

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CAMPUS FLORIANÓPOLIS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

BERNARDO RODRIGUES MARTORANO

DINÂMICA NOS ESPAÇOS DE CANTOR E O ESPAÇO DOS  
LADRILHAMENTOS

Florianópolis

2022

Bernardo Rodrigues Martorano

# Dinâmica nos Espaços de Cantor e o Espaço dos Ladrilhamentos

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação em Matemática submetido ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina, como requisito necessário para obtenção do grau de Bacharel em Matemática

Orientador: Professor Dr. Daniel Gonçalves

Florianópolis  
2022

Bernardo Rodrigues Martorano

## Dinâmica nos Espaços de Cantor e o Espaço dos Ladrilhamentos

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado para a obtenção do título de Bacharel em Matemática, sendo aprovado em sua forma final pelo Curso de Matemática.

Florianópolis, março de 2022.

---

Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Silvia Martini de Holanda.  
Coordenadora do Curso de Matemática

**Banca Examinadora:**

---

Prof. Dr. Daniel Golçalves  
Orientador  
Universidade Federal de Santa Catarina

---

Prof. Dr. Marcelo Sobottka  
Universidade Federal de Santa Catarina

---

Prof. Dr. Francisco Carlos Caramello Junior  
Universidade Federal de Santa Catarina



# Resumo

Na primeira parte desta tese de conclusão de curso é apresentado ao leitor uma breve introdução sobre fluxos, sistemas dinâmicos e sistemas caóticos. O sistema quadrático é usado como motivação para o desenvolvimento da dinâmica simbólica e a partir disso os espaços simbólicos se tornam uma das partes centrais do trabalho, em que são mostradas características relevantes do conjunto de Cantor. Na segunda parte, o espaço dos ladrilhamentos é introduzido, junto com complexos celulares, o método da substituição e resultados importantes envolvendo tais temas.

**Palavras-chave:** sistemas dinâmicos; sistemas caóticos; dinâmica simbólica; conjunto de Cantor; espaços simbólicos; espaço dos ladrilhamentos.

# Abstract

In the first part of this thesis, a brief introduction to flows, dynamical systems and chaotic systems is given to the reader. As motivation for the development of symbolic dynamics, the quadratic systems are presented, and from that, the symbolic spaces become a central subject of this work, where relevant properties of the Cantor set are shown. The tiling system is introduced in the second part, along with cell complexes, the substitution method and important results from these themes.

**Keywords:** Dynamical systems, chaotic systems, symbolic dynamics, Cantor set, symbolic spaces, tiling spaces.

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Trajetórias para diferentes valores do parâmetro $r$ . . . . .	14
Figura 2 – Exemplo de um ladrilhamento no plano. . . . .	33
Figura 3 – Exemplo de $\omega$ aplicada a protoladrilhos. . . . .	38

# Sumário

1	INTRODUÇÃO . . . . .	8
2	SISTEMAS DINÂMICOS . . . . .	9
2.1	Equações Diferenciais Ordinárias . . . . .	9
2.2	Fluxos . . . . .	10
2.3	Sistemas Quadráticos . . . . .	13
2.4	Sistemas Caóticos . . . . .	15
2.5	Introdução à Dinâmica Simbólica . . . . .	18
3	ESPAÇOS SIMBÓLICOS . . . . .	23
3.1	Espaços Simbólicos . . . . .	23
4	ESPAÇO DOS LADRILHAMENTOS . . . . .	31
4.1	Complexos Celulares . . . . .	31
4.2	Ladrilhamentos . . . . .	32
4.3	O espaço de ladrilhamento $\Omega_T$ . . . . .	33
4.4	Método da Substituição . . . . .	37
4.5	$\Omega_T$ como um Limite Inverso . . . . .	40
5	CONCLUSÃO . . . . .	44
A	APÊNDICE - LIMITE INVERSO . . . . .	45
B	APÊNDICE - RESULTADOS AUXILIARES . . . . .	49
	REFERÊNCIAS . . . . .	51



# 1 Introdução

Com base no livro [Kůrka 2003], no capítulo 2 é introduzido ao leitor o conceito de sistema dinâmico, que consiste em um conjunto, chamado de conjunto de estados, e uma função contínua que leva esse conjunto a ele mesmo. A evolução da temperatura de certa partícula com o passar do tempo, ou como a posição de algum objeto se altera com o tempo são exemplos de sistemas dinâmicos. É definido então o que é um ponto atrator, sendo ele um ponto que atrai a trajetória de pontos ao seu redor. O critério diferencial de estabilidade é apresentado e demonstrado, como uma ferramenta para determinar se um ponto é atrator em certos sistemas dinâmicos.

Alguns sistemas dinâmicos podem ter comportamentos imprevisíveis e difíceis de analisar, como os sistemas caóticos, apresentados na seção 2.4. Tais sistemas serviram para a motivação do estudo da dinâmica simbólica, que tem como objetivo representar sistemas dinâmicos através de sequências infinitas de símbolos e sua dinâmica pelo deslocamento de seus elementos. Foi tomado como exemplo de sistema caótico um sistema quadrático particular (sistema dinâmico cuja função contínua é uma função de segundo grau). Para estudar esse sistema caótico, analisamos a expansão binária de seus elementos e foi notado que a partir dessas expansões, sua dinâmica é simplificada.

Enxergar os elementos de um sistema através de suas expansões binárias incentivou uma análise do conjunto de Cantor, pois como é visto nesse trabalho, ele é homeomorfo ao conjunto das sequências binárias infinitas. Com tal perspectiva em mente, no capítulo 3 abordamos nesse trabalho os espaços simbólicos, que são espaços topológicos formados por sequências de símbolos. É então exibida a definição de espaço de Cantor e partir dela, é provado que todo espaço de Cantor é homeomorfo ao espaço de sequências binárias, e portanto todo espaço de Cantor é homeomorfo entre si.

No capítulo 4, com base nas referências [Starling 2005], [Starling 2012], exibimos o espaço dos ladrilhamentos. Tome o plano,  $\mathbb{R}^2$ , como exemplo. Podemos o preencher com infinitos ladrilhos de formatos finitos de forma aperiódica e, a partir desse ladrilhamento do plano, é possível o transladar, inflar e encolher, formando um conjunto de ladrilhamentos. Ao atribuir uma métrica a ele, formamos um espaço métrico de ladrilhamentos, que junto com uma função contínua que expande os ladrilhamentos, formam um sistema dinâmico.

No apêndice A, propriedades extras do limite inverso são demonstradas, tendo como referência [Varagona 2008]. Já no apêndice B, resultados que foram importantes no desenvolvimento do trabalho, mas que não era conveniente para o texto que suas demonstrações fossem exibidas, são provados. Aqui, as referências [Munkres 2000] e [Lima 1977] foram consultadas.

## 2 Sistemas Dinâmicos

### 2.1 Equações Diferenciais Ordinárias

Uma equação diferencial ordinária autônoma de primeira ordem é escrita como:

$$f'(t) = \varphi(f(t)), \quad f(0) = x \in \mathbb{R}$$

onde  $f$  é uma função desconhecida,  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função dada e o número real  $x$  é o valor inicial da função  $f$  dado no tempo 0. Veja que se  $\varphi(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$ , então  $f(t) = x$  para todo  $t$  e chamaremos tal  $x$  de **ponto estacionário**.

Se  $\varphi(x) \neq 0$  e é contínua, então em um intervalo  $I$  ao redor de  $x$  no domínio de  $\varphi$ , ela será não nula. Observe a equação abaixo:

$$t = \int_0^t 1 dt = \int_0^t \frac{f'(t)}{\varphi(f(t))} dt = \int_{f(0)}^{f(t)} \frac{1}{\varphi(y)} dy = [G(y)]_x^{f(t)} = G(f(t)) - G(x) \quad (2.1)$$

em que  $f(t) = y$  e  $G(y)$  é uma primitiva de  $1/\varphi(y)$ . Perceba que como  $\varphi$  não se anula em  $I$ , não muda de sinal, logo, considerando o mesmo intervalo,  $G'(y)$  também manterá o sinal e portanto,  $G$  é monótona e terá uma inversa em  $I$ . Da equação (2.1), veja que:

$$t = G(f(t)) - G(x) \Rightarrow G(f(t)) = t + G(x) \Rightarrow f(t) = G^{-1}(t + G(x)). \quad (2.2)$$

A equação acima é uma solução da EDO proposta no intervalo  $I$  e definirá um sistema dinâmico (Definição 2) se a solução está definida para todo  $t$  positivo e se for única.

#### Exemplo 1. Crescimento exponencial:

Equação que modela o crescimento de uma população com base em sua população atual. Sendo  $f(t)$  o tamanho da população no tempo  $t$ , temos que seu crescimento pode ser expressado por:

$$f'(t) = af(t), \quad f(0) = x$$

cujas únicas soluções são dadas por:

$$f(t) = xe^{at}$$

definidas em todo  $t$ .

## 2.2 Fluxos

Seja  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função tal que para cada  $x \in \mathbb{R}$  a EDO

$$f'(t) = \varphi(f(t)), \quad f(0) = x$$

tenha uma única solução definida para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Seja  $F(x, t)$  a solução da EDO considerando o valor inicial  $x \in \mathbb{R}$ . Então:

$$\frac{\partial F(x, t)}{\partial t} = \varphi(F(x, t)), \quad F(x, 0) = x.$$

No Exemplo 1 podemos escrever a solução na forma  $F(x, t) = xe^{at}$ , para exemplificar. Fixe agora  $x$  e  $t$  reais e considere as funções:

$$F_1(s) = F(F(x, t), s) \quad F_2(s) = F(x, t + s).$$

Note que  $F_1$  e  $F_2$  são soluções da EDO levando em conta os valores iniciais  $F_1(0) = F_2(0) = F(x, t)$  e, devido a unicidade da solução,  $F_1 = F_2$ .

Vamos observar essa igualdade por outra perspectiva. Para qualquer  $t \in \mathbb{R}$ , seja  $F^t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$F^t(x) = F(x, t)$$

logo  $F^t$  é a função que descreve como os estados de um certo sistema mudam em relação a passagem de um tempo  $t$ . Se  $x$  é o estado inicial (quando  $t = 0$ ),  $F^t(x)$  é o estado no tempo  $t$ . Ou seja:

$$F^0(x) = x, \quad F^s(F^t(x)) = F^{s+t}(x),$$

ou

$$F^0 = Id, \quad F^s \circ F^t = F^{s+t}.$$

Uma função de duas variáveis que possui as propriedades descritas acima é considerada um **fluxo**.

**Definição 1.** *Um fluxo é uma tripla  $(X, T, F)$  em que:*

1.  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  será o conjunto de estados,
2.  $T \subseteq \mathbb{R}$  é o conjunto dos tempos, tal que  $\forall s, t \in T, s + t \in T$  e  $0 \in T$
3.  $F : X \times T \rightarrow X$  é uma função contínua satisfazendo:  $F^0 = Id$  e  $F^s \circ F^t = F^{s+t}$

Nem todo fluxo é obtido a partir de uma equação diferencial ordinária. Uma função contínua e bijetora  $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  pode definir um fluxo da seguinte maneira: para  $t \in \mathbb{R}$ , seja  $F^t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que:

$$F^t(x) = G^{-1}(t + G(x)).$$

Caso  $G$  e  $G^{-1}$  não sejam diferenciáveis, o fluxo anterior não provém de uma EDO. Até agora observamos apenas fluxos que consideram o tempo contínuo, ou seja,  $t \in \mathbb{R}$ , mas podemos também considerar a variável  $t$  apenas nos inteiros, caracterizando uma passagem de tempo discreta. Se o sistema é determinístico, ou seja, o estado futuro é determinado de maneira única pelo estado presente, podemos escrever o estado  $F^n(x) \in X$  em um tempo  $n \in \mathbb{Z}$  de forma que  $x$  é o estado inicial (no tempo 0) e  $F^n(x)$  é a  $n$ -ésima composição de  $F$  com ela mesma. Ou seja:  $F^0(x) = x$  e  $F^{n+1}(x) = F(F^n(x))$ .

Teremos um fluxo determinístico em relação ao futuro se  $T = [0, \infty)$ , e se  $T = (-\infty, \infty)$ , em relação ao passado e ao futuro. Nesse caso, a função contínua  $F$  será um homeomorfismo, uma vez que  $F^t \circ F^{-t} = F^{t-t} = F^0 = Id$ . Considerando  $T = \mathbb{N}$ , o fluxo será determinístico em relação ao futuro e dado pela função contínua  $F : X \rightarrow X$ . Caso  $T = \mathbb{Z}$  o fluxo será determinístico em relação ao passado e ao futuro e  $F$  será um homeomorfismo. Abaixo, definiremos um fluxo de tempo discreto chamado de **sistema dinâmico**.

**Definição 2.** *Um sistema dinâmico é um par  $(X, F)$ , em que  $X$  é um espaço métrico chamado de espaço dos estados, e  $F : X \rightarrow X$  é uma função contínua.*

**Definição 3.** *Seja  $(X, F)$  um sistema dinâmico.*

1. *Um ponto  $x \in X$  é um ponto fixo se  $F(x) = x$ .*
2. *Um ponto fixo  $x \in X$  será **estável** se, para todo  $\varepsilon \geq 0$ , existe  $\delta \geq 0$  tal que:*

$$y \in B(x, \delta) \Rightarrow F^n(y) \in B(x, \varepsilon), \forall n \in \mathbb{N},$$

*onde  $B(p, r)$  é a bola de centro  $p$  e raio  $r$*

3. *Um ponto fixo  $x \in X$  é **atrator** se, além de estável, existe  $\delta$  tal que:*

$$y \in B(x, \delta) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} d(x, F^n(y)) = 0,$$

*onde  $d$  é a métrica de  $X$ .*

Para entender melhor as definições vistas acima, vejamos um exemplo:

**Exemplo 2. Sistema Linear:** seja  $(\mathbb{R}, L_a)$  um sistema dinâmico, em que  $L_a(x) = ax$ . Perceba que há uma família  $(\mathbb{R}, L_a)_{a \in \mathbb{R}}$  de sistemas dinâmicos, e que as trajetórias dos elementos serão sempre uma progressão geométrica, uma vez que  $F^n(x) = a^n x, \forall a \in \mathbb{R}$ . Veja então que 0 sempre será um ponto fixo, e se  $|a| = 1$ , então 0 será estável mas não atrator, e caso  $|a| < 1$ , 0 será um ponto atrator.

**Teorema 1. Critério diferencial de estabilidade:** *Seja  $(\mathbb{R}, F)$  um sistema dinâmico em que  $F$  é diferenciável em um ponto fixo  $x$ .*

1. Se  $|F'(x)| < 1$ , então  $x$  é ponto atrator.
2. Se  $|F'(x)| > 1$ , então  $x$  não é estável.

*Demonstração.* Separando os casos, segue:

1. Suponha que  $F(x) = x$  e que  $|F'(x)| < 1$ . Tome agora  $r \in \mathbb{R}$  tal que  $|F'(x)| < r < 1$ . Considere  $\varepsilon > 0$  pequeno o suficiente para que  $|F'(x)| + \varepsilon < r$ . Considerando a definição de derivada como um limite, existe  $\delta > 0$  tal que:

$$\begin{aligned} |x - y| < \delta &\Rightarrow \left| \frac{x - F(y)}{x - y} - F'(x) \right| < \varepsilon \\ &\Rightarrow \frac{|x - F(y)|}{|x - y|} - |F'(x)| < \varepsilon \\ &\Rightarrow \frac{|x - F(y)|}{|x - y|} < \varepsilon + |F'(x)| < r \\ &\Rightarrow |x - F(y)| < r|x - y| < |x - y|. \end{aligned}$$

Vamos provar por indução que para todo  $y \in B(x, \delta)$ ,  $|x - F^n(y)| < r^n \delta$ , ou seja, se  $y$  está na bola dada, sua trajetória se aproxima monotonamente a  $x$ , uma vez que a sequência  $(r^n \delta)_{n \in \mathbb{N}}$  tende a 0.

Suponha que  $|x - F^{n-1}(y)| < r^{n-1} \delta$ , vamos provar que  $|x - F^n(y)| < r^n \delta$ . Pela definição da derivada de  $F$  em  $x$ , temos:

$$|x - F^n(y)| < \delta \Rightarrow \left| \frac{x - F^n(y)}{x - F^{n-1}(y)} \right| < r \Rightarrow |x - F^n(y)| < r|x - F^{n-1}(y)| < r \cdot r^{n-1} \delta,$$

provando o que queríamos.

2. Suponha agora que  $1 < |F'(x)|$ . Tome então um  $r \in \mathbb{R}$  tal que  $1 < r < |F'(x)|$ . Considere  $\varepsilon$  suficientemente pequeno tal que  $r < |F'(x)| - \varepsilon$ . Tendo em vista a definição da derivada de  $F$  em  $x$ , por um argumento semelhante ao visto na demonstração acima, temos que existe  $\delta > 0$  tal que:

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |x - F(y)| > r|x - y| > |x - y|$$

Caso  $|x - F(y)| > \delta$  então a prova acaba aqui. Caso  $|x - F(y)| < \delta$ , repetimos o processo acima e concluimos que  $|x - F^2(y)| > r|x - F(y)| > r^2|x - y|$ . Como a sequência  $(r^n|x - y|)_{n \in \mathbb{N}}$  converge para o infinito, temos que para algum  $k \in \mathbb{N}$ ,  $|x - F^k(y)| > r^k|x - y| > \delta$ , ou seja,  $x$  não é estável.

□

## 2.3 Sistemas Quadráticos

**Definição 4.** *Sejam  $\mathbb{I} = [0, 1]$ ,  $r \in [0, 4]$  e  $Q_r(x) = rx(1 - x)$ . Então  $(\mathbb{I}, Q_r)$  define uma família de sistemas dinâmicos chamados de **sistemas quadráticos**.*

Na Figura 1, os comportamentos de  $(\mathbb{I}, Q_r)$  para diferentes valores de  $r$  são ilustrados. Veja que os únicos candidatos a pontos fixos, independente do parâmetro  $r$ , são  $x = 0$  e  $x = 1 - \frac{1}{r}$ . Perceba também que se  $0 < r \leq 1$ , então 0 é o único ponto fixo em  $\mathbb{I}$ , e pelo Teorema 1, 0 será um ponto atrator. Além disso, qualquer trajetória irá convergir a 0, como provado a seguir.

**Proposição 1.** *Se  $0 \leq r \leq 1$ , então  $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_r^n(x) = 0$ , para qualquer  $x \in \mathbb{I}$ .*

*Demonstração.* Veja que pela definição de  $Q_r$  e por  $r \leq 1$ , temos que  $Q_r(x) < x$  para qualquer  $x \in \mathbb{I}$ , se  $x \neq 0$ . Como  $(Q_r^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sequência decrescente limitada inferiormente por 0, existe  $y \in \mathbb{R}$  tal que  $(Q_r^n(x))_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow y$ . Então

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} Q_r^n(x) \Rightarrow Q_r(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} Q_r^{n+1}(x) = y,$$

mas o único ponto fixo é 0, logo  $y = 0$  □

Se  $1 < r$  então 0 não será mais um ponto estável, e existirá um outro ponto fixo  $p_r = 1 - \frac{1}{r}$ . Pelo Teorema 1, veja que  $p_r$  será atrator se  $1 < r < 3$ , já que  $Q_r'(y) = 2 - r$ . Vamos provar agora que  $p_r$  atrairá qualquer ponto no intervalo  $\mathbb{I}$  exceto 0 e 1.

**Proposição 2.** *Se  $1 < r \leq 3$ , então  $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_r^n(x) = p_r$ , para qualquer  $x \in (0, 1)$ .*

*Demonstração.* Vejamos as situações:

- Caso  $r \leq 2$ . Temos então que  $p_r \leq \frac{1}{2}$  e:

$$0 < x < p_r \Rightarrow 0 < x < Q_r(x) < Q_r(p_r) = p_r$$

já que  $Q_r$  é crescente para  $x < \frac{1}{2}$ . Então, se  $x < p_r$ ,  $(Q_r^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sequência limitada superiormente por  $p_r$  e esse será limite. Se  $p_r < x \leq \frac{1}{2}$ ,  $(Q_r^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  será uma sequência limitada inferiormente por  $p_r$  e esse também será seu limite. Caso  $\frac{1}{2} \leq x < 1$ , a função é decrescente para  $[\frac{1}{2}, 1)$ , então segue:

$$\frac{1}{2} \leq x < 1 \Rightarrow Q_r(1) = 0 < Q_r(x) \leq Q_r\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{r-1}{2} \leq \frac{1}{2},$$

Logo  $Q_r(x) \leq \frac{1}{2}$  e cairá em algum caso anterior, portanto teremos  $(Q_r^n(x))_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow p_r$ .

- Caso  $2 < r \leq 3$ . Tome  $q_r = 1 - p_r = \frac{1}{2}$ . Teremos então:

$$q_r \leq x \leq p_r \Rightarrow \frac{1}{2} < p_r \leq Q_r(x) \leq Q_r\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow q_r \leq Q_r^2\left(\frac{1}{2}\right) \leq Q_r^2(x) \leq p_r$$

Logo,  $x < Q_r^2(x)$  para  $x \in [q_r, p_r]$ . Se  $x \in (0, 1)$ , então  $Q_r^k(x) \in [\frac{1}{2}, p_r]$  para algum  $k \in \mathbb{N}$  e  $(Q_r^{k+2n}(x))_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sequência crescente limitada superiormente que converge para  $p_r$ .

□

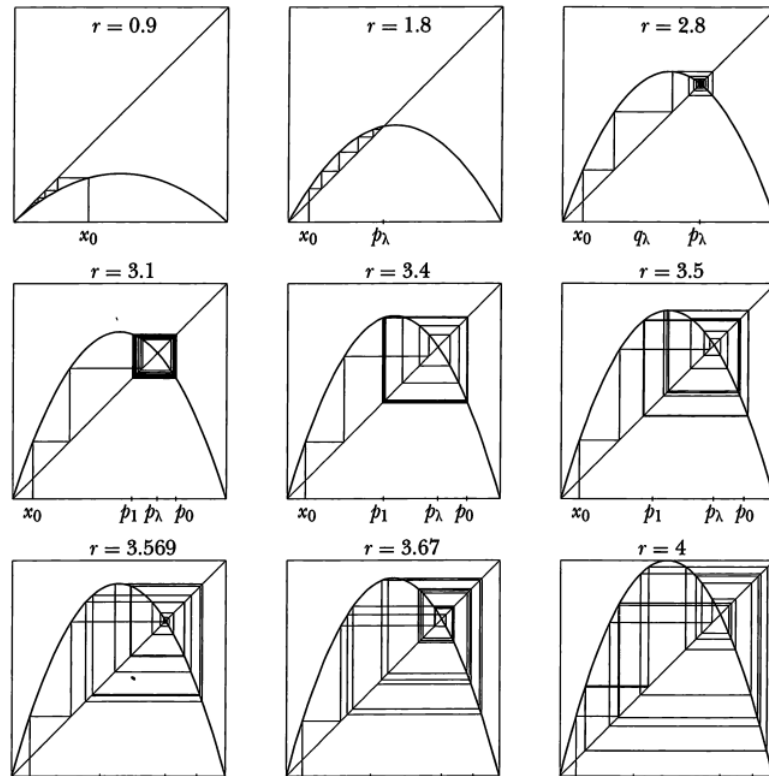


Figura 1 – Trajetórias para diferentes valores do parâmetro  $r$ .

**Definição 5.** Seja  $(X, F)$  um sistema dinâmico.

1. Se  $x \in X$ , o conjunto  $\mathcal{O}(x) = \{x, F(x), F^2(x), \dots\}$  será chamado de **órbita** de  $x$ .
2. Um ponto  $x \in X$  é chamado de **periódico** se existe  $p > 0$  tal que  $F^p(x) = x$ . O menor  $p$  que satisfaça essa propriedade é chamado de **período** de  $x$ .
3. Se  $F^m(x)$ ,  $m > 0$ , é periódico para algum  $x \in X$ , então  $x$  é chamado de **eventualmente periódico**.
4. Se  $x \in X$  é eventualmente periódico mas não é periódico, então será chamado de **pré-periódico**.

Veja que 1 é um ponto pré-periódico em  $(\mathbb{I}, Q_r)$ , uma vez que  $Q_r(1) = 0$  e 0 é um ponto fixo (periódico de período 1). Se  $r > 1$ ,  $q_r$  também é pré-periódico, pois  $Q_r(q_r) = p_r$ , que é periódico.

## 2.4 Sistemas Caóticos

Perceba da Definição 4 que, dependendo do parâmetro  $r$ , as propriedades do sistema  $(\mathbb{I}, Q_r)$  podem ser difíceis de se compreender. Porém, para o caso  $r = 4$  podemos observá-lo usando um sistema dinâmico em que seu espaço de estados é o círculo unitário. Podemos representar esse círculo no plano complexo, considerando todos os números  $z \in \mathbb{C}$  tais que  $z = e^{2\pi ix}$ , onde  $x \in [0, 1)$ . Para facilitar o entendimento, vamos nos referir a esses pontos por elementos do intervalo  $\mathbb{T} = [0, 1)$  da seguinte maneira: o número 1 é relacionado ao 0,  $i$  ao  $\frac{1}{4}$ ,  $-1$  ao  $\frac{1}{2}$  e  $-i$  ao  $\frac{3}{4}$ . Ou seja, uma bijeção que leva  $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  à  $\mathbb{T}$  fazendo  $\frac{\arg(z)}{2\pi}$ .

Interpretando  $\mathbb{T}$  como o círculo unitário, a distância entre dois pontos em  $\mathbb{T}$  será o menor comprimento de arco entre eles, ou seja:

$$d(x, y) = \min\{|x - y|, 1 - |x - y|\}.$$

Por exemplo,  $d(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}) = \frac{1}{8}$ , enquanto  $d(\frac{1}{8}, \frac{7}{8}) = \frac{1}{4}$ . Considere agora a função  $mod_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}$  dada por  $mod_1(x) = x - [x]$ , onde  $[x]$  é a parte inteira de  $x$ . Veja que  $mod_1$  é contínua, uma vez que os candidatos a pontos de descontinuidade são os números inteiros, que são enviados ao 0, e as pequenas vizinhanças dos inteiros no domínio são enviadas a valores que pela distância  $d$  definida acima, são próximos à 0.

**Exemplo 3. Sistema da dobra de ângulo.** Considere o sistema dinâmico  $(\mathbb{T}, D)$  em que  $\mathbb{T} = [0, 1)$  e  $D : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$  tal que  $D(x) = mod_1(2x)$ . Ou seja:

$$D(x) = \begin{cases} 2x, & x < \frac{1}{2} \\ 2x - 1, & x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Perceba que o ponto  $x = 1/2$  é candidato a ponto de descontinuidade. Será mostrado que  $D$  é contínua em  $1/2$ . Tome  $0 < \varepsilon < 1/2$  qualquer. Note que

$$B(D(1/2), \varepsilon) = B(0, \varepsilon) = [0, \varepsilon) \cup (1 - \varepsilon, 1),$$

devido a métrica  $d$  definida acima. Tome  $\delta = \varepsilon/2$  e conseqüentemente:

$$B\left(\frac{1}{2}, \delta\right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Considere um  $y \neq 1/2$ . Suponha que  $y \in (\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{2}) \subset B(1/2, \delta)$ , segue então que  $D(y) = 2y \in (1 - \varepsilon, 1) \subset B(0, \varepsilon)$ . Agora suponha que  $y \in (\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{2})$ , e então  $D(y) = 2y - 1 \in (0, \varepsilon) \subset B(0, \varepsilon)$ . Portanto, acabamos de mostrar que:



$$y \in B\left(\frac{1}{2}, \delta\right) \Rightarrow D(y) \in B(0, \varepsilon).$$

Ou seja,  $D$  é contínua em  $x = 1/2$ . De maneira similar é possível mostrar que  $D$  é contínua.

Se projetarmos o círculo  $\mathbb{T}$  no intervalo  $\mathbb{I}$  de tal maneira que 0 seja mandado ao 0 e  $\frac{1}{2}$  ao 1, então as trajetórias de  $(\mathbb{T}, D)$  serão projetadas às trajetórias de  $(\mathbb{I}, Q_4)$ . A projeção será a função sobrejetora  $H : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{I}$  tal que  $H(x) = \sin^2(x\pi)$ . Veja também que:

$$Q_4 \circ H(x) = 4 \sin^2(x\pi)(1 - \sin^2(x\pi)) = (2 \sin(x\pi) \cos(x\pi))^2 = \sin^2(2x\pi) = H \circ D(x),$$

logo, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T} & \xrightarrow{D} & \mathbb{T} \\ H \downarrow & & \downarrow H \\ \mathbb{I} & \xrightarrow{Q_4} & \mathbb{I} \end{array}$$

**Definição 6.** *Sejam  $(X, f)$  e  $(Y, g)$  dois sistemas dinâmicos. Ambos serão **topologicamente semi-conjugados** se existe uma função  $h : X \rightarrow Y$  contínua e sobrejetiva tal que  $h \circ f = g \circ h$ . Se além disso  $h$  for homeomorfismo,  $(X, f)$  e  $(Y, g)$  serão **topologicamente conjugados**.*

Percebemos então que  $(\mathbb{T}, D)$  e  $(\mathbb{I}, Q_4)$  são topologicamente semi-conjugados.

Vamos agora observar as propriedades do sistema  $(\mathbb{T}, D)$  através da expansão binária de seus elementos. A expansão binária de certo  $x \in \mathbb{T}$  será uma sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  em que para todo  $n$  natural,  $x_n \in \{0, 1\}$  de forma:

$$x = \frac{x_0}{2} + \frac{x_1}{4} + \cdots + \frac{x_i}{2^{i+1}} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x_i}{2^{i+1}}.$$

Como a função  $D$  se comportará com as expansões binárias? Basta “esquecer” a primeira coordenada e mover as restantes um dígito à esquerda. Como demonstrado na proposição abaixo:

**Proposição 3.** *Seja  $(\mathbb{T}, D)$  o sistema dinâmico definido no Exemplo 3 e seja  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  a expansão binária de um  $x \in \mathbb{T}$  qualquer. Então a expansão binária de  $D(x)$  será  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  e portanto,  $x$  será um ponto periódico se e somente se sua expansão binária for uma sequência periódica.*

*Demonstração.* Seja  $x \in \mathbb{T}$  e  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sua expansão binária.

Se  $x \leq \frac{1}{2}$ , então:

$$x = \frac{0}{2} + \frac{x_1}{4} + \cdots + \frac{x_i}{2^{i+1}} + \cdots \Rightarrow 2x = \frac{2 \cdot 0}{2} + \frac{2x_1}{4} + \cdots + \frac{2x_i}{2^{i+1}} + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{2^i}.$$

Se  $x > \frac{1}{2}$ , então:

$$x = \frac{1}{2} + \frac{x_1}{4} + \cdots + \frac{x_i}{2^{i+1}} + \cdots$$

$$\Rightarrow D(x) = 2x - 1 = 1 + \frac{2x_1}{4} + \cdots + \frac{2x_i}{2^{i+1}} + \cdots - 1 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{2^i}.$$

Portando, a expansão binária de  $D(x)$  é  $x_1x_2\dots$  como proposto. Se  $x \in \mathbb{T}$  for periódico, então existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $D^k(x) = x$ , logo, a cada  $k$  dígitos, a expansão binária de  $x$  precisa se repetir. Se a expansão binária de  $x$  se repetir a cada  $m \in \mathbb{N}$  dígitos, teremos então  $D^m(x) = x$ , uma vez que  $D^m(x)$  terá a mesma expansão binária de  $x$ .  $\square$

Para exemplificar, veja que  $D^2(\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$  e que a expansão binária de  $\frac{1}{3}$  é  $0101\dots$ , outro exemplo é  $D^3(\frac{3}{7}) = \frac{3}{7}$ , e a expansão binária de  $\frac{3}{7}$  é  $011011\dots$ . Vamos mostrar agora que  $(\mathbb{T}, D)$  é um sistema caótico.

**Definição 7.** *Seja  $(X, F)$  um sistema dinâmico.*

1. *Se para algum  $x \in X$ , a órbita de  $x$  é densa em  $X$ , então  $(X, F)$  é um sistema dinâmico **transitivo**.*
2. *Se  $X$  tem um número infinito de elementos, é transitivo e o conjunto dos pontos periódicos de  $X$  é denso em  $X$ , então  $(X, F)$  é um sistema dinâmico **caótico**.*

Seja  $x \in \mathbb{T}$  qualquer, cuja expansão binária é  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Seja  $y_k \in \mathbb{T}$  um ponto periódico tal que a expansão binária de  $y_k$  é a repetição infinita dos  $k$  primeiros algarismos de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Portanto, aumentando o  $k$  indefinidamente, a distância entre  $y_k$  e  $x$  vai a zero. Logo, os pontos periódicos são densos em  $\mathbb{T}$ .

Construiremos agora um elemento  $w \in \mathbb{T}$  que tem órbita densa em  $\mathbb{T}$ . Para tal, basta “colar” todas as sequências binárias finitas na expansão binária de  $w$ , que ficará na forma:

$$0\ 1\ 00\ 01\ 10\ 11\ 000\ 001\ 010\ 100\ 011\ \dots$$

Tomando  $x \in \mathbb{T}$  qualquer, basta considerar um número  $n \in \mathbb{N}$  grande o suficiente e tomar o  $m \in \mathbb{N}$  necessário para que a expansão binária de  $D^m(w)$  e a expansão de  $x$  tenham os mesmos  $n$  primeiros dígitos, tornando-os tão próximos quanto queira. Diante de tais fatos, concluímos que  $(\mathbb{T}, D)$  é caótico.

Pelo fato da função  $H : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{I}$  ser contínua e por  $(\mathbb{T}, D)$  e  $(\mathbb{I}, Q_4)$  serem topologicamente semi-conjugados, segue que como pontos periódicos são densos em  $(\mathbb{T}, D)$ , em  $(\mathbb{I}, Q_4)$  também serão. O mesmo vale para a imagem do elemento de órbita densa em  $(\mathbb{T}, D)$ , que terá órbita densa em  $(\mathbb{I}, Q_4)$ . Mais formalmente:

**Proposição 4.** *O sistema dinâmico  $(\mathbb{I}, Q_4)$  é um sistema caótico.*

*Demonstração.* Primeiramente, note que como  $H \circ D = Q_4 \circ H$ , também é válido para todo  $k \in \mathbb{N}$  que  $H \circ D^k = Q_4^k \circ H$ .

Vamos mostrar que se  $t \in \mathbb{T}$  é periódico, então  $H(t) \in \mathbb{I}$  também será. Seja  $t \in \mathbb{T}$  um ponto periódico. Então existe  $M \in \mathbb{N}$  tal que  $D^M(t) = t$ . Como  $D$  é conjugado a  $Q_4$ , segue que

$$H(t) = H(D^M(t)) = Q_4^M(H(t)),$$

ou seja,  $H(t) \in \mathbb{I}$  é periódico. Mostraremos agora que  $(\mathbb{I}, Q_4)$  é um sistema caótico.

1. O conjunto de pontos periódicos em  $(\mathbb{I}, Q_4)$  é denso em  $\mathbb{I}$ . Seja  $x \in \mathbb{I}$  qualquer. Como  $H$  é sobrejetiva, existe  $t \in \mathbb{T}$  tal que  $H(t) = x$ . Tome  $\varepsilon > 0$ . Como  $H$  é contínua, existe  $\delta > 0$  de forma que, para todo  $y \in \mathbb{T}$ :

$$y \in B(t, \delta) \Rightarrow H(y) \in B(x, \varepsilon),$$

como os pontos periódicos de  $(\mathbb{T}, D)$  são densos em  $\mathbb{T}$ , conseqüentemente há um  $p \in \mathbb{T}$  periódico tal que  $p \in B(t, \delta)$  e portanto,  $H(p) \in B(x, \varepsilon)$ . Como visto antes, já que  $p$  é periódico,  $H(p)$  também será, provando o que queríamos.

2. Ponto com órbita densa em  $\mathbb{I}$ . Seja  $w \in \mathbb{T}$  o ponto que tem órbita densa em  $\mathbb{T}$ . Mostraremos que  $H(w)$  tem órbita densa em  $\mathbb{I}$ .

Considere  $a \in \mathbb{I}$  qualquer. Como  $H$  é sobrejetora, existe  $b \in \mathbb{T}$  tal que  $H(b) = a$ . Tome  $\varepsilon > 0$  qualquer. Já que  $H$  é contínua, existe  $\delta > 0$  tal que para todo  $y \in \mathbb{T}$ :

$$y \in B(b, \delta) \Rightarrow H(y) \in Q_4(a, \varepsilon).$$

Como  $w$  tem órbita densa, existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $D^N(w) \in B(b, \delta)$ , logo  $H(D^N(w))$  está em  $B(a, \varepsilon)$ . Perceba então que  $H(D^N(w)) = Q_4^N(H(w))$ , ou seja,  $H(w)$  tem órbita densa em  $\mathbb{I}$ .

Diante disso, segue que  $(\mathbb{I}, Q_4)$  é um sistema caótico. □

## 2.5 Introdução à Dinâmica Simbólica

Com os conteúdos vistos nessa seção poderemos, por exemplo, observar as propriedades do sistema da dobra de ângulo a partir da dinâmica simbólica de suas expansões binárias.

**Definição 8.** *Seja  $\mathcal{Z} = \{0, 1\}$  o alfabeto binário e  $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$  o espaço das seqüências binárias infinitas. Defina a métrica em  $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$  como  $d : \mathbf{2}^{\mathbb{N}} \times \mathbf{2}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}$ , em que:*

$$d(x, y) = \frac{1}{2^n}, \quad \text{onde } n = \min\{i \geq 0 : x_i \neq y_i\}.$$

Por exemplo, tomando as sequências  $x = 0011111 \dots$  e  $y = 0001010 \dots$ , teremos que  $d(x, y) = 2^{-2}$ . Vamos mostrar agora que  $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$  e o **conjunto de Cantor** são homeomorfos, mas antes, construiremos tal conjunto.

A ideia da construção do conjunto de Cantor é dividir em três partes o intervalo  $[0, 1]$  e depois retira-se a parte do meio, sobrando  $[0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ . Agora, divide-se cada um dos intervalos restantes de novo em 3 partes e cada parte do meio é retirada, sobrando  $[0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{3}{9}] \cup [\frac{6}{9}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$ . Repetindo esse processo infinitamente, teremos que o conjunto de Cantor  $C$  é igual à:

$$C = [0, 1] \setminus \left( \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right) \setminus \left( \frac{1}{9}, \frac{2}{9} \right) \setminus \left( \frac{7}{9}, \frac{8}{9} \right) \setminus \dots$$

Semelhante à expansão binária, existe a expansão ternária, definida como: a expansão ternária de certo  $x \in [0, 1]$  é uma sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  em que,  $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in \{0, 1, 2\}$ , e

$$x = \frac{x_0}{3} + \frac{x_1}{9} + \dots + \frac{x_i}{3^{i+1}} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x_i}{3^{i+1}}.$$

Logo, percebe-se que os elementos cuja expansão ternária tem como o primeiro dígito o número 1 estão em  $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ . De fato, uma vez que se a expansão ternária de  $x$  é  $1x_1x_3 \dots$ , temos que:

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{0}{3^i} \leq x \leq \frac{1}{3} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{2}{3^i} = \frac{2}{3}.$$

Analogamente, os elementos cuja expansão ternária tem como o segundo dígito o número 1 estão em  $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}) \cup (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$ . Prosseguindo com esse raciocínio infinitamente, concluímos que o conjunto de Cantor possui todos os elementos do intervalo  $[0, 1]$  cuja expansão ternária possui apenas os dígitos 0 e 2. Se um número em  $[0, 1]$  é racional e seu denominador é uma potência de 3, então ele terá duas expansões ternárias, e ele estará no conjunto de Cantor se pelo menos uma delas não possuir o dígito 1, por exemplo  $\frac{1}{3}$  tem as expansões:  $1000 \dots$  e  $0222 \dots$ . Tendo o que foi escrito acima em mente, um homeomorfismo intuitivo entre  $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$  e  $C$  (munido da métrica euclidiana) seria multiplicar por 2 os dígitos de uma sequência binária para obter um elemento de  $C$  e dividir por 2 os dígitos de um elemento de  $C$  para obter uma sequência binária. Segue então que:

**Teorema 2.** *O espaço das sequências binárias  $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$  é homeomorfo ao conjunto de Cantor.*

*Demonstração.* A função candidata a homeomorfismo é  $\varphi : \mathbf{2}^{\mathbb{N}} \rightarrow C$  tal que

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{\infty} 2 \cdot \frac{x_i}{3^{i+1}}.$$

Ou seja, se considerarmos as imagens como expansões ternárias,  $\varphi$  multiplica cada entrada de  $x$  por 2. A bijetividade de  $\varphi$  é trivial, vamos provar a bicontinuidade.

1. Continuidade de  $\varphi$ . Suponha que  $x \neq y$  estão em  $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ . Tome  $\varepsilon > 0 \in \mathbb{R}$  qualquer e seja  $n \in \mathbb{N}$  grande o suficiente tal que  $3^{-n} < \varepsilon$ . Então, se  $d(x, y) \leq 2^{-n}$ , existe  $k \geq n \in \mathbb{N}$  tal que  $d(x, y) = 2^{-k}$ . Segue:

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = \left| \sum_{i=k}^{\infty} \frac{2(x_i - y_i)}{3^{i+1}} \right| \leq 2 \sum_{i=k}^{\infty} \frac{1}{3^{i+1}} = 2 \cdot \frac{3^{-k-1}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{3^k} \leq \frac{1}{3^n} < \varepsilon,$$

logo  $d(x, y) \leq 2^{-n} \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \varepsilon$  e portanto  $\varphi$  é contínua.

2. Continuidade de  $\varphi^{-1}$ . Suponha que  $x \neq y$  estão em  $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$  e que  $d(x, y) \geq 2^{-n}$  para  $n \in \mathbb{N}$  qualquer, então existe  $k < n \in \mathbb{N}$  tal que  $d(x, y) = 2^{-k}$ . Note que

$$\begin{aligned} |\varphi(x) - \varphi(y)| &= \left| \sum_{i=k}^{\infty} \frac{2(x_i - y_i)}{3^{i+1}} \right| = \left| \frac{2(x_k - y_k)}{3^{k+1}} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{2(x_i - y_i)}{3^{i+1}} \right| \\ &\geq \frac{2|x_k - y_k|}{3^{k+1}} - 2 \left| \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{(x_i - y_i)}{3^{i+1}} \right| \\ &\geq \frac{2}{3^{k+1}} - 2 \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{3^{i+1}} = \frac{1}{3^{k+1}} \geq \frac{1}{3^{n+1}} \end{aligned} \quad (2.3)$$

veja que na linha (2.3) temos que  $|x_k - y_k| = 1$  pois  $d(x, y) = 2^{-k}$ . Concluimos então que:

$$d(x, y) \geq 2^{-n} \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(y)| \geq 3^{-n-1},$$

e pela sua contrapositiva:  $|\varphi(x) - \varphi(y)| < 3^{-n-1} \Rightarrow d(x, y) < 2^{-n}$ , ou seja  $\varphi^{-1}$  é contínua. □

Na verdade, o resultado visto acima tem uma versão ainda mais forte, cuja afirmação é que se  $A$  é um alfabeto finito de símbolos, então  $\mathbf{A}^{\mathbb{N}}$  munido com uma métrica análoga a da Definição 8 é homeomorfo à  $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ , e por consequência, todos os espaços de sequências infinitas construídas a partir de dígitos finitos são homeomorfos entre si. Veremos a seguir um exemplo:

Suponha que  $A = \{a, b, c\}$ . Defina a função  $\varphi_*$  tal que:

$$\varphi_*(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = a, \\ 10, & \text{se } x = b, \\ 11, & \text{se } x = c. \end{cases}$$

O homeomorfismo entre  $\mathbf{A}^{\mathbb{N}}$  e  $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$  será dado por  $\varphi : \mathbf{A}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$  onde

$$\varphi(x) = \varphi(x_0x_1x_2\cdots) = \varphi_*(x_0)\varphi_*(x_1)\varphi_*(x_2)\cdots,$$

logo,  $\varphi$  vai transformar cada algarismo da sequência de  $\mathbf{A}^{\mathbb{N}}$  em uma sequência finita de zeros e uns de maneira que não haja ambiguidade. A bijetividade de  $\varphi$  é trivial. Vamos mostrar a bicontinuidade: veja que  $\varphi$  é Lipschitz contínua, pois  $d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq d(x, y) \forall x, y \in \mathbf{A}^{\mathbb{N}}$ , uma vez que quando aplicada a  $\varphi$ , o número  $n$  de dígitos iguais de  $x$  e  $y$  no mínimo vão se manter ou no máximo dobrar. Por motivo semelhante, tomando  $2^{-n}$  para  $n \in \mathbb{N}$  qualquer, temos que

$$d(w, z) < 2^{-2n-1} \Rightarrow d(\varphi^{-1}(w), \varphi^{-1}(z)) < 2^{-n}, \forall w, z \in \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$$

já que os algarismos iguais entre  $w$  e  $z$  podem diminuir no máximo pela metade, logo  $\varphi^{-1}$  é contínua.

**Proposição 5.** *Seja  $A$  um alfabeto finito e a função shift definida como  $\sigma : \mathbf{A}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbf{A}^{\mathbb{N}}$  tal que:*

$$\sigma(x) = \sigma(x_0x_1x_2\cdots) = x_1x_2x_3\cdots$$

então  $(\mathbf{A}^{\mathbb{N}}, \sigma)$  é um sistema dinâmico caótico.

*Demonstração.* Começaremos demonstrando que  $\sigma$  é contínua e depois mostraremos que o sistema é caótico.

1. Continuidade de  $\sigma$ . Tome  $x, y \in \mathbf{A}^{\mathbb{N}}$  tais que  $x \neq y$  quaisquer.

Caso  $d(x, y) = 1$ , então  $d(\sigma(x), \sigma(y)) \leq d(x, y)$ .

Caso  $d(x, y) \neq 1$ , então existe  $k$  natural tal que  $d(x, y) = 2^{-k}$ , ou seja,  $x_i = y_i, \forall i \leq k$  para  $i \in \mathbb{N}$  e  $x_{k+1} \neq y_{k+1}$ .

Então  $\sigma(x)_i = \sigma(y)_i$ , para todo natural  $i \leq k-1$  e  $\sigma(x)_k \neq \sigma(y)_k$ , logo  $d(\sigma(x), \sigma(y)) = 2^{-k+1}$ , ou seja,

$$d(\sigma(x), \sigma(y)) \leq d(x, y)$$

e em ambos os casos,  $\sigma$  é Lipschitz contínua.

2. Pontos periódicos densos em  $\mathbf{A}^{\mathbb{N}}$ . Tome  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbf{A}^{\mathbb{N}}$  e  $k \in \mathbb{N}$  quaisquer. Considere o ponto periódico  $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathbf{A}^{\mathbb{N}}$  como sendo

$$(y_n)_{n \in \mathbb{N}} = x_0x_1\cdots x_{k+1}x_0x_1\cdots x_{k+1}\cdots = (x_0x_1\cdots x_{k+1})^{\infty},$$

então temos que  $d(x, y) \leq 2^{-k}$ .

3. Ponto com órbita densa. Seja  $w$  sequência formada pela concatenação de todas as sequências finitas com dígitos em  $\mathbf{A}^{\mathbb{N}}$ . Tome  $x \in \mathbf{A}^{\mathbb{N}}$  e  $k \in \mathbb{N}$  quaisquer. Sabemos que existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $\sigma^m(w)_i = x_i, \forall i \leq k, i \in \mathbb{N}$  e então  $d(x, \sigma^m(w)) \leq 2^{-k}$ . Concluímos que  $w$  tem órbita densa em  $\mathbf{A}^{\mathbb{N}}$ .

□

Lembrando do sistema dinâmico  $(\mathbb{T}, D)$  definido no Exemplo 3, interpretando  $\mathbb{T}$  como expansões binárias e como a função  $D$  se comportava em relação às elas (praticamente a função *shift*), é evidente sua semelhança com o sistema  $(\mathbf{2}^{\mathbb{N}}, \sigma)$ . Veremos no resultado a seguir que tais sistemas são topologicamente semi-conjugados e por consequência,  $(\mathbf{2}^{\mathbb{N}}, \sigma)$  e  $(\mathbb{I}, Q_4)$ , definido na Definição 4, também são topologicamente semi-conjugados.

**Proposição 6.** *Os sistemas dinâmicos  $(\mathbf{2}^{\mathbb{N}}, \sigma)$  e  $(\mathbb{I}, Q_4)$  são topologicamente semi-conjugados.*

*Demonstração.* Defina a função  $\psi : \mathbf{2}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{T}$  por  $\psi(x) = \text{mod}_1(\sum_{i=0}^{\infty} x_i \cdot 2^{-i-1})$ . Ou seja,  $\psi$  transforma uma sequência binária em uma expansão binária de um número do intervalo  $[0, 1)$ . A função  $\text{mod}_1$  (definida acima do Exemplo 3) tem o papel de mandar a sequência constante 1 em  $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$  para  $0 \in \mathbb{T}$ . A sobrejetividade de  $\psi$  é evidente.

A continuidade de  $\psi$  é em razão de: Tome  $x \in \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ . Então

$$d(x, y) < 2^{-k} \Rightarrow |\psi(x) - \psi(y)| \leq \sum_{i=k}^{\infty} 2^{-i}$$

para qualquer  $k \in \mathbb{N}$ . Isso se deve do fato que  $x$  e  $y$  teriam os mesmos algarismos até a  $k$ -ésima coordenada, logo, ao fazermos a subtração de  $\psi(x)$  e  $\psi(y)$ , sobrariam apenas as parcelas multiplicadas por  $2^{-i}$ , para  $i \geq k$ .

Perceba que  $\psi$  e  $D$  comutam, pois como visto na Proposição 3,  $D$  atua em uma expansão binária como se fosse exatamente a função *shift* em  $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ . Temos então que  $H \circ \psi : \mathbf{2}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{I}$ , em que  $H$  foi definida no Exemplo 3, é a função que queríamos.  $\square$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{2}^{\mathbb{N}} & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{T} & \xrightarrow{H} & \mathbb{I} \\ \sigma \downarrow & & \downarrow D & & \downarrow Q_4 \\ \mathbf{2}^{\mathbb{N}} & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{T} & \xrightarrow{H} & \mathbb{I} \end{array}$$

Ou seja, o diagrama acima comuta.

## 3 Espaços Simbólicos

### 3.1 Espaços Simbólicos

Chamaremos de **alfabeto** um conjunto  $A$  finito com pelo menos dois elementos. Denotaremos como  $A^n$  o conjunto de todas as sequências finitas (também chamadas de palavras) de tamanho  $n$  cujos algarismos estão em  $A$ , e  $A^0 = \{\lambda\}$ , em que  $\lambda$  é a palavra vazia. Considere  $A^{\mathbb{N}}$  como sendo o conjunto de todas as sequências infinitas cujos algarismos estão em  $A$ , e:

$$A^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n, \quad \overline{A^*} = A^* \cup A^{\mathbb{N}}.$$

A **concatenação** de  $u, v \in A^*$  será escrita como  $uv$ . Se existem palavras  $x, y$  tais que  $xuy = v$ , então  $u$  é uma **subpalavra** de  $v$  e escrevemos  $u \sqsubseteq v$ . Teremos que  $u$  será um **prefixo** de  $v$  se  $uy = v$ , e escrevemos  $u \sqsubseteq_p v$ . Se  $xu = v$ , temos que  $u$  é um **sufixo** de  $v$  e escrevemos  $u \sqsubseteq_s v$ . Se  $u \in A^* \setminus \{\lambda\}$ , então  $u^\infty \in A^{\mathbb{N}}$  é a concatenação infinita de  $u$  com o próprio  $u$ . A cardinalidade de  $A$  é denotada por  $\#A$ .

Podemos considerar também um conjunto de sequências em que seus algarismos não correspondem necessariamente a um alfabeto só. Ou seja, tome a sequência infinita de alfabetos  $\mathcal{A} = (A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ . Defina  $\mathcal{A}^0 = \{\lambda\}$  e:

$$\mathcal{A}^n = \prod_{i=0}^{n-1} A_i, \quad \mathcal{A}^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}^n, \quad \mathcal{A}^{\mathbb{N}} = \prod_{i=0}^{\infty} A_i, \quad \overline{\mathcal{A}^*} = \mathcal{A}^* \cup \mathcal{A}^{\mathbb{N}}.$$

O tamanho (quantidade de letras) de  $u \in \mathcal{A}^n$  é definido como  $|u| = n$ , e se  $u$  estiver em  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ , então  $|u| = \infty$ . A  $i$ -ésima letra de  $u \in \overline{\mathcal{A}^*}$  será  $u_i \in A_i$ . Se  $i > |u|$ , defina  $u_i = \lambda$ . Se  $[j, k] \subset \mathbb{N}$  é um intervalo e  $u \in \overline{\mathcal{A}^*}$ , então defina  $u_{[j,k]} = u_j \cdots u_k \in \prod_{i=j}^k A_i$ . O espaço  $\overline{\mathcal{A}^*}$  é munido com a topologia induzida pela métrica  $d(x, y) = 2^{-n}$ , onde  $n = \min\{i \in \mathbb{N} : x_i \neq y_i\}$ .

**Definição 9.** Um **espaço simbólico** é qualquer subespaço fechado de  $\overline{\mathcal{A}^*}$ . Um **espaço produto simbólico** é qualquer espaço da forma  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ .

Perceba da definição acima que a distância entre duas sequências será  $2^{-k}$ , onde  $k$  é a primeira coordenada onde elas diferem.

Se  $n < m$  e  $u \in \mathcal{A}^n$  é um prefixo de  $v \in \mathcal{A}^m$ , então  $u_n = \lambda \neq v_n$  e  $d(u, v) = 2^{-n}$ . Ou seja, toda palavra finita  $u \in \mathcal{A}^*$  é isolada em  $\overline{\mathcal{A}^*}$ , já que a distância mínima entre  $u$  e qualquer outra sequência diferente de  $u$  é  $2^{-|u|}$ . Perceba que  $\mathcal{A}^*$  é denso em  $\overline{\mathcal{A}^*}$  uma vez que para quaisquer  $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$  e  $2^{-k}$ , basta tomar  $x_{[0,k]} \in \mathcal{A}^*$ , pois  $d(x, x_{[0,k]}) = 2^{-k-1} < 2^{-k}$ .



Logo,  $\mathcal{A}^*$  é um subconjunto cujos elementos são isolados e densos em  $\overline{\mathcal{A}^*}$ , ao mesmo tempo.

Podemos visualizar melhor esse comportamento levando em consideração a função  $\psi : \overline{\mathbf{2}^*} \rightarrow \mathbb{I}$  definida como:

$$\psi(u) = \sum_{i=1}^{|u|} \frac{2u_{i-1}}{3^i} + \frac{1}{2 \cdot 3^{|u|}}.$$

Perceba que a função  $\psi$  e a função  $\varphi$  (definida na demonstração do Teorema 2) são idênticas para sequências infinitas, porém, o que acontece quando a sequência é finita? Por causa da parcela envolvendo seu tamanho,  $\psi$  vai “empurrar” a sequência para o meio de um intervalo que em algum momento será excluído na construção do conjunto de Cantor. Por exemplo, se  $x = 010 \dots \in \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ , então  $\psi(x) = 2/9$ , que está no conjunto de Cantor. Mas se  $x = 01 \in \mathbf{2}^2$ , então  $\psi(x) = 2/9 + 18^{-1}$ , que está exatamente no meio entre  $2/9$  e  $3/9$ , logo não está no conjunto de Cantor.

**Definição 10.** Para cada  $i \in \mathbb{N}$ , considere o espaço métrico discreto  $(A_i, d_i)$ . Defina a métrica produto  $d'$  em  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$  tal que

$$d'(u, v) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{d_i(u_i, v_i)}{2^i}.$$

Veja que as métricas  $d$  e  $d'$  são equivalentes, pois  $d(u, v) \leq d'(u, v) \leq 2 \cdot d(u, v)$ . Da Proposição 20 no Apêndice B, concluímos que  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$  é um espaço métrico compacto.

Um **cilindro** de algum espaço produto simbólico  $X \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$  é um conjunto da forma: se  $u \in \mathcal{A}^*$ ,

$$[u] = \{x \in X : x_{[0,n]} = u\}.$$

Caso  $[u]$  for não vazio, será uma bola aberta em  $X$ , pois  $x \in [u] \Rightarrow [u] = B(x, 2^{-|u|+1})$ . Perceba que o complementar de  $[u]$  é uma união finita de outros cilindros, pois, supondo que  $u \in \mathcal{A}^k$ , então o complementar de  $[u]$  são todas as sequências  $y$  de  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$  tais que  $y_i \neq u_i$  para algum  $i \leq k$ , ou seja  $[u]^C = \{[v] : v \in \mathcal{A}^k \text{ e } v \neq u\}$ , e como todos os  $A_i$  são alfabetos finitos, em particular  $A_n, \forall n \leq k$ , temos que  $\#[u]^C = \#A_1 \cdot \#A_2 \cdots \#A_k - 1$ . Portanto, como o complementar de  $[u]$  é uma união finita de outros cilindros (e então aberto),  $[u]$  é fechado também. Logo, para qualquer  $n > 0$ , temos uma partição (uma cobertura cujos elementos são disjuntos entre si) aberta e fechada para  $X$ :

$$\mathcal{P}_n = \{[u] : u \in \mathcal{A}^n\}.$$

Relembrando a Definição 9, vimos que elementos de um espaço simbólico não necessariamente são sequências infinitas, porém, como veremos a seguir, um espaço simbólico é homeomorfo a um espaço produto simbólico, sendo a ideia da prova “preencher” as sequências finitas com Algarismos para que se tornem infinitas.

**Proposição 7.** *Qualquer espaço simbólico é homeomorfo a um subespaço fechado de algum espaço produto simbólico.*

*Demonstração.* Seja  $\overline{\mathcal{A}^*}$  um espaço simbólico qualquer. O candidato a ser seu homeomorfo será construído de forma que: defina  $B_i = A_i \cup \{0\}$ , em que 0 é um símbolo que não pertence a nenhum  $A_i$ . Tome o espaço produto simbólico  $\mathcal{B}^{\mathbb{N}} = \prod_{i \in \mathbb{N}} B_i$  e considere

$$X = \{x \in \mathcal{B}^{\mathbb{N}} : \forall i \in \mathbb{N}, x_i = 0 \Rightarrow x_{i+1} = 0\},$$

ou seja,  $X$  é o conjunto das seqüências de  $\mathcal{B}^{\mathbb{N}}$  tal que a partir da primeira coordenada igual a 0, todas as posteriores serão 0.

Provaremos que  $X \subset \mathcal{B}^{\mathbb{N}}$  é fechado, pois contém todos seus pontos de acumulação. Tome  $y \in \mathcal{B}^{\mathbb{N}}$  no fecho de  $X$  e suponha que  $y \notin X$ . Então existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $y_k = 0$  e  $y_{k+1} \neq 0$ , o que é um absurdo, pois  $B(y, 2^{-k-2}) \cap X = \emptyset$ . Logo  $X$  contém todos seus pontos de acumulação e portanto é fechado.

Agora, defina  $\varphi : \overline{\mathcal{A}^*} \rightarrow \mathcal{B}^{\mathbb{N}}$  por:

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \\ x0^\infty, & \text{se } x \in \mathcal{A}^* \end{cases}$$

é fácil de ver que  $\varphi$  é não só um homeomorfismo, mas uma isometria, visto que a primeira coordenada diferente entre  $x, y \in \mathcal{A}^*$  é a também a primeira coordenada diferente entre  $\varphi(x)$  e  $\varphi(y)$ , ou seja,  $d(x, y) = d(\varphi(x), \varphi(y))$ . A bijetividade de  $\varphi$  é trivial.  $\square$

**Proposição 8.** *Seja  $\mathcal{A} = (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma seqüência infinita de alfabetos e considere a seqüência de funções  $(h_n : A_{n+1} \rightarrow A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Então o espaço do limite inverso:*

$$X = \varprojlim (A_n, h_n) = \{x \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}} : \forall n \in \mathbb{N}, h_n(x_{n+1}) = x_n\}$$

*munido com a topologia induzida pela métrica  $d$  é um espaço simbólico. Além disso, se  $\#h_n^{-1}(a) \geq 2$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  e todo  $a \in A_n$ , então  $X$  é perfeito, ou seja, não possui pontos isolados.*

*Demonstração.* Provaremos as duas afirmações.

1. Vamos mostrar que o complementar de  $X$ , denotado por  $X^C$ , é aberto. Tome  $x \in X^C$ , logo, para algum  $k \in \mathbb{N}$ ,  $x_k \neq h_k(x_{k+1})$  e então  $B(x, 2^{-k-2}) \subset X^C$  e  $B(x, 2^{-k-2}) \cap X = \emptyset$ , ou seja,  $X^C$  é aberto.
2. Suponha que  $\#h_n^{-1}(a) \geq 2$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  e todo  $a \in A_n$ . Tome  $x \in X$  e  $k \in \mathbb{N}$  quaisquer. Tome  $y \in X$  tal que  $y_n = x_n, \forall n \leq k$  e  $y_{k+1} = a$ , onde  $a \in h^{-1}(x_k)$  e  $a \neq x_{k+1}$ , logo,  $y \in B(x, 2^{-k})$ .

$\square$

Veja que os cilindros no espaço do limite inverso  $X$  são expressados de uma maneira mais simples, por exemplo, se  $a_n \in A_n$ , defina:  $[a_n] = \{x \in X : x_n = a_n\}$ . Então  $\{[a_n] : a_n \in A_n\}$  é uma partição aberta e fechada de  $X$ .

**Definição 11.** *Seja  $X$  um espaço métrico.*

1.  $X$  é **totalmente desconexo** se para cada  $x, y \in X$  diferentes, existe  $A \subset X$  aberto e fechado tal que  $x \in A$  e  $y \in A^C$ .
2.  $X$  é **perfeito** se não tem pontos isolados.
3.  $X$  é um **espaço de Cantor** se for compacto, perfeito e totalmente desconexo.

**Proposição 9.** *Qualquer espaço produto simbólico  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$  é um espaço de Cantor. Se  $U \subset \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$  é aberto e fechado, então  $U$  é uma união finita de cilindros.*

*Demonstração.* Observe que:

1.  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$  é compacto pela Proposição 20.
2. Vamos mostrar que  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$  é totalmente desconexo. Tome  $x, y \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$  diferentes. Então existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $x_k \neq y_k$ . Como visto anteriormente, cilindros são abertos e fechados, e então  $x \in [x_{[0,k]}]$  e  $y \in [y_{[0,k]}]$ , ao mesmo tempo que  $[x_{[0,k]}] \cap [y_{[0,k]}] = \emptyset$ .
3. Provaremos que  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$  é perfeito. Seja  $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$  e  $2^{-k}$  para um  $k \in \mathbb{N}$  qualquer. Considere a sequência  $y \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$  tal que  $y_i = x_i, \forall i \leq k$  e  $y_{k+1} \neq x_{k+1}$ . Portanto  $y \in B(x, 2^{-k})$ .
4. Mostraremos que um conjunto aberto e fechado é uma união finita de cilindros. Seja  $U \subset \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$  e  $x \in U$ . Logo, existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que o cilindro  $[x_{[0,m]}]$  contém  $x$  e está contido em  $U$ . Tome a cobertura aberta  $\{[y_{[0,k]}] : y \in U\}$ , obtida da mesma maneira que encontramos  $[x_{[0,m]}]$ . Como  $U$  é fechado e está contido em um compacto, também será compacto e portanto,  $\{[y_{[0,k]}] : y \in U\}$  tem uma subcobertura finita, que gerará a união que queríamos.

□

Tal resultado é importante pelo fato de que em breve provaremos que todos os espaços de Cantor são homeomorfos ao espaço  $2^{\mathbb{N}}$  e por consequência, quaisquer dois espaços produto simbólicos são homeomorfos entre si, e particularmente, homeomorfos a  $2^{\mathbb{N}}$ . Ou seja, topologicamente falando, não importam os alfabetos que formam um espaço produto simbólico, pois podemos sempre tratá-lo como o espaço das sequências binárias infinitas.

**Proposição 10.** *Seja  $X$  um espaço métrico compacto e totalmente desconexo. Então os conjuntos abertos e fechados formam uma base para sua topologia. Para qualquer  $\varepsilon > 0$ , existe uma partição aberta e fechada finita  $\mathcal{V}$  em que cada aberto da partição tem diâmetro menor que  $\varepsilon$ . Se  $X$  também é perfeito, então existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $\#\mathcal{V}$  pode ser qualquer número maior que  $N$ .*

*Demonstração.* Separando a demonstração, temos:

1. Vamos provar que os conjuntos abertos e fechados são uma base. Seja  $U \subset X$  um conjunto aberto e  $x \in U$  (se  $X = U$  o resultado é trivial). Vamos construir um  $A \subseteq U$  aberto e fechado que contenha  $x$ . Como  $X$  é desconexo, para cada  $y \in U^C$  temos dois conjuntos abertos e fechados  $A_y$  e  $B_y$  tais que  $x \in A_y$  e  $y \in B_y$  e  $A_y \cap B_y = \emptyset$ . Tome a cobertura aberta de  $U^C$ ,  $C = \{B_y : y \in U^C\}$ , onde cada  $B_\alpha$  é construído de maneira análoga a feita anteriormente. Como  $X$  é compacto,  $C$  tem uma subcobertura finita, digamos  $B = \{B_{y_1}, \dots, B_{y_n}\}$  e então  $A = A_{y_1} \cap \dots \cap A_{y_n}$  é um conjunto aberto e fechado tal que  $x \in A \subseteq U$ , pois se  $A \cap U^C \neq \emptyset$ , então existe  $w \in A \cap B$ , pois  $B$  é cobertura de  $U^C$ , o que é um absurdo, pois  $A_{y_k}$  e  $B_{y_k}$  são disjuntos para todo  $k$ .
2. Vamos provar a afirmação referente à partição finita. Tome  $\varepsilon > 0$ , como os conjuntos abertos e fechado formam uma base, para todo  $x \in X$ , existe um aberto e fechado  $U_x$  tal que  $x \in U_x$  e  $\text{diam}(U_x) < \varepsilon$ . Tome então a cobertura de  $X$  igual a  $\{U_x : x \in X\}$  e seja  $\{U_{x_1}, \dots, U_{x_n}\}$  sua subcobertura finita minimal. Agora, defina:

$$V_1 = U_{x_1}, \quad V_2 = U_{x_2} \setminus V_1, \dots, \quad V_n = U_{x_n} \setminus (V_1 \cup \dots \cup V_{n-1})$$

tome  $\mathcal{V} = \{V_i : i \in [1, n]\}$ , que é uma partição aberta e fechada de  $X$  em que para cada aberto e fechado  $V_n$ , temos  $\text{diam}(V_n) < \varepsilon$ .

3. Agora suponha que  $X$  é perfeito. Tome  $U$  aberto e fechado de  $X$ , então  $U$  tem pelo menos dois elementos, digamos  $x$  e  $y$ . Como  $X$  é totalmente desconexo,  $x$  e  $y$  podem ser separados por um aberto e fechado  $V$  tal que  $x \in V$  e  $y \in V^C$ . Então  $U \cap V$  e  $U \cap V^C$  são dois abertos e fechados disjuntos, não vazios cuja união é  $U$ . Com o método que acaba de ser descrito, se  $\mathcal{V}$  é uma partição aberta e fechada de  $X$ , podemos dividir seus abertos e fechados arbitrariamente para produzir uma nova partição  $\mathcal{V}'$  tal que  $\#\mathcal{V} < \#\mathcal{V}'$ .

□

Para mostrar que um espaço métrico totalmente desconexo é homeomorfo a um espaço simbólico, e que os espaços de Cantor são homeomorfos entre si, a Proposição 10 será essencial, uma vez que a ideia da prova é dividir o espaço em partições de abertos e fechados e identificar cada aberto e fechado com uma letra. Fazendo essa divisão do

espaço em abertos e fechados cada vez menores, sempre contidos nos maiores e também os identificando com letras, podemos encontrar um homeomorfismo entre um elemento do espaço com a sequência de letras que representam os abertos e fechados nos quais esse elemento está contido. No caso dos conjuntos de Cantor, esses abertos e fechados poderão ser identificados com sequências binárias finitas.

**Definição 12.** *Sejam  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{V}$  coberturas abertas. Dizemos que  $\mathcal{V}$  é mais fina que  $\mathcal{U}$ , escreve-se  $\mathcal{V} \succeq \mathcal{U}$ , se:*

$$\forall V \in \mathcal{V}, \exists U \in \mathcal{U} \text{ tal que } V \subseteq U.$$

*O diâmetro de  $\mathcal{U}$  é definido como:  $\text{diam}(\mathcal{U}) = \sup\{\text{diam}(U) : U \in \mathcal{U}\}$ .*

**Teorema 3.** *Se  $X$  é um espaço métrico compacto e totalmente desconexo, então  $X$  é homeomorfo a um espaço simbólico. Todo espaço de Cantor é homeomorfo a  $\mathcal{2}^{\mathbb{N}}$ .*

*Demonstração.* Provaremos que  $X$  é homeomorfo a um espaço simbólico. Seja  $X$  espaço métrico compacto e totalmente desconexo. Pela Proposição 10, tome uma partição finita  $\mathcal{V}_1$  tal que  $\text{diam}(\mathcal{V}_1) < 2^{-1}$ . Para cada  $V \in \mathcal{V}_1$ , faça o seguinte: tome  $a \in V$  qualquer e renomeie  $V$  para  $V_a$  e repita o processo para todos os  $V \in \mathcal{V}_1$ . Defina o alfabeto limitado:

$$A_1 = \{a \in X : V_a \in \mathcal{V}_1\}.$$

Vamos agora construir  $A_2$ . Também pela Proposição 10, reparta cada  $V_a \in \mathcal{V}_1$  em uma partição finita (aberta e fechada) com diâmetro menor que  $2^{-2}$ , e a partir dessas novas partições, formamos uma nova partição finita  $\mathcal{V}_2 \succeq \mathcal{V}_1$  de  $X$ . Para cada  $V \in \mathcal{V}_2$  faça o seguinte: tome  $b \in V$  qualquer e renomeie  $V$  para  $V_b$  e repita o processo para todos os  $V \in \mathcal{V}_2$ . Defina o alfabeto limitado:

$$A_2 = \{b \in X : V_b \in \mathcal{V}_2\}.$$

Note que se  $b \in A_2$ , então existe único  $a \in A_1$  tal que  $V_b \subseteq V_a$ . Recursivamente, defina as sequências  $(\mathcal{V}_n)_{n \geq 0}$  com  $\text{diam}(\mathcal{V}_n) \leq 2^{-n}$  e  $(A_n)_{n \geq 1}$ . Tome  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$  como sendo o espaço produto simbólico formado por ela.

Pela construção que fizemos, para cada  $x \in A_{n+1}$ , existe um único  $h_n(x) \in A_n$  tal que  $V_x \subseteq V_{h_n(x)}$ . Defina a função  $h_n : A_{n+1} \rightarrow A_n$  desta mesma maneira. Veja que  $h_n$  é contínua, pois possui domínio finito, para todo  $n$ . Tome o espaço do limite inverso:

$$Y = \varprojlim (A_n, h_n) = \{u \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}} : h_n(u_{n+1}) = u_n, \forall n \geq 0\}.$$

Mostraremos que  $Y$  é homeomorfo a  $X$ . Já sabemos que pela Proposição 8,  $Y$  é um espaço simbólico. Agora veja que se  $u \in Y$ , então  $V_{u_{n+1}} \subseteq V_{u_n}$  para todo  $n$ , logo  $\bigcap_{n \geq 1} V_{u_n} := V_u$  é uma interseção de fechados encaixados em um compacto, então pela

Proposição 19 e como tem diâmetro 0, possui apenas um elemento. Defina a função bijetora  $\varphi : Y \rightarrow X$  por  $\varphi(u) \in V_u$ . Veja que para qualquer  $n \in \mathbb{N}$ , temos:

$$d(u, v) < 2^{-n} \Rightarrow \varphi(u), \varphi(v) \in V_{u_{n-1}} \Rightarrow d(\varphi(u), \varphi(v)) < 2^{-n+1},$$

logo  $\varphi$  é contínua.

Vamos mostrar que  $\varphi$  é bijetiva. Injetividade: suponha  $x \neq y \in Y$ . Então  $\exists k \in \mathbb{N}$  tal que  $x_k \neq y_k$ , ou seja,  $y_{k+1} \in X$  não pertence a  $V_{x_{k+1}} \in \mathcal{V}_{k+2}$  e portanto  $\varphi(y) = \bigcap_{n \geq 1} V_{y_n} \neq \bigcap_{n \geq 1} V_{x_n} = \varphi(x)$ . Sobrejeção: Tome  $u \in X$  qualquer. Vamos descobrir qual sequência de  $Y$  é mandada a  $u$ . Como  $u \in X$ , existe  $V_{u_0} \in \mathcal{V}_1$ ,  $u_0 \in A_1$ , tal que  $u \in V_{u_0}$ . Também existe  $V_{u_1} \in \mathcal{V}_2$ ,  $u_1 \in A_2$ , tal que  $u \in V_{u_1} \subseteq V_{u_0}$ . Continuando esse processo infinitamente, temos que a sequência  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in Y$  é a pré-imagem de  $u \in X$ .

Como  $\varphi$  é bijetiva, contínua e com domínio compacto, segue que é também homeomorfismo, pela Proposição 18. Como queríamos demonstrar.

Agora vamos supor que  $X$  é um espaço de Cantor. Pela Proposição 10, existe uma partição aberta e fechada  $\mathcal{V}_0$ , finita, com diâmetro menor que 1 e  $\#\mathcal{V}_0 = 2^{k_0}$ , para algum  $k_0 \in \mathbb{N}$ . Nomeie os elementos  $V \in \mathcal{V}_0$  com palavras binárias de tamanho  $k_0$  (perceba que há exatamente  $2^{k_0}$  palavras binárias de tamanho  $k_0$ ). Logo  $\mathcal{V}_0 = \{V_u : u \in \mathbf{2}^{k_0}\}$ . Vamos agora construir  $\mathcal{V}_1$ . Tome  $V_u \in \mathcal{V}_0$  qualquer. Pela proposição 10, podemos repartir  $V_u$  em uma partição finita com  $2^{k_1-k_0}$  elementos, para algum  $k_1 > k_0$ , com diâmetro menor que  $2^{-1}$ . Para cada elemento da partição de  $V_u$ , o nomeie concatenando  $u$  com uma palavra binária de tamanho  $2^{k_1-k_0}$  (formando uma palavra binária de tamanho  $k_1$ ), portanto essa partição de  $V_u$  terá a forma:  $\{V_{uv} : v \in \mathbf{2}^{k_0-k_1}\}$ . Fazendo isso para cada  $V_u \in \mathcal{V}_0$ , encontramos uma nova partição aberta e fechada  $\mathcal{V}_1 = \{V_w : w \in \mathbf{2}^{k_1}\}$  de  $X$ , com diâmetro menor que  $2^{-1}$  e  $2^{k_1}$  elementos.

Definimos então a sequência de partições abertas e fechadas  $(\mathcal{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $X$ , com  $\text{diam}(\mathcal{V}_n) < 2^{-n}$ . Pela maneira que construímos  $(\mathcal{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\mathcal{V}_{n+1}$  é mais fina que  $\mathcal{V}_n$ . Agora tome  $x \in \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$  qualquer e defina  $V_x = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_{u_{[0, k_n]}}$ , que é uma interseção de fechados encaixados em um compacto, pela Proposição 19 é não vazia, e como seu diâmetro é 0,  $V_x$  contém apenas um elemento. Defina a função  $\varphi : \mathbf{2}^{\mathbb{N}} \rightarrow X$  por  $\varphi(x) \in V_x$ .

Vamos mostrar que  $\varphi$  é contínua. Seja  $n \in \mathbb{N}$  qualquer. Perceba que para  $x, y \in \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$  se  $d(x, y) < 2^{-n}$ , então existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $k > n$  e  $\varphi(x), \varphi(y) \in V_w$ , para  $w \in \mathbf{2}^k$ , e então  $d(\varphi(x), \varphi(y)) < 2^{-k} < 2^{-n}$ .

Agora vamos mostrar a bijetividade. Injetividade: sejam  $x \neq y \in \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ . Então existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $x_n \neq y_n$ . Logo, há  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $k \geq n$  e  $\varphi(x) \in V_{[x_0, x_k]}$  mas  $\varphi(y) \notin V_{[x_0, x_k]}$ . Portanto  $\varphi(x) \neq \varphi(y)$ . Sobrejetividade: Tome  $u \in X$ . Vamos mostrar quem é a sequência binária que é levada a  $u$ . Como  $u \in X$ , existe  $V_w$ ,  $w \in \mathbf{2}^{k_0}$  tal que  $V_w \subseteq \mathcal{V}_0$  e  $u \in V_w$ . Defina  $\varphi^{-1}(u)_{[0, 2^{k_0}]} = w$ . Também existe  $V_{wv} \subseteq V_w$ ,  $v \in \mathbf{2}^{k_1-k_0}$ , tal que  $u \in V_{wv}$ . Defina  $\varphi^{-1}(u)_{[0, 2^{k_1}]} = wv$ . Continuando esse processo indefinidamente, construímos a sequência  $(\varphi(u)_{[0, 2^{k_n}]})_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$  e obtemos  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\varphi(u)_{[0, 2^{k_n}]}) = \varphi(u)$ , como queríamos.

---

Como  $\varphi$  é contínua e bijetiva com domínio compacto, também será um homeomorfismo, como mostrado na Proposição 18.  $\square$

## 4 Espaço dos Ladrilhamentos

### 4.1 Complexos Celulares

Estabeleceremos agora notações que usaremos no resto do texto. Se  $A$  é um subconjunto de um espaço métrico, então seu fecho será denotado por  $\bar{A}$ . Considere como bola fechada unitária  $E^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$ , a bola aberta unitária será  $U^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$  e a circunferência  $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ .

A ideia de um complexo celular é construir um espaço multidimensional, primeiro criando os vértices (dimensão 0), depois construir as arestas (dimensão 1) homeomorfas ao intervalo  $(0, 1)$  e colá-las nos vértices. Agora, consideramos as faces (dimensão 2) homeomorfas à bola aberta unitária em  $\mathbb{R}^2$  e as colamos nas arestas. Esse processo pode ser interrompido ou continuar infinitamente. De maneira mais precisa:

**Definição 13.** Um **complexo celular Hausdorff**  $X$  é definido a partir da sequência (possivelmente finita):

$$X^0 \subset X^1 \subset X^2 \subset \dots$$

em que cada  $X^i$  satisfaz:

1.  $X^0$  é munido da topologia discreta.
2. Para  $n > 0$ , vamos construir  $X^n$  da seguinte maneira: adicione de maneira adjacente a coleção  $\{e_\lambda^n\}_{\lambda \in \Lambda_n}$  de conjuntos disjuntos homeomorfos a  $U^n$ , chamados de  **$n$ -células** tal que para cada  $\lambda \in \Lambda_n$  existe uma função contínua

$$f_\lambda : E^n \rightarrow \bar{e}_\lambda^n$$

que manda  $U^n$  homeomorficamente para  $e_\lambda^n$  e  $f_\lambda(S^{n-1}) \subset X^{n-1}$ .

3.  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^n$
4. Os espaços  $X$  e  $X^n$  tem a topologia fraca:  $A \subseteq X$  é fechado se e somente se  $A \cap \bar{e}_\lambda^n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  e todo  $\lambda \in \Lambda_n$ .

Chamamos o conjunto de  $n$ -células adicionadas ao complexo na etapa  $n$  de  $K_n$ . Se  $K_i = \emptyset, \forall i > n$  e  $K_n \neq \emptyset$ , então dizemos que o complexo celular é de  $n$ -ésima dimensão. Dizemos que o complexo celular é **regular** se todas as funções  $f_\lambda$  referenciadas na Definição 13 são homeomorfismos. Vejamos agora um exemplo:



**Exemplo 4.** Faremos a construção de um complexo celular que será a fronteira da esfera unitária, no caso  $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ . Em que:

$$K_0 = \{(0, 0, -1), (0, 0, 1)\}$$

$$K_1 = \{ \{(\sin t\pi, 0, \cos t\pi) : t \in (0, 1)\}, \{(-\sin t\pi, 0, \cos t\pi) : t \in (0, 1)\} \}$$

$$K_2 = \{ \{(x, y, z) \in S^2 : y > 0\}, \{(x, y, z) \in S^2 : y < 0\} \}$$

Perceba que as primeiras células são vértices no eixo  $z$ , já as células de uma dimensão serão as semicircunferências unitárias no plano  $xz$ , que serão coladas aos vértices e as células de duas dimensões serão as fronteiras das calotas unitárias, que serão coladas nas semicircunferências.

Veja que o fecho das semicircunferências são homeomorfos a  $[0, 1]$  pelas funções  $f_\lambda(z) = \pm\sqrt{1 - z^2}$  e similarmente, o fecho das calotas unitárias são homeomorfos a bola unitária fechada em  $\mathbb{R}^2$  pelas funções  $g_\lambda(x, z) = \pm\sqrt{1 - (x^2 + z^2)}$ . Disso, temos um complexo celular regular em  $S^2$ .

## 4.2 Ladrilhamentos

Primeiro, vamos estabelecer o que é uma translação de conjuntos. Se  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ , então sua translação por um vetor  $x \in \mathbb{R}^n$  qualquer é dada por:  $A + x = \{a + x : a \in A\}$ .

Chamaremos de **protoladrilhos** os conjuntos  $p_i \subset \mathbb{R}^n$  homeomorfos à bola unitária fechada de  $\mathbb{R}^n$  que formam um conjunto finito  $\{p_1, p_2, \dots, p_N\}$ . Dois protoladrilhos distintos podem ter o mesmo formato, mas terão que ter uma marcação que os diferencie. Um subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  que é uma translação de algum protoladrilho será chamado de **ladrilho**.

**Definição 14.** Um **ladrilhamento parcial** será um conjunto  $T \subset \mathbb{R}^n$  cujos elementos são ladrilhos tais que seus interiores são disjuntos dois a dois. O conjunto  $\text{supp}(T)$ , chamado de **suporte de T**, é a união de todos os ladrilhos pertencentes a  $T$ . Um **ladrilhamento** é um ladrilhamento parcial com suporte igual a  $\mathbb{R}^n$ . Um **fragmento** de  $T$  é um subconjunto de  $T$  com suporte limitado.

Veja que em  $\mathbb{R}$ , um ladrilhamento pode ser interpretado como uma sequência bi-infinita formada por um conjunto de letras finitas, uma vez que cada protoladrilho (que será um intervalo fechado) pode ser identificado com uma letra, e há um número finito de protoladrilhos. Em  $\mathbb{R}^2$ , os ladrilhamentos podem ser visualizados como peças de um quebra-cabeça que encaixadas cobrem o plano inteiro. Se  $T = \{t_j\}_{j \in J}$  é um ladrilhamento, definimos a translação de  $T$  por  $x \in \mathbb{R}^n$  como  $T + x = \{t_j + x\}_{j \in J}$ . Se  $U \subset \mathbb{R}^n$ , então  $T(U)$  são todos os ladrilhos de  $T$  que intersectam  $U$ , ou seja,  $T(U) = \{t \in T : U \cap t \neq \emptyset\}$ .  $T(\{x\})$  será abreviado para  $T(x)$ . Caso  $T(U) = T'(U)$  para dois ladrilhamentos  $T$  e  $T'$ , então dizemos que  $T$  e  $T'$  **concordam** em  $U$ .

**Definição 15.** Um ladrilhamento  $T$  será **periódico** se existe  $v \in \mathbb{R}^n$  não nulo tal que  $T + v = T$ . Um ladrilhamento que não é periódico será chamado de **aperiódico**.

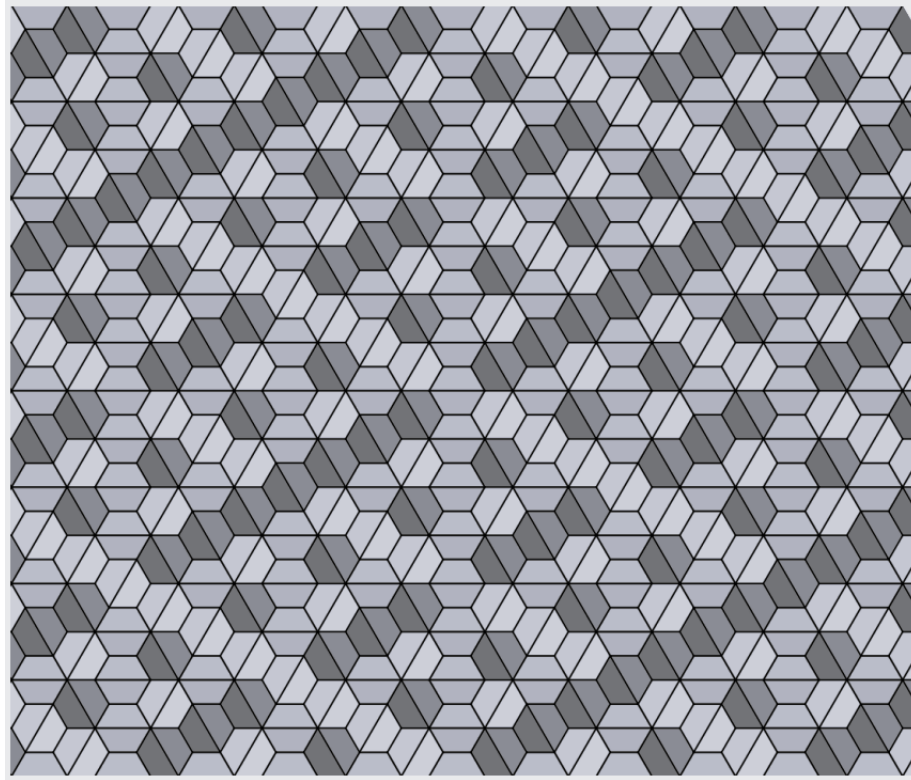


Figura 2 – Exemplo de um ladrilhamento no plano.

Na Figura 2, retirada da referência [Gonçalves e Ramirez-Solano 2018], temos um exemplo de ladrilhamento no plano. Nela, vemos que os protoladrilhos são seis trapézios de medidas iguais, porém com inclinações e tons de cinza diferentes.

### 4.3 O espaço de ladrilhamento $\Omega_T$

Queremos agora formar um espaço métrico a partir de uma coleção de ladrilhamentos  $\mathcal{T}$ . A ideia da métrica que iremos apresentar é que dois ladrilhamentos estão próximos se a partir de uma pequena translação, tais ladrilhamentos concordam em uma bola grande centrada na origem. Antes de definir formalmente tal métrica, apresentaremos um lema que será essencial em nossa demonstração:

**Lema 1.** Para  $a$  e  $b$  números positivos tais que  $a + b \leq 1$ , temos:

$$\frac{1}{a+b} \leq \frac{1-ab}{a}.$$

*Demonstração.* Tome  $a, b \in \mathbb{N}$  positivos tais que  $a + b \leq 1$ . Então:

$$\begin{aligned} 0 &\leq 1 - a(a + b) \Rightarrow 0 \leq b - a^2b - ab^2 \\ \Rightarrow a &\leq b - a^2b - ab^2 + a \Rightarrow a \leq (a + b)(1 - ab) \\ \Rightarrow \frac{1}{a + b} &\leq \frac{1 - ab}{a}. \end{aligned}$$

□

**Proposição 11.** Se  $T = \{t_j\}_{j \in J}$  e  $T' = \{t'_m\}_{m \in M}$  estão em  $\mathcal{T}$ , então a função  $d$  definida abaixo é uma métrica.

$$\begin{aligned} d(T, T') &= \inf\{1, \varepsilon : \exists x, x' \in \mathbb{R}^n, |x|, |x'| < \varepsilon, \\ &\quad (T - x)(B(0, \varepsilon^{-1})) = (T' - x')(B(0, \varepsilon^{-1}))\}. \end{aligned}$$

*Demonstração.* Veja que  $d$  satisfaz as três condições para ser uma métrica, pois:

A simetria em  $d$  se confirma pela própria definição. Mostraremos que  $d(T, T') = 0 \Leftrightarrow T = T'$ . Provaremos primeiro a ida. A ideia da prova é que se  $T \neq T'$ , então precisaremos de um deslocamento suficientemente grande para que ambos concordem em uma bola grande centrada na origem.

Tome  $T = \{t_j\}_{j \in J}$  e  $T' = \{t'_i\}_{i \in I}$  ladrilhamentos distintos de  $\mathcal{T}$ . Suponha por absurdo que  $d(T, T') = 0$ . Como  $T \neq T'$ , existe  $t_j \in T$  tal que  $t_j \notin T'$  e portanto, também existe um  $t'_j \in T'$  que se sobrepõe a  $t_j$ . Escolha  $x \in \mathbb{R}$  no interior de  $t_j \cap t'_j$  e tome  $r \in \mathbb{R}$ ,  $r > 0$  tal que  $B(x, r) \subset t_j \cap t'_j$ .

Como  $d(T, T') = 0$ , existe um  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno de modo que  $B(x, r) \subset B(0, \varepsilon^{-1})$  e  $\varepsilon < r/2$ , e vetores  $v$  e  $v'$  em  $\mathbb{R}^n$  tais que suas normas são menores que  $\varepsilon$  e:

$$(T - v)(B(0, \varepsilon^{-1})) = (T' - v')(B(0, \varepsilon^{-1})),$$

o que é um absurdo, visto que como  $|v|, |v'| < r/2$ , os interiores de  $(t_j - v)$  e  $(t'_j - v')$  ainda possuem interseção não nula, logo  $d(T, T') \neq 0$ .

Mostraremos agora que se  $T = T'$ , então  $d(T, T') = 0$ . Tome  $T$  um ladrilhamento. Perceba que para todo  $\varepsilon > 0$  real, temos que:

$$(T - 0)(B(0, \varepsilon^{-1})) = (T - 0)(B(0, \varepsilon^{-1})),$$

logo  $d(T, T)$  é o ínfimo dos reais positivos que é igual a 0.

Veremos agora a prova da desigualdade triangular. Sejam  $T, R$  e  $S$  ladrilhamentos. Vamos mostrar que  $d(T, S) \leq d(T, R) + d(S, R)$ . Caso  $1 \leq d(T, R) + d(S, R)$ , o resultado segue imediatamente, uma vez que  $d(T, S) \leq 1$ . Suponha agora que  $d(T, R) + d(S, R) < 1$ . Então existe  $\varepsilon > 0$  real tal que  $d(T, R) + d(S, R) + \varepsilon < 1$ . Pelo fato de  $d(T, R)$  ser um ínfimo, existem vetores  $x_{TR}$  e  $x'_{TR}$  em  $\mathbb{R}^n$  de forma que:

$$|x_{TR}|, |x'_{TR}| < d(T, R) + \varepsilon/2, \quad (4.1)$$

e

$$(T - x_{TR}) \left( B \left( 0, \frac{1}{d(T, R) + \varepsilon/2} \right) \right) = (R - x'_{TR}) \left( B \left( 0, \frac{1}{d(T, R) + \varepsilon/2} \right) \right). \quad (4.2)$$

Analogamente, existem vetores  $x_{RS}$  e  $x'_{RS}$  em  $\mathbb{R}^n$  tais que:

$$|x_{RS}|, |x'_{RS}| < d(R, S) + \varepsilon/2, \quad (4.3)$$

e

$$(R - x'_{RS}) \left( B \left( 0, \frac{1}{d(R, S) + \varepsilon/2} \right) \right) = (S - x_{RS}) \left( B \left( 0, \frac{1}{d(R, S) + \varepsilon/2} \right) \right). \quad (4.4)$$

Da equação 4.2 observamos que  $T - x_{TR} - x'_{RS}$  concorda com  $R - x'_{TR} - x'_{RS}$  na bola  $B \left( -x'_{RS}, \frac{1}{d(T, R) + \varepsilon/2} \right)$ , pois trasladamos dois ladrilhamentos que já concordavam em uma bola centrada na origem pelo mesmo vetor  $x'_{RS}$ . De maneira análoga,  $S - x_{RS} - x'_{TR}$  concorda com  $R - x'_{RS} - x'_{TR}$  na bola  $B \left( -x'_{TR}, \frac{1}{d(S, R) + \varepsilon/2} \right)$ . Por transitividade,  $T - x_{TR} - x'_{RS}$  e  $S - x_{RS} - x'_{TR}$  vão concordar na interseção das bolas  $B \left( -x'_{RS}, \frac{1}{d(T, R) + \varepsilon/2} \right)$  e  $B \left( -x'_{TR}, \frac{1}{d(S, R) + \varepsilon/2} \right)$ . Tal interseção conterá a origem, pois  $|-x'_{RS}|, |-x'_{TR}| < 1$  e os raios  $\frac{1}{d(T, R) + \varepsilon/2}$  e  $\frac{1}{d(S, R) + \varepsilon/2}$  são maiores do que 1, ou seja, a translação de  $T - x_{TR}$  por  $-x'_{RS}$  não é o suficiente para “tirar” a origem da bola da equação 4.2 trasladada pelo mesmo vetor. O mesmo acontece com a translação de  $S - x_{RS}$  por  $-x'_{TR}$ . Agora, tome  $r > 0$  como sendo o maior raio onde  $B(0, r) \subseteq B \left( -x'_{RS}, \frac{1}{d(T, R) + \varepsilon/2} \right)$  e tome  $r'$  o maior raio tal que  $B(0, r') \subseteq B \left( -x'_{TR}, \frac{1}{d(S, R) + \varepsilon/2} \right)$ . Sem perda de generalidade, suponha que  $r < r'$ . Logo,  $T - x_{TR} - x'_{RS}$  e  $S - x_{RS} - x'_{TR}$  concordam em  $B(0, r)$ . Perceba que  $r$  é o raio da bola que contém a origem subtraído da distância entre a origem e  $-x'_{RS}$ , ou seja:

$$r = \frac{1}{d(T, R) + \varepsilon/2} - |-x'_{RS}|.$$

Agora perceba que:

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{d(T, R) + \varepsilon/2} - |-x'_{RS}| \\ &\geq \frac{1}{d(T, R) + \varepsilon/2} - (d(S, R) + \varepsilon/2) \\ &= \frac{1 - (d(T, R) + \varepsilon/2)(d(S, R) + \varepsilon/2)}{d(T, R) + \varepsilon/2}, \end{aligned}$$

e o Lema 1 nos garante que  $r \geq \frac{1}{d(T, R) + \varepsilon/2 + d(S, R) + \varepsilon/2}$  e então  $T - x_{TR} - x'_{RS}$  e  $S - x_{RS} - x'_{TR}$  concordam em  $B \left( 0, \frac{1}{d(T, R) + d(S, R) + \varepsilon} \right)$ . Das equações 4.1 e 4.3 temos que

$$|x_{TR} + x'_{RS}| \leq d(T, R) + d(S, R) + \varepsilon,$$

$$|x_{RS} + x'_{TR}| \leq d(T, R) + d(S, R) + \varepsilon$$

e como

$$\begin{aligned} & (T - x_{TR} - x'_{RS}) \left( B \left( 0, \frac{1}{d(T, R) + d(S, R) + \epsilon} \right) \right) = \\ & = (S - x_{RS} - x'_{TR}) \left( B \left( 0, \frac{1}{d(T, R) + d(S, R) + \epsilon} \right) \right), \end{aligned}$$

logo, pela definição da métrica  $d$ ,  $d(T, S) \leq d(T, R) + d(R, S)$ .  $\square$

Concluimos então que uma coleção de ladrilhamentos  $\mathcal{T}$  pode se tornar um espaço métrico se munido com a métrica  $d$ . Um espaço fácil de se construir é considerar um ladrilhamento  $T$  e formar uma coleção de ladrilhamentos  $\mathcal{T}$  a partir de todas as translações de  $T$ , ou seja,  $\mathcal{T} = \{T + x : x \in \mathbb{R}^n\}$ , simplificando,  $\mathcal{T} = T + \mathbb{R}^n$ . Será que tal espaço métrico seria completo? É claro que  $\mathcal{T}$  terá seqüências de Cauchy, mas não necessariamente será completo, como visto no exemplo a seguir. Imagine que  $T$  é um ladrilhamento de  $\mathbb{R}^2$  formado apenas por quadrados cujos vértices localizam-se nos inteiros, como um tabuleiro de damas, mas os quatro quadrados que contém a origem são colados uns aos outros, formando um único quadrado de lado 2. Perceba então que o limite da seqüência  $(T + (n, 0))_{n \in \mathbb{N}}$  será o tabuleiro de damas original  $C$ , uma vez que para qualquer  $\epsilon > 0$ , basta tomar um  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $k > \epsilon^{-1}$ , pois teremos:  $m > k \Rightarrow (T + m)(B(0, \epsilon^{-1})) = C(B(0, \epsilon^{-1}))$ . Essa discussão culmina em:

**Definição 16.** *Seja  $T$  um ladrilhamento. Então o espaço métrico obtido por completar o conjunto  $\mathcal{T} = \{T + x : x \in \mathbb{R}^n\}$  será chamado de  $\Omega_T$ .*

Logo abaixo definiremos uma propriedade que é essencial para determinarmos se o espaço  $\Omega_T$  será ou não compacto.

**Definição 17.** *Um ladrilhamento  $T$  tem **complexidade local finita**, ou **CLF**, se para qualquer  $R > 0$  real, existe apenas uma quantidade finita de fragmentos de  $T$  com suportes de raios menores que  $R$  (a menos de translações)*

Um ladrilhamento ter CLF significa que, ao tomarmos uma bola aberta em  $\mathbb{R}^n$  com raio qualquer, existe um número finito de fragmentos de  $T$  que cabem dentro dessa bola.

**Proposição 12.** *O espaço  $\Omega_T$  é compacto se e somente se  $T$  tiver complexidade local finita.*

*Demonstração.* Primeiro, vamos mostrar pela contrapositiva que se  $\Omega_T$  é compacto, então  $T$  tem CLF. Suponha então que  $T$  não tem CLF, mostraremos que  $\Omega_T$  não será sequencialmente compacto (em espaços métricos, um conjunto é compacto se e só se é sequencialmente compacto). Tome  $T_0 \in \Omega_T$  qualquer. Como  $T$  não é CLF, existe  $r > 0$  tal que há um  $T_1 \in \Omega_T$  de forma que:

$$(T_0 - x_0)(B(0, r)) \neq (T_1 - x_1)(B(0, r))$$

para todos vetores  $|x_0|, |x_1| < r^{-1}$ . Tome agora  $T_2 \in \Omega_T$  tal que:

$$(T_2 - x_2)(B(0, r)) \neq (T_0 - x_0)(B(0, r)) \neq (T_1 - x_1)(B(0, r)),$$

para todos  $|x_0|, |x_1|, |x_2| < r^{-1}$ . Construa então, de maneira recursiva, a sequência  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  em  $\Omega_T$ . Note que tal sequência não tem subsequências convergentes, uma vez que todos os seus elementos são pontos isolados. Logo  $\Omega_T$  não é sequencialmente compacto.

Agora, Provaremos que se  $T$  tem CLF, então  $\Omega_T$  será sequencialmente compacto. Suponha que  $T$  tem CLF e tome  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência em  $\Omega_T$  qualquer. Iremos exibir uma subsequência convergente. Como  $T$  tem CLF, existe uma subsequência de  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , que denotaremos por  $(T_{n_k^0})_{k \in \mathbb{N}}$ , e uma sequência de vetores  $(x_k^0)_{k \in \mathbb{N}}$  tais que  $|x_n^0| \leq 1$  para todo  $n$  e:

$$(T_{n_0^0} - x_0^0)(B(0, 1)) = (T_{n_1^0} - x_1^0)(B(0, 1)) = \dots = (T_{n_k^0} - x_k^0)(B(0, 1)) = \dots$$

Tome uma subsequência convergente de  $(x_k^0)_{k \in \mathbb{N}}$ , que denotaremos por  $(x_{k_j}^0)_{j \in \mathbb{N}}$  e considere a sequência  $(T_{n_{k_j}^0})_{j \in \mathbb{N}}$ , e a renomeie como  $(T_{n_i^0})_{i \in \mathbb{N}}$ . Temos então que os elementos dessa sequência distam pelo menos 1 um do outro.

De novo, como  $T$  tem CLF, existe uma subsequência de  $(T_{n_i^0})_{i \in \mathbb{N}}$ , que chamaremos de  $(T_{n_i^1})_{i \in \mathbb{N}}$ , e uma sequência de vetores  $(x_i^1)_{i \in \mathbb{N}}$  com  $|x_i^1| < 1/2$  para todo  $i$  e:

$$(T_{n_0^1} - x_0^1)(B(0, 2)) = (T_{n_1^1} - x_1^1)(B(0, 2)) = \dots = (T_{n_i^1} - x_i^1)(B(0, 2)) = \dots$$

Tome a subsequência convergente de  $(x_i^1)_{i \in \mathbb{N}}$ , que sem perda de generalidade chamaremos de  $(x_i^1)_{i \in \mathbb{N}}$ , e considere a sequência  $(T_{n_i^1})_{i \in \mathbb{N}}$  de mesmos índices. Temos então que os elementos dessa sequência distam pelo menos 1/2 um do outro.

De maneira recursiva, considere a sequência de sequências

$$(T_{n_i^0})_{i \in \mathbb{N}} \supset (T_{n_i^1})_{i \in \mathbb{N}} \supset (T_{n_i^2})_{i \in \mathbb{N}} \supset \dots$$

Tal que

$$(T_{n_0^m} - x_0^m)(B(0, m)) = (T_{n_1^m} - x_1^m)(B(0, m)) = \dots = (T_{n_i^m} - x_i^m)(B(0, m)) = \dots$$

Para todo  $m \in \mathbb{N}$ . Agora tome a sequência  $(T_{n_k^k})_{k \in \mathbb{N}}$ , que será uma subsequência de  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  que converge, pois os elementos de  $(T_{n_k^k})_{k \in \mathbb{N}}$  se aproximam cada vez mais entre si (sequência de Cauchy) e  $\Omega_T$  é um espaço completo. Provando o que queríamos.  $\square$

## 4.4 Método da Substituição

Será apresentado agora um método para obtermos exemplos de ladrilhamentos, que iremos chamar de **método da substituição**, que consiste em a partir do conjunto finito de protoladrilhos  $\{p_1, p_2, \dots, p_N\}$ , dividimos cada  $p_i$  em ladrilhos que são cópias menores dos

protoladrilhos (não necessariamente todos os protoladrilhos) e em seguida os “expandimos” até que fiquem do tamanho dos protoladrilhos originais, expansão essa representada pela constante  $\lambda > 1$ . Vamos denotar o resultado desse método em um protoladrilho  $p_i$  por  $\omega(p_i)$ . Na Figura 3, vemos como o método atua sobre os protoladrilhos do ladrilhamento representado pela Figura 2.

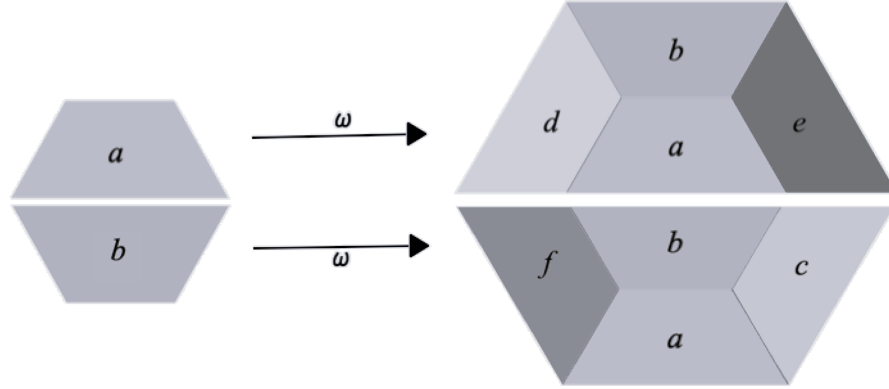


Figura 3 – Exemplo de  $\omega$  aplicada a protoladrilhos.

É possível adaptar esse método para ladrilhos da seguinte maneira: se  $t$  é um ladrilho, então existe um protoladrilho  $p_k$  e um vetor  $x \in \mathbb{R}^n$  tais que  $t = p_k + x$  e então definimos  $\omega(t) = \omega(p_k) + \lambda x$ . Para um ladrilhamento parcial, para aplicar  $\omega$  basta realizar o método em todos os seus ladrilhos, resultando em um suporte  $\lambda$  vezes o suporte do original. Da mesma forma, podemos aplicar esse processo a um ladrilhamento  $T$  aplicando  $\omega$  em todos os ladrilhos de  $T$ , gerando  $\omega(T)$ , que também é um ladrilhamento.

De agora em diante fixe um ladrilhamento  $T$ , o espaço  $\Omega_T$  e o método de substituição  $\omega$ . Para a regra de substituição  $\omega$ , faremos as seguintes considerações: primeiro, assumamos que  $\omega : \Omega_T \rightarrow \Omega_T$ , ou seja,  $\omega$  manda  $\Omega_T$  em  $\Omega_T$ . Segundo, assumamos que  $\omega$  é injetiva. Terceiro, considere que  $\omega$  é sobrejetiva e por último, assumamos que  $\omega$  é **primitiva**, ou seja, existe  $M \in \mathbb{Z}^+$  tal que para qualquer protoladrilho  $p_i$ ,  $\omega^M(p_i)$  contém uma translação de todos os protoladrilhos.

**Proposição 13.** *Considerando as suposições acima, o espaço  $\Omega_T$  não tem ladrilhamentos periódicos.*

*Demonstração.* Mostraremos que  $T \neq T + v$  para qualquer  $v \in \mathbb{R}^n$ . Seja  $v \in \mathbb{R}^n$  um vetor qualquer e seja  $k \in \mathbb{N}$  grande o suficiente para que todo protoladrilho tenha uma bola de raio  $\lambda^{-k}|v|$  contida nele. Tome  $t \in \omega^{-k}(T)$  e perceba que a interseção dos interiores de  $t$  e  $t + \lambda^{-k}v$  é não vazia, já que o vetor  $\lambda^{-k}v$  não é grande o suficiente para “desvencilhar”  $t$  de  $t + \lambda^{-k}v$ , ou seja,  $t + \lambda^{-k}v \notin \omega^{-k}(T)$  e portanto  $\omega^{-k}(T) + \lambda^{-k}v \neq \omega^{-k}(T)$  e disso concluímos que  $T + v \neq T$ .  $\square$

**Teorema 4.** *O par  $(\Omega_T, \omega)$  é um sistema dinâmico topológico, isto é,  $\omega$  é bijetiva e bicontínua.*

*Demonstração.* Já é assumido que  $\omega$  é bijetiva, então provaremos sua bicontinuidade, começando por  $\omega$ . Tome  $T$  e  $T'$  quaisquer em  $\Omega_T$ , tais que  $d = d(T, T') < 1$ . Então, para todo  $r > 0$  real, existem vetores  $x$  e  $y$  em  $\mathbb{R}^n$  tais que  $|x|, |y| < d + r$  e

$$(T - x) \left( B \left( 0, \frac{1}{d+r} \right) \right) = (T' - y) \left( B \left( 0, \frac{1}{d+r} \right) \right).$$

Da equação anterior podemos concluir que:

$$(\omega(T) - \lambda x) \left( B \left( 0, \frac{1}{\lambda(d+r)} \right) \right) = (\omega(T') - \lambda y) \left( B \left( 0, \frac{1}{\lambda(d+r)} \right) \right) \quad (4.5)$$

e então, como  $|\lambda x|, |\lambda y| < \lambda(d+r)$  e da equação 4.5, segue da definição da métrica  $d$  na Proposição 11 que  $d(\omega(T), \omega(T')) \leq \lambda d(T, T')$ , para quaisquer  $T, T' \in \Omega_T$ , ou seja  $\omega$  é Lipschitz contínua.

Analogamente, mostra-se que  $d(\omega^{-1}(T), \omega^{-1}(T')) \leq \lambda d(T, T')$ .  $\square$

Assumiremos a partir de agora que todos os protoladrilhos são polígonos. Vamos agora construir um complexo celular também conhecido como complexo de Anderson-Putnam. Primeiro, vamos definir o seguinte: se  $t \in T$  é um ladrilho qualquer, defina  $T^{(0)}(t) = \{t\}$  e  $T^{(1)}(t) = T(t)$ , ou seja,  $T^{(1)}(t)$  é o conjunto formado por  $t$  e todos os ladrilhos que compartilham uma aresta ou vértice com  $t$ . Logo, definimos recursivamente  $T^{(k)}(t) = T(T^{(k-1)}(t))$ . Tome agora o espaço  $\Omega_T \times \mathbb{R}^n$  munido com a topologia produto e seja  $\sim_k$  a menor relação de equivalência (a relação que veremos a seguir não definirá uma relação de equivalência, por isso, tomamos a menor relação de equivalência que contém ela) em  $\Omega_T \times \mathbb{R}^n$  em que  $(T_1, u_1), (T_2, u_2) \in \mathbb{R}^n$  são equivalentes se para  $i = \{1, 2\}$ , existirem  $t_i \in T_i$  tais que  $u_i \in t_i$ , de forma que  $T_1^{(k)}(t_1) - u_1 = T_2^{(k)}(t_2) - u_2$ . Definimos então  $\Gamma_k = \Omega_T \times \mathbb{R}^n / \sim_k$  com a topologia quociente.

Vejamos um exemplo em  $\Gamma_0 = \Omega_T \times \mathbb{R}^n / \sim_0$ . Então  $(T_1, u_1)$  e  $(T_2, u_2)$  serão equivalentes se existirem  $t_1 \in T_1$  e  $t_2 \in T_2$  tais que  $u_1$  e  $u_2$  estão em  $t_1$  e  $t_2$  respectivamente e  $t_1 - u_1 = t_2 - u_2$ . Ou seja  $(T_1, u_1)$  e  $(T_2, u_2)$  serão equivalentes se  $t_1$  e  $t_2$  forem translações do mesmo protoladrilho e a posição de  $u_1$  dentro de  $t_1$  é a mesma de  $u_2$  dentro de  $t_2$ . Imagine agora o ladrilhamento  $T$  que consiste em quadrados que se encaixam aresta com aresta e vértice com vértice (tabuleiro de damas). Então  $\Gamma_0 = \Omega_T \times \mathbb{R}^n / \sim_0$  será isomorfo a um toro (forma semelhante a um *donut*), pois: como há apenas um protoladrilho em  $T$ , as classes de equivalência podem ser vistas como os pontos no interior do quadrado, os pontos da aresta superior são identificados com os pontos da aresta inferior, e os pontos da aresta esquerda são identificados com os pontos da aresta direita.

Um elemento do espaço  $\Omega_T \times \mathbb{R}^2$  é uma dupla formada por um ladrilhamento e um vetor. Se  $u \in \mathbb{R}^n$  está no interior de algum ladrilho  $t \in T' \in \Omega_T$ , em que  $t$  é uma translação de um



protoladrilho  $p_i$ , então a classe de equivalência  $(T', u)_0$  é o conjunto de todos os  $(T_k, u_k) \in \Omega_T \times \mathbb{R}^2$  tais que  $u_k$  está no interior de um ladrilho  $t_k$  que também é uma translação do protoladrilho  $p_i$ , e  $u_k$  está dentro de  $t_k$  na mesma posição em que  $u$  está dentro de  $t$ . Vamos definir então o conjunto  $P_i = \{(T, u)_0 \in \Omega_T \times \mathbb{R}^n / \sim_0 : T(u) \text{ é uma translação de } p_i\}$ .

**Afirmção 1.** *Os elementos do conjunto  $\{P_1, P_2, \dots, P_N\}$  são 2-células em um complexo celular de  $\Gamma_0$ .*

Não faremos a demonstração desta afirmação. Para montar o complexo celular inteiro, faça o seguinte: nomeie todos os protoladrilhos (que serão os  $P_i$ ). Para as arestas, comece com qualquer 2-célula, escolha uma de suas arestas e a nomeie. Dê esse mesmo nome para qualquer aresta de qualquer outra 2-célula que em algum ladrilhamento de  $\Omega_T$  compartilhe a primeira aresta nomeada com a primeira 2-célula escolhida. O mesmo se faz para os vértices. Isso define um complexo celular em  $\Gamma_0$ . Para um complexo celular em  $\Gamma_1$  a construção é similar, mas devemos levar em consideração todos os vizinhos possíveis de cada protoladrilho em ladrilhamentos de  $\Omega_T$  para nomear as 2-células.

**Teorema 5.** *Se  $T$  tem complexidade local finita, então  $\Gamma_k$  é um espaço Hausdorff e compacto.*

*Demonstração.* Vamos mostrar que  $\Gamma_k$  é compacto pois é a imagem contínua de um compacto. Como  $T$  tem CLF, existe um  $r > 0$  tal que todos os protoladrilhos e seus possíveis ladrilhos adjacentes estejam na bola  $B(0, r)$ . Vamos mostrar que a função projeção  $\pi : \Omega_T \times \mathbb{R}^n \rightarrow \Gamma_k$  mapeia  $\{T\} \times \overline{B(0, r)}$  em  $\Gamma_k$  de maneira sobrejetiva. Seja  $(T_1, u_1) \in \Omega_T \times \mathbb{R}^n$  qualquer. Devido a construção de  $B(0, r)$ , existe um  $u$  em  $B(0, r)$  tal que  $(T, u) \sim (T_1, u_1)$ . Como a função quociente é contínua e  $\{T\} \times \overline{B(0, r)}$  é compacto,  $\Gamma_k$  será compacto.

Um complexo celular sempre é Hausdorff, resultado que pode ser visto na referência [Massey 2019].  $\square$

## 4.5 $\Omega_T$ como um Limite Inverso

Nessa seção mostraremos que  $\Omega_T$  é homeomorfo a um espaço do limite inverso formado a partir de elementos de  $\Gamma_k$ . Para isso, definiremos uma função em  $\Gamma_k$  semelhante a função de expansão  $\omega$  em  $\Omega_T$ .

**Teorema 6.** *A função de expansão  $\omega$  define uma função contínua sobrejetora  $\gamma_k : \Gamma_k \rightarrow \Gamma_k$  tal que:*

$$\gamma_k((T, u)_k) = (\omega(T), \lambda u)_k$$

*Demonstração.* Primeiro, mostraremos que a função  $\gamma_k$  está bem definida. Sejam  $T_1$  e  $T_2$  em  $\Omega_T$  e  $u_1$  e  $u_2$  em  $\mathbb{R}^n$ , suponha que  $(T_1, u_1)_k \sim (T_2, u_2)_k$ . Então  $T_1^{(k)}(t_1) - u_1 = T_2^{(k)}(t_2)$

para alguns  $t_1 \in T_1$  e  $t_2 \in T_2$  tais que  $u_1 \in t_1$  e  $u_2 \in t_2$  e por consequência,  $t_1 - u_1 = t_2 - u_2$ . Agora, tome  $t'_1 \in \omega(t_1)$  e  $t'_2 \in \omega(t_2)$  tais que  $\lambda u_1$  está em  $\omega(t_1)$  e  $\lambda u_2$  está em  $\omega(t_2)$  e perceba que  $\omega(T_1)^{(k)}(t'_1) - \lambda u_1 = \omega(T_2)^{(k)}(t'_2) - \lambda u_2$ , ou seja,  $(\omega(T_1), \lambda u_1)_k \sim (\omega(T_2), \lambda u_2)$  e então  $\gamma_k((T_1, u_1)_k) = \gamma_k((T_2, u_2)_k)$ .

Mostraremos agora a continuidade de  $\gamma_k$ . Veja que a função que manda  $(T', u) \in \Omega_T \times \mathbb{R}^n$  em  $(\omega(T'), \lambda u \in \Omega_T \times \mathbb{R}^n)$  tem suas funções coordenadas contínuas, e portanto contínua, e então quando a projetamos às classes de equivalência (função que sempre é contínua) percebemos que  $\gamma_k$  é contínua.

Para mostrar que  $\gamma_k$  é sobrejetiva, basta perceber que como  $\omega$  é bijetiva em  $\Omega_T$ , então  $\gamma_k((\omega^{-1}(T'), \lambda^{-1}u)_k) = (T', u)_k$ , para qualquer  $(T', u)_k \in \Gamma_k$ .  $\square$

Usaremos a função  $\gamma_k$  que acabamos de definir para construir o espaço do limite inverso em  $\Gamma_k$ , para  $k$  fixado. Defina:

$$\Omega_k = \varprojlim \Gamma_k = \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} : x_i \in \Gamma_k, \gamma_k(x_{i+1}) = x_i, \forall i \in \mathbb{N}\},$$

que será um espaço topológico com a topologia produto. Logo, um elemento da base do espaço  $\Omega_k$  será  $U_n = \{x \in \Omega_k : x_n \in U\}$ , onde  $U \subset \Gamma_k$  é um aberto. Definiremos a função  $\omega_k : \Omega_k \rightarrow \Omega_k$  como  $\omega_k(x)_i = \gamma_k(x_i), \forall i \in \mathbb{N}$ . Veja que a função  $\omega_k$  é a função *shift* no espaço  $\Omega_k$ , uma vez que ela aplica  $\gamma_k$  em todas as coordenadas da sequência.

**Definição 18.** *O espaço  $(\Omega_T, \omega)$  **força sua borda** se existe um  $N \in \mathbb{N}$  tal que para qualquer ladrilho  $t$  e ladrilhamentos  $T_1$  e  $T_2$  em  $\Omega_T$  que contenham  $t$ , temos que:*

$$\omega^N(T_1)(\omega^N(t)) = \omega^N(T_2)(\omega^N(t)).$$

Ou seja, se o espaço força sua borda, existe um número natural  $N$  tal que se um ladrilho  $t$  é compartilhado por dois ladrilhamentos  $T_1$  e  $T_2$ , os ladrilhos que cercam a imagem da  $N$ -ésima composição de  $\omega$  aplicada em  $t$  em  $\omega^N(T_1)$  e  $\omega^N(T_2)$  são iguais.

**Teorema 7.** *Seja  $T$  um ladrilhamento com CLF e  $\omega : \Omega_T \rightarrow \Omega_T$  um método de substituição que é uma função bijetiva e primitiva. Então os sistemas dinâmicos  $(\Omega_T, \omega)$  e  $(\Omega_1, \omega_1)$  são topologicamente conjugados. Além disso, se  $T$  força sua borda, então  $(\Omega_T, \omega)$  e  $(\Omega_0, \omega_0)$  são topologicamente conjugados.*

*Demonstração.* Vamos começar provando que  $(\Omega_T, \omega)$  é topologicamente conjugado a  $(\Omega_1, \omega_1)$ . Para qualquer ladrilhamento  $T'$  em  $\Omega_T$ , defina  $\pi : \Omega_T \rightarrow \Omega_1$  como  $\pi(T') = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  tal que  $x_i = (\omega^{-i}(T'), 0)_1$ .

Provaremos a injetividade de  $\pi$ . Suponha que  $\pi(T_1) = \pi(T_2)$  para  $T_1$  e  $T_2$  em  $\Omega_T$ . Defina para quaisquer conjuntos  $U$  e  $V$  em  $\mathbb{R}^n$   $dist(U, V) = \inf \{\|u - v\| : u \in U, v \in V\}$ . Denote a fronteira de um conjunto  $U$  como  $\partial(U)$ . Tome então

$$r = \inf \left\{ dist\left(t, \partial(\cup T'(t))\right) : T' \in \Omega_T, t \in T' \right\},$$

ou seja,  $r$  é o ínfimo da distância entre qualquer ladrilho  $t$  e a fronteira “externa” de todos os possíveis ladrilhos vizinhos a  $t$ , em qualquer ladrilhamento de  $\Omega_T$ . Como  $T$  tem CLF,  $r$  será um ínfimo tomado de um conjunto finito de números positivos, logo  $r$  também será positivo. Tome  $v \in \mathbb{R}^n$  qualquer, vamos mostrar que  $T_1$  e  $T_2$  concordam em uma bola centrada na origem de raio maior que  $\|v\|$ .

Tome  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\|v\| < r\lambda^n$ . Como  $\pi(T_1) = \pi(T_2)$  são sequências de  $\Omega_1$ , temos que  $\pi(T_1)_n = \pi(T_2)_n$ , logo,  $(\omega^{-n}(T_1), 0)_1 = (\omega^{-n}(T_2), 0)_1$  e então existem  $t_1 \in T_1$  e  $t_2 \in T_2$  tais que ambos contém a origem e  $\omega^{-n}(T_1)(t_1) - 0 = \omega^{-n}(T_2)(t_2) - 0$ , ou seja,  $\omega^{-n}(T_1)$  e  $\omega^{-n}(T_2)$  concordam pelo menos em  $B(0, r)$  e portanto  $T_1$  e  $T_2$  concordam em  $B(0, r\lambda^n)$ . Como  $v \in B(0, r\lambda^n)$ , temos que  $T_1 = T_2$ . Logo,  $\pi$  é injetiva. A prova de que  $\pi$  é sobrejetora pode ser vista na referência [Anderson e Putnam 1998].

A bicontinuidade pode ser provada por métodos usuais. Veja que se  $T' \in \Omega_T$ , então:

$$\omega_1(\pi(T')) = (\omega(T'), 0)_1, (T', 0)_1, (\omega^{-1}(T'), 0)_1, \dots = \pi(\omega(T')),$$

ou seja,  $\omega_1 \circ \pi = \pi \circ \omega$ . Portanto  $(\Omega_T, \omega)$  é topologicamente conjugado com  $(\Omega_1, \omega_1)$ .

Vamos supor agora que  $\Omega_T$  força sua borda. Mostraremos que  $(\Omega_1, \omega_1)$  é topologicamente conjugado com  $(\Omega_0, \omega_0)$ , e então pela prova anterior,  $(\Omega_T, \omega)$  será conjugado com  $(\Omega_0, \omega_0)$ .

Defina a função  $f : \Omega_T \times \mathbb{R}^n / \sim_1 \rightarrow \Omega_T \times \mathbb{R}^n / \sim_0$  tal que  $f((T', u)_1) = (T', u)_0$ . Veja que  $f$  é bem definida, uma vez que se  $(T_1, u_1) \sim_1 (T_2, u_2)$  então  $(T_1, u_1) \sim_0 (T_2, u_2)$ . Claramente  $f$  é sobrejetiva, mas não necessariamente injetiva. Veja que:

$$\gamma_0(f(T', u)_1) = \gamma_0((T', u)_0) = (\omega(T'), \lambda u)_0 = f((\omega(T'), \lambda u)_1) = f(\gamma_1((T', u)_1)),$$

ou seja,  $\gamma_0 \circ f = f \circ \gamma_1$ . Devemos então definir a função  $F : \Omega_1 \rightarrow \Omega_0$  por  $F(x)_i = f(x_i)$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ . Afirmamos que  $F$  é um homeomorfismo e que conjuga  $\omega_1$  e  $\omega_0$ . Como  $\gamma_0 \circ f = f \circ \gamma_1$ , é fácil de ver que  $F \circ \omega_1 = \omega_0 \circ F$ .

Vamos mostrar que  $F$  é injetiva. Suponha que  $F((x_i)_{i \in \mathbb{N}}) = F((y_i)_{i \in \mathbb{N}})$  em que  $x_i = (T_i, u_i)_1$  e  $y_i = (T'_i, u'_i)_1$ . Suponha que  $S_1$  e  $S_2$  são ladrilhamentos de  $\Omega_T$ , e que  $v_1$  e  $v_2$  são vetores, então se  $v_1 \in s_1 \in S_1$  e  $v_2 \in s_2 \in S_2$  e se  $(S_1, v_1)_0 = (S_2, v_2)_0$ , então  $S_1^{(0)}(s_1) - v_1 = S_2^{(0)} - v_2$  e como  $\Omega_T$  força a borda, teremos que  $(\omega^N(S_1), \lambda^N v_1)_1 = (\omega^N(S_2), \lambda^N v_2)_1$ . Como  $F((x_i)_{i \in \mathbb{N}}) = F((y_i)_{i \in \mathbb{N}})$  e em particular  $(T_{j+N}, u_{j+N})_0 = (T'_{j+N}, u'_{j+N})_0$ , para qualquer  $j$ , então teremos  $(\omega^N(T_{j+N}), \lambda^N u_{j+N})_1 = (\omega^N(T'_{j+N}), \lambda^N u'_{j+N})_1$ . Sabemos que  $T_{j+N} = \omega^{-N}(T_j)$  e que  $u_{j+N} = \lambda^{-N} u_j$ , então  $(T_j, u_j)_1 = (T'_j, u'_j)_1$ , logo  $F$  é injetiva.

Vamos mostrar agora a sobrejeção de  $F$ . Tome  $((T_i, u_i)_0)_{i \in \mathbb{N}} \in \Omega_0$  qualquer. Como  $\Omega_T$  é compacto, a sequência  $(\omega^n(T_n - u_n))_{n \in \mathbb{N}}$  tem uma subsequência convergente  $(\omega^{n_k}(T_{n_k} - u_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$  que converge para algum ladrilhamento  $T' \in \Omega_T$ . Veja que a sequência  $((\omega^i(T'), 0)_1)_{i \in \mathbb{N}}$  está em  $\Omega_1$ , e afirmamos que ela é a pré-imagem de  $((T_i, u_i)_0)_{i \in \mathbb{N}} \in \Omega_0$ . Como  $(T_0, u_0)_0 = (\omega^n(T_n), \lambda^n u_n)_0$ , pois  $((T_i, u_i)_0)_{i \in \mathbb{N}} \in \Omega_0$  e como  $\omega^n(T_n - u_n) = \omega^n(T_n) - \lambda^n u_n$ , temos que  $(\omega^n(T_n - u_n), 0)_0 = (T_0, u_0)_0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Já que  $T$  tem CLF,

teremos que entre todos os ladrilhamentos  $\omega^n(T_n - u_n)$  para  $n$  natural, apenas uma quantidade finita de ladrilhos vão conter a origem.

Fixe  $i \in \mathbb{N}$ . Tendo em vista que  $(\omega^{n_k}(T_{n_k} - u_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$  é convergente, para qualquer  $\varepsilon > 0$ , existe um  $k$  grande o suficiente de forma que  $\omega^{n_k}(T_{n_k} - u_{n_k})$  concorda com  $T'$  em uma bola  $B(0, \varepsilon^{-1})$ . Seja  $R$  um número real maior que o diâmetro de qualquer protoladrilho, então existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $n_k \geq i$  e  $\omega^{n_k}(T_{n_k} - u_{n_k})$  concorda com  $T'$  em  $B(0, \lambda^i R)$ . Então

$$(\omega^{-i}(T'), 0)_0 = (\omega^{n_k-i}(T_{n_k} - u_{n_k}), 0)_0 = \gamma_0^{n_k-i}(T_{n_k}, u_{n_k})_0 = (T_i, u_i)_0,$$

como queríamos provar.

$F$  é bicontínua, portanto, como  $(\Omega_T, \omega)$  é topologicamente conjugado com  $(\Omega_1, \omega_1)$ , e como  $(\Omega_1, \omega_1)$  é conjugado com  $(\Omega_0, \omega_0)$ , segue que  $(\Omega_T, \omega)$  é conjugado com  $(\Omega_0, \omega_0)$ .  $\square$

## 5 Conclusão

Os estudos realizados para a apresentação deste trabalho dão uma pequena amostra da importância da dinâmica simbólica, uma vez que conseguimos descrever com maior facilidade o sistema quadrático que aparentava ter um comportamento imprevisível.

Olhando com atenção para os espaços simbólicos, descobrimos diversas propriedades importantes envolvendo os espaços de Cantor, em particular que eles são homeomorfos entre si.

Já em relação aos espaços de ladrilhamentos, vimos que é possível atribuir uma métrica a eles, formar um sistema dinâmico com a função que chamamos de método de substituição, e o interpretar como um espaço do limite inverso.

# A Apêndice - Limite Inverso

Ao decorrer dos estudos realizados para essa tese de conclusão de curso, nos deparamos com o espaço do limite inverso. Por essa razão, desenvolveremos aqui uma breve introdução a esse espaço, compreendendo melhor algumas de suas propriedades.

**Definição 19.** *Vamos definir:*

1. Para todo  $i$  natural, seja  $X_i$  um espaço topológico e  $f_i : X_{i+1} \rightarrow X_i$  uma função contínua. Defina então

$$X = \varprojlim_{i \in \mathbb{N}} (X_i, f_i) = \left\{ x \in \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i : x_i = f_i(x_{i+1}) \right\}$$

em que  $X$  é chamado de espaço do limite inverso.

2. Se  $C_i$  é um subconjunto de  $X_i$ , defina  $\overleftarrow{C} = \{x \in X : x_i \in C_i\}$ . Uma base para a topologia de  $X$  é o conjunto  $\{\overleftarrow{A}_i : A_i \subseteq X_i \text{ é aberto}\}$ .

Observe que a topologia que definimos acima é a topologia induzida da topologia produto, ou seja,  $X$  é um subespaço do espaço produto  $\prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ . A partir desse fato, prova-se que:

**Proposição 14.** *É verdade que:*

1. Se  $X_i$  é um espaço topológico Hausdorff para todo  $i$  natural, então o espaço do limite inverso  $X$  também será Hausdorff.
2. Se  $X_i$  é um espaço regular para todo  $i$  natural, então o espaço do limite inverso  $X$  também será regular.
3. Se  $X_i$  é um espaço primeiro contável para todo  $i$  natural, então o espaço do limite inverso  $X$  também será primeiro contável.
4. Se  $X_i$  é um espaço segundo contável para todo  $i$  natural, então o espaço do limite inverso  $X$  também será segundo contável.

A proposição acima é decorrente do fato de que o produto de espaços Hausdorff também é Hausdorff, e um subespaço de um espaço Hausdorff também é Hausdorff. O mesmo vale para espaços regulares, primeiro contáveis e segundo contáveis. As demonstrações dessas afirmações podem ser vistas com detalhes na referência [Munkres 2000].

Vamos agora definir uma notação referente à sequência  $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de funções contínuas do espaço do limite inverso. Defina  $f_i^j : X_j \rightarrow X_i$  por  $f_i^j = f_i \circ f_{i+1} \circ \cdots \circ f_{j-1}$ . Ou seja  $f_i^j$  é

uma composição de funções leva elementos de  $X_j$  para  $X_i$ , sem que  $i$  seja necessariamente o antecessor de  $j$ .

Será que se “retirarmos” uma quantidade enumerável de espaços  $X_i$  do espaço do limite inverso  $X$ , e usarmos as funções de tipo  $f_i^j$  para “pular” os espaços retirados, as propriedades originais do espaço do limite inverso serão mantidas? É o que veremos a seguir:

**Proposição 15.** *Suponha que  $X = \varprojlim (X_i, f_i)$  é um espaço do limite inverso e seja  $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$  uma sequência crescente de números naturais. Considere  $g_i = f_{n_i}^{n_i+1}$  para todo  $i$  natural, e seja  $Y = \varprojlim (X_{n_i}, g_i)_{i \in \mathbb{N}}$ . Então  $X$  é homeomorfo a  $Y$ .*

*Demonstração.* A função candidata a homeomorfismo será  $h : X \rightarrow Y$  de forma que  $h((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (x_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ , ou seja,  $h$  tira todas as coordenadas da sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  que foram retiradas de  $X$  para a formação de  $Y$ . Mostraremos que é homeomorfismo.

Observe que  $h$  é bijetora. Tome  $p = (p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $q = (q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  elementos distintos de  $X$ . Suponha por absurdo que  $h(p) = h(q)$ . Como  $p \neq q$ , existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $p_k \neq q_k$ . Considere  $n_r$  o menor elemento de  $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$  tal que  $k < n_r$ . Então  $p_k = f_k^{n_r}(p_{n_r}) = f_k^{n_r}(q_{n_r}) = q_k$ , o que é um absurdo. Logo  $h(p) \neq h(q)$  e  $h$  é injetora. A sobrejetividade de  $h$  é evidente.

Vejam agora a continuidade de  $h$ . Seja  $\overleftarrow{A} \subset Y$  um aberto básico. Logo existe  $n_k \in (n_i)_{i \in \mathbb{N}}$  tal que  $A$  é um aberto de  $X_{n_k}$ . Perceba então que a pré-imagem de  $\overleftarrow{A} \subset Y$  por  $h$  é  $\overleftarrow{A} \subset X$ , que é aberto. Logo  $h$  é contínua.

Mostraremos que  $h^{-1}$  é contínua. Tome  $\overleftarrow{B}$  aberto básico em  $X$ . Então existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $B$  é aberto para algum  $X_n$ . Se  $n = n_j$  para algum  $n_j \in (n_i)_{i \in \mathbb{N}}$ , então segue que  $(h^{-1})^{-1}(\overleftarrow{B}) = h(\overleftarrow{B}) = \overleftarrow{B} \subset Y$  que é aberto, como gostaríamos de provar. Se  $n \neq n_j$  para todo  $j$  natural, considere  $k \in \mathbb{N}$  o menor índice tal que  $n_k \in (n_i)_{i \in \mathbb{N}}$  e  $n < n_k$ . Veja então que como  $f_i$  é contínua para cada  $i$  natural, temos que  $(f_n^{n_k})^{-1}(B) = C$  é aberto em  $X_{n_k}$  e portanto  $\overleftarrow{C}$  é aberto em  $Y$  de forma que  $(h^{-1})^{-1}(\overleftarrow{B}) = h(\overleftarrow{B}) = \overleftarrow{C} \subset Y$ . Concluimos então que  $h^{-1}$  é contínua.

Disso,  $h$  é um homeomorfismo. □

Veremos a seguir que dependendo de determinadas condições, o espaço do limite inverso  $X = \varprojlim (X_i, f_i)_{i \in \mathbb{N}}$  pode ser homeomorfo a apenas o espaço de uma coordenada só, como mostrado na proposição abaixo.

**Proposição 16.** *Seja  $X = \varprojlim (X_i, f_i)_{i \in \mathbb{N}}$  um espaço do limite inverso. Se existe um número natural  $N$  tal que  $f_n$  é um homeomorfismo para todo  $n \geq N$ , então  $X$  é homeomorfo a  $X_N$ .*

*Demonstração.* A função candidata a homeomorfismo será  $h : X \rightarrow X_N$  de forma que  $h((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = x_N$ , ou seja,  $h$  leva uma sequência qualquer de  $X$  a sua  $N$ -ésima coordenada.

Mostraremos que  $h$  é sobrejetora. Considere  $x_N \in X_N$  qualquer. Como  $f_i$  é homeomorfismo para todo  $i \geq N$ , podemos tomar a sequência  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X$  tal que:

$$y_i = \begin{cases} f_i^N(x_N), & \text{se } i < N, \\ x_N, & \text{se } i = N, \\ (f_N^i)^{-1}(x_N), & \text{se } i > N. \end{cases}$$

Veja então que  $h((y_n)_{n \in \mathbb{N}}) = x_N$ , como gostaríamos.

Provaremos agora a injetividade de  $h$ . Suponha que  $h(x) = h(y)$  para  $x$  e  $y$  em  $X$ . Então segue que  $x_N = y_N$  e portanto, para  $i \leq N$ , concluímos:

$$x_i = f_i^N(x_N) = f_i^N(y_N) = y_i.$$

Tendo em vista que  $f_k$  é homeomorfismo para todo  $k \geq N$ , também é verdade que se  $i > N$ , temos:

$$x_i = (f_N^i)^{-1}(x_N) = (f_N^i)^{-1}(y_N) = y_i,$$

ou seja, das duas equações acima,  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e portanto  $x = y$ , como queríamos.

Vejam a continuidade de  $h$ . Tome  $A \subset X_N$  um aberto qualquer. Então  $h^{-1}(A) = \overleftarrow{A} \subset X$ , que é aberto, logo  $h$  é contínua.

Provaremos a continuidade de  $h^{-1}$ . Tome  $\overleftarrow{B} \subset X$  aberto básico qualquer. Mostraremos que  $h(\overleftarrow{B})$  é aberto em  $X_N$ .

1. Caso  $B \subset X_N$ , então  $h(\overleftarrow{B}) = B$  que é aberto.
2. Caso  $B \subset X_m$  para  $m > N$ , então  $h(\overleftarrow{B}) = f_N^m(B)$  que é aberto, pois  $f_i$  é homeomorfismo para todo  $i \geq N$ .
3. Caso  $B \subset X_m$  para  $m < N$ , então  $h(\overleftarrow{B}) = (f_m^N)^{-1}(B)$  que é aberto, pois  $f_i$  é contínua para todo  $i$  natural.

Com isso concluímos a prova, ou seja,  $h$  é um homeomorfismo entre  $X$  e  $X_N$ .  $\square$

**Proposição 17.** *Se todo espaço  $X_i$  for Hausdorff, então o espaço do limite inverso  $X = \varprojlim (X_i, f_i)_{i \in \mathbb{N}}$  será um subespaço fechado do espaço produto  $\prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ .*

*Demonstração.* Mostraremos que  $\prod_{i \in \mathbb{N}} X_i \setminus X$  é aberto. Tome  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  elemento de  $\prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$  qualquer. Exibiremos um aberto  $A$  do espaço produto totalmente contido no conjunto  $\prod_{i \in \mathbb{N}} X_i \setminus X$ .

Como  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  não está em  $X$ , existe um  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $x_k \neq f_k(x_{k+1})$ . Já que  $X_k$  é Hausdorff, tome dois abertos disjuntos  $A_1$  e  $A_2$  de forma que  $x_k \in A_1$  e  $f_k(x_{k+1}) \in A_2$ . Tendo em vista que  $f_k : X_{k+1} \rightarrow X_k$  é contínua, o conjunto  $f_k^{-1}(A_2)$  é aberto em  $X_{k+1}$ .

Considere o conjunto aberto  $A = X_1 \times \cdots \times A_1 \times f_k^{-1}(A_2) \times X_{k+2} \times \cdots$  contido em  $\prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$  e perceba que  $x \in A$  e que  $A \cap X$  é vazio. Logo  $X$  é fechado.  $\square$



Tendo o Teorema de Tychonoff em mente (qualquer produto de compactos é compacto na topologia produto, demonstração na referência [Munkres 2000]), se cada  $X_i$  for compacto e Hausdorff, então  $\prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$  será compacto, e pela proposição anterior, o espaço do limite inverso  $X$  será um subespaço fechado de um conjunto compacto, portanto será também compacto. Acabamos de provar:

**Teorema 8.** *Suponha que cada espaço  $X_i$  é compacto e Hausdorff. Então o espaço do limite inverso  $X = \varprojlim (X_i, f_i)_{i \in \mathbb{N}}$  é compacto.*

## B Apêndice - Resultados Auxiliares

Neste apêndice apresentaremos a demonstração de alguns resultados usados em certas demonstrações de proposições e teoremas exibidos no decorrer deste trabalho.

**Proposição 18.** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços Hausdorff,  $X$  compacto e  $f : X \rightarrow Y$  uma função bijetiva e contínua. Então  $f$  é um homeomorfismo.*

*Demonstração.* Vamos mostrar que para qualquer  $F \subset X$  é fechado, então a pré-imagem de  $F$  por  $f^{-1}$  é fechada, ou seja,  $(f^{-1})^{-1}(F) = f(F) \subset Y$  é fechado, o que caracteriza  $f^{-1}$  como uma função contínua.

Tome  $F \subset X$  fechado. Como  $X$  é compacto,  $F$  também será. Já que  $f$  é contínua e  $F$  compacto,  $f(F) \subset Y$  é compacto.  $Y$  é compacto por motivo semelhante. Como  $Y$  é compacto, Hausdorff e  $f(F) \subset Y$  é compacto, segue que  $f(F)$  é fechado.  $\square$

**Proposição 19.** *Seja  $X$  um espaço topológico compacto e  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  uma sequência de conjuntos fechados, não vazios, tais que  $F_n \supseteq F_{n+1}$  para todo  $n$  natural. Então  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$  é não vazio.*

*Demonstração.* Suponha por absurdo que  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$  é um conjunto vazio. Portanto,  $(X \setminus F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma cobertura aberta de  $X$ . Como  $X$  é compacto, existe uma sequência finita de índices  $(n_k)_{k=0}^k$  tais que

$$\bigcup_{i=0}^k (X \setminus F_{n_i}) = X.$$

Então  $\bigcap_{i=0}^k F_{n_i} = \emptyset$ , o que é um absurdo, visto que os elementos da sequência  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  são todos não vazios. Concluímos então que  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$  é não vazio.  $\square$

**Proposição 20.** *Considere a sequência de espaços métricos  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Se  $X_i$  é compacto para todo  $i$  natural, então  $\prod_{i=0}^{\infty} X_i = X$  munido da métrica produto, é compacto.*

*Demonstração.* Mostraremos que qualquer sequência de  $X$  tem uma subsequência convergente. Tome  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência qualquer de  $X$ . Para cada  $n$  natural, defina  $(x_n^k)_{k \in \mathbb{N}}$  a sequência que representa a  $n$ -ésima coordenada de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Como  $X_0$  é compacto, existe uma sequência de índices  $(k_{0,i})_{i \in \mathbb{N}}$  tal que a sequência  $(x_0^{k_{0,i}})_{i \in \mathbb{N}}$  converge para um  $a_0 \in X_0$ . Agora, como  $X_1$  é compacto, existe uma subsequência de  $(k_{0,i})_{i \in \mathbb{N}}$ , que denotaremos por  $(k_{1,i})_{i \in \mathbb{N}}$  tal que  $(x_1^{k_{1,i}})_{i \in \mathbb{N}}$  converge para algum elemento  $a_1 \in X_1$ .

Recursivamente, construa a sequência de sequências em que:

$$(k_{0,i})_{i \in \mathbb{N}} \supset (k_{1,i})_{i \in \mathbb{N}} \supset (k_{2,i})_{i \in \mathbb{N}} \supset \cdots \supset (k_{j,i})_{i \in \mathbb{N}} \supset \cdots$$

---

em que, para todo  $q$  natural,  $(x_q^{k_{q,i}})_{i \in \mathbb{N}}$  converge para algum  $a_q$  em  $X_q$ . Defina a subsequência de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  denotada por  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  em que para todo  $m$  natural,  $y_m = (x_m^{k_{i,i}})_{i \in \mathbb{N}}$ . Perceba que  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge para  $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ , pois para  $n$  fixado, a sequência  $y_n = (x_n^{k_{i,i}})_{i \in \mathbb{N}}$  se torna uma subsequência de  $(x_n^{k_{n,i}})_{i \in \mathbb{N}}$  a partir de  $i \geq n$ , ou seja  $y_n = (x_n^{k_{i,i}})_{i \in \mathbb{N}}$  converge para  $a_n$ , para todo  $n$  natural.  $\square$

# Referências

- Anderson e Putnam 1998 ANDERSON, J. E.; PUTNAM, I. F. Topological invariants for substitution tilings and their associated  $c^*$ -algebras. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, Cambridge University Press, v. 18, n. 3, p. 509–537, 1998. Citado na página 42.
- Gonçalves e Ramirez-Solano 2018 GONÇALVES, D.; RAMIREZ-SOLANO, M. *On the  $K$ -theory of  $C^*$ -algebras for substitution tilings (a pedestrian version)*. 2018. Disponível em: [⟨https://arxiv.org/abs/1712.09551⟩](https://arxiv.org/abs/1712.09551). Citado na página 33.
- Kůrka 2003 KŮRKA, P. *Topological and Symbolic Dynamics*. [S.l.]: Société mathématique de France, 2003. (Collection SMF). ISBN 9782856291436. Citado na página 8.
- Lima 1977 LIMA, E. *Espaços métricos*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1977. (Projeto Euclides). Disponível em: [⟨https://books.google.com.br/books?id=11mGmQEACAAJ⟩](https://books.google.com.br/books?id=11mGmQEACAAJ). Citado na página 8.
- Massey 2019 MASSEY, W. *A Basic Course in Algebraic Topology*. Springer New York, 2019. (Graduate Texts in Mathematics). ISBN 9781493990634. Disponível em: [⟨https://books.google.com.br/books?id=laSfDwAAQBAJ⟩](https://books.google.com.br/books?id=laSfDwAAQBAJ). Citado na página 40.
- Munkres 2000 MUNKRES, J. *Topology*. Prentice Hall, Incorporated, 2000. (Featured Titles for Topology). ISBN 9780131816299. Disponível em: [⟨https://books.google.com.br/books?id=XjoZAQAIAAJ⟩](https://books.google.com.br/books?id=XjoZAQAIAAJ). Citado 3 vezes nas páginas 8, 45 e 48.
- Starling 2005 STARLING, C. *Computation of the Ruelle-Sullivan map for substitution tilings*. Dissertação (Mestrado) — University of Victoria, 2005. Disponível em: [⟨http://dspace.library.uvic.ca/bitstream/handle/1828/778/starling\\_2005.pdf?sequence=1&isAllowed=y⟩](http://dspace.library.uvic.ca/bitstream/handle/1828/778/starling_2005.pdf?sequence=1&isAllowed=y). Citado na página 8.
- Starling 2012 STARLING, C. *Actions of Finite Groups on Substitution Tilings and Their Associated  $C^*$ -algebras*. Tese (Doutorado) — University of Ottawa, 2012. Disponível em: [⟨https://ruor.uottawa.ca/handle/10393/20663⟩](https://ruor.uottawa.ca/handle/10393/20663). Citado na página 8.
- Varagona 2008 VARAGONA, S. *Inverse Limit Spaces*. Dissertação (Mestrado) — Auburn University, 2008. Disponível em: [⟨http://hdl.handle.net/10415/1486⟩](http://hdl.handle.net/10415/1486). Citado na página 8.