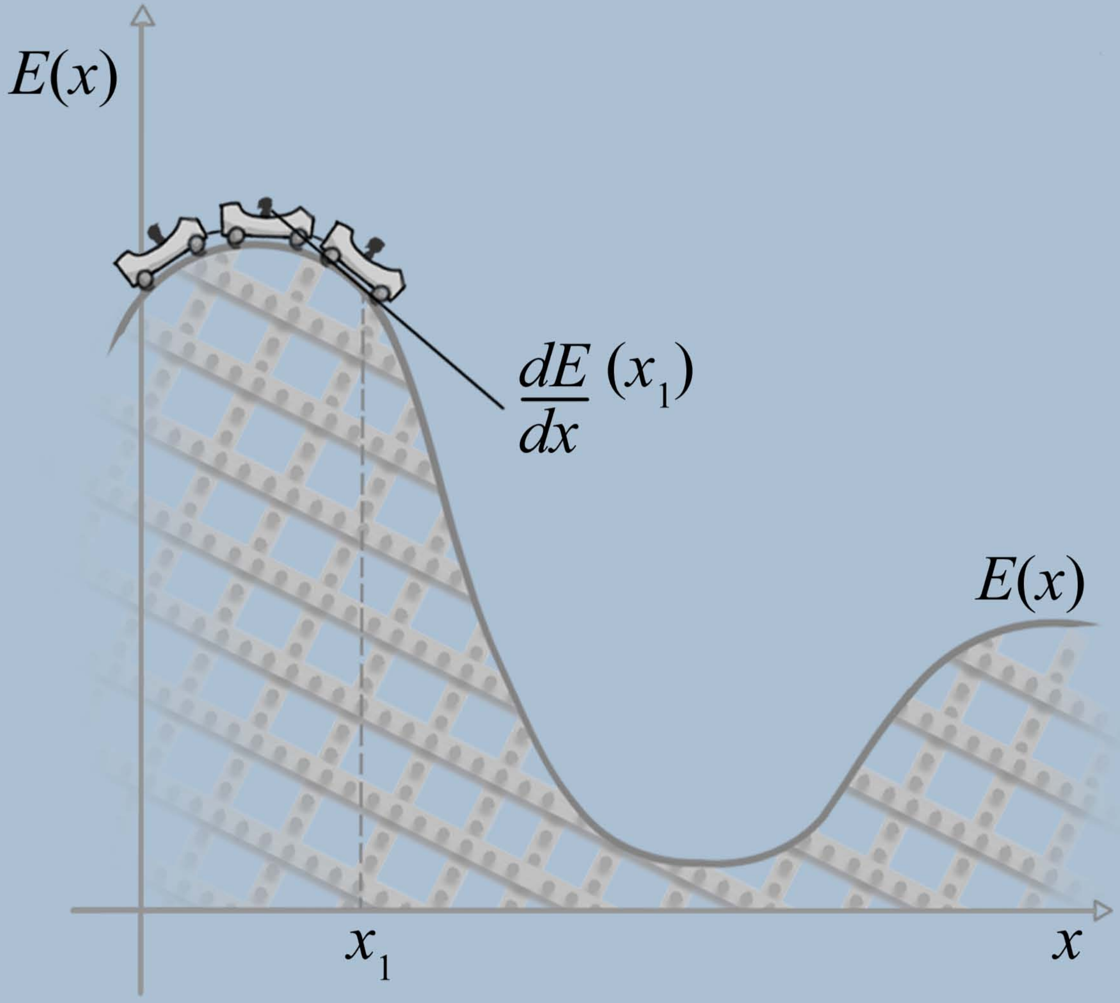
Cálculo I

Gustavo A. T. F. da Costa
Fernando Guerra



Curso de Licenciatura em Física
na Modalidade à Distância

Universidade Federal de Santa Catarina

Cálculo I

Gustavo A. T. F. da Costa
Fernando Guerra

2ª Edição
Florianópolis, 2009

Governo Federal

Presidente da República: Luiz Inácio Lula da Silva

Ministro de Educação: Fernando Haddad

Secretário de Ensino a Distância: Carlos Eduardo Bielschowky

Coordenador Nacional da Universidade Aberta do Brasil: Celso Costa

Universidade Federal de Santa Catarina

Reitor: Alvaro Toubes Prata

Vice-Reitor: Carlos Alberto Justo da Silva

Secretário de Educação a Distância: Cícero Barbosa

Pró-Reitora de Ensino de Graduação: Yara Maria Rauh Müller

Pró-Reitora de Pesquisa e Extensão: Débora Peres Menezes

Pró-Reitor de Pós-Graduação: Maria Lúcia de Barros Camargo

Pró-Reitor de Desenvolvimento Humano e Social: Luiz Henrique Vieira Silva

Pró-Reitor de Infra-Estrutura: João Batista Furtuoso

Pró-Reitor de Assuntos Estudantis: Cláudio José Amante

Centro de Ciências da Educação: Wilson Schmidt

Centro de Ciências Físicas e Matemáticas: Tarciso Antônio Grandi

Centro de Filosofia e Ciências Humanas: Roselane Neckel

Curso de Licenciatura em Física na Modalidade à Distância

Coordenação de Curso: Sônia Maria S. Corrêa de Souza Cruz

Coordenação de Tutoria: Rene B. Sander

Coordenação Pedagógica/CED: Roseli Zen Cerny

Coordenação de Ambientes Virtuais/CFM: Nereu Estanislau Burin

Laboratório de Novas Tecnologias - LANTEC/CED

Coordenação Pedagógica

Coordenação Geral: Andrea Lapa, Roseli Zen Cerny
Núcleo de Formação: Nilza Godoy Gomes
Núcleo de Pesquisa e Avaliação: Claudia Regina Flores

Núcleo de Criação e Desenvolvimento de Materiais

Design Gráfico

Coordenação: Laura Martins Rodrigues, Thiago Rocha Oliveira
Projeto Gráfico Original: Diogo Henrique Ropelato, Marta Cristina Goulart Braga, Natal Anacleto Chicca Junior.
Redesenho do Projeto Gráfico: Laura Martins Rodrigues, Thiago Rocha Oliveira
Diagramação: Rafael de Queiroz Oliveira, Gabriel Nietsche
Ilustrações: Gil Prado, Maximilian Vartuli, Paula Cardoso Pereira, Rafael de Queiroz Oliveira, Gabriel Nietsche
Capa: Ângelo Bortolini

Design Instrucional

Coordenação: Juliana Machado
Design Instrucional: Klalter Bez Fontana, Nilza Godoy Gomes
Revisão de Design Instrucional: Elizandro Maurício Brick

Revisão Gramatical: Helena Gouveia

Ficha Catalográfica

G934c Guerra, Fernando
Cálculo I / Fernando Guerra, Gustavo A. T. F. da Costa. - 2. ed. - Florianópolis : UFSC/EAD/CED/CFM, 2009.
218 p.

ISBN 978-85-99379-78-3

1. Limites. 2. Derivadas. 3. Integrais. I. Costa, Gustavo A. T. F. da. II. Título.

CDU 51

Elaborada pela Bibliotecária Eleonora M. F. Vieira – CRB – 14/786

Sumário

Apresentação

Caros alunos!

Nesta disciplina apresentaremos a você as principais idéias do Cálculo Diferencial e Integral, bem como certa habilidade na parte algébrica. Através de uma linguagem simples e clara, muitas vezes coloquial, apresentamos os conceitos com alguns exercícios resolvidos. Dentre os exercícios apresentados, encontram-se aqueles que se destinam a auxiliar a sua compreensão do conteúdo trabalhado, e aqueles que objetivam conferir a você certa familiaridade com as técnicas operatórias.

Inicialmente, no Capítulo 1, faremos uma rápida apresentação dos números reais e um estudo sobre desigualdades visando apenas lidar com domínios de certas funções que serão logo consideradas.

Já no Capítulo 2, abordaremos as funções reais de uma variável real. Enfatizaremos funções especiais e elementares bem como várias propriedades gerais de funções, tais como, domínio, imagem, gráfico, inversibilidade, etc. importantes para o desenvolvimento do calculo e suas aplicações.

Iniciaremos o Capítulo 3 dando uma noção intuitiva de limites de funções. Apresentaremos teoremas sobre limites e suas aplicações que usaremos para definir o importante conceito de Continuidade de uma função, teoremas estes que você utilizará durante o curso.

Abordaremos, no Capítulo 4, um dos principais conceitos do Cálculo Diferencial e Integral que é o da derivada, sua interpretação geométrica e várias regras de derivação de funções. Já no Capítulo 5, estudaremos as aplicações da derivada como, por exemplo, esboço de gráfico, problemas de maximização e minimização e a regra de L'Hospital.

Para finalizar, no Capítulo 6, apresentaremos uma outra ferramenta de grande importância no Cálculo Diferencial e Integral que é o conceito de Integral. Ainda neste capítulo você conhecerá o conceito de Integral Indefinida e Definida, suas propriedades, o Teorema Fundamental do Cálculo e o cálculo de áreas entre duas curvas.

Desejamos a você um bom curso!

Gustavo A. T. F. da Costa

Fernando Guerra

Capítulo 1

Números Reais, Desigualdades, Valor Absoluto e Intervalos

Capítulo 1

Números Reais, Desigualdades, Valor Absoluto e Intervalos

Para você iniciar o estudo de Cálculo deverá desenvolver noções sobre Números Reais, Desigualdades, Valor Absoluto e Intervalos.

O objetivo é que você possa definir os conjuntos numéricos; as operações no conjunto dos números reais; citar as propriedades das desigualdades e as propriedades do módulo ou valor absoluto de um número real, bem como resolver algumas desigualdades aplicando suas propriedades.

Num estudo de cálculo utiliza-se, apenas, as propriedades dos números reais, ao invés da maneira como são construídos. Assim, estudaremos funções, limite, continuidade, derivadas e integrais de funções e usaremos situações elementares a respeito dos números reais.

1.1 Números Reais

Faremos, neste capítulo, uma rápida apresentação dos números reais e suas propriedades.

Conjuntos Numéricos

Números naturais
O conjunto $\mathbb{N} = \{0,1, 2, 3, ...\}$ é denominado conjunto dos números naturais.

Em matemática, um conjunto é uma coleção de elementos. Não interessa a ordem e quantas vezes os elementos estão listados na coleção.
Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Conjunto

Números inteiros
O conjunto $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... \}$ é denominado conjunto dos números inteiros.

Números racionais

São todos os números fracionários, que têm o numerador e do denominador (diferente de zero) pertencentes ao conjunto $\mathbb{Z}$. Simbolicamente

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q};\ p, q \in \mathbb{Z} \ \text{ e } \ q \neq 0 \right\}.$$

Números irracionais

São os números que não são racionais, mas podem ser "encontrados na reta". Por exemplo, $\sqrt{2} = 1{,}41421\ldots$, $\pi = 3{,}14159\ldots$, $e = 2{,}718282\ldots$

Denotaremos por $\mathbb{Q}^c$, o conjunto dos números irracionais.

Números reais

É a união do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais, que será denotada por $\mathbb{R}$, ou seja, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c$.

Como o cálculo elementar envolve números reais, devemos estar familiarizados com algumas propriedades fundamentais do sistema de números reais. Observe, atentamente, a cada uma dessas propriedades dadas a seguir:

P1. Fechamento: Se a, $b \in \mathbb{R}$, existe um e somente um número real denotado por $a + b$, chamado soma de a e b e existe um e somente um número real, denotado por $a \cdot b$ chamado produto de a por b.

P2. Comutatividade: Se a, $b \in \mathbb{R}$ então

$$a + b = b + a \ \text{ e } \ a \cdot b = b \cdot a.$$

P3. Associatividade: Se $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ então

$$a + (b + c) = (a + b) + c \quad \text{e} \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

P4. Distributividade: Se $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ então

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

P5. Existência de elementos neutros: Existem 0 e $1 \in \mathbb{R}$ tais que $a + 0 = a$ e $a \cdot 1 = a$, para qualquer $a \in \mathbb{R}$.

P6. Existência de simétricos: Todo $a \in \mathbb{R}$ tem um simétrico, denotado por $-a$, tal que $a+(-a)=0$.

P7. Existência de inversos: Todo $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, tem um inverso, denotado por $\frac{1}{a}$, tal que $a \cdot \frac{1}{a} = 1$.

Usando P6 e P7 pode-se definir subtração e a divisão de números reais!

P8. Subtração: Se a, $b \in \mathbb{R}$, a diferença entre a e b, denotada por $a-b$, é definida por $a-b=a+(-b)$.

P9. Divisão: Se a, $b \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$, o quociente de a por b é definido por $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$. É importante observar que sempre que falarmos em número, sem qualquer qualificação, entenderemos tratar-se de um número real.

1.2 A Reta Real

O uso dos números reais para medição, tais como comprimento, área, volume, posição, tempo e velocidade, se reflete no costume bastante conveniente de representar esses números graficamente por meio de pontos numa reta horizontal.

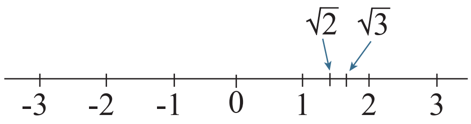


Figura 1.1

Observe que essa representação começa com a escolha de um ponto arbitrário, denominado origem ou ponto zero, e um outro ponto arbitrário a sua direita, o ponto 1. A distância entre esses pontos (distância unitária) serve como escala por meio da qual é possível associar pontos da reta a números inteiros positivos ou negativos, como ilustrado na figura 1.1, e também a números racionais. Todos os números positivos estão à direta do Zero, no "sentido positivo", e todos os números negativos estão à sua esquerda.

1.3 Desigualdades

A sucessão de pontos na reta real, da esquerda para a direita, corresponde a uma parte importante da álgebra dos números reais a que trata das desigualdades.

É o ramo que estuda as generalizações dos conceitos e operações de aritmética. A álgebra teve a sua origem com matemáticos do antigo Islã. O nome "Álgebra" surgiu do nome de um tratado escrito por um matemático persa nascido por volta do ano 800 d.c.
Fonte: http:// pt.wikipedia.org/ wiki/Álgebra

O significado geométrico da desigualdade $a < b$ (leia-se "*a* menor que *b*") é simplesmente que *a* está à esquerda de *b*; a desigualdade equivalente $b > a$ (leia-se "*b* maior que *a*") significa que *b* está à direta de *a*. Um número *a* é positivo ou negativo conforme $a > 0$ ou $a < 0$. Se você quer dizer que *a* é positivo ou igual a zero, escreve-se $a \geq 0$ e lê-se "*a* maior ou igual a zero". Do mesmo modo, $a \geq b$ significa que $a > b$ ou $a = b$. Assim, $5 \geq 3$ e $5 \geq 5$ são ambas desigualdades verdadeiras.

Assim como o conjunto dos Números Reais, as Desigualdades também apresentam propriedades fundamentais, dadas a seguir.

1.3.1 Propriedades das Desigualdades

Para quaisquer números reais *a*, *b*, *c* e *d*, valem as propriedades

Para saber mais sobre Desigualdades e suas Propriedades, leia LEITHOLD, Louis. *O Cálculo com Geometria Analítica*. Vol. 1 e 2. 3ª Ed., Ed.Harbra, São Paulo, 1994

P1. $a < b \Rightarrow a + c < b + c$, para qualquer real *c*.
Exemplo: $3 < 5 \Rightarrow 3 + 4 < 5 + 4$.

P2. $a < b$ e $c < d \Rightarrow a + c < b + d$.
Exemplo: $6 < 8$ e $5 < 7 \Rightarrow 6 + 5 < 8 + 7$.

P3. $a < b$ e $b < c \Rightarrow a < c$.
Exemplo: $5 < 9$ e $9 < 11 \Rightarrow 5 < 11$.

P4. $a < b$ e $c > 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$.
Exemplo: $4 < 6$ e $3 > 0 \Rightarrow 4 \cdot 3 < 6 \cdot 3$.

P5. $a < b$ e $c < 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$.
Exemplo: $4 < 6$ e $-3 < 0 \Rightarrow 4 \cdot (-3) > 6 \cdot (-3)$.

P6. $0 < a < b$ e $0 < c < d \Rightarrow a \cdot c < b \cdot d$.
Exemplo: $0 < 4 < 7$ e $0 < 5 < 8 \Rightarrow 4 \cdot 5 < 7 \cdot 8$.

1.4 Valor Absoluto ou Módulo

Dado um número real a, valor absoluto ou módulo é definido por

$$|a| = a \quad \text{se} \quad a \geq 0 \quad \text{e} \quad |a| = -a \quad \text{se} \quad a < 0.$$

Exemplos:

$$|4| = 4, \quad \left|-\frac{3}{4}\right| = -(-\frac{3}{4}) = \frac{3}{4}, \quad |-4| = -(-4) = 4, \quad |0| = 0, \quad \left|\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3}.$$

Observações:

1) Para qualquer número real a tem-se

$$|a| \geq 0 \quad \text{e} \quad |a| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0.$$

2) $|-a| = |a|$ para qualquer real a.

3) Geometricamente, o valor absoluto de um número real a é distância de a até zero.

4) Para qualquer real a tem-se: $\sqrt{a^2} = |a|$, a raiz quadrada de qualquer número real, quando existe, é maior ou igual a zero. Logo, $|a|^2 = a^2 = (-a)^2$.

1.4.1 Propriedades do Valor Absoluto

É preciso que você observe atentamente as Propriedades do Valor Absoluto:

P1. $|x| < a \quad \Leftrightarrow \quad -a < x < a, \quad (a > 0).$

P2. $|x| > a \quad \Leftrightarrow \quad x < -a \quad \text{ou} \quad x > a, \quad (a \geq 0).$

P3. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ para quaisquer a e $b \in \mathbb{R}$.

P4. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, para a e $b \in \mathbb{R}$, $(b \neq 0)$.

P5. Para quaisquer a e $b \in \mathbb{R}$ vale a desigualdade triangular:

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

1.5 Intervalos

Um conjunto I de números reais é denominado intervalo quando, dados $a, b \in I$ com $a < b$, valer a implicação $a < x < b \Rightarrow x \in I$.

Os intervalos podem ser limitados ou ilimitados.

Intervalos limitados

1) Fechado $[a,b] = \{x \in \mathbb{R}; a \le x \le b\}$.

2) Aberto $(a,b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$.

3) Semi-abertos $(a,b] = \{x \in \mathbb{R},\ a < x \le b\}$

$[a,b) = \{x \in \mathbb{R};\ a \le x < b\}$.

Intervalos ilimitados

1) Fechados $[a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R}; x \ge a\}$

$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}; x \le b\}$.

2) Abertos $(a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R}; x > a\}$

$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R};\ x < b\}$.

3) Aberto e fechado $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

Veja a representação de intervalos na reta real:

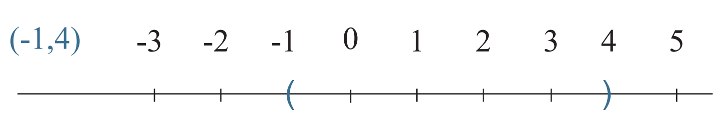


Figura 1.2

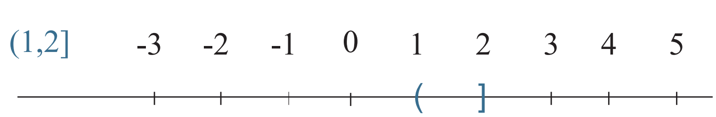


Figura 1.3

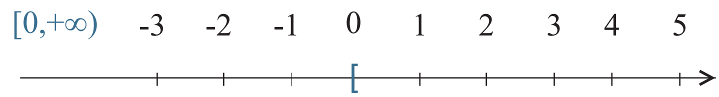


Figura 1.4

Para você visualizar melhor o conjunto solução das desigualdades, marque os valores na reta real na forma de intervalos.

Resolver uma desigualdade consiste em determinar o conjunto dos números reais que tornam verdadeira a desigualdade proposta. Para isto, você usa as propriedades das desigualdades (e do valor absoluto quando este estiver envolvido).

A partir de agora você irá acompanhar a resolução de alguns exercícios. Nosso intuito é que você compreenda a resolução de exercícios sobre desigualdades e potencialize seu entendimento para os exercícios e/ou desafios propostos posteriormente.

Exemplo 1. Resolver a desigualdade $7 \le 5x - 3 < 17$.

Resolução: Esta desigualdade pode ser resolvida através de dois procedimentos. O primeiro procedimento consiste em resolver separadamente as duas desigualdades: $7 \le 5\,x - 3$ e $5\,x - 3 < 17$, e fazer a interseção das soluções. O segundo procedimento, consiste em resolver simultaneamente as duas desigualdades.

Primeiro Procedimento: Resolvendo separadamente as duas desigualdades, vem:

$7 \le 5\,x - 3$ e $5\,x - 3 < 17 \Leftrightarrow$

$7 + 3 \le 5x - 3 + 3$ e $5x - 3 + 3 < 17 + 3$ (Propriedade 1 da desigualdade) $\Leftrightarrow$ $10 \le 5x$ e $5x < 20 \Leftrightarrow \dfrac{10}{5} \le x$ e $x < \dfrac{20}{5} \Leftrightarrow$

$2 \le x$ e $x < 4$ ou $x \ge 2$ e $x < 4$.

O conjunto solução, S, da desigualdade proposta é

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \le x < 4\} \text{ ou ainda } S = [2\,,4).$$

Segundo Procedimento: Resolvendo simultaneamente as duas desigualdades, vem:

$7 \le 5\,x - 3 < 17 \Leftrightarrow 7 + 3 \le 5x - 3 + 3 < 17 + 3$ (Propriedade 1 da desigualdade) $\Leftrightarrow$ $10 \le 5x < 20$ (Dividindo por 5) $\Leftrightarrow$ $2 \le x < 4$.

Note que obtemos o mesmo conjunto solução $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \le x < 4\}$.

Exemplo 2. Resolver a desigualdade $\frac{3}{4}+x\leq\frac{x}{3}+2$.

Resolução: Você elimina as frações multiplicando os dois membros da desigualdade por 12 que é o menor múltiplo comum de 3 e 4, isto é, m.m.c.(3 , 4) = 12, assim

$$\frac{3}{4}+x\leq\frac{x}{3}+2 \iff 12\cdot\left(\frac{3}{4}+x\right)\leq 12\cdot\left(\frac{x}{3}+2\right) \iff$$

$$12\cdot\frac{3}{4}+12\cdot x\leq 12\cdot\frac{x}{3}+12\cdot 2 \iff 9+12x\leq 4x+24 \iff$$

$$12x-4x\leq 24-9 \iff 8x\leq 15 \iff x\leq\frac{15}{8}.$$

Logo, o conjunto solução da desigualdade proposta é

$$S=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,x\leq\frac{15}{8}\right\} \text{ ou } S = \left(-\infty\ ,\ \frac{15}{8}\right].$$

Exemplo 3. Resolver a desigualdade $\frac{x}{x-2}\geq 5$, com $x - 2 \neq 0$ ou seja $x\neq 2$.

Para resolver este exemplo você tem

$$\frac{x}{x-2}\geq 5 \iff \frac{x}{x-2}-5\geq 0 \iff$$

$$\frac{x}{x-2}-\frac{5(x-2)}{x-2}\geq 0 \qquad \frac{x}{x-2}-\frac{5x-10}{x-2}\geq 0 \iff$$

$$\frac{x-5x+10}{x-2}\geq 0 \iff \frac{-4x+10}{x-2}\geq 0.$$

Agora, para que o quociente entre dois números reais seja positivo, vem

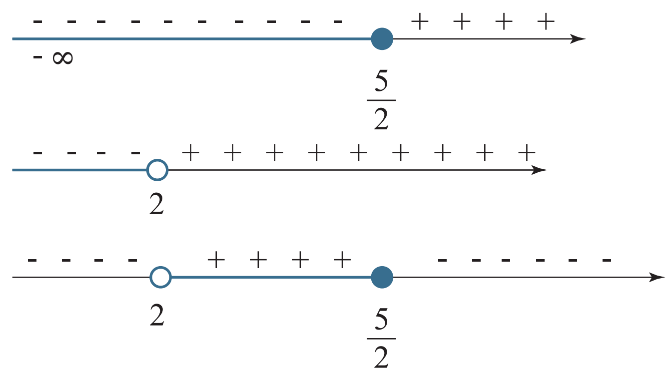
$$\frac{positivo}{positivo}\geq 0 \quad e \quad \frac{negativo}{negativo}\geq 0.$$

Assim,

$$-4x+10\geq 0 \iff -4x\geq -10 \iff 4x\leq 10 \iff x\leq\frac{10}{4} \quad ou \quad x\leq\frac{5}{2}$$

Do mesmo modo, $x-2>0 \iff x>2$.

Localizando, na reta real, $x\leq\frac{5}{2}$ para $-4x+10\geq 0$ e $x>2$ para $x-2>0$, você tem



Logo, $\dfrac{-4x+10}{x-2} \geq 0$, com $x-2 \neq 0$, no intervalo $\left(2\ ,\ \dfrac{5}{2}\right]$.

Portanto, o conjunto solução de $\dfrac{x}{x-2} \geq 5$ é $S = \left(2\ ,\ \dfrac{5}{2}\right]$.

Agora, apresentaremos a você alguns problemas resolvidos indicando apenas o percurso para que você possa por si só, chegar à solução dos mesmos.

Problema 1. Resolver a desigualdade $|2x+1| < |x-3|$.

Resolução. Aqui, você utiliza a observação 4, da página 17, $|a|^2 = a^2$, e vem

$$|2x+1| < |x-3| \iff |2x+1|^2 < |x-3|^2 \iff (2x+1)^2 < (x-3)^2 \iff$$

$$4x^2 + 4x + 1 < x^2 - 6x + 9 \iff 4x^2 + 4x + 1 - x^2 + 6x - 9 < 0$$

$$3x^2 + 10x - 8 < 0.$$

Agora, para decompor $3x^2+10x-8$, você utiliza a fórmula de Baskara, para $3x^2+10x-8=0$, onde $a=3; b=10$ e $c=-8$ e tem as seguintes raízes $x=-4$ e $x=\dfrac{2}{3}$.

Logo, $3x^2+10x-8 = (x+4)\left(x-\dfrac{2}{3}\right)$ e

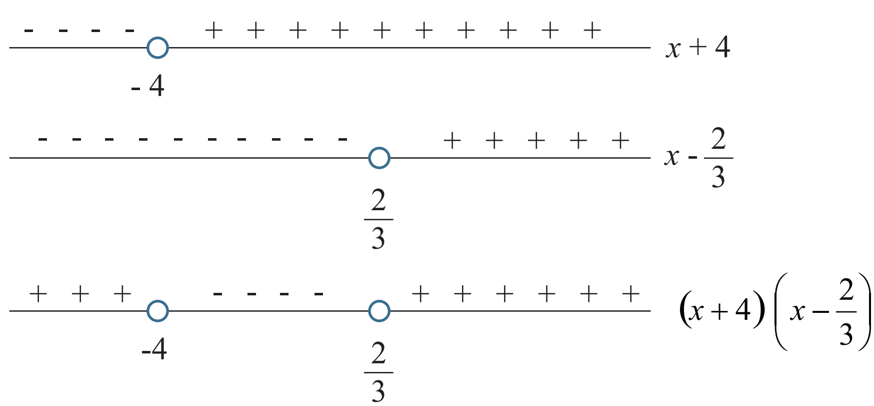
$3x^2+10x-8<0$ é $(x+4)\left(x-\dfrac{2}{3}\right)<0$.

Resolvendo $(x+4)\left(x-\dfrac{2}{3}\right)<0$, você tem

$$x+4>0 \iff x>-4.$$

$$x-\frac{2}{3}>0 \quad \Leftrightarrow \quad x>\frac{2}{3}.$$

Localizando, na reta real, $x>-4$ para $x+4>0$ e $x>\frac{2}{3}$ para $x-\frac{2}{3}>0$, vem



Logo, $(x+4)\left(x-\frac{2}{3}\right)<0$ no intervalo $\left(-4,\frac{2}{3}\right)$.

Portanto, o conjunto solução da inequação $|2x+1|<|x-3|$ é $S=\left(-4,\frac{2}{3}\right)$.

Como você pode perceber, mesmo para determinar o conjunto solução da desigualdade $|2x+1|<|x-3|$, tivemos um trabalho razoável. Mesmo assim, não desanime, descanse um pouco e vá em frente...

Problema 2. Determine todos os números reais que satisfazem a equação $|\,3x-5\,|=4$.

Para resolver este problema, use os seguintes passos:

Passo 1: Pela definição de valor absoluto você tem que

$$|\,3\,x-\,5\,|=3\,x-5 \quad \text{se} \quad 3x-5\geq 0 \quad \text{ou} \quad 3x\geq 5 \quad \text{ou} \quad x\geq\frac{5}{3}.$$

Admita então $x\geq\frac{5}{3}$ neste passo.

Logo, $|3x-5|=4 \;\Leftrightarrow\; 3x-5=4$ que resolvendo tem-se $x=3$.

Como neste passo $x\geq\frac{5}{3}$, $x=3$ é uma solução da equação dada.

Passo 2: Ainda pela definição de valor absoluto, vem

$|3x-5| = -(3x-5) = -3x+5$ se $3x-5<0$ ou $x<\dfrac{5}{3}$.

Seja então $x<\dfrac{5}{3}$.

Logo, $|3x-5| = 4 \Leftrightarrow -3x+5=4$ que resolvendo tem-se $x=\dfrac{1}{3}$.

Como $\dfrac{1}{3}<\dfrac{5}{3}$, $x=\dfrac{1}{3}$ é também, solução da equação dada.

Portanto, o conjunto solução de $|\,3\,x-5\,|=4$ é $S=\left\{\dfrac{1}{3},\ 3\right\}$.

Vamos conferir se você está acompanhando tudo até aqui! Para saber, procure, então, resolver os exercícios propostos a seguir, caso tenha dúvidas faça uma releitura cuidadosa dos conceitos ou exemplos que não foram bem compreendidos.

Exercícios Propostos

1) Determinar todos os números reais que satisfazem as desigualdades abaixo:

a) $3 \le |\,x-5\,| \le 15$.

b) $(x-2)\cdot(x+3)<0$.

c) $x\cdot(x-6)\le -8$.

d) $\dfrac{5}{3-x} \le 2$.

2) Determinar todos os números reais que satisfazem a equação

$|\,x-3\,|+|\,x+1\,|=4$.

Respostas:

1) a) $S=[-10,\ 2]\cup[8,\ 20]$ b) $S=(-3,\ 2)$

c) $S=[2,\ 4]$ d) $S=\left(-\infty,\ \dfrac{1}{2}\right]\cup(3,\ +\infty)$.

2) $S=\{-1,3\}$.

Resumo

Neste capítulo, você estudou os conjuntos numéricos (o conjunto numérico usado nesta disciplina é o conjunto dos reais) e suas propriedades, aprendeu como marcar um número real na reta. Estudou também o valor absoluto de um número real, juntamente com suas propriedades e deve ser capaz de resolver uma desigualdade aplicando essas propriedades, apresentando seu conjunto-solução em forma de intervalo.

Capítulo 2

Funções Reais de uma Variável Real

Capítulo 2

Funções Reais de uma Variável Real

Um dos conceitos mais importantes da matemática é o conceito de função. Neste capítulo nosso objetivo será o de apresentar a definição de função e vários tipos especiais de funções, chamadas de modo geral de funções elementares que são importantes para o desenvolvimento do cálculo.

Nas ciências aplicadas as funções são de grande relevância, pois, através delas, os fenômenos naturais podem ser descritos e estudados como você aprenderá nas disciplinas do curso de Física. Veremos algumas de suas propriedades.

2.1 Função

Mas, afinal, o que é função?

Função
Funções descrevem relações matemáticas especiais entre dois objetos, x e $y=f(x)$. O objeto x é chamado o argumento da função f e o objeto y que depende de x é chamado imagem de x pela f.

Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Fun%C3%A7%C3%B5es

Vejamos, então, sua definição.

Definição 2.1. Sejam A e B dois conjuntos. Uma função é uma relação que a cada elemento de A associa um único elemento de B, e é indicada por

$$f : A \to B \tag{1}$$

A relação entre os conjuntos A e B é dada através de uma regra de associação expressa na forma

$$y = f(x) \tag{2}$$

Essa regra diz que o elemento $x \in A$, chamado de variável independente, está relacionado de modo único ao elemento $y = f(x) \in B$, chamado de variável dependente. O conjunto A é chamado de domínio e indicamos $A = Dom(f)$ e o conjunto B, de contradomínio. O conjunto imagem indicado como $\text{Im}(f)$ é o conjunto dos elementos de B aos quais foram associados elementos de A, isto é,

$$\text{Im}(f) = \{y \in B \mid y = f(x) \text{ para algum } x \in A\}. \tag{3}$$

Exemplo 1. A função indicada como $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$, é a relação cujo domínio e contradomínio é o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. A regra de associação é dada por $f(x)=x^2$. Esta regra associa a cada número real x um único número real da forma x^2. O conjunto imagem é o conjunto dos números reais não negativos.

Outra maneira de se indicar uma função e que será muito utilizada nos exemplos e exercícios consiste em dar a regra de associação seguida do seu domínio. A função do exemplo anterior pode assim ser indicada por $f(x)=x^2$, $x\in\mathbb{R}$. O contradomínio, nesse modo de indicar a função, subentende-se que é o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais.

Para conferir se você compreendeu corretamente a definição de função resolva o seguinte exemplo.

Exemplo 2. Qual das relações abaixo é uma função? Procure, com base na definição, identificá-la, justificando. Só depois, verifique a resposta!

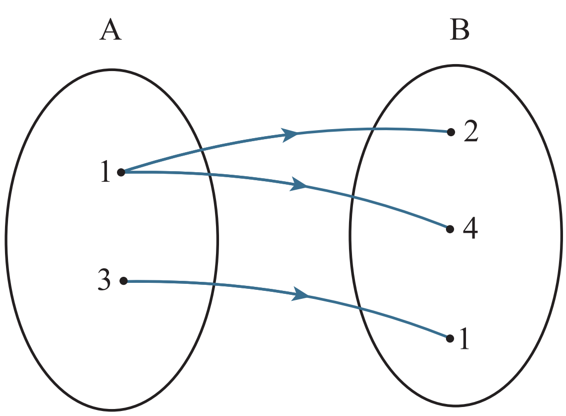


Figura 2.1

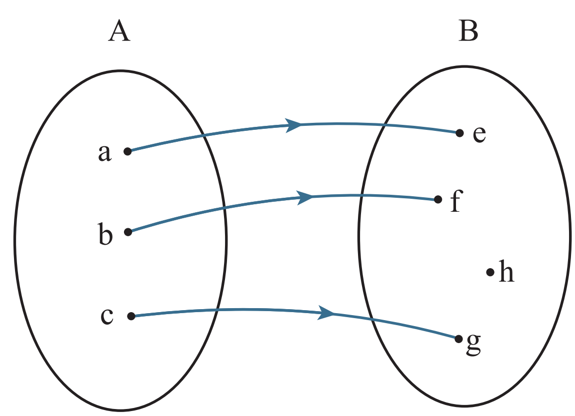


Figura 2.2

Veja, agora, a resposta:

Figura 2.1: A relação não é uma função, pois o elemento 1 é associado a mais de um elemento de B.

Figura 2.2: A relação é uma função, pois cada elemento de A é associado a um único elemento de B. O conjunto imagem é {e, f, g}.

Exemplo 3. As funções $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$, e $g:(-1,\ 1)\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2$, têm domínios $Dom(f)=\mathbb{R}$ e $Dom(g)=(-1,\ 1)$. Essas funções são distintas, pois têm domínios diferentes, apesar de terem a mesma regra de associação e o mesmo contradomínio. Os conjuntos imagem de ambas são também distintos: $\mathrm{Im}(f)=[0,\ +\infty)$ e $\mathrm{Im}(g)=[0,\ 1)$.

Observações:

- Quando o domínio e o contradomínio de uma função estão contidos no conjunto dos números reais, a função é chamada de uma função real de variável real.
- Uma função tem três constituintes básicos que são seu domínio, contradomínio e a regra de associação. Duas funções são iguais somente quando tem os mesmos domínio, contradomínio e regra de associação.

Definição 2.2. O gráfico de uma função $f:A\to B$, dada como $y=f(x)$, é o conjunto dos pontos do plano cujas coordenadas no sistema cartesiano retangular são dadas por $(x, f(x))$ onde $x\in A$.

Vejamos alguns exemplos de gráficos:

Exemplo 4. Gráfico da função $g(x)=x^2, x\in[-1,\ 1]$:

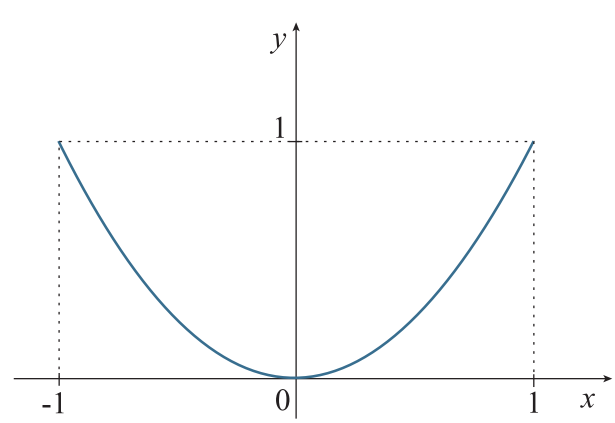


Figura 2.3

Observação:
Um método prático que pode ajudar a traçar o gráfico de uma função consiste em elaborar uma tabela onde constam vários valores de x e os correspondentes valores de $f(x)$, marcando-se os pontos $(x, f(x))$ no plano cartesiano e esboçando-se o gráfico.

Este método, contudo, é muito grosseiro, principalmente se baseado numa tabela com poucos pontos. O auxílio de um computador pode tornar o método mais eficiente, pois um grande número de pontos pode ser calculado. É o caso dos gráficos nesse livro.

Outra maneira de esboçar o gráfico de uma função é através do cálculo da sua derivada; assunto que será abordado no capítulo 5.

O gráfico de uma função é importante pois ele nos ajuda a formar uma idéia de como a função se comporta quando x varia em $Dom(f)$. Ele pode auxiliar na descoberta de certas propriedades da função, mas não pode ser utilizado como prova destas propriedades!

Ademais, se $Dom(f)$ é todo o conjunto dos reais somente uma parte do gráfico pode ser esboçado.

Duas funções podem ser somadas, subtraídas, multiplicadas e divididas desde que estas operações sejam efetuadas em pontos onde ambas as funções estão definidas. Obtém-se desse modo novas funções. Temos a seguinte definição, que estabelece mais precisamente estas operações e as funções obtidas a partir delas:

Definição 2.3. Sejam $f : A \to \mathbb{R}$ e $g : B \to \mathbb{R}$ duas funções e suponha $A \cap B \neq \varnothing$. As funções soma, diferença e produto estão definidas no domínio $A \cap B$ e o quociente nos pontos de $A \cap B$ onde o denominador não é zero. Estão dadas por:

a) $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

b) $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

c) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

d) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, quando $g(x) \neq 0$, $\forall x \in A \cap B$.

Exemplo 5. Considere as funções f, g do Exemplo 3. No domínio $\mathbb{R} \cap (-1,\ 1) = (-1,\ 1)$ temos que $(f+g)(x) = 2x^2$, $(f-g)(x) = 0$ e $(f \cdot g)(x) = x^4$. O quociente $\dfrac{f}{g}$ ou $\dfrac{g}{f}$ destas funções está definido apenas em $(-1,\ 1) - \{0\}$, ou seja, $Dom\left(\dfrac{f}{g}\right) = Dom\left(\dfrac{g}{f}\right) =$ $(-1,\ 0) \cup (0,\ 1)$, pois $f(0) = g(0) = 0$. Para todo $x \in (-1,\ 0) \cup (0,\ 1)$ tem-se $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \left(\dfrac{g}{f}\right)(x) = 1$.

Definição 2.4. Uma função f com a propriedade de que $f(x) = f(-x)$, $\forall x \in Dom(f)$, é chamada de função par. Quando $f(-x) = -f(x), \forall x \in Dom(f)$, a função é chamada de função ímpar. Quando um desses casos se verifica dizemos que a função tem uma paridade definida.

Exemplo 6. A função $f:[-2,\ 2] \to \mathbb{R}$ dada pela $f(x) = x^2$ é par pois $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$, $\forall x \in [-2,\ 2]$. Veja a figura 2.4.

A função $f(x) = x^3, x \in [-2,\ 2]$, é ímpar. De fato, $f(-x) = (-x)^3 =$ $-x^3 = -f(x)$. Veja a figura 2.5.

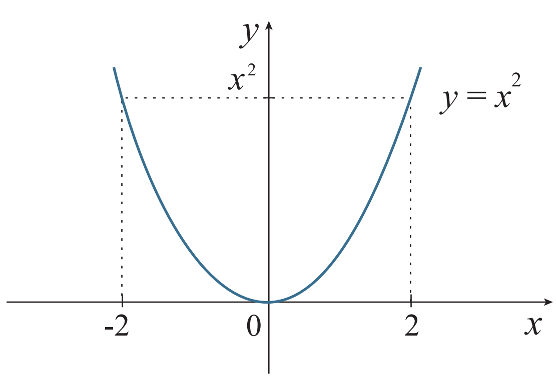


Figura 2.4

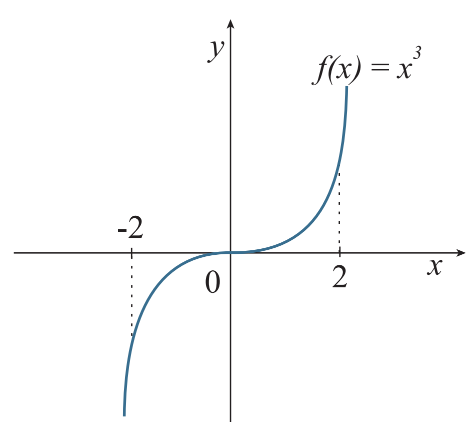


Figura 2.5

Observação: quando uma função é par, seu gráfico é simétrico em relação ao eixo Y. Isso significa que, se o ponto (x, y) pertence ao gráfico, então o ponto $(-x, y)$ também pertence. Quando uma função é ímpar, seu gráfico é simétrico em relação à origem. Isso significa que, se o ponto (x, y) pertence ao gráfico, então o ponto $(-x, -y)$ pertence também ao gráfico. Portanto, o conhecimento da paridade de uma função, se existe uma, pode ajudar no esboço do gráfico da função.

Vamos verificar se você está acompanhando tudo até aqui? Procure, então, resolver os exercícios propostos.

Exercícios Propostos

1) Verifique se as funções dadas são iguais:

   $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ e $B = \mathbb{R}$, $f(x) = x - 3$ e $g(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x}$.

2) Dadas as funções $f(x) = x^3 + 2x + 3$, $x \in \mathbb{R}$, e $g(x) = 2x + 5$, $x \in (0, \infty)$, obtenha as funções soma, diferença, produto e quociente de f com g.

3) Determine a paridade da função $f(x) = \dfrac{x^3 + x}{x^5}$, $x \neq 0$.

Respostas:

1) $f = g$.

2) $(f+g)(x) = x^3 + 4x + 8$, $(f-g)(x) = x^3 - 2$, $(f \cdot g)(x) = (x^3 + 2x + 3)(2x + 5)$

   e $\dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{x^3 + 2x + 3}{2x + 5}$, todas definidas em $(0, \infty)$.

3) par.

Se ao final desse primeiro estudo sobre funções, você continua com dúvidas e não conseguiu resolver os exercícios propostos, não desista! Releia o material, estude os exemplos mais uma vez. Refaça os exercícios.

Vamos conhecer alguns tipos de função?

2.2 Algumas Funções Elementares

2.2.1 Função Constante

A função que associa cada elemento do seu domínio a um mesmo elemento do contradomínio é chamada de função constante. Vejamos um exemplo.

Exemplo 7. A função $f:[0,\ \infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2$, é uma função constante. Seu gráfico no intervalo $[0,\ 2]$ do seu domínio é o seguinte:

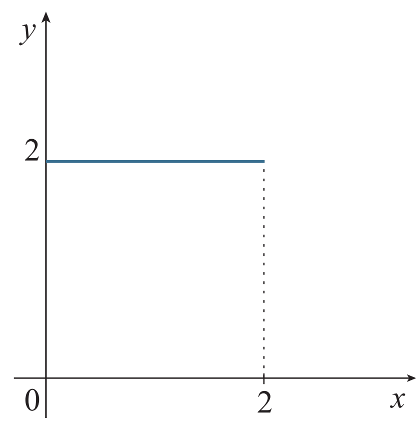


Figura 2.6

2.2.2 Funções Afim e Linear

Chama-se função afim qualquer função dada como $f(x)=ax+b$, $a\neq 0$, onde os coeficientes a e b são números reais dados. Quando $b=0$, a função é chamada de linear. O gráfico da função afim com domínio e contradomínio $\mathbb{R}$ é uma reta com coeficiente angular igual a a e que intercepta os eixos coordenados X e Y nos pontos $\left(-\dfrac{b}{a},\ 0\right)$ e $(0,\ b)$, respectivamente.

Exemplo 8. O gráfico da função afim tomando-se $a=1$ e $b=-1$, no intervalo $[-1,\ 2]$, é mostrado a seguir.

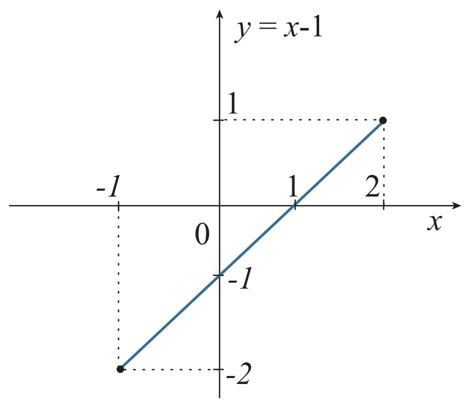


Figura 2.7

Exemplo 9. Um raio de luz é emitido no ponto de coordenadas $(-1, 2)$. Ao atingir o ponto $(1,\ 0)$ ele é refletido e passa pelo ponto $(2,\ 1)$. Represente o percurso do raio de luz através de funções afim.

Resolução: Suponha que o raio de luz viaja em linha reta antes e depois da reflexão. Veja a figura:

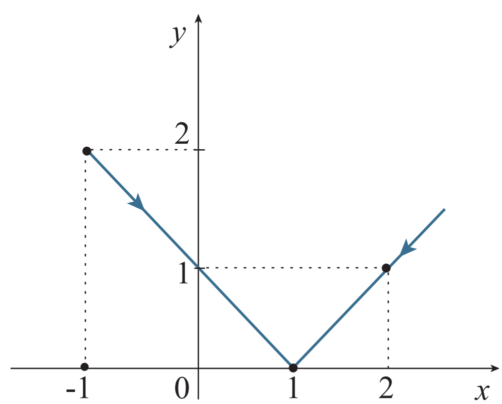


Figura 2.8

Uma reta ou semi-reta pode ser sempre representada como uma função afim da forma $y = ax + b$. Precisamos determinar a e b. O raio de luz é emitido no ponto $(-1,\ 2)$ que tem $x = -1$ e $y = 2$; logo, estes valores de x e y devem satisfazer a equação $y = ax + b$, o que fornece $2 = (-1) \cdot a + b$ ou $-a + b = 2$.

Como o raio de luz incide em $(1,\ 0)$ que tem $x = 1$ e $y = 0$, estes valores também devem satisfazer a equação $y = ax + b$. Assim, obtém-se $0 = 1 \cdot a + b$ ou $a + b = 0$.

Temos então o sistema $\begin{cases} -a + b = 2 \\ a + b = 0 \end{cases}$ que fornece $a = -1$ e, portanto, $b = 1$. A trajetória do raio entre os pontos $(-1,\ 2)$ e $(1,\ 0)$ está representada pela função afim $f(x) = -x + 1,\ \ x \in [-1,\ 1]$.

No ponto $(1,\ 0)$ o raio é refletido. Seguindo novamente uma trajetória reta ele passa pelo ponto $(2,\ 1)$ e prossegue viagem. Repetindo o cálculo anterior, obtemos que:

$$g(x) = x - 1,\ \ x \in [1,\ +\infty).$$

2.2.3 Função Módulo

É a função definida por $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$, cujo gráfico é o seguinte:

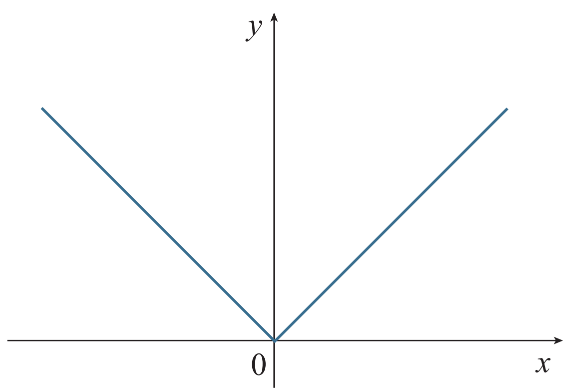


Figura 2.9

Exemplo 10. A trajetória do raio de luz do exemplo anterior pode ser expressa como uma função módulo da forma $f(x) = |x - 1|$, $x \in [-1,\ \infty)$.

De fato, pois para $x \in [-1,\ 1]$, $x - 1 < 0$ e, portanto, $|x - 1| = -(x - 1) = -x + 1$.

Quando $x \in [1,\ \infty)$, $x - 1 \geq 0$ e $|x - 1| = x - 1$.

2.2.4 Função Polinomial

É toda função cuja regra de associação é um polinômio, isto é, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ onde os coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são números reais e n é algum natural.

Exemplo 11. As funções afim e linear são exemplos de funções polinomiais de grau $n=1$. Outro exemplo é a função quadrática cuja regra de associação é $f(x)=ax^2+bx+c$, onde $a\neq 0$. Funções quadráticas ocorrem em vários exemplos anteriores. Quando $Dom(f)=\mathbb{R}$, o gráfico desta função é chamado de parábola. Seu eixo de simetria é a reta $x=-\dfrac{b}{2a}$. O vértice da parábola é o ponto $V\left(-\dfrac{b}{2a},-\dfrac{\Delta}{4a}\right)$ onde $\Delta=b^2-4ac$. Quando $a>0$, a parábola tem sua abertura voltada para cima e quando $a<0$, a tem para baixo. Se $\Delta>0$, então a parábola cruza o eixo das abcissas nos pontos $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ que são as raízes da equação $ax^2+bx+c=0$.

2.2.5 Função Racional

É toda função f cuja regra de associação é da forma $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ onde $p(x)$ e $q(x)$ são funções polinomiais. Note que uma função racional está definida em qualquer domínio que não contenha raízes do polinômio $q(x)$.

Exemplo 12. Determine o maior domínio possível da função racional $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$, no conjunto $(-1,\infty)$.

Resolução: Uma função racional com esta regra de associação está definida em todo ponto x tal que $x+1\neq 0$. Portanto, o maior domínio possível é o conjunto $\{x\in\mathbb{R} \mid x>-1\}$.

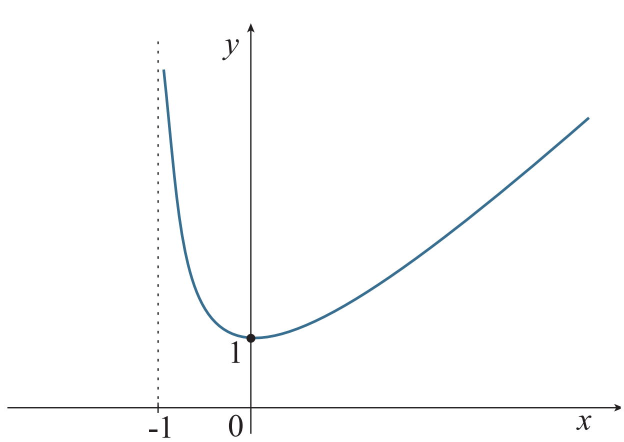


Figura 2.10

2.3 Composição e Inversão de Funções

Nesta seção, você estudará uma outra operação importante entre funções, chamada de composição. Em seguida você aprenderá que às vezes uma função pode ser invertida. Caso esteja cansado, não desanime. Respire fundo, retome o fôlego... só após retome seus estudos.

2.3.1 Composição de Funções

Outra operação importante entre funções é a operação de composição, definida como segue:

Definição 2.5. Dadas as funções $f: A \to B$ e $g: C \to \mathbb{R}$, a função composta de g com f é a função $h: E \to \mathbb{R}$, onde $E = \{x \in A \mid f(x) \in C\}$ dada por $h(x) = g(f(x))$.

A operação de composição entre duas funções é também indicada com o símbolo "$\circ$" de composição. Com este símbolo, a função composta de g com f é indicada como $g \circ f$ e $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Observações:

- A operação de composição está definida somente quando existem valores $f(x)$ no domínio da função g como fica claro a partir da regra de associação. Caso contrário, a composição não é possível.
- Quando $\mathrm{Im}(f) \subseteq Dom(g)$, então $Dom(g \circ f) = E = Dom(f)$.

Exemplo 13. Dadas as funções $f:[0, 1] \to [0, \infty)$, $f(x) = 2x^3 + 1$, e $g:[0, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x}$, temos que $\mathrm{Im}(f) = [1, 3] \subset Dom(g)$.

Portanto, a função composta de g com f está definida e é a função $g \circ f:[0, 1] \to \mathbb{R}$ dada como $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{2x^3 + 1}$.

A composta de f com g é a função $f \circ g : [0,\ 1] \to \mathbb{R}$ dada por $(f \circ g)(x) = 2(g(x))^3 + 1 = 2(\sqrt{x})^3 + 1$. Observe que $f \circ g \neq g \circ f$.

2.3.2 Inversão de Funções

Dada uma função $f : A \to B$, $y = f(x)$, a relação inversa da *f*, que se indica $x = f^{-1}(y)$, nem sempre é uma função como ilustram os exemplos a seguir.

Exemplo 14. Considere a função $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 4, 7, 9\}$ dada por $f(x) = x^2$. O diagrama a seguir descreve a relação $y = f(x)$:

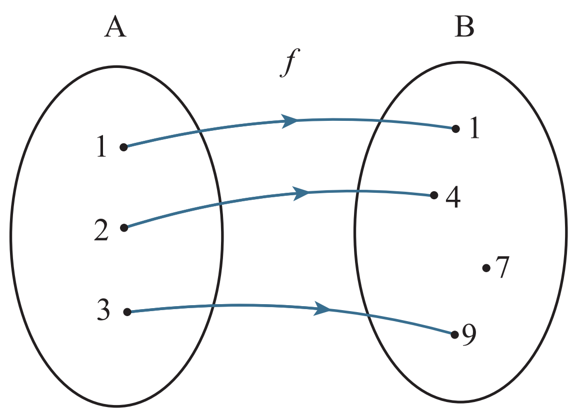


Figura 2.11

O diagrama seguinte descreve a relação inversa $x = f^{-1}(y)$:

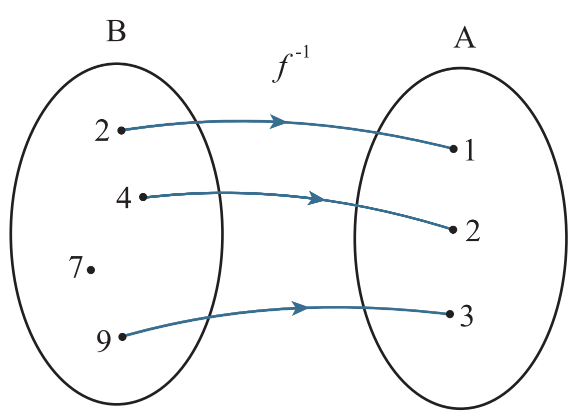


Figura 2.12

A relação f^{-1} não é uma função pois uma função relaciona cada elemento do seu domínio a algum (e único) elemento do contra-domínio. O número 7 não tem correspondente $y = f^{-1}(7)$ pela f^{-1}.

Outro exemplo é o seguinte.

Exemplo 15. Seja a função $g:\{-1,\ 1,\ 0\}\rightarrow\{1,\ 0\}$, $f(x)=x^2$, cujo diagrama é o seguinte:

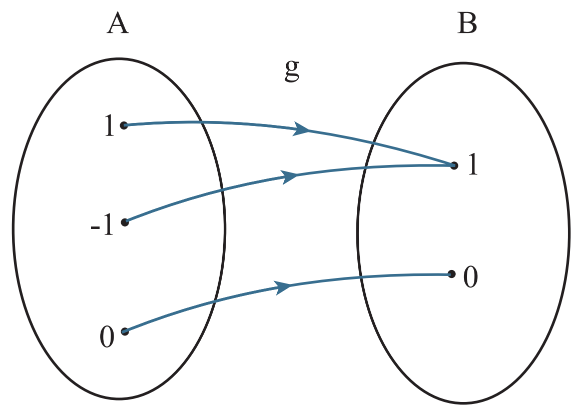


Figura 2.13

A relação inversa g^{-1} tem o seguinte diagrama:

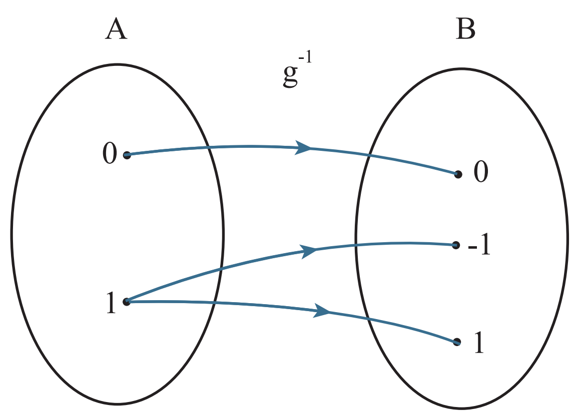


Figura 2.14

A relação g^{-1} não pode ser uma função pois ela relaciona o 1 a dois elementos. Uma função, repetimos, associa cada elemento do seu domínio a um único elemento do contradomínio.

A seguir definiremos quando uma função é inversível.

Definição 2.6 Uma função $f:A\rightarrow B$ é inversível quando a relação inversa da f também é uma função. Nesse caso, diz-se que a f em função inversa $f^{-1}:B\rightarrow A$.

Propriedades de Função Inversa

Seja f uma função inversível e f^{-1} a sua inversa. Então,

1) $Dom(f^{-1}) = \mathrm{Im}(f)$.

2) $\mathrm{Im}(f^{-1}) = Dom(f)$.

3) Seja $f: A \to B$ uma função inversível. A função $g: B \to A$ é função inversa da f quando para todo $x \in A$ e todo $y \in B$ tem-se $g(f(x)) = x$ e $f(g(y)) = y$.

4) O gráfico da f^{-1} é simétrico ao gráfico de f em relação à reta diagonal $y = x$. Isso significa que se o ponto (x, y) pertence ao gráfico da f, então o ponto (y, x) pertence ao gráfico da f^{-1}.

5) Dada a regra de associação da f, $y = f(x)$, para se obter a regra que define f^{-1}, procede-se assim:

   A partir da relação $y = f(x)$, expresse x em termos de y para obter a relação inversa $x = f^{-1}(y)$.

Exemplo 16. As funções $f:[0, \infty) \to [0, \infty)$, $f(x) = x^2$, e $g:[0, \infty) \to [0, \infty)$, $g(y) = \sqrt{y}$, são inversas uma da outra pois $g(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2} = |x| = x$, $\forall x \in Dom(f)$ e $f(g(y)) = (g(y))^2 = (\sqrt{y})^2 = y, \forall y \in Dom(g)$.

Exemplo 17. As funções $f:\mathbb{R} \to [0, \infty)$, $f(x) = x^2$, e $g:[0, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(y) = \sqrt{y}$, não são inversas uma da outra pois

$$g(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}.$$

Nesse caso, existe $x \in Dom(f)$ tal que $g(f(x)) \neq x$. Como exemplo, $x = -2$ e $g(f(-2)) = 2 \neq -2$.

Vamos verificar como está sua aprendizagem? Procure, então, resolver os Exercícios Propostos.

Exercícios Propostos

1) Sejam $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2 + 3x + 1$. Obtenha as regras de associação que definem as compostas $g \circ f$, $f \circ g$, $f \circ f$.

2) Seja $f:[0,\ \infty)\to[-2,\ \infty)$, $y=f(x)=\ x^2-2$. Determine a inversa da função f.

Respostas:

1) a) $g\circ f(x)=x^6+3x^3+1$, b) $f\circ g(x)=(x^2+3x+1)^3$,

c) $f\circ f(x)=x^9$, todas definidas em $\mathbb{R}$

2) $f^{-1}(x)=\sqrt{x+2}$

Você estudará, agora, como finalização desse capítulo, outras funções do tipo elementares.

2.4 Outras Funções Elementares

2.4.1 Função Exponencial de Base *a*

Seja a um número positivo e $a\neq 1$. A função $f:\mathbb{R}\to(0,\ \infty)$, dada por $f(x)=a^x$, é chamada de função exponencial de base a. Os gráficos dessas funções são os seguintes.

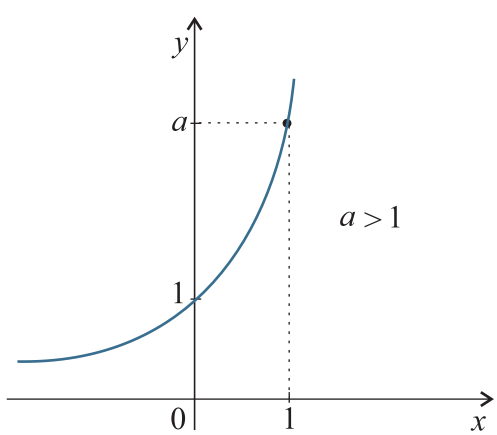


Figura 2.15

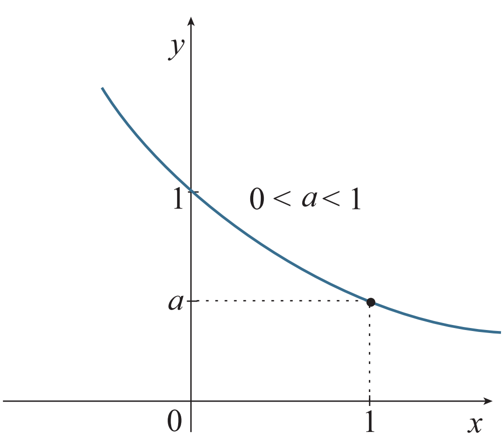


Figura 2.16

O conjunto imagem é o intervalo $(0,\ +\infty)$.

Apresentaremos, a seguir, as propriedades de Exponenciação. É preciso que você esteja bastante atento a elas.

Propriedades da Exponencial

As seguintes regras valem para quaisquer $a, b, x, y \in R$ com $a > 0$, $b > 0$:

1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

2) $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

3) $(a^x)^y = (a^y)^x = a^{xy}$

4) $(a^x b^x) = (ab)^x$

5) $\left(\dfrac{a^x}{b^x}\right) = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$

Observações: a função exponencial mais comum em aplicações é a função exponencial de base $a = e$ onde $e = 2{,}71828...$ é a constante de Euler, que é um número irracional. A função, nesse caso, é chamada de função exponencial natural ou, simplesmente, função exponencial. Veremos mais adiante que a função exponencial de base qualquer a pode ser sempre expressa em termos de uma função exponencial natural.

2.4.2 Função Logarítmica

A função exponencial de base a definida anteriormente admite uma função inversa g chamada de função logaritmo na base a. Portanto, $g : (0, \ +\infty) \to \mathbb{R}$. A regra de associação desta função é representada como $g(x) = \log_a x$.

Como as funções exponencial e logarítmica (ambas de base a) são inversas uma da outra, segue pela definição de função inversa que:

$$a^{\log_a x} = x \tag{2.4}$$

e

$$\log_a (a^x) = x \tag{2.5}$$

Segue imediatamente desta última relação, tomando-se $x = 0$ e $x = 1$, respectivamente, que:

$$\log_a 1 = 0 \tag{2.6}$$

e

$$\log_a a = 1 \tag{2.7}$$

Vejamos os gráficos da função logarítmica:

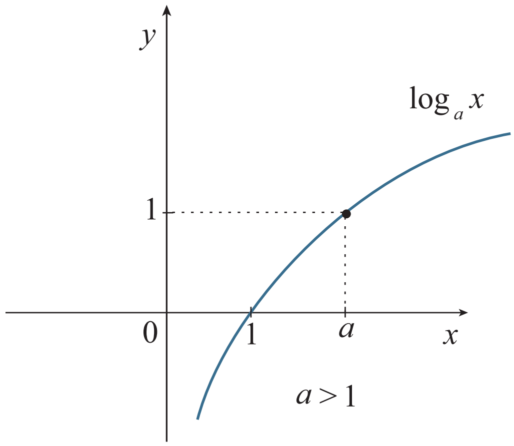


Figura 2.17

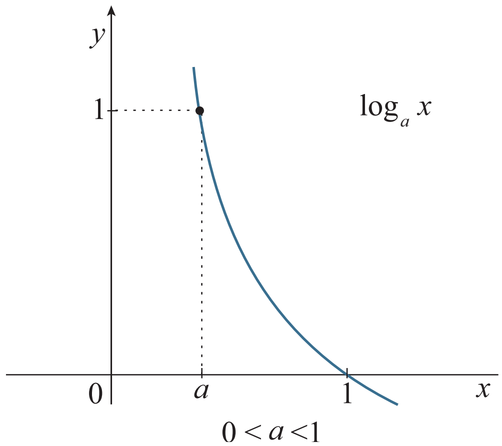


Figura 2.18

Propriedades Operatórias

Para todo $x, y > 0$, valem as seguintes regras:

1) Propriedade do produto:

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y.$$

2) Propriedade do quociente:

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y.$$

3) Propriedade da potenciação:

$$\log_a(y^x) = x \log_a y.$$

Exemplo 19. Mostrar a propriedade do produto:

Resolução: Basta aplicar a propriedade (1) da exponenciação e a relação (2.5) para obter $a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = xy$.

O logaritmo na base $a = e$, é chamado de logaritmo natural e é comum indicá-lo como $\ln(x)$.

Exemplo 20. Mostrar que: $a^x = e^{x \ln a}$

Resolução: Temos que, pela propriedade (3) de exponenciação, $e^{x \ln a} = (e^{\ln a})^x = (e^{\log_e a})^x = a^x$.

Exemplo 21. Mostrar que $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$ (2.8)

Resolução: Da relação (2.4), vem $\ln(a^{\log_a x}) = \ln x$ e pela propriedade (3) de potenciação, temos $\ln(a^{\log_a x}) = \log_a x \cdot \ln a$, ou seja, $\ln x = \log_a x \cdot \ln a$, ou ainda, $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$.

A fórmula (2.8) é chamada de fórmula da mudança de base (da natural para uma base a qualquer).

2.4.3 Funções Trigonométricas

A) Funções Seno e Cosseno

Considere a circunferência de raio unitário e centro na origem do sistema ortogonal de coordenadas, chamada de círculo trigonométrico.

Vamos convencionar o seguinte: o ponto *A* é a origem dos arcos sobre a circunferência, e o comprimento *x* de um arco é positivo quando o mesmo é obtido a partir de *A*, deslocando-se, no sentido anti-horário e, negativo, se no sentido horário.

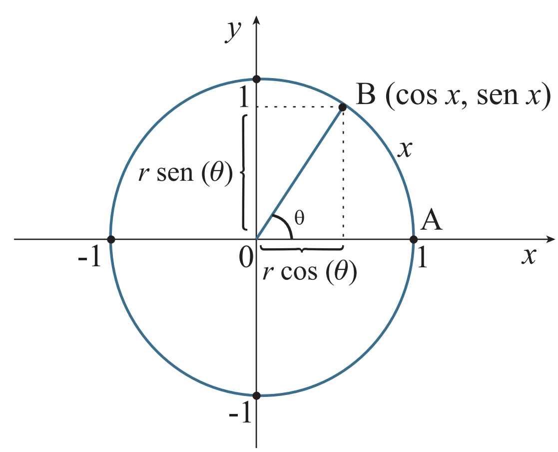


Figura 2.19

Chama-se função seno a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, indicada como $f(x) = \operatorname{sen} x$, que associa a cada número real *x*, entendido como o comprimento de um arco $\overset{\frown}{AB}$ da circunferência, a ordenada do ponto *B* no eixo *OY*.

Numa circunferência de raio *r*, o comprimento *x* de um arco e o ângulo θ subentendido, estão relacionados pela fórmula $x = \theta \cdot r$.

Se $r = 1$, tem-se $x = \theta$ e, nesse caso, podemos interpretar sen x como sendo o seno do ângulo cuja medida, em radianos, é *x*. Lembramos que a medida de um arco é 1 radiano quando o comprimento do arco é igual ao raio da circunferência.

A conversão para graus é dada por:

$$1 \text{ radiano} = \frac{180}{\pi} \approx 57 \text{ graus}$$

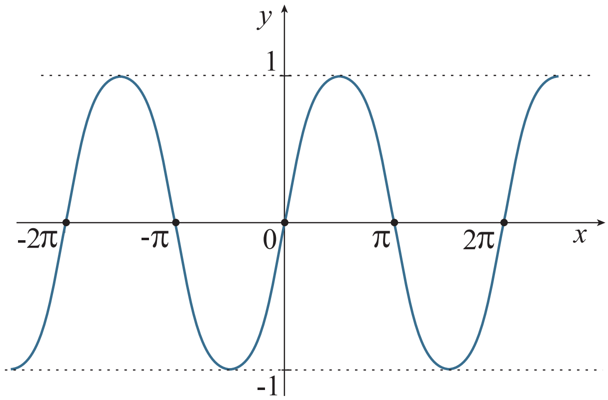


Figura 2.20 - Gráfico da função seno

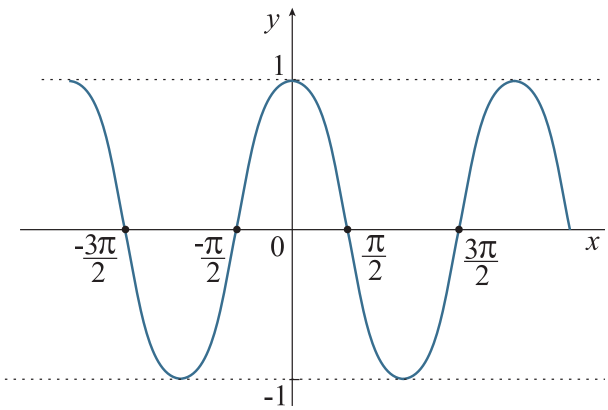


Figura 2.21 - Gráfico da função cosseno

A função cosseno é a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ indicada por $f(x)=\cos x$, que associa a cada número real x, entendido aqui também como o comprimento de um arco $\overset{\frown}{AB}$ da circunferência unitária, a abcissa do ponto B no eixo OX.

Vejamos, ao lado, as propriedades das funções seno e cosseno.

1) Ambas as funções têm por conjunto imagem o intervalo $[-1,\ 1]$. Para todos os valores de $x\in\mathbb{R}$, tem-se que $-1\leq$ sen $x\leq 1$ e $-1\leq\cos x\leq 1$.

   Sendo x o comprimento de um arco $\overset{\frown}{AB}$ da circunferência unitária, a ordenada e a abcissa de B, sen x e $\cos x$, são no máximo 1 e, no mínimo, -1, qualquer que seja x, como se constata examinando-se a figura 2.21.

2) As funções seno e cosseno são exemplos importantes de funções periódicas.

Uma função $f(x)$ é chamada de periódica quando satisfaz, para algum p, a relação $f(x)=f(x+p)$, qualquer que seja $x\in Dom f$. O menor valor de p para o qual se tem $f(x+p)=f(x)$ para qualquer $x\in\mathbb{R}$ é chamado de período da função f.

As funções seno e cosseno são funções periódicas com período 2π. Isso significa que, para todo $x\in\mathbb{R}$, sen $(x+2\pi)$ = sen x, $\cos(x+2\pi)=\cos x$.

Esta propriedade segue da interpretação geométrica dessas funções. Examinando o círculo trigonométrico, conclui-se que a extremidade C de um arco $\overset{\frown}{AC}$ de comprimento $x+2\pi$ coincide com o ponto B do arco $\overset{\frown}{AB}$ e, portanto, B e C têm as mesmas coordenadas.

3) A função cosseno é uma função par.

De fato, considere o arco $\widehat{AB}$ de comprimento $x > 0$, como indica a figura abaixo, e o arco $\widehat{AC}$, medido no sentido anti-horário, cujo comprimento é também $-x$. Isto é, $\widehat{AC}$ é o arco $-x$. Os pontos B e C, portanto, têm a mesma abcissa, de modo que $\cos(-x) = \cos x$

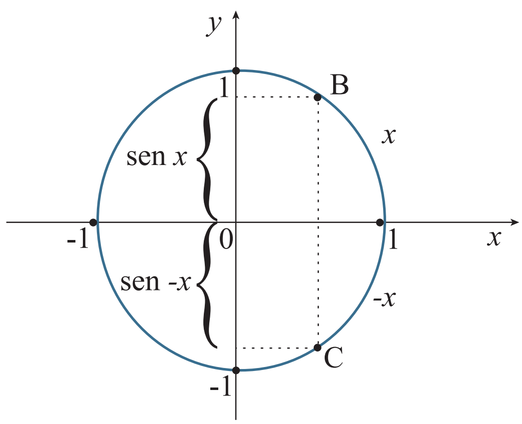


Figura 2.22

4) A função seno é uma função ímpar, isto é, $\text{sen}(-x) = (-1)\,\text{sen}(x)$.

Verifique!

5) As funções $\text{sen}\,x$ e $\cos x$ satisfazem algumas relações chamadas relações trigonométricas. Em especial, aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo $Q0B$, obtém-se a relação

$$\cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1 \qquad (2.9)$$

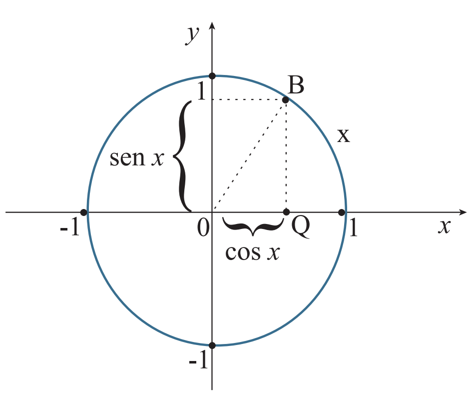


Figura 2.23

Outras relações que não serão demonstradas aqui, são:

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \cos a \cdot \operatorname{sen} b \qquad (2.10)$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b \qquad (2.11)$$

$$\operatorname{sen}(2a) = 2 \cdot \operatorname{sen} a \cdot \cos a \qquad (2.12)$$

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a \qquad (2.13)$$

Exemplo 22. Mostre que:

$$\cos^2 a = \frac{1+\cos(2a)}{2} \qquad (2.14)$$

$$\text{e } \operatorname{sen}^2 a = \frac{1-\cos(2a)}{2} \qquad (2.15)$$

Resolução: Pela propriedade 5), $\cos^2 a = 1 - \operatorname{sen}^2 a$. Substituindo na (2.13), obtém-se $\cos(2a) = 1 - 2\operatorname{sen}^2 a$ da qual segue a (2.15). Da mesma forma, substitua $\operatorname{sen}^2 a = 1 - \cos^2 a$ na (2.13) para obter (2.14).

As funções seno e cosseno têm inúmeras aplicações na física e na modelagem de fenômenos que apresentam periodicidade como mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 23. Um corpo de massa M está preso a uma mola como mostra a figura 2.24.

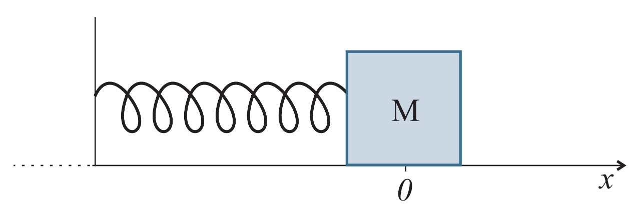


Figura 2.24

Na posição de equilíbrio, isto é, quando nenhuma força é exercida sobre a massa, sua posição é $x = 0$. Suponha, também, que o ar e a mesa sobre a qual a massa M se encontra, não oferecem nenhuma resistência ao movimento de M. Fora da posição de equilíbrio, a física nos diz que a mola exerce uma força sobre a massa M da forma $F(x) = -kx$, onde $k > 0$ é uma constante e x é a posição de M. Ver figura 2.25.

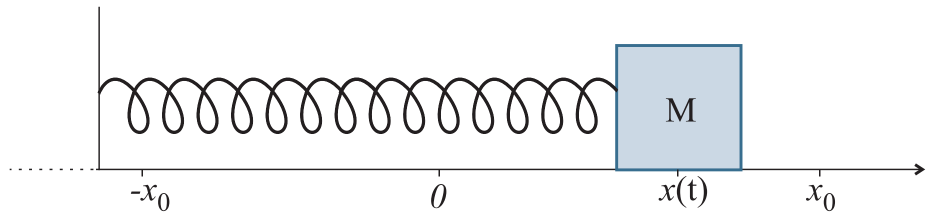


Figura 2.25

O movimento da massa M é periódico, isto é, ela oscila entre as posições $-x_0$ e $x_0 > 0$. Em cada instante $t \geq 0$, sabe-se que a posição é dada por $x(t) = x_0 \text{sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$ onde $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ é a freqüência das oscilações. Portanto, a posição de M é dada em termos de uma função seno.

Exemplo 24. Determine o período da função $x(t)$ do exemplo anterior.

> **Resolução:** Queremos determinar o menor p tal que, para todo t, $x(t+p) = x(t)$. Temos $x(t+p) = x_0 \text{sen}\left[\omega(t+p) + \frac{\pi}{2}\right] = x_0 \text{ sen}\left[\omega t + \frac{\pi}{2} + \omega p\right]$ é igual a $x(t)$ quando $\omega p = 2k\pi$, pela periodicidade da função seno. Portanto, a função $x(t)$ tem período $\frac{2\pi}{\omega}$, pois o menor valor positivo possível para $2k\pi$ é 2π.

B) Função Tangente

A função $f: A \to \mathbb{R}$, $f(x) = \text{tg}\, x$, definida por $\text{tg}\, x = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x}$, onde $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos x \neq 0\}$ é chamada de função tangente.

A função tangente tem uma interpretação geométrica que é a seguinte. Na circunferência unitária desenhe a reta tangente à circunferência no ponto A, chamada eixo das tangentes (reta E na fig. 2.26), como indica a figura 2.26.

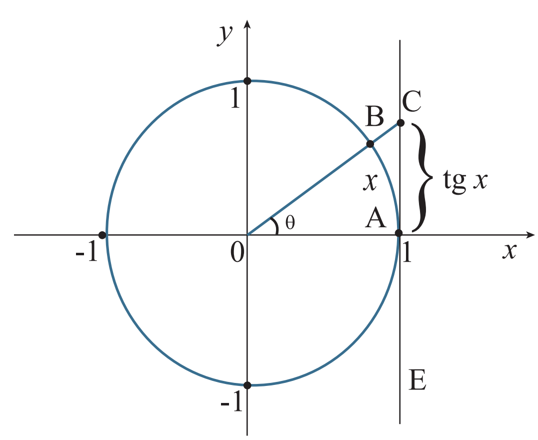


Figura 2.26

A função tangente associa a cada número real x, interpretado como a medida de um arco $\widehat{AB}$, a medida do segmento AC, mostrado na figura. Os valores da função tangente são positivos quando no semi-eixo acima de A, e negativos abaixo de A.

A função tangente é periódica. Seu período é π. Verifique!

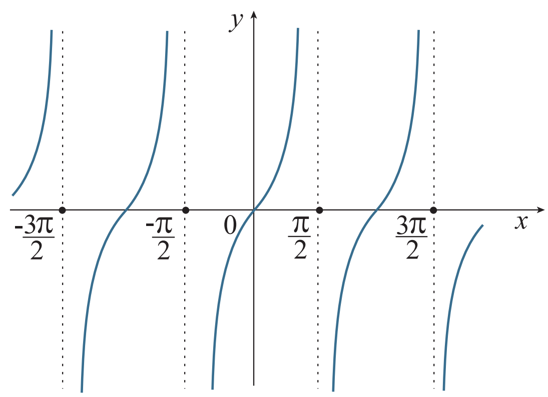


Figura 2.27 – Gráfico da função tangente

C) Função Secante

É a função $f: A \to \mathbb{R}$, indicada por $f(x) = \sec x$, onde $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ e $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos x \neq 0\}$

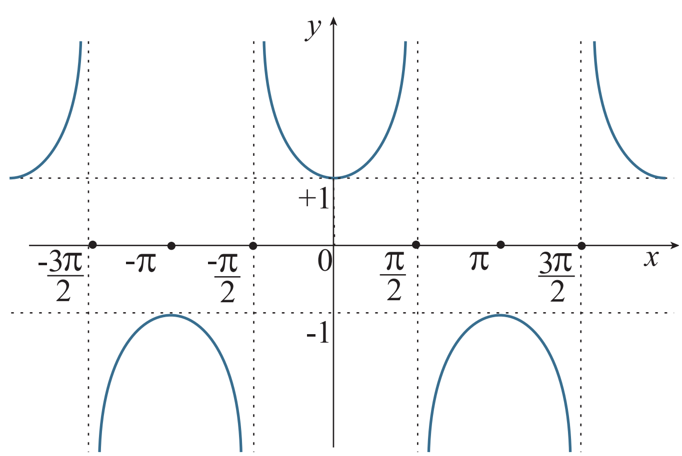


Figura 2.28 – Gráfico da função secante

A função secante é uma função par e periódica com período 2π. Seu conjunto imagem é $\mathrm{Im}(\sec x) = (-\infty, \ -1] \cup [1, \ +\infty)$.

D) Função Cossecante

É a função $f : A \to \mathbb{R}$, onde A é o conjunto dos números reais x tais que $\operatorname{sen} x \neq 0$, dada por $f(x) = \operatorname{cossec} x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$.

Vejamos, agora, o gráfico da função cossecante:

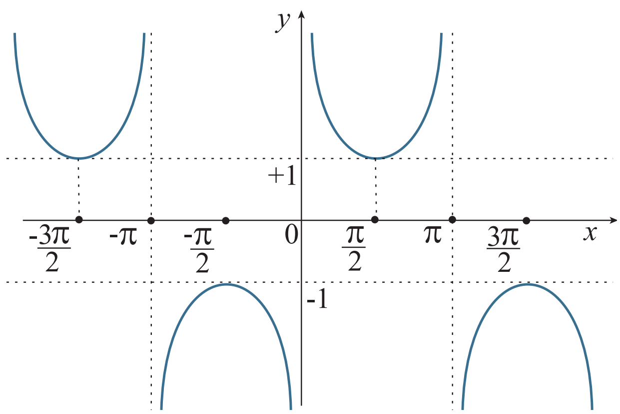


Figura 2.29

A função cossec x é uma função ímpar, periódica com período 2π. Seu conjunto imagem é o conjunto:

$$\operatorname{Im}(\operatorname{cossec} x) = (-\infty,\ -1] \cup [1,\ \infty)$$

E) Função Cotangente

A função $f : A \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$, onde A é o conjunto dos números reais x tais que sen $x \neq 0$, é chamada função cotangente.

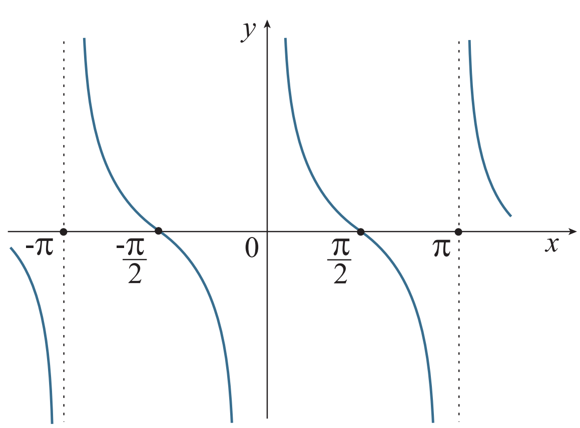


Figura 2.30 – Gráfico da função cotangente

A função cotangente é uma função ímpar, periódica de período π e $\text{Im}(\text{cotg}\, x) = \mathbb{R}$.

2.4.4 Funções Trigonométricas Inversas

A) Função Arco Seno

Considere a função seno com domínio $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$ e contradomínio $[-1,\ 1]$. Essa função admite inversa que é a função $f:[-1,\ 1] \to \left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$ indicada por $f(x) = \text{arcsen}\, x$ ou $f(x) = \text{sen}^{-1} x$ chamada de função arco seno.

Vejamos, agora, o gráfico da função arco seno:

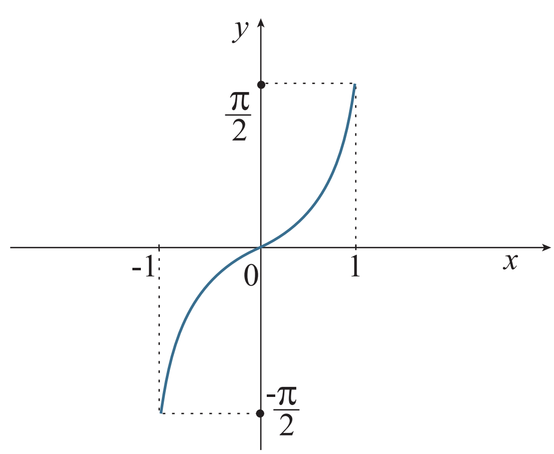


Figura 2.31

B) Função Arco Cosseno

É a função $f:[-1,\ 1] \to [0,\ \pi]$, indicada por $f(x) = \arccos x$ ou $f(x) = \cos^{-1} x$, chamada de função arco cosseno. Esta função é a inversa da função cosseno, com domínio $[0,\ \pi]$ e contradomínio $[-1,\ 1]$.

Vejamos o gráfico da função arco cosseno:

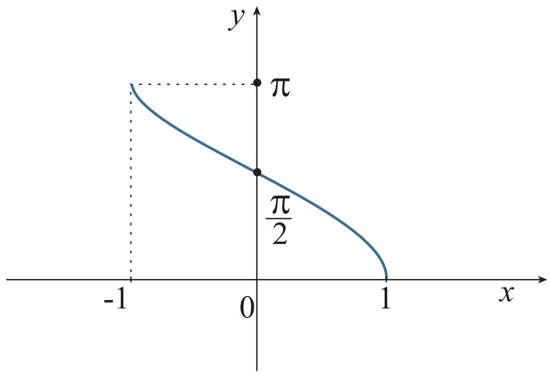


Figura 2.32

C) Função Arco Cotangente

A função tangente definida no domínio $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ com contradomínio $\mathbb{R}$ admite função inversa. Esta é a função $f: \mathbb{R} \to \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, indicada por $f(x) = \text{arctg } x$ ou $f(x) = \text{tg}^{-1} x$.

Vejamos o gráfico da função arco tangente:

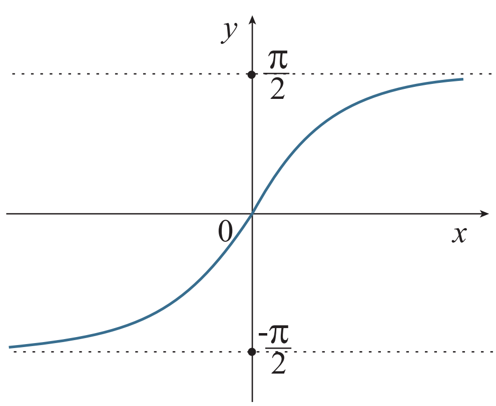


Figura 2.33

D) Função Arco Secante

É a função $f: (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \to [0, \pi] - \left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$ indicada por $f(x) = \text{arcsec}\, x$ ou $f(x) = \sec^{-1} x$.

Vejamos o gráfico da função arco secante:

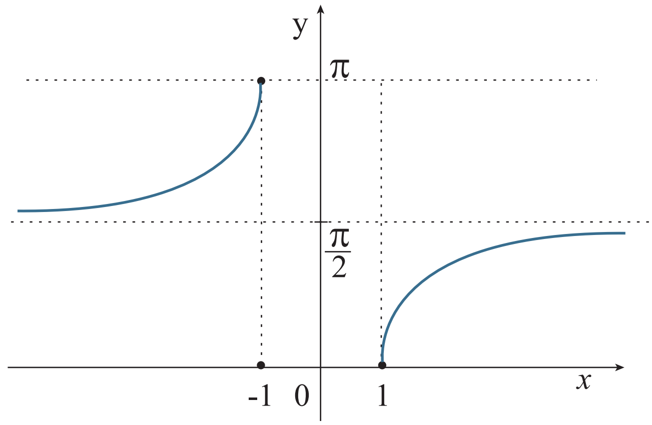


Figura 2.34

E) Função Arco Cossecante

A função arco cossecante é a função

$f:(-\infty,\ -1]\cup[1,\ \infty)\rightarrow\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]-\{0\},$

indicada como ou $f(x)=\text{cossec}^{-1}x.$

Vejamos o gráfico da função arco cossecante:

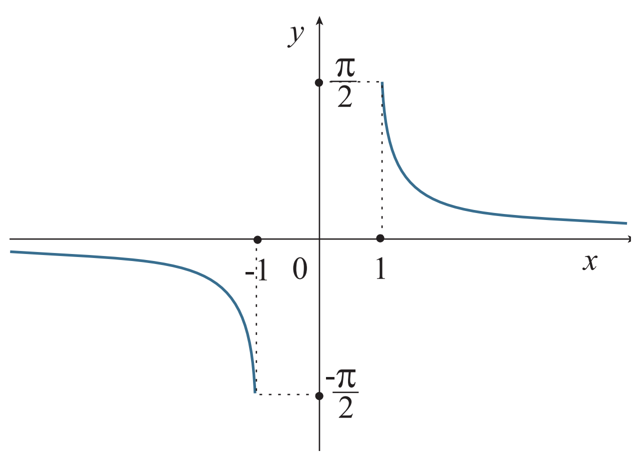


Figura 2.35

F) Função Arco Cotangente

A função arco cotangente é a função $f:\mathbb{R}\rightarrow(0,\pi)$, indicada por $f(x)=\ \text{arccotg}\,x$ ou $f(x)=\text{cotg}^{-1}x$.

Vejamos o gráfico da função arco cotangente:

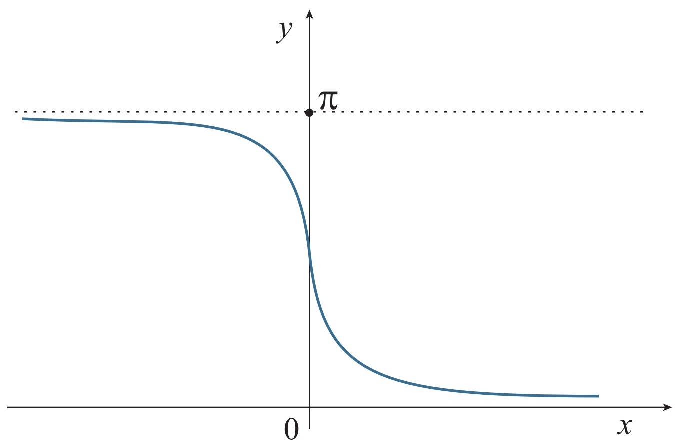


Figura 2.36

2.4.5 Funções Hiperbólicas

As funções hiperbólicas são definidas a partir da função $f(x) = e^x$. O quadro a seguir apresenta as definições de cada uma delas.

Função	Domínio	Imagem
$\operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$	$\mathbb{R}$	$[1, +\infty)$
$\operatorname{tgh} x = \dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}$	$\mathbb{R}$	$(-1, 1)$
$\operatorname{ctgh} x = \dfrac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}$	$\mathbb{R} - \{0\}$	$(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
$\operatorname{sech} x = \dfrac{1}{\cosh x}$	$\mathbb{R}$	$(0, 1]$
$\operatorname{cosech} x = \dfrac{1}{\operatorname{senh} x}$	$\mathbb{R} - \{0\}$	$\mathbb{R} - \{0\}$

Gráficos das funções hiperbólicas:

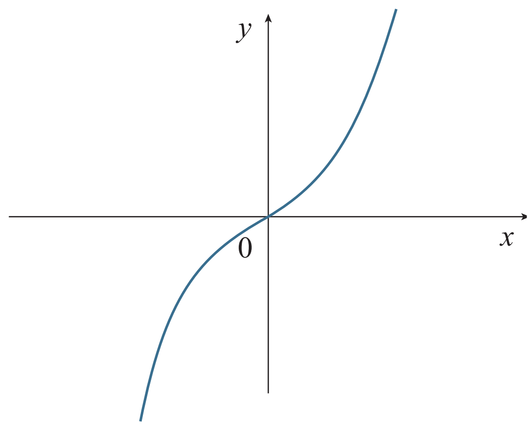


Figura 2.37: Gráfico de senh (x)

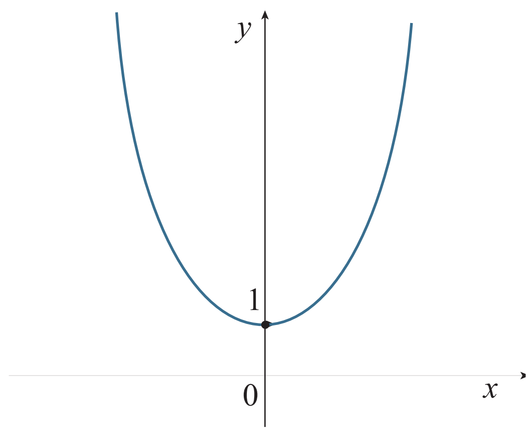


Figura 2.38: Gráfico de cosh (x)

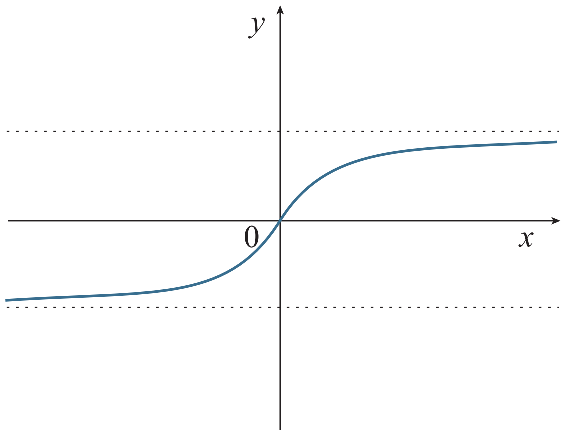


Figura 2.39: Gráfico de tgh (x)

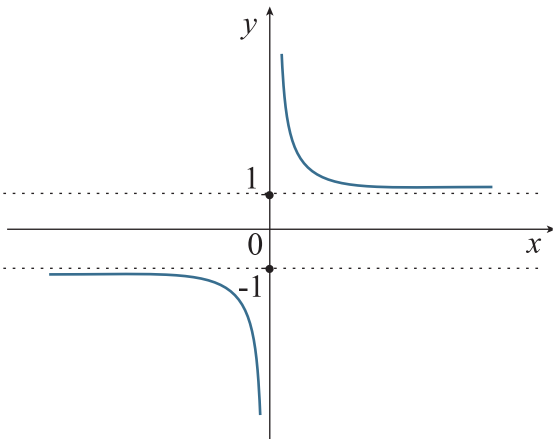


Figura 2.40: Gráfico de ctgh (x)

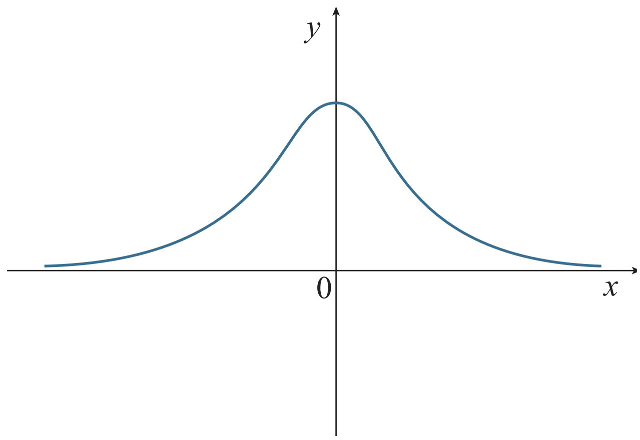


Figura 2.41: Gráfico de sech (x)

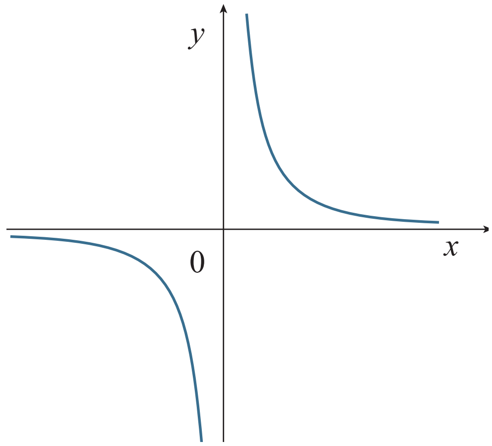


Figura 2.42: Gráfico de cossech (x)

2.4.6 Funções Hiperbólicas Inversas

As funções hiperbólicas inversas estão dadas no quadro seguinte:

Função	Domínio	Imagem
$\text{argsenh}(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\text{argcosh}(x)$	$[-1,\infty)$	$[0,+\infty)$
$\text{argtgh}(x)$	$(-1,1)$	$\mathbb{R}$
$\text{argcotgh}(x)$	$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$	$\mathbb{R}-\{0\}$
$\text{argsech}(x)$	$(0,1]$	$[0,+\infty)$
$\text{argcossech}(x)$	$\mathbb{R}-\{0\}$	$\mathbb{R}-\{0\}$

Vamos verificar se você conseguiu compreender os tópicos das seções acima. Faça, então, os Exercícios Propostos.

Exercícios Propostos

1) Escreva a função exponencial dada na base natural *e*:
   $y = 2^{x+3}$

2) Escreva a função dada em termos do logaritmo natural

   $y = 2 + 7\log_3(2x+1)$

3) Determine y na equação $\ln(2y) = 2x^2 + 1$.

4) Determine o período da função $f(x) = \cos(3x+2)$, $x \in \mathbb{R}$.

5) Determine o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}$ onde

   a) $\cos x = 0$ e

   b) $\text{sen}\, x = 0$.

Respostas:

1) $e^{(x+3)\ln 2}$

2) $y = 2 + 7\dfrac{\ln(2x+1)}{\ln 3}$

3) $y = \dfrac{e^{2x^2+1}}{2}$

4) $\dfrac{2\pi}{3}$

5) a) $x = (2n+1)\dfrac{\pi}{2},\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

b) $x = n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Resumo

Neste capítulo, você teve a oportunidade de estudar e aprender o que é uma função. A definição é bastante simples. Uma função é uma relação entre conjuntos que associa a cada elemento de um dos conjuntos um único elemento do outro conjunto. Você aprendeu que quando certas condições são satisfeitas é possível somar, subtrair, multiplicar e dividir funções e assim obter novas funções. Além dessas operações vimos que também é possível compor funções. A composição de funções é outra operação importante entre funções. Em seguida indagamos se a relação inversa daquela que define uma função também é uma função. Alguns exemplos mostraram que esse nem sempre é o caso. Além disso, estudamos vários tipos de funções chamadas de funções elementares que são relevantes para o desenvolvimento do cálculo e suas aplicações. Em alguns exemplos, ilustramos algumas situações oriundas da física onde estas funções são importantes na descrição e modelagem quantitativa de alguns fenômenos físicos.

Capítulo 3

Limite e Continuidade

Capítulo 3
Limite e Continuidade

Nesse capítulo, você aprenderá a expressar algebricamente a definição de limite de uma função de uma maneira intuitiva; enunciar e aplicar os teoremas de limite na resolução de problemas; calcular limites laterais; resolver exercícios de limites quando ocorrer um tipo de indeterminação; identificar e calcular limites no infinito e limites infinitos, bem como calcular limites através dos limites fundamentais e analisar a continuidade de uma função no ponto $x = a$.

O conceito de limite é importante na construção de muitos outros conceitos no cálculo diferencial e integral. As noções de derivada e de integral abordados nos capítulos 4 e 6, são os suportes de toda a construção das variáveis físicas. Além disso, são importantes no cálculo de área e volumes.

Augustin Louis Cauchy (1789-1857). Curiosidade: Você sabia que Augustin Louis Cauchy foi um matemático francês do século XIX que formulou as noções de limites e continuidade, obtendo resultados que marcaram a Análise Matemática?

3.1 A Noção de Limite

A noção de limite fornece um caminho preciso para distinguir o comportamento de algumas funções que variam continuamente e o comportamento de outras funções que podem variar independente do modo como se controla as variáveis.

É com base nisso que pretendemos apresentar a você uma noção intuitiva de limite, para que você possa observar o que ocorre com a função $f(x)$, intuitivamente, quando x tende para um número real a ou quando x tende para mais ou menos infinito. Usaremos limites, por exemplo, para definir retas tangentes a gráficos de funções. Essa aplicação geométrica nos leva ao importante conceito de derivada de uma função que investigaremos, com detalhes, no capítulo 4.

Dada uma função f, você quer saber o que ocorre com os valores $f(x)$, quando a variável x se aproxima de um ponto a. Para você entender isto melhor, considere a função f definida pela expressão a seguir.

$$f(x) = \frac{(3x+2)\cdot(x-1)}{(x-1)}.$$

A função f está definida para todo x real exceto $x = 1$. Assim, se $x \neq 1$, o numerador e o denominador de f podem ser divididos por $(x-1)$ e você obtém $f(x) = 3x+2$, para $x \neq 1$.

Vamos estudar juntos os valores da função $f(x)$, quanto x estiver próximo de 1, mas não é igual a 1. Primeiro, vamos considerar valores de x cada vez mais próximo de 1, com $x < 1$ e observarmos o que está acontecendo com $f(x)$, conforme a tabela abaixo:

$x < 1$	0	0,25	0,5	0,75	0,9	0,99	0,999	0,9999	0,99999
$f(x) = 3x+2$	2	2,75	3,5	4,25	4,70	4,97	4,997	4,9997	4,99997

Agora, vamos considerar que a variável x aproxima-se cada vez mais de 1, com $x > 1$ e observar o que está acontecendo com $f(x)$:

$x > 1$	2	1,75	1,5	1,25	1,1	1,01	1,001	1,00001
$f(x) = 3x+2$	8	7,25	6,5	5,75	5,30	5,03	5,003	5,00003

Observamos, em ambas as tabelas, que quando x se aproxima cada vez mais de 1, a função $f(x)$ se aproxima cada vez mais de 5. Em outras palavras, é possível obter o valor de $f(x)$ tão próximo de 5 quando desejarmos, desde que tomemos x suficientemente próximo de 1. Examine o gráfico de $f(x)$ ao lado.

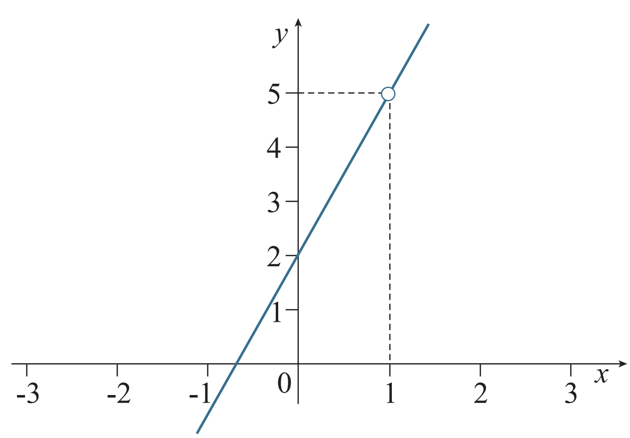


Figura 3.1

Para x cada vez mais próximo de 1, $f(x)$ aproxima-se de 5 e escreve-se a seguinte expressão: $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(3x+2) = 5$.

Lê-se: O limite da função $f(x)$ quando x aproxima-se de 1 é 5, ou ainda, o limite de $f(x)$ quando x tende a 1 é 5. Isto significa dizer que o valor da expressão $3x+2$ cada vez mais aproxima-se de 5 a medida que os valores de x estão aproximando-se de 1. Quando $x \to 1$, $f(x) \to 5$.

Vejamos, agora, mais um exemplo e para isto vamos considerar a função $f(x)$ definida pela expressão $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$, para $x \neq 0$.

Queremos saber o que ocorre com $f(x)$ quando x assume valores (positivos ou negativos) arbitrariamente grandes, ou seja, x tende para $+\infty$, $x > 0$ e x tende para $-\infty$, $x < 0$. Observamos na tabela abaixo, quando x cresce cada vez mais o que está acontecendo com a função $f(x)$.

x	1	2	3	4	5	500	...	1000	...	10000	...
$f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$	2	1,5	1,333	1,25	1,2	1,002	...	1,001	...	1,0001	...

Quando x cresce cada vez mais, ou seja, x tende para $+\infty$, a função $f(x)$ aproxima-se cada vez mais de 1.

Observamos na tabela abaixo, quando o valor absoluto de x cresce cada vez mais (para valores negativos de x) o que está acontecendo com a função $f(x)$.

x	-1	-2	-3	-4	...	-100	...	-1000	...	-10000	...
$f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$	0	0,5	0,666	0,75	...	0,99	...	0,998	...	0,9998	...

Quando o valor absoluto de x cresce cada vez mais, para valores negativos de x, ou seja, quando x tende para $-\infty$, a função $f(x)$ aproxima-se cada vez mais de 1. Assim, concluímos, nas duas tabelas, que quando x tende para $+\infty$ e quando x tende para $-\infty$, a função $f(x)$ tende para 1 e escreve-se:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1 \text{ e } \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1.$$

Lê-se: O limite da função $f(x)$ quando x tende para $+\infty$ é 1 e o limite da função $f(x)$ quando x tende para $-\infty$ é 1 ou quando $x \to +\infty$, $f(x) \to 1$ e quando $x \to -\infty, f(x) \to 1$.

Observemos o gráfico da função $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ ao lado.

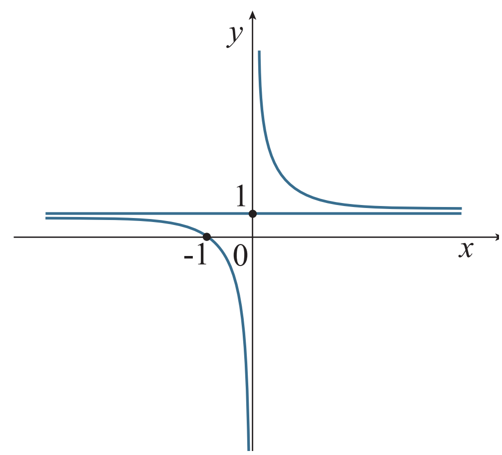


Figura 3.2

Não é difícil de observar no gráfico da função $f(x)$ acima que:

- Quando x aproxima-se cada vez mais de 0 pela direita, ou seja, para valores de $x > 0$, que a função f cresce cada vez mais com valores positivos, ou seja, pode-se dizer que a função f tende para $+\infty$. Quando x tende a 0 pela direita, $x \to 0^+$, $f(x) \to +\infty$ e escreve-se:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = +\infty \cdot$$

- Quando x aproxima-se cada vez mais de 0 pela esquerda, ou seja, com valores de $x < 0$, que os valores absolutos da função f crescem cada vez mais e são negativos, ou seja, pode-se dizer que a função f tende para $-\infty$. Quando x tende a 0 pela esquerda, $x \to 0^-$, $f(x) \to -\infty$ e escreve-se:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = -\infty.$$

Consideremos agora a função f definida pela expressão $f(x) = \dfrac{3x+1}{x-1}$, para $x - 1 \neq 0$, ou seja, $x \neq 1$.

Queremos saber o que ocorre com a função $f(x)$ quando x tende para 1 através de valores de $x > 1$ e o que ocorre com a função $f(x)$ quando x tende para 1 através de valores de $x < 1$. Vejamos o que acontece com $f(x)$ na tabela abaixo, quando x tende para 1 através de valores de $x > 1$.

$x > 1$	3	2	1,5	1,25	1,1	1,01	1,001	1,0001	...
$f(x) = \dfrac{3x+1}{x-1}$	5	7	11	19	43	403	4003	40003	...

Observamos que quando x tende para 1, através de valores de $x > 1$, ou seja, pela direita de 1, a função $f(x)$ cresce indefinidamente, ou seja, a função f tende para $+\infty$. Pode-se dizer que o limite de $f(x)$ quando x tende a 1 pela direita é $+\infty$, $x \to 1^+$, $f(x) \to +\infty$ e anota-se por $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{3x+1}{x-1} = +\infty$.

Vejamos o que acontece com $f(x)$ na tabela abaixo, quando x tende para 1 através de valores de $x < 1$.

$x < 1$	-1	0	0,9	0,99	0,999	0,9999	...
$f(x) = \dfrac{3x+1}{x-1}$	1	-1	-37	-397	-3997	-39997	...

Observamos que quando x tende a 1, através de valores de $x < 1$, ou seja, pela esquerda de 1, os valores absolutos da função $f(x)$ crescem e são negativos, ou seja, a função f tende para $-\infty$. Pode-se dizer que o limite de $f(x)$ quando x tende a 1 pela esquerda é $-\infty$, $x \to 1^-$, $f(x) \to -\infty$ e anota-se por $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{3x+1}{x-1} = -\infty$.

Conforme estudado acima, temos ao lado o gráfico da função $f(x) = \dfrac{3x+1}{x-1}$. (Figura 3.3)

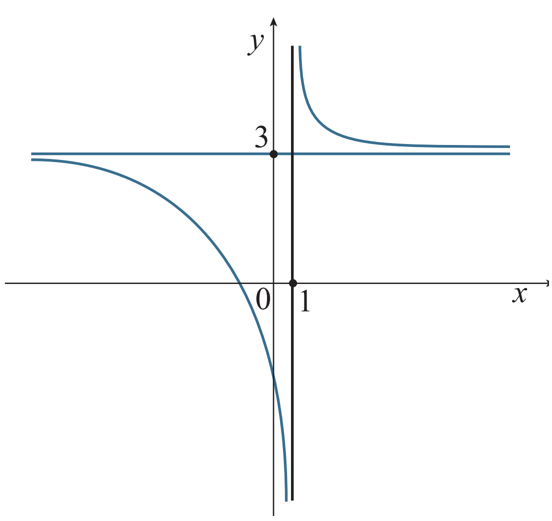


Figura 3.3

Com base no que você aprendeu até aqui, tente esboçar o gráfico de uma função $f(x)$ com as seguintes características:

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \text{ e } \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0.$$

Escreva a expressão algébrica de uma função com as características acima.

Em outras palavras, você quer esboçar o gráfico de uma função com as seguintes características:

- Para x aproximando-se de –1 pela direita, a função $f(x)$ cresce indefinidamente;
- Para x aproximando-se de –1 pela esquerda, a função $f(x)$ decresce indefinidamente;
- Para x crescendo indefinidamente, a função $f(x)$ aproxima-se de 0;
- Para x decrescendo indefinidamente, a função $f(x)$ aproxima-se de 0.

Note que uma função com estas características apresenta um gráfico do seguinte tipo:

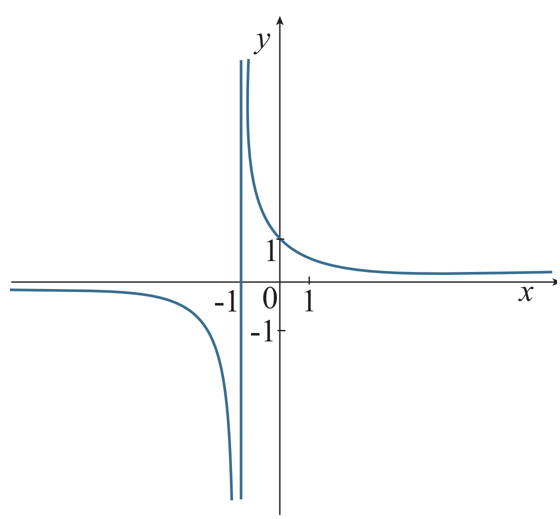


Figura 3.4

A expressão algébrica de f pode ser $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$, para $x+1\neq 0$, ou seja, $x\neq -1$.

Vamos apresentar agora alguns problemas resolvidos com indicação do percurso para sua solução.

Problema 1. Seja a função $f(x) = \dfrac{x+3}{x-2}$, com $x-2 \neq 0$, ou seja, $x \neq 2$.

Você quer saber o que ocorre com a função $f(x)$ quando x tende para 2 com valores de x maiores que 2, $x > 2$, e quando x tende para 2 com valores de x menores que 2, $x < 2$, e com base nestas informações esboçar o gráfico de $f(x)$.

Resolução: Inicialmente você elabora uma tabela com valores de $x > 2$ e observa o que ocorre com $f(x)$. Você vai perceber que a função $f(x)$ cresce indefinidamente, isto é, pode-se afirmar que $f(x)$ tende para mais infinito, $f(x) \to +\infty$.

Elaborando uma tabela com valores de $x < 2$ você vai observar o que ocorre com $f(x)$. Você vai perceber que a função $f(x)$ decresce indefinidamente, isto é, pode-se afirmar que $f(x)$ tende para menos infinito, $f(x) \to -\infty$.

Com base na tabela que você elaborou para valores de $x > 2$ e $x < 2$, você esboça o gráfico a seguir.

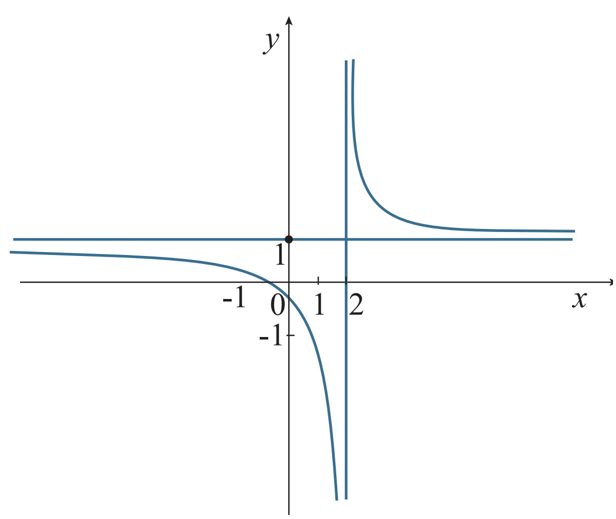


Figura 3.5

Analisando as duas tabelas que você elaborou e o gráfico de $f(x)$, concluímos que:

1) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x+3}{x-2} = +\infty$. Lê-se: O limite de $f(x)$ quando x tende a 2 pela direita é mais infinito.

2) $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{x+3}{x-2} = -\infty$. Lê-se: O limite de $f(x)$ quando x tende a 2 pela esquerda é menos infinito.

Problema 2. Considere a função $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$, para $x \neq 2$. Você quer saber o que ocorre com a função $f(x)$ quando x tende para mais infinito e quando x tende para menos infinito.

Resolução: Elaborando uma tabela quando x assume valores positivos grandes, isto é, x tende para mais infinito, conforme a tabela abaixo, você observa que a função $f(x)$ aproxima-se cada vez mais de 1.

x	3	4	6	10	50	100	1000	10000	100000	...
$f(x) = \frac{x+3}{x-2}$	6	3,5	2,25	1,625	1,1042	1,051	1,002	1,0002	1,00002	...

Fazendo o mesmo, conforme tabela a seguir, quando x assume valores negativos de módulo grande, isto é, x tende para menos infinito, você observa que a função $f(x)$ aproxima-se cada vez mais de 1.

x	-5	-10	-50	-100	-1000	-10000	-100000	...
$f(x) = \frac{x+3}{x-2}$	0,29	0,58	0,90	0,95	0,9950	0,9995	0,99995	...

Após esta análise você conclui que:

- **Primeiro:** $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x+3}{x-2} = 1$. Lê-se: O limite de $f(x)$ quando x tende para mais infinito é igual a 1.
- **Segundo:** $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x+3}{x-2} = 1$. Lê-se: O limite de $f(x)$ quando x tende para menos infinito é igual a 1.

Observe isto no gráfico de $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$ apresentado no Problema 1 resolvido acima, figura 3.5.

Apresentaremos agora a definição formal de limite de uma função.

Definição 3.1. Seja I um intervalo qualquer, $a \in I$ e $f(x)$ uma função definida no intervalo I, (exceto eventualmente em a). Diz-se que o limite de $f(x)$ quando x tende a a é L, e escreve-se $\lim_{x \to a} f(x) = L$, se para todo ε (epslon), $\varepsilon > 0$, existe um δ (delta), $\delta > 0$, tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$.

3.2 Teoremas Sobre Limites de Funções

Nesta seção, enunciaremos, sem demonstração, os teoremas sobre limites de funções e suas aplicações na resolução de problemas, teoremas estes que desempenharão um papel importante em todo o nosso curso.

Teorema 3.1. Unicidade do limite
Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} f(x) = M$ então $L = M$.

Teorema 3.2. Se $f(x) = k$ para todo x real, então para qualquer número real a, tem-se $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} k = k$.

Exemplo. Considere $f(x) = 4$ e $a = 2$ então $\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} 4 = 4$.
Ou seja, **o limite de uma constante é a própria constante**.

Teorema 3.3. Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} g(x) = M$ então:

a) $\lim_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) = L \pm M$..

b) Para qualquer número real k, tem-se
$\lim_{x \to a} (k \cdot f(x)) = k \cdot \lim_{x \to a} f(x) = k \cdot L$.

c) $\lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x) = L \cdot M$.

d) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \dfrac{L}{M}$ $se\ M \neq 0$.

e) $\lim_{x \to a} (f(x))^n = (\lim_{x \to a} f(x))^n = L^n$.

Teorema 3.4. Se $\lim_{x \to a} f(x) = b$ e $\lim_{y \to b} g(y) = L$, com $L = g(b)$,

$\lim_{x \to a} g(f(x)) = g(\lim_{x \to a} f(x))$.

Teorema 3.5 Sejam $b \in \mathbb{R}$, $b \neq 1$, $b > 0$ e $n \in \mathbb{N}$. Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$, então:

a) $\lim_{x \to a} (\text{sen}\, f(x)) = \text{sen}(\lim_{x \to a} f(x)) = \text{sen}\, L$.

b) $\lim_{x \to a} (\cos f(x)) = \cos(\lim_{x \to a} f(x)) = \cos L$.

c) $\lim_{x \to a} b^{f(x)} = b^{\lim_{x \to a} f(x)} = b^L$.

d) $\lim_{x \to a} (\log_b f(x)) = \log_b (\lim_{x \to a} f(x)) = \log_b L$, para $L > 0$.

e) $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$, para todo n se $L \geq 0$ e só para n ímpar se $L < 0$.

Primeira Observação: $\lim_{x \to a} x^n = a^n$.

Exemplo: $\lim_{x \to 2} x^3 = 2^3 = 8$.

Segunda Observação: Seja $p(x) = b_n x^n + b_{n\text{-}1} x^{n\text{-}1} + \ldots + b_1 x + b_0$ um polinômio qualquer, pelo teorema 3.3 a, 3.3 b e pela "Primeira Observação", você tem:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} p(x) &= \lim_{x \to a} (b_n x^n + b_{n\text{-}1} x^{n\text{-}1} + \ldots + b_1 x + b_0) \\
&= \lim_{x \to a} b_n x^n + \lim_{x \to a} b_{n\text{-}1} x^{n\text{-}1} + \ldots + \lim_{x \to a} b_1 x + \lim_{x \to a} b_0 \\
&= b_n \lim_{x \to a} x^n + b_{n-1} \lim_{x \to a} x^{n-1} + \ldots + b_1 \lim_{x \to a} x + \lim_{x \to a} b_0 \\
&= p(a).
\end{aligned}$$

Logo, $\lim_{x \to a} p(x) = p(a)$.

Usando a segunda observação, calcular os limites abaixo.

1) $\lim_{x \to 2} (2x^2 - 7x + 4) = 2 \cdot 2^2 - 7 \cdot 2 + 4 = 2 \cdot 4 - 7 \cdot 2 + 4 = 18.$

2) $\lim_{x \to 1} (x^5 - 3x^4 + 2x^3 + 2) = 1^5 - 3 \cdot 1^4 + 2 \cdot 1^3 + 2 = 1 - 3 + 2 + 2 = 2.$

Vejamos agora alguns exemplos de exercícios resolvidos!

Exemplo 1. Calcular $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+7x-2}{3x-5}$.

Resolução: Pelo teorema 3.3, letra d e pelo Teorema 3.3 letras a e b, você tem:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+7x-2}{3x-5}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x^2+7x-2)}{\lim\limits_{x\to 1}(3x-5)}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 1}x^2+\lim\limits_{x\to 1}7x-\lim\limits_{x\to 1}2}{\lim\limits_{x\to 1}3x-\lim\limits_{x\to 1}5}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 1}x^2+\lim\limits_{x\to 1}7\cdot\lim\limits_{x\to 1}x-\lim\limits_{x\to 1}2}{\lim\limits_{x\to 1}3\cdot\lim\limits_{x\to 1}x-\lim\limits_{x\to 1}5}$$

$$=\frac{1^2+7\cdot 1-2}{3\cdot 1-5}=\frac{6}{-2}=-3.$$

Portanto, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+7x-2}{3x-5}=-3.$

Exemplo 2. Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\left[(x-1)^{10}\cdot(x+5)\right]$.

Resolução: Inicialmente você aplica o Teorema 3.3 letra c depois o Teorema 3.3 letra e, vem

$$\lim_{x\to 0}\left[(x-1)^{10}\cdot(x+5)\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}(x-1)^{10}\cdot\lim_{x\to 0}(x+5)=\lim_{x\to 0}(x-1))^{10}\cdot\lim_{x\to 0}(x+5)$$

$$=(0-1)^{10}\cdot(0+5)=(-1)^{10}\cdot 5=1\cdot 5=5.$$

Portanto, $\lim\limits_{x\to 0}\left[(x-1)^{10}\cdot(x+5)\right]=5.$

Exemplo 3. Determinar $\lim\limits_{x\to 1}\left[\log_{10}(x^2-2x+101)\right]$.

Resolução: Aplicando o Teorema 3.5 letra d e em seguida o Teorema 3.3 letra a você tem:

$$\lim_{x\to 1}\left[\log_{10}(x^2-2x+101)\right]$$

$$=\log_{10}\left[\lim_{x\to 1}(x)^2-2x+101\right]=\log_{10}\left[1^2-2\cdot 1+101\right]$$

$$= \log_{10} 100 = \log_{10} 10^2 = 2 \cdot \log_{10} 10 = 2 \cdot 1 = 2.$$

Portanto, $\lim\limits_{x \to 1} \left[\log_{10}(x^2 - 2x + 101) \right] = 2.$

Vamos apresentar para você alguns problemas resolvidos indicando o caminho para sua resolução.

Problema 1. Determinar $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{x \cdot \cos x}{x+1}$.

Resolução: Aplicando diretamente o Teorema 3.3 letra d e o Teorema 3.5 letra b, vem

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{x \cdot \cos x}{x+1} = \frac{\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (x \cdot \cos x)}{\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (x+1)} = \frac{\frac{\pi}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2} + 1}$$

$$= \frac{\frac{\pi}{2} \cdot 0}{\frac{\pi}{2} + 1} = \frac{0}{\frac{\pi}{2} + 1} 0.$$

Portanto, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{x \cdot \cos x}{x+1} = 0.$

Problema 2. Calcular $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{x^2 \cdot \cos x}{x+2}$.

Resolução: Aplicando o Teorema 3.3 letra d, e a seguir o Teorema 3.3 letra c e o Teorema 3.3 letra a, você tem

$$\lim_{x \to \pi} \frac{x^2 \cdot \cos x}{x+2} = \frac{\lim\limits_{x \to \pi} (x^2 \cdot \cos x)}{\lim\limits_{x \to \pi} (x+2)} = \frac{\lim\limits_{x \to \pi} x \cdot \lim\limits_{x \to \pi} \cos x}{\lim\limits_{x \to \pi} x + \lim\limits_{x \to \pi} 2}$$

$$= \frac{\pi^2 \cdot \cos \pi}{\pi + 2} = \frac{\pi^2 \cdot (-1)}{\pi + 2} = -\frac{\pi^2}{\pi + 2}.$$

Portanto, $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{x^2 \cdot \cos x}{x+2} = -\dfrac{\pi^2}{\pi + 2}.$

Vamos, agora, verificar se você compreendeu os teoremas sobre limites. Resolva os exercícios a seguir, caso seja necessário estude novamente os itens anteriores.

Exercícios Propostos

1) Calcular $\lim\limits_{x\to 27} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-2}$.

2) Calcular $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^3-10x^2+8x+1}{x^2-5x-6}$.

3) Calcular $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\frac{x}{2}\cdot \operatorname{tg} x}{1+x}$.

4) Calcular $\lim\limits_{x\to 2} \left[\cos\ (x^2-5\,x\ +\ 6)\right]$.

5) Calcular $\lim\limits_{x\to -1} 3^{(x^3+3\,x\ +\ 2)}$.

Respostas:

1) $\dfrac{2}{25}$.   2) $\dfrac{7}{12}$.   3) $\dfrac{\pi}{2\cdot(4+\pi)}$.

4) 1.   5) $\dfrac{1}{9}$.

O estudo e compreensão destes itens serão importantes para toda a seqüência de nosso curso. Por isto, só passe para a próxima seção quando tiver feito todos os exercícios propostos acima. Se você teve ainda alguma dúvida releia o item, novamente, e após isto retorne aos exercícios. Este procedimento pode ser bastante útil para descobrir o que você conseguiu compreender até agora.

3.3 Limites Laterais

No item anterior analisamos o comportamento de uma função $f(x)$ quando x se aproxima de um número real a e quando x assume valores (positivos ou negativos) de valor absoluto muito grande. O nosso objetivo agora é estudar os casos quando x tende para a pela direita, $x \to a$ e $x > a$ ou quando x tende para a pela esquerda, $x \to a$ e $x < a$ e com isto identificar a existência de limite de uma função através dos limites laterais e esboçar o gráfico de uma função usando limites laterais. Para isto vejamos as seguintes definições.

Definição 3.2. Limite à esquerda.
Se $f(x)$ tende para L_1 quando x tende para a através de valores menores que a diz-se que L_1 é o limite de $f(x)$ quando x tende para a pela esquerda e indica-se por $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L_1$.

Definição 3.3. Limite à direita.
Se $f(x)$ tende para L_2 quando x tende para a através de valores maiores que a diz-se que L_2 é o limite de $f(x)$ quando x tende para a pela direita e indica-se por $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L_2$.

Vamos ver agora alguns exemplos aplicando as definições acima:

Exemplo 1. Seja a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1, & \text{se } x<1 \\ 4, & \text{se } x=1 \\ 4-x, & \text{se } x>1 \end{cases}.$$

Determinar: a) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$; b) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$. Esboce o gráfico de $f(x)$.

Resolução: Pela definição de limite à esquerda, você responde a letra a. Observe que a função $f(x)$ está definida por $f(x) = x^2+1 \quad se \quad x<1$.

Logo, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+1) = 1^2+1 = 2$.

Assim, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 2$.

Agora, pela definição de limite à direita você responde a letra b. Observe que a função $f(x)$ está definida por $f(x) = 4-x$ se $x>1$.

Logo, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(4-x) = 4-1 = 3$.

Assim, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 3$.

Note que $f(1)=4$. Com estas informações, de que $f(1)=4$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 2$ e $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 3$, você consegue perceber como $f(x)$ se comporta quando x está próximo de 1. Para esboçar o gráfico

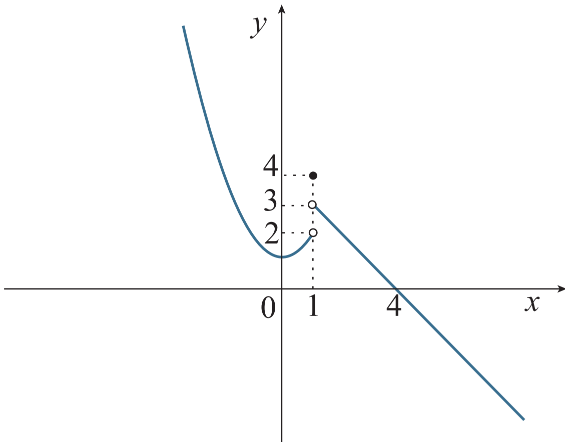


Figura 3.6

de $f(x)$, dê valores para x, $x<1$ e calcule os valores de $f(x)$ correspondentes através da expressão x^2+1, dê valores para $x>1$ e calcule os valores de $f(x)$ correspondentes através da expressão $4-x$ e veja o gráfico de $f(x)$ ao lado (figura 3.6).

Exemplo 2. Considere a função

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1, & \text{se } x\le -2 \\ 2x+7, & \text{se } x>-2 \end{cases}.$$

Determinar: a) $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$; b) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$. Esboçar o gráfico de $f(x)$.

Resolução: Pela definição de limite à esquerda, vamos resolver letra a. Observe como está definida a função acima para valores de x à esquerda de –2, ou seja, para $x\le -2$.

Assim, $f(x) = x^2-1$ se $x\le -2$ e

$\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-}(x^2-1)=(-2)^2-1=3$.

Logo, $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = 3$.

Pela definição de limite à direita, vamos resolver a letra b. Para valores de x à direita de –2, a função $f(x)$ está definida por $f(x)=2x+7$ se $x>-2$ e

$\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+}(2x+7)=2\cdot(-2)+7=3$.

Logo, $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=3$.

Portanto, $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = 3$.

Note que $f(-2)=(-2)^2-1=4-1=3$.

Como $f(-2)=3$ e $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = 3$, para esboçar o gráfico de $f(x)$, dê valores para x, $x\le -2$ e calcule os valores de $f(x)$ correspondentes através da expressão x^2-1, dê valores para $x>-2$ e calcule os valores de $f(x)$ correspondentes através da expressão $2x+7$ e veja o gráfico de $f(x)$ a seguir.

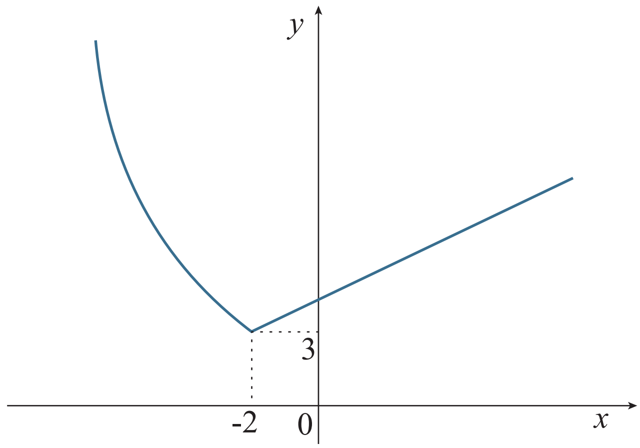


Figura 3.7

Exemplo 3. Considere a função $f(x) = 2 + \sqrt{x-4}$. Determinar se possível $\lim_{x \to 4^-} f(x)$ e $\lim_{x \to 4^+} f(x)$. Esboçar o gráfico de $f(x)$.

Resolução: Não se pode questionar $\lim_{x \to 4^-} f(x)$ pois a função $f(x)$ só está definida para $x - 4 \geq 0$ ou $x \geq 4$. Se $x < 4$ então $x - 4$ será um número negativo e $x \notin \text{Dom} f$.

Para calcular o $\lim_{x \to 4^+} f(x)$, você tem que a função $f(x)$ está definida somente para valores de $x - 4 \geq 0$ ou $x \geq 4$ e podemos escrever

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 4^+} f(x) &= \lim_{x \to 4^+} (2 + \sqrt{x-4}) = \lim_{x \to 4^+} 2 + \lim_{x \to 4^+} \sqrt{x-4} \\ &= 2 + \sqrt{\lim_{x \to 4^+} (x-4)} = 2 + \sqrt{4-4} = 2 + 0 = 2. \end{aligned}$$

Portanto, $\lim_{x \to 4^+} f(x) = 2$.

Para esboçar o gráfico de $f(x)$, dê valores para x, $x \geq 4$ e calcule os valores de $f(x)$ correspondentes e você terá o gráfico de $f(x)$ a seguir.

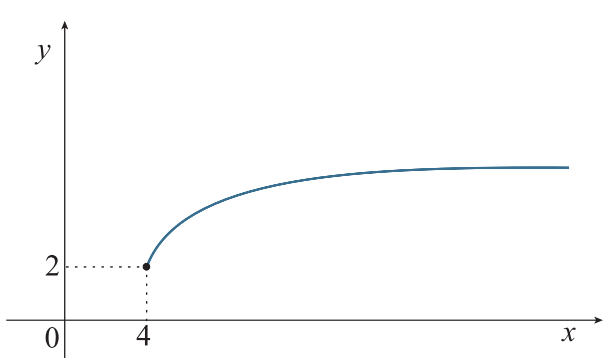


Figura 3.8

As definições de limite à esquerda e de limite à direita nos motiva o seguinte Teorema.

Teorema 3.6. (Teorema de Existência do Limite).
Sejam I um intervalo aberto, a um ponto deste intervalo e

$f: \mathrm{I} - \{a\} \to \mathbb{R}$. Então $\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L$.

Vejamos agora alguns exemplos de aplicação do teorema de existência do limite.

Exemplo 1. Considere a função $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{se } x < 2 \\ 1, & \text{se } x = 2 \\ x + 3, & \text{se } x > 2 \end{cases}$.

Determinar o $\lim_{x \to 2} f(x)$, se existir, e esboçar o gráfico de $f(x)$.

Resolução: Para determinar o $\lim_{x \to 2} f(x)$, vamos calcular os limites laterais de $f(x)$, ou seja, calcular $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ e $\lim_{x \to 2^+} f(x)$. Para calcular $\lim_{x \to 2^-} f(x)$, observe na função dada como $f(x)$ está definida por $f(x) = x^2 + 1$ para valores de x menores que 2.

Assim, $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (x^2 + 1) = 2^2 + 1 = 5$.

Para calcular $\lim_{x \to 2^+} f(x)$, observe na função dada como $f(x)$ está definida por $f(x) = x + 3$ para valores de x maiores que 2.

Assim, $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (x + 3) = 2 + 3 = 5$.

Como $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 5$ e $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 5$,, pelo teorema acima temos $\lim_{x \to 2} f(x) = 5$.

Para esboçar o gráfico da função $f(x)$ você utiliza o mesmo procedimento do exemplo anterior e conseguirá facilmente o gráfico da função $f(x)$ conforme figura 3.9.

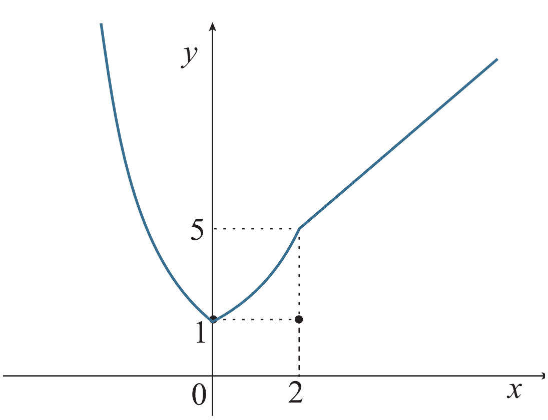


Figura 3.9

Exemplo 2. Seja a função $f(x) = \begin{cases} x + 2, & se \;\; x \le 4 \\ 5 - x, & se \;\; x > 4 \end{cases}$.

Determinar $\lim_{x \to 4} f(x)$, se existir, e esboçar o gráfico de $f(x)$.

Resolução: Para determinar o $\lim_{x\to 4} f(x)$, devemos calcular os limites laterais de $f(x)$, ou seja, calcular $\lim_{x\to 4^-} f(x)$ e $\lim_{x\to 4^+} f(x)$.

Para calcular $\lim_{x\to 4^-} f(x)$ observe na função dada como $f(x)$ está definida por $f(x) = x+2$ para valores de x menores que 4.

Assim, $\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-}(x+2) = 4+2 = 6$.

Para calcular o $\lim_{x\to 4^+} f(x)$ verifique agora como $f(x)$ está definida por $f(x) = 5-x$ para valores de $x > 4$.

Assim, $\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+}(5-x) = 5-4 = 1$.

Como $\lim_{x\to 4^-} f(x) = 6$ e $\lim_{x\to 4^+} f(x) = 1$,,isto é, os limites laterais são diferentes, conclui-se pelo teorema de existência do limite que não existe $\lim_{x\to 4} f(x)$.

Para esboçar o gráfico da função $f(x)$ você utiliza o mesmo procedimento dos exemplos anteriores e conseguirá facilmente o gráfico da função $f(x)$ conforme a seguir.

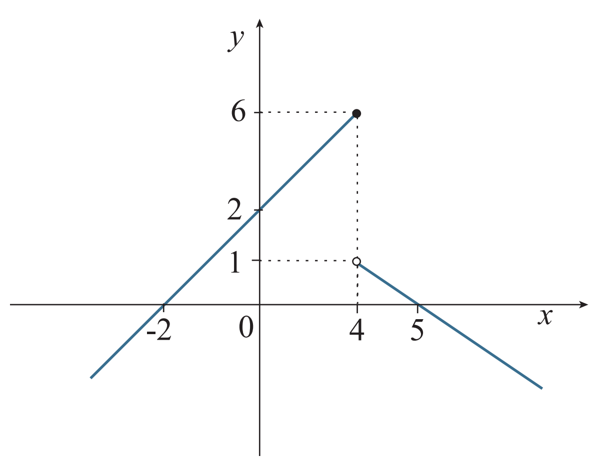


Figura 3.10

Exemplo 3. Considere a função $f(x) = \begin{cases} 3x-5, & \text{se } x < 2 \\ 4x+k, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$.

Determinar o valor da constante real k para que exista $\lim_{x\to 2} f(x)$.

Resolução: Inicialmente vamos calcular os limites laterais de $f(x)$. Para calcular o limite à esquerda de 2 (para $x < 2$), temos

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}(3x-5) = 3\cdot 2 - 5 = 6 - 5 = 1$.

Assim, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 1$.

Para calcular o limite à direita de 2 (para $x > 2$), temos $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}(4x+k) = 4\cdot 2 + k = 8 + k$.

Assim, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 8 + k$.

Pelo teorema 3.6, você sabe que existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ se e somente se os limites laterais existem e são iguais, ou seja, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$.

Como $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 1$ *e* $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 8 + k$, vem $1=8+k$, o que fornece $k = 1 - 8 = -7$. Logo $k = -7$.

Portanto, o valor da constante real k para que exista $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ é $k = -7$.

Vamos apresentar agora alguns problemas resolvidos indicando o percurso da solução.

Problema 1. Considere a função $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{se} \quad x < 0 \\ 3, & \text{se} \quad 0 \le x \le 3 \\ x, & \text{se} \quad x > 3 \end{cases}$.

Calcular: a) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$; b) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$; c) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$; d) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$.

Resolução:

a) Para $x < 0$ você tem $f(x) = -x$, assim, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(-x) = 0$.

b) Para $x \ge 0$, $0 \le x \le 3$, você tem $f(x) = 3$, assim,
$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 3 = 3$.

Logo, pelo Teorema 3.6, você conclui que não existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

c) Para $x \le 3$, ou seja, $0 \le x \le 3$, você tem $f(x) = 3$, assim,
$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} 3 = 3$.

d) Para $x > 3$, você tem $f(x) = x$, assim, $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} x = 3$.

Como $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 3$ e $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 3$, você conclui, pelo Teorema 3.6, que $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 3$.

Problema 2. Determinar: a) $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x)$; b) $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$; c) $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$,

onde $f(x)$ é definida por $f(x) = \begin{cases} 3x+1, & \text{se} \quad x \leq -2 \\ -x, & \text{se} \quad x > -2 \end{cases}$.

Resolução:

a) Para $x \leq -2$, note que $f(x)$ está definida por $f(x) = 3x+1$, assim, $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (3x+1) = 3 \cdot (-2) + 1 = -6 + 1 = -5$ ou

$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\ 5$.

b) Para $x > -2$, $f(x)$ está definida por $f(x) = -x$, assim, $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^+} (-x) = 2$ ou $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = 2$.

c) Como $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = 2$ e $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\ 5$, ou seja,

$\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to -2^-} f(x)$, pelo Teorema 3.6, $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ não existe.

Problema 3. Considere o gráfico da função a seguir

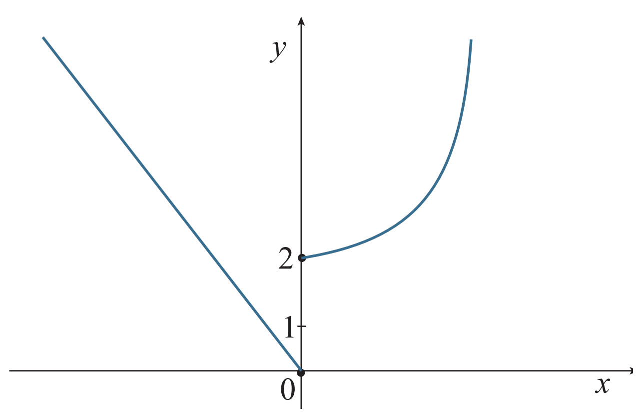


Figura 3.11

Intuitivamente, determinar $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$.

Resolução: Você observa no gráfico acima que quando x assume valores positivos "próximos" de zero, $f(x)$ se aproxima de 2, logo, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 2$.

Do mesmo modo, observando no gráfico acima, você tem que quando x assume valores negativos "próximos" de zero, $f(x)$ se aproxima de 0, logo, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$.

Vamos conferir se você está acompanhando tudo até aqui? Tente resolver os exercícios propostos a seguir.

Exercícios Propostos

1) Seja $f(x)=\begin{cases} 7x-2, & \text{se } x\geq 2 \\ x^2-2x+1, & \text{se } x<2 \end{cases}$

Calcular: $\lim_{x\to 2^+} f(x)$, $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ *e* $\lim_{x\to 2} f(x)$.

2) Seja $f(x)=\begin{cases} x+1, & \text{se } x<0 \\ 2, & \text{se } x=0 \\ \sqrt{x+5}, & \text{se } x>0 \end{cases}$

Calcular: $\lim_{x\to 0^-} f(x)$; $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ e $\lim_{x\to 0} f(x)$.

3) Seja $\mathrm{f}(x)=\begin{cases} x+1, & \text{se } x<2 \\ \sqrt{x^3+1}, & \text{se } x\geq 2 \end{cases}$, calcular:

$\lim_{x\to 2^-} f(x)$, $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ *e* $\lim_{x\to 2} f(x)$.

4) Seja $f(x)$ uma função definida para todo número real por

$f(x)=\begin{cases} x^2-4x, & \text{se } x\leq -2 \\ 4-k, & \text{se } x>-2 \end{cases}$. Determinar o valor da constante k para que exista $\lim_{x\to -2} f(x)$.

5) Seja $f(x)=\begin{cases} x^2-6x+8, & \text{se } x>4 \\ 4-x, & \text{se } x\leq 4 \end{cases}$

Calcular: $\lim_{x\to 4^+} f(x)$, $\lim_{x\to 4^-} f(x)$ e $\lim_{x\to 4} f(x)$.

Respostas:

1) $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 12$, $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to 2} f(x)$ não existe.

2) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$; $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\sqrt{5}$. Não existe $\lim_{x\to 0} f(x)$.

3) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 3$, $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 3$ e $\lim_{x\to 2} f(x) = 3$.

4) $k = -8$.

5) $\lim_{x\to 4^+} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 4^-} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to 4} f(x) = 0$.

Os exercícios deste ítem têm por objetivo contribuir para o amadurecimento do conceito da existência do limite de uma função. Para isto, é importante que você tenha resolvido a maioria deles. Se você percebeu alguma dificuldade, reveja os exemplos, pois eles contêm tudo que você precisa para resolvê-los.

Da noção de limite lateral, dependerá, fundamentalmente, o entendimento de continuidade de uma função que será estudada na seção 3.8.

3.4 Indeterminação

Na seção anterior, você estudou Limites Laterais. Nesta seção, vamos entender melhor o que vem a ser Indeterminação. Nosso objetivo aqui é "levantar" uma indeterminação que é uma expressão sem sentido que se obtém ao tentar calcular um limite. Por exemplo, usando erroneamente o item d do Teorema 3.3 para calcular $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ se chega à expressão $\frac{0}{0}$ que não possui significado. Neste processo utilizaremos alguns artifícios algébricos.

Para saber mais sobre como levantar uma indeterminação do tipo 0/0, leia KÜHLKAMP, Nilo. Cálculo 1. 3. Ed.UFSC, Florianópolis, 2006

Até agora calculamos limites do quociente entre duas funções aplicando o Teorema 3.3, letra d, veja o exercício 1 resolvido $\left(\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+7x-2}{3x-5}=-3\right)$. Utilizando este teorema, você notou que não houve nenhuma dificuldade para encontrar o valor do referido limite, mas podem ocorrer situações em que você, usando erroneamente o item d do Teorema 3.3, encontre $\frac{0}{0}$. Cuidado quando isto ocorrer: o limite nunca é $\frac{0}{0}$, pois $\frac{0}{0}$ não é número algum. Neste caso, o que fazer? É o que veremos a seguir.

Consideremos $f(x)$ e $g(x)$ funções tais que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$. A princípio, nada se pode afirmar sobre o

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to 0} f(x)}{\lim\limits_{x\to 0} g(x)}=\frac{0}{0}$$ (com a aplicação indevida do Teorema 3.3 idem d).

Dependendo das funções f e g o limite pode assumir qualquer valor real ou não existir. Diz-se que $\frac{0}{0}$ é uma indeterminação, ou um símbolo de indeterminação. Para melhor entendimento, vejamos os exemplos abaixo.

Exemplo 1. Sejam $f(x) = x^4$ e $g(x) = x^3$.

Tem-se $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^4 = 0^4 = 0$ e $\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} x^3 = 0^3 = 0$.

Mas, $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^3} = \lim_{x\to 0} x = 0$.

Exemplo 2. Sejam $f(x) = x^3$ e $g(x) = 4\,x^3$.

Você tem $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^3 = 0^3 = 0$ e $\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} 4x^3 = 4\cdot 0^3 = 0$.

Neste caso, $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{4\,x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$..

Tentando calcular limites de funções, aplicando os teoremas vistos, você pode chegar a outras expressões cujo significado, ou valor, não é determinado. Ao todo são sete as indeterminações:

$$\frac{0}{0}\ ,\ \frac{\infty}{\infty}\ ,\ 0\ .\ \infty\ ,\ \infty - \infty\ ,\ 0^0\ ,\ 1^\infty \text{ e } \infty^0 .$$

Vamos então calcular alguns limites.

> Sempre que no cálculo de um limite você chegar a um destes símbolos, deve buscar alguma alternativa para obter o valor do limite usando artifícios algébricos. A este trabalho dá-se o nome de levantamento de uma indeterminação.

Exemplo 1. Calcular $\lim_{x\to 5} \frac{x-5}{x^2-25}$.

Fatorar é transformar equações algébricas em produtos de duas ou mais expressões, chamadas fatores. Ex: $ax + ay = a.(x+y)$.

Resolução: Se no cálculo deste limite você tentar utilizar o item d do Teorema 3.3 (que não pode ser aplicado aqui, pois o denominador tem limite 0), você chegará à indeterminação $\frac{0}{0}$. Neste caso o artifício algébrico usado para levantar a indeterminação obtida é a fatoração.

Para fatorar o denominador x^2-25 vamos utilizar o produto notável $a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b)$.

Assim, você tem $x^2-25=x^2-5=(x-5)\cdot(x+5)$.

Desta forma o limite dado, será igual a

$$\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{x^2-25}=\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{(x-5)\cdot(x+5)}=\lim_{x\to 5}\frac{1}{x+5}=\frac{1}{5+5}=\frac{1}{10}$$

Portanto, $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{x^2-25}=\dfrac{1}{10}$.

Exemplo 2. Calcular $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-5\,x^2+6\,x}{x^2-7\,x\;+\;10}$.

Resolução: Se no cálculo deste limite você tentar utilizar o item d do Teorema 3.2.3 (que não pode ser aplicado aqui, pois o denominador tem limite 0), você chegará à indeterminação $\dfrac{0}{0}$. Neste caso o artifício algébrico usado para levantar a indeterminação obtida é a fatoração. Para obter as fatorações necessárias, você usa a seguinte proposição, que diz:

> Um número a é raiz ou zero de um polinômio $p(x)$ se, e somente se, $p(x)$ é divisível por $x-a$.

Como $x=2$ é uma raiz ou zero do numerador e do denominador, para efetuar a fatoração de ambos, em divisão de um polinômio por um monômio, faremos isto em duas etapas:

Etapa 1. Você divide o numerador, x^3-5x^2+6x por $x-2$, tem

$$\begin{array}{r|l}
x^3-5x^2+6x & x-2 \\ \cline{2-2}
-x^3+2x^2 & x^2-3x \\ \cline{1-1}
-3x^2+6x & \\
+3x^2-6x & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Assim, $x^3-5x^2+6x=(x-2)\cdot(x^2-3x)$.

Etapa 2. Você agora divide o denominador $x^2 - 7\,x\ +\ 10$ por $x-2$, tem

$$\begin{array}{r|l} x^2-7x+10 & x-2 \\ \cline{2-2} -x^2+2x & x-5 \\ -5x+10 & \\ \cline{1-1} -5x+10 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Assim, $x^3-5x^2+6x=(x-2)\cdot(x-5)$. Logo,

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-5x^2+6x}{x^2-7x+10}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\cdot(x^2-3x)}{(x-2)\cdot(x-5)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x}{x-5}=\frac{2^2-3\cdot 2}{2-5}=\frac{4-6}{-3}=\frac{-2}{-3}=\frac{2}{3}.$$

Portanto, $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-5\,x^2+6\,x}{x^2-7\,x\ +\ 10}\ =\ \dfrac{2}{3}.$

Exemplo 3. Calcular $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}$.

Resolução: Para calcular este limite se você tentar utilizar o item d do Teorema 3.3 (que não pode ser aplicado, pois o denominador tem limite 0), você chegará à indeterminação $\dfrac{0}{0}$.

Vamos levantar esta indeterminação e para isto você usa o artifício algébrico do produto notável $a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b)$. Você multiplica o numerador da função, $\sqrt{x}-3$, pelo seu conjugado, $\sqrt{x}+3$, para eliminar a raiz quadrada do numerador. Para não alterar a função você multiplica também o denominador por $\sqrt{x}+3$.

Como $(\sqrt{x+3}-\sqrt{3})\cdot(\sqrt{x+3}+\sqrt{3})=(\sqrt{x+3})^2-(\sqrt{3})^2$, temos

$$\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}=\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}\cdot\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}=\lim_{x\to 9}\frac{(\sqrt{x}-3)\cdot(\sqrt{x}+3)}{(x-9)\cdot(\sqrt{x}+3)}$$

$$=\lim_{x\to 9}\frac{(x-9)}{(x-9)\cdot(\sqrt{x}+3)}=\lim_{x\to 9}\frac{1}{\sqrt{x}+3}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{9}+3}=\frac{1}{3+3}=\frac{1}{6}.$$

Portanto, $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}=\dfrac{1}{6}$.

Apresentaremos, agora, alguns problemas resolvidos indicando o percurso para sua solução.

Problema 1. Determinar o valor do seguinte limite $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x}$.

Resolução: Neste limite se você tentar utilizar o item d do Teorema 3.3 (que não pode ser aplicado, pois o denominador tem limite 0), você chegará à indeterminação $\dfrac{0}{0}$.

Vamos usar o artifício algébrico da racionalização do numerador da função para levantar a indeterminação. Vamos multiplicar o numerador da função, $\sqrt{x+3}-\sqrt{3}$, pelo seu conjugado, $\sqrt{x+3}+\sqrt{3}$ e aplicar o produto notável $a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b)$. Temos

$$(\sqrt{x+3}-\sqrt{3})\cdot(\sqrt{x+3}+\sqrt{3})=(\sqrt{x+3})^2-(\sqrt{3})^2$$

$$=(x+3)-3=x.$$

Para não alterar a fração vamos multiplicar também o denominador da função por $\sqrt{x+3}+\sqrt{3}$.

Assim o limite dado passa de $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x}$ para

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x}\cdot\dfrac{\sqrt{x+3}+\sqrt{3}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{3}}$, ou seja,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x}\cdot\frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{3}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{3}}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+3}-\sqrt{3})\cdot(\sqrt{x+3}+\sqrt{3})}{x\cdot(\sqrt{x+3}+\sqrt{3})}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\cdot(\sqrt{x+3}+\sqrt{3})}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{0+3}+\sqrt{3}}\\
&=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{3}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x}=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$.

Problema 2. Calcular $\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 2}{x - 8}$.

Resolução: Neste limite se você tentar utilizar o item d do Teorema 3.3 (que não pode ser aplicado, pois o denominador tem limite 0), você chegará à indeterminação $\dfrac{0}{0}$.

Vamos transformar a expressão cujo limite se quer calcular num quociente entre dois polinômios para levantar a indeterminação e para isto vamos fazer uma mudança de variável, escrevendo $\sqrt[3]{x} = u$.

De $\sqrt[3]{x} = u$ temos que $u = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ e elevando a igualdade a terceira potência vem $u^3 = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 = x$. Você observa que, quando x tende para 8, u tende para 2, de fato, em $\sqrt[3]{x} = u$, faça $x = 8$ e você terá $u = 2$.

Assim, o limite dado passa de $\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 2}{x - 8}$ para $\lim\limits_{u \to 2} \dfrac{u - 2}{u^3 - 8}$ ou $\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 2}{x - 8} = \lim\limits_{u \to 2} \dfrac{u - 2}{u^3 - 8}$. Agora, a fatoração do denominador você obtém dividindo $u^3 - 8$ por $u - 2$, cujo quociente é $u^2 + 2u + 4$.

Então, $u^3 - 8 = (u - 2) \cdot (u^2 + 2u + 4)$.

Logo, $\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 2}{x - 8} = \lim\limits_{u \to 2} \dfrac{u - 2}{u^3 - 8} = \lim\limits_{u \to 2} \dfrac{(u - 2)}{(u - 2) \cdot (u^2 + 2u + 4)}$

$$= \lim_{u \to 2} \frac{1}{u^2 + 2u + 4} = \frac{1}{4 + 4 + 4} = \frac{1}{12}.$$

Portanto, $\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 2}{x - 8} = \dfrac{1}{12}$.

Vamos conferir se você está acompanhando tudo até aqui? Considerando os estudos feitos até o final deste item, resolva os exercícios propostos:

Exercícios Propostos

1) Calcular $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^2 + 7x + 6}$.

2) Calcular $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x - 3}$.

3) Calcular $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$.

4) Calcular $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$.

5) Calcular $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^2-7x+4}-2}{x}$.

Respostas:

1) $-\dfrac{2}{5}$.

2) $\dfrac{3}{4}$.

3) $-\dfrac{1}{3}$.

4) $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

5) $-\dfrac{7}{4}$.

3.5 Limites no Infinito

Vimos anteriormente o comportamento de uma função $f(x)$ quando x aproxima-se de um número real a. Vimos também, na seção anterior, como levantar uma indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$. Nesta seção, iremos analisar o comportamento de uma função $f(x)$ quando x assume valores positivos arbitrariamente grandes (quando x tende para $+\infty$), ou valores negativos com valores absolutos arbitrariamente grandes (quando x tende para $-\infty$); aplicar o Teorema de $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$, para n um número positivo qualquer e levantar indeterminação do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$. Pois, aqui, a análise será feita com a variável x tendendo ora para mais infinito, ora para menos infinito. Utilizaremos sempre algum artifício algébrico para levantar uma indeterminação do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Para um melhor entendimento, consideremos a seguinte função:

$f(x) = \dfrac{3x+1}{x+1}$, para $x \neq 1$.

Para valores de x, por exemplo, 0, 1, 2, 4, 5, 10, 100, 1000 e 10000 e assim por diante, de tal forma que x cresça ilimitadamente construímos a seguinte tabela para os correspondentes valores da função $f(x)$.

x	0	1	2	4	5	10	100	1000	10000
$f(x)=\dfrac{3x+1}{x+1}$	1	2	2,31	2,6	2,67	2,98	2,98	2,998	2,9998

À medida que x cresce através de valores positivos, observamos que os valores da função $f(x)$ se aproximam cada vez mais de 3. Logo, pode-se dizer que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x+1}{x+1} = 3$.

Temos a seguinte definição.

Definição 3.4. Seja $f(x)$ uma função definida em todo número real de um intervalo $(a,+\infty)$. O limite de $f(x)$, quando x cresce ilimitadamente, é L, e escreve-se $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$, se para qualquer $\varepsilon > 0$, existir um número $T > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $x > T$.

Vamos considerar novamente a função $f(x) = \dfrac{3x+1}{x+1}$,, para $x \neq -1$. Considerando para x valores, por exemplo, $-1,5; -2; -3; -5; -10; -100; -1000; -10000$ e assim por diante de tal forma que x decresça ilimitadamente. Então os valores da função $f(x)$ correspondentes estão na tabela a seguir

x	-1,5	-2	-3	-5	-10	-100	-1000	-10000	...
$f(x)=\dfrac{3x+1}{x+1}$	-7	5	4	3,5	3,222	3,0202	3,0020	3,0002	...

Observamos que, à medida em que os valores de x decrescem ilimitadamente, $f(x)$ aproxima-se cada vez mais de 3. Logo, pode-se afirmar que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x+1}{x+1} = 3$. E por conta disso temos a seguinte definição.

Definição 3.5. Seja $f(x)$ uma função definida em todo número real de um intervalo $(-\infty, a)$. O limite de $f(x)$, quando x decresce ilimitadamente, é L, e escreve-se $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$, se para qualquer $\varepsilon > 0$, existir um número $T < 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $x < T$.

Assim, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x+1}{x+1} = 3$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x+1}{x+1} = 3$, veja o gráfico de $f(x)$ a seguir.

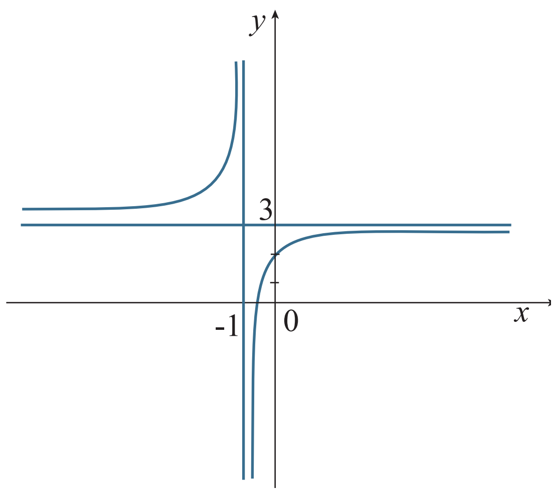


Figura 3.12

Observe atentamente pelo gráfico que $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$.

Teorema 3.7. Se n é um número positivo qualquer, então

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$; ii) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$.

Vamos agora aplicar o Teorema 3.7 na resolução de exemplos.

Exemplo 1. Determinar o valor de $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{7x + 2}{\sqrt{5x^2 - 3}}$.

Resolução: Se no cálculo deste limite você tentar utilizar o item d do Teorema 3.3 (que se aplica somente quando $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M \neq 0$, com $L, M \in \mathbb{R}$ o que não ocorre aqui), você chegará à indeterminação $\dfrac{\infty}{\infty}$. Para levantar esta indeterminação, divida o numerador e o denominador de $f(x)$ por x, para x maior que zero, pois os valores x devem ser considerados positivos.

Assim,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x+2}{\sqrt{5x^2-3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{7x+2}{x}}{\dfrac{\sqrt{5x^2-3}}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{7x+2}{x}}{\sqrt{\dfrac{5x^2-3}{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{7x}{x}+\dfrac{2}{x}}{\sqrt{\dfrac{5x^2}{x^2}-\dfrac{3}{x^2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{7+\dfrac{2}{x}}{\sqrt{5-\dfrac{3}{x^2}}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(7+\dfrac{2}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{5-\dfrac{3}{x^2}}\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(7+\dfrac{2}{x}\right)}{\sqrt{\lim\limits_{x\to\infty}\left(5-\dfrac{3}{x^2}\right)}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}7+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x}}{\sqrt{\lim\limits_{x\to\infty}5-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x^2}}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}7+\lim\limits_{x\to\infty}\left(2\cdot\dfrac{1}{x}\right)}{\sqrt{\lim\limits_{x\to\infty}5-\lim\limits_{x\to\infty}\left(3\cdot\dfrac{1}{x^2}\right)}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}7+\left(\lim\limits_{x\to\infty}2\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\right)}{\sqrt{\lim\limits_{x\to\infty}5-\left(\lim\limits_{x\to\infty}3\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}\right)}}$$

Pelo Teorema 3.7, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$ *e* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$, calculando o limite quando $x\to\infty$, a expressão do lado direito da igualdade acima, fica $\dfrac{7+2\cdot 0}{\sqrt{5-3\cdot 0}}=\dfrac{7}{\sqrt{5}}$.

Portanto, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x+2}{\sqrt{5x^2-3}}=\dfrac{7}{\sqrt{5}}$.

Exemplo 2. Calcular $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{7x+2}{\sqrt{5x^2-3}}$.

Resolução: Se no cálculo deste limite você tentar utilizar o item d do Teorema 3.3 (que se aplica somente quando $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$ e $\lim\limits_{x\to a}g(x)=M\neq 0$,com $L,M\in\mathbb{R}$ o que não ocorre aqui), você chegará à indeterminação $\dfrac{\infty}{\infty}$. Como no exemplo anterior, para levantar esta indeterminação, divida o numerador e o denominador da função $f(x)$ por x. Como x tende a menos infinito, os valores de

x devem ser considerados negativos. Para o denominador vamos considerar $x = -\sqrt{x^2}$.

Assim,

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{7x+2}{\sqrt{5x^2-3}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\dfrac{7x+2}{x}}{\dfrac{\sqrt{5x^2-3}}{x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\dfrac{7x+2}{x}}{\dfrac{\sqrt{5x^2-3}}{-\sqrt{x^2}}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\dfrac{7x+2}{x}}{-\sqrt{\dfrac{5x^2-3}{x^2}}} = \frac{\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{7x+2}{x}}{\lim\limits_{x \to -\infty} -\sqrt{\dfrac{5x^2-3}{x^2}}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{7x}{x} + \dfrac{2}{x}}{-\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{\dfrac{5x^2}{x^2} - \dfrac{3}{x^2}}} = \frac{\lim\limits_{x \to -\infty} \left(7 + \dfrac{2}{x}\right)}{-\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{5 - \dfrac{3}{x^2}}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to -\infty} 7 + \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2}{x}}{-\sqrt{\lim\limits_{x \to -\infty} 5 - \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3}{x^2}}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to -\infty} 7 + \lim\limits_{x \to -\infty} 2 \cdot \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x}}{-\sqrt{\lim\limits_{x \to -\infty} 5 - \lim\limits_{x \to -\infty} 3 \cdot \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2}}}$$

$$= \frac{7 + 2 \cdot 0}{\sqrt{5 - 3 \cdot 0}} = \frac{7}{-\sqrt{5}} = -\frac{7}{\sqrt{5}}.$$

Portanto, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{7x+2}{\sqrt{5x^2-3}} = -\dfrac{7}{\sqrt{5}}$.

Exemplo 3. Determinar $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x^3 - 8x + 7}{6x^5 - 3}$.

Resolução: Para calcular este limite se você tentar utilizar o item d do Teorema 3.3 (que se aplica somente quando $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M \neq 0$, com $L, M \in \mathbb{R}$ e aqui isto não ocorre), você chegará à indeterminação $\dfrac{\infty}{\infty}$. Para levantar esta indeterminação, divida o numerador e o denominador da função $f(x)$ pela maior potência ou expoente da variável x, que no neste nosso caso é x^5.

Assim, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x^3 - 8x + 7}{6x^5 - 3} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\dfrac{4x^3 - 8x + 7}{x^5}}{\dfrac{6x^5 - 3}{x^5}}$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\dfrac{4x^3}{x^5} - \dfrac{8x}{x^5} + \dfrac{7}{x^5}}{\dfrac{6x^5}{x^5} - \dfrac{3}{x^5}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\dfrac{4}{x^2} - \dfrac{8}{x^4} + \dfrac{7}{x^5}}{6 - \dfrac{3}{x^5}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{4}{x^2} - \dfrac{8}{x^4} + \dfrac{7}{x^5} \right)}{\lim\limits_{x \to -\infty} (6 - \dfrac{3}{x^5})}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4}{x^2} - \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{8}{x^4} + \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{7}{x^5}}{\lim\limits_{x \to -\infty} 6 - \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3}{x^5}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to -\infty} \left(4 \cdot \dfrac{1}{x^2} \right) - \lim\limits_{x \to -\infty} \left(8 \cdot \dfrac{1}{x^4} \right) + \lim\limits_{x \to -\infty} \left(7 \cdot \dfrac{1}{x^5} \right)}{\lim\limits_{x \to -\infty} 6 - \lim\limits_{x \to -\infty} \left(3 \cdot \dfrac{1}{x^5} \right)}$$

$$= \frac{4 \cdot \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2} - 8 \cdot \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^4} + 7 \cdot \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^5}}{\lim\limits_{x \to -\infty} 6 - 3 \cdot \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^5}}$$

Pelo Teorema 3.7, sabemos que $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^4} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^5} = 0$,

assim $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x^3 - 8x + 7}{6x^5 - 3} = \dfrac{4 \cdot 0 - 8 \cdot 0 + 7 \cdot 0}{6 - 3 \cdot 0} = 0$.

Portanto, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x^3 - 8x + 7}{6x^5 - 3} = 0$.

Apresentaremos, agora, alguns problemas resolvidos indicando o percurso de sua resolução. Acompanhe, atentamente, os passos indicados.

Problema 1. Calcular $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2+x+1}}{\sqrt{3x^2+4}}$.

Resolução: Para calcular este limite se você tentar utilizar o item d do Teorema 3.3 (que se aplica somente quando $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M \neq 0$, com $L, M \in \mathbb{R}$ e aqui isto não ocorre), você chegará à indeterminação $\dfrac{\infty}{\infty}$. Para levantar esta indeterminação acompanhe atentamente o seguinte desenvolvimento algébrico

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{2x^2+x+1}}{\sqrt{3x^2+4}} = \sqrt{\lim_{x\to -\infty} \frac{2x^2+x+1}{3x^2+4}}$$

$$= \sqrt{\lim_{x\to -\infty} \frac{2x^2+x+1}{3x^2+4}}$$

$$= \sqrt{\lim_{x\to -\infty} \frac{\dfrac{2x^2+x+1}{x^2}}{\dfrac{3x^2+4}{x^2}}}$$

$$= \sqrt{\lim_{x\to -\infty} \frac{\dfrac{2x^2}{x^2}+\dfrac{x}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{3x^2}{x^2}+\dfrac{4}{x^2}}}$$

$$= \sqrt{\lim_{x\to -\infty} \frac{2+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{3+\dfrac{4}{x^2}}}$$

$$= \sqrt{\frac{\lim\limits_{x\to -\infty}\left(2+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to -\infty}\left(3+\dfrac{4}{x^2}\right)}}$$

$$= \sqrt{\frac{\lim\limits_{x \to -\infty} 2 + \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} + \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x \to -\infty} 3 + \lim\limits_{x \to -\infty} \left(4 \cdot \frac{1}{x^2}\right)}}$$

$$= \sqrt{\frac{2+0+0}{3+4\cdot 0}} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Portanto, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2 + x + 1}}{\sqrt{3x^2+4}} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}.$

Problema 2. Calcular $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^4 - 3x^2 + x + 1}{x^5 + 3x^4 - 3x^2 + 2}.$

Resolução: Para calcular este limite se você tentar utilizar o item d do Teorema 3.3 (que se aplica somente quando $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M \neq 0$, com $L, M \in \mathbb{R}$ o que não ocorre aqui), você chegará à indeterminação $\dfrac{\infty}{\infty}$. Para levantar esta indeterminação vamos dividir o numerador e o denominador de $f(x)$ pela maior potência em x, neste caso x^5 e vem

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^4 - 3x^2 + x + 1}{x^5 + 3x^4 - 3x^2 + 2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{2x^4 - 3x^2 + x + 1}{x^5}}{\dfrac{x^5 + 3x^4 - 3x^2 + 2}{x^5}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{2x^4}{x^5} - \dfrac{3x^2}{x^5} + \dfrac{x}{x^5} + \dfrac{1}{x^5}}{\dfrac{x^5}{x^5} + \dfrac{3x^4}{x^5} - \dfrac{3x^2}{x^5} + \dfrac{2}{x^5}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{x^3} + \dfrac{1}{x^4} + \dfrac{1}{x^5}}{1 + \dfrac{3}{x} - \dfrac{3}{x^3} + \dfrac{2}{x^5}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{x^3} + \dfrac{1}{x^4} + \dfrac{1}{x^5}\right)}{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{3}{x} - \dfrac{3}{x^3} + \dfrac{2}{x^5}\right)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2\cdot\frac{1}{x}\right) - \lim\limits_{x\to+\infty}\left(3\cdot\frac{1}{x^3}\right) + \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^4} + \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^5}}{\lim\limits_{x\to+\infty}1 + \lim\limits_{x\to+\infty}\left(3\cdot\frac{1}{x}\right) - \lim\limits_{x\to+\infty}\left(3\cdot\frac{1}{x^3}\right) + \lim\limits_{x\to+\infty}\left(2\cdot\frac{1}{x^5}\right)}$$

$$= \frac{2\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x} + 3\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3} + \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^4} + \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^5}}{\lim\limits_{x\to+\infty}1 + 3\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x} - 3\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3} + 2\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^5}}$$

$$= \frac{2\cdot 0 - 3\cdot 0 + 0 + 0}{1 + 3\cdot 0 - 3\cdot 0 + 2\cdot 0} = \frac{0}{1} = 0$$

Portanto, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^4 - 3x^2 + x + 1}{x^5 + 3x^4 - 3x^2 + 2} = 0.$

Vamos conferir se você está acompanhando tudo até aqui?
E, para isto, tente resolver os exercícios propostos a seguir.

Exercícios Propostos

1) Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2 + 3x - 7}{2x^2 + 1}$.

2) Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2 + 3x - 7}{2x + 1}$.

3) Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2 + 3x + 1}}{\sqrt{9x^2 + 5x + 4}}$.

4) Calcular $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^5 - 7x^4 + 2x^2 + 7}{6x^5 + 2x^4 - x^3 + 2}$.

5) Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x + \sqrt{x^2 + 1}}{2x + \sqrt{4x^2 + 9}}$.

Respostas:

1) $\dfrac{1}{2}$. 2) $+\infty$. 3) $\dfrac{2}{3}$.

4) $\dfrac{1}{2}$. 5) 1.

Nesta seção e na anterior, você estudou como levantar uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$. No Capítulo 5, voltaremos a abordar, novamente, como levantar uma indeterminação dos tipos citados, aplicando derivadas através do Teorema de L' Hospital.

Ao estudar Limites Infinitos, a seguir, pretendemos que você consiga analisar, quando x se aproxima de um número real a pela direita ou pela esquerda, o comportamento de uma função $f(x)$; levantar uma indeterminação do tipo $\infty - \infty$ e aplicar o Teorema do Limite de uma função racional.

3.6 Limites Infinitos

Consideremos a função definida por $f(x) = \frac{2}{(x-3)^2}$ para $x \neq 3$. Queremos determinar os valores da função $f(x)$ quando x está próximo de 3. Para x se aproximando de 3 pela direita, $x > 3$, temos os valores de $f(x)$ dados na tabela abaixo.

$x, x > 3$	4	3,5	3,25	3,125	3,1	3,01	3,001	...
$f(x) = \frac{2}{(x-3)^2}$	2	8	32	128	200	20.000	2.000.000	...

Observamos que, fazendo x aproximar-se cada vez mais de 3, com $x > 3$, $f(x)$ cresce ilimitadamente, isto é, pode-se tornar $f(x)$ tão grande quanto você desejar desde que se tome x bem próximo de 3.

Escreve-se $\lim_{x \to 3^+} \frac{2}{(x-3)^2} = +\infty$. Quando $x \to 3^+$, $f(x) \to +\infty$.

Agora vamos considerar x se aproximando de 3 pela esquerda. Para $x < 3$ obtém-se os valores de $f(x)$, dados na tabela a seguir.

$x, x < 3$	2	2,5	2,75	2,8	2,9	2,99	2,999	...
$f(x) = \frac{2}{(x-3)^2}$	2	8	32	50	2.000	20.000	2.000.000	...

Observamos que fazendo x aproximar-se cada vez mais de 3, com $x < 3$, $f(x)$ cresce ilimitadamente, isto é, pode-se tornar $f(x)$ tão grande quanto você desejar desde que se torne x bem próximo de 3.

Escreve-se $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{2}{(x-3)^2} = +\infty$. Quando $x \to 3^-$, $f(x) \to +\infty$.

Portanto, quando x se aproxima de 3 pela direita $(x > 3)$ ou pela esquerda $(x < 3)$, $f(x)$ cresce ilimitadamente e escreve-se

$$\lim_{x \to 3} \frac{2}{(x-3)^2} = +\infty.$$

Após estas considerações, veja o gráfico de $f(x) = \dfrac{2}{(x-3)^2}$ para $x \neq 3$ a seguir.

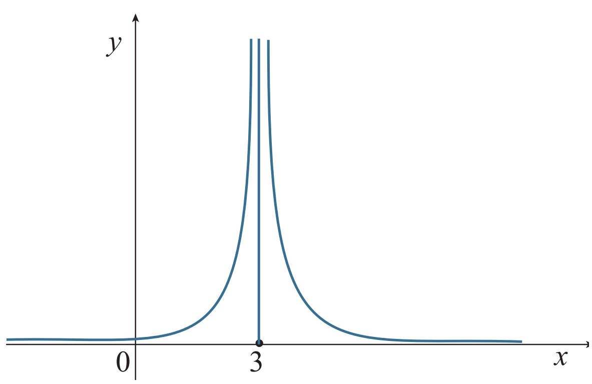


Figura 3.13

Escrevemos $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ para dizer que $f(x)$ cresce ilimitadamente quando x tende para a.

Se $f(x) < 0$ para x próximo de a e o módulo de $f(x)$ crescer ilimitadamente escrevemos $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

De maneira análoga atribuímos significados para $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ e $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$.

Escrevemos $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ para dizer que $f(x)$ cresce ilimitadamente sempre que x crescer ilimitadamente.

De maneira análoga atribuímos significado para $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \pm\infty$.

Teorema 3.8. Se n é um número natural, então

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$;

b) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & \text{se } n \text{ par} \\ -\infty & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$.

Vejamos alguns exemplos de aplicação do teorema 3.8.

Exemplo 1. Calcular $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^4}$.

Resolução: Neste caso $n = 4$ e pela letra a do teorema 3.8, temos

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^4} = +\infty.$$

Exemplo 2. Calcular $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^5}$.

Resolução: Agora $n = 5$, ímpar, pela letra b do teorema 3.8, vem

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^5} = -\infty.$$

Exemplo 3. Calcular $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^8}$.

Resolução: Como $n = 8$, par, pela letra b do teorema 3.8, temos,

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^8} = +\infty.$$

Consideremos mais alguns exemplos aplicando o Teorema 3.8 e anteriores.

Exemplo 4. Determinar $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(x^4 + \sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{x^6} \right)$.

Resolução: Usando os teoremas sobre limites e o teorema 3.8 vem

$$\lim_{x\to 0^+} \left(x^4 + \sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^6} \right) = \lim_{x\to 0^+} x^4 + \lim_{x\to 0^+} \sqrt[3]{x} + \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^6}$$

$$= 0 + 0 + \infty = +\infty.$$

Exemplo 5. Determinar $\lim\limits_{x\to +\infty} (5x^7 - 3x^5 + 2)$.

Resolução: Tentando aplicar o item a do Teorema 3.3 ao limite $\lim\limits_{x\to+\infty}(5\,x^7-3\,x^5+2)$ você chega à indeterminação $\infty-\infty$. Para levantá-la, vamos multiplicar e dividir a função dada por x^7 que é o termo de mais alto grau da função $f(x)$, e temos

$$\lim_{x\to+\infty}(5x^7-3x^5+2)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^7\cdot(5x^7-3x^5+2)}{x^7}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^7\cdot\left(\frac{5x^7}{x^7}-\frac{3x^5}{x^7}+\frac{2}{x^7}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^7\cdot\left(5-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^7}\right).$$

Como $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(5-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{2}{x^7}\right)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}5-\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x^2}+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x^7}\right)$

$$=\left(\lim_{x\to+\infty}5-\lim_{x\to+\infty}\left(3\cdot\frac{1}{x^2}\right)+\lim_{x\to+\infty}\left(2\cdot\frac{1}{x^7}\right)\right)$$

$$=\left(\lim_{x\to+\infty}5-\lim_{x\to+\infty}3\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}+\lim_{x\to+\infty}2\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^7}\right)$$

$$=5-3\cdot0+2\cdot0=5,$$

enquanto $\lim\limits_{x\to+\infty}x^7=+\infty$, tem-se $\lim\limits_{x\to+\infty}(5\,x^7-3\,x^5+2)=+\infty$.

Portanto, $\lim\limits_{x\to+\infty}(5\,x^7-3\,x^5+2)=+\infty$.

Exemplo 6. Determinar $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{3\,x^2}{x^2-4}$.

Resolução: O limite do numerador é $\lim\limits_{x\to2^+}3x^2=3\cdot2^2=3\cdot4=12$ e o limite do denominador é

$$\lim_{x\to2^+}(x-2)\cdot(x+2)=\lim_{x\to2^+}(x-2)\cdot\lim_{x\to2^+}(x+2)$$

$$=(2-2)\cdot(2+2)=0\cdot4=0$$

O limite do denominador é 0, e o denominador está se aproximando de 0 através de valores positivos, isto é, quando $x\to2^+$ tem-se $x>2$ e $x-2>0$. Logo, $x-2\to0$ por valores positivos e, assim a fração $\dfrac{3\,x^2}{x^2-4}$ é positiva e assume valores arbitrariamente grandes.

Portanto, $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{3x^2}{x^2 - 4} = +\infty$.

Apresentaremos alguns problemas resolvidos indicando o percurso de sua resolução. Procure acompanhar cada um dos passos atentamente.

Problema 1. Calcular $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{x}{x-3}$.

Resolução: Tem-se $\lim\limits_{x \to 3^+} x = 3$ e o $\lim\limits_{x \to 3^+} (x-3) = 0$. O limite do denominador é 0, e o denominador está se aproximando de 0 através de valores positivos, isto é, quando $x \to 3^+$ tem-se $x > 3$ ou $x - 3 > 0$. Logo, $x - 3 \to 0$ por valores positivos e a fração $\dfrac{x}{x-3}$ cujo valor absoluto cresce indefinidamente é sempre positiva.

Portanto, $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{x}{x-3} = +\infty$.

Problema 2. Determinar $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{x}{x-3}$.

Resolução: Tem-se $\lim\limits_{x \to 3^-} x = 3$ e o $\lim\limits_{x \to 3^-} (x-3) = 0$.

O limite do denominador é 0, e o denominador está se aproximando de 0 através de valores negativos, isto é, quando $x \to 3^-$ tem-se $x < 3$ ou $x - 3 < 0$. Logo, $x - 3 \to 0$ por valores negativos e a fração $\dfrac{x}{x-3}$ cujo valor absoluto cresce indefinidamente é sempre negativa.

Portanto, $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{x}{x-3} = -\infty$.

Teorema 3.9. Limite de Função Racional

Este teorema vai nos facilitar o cálculo de limite de uma função racional quando a variável x tende para mais infinito ou tende para menos infinito. Vejamos o seu enunciado.

Seja a função racional (o quociente entre dois polinômios)

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_o\, x^n + a_1\, x^{n-1} + a_2\, x^{n-2} + \ldots + a_n}{b_o\, x^m + b_1\, x^{m-1} + b_2\, x^{m-2} + \ldots + b_m} \text{ com } a_o \neq 0 \text{ e } b_o \neq 0.$$

Então, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{a_0 \cdot x^n}{b_0 \cdot x^m}$, ou seja, o limite da função racional $f(x)$ é dado pelo limite da razão ou o quociente dos termos de maior grau dos polinômios $P(x)$ e $Q(x)$.

Vejamos alguns exemplos aplicando o Teorema de uma função racional quando $x \to \pm\infty$.

Exemplo 1. Determinar $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3x^3 - x^2 + 7x - 1}{5x^3 - 2x^2 + x + 3}$.

Resolução: Pelo Teorema 3.9, temos

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{3x^3 - x^2 + 7x - 1}{5x^3 - 2x^2 + x + 3} = \lim_{x\to -\infty} \frac{3x^3}{5x^3} = \lim_{x\to -\infty} \frac{3}{5} = \frac{3}{5}.$$

(Aqui $n = m = 3$).

Portanto, $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3x^3 - x^2 + 7x - 1}{5x^3 - 2x^2 + x + 3} = \dfrac{3}{5}$.

Exemplo 2. Determinar $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^5 - 3x^4 + 2x^2 + 2}{x^6 + 2x^5 - x^3 + x^2 + 1}$.

Resolução: Pelo Teorema 3.9 e pelo Teorema 3.7, temos

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^5 - 3x^4 + 2x^2 + 2}{x^6 + 2x^5 - x^3 + x^2 + 1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^5}{x^6} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

(Aqui $n = 5$ e $m = 6$).

Portanto, $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^5 - 3x^4 + 2x^2 + 2}{x^6 + 2x^5 - x^3 + x^2 + 1} = 0$.

Exemplo 3. Determinar $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2 - 7x + 2}{2x + 3}$.

Resolução: Pelo teorema 3.9, temos

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 - 7x + 2}{2x + 3} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{2x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{2} = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot x\right) = +\infty.$$

(Aqui $n = 2$ e $m = 1$).

Portanto, $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2 - 7x + 2}{2x + 3} = +\infty$.

Mostraremos agora alguns problemas resolvidos indicando o percurso de sua resolução.

Problema 1. Determinar $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{5 + 7x - x^2}{6x + 1}$.

Resolução: Veja os passos na resolução deste problema e aplicando o Teorema 3.9, você tem

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{5+7x-x^2}{6x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^2+7x+5}{6x+1}$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{-x^2}{6x}$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{-x}{6}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{-1}{6}\cdot x\right) = +\infty.$$

Portanto, $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{5+7x-x^2}{6x+1} = +\infty.$

Problema 2. Determinar $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x\cdot(1-x)}{(x+2)\cdot(x+3)}$.

Resolução: Vamos melhorar o numerador e o denominador efetuando os produtos indicados, e temos:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\cdot(1-x)}{(x+2)\cdot(x+3)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-x^2}{x\cdot x+3\cdot x+2\cdot x+2\cdot 3}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{x-x^2}{x^2+5x+6}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{-x^2+x}{x^2+5x+6}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{-x^2}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} (-1) = -1$$

Portanto, $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x\cdot(1-x)}{(x+2)\cdot(x+3)} = -1.$

Problema 3. Determinar $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{8x^2+3x}}{\sqrt{2x^2-x}}$.

Resolução: Aplicando os teoremas sobre limites e pelo Teorema 3.9, temos

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{8x^2+3x}}{\sqrt{2x^2-x}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{8x^2+3x}{2x^2-x}}$$

$$=\sqrt{\lim_{x\to+\infty}\frac{8x^2+3x}{2x^2-x}}$$

$$=\sqrt{\lim_{x\to+\infty}\frac{8x^2}{2x^2}}$$

$$=\sqrt{\lim_{x\to+\infty}4}=\sqrt{4}=2.$$

Portanto, $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{8x^2+3x}}{\sqrt{2x^2-x}}=2.$

Vamos conferir se você está acompanhando tudo até aqui?
Considerando o que estudou até o final deste item, resolva os exercícios propostos.

Exercícios Propostos

1) Calcular $\lim_{x\to+\infty}(3x^5-2x^3+4)$.

2) Determinar $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{9x^3+7x^2-2x-1}}{\sqrt{16x^3-2x+1}}$.

3) Calcular $\lim_{x\to-2^+}\frac{-2x}{4-x^2}$.

4) Determinar $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^6-2x^5+7x^3+2}{x^5-2x^3+4}$.

5) Calcular $\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^4-3x^3+2x^2+x-1}{6x^5+2x^3-2}$.

Respostas:

1) $+\infty$.

2) $\frac{3}{4}$.

3) $-\infty$.

4) $-\infty$.

5) 0.

Nos exercícios desta seção e da anterior você teve a oportunidade de perceber se compreendeu a aplicação dos teoremas estudados nessas seções. Só prossiga após fazer todos os exercícios propostos em ambas as seções, porque contriburá para um melhor entendimento desses conteúdos.

3.7 Limites Fundamentais

Daremos a seguir três teoremas, sem demonstração, que caracterizam os chamados Limites Fundamentais, pois através deles podemos calcular outros limites. Nosso intuito é que você, ao estudar Limites Fundamentais, consiga identificar os tipos de limites fundamentais; levantar indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ e $1^{+\infty}$ utilizando os limites fundamentais e calcular limites através dos limites fundamentais.

Teorema 3.10. Primeiro Limite Fundamental
É conhecido como o limite trigonométrico fundamental dado por $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{sen}\, x}{x}=1$. Este limite pode ser apresentado também por $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\text{sen}\, x}=1$. Não é difícil de observar que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{tg}\, x}{x}=1$ é também um limite fundamental, para isto basta usar a relação trigonométrica $\text{tg}\, x = \frac{\text{sen}\, x}{\cos\, x}$ e aplicar o limite trigonométrico fundamental acima.

Para melhor compreendermos o limite trigonométrico fundamental, vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1. Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{sen}\, 5\, x}{x}$.

Resolução: Calculando o limite do numerador e do denominador chegamos à indeterminação $\frac{0}{0}$. Para levantar esta indeterminação, vamos multiplicar e dividir a função $f(x)$ por 5, ou seja,

$$\frac{\text{sen}\, 5x}{x}=\frac{5}{5}\cdot\frac{\text{sen}\, 5x}{x}=\frac{5\cdot\text{sen}\, 5x}{5x}.$$

Agora fazendo a mudança de variável, isto é, fazendo $5x = t$, vem

$\dfrac{\operatorname{sen} 5x}{x} = \dfrac{5 \cdot \operatorname{sen} t}{t}$. Observe em $5x = t$, quando $x \to 0$, $t \to 0$

e o limite dado passa de $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 5\,x}{x}$ para $\lim\limits_{t \to 0} 5 \cdot \dfrac{\operatorname{sen} t}{t}$, ou seja,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{x} = \lim_{t \to 0} 5 \cdot \frac{\operatorname{sen} t}{t} = \lim_{t \to 0} 5 \cdot \lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 5 \cdot 1 = 5.$$

Portanto, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 5\,x}{x} = 5$.

Exemplo 2. Determinar $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 \cdot \sec x}{\sec x - 1}$.

Resolução: Calculando o limite do numerador e do denominador chegamos à indeterminação $\dfrac{0}{0}$, para levantá-la vamos utiliza a relação trigonométrica $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ e temos:

$$\frac{x^2 \cdot \sec x}{\sec x - 1} = \frac{x^2 \cdot \dfrac{1}{\cos x}}{\dfrac{1}{\cos x} - 1}$$

$$= \frac{\dfrac{x^2}{\cos x}}{\dfrac{1 - \cos\, x}{\cos x}}$$

$$= \frac{x^2}{\cos x} \cdot \frac{\cos x}{1 - \cos x}$$

$$= \frac{x^2}{1 - \cos x}.$$

Assim, o limite dado passa de $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 \cdot \sec x}{\sec x - 1}$ para $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{1 - \cos x}$, ou seja, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 \cdot \sec x}{\sec x - 1} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{1 - \cos x}$

Em $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{1 - \cos x}$ calculando o limite do numerador e do denominador chegamos à indeterminação $\dfrac{0}{0}$ e para levantá-la vamos multiplicar e dividir $\frac{x^2}{1-\cos x}$ por $1+\cos x$ e o limite

dado passa de $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\cdot\sec x}{\sec x-1}$ para $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}$,

ou seja, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sec x}{\sec x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}$,

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot(1+\cos x)}{(1-\cos x)\cdot(1+\cos x)},$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot(1+\cos x)}{1^2-(\cos x)^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot(1+\cos x)}{(\operatorname{sen} x)^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{(\operatorname{sen} x)^2}\cdot(1+\cos x)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{x}{\operatorname{sen} x}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}(1+\cos x)\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\operatorname{sen} x}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}(1+\cos x)$$

$$=\left(\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{sen} x}\right)^2\cdot(\lim_{x\to 0}1+\lim_{x\to 0}\cos x)$$

$$=1^2\cdot(1+\cos 0)=2.$$

Portanto, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\cdot\sec x}{\sec x-1}=2.$

Vejamos agora a resolução de alguns problemas, aplicando o Teorema 3.10, indicando o caminho para sua solução.

Problema 1. Calcular $\lim\limits_{x\to 0}(x\cdot\operatorname{cossec} x\cdot\sec x)$.

Resolução: Aplicando os teoremas sobre limites e usando a relação trigonométrica $\operatorname{cossec} x=\frac{1}{\operatorname{sen} x}$ você tem

$$\lim_{x\to 0}(x\cdot \operatorname{cossec} x\cdot \sec x)=\lim_{x\to 0}(x\cdot \frac{1}{\operatorname{sen} x}\cdot \frac{1}{\cos x})$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\operatorname{sen} x}\cdot \frac{1}{\cos x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\operatorname{sen} x}\right)\cdot \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}$$

$$=1\cdot \frac{1}{\cos 0}=1\cdot 1=1.$$

Portanto, $\lim_{x\to 0}(x\cdot \operatorname{cossec} x\cdot \sec x)=1$.

Problema 2. Calcular $\lim_{x\to 2}\frac{\operatorname{sen}(x^2-4)}{x-2}$.

Resolução: Aqui, calculando o limite do numerador e do denominador chegamos à indeterminação $\frac{0}{0}$. Para levantar esta indeterminação vamos novamente usar uma mudança de variável fazendo $x^2-4=t$. Observe, quando $x\to 2$, $t\to 0$. De $x^2-4=t$ temos $x^2=t+4$ e $x=\sqrt{t+4}$.

De $x^2-4=t$ temos ainda

$$(x-2)\cdot(x+2)=t\Rightarrow x-2=\frac{t}{x+2}\Rightarrow x-2=\frac{t}{\sqrt{t+4}+2}.$$

Agora, em $\lim_{x\to 2}\frac{\operatorname{sen}(x^2-4)}{x-2}$, substituímos x^2-4 por t, $x\to 2$ por $t\to 0$ e $x-2$ por $\frac{t}{\sqrt{t+4}+2}$. Assim, o limite dado passa de

$\lim_{x\to 2}\frac{\operatorname{sen}(x^2-4)}{x-2}$ para $\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen} t}{\frac{t}{\sqrt{t+4}+2}}$, ou seja,

$$=\lim_{t\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} t}{\frac{t}{\sqrt{t+4}+2}}\right)$$

$$= \lim_{t\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} t}{t}\cdot(\sqrt{t+4}+2)\right)$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen} t}{t}\cdot\lim_{t\to 0}(\sqrt{t+4}+2)$$

$$= 1\cdot(\sqrt{0+4}+2)$$

$$= 1\cdot(\sqrt{4}+2)$$

$$= 1\cdot(2+2) = 1\cdot 4.$$

Portanto, $\lim_{x\to 2}\dfrac{\operatorname{sen}(x^2-4)}{x-2} = 4.$

Teorema 3.11. Segundo Limite Fundamental
Este limite é conhecido como o limite exponencial fundamental e dado por $\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ onde e = 2,718281... é a constante de Euler, que é um número irracional e é também a base dos logaritmos naturais ou neperianos.

O limite exponencial fundamental também é dado por
$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$
(Obtenha-o a partir do limite acima fazendo uma mudança de variável).

Este limite fundamental será utilizado para levantar uma indeterminação do tipo 1^∞.

Vejamos agora alguns exemplos de aplicação do Teorema 3.11

Exemplo 1. Determinar $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^x$.

Resolução: Se tentarmos calcular este limite usando os teoremas sobre limites de funções, seção 3.2, chegamos à indeterminação 1^∞ e para levantá-la, vamos substituir em $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^x$, $\frac{5}{x}$ por t, ou seja, $\frac{5}{x}=t$ e x por $\frac{5}{t}$, ou seja, $x=\frac{5}{t}=\frac{1}{t}\cdot 5$.

Observe, quando $x\to+\infty, \frac{1}{x}\to 0,\ 5\cdot\frac{1}{x}\to 0$ e $t\to 0.$ (pelo Teorema 3.7)

Assim, o limite dado passa de $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^{x}$ para $\lim\limits_{x\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}\cdot 5}$, ou seja, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}\cdot 5}=\left[\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^{5}=e^{5}$.

Pelo limite exponencial fundamental.

Portanto, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^{x}=e^{5}$.

Exemplo 2. Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+5}$.

Resolução: Aqui temos também a indeterminação 1^{∞}. Para levantar esta indeterminação utilizaremos a propriedade de Potências $a^{x+y}=a^{x}\cdot a^{y}$ e escrevemos $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+5}$ da seguinte maneira $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+5}=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}\cdot\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{5}$.

Assim,

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+5}=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)^{5}\right].$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\cdot\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{5}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\cdot\left[\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]^{5}$$

$$=e\cdot(1+0)^{5}=e.$$

Portanto, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+5}=e$.

Exemplo 3. Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{x}$.

Resolução: Temos aqui a indeterminação 1^{∞}.

Para levantar esta indeterminação vamos em $\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{x}$ dividir o numerador e o denominador por x e temos

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x}=\left[\frac{\frac{x}{x}}{\frac{x+1}{x}}\right]^{x}=\left[\frac{1}{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}\right]^{x}$$

$$=\left[\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right]^x=\frac{1^x}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}.$$

Assim,

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)^x=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}.$$

Passando ao limite, quando $x \to +\infty$, ambos os membros da equação acima vem

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}1}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}=\frac{1}{e}=e^{-1}.$$

Portanto, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x=e^{-1}$.

Vejamos agora a resolução de alguns problemas, indicando o percurso para sua solução.

Problema 1. Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{7}{x}\right)^{x+5}$.

Resolução: Também aqui temos a indeterminação 1^{∞}. Para levantar esta indeterminação vamos usar a mudança de variável.

Em $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{7}{x}\right)^{x+5}$ vamos substituir $\frac{7}{x}$ por t ou $\frac{7}{x}=t$ e x por pois $x=\frac{7}{t}=7\cdot\frac{1}{t}$. Observe, quando $x \to +\infty$, $t \to 0$ (Pelo Teorema 3.7).

Assim, o limite dado passa de $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{7}{x}\right)^{x+5}$ para $\lim\limits_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}\cdot7+5}$, ou seja,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{7}{x}\right)^{x+5}=\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}\cdot7+5}$$

$$= \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}\cdot 7} \cdot \lim_{t\to 0}(1+t)^{5}$$

$$= \left[\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^{7} \cdot \left[\lim_{t\to 0}(1+t)\right]^{5}$$

$$= e^{7} \cdot [1+0]^{5} = e^{7} \cdot 1 = e^{7}.$$

Portanto, $\lim_{x\to +\infty}\left(1+\dfrac{7}{x}\right)^{x+5} = e^{7}$.

Problema 2. Calcular $\lim_{x\to +\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}$.

Resolução: Aplicando diretamente o Teorema 3.5 letra d, $\lim_{x\to +\infty} \ln f(x) = \ln \lim_{x\to +\infty} f(x)$, o limite dado passa para

$$\ln\left[\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right] = \ln e = 1.$$

Portanto, $\lim_{x\to +\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x} = 1$.

Problema 3. Calcular $\lim_{x\to 0} (1-8x)^{\frac{2}{x}}$.

Resolução: A indeterminação aqui presente é 1^{∞}. Para levantar esta indeterminação vamos usar a mudança de variável, fazendo $-8x = t$ e isolando o valor de x vem $x = \dfrac{t}{-8} = -\dfrac{t}{8}$

e $\dfrac{2}{x} = \dfrac{2}{-\frac{t}{8}} = \dfrac{2\cdot 8}{-t} = \dfrac{16}{-t} = -\dfrac{16}{t} = \dfrac{-16}{t} = \dfrac{1}{t}\cdot(-16)$, ou seja,

$\dfrac{2}{x} = \dfrac{1}{t}\cdot(-16)$. Observe que quando $x \to 0$, $t \to 0$.

Agora, em $\lim_{x\to 0} (1-8x)^{\frac{2}{x}}$, substituímos $x \to 0$ por $t \to 0$, $-8x$ por t, $\dfrac{2}{x}$ por $\dfrac{1}{t}\cdot(-16)$ e o limite dado passa de

$\lim_{x\to 0} (1-8x)^{\frac{2}{x}}$ para $\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}\cdot(-16)}$, ou seja,

$$\lim_{x\to 0}(1-8x)^{\frac{2}{x}} = \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}\cdot(-16)} = \left[\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^{-16} = e^{-16}.$$

Portanto, $\lim_{x\to 0} (1-8x)^{\frac{2}{x}} = e^{-16}$.

Teorema 3.12. Terceiro Limite Fundamental

Este limite é dado por $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$, para $a > 0,\ a \neq 1$. É utilizado para levantar indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$.

Vejamos aplicações diretas deste limite fundamental. Para calcular $\lim_{x \to 0} \frac{10^x - 1}{x}$ neste caso $a = 10$ e $\lim_{x \to 0} \frac{10^x - 1}{x} = \ln 10$. Para calcular $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$, observe que $a = e$, logo $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \ln e = 1$.

Vamos agora resolver juntos alguns exemplos utilizando este teorema fundamental.

Exemplo 1. Calcular $\lim_{x \to 0} \frac{5^{x+3} - 125}{x}$.

Resolução: Como $\lim_{x \to 0} 5^{x+3} - 125 = 0$, temos aqui a indeterminação $\frac{0}{0}$.

Para levantar esta indeterminação sabemos que

$5^{x+3} = 5^x \cdot 5^3$, pela propriedade, $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, logo,

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{5^{x+3} - 125}{x} &= \lim_{x \to 0} \frac{5^x \cdot 5^3 - 5^3}{x} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{5^3 \cdot (5^x - 1)}{x} \\
&= \lim_{x \to 0} 5^3 \cdot \frac{5^x - 1}{x} \\
&= \lim_{x \to 0} 5^3 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{5^x - 1}{x} \\
&= 5^3 \cdot 1\mathrm{n}\, 5 = 125 \cdot 1\mathrm{n}\, 5.
\end{aligned}$$

Portanto, $\lim_{x \to 0} \frac{5^{x+3} - 125}{x} = 125 \cdot 1\mathrm{n}\, 5$.

Exemplo 2. Determinar $\lim_{x \to 0} \frac{16 - 4^{x+2}}{x}$.

Resolução: Como $\lim_{x \to 0} 16 - 4^{x+2} = 0$ a indeterminação aqui presente é $\frac{0}{0}$. Para levantar esta indeterminação, vamos usar o mesmo raciocínio do exemplo 1 e temos

$$\lim_{x\to 0}\frac{16-4^{x+2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{4^2\cdot(1-4^x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{4^2(1-4^x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(4^2\cdot\frac{1-4^x}{x}\right)=4^2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{-4^x+1}{x}$$

$$=16\cdot\lim_{x\to 0}\frac{-(4^x-1)}{x}=16\cdot\lim_{x\to 0}\frac{(-1)\cdot(4^x-1)}{x}$$

$$=16\cdot\lim_{x\to 0}(-1)\cdot\frac{4^x-1}{x}=16\cdot(-1)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{4^x-1}{x}$$

$$=16\cdot(-1)\cdot 1\text{n}\,4=16\cdot(-1)\cdot 1\text{n}\,2^2$$

$$=-16\cdot 2\cdot 1\text{n}=-32\cdot 1\text{n}\,2.$$

(Lembre que $1\text{n}\,A^n=n\cdot 1\text{n}\,A$).

Portanto, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{16-4^{x+2}}{x}=-32\cdot\ln 2$.

Mostraremos alguns problemas resolvidos com o percurso de sua solução.

Problema 1. Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7^x-1}{5x}$.

Resolução: Como $\lim\limits_{x\to 0}(7^x-1)=0$ a indeterminação aqui presente também é $\dfrac{0}{0}$.

Levantando esta indeterminação, vem que

$$\lim_{x\to 0}\frac{7^x-1}{5x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{5}\cdot\frac{7^x-1}{x}\right)=\frac{1}{5}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{7^x-1}{x}=\frac{1}{5}\cdot\ln 7.$$

Portanto, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7^x-1}{5x}=\dfrac{1}{5}\cdot 1\text{n}\,7.$

Problema 2. Calcular $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3^{\frac{x-2}{5}}-1}{x-2}$.

Resolução: Temos a indeterminação $\dfrac{0}{0}$. Para levantar esta indeterminação, no limite dado $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3^{\frac{x-2}{5}}-1}{x-2}$, vamos substituir $\dfrac{x-2}{5}$ por t, isto é, $\dfrac{x-2}{5}=t$, e $x-2$ por $5t$ isto é, $x-2=5t$. Observe, quando $x\to 2$, $(x-2)\to 0$ e $t\to 0$ e substituímos $x\to 2$ por $t\to 0$.

Assim, o limite dado passa de $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3^{\frac{x-2}{5}}-1}{x-2}$ para $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{3^t-1}{5\,t}$, ou seja,

$$\lim_{x\to 2}\frac{3^{\frac{x-2}{5}}-1}{x-2}=\lim_{t\to 0}\frac{3^t-1}{5t}=\lim_{t\to o}\frac{1}{5}\cdot\frac{3^t-1}{t}$$

$$=\frac{1}{5}\cdot\lim_{x\to 2}\frac{3^x-1}{t}=\frac{1}{5}\cdot 1\mathrm{n}\,3.$$

Portanto, $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3^{\frac{x-2}{5}}-1}{x-2}=\dfrac{1}{5}\cdot 1\mathrm{n}\,3=\dfrac{1\mathrm{n}\,3}{5}$.

Problema 3. Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7^{x+2}-49}{14\cdot x}$.

Resolução: A indeterminação a ser levantada aqui é $\dfrac{0}{0}$. Para levantar esta indeterminação sabemos que $7^{x+2}=7^x.7^2$ e $49=7^2$, assim,

$$\lim_{x\to 0}\frac{7^{x+2}-49}{14\cdot x}=\lim_{x\to\infty}\frac{7^x\cdot 7^2-7^2}{14\cdot x}=\lim_{x\to 0}\frac{7^2\cdot(7^x-1)}{14\cdot x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{7^2}{14}\cdot\frac{7^x-1}{x}\right)=\frac{7^2}{14}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{7^x-1}{x}$$

$$=\frac{7^2}{14}\cdot\ln 7=\frac{7\cdot 7}{2\cdot 7}\cdot\ln 7=\frac{7}{2}\cdot\ln 7\,.$$

Portanto, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7^{x+2}-49}{14\cdot x}=\dfrac{7}{2}\cdot 1\mathrm{n}\,7$.

Vamos conferir se você está acompanhando tudo até aqui? Para saber, procure resolver os exercícios propostos, calculando os limites abaixo.

Exercícios Propostos

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{7}{5\,x}\right)^x$.

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{6}{x}\right)^x$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos\,x}{\mathrm{sen}\,x}$.

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{3x} - 1}{\operatorname{sen}(2x)}$.

5) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{6^{\operatorname{sen} x} - 1}{\operatorname{sen} x}$.

6) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(3x^2)}{x^3 + x^2}$.

7) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{7x + 3}{7x + 4}\right)^{x+1}$.

8) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{20^{x-3} - 1}{x - 3}$.

9) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(12)^x - 3^x}{3x}$.

10) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{5^{\frac{x-4}{3}} - 1}{8 \cdot (x-4)}$.

Respostas:

1) $e^{\frac{7}{5}}$.

2) e^{-6}.

3) 0.

4) $\dfrac{3}{2}$.

5) ln 6.

6) 3.

7) $e^{-\frac{1}{7}}$.

8) ln 20.

9) $\dfrac{\ln 4}{3}$.

10) $\dfrac{\ln 5}{24}$.

Nesta seção você estudou e compreendeu a aplicação dos limites fundamentais para levantar indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$ *e* $1^{+\infty}$*, além disso, deve demonstrar habilidades nos teoremas de limites bem como das propriedades básicas das funções seno e coseno. Caso você tenha alguma dificuldade, releia a seção 3.2.*

3.8 Funções Contínuas

Nesta seção vamos estudar uma das conseqüências importantes da noção de limite, que é a noção de continuidade de uma função.

E para isto, o nosso intuito é que ao estudar a continuidade de uma função $f(x)$ no ponto $x = a$ você amplie o entendimento quando for esboçar o gráfico de uma função.

Na linguagem quotidiana dizemos que o tempo é contínuo, uma vez que ele decorre de maneira interrupta. O tempo não salta, digamos, de 2 horas para 2 horas e 1 minuto da tarde, deixando um lapso de 1 minuto. Se a altitude inicial é 300 metros, o objeto passa por todas as altitudes entre 300 metros e 0 metro antes de atingir o solo.

Em matemática usamos a expressão contínua em um sentido semelhante.

Intuitivamente gostaríamos de afirmar que uma função f é contínua em $x = a$ quando o gráfico de f não tem interrupção em a, ou seja, o gráfico de f não tem quebras ou saltos em a. Para muitas funções contínuas isto é verdadeiro mas existem exceções.

As considerações acima motivam as definições a seguir.

Para saber mais sobre funções contínuas, consulte THOMAS, George B. *Cálculo*. Vol. 1, Addison Wesley, São Paulo, 2002 e SWOKOWSKI, E. William. *Cálculo com geometria analítica*. Vol 1., 2. ed., Makron Books do Brasil, 1994.

Definição 3.6. Seja f uma função definida em um conjunto X constituído de uma reunião de intervalos e seja $a \in X$. Diz-se que a função f é contínua no ponto a quando $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

A maior parte das funções elementares, vistas no capítulo 2, são contínuas em todo x real. Por exemplo:
$f(x) = c$, $f(x) = ax + b$, $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $f(x) = \cos x$.

Definição 3.7. Seja $a \in \operatorname{Dom} f$ diz-se que uma função f é descontínua no ponto $x = a$ se f não for contínua em $x = a$.

Isto significa que f é descontínua em $x = a$ se ocorrer ao menos uma das seguintes condições:

Vamos ver alguns exemplos.

i) Não existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Exemplo: Seja $f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{se } x \le 3 \\ 4, & \text{se } x > 3 \end{cases}$.

A função $f(x)$ é descontínua no ponto $x = 3$, pois, $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-}(x-1) = 3-1 = 2$ e $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} 4 = 4$, logo não existe $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$.

Observe que $f(3) = 3-1 = 2$, mas isto não é suficiente para a continuidade de $f(x)$. Seria necessário que se tivesse $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3)$ o que jamais poderia ocorrer visto que não existe $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$. Veja o gráfico de $f(x)$ a seguir.

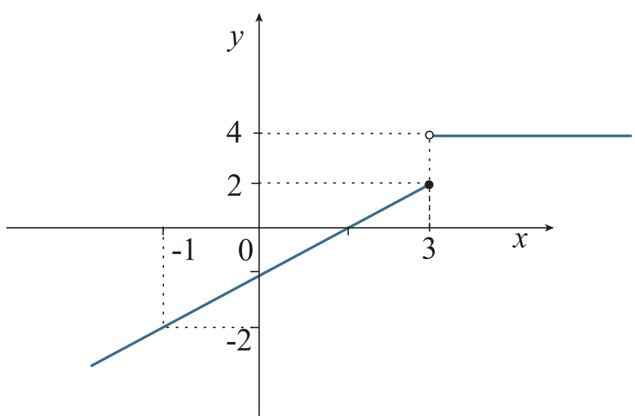


Figura 3.14

ii) Existe $f(a)$, mas $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq f(a)$.

Exemplo: A função $f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x+3)\cdot(x-2)}{(x-2)}, & \text{se } x \neq 2 \\ 3, & \text{se } x = 2 \end{cases}$

A função $f(x)$ é descontínua no ponto $x = 2$, pois,

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{(x+3)\cdot(x-2)}{(x-2)} = \lim_{x \to 2}(x+3) = 2+3 = 5 \; e \; f(2) = 3,$$

isto é, $\lim\limits_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$.

Veja o gráfico de $f(x)$ na figura 3.15.

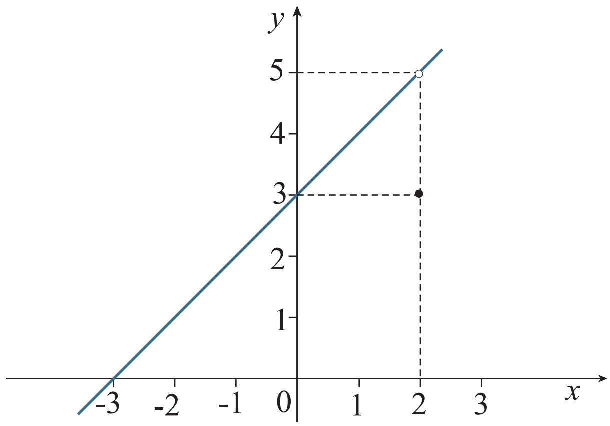


Figura 3.15

Definição 3.8. Uma função f é contínua no conjunto X se f é contínua em todos os pontos de X.

Por exemplo, as funções $f(x) = \text{tg}\, x$ e $g(x) = \text{sen}\, x$ são contínuas nos intervalos $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, respectivamente.

Vamos estudar agora os teoremas elementares de funções contínuas, tais como: soma, produto, quociente e composição.

Teorema 3.13. Se as funções $f(x)$ e $g(x)$ são contínuas em $x = a$, então:

1) A soma, $f(x) + g(x)$, é contínua em $x = a$;

2) A diferença, $f(x) - g(x)$ é contínua em $x = a$;

3) O produto, $f(x) \cdot g(x)$, , é uma função contínua em $x = a$;

4) O quociente, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, é uma função contínua $x = a$, desde que se tenha $g(a) \neq 0$.

Teorema 3.14. A composição, $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ é contínua em $x = a$, desde que $g(x)$ seja contínua em $x = a$ e $f(x)$ seja contínua em $g(a)$.

Observação 1. A função polinomial $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ é contínua em $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

Observação 2. Uma função racional é contínua em todo número real de seu domínio.

Observação 3. As funções abaixo são contínuas em todo número real x de seu domínio:

$$f(x) = a^x,\ g(x) = \log_a x\ ,\ h(x) = \sqrt{x}.$$

Vejamos alguns exemplos de funções contínuas pelo Teorema 3.13 e 3.14.

Exemplo 1. As funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = 3x$ são contínuas para todo número real x, logo, $(f+g)(x) = x^2 + 3x$ é contínua para todo número real x.

Exemplo 2. As funções $f(x) = x+1$ e $g(x) = \cos x$ são contínuas para todo número real x, logo, $(f \cdot g) \cdot (x) = (x+1) \cdot \cos x$ é contínua para todo número real x.

Exemplo 3. As funções $f(x) = x^3$ e $g(x) = x^2 + 1$ são contínuas para todo número real x, logo, $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x^3}{x^2+1}$ é contínua para todo número real x.

Exemplo 4. A função $f(x) = 2x^5 - x^3 + 3\,x^2 - 1$ é contínua para todo número real x.

Exemplo 5. As funções $f(x) = 2\,x + 1$ e $g(x) = 2\,x$ são contínuas para todo número real x, logo $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2\,x) = 4\,x + 1$, isto é, $(f \circ g)(x) = 4\,x + 1$ é contínua para todo número real x.

Vamos analisar a continuidade de uma função num determinado ponto $x = a$ e para isto consideremos os seguintes exemplos resolvidos.

Exemplo 1. Verificar se a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 7x - 6, & \text{se } x < 2 \\ 2x^2, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$ é contínua em $x = 2$.

Resolução: Vamos verificar se $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$. Inicialmente observe que $f(x) = 2\,x^2$ para $x \geq 2$, assim $f(2) = 2 \cdot 2^2 = 2 \cdot 4 = 8$, ou seja, $f(2) = 8$. Agora, vamos calcular os limites laterais e temos $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(2x^2) = 2\cdot 2^2 = 8$ e $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(7x-6) =$ $7\cdot 2 - 6 = 8$, ou seja, $\lim_{x\to 2} f(x) = 8 = f(2)$.

Portanto, $f(x)$ é contínua em $x = 2$.

Exemplo 2. Analisar se a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3}, & \text{se } x \neq 3 \\ 5, & \text{se } x = 3 \end{cases}$$ é contínua em $x = 3$.

Resolução: Precisamos verificar se $\lim_{x\to 3} f(x) = f(3)$.

É fácil observar que em $x = 3$ a função $f(x)$ vale 5, isto é, $f(3) = 5$.

Agora, calculando o limite de $f(x)$ quando $x \to 3$, temos

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\cdot(x+3)}{x-3}$$

$$= \lim_{x\to 3}(x+3) = 3+3 = 6.$$

Como $\lim_{x\to 3} f(x) = 6$ é diferente de $f(3) = 5$, a função $f(x)$ não é contínua em $x = 3$.

Exemplo 3. Verificar se a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\text{sen}\, x}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 2, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$ é contínua em $x = 0$.

Resolução: Vamos verificar se $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$.

Não é difícil de observar que $f(0) = 2$, isto é, quando $x = 0$ f vale 2. Agora, calculando $\lim_{x\to 0} f(x)$ temos $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{sen\ x}{x} = 1$ (Primeiro limite trigonométrico fundamental).

Como $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ é diferente de $f(0) = 2$, a função f não é contínua em $x = 0$.

Vamos agora apresentar alguns problemas resolvidos, mostrando o percurso de suas soluções.

Problema 1. Verificar se a função definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}, & \text{se } x\neq 1\\ 2, & \text{se } x=1\end{cases} \quad \text{é contínua em } x=1.$$

Resolução: Precisamos verificar se $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$. É fácil observar que para $x=1$, $f(x)=2$, ou seja, $f(1)=2$. Agora vamos calcular $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ e temos

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\cdot(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=1+1=2.$$

Como $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2 = f(1)$, a função f é contínua em $x=1$.

Problema 2. Verificar se a função $f(x)$ definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+3x+2}{x+1}, & \text{se } x<-1\\ 1, & \text{se } x=-1\\ 3x, & \text{se } x>-1\end{cases} \quad \text{é contínua no ponto } x=-1.$$

Resolução: Precisamos verificar se $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = f(-1)$.

Para $x=-1$, é fácil observar que $f(x)$ vale 1, isto é, $f(-1)=1$.

Agora, calculamos $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$, para isto vamos calcular os limites laterais e devemos ter $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = f(-1)=1$ para que f seja contínua em $x=-1$.

Inicialmente, vamos calcular $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$.

Observe que para $x<-1$, $f(x)$ está definida por $\dfrac{x^2+3x+2}{x+1}$. Como tanto o numerador quanto o denominador têm limite 0 quando $x\to -1$ temos a indeterminação $\dfrac{0}{0}$.

Para levantar esta indeterminação, vamos usar o método da fatoração, e para isto, calculamos as raízes de $x^2+3x+2=0$.

Usando a fórmula de Bhaskara, encontramos as raízes $x_1=-1$ e $x_2=-2$ (Verifique!).

Agora, fatorando x^2+3x+2 vem

$$x^2 + 3x + 2 = (x - (-1)) \cdot (x - (-2)) = (x+1) \cdot (x+2)$$

ou $x^2 + 3x + 2 = (x+1) \cdot (x+2)$ e temos

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{x^2 + 3x + 2}{x+1} = \lim_{x \to -1^-} \frac{(x+1) \cdot (x+2)}{(x+1)}$$

$$= \lim_{x \to -1^-} (x+2) = 1.$$

Assim, $\lim_{x \to -1^-} f(x) = 1$.

Agora vamos calcular $\lim_{x \to -1^+} f(x)$.

Para $x > -1$, observe que $f(x)$ está definida por $3\,x$, isto é, $f(x) = 3x$ para $x > -1$, logo, $\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} (3x) = 3 \cdot (-1) = -3$.
Assim, $\lim_{x \to -1^+} f(x) = -3$.

Como, $\lim_{x \to -1^-} f(x) = 1$ e $\lim_{x \to -1^+} f(x) = -3$, não existe $\lim_{x \to -1} f(x)$.

Portanto, a função $f(x)$ dada não é contínua em $x = -1$.

Teorema 3.15. Teorema do Valor Intermediário para Funções Contínuas.

Uma função $y = f(x)$ que é contínua em um intervalo $[a, b]$ assume cada valor entre $f(a)$ e $f(b)$. Em outras palavras, se y_0 for qualquer valor entre $f(a)$ e $f(b)$, então $y_0 = f(c)$ para algum c em $[a, b]$.

Geometricamente, o teorema do valor intermediário diz que qualquer reta horizontal $y = y_0$ cruzando o eixo y entre os números $f(a)$ e $f(b)$ cruzará a curva $y = f(x)$ pelo menos uma vez no intervalo $[a, b]$. Veja a figura 3.16.

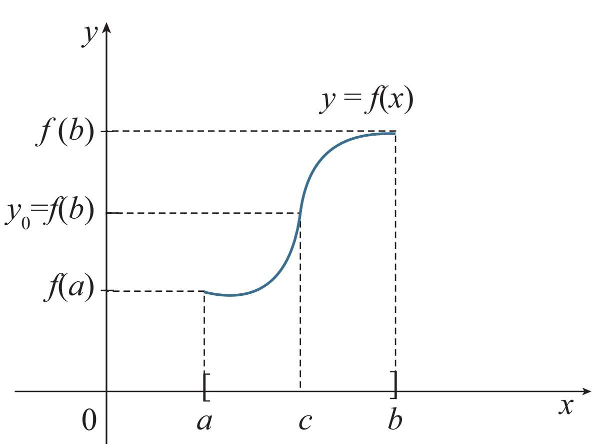


Figura 3.16

A continuidade de f no intervalo é essencial para o Teorema 3.15. Se f é descontínua em um ponto do intervalo, a conclusão do teorema pode falhar, como acontece, por exemplo, com a função

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 2, & \text{se } 1 \le x < 2 \\ 3, & \text{se } 2 \le x \le 4 \end{cases},$$ que não assume todos os valores entre $f(1) = 0$ e $f(4) = 3$; ela não assume nenhum valor entre 2 e 3.

Vejamos um exemplo usando o Teorema do Valor Intermediário.

Exemplo. Algum número real somado a 1 é exatamente igual ao seu cubo?

Resolução: Respondemos a essa pergunta aplicando o Teorema 3.15 da maneira a seguir. Um tal número x deve satisfazer a equação $x+1=x^3$ ou $x^3-x-1=0$. Portanto estamos procurando um zero da função contínua $f(x)=x^3-x-1$. A função muda de sinal ente 1 e 2, então deve existir um ponto c entre 1 e 2 em que $f(c)=0$. Veja o gráfico ao lado.

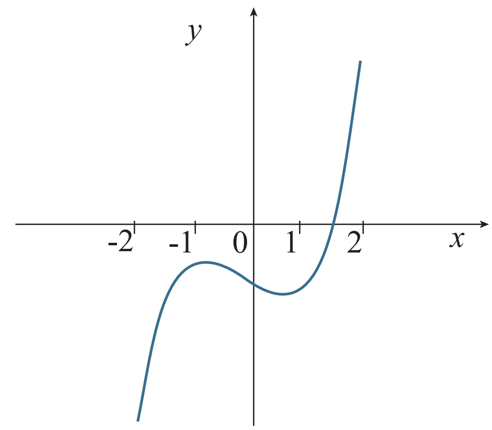


Figura 3.17

Vamos conferir se você está acompanhando tudo até aqui?
Para saber, procure atender aos exercícios propostos abaixo, verificando a continuidade de uma função $f(x)$ no ponto $x=a$ indicado.

Exercícios Propostos

1) Seja a função $f(x)$ definida por $f(x)=\begin{cases} x+3, & se \;\; x\geq 1 \\ 3-k, & se \;\; x<1 \end{cases}$.

Determinar o valor da constante k tal que a função $f(x)$ seja contínua no ponto $x=1$.

2) Seja $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & \text{se} \;\; x>2 \\ 5, & \text{se} \;\; x=2 \\ 7x-9, & \text{se} \;\; x<2 \end{cases}$.

Verificar se $f(x)$ é contínua em $x=2$.

3) Verificar se a função f definida por $f(x)=\begin{cases} x^2-x, & \text{se} \;\; x<-3 \\ x^3+2, & \text{se} \;\; x>-3 \\ 4, & \text{se} \;\; x=-3 \end{cases}$ é contínua no ponto $x=-3$.

4) Seja $f(x)=\begin{cases} x-1, & \text{se} \;\; x<3 \\ 5, & \text{se} \;\; x=3 \\ 8-x, & \text{se} \;\; x>3 \end{cases}$

Verifique se $f(x)$ é contínua em $x=3$.

5) Determinar o valor de k de modo que a função $f(x)$ definida por $f(x)=\begin{cases} e^{4x}, & \text{se} \quad x \neq 0 \\ k^3 - 7, & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$ seja contínua em $x = 0$.

Respostas:

1) $k = -1$.

2) Sim, $f(x)$ é contínua em $x = 2$.

3) A função dada não é contínua em $x = -3$.

4) A função $f(x)$ não é contínua em $x = 3$.

5) A função $f(x)$ será contínua em $x = 0$ quando $k = 2$.

Resumo

Neste capítulo, você estudou e compreendeu a definição de limite de uma forma intuitiva, bem como aprendeu a calcular limite de uma função usando os teoremas sobre limites.

Você estudou também o significado dos limites laterais, limites no infinito e limites infinitos, percebeu como levantar uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ e $1^{+\infty}$ usando os limites fundamentais, aprendeu a analisar a continuidade de uma função aplicando limites laterais e o esboço de gráfico de uma função.

Capítulo 4

Derivada

Capítulo 4
Derivada

Nosso objetivo neste capítulo é apresentar a definição de derivada de uma função e seu significado geométrico, além de algumas regras que auxiliam o seu cálculo em geral e a derivada das funções elementares. Começaremos, então, por sua definição.

4.1 Derivada

Definição 4.1. A derivada de uma função $f : I \to \mathbb{R}$ em relação à variável $x \in I$ é a função $f'(x)$ dada por

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{4.1}$$

A derivada está definida em todo ponto x onde o limite exista. Diz-se, nesse caso, que a função $f(x)$ é derivável em x.

Leibniz nasceu em Leipzig, Alemanha, no dia 1° de julho de 1646.

Observação:

Na notação de Leibniz, a derivada de uma função $f(x)$ também é indicada por $\frac{d}{dx} f(x)$ ou $\frac{df(x)}{dx}$.

A derivada de uma função $f(x)$ em um ponto x_0 pode ser expressa também como

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{4.2}$$

Basta tomar $x = x_0$ na (4.1) e, em seguida, fazer $x_0 + h = x$. O limite $h \to 0$ é então equivalente ao limite $x \to x_0$.

Quando $x \in I$ é uma extremidade do intervalo I, o limite que define $f'(x)$ é, na verdade, apenas um limite lateral e a derivada coincide com o que será chamado de "derivada lateral" mais adiante neste capítulo.

Vejamos um exemplo:

Exemplo 1. Calcular a função derivada das seguintes funções:

a) $f(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$;

b) $f(x) = |x|, \forall x \in \mathbb{R}$;

c) $f(x) = c, \forall x \in \mathbb{R}$, onde c é uma constante.

Resolução: a) A função derivada é calculada pelo limite (4.1). Para todo $x \in \mathbb{R}$;

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2xh + h^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x.$$

Portanto, a função derivada de $f(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$, é a função $f'(x) = 2x$ que também esta definida em todo $x \in \mathbb{R}$; ou seja, a f é derivável em todo o domínio da função.

b) Nesse caso, $f(x) = x$, se $x \geq 0$, e $f(x) = -x$, se $x < 0$. Para todo $x > 0$, $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h} = 1$ e, para todo $x < 0$, $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-(x+h)-(-x)}{h} = -1$.

No ponto $x = 0$, os limites laterais são:

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{(0+h)-0}{h} = 1 \quad \text{e}$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{-(0+h)-(0)}{h} = -1.$$

Os valores são distintos. Concluímos, pela definição 4.1, que o limite não existe em $x = 0$ para a função do problema. Portanto, a função $f(x) = |x|$ não é derivável em $x = 0$. A função derivada da função

$f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$, é a função $f'(x) = -1$, se $x < 0$, e $f'(x) = 1$, se $x > 0$. A função derivada, nesse caso, não está definida em $x = 0$.

c) Para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = c$ e, portanto, $f(x+h) = c$, também. Logo,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0$$

Conhecida a função derivada de uma função f, pode-se calcular a derivada de f em qualquer ponto onde ela é derivável, através da função derivada. Como exemplo, no item **a)**, a derivada de f em $x = x_0$ é $f'(x_0) = 2x_0$. O mesmo resultado pode ser obtido utilizando-se a relação (4.2).

Uma importante propriedade da derivada é dada a seguir:

Teorema 4.1. Se uma função $f(x)$ é derivável num ponto x_0 do seu domínio então $f(x)$ é contínua em x_0, ou seja,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \tag{4.3}$$

Observação: a partir do teorema 4.1, verificamos que se uma função é descontínua em um ponto, nesse ponto ela não é derivável. Portanto, a continuidade da função num determinado ponto é condição necessária para que ela seja derivável nesse ponto. Porém, esta não é uma condição suficiente. Uma função pode ser contínua mas não derivável num ponto. O exemplo clássico disso é a função módulo do exemplo 1b).

Exemplo 2. Considere a função $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in (-\infty, 1] \\ x+1, & x \in (1, \infty) \end{cases}$.

Resolução: Essa função é descontínua em $x = 1$ e, portanto, não possui derivada nesse ponto.

Vamos ver se você aprendeu a definição de derivada? Resolva os três primeiros exercícios da lista de exercícios propostos no final do capítulo.

4.2 Interpretação Geométrica da Derivada

A derivada de uma função num dado ponto, quando existe, tem um significado geométrico importante que é o discutido nesta seção.

Definição 4.2. Dada a função $f(x)$, o quociente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{4.4}$$

onde $x \neq x_0$ é chamado de taxa de variação média da função $f(x)$ no intervalo determinado por x_0 e x.

Consideremos o gráfico de uma função $f(x)$ definida em $[a,b]$ onde é contínua. Vamos supor que f também é derivável em x_0. Veja a figura a seguir:

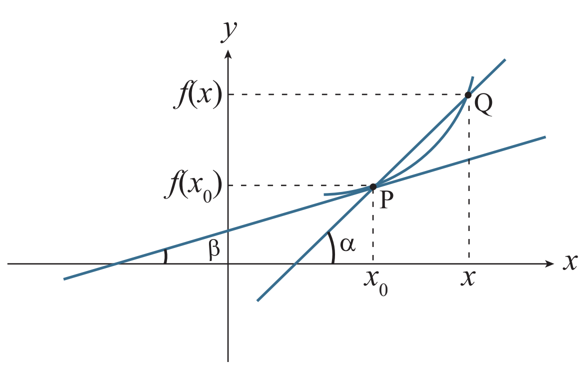


Figura 4.1

Observe que o quociente na definição (4.2) é igual a $\operatorname{tg}\alpha$, o coeficiente angular da reta secante passando nos pontos $P(x_0, f(x_0))$ e $Q(x, f(x))$, onde α é o ângulo de inclinação da reta. Tome o limite do quociente (4.4) quando $x \to x_0$. Este limite existe pois f é derivável em x_0. Observe que nesse limite a reta secante tende para a reta tangente ao gráfico da função $f(x)$, no ponto $P(x_0, f(x_0))$. Podemos concluir que a derivada de uma função $f(x)$ em um ponto x_0, quando existe, coincide com o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função no ponto de abcissa x_0. Você saberia calcular a equação dessa reta? Não? Então, vejamos como se faz isso.

Observação: a equação de uma reta não vertical passando em um ponto (x_0, y_0) é

$$y - y_0 = a(x - x_0) \tag{4.5}$$

onde a é o coeficiente angular da reta. Se $f(x)$ é uma função derivável em $x = x_0$ segue da interpretação geométrica da derivada que a reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto $(x_0, f(x_0))$ tem coeficiente angular $a = f'(x_0)$. Portanto, a equação da reta tangente é

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)\,. \tag{4.6}$$

Exemplo 3. Determine a equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = x^2$ no ponto (2, 4).

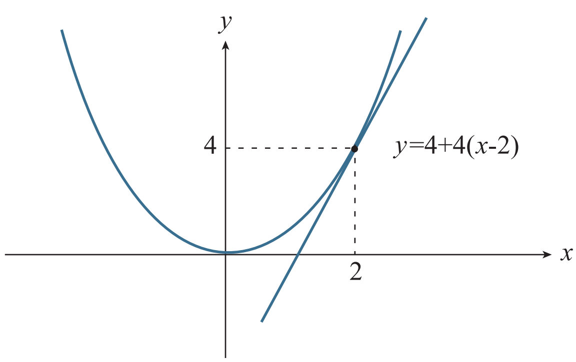


Figura 4.2

Resolução: Temos que

$$f'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)}$$

$$= \lim_{x\to 2} (x+2) = 4\,.$$

A equação da reta é $y - 4 = 4(x - 2)$.

4.3 Derivadas Laterais

Se I é um intervalo aberto contido no domínio de uma função, então a derivada desta função num ponto de I, quando existe, está definida em termos de um limite bilateral. A existência do limite bilateral depende da existência dos limites laterais e de que estes limites sejam iguais. Os limites laterais associados ao limite (4.1) são chamados de derivadas laterais. Eles serão relevantes para se determinar pontos onde a função não é derivável e no tratamento da derivada nos extremos de um intervalo.

Definição 4.3. Dada a função $f(x): I \to \mathbb{R}$

i) a derivada à direita de $x_0 \in I$ é o número real indicado como $f'_+(x_0)$ e dado pelo limite lateral à direita

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad (4.7),$$

quando este existir.

ii) a derivada à esquerda de $x_0 \in I$ é o número real indicado como $f_-'(x_0)$ dado pelo limite lateral à esquerda

$$f_-'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad (4.8),$$

quando este existir.

Exemplo 4. Calcule as derivadas laterais da função

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 8, \ x \le 3 \\ 4 - x, \ 3 < x \le 6 \end{cases} \quad \text{nos pontos } x_0 = 3 \text{ e } 6.$$

Resolução: Temos que

$$f'_+(3) = \lim_{x \to 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3^+} \frac{4 - x - (3^2 - 8)}{x - 3} = \lim_{x \to 3^+} \frac{3 - x}{x - 3}.$$

$$= \lim_{x \to 3^+} -1 = -1\,;$$

$$f_-'(3) = \lim_{x \to 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{(x - 3)} = \lim_{x \to 3^-} \frac{x^2 - 8 - 1}{x - 3} = \lim_{x \to 3^-} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \to 3^-} \frac{(x-3)(x+3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3^-} (x + 3) = 6\,.$$

Como $f_+'(3) \neq f_-'(3)$, então f não é derivável em $x = 3$, isto é, não existe $f'(x)$. Em $x_0 = 6$, temos

$$f_-'(6) = \lim_{x \to 6^-} \frac{f(x) - f(6)}{(x - 6)} = \lim_{x \to 3^-} \frac{4 - x - (-2)}{x - 6}$$

$$= \lim_{x \to 3^-} \frac{6 - x}{x - 6} = -1\,.$$

Antes de passar para a próxima seção, tente resolver o exercício 5 no final do capítulo.

4.4 Regras de Derivação

O cálculo da derivada de uma função pela definição, dependendo da função, pode ser bastante tedioso e às vezes complicado. Contudo, com base na definição (4.1), é possível obter várias regras que facilitam muito o trabalho. São as chamadas regras de derivação para soma, produto e quociente de funções. Elas são importantes no cálculo de derivadas de qualquer função.

Vamos, então, às regras:

Teorema 4.2. Sejam g e f duas funções definidas no mesmo intervalo I e deriváveis em $x \in I$. Então,

a) A função $w = f + g$ é derivável em x e

$$w'(x) = f'(x) + g'(x) \tag{4.9}$$

b) A função $h = f.g$ é derivável em x e

$$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \tag{4.10}$$

c) A função $t = \dfrac{f}{g}$ é derivável em x e

$$t'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \tag{4.11}$$

Os resultados a), b) e c) no teorema acima serão daqui em diante chamados de regras da soma, do produto e do quociente, respectivamente.

Exemplo 5. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável em $x_0 \in I$ e a uma constante. Verifique que a função $h(x) = af(x)$ também é derivável em $x_0 \in I$ e $h'(x) = af'(x)$.

> **Resolução:** A função h é o produto da função constante a com a f. Aplicando a regra do produto e o resultado $a' = 0$ pois a é uma constante (veja exemplo 1c), segue que $h'(x) = a' f(x) + af'(x) = af'(x)$.

Exemplo 6. Calcule a derivada da função $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

> **Resolução:** Temos que $f(x) = x \cdot x$. Aplicando a regra do produto, $f'(x) = x'x + xx'$. Pelo exemplo 1b) sabemos que $x' = 1$ e, assim, obtemos $f'(x) = 2x$.

Exemplo 7. Calcular a derivada de $f(x) = x^2 - 4x + \frac{1}{x}$, $x > 0$.

Resolução: Aplicando a regra da soma, do produto e do quociente, obtemos

$$f'(x) = \left(x^2 - 4x + \frac{1}{x}\right)' = (x^2)' + (-4x)' + \left(\frac{1}{x}\right)' = 2x - 4 - \frac{1}{x^2}.$$

Vamos verificar se você aprendeu a aplicar as regras de derivação? Resolva o exercício 5 da lista.

4.5 Derivada da Função Composta

Sejam u uma função derivável no ponto x e f uma função derivável no ponto $u(x)$. Então, se existir a composta $h = f \circ u$ ela será derivável no ponto x e teremos

$$h'(x) = f'(u(x)).u'(x). \tag{4.12}$$

Portanto, a derivada da composta é igual à derivada da função f, calculada em $u(x)$, vezes a derivada de u, calculada em x.

A expressão (4.12) também é chamada de **regra da cadeia**.

Exemplo 8. Calcular a derivada de $h(x) = (2x^3 + 4x + 1)^5$, $x \in \mathbb{R}$.

Resolução: Fazendo $u(x) = 2x^3 + 4x + 1$ e $f(u) = u^5$, obtemos que $h(x) = f(u(x))$. Aplicando a regra da cadeia,
$h'(x) = f'(u) \cdot u' = 4u^4 \cdot u' = 4(2x^3 + 4x + 1)^4 \cdot (6x^2 + 4)$.

4.6 Derivada da Função Inversa

Seja $y = f(x)$ uma função que admite inversa e é derivável no intervalo I e tal que $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in I$. Então, a função inversa $f^{-1}(y)$ é derivável em todo $y \in f(I)$ e

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} \tag{4.13}$$

onde a derivada $f'(x)$ deve ser calculada em $x = f^{-1}(y)$.

Exemplo 9. Determine a derivada da inversa da função $f:(0,\ \infty)\to(0,\ \infty), f(x)=x^3$.

> **Resolução:** A inversa da f é a função $x=f^{-1}(y)=\sqrt[3]{y}$, $y\in(0,\infty)$. Ademais, $f'(x)\neq 0$ para todo x. Aplicando a regra (4.13), temos que $(f^{-1})'(y)=\dfrac{1}{f'(x)}=\dfrac{1}{3x^2}=\dfrac{1}{3(\sqrt[3]{y})^2}$.

Que tal fazer o exercício 7 no final do capítulo? Tente!

4.7 Derivadas das Funções Elementares

No capítulo 2 você estudou as funções elementares. Nesta seção você aprenderá a calcular as derivadas destas funções.

4.7.1 Derivada da Função Exponencial de Base *a*

Seja $f(x)=a^x$, $a>0$, $a\neq 1$ e $x\in\mathbb{R}$. A derivada desta função é

$$f'(x)=a^x\ln a\,. \tag{4.14}$$

De fato,

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a^x(a^h-1)}{h}\,.$$

$$=a^x\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}=a^x\ln a\,.$$

O último limite é um limite fundamental apresentado no capítulo 3.

Exemplo 10. Calcule a derivada da função $f(x)=e^x$, $x\in\mathbb{R}$.

> **Resolução:** Temos que $f'(x)=e^x\ln e=e^x$.

Verifique se você está compreendendo as Derivadas das Funções Elementares. Faça o exercício 8 da lista do final do capítulo. Já fez? Acertou? Ótimo! Aprenda em seguida como se deriva a função logarítmica.

4.7.2 Derivada da Função Logarítmica

A função $g(x) = \log_a x$ é a inversa da função $y = f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$. Sabemos que $f'(x) \neq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Podemos então aplicar a fórmula (4.13) para calcular $(f^{-1})'(y)$:

$$g'(y) = (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{a^x \ln a} = \frac{1}{y \ln a}.$$

Indicando a variável de g por x, obtemos

$$g'(x) = \frac{1}{x \ln a}. \tag{4.15}$$

Exemplo 11. Calcule a derivada da função $g(x) = \ln x$, $x \in (0, +\infty)$.

Resolução: Nesse caso, a base é a natural, $a = e$ e $\ln e = 1$. Então, $g'(x) = \frac{1}{x}$.

Nesta seção você aprendeu a derivar a função logarítmica. Procure resolver o exercício nº 9 da lista.

4.7.3 Derivada da Função Potência

A derivada da função $y = x^r$, chamada função potência, onde r é um número real qualquer, pode ser calculada usando o logaritmo do seguinte modo:

$$\ln y = \ln x^r = r \ln x.$$

Agora, calcule a derivada de ambos os lados da igualdade, com respeito a x:

$$\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dx}(r \ln x).$$

Aplicando resultados anteriores você obtém que $\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{r}{x}$, ou ainda,

$$y' = \frac{ry}{x} = \frac{rx^r}{x} = rx^{r-1}.$$

Portanto, a derivada da função $y = x^r$ é

$$y' = rx^{r-1}. \tag{4.16}$$

Exemplo 12. Calcule a derivada da função $f(x)=\sqrt{x}$, $x>0$.

Resolução: Temos que $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$, portanto

$$f'(x)=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Resolva o exercício de número 10 no final deste Capítulo.

4.7.4 Derivada da Função Seno

Seja $f(x)=\operatorname{sen} x$, $x\in\mathbb{R}$. Aplicando a definição de derivada, obtemos $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen} x}{h}$.

Usando a identidade trigonométrica $\operatorname{sen}(x+h)=\operatorname{sen} x.\cos h \operatorname{sen} x$, segue que

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\left[\operatorname{sen} x\frac{(\cos h-1)}{h}+\frac{\operatorname{sen} h}{h}\cos x\right]$$

$$=\operatorname{sen} x\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}+\cos x\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} h}{h}$$

onde $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} h}{h}=1$ e

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos^2 h-1}{h(\cos h+1)}=\lim_{h\to 0}\frac{-\operatorname{sen}^2 h}{h(\cos h+1)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} h}{h}\cdot\lim_{h\to 0}=\frac{\operatorname{sen} h}{\cos h+1}=0.$$

Logo,

$$f'(x)=\cos x \tag{4.17}$$

ou seja, $(\operatorname{sen} x)'=\cos x$.

4.7.5 Derivada da Função Cosseno

O cálculo da derivada de $f(x)=\cos x$, $x\in\mathbb{R}$, pode ser feito como no caso do $\operatorname{sen} x$. Outra maneira mais simples é a seguinte.

Como $\cos x = \text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$ segue que

$$(\cos x)' = \left[\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]' =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\text{sen}\, x.$$

Portanto,

$$(\cos x)' = -\text{sen}\, x \tag{4.18}$$

4.7.6 Derivada da Função Tangente

Aplicando a regra do quociente à relação $\text{tg}\, x = \dfrac{\text{sen}\, x}{\cos x}$, obtemos

$$(\text{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \tag{4.19}$$

Portanto, a derivada da função tg x é $(\text{tg}\, x)' = \sec^2 x$.

Verifique o resultado (4.18)! Este é um boa oportunidade de praticar a regra do quociente! Em seguida, procure resolver os exercícios propostos de 11 a 13.

4.7.7 Derivada da Função Arco Seno

A função $y = \text{arcsen}\, x$, $x \in [-1,\ 1]$, é a inversa de $x = \text{sen}\, y$. Aplicando a regra (4.13), obtemos:

$$y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{sen}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Portanto,

$$(\text{arcsen}\, x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},\quad x \in (-1, 1). \tag{4.20}$$

4.7.8 Derivada da Função Arco Cosseno

A função $y = \arccos x$, $x \in [-1,\ 1]$, é a inversa da função $x = \cos y$. Aplicando a regra da derivada da inversa, obtemos:

$$y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{-\text{sen}\, y} = \frac{1}{-\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Portanto,

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \; x \in (-1,\; 1). \tag{4.21}$$

4.7.9 Derivada da Função Arco Tangente

A função $y = \text{arctg}\, x$, $x \in \mathbb{R}$, é a inversa da função $x = \text{tg}\, y$. Então,

$$y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\text{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Assim,

$$(\text{arctg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}, \; x \in \mathbb{R} \tag{4.22}$$

4.7.10 Derivada da Função Arco Cotangente

A função $y = \text{arccotg}\, x$, $x \in (0, \pi)$, é a inversa da função $x = \text{cotg}\, y$.

Então, $y' = \dfrac{1}{x'} = \dfrac{1}{-\text{cossec}^2 y} = -\dfrac{1}{1+\text{cotg}^2 y} = -\dfrac{1}{1+x^2}.$

Assim,

$$(\text{arccotg}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}. \tag{4.23}$$

Exemplo 13. Calcule a derivada das funções:

a) $y = \text{arcsec}\, x$ e b) $y = \text{arccos sec}\, x$

Resolução:

a) Sendo $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$, temos $y = \arccos\left(\dfrac{1}{x}\right)$, que é a inversa da função $\dfrac{1}{x} = \cos y$. Então

$$y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{(\sec y)'} = \frac{1}{\text{tg}\, y \cdot \sec y} = \frac{\cos^2 y}{\text{sen}\, y} = \frac{\cos^2 y}{\sqrt{1-\cos^2 y}}.$$

Lembrando que $\cos y = \dfrac{1}{x}$, obtemos $y' = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$.

b) Sendo $\operatorname{cossec} x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$, temos $y = \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ que é a inversa da função $\dfrac{1}{x} = \operatorname{sen} y$. Então,

$$y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{(\operatorname{cossec} y)'}$$

$$= \frac{1}{-\operatorname{cotg} y \cdot \operatorname{cossec} y} = -\frac{\operatorname{sen}^2 y}{\cos y} = -\frac{\operatorname{sen}^2 y}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y}}.$$

Como $\operatorname{sen} y = \dfrac{1}{x}$ então, $y' = -\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$.

4.7.11 Derivada das Funções Hiperbólicas

Reunimos na tabela embaixo as derivadas das funções hiperbólicas.

$(\operatorname{senh} x)' = \cosh x$	$(\operatorname{tgh} x)' = \operatorname{sech}^2 x$
$(\cosh x)' = \operatorname{senh} x$	$(\operatorname{cotgh} x)' = -\operatorname{cossech}^2 x$
$(\operatorname{sech} x)' = -\operatorname{tgh} x \cdot \operatorname{sech} x$	$(\operatorname{cossec} hx)' = -\operatorname{cotgh} x \cdot \operatorname{cossec} hx$

4.7.12 Derivada das Funções Hiperbólicas Inversas

Na tabela a seguir exibimos as derivadas das funções hiperbólicas inversas.

$(\operatorname{arcsenh} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$(\operatorname{arccosh} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad x > 1$
$(\operatorname{arctgh} x)' = \dfrac{1}{1-x^2}, \quad \lvert x\rvert < 1$	$(\operatorname{arcctgh} x)' = \dfrac{1}{x^2-1}, \quad \lvert x\rvert > 1$
$(\operatorname{arcsech} x)' = -\dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}, \quad 0 < x < 1$	$(\operatorname{arccossech} x)' = -\dfrac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2+1}}, \quad x \neq 0$

4.8 Derivadas Sucessivas

Suponha que f é uma função derivável no intervalo I. Se a função $f'(x)$, também chamada de derivada primeira de $f(x)$, é derivável no mesmo intervalo, então existe a função derivada de $f'(x)$, indicada como $f''(x)$ que é chamada de derivada segunda de $f(x)$. Diz-se então que $f(x)$ é duas vezes derivável.

Seguindo esse procedimento sucessivamente e, supondo que $f(x)$ é n vezes derivável, obtém-se a função derivada n-ésima, ou de ordem n, de $f(x)$ indicada como $f^{(n)}(x)$. As funções $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(n)}(x)$, são as derivadas sucessivas de $f(x)$.

Exemplo 14. Seja $f(x)=x^3+2x^2+x+1$, $x\in\mathbb{R}$. Aplicando as regras de derivação vistas, obtemos:

- $f'(x)=3x^2+4x+1\,,\ x\in\mathbb{R}$
- $f''(x)=6x+4\,,\ x\in\mathbb{R}$
- $f^{(3)}(x)=6\,,\ x\in\mathbb{R}$
- $f^{(n)}(x)=0\,,\ \forall n\geq 4\,,\ x\in\mathbb{R}$

4.9 Derivação Implícita

Até aqui estudamos as funções em que a variável dependente y é dada explicitamente em termos da variável independente x através de uma relação $y=f(x)$. Por exemplo, a função quadrática

$$y=x^2+3x-1,\ x\in\mathbb{R}.$$

Há funções, contudo, que são definidas implicitamente através de uma equação da forma $F(x,y)=0$ envolvendo as variáveis x e y. Um exemplo simples é a equação da circunferência de raio 1 dada como $x^2+y^2-1=0$. Nesse caso é possível resolver a equação em y e obtém-se as funções:

$$y=\sqrt{1-x^2}\,,\ x\in[-1,1]\ \text{ e }\ y=-\sqrt{1-x^2}\,,\ x\in[-1,1].$$

Há equações mais complicadas onde a resolução explícita de y em termos de x não é simples ou possível como é o caso da equação

$$2xy^2 + \cos(xy) + 1 = 0.$$

O objetivo da regra de derivação implícita é o de calcular a derivada da y, como função de x, quando y é dada implicitamente.

A regra consiste em derivar os dois membros da equação em relação a x usando a regra da cadeia quando preciso e, em seguida, isolar o termo y'.

Exemplo 15. Calcular y', sendo:

a) $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

b) $2xy^2 + \cos(xy) + 1 = 0$.

Resolução:

a) Derivando os dois membros da equação (a) em relação a x obtemos $2x + 2yy' = 0$.

Isolando o termo y', obtém-se que $2yy' = -2x$.

Suponha que existe um intervalo onde y é derivável e onde $y \neq 0$, segue que $y' = -\dfrac{x}{y}$.

b) Derivando os dois membros da equação (b) em relação a x obtemos $2y^2 + 2x2yy' - \text{sen}\,(xy)[y + xy'] = 0$.

Isolando o termo y': $y' = \dfrac{-2y^2 - y\text{sen}(xy)}{4xy + x\text{sen}(xy)}$.

Também nesse caso pressupõe-se a existência de um intervalo onde y é derivável e $x \neq 0$ e $4y + \text{sen}(xy) \neq 0$.

4.10 Diferencial

Seja $f(x)$ uma função contínua e derivável em $x_0 \in I$. Da interpretação geométrica da derivada, sabemos que $f'(x_0)$ é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f, no ponto $(x_0, f(x_0))$.

Veja a figura:

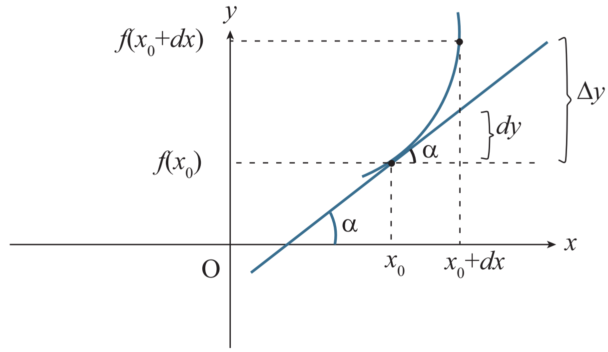


Figura 4.3

Seja dx um acréscimo a x_0 e defina $dy = \operatorname{tg}\alpha \cdot dx$. Como $\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$, então

$$dy = f'(x_0)dx\,. \tag{4.24}$$

O número dy é chamado de diferencial da função $y = f(x)$, no ponto $x = x_0$.

Vamos denotar por Δy o acréscimo sofrido por f quando se dá um acréscimo dx a x_0, ou seja,

$$\Delta y = f(x_0 + dx) - f(x_0)\,. \tag{4.25}$$

Se o acréscimo dx for suficientemente pequeno, podemos esperar que a diferença $\Delta y - dy$ é também pequena e podemos aproximar Δy pela diferencial dy, sendo $dy = f'(x_0)\,dx$, ou seja

$$f(x_0 + dx) \approx f(x_0) + f'(x_0)dx\,. \tag{4.26}$$

Para entendermos melhor esse resultado, chame $x_0 + dx$ de x na equação (4.26). Em seguida, faça $dx = x - x_0$. Obtemos que

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\,. \tag{4.27}$$

A equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$ é $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ onde (x, y) são as coordenadas de um ponto da reta. Comparando com a expressão (4.27) segue que o gráfico da função $f(x)$, para x próximo de x_0, pode ser aproximado por uma linha reta (ou uma função afim).

Exemplo 16. Calcule um valor aproximado para o acréscimo Δy da função $y = x^2$ no intervalo de $x = 1$ a $1 + dx = 1{,}001$.

Resolução: A diferencial de $y = x^2$ é $dy = 2xdx$. Em $x = 1$, $dy = 2dx$. Temos que $dx = 0{,}001$, logo $dy = 0{,}002$. O valor do acréscimo Δy é $\Delta y = f(1+dx) - f(1) = (1{,}001)^2 - 1^2 = 0{,}002001.$

O erro que se comete ao se fazer a aproximação $\Delta y \approx dy$ é igual a $\Delta y - dy = 0{,}000001$ um número muito pequeno. A aproximação pode ser considerada muito boa.

Para finalizar este capítulo, resolva os exercícios propostos abaixo.

Exercícios Propostos

1) Verifique que não existe a derivada de $f(x)$ em $x = x_0$, para $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, \infty)$ e $x_0 = 0$.

2) Calcule $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$, em $x = x_0$, para $f(x) = 3x\,|\,x\,|$, $x_0 = 0$.

3) Calcule a função derivada da $f(x) = x^2 + x$, $x \in \mathbb{R}$, e o valor da função derivada em $x_0 = 5$. Em seguida, calcule a derivada da f no ponto $x_0 = 5$, utilizando a relação (4.2) e compare os resultados.

4) Calcule as derivadas laterais no ponto $x = 1$, da função

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x, & x < 1 \\ x - 2, & x \geq 1 \end{cases}.$$

A função é derivável em $x = 1$? Justifique.

5) Calcular a derivada de $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x - 1}$, $x \neq 1$.

6) Calcule a derivada da função composta $f(x) = (x^2 + 1)^{10}$, $x \in \mathbb{R}$.

7) Calcule a derivada da função inversa das seguinte função $y = f(x) = x^2 + 1$, $x > 0$.

8) Calcule a derivada da função $g(x) = a^{x^2+2x+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

9) Calcule a derivada da função $g(x) = \ln(2x^2 + 2x^4 + 1)$, $x \in \mathbb{R}$.

10) Calcule y' onde $y = (2x+1)^{3x}$, $x \in \mathbb{R}$.

11) Calcule a derivada da função $f(x) = \operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$, $x \neq k\pi, k = 0, 1, \ldots$

Resposta: $f'(x) = -\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{cossec}^2 x$.

12) Calcule a derivada da função $f(x) = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$, $x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}, k = 0, 1, 2, \ldots$

Resposta: $(\sec x)' = \operatorname{tg} x \cdot \sec x$.

13) Calcule a derivada da função $f(x) = \operatorname{cossec} x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$, $x \neq k\pi, k = 0, 1, \ldots$

Resposta: $(\operatorname{cossec} x)' = -\operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{cossec} x$.

Resumo

Neste capítulo você aprendeu a definição de derivada de uma função $f(x)$ e sua interpretação geométrica. Segundo esta interpretação, a derivada de uma função em um ponto x_0 é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função no ponto de coordenadas $(x_0, f(x_0))$. Além disso, aprendeu como determinar a equação desta reta. O conjunto dos pontos onde a derivada existe é o domínio de definição da função derivada. Este domínio não coincide sempre com o domínio da própria função mas pode ser um subconjunto deste. Realmente, a derivada de uma função pode não existir em alguns pontos do domínio da função. Foi observado que uma condição necessária para sua existência em um ponto é a de que a função seja contínua. Importante lembrar que a continuidade da função não é suficiente. Você teve a oportunidade de estudar um exemplo de uma função, a função módulo, que é contínua mas não derivável em $x = 0$. Uma outra maneira de se determinar se uma função é derivável em um ponto é através das derivadas laterais. Também aprendeu regras para derivar soma, diferença, multiplicação e quociente de funções bem como regras para derivar uma função composta e a inversa de uma função. Com estas ferramentas foi possível, então, calcular a derivada das funções elementares. Nas últimas seções deste capítulo você teve a oportunidade de aprender a derivar uma função sucessivas vezes e a derivar uma função implícita. Na última seção, definimos a diferencial de uma função que permite calcular o valor através de uma aproximação linear.

Capítulo 5

Aplicações da Derivada

Capítulo 5

Aplicações da Derivada

No capítulo anterior você aprendeu o que é a derivada de uma função, sua interpretação geométrica e várias regras que auxiliam no seu cálculo. Neste capítulo você aprenderá a aplicá-la para determinar informações importantes sobre a função. Estas informações o ajudarão a analisar a variação de uma função ao longo de seu domínio e a esboçar o seu gráfico.

5.1 Taxa de Variação

Definição 5.1. Dada a função $f : I \to \mathbb{R}$ e $[a,\ b] \subseteq I$, a taxa de variação média de f em $[a,b]$ é o quociente

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{5.1}$$

A taxa de variação média indica quanto, em média, variou a função por unidade de variação da variável no intervalo considerado.

O significado da taxa de variação média será melhor compreendido através de alguns exemplos.

Exemplo 1. Suponha que no intervalo de 5 anos, uma árvore cresceu de 50 cm para 150 cm.

A variação média de sua altura nesse intervalo é, portanto, $\dfrac{150 - 50}{5} = 20$ cm/ano.

Isso significa que a árvore cresceu 20 cm a cada ano, em média. Nesse exemplo, o intervalo corresponde a 5 anos e a unidade de intervalo, a um ano. A função que descreve o crescimento da árvore varia 20 cm, em cada intervalo de 1 ano.

Observe que a taxa média de variação pode ser entendida como uma velocidade. Assim, no exemplo anterior, podemos dizer que a velocidade de crescimento da árvore foi de 20 cm ao ano.

Exemplo 2. Um carro, inicialmente no quilômetro 100 de uma rodovia, chega ao quilômetro 200 após 2 horas de viagem. A variação média da posição do carro durante a viagem é, portanto,

$$\frac{200-100}{2} = 50 \text{ km/h}.$$

Isso significa que a cada hora, o carro percorreu, em média, 50 km. Podemos dizer que a velocidade do carro foi de 50 km por hora ou, mais precisamente, que a função que descreve a posição do carro, cresceu à taxa média de 50 km por hora.

A taxa de variação média de uma função que descreve a posição de um móvel num dado intervalo de tempo, é a velocidade média do móvel.

Exemplo 3. Para atingir o seu destino em duas horas o carro do exemplo anterior, teve que percorrer em média 50 km em cada hora de viagem. Isso não significa que de fato em cada instante da viagem a velocidade do carro foi sempre igual à velocidade média. Ela pode ter variado, ou seja, o carro pode ter acelerado em alguns momentos e desacelerado em outros. Suponha que inicialmente no quilômetro 100 o carro estava parado e portanto sua velocidade era zero km/h no instante inicial e, ao atingir o quilômetro 200, duas horas depois, sua velocidade é 100 km/h. Nesse caso, a aceleração média do carro nestas duas horas de viagem é

$$\frac{100-0}{2}\;\frac{(\text{km/h})}{(\text{h})} = 50 \text{ (km/h)/h} = 50 \text{ km/h}^2.$$

Portanto, a função que descreve a velocidade do carro cresce, em média, 50 km/h, a cada hora.

A taxa de variação média de uma função que descreve a velocidade de um móvel num dado intervalo de tempo, é a aceleração média do móvel.

Na definição (5.1), tome $b - a = h$. Então, a taxa de variação da função $f : I \to \mathbb{R}$ no intervalo $[a,\ a+h] \subset I$ pode ser expressa por

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Supondo que f é derivável em $a \in I$, no limite $h \to 0$ obtemos a derivada de f em a:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Suponha, agora, que f descreve a posição de um móvel em função do tempo t e $a = t_0$. Sabemos da discussão anterior que a velocidade média do móvel no intervalo de tempo h é dada pela taxa de variação média de f em h. No limite $h \to 0$, podemos interpretar $f'(t_0)$ como sendo a velocidade do móvel no instante t_0, chamada então de velocidade instantânea do móvel.

Temos, então, que

A velocidade instantânea $v(t)$ de um móvel no instante t é a derivada da função $f(t)$ que descreve a posição do móvel, no instante t:

$$v(t) = f'(t) \tag{5.2}$$

O conceito de aceleração instantânea é introduzido da mesma forma. Temos:

A aceleração instantânea $a(t)$ de um móvel no instante t é a derivada da função velocidade $v(t)$:

$$a(t) = v'(t). \tag{5.3}$$

Como $v(t) = f'(t)$, e $v'(t) = f''(t)$, segue que a aceleração instantânea é a derivada de 2ª ordem da função posição:

$$a(t) = f''(t)\,. \tag{5.4}$$

Exemplo 4. A posição de um móvel (em metros) no instante t é dada pela função $s(t) = 4t^2 + 3t - 5$. Vamos calcular a sua velocidade no instante $t_0 = 2$ segundos. Derivando a função $s(t)$ obtemos $s'(t) = 8t + 3$. Portanto, a velocidade do móvel no instante $t_0 = 2$ é $v(2) = s'(2) = 19$ m/s.

Exemplo 5. Vamos obter a aceleração do móvel do exemplo anterior no instante $t = 2$. A aceleração em um instante t qualquer é obtida derivando-se a função velocidade $v(t) = s'(t) = 8t + 3$. Obtemos $a(t) = 8$ m/s².

5.2 Máximos e Mínimos de uma Função

Definição 5.2 Dada a função $f : I \to \mathbb{R}$, um ponto $x_0 \in I$ é chamado de:

i) ponto de máximo absoluto da função quando

$$f(x) \le f(x_0) \quad \text{para todo } x \in I; \tag{5.5}$$

ii) ponto se mínimo absoluto da função quando

$$f(x_0) \le f(x) \quad \text{para todo } x \in I; \tag{5.6}$$

iii) ponto de máximo local (ou relativo) quando (5.5) é satisfeita em algum subintervalo aberto de I contendo x_0.

iv) ponto de mínimo local (ou relativo) quando (5.6) é satisfeita em algum subintervalo aberto de I contendo x_0.

O valor $f(x_0)$ é chamado de máximo ou mínimo, absoluto ou local, conforme o caso. Observe que um ponto de máximo ou mínimo absoluto também é um ponto de máximo ou mínimo local. O contrário não é necessariamente verdadeiro. Os máximos e mínimos de uma função são também chamados de extremos.

A derivada de uma função nos seus pontos de máximo ou mínimo tem uma propriedade, dada a seguir, que auxilia na determinação desses pontos.

Teorema 5.1. Seja f uma função derivável em x_0. Se f tem um máximo ou mínimo local em x_0, então $f'(x_0) = 0$.

Exemplo 6. A função $f(x) = x^2$, $x \in (-1,\ 1)$, tem derivada $f'(x) = 2x$. Em $x = 0$, a função tem um mínimo absoluto e $f'(0) = 0$.

Observações

- O teorema afirma que, se a função f é derivável em um ponto onde há um máximo ou mínimo da função, então neste ponto $f' = 0$. Esta é uma condição necessária, mas não suficiente para ocorrência de máximo ou mínimo no ponto. Veremos a seguir exemplo de uma função cuja derivada se anula num ponto onde não há um máximo nem um mínimo.
- Outro caso possível de ocorrer é aquele onde uma função não é derivável num dado ponto. No entanto, nesse ponto há um máximo ou mínimo. Veremos um exemplo disso a seguir.

Exemplo 7. A função $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, é derivável em todo seu domínio e $f'(x) = 3x^2$. Em $x = 0$, $f'(0) = 0$ mas a f não tem máximo nem mínimo nesse ponto. Veja a figura 2.5, do capítulo 2.

Exemplo 8. A função $f(x) = x^{2/3}$, $x \in \mathbb{R}$, é derivável em todo $x \neq 0$ onde $f'(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$. A função f possui um mínimo no ponto $x = 0$ pois $f(x) \geq 0$, para todo x, e não existe a $f'(0)$.

Definição 5.3. Dada a função $f(x)$, um ponto $x_0 \in Dom(f)$ é chamado de ponto crítico da função quando:

i) f não é derivável em x_0; ou

ii) f é derivável em x_0 e $f'(x_0) = 0$.

Exemplo 9. A função $f(x) = x^3 - 3x^2$, $x \in \mathbb{R}$, é derivável em todo $x \in \mathbb{R}$ e $f'(x) = 0$ em $x = 0$ e $x = 2$, que são os únicos pontos críticos da função.

Exemplo 10. A função $f(x) = (x - 1)^{2/3}$, $x \in \mathbb{R}$, não é derivável em $x = 1$. Nesse caso, este é o único ponto crítico.

5.3 Teoremas de Rolle e do Valor Médio

Teorema 5.2. **(Teorema de Rolle)**. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Supondo que f é derivável em (a,b) e $f(a) = f(b)$, existe pelo menos um $x_0 \in (a, b)$ onde $f'(x_0) = 0$.

O matemático francês Michel Rolle(1652-1719) foi um autoditada em matemática. Em 1691 publicou *Démonstration d'une méthode pour resoudre les egalitez de tous les degrez*, que continha o teorema que leva seu nome.

Fonte: http://cwx.prenhall.com/bookbind/pubbooks/thomas_br/chapter1/medialib/custom3/bios/rolle.htm

O teorema de Rolle garante a existência de pelo menos um $x_0 \in (a, b)$ onde $f'(x_0) = 0$. Mas pode haver mais de um ponto no intervalo com esta propriedade. Confira o exemplo a seguir.

Exemplo 11. O polinômio $f(x) = x^3 - 4x$ é uma função contínua e derivável para todo $x \in \mathbb{R}$, e $f(2) = f(-2) = 0$. O teorema de Rolle, então, garante a existência de um $x_0 \in (-2, 2)$ onde $f'(x_0) = 0$. De fato, $f'(x) = 3x^2 - 4 = 0$ em $x_0 = -\frac{2}{\sqrt{3}}$, mas também em $x_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

O teorema de Rolle tem uma interpretação geométrica simples que é a seguinte. Lembre-se que a derivada de uma função num ponto x_0 é igual ao coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função no ponto $(x_0, f(x_0))$. Se $f'(x_0) = 0$, isso significa que a reta tangente no ponto $(x_0, f(x_0))$ é paralela ao eixo x.

Teorema 5.3 **(Teorema do Valor Médio).** Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Supondo que f é derivável em (a, b), existe $x_0 \in (a, b)$ onde

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{5.7}$$

Observações

- Quando $f(a) = f(b)$, o teorema do valor médio implica $f'(x_0) = 0$ para algum $x_0 \in (a, b)$, que é o resultado do teorema de Rolle.

- O teorema do valor médio tem uma interpretação física que é a seguinte:

  Se $f(t)$ descreve a posição de um móvel no intervalo de tempo $[a, b]$, então em algum instante $t_0 \in (a, b)$, a velocidade instantânea do móvel em $t = t_0$ é igual à velocidade média do móvel no intervalo $[a, b]$. Isso significa que, se um carro viaja à velocidade média de 60 km/h, então, pelo menos em um momento durante a viagem, a velocidade (instantânea) do carro foi precisamente 60 km/h.

- Geometricamente, o teorema afirma que existe pelo menos uma coordenada $x_0 \in (a, b)$ tal que a reta tangente ao gráfico da função no ponto $(x_0, f(x_0))$ é paralela à reta que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, como indica a figura a seguir:

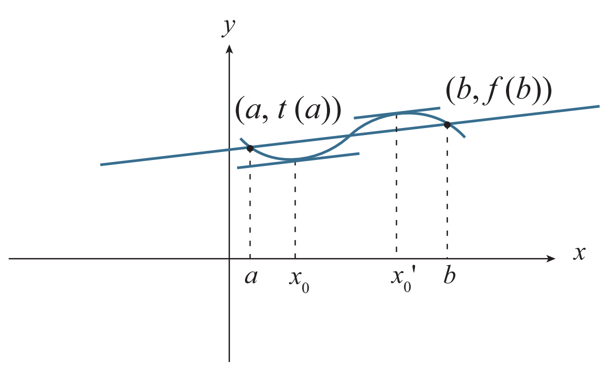


Figura 5.1

Exemplo 12. Verifique que as funções seguintes têm $f'(x_0) = 0$ para algum x_0 no intervalo dado, mas alguma hipótese do teorema de Rolle não é satisfeita.

a) $f(x) = x^2$, $x \in [-1, 4]$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$, $x \in [-2,\ 2]$

Resolução:

a) A função é contínua em $[-1,4]$, é derivável em $(-1,4)$ e tem derivada nula em $x=0$ mas $f(-1)=1 \neq f(4)=16$

b) Em $x=0$, $f'(0)=0$, e $f(-2)=f(2)=\frac{1}{3}$, mas $[-2,\ 2] \not\subset Dom(f)$ pois $-1 \notin Dom(f)$ e $1 \notin Dom(f)$.

O exemplo acima mostra que não vale o recíproco do teorema de Rolle.

Exemplo 13. Verifique se as condições do teorema do valor médio são satisfeitas pela função $f(x)=x^3+3x^2-5$ em $[-1,2]$. Determine os pontos desse intervalo onde se verifica a afirmação do teorema.

Resolução: A função é um polinômio e como tal satisfaz as hipóteses do teorema e $f'(x)=3x^2+6x$. Queremos determinar x_0 tal que

$$f'(x_0)=\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}.$$

Ou seja, $3x_0^2+6x_0=6$. Obtém-se $x_0=-1+\sqrt{2}$.

5.4 Funções Crescentes e Decrescentes

Definição 5.4. Dada uma função $f: I \to \mathbb{R}$, diz-se que

i) f é crescente no intervalo I quando dados $x_1, x_2 \in I$, quaisquer, com $x_1 < x_2$, tem-se que $f(x_1) < f(x_2)$;

ii) f é decrescente no intervalo I quando dados $x_1,\ x_2 \in I$, quaisquer, com $x_1 < x_2$, tem-se que $f(x_1) > f(x_2)$.

O seguinte teorema estabelece um critério para determinar-se onde uma função é crescente ou decrescente:

Teorema 5.4. Seja $f(x)$ uma função derivável no intervalo $(a,\ b)$.

a) Se $f'(x)=0$ em $(a,\ b)$, então $f(x)$ é constante em $(a,\ b)$;

b) Se $f'(x) > 0$ em $(a,\ b)$, então $f(x)$ é crescente em $(a,\ b)$;

c) Se $f'(x) < 0$ em $(a,\ b)$, então $f(x)$ é decrescente em $(a,\ b)$.

Exemplo 14. A função $f(x) = x^3 - 3x^2,\ x \in \mathbb{R}$, tem derivada $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$.

Portanto, $f'(x) = 0$ quando $x < 0$ ou $x > 2$ e $f'(x) = 0$ quando $0 < x < 2$. A função é crescente nos intervalos $(-\infty, 0)$ e $(2,\ +\infty)$ e decrescente no intervalo $(0, 2)$. Confira o gráfico abaixo.

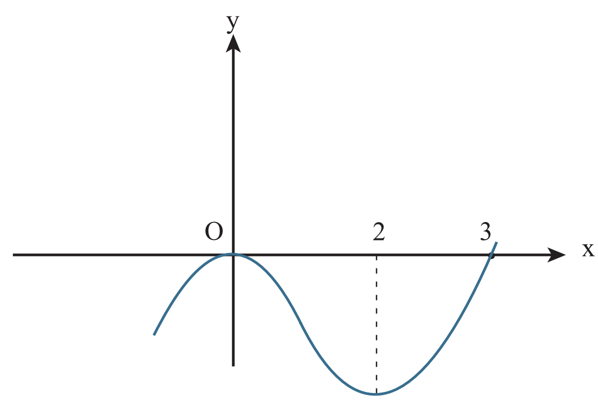


Figura 5.2

5.5 Critérios para Determinar Extremos de uma Função

A seguir apresentaremos uma condição suficiente para a existência de máximo e mínimo.

Teorema 5.5. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável em I exceto, talvez, num ponto crítico $x_0 \in I$. Se existir $a < x_0$ e $b > x_0$ tal que

i) $f'(x) > 0$, $\forall x \in (a,\ x_0)$, e $f'(x) < 0$, $\forall x \in (x_0,\ b)$, então f tem um máximo local em x_0; ou

ii) $f'(x) < 0$, $\forall x \in (a,\ x_0)$, e $f'(x) > 0$, $\forall x \in (x_0,\ b)$ então f tem um mínimo local em x_0.

Exemplo 15. A função $f(x) = (x-1)^{2/3}$, $x \in \mathbb{R}$, é derivável em todo o domínio exceto no ponto $x_0 = 1$. Mas $f'(x) = \frac{2}{3}(x-1)^{-1/3} < 0$, em todo

$x<1$ e $f'(x)>0$ em todo $x>1$. A função f é decrescente em $(-\infty,\ 1)$ e crescente em $(1,\ \infty)$; logo, f tem um mínimo absoluto em $x_0=1$.

Um outro critério para determinar extremos de uma função aplica a segunda derivada.

Teorema 5.6. Seja $f: I \to \mathbb{R}$ uma função derivável em todo $x \in I$ sendo I um intervalo aberto e $x_0 \in I$ um ponto crítico de f. Se existir $f''(x_0)$, e:

i) $f''(x_0)<0$ então x_0 é ponto de máximo local

ii) $f''(x_0)>0$ então x_0 é ponto de mínimo local

Exemplo 16. Determinar os pontos de máximos e mínimos locais da função $f(x)=2x^4+\dfrac{8}{3}x^3-8x^2,\ x\in\mathbb{R}$.

Resolução: Temos $f'(x)=8x^3+8x^2-16x=8x(x+2)(x-1)$ e $f'(x)=0$ em $x_1=0, x_2=1$ e $x_3=-2$. Logo, $x=0,\ 1,\ -2$ são pontos críticos. Como $f''(x)=24x+16x-16$, obtemos $f''(0)=-16<0$, $f''(1)=24>0$ e $f''(-2)=-96<0$.

Portanto, pelo critério anterior, $x_1=0$ é ponto de máximo local enquanto que $x_2=1$, -2 são pontos de mínimo.

5.6 Concavidade e Pontos de Inflexão

Definição 5.5. Seja $f: I \to \mathbb{R}$ uma função contínua no intervalo I e derivável em $x_0 \in I$. Diz-se que o gráfico da $f(x)$ tem concavidade positiva (negativa) em x_0 quando existe uma vizinhança V deste ponto, isto é, um intervalo aberto contido no intervalo I e que contém x_0, tal que para todo $x \in V$ o gráfico da função está acima (abaixo) da reta tangente ao ponto da curva com abcissa x_0.

Um critério para se determinar a concavidade de uma função é dado pelo seguinte teorema:

Teorema 5.7. Seja f uma função derivável até segunda ordem no intervalo I e suponha que em $x_0 \in I$, $f''(x_0)\neq 0$. Nesse caso,

i) se $f''(x_0) > 0$, o gráfico da f tem concavidade positiva em x_0;

ii) se $f''(x_0) < 0$, o gráfico da f tem concavidade negativa em x_0.

Definição 5.6. Um ponto do domínio de uma função f, no qual f é contínua, é chamado de ponto de inflexão quando neste ponto a função muda de concavidade.

Exemplo 17. Analisar a concavidade das funções

a) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1, \ x \in \mathbb{R}$;

b) $f(x) = x^3 - 3x + 6, \ x \in \mathbb{R}$.

Resolução:

a) Temos que $f'(x) = 6x - 2$ e $f''(x) = 6 > 0, \ \forall x$. A função tem concavidade para cima em todo o seu domínio.

b) $f'(x) = 3x^2 - 3$ e $f''(x) = 6x + 8$ quando $x > 0$ e $f''(x) < 0$ quando $x < 0$.

Portanto, a função é côncava para cima em $(0, \ \infty)$ e côncava para baixo em $(-\infty, \ 0)$. A função muda de concavidade em $x = 0$, então este é um ponto de inflexão.

Teorema 5.8. Seja f uma função derivável até segunda ordem num intervalo I e suponha que $x_0 \in I$ é a abcissa de um ponto de inflexão do gráfico da f. Então, $f''(x_0) = 0$.

O teorema 5.8 dá uma condição necessária porém não suficiente para que x_0 seja um ponto de inflexão da f. Não basta que $f''(x_0) = 0$ em algum x_0 para que $(x_0, f(x_0))$ seja um ponto de inflexão.

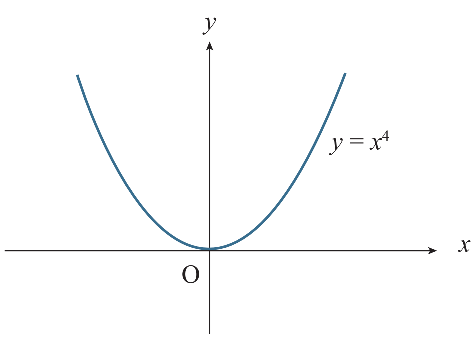


Figura 5.3

Exemplo 18. A função $f(x) = x^4, \ x \in [-1, \ 1]$, cujo gráfico é mostrado na figura 5.3, tem $f'(x) = 4x^3$ e $f''(x) = 12x^2$. Em $x = 0$, $f''(0) = 0$, $f''(x) \geq 0$, para todo x.

O gráfico tem concavidade sempre para cima. Portanto, apesar de termos $f''(0) = 0$ a função não tem ponto de inflexão.

Exemplo 19. A função $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$, $x \in \mathbb{R}$, tem derivadas primeira e segunda $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ e $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$, ambas definidas para todo $x \neq 0$. A função *f* está definida em $x = 0$ e $f(0) = 0$ mas não f' e f''. Para sabermos se em $x = 0$ há um ponto de inflexão, note que $f''(x) > 0$ para $x < 0$ e $f''(x) < 0$ em $x > 0$; logo, *f* é côncava para cima em $(-\infty, 0)$ e é côncava para baixo quando $(0, \infty)$. Em $x = 0$ o gráfico da f tem um ponto de inflexão.

5.7 Esboço de Gráficos de Funções

Os critérios anteriores para determinar-se os extremos de uma função, onde ela cresce ou decresce, a concavidade e os pontos de inflexão constituem ferramentas importantes que auxiliam no esboço do gráfico da função, como veremos no exemplo a seguir.

Exemplo 20. Esboce o gráfico da função $f(x) = x(x+2)^2$, $x \in \mathbb{R}$.

Resolução: A função é um polinômio, logo é uma função contínua e derivável em seu domínio. Em $x = 0$ e em $x = -2$ temos $f(x) = 0$.

O gráfico da f toca o eixo x nos pontos $(0, 0)$ e $(-2, 0)$. Temos que $f(x) \to +\infty$ quando $x \to +\infty$ e $f(x) \to -\infty$ quando $x \to -\infty$.

A primeira e segunda derivadas da f são:

$$f'(x) = 3x^2 + 8x + 4 \quad \text{e} \quad f''(x) = 6x + 8.$$

Temos que $f'(x) = 0$ em $x_1 = -\frac{2}{3}$ e $x_2 = -2$. Nesses pontos, $f''(x_1) = 4 > 0$ e $f''(x_2) = -4 < 0$. Logo, x_1 é ponto de mínimo local e x_2 é ponto de máximo local.

Também, $f'(x) > 0$ para $x > -\frac{2}{3}$ ou $x < -2$ e $f'(x) < 0$ para $-2 < x < -\frac{2}{3}$. A função, então, é crescente em $(-\infty, -2)$ e $\left(-\frac{2}{3}, +\infty\right)$ e decrescente em $\left(-2, -\frac{2}{3}\right)$.

Para $x > -\frac{4}{3}$, tem-se $f''(x) > 0$ e, para $x < -\frac{4}{3}$, tem-se $f''(x) < 0$.

O gráfico da função é côncavo para cima em $\left(-\frac{4}{3},+\infty\right)$ e para baixo em $\left(-\infty,\ -\frac{4}{3}\right)$. O ponto $x=-\frac{4}{3}$ é abcissa de um ponto de inflexão do gráfico.

Com essas informações, podemos esboçar o gráfico da f:

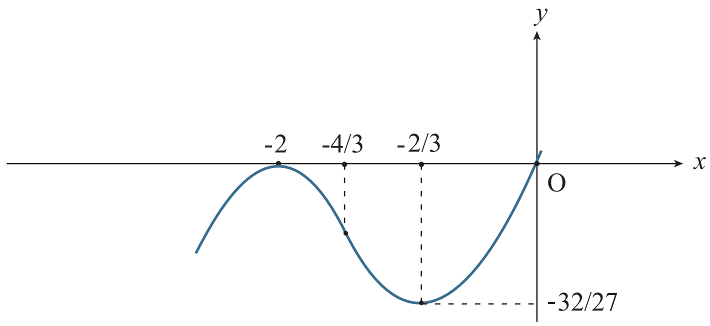


Figura 5.4

5.8 Problemas de Maximização e Minimização

O cálculo da derivada tem aplicação concreta em problemas onde precisa-se determinar quando uma determinada função tem seu valor máximo ou mínimo. Esta função pode descrever o volume de uma caixa, a velocidade de um móvel, etc.

Exemplo 21. Pretende-se fazer uma caixa de papelão a partir de uma lâmina retangular de 1 metro de largura e 2 metros de comprimento, recortando-se quadrados iguais em cada canto da lâmina para obter os lados da caixa, como mostra a figura. Qual o comprimento dos lados dos quadrados para que o volume da caixa seja máximo?

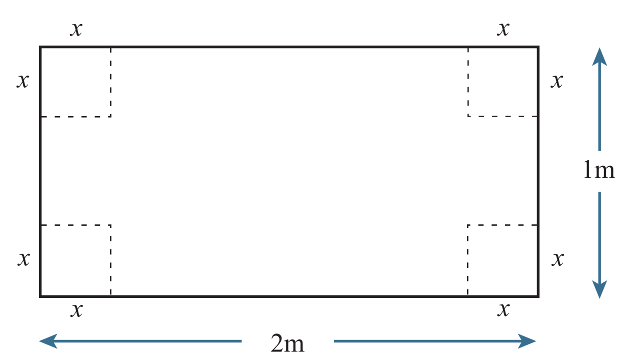


Figura 5.5

Resolução: Seja x o comprimento do lado dos quadrados a serem recortados. Após o recorte dos mesmos, a lâmina permite fabricar uma caixa de altura x, largura $1-2x$ e comprimento $2-2x$. Portanto, o volume como uma função de x é $V(x)=x(1-2x)(2-2x)=2x-6x^2+4x^3$, onde $x \in \left[0,\ \frac{1}{2}\right]$.

Temos que $V'(x)=2-12x+12x^2=0$, com $x=\frac{3+\sqrt{3}}{6} \notin \left[0,\ \frac{1}{2}\right]$, $x=\frac{3-\sqrt{3}}{6} \in \left[0,\ \frac{1}{2}\right]$ e $V''(x)=-12+24x$.

Como $V''\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)<0$, segue que o volume é máximo quando $x=\frac{3-\sqrt{3}}{6}$ metros.

5.9 Regras de L'Hospital

A seguir apresentamos algumas regras para o cálculo de limites associados a indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^∞, ∞^0 e 0^0. Estas regras baseiam-se no cálculo da derivada e são chamadas de regras de L´Hospital.

Guillaume François Antoine, Marquês de L'Hôpital (Paris, 1661 - Paris, 2 de Fevereiro de 1704) foi um matemático francês. É principalmente conhecido pela regra que tem o seu nome para calcular o valor limite de uma fração cujo numerador e denominador tendem para zero.

Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Guillaume_Fran%C3%A7ois_Antoine_l'Hospital

A) Indeterminações do Tipo $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$.

Considere o limite $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, onde $g(x)\neq 0$ para $x\neq a$, nos casos

1) $f(x)\to 0$ e $g(x)\to 0$ quando $x\to a$
2) $f(x)\to\infty$ e $g(x)\to\infty$ quando $x\to a$

Regra 1. Nos casos 1) e 2), calcule $f'(x)$, $g'(x)$. O limite está dado como $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Se a indeterminação continua, isto é, $f'(x)$ e $g'(x)$ satisfazem 1) e 2), calcule $f''(x)$ e $g''(x)$ e $\lim\limits_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}$.

E assim por diante. A regra, é claro, pressupõe que as funções f e g são deriváveis.

Exemplo 22. Calcular:

a) $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}\,(6x)}{4x}$, b) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x}$.

Resolução:

a) A indeterminação é do tipo $\frac{0}{0}$. Aplicando a REGRA 1,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}\,(6x)}{4x} = \lim_{x \to 0} \frac{(\text{sen}\,(6x))'}{(4x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{6\cos(6x)}{4}$$

$$= \frac{6}{4} \cdot \lim_{x \to 0} \cos(6x) = \frac{6}{4}.$$

b) A indeterminação é do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Pela REGRA 1,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{(x^2)'}{(e^x)'} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{e^x}.$$

A indeterminação continua. Aplicando a regra uma segunda vez,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{(2x)'}{(e^x)'} = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

B) Indeterminação do Tipo $0 \cdot \infty$

Ocorre quando se considera limites da forma $\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x)$, no caso $f(x) \to 0$ e $g(x) \to \infty$, quando $x \to a$.

Regra 2. Escreva $\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to a} = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ ou

$$\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to a} = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}},$$

obtendo assim as indeterminações $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.

Aplique então a regra 1.

Exemplo 23. Calcular

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\left(1-\frac{2x}{\pi}\right)\operatorname{tg} x\right] \tag{5.8}$$

Resolução: Este limite é da forma indeterminada 0 · ∞. Aplicando a regra 2, temos que (5.8) é igual a:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left(\dfrac{1-2x}{\pi}\right)'}{\left(\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}\right)'}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\dfrac{-2}{\pi}}{\dfrac{-1}{\operatorname{sen}^2 x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\operatorname{sen}^2 x}{\pi}=\frac{2}{\pi}.$$

C) Indeterminação do Tipo $\infty-\infty$.

Ocorrem no cálculo do limite $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]$ com $f(x)\to\infty$ e $g(x)\to\infty$ quando $x\to a$.

Regra 3. Para calcular o limite, escreva:

$$\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)]=\lim_{x\to a}g(x)\left[\frac{f(x)}{g(x)}-1\right]$$

em seguida, aplique a regra 2.

Exemplo 24. Calcular

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right). \tag{5.9}$$

Resolução: Nesse caso, ocorre a indeterminação da forma $\infty-\infty$. Pela regra 3, (5.9) é igual a

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}\right)\left(\frac{\dfrac{2}{x^2-1}}{\dfrac{1}{x-1}}-1\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}\right)\left(\frac{2}{x+1}-1\right).$$

este último limite é da forma $\infty\cdot 0$.

Aplicando a regra 2, obtemos

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{\dfrac{2}{x+1}-1}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\dfrac{2}{x+1}-1\right)'}{(x-1)'}=-\frac{1}{2}.$$

As demais indeterminações 1^∞, ∞^0 e 0^0 ocorrem no cálculo de $\lim\limits_{x\to a}(f(x))^{g(x)}$ quando, para $x \to a$, tem-se:

1) $f(x) \to 1$ e $g(x) \to \infty$

2) $f(x) \to 0$ e $g(x) \to 0$

3) $f(x) \to \infty$ e $g(x) \to 0$

Regra 4. Nos casos acima, tome o logaritmo natural como segue: $\ln(\lim\limits_{x\to a}(f(x))^{g(x)}) = \lim\limits_{x\to a}\ln(f(x))^{g(x)}$ e aplique uma das regras anteriores.

Exemplo 25. Calcular

1) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 2) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$

Resolução:

1) A indeterminação neste limite é da forma 1^∞. Pela regra 4,

$$\ln\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to 0}\ln\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x},$$

que é do tipo $\frac{0}{0}$. Pela regra 1,

$$\ln\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{(\ln(1+x))'}{x'} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x} = 1.$$

Invertendo o logaritmo: $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

2) Este limite é da forma 0^0. Pela regra 4,

$\ln(\lim\limits_{x\to 0^+}(x)^x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\ln(x)^x = \lim\limits_{x\to 0^+} x\cdot\ln(x)$, que é do tipo $0\cdot\infty$ e pode ser calculado como $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0^+}(-x) = 0$ usando a regra 1.

Portanto, $\ln(\lim\limits_{x\to 0^+} x^x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to 0^+}(x^x) = 1$.

5.10 Fórmula de Taylor

Seja $f: I \to R$ uma função n vezes derivável e $x_0 \in I$. O polinômio

$$T_n(x;x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad (5.10)$$

é chamado de polinômio de Taylor, de grau n, de f no ponto x_0.

Exemplo 26. Calcule o polinômio de Taylor $T_n(x;0)$ de grau $n = 1, 2, 3$ da função $f(x) = e^x$, $x \in R$, no ponto $x_0 = 0$.

Resolução: A derivada de ordem n da $f(x) = e^x$ é $f^{(n)}(x) = e^x$, $n = 1, 2, \ldots$ (Verifique!). Portanto, em $x = x_0 = 0$, $f^{(n)}(0) = 1$ e

$$T_1(x;\ 0) = 1 + x$$

$$T_2(x;\ 0) = 1 + x + \frac{x^2}{2!}$$

$$T_3(x;\ 0) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}.$$

Os gráficos desses 3 polinômios e o da função e^x estão dados na figura abaixo:

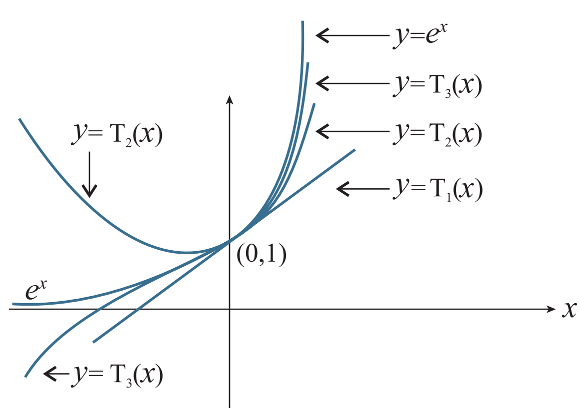


Figura 5.6

É interessante analisarmos, agora, a diferença

$$R_n(x;\ x_0) = f(x) - T_n(x;\ x_0) \quad (5.11)$$

para termos uma idéia de como os polinômios de Taylor aproximam a função $f(x)=e^x$. A diferença R_n é chamada de erro da aproximação.

Comparando os gráficos percebe-se que para um valor de x fixado, por exemplo, $x = 2$, $R_1 > R_2 > R_3$, o erro diminui quando o grau do polinômio aumenta. Por outro lado, quando o valor de x é tomado cada vez mais próximo de $x_0 = 0$, o erro também diminui, qualquer que seja o grau do polinômio.

O seguinte teorema permite tirar conclusões bem gerais sobre o erro $R_n(x;\ x_0)$, que se comete quando uma função f é aproximada por $T_n(x;\ x_0)$ para quaisquer n e x_0.

Teorema 5.9. Seja $f: I \to \mathbb{R}$, uma função $n+1$ vezes derivável com derivadas contínuas em I e sejam $x, x_0 \in I$. Existe um número c no intervalo de extremos x_0 e x tal que

$$f(x) = T_n(x;\ x_0) + R_n(x,\ x_0) \tag{5.12}$$

onde

$$R_n(x,\ x_0) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \tag{5.13}$$

Além disso, se $\left|f^{(n+1)}(c)\right| \le K$, $K > 0$, então

$$\left|R_n\right| \le \frac{K}{(n+1)!}\left|x-x_0\right|^{n+1} \tag{5.14}$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|\,x-x_0\,|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ segue que, fixado um ponto x, o erro tende a zero quando o grau n é tomado cada vez maior.

Exemplo 27. Seja $f(x) = \ln x$, $x > 0$. Determine o polinômio de Taylor de f de grau 3, no ponto $x_0 = 1$. Em seguida, calcule um valor aproximado para $f(1,\ 1)$ e avalie o erro cometido na aproximação.

Resolução: Temos que $f(1) = 0$ e as derivadas de f até ordem 4 são:

$$f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(1) = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow f''(1) = -1$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{2}{x^3} \Rightarrow f^{(3)}(1) = 2$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4} \Rightarrow f^{(4)}(1) = -6.$$

Portanto, $T_3(x,\ 1) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3$.

Tomando $x = 1{,}1$, obtemos:

$$T_3(1{,}1;\ 1) = (0{,}1) - \frac{1}{2}(0{,}1)^2 + \frac{1}{3}(0{,}1)^3 = 0{,}09533 \text{ e}$$

$\ln(1{,}1) = 0{,}09533 + R_3(1{,}1;\ 1)$, onde

$$R_3(1{,}1;\ 1) = \frac{f^{(4)}(c)}{4!}(1{,}1-1)^4 = -\frac{(0{,}1)^4}{4c^4}$$

para algum ponto c entre 1 e $1{,}1$.

Portanto, se aproximarmos $\ln(1{,}1)$ pelo valor 0,09533 o erro que se comete é $|R_3| < \frac{(0{,}1)^4}{4} = 0{,}000025$, pois $c > 1$. Esse erro é muito pequeno e só afeta o valor da aproximação a partir da 5ª casa decimal.

Vamos ver se você está compreendendo os conteúdos deste capítulo? Resolva os exercícios a seguir.

Exercícios Propostos

1) Um carro desloca-se em linha reta obedecendo à função posição $f(t) = t^4 + \cos t,\ t \geq 0$.

   Determine:

   a) sua velocidade em função de t.

   b) sua aceleração em função de t.

   c) sua velocidade em $t = 0$.

Resposta:

a) $v(t) = 4t^3 - \text{sen } t$.

b) $a(t) = 12t^2 - \cos t$.

c) $v(0) = 0$.

2) Determine os pontos críticos da função $f(x) = x^4 + 2x^3 + 4$, $x \in \mathbb{R}$.

3) Verifique se as hipóteses do teorema de Rolle são satisfeitas pela função *f* dada. Determine onde $f\,'(x) = 0$.

$f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$, $x \in [-1, 2]$

Resposta: $x_0 = \dfrac{2 \pm \sqrt{7}}{3}$

4) Seja $f(x) = x^2 + 1$, $x \in [-3,\ 3]$. Determine $x_0 \in [-3,\ 3]$ onde $f\,'(x_0) = \dfrac{f(3) - f(-3)}{3 - (-3)}$.

Resposta: $x_0 = 0$

5) Determine os intervalos onde a função é crescente e onde decrescente: $f(x) = \text{sen } x$, $x \in [0,\ \pi]$.

Resposta: A função cresce em $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ e decresce em $\left[\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right]$.

6) Obter os pontos de máximo e mínimo locais da função: $f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 14x^2 + 5$, $x \in \mathbb{R}$.

7) Determinar os pontos de inflexão dos gráficos da seguinte função: $f(x) = x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 12x - 5$, $x \in \mathbb{R}$.

Resposta: $(2,\ -29)$ e $(-1,\ -26)$

8) Esboce o gráfico da função $f(x) = 2x^3 - 6x$, $x \in \mathbb{R}$.

9) Verificar os seguintes limites:

a) $\lim_{x\to 0}(\operatorname{sen} x)^x = 1$.

b) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6} = -4$.

10) Calcule o polinômio de Taylor de ordem n da função $f(x)=\dfrac{1}{x},\ x>0$ no ponto $x_0=1$.

Resumo

As aplicações da derivada ao estudo de funções são muitas, como você verificou ao estudar este capítulo. Iniciamos com uma discussão sobre o significado da taxa de variação média de uma função em um intervalo do seu domínio. Ela pode ser interpretada como sendo a velocidade média de crescimento da função no intervalo. Em especial, se a função descreve a posição de um móvel no tempo, a taxa corresponde à velocidade média do móvel no intervalo de tempo. Se considerarmos intervalos cada vez menores de tempo, no limite em que o intervalo vai a zero a taxa de variação é igual à derivada da função em um ponto que é igual à velocidade instantânea do móvel. Da mesma forma, a aceleração média do móvel é igual à taxa de variação média da velocidade e a aceleração instantânea é a derivada da função velocidade, ou ainda, a derivada de segunda ordem da função posição. Em seguida, você aprendeu a aplicar a derivada para determinar os pontos onde ocorrem os extremos de uma função, isto é, aqueles pontos do domínio da função onde ela assume seus maiores ou menores valores relativos. Nesses pontos, se a função for derivável, sua derivada é igual a zero. Temos assim uma maneira de achar os pontos que são candidatos a serem pontos extremos: determinando onde a derivada é igual a zero. Alguns exemplos mostraram no entanto que essa informação não é suficiente. O conhecimento de onde no domínio a função é crescente ou decrescente auxilia a determinar máximos e mínimos de uma função. Essa informação pode também ser obtida através da derivada. A função é crescente em cada intervalo onde a derivada é positiva e é decrescente em cada intervalo onde ela é negativa. Portanto, para certificar-se de que um ponto onde a derivada se anula, ou não existe, é suficiente verificar se no ponto a derivada da função muda de sinal. Você certamente aprendeu que outro critério importante é o da segunda derivada. Supondo que ela existe e a primeira derivada se anula num dado ponto, então esse ponto é ponto de mínimo (máximo) se a segunda derivada é positiva (negativa) neste ponto. Essas informações sobre os pontos onde uma função cresce ou decresce, onde tem seus pontos de máximo ou mínimo auxiliam a esboçar o gráfico da função. O esboço, é claro, será mais preciso se você conhecer sua concavidade e ponto(s) de inflexão. O gráfico é côncavo para cima (para baixo) onde a segunda derivada é positiva (negativa). Os pontos onde f é contínua e a concavidade inverte são os chamados pontos de inflexão. Nesses pontos a segunda derivada, se existir, é igual a zero; mas, cuidado, pois você viu um exemplo onde a segunda derivada se anula em um ponto onde a função não tem ponto de inflexão. Outras aplicações da derivada é em problemas de maximização e minimização de funções e no cálculo de limites - através das regras de L´Hospital - e no cálculo de aproximações de uma função - através da fórmula de Taylor.

Capítulo 6

Introdução à Integral

Capítulo 6
Introdução à Integral

Desejamos que você, neste capítulo, possa, compreender o conceito de integral definida, aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo para calcular integrais, calcular a área da região do plano compreendido entre duas curvas, usar as propriedades das integrais, calcular integrais imediatas e usar o método da substituição para calcular uma integral.

Nos capítulos 4 e 5 tratamos da derivada e suas aplicações. A derivada é um dos conceitos mais importantes do cálculo. Outro conceito também muito importante é o de integral.

Existem dois problemas fundamentais em cálculo. O primeiro é encontrar a inclinação de uma curva em um ponto dado e o segundo é encontrar a área sob a curva. Você viu, no capítulo 4, que o conceito de derivada está ligado ao problema de traçar a tangente a uma curva.

Agora, você verá que a integral está ligada ao problema de determinar área de uma figura plana qualquer. Assim, a derivada e a integral são as duas noções básicas em torno das quais se desenvolve todo o cálculo.

6.1 Conceito de Área

O nome Cálculo Integral foi criado por Johann Bernoulli e publicado pela primeira vez por seu irmão mais velho Jacques Bernoulli em 1690. Veja mais em http://www.cepa.if.usp.br/e-calculo/historia/historia_integrais.htm

Já sabemos que a integral está ligada ao problema de determinar a área de uma figura plana qualquer.

Para isso, motivaremos o entendimento do cálculo de área, usando o método do retângulo, de uma região R compreendida entre o gráfico de uma função $f(x)$ com valores positivos, o eixo x, em um intervalo fechado $[a,b]$ conforme figura a seguir.

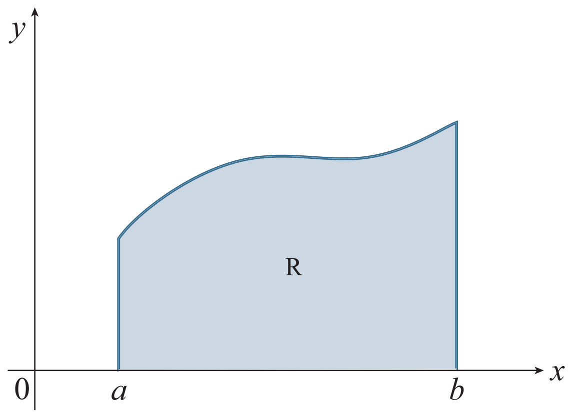


Figura 6.1

Talvez o primeiro contato que você tenha com o conceito de área seja a fórmula $A = b \, . \, h$, que dá a área A de um retângulo como o produto da base b pela altura h. Logo a seguir você tem a área de um triângulo que é igual à metade do produto da base pela altura. Isto decorre do fato de que qualquer triângulo pode ser decomposto em dois triângulos retângulos, e todo triângulo equivale exatamente a meio retângulo, conforme figura a seguir:

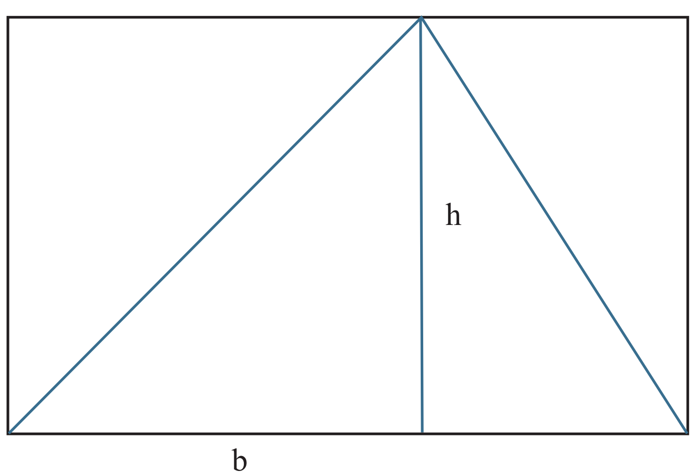


Figura 6.2

Dada a fórmula $A = \frac{1}{2} b \cdot h$ para a área de um triângulo, pode-se, encontrar a área de qualquer polígono. A razão é que qualquer figura poligonal pode ser subdividida em triângulos que não se superpõem, a área do polígono é então a soma das áreas desses triângulos. Essa abordagem de área remonta ao Egito e à Babilônia de muitos milênios atrás.

Polígono

Polígono é uma figura geométrica cuja palavra é proveniente do grego que quer dizer: poli(muitos) + gonos(ângulos), ou seja, um subconjunto do plano delimitado por uma "curva" fechada consistindo em um número finito de segmentos retilíneos.

Os problemas de calcular a área não apresentam grande dificuldade se a figura plana for um retângulo, um paralelogramo ou um triângulo.

A área de uma figura plana qualquer pode ser calculada aproximando a figura por polígonos cujas áreas possam ser calculadas pelos métodos da geometria elementar.

Isto nos motiva a considerar agora o problema de calcular a área de uma região R do plano, limitada por duas retas verticais $x = a$ e $x = b$, pelo eixo x e pelo gráfico de uma função $f(x)$ limitada e não negativa no intervalo fechado $[a, b]$, conforme figura abaixo:

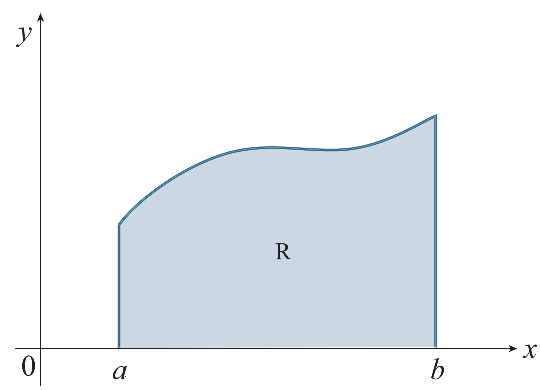


Figura 6.3

Para isso, vamos fazer uma partição P do intervalo $[a,b]$, isto é, vamos dividir o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos, por meio dos pontos x_0, x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_i, ..., x_n, escolhidos arbitrariamente da seguinte maneira:

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$, veja figura a seguir

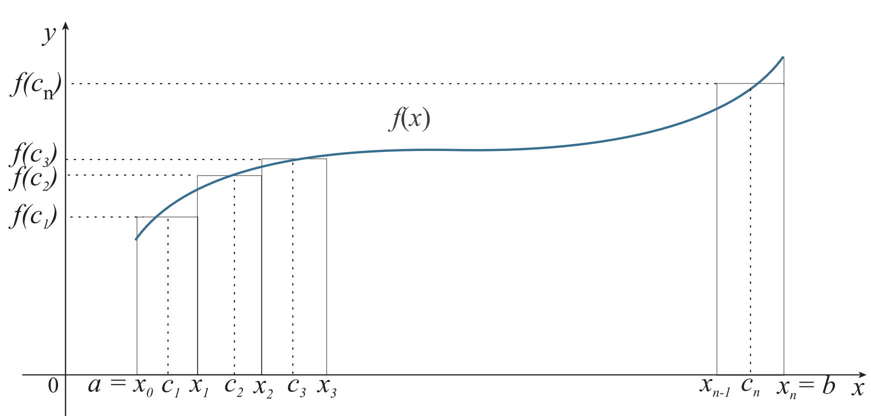


Figura 6.4

O comprimento do i-ésimo subintervalo, $[x_{i-1}\ ,\ x_i]$, é dado por $\Delta\, x_i\ =\ x_i - x_{i-1}$. Vamos construir retângulos de base $x_i - x_{i-1}$ e altura $f(c_i)$ onde c_i é um ponto do intervalo $[x_{i-1}\ ,\ x_i]$.

Da figura acima, temos:

- $\Delta x_1 = x_2 - x_1$ base do primeiro retângulo;
- $\Delta x_2 = x_3 - x_2$ base do segundo retângulo; ... ;
- $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ base do i-ésimo retângulo; ... ;
- $\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$ base do n-ésimo retângulo e
- $f(c_1)$ altura do primeiro retângulo;
- $f(c_2)$ altura do segundo retângulo; ... ;
- $f(c_i)$ altura do i-ésimo retângulo; ...;
- $f(c_n)$ altura do n-ésimo retângulo.

Logo, a área de cada retângulo será:

- $\Delta x_1\ \times\ f(c_1)$ área do primeiro retângulo;
- $\Delta x_2\ \times f(c_2)$ área do segundo retângulo; ...;
- $\Delta x_i\ \times\ f(c_i)$ área do i-ésimo retângulo; ... ;
- $\Delta x_n\ \times\ f(c_n)$ área do n-ésimo retângulo.

Você já deve ter percebido que, aumentando o números de retângulos pode-se obter uma melhor aproximação para a área A da região R.

Assim a soma das áreas dos n retângulos, denotada por S_n, será

$$S_n = f(c_1)\cdot\Delta x_1 + f(c_2)\cdot\Delta x_2 + \ldots + f(c_n)\cdot\Delta x_n$$
$$= \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot\Delta x_i\ .$$

Essa soma é chamada Soma de Riemann da função f relativa à partição P. Quando n cresce, é "razoável" esperar que a soma das áreas dos retângulos tenda à área A sob a curva. Deste modo, definimos a medida da área A da região R como sendo

Bernhard Riemann (1826-1866), matemático alemão, que trouxe contribuições importantes para a análise e a geometria diferencial, algumas das quais abriram caminho para o desenvolvimento da relatividade geral.

Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Bernhard_Riemann

$A = \lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x_i$ se esse limite existir. E então se diz que a região R é mensurável.

6.2 A Integral

Chamamos a atenção do leitor para o fato de que a integral não significa necessariamente uma área. Dependendo do problema, ela pode representar grandezas como volume, quantidade de bactérias presentes em certo instante, trabalho realizado por uma força, momentos e centro de massa (ponto de equilíbrio).

A integral está associada ao limite apresentado acima. Neste ítem apresentaremos a definição da integral que nasceu com a formulação dos problemas de áreas e citaremos as suas propriedades. Já sabemos que a integral e a derivada, estudada no Capítulo 4, são as duas noções básicas em torno das quais se desenvolve todo o Cálculo. Conforme terminologia introduzida anteriormente, temos a seguinte definição.

Definição 6.1. Seja $f(x)$ uma função limitada definida no intervalo fechado $[a,\ b]$ e seja P uma partição qualquer de $[a,\ b]$. A integral de $f(x)$ no intervalo $[a,\ b]$, denotada por $\int_a^b f(x)\ dx$, é dada por

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\ .\ \Delta x_i\ ,$$

desde que o limite do segundo membro exista.

Na notação $\int_a^b f(x)\ dx$:

- $f(x)$ é chamada função integrando;
- $\int$ é o símbolo da integral.

Os números a e b são chamados limites de integração (a = limite inferior e b = limite superior).

Se $\int_a^b f(x)\ dx$ existe, diz-se que f é integrável em $[a,\ b]$ e geometricamente a integral representa a área da região limitada pela função $f(x)$, as retas $x = a$ e $x = b$ e o eixo x, desde que $f(x) \geq 0\ \ \forall x \in [a,\ b]$.

O método de calcular a área, conforme a secção 6.1 pode ser ampliado de modo a incluir o caso em que o limite inferior seja maior do o limite superior e o caso em que os limites inferior e superior são iguais, senão vejamos.

Definição 6.2. Se $a > b$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

se a integral à direita existir.

Definição 6.3 Se $a = b$ e $f(a)$ existe, então $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

Teorema 6.1. Se $f(x)$ é uma função contínua no intervalo fechado, $[a,\ b]$ então $f(x)$ é integrável em $[a,\ b]$.

A seguir citaremos algumas propriedades fundamentais da integral que usaremos no curso.

6.3 Propriedades da Integral

As propriedades da integral não serão demonstradas, pois foge do objetivo do nosso curso.

P1. Se a função $f(x)$ é integrável no intervalo fechado $[a,\ b]$ e se k é uma constante real qualquer, então

$$\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx.$$

P2. Se as funções $f(x)$ e $g(x)$ são integráveis em $[a,\ b]$, então $f(x) \pm g(x)$ é integrável em $[a,\ b]$ e

$$\int_a^b \big(f(x) \pm g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx.$$

P3. Se $a < c < b$ e a função $f(x)$ é integrável em $[a,c]$ e em $[c,b]$, então $f(x)$ é integrável em $[a,\ b]$ e

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

P4. Se a função $f(x)$ é integrável e se $f(x) \geq 0$ para todo x em $[a,\ b]$, então $\int_a^b f(x)\ dx\ \geq\ 0.$

P5. Se as funções $f(x)$ e $g(x)$ são integráveis em $[a,\ b]$ e $f(x)\ \geq\ g(x)$ para todo x em $[a,\ b]$, então

$$\int_a^b f(x)\ dx\ \geq\ \int_a^b g(x)\ dx.$$

P6. Se $f(x)$ é uma função integrável em $[a,\ b]$, então $|f(x)|$ é integrável em $[a,\ b]$ e

$$\left|\int_a^b f(x)\ dx\right|\ \leq\ \int_a^b |f(x)|\ dx.$$

Calcular uma integral através do limite das Somas de Riemann é geralmente uma tarefa árdua. Por isso nosso próximo objetivo é estabelecer o chamado Teorema Fundamental do Cálculo, o qual nos permite calcular muitas integrais de forma surpreendentemente fácil.

6.4 Função Primitiva

No estudo da derivada tínhamos uma função e obtivemos, a partir dela, uma outra, a que chamamos de **derivada**. Neste ítem, faremos o caminho inverso, isto é, dada a derivada, vamos encontrar ou determinar uma função original que chamaremos **primitiva**. Você deve observar que é importante conhecer bem as regras de derivação e as derivadas de várias funções, estudadas no Capítulo 4, para determinar primitivas.

O que acabamos de mencionar nos motiva a seguinte definição.

Definição 6.4 Uma função $F(x)$ é chamada uma **primitiva** da função $f(x)$ em um intervalo I, se para todo $x \in I$, tem-se $F'(x)\ =\ f(x)$.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1. A função $F(x)=\dfrac{x^5}{5}$ é uma primitiva da função

$f(x)=x^4$, pois $F'(x)=\dfrac{5\,x^4}{5}=x^4=f(x)$, para todo x real.

Exemplo 2. As funções $T(x)=\dfrac{x^5}{5}+9$, $H(x)=\dfrac{x^5}{5}-2$ também são

primitivas da função $f(x)=x^4$, pois $T'(x)=H'(x)=f(x)$.

Exemplo 3. A função $F(x)=\dfrac{e^{-3x}}{-3}$ é uma primitiva da função

$f(x) = e^{-3x}$, pois $F'(x)=\dfrac{-3\cdot e^{-3x}}{-3}=e^{-3x}=f(x)$ para todo x real.

Exemplo 4. A função $F(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$ é uma primitiva da função

$f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, pois $F'(x)=\dfrac{1}{2}\cdot x^{1/2-1}=\dfrac{1}{2}\cdot x^{-1/2}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x^{1/2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=f(x)$.

Observação. Seja I um intervalo em $\mathbb{R}$. Se $F: I \to \mathbb{R}$ é uma primitiva de $f: I \to \mathbb{R}$, então para qualquer constante real k, a função $G(x)$ dada por $G(x)=F(x)+k$ é também uma primitiva de $f(x)$. Se $F, G: I \to \mathbb{R}$ são primitivas de $f: I \to \mathbb{R}$, então existe uma constante real k tal que $G(x)=F(x)+k$, para todo $x \in I$.

Exemplo 5. Você sabe que $(\operatorname{sen} x)'=\cos x$. Assim, $F(x)=\operatorname{sen} x$ é uma primitiva da função $f(x)=\cos x$ e toda primitiva da função $f(x)=\cos x$ é do tipo $G(x)=\operatorname{sen} x+k$ para $k \in \mathbb{R}$. Assim,

$G_1(x)=\operatorname{sen} x+10$, $G_2(x)=\operatorname{sen} x-50$ *e* $G_3(x)=\operatorname{sen} x-\dfrac{3}{4}$,

são todas primitivas da função $f(x)=\cos x$, pois
$G_1'(x)=G_2'(x)=G_3'(x)=\cos x=f(x)$.

Exemplo 6. Encontrar uma primitiva $F(x)$, da função $f(x)=\cos x-\operatorname{sen} x$, que satisfaça a seguinte condição $F(0)=0$.

Resolução: Pela definição de função primitiva temos $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$, assim, $F(x)$ será uma função cuja derivada será a função $f(x)$ dada. Logo,

$F(x) = \text{sen}\, x - (-\cos x) + k = \text{sen}\, x + \cos x + k$, pois,

$$\begin{aligned} F'(x) &= (\text{sen}\, x)' + (\cos x)' + k' \\ &= \cos x + (-\text{sen}\, x) + 0 \\ &= \cos x - \text{sen}\, x = f(x). \end{aligned}$$

Ou seja, $F(x) = \text{sen}\, x + \cos x + k$.

Como $F(x)$ deve satisfazer a condição $F(0) = 0$, vamos calcular o valor da constante k, fazendo $x = 0$ na função $F(x)$, isto é,

$F(0) = \text{sen}\ 0 + \cos 0 + \text{k} = 0 \Rightarrow 0 + 1 + \text{k} = 0 \Rightarrow \text{k} = -1$

Assim, $F(x) = \text{sen}\, x + \cos x - 1$.

Portanto, $F(x) = \text{sen}\, x + \cos x - 1$ é uma função primitiva de $f(x) = \cos x - \text{sen}\, x$.

6.5 Teorema Fundamental do Cálculo (TFC)

Esta seção aborda um dos mais importantes teoremas do cálculo.

Este teorema permite calcular a integral de uma função utilizando uma primitiva da mesma, e por isso, é a chave para calcular integrais. Ele diz que, conhecendo uma função primitiva de uma função $f(x)$ integrável no intervalo fechado $[a, b]$, podemos calcular a sua integral.

As considerações acima motivam o teorema a seguir.

Teorema 6.2. (Teorema Fundamental do Cálculo). Se a função $f(x)$ é integrável no intervalo fechado $[a, b]$ e se $F(x)$ é uma função de $f(x)$ neste intervalo, então

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

Costuma-se escrever $F(x)\big|_a^b$ para indicar $F(b) - F(a)$.

O Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) não só torna o cálculo de integrais mais simples, como também contém em si a relação entre a derivada, o limite e a integral. Isto porque o Teorema Fundamental afirma que o valor da integral, $\int_a^b f(x)\,dx$, pode ser calculado com o auxílio de uma função F tal que a derivada de F seja igual a f, possibilitando encontrar o valor de uma integral utilizando uma primitiva da função integrando.

Vejamos agora alguns exemplos aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo.

Exemplo 1. Determinar $\int_0^2 x\,dx$.

Resolução: Sabemos que $F(x)=\dfrac{x^2}{2}$ é uma primitiva da função $f(x)$, pois $F'(x)=2\cdot\dfrac{x}{2}=x=f(x)$, logo, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, vem

$$\begin{aligned}\int_0^2 x\,dx = F(x)\Big|_0^2 &= \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = F(2)-F(0)\\ &= F(2)-F(0) = \frac{2^2}{2}-\frac{0^2}{2}\\ &= \frac{4}{2}-\frac{0}{2} = 2-0=2.\end{aligned}$$

Portanto, $\int_0^2 x\,dx = 2$.

Exemplo 2. Calcular $\int_1^3 (x^2+4)\,dx$.

Resolução: Aqui, temos $F(x)=\dfrac{x^3}{3}+4x$ que é uma primitiva de $f(x)=x^2+4$, pois $F'(x)=3\cdot\dfrac{x^2}{3}+4\cdot 1=x^2+4=f(x)$, logo, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, vem

$$\int_1^3 (x^2+4)dx = \left(\frac{x^3}{3}+4x\right)\Bigg|_1^3 = F(3)-F(1)$$

$$= \left(\frac{3^3}{3}+4\cdot 3\right)-\left(\frac{1^3}{3}+4\cdot 1\right) = (9+12)-\left(\frac{1}{3}+4\right)$$

$$= 21-\left(\frac{1+12}{3}\right) = 21-\frac{13}{3} = \frac{63-13}{3} = \frac{50}{3}.$$

Portanto, $\int_1^3 (x^2+4)dx = \frac{50}{3}$.

Observe que podemos calcular a integral $\int_1^3 (x^2+4)dx$ usando as propriedades um e dois da integral e o teorema fundamental do cálculo, o resultado será o mesmo, de fato,

$$\int_1^3 (x^2+4)dx = \int_1^3 x^2dx + \int_1^3 4\,dx = \int_1^3 x^2\,dx + 4\int_1^3 dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\Bigg|_1^3 + 4x\Big|_1^3 = \left(\frac{3^3}{3}-\frac{1^3}{3}\right)+4\cdot(3-1).$$

$$= \left(\frac{27}{3}-\frac{1}{3}\right)+4\cdot 2 = \frac{26}{3}+8$$

$$= \frac{26+24}{3} = \frac{50}{3},$$

Assim, $\int_1^3 (x^2+4)dx = \frac{50}{3}$.

Portanto, usando propriedades da integral e o TFC chegamos ao mesmo valor no cálculo da integral $\int_1^3 (x^2+4)\,dx$ que é $\frac{50}{3}$.

Exemplo 3. Calcular $\int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$.

Resolução: Sabemos que $F(x) = \sqrt{x}$ é uma primitiva de $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, pois $F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = f(x)$, logo pelo TFC, temos

$$\int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{x}\Big|_1^4 = F(4)-F(1) = \sqrt{4}-\sqrt{1} = 2-1 = 1.$$

Portanto, $\int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = 1$.

Exemplo 4. Calcular a integral $\int_0^4 f(x)\,dx$, onde

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & se \quad 0 \le x \le 2 \\ 2x, & se \quad 2 < x \le 4 \end{cases}.$$

Resolução: Pela propriedade 3 da integral, temos
$\int_0^4 f(x)\,dx \;=\; \int_0^2 f(x)\,dx \;+\; \int_2^4 f(x)\,dx$. Como
$f(x) = x^2$ para $0 \le x \le\; 2$ e $f(x) = 2x$ para $2 < x \le\; 4$, vem

$$\begin{aligned}
\int_0^4 f(x)\,dx &= \int_0^2 x^2\,dx + \int_2^4 2x\,dx \\
&= \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^2 + 2\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_2^4 \\
&= \left(\frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right) + 2\cdot\left(\frac{4^2}{2} - \frac{2^2}{2}\right) \\
&= \left(\frac{8}{3} - \frac{0}{3}\right) + 2\cdot\left(\frac{16}{2} - \frac{4}{2}\right) \\
&= \left(\frac{8}{3} - 0\right) + 2\cdot\left(\frac{16}{2} - \frac{4}{2}\right) \\
&= \left(\frac{8}{3} - 0\right) + 2\cdot(8-2) = \frac{8}{3} + 2\cdot 6 \\
&= \frac{8}{3} + 12 = \frac{8+36}{3} = \frac{44}{3}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\int_0^4 f(x)\,dx = \frac{44}{3}$.

Vamos conferir se você está acompanhando tudo até aqui? Considerando os estudos feitos até o final deste ítem e resolva os exercícios propostos.

Exercícios Propostos

1) Calcular a integral $\int_0^3 f(x)\,dx$ onde $f(x) = \begin{cases} 7 - x, & \text{se } x < 2 \\ x + 3, & \text{se } x \ge 2 \end{cases}$.

2) Determinar o valor das seguintes integrais aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo.

a) $\int_0^2 (x^2+5)^3 \cdot 2x\,dx$.

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+\cos x)\;dx$.

c) $\int_0^1 (x^3-6x+8)\;dx$.

d) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\;dx$.

e) $\int_0^2 e^x\;dx$.

Respostas:

1) $\dfrac{35}{2}$.

2) a) 1.484.

b) $\dfrac{\pi^2}{8}+1$.

c) $\dfrac{21}{8}$.

d) 1.

e) e^2-1.

Nesta seção você teve a oportunidade de perceber se entendeu o significado e a importância do Teorema Fundamental do Cálculo. Só prossiga após resolver os exercícios propostos acima, pois tudo que veremos a seguir depende do conceito trabalhado neste ítem.

6.6 Integral Indefinida

Sabemos que a derivada é um dos conceitos mais importantes do Cálculo. Outro conceito também muito importante é o de Integral. Existe uma estreita relação entre estas duas idéias. Assim, nesta seção, será apresentada a definição de integral indefinida e explicada sua relação com a derivada.

Acreditamos que você já está preparado para a definição a seguir.

Definição 6.5. Seja f uma função integrável em $[a,\ b]$. Toda função $G:[a,\ b]\to\mathbb{R}$ definida por $G(x)=\int_a^x f(t)\;dt+k$ onde k é uma constante, é chamada **integral indefinida** da função f.

Observação: Se F é uma primitiva de f em $[a, b]$ então, pelo T.F.C., a integral indefinida de f é

$$G(x) = \int_a^x f(t)\, dt + k = F(x) - F(a) + k = F(x) + C,$$

onde $C = k - F(a)$ é chamada constante de integração.

Assim, se F é uma primitiva de f a integral indefinida de f é dada por $G(x) = F(x) + C$ que representa a família de todas as primitivas de f.

A integral indefinida de f é também representada por $\int f(x)\, dx$.

Em síntese, quando a função f possui primitiva temos:

1) $\int f(x)\, dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$.

2) $\int f(x)\, dx$ representa uma família de funções, isto é, a família ou o conjunto de todas primitivas da função integrando.

3) $\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\, dx\right) = \frac{d}{dx}(F(x) + C) = \frac{d}{dx} F(x) = F(x) = f(x)$.

Para reforçar a diferença entre $\int_a^b f(x)\, dx$ e $\int f(x)\, dx$, dizemos também que a integral de f, $\int_a^b f(x)\, dx$, é a integral definida de f.

Vejamos alguns exemplos da parte 3 apresenta anteriormente.

Exemplo 1. Como $\frac{d}{dx}(\text{sen}\, x) = \cos x$ temos $\int \cos x\, dx = \text{sen}\, x + C$

Exemplo 2. Como $\frac{d}{dx}(x^4) = 4x^3$ temos $\int 4\, x^3\, dx = x^4 + C$.

Exemplo 3. Como $\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ temos $\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx = \sqrt{x} + C$.

Exemplo 4. Como $\dfrac{d}{dx}(\text{tg}\, x) = \sec^2 x$ temos $\int \sec^2 x \, dx = \text{tg}\, x + C$.

Exemplo 5. Como $\dfrac{d}{dx}(\text{arc tg}\, x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ temos

$\int \dfrac{1}{1+x^2} \, dx = \text{arc tg}\, x + C$.

Exemplo 6. Como $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{3}{5}\, x^{\frac{5}{3}}\right) = x^{\frac{2}{3}}$ temos $\int x^{\frac{2}{3}} \, dx = \dfrac{3}{5}\, x^{\frac{5}{3}} + C$.

Estes exemplos confirmam o que foi provado na parte 3 acima.

No que segue, ao nos referirmos à $\int f(x) \, dx$ admitiremos sempre que f possui primitiva.

6.7 Propriedades da Integral Indefinida

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções reais integráveis definidas no mesmo domínio e C uma constante real. Então:

P1. $\int C \cdot f(x) dx = C \cdot \int f(x) dx$.

P2. $\int \big(f(x) + g(x)\big) dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx$.

6.8 Integrais Imediatas

Neste ítem apresentaremos a tabela de integrais imediatas para que, aplicando as propriedades da integral indefinida, você possa calcular uma integral imediata de uma função.

6.8.1 Tabela de Integrais Imediatas

Daremos agora algumas fórmulas de integrais simples e imediatas.

1) $\int dx = x + C$.

2) $\int x^n \, dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$, para $n \neq -1$.

3) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln |x| + C$.

4) $\int a^x \, dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$, para $a > 0$, $a \neq 1$.

5) $\int e^x \, dx = e^x + C$.

6) $\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + C$.

7) $\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + C$.

8) $\int \sec^2 x \, dx = \operatorname{tg} x + C$.

9) $\int \operatorname{cos sec}^2 x \, dx = -\operatorname{cotg} x + C$

10) $\int \sec x \cdot \operatorname{tg} x \, dx = \sec x + C$.

11) $\int \operatorname{cosec} x \cdot \operatorname{cotg} x \, dx = -\operatorname{cotg} x + C$.

12) $\int \dfrac{1}{1 + x^2} \, dx = \operatorname{arc\,tg} x + C$.

13) $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x}{a} + C$.

14) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx = \operatorname{arc\,sen} x + C$.

15) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arc\,sen} \dfrac{x}{\mathrm{a}} + C$.

16) $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}} = \operatorname{arc\,sec} x + C$.

17) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + 1} \right| + C$.

18) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - 1} \right| + C$.

Usando as propriedades da integral e a tabela de integrais imediatas, vamos através de alguns exemplos calcular a integral de funções.

Exemplo 1. Calcular $\int (7x^4 + \sec^2 x)\, dx$.

Resolução: Das propriedades da integral indefinida e da tabela de integrais imediatas, temos

$$\begin{aligned}\int (7x^4 + \sec^2 x)\, dx &= 7 \int x^4\, dx + \int \sec^2 x\, dx \\ &= \int 7\, x^4\, dx + \int \sec^2 x\, dx \\ &= 7\frac{x^{4+1}}{4+1} + C_1 + \operatorname{tg} x + C_2 \\ &= 7\frac{x^5}{5} + \operatorname{tg} x + C_1 + C_2,\end{aligned}$$

onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias.

Como a soma $C_1 + C_2$ é uma nova constante arbitrária, você escreve $C_1 + C_2 = C$ e vem $7\frac{x^5}{5} + \operatorname{tg} x + C_1 + C_2 = 7\frac{x^5}{5} + \operatorname{tg} x + C$.

Portanto, $\int (7x^4 + \sec^2 x)\, dx = 7\frac{x^5}{5} + \operatorname{tg} x + C$.

Sempre que você tiver uma soma de duas ou mais integrais indefinidas, escreva apenas uma constante para indicar a soma das várias constantes de integração.

Exemplo 2. Calcular $\int \left(3\, e^x + \frac{1}{4\, x} - \operatorname{sen} x \right) dx$.

Resolução: Das propriedades da integral, vem

$$\begin{aligned}&\int \left(3\, e^x + \frac{1}{4\, x} - \operatorname{sen} x \right) dx \\ &\qquad = \int 3\, e^x\, dx + \int \frac{1}{4\, x}\, dx - \int \operatorname{sen} x\, dx \\ &\qquad = 3 \cdot \int e^x dx + \int \frac{1}{4} \frac{dx}{x} - \int \operatorname{sen} x\, dx \\ &\qquad = 3 \cdot \int e^x\, dx + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x} - \int \operatorname{sen} x\, dx\end{aligned}$$

$$= 3\,e^{x} + \frac{1}{4}\ \ln|x| - (-\cos\ x) + C$$

$$= 3\,e^{x} + \frac{1}{4}\ \ln\ |x| + \cos\ x + C.$$

(Pelas fórmulas de integrais).

Portanto, $\int\left(3\,e^{x} + \frac{1}{4\,x} - \text{sen}\,x\right)dx$

$$= 3\,e^{x} + \frac{1}{4}\ \ln\ |x| + \cos\ x + C.$$

Exemplo 3. Calcular $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(3\,e^{x} + \frac{1}{4\,x} - \text{sen}\,x\right)dx$.

Resolução: Pelo exemplo 2 acima e pelo T.F.C., temos

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(3\,e^{x} + \frac{1}{4\,x} - \text{sen}\,x\right)dx = \left(3e^{x} + \frac{1}{4}ln|x| + \cos x\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(3\ \text{e}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4}\ \ln\ \left|\frac{\pi}{2}\right| + \cos\ \frac{\pi}{2}\right) - \left(3\ \text{e}^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{4}\ \ln\ \left|\frac{\pi}{4}\right| + \cos\ \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \left(3\ \text{e}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4}\ \ln\ \left|\frac{\pi}{2}\right| + 0\right) - \left(3\ \text{e}^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{4}\ \ln\ \left|\frac{\pi}{4}\right| + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= 3\left(\text{e}^{\frac{\pi}{2}} - \text{e}^{\frac{\pi}{4}}\right) + \frac{1}{4}\left(\ln\ \frac{\pi}{2} - \ln\ \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Portanto, $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(3\,e^{x} + \frac{1}{4\,x} - \text{sen}\,x\right)dx$

$$= 3\left(\text{e}^{\frac{\pi}{2}} - \text{e}^{\frac{\pi}{4}}\right) + \frac{1}{4}\left(\ln\ \frac{\pi}{2} - \ln\ \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Exemplo 4. Calcular $\int_{1}^{4}(\sqrt[2]{x} + x)dx$.

Resolução: Como $\int_{1}^{4}(\sqrt[2]{x} + x)dx = \int_{1}^{4}\left(x^{\frac{1}{2}} + x\right)dx$, aplicando as propriedades da integral e o T.F.C., temos

$$\int_1^4 (\sqrt[2]{x}+x)dx = \int_1^4 \left(x^{\frac{1}{2}}+x\right)dx = \left(2\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^4$$

$$= \left(2\frac{4^{\frac{3}{2}}}{3}+\frac{4^2}{2}\right)-\left(2\frac{1^{\frac{3}{2}}}{3}+\frac{1^2}{2}\right)=\left(2\frac{\sqrt[2]{64}}{3}+\frac{16}{2}\right)-\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{16}{3}+8\right)-\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{16+24}{3}\right)-\left(\frac{4+3}{6}\right)=\frac{40}{3}-\frac{7}{6}=\frac{73}{6}.$$

Portanto, $\int_1^4 (\sqrt[2]{x}+x)dx = \frac{73}{6}$.

Você conseguiu acompanhar o conteúdo estudado até aqui? Para saber, procure resolver os exercícios, propostos abaixo, de função primitiva e integral.

Exercícios Propostos

1) Determinar a função primitiva $F(x)$ da função $f(x)$, onde:

   a) $f(x) = 5x^2 + 7x + 2$.

   b) $f(x) = x^{-\frac{5}{4}}$.

   c) $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$.

   d) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ para $x > 1$.

   e) $f(x) = e^{4x}$.

2) Encontrar uma função primitiva $F(x)$ da função $f(x)$ dada, que satisfaça a condição inicial dada, onde:

   a) $f(x) = 2\,\text{sen}\,x + \cos x - \frac{1}{2}x^2$ tal que $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

   b) $f(x) = x^{-\frac{2}{3}} + x$ tal que $F(1) = \frac{1}{2}$.

   c) $f(x) = \sec x \cdot \text{tg}\,x + \cos x$ tal que $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2$.

d) $f(x) = x\sqrt[3]{x} + e^x$ tal que $F(0) = 2$.

e) $f(x) = 2\operatorname{cosec}^2 x - \sec^2 x + \cos x$ tal que $F(\frac{\pi}{3}) = 2$.

3) Calcular as integrais

a) $\int \operatorname{cotg}^2 x \cdot \sec^2 x\, dx$.

b) $\int (x-2)^2 \cdot (x+2)^2\, dx$.

c) $\int (t^{-3} + 7^t - \cos t)\, dt$.

d) $\int \dfrac{x^{-\frac{1}{3}} + 2}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx$.

e) $\int \dfrac{\operatorname{cosec}^2 x}{\sec x}\, dx$.

f) $\int_0^1 (x^3 + x^2 + 1)\, dx$.

g) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x + 2\ \operatorname{sen} x)\, dx$.

Respostas:

1) a) $F(x) = \dfrac{5}{3}x^3 + \dfrac{7}{2}x^2 + 2x + K$,

b) $F(x) = -4x^{-1/4} + K$,

c) $F(x) = -2x^{-1/2} + K$,

d) $F(x) = \ln\ (x-1) + K$,

e) $F(x) = \dfrac{e^{4x}}{4} + K$

2) a) $F(x) = -2\cos x + senx - \dfrac{x^3}{6} + K$ e $K = \dfrac{\pi^3}{384}$,

b) $F(x) = 3\,x^{\frac{1}{3}} + \dfrac{x^2}{2} + K$ e $K = -3$,

c) $F(x) = \sec x + \operatorname{sen} x + K$ e $K = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

d) $F(x) = \dfrac{3}{7}\, x^{\frac{7}{3}} + e^x + K$ e $K = 1$,

e) $F(x) = -\ 2\ \operatorname{cot g} x - \operatorname{tg} x + \operatorname{sen} x + K$ e $K = 2 + \dfrac{7\sqrt{3}}{6}$.

3) a) $-\operatorname{cot} g\ x + C$,

b) $\dfrac{x^5}{5} - \dfrac{8}{3}x^3 + 16x + C$,

c) $\dfrac{-t^{-2}}{2} + \dfrac{7^t}{\ln 7} - \operatorname{sen} t + C$,

d) $\ln x + 6x^{\frac{1}{3}} + C$,

e) $-\operatorname{cossec} x + C$,

f) $\dfrac{19}{12}$,

g) $2 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Os exercícios propostos nesta seção contribuirão para amadurecer os conceitos que acabamos de apresentar. As propriedades apresentadas nesta seção serão utilizadas durante o curso. Por este motivo, é extremamente importante que você tenha resolvido corretamente a maioria deles. Caso encontre alguma dúvida nos exercícios, releia o item acima com atenção e tente resolvê-los novamente.

Vamos estudar a seguir uma técnica para calcular a integral de uma função conhecida como Integração por Substituição ou Mudança de Variável.

6.9 Integração por Substituição

Veremos nesta seção uma técnica utilizada com o objetivo de desenvolver o cálculo de integrais de funções que possuem primitivas. A esta técnica damos o nome de integração por substituição ou mudança de variável.

Suponha que u é derivável em $[a, b]$, f uma função para a qual a composta $f \circ u$ está definida, f e $f(u(x)) \cdot u'(x)$ integráveis, e F uma primitiva de f em $u([a, b])$. Então, pelo Teorema Fundamental do Cálculo tem-se:

$$\int_a^b f(u(x)) \cdot u'(x)\, dx = \int_a^b F'(u(x)) \cdot u(x)\, dx = \int_a^b (F \circ u)'(x)\, dx.$$

$$= (F \circ u)'(x)\Big|_a^b$$

$$= F(u(x))\Big|_a^b = F(u(b)) - F(u(a))$$

$$= \int_{u(a)}^{u(b)} F'(u)\, du = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\, du \,.$$

Portanto, $\int_a^b f(u(x)) \cdot u'(x)\, dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\, du$.

Para a integral indefinida, tomando $x \in [a,b]$ tem-se

$$\int_a^x f(u(t)) \cdot u'(t)\, dt = \int_{u(a)}^{u(x)} f(u)\, du$$

ou na notação sem os limites de integração

$$\int f(u(x)) \cdot u'(x)\, dx = \int f(u) du \,.$$

Note que interpretando du e dx como diferenciais tem-se $du = u'(x)\ dx$ e as fórmulas de mudança de variáveis tanto na integral definida como na indefinida se tornam "naturais".

Na prática, você deve escolher uma função $u = u(x)$ conveniente, de tal forma que a integral obtida seja mais simples.

Vejamos agora alguns exemplos de como determinar a integral de uma função aplicando a técnica da mudança de variável ou substituição e usando a tabela de integrais imediatas, na seção 6.9.1.

Exemplo 1. Calcular a integral $\int (x^2 + 5)^3 \cdot 2x\, dx$.

Resolução: Fazendo a substituição de $x^2 + 5$ por u na integral dada, vem $u = x^2 + 5$. Como a diferencial de u é $du = u'dx$, temos $du = 2\,x\ dx$.

Agora, vamos em $\int (x^2 + 5)^3 \cdot 2x\, dx$, substituímos $x^2 + 5$ por u e $2\,x\ dx$ por du e temos

$$\int (x^2 + 5)^3 \cdot 2x\, dx = \int u^3 du = \frac{u^4}{4} + C \,.$$

Como $u = x^2 + 5$ temos $\frac{u^4}{4} + C = \frac{(x^2 + 5)^4}{4} + C$.

Portanto, $\int (x^2 + 5)^3 \cdot 2x\, dx = \frac{(x^2 + 5)^4}{4} + C.$

Exemplo 2. Calcular $\int_0^1 (x^2+5)^3 \cdot 2x\,dx$.

Resolução: Sabemos que $\int_a^b f(u(x)) \cdot u'(x)\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,du$.

Como a função integrando é a mesma do exemplo 1, fazemos a mesma escolha para u, ou seja, $u = x^2+5$. Assim temos

$du = 2x\ dx$, $u(0) = 0^2+5 = 5$ e $u(1) = 1^2+5 = 6$.

Pelo exemplo acima e pelo T.F.C., temos:

$$\int_0^1 (x^2+5)^3 \cdot 2x\,dx = \int_{u(0)}^{u(1)} u^3\,du = \int_5^6 u^3\,du = \left.\frac{u^4}{4}\right|_5^6$$

$$= \frac{6^4}{4} - \frac{5^4}{4} = \frac{1.296}{4} - \frac{625}{4} = \frac{671}{4}.$$

Portanto, $\int_0^1 (x^2+5)^3 \cdot 2x\,dx = \frac{671}{4}$.

Exemplo 3. Calcular $\int \frac{3\,x^2\ dx}{1+x^3}$.

Resolução: Fazendo a substituição de $1 + x^3$ por u na integral dada, ou $u = 1 + x^3$, vem $du = 3\,x^2\ dx$.

Agora, vamos em $\int \frac{3\,x^2\ dx}{1+x^3}$, substituímos $u = 1+x^3$ por u e $3x^2dx$ por du e temos

$$\int \frac{3\,x^2\ dx}{1+x^3} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C.$$

Como $u = 1+x^3$, temos $\ln|u| + C = \ln|1+x^3| + C$.

Portanto, $\int \frac{3\,x^2\ dx}{1+x^3} = \ln|1+x^3| + C$.

Exemplo 4. Calcular o valor da seguinte integral $\int_0^2 7^{x^2} x\ dx$.

Resolução: Fazendo a substituição $u = x^2$ vem $du = 2x\ dx$, $\frac{du}{2} = x\ dx$, $u(0) = 0$ e $u(2) = 4$. Logo

$$\int_0^2 7^{x^2} x\, dx = \int_{u(0)}^{u(2)} 7^u \frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^4 7^u\, du = \frac{1}{2}\cdot\frac{7^u}{\ln 7}\bigg|_0^4 = \frac{1}{2\ln 7}7^u\bigg|_0^4 = \frac{1}{2\ln 7}(7^4 - 7^0)$$

$$= \frac{2.400}{2\ \ln 7} = \frac{1.200}{\ln 7}.$$

Portanto, $\displaystyle\int_0^2 7^{x^2} x\, dx = \frac{1.200}{\ln 7}$.

Exemplo 5. Calcular $\displaystyle\int \frac{dx}{16+9x^2}$.

Resolução: Na integral dada temos

$$\int \frac{dx}{16+9x^2} = \int \frac{dx}{4^2+3^2x^2} = \int \frac{dx}{4^2+(3x)^2}$$

aqui $a = 4$ e $u = 3x$. Assim, $u = 3x$ e $du = 3\,dx$ ou $dx = \dfrac{1}{3}\,du$.

Agora, vamos à integral dada $\displaystyle\int \frac{dx}{16+9x^2}$, substituímos $3x$ por u e dx por $\dfrac{1}{3}\,du$ e temos

$$\int \frac{dx}{16+9x^2} = \int \frac{dx}{4^2+(3x)^2}$$

$$= \int \frac{\frac{1}{3}\,du}{4^2+u^2} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{4^2+u^2}$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\operatorname{arc\,tg}\frac{u}{4} + C$$

$$= \frac{1}{12}\ \operatorname{arc\,tg}\frac{u}{4} + C.$$

Pois $\left(\dfrac{1}{4}\ \operatorname{arc\,tg}\ \dfrac{u}{4}\right)' = \dfrac{1}{4^2+u^2}$.

Como $u = 3x$, temos $\dfrac{1}{12}\ \operatorname{arc\,tg}\dfrac{u}{4} + C = \dfrac{1}{12}\ \operatorname{arc\,tg}\dfrac{3x}{4} + C$.

Portanto, $\displaystyle\int \frac{dx}{16+9x^2} = \frac{1}{12}\ \operatorname{arc\,tg}\frac{3x}{4} + C$.

Exemplo de Aplicação. Suponhamos que a velocidade de uma partícula móvel seja dada pela função $v(t) = 30 - 2t$ m/s. Determinar a função que fornece a distância percorrida em x segundos e a distância que ela percorre entre os instantes $t = 0$ e $t = 20$ segundos.

Resolução: Para determinar a função distância, sabemos que $v(t) = \dfrac{ds}{dt}$ e assim a diferencial de s é $ds = v(t)\,dt$ e $\int_{s(0)}^{s(t)} ds = \int_0^t v(t)\,dt$.

$$s\Big|_0^{s(t)} = \int_0^t v(t)\,dt \quad \Rightarrow \quad s(t) = \int_0^t v(t)\,dt \quad \Rightarrow s(20) = \int_0^{20} v(t)\,dt \Rightarrow$$

$$s(20) = \int_0^{20} (30 - 2t)\,dt = \left(30t - 2 \cdot \frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^{20} = F(20) - F(0)$$

$(30 \cdot 20 - 20^2) - (30 \cdot 0 - 0^2) = (600 - 400) - (0 - 0) = 200 - 0 = 200$, ou seja, $s(20) = 200$.

Logo, a distância $s(20)$ percorrida é 200 metros.

Para calcular a distância total percorrida, sabemos que a velocidade pode ser positiva se $v > 0$ e negativa se $v < 0$. Para a velocidade positiva, temos:

$$v = 30 - 2\,t > 0 \quad \Rightarrow \quad 30 > 2\,t \quad \Rightarrow \quad \frac{30}{2} > t \quad \Rightarrow \quad 15 > t \quad \text{ou} \quad t < 15.$$

Assim, a velocidade será positiva nos primeiros 15 segundos do movimento, isto é, no intervalo $[0,15]$.

Logo,

$$v > 0 \quad \Rightarrow \quad \int_0^{15} (30 - 2\,t)\,dt = \left(30t - 2 \cdot \frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^{15} = F(15) - F(0)$$

$$= (30 \cdot 15 - 15^2) - (30 \cdot 0 - 0^2) = (450 - 225) - (0 - 0) = 225$$

Assim, a partícula percorre 225 metros para frente.

Para a velocidade negativa, temos

$$v = 30 - 2\,t \; < \; 0 \quad \Rightarrow \quad 30 - 2t < 0 \quad \Rightarrow \quad 30 < 2t \quad \Rightarrow \quad \frac{30}{2} < t \quad \Rightarrow$$

$15 < \; t \;\; ou \;\; t > 15$.

Assim, a velocidade será negativa após 15 segundos do deslocamento e no máximo 20 segundos, isto é no intervalo [15, 20].

Logo,

$$v<0 \quad \Rightarrow \quad \int_{15}^{20}(30-2\,t)\,dt=\left(30t-2\cdot\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_{15}^{20}=F(20)-F(15)$$

$$=(30\cdot 20-20^2)-(30\cdot 15-15^2)$$

$$=(600-400)-(450-225)=200-225=-25.$$

Portanto, a partícula percorre 25 metros para trás, com uma distância total de 250 metros.

Vamos verificar se você compreendeu a técnica de integração de uma função aplicando o artifício de mudança de variável?

Exercícios Propostos

1) Determinar o valor das integrais abaixo.

a) $\displaystyle\int \frac{4}{(7-5x)^3}\,dx$.

b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\,dx$.

c) $\displaystyle\int \cos(7t-\pi)\,dt$.

d) $\displaystyle\int \sqrt{x^2-2x^4}\,dx$.

e) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+3}$.

f) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \;\operatorname{sen} x\,dx$.

g) $\displaystyle\int_1^4 \frac{\ln t^5}{t}\,dt$.

h) $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$.

Respostas:

1) a) $\displaystyle\frac{2}{5(7-5x)^2}+C$.

b) $\displaystyle\frac{-1}{x}+C$.

c) $\frac{1}{7}\ \mathrm{sen}(7t-\pi)+C$.

d) $\frac{-1}{6}(1-2x^2)^{\frac{3}{2}}+C$.

e) $\frac{\sqrt{3}}{3}\ arctg\ \frac{x}{\sqrt{3}}+C$.

f) $\frac{1}{4}$.

g) $\frac{5}{2}\cdot(\ln 4)^2$.

h) $\sqrt{10}-1$.

Vamos ver agora alguns exemplos de aplicação da Integral na Física, tais como, o movimento uniformemente acelerado e o modelo de queda livre.

6.10 Movimento Uniformemente Acelerado

Consideremos que $s(t)$ é a função que indica a posição de uma partícula que se move ao longo de um eixo s, no instante t. Então a velocidade instantânea é dada por $v(t)=s'(t)=\frac{ds}{dt}$ *ou* $\frac{ds}{dt}=v(t)$ e a aceleração é dada por $a(t)=v'(t)=\frac{dv}{dt}$ ou $\frac{dv}{dt}=a(t)$.

Tem-se a partir das fórmulas apresentadas acima que $s(t)$ é uma primitiva de $v(t)$ e, por sua vez, que $v(t)$ é uma primitiva de $a(t)$. De fato, de $\frac{ds}{dt}=v(t)$ temos que a diferencial de $s(t)$ é $ds=v(t)\ dt$.

Logo,

$$\int_{s(t_0)}^{s(t)} ds=\int_{t_0}^{t} v(r)\ dr\ \Rightarrow s\Big|_{s(t_0)}^{s(t)}=\int_{t_0}^{t} v(r)\ dr \Rightarrow$$

$$s(t)-s(t_0)=\int_{t_0}^{t} v(r)\ dr \quad\Rightarrow$$

$$s(t)=s(t_0)+\int_{t_0}^{t} v(r)\ dr \qquad (1)$$

E, $\frac{dv}{dt}=a(t)\Rightarrow dv=a(t)\,dt\Rightarrow \int_{v(t_0)}^{v(t)} dv=\int_{t_0}^{t} a(r)\,dr\Rightarrow$

$$\mathrm{v}\Big|_{v(t_0)}^{v(t)}=\int_{t_0}^{t} a(r)\ dr\Rightarrow\ v(t)-v(t_0)=\int_{t_0}^{t} a(r)\ dr\quad\Rightarrow$$

$$v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(r)\ dr \tag{2}$$

Como exemplo, vamos supor que a partícula tenha uma aceleração constante $a(t) = a$, $s = s_0$ quando $t = 0$ e $v = v_0$ quando $t = 0$ onde s_0 e v_0 são conhecidos.

Pela equação (2), temos

$$v(t) = v(0) + \int_0^t a(r)\ dr = v_0 + \int_0^t a\ dr = v_0 + a\int_0^t dr = v_0 + a\ r\Big|_0^t = v_0 + at,$$

ou seja,

$$v(t) = v_0 + at \tag{3}$$

Agora, pela equação (1), temos

$$s(t) = s(0) + \int_{t_0}^{t} v(r)\ dr = s_0 + \int_{t_0}^{t} (v_0 + a\ r)dr = s_0 + \left(v_0\ r + a\frac{r^2}{2}\right)\Bigg|_{t_0}^{t}$$

$$s(t) = s_0 + \left[\left(v_0\ t + a\frac{t^2}{2}\right) - \left(v_0\ t_0 + \frac{a\ t_0^2}{2}\right)\right], \text{ como } t_0 = 0, \text{ vem}$$

$$s(t) = s_0 + v_0\ t + \frac{1}{2}at^2 \tag{4}$$

Resumindo, temos o seguinte resultado: Se uma partícula move-se com uma aceleração constante, ao longo de um eixo s, e se s_0 e v_0 forem, respectivamente, posição e velocidade no instante $t = 0$, então as funções posição $s(t)$ e velocidade $v(t)$ da partícula são $s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ e $v(t) = v_0 + at$.

Para justificar o fato mencionado anteriormente, vejamos um exemplo:

Exemplo: Suponha que uma nave espacial intergaláctica usa vela e "radiação solar" para produzir uma aceleração constante de 0,032 m/s^2. Supondo que a velocidade da nave é de 10.000 m/s quando a vela é desfraldada pela primeira vez, até onde viajará a nave em uma hora e qual será a sua velocidade?

Resolução: Você introduz um eixo s cujo sentido positivo está no sentido do movimento e escolhe a origem coincidente com a posição da nave em $t=0$ quando a vela é desfraldada. Assim, para o movimento uniformemente acelerado as fórmulas acima podem ser aplicadas com $s_0 = s(0) = 0$, $v_0 = v(0) = 10.000$ e $a = 0,032$. Como uma hora corresponde a 3600 segundos, tem-se, usando (4) que em uma hora a nave percorre a distância de

$$s(3.600) = 10.000 \cdot (3.600) + \frac{1}{2} \cdot (0,0320) \cdot (3.600)^2$$

$$\cong 36.207.400 \text{ metros}$$

e a partir de (3) tem-se , que após uma hora, a velocidade é de:

$$v(3.600) = 10.000 + 0,032 \cdot 3.600 \cong 10.115 \text{ m/s}.$$

Portanto, quando a vela é desfraldada pela primeira vez, em uma hora a nave percorre a distância de, aproximadamente, 36.207.400 metros e após uma hora a sua velocidade será de, aproximadamente, 10.115 m/s.

Vejamos agora uma outra aplicação da integral na Física.

6.11 Modelo de Queda Livre

Vamos supor que um objeto se move sobre um eixo s, cuja origem está na superfície da Terra e cuja direção positiva é para cima, suponha que no instante $t=0$ a posição e a velocidade sejam, respectivamente, s_0 e v_0.

É um fato da Física que uma partícula, movendo-se sobre uma reta vertical próximo da superfície da Terra, sujeita somente à força de atração da gravidade, move-se com aceleração constante, denotada pela letra g, aproximadamente igual a 9,8 m/s^2.

Lembre-se que uma partícula está aumentando a sua rapidez quando a velocidade e a aceleração tiverem o mesmo sinal, e diminuindo quando tiverem sinais opostos. Assim sendo, como você escolheu a direção positiva para cima, tem-se que a aceleração $a(t)$ de uma partícula em queda livre é negativa para todos os valores de t. Para você ver porque é assim, observe que uma partícula subindo (velocidade positiva) está diminuindo a rapidez, logo a sua aceleração deve ser negativa. Uma partícula descendo (velocidade negativa) está aumentando a sua rapidez, portanto a sua aceleração deve ser negativa. Assim, você conclui que $a = a(t) = -g$ e deste modo, tem-se a partir de (3) e (4) que as funções posição e velocidade de um objeto em queda livre são

$$s(t) = s_0 + v_0\ t - \frac{1}{2}\ g\ t^2 \text{ e } v(t) = v_0 - g\ t\ .$$

Para justificar o que foi mencionado acima, vejamos o seguinte exemplo.

Exemplo 1: Uma bola é atirada diretamente para cima com uma velocidade inicial de 49 m/s, a partir de um ponto a 8 metros do solo. Supondo que o modelo de queda livre se aplica, até onde chega a bola?

Resolução: Como a distância está em metros, vamos considerar g = 9,8 m/s^2.

Inicialmente, tem-se $s_0 = 8$ metros e $v_0 = 49$ m/s; assim, a partir de (3) e (4), temos

$$s(t) = 8 + 49\ t - \frac{1}{2} 9{,}8\ t^2 = 8 + 49\ t - 4{,}9\ t^2 \text{ e } v(t) = 49 - 9{,}8\ t\ .$$

A bola subirá até que se tenha $v(t) = 0$, ou seja,

$$0 = 49 - 9{,}8\ t \quad \Rightarrow\ 9{,}8\ t = 49 \quad \Rightarrow\ t = \frac{49}{9{,}8} = 5 \text{ ou } t = 5 \text{ segundos.}$$

Neste instante, a altura acima do solo será de:

$$s(5) = 8 + 49 \cdot 5 - 4{,}9 \cdot 5^2 = 130{,}5\ m.$$

Portanto, a bola chega até uma altura de 130,5 metros.

Veja agora mais exemplos de aplicação da integral na Física.

Exemplo 2. A velocidade, num instante t, de um corpo em movimento é dada por $v = at$, onde a é uma constante. Se a posição do corpo é s_0 no tempo $t = 0$, determinar a distância (s) como uma função de t.

Resolução: A velocidade v é a derivada da distância s em relação ao tempo t, ou seja, $v = \dfrac{ds}{dt} = a\ t$. A resolução do problema consiste em resolver a equação $\dfrac{ds}{dt} = at$, $s = s_0$, quando $t = 0$.

De $\dfrac{ds}{dt} = at$, tem-se $ds = at\ dt$.

Logo, $\displaystyle\int_{s(0)}^{s(t)} ds = \int_0^t a\ r\ dr$ ou $s(t) - s_0 = a\dfrac{r^2}{2}\Big|_0^t = a\dfrac{t^2}{2}$.

Portanto, a solução do problema é $s(t) = s_0 + a\dfrac{t^2}{2}$.

Exemplo 3. Determinar a posição s como função do tempo t a partir da velocidade v dada por $v = \dfrac{ds}{dt}$. Calcular a constante de integração de modo que $s = s_0$ quando $t = 0$, para as seguintes funções.

1) Seja $v = 2\ \mathrm{t} + 1$.

Resolução: Como a velocidade v é a derivada de s em relação a t, ou seja, $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{dt}} = v$ e como $v = 2\ \mathrm{t} + 1$, temos $\dfrac{ds}{dt} = 2t + 1$.

De $\dfrac{ds}{dt} = 2t + 1$, tem-se $ds = (2t+1)dt$.

Logo, $\displaystyle\int_{s(t_0)}^{s(t)} ds = \int_0^t (2r+1)\,dr$ ou $s(t) - s(t_0) = \left(2\dfrac{r^2}{2} + r\right)\Bigg|_0^t =$

$s_0 + (r^2 + r)\big|_0^t = s_0 + t^2 + t$, ou seja,

$s(t) = t^2 + t + s_0$.

Portanto, a solução do problema é $s(t) = t^2 + t + s_0$.

2) Seja $v = (t^2+1)^2$.

Resolução: Como $\dfrac{ds}{dt} = v$ e $v = (t^2+1)^2$, temos $\dfrac{ds}{dt} = (t^2+1)^2$.

De $\dfrac{ds}{dt} = (t^2+1)^2$ tem-se $ds = (t^2+1)^2 dt$.

Logo, $\int_{s(t_0)}^{s(t)} ds = \int_0^t (r^2+1)^2\, dr = \int_0^t (r^4+2r^2+1)dr$ ou

$$s(t) = s(t_0) + \left(\frac{r^5}{5} + 2\frac{r^3}{3} + r\right)\Big|_0^t = s_0 + \frac{t^5}{5} + 2\frac{t^3}{3} + t\,.$$

Portanto, a solução do problema é $s(t) = \dfrac{t^5}{5} + 2\ \dfrac{t^3}{3} + t + s_0\,.$

6.12 Aplicações da Integral Definida

O objetivo desta seção é que você compreenda algumas aplicações da integral definida em problemas de Física, tais como o Trabalho e a Força.

6.12.1 Trabalho e Força

Imagine que você esteja dentro de seu veículo e o mesmo esteja atolado numa estrada não asfaltada. Quando ele é empurrado, você sabe que a velocidade atingida por ele, para sair desta situação desagradável, depende da força $\mathbf{f}$ com a qual ele é empurrado e da distância $\mathbf{d}$, durante a qual a força é aplicada. Senão meu caro aluno, para resolver este problema chame um guincho! Isto nos motiva a seguinte definição.

Definição 6.5. Se uma força constante $\mathbf{f}$ (em Newton, N) for aplicada na direção do movimento do objeto, e se esse objeto move-se a uma distância $\mathbf{d}$ (em metros) então define-se o trabalho $\mathbf{W}$ (em Joule, J) realizado pela força sobre o objeto como sendo

$$\mathrm{W} = \mathrm{f}\cdot\mathrm{d} \qquad (1)$$

Exemplo: Um objeto move-se 25 metros ao longo de uma reta, enquanto sujeito a uma força constante de 4 N, na direção ao seu movimento. O trabalho realizado será

$$\mathrm{W} = \mathrm{f}\cdot\mathrm{d} = 4\cdot 25 = 100\ N\cdot m = 100\ J\,.$$

Definição 6.6. Suponha que um objeto se move no sentido positivo ao longo de um eixo coordenado no intervalo $[a,b]$, enquanto sujeito a uma força variável $f(x)$ que é aplicada na direção do movimento.

Então, define-se o trabalho $\mathbf{W}$ realizado pela força sobre o objeto como sendo $\mathbf{W} = \int_a^b f(x)\, dx$.

(Robert Hooke, Físico inglês, 1635 – 1703)

A Lei de Hooke estabelece que, sob condições apropriadas, uma mola esticada em x unidades além do seu comprimento natural puxa de volta com uma força $f(x) = k\,x$ onde k é uma constante (chamada de constante da mola ou rigidez da mola). O valor de k depende, por exemplo, da espessura da mola e do material do qual é feita. Uma vez que $k = \dfrac{f(x)}{x}$, a constante k tem unidades de força por unidade de comprimento.

Para aplicar a Lei de Hooke, vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1. Uma mola exerce uma força de $5 \cdot N$ quando esticada 1 metro além do seu comprimento natural. Calcular:

a) a constante k da mola;

b) quanto trabalho é necessário para esticar a mola 1,8 metros além do seu comprimento natural?

Resolução: Você tem que $f(x) = 5N$ quando $x = 1$ metro.

a) A partir da Lei de Hooke, $f(x) = k \cdot x$, vem $5 = k \cdot 1 \Rightarrow k = 5$, ou seja, a constante da mola é $k = 5$ Newtons por metro (N/m). Isto significa que a força $f(x)$ necessária para esticar a mola em x metros é $f(x) = 5 \cdot x$.

b) Colocando a mola ao longo de um eixo coordenado, veja figura a seguir:

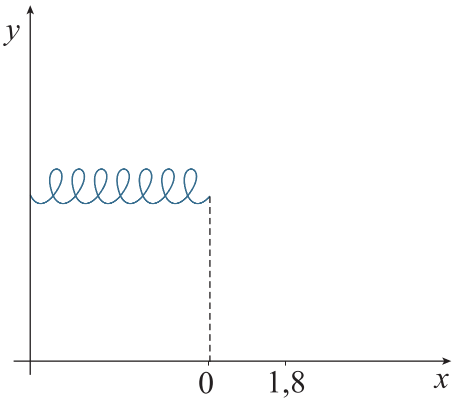


Figura 6.5

Você quer encontrar o trabalho W necessário para esticar a mola no intervalo de $x = 0$ a $x = 1,8$, logo o trabalho necessário é:

$$\mathbf{W} = \int_a^b f(x)\,dx = \int_0^{1,8} 5\,x\,dx$$

$$= 5 \cdot \int_0^{1,8} x\,dx = 5 \cdot \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{1,8}$$

$$= 5 \cdot \left(\frac{(1,8)^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right)$$

$$= 5 \cdot \left(\frac{3,24}{2} - \frac{0^2}{2} \right) = 5 \cdot (1,62 - 0)$$

$$= 5 \cdot 1,62 = 8,1$$

Portanto, o trabalho necessário para esticar a mola no intervalo de $x = 0$ a $x = 1,8$ é de 8,1 J.

Exemplo 2. Calcular o trabalho realizado por um força de intensidade $f(x) = \dfrac{5}{x}$ Newton, aplicada formando um ângulo de 45º com a horizontal (eixo x) ao deslocar um móvel (ao longo do eixo x) do ponto de abscissa $x = 4$ m ao ponto de abscissa $x = 8$, conforme figura abaixo.

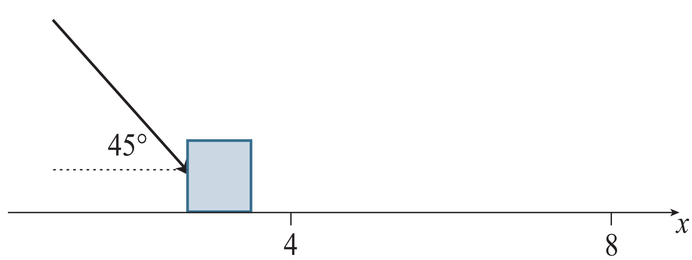


Figura 6.6

Resolução: Observe que o deslocamento é realizado pelo componente de f paralelo ao eixo x, que tem intensidade,

$$f(x) \cdot \cos 45° = \frac{5}{x} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2x} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{x}.$$

Assim, o trabalho será:

$$W = \int_4^8 \frac{5\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{5\sqrt{2}}{2} \cdot \int_4^8 \frac{1}{x} dx$$
$$= \frac{5\sqrt{2}}{2} \cdot \int_4^8 \frac{dx}{x} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \cdot \ln x \Big|_4^8$$
$$= \frac{5\sqrt{2}}{2} \cdot (\ln 8 - \ln 4) = \frac{5\sqrt{2}}{2} \cdot \ln \frac{8}{4}$$
$$= \frac{5\sqrt{2}}{2} \cdot \ln 2 \text{, ou } W = \frac{5\sqrt{2}}{2} \cdot \ln 2 .$$

Portanto, o trabalho realizado é $\dfrac{5\sqrt{2}}{2} \ln 2$ Joules.

6.13 Cálculo de Área Entre Duas Curvas

Nesta seção abordaremos uma das aplicações da integral definida. Começaremos com a aplicação que motivou a definição deste importante conceito matemático – a determinação da área de uma região R do plano, que estudamos na seção 6.1. Outras aplicações da integral definida, tais como, calcular volumes, comprimento de gráficos, áreas de superfícies de sólidos de revolução, momentos e centro de massa, etc., você estudará na Disciplina de Cálculo 2, aguarde!

Vamos considerar sempre a região que está entre os gráficos de duas funções.

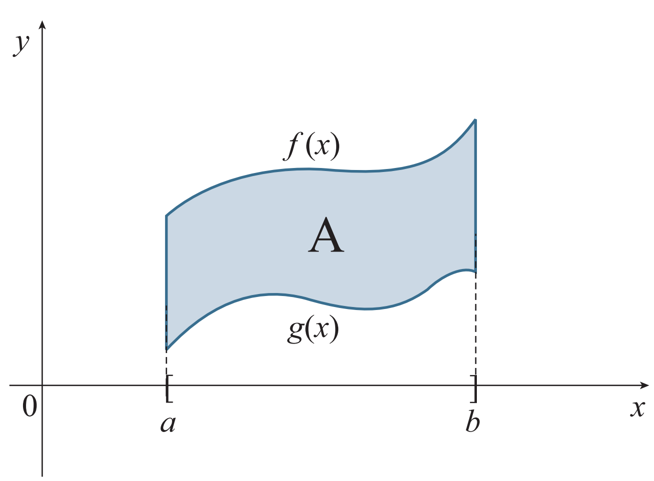


Figura 6.7

Suponhamos então que $f(x)$ e $g(x)$ sejam funções contínuas no intervalo fechado $[a,b]$ e que $f(x) \geq g(x)$ para todo x em $[a,b]$. Então a área da região limitada acima por $y = f(x)$, abaixo por $y = g(x)$ à esquerda pela reta $x = a$ e à direita pela reta $x = b$, conforme ilustra a figura 6.7, é

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx .$$

Quando a região não for tão simples como a da figura 6.7, é necessário uma reflexão cuidadosa para determinar o integrando e os limites de integração. Segue abaixo um procedimento sistemático que podemos seguir para estabelecer a fórmula, utilizando os seguintes passos:

Passo 1. Você faz o gráfico da região para determinar qual curva limita acima e qual limita abaixo.

Passo 2. Você determina os limites de integração. Os limites a e b serão as abscissas x dos dois pontos de interseção das curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$. Para tanto iguala-se $f(x)$ e $g(x)$, ou seja, faz $f(x) = g(x)$ e resolve-se a equação resultante em relação a x.

Passo 3. Calcule a integral definida para encontrar a área entre as duas curvas.

Apresentaremos alguns exemplos de cálculo de área entre duas curvas.

Exemplo 1. Determinar a área da região limitada entre as curvas $y = f(x) = x + 6$ e $y = g(x) = x^2$.

Resolução: Utilizando o procedimento sistemático apresentado acima, temos os seguintes passos.

Passo 1. Esboço da região

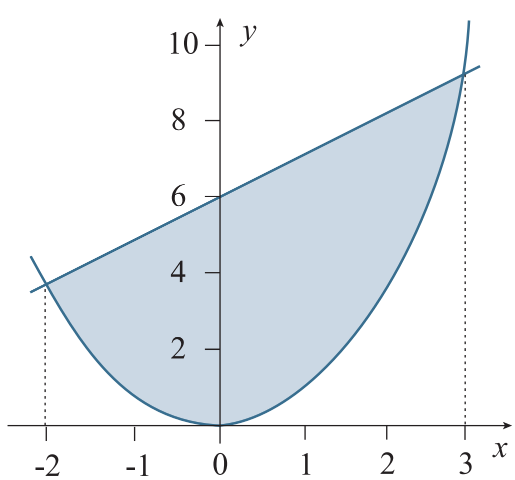


Figura 6.8

Passo 2. Para encontrar os limites de integração fazemos $f(x) = g(x)$, isto é, $x+6 = x^2$ ou $x^2 = x+6$, que fornece $x^2 - x - 6 = 0$.

Bhaskara viveu de 1114 a 1185 aproximadamente, na India.Veja mais no site http://pet.mtm.ufsc.br/biobha.html

Pela fórmula de Bhaskara encontramos as raízes da equação acima, $x = -2$ e $x = 3$, que serão os limites de integração.

Observe, pelo gráfico acima, que $x + 6 \geq x^2$, para todo x em $[-2,3]$.

Passo 3. Calculando a área da região limitada por $y = f(x) = x + 6$ e $y = g(x) = x^2$ em $[-2,3]$ temos:

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$$

$$= \int_{-2}^{3} \left[(x + 6) - x^2\right] dx = \int_{-2}^{3} (x + 6 - x^2)\, dx$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + 6x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{3} = \left(\frac{3^2}{2} + 6\cdot 3 - \frac{3^3}{3}\right) - \left(\frac{(-2)^2}{2} + 6\cdot 2 - \frac{(-2)^3}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{9}{2} + 18 - 9\right) - \left(2 - 12 + \frac{8}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{9}{2} + 18 - 3^2\right) - \left(\frac{4}{2} - 12 - \frac{-8}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{9}{2} + 9\right) - \left(-10 + \frac{8}{3}\right) = \left(\frac{9 + 18}{2}\right) - \left(\frac{-30 + 8}{3}\right)$$

$$= \frac{27}{2} - \frac{-22}{3} = \frac{27}{2} + \frac{22}{3} = \frac{81 + 44}{6} = \frac{125}{6} \text{ ou}$$

$$A = \int_{-2}^{3} \left[(x + 6) - x^2\right] dx = \int_{-2}^{3} (x + 6 - x^2)\, dx = \frac{125}{6}.$$

Portanto, a área limitada por $y = f(x) = x + 6$ e $y = g(x) = x^2$ em $[-2,3]$ é $\frac{125}{6}$ unidades de área.

Exemplo 2. Determinar a área da região limitada por $y = f(x) = 4$ e $y = g(x) = x^2$.

Resolução: Utilizando o procedimento sistemático apresentado acima, temos os seguintes passos.

Passo 1. Esboço da região, como mostra a figura 6.9.

Passo 2. Para encontrar os limites de integração fazendo $f(x) = g(x)$, temos, $4 = x^2$ ou $x^2 = 4$. Logo, $x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$, ou seja, $x_1 = -2$ e $x_2 = 2$.

Assim, $a = -2$ e $b = 2$.

Passo 3. A área da região limitada por $y = f(x) = 4$ e $y = g(x) = x^2$, em $[-2, 2]$ será:

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$

$$= \int_{-2}^{2} (4 - x^2)dx = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{2}$$

$$= \left(4\cdot 2 - \frac{2^3}{3}\right) - \left(4\cdot(-2) - \frac{(-2)^3}{3}\right)$$

$$= \left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(-8 - \frac{-8}{3}\right) = \left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(-8 + \frac{8}{3}\right)$$

$$= 8 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} = 16 - 2\cdot\frac{8}{3} = 16 - \frac{16}{3}$$

$$= \frac{48 - 16}{3} = \frac{32}{3} \text{ ou } A = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\,dx = \frac{32}{3}.$$

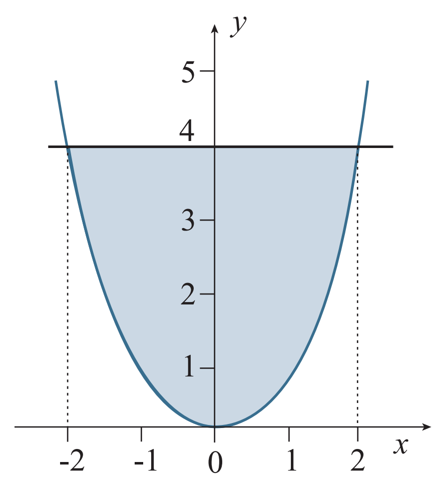


Figura 6.9

Portanto, a área limitada por $y = f(x) = 4$ e $y = g(x) = x^2$ em $[-2, 2]$ é $\dfrac{32}{3}$ unidades de área.

Exemplo 3. Determinar a área da região limitada por $y = f(x) = 8 - x^2$ e $g(x) = x^2$.

Resolução: Temos os seguintes passos.

Passo 1. Esboço da região, como mostra a figura 6.10.

Passo 2. Para encontrar os limites de integração, fazemos $f(x) = g(x)$, isto é, $8 - x^2 = x^2$ que fornece $8 = 2x^2$ e $x_1 = -2$ e $x_2 = 2$. Assim, $a = -2$ e $b = 2$.

Passo 3. A área da região limitada por $y = f(x) = 8 - x^2$ e $g(x) = x^2$ será

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx = \int_{-2}^{2} (8 - x^2 - x^2)\,dx$$

$$= \int_{-2}^{2} (8 - 2x^2)dx = \left(8x - 2\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{2}$$

$$= \left(8\cdot 2 - 2\cdot\frac{2^3}{3}\right) - \left(8\cdot(-2) - 2\cdot\frac{(-2)^3}{3}\right)$$

$$= \left(16 - 2\cdot\frac{8}{3}\right) - \left(-16 - 2\cdot\frac{-8}{3}\right)$$

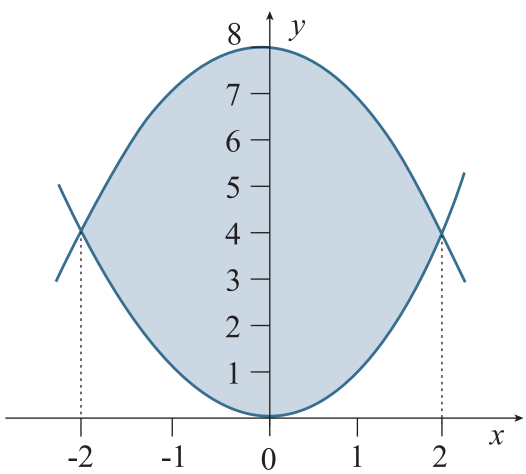


Figura 6.10

$$= \left(16 - \frac{16}{3}\right) - \left(-16 + \frac{16}{3}\right) = 16 - \frac{16}{3} + 16 - \frac{16}{3}$$

$$= 32 - 2\cdot\frac{16}{3}$$

$$= 32 - \frac{32}{3} = \frac{96 - 32}{3} = \frac{64}{3}$$, ou

$$A = \int_{-2}^{2} (8 - x^2 - x^2)dx = \frac{64}{3}.$$

Portanto, a área limitada por $y = f(x) = 8 - x^2$ e $g(x) = x^2$ em $[-2, 2]$ é $\dfrac{64}{3}$ unidades de área.

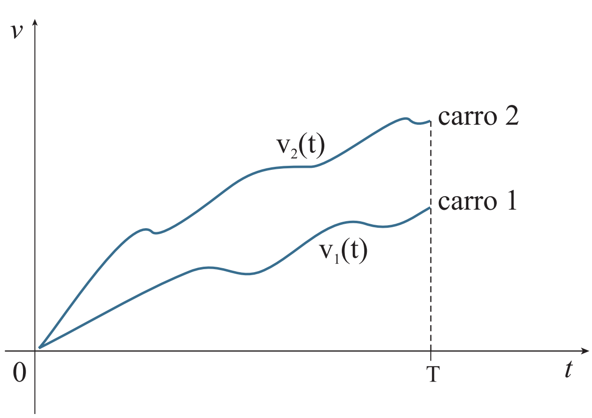


Figura 6.11

Exemplo 4. O gráfico da figura 6.11 mostra as curvas velocidade × tempo para dois carros de corrida, movendo-se em pista reta, partindo do repouso alinhado. O que representa a área entre as curvas no intervalo $0 \leq t \leq T$?

Resolução: Não é difícil de observar, pelo gráfico ao lado, que $v_2(t) \geq v_1(t)$ para todo t em $[0, T]$. Logo, a área A entre as duas curvas será

$$A = \int_0^T (v_2(t) - v_1(t))\, dt \;=\; \int_0^T v_2(t)\, dt - \int_0^T v_1(t)\, dt\,.$$

A primeira integral, $\int_0^T v_2(t)\, dt$, é a distância percorrida pelo Carro 2 e a segunda integral, $\int_0^T v_1(t)dt$ é distância percorrida pelo Carro 1. Portanto, a área A entre as duas curvas é distância que o Carro 2 está à frente do Carro 1 no tempo T.

Consideremos agora a área da figura plana limitada pelo gráfico de $f(x)$, pelas retas $x = a$ e $x = b$ e o eixo x, onde $f(x)$ é uma função contínua sendo $f(x) \le 0$, para todo x em $[a, b]$, conforme figura 6.12.

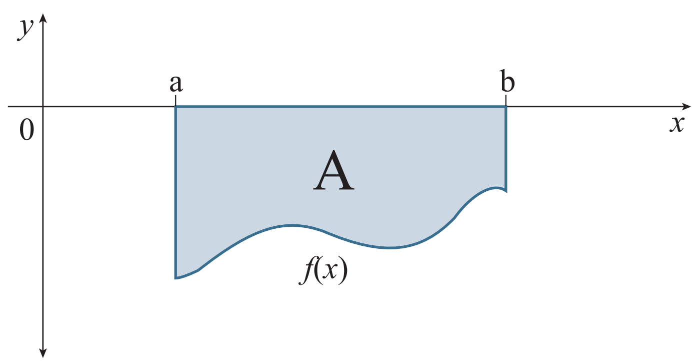


Figura 6.12

O cálculo da área A é dado por

$$A \;=\; \left| \int_a^b f(x)\, dx \right|,$$

ou seja, basta você calcular a integral definida e considerar o módulo ou valor absoluto da integral definida encontrada.

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1. Determinar a área limitada pela curva $y = f(x) = x^2 - 5x$, o eixo x e as retas $x = 1$ e $x = 3$.

Resolução: Temos os seguintes passos.

Passo 1. Esboço da região, como mostra a figura 6.13.

Passo 2. Os limites de integração são $a = 1$ e $b = 3$.

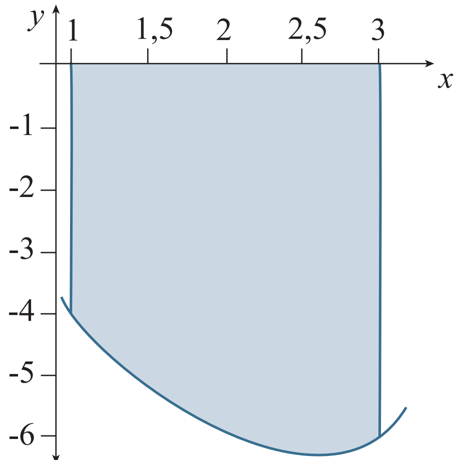


Figura 6.13

Passo 3. A área limitada pela curva $y = f(x) = x^2 - 5x$ o eixo x e as retas $x = 1$ e $x = 3$ será:

$$A = \left|\int_1^3 (x^2 - 5x)\,dx\right| = \left|\left(\frac{x^3}{3} - 5\cdot\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^3\right|$$

$$= \left|\left(\frac{3^3}{3} - 5\cdot\frac{3^2}{2}\right) - \left(\frac{1^3}{3} - 5\cdot\frac{1^2}{2}\right)\right|$$

$$= \left|\left(\frac{27}{3} - 5\cdot\frac{9}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} - 5\cdot\frac{1}{2}\right)\right|$$

$$= \left|\left(9 - \frac{45}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{2}\right)\right| = \left|\left(\frac{18-45}{2}\right) - \left(\frac{2-15}{6}\right)\right|$$

$$= \left|\left(\frac{-27}{2}\right) - \left(\frac{-13}{6}\right)\right| = \left|\frac{-27}{2} + \frac{13}{6}\right|$$

$$= \left|\frac{-81+13}{6}\right| = \left|\frac{-68}{6}\right| = \left|\frac{-34}{3}\right|,$$

ou seja, $A = \left|\int_1^3 (x^2 - 5\,x)\,dx\right| = \left|\frac{-34}{3}\right|.$

Logo, $A = \left|\frac{-34}{3}\right| = \frac{34}{3}$ unidades de área.

Portanto, a área limitada pela curva $y = f(x) = x^2 - 5x$ o eixo x e as retas $x = 1$ e $x = 3$ é $\frac{34}{3}$ unidades de área.

Exemplo 2. Encontrar a área da região limitada pela curva $y = f(x) = \text{sen}\,x$ e pelo eixo x de 0 a 2π.

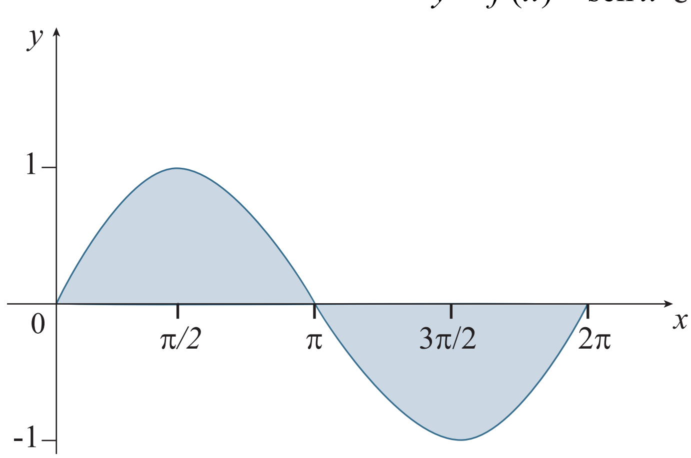


Figura 6.14

Resolução: Você tem os seguintes passos.

Passo 1. Esboço da região, como mostra a figura 6.14.

Passo 2. Para determinar os limites de integração temos, pelo gráfico acima, no intervalo $[0\,,\pi]$, $f(x) = \text{sen}\,x \geq 0$ e no intervalo $[\pi\,,2\pi]$, $f(x) = \text{sen}\,x \leq 0$.

Passo 3. A área da região limitada pela curva $f(x) = \text{sen}\, x$, e pelo eixo x de 0 até 2π será

$$A = \int_0^{\pi} \text{sen}\, x\, dx + \left| \int_{\pi}^{2\pi} \text{sen}\, x\, dx \right| = -\cos x \Big|_0^{\pi} + \left(\left| -\cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} \right| \right)$$

$$= (-\cos \pi - (-\cos 0)) + \left|(-\cos 2\pi - (-\cos \pi)\right|$$

$$= -(-1) - (-1) + \left|-1 - (-(-1))\right|$$

$$= 1 + 1 + \left|-1-1\right| = 2 + \left|-2\right| = 2 + 2 = 4, \text{ ou seja, A = 4.}$$

Portanto, a área da região limitada pela curva $f(x) = \text{sen}\, x$ e pelo eixo x de 0 até 2π é 4 unidades de área.

Vamos verificar se você compreendeu esta importante aplicação da integral definida e, para isto, resolva os exercícios propostos a seguir.

Exercícios Propostos

1) Calcular a área assinalada nas figuras a seguir.

a)

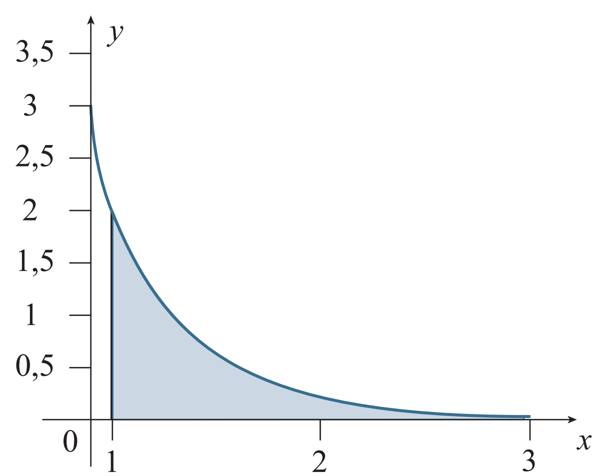


Figura 6.15

Onde $y = f(x) = \dfrac{2}{x^4}$.

b)

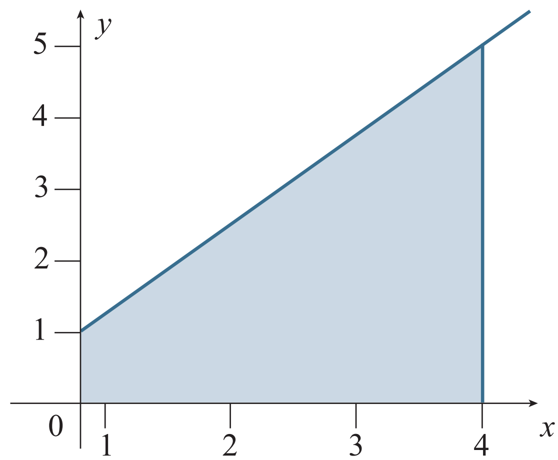


Figura 6.16

Onde $y = f(x) = x + 1$.

c)

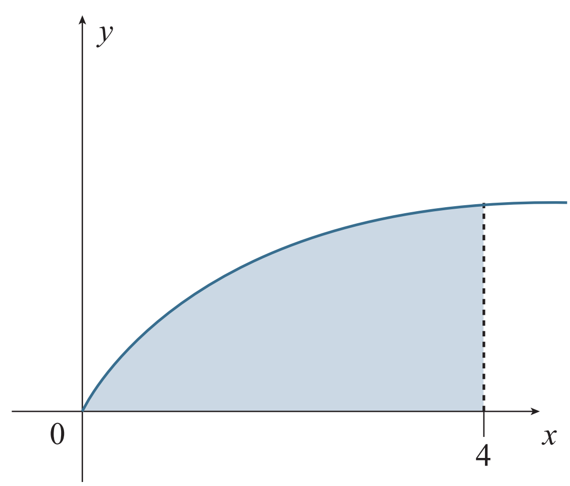


Figura 6.17

Onde $y = f(x) = \sqrt{x}$.

2) Determinar a área da região limitada por $y = f(x) = x$ e $y = g(x) = x^2 - x$.

3) Determinar a área da região limitada por $y = f(x) = -x + 1$, o eixo x e as retas $x = -2$ e $x = 0$.

4) Determinar a área da região limitada por $y = f(x) = x^2$ e $y = g(x) = -x^2 + 4x$.

5) Calcular a área da região limitada por $y = f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, o eixo x e as retas $x = 1$ e $x = 4$.

Respostas:

1) a) $A = \dfrac{52}{81}$ unidades de área,

b) 12 unidades de área,

c) $\dfrac{16}{3}$ unidades de área.

2) $\dfrac{4}{3}$ unidades de área.

3) 4 unidades de área.

4) $\dfrac{8}{3}$ unidades de área.

5) 2 unidades de área.

Resumo

Neste capítulo, você estudou como encontrar uma função primitiva (fazendo a relação com a derivada), como calcular uma integral indefinida aplicando suas propriedades e como calcular integrais imediatas (aplicando as fórmulas apresentadas). Além disso, você também aprendeu a calcular uma integral usando a técnica da substituição ou mudança de variável. Pôde compreender, geometricamente, o cálculo de área de uma região plana através de retângulos usando a *Soma de Riemann* e conhecer um dos resultados mais importantes do Cálculo Diferencial e Integral: O Teorema Fundamental do Cálculo e aprender a aplicá-lo.

Bibliografia comentada

KÜHLKAMP, Nilo. **Cálculo 1**. 3. ed. Florianópolis: EdUFSC, 2006.

Neste livro você pode compreender melhor como levantar uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$; limites fundamentais, Teorema Fundamental do Cálculo e a técnica de integração de funções por substituição.

LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com geometria analítica**. 3. ed. Harbra: São Paulo, 1994. v. 1 e 2.

A obra aborda Desigualdades e suas Propriedades e cálculo de áreas entre duas curvas.

SWOKOWSKI, E. William. **Cálculo com geometria analítica**. 2. ed. Makron Books do Brasil, 1994. v. 1.

Neste livro você pode aprender mais sobre funções contínuas.

THOMAS, George B. **Cálculo**. São Paulo: Addison Wesley, 2002. v. 1.

O autor aborda sobre limites no infinito, limites infinitos e limites de funções racionais quando $x \to \pm\infty$.

A obra também aborda conteúdos referente a funções contínuas e função primitiva e integrais indefinidas.

UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA

UNIVERSIDADE
ABERTA DO BRASIL

Ministério
da Educação

BRASIL
UM PAÍS DE TODOS
GOVERNO FEDERAL

Cálculo I

Este livro aborda as principais idéias do Cálculo Diferencial e Integral. O objetivo é proporcionar ao aluno o aprendizado de conceitos de cálculo, através de uma linguagem simples e clara, incluindo alguns exercícios resolvidos. Dentre os exercícios apresentados, encontram-se aqueles que se destinam a auxiliar a compreensão do conteúdo trabalhado, e aqueles que objetivam familiarizar o aluno com as técnicas operatórias.

9 788599 379783