



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Luiz Carlos Kubaski Medeiros

**Q-balls e Q-shells compactas eletricamente carregadas em um
modelo $\mathbb{C}P^N$ multicomponente**

Florianópolis (SC)

2022

Luiz Carlos Kubaski Medeiros

**Q-balls e Q-shells compactas eletricamente carregadas em um modelo CP^N
multicomponente**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação
em Física da Universidade Federal de Santa Catarina
para a obtenção do título de mestre em física.
Orientador: Pawel Klimas

Florianópolis (SC)

2022

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Medeiros, Luiz Carlos Kubaski

Q-balls e Q-shells compactas eletricamente carregadas
em um modelo CP-N multicomponente / Luiz Carlos Kubaski
Medeiros ; orientador, Pawel Klimas, 2022.

64 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas,
Programa de Pós-Graduação em Física, Florianópolis, 2022.

Inclui referências.

1. Física. 2. Sólitons não topológicos. 3. Compactons. 4.
Potenciais não analíticos. I. Klimas, Pawel. II.
Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós
Graduação em Física. III. Título.

Luiz Carlos Kubaski Medeiros

**Q-balls e Q-shells compactas eletricamente carregadas em um modelo CP^N
multicomponente**

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Paulo Eduardo Gonçalves de Assis, Dr.
Universidade Federal de Catalão (UFCAT)

Prof. Gabriel Luchini Martins, Dr.
Universidade Federal do Espírito Santo (UFES)

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestre em física.

Coordenação do Programa de
Pós-Graduação

Pawel Klimas
Orientador

Florianópolis (SC), 2022.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço ao Prof. Paweł Klimas, pela orientação. Deixo um obrigado também à meus colegas Fernando Miguel Hahne e João Saldanha Streibel.

Deixo um agradecimento especial à minha namorada, meus amigos e minha família (~~apesar de terem se negado a resolver uma equação sequer~~) pelo apoio e companhia.

Por fim, agradeço à FAPESC pelo apoio financeiro.

RESUMO

Neste trabalho estudamos as soluções do modelo $\mathbb{C}P^N$ multicomponentes com potencial não analítico. Este modelo é uma extensão do modelo $\mathbb{C}P^N$ padrão, que possui soluções compactas do tipo Q-ball e Q-shell. Utilizando o ansatz de Q-balls, obtivemos as equações de movimento para os campos e analisamos numericamente as soluções do modelo. Obtivemos também expressões para a energia das soluções em função das cargas de Noether e, a partir da relação carga-energia, discutimos a estabilidade das soluções. Ainda, identificamos que o modelo apresenta soluções do tipo *harbor*, onde temos um compacton localizado na cavidade interna de outro compacton sem haver sobreposição. Por fim, acoplamos o campo elétrico ao modelo e apresentamos as soluções.

Palavras-chave: Potenciais não analíticos, sólitons não topológicos, compactons.

ABSTRACT

In this work we study the solutions of the multi-component $\mathbb{C}P^N$ model with a non-analytic potential. This model is an extension of the standard $\mathbb{C}P^N$ model, which possesses compact Q-ball and Q-shell type solutions. Using the Q-ball ansatz, we obtained the equations of motion for the fields and analyzed the solutions numerically. We also obtained expressions for the energy of the solutions as a function of the Noether charges and, from the charge-energy relation, discuss the stability of the solutions. Furthermore, we identified that the model presents harbor like solutions, where a compacton is located inside other compacton without any superposition. Finally, we coupled the electric field to the model and present its solutions.

Keywords: Non-analytic potentials, non-topological solitons, compactons.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Exemplos de Q-balls no modelo $\mathbb{C}P^1$	24
Figura 2 – Exemplos de Q-balls no modelo $\mathbb{C}P^3$	25
Figura 3 – Exemplos de Q-shells no modelo $\mathbb{C}P^5$	25
Figura 4 – Exemplos de Q-shells no modelo $\mathbb{C}P^{21}$	26
Figura 5 – Gráfico de $E^{-\frac{1}{5}}$ em função de ω	26
Figura 6 – Gráfico de $Q_t^{-\frac{1}{6}}$ em função de ω	27
Figura 7 – Exemplo de solução do tipo BB no caso $\mathbb{C}P^1 - \mathbb{C}P^1$	38
Figura 8 – Exemplos de soluções inválidas	38
Figura 9 – Exemplo de solução do tipo BB no caso $\mathbb{C}P^1\mathbb{C}P^3$	39
Figura 10 – Gráfico da densidade Hamiltoniana para o caso $\mathbb{C}P^1 - \mathbb{C}P^1$	40
Figura 11 – Soluções do tipo BS para os casos $\mathbb{C}P^1 - \mathbb{C}P^5$ e $\mathbb{C}P^3 - \mathbb{C}P^5$	41
Figura 12 – Gráfico da densidade Hamiltoniana para o caso $\mathbb{C}P^1 - \mathbb{C}P^5$	42
Figura 13 – Solução do tipo SS para o caso $\mathbb{C}P^5 - \mathbb{C}P^7$	43
Figura 14 – Gráfico da densidade Hamiltoniana para o caso $\mathbb{C}P^5 - \mathbb{C}P^7$	44
Figura 15 – Exemplo de solução tipo <i>harbor</i> no caso $\mathbb{C}P^1 - \mathbb{C}P^5$	45
Figura 16 – Exemplos de soluções para $n = 3$	47
Figura 17 – Gráfico da densidade Hamiltoniana no caso $n = 3$	47
Figura 18 – Exemplo de solução do modelo $\mathbb{C}P^1 - \mathbb{C}P^1$ com campo elétrico	55
Figura 19 – Exemplo de solução do tipo <i>harbor</i> no modelo $\mathbb{C}P^1 - \mathbb{C}P^5$ com campo elétrico	56
Figura 20 – Exemplo de solução do tipo <i>harbor</i> no modelo $\mathbb{C}P^5 - \mathbb{C}P^7$ com campo elétrico	57
Figura 21 – Exemplo de solução do tipo <i>harbor</i> no modelo $\mathbb{C}P^5 - \mathbb{C}P^7$ com campo elétrico e $q_2 = 3$	57

SUMÁRIO

	Introdução	15
1	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	19
1.1	Compactons em modelos com potencial não diferenciável	19
1.2	O modelo $\mathbb{C}P^N$ padrão com potencial não diferenciável	20
1.2.1	Soluções do modelo $\mathbb{C}P^{2l+1}$	22
1.2.1.1	Soluções numéricas	24
2	O MODELO $\mathbb{C}P^N$ MULTICOMPONENTE	29
2.1	O modelo	29
2.2	O ansatz Q-Ball/Q-Shell	33
2.2.1	A densidade Hamiltoniana	34
2.2.2	Cargas de Noether	35
2.3	Soluções	36
2.3.1	Q-ball - Q-ball	37
2.3.2	Q-ball - Q-shell	40
2.3.3	Q-shell - Q-shell	42
2.3.4	Soluções tipo <i>harbor</i>	44
2.3.5	Relação carga-energia	45
2.3.6	Sobre as soluções analíticas	45
2.4	Soluções com três componentes	46
3	O MODELO $\mathbb{C}P^N$ MULTICOMPONENTE ELETRICAMENTE CARREGADO	49
3.1	O modelo	49
3.2	O ansatz	51
3.2.1	A densidade Hamiltoniana	52
3.2.2	Cargas de Noether	52
3.3	Soluções	54
3.3.1	Q-ball - Q-ball	54
3.3.2	Q-ball - Q-shell	55
3.3.3	Q-shell - Q-shell	56
4	CONCLUSÕES	59
	REFERÊNCIAS	61

INTRODUÇÃO

Em modelos não lineares de teoria de campos com um alto grau de simetrias podem existir estados ligados estáveis chamados de sólitons (LEE; PANG, 1992). De forma geral, um sóliton pode ser concebido como uma densidade localizada de energia (COLEMAN, 1977) e lembra, de certa forma, uma partícula; porém, representa, de forma efetiva, uma superposição das partículas que o constituem. Os sólitons se destacam por preservar sua forma e energia durante sua propagação e interagir elasticamente entre si. Modelos com esse tipo de solução têm se tornado populares tanto do ponto de vista teórico quanto experimental. Existe uma ampla literatura sobre modelos com soluções do tipo sóliton, porém, a maioria delas é realizada em apenas uma dimensão espacial. Isso se deve ao teorema de Derrick (DERRICK, 1964), que proíbe a existência de soluções do tipo sóliton estacionárias em modelos de teorias de campo escalar com dimensões espaciais maiores que um.

As soluções tipo sóliton dividem-se em dois grupos: topológicas e não topológicas. Os sólitons constituem mapas entre variedades. No caso dos sólitons topológicos, os grupos de homotopia não são triviais, o que leva à existência de invariantes topológicos associados com os mapeamentos. Esses invariantes são chamados de cargas topológicas. Uma deformação suave da solução topológica não altera o valor do invariante. Um exemplo de sólitons topológicos são os skyrmions (BROWN, 1994). Na literatura científica existe um amplo uso da palavra "sóliton" fora do seu contexto original, isto é, para descrever soluções em modelos que não são necessariamente integráveis. O significado original dessa palavra faz referência à uma solução muito especial do ponto de vista matemático. As propriedades da solução têm origem nas simetrias do modelo, que não são simetrias nem de Noether, nem das equações de movimento. Elas existem no nível mais profundo da teoria e ficam explícitas quando o modelo é reformulado em uma linguagem de pares de Lax (formulação de curvatura nula) (BABELON; BERNARD; TALON, 2003; DUNAJSKI, 2009).

No caso das soluções não topológicas são necessárias outras cargas conservadas, que não as cargas topológicas. Em modelos integráveis, como o KdV (Korteweg-De Vries) (MIURA, 1968), as não linearidades levam à efeitos que permitem a existência de sólitons e garantem suas propriedades características. Em modelos não integráveis, como por exemplo modelos com potencial não diferenciável no seu mínimo, cargas de Noether devem existir para garantir a estabilidade das soluções (que é o caso das Q-balls¹). Isso requer a presença de simetrias globais no modelo.

Considere um modelo com campo escalar complexo e simetria global/local $U(1)$. Impondo as condições corretas sobre o potencial escalar, o modelo apresenta soluções estacionárias, localizadas, de carga e energia finitas, chamadas de Q-balls (COLEMAN,

¹ As soluções do tipo Q-ball não se restringem a modelos não integráveis.

1985). Essas soluções possuem inúmeras aplicações em física de partículas e cosmologia, tendo sido previstas nas extensões supersimétricas do modelo padrão, estudadas no contexto de evolução do universo primordial e consideradas candidatas à matéria escura (KUSENKO, 1997; KUSENKO; SHAPOSHNIKOV, 1998; KUSENKO; KUZMIN; SHAPOSHNIKOV; TINYAKOV, 1998). Ainda assim, é relativamente simples estudar esse tipo de solução, e devido a isso, serve de base para estudar modelos onde a dinâmica real dos objetos é mais complicada. Um exemplo comum é o caso das estrelas de bósons, que, por sua vez, são utilizadas para modelar estruturas astrofísicas como estrelas de nêutrons (JETZER, 1992; FRIEDBERG; LEE; PANG, 1987). O campo escalar constitui um modelo de matéria e as Q-balls representam as estruturas esféricas. No limite de gravidade fraca os modelos de estrelas de bóson reduzem-se a modelos com Q-balls (LYNN, 1989). No caso da simetria local $U(1)$ além do campo escalar existe também um campo eletromagnético acoplado (LEE; STEIN-SCHABES; WATKINS; WIDROW, 1989; GULAMOV; NUGAEV; SMOLYAKOV, 2014). As Q-balls, nesse caso, possuem carga elétrica. A presença dessa carga modifica as soluções (repulsão) e em certas circunstâncias leva à soluções do tipo *shell*, que têm a forma de uma casca esférica onde no seu interior a solução assume valor de vácuo. Ou seja, aparece um raio interno tal que na região $0 < r < R_{in}$ o campo é nulo. Logo o campo de matéria existe apenas na região $R_{in} < r < R_{out}$, onde R_{out} é o raio externo. Essas configurações onde $R_{in} < r < R_{out}$ são chamadas de Q-shells (cascas esfericamente simétricas). As soluções tipo *shell* aparecem também em modelos sem campo eletromagnético, mas isso requer a presença de vários campos escalares (constituintes do modelo CP^N). Essas soluções são analisadas neste trabalho.

A escolha do termo potencial é outro fator relevante na formulação de um modelo. A forma como o potencial se comporta na vizinhança do seu mínimo determina o comportamento dominante do campo escalar próximo à configuração de vácuo. Os modelos considerados em (COLEMAN, 1985; LEE; PANG, 1992) possuem potenciais com comportamento suave em torno do seu mínimo. Isso faz com que as soluções apresentem uma cauda exponencial e, inevitavelmente, interajam entre si devido à superposição. Com isso, outros tipos de potenciais têm sido propostos (ARODZ; KLIMAS; TYRANOWSKI, 2005; BAZEIA; LOSANO; MARQUES; MENEZES; ROCHA, 2016). A principal diferença desses potenciais é que eles não são suaves em seu mínimo, ou seja, os limites das primeiras derivadas por ambos os lados, na proximidade do mínimo, são não nulos e a segunda derivada no mínimo não existe. A forma característica do potencial, que lembra a letra V, deu origem ao nome: *V-shaped* (potenciais com aspecto de V). Como consequência, em modelos com potenciais *V-shaped* as soluções não apresentam cauda exponencial com extensão infinita, mas sim um suporte compacto no qual a solução aproxima-se do vácuo, atingindo o valor de vácuo na borda do suporte. Neste trabalho, utilizaremos os termos "*V-shaped*", "não analítico" e "formato V" intercambiavelmente.

O caráter compacto das soluções permite realizar uma superposição de várias

Q-balls sem elas entrarem em contato. Em particular, as soluções tipo *shell* podem abrigar em seu interior outras soluções tipo *shell* ou soluções tipo *ball* (bola esfericamente simétrica delimitada por raio externo). As estruturas desse tipo são chamadas *harbor*². No caso em que há acoplamento com a gravitação, elas podem abrigar no seu centro um buraco negro.

Um modelo que apresenta tais soluções e que será base para este trabalho é o modelo $\mathbb{C}P^N$ sigma não linear. A lagrangiana do modelo é dada por (KLIMAS; LIVRAMENTO, 2017)

$$\mathcal{L} = -\frac{M^2}{2} \text{Tr}(X^{-1}\partial^\mu X)^2 - \mu^2 V(X) \quad (0.1)$$

onde o potencial *V-shaped* é dado por

$$V(X) = \frac{1}{2}[\text{Tr}(\mathbb{1} - X)]^{\frac{1}{2}}.$$

Aqui M e μ são constantes de acoplamento e possuem dimensões de $[\text{comprimento}]^{-1}$ e $[\text{comprimento}]^{-2}$, respectivamente. A variável principal X parametriza o espaço coset $SU(N+1)/SU(N) \otimes U(1) = \mathbb{C}P^N$. A variável principal pode, ainda, ser parametrizada em termos de campos complexos u_i na forma:

$$X(g) = g^2 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{N \times N} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{2}{\theta^2} \begin{pmatrix} -u \otimes u^\dagger & iu \\ iu^\dagger & 1 \end{pmatrix},$$

onde $\theta := \sqrt{1 + u^\dagger \cdot u}$. Utilizando essa parametrização, podemos reescrever a Lagrangiana como

$$\mathcal{L} = -M^2 \eta^{\mu\nu} \tau_{\nu\mu} - \mu^2 V,$$

onde $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ e

$$\tau_{\nu\mu} := -4 \frac{\partial_\mu u^\dagger \cdot \Delta^2 \cdot \partial_\nu u}{(1 + u^\dagger \cdot u)^2}, \quad \Delta_{ij}^2 = \theta^2 \delta_{ij} - u_i u_j^*.$$

Quando acoplado com o campo gravitacional, o modelo apresenta soluções do tipo estrela de bóson (*boson-star*) e *boson-shell* (KLIMAS; SAWADO; YANAI, 2019; YANAI, 2019; SAWADO; YANAI, 2020; SAWADO; YANAI, 2021a). As *boson-shells* são particularmente interessantes, pois podem conter outras soluções em seu interior. A solução que fica confinada no centro da Q-shell consiste de um buraco negro, semelhante à um buraco negro de Schwarzschild (KLEIHAUS; KUNZ; LÄMMERZAHN; LIST, 2010).

Teorias que consideram dois ou mais campos escalares, i.e., modelos de campos escalares multicomponentes, são interessantes tanto do ponto de vista teórico quanto experimental. Do ponto de vista teórico, é sabido que modelos com dois campos escalares apresentam sólitons. Um exemplo famoso é o caso do vórtice (WITTEN, 1985). Outro

² abrigo, porto.

exemplo de modelo com vários campos é o óscilon (BOGOLYUBSKII; MAKHAN'KOV, 1976; GLEISER, 1994; COPELAND; GLEISER; MÜLLER, 1995). Um ponto importante a ser ressaltado é que no modelo com dois campos escalares o tempo de vida das soluções é muito maior quando comparado com o modelo com apenas um campo.

Neste trabalho, construiremos soluções Q-ball e Q-shell para o modelo $\mathbb{C}P^N$ sigma não linear estendido para campos multicomponentes. Conforme mostrado em (KLIMAS; LIVRAMENTO, 2017; KLIMAS; SAWADO; YANAI, 2019; SAWADO; YANAI, 2020), para $l = 0, 1$ ($N := 2l + 1$), as soluções assumem a forma de Q-balls compactas, enquanto para $l \geq 2$ as mesmas se tornam Q-shells. Sendo assim, considerando um modelo multicomponente, podemos construir novas soluções do tipo *harbor* inserindo uma Q-ball dentro de uma Q-shell, dentro de outra Q-shell e assim por diante. Essas soluções foram obtidas no decorrer desta pesquisa e apresentadas em um artigo em colaboração (KLIMAS; KUBASKI; SAWADO; YANAI, 2021).

Em seguida, estudamos um modelo com simetria local $U(1)$. Nesse modelo, existe um campo eletromagnético associado com a carga elétrica das Q-balls/shells. Assim, no final desta dissertação, apresentaremos soluções compactas com carga elétrica em um modelo $\mathbb{C}P^N$ multicomponente.

1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Começaremos analisando o modelo $\mathbb{C}P^N$, em $3 + 1$ dimensões, estendido por um termo potencial não diferenciável em seu mínimo. Veremos que existem algumas condições que devem ser satisfeitas para que o modelo possa apresentar soluções compactas não topológicas. Além disso, veremos que a forma e as propriedades das soluções permitem a existência de configurações estáveis acopladas.

1.1 COMPACTONS EM MODELOS COM POTENCIAL NÃO DIFERENCIÁVEL

Segundo (ARODZ, 2002), existem soluções de equações não lineares que possuem suporte compacto. Essas soluções são chamadas de *compactons*. Essas estruturas foram amplamente estudadas no contexto de equações K-dV e K-dV modificadas, sendo o termo compacton originalmente proposto por (ROSENAU; HYMAN, 1993).

As Q-balls são exemplos de sólitons não topológicos que aparecem em certos modelos não lineares com campo escalar complexo. Tipicamente, os potenciais considerados nesses modelos possuem comportamento suave próximo ao seu mínimo, o que faz com que as soluções apresentem uma cauda exponencial característica que se estende por todo o espaço (LEE; PANG, 1992). Conseqüentemente, um modelo contendo duas soluções desse tipo implicaria, necessariamente, na interação entre as soluções, uma vez que haveria a superposição dos campos, independente da distância entre os máximos de energia de cada solução. Com isso, outras formas de potenciais têm sido propostas para obter soluções compactas (ARODZ; KLIMAS; TYRANOWSKI, 2005; BAZEIA; LOSANO; MARQUES; MENEZES; ROCHA, 2016).

Neste trabalho, focaremos no caso de potenciais do tipo *V-shaped*. Apesar desse tipo de potencial parecer artificial, ele possui um análogo mecânico muito simples. Alguns exemplos podem ser vistos em (ARODZ, 2002; ARODZ; KLIMAS; TYRANOWSKI, 2005; ARODZ; KLIMAS, 2005). Conforme mostrado em (ARODZ, 2002), para um modelo com kinks e um potencial em formato V, a presença de um potencial não diferenciável em seu mínimo faz com que as soluções passem a alcançar o estado de vácuo a uma distância finita, garantindo um suporte compacto às soluções. Esse comportamento surge (ARODZ; KLIMAS; TYRANOWSKI, 2005) devido ao fato das primeiras derivadas do potencial, de ambos os lados, serem não nulas na vizinhança do mínimo, fazendo com que alcancem o vácuo de forma polinomial.

Um dos modelos mais simples e que possui soluções do tipo Q-balls compactas é o signum-Gordon complexo (ARODZ; LIS, 2008). A Lagrangiana desse modelo toma a forma $\mathcal{L} = \partial_\mu \psi^* \partial^\mu \psi - \lambda |\psi|^4$, onde ψ é um campo escalar complexo, $\lambda > 0$ é a constante de acoplamento. O termo potencial $\lambda |\psi|^4$ é claramente não diferenciável no seu mínimo. Nesse caso, os campos alcançam o vácuo de maneira quadrática (comportamento típico de modelos signum-Gordon com termo cinético quadrático). A equação de signum-Gordon é

equivalente à uma equação de onda com o termo não homogêneo igual à ± 1 . Nos domínios onde a solução tem sinal fixo pode-se obter as soluções (chamadas de soluções parciais). A solução da equação completa é dada através do casamento apropriado entre soluções parciais e a solução de vácuo constante. A união dessas soluções corresponde às bordas dos compactons. O modelo mencionado acima é o caso limite do modelo $\mathbb{C}P^N$ estudado por (KLIMAS; LIVRAMENTO, 2017), que será apresentado a seguir e, que por sua vez, é caso limite do modelo estudado neste trabalho.

1.2 O MODELO $\mathbb{C}P^N$ PADRÃO COM POTENCIAL NÃO DIFERENCIÁVEL

Os modelos $\mathbb{C}P^N$, i.e., modelos em um espaço complexo projetivo N -dimensional (ZAKRZEWSKI, 1988), apresentam uma relação muito próxima com os modelos σ não lineares, os quais possuem aplicações em diversas áreas da física (FRADKIN, 2013; INAMI; NAKAJIMA, 2004). A definição geral de um modelo σ não linear pode ser dada da seguinte forma (D'ADDA; LÜSCHER; VECCHIA, 1978): seja G um grupo de Lie compacto e H um subgrupo fechado de G . O modelo σ não linear G/H é uma teoria de campos $\phi(x)$ no espaço-tempo que toma valores no espaço coset G/H . O grupo G atua nos campos de acordo com transformação $\phi'(x) = g\phi(x)$, $g \in G$. Para definir uma ação S para os campos $\phi(x)$ que seja invariante em relação a essa transformação, tomamos uma métrica G -invariante em G/H e definimos

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \sum_{\mu=0}^3 \langle \partial_\mu \phi(x), \partial_\mu \phi(x) \rangle,$$

onde os *brackets* $\langle \partial_\mu \phi, \partial_\mu \phi \rangle$ representam a distância ao quadrado de $\partial_\mu \phi$ com relação à métrica escolhida em G/H . Aqui consideramos um espaço-tempo quadridimensional e Euclidiano, mas o modelo pode ser definido para qualquer dimensão e com qualquer métrica.

O modelo $\mathbb{C}P^N$ pode ser construído tomando

$$G = SU(N + 1), \quad H = SU(N) \otimes U(1).$$

Nesse caso, G/H pode ser identificado com o espaço complexo projetivo N -dimensional, i.e., o espaço de todas as classes de equivalência $[z]$ de vetores complexos $(z_1, \dots, z_{N+1}) \neq 0$. Aqui, é conveniente simplificar a notação: ao invés de considerarmos campos $[z](x)$, restringimos à campos de vetores complexos unitários

$$(z_1(x), \dots, z_{N+1}(x)), \quad |z_1|^2 + \dots + |z_{N+1}|^2 = 1.$$

O espaço $\mathbb{C}P^N$ pode ser parametrizado em termos da variável principal X (EICHENHERR; FORGER, 1980; FERREIRA; OLIVE, 1985; FERREIRA; LEITE, 1999),

$$X(g) := g\sigma(g)^{-1}, \quad g \in SU(N + 1),$$

satisfazendo $X(gk) = X(g)$ para $\sigma(k) = k$, onde $k \in SU(N) \otimes U(1)$ e σ é um automorfismo involutivo ($\sigma^2 = 1$) que mantém o subgrupo $SU(N) \otimes U(1)$ invariante. A Lagrangiana do modelo estendido por um potencial não diferenciável é dada por (KLIMAS; LIVRAMENTO, 2017)

$$\mathcal{L} = -\frac{M^2}{2} \text{Tr}(X^{-1} \partial_\mu X)^2 - \mu^2 V(X),$$

onde M possui a dimensão de massa. Assumindo a representação $(N+1)$ -dimensional na qual o elemento $g \in SU(N+1)$ é parametrizado por um conjunto de campos complexos u_i , $i = 1, \dots, N$, temos

$$g \equiv \frac{1}{\theta} \begin{pmatrix} \Delta & iu \\ iu^\dagger & 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta_{ij} \equiv \theta \delta_{ij} - \frac{u_i u_j^*}{1 + \theta}, \quad \theta \equiv \sqrt{1 + u^\dagger \cdot u}, \quad (1.1)$$

o que nos permite reescrever a variável principal como:

$$X(g) = g^2 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{N \times N} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{2}{\theta^2} \begin{pmatrix} -u \otimes u^\dagger & iu \\ iu^\dagger & 1 \end{pmatrix}.$$

Utilizando essa parametrização, podemos reescrever a Lagrangiana como

$$\mathcal{L} = -M^2 \eta^{\mu\nu} \tau_{\nu\mu} - \mu^2 V,$$

onde $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ e

$$\tau_{\nu\mu} := -4 \frac{\partial_\mu u^\dagger \cdot \Delta^2 \cdot \partial_\nu u}{(1 + u^\dagger \cdot u)^2}, \quad \Delta_{ij}^2 = \theta^2 \delta_{ij} - u_i u_j^*.$$

De forma a obter soluções compactas, o termo potencial $V(X)$ é escolhido como (ARODZ; KLIMAS; TYRANOWSKI, 2005; ARODZ, 2002)

$$V(X) = \frac{1}{2} [\text{Tr}(\mathbb{1} - X)]^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{u^\dagger \cdot u}{1 + u^\dagger \cdot u} \right)^{\frac{1}{2}},$$

que é uma generalização para o $\mathbb{C}P^N$ do caso $\mathbb{C}P^1$ (baby skyrmions) (ADAM; KLIMAS; SANCHEZ-GUILLEN; WERESZCZYŃSKI, 2009). Note que quando $u_i = 0$, i.e., $X = \mathbb{1}$, o potencial se anula, porém a primeira derivada (de ambos os lados) é não nula na região do mínimo. Ainda, no limite para campos pequenos, i.e., $u \rightarrow 0$ temos que $V \sim |u|$. Conforme mencionado anteriormente, essa é uma característica dos potenciais do tipo *V-shaped*, que permite a existência de soluções compactas no modelo.

A variação da ação $\mathcal{S} = \int_\Omega d^4x \mathcal{L}$ com relação aos campos u_i^* , assim como seu complexo conjugado u_i (que se torna redundante) leva às equações de Euler-Lagrange. Os termos envolvendo segundas derivadas podem ser desacoplados utilizando a inversa de Δ_{ij}^2 , dada por $\Delta_{jl}^{-2} = \frac{1}{1 + u^\dagger \cdot u} (\delta_{jl} + u_j u_l^*)$. As equações obtidas através de $\delta_{u_i^*} \mathcal{L} = 0$ são

$$\partial_\mu \partial^\mu u_i - 2 \frac{(u^\dagger \cdot \partial^\mu u) \partial_\mu u_i}{1 + u^\dagger \cdot u} + \frac{\mu^2}{8M^2} \frac{u_i}{\sqrt{u^\dagger \cdot u}} \sqrt{1 + u^\dagger \cdot u} = 0. \quad (1.2)$$

Vale notar que, diferentemente do que ocorre no caso de potenciais diferenciáveis, a solução de vácuo constante não satisfaz a equação de movimento contendo o termo de potencial não trivial V , mas sim a equação do modelo sem o termo potencial. Por outro lado, a existência de soluções constantes pode ser deduzida a partir da densidade de energia, que nesse caso é dada por

$$\mathcal{H} := -M^2 \left(\tau_{00} + \sum_{a=1}^3 \tau_{aa} \right) + \mu^2 V.$$

A configuração com todos os campos escalares nulos, $u_i = 0, i = 1, \dots, N$, minimiza a energia e, por consequência, deve ser considerada como uma configuração física. O fato de que essa configuração não é contemplada na equação (1.2) é típico de modelos com potencial não diferenciável. Esse problema pode ser resolvido através da definição adequada da função *signum* (sinal), escolhendo $\text{sgn}(0) \equiv 0$. Por consequência, a solução parcial compacta não nula deve satisfazer a equação (1.2), enquanto a configuração de vácuo deve satisfazer a equação $\mathbb{C}P^N$ homogênea

$$\partial_\mu \partial^\mu u_i - 2 \frac{(u^\dagger \cdot \partial^\mu u) \partial_\mu u_i}{1 + u^\dagger \cdot u} = 0. \quad (1.3)$$

Em um primeiro momento, esse procedimento pode parecer artificial; porém, o potencial não diferenciável pode ser considerado como um limite de um potencial regularizado. No caso do potencial regularizado a solução de vácuo satisfaz as equações de Euler-Lagrange independente de quão pequeno seja o parâmetro que regulariza o potencial.

Em termos da parametrização (1.1), a Lagrangiana do modelo é invariante sob transformações globais dos campos u_i dadas por

$$u_i \rightarrow e^{i\alpha_i} u_i, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

onde α_i são um conjunto de parâmetros contínuos. Essa simetria do modelo leva um conjunto de correntes conservadas de Noether que possuem a seguinte forma

$$J_\mu^{(i)} = -\frac{4iM^2}{(1 + u^\dagger \cdot u)^2} \sum_{j=1}^N [u_i^* \Delta_{ij}^2 \partial_\mu u_j - \partial_\mu u_j^* \Delta_{ji}^2 u_i]. \quad (1.4)$$

As correntes (1.4) satisfazem a equação de continuidade $\partial^\mu J_\mu^{(i)} = 0$. Integrando (1.4) no espaço-tempo $[t', t''] \times \mathbb{R}^3$, supondo que as componentes espaciais das correntes vão à zero no infinito espacial, obtemos as cargas conservadas de Noether

$$Q_0^{(i)} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x J_0^{(i)}.$$

1.2.1 Soluções do modelo $\mathbb{C}P^{2l+1}$

Considere um número ímpar N de campos complexos, i.e, $N = 2l + 1, l = 0, 1, \dots$. Com isso, é possível representar a parte angular do operador de Laplace e os campos

complexos em função dos harmônicos esféricos. Por conveniência, os $2l+1$ campos complexos são indexados de u_{-l}, \dots, u_l . Com isso, temos o espaço alvo $\mathbb{C}P^{2l+1}$.

O modelo é parametrizado por coordenadas adimensionais, i.e., $\tilde{x}^\mu := r_0^{-1}x^\mu$, onde r_0 é uma constante com dimensão de comprimento e pode ser escolhida como $r_0 \equiv M^{-1}$. Consideramos o ansatz de Q-balls

$$u_m(t, r, \theta, \phi) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} f(r) Y_{lm}(\theta, \phi) e^{i\omega t}, \quad (1.5)$$

onde as coordenadas (t, r, θ, ϕ) são adimensionais e definidas pelas seguintes relações:

$$\begin{aligned} \tilde{x}^0 &= t, & \tilde{x}^1 &= r \sin \theta \cos \phi, \\ \tilde{x}^2 &= r \sin \theta \sin \phi, & \tilde{x}^3 &= r \cos \theta. \end{aligned}$$

Segue que $u^\dagger u = f^2(r)$ depende somente da coordenada radial. De maneira análoga, outros termos ou são nulos, ou dependem apenas da coordenada radial. Utilizando o ansatz, as equações (1.2) e (1.3) resultam em uma única equação diferencial de segunda ordem puramente radial

$$f'' + \frac{2}{r} f' + \omega^2 \frac{1-f^2}{1+f^2} f - \frac{l(l+1)}{r^2} f - \frac{2ff'^2}{1+f^2} = \frac{\tilde{\mu}^2}{8} \text{sgn}(f) \sqrt{1+f^2}, \quad (1.6)$$

onde $\tilde{\mu}^2 := \mu^2/M^4$ e é adotada a definição da função $\text{sgn}(f)$ como $\text{sgn}(f) := 1$ para $f > 0$ e $\text{sgn}(0) := 0$. Utilizando (1.5), podemos reescrever a densidade Hamiltoniana adimensional como

$$H = \frac{4}{(1+f^2)^2} \left[f'^2 + \left(\omega^2 + \frac{l(l+1)}{r^2} (1+f^2) \right) f^2 \right] + \tilde{\mu}^2 \sqrt{\frac{f^2}{1+f^2}}.$$

A energia total adimensional pode ser obtida integrando a densidade Hamiltoniana em todo o espaço

$$E = \int_{\mathbb{R}^3} d\Omega dr r^2 H.$$

Em função das coordenadas adimensionais, a equação de continuidade assume a forma

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \tilde{J}_\nu^{(m)}(\xi)) = 0,$$

onde $\xi^\mu = \{t, r, \theta, \phi\}$, $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -\frac{1}{r^2}, -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta})$, $\sqrt{-g} = r^2 \sin \theta$ e $J_\nu^{(m)} = M^3 \tilde{J}_\nu^{(m)}$, $m = -l, \dots, l$. As únicas componentes não nulas são

$$\begin{aligned} \tilde{J}_t^{(m)}(r, \theta) &= 8\omega \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \frac{f^2}{(1+f^2)^2} (P_l^m(\cos \theta))^2, \\ \tilde{J}_\phi^{(m)}(r, \theta) &= 8m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \frac{f^2}{1+f^2} (P_l^m(\cos \theta))^2. \end{aligned}$$

Note que ambas as equações não dependem de t ou ϕ e portanto a equação de continuidade é satisfeita explicitamente. As cargas podem ser obtidas integrando a equação de continuidade

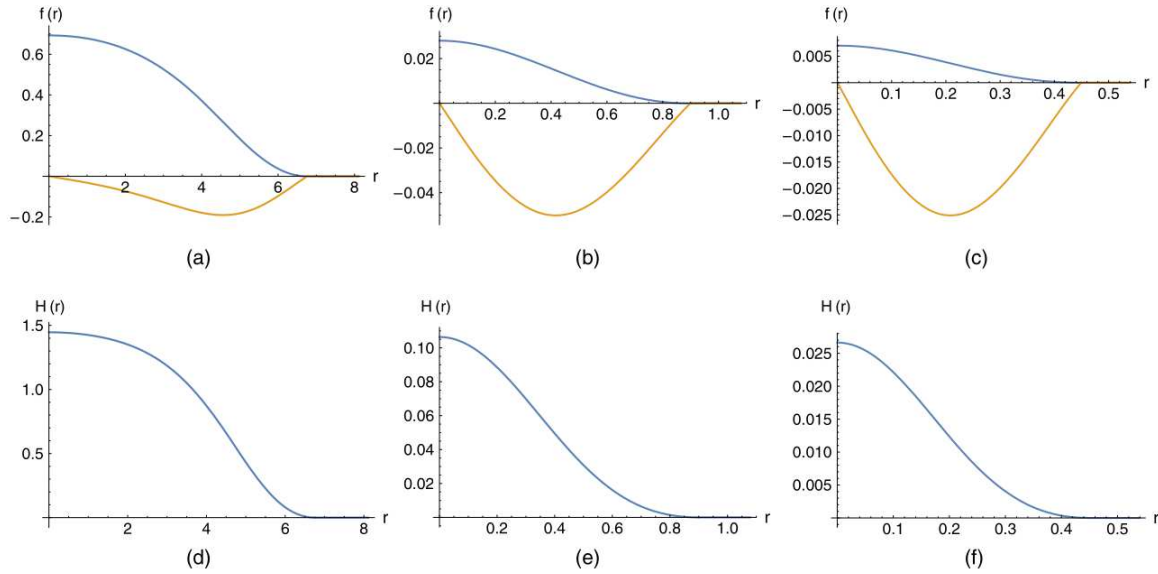


Figura 1 – Q-balls no modelo $\mathbb{C}P^1$ ($l = 0$). Nas figuras (a), (b) e (c) temos a função radial $f(r)$ (curva superior) e sua derivada $f'(r)$ (curva inferior). Nas figuras (d), (e) e (f) temos as respectivas densidades de energia $H(r)$. $\omega = 1.0$ em (a),(d); $\omega = 5.0$ em (b),(e) e $\omega = 10.0$ em (c),(f). Essa Figura foi extraída diretamente de (KLIMAS; LIVRAMENTO, 2017).

na região $[t', t''] \times \mathbb{R}^3$. Supondo que as correntes vão à zero no infinito espacial, apenas a componente t contribui para as cargas de Noether, sendo dada por

$$Q_t^{(m)} = \omega \frac{16\pi}{2l+1} \int_0^\infty dr r^2 \frac{f^2}{(1+f^2)^2}.$$

Como a expressão não depende de m , todas as cargas possuem o mesmo valor.

1.2.1.1 Soluções numéricas

As soluções do modelo são obtidas numericamente através do *shooting method* para a integração numérica da equação radial (1.6). São impostas condições iniciais para a integração numérica em termos dos primeiros termos de uma expansão em série em $r = 0$ para $l = 0, 1$ ou $r = R$ para $l \geq 2$. Os detalhes desse procedimento serão omitidos aqui e discutidos no capítulo 2.3. Na Figura 1 temos exemplos de soluções numéricas para o caso $l = 0$ para diferentes valores de ω . A função radial $f(r)$ e suas derivadas $f'(r)$ são apresentadas na Figura 1(a)- 1(c). As respectivas densidades de energia são apresentadas na Figura 1(d)-1(f). A densidade de energia é máxima em $r = 0$.

Na Figura 2 são apresentadas as soluções para o modelo $\mathbb{C}P^3$ ($l = 1$). Pode-se ver que a principal diferença entre o caso $l = 0$ e $l = 1$ está na forma da solução em $r = 0$. Para $l = 1$ a função $f(r)$ é nula na origem, enquanto sua primeira derivada $f'(r = 0)$ é finita. A densidade de energia é não nula em $r = 0$, porém, $H(0)$ não representa um máximo. O máximo de $H(r)$ fica localizado à uma distância finita do centro. No caso de modelos com $l \geq 2$, surge um raio interno $R_1 > 0$ e as soluções passam a ser não nulas apenas

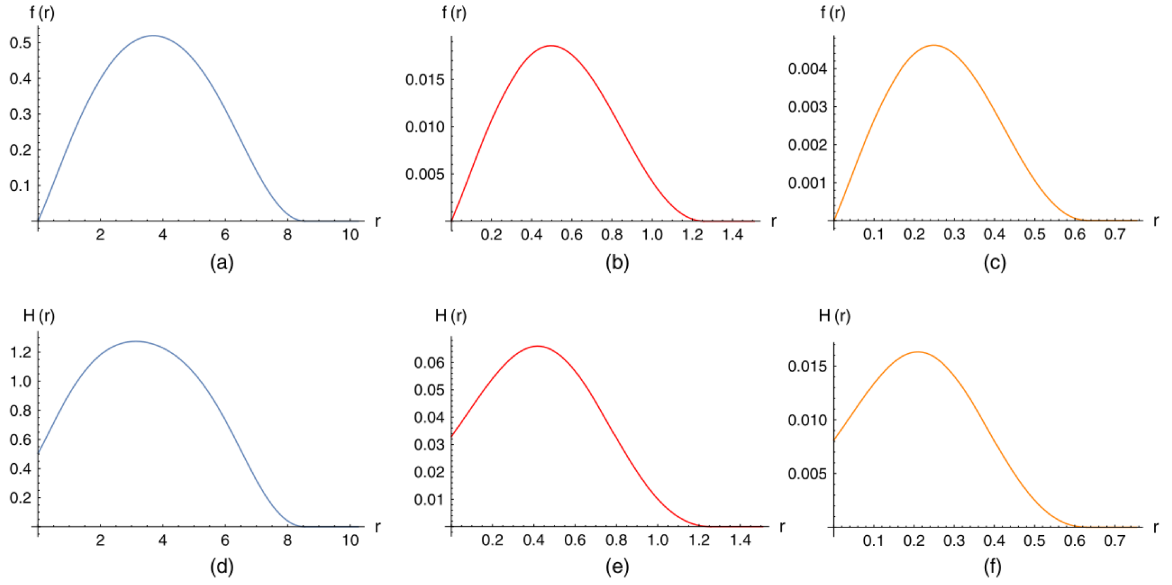


Figura 2 – Q-balls no modelo $\mathbb{C}P^3$ ($l = 1$). Nas figuras (a)-(c) temos a função radial $f(r)$. Nas figuras (d)-(f) temos as respectivas densidades de energia $H(r)$. $\omega = 1.0$ em (a),(d); $\omega = 5.0$ em (b),(e) e $\omega = 10.0$ em (c),(f). Essa Figura foi extraída diretamente de (KLIMAS; LIVRAMENTO, 2017).

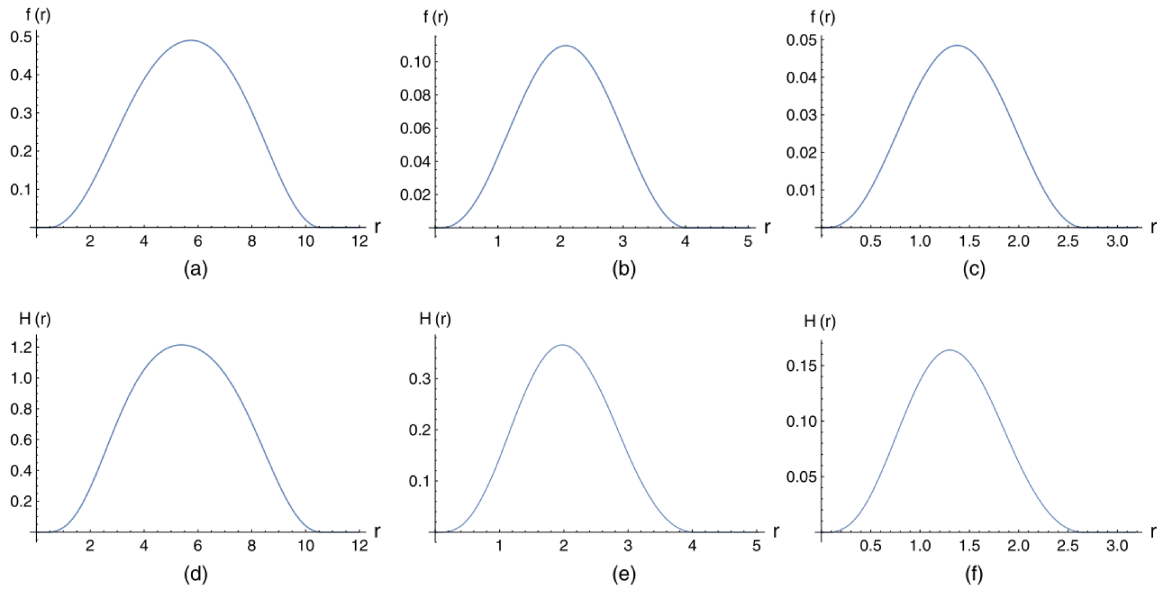


Figura 3 – Q-shells no modelo $\mathbb{C}P^5$ ($l = 2$). Nas figuras (a)-(c) temos a função radial $f(r)$. Nas figuras (d)-(f) temos as respectivas densidades de energia $H(r)$. $\omega = 1.0$ em (a),(d); $\omega = 2.0$ em (b),(e) e $\omega = 3.0$ em (c),(f). Essa Figura foi extraída diretamente de (KLIMAS; LIVRAMENTO, 2017).

numa região $R_1 < r < R_2$, onde R_2 faz o papel de raio externo da solução. Devido à isso, soluções com $l \geq 2$ são chamadas de Q-shell. Os raios internos e externos das soluções crescem com o aumento de l . Isso pode ser visto a partir das Figuras 3 e 4. Em todos os casos, os raios decrescem com o aumento de ω .

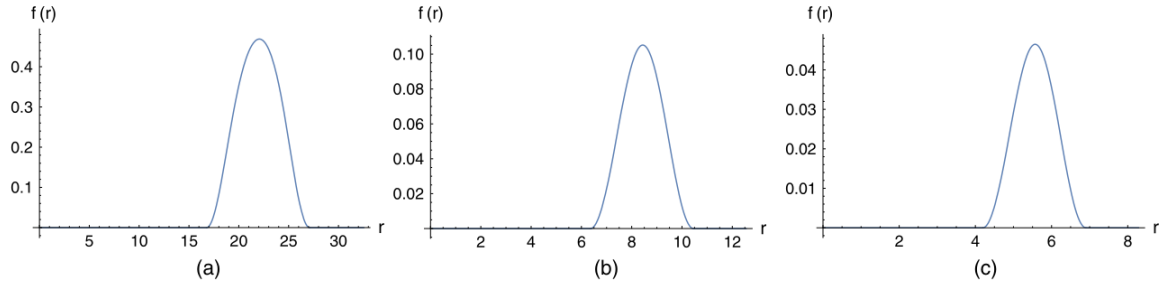


Figura 4 – Q-shells no modelo $\mathbb{C}P^{21}$ ($l = 10$). Nas figuras (a)-(c) temos a função radial $f(r)$. (a) $\omega = 1.0$, (b) $\omega = 2.0$ e (c) $\omega = 3.0$. Essa Figura foi extraída diretamente de (KLIMAS; LIVRAMENTO, 2017).

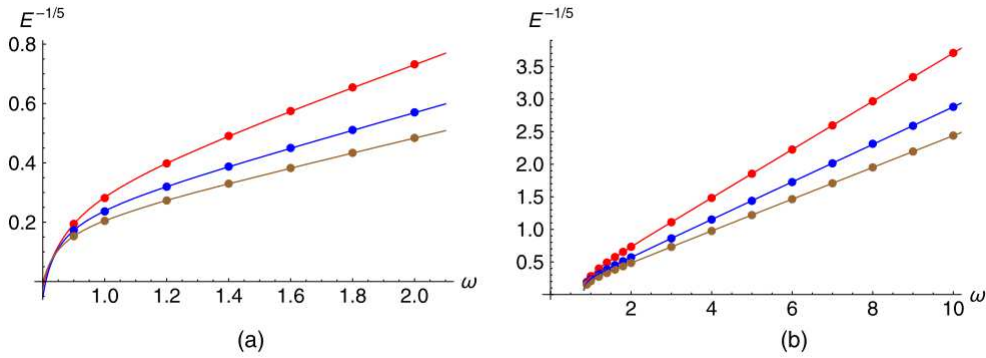


Figura 5 – Energia do compacton em função da variável ω para (de cima para baixo) $l = 0$, $l = 1$ e $l = 2$. Essa Figura foi extraída diretamente de (KLIMAS; LIVRAMENTO, 2017).

A energia total das soluções pode ser colocada na forma

$$E = 4\pi \int_0^\infty dr r^2 \left(\frac{4f'^2}{(1+f^2)^2} + \tilde{\mu}^2 \sqrt{\frac{f^2}{1+f^2}} \right) + \sum_{m=-l}^l (\omega Q_t^{(m)} + m Q_\phi^{(m)}),$$

onde $Q_\phi^{(m)}$ não representa uma carga de Noether, mas sim uma integral definida, por conveniência, como

$$Q_\phi^{(m)} := \frac{3}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\xi \sqrt{-g} \frac{\tilde{J}_\phi^{(m)}(\xi)}{r^2} = m \frac{48\pi}{2l+1} \int_0^\infty dr \frac{f^2}{1+f^2}.$$

Tanto E quanto Q_t dependem de ω (o índice m foi omitido, uma vez que as cargas Q_t não dependem de m). Através de uma análise numérica do comportamento de E para diferentes valores de ω , é possível observar que $E^{-\frac{1}{5}}$ é uma função linear de ω , para $\omega \gg 1$. Na Figura 5 é apresentada a relação $E - \omega$. Fazendo o gráfico de $E^{-\frac{1}{5}}$ como função de ω , podemos ver um comportamento linear para ω 's grandes. De maneira análoga, é realizada a análise da dependência de Q_t em função do parâmetro ω . Essa dependência está apresentada na Figura 6(a), onde podemos perceber que para $\omega \gg 1$ as cargas se comportam como $Q_t \propto \omega^{-6}$. Na Figura 6(b), temos a relação entre a carga e a energia no caso de Q-balls ($l = 0,1$) e Q-shells ($l = 2$). Através das análises numéricas e da Figura 6(b), é possível afirmar que a relação entre a energia $E^{-\frac{1}{5}}$ e as cargas de Noether $Q_t^{-\frac{1}{6}}$

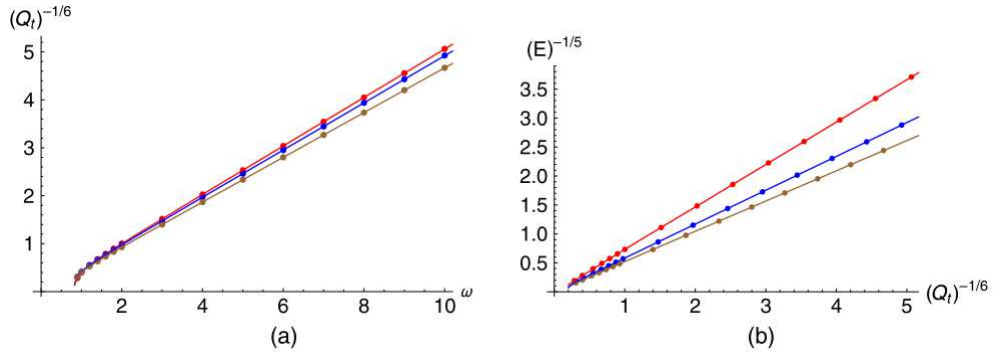


Figura 6 – (a) A Carga de Noether Q_t em função de ω para (de cima para baixo) $l = 0$, $l = 1$ e $l = 2$. (b) Relação entre as cargas de Noether e a energia das soluções para (de cima para baixo) $l = 0$, $l = 1$ e $l = 2$. Essa Figura foi extraída diretamente de (KLIMAS; LIVRAMENTO, 2017).

é linear com uma boa precisão, até mesmo para valores pequenos de ω . Isso significa que as energias dos compactons se comportam como $E \propto Q^{\frac{5}{6}}$ em todo o domínio de ω . O fato de que o valor da potência é menor do que um ($\frac{5}{6} < 1$) implica na estabilidade das Q-balls. Não é energeticamente favorável uma solução decair em outras duas, pois $E(Q_1 + Q_2) < E(Q_1) + E(Q_2)$.

2 O MODELO $\mathbb{C}P^N$ MULTICOMPONENTE

Conforme mencionado no capítulo 1, o modelo $\mathbb{C}P^N$ apresenta soluções do tipo Q-ball com algumas propriedades interessantes. Em particular, o fato das soluções serem compactas sugere que pode ser construído um modelo contendo mais de uma solução no mesmo espaço e, contanto que não haja superposição dos suportes, sem haver interação entre as soluções. Primeiramente, vamos construir a extensão do modelo $\mathbb{C}P^N$ para n campos multicomponentes. Em seguida, sem perda de generalidade, vamos restringir para o caso $n = 2$, onde vamos obter as equações explícitas do modelo. O procedimento para obter as soluções no caso $n \geq 3$ é similar.

2.1 O MODELO

Partindo da densidade Lagrangiana do modelo $\mathbb{C}P^N$ (0.1), podemos estender o modelo $\mathbb{C}P^N$ para n campos através da inclusão de n termos proporcionais à $\text{Tr}(X_a^{-1}\partial_\mu X_a)^2$ da seguinte forma,

$$\mathcal{L} = - \sum_{a=1}^n \frac{M_a^2}{2} \text{Tr}(X_a^{-1}\partial_\mu X_a)^2 - U(\{X_a\}) \quad (2.1)$$

onde X_a ($a = 1, 2, \dots, n$) são as variáveis principais que parametrizam o espaço $\mathbb{C}P^{N_1} \otimes \mathbb{C}P^{N_2} \otimes \dots \otimes \mathbb{C}P^{N_n}$. Cada espaço $\mathbb{C}P^{N_a}$ é um espaço coset $\mathbb{C}P^{N_a} = SU(N_a + 1)/SU(N_a) \otimes U(1)$. A escolha do termo potencial pode ser feita de diversas maneiras. Aqui escolhemos uma forma bastante geral, considerando termos que envolvem polinômios com um número arbitrário de campos

$$U(\{X_a\}) = \sum_a \mu_a^2 V_a(X_a) + \sum_{ab} \lambda_{ab} W_{ab}(X_a, X_b) + \sum_{abc} \omega_{abc} Z_{abc}(X_a, X_b, X_c) + \dots, \quad (2.2)$$

onde os termos \sum_{ab}, \sum_{abc} representam as somas sobre todos os termos possíveis. Note que se o modelo contiver apenas o primeiro termo, com um único somatório, teremos n modelos $\mathbb{C}P^N$ desacoplados.

Conforme discutido na seção 1.1, consideraremos os potenciais V_a sendo *V-shaped*, uma vez que permitem soluções compactas no modelo desacoplado (modelo limite no caso $n = 1$). Assim, temos

$$V_a(X_a) \equiv V(X_a) := \frac{1}{2} \sqrt{\text{Tr}(\mathbb{1} - X_a)}, \quad a = 1, \dots, n, \quad (2.3)$$

onde $\mathbb{1}$ é a matriz identidade $N_a \times N_a$. Apesar do caráter não diferenciável dos potenciais V_a não ser visível a partir da expressão (2.3) dada em função das variáveis principais, vamos manter o nome *V-shaped* e justificá-lo em seguida.

Como estamos interessados em soluções compactas do modelo acoplado, escolhemos os termos de acoplamento do potencial de forma a permitir a existência de Q-balls/Q-shells por uma única componente $\mathbb{C}P^N$ do campo, enquanto as outras tomam os valores do

vácuo, ou seja, quando $n - 1$ componentes tomam o valor do vácuo, a componente restante se desacopla mesmo tendo constantes de acoplamento diferentes de zero. Por essa razão consideramos os seguintes termos de acoplamento

$$W_{ab}(X_a, X_b) \equiv W(X_a, X_b) := V(X_a)^{2\alpha} V(X_b)^{2\beta} = \left(\frac{1}{4} \text{Tr}(\mathbb{1} - X_a) \right)^\alpha \left(\frac{1}{4} \text{Tr}(\mathbb{1} - X_b) \right)^\beta,$$

$$\begin{aligned} Z_{abc}(X_a, X_b, X_c) \equiv Z(X_a, X_b, X_c) &:= V(X_a)^{2\alpha} V(X_b)^{2\beta} V(X_c)^{2\gamma} \\ &= \left(\frac{1}{4} \text{Tr}(\mathbb{1} - X_a) \right)^\alpha \left(\frac{1}{4} \text{Tr}(\mathbb{1} - X_b) \right)^\beta \left(\frac{1}{4} \text{Tr}(\mathbb{1} - X_c) \right)^\gamma \end{aligned}$$

e assim por diante. Aqui $\alpha, \beta, \gamma, \dots \geq 1$. Assumimos ainda que não há repetição de índices, i.e., $a \neq b, a \neq c$, etc. e com isso os coeficientes de (2.2), $\lambda_{ab}, \omega_{abc}, \dots$, se tornam simétricos na troca de índices a, b, c, \dots . Por exemplo, para $n = 3$, definimos dois parâmetros, λ e ω , tais que

$$\lambda := \lambda_{12} = \lambda_{21} = \lambda_{13} = \lambda_{31} = \lambda_{23} = \lambda_{32}, \quad \omega := \omega_{123} \text{ e todas suas permutações}$$

e todos os outros coeficientes sendo zero. Essas simples considerações nos permitem fazer a extensão do modelo para um número arbitrário de campos. De forma a evitar complicações desnecessárias na construção das soluções, vamos nos concentrar na formulação do modelo com $n \leq 3$, ou seja, com no máximo três variáveis principais X_a .

As variáveis principais são dadas por

$$X_a(g_a) := g_a \sigma_a(g_a)^{-1}, \quad a = 1, 2, \dots, n,$$

onde $\sigma_a(k_a) = k_a$ são automorfismos involutivos $\sigma(\sigma(g_a)) = g_a$. Cada variável principal parametriza um espaço coset, $X_a(g_a k_a) = X_a(g_a)$ e $\sigma_a(k_a) = k_a$ onde $k_a \in SU(N_a) \otimes U(1)$. Na representação matricial, os elementos de grupo, $g_a \in SU(N_a + 1)$, são parametrizados pelo conjunto de campos escalares complexos

$$u^{(a)} \equiv \begin{pmatrix} u_1^{(a)} \\ \vdots \\ u_{N_a}^{(a)} \end{pmatrix}, \quad a = 1, 2, \dots, n.$$

A parametrização dos elementos g_a em função dos campos $u^{(a)}$ é realizada da seguinte forma

$$\begin{aligned} g_a &\equiv \frac{1}{\sqrt{1 + u^{(a)\dagger} \cdot u^{(a)}}} \begin{pmatrix} \Delta(u^{(a)}) & iu^{(a)} \\ iu^{(a)\dagger} & 1 \end{pmatrix}, \\ \Delta_{ij}(u^{(a)}) &\equiv \sqrt{1 + u^{(a)\dagger} \cdot u^{(a)}} \delta_{ij} - \frac{u_i^{(a)} u_j^{(a)*}}{1 + \sqrt{1 + u^{(a)\dagger} \cdot u^{(a)}}}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Nessa parametrização, as variáveis principais são escritas como

$$X_a(g_a) = g_a^2 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{N_a \times N_a} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{2}{1 + u^{(a)\dagger} \cdot u^{(a)}} \begin{pmatrix} -u^{(a)} \otimes u^{(a)\dagger} & iu^{(a)} \\ iu^{(a)\dagger} & 1 \end{pmatrix}.$$

Em termos dos campos $u^{(a)}$ e seu conjugado Hermitiano $u^{(a)\dagger}$, a densidade lagrangiana (2.1) possui a forma

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \sum_a \mathcal{L}_a + \mathcal{L}_{int} \tag{2.5} \\ \mathcal{L}_a &:= \mathcal{L}_{kin,a} - \mu_a^2 V_a(u^{(a)\dagger}, u^{(a)}), \quad \mathcal{L}_{kin,a} := -M_a^2 \eta_{\mu\nu} \tau_a^{\nu\mu} \\ \mathcal{L}_{int} &:= -\lambda \sum_{a \neq b} W(u^{(a)\dagger}, u^{(a)}, u^{(b)\dagger}, u^{(b)}) - \omega Z(u^{(1)\dagger}, u^{(1)}, u^{(2)\dagger}, u^{(2)}, u^{(3)\dagger}, u^{(3)}),\end{aligned}$$

com $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ sendo as componentes do tensor métrico no espaço-tempo de Minkowski. A somatória $\sum_{a \neq b}$ estende-se sobre todos os pares (a, b) possíveis, i.e., $(a, b) = (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (3, 2)$. O termo $\tau_a^{\nu\mu}$ é definido como

$$\tau_a^{\nu\mu} = -4 \frac{\partial^\mu u^{(a)\dagger} \cdot \Delta^2(u^{(a)}) \cdot \partial^\nu u^{(a)}}{(1 + u^{(a)\dagger} \cdot u^{(a)})^2} \tag{2.6}$$

onde Δ^2 é o quadrado da matriz Δ , $\Delta_{ij}^2 \equiv \Delta_{ik} \Delta_{kj}$, que é dada por

$$\Delta_{ij}^2(u^{(a)}) = \left(1 + u^{(a)\dagger} \cdot u^{(a)}\right) \delta_{ij} - u_i^{(a)} u_j^{(a)*}.$$

As equações de Euler-Lagrange são obtidas através da variação da ação $S = \int_\Omega d^4x \mathcal{L}$ com relação aos campos $u_k^{(a)}, u_k^{(a)*}$ (supondo que as variações dos campos nas bordas do espaço sejam nulas, i.e., $\delta u_k^{(a)} = \delta u_k^{(a)*} = 0$ na borda $\partial\Omega$). As equações obtidas através da variação de $u_k^{(a)}$ e $u_k^{(a)*}$ são equivalentes (descrevem a mesma física). Por esse motivo, daqui em diante, consideraremos as equações obtidas a partir de $\delta_{u_k^{(a)*}} \mathcal{L} = 0$. Elas são da forma

$$\underbrace{\frac{\delta \mathcal{L}_{kin,a}}{\delta u_k^{(a)*}} - \partial_\alpha \frac{\delta \mathcal{L}_{kin,a}}{\delta (\partial_\alpha u_k^{(a)*})}}_{\text{termos cinéticos}} - \underbrace{\mu_a^2 \frac{\delta V_a}{\delta u_k^{(a)*}} - \lambda \sum_{b \neq c} \frac{\delta W}{\delta u_k^{(a)*}} - \omega \frac{\delta Z}{\delta u_k^{(a)*}}}_{\text{termos potenciais}} = 0 \tag{2.7}$$

onde a é fixo para cada equação e $W \equiv W(u^{(b)\dagger}, u^{(b)}, u^{(c)\dagger}, u^{(c)})$. Multiplicando a equação (2.7) por $-\frac{1}{4} (1 + u^{(a)\dagger} \cdot u^{(a)})^2$ e calculando os termos cinéticos, chegamos nas seguintes equações

$$\Delta_{kl}^2(u^{(a)}) K_l^{(a)}(u^{(a)}) + \frac{1}{4} (1 + u^{(a)\dagger} \cdot u^{(a)})^2 \left[\mu_a^2 \frac{\delta V_a}{\delta u_k^{(a)*}} + \lambda \sum_{b \neq c} \frac{\delta W}{\delta u_k^{(a)*}} + \omega \frac{\delta Z}{\delta u_k^{(a)*}} \right] = 0, \tag{2.8}$$

onde $K_l^{(a)}$ representa a contribuição dos termos cinéticos e é dada por

$$K_l^{(a)}(u^{(a)}) \equiv M_a^2 \eta_{\mu\nu} \left[\partial^\mu \partial^\nu u_l^{(a)} - \frac{(u^{(a)\dagger} \cdot \partial^\mu u^{(a)}) \partial^\nu u_l^{(a)} + (u^{(a)\dagger} \cdot \partial^\nu u^{(a)}) \partial^\mu u_l^{(a)}}{1 + u^{(a)\dagger} \cdot u^{(a)}} \right].$$

A matriz $\Delta_{kl}^2(u^{(a)})$ é inversível e sua inversa é dada por $\Delta_{kl}^{-2} = \frac{1}{1 + u^\dagger \cdot u} (\delta_{kl} + u_k u_l^*)$. Multiplicando (2.8) pela matriz inversa, podemos desacoplar os termos contendo derivadas de segunda ordem. O resultado dessa operação é

$$K_l^{(a)}(u^{(a)}) + \frac{1}{4} (1 + u^{(a)\dagger} \cdot u^{(a)})^2 \Delta_{lk}^{-2}(u^{(a)}) \left[\mu_a^2 \frac{\delta V_a}{\delta u_k^{(a)*}} + \lambda \sum_{b \neq c} \frac{\delta W}{\delta u_k^{(a)*}} + \omega \frac{\delta Z}{\delta u_k^{(a)*}} \right] = 0.$$

As equações de movimento do modelo $\mathbb{C}P^N$ simples podem ser obtidas tomando $U = 0$; nesse caso temos $K_l^{(a)}(u^{(a)}) = 0$.

Daqui em diante, estudaremos o caso $n = 2$, i.e., o modelo contendo dois campos (duas variáveis principais) $\mathbb{C}P^N$. Em tal modelo $Z \rightarrow 0$ e, portanto, apenas o potencial $W(X_1, X_2)$ fica responsável pelo acoplamento entre os campos. Por conveniência, escrevemos $u^{(1)} \rightarrow u, u^{(2)} \rightarrow v$. Como queremos soluções com energia finita, consideraremos potenciais $V_1(u^\dagger, u)$ e $V_2(v^\dagger, v)$ na forma (2.3), que possui caráter *V-shaped* no seu mínimo:

$$V_1 = \left(\frac{u^\dagger \cdot u}{1 + u^\dagger \cdot u} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad V_2 = \left(\frac{v^\dagger \cdot v}{1 + v^\dagger \cdot v} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Os potenciais (2.1) são da mesma forma do que os utilizados no modelo $\mathbb{C}P^N$ padrão (KLIMAS; LIVRAMENTO, 2017). Portanto, desligando a interação, ou seja, tomando $\lambda = 0$, temos dois modelos $\mathbb{C}P^N$ desacoplados com potenciais que suportam compactons. O potencial de acoplamento W é escrito como

$$W(u^\dagger, u, v^\dagger, v) = \left(\frac{u^\dagger \cdot u}{1 + u^\dagger \cdot u} \right)^\alpha \left(\frac{v^\dagger \cdot v}{1 + v^\dagger \cdot v} \right)^\beta,$$

onde, $\alpha, \beta \geq 1$. Inserindo as expressões explícitas dos potenciais na equação de movimento (2.1), com $a = 1, 2$, temos

$$K_l^{(1)} + \frac{\mu_1^2}{8} \sqrt{1 + u^\dagger \cdot u} \frac{u_l}{\sqrt{u^\dagger \cdot u}} + \frac{\lambda \alpha}{4} \left(\frac{u^\dagger \cdot u}{1 + u^\dagger \cdot u} \right)^{\alpha-1} \left(\frac{v^\dagger \cdot v}{1 + v^\dagger \cdot v} \right)^\beta u_l = 0, \quad (2.9)$$

$$K_r^{(2)} + \frac{\mu_2^2}{8} \sqrt{1 + v^\dagger \cdot v} \frac{v_r}{\sqrt{v^\dagger \cdot v}} + \frac{\lambda \beta}{4} \left(\frac{u^\dagger \cdot u}{1 + u^\dagger \cdot u} \right)^\alpha \left(\frac{v^\dagger \cdot v}{1 + v^\dagger \cdot v} \right)^{\beta-1} v_r = 0, \quad (2.10)$$

onde $l = 1, 2, \dots, N_1$ e $r = 1, 2, \dots, N_2$.

Por conveniência, podemos escrever as equações de campo na sua forma adimensional. As variáveis X_a e os campos u_l e v_r são adimensionais. Por outro lado, as coordenadas espaciais x^μ tem dimensão de comprimento. A escala de comprimento característico pode ser dada em função das constantes dimensionais M_a^2, μ_a^2 e λ (ou suas combinações), onde¹ $[M_a^2] = L^{-1}, [\mu_a^2] = [\lambda] = L^{-4}$. Seja r_0 o comprimento característico, $[r_0] = L$. Podemos, então, substituir as coordenadas dimensionais por suas respectivas formas adimensionais colocando a escala de comprimento explicitamente: $x^\mu \rightarrow x^\mu = r_0 \tilde{x}^\mu, \partial_\mu \rightarrow r_0^{-1} \tilde{\partial}_\mu$. As coordenadas adimensionais (t, r, θ, ϕ) são definidas através das seguintes relações:

$$\begin{aligned} \tilde{x}^0 &= t, & \tilde{x}^1 &= r \sin \theta \cos \phi, \\ \tilde{x}^2 &= r \sin \theta \sin \phi, & \tilde{x}^3 &= r \cos \theta. \end{aligned}$$

Isso leva às expressões adimensionais

$$\tilde{K}_l^{(1)} := M_1^{-2} r_0^2 K_l^{(1)}, \quad \tilde{K}_r^{(2)} := M_2^{-2} r_0^2 K_r^{(2)}.$$

¹ A notação $[\cdot]$ representa a dimensão do parâmetro. L representa a dimensão de comprimento.

Em seguida, multiplicamos (2.9) por $M_1^{-2}r_0^2$ e (2.10) por $M_2^{-2}r_0^2$ e definimos as constantes de acoplamento

$$\tilde{\mu}_1^2 := M_1^{-2}r_0^2\mu_1^2, \quad \tilde{\mu}_2^2 := M_2^{-2}r_0^2\mu_2^2, \quad \lambda_1 := M_1^{-2}r_0^2\lambda, \quad \lambda_2 := M_2^{-2}r_0^2\lambda.$$

As equações de campo adimensionais possuem a mesma forma das equações (2.9) e (2.10) com $K_l^{(1)} \rightarrow \tilde{K}_l^{(1)}, K_r^{(2)} \rightarrow \tilde{K}_r^{(2)}, \mu_1^2 \rightarrow \tilde{\mu}_1^2, \mu_2^2 \rightarrow \tilde{\mu}_2^2$ e $\lambda \rightarrow \lambda_1$ em (2.9) e $\lambda \rightarrow \lambda_2$ em (2.10).

2.2 O ANSATZ Q-BALL/Q-SHELL

Seguindo os passos de (KLIMAS; LIVRAMENTO, 2017), queremos obter uma forma reduzida das equações de movimento que dependa exclusivamente da coordenada radial r . Vale lembrar que, no limite em que $\lambda = 0$, devemos recuperar dois modelos $\mathbb{C}P^N$ desacoplados. Sendo assim, considere o caso onde N_1 e N_2 são dois números ímpares. Tome $N_1 = 2l_1 + 1$, $N_2 = 2l_2 + 1$ e considere o seguinte ansatz para os campos u_{m_1}, v_{m_2} , proporcionais aos harmônicos esféricos Y_l^m :

$$u_{m_1}(t, r, \theta, \phi) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l_1 + 1}} f(r) Y_{l_1, m_1}(\theta, \phi) e^{i\omega_1 t}, \quad (2.11)$$

$$v_{m_2}(t, r, \theta, \phi) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l_2 + 1}} g(r) Y_{l_2, m_2}(\theta, \phi) e^{i\omega_2 t}, \quad (2.12)$$

onde as coordenadas t, r, θ, ϕ são adimensionais e $m_1 = 0, \pm 1, \dots, \pm l_1$ e $m_2 = 0, \pm 1, \dots, \pm l_2$. Os parâmetros ω_1 e ω_2 são números reais e representam a rotação no espaço interno dos campos. Utilizando o ansatz podemos reduzir as equações de campo (2.9), (2.10) à duas equações diferenciais acopladas que dependem apenas da variável radial r

$$\Sigma^{(1)}(r) = \frac{\tilde{\mu}_1^2}{8} \sqrt{1 + f^2} \operatorname{sgn}(f) + \lambda_1 \frac{\alpha}{4} \left(\frac{f^2}{1 + f^2} \right)^{\alpha-1} \left(\frac{g^2}{1 + g^2} \right)^\beta f, \quad (2.13)$$

$$\Sigma^{(2)}(r) = \frac{\tilde{\mu}_2^2}{8} \sqrt{1 + g^2} \operatorname{sgn}(g) + \lambda_2 \frac{\beta}{4} \left(\frac{f^2}{1 + f^2} \right)^\alpha \left(\frac{g^2}{1 + g^2} \right)^{\beta-1} g \quad (2.14)$$

onde as expressões do lado esquerdo, que vêm dos termos cinéticos e gradientes, são dadas por

$$\Sigma^{(1)}(r) \equiv f'' + \frac{2}{r} f' + \omega_1^2 \frac{1 - f^2}{1 + f^2} f - 2 \frac{f f'^2}{1 + f^2} - \frac{l_1(l_1 + 1)}{r^2} f, \quad (2.15)$$

$$\Sigma^{(2)}(r) \equiv g'' + \frac{2}{r} g' + \omega_2^2 \frac{1 - g^2}{1 + g^2} g - 2 \frac{g g'^2}{1 + g^2} - \frac{l_2(l_2 + 1)}{r^2} g. \quad (2.16)$$

Por definição $\operatorname{sgn}(0) = 0$.

Uma propriedade marcante dos modelos com potencial *V-shaped* é o fato de a sua dinâmica não ser completamente descrita pelas equações de Euler-Lagrange. As equações obtidas através do princípio variacional não "enxergam" as soluções de vácuo, que representam algumas das configurações físicas. Para ilustrar essa questão, considere

um modelo de campo escalar real com potencial $|\phi|$. A densidade Lagrangiana do modelo toma a seguinte forma: $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - |\phi|$, onde $\phi \in \mathbb{R}$. Sua energia é dada por $E = \int d^3x \left[\frac{1}{2}(\partial_0\phi)^2 + \frac{1}{2}\nabla^2\phi + |\phi| \right]$ enquanto que as equações de Euler-Lagrange tomam a forma $\partial_\mu\partial^\mu\phi \pm 1 = 0$. Perceba que a configuração física que minimiza a energia, $\phi = 0$, não é uma solução das equações de Euler-Lagrange. Por outro lado, essa solução possui um papel importante na dinâmica do campo. Como mencionado na seção 1.2, a solução do vácuo pode ser incluída formalmente no conjunto de soluções da equação de campo, contanto que o termo ± 1 seja substituído pelo termo $\text{sgn}(\phi)$ tal que $\text{sgn}(0) := 0$. Com isso, a equação de movimento se torna $\partial_\mu\partial^\mu\phi + \text{sgn}(\phi) = 0$ (modelo de signum-Gordon). No caso em que o campo escalar é complexo, $\phi = fe^{ix}$ com $f \geq 0$, o termo signum (função sinal) fica restrito a dois valores: $\text{sgn}(f) = 0$ e $\text{sgn}(f) = +1$. Esse é exatamente o que ocorre no modelo abordado neste trabalho. Assumimos que $f(r)$ em (2.11) e $g(r)$ em (2.12) são não negativas. Nossa definição da função sinal faz com que as configurações de vácuo $f = 0$ e $g = 0$ se tornem uma solução explícita das equações de campo (2.13) e (2.14). Recentemente, foi analisado o caso de soluções Q-balls compactas no caso em que a função radial não é restringida à valores não negativos (soluções nodais) (KLIMAS; SAWADO; YANAI, 2022).

2.2.1 A densidade Hamiltoniana

A densidade Hamiltoniana associada com a Lagrangiana (2.5) possui a forma

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{\delta\mathcal{L}_1}{\delta(\partial_0u_i)}\partial_0u_i + \frac{\delta\mathcal{L}_1}{\delta(\partial_0u_i^*)}\partial_0u_i^* - \mathcal{L}_1 + \\ &+ \frac{\delta\mathcal{L}_2}{\delta(\partial_0v_j)}\partial_0v_j + \frac{\delta\mathcal{L}_2}{\delta(\partial_0v_j^*)}\partial_0v_j^* - \mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_{int} \end{aligned}$$

e pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{M_1^2}{r_0^2}\mathcal{H}_1 + \frac{M_2^2}{r_0^2}\mathcal{H}_2 + \lambda W, \\ \mathcal{H}_a &:= -\tau_{00}^a + \sum_{k=1}^3 \tau_{kk}^a + \tilde{\mu}_a^2 V_a, \quad a = 1,2 \end{aligned} \quad (2.17)$$

onde W e \mathcal{H}_a são funções adimensionais. As expressões $\tau_{\nu\mu}^a$ são dadas por (2.6). A única diferença é que as expressões $\tau_{\nu\mu}^a$ consideradas em (2.17) contém derivadas com relação às coordenadas adimensionais. Supondo $\lambda \neq 0$ podemos reescrever a densidade Hamiltoniana como

$$\mathcal{H} = \lambda \left(\frac{1}{\lambda_1}\mathcal{H}_1 + \frac{1}{\lambda_2}\mathcal{H}_2 + W \right). \quad (2.18)$$

Utilizando o ansatz de Q-ball/Qshell, as expressões \mathcal{H}_a e W assumem a forma

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_1 &= \frac{4}{(1+f^2)^2} \left[f'^2 + \omega_1^2 f^2 + \frac{l_1(l_1+1)}{r^2} (1+f^2)f^2 \right] + \tilde{\mu}_1^2 \frac{f}{\sqrt{1+f^2}}, \\ \mathcal{H}_2 &= \frac{4}{(1+g^2)^2} \left[g'^2 + \omega_2^2 g^2 + \frac{l_2(l_2+1)}{r^2} (1+g^2)g^2 \right] + \tilde{\mu}_2^2 \frac{g}{\sqrt{1+g^2}}, \\ W &= \left(\frac{f^2}{1+f^2} \right)^\alpha \left(\frac{g^2}{1+g^2} \right)^\beta, \quad \alpha, \beta \geq 1.\end{aligned}$$

A configuração de vácuo, $f(r) = 0$ e $g(r) = 0$, possui energia total igual à zero.

2.2.2 Cargas de Noether

Em termos da parametrização (2.4), a Lagrangiana (2.5) possui simetria global $U(1)^{N_1} \otimes U(1)^{N_2}$ sob a transformação

$$u_k \rightarrow e^{i\sigma_k} u_k, \quad k = 1, \dots, N_1, \quad (2.19)$$

$$v_k \rightarrow e^{i\tau_k} v_k, \quad k = 1, \dots, N_2 \quad (2.20)$$

onde $\sigma_k, \tau_k \in \mathbb{R}$. Conforme mencionado anteriormente, a simetria global e as cargas de Noether possuem um papel importante na estabilização das soluções. As correntes de Noether associadas à (2.19) são dadas por

$$J_\mu^{(m)} = -\frac{4i}{(1+u^\dagger \cdot u)^2} \sum_{j=1}^{N_1} [u_m^* \Delta_{mj}^2(u) \partial_\mu u_j - \partial_\mu u_j^* \Delta_{jm}^2(u) u_m]. \quad (2.21)$$

A seguir, mostraremos os resultados para (2.19), uma vez que as expressões para (2.20) podem ser obtidas a partir da expressão (2.21) trocando $u \leftrightarrow v$ e $f \leftrightarrow g$. Utilizando o ansatz (2.11), temos que apenas duas componentes das correntes de Noether são não nulas e dadas por

$$J_t^{(m_1)} = 8\omega_1 \frac{(l_1 - m_1)!}{(l_1 + m_1)!} \frac{f^2}{(1+f^2)^2} (P_{l_1}^{m_1}(\cos \theta))^2, \quad (2.22)$$

$$J_\varphi^{(m_1)} = 8m_1 \frac{(l_1 - m_1)!}{(l_1 + m_1)!} \frac{f^2}{1+f^2} (P_{l_1}^{m_1}(\cos \theta))^2. \quad (2.23)$$

As outras duas componentes são $J_r^{(m_1)} = J_\theta^{(m_1)} = 0$, para $m_1 = -l_1, -l_1 + 1, \dots, l_1 - 1, l_1$. A conservação de corrente pode ser vista diretamente da dependência de (2.22), (2.23) em função apenas de r, θ . Segue, da equação de continuidade, que

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} J_\nu^{(m_1)}) = \partial_t J_t^{(m_1)} - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\varphi J_\varphi^{(m_1)} = 0. \quad (2.24)$$

Integrando a equação de continuidade (2.24) envolvendo a quadricorrente temos

$$\int dt \int d^3x \sqrt{-g} \left(\partial_0 J_0^{(m_1)} - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\varphi J_\varphi^{(m_1)} \right) = 0.$$

Assumindo que a componente espacial $J_\varphi^{(m_1)}$ decresce suficientemente rápido na borda espacial, obtemos a carga de Noether conservada

$$Q_t^{(m_1)} = \frac{1}{2} \int d^3x \sqrt{-g} J_t^{(m_1)}(x) = \frac{16\pi\omega}{2l_1 + 1} \int_0^\infty r^2 dr \frac{f^2}{(1 + f^2)^2}.$$

As componentes espaciais das correntes de Noether não contribuem para as cargas conservadas; ainda assim, são úteis para definir as integrais

$$q_\varphi^{(m_1)} := \frac{3}{2} \int d^3x \sqrt{-g} \frac{J_\varphi^{(m_1)}(x)}{r^2} = \frac{48\pi m_1}{2l_1 + 1} \int_0^\infty dr \frac{f^2}{1 + f^2}.$$

Como mencionado anteriormente, a carga de Noether associada com o segundo modelo (2.20), $Q_t^{(m_2)}$, assim como a integral $q_\varphi^{(m_2)}$, podem ser obtidas através das trocas $f \leftrightarrow g$ e $l_1 \leftrightarrow l_2$. A energia total é obtida integrando a densidade Hamiltoniana em todo o espaço $E = \int d^3x \mathcal{H}$, onde \mathcal{H} é dada por (2.18), e pode ser expressa em termos de $Q_t^{(m)}$ e $q_\varphi^{(m)}$

$$E = \sum_{m_1=-l_1}^{l_1} \left(\omega_1 Q_t^{(m_1)} + m_1 q_\varphi^{(m_1)} \right) + \sum_{m_2=-l_2}^{l_2} \left(\omega_2 Q_t^{(m_2)} + m_2 q_\varphi^{(m_2)} \right) + 4\pi \int r^2 dr \left[\frac{4f'^2}{(1 + f^2)^2} + \frac{4g'^2}{(1 + g^2)^2} + \tilde{\mu}_1^2 \frac{f}{\sqrt{1 + f^2}} + \tilde{\mu}_2^2 \frac{g}{\sqrt{1 + g^2}} + \left(\frac{f^2}{1 + f^2} \right)^\alpha \left(\frac{g^2}{1 + g^2} \right)^\beta \right]$$

onde, por simplicidade, escolhemos $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Para entender completamente as soluções é necessário obter E como função de Q_1, Q_2 . Em particular, é interessante conhecer a relação entre E e a soma das cargas $Q = Q_1 + Q_2$. O estudo das soluções exatas pode ser realizado apenas em casos específicos como em uma aproximação "thin-wall"² do modelo. Por outro lado, no caso geral temos que recorrer à análise numérica, que será discutida na próxima seção.

2.3 SOLUÇÕES

Primeiramente, vamos analisar o caso mais genérico da sobreposição de dois compactons. Existem algumas possibilidades: Q-ball - Q-ball (BB), Q-ball - Q-shell (BS) e Q-shell - Q-shell (SS). Os exemplos apresentados a seguir foram obtidos tomando $\alpha = \beta = 1$ no termo referente ao potencial de acoplamento W . Não foram observadas mudanças qualitativas no comportamento radial das soluções para valores maiores de α e β .

As soluções numéricas são obtidas através da integração numérica das equações radiais. Neste trabalho, utilizamos um método de análise numérica chamado de "shooting method". Esse método é uma forma de obter soluções para problemas de valores de contorno através do "chute" das condições iniciais, variando os parâmetros do modelo, até que as condições de contorno desejadas sejam alcançadas.

² "paredes finas".

No caso $n = 2$, temos duas equações diferenciais de segunda ordem acopladas e, portanto, precisaremos de dois parâmetros livres (de "chute"). Para obter esses parâmetros, expandimos a função em série de potências em torno de uma região de interesse e utilizamos o comportamento dominante das funções nesse ponto como condições de contorno para as soluções. As soluções finais são obtidas através da junção das soluções parciais do problema em cada região, garantindo que tanto a função quanto sua primeira derivada sejam contínuas.

2.3.1 Q-ball - Q-ball

A solução mais simples do tipo BB contém apenas a sobreposição de duas Q-balls $\mathbb{C}P^1$. Consideramos $\omega_1 > \omega_2$ pois para $\omega_1 = \omega_2$, $\tilde{\mu}_1^2 = \tilde{\mu}_2^2$ e $\lambda_1 = \lambda_2$ as funções radiais são idênticas, $f(r) = g(r)$, e o modelo se reduz a um único modelo $\mathbb{C}P^1$ com uma deformação analítica do potencial *V-shaped*.

No caso $l_1 = l_2 = 0$ expandimos as funções radiais em série de potências em torno de $r = 0$

$$f(r) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k, \quad g(r) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k r^k.$$

Em seguida, substituímos as expansões nas equações (2.13) e (2.14) e determinamos os coeficientes, $k = 1, 2, \dots$, recursivamente. Os coeficientes ímpares, $k = 1, 3, 5, \dots$, são nulos. Os dois primeiros coeficientes pares são

$$a_2 = \frac{1}{6} \left[\frac{a_0 b_0^2}{4(1+b_0^2)} \lambda_1 + \frac{\tilde{\mu}_1^2}{8} \sqrt{1+a_0^2} - \frac{a_0(1-a_0^2)}{1+a_0^2} \omega_1^2 \right],$$

$$b_2 = \frac{1}{6} \left[\frac{b_0 a_0^2}{4(1+a_0^2)} \lambda_2 + \frac{\tilde{\mu}_2^2}{8} \sqrt{1+b_0^2} - \frac{b_0(1-b_0^2)}{1+b_0^2} \omega_2^2 \right].$$

As equações de movimento para as funções radiais, (2.13) e (2.14), possuem termos proporcionais a r^{-1} e r^{-2} . Devido à isso, substituímos no cálculo numérico $r = 0$ por $r = \varepsilon = 10^{-4}$. Dessa forma, temos que para $r = \varepsilon$ as soluções devem satisfazer

$$\begin{aligned} f(\varepsilon) &= a_0 + a_2(a_0, b_0)\varepsilon^2, \\ f'(\varepsilon) &= 2a_2(a_0, b_0)\varepsilon, \\ g(\varepsilon) &= b_0 + b_2(a_0, b_0)\varepsilon^2, \\ g'(\varepsilon) &= b_2(a_0, b_0)\varepsilon. \end{aligned}$$

Os dois coeficientes livres são (a_0, b_0) . A partir dos coeficientes a_2 e b_2 , é possível observar que a segunda derivada da função perfil $f(r)$ em $r = 0$ depende do valor de $g(0)$ e *vice versa*. As funções perfil radial $f(r), g(r)$ e suas derivadas estão representadas na Figura 7. Quanto maior a diferença entre ω_1 e ω_2 , menor será a similaridade entre as curvas radiais.

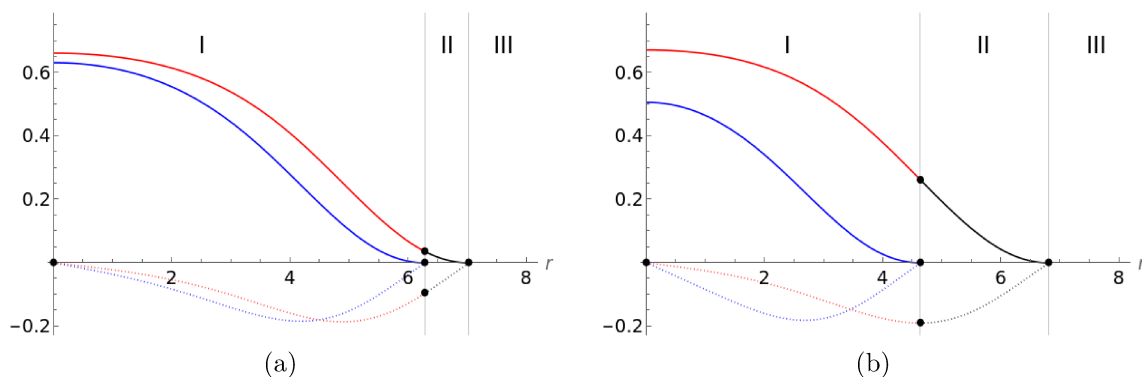


Figura 7 – Q-balls no modelo $\mathbb{C}P^1 - \mathbb{C}P^1$ para (a) $(\omega_1, \omega_2) = (1.05, 1.0)$ e (b) $(\omega_1, \omega_2) = (1.2, 1.0)$. As outras constantes têm valores $\tilde{\mu}_1^2 = \tilde{\mu}_2^2 = 1.0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1.0$. Os raios das Q-balls são (a) $(R_1, R_2) = (6.284, 7.029)$ e (b) $(R_1, R_2) = (4.641, 6.812)$. A função radial $f(r)$ possui amplitude menor que a função $g(r)$ (linhas contínuas). As derivadas $f'(r)$ e $g'(r)$ são representadas pelas linhas pontilhadas.

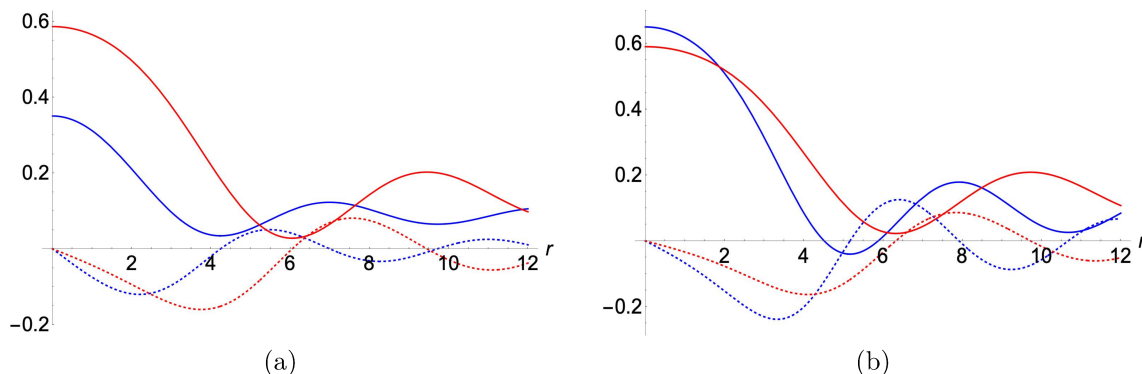


Figura 8 – Soluções não válidas para o caso $\mathbb{C}P^1 - \mathbb{C}P^1$. (a) Ambos parâmetros a_0 e b_0 são muito pequenos e as soluções nunca alcançam o vácuo; (b) a_0 é muito grande e b_0 muito pequeno – a função $f(r)$ muda de sinal.

A discrepância entre R_1 e R_2^3 , assim como entre $f(0)$ e $g(0)$, cresce com o aumento de $|\omega_1 - \omega_2|$.

Para obter as soluções apresentadas, começamos com um chute inicial, arbitrário, dos parâmetros a_0, b_0 . Suponha que com esse chute obtenhamos uma solução como no caso da Figura 8(a). Em seguida, calculamos o valor de r no primeiro mínimo, chamemos de \tilde{R}_1 (que no caso da Figura 8(a) corresponderia à $\tilde{R}_1 \sim 4$). Segue, então, que $f'(\tilde{R}_1) = 0$. O comportamento numérico das soluções mostra que existe um certo ponto (a'_0, b'_0) , no espaço de parâmetros, tal que nesse ponto $f(\tilde{R}_1) = 0 = g(\tilde{R}_2) = 0$. Sabendo disso, variamos o parâmetro a_0 até alcançarmos a condição $|f(\tilde{R}_1)| < 10^{-6}$. Em seguida, repetimos o procedimento para a segunda solução de modo que, ao final do processo, tenhamos $f'(\tilde{R}_1) = 0$, $|f(\tilde{R}_1)| < 10^{-6}$ e $g'(\tilde{R}_2) = 0$, $|g(\tilde{R}_2)| < 10^{-6}$. Finalmente, definimos $R_1 = \tilde{R}_1$ e $R_2 = \tilde{R}_2$. O mesmo procedimento é tomado nos casos a seguir.

³ R_i se refere ao ponto onde uma solução toma valor de vácuo, e.g., R_1 (no caso de Q-balls) se refere ao ponto tal que $f(R_1) = f'(R_1) = 0$ e é, nesse caso, o raio externo da solução.

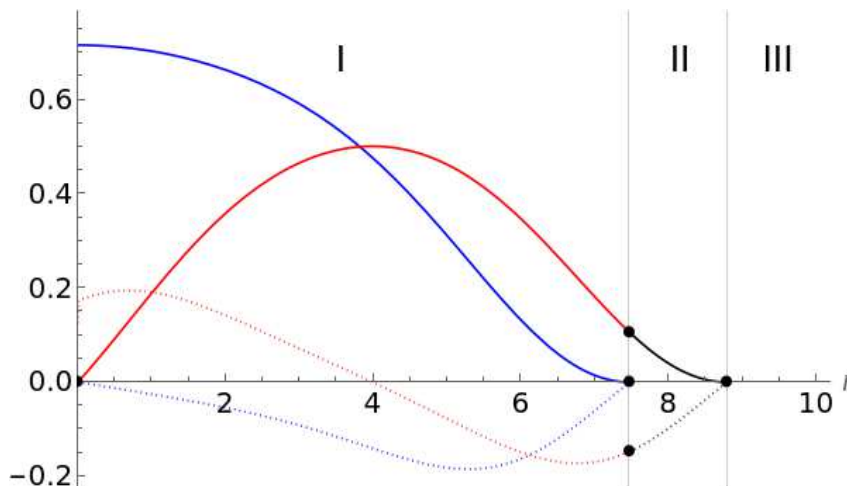


Figura 9 – Solução do tipo BB para o modelo $\mathbb{C}P^1 - \mathbb{C}P^3$. Os valores dos parâmetros livres são $\omega_1 = \omega_2 = 1.0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1.0$, $\tilde{\mu}_1^2 = \tilde{\mu}_2^2 = 1.0$. Os parâmetros de chute são $(a_0, b_1) = (0.717, 0.173)$. Ambas funções radiais são não triviais na região I , $0 < r < R_1$; temos $f(r) = 0$ enquanto $g(r) > 0$ em II ($R_1 < r < R_2$) e $f(r) = g(r) = 0$ na região III ($r > R_2$). As curvas tracejadas representam as respectivas derivadas das funções perfil com respeito à r

Analisando a Figura 7, na região I ($0 < r < R_1$) ambas as funções, $f(r)$ e $g(r)$, são não triviais. De forma a obter uma solução compacta, devemos escolher ambos os parâmetros de forma apropriada. Se a_0 e b_0 forem muito pequenos, a região I se estende para o infinito espacial e a solução numérica nunca atinge o valor de vácuo (Figura 8 (a)). Uma configuração com tal comportamento possui energia infinita e, portanto, não pode ser aceitável. Por outro lado, quando o parâmetro chutado é muito grande a função muda de sinal (Figura 8 (b)). Como procuramos por soluções com valores da função perfil não negativos, esse tipo de solução também deve ser rejeitada. A função perfil $f(r)$ é nula na região II , $R_1 < r < R_2$, enquanto $g(r)$ é não trivial. Por fim, na terceira região, $r > R_2$, ambas as funções $f(r)$ e $g(r)$ assumem o valor de vácuo.

O comportamento das funções perfil em R_1 é dado por

$$f(r) = \frac{\tilde{\mu}_1^2}{16}(r - R_1)^2 - \frac{\tilde{\mu}_1^2}{24R_1}(r - R_1)^3 + \mathcal{O}((r - R_1)^4),$$

$$g(r) = B_0 + B_1(r - R_1) + \dots,$$

onde $B_0 \equiv g(R_1)$ e $B_1 \equiv g'(R_1)$ são determinados pela integração numérica das equações acopladas. Similarmente, na vizinhança de R_2 temos

$$f(r) = 0, \quad \text{e} \quad g(r) = \frac{\tilde{\mu}_2^2}{16}(r - R_2)^2 - \frac{\tilde{\mu}_2^2}{24R_2}(r - R_2)^3 + \mathcal{O}((r - R_2)^4)$$

A partir das expansões fica claro o comportamento parabólico de ambos os campos próximo ao vácuo.

Outro exemplo de compacton do tipo BB pode ser obtido no modelo $\mathbb{C}P^1 - \mathbb{C}P^3$ ($l_1 = 0, l_2 = 1$). Realizando a expansão em $r = 0$, temos que o comportamento dominante

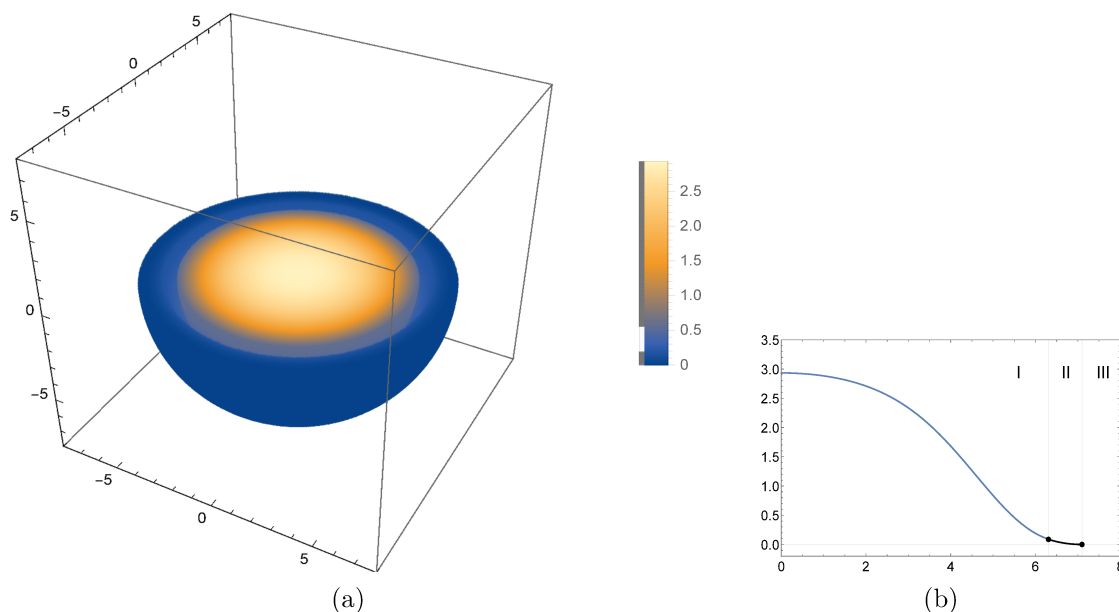


Figura 10 – Densidade Hamiltoniana da solução BB associada à Figura 7(a) para o modelo $\mathbb{C}P^1 - \mathbb{C}P^1$. Figura (a) o gráfico 3D da densidade Hamiltoniana. (b) a densidade radial associada com (a). A densidade Hamiltoniana é um função monotonicamente decrescente.

das soluções é dado por

$$f(r) = a_0 + \left[\frac{\tilde{\mu}_1^2}{48} \sqrt{1 + a_0^2} - \frac{a_0}{6} \frac{1 - a_0^2}{1 + a_0^2} \omega_1^2 \right] r^2 + \mathcal{O}(r^4),$$

$$g(r) = b_1 r + \frac{\tilde{\mu}_2^2}{32} r^2 + \frac{b_1}{40} \left[8b_1^2 + \frac{\lambda_2 a_0^2}{1 + a_0^2} - 4\omega_2^2 \right] r^3 + \mathcal{O}(r^4).$$

Nesse caso a função radial $g(r)$ é nula em $r = 0$. A expansão possui dois parâmetros livres a_0 e b_1 . Os outros coeficientes são determinados em termos desses dois parâmetros. Olhando para os outros termos vemos que $a_3 = 0$ e que a_4 depende de b_1 . Note que o valor de b_2 é fixado pelo valor da constante $\tilde{\mu}_2^2$. Olhando para a Figura 9 vemos que a função $f(r)$ associada com o modelo $\mathbb{C}P^1$ alcança o vácuo em $r = R_1$, i.e., antes de $g(r)$ mudar seu sinal. Para $r > R_1$, $f(r) = 0$ e $g(r) > 0$ até alcançar seu zero em $r = R_2$. Os parâmetros livres, a_0 e b_1 , são escolhidos de forma a obtermos mínimos locais para as funções radiais no eixo r . Na Figura 10, apresentamos o gráfico 3D da densidade Hamiltoniana discutida na seção 2.2.1 correspondendo à solução BB para o modelo $\mathbb{C}P^1 - \mathbb{C}P^1$ (Figura 7(a)). A função radial da densidade de energia decresce monotonicamente, de forma similar às funções que descrevem os campos.

2.3.2 Q-ball - Q-shell

As soluções do tipo BS ocorrem quando um modelo $\mathbb{C}P^1$ ou $\mathbb{C}P^3$ é acoplado com um modelo $\mathbb{C}P^N$ com $N \geq 5$. Mesmo no caso de um único modelo $\mathbb{C}P^N$, a solução do tipo

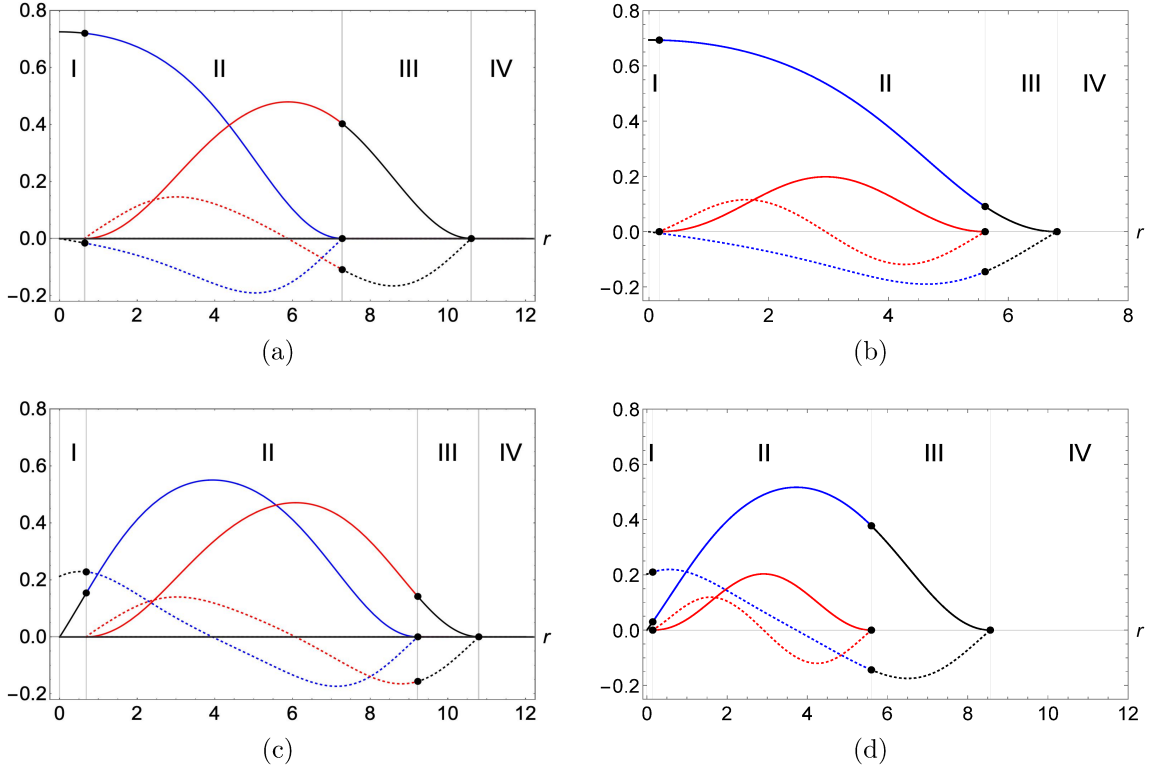


Figura 11 – Solução BS para $(\lambda_1, \lambda_2) = (1.0, 1.0)$, $(\tilde{\mu}_1^2, \tilde{\mu}_2^2) = (1.0, 1.0)$. (a) Modelo $\mathbb{C}P^1 - \mathbb{C}P^5$ com $(\omega_1, \omega_2) = (1.0, 1.0)$, e parâmetros $(a_0, R_1) = (0.725, 0.643)$. Os raios externos da Q-ball e Q-shell são dados, respectivamente, por $(R_2, R_3) = (7.28, 10.60)$. (b) Modelo $\mathbb{C}P^1 - \mathbb{C}P^5$ com $(\omega_1, \omega_2) = (1.0, 1.5)$, e parâmetros $(a_0, R_1) = (0.694, 0.174)$. Os raios externos da Q-ball e Q-shell são dados, respectivamente, por $(R_2, R_3) = (6.81, 5.61)$. (c) Modelo $\mathbb{C}P^3 - \mathbb{C}P^5$ com $(\omega_1, \omega_2) = (1.0, 1.0)$, e parâmetros $(a_1, R_1) = (0.212, 0.683)$. Os raios externos da Q-ball e Q-shell são dados, respectivamente, por $(R_2, R_3) = (9.22, 10.81)$. (d) Modelo $\mathbb{C}P^3 - \mathbb{C}P^5$ com $(\omega_1, \omega_2) = (1.0, 1.5)$, e parâmetros $(a_1, R_1) = (0.202, 0.145)$. Os raios externos da Q-ball e Q-shell são dados, respectivamente, por $(R_2, R_3) = (8.56, 5.60)$.

Q-shell aparece porque a expansão na origem, $r = 0$, não leva à nenhum comportamento não trivial (todos os coeficientes b_k são nulos). O mesmo é válido para dois modelos acoplados. Apenas a função radial associada com $N = 1$ ou $N = 3$ possui comportamento não trivial na vizinhança de $r = 0$. Logo, a expansão em $r = 0$ envolve apenas $f(r)$, enquanto $g(r) = 0$ nessa região.

A solução consiste de quatro soluções parciais que se completam em $r = R_1$, $r = R_2$ e $r = R_3$. Na vizinhança de $r = 0$, a função $f(r)$ possui o seguinte comportamento

$$\mathbb{C}P^1 : f(r) = a_0 + \left[\frac{\tilde{\mu}_1^2}{48} \sqrt{1 + a_0^2} - \frac{a_0}{6} \frac{1 - a_0^2 \omega_1^2}{1 + a_0^2} \right] r^2 + \mathcal{O}(r^4)$$

$$\mathbb{C}P^3 : f(r) = a_1 r + \frac{\tilde{\mu}_1^2}{32} r^2 + \frac{a_1}{10} (2a_1^2 - \omega_1^2) r^3 + \mathcal{O}(r^4)$$

enquanto $g(r) = 0$. Essa solução parcial é válida para $0 < r < R_1$. Para a segunda solução parcial, válida na região $R_1 < r < R_2$, a função $g(r)$ é não trivial e possui a seguinte

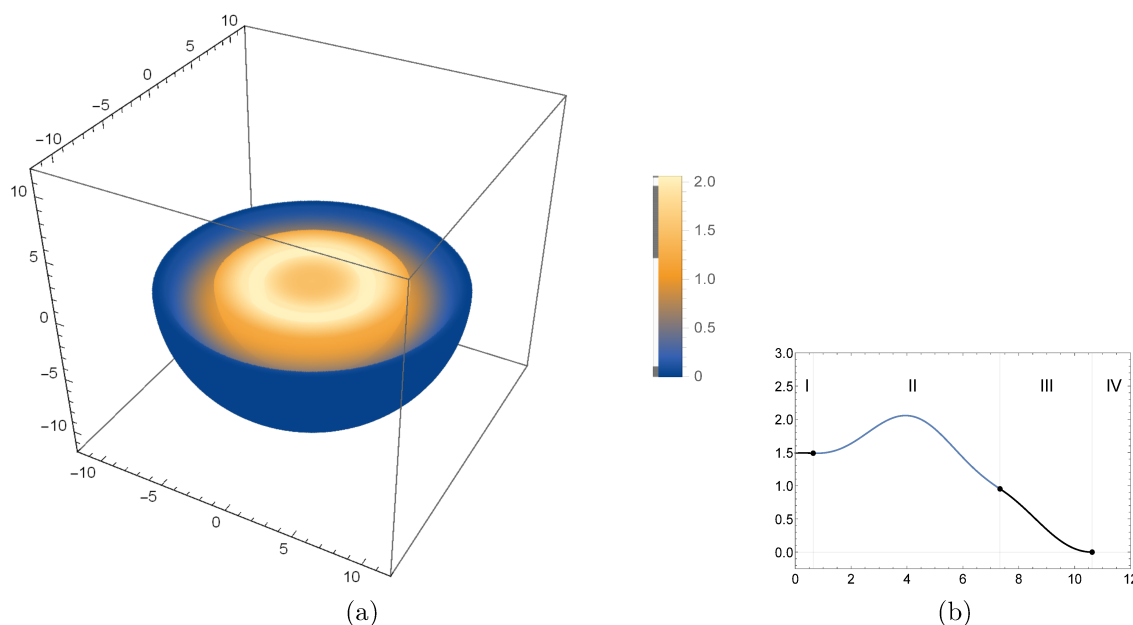


Figura 12 – Densidade Hamiltoniana da solução BS associada à Figura 11(a) do modelo $\mathbb{C}P^1 - \mathbb{C}P^5$. Figura (a) gráfico 3D da densidade Hamiltoniana e (b) a densidade radial associada à (a). A densidade Hamiltoniana ainda possui um formato esférico, porém, agora o seu valor máximo está localizado em torno de $r \sim 4$.

expansão em $r = R_1$

$$g(r) = \frac{\tilde{\mu}_2^2}{16}(r - R_1)^2 - \frac{\tilde{\mu}_2^2}{24R_1}(r - R_1)^3 + \mathcal{O}((r - R_1)^4)$$

tanto para o modelo $\mathbb{C}P^1 - \mathbb{C}P^N$ quanto para o $\mathbb{C}P^3 - \mathbb{C}P^N$, $N \geq 5$. Os resultados numéricos são apresentados na Figura 11. A princípio, o raio interno R_1 não é conhecido e, portanto, pode ser considerado um parâmetro livre. Os coeficientes de ordens superiores dependem de $f(R_1)$, $f'(R_1)$ e das constantes do modelo. Na região *II*, ambas as funções $f(r)$ e $g(r)$ dependem uma da outra. Em $r = R_2$ a componente referente à Q-ball assume seu valor de vácuo $f = 0$, enquanto $g(r) > 0$. Na região *III* ($R_2 < r < R_3$) a função $f(r) = 0$ é constante e $g(r)$ decresce alcançando o vácuo de forma parabólica em $r = R_3$. Os parâmetros de chute são (a_0, R_1) para o modelo $\mathbb{C}P^1 - \mathbb{C}P^5$ e (a_1, R_1) para o $\mathbb{C}P^3 - \mathbb{C}P^5$. De forma análoga ao que acontece no caso das soluções do tipo BB, a discrepância entre as soluções aumenta com $|\omega_1 - \omega_2|$.

Na Figura 12, apresentamos o gráfico 3D da densidade Hamiltoniana correspondente à solução BS para o caso $\mathbb{C}P^1 - \mathbb{C}P^5$ (Figura 11(a)).

2.3.3 Q-shell - Q-shell

As soluções do tipo SS acontecem quando trabalhamos com modelos $\mathbb{C}P^{N_1} - \mathbb{C}P^{N_2}$, onde $N_1, N_2 \geq 5$ ($l_1, l_2 \geq 2$). Como exemplo desse tipo de solução, considere a superposição de duas Q-shells no modelo $\mathbb{C}P^5 - \mathbb{C}P^7$. De forma equivalente, poderíamos considerar

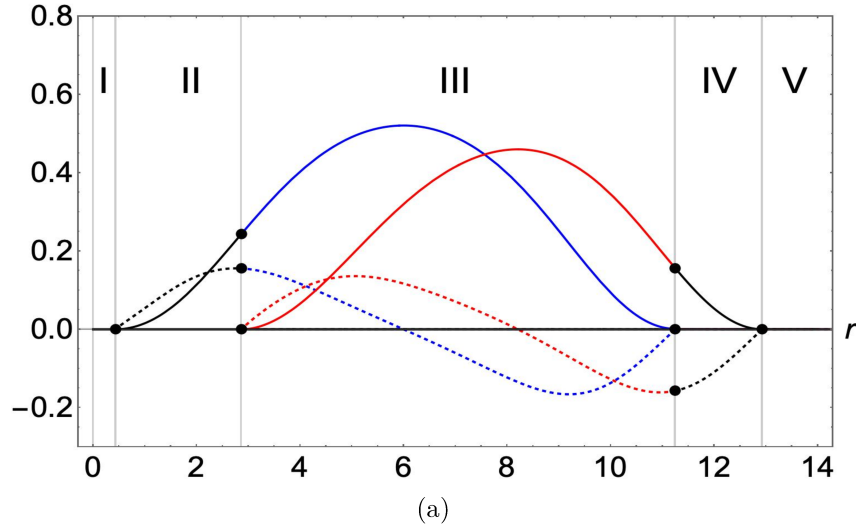


Figura 13 – Solução do tipo SS para o modelo $\mathbb{C}P^5 - \mathbb{C}P^7$ com $(\omega_1, \omega_2) = (1.0, 1.0)$, $(\tilde{\mu}_1^2, \tilde{\mu}_2^2) = (1.0, 1.0)$ e $(\lambda_1, \lambda_2) = (1.0, 1.0)$. A solução SS compacta é obtida para os parâmetros $(R_1, R_2) = (0.43, 2.86)$. Os raios externos das soluções são $(R_3, R_4) = (11.24, 12.92)$.

o caso $\mathbb{C}P^5 - \mathbb{C}P^5$ com $\omega_1 \neq \omega_2$. Aqui, consideramos $\omega_1 = \omega_2 = 1.0$. A solução consiste de cinco regiões e está apresentada na Figura 13. Temos quatro raios característicos: R_1, R_2, R_3 e R_4 . Na região *I*, dada por $0 < r < R_1$, assim como na região $r > R_4$, ambas as soluções assumem valor de vácuo, $f(r) = g(r) = 0$. Na região *II*, a função radial f é não nula, enquanto $g(r) = 0$. Similarmente, na região *IV* temos $f(r) = 0$ enquanto $g(r) > 0$. Na região *III*, temos ambas soluções não nulas (superposição), respeitando o acoplamento entre as equações. Aqui, os raios R_1 e R_2 são considerados parâmetros de chute e representam os raios internos das soluções. Expandindo as funções radiais em torno de $r = R_1$ obtemos as expansões

$$f(r) = \frac{\tilde{\mu}_1^2}{16}(r - R_1)^2 - \frac{\tilde{\mu}_1^2}{24R_1}(r - R_1)^3 + \mathcal{O}((r - R_1)^4), \quad g(r) = 0.$$

Em $r = R_2$ a função $f(r)$ (determinada numericamente) é não nula e pode ser representada por uma série, $f(r) = A_0 + A_1(r - R_2) + A_2(r - R_2)^2 + \mathcal{O}((r - R_2)^3)$, e a função $g(r)$ é dada por

$$g(r) = \frac{\tilde{\mu}_2^2}{16}(r - R_2)^2 - \frac{\tilde{\mu}_2^2}{24R_2}(r - R_2)^3 + \mathcal{O}((r - R_2)^4)$$

Para obter as soluções, chutamos R_1 e R_2 e integramos numericamente o sistema de equações. Em seguida determinamos o primeiro mínimo local $r = \tilde{R}_3$ para $f(r)$. A partir disso, alteramos os valores dos parâmetros até obter $|f(\tilde{R}_3)| < 10^{-6}$. A solução correta é obtida quando tivermos parâmetros R_1 e R_2 tais que $|f(\tilde{R}_3)| < 10^{-6}, |g(\tilde{R}_4)| < 10^{-6}$ e $f'(\tilde{R}_3) = g'(\tilde{R}_4) = 0$. Evidentemente, isso depende do ajuste simultâneo dos parâmetros do modelo devido ao acoplamento. Na Figura 14, apresentamos o gráfico 3D da densidade Hamiltoniana correspondente com a solução SS para o modelo $\mathbb{C}P^5 - \mathbb{C}P^7$ (Figura 13).

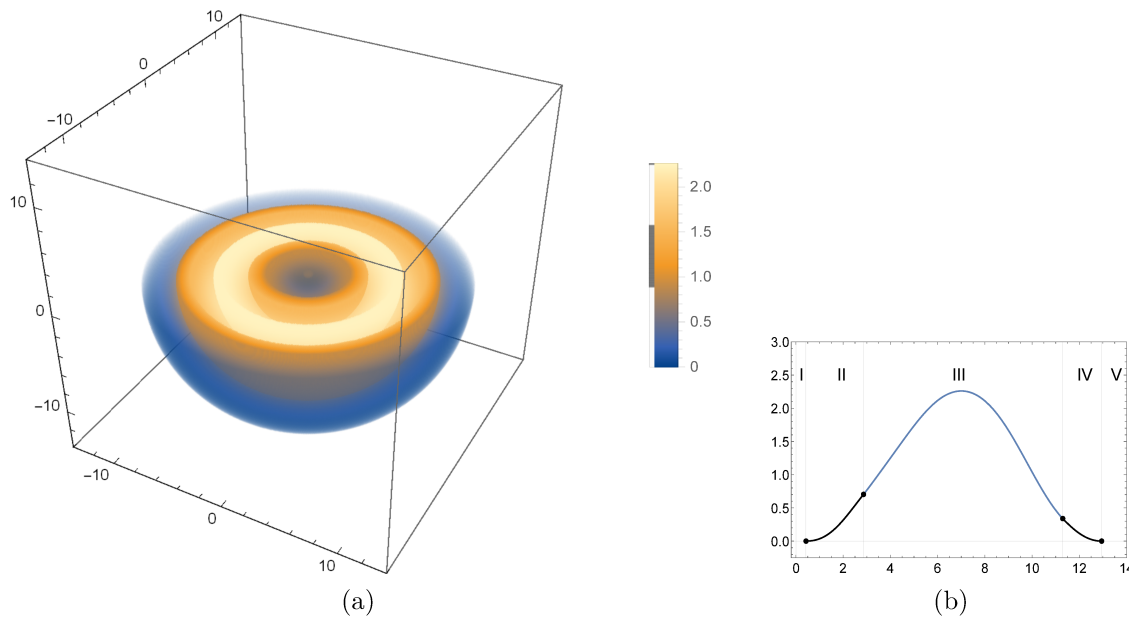


Figura 14 – A densidade Hamiltoniana para a solução SS correspondente à Figura 13(a) para o modelo $\mathbb{C}P^5 - \mathbb{C}P^7$. Figura (a) gráfico 3D da densidade de energia (b) densidade radial de energia associada com (a). A estrutura tipo *shell* (casca) se torna aparente nessa solução.

2.3.4 Soluções tipo *harbor*

Compactons do tipo *harbor* são estruturas do tipo BS e SS nas quais uma das soluções permanece completamente inclusa na cavidade interna de uma Q-shell, ou seja, é uma configuração onde $f(r) > 0$ sobrepõe apenas $g(r) = 0$ e $g(r) > 0$ sobrepõe apenas $f(r) = 0$. Isso significa que os termos de acoplamento proporcionais à λ_1 e λ_2 não têm significância, pois para todo r sempre temos um dos campos tomando o valor de vácuo. Isso é possível, exclusivamente, devido ao caráter compacto das soluções. A possibilidade de termos um compacton cercado por outro compacton é um tanto quanto intrigante, especialmente no contexto de aplicações em modelos com estrelas de bósons. Soluções do tipo *harbor* contendo buracos negros em seu interior foram discutidas em (KLEIHAUS; KUNZ; LAMMERZAHN; LIST, 2009; KLEIHAUS; KUNZ; LAMMERZAHN; LIST, 2010; KLIMAS; SAWADO; YANAI, 2019; SAWADO; YANAI, 2021b).

Tal solução ocorre, por exemplo, no caso de uma Q-ball $\mathbb{C}P^1$ envolta por uma Q-shell $\mathbb{C}P^5$. O gráfico do perfil radial dessa configuração pode ser visto na Figura 15. Note que o suporte de ambas as soluções não se sobrepõem, isto é, quando $f > 0, g = 0$ e vice versa. Para compactons do tipo *harbor* o raio R_0 da Q-ball é menor ou igual ao raio interno R_1 da Q-shell. Outra possibilidade de solução tipo *harbor* é com duas shells. Duas Q-shells não se sobrepõem se o raio externo da solução interna for menor que o raio interno da solução externa.

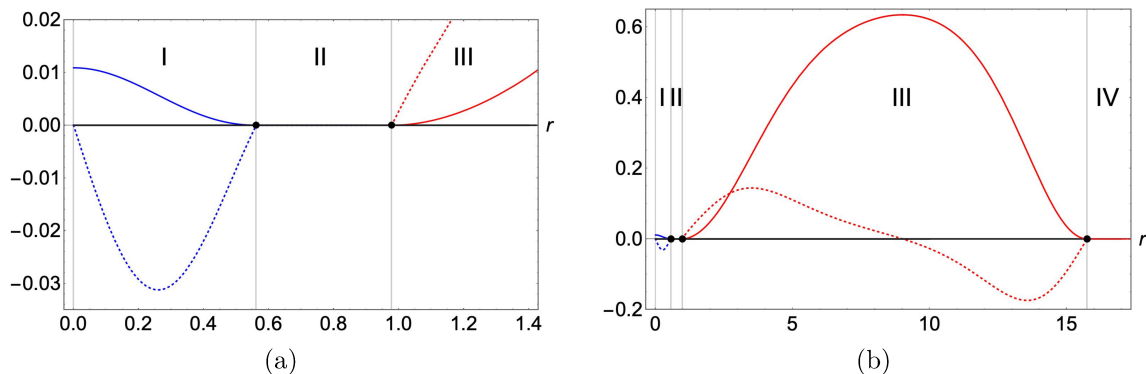


Figura 15 – Uma Q-ball $\mathbb{C}P^1$ na cavidade interna de uma Q-shell $\mathbb{C}P^5$. O raio externo da Q-ball é $R_0 = 0.56$ enquanto os raios da Q-shell são $R_1 = 0.97$ e $R_2 = 15.75$. As soluções foram obtidas para $\omega_1 = 8.0$ e $\omega_2 = 0.9$. Figura (a) mostra a região central onde se encontra a Q-ball.

2.3.5 Relação carga-energia

As análises do comportamento da energia e da relação carga-energia não foram objetos de estudo durante o desenvolvimento deste trabalho. Porém, a partir dos resultados obtidos nessa pesquisa, foi produzido um artigo por (KLIMAS; KUBASKI; SAWADO; YANAI, 2021) onde são apresentadas as análises para esta classe de soluções.

Até o momento foram apresentadas diversas estruturas do tipo ball-shell (BS) e shell-shell (SS) no modelo multicomponentes. Com isso, surge uma pergunta: é possível existir tais estruturas, sem que elas se dissipem ou colapsem? No artigo acima mencionado, os autores analisam o comportamento da razão⁴ E/Q em dependência de ω_1 e ω_2 , uma vez que propriedades como seu tamanho, posição e amplitude dependem dessas quantidades. Também foi analisada a relação $E \sim Q^\alpha$. A partir da análise da razão E/Q , é possível concluir que as soluções multicomponentes são energeticamente mais favoráveis quanto menor for sua sobreposição. Aqui vale lembrar que quanto maior o valor de $|\omega_1 - \omega_2|$ menor será a sobreposição das soluções.

Na análise da relação carga-energia para o modelo $\mathbb{C}P^N$ simples, mencionada no Capítulo 1, vimos que a energia das soluções se comporta como $E \sim Q^{\frac{5}{6}}$ ($\alpha = \frac{5}{6} < 1$), o que sugere que é classicamente favorável a solução permanecer estável, sem decair em cargas menores. Uma análise semelhante foi realizada para o caso multicomponente e foi obtido que para valores grandes de ω_1 e ω_2 , a relação se torna $E \sim Q^{\frac{9}{10}}$. Isso indica que as soluções se tornam mais estáveis com o aumento da carga.

2.3.6 Sobre as soluções analíticas

Conforme mencionado anteriormente, o modelo $\mathbb{C}P^N$ simples tende à um modelo signum-Gordon modificado no limite de baixas amplitudes dos campos. A função perfil

⁴ Q pode ser visto como o número de constituintes; a razão E/Q pode ser vista como a massa de seus constituintes.

satisfaz a equação linearizada contendo a função sinal (que é o único termo que não pode ser linearizado). Conseqüentemente, nesse limite, existem soluções exatas da equação radial. A pergunta natural que surge é se o mesmo processo pode ser feito no caso dos modelos acoplados, considerados neste trabalho.

No limite de pequenas amplitudes dos campos, as equações (2.15) e (2.16) se tornam

$$\begin{aligned}\Sigma^{(1)}(r) &\equiv f'' + \frac{2}{r}f' + \left(\omega_1^2 - \frac{l_1(l_1 + 1)}{r^2}\right)f, \\ \Sigma^{(2)}(r) &\equiv g'' + \frac{2}{r}g' + \left(\omega_2^2 - \frac{l_2(l_2 + 1)}{r^2}\right)g.\end{aligned}$$

Com isso, as equações radiais, (2.13) e (2.14), podem ser escritas como

$$\Sigma^{(1)}(r) - \frac{\tilde{\mu}_1^2}{8} \operatorname{sgn}(f) = \frac{\lambda_1 \alpha}{4} g^{2\beta} f^{2\alpha-1}, \quad (2.25)$$

$$\Sigma^{(2)}(r) - \frac{\tilde{\mu}_2^2}{8} \operatorname{sgn}(f) = \frac{\lambda_2 \beta}{4} f^{2\alpha} g^{2\beta-1}. \quad (2.26)$$

Para $\alpha = \beta = 1$ o lado direito da primeira equação (2.25) é proporcional à $g^2(r)f(r)$ e o lado direito da equação (2.26) é proporcional à $f^2(r)g(r)$. Os termos de acoplamento são de ordem superior e não lineares e, portanto, devem ser omitidos na aproximação linear. Quando desconsideramos esses termos, temos dois modelos $\mathbb{C}P^N$ desacoplados. Ou seja, no limite de pequenas amplitudes, no regime linear, os compactons não interagem entre si. As soluções analíticas de cada modelo são as mesmas soluções obtidas por (KLIMAS; LIVRAMENTO, 2017), apresentadas na seção 1.2.1. Por outro lado, se mantivéssemos os termos de acoplamento encontraríamos sérios obstáculos para obter as soluções exatas. Nesse caso, uma abordagem numérica seria inevitável e, portanto, não teria benefícios analíticos em realizar a linearização da equação.

2.4 SOLUÇÕES COM TRÊS COMPONENTES

A generalização da abordagem apresentada para um número maior de campos acoplados é bastante direta; todavia, surgem novas dificuldades técnicas na obtenção das soluções numéricas. A seguir, serão apresentados alguns resultados para o modelo com três componentes acopladas. Primeiramente, vamos analisar o modelo com três Q-balls e, em seguida, uma mistura de Q-balls e Q-shells.

A Figura 16(a) mostra o resultado para 3 Q-balls (BBB) para $(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = (1.5, 1.2, 1.0)$. Pela figura é possível verificar que para frequências $\omega_1 > \omega_2 > \omega_3$ os raios das Q-balls satisfazem a relação $R_1 < R_2 < R_3$. A solução mista (BBS) para $(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = (1.0, 1.0, 1.0)$ é apresentada na Figura 16(b). Na região central $0 \leq r \leq R_1$ temos apenas as Q-balls $\mathbb{C}P^1 - \mathbb{C}P^3$ não nulas, enquanto a $\mathbb{C}P^5$ assume valor de vácuo. Na região $R_1 \leq r \leq R_2$ todas soluções $\mathbb{C}P^N$ são não triviais. Na região $R_2 \leq r \leq R_3$ a solução $\mathbb{C}P^1$ assume valor de vácuo e, finalmente, em $R_3 \leq r \leq R_4$ apenas a solução $\mathbb{C}P^5$

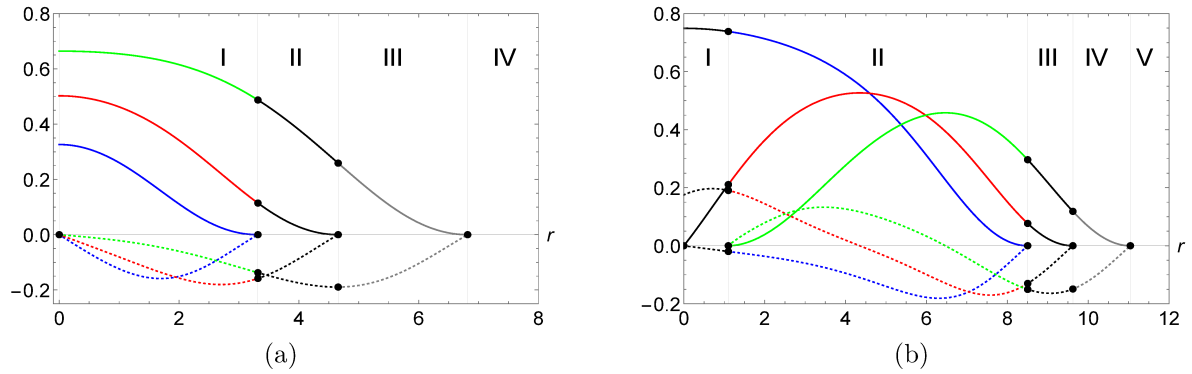


Figura 16 – (a) Modelos $\mathbb{C}P^1 - \mathbb{C}P^1 - \mathbb{C}P^1$ para $(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = (1.5, 1.2, 1.0)$. As outras constantes possuem valores $\tilde{\mu}_1^2 = \tilde{\mu}_2^2 = \tilde{\mu}_3^2 = 1.0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1.0$. Os parâmetros de chute para $f(r), g(r)$ e $h(r)$ são $(0.3261812, 0.5025038, 0.6642960)$. Os raios das Q-balls são $(R_1, R_2, R_3) = (3.3167, 4.65616, 6.81789)$. As derivadas $f'(r), g'(r)$ e $h'(r)$ estão representadas pelas curvas tracejadas. (b) Modelo $\mathbb{C}P^1 - \mathbb{C}P^3 - \mathbb{C}P^5$ para $(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = (1.0, 1.0, 1.0)$. As outras constantes possuem valores $\tilde{\mu}_1^2 = \tilde{\mu}_2^2 = \tilde{\mu}_3^2 = 1.0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1.0$. Os parâmetros de chute são $(a_0, b_1, R_1) = (0.74928874, 0.175212, 1.1012037)$. Os raios externos das Q-balls e da Q-shell são $(R_2, R_3, R_4) = (8.50442, 9.62203, 11.0439)$. As derivadas $f'(r), g'(r)$ e $h'(r)$ estão representadas pelas curvas tracejadas.

é não trivial. Para $r > R_4$ todas as soluções são nulas. Na Figura 17(a) temos o gráfico da densidade Hamiltoniana da solução BBS para o caso $\mathbb{C}P^1 - \mathbb{C}P^3 - \mathbb{C}P^5$ (Figura 16(b)).

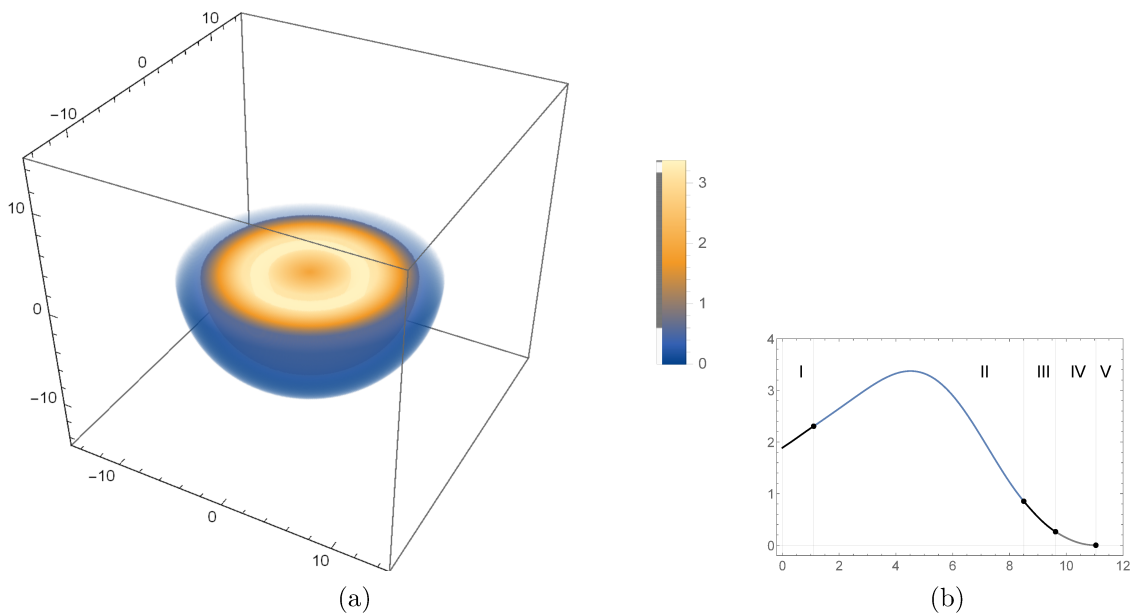


Figura 17 – Densidade Hamiltoniana correspondente a Figura 16(b) para o modelo $\mathbb{C}P^1 - \mathbb{C}P^3 - \mathbb{C}P^5$. Figura (a) o gráfico 3D da Hamiltoniana (b) a densidade radial da Hamiltoniana.

3 O MODELO $\mathbb{C}P^N$ MULTICOMPONENTE ELETRICAMENTE CARREGADO

As soluções obtidas até o momento consistem de estruturas de matéria compactas e esfericamente simétricas. Uma extensão natural para o modelo é o acoplamento com o campo elétrico, permitindo que as soluções possuam uma carga elétrica associada. Nas próximas seções veremos os meios para construir tais configurações.

3.1 O MODELO

Utilizando os resultados obtidos no capítulo anterior, vamos partir da Lagrangiana do modelo já em termos dos campos complexos $u^{(a)}$, $a = 1, \dots, n$ com $n = 2$. A extensão do modelo é feita através inclusão do termo eletromagnético na Lagrangiana e do acoplamento mínimo entre os campos $u_i^{(a)}$ e os campos de gauge A_μ . A lagrangiana assume a forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_{EM} + \sum_a^n \mathcal{L}_a + \mathcal{L}_{int} & (3.1) \\ \mathcal{L}_{EM} &:= -\frac{1}{4} g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma} F_{\mu\nu} F_{\lambda\sigma} \\ \mathcal{L}_a &:= \mathcal{L}_{kin,a} - \mu_a^2 V_a(u^{(a)\dagger}, u^{(a)}), & \mathcal{L}_{kin,a} &:= -M_a^2 g_{\mu\nu} \tau_a^{\nu\mu} \\ \mathcal{L}_{int} &:= -\lambda W(u^{(1)\dagger}, u^{(1)}, u^{(2)\dagger}, u^{(2)}), \end{aligned}$$

onde $g^{\mu\nu}$ é o tensor métrico e $F_{\mu\nu}$ é o tensor de campo eletromagnético usual. Os termos potenciais V_a e o termo de interação \mathcal{L}_{int} possuem a mesma forma que no modelo analisado no capítulo anterior. Por outro lado, o termo $\tau_a^{\nu\mu}$ é definido como

$$\tau_a^{\nu\mu} = -4 \frac{D^\mu u^{(a)\dagger} \cdot \Delta^2(u^{(a)}) \cdot D^\nu u^{(a)}}{(1 + u^{(a)\dagger} \cdot u^{(a)})^2}.$$

onde seguindo os passos de (LOGINOV, 2016; SAWADO; YANAI, 2020) definimos a atuação da derivada covariante sobre os campos $u_j^{(a)}$ como

$$D_\mu u_j^{(a)} = \partial_\mu u_j^{(a)} - ie q_j^{(a)} A_\mu u_j^{(a)}.$$

onde A_μ é um campo Abeliano de gauge. A transformação de A_μ que deixa a Lagrangiana invariante é

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + e^{-1} \partial_\mu \Lambda(x),$$

enquanto as transformações dos campos $u_j^{(a)}$ que deixam a Lagrangiana invariante, são transformações, dadas por

$$u_j^{(a)} \rightarrow u_j^{(a)} e^{iq_j^{(a)} \Lambda(x)}, \quad j = 1, \dots, N_a$$

As equações de Euler-Lagrange são obtidas através da variação da ação $S = \int_\Omega d^4x \mathcal{L}$ com relação aos campos $u_k^{(a)}, u_k^{(a)*}$ e A_ν (supondo que as variações dos campos na borda

sejam nulas, i.e., $\delta u_k^{(a)} = \delta u_k^{(a)*} = \delta A_\nu = 0$ na borda $\partial\Omega$). Novamente, as equações obtidas através da variação de $u_k^{(a)}$ e $u_k^{(a)*}$ são equivalentes. As equações de movimento relacionadas à variação de $u_k^{(a)*}$ e A_ν são, respectivamente,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{-g}} D_\mu \left(\sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_\mu u_k^{(a)*}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_k^{(a)*}} &= 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \left(\sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu A_\nu} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} &= 0, \end{aligned}$$

que podem ser reescritas de forma mais útil como

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} D_\mu \left(\sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}_{kin,a}}{\partial D_\mu u_k^{(a)*}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}_{kin,a}}{\partial u_k^{(a)*}} + \mu_a^2 \frac{\delta V_a}{\delta u_k^{(a)*}} + \lambda \frac{\delta W}{\delta u_k^{(a)*}} = 0 \quad (3.2)$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \left(\sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}_{EM}}{\partial \partial_\mu A_\nu} \right) - \sum_a \frac{\partial \mathcal{L}_{kin,a}}{\partial A_\nu} = 0. \quad (3.3)$$

Multiplicando a equação (3.2) por $\frac{1}{4}(1 + u^{(a)\dagger} \cdot u^{(a)})^2$ e calculando os termos cinéticos, chegamos no seguinte conjunto de equações

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{-g}} D_\mu \left(\sqrt{-g} \frac{(1 + u^{(a)\dagger} \cdot u^{(a)})^2}{4} \frac{\partial \mathcal{L}_{kin,a}}{\partial D_\mu u_k^{(a)*}} \right) - \frac{1}{4} \partial_\mu \left((1 + u^{(a)\dagger} \cdot u^{(a)})^2 \right) \frac{\partial \mathcal{L}_{kin,a}}{\partial D_\mu u_k^{(a)*}} - \\ - \frac{(1 + u^{(a)\dagger} \cdot u^{(a)})^2}{4} \frac{\partial \mathcal{L}_{kin,a}}{\partial u_k^{(a)*}} + \frac{(1 + u^{(a)\dagger} \cdot u^{(a)})^2}{4} \left[\mu_a^2 \frac{\delta V_a}{\delta u_k^{(a)*}} + \lambda \frac{\delta W}{\delta u_k^{(a)*}} \right] = 0. \end{aligned}$$

Calculando cuidadosamente cada um dos termos e utilizando a inversa de $\Delta_{kl}^2(u^{(a)})$, dada por $\Delta_{kl}^{-2} = \frac{1}{1+u^\dagger \cdot u} (\delta_{kl} + u_k u_l^*)$, é possível desacoplar os termos com derivadas de segunda ordem. A equação toma a forma

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{-g}} D_\mu \left(\sqrt{-g} D^\mu u_j^{(a)} \right) - \frac{2}{(1 + u^{(a)\dagger} \cdot u^{(a)})} \left(u^{(a)\dagger} \cdot D_\mu u^{(a)} \right) D^\mu u_j^{(a)} + \\ + \frac{u_j^{(a)}}{(1 + u^{(a)\dagger} \cdot u^{(a)})} \left[(1 + u^{(a)\dagger} \cdot u^{(a)}) i e A_\mu \sum_l q_l^{(a)} u_l^{(a)*} D^\mu u_l^{(a)} - \right. \\ \left. - (u^{(a)\dagger} \cdot D^\mu u^{(a)}) i e A_\mu \left(q_j^{(a)} + \sum_l q_l^{(a)} u_l^{(a)*} u_l^{(a)} \right) \right] + \\ + \frac{(1 + u^{(a)\dagger} \cdot u^{(a)})}{4} \sum_{l=1}^{N_a} \left\{ \left(\delta_{jl} + u_j^{(a)} u_l^{(a)*} \right) \left[\frac{\mu_a^2}{M_a^2} \frac{\delta V_a}{\delta u_l^{(a)*}} + \frac{\lambda}{M_a^2} \frac{\delta W}{\delta u_l^{(a)*}} \right] \right\} = 0. \end{aligned}$$

Por conveniência, assumimos que $q_1^{(a)} = q_2^{(a)} = \dots = q_{N_a}^{(a)} \equiv q_a$. Assim, o termo proporcional à $\frac{u_j^{(a)}}{(1+u^{(a)\dagger} \cdot u^{(a)})}$ se anula, restando apenas

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{-g}} D_\mu \left(\sqrt{-g} D^\mu u_j^{(a)} \right) - \frac{2}{(1 + u^{(a)\dagger} \cdot u^{(a)})} \left(u^{(a)\dagger} \cdot D_\mu u^{(a)} \right) D^\mu u_j^{(a)} + \\ + \frac{(1 + u^{(a)\dagger} \cdot u^{(a)})}{4} \sum_{l=1}^{N_a} \left\{ \left(\delta_{jl} + u_j^{(a)} u_l^{(a)*} \right) \left[\frac{\mu_a^2}{M_a^2} \frac{\delta V_a}{\delta u_l^{(a)*}} + \frac{\lambda}{M_a^2} \frac{\delta W}{\delta u_l^{(a)*}} \right] \right\} = 0. \quad (3.4) \end{aligned}$$

Em seguida, calculamos os termos da equação (3.3). A expressão final para a equação é dada por

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}F^{\mu\nu}) = -\sum_a \frac{4ieq_a M_a^2}{(1+u^{(a)\dagger}\cdot u^{(a)})^2} [u^{(a)\dagger}\cdot D^\nu u^{(a)} - D^\nu u^{(a)\dagger}\cdot u^{(a)}], \quad (3.5)$$

Seguindo as notações do capítulo anterior, escrevemos $u^{(1)} \rightarrow u, u^{(2)} \rightarrow v$ e utilizaremos as mesmas parametrizações em termos de coordenadas adimensionais (t, r, θ, ϕ) com $\sqrt{-g} = r^2 \sin \theta$ e $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -\frac{1}{r^2}, -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta})$.

3.2 O ANSATZ

Seguindo o raciocínio utilizado no capítulo anterior, queremos obter uma forma reduzida das equações de movimento que dependa somente da coordenada radial r . Ainda, no caso em que desligamos a interação eletromagnética, devemos obter as estruturas apresentadas no capítulo anterior. Nesse sentido, o modelo $\mathbb{C}P^N$ multicomponente construído no capítulo 2 serve de caso limite para o modelo construído aqui.

Sendo assim, tome $N_1 = 2l_1 + 1$ e $N_2 = 2l_2 + 1$ e considere o ansatz

$$\begin{aligned} u_{m_1}(t, r, \theta, \phi) &= \sqrt{\frac{4\pi}{2l_1 + 1}} f(r) Y_{l_1, m_1}(\theta, \phi) e^{i\omega_1 t}, \\ v_{m_2}(t, r, \theta, \phi) &= \sqrt{\frac{4\pi}{2l_2 + 1}} g(r) Y_{l_2, m_2}(\theta, \phi) e^{i\omega_2 t}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

onde as coordenadas t, r, θ, ϕ são adimensionais e $m_1 = 0, \pm 1, \dots, \pm l_1$ e $m_2 = 0, \pm 1, \dots, \pm l_2$. Procuramos soluções esfericamente simétricas, estacionárias, com um campo magnético nulo. Para isso, consideramos o seguinte ansatz para o campo A_μ

$$A_\mu(t, r, \theta, \phi) = A_t(r). \quad (3.7)$$

Utilizando esse ansatz temos que

$$\begin{aligned} D_t u &= \partial_t u - ieq_1 A_t(r) u = i(\omega_1 - eq_1 A_t(r)) u = ib_1(r) u, \\ D_i u &\equiv \partial_i, \quad \text{para } i = r, \theta, \phi, \end{aligned}$$

e similarmente para v . Por conveniência, para manter as equações na forma simétrica, definimos um campo de gauge auxiliar $b_a(r) := \omega_a - eq_a A_t(r)$. Note que entre as 2 funções b_a apenas uma é independente.

Utilizando os ansatz podemos reduzir o conjunto de equações (3.4) e (3.5) à um sistema de três equações diferenciais acopladas que dependem apenas da variável radial

$$\Sigma^{(1)}(r) = \frac{\tilde{\mu}_1^2}{8} \sqrt{1+f^2} \text{sgn}(f) + \lambda_1 \frac{\alpha}{4} \left(\frac{f^2}{1+f^2} \right)^{\alpha-1} \left(\frac{g^2}{1+g^2} \right)^\beta f, \quad (3.8)$$

$$\Sigma^{(2)}(r) = \frac{\tilde{\mu}_2^2}{8} \sqrt{1+g^2} \text{sgn}(g) + \lambda_2 \frac{\beta}{4} \left(\frac{f^2}{1+f^2} \right)^\alpha \left(\frac{g^2}{1+g^2} \right)^{\beta-1} g \quad (3.9)$$

$$A_t'' + \frac{2}{r} A_t' + 8 \left(M_1^2 eq_1 b_1 \frac{f^2}{(1+f^2)^2} + M_2^2 eq_2 b_2 \frac{g^2}{(1+g^2)^2} \right) = 0, \quad (3.10)$$

onde definimos os termos $\Sigma^{(a)}(r)$ como

$$\begin{aligned}\Sigma^{(1)}(r) &\equiv f'' + \frac{2}{r}f' + b_1^2 \frac{1-f^2}{1+f^2}f - 2 \frac{ff'^2}{1+f^2} - \frac{l_1(l_1+1)}{r^2}f, \\ \Sigma^{(2)}(r) &\equiv g'' + \frac{2}{r}g' + b_2^2 \frac{1-g^2}{1+g^2}g - 2 \frac{gg'^2}{1+g^2} - \frac{l_2(l_2+1)}{r^2}g.\end{aligned}$$

Como esperado, no limite $q_a \rightarrow 0$ temos que $b_a \rightarrow \omega_a$ e, com isso, a equação (3.10) se desacopla e as equações (3.8), (3.9) se reduzem às equações (2.13) e (2.14), obtidas no capítulo 2.

3.2.1 A densidade Hamiltoniana

A densidade Hamiltoniana associada com a Lagrangiana (3.1) possui a forma

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \frac{\delta \mathcal{L}_1}{\delta(\partial_0 u_i)} \partial_0 u_i + \frac{\delta \mathcal{L}_1}{\delta(\partial_0 u_i^*)} \partial_0 u_i^* - \mathcal{L}_1 + \\ &+ \frac{\delta \mathcal{L}_2}{\delta(\partial_0 v_j)} \partial_0 v_j + \frac{\delta \mathcal{L}_2}{\delta(\partial_0 v_j^*)} \partial_0 v_j^* - \mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_{EM} - \mathcal{L}_{int}.\end{aligned}$$

Utilizando os ansatz (3.6) e (3.7) e supondo $\lambda \neq 0$ podemos reescrever a densidade Hamiltoniana como

$$\mathcal{H} = \lambda \left(\frac{1}{\lambda_1} \mathcal{H}_1 + \frac{1}{\lambda_2} \mathcal{H}_2 + \frac{1}{\lambda} \mathcal{H}_{EM} + W \right). \quad (3.11)$$

onde W é da mesma forma que no caso anterior e as expressões \mathcal{H}_a assumem a forma

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_1 &= \frac{4}{(1+f^2)^2} \left[f'^2 - b_1^2 f^2 + 2b_1 \omega_1 f^2 + \frac{l_1(l_1+1)}{r^2} (1+f^2) f^2 \right] + \tilde{\mu}_1^2 \frac{f}{\sqrt{1+f^2}}, \\ \mathcal{H}_2 &= \frac{4}{(1+g^2)^2} \left[g'^2 - b_2^2 g^2 + 2b_2 \omega_2 g^2 + \frac{l_2(l_2+1)}{r^2} (1+g^2) g^2 \right] + \tilde{\mu}_2^2 \frac{g}{\sqrt{1+g^2}}, \\ \mathcal{H}_{EM} &= -\frac{A_0'^2}{2}, \quad W = \left(\frac{f^2}{1+f^2} \right)^\alpha \left(\frac{g^2}{1+g^2} \right)^\beta, \quad \alpha, \beta \geq 1.\end{aligned}$$

Novamente, a configuração de vácuo constante, $f(r) = 0$ e $g(r) = 0$, minimiza a energia total do sistema.

3.2.2 Cargas de Noether

Conforme mencionado anteriormente, utilizando a parametrização em termos dos campos complexos $u^{(a)}$, a Lagrangiana (3.1) possui simetria local $U(1)^{N_1} \otimes U(1)^{N_2}$ sob as transformações

$$\begin{aligned}u_j &\rightarrow u_j e^{iq_1 \Lambda(x)}, & j &= 1, \dots, N_1 \\ v_j &\rightarrow v_j e^{iq_2 \Lambda(x)}, & j &= 1, \dots, N_2\end{aligned} \quad (3.12)$$

com $q_a \in \mathbb{R}$. Os resultados a seguir serão apresentados para um dos modelos, $a = 1$. Os resultados para as outras componentes podem ser obtidos trocando $u \leftrightarrow v$ e $f \leftrightarrow g$. Aqui consideraremos apenas as variações dos campos de matéria, ou seja, $\delta A_\mu = 0$ e, portanto, $\partial_\mu \Lambda(x) = 0 \implies \Lambda(x) = \Lambda = \text{constante}$. A partir da relação (3.12), a variação dos campos pode ser escrita como $\delta u_j = iq_1 \Lambda u_j$.

As correntes de Noether são dadas através da equação

$$\begin{aligned} J^{\mu,(m)} &= \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \partial_\mu u_m} \delta u_m + \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \partial_\mu u_m^*} \delta u_m^* \\ &= \Lambda q_1 \tilde{J}^{\mu,(m)} \end{aligned}$$

onde $\tilde{J}^{\mu,(m)}$ é definido como

$$\begin{aligned} \tilde{J}^{\mu,(m)} &= i \left(\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \partial_\mu u_m} u_m + \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \partial_\mu u_m^*} u_m^* \right) \\ &= -\frac{4i}{\theta^4} \sum_i^{N_1} \left[u_m^* \Delta_{mi}^2 D^\mu u_i - D^\mu u_i^* \Delta_{im}^2 u_m \right]. \end{aligned}$$

Utilizando o ansatz de Q-ball temos que, assim como no caso sem campo eletromagnético, apenas duas componentes são não nulas

$$\begin{aligned} \tilde{J}_t^{(m_1)} &= 8b_1 \frac{(l_1 - m_1)!}{(l_1 + m_1)!} \frac{f^2}{(1 + f^2)^2} (P_{l_1}^{m_1}(\cos \theta))^2, \\ \tilde{J}_\varphi^{(m_1)} &= 8m_1 \frac{(l_1 - m_1)!}{(l_1 + m_1)!} \frac{f^2}{1 + f^2} (P_{l_1}^{m_1}(\cos \theta))^2. \end{aligned}$$

A equação de continuidade pode ser escrita como

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} J_\nu^{(m_1)} \right) = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \Lambda q_1 \tilde{J}_\nu^{(m_1)} \right) = 0.$$

Supondo, que $q_1 \neq 0$, podemos escrever

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \tilde{J}_\nu^{(m_1)} \right) = \partial_t \tilde{J}^{(m_1)} t - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\varphi \tilde{J}_\varphi^{(m_1)} = 0$$

Integrando a equação de continuidade na região $[t', t''] \times \mathbb{R}^3$ e assumindo que a componente espacial $J_\varphi^{(m)}$ decresce suficientemente rápido na borda espacial obtemos a carga conservada de Noether

$$Q_t^{(m_1)} = \int d^3x \sqrt{-g} \tilde{J}_t^{(m_1)}(x) = \frac{32\pi}{2l_1 + 1} \int_0^\infty dr r^2 \frac{b_1 f^2}{(1 + f^2)^2}.$$

As componentes espaciais das correntes de Noether não contribuem para as cargas conservadas; ainda assim, são úteis para definir as integrais

$$q_\varphi^{(m_1)} := \frac{3}{2} \int d^3x \sqrt{-g} \frac{\tilde{J}_\varphi^{(m_1)}(x)}{r^2} = m_1 \frac{48\pi}{2l_1 + 1} \int_0^\infty dr \frac{f^2}{1 + f^2}.$$

A energia total é obtida integrando a densidade Hamiltoniana em todo o espaço $E = \int d^3x \mathcal{H}$, onde \mathcal{H} é dada por (3.11), e pode ser expressa em termos de $Q_a^{(m)}$ e $q_a^{(m)}$

$$\begin{aligned} E &= \int d^3x \sqrt{-g} (\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_{EM} + W) \\ &= \sum_{m_1=-l_1}^{l_1} \left(\omega_1 Q_t^{(m_1)} + m_1 q_\varphi^{(m_1)} \right) + \sum_{m_2=-l_2}^{l_2} \left(\omega_2 Q_t^{(m_2)} + m_2 q_\varphi^{(m_2)} \right) + \\ &\quad + 4\pi \int dr r^2 \left[\frac{4f'^2}{(1+f^2)^2} + \frac{4g'^2}{(1+g^2)^2} + \tilde{\mu}_1^2 \frac{f}{\sqrt{1+f^2}} + \tilde{\mu}_2^2 \frac{g}{\sqrt{1+g^2}} + \right. \\ &\quad \left. - \frac{4b_1^2 f^2}{(1+f^2)^2} - \frac{4b_2^2 g^2}{(1+g^2)^2} - \frac{A_0'^2}{2} + \left(\frac{f^2}{1+f^2} \right)^\alpha \left(\frac{g^2}{1+g^2} \right)^\beta \right], \end{aligned}$$

onde por simplicidade tomamos $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

3.3 SOLUÇÕES

A seguir serão apresentadas soluções numéricas do modelo para o caso $n = 2$. O procedimento para a obtenção dos resultados é semelhante ao realizado no capítulo 2, com a diferença que agora temos três equações acopladas, ao invés de duas. Portanto, precisaremos de três parâmetros de chute. Para obter esses parâmetros, expandimos as funções $f(r)$, $g(r)$ e $A(r)$ em série de potências em torno de uma região de interesse e utilizamos o comportamento dominante das funções nesse ponto como condições de contorno para as soluções. As soluções finais são obtidas através da junção das soluções parciais do problema em cada região, garantindo a continuidade das funções e suas derivadas. Para os casos a seguir, tomaremos todos os outros parâmetros do modelo iguais à 1.0, exceto onde o valor for indicado explicitamente.

De forma a evitar repetição, serão apresentadas as expansões para cada um dos casos e exemplos de soluções. Ao final, discutiremos as principais diferenças em relação aos resultados obtidos no capítulo anterior.

3.3.1 Q-ball - Q-ball

Vamos começar analisando o caso $\mathbb{C}P^1 - \mathbb{C}P^1$. Primeiramente, precisamos expandir as funções em série de potências em torno de $r = 0$

$$\begin{aligned} f(r) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k, & g(r) &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k r^k, \\ A(r) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k r^k. \end{aligned}$$

Em seguida, substituímos as expansões nas equações (3.8), (3.9) e (3.10) e determinamos os coeficientes, $k = 1, 2, \dots$, recursivamente. Os três coeficientes livres são (a_0, b_0, c_0) . Os

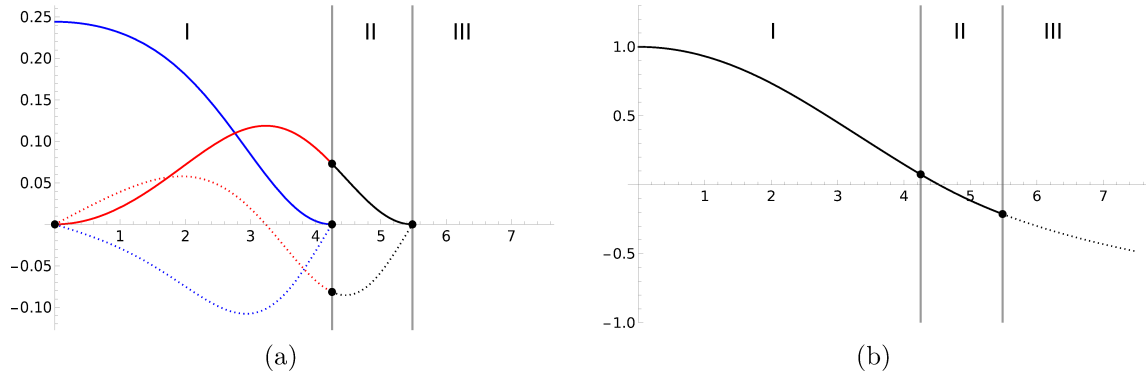


Figura 18 – (a) gráfico das funções $f(r), g(r)$ e suas respectivas derivadas (linhas pontilhadas) no modelo $\mathbb{C}P^1 - \mathbb{C}P^1$ acoplado ao campo elétrico para $(a_0, b_0, c_0) = (0.2442, 0, 1)$ com $(\omega_1, \omega_2) = (1.9671, 1.7422)$ e $q_1 = q_2 = 1$; (b) o campo de gauge associado com a configuração (a). Os raios das Q-balls são $(R_1, R_2) = (4.2502, 5.4831)$.

coeficientes ímpares, $k = 1, 3, 5, \dots$, são nulos. Os três primeiros coeficientes pares são

$$a_2 = \frac{1}{6} \left(\frac{a_0 b_0^2 \lambda_1}{4(1 + b_0^2)} + \frac{1}{8} \sqrt{1 + a_0^2 \tilde{\mu}_1^2} - \frac{a_0(1 - a_0^2)(\omega_1 - eq_1 c_0)^2}{1 + a_0^2} \right),$$

$$b_2 = \frac{1}{6} \left(\frac{a_0^2 b_0 \lambda_2}{4(1 + a_0^2)} + \frac{1}{8} \sqrt{1 + b_0^2 \tilde{\mu}_2^2} - \frac{b_0(1 - b_0^2)(\omega_2 - eq_2 c_0)^2}{1 + b_0^2} \right),$$

$$c_2 = -\frac{4}{3} \left(\frac{a_0^2 eq_1 M_1^2 (\omega_1 - c_0 eq_1)}{(1 + a_0^2)^2} + \frac{b_0^2 eq_2 M_2^2 (\omega_2 - c_0 eq_2)}{(1 + b_0^2)^2} \right).$$

A partir dos coeficientes com $k = 2$ é possível observar que em $r = 0$ as três funções dependem de $f(0), g(0)$ e $A(0)$. As funções perfil radial $f(r), g(r)$ e suas derivadas estão representadas na Figura 18(a). O campo de gauge associado $A(r)$ está apresentado na Figura 18(b). Aqui podemos perceber a primeira consequência da presença do campo elétrico no modelo: devido à repulsão elétrica entre as soluções, existe a configuração onde uma das Q-balls é radialmente deformada no sentido oposto à primeira Q-ball lembrando, de certa forma, uma Q-shell. Conforme $q_2 \rightarrow 0$ a solução deixa de existir, que é o que acontece no modelo sem campo elétrico.

3.3.2 Q-ball - Q-shell

No caso do modelo BS com campo elétrico precisamos de duas expansões. A primeira, em torno de $r = 0$, serve para encontrar o comportamento dos campos $f(r)$ e $A(r)$ (já que nessa região $g(r) = 0$). A segunda expansão serve para determinar o comportamento de $g(r)$ em torno de uma região $r = R_1$, onde a solução possui um raio interno. Considere como exemplo o caso $\mathbb{C}P^1 - \mathbb{C}P^5$.

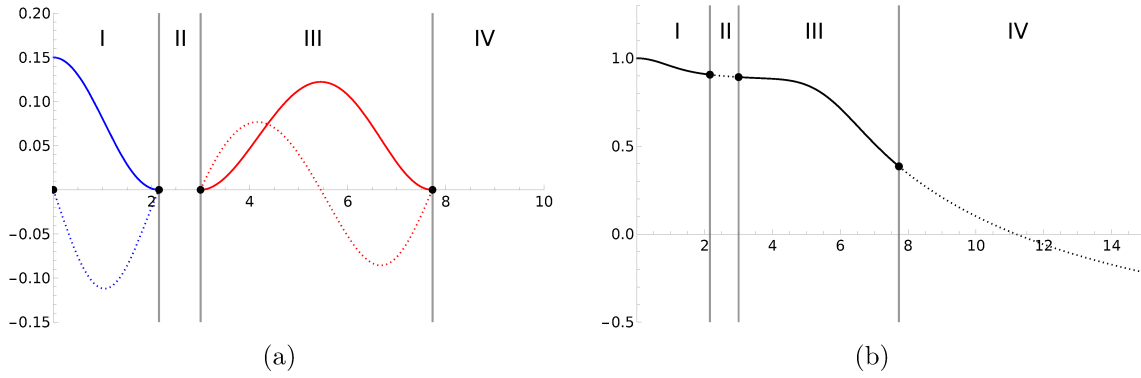


Figura 19 – (a) gráfico das funções $f(r), g(r)$ e suas respectivas derivadas (linhas pontilhadas) no modelo $\mathbb{C}P^1 - \mathbb{C}P^5$ acoplado ao campo elétrico para $(a_0, c_0, R_1) = (0.15, 1.0, 3.0)$ e $(\omega_1, \omega_2) = (3.0864, 2.2491)$ (b) o campo de gauge associado com a figura (a). Os raios externos da Q-ball e da Q-shell são, respectivamente, $R_0 = 2.1540$ e $R_2 = 7.7289$.

As expansões em torno de $r = 0$ são

$$f(r) = a_0 + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{8} \sqrt{1 + a_0^2 \tilde{\mu}_1^2} - \frac{a_0(1 - a_0^2)(\omega_1 - eq_1 c_0)^2}{1 + a_0^2} \right) r^2 + \mathcal{O}(r^3),$$

$$g(r) = 0,$$

$$A(r) = c_0 - \frac{4 a_0^2 eq_1 M_1^2 (\omega_1 - eq_1 c_0)}{3 (1 + a_0^2)^2} r^2 + \mathcal{O}(r^3),$$

Como as funções estão acopladas, em $r = R_1$ precisamos expandir todas as funções novamente. A expansão para $g(r)$ é dada por

$$g(r) = \frac{\tilde{\mu}_2^2}{16} (r - R_1)^2 - \frac{\tilde{\mu}_2^2}{24R_1} (r - R_1)^3 + \mathcal{O}((r - R_1)^4).$$

Vale lembrar que a expansão em torno de $r = R_1$ é realizada para garantir a continuidade das funções radiais e suas derivadas nesse ponto. Porém, apesar de termos que expandir as três funções nessa região, apenas a expansão de $g(r)$ é útil, pois podemos utilizar as soluções obtidas a partir da expansão em $r = 0$ para garantir as condições de contorno em $r = R_1$ para $f(r)$ e $A(r)$. Os parâmetros de chute nesse caso são (a_0, c_0, R_1) . Um exemplo de solução tipo *harbor* para esse caso pode ser visto na Figura 19. No modelo sem campo elétrico, o modelo $\mathbb{C}P^1 - \mathbb{C}P^5$ também apresenta soluções do tipo *harbor*, como foi apresentado na Figura 15. Porém lá, a Q-ball precisa ter uma amplitude muito pequena, enquanto a Q-shell é dezenas de vezes maior. Com a inclusão do campo elétrico, é possível obter estruturas de amplitudes muito próximas.

3.3.3 Q-shell - Q-shell

Para finalizar, serão apresentados dois exemplos de soluções do modelo $\mathbb{C}P^5 - \mathbb{C}P^7$. A primeira solução pode ser vista na Figura 20 e possui $q_1 = q_2 = 1.0$; já a segunda solução

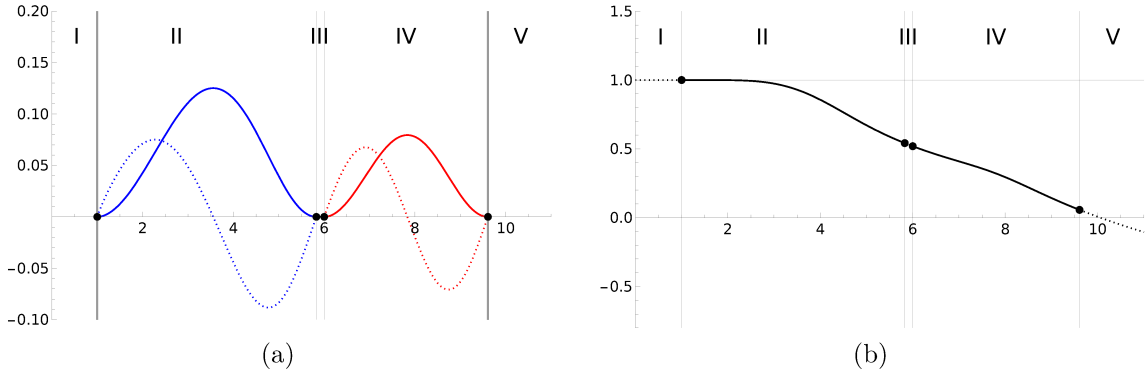


Figura 20 – (a) gráfico das funções $f(r),g(r)$ e suas respectivas derivadas (linhas pontilhadas) no modelo $\mathbb{C}P^5 - \mathbb{C}P^7$ acoplado ao campo elétrico para $(c_0, R_1, R_2) = (1.0, 1.0, 6.0)$, $(\omega_1, \omega_2) = (2.4565, 2.1323)$ e $q_1 = q_2 = 1.0$; (b) o campo de gauge associado com a figura (a). Os raios externos das Q-shells são, respectivamente, $R_3 = 5.8271$ e $R_4 = 9.6074$.

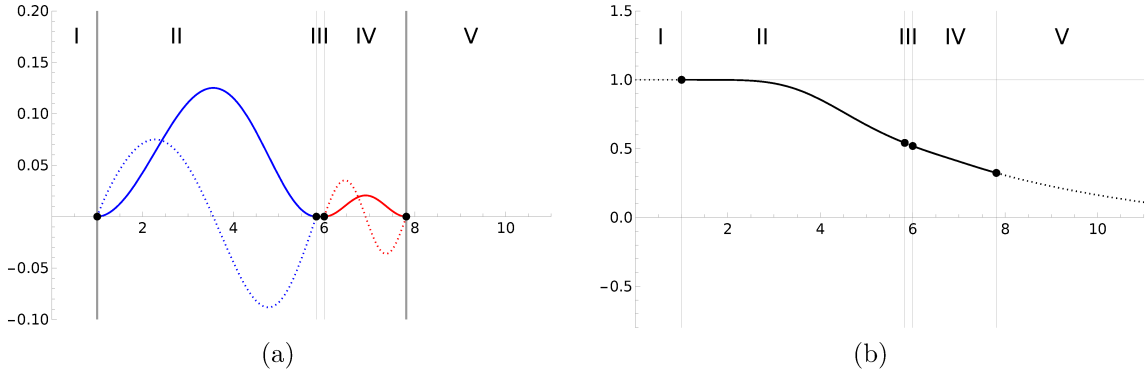


Figura 21 – (a) gráfico das funções $f(r),g(r)$ e suas respectivas derivadas (linhas pontilhadas) no modelo $\mathbb{C}P^5 - \mathbb{C}P^7$ acoplado ao campo elétrico para $(c_0, R_1, R_2) = (1.0, 1.0, 6.0)$, $(\omega_1, \omega_2) = (2.4565, 4.7636)$ e $q_1 = 1, q_2 = 3$; (b) o campo de gauge associado com a figura (a). Os raios externos das Q-shells são, respectivamente, $R_3 = 5.8271$ e $R_4 = 7.8083$.

está apresentada na Figura 21 e possui $q_1 = 1.0$ e $q_2 = 3.0$. Nas regiões I, III e V ambas as funções perfil f, g são nulas. Na região II temos $f > 0$ enquanto $g = 0$. Na região III temos $f = 0$ e $g > 0$. Ou seja, o raio externo da Q-shell interna encontra o raio interno da Q-shell externa, configurando uma solução tipo *harbor*.

No caso de modelos com solução SS a expansão das funções em torno de um ponto $r = R_{1,2} > 0$ gera sempre os mesmos termos

$$f(r \rightarrow R_1) = \frac{\tilde{\mu}_1^2}{16}(r - R_1)^2 - \frac{\tilde{\mu}_1^2}{24R_1}(r - R_1)^3 + \mathcal{O}((r - R_1)^4),$$

$$g(r \rightarrow R_2) = \frac{\tilde{\mu}_2^2}{16}(r - R_2)^2 - \frac{\tilde{\mu}_2^2}{24R_2}(r - R_2)^3 + \mathcal{O}((r - R_2)^4).$$

Já os campos de gauge precisam ser expandidos na origem, que basicamente nos resulta em um termo constante, uma vez que ambas funções f, g são nulas nessa região.

Com isso temos três parâmetros de chute: os dois raios internos das Q-shells (R_1, R_2) e o valor do campo de gauge em $r = 0$, (c_0).

A partir da comparação entre esses dois exemplos é possível observar como a alteração da carga das soluções impacta na sua forma. Com o aumento de q_2 na Q-shell externa, temos o aumento de ω_2 e a redução do seu raio R_4 .

Após a análise numérica das soluções BB, BS e SS, alguns pontos valem ser mencionados. No modelo com o campo elétrico é possível obter um conjunto de parâmetros iniciais para os quais existem mais de uma solução possível (para diferentes conjuntos de ω_a e q_a), algo que não foi percebido no modelo sem campo elétrico. Por fim, outro ponto a ser mencionado é que fixado um conjunto de parâmetros iniciais, existe uma carga máxima para a qual não é possível encontrar soluções através da variação dos parâmetros ω_a .

4 CONCLUSÕES

Foram apresentadas diversas classes de soluções inéditas para o problema de campos acoplados no modelo $\mathbb{C}P^N$ sigma não linear com e sem campo elétrico. O primeiro modelo considerado consiste de dois ou mais campos $\mathbb{C}P^N$ acoplados através de um potencial de interação, onde foi focado principalmente no caso de dois campos acoplados. Foram construídos diversos compactons esfericamente simétricos de diferentes formatos, caracterizados pelos números (N_1, N_2) que determinam o número de campos complexos em cada componente $\mathbb{C}P^N$. O caso $(N_1, N_2) = (1, 1)$, isto é, o modelo $\mathbb{C}P^1 - \mathbb{C}P^1$, possui solução do tipo Q-ball - Q-ball (BB). Outras soluções do tipo BB foram obtidas para $(1,3)$ e $(3,3)$. Para N_1 ou N_2 maior que 3, as soluções tem a forma de Q-ball - Q-shell (BS) ou Q-shell - Q - shell (SS).

Cada solução depende de diversas constantes, incluindo as constantes de acoplamento. Nos estudos apresentados aqui, focamos principalmente na dependência em função das constantes (ω_1, ω_2) que aparecem devido ao ansatz de Q-ball e que influenciam no tamanho do raio da Q-ball compacta. Dentre as soluções apresentadas, as que mais chamam a atenção são as do tipo *harbor*. Elas envolvem duas soluções radiais, uma completamente contida no vácuo interno da outra. Essa solução é nova em comparação à outras soluções do tipo *harbor* onde normalmente temos um buraco negro ou outro corpo massivo como solução interna. Nossos compactons são estruturas do tipo BS e SS, tais que $f(r) > 0$ apenas onde $g(r) = 0$ e $g(r) > 0$ apenas onde $f(r) = 0$. Em outras palavras, cada componente do $\mathbb{C}P^N$ não interage com as outras componentes. A existência de tais soluções só é possível devido ao caráter compacto das soluções e da forma do potencial de acoplamento.

A estabilidade das soluções foi estudada em (KLIMAS; KUBASKI; SAWADO; YANAI, 2021), através da análise da energia em função das cargas de Noether. A energia é um pouco maior que no caso de modelos não acoplados. Alterando o valor dos parâmetros ω_1 e ω_2 alteramos os raios dos compactons que compõem a solução. Consequentemente, deslocamos a posição do máximo da densidade de energia associada com a configuração. Além disso, através da análise da relação carga-energia $E \sim Q^\alpha$, foi obtido $\alpha < 1$ e, com isso, podemos concluir que as Q-balls e Q-shells grandes são energeticamente mais estáveis do que as Q-balls e Q-shells pequenas.

Soluções analíticas aproximadas, são possíveis apenas no limite de baixas amplitudes para os campos. Nesse caso, as equações radiais se reduzem à um sistema acoplado de equações tipo signum-Gordon. No caso onde os compactons não se sobrepõem, cada compacton é separadamente uma solução da equação de signum-Gordon, e nesse caso, a aproximação corresponde com a apresentada em (KLIMAS; LIVRAMENTO, 2017). Por outro lado, mesmo no limite de pequenas amplitudes dos campos, é muito difícil obter soluções analíticas para os compactons. Mesmo possuindo tal solução não teríamos novas informações relevantes, uma vez que as solução não seriam gerais. Esse é o motivo de não

serem apresentadas soluções analíticas aproximadas para as funções radiais no caso de superposições.

O segundo modelo considerado consiste de dois ou mais campos $\mathbb{C}P^N$ acoplados através do potencial de interação e do campo eletromagnético. Novamente, foram construídos compactons esfericamente simétricos, onde focamos no caso de dois campos acoplados. A inclusão do campo eletromagnético no modelo se dá através do acoplamento mínimo entre os campos de matéria e o campo de gauge na derivada covariante. Com isso, além dos parâmetros usuais do modelo, temos também as cargas q_a que aparecem devido à invariância da Lagrangiana sob transformações dos campos de matéria. Foi observado que a presença do campo elétrico distorce as configurações devido à repulsão entre soluções. O modelo também apresenta soluções do tipo *harbor*.

Os resultados obtidos nesse modelo são inéditos. Outras propriedades do modelo, novas soluções e a análise da estabilidade das soluções estão sendo estudadas e serão apresentadas em um artigo que está sendo elaborado.

REFERÊNCIAS

- ADAM, C.; KLIMAS, P.; SANCHEZ-GUILLEN, J.; WERESZCZYŃSKI, A. Compact baby skyrmions. *Physical Review D*, APS, v. 80, n. 10, p. 105013, 2009. Citado na página 21.
- ARODZ, H. Topological compactons. *arXiv preprint nlin/0201001*, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 21.
- ARODZ, H.; KLIMAS, P. Chain of impacting pendulums as non-analytically perturbed sine-gordon system. *arXiv preprint cond-mat/0501112*, 2005. Citado na página 19.
- ARODZ, H.; KLIMAS, P.; TYRANOWSKI, T. Field-theoretic models with v-shaped potentials. *arXiv preprint hep-th/0510204*, 2005. Citado 3 vezes nas páginas 16, 19 e 21.
- ARODZ, H.; LIS, J. Compact q-balls in the complex signum-gordon model. *Physical Review D*, APS, v. 77, n. 10, p. 107702, 2008. Citado na página 19.
- BABELON, O.; BERNARD, D.; TALON, M. *Introduction to classical integrable systems*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2003. Citado na página 15.
- BAZEIA, D.; LOSANO, L.; MARQUES, M.; MENEZES, R.; ROCHA, R. da. Compact q-balls. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 758, p. 146–151, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 19.
- BOGOLYUBSKII, I.; MAKHAN'KOV, V. Lifetime of pulsing solitons in some classical models. *Zh. Eksp. Teor. Fiz., Pis'ma Red.;*(USSR), v. 24, n. 1, 1976. Citado na página 18.
- BROWN, G. E. *Selected Papers With Commentary, Of Tony Hilton Royle Skyrme*. [S.l.]: World Scientific, 1994. v. 3. Citado na página 15.
- COLEMAN, S. New phenomena in subnuclear physics: Proceedings, international school of subnuclear physics, erice, sicily, jul 11-aug 1 1975. part a. *Subnucl. Ser*, v. 13, p. 297, 1977. Citado na página 15.
- COLEMAN, S. Q-balls. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 262, n. 2, p. 263–283, 1985. Citado na página 16.
- COPELAND, E. J.; GLEISER, M.; MÜLLER, H.-R. Oscillons: Resonant configurations during bubble collapse. *Physical Review D*, APS, v. 52, n. 4, p. 1920, 1995. Citado na página 18.

D'ADDA, A.; LÜSCHER, M.; VECCHIA, P. D. A 1n expandable series of non-linear σ models with instantons. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 146, n. 1, p. 63–76, 1978. Citado na página 20.

DERRICK, G. Comments on nonlinear wave equations as models for elementary particles. *Journal of Mathematical Physics*, American Institute of Physics, v. 5, n. 9, p. 1252–1254, 1964. Citado na página 15.

DUNAJSKI, M. *Solitons, instantons, and twistors*. [S.l.]: OUP Oxford, 2009. v. 19. Citado na página 15.

EICHENHERR, H.; FORGER, M. More about non-linear sigma models on symmetric spaces. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 164, p. 528–535, 1980. Citado na página 20.

FERREIRA, L. A.; LEITE, E. E. Integrable theories in any dimension and homogenous spaces. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 547, n. 3, p. 471–500, 1999. Citado na página 20.

FERREIRA, L. A.; OLIVE, D. I. Non-compact symmetric spaces and the toda molecule equations. *Communications in mathematical physics*, Springer, v. 99, n. 3, p. 365–384, 1985. Citado na página 20.

FRADKIN, E. *Field Theories of Condensed Matter Physics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2013. (Field Theories of Condensed Matter Physics). ISBN 9780521764445. Citado na página 20.

FRIEDBERG, R.; LEE, T.; PANG, Y. Scalar soliton stars and black holes. *Physical Review D*, APS, v. 35, n. 12, p. 3658, 1987. Citado na página 16.

GLEISER, M. Pseudostable bubbles. *Physical Review D*, APS, v. 49, n. 6, p. 2978, 1994. Citado na página 18.

GULAMOV, I.; NUGAEV, E. Y.; SMOLYAKOV, M. Theory of u (1) gauged q-balls revisited. *Physical Review D*, APS, v. 89, n. 8, p. 085006, 2014. Citado na página 16.

INAMI, T.; NAKAJIMA, H. Supersymmetric CPN Sigma Model on Noncommutative Superspace. *Progress of Theoretical Physics*, v. 111, n. 6, p. 961–966, 06 2004. ISSN 0033-068X. Citado na página 20.

JETZER, P. Boson stars. *Physics Reports*, Elsevier, v. 220, n. 4, p. 163–227, 1992. Citado na página 16.

- KLEIHAUS, B.; KUNZ, J.; LAMMERZAHN, C.; LIST, M. Charged Boson Stars and Black Holes. *Phys. Lett.*, B675, p. 102–115, 2009. Citado na página 44.
- KLEIHAUS, B.; KUNZ, J.; LAMMERZAHN, C.; LIST, M. Boson shells harboring charged black holes. *Physical Review D*, APS, v. 82, n. 10, p. 104050, 2010. Citado na página 17.
- KLEIHAUS, B.; KUNZ, J.; LAMMERZAHN, C.; LIST, M. Boson Shells Harboring Charged Black Holes. *Phys. Rev.*, D82, p. 104050, 2010. Citado na página 44.
- KLIMAS; LIVRAMENTO. Compact q-balls and q-shells in c p n-type models. *Physical Review D*, APS, v. 96, n. 1, p. 016001, 2017. Citado 12 vezes nas páginas 17, 18, 20, 21, 24, 25, 26, 27, 32, 33, 46 e 59.
- KLIMAS; SAWADO; YANAI. Gravitating compact q-ball and q-shell solutions in the c p n nonlinear sigma model. *Physical Review D*, APS, v. 99, n. 4, p. 045015, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 18.
- KLIMAS, P.; KUBASKI, L.; SAWADO, N.; YANAI, S. Compact q-balls and q-shells in a multi-component cp-n model. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2021, n. 9, p. 1–28, 2021. Citado 3 vezes nas páginas 18, 45 e 59.
- KLIMAS, P.; SAWADO, N.; YANAI, S. Gravitating compact Q -ball and Q -shell solutions in the CP^N nonlinear sigma model. *Phys. Rev. D*, v. 99, n. 4, p. 045015, 2019. Citado na página 44.
- KLIMAS, P.; SAWADO, N.; YANAI, S. Nodal compact q-ball and q-shell in the c p n nonlinear sigma model. *Physical Review D*, APS, v. 105, n. 8, p. 085004, 2022. Citado na página 34.
- KUSENKO, A. Solitons in the supersymmetric extensions of the standard model. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 405, n. 1-2, p. 108–113, 1997. Citado na página 16.
- KUSENKO, A.; KUZMIN, V.; SHAPOSHNIKOV, M.; TINYAKOV, P. G. Experimental signatures of supersymmetric dark-matter q-balls. *Physical Review Letters*, APS, v. 80, n. 15, p. 3185, 1998. Citado na página 16.
- KUSENKO, A.; SHAPOSHNIKOV, M. Supersymmetric q-balls as dark matter. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 418, n. 1-2, p. 46–54, 1998. Citado na página 16.
- LEE, K.; STEIN-SCHABES, J. A.; WATKINS, R.; WIDROW, L. M. Gauged q balls. *Physical Review D*, APS, v. 39, n. 6, p. 1665, 1989. Citado na página 16.

LEE, T.-D.; PANG, Y. Nontopological solitons. *Physics Reports*, Elsevier, v. 221, n. 5-6, p. 251–350, 1992. Citado 3 vezes nas páginas 15, 16 e 19.

LOGINOV, A. Y. Topological solitons in a gauged c p (2) model. *Physical Review D*, APS, v. 93, n. 6, p. 065009, 2016. Citado na página 49.

LYNN, B. W. Q-stars. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 321, n. 2, p. 465–480, 1989. Citado na página 16.

MIURA, R. M. Korteweg-de vries equation and generalizations. i. a remarkable explicit nonlinear transformation. *Journal of Mathematical Physics*, American Institute of Physics, v. 9, n. 8, p. 1202–1204, 1968. Citado na página 15.

ROSENAU, P.; HYMAN, J. M. Compactons: solitons with finite wavelength. *Physical Review Letters*, APS, v. 70, n. 5, p. 564, 1993. Citado na página 19.

SAWADO; YANAI. Compact, charged boson stars and shells in the c p n gravitating nonlinear sigma model. *Physical Review D*, APS, v. 102, n. 4, p. 045007, 2020. Citado 3 vezes nas páginas 17, 18 e 49.

SAWADO; YANAI. Phase analyses for compact, charged boson stars and shells harboring black holes in the c p n nonlinear sigma model. *Physical Review D*, APS, v. 103, n. 12, p. 125018, 2021. Citado na página 17.

SAWADO, N.; YANAI, S. Phase analyses for compact, charged boson stars and shells harboring black holes in the CP^N nonlinear sigma model. *Phys. Rev. D*, v. 103, n. 12, p. 125018, 2021. Citado na página 44.

WITTEN, E. Superconducting strings. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 249, n. 4, p. 557–592, 1985. Citado na página 17.

YANAI. Q-balls,-shells of a nonlinear sigma model with finite cosmological constants. In: IOP PUBLISHING. *Journal of Physics: Conference Series*. [S.l.], 2019. v. 1194, n. 1, p. 012114. Citado na página 17.

ZAKRZEWSKI, W. *Low dimensional sigma models*. [S.l.], 1988. Citado na página 20.