(\psi(t, x)) \end{pmatrix}$$

Ainda mais, as últimas duas coordenadas da imagem de  $F$  estão em uma esfera unitária, isto é,  $F(\tilde{M}) = \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ . Então  $F : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$  é sobrejetiva, e a aplicação  $dF_{(t,x)}$  é injetiva e mapeia espaços vetoriais de mesma dimensão, logo é um isomorfismo, implicando que  $F$  é um difeomorfismo local. Em particular,  $F$  é uma aplicação aberta.

Defina a função  $\bar{F} : M \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$  como  $\bar{F}([p]) = F(p)$ . É fácil observar que  $F(A_k(t, x)) = F(t, x)$ , logo  $\bar{F}$  está bem definido.

Além disso, suponha que  $F(t, x) = F(t', x')$ . Então, vale que  $x^2 - t^2 = x'^2 - t'^2$  e, para algum  $N \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} 2\pi N - 2 \ln \left( \frac{x-t}{2} \right) &= -2 \ln \left( \frac{x'-t'}{2} \right) \\ \implies \ln \left( \frac{e^{-\pi N}(x-t)}{2} \right) &= \ln \left( \frac{x'-t'}{2} \right) \\ \longrightarrow e^{-\pi N}(x-t) &= (x'-t'). \end{aligned}$$

Mas a primeira equação implica que os pontos  $(t, x)$  e  $(t', x')$  de  $\tilde{M}$  tem o mesmo módulo de Lorentz, logo existe algum  $A_\lambda \in SO^+(1, 1)$  tal que  $A_\lambda(t, x) = (t', x')$ . Isso implica que  $e^{-\pi\lambda}(x-t) = (x'-t')$ . Mas então  $\lambda = N$ , e portanto, segue que  $(t, x)$  e  $(t', x')$  estão na mesma órbita.

Ou seja, a função  $\bar{F}$  é injetivo. Como também é sobrejetivo, se trata de uma bijeção. É claro que  $F = \bar{F} \circ \pi$  e que  $\bar{F}$  é um difeomorfismo local, portanto  $\bar{F}$  é um difeomorfismo.

Sendo assim, existe uma maneira única de colocar uma métrica  $h$  em  $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$  e uma orientação temporal de modo que  $\bar{F} : (M, g) \rightarrow (\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1, h)$  seja uma isometria entre espaços-tempos.

**Definição 5.0.3.**  $(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1, h)$  com a orientação temporal induzida por  $\bar{F}$  é o espaço-tempo de Misner.

É possível encontrar explicitamente a métrica  $h$  do espaço-tempo de Misner. Para isso, considere as coordenadas globais  $(u, v)$  de  $\mathbb{R}^2$  e a 1-forma  $\omega_0 := udv - vdu$ , além da inclusão  $i : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$  e de  $\omega_1 := i^*\omega_0$ . Denotando  $\pi_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  a projeção que leva  $(s, p)$  em  $p$ , então é possível definir uma 1-forma  $\omega := \pi_2^*\omega_1$  em  $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ . Ainda mais, denote  $\tau : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$  a projeção na primeira coordenada.

**Proposição 5.0.4.** A métrica  $h$  é dada pela expressão:

$$h = -d\tau \otimes \omega - \omega \otimes d\tau - \tau\omega \otimes \omega.$$

*Demonstração.* Denote por  $\hat{g}$  a parte direita da expressão acima. Basta mostrar que  $F^*\hat{g} = \tilde{g}$ , pois, nesse caso,

$$\tilde{g} = (\bar{F} \circ \pi)^*\hat{g} = \pi^*(\bar{F}^*\hat{g}),$$

mas, por outro lado,

$$\tilde{g} = \pi^*(\bar{F}^*h) = \pi^*g.$$

Portanto, pela unicidade da métrica  $g$ , tem-se que  $g = \overline{F}^* h = \overline{F}^* \hat{g}$ , mostrando  $h = \hat{g}$ , o que concluiria a demonstração.

Provemos essa afirmação calculando  $F^* \hat{g}$ .

$$F^* \hat{g} = -d(\tau \circ F) \otimes F^* \omega - F^* \omega \otimes d(\tau \circ F) - (\tau \circ F) F^* \omega \otimes F^* \omega.$$

Note que  $\tau \circ F = T$ , e,

$$F^* \omega = F^* \pi_2^* i^*(\omega_0) = (i \circ \pi_2 \circ F)^* \omega_0 = (\cos(\psi), \sin(\psi))^* \omega_0,$$

ademais,

$$\begin{aligned} (F^* \omega) \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) &= (\omega_0)_{(\cos(\psi), \sin(\psi))} \left( \frac{\partial \cos(\psi)}{\partial t} \partial_u + \frac{\partial \sin(\psi)}{\partial t} \partial_v \right) \\ &= (\cos(\psi) dv - \sin(\psi) du) \left( -\sin(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} \partial_u + \cos(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} \partial_v \right) \\ &= \cos^2(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} \partial_u + \sin^2(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} \partial_v = \frac{\partial \psi}{\partial t}. \end{aligned}$$

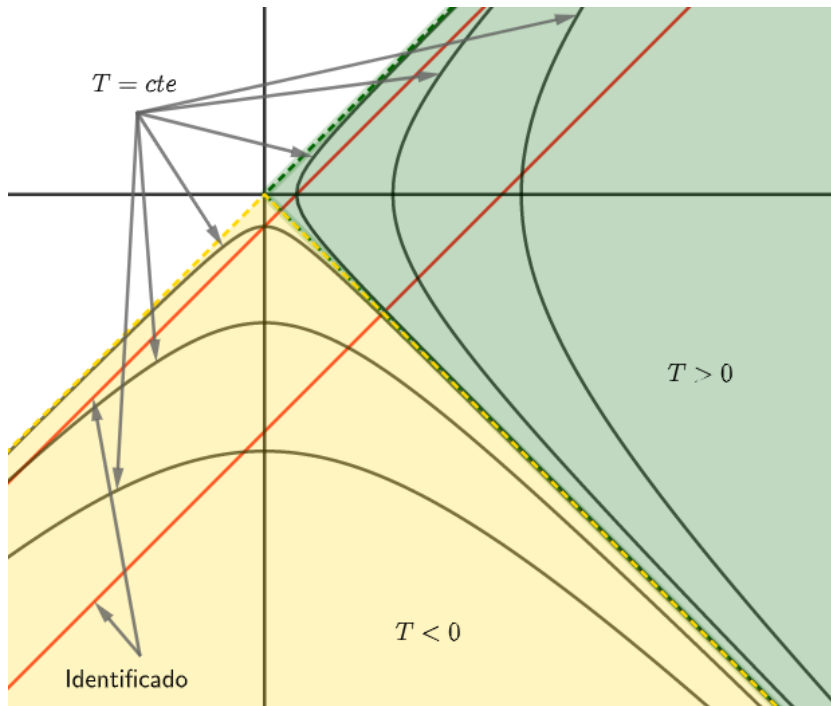
Analogamente se obtém que  $(F^* \omega) \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) = \frac{\partial \psi}{\partial x}$ , isto é,  $(F^* \omega) = d\psi$ . Logo,

$$F^* \hat{g} = -dT \otimes d\psi - d\psi \otimes dT - T d\psi \otimes d\psi.$$

Mas, como já computado, a parte direita da equação é uma expressão equivalente para  $\tilde{g}$  nas coordenadas  $\psi$  e  $T$ .  $\square$

As figuras abaixo ilustram essa discussão.

Figura 14 – O espaço de recobrimento de Misner. As linhas identificadas são as retas  $\psi$  constante. A região verde representa  $T > 0$  enquanto a região laranja  $T < 0$ .



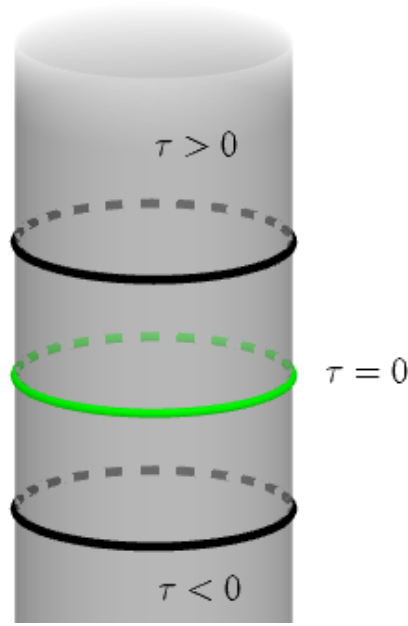


Figura 15 – O espaço-tempo de Misner. A curva  $\tau = 0$  é fechada e tipo-luz, enquanto as curvas  $\tau$  constante são tipo-tempo se  $\tau > 0$  e tipo-espaço se  $\tau < 0$ .

A região  $R_1$  ( $T > 0$ ) de  $\tilde{M}$  é mapeada por  $F$  na região em que  $\tau > 0$  no espaço-tempo de Misner, e a região  $R_2$  ( $T < 0$ ) é mapeada em  $\tau < 0$ . Como  $\pi(R_1)$  é totalmente vicioso, então  $\overline{F}(\pi(R_1))$ , que é a região em que  $\tau > 0$ , é totalmente vicioso, pois  $\overline{F}$  é isometria, e, analogamente, a região  $\tau < 0$  é causal.

Seja  $\partial_\tau$  o levantamento horizontal do campo vetorial usual  $d/dt$  de  $\mathbb{R}$ , isto é, o campo vetorial que é definido pontualmente por  $(\partial_\tau)_q = (d\tau_p)^{-1}((d/dt)_{\tau(q)})$ . É imediato que  $d\tau(\partial_\tau) = 1$  e  $d\pi_2(\partial_\tau) = 0$ .

Seja também  $Z_0 = u\partial_v - v\partial_u \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ . Vale que  $\omega_0(Z_0) = u^2 + v^2$ , imediatamente de suas definições. Tome  $Z_1 \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^1)$  o único campo vetorial relacionado a  $Z_0$  pela inclusão  $i$ , isto é,  $di_p(Z_1(p)) = Z_0(i(p))$ ,  $\forall p \in \mathbb{S}^1$ . Como os pontos de  $\mathbb{S}^1$  são unitários, vale

$$(\omega_1)_p(Z_1(p)) = (\omega_0)_{i(p)}(di_p(Z_1(p))) = (\omega_0)_{i(p)}(Z_0(i(p))) = 1.$$

Agora, considere  $Z$  o levantamento de  $Z_1$  através de  $\pi_2$ . Então  $d\tau(Z) = 0$  e  $\omega(Z) = \omega_1(Z_1) \circ \pi_2 = 1$ . Usando a expressão obtida para a métrica  $h$ , temos que:

$$h(\partial_\tau, \partial_\tau) = 0, \quad h(\partial_\tau, Z) = -1, \quad h(Z, Z) = -\tau.$$

Então o campo vetorial  $\partial_\tau$  é luminoso e  $Z$  tem seu caráter causal determinado pelo sinal de  $\tau$ . Como  $d\tau(Z) = 0$ , segue que  $h(\nabla^h \tau, Z) = 0$ , isto é,  $Z$  está no espaço tangente ao gradiente de  $\tau$ , então é tangente as superfícies  $\tau$  constante.

Seja  $p_0 = (s_0, \cos(t_0), \sin(t_0)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$  um ponto e  $\alpha_{p_0} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$  a curva dada por

$$\alpha_{p_0}(\lambda) = (s_0, \cos(\lambda + t_0), \sin(\lambda + t_0)).$$

Desse modo, se tem que  $\alpha_{p_0}(0) = p_0$ , e,

$$\alpha'_{p_0}(\lambda) = (0, -\sin(\lambda + t_0), \cos(\lambda + t_0)),$$

então,

$$\begin{aligned} (di \circ d\pi_2)_{\alpha_{p_0}(\lambda)}(Z_{\alpha_{p_0}(\lambda)}) &= (di)_{\pi_2(\alpha_{p_0}(\lambda))}(Z_1(\pi_2(\alpha_{p_0}(\lambda)))) \\ &= Z_0(i(\pi_2(\alpha_{p_0}(\lambda)))) = Z_0(\cos(\lambda + t_0), \sin(\lambda + t_0)) \\ &= \cos(\lambda + t_0)\partial_v - \sin(\lambda + t_0)\partial_u. \end{aligned}$$

Portanto, fica patente que  $\alpha_{p_0}$  é uma curva integral de  $Z$  em  $p_0$ . O caráter causal dessa curva é o mesmo de  $Z$ , e a curva é fechada, ou seja, na região  $\tau > 0$ ,  $\alpha_{p_0}$  é uma curva tipo-tempo fechada.

Ainda mais, note que  $V := \frac{2}{x-t}(\partial_t + \partial_x)$  é um campo vetorial luminoso e futuro-dirigido em  $(\tilde{M}, \tilde{g})$ , e uma computação simples mostra que  $dF \circ V = \partial_\tau \circ F$ , ou seja,  $\partial_\tau$  é futuro-dirigido. Como  $h(\partial_\tau, Z) = -1$ , então  $Z$  é futuro-dirigido na região  $\tau > 0$  (na qual  $Z$  é tipo-tempo).

**Proposição 5.0.5.** *A região  $\tau < 0$  do espaço-tempo de Misner é globalmente hiperbólica.*

*Demonstração.* Como  $Z$  e  $\partial_\tau$  são lineamernete independentes, é possível escrever  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1)$  como  $X = X^\tau \partial_\tau + X^Z Z$ . Então,

$$\begin{aligned} h(\tau \partial_\tau - Z, X^\tau \partial_\tau + X^Z Z) &= -\tau X^Z - (-X^\tau) - (-\tau X^Z) \\ &= X^\tau = d\tau(X) = h(\nabla^h \tau, X), \end{aligned}$$

isto é,  $\nabla^h \tau = \tau \partial_\tau - Z$ . Ainda mais,

$$h(\nabla^h \tau, \nabla^h \tau) = h(\tau \partial_\tau - Z, \tau \partial_\tau - Z) = 2\tau - \tau = \tau,$$

ou seja, na região  $\tau < 0$  o gradiente de  $\tau$  é tipo-tempo. Também vale que

$$h(\nabla^h \tau, \partial_\tau) = h(\tau \partial_\tau - Z, \partial_\tau) = 1,$$

implicando  $\nabla^h \tau$  passado-dirigido. Sendo assim, a função  $\tau$  é uma função temporal, o que garante que o espaço-tempo é estavelmente causal e, em particular, fortemente causal.

Agora, prova-se que as superfícies  $\tau$  constante são hipersuperfícies de Cauchy na região  $\tau < 0$ . Fixe  $c < 0$  e  $S_c = \tau^{-1}(c)$  uma hipersuperfície. Para provar a acronalidade, assuma que uma curva  $\alpha$  tipo-tempo nessa região intersekte  $\tau = c$  duas vezes. Então  $(\tau \circ \alpha)'(\lambda_0) = d\tau_{\alpha(\lambda_0)}(\alpha'(\lambda_0)) = 0$  em algum  $\lambda_0$ , pelo teorema do valor médio. Ainda mais, o campo  $\alpha'$  pode ser escrito como  $\alpha' = \alpha'^\tau \partial_\tau + \alpha'^Z Z$ , e então  $\alpha'^\tau(\lambda_0) = 0$ . Desse modo,

$$h(\alpha', \alpha') = -2\alpha'^Z \alpha'^\tau - \tau(\alpha'^Z)^2,$$

logo, em  $\lambda_0$ ,  $h(\alpha', \alpha')$  é igual a  $-\tau(\lambda_0)(\alpha'^Z)^2(\lambda_0) \geq 0$ , uma contradição. Concluí-se que  $S_c$  é acronal.

Para finalizar, basta provar que toda curva tipo-tempo inextensível intersecta  $S_c$ . Seja  $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$  uma curva causal futuro-dirigida inextensível em  $\tau < 0$  e  $\lambda_0 \in (a, b)$ . Se  $c < \tau(\alpha(\lambda_0)) < 0$ , então  $\alpha$  intersecta  $S_c$  ao passado. De fato, caso contrário, já que

$$(\tau \circ \gamma)' = d\tau(\gamma') = h(\nabla^h \tau \circ \gamma, \gamma') > 0,$$

pois  $\gamma$  é futuro-dirigida, tem-se que  $(\tau \circ \gamma)$  é crescente. Portanto, ficaria exposto que

$$\gamma(a, \lambda_0] \subseteq [c, \tau(\gamma(\lambda_0))] \times \mathbb{S}^1,$$

e como  $[c, \tau(\gamma(\lambda_0))] \times \mathbb{S}^1$  é compacto, a curva ficaria aprisionada, o que contradiz a condição forte de causalidade. Então  $\gamma$  de fato intersecta  $S_c$  ao passado.

Agora, se  $\tau(\gamma(\lambda_0)) < c$ , um argumento dual mostra que  $\gamma$  intersecta  $S_c$  ao futuro. Portanto, a hipersuperfície  $S_c$  é de Cauchy.  $\square$

## 6 CONCLUSÃO

Neste trabalho foram apresentadas diversas noções de geometria semi-Riemanniana, focando especialmente no caso Lorentziano, com o objetivo de estudar os espaços-tempos. Ainda mais, foram abordadas propriedades de causalidade a fim de compreender a hierarquia causal dos espaços-tempos, e, por fim, se apresentou o espaço-tempo de Misner, um exemplo cujo comportamento com respeito a causalidade é bastante rico.

Existem diversos outros resultados sobre causalidade e exemplos interessantes além dos apresentados aqui. A hierarquia causal tradicional, que fora apresentada, pode ser complexificada, adicionando alguns degraus intermediários e inspecionando condições transversais, como a de reflexividade. Além disso, o estudo da causalidade pode conduzir a resultados bastante importantes sobre a geometria e a topologia do espaço-tempo. Por exemplo, é possível enunciar *teoremas de singularidade* com hipóteses de causalidade mais fracas que as usuais, como o teorema apresentado por Tipler em [11].



## REFERÊNCIAS

- [1] Robert G. Bartle. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. Wiley Classics Library. Michigan: John Wiley & Sons, 1995.
- [2] John K. Beem, Paul E. Ehrlich e Kevin L. Easley. *Global Lorentzian Geometry*. 2<sup>a</sup> ed. New York: CRC Press, 1999.
- [3] J. Dieckmann. “Volume Functions in General Relativity”. Em: *General Relativity and Gravitation* 20.9 (1988), pp. 859–867.
- [4] Kurt Gödel. “An example of a New Type of Cosmological Solution of Einstein’s Field Equations of Gravitation”. Em: *Reviews of Modern Physics* 21.3 (1949), pp. 447–450.
- [5] S.W. Hawking e G. F. R. Ellis. *The Large Scale Structure Of Space-time*. Cambridge: Cambridge University Press, 1973.
- [6] Leandro Lichtenfelz. *Teoremas de Singularidade de Hawking e Penrose*. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática). Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2009.
- [7] Katsumi Nomizu e Hideki Ozeki. “The existence of complete Riemannian metrics”. Em: *Proceedings of the American Mathematical Society* 12.6 (1961), pp. 889–891.
- [8] Barret O’Neill. *Semi-Riemannian Geometry: With Applications to Relativity*. 1<sup>a</sup> ed. San Diego: Academic Press, 1983.
- [9] M. Sánchez. “Causal hierarchy of spacetimes, temporal functions and smoothness of Gerochs splitting. A revision”. Em: *Contemporanea Mathematica* 29 (2005), pp. 127–155.
- [10] M. Sánchez e E. Minguzzi. “The causal hierarchy of spacetimes”. Em: *Recent developments in pseudo-Riemannian geometry* 4 (2008).
- [11] F. Tipler. “Singularities and Causality Violation”. Em: *Annals of Physics* 108 (1977), pp. 1–36.