

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
ESCOLA DE FILOSOFIA, LETRAS E CIÊNCIAS HUMANAS

JEFFERSON DOS SANTOS FERREIRA

A GRADUAÇÃO COMO ELEMENTO CONSTITUINTE DA *MATEMÁTICA*
DO ENSINO: uma análise da aritmética dos manuais pedagógicos (1933-1951)

GUARULHOS, SP

2022

JEFFERSON DOS SANTOS FERREIRA

**A GRADUAÇÃO COMO ELEMENTO CONSTITUINTE DA *MATEMÁTICA*
DO ENSINO: uma análise da aritmética dos manuais pedagógicos (1933-1951)**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação e Saúde na Infância e na Adolescência da Universidade Federal de São Paulo como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Ciências.

Orientador: Prof.º Dr. Wagner Rodrigues Valente

GUARULHOS, SP

2022

Na qualidade de titular dos direitos autorais, em consonância com a Lei de direitos autorais nº 9610/98, autorizo a publicação livre e gratuita desse trabalho no Repositório Institucional da UNIFESP ou em outro meio eletrônico da instituição, sem qualquer ressarcimento dos direitos autorais para leitura, impressão e/ou download em meio eletrônico para fins de divulgação intelectual, desde que citada a fonte.

Ferreira, Jefferson dos Santos

A graduação como elemento constituinte da *matemática do ensino*: uma análise da aritmética dos manuais pedagógicos (1933-1951) / Jefferson dos Santos Ferreira – 2022. – 133 f.

Tese (Doutorado em Ciências). – Guarulhos: Universidade Federal de São Paulo. Escola de Filosofia, Letras e Humanas. Programa de Pós-Graduação em Educação e Saúde na Infância e na Adolescência.

Orientador: Wagner Rodrigues Valente.

Título em outro idioma: Undergraduation as a constituent element of the mathematics of teaching: an analysis of the arithmetic of pedagogical manuals (1933-1951)

1. Aritmética. 2. Graduação. 3. Cultura escolar. 4. Formação de professores. 5. Manuais pedagógicos. I. Orientador: Wagner Rodrigues Valente. II. Título.

JEFFERSON DOS SANTOS FERREIRA

**A GRADUAÇÃO COMO ELEMENTO CONSTITUINTE DA *MATEMÁTICA*
DO ENSINO: uma análise da aritmética dos manuais pedagógicos (1933-1951)**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação e Saúde na Infância e na Adolescência da Universidade Federal de São Paulo como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Ciências.

Aprovada em: 19 de janeiro de 2022

Prof.º Dr. Wagner Rodrigues Valente
Universidade Federal de São Paulo – Orientador

Prof.ª Dra. Rosilda dos Santos Morais
Universidade Federal de São Paulo – Titular interna

Prof.ª Dra. Heloísa da Silva
Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” – Titular externa

Prof.ª Dra. Ivanete Batista dos Santos
Universidade Federal de Sergipe – Titular externa

Prof.ª Dra. Vivian Batista da Silva
Universidade de São Paulo – Titular externa

Prof.º Dr. David Antônio da Costa
Universidade Federal de Santa Catarina – Suplente externo

Prof.ª Dra. Nara Vilma Lima Pinheiro
Universidade de São Paulo – Suplente externa

Dedico este trabalho aos meus pais, João e Marleide e à minha esposa Layane que muito contribuíram para que eu chegasse até aqui.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) – Código de Financiamento 001. O estudo também contou com o apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) – processo FAPESP 2018/06521-6.

Agradeço ao professor Wagner Rodrigues Valente, por toda a dedicação dispensada à orientação deste trabalho ao longo de todo o período do doutorado. Essa orientação foi fundamental no meu processo de formação como pesquisador e, sem ela, não teria chegado aos resultados apresentados nesta tese.

Ao Programa de Pós-Graduação em Educação e Saúde na Infância e na Adolescência (PPGES) da Universidade Federal de São Paulo (UNIFESP), de um modo particular, agradeço à secretária Rute Dourado Lopes por toda a ajuda dispensada com as questões burocráticas.

À Biblioteca da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo (FEUSP), ao Arquivo Público do Estado de São Paulo (APESP) e ao Centro de Referência em Educação Mário Covas (CRE), agradeço a disponibilização de seus acervos para a pesquisa.

Aos professores: David Antônio da Costa; Heloísa da Silva; Ivanete Batista dos Santos; Nara Vilma Lima Pinheiro; Rosilda dos Santos Moraes e Vivian Batista da Silva, agradeço por terem aceitado participar da banca e pelas contribuições para a melhoria do trabalho.

Às professoras Luciane de Fátima Bertini e Rosilda dos Santos Moraes, por terem participado do meu processo de formação ao longo do doutorado.

À professora Ivanete Batista dos Santos, por todo o apoio desde a graduação.

Aos colegas de trajetória do GHEMAT/SP: Ana Basei; Ana Rocha; André; Andréia; Alan; Bruna; Diego; Eliene; Erisvaldo; Francisco; Gabriela; Gisele; Ivone; Janice; Joana; Juliana; Karina; Márcio; Marylúcia; Lauro; Robert; Rogério Grotti; Relicler; Thayane; Viviane e Victor agradeço pelas leituras das versões preliminares do projeto, pela convivência e pelos embates.

A todos que de alguma forma colaboraram para o desenvolvimento deste trabalho.

Por fim, agradeço a Deus por tudo.

RESUMO

Este estudo abordou historicamente os saberes envolvidos na formação de professores que ensinavam matemática. Situou-se numa perspectiva que tomou os saberes no âmbito da cultura escolar. Delimitou como marco temporal o período que estudos históricos da educação denominam Escola Nova, fixando atenção no que ganhou denominação de pedagogia científica. Utilizou como fontes de pesquisa os manuais pedagógicos: *Como se ensina a aritmética?* de Faria de Vasconcelos (1933); *Pedagogia científica: psicologia e direção da aprendizagem*, de Miguel Alfredo Aguayo (1936); *Práticas escolares: de acordo com o programa de prática do ensino do curso normal e com a orientação do ensino primário*, de Antônio D'Ávila (1942) e *Metodologia da Matemática: orientação detalhada e sugestões prática acerca de todos os pontos do programa do curso primário*, de Irene de Albuquerque (1951), considerados como referências de orientação para o trabalho docente. Orientou-se pela questão: *que graduação do ensino foi dada a conhecer em manuais presentes na formação de professores em tempos de pedagogia científica?* Graduação do ensino entendida neste trabalho com as diferentes formas e níveis em que o ensino se organiza nessas obras de acordo com as concepções de ensino e aprendizagem de seus autores. Como resultado da pesquisa é defendida a tese de que na cultura escolar em tempos de pedagogia científica produziu-se uma graduação própria do ensino de aritmética. Tal graduação se configura como elemento constituinte da *matemática do ensino*, conceito que articula as noções de matemática *a* ensinar e a matemática *para* ensinar, e que se refere à matemática elaborada tendo em conta a cultura escolar.

Palavras-chave: Aritmética. Graduação. Cultura escolar. Formação de professores. Manuais pedagógicos.

ABSTRACT

This study historically addressed the knowledge involved in the education of teachers who taught mathematics. It is situated from a perspective that took knowledge in the context of school culture. The time frame chosen was the period education historical studies call Escola Nova, focusing on the so-called scientific pedagogy. It used as research sources the pedagogical manuals: “How to teach arithmetic”, by Faria de Vasconcelos (1933); “Scientific pedagogy: psychology and direction of learning”, by Miguel Alfredo Aguayo (1936); “School practices: according to the program of teaching practice of the normal course and the orientation of elementary school”, by Antônio D'Ávila (1942) and “Mathematical Methodology: detailed guidance and practical suggestions on all points of the primary course program”, by Irene de Albuquerque (1951), considered as guidance references for the teaching work. The research was guided by to question: *what degree of teaching was made known in handbooks present in teacher education in times of the scientific pedagogy?* Undergraduation of teaching understood in this work with the different forms and levels at which teaching is organized in these works according to the conceptions of teaching and learning of their authors. As a result of the research, this thesis defends that in the school culture in times of scientific pedagogy has produced itself a undergraduation in the arithmetic teaching. Such undergraduation is configured as a constituent element of the *mathematics of teaching*.

Keywords: Arithmetic. Undergraduation. School culture. Teacher training. Pedagogical handbooks.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Recorte da programação do ensino normal de São Paulo 1925	49
Figura 2: Discurso de Augusto de Oliveira sobre a graduação do ensino	60
Figura 3: Capa do Manual Como se ensina a aritmética de Faria de Vasconcelos	73
Figura 4: Tipos de dificuldades dos decimais.....	80
Figura 5: Idade mental mínima e ótima para ensino dos conteúdos da aritmética de acordo com a Comissão dos Sete.....	81
Figura 6: Combinações de soma, subtração e multiplicação segundo Clapp	84
Figura 7: Combinações da divisão segundo Clapp.....	85
Figura 8: Capa do Manual Pedagogia Científica: Psicologia e direção da aprendizagem, de Miguel Aguayo	86
Figura 9: Conteúdos referentes ao ensino da aritmética em Aguayo (1936).....	89
Figura 10: Capa do manual Práticas Escolares de Antônio D'Ávila.....	95
Figura 11: Conteúdos da aritmética em Práticas Escolares	96
Figura 12: Graduação do ensino da soma de acordo com D'Ávila	99
Figura 13: Capa do manual Metodologia da Matemática, de Irene de Albuquerque .	102
Figura 14: Índice do manual Metodologia da Matemática	104
Figura 15: Organização temporal dos exercícios segundo Thorndike.....	106
Figura 16: Proposta de organização dos fatos fundamentais	110
Figura 17: Exemplo de graduação das dificuldades da adição	112
Figura 18: Exemplo de graduação das dificuldades da subtração	113
Figura 19: Modelos de questões de equivalências de frações	115
Figura 20: Operações envolvendo o sistema monetário	116

LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Dissertações e Teses que abordam a aritmética e a pedagogia científica.....	32
Quadro 2: Categorias adotadas na análise da graduação nos manuais pedagógicos	71
Quadro 3: Seis primeiros capítulos do manual: Como se ensina a aritmética.....	75
Quadro 4: Capítulos 13 e 18 do manual: Como se ensina a aritmética	76
Quadro 5: Capítulos 7-11 de Faria de Vasconcelos (1933).....	77
Quadro 6: Capítulos que trataram das investigações referentes às operações	77
Quadro 7: Capítulos que trataram do problema dos erros relativos às operações	77

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

APA	American Psychological Association
APB	Acervo Paulo Bourroul
APES	Arquivo Público do Estado de Sergipe
APESP	Arquivo Público do Estado de São Paulo
BDTD	Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações
BLD	Biblioteca do Livro Didático
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CPP	Centro do Professorado Paulista
CRE	Centro de Referência em Educação Mário Covas
DMA	Departamento de Matemática
EFLCH	Escola de Filosofia, Letras e Ciências Humanas
ERHISE	Equipe de Recherche en Historie Sociale de l'Éducation
FAPESP	Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo
FEUSP	Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo
GHEMAT	Grupo de Pesquisa em História da Educação Matemática no Brasil
IERJ	Instituto de Educação do Rio de Janeiro
IHGSE	Instituto Histórico e Geográfico de Sergipe
MMM	Movimento da Matemática Moderna
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PPGES	Programa de Pós-Graduação em Educação e Saúde na Infância e na Adolescência
RCD	Repositório de Conteúdo Digital
TCC	Trabalho de Conclusão de Curso
UFS	Universidade Federal de Sergipe
UFSC	Universidade Federal de Santa Catarina
UNIFESP	Universidade Federal de São Paulo

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	12
2. AS MATEMÁTICAS DA CULTURA ESCOLAR E O SABER PROFISSIONAL DO PROFESSOR QUE ENSINAVA MATEMÁTICA.....	16
2.1 Alicerces teóricos da pesquisa	16
2.2 Aritmética <i>a</i> ensinar e aritmética <i>para</i> ensinar: matemáticas da cultura escolar.....	20
3. O CONTEXTO DE REALIZAÇÃO DA PESQUISA.....	25
3.1 O trabalho no contexto de uma produção coletiva de pesquisa	25
3.2 Uma revisão bibliográfica.....	31
4. A GRADUAÇÃO E A <i>MATEMÁTICA DO ENSINO</i> : considerações sobre o saber profissional do professor	40
4.1 A noção de graduação do ensino como uma temática relevante	41
4.2 A <i>matemática do ensino</i>	51
4.2.1 Sobre o conceito de <i>matemática do ensino</i>	53
4.3 A graduação como elemento das <i>matemáticas do ensino</i>	60
5. OS MANUAIS PEDAGÓGICOS E A GRADUAÇÃO DO ENSINO DE ARITMÉTICA: elementos da aritmética <i>para</i> ensinar.....	65
5.1 Os manuais pedagógicos e o saber profissional do professor que ensinava matemática	65
5.2 Manuais pedagógicos e a graduação do ensino de aritmética	72
5.2.1 A graduação do ensino de aritmética em Faria de Vasconcelos	72
5.2.2 A graduação do ensino de aritmética em Miguel Aguayo.....	86
5.3 Manuais brasileiros e suas graduações do ensino de aritmética	93
5.3.1 A graduação do ensino de aritmética em Antônio D'Ávila.....	94
5.3.2 A graduação do ensino de aritmética em Irene de Albuquerque	102
6. CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	118
REFERÊNCIAS	122

1. INTRODUÇÃO

Neste trabalho apresento¹ resultados de uma pesquisa de doutorado desenvolvida no Programa de Pós-Graduação em Educação e Saúde na Infância e na Adolescência (PPGES) da Universidade Federal de São Paulo (UNIFESP). A pesquisa teve o apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo² (FAPESP) e tratou da aritmética na formação de professores em tempos de pedagogia científica.

Antes de sintetizar os capítulos que compõem esta tese, preciso destacar que meu primeiro contato com temas da história da educação matemática ocorreu no primeiro semestre de 2013, quando cursei a disciplina obrigatória *Prática de Pesquisa I*³ da Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Sergipe (UFS). Nessa disciplina, era preciso elaborar um projeto de pesquisa sob orientação de um dos professores do Departamento de Matemática (DMA) da UFS, o qual deveria ser desenvolvido no semestre seguinte sob a forma de Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) na disciplina *Prática de Pesquisa II*.

Foi a partir da necessidade de pensar uma temática para a escrita do TCC e na busca de um professor que estivesse disposto a me orientar, que fui apresentado à área da história da educação matemática pela professora Dra. Ivanete Batista do Santos, a quem procurei pedindo orientação e por quem fui convidado a ler o projeto coletivo *A constituição dos saberes elementares matemáticos: a aritmética, a geometria e o desenho em perspectiva histórico comparativa, 1890 e 1970* (VALENTE, 2012a). Só depois da leitura desse projeto e de uma primeira visita ao Instituto Histórico e Geográfico de Sergipe (IHGSE) e ao Arquivo Público do Estado de Sergipe (APES) – para uma consulta inicial da presença da matemática em documentos oficiais – e de concordar em escrever um TCC dentro desse projeto e da história da educação matemática, fui aceito como orientando e definiu-se uma temática nesta área de pesquisa até então desconhecida por mim. Considero que este passo inicial de escrita de um TCC foi fundamental para as escolhas que fiz logo depois de concluir a Licenciatura em Matemática.

Naquela oportunidade, a partir da documentação oficial, escrevi o TCC abordando a aritmética no ensino primário em Sergipe. Este trabalho foi intitulado *A aritmética da escola*

¹ Além de apresentar a pesquisa, trago também alguns elementos da minha trajetória pessoal; assim, optei por escrever o texto da introdução em primeira pessoa do singular.

² Processo FAPESP 2018/06521-6.

³ Essa disciplina foi ministrada pela Prof.^a Dra. Georgiane Amorim Silva.

primária em Sergipe: uma investigação sobre conteúdos, métodos e recursos (1901-1931) e foi apresentado à banca examinadora do DMA em 26 de fevereiro de 2014. Nele, como o próprio título indica, descrevi de um modo geral os conteúdos, métodos e recursos voltados a este ensino. Ao tratar de métodos prescritos na documentação sergipana, pude notar que, para o período estudado, predominava a recomendação de ensino pelo método intuitivo.

Esta constatação me fez buscar compreender um pouco melhor o método intuitivo e, ao terminar a graduação, ingressei no mestrado em Ensino de Ciências e Matemática na UFS em 2015, também sob orientação da professora Ivanete. No mestrado, busquei, a partir da perspectiva da história cultural, analisar apropriações dos princípios do método intuitivo de Pestalozzi, elaborando uma dissertação no âmbito do projeto coletivo já citado, que foi intitulada *Apropriações do método intuitivo de Pestalozzi para o ensino de saberes elementares matemáticos em periódicos brasileiros do final do século XIX e início do século XX*. O trabalho foi defendido e publicado no início do ano de 2017.

Como resultado, foi possível delinear algumas características do método intuitivo de Pestalozzi, bem como a sua circulação em periódicos brasileiros. Uma dessas características era a necessidade de seguir um ensino que fosse gradual, com o qual, por meio dos sentidos e com o uso de objetos, a criança deveria começar a aprender as noções mais simples e, à medida em que fosse desenvolvendo suas faculdades mentais, passaria a aprender as noções mais complexas (FERREIRA, 2017).

Naquele momento, apesar de a graduação do ensino – que consiste em partir do simples para o complexo – enquanto categoria de análise permear toda a escrita da minha dissertação por ter sido um dos elementos de Pestalozzi apropriados nas revistas que analisei, não tinha meios para pensá-la como algo maior, como elemento estruturante da *matemática do ensino*.

Depois de estudar o método intuitivo voltado para os saberes matemáticos da escola, ingressei no doutorado no primeiro semestre de 2018 com o objetivo de estudar saberes *para ensinar aritmética* na formação de professores em tempos de Escola Nova. O projeto que apresentei na seleção do doutorado intitulava-se: *Os saberes para ensinar aritmética para a formação de professores que ensinaram matemática em tempos de Escola Nova*. Na terceira seção desta tese, mostro de uma forma mais detalhada o contexto da pesquisa e como a temática foi mudando a partir dos resultados parciais que fui obtendo ao longo dos quatro anos de doutoramento.

Uma vez que descrevi como adentrei na área da história da educação matemática e como tive a oportunidade de pesquisar no âmbito da história cultural, destaco que, para a construção desta tese, busquei problematizar a graduação do ensino da aritmética como elemento presente na cultura escolar e, para tal empreitada, parti da perspectiva de análise histórica e de um referencial teórico-metodológico voltado à pesquisa sobre os saberes profissionais dos professores.

Assim, na segunda seção desta tese, discorro sobre os alicerces teórico-metodológicos que sustentam este trabalho, problematizo a noção de cultura escolar e a relaciono com noções de saberes *a* e *para* ensinar que, articulados, definem o saber o profissional do professor. Mostro ainda como, a partir destes conceitos, foram construídas as hipóteses teóricas da pesquisa, lançando mão de conceitos como matemática *a* ensinar e matemática *para* ensinar e de saberes profissionais dos professores que ensinavam matemática.

A terceira seção dedico à apresentação do contexto em que construí o trabalho, mostrando como fui reelaborando minha problemática de pesquisa a partir dos resultados parciais que foram obtidos ao longo do período doutoral e acompanhando a produção coletiva na qual esta pesquisa se insere.

Nessa seção, mostro ainda, a partir da revisão de literatura, como elaborei as hipóteses e a problemática que guiaram as análises realizadas na construção da tese. No entanto, cabe mencioná-las desde já. Assim, tomo como hipóteses de pesquisa que:

- existe uma *matemática do ensino* própria de cada momento histórico e elaborada no contexto da cultura escolar;
- em tempos de pedagogia científica, na cultura escolar elaborou-se uma *aritmética sob medida*;
- relacionada a essa aritmética, existiu uma graduação do ensino, que também é fruto da pedagogia científica, utilizada como objeto e ferramenta do trabalho do professor que ensinou matemática.

A partir dessas hipóteses de pesquisa, busco responder nesta tese à seguinte questão: *que graduação do ensino foi dada a conhecer em manuais presentes na formação de professores em tempos de pedagogia científica?*

Com isso, na quarta seção apresento conceitos relacionados à graduação do ensino e uma categorização para a análise da graduação. Em um segundo momento, procuro discorrer sobre a noção de *matemática do ensino*.

Por fim, de posse de todos os aspectos teórico-metodológicos apresentados ao longo do texto, das hipóteses e da problemática de pesquisa, dedico a quinta seção à apresentação da empiria da pesquisa e busco, por meio de manuais pedagógicos que circularam no Brasil entre 1933 e 1951, defender a tese de que, em tempos de pedagogia científica, a graduação do ensino da aritmética foi um elemento constituinte da *matemática do ensino*.

2. AS MATEMÁTICAS DA CULTURA ESCOLAR E O SABER PROFISSIONAL DO PROFESSOR QUE ENSINAVA MATEMÁTICA

Nesta seção são apresentados os aspectos teórico-metodológicos que conduziram a elaboração desta tese.

Em uma primeira parte, são discutidos alguns conceitos que foram fundamentais na realização deste estudo, os quais são provenientes de pesquisas no âmbito da História da Educação e de trabalhos que adotam uma perspectiva sócio-histórica para analisar a formação de professores.

Depois de delimitar os aspectos teórico-metodológicos, em uma segunda parte são apresentadas as noções de aritmética *a* ensinar e aritmética *para* ensinar, assim como sua relação com o saber profissional do professor que ensinava matemática.

2.1 Alicerces teóricos da pesquisa

Inicialmente, é preciso destacar que este trabalho de pesquisa se situa no âmbito da produção de saberes por sujeitos situados na cultura escolar, o que possibilitou pensar a escola não como uma mera reprodutora dos saberes produzidos pelos campos científicos, mas ela própria como produtora de saberes (JULIA, 2001). Desta forma, a noção de cultura escolar forneceu elementos para analisar os saberes da escola desde uma perspectiva epistemológica. De fato, não interessou no estudo a abordagem didática, de mecanismos e estratégias utilizadas para a passagem de saberes de um campo disciplinar (matemática) para o ensino e para a formação de professores.

Segundo Dominique Julia, a cultura escolar só pode ser analisada a partir “[...] das relações conflituosas ou pacíficas que ela mantém, a cada período de sua história, com o conjunto das culturas que lhe são contemporâneas: cultura religiosa, cultura política ou cultura popular” (JULIA, 2001, p. 10). Feitas essas considerações, Julia (2001) definiu o conceito de cultura escolar como

[...] um conjunto de *normas* que definem conhecimentos a ensinar e condutas a inculcar, e um conjunto de *práticas* que permitem a transmissão desses conhecimentos e a incorporação desses comportamentos; normas e práticas coordenadas a finalidades que podem variar segundo as épocas (finalidades

religiosas, sociopolíticas ou simplesmente de socialização). Normas e práticas não podem ser analisadas sem se levar em conta o corpo profissional dos agentes que são chamados a obedecer a essas ordens e, portanto, a utilizar dispositivos pedagógicos encarregados de facilitar sua aplicação, a saber, os professores primários e os demais professores (JULIA, 2001, p. 10-11, grifos do autor).

Deste modo, em cada período histórico a cultura escolar dialoga com outras culturas a ela contemporâneas e que definem, em sua época, as finalidades da escola. Mudanças nessas finalidades geram alterações no conjunto de normas e práticas da escola e, conseqüentemente, transformam a cultura escolar.

A respeito das finalidades da escola, Chervel (1990, p. 188) argumentou que essa instituição “[...] é, em cada época, tributária de um complexo de objetivos que se entrelaçam e se combinam numa delicada arquitetura da qual alguns tentaram fazer um modelo”. O autor destacou ainda:

A definição das finalidades reais da escola passa pela resposta à questão “por que a escola ensina o que ensina?” E não pela questão à qual muito frequentemente nos apegamos: “que é que a escola deveria ensinar para satisfazer os poderes públicos?” (CHERVEL, 1990, p. 190).

Os saberes elaborados pela escola e seus modos de transmissão cumpriam o papel de atender demandas que a própria escola criou, por isso o autor colocou que o cerne da questão se refere à compreensão do porquê ela ensina o que ensina. Pode-se afirmar que, em diferentes vagas pedagógicas⁴, foram produzidos para o meio escolar diferentes saberes e, conseqüentemente, diferentes modos para a sua transmissão. Essa produção visava a atender as finalidades que foram atribuídas à escola em cada tempo.

Também foi importante destacar que, no conceito de cultura escolar defendido por Julia (2001), os saberes e as práticas escolares ocuparam um lugar que era central. Segundo ele, contrariamente

[...] às ideias recebidas, o estudo histórico das disciplinas escolares mostra que, diante das disposições gerais atribuídas pela sociedade à escola, os professores dispõem de uma ampla liberdade de manobra: a escola não é o lugar da rotina e da coação e o professor não é o agente de uma didática que lhe seria imposta de fora (JULIA, 2001, p. 33).

⁴ Podem ser pensadas como as diferentes periodizações elaboradas pela História da Educação, nas quais “[...] estão presentes modos de conduzir a educação os mais diversos, caracterizados como: pedagogia tradicional, pedagogia moderna, pedagogia ativa, escola ativa, tecnicista, pedagogia intuitiva, pedagogia científica dentre outros” (VALENTE, 2015, p. 19).

Nesta concepção de prática escolar, o autor tomou um posicionamento teórico que advogava que a escola era produtora de saberes e, no caso dos professores que ensinavam matemática, foi possível, a partir disso, conjecturar que eles não eram apenas transmissores daquilo que era produzido pelo campo disciplinar matemático. Os saberes que transmitiam resultavam da articulação entre saberes disciplinares matemáticos e saberes elaborados propriamente para a escola. Desse modo, foi possível afirmar ainda que, se a escola não é uma mera reprodutora de saberes disciplinares, ela elabora lógicas próprias de transmissão para os alunos e, como destacou Chervel (1990), a pedagogia é um elemento do mecanismo de elaboração desses saberes e não um simples lubrificante que opera sobre os conteúdos.

Tendo em vista esta perspectiva, a presente pesquisa considerou as transformações dos saberes no âmbito escolar, diferindo-se de um estudo que se ativesse à seara disciplinar do campo matemático, o que levaria a considerar os saberes matemáticos como imutáveis, ou seja, que a matemática é a mesma também na escola, apenas diferindo de nível – avançado ou superior. Para o campo disciplinar, a matemática presente no ensino constituiu formas elementares que levavam ao estágio superior, avançado da matemática. Na presente pesquisa, os referenciais adotados permitiram que se assumisse como hipótese teórica de investigação que há diferentes matemáticas, que a matemática presente na escola não era simplesmente uma forma elementar daquela do campo matemático, tida como superior.

Nesta perspectiva, neste trabalho utilizaram-se também estudos que trataram da formação de professores, elaborados por autores ligados à *Equipe de Recherche en Historie Sociale de l'Éducation* (ERHISE), que adotaram o posicionamento de que os conteúdos ensinados na escola “[...] são o resultado de processos complexos de construção e de transformações dos saberes” (HOFSTETTER; SCHNEUWLY, 2017a, p. 118).

Esses autores, ao tratarem da noção de currículo, ressaltaram em relação à escola que a “[...] prática de aprender num currículo se encontra decomposta, para ser explicitada, exteriorizada e objetivada. A aprendizagem não se opera por identificação da fala na ação, mas por diferenciação da fala sobre a ação” (HOFSTETTER; SCHNEUWLY, 2017a, p. 123-124). Assim, foi possível afirmar que a escola funciona como local de mediação de saberes e, como a formação se diferencia das ações cotidianas no trabalho, os autores destacaram que “[...] a ação de formar implica na existência de mediações semióticas” (HOFSTETTER; SCHNEUWLY, 2017a, p. 124).

Feitas essas considerações a respeito da mediação dos saberes operada na escola, vale destacar que o local específico para a análise aqui empreendida referiu-se à formação de

professores primários em tempos de pedagogia científica. Tal escolha encontra-se mais bem explicitada e justificada na seção seguinte, na qual, dentre outras coisas, aborda-se o contexto da realização da pesquisa e delimitação e refinamento da temática tratada nesta tese.

Do ponto de vista da cultura escolar, um dos intentos deste trabalho era o de compreender como, na formação de professores primários, foram produzidos saberes próprios para a escola, seguindo uma lógica diversa daquela imposta pelo campo disciplinar, como se destacou anteriormente, principalmente em tempos de pedagogia científica, uma das vertentes do chamado movimento da Escola Nova, cujos representantes não davam ênfase aos saberes disciplinares (GUALTIERI, 2020). Nesse caso, uma questão ainda muito geral que se apresentou referia-se a como pensar em uma matemática própria da escola em um tempo no qual a ênfase não estava nos conteúdos, mas na psicologia.

A respeito da pedagogia científica, foi plausível afirmar que se tratava de

[...] uma teoria prática cujas raízes se nutrem da antropologia física, fisiologia, biologia, psicologia, higiene, estatística, sociologia e por aí vai. Do cultivo da *Arbor Scientiae*, velha figura medieval a representar a árvore do conhecimento e da vida, mas também do Bem e do Mal, resultava o florescer de uma ciência de ramos fortes e vistosos, designados por nomes encantatórios, misteriosos mesmo: “pedologia”, “pedanálise”, “antropometria pedagógica”, “pedagogia experimental”, “pedagogia emendativa”, “psicopedologia”, “pedagogia científica”, “pedagogia genética”, “pedagogia emendativa”, “eufrenia”, “ortofrenia”, “psicopedagogia”, “psicologia experimental” (MONARCHA, 2009, p. 148).

Por ora, sem ainda adentrar nos meandros da questão acerca da produção de matemática cujo foco estava na psicologia, é razoável destacar que a noção de cultura escolar possibilitou pensar a existência, em dado tempo histórico, de uma matemática que era específica da escola e que, portanto, fazia sentido ser pensada dentro do contexto de seu ensino, não de um ponto de vista disciplinar matemático.

Problematizar a produção de saberes próprios aos professores que ensinam matemática implica, como já indicado, levar em conta a existência de uma matemática que é própria do ensino, ou seja, um ponto de vista que considerou que há “matemáticas” no plural e que a “matemática do professor de matemática” distingue-se da “matemática do matemático” (VALENTE, 2017).

2.2 Aritmética a ensinar e aritmética para ensinar: matemáticas da cultura escolar

Este trabalho, conforme indicado na subseção anterior, está situado teoricamente no contexto da produção de saberes escolares. O esforço de pesquisa que aqui foi realizado considerou fundamental que se atentasse para as ponderações de Michel de Certeau (2015) sobre a importância que a operação historiográfica dá ao esclarecimento do lugar de onde fala o historiador. Neste caso, o lugar de onde se fala a partir da análise empírica⁵ desta tese é a cultura escolar. Tendo isso em conta, nesta etapa são trazidas algumas considerações sobre as matemáticas produzidas historicamente para a escola.

Antes de adentrar a problemática da construção teórica destas matemáticas, bem como das suas distinções epistemológicas, tornou-se imperativo compreender que diversos autores, na atualidade, têm o interesse em determinar que matemática se deve ensinar. Tais distinções, se referem ao modo como se concebe o saber profissional do professor.

A discussão a respeito dos saberes profissionais do professor é complexa, haja vista a própria natureza deles. Como menciona um dos renomados autores sobre o tema, foi possível destacar que a

[...] investigação internacional mostra, há pelo menos 40 anos, que o saber profissional dos professores é plural, ou seja, é constituído por conhecimentos oriundos de várias fontes: formação inicial e contínua, currículo escolar, experiência docente, história de vida, cultura pessoal etc. Também é variável de acordo com o país, as tradições culturais e escolares. Por exemplo, um professor de matemática do ensino médio deve, é claro, ter um conhecimento sólido da disciplina que ensina. No entanto, falar de “conhecimentos disciplinares sólidos em matemática” não significa muito até que se especifique a natureza, a profundidade e extensão desse conhecimento (TARDIF, 2020, p. 8).

Com isso, dada a pluralidade do modo de conceber os saberes profissionais, foi preciso destacar que, do ponto de vista do referencial aqui adotado, eles são o resultado da articulação entre saberes de naturezas diferentes, produzidos, de um lado, pelas didáticas disciplinares e, de outro lado, pelas ciências da educação (HOFSTETTER E SCHNEUWLY, 2017b).

Hofstetter e Schneuwly (2017b, p. 26) analisaram essa relação, considerando “[...] o ‘processo de disciplinarização’ relativamente a dois campos disciplinares: as ciências da

⁵ Essa empiria é apresentada na seção 5.

educação de uma parte, as didáticas das disciplinas de outra, ambas intrinsicamente ligadas aliás”. Foi factível destacar ainda que

[...] a emergência e o desdobramento desses dois campos disciplinares são realizados segundo uma lógica que encontramos em outros domínios: interação com os campos socioprofissionais e político-administrativos, constituição mesclada do ponto de vista disciplinar e cognitivo, referências locais e regionais acopladas a uma perspectiva internacional e universalista. Dado o seu objeto – a educação, a formação e o ensino –, as ciências da educação e as didáticas das disciplinas permitem observar outra dimensão própria a toda disciplina: precisamente a da “disciplinação”, condição de uma socialização no campo que os dispositivos pedagógicos e didáticos facilitam. Estes dois campos disciplinares têm por outro lado como terreno de investigação o conjunto de níveis de ensino, do primário ao superior e oferecem por isso a ocasião de problematizar também a relação entre as disciplinas escolares e as disciplinas acadêmicas (HOFSTETTER; SCHNEUWLY, 2017b, p. 27).

Assim, para discutir os saberes da formação e do ensino, foi necessário ter em conta que eles são resultado desta relação entre disciplinas universitárias e escolares, bem como dos processos de especialização das ciências da educação e das didáticas das disciplinas.

A análise histórica e empírica do processo de disciplinarização das ciências da educação e das didáticas das disciplinas oferece uma oportunidade particularmente heurística para conceituar as diferentes facetas do “disciplinar” na nossa sociedade. A organização disciplinar dos saberes atravessa as fronteiras entre educação e ciência. O uso da mesma palavra em muitas línguas não é fruto do acaso, mas o sintoma de uma realidade à qual é preciso atentar. O que une os dois é o ensino, a transmissão sistemática de saberes e conhecimentos (HOFSTETTER; SCHNEUWLY, 2017b, p. 47).

Os saberes provenientes das ciências da educação e das didáticas das disciplinas, possuem características fundamentais que os distinguem. Hofstetter e Schneuwly (2017a) ressaltaram que eles poderiam ser classificados como saberes objetivados. Quanto a esses, constatou-se que são aqueles que se tornam apropriáveis e, portanto, passíveis de transmissão (BARBIER, 1996).

Postas estas discussões, vale destacar que estes autores distinguiram tais saberes em saberes *a* ensinar e saberes *para* ensinar. No caso dos saberes *a* ensinar, foi possível afirmar que, a partir da perspectiva de Hofstetter e Schneuwly (2017a), tratava-se de saberes de cultura geral e, portanto, comuns às mais diversas profissões e produzidos pelas didáticas disciplinares, sendo os responsáveis por distinguir as profissões do ensino e da formação.

Os saberes *para* ensinar, por sua vez, seriam saberes produzidos pelas ciências da educação, dizendo respeito

[...] a saberes sobre “o objeto” do trabalho de ensino e de formação (sobre os saberes a ensinar e sobre o aluno, o adulto, seus conhecimentos, seu desenvolvimento, as maneiras de aprender etc.), sobre as práticas de ensino (métodos, procedimentos, dispositivos, escolha dos saberes a ensinar, modalidades de organização e de gestão) e sobre a instituição que define o seu campo atividade profissional (planos de estudos, instituições, finalidades, estruturas administrativas e políticas etc.). Como em toda profissão esses saberes são multiformes (HOFSTETTER; SCHNEUWLY, 2017a, p. 134).

Conforme já destacado, a escolha dos saberes *a* e *para* ensinar são o resultado de processos complexos. Os primeiros também são considerados pelos autores como objetos do trabalho profissional do professor, enquanto os segundos muitas vezes funcionam como saberes auxiliares desse trabalho. Os saberes *para* ensinar englobam saberes a respeito dos saberes *a* ensinar, dos alunos, dos métodos de ensino, das instituições de ensino etc.

A problematização acerca da natureza dos saberes levou a refletir sobre a especificidade dos saberes próprios do professor que ensinava matemática. Assim, Bertini, Moraes e Valente (2017), assumiram a existência de uma matemática *a* ensinar e de uma matemática *para* ensinar, ambas hipóteses teóricas de pesquisa.

A matemática *a* ensinar, como hipótese teórica de pesquisa, foi tomada “[...] como um saber advindo do campo matemático, reunindo uma gama de conteúdos que devem ser aprendidos por aqueles que estão em processo de formação” (VALENTE, 2019, p. 53). Referia-se basicamente, àqueles saberes que precisariam ser ensinados pelos professores e consequentemente que teriam de ser aprendidos pelos alunos.

Assim, não houve grandes dificuldades em entender a matemática como objeto do ensino, como um saber a ser ensinado, e que era dada

[...] por processos históricos, revelando-se esse saber devedor, em cada época, das finalidades atribuídas à escola, da pedagogia reinante num dado tempo escolar, das concepções vigentes sobre a matemática, dentre vários outros determinantes (VALENTE, 2019, p. 53).

Deste modo, foi possível afirmar que, em diferentes momentos históricos, a matemática *a* ensinar apareceu transformada pelas concepções vigentes, ou seja, a hipótese teórica de pesquisa se amparou na noção de cultura escolar e possibilitou compreender que a matemática escolar não é constituída por saberes invariantes. É a pesquisa histórica que permite constatar as mudanças e permanências na matemática escolar.

Por outro lado, era necessário refletir um pouco mais a respeito da matemática como ferramenta de ensino, transformada pelas ciências da educação e tomada como hipótese teórica de pesquisa, ou seja, a matemática *para* ensinar, que

[...] também é fruto de processo de elaboração histórica, não constitui um saber de cultura geral. Trata-se de um saber específico, de cultura profissional, próprio à formação do futuro docente. De outra parte, é preciso ressaltar, que a admissão da existência da *matemática para ensinar* não implica em sua autonomia. Sendo um saber específico, um saber do profissional da docência, uma ferramenta do ofício do ser professor, articula-se tal ferramenta com o objeto de ensino, a *matemática a ensinar*. Cabe somente à profissão docente a posse de um saber para ensinar, uma *matemática para ensinar* (VALENTE, 2019, p. 54, grifos do autor).

A articulação entre a matemática *a ensinar* e a matemática *para ensinar* é o que forma o saber profissional do professor que ensina matemática e caracteriza a sua profissão, uma vez que somente a esse profissional interessa saber como ensinar os saberes de cultura geral referentes à matemática. Ressalte-se aqui que a matemática *para ensinar* não diz respeito somente a uma metodologia voltada ao ensino de um determinado saber matemático, refere-se também a saberes sobre aquele saber, como sua história, suas aplicações etc. Além disso, abarca a forma como o aluno aprende aquela matemática e em quais níveis, e como ela deveria ser graduada de modo que se tenha uma melhor aprendizagem etc.

Tanto a matemática *a ensinar* como a matemática *para ensinar* no contexto deste trabalho são matemáticas elaboradas no âmbito da produção de saberes escolares, haja vista que se trata de matemáticas cujas finalidades se voltam ao ensino escolar. No primeiro caso, diz respeito àquilo que precisa ser transmitido pela escola para formar uma cultura geral; no segundo, por sua vez, trata-se de uma matemática própria do trabalho do professor, ou seja, uma matemática que ele precisa saber para a transmissão da matemática *a ensinar*.

Pode-se afirmar que, na cultura escolar, foram produzidas ao longo do tempo diversas matemáticas⁶ e nem sempre elas estiveram reunidas no contexto de uma única rubrica chamada “matemática”. O movimento de unificação das matemáticas escolares remontou a finais do século do século XIX com a circulação das ideias do matemático Félix Cristian Klein⁷ (VALENTE, 2016a). Até o advento dos trabalhos de Klein, as matemáticas estavam separadas nas rubricas referentes às áreas a que cada uma se referia, como aritmética, álgebra, trigonometria, geometria etc.

⁶ Essa temática é abordada de uma maneira mais aprofundada na seção 4 desta tese.

⁷ “[...] um dos mais importantes matemáticos de finais do século XIX, tem papel fundamental na internacionalização dos estudos sobre a formação matemática das novas gerações. Em 1908, Klein é eleito no IV Congresso Internacional de Matemática, em Roma, presidente da Comissão Internacional de Instrução Matemática. Desde esse tempo, as propostas para mudanças no ensino de matemática circulam por muitos países, na busca de uma nova reorganização de métodos e conteúdos” (VALENTE, 2016a, p. 282-283).

Foi nesse contexto que fez sentido pensar nas hipóteses teóricas da existência de uma aritmética *a* ensinar e uma aritmética *para* ensinar. E ainda é possível afirmar que a aritmética escolar, em determinado momento histórico, em grande medida era a própria matemática do meio escolar.

Assim, no contexto da presente pesquisa, fez sentido afirmar que aquilo que foi problematizado em relação às noções de matemática *a* e *para* ensinar podia ser aplicado às noções de aritmética *a* e *para* ensinar sem que se tenha um prejuízo teórico.

Vale esclarecer que as noções de matemáticas elaboradas no âmbito da cultura escolar levaram à reflexão sobre uma outra hipótese de pesquisa que se referia à existência de uma *matemática do ensino*. Tal matemática é o produto da articulação entre a matemática *a* ensinar e a matemática *para* ensinar, ou seja, a *matemática do ensino* se relaciona diretamente com o saber profissional do professor que ensinava matemática. Assim, a noção de *matemática do ensino* faz sentido a partir de uma análise sócio-histórica do contexto de problematização dos conceitos de matemática *a* ensinar e matemática *para* ensinar.

Elencados esses aspectos basilares que sustentaram a elaboração desta tese, na próxima seção são justificadas algumas escolhas metodológicas que foram feitas longo do processo de doutoramento e que resultaram na construção de hipóteses e problemática de pesquisa.

3. O CONTEXTO DE REALIZAÇÃO DA PESQUISA

Nesta seção busca-se dar destaque ao contexto de realização da pesquisa que resultou na escrita desta tese.

Desse modo, em um primeiro momento mostra-se como a temática de pesquisa e o objetivo foram sendo elaborados ao longo dos quatro anos de desenvolvimento do projeto, bem como a forma como ocorrem diálogos com o projeto mais amplo do GHEMAT.

Em um segundo momento, a partir de uma revisão de literatura, a seção foca na delimitação da problemática e das hipóteses de pesquisa que formaram as bases para a construção deste trabalho.

3.1 O trabalho no contexto de uma produção coletiva de pesquisa

O presente trabalho de pesquisa está situado no contexto de desenvolvimento de um projeto temático⁸ amplo financiando pela FAPESP e que teve seu início no final de 2017. Ele foi intitulado *A matemática na formação de professores e no ensino: processos e dinâmicas de elaboração de um saber profissional, 1890-1990*, e objetiva investigar “[...] os processos e dinâmicas de constituição do saber profissional do professor que ensina matemática no período compreendido entre 1890-1990” (VALENTE *et al.*, 2017, p. 30).

Com o intuito de atingir o objetivo proposto, o projeto temático está estruturado em quatro eixos temáticos articulados entre si, cada um deles conduzido por um projeto guarda-chuva, que direciona subtemáticas de pesquisas envolvendo estudos de iniciação científica, mestrado, doutorado e pós-doutorado.

O primeiro eixo temático trata dos “[...] *experts* e os ensinamentos de matemática nos primeiros anos escolares” (VALENTE *et al.*, 2017, p. 34), assim o projeto guarda-chuva que conduz esse eixo é intitulado *Os experts e o processo de produção dos saberes profissionais do professor que ensina matemática, 1890-1990*. A esse eixo temático importam os processos de elaboração de saberes, dando-se ênfase aos personagens responsáveis por realizá-la.

⁸ Processo FAPESP 2017/15751-2.

O segundo eixo temático aborda os processos “[...] de elaboração da *matemática a ensinar* nos primeiros anos escolares” (VALENTE *et al.*, 2017, p. 36, grifo dos autores). Nesse caso, as pesquisas questionam quais foram os processos e as matemáticas elaboradas com finalidades de ensino entre 1890 e 1990. Tem-se o projeto guarda-chuva que direciona o eixo denominado *A produção da matemática a ensinar, 1890-1990*.

Já no terceiro eixo, o projeto versa sobre a matemática presente na formação de professores primários e trata especificamente da constituição de uma matemática *para* ensinar. Desse modo, os

[...] projetos desta subtemática voltam sua atenção para a sistematização dos saberes envolvidos na orientação das ações docentes, saberes sobre o aluno e suas maneiras de aprender matemática, saberes sobre as práticas de ensino, ou seja, métodos, procedimentos, dispositivos, assim como saberes sobre modalidades de organização e gestão dos saberes matemáticos, planos de estudos e finalidades das diferentes propostas curriculares. Serão consideradas orientações fornecidas por diferentes rubricas (Pedagogia da Matemática, Metodologia da Matemática, Didática Especial da Matemática, Prática de Ensino de Matemática, dentre outras) evidenciadas na análise de material empírico como revistas pedagógicas, livros e manuais didáticos, documentos oficiais, cadernos escolares, dentre outros documentos (VALENTE *et al.*, 2017, p. 38).

Por fim, no quarto eixo temático, a ênfase das pesquisas envolvidas

[...] tem em conta uma das dimensões da prática pedagógica: a matemática ensinada nos primeiros anos escolares. Como matemática ensinada, considera-se, neste estudo, aquela objetivada nos registros dos documentos escolares, aquela que resulta das relações estabelecidas no ambiente escolar e que ganha visibilidade por meio desses registros (VALENTE *et al.*, 2017, p. 40).

Uma vez apresentado o projeto temático e seus respectivos eixos, vale destacar que esta tese está primordialmente situada no terceiro eixo⁹, com um olhar mais direcionado para a formação de professores.

Em um primeiro momento, ainda no processo de submissão do projeto de tese à FAPESP, o objetivo inicial era o de analisar processos e dinâmicas de apropriação de matrizes teóricas, lidos em documentos oficiais para a constituição de uma matemática profissional na

⁹ Ao longo do desenvolvimento deste trabalho e das publicações de resultados parciais, dialogou-se com os demais eixos, de modo que é preciso esclarecer que o fato de se situar dentro de um eixo não significou um processo de produção em separado.

Escola Normal de São Paulo¹⁰ entre 1920 e 1950. Tratava-se de um objetivo muito amplo, elaborado *a priori*, sem um contato maior com a documentação a ser analisada.

Com a aprovação do projeto, seguindo as devidas recomendações da assessoria da FAPESP, iniciou-se a busca por documentos oficiais que ajudassem na elaboração da tese. Tal fato mostrou que seria uma tarefa muito complexa identificar as matrizes teóricas somente a partir desses documentos, haja vista que, em geral, este tipo de documentação quase não apresenta pistas a respeito de seus autores, bem como das referências que utilizaram. Além disso, documentos oficiais não necessariamente expressam uma dada matriz teórica; muitas vezes representam arranjos possíveis, em um dado tempo, que a política educacional permitiu definir.

A partir desse momento, fez-se necessário ampliar o leque de fontes para a escrita deste trabalho e, com isso, passou-se a buscar discursos de professores da Escola Normal de São Paulo e manuais pedagógicos. Tal movimento resultou em uma mudança no objetivo de pesquisa, que deixou de focar as apropriações de matrizes teóricas e se voltou para a análise dos processos e dinâmicas de elaboração do saber profissional do professor que ensinou matemática dentro de um marco cronológico específico.

Buscou-se tal análise tendo em conta que historiadores da Educação destacam que, entre as décadas de 1920 e 1950, estava em voga no Brasil, o movimento que aqui ficou conhecido como Escola Nova: “[...] um movimento disposto a concretizar as bases da educação moderna, nos meios nacionais, mediante integração da pedagogia com campos do saber em franco desenvolvimento: Sociologia, Higiene, Biologia e Psicologia” (MONARCHA, 2008, p. 11). Assim, um ponto importante a se destacar é que a Escola Nova foi um movimento que agregou pesquisadores de diversas tendências e educadores que não necessariamente concordavam entre si. Exemplo disso são as controvérsias de Dewey e Thorndike no campo da psicologia (SANTOS, 2006).

Ainda sobre esse movimento amplo, Cunha e Souza (2011) destacaram algumas formulações que, segundo eles, são comuns às suas várias correntes de pensamento, a saber:

¹⁰ “Aparentemente fadada a ruínas, por inúmeras vezes a Escola Normal de São Paulo ocupou a centralidade no imaginário das classes sociais paulistas; no transcorrer da Monarquia e da República, mudou várias vezes de configuração e recebeu tantas outras denominações oficiais: Escola Normal, Escola Normal de São Paulo, Escola Normal da Capital, Escola Normal Secundária, Escola Normal Primária, Instituto Pedagógico, Instituto de Educação e Escola Caetano de Campos, entre outros” (MONARCHA, 1999, p. 13). Dada a variedade de nomes pelos quais essa instituição foi conhecida ao longo do tempo, optou-se neste trabalho, em todas as referências a ela, por utilizar *Escola Normal de São Paulo*.

- formação da personalidade integral do educando, tendo em vista não apenas o desenvolvimento de atributos individuais, mas especialmente a reordenação da sociedade, o que caracteriza uma educação socializadora/civilizadora;
- aproveitamento das experiências cotidianas dos alunos sem desprezar os conteúdos das matérias escolares, o que se materializa por meio da renovação dos métodos de ensino;
- redirecionamento da mentalidade dos professores, envolvendo novas concepções morais e sintonia com os avanços da modernidade, em que se incluem as contribuições das ciências à educação e a universalização do acesso à escola (CUNHA; SOUZA, 2011, p. 853).

Devido à multiplicidade de vertentes que integraram o movimento da Escola Nova, tratar da aritmética nessa vaga pedagógica ainda constituía um exercício bastante amplo, haja vista que cada vertente apresentou características que lhes são próprias. Com isso, foi necessário escolher uma delas para delimitar este estudo.

Tal escolha foi conduzida a partir das fontes de pesquisa, o que demandou idas semanais ao Arquivo Público do Estado de São Paulo (APESP) e visitas ao Centro de Referência em Educação Mário Covas (CRE), bem como à Biblioteca do Livro Didático (BLD) e ao Acervo Paulo Bourroul (APB), estes dois últimos pertencentes à Biblioteca da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo (FEUSP). Além desses arquivos, buscou-se delimitar a pesquisa a partir de fontes disponíveis no Repositório de Conteúdo Digita (RCD)¹¹ da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), onde estão alocados documentos disponibilizados por pesquisadores de diversos estados brasileiros, constituindo verdadeira base de dados do GHEMAT.

Em uma das visitas ao APESP, identificou-se programas da cadeira de Didática para o ano de 1926 de nove¹² das dez escolas normais paulistas¹³: São Paulo, Botucatu, Brás¹⁴, Campinas, Casa Branca, Itapetininga, Piracicaba, Pirassununga e São Carlos. Nesses programas, escritos pelos respectivos professores de cada instituição¹⁵, constatou-se que, depois

¹¹ Para maiores informações sobre o repositório, acessar: <<https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/1769>>.

¹² Apenas o programa da Escola Normal de Guaratinguetá não foi localizado.

¹³ O artigo 243 do Decreto nº. 3.356, de 31 de maio de 1921, que regulamentava a instrução pública paulista, determinava que o governo deveria manter “[...] dez escolas normais do mesmo tipo nos seguintes lugares: Capital (2), Campinas, Piracicaba, São Carlos, Itapetininga, Guaratinguetá, Pirassununga, Casa Branca e Botucatu” (SÃO PAULO, 1921, p. 3606).

¹⁴ Também localizada na cidade de São Paulo, mas exclusiva para mulheres (SÃO PAULO, 1921).

¹⁵ O artigo 253 do Decreto nº. 3.356 determinou que os programas das cadeiras das escolas normais paulistas deveriam ser “[...] casualmente organizados em lições pelos respectivos professores, de acordo com as bases estabelecidas no Capítulo III deste regulamento, e entregues até 15 dias antes da abertura das aulas ao diretor da escola, que os submeterá ao Secretário do Interior para o fim de os aprovar ou rejeitar se observaram, ou não, unidade fundamental em todas as escolas, continuidade com os programas das complementares do ano anterior e se forem ou não exequíveis” (SÃO PAULO, 1921, p. 3067).

de alguns aspectos gerais a respeito da escola, como sua estrutura, a organização das classes etc., os autores dedicaram uma grande parte do texto para tratar das metodologias das matérias do curso primário.

Dentre as metodologias abordadas, estavam a metodologia da aritmética e a metodologia da geometria. A primeira foi tomada como objeto de análise em uma produção parcial deste trabalho, buscando responder à questão: “Que *aritmética a ensinar e para ensinar* estão referenciadas nos programas?” (FERREIRA; VALENTE, 2020a, p. 350). Essa produção foi um marco importante¹⁶ deste trabalho a partir da análise da metodologia da aritmética, especialmente do programa da Escola Normal de Casa Branca escrito pelo professor Henrique Gaspar Midom¹⁷, pois a partir dele foi possível identificar uma proposta para seriação dos exercícios e dos problemas.

O duplo destaque dado à “seriação” revela um indício de movimento em direção à pedagogia científica posta no programa. O professor deverá atentar para a “seriação dos exercícios” e a “seriação dos problemas”. Tal seriação não está esclarecida no programa, mas possivelmente é resultado de testes pedagógicos que indicam a marcha gradual dos exercícios e problemas remetendo ao progressivo avanço do fácil para o difícil. Isto é, do fácil como exercícios e problemas com maiores acertos estatísticos; e o difícil como aqueles exercícios e problemas com índice menor de acertos (FERREIRA; VALENTE, 2020a, p. 365-366).

Para fins de delimitação de pesquisa, dadas as evidências da presença da pedagogia científica circulando em diretivas oficiais, tratar com ênfase a aritmética da formação de professores em São Paulo, a partir desta vertente da Escola Nova, tornou-se um caminho promissor de pesquisa, haja vista que outros trabalhos do GHEMAT, como Bassinelo (2014); Soares (2014); Ramos (2016) e Pinheiro (2017), já haviam enunciado, de uma certa maneira, a temática com ênfase no ensino primário, tendo em vista a pedagogia científica.

Desse modo, ganhou importância interrogar qual aritmética esteve presente na formação de professores paulistas, em tempos de Escola Nova, em sua vertente conhecida como pedagogia científica. Com esta delimitação da pesquisa, sobreveio a necessidade da busca por documentos que pudessem constituir fontes de pesquisa e atentar para termos específicos da pedagogia científica, como *testes, experimentos, medida, laboratórios, psicologia* etc.

¹⁶ Vale destacar que, apesar de ter sido publicado em 2020, esse trabalho foi escrito no segundo semestre de 2018, ainda no primeiro ano desta pesquisa doutoral.

¹⁷ A partir do quadro de funcionários daquela instituição apresentado na pesquisa de Monteiro (2016), pode-se afirmar que Midom foi professor da cadeira de Didática da Escola Normal de Casa Branca entre os anos de 1925 e 1932, quando assumiu a cadeira de Geografia na mesma instituição.

Neste sentido, um documento importante foi *A construção científica dos programas – I Parte – O problema teórico: as bases psico-sociológicas dos programas*, escrito pelo professor José Ribeiro Escobar (1934) e localizado no acervo do Centro do Professorado Paulista (CPP), que atualmente está alocado na biblioteca da Escola de Filosofia, Letras e Ciências Humanas (EFLCH) do *campus* Guarulhos da UNIFESP. Em um primeiro momento, tal documento se mostrou importante para este trabalho por ter sido um texto escrito por Escobar, que havia sido catedrático de matemática na Escola Normal de São Paulo durante a década 1920 (CAMPOS, 2018). Assim, a pesquisa, desde a sua origem, estava interessada na aritmética presente nessa instituição e, além disso, em momento anterior já haviam sido localizados os programas de matemática de 1922 e de aritmética e álgebra de 1926¹⁸, que também haviam sido escritos por Escobar.

Como o próprio título do documento indicava, o autor estava propondo programas construídos cientificamente e, para tanto, fez uso de referências vindas da pedagogia científica a exemplo de Lay¹⁹, que, segundo ele,

[...] fez várias experiências, diz Starch na “Educational Psychology”, sobre crianças escolares para determinar o mérito relativo dos vários artifícios e arranjos dos materiais usados para ensinar a apreensão do número de objetos. Investigou se era melhor, para ensinar números, apresentar grupos de estímulos ou objetos, simultaneamente ou sucessivamente; se era melhor apresentá-los em fileiras simples ou duplas, em fileiras contínuas ou em quadrados (grupos de 4); quantos objetos a criança pode aprender de uma vez; que efeito produz a distância entre os objetos, etc. (ESCOBAR, 1934, p. 12).

Uma vez constatada a necessidade, conforme defendida por Escobar (1934), de se construir programas de ensino a partir de experimentos feitos por psicólogos, ou seja, a necessidade de elaborar saberes com bases científicas, tornou-se imprescindível buscar referências que ajudassem a compreender como a pedagogia científica se fez presente na formação de professores primários. E, a partir disso, traçar entendimentos a respeito de como tal pedagogia corroborou na elaboração de uma aritmética *para* ensinar, própria do trabalho do professor que ensinava matemática.

¹⁸ Vale ressaltar que, de acordo com o parágrafo único do artigo 50 do Decreto n.º 3.858, de 23 de junho de 1925, havia na Escola Normal de São Paulo duas cadeiras de matemática: uma responsável por aritmética e álgebra e outra por geometria plana e espacial. Assim, em um primeiro momento Escobar escreveu um programa que contemplava as três rubricas, mas alguns anos depois focou em aritmética e álgebra, que eram as disciplinas que ele ministrava.

¹⁹ Trata-se Wilhelm August Lay, um dos representantes alemães da pedagogia científica. Devechi e Bisol (2019, p. 7) a esse respeito destacam que: “Entre o final do século XIX e o começo do século XX se afirma a pedagogia experimental: na Alemanha, inspirada na escola de psicologia experimental de Wilhelm Wundt, com Wilhelm August Lay e Ernst Meumann, fundadores da revista ‘A pedagogia experimental’ (1905)”.

No contexto do já citado projeto coletivo, este trabalho cumpria o papel de traçar entendimentos a respeito de processos e dinâmicas de elaboração do saber profissional do professor que ensinava matemática, no seu contexto de formação na Escola Normal de São Paulo. Esta finalidade foi sendo moldada em torno da pedagogia científica, conforme relatado, e, como parte integrante de um projeto temático, caberia acompanhar e mesmo utilizar resultados que foram obtidos ao longo do seu desenvolvimento.

Deste modo, passou-se a tratar do saber profissional do professor que ensinava matemática em tempos de pedagogia científica a partir da perspectiva da existência de uma *matemática do ensino*²⁰, conceito que começou a ser desenvolvido pelo grupo a partir do desenvolvimento do projeto temático.

Ainda neste movimento de delimitação da problemática de pesquisa, na subseção seguinte busca-se dialogar com outros trabalhos que, de algum modo, discorreram sobre a aritmética em tempos de pedagogia científica. Tais resultados ajudaram a melhor delinear as hipóteses que conduziram a investigação que resultou na construção do presente trabalho.

3.2 Uma revisão bibliográfica

A delimitação da problemática de pesquisa se deu ainda a partir de uma revisão de literatura que buscou trabalhos que discorressem sobre a aritmética e a pedagogia científica. Para tanto, em uma primeira etapa, o foco esteve voltado para pesquisas de maior fôlego, como dissertações e teses disponíveis em bancos de dados brasileiros, como a Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) e no RCD²¹.

Por meio desta busca, entre teses e dissertações que tratavam da temática buscada, desconsiderando as repetições de trabalhos presentes nos dois lugares e aqueles que se limitaram apenas a citar a pedagogia científica ou testes, foi possível identificar ao todo nove²²

²⁰ O conceito de *matemática do ensino* está problematizado de uma maneira mais precisa na seção 4 desta tese.

²¹ Para isso, utilizou-se como descritor “*aritmética*” + “*Escola Nova*” em uma primeira etapa e, em uma segunda, substituiu-se o termo *Escola Nova* por *pedagogia científica*. Para fins de seleção dos trabalhos, buscou-se, em cada um dos resultados, referências explícitas aos testes ou à pedagogia científica/experimental associados ao ensino de aritmética.

²² O trabalho de Ramos (2016) não aparece na pesquisa quando se usa *aritmética* no descritor, entretanto foi incluído nesse rol por se tratar de uma pesquisa cuja pedagogia científica aparece já no título e associada aos *saberes matemáticos*. Apesar do uso de último termo, a autora trata especificamente da aritmética.

trabalhos, dos quais quatro eram teses e outros cinco, dissertações. Todos esses estudos foram elaborados por pesquisadores ligados ao GHEMAT e são apresentados no Quadro 1 a seguir.

Quadro 1: Dissertações e Teses que abordam a aritmética e a pedagogia científica

DISSERTAÇÕES	
Título	Autor/Ano
Manuais pedagógicos e as orientações para o ensino de matemática no curso primário em tempos de Escola Nova	Josiane Acácia de Oliveira Marques / 2013
A aritmética de Lourenço Filho: um estudo sobre as dinâmicas de transformações do saber escolar em face de uma nova pedagogia	Márcia Guedes Soares/ 2014
Lourenço Filho e a matematização da pedagogia: dos testes psicológicos para os testes pedagógicos	Ieda Bassinelo / 2014
A resolução de problemas de aritmética no ensino primário: um estudo das mudanças no ideário pedagógico, 1920-1940	Wellington Pereira das Virgens / 2014
A Pedagogia Científica e o ensino dos saberes elementares matemáticos nos primeiros anos escolares: uma análise dos Relatórios das Delegacias Regionais de ensino do Estado de São Paulo (1930-1945)	Bruna Lima Ramos / 2016
TESES	
A aritmética sob medida: a matemática em tempos de pedagogia científica	Nara Vilma Lima Pinheiro / 2017
A aritmética no ensino primário em Brasília:1957-1970	Rosália Policarpo Fagundes de Carvalho / 2017
Faria de Vasconcelos e as diretrizes da pedagogia científica na formação matemática do professor	Josiane Acácia de Oliveira Marques / 2018
A aritmética, os centros de interesse e o saber profissional do professor que ensina matemática, 1920-1940	Juliana Chiarini Balbino Fernandes / 2020

Fonte: Elaborado pelo autor.

Esses trabalhos, em sua grande maioria, apresentaram em comum a existência de uma graduação do ensino de aritmética que de algum modo se relacionava com a pedagogia científica. Também por isso foram tomados como referência para elaboração desta tese.

Ramos (2016), ao analisar a pedagogia científica e os saberes matemáticos em relatórios das delegacias regionais de ensino do estado de São Paulo, constatou transformações operadas por essa pedagogia nos saberes escolares. É possível dizer que uma dessas transformações se refere à organização dos saberes de acordo com o grau de dificuldade apresentado pelos alunos.

Nesse sentido, ao analisar a presença dos trabalhos manuais²³ no programa primário de 1941 (SÃO PAULO, 1941), a autora constatou que

[...] torna-se clara a presença dos saberes elementares matemáticos nessa matéria. A importância de se ter um professor próprio para cada uma delas pode estar relacionada ao *grau de dificuldade ou abstração* que se pretende dar às crianças, subjetivamente do ensino de saberes matemáticos (RAMOS, 2016, p. 66, grifo nosso).

Esse resultado indicou uma divisão do ensino dos saberes matemáticos, na qual o professor precisaria dosar o ensino em graus diferentes de dificuldade. Em cada ano escolar, havia um passo a passo que o professor deveria seguir de acordo com as capacidades da criança e, com isso,

[...] percebe-se que a criança do primeiro ano faz desenhos de imaginação. Depois surge o desenho de memória, então pode-se pensar na hipótese de um ensino natural, diferentemente daquele ensino de cópia. Apenas no 4º ano é que a criança tem contato com o desenho geométrico. O que se faz relevante é a observação e a imaginação que a criança deve exercitar no 1º ano. Esse passo a passo condiz com a realidade proposta pelo programa de 1925 e pelo Programa Mínimo de 1934 (RAMOS, 2016, p. 67).

A questão da organização do ensino segundo diferentes graus de dificuldades também pode ser observada com relação aos problemas aritméticos. Essa organização, aliás, funcionou como critério para a classificação de “bons” problemas para o ensino de aritmética. A concepção do que era considerado um “bom” problema variou nas diferentes vagas pedagógicas e, a título de exemplo, foi possível destacar que em tempos de método intuitivo:

[...] o “Bom Problema”, na concepção do método de ensino intuitivo, seria aquele que servisse ao propósito de aferir o quanto de determinada lição o aluno teria aprendido e seria capaz de reproduzir, de maneira a demonstrar domínio da lição e, principalmente, desenvolvimento das faculdades mentais relacionadas ao conhecimento (VIRGENS, 2014, p. 47).

Em contrapartida, Virgens (2014) mostrou como na vaga da Escola Nova, o “bom” problema deixou ser aquele que cumpria o papel de desenvolver as faculdades das crianças e passou

[...] a ser aquele que tratasse de situações que apresentassem boa probabilidade de ocorrer na vida real e na prática, apresentando-se sob uma feição nem muito mais difícil, nem muito mais fácil de entender do que seriam na realidade e despertando o mesmo grau de interesse de uma situação real. Não seria mais primordial que o professor treinasse, previamente, a criança nos cálculos que esta aplicaria depois nos Problemas, uma vez que os Problemas se

²³ A respeito dos trabalhos manuais como saberes matemáticos, recomenda-se a leitura da tese de Frizzarini (2018), que se debruçou sobre a temática em revistas e manuais pedagógicos de São Paulo e do Rio de Janeiro publicados entre 1890 e 1960.

relacionariam com situações reais, do interesse da criança, onde ela deveria dispor daquilo que já conhecia em busca da resolução do Problema proposto e, a partir daí, contando com a intervenção do professor, chegaria a um novo conhecimento (VIRGENS, 2014, p. 47, grifo nosso).

Deste modo, o carro-chefe da escolha dos problemas e de sua classificação como fácil ou difícil passava a ser o interesse. Assim, era preciso graduar os problemas para que não fossem nem muito fáceis e nem muito difíceis, tal graduação, como já destacado, provinha dos testes pedagógicos. Sobre o interesse, Escobar (1934), ressaltou:

Sendo o interesse o único gerador de esforços eficazes e produtivos – pelo que é a alavanca essencial da educação –, compreende-se que a ‘lei da necessidade funcional’ deve afetar o conjunto do programa e o método de um determinado ensino.

Atendendo ao papel funcional do interesse – a primeira condição da educação ativa – e reconhecendo a identidade do fato a ser apreendido ou a ação proposta com o desenvolvimento íntimo do agente, o programa de ensino só deve incluir as matérias de “vital” interesse para a criança (ESCOBAR, 1934, p. 20).

O trabalho de Fernandes (2020) foi outro que tratou da questão do interesse, mas, nesse caso, de um ponto de vista mais específico, deu destaque ao saber profissional do professor que ensinava matemática a partir da pedagogia Decroly²⁴. Nesse trabalho, verifica-se, assim como nos já citados, que havia uma preocupação na proposta em graduar o ensino e, dessa forma,

[...] observar era mais que perceber, propiciaria que estabelecessem relações entre os aspectos graduados do mesmo objeto e entre diferentes intensidades; verificar sucessões, relacionamentos especiais e temporários; fazer comparações; e notar diferenças e semelhanças em bloco ou em detalhes (análise), ou seja, estabelecer uma ponte entre o mundo e o pensamento (FERNANDES, 2020, p. 59).

Vale destacar que, uma vez apresentada esta necessidade de graduar o ensino na proposta de Decroly, uma das questões que a autora levantou em sua problematização referia-se justamente a como era proposta essa graduação. De certo modo, uma conclusão a que a autora chegou sobre a graduação do ensino se relacionava com os problemas e, assim, a partir da análise de problemas em revistas mineiras, ela afirmou:

Nota-se que há uma graduação na complexidade desses problemas, inicialmente, envolvendo números e operações fundamentais (situações de compra e venda) e, posterior aumento do grau de dificuldade (situações de compra, venda e lucro) (FERNANDES, 2020, 94-95).

²⁴ Segundo a autora, o “[...] nome de Jean Ovide Decroly é associado aos Centros de Interesse e ao princípio da globalização, em particular, ao chamado método “global” de leitura, que ele teorizou e implantou em suas escolas. O pedagogo belga foi, em primeiro lugar, através de suas concepções e práticas originais e inovadoras, não apenas um reconhecido pedagogo da infância “especial”, que ele chamou de “irregular” ou “anormal”, mas especialmente o criador de um princípio geral de educação” (FERNANDES, 2020, p. 46).

No Brasil, em tempos de pedagogia científica, a graduação do ensino de aritmética também encontrou lugar na produção de Lourenço Filho, como mostraram os trabalhos realizados por Bassinello (2014) e Soares (2014).

Bassinello (2014) deu destaque em sua pesquisa a como Lourenço Filho, em São Paulo, operou um movimento de transformação dos testes psicológicos para os testes pedagógicos. Nesse movimento, a graduação do ensino proveniente da pedagogia científica ocupou um papel central e sua apropriação pela escola primária, segundo a autora,

[...] interfere decisivamente no modo de pensar a sequência, a organização e a dosagem dos conteúdos a serem ensinados. Passa-se da graduação interna dos conteúdos (do simples ao complexo), para uma graduação que leva em conta a aprendizagem do aluno (do fácil ao difícil). E o “fácil” indica as questões que obtiveram maior número de acertos; o “difícil”, o inverso (BASSINELLO, 2014, p. 97).

Nesse movimento apontado pela autora foi possível destacar uma mudança de organização dos conteúdos que, em um primeiro momento, levava em conta uma organização disciplinar (do simples ao complexo) e, em um segundo momento, considerava a aprendizagem do aluno e organizava os saberes do fácil para o difícil.

Uma outra conclusão a que a autora chegou em sua análise foi a de que:

No que diz respeito aos avanços da psicologia experimental, a elaboração de provas graduadas levou à quantificação dos níveis mentais, e a consequente consolidação de práticas experimentais aliadas aos conhecimentos de base psicológica trouxe para o ensino de matemática um *status* científico no ensino para os alunos (BASSINELLO, 2014, p. 104).

Ainda sobre o papel de Lourenço Filho, Soares (2014) analisou uma série de exercícios de aritmética em publicações daquele autor em um material intitulado *Aprenda por si!* Publicado entre os anos de 1941 e 1956. Tomando essas produções, a autora buscou compreender como se aplicariam à matemática escolar.

Segundo ela, Lourenço Filho,

[...] ao abordar os problemas psicológicos da organização escolar, destaca dois aspectos pedagógicos: a “organização das classes, graduação e seriação do ensino em relação à idade e a capacidade de aprender” e a “*dynamica da aprendizagem*, à maneira de ensinar”. Para sanar tais problemas defende a *escola ativa* e a organização racional de classes homogêneas, o ensino seletivo e diferenciado ou *sob medida*, citando Édouard Claparède, além da classificação científica dos anormais de inteligência (SOARES, 2014, p. 30, grifos da autora).

Foi possível destacar a relação entre a graduação do ensino e a organização das classes escolares como um problema próprio da pedagogia científica, o que também aponta Carvalho

(2017), cuja pesquisa se voltou para a aritmética na escola primária de Brasília entre os anos de 1957 e 1970.

Com relação à pedagogia científica, Carvalho (2017) constatou que os

[...] testes padronizados estiveram presentes no movimento da pedagogia científica e contribuíram para introduzir normas e práticas que ainda são encontrados na cultura escolar, como, por exemplo, a convicção de alguns professores de que uma turma homogênea facilitaria o trabalho pedagógico, a classificação dos alunos fortes, médios e fracos, entre outras (CARVALHO, 2017, p. 149).

Depois de encontrar referências sobre a aplicação dos testes de Lourenço Filho em Brasília, a autora destacou que eles contribuíram “[...] para a implantação de uma cultura escolar que deu base científica à educação” (CARVALHO, 2017, p. 195). Sobre a graduação, um outro destaque que a autora faz, é que, ao colocar a criança num lugar central do processo de aprendizagem, “[...] a psicologia experimental daria suporte à cientificidade da pedagogia promovendo testes e também à constituição das classes homogêneas; a *graduação de conteúdos devia ser observada*, durante o processo de ensino-aprendizagem” (CARVALHO, 2017, p. 51, grifo nosso).

Um outro trabalho que abordou de um modo aprofundado a aritmética em tempos de pedagogia científica foi o de Pinheiro (2017), que analisou como essa pedagogia impactou a matemática escolar. O referido trabalho buscou responder à pergunta: “[...] que modificações ocorreram na aritmética da escola primária em tempos de pedagogia científica?” (PINHEIRO, 2017, p. 17-18). Em uma primeira etapa no caminho construído para responder esse questionamento, a autora analisou obras de Alfred Binet²⁵ e ressaltou:

As primeiras análises das obras de Binet evidenciaram o interesse com o aprendizado da aritmética; com o modo como as crianças aprendiam; *com a graduação do ensino*, pois foram constatadas que certos conteúdos eram muito precoces e mal adaptados àquilo que era considerado ao desenvolvimento intelectual das crianças (PINHEIRO, 2017, p. 18, grifo nosso).

²⁵ “Uma das principais referências da ciência psicológica do século XX, o psicólogo francês Alfred Binet (1857-1911) exerceu profunda influência na configuração do campo. Doutor em Ciências pela Universidade de Paris (Sorbonne), destacou-se especialmente na construção de estratégias metodológicas de investigação psicológica, num modelo de ciência aplicada, capaz de intervir na vida social. Suas pesquisas sobre o funcionamento das funções psicológicas superiores e sobre as diferenças individuais na inteligência e nos estilos de pensamento resultaram na elaboração de um conjunto de instrumentos de avaliação e medida da inteligência e na proposição do conceito de idade mental. Seu trabalho teve profundo impacto na conformação dos campos de conhecimento da psicométrica, da psicologia do desenvolvimento e da psicologia educacional contemporâneas, e contribuiu para desencadear o chamado movimento dos testes na psicologia e na educação, ao longo do novecentos” (CAMPOS; GOUVEA; GUIMARÃES, 2014, p. 218).

Esse excerto reforçou o argumento a respeito da necessidade de graduar o ensino de acordo com o grau de desenvolvimento da criança como um elemento próprio da pedagogia científica. Vale ressaltar, porém, que não havia um consenso sobre isso, principalmente no que se referia a aplicação de testes segundo uma graduação. Veja-se, por exemplo o exercício de comparação que a autora faz entre a pedagogia científica nos Estados Unidos e na França:

Nos Estados Unidos, diferentemente da França onde a *graduação dos testes* foi elaborada segundo o grau de desenvolvimento mental, a *graduação* “se converteu em escalonagem (standardisation), com modelos de perguntas e respostas e de julgamento, tão rígidos e idênticos, como os próprios *standars* de produção Ford” (PINHEIRO, 2017, p. 73, grifos nossos).

Avançando em seu trabalho, Pinheiro (2017) construiu um capítulo no qual mostrou como se institucionalizaram *experts* em educação que buscaram construir uma escola sob medida na qual promoveram mudanças na aritmética do ensino primário. Um dos lugares em que atuaram esses personagens foi no Instituto de Educação do Rio de Janeiro (IERJ). Ao analisar a atuação de Alfredina de Paiva e Souza²⁶ nessa instituição, a autora indicou que, para essa professora, o ensino “[...] iniciar-se-ia pelas combinações que se mostraram mais fáceis e seguir *gradativamente* pelas suas combinações com maior grau de dificuldade” (PINHEIRO, 2017, p. 98, grifo nosso). Conclusão semelhante a autora chegou ao analisar o trabalho de Irene de Albuquerque²⁷, que também atuava no IERJ. Segundo ela, assim “[...] como Alfredina, Irene de Albuquerque defendia a *graduação das dificuldades* e o treino intensivo de cada noção no início da aprendizagem” (PINHEIRO, 2017, p. 99, grifo nosso).

A análise realizada por Pinheiro (2017) ao longo de seu trabalho levou-a a conjecturar como, na prática, a escola sob medida foi se configurando. Segundo ela, tal escola precisaria compreender

[...] o diagnóstico e seleção dos alunos segundo suas capacidades; organização de classes homogêneas subdivididas em: classes paralelas – compostas de alunos fracos, médios ou fortes; ou classes móveis – compostas por alunos de graus diferentes em diversas matérias; a organização científica do programa de ensino, tendo como ponto de partida os conhecimentos necessários à sociedade e o desenvolvimento psicológico; e a elaboração de materiais que favorecessem o ensino individualizado. Essa escola sob medida, de função utilitarista, preconizava o estudo racional dos

²⁶ “Alfredina de Paiva e Souza foi a professora-chefe da seção de Prática de Ensino e lecionava cálculo. Além de atuar como professora e catedrática do Instituto, realizou pesquisa e trabalhos experimentais sobre o ensino de matemática, apoiados em estudos internacionais. Assim, produziu manuais de ensino, livros didáticos e publicou artigos divulgando os resultados de pesquisas desenvolvidas no âmbito do Instituto de Educação, *locus* de circulação e produção de conhecimentos científicos” (ALMEIDA; LEME DA SILVA, 2014, p. 52).

²⁷ Uma biografia de Irene de Albuquerque é apresentada na seção 5 quando se analisa uma de suas obras.

mecanismos do ensino, tendo por objetivo a eficiência (PINHEIRO, 2017, p. 143).

A análise da pedagogia científica empreendida pela autora levou-a a caracterizar uma aritmética própria da escola sob medida, à qual ela chamou de *aritmética sob medida*. A título de exemplo de como se configurava essa aritmética, foi possível tomar a análise que a autora fez de uma das obras de Alfredina.

O livro de Alfredina tinha todas as características de material autodidático para o ensino individualizado defendido por Wahsburne. Tratava-se de um livro em que o aluno poderia seguir sozinho na aprendizagem, reportando-se ao professor apenas para as dúvidas mais específicas, pois tinha uma linguagem que dialogava diretamente com o aluno, muitos exercícios de treinamento visando à automatização de combinações, cujo foco principal era a habilidade de calcular com rapidez e exatidão. *Nossa Aritmética* é a materialização e sistematização de uma *aritmética sob medida*, estruturada de modo a atender ao desenvolvimento psicológico, à maturidade da criança (PINHEIRO, 2017, p. 152, grifos da autora).

Os trabalhos tomados nesta revisão bibliográfica mostraram como a pedagogia científica adentrou a escola e como foi configurando uma *aritmética sob medida* cunhada principalmente por experimentos e testes.

Associada à pedagogia científica, nos trabalhos analisados foi possível verificar uma graduação do ensino e, ao que parece, essa pedagogia, no espaço escolar, construiu uma graduação própria. Essa aritmética própria da escola caracterizada na pedagogia científica, pode ser tomada como uma aritmética *a* ensinar. Portanto foi plausível tecer a afirmação de que a graduação apareceu como um elemento constituinte de uma aritmética *a* ensinar.

Assim sendo, a partir das pesquisas inventariadas nesta revisão de literatura e do referencial teórico-metodológico, consideraram-se algumas hipóteses de pesquisa que são responsáveis por nortear este trabalho: a primeira delas refere-se à existência de uma aritmética própria da cultura escolar em cada momento histórico, uma *matemática do ensino* (MORAIS; BERTINI; VALENTE, 2021), que articulou saberes do ensino e da formação para o ensino.

Uma segunda hipótese, essa principalmente fruto da revisão dos estudos já finalizados, é a de que existiu uma aritmética elaborada em tempos de pedagogia científica: uma *aritmética sob medida* (PINHEIRO, 2017). Por fim, identificou-se, relativamente a essa *aritmética sob medida*, uma graduação do ensino que, em geral, foi associada à pedagogia científica pelas pesquisas apresentadas aos testes.

Deste modo, a partir dessas hipóteses, uma vez demonstrado que a graduação do ensino da aritmética constituiu elemento de uma aritmética a ensinar, objetivou-se responder ao questionamento: *que graduação do ensino foi dada a conhecer em manuais presentes na formação de professores em tempos de pedagogia científica?*

Na próxima seção apresentam-se algumas categorias analíticas que possibilitam pensar a graduação do ensino de aritmética como um saber produzido no âmbito da escola.

4. A GRADUAÇÃO E A MATEMÁTICA DO ENSINO: considerações sobre o saber profissional do professor

Cabe reiterar, de pronto, que este trabalho está situado em uma perspectiva teórica que leva em conta os saberes produzidos no âmbito da escola. Vale ressaltar ainda que este trabalho não focou nas práticas executadas em sala de aula, apenas nas prescrições e recomendações dadas a ler em manuais pedagógicos.

Assim, foi a partir de uma perspectiva cultural que fez sentido tratar de uma matemática própria do meio escolar e, no caso do presente trabalho, de uma aritmética como saber profissional do professor, uma aritmética que articula a aritmética *a* ensinar com a aritmética *para* ensinar.

Uma vez mais, será preciso enfatizar que este estudo buscou situar-se em fontes da cultura escolar. Isso significa, dentre outros elementos, que a pesquisa não foi realizada no seio do campo disciplinar matemático. Se assim fosse, ao que parece, o tema da graduação do saber não teria significado.

Corroborando essas ponderações, vale citar os termos de um parecer elaborado pelo professor Pitombeira de Carvalho referente a contribuições para a elaboração da proposta inicial dos PCN de matemática, no qual, ao analisar a documentação curricular do estado de Goiás, ele ressaltou que um

[...] perigo muito presente nos textos das primeiras séries do ensino fundamental, e repetido pelo menos em uma proposta, a do Estado de Goiás, é o de tentar “graduar” as dificuldades das operações em tipos de complexidade crescente, o que pode dar a impressão de que há, por exemplo, não uma adição, mas uma série de definições de adição. Isso destrói completamente qualquer tentativa de enfatizar os conceitos ligados às operações, além de retalhar o conteúdo, atomizando-o, e tornando-o sem sentido (CARVALHO, 1995, p. 52).

No exemplo apresentado, é possível ressaltar que a graduação de saberes matemáticos, do ponto de vista da cultura na qual o autor estava inserido, não fazia sentido. Este exemplo ajuda a reforçar a ideia de que, ao tratar da cultura escolar, é preciso sempre ter em conta o momento e o lugar históricos em que os sujeitos produtores estão inseridos. Ao tecer críticas à graduação encontrada nos currículos escolares, ao que tudo indica, a escola, no entender do parecerista, deveria seguir a graduação dada pelo campo disciplinar, em termos de conteúdo, de uma organização interna desse saber. No entanto, conforme já destacado na revisão de literatura apresentada na seção anterior, em tempos de pedagogia científica a graduação dos

saberes ganhou destaque na matemática produzida para a escola, afirmando a sua existência como função do desenvolvimento do aluno dado pelos resultados dos testes aferidos de modo estatístico.

Tal graduação constitui-se como um elemento próprio da matemática escolar em tempos de pedagogia científica, resultando em um momento no qual os experimentos e testes psicológicos ditavam o ritmo do trabalho do professor e tinham, como consequência, transformações na lógica interna de organização da própria aritmética. Desse modo, foi elaborada para a escola uma *aritmética sob medida* (PINHEIRO, 2017).

A noção de graduação será problematizada nas duas subseções que seguem, inicialmente com ideias gerais, emprestadas de pesquisas que pensam a graduação de uma perspectiva da didática do ensino de francês. Em um segundo momento, a graduação será tratada de um ponto de vista histórico e em relação ao ensino de aritmética, considerada como elemento epistemológico de organização dos saberes presentes na cultura escolar.

Reafirma-se que, para os objetivos deste trabalho, a graduação do ensino foi tratada por meio de uma perspectiva epistemológica, ou seja, como produtora de saberes no contexto da escola, não como instrumento didático.

4.1 A noção de graduação do ensino como uma temática relevante

Em etapa anterior desta tese, mostrou-se, a partir da revisão bibliográfica, diferentes modos pelos quais os trabalhos abordaram a graduação do ensino da aritmética, o que já é um forte indício da relevância da problematização do tema.

A sistematização da noção de graduação do ensino da aritmética enquanto temática de pesquisa, resultou de produções parciais elaboradas ao longo do processo de construção desta tese. Inicialmente, a temática perpassava a discussão de elementos de uma aritmética *para ensinar*, ou seja, era tratada como uma noção auxiliar ao entendimento dos processos e dinâmicas de elaboração do saber profissional do professor, em sua formação na Escola Normal de São Paulo.

Uma primeira produção parcial que contemplou o aspecto da graduação como elemento da aritmética *para ensinar*, foi o já citado capítulo escrito por Ferreira e Valente (2020a),

responsável pela delimitação da pesquisa à pedagogia científica, pois foi nesse texto que a relação entre os exercícios fáceis e os problemas difíceis, indicou primeiros indícios de uma graduação que o professor deveria seguir no ensino de aritmética. Essa graduação, indicada a partir do programa de Didática da Escola Normal de Casa Branca (MIDOM, 1925), foi caracterizada por Ferreira e Valente (2020a) como uma ferramenta do trabalho profissional do professor.

Em Ferreira e Valente (2020b), considerando a pesquisa no contexto da pedagogia científica, analisou-se o manual *Pedagogia Científica: psicologia e direção da aprendizagem* de Miguel Aguayo, já tendo em conta que nele há elementos do saber profissional do professor que ensinava matemática. Vale ressaltar que, apesar de em alguma medida abordar a temática da graduação, esse texto teve um olhar mais amplo e, como principal resultado, evidenciou uma perda de autonomia por parte do professor que, diferentemente de tempos anteriores,

[...] deveria estar atualizado com os resultados vindos de estudos científicos, promovidos pela psicologia experimental de base estatística. Em termos práticos, caberia ao futuro professor ter em conta tabelas, sequências de exercícios, que sendo resolvidos passo a passo pelos alunos, iriam levá-los à aprendizagem de uma aritmética prática, isto é, uma aritmética onde conseguiriam efetuar rápida e corretamente os cálculos advindos das quatro operações fundamentais. Tais sequências adviriam dos testes mentais e pedagógicos. Configurariam um instrumento testado e aprovado a ser colocado em uso pelos futuros professores (FERREIRA; VALENTE, 2020b, p. 15).

Uma das conclusões apresentadas nesse excerto foi a de que deveriam ser os experimentos os responsáveis por ditar o passo a passo. Esse resultado parcial de pesquisa foi fundamental no entendimento de como a pedagogia científica ditou uma graduação peculiar ao ensino, embasada na psicologia da criança e determinada pelos testes.

De um modo particular esse texto dialogava com o artigo escrito por Valente (2019), para quem,

Desde a escola graduada, em finais do século XIX, os programas apontam quando, em que época do curso, tal ou qual conteúdo deverá ser ministrado, isto é, sedimentam uma *graduação*, um movimento indicativo do progresso que deve ser dado ao ensino. Tal graduação apresenta-se em níveis diferentes: seja ele o de organização do sistema escolar, por exemplo, programas para o curso primário, para o curso secundário; ou referem-se a programas que orientam como deverá ocorrer a organização interna de cada matéria do ensino num dado curso e numa dada série etc. (VALENTE, 2019, p. 55).

Apesar de a graduação do ensino da aritmética ser tema recorrentemente tratado pela pedagogia científica, o excerto apresentado mostrou que essa foi uma temática que acompanhou

o ensino de uma forma geral no Brasil desde a escola graduada implantada com a criação dos grupos escolares²⁸.

A temática da graduação do ensino da aritmética foi aprofundada posteriormente em Valente e Ferreira (2021), com a análise dela no manual: *Como se ensina aritmética*, de Faria de Vasconcelos. A graduação foi então tomada como uma ferramenta constituinte do trabalho do professor, pois por

[...] ela rege-se a sequência das aulas, dos temas de um conteúdo, dos exercícios, problemas etc. Nesses termos, o ofício da docência não prescinde de uma graduação. Além disso, caberia mencionar que uma dada graduação se liga diretamente ao modo como em determinada época está consolidada uma concepção de ensino e de aprendizagem dos alunos. Tal concepção é própria de uma dada vaga pedagógica, de uma dada pedagogia que se estabelece como hegemônica num determinado período da história da educação. Essas considerações levam-nos a ponderar que a graduação como ferramenta do ofício docente constitui elemento do *saber para ensinar*. Em específico, para o que se está estudando neste artigo, a graduação refere-se a elemento constitutivo de uma *aritmética para ensinar* (VALENTE; FERREIRA, 2021, p. 6).

Este foi um primeiro movimento de caracterização da graduação do ensino da aritmética como uma aritmética *para ensinar* presente nesse manual. Essa caracterização foi ampla, pois também apontou outros elementos concernentes à aritmética *para ensinar*, não tratando particularmente da graduação, de modo que, nesta tese, a discussão foi aprofundada especificamente em relação à graduação²⁹.

Se por um lado é inegável, a partir destes dois resultados parciais apresentados, que existia uma graduação testada que deveria ditar o ritmo do trabalho do professor e dizia respeito a como ele deveria atuar, por outro lado a graduação também apareceu em pesquisas que se debruçaram sobre a aritmética desde uma perspectiva voltada ao ensino (BASSINELLO, 2014; SOARES, 2014; RAMOS, 2016 e PINHEIRO, 2017).

Deste modo, tornou-se plausível a hipótese de que, para além de afetar as ferramentas do trabalho profissional do professor que ensinava matemática no período estudado, a graduação do ensino também guardava relação com o objeto do seu trabalho, com a aritmética *a ensinar*. Mais que isso, a graduação do ensino da aritmética, em tempos de pedagogia

²⁸ Sobre a escola graduada em São Paulo, Souza (1998, p. 18) afirmou: “A escola graduada de ensino primário constituía em si um modelo cultural em circulação. Implantados no Estado de São Paulo sob o signo da modernidade e inovação educacional, os reformadores da instrução pública – políticos republicanos, elites intelectuais e educadores – buscaram instituir uma nova realidade educacional e adaptar o modelo às condições da realidade paulista”.

²⁹ Retoma-se o manual de Faria de Vasconcelos na seção 5.2.1.

científica, foi um elemento articulador entre a aritmética *a* ensinar e a aritmética *para* ensinar. Tal reflexão leva-nos a considerar que a graduação do ensino se constituiu como um importante elemento do saber profissional do professor que ensinava matemática.

Com base nesta hipótese, o desenvolvimento do estudo prosseguiu, tendo sido obtido um outro resultado parcial de pesquisa. Desta feita, tomou-se como fonte de análise o manual *Didáctica: nas escolas primárias*, escrito por João Toledo no ano de 1930.

De modo diverso do que ocorreu com as produções parciais anteriores, neste resultado não foi dado destaque à aritmética *para* ensinar, a graduação foi tomada para análise como um elemento do saber profissional do professor. Nessa perspectiva, buscou-se analisar que graduação estava presente no manual de João Toledo. Como resultado da análise, foi possível demonstrar que a obra de João Toledo, no que se referia ao ensino de cálculo, possui

[...] em um primeiro momento, um caráter essencialmente intuitivo com uma grande ênfase no ensino que parte do concreto para o abstrato. A graduação do ensino proposta por João Toledo à medida que avança, ganha forma mais ativa, pois, se inicialmente todo o processo de ensino estava centrado no professor, posteriormente centra-se no aluno que deveria contar, medir, pesar e, principalmente, agir para aprender (FERREIRA; VALENTE, 2021, p. 126).

É importante notar que este resultado de pesquisa aponta para uma graduação em um movimento de transição da vaga pedagógica intuitiva para a pedagogia científica. Os indícios da presença dessa pedagogia podem ser encontrados no manual à medida em

[...] que o capítulo da obra que trata do ensino de cálculo avança, é possível averiguar traços da pedagogia científica sobretudo quando o autor propõe uma seriação dos problemas de acordo com o grau de dificuldade, sempre seguindo a ordem do fácil para o difícil (FERREIRA; VALENTE, 2021, p. 126).

Seja com uso da palavra graduação ou outras equivalentes, como seriação e progressão, seja com termos que remetiam à ideia de uma *marcha do ensino*, como a passagem do fácil para o difícil, os resultados parciais apresentados mostraram que a pedagogia científica imprimiu no meio escolar um ritmo próprio ao ensino de aritmética como resultado da aplicação de testes.

A revisão de literatura apresentada na seção anterior mostrou que a graduação do ensino despontou como uma categoria de análise importante. Entretanto, tomar a graduação apenas como uma simples categoria, ao que parece, acabaria reduzindo muito o seu papel com relação ao saber profissional do professor, pois os resultados parciais deste trabalho mostraram que a graduação do ensino guarda forte relação com o saber profissional do professor que ensinava

matemática em tempos de pedagogia científica. Assim, ela apareceu não como um simples auxiliar de processos didáticos, mas como elemento desse saber profissional.

Neste sentido, um outro trabalho no qual a graduação do ensino apareceu problematizada foi o de Valente (2020), que mostrou diferentes amplitudes para a graduação. Segundo ele,

[...] poderemos tratar da graduação tendo em conta a sequência, o lugar ocupado por um assunto específico no conjunto dos temas de uma dada rubrica (aritmética, geometria etc.). A matemática do ensino apresenta-se como um conjunto ordenado de temas que o professor deverá mobilizar tendo em vista a aprendizagem de seus alunos, num dado período de tempo. Essa sequência tem caráter histórico, muda em cada época. Um exemplo pontual ilustrativo: há momentos em que as frações ordinárias terão prioridade em relação aos números decimais; em outros, os decimais tomam a dianteira das frações dentre os temas aritméticos que o professor deverá ensinar. Em outra escala de análise, a graduação poderá ser tratada como marcha do ensino. A graduação, neste caso, tem caráter mais restrito, tem-se um nível menos amplo de observação e não se confunde com a sequência. Esta última indica a estruturação de uma dada rubrica escolar, nos seus diferentes temas para o ensino. A marcha do ensino está diretamente ligada a uma dada concepção de ensino e aprendizagem de um dado assunto pelos alunos (VALENTE, 2020, p. 170).

A graduação do ensino guarda relação com as vagas pedagógicas vigentes em cada época e, conforme Valente (2020), pode ser pensada sob diferentes óticas, seja aquelas com um caráter mais restrito, em uma escala menor, que envolve a lógica interna de organização dos saberes dentro de um mesmo conteúdo, como a *marcha do ensino*, ou, em uma escala maior, a própria relação dos saberes com os grandes temas da matemática, como a aritmética, álgebra, geometria etc.

Um outro aspecto da graduação do ensino de matemática ainda mais amplo se referia à divisão dos saberes ao longo de vários anos escolares. Neste caso, haveria uma escolha a respeito de quais saberes devem ser ensinados em cada ano. Essa escolha, em termos de ensino, envolvia também uma organização dos saberes dentro de cada um dos grandes temas, bem como a forma como eles se articulam. A graduação, conforme o exemplo apresentado, configura-se em termos de estrutura do ensino e, com isso, refere-se à progressão de saberes que o aluno precisaria aprender ao longo de cada etapa de sua escolarização.

Mas que graduação foi tomada como objeto de análise neste trabalho? As diferentes designações e sentidos atribuídos à graduação mostram a complexidade da temática. Vale destacar que, para a escrita desta tese, adotou-se o sentido de graduação como um elemento da *matemática do ensino*.

Em diferentes níveis, há terminologias e designações as mais diversas sobre o tema da graduação e, por isso, foi necessário aprofundar a discussão a respeito da graduação do ensino de aritmética. Neste caso, tomou-se importante adotar categorias que permitissem analisar essa graduação como um produto da cultura escolar em tempos de pedagogia científica. Para tanto, buscou-se ampliar a bibliografia considerando estudos internacionais, tomando-se emprestado de outras áreas de pesquisa, como a didática do ensino de francês³⁰, elementos que ajudassem a precisar as categorias que deveriam enfeixar o tema da graduação.

No movimento de busca por estudos internacionais ligados à categorização da graduação do ensino, um autor que se destacou foi o francês Serge Borg (2001), com estudos vindos da didática do ensino de língua francesa. Esse autor buscou conceituar o que denominou de *La notion de progression*. Outra autora francesa da didática, Élisabeth Nonnon, ressaltou que o “[...] conceito de progressão, na medida em que afeta a organização temporal dos ensinamentos e a experiência do tempo, constitutiva das aprendizagens, é central em qualquer reflexão didática³¹” (2010, tradução nossa). A autora argumentou ainda que o *conceito de progressão* é uma questão da didática, pois se refere à organização do currículo e ao cotidiano do ensino.

Aqui, uma vez mais, vale a ressalva de que, mesmo tomando estudos da didática para melhor precisar termos sobre a graduação, interessou para o presente trabalho caracterizar, no âmbito da cultura escolar, a aritmética e o modo como a graduação inseriu-se como elemento próprio desse saber, reorganizando-o e transformando-o, ou seja, como tema epistemológico. Assim, apesar de os estudos sobre organização do ensino dada pelo *conceito de progressão* serem uma questão didática, nesta tese ela foi tratada do ponto de vista histórico no que se referia à organização do ensino em manuais pedagógicos, definidores de saberes, vindos do âmbito da cultura escolar.

Borg (2001, p. 114), depois de todo um percurso de caracterização do conceito de progressão aplicado ao ensino de francês, destacou que ele está dividido em seis níveis que,

³⁰ Um primeiro indício de que este poderia ser um caminho a tomar para melhor categorizar a graduação do ensino, surgiu no processo de caracterização dos manuais como fontes para analisar a graduação ao buscar os escritos do historiador francês Alain Choppin, uma referência na história dos livros escolares. Na busca, um dos textos encontrados intitulava-se *Le rôle des manuels*, publicado em 2000 como capítulo do livro: *La Notion de Progression*, que havia sido coordenado pelos pesquisadores Daniel Coste e Daniel Véronique e cujo sumário revelava um aprofundamento desta temática a partir da didática da língua francesa. Deste modo, dada a proximidade dos significados de progressão e graduação, intentou-se compreender de uma forma mais aprofundada esta noção e, por isso, utilizou-se o termo *la notion de progression* como um descritor para buscar trabalhos em língua francesa que contribuíssem para elaborar categorias de análise da graduação do ensino.

³¹ “[...] notion de progression, en ce qu'elle touche à l'organisation temporelle des enseignements et à l'expérience du temps, constitutive des apprentissages, est centrale dans toute réflexion didactique”.

para ele, são incontestáveis para quem se debruça sobre a temática: *seleção, gradação, programa, programação, currículo e progressão*.

Segundo o autor, essas categorias de amplitudes diferentes estão dispostas de tal modo que vão da menos abrangente, como é o caso da *seleção*, para a mais abrangente, que é a *progressão*, seguindo uma ordem crescente de complexidade, sendo que a última pode ser pensada como uma categoria que englobava todas as outras.

A respeito da *seleção*, Borg (2001) ressaltou que ela se refere à primeira etapa da construção de uma progressão/graduação³² do ensino. Para ele, a *seleção* tem como finalidade o estabelecimento do *corpus* da matéria que seria ensinada. Esta etapa diz respeito à escolha dos conteúdos privilegiados para compor o rol de saberes concernentes às matemáticas *a e para ensinar* e, especificamente nesta tese, pode-se afirmar que se refere ao primeiro passo a ser dado com vistas à elaboração das aritméticas *a e para ensinar*.

Uma segunda etapa de elaboração de uma graduação do ensino se refere à *gradação*, que diz respeito à ordem em que os saberes são organizados dentro de um tema. Neste caso, a *gradação* do ensino também pode ser pensada como *sequência*. Com isso, ela está relacionada à ordem em que aparecem os conteúdos, referindo-se ao “[...] lugar ocupado por um assunto específico no conjunto dos temas de uma dada rubrica (aritmética, geometria etc.)” (VALENTE, 2020, p. 170).

A *gradação*, como se pode notar, é um elemento basilar no que se refere à organização do ensino, pois envolve uma série de opções teóricas que são feitas quanto à ordem em que os saberes devem ser ensinados aos alunos, tendo em conta as filiações teóricas daqueles que são responsáveis pela elaboração dos currículos. Deste modo, na escolha de uma *gradação* do ensino, a *expertise*³³ pedagógica tem papel fundamental, pois é ela quem determina, em cada momento histórico, os saberes do ensino, tanto do ponto de vista dele, quanto da formação para ele.

³² Vale destacar que, no original em francês, o autor não utilizou o termo graduação, entretanto o significado dado para o termo progressão pode ser utilizado dentro dos limites do que se designa por graduação no âmbito desta tese. Reitera-se a ressalva de que, para este trabalho, ela foi pensada sob a perspectiva da elaboração de saberes dentro da cultura escolar e, para Borg (2001), a partir de uma perspectiva didática.

³³ Vale destacar que, nesta tese, tomou-se como *expertise* “[...] uma instância, em princípio reconhecida como legítima, atribuída a um ou a vários especialistas – supostamente distinguidos pelos seus conhecimentos, atitudes, experiências -, a fim de examinar uma situação, de avaliar um fenômeno, de constatar fatos. Esta *expertise* é solicitada pelas autoridades do ensino tendo em vista a necessidade de tomar uma decisão. A solicitação de *expertise*, [...] participa decisivamente da produção de novos saberes no campo pedagógico” (HOFSTETTER *et al.*, 2017, p. 57, grifos dos autores).

Uma outra etapa da graduação do ensino que também guarda relação com a *expertise* pedagógica, sendo, porém, um pouco mais ampla que as anteriores, é a que Borg (2001) denominou como *le syllabus* ou o *programa*. Neste caso, refere-se aos saberes que deveriam ser ensinados ao longo de um ano escolar dentro de uma *programação*.

Este autor ressaltou ainda: “*Seleção e gradação* se encaixam em um *programa*. Esta é a terceira entidade que orienta seu posicionamento no desenvolvimento de uma progressão” (BORG, 2001, p. 122, tradução nossa, grifos nossos). O *programa*, desse modo, aparece como um nível um pouco mais amplo e que engloba a *seleção* e a *gradação*. Assim, pode-se pensar o *programa* como uma articulação entre os saberes que são destacados para o ensino na etapa de *seleção* e a forma como eles são organizados pela *gradação*.

Em uma dimensão ainda mais ampla, a *programação* tem uma dimensão temporal de organização dos saberes ao longo de um ano escolar. Tal dimensão desponta como um dos aspectos fundamentais do ensino e, neste sentido, ao analisarem a forma escolar, Vincent, Lahire e Thin (2001) destacam, dentre outros aspectos, a escola como local de transmissão de saberes objetivados dentro de um “tempo escolar”.

Ainda sobre a *programação*,

[...] é possível dizer que os programas inovadores, por vezes, divulgam uma *programação*, um modo como deve ser dosado, encadeado e articulado o ensino. Para além de serem programas, fazem circular uma *programação*. Por mais detalhados que sejam os programas, em termos dos itens de conteúdos a ensinar, há necessidade de ir além, ou seja, orientarem o trabalho didático-pedagógico de modo que as prescrições oficiais para o ensino do novo programa possam ser adotadas no dia-a-dia (sic) das aulas. Assim, na oficialização de uma nova proposta de ensino, de algo considerado inovador, há evidências de uma *programação* que acompanha os programas. O programa contém uma *programação*; isto é, uma graduação, de acordo com uma visão e finalidade da escola, com uma metodologia, com uma postura do professor em relação ao aluno; uma *programação* que atende às aulas, ao número delas, a um dado ano ou semestre letivo, dentre outros elementos. Esse saber, configurado numa *programação* de ensino, tenderá a estar presente, de modo mais sistematizado, nos livros didáticos e/ou manuais pedagógicos. Assim, uma *programação* expressa uma graduação, um movimento de progressão que deve ser dado ao ensino e no modo de como deverá caminhar essa graduação – o seu método (VALENTE, 2019, p. 56-57, grifo do autor).

Esse excerto mostra como *programa* e *programação* se relacionam a partir das finalidades da escola, são elementos intrínsecos à cultura escolar. A própria graduação do ensino é elemento dessa cultura, conforme já foi destacado nesta tese.

Em outra escala de graduação, o *currículo* se apresenta como o posicionamento dos saberes em relação às rubricas da Matemática: aritmética, álgebra, geometria, trigonometria etc.

Um exemplo histórico da necessidade de posicionar os saberes pode ser tirado da reforma Sampaio Dória³⁴, dada pela Lei nº. 1.750, de 08 de dezembro de 1920 (SÃO PAULO, 1920), que reformou a instrução pública paulista, unificou as rubricas de aritmética, álgebra e geometria sob a rubrica de Matemática, no entanto as matérias referentes àquelas rubricas continuavam a ser trabalhadas em horários específicos na formação de professores primários. Deste modo, como se pode ver em uma reforma da instrução pública posterior, dada pelo Decreto nº. 3.858, de 11 de julho de 1925 (SÃO PAULO, 1925), a disciplina Matemática contava com duas cadeiras no curso de formação de professores, uma responsável por aritmética e álgebra e a outra, por geometria plana e espacial.

Esta organização das rubricas dentro do *currículo* de Matemática da formação de professores ficou mais clara quando se observou sua distribuição ao longo dos cinco anos do curso normal, como na Figura 1 a seguir, que mostra uma *programação* que deveria ser seguida nos cursos normais paulistas.

Figura 1: Recorte da *programação* do ensino normal de São Paulo 1925

1.º ANNO	2.º ANNO	3.º ANNO
Portuguez e calliphasia 3 aulas por semana	Portuguez e calliphasia 3 aulas por semana	Portuguez e literatura 2 aulas por semana
Francês 4	Francês 3	Latim 2
Geographia da America e especialmente Geographia do Brasil 3	Cosmographia e geographia geral 3	Inglês 2
Arithmetica e Algebra 5	Algebra (revisão) 2	Historia da Civilização 4
Desenho (Secção feminina) 3	Geometria plana 3	Geometria plana (revisão) e no espaço. 2
Desenho (Secção masculina) 3	Physica 3	Physica e Chimica 3
Trabalhos manuaes (Secção feminina) 2	Desenho (Secção feminina) 2	Anatomia e physiologia humanas 3
Trabalhos manuaes (Secção masculina) 2	Desenho (Secção masculina) 2	Desenho (Secção feminina) 2
Musica 2	Trabalhos manuaes (Secção feminina) 1	Trabalhos manuaes (Secção masculina) 2
Gymnastica (Secção feminina) 2	Musica 2	Musica 1
Gymnastica (Secção masculina) 2	Gymnastica (Secção feminina) 2	Gymnastica (Secção feminina) 1
Total 24	Gymnastica (Secção masculina) 2	Gymnastica (Secção masculina) 1
	Total 24	Total 24
4.º ANNO	5.º ANNO	
Portuguez e literatura 2 aulas por semana	Historia da lingua 2 aulas por semana	
Latim 2	Latim 2	
Inglês 2	Inglês 2	
Historia da America e especialmente do Brasil 3	Higiene 2	
Chimica (sendo uma aula pratica) 2	Noções do direito usual 2	
Biologia 2	Pedagogia 3	
Didactica 2	Didactica 4	
Psychologia 3	Desenho (Secção feminina) 2	
Desenho (Secção feminina) 2	Desenho (Secção masculina) 2	
Desenho (Secção masculina) 1	Trabalhos manuaes (Secção feminina) 2	
Trabalhos manuaes (Secção feminina) 1	Trabalhos manuaes (Secção masculina) 2	
Trabalhos manuaes (Secção masculina) 1	Musica 2	
Musica 1	Musica (Secção feminina) 1	
Gymnastica (Secção feminina) 2	Gymnastica (Secção feminina) 1	
Gymnastica (Secção masculina) 2	Gymnastica (Secção masculina) 1	
Total 24	Total 24	

Fonte: São Paulo (1925, p. 4572).

Deste modo, a dimensão curricular da graduação do ensino engloba as outras noções já referidas e, na análise dos saberes presentes nos manuais, ajuda a pensar como eles se relacionam com temáticas mais amplas da Matemática.

Por fim, para além das categorias já apresentadas, uma última categoria que foi considerada importante para a análise da graduação do ensino da aritmética foi a *marcha do*

³⁴ De acordo com a tese de Medeiros (2005), pode-se afirmar que Antônio de Sampaio Dória ingressou na Escola Normal de São Paulo em 8 de abril de 1915, na cadeira de Psicologia, Pedagogia e Educação Cívica. Entre abril de 1920 e abril de 1921, ocupou o cargo de Diretor da Instrução Pública do estado de São Paulo e, em 1925, entrou para a Faculdade de Direito de São Paulo.

ensino. Essa categoria tem sido recorrente em pesquisas da área da história da educação matemática e adveio das fontes de pesquisa, pois a *marcha do ensino* esteve presente nos mais diversos discursos: em documentos oficiais, manuais, revistas pedagógicas etc. que circularam pelo país entre os séculos XIX e XX.

Em uma busca realizada na Hemeroteca Digital Brasileira³⁵ utilizando a expressão *marcha do ensino*, foi possível verificar uma primeira ocorrência nos jornais já em meados do século XIX. Essa primeira ocorrência da expressão remonta ao período imperial e ocorreu no dia 10 de março de 1840 na publicação do *Correio Oficial: In médio Posita Virtus* e se referia à fala do presidente da província de Minas Gerais, Bernardo Jacintho da Veiga, dirigida à Assembleia Legislativa Provincial, acerca da instrução pública daquela província.

[...] A fundação da escola normal, a que já me referi, e cujos trabalhos espero com prazer que possa ser por vós pessoalmente examinados ainda antes do fim da sessão, será sem dúvida um princípio de outros melhoramentos, e o *Governo observando a marcha do ensino com a atenção de que o objeto se faz digno*, não deixará de oportunamente reclamar quaisquer medidas que por ventura (sic) dependam de deliberação (VEIGA, 1840, p. 226, grifo nosso).

Em outro exemplo, pode-se citar um anúncio publicado em 1847 no *Jornal do Commercio*, na edição de 23 de dezembro, nos seguintes termos:

O COLLÉGIO de Mme. Bins, sito em S. Cristóvão, fica d'ora em diante pertencendo a Mme. Adelaide Labotiere e a Mme. Lacombe. As novas diretoras esperam a continuação da mesma confiança que os Srs. Pais de família depositaram em Mme. Bins, bem certos de que *a marcha do ensino será a mesma, ou modificada para melhor*, pois que, além de terem professoras hábeis, nada se poupará para que o estabelecimento satisfaça em tudo às condições que exige a educação moral e científica das meninas a seu cargo.
O colégio abrir-se-á no dia 7 de janeiro próximo futuro (JORNAL DO COMMERCIO, 1847, p. 4, grifo nosso).

Embora esses exemplos não revelassem detalhes a respeito da *marcha do ensino*, eles mostraram que ao menos a ideia da existência de uma *marcha* estava presente na cultura escolar. Mas o que vem a ser a *marcha do ensino*? Como resposta, pode-se afirmar, citando Valente (2020):

[...] no ensino de frações há que se considerar que marcha? Iniciar com frações mais próximas da vida cotidiana como representações da metade, de um terço etc., progredindo para uma fração qualquer? Ou trabalhar durante todo um período apenas com essas frações conhecidas em termos de efetuar operações etc., para então expandir o assunto com frações de qualquer natureza? Noutros

³⁵ Essa base de dados pode ser acessada por meio do endereço: <<https://bndigital.bn.gov.br/hemeroteca-digital/>>.

termos, qual o passo a passo deverá ser seguido pelo professor para tratar as frações? (VALENTE, 2020, p. 170-171).

Deste modo, a *marcha do ensino* pode ser pensada, a partir deste exemplo, como o passo a passo que o professor precisa seguir para progredir no ensino de um determinado conteúdo que, no caso específico desta tese, trata-se de um conteúdo da aritmética.

Uma vez mostrada a amplitude da temática da graduação em seus diferentes níveis, é preciso ressaltar que, nesta tese, a opção foi a de tomá-la para análise considerando a perspectiva da *matemática do ensino*.

4.2 A matemática do ensino

Os resultados apresentados neste trabalho, conforme destacado anteriormente, dialogaram com outros trabalhos integrantes do projeto temático. Da mesma forma, acompanham produções parciais que vêm sendo obtidas pelo GHEMAT.

Como o próprio título do projeto temático indica, seu foco está em processos e dinâmicas de elaboração do saber profissional do professor que ensinou matemática entre 1890 e 1990. Com seu desenvolvimento, à medida que novos resultados parciais foram sendo incorporados, tornou-se necessário readequar os rumos do projeto temático, haja vista que a discussão sobre o saber profissional dos professores era algo imprópria para o final do século XIX, apesar da constatação de que a docência, “[...] mesmo sem estar caracterizada profissionalmente, mobiliza saberes desde tempos imemoriais” (VALENTE, 2020, p. 166).

Esta reflexão foi determinante para que, com o desenvolvimento do projeto temático, seus pesquisadores responsáveis comesçassem a discutir a respeito da existência de uma *matemática do ensino*, ou seja, uma matemática elaborada com finalidades de ensino, tanto do ponto de vista da escola, quanto do ponto de vista da formação de professores (MORAIS; BERTINI; VALENTE, 2021). Tal matemática engloba as noções de matemática *a* ensinar e matemática *para* ensinar que vinham sendo elaboradas pelo grupo.

A elaboração do conceito de *matemática do ensino* é fruto de construções coletivas produzidas ao longo dos anos pelo GHEMAT em diferentes projetos de pesquisa. A este respeito, Moraes e Valente (2021) destacaram a trajetória que o grupo tem trilhado na produção coletiva de modo a dar sentido à elaboração desse conceito.

Os referidos autores mostraram como, inicialmente abordando a documentação escolar oficial, os trabalhos elaborados pelo grupo trataram dos saberes matemáticos presentes nessas fontes. Essa abordagem ainda era feita a partir de uma perspectiva didática e dava ênfase a diferentes modos de ensinar matemática, mas pouco considerava as transformações operadas nos saberes por sujeitos inseridos na cultura escolar.

Morais e Valente (2021), na síntese que fizeram dos livros resultantes dos seminários temáticos organizados pelo grupo, indicaram que, em um segundo momento, houve uma passagem dos saberes matemáticos para os saberes elementares matemáticos. Para os autores, a problematização a respeito do “elementar” apontou para “[...] um movimento de investigação do meio escolar, da matemática presente no meio escolar, para além da matemática configurada pelo campo disciplinar” (MORAIS; VALENTE, 2021, p. 67).

Este movimento de construção de conceitos progrediu à medida em que novas discussões foram elaboradas, quando o grupo passou a analisar de modo mais aprofundado outras fontes, como foi o caso dos manuais pedagógicos, o que ocorreu a partir do XIV Seminário Temático³⁶ organizado pelo GHEMAT e que aconteceu em Natal, RN, no ano de 2017 (MORAIS; VALENTE, 2021).

Se para os livros que trataram da documentação oficial e das revistas pedagógicas, em destaque encontram-se os métodos aplicados ao saber matemático a ser ministrado na escola primária, evocando de modo mais incisivo questões didáticas; para essa terceira obra começam a surgir questões de âmbito epistemológico: tratava-se de investigar a elaboração de saberes próprios do meio escolar. Surgia a menção, mesmo que inicial, de uma matemática intuitiva e, também, de uma matemática elaborada por meio de novas bases psicológicas com auxílio da estatística (MORAIS; VALENTE, 2021, p. 68).

Assim, o tratamento dos saberes do ponto de vista do referencial teórico-metodológico adotado nesta tese acerca dos saberes profissionais e da cultura escolar, levou a consideração de pensar esses saberes da escola sob uma perspectiva epistemológica, pois, como já se destacou, a noção de cultura escolar possibilitou pensar a escola como produtora de saberes que visam a atender as necessidades da própria escola.

Uma vez tecidas essas considerações mais gerais a respeito da matemática própria da escola, nas linhas que seguem, busca-se melhor problematizar o conceito de *matemática do*

³⁶ Maiores informações a respeito deste evento podem ser acessadas no endereço: <<https://xivseminariotematico.paginas.ufsc.br/>>.

ensino e apresentar alguns exemplos a este respeito que foram retirados de outros resultados de pesquisa.

4.2.1 Sobre o conceito de *matemática do ensino*

A partir deste ponto, discorre-se sobre alguns aspectos da *matemática do ensino* como resultado do processo de caracterização do saber profissional do professor que ensinava matemática entre o final do século XIX e o final do século XX.

Em obra-síntese do XVI Seminário Temático³⁷ realizado pelo GHEMAT, Valente (2018) destacou a *matemática do ensino* como uma categoria emergente da análise de provas e exames de matemática. A partir dos elementos constituintes de uma disciplina, “[...] um ensino de exposição, os exercícios, as práticas de incitação e motivação e um aparelho docimológico” (CHERVEL, 1990, p. 207), Valente (2018) constatou que cada um desses elementos tem um peso relativo em cada disciplina, pois Chervel (1990) mostrou como eles se combinam em diferentes proporções.

Ao que tudo indica, será esse peso relativo que melhor distinguirá cada rubrica curricular. Tal suposição nos faz retornar o que de início já se disse: talvez as salas de aula de matemática sejam aquelas onde maior importância tenham para o trabalho docente, as provas e exames de matemática. Nos termos de Chervel, seria possível dizer que para a matemática escolar, para a disciplina escolar matemática, o aparelho docimológico tem peso relativo alto comparado aos demais elementos componentes dessa disciplina (VALENTE, 2018, p. 142).

Neste sentido, uma primeira problematização levantada por Valente (2018) relativamente à matemática presente em provas e exames foi elaborada nos seguintes termos:

[...] como caracterizar o que é ensinado? Como penetrar na “caixa preta” das salas de aula identificando o que é ensinado? Em outras palavras e retomando a questão colocada inicialmente: que matemática está presente no cotidiano das aulas? A resposta é possível de ser dada, por processos de investigação histórica, buscando por vestígios do ensino (VALENTE, 2018, p. 142).

Em outro capítulo da mesma obra-síntese, Bertini, Gomes e Oliveira (2018) deram ênfase a relação dinâmica que envolve a *matemática do ensino*.

³⁷ Esta edição do evento aconteceu em abril de 2018 na cidade de Boa Vista – RR, e tratou de provas, exames e a história da educação matemática. Maiores informações sobre o evento podem ser encontradas em: <<https://xviseminariotematico.paginas.ufsc.br/>>.

Transitando por diferentes documentos, percebeu-se que a matemática do ensino envolve as relações dinâmicas entre aquilo que é prescrito oficialmente, as orientações e propostas e também aquilo que é efetivamente parte da prática nas escolas. As provas e exames participam dessas relações dinâmicas tanto na medida em que fazem uso, na sua composição, daquilo que é prescrito ou proposto, como na medida em que colaboram na definição daquilo que será prescrito e proposto (BERTINI; GOMES; OLIVEIRA, 2018, p. 14).

Nesta primeira caracterização de *matemática do ensino*, já foi possível constatar um aspecto relevante a seu respeito: ela é o resultado das interações entre as prescrições oficiais e a prática operada nas escolas. Trata-se de uma matemática produzida propriamente para a escola, uma matemática oriunda da cultura escolar. Tal conclusão foi referendada por Valente (2018) na conclusão da obra.

Seja como for, nos limites enfrentados pelos estudos postos nos capítulos anteriores, em termos do material empírico analisado, as provas e exames revelam uma matemática diferente daquela prescrita, da matemática dos programas de ensino. Nas salas de aula de matemática o desenvolvimento da atividade docente está condicionado pela cultura escolar do ensino de matemática nos primeiros anos escolares e dos ensinamentos de matemática para a formação de professores. A interpretação dos elementos dessa cultura, em termos das avaliações realizadas a partir dos ensinamentos, aponta para a existência não multiforme de modos de avaliar, bem ao contrário: há padrões, modelos seguidos pelos professores que parecem mostrar-se independentes do ensino ministrado (VALENTE, 2018, p. 149).

Com isso, vale destacar que a noção de *matemática do ensino* foi pensada à luz da cultura escolar, considerando que “[...] a escola tem papel fundamental na criação de saberes que ela mesma fabrica ao longo do tempo” (MORAIS; BERTINI; VALENTE, 2021, p. 9). Os autores consideraram ainda a existência de uma

[...] matemática elaborada historicamente pelo meio escolar que serve às diferentes finalidades postas para o ensino nas diversas épocas em que se exercem as práticas pedagógicas. A esta matemática chamaremos “matemática do ensino”, compreendendo a dimensão do ensino propriamente dito e, ainda, a formação de professores para esse ensino (MORAIS; BERTINI; VALENTE, 2021, p. 9-10).

Cabe enfatizar também que, do ponto de vista adotado pelos autores, tal matemática como construção histórica se distingue da matemática que foi tratada a partir de uma perspectiva didática, de modo que fizeram a seguinte ressalva sobre essa distinção:

A *matemática do ensino*, neste texto, é considerada como um saber resultante da produção histórica da cultura escolar. Por *ensino de matemática*, identificamos a expressão como sinônimo do desafio que o campo disciplinar matemático tem para ser transmitido na escola. Desse modo, com a matemática do ensino tem-se uma perspectiva diferente daquela do ensino de matemática. Esta última, reitera-se, preocupa-se em lançar olhar sobre

mecanismos didáticos voltados para problemas postos pela transmissão de saberes dos campos disciplinares científicos para o interior do meio escolar (MORAIS; BERTINI; VALENTE, 2021, p. 16, grifos dos autores).

Assim, o ponto fundamental desta discussão foi tratar da produção de um saber elaborado com o intuito de atender as necessidades da escola e que não foi considerada como uma simples didatização dos saberes científicos produzidos pelo campo da Matemática. Nesse sentido, tal perspectiva foi ao encontro daquilo que propôs Chervel (1990, p.192) ao afirmar que o ensino escolar cumpre o papel de pôr “[...] em ação as finalidades impostas à escola”.

Tal qual foi proposta por Morais, Bertini e Valente (2021), a *matemática do ensino* pode ser pensada a partir de quatro categorias analíticas: sequência³⁸, significado, graduação e exercícios e problemas.

Apesar do tratamento da *matemática do ensino* da forma como foi apresentada por Morais, Bertini e Valente (2021) ser uma categorização nova, que desponta como contraponto a uma abordagem didática, as análises da matemática da escola a partir da perspectiva da cultura escolar vêm de longa data nas produções do GHEMAT. Nesse sentido, França, Silva e Guimarães (2020), ao se debruçarem sobre essas produções em anais no período compreendido entre 2013 e 2017, levantaram a seguinte problemática:

O que orientava o ensino de aritmética? A aritmética atendia a uma finalidade elementar (como princípios fundamentais de uma disciplina mais avançada) ou rudimentar (como elementos essenciais e indispensáveis para a vida prática)? Tais questões são significativas para a caracterização da aritmética ensinada na escola, em diferentes períodos, natureza das instituições etc. Caberia inferir que a aritmética escolar oscilou, em geral, entre uma oferta centrada em saberes elementares e saberes rudimentares, com ajustes, apropriações e mobilizações da cultura escolar, visto que estes saberes necessitaram de novos métodos e processos para atender o ideário da vaga pedagógica vigente (FRANÇA, SILVA, GUIMARÃES, 2020, p. 27).

Este exemplo mostrou que a produção coletiva do grupo tem caracterizado uma aritmética própria da escola e cuja finalidade foi se alterando e se adequando às finalidades desta instituição em cada época.

Do mesmo modo, foi possível constatar a existência de outros resultados de pesquisa nos quais, apesar de não se utilizarem da expressão *matemática do ensino*, os autores mostraram

³⁸ Morais, Bertini e Valente (2021, p. 19, grifos dos autores) fizeram uma ressalva de que a “[...] graduação não se confunde com a sequência. Esta última indica a estruturação de uma dada rubrica escolar, nos seus diferentes temas para o ensino. A graduação está diretamente ligada a uma dada concepção de ensino e aprendizagem de um dado assunto aos alunos”. No entanto, para este trabalho, conforme foi justificado na subseção anterior, toma-se a *sequência* ou *gradação* do ensino como uma forma de graduação, em uma etapa mais restrita, ou seja, considera-se a *sequência* como uma das categorias constituintes da graduação do ensino.

a existência de uma matemática produzida para a escola em consonância com as vagas pedagógicas então vigentes.

A *matemática do ensino*, de um modo geral, pode ser pensada como a matemática elaborada com finalidades de ensino e que foi produzida no contexto da cultura escolar. Deste modo, tal conceito engloba as ideias de matemática *a* ensinar e a matemática *para* ensinar, componentes centrais do saber profissional do professor que ensinava matemática.

As diferentes vagas pedagógicas foram responsáveis, dentro da cultura escolar, pela elaboração de *matemáticas do ensino*, que deveriam atender as demandas que eram próprias do seu tempo. Em uma perspectiva ampla, Moraes, Bertini e Valente (2021) dividiram estas vagas em termos da *matemática do ensino* em tempos de ensino tradicional, intuitivo, Escola Nova, Movimento da Matemática Moderna (MMM) e em tempos de Educação Matemática, esta última já englobando os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Maciel (2019), ao abordar o ensino de multiplicação em manuais de aritmética escritos em tempos anteriores ao ensino intuitivo, período no qual vigorava uma forma de ensino puramente pautada na transmissão oral por parte do professor, que ficou conhecida como “ensino tradicional”, destacou que esses manuais

[...] estão representados pela sequência: apresentação da definição, exemplo, regra e exercícios (quando se mostram presentes) [...]. Nesses manuais, com dispositivos didáticos convencionais, a multiplicação é ensinada logo após a subtração e antecedendo a divisão (MACIEL, 2019, p. 143).

Em tempos de ensino tradicional, a *matemática do ensino* apresentava um caráter disciplinar, pois era a lógica do campo matemático que deveria prevalecer no ensino. A sequência de conteúdos, partindo da adição e indo até a divisão, revelou uma concepção de ensino em que se partia do mais elementar para o menos elementar e, assim, não se considerava o desenvolvimento psicológico da criança, mas a lógica interna do conteúdo.

Neste caso, não havia uma preocupação com a forma como a criança aprendia, implicitamente existia a premissa de que “[...] o papel da escola é o de transmissão dos saberes do campo disciplinar. Neste caso, do campo disciplinar matemático” (MORAIS; BERTINI; VALENTE, 2021, p. 16). Ainda sobre a *matemática do ensino* tradicional, os autores, analisando o ensino de frações, realçaram:

A matemática do ensino de frações nesse período primeiro da história da educação, compreendendo desde a Independência até décadas finais do século XIX, mostra-se por meio do que costumeiramente é denominado “ensino

tradicional”. Um ensino tido por verbalístico, centrado no professor, cuja tarefa é, no caso da matemática dos primeiros anos, levar os alunos a exercitarem o cálculo numérico. O ensino prevê que bem exercitado nos cálculos, os egressos farão uso deles na vida cotidiana (MORAIS; BERTINI; VALENTE, 2021, p. 26).

Os sujeitos inseridos na cultura escolar produziram, em tempos de ensino tradicional, uma matemática voltada aos cálculos e cujo centro estava na ação de ensinar representada pelo professor, naquele tempo o ensino era do tipo “[...] livresco, de repetição por processos mecânicos” (VALENTE, 2012b, p. 1421).

Com a circulação do método intuitivo, mudou o entendimento a respeito de como a criança aprendia e isto teve reflexos na *matemática do ensino*. Na vaga pedagógica da Escola Tradicional, os saberes matemáticos eram tomados como rudimentos que a criança deveria aprender para aplicar na vida cotidiana. Na vaga intuitiva, por sua vez, esses saberes se apresentavam como elementos³⁹ e cumpriam a finalidade de desenvolvimento cognitivo da criança.

Neste período, a partir de manuais pedagógicos voltados ao ensino primário, Oliveira (2017) caracterizou a aritmética da cultura escolar como uma *aritmética intuitiva*, na qual o ensino deveria se dar a partir do diálogo entre o professor e o aluno.

O professor renunciando a prática antiga de *falar aos alunos* passaria a *falar com os alunos*. Estes, por sua vez, abandonariam a prática de escrever mecanicamente a lição dada no quadro negro para conversar com o professor sobre a quantidade de objetos. Com estas mudanças, contar e calcular deixariam de ser saberes teorizados por regras e definições, passando a ser saberes elaborados pela prática do diálogo sobre objetos que fazem parte do cotidiano da criança (OLIVEIRA, 2017, p. 206, grifos do autor).

Em comparação com a vaga pedagógica anterior, os saberes produzidos na cultura escolar e resultantes do ensino intuitivo modificaram os papéis de alunos e professores: estes deixaram de ser simples expositores, enquanto aqueles deixaram de ser apenas ouvintes. Nesta concepção de ensino, aprender aritmética era resultado de uma relação de diálogo entre professor e aluno cuja finalidade estava voltada ao desenvolvimento dos sentidos deste último.

A entrada do ensino intuitivo na cultura escolar foi responsável por uma graduação própria do ensino de aritmética, é o que pode ser constatado a partir de Pinto, Felisberto e Berticelli (2020), que com um olhar voltado para os métodos, processos e finalidades da

³⁹ Uma problematização mais bem aprofundada a respeito da diferença da matemática dos primeiros anos escolares, tomada como elementos e rudimentos, pode ser encontrada em Valente (2016b).

aritmética em diferentes vagas pedagógicas analisaram 32 dissertações e teses do GHEMAT produzidas entre 2013 e 2017. Assim, afirmaram que

[...] o método intuitivo perpassou reformas e programas oficiais do período analisado, estimulando uma educação pelos sentidos, a observação das coisas do mundo real a partir de uma graduação progressiva das dificuldades, considerando a marcha natural do desenvolvimento do espírito humano em seus aspectos intelectuais, morais e físicos (PINTO; FELISBERTO; BERTICELLI, 2020, p. 61).

Com a Escola Nova, a *matemática do ensino* sofreu transformações que visaram a atender as demandas colocadas para aquela época, pois, se em tempos de ensino tradicional o processo estava centrado no professor e com o ensino intuitivo a ênfase foi posta na relação de diálogo estabelecida entre professor e aluno, na Escola Nova estava em questão tornar o ensino o mais funcional possível. “Vale dizer, na escola nova predicada pela ‘revolução copernicana na educação’, o verdadeiro centro, o centro de fato, não é a criança e seu ensino, mas psicologia funcionalista, a ela somente cabem todas as honras e glórias” (MONARCHA, 2009, p. 46).

Mas que características tem a *matemática do ensino* da vaga pedagógica da Escola Nova? Para este questionamento não há uma resposta que seja simples e direta, uma vez que se tratava de uma vaga multifacetada, entretanto é possível trazer exemplos de diferentes *matemáticas do ensino* elaboradas em algumas vertentes da Escola Nova.

Um primeiro exemplo que pode ser apresentado é a *matemática do ensino* que se relacionava com os centros de interesse. Neste sentido, a pesquisa de Fernandes (2020), ao estudar a presença da aritmética na pedagogia decroliana em revistas pedagógicas mineiras, destacou que as

[...] sugestões para os professores giraram em torno de desenvolver atividades que envolvessem mercados, fazenda (tecido), padaria etc., atividades estas relacionadas com hábitos e dia a dia dos alunos. A passagem para as operações aritméticas se daria a partir dessa convivência coletiva entre os alunos. O foco dado o tempo todo foi para se trabalhar com as crianças as noções de: ‘juntar’, ‘tirar’, ‘dividir’, ‘distribuir’, *saberes a ensinar* que se articulam aos *saberes para ensinar* na constituição do *saber profissional* do professor (FERNANDES, 2020, p. 118, grifos da autora).

A *matemática do ensino* pensada a partir das noções acerca dos centros de interesse, conforme apresentada pela autora, dispensava uma atenção especial às atividades que pudessem ser relacionadas ao cotidiano das crianças. Era neste contexto que as operações aritméticas deveriam ser ministradas a partir das noções de juntar, tirar, dividir e distribuir.

Ainda na linha de *matemática do ensino* própria de vertentes da Escola Nova, outro exemplo é a já citada *aritmética sob medida*, elaborada em tempos de pedagogia científica e apresentada em Pinheiro (2017). Esta, aliás, como já indicado, foi a *matemática do ensino* na qual se focou a escrita desta tese.

Outra matemática da cultura escolar própria das vagas pedagógicas foi aquela elaborada em tempos de MMM. Ao analisar a *matemática do ensino* de frações no período de MMM, Morais Bertini e Valente (2021) concluíram que a

[...] matemática do ensino de frações é, antes de tudo, matemática. Entenda-se: há necessidade de expansão dos conjuntos numéricos e as frações são o elo que possibilita isso, servem como representação dos números racionais. A lógica de orientação do ensino guia-se pela estruturação matemática dos conteúdos. A partir dela, tomam-se as etapas piagetianas como referência para o tratamento já previamente organizado dos conteúdos (MORAIS; BERTINI; VALENTE, 2021, p. 56).

Nesse caso, a vaga pedagógica então vigente impunha uma lógica de organização da *matemática do ensino* na qual o campo disciplinar matemático era o responsável por ditar a lógica do ensino. Deste modo, a lógica disciplinar sobrepôs a própria lógica do desenvolvimento e da aprendizagem fortemente defendidas em vagas anteriores.

Ainda sobre a importância dos conjuntos na *matemática do ensino* em tempos de MMM, vale trazer uma das conclusões a que chegaram Oliveira, Leme da Silva e Valente (2011) em obra-síntese da produção de um projeto⁴⁰ do GHEMAT que tinha foco nesse movimento no Brasil e em Portugal:

Uma nova profissionalidade surge, centrada no conhecimento das estruturas matemáticas, na nova linguagem matemática, na axiomática, tendo a Teoria dos Conjuntos como elo unificador dos conteúdos programáticos. De outra parte, esse novo paradigma de formação propiciou um diálogo entre a Matemática e a Educação, dinamizando a demanda pelo aperfeiçoamento profissional e ressignificando, nas décadas de 1960 e 1970, o campo da Educação Matemática como espaço fertilizador da formação dos professores de Matemática (OLIVEIRA; LEME DA SILVA; VALENTE, 2011, p. 133).

Assim, a *matemática do ensino* da vaga do MMM era, conforme estes resultados, uma matemática na qual a teoria dos conjuntos tinha um papel central na organização e estruturação do ensino.

⁴⁰ Tratava-se do projeto de cooperação internacional *A matemática moderna nas escolas do Brasil e de Portugal: estudos históricos comparativos*. Esse projeto teve vigência de 2006 a 2008.

4.3 A graduação como elemento das *matemáticas do ensino*

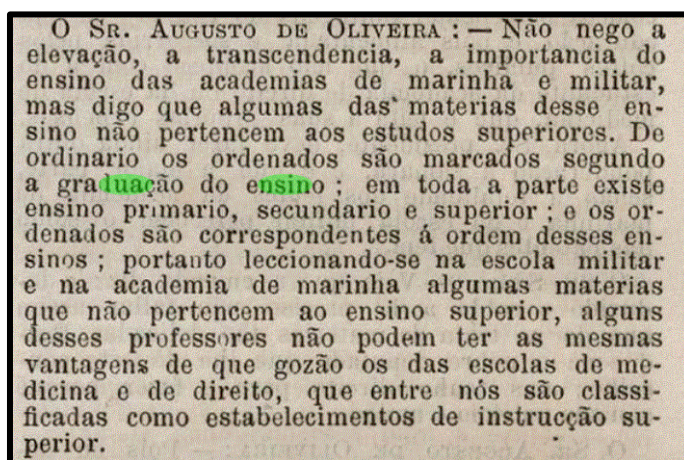
Sobre a *matemática do ensino*, vale enfatizar inicialmente que esse conceito relaciona a matemática *a* ensinar e a matemática *para* ensinar. Assim, a cultura escolar, em sentido mais alargado, refere-se à formação para o ensino e ao ensino propriamente dito.

Ao longo desta quarta seção da tese, mostrou-se que a temática da graduação é ampla e optou-se por tomá-la a partir da perspectiva da *matemática do ensino*. Com isso, a partir deste momento passa-se a problematizar essa graduação do ensino tendo em vista a matemática do meio escolar.

Temática ampla, a graduação do ensino esteve presente em discussões voltadas para a organização escolar no Brasil ao menos desde meados do século XIX. Tal constatação foi tirada de notícias de jornais disponíveis na Hemeroteca Digital Brasileira usando-se como descritor o termo “graduação do ensino” e buscando-se em cada um dos períodos disponíveis na base de dados sem especificação de local e de período.

Deste modo, a primeira ocorrência do termo pesquisado remonta ao período de 1850-1859 na edição número 4 de 1854 dos *Annaes do parlamento brasileiro (RJ)*. Na sessão ocorrida em 16 de agosto de 1854, o deputado Augusto de Oliveira⁴¹ proferiu o discurso apresentado na Figura 2 a seguir.

Figura 2: Discurso de Augusto de Oliveira sobre a graduação do ensino



Fonte: Annaes do Parlamento brasileiro (1854).

⁴¹ Até o momento da escrita desta tese, não foram identificadas mais informações sobre este personagem.

Nessa figura, foi possível notar que a graduação do ensino ganhou espaço em meados do século XIX na Câmara dos Deputados em uma discussão voltada à organização do ensino militar no Brasil. Neste caso, a discussão focou na graduação do ensino. Na fala do deputado Augusto de Oliveira, destacada no excerto apresentado na figura, também é importante observar que “[...] os ordenados são marcados segundo a graduação do ensino; em toda a parte existe ensino primário, secundário e superior e os ordenados são correspondentes à ordem desses ensinos” (ANNAES..., 1954, p. 179). Esta fala deixa transparecer que havia uma ordenação do ensino, uma graduação própria do primário, secundário e superior.

Uma vez mostrado por meio deste exemplo que já em meados do século XIX se discutia a respeito de uma graduação do ensino, vale discorrer um pouco acerca da graduação do ensino de aritmética em diferentes momentos na cultura escolar. Com isto, pretende-se mostrar que essa graduação é um elemento da *matemática do ensino*.

Retomando o texto de Moraes, Bertini e Valente (2021), pode-se verificar que em tempos de ensino verbalístico, tempo da já citada vaga pedagógica conhecida como Escola Tradicional ou tempos de ensino tradicional, no que dizia respeito ao ensino de frações em análise de um manual publicado em 1870⁴², os autores concluíram que

[...] a ordem de *graduação* dos assuntos relativos às frações supõe que os alunos devam tomar contato inicial com as propriedades das frações, entendendo exemplos numéricos de cada enunciado delas. Dessa maneira, por exemplo, ao mencionar que uma fração aumenta quando se multiplica o seu numerador por qualquer número, tem-se: “Assim, a fração $\frac{6}{10}$ ficará elevada a $\frac{12}{10}$ se multiplicarmos por 2 o numerador”. Depois de vistas as propriedades com exemplos, o ensino deve seguir para as operações, suas regras e utilização das propriedades vistas. A cada operação, uma regra com exemplos numéricos. (MORAIS; BERTINI; VALENTE, 2021, p. 24-25, grifo dos autores).

Ao que parece, em tempos de Escola Tradicional, na graduação do ensino de frações se seguia uma *marcha* das propriedades para exemplos numéricos sobre cada uma delas. Em tempo posterior ao ensino tradicional, a graduação do ensino foi associada ao desenvolvimento das faculdades mentais das crianças (FERREIRA, 2017; OLIVEIRA, 2017).

Assim, muitas vezes tomada como *marcha do ensino intuitivo* ou simplesmente como *marcha intuitiva*, a graduação do ensino teve um papel relevante na cultura escolar em tempos de método intuitivo. Isso pode ser exemplificado por meio da pesquisa de Ferreira (2017) que, analisando apropriações de Pestalozzi em revistas brasileiras da primeira metade do século XX,

⁴² Se trata do manual de Daliguault disponível em: <<https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/179927>>.

constatou que, em uma das apropriações, verificou-se uma *marcha* que seguia do todo para as partes e do complexo para o simples. Com isto, o autor destacou que “[...] essa *marcha do ensino* ao que parece, vai de encontro com o proposto pelo método intuitivo [...] em que o ensino deveria seguir a ordem contrária, ou seja, das partes para o todo e do simples para o complexo” (FERREIRA, 2017, p. 98). Deste modo, é possível destacar que, em tempos de ensino intuitivo, a *marcha do ensino* estava relacionada com a passagem do simples ao complexo.

A revisão de literatura a partir de teses e dissertações apresentada anteriormente neste texto possibilitou destacar e concluir que existe uma graduação própria da pedagogia científica. Neste sentido, tomando a perspectiva da graduação como *marcha do ensino*, Valente e Pinheiro (2017) realçaram que:

Com a pedagogia científica há uma alteração na passagem do simples/complexo para o fácil/difícil. A constituição desse par fácil/difícil refere-se aos resultados das testagens em grande escala com alunos e as lides com os conteúdos matemáticos que deveriam aprender (VALENTE; PINHEIRO, 2017, p. 85-86).

Este resultado, obtido a partir da análise de escritos de Alfredina de Paiva e Souza, foi exemplificado pelos autores em termos de ensino aritmética da seguinte maneira:

Na operação de adição, na forma vertical, o aluno estudaria várias combinações simples, a princípio apenas com unidades e gradualmente os exercícios iam aumentando de dificuldade. Após certo tempo estudando a adição de unidades, na forma vertical, passar-se-ia à operar com dezenas, mas a mesma combinação utilizada na soma ($4 + 3$) seria mantida, então passava-se a executar operações na forma vertical com dezenas. A ideia geral era, sempre que possível, retomar um conhecimento já adquirido para a aprendizagem de um novo (VALENTE; PINHEIRO, 2017, p. 86-87).

Os autores também deram destaque ao trabalho de Irene de Albuquerque. Segundo eles, ela “[...] defendia a graduação das dificuldades de cada noção no início da aprendizagem” (VALENTE; PINHEIRO, 2017, p. 88). Um outro destaque que fizeram em relação à Irene de Albuquerque foi o de que as “[...] primeiras iniciativas, ainda que advindas de observações pessoais, de se graduar o ensino baseado nas dificuldades apresentadas pelas crianças, podem ser lidas em *Aritmética Preparatória*, publicada em 1927, por Francisco Leite” (VALENTE; PINHEIRO, 2017, p. 90).

A lógica da graduação do ensino seguindo uma ordem crescente de dificuldades também apareceu na análise realizada por França (2016) sobre o *Programa do Ensino Primário do Estado da Guanabara*. A autora destacou que havia uma orientação sobre a *gradação* do ensino

[...] distribuindo convenientemente a aprendizagem por todo o ano letivo em etapas de crescentes dificuldades, fazendo com isso o treino interessado de cada etapa até obter o êxito que permitisse passar à etapa seguinte por meio de exercícios e jogos bem planejados: “Graduar as dificuldades, ensinar pouco de cada vez; verificar se há domínio perfeito dos conhecimentos ou das habilidades básicas” (FRANÇA, 2016, p. 226).

Em tempos de pedagogia científica, foi possível constatar que ganhou destaque uma graduação do ensino de aritmética pautada principalmente pela relação com o desenvolvimento psicológico da criança. Essa graduação também apresentava características de uma *programação*, indicando que saberes deveriam ser ensinados em cada momento. Ao analisar trabalhos de Carleton Washburne⁴³, Pinheiro (2021) mostrou que

[...] No caso do ensino de frações, este não deveria ultrapassar os princípios básicos, suficientes à maioria das pessoas. Quanto à multiplicação e divisão envolvendo números inteiros, a recomendação seria reduzir os padrões de graduação para o nível dos requisitos exigidos para os alunos da sétima série. O contrário ocorria com a adição e a subtração de inteiros, ambas consideradas essenciais à demanda constante da vida (PINHEIRO, 2021, p. 4-5).

A graduação como *programação*, na pesquisa de Washburne analisada pela autora, também ficou evidente quando ela afirmou que

[...] aqui, as primeiras experiências desenvolvidas por Washburne estavam focadas no *que* e *como* ensinar aritmética para as crianças da escola primária. No entanto, ele também se preocupou com o *quando* ensinar, em que graus do ensino e em que ordem colocar os vários tópicos aritméticos. Até então, os estudos científicos tinham se dedicado ao *como* ensinar, deixando de lado a idade mais adequada para tal. E, sob a ótica de Washburne (1928), talvez este fosse um dos motivos da dificuldade da aprendizagem de algumas crianças, isto é, conteúdos ensinados antes da maturidade infantil. Afinal, a ordem lógica da própria aritmética estaria adequada à ordem psicológica do desenvolvimento infantil? (PINHEIRO, 2021, p. 9, grifos da autora).

Desse modo, a pesquisa de Pinheiro (2021) mostrou que, a partir da perspectiva de Washburne, era preciso haver uma articulação entre o *que*, o *como* e o *quando* ensinar. Assim, o tempo escolar próprio para o ensino de cada conteúdo aparecia como um fator fundamental na pedagogia científica, tomada na perspectiva daquele pesquisador.

⁴³ “Carleton Washburne foi um dos sujeitos que se destacou por suas experiências educacionais com o ensino individualizado, razão pela qual lhe foi solicitado por autoridades educacionais locais a organizar, em 1919, o sistema escolar público de Winnetka, uma pequena vila nos subúrbios de Chicago. Como *expert*, Washburne teve liberdade para pôr em prática um plano mais ambicioso do que vinha desenvolvendo desde 1914 na escola anexa à Escola Normal de São Francisco, resultando no desenvolvimento e na implementação de materiais curriculares de ciências, e na publicação de sua tese de doutorado intitulada *A science curriculum based on reseach*” (PINHEIRO, 2021, p. 2, grifos da autora).

As diferentes vagas pedagógicas, cada uma a seu modo, elaboraram suas graduações do ensino da aritmética. Ao longo deste trabalho, foi possível mostrar a graduação do ensino da aritmética como um elemento constituinte da aritmética *a* ensinar na pedagogia científica.

Na próxima seção, busca-se caracterizar por meio de manuais pedagógicos oriundos daquele momento histórico, uma graduação do ensino da aritmética como elemento constituinte da aritmética *para* ensinar.

5. OS MANUAIS PEDAGÓGICOS E A GRADUAÇÃO DO ENSINO DE ARITMÉTICA: elementos da aritmética *para* ensinar

Neste capítulo, analisa-se a graduação do ensino de aritmética no contexto da pedagogia científica. Para tanto, utilizou-se manuais pedagógicos datados de meados do século XX como fonte.

Assim, por meio da análise dos manuais, pretendeu-se caracterizar a graduação do ensino da aritmética de tempos de pedagogia científica como elemento constituinte da aritmética *para* ensinar. Vale ressaltar que, ao longo do texto, mostrou-se a partir da revisão bibliográfica que a graduação do ensino da aritmética referente à pedagogia científica pode ser caracterizada como um elemento constituinte da aritmética *a* ensinar.

Para tal empreitada, esta seção está dividida em três subseções: na primeira delas, discute-se a importância dos manuais pedagógicos como fonte para o estudo dos saberes profissionais do professor que ensinava matemática. Na segunda, enfatiza-se a análise de manuais estrangeiros que circularam no Brasil e deram destaque à psicologia como instrumento para a construção de uma graduação do ensino. Por fim, na terceira, colocou-se foco em manuais brasileiros que também destacaram a psicologia, mas em certa medida construíram uma graduação pautada nas experiências dos seus autores como professores e formadores. Esta graduação constituiu-se como elemento da aritmética *para* ensinar extraída dos manuais.

5.1 Os manuais pedagógicos e o saber profissional do professor que ensinava matemática

Todo o caminho teórico percorrido até a presente seção levou a uma problematização relativa a quais documentos analisar no intuito de elaborar considerações a respeito da graduação do ensino da aritmética como elemento constituinte da aritmética *para* ensinar.

Deste modo, era preciso escolher documentos que ajudassem a compor a empiria da pesquisa de forma a caracterizar a graduação do ensino da aritmética como elemento constituinte da aritmética *para* ensinar. Assim, para analisar esta matemática produzida no contexto da cultura escolar, principalmente do ponto de vista da formação de professores primários, tomaram-se como fontes principais de pesquisa manuais pedagógicos que circularam

no Brasil e nos quais, de algum modo, seus autores fizeram referências à pedagogia científica, ou a termos que remetessem a ela, como a experimentação e testes.

Vale destacar que esta escolha foi feita tendo-se em consideração os escritos do historiador francês Alain Choppin, pesquisador cuja produção se volta para os livros escolares. Este autor destacou que os “[...] manuais representam para os historiadores uma fonte privilegiada, seja qual for o interesse por questões relativas à educação, à cultura ou às mentalidades, à linguagem, às ciências” (CHOPPIN, 2002, p. 13).

Outro aspecto destacado por este autor a respeito da importância dos manuais para a História da Educação é o seu papel na transmissão de saberes.

Depositário de um conteúdo educativo, o manual tem, antes de mais nada, o papel de transmitir às jovens gerações os saberes, as habilidades (mesmo o “saber-ser”) os quais, em uma dada área e a um dado momento, são julgados indispensáveis à sociedade para perpetuar-se. Mas, além desse conteúdo objetivo cujos programas oficiais constituem a trama, em numerosos países, o livro de classe veicula, de maneira mais ou menos sutil, mais ou menos implícita, um sistema de valores morais, religiosos, políticos, uma ideologia que conduz ao grupo social de que ele é a emanção: participa, assim, estreitamente do processo de socialização, de aculturação (até mesmo de doutrinação) da juventude. É, igualmente, um instrumento pedagógico, na medida em que propõe métodos e técnicas de aprendizagem, que as instruções oficiais ou os prefácios não poderiam fornecer senão os objetivos ou os princípios orientadores (CHOPPIN, 2002, p. 14).

Os manuais pedagógicos são elementos importantes no âmbito da cultura escolar, pois possuem uma “[...] dupla natureza de produto e produtor de um discurso pedagógico que permite aos manuais para professores ocuparem um lugar especial na cultura escolar e pedagógica” (SILVA; CORREIA, 2004, p. 626). Vale destacar que eles foram tomados como fontes de análise neste trabalho pelo fato de serem elementos importantes na cultura escolar e por sua relação com a temática da graduação do ensino. Neste sentido, Choppin (2002) também enfatizou que os manuais

[...] prestam-se, portanto, muito particularmente ao estudo serial. Direcionando seu olhar aos manuais, o historiador pode, assim, observar, a longo prazo, a aparição e as transformações de uma noção científica, as inflexões de um método pedagógico ou as representações de um comportamento social; pode, igualmente, colocar sua atenção sobre as evoluções materiais (papel, formato, ilustração, paginação, tipografia, etc.) que caracterizam os livros destinados às classes (CHOPPIN, 2002, p. 15, grifo nosso).

Nesse excerto, constatam-se algumas indicações de elementos que o pesquisador pode buscar para a análise dos manuais, como aparições e transformações de conceitos científicos, mudanças nos métodos de ensino e até mesmo o modo como estes materiais eram editados. Os

manuais figuram assim como importantes fontes para a análise dos saberes transmitidos em determinados momentos históricos, bem como para o estudo serial desses saberes.

Os manuais são referências importantes do trabalho profissional do professor e, nesse sentido, Boto (2018) destacou em seu trabalho a importância destas fontes para a História da Educação, pois, segundo ela, era por meio deles que os discursos pedagógicos eram interpretados. Trevisan (2011, p. 80) afirmou que “[...] os manuais de ensino de Pedagogia eram destinados aos cursos de formação de professores”.

Silva (2018) também se deteve na análise de manuais pedagógicos, especificamente na circulação de saberes por meio deles no Brasil e em Portugal entre 1870 e 1970, e destacou que os “[...] alunos da Escola Normal usaram os manuais para estudarem pela primeira vez as questões relativas ao ofício de ensinar, encontrando nesses textos os saberes a partir dos quais conceberam sua profissão” (SILVA, 2018, p. 17). Além disso, a autora afirmou que eles mediarão “[...] a compreensão do pensamento educacional, expondo aos normalistas algumas informações que essas pessoas ainda não tinham lido ou entendido” (SILVA, 2018, p. 18).

Estas pesquisadoras mostraram o papel fundamental que os manuais pedagógicos exerceram na formação de professores. Ainda a respeito desta temática, Silva (2018) esclareceu que:

Por terem se destinado aos alunos da Escola Normal, os manuais pedagógicos constituíram-se numa das leituras promovidas pela escola. Mas, diferentemente do que ocorreu com os livros escritos para outros níveis de ensino, os textos dos normalistas foram feitos para ensinarem a essas pessoas modos de socializarem seus futuros alunos. Das afinidades e especificidades existentes entre os manuais escritos para as crianças e os que foram feitos para os futuros professores, foi possível assinalar o fato de ambos terem sustentado o processo de socialização escolar, organizando o discurso que instituiu os atores e a sua subjetividade. No entanto, no caso dos manuais para professores, existiu a construção de um discurso com foros de cientificidade acerca da natureza do ato escolar, do espaço-tempo da escola, da infância, da sua Psicologia e do seu desenvolvimento, das questões fisiológicas, dentre outras referências que legitimaram o modo como os saberes pedagógicos foram selecionados e dados a ler. Assim, a formação inicial do professor produziu efeitos sobre a socialização escolar das crianças, mas foi acompanhada de uma espécie de discurso particular, supostamente superior à dos textos do público infantil [...] (SILVA, 2018, p. 47).

Dentre os pontos apresentados por Silva (2018), foi possível destacar a importância dos manuais pedagógicos para reforçar, entre os futuros professores primários, o discurso científico voltado para a pedagogia e embasado na psicologia. Por isso, foi preciso olhar com bastante atenção o papel da psicologia nas escolas normais, uma vez que essas instituições referenciaram o seu desenvolvimento.

A produção das Escolas Normais constituiu, provavelmente, numa das mais importantes contribuições para o estabelecimento da Psicologia científica no Brasil, quer no âmbito teórico, quer no âmbito da aplicação prática de seus conhecimentos. Sua importância reside também no fato de muitos dos primeiros profissionais de Psicologia terem iniciado sua formação nessas escolas e terem sido elas incentivadoras da publicação das primeiras obras específicas de Psicologia no país (ANTUNES, 2014, p. 75).

Nesta citação, constata-se a relação próxima que a psicologia mantinha com as escolas normais, pois nessas instituições encontrou terreno fértil para seu desenvolvimento como ciência no Brasil. Deste modo, a autora ainda afirmou que era

[...] possível dizer que essas escolas foram uma das principais portas para a penetração da Psicologia científica no país e para a definição do perfil dos profissionais que se tornariam especialistas em Psicologia, além de, no caso da Escola Normal de São Paulo, ter sido uma das mais importantes bases para que a Psicologia se tornasse mais tarde disciplina universitária (ANTUNES, 2014, p. 81).

Por um lado, as escolas normais deram um suporte para a constituição da psicologia enquanto campo de pesquisa no Brasil. Por outro lado, foi por meio dos manuais pedagógicos que os fundamentos da psicologia começaram a circular na formação de futuros professores primários, como evidenciou Silva (2018).

Deste modo, os manuais puderam ser tomados como fontes privilegiadas para o estudo dos saberes presentes na formação de professores, pois as referências apresentadas mostraram que foi por meio deles que os professores em processo de formação tiveram contato com os mais diversos saberes.

No que diz respeito a aspectos do saber profissional do professor que ensinava matemática, vale destacar que algumas pesquisas já tomaram manuais pedagógicos como fontes de análise, como foi o caso da pesquisa de Maciel (2019), que buscou elementos caracterizadores de uma aritmética *para* ensinar em manuais pedagógicos publicados entre 1880 e 1920. O período de quarenta anos abarcado por Maciel (2019) possibilitou que a autora, em sua análise, pudesse comparar a aritmética *para* ensinar proposta nos manuais em diferentes vagas pedagógicas, desde a Escola Tradicional, passando pela Pedagogia Intuitiva até chegar a Escola Nova. Mas vale destacar que sua pesquisa se ateve prioritariamente à vaga pedagógica intuitiva.

A análise empreendida por Maciel (2019) apresentou elementos metodológicos que podem ser utilizados para a compreensão da aritmética *para* ensinar em uma perspectiva ampla, tais como: apresentação, explicação, graduação, articulação, generalização e avaliação. Foi com

base nestes elementos, presentes nos manuais de didática e pedagogia, que a autora teceu considerações em relação à aritmética *para ensinar* entre o final do século XIX e início do século XX.

Antes de abordar especificidades deste trabalho, vale trazer outras pesquisas que, assim como a de Maciel (2019), buscaram caracterizar elementos do saber profissional do professor que ensinava matemática a partir de uma perspectiva sócio-histórica, debruçando-se sobre manuais pedagógicos como fonte de pesquisa.

Um outro trabalho no qual foi abordado o saber profissional do professor que ensinava matemática presente em manuais pedagógicos foi o de Fortaleza (2021), que analisou a geometria do método intuitivo também com o olhar voltado para a matemática *para ensinar* e, no caso específico, para uma geometria *para ensinar*. Para a construção de seu trabalho, utilizou as categorias recompilação, comparação e sistematização conforme propostas por Burke (2016).

No que se referia à recompilação de experiências docentes a partir da noção de saber objetivado, Fortaleza reescreveu esse conceito tendo em conta “*recompilação de manuais de pedagogia*” (2021, p. 80, grifo da autora). A recompilação foi ainda redefinida e, com isso, a autora destacou:

Considerando a especificidade desta pesquisa de doutoramento, que objetiva caracterizar uma *geometria para ensinar* a partir de manuais de Pedagogia direcionados à formação de professores dos primeiros anos escolares no Brasil entre 1870 e 1920, refinamos as denominações das etapas metodológicas, reescrevendo-as da seguinte forma: *recompilação de elementos de uma geometria para ensinar em manuais de Pedagogia, análise comparativa dos elementos de uma geometria para ensinar em manuais de Pedagogia e sistematização de elementos de uma geometria para ensinar nos primeiros anos escolares do Brasil entre 1890 e 1920* (FORTALEZA, 2021, 87, grifos da autora).

A partir deste caminho metodológico, a autora pôde fazer a constatação de que “[...] havia articulação entre o campo disciplinar matemático e as ciências da educação, a qual mostrava-se pautada na elaboração de uma geometria a ensinar e de uma *geometria para ensinar*” (FORTALEZA, 2021, p. 189, grifo da autora). Ainda sobre a geometria como um saber profissional presente nos manuais pedagógicos a partir da recompilação, comparação e sistematização, a autora concluiu, em relação ao método intuitivo e ao saber profissional do professor, que:

Geometria a ensinar, materiais de ensino, a graduação do ensino, a forma como os conteúdos são apresentados e a maneira como conduzir a

generalização, são elementos do saber profissional do professor que, articulados, constituem a *geometria para ensinar*. Considerando a natureza de suas convergências, como discutimos, pode-se afirmar que tais elementos estão pautados no método intuitivo (FORTALEZA, 2021, p. 194, grifos da autora).

Pavarin (2020), assim como Fortaleza (2021), analisou manuais tomando elementos de Burke (2016) como norte para um caminho metodológico voltado para o ensino intuitivo. A autora focou no ensino da aritmética, questionando a respeito da participação dos problemas na caracterização de uma aritmética presente em manuais da vaga intuitiva. A partir da sua sistematização, destacou a presença de

[...] relações entre a *matemática a ensinar* e a *para ensinar*: A primeira, ou seja, a *matemática a ensinar*, não é apenas definida pela apresentação dos conteúdos pela ordem da matemática acadêmica, a matemática a ser ensinada é caracterizada pela participação dos problemas de aritmética na marcha do ensino. A segunda, a *matemática para ensinar*, não é definida com os professores sabendo as operações e resolvendo os problemas, eles precisam saber como propor e abordar os problemas de aritmética como um dos elementos centrais no ensino. Precisam saber como ensinar a aritmética a partir destes problemas, pois na *Aritmética intuitiva* os problemas de aritmética passam a ser uma das ferramentas para se ensinar a matéria (PAVARIN, 2020, p. 95, grifos da autora).

Ainda nesta mesma linha de sistematização de saberes em manuais pedagógicos a partir de Burke (2016), o trabalho de Gregório (2020) tratou de uma matemática *para ensinar* soma a partir de manuais publicados no Brasil entre 1950 e 1970. Nesse trabalho, a autora destacou que essa matemática

[...] pode ser encontrada nos manuais citados como orientações e indicações de como trabalhar o conteúdo levando em consideração a abordagem de ensino explorada em cada manual. Uma das indicações presentes nos manuais é o uso de objetos para a realização da soma, utilizando-se de representações gráficas, tais como gravuras, fichas e peças de madeiras, para introduzir o ensino; além de que o ensino desconectado da realidade não apresenta ao aluno qualquer significação. A utilização de situações reais e a aplicação de problemas que envolvam a realidade do dia a dia do aluno, segundo os autores, favorecem o ensino da soma (GREGÓRIO, 2020, p. 86).

Os trabalhos apresentados mostraram que os manuais vêm sendo tomados como fontes para a análise de elementos do saber profissional do professor que ensinava matemática como a matemática *a ensinar* e a matemática *para ensinar*. Essas fontes, aliadas a elementos apresentados Burke (2016), têm sido responsáveis por uma sistematização de saberes que, em certos momentos históricos, foram referências na formação profissional dos professores.

Uma vez justificada a importância dos manuais pedagógicos como fonte para uma discussão histórica a respeito dos saberes profissionais dos professores que ensinavam

matemática, vale destacar que, com base nos critérios de referência à pedagogia científica e a necessidade de graduar os saberes já enunciados no início desta seção, tomaram-se quatro obras para a análise da graduação do ensino da aritmética e sua caracterização como elemento constituinte de uma aritmética *para ensinar*: *Como se ensina a aritmética?* de Faria de Vasconcelos (1933); *Pedagogia científica: psicologia e direção da aprendizagem*, de Miguel Alfredo Aguayo (1936); *Práticas escolares: de acordo com o programa de prática do ensino do curso normal e com a orientação do ensino primário*, de Antônio D'Ávila (1942) e *Metodologia da Matemática: orientação detalhada e sugestões prática acerca de todos os pontos do programa do curso primário*, de Irene de Albuquerque (1951).

Nas subseções seguintes, analisa-se a graduação nesses manuais, o que se fez em dois blocos: no primeiro deles, discorre-se a respeito dos manuais de Vasconcelos (1933) e Aguayo (1936), autores estrangeiros com uma grande circulação no Brasil; já em um segundo momento, abordam-se os manuais de D'Ávila (1942) e Albuquerque (1951), autores brasileiros que também tiveram lugar como referências na formação de professores.

A análise dos manuais levou em conta a categorização dos elementos da graduação que foram apresentados na seção anterior. Vale destacar que, embora a graduação englobe outras categorias, como o caso do *currículo* e da *progressão* do ensino, analisar os manuais possibilitou a percepção de que nem todas as categorias da graduação do ensino são apropriadas para tecer considerações sobre estas fontes e, por isso, para tal empreitada, adotaram-se as categorias apresentadas no Quadro 2:

Quadro 2: Categorias adotadas na análise da graduação nos manuais pedagógicos

Categoria	Significado
<i>Seleção</i>	Saberes escolhidos para comporem os manuais.
<i>Gradação / Sequência</i>	Ordem em que os saberes aparecem nas obras.
<i>Programa</i>	Articulação entre <i>seleção</i> e <i>gradação</i> .
<i>Programação</i>	Dimensão temporal do ensino.
<i>Marcha do ensino</i>	Passo a passo que o professor deveria dar para ensinar um determinado conteúdo.

Fonte: Elaborado pelo autor.

5.2 Manuais pedagógicos e a graduação do ensino de aritmética

Na seção anterior, mostrou-se como, a partir de experimentos realizados por pesquisadores da psicologia, construiu-se um discurso voltado para uma graduação do ensino da aritmética produzida cientificamente. Tal graduação estava voltada ao ensino e podia ser caracterizada como elemento constituinte de uma aritmética *a ensinar*.

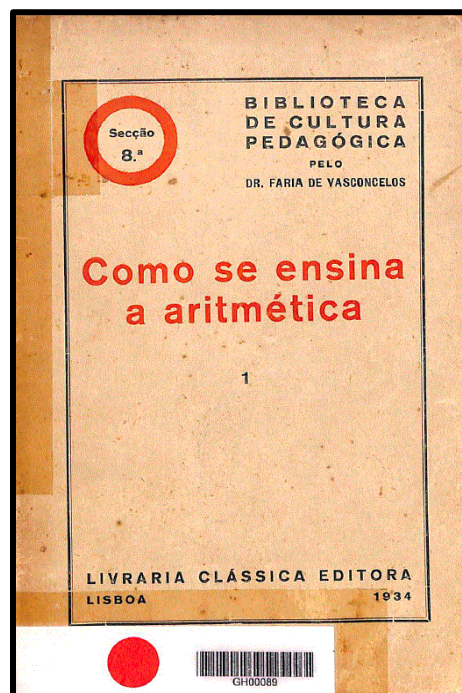
Neste momento, passa-se a analisar a graduação do ensino de aritmética a partir de apropriações⁴⁴ que dois renomados autores, Alfredo Miguel Aguayo e António Sena Faria de Vasconcelos, fizeram de discursos provenientes da pedagogia científica. A escolha desses autores se deu a partir da circulação de suas obras, haja vista que estiveram presentes em programas de formação de professores, como é o caso do *Programa dos cursos regulares e extraordinários para o ano de 1937* (SÃO PAULO, 1937), em que a obra de Aguayo aparece como referência nas seções de psicologia e pedagogia e a de Faria de Vasconcelos, na de pedagogia. A partir da análise destes manuais, discorre-se sobre uma graduação do ensino da aritmética que funcionava como ferramenta do trabalho docente e, com isso, caracterizadora de elementos constituintes de uma aritmética *para ensinar*.

5.2.1 A graduação do ensino de aritmética em Faria de Vasconcelos

O manual: *Como se ensina a aritmética*, publicado em 1933 em Lisboa por Faria de Vasconcelos, dada sua notoriedade, foi objeto de diversas pesquisas no contexto da história da educação matemática. Antes de discorrer um pouco sobre algumas dessas pesquisas, a título de ilustração da obra, apresenta-se sua capa na Figura 3 a seguir.

⁴⁴ Entende-se neste trabalho que tal conceito refere-se a uma “[...] história social dos usos e a interpretações, remetidas às suas determinações fundamentais e inscritas nas práticas específicas que as constroem” (CHARTIER, 2011, p. 153).

Figura 3: Capa do Manual Como se ensina a aritmética de Faria de Vasconcelos



Fonte: Vasconcelos (1933⁴⁵), a obra original encontra-se no acervo do Centro de Documentação do GHEMAT em São Paulo.

A respeito deste autor, tem-se as seguintes informações:

[...] Educador, estudou na Faculdade de Ciências Sociais da Universidade Nova de Bruxelas, onde depois atuaria junto às cadeiras de pedagogia e de psicologia. Publicou, já em 1909, um trabalho que foi muito utilizado nas escolas de formação de professores: *Lições de pedologia e pedagogia experimental*. A partir de 1912 dirigiu uma escola por ele próprio fundada em Bierges-Les-Wavre, experiência caracterizada por contemporâneos como uma das principais ações de aplicação dos princípios renovados em educação. Essa escola seria fechada após a invasão alemã na Bélgica em 1914. Entre 1914 e 1915, Faria de Vasconcelos integrou a equipe que compunha na época o Instituto Jean-Jacques Rousseau em Genebra, onde ele teria estreito contato com Claparède, Ferrière e Bovet (BOTO, 2019, p. 2, grifos da autora).

Nesse excerto é possível notar a forte ligação que Faria de Vasconcelos tem com a pedagogia científica, tendo inclusive publicado uma obra (*Lições de pedologia e pedagogia experimental*) que se tornou referência no assunto e bastante utilizada na formação de professores.

O manual: *Como se ensina a aritmética*, tomado como fonte de análise nesta seção, também apresenta explicitamente a presença da pedagogia científica desde o Prefácio. Nele, o

⁴⁵ Vale ressaltar que, apesar de aparecer o ano de 1934 na capa, a opção feita foi utilizar como referência o ano de 1933, que é o que consta na contracapa e o ano que outros pesquisadores que se debruçaram sobre o manual atribuem à obra. Além disso, no manual não consta nenhuma indicação de que se trata de uma segunda edição ou reimpressão.

autor já esclarece que a “[...] maneira de tratar os problemas, as conclusões que se fazem, assentam nos resultados das investigações mais recentes feitas no domínio da didática, renovada pela psicologia e pela experimentação científicas” (VASCONCELOS, 1933, p. 9). Uma vez que o autor afirma que toda a obra é embasada na pedagogia científica, faz sentido levantar a hipótese de que foi por meio dela que ele construiu, na obra, uma graduação do ensino de aritmética voltada à formação de professores primários.

Esse manual se constituiu fonte importante pois

[...] dá a perceber como a psicologia, especialmente a psicologia experimental de aferição estatística, impõe uma lógica própria a essa organização que se relaciona com a graduação do ensino. Como se disse anteriormente, uma dada graduação liga-se, implicitamente, a uma concepção de ensino e aprendizagem dos alunos. O modo como graduar está intimamente associado a essa concepção. No período que estudamos, a pedagogia científica, em que se predomina a psicologia experimental de base estatística, ditará essa graduação, justificará o modo como deverá ocorrer a marcha do ensino, o passo a passo do trabalho docente com os conteúdos escolares, com a aritmética escolar (VALENTE; FERREIRA, 2021, p. 10).

Ainda sobre esse manual, vale destacar que era composto de 23 capítulos, nos quais o autor

[...] discutia sobre os problemas de didática, especificamente, nas operações com números inteiros. Para isso, debruçou-se sobre diversos estudos que tratavam do ensino de aritmética para fundamentar sua discussão acerca da importância de o professor ter o conhecimento científico da criança e da disciplina para melhor ensinar (MARQUES, 2018, p. 70).

A partir desse excerto do trabalho de Marques (2018), pode-se reafirmar o caráter científico que tinha a obra de Faria de Vasconcelos aqui analisada, pois, conforme afirma a autora, era preciso ter conhecimento científico da disciplina a ensinar e da criança. Com isso, interessa para este trabalho compreender como, a partir dos experimentos, Faria de Vasconcelos propôs uma graduação do ensino de aritmética e como tal graduação pôde ser caracterizada em termos de uma aritmética *para* ensinar.

Um primeiro movimento de análise da graduação do ensino de aritmética em *Como se ensina a aritmética*, e que levou em conta o saber profissional do professor que ensina matemática a partir da perspectiva teórica de Hofstetter e Schneuwly (2017a), foi feito por Valente e Ferreira (2021) como forma de divulgação dos resultados parciais de pesquisa desta tese e já foi apresentado em momento anterior. Nessa pesquisa, o texto versou sobre aspectos da aritmética *para* ensinar. A graduação apareceu como um dos elementos caracterizadores. Assim, nesta tese, pretende-se aprofundar a análise dessa graduação.

Tendo em conta as categorias analíticas apresentadas anteriormente, uma primeira coisa a se considerar é a *seleção* dos saberes que deveriam ser objeto do ensino. Que saberes foram escolhidos por Vasconcelos (1933) para compor seu manual? É possível identificar alguma justificativa que embasasse essa escolha?

Como o próprio título da obra indica, tratava-se de um manual voltado ao ensino de aritmética abordada de uma perspectiva didática. O autor iniciou o texto com a justificativa de que os saberes “[...] serão tratados à luz dos mais recentes pontos de vista da ciência da educação e do ensino” (VASCONCELOS, 1933, p. 7). Apesar de ainda não apresentar quais eram os saberes por se tratar do início do Prefácio da obra, o autor deixou claro que seu posicionamento era aquele das ciências da educação, ou seja, sua obra não tinha um caráter disciplinar.

Ainda nas palavras iniciais presentes no Prefácio, foi possível constatar a primeira delimitação de saberes em sua obra. Segundo o autor, os “[...] problemas de didática versados referem-se apenas às operações com números inteiros, que são verdadeiramente fundamentais e sem os quais não é possível dar um passo em aritmética” (VASCONCELOS, 1933, p. 9).

Sobre a *gradação* ou *sequência* dos saberes na obra, foi possível afirmar que o autor seguiu uma lógica cuja preocupação era tratar dos saberes da aritmética relativos ao desenvolvimento psicológico da criança. Isso ficou mais bem explicitado quando se analisou a organização do manual, pois Faria de Vasconcelos (1933) inicialmente deu ênfase as investigações psicológicas relativas à aritmética, conforme pode ser observado no Quadro 3 a seguir.

Quadro 3: Seis primeiros capítulos do manual: *Como se ensina a aritmética*

- | |
|--|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. Funções da aritmética 2. A psicologia e a renovação do ensino de aritmética 3. As investigações e a renovação da aritmética 4. As técnicas de investigações 5. As medidas educativas: categorias de “tests”, formas que podem revestir 6. A carência de informação científica constitui um obstáculo no ensino da aritmética |
|--|

Fonte: Elaborado pelo autor a partir de Vasconcelos (1933).

Na organização inicial de capítulos, Vasconcelos (1933) não abordou saberes específicos da aritmética, apesar de o fazer dentro dos capítulos. Foi possível notar que, na *gradação* escolhida por ele, a aritmética estava posicionada em função do desenvolvimento psicológico da criança. Deste modo, foi plausível afirmar que a lógica de organização dos

conteúdos da aritmética precisaria estar de acordo com esse desenvolvimento, tratava-se de uma evidência da psicologia ditando o ritmo do ensino.

Esse movimento de *gradação* dos saberes com destaque para a psicologia, ao que tudo indica advinha de uma matriz teórica estadunidense, haja vista que, ao fazer um levantamento dos autores citados por Vasconcelos (1933), Marques (2018) enfatizou que a maioria deles eram de origem estadunidense e, para ela, isso podia ser justificado pelo fato de as “[...] primeiras décadas do século XX serem marcadas por diversos debates sobre a reestruturação das disciplinas escolares nos Estados Unidos” (MARQUES, 2018, p. 73).

Outros dois capítulos do manual que puderam ser posicionados com ênfase na psicologia são os capítulos 13 e 18, que são apresentados no Quadro 4.

Quadro 4: Capítulos 13 e 18 do manual: *Como se ensina a aritmética*

13. Investigações de C. Washburne e M. Vogel sobre se há combinações que sejam inerentemente difíceis

18. O problema do erro; sua importância; influência e persistência do erro; necessidade de o evitar e de o corrigir

Fonte: Elaborado pelo autor a partir de Vasconcelos (1933).

Estes dois capítulos trataram de duas temáticas muito específicas: as investigações sobre combinações de operações e sobre o erro. Eles introduziram dois blocos de capítulos nos quais Faria de Vasconcelos se aprofundou sobre essas temáticas em relação a cada uma das operações com inteiros.

Antes de tecer considerações sobre esses dois blocos de capítulos, vale destacar que a partir do capítulo sete, o autor começou a tratar especificamente dos conteúdos da aritmética e, com isso, ao contrário do que ocorreu com os capítulos iniciais, deixou de se referir à aritmética de um modo geral. Ao que tudo indica, a psicologia seria colocada em função dos conteúdos específicos da aritmética, como fica evidente no Quadro 5.

Quadro 5: Capítulos 7-11 de Faria de Vasconcelos (1933)

7. Os conceitos numéricos; os seus principais aspectos
8. Investigações de Buckingham e Maclatchy sobre os conhecimentos numéricos que possuem as crianças, quando entrem na escola primária.
9. A idade mental da criança mínima e ótima para começar o estudo das diferentes operações e processos aritméticos
10. Capacidades e operações aritméticas
11. As operações fundamentais da aritmética; as combinações elementares

Fonte: Elaborado pelo autor a partir de Vasconcelos (1933).

Nessa *gradação*, foi possível constatar que Vasconcelos (1933) começou a enfatizar os saberes da aritmética também em função da psicologia, levando em consideração conceitos relativos ao ensino dos números seguidos das operações aritméticas.

Os outros capítulos que compuseram o sumário puderam ser divididos em dois grupos, eram aqueles precedidos respectivamente pelos capítulos 13 e 18 apresentados anteriormente no Quadro 4. Em cada um desses dois grupos, o autor aprofundou as temáticas dos dois capítulos precedentes a partir de exemplos com as operações, como pode ser observado nos Quadros 6 e 7 que seguem.

Quadro 6: Capítulos que trataram das investigações referentes às operações

14. Questões de método na soma
15. Questões de método da subtração
16. Questões de método na multiplicação
17. Questões de método na divisão

Fonte: Elaborado pelo autor a partir de Vasconcelos (1933).

Quadro 7: Capítulos que trataram do problema dos erros relativos às operações

19. Tipos de defeitos e de erros na soma dos números inteiros
20. Tipos de defeitos e de erros na subtração dos números inteiros
21. Tipos de defeitos e de erros na multiplicação dos números inteiros
22. Tipos de defeitos e de erros na divisão dos números inteiros
23. Esboço rápido das causas dos erros que se cometem nas operações com números inteiros

Fonte: Elaborado pelo autor a partir de Vasconcelos (1933).

O *programa* elaborado por Vasconcelos, ao que tudo indica, visava formar o professor que ensinava matemática levando em consideração o desenvolvimento psicológico da criança e como ela aprendia. Vale destacar que Faria de Vasconcelos integrava o rol de autores portugueses que, entre 1910 e 1940, “[...] mobilizaram saberes no intuito de compreender os alunos” (SILVA, 2018, p. 213).

Uma vez feitos estes comentários mais gerais em relação à organização da obra, passa-se a discorrer sobre a graduação que aparecia disposta nos capítulos. Inicialmente foi possível destacar que o autor apresentou uma série de considerações na primeira seção, intitulada *Funções da aritmética*, cujo intuito era o de contextualizar a importância do ensino da aritmética, como o próprio título indica. Assim, esse capítulo no contexto da obra deveria cumprir o papel de introduzir e contextualizar a importância da aritmética, pois tal disciplina, conforme argumentou o autor,

[...] fornece qualquer coisa que nenhuma outra disciplina da escola elementar consegue dar: oferece o tipo mais vasto de generalização e permite a organização da experiência. Pelo número, que não se encontra na natureza, introduz o homem nela ordem e sistema; por meio do número aplicado às unidades de medida descreve com precisão e reproduz com exatidão as suas ideias; a verificação do pensamento quantitativo é o maior resultado matemático e nenhuma parte da matemática é mais poderosa para atingir este objetivo do que a da escola elementar (VASCONCELOS, 1933, p. 15-16).

Na segunda seção, Vasconcelos (1933) discorreu a *psicologia e a renovação do ensino da aritmética*.

É fácil compreender quanto a psicologia infantil tem contribuído para o progresso ensino da aritmética, se se tiver presente que o *conhecimento do aluno*, da sua natureza e desenvolvimento mental, das suas capacidades características e diferenciais, das suas tendências e interesses *fornece a base, os fundamentos, a orientação para atuar sobre a criança convenientemente*. Mas para atingir este objetivo é necessário ainda, além do conhecimento psicológico do aluno, o conhecimento psicológico da disciplina e dos métodos e processos de ensinar. Graças aos dados fornecidos pela psicologia infantil e pela psicologia da disciplina, têm sido esclarecidos problemas fundamentais da maior importância pedagógica e didática (VASCONCELOS, 1933, p. 18, grifo nosso).

Esse excerto mostrou uma aritmética *para* ensinar que apresentava algumas características que deveriam ser tomadas em consideração, como a necessidade de saberes sobre o aluno e sobre a disciplina, perspectiva típica de um saber *para* ensinar conforme apontado anteriormente a partir de Hofstetter e Schneuwly (2017a). Um dos problemas fundamentais elencados por Vasconcelos (1933) se referia

[...] à organização dos programas da disciplina: idade em que deve ser iniciado o seu estudo, distribuição das matérias, pelos diversos anos, princípios fundamentais a que esta distribuição deve obedecer, finalidades a que se deve atender (VASCONCELOS, 1933, p. 19).

Deste modo, um problema fundamental dizia respeito a uma graduação do ensino que deveria discorrer a respeito de como os conteúdos seriam organizados ao longo do tempo. Era preciso estabelecer uma *programação* do ensino que levasse em conta a finalidade de cada conteúdo.

Ao tratar das *Investigações e a renovação da aritmética* na terceira seção da obra, Vasconcelos (1933) iniciou argumentando a respeito da importância das investigações para a pedagogia e afirmou que a “[...] aritmética é uma das disciplinas onde o movimento de investigação tomou maior extensão e intensidade” (VASCONCELOS, 1933, p. 19-20). Com esta afirmação, reforçou o destaque da aritmética como uma das disciplinas tratadas pela pedagogia científica.

O autor se amparou em resultados obtidos por Brownell⁴⁶ para elencar 67 problemas resultantes das investigações em aritmética. Um desses problemas dizia respeito à “[...] colocação da aritmética nos graus de ensino” (VASCONCELOS, 1933, p. 20-21). Esta problemática de pesquisa revelava uma graduação do ensino que também pôde ser caracterizada como uma *programação*, pois dizia respeito à organização dos conteúdos da aritmética nos diferentes graus.

Para além de organizar os conteúdos, havia também a necessidade de distribuir os alunos em cada grau do ensino e, com isso, uma outra problemática listada pelo autor discorria sobre a “[...] inadequada distribuição dos alunos nos diferentes graus” (VASCONCELOS, 1933, p. 21).

Na sexta seção da obra intitulada *A carência de informação científica constitui um obstáculo no ensino da aritmética*, Vasconcelos (1933) indicou alguns problemas que, segundo ele, na época ainda não haviam sido resolvidos por falta de conhecimentos científicos. Assim, o primeiro desses problemas foi apresentado por ele nos seguintes termos:

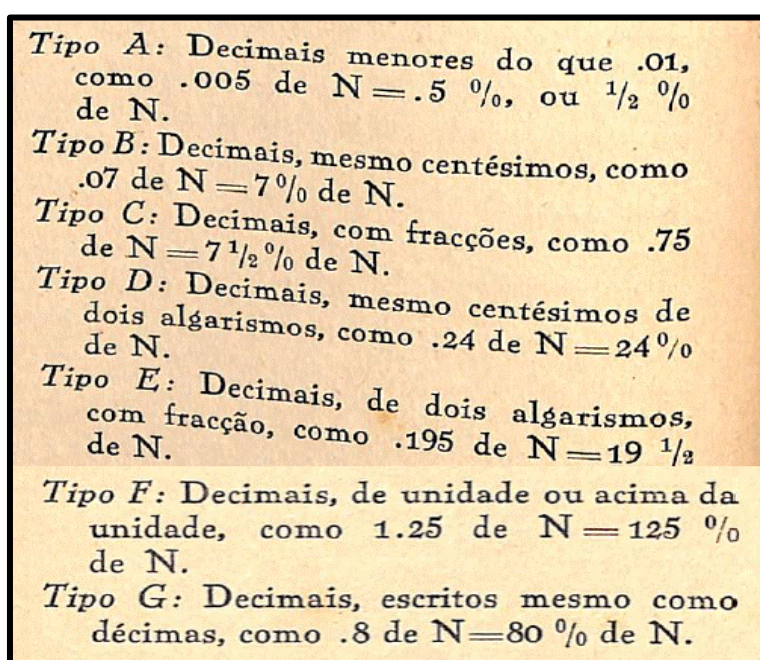
⁴⁶ Apesar de não trazer referências na obra, tudo indica que Vasconcelos (1933) se refere à William Artur Brownell (1895-1977), importante pesquisador estadunidense que se doutorou na Universidade de Chicago (1926) e atuou como professor nas universidades Illinois, Cornell, Michigan, George Peabody College for Teachers, Universidade de Duke, onde passou quase 20 anos, passou também pela Universidade Northwestern e se aposentou em 1962 na Universidade da Califórnia situada em Berkeley. Também atuou como vice-presidente da American Psychological Association (APA) e, como pesquisador, dedicou-se às questões envolvendo a aprendizagem da aritmética (McCONNELL *et al.*, 1978).

- 1) Fatores de interferência: pouco se sabe acerca destes fatores na aprendizagem, pois não é certo que os mais importantes tenham sido registrados. Suponhamos que *uma criança aprende nos graus inferiores* que o meio de obter uma parte fracional de qualquer coisa consiste na divisão pelo denominador da fração; para obter $\frac{1}{2}$ de 20, divide-se pelo número inteiro 2; para obter $\frac{1}{4}$ de 16 metros de fazenda, divide-se pelo número inteiro 4, etc. Ulteriormente a criança tem que aprender que o ‘de’ significa multiplicar; como $\frac{3}{4} \times 16$ ou $\frac{5}{6}$ de 30, etc. É verdade que, mesmo na multiplicação, a divisão pelo denominador é ainda empregada (VASCONCELOS, 1933, p. 30-31, grifo nosso).

Esse problema tratava de um passo a passo apresentado pelo autor sobre como a criança aprenderia fração e possibilitou refletir a respeito de uma *marcha do ensino* que o professor deveria seguir, tendo em conta esta aprendizagem. Em tal *marcha*, inicialmente para obter uma fração de um inteiro, o professor deveria ensinar a dividir pelo denominador da fração que se queria obter, só depois o professor deveria ensinar que, para obter uma fração de um inteiro, bastava multiplicar essa fração pelo inteiro.

Em um outro problema, o autor abordou algumas dificuldades de aprendizagem como um dos obstáculos a serem enfrentados pelos professores e pesquisadores. Segundo ele, era “[...] inteiramente provável que há certos exercícios numa classe de dificuldade que são realmente mais difíceis do que outros noutra classe de maior dificuldade média” (VASCONCELOS, 1933, p. 32). Para ilustrar esses diferentes níveis de dificuldades, o autor apresentou alguns tipos de dificuldades em relação à transformação de decimais em porcentagens, como mostrado na Figura 4 a seguir.

Figura 4: Tipos de dificuldades dos decimais



Fonte: Vasconcelos (1933, p. 32-33).

Nesta figura, foi possível verificar que o ensino dos números decimais foi apresentado seguindo uma *marcha do ensino* que obedecia a diferentes níveis de dificuldades, exemplificados por tipos de A a G. A disposição do ensino de acordo uma ordem de dificuldades era, como demonstrado ao longo deste trabalho, uma das características da aritmética escolar em tempos de pedagogia científica, isso evidencia uma aritmética *para* ensinar que, neste caso, articula-se com a aritmética *a* ensinar.

Acerca do ensino de números, apoiado em investigações de Buckingham e Maclatchy⁴⁷, Vasconcelos (1933, p. 41-42) afirmou que o “[...] ensino de número, a sua aprendizagem, depende primordialmente da preparação da criança, do grau de desenvolvimento, do seu interesse pelo número e do conhecimento que dele tenha adquirido”. Com relação a esse ensino dos números, a Comissão dos Sete⁴⁸, a partir de suas investigações a respeito de como as crianças aprendiam a aritmética, elaborou um quadro com a idade mental mínima e ótima para o ensino de cada conteúdo da aritmética. Os resultados foram apresentados por Vasconcelos, conforme mostrado na Figura 5.

Figura 5: Idade mental mínima e ótima para ensino dos conteúdos da aritmética de acordo com a Comissão dos Sete

Tópicos	Idade mental mínima	Idade mental ótima
Factos de adição. Somas até 10.	6 anos e 5 meses	7 anos e 4 meses
Factos de subtração. Os 50 mais fáceis.	6 anos e 7 meses	8 anos e 3 meses
Factos de adição. Somas acima de 10	7 anos e 4 meses	7 anos e 11 meses
Factos de subtração. Os 50 mais difíceis	7 anos e 8 meses	8 anos e 11 meses
Processos de subtração	8 anos e 9 meses	8 anos e 9 meses
Significação de fracções	9 anos e 0 meses	10 anos e 9 meses
Adição e subtração de fracções homogéneas e números mistos com fracções homogéneas	9 anos e 10 meses	11 anos e 1 mês
Factos de multiplicação	10 anos e 2 meses	10 anos e 2 meses
Multiplicação de compostos	10 anos e 4 meses	11 anos e 0 meses
Gráficos	10 anos e 5 meses	
	(Idade cronológica)	
Decimais	10 anos e 11 meses	12 anos e 6 meses
Divisão breve	11 anos e 4 meses	11 anos e 4 meses
Significação de fracções. Agrupamento (1)	11 anos e 7 meses	13 anos e 4 meses

(1) Isto implica mostrar $\frac{3}{4}$ de 12 objectos, $\frac{1}{5}$ de 15 objectos, à vista, antes do ensino da manipulação das fracções.

Fonte: Vasconcelos (1933, p. 48-49).

⁴⁷ Não foram identificadas maiores informações a respeito destes autores.

⁴⁸ De acordo com Pinheiro (2017, p. 56), trata-se de um conjunto de especialistas que foram reunidos por Washburne “[...] em condições bem definidas para elaborar cientificamente um programa mínimo para o ensino de aritmética na escola primária”.

Nos resultados obtidos pela Comissão dos Sete e apresentados por Vasconcelos (1933), verifica-se uma graduação da aprendizagem por parte das crianças de acordo com seu desenvolvimento mental. De posse de tal resultado, o professor poderia pensar em uma *marcha do ensino* que deveria obedecer a uma ordem crescente de dificuldades, partindo da soma até 10 para crianças de com idade entre 6 e 7 anos, mais ou menos nessa idade também já começaria a tratar das subtrações mais fáceis. Depois de tratar das somas e subtrações consideradas mais difíceis entre 7 e 8 anos, o professor passaria a abordar a significação das frações para as crianças de 9 a 10 anos. Somente depois deveria tratar da multiplicação e da divisão para as crianças com idade entre 10 e 11 anos, até retornar às frações que seriam tratadas de forma agrupada para as crianças de 11 a 13 anos.

É importante destacar que, nos resultados da Comissão dos Sete apresentados por Vasconcelos (1933), ficou evidente que a *marcha do ensino* associada ao desenvolvimento mental não deveria seguir uma lógica disciplinar na qual somente depois de ter contato com as operações de somar, subtrair, multiplicar e dividir é que o aluno passaria a ter contato com as frações. Na proposta da Comissão dos Sete, o contato com as frações deveria intercalar essas operações, aparecendo de uma forma considerada mais fácil depois da subtração e reaparecendo de um modo considerado mais difícil depois da divisão.

Na nona seção da obra, Vasconcelos (1933), ainda amparado nas pesquisas da Comissão dos Sete, discorreu sobre a *idade mental da criança mínima e ótima para começar o estudo das diferentes operações e processos aritméticos*. Assim, questionou:

Haverá um estado de preparação mental para a aprendizagem duma determinada operação aritmética? Em tal caso, esta preparação pode medir-se? Quais são os efeitos do ensino duma operação, antes que a criança esteja mentalmente em condições de a estudar, comparados com os efeitos do ensino depois de a criança ter atingido esta preparação? Como pode o programa ser reorganizado em harmonia com o crescimento psicológico da criança, de modo que ela passa estudar os tópicos do programa, quando está apta mentalmente para os estudar? (VASCONCELOS, 1933, p. 46-47).

A última questão dizia respeito justamente a elaboração de um *programa* que levasse em conta o desenvolvimento mental da criança. Assim, a graduação do ensino precisaria levar em consideração a capacidade da criança para aprender um determinado conteúdo e, com isso, o autor argumentou que os “[...] fracassos na aritmética são devidos, em grande parte, ao fato de o ensino das operações ser feito em tempo impróprio, como observa com razão Washburne” (VASCONCELOS, 1933, p. 50).

Tratando especificamente das capacidades na décima seção, o autor concluiu:

Toda a operação, todo o processo aritmético é uma *hierarquia de capacidades*; num exemplo dado umas capacidades são utilizadas e outras não, uma determinada unidade de capacidade pode preceder ou seguir-se a outra; e certos fatos e não outros podem ser utilizados; as capacidades ou as unidades de capacidade ou os elementos da solução total podem ser analisados ou registrados de vários modos; um exemplo pode conter alguns e não todos os fatos que fazem parte do processo total (VASCONCELOS, 1933, p. 56, grifo nosso).

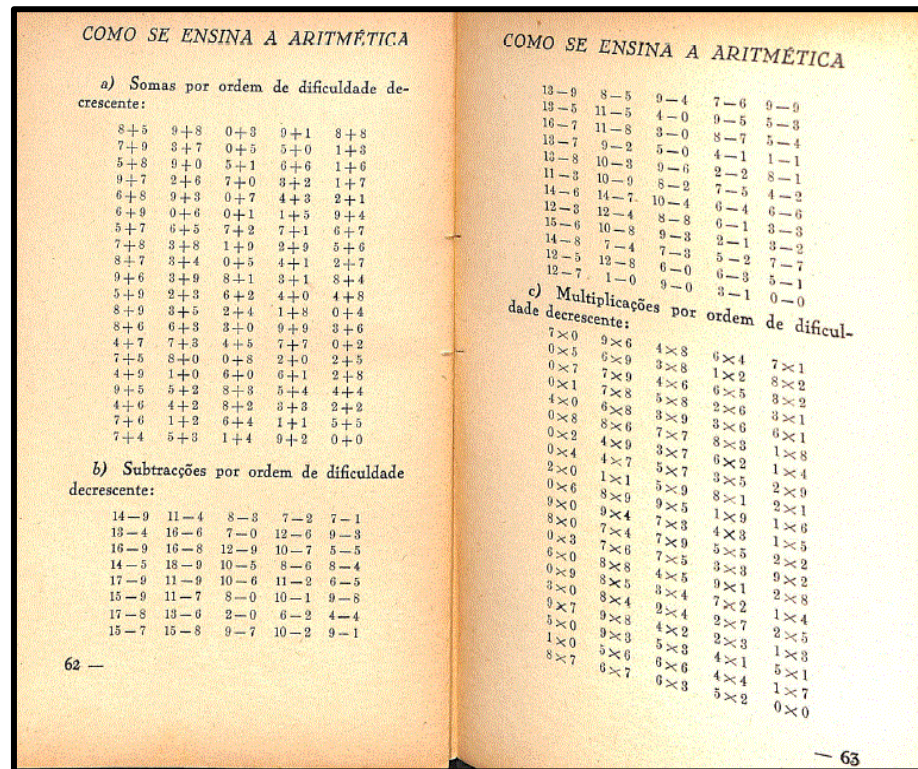
Ainda sobre esta organização, o autor ressaltou que um “[...] processo é uma *hierarquia ou organização* de capacidades, muitas destas são por sua vez agrupamentos ou complexos de unidades de capacidade” (VASCONCELOS, 1933, p. 57, grifo nosso). Deste modo, para graduar o ensino, antes era necessária uma graduação das capacidades de modo que se levasse em consideração aquilo que a criança tinha condições de compreender de acordo com seu desenvolvimento. A progressão do ensino deveria estar de acordo com a progressão do desenvolvimento mental da criança, era este que ditaria o ritmo do ensino.

Avançando na obra, na décima segunda seção Vasconcelos (1933, p. 61) abordou a questão da *relativa dificuldade das combinações numéricas* e destacou que “Clapp⁴⁹ estudou a dificuldade relativa das combinações numéricas determinada pela frequência dos erros cometidos pelas 7.000 crianças examinadas nas operações fundamentais”.

Vale destacar que a ordem das dificuldades é apresentada de cima para baixo a partir da primeira coluna. As combinações relativas às operações de soma, subtração e multiplicação são apresentadas na sequência, por meio da Figura 6.

⁴⁹ Trata-se do pesquisador e psicólogo Frank Leslie Clapp que, de acordo com Almeida e Leme da Silva (2014, p.53), ocupou o cargo de “[...] professor de Educação da Universidade Wisconsin, Madison”.

Figura 6: Combinações de soma, subtração e multiplicação segundo Clapp



Fonte: Vasconcelos (1933, p. 62-63).

Estas combinações de Clapp apareceram também no programa de cálculo do IERJ elaborado por Alfredina de Paiva e Souza que foi analisado por Almeida e Leme da Silva (2014). Sobre essas combinações, fizeram a ressalva de

[...] que o livro de Clapp não foi encontrado na biblioteca do Instituto de Educação, assim como não fez parte das referências usadas por Alfredina em seu artigo e manual. Entretanto, os manuais “A Didática da Escola Nova” e “Pedagogia Científica” de Alfredo Miguel Aguayo, de grande circulação no período fazem referência aos testes de Clapp. Tudo indica que o contato de Alfredina com os estudos de Clapp tenha se dado por meio de Aguayo (ALMEIDA; LEME DA SILVA, 2014, p. 56).

A respeito destas combinações, foi importante salientar o papel das investigações, estabelecendo uma ordem predeterminada de exemplos de combinações numéricas de cada operação que o professor deveria seguir. Neste caso, a proposta de Clapp se referia a uma *marcha do ensino* com exemplos que seguiam uma ordem decrescente de dificuldades. Vale a ressalva que, conforme já destacado anteriormente ao longo desta tese, o grau de dificuldade de cada operação era determinado pelo número de acertos dos alunos nos testes: quanto menor o número de acertos, maior a dificuldade. A mesma lógica foi adotada em relação à divisão, conforme a Figura 7.

Figura 7: Combinações da divisão segundo Clapp

d) Divisões por ordem de dificuldade decrescente:

2:2	4:4	12:4	14:2	42:7
9:9	63:9	40:5	24:6	36:9
28:4	0:5	21:7	0:1	28:7
1:1	0:9	21:3	6:3	63:7
36:4	18:9	30:5	32:4	36:6
8:8	16:8	12:3	18:2	16:2
3:3	4:1	15:5	8:4	14:7
6:6	20:4	12:6	56:7	24:8
56:8	6:1	49:7	54:9	48:6
54:6	32:8	40:8	0:2	24:4
9:1	35:5	72:8	0:7	2:1
45:9	27:9	18:6	0:8	10:5
30:6	5:1	24:3	8:1	6:2
3:1	0:3	72:9	45:5	81:9
35:7	64:8	20:5	42:6	9:3
18:3	27:3	8:2	48:8	10:2
7:7	16:4	12:2	0:4	25:5
5:5	7:1	15:3	0:6	4:2

Fonte: Vasconcelos (1933, p. 64).

Ao analisarem esta figura a respeito da divisão, Valente e Ferreira (2021) destacaram:

De posse desses dados característicos da pedagogia científica, o professor teria condições de ensinar a divisão seguindo uma graduação de dificuldades preestabelecida pelos testes psicológicos. Trata-se de um exemplo de como essa pedagogia afeta elementos do saber profissional do professor que ensina matemática; uma *aritmética para ensinar*, haja vista que se trata de um específico da profissão docente. Com tais referências tem-se que o trabalho pedagógico do professor não deve ser executado segundo as preferências pessoais de cada mestre. Não caberá ao professor elaborar um conjunto de exercícios ou problemas de aritmética para trabalhar com seus alunos. Ele deverá servir-se do que já foi objeto de testes mentais e pedagógicos. Assim fazendo, irá exercer a docência de modo científico (VALENTE; FERREIRA, 2021, p. 14, grifo dos autores).

Deste modo, os exemplos de Clapp trazidos por Vasconcelos (1933) revelaram uma graduação do ensino construída como resultado direto dos testes, já que deveriam ser eles os responsáveis pela *marcha do ensino* que o professor deveria seguir.

Embasado em pesquisas científicas, Vasconcelos (1933) elaborou uma graduação do ensino da aritmética que deu ênfase à organização das dificuldades. Tratava-se principalmente de uma graduação como *marcha do ensino* na qual ficou evidente o par fácil/difícil, elemento característico da pedagogia científica.

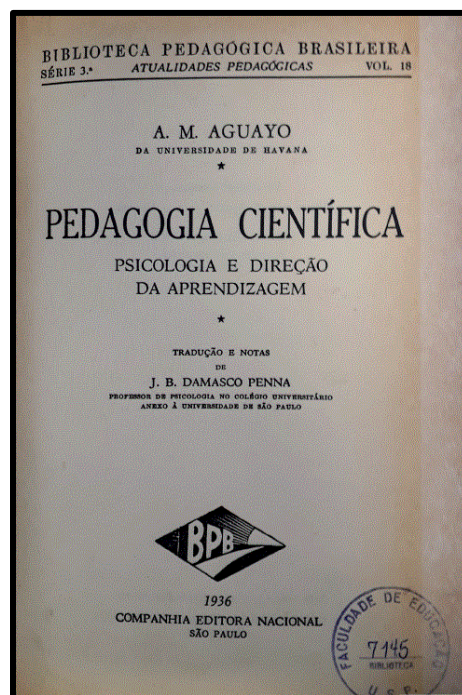
A análise do manual de Vasconcelos (1933) possibilitou caracterizar uma graduação que, amparada na psicologia, apresentou aspectos de saberes específicos dos professores. A

exemplo da marcha e da organização do ensino, tal graduação é reveladora de uma matemática *para ensinar* na obra.

5.2.2 A graduação do ensino de aritmética em Miguel Aguayo

Uma vez analisada na subseção anterior a obra de Faria de Vasconcelos, toma-se como fonte de análise nesta subseção o manual *Pedagogia Científica: psicologia e direção da aprendizagem* de autoria de Miguel Aguayo, cuja capa é apresentada na Figura 8 que segue.

Figura 8: Capa do Manual *Pedagogia Científica: Psicologia e direção da aprendizagem*, de Miguel Aguayo



Fonte: Aguayo (1936), a obra original encontra-se no acervo da biblioteca da FEUSP.

Antes de tratar da graduação do ensino de aritmética na obra, vale apresentar alguns elementos biográficos do autor, de acordo com Souza (2011):

Nascido em 28 de Março de 1866, na cidade de Ponce, em Porto Rico, o intelectual Alfredo Miguel Aguayo y Sánchez (1866-1943), logo se mudou para Cuba, onde viveu a maior parte de sua vida. A nossa opção nesse estudo é designar Aguayo como pensador cubano, uma vez que ele viveu praticamente toda a sua vida nesse país, onde também obteve toda a sua formação profissional e desenvolveu sua atividade intelectual. Na Universidade de Havana, na capital cubana, formou-se em Direito e doutorou-se em Pedagogia. Atuou toda a sua vida como educador em várias escolas, na Universidade de Havana, onde foi diretor da “Escuela de Pedagogia”; foi autor

de inúmeros textos e livros para uso nas escolas primárias, principalmente destinados aos professores (SOUZA, 2011, p. 120).

Sobre o manual *Pedagogia Científica*, foi possível destacar que ele “[...] teve uma ampla recepção entre educadores e leitores no Brasil” (SOUZA, 2011, p. 119). Esse manual

[...] circulou pelo país ultrapassando o número de onze edições. Foi adotado nos programas de ensino dos Institutos de Educação de São Paulo e do Rio de Janeiro de 1933, 1934 e 1936, na disciplina Práticas de Ensino que incluía o ensino de cálculo aos normalistas (MARQUES, 2018, p. 116).

As informações apresentadas por Souza (2011) e Marques (2018) no que se referia à circulação do manual no Brasil vão ao encontro daquilo que Silva (2018) também constatou. Nos quadros-síntese que mostram a quantidade de citações que os autores receberam em manuais de metodologia de Portugal e do Brasil entre 1941 e 1970, Silva (2018) mostrou que Aguayo foi bastante citado em manuais portugueses, com 12 citações ao todo, e foi o mais citado nos manuais brasileiros do mesmo período, tendo recebido ao todo 45 citações.

O manual *Pedagogia Científica*, de Aguayo (1936), cumpriu um papel fundamental na proposição de mudanças relativas ao saber profissional do professor que ensinava matemática em comparação com vagas anteriores, esta foi uma das conclusões do já citado resultado parcial elaborado por Ferreira e Valente (2020b). A este respeito, os autores afirmaram que:

[...] no manual de Aguayo aqui analisado, foi possível identificar alguns indícios da divulgação do novo saber profissional, resultado dos experimentos laboratoriais, que determinaram não somente como ensinar saberes da aritmética, mas também a ordem em que deveria se dar esse ensino, centrado em sequências de exercícios previamente indicados para o professor usar em classe (FERREIRA; VALENTE, 2020b, p. 15-16).

Uma vez feitas algumas considerações sobre outras pesquisas que se debruçaram sobre a *Pedagogia Científica*, de Aguayo, e antes de adentrar na especificidade da graduação do ensino de aritmética como elemento do saber profissional do professor, temática abordada neste trabalho, vale destacar aspectos elencados pelo autor que justificam sua escolha como fonte para análise. O primeiro ponto que é preciso ressaltar é a distinção que o autor faz no Prefácio da obra entre sua proposta didática, embasada na escola ativa, e aquela trabalhada pelas vagas pedagógicas até então vigentes.

Quando se estudam com senso crítico as diferenças cardeais que extremam a didática corrente da didática da nova escola ativa, vitalizada ou progressiva, vê-se que a linha divisória mais precisa e clara, a distinção fundamental de ambos os sistemas pedagógicos está no conceito de aprendizagem (AGUAYO, 1936, p. IX).

Dito isso, Aguayo (1936) continuou sua argumentação, salientando que na

[...] escola comum o professor ensina; na escola ativa as crianças aprendem por si mesmas, e o mestre se limita a dirigi-las, estimulá-las e animá-las. Daí a importância que a pedagogia atual atribui à psicologia da aprendizagem. Daí também o uso, cada vez mais difundido da expressão direção da aprendizagem, em substituição ao termo ensino, que costuma ser fonte de muito erro grave na prática profissional (AGUAYO, 1936, p. IX-X).

Há na base da argumentação de Aguayo (1936) uma distinção quanto aos papéis de alunos e professores na Escola Tradicional em comparação com a escola ativa. Nesta última, o aluno está no centro do processo de ensino e aprendizagem. O entendimento apresentado por Aguayo (1936) acerca da escola ativa, ao que parece, muito se assemelha à definição que Escobar (1921) indicou a respeito do aprendizado individual e ativo. Para ele, no

[...] aprendizado ativo e individual, a criança é que faz, observa, julga, raciocina, compara, generaliza, exercita a atenção e a vontade, constrói, produz. A ela – cabe a espontaneidade; ao mestre o “controle”, o guia. No aprendizado ativo, a atenção assume suas formas mais enérgicas, porque é investigativa e construtiva e pode passar por todos os graus: o interesse, a reflexão, a aplicação, a meditação, a contenção, a contemplação (ESCOBAR, 1921, p. 41).

A seguir, destaca-se o principal argumento de Aguayo (1936) apresentado no Prefácio, que foi uma das principais justificativas para a escolha da obra para compor este trabalho, visto que, depois da defesa da escola ativa já apresentada, ele realçou:

Tanto nos capítulos consagrados à psicologia da aprendizagem quanto nos que tratam de sua direção procurei ater-me às conclusões da investigação científica, dando muito pouca importância a opiniões pessoais de psicólogos e pedagogistas. Foi por isso que dei a esta obra o título de PEDAGOGIA CIENTÍFICA, já empregado por alguns autores (AGUAYO, 1936, p. X).

Ao que parece, assim como na obra de Faria de Vasconcelos, a *seleção* dos saberes se deu a partir de critérios considerados científicos e abordados pela psicologia. Aguayo (1936) destacou ainda no Prefácio de sua obra que nos

[...] capítulos que tratam da direção especial da aprendizagem refiro-me somente à aprendizagem da leitura, da escrita, da ortografia, da aritmética e do desenho, por serem até hoje preferidas e quase exclusivamente cultivadas pela investigação científica. As outras matérias da escola primária serão tratadas em meu livro projetado – DIDÁCTICA DE LA ESCUELA PRIMARIA (AGUAYO, 1936, p. X).

Foi importante notar que, para Aguayo (1936), a aritmética fazia parte de um seleto grupo de matérias do ensino primário que eram tratadas pela pedagogia científica. Foi possível afirmar que, em grande medida, a aritmética ocupava o *status* de ser a matemática da pedagogia científica, mas vale ressaltar que isso não significa que a geometria e a álgebra não foram tratadas por outras vertentes da Escola Nova, apesar da afirmação de Aguayo (1936) de que,

em se tratando de pedagogia científica, o foco estava centrado na aritmética. Essa ideia, ao que parece, estava implícita no título do trabalho de Pinheiro (2017).

Uma vez destacada a escolha da aritmética como a matemática da pedagogia científica em Aguayo (1936), vale tecer algumas considerações sobre a *seleção* dos conteúdos que foram abordados na obra. Assim, esses conteúdos podem ser observados na Figura 9, que apresenta um recorte da parte referente à aritmética no índice geral da obra.

Figura 9: Conteúdos referentes ao ensino da aritmética em Aguayo (1936)

XXVI	
APRENDIZAGEM DA ARIMÉTICA	
1. Função da aprendizagem da arimética. — 2. Problemas apresentados pela aprendizagem da arimética. — 3. Formação da idéia de número. — 4. Aprendizagem da adição. — 5. Aprendizagem da subtração. — 6. A multiplicação. — 7. A divisão. — BIBLIOGRAFIA	335
XXVII	
APRENDIZAGEM DA ARIMÉTICA	
(SEGUNDA PARTE)	
As frações ordinárias. — 2. Números decimais. — 3. A resolução de problemas. — 4. Métodos de aprendizagem. — 5. O exercício. — 6. Distribuição da prática. — 7. Correção dos erros. — 8. As diferenças individuais na aprendizagem da arimética. — 9. A medição dos produtos da aprendizagem da arimética. — BIBLIOGRAFIA . . .	349

Fonte: Aguayo (1936, p. XVI-XVII).

A figura acima mostra que a graduação do ensino do ponto de vista da *seleção* dos conteúdos foi abordada em dois capítulos que discorreram sobre o ensino da aritmética. O primeiro deles, o capítulo XXVI, discorreu sobre a aprendizagem do ensino da aritmética e os problemas apresentados por ela, seguindo com a ideia de número e com as operações até a divisão. Já o capítulo XXVII começou com as frações ordinárias e números decimais e finalizou com a medição da aprendizagem da aritmética.

Como os próprios títulos dos capítulos indicam, a discussão apresentada por Aguayo (1936) girou em torno da aprendizagem da aritmética. Vale destacar que a própria organização destes dois capítulos revelou o papel de destaque dado à questão da aprendizagem, pois ela era tema central das duas primeiras seções do capítulo XXVI e das duas últimas do capítulo XXVII e, por isso, foi possível afirmar que o autor, ao tratar da aritmética, iniciou e terminou sua argumentação com foco na aprendizagem. Assim, a *seleção* feita por Aguayo (1936) apresentava elementos de uma aritmética *para* ensinar, pois o ponto central da discussão estava

em torno de como a criança aprenderia os conteúdos, nesse caso não se tratava de saberes de uma cultura geral, mas específicos do trabalho docente.

Nesta organização, as seções voltadas ao conteúdo da aritmética, como a noção de número, as operações (adição, subtração, multiplicação e divisão), as frações e os números decimais, estão posicionadas entre a função da aprendizagem da aritmética e a medição dessa aprendizagem.

Adentrando nesses dois capítulos da obra de Aguayo (1936), é possível destacar que, na seção em que versou sobre a função da aprendizagem da aritmética, após defender o valor utilitário da aritmética, o autor apresentou alguns pontos que, segundo ele, foram tratados pelo professor G. M. Wilson⁵⁰ como questões essenciais referentes ao ensino da aritmética. Do ponto de vista da categorização adotada nesta tese, esses pontos puderam ser tomados como um *programa* que seria trabalhado em relação à função da aprendizagem desta disciplina:

1. Escrita e leitura de números inferiores, frações ordinárias e decimais.
2. Operações fundamentais com números inteiros, frações ordinárias e decimais.
3. Divisão simples em fatores.
4. Números complexos: adição e subtração e redução a uma espécie. Medidas de comprimento, superfície, volume, de líquidos e sólidos, de tempo, peso e moeda.
5. Uso das partes alíquotas comuns.
6. Porcentagem simples, com juros simples e desconto bancário.
7. Medição de perímetros, superfícies, figuras planas comuns e corpos sólidos. Raiz quadrada.
8. Práticas comerciais: empréstimos, economias, inversão; negócios bancários; contribuições e gastos públicos; escrituração simples de livros (AGUAYO, 1936, p. 335-336).

Uma noção de graduação também teve destaque na obra quando Aguayo (1936) abordou a formação da ideia de número que aparecia associada à contagem, pois, para ele, quando se buscava afirmar um número “[...] temos que contar coisas e, como o fazemos quase sempre com o auxílio dos olhos, temos a crença de que vemos os números” (AGUAYO, 1936, p. 336). Em relação a esta formação, na obra verificou-se que o autor apresentou considerações sobre uma *gradação* da aprendizagem.

É fácil observar que a criança, *antes de formar a ideia de número*, pode seguir uma sucessão de estímulos, como, por exemplo, o tic-tac de um relógio ou outros movimentos rítmicos. No entanto, essa série de processos psíquicos nada tem que ver com a operação de contar. (AGUAYO, 1936, p. 337, grifo nosso).

⁵⁰ Apesar de citar esse professor, Aguayo (1936) não o trouxe nas referências e, deste modo, não foi possível identificá-lo.

Neste exemplo, o termo grifado revela indícios de uma *gradação* da aprendizagem, na qual os estímulos que a criança aprenderia precederiam as noções de números. Seguindo sua argumentação, o autor ressaltou:

Segundo PREYER, os primeiros ensaios desse processo psicológico revestem, na criança, a forma de *um, mais um, mais um* etc. Logo, porém, a criança aprende os nomes dos primeiros números, já por imitação, já por influência consciente das pessoas mais velhas; e desde então o conhecimento da numeração se desenvolve mais ou menos rapidamente (AGUAYO, 1936, p. 337, grifo do autor).

Neste excerto, foi possível observar que, para o autor, na *gradação* da aprendizagem das noções de números, em um primeiro momento a criança passava a tê-las a partir da contagem dos objetos, sempre adicionando *mais um*. Somente em momento posterior aprenderia os nomes dos números e então aprendizagem fluiria mais rapidamente.

Ainda sobre a *gradação* da aprendizagem da contagem:

As primeiras ações de contar começam com certos movimentos rítmicos de várias espécies. *Mais tarde* esses movimentos são substituídos por articulações rítmicas, p. ex., os nomes dos números. *A princípio*, a criança se mostra sem compreensão; mas *a pouco e pouco* se vai desenvolvendo a aplicação dos números aos objetos exteriores, até que a numeração toma caráter racional *e então* a criança conta não só de um em um, mas de dois em dois, três em três, etc. (AGUAYO, 1936, p. 337, grifos nossos).

As expressões grifadas na citação mostram como Aguayo (1936) compreendia a forma pela qual gradualmente a criança ia desenvolvendo a noção de número partindo das noções de contagem, passando pelos nomes dos números até conseguir contar números agrupados de dois em dois, três em três etc. Esta *gradação*, na qual a ideia de contar precederia a ideia de números, foi usada pelo autor a partir do argumento de que os “[...] estudos feitos sobre a operação de contar provam também que ela é necessária ao desenvolvimento do conceito de número” (AGUAYO, 1936, p. 338).

Para fechar a *gradação* do ensino, na seção que versou sobre a formação da ideia de número o autor mostrou elementos que puderam ser caracterizados como uma *programação do ensino* a partir das investigações de Eckhardt⁵¹ a respeito da “[...] espécie de imagens visuais que as crianças usam nas operações de contar e nas de cálculo” (AGUAYO, 1936, p. 339). Essa *programação* foi apresentada seguindo as principais conclusões de Eckhardt:

1.^a – as imagens de pontos são empregadas mentalmente só no fim do primeiro ano;

⁵¹ Não foram identificadas maiores informações sobre este pesquisador.

- 2.^a – nenhum aluno emprega as imagens formadas com os grupos de bolinhas do ábaco russo;
 3.^a – no segundo ano usam-se as imagens visuais como representantes das ideias de número (AGUAYO, 1936, p. 339).

O manual de Aguayo (1936), ainda no capítulo XXVI, ao tratar das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão, indicou uma graduação que aparecia como *marcha do ensino*, na qual era preciso seguir uma ordem decrescente de dificuldades de acordo com a proposta de Clapp⁵². Vale destacar que estas combinações também apareceram em relação às outras operações apresentadas segundo a ordem decrescente de dificuldade e são as mesmas indicadas por Vasconcelos (1933) e apresentadas na subseção anterior.

Avançando na obra, foi possível verificar outros indicativos de uma graduação do ensino. Assim, em termos de organização, depois de tratar da numeração, da contagem e das operações até a divisão no capítulo XXVI, Aguayo (1936) iniciou o capítulo XXVII pelas frações ordinárias e destacou:

Quando a criança executa operações com números fracionários, seu pensamento está nos números inteiros e não nas frações. Assim, por exemplo, quando se pergunta à criança quanto é $1/5$ de 20, ela reage pensando $20 \div 5 = 4$. Por essa razão, é conveniente preparar a multiplicação mediante uma soma de frações, assim, por exemplo: $1/3$ de 2 folhas de papel é igual a $1/3$ da primeira folha mais $1/3$ da segunda (AGUAYO, 1936, p. 349).

Nesse excerto, o autor evidenciou a necessidade de um pré-requisito ao propor que se preparassem as noções de multiplicação de frações por meio da soma delas. Com isso, ao contrário do que propôs para as combinações das operações tendo em conta os trabalhos de Clapp, sugeriu uma *marcha do ensino* do fácil para o difícil com relação às frações, seguindo uma ordem crescente de dificuldades.

Ao discorrer sobre a resolução de problemas, Aguayo (1936) também deixou indícios de uma graduação do ensino.

As demonstrações das regras de cálculo devem reservar-se para os *graus superiores*. Nos *graus inferiores*, o principal trabalho da aprendizagem da aritmética consiste em dirigir a criança no sentido de que se descubra por si mesma as relações numéricas e memorize certos fatos (AGUAYO, 1936, p. 350, grifos nossos).

Desse modo, o autor defendeu uma *gradação* da resolução de problemas na qual os dos graus inferiores não deveriam abordar demonstrações de regras, era preciso que o professor

⁵² Ao contrário de Faria de Vasconcelos (1933), que não trouxe as obras que utilizou como referência, Aguayo (1936) indicou uma pequena lista de algumas obras que ele utilizou e, dentre elas, fez referência ao manual *Summary of investigations relating to arithmetic*, de autoria de Clapp.

orientasse as crianças para que elas descobrissem as relações numéricas e memorizassem fatos que, neste caso, referiam-se às combinações das operações, como no exemplo de Clapp.

Aguayo (1936) construiu uma graduação do ensino da aritmética que estava amparada em discussões da pedagogia científica, como a necessidade de se organizar o ensino de acordo com o desenvolvimento psicológico da criança. Nesta graduação ficou evidente uma argumentação a respeito da importância dada a uma *marcha do ensino* disposta segundo o par fácil/difícil, em um primeiro momento, o autor defendeu uma ordem que seguia do difícil para o fácil em relação às combinações numéricas envolvendo soma, subtração, multiplicação e divisão, já em relação ao ensino de frações propôs o processo inverso.

A graduação do ensino da aritmética apresentada em Aguayo (1936) munia os professores de saberes acerca de como ensinar conteúdos aritméticos tendo em conta o desenvolvimento mental da criança. Assim, a análise dessa graduação possibilitou caracterizar uma matemática do trabalho docente, uma aritmética *para* ensinar.

5.3 Manuais brasileiros e suas graduações do ensino de aritmética

Na etapa anterior analisou-se a graduação do ensino da aritmética em manuais produzidos inicialmente em outros países, mas que circularam no Brasil, seja na versão original, como no caso do manual de Faria de Vasconcelos (1933), seja em uma tradução, como o de Aguayo (1936). Esses manuais foram tomados como referência para a formação de professores em São Paulo e apresentam como característica a construção de uma graduação do ensino de aritmética embasada em experimentos de pesquisadores com notoriedade no domínio da psicologia. Em um primeiro momento, os autores tinham a necessidade de embasar seus argumentos trazendo os psicólogos como autoridades para justificar a organização do ensino que cada um deles propôs.

Em um momento posterior, à medida que a pedagogia científica passou a ganhar mais espaço no meio educacional, os autores de manuais pedagógicos passaram a não ter tanta necessidade de, a todo o momento, trazer argumentos de autoridades para justificar a forma como organizaram suas propostas de ensino. Foi possível afirmar que, em determinado momento histórico, ao passo que a pedagogia científica foi adentrando no meio escolar, os

autores sentiram menos necessidade de justificar as diferentes graduações do ensino que propuseram.

Com isso, cabe indagar: que diferentes graduações do ensino de aritmética foram elaboradas por autores brasileiros que, em tempos de pedagogia científica, serviram como referência para a formação de professores? E ainda: que elementos de uma matemática *para* ensinar podem ser lidos por meio dessas graduações?

Para responder a esses questionamentos tomaram-se como fonte de análise dois manuais produzidos no Brasil em tempos de pedagogia científica e que circularam na formação de professores primários. São eles: *Práticas escolares*, publicado por Antônio D'Ávila (1942⁵³), e *Metodologia da Matemática*, de autoria de Irene de Albuquerque (1951).

5.3.1 A graduação do ensino de aritmética em Antônio D'Ávila

O manual *Práticas escolares*, de Antônio D'Ávila, foi selecionado para compor o rol dos manuais analisados nesta tese por ter sido referência na formação de professores em São Paulo e por trazer referências a elementos da pedagogia científica, como os testes.

A primeira referência aos testes encontra-se no capítulo III, intitulado: *Dos alunos. Sua seleção. Exames diversos. Ficha escolar*. Nesse capítulo, é possível constatar que o autor apresentou uma série de testes que deveriam ser aplicados na escola e, além disso, fez referência à escala de Binet-Simon, importante instrumento utilizado em tempos de pedagogia científica (PINHEIRO, 2017).

Para reforçar o argumento de que esta obra em certa medida se filiava à pedagogia científica, vale destacar que o capítulo VI, *Programas e Horários*, no qual D'Ávila (1942) expôs recortes de programas do Brasil e do mundo, dentre os quais o programa mínimo em vigor em São Paulo em 1930, foi introduzido pelo autor com as seguintes palavras:

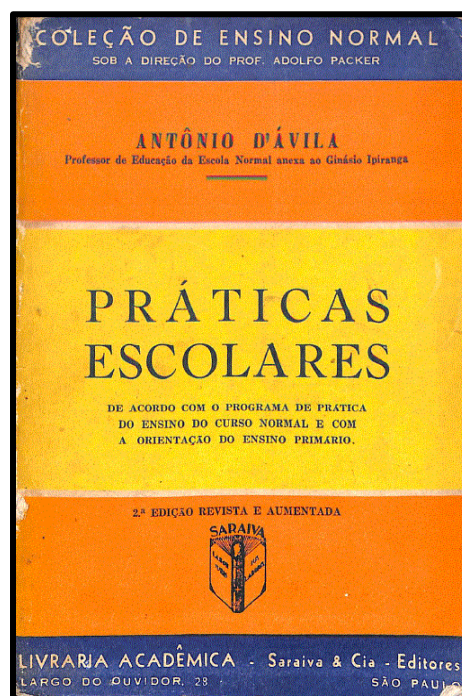
Embora muitas de nossas classes ainda funcionem em salas acanhadas, com matrícula excessiva e em condições materiais e pedagógicas pouco satisfatórias, muito se pode esperar da dedicação e boa vontade de nosso abnegado e inteligente professorado, no sentido de manter o ensino primário sempre *ativo, atraente, experimental*, adaptado ao meio ambiente e em

⁵³ Para este trabalho, tomou-se a segunda edição, revista e aumentada, publicada pela editora Saraiva em 1942, pois não se teve acesso à primeira edição, que foi publicada no ano de 1940 também pela Saraiva.

rigorosa obediência aos ideais de uma educação moderna (D'ÁVILA, 1942, p. 100, grifo nosso).

Esta obra ganhou relevância na formação de professores pela sua circulação, como mostrou o quadro síntese elaborado por Silva (2018) a respeito das obras citadas por manuais brasileiros de metodologia entre os anos de 1941 e 1970. Nesse quadro, foi possível observar que *Práticas escolares* (1942) foi a segunda obra mais citada nos manuais de metodologia, com um total de 13 citações, ficando atrás apenas da obra *Didática da Escola Nova*, de Aguayo, que teve 18 citações. Uma vez justificada a escolha do manual de D'Ávila (1942), passa-se a apresentar autor e obra, a começar pela capa, conforme a Figura 10 a seguir.

Figura 10: Capa do manual *Práticas Escolares* de Antônio D'Ávila



Fonte: D'Ávila (1942), a obra original pertence ao acervo pessoal do autor.

A partir da capa de sua obra, é possível averiguar Antônio D'Ávila se apresentou como professor de Educação da Escola Normal anexa ao Ginásio do Ipiranga. A seu respeito foi possível afirmar ainda que ele era natural

[...] da cidade de Jaú (SP), fez seus estudos primários na capital do estado de São Paulo e ingressou na Escola Normal de São Paulo em 1917, tendo-se diplomado em 1920. A partir de então, passou a dedicar-se ao magistério e às questões educacionais, tendo participado ativamente de várias entidades profissionais e culturais, como a Liga do Professorado Católico, o Centro do Professorado Paulista, o Instituto Histórico e Geográfico de São Paulo, a Academia Brasileira de Literatura Infantil e Juvenil. Ao longo de sua atuação profissional, escreveu manuais de ensino, livros didáticos, artigos em jornais e revistas, biografias, proferiu diversas conferências e discursos e traduziu, juntamente com João Baptista Damasco Penna, o livro *Didática da Escola*

Nova, de A. Aguayo, publicado no Brasil pela Companhia Editora Nacional, em 1932 (TREVISAN, 2009, p. 168).

Uma vez apresentados obra e autor, passa-se a tecer algumas considerações a respeito da graduação do ensino da aritmética presente na obra. Inicialmente, vale destacar a *seleção* dos conteúdos da aritmética adotada pelo autor, que foi tratada por ele no capítulo XVII, intitulado *O ensino da aritmética*. No índice alfabético dos principais assuntos tratados em *Práticas Escolares*, que se encontrava no final do manual, foi possível ter uma visão da *seleção* relativa à aritmética, como mostra a Figura 11 a seguir.

Figura 11: Conteúdos da aritmética em *Práticas Escolares*

Aritmética	— 305
atividades preparatórias na	— 306
conceito de número	— 305
definições em	— 315
erros na	— 316
objetivação na	— 328
objetivos do ensino da	— 305
programa mínimo de	— 314
problemas na	— 317
quatro operações	— 307
Associação Pat	

Fonte: D'Ávila (1942, p. 497).

Em termos de conteúdos da aritmética, foi possível constatar, a partir da figura acima, que na *seleção* feita pelo autor destacaram-se o conceito de número e as quatro operações. Verificou-se ainda a presença de conteúdos voltados à questão do erro e da objetivação no ensino de aritmética, além de um programa mínimo.

A ideia de um programa mínimo remontava à pedagogia científica e aos escritos de Lourenço Filho. Este autor defendia que

[...] nos novos tempos, os professores e as escolas deveriam organizar os seus próprios programas de ensino. Num momento posterior, as referências para os programas viriam de experimentos e trabalho de especialistas, tudo em conformidade com elementos apropriados da psicologia experimental. Dela seriam extraídas referências que permitiriam classificar os alunos segundo o seu nível mental, agrupando-os em classes homogêneas, e a montagem das classes constituiria ingrediente definidor do que seria ensinado. Para além disso, haveria uma standardização das provas e dos exames, para verificação da marcha da eficiência do ensino dos mestres. Em tese, essa seria, ao que tudo leva a crer, a perspectiva do trabalho de Lourenço Filho (VALENTE, 2016c, 191).

Valente (2016c) também argumentou que, com a saída de Lourenço Filho da Instrução Pública Paulista em 1932, esta proposta de um programa mínimo baseado na experimentação foi abandonada e São Paulo seguiu adotando o programa de 1925, que era pautado no método de ensino intuitivo, até 1942. Ao que parece, embora tivesse perdido espaço nos meios oficiais,

a ideia de um programa mínimo de Lourenço Filho continuou circulando em outros meios, como o caso do manual de D'Ávila (1942).

Estes elementos acerca da defesa de um programa mínimo, bem como a defesa de um programa experimental feita no capítulo VI da obra, justificaram a escolha do manual de D'Ávila (1942) como fonte para analisar uma graduação do ensino da aritmética em tempos de pedagogia científica.

Adentrado no capítulo XVII, parte da obra dedicada especificamente ao ensino da aritmética, foi possível verificar que D'Ávila (1942) iniciou sua organização e argumentação a respeito deste ensino trazendo uma breve citação de Alberto Pimentel Filho⁵⁴ como sugestão de leitura para justificar a importância da aritmética como um dos objetivos do ensino primário. Tal ensino deveria ser racional e prático.

Esta leitura inicial junto com a apresentação dos objetivos do ensino da aritmética compunham as atividades preparatórias elencadas na *seleção* de conteúdos apresentados na figura anterior. Acerca desses objetivos, o autor observou:

Segundo Thorndike e de acordo com a opinião comum, a tarefa da escola elementar é ensinar, com relação à aritmética, o seguinte: 1 – o significado dos números; 2 – a natureza de nosso sistema de numeração decimal; 3 – o significado da adição, subtração, multiplicação e divisão e 4 – a natureza e as relações de certas medidas comuns; para assegurar também 5 – a habilidade, no adicionar, subtrair, multiplicar e dividir com inteiros, frações ordinárias e decimais e números complexos, 6 – habilidade de aplicar os conhecimentos e poderes representados em (1) e (5) na resolução de problemas e 7 – certas habilidades específicas, para solucionar problemas concernentes a porcentagem, juros e outras ocorrências da vida comercial (D'ÁVILA, 1942, p. 305).

Neste excerto, os objetivos do ensino da aritmética elencados pelo autor com base em Thorndike revelaram, nos termos anteriormente definidos, um *programa* que deveria ser seguido na escola primária. Ao justificar que tal *programa* também estava de acordo com a

⁵⁴ “[...] foi um médico que, desde o ano letivo 1901/1902, lecionou nas sucessivas escolas normais de Lisboa, inicialmente apenas as disciplinas relacionadas com as ciências físico-químicas e naturais. No ano letivo de 1915/1916 foi nomeado para a regência da cadeira de pedagogia de 2.^a classe, sendo nomeado professor efetivo da Escola Normal de Lisboa, em 1923, mantendo-se nessa escola até meados da década de 1930. Para além da Súmula Didáctica, aqui já referida, foi também autor de outras obras de referência, tanto no âmbito da pedagogia, como no âmbito da pedologia e da psicofisiologia. Nóvoa (2003) salienta que a importância deste autor deve ser vista nesta dupla perspectiva. Por um lado, a sua formação médica capacita-o na interpretação da crescente importância que a divulgação dos princípios psicológicos e fisiológicos tinha nos debates educativos. Por outro lado, a sua permanência na escola normal durante um longo período de tempo permitiu-lhe acompanhar a evolução dos programas e das práticas de formação de docentes” (CANDEIAS; MONTEIRO, 2015, p. 824).

opinião comum, D'Ávila (1942) deixou um indício de que a organização do ensino feita por Thorndike a partir de suas pesquisas adentrou na cultura escolar.

Manual de lições aos professores, como indicou Silva (2018), a obra de D'Ávila tinha como característica apresentar no final de cada seção uma série de problemas para estudo e debate relacionados ao conteúdo nela trabalhado. Em relação às atividades preparatórias, o autor propôs os seguintes problemas:

1. – Quais são os objetivos do ensino da aritmética no curso primário?
2. – Como Thorndike define esses objetivos?
3. – Que relação de assuntos desse ensino compreende nosso programa primário (do 1.º ao 4.º ano)?
4. – Como se forma na criança o conceito de número?
5. – Quais as ideias de Pestalozzi a respeito do ensino da aritmética? (D'ÁVILA, 1942, p. 306).

Os problemas apresentados no contexto da organização da obra apareciam como uma forma de reflexão de cada conteúdo discutido, pois, tratava-se de problemas que poderiam ser resolvidos com uma simples leitura do texto.

Retornando aos aspectos mais relacionados à graduação do ensino da aritmética, foi possível destacar que, ao abordar a questão da representação do número, D'Ávila (1942) deixou transparecer a ideia de uma *marcha do ensino* de acordo com o ritmo de aprendizagem.

A criança não inicia a experiência de números com a sua representação mental, mas realiza concretamente os seus cálculos, operações jogando com objetos, figuras etc. É também este o *ponto de partida do ensino*, na aula primária. A proporção, porém, que a *aprendizagem avança*, cumpre representar o número também com figuras, bolinhas, círculos, quadrados e desenhos. *Só depois* é que entra em jogo o algarismo, para completar a representação: coisas, figuras e algarismos (D'ÁVILA, 1942, p. 306, grifos nossos).

Neste exemplo, a aprendizagem da criança era um fator determinante para a *marcha do ensino*. Havia uma sutileza da passagem do fácil para o difícil e, mesmo que não tivesse dito isto explicitamente, o autor propôs que se partisse das coisas para os algarismos, passando pelas figuras. As coisas, nesse caso representadas pelos objetos com os quais a criança tinha contato no seu dia a dia, em um segundo nível as figuras apareciam como ilustração dos objetos e, por fim, os algarismos como a representação numérica desses objetos.

A graduação do ensino da aritmética em tempos de pedagogia científica se fez elemento importante na cultura escolar. Esse elemento esteve presente como uma seção da obra de D'Ávila (1942) que, sobre a graduação das dificuldades iniciais, alegou:

Não é de boa orientação colocar o aluno, inicialmente, diante de dificuldades desanimadoras, na aprendizagem do cálculo. É necessário, antes, encaminhá-lo passo a passo na aquisição de conhecimentos aritméticos, dando-lhe ainda oportunidade para o treino realizando o professor repetidos exercícios de verificação do aprendido.

O que dizemos é que a soma tem oportunidade nas outras operações (D'ÁVILA, 1942, p. 308).

Na Figura 12 seguinte, foi possível observar que o autor reforçou a necessidade de graduar o ensino da soma.

Figura 12: Gradação do ensino da soma de acordo com D'Ávila

1 — É necessário graduar as dificuldades para exercitar a criança no domínio da soma. Suponhamos:

a — $\begin{array}{r} 1 \\ 1 \\ \hline 2 \end{array}$ $\begin{array}{r} 1 \\ 2 \\ \hline 3 \end{array}$ $\begin{array}{r} 1 \\ 3 \\ \hline 4 \end{array}$ $\begin{array}{r} 1 \\ 4 \\ \hline 5 \end{array}$ $\begin{array}{r} 1 \\ 5 \\ \hline 6 \end{array}$ $\begin{array}{r} 1 \\ 6 \\ \hline 7 \end{array}$ $\begin{array}{r} 1 \\ 7 \\ \hline 8 \end{array}$ $\begin{array}{r} 1 \\ 8 \\ \hline 9 \end{array}$

b — $\begin{array}{r} 2 \\ 1 \\ \hline 3 \end{array}$ $\begin{array}{r} 2 \\ 2 \\ \hline 4 \end{array}$ $\begin{array}{r} 2 \\ 3 \\ \hline 5 \end{array}$ $\begin{array}{r} 2 \\ 4 \\ \hline 6 \end{array}$ $\begin{array}{r} 2 \\ 5 \\ \hline 7 \end{array}$ $\begin{array}{r} 2 \\ 6 \\ \hline 8 \end{array}$ $\begin{array}{r} 2 \\ 7 \\ \hline 9 \end{array}$

c — $\begin{array}{r} 3 \\ 1 \\ \hline 4 \end{array}$ $\begin{array}{r} 3 \\ 2 \\ \hline 5 \end{array}$ $\begin{array}{r} 3 \\ 3 \\ \hline 6 \end{array}$ $\begin{array}{r} 3 \\ 4 \\ \hline 7 \end{array}$ $\begin{array}{r} 3 \\ 5 \\ \hline 8 \end{array}$ $\begin{array}{r} 3 \\ 6 \\ \hline 9 \end{array}$

d — $\begin{array}{r} 4 \\ 1 \\ \hline 5 \end{array}$ $\begin{array}{r} 4 \\ 2 \\ \hline 6 \end{array}$ $\begin{array}{r} 4 \\ 3 \\ \hline 7 \end{array}$ $\begin{array}{r} 4 \\ 4 \\ \hline 8 \end{array}$ $\begin{array}{r} 4 \\ 5 \\ \hline 9 \end{array}$

e — $\begin{array}{r} 5 \\ 1 \\ \hline 6 \end{array}$ $\begin{array}{r} 5 \\ 2 \\ \hline 7 \end{array}$ $\begin{array}{r} 5 \\ 3 \\ \hline 8 \end{array}$ $\begin{array}{r} 5 \\ 4 \\ \hline 9 \end{array}$

f — $\begin{array}{r} 6 \\ 6 \\ \hline 12 \end{array}$ $\begin{array}{r} 2 \\ 6 \\ \hline 8 \end{array}$ $\begin{array}{r} 3 \\ 6 \\ \hline 9 \end{array}$ $\begin{array}{r} 4 \\ 6 \\ \hline 10 \end{array}$

g — $\begin{array}{r} 1 \\ 7 \\ \hline 8 \end{array}$ $\begin{array}{r} 2 \\ 7 \\ \hline 9 \end{array}$ $\begin{array}{r} 3 \\ 7 \\ \hline 10 \end{array}$

h — $\begin{array}{r} 1 \\ 8 \\ \hline 9 \end{array}$ $\begin{array}{r} 2 \\ 8 \\ \hline 10 \end{array}$

i — $\begin{array}{r} 1 \\ 9 \\ \hline 10 \end{array}$

Desse exercícios, convenientemente medidos, pode-se passar a uma segunda série de somas, constituídas de três algarismos. Assim:

$\begin{array}{r} 8 \\ 1 \\ \hline 9 \end{array}$ $\begin{array}{r} 7 \\ 2 \\ \hline 9 \end{array}$ $\begin{array}{r} 6 \\ 3 \\ \hline 9 \end{array}$ $\begin{array}{r} 5 \\ 4 \\ \hline 9 \end{array}$ $\begin{array}{r} 4 \\ 5 \\ \hline 9 \end{array}$ $\begin{array}{r} 3 \\ 6 \\ \hline 9 \end{array}$ $\begin{array}{r} 2 \\ 7 \\ \hline 9 \end{array}$ $\begin{array}{r} 1 \\ 8 \\ \hline 9 \end{array}$

A terceira série de somas poderá ser esta:

$\begin{array}{r} 12 \\ 1 \\ \hline 13 \end{array}$ $\begin{array}{r} 12 \\ 2 \\ \hline 14 \end{array}$ $\begin{array}{r} 12 \\ 3 \\ \hline 15 \end{array}$ $\begin{array}{r} 12 \\ 4 \\ \hline 16 \end{array}$ $\begin{array}{r} 12 \\ 5 \\ \hline 17 \end{array}$ $\begin{array}{r} 12 \\ 6 \\ \hline 18 \end{array}$ etc.

Outras séries:

$\begin{array}{r} 22 \\ 24 \\ \hline 46 \end{array}$ $\begin{array}{r} 25 \\ 22 \\ \hline 47 \end{array}$; $\begin{array}{r} 21 \\ 26 \\ \hline 47 \end{array}$;

$\begin{array}{r} 122 \\ 24 \\ \hline 146 \end{array}$ $\begin{array}{r} 128 \\ 12 \\ \hline 140 \end{array}$;

$\begin{array}{r} 224 \\ 222 \\ \hline 446 \end{array}$ $\begin{array}{r} 226 \\ 221 \\ \hline 447 \end{array}$ etc.

Fonte: D'Ávila (1942, p. 308-309).

Na gradação do ensino da soma apresentada por D'Ávila, inicialmente o professor deveria combinar todos os algarismos de 1 a 9, tendo este primeiro por referência, em seguida, era preciso fazer o mesmo processo começando por 2. A partir do número 3, as combinações passavam a ser feita de tal modo que a última soma resultava em 10 como no caso 3+7. Assim, no item i, a única combinação era 9+1.

Logo depois desta primeira etapa, considerada fácil, o autor apresentou outras combinações de exercícios que, segundo ele, foram “convenientemente medidos”, nos quais cada soma possuía 3 algarismos. A dificuldade deveria ir aumentando até se chegar em somas de centenas.

No exemplo ilustrado por D’Ávila (1942), foi possível averiguar mais uma vez a presença de uma *marcha do ensino* que deveria seguir uma ordem crescente de dificuldade. Nessa *marcha*, os primeiros exercícios envolviam apenas somas de unidades, depois gradualmente passava a combinar unidades e dezenas e, por fim, somas que envolviam dezenas e centenas. Deste modo, assim como no caso dos outros manuais já destacados, havia em D’Ávila (1942) uma *marcha do ensino* que, baseada no par fácil/difícil, apresentava-se como um fator determinante de saberes próprios do professor e, por meio dessa *marcha*, configurou-se uma aritmética *para ensinar*.

A presença de uma *marcha do ensino* também ficou evidenciada na obra na seção em que D’Ávila (1942) tratou das frações. Nela o autor evidenciou um passo a passo de noções que o aluno deveria aprender com relação às frações que, de certo modo, deveria nortear o trabalho do professor. Assim, ele destacou:

Para compreender frações deverá o aluno, no mínimo, assenhorar-se das seguintes noções:

- a) entender o que é fração.
- b) entender que $1/2$ é a $3/6$, $4/8$, $5/10$ etc.
- c) entender que o número de baixo do traço (denominador) significa em quantas partes a unidade foi dividida e o de cima (numerador), as partes tomadas.
- d) entender a significação do traço usado.
- e) que a fração se torna maior quanto menor o denominador ou maior o numerador.
- f) que frações de números diferentes podem ter o mesmo valor: $2/6 = 1/3$.
- g) que $1/2$ de um terreno, $1/2$ de uma laranja, $1/2$ de um metro valem a mesma coisa como fração.
- h) que há $1/2$ maiores e $1/2$ menores, de acordo com a unidade dividida.
- i) que a fração vem de um inteiro: $1/2$ de uma fruta, por exemplo, ou de um número: $1/2$ de 20 laranjas.
- j) que multiplicando ambos os termos de uma fração pelo mesmo número a fração não se altera etc. (D’ÁVILA, 1942, p. 313).

Logo depois de apresentar estas noções, D’Ávila (1942) indicou duas notas a respeito deste conteúdo nas quais ele deixou claro que sua fala estava direcionada a professores em processo de formação. Assim, na primeira nota ele destacou que “Para o primeiro exercício da série, o professor de metodologia orientará os alunos normalistas na organização de material

para o ensino de frações” (D’ÁVILA, 1942, p. 313). Já na segunda nota, logo após defender que o ensino de frações se fundamentava no concreto, o autor afirmou:

Após essa base é que deve vir a representação numérica das frações. Aqui, como na fase concreta, *é necessário seriar os exercícios* para que, diante de uma expressão fracionária, a criança perceba exatamente o que ela é.

Alguns exercícios aconselháveis:

- a) Que falta à fração $\frac{2}{5}$ para alcançar a unidade?
- b) Quanto a fração $\frac{8}{5}$ excede a unidade?
- c) Que fração é maior: $\frac{2}{4}$ ou $\frac{2}{5}$?
- d) Que fração é menor: $\frac{3}{8}$ ou $\frac{3}{5}$?
- e) Que fração é maior: $\frac{2}{8}$ ou $\frac{3}{7}$?
- f) Que significam frações assim: $\frac{4}{4}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{3}{3}$?
- g) Que significam estas expressões. $1\frac{2}{4}$, $2\frac{2}{7}$
- h) Em frações de numeradores iguais, qual a maior?
- i) Em frações de denominadores iguais, qual a menor?
- j) Como converter números inteiros em terços, quartos, quintos etc.?
- l) Como converter quintos, quartos, terços em números inteiros?
- m) Que são frações iguais? etc.

Após essas bases, cuja formação no aluno, constitui garantia de êxito posterior, vêm as demais questões sobre frações, compreendidas no curso primário (D’ÁVILA, 1942, p. 313-314, grifo nosso).

Com este exemplo, D’Ávila (1942) reforçou a ideia de uma *marcha do ensino* de acordo com uma ordem crescente de dificuldades. Este argumento também corroborou uma ideia presente na pedagogia científica e que o autor trouxe ao final de sua exposição: que bastava seguir uma ordem preestabelecida e testada que se teria a garantia de êxito no ensino (FERREIRA; VALENTE 2020b, VALENTE; FERREIRA, 2021).

Ainda sobre a *marcha do ensino*, destaca-se um argumento do autor em relação aos problemas em série que, segundo ele, “São problemas ordenados, cujas *dificuldades crescem pouco a pouco*. Às vezes uns são organizados com os resultados de outros” (D’ÁVILA, 1942, p. 320, grifo nosso). Ainda sobre a graduação dos problemas, uma vez

[...] atendida a exigência de clareza no enunciado do problema; uma vez graduadas as dificuldades de acordo com a capacidade mental do aluno; uma vez lida, analisada, interpretada e compreendida a linguagem do problema, resta o trabalho mais ingrato e mais difícil da escola: o de ensinar a criança a raciocinar (D’ÁVILA, 1942, p. 324).

O manual de D’Ávila (1942), organizado em forma de lições, discorreu sobre uma graduação do ensino que, em partes, foi resultado de apropriações de discussões advindas da pedagogia científica e, em partes, foi fruto da experiência profissional do autor que atuou na formação de professores que ensinavam matemática. Deste modo, a aritmética *para* ensinar, no manual *Práticas escolares*, incorporou o discurso da pedagogia científica, no sentido de graduar

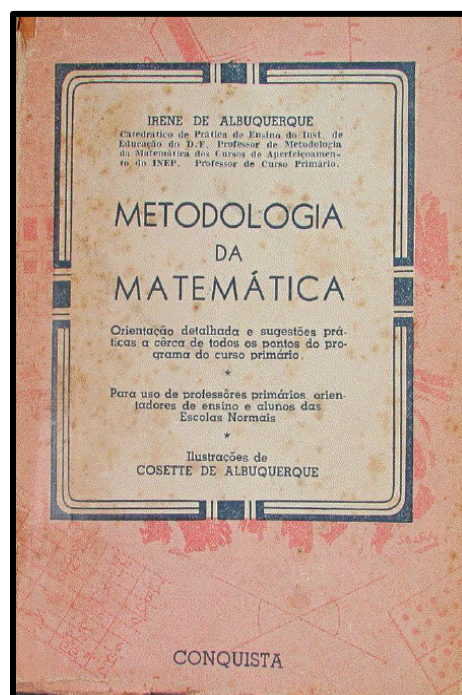
as dificuldades de acordo uma ordem crescente, e o articulou a saberes que, tudo indica, advinham da experiência profissional do autor.

5.3.2 A graduação do ensino de aritmética em Irene de Albuquerque

A obra de Irene de Albuquerque que foi tomada para análise nesta subseção já foi objeto de várias pesquisas na área da história da educação matemática, o que mostra a relevância que teve na formação de professores que ensinavam matemática em meados do século XX.

Assim como foi feito em relação às outras obras analisadas, antes de adentrar na problemática da graduação do ensino da aritmética, vale fazer uma breve apresentação da autora e da obra, a começar pela capa do manual, ilustrada na Figura 13 a seguir.

Figura 13: Capa do manual Metodologia da Matemática, de Irene de Albuquerque



Fonte: Albuquerque (1951)⁵⁵.

Na parte superior da capa é possível constatar as qualificações técnicas da autora como professora do IERJ. Na parte inferior, fica claro que este manual se destinava a professores primários, orientadores e alunos das escolas normais. Estas informações, associadas às obtidas

⁵⁵ A reprodução aqui utilizada encontra-se disponível em: <<https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/134314>>.

nas pesquisas já citadas ao longo desta tese, foram fundamentais para tomar este livro como fonte de pesquisa para discutir a graduação do ensino de aritmética.

Vale destacar que a escolha desta obra se justificou para as pretensões desta tese por ela ser uma importante referência para tratar do saber profissional do professor que ensinava matemática no século XX e por tratar explicitamente da importância de basear-se em estudos da psicologia para graduar as dificuldades no ensino matemática. A este respeito, já no começo da introdução, Albuquerque (1951) ressaltou:

Por ser uma ciência lógica, certas noções precisam ser dadas antes de outras, a fim que os alunos possam jogar com elas. Há ainda a preocupação com a dosagem certa, com a *graduação das dificuldades*, com desdobramento de casos que a nós parecem idênticos, mas são diferentes para a criança; há o apelo constante ao seu interesse, à sua experiência anterior, há, sobretudo, a *necessidade de certo conhecimento de psicologia* que nos leve a uma adaptação tão perfeita ao tipo de raciocínio da criança em cada idade, que seja esse o raciocínio que nós empreguemos ao ministrá-lhes uma noção (ALBUQUERQUE, 1951, p. 7, grifos nossos).

Conforme apresentado na segunda seção deste trabalho, graduar as dificuldades de apresentação dos saberes a partir da psicologia era uma das características da pedagogia científica. A graduação proposta por Albuquerque (1951) foi fundamental para o enquadramento da obra no rol daquelas que compõem o presente estudo.

Sobre a autora, é possível afirmar que:

Irene de Albuquerque foi responsável pelo desenvolvimento de uma das mais ricas experiências no campo da prática de ensino. Ao constatar a limitação dos estágios discentes ao campo de excelência da escola-modelo, Irene propôs que as futuras professoras percebessem que um bom trabalho educativo não existia apenas nos grandes centros, mas que poderiam também frutificar em terrenos aparentemente áridos (LOPES; GURGEL, 2017, p. 102).

É sempre um grande desafio falar algo mais de uma obra já analisada em muitos e importantes estudos, desde artigos a dissertações e teses. O que aqui se propôs diferentemente de outras pesquisas foi analisá-la a partir da perspectiva da graduação do ensino da aritmética como um saber que perpassa toda a obra, buscando caracterizar essa graduação como elemento de uma aritmética *para* ensinar.

Como primeiro elemento da graduação do ensino da aritmética presente no manual de Albuquerque (1951), vale discutir alguns aspectos relativos à *seleção* dos conteúdos presentes na obra. Antes de tecer considerações sobre este aspecto, foi possível ter uma visão geral da obra a partir do seu índice, conforme mostrado na Figura 14 a seguir.

Figura 14: Índice do manual *Metodologia da Matemática*

ÍNDICE	
Introdução	7
1.ª PARTE	
Capítulo I — Princípios gerais da aprendizagem.	
A — Aprendizagem espontânea	11
B — Aprendizagem dirigida	12
Tópicos para discussão	15
Capítulo II — A Matemática e as demais matérias; planos de trabalho; plano de aula	16
Sugestões práticas:	
A — Sugestões relativas às unidades de trabalho	19
B — Exemplo de um plano de aula de Matemática	21
C — Sugestões para trabalhos práticos	23
Capítulo III — Hábitos, atitudes e ideais a desenvolver; sua importância	24
Capítulo IV — Tarefas desnecessárias em Matemática	27
Capítulo V — Fixação da aprendizagem: exercícios sistematizados	29
Capítulo VI — Fixação da aprendizagem: jogos didáticos	36
Sugestões práticas	38
Capítulo VII — O treino do raciocínio e os problemas de Matemática	44
Capítulo VIII — Verificação da aprendizagem e do progresso do aluno	63
2.ª PARTE	
Capítulo I — Noções de Geometria	65
Capítulo II — Noção de número. Contagem. Numeração	69
Sugestões práticas	75
Capítulo III — Aprendizagem dos fatos fundamentais das 4 operações de inteiros. A tabuada	80
Sugestões práticas	94
Capítulo IV — Aprendizagem das operações fundamentais com inteiros	100
A — Recomendações gerais	100
B — Casos simples da adição e da subtração	104
C — Adição com reservas	105
D — Subtração com recurso à ordem superior	107
E — Multiplicação	111
F — Divisão com divisor simples	118
G — Divisão com divisor composto	123
Sugestões práticas	125
Capítulo V — Cálculo mental abreviado	130
Capítulo VI — Frações ordinárias	133
Sugestões práticas	147
Capítulo VII — Frações decimais. Números decimais. Cálculo com números decimais	149
Sugestões práticas	156
Capítulo VIII — Sistema monetário brasileiro	157
Sugestões práticas	161
Capítulo IX — Jogos fundamentais do sistema métrico	164
Sugestões práticas:	
A — Exercícios e problemas	168
B — Material	169
C — Jogos	169
Capítulo X — Perímetros. Áreas. Volumes	170
Sugestões práticas	177
Capítulo XI — Noção de proporcionalidade. Regra de Três	179
Sugestões práticas	183
Capítulo XII — Porcentagem. Juros	184
Sugestões práticas	188
Bibliografia	189

Fonte: Albuquerque (1951).

Na *seleção* de conteúdos ilustrada por meio da figura acima, foi possível constatar que a obra foi dividida pela autora em duas partes. A primeira delas trata da matemática relativamente às questões mais ligadas à psicologia, como é o caso da aprendizagem, e a segunda apresenta uma ênfase maior nos conteúdos matemáticos.

Ainda sobre a *seleção*, no primeiro capítulo da parte inicial da obra intitulada *Princípios gerais da aprendizagem*, foi possível destacar o tópico 6, no qual a autora argumentou que se deveria ensinar um “[...] pouco de cada vez, graduando as dificuldades e atendendo ao interesse [da criança]” (ALBUQUERQUE, 1951, p. 14). Desse modo, a

[...] escola fará esse *trabalho de seleção* e dosagem, ensinando-lhe pouco de cada vez, primeiro o mais fácil, depois o mais difícil. E como é a matemática uma ciência lógica, é *preciso selecionar* ainda as noções básicas para a aprendizagem de outras: a numeração antes da adição; as medidas de comprimento antes das de áreas, etc. Como não é preciso, por exemplo, conhecer todo o sistema de numeração para aprender as combinações fundamentais da adição, essas aprendizagens vão-se alternando, sempre obedecendo à ordem de dificuldade, e resolvendo situações de real interesse (ALBUQUERQUE, 1951, p. 14, grifos nossos).

Neste exemplo, como um princípio relacionado à aprendizagem, a *seleção* dos conteúdos precisaria seguir uma lógica que partiria do mais fácil para o mais difícil. Tal *seleção*, ao que parece, estava articulada à uma *marcha do ensino* e deveria seguir uma ordem crescente de dificuldades.

A *marcha do ensino* do fácil para o difícil no manual de Albuquerque (1951) apareceu ainda no capítulo 5 da primeira parte da obra, associada à fixação da aprendizagem por meio de exercícios e problemas.

Seriação – Os exercícios devem ser dispostos em ordem crescente de dificuldade. Vencida uma pequena dificuldade, adquire o aluno certa experiência inicial que o ajudará a vencer a seguinte, e assim sucessivamente. Além disso, o primeiro êxito constituirá, desde logo, valioso estímulo para o prosseguimento do trabalho (ALBUQUERQUE, 1951, p. 31, grifo da autora).

Ainda neste sentido, a autora ressaltou que deveria

[...] haver perfeita concordância entre o nível da turma e os exercícios propostos. Se estes forem demasiado fáceis para os alunos, provocarão lamentável desinteresse, do qual resultará perda de tempo e energia numa atividade inteiramente despicienda. Exercícios rebuscados e difíceis conduzem facilmente ao desânimo e só podem trazer rendimento negativo. Só se deve propor um exercício quando as noções que ele subtende forem bem explicadas e compreendidas (ALBUQUERQUE, 1951, p. 31).

Assim, segundo a autora, era necessário que houvesse uma dosagem dos exercícios de modo que não ficassem desinteressantes por serem muito fáceis e nem desestimulantes por serem muito difíceis. Com isso, foi possível afirmar que essa dosagem dos exercícios pode ser caracterizada como um saber próprio da docência, nos termos definidos neste trabalho, uma aritmética *para ensinar*.

Um outro aspecto da graduação do ensino de aritmética relacionado à fixação da aprendizagem referia-se ao tempo. Neste caso, a autora afirmou:

Tempo – Eis outro fator de importância primacial. Aconselha a prática a evitarmos os exercícios longos, que se tornam fastidiosos, e, também os extremamente breves, que não sejam suficientes para fixar uma noção. Impõe-se nos achar o equilíbrio entre os extremos condenáveis do exagero. É claro que nas séries mais adiantadas os exercícios um pouco mais longos são bem aceitos, mas para as classes mais atrasadas a nossa escolha deve recair sobre os exercícios de menor duração (ALBUQUERQUE, 1951, p. 31, grifo da autora).

Com isso, o professor precisaria seguir uma *programação* do ensino de modo a melhor organizar o tempo escolar empregado em cada tipo de exercício. Ainda sobre esta questão temporal, a autora destacou uma proposta de organização dos exercícios para o treino, que segundo ela, foi proposta por Thorndike, conforme a Figura 15.

Figura 15: Organização temporal dos exercícios segundo Thorndike

10	exercícios	de	20	minutos	na	1. ^a	semana
10	"	"	10	"	"	2. ^a	"
10	"	"	5	"	"	3. ^a	"
5	"	"	10	"	"	4. ^a	"
1	"	"	10	"	nos meses seguintes.		

Fonte: Albuquerque (1951, p. 31).

É possível notar na figura acima que a proposta era dosar quantidade e tempo dos exercícios. Nas três primeiras semanas, deveriam ser propostos aos alunos 10 exercícios cujo tempo de execução deveria ser reduzido pela metade a cada semana, de modo que na primeira semana os alunos deveriam dispor de 20 minutos, enquanto na terceira, apenas de cinco minutos. A partir da quarta semana, o número de exercícios diminuía para cinco e, nos meses seguintes, chegava a apenas um, os quais deveriam ser resolvidos em 10 minutos.

A respeito do tempo de execução dos exercícios, ao estudar obras de Thorndike, Santos (2006, p. 116) destacou que este fator “[...] aos poucos, vai sendo incorporado como um componente importante para o controle da aprendizagem. As atividades vão sendo incorporadas de um modo gradativo”.

A aritmética *para* ensinar em Albuquerque (1951), articulou a dosagem dos exercícios à do tempo. Ao que tudo indica, tal articulação associava resultados de pesquisa como a de Thorndike à experiência profissional da autora.

Avançando na questão da aprendizagem, na primeira parte da obra de Albuquerque (1951), no capítulo sete, intitulado *o treino do raciocínio e os problemas de matemática*, a autora continuou a discorrer a respeito do treino por meio de exercícios e problemas, como o próprio título indica. Depois de uma série de questionamentos referentes aos problemas, como o que pedia um problema, o que era preciso saber sobre ele, o que ele propôs e como se articulavam os dados, a autora questionou: “Como podemos, então, organizar a nossa marcha para resolução?” (ALBUQUERQUE, 1951, p. 51).

A forma como esta questão estava posta corrobora a hipótese da existência de uma *marcha* própria para a resolução de problemas em tempos de pedagogia científica. Ainda nesta linha, a autora defendeu que houvesse uma progressividade na resolução dos problemas.

Progressivamente, os alunos devem ser levados a dispensar a leitura oral do problema e a restringir a sua análise oral, habilitando-se a resolvê-los com

independência. Forçar o desenvolvimento das crianças até essa fase, antes de estarem preparadas para isso, seria trabalho inútil. Enquanto tal não for possível, mesmo os problemas para resolver em casa devem ser previamente analisados em classe (ALBUQUERQUE, 1951, p. 55).

Esse excerto revela um aspecto importante da pedagogia científica e que também apareceu nas outras obras analisadas: a necessidade de adequação do ensino à capacidade que a criança tinha para aprender, o que deveria ser responsável por dar norte ao trabalho docente.

No último capítulo da primeira parte da obra, a autora tratou da *verificação da aprendizagem e do processo do aluno*. Neste caso, a graduação do ensino foi abordada a partir das provas. Quanto a estas, verificou-se uma série de orientações aos professores acerca da elaboração dos instrumentos de avaliação. Assim, um primeiro ponto que se pode destacar no contexto da análise empreendida por esta tese, é o que está posto na sexta orientação. Em “[...] qualquer caso, tanto os exercícios de verificação quanto as provas devem permitir uma *medida objetiva daquilo que se pretende medir*, e tal tarefa é fácil em matemática” (ALBUQUERQUE, 1951, p. 63, grifo nosso).

Uma vez feito o destaque das provas como instrumentos de objetivação da medida de verificação da aprendizagem, na sétima orientação apresentada no capítulo, a autora argumentou ainda que as “[...] provas para medir *aproveitamento num determinado período* incluem questões sobre a matéria abordada, questões essas de complexidade variável, e de tipos variados, em ordem crescente de dificuldades” (ALBUQUERQUE, 1951, p. 63, grifo da autora). Assim, pode-se ressaltar que, de acordo com a autora, havia a necessidade de uma *marcha* das questões, sempre do mais fácil para o mais difícil, como propunha a pedagogia científica.

O argumento a respeito da necessidade de graduar as questões das provas segundo a ordem de dificuldades foi reforçado nas orientações oito e nove, que diziam respeito às provas de velocidade e capacidade.

8. As *provas de velocidade* têm um objetivo definido (medir, por exemplo, a velocidade para a resolução de adições de duas parcelas, sem reservas): Dão-se grande número de questões, abrangendo todas as situações possíveis graduadas, pelo menos aproximadamente, em ordem de dificuldade, e marca-se um limite e tempo. Pode-se, assim, calcular, contando as questões certas, a velocidade do aluno por minuto.

9. As *provas de habilidades ou capacidades* apresentam questões graduadas, em todas as situações possíveis, dentro do que se deseja medir; todos os casos da divisão, por exemplo. A criança faz todas as que é capaz de resolver (ALBUQUERQUE, 1951, p. 64, grifos da autora).

É possível destacar que, na primeira parte da obra *Metodologia da Matemática*, Irene de Albuquerque propôs uma graduação do ensino da aritmética que deveria se relacionar com o processo de aprendizagem. Nesta parte da obra, a aritmética *para* ensinar relativa à essa graduação apareceu principalmente como *marcha do ensino*, sempre seguindo a ordem crescente de dificuldades, ou seja, do fácil ao difícil, tanto em relação aos exercícios de problemas quanto em relação às provas.

Como já destacado, a segunda parte da obra deu ênfase maior aos conteúdos e a discussão acerca do processo de aprendizagem que estava posta em função deles. Qual foi a graduação do ensino da aritmética proposta para isso?

Retomando a noção de *seleção*, vale destacar que, na segunda parte, o manual apresentava um total de 12 capítulos, dos quais dois eram voltados à geometria, que são os capítulos I e X, o primeiro deles sobre *noções de geometria* e o outro sobre *perímetros, áreas e volumes*. Esses capítulos não foram considerados na análise empreendida nesta tese. Os outros 10 capítulos da segunda parte versavam sobre o ensino de conteúdos da aritmética, como números, contagem, operações com inteiros e frações, porcentagem e juros.

No capítulo II, em que tratou das noções de número, contagem e numeração, um dos argumentos iniciais da autora foi o seguinte:

Todo o programa de Matemática do curso primário apresenta o número nos seus vários sentidos. *A aprendizagem, entretanto, é feita pouco a pouco, em experiências sucessivas.*

A precisão da noção de número é relativa às possibilidades das crianças em cada idade: Uma criança pode não ter noção de quanto sejam 500 brinquedos, mas saberá que são ‘muitos’; saberá que são mais do que 5 ou do que 100. Só mais tarde poderá compreender que 500 são 5 centenas, sendo uma centena, 100 unidades ou 10 dezenas (ALBUQUERQUE, 1951, p. 69, grifo nosso).

Mais uma vez, a autora reforçou a necessidade de associar a *marcha do ensino* a uma marcha da aprendizagem que, no caso da noção de número, deveria acontecer pouco a pouco, por meio de experiências feitas pelas crianças. De acordo com esta proposta, é possível afirmar que a autora defendia uma graduação das experiências.

A *marcha do ensino* nesse segundo capítulo também apareceu na contagem, como no exemplo:

Contagem dentro da dezena: A contagem será feita, primeiro de 1 até 5 e depois de 6 até 10, e objetivamente, apontando ou segurando os objetos. Mesmo quando até 5 ou 10, em ordem, isso não significa que tenha a noção de número, desde que não saiba conhecer quando um grupo tem determinado número de coisas. A contagem com objetivação mostra a correspondência

entre o número, o símbolo oral (um, dois, três, etc.) enunciado pela criança, e os algarismos que o representam (ALBUQUERQUE, 1951, p. 70, grifo da autora).

Este exemplo mostra um passo a passo para o ensino de contagem que deveria ser feito a partir de objetos. Ao tratar do que denominou de números vizinhos, Albuquerque (1951) se utilizou de expressões que indicam uma *marcha do ensino*:

Números vizinhos; completamento de séries; convém, nos *primeiros exercícios* de treino, escrever a série completa no quadro negro, deixando a criança consultá-la ou para exercícios de complemento de séries ou de números vizinhos. *Exercitar primeiro* com os números menores, para, *depois*, passar ao maiores (ALBUQUERQUE, 1951, p. 74, grifo nosso).

Inicialmente, segundo esta proposta, era preciso escrever as séries de números no quadro negro e, na *marcha do ensino* de numeração, o professor precisava levar os alunos a exercitarem seguindo sempre a ordem do menor ao maior. Esta ideia de ordem foi explicitada por meio das expressões *exercitar primeiro e depois*.

Ao tratar, no terceiro capítulo, dos fatos fundamentais para a aprendizagem da tabuada por meio de operações com inteiros, Albuquerque (1951) mais uma vez reforçou a necessidade de uma graduação do ensino. Para tanto, assim como o fizeram Vasconcelos (1933) e Aguayo (1936), valeu-se das pesquisas de Clapp.

Estudando a ordem das dificuldades dos fatos da adição e da subtração, segundo as pesquisas de Clapp, nos Estados Unidos, e de Alfredina de Paiva e Souza, no Brasil, podemos formular as seguintes conclusões:

Em relação à adição:

- a) As combinações mais fáceis da adição apresentam total não superior a 10; as mais difíceis apresentam totais altos (17, 16, 15, 14, 13).
- b) Figuras entre as mais fáceis, as combinações de adição com número 1 (3+1, 1+3 etc.) e as combinações com números iguais (3+3, 5+5 etc.).
- c) As combinações com zero são, em geral, de dificuldade média (3+0, 0+3 etc.) (ALBUQUERQUE, 1951, p. 86, grifo da autora).

Assim como foi feito para a adição, a autora comenta os fatos fundamentais da pesquisa de Clapp também em relação à subtração, multiplicação e divisão. Neste caso, constata-se uma graduação do ensino das operações que era embasada nos experimentos e, com isso, foi possível retomar uma das conclusões de Ferreira e Valente (2020b), que afirmaram que em tempos de pedagogia científica não cabia ao professor, no ato de ensinar, alterar uma ordem preestabelecida que era fruto de uma medida objetiva determinada pelos psicólogos em seus laboratórios. Quanto à *marcha do ensino* dessas operações e dos fatos fundamentais:

No início da aprendizagem, daremos apenas os fatos da adição, até que esta operação esteja bem compreendida; atingindo esse objetivo, passaremos à subtração, usando justamente os fatos correspondentes àqueles da adição já

aprendidos; daí por diante, ensinaremos sempre por unidades didáticas completas, incluindo adição e subtração (ALBUQUERQUE, 1951, p. 88).

A *marcha do ensino* proposta estabelecia que somente depois que o aluno compreendesse bem os fatos fundamentais da adição é que passaria a ter contato com aqueles relacionados à subtração. No final deste capítulo, a autora voltou a reforçar a necessidade de organizar os exercícios de acordo com a complexidade:

Os exercícios já passados no copiador ou mimeógrafo e entregues aos alunos, para colocar apenas os resultados, economizam o tempo e o trabalho gasto com cópia, permitem que sejam treinados cerca de vinte fatos num espaço de 5 minutos, auxiliam à *organização de exercícios seriados por complexidade* (que podem ser usados todos os anos, desde que os alunos não escrevam no material que lhes foi fornecido), trazem grande interesse ao aluno e tornam-no consciente do seu progresso (ALBUQUERQUE, 1951, p. 94, grifo nosso).

Para a autora, a ordem dos exercícios precisaria aparecer desde a organização “[...] do caderno do professor, para a anotação da frequência com que foram exercitados os vários fatos fundamentais” (ALBUQUERQUE, 1951, p. 96). Deste modo:

Cada página será dividida ao meio, para adição e subtração; o professor irá anotando os fatos fundamentais à proporção que vão sendo ensinados, o que corresponderá também, aproximadamente, à ordem de dificuldades. Os fatos correspondentes da subtração serão logo relacionados, mesmo que sua aprendizagem não se tenha iniciado. Cada vez que o fato entra em exercício ou jogo, coloca um risco adiante: o quinto risco é feito cortando os 4 anteriores, para facilitar a contagem (ALBUQUERQUE, 1951, p. 96).

Um exemplo dessa organização do caderno do professor pode ser observado na Figura 16.

Figura 16: Proposta de organização dos fatos fundamentais

ADIÇÃO		SUBTRAÇÃO	
1+1		2-1	
2+1		3-1	
1+2		3-2	
3+1		4-1	
1+3		4-3	

Fonte: Albuquerque (1951, p. 96).

À medida em que se avançou no manual de Albuquerque (1951), foi possível observar que a autora foi reforçando a ideia da necessidade de uma graduação do ensino da aritmética na

qual era preciso estabelecer atividades segundo a ordem crescente de dificuldades. Assim, do mesmo modo que ocorre no terceiro capítulo em relação à tabuada, no quarto capítulo, intitulado *aprendizagem das operações fundamentais com inteiros*, verificou-se uma graduação que apareceu como *marcha do ensino*.

Com isso, já nas recomendações gerais do início do capítulo, Albuquerque (1951) apresentou a seguinte orientação:

A graduação das dificuldades de cada operação é essencial para que a aprendizagem se realize com êxito. Cada operação, considerada do ponto de vista das dificuldades que apresenta à criança, não pode ser estudada apenas em um, dois ou três casos, conforme pareceria, à primeira vista. Essa graduação está minuciosamente explicada nas páginas a seguir, e o professor não encontrará grande trabalho em guiar-se por ela, o que assegurará o progresso do aluno e lhe evitará estar sempre voltando atrás para novas explicações (ALBUQUERQUE, 1951, p. 100, grifo da autora).

Como um trabalho típico da pedagogia científica, a autora propôs uma graduação do ensino que deveria ser seguida como forma de garantir o progresso do aluno. Segundo essa graduação, cada caso deveria ser apresentado somente “[...] quando o anterior estiver sabido” (ALBUQUERQUE, 1951, p. 100).

No ensino das operações, era preciso que paralelamente “[...] ao ensino da numeração e das combinações dos números dígitos, vai-se introduzindo a aprendizagem dos vários casos da adição e da subtração, em *ordem crescente de dificuldade*” (ALBUQUERQUE, 1951, p. 101).

Ao tratar da importância dos hábitos de verificação das operações, a autora mostrou um passo a passo para essa verificação em cada uma das operações e, com isso, acabou mais uma vez propondo ao professor uma *marcha do ensino*:

- a) *Para a adição*: Ensina-se a somar de cima para baixo; completada a operação, soma-se mentalmente, de baixo para cima, verificando se há coincidência de resultados;
- b) *Para a subtração*: Calculando o resto, soma-se mentalmente o subtraendo com o resto, a partir das unidades, confrontando com os algarismos do minuendo, para ver se coincidem;
- c) *Para a multiplicação*: Refazer mentalmente a operação após cada produto parcial, verificar a colocação dos produtos parciais, a adição aos produtos parciais e os zeros finais. De preferência, multiplicando-se em sentido inverso, isto é, por exemplo: $382 \times 8 =$ Da 1.^a vez, dizemos: 8×2 ; 8×8 ; 8×3 ; da 2.^a vez, dizemos: 2×8 ; 8×8 ; 3×8 .

Para a verificação da adição dos produtos parciais, usa-se o método *a*.

- d) *Para a divisão*: Verificar imediatamente se cada resto obtido é, realmente, menor que o divisor. Refazer as multiplicações e subtrações, mentalmente. Verificar os zeros finais (ALBUQUERQUE, 1951, p. 101-102, grifos da autora).

Depois de apresentar estas orientações acerca do ensino das operações, Albuquerque (1951) problematizou de um modo mais detalhado neste capítulo como se deveria graduar as dificuldades em cada uma dessas operações, apresentando alguns critérios a respeito delas, como no caso da adição com reservas, em que a graduação deveria ser “[...] feita tendo em vista vários aspectos: a) número de parcelas; b) número desigual de algarismos nas parcelas; c) reservas em todos os casos ou não” (ALBUQUERQUE, 1951, p. 106-107). Para exemplificar esses critérios, a autora mostrou cinco casos que são apresentados na Figura 17.

Figura 17: Exemplo de graduação das dificuldades da adição

1.º caso	$\begin{array}{r} 28 \\ + 34 \\ \hline 62 \end{array}$	(Duas parcelas, o mesmo número de algarismos em cada parcela, não há reservas na última coluna à esquerda).
2.º caso	$\begin{array}{r} 98 \\ + 12 \\ \hline 110 \end{array}$	(O total da última coluna à esquerda é maior que 9, acrescentando uma dificuldade nova à escrita).
3.º caso	$\begin{array}{r} 425 \\ + 718 \\ \hline 1143 \end{array}$	(As colunas com reservas apresentam-se de permeio às colunas sem reservas).
4.º caso	$\begin{array}{r} 385 \\ + 15 \\ \hline 400 \end{array}$	(Número desigual de algarismos nas parcelas).
5.º caso	$\begin{array}{r} 985 \\ + 47 \\ \hline 1032 \end{array}$	(Combina as dificuldades do 2.º e do 4.º casos).

Fonte: Albuquerque (1951, p. 107).

Na figura, é possível constatar como Albuquerque (1951) exemplificou de um modo prático a graduação do ensino da adição, começando por um caso considerado fácil, em que as parcelas eram iguais e não havia reservas na última coluna. Já no segundo caso, um pouco mais difícil, as parcelas continuavam iguais, mas já aparecia uma soma com reserva na última coluna. Em seguida, aparece um caso com duas colunas com reservas até chegar em caso com parcelas diferentes. Por fim, no exemplo mais elaborado, há parcelas desiguais e soma com reserva em uma das colunas.

Foi possível constatar ainda uma graduação das dificuldades em relação à subtração, recorrendo à ordem superior:

Essa graduação é de grande importância quando se usa o processo de decomposição; subtrações longas, com sucessivos empréstimos, levam a erros; além disso, os zeros no minuendo, principalmente quando intercalados com 1, constituem grande dificuldade. Para os outros dois processos, é lógico que as subtrações pequenas são mais fáceis do que as longas, mas os casos com zeros se identificam com os demais (ALBUQUERQUE, 1951, p. 110-111).

Tal graduação foi apresentada por meio dos exemplos mostrados na Figura 18 a seguir, com a orientação de que mesmo “[...] ao professor acostumado ao processo de decomposição, pedimos que experimente efetuar as operações pelos três processos; terá, aí, constatada a grande desvantagem dos empréstimos” (ALBUQUERQUE, 1951, p. 111).

Figura 18: Exemplo de graduação das dificuldades da subtração

35	225	204	1002	20101	301001
—18	—38	—37	—635	—9875	—71273
-----	-----	-----	-----	-----	-----

Fonte: Albuquerque (1951, p. 111).

No que se referia à multiplicação, a autora aconselhou aos

[...] professores, que escolham os seus exercícios de multiplicação obedecendo às seguintes etapas e com os seguintes treinos complementares de adição:

I—Multiplicando e multiplicador com algarismos até 5; somar 1 e 2 aos possíveis resultados da multiplicação de cada algarismo.

II—Multiplicando e multiplicador com algarismos até 7; somar 2, 3 e 4 aos possíveis resultados da multiplicação de cada algarismo.

III—Multiplicando e multiplicador com algarismos até 8; somar 1, 2, 3, 4, 5 e 6 aos possíveis resultados da multiplicação de cada algarismo.

IV—Multiplicando e multiplicador com algarismos até 9; somar 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8 aos possíveis produtos (ALBUQUERQUE, 1951, p. 114).

Segundo estas orientações, ao escolher exercícios a respeito da multiplicação para o treino, o professor deveria atentar-se a alguns critérios que precisavam ser observados em cada uma das etapas. Na primeira etapa, era preciso limitar os algarismos do multiplicando e multiplicador até 5 e somar 1 e 2 aos resultados. Depois, progressivamente esses algarismos iriam aumentando até 7, 8 e 9 e, neste último, o produto já poderia ser somado aos algarismos de 1 a 8. Deste modo, Albuquerque (1951) evidenciou uma ordem crescente de dificuldades que deveriam ser seguidas pelo professor.

No manual de Albuquerque (1951) também foi possível notar uma graduação própria da operação de divisão. Deste modo, a autora argumentou que a

[...] *graduação das dificuldades*, apresentando cada etapa ao aluno, com seu ensino especial, e depois que a anterior tenha sido perfeitamente dominada, é essencial à aprendizagem.

São de três ordens de dificuldades na operação em questão:

- a) Em relação ao cálculo do algarismo do cociente
- b) Em relação às subtrações envolvidas
- c) Em relação às multiplicações a efetuar
- d) Em relação aos zeros.

O método longo diminui a influência da dificuldade *b*, que só será muito séria se há deficiências anteriores (ALBUQUERQUE, 1951, p. 124-125, grifo da autora).

Mais uma vez a autora reforçou a necessidade da compreensão de cada etapa antes de se passar para a etapa posterior, como já havia ressaltado em relação aos fatos fundamentais da adição e da multiplicação. Quanto à ordem das dificuldades, apesar de falar em três, ela acaba apresentado quatro, as quais estão relacionadas ao cociente, as operações de subtrair e multiplicar e aos zeros presente na operação.

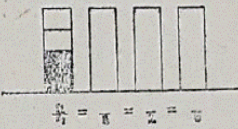
Fechando o capítulo que tratou da aprendizagem das operações com inteiros, na seção em que apresentou sugestões práticas que seriam direcionadas ao estudante de metodologia, a autora reforçou o argumento principal desse capítulo acerca da graduação: “Indique as dificuldades da adição que cada exercício procurou fixar, *gradue os exercícios em ordem crescente de dificuldade*” (ALBUQUERQUE, 1951, p. 129, grifo nosso).

A ideia a respeito da necessidade da graduação do ensino continuou presente nos demais capítulos. Com isto, ao tratar do *cálculo mental abreviado* no capítulo 5, a autora recomendou que o “[...] treino do cálculo mental abreviado deve ser *progressivamente intensificado*, por exercícios sistematizados de cálculo mental, nos quais os alunos empreguem processos abreviados de cálculo que lhes foram ensinados” (ALBUQUERQUE, 1951, p. 130, grifo nosso).

Quanto às frações ordinárias abordadas no capítulo 6, ao apresentar algumas sugestões práticas, a autora indicou “[...] modelos de questões sobre equivalência de frações, em ordem decrescente de valor didático e crescente de dificuldade” (ALBUQUERQUE, 1951, p. 147). Tais modelos são apresentados na Figura 19.

Figura 19: Modelos de questões de equivalências de frações

Complete:

1 — 

2 — Quantos quartos há em meio bolo?
Quantos quartos de litro há em meio litro de leite?
De quantos oitavos preciso para obter $1/2$ melancia?
Com $1/5$ de um queijo, quantos décimos posso obter?

3 — Pense em $2/3$ sob a forma de sextos e de nonos.
Pense em $5/10$ sob a forma de meios e de quintos.
Pense em $3/4$ com denominador 8 e com denominador 2.
Represente a fração $4/8$, respectivamente, com o denominador 4 e o denominador 2.

4 — Reduza a sextos a fração $2/3$.

5 — Achar as frações equivalentes à primeira, em cada linha, com os denominadores indicados.

$$\frac{1}{2} = \frac{\quad}{4}, \frac{\quad}{10}, \frac{\quad}{6}, \frac{\quad}{8}$$

6 — Escreva frações equivalentes à unidade, respectivamente com os denominadores 10, 5, 8, 2, 6.

7 — Reduza ao mesmo denominador as frações que estão em cada linha e represente-as graficamente:

$$\frac{1}{2} \text{ e } \frac{3}{10}$$

$$\frac{5}{6} \text{ e } \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{2}, \frac{4}{10} \text{ e } \frac{4}{5}$$

7 — Apresente a forma mais simples de cada uma das frações abaixo indicadas:

$$\frac{4}{6}, \frac{50}{100}, \frac{20}{50}$$

Fonte: Albuquerque (1951, p. 147-148).

Neste caso, a graduação proposta para o ensino de frações deveria obedecer a uma ordem crescente de dificuldade e o inverso em relação ao valor didático. Inicialmente, o ensino de frações se daria por meio de uma representação concreta que a autora considerava ter um maior valor didático e, ao mesmo tempo, um grau de dificuldade menor para os alunos e deveria ir progredindo até chegar às frações equivalentes.

No que se referia às frações decimais tratadas no capítulo 7, o destaque foi o de que:

É preciso, ainda, graduar as dificuldades e apresentar as várias situações que podem ocorrer na adição:

$3,45 + 2,37$ – parcelas com igual número de casas decimais;

$2,45 + 2,3$ – parcelas com número desigual de casas decimais;

$3,27 + 2$ – algumas parcelas só com inteiros e outras com parte inteira e parte decimal;

$3 + 0,27$ – usar parcelas só com números inteiros e outras só com parte decimal (parte inteira representada por zero) (ALBUQUERQUE, 1951, p. 151).

Para fechar a análise da graduação do ensino de aritmética no manual de Albuquerque (1951), vale trazer algumas considerações a respeito do capítulo 8, que discorre sobre o *sistema monetário brasileiro*. Em orientação dada no início do capítulo, a autora destacou que

[...] nenhuma referência se fará a número decimal, nem à relação do nosso sistema monetário, até que a criança tenha a noção de números decimais. Isso não impede que se vá, *progressivamente*, ensinando a escrita de quantias e, mesmo, a adição e a subtração, uma vez que a disposição do cálculo não apresentará dificuldades para a criança (ALBUQUERQUE, 1951, p. 159-160, grifo nosso).

Sobre a progressividade para o ensino do sistema monetário Albuquerque (1951) afirmou:

Podemos estabelecer várias etapas para a aprendizagem inicial de leitura, escrita e cálculo de quantias:

- Leitura e escrita de quantias incluindo apenas cruzeiros, até nove cruzeiros;
- Leitura e escrita de quantias incluindo apenas centavos, até noventa centavos;
- Leitura e escrita das quantias: dez, vinte, trinta, quarenta, cinquenta, sessenta, setenta, oitenta, noventa e cem cruzeiros;
- Leitura e escrita de quaisquer quantias entre um e cem cruzeiros, incluindo apenas cruzeiros;
- Adição e subtração de quantias já conhecidas e que se escrevam com o mesmo número de algarismos (ALBUQUERQUE, 1951, p. 160).

Neste exemplo, a *marcha do ensino* do sistema monetário pode ser observada a partir das cinco primeiras etapas que o professor deveria seguir no ensino desse conteúdo. Dessas etapas, quatro envolviam leitura e escrita de quantias que variavam até cem cruzeiros e, a partir da quinta etapa, apareciam as operações de adição e subtração de quantias já conhecidas pelos alunos. Essas operações propostas a partir da quinta etapa, bem como o restante da graduação exposta pela autora a respeito do sistema monetário, são apresentadas no recorte indicado na Figura 20.

Figura 20: Operações envolvendo o sistema monetário

0,60 + 0,20 <hr/> Cr\$ 0,80	20,00 + 35,00 <hr/> Cr\$ 55,00	20,00 18,00 + 11,00 <hr/> Cr\$ 49,00	25,00 1,20 + 0,70 <hr/> Cr\$ 26,90	18,00 — 2,00 <hr/> Cr\$ 16,00
1,00 + 0,50 <hr/> Cr\$ 1,50	0,60 — 0,20 <hr/> Cr\$ 0,40	35,00 — 20,00 <hr/> Cr\$ 15,00	h) Leitura e escrita de quantias incluindo cruzeiros e centavos, com zeros intercalados, ou quaisquer outras, até 100 cruzeiros. Aprendizagem feita pela adição:	
f) Derivando da soma, a leitura, escrita de quantias, incluindo cruzeiros e centavos:			10,00 + 0,10 <hr/> Cr\$ 10,10	
Cr\$ 1,00 — Cr\$ 1,10 — Cr\$ 1,20 — ... Cr\$ 2,00			Cr\$ 10,00 — Cr\$ 10,10 — Cr\$ 10,20 — Cr\$ 10,30 — 20,00 Cr\$ 29,00 — Cr\$ 29,10 — Cr\$ 29,20 Cr\$ 30,00	
g) Adição e subtração de quantias já conhecidas, número desigual de algarismos nos termos:			i) Os mesmos métodos serão adotados para a leitura e escrita de quantias acima de cem cruzeiros;	
10,00 + 9,00 <hr/> Cr\$ 19,00	20,00 + 0,80 <hr/> Cr\$ 20,80	18,00 + 1,80 <hr/> Cr\$ 19,80	j) A multiplicação e a divisão com o uso de quantias serão aprendidas à proporção que tal aprendizagem se fizer em relação a números decimais.	

Fonte: Albuquerque (1951, p. 160-161).

Na graduação do ensino apresentada por Albuquerque (1951) sobre o sistema monetário, é possível verificar novamente uma ordem crescente das dificuldades. Assim, só depois de um certo tempo trabalhando com as operações de soma e subtração é que os alunos

passariam a realizar operações com o sistema monetário envolvendo multiplicações e divisões, estas últimas deveriam ser aprendidas quando o professor tratasse dos números decimais.

Ao longo do manual *Metodologia da Matemática*, Albuquerque (1951) propôs aos professores uma graduação que, em um primeiro momento, estava relacionada à aprendizagem dos saberes pelos alunos. Nessa proposta de graduação, o professor precisava ter contato com saberes a respeito de como os alunos aprendiam matemática. Tais saberes podem ser classificados como uma matemática *para* ensinar.

Já em um segundo momento, o manual apresentou uma graduação mais relacionada ao ensino de conteúdos da matemática, principalmente em relação à aritmética. Na segunda parte do manual, na graduação do ensino proposta por Albuquerque (1951), a aritmética *para* ensinar apareceu relacionada à matemática *a* ensinar, haja vista que a autora propôs saberes relativos aos conteúdos que precisariam ser ensinados.

Seja como objeto ou ferramenta do ensino, Albuquerque (1951) construiu em seu manual uma graduação cuja ênfase esteve na organização dos saberes, exercícios e problemas de acordo com uma ordem crescente de dificuldades, como um trabalho típico da pedagogia científica. Deste modo, produziu saberes profissionais do professor que ensinava matemática nos quais a necessidade de uma graduação do ensino da aritmética teve um lugar central.

Pode-se afirmar que, dos manuais analisados neste trabalho, o de Albuquerque (1951) foi aquele que trouxe mais informações a respeito da necessidade de uma graduação. Tal graduação apresentou-se como um elemento incorporado aos saberes profissionais, ou seja, não se tratava de algo acessório no processo de ensinar, mas de aspecto característico desta matemática do meio escolar.

Por fim, vale destacar que, ao contrário de outros trabalhos analisados, o manual de Albuquerque (1951) não fez uso de longas justificativas embasadas em diversos estudos advindos da psicologia. Ao que tudo indica, esta graduação foi construída a partir das experiências da autora enquanto professora formadora no IERJ.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho discorreu – a partir da perspectiva da existência de articulações entre saberes do ensino e da formação de professores – sobre o saber profissional do professor que ensinava matemática. Para tanto, a opção de análise dessas articulações foi a de tomar a graduação do ensino de aritmética como temática de pesquisa a partir da constatação de que ela vinha permeando pesquisas voltadas para a história da educação matemática, principalmente como uma categoria de análise de fontes históricas. Vale destacar que a graduação do ensino de aritmética permeou saberes pedagógicos presentes tanto no ensino quanto na formação de professores que ensinavam matemática, por isso foi possível pensar nessa graduação como elemento de uma aritmética *a* ensinar e de uma aritmética *para* ensinar.

Deste modo, tendo em conta esta característica da graduação, buscaram-se respostas à seguinte questão: *que graduação do ensino de aritmética foi dada a conhecer em manuais presentes na formação de professores em tempos de pedagogia científica?*

A busca por respostas a esta questão possibilitou mostrar que a graduação do ensino enquanto temática de pesquisa é bastante ampla e encontra suas principais discussões no campo da Didática. Mas, no caso específico desta tese, a opção feita foi por analisar a graduação do ensino de aritmética a partir de uma perspectiva epistemológica, tendo em consideração estudos voltados à análise da cultura escolar, para os quais a escola é produtora de saberes e não uma simples reprodutora do que é elaborado pelos campos disciplinares.

Com isso, a análise da graduação do ensino de aritmética nos manuais pedagógicos levou em consideração a perspectiva sócio-histórica de análise dos saberes profissionais da docência em matemática que vem sendo elaborada no contexto do GHEMAT.

Embora a discussão mais incisiva acerca da necessidade de uma graduação do ensino remonte a meados do século XIX e as vagas pedagógicas da Escola Tradicional e do método intuitivo terem organizado suas próprias graduações, a opção feita neste trabalho foi a de discorrer sobre a temática em tempos de pedagogia científica, pois foi nessa vaga pedagógica que se identificou uma mudança significativa no que tange à graduação, que passou de um processo de cunho mais propriamente filosófico representado pelo par simples/complexo para um processo educativo, obtido por meio dos testes e das medidas, tendo sua melhor representação no par fácil/difícil, conforme mostrado por outras pesquisas trazidas ao longo do texto.

Assim, considerando os aspectos teórico-metodológicos a respeito da cultura escolar e da formação de professores, a problemática e o recorte temporal escolhido, assumiu-se inicialmente a hipótese da existência de uma matemática própria da cultura escolar: *uma matemática do ensino*. Uma outra hipótese foi a de que, em tempos de pedagogia científica, produziu-se uma *aritmética sob medida* e, por fim, admitiu-se que, relacionada a essa aritmética, existiu uma graduação do ensino, que também é fruto da pedagogia científica, a ser utilizada como objeto e ferramenta do trabalho docente.

Ao longo deste texto, foi possível mostrar que a temática da graduação do ensino foi abordada por diversos autores na história da educação matemática, principalmente como uma categoria analítica para análise de fontes históricas. A graduação foi tratada muitas vezes sob diversas denominações como *seriação, gradação, programa, programação, marcha do ensino, progressão, grau do ensino* etc.

Este movimento levou a uma tentativa de aprofundamento e sistematização do tema relativo à graduação do ensino, para tanto, na busca ampliada de referenciais que trataram do assunto, recorreu-se a textos da didática da língua francesa que versavam sobre o *conceito de progressão*. Tais referências possibilitaram fazer um paralelo entre a noção de progressão e graduação do ensino e mostrar que, tratada sob uma perspectiva didática, essa noção tem caráter amplo. O referencial tomado para a análise da graduação do ensino possibilitou mostrar que os diversos termos pelos quais essa noção foi tratada, na verdade poderiam ser tomados como categorias menores e complementares da temática maior.

No decorrer do texto, mostraram-se exemplos da *matemática do ensino* em diferentes vagas pedagógicas e constatou-se que a graduação do ensino ocupou um lugar privilegiado na cultura escolar, perpassando as diversas vagas pedagógicas como um elemento-chave do saber profissional do professor que ensinava matemática. Embora estivesse presente em diferentes vagas, a graduação do ensino ganhou protagonismo em tempos nos quais os testes e as medidas científicas adentraram no meio escolar por meio do que ficou conhecido como pedagogia científica.

Foi possível constatar ainda que a graduação do ensino foi um elemento articulador entre o *que* e o *como* ensinar, funcionando como elemento importante da *matemática do ensino*. Uma vez mostrada a relação da graduação com a *matemática do ensino*, foi possível retornar à problematização sobre que graduação foi dada a conhecer em manuais pedagógicos que figuram como obras importantes para a formação de professores.

Tal constatação resultou da análise de quatro manuais pedagógicos selecionados por terem tido uma circulação expressiva, citados em outros livros de referência, além de terem figurado em programas de formação de professores em São Paulo e no Rio de Janeiro.

Além da circulação, os manuais utilizados na empiria da tese têm em comum o fato de terem proposto graduações do ensino com base em testes e medidas. No caso dos manuais de Vasconcelos (1933) e Aguayo (1936), foi possível constatar que a todo o momento estes autores tiveram a necessidade de justificar suas propostas de graduação do ensino por meio de pesquisadores renomados do campo da psicologia. Além disso, as pesquisas voltadas ao ensino da aritmética mencionadas por ambos mostram-se como argumento de autoridade para justificar a necessidade de uma determinada graduação do ensino.

Já os manuais de D'Ávila (1942) e Albuquerque (1951), apesar de também em alguns momentos se valerem de pesquisadores renomados para justificar algumas escolhas, de um modo geral apresentam uma característica diferente. Ao que parece, a graduação do ensino proposta por estes autores foi, em grande medida, fruto de suas experiências como professores e, além disso, tudo indica que, por terem sido escritos em momento posterior, quando as noções vindas da psicologia já haviam tido uma penetração maior no meio escolar, não havia tanta necessidade de justificar suas escolhas no que se referia a uma organização do ensino. Na elaboração da própria graduação trazida por esses autores já estava em curso um processo de apropriação da etapa anterior.

Apesar de terem proposto uma graduação do ensino de aritmética embasada na pedagogia científica, cada autor, a seu modo, construiu uma graduação com características próprias. Essas graduações tinham em comum a ideia de organização do ensino de acordo com uma *marcha*, que deveria obedecer a um ordenamento do fácil ao difícil.

Ao longo do tempo, sujeitos inseridos na cultura escolar elaboraram graduações do ensino da aritmética com características próprias de cada vaga pedagógica. Em tempos de pedagogia científica, a graduação se fez conhecer em manuais pedagógicos como um elemento constituinte da *matemática do ensino* e buscou construir uma organização pedagógica de tal modo que, tendo em consideração o par fácil / difícil, deveria o professor levar os alunos a aprenderem de acordo com uma ordem de dificuldades resultante dos testes e, assim, em alguns momentos partia-se do fácil para o difícil e em outros fazia-se o movimento inverso.

No decorrer deste trabalho, buscou-se mostrar como a graduação do ensino incorporada à cultura escolar operou transformações no meio escolar, tendo como principal característica a

proposta de uma organização do ensino que levasse em conta o desenvolvimento psicológico da criança em detrimento de uma lógica de organização disciplinar.

Vale ressaltar ainda, que o exercício feito com manuais de tempos de pedagogia científica possibilitou afirmar que, muito além de uma simples categoria analítica, a graduação do ensino da aritmética se caracterizou como um elemento constituinte da aritmética *para* ensinar. De outra parte, os estudos apresentados na revisão de literatura possibilitaram constatar que a graduação do ensino da aritmética também se caracterizou como um elemento constituinte da aritmética *a* ensinar.

Estes resultados permitiram defender a tese de que a graduação do ensino da aritmética em tempos de pedagogia científica articulou uma aritmética *a* ensinar com uma aritmética *para* ensinar. Assim, mostrou-se um aspecto importante da existência de articulação entre formação e ensino. Como resultado dessa articulação, foi possível afirmar que, no período estudado, a graduação do ensino de aritmética foi elemento constituinte da *matemática do ensino*. Ou seja, tal graduação referia-se diretamente ao saber profissional do professor que ensinava matemática.

Outros trabalhos poderão mostrar como este elemento próprio da cultura escolar relativamente à *matemática do ensino* foi se caracterizando em outros tipos de fontes, para além dos manuais e em outros momentos históricos.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Denis Hebert de; LEME DA SILVA, Maria Célia. Alfredina de Paiva e Souza e o Instituto de Educação do Rio de Janeiro: a vanguarda da tabuada na era dos testes.

Caminhos da Educação Matemática em Revista, Aracaju, v. 1, n. 1, p. 48-70, 2014.

Disponível em:

<https://aplicacoes.ifs.edu.br/periodicos/caminhos_da_educacao_matematica/article/view/5>

Acesso em: 25 mai. 2020.

ANTUNES, Mitsuko Aparecida Makino. **A Psicologia no Brasil: leitura histórica sobre sua constituição**. 5 ed. São Paulo: EDUC – Editora da PUC-SP, 2014.

BARBIER, Jean-Marie. (ed.). **Savoirs théoriques et savoirs d’action**. Paris: PUF, 1996.

BASSINELLO, Ieda. **Laurenço Filho e a matematização da Pedagogia: dos testes psicológicos para os testes pedagógicos**. 2014. 116 f. Dissertação (Mestrado em Ciências) – Programa de Pós-Graduação em Educação e Saúde na Infância e na Adolescência, Universidade Federal de São Paulo, Guarulhos, 2014.

BERTINI, Luciane de Fátima; GOMES, Larissa Pinca Sarro; OLIVEIRA, Marcus Aldenison de. Provas, Exames e a matemática do ensino. *In*: BÚRIGO, Elisabete Zardo; LIMA, José Ivanildo de; OLIVEIRA, Maria Cristina Araújo de; VALENTE, Wagner Rodrigues (org.). **Provas, Exames e história da educação matemática**. Boa Vista: Editora da UFRR, 2018. p. 11-76.

BERTINI, Luciane de Fátima; MORAIS, Rosilda dos Santos.; VALENTE, Wagner Rodrigues. **A matemática a ensinar e a matemática para ensinar** – novos estudos sobre a formação de professores. São Paulo: Livraria da Física, 2017.

BORG, Serge. **La notion de progression**. Paris: Les Éditions Didier, 2001.

BOTO, Carlota. A civilização escolar pelos compêndios didáticos de formação de professores. **Educar em Revista**, Curitiba, v. 34, n. 70, p. 115-178, jul./ago. 2018. DOI: <[10.1590/0104-4060.58075](https://doi.org/10.1590/0104-4060.58075)>. Disponível em:

<http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0104-40602018000400155>.

Acesso em 04 jul. 2019.

BOTO, Carlota. Faria de Vasconcelos e a Escola Nova em Portugal: do self-government à educação científica. **Revista Brasileira de História da Educação**, Maringá, v. 19, n. 49, p. 1-20, 2019. DOI: <[10.4025/rbhe.v19.2019.e092](https://doi.org/10.4025/rbhe.v19.2019.e092)>. Disponível em:

<<http://www.periodicos.uem.br/ojs/index.php/rbhe/article/view/48006>>. Acesso em 10 dez. 2020.

BURKE, Peter. **O que é história do conhecimento?** Tradução: Cláudia Freire. 1. ed. São Paulo: Editora UNESP, 2016.

CAMPOS, Ana Maria Antunes. **José Ribeiro Escobar**: trajetória intelectual e profissional (1903-1938). 2018. 157 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de São Paulo, Guarulhos, 2018.

CAMPOS, Regina Helena de Freitas; GOUVEA, Maria Cristina Soares de; GUIMARÃES, Paula Cristina David. A recepção da obra de Binet e dos testes psicométricos no Brasil: contrafaces de uma história. **Revista Brasileira de História da Educação**, Maringá, v. 14, n. 2, p. 215, 2014. DOI: <10.4025/rbhe.v14i2.696>. Disponível em: <https://periodicos.uem.br/ojs/index.php/rbhe/article/view/38885/pdf_23>. Acesso em: 26 ago. 2021.

CANDEIAS, Rui; MONTEIRO, Cecília. A matemática na formação de professores do ensino primário. *In*: CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3., 2015, Belém. **Anais [...]** Belém: SBHMat, 2016. p. 823-839. Disponível em: <<https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/169988>>. Acesso em 06 nov. 2021.

CARVALHO, João Bosco Pitombeira de. Propostas curriculares de Matemática. *In*: BARRETO, Elba Siqueira de Sá (coord.). **As propostas curriculares oficiais**: análise das propostas curriculares dos estados e de alguns municípios capitais para o ensino fundamental. São Paulo: Fundação Carlos Chagas, 1995. p. 46-58.

CARVALHO, Rosália Policarpo Fagundes de. **A aritmética no ensino primário em Brasília**: 1957-1970. 2017. 226 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2017.

CERTEAU, Michel de. **A escrita da história**. Tradução: Maria de Lourdes Menezes. Revisão técnica Arno Vogel. 3. ed. Rio de Janeiro: Forense, 2015.

CHARTIER, Roger. **Formas e Sentido. cultura escrita**: entre distinção e apropriação. Tradução: Maria de Lourdes Meirelles Matencio. 2. ed. Campinas: Mercado de Letras; Associação de Leitura do Brasil (ABL), 2011.

CHERVEL, André. Histórica das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. **Teoria e Educação**, Porto Alegre, n. 2, p. 177-229, 1990.

CHOPPIN, Alain. Le rôle des manuels. *In*: COSTE, Daniel; VÉRONIQUE, Daniel (coord.). **La notion de progression**. Paris: ENS Éditions, 2000, p. 81-85.

CHOPPIN, Alain; BASTOS, Tradução Maria Helena Camara. O historiador e o livro escolar. **Revista História da Educação**, Pelotas, v. 6, n. 11, p. 5-24, 2002. Disponível em: <<https://www.seer.ufrgs.br/asphe/article/view/30596>>. Acesso em: 30 set. 2019.

COSTE, Daniel; VÉRONIQUE, Daniel (coord.). **La notion de progression**. Paris: ENS Éditions, 2000.

CUNHA, Marcus Vinicius da; SOUZA, Aline Vieira de. Cecília Meireles e o temário da Escola Nova. **Cadernos de Pesquisa**, São Paulo, v. 41, n. 144, p. 850-865, set./dez., 2011. Disponível em: <<https://www.scielo.br/j/cp/a/zKbVF5NZjdSWY5FYwrWCz6K/?format=pdf&lang=pt>>. Acesso em 14 fev. 2022.

DEVECHI, Catia Piccolo Viero; BISOL, Benedetta. Ciências da educação: especificidade epistemológica, objetividade e prática pedagógica. **Revista Educação**, Santa Maria, v. 44, p. 1-19, 2019. DOI: <[10.5902/1984644438219](https://doi.org/10.5902/1984644438219)>. Disponível em: <<https://periodicos.ufsm.br/reeducacao/article/view/38219>>. Acesso em 31 maio 2021.

FERNANDES, Juliana Chiarini Balbino. **A aritmética, os centros de interesse e o saber profissional do professor que ensina matemática, 1920-1940**. 2020.135 f. Tese (Doutorado em Ciências) – Programa de Pós-Graduação em Educação e Saúde na Infância e na Adolescência, Universidade Federal de São Paulo, Guarulhos, 2020.

FERREIRA, Jefferson dos Santos. **A aritmética da escola primária em Sergipe: uma investigação sobre conteúdos, métodos e recursos (1901-1931)**. 2014. 58 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Departamento de Matemática, Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2014.

FERREIRA, Jefferson dos Santos. **Apropriações do método intuitivo de Pestalozzi para o ensino de saberes elementares matemáticos em periódicos brasileiros do final do século XIX e início do século XX**. 2017. 141 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2017.

FERREIRA, Jefferson dos Santos; VALENTE, Wagner Rodrigues. Os programas da cadeira de Didática das escolas normais: a aritmética a ensinar e a aritmética para ensinar – São Paulo, 1926. *In*: MENDES, Iran Abreu; STAMATTO, Maria Inês Sucupira (org.). **Escolas**

normais do Brasil: Espaços de (trans)formação docente e produção de saberes profissionais. São Paulo: Livraria da Física, 2020a. p. 347-372.

FERREIRA, Jefferson dos Santos; VALENTE, Wagner Rodrigues. Miguel Aguayo e as mudanças no saber profissional do professor que ensina matemática. **Revemat**, Florianópolis, v. 15, n. 1, p. 1-18, 2020b. DOI: <[10.5007/1981-1322.2020.e66753](https://doi.org/10.5007/1981-1322.2020.e66753)>. Disponível em: <<https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2020.e66753>>. Acesso em 06 jul. 2021.

FERREIRA, Jefferson dos Santos; VALENTE, Wagner Rodrigues. A graduação do ensino de cálculo no manual Didática nas escolas primárias de João Toledo. **Educação Matemática em Revista – RS**, Rio Grande, v.1, n. 22, p. 119-128, 2021. DOI: <[10.37001/EMR-RS.v.1.n.22.2021.p.119-128](https://doi.org/10.37001/EMR-RS.v.1.n.22.2021.p.119-128)>. Disponível em: <<http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/revista/index.php/EMR-RS/article/view/2736>>. Acesso em 20 jul. 2021.

FORTALEZA, Janice Francisca dos Santos. **Uma geometria para ensinar:** elementos do saber profissional do professor que ensina matemática (1870-1920). 2021. 214 f. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, Universidade Federal do Pará, Belém, 2021.

FRANÇA, Denise Medina. O ensino de aritmética no programa do ensino primário do estado da Guanabara (1961). **Revista de História da Educação Matemática**, São Paulo, v. 1, n. 1, p. 216-234, 2016. Disponível em: <<http://histemat.com.br/index.php/HISTEMAT/article/view/40>> Acesso em: 08 set. 2021.

FRANÇA, Denise Medina; SILVA, Martha Raíssa Iane Santana da; GUIMARÃES, Marcos Denilson. Os saberes aritméticos na escola primária e as vagas pedagógicas: uma visão panorâmica. *In*: OLIVEIRA, Maria Cristina Araújo de; PINTO, Neuza Bertoni; VALENTE, Wagner Rodrigues (org.). **A aritmética, a geometria e o desenho:** a matemática nos primeiros anos escolares. São Paulo: Livraria da Física, 2020. p. 25-55.

FRIZZARINI, Claudia Regina Boen. **Saberes matemáticos na matéria trabalhos manuais:** processos de escolarização do fazer, São Paulo e Rio de Janeiro (1890-1960). 2018. 184 f. Tese (Doutorado em Ciências) – Programa de Pós-Graduação em Educação e Saúde na Infância e na Adolescência, Universidade Federal de São Paulo, Guarulhos, 2018.

GREGÓRIO, Janine Marques da Costa. **Matemática para ensinar soma:** análise de manuais pedagógicos publicados no Brasil dos anos 1950 aos 1970. 2020. 101 f. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) – Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2020.

GUALTIERI, Regina Cândido Ellero. Ciências da Educação versus didáticas das disciplinas: elementos de um debate. *In*: VALENTE, Wagner Rodrigues (org.). **Ciências da educação, campos disciplinares e profissionalização**: saberes em debate para a formação de professores. São Paulo: Livraria da Física, 2020. p. 76-104.

HOFSTETTER, Rita; SCHNEUWLY, Bernard. Saberes: um tema central para as profissões do ensino e da formação. *In*: HOFSTETTER, Rita; VALENTE, Wagner Rodrigues. (org.). **Saberes em (trans)formação**: um tema central da formação de professores. São Paulo: Livraria da Física, 2017a. p. 113-172.

HOFSTETTER, Rita; SCHNEUWLY, Bernard. Disciplinarização e disciplinação: as ciências da educação e as didáticas das disciplinas sob análise. *In*: HOFSTETTER, R.; VALENTE, W. R. (org.). **Saberes em (trans)formação**: um tema central da formação de professores. São Paulo: Livraria da Física, 2017b. p. 21-54.

HOFSTETTER, Rita; SCHNEUWLY, Bernard; FREYMOND, Mathilde; BOSS, François. Penetrar na verdade da escola para ter elementos concretos de sua avaliação – A irresistível institucionalização do *expert* em educação (século XIX e XX). *In*: HOFSTETTER, Rita; VALENTE, Wagner Rodrigues. (org.). **Saberes em (trans)formação**: um tema central da formação de professores. São Paulo: Livraria da Física, 2017. p. 55-112.

JULIA, Dominique. A cultura escolar como objeto histórico. **Revista Brasileira de História da Educação**, Maringá, v. 1, n. 1, p. 9-43, 2001. Disponível em: <<http://periodicos.uem.br/ojs/index.php/rbhe/article/view/38749/20279>>. Acesso em: 28 jan. 2020.

LOPES, Sônia Lopes; GURGEL, Patrícia. A “prata da casa”: percursos acadêmicos e trajetórias profissionais de ex-alunas do Instituto de Educação do Rio de Janeiro (1930-1960). **Educação em Foco**, Juiz de Fora, v. 22, n. 2, p. 73-111, mai./ago., 2017. Disponível em: <<https://periodicos.ufjf.br/index.php/edufoco/article/view/19994>>. Acesso em 03 set. 2021.

MACIEL, Viviane Barros. **Elementos do saber profissional do professor que ensina Matemática: uma aritmética para ensinar** nos manuais pedagógicos (1880 – 1920). 2019. 312 f. Tese (Doutorado em Ciências) – Programa de Pós-Graduação em Educação e Saúde na Infância e na Adolescência, Universidade Federal de São Paulo, Guarulhos, 2019.

MARQUES, Josiane Acácia de Oliveira. **Manuais pedagógicos e as orientações para o ensino de matemática no curso primário em tempos de Escola Nova**. 2013. 131 f. Dissertação (Mestrado em Ciências) – Programa de Pós-Graduação em Educação e Saúde na Infância e na Adolescência, Universidade Federal de São Paulo, Guarulhos, 2013

MARQUES, Josiane Acácia de Oliveira. **Faria de Vasconcelos e as diretrizes da pedagogia científica na formação matemática do professor primário (1909-1960)**. 2018. 167 f. Tese (Doutorado em Educação, Arte e História Cultural) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Arte e História Cultural, Universidade Presbiteriana Mackenzie, São Paulo, 2018.

McCONNELL, Thomas Raymond; RELLER, T. L.; SCOTT, L. F.; STEWART, STONE, J. C. William Arthur Brownell, Education: Berkeley. *In: University of California: In Memoriam*, September 1978. Berkeley: Academic Senate, 1978, p. 27-29. Disponível em: <http://texts.cdlib.org/view?docId=hb4q2nb2nd&chunk.id=meta&brand=calisphere&doc.view=entire_text> Acesso em 22 out. 2021.

MEDEIROS, Valéria Antonia. **Antonio de Sampaio Dória e a modernização do ensino em São Paulo nas primeiras décadas do século XX**. 2005. 358 f. Tese (Doutorado em Educação: História, Política e Sociedade) – Programa de Pós-Graduação Educação: História, Política e Sociedade, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

MONARCHA, Carlos. **Escola Normal da Praça: o lado noturno das luzes**. Campinas: Editora da Unicamp, 1999.

MONARCHA, Carlos. “Testes ABC”: origem e desenvolvimento. **Boletim Academia Paulista de Psicologia**, São Paulo, n. 1, p. 7-17, jan./jun., 2008. Disponível em: <<https://www.redalyc.org/pdf/946/94600102.pdf>>. Acesso em: 24 abr. 2021.

MONARCHA, Carlos. **Brasil arcaico, Escola Nova: ciência, técnica e utopia nos anos 1920-1930**. São Paulo: Editora Unesp, 2009.

MONTEIRO, Simone Maria. **A Escola Normal de Casa Branca: criação, instalação, saberes e práticas escolares (1912-1932)**. 2016. 199 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Faculdade Metodista, Piracicaba, 2016.

MORAIS, Rosilda dos Santos; BERTINI, Luciane de Fátima; VALENTE, Wagner Rodrigues **A matemática do ensino de frações: do século XIX à BNCC**. São Paulo: Livraria da Física, 2021. (História da matemática em estudos e no ensino; 4).

MORAIS, Rosilda dos Santos; VALENTE, Wagner Rodrigues. Dos saberes matemáticos à matemática do ensino e o papel dos *experts*: pesquisas em história da educação matemática. *In: VALENTE, Wagner Rodrigues; MACIEL, Cilene Maria Lima Antunes; COSTA, David Antônio da; ALMEIDA, Laura Isabel Marques Vasconcelos de (org.). Experts: saberes para o ensino e para a formação de professores*. São Paulo: Livraria da Física, 2021. p. 59-86.

NONNON, Élisabeth. La notion de progression au cœur des tensions de l'activité d'enseignement. **Repères. Recherches en didactique du français langue maternelle**, n. 41, p. 5-34, 2010. DOI: <[10.4000/reperes.276](https://doi.org/10.4000/reperes.276)>. Disponível em: <<https://journals.openedition.org/reperes/276>> Acesso em: 28 abr. 2021.

OLIVEIRA, Marcus Aldenison de. **A aritmética escolar e o método intuitivo: um novo saber para o curso primário (1870-1920)**. 2017. 280 f. Tese (Doutorado em Ciências) – Programa de Pós-Graduação em Educação e Saúde na Infância e na Adolescência, Universidade Federal de São Paulo, Guarulhos, 2017.

OLIVEIRA, Maria Cristina Araújo de; LEME DA SILVA, Maria Célia; VALENTE, Wagner Rodrigues (org.). **Movimento da Matemática moderna: história de uma revolução curricular**. Juiz de Fora: Editora UFJF, 2011.

PAVARIN, Karina Cristina dos Santos. **Problemas de aritmética em tempos de Aritmética Intuitiva: uma análise em livros didáticos (1890-1990)**. 2020. 102 f. Dissertação (Mestrado em Ciências) – Programa de Pós-Graduação em Educação e Saúde na Infância e na Adolescência, Universidade Federal de São Paulo, Guarulhos, 2020.

PINHEIRO, Nara Vilma Lima. **A aritmética sob medida: a matemática em tempos de pedagogia científica**. 2017. 224 f. Tese (Doutorado em Ciências) – Programa de Pós-Graduação em Educação e Saúde na Infância e na Adolescência, Universidade Federal de São Paulo, Guarulhos, 2017.

PINHEIRO, Nara Vilma Lima. Do cálculo ao problema: um caminho a trilhar a partir de resultados científicos. **Ciência & Educação**, Bauru, v. 27, e21038, p. 1-17, 2021. DOI: <[10.1590/1516-731320210038](https://doi.org/10.1590/1516-731320210038)>. Disponível em: <<https://www.scielo.br/j/ciedu/a/cMD8wFWJ79bZWw4XyqtXkfQ/?format=pdf&lang=pt>>. Acesso em 08 set. 2021.

PINTO, Neuza Bertoni; FELISBERTO, Lidiane Gomes dos Santos; BERTICELLI, Danilene Donin. Métodos, processos e finalidades da Aritmética na Escola Primária e as vagas pedagógicas. In: OLIVEIRA, Maria Cristina Araújo de; PINTO, Neuza Bertoni; VALENTE, Wagner Rodrigues (org.). **A aritmética, a geometria e o desenho: a matemática nos primeiros anos escolares**. São Paulo: Livraria da Física, 2020. p. 56-87.

RAMOS, Bruna Lima. **A pedagogia científica e o ensino dos saberes elementares matemáticos nos primeiros anos escolares: uma análise dos relatórios das delegacias regionais de ensino do Estado de São Paulo (1930-1945)**. 2016. 98 f. Dissertação (Mestrado em Ciências) – Programa de Pós-Graduação em Educação e Saúde na Infância e na Adolescência, Universidade Federal de São Paulo, Guarulhos, 2016.

SANTOS, Ivanete Batista dos. **Edward Lee Thorndike e a conformação de um novo padrão pedagógico para o ensino de Matemática** (Estados Unidos, primeiras décadas do século XX). 2006. 283 f. Tese (Doutorado em Educação: História, Política e Sociedade) – Programa de Pós-Graduação em Educação: História, Política e Sociedade, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

SILVA, Vivian Batista da. **Saberes em viagem nos manuais pedagógicos: construções da escola em Portugal e no Brasil (1870-1970)**. São Paulo: Editora Unesp, 2018.

SILVA, Vivian Batista da; CORREIA, António Carlos da Luz. Saberes em viagem nos manuais pedagógicos (Portugal-Brasil). **Cadernos de Pesquisa**, v. 34, n. 123, p. 613-632, set./dez., 2004. DOI: <10.1590/S0100-15742004000300006>. Disponível em: <<https://www.scielo.br/j/cp/a/p3FTtHfxKWGWXCXDNV6wq4Yc/?lang=pt#>>. Acesso em 03 nov. 2021.

SOARES, Márcia Guedes. **A aritmética de Lourenço Filho: Um estudo sobre as dinâmicas de transformações do saber escolar em face de uma nova pedagogia**. 2014. 107 f. Dissertação (Mestrado em Ciências) – Programa de Pós-Graduação em Educação e Saúde na Infância e na Adolescência, Universidade Federal de São Paulo, Guarulhos, 2014.

SOUZA, Rosa Fátima de. **Templos de Civilização: A implantação da escola primária graduada no estado de São Paulo (1890-1910)**. São Paulo: Editora Unesp, 1998. (Prismas)

SOUZA, Rodrigo Augusto de. O ensino de História na perspectiva intelectual de Alfredo Miguel. **Revista HISTEDBR On-line**, Campinas, SP, v. 11, n. 43, p. 118–131, 2011. DOI: <10.20396/rho.v11i43.8639932>. Disponível em: <<https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/histedbr/article/view/8639932>>. Acesso em: 25 mar. 2021.

TARDIF, M. Prefácio. *In*: VALENTE, W. R. (org.). **Ciências da educação, campos disciplinares e profissionalização: saberes em debate para a formação de professores**. São Paulo: Livraria da Física, 2020. p. 7-12.

TREVISAN, Thabatha Aline. O ensino da leitura e escrita segundo Antônio d'Ávila: práticas escolares (1940). **Revista Brasileira de História da Educação**, Maringá, v. 9, n. 2, p. 165-191, maio/ago., 2009. Disponível em: <<https://periodicos.uem.br/ojs/index.php/rbhe/article/view/38553>>. Acesso em 02 set. 2021

TREVISAN, Thabatha Aline. **História da disciplina Pedagogia nas escolas normais do estado de São Paulo (1874-1959)**. 2011. 222 f. Tese (Doutorado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Marília, 2011.

VALENTE, Wagner Rodrigues. **A constituição dos saberes elementares matemáticos: a Aritmética a Geometria e o Desenho em perspectiva histórico-comparativa, 1890-1990.** Projeto de Pesquisa. São Paulo: CNPq – chamada universal 2012 (processo 470400/2012-9), 2012a.

VALENTE, Wagner Rodrigues. O que é número? Produção, circulação e apropriação da Matemática Moderna para crianças. **Bolema**, Rio Claro, v. 26, n. 44, p. 1417-1441, 2012b. DOI: <10.1590/S0103-636X2012000400014>. Disponível em: <<https://www.scielo.br/j/bolema/a/96qzjpXC3F9TGr38BzsRwBw/?lang=pt>>. Acesso em 26 jul. 2021.

VALENTE, Wagner Rodrigues. Elementar. *In*: VALENTE, Wagner Rodrigues (org.). **Cadernos de trabalho**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015.

VALENTE, Wagner Rodrigues. *Les enjeux* da pesquisa em história da educação matemática nos anos iniciais escolares. **Diálogo Educacional**, Curitiba, v. 16, n. 48, p. 271-299, maio / ago. 2016a. DOI: <10.7213/dialogo.educ.16.048.DS01>. Disponível em: <<https://periodicos.pucpr.br/dialogoeducacional/article/view/2665>>. Acesso em 05 nov. 2021.

VALENTE, Wagner Rodrigues. A matemática dos primeiros anos escolares: elementos ou rudimentos?. **História da Educação**, Porto Alegre, v. 20, n. 49, p. 33-47, 2016b. DOI: <10.1590/2236-3459/56670>. Disponível em: <<https://www.scielo.br/j/heduc/a/LRM9YrG6jhsNkSTDnn4rqVr/?format=html&lang=pt#>>. Acesso em 28 jul. 2021.

VALENTE, Wagner Rodrigues. Que matemática ensinar às crianças? O *programa mínimo* em tempos das pedagogias não diretivas. **Educação em Revista**, Belo Horizonte, v. 32, n. 2, p. 187-202, jun./abr., 2016c. DOI: <10.1590/0102-4698142080>. Disponível em: <<https://www.scielo.br/j/edur/a/zT3m69ZdxgRpFN3Bdwt9Z8z/?lang=pt>>. Acesso em: 14 set. 2021.

VALENTE, Wagner Rodrigues. A matemática a ensinar e a matemática para ensinar: os saberes para a formação do educador matemático. *In*: HOFSTETTER, Rita; VALENTE, Wagner Rodrigues (org.). **Saberes em (trans)formação: um tema central da formação de professores**. São Paulo: Livraria da Física, 2017. p. 201-228.

VALENTE, Wagner Rodrigues. Provas e exames como documentos para estudo da *matemática do ensino* e da *matemática da formação de professores*: elementos do saber profissional docente. *In*: BÚRIGO, Elisabete Zardo; LIMA, José Ivanildo de; OLIVEIRA, Maria Cristina Araújo de; VALENTE, Wagner Rodrigues (org.). **Provas, Exames e história da educação matemática**. Boa Vista: Editora da UFRR, 2018. p. 139-154.

VALENTE, Wagner Rodrigues. Programas de ensino e manuais escolares como fontes para estudo da constituição da matemática para ensinar. **Alexandria**, Florianópolis, v. 12, n. 2, p. 51-63, 2019. DOI: <[10.5007/1982-5153.2019v12n2p51](https://doi.org/10.5007/1982-5153.2019v12n2p51)>. Disponível em: <<https://periodicos.ufsc.br/index.php/alexandria/article/view/1982-5153.2019v12n2p51>>. Acesso em: 28 jan. 2020.

VALENTE, Wagner Rodrigues. História e Cultura em Educação Matemática: a produção da matemática do ensino. **REMATEC**, [S. l.], v. 15, n. 36, p. 164-174, 2020. DOI: <[10.37084/REMATEC.1980-3141.2020.n16.p164-174.id307](https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2020.n16.p164-174.id307)>. Disponível em: <<http://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/307>>. Acesso em: 21 jul. 2021.

VALENTE, Wagner Rodrigues; BERTINI, Luciane de Fátima; PINTO, Neuza Bertoni; MORAIS, Rosilda dos Santos. **A Matemática na Formação de Professores e no Ensino:** processos e dinâmicas de produção de um saber profissional, 1890-1990. Projeto de Pesquisa. São Paulo: FAPESP, 2017. Disponível em: <<http://bv.fapesp.br/pt/auxilios/98879/a-matematica-na-formacao-de-professores-e-no-ensino-processos-e-dinamicas-de-producao-de-um-saber-p/?q=17/15751-2>>. Acesso em: 01 mar. 2018.

VALENTE, Wagner Rodrigues; FERREIRA, Jefferson dos Santos. Como se ensina aritmética? Elementos de uma aritmética para ensinar no manual de Faria de Vasconcelos. **Ensino em Re-Vista**, Uberlândia, v. 28, n. Contínua, p. e027, 11 maio 2021. DOI: <[10.14393/ER-v28a2021-27](https://doi.org/10.14393/ER-v28a2021-27)> . Disponível em: <<http://www.seer.ufu.br/index.php/emrevista/article/view/60960>>. Acesso em 05 jul. 2021.

VALENTE, Wagner Rodrigues; PINHEIRO, Nara Vilma Lima. A matemática dos livros didáticos em tempos de pedagogia científica. In: MENDES, Iran Abreu; VALENTE, Wagner Rodrigues (org.). **A matemática dos manuais escolares:** curso primário, 1890-1970. São Paulo: Livraria da Física, 2017. p. 69-108.

VINCENT, Guy; LAHIRE, Bernard; THIN, Daniel. Sobre a história e a teoria da forma escolar. **Educação em Revista**, Belo Horizonte, n. 33, p. 7-47, jun. 2001. Disponível em <http://educa.fcc.org.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0102-46982001000100002&lng=pt&nrm=iso&tlng=pt>. Acesso em 16 ago. 2021.

VIRGENS, Wellington Pereira das. **A resolução de problemas de aritmética no ensino primário:** um estudo das mudanças no ideário pedagógico, 1920-1940. 2014. 80 f. Dissertação (Mestrado em Ciências) – Programa de Pós-Graduação em Educação e Saúde na Infância e na Adolescência, Universidade Federal de São Paulo, Guarulhos, 2014.

Fontes históricas

ALBUQUERQUE, Irene de. **Metodologia da Matemática**: Orientação detalhada e sugestões prática a cerca de todos os pontos do programa do curso primário. Conquista: Rio de Janeiro, 1951. Disponível em: <<https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/134314>>. Acesso em 17 ago. 2020.

ANNAES DO PARLAMENTO BRASILEIRO. **Discurso do deputado Augusto de Oliveira na sessão de 16 de agosto de 1854**. Rio de Janeiro: Annaes do parlamento brasileiro, 1854. Disponível em: <<http://memoria.bn.br/DocReader/DocReader.aspx?bib=132489&pesq=%22gradua%C3%A7%C3%A3o%20do%20ensino%22&pasta=ano%20185&hf=memoria.bn.br&pagfis=35698>>. Acesso em 10 set. 2021.

AGUAYO, Alfredo Miguel. **Pedagogia Científica**: Psicologia e direção da aprendizagem. Tradução: J. B. Damasco Penna. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1936. 436 p. Título original: Pedagogía Científica: Psicología y dirección del aprendizaje.

D'ÁVILA, Antônio. Práticas escolares: de acordo com o programa de prática do ensino do curso normal e com a orientação do ensino primário. 2 ed. São Paulo: Saraiva, 1942. (Coleção de Ensino Normal).

ESCOBAR, José Ribeiro. O aprendizado activo. **Revista Nacional**, São Paulo, anno I, n. 3, dez., 1921. Disponível em: <<https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/130585>>. Acesso em 11 out. 2019.

ESCOBAR, José Ribeiro. **Programma da cadeira de mathematica da Escola Normal da Capital**. São Paulo: Arquivo Público do Estado de São Paulo, 1922. Disponível em: <<https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/201429>>. Acesso em 24 fev. 2020.

ESCOBAR, J. R. Bases para o programma de arithmetica e algebra da Escola Normal da Capital em 1926. **O Estímulo**, São Paulo, n. 4, p. 3-7 ago. 1927. Disponível em: <<https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/222246>>. Acesso em: 20 abr. 2021.

ESCOBAR, José Ribeiro. **A construção Científica dos programas – I parte – O problema teórico**: as bases psico-sociológicas dos problemas. São Paulo: Imprensa Oficial do Estado, 1934. Disponível em: <<https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/201665>>. Acesso em 02 dez. 2020.

JORNAL DO COMMERCIO. **Publicações a pedido**. Jornal do commercio, anno XXII, n. 353, p.4, 23 dez. 1847. Disponível em: <http://memoria.bn.br/DocReader/DocReader.aspx?bib=364568_03&pesq=%22marcha%20do%20ensino%22&pasta=ano%20184&hf=memoria.bn.br&pagfis=11835>. Acesso em 06 nov. 2021.

MIDOM, Henrique Gaspar. **Programa de Didactica**. Arquivo público do estado de São Paulo, Programas de escolas normais, lata CO 6984, 1925. Disponível em: <<https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/193853>>. Acesso em 20 mar. 2020.

SÃO PAULO. **Lei nº. 1.750, de 8 de dezembro de 1920**. São Paulo: Assembleia Legislativa do Estado de São Paulo, 1920. Disponível em: <<http://dobuscadireta.imprensaoficial.com.br/default.aspx?DataPublicacao=19201211&Caderno=Diario%20Oficial&NumeroPagina=7657>> Acesso em 30 set. 2019.

SÃO PAULO. **Decreto nº. 3.356, de 31 de maio de 1921**. São Paulo: Secretaria de Estado dos Negócios do Interior, 1921. Disponível em: <<http://dobuscadireta.imprensaoficial.com.br/default.aspx?DataPublicacao=19210605&Caderno=Diario%20Oficial&NumeroPagina=3591>>. Acesso em 30 set. 2019.

SÃO PAULO. **Decreto nº. 3.858, de 11 de julho de 1925**. Reforma a Instrução Publica do Estado. São Paulo, 1925. Disponível em <<http://dobuscadireta.imprensaoficial.com.br/default.aspx?DataPublicacao=19250623&Caderno=Diario%20Oficial&NumeroPagina=4569>>. Acesso em 13 mar. 2020.

SÃO PAULO. **Programa dos cursos regulares e extraordinários para o ano de 1937**. São Paulo: Imprensa oficial do estado, 1937. Disponível em: <<https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/115970>>. Acesso em 09 set. 2021.

SÃO PAULO. **Programa para as escolas primárias**. São Paulo: Departamento de Educação, Serviço técnico de publicidade, 1941. Disponível em: <<https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/99652>>. Acesso em: 18 ago. 2021.

TOLEDO, João. **Didáctica**: nas escolas primárias. 2. ed. São Paulo: Livraria Liberdade, 1930.

VASCONCELOS, Faria de. **Como se ensina a aritmética**. Lisboa: Livraria Clássica Editora, 1933. (Biblioteca de cultura pedagógica).

VEIGA, Bernardo Jacintho da. Falla dirigida à Assembléa Legislativa Provincial de Minas Gerais, na sessão ordinaria do anno de 1840, pelo presidente da Provincia Bernardo Jacintho da Veiga. **Correio Offical**: In Mdio Posita Virtus, Rio de Janeiro, v. 1, n. 57, p. 226, 10 mar. 1840. Disponível em: <<http://memoria.bn.br/DocReader/DocReader.aspx?bib=749443&pesq=%22marcha%20do%20ensino%22&pasta=ano%20184&hf=memoria.bn.br&pagfis=7912>>. Acesso em 06 nov. 2021.