



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO TECNOLÓGICO, DE CIÊNCIAS EXATAS E EDUCAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Lauro dos Santos Rodrigues Junior

Funções geradoras em resoluções de problemas combinatórios no ensino médio

Blumenau

2021

Lauro dos Santos Rodrigues Junior

Funções geradoras em resoluções de problemas combinatórios no ensino médio

Dissertação submetida ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Federal de Santa Catarina, Campus Blumenau, para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rafael Aleixo de Carvalho

Blumenau

2021

Ficha de identificação da obra

Rodrigues Junior, Lauro dos Santos

Funções geradoras em resoluções de problemas combinatórios no ensino médio / Lauro dos Santos Rodrigues Junior ; orientador, Rafael Aleixo de Carvalho, 2021.

48 p.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Santa Catarina, Campus Blumenau, Programa de Pós Graduação em Matemática, Blumenau, 2021.

Inclui referências.

1. Matemática. 2. Funções Geradoras. 3. Análise Combinatória. I. de Carvalho, Rafael Aleixo. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós Graduação em Matemática. III. Título.

Lauro dos Santos Rodrigues Junior

Funções geradoras em resoluções de problemas combinatórios no ensino médio

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Dr. Rafael Aleixo de Carvalho

Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

Prof. Dr. Francis Felix Cordova Puma

Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

Prof. Dr. Bruno Tadeu Costa

Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

Prof. Dr. Roy Wilhelm Probst

Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestre do PROFMAT, Mestrado Profissional em Matemática.

Prof. Dr. Márcio de Jesus Soares

Coordenador do Programa

Prof. Dr. Rafael Aleixo de Carvalho

Orientador

Blumenau, 2021.

Dedico este trabalho a todos os professores que sempre buscam atualizar-se para promover aos seus alunos um ensino de qualidade.

AGRADECIMENTOS

A Deus primeiramente, pela vida, por me guiar, iluminar e proteger em todas as sextas-feiras no caminho de ida e volta de Lages a Blumenau, por me fornecer a virtude de aprender e de ensinar.

À minha esposa Luana, pelo amor, pela compreensão, paciência, por torcer pelo sucesso em minha profissão, por me apoiar e me incentivar em todos os momentos ao qual eu precisei, sempre estando ao meu lado.

À minha mãe, pelo amor que me proporcionou em toda minha vida, pela educação que me deu, fazendo com que me tornasse um homem de bem. Ao meu pai (*in memoriam*), pelo amor e educação que me deu por 14 anos da minha vida, sempre me incentivando a estudar, pois ele não teve a mesma oportunidade.

Às minhas irmãs Grasielle, Daiane, Janine e Bruna que sempre torceram pelo sucesso na minha profissão.

Aos professores do curso de mestrado da UFSC – Campus Blumenau, pelo compromisso e dedicação ao qual forneceram para que eu pudesse concluir mais essa etapa da minha jornada profissional, em especial ao meu orientador Rafael Aleixo de Carvalho, por suas análises e sugestões que foram de grande importância para a elaboração dessa dissertação.

Aos meus colegas de curso, pelas constantes trocas que foram fundamentais para o aprendizado nesses anos de mestrado.

Aos meus alunos que fizeram parte da aplicação do tema escolhido e que se dispuseram a contribuir para a elaboração desse trabalho.

*“A mente que se abre a uma nova ideia jamais
voltará ao seu tamanho original.”*

(Albert Einstein)

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo desenvolver estratégias que possibilitem o aprendizado matemático como um processo contínuo, onde os estudantes ampliarão seus conhecimentos, habilidades e atitudes em situações problemas que necessitam de contagem, utilizando os conteúdos ensinados no Ensino Médio e as Funções Geradoras como uma metodologia diferente da já praticada por professores neste nível. Foi realizada uma pesquisa bibliográfica sobre as Funções Geradoras para um maior aprofundamento e entendimento do tema. Em seguida, em uma turma do segundo ano do Ensino Médio, o tema foi aplicado de forma paralela aos conteúdos programáticos do ano letivo. Uma atividade avaliativa, utilizando uma abordagem sobre o tema, foi disponibilizada aos alunos para avaliar seus conhecimentos, habilidades e atitudes, tanto com aplicação de fórmulas resolutivas da Análise Combinatória como o uso das técnicas de Funções Geradoras. Após a execução desta atividade, foi realizada uma análise com os resultados obtidos a partir das resoluções e com a opinião dos alunos.

Palavras-chave: Ensino Médio 1. Análise Combinatória 2. Funções Geradoras 3.

ABSTRACT

The present research aims to develop strategies that enable mathematical learning as a continuous process, which in students will expand their knowledge, skills and attitudes in problem situations that need counting, using the content taught during High School plus Generating Functions as a different methodology from the ones already practiced by professors from this level. A bibliography research about Generating Functions was collected intending a greater deepening and understanding of the theme. Forward, on a High School second year class, the theme was applied in a parallel way as the pragmatic content from the scholar year. An evaluative activity, using a theme approach, was available to the students in order to review their knowledge, skills and attitudes, with resolute formulas applications from Combinatory Analysis and Generating Functions techniques. Once was done this activity an analysis was made with the results gained from resolutions and students' opinions.

Keywords: High School 1. Combinatory Analysis 2. Generating Functions 3.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Pontos A, B, C, D, E, F, G e H marcados em uma circunferência..... 36

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC Base Nacional Comum Curricular

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	OBJETIVOS	14
1.1.1	Objetivo Geral.....	14
1.1.2	Objetivos Específicos	14
2	ANÁLISE COMBINATÓRIA.....	15
2.1	PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM.....	15
2.2	PERMUTAÇÃO SIMPLES E FATORIAL DE UM NÚMERO	16
2.3	PERMUTAÇÕES CIRCULARES	17
2.4	ARRANJO SIMPLES	18
2.5	COMBINAÇÃO SIMPLES	19
2.6	PERMUTAÇÃO COM REPETIÇÃO.....	20
2.7	ARRANJO COM REPETIÇÃO.....	21
2.8	COMBINAÇÃO COM REPETIÇÃO	22
3	BNCC E COMO O ESTUDO DE FUNÇÕES GERADORAS PODE SER INSERIDO NO CURRÍCULO.....	25
4	FUNÇÕES GERADORAS.....	27
5	APLICAÇÃO DAS FUNÇÕES GERADORAS NO ENSINO MÉDIO	35
5.1	PROBLEMA 1	35
5.2	PROBLEMA 2	36
5.3	PROBLEMA 3	38
6	ANÁLISE SOBRE A APLICAÇÃO DAS FUNÇÕES GERADORAS NO ENSINO MÉDIO.....	40
6.1	ANÁLISE DA CORREÇÃO.....	40
6.2	PESQUISA SOBRE A OPINIÃO DOS ALUNOS.....	41
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	43
	REFERÊNCIAS.....	45
	APÊNDICE A – LISTA DE EXERCÍCIOS.....	46

APÊNDICE B – QUESTIONÁRIO	47
--	-----------

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho tem como finalidade fazer um estudo nas resoluções de problemas de contagem no Ensino Médio, mais especificamente nos problemas que envolvem combinações, incluindo a aprendizagem da matemática relacionada à interpretação e resolução destes tipos de problemas.

Dentro da Análise Combinatória é corriqueiro fazer associações dos problemas às permutações, arranjos e combinações, sem levar em conta que existem outras formas de solucioná-los, como por exemplo, as Funções Geradoras, estas como uma técnica com natureza diferente das já citadas, promovendo em muitos casos uma alternativa de fácil entendimento e desenvolvimento. Segundo a Base Nacional Comum Curricular, os estudantes precisam “resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas” (BRASIL, 2018, p. 537). Assim, cabe aos professores de matemática do Ensino Médio proporcionar e desenvolver nos estudantes essas estratégias diversas.

Com experiência profissional desde 2013 e por relatos de colegas do mesmo componente curricular, um fato preocupante é a dificuldade dos estudantes em resolver problemas de contagem, levando em consideração contextos e interpretações diferentes em que estes se apresentam.

Um dos fatores que pode contribuir e favorecer que os professores não abordem determinados conceitos matemáticos é a segmentação do conhecimento matemático. Cada conceito é tratado de forma pontual em uma determinada série do Ensino Médio, desta forma, não há interação entre os conhecimentos ensinados. (SABO, 2007, p. 8).

O conhecimento matemático deve ser um processo contínuo, onde combinatória em muitos casos é pouco abordada no Ensino Fundamental, somente tratado em problemas com uso do princípio aditivo e multiplicativo, e só retomado no segundo ano do Ensino Médio. Entretanto, o uso de expressões algébricas e polinômios estão mais presentes em cada ano escolar do estudante, estes abordados a partir do sétimo ano do Ensino Fundamental.

Assim, faz-se necessário o estudo e aplicação de métodos e técnicas que possam auxiliar a solucionar problemas que envolvem contagem.

Este trabalho fará um estudo do conteúdo da Análise Combinatória no Ensino Médio, as aplicações das definições, resultados e fórmulas que esse conteúdo contém. Na sequência, uma análise da BNCC, documento de rege a educação básica, e como o estudo das Funções

Geradoras pode ser inserido no currículo. Depois, abordará as técnicas das Funções Geradoras utilizadas para resolução de problemas de combinatória, assim como as definições e resultados desse assunto. Por fim, após a aplicação do tema, uma análise dos resultados obtidos pelos estudantes e também a opinião deles sobre o uso das Funções Geradoras na resolução de problemas de combinatória.

1.1 OBJETIVOS

1.1.1 Objetivo Geral

Desenvolver estratégias que possibilitem o aprendizado matemático como um processo contínuo onde os estudantes ampliarão seus conhecimentos, habilidades e atitudes em situações problemas que necessitam de contagem.

1.1.2 Objetivos Específicos

- Identificar os tipos de problemas que envolvem contagem e suas metodologias;
- Promover uma alternativa diferente ao uso de fórmulas resolutivas;
- Contextualizar o tema com realidade do aluno;
- Propor aos estudantes atividades que avaliem os conhecimentos, habilidades e atitudes relacionadas com problemas de contagem.

2 ANÁLISE COMBINATÓRIA

O uso da Análise Combinatória é de grande utilidade em inúmeras áreas. Perguntas como “de quantas maneiras pode se escolher seis dezenas para fazer uma aposta na Mega-Sena?”, “de quantas maneiras uma pessoa pode vestir-se utilizando algumas peças de roupas?”, “de quantas maneiras uma pessoa pode fazer um pedido em um restaurante?”, “de quantas maneiras uma pessoa pode criar uma senha para sua conta em um banco?”, são exemplos que estão diretamente relacionadas a problemas de contagem. Na matemática, esses problemas são solucionados por meio de técnicas de contagem de certos tipos de subconjuntos de um conjunto, chamado de Análise Combinatória ou somente Combinatória. Esses resultados podem ser determinados contando as possibilidades uma a uma, porém, nem sempre esse pode ser um caminho rápido e fácil, pois tratando-se de conjuntos, em muitos casos pode-se ter, por exemplo, milhões de possibilidades, o que torna muito difícil a resolução contando uma a uma. Assim, faz-se necessário um amplo estudo em diversos tipos de resoluções desses problemas que serão abordados adiante.

Neste capítulo, o objetivo é conceituar e identificar as fórmulas resolutivas da Análise Combinatória fazendo uso de exemplos para um melhor entendimento. Além do princípio fundamental da contagem, permutações, combinações e arranjos, para isso será utilizado obras de teóricas de José Plínio de Oliveira Santos, Augusto César de Oliveira Morgado e Samuel Hazzan. Também serão discutidas outras técnicas de resolução de problemas, que serão as Funções Geradoras, sendo essas um método mais fácil em determinados problemas.

2.1 PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM

Sejam m e n números inteiros positivos, se um evento é composto de duas etapas sucessivas e independentes de tal maneira que o número de possibilidades na 1ª etapa é m e para cada possibilidade da 1ª etapa o número de possibilidades na 2ª etapa é n , então o número total de possibilidades de o evento ocorrer é dado pelo produto $m \cdot n$. (HAZZAN, 2004).

O produto dos números de possibilidades pode ser estendido para qualquer número de etapas, desde que essas sejam independentes. Supõe-se uma sequência de k elementos $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_k)$, onde:

1. a_1 possa ser escolhido de m_1 maneiras distintas;
2. a_2 possa ser escolhido de m_2 maneiras distintas, a partir de cada maneira escolhida anteriormente;
3. a_3 possa ser escolhido de m_3 maneiras distintas, a partir de cada maneira escolhida anteriormente;
- ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮
4. a_k possa ser escolhido de m_k maneiras distintas, a partir de cada maneira escolhida anteriormente;

Então, o número de possibilidades de escolhas da sequência $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_k)$ é dada por

$$m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot \dots \cdot m_k.$$

Exemplo 1. *Quantos números com três algarismos distintos podem ser formados?*

Para formar um número com três algarismos, precisa-se escolher os algarismos da centena, dezena e da unidade. O algarismo da centena pode ser escolhido de nove maneiras, pois não pode ser igual a zero. Escolhido o algarismo da centena, existem nove maneiras de escolher o algarismo da dezena, pois este pode ser zero, mas não pode ser igual ao algarismo da centena. O algarismo da unidade pode ser escolhido de oito maneiras, pois deve ser diferente dos dois algarismos anteriores. Portanto, a quantidade de números com três algarismos distintos é $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$.

2.2 PERMUTAÇÃO SIMPLES E FATORIAL DE UM NÚMERO

Permutar é sinônimo de trocar. Intuitivamente, nos problemas de contagem, deve-se associar a permutação à noção de embaralhar, trocar objetos de posição.

Teorema 1. Têm-se n elementos distintos, então o número de agrupamentos ordenados (Permutação Simples), indicado por P_n , que pode-se obter com todos esses n elementos é dado por:

$$P_n = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1. \quad (1)$$

Demonstração: De modo geral, supondo um conjunto de n elementos distintos, colocando esses em fila pode se escolher n elementos para ocupar a primeira posição, após isso, sobraram $n - 1$ elementos para escolher para a segunda posição e assim sucessivamente até que sobre o último elemento para ocupar a última posição. Assim, utilizando o princípio fundamental da contagem tem-se $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ tipos de filas que podem ser formadas. Esses agrupamentos ordenados (diferem pela ordem) recebem o nome de permutação simples.

Definição 1. O valor obtido de P_n é também chamado de fatorial do número natural n e indicado por $n!$. Assim, $n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, $\forall n \geq 1$. Define-se $0! = 1$. (HAZZAN, 2004).

Exemplo 2. *Quantos são os anagramas da palavra AMOR?*

Cada anagrama corresponde a uma ordem de colocação dessas quatro letras. Assim, o número de anagramas é $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

2.3 PERMUTAÇÕES CIRCULARES

Em problemas de permutações onde a finalidade é trocar n elementos de lugar em círculo, faz-se necessário interpretar de modo diferente, como observa-se no seguinte problema: De quantas maneiras cinco pessoas podem se dispor em cinco cadeiras ao redor de uma mesa redonda? Observando que são idênticas as disposições que podem ser obtidas por rotação.

Para resolver o problema, indicam-se as pessoas A, B, C, D e E. Formando uma mesa circular com as cinco pessoas ao redor, basta escolher uma ordem para elas, de $5! = 120$ maneiras. Porém, as ordens ABCDE e EABCD são iguais, visto que ao formar uma roda, o que importa é a posição relativa das pessoas entre si e a roda ABCDE pode ser rotacional. Como cada roda terá cinco rotações, a contagem de 120 maneiras contou cada roda cinco vezes, e assim a solução é $120/5 = 24$.

Pode-se generalizar o raciocínio anterior para n elementos dispostos ao redor de um círculo, considerando apenas as posições relativas entre eles.

O número de maneiras de ordenar n elementos em fila é $P_n = n!$, visto anteriormente em permutações simples. (HAZZAN, 2004).

Existem n permutações simples que geram a mesma permutação circular, levando em consideração todas por meio de uma rotação. (HAZZAN, 2004).

Assim, para obter o número de permutações circulares de n elementos, que denota-se por $(PC)_n$, divide-se o número de permutações simples por n .

$$\begin{aligned} (PC)_n &= \frac{P_n}{n} = \frac{n!}{n} = \frac{n \cdot (n-1)!}{n} \\ (PC)_n &= (n-1)!. \end{aligned} \tag{2}$$

Exemplo 3. *Oito crianças gostam de brincar no gira-gira, brinquedo comum em parques e praças. De quantas maneiras as crianças podem se dispor nesse brinquedo?*

Como se trata de uma troca de lugares em roda, deseja-se determinar uma permutação circular com oito elementos $(PC)_8$:

$$(PC)_8 = (8-1)! = 7! = 5040.$$

Logo, serão 5040 maneiras de dispor essas crianças no gira-gira.

2.4 ARRANJO SIMPLES

Quando escolhidos p elementos distintos dentre n elementos distintos de um conjunto A com $n \geq 1$ e, em seguida, ordenados tais p elementos com $p \leq n$, forma-se um arranjo simples dos n elementos tomados p a p . (SANTOS, 2007).

Utiliza-se A_n^p como notação para representar um arranjo simples de n elementos tomados p a p .

Teorema 2. A expressão matemática utilizada para cálculo de arranjo simples é dada por:

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}. \tag{3}$$

Demonstração:

Para $n = p$, tem-se $A_n^n = P_n = n!$.

Para $n > p$:

O primeiro elemento pode ser escolhido de n maneiras distintas. Feita a primeira escolha, como não há elementos repetidos, o segundo elemento pode ser escolhido de $(n - 1)$ maneiras distintas. Para o terceiro elemento, tem-se $(n - 2)$ maneiras distintas de escolha. Assim, para escolher o p -ésimo elemento, a partir das $(p - 1)$ escolhas anteriores, há $n - (p - 1) = n - p + 1$ opções de escolha. Pelo Princípio Fundamental da Contagem:

$$A_n^p = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - p + 1).$$

Agora, ao se multiplicar essa expressão por $\frac{(n-p)!}{(n-p)!}$ obtêm-se:

$$A_n^p = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - p + 1) \cdot \frac{(n - p)!}{(n - p)!}$$

$$A_n^p = \frac{n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - p + 1) \cdot (n - p)!}{(n - p)!}$$

Portanto, $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$.

Exemplo 4. *A final de uma prova de natação será disputada por oito nadadores. Os três primeiros colocados formam o pódio e recebem medalhas. De quantas maneiras o pódio pode ser formado?*

Nota-se que a ordem com que se forma o pódio importa. Assim tem-se oito elementos tomados três a três:

$$A_8^3 = \frac{8!}{(8 - 3)!} = 336.$$

O pódio pode ser formado de 336 maneiras.

2.5 COMBINAÇÃO SIMPLES

Seja A um conjunto com n elementos, isto é, $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$. Denominam-se combinações dos n elementos, tomados p a p , os subconjuntos de A constituídos de p elementos. (HAZZAN, 2004)

Exemplo 5. $A = \{a, b, c, d\}$, as combinações dos quatro elementos tomados dois a dois, são os subconjuntos:

$$\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}.$$

Segundo Hazzan (2004), observa-se que $\{a, b\} = \{b, a\}$, conforme a definição, combinação é um conjunto, deste modo não depende da ordem dos elementos.

Para determinar o número de combinações de um conjunto de n elementos tomados p a p , tem-se agrupamentos de p elementos, tomados dentre os n elementos disponíveis, que diferem entre si apenas pela natureza dos elementos, isto é, importa somente quem participa do grupo. Por esse fato, o número de subconjuntos é dado pelo número de arranjo simples de n elementos tomados p a p dividido por $p!$, que é a permutação dos elementos que compõem cada arranjo simples. Usando as equações (1) e (3):

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!} \cdot \frac{1}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}. \quad (4)$$

Exemplo 6. *Uma pessoa dispõe das seguintes frutas: abacaxi, laranja, maçã, maracujá e uva. De quantas maneiras ela pode escolher duas dessas cinco frutas para fazer o suco?*

Nota-se que a ordem com que se escolhem as duas frutas não importa. Por exemplo, um suco de abacaxi e uva será o mesmo de uva e abacaxi. Logo tem-se uma combinação de cinco elementos, tomados dois a dois.

$$C_5^2 = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2! 3!} = 10.$$

Portanto, serão 10 tipos de sucos diferentes.

2.6 PERMUTAÇÃO COM REPETIÇÃO

De acordo com Hazzan (2004), seja $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_r)$ uma n -upla com n elementos. Supondo que essa tenha n_1 elementos iguais a a_1 , n_2 elementos iguais a a_2 , n_3 elementos iguais a a_3, \dots, n_r elementos iguais a a_r onde $n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_r = n$, o conjunto de

permutações desses elementos é denominado como conjunto das permutações com repetição. Assim, o número de permutações distintas se obtém de:

$$P_n^{n_1, n_2, n_3, \dots, n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! n_3! \dots n_r!} \quad (5)$$

Demonstração: Considerando n elementos de uma permutação simples, onde existem n_1 elementos iguais a a_1 , n_2 elementos iguais a a_2 , n_3 elementos iguais a a_3, \dots, n_r elementos iguais a a_r onde $n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_r = n$. Assim, tem-se a fila:

$$\underbrace{a_1 a_1 \dots a_1}_{n_1 \text{ vezes}} \underbrace{a_2 a_2 \dots a_2}_{n_2 \text{ vezes}} \underbrace{a_3 a_3 \dots a_3}_{n_3 \text{ vezes}} \dots \underbrace{a_r a_r \dots a_r}_{n_r \text{ vezes}}$$

Precisa-se escolher n_1 lugares nessa fila para colocação dos a'_1 s. Dos $n - n_1$ lugares restantes, escolher n_2 lugares nessa fila para colocação dos a'_2 s. Dos $n - n_1 - n_2$ lugares restantes, escolher n_3 lugares nessa fila para colocação dos a'_3 s. Dos $n - n_1 - n_2 - \dots - n_{r-1}$ lugares restantes, escolher n_r lugares nessa fila para colocação dos a'_r s. Usando (4), obtém-se:

$$\frac{C_n^{n_1} \cdot C_{n-n_1}^{n_2} \cdot C_{n-n_1-n_2}^{n_3} \dots C_{n-n_1-n_2-\dots-n_{r-1}}^{n_r}}{\frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \cdot \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \cdot \frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3!(n-n_1-n_2-n_3)!} \dots \frac{(n-n_1-n_2-n_3-\dots-n_{r-1})!}{n_r!(n-n_1-n_2-n_3-\dots-n_r)!}} = \frac{n!}{n_1! n_2! n_3! \dots n_r!}$$

Exemplo 7. *Quantos são os anagramas da palavra ARARA?*

Tem-se cinco elementos para permutar, porém o elemento A se repete por três vezes e o elemento R por duas vezes, então ao se permutar dois elementos iguais, o anagrama será o mesmo. Assim, tem-se uma permutação com repetição $P_5^{2,3}$:

$$P_5^{2,3} = \frac{5!}{2! 3!} = 10.$$

Portanto, totalizam-se 10 anagramas formados com a palavra ARARA.

2.7 ARRANJO COM REPETIÇÃO

Como visto anteriormente no teorema 2, o número de arranjos simples de n elementos tomados p a p é dado por:

$$A_n^p = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-p+1). \quad (3)$$

Este número conta todas as possíveis maneiras de se retirar, de um conjunto de n elementos distintos, p elementos, levando-se em conta a ordem dos elementos.

Caso repetições sejam permitidas, pelo princípio multiplicativo, o número total de maneiras de se retirar, levando-se em conta a ordem p dos n objetos, distintos ou não, é igual a:

$$AR_n^p = n^p. \quad (6)$$

Uma vez que o primeiro elemento pode ser retirado de n maneiras, o segundo também de n maneiras e assim sucessivamente até que o p -ésimo elemento seja escolhido (SANTOS, 2007).

Exemplo 8. *Quantas placas de automóveis podem ser fabricadas levando em consideração que elas são compostas por três letras do alfabeto e quatro algarismos do sistema de numeração decimal?*

Tem-se que esse problema é um arranjo, pois quando trocada a ordem de elementos diferentes, terão placas de automóveis diferentes. Como o alfabeto é formado por 26 letras e pode-se ter, por exemplo, a placa de um automóvel iniciada por AAA, o número de configurações de letras será:

$$AR_{26}^3 = 26^3 = 17576.$$

Como pode-se escolher quatro algarismos dos 10 disponíveis, por exemplo, a placa de um automóvel pode ser formada por 8888, o número de configurações de algarismos será:

$$AR_{10}^4 = 10^4 = 10000.$$

Assim, como devem se formar placas dos automóveis com três letras e quatro algarismos:

$$AR_{26}^3 \cdot AR_{10}^4 = 17576 \cdot 10000 = 175760000.$$

Logo, tem-se 175760000 placas de automóveis diferentes, considerando as 26 letras do alfabeto e os 10 algarismos do sistema de numeração decimal.

2.8 COMBINAÇÃO COM REPETIÇÃO

A combinação simples é amplamente utilizada em resoluções de problemas onde é necessário escolher n elementos tomados p a p . Porém, para alguns problemas necessita-se de

uma nova interpretação e um modo diferente de resolver, de acordo com o seguinte problema: Dada a equação $x_1 + x_2 + \dots + x_n = p$, quantas são as soluções inteiras e não negativas?

Trata-se de um problema com elementos repetidos onde CR_n^p é o número de combinações completas ou com repetição dos n objetos tomados p a p .

O livro de Morgado descreve:

Para determinar o valor de CR_n^p , vamos representar cada solução da equação por uma fila de sinais + e |. Por exemplo, para a equação $x + y + z = 5$, as soluções (2, 2, 1) e (5, 0, 0) seriam representadas por ++|++|+ e +++++|, respectivamente. Nessa representação, as barras são usadas para separar as incógnitas e a quantidade de sinais + indica o valor de cada incógnita. (MORGADO, 2015, p. 123).

Morgado expõe ainda, que:

Para a equação $x_1 + x_2 + \dots + x_n = p$, cada solução seria representada por uma fila com $n - 1$ barras (as barras são para separar as incógnitas; para separar n incógnitas, usa-se $n - 1$ barras) e p sinais +. Ora, para formar uma fila com $n - 1$ barras e p sinais +, basta escolher dos $n + p - 1$ lugares na fila os p lugares onde serão colocados os sinais +, o que pode ser feito de C_{n+p-1}^p modos. Portanto, $CR_n^p = C_{n+p-1}^p$. (MORGADO, 2015, p. 123).

Assim, utiliza-se $CR_n^p = C_{n+p-1}^p$ para determinar qualquer problema que abranja combinação com repetições.

Exemplo 9. *Caixas com três bombons são fabricadas por uma empresa que dispõe de seis tipos de recheios diferentes de bombons. Quantos tipos de caixas podem ser montadas de um só tipo ou sortidas?*

Para formar uma caixa, escolhem-se três dentre os seis tipos de bombons diferentes, podendo ter repetição desses bombons. Chamando de x_i o número de bombons do i -ésimo tipo de bombom que será escolhido, deve-se determinar valores inteiros e não negativos para x_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, tais que $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 3$.

$$CR_6^3 = C_8^3 = \frac{8!}{3!(8-3)!} = 56.$$

Portanto, podem ser formadas 56 caixas com três bombons dos seis tipos diferentes disponíveis.

Contudo, após o estudo das definições, teoremas e fórmulas que compõem a Análise Combinatória, destaca-se a importância desse conteúdo para o desenvolvimento do raciocínio matemático. Muitas vezes, um mesmo problema pode ser resolvido de mais um modo e, por

essa e outras razões, o mais importante não é simplesmente conhecer as fórmulas, mas sim, desenvolver raciocínios de acordo com as características para cada problema. Assim, nos capítulos a seguir será retomada a ideia do uso das fórmulas da Análise Combinatória, mas também, com outros tipos de técnicas para resoluções de tais problemas.

3 BNCC E COMO O ESTUDO DE FUNÇÕES GERADORAS PODE SER INSERIDO NO CURRÍCULO

Para estudar e aplicar as funções geradoras em resoluções problemas de combinatória no Ensino Médio será feito um breve estudo na Base Nacional Comum Curricular, a fim de identificar o que esse documento sugere enquanto metodologias diversas para que os estudantes tenham um aprendizado que valorize as competências e habilidades dentro da Análise Combinatória.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de **aprendizagens essenciais** que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE). (BRASIL, 2018, p.9).

Assim, a BNCC tem como fim contribuir no que se refere à formação dos profissionais da educação, aos conteúdos educacionais e a avaliação, o alinhamento de ações educacionais para construir uma sociedade justa, inclusiva e democrática.

A partir dessas contribuições do documento, é importante que os professores tenham acesso e busquem por recursos diversificados para sua prática pedagógica, visando oferecer aos alunos diferentes estratégias para solução de problemas que venham a colaborar para o desenvolvimento de seu aprendizado.

[...] contextualizar os conteúdos dos componentes curriculares, identificando estratégias para apresentá-los, representá-los, exemplificá-los, conectá-los e torná-los significativos, com base na realidade do lugar e do tempo nos quais as aprendizagens estão situadas; [...] selecionar e aplicar metodologias e estratégias didático-pedagógicas diversificadas, recorrendo a ritmos diferenciados e a conteúdos complementares, se necessário, para trabalhar com as necessidades de diferentes grupos de alunos, suas famílias e cultura de origem, suas comunidades, seus grupos de socialização etc. (BRASIL, 2018, p.18 e 19).

A busca de metodologias e estratégias diversificadas é de grande importância para que os professores e alunos não fiquem aprisionados a um único método de ensino e que a aprendizagem da matemática não se torne rotineira.

Na área voltada à matemática, a BNCC identifica como competência específica:

Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente (BRASIL, 2018, p. 531).

Deste modo, na resolução de problemas os alunos podem inicialmente identificar os conceitos e procedimentos necessários que sejam utilizados na solução. Em seguida eles

devem aplicar esses conceitos, realizar os procedimentos e conciliar com o problema em discussão.

Ainda, em alguns problemas, os alunos necessitam de mais recursos e estratégias para resolução após a sua interpretação do enunciado.

[...] a resolução de problemas pode exigir processos cognitivos diferentes. Há problemas nos quais os estudantes deverão aplicar de imediato um conceito ou um procedimento, tendo em vista que a tarefa solicitada está explícita. Há outras situações nas quais, embora essa tarefa esteja contida no enunciado, os estudantes deverão fazer algumas adaptações antes de aplicar o conceito que foi explicitado, exigindo, portanto, maior grau de interpretação. (BRASIL, 2018, p. 535).

Solucionar problemas que dependem de um grau maior de interpretação, onde geralmente professores e alunos estão acostumados a um modelo único de resolução, podem fazer com que o professor não aborde tais problemas com os alunos pelo grau de complexidade ou quando aplicado, o aluno acabe não os solucionando de maneira correta ou até mesmo deixando-os em branco. Portanto, ao invés de ficar preso a um único método de resolução, é de grande relevância o acesso às técnicas que facilitem a compreensão do conteúdo e aplicação de forma a solucionar os problemas em discussão.

Segundo a BNCC:

Na (re)elaboração dos currículos e das propostas pedagógicas, é possível adotar outras organizações, recorrendo tanto às habilidades definidas nesta BNCC quanto a outras que sejam necessárias e que contemplem especificidades e demandas próprias dos sistemas de ensino e das escolas (BRASIL, 2018, p. 542).

Assim, fica como responsabilidade do professor, dentro das suas práticas e seguindo as orientações da BNCC, estar se aperfeiçoando, atualizando-se e buscando diversas metodologias para contribuir em cada habilidade que seus alunos irão desenvolver.

Contudo, o uso das Funções Geradoras no Ensino Médio pode ser uma importante ferramenta na resolução de problemas que necessitam de contagem, onde esses não se enquadram em aplicações comuns de fórmulas resolutivas de permutações, arranjos ou combinações. Também é relevante destacar que, utilizando essa ferramenta, os professores e alunos sintam-se motivados a repensarem os conceitos e métodos de ensino e aprendizagem.

4 FUNÇÕES GERADORAS

A intenção deste capítulo é verificar técnicas de resoluções para problemas que necessitam de contagem sem o uso das fórmulas da Análise Combinatória, ou seja, encontrar uma técnica diferente das habituais para ser aplicada em problemas de contagem no Ensino Médio, visto que essa técnica não é abordada com os alunos de tal nível.

Esta técnica teve origem nos trabalhos de A. De Moivre (1167-1754), tendo sido aplicada extensivamente por L. Euler (1707-1783) em problemas de teoria aditiva de números, especificamente na teoria de partições. Este método foi muito usado por S. Laplace (1749-1827) no estudo de probabilidade. N. Bernoulli (1687-1759) utilizou este método no estudo de permutações caóticas. (SANTOS, 2007, p. 149).

Assim, faz-se necessário uma boa explanação dessa técnica dentro do conteúdo de Análise Combinatória para os alunos do Ensino Médio, visto que, em determinados problemas o uso das fórmulas de contagem precisa avaliar muitos casos específicos ou quebrar-se em muitas partes para ter solução.

Para dar início ao tema, considera-se o seguinte problema:

Determine o número de soluções inteiras para a equação $x_1 + x_2 + x_3 = 10$, onde as variáveis x_1 e x_2 pertencem a $\{1, 2, 3\}$, e a variável x_3 pertence a $\{5, 6, 7\}$. Assim, definem-se os polinômios p_1 para x_1 , p_2 para x_2 e p_3 para x_3 :

$$p_1 = x^1 + x^2 + x^3.$$

$$p_2 = x^1 + x^2 + x^3.$$

$$p_3 = x^5 + x^6 + x^7.$$

Observa-se que os expoentes de x em p_i são os elementos do conjunto que x_i pertence. Como o objetivo é encontrar as soluções inteiras que somem 10, onde cada variável esteja em seu conjunto, determina-se o polinômio $p(x)$ resultante do produto $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$:

$$p(x) = (x^1 + x^2 + x^3)(x^1 + x^2 + x^3)(x^5 + x^6 + x^7).$$

Chegando assim na solução do problema com a expansão do polinômio $p(x)$ em 7 soluções com números inteiros, pois este é o coeficiente de x^{10} :

$$(x^1 + x^2 + x^3)^2(x^5 + x^6 + x^7) = x^7 + 3x^8 + 6x^9 + 7x^{10} + 6x^{11} + 3x^{12} + x^{13}.$$

Verificando, tem-se que o termo $x^2x^3x^5$ fornece a solução $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ e $x_3 = 5$. Assim, cada solução do problema satisfaz a uma maneira de se obter x^{10} em $p(x)$. Além do mais o polinômio em questão fornece também outros tipos de soluções, como por exemplo, para a equação $x_1 + x_2 + x_3 = 8$, tendo no polinômio x^8 o coeficiente 3, que é o número de solução para essa equação. De forma geral, o polinômio $p(x)$ encontrado, gera soluções para

todos os tipos de equações do tipo $x_1 + x_2 + x_3 = m$, para $m \in \{7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$ com x_i pertencente aos conjuntos já citados anteriormente.

Definição 2. (SANTOS, 2007) Uma série de potências é uma série infinita da forma $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$, onde a_i , para $i = 0, 1, 2, 3, \dots$, são números reais e x é uma variável.

Tendo como base esta definição, qualquer polinômio de variável x é considerado uma série de potências.

Exemplo 10. O polinômio $3x + 5x^3 + 5x^4$ pode ser escrito como $0 + 3x + 0x^2 + 5x^3 + 5x^4 + 0x^5 + 0x^6 + \dots$.

Definição 3. (SANTOS, 2007) Se $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$ e $b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots$ são duas séries de potências, então a soma destas duas séries é a série de potências na qual o coeficiente de x^r é $a_r + b_r$ e o produto destas duas séries de potências é a série de potência, na qual o coeficiente de x^r é $a_0b_r + a_1b_{r-1} + a_2b_{r-2} + \dots + a_rb_0$.

Exemplo 11. Sejam os polinômios $p_1 = 2x + 3x^2 + x^3$ e $p_2 = x + 2x^3 + x^4$. A soma $p_1 + p_2$ é dada por:

$$(2x + 3x^2 + x^3) + (x + 2x^3 + x^4) = x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x.$$

O produto $p_1 \cdot p_2$ é dado por:

$$(2x + 3x^2 + x^3)(x + 2x^3 + x^4) = x^7 + 5x^6 + 8x^5 + 5x^4 + 3x^3 + 2x^2.$$

Definição 4. (SANTOS, 2007) Se a_r , para $r = 1, 2, \dots$, é o número de soluções de um problema de combinatória, a função geradora ordinária para este problema é a série de potências $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$, ou, de maneira geral, dada a sequência (a_r) , a função geradora ordinária para esta sequência é definida como série de potências.

Como o número de maneiras de retirar r objetos de um conjunto de n objetos distintos, $r \leq n$, é C_n^r , a função geradora ordinária para este problema é $f(x) = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + \dots + C_n^rx^r + \dots + C_n^nx^n$, a qual, como sabemos, é igual a: $f(x) = (1 + x)^n$. (SANTOS, 2007, p.152).

Assim, percebe-se que fica determinado que uma Função Geradora $f(x) = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + \dots + C_n^r x^r + \dots + C_n^n x^n$ pode ser utilizada para calcular as combinações $C_n^0, C_n^1, C_n^2, \dots, C_n^r, \dots, C_n^n$. É importante destacar que nessas funções o objetivo principal é determinar os coeficientes e os expoentes da variável x .

Exemplo 12. *Qual a quantidade de maneiras em que podem-se escolher quatro pessoas de um grupo de sete pessoas?*

Tratando-se de uma combinação simples, usa-se a fórmula:

$$C_7^4 = \frac{7!}{4!(7-4)!} = 35.$$

Entretanto, pode-se solucionar essa situação usando as técnicas de Funções Geradoras. Seja o polinômio $(1+x)$ a presença de uma pessoa escolhida e com o desenvolvimento de $(1+x)^7$ tem-se:

$$f(x) = (1+x)^7 = 1 + 7x + 21x^2 + 35x^3 + 35x^4 + 21x^5 + 7x^6 + x^7.$$

Pela definição de Função Geradora, o termo $35x^4$ que tem como coeficiente 35 é a solução dessa situação.

Exemplo 13. *Determinar a função geradora ordinária $f(x)$ tal que o coeficiente a_r de x^r é o número de soluções inteiras positivas de:*

$$x_1 + x_2 + x_3 = r, \text{ onde } r \in \{15, 16, 17, 18, 19, 20, 21\}.$$

$$4 \leq x_i \leq 6, \text{ para } i = 1, 2,$$

$$7 \leq x_3 \leq 9.$$

Desenvolvendo polinômio com a expansão do produto, tem-se:

$$(x^4 + x^5 + x^6)^2(x^7 + x^8 + x^9) = x^{15} + 3x^{16} + 6x^{17} + 7x^{18} + 6x^{19} + 3x^{20} + x^{21}.$$

Portanto, a série de potência determinada é a função geradora ordinária para o problema proposto e a sequência 1, 3, 6, 7, 6, 3, 1 fornece o número de soluções.

Exemplo 14. *De um grupo de cinco amigos, serão escolhidos dois para pagar a conta de um jantar em uma pizzaria. Quantas são as possibilidades de se fazer essa escolha?*

Tem-se que dos cinco amigos, serão escolhidos dois, não importando a ordem da escolha, para pagar a conta. Pode-se considerar $(1 + x)$, sendo 1 a não escolha de um amigo e x a escolha dele. Determinando o polinômio para os cinco amigos, tem-se:

$$p(x) = (1 + x)(1 + x)(1 + x)(1 + x)(1 + x) = (1 + x)^5$$

$$(1 + x)^5 = 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5.$$

Assim, a escolha de dois amigos dentre os cinco pode ser feita de 10 formas diferentes, visto que 10 é o coeficiente de x^2 .

Nota-se também que caso três amigos fossem escolhidos para pagar a conta, essa escolha poderia ser feita de 10 maneiras, assim como a escolha de quatro amigos teria 5 maneiras diferentes.

É importante destacar que o uso das técnicas das Funções Geradoras pode se estender para outras quantidades, tanto para uma quantidade n de total de amigos, quanto para uma quantidade p de amigos escolhidos para pagar a conta, sendo $p \leq n$.

Exemplo 15. *Um cardápio de uma pizzaria oferece 10 sabores diferentes de pizzas. O cliente pode escolher até quatro sabores diferentes para compor essa pizza. De quantas maneiras pode ser feita essa escolha?*

Dos 10 sabores disponíveis, o cliente pode montar a sua pizza com um sabor, dois sabores, três sabores ou quatro sabores. Considerando $(1 + x)$ a escolha de um sabor ou não e estendendo isso para os 10 sabores, tem-se:

$$(1 + x)^{10} =$$

$$1 + 10x + 45x^2 + 120x^3 + 210x^4 + 252x^5 + 210x^6 + 120x^7 + 45x^8 + 10x^9 + x^{10}.$$

Dos termos $10x$, $45x^2$, $120x^3$ e $210x^4$ do polinômio, determina-se que o cliente pode escolher 10 pizzas com um sabor, 45 pizzas com dois sabores, 120 pizzas com três sabores ou 210 pizzas com quatro sabores. Portanto, serão $10 + 45 + 120 + 210 = 385$ formas de escolher os sabores da pizza.

Exemplo 16. *Com cinco homens e quatro mulheres, deseja-se formar comissões de cinco pessoas, onde deve-se ter exatamente três homens. Quantas comissões podem ser formadas?*

Para formar a comissão devem ser escolhidos três homens e duas das mulheres. Considerando $(1 + y)$ a escolha para cada mulher e $(1 + x)$ a escolha para homem.

$$\begin{aligned}
(1+y)^4(1+x)^5 &= 1 + 4y + 6y^2 + 4y^3 + y^4 + 5x + 20xy + 30xy^2 + 20xy^3 + 5xy^4 \\
&+ 10x^2 + 40x^2y + 60x^2y^2 + 40x^2y^3 + 10x^2y^4 + 10x^3 + 40x^3y \\
&+ 60x^3y^2 + 40x^3y^3 + 10x^3y^4 + 5x^4 + 20x^4y + 30x^4y^2 + 20x^4y^3 \\
&+ 5x^4y^4 + x^5 + 4x^5y + 6x^5y^2 + 4x^5y^3 + x^5y^4.
\end{aligned}$$

Como o desejo é formar comissões com três homens e duas mulheres, tem-se que serão 60 comissões, pois este é o coeficiente de x^3y^2 .

Exemplo 17. *Com cinco homens e quatro mulheres, deseja-se formar comissões de cinco pessoas, onde deve-se ter exatamente três mulheres. Quantas comissões podem ser formadas?*

Como desejam-se formar comissões com três mulheres e dois homens, considera-se $(1+y)$ a escolha para cada mulher e $(1+x)$ a escolha para homem. Da extensão do mesmo polinômio do exemplo 14, tem-se 40 comissões pelo fato desse ser o coeficiente do termo x^2y^3 com exatamente dois homens e três mulheres fazendo parte dessa comissão.

É importante destacar, dos exemplos 16 e 17, que o polinômio $(1+y)^4(1+x)^5$ fornece todas as soluções possíveis para a formação de comissões escolhendo quantidades entre cinco homens e quatro mulheres. Por exemplo, $20xy^3$ indica que serão 20 comissões com um homem e três mulheres. O termo independente 1 representa a quantidade de comissões formadas por nenhum homem e nenhuma mulher, ou seja, uma maneira de não se ter comissão alguma.

Exemplo 18. *Tome três pontos de uma reta r e quatro pontos de uma reta r' . Considerando que r e r' são paralelas, quantos quadriláteros convexos existem com vértices nesses pontos?*

Para formar um quadrilátero convexo, escolhem-se dois pontos da reta r e dois pontos da reta r' . Assim, considerando $(1+x)$ a não escolha ou escolha de um ponto da reta r e $(1+y)$ a não escolha ou escolha de um ponto da reta r' , tem-se:

$$\begin{aligned}
(1+x)^3(1+y)^4 &= x^3y^4 + 4x^3y^3 + 6x^3y^2 + 4x^3y + x^3 + 3x^2y^4 + 12x^2y^3 + 18x^2y^2 \\
&+ 12x^2y + 3x^2 + 3xy^4 + 12xy^3 + 18xy^2 + 12xy + 3x + y^4 + 4y^3 + 6y^2 \\
&+ 4y + 1.
\end{aligned}$$

Logo, para a escolha de dois pontos na reta r e dois pontos na reta r' , do termo $18x^2y^2$, tem-se que serão 18 quadriláteros convexos.

Exemplo 19. *Tome três pontos de uma reta r e quatro pontos de uma reta r' . Considerando que r e r' são paralelas, quantos triângulos existem com vértices nesses pontos?*

Para formar triângulos, devem ser escolhidos dois pontos de r e um ponto de r' ou um ponto de r e dois pontos de r' . Da expansão do polinômio $(1+x)^3(1+y)^4$ do exemplo 16, tem-se $12 + 18 = 30$ triângulos, pois 12 e 18 são os coeficientes de x^2y e xy^2 , respectivamente.

Exemplo 20. *Um castelo tem sete portões. De quantas maneiras esse castelo pode ficar aberto?*

Tem-se que esse castelo pode ter um portão aberto, dois portões abertos, três portões abertos, ..., sete portões abertos. Assim, considera-se $(1+x)$ o modo de um portão estar aberto ou de não estar aberto. Como ao todo são sete portões:

$$(1+x)^7 = 1 + 7x + 21x^2 + 35x^3 + 35x^4 + 21x^5 + 7x^6 + x^7.$$

Tem-se sete maneiras de abrir um portão, 21 maneiras de abrir dois portões, 35 maneiras de abrir três portões, 35 maneiras de abrir três portões, 21 maneiras de abrir cinco portões, 7 maneiras de abrir seis portões e uma maneira de abrir os 7 portões. Logo, este castelo pode ficar aberto de $7 + 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1 = 127$ maneiras diferentes.

Registrando também que no polinômio o termo independente 1 significa uma forma do castelo ficar fechado.

Exemplo 21. *Com cinco frutas diferentes, quantas vitaminas podem ser feitas utilizando duas ou mais frutas?*

Podendo-se escolher duas, três, quatro ou cinco frutas para fazer a vitamina e escrevendo $(1 + x)$ a forma de uma fruta ser escolhida ou não, desenvolve-se o polinômio para a escolha das cinco frutas:

$$(1 + x)^5 = 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5.$$

Assim, serão 10 vitaminas escolhendo duas frutas, 10 vitaminas escolhendo três frutas, 5 vitaminas escolhendo quatro frutas e uma vitamina com as cinco frutas. Tem-se então que a quantidade de vitaminas diferentes é $10 + 10 + 5 + 1 = 26$.

Exemplo 22. *Quantas são as soluções inteiras e positivas da equação $x + y + z = 5$?*

Para determinar as soluções inteiras e positivas de $x + y + z = 5$, consideram-se x, y e z como w_i com $i = 1$ para x , com $i = 2$ para y e com $i = 3$ para z , onde w_i pertence ao conjunto $\{1, 2, 3\}$. Considere os polinômios p_1, p_2 e p_3 para w_1, w_2 e w_3 , respectivamente:

$$p_1 = w + w^2 + w^3.$$

$$p_2 = w + w^2 + w^3.$$

$$p_3 = w + w^2 + w^3.$$

Os expoentes de w em p_i são os elementos do conjunto que w_i pertence. O objetivo do problema é encontrar as soluções inteiras que a soma é cinco, com as variáveis pertencendo conjunto $\{1, 2, 3\}$. O polinômio do produto $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$ é dado por:

$$p(w) = (w + w^2 + w^3)^3$$

$$p(w) = w^3 + 3w^4 + 6w^5 + 7w^6 + 6w^7 + 3w^8 + w^9.$$

Do termo $6w^5$, são seis soluções inteiras e positivas para a equação $x + y + z = 5$.

Exemplo 23. *Em um grande salão, existem 10 lustres, cada um aceso por meio de um interruptor exclusivo. Para que o salão fique iluminado o suficiente, devem ser acessos, no mínimo, três lustres. De quantas maneiras o salão pode ficar iluminado?*

Podendo-se escolher três, quatro, cinco, ..., até os dez lustres para ficarem acessos. Escrevendo $(1 + x)$ a forma de um lustre ficar acesso ou não, desenvolve-se o polinômio para a escolha dos dez lustres:

$$(1 + x)^{10} = 1 + 10x + 45x^2 + 120x^3 + 210x^4 + 252x^5 + 210x^6 + 120x^7 + 45x^8 + 10x^9 + x^{10}.$$

Logo, pelos termos $120x^3$, $210x^4$, $252x^5$, $210x^6$, $120x^7$, $45x^8$, $10x^9$ e x^{10} , tem-se 120 maneiras de três lustres ficarem acessos, 210 maneiras de quatro lustres ficarem acessos, 252 maneiras de cinco lustres ficarem acessos, ..., até uma maneira de os dez lustres ficarem acessos. Portanto, serão $120 + 210 + 252 + 210 + 120 + 45 + 10 + 1 = 968$ maneiras que o salão pode ficar iluminado com no mínimo três lustres acessos.

Com estes exemplos, pode-se notar que a técnica de utilizar as Funções Geradoras para resolver problemas de contagem, que necessite o uso de combinações no Ensino Médio, é uma ferramenta poderosa, visto que os alunos encontram muitas dificuldades em interpretar e solucionar tais problemas utilizando as fórmulas de Análise Combinatória. Assim, inserindo as Funções Geradoras como técnica de solução para os problemas de combinações, torna-se mais um recurso de grande valia para que esses alunos resolvam com eficiência.

5 APLICAÇÃO DAS FUNÇÕES GERADORAS NO ENSINO MÉDIO

Como visto anteriormente, problemas voltados ao uso de contagem e combinatória são conteúdos ensinados no Ensino Médio, principalmente no segundo ano.

Soluções com uso das Funções Geradoras em problemas de contagem e combinatória não é um tema que compõem o conteúdo programático dentro do Ensino Médio. Em geral, são estudadas em cursos de Ensino Superior na disciplina de Matemática Discreta.

A intenção neste capítulo é de proporcionar alguns problemas que podem ser apresentados aos estudantes do segundo ano do Ensino Médio, cujas soluções podem ser encontradas utilizando as conhecidas fórmulas de Análise Combinatória e também técnicas das Funções Geradoras. Para isso, no conteúdo programático de matemática do segundo do Ensino Médio foi adicionado o tema das Funções Geradoras juntamente com Análise Combinatória para serem estudadas paralelamente.

Portanto, utilizou-se de 25 aulas para o estudo da Análise Combinatória e das Funções Geradoras. Em seguida, foi elaborada uma lista contendo três exercícios com problemas de combinatória e solicitado aos alunos as resoluções utilizando os dois métodos, com uso das fórmulas da Análise Combinatória e técnicas das Funções Geradoras, como forma de obtenção de nota parcial dentro do sistema avaliativo bimestral.

5.1 PROBLEMA 1

Em uma classe com seis alunos, quantos grupos podem ser formados com três membros dessa classe?

Solução 1: *Utilizando fórmula resolutive.* Observando que se tem seis alunos para escolher três a três para formar os grupos, trata-se de uma combinação simples. Assim:

$$C_6^3 = \frac{6!}{3!(6-3)!} = 20.$$

Logo, tem-se 20 grupos formados escolhendo três alunos dentre os seis disponíveis.

Solução 2: *Utilizando funções geradoras.* Tem-se seis elementos para formar grupos com três. Admitindo que dos seis alunos, cada um pode estar ou não no grupo escolhido,

pode-se escrever com $(1 + x)$ as chances de um aluno, onde 1 representa não ser escolhido e x ser escolhido. Aplicando para os seis alunos se tem:

$$(1 + x)^6 = 1 + 6x + 15x^2 + 20x^3 + 15x^4 + 6x^5 + x^6.$$

Como deseja-se formar grupos com três alunos, após o desenvolvimento do polinômio, percebe-se que a solução é 20 grupos, pois 20 é o coeficiente de x^3 .

5.2 PROBLEMA 2

Em uma circunferência são marcados oito pontos, como mostra a figura.

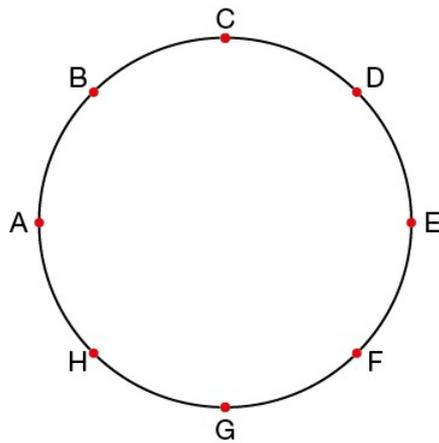


Figura 1: Pontos A, B, C, D, E, F, G e H marcados em uma circunferência.

Analise as afirmações como verdadeiras ou falsas:

- O número de retas determinadas por esses pontos é 28.
- O número de triângulos que podem ser formados com vértices em três desses pontos é 56.
- O número de pentágonos que podem ser formados é maior que o número de quadriláteros.
- O número de hexágonos que podem ser formados é a metade do número de triângulos.
- O número de polígonos que podem ser formados é 219.

Solução 1: *Utilizando fórmula resolutive.* Neste problema será utilizada combinação simples. Têm-se oito elementos para ser escolhidos de p formas, onde $p = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$. Determinando item a item:

- a) Como se quer determinar o número de retas possíveis, devem escolher-se dois pontos quaisquer dentre os oito disponíveis.

$$C_8^2 = \frac{8!}{2!(8-2)!} = 28.$$

Afirmativa verdadeira, pois serão 28 retas formadas.

- b) Como se quer determinar o número de triângulos possíveis, devem escolher-se três pontos quaisquer dentre os oito disponíveis.

$$C_8^3 = \frac{8!}{3!(8-3)!} = 56.$$

Afirmativa verdadeira, pois serão 56 triângulos.

- c) Neste item se quer determinar o número de pentágonos e quadriláteros possíveis. Devem escolher-se cinco e quatro pontos quaisquer, respectivamente, dentre os oito disponíveis.

$$C_8^5 = \frac{8!}{5!(8-5)!} = 56.$$

Logo, serão 56 pentágonos.

$$C_8^4 = \frac{8!}{4!(8-4)!} = 70.$$

Logo, serão 70 quadriláteros.

Afirmativa falsa, pois o número de pentágonos que podem ser formados é menor que o número de quadriláteros.

- d) Neste item se quer determinar o número de hexágonos e triângulos possíveis. Já foram determinados 56 triângulos no item b, portanto devem ser escolhidos então seis pontos quaisquer, respectivamente, dentre os oito disponíveis.

$$C_8^6 = \frac{8!}{6!(8-6)!} = 28.$$

Afirmativa verdadeira, pois serão 28 hexágonos que é a metade do número de triângulos.

- e) Neste item, como se quer encontrar o número de polígonos formados, deve-se calcular a escolha de três, quatro, cinco, seis, sete e oito pontos dos oito disponíveis.

$$C_8^3 + C_8^4 + C_8^5 + C_8^6 + C_8^7 + C_8^8 = 56 + 70 + 56 + 28 + 8 + 1 = 219.$$

Assim, a afirmativa é verdadeira, pois podem ser formados 219 polígonos com os oito pontos da circunferência.

Solução 2. *Utilizando as funções geradoras.* Neste problema, como se quer determinar o número de pontos escolhidos entre os oito disponíveis, pode se denotar $(1 + x)$ a escolha de cada um dos pontos, onde 1 representa a não escolha desse ponto e x a escolha desse ponto. Assim, para os oito pontos disponíveis tem-se:

$$(1 + x)^8 = 1 + 8x + 28x^2 + 56x^3 + 70x^4 + 56x^5 + 28x^6 + 8x^7 + x^8.$$

Com o desenvolvimento do polinômio, tem-se que podem obter-se 28 escolhas de dois pontos, 56 escolhas de três pontos, 70 escolhas de quatro pontos, 56 escolhas de cinco pontos, 28 escolhas de seis pontos, oito escolhas de sete pontos e uma escolha de oito pontos.

Logo, tem-se 28 retas, 56 triângulos, 70 quadriláteros, 56 pentágonos, 28 hexágonos, oito heptágonos e um octógono.

Portanto,

- a) Verdadeira.
- b) Verdadeira.
- c) Falsa, pois o número de pentágonos é menor que o de quadriláteros.
- d) Verdadeira, pois o número de hexágonos é a metade do número de triângulos.
- e) Verdadeiro, $56 + 70 + 56 + 28 + 8 + 1 = 219$ polígonos.

5.3 PROBLEMA 3

Quantas são as soluções inteiras e positivas da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 6$?

Solução 1. *Utilizando fórmula resolutive.* Deseja-se encontrar as soluções inteiras e positivas para as incógnitas, então considera-se $x_1 = a + 1$, $x_2 = b + 1$ e $x_3 = c + 1$ para determinar as soluções da nova equação:

$$(a + 1) + (b + 1) + (c + 1) = 6$$

$$a + b + c = 3.$$

Assim, tem-se uma combinação com repetição CR_3^3 , pois devem-se escolher três valores para soma igual a três.

$$CR_3^3 = C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10.$$

Logo, tem-se 10 soluções inteiras e positivas para $x_1 + x_2 + x_3 = 6$.

Solução 2. *Utilizando funções geradoras.* Para determinar as soluções inteiras e positivas de $x_1 + x_2 + x_3 = 6$, considera-se x_i para $i = 1, 2, 3$ pertencente ao conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$. Escrevendo os polinômios p_1 , p_2 e p_3 para x_1 , x_2 e x_3 , respectivamente:

$$p_1 = x + x^2 + x^3 + x^4.$$

$$p_2 = x + x^2 + x^3 + x^4.$$

$$p_3 = x + x^2 + x^3 + x^4.$$

Os expoentes de x em p_i são os elementos do conjunto que x_i pertence. O objetivo do problema é encontrar as soluções inteiras que somem seis, onde cada variável esteja no conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$, determina-se o polinômio $p(x)$ resultante do produto $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$:

$$p(x) = (x + x^2 + x^3 + x^4)^3.$$

Assim, a solução do problema com a expansão do polinômio $p(x)$ tem 10 soluções inteiras e positivas, pois 10 é o coeficiente de x^6 :

$$\begin{aligned} (x + x^2 + x^3 + x^4)^3 \\ = x^3 + 3x^4 + 6x^5 + 10x^6 + 12x^7 + 12x^8 + 10x^9 + 6x^{10} + 3x^{11} + x^{12}. \end{aligned}$$

6 ANÁLISE SOBRE A APLICAÇÃO DAS FUNÇÕES GERADORAS NO ENSINO MÉDIO

A lista contendo os três exercícios foi aplicada em uma turma do segundo ano do Ensino Médio com 10 alunos, visando avaliar as competências e habilidades dos alunos em resolver problemas de combinatória com uso de fórmulas resolutivas da Análise Combinatória e com o uso das técnicas das Funções Geradoras, conteúdos aos quais foram estudados de forma paralela, aplicando-se os conceitos, definições, fórmulas, técnicas, exemplos e exercícios.

6.1 ANÁLISE DA CORREÇÃO

Do problema um, utilizando a fórmula resolutiva de combinação simples e as técnicas da Função Geradora, os 10 alunos resolveram com êxito, obtendo assim $10/10$ em ambas as técnicas aplicadas.

Diante das resoluções, observou-se que o primeiro problema pode ser resolvido tanto pela fórmula resolutiva de combinações como pelas técnicas das Funções Geradoras. Este tipo de problema é mais frequente nos livros didáticos do Ensino Médio. Assim, o uso das Funções Geradoras também é um recurso viável.

Do problema dois, analisando item a item:

- a) Utilizando ambas as técnicas, obteve-se $10/10$.
- b) Utilizando ambas as técnicas, obteve-se $10/10$.
- c) Utilizando ambas as técnicas, obteve-se $10/10$.
- d) Utilizando ambas as técnicas, obteve-se $10/10$.
- e) Utilizando a fórmula resolutiva, obteve-se $9/10$, pois um aluno não calculou o número de octógonos possíveis. Utilizando as técnicas das Funções Geradoras, obteve-se $10/10$.

Neste problema, obteve-se uma pequena vantagem no uso das técnicas das Funções Geradoras, identificando que na expansão do polinômio $(1 + x)^8$, os alunos conseguiram

determinar todas as soluções de uma só vez, sem precisar resolver item por item utilizando a fórmula de combinação simples.

Do problema três, utilizando a fórmula resolutive de combinações com repetição, obteve-se $2/10$ acertos, pois alguns alunos não utilizaram a fórmula resolutive e resolveram por tentativa e erro, mas nesse caso faltaram algumas soluções para a equação $x_1 + x_2 + x_3 = 6$. Outros até utilizaram a fórmula resolutive, porém de maneira equivocada, ao invés de calcular $CR_3^3 = C_5^3$, utilizaram C_6^3 . Enquanto utilizando as técnicas de Função Geradora, a relação de acertos foi de $9/10$, somente um aluno desenvolveu o polinômio $p(x) = (x + x^2 + x^3)^3$, ao invés de $p(x) = (x + x^2 + x^3 + x^4)^3$, não chegando a solução correta.

Na resolução do último problema, fica mais evidente que o uso das técnicas das Funções Geradoras teve um aproveitamento superior ao uso das fórmulas resolutivas da Análise Combinatória. Ao tentar identificar como utilizar a fórmula resolutive, a maioria dos alunos teve dificuldade ao interpretar este problema ou utilizou a fórmula de maneira equivocada. Entretanto, ao utilizar as técnicas das Funções Geradoras, os alunos, em sua maioria, identificaram de maneira correta as possíveis soluções inteiras e positivas para a equação $x_1 + x_2 + x_3 = 6$, estas pertencendo ao conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$, e em seguida desenvolveram o polinômio $p(x) = (x + x^2 + x^3 + x^4)^3$ corretamente.

6.2 PESQUISA SOBRE A OPINIÃO DOS ALUNOS

Depois de aplicada e corrigida a lista de exercícios, foi entregue aos alunos um questionário com perguntas sobre os métodos de resolução utilizados, a fim de identificar a opinião deles e de que maneira se sentiram mais confortáveis para resolver os problemas de combinatória.

Foi perguntado: “sobre o conteúdo de Análise Combinatória, você considera-o de nível difícil, médio ou fácil?”. Um total de seis alunos responderam que consideram difícil, enquanto quatro responderam que consideram médio e nenhum respondeu que considera fácil.

A segunda pergunta feita a eles foi: “você gostaria que tivesse métodos diferentes que possam facilitar resolver problemas de Análise Combinatória?”. Os 10 alunos responderam que sim.

Sobre a lista de exercícios com problemas de Análise Combinatória, quando perguntado: “qual método você preferiu utilizar para solucionar o problema número 1?”, dois alunos responderam que preferiram pela fórmula resolutiva de combinação, dois responderam utilizando a Função Geradora, enquanto seis responderam utilizando qualquer um dos métodos e nenhum aluno respondeu que não conseguiria resolver por nenhum dos métodos.

Perguntado “qual método você preferiu utilizar para solucionar o problema número 2?”, dois alunos responderam que preferiram pela fórmula resolutiva de combinação, cinco responderam que utilizando a Função Geradora, enquanto três responderam que utilizando qualquer um dos métodos. Nenhum aluno respondeu que não conseguiria resolver por nenhum dos métodos.

Sobre o último problema, foi questionado: “qual método você preferiu utilizar para solucionar o problema número 3?”, Nenhum aluno respondeu que preferiu pela fórmula resolutiva de combinação, sete responderam que utilizando a Função Geradora, enquanto dois responderam que utilizando qualquer um dos métodos e um aluno que respondeu que não conseguiu resolver por nenhum dos métodos.

A última pergunta direcionada aos alunos foi: “você acredita que o uso das técnicas das Funções Geradoras pode facilitar na resolução de problemas combinatórios?”, todos os 10 alunos responderam que sim.

A partir das opiniões dos alunos, nota-se que a aplicabilidade das técnicas das Funções Geradoras foi de grande importância neste estudo de caso, oportunizando assim a eles recursos diferenciados para solucionar problemas de combinatória, conteúdo ao qual eles classificam como de nível médio ou difícil.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Após o estudo, a elaboração e aplicação deste trabalho voltado ao ensino e a aprendizagem da Análise Combinatória no Ensino Médio, percebeu-se o quanto é necessário o uso de diferentes métodos para resoluções de problemas que necessitam de contagem e/ou combinações. A Análise Combinatória é um conteúdo de grande importância dentro da matemática e que, por vezes não é ensinado de maneira ampla ou até mesmo omitido no Ensino Médio. Alguns dos possíveis fatores responsáveis por isso devem-se aos livros didáticos que abordam esse conteúdo de forma superficial, não oferecendo um bom suporte para o ensino, segundo Sabo (2007, p. 8) “a grande maioria dos livros didáticos do Ensino Médio, que já tive oportunidade de trabalhar e estudar segue este padrão de “encaixotamento” dos conceitos matemáticos.” e/ou da falta de formação dos professores. Como visto na BNCC, documento que determina as competências gerais e específicas, as habilidades e as aprendizagens essenciais, o professor deve buscar estratégias e metodologias diversificadas para trabalhar com os alunos.

Com o uso das Funções Geradoras em resoluções de problemas de combinatória, pode-se oferecer aos alunos mais este recurso que os possibilita resoluções mais versáteis em alguns problemas. Em muitos problemas de combinatória, até então que são resolvidos somente pelo uso de fórmulas resolutivas, necessitando por vezes de soluções muito trabalhosas, com o uso das técnicas das Funções Geradoras, estes problemas podem ser solucionados de maneira mais prática e fácil.

A análise da correção das atividades propostas aos alunos mostra o quanto é benéfico o uso das técnicas de Funções Geradoras neste estudo de caso, pois alcançaram-se resultados positivos na aplicação e nas resoluções dos problemas, principalmente nos problemas dois e três. Assim, também a inclusão desse método de resolução foi de aceitação satisfatória por parte dos alunos, uma vez que os mesmos opinaram que as técnicas de Função Geradora podem facilitar a resolução de problemas combinatórios. Fica como recomendação, para trabalhos futuros, a aplicação em outras turmas e com uma quantidade maior de alunos para um estudo mais amplo desse tema.

Acredita-se então, que as Funções Geradoras quando inseridas e ensinadas com os critérios adequados, podem fazer parte do currículo do Ensino Médio, dentro da Análise Combinatória, sendo assim ferramentas diferentes que podem tornar a aprendizagem de forma mais significativa e atrativa.

Por fim, fica como sugestão a todos os professores de matemática, o ingresso ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, sendo uma excelente formação aos profissionais que sempre buscam aperfeiçoar suas práticas, com objetivo de um aprofundamento no domínio dos conteúdos para sua docência.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

HAZZAN, Samuel. **Fundamentos da Matemática elementar**: combinatória, probabilidade. São Paulo: Atual, 2004. v. 5.

MORGADO, Augusto César. **Matemática Discreta**. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

SABO, Ricardo Dezso. **Análise dos livros didáticos do Ensino Médio**: Um estudo dos conteúdos referentes à Combinatória. Santo André: Centro de Pós Graduação, Pesquisa e Extensão do Centro Universitário Fundação Santo André, 2007. Disponível em: <https://www.pucsp.br/~cileda/Monografia_RicardoSabo.pdf> acesso em: 02 de abril de 2021.

SANTOS, J. P. O.; MELLO, M. P.; MURARI, I. T. C. **Introdução à Análise Combinatória**. Quarta Edição. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2007.

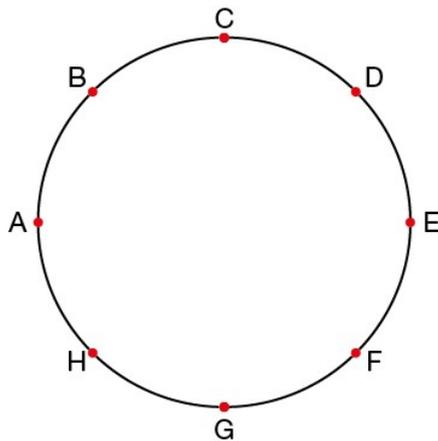
APÊNDICE

A. LISTA DE EXERCÍCIOS

Exercícios Avaliativos de Análise Combinatória

Todos os exercícios devem apresentar os cálculos e devem ser resolvidos de duas maneiras, pelo método de fórmulas da análise combinatória e também por função geradora.

- 01.** Em uma classe com seis alunos, quantos grupos podem ser formados com três membros dessa classe, usando o método das funções geradoras?
- 02.** Em uma circunferência são marcados oito pontos, como mostra a figura.



Analise as afirmações como verdadeiras ou falsas:

- O número de retas determinadas por esses pontos é 28.
- O número de triângulos que podem ser formados com vértices em três desses pontos é 56.
- O número de pentágonos que podem ser formados é maior que o número de quadriláteros.
- O número de hexágonos que podem ser formados é a metade do número de triângulos.
- O número de polígonos que podem ser formados é 219.

- 03.** Quantas são as soluções inteiras e positivas da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 6$?

B. QUESTIONÁRIO

Pesquisa: Aplicação de Métodos Resolutivos na Análise Combinatória

Sobre o conteúdo de Análise Combinatória, você considera-o de nível:

- a) () Difícil.
- b) () Médio.
- c) () Fácil.

Você gostaria que tivesse métodos diferentes que possam facilitar resolver problemas de Análise Combinatória?

- a) () Sim.
- b) () Não

Sobre os exercícios da lista de Análise Combinatória aplicada:

Qual método você preferiu utilizar para solucionar o problema número 1?

- a) () Fórmula resolutiva de combinação.
- b) () Função geradora.
- c) () Qualquer um dos métodos.
- d) () Não consegui resolver por nenhum dos métodos.

Qual método você preferiu utilizar para solucionar o problema número 2?

- a) () Fórmula resolutiva de combinação.
- b) () Função geradora.
- c) () Qualquer um dos métodos.
- d) () Não consegui resolver por nenhum dos métodos.

Qual método você preferiu utilizar para solucionar o problema número 3?

- a) () Fórmula resolutiva de combinação.
- b) () Função geradora.
- c) () Qualquer um dos métodos.
- d) () Não consegui resolver por nenhum dos métodos.

Você acredita que o uso das técnicas das Funções Geradoras pode facilitar na resolução de problemas combinatórios?

a) Sim.

e) Não.