UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Victor Damian Almeida

Ações parciais de Categorias em conjuntos e o Problema da Globalização

Florianópolis
2022

Victor Damian Almeida

Ações parciais de Categorias em conjuntos e o Problema da Globalização

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador(a): Prof. Paulinho Demeneghi, Dr.

Florianópolis

2022

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Almeida, Victor
Ações parciais de Categorias em conjuntos e o Problema da Globalização / Victor Almeida ; orientador, Paulinho Demeneghi, 2022.
69 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, Florianópolis, 2022.

Inclui referências.

1. Matemática Pura e Aplicada. 2. Matemática. 3. Álgebra. 4. Categorias . 5. Ações Parciais. I. Demeneghi, Paulinho. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada. III. Título.

Victor Damian Almeida

Ações parciais de Categorias em conjuntos e o Problema da Globalização

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof.ª Thaísa Raupp Tamusiunas, Dr.ª
Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS

Prof. Gilles Gonçalves de Castro, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

Prof. Felipe Lopes Castro, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestre em Matemática Pura e Aplicada.

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Daniel Goncalves
Data: 16/08/2022 07:41:28-0300
CPF: 017.022.459-77
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Coordenação do Programa de Pós-Graduação

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Paulinho Demeneghi
Data: 16/08/2022 13:14:47-0300
CPF: 012.173.280-09
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Paulinho Demeneghi, Dr.
Orientador

Florianópolis, 2022.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer primeiramente a Deus, pela saúde, pelo sustento, pela oportunidade de estar cursando um mestrado e pela minha família, tudo isso certamente são bençãos Dele e sou grato por tudo isso.

Agradeço a minha maravilhosa esposa Paula, por todo o apoio que tem me dado nesse período, por sempre estar me incentivando a estudar, por ter me dado uma filha linda chamada Beatriz e por todo amor e dedicação a nós.

Aos meus familiares, que nos deram suporte de diversas maneiras, principalmente me proporcionando tempo para escrever o trabalho enquanto cuidavam da minha filha Beatriz nesses dois primeiros meses de vida dela.

Agradeço ao Paulinho, meu orientador, por toda a ajuda durante todo o período do mestrado, por ter me apresentado o conceito de ações parciais e por toda dedicação que teve para me ajudar a entender mais sobre esse assunto.

Aos membros da banca, que aceitaram o convite para participar.

Ao professor Gilles, que me deu a oportunidade de realizar o estágio de docência em uma de suas disciplinas. Além disso, sou grato por ter me apresentado a teoria de categorias durante a iniciação científica. É um conhecimento que venho utilizando durante o mestrado e agora na dissertação.

Aos meus amigos, em especial ao Drala pelas conversas de cada dia e pela oportunidade de trabalho no período que estive sem bolsa.

Por fim, agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro.

Resumo

Nesse trabalho estudamos ações parciais de grupos em conjuntos e ações parciais de categorias pequenas em conjuntos. Inicialmente estudaremos ações parciais de grupos em conjuntos, com objetivo de demonstrar que toda ação parcial de grupo possui uma globalização universal. Em sequência, estudaremos ações parciais de categorias pequenas em conjuntos e exploraremos resultados que nos auxiliarão a demonstrar uma generalização do resultado anterior que diz que toda ação parcial de categoria admite uma globalização universal. Por fim, estudaremos um pouco de ações parciais de grupoides e mostraremos uma leve melhoria a um resultado de Gilbert.

Palavras-chave: Ações parciais. Globalização. Globalização universal. Grupos. Categorias.

Abstract

In this work we study partial group actions on sets and partial actions of small categories on sets. Initially we will study partial group actions on sets, with the objective of demonstrating that every partial group action on a set admits an universal globalization. Next, we will study partial actions of small categories on sets and explore results that will help us prove a generalization of the previous result that says that every partial category action on a set admits an universal globalization. Finally, we will study some partial groupoid actions and show a slight improvement to Gilbert's result.

Keywords: Partial actions. Globalization. Universal Globalization. Groups. Categories.

Sumário

Introdução

A noção de ação parcial apareceu pela primeira vez na literatura em (11), em um trabalho desenvolvido por Exel no contexto de C*-Álgebras onde o conceito de produto cruzado de uma C*-Álgebra por uma ação parcial do grupo cíclico infinito foi introduzido. O trabalho de Exel foi generalizado posteriormente por McClanahan em (18) onde uma definição formal de produto cruzado de uma C*-Álgebra por uma ação parcial de um grupo discreto foi apresentada. Desde então, ações parciais de grupo foram extensivamente exploradas e estudadas em diversas outras áreas.

A noção de ações parciais de grupos em conjuntos foi introduzida por Exel em (13) motivado pelo grande interesse no conceito de ações parciais de grupos em C*-Álgebras. Desde então, o conceito de ações parciais de grupos vem aparecendo em diversos contextos diferentes.

Ações globais induzem naturalmente ações parciais e é um problema importante saber quando uma ação parcial pode ser obtida através da restrição de uma ação global. Mais especificamente, dada uma ação global de um grupo G em um conjunto X, pode-se obter uma nova ação restringindo a ação global inicial de X para Y. A ação resultante é uma ação parcial de G em Y que pode não ser uma ação global (se Y não for G-invariante). Por outro lado, dada uma ação parcial de um grupo G em um conjunto Y, podemos nos perguntar se existe uma ação global de G em um conjunto X que contém Y tal que, restringindo-a, obtemos a ação parcial inicial de G em Y.

Essa discussão nos leva a noção de globalização universal, também conhecida como ação envolvente. Uma globalização universal de uma ação parcial θ de um grupo G em um conjunto Y é uma ação global $\tilde{\theta}$ de G em um conjunto $X \supseteq Y$ tal que θ é a restrição de $\tilde{\theta}$ e, além disso, satisfaz certas condições minimais.

A questão da existência de globalizações universais de ações parciais de grupos foi estudada inicialmente por Abadie em (2, 1) e por Kellendonk e Lawson em (16), de forma independente. Em (2), Abadie obteve um resultado que diz que toda ação parcial de grupo em um conjunto admite uma globalização universal. Nesse mesmo trabalho Abadie também estudou ações envolventes de ações parciais de grupos em espaços topológicos e C*-Álgebras. Em (16), além do contexto de conjuntos e espaços topológicos, Kellendonk e Lawson também estudaram ações parciais em semirreticulados.

Motivados pelo problema da globalização de ações parciais, muitos trabalhos foram desenvolvidos em vários contextos explorando: ações parciais de grupos em objetos como espaços topológicos, anéis, C*-Álgebras; ações parciais de estruturas como monoides, semigrupos inversos, álgebras de Hopf, grupoides ordenados, grupoides e categorias; e até contextos envolvendo ações torcidas. Podemos citar (3, 6, 9, 10, 12, 19, 21, 5, 7, 20, 15), por exemplo. Além disso, sugerimos o interessante trabalho de Dokuchaev em (8) apresentando um histórico do desenvolvimento e desdobramentos do estudo de ações parciais.

Nesse trabalho estamos interessados em estudar o problema da globalização para ações parciais em conjuntos. Inicialmente, estudamos ações parciais de grupos em conjuntos e mostramos o Teorema de Abadie que diz que toda ação parcial de grupos em conjuntos admite uma globalização universal. A demonstração da versão apresentada aqui é adaptada de uma demonstração de Exel em (14), com uso de notação inspirado em (16, 20).

Na segunda parte do trabalho estudamos ações parciais de categorias em conjuntos inspirado em (20). Mostramos que, assim como para ações parciais de grupos, toda ação parcial de uma categoria em um conjunto admite uma globalização universal. Esse resultado generaliza simultaneamente o Teorema 4.23 de (2) para ações parciais de grupos, a Proposição 2.6 de (19) para ações parciais de monoides e o Teorema 4.9 de (15).

Por fim, descendo ao caso mais específico de ações parciais de grupoides em conjuntos, encerramos o trabalho dando uma pequena contribuição de nossa autoria generalizando a Proposição 4.10 de (15). Basicamente, mostramos que a globalização construída no Teorema 3.25 é, no contexto de ações de grupoides, a melhor possível em certo sentido.

Para isso, este trabalho foi dividido em quatro capítulos, como segue:

No primeiro capítulo, apresentaremos as definições de categorias, de grupoides, e outras necessárias ao longo do trabalho. Estes conceitos serão utilizados com frequência no terceiro e quarto capítulo. Fundamentalmente, nesse capítulo estabelecemos as notações a serem utilizadas ao longo do trabalho.

No segundo capítulo trataremos sobre ações parciais de grupos em conjuntos. Este capítulo foi principalmente baseado em (14) e (2), as notações utilizadas foram baseadas em (16) e (20) e foi dividido em três seções. Na primeira seção, apresentamos a definição de ações globais e G-conjuntos, juntamente com alguns exemplos. Essa seção nos leva à segunda seção, que trata de ações parciais e globalização. Nesta segunda seção definimos o que é uma ação parcial de grupo em conjunto, mostramos uma equivalência entre a definição dada neste trabalho e a definição dada em (14), e apresentamos alguns resultados envolvendo ações parciais de grupos em conjuntos. Na terceira seção, desenvolvemos as noções de restrição e globalização. Dada uma ação parcial de um grupo G em um conjunto X, definimos uma relação de equivalência sobre $G \times X$ e induzimos uma ação global de G no quociente de $G \times X$ por essa relação. Por fim, demonstraremos que toda ação parcial de grupos em conjuntos admite uma globalização universal, dada basicamente por essa ação global construída.

No terceiro capítulo, abordamos ações parciais de categorias pequenas em conjuntos. Este capítulo foi inteiramente motivado por (20) e foi dividido em duas seções. Na primeira seção, definimos o que é uma ação parcial de categoria e apresentamos uma definição equivalente nos mesmos moldes da definição utilizada em (14). Na segunda seção, a partir de uma ação parcial de uma categoria pequena em um conjunto, definimos um conjunto $\overline{X}$ contido em $G \times X$ e uma relação reflexiva $\sim$ sobre $\overline{X}$ e, a partir da relação de equivalência $\simeq$ gerada por $\sim$, novamente teremos uma ação global de G no quociente $\overline{X}/_{\simeq}$. Em sequência, demonstraremos que toda ação parcial de categoria em conjunto admite uma globalização universal, que basicamente é dada por essa ação global construída. Por fim, apresentaremos alguns exemplos de ações parciais de uma categoria G em um conjunto X e calcularemos a globalização universal de X.

No quarto capítulo, discorreremos sobre ações parciais de grupoides em conjuntos. Este capítulo foi motivado por (20). Nele, definiremos ações parciais de grupoides em conjuntos, mostraremos uma equivalência entre a definição de ações parciais de grupoides e ações parciais de categorias no contexto em que a categoria é um grupoide. Mostraremos também uma equivalência entre as definições de ações parciais de grupoides em conjuntos visto em (20) e (17) a menos de uma leve ponderação. Para finalizar o trabalho, mostraremos uma leve generalização da Proposição 4.10 em (15). Se θ é uma ação parcial de um grupoide G em um conjunto X, mostramos que para qualquer ação global $\tilde{\theta}$ de G em $Y \supset X$ tal que θ é restrição de $\tilde{\theta}$, a função mediadora obtida pela propriedade universal de ação envolvente de θ é injetiva em $R_e = \{[g, x] \mid (g, x) \in \overline{X} \text{ e } c(g) = e\}$ para cada e objeto de G.

1 Conceitos básicos

Este primeiro capítulo tem como objetivo apresentar ao leitor algumas definições e principalmente introduzir as notações que serão utilizadas nos Capítulos 3 e 4, em que trabalharemos com ações parciais de categorias em conjuntos e ações parciais de grupoides em conjuntos.

Definição 1.1. Uma *categoria* G é uma sextupla $(\mathrm{Ob}(G), \mathrm{mor}(G), d, c, \circ, i)$ em que:

- $\mathrm{Ob}(G)$ é uma classe chamada coleção dos objetos de G;
- $\mathrm{mor}(G)$ é uma classe chamada coleção dos morfismos de G;
- $d, c : \mathrm{mor}(G) \to \mathrm{Ob}(G)$ são funções que a cada morfismo $g \in \mathrm{mor}(G)$ atribuem objetos $d(g)$ e $c(g)$ chamados domínio e contradomínio de g, respectivamente;
- $\circ : G^2 \to \mathrm{mor}(G)$ é uma função, chamada de composição, em que

  $$G^2 \subseteq \mathrm{mor}(G) \times \mathrm{mor}(G)$$

  é formado por todos os pares (g, h) tais que $d(g) = c(h)$. Um par $(g, h) \in G^2$ é chamado componível e a composição $\circ$ aplicada a (g, h) é denotada por $g \circ h$ ou simplesmente por gh.
- $i : \mathrm{Ob}(G) \to \mathrm{mor}(G)$ é função injetiva.

Satisfazendo:

(i) $d(gh) = d(h)$ e $c(gh) = c(g)$ para qualquer $(g, h) \in G^2$;

(ii) $(kg)h = k(gh)$ para quaisquer $(k, g), (g, h) \in G^2$;

(iii) $d(i(e)) = e = c(i(e))$ para qualquer $e \in \mathrm{Ob}(G)$;

(iv) $i(e)g = g = gi(f)$ para quaisquer $e, f \in \mathrm{Ob}(G)$ e $g \in \mathrm{mor}(G)$ tal que $d(g) = f$ e $c(g) = e$.

Dado um morfismo g, costumamos escrever $g : e \to f$ para dizer que $d(g) = e$ e $c(g) = f$. Além disso, se $(k, g), (g, h) \in G^2$, então pelo item (i), temos $(k, gh), (kg, h) \in G^2$ e assim, o item (ii) faz sentido. A seguir, exibimos dois exemplos bem conhecidos de categorias.

Exemplo 1.2. A categoria *Set* tem como objetos a classe de todos os conjuntos e como morfismos a classe de funções entre conjuntos. Além disso, se $f : X \to Y$ é uma função, então $d(f) = X$ e $c(f) = Y$, $\circ$ é a composição usual de funções e $i(X) = Id_X$, para todo conjunto X, em que Id_X denota a função identidade em X.

Exemplo 1.3. A categoria *Grp* tem como objetos a classe de todos os grupos e como morfismos a classe de todos os homomorfismos de grupos. Se $f : G_1 \to G_2$ é um homomorfismo de grupos, então $d(f) = G_1$ e $c(f) = G_2$, $\circ$ é a composição de homomorfismos de grupos e $i(G) = Id_G$ para todo grupo G.

Nos exemplos acima a classe de objetos é uma classe própria, isto é, não é um conjunto. Neste trabalho estamos interessados em estudar ações de categorias pequenas em conjuntos.

Definição 1.4. Uma categoria é dita *pequena* se a classe de objetos e a classe de morfismos forem conjuntos.

Um primeiro exemplo de categoria pequena é um grupo. Mais precisamente:

Exemplo 1.5. Um grupo G pode ser visto como uma categoria pequena em que a classe de objetos é um conjunto unitário formado pelo elemento neutro de G, e a classe de morfismos é o próprio conjunto dos elementos de G. De fato, nesse caso, d, c são triviais, $\circ$ é a operação do grupo e i é a função inclusão.

Esse exemplo é um caso particular de uma classe de categorias pequenas importantes para a sequência desse trabalho.

Exemplo 1.6. Um grupoide G é uma categoria pequena em que todos os seus morfismos são invertíveis, ou seja, para cada $g \in \text{mor}(G)$, existe $g^{-1} \in \text{mor}(G)$ tal que $gg^{-1} = i(c(g))$ e $g^{-1}g = i(d(g))$.

Quando estivermos trabalhando com categorias pequenas, utilizaremos a função i da Definição 1.1 para identificar $\text{Ob}(G)$ como uma subclasse de $\text{mor}(G)$. Isto é, dado $e \in \text{Ob}(G)$, veremos o objeto e também como um morfismo e, assim, passaremos a omitir a função i. Com essa identificação podemos substituir os itens (iii) e (iv) da definição de categorias por:

(iii) $d(e) = e = c(e)$ para qualquer $e \in \text{Ob}(G)$;

(iv) $eg = g = gf$ para qualquer $e, f \in \text{Ob}(G)$ e $g \in \text{mor}(G)$ tal que $d(g) = f$ e $c(g) = e$.

Além disso, podemos reparar que $(g, d(g)), (c(g), g) \in G^2$ para qualquer $g \in \text{mor}(G)$ e, $gd(g) = g = c(g)g$.

Definição 1.7. Seja G uma categoria. Um morfismo $g \in \mathrm{mor}(G)$ é dito ser um monomorfismo se, para quaisquer morfismos $h_1, h_2 \in \mathrm{mor}(G)$ tais que $(g, h_1), (g, h_2) \in G^2$ e $gh_1 = gh_2$, então necessariamente $h_1 = h_2$.

Definição 1.8. Seja G uma categoria. Uma *subcategoria* G' de G é uma categoria $(\mathrm{Ob}(G'), \mathrm{mor}(G'), d', c', \circ', i')$ em que a coleção de objetos $\mathrm{Ob}(G')$ é uma subcoleção de objetos de G, a coleção de morfismos $\mathrm{mor}(G')$ é uma subcoleção de morfismos G, d' e c' coincidem com d e c em $\mathrm{mor}(G')$, $\circ'$ coincide com $\circ$ em $G'^2 = \{(g, h) \in G^2 \mid g, h \in \mathrm{mor}(G')\}$ e i' coincide com i em $\mathrm{Ob}(G')$.

Em particular, veja que:

- Se $g \in \mathrm{mor}(G')$, então $d(g), c(g) \in \mathrm{Ob}(G')$;
- Se $g, g' \in \mathrm{mor}(G')$ são tais que $(g', g) \in G^2$, então a composição $g'g \in \mathrm{mor}(G')$;
- Se $f \in \mathrm{Ob}(G')$, então $i(f) \in \mathrm{mor}(G')$.

Definição 1.9. Uma subcategoria G' de G é dita ser *plena* se, para qualquer $g \in \mathrm{mor}(G)$ tal que $d(g), c(g) \in \mathrm{Ob}(G')$, tem-se que $g \in \mathrm{mor}(G')$.

Definição 1.10. Dadas uma categoria G, uma subcategoria plena G' da mesma e $e \in \mathrm{Ob}(G)$ e $e' \in \mathrm{Ob}(G')$, dizemos que um morfismo $e \to e'$ é uma *reflexão* de G em G' se, para todo morfismo $e \to f$, com $f \in G'$, tivermos que existe um único morfismo $e' \to f$ tal que o seguinte diagrama comuta.

$$\begin{tikzcd} e \arrow[r] \arrow[d] & f \\ e' \arrow[ur, dotted] & \end{tikzcd}$$

Além disso, dizemos que G' é uma *subcategoria reflexiva* de G se para todo objeto $e \in G'$, existe uma reflexão de e em G'.

Definição 1.11. Sejam G e G' categorias. Um funtor covariante $F : G \to G'$ consiste de uma função entre $\mathrm{Ob}(G)$ e $\mathrm{Ob}(G')$ que atribui para cada objeto $e \in \mathrm{Ob}(G)$ um objeto $F(e) \in \mathrm{Ob}(G')$ e uma aplicação entre $\mathrm{mor}(G)$ e $\mathrm{mor}(G')$ que atribui para cada morfismo $g : e \to f$ em $\mathrm{mor}(G)$ um morfismo $F(g) : F(e) \to F(f)$, satisfazendo as seguintes propriedades:

- Se $g, h \in \mathrm{mor}(G)$ tais que $(g, h) \in G^2$, então $(F(g), F(h)) \in G'^2$ e
$$F(g \circ h) = F(g) \circ F(h).$$
- $F(i(e)) = i(F(e))$ para todo $e \in \mathrm{Ob}(G)$.

Definição 1.12. Seja G uma categoria e G' uma subcategoria reflexiva da mesma. Associando a cada $e \in \mathrm{Ob}(G)$ uma reflexão $e \to F(e)$ em G', isto nos induz um funtor $F : G \to G'$ que associa a cada morfismo $e \to f$ o único morfismo $F(e) \to F(f)$ que comuta o diagrama

$$\begin{tikzcd} e \arrow[r] \arrow[d] & F(e) \arrow[d] \\ f \arrow[r] & F(f) \end{tikzcd}$$

em que $e \to F(e)$ e $f \to F(f)$ são as respectivas reflexões de e e f. Chamamos um funtor assim induzido por *refletor*.

2 Ações parciais de grupos em conjuntos

Neste capítulo estudaremos ações parciais de grupos em conjuntos e exploraremos dois conceitos importantes, que são o de restrição e globalização. Nosso objetivo é demonstrar o Teorema 2.35 que diz que toda ação parcial de grupos em conjuntos admite uma globalização universal.

Para este capítulo, denotaremos G como sendo um grupo, com unidade denotada por e e X como sendo um conjunto.

2.1 Ações Globais

Definição 2.1. Sejam X um conjunto e G um grupo. Uma ação global θ de G em X é uma função $\theta : G \times X \to X$, denotada por $\theta(g, x) = g \cdot x$, satisfazendo:

(i) $e \cdot x = x$, para qualquer $x \in X$;

(ii) $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$, para quaisquer $x \in X$ e $g, h \in G$.

Neste caso, dizemos que o par (X, θ) é um G-*conjunto* e, por vezes, por um abuso de linguagem, dizemos apenas que X é um G-conjunto, quando não houver confusão.

Exemplo 2.2. Sejam H um subgrupo de um grupo G. Considerando G como um conjunto, temos que H age em G via:

$$\begin{array}{rccc} \pi : & H \times G & \to & G \\ & (h, g) & \mapsto & hg \end{array},$$

chamada de ação por translação.

Na Definição 2.1, para cada $g \in G$, obtemos uma função $\theta_g : X \to X$ tal que $\theta_g(x) = \theta(g, x) = g \cdot x$. Isso possibilita reescrever a definição de ação da seguinte forma.

Definição 2.3. Sejam X um conjunto e G um grupo. Uma ação global θ de G em X é uma coleção $\{\theta_g\}_{g \in G}$ de funções $\theta_g : X \to X$ satisfazendo

(i) $\theta_e = Id_X$, onde e é o elemento neutro de G;

(ii) $\theta_g \circ \theta_h = \theta_{gh}$, para quaisquer $g, h \in G$.

Agora, introduziremos o conceito de G-função para o caso de ações globais.

Definição 2.4. Sejam G um grupo e X e Y G-conjuntos. Uma função $\varphi : X \to Y$ é dita uma G-função se $\varphi(g \cdot x) = g \cdot \varphi(x)$, para todo $g \in G$ e $x \in X$.

Note que o símbolo $\cdot$ aparece em $g \cdot x$ e $g \cdot \varphi(x)$ com significados diferentes. Se (X, θ_X) e (Y, θ_Y) são os G-conjuntos envolvidos, então $g \cdot x$ denota $\theta_X(g, x)$ enquanto que $g \cdot \varphi(x)$ denota $\theta_Y(g, \varphi(x))$.

Observação 2.5. Para cada grupo G, podemos formar uma categoria, denotada por $\mathscr{A}(G)$, cujos objetos são os G-conjuntos e cujos morfismos são as G-funções. De fato, d e c são as funções que a cada G-função φ atribuem seu domínio e seu contradomínio, respectivamente, $\circ$ é a composição usual de funções (composição de G-funções é G-função) e i é a função que atribui a cada G-conjunto X a função identidade sobre X, denotada por Id_X, que é claramente uma G-função.

Seguindo, temos o conceito de subconjunto G-invariante. Veremos adiante que, quando temos uma ação global em um conjunto X, dado um subconjunto G-invariante Y, podemos obter uma nova ação global restringindo a ação de G a Y.

Definição 2.6. Seja G um grupo e X um G-conjunto. Um subconjunto $Y \subseteq X$ é dito ser G-invariante se $g \cdot y \in Y$ para todo $g \in G$ e para todo $y \in Y$.

Exemplo 2.7. Sejam G um grupo, (X, θ) um G-conjunto e $Y \subseteq X$ um subconjunto G-invariante. Como Y é G-invariante, a imagem de $G \times Y$ por θ está contida em Y e, assim, a função

$$\begin{array}{rccc} \theta_Y : & G \times Y & \to & Y \\ & (g, y) & \mapsto & \theta(g, y) \end{array}$$

satisfaz trivialmente os axiomas (i) e (ii) da Definição 2.1.

2.2 Ações parciais e globalização

De certa forma, o Exemplo 2.7 motiva a definição de ação parcial de grupos que veremos nesta seção. No contexto do Exemplo 2.7, quando $Y \subseteq X$ não é G-invariante, o problema que surge é que a imagem de $G \times Y$ por θ não está contida em Y. Mas, e se definíssemos $\theta|_Y$ apenas para os pares $(g, x) \in G \times Y$ tais que $\theta(g, x) \in Y$? Nesse caso, $\theta|_Y : G \times Y \to Y$ seria uma função parcial, como nas Definições 2.8 e 2.11.

Definição 2.8. Sejam A e B conjuntos. Uma *função parcial* φ de A em B é uma relação de A em B tal que, para cada elemento $a \in A$ no domínio de φ, existe um único elemento $b \in B$ tal que $a \sim_\varphi b$. Assim como para funções, utilizamos $\varphi : A \to B$ para denotar uma função parcial de A em B e, se $a \in A$ é um elemento do domínio de φ, denotamos por $\varphi(a)$ o único elemento de B tal que $a \sim_\varphi \varphi(a)$. Além disso, dado $a \in A$, diremos que $\varphi(a)$ *está definido* se a pertencer ao domínio de φ.

Exemplo 2.9. Se G é uma categoria pequena, então a composição que aparece na Definição 1.1, de categoria, pode ser vista como uma função parcial $\circ : \mathrm{mor}(G) \times \mathrm{mor}(G) \to \mathrm{mor}(G)$.

Observação 2.10. Voltando à discussão anterior à Definição 2.8, obtemos assim uma função parcial $\theta|_Y : G \times Y \to Y$ cujo domínio é formado pelos pares (g, y) tais que $\theta(g, y) \in Y$. Se $y \in Y$, claro que $e \cdot y = y \in Y$ e, assim, $\theta|_Y$ está definida em (e, y) para qualquer $y \in Y$ e o Axioma (i) de 2.1 é trivialmente verificado. Já para o Axioma (ii) de 2.1, dado $y \in Y$, podem existir $g, h \in G$ tais que $g \cdot (h \cdot y) \notin Y$ ou $(gh) \cdot y \notin Y$. No entanto, é claro que $g \cdot (h \cdot y) \in Y$ se, e somente se, $(gh) \cdot y \in Y$ já que $\theta(g, \theta(h, y)) = \theta(gh, y)$. Assim, se $\theta|_Y(h, y)$ está definido, então tem-se que $\theta|_Y(g, \theta|_Y(h, y))$ está definido se, e somente se, $\theta|_Y(gh, y)$ está definido e, nesse caso, verifica-se o axioma (ii) de 2.1. Essa discussão motiva a seguinte definição.

Definição 2.11. Sejam X um conjunto e G um grupo. Uma *ação parcial* θ de G em X é uma função parcial $\theta : G \times X \to X$, denotada por $\theta(g, x) = g \cdot x$, satisfazendo:

$(G1)$ Para qualquer $x \in X$, $e \cdot x$ está definido e $e \cdot x = x$;

$(G2)$ Se $x \in X$ e $h \in G$ são tais que $h \cdot x$ está definido, então, para qualquer $g \in G$ tem-se que $g \cdot (h \cdot x)$ está definido se, e somente se, $(gh) \cdot x$ está definido e, nesse caso, $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$.

Veja que, na Definição 2.11, se $g \cdot x$ está definido para todo $g \in G$ e $x \in X$, então a ação parcial em questão é uma ação global. Portanto, a definição de ação parcial é uma generalização do conceito de ação global, que frequentemente é denominada apenas por ação.

Dessa forma, se θ é uma ação parcial de G em X, dizemos que o par (X, θ) é um G-conjunto, estendendo a noção de G-conjunto para ações parciais. Assim como antes, se não existir chance de confusão dizemos apenas que X é um G-conjunto.

Se θ é uma ação global de G em X e $Y \subseteq X$, então a ação parcial de G em Y obtida pela restrição da ação de G em X é denotada por $\theta|_Y$.

Exemplo 2.12. Seja X um conjunto e $\phi : G \times X \to X$ função parcial tal que, para qualquer $x \in X$, $\phi(g, x)$ está definido se, e somente se, $g = e$. É claro que ϕ é uma ação parcial de G em X chamada *ação supertrivial.* Este é um caso particular de ação trivial. Dizemos que uma ação $\phi : G \times X \to X$ é trivial se $\phi(g, x) = x$ sempre que $\phi(g, x)$ está definido.

O leitor já familiarizado com a noção de ações parciais de grupos possivelmente esteja acostumado com uma literatura (veja (14, 2), por exemplo) que apresenta a definição de ação parcial em uma roupagem diferente. Aqui, nos baseamos na notação utilizada por Nystedt em (20) para apresentar a Definição 2.11 desta forma. Uma definição nesses moldes pode também ser consultada em (16).

Nosso objetivo inicial será apresentar a definição de ação parcial dada em (14) e mostrar que esta definição é equivalente à definição de ação parcial dada em 2.11.

Definição 2.13. Uma ação parcial θ de G em X é um par $(\{D_g\}_{g\in G}, \{\theta_g\}_{g\in G})$ em que $\{D_g\}_{g\in G}$ é uma coleção de subconjuntos de X e $\{\theta_g\}_{g\in G}$ é uma coleção de funções

$$\theta_g : D_{g^{-1}} \to D_g$$

satisfazendo as seguintes condições:

(*i*) $D_e = X$, e $\theta_e = id_X$ é a função identidade.

(*ii*) $\theta_g \circ \theta_h \subseteq \theta_{gh}$, para todo $g, h \in G$.

A composição $\theta_g \circ \theta_h$ que aparece no item (ii) da Definição 2.13 se refere à função cujo domínio são todos os elementos $x \in X$ tais que $\theta_g(\theta_h(x))$ está definido pois, a imagem de θ_h não precisa necessariamente estar contida no domínio de θ_g. Dessa forma, o elemento x deve estar em $D_{h^{-1}}$ e $\theta_h(x)$ deve estar em $D_{g^{-1}}$, ou seja, o domínio de $\theta_g \circ \theta_h$ é o conjunto

$$\{x \in D_{h^{-1}} \mid \theta_h(x) \in D_{g^{-1}}\}$$

que pode ser reescrito como

$$\theta_h^{-1}(D_{g^{-1}}),$$

ou

$$\theta_h^{-1}(D_h \cap D_{g^{-1}}).$$

Além disso, o símbolo "$\subseteq$"que aparece no item (ii) da Definição 2.13 quer dizer que a função θ_{gh} é uma extensão da função $\theta_g \circ \theta_h$ e consequentemente $\theta^{-1}(D_h \cap d_{g^{-1}}) \subseteq D_{(gh)^{-1}}$.

Agora, mostraremos uma proposição que nos auxiliará a verificar a equivalência entre as definições 2.11 e 2.13.

Proposição 2.14. *Sejam G um grupo e X um conjunto tais que G age parcialmente sobre X segundo a definição 2.11. Se $g \in G$ e $x \in X$ são tais que $g \cdot x$ está definido, então $g^{-1} \cdot (g \cdot x)$ está definido e $g^{-1} \cdot (g \cdot x) = x$.*

Demonstração. Sejam $g \in G$ e $x \in X$ tais que $g \cdot x$ está definido. Pelo axioma $(G1)$ da Definição 2.11, $(g^{-1}g) \cdot x = e \cdot x$ está definido e é igual a x. Pelo axioma $(G2)$ da definição 2.11, $g^{-1} \cdot (g \cdot x)$ está definido e $g^{-1} \cdot (g \cdot x) = (g^{-1}g) \cdot x = e \cdot x = x$, como queríamos. $\square$

Agora, estamos em condições de provar uma implicação da equivalência prometida. Para isso, suponha que G age parcialmente sobre um conjunto X e, para cada $g \in G$, defina

$$D_{g^{-1}} := \{x \in X \mid g \cdot x \text{ está definido}\}.$$

Pela Proposição 2.14, temos $\{g \cdot x \mid x \in D_{g^{-1}}\} \subseteq D_g$. Além disso, se $y \in D_g$, então $g^{-1} \cdot y$ está definido e, novamente pela Proposição 2.14, $g \cdot (g^{-1} \cdot y)$ está definido e $y = g \cdot (g^{-1} \cdot y) \in \{g \cdot x \mid x \in D_{g^{-1}}\}$. Logo, $D_g = \{g \cdot x \mid x \in D_{g^{-1}}\}$. Assim, para cada $g \in G$, temos uma função $\theta_g : D_{g^{-1}} \to D_g$ tal que $\theta_g(x) = \theta(g, x)$, para todo $x \in D_{g^{-1}}$. Construímos assim um par

$$(\{D_g\}_{g \in G}, \{\theta_g\}_{g \in G}), \tag{2.1}$$

em que $\{D_g\}_{g \in G}$ é uma coleção de subconjuntos de X e $\{\theta_g\}_{g \in G}$ é uma coleção de funções $\theta_g : D_{g^{-1}} \to D_g$.

Proposição 2.15. *Seja θ uma ação parcial de G em X. O par $(\{D_g\}_{g \in G}, \{\theta_g\}_{g \in G})$ dado como em* (2.1) *é uma ação parcial de G em X, segundo a Definição 2.13.*

Demonstração. Sejam θ uma ação parcial de G em X e $(\{D_g\}_{g \in G}, \{\theta_g\}_{g \in G})$ o par como definido em (2.1). Seja e o elemento neutro de G. Note que, para cada $x \in X$, $e \cdot x$ está definido, ou seja, $x \in \{e \cdot x \mid x \in D_{e^{-1}}\} = D_e$ e, portanto, $D_e = X$. Além disso, $\theta_e(x) = \theta(e, x) = e \cdot x = x$, ou seja, θ_e é a função identidade em X.
Agora, tome $g, h \in G$ e x um elemento do domínio de $\theta_g \circ \theta_h$, isto é, $\theta_g(\theta_h(x))$ está definido. Isto nos diz que $x \in D_{h^{-1}}$ e $\theta_h(x) \in D_{g^{-1}}$, assim,

$$\theta_g(\theta_h(x)) = \theta_g(h \cdot x) = g \cdot (h \cdot x)$$

e como θ é ação parcial, pelo item $(G2)$ da Definição 2.11, temos que $(gh) \cdot x$ está definido e $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$. Logo, x está no domínio de θ_{gh} e

$$\theta_{gh}(x) = (gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$$

portanto, $\theta_g \circ \theta_h \subseteq \theta_{gh}$ para todo x no domínio de $\theta_g \circ \theta_h$. □

Reciprocamente, se $(\{D_g\}_{g \in G}, \{\theta_g\}_{g \in G})$ é uma ação parcial de G em X segundo a Definição 2.13, então a função parcial $\theta : G \times X \to X$ dada por $\theta(g, x) = \theta_g(x)$ para $x \in D_{g^{-1}}$ é uma função parcial de G em X segundo a Definição 2.11. Mas, antes de provar isso, vamos explorar um pouco mais a definição 2.13.

Note também que as funções $\theta_g : D_{g^{-1}} \to D_g$ da Definição 2.13 são bijeções.

Proposição 2.16. *Seja θ uma ação parcial de G em X segundo a Definição 2.13, então, para cada $g \in G$, a função θ_g é uma bijeção com inversa $\theta_g^{-1} = \theta_{g^{-1}}$.*

Demonstração. Dado $g \in G$, observe que, pelo item (ii) da Definição 2.13, temos

$$\theta_{g^{-1}} \circ \theta_g \subseteq \theta_{g^{-1}g} = \theta_e,$$

ou seja, $\theta_{g^{-1}} \circ \theta_g$ é a função identidade em seu domínio, que é $D_{g^{-1}}$.
De maneira similar, $\theta_g \circ \theta_{g^{-1}}$ é a identidade em D_g. Portanto, temos uma bijeção entre $D_{g^{-1}}$ e D_g, e $\theta_{g^{-1}}$ é a inversa de θ_g. □

A seguir, temos uma proposição que nos fornece uma equivalência para a Definição 2.13 que será usada para mostrar a recíproca prometida.

Proposição 2.17. *Seja $\{D_g\}_{g\in G}$ uma coleção de subconjuntos de X, e seja $\{\theta_g\}_{g\in G}$ uma coleção de funções*

$$\theta_g : D_{g^{-1}} \to D_g.$$

Então, $(\{D_g\}_{g\in G}, \{\theta_g\}_{g\in G})$ é uma ação parcial de G em X segundo a Definição 2.13 se, e somente se, para todo $g, h \in G$, tivermos que

(i') *$D_e = X$ e $\theta_e = id_X$ é a função identidade.*

(ii') *$\theta_g(D_{g^{-1}} \cap D_h) \subseteq D_{gh}$.*

(iii') *$\theta_g(\theta_h(x)) = \theta_{gh}(x)$, para todo $x \in D_{h^{-1}} \cap D_{(gh)^{-1}}$.*

Demonstração. Suponha que $(\{D_g\}_{g\in G}, \{\theta_g\}_{g\in G})$ seja uma ação parcial de G em X segundo a definição 2.13. Note que as condições 2.13(i) e (i') são iguais.

Mostremos que vale (ii'). Sejam $g, h \in G$, sabemos que o domínio de $\theta_g \circ \theta_h$ é precisamente $\theta_h^{-1}(D_h \cap D_g^{-1})$. Além disso, sabemos por 2.13(ii) que $\theta_g \circ \theta_h \subseteq \theta_{gh}$, e que o domínio de θ_{gh} é $D_{(gh)^{-1}}$. Logo, temos que

$$\theta_h^{-1}(D_h \cap D_{g^{-1}}) \subseteq D_{(gh)^{-1}}.$$

Sabendo que $\theta_h^{-1} = \theta_{h^{-1}}$, e substituindo h por g^{-1} e g por h^{-1}, temos

$$\theta_g(D_{g^{-1}} \cap D_h) \subseteq D_{gh}$$

que é precisamente o item (ii').

Mostremos (iii'). Seja $x \in D_{h^{-1}} \cap D_{(gh)^{-1}}$. Como $x \in D_{h^{-1}}$ e $x \in D_{(gh)^{-1}}$ temos que $\theta_h(x)$ e $\theta_{gh}(x)$ estão definidos. Além disso, por (ii') temos que

$$\theta_h(x) \in \theta_h(D_{h^{-1}} \cap D_{(gh)^{-1}}) \subseteq D_{hh^{-1}g^{-1}} = D_{g^{-1}},$$

ou seja, x está no domínio de $\theta_g \circ \theta_h$. Como $\theta_g \circ \theta_h \subseteq \theta_{gh}$, temos que $\theta_g(\theta_h(x)) = \theta_{gh}(x)$.

Agora suponha que valem as condições $(i'), (ii')$ e (iii') do enunciado e vamos mostrar que valem 2.13(i) e 2.13(ii). Novamente, como 2.13(i) é igual a (i'), nada a fazer.

Mostremos primeiramente que, para todo $g \in G$, $\theta_g^{-1} = \theta_{g^{-1}}$. Note que, se escrevermos $h = g^{-1}$, o item (iii') nos diz que para qualquer $x \in D_g$, temos

$$\theta_g(\theta_{g^{-1}}(x)) = x$$

ou seja, $\theta_{g^{-1}}$ é uma inversa à direita de θ_g. Substituindo g por g^{-1}, temos que $\theta_{g^{-1}}$ é uma inversa à esquerda de θ_g e portanto, $\theta_g^{-1} = \theta_{g^{-1}}$.

Mostremos que vale 2.13(ii). Tome x tal que pertença ao domínio de $\theta_g \circ \theta_h$, ou seja,

$$x \in \theta_h^{-1}(D_h \cap D_{g^{-1}}) = \theta_{h^{-1}}(D_h \cap D_{g^{-1}}).$$

Pelo item (ii'), temos que $\theta_{h^{-1}}(D_h \cap D_{g^{-1}}) \subseteq D_{h^{-1}g^{-1}}$, mostrando assim que o domínio de $\theta_g \circ \theta_h$ está contido no domínio de θ_{gh}. Como x está no domínio de θ_h, temos que $x \in D_{h^{-1}} \cap D_{h^{-1}g^{-1}}$ e portanto, pelo item (iii'), segue que $\theta_g(\theta_h(x)) = \theta_{gh}(x)$, ou seja, temos que $\theta_g \circ \theta_h \subseteq \theta_{gh}$. $\square$

Podemos ainda fazer uma leve mudança no item (ii') da Proposição 2.17.

Proposição 2.18. *Seja $\theta = (\{D_g\}_{g\in G}, \{\theta_g\}_{g\in G})$ uma ação parcial de G em X segundo a Definição 2.13. Então, para todo $g, h \in G$, temos que*

$$\theta_g(D_{g^{-1}} \cap D_h) = D_g \cap D_{gh}.$$

Demonstração. Pela Proposição 2.17, temos que $\theta_g(D_{g^{-1}} \cap D_h) \subseteq D_{gh}$. Além disso, a imagem de θ_g está contida em D_g, logo,

$$\theta_g(D_{g^{-1}} \cap D_h) \subseteq D_g \cap D_{gh}.$$

Agora, aplicando $\theta_{g^{-1}}$ na inclusão acima, obtemos

$$\theta_{g^{-1}}(\theta_g(D_{g^{-1}} \cap D_h)) \subseteq \theta_{g^{-1}}(D_g \cap D_{gh})$$

que resulta em

$$D_{g^{-1}} \cap D_h \subseteq \theta_{g^{-1}}(D_g \cap D_{gh}).$$

Substituindo g por g^{-1} e h por gh, obtemos

$$D_g \cap D_{gh} \subseteq \theta_g(D_{g^{-1}} \cap D_h).$$

Portanto, $\theta_g(D_{g^{-1}} \cap D_h) = D_g \cap D_{gh}$ para todo $g, h \in G$. $\square$

Finalmente, estamos em condições de mostrar a recíproca da equivalência entre as definições de ações parciais.

Proposição 2.19. *Se $(\{D_g\}_{g\in G}, \{\theta_g\}_{g\in G})$ é uma ação parcial de G em X segundo a Definição 2.13, então a função parcial $\theta : G \times X \to X$ tal que $g \cdot x = \theta(g, x) = \theta_g(x)$, para todo $(g, x) \in G \times X$ com $x \in D_{g^{-1}}$, é uma ação parcial segundo a Definição 2.11.*

Demonstração. Seja $\theta : G \times X \to X$ função parcial tal que $g \cdot x = \theta(g,x) = \theta_g(x)$ para todo $(g,x) \in G \times X$ tal que $x \in D_{g^{-1}}$. Dado $x \in X$, temos que $x \in D_e$, ou seja, $e \cdot x = \theta(e,x) = \theta_e(x)$ está definido, e como θ_e é a função identidade, $e \cdot x = x$.
Agora, tome $x \in X$ e $h \in G$ tal que $h \cdot x$ esteja definido. Tome $g \in G$ tal que $g \cdot (h \cdot x)$ esteja definido, logo, $x \in D_{h^{-1}}$ e $\theta_h(x) \in D_{g^{-1}}$, assim, $\theta_g(\theta_h(x)) = (\theta_g \circ \theta_h)(x)$ está definido, e como $\theta_g \circ \theta_h \subseteq \theta_{gh}$ para todo $g, h \in G$, segue que $\theta_{gh}(x) = \theta(gh, x) = (gh) \cdot x$ está definido.
Por outro lado, seja $g \in G$ tal que $(gh) \cdot x = \theta_{gh}(x)$ esteja definido. Note que, como $h \cdot x = \theta_h(x)$ está definido, então $x \in D_{h^{-1}}$ e $x \in D_{(gh)^{-1}}$, assim, pelo item (iii') da 2.17, temos que $g \cdot (h \cdot x) = \theta_g(\theta_h(x))$ está definido e $(gh) \cdot x = \theta_{gh}(x) = \theta_g(\theta_h(x)) = \theta_g(h,x) = g \cdot (h \cdot x)$. $\square$

A partir de agora, voltaremos a utilizar a notação vista na Definição 2.11.

Vamos finalizar esta seção estendendo o conceito de G-função visto na Definição 2.4 para o contexto de ações parciais e mostrando que, assim como no Exemplo 2.5, podemos formar uma categoria que contém $\mathscr{A}(G)$ como subcategoria plena.

Definição 2.20. Sejam G um grupo e X e Y G-conjuntos. Dizemos que uma função $\varphi : X \to Y$ é uma *G-função* se para quaisquer $g \in G$ e $x \in X$ tais que $g \cdot x$ está definido, então $g \cdot \varphi(x)$ está definido e $g \cdot \varphi(x) = \varphi(g \cdot x)$.

Vejamos alguns exemplos de G-função:

Exemplo 2.21. Se X é um G-conjunto, Id_X é claramente uma G-função. Além disso, se Y é outro G-conjunto e a ação de G em X é a supertrivial, então qualquer função $\varphi : X \to Y$ é claramente uma G-função.

Exemplo 2.22. Se θ é uma ação global de G em X e $Y \subseteq X$, então a inclusão $i : Y \hookrightarrow X$ é uma G-função entre os G-conjuntos $(Y, \theta|_Y)$ e (X, θ).

Observação 2.23. Definido G-funções para ações parciais, podemos formar a categoria $\mathscr{A}_p(G)$ das ações parciais, para um grupo G dado. Os objetos desta categoria são os G-conjuntos e os morfismos são G-funções. Veja que a categoria $\mathscr{A}(G)$ é uma subcategoria plena de $\mathscr{A}_p(G)$ pois, dados dois objetos de $\mathscr{A}(G)$, isto é, duas ações globais, todo morfismo de $\mathscr{A}_p(G)$ entre essas duas ações será uma G-função entre ações globais, logo, pertence aos morfismos de $\mathscr{A}(G)$.

Observação 2.24. Os monomorfismos de $\mathscr{A}_p(G)$ são as G-funções injetivas. De fato, se φ é uma G-função injetiva, então claramente φ é monomorfismo. Por outro lado, sejam (X, θ_X) e (Y, θ_Y) G-funções e $\varphi : X \to Y$ monomorfismo. Seja θ ação supertrivial de G

em X. Sejam $a, b \in X$ tais que $\varphi(a) = \varphi(b)$ e defina $\psi : X \to X$ de forma que

$$\psi(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \notin \{a, b\} \\ a, & \text{se } x = b \\ b, & \text{se } x = a \end{cases}$$

assim, $\psi : (X, \theta) \to (X, \theta_X)$ é uma G-função tal que

$$\varphi \circ \psi = \varphi = \varphi \circ Id_X.$$

Como φ é monomorfismo, temos que $\psi = Id_X$ e, portanto, $a = b$.

Definição 2.25. Seja X um G-conjunto. Dizemos que (φ, Y) é uma *extensão* de X se Y é um G-conjunto e $\varphi : X \to Y$ é uma G-função injetiva. Se, além disso, a ação de G em Y for global, dizemos que (φ, Y) é uma *globalização* de X. Se não houver chance de confusão, por um abuso de notação, escreveremos apenas Y ao invés de (φ, Y)

Observação 2.26. A noção de restrição não é exatamente a oposta da noção de globalização. Mais precisamente, se (X, θ_X) e (Y, θ_Y) são G-conjuntos tais que $Y \subseteq X$, θ_X é uma ação global de G em X e $\theta_Y(g, y) = \theta_X(g, y)$, para todo $y \in Y$, então (i, X) é uma globalização de Y em que $i : Y \to X$ é a inclusão. Mas, não necessariamente $\theta_X|_Y = \theta_Y$.

Exemplo 2.27. Seja $\pi : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$ ação por translação e $\theta : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$ a ação supertrivial, então $(Id_{\mathbb{Z}_2}, (\mathbb{Z}_2, \pi))$ é uma globalização de $(\mathbb{Z}_2, \theta)$, mas $\theta \neq \pi = \pi|_{\mathbb{Z}_2}$.

Perceba que, na observação anterior, $Id_{\mathbb{Z}_2} : (\mathbb{Z}_2, \theta) \to (\mathbb{Z}_2, \tau)$ é uma G-função bijetiva, mas não é um isomorfismo em $\mathscr{A}_p(\mathbb{Z}_2)$, já que a função inversa $Id_{\mathbb{Z}_2}$ não é uma G-função entre $(\mathbb{Z}_2, \tau)$ e $(\mathbb{Z}_2, \theta)$. De fato, se X e Y são G-conjuntos, então uma G-função $\varphi : X \to Y$ bijetiva é um isomorfismo em $\mathscr{A}_p(G)$ se, e somente se, a função inversa $\varphi^{-1} : Y \to X$ for uma G-função.

Em (4), uma G-função f é dita forte se $g \cdot f(x)$ definida implica $g \cdot x$ definida. Aliás, na referência (4) várias construções categóricas são feitas em $\mathscr{A}_p(G)$ e é verificado que essa categoria é completa (veja Corolário 9, (4)).

2.3 Restrição e Globalização

Vimos que, quando temos inicialmente uma ação global de G em um conjunto Y, através de um processo de restrição obtemos uma ação parcial de G em um subconjunto $X \subseteq Y$. Por outro lado, podemos nos perguntar se, iniciando com uma ação parcial de G em um conjunto X, existe uma ação global de G em um conjunto Y que contenha X de tal forma que a ação de G em X seja obtida pela restrição da ação de G em Y. A resposta para essa questão de globalização nos leva ao resultado mais importante desse trabalho, que nos diz que toda ação parcial de uma categoria G em um conjunto X admite uma globalização (Teorema 3.29), e, em particular, que toda ação parcial de um grupo G em um conjunto X admite uma globalização (Teorema 2.35).

Nessa seção, nosso objetivo será desenvolver as ferramentas necessárias para provar o principal teorema desse capítulo que diz que toda ação parcial é a restrição de uma ação global.

Definição 2.28. Sejam X e Y G-conjuntos e $\varphi : X \to Y$ uma G-função. Dizemos que (φ, Y) é uma *globalização universal* de X se (φ, Y) é uma globalização de X e φ é uma reflexão de X em $\mathscr{A}(G)$. Isto é, (φ, Y) é uma globalização de X e para qualquer G-conjunto Z em que a ação de G em Z é global e qualquer G-função $\psi : X \to Z$, existe uma única G-função $\sigma : Y \to Z$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] & Y \arrow[dl, dotted, "\sigma"] \\ Z & \end{tikzcd}$$

comuta.

Agora, definiremos uma relação em $G \times X$ e em seguida construiremos um conjunto $R(X)$ equipado com uma ação global de G.

Definição 2.29. Seja X um G-conjunto. Defina uma relação $\sim$ sobre $G \times X$ da seguinte maneira: dados $(g, x), (h, y) \in G \times X$, $(g, x) \sim (h, y)$ se, e somente se, $(h^{-1}g) \cdot x$ está definido e $(h^{-1}g) \cdot x = y$.

Proposição 2.30. *Seja X um G-conjunto. A relação $\sim$ definida em 2.29 é uma relação de equivalência em $G \times X$.*

Demonstração. Provemos que $\sim$ é de fato uma relação de equivalência.

- Reflexividade: Seja $(g, x) \in G \times X$, observe que $(g^{-1}g) \cdot x = e \cdot x$ está definido e, $(g^{-1}g) \cdot x = e \cdot x = x$, portanto, $(g, x) \sim (g, x)$.

- Simetria: Sejam $(g, x), (h, y) \in G \times X$ e suponha que $(g, x) \sim (h, y)$. Logo, $(h^{-1}g) \cdot x$ está definido e $(h^{-1}g) \cdot x = y$. Como $(h^{-1}g) \cdot x = y$, pela Proposição 2.14 temos que $(g^{-1}h) \cdot y$ está definido e

$$(g^{-1}h) \cdot y = (g^{-1}h) \cdot ((h^{-1}g) \cdot x) = x.$$

  Portanto, $(h, y) \sim (g, x)$.

- Transitividade: Sejam $(g, x), (h, y), (k, z) \in G \times X$ e suponha que $(g, x) \sim (h, y)$ e $(h, y) \sim (k, z)$. Dessa forma, temos que $(h^{-1}g) \cdot x$ e $(k^{-1}h) \cdot y$ estão definidos bem como $(h^{-1}g) \cdot x = y$ e $(k^{-1}h) \cdot y = z$. Assim, pelo axioma $(G2)$ da Definição 2.11, $(k^{-1}g) \cdot x = (k^{-1}hh^{-1}g) \cdot x$ está definido e

$$(k^{-1}g) \cdot x = (k^{-1}hh^{-1}g) \cdot x = (k^{-1}h) \cdot ((h^{-1}g) \cdot x) = (k^{-1}h) \cdot y = z.$$

Portanto, $(g, x) \sim (k, z)$.

Assim, concluímos que $\sim$ é uma relação de equivalência em $G \times X$. $\square$

Definição 2.31. Defina $R(X)$ como sendo o quociente de $G \times X$ pela relação de equivalência definida em 2.29. Denotaremos por $[g, x]$ a classe de equivalência com representante $(g, x) \in G \times X$.

Agora que temos o conjunto $R(X)$ em mãos, utilizaremos a ação de G em X para induzir uma ação de G em $R(X)$ que será uma ação global dada pela expressão a seguir.

Definição 2.32. Definimos uma função $\theta_R : G \times R(X) \to R(X)$ tal que

$$\theta_R(g, [h, x]) = [gh, x], \tag{2.2}$$

para todo $g, h \in G$ e para todo $x \in X$.

Proposição 2.33. *A função θ_R definida em 2.32 está bem definida e é uma ação global de G em $R(X)$.*

Demonstração. Mostremos que θ_R está bem definida. Sejam $[h_1, x], [h_2, y] \in R(X)$, tais que $[h_1, x] = [h_2, y]$. Assim, temos que $(h_1, x) \sim (h_2, y)$, logo, pela Definição 2.29, temos que $(h_2^{-1}h_1) \cdot x$ está definido e $(h_2^{-1}h_1) \cdot x = y$. Assim, para todo $g \in G$, temos que

$$((gh_2)^{-1}(gh_1)) \cdot x = (h_2^{-1}g^{-1}gh_1) \cdot x = (h_2^{-1}h_1) \cdot x$$

está definido e é igual a y. Logo, $\theta_R(g, [h_1, x]) = [gh_1, x] = [gh_2, y] = \theta_R(g, [h_2, y])$. Portanto, θ_R está bem definida. Mostremos agora que θ_R é uma ação global de G em $R(X)$. Primeiramente, temos que

$$\theta_R(e, [h, x]) = [eh, x] = [h, x],$$

para todo $h \in G$ e $x \in X$. Além disso, para $g, g' \in G$ temos que

$$\theta_R(g', \theta_R(g, [h, x])) = \theta_R(g', [gh, x]) = [g'gh, x] = \theta_R(g'g, [h, x]),$$

para todo $g, g', h \in G$ e $x \in X$. Pela Definição 2.1, θ_R é uma ação global de G em $R(X)$. $\square$

Estamos em condições agora de enunciar e provar o principal resultado desse capítulo. Vamos apenas apresentar mais uma definição antes de enunciar o teorema.

Definição 2.34. Sejam G um grupo e (X, θ_X) e (Y, θ_Y) G-conjuntos. Dizemos que uma globalização (φ, Y) de X *induz* a ação θ_X de G em X se $\varphi : X \to \varphi(X)$ é um isomorfismo entre (X, θ_X) e $(\varphi(X), \theta_Y|_{\varphi(X)})$ em $\mathscr{A}_p(G)$.

O seguinte resultado foi devido Abadie em (2). A versão da demonstração que apresentaremos a seguir é uma adaptação da demonstração de Exel em (14).

Teorema 2.35. *Se G é um grupo e (X, θ) é um G-conjunto qualquer, então, existem um G-conjunto $(R(X), \theta_R)$ e uma G-função $i : X \to R(X)$ tal que o par $(i, R(X))$ é uma globalização universal de (X, θ) que induz a ação original de G em X.*

Demonstração. Seja $R(X)$ como definido em 2.31 e θ_R como definido em 2.32. Pela proposição 2.33, $(R(X), \theta_R)$ é um G-conjunto tal que a ação θ_R de G em $R(X)$ é global. Seja $i : X \to R(X)$ a função dada por

$$\begin{array}{rccc} i: & X & \to & R(X) \\ & x & \mapsto & [e, x], \end{array}$$

para cada $x \in X$. Verifiquemos inicialmente que i é injetiva. Sejam $x, y \in X$ tais que $[e, x] = [e, y]$. Note que, como $[e, x] = [e, y]$, temos que $(e, x) \sim (e, y)$, logo, $y = (e^{-1}e) \cdot x = e \cdot x = x$ e portanto, i é injetiva.

Vamos verificar que i é uma G-função. Para isso, considere $g \in G$ e $x \in X$ tal que $g \cdot x$ está definido. Note que $(g, x) \sim (e, g \cdot x)$ pois, $(e^{-1}g) \cdot x$ está definido e $(e^{-1}g) \cdot x = g \cdot x$. Logo, $[g, x] = [e, g \cdot x]$ e, portanto,

$$g \cdot i(x) = g \cdot [e, x] = [ge, x] = [g, x] = [e, g \cdot x] = i(g \cdot x).$$

Logo, $(i, R(X))$ é uma globalização de (X, θ).

Mostremos agora que esta globalização é universal. Suponha que (Z, θ_Z) é um G-conjunto em que a ação θ_Z de G em Z é global e seja $j : X \to Z$ uma G-função. Defina a seguinte função

$$\begin{aligned} \phi \colon G \times X &\longrightarrow Z \\ (g, x) &\longmapsto g \cdot j(x), \end{aligned}$$

para todo $(g, x) \in G \times X$. Agora observe que, se $(g, x) \sim (h, y)$, então, $(h^{-1}g) \cdot x$ está definido e $(h^{-1}g) \cdot x = y$. Logo,

$$j(y) = j((h^{-1}g) \cdot x) = (h^{-1}g) \cdot j(x),$$

e, portanto,

$$\phi(h, y) = h \cdot j(y) = g \cdot j(x) = \phi(g, x).$$

Por consequência, temos que a função ϕ se fatora através do quociente $R(X)$ a uma função $\tilde{\phi} : R(X) \to Z$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} G \times X \arrow[r, "\phi"] \arrow[d] & Z \\ R(X) \arrow[ur, dotted, "\tilde{\phi}"'] & \end{tikzcd}$$

comuta, isto é, tal que $\tilde{\phi}([g,x]) = \phi(g,x) = g \cdot j(x)$, para todo $g \in G$ e $x \in X$.

Provemos agora que $\tilde{\phi}$ é uma G-função. Como as ações θ_R e θ_Z são globais, para todo $g, h \in G$ e $x \in X$ temos que

$$\tilde{\phi}(g \cdot [h,x]) = \tilde{\phi}([gh,x]) = (gh) \cdot j(x) = g \cdot (h \cdot j(x)) = g \cdot \tilde{\phi}([h,x]).$$

Portanto, $\tilde{\phi}$ é G-função. E, além disso, o diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "j"] \arrow[d, "i"'] & Z \\ R(X) \arrow[ur, "\tilde{\phi}"'] & \end{tikzcd}$$

comuta, pois

$$(\tilde{\phi} \circ i)(x) = \tilde{\phi}([e,x]) = e \cdot j(x) = j(x),$$

para qualquer $x \in X$.

Falta ainda mostrar que $\tilde{\phi}$ é única. Suponha que $\phi' : R(X) \to Z$ é outra G-função tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "j"] \arrow[d, "i"'] & Z \\ R(X) \arrow[ur, "\phi'"'] & \end{tikzcd}$$

comuta. Como ϕ' é G-função, temos que

$$\phi'([g,x]) = \phi'(g \cdot [e,x]) = g \cdot \phi'([e,x]) = g \cdot (\phi' \circ i)(x) = g \cdot j(x) = \tilde{\phi}([g,x])$$

para todo $g \in G$ e $x \in X$, o que garante a unicidade de $\tilde{\phi}$.

Para finalizar, vamos mostrar que a ação global de G sobre $i(X)$ induz a ação parcial de G sobre X, isto é, vamos mostrar que a co-restrição $i : X \to i(X)$ é um isomorfismo entre (X, θ) e $(i(X), \theta_R|_{i(X)})$. De fato, é claro que esta função é uma G-função bijetiva. Resta mostrar que a função inversa é uma G-função. Para isso, sejam $x, y \in X$ e $g \in G$ tal que $g \cdot i(x)$ está definido e $g \cdot i(x) = i(y)$. Queremos mostrar que $g \cdot x$ está definido e $g \cdot x = y$. Note que $[g,x] = g \cdot [e,x] = g \cdot i(x) = i(y) = [e,y]$ ou seja, $(g,x) \sim (e,y)$. Assim, $g \cdot x = (e^{-1}g) \cdot x$ está definido e $g \cdot x = (e^{-1}g) \cdot x = y$. $\square$

Esse teorema nos fornece um funtor $R : \mathscr{A}_p(G) \to \mathscr{A}(G)$ refletor que a cada G-conjunto (X, θ) associa o G-conjunto $(R(X), \theta|_R)$ e a cada G-função $\varphi : X \to Y$ associa a única G-função $\varphi_R : R(X) \to R(Y)$ que comuta o diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "i_X"'] & Y \arrow[d, "i_Y"] \\ R(X) \arrow[r, dotted, "\varphi_R"'] & R(Y). \end{tikzcd}$$

Ainda, se a ação de G em X é global, então i_X é um isomorfismo entre X e $R(X)$.

Ainda é possível melhorar um pouco o resultado apresentado no teorema anterior. Em certo sentido, a globalização $(i, R(X))$ construída é a menor globalização de X que induz a ação original de G em X. Mais precisamente, temos a seguinte proposição.

Proposição 2.36. *No contexto da demonstração do Teorema 2.35, se (j, Z) é uma globalização que induz a ação original de G em X, então a G-função $\tilde{\phi} : R(X) \to Z$ é injetiva.*

Demonstração. Sejam $(g, x), (h, y) \in G \times X$ tais que $\tilde{\phi}([g, x]) = \tilde{\phi}([h, y])$. Pela definição de $\tilde{\phi}$, temos que $g \cdot j(x) = h \cdot j(y)$. Como a ação de G em Z é global, $h^{-1} \cdot (g \cdot j(x))$ está definido e

$$(h^{-1}g) \cdot j(x) = h^{-1} \cdot (g \cdot j(x)) = h^{-1} \cdot (h \cdot j(y)) = j(y).$$

Como j induz a ação original de G em X, segue que $(h^{-1}g) \cdot x = y$. Pela Definição 2.29, segue que $(g, x) \sim (h, y)$. Isto é, $[g, x] = [h, y]$. □

A hipótese de que a globalização (j, z) induz a ação de G em X original é essencial, como podemos ver no exemplo a seguir.

Exemplo 2.37. Seja (X, θ) um G-conjunto tal que θ é a ação supertrivial. Veja que, se $(g, x) \sim (h, y)$ em $G \times X$, então $g = h = e$ e $x = y$. Logo, cada classe de equivalência em $R(X)$ é unitária e podemos identificar $R(X)$ com $G \times X$. Além disso, a ação

$$\phi_R : G \times R(X) \to R(X)$$

nesse caso é dada por $g \cdot (h, x) = (gh, x)$ para quaisquer $g, h \in G$ e $x \in X$.

Veja que, se θ_X é uma ação global qualquer sobre X, então (Id_X, X, θ_X) é uma globalização de (X, θ). Nesse caso, temos que $\tilde{\phi} : G \times X \to X$ é simplesmente θ_X.

Em particular, se $G = \mathbb{Z}_2$, $X = \mathbb{Z}_2$ e θ_X é a ação por translação, como na Observação 2.26, então $\tilde{\phi}$ não é injetiva.

Ainda, o teorema nos permite concluir que qualquer globalização universal de X induz a ação original de G em X.

Proposição 2.38. *Seja G um grupo e (X,θ) um G-conjunto. Se (Y,θ_Y) é um G-conjunto e $\varphi : X \to Y$ é uma G-função tal que (φ, Y) é uma globalização universal de X, então (Y,θ_Y) é isomorfo a $(R(X),\theta_R)$ em $\mathscr{A}_p(G)$ e (φ, Y) induz a ação θ de G em X.*

Demonstração. Como (φ, Y) e $(i, R(X))$ são globalizações universais de X, existem únicas G-funções $\tilde{\phi} : R(X) \to Y$ e $\psi : Y \to R(X)$ tais que o diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "i"'] & Y \arrow[dl, dotted, shift left, "\psi"] \\ R(X) \arrow[ur, dotted, shift left, "\tilde{\phi}"] & \end{tikzcd}$$

comuta. Logo,

$$i = \psi \circ \varphi = \psi \circ (\tilde{\phi} \circ i) = (\psi \circ \tilde{\phi}) \circ i$$

e

$$\varphi = \tilde{\phi} \circ i = \tilde{\phi} \circ (\psi \circ \varphi) = (\tilde{\phi} \circ \psi) \circ \varphi.$$

Novamente pela universalidade de (φ, Y) e $(i, R(X))$, segue que $\psi \circ \tilde{\phi}$ e $\tilde{\phi} \circ \psi$ são os únicos morfismos que comutam os diagramas

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i"'] & R(X) \\ R(X) \arrow[ur, dotted, "\psi\circ\tilde{\phi}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\varphi"'] & Y \\ Y. \arrow[ur, dotted, "\tilde{\phi}\circ\psi"'] & \end{tikzcd}$$

Como $Id_{R(X)}$ e Id_Y são G-funções que comutam esses diagramas, segue que $\psi\circ\tilde{\phi} = Id_{R(X)}$ e $\tilde{\phi} \circ \psi = Id_Y$ e, portanto, $\tilde{\phi}$ é um isomorfismo entre (Y,θ_Y) e $(R(X),\theta_R)$.

Mostraremos agora que (φ, Y) induz a ação original de G em X. Para isso, sejam $x, x' \in X$ e $g \in G$ tais que $g \cdot \varphi(x) = \varphi(x')$. Assim, temos que $g \cdot \tilde{\phi}(i(x)) = \tilde{\phi}(i(x'))$. Como ψ é G-função, $g \cdot \psi(\tilde{\phi}(i(x))) = g \cdot i(x)$ está definido e é igual a $\psi(g \cdot \tilde{\phi}(i(x))$. Logo,

$$g \cdot i(x) = \psi(g \cdot \tilde{\phi}(i(x))) = \psi(\tilde{\phi}(i(x'))) = i(x').$$

Finalmente, como $(i, R(X))$ induz a ação original de G em X, segue que $g\cdot x$ está definido e $g \cdot x = x'$. $\square$

3 Ações parciais de categorias em conjuntos

Neste capítulo desenvolveremos um pouco da teoria de ações parciais de categorias em conjuntos. Nosso objetivo é demonstrar o Teorema 3.29, que nos diz que toda ação parcial de categoria em conjunto admite uma globalização universal.

Ao longo deste capítulo, abordaremos a definição de ação parcial de categoria em conjunto e quando esta ação é global. Além disso, veremos também o conceito de G-funções e globalização universal no contexto em que G é uma categoria. Ademais, temos diversas definições e resultados que nos auxiliarão na demonstração do 3.29, e que estão de certo modo ligados aos resultados já vistos no capítulo 2, uma vez que, um grupo G pode ser visto como uma categoria pequena (exemplo 1.5).

Como mencionado no primeiro capítulo, as categorias que estaremos interessados são as categorias pequenas. Sendo assim, nesse capítulo denotaremos G como sendo uma categoria pequena e X um conjunto.

3.1 Ações parciais

Definição 3.1. Sejam X um conjunto e G uma categoria. Uma ação parcial θ de G em X é uma função parcial $\theta : \mathrm{mor}(G) \times X \to X$, denotada por $\theta(g, x) = g \cdot x$ satisfazendo os seguintes axiomas:

(C1) Para todo $x \in X$, existe um objeto $e \in \mathrm{Ob}(G)$ tal que $e \cdot x$ está definido. Além disso, se $f \in \mathrm{Ob}(G)$ e $x \in X$ são tais que $f \cdot x$ está definido, então $f \cdot x = x$.

(C2) Se $x \in X$ e $g \in \mathrm{mor}(G)$ tal que $g \cdot x$ esteja definido, então $d(g) \cdot x$ está definido.

(C3) Se $(g, h) \in G^2$ e $x \in X$ tal que $h \cdot x$ está definido, então $(gh) \cdot x$ está definido se, e somente se, $g \cdot (h \cdot x)$ está definido e, nesse caso, $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$.

Dizemos que a ação de G em X é *global* se o seguinte axioma for válido.

(C4) Se $g \in \mathrm{mor}(G)$ e $x \in X$ tal que $d(g) \cdot x$ está definido, então $g \cdot x$ está definido.

Novamente, dizemos que o par (X, θ) é um G-conjunto e, por um abuso de linguagem, dizemos apenas que X é um G-conjunto quando não existir chance de confusão.

Pelo Exemplo 1.5, podemos ver todo grupo G como uma categoria pequena e, nesse sentido, as Definições 2.11 e 3.1 são compatíveis, ou seja, as ações parciais de G sobre um conjunto X segundo a Definição 2.11, são precisamente as ações parciais de G

sobre X segundo a Definição 3.1. Logo, a Definição 3.1 é uma generalização da Definição 2.11.

Ainda, temos uma maneira alternativa de descrever uma ação parcial de uma categoria G em um conjunto X através de subconjuntos de X e funções parcialmente definidas. Para isso, suponha que tenhamos um conjunto X equipado com uma ação parcial de G. Dado $g \in G$, definimos os seguintes conjuntos

$$X_g = \{x \in X \mid g \cdot x \text{ está definido}\}$$

e

$${}_gX = \{g \cdot x \mid x \in X_g\}.$$

Definimos a função $\alpha_g : X_g \to {}_gX$ por $\alpha_g(x) = g \cdot x$, para $x \in X_g$, assim temos uma tripla

$$(\{X_g\}_{g\in \mathrm{mor}(G)}, \{{}_gX\}_{g\in \mathrm{mor}(G)}, \{\alpha_g\}_{g\in \mathrm{mor}(G)}) \tag{3.1}$$

consistindo de subconjuntos X_g e ${}_gX$ de X e funções $\alpha_g : X_g \to {}_gX$, para $g \in \mathrm{mor}(G)$.

Proposição 3.2. *Seja θ uma ação parcial de G em X. A tripla*

$$(\{X_g\}_{g\in \mathrm{mor}(G)}, \{{}_gX\}_{g\in \mathrm{mor}(G)}, \{\alpha_g\}_{g\in \mathrm{mor}(G)})$$

dada em (3.1) *satisfaz:*

(C1') $X = \bigcup_{e\in \mathrm{Ob}(G)} X_e$ e $\alpha_e = Id_{X_e}$ para $e \in \mathrm{Ob}(G)$;

(C2') Para qualquer $g \in \mathrm{mor}(G)$, temos que $X_g \subseteq X_{d(g)}$;

(C3') Suponha que $(g,h) \in G^2$. Então, $X_h \cap X_{gh} = \alpha_h^{-1}(X_g \cap {}_hX)$ e $\alpha_g(\alpha_h(x)) = \alpha_{gh}(x)$ para $x \in X_h \cap X_{gh}$.

Se a ação de G em X for global, então vale a seguinte propriedade.

(C4') Se $g \in \mathrm{mor}(G)$, então $X_g = X_{d(g)}$.

Demonstração. Vamos começar mostrando $(C1')$. Dado $x \in X$, por $(C1)$, existe $e \in \mathrm{Ob}(G)$ tal que $e \cdot x$ está definido, ou seja, $x \in X_e$ para algum $e \in \mathrm{Ob}(G)$. Portanto $x \in \bigcup_{e\in \mathrm{Ob}(G)} X_e$, e assim $X = \bigcup_{e\in \mathrm{Ob}(G)} X_e$. Além disso, dado $e \in \mathrm{Ob}(G)$, temos que

$$\alpha_e(x) = e \cdot x = x = Id_{X_e}(x)$$

para todo $x \in X_e$ e, portanto, $\alpha_e = Id_{X_e}$.

Agora mostremos $(C2')$. Sejam $g \in \mathrm{mor}(G)$ e $x \in X_g$. Assim, $g \cdot x$ está definido e, por $(C2)$, $d(g) \cdot x$ está definido, ou seja, $x \in X_{d(g)}$. Portanto, $X_g \subseteq X_{d(g)}$.

Provemos $(C3')$. Sejam $(g,h) \in G^2$ e $x \in X_h$. Como $h \cdot x$ está definido, temos pelo item $(C3)$ que $(gh) \cdot x$ está definido se, e somente se, $g \cdot (h \cdot x)$ está definido. Dessa forma, temos que $x \in X_{gh}$ se, e somente se, $\alpha_h(x) \in X_g$ e, portanto, $x \in X_{gh}$ se, e somente se, $x \in \alpha_h^{-1}(X_g \cap {}_hX)$. Assim, segue que $x \in X_h \cap X_{gh}$ se, e somente se, $x \in \alpha_h^{-1}(X_g \cap {}_hX)$, e para um tal x, vale que $\alpha_g(\alpha_h(x)) = \alpha_{gh}(x)$ por conta de $(C3)$.

Por fim, suponha que a ação de G em X é global, e vamos provar que vale $(C4')$. Seja $g \in \text{mor}(G)$, já sabemos por $(C2')$ que $X_g \subseteq X_{d(g)}$. Seja $x \in X_{d(g)}$, então, $d(g) \cdot x$ está definido, logo, por $(C4)$ temos que $g \cdot x$ está definido e portanto $x \in X_g$, mostrando com isso que $X_g = X_{d(g)}$. □

Proposição 3.3. *Se uma tripla da forma*

$$(\{X_g\}_{g \in \text{mor}(G)}, \{{}_gX\}_{g \in \text{mor}(G)}, \{\alpha_g\}_{g \in \text{mor}(G)})$$

em que, para cada $g \in \text{mor}(G)$, X_g e ${}_gX$ são subconjuntos de X e $\alpha_g : X_g \to {}_gX$ é função, satisfaz as propriedades $(C1'), (C2')$ e $(C3')$ listadas na Proposição 3.2, então a função parcial $\alpha : \text{mor}(G) \times X \to X$ dada por $g \cdot x = \alpha(g,x) = \alpha_g(x)$ para cada $g \in \text{mor}(G)$ e $x \in X_g$, é uma ação parcial da categoria G em X.
Mais ainda, se a propriedade $(C4')$ também se verificar, então essa ação é global.

Demonstração. Mostremos $(C1)$. Seja $x \in X$, como $X = \cup X_e$, para $e \in \text{Ob}(G)$, então $x \in X_e$ para algum $e \in \text{Ob}(G)$, logo, $e \cdot x$ está definido. Além disso, $e \cdot x = \alpha_e(x) = Id_{X_e}(x) = x$, pois $e \in \text{Ob}(G)$.

Mostremos $(C2)$. Sejam $x \in X$ e $g \in \text{mor}(G)$ tais que $g \cdot x$ esteja definido, ou seja, $g \cdot x \in X_g$. Como $g \in \text{mor}(G)$, sabemos por $(C2')$ que $X_g \subseteq X_{d(g)}$, logo, $x \in X_{d(g)}$, e portanto $d(g) \cdot x$ está definido.

Mostremos $(C3)$. Seja $(g,h) \in G^2$ e $x \in X$ tal que $h \cdot x$ esteja definido. Suponha que $(gh) \cdot x$ esteja definido, assim, $x \in X_{gh}$ e, portanto, $x \in X_h \cap X_{gh}$. Dessa forma, por $(C3')$, segue que $\alpha_h(x) \in X_g \cap {}_hX$, isto é, $h \cdot x \in X_g$ e portanto $g \cdot (h \cdot x)$ está definido. Agora, suponha que $g \cdot (h \cdot x)$ está definido, assim, $\alpha_h(x) \in X_g \cap {}_hX$. Por $(C3')$, $x \in X_h \cap X_{gh}$ e, portanto, $(gh) \cdot x$ está definido. Em caso afirmativo, obtemos que $x \in X_h \cap X_{gh}$, e por $(C3')$, $\alpha_g(\alpha_h(x)) = \alpha_{gh}(x)$, e assim, $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$.

Por fim, suponha que $(C4')$ vale. Seja $g \in \text{mor}(G)$ e $x \in X$ tal que $d(g) \cdot x$ está definido. Logo, $x \in X_{d(g)}$ e como $X_g = X_{d(g)}$, segue que $x \in X_g$ e portanto $g \cdot x$ está definido. □

Através das Proposições 3.2 e 3.3, temos duas maneiras de descrever uma ação parcial de uma categoria G em um conjunto X, de modo que, dependendo do contexto que serão descritas as ações, a mudança de notação pode facilitar a escrita e compreensão.

No decorrer deste trabalho, continuaremos utilizando a notação da Definição 3.1 para descrever as ações parciais.

Vejamos a seguir, alguns exemplos de ações parciais.

Exemplo 3.4. Seja G uma categoria tal que $\mathrm{Ob}(G) = \{e, f\}$ e $\mathrm{mor}(G) = \{e, f, g\}$ com $g : e \to f$ e seja $X = \{1, 2, 3, 4\}$ um conjunto. Definimos uma ação parcial de G em X da seguinte forma:

$$\begin{array}{lll} e \cdot 1 = 1, & f \cdot 2 = 2, & g \cdot 2 = 2, \\ \\ e \cdot 2 = 2, & f \cdot 3 = 3, & g \cdot 3 = 2, \\ \\ e \cdot 3 = 3, & f \cdot 4 = 4. & \end{array}$$

Assim, temos

$$X_e = \{1, 2, 3\}, \ X_f = \{2, 3, 4\} \text{ e } X_g = \{2, 3\}.$$

Os axiomas $(C1)$ e $(C2)$ são facilmente verificados. Para o axioma $(C3)$ veja que os pares componíveis são $(e, e), (e, g), (g, f), (f, f)$ de onde facilmente se verifica $(C3)$. Além disso, a ação de G em X não é global, pois $d(g) = e$ e $X_g \neq X_e$.

Repare que, no exemplo acima temos $g \cdot 2 = g \cdot 3$, fenômeno que não era possível no caso de grupos, como visto na Proposição 2.16. Além disso, repare que a categoria desse exemplo pode ser mergulhada em grupoide $\hat{G}$ (simplesmente adicionando a $\mathrm{mor}(G)$ um inverso g^{-1} para g), mas não existe ação de $\hat{G}$ em X tal que as ações de e, f e g sejam dadas como acima. De fato, caso contrario, como $g \cdot 2$ e $g \cdot 3$ estão definidos, $(g^{-1}, g) \in G^2$, $g^{-1}g = e$ e $e \cdot 2$ e $e \cdot 3$ estão definidos, por $(C3)$ deveríamos ter $g^{-1} \cdot (g \cdot 2)$ e $g^{-1} \cdot (g \cdot 3)$ definidos e $2 = e \cdot 2 = g^{-1} \cdot (g \cdot 2) = g^{-1} \cdot (g \cdot 3) = e \cdot 3 = 3$.

Exemplo 3.5. Sejam G uma categoria tal que $\mathrm{Ob}(G) = \{e, f\}$ e $\mathrm{mor}(G) = \{e, f, g\}$, com $g : e \to f$ e $X = \{1, 2, 3\}$ um conjunto. Definimos uma ação parcial de G em X da seguinte forma:

$$\begin{array}{lll} e \cdot 1 = 1 & f \cdot 2 = 2 & g \cdot 2 = 2 \\ \\ e \cdot 2 = 2 & f \cdot 3 = 3. & \end{array}$$

Assim, temos

$$X_e = \{1, 2\}, \ X_f = \{2, 3\} \text{ e } X_g = \{2\}.$$

Assim como no exemplo anterior, os axiomas $(C1), (C2)$ e $(C3)$ são facilmente verificados.

Veremos a seguir que, ao contrário do Exemplo 3.4, agora podemos adicionar uma inversa g^{-1} de g a $\text{mor}(G)$ de modo que seja possível definir uma ação do grupoide resultante em X e as ações de e, f e g sejam dadas como no exemplo anterior.

Exemplo 3.6. Seja G uma categoria tal que $\text{Ob}(G) = \{e, f\}$ e $\text{mor}(G) = \{e, f, g, g^{-1}\}$, com $g : e \to f$ e $g^{-1} : f \to e$ e seja $X = \{1, 2, 3\}$. Definimos uma ação parcial de G em X da seguinte forma:

$$e \cdot 1 = 1 \qquad f \cdot 2 = 2 \qquad g \cdot 2 = 2 \qquad g^{-1} \cdot 2 = 2$$

$$e \cdot 2 = 2 \qquad f \cdot 3 = 3.$$

Assim, temos

$$X_e = \{1, 2\}, \ X_f = \{2, 3\}, \ X_g = \{2\} \text{ e } X_{g^{-1}} = \{2\}.$$

Por último, e não menos importante, um exemplo de ação global.

Exemplo 3.7. Seja G uma categoria tal que $\text{Ob}(G) = \{e, f\}$ e $\text{mor}(G) = \{e, f, g\}$, com $g : e \to f$ e seja $X = \{1, 2, 3\}$. Definimos uma ação global de G em X da seguinte forma:

$$e \cdot 1 = 1 \qquad f \cdot 1 = 1 \qquad g \cdot 1 = 1$$

$$e \cdot 2 = 2 \qquad f \cdot 2 = 2 \qquad g \cdot 2 = 2$$

$$e \cdot 3 = 3 \qquad f \cdot 3 = 3 \qquad g \cdot 3 = 3.$$

Assim, temos

$$X_e = \{1, 2, 3\}, \quad X_f = \{1, 2, 3\} \text{ e } \ X_g = \{1, 2, 3\}.$$

Vamos finalizar essa seção estendendo o conceito de G-função para ações de categorias e, assim como foi feito na Observação 2.23, falar da categoria das ações parciais de uma categoria G.

Definição 3.8. Sejam G uma categoria e X e Y dois G-conjuntos. Dizemos que uma função $\varphi : X \to Y$ é uma *G-função* se para quaisquer $g \in \text{mor}(G)$ e $x \in X$ tais que $g \cdot x$ está definido, então $g \cdot \varphi(x)$ também está definido e $g \cdot \varphi(x) = \varphi(g \cdot x)$.

Exemplo 3.9. Seja G uma categoria e X um G-conjunto. A função Id_X é uma G-função, pois, dado $g \in G$ e $x \in X$ tal que $g \cdot x$ está definido, $g \cdot Id_X(x) = g \cdot x$ também está definido e

$$Id_X(g \cdot x) = g \cdot x = g \cdot Id_X(x).$$

Definição 3.10. Agora que definimos G-funções para categorias, podemos definir as categorias $\mathscr{A}(G)$ e $\mathscr{A}_p(G)$, em que G é uma categoria. Os objetos de ambas categorias são os G-conjuntos e os morfismos são as G-funções.

Observação 3.11. As G-funções injetivas são claramente monomorfismos em $\mathscr{A}_p(G)$. Mas, ao contrário do que acontece no caso de ações parciais de grupos, um monomorfismo em $\mathscr{A}_p(G)$ não é necessariamente uma G-função injetiva.
Por exemplo, considere a categoria G em que $\mathrm{mor}(G) = \mathrm{Ob}(G) = \{e, f\}$ e seja $X = \{0, 1\}$. Seja $\theta : G \times X \to X$ função tal que $\theta(g, x) = x$ para quaisquer $g \in \mathrm{mor}(G)$ e $x \in X$ e seja $\theta_X : G \times X \to X$ função parcial definida em $\{(e, 0), (f, 1)\}$ e tal que $\theta_X(e, 0) = 0$ e $\theta_X(f, 1) = 1$. Então, θ e θ_X são ações de G em X.
Veja que a função $\varphi : X \to X$ tal que $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ é uma G-função entre os G-conjuntos (X, θ_X) e (X, θ) que não é injetiva. Seja (Y, θ_Y) um G-conjunto e sejam $\psi_1, \psi_2 : Y \to X$ G-funções entre (Y, θ_Y) e (Y, θ_X) tais que $\varphi \circ \psi_1 = \varphi \circ \psi_2$. Suponha que exista $y \in Y$ tal que $\psi_1(y) \neq \psi_2(y)$. Podemos assumir sem perda de generalidade que $\psi_1(y) = 0$ e $\psi_2(y) = 1$. Sendo (Y, θ_Y) G-conjunto, devemos ter (e, y) ou (f, y) no domínio de θ_Y.
Se $\theta_Y(e, y)$ estivesse definido, como ψ_1 e ψ_2 são G-funções, teríamos que $\theta_X(e, 0) = \theta_X(e, \psi_1(y))$ e $\theta_X(e, 1) = \theta_X(e, \psi_2(y))$ estariam definidos, o que não é o caso. Similarmente, $\theta_Y(f, y)$ não pode estar definido, contradizendo o axioma $(C1)$, já que não existe um objeto de G agindo em $y \in Y$. Logo, $\psi_1(y) = \psi_2(y)$ para todo $y \in Y$.

Definição 3.12. Seja X um G-conjunto. Dizemos que (φ, Y) é uma extensão de X se Y é um G-conjunto e $\varphi : X \to Y$ é um monomorfismo em $\mathscr{A}_p(G)$. Se além disso a ação de G em Y for global, dizemos que (φ, Y) é uma globalização de X. Se não houver chance de confusão, por um abuso de notação, escreveremos apenas Y ao invés de (φ, Y).

Exemplo 3.13. Considere as ações dadas nos Exemplos 3.5 e 3.7, observe que o conjunto X de ambos exemplos é o mesmo. Note também que a função Id_X que vai de X definido em 3.5 para X definido em 3.7 é uma G-função, assim, a ação dada em 3.7 é uma globalização para o conjunto X dado em 3.5.

3.2 Globalização

Se temos uma ação parcial $\theta : \mathrm{mor}(G) \times Y \to Y$ e $X \subseteq Y$, podemos restringir o domínio de θ aos pares (g, x) em que $x \in X$, $\theta(g, x)$ está definido e $\theta(g, x) \in X$ para obter uma função parcial $\theta|_X : \mathrm{mor}(G) \times X \to X$. É fácil ver que $\theta|_X$ satisfaz os axiomas $(C1), (C2)$ e $(C3)$ da Definição 3.1. Logo, $\theta|_X$ é uma ação parcial de G em X.

Além disso, a inclusão $i : X \hookrightarrow Y$ é uma G-função entre $(Y, \theta|_X)$ e (Y, θ). E, sendo i uma função injetiva, ela é um monomorfismo em $\mathscr{A}_p(G)$, assim (i, Y) é uma extensão de X.

Agora, se a ação original θ de G em Y for global, então $\theta|_X$ será uma ação global de G em X se $X \subseteq Y$ for um subconjunto G-invariante no sentido da seguinte definição.

Definição 3.14. Seja G uma categoria e Y um G-conjunto. Dizemos que um subconjunto $X \subseteq Y$ é G-invariante se $g \cdot x \in X$ para todo $g \in \mathrm{mor}(G)$ e $x \in X$ tais que $g \cdot x$ está definido.

Se $X \subseteq Y$ não for G-invariante, significa que existe $x \in X$ e $g \in \mathrm{mor}(G)$ tal que (g, x) está definido, mas $\theta(g, x) \notin X$. Logo, $\theta|_X(g, x)$ não está definido, mas por $(C1)$ tem-se que $\theta(d(g), x)$ está definido e $\theta(d(g), x) = x \in X$. Logo, $\theta|_X(g, x)$ não está definido e $\theta|_X(d(g), x)$ está definido, de onde segue que $\theta|_X$ não é uma ação global de G em X.

Resumindo, se a ação θ de G em Y original for global, a ação $\theta|_X$ de G em X obtida pela restrição será global se, e somente se, $X \subseteq Y$ for um conjunto G-invariante.

Novamente, restrição e globalização não são noções exatamente opostas. Denotando os G-conjuntos vistos nos Exemplos 3.5 e 3.7 por (X, θ_1) e (X, θ_2) respectivamente, temos que $\theta_1(g, x) = \theta_2(g, x)$ para todo $x \in X$, isto é, θ_2 é uma globalização para X em 3.5, entretanto, a restrição de θ_2 por X resulta na própria ação θ_2, que é diferente de θ_1.

Assim como no caso de ações parciais de grupos, surge então a questão: se temos uma ação parcial de uma categoria G em um conjunto X, será que existe uma ação global de G em um conjunto Y que contenha X e tal que a restrição da ação de G em Y a X seja a ação parcial original?

O objetivo dessa seção é responder afirmativamente essa questão através do Teorema 3.29, que é o principal resultado desse trabalho. Em suma, o Teorema 3.29 diz que toda ação parcial admite uma globalização universal de modo que a ação parcial original pode ser obtida da globalização por restrição.

Comecemos definindo globalização universal.

Definição 3.15. Sejam X e Y G-conjuntos e $\varphi : X \to Y$ uma G-função. Dizemos que (φ, Y) é uma *globalização universal* de X se (φ, Y) é uma globalização de X e φ é uma reflexão de X em $\mathscr{A}(G)$. Isto é, (φ, Y) é uma globalização de X e para qualquer G-conjunto Z em que a ação de G em Z é global e qualquer G-função $\psi : X \to Z$, existe uma única G-função $\sigma : Y \to Z$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] & Y \arrow[dl, dotted] \\ Z & \end{tikzcd}$$

comuta.

O primeiro passo a ser dado é encontrar o conjunto que contenha X.

Definição 3.16. Sejam X um G-conjunto e

$$\overline{X} = \{(g, x) \in \text{mor}(G) \times X \mid d(g) \cdot x \text{ está definido}\}.$$

Definimos uma relação $\sim$ em $\overline{X}$ da seguinte maneira: dados $(g, x), (g', x') \in \overline{X}$, dizemos que $(g, x) \sim (g', x')$ se um dos dois casos ocorrer.

(i) Existe $h \in \text{mor}(G)$ tal que $(g', h) \in G^2$, $h \cdot x$ está definido e valem as igualdades $g = g'h$ e $x' = h \cdot x$.

(ii) $x = x'$, $g, g' \in \text{Ob}(G)$ e $g \cdot x$ e $g' \cdot x'$ estão definidos.

Observação 3.17. Note que, vendo um grupo G como uma categoria e denotando por e o seu elemento neutro temos $d(g) = e$ para todo $g \in G$ e assim, $d(g) \cdot x$ está definido para todo $x \in X$ e todo $g \in G$. Isto é, neste caso, $\overline{X} = G \times X$. Além disso, mostraremos que nesse caso as relações $\sim$ definidas em 2.29 e 3.16 são exatamente as mesmas.

De fato, sejam $(g, x), (g', x') \in G \times X$ tais que $(g, x) \sim (g', x')$ pela Definição 3.16. Logo, existem duas possibilidades para tais elementos estarem relacionados, são elas:

- Se $(g, x) \sim (g', x')$ por 3.16(i), então, existe $h \in G$ tal que $h \cdot x$ está definido, $g = g'h$ e $x' = h \cdot x$. Assim, $g'^{-1}g = h$ e, portanto, $(g'^{-1}g) \cdot x$ está definido e $(g'^{-1}g) \cdot x = x'$. Logo, $(g, x) \sim (g', x')$ pela Definição 2.29.
- Se $(g, x) \sim (g', x')$ por 3.16(ii), então, $x = x'$ e $g = g' = e$. Logo, como $e \cdot x$ está definido e $e \cdot x = x$, segue que $(g'^{-1}g) \cdot x$ está definido e $(g'^{-1}g) \cdot x = x'$. Portanto, $(g, x) \sim (g', x')$ pela Definição 2.29.

Reciprocamente, suponha que $(g, x) \sim (g', x')$ pela definição 2.29. Assim, $(g'^{-1}g) \cdot x$ está definido e $(g'^{-1}g) \cdot x = x'$. Basta tomar $h = g'^{-1}g$, pois assim, $g'h = g$, $h \cdot x$ está definido e $h \cdot x = x'$. Isto é, $(g, x) \sim (g', x')$ pelo item (i) da definição 3.16.

Assim, concluímos que, se G é um grupo visto como uma categoria, então a relação da Definição 2.29 é exatamente a mesma relação da Definição 3.16. Infelizmente, no caso mais geral em que G é uma categoria pequena qualquer, esta relação não é necessariamente uma relação de equivalência. Nesse caso, podemos apenas garantir que a relação é reflexiva.

Proposição 3.18. *A relação $\sim$, como descrita em 3.16, é reflexiva.*

Demonstração. Seja $(g, x) \in \overline{X}$, então, temos que $d(g) \cdot x$ está definido. Como $d(g)$ é um objeto de G, então $d(g) \cdot x = x$, além disso, $(g, d(g)) \in G^2$. Dessa forma, observe que $(g, x) = (gd(g), x)$ se relaciona com $(g, d(g) \cdot x) = (g, x)$, pois pelo item (iv) da Definição 1.1, $(g, d(g)) \in G^2$, $d(g) \cdot x$ está definido e $g = gd(g)$ e $d(g) \cdot x = d(g) \cdot x$. Portanto, a relação $\sim$ é reflexiva. $\square$

Como comentado anteriormente, quando G é uma categoria pequena qualquer, a relação $\sim$ não é necessariamente simétrica e nem transitiva, como mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 3.19. Considerando o Exemplo 3.4, temos que $d(e) = e$, $d(f) = f$ e $d(g) = e$, assim, obtemos o seguinte conjunto

$$\overline{X} = \{(e,1),(e,2),(e,3),(f,2),(f,3),(f,4),(g,1),(g,2),(g,3)\}.$$

Agora, observe que alguns elementos de $\overline{X}$ estão relacionados por $\sim$. Temos que

- $(g,3) \sim (f,2)$, pois $g \in \text{mor}(G)$ tal que $(f,g) \in G^2$, $g \cdot 3$ está definido, $g = fg$, e, como f é um objeto, o mesmo atua como morfismo identidade, logo, $2 = g \cdot 3$, satisfazendo assim o item (i) da Definição 3.16, para $h = g$.
- $(g,2) \sim (f,2)$, pela mesma justificativa anterior, pois $g \in \text{mor}(G)$ tal que $(f,g) \in G^2$, $g \cdot 2$ está definido, $g = fg$ e $2 = g \cdot 2$.
- $(f,2) \sim (e,2)$, pois $f, e \in \text{Ob}(G)$, $x_1 = x_2$ (no caso, $2 = 2$), e $f \cdot 2$ e $e \cdot 2$ estão definidos, satisfazendo assim o item (ii) da definição 3.16.
- $(e,3) \sim (f,3)$, pela mesma justificativa do item anterior.

Note que nesse exemplo a relação $\sim$ não é simétrica. Vejamos que $(f,2) \not\sim (g,3)$. Observe que e é o único morfismo de G tal que $(g,e) \in G^2$, (pois $(g,g) \notin G^2$ e $(g,f) \notin G^2$). Além disso, $e \cdot 2$ está definido, porém, $f \neq ge = g$ e $3 \neq e \cdot 2 = 2$. Portanto, o item (i) da definição 3.16 não é satisfeito. Além disso, o item (ii) não se aplica nesse caso, pois $g \notin \text{Ob}(G)$. Dessa forma $(f,2) \not\sim (g,3)$.

Ainda, nesse exemplo, temos que $(g,3) \sim (f,2)$ e $(f,2) \sim (e,2)$, porém, não é verdade que $(g,3) \sim (e,2)$ pois, e é o único morfismo de G tal que $(e,e) \in G^2$, assim, $e \cdot 3$ está definido, no entanto, $g \neq ee = e$ e $2 \neq e \cdot 3 = 3$. Além disso, $g \notin \text{Ob}(G)$. Dessa forma, nenhum dos itens da definição 3.16 é satisfeito. Portanto, neste caso, a relação $\sim$ não é transitiva.

Observação 3.20. Se G é um grupoide podemos garantir que a relação $\sim$ será simétrica. De fato, suponha que G é um grupoide e $(g,x),(h,y) \in \overline{X}$ são tais que $(g,x) \sim (h,y)$.
Se $(g,x) \sim (g',x')$ pelo item (ii) da Definição 3.16, então é direto que $(h,y) \sim (g,x)$.
Se $(g,x) \sim (h,y)$ pelo item (i), então, existe $p \in \text{mor}(G)$ tal que $(h,p) \in G^2$, $p \cdot x$ está definido e $p \cdot x = y$ e $g = hp$. Disto temos que $(g,p^{-1}) \in G^2$, pois $c(p^{-1}) = d(p) = d(g)$, e temos também que $p^{-1} \cdot y$ está definido e $p^{-1} \cdot y = x$, pois além de $p \cdot x$ estar definido, temos que $(p^{-1}p) \cdot x$ está definido, já que $p^{-1}p = d(p) = d(g)$ e $(g,x) \in \overline{X}$. Logo, pelo axioma $(C3)$, $p^{-1} \cdot (p \cdot x)$ está definido e $p^{-1} \cdot (p \cdot x) = x$. Por fim, $gp^{-1} = (hp)p^{-1} = h$. Portanto, $(h,y) \sim (g,x)$ pelo item (i) da definição 3.16.

Reciprocamente, se G é uma categoria tal que, para qualquer G-conjunto X, a relação $\sim$ é simétrica (além de reflexiva), obtemos que a categoria G é um grupoide. De fato, seja $g \in G$ e vamos mostrar que g é um isomorfismo.

Note que, se g é um objeto de G, temos automaticamente que g é um isomorfismo. Consideremos então o caso em que g não é um objeto.
Seja X um G-conjunto para o qual exista $x \in X$ tal que $g \cdot x$ esteja definido. Nesse caso, temos que $(g, x) \sim (c(g), g \cdot x)$ pois, $(c(g), g) \in G^2$, $g \cdot x$ está definido, $g = c(g)g$ e $g \cdot x = g \cdot x$.
Como $\sim$ é simétrica, $(c(g), g \cdot x) \sim (g, x)$. Logo, existe $h \in \text{mor}(G)$ tal que $(g, h) \in G^2$, $h \cdot (g \cdot x)$ está definido, $h \cdot (g \cdot x) = x$ e $c(g) = gh$. Dessa forma, $(h, g \cdot x) \sim (d(g), x)$ pois, $(d(g), h) \in G^2$, $h \cdot (g \cdot x)$ está definido e $h \cdot (g \cdot x) = x$ e $h = d(g)h$.
Novamente, usando a simetria temos que $(d(g), x) \sim (h, g \cdot x)$. Assim, existe $p \in \text{mor}(G)$ tal que $(h, p) \in G^2$, $p \cdot x$ está definido e $p \cdot x = g \cdot x$ e $d(g) = hp$. Como $d(g) = hp$ e $c(g) = gh$, temos que

$$g = gd(g) = g(hp) = (gh)p = c(g)p = p.$$

Logo, $d(g) = hg$ e $c(g) = gh$ e com isso, concluímos que g é isomorfismo. Da arbitrariedade de g segue que G é grupoide.

No entanto, mesmo G sendo um grupoide, não podemos garantir a transitividade de $\sim$ como podemos ver no exemplo a seguir.

Exemplo 3.21. Considere a ação parcial dada no Exemplo 3.6. Temos que $d(e) = e$, $d(f) = f$, $d(g) = e$ e $d(g^{-1}) = f$, assim, obtemos o seguinte conjunto

$$\overline{X} = \{(e, 1), (e, 2), (f, 2), (f, 3), (g, 1), (g, 2), (g^{-1}, 2), (g^{-1}, 3)\}.$$

de forma que os elementos relacionados por $\sim$ são:

- $(e, 2) \sim (f, 2)$, pois $x_1 = x_2$, $e, f \in \text{Ob}(G)$ e $e \cdot 2$ e $f \cdot 2$ estão definidos, satisfazendo assim o item (ii) da definição 3.16.
- $(f, 2) \sim (e, 2)$ pelo mesmo motivo que acima.
- $(e, 2) \sim (g^{-1}, 2)$, pois $g \in \text{mor}(G)$ tal que $(g^{-1}, g) \in G^2$, $g \cdot 2$ está definido, $e = g^{-1}g = e$ e $2 = g \cdot 2 = 2$, satisfazendo assim o item (i) da definição 3.16.
- $(g^{-1}, 2) \sim (e, 2)$, pois $g^{-1} \in \text{mor}(G)$ tal que $(e, g^{-1}) \in G^2$, $g^{-1} \cdot 2$ está definido e $g^{-1} = eg^{-1}$ e $2 = g^{-1} \cdot 2$.
- $(g, 2) \sim (f, 2)$, pois como $(g, e), (g, g^{-1}) \in G^2$ e $(e, 2) \sim (g^{-1}, 2)$, pela proposição 3.24 temos que $(ge, 2) \sim (gg^{-1}, 2)$, que é o mesmo que $(g, 2) \sim (f, 2)$.

- $(f,2) \sim (g,2)$, pois $g^{-1} \in \text{mor}(G)$ tal que $(g, g^{-1)} \in G^2$, $g^{-1} \cdot 2$ está definido e $f = gg^{-1}$ e $2 = g^{-1} \cdot 2$.

Dessa forma, podemos ver claramente a simetria de $\sim$ neste exemplo em que G é um grupoide. Observe que $(e,2) \sim (f,2)$ e $(f,2) \sim (g,2)$, porém, não é verdade que $(e,2) \sim (g,2)$, pois

- $e \in \text{mor}(G)$ tal que $(g,e) \in G^2$, $e \cdot 2$ está definido, mas $e \neq ge = g$. Além disso,
- $g^{-1} \in \text{mor}(G)$ tal que $(g, g^{-1}) \in G^2$, $g^{-1} \cdot 2$ está definido, mas $e \neq gg^{-1} = f$.

Assim, o item (i) da definição 3.16 não é satisfeito. Ainda, o item (ii) não se aplica nesse caso, visto que $g \notin \text{Ob}(G)$. Portanto $(e,2) \nsim (g,2)$ e assim, não temos a transitividade de $\sim$.

Em 2.29, definimos uma relação $\sim$ sobre $G \times X$ e mostramos em 2.30 que tal relação é de equivalência. De maneira similar, definimos em 3.16 uma relação reflexiva $\sim$ sobre o conjunto $\overline{X}$, porém, é de nosso interesse obter uma relação de equivalência.

Observação 3.22. Relação de equivalência gerada por uma relação reflexiva] Se R for uma relação reflexiva sobre um conjunto A, então podemos considerar a relação de equivalência gerada por R. A relação de equivalência em questão é igual ao conjunto dos pares $(a,b) \in A \times A$ com a propriedade de que existe um número inteiro $n \geq 2$ e $a_1, ..., a_n \in A$ tais que $a_1 = a$, $a_n = b$, e para cada $i \in \{1, ..., n-1\}$, tem-se que $(a_i, a_{i+1}) \in R$ ou que $(a_{i+1}, a_i) \in R$.

A ideia aqui é que podemos formar uma cadeia de elementos de A relacionados por R, de forma que o primeiro e o último estarão então relacionados pela nova relação.

Defina S como o conjunto de todos os pares $(a,b) \in A \times A$ para os quais existem $n \geq 2$ e $a_1, ..., a_n \in A$ tais que $a_1 = a$, $a_n = b$ e $(a_i, a_{i+1}) \in R$ ou $(a_{i+1}, a_i) \in R$ para cada $i \in \{1, ..., n-1\}$. Afirmamos assim que S é a menor relação de equivalência sobre A que contém R. Mostremos primeiramente que S é de fato uma relação de equivalência.

- Reflexividade: Seja $a \in A$. Como R é reflexiva, $(a,a) \in R$. Assim, para $n = 2$, $a_1 = a$ e $a_2 = a$, temos $(a_1, a_2) = (a,a) \in R$. Logo, $(a,a) \in S$.
- Simetria: Suponha que $(a,b) \in S$. Como $(a,b) \in S$, existem $n \geq 2$ e $a_1, ..., a_n \in A$ tais que $a_1 = a$, $a_n = b$ e $(a_i, a_{i+1}) \in R$ ou $(a_{i+1}, a_i) \in R$ para cada $i \in \{1, ..., n-1\}$. Seja $b_i = a_{n-i+1}$. Assim, $b_1 = a_n = b$, $b_n = a_1 = a$ e $(b_i, b_{i+1}) = (a_{n-i+1}, a_{n-i}) \in R$ ou $(b_{i+1}, b_i) = (a_{n-i}, a_{n-i+1}) \in R$. Logo, $(b,a) \in S$.
- Transitividade: Sejam $(a,b), (b,c) \in S$.
  Assim, existem $n, m \geq 2$ e $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_m \in A$ tais que $a_1 = a$, $a_n = b = b_1$,

$b_m = c$, $(a_i, a_{i+1}) \in R$ ou $(a_{i+1}, a_i) \in R$ para cada $i \in \{1, ..., n-1\}$ e $(b_i, b_{i+1}) \in R$ ou $(b_{i+1}, b_i) \in R$ para cada $i \in \{1, ..., m-1\}$. Sejam $k = n + m$ e, para cada $i \in \{1, ..., k\}$,

$$c_i = \begin{cases} a_i \text{ se } i \leq n \\ b_{i-n} \text{ se } i > n. \end{cases}$$

Note que, $c_1 = a_1 = a$, $c_k = b_{k-n} = b_m = c$, e assim temos que

– $(c_i, c_{i+1}) = (a_i, a_{i+1}) \in R$ ou $(c_{i+1}, c_i) = (a_{i+1}, a_i)$ se $i \in \{1, ..., n-1\}$;

– $(c_i, c_{i+1}) = (a_n, b_1) = (b, b) \in R$ se $i = n$;

– $(c_i, c_{i+1}) = (b_{i-n}, b_{i+1-n}) \in R$ ou $(c_{i+1}, c_i) = (b_{i-n}, b_{i+1-n}) \in R$ se $i \in \{n+1, ..., k-1\}$.

Logo, $(a, c) \in S$.

Portanto, S é uma relação de equivalência.

Mostraremos agora que $R \subseteq S$ e, em seguida que S é a menor relação de equivalência que contém R. Suponha que $(a, b) \in R$. Sejam $n = 2$, $a_1 = a$ e $a_2 = b$, assim, temos que $(a_1, a_2) = (a, b) \in R$, logo, $(a, b) \in S$. Agora suponha que T seja uma relação de equivalência que contenha R e seja $(a, b) \in S$. Assim, existem $n \geq 2$ e $a_1, ..., a_n \in A$ tais que $a_1 = a$, $a_n = b$ e $(a_i, a_{i+1}) \in R$ ou $(a_{i+1}, a_i) \in R$ para cada $i \in \{1, ..., n-1\}$. Como $R \subseteq T$ e T é relação de equivalência, por simetria, $(a_i, a_{i+1}) \in T$ para cada $i \in \{1, ..., n-1\}$ e, por transitividade, $(a_1, a_n) \in T$, isto é, $(a, b) \in T$.

Assim, temos a relação de equivalência que queríamos inicialmente e, finalmente podemos obter um análogo da Definição 2.31 para o caso em que G é uma categoria pequena.

Definição 3.23. Sejam X um G-conjunto, $\overline{X}$ e $\sim$ como definido em 3.16 e $\simeq$ a relação de equivalência gerada por $\sim$ em X, conforme a Observação 3.22. Denotamos por $R(X)$ o quociente de $\overline{X}$ pela relação de equivalência $\simeq$. Denotaremos por $[g, x]$ a classe de equivalência de cada $(g, x) \in \overline{X}$.

Ainda, quando temos elementos de $\overline{X}$ que estão relacionados, se houver morfismos de G que possamos compor com os morfismos em questão (respectivo aos elementos de $\overline{X}$ que estão relacionados), então obtemos novos elementos relacionados. Mais especificamente, temos:

Proposição 3.24. *Se $(g, x), (g', x') \in \overline{X}$ satisfazem $(g, x) \sim (g', x')$, então para todo $p \in \mathrm{mor}(G)$ tal que $(p, g), (p, g') \in G^2$, temos que $(pg, x) \sim (pg', x')$.*

Demonstração. Inicialmente, cabe ressaltar que $d(pg) = d(g)$ e $d(pg') = d(g')$ e, portanto, (pg, x) e (pg', x') são elementos de $\overline{X}$. Agora, separaremos a demonstração em dois casos.

O primeiro caso é quando $(g,x) \sim (g',x')$ pelo item (i) da Definição 3.16, e o segundo caso, quando $(g,x) \sim (g',x')$ pelo item (ii) da Definição 3.16.

Para o caso (i), como $(g,x) \sim (g',x')$, então existe $h \in \text{mor}(G)$, tal que $(g',h) \in G^2$, $g \cdot x$ está definido, $g = g'h$ e $x' = h \cdot x$. Seja $p \in \text{mor}(G)$ tal que $(p,g) \in G^2$ e $(p,g') \in G^2$, assim, compondo p à esquerda de $g = g'h$ obtemos $pg = pg'h$, assim o morfismo h continua satisfazendo os requisitos de 3.16(i) para os pares (pg,x) e (pg',x') e, temos que $(pg,x) \sim (pg',x')$.

Agora faremos o caso (ii). Como $(g,x) \sim (g',x')$, então $x = x'$ e $g, g' \in \text{Ob}(G)$, $g \cdot x$ e $g' \cdot x'$ estão definidos. Seja $p \in \text{mor}(G)$ tal que $(p,g),(p,g') \in G^2$, observe que como $g, g' \in \text{Ob}(G)$, $g = d(p) = g'$, logo, $(pg,x) = (p,x) = (pg',x)$, assim, pela proposição 3.18 obtemos que $(pg,x) \sim (pg',x)$. $\square$

Proposição 3.25. *Suponha que* $(g,x),(g',x') \in \overline{X}$. *Se* $[g,x] = [g',x']$, *então* $g \cdot x$ *está definido se, e somente se,* $g' \cdot x'$ *está definida. Nesse caso,* $g \cdot x = g' \cdot x'$.

Demonstração. Sejam $(g,x),(g',x') \in \overline{X}$ tais que $[g,x] = [g',x']$. Pela definição de relação de equivalência gerada, sabemos que existem $n \geq 2$ e $(g_1,x_1),...,(g_n,x_n) \in \overline{X}$ tais que $(g_1,x_1) = (g,x)$, $(g_n,x_n) = (g',x')$ e para cada $i \in \{1,...,n-1\}$ uma das seguintes situações ocorrem, $(g_i,x_i) \sim (g_{i+1},x_{i+1})$ ou $(g_{i+1},x_{i+1}) \sim (g_i,x_i)$. Vamos provar por indução em n que $g \cdot x$ está definido se, e somente se, $g' \cdot x'$ está definido, e que nesse caso $g \cdot x = g' \cdot x'$.

Suponha que $n = 2$. Então temos que $(g,x) \sim (g',x')$ ou $(g',x') \sim (g,x)$. Como os casos são análogos, vamos considerar sem perda de generalidade que $(g,x) \sim (g',x')$. Então, pela Definição 3.16 temos duas possibilidades.

Caso (i): existe $h \in \text{mor}(G)$ tal que $(g',h) \in G^2$, $h \cdot x$ está definido, $g = g'h$ e $x' = h \cdot x$. Disto, segue do Axioma $(C3)$ da Definição 3.1 que $g \cdot x = (g'h) \cdot x$ está definido se, e somente se, $g' \cdot (h \cdot x) = g' \cdot x'$ está definido, e nesse caso $g \cdot x = (g'h) \cdot x = g' \cdot (h \cdot x) = g' \cdot x'$.

Caso (ii): temos que $x = x'$, $g, g' \in \text{Ob}(G)$ e $g \cdot x$ e $g' \cdot x'$ estão definidos. Disto, segue do axioma 3.1$(C1)$ que $g \cdot x = x = x' = g' \cdot x'$.

Agora suponhamos que $n > 2$ e que $g \cdot x$ está definido se, e somente se, $g' \cdot x'$ está definido para todo $m < n$. Por hipótese de indução, temos que $g \cdot x$ está definido se, e somente se, $g_{n-1} \cdot x_{n-1}$ está definido e nesse caso, $g \cdot x = g_{n-1} \cdot x_{n-1}$. Pelo caso $n = 2$, temos que $g_{n-1} \cdot x_{n-1}$ está definido se, e somente se, $g' \cdot x'$ está definido e nesse caso, $g_{n-1} \cdot x_{n-1} = g' \cdot x'$. Assim, segue que $g \cdot x$ está definido se, e somente se, $g_{n-1} \cdot x_{n-1}$ está definido, que por sua vez está definido se, e somente se $g' \cdot x'$ está definido e, nesse caso, $g \cdot x = g_{n-1} \cdot x_{n-1} = g' \cdot x'$. $\square$

De maneira similar ao que foi visto para grupos em 2.32, temos agora uma ação da categoria G no quociente $R(X) = \overline{X}/_{\simeq}$, e esta ação é global.

Definição 3.26. Definimos uma função parcial $\theta_R : G \times R(X) \to R(X)$ da seguinte maneira. Dados $g \in \text{mor}(G)$ e $(h, x) \in \overline{X}$, tem-se que $(g, [h, x])$ está no domínio de θ_R se, e somente se, existe $(h', x') \in \overline{X}$ tal que $(h, x) \simeq (h', x')$ e $(g, h') \in G^2$. Nesse caso, $g \cdot [h, x] = \theta_R(g, [h, x]) = [gh', x']$.

Proposição 3.27. *A função parcial da Definição 3.26 está bem definida e é uma ação global da categoria G em $R(X)$.*

Demonstração. Vamos mostrar inicialmente que a função parcial $\theta_R : G \times R(X) \to R(X)$ está bem definida. Sejam $g, h, h' \in \text{mor}(G)$ e $x, x' \in X$ tais que $(h, x), (h', x') \in \overline{X}$, $(g, h), (g, h') \in G^2$ e $[h, x] = [h', x']$. Queremos mostrar que $[gh, x] = [gh', x']$.

Primeiramente observe que, se $h' \in \text{Ob}(G)$, então $h' = d(g) = c(h)$ e como $(h', x') \in \overline{X}$, segue que $d(h') \cdot x' = x'$ está definido e, portanto, temos que $h' \cdot x'$ está definido. Dessa forma, pela proposição 3.25, segue que $h \cdot x$ está definido e é igual a x', logo, do item (i) da definição 3.16, temos que $(h, x) \sim (c(h), h \cdot x) = (h', x')$. Assim, pela proposição 3.24, segue que $(gh, x) \sim (gh', x')$ e, portanto, $[gh, x] = [gh', x']$.

Como $[h, x] = [h', x']$, então existe $n \geq 2$ e $(h_1, x_1), ..., (h_n, x_n) \in \overline{X}$ tais que $(h_1, x_1) = (h, x)$, $(h_n, x_n) = (h', x')$ e para cada $i \in \{1, ..., n-1\}$ uma das seguintes situações ocorrem, $(h_i, x_i) \sim (h_{i+1}, x_{i+1})$ ou $(h_{i+1}, x_{i+1}) \sim (h_i, x_i)$

Agora mostraremos que $[gh, x] = [gh', x']$ por indução sobre n. Considere o caso em que $n = 2$. Então, de $[h, x] = [h', x']$, temos que $(h, x) \sim (h', x')$ ou $(h', x') \sim (h, x)$. Utilizando a proposição 3.24, obtemos que $(gh, x) \sim (gh', x)$ ou $(gh', x) \sim (gh, x)$ e portanto $[gh, x] = [gh', x']$.

Considere o caso em que $n > 2$ e suponha que o resultado é valido para $m < n$. Além disso, suponha que $h, h' \notin \text{Ob}(G)$, pois quando $h' \in \text{Ob}(G)$ ou $h \in \text{Ob}(G)$, já verificamos que $[gh, x] = [gh', x']$. Assim, podem ocorrer duas situações, são elas $(h_n, x_n) \sim (h_{n-1}, x_{n-1})$ ou $(h_{n-1}, x_{n-1}) \sim (h_n, x_n)$. Na primeira situação, pelo item (i) da definição 3.16 temos que existe $h \in \text{mor}(G)$ tal que $h_n = h_{n-1}h$, e na segunda situação, novamente pelo item (i) da definição 3.16, temos que existe $h \in \text{mor}(G)$ tal que $h_{n-1} = h_n h$. Em qualquer caso, temos que $c(h_{n-1}) = c(h_n) = c(h') = d(g)$. Assim, pela hipótese de indução, obtemos que $[gh, x] = [gh_{n-1}, x_{n-1}]$ e disso voltamos para o caso $n = 2$, ou seja, $[gh_{n-1}, x_{n-1}] = [gh', x']$ e, portanto, $[gh, x] = [gh', x']$.

Agora que mostramos que a ação está bem definida, mostraremos que valem os axiomas $(C1), (C2), (C3)$ e $(C4)$ da Definição 3.1.

Mostremos (C1). Seja $[h, x] \in R(X)$. Dessa forma temos que $(h, x) \simeq (h, x)$ e $(c(h), h) \in G^2$, lembrando que $c(h)$ é um objeto de G, assim $c(h) \cdot [h, x]$ está definido. Além disso, se $f \in \text{Ob}(G)$ e $[h, x] \in R(X)$ tal que $f \cdot [h, x]$ esteja definido, então existe

$(h', x') \in \overline{X}$ tal que $[h', x'] = [h, x]$ e $(f, h') \in G^2$. Logo, $f \cdot [h, x] = [fh', x'] = [h', x'] = [h, x]$.

Mostremos $(C2)$. Sejam $[h, x] \in R(X)$ e $g \in \mathrm{mor}(G)$ tal que $g \cdot [h, x]$ está definido, assim, existe $(h', x') \in \overline{X}$ tal que $(h, x) \simeq (h', x')$ e $(g, h') \in G^2$. Como $(g, h') \in G^2$, $c(h') = d(g)$, logo $(d(g), h') \in G^2$ e portanto $d(g) \cdot [h, x]$ está definido.

Mostremos $(C3)$. Sejam $(g, h) \in G^2$ e $[k, x] \in R(X)$ tais que $h \cdot [k, x]$ esteja definido. Suponha que $(gh) \cdot [k, x]$ está definido, assim, existe $(k', x') \in \overline{X}$ tal que $(k, x) \simeq (k', x')$ e $(gh, k') \in G^2$. Assim, $(h, k') \in G^2$ e, portanto, $h \cdot [k, x] = [hk', x']$. E como $(g, hk') \in G^2$, segue que $g \cdot [hk', x] = g \cdot (h \cdot [k, x])$ está definido e nesse caso

$$g \cdot (h \cdot [k, x]) = g \cdot [hk', x'] = [ghk', x'] = (gh) \cdot [k, x].$$

Suponha agora que $g \cdot (h \cdot [k, x])$ está definido. Como $h \cdot [k, x]$ está definido, existe $(k', x') \in \overline{X}$ tal que $(k, x) \simeq (k', x')$ e $(h, k') \in G^2$. Mas, como $(g, h) \in G^2$, temos que $(gh, k') \in G^2$, portanto $(gh) \cdot [k, x]$ está definido e nesse caso

$$(gh) \cdot [k, x] = [ghk', x'] = g \cdot [hk', x'] = g \cdot (h \cdot [k, x]).$$

Logo, $(gh) \cdot [k, x]$ está definido se, e somente se, $g \cdot (h \cdot [k, x])$ está definido e, nesse caso $(gh) \cdot [k, x] = g \cdot (h \cdot [k, x])$.

Mostremos $(C4)$. Seja $g \in \mathrm{mor}(G)$ e $[h, x] \in R(X)$ tal que $d(g) \cdot [h, x]$ está definido. Assim, existe $(h', x') \in \overline{X}$ tal que $(h, x) \simeq (h', x')$ e $(d(g), h') \in G^2$. Como $(d(g), h') \in G^2$, temos $c(h') = d(g)$ e, portanto, $(g, h') \in G^2$, logo, $g \cdot [h, x]$ está definido. □

Agora que mostramos que θ_R é uma ação global de G em $R(X)$, temos as ferramentas necessárias para demonstração do principal resultado deste capítulo. Apenas apresentaremos primeiro uma definição e na sequência enunciaremos o teorema.

Definição 3.28. Sejam G uma categoria e (X, θ_X) e (Y, θ_Y) G-conjuntos. Dizemos que uma globalização (φ, Y) de X induz a ação θ_X de G em X se $\varphi : X \to \varphi(X)$ é um isomorfismo entre (X, θ_X) e $(\varphi(X), \theta_Y|_{\varphi(X)})$ em $\mathscr{A}_p(G)$.

Teorema 3.29. *Seja G uma categoria. Para qualquer G-conjunto (X, θ) existem um G-conjunto $(R(X), \theta_R)$ e uma G-função $i : X \to R(X)$ tal que o par $(i, R(X))$ é uma globalização universal de (X, θ) que induz a ação original de G em X.*

Demonstração. Sejam $R(X)$ como Definido em 3.23 e $\theta_R : G \times R(X) \to R(X)$ como definido em 3.26. Pela Proposição 3.27, $(R(X), \theta_R)$ é um G-conjunto tal que a ação θ_R de G em $R(X)$ é global.

Definimos então uma função $i : X \to R(X)$ da seguinte maneira. Dado $x \in X$, temos por 3.1($C1$) que existe $e \in \mathrm{Ob}(G)$ tal que $e \cdot x$ está definido. Assim, defina

$$\begin{array}{rccc} i: & X & \to & R(X) \\ & x & \mapsto & [e, x]. \end{array}$$

Vamos mostrar inicialmente que a função i está bem definida. Suponha que $e_1, e_2 \in \mathrm{Ob}(G)$ tais que $e_1 \cdot x$ e $e_2 \cdot x$ estejam definidos, então, pelo item (ii) da Definição 3.16, segue que $(e_1, x) \sim (e_2, x)$ e portanto $[e_1, x] = [e_2, x]$.

Agora mostraremos que a função i é uma G-função. Sejam $x \in X$ e $g \in \mathrm{mor}(G)$ tais que $g \cdot x$ esteja definido, vamos mostrar primeiramente que $g \cdot i(x)$ está definido. Como $g \cdot x$ está definido, por 3.1($C2$) temos que $d(g) \cdot x$ está definido, além disso $(g, d(g)) \in G^2$, portanto, $g \cdot [d(g), x]$ está definido, e assim $g \cdot i(x)$ está definido.

Além disso, como $g \cdot x$ está definido e $(c(g), g) \in G^2$, segue de 3.1($C3$) que $c(g) \cdot (g \cdot x)$ está definido e $c(g) \cdot (g \cdot x) = (c(g)g) \cdot x = g \cdot x$, portanto $i(g \cdot x) = [c(g), g \cdot x]$. Dessa forma, pelo item (i) da Definição 3.16, temos que $(g, x) \sim (c(g), g \cdot x)$ e, portanto, $i(g \cdot x) = [c(g), g \cdot x] = [g, x] = g \cdot [d(g), x] = g \cdot i(x)$.

Mostremos que a função $i : X \to R(X)$ é injetiva. Sejam $x, x' \in X$ e $e, e' \in \mathrm{Ob}(G)$ tais que $e \cdot x$ e $e' \cdot x'$ estejam definidos e suponha que $i(x) = i(x')$, ou seja, que $[e, x] = [e', x']$. Como $[e, x] = [e', x']$ e $e \cdot x$ e $e' \cdot x'$ estão definidos, segue da proposição 3.25 que $e \cdot x = e' \cdot x'$, daí temos que $x = e \cdot x = e' \cdot x' = x'$, portanto a função i é injetiva. Dessa forma, $(i, R(X))$ é, em particular, uma globalização de X. Mostremos que esta globalização é universal. Suponha que (Z, θ_Z) é um G-conjunto em que a ação θ_Z de G em Z é global e seja $j : X \to Z$ uma G-função. Começamos então definido uma função

$$\begin{array}{rccc} \phi: & \overline{X} & \to & Z \\ & (g, x) & \mapsto & g \cdot j(x). \end{array}$$

para todo $(g, x) \in \overline{X}$.

Vejamos que ϕ está bem definida, isto é, vejamos que $g \cdot j(x)$ está definido para qualquer $(g, x) \in \overline{X}$. De fato, como $(g, x) \in \overline{X}$, temos que $d(g) \cdot x$ está definido e como j é G-função, $d(g) \cdot j(x)$ está definido. Além disso, como a ação de θ_Z de G em Z é global, o axioma 3.1($C4$) se verifica e, portanto, $g \cdot j(x)$ está definido.

Vamos mostrar agora que ϕ se fatora através do quociente $R(X)$.
Sejam $(g, x), (g', x') \in \overline{X}$ tais que $[g, x] = [g', x']$, assim, sabemos que existem $n \geq 2$ e $(g_1, x_1), ..., (g_n, x_n) \in \overline{X}$ tais que $(g_1, x_1) = (g, x)$, $(g_n, x_n) = (g', x')$ e para cada $i \in \{1, ..., n-1\}$ uma das seguintes situações ocorrem, $(g_i, x_i) \sim (g_{i+1}, x_{i+1})$ ou $(g_{i+1}, x_{i+1}) \sim (g_i, x_i)$. Provaremos que $\phi(g, x) = \phi(g', x')$ por indução sobre n.

Caso $n = 2$. Nesse caso, temos que $(g, x) \sim (g', x')$ ou $(g', x') \sim (g, x)$. Como os casos são análogos, suponha sem perda de generalidade que $(g, x) \sim (g', x')$. Temos agora

dois subcasos. Comecemos pelo caso (i) da definição 3.16.
Subcaso (i): existe $h \in \mathrm{mor}(G)$ tal que $(g', h) \in G^2$, $h \cdot x$ está definido, $g = g'h$ e $x' = h \cdot x$. Como j é G-função, $h \cdot j(x)$ está definido e é igual a $j(h \cdot x)$. Disto, segue de 3.1($C3$) que

$$\phi(g, x) = g \cdot j(x) = (g'h) \cdot j(x) = g' \cdot (h \cdot j(x)) = g' \cdot j(h \cdot x) = g' \cdot j(x') = \phi(g', x').$$

Subcaso (ii): temos que $x = x'$, $g, g' \in \mathrm{Ob}(G)$ e $g \cdot x$ e $g' \cdot x'$ estão definidos. Então, por 3.1($C1$), segue que $g \cdot x = x = x' = g' \cdot x'$, portanto,

$$\phi(g, x) = g \cdot j(x) = j(g \cdot x) = j(x) = j(x') = j(g' \cdot x') = g' \cdot j(x') = \phi(g', x').$$

Agora considere o caso em que $n > 2$ e suponha que o resultado vale para $m < n$. Então, por hipótese de indução e pelo caso $n = 2$, temos que

$$\phi(g, x) = \phi(g_{n-1}, x_{n-1}) = \phi(g', x').$$

Por consequência, temos que a função ϕ se fatora através do quociente $R(X)$ a uma função $\tilde{\phi} : R(X) \to Z$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} \overline{X} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d] & Z \\ R(X) \arrow[ur, dotted, "\tilde{\phi}"'] & \end{tikzcd}$$

comuta, isto é, tal que $\tilde{\phi}([g, x]) = \phi(g, x) = g \cdot j(x)$ para todo $(g, x) \in \overline{X}$.

Vamos mostrar que a função $\tilde{\phi}$ é G-função. Seja $(h, x) \in \overline{X}$ e $g \in \mathrm{mor}(G)$ tais que $(g, h) \in G^2$. Temos que $h \cdot j(x)$ está definido, logo, por ($C3$), segue que

$$\tilde{\phi}(g \cdot [h, x]) = \tilde{\phi}([gh, x]) = (gh) \cdot j(x) = g \cdot (h \cdot j(x)) = g \cdot (\tilde{\phi}([h, x])) = g \cdot \tilde{\phi}([h, x]).$$

Além disso, o diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "j"] \arrow[d, "i"'] & Z \\ R(X) \arrow[ur, dotted, "\tilde{\phi}"'] & \end{tikzcd}$$

comuta. De fato, dado $x \in X$, seja $e \in \mathrm{Ob}(G)$ tal que $e \cdot x$ esteja definido, ou seja, $e \cdot x = x$. Então, como j é G-função, e sabendo que $i(x) = [e, x]$, temos que

$$(\tilde{\phi} \circ i)(x) = \tilde{\phi}(i(x)) = \tilde{\phi}([e, x]) = e \cdot j(x) = j(e \cdot x) = j(x).$$

Vamos mostrar que a função $\tilde{\phi}$ é única. Suponha que exista outra G-função $\phi' : R(X) \to Z$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "j"] \arrow[d, "i"'] & Z \\ R(X) \arrow[ur, "\phi'"'] & \end{tikzcd}$$

comuta. Assim, dado $(g,x) \in \overline{X}$, temos que

$$\phi'([g,x]) = \phi'(g \cdot [d(g),x]) = g \cdot \phi'([d(g),x]) = g \cdot (\phi' \circ i)(x) = g \cdot j(x) = \tilde{\phi}([g,x]),$$

para todo $(g,x) \in \overline{X}$, o que garante a unicidade de $\tilde{\phi}$.

Para finalizar, vamos mostrar que a ação global de G sobre $i(X)$ induz a ação parcial de G sobre X, isto é, vamos mostrar que a co-restrição $i : X \to i(X)$ é um isomorfismo entre (X,θ) e $(i(X), \theta_R|_{i(X)})$. Agora, tome $y,z \in X$ e $g \in \text{mor}(G)$ tais que $g \cdot i(y)$ esteja definido e $g \cdot i(y) = i(z)$. Vamos mostrar que $g \cdot y$ está definido e é igual a z. Sejam $p,q \in \text{Ob}(G)$ tais que $p \cdot y$ e $q \cdot z$ estão definidos. Como $g \cdot i(y)$ está definido, existem $y' \in X$ e $h \in \text{mor}(G)$ tais que $(g,h) \in G^2$, $d(h) \cdot y'$ está definido e $i(y) = [p,y] = [h,y']$. Disto segue que $[gh,y'] = g \cdot [h,y'] = g \cdot [p,y] = g \cdot i(y) = i(z) = [q,z]$.

Observe que $q \cdot z$ está definido, logo, da proposição 3.25 temos que $(gh) \cdot y'$ também está definido e $(gh) \cdot y' = q \cdot z = z$, porém, como $p \cdot y$ está definido, segue da proposição 3.25 que $h \cdot y'$ está definido e $h \cdot y' = p \cdot y = y$. Assim, utilizando o axioma 3.1$(C3)$, obtemos que $g \cdot (h \cdot y')$ está definido e $g \cdot (h \cdot y') = (gh) \cdot y' = z$, portanto concluímos que $g \cdot y = g \cdot (h \cdot y')$ está definido e $g \cdot y = g \cdot (h \cdot y') = z$. □

Esse teorema nos fornece um funtor $R : \mathscr{A}_p(G) \to \mathscr{A}(G)$ refletor que a cada G-conjunto (X,θ) associa o G-conjunto $(R(X), \theta_R)$ e a cada G-função $\varphi : X \to Y$ associa a única G-função $\varphi_R : R(X) \to R(Y)$ que comuta o diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "i_X"'] & Y \arrow[d, "i_Y"] \\ R(X) \arrow[r, dotted, "\varphi_R"'] & R(Y). \end{tikzcd}$$

Ainda, se a ação de G em X é global, então i_X é um isomorfismo entre X e $R(X)$.

Ainda, assim como acontece no caso de grupos, o teorema nos permite concluir que qualquer globalização universal de X é injetiva e induz a ação original de G em X. Lembre que, uma globalização é, em particular, um monomorfismo em $\mathscr{A}_p(G)$ e como vimos na Observação 3.10, monomorfismos em $\mathscr{A}_p(G)$ não necessariamente são injetores.

Proposição 3.30. *Seja G uma categoria e (X,θ) um G-conjunto. Se (Y,θ_Y) é um G-conjunto e $\varphi : X \to Y$ é uma G-função tal que (φ, Y) é uma globalização universal de X, então (Y,θ_Y) é isomorfo a $(R(X), \theta_R)$ em $\mathscr{A}_p(G)$, φ é injetiva e (φ, Y) induz a ação θ de G em X.*

Demonstração. Como (φ, Y) e $(i, R(X))$ são globalizações universais de X, existem únicas G-funções $\tilde{\phi} : R(X) \to Y$ e $\psi : Y \to R(X)$ tais que o diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "i"'] & Y \arrow[dl, dotted, shift left, "\psi"] \\ R(X) \arrow[ur, dotted, shift left, "\tilde{\phi}"] & \end{tikzcd}$$

Por um argumento análogo ao utilizado na demonstração da Proposição 2.38 (versão para grupos), segue que $\psi \circ \tilde{\phi} = Id_{R(X)}$ e $\tilde{\phi} \circ \psi = Id_Y$ e, portanto, $\tilde{\phi}$ é um isomorfismo entre (Y, θ_Y) e $(R(X), \theta_R)$.

Mostraremos agora que φ é injetiva. Sejam $x, x' \in X$ tais que $\varphi(x) = \varphi(x')$. Logo, $i(x) = (\psi \circ \varphi)(x) = (\psi \circ \varphi)(x') = i(x')$. Da injetividade de i, segue que $x = x'$.

Resta mostrar que (φ, Y) induz a ação original de G em X. Sejam $x, x' \in X$ e $g \in \mathrm{mor}(G)$ tais que $g \cdot \varphi(x)$ está definido e $g \cdot \varphi(x) = \varphi(x')$. Assim, temos que $g \cdot \tilde{\phi}(i(x)) = \tilde{\phi}(i(x'))$. Como ψ é G-função, $g \cdot \psi(\tilde{\phi}(i(x))) = g \cdot i(x)$ está definido e é igual a $\psi(g \cdot \tilde{\phi}(i(x))$. Logo, $g \cdot i(x) = \psi(g \cdot \tilde{\phi}(i(x))) = \psi(\tilde{\phi}(i(x'))) = i(x')$. Finalmente, como $(i, R(X))$ induz a ação original de G em X, segue que $g \cdot x$ está definido e $g \cdot x = x'$. $\square$

Agora apresentaremos exemplos de ações parciais e calcularemos a globalização universal em cada caso.

Exemplo 3.31. Considere a ação parcial dada em 3.4. Como visto em 3.19, temos o seguinte conjunto $\overline{X}$:

$$\overline{X} = \{(e,1), (e,2), (e,3), (f,2), (f,3), (f,4), (g,1), (g,2), (g,3)\}$$

e temos as seguintes relações entre os elementos de $\overline{X}$:

$$(g,3) \sim (f,2), \quad (f,2) \sim (e,2), \quad (e,3) \sim (f,3) \text{ e } (g,2) \sim (f,2).$$

Disto, temos que $[g,3] = [f,2]$, $[f,2] = [e,2]$, $[e,3] = [f,3]$ e $[g,2] = [f,2]$ e portanto obtemos o seguinte conjunto $R(X)$:

$$R(X) = \{[e,1], [e,2], [e,3], [f,4], [g,1]\}.$$

Dessa forma, a ação global da categoria G em $R(X)$, seguindo a Definição 3.26, é dada por

$$e \cdot [e,1] = [e,1] \qquad f \cdot [e,2] = [e,2] \qquad g \cdot [e,1] = [g,1]$$

$$e \cdot [e,2] = [e,2] \qquad f \cdot [e,3] = [e,3] \qquad g \cdot [e,2] = [e,2]$$

$$e \cdot [e,3] = [e,3] \qquad f \cdot [f,4] = [f,4] \qquad g \cdot [e,3] = [e,2]$$

$$f \cdot [g,1] = [g,1]$$

e a G-função injetiva $i : X \to R(X)$ é dada por

$$i(1) = [e,1] \qquad i(2) = [e,2] \qquad i(3) = [e,3] \qquad i(4) = [f,4].$$

Exemplo 3.32. Considere a ação parcial dada em 3.5. Note que, $d(e) = e$, $d(f) = f$ e $d(g) = e$, assim, temos o seguinte conjunto

$$\overline{X} = \{(e, 1), (e, 2), (f, 2), (f, 3), (g, 1), (g, 2)\}.$$

Agora, observe que

- $(e, 2) \sim (f, 2)$, pois satisfaz o item (ii) da Definição 3.16.
- $(g, 2) \sim (f, 2)$, pois, $g \in \text{mor}(G)$ tal que $(f, g) \in G^2$, $g \cdot 2$ está definido, $g = fg$ (pois $f \in \text{Ob}(G)$) e $2 = g \cdot 2 = 2$. Assim, o item (i) da Definição 3.16 é satisfeito.

Como $(e, 2) \sim (f, 2)$ e $(g, 2) \sim (f, 2)$, temos que $[e, 2] = [f, 2]$ e $[g, 2] = [f, 2]$, logo, obtemos o seguinte conjunto $R(X)$:

$$R(X) = \{[e, 1], [e, 2], [f, 3], [g, 1]\}.$$

Dessa forma, a ação da categoria G em $R(X)$, através da Definição 3.26, é dada por

$$e \cdot [e, 1] = [e, 1] \qquad f \cdot [f, 3] = [f, 3] \qquad g \cdot [e, 1] = [g, 1]$$

$$e \cdot [e, 2] = [e, 2] \qquad f \cdot [g, 1] = [g, 1] \qquad g \cdot [e, 2] = [e, 2].$$

A função injetiva $i : X \to R(X)$ é dada por

$$i(1) = [e, 1] \qquad i(2) = [e, 2] \qquad i(3) = [f, 3].$$

Exemplo 3.33. Considere a ação parcial dada em 3.6. Através do Exemplo 3.21, sabemos que o conjunto $\overline{X}$ é dado por

$$\overline{X} = \{(e, 1), (e, 2), (f, 2), (f, 3), (g, 1), (g, 2), (g^{-1}, 2), (g^{-1}, 3)\}$$

e os elementos de $\overline{X}$ relacionados por $\sim$ são: $(e, 2) \sim (f, 2)$, $(f, 2) \sim (e, 2)$, $(e, 2) \sim (g^{-1}, 2)$, $(g^{-1}, 2) \sim (e, 2)$, $(g, 2) \sim (f, 2)$ e $(f, 2) \sim (g, 2)$.

Assim, temos que $[e, 2] = [f, 2]$, $[e, 2] = [g^{-1}, 2]$ e $[g, 2] = [f, 2]$ e, portanto, obtemos o seguinte conjunto $R(X)$

$$R(X) = \{[e, 1], [e, 2], [f, 3], [g, 1], [g^{-1}, 3]\}.$$

Dessa forma, a ação global da categoria G (que neste caso é um grupoide) em $R(X)$ é dada por

$$e \cdot [e, 1] = [e, 1] \qquad f \cdot [f, 3] = [f, 3] \qquad g \cdot [e, 1] = [g, 1] \qquad g^{-1} \cdot [g, 1] = [e, 1]$$

$$e \cdot [e, 2] = [e, 2] \qquad f \cdot [g, 1] = [g, 1] \qquad g \cdot [e, 2] = [e, 2] \qquad g^{-1} \cdot [e, 2] = [e, 2]$$

$$e \cdot [g^{-1}, 3] = [g^{-1}, 3] \qquad g^{-1} \cdot [f, 3] = [g^{-1}, 3]$$

Portanto, a G-função injetiva $i : X \to R(X)$ é definida por

$$i(1) = [e, 1] \qquad i(2) = [e, 2] \qquad i(3) = [f, 3].$$

4 Ações parciais de grupoides em conjuntos

Neste capítulo, falaremos um pouco sobre as ações parciais de grupoides em conjuntos. Apresentaremos uma definição para ação parcial de grupoide em um conjunto como em (20) e mostraremos que nesse contexto, essa definição é equivalente à ação parcial de uma categoria (pequena) em um conjunto.

Neste capítulo, denotaremos G como sendo um grupoide e X um conjunto.

4.1 Ações parciais

Comecemos diretamente pela definição mencionada.

Definição 4.1. Sejam X um conjunto e G um grupoide. Definimos uma *ação parcial* de G em X como sendo uma função parcial $\theta : \mathrm{mor}(G)\times X \to X$, denotada por $\theta(g,x) = g{\cdot}x$, satisfazendo os seguintes axiomas:

(GR1) Para cada $x \in X$, existe $e \in \mathrm{Ob}(G)$ tal que $e \cdot x$ está definido. Se $f \in \mathrm{Ob}(G)$ e $x \in X$ são tais que $f \cdot x$ está definido, então $f \cdot x = x$.

(GR2) Se $x \in X$ e $g \in \mathrm{mor}(G)$ são tais que $g \cdot x$ está definido, então $g^{-1} \cdot (g \cdot x)$ está definido e é igual a x.

(GR3) Sejam $(g, h) \in G^2$ e $x \in X$ tais que $g \cdot (h \cdot x)$ está definido, então $(gh) \cdot x$ está definido e é igual a $g \cdot (h \cdot x)$.

Dizemos que a ação de G é global se o seguinte axioma for satisfeito.

(GR4) Se $g \in \mathrm{mor}(G)$ e $x \in X$ são tais que $d(g) \cdot x$ está definido, então $g \cdot x$ está definido.

Como mencionado na introdução do capítulo, vamos verificar agora uma equivalência entre as Definições 4.1 e 3.1. Esta equivalência é muito útil, pois torna válido diversos resultados já vistos no capítulo 3.

Proposição 4.2. *Seja G um grupoide e X um conjunto. Nesses termos, G age parcialmente sobre X segundo a Definição 3.1 se, e somente se, G age parcialmente sobre X segundo a Definição 4.1.*

Demonstração. Suponha que valem os axiomas $(C1)$, $(C2)$ e $(C3)$. Observe que os axiomas $(C1)$ e $(GR1)$ são iguais, logo, vale $(GR1)$.

Mostremos que vale $(GR2)$. Sejam $x \in X$ e $g \in \mathrm{mor}(G)$ tais que $g \cdot x$ está definido, então, por $(C2)$ sabemos que $d(g) \cdot x$ está definido, e por $(C1)$ que $d(g) \cdot x = x$. Além disso, como $d(g) = g^{-1}g$, então $(g^{-1}g) \cdot x$ está definido. Como $(g^{-1}, g) \in G^2$, temos por $(C3)$ que $g^{-1} \cdot (g \cdot x)$ está definido e $g^{-1} \cdot (g \cdot x) = (g^{-1}g) \cdot x = d(g) \cdot x = x$, portanto vale $(GR2)$.

Mostremos $(GR3)$. Sejam $(g, h) \in G^2$ e $x \in X$ tais que $g \cdot (h \cdot x)$ está definido, assim, $h \cdot x$ está definido, logo, por $(C3)$, $(gh) \cdot x$ também está definido e $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$.

Reciprocamente, suponha que valem os axiomas $(GR1)$, $(GR2)$, $(GR3)$ e vamos mostrar que valem $(C1)$, $(C2)$ e $(C3)$. Como já mencionado anteriormente, os axiomas $(C1)$ e $(GR1)$ são iguais, logo, vale $(C1)$.

Mostremos que vale $(C2)$. Sejam $x \in X$ e $g \in \mathrm{mor}(G)$ tais que $g \cdot x$ esteja definido, então, por $(GR2)$ temos que $g^{-1} \cdot (g \cdot x)$ está definido e por $(GR3)$, $g^{-1} \cdot (g \cdot x) = (g^{-1}g) \cdot x = d(g) \cdot x$ está definido, portanto vale $(C2)$.

Mostremos $(C3)$. Sejam $(g, h) \in G^2$ e $x \in X$ tais que $h \cdot x$ esteja definido. Suponha primeiramente que $g \cdot (h \cdot x)$ está definido, então, por $(GR3)$ temos que $(gh) \cdot x$ está definido e $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$. Por outro lado, suponha que $(gh) \cdot x$ está definido. Por $(GR2)$ temos que $h^{-1} \cdot (h \cdot x)$ está definido e $h^{-1} \cdot (h \cdot x) = x$. Dessa forma, temos que $(gh) \cdot x = (gh) \cdot (h^{-1} \cdot (h \cdot x))$ está definido, de modo que, de $(GR3)$ segue que $(ghh^{-1}) \cdot (h \cdot x) = g \cdot (h \cdot x)$ está definido. $\square$

Note que, por termos uma equivalência entre as Definições 4.1 e 3.1, obtemos uma tripla

$$(\{X_g\}_{g \in \mathrm{mor}(G)}, \{{}_gX\}_{g \in \mathrm{mor}(G)}, \{\alpha_g\}_{g \in \mathrm{mor}(G)}),$$

em que os conjuntos $\{X_g\}_{g \in \mathrm{mor}(G)}$,$\{{}_gX\}_{g \in \mathrm{mor}(G)}$ e as funções $\{\alpha_g\}_{g \in \mathrm{mor}(G)}$ são definidas como em (3.1). Veremos agora que, para cada $g \in \mathrm{mor}(G)$ temos $X_g = {}_{g^{-1}}X$ e também α_g é bijeção.

Proposição 4.3. *Se G é um grupoide e X um conjunto equipado com a ação parcial de G, então, utilizando a notação vista em* (3.1)*, temos que para todo $g \in \mathrm{mor}(G)$, ${}_gX = X_{g^{-1}}$ e a função α_g é bijetiva e $(\alpha_g)^{-1} = \alpha_{g^{-1}}$.*

Demonstração. Seja $g \in \mathrm{mor}(G)$. Segue diretamente da definição de ${}_gX$ em (3.1) que α_g é sobrejetiva, mostremos que é injetiva. Observe que por $(GR2)$ temos que ${}_gX \subseteq X_{g^{-1}}$ e $\alpha_{g^{-1}}(\alpha_g(x)) = x$ para $x \in X_g$ e, portanto, α_g é injetiva.
Agora, dado $x \in X_{g^{-1}}$, observe que por $(GR2)$ ${}_{g^{-1}}X \subseteq X_g$. Logo, novamente por $(GR2)$ temos que $x = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(x)) \in {}_gX$, assim, ${}_gX = X_{g^{-1}}$. $\square$

Essa proposição nos possibilita reescrever a tripla dada em (3.1) como um par

$$(\{X_g\}_{g \in \mathrm{mor}(G)}, \{\alpha_g\}_{g \in \mathrm{mor}(G)}), \tag{4.1}$$

em que, para cada $g \in \text{mor}(G)$, $X_g = \{x \in X \mid g \cdot x \text{ está definido}\}$ e $\alpha_g : X_g \to X_{g^{-1}}$ é uma bijeção dada por $\alpha_g(x) = g \cdot x$ para todo $x \in X_g$. De fato, o leitor familiarizado com ações parciais de grupoides pode estar acostumado com a definição em um formato semelhante a esse (formato semelhante a 2.13 e 3.2).

Encerraremos essa seção apresentando a definição de ação parcial de grupoide dada em (5) e verificaremos que, adicionando um pequeno requerimento a essa definição, obtemos uma definição equivalente a 4.1.

Definição 4.4. Uma *ação parcial* α de um grupoide G em um conjunto X é um par $\alpha = (\{D_g\}_{g \in \text{mor}(G)}, \{\alpha_g : D_{g^{-1}} \to D_g\}_{g \in \text{mor}(G)})$, em que, para cada $g \in \text{mor}(G)$, $D_{r(g)}$ é um subconjunto de X, D_g é um subconjunto de $D_{r(g)}$ e α_g é bijetivo. Além disso, valem as seguintes propriedades.

$(PA1)$ $\alpha_e = Id_{D_e}$, para qualquer $e \in \text{Ob}(G)$;

$(PA2)$ $\alpha_h^{-1}(D_{g^{-1}} \cap D_h) \subseteq D_{(gh)^{-1}}$, para todo $(g,h) \in G^2$;

$(PA3)$ $\alpha_g(\alpha_h(x)) = \alpha_{gh}(x)$, para todo $x \in \alpha_h^{-1}(D_{g^{-1}} \cap D_h)$, para todo $(g,h) \in G^2$.

Mostraremos primeiro que assumindo a definição 4.1, podemos chegar na definição 4.4, e, em seguida, mostraremos que, assumindo a definição 4.4 e adicionando a hipótese que a união de todos os X_e com $e \in \text{Ob}(G)$ é igual a X, chegaremos na definição 4.1.

Proposição 4.5. *Seja G um grupoide e X um conjunto. Se G age parcialmente sobre X segundo a Definição 4.1, então, G age parcialmente sobre X segundo a Definição 4.4.*

Demonstração. Seja $(\{X_g\}_{g \in \text{mor}(G)}, \{\alpha_g\}_{g \in \text{mor}(G)})$ um par dado como em (4.1). Assim, para cada $g \in \text{mor}(G)$, $X_g = \{x \in X \mid g \cdot x \text{ está definido}\}$ e $\alpha_g : X_g \to X_{g^{-1}}$ é uma bijeção tal que $\alpha_g(x) = g \cdot x$ para todo $x \in X_g$ e $(\alpha_g)^{-1} = \alpha_{g^{-1}}$. Assim, para cada $g \in G$, defina $D_g = X_{g^{-1}}$ e mostremos que o par

$$\alpha = (\{D_g\}_{g \in \text{mor}(G)}, \{\alpha_g : D_{g^{-1}} \to D_g\}_{g \in \text{mor}(G)})$$

é uma ação parcial de G em X, segundo a Definição 4.4. É claro que $D_{r(g)}$ é subconjunto de X e, como mencionamos α_g é bijeção. Vejamos que D_g é subconjunto de $D_{r(g)}$. Observe que, trocando g por $r(g)$, obtemos que $D_{r(g)}$ é tanto o domínio como o contradomínio de $\alpha_{r(g)}$, visto que $r(g) = (r(g))^{-1}$. Dessa forma, temos que $D_g \subseteq D_{r(g)}$. Verifiquemos agora $(PA1)$,$(PA2)$ e $(PA3)$.

Mostremos que vale $(PA1)$. Seja $e \in \text{Ob}(G)$. Observe que, dado $x \in D_e$, temos que $\alpha_e(x) = e \cdot x = x = Id_{D_e}(x)$. Dessa forma $\alpha_e = Id_{D_e}$.

Mostremos $(PA2)$. Observe que, dado $(g,h) \in G^2$ e $x \in \alpha_h^{-1}(X_g \cap {}_hX)$, segue pelo item $(C3')$ da proposição 3.2 que $X_h \cap X_{gh} = \alpha_h^{-1}(X_g \cap X_h^{-1})$. Logo, $D_h^{-1} \cap D_{(gh)^{-1}} = \alpha_h^{-1}(D_{g^{-1}} \cap D_h)$ e, em particular, $\alpha_h^{-1}(D_{g^{-1}} \cap D_h) \subseteq D_{(gh)^{-1}}$.

Para mostrar $(PA3)$, utilizaremos novamente o item $(C3')$ da proposição 3.2. Seja $(g,h) \in G^2$ e $x \in \alpha_h^{-1}(D_{g^{-1}} \cap D_h) = \alpha_h^{-1}(X_g \cap X_h^{-1})$. Pelo item $(C3')$, $x \in X_h \cap X_{gh} = D_h^{-1} \cap D_{(gh)^{-1}}$ e $\alpha_g(\alpha_h(x)) = \alpha_{gh}(x)$. □

Proposição 4.6. *Seja G um grupoide e X um conjunto. Se G age parcialmente sobre X, segundo a Definição 4.4 e $X = \bigcup_{e \in \mathrm{Ob}(G)} D_e$, então G age parcialmente sobre X, segundo a Definição 4.1.*

Demonstração. Seja $\alpha = (\{D_g\}_{g \in \mathrm{mor}(G)}, \{\alpha_g : D_{g^{-1}} \to D_g\}_{g \in \mathrm{mor}(G)})$ uma ação parcial de G em X como na definição 4.4. Defina uma função parcial $\mathrm{mor}(G) \times X \to X$ tal que $(g,x) \mapsto \alpha_g(x)$ para todo $(g,x) \in \mathrm{mor}(G) \times X$ tal que $x \in D_{g^{-1}}$. Denote por $g \cdot x$ a imagem de um par (g,x) tal que $x \in D_{g^{-1}}$.

Mostremos (GR1). Seja $x \in X$, como $X = \bigcup_{e \in \mathrm{Ob}(G)} D_e$, temos que $x \in D_e$ para algum $e \in \mathrm{Ob}(G)$, ou seja $e \cdot x$ está definido. Além disso, como $\alpha_e = Id_{D_e}$ por (PA1), temos que $e \cdot x = \alpha_e(x) = Id_{D_e}(x) = x$.

Mostremos (GR2). Seja $g \in \mathrm{mor}(G)$ e seja $x \in X$ tal que $g \cdot x$ está definido, isto é, $x \in D_{g^{-1}}$. Assim, $\alpha_g(x) \in D_g$ e, portanto, está no domínio de $\alpha_{g^{-1}} : D_g \to D_{g^{-1}}$. Logo, $g^{-1} \cdot (g \cdot x) = \alpha_{g^{-1}}(\alpha_g(x))$ está definido. Além disso, por $(PA3)$, $\alpha_{g^{-1}}(\alpha_g(x)) = \alpha_{g^{-1}g}(x) = \alpha_{d(g)}(x)$ pois $x \in \alpha_g^{-1}((D_{g^{-1}})^{-1} \cap D_g)$. Por $(PA1)$, temos $g^{-1} \cdot (g \cdot x) = \alpha_{d(g)}(x) = x$.

Por fim, mostremos (GR3). Seja $(g,h) \in G^2$ e $x \in X$ tal que $g \cdot (h \cdot x)$ está definido, isto é, $x \in D_{h^{-1}}$ e $\alpha_h(x) \in D_{g^{-1}}$. Dessa forma, temos que $x \in \alpha_h^{-1}(D_{g^{-1}} \cap D_h)$ e portanto, pelo item (PA3), segue que $\alpha_g(\alpha_h(x)) = \alpha_{gh}(x)$, ou seja, $(gh) \cdot x$ está definido e é igual a $g \cdot (h \cdot x)$. □

4.2 Globalização

Na presença da Proposição 4.2, o teorema 3.29 se aplica para ações parciais de Grupoides. Isto é, toda ação parcial de um grupoide G em um conjunto X admite uma globalização universal.

Em (15), Gilbert mostra (Teorema 4.9) que toda ação parcial de um grupoide ordenado em um conjunto admite uma globalização canônica. O processo de construção dessa globalização é similar ao apresentado na Seção 3.2. Dado um G-conjunto (X, θ), Gilbert define um conjunto $G \otimes_\theta X$ dado pelo quociente do conjunto $\overline{X}$ (como definido em 3.16) pela relação de equivalência que relaciona elementos $(g,x), (g',x') \in \overline{X}$ se, e somente se, existe $h \in \mathrm{mor}(G)$ tal que $(g',h) \in G^2$, $h \cdot x$ está definido, $g = g'h$ e $x' = h \cdot h$ (item (i) da definição 3.16).

Lembre que a relação definida em 3.16 não é necessariamente transitiva, mesmo que G seja um grupoide (veja exemplo 3.21). Logo, a relação definida em 3.16 é estritamente maior que a relação definida por Gilbert e, por consequência $R(X)$ é menor que $G \otimes_\theta X$.

Ainda, Gilbert denota por $g \otimes x$ a classe de um elemento $(g, x) \in \overline{X}$ e a ação de G em $G \otimes_\theta X$ definida por Gilbert é dada por $h \cdot (g \otimes x) = hj \otimes x$, para $g \otimes x \in G \otimes_\theta X$ e $h \in \text{mor}(G)$ tal que $(h, j) \in G^2$.

Exemplo 4.7. Considere a ação parcial dada no Exemplo 3.6. No Exemplo 3.32, vimos que $R(X) = \{[e, 1], [e, 2], [f, 3], [g, 1], [g^{-1}, 3]\}$. No entanto, ao considerarmos a relação de equivalência utilizada por Gilbert, vemos que perdemos as relações $(e, 2) \sim (f, 2)$ e $(f, 2) \sim (e, 2)$ que vimos no Exemplo 3.21. Assim, teríamos no contexto de Gilbert $G \otimes_\theta X = \{e \otimes 1, e \otimes 2, f \otimes 2, f \otimes 3, g \otimes 1, g^{-1} \otimes 3\}$.

Gilbert também mostra que, se X é um G-conjunto e (φ, Y) é uma globalização de X, então existe uma G-função $\psi : G \otimes_\theta X \to Y$ tal que $\psi(g \otimes x) = g \cdot \varphi(x)$ e é injetiva em cada conjunto da forma $\{g \otimes x \in G \otimes_\theta X \mid d(g) = e = c(g)\}$, para $e \in \text{Ob}(G)$ (veja Proposição 4.10 de (15)).

Apresentamos agora uma proposição que, no caso em que a relação de ordem no grupoide é a igualdade, generaliza esse resultado de Gilbert e é um análogo da Proposição 2.36 para grupos.

Proposição 4.8. *Seja G um grupoide. No contexto da demonstração do Teorema 3.29, se (j, Z) é uma globalização que induz a ação original de G em X, então a G-função $\tilde{\phi} : R(X) \to Z$ é injetiva em $R_e = \{[g, x] \in R(X) \mid c(g) = e\}$ para cada $e \in \text{Ob}(G)$.*

Demonstração. Seja $e \in \text{Ob}(G)$ e sejam $[g, x], [h, y] \in R_e$ tais que $\tilde{\phi}([g, x]) = \tilde{\phi}([h, y])$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $c(g) = e = c(h)$.

Pela definição de $\tilde{\phi}$, temos que $g \cdot j(x) = h \cdot j(y)$. Por $(GR2)$, $h^{-1} \cdot (h \cdot j(y))$ está definido e é igual a $j(y)$. Logo, $h^{-1} \cdot (g \cdot j(x))$ está definido e é igual a $j(y)$. Como $c(g) = c(h)$, por $(GR3)$ $(h^{-1}g) \cdot j(x)$ está definido e $h^{-1} \cdot (g \cdot j(x)) = j(y)$. Assim, obtemos que $(h^{-1}g) \cdot j(x) = j(y)$. Como j induz a ação original de G em X, segue que $(h^{-1}g) \cdot x = y$. Pelo item (i) da Definição 3.16, segue que $(g, x) \sim (h, y)$. Logo, $[g, x] = [h, y]$. $\square$

Veja que, se G é um grupo, a proposição acima coincide com a Proposição 2.36.

Considerações Finais

Neste estudo de ações parciais de grupos e de categorias pequenas em conjuntos e seus respectivos teoremas de globalização, pode-se ver uma parte da riqueza que são esses conceitos.

Apesar da definição de ação parcial aparecer em diferentes formas, todas equivalentes, isso pode facilitar o estudo e aprendizado, dependendo do contexto. Além disso, na construção das ferramentas necessárias para demonstração do teorema, pode-se ver diversas relações entre os resultados vistos para grupos, categorias e grupoides. De certa forma, os argumentos se repetem e/ou são adaptados em cada contexto. Isso possibilita ver como essas estruturas estão de certa forma interligadas, o que torna o trabalho mais interessante, e até deixa oportunidades para futuras pesquisas, como por exemplo: O teorema de globalização é valido para ações parciais de semigrupoides? Como se dá a construção deste teorema, caso seja válido? Será que as técnicas que utilizamos para ações parciais de grupos podem ser repetidas e/ou adaptadas para obter um teorema de globalização para ações parciais de semigrupoides em conjuntos?

Para contextualizar, semigrupoides são estruturas algébricas introduzidas por Exel e já foi desenvolvida uma noção de ação parcial de semigrupoides inversos em conjuntos.

Ainda, em (4) foram feitas várias construções categóricas em $\mathscr{A}_p(G)$, com G grupo, como produto, coproduto, equalizador, pullback. Isso nos dá a oportunidade de explorar essas construções para ver se elas podem ser adaptadas para $\mathscr{A}_p(G)$, com G categoria pequena.

Agradeço novamente ao meu orientador Paulinho por toda dedicação e por me apresentar esse estudo de ações parciais (que na minha opinião foi muito interessante), e agradeço novamente ao CNPq pela oportunidade da bolsa de estudos.

Bibliografia

1 ABADIE, Fernando. Enveloping actions and Takai duality for partial actions. **Journal of Functional Analysis**, v. 197, n. 1, p. 14–67, 2003. ISSN 0022-1236. DOI: https://doi.org/10.1016/S0022-1236(02)00032-0.

2 ________. **Sobre ações parciais, Fibrados de Fell e Grupóides**. 1999. Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo.

3 ALVES, Marcelo Muniz S.; BATISTA, Eliezer. Enveloping Actions for Partial Hopf Actions. **Communications in Algebra**, Taylor & Francis, v. 38, n. 8, p. 2872–2902, 2010. DOI: 10.1080/00927870903095582.

4 AVILA, Jesús; BUITRAGO, Soledad; ZAPATA, Sabrina. The category of partial actions of a group: some constructions. **Int. J. Pure Appl. Math**, v. 95, n. 1, p. 45–56, 2014.

5 BAGIO, Dirceu; PAQUES, Antonio. Partial Groupoid Actions: Globalization, Morita Theory, and Galois Theory. **Communications in Algebra**, Taylor & Francis, v. 40, n. 10, p. 3658–3678, 2012. DOI: 10.1080/00927872.2011.592889.

6 BAGIO, Dirceu et al. Actions of Inverse Semigroups on Algebras. **Communications in Algebra**, Taylor & Francis, v. 35, n. 12, p. 3865–3874, 2007. DOI: 10.1080/00927870701511905.

7 BEMM, Laerte; LAUTENSCHLAEGER, Wesley G.; TAMUSIUNAS, Thaísa. **Groupoid Twisted Partial Actions**. [S.l.]: arXiv, 2021. DOI: 10.48550/ARXIV.2105.03008.

8 DOKUCHAEV, Michael. Partial actions: a survey. **Contemp. Math.**, v. 537, 2011. DOI: 10.1090/conm/537/10573.

9 DOKUCHAEV, Michael; EXEL, Ruy. Associativity of crossed products by partial actions, enveloping actions and partial representations. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 357, p. 1931–1952, jul. 2005. DOI: 10.1090/S0002-9947-04-03519-6.

10 DOKUCHAEV, Michael; RÍO, Ángel del; SIMÓN, Juan Jacobo. Globalizations of Partial Actions on Nonunital Rings. **Proceedings of the American Mathematical Society**, American Mathematical Society, v. 135, n. 2, p. 343–352, 2007.

11 EXEL, R. Circle Actions on C*-Algebras, Partial Automorphisms, and a Generalized Pimsner-Voiculescu Exact Sequence. **Journal of Functional Analysis**, v. 122, n. 2, p. 361–401, 1994. ISSN 0022-1236. DOI: https://doi.org/10.1006/jfan.1994.1073.

12 EXEL, R.; GIORDANO, Thierry; GONÇALVES, Daniel. Envelope Algebras of Partial Actions as Groupoid C*-Algebras, jul. 2008.

13 EXEL, Ruy. Partial Actions of Groups and Actions of Inverse Semigroups. **Proceedings of the American Mathematical Society**, American Mathematical Society, v. 126, n. 12, p. 3481–3494, 1998. ISSN 00029939, 10886826. Acesso em: 23 maio 2022.

14 ________. **Partial Dynamical Systems, Fell Bundles and Applications**. [S.l.]: American Mathematical Society, 2017. (Mathematical Surveys and Monographs 224). ISBN 9781470437855.

15 GILBERT, N.D. Actions and expansions of ordered groupoids. **Journal of Pure and Applied Algebra**, v. 198, n. 1, p. 175–195, 2005. ISSN 0022-4049. DOI: `https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2004.11.006`.

16 KELLENDONK, J.; LAWSON, Mark V. Partial Actions of Groups. **International Journal of Algebra and Computation**, v. 14, n. 01, p. 87–114, 2004. DOI: `10.1142/S0218196704001657`.

17 LAUTENSCHLAEGER, Wesley G.; TAMUSIUNAS, Thaísa. **Inverse Semigroupoid Actions and Representations**. [S.l.]: arXiv, 2020. DOI: `10.48550/ARXIV.2007.15216`.

18 MCCLANAHAN, K. K-Theory for Partial Crossed Products by Discrete Groups. **Journal of Functional Analysis**, v. 130, n. 1, p. 77–117, 1995. ISSN 0022-1236.

19 MEGRELISHVILI, Michael; SCHRÖDER, Lutz. Globalization of confluent partial actions on topological and metric spaces. **Topology and its Applications**, v. 145, n. 1, p. 119–145, 2004. ISSN 0166-8641. DOI: `https://doi.org/10.1016/j.topol.2004.06.006`.

20 NYSTEDT, Patrik. Partial category actions on sets and topological spaces. **Communications in Algebra**, Taylor & Francis, v. 46, n. 2, p. 671–683, 2018. DOI: `10.1080/00927872.2017.1327057`.

21 STEINBERG, Benjamin. Partial Actions of Groups on Cell Complexes. **Monatshefte für Mathematik**, v. 138, p. 159–170, 2003. ISSN 0166-8641. DOI: `https://doi.org/10.1007/s00605-002-0521-0`.