4º

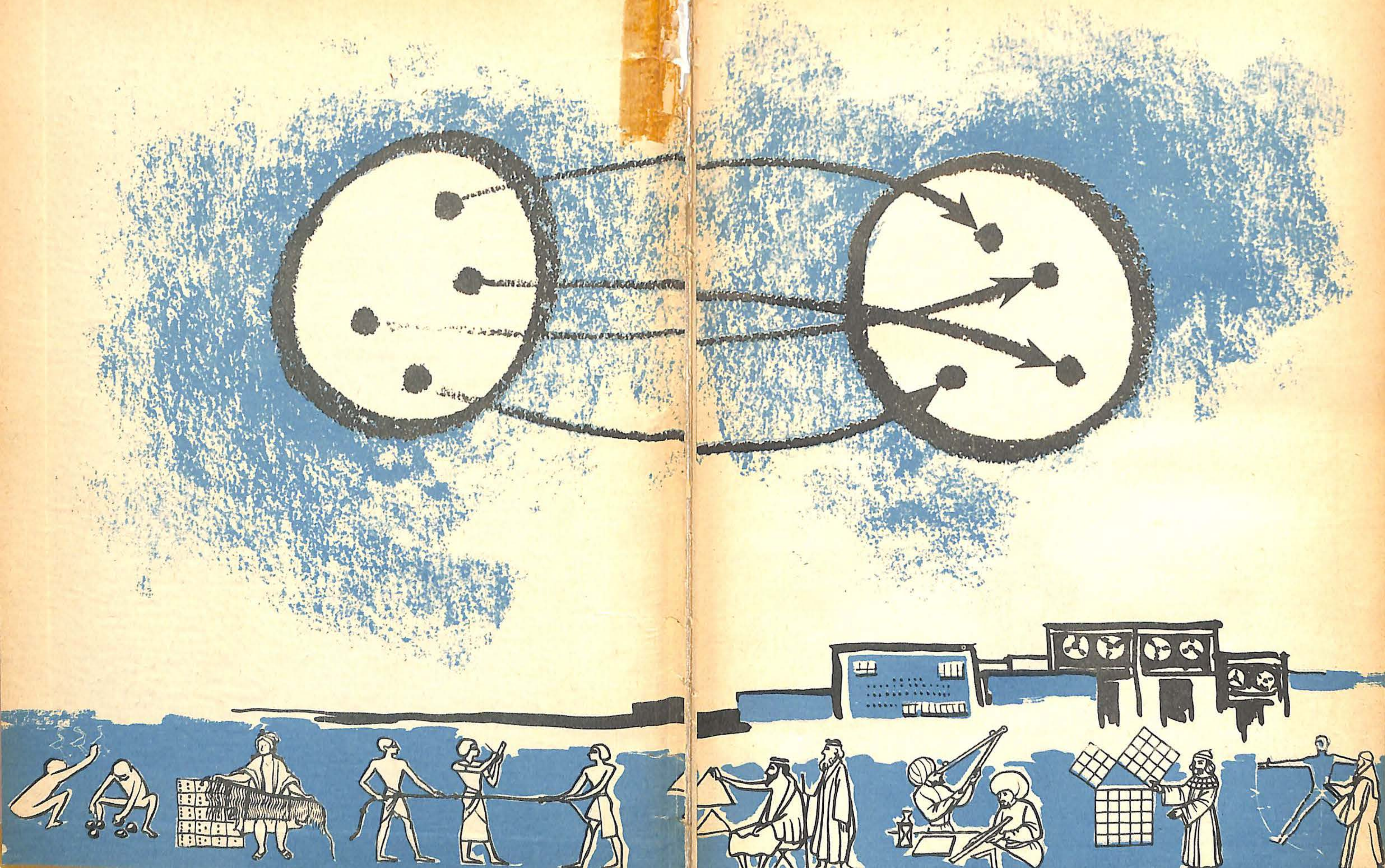
Volume

para os ginásios

MATEMÁTICA

CURSO MODERNO

OSVALDO SANGIORGI



Homenagem à

Segunda Conferência Interamericana
de Educação Matemática

Lima, Peru – 2/12 de dezembro de 1966

MATEMÁTICA
CURSO MODERNO
4

Osvaldo
SANGIORGI

Licenciado em Matemática pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras, da Universidade de São Paulo

MATEMÁTICA

curso moderno

para os ginásios

4.º volume

Companhia Editora Nacional

Capa de:

NESTOR BATTAGLIERO

Ilustrações de:

JOEL LINCK

segunda edição

1968

obra composta e impressa
nas oficinas da
São Paulo Editora S. A.

Impresso nos Estados Unidos do Brasil
Printed in the United States of Brazil

PROGRAMA[1]

para um

CURSO MODERNO

de

MATEMÁTICA

(Para a *Quarta Série* dos Cursos Ginasiais)[2]

1. *Números reais* — prática com números irracionais — radicais: potências com expoente racional relativo — operações e propriedades;
2. *Equações do segundo grau* — generalidades — resolução — relações entre os coeficientes e as raízes; equações biquadradas e equações irracionais; sistemas simples do segundo grau — problemas;
3. *Funções* — domínio e conjunto-imagem; função linear e sua representação gráfica cartesiana — resolução gráfica de sistemas de equações; função trinômio do segundo grau e sua representação gráfica cartesiana; inequações do segundo grau;
4. *Semelhança* — razão e proporcionalidade de segmentos — Teorema de Tales — semelhança de triângulos — semelhança de polígonos; razões trigonométricas;
5. *Relações métricas* — num triângulo retângulo — Teorema de Pitágoras; num triângulo qualquer — lei dos senos e lei dos co-senos; relações métricas num círculo;
6. *Polígonos regulares e medida da circunferência* — polígonos regulares inscritíveis e circunscritíveis numa circunferência; construção e relações métricas entre os elementos do quadrado, do triângulo eqüilátero, do hexágono e decágono regulares; noções sôbre a medida da circunferência — cálculo de π.

Apêndice: Números complexos; Áreas de regiões planas; Mapas topológicos.

---

(1) De acôrdo com os *Assuntos Mínimos* para um moderno Programa de Matemática para os Ginásios, aprovado pela Diretoria do Ensino Secundário, do Ministério de Educação e Cultura, no Curso de Treinamento Básico para Professôres Secundários, realizado em Brasília, de 25 a 30 de novembro de 1963, e *Sugestões para um roteiro de programa para a cadeira de Matemática*, Curso Secundário — 1.º Ciclo — quarto ano ginasial, da Secretaria de Educação de São Paulo, publicadas no *Diário Oficial* de 19/1/1965.

(2) Designação genérica do 1.º Ciclo dos Cursos Médios, compreendendo os Ginásios, os Ginásios Modernos, os Ginásios Experimentais, os Ginásios Vocacionais, os Ginásios Industriais, os Ginásios Comerciais e os Ginásios Pluricurriculares.

Do autor:

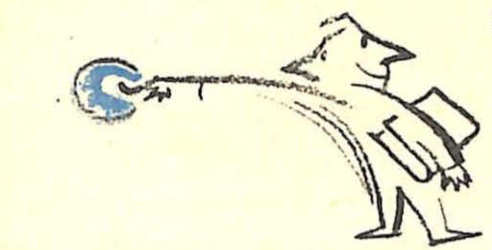
Matemática, 1 — Curso Moderno.
Guia para uso dos *Professôres* (para a *Matemática - 1*).
Matemática, 2 — Curso Moderno.
Guia para uso dos *Professôres* (para a *Matemática - 2*).
Matemática, 3 — Curso Moderno.
Guia para uso dos *Professôres* (para a *Matemática - 3*).
Matemática e Estatística, para os Institutos de Educação e Escolas Normais.
Programa de Admissão — parte da Matemática Moderna — para os ginásios (em colaboração).

EDIÇÕES DA

COMPANHIA EDITORA NACIONAL

Rua dos Gusmões, 639

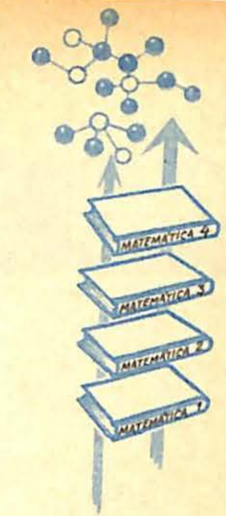
São Paulo 2, SP



índice

Capítulo 1: Números reais: práticas com números irracionais

Capítulo 2: Funções



UMA PALAVRA PARA VOCÊ, QUE VAI TERMINAR O GINÁSIO . . .

Meu caro estudante:

Ao final dêste volume, você ficará de posse dos assuntos de Matemática relativos aos quatro anos de estudos do Ginásio. E não se esqueça: você estará incluído no primeiro grupo de jovens brasileiros que completa o seu curso ginasial conhecendo as belas *estruturas* da *Matemática Moderna*, a exemplo do que já vem ocorrendo nos grandes países civilizados de nossa época.

Neste livro o conceito moderno de *função* é o dominante, participando ativamente da Álgebra e da Geometria. As *equações do segundo grau*, bem como os problemas que envolvem, terão um tratamento atualizado, seguindo a linha já empregada no estudo das equações em outras séries.

Haverá um "introito" à Geometria Analítica, principal responsável pela primeira tentativa da unidade da Matemática, desde o tempo de Descartes. A *semelhança* comanda o estudo da Geometria, iniciado axiomàticamente na 3.ª série. Agora, enfatizará os teoremas de *Tales* e de *Pitágoras*, ressaltando-lhes importantes aplicações.

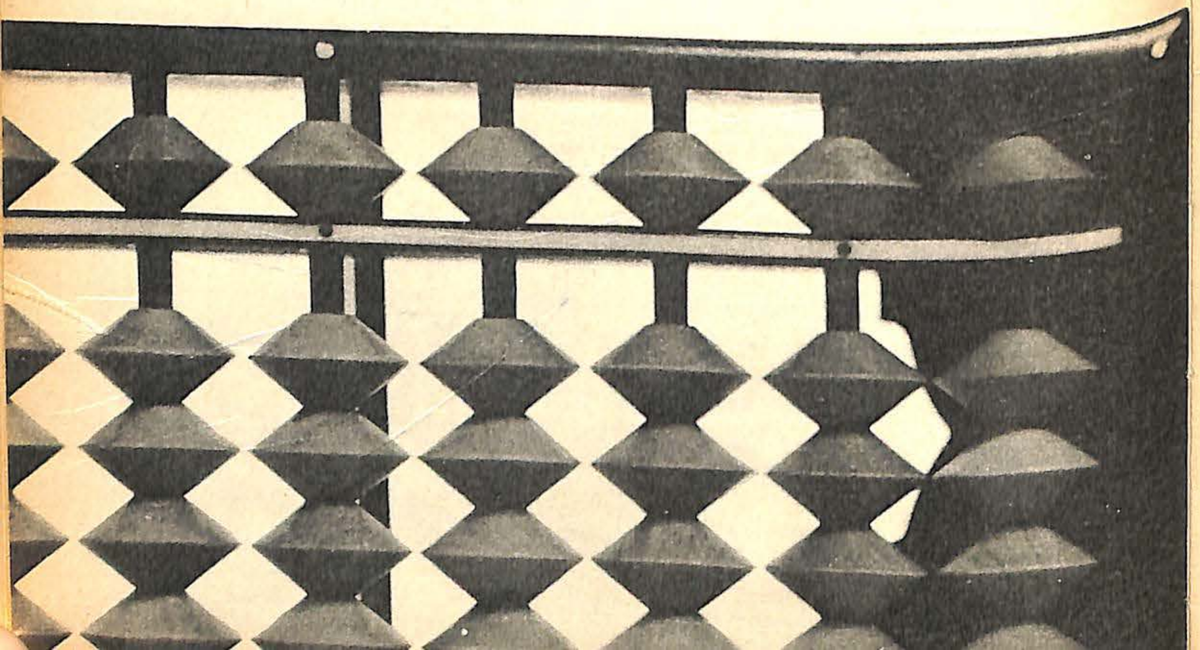
A apresentação das *razões trigonométricas* visa a ensinar as novas técnicas de medir e que são de uso corrente.

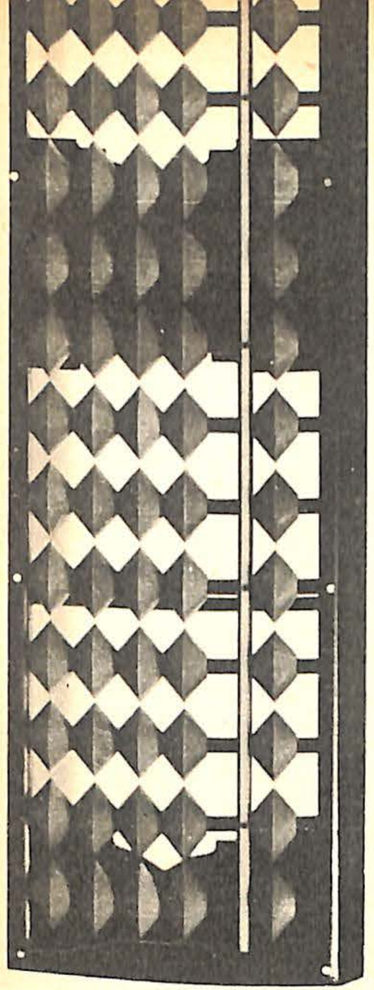
No *Apêndice* figura uma parte que o levará ao mais amplo conjunto de números de todo o curso secundário: *o Conjunto dos Números Complexos*. A outra parte diz respeito ao tratamento axiomático das áreas de regiões planas. Atente, a seguir, para os *Mapas Topológicos*, da América do Sul e do Brasil, que constituem uma dimensão nova para seu estudo da Geografia.

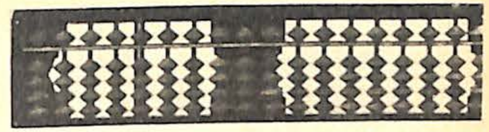
Está, pois, encerrada a coleção de livros didáticos para o Ginásio, destinada à sua formação matemática e humanística, de acôrdo com os anseios renovadores dos atuais homens de Ciência.

Que esta formação o enriqueça sob todos os aspectos e lhe seja útil e agradável para bem conduzi-lo na vida de estudante e cidadão, são os sinceros votos de

OSVALDO SANGIORGI
Rua Macapá, 17 — São Paulo 5, SP







capítulo 1

Números reais:

práticas com números irracionais

1.ª Parte · Técnicas operatórias com números irracionais (radicais)

2.ª Parte · Equações do segundo grau; relações entre os coeficientes e as raízes

3.ª Parte · Equações biquadradas; equações irracionais
· Sistemas simples do segundo grau
· Problemas do segundo grau

1.ª Parte Técnicas operatórias com números irracionais (radicais)

Radicais

1. *Cálculo*

O *cálculo literal*, na terceira série ginasial, foi efetuado no *corpo dos números reais*. Para o estudo das *equações do segundo grau* — a ser feito nesta série — você necessitará de mais algumas técnicas operatórias com os *números irracionais*, quando os numerais que os representam são **radicais.**

Assim, por exemplo: $\sqrt[4]{7}$ é um *número irracional* representado por um **radical** de *índice* 4 e *radicando* 7.

Outros exemplos:

$$\sqrt{2}, \quad \sqrt[5]{\frac{1}{3}}, \quad \sqrt[3]{-7a}, \quad \sqrt{\sqrt{5}}, \quad \sqrt{\pi}$$

NOTA: Não se esqueça de que $\sqrt{2}$ é o mesmo que $\sqrt[2]{2}$.

Por outro lado, *você já sabe* que:

1.º) As operações *radiciação* e *potenciação* são *inversas* uma da outra (desde a 1.ª série ginasial...). Então:

$$\sqrt[4]{7} = \square \iff \square^4 = 7 \text{ ou } (\sqrt[4]{7})^4 = 7$$

isto é: *a potência de um radical com expoente igual ao índice é igual ao radicando.* Outros exemplos:

$$(\sqrt{3})^2 = 3, \quad (\sqrt[3]{8})^3 = 8, \quad \left(\sqrt[5]{\frac{1}{3}}\right)^5 = \frac{1}{3}$$

2.º) Os radicais podem ser representados por uma *potência indicada*, cuja base é um número real não-negativo e de *expoente fracionário* (3.ª série ginasial...). Logo:

$$\sqrt[4]{7^1} = 7^{\frac{1}{4}}$$

Outros exemplos:

$$\sqrt[3]{4^2} = 4^{\frac{2}{3}}, \quad \sqrt{25} = 25^{\frac{1}{2}}, \quad \sqrt[5]{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{5}}$$

2. *Transformação de radicais; aplicações*

A *transformação* de radicais está baseada nas seguintes *propriedades:*

R-1 *O valor de um radical não se altera quando se multiplicam (ou se dividem) o expoente do radicando e o índice por um mesmo número inteiro maior que 0.*

De fato, como: $2^{\frac{3}{4}} = 2^{\frac{3\times 5}{4\times 5}}$ (O valor da fração $\frac{3}{4}$ não se altera quando se multiplicam o numerador e o denominador por 5)

então: $\sqrt[4]{2^3} = \sqrt[4\times 5]{2^{3\times 5}}$

APLICAÇÕES DA **R-1:**

1.ª) *Redução de um radical à expressão mais simples (simplificação):* basta "suprimir" os fatôres comuns ao índice e ao expoente do radicando. Exemplos:

$$\sqrt[20]{2^{15}} = \sqrt[4\times 5]{2^{3\times 5}} = \sqrt[4]{2^3}$$

$\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = \sqrt[1]{2^1} = 2$ (Para generalizar o uso da propriedade R-1, convenciona-se que o radical de índice 1 é o próprio radicando)

(fatorou-se: $16 = 2^4$)

$\sqrt[3]{5^{12}} = \sqrt[1]{5^4} = 5^4$ (Quando o expoente do radicando é divisível pelo índice do radical, basta dividir aquêle por êste, que o radical "desaparece"...)

$\sqrt[10]{32} = \sqrt[10]{2^5} = \sqrt{2}$ (Aqui, já não é possível...)

2.ª) *Redução de radicais ao mesmo índice:* da mesma forma que você reduziu frações ao menor denominador comum, vai agora reduzir radicais ao *menor índice comum*. Para isso, basta determinar o m.m.c. dos índices e, a seguir, dividi-lo pelo índice de cada radical e multiplicar o quociente obtido pelo respectivo expoente do radicando. Exemplo:

Reduzir ao mesmo índice (de preferência ao *menor*) os radicais:

$$\sqrt[3]{2^2},\ \sqrt{8},\ \sqrt[4]{5^3}$$

Disposição prática:

3M2M4 = 12 $\qquad \sqrt[12]{\ \ },\ \sqrt[12]{\ \ },\ \sqrt[12]{\ \ }$

$\qquad \sqrt[12]{2^8},\ \sqrt[12]{8^6},\ \sqrt[12]{5^9}$

3.ª) *Comparação de radicais:* dados dois radicais, é sempre possível saber qual dêles é o de *maior* valor. Se os dois radicais têm o *mesmo índice*, o *maior* é o que tem *maior radicando*. Exemplo:

Qual é o *maior:* $\sqrt[3]{7}$ ou $\sqrt[3]{4}$? Temos que: $\sqrt[3]{7} > \sqrt[3]{4}$

No caso geral, é suficiente reduzir os radicais ao mesmo índice. Exemplos:

1. Qual é o maior: $\sqrt[3]{21}$ ou $\sqrt{8}$?

Reduzindo ao mesmo índice: $\sqrt[6]{21^2},\ \sqrt[6]{8^3}$

ou $\qquad \sqrt[6]{441},\ \sqrt[6]{512}$

Como: $\sqrt[6]{512} > \sqrt[6]{441}$ (caso anterior), então $\sqrt{8} > \sqrt[3]{21}$

2. Escrever em ordem de grandeza *decrescente* os radicais:

$$\sqrt[6]{5},\ \sqrt[3]{9},\ \sqrt[4]{3^2}$$

Temos: $\qquad \sqrt[12]{5^2},\ \sqrt[12]{9^4},\ \sqrt[12]{3^6}$

ou $\qquad \sqrt[12]{25},\ \sqrt[12]{6.561},\ \sqrt[12]{729}$

e, portanto: $\qquad \sqrt[3]{9} > \sqrt[4]{3^2} > \sqrt[6]{5}$

R-2 *O radical de índice inteiro e positivo de um produto indicado (ou quociente indicado) é igual ao produto (ou quociente) dos radicais de mesmo índice dos fatôres do radicando.*

Assim, por exemplo: $\sqrt{7\times 5} = \sqrt{7}\times\sqrt{5}$

De fato:

$$\sqrt{7\times 5} \underset{\text{def.}}{=} (7\times 5)^{\frac{1}{2}} \underset{\text{P3 (pot.)}}{=} 7^{\frac{1}{2}}\times 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}\times\sqrt{5}$$

Também: $\sqrt[3]{\dfrac{2}{5}} = \dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{5}}$

pois: $$\sqrt[3]{\frac{2}{5}} = \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{2^{\frac{1}{3}}}{5^{\frac{1}{3}}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{5}}$$

De um modo geral, se a e b são números racionais não-negativos e $n \geqslant 2$ (inteiro), então:

$$\boxed{\sqrt[n]{a \times b} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}}$$

APLICAÇÕES DE **R-1** E **R-2**: *Simplificação* de radicais. Exemplos: *Simplificar* os seguintes radicais:

1.º) $\sqrt{8}$ Temos: $\sqrt{8} \underset{\text{fat.}}{=} \sqrt{2^3} = \sqrt{2^2 . 2} \underset{\text{R-2}}{=} \sqrt{2^2} . \sqrt{2} \underset{\text{R-1}}{=} 2\sqrt{2}$

Logo: $\boxed{\sqrt{8} = 2\sqrt{2}}$

2.º) $\sqrt[3]{250}$ Temos: $\sqrt[3]{250} \underset{\text{fat.}}{=} \sqrt[3]{2 . 5^3} \underset{\text{R-2}}{=} \sqrt[3]{2} . \sqrt[3]{5^3} \underset{\text{R-1}}{=} \sqrt[3]{2} . 5 = 5\sqrt[3]{2}$

Logo: $\boxed{\sqrt[3]{250} = 5\sqrt[3]{2}}$

3.º) $\sqrt{a^2 . b}$ (a e b, números racionais não-negativos)

Temos: $\sqrt{a^2 . b} \underset{\text{R-2}}{=} \sqrt{a^2} . \sqrt{b} \underset{\text{R-1}}{=} a\sqrt{b}$

Logo: $\boxed{\sqrt{a^2 . b} = a\sqrt{b}}$

4.º) $\sqrt[5]{5^6}$ Temos: $\sqrt[5]{5^6} \underset{\text{fat.}}{=} \sqrt[5]{5^5 . 5} \underset{\text{R-2}}{=} \sqrt[5]{5^5} . \sqrt[5]{5^1} \underset{\text{R-1}}{=} 5\sqrt[5]{5}$

Logo: $\boxed{\sqrt[5]{5^6} = 5\sqrt[5]{5}}$

5.º) $\sqrt[4]{\dfrac{16a^3b^4}{25c^6}}$ (a, b, c, números racionais não-negativos, $c \neq 0$)

Temos:

$$\sqrt[4]{\frac{16a^3b^4}{25c^6}} \underset{\text{R-2}}{=} \frac{\sqrt[4]{16a^3b^4}}{\sqrt[4]{25c^6}} \underset{\text{fat.}}{=} \frac{\sqrt[4]{2^4a^3b^4}}{\sqrt[4]{5^2 . c^4 . c^2}} \underset{\text{R-1}}{=} \frac{2b\sqrt[4]{a^3}}{c\sqrt[4]{5^2c^2}} = \frac{2b\sqrt[4]{a^3}}{c\sqrt{5c}}$$

Logo: $\boxed{\sqrt[4]{\dfrac{16a^3b^4}{25c^6}} = \dfrac{2b\sqrt[4]{a^3}}{c\sqrt{5c}}}$

NOTA: Lembre-se (desde a 3.ª série...) de que:

As raízes expressas por radicais de *índice par e radicando negativo não representam números reais*, isto é, não pertencem ao conjunto $\mathbb{R}$. Assim, por exemplo:

$$\sqrt{-1} \notin \mathbb{R}, \quad \sqrt[4]{-5} \notin \mathbb{R}, \quad \sqrt[6]{-1} \notin \mathbb{R}, \quad \sqrt[4]{-256} \notin \mathbb{R}$$

Porém, as raízes expressas por radicais de *índice ímpar e radicando negativo representam números reais*. Exemplos:

$$\sqrt[3]{-1} \in \mathbb{R} \text{ (pois } \sqrt[3]{-1} = -1 \text{, porque } (-1)^3 = -1); \quad \sqrt[5]{-32} \in \mathbb{R}; \quad \sqrt[3]{-100} \in \mathbb{R}$$

Nestas condições você pode aplicar a **R-2** também na *simplificação* de radicais de *índice ímpar e radicando negativo*. Exemplo:

Simplificar: $\sqrt[3]{-5}$

Temos: $\sqrt[3]{-5} \underset{\text{fat.}}{=} \sqrt[3]{-1 . 5} \underset{\text{R-2}}{=} \sqrt[3]{-1} . \sqrt[3]{5} \underset{\text{R-1}}{=} -1\sqrt[3]{5} = -\sqrt[3]{5}$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 1

1. Preencha as lacunas, a fim de tornar *verdadeira* cada uma das seguintes equivalências:

   1.ª) (Modêlo) $\sqrt[3]{8} = 2 \iff 2^3 = \ldots$ Temos: $\sqrt[3]{8} = 2 \iff 2^3 = 8$

   2.ª) $\sqrt[4]{81} = 3 \iff 3^{\cdots} = 81$

   3.ª) $\sqrt{5} = \square \iff \square^2 = \ldots$

   4.ª) $\sqrt[4]{\frac{1}{2}} = \triangle \iff \ldots^{\cdots} = \frac{1}{2}$

   5.ª) $\sqrt[5]{-1} = -1 \iff (-1)^{\cdots} = \ldots$

   6.ª) $\sqrt[3]{8} = * \iff *^{\cdots} = \ldots$

2. Idem, com as seguintes sentenças:

   1.ª) (Modêlo) $(\sqrt[3]{8})^3 = \ldots$ Temos: $(\sqrt[3]{8})^3 = 8$

   2.ª) $(\sqrt{5})^2 = \ldots$ 3.ª) $\left(\sqrt[4]{\frac{1}{2}}\right)^4 = \ldots$

   4.ª) $(\sqrt[5]{0{,}1})^5 = \ldots$ 5.ª) $(\sqrt{a^2 . b})^2 = \ldots$ ($a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$)

3. Idem, com as seguintes sentenças:

   1.ª) (Modêlo) $\sqrt[3]{4^2} = \ldots$ Temos: $\sqrt[3]{4^2} = 4^{\frac{2}{3}}$

   2.ª) $\sqrt{25} = \ldots$ 3.ª) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \ldots$ 4.ª) $\sqrt[3]{-8} = \ldots$ 5.ª) $\sqrt[3]{2^4} = \ldots$

   6.ª) $2^{\frac{3}{5}} = \ldots$ 7.ª) $4^{\frac{1}{2}} = \ldots$ 8.ª) $32^{\frac{1}{5}} = \ldots$ 9.ª) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{5}} = \ldots$

4. *Simplifique*, aplicando as propriedades **R-1** e **R-2**, os seguintes radicais:

1.º) (Modêlo): $\sqrt[4]{2^6}$ Temos: $\sqrt[4]{2^6} \underset{\text{R-1}}{=} \sqrt{2^3} = \sqrt{2^2 \cdot 2} \underset{\text{R-2}}{=} \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

2.º) $\sqrt[3]{2^6}$ 3.º) $\sqrt{36}$ 4.º) $\sqrt[4]{81}$ 5.º) $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^{12}}$ 6.º) $\sqrt{a^4}$ $(a \geq 0)$

7.º) $\sqrt{121}$ 8.º) $\sqrt[3]{-27}$ 9.º) $\sqrt[4]{3^6}$ 10.º) $\sqrt[6]{a^6}$ 11.º) $\sqrt[3]{a^7}$

5. *Reduza* ao menor índice comum os seguintes grupos de radicais:

1.º) $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[4]{3}$, $\sqrt{5}$ 3.º) $\sqrt[6]{2^3}$, $\sqrt[3]{2^2}$, $\sqrt[4]{3}$

2.º) $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{2^2}$, $\sqrt[5]{2^3}$ 4.º) $\sqrt[8]{3^2}$, $\sqrt[12]{6}$, $\sqrt[10]{2}$

6. Escreva em *ordem de grandeza decrescente* os radicais:

$$\sqrt{4},\quad \sqrt[6]{2^3},\quad \sqrt[3]{4^2}$$

7. Idem, em *ordem de grandeza crescente* os radicais:

$$\sqrt[4]{2^3},\quad \sqrt{12},\quad \sqrt[3]{24}$$

8. Aplicando as propriedades **R-1** e **R-2**, *simplifique* os radicais:

1.º) $\sqrt{32}$	6.º) $\sqrt[3]{2^8}$	11.º) $\sqrt{16a^4b^2}$ $(a \geqslant 0,\ b \geqslant 0)$
2.º) $\sqrt{108}$	7.º) $\sqrt[4]{2^8 \times 3^2}$	12.º) $\sqrt[3]{16a^4b^2}$
3.º) $\sqrt[3]{648}$	8.º) $\sqrt[3]{-8}$	13.º) $\sqrt[4]{\dfrac{2^4a^2b}{c^8}}$ $(a \geqslant 0,\ b \geqslant 0,\ c \geqslant 0)$
4.º) $\sqrt[5]{1.024}$	9.º) $\sqrt[5]{2^{10}}$	14.º) $\sqrt[3]{-6}$
5.º) $\sqrt{144}$	10.º) $\sqrt[3]{3^9 \times 2^4 \times 5^6}$	15.º) $\sqrt{256a^4b^6}$

3. *Operações combinadas com radicais; radicais semelhantes*

I — Adição e Subtração

Observe bem as seguintes sentenças:

$$\sqrt{16} + \sqrt{9} = \sqrt{16 + 9} \text{ é FALSA!}$$

$$\sqrt{16} - \sqrt{9} = \sqrt{16 - 9} \text{ é FALSA!}$$

pois:

$$\sqrt{16} + \sqrt{9} \overset{?}{=} \sqrt{16+9} \qquad \sqrt{16} - \sqrt{9} \overset{?}{=} \sqrt{16-9}$$

$$\underbrace{4 + 3}_{7} \overset{?}{=} \sqrt{25} \qquad \underbrace{4 - 3}_{1} \overset{?}{=} \sqrt{7}$$

$$7 \overset{?}{=} 5 \text{ (falso!)} \qquad 1 \overset{?}{=} \sqrt{7} \text{ (falso!)}$$

ou seja, não se obtém *um radical cujo radicando seja a soma ou diferença dos radicandos de dois radicais dados!*

NOTA: Sòmente se um e/ou outro radical fôr nulo é que se obtém um radical que seja a soma (ou diferença) de dois radicais dados. Exemplo:

$$\sqrt{16} + \sqrt{0} = \sqrt{16 + 0}$$

Então, como se procede para *adicionar* ou *subtrair* radicais? No caso de os radicais não representarem raízes "exatas", as *adições* e *subtrações*, para efeito de cálculo, são efetuadas *sòmente* com uma *certa aproximação* (por falta ou por excesso). Exemplos:

1.º) $\sqrt{2} + \sqrt{3} \simeq 1{,}41 + 1{,}71 \simeq 3{,}12$ (aproximação por falta a menos de 0,01)

2.º) $\sqrt{6} - \sqrt{5} \simeq 2{,}4 - 2{,}2 \simeq 0{,}2$ (aproximação por falta a menos de 0,1)

3.º) $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$ (. . . sem aproximação!)

4.º) $\sqrt[3]{8} - \sqrt{2} \simeq 2{,}00 - 1{,}41 \simeq 0{,}59$ (aproximação por falta a menos de 0,01)

No caso especial de se operar com radicais *iguais*, como por exemplo na adição de:

$$\sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2}$$

você pode usar um *numeral mais simples* para representar essa *soma:* $3\sqrt{2}$

De fato:

$$\sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} = 1\sqrt{2} + 1\sqrt{2} + 1\sqrt{2} = (1 + 1 + 1)\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

Do mesmo modo: $\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$, pois:

$$\sqrt{2} - \sqrt{2} = 1\sqrt{2} - 1\sqrt{2} = (1 - 1)\sqrt{2} = 0\sqrt{2} = 0$$

Radicais, como:

$$3\sqrt{2},\ -5\sqrt{2},\ \frac{1}{2}\sqrt{2},\ \ldots$$

que possuem o *mesmo índice* e *mesmo radicando*, são denominados **radicais semelhantes.**

Os exemplos seguintes mostram algumas *reduções* com *radicais semelhantes:*

1.º) Efetuar: $4\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 5\sqrt{2}$

Temos: $4\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = (4 + 3 - 5)\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

2.º) Efetuar: $8\sqrt[3]{5} + 2\sqrt[3]{5}$

Temos: $8\sqrt[3]{5} + 2\sqrt[3]{5} = (8 + 2)\sqrt[3]{5} = 10\sqrt[3]{5}$

Algumas vêzes os radicais não aparentam ser semelhantes. É necessário então aplicar a **R-1** e a **R-2**, para que a semelhança "apareça", caso exista. Exemplos:

1.º) Efetuar: $\sqrt{50} + \sqrt{98} - \sqrt{32} + \sqrt{2}$

Aparentemente êsses radicais não parecem *semelhantes;* todavia, aplicando a **R-1** e a **R-2**, obtém-se:

$$\begin{aligned} \sqrt{50} + \sqrt{98} - \sqrt{32} + \sqrt{2} &= \sqrt{2 \times 5^2} + \sqrt{2 \times 7^2} - \sqrt{2^5} + \sqrt{2} = \\ &= 5\sqrt{2} + 7\sqrt{2} - 2^2\sqrt{2} + \sqrt{2} = \\ &= 5\sqrt{2} + 7\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + \sqrt{2} = \\ &= (5 + 7 - 4 + 1)\sqrt{2} = 9\sqrt{2} \end{aligned}$$

Logo: $9\sqrt{2}$ é o *numeral mais simples* para representar a expressão:

$$\sqrt{50} + \sqrt{98} - \sqrt{32} + \sqrt{2}$$

2.º) Efetuar: $\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{5}{27}} + \frac{1}{9}\sqrt[3]{625}$

Temos: $$\begin{aligned} \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{5}{27}} + \frac{1}{9}\sqrt[3]{625} &= \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{5}{3^3}} + \frac{1}{9}\sqrt[3]{5^4} = \\ &= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\sqrt[3]{5} + \frac{1}{9}\cdot 5\sqrt[3]{5} = \\ &= \frac{2}{9}\sqrt[3]{5} + \frac{5}{9}\sqrt[3]{5} = \left(\frac{2}{9} + \frac{5}{9}\right)\sqrt[3]{5} = \frac{7}{9}\sqrt[3]{5} \end{aligned}$$

LEMBRETE AMIGO

Assim como, operando com as *frações:*

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{5} \neq \frac{3+2}{4+5}$$

você **não somava numeradores entre si nem denominadores entre si. . .**, também, operando com *radicais:*

$$\sqrt{9} + \sqrt{16} \neq \sqrt{9 + 16}$$

você **não soma os radicandos!**

TESTE DE ATENÇÃO — Grupo 2

Escreva *V* ao lado das sentenças *verdadeiras* e *F* ao lado das *falsas:*

1.ª) $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5}$

2.ª) $\sqrt{2} + \sqrt{3} = 1{,}4 + 1{,}7 = 3{,}1$ (aproximação por falta de 0,1)

3.ª) $\sqrt{9} + \sqrt{16} \neq \sqrt{9 + 16}$

4.ª) $\sqrt{3} + \sqrt{3} = \sqrt{6}$

5.ª) $\sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

6.ª) $\sqrt{6} - \sqrt{5} = \sqrt{1}$

7.ª) $\sqrt{6} - \sqrt{5} = 2{,}4 - 2{,}2 = 0{,}2$ (aproximação por falta de 0,1)

8.ª) $\sqrt[4]{10} - \sqrt[3]{10} = 0$

9.ª) $\sqrt[3]{10} - \sqrt[3]{10} \neq 0$

10.ª) $2\sqrt[5]{\frac{1}{3}} + \sqrt[5]{\frac{1}{3}} = 3\sqrt[5]{\frac{1}{3}}$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — Grupo 3

Calcule o *numeral mais simples* das seguintes expressões:

1.ª) $8\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + \sqrt{2}$

2.ª) $4\sqrt[3]{5} + {}^{-}2\sqrt[3]{5} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{5} + {}^{-}3\sqrt[3]{5}$

3.ª) $2\sqrt[5]{3} - 4\sqrt[5]{3}$

4.ª) $\sqrt{48} + \sqrt{75} - \sqrt{12}$

5.ª) $2\sqrt{18} - 5\sqrt{50} + 3\sqrt{98} - \sqrt{72} + \sqrt{8}$

6.ª) $\sqrt[3]{320} - \sqrt[3]{135} + \sqrt[3]{625}$

7.ª) $\sqrt{5} + \sqrt{20} + \sqrt{125} + \sqrt{1.445}$

8.ª) $\sqrt{243} + \sqrt{3} + \sqrt{75} + \sqrt{192} + \sqrt{507}$

9.ª) $7\sqrt{50} + 9\sqrt{98} + 3\sqrt{8} - 6\sqrt{162} + 2\sqrt{32} + 7\sqrt{242}$

10.ª) $\sqrt{\frac{18}{25}} + \sqrt{32} - \sqrt{\frac{8}{9}}$

11.ª) $\frac{1}{5}\sqrt[3]{\frac{16}{27}} - \frac{5}{2}\sqrt[3]{54} + 3\sqrt[3]{\frac{2}{125}}$

12.ª) $2\sqrt{9a} - \sqrt{4a} + \sqrt{625a} \quad (a > 0)$

II — Multiplicação e Divisão

Como aplicação imediata da propriedade **R-2,** o *produto* (ou o *quociente*) de radicais de *mesmo índice* é calculado fàcilmente. Exemplos:

1.º) $\sqrt{16} \times \sqrt{9} = \sqrt{16 \times 9} = \sqrt{144}$

2.º) $\sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{5 \times 4} = \sqrt[3]{20}$

3.º) $\sqrt[3]{27} : \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{27 : 8} = \sqrt[3]{\frac{27}{8}}$

4.º) $\sqrt[4]{2a^2b} \times \sqrt[4]{3a^2b} = \sqrt[4]{2a^2b \times 3a^2b} = \sqrt[4]{6a^4b^2}$ $(a \geqslant 0,\ b \geqslant 0)$

Quando os radicais *não têm* o mesmo índice, procura-se primeiramente reduzi-los ao mesmo índice, e o cálculo segue naturalmente. Exemplos:

1.º) Efetuar: $\sqrt[4]{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt[3]{5}$

Temos: $\sqrt[4]{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt[3]{5} = \sqrt[12]{2^3} \times \sqrt[12]{3^6} \times \sqrt[12]{5^4} = \sqrt[12]{2^3 \times 3^6 \times 5^4}$

2.º) Efetuar: $\sqrt[5]{3} : \sqrt[3]{2}$

Temos: $\sqrt[5]{3} : \sqrt[3]{2} = \sqrt[15]{3^3} : \sqrt[15]{2^5} = \sqrt[15]{\frac{3^3}{2^5}}$

III — Potenciação e Radiciação

Para *se elevar* um radical a *uma potência*, basta *elevar* o *radicando* a *essa potência*. Exemplos:

1.º) $(\sqrt[4]{5})^3 = \sqrt[4]{5^3}$

De fato: $(\sqrt[4]{5})^3 \underset{\text{def. pot.}}{=} \sqrt[4]{5} \times \sqrt[4]{5} \times \sqrt[4]{5} \underset{\text{R-2}}{=} \sqrt[4]{5 \times 5 \times 5} = \sqrt[4]{5^3}$

2.º) $(\sqrt[3]{2a^2b})^4 = \sqrt[3]{(2a^2b)^4}$ $\qquad (a \geqslant 0,\ b \geqslant 0)$

NOTA: Simplificando o resultado: $\sqrt[3]{(2a^2b)^4} = \sqrt[3]{(2a^2b)^3 \cdot (2a^2b)} = 2a^2b\sqrt[3]{2a^2b}$

A *raiz* de *um radical* é um nôvo radical cujo *índice* é o *produto dos índices*. Exemplos:

1.º) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[4 \times 3]{2} = \sqrt[12]{2}$

De fato: $\sqrt[4]{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[4]{2^{\frac{1}{3}}} = \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{2}$

2.º) $\sqrt{\sqrt{5}} = \sqrt[4]{5}$

3.º) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt{18}}} = \sqrt[30]{18}$

4.º) $\sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{a^2}}} = \sqrt[12]{a^2}$

NOTA: No caso de $\sqrt{3\sqrt{2}}$, temos: $\sqrt{3\sqrt{2}} = \sqrt{\sqrt{3^2 \times 2}} = \sqrt[4]{3^2 \times 2}$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — Grupo 4

1. Efetue as seguintes operações indicadas:

1.ª) $\sqrt{5} \times \sqrt{3}$

2.ª) $\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \times \sqrt[3]{10} \times \sqrt[3]{9}$

3.ª) $\sqrt[4]{2} \times \sqrt[4]{3} \times \sqrt[4]{4} \times \sqrt[4]{1}$

4.ª) $\sqrt[5]{12} \times \sqrt[5]{\frac{1}{12}}$

5.ª) $\sqrt{3} \times \sqrt[3]{2^2}$

6.ª) $\sqrt[3]{2} \times \sqrt{5} \times \sqrt[4]{3^2}$

7.ª) $\sqrt[3]{4} \times 4\sqrt{5} \times 2\sqrt[4]{2}$

8.ª) $\sqrt{a} \times \sqrt[3]{a^2} \times \sqrt[4]{a^3}$ $(a > 0)$

9.ª) $\frac{2}{5}\sqrt[5]{3} \times \sqrt[4]{\frac{1}{2}} \times 4\sqrt{2}$

10.ª) $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^2} \times 3\sqrt[4]{2^2} \times \frac{1}{3}\sqrt[12]{2^2}$

11.ª) $\sqrt{8} : \sqrt{4}$

12.ª) $\sqrt[3]{8} : \sqrt[4]{16}$

13.ª) $\sqrt[4]{2} : \sqrt{8}$

14.ª) $\sqrt[5]{3^2} : \sqrt[4]{2^2}$

15.ª) $\sqrt{12} : \sqrt[3]{4}$

16.ª) $\sqrt{\frac{3}{8}} : \sqrt[3]{2}$

17.ª) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{5^2} : \frac{2}{3}\sqrt{3}$

18.ª) $\frac{2}{5}\sqrt[4]{18} : \frac{5}{2}\sqrt{6}$

19.ª) $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{2}} : \sqrt[3]{2^2}$

20.ª) $6\sqrt[3]{a^2} : 3\sqrt{a}$ $(a \geqslant 0)$

2. Efetue as operações indicadas, simplificando os resultados quando possível:

1.ª) $(\sqrt{5})^2$ 2.ª) $\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)^3$ 3.ª) $(\sqrt[4]{3})^5$ 4.ª) $(\sqrt{2^2 \times 5})^3$

5.ª) $(2\sqrt[3]{2^2 \times 3})^2$ 6.ª) $\left(\frac{1}{3}\sqrt[4]{2^3 \times 3^2}\right)^2$ 7.ª) $(\sqrt[3]{2a^2b})^2$ 8.ª) $(3a\sqrt{3ab})^3$ $(a \geqslant 0, b \geqslant 0)$

3. Idem:

1.ª) $\sqrt{\sqrt{4}}$ 2.ª) $\sqrt{\sqrt[3]{2}}$ 3.ª) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{3}}$ 4.ª) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}}}$

5.ª) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}}$ 6.ª) $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[4]{\sqrt[5]{32}}}}$ 7.ª) $\sqrt{2\sqrt{3}}$ 8.ª) $\sqrt{3\sqrt{a}}$ $(a \geqslant 0)$

4. Verifique que é *verdadeiro* o conjunto das seguintes igualdades:

$$\sqrt{4} = \sqrt{2 + \sqrt{4}} = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{4}}} = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{4}}}}$$

4. *Casos simples de racionalização*

Dado um número real, por meio de uma fração que contém um ou mais radicais (sem raiz exata) no seu denominador, como por exemplo:

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

chama-se **racionalização** ao processo de se determinar um nôvo numeral para o mesmo número real, que *não contenha radicais no denominador*.

A *racionalização* é mais uma vantagem para o *cálculo*, como mostrarão os exemplos estudados a seguir:

1.º) *Racionalizar* a fração: $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

Como o denominador é uma *raiz quadrada* constituída sòmente por *um radical* de índice dois ($\sqrt{3}$), basta *multiplicar ambos os têrmos da fração por* $\sqrt{3}$:

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}.\sqrt{3}}{\sqrt{3}.\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3^2}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

e a fração está *racionalizada*.

OBSERVAÇÃO: O *cálculo* de $\frac{\sqrt{6}}{3}$ (isto é, da fração $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ *racionalizada*) com aproximação por falta de 0,01, isto é:

$$\frac{\sqrt{6}}{3}\cong\frac{2,45}{3}\cong 0,80$$

é muito mais preciso e menos trabalhoso que o cálculo da fração original $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ onde, com a mesma aproximação, seria:

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cong\frac{1,41}{1,73}\cong\dots$$

OUTROS EXEMPLOS:

1) $\frac{5}{\sqrt{2}}=\frac{5.\sqrt{2}}{\sqrt{2}.\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$ (basta multiplicar ambos os têrmos da fração por $\sqrt{2}$)

2) $\frac{3a}{2\sqrt{a}}=\frac{3a.\sqrt{a}}{2\sqrt{a}.\sqrt{a}}=\frac{3\cancel{a}\sqrt{a}}{2\cancel{a}}=\frac{3}{2}\sqrt{a}$ (... idem por $\sqrt{a}$)
($a > 0$)

2.º) *Racionalizar* a fração: $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

Nesse caso, sendo o denominador uma *raiz cúbica*, é necessário multiplicar ambos os têrmos por $\sqrt[3]{2^2}$, a fim de obter para denominador: $\sqrt[3]{2^3}=2$. Observe que $\sqrt[3]{2^2}$ tem o expoente (2) do radicando como a *diferença* entre o índice (3) e o expoente (1) do radicando dado: ($\sqrt[3]{2^1}$)

Logo: $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}=\frac{1.\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{2^2}}=\frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^3}}=\frac{\sqrt[3]{2^2}}{2}$

OUTROS EXEMPLOS:

1) $\frac{6}{\sqrt[5]{3^2}}=\frac{6.\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^2}.\sqrt[5]{3^3}}$ (Multiplicaram-se ambos os têrmos da fração por $\sqrt[5]{3^3}$, porque agora a *diferença* entre o índice (5) e o expoente (2) do radicando é 3)

Logo: $\frac{6}{\sqrt[5]{3^2}}=\frac{6.\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^2}.\sqrt[5]{3^3}}=\frac{6.\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^5}}=\frac{\cancel{6}.\sqrt[5]{3^3}}{\cancel{3}}=2\sqrt[5]{3^3}$

2) $\frac{2a}{5\sqrt[7]{a^6}}=\frac{2a.\sqrt[7]{a^1}}{5\sqrt[7]{a^6}.\sqrt[7]{a^1}}=\frac{2a.\sqrt[7]{a}}{5\sqrt[7]{a^7}}=\frac{2\cancel{a}.\sqrt[7]{a}}{5\cancel{a}}=\frac{2\sqrt[7]{a}}{5}$ (... idem por $\sqrt[7]{a^1}$)
($a>0$)

3.º) *Racionalizar* a fração: $\frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$

Agora a fração tem para denominador uma *soma* (poderia ser uma *diferença*) de *dois radicais de índice dois*. Nesse caso a *racionalização* da fração é obtida multiplicando-se ambos os têrmos pela expressão: $\sqrt{6}-\sqrt{2}$, também denominada *conjugada* da expressão $\sqrt{6}+\sqrt{2}$. Então:

$$\frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{4(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}$$

Você já sabe que o *produto da soma indicada pela diferença indicada* de *dois números* é igual ao *quadrado do primeiro número menos o quadrado do segundo número*, e portanto:

$$\frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{4(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}=\frac{4(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{(\sqrt{6})^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{4(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{6-2}=$$

$$=\frac{\cancel{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{\cancel{4}}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$$

OUTROS EXEMPLOS:

1) *Racionalizar:* $\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$. A expressão *conjugada* de $\sqrt{7}-\sqrt{3}$ é $\sqrt{7}+\sqrt{3}$

Logo: $$\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} = \frac{1\,(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{(\sqrt{7}-\sqrt{3})\,(\sqrt{7}+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{3})^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{7-3} = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{4}$$

2) *Racionalizar:* $\dfrac{2}{\sqrt{5}-4}$. A expressão *conjugada* de $\sqrt{5}-4$ é $\sqrt{5}+4$

Logo: $$\frac{2}{\sqrt{5}-4} = \frac{2\,(\sqrt{5}+4)}{(\sqrt{5}-4)\,(\sqrt{5}+4)} = \frac{2\,(\sqrt{5}+4)}{(\sqrt{5})^2-(4)^2} = \frac{2\,(\sqrt{5}+4)}{5-16} =$$

$$= \frac{^-2}{11}\,(\sqrt{5}+4)$$

3) *Racionalizar:* $\dfrac{3ab}{2\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ $(a>0,\ b>0)$. A expressão *conjugada* de $2\sqrt{a}+\sqrt{b}$ é $2\sqrt{a}-\sqrt{b}$

Logo: $$\frac{3ab}{2\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{3ab\,(2\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(2\sqrt{a}+\sqrt{b})\,(2\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \frac{3ab\,(2\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(2\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2} =$$

$$= \frac{3ab\,(2\sqrt{a}-\sqrt{b})}{4a-b} \quad \left(a \neq \frac{b}{4}\right)$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 5

Racionalize as seguintes frações:

1.ª) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 2.ª) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$ 3.ª) $\dfrac{2}{3\sqrt{5}}$ 4.ª) $\dfrac{\sqrt{8}}{5\sqrt{6}}$ 5.ª) $\dfrac{^-3}{2\sqrt{3}}$ 6.ª) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{2}}$ 7.ª) $\dfrac{5}{\sqrt[5]{3^2}}$

8.ª) $\dfrac{4}{3\sqrt[7]{5^2}}$ 9.ª) $\dfrac{\sqrt{2}}{5\sqrt[8]{2^6}}$ 10.ª) $\dfrac{^-3a}{4\sqrt[6]{a^5}}$ $(a \geqslant 0)$ 11.ª) $\dfrac{8}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ 12.ª) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

13.ª) $\dfrac{1}{3\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ 14.ª) $\dfrac{2}{2\sqrt{5}-1}$ 15.ª) $\dfrac{5\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}$ 16.ª) $\dfrac{12}{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}$ 17.ª) $\dfrac{10}{5\sqrt{3}-2\sqrt{5}}$

18.ª) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $(a \geqslant 0, b \geqslant 0)$ 19.ª) $\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ 20.ª) $\dfrac{3ab}{5\sqrt{a}+3\sqrt{b}}$

2.ª Parte • Equações do segundo grau; relações entre os coeficientes e as raízes

Equações do segundo grau

1. *Definição*

Equação do *segundo grau* na variável x é tôda *sentença aberta* da forma:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

onde a, b e c representam *números reais*, com a condição de a ser diferente de 0. Exemplo:

$$5x^2 + 8x + {}^-4 = 0$$
$$\text{ou } 5x^2 + 8x - 4 = 0$$

é uma *equação do segundo grau* na variável x, onde $a = 5$, $b = 8$ e $c = {}^-4$.

Observe que o *maior expoente* com que figura x nessa equação é 2. Êsse fato lembra o *grau* da equação que está sendo estudada: *segundo grau.*

Abreviadamente, você já pode escrever:

[eq. 2.º grau] $\iff$ $[ax^2 + bx + c = 0,\ \forall a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0]$

Diz-se também que na equação:

$ax^2 + bx + c = 0$
- a é o *coeficiente* de x^2
- b é o *coeficiente* de x
- c é o *têrmo constante* ou *independente*

Por que o coeficiente a de x^2 deve ser necessàriamente *diferente de 0*?

Ora, se $a = 0$, então você teria:

$$0.x^2 + bx + c = 0 \text{ ou } bx^1 + c = 0$$

que é uma *equação do primeiro grau* na variável x, se $b \neq 0$ (lembre-se de que o *maior* expoente de x agora é 1). As equações do primeiro grau você já sabe resolvê-las desde a 2.ª série ginasial; por isso sabe que $\forall b$, c e $b \neq 0$:

$$bx + c = 0 \iff bx = {}^-c \iff x = \frac{{}^-c}{b}$$

onde $V = \left\{\frac{{}^-c}{b}\right\}$ e, portanto, a raiz da equação é o número real: $\frac{{}^-c}{b}$.

Nos exemplos seguintes serão destacados a *variável* e os *coeficientes* (inclusive o têrmo constante) de algumas *equações do segundo grau*. Procure guardar bem êsses resultados:

1.º) $x^2 - 5x + 6 = 0$ — variável: x; coeficientes: $a = 1$, $b = {}^-5$, $c = 6$

2.º) $2y^2 - 9y + \sqrt{2} = 0$ — variável: y; coeficientes: $a = 2$, $b = {}^-9$, $c = \sqrt{2}$

3.º) $3x^2 - 27 = 0$ *o mesmo que:* $3x^2 + 0.x - 27 = 0$

variável: x; coeficientes: $a = 3$, $b = 0$, $c = {}^-27$

4.º) ${}^-4z^2 + z = 0$ *o mesmo que:* ${}^-4z^2 + 1z + 0 = 0$

variável: z; coeficientes: $a = {}^-4$, $b = 1$, $c = 0$

5.º) $8x^2 = 0$ *o mesmo que:* $8x^2 + 0.x + 0 = 0$

variável: x; coeficientes: $a = 8$, $b = 0$, $c = 0$

6.º) $\frac{t^2}{3} - \sqrt{5}.t = 0$ *o mesmo que:* $\frac{1}{3}t^2 - \sqrt{5}.t + 0 = 0$

variável: t; coeficientes: $a = \frac{1}{3}$, $b = -\sqrt{5}$, $c = 0$

7.º) $px^2 - 2mx + n = 0 \quad (p \neq 0)$

variável: x; coeficientes: $a = p$, $b = {}^-2m$, $c = n$

Observações:

1.ª) As equações do segundo grau que possuem os coeficientes $b=0$ (como nos exemplos 3.º e 5.º) ou $c=0$ (exemplos 4.º, 5.º e 6.º) ou ainda b e c iguais a 0 (exemplo 5.º) são também denominadas **equações incompletas** do segundo grau, pois falta o têrmo do *primeiro grau* ou o *têrmo constante* ou *ambos*.

2.ª) As equações do segundo grau que apresentam *letras* como coeficientes (exemplo 7.º) são também denominadas **equações literais do segundo grau.**

TESTE DE ATENÇÃO — Grupo 6

1. Destaque a *variável* e os *coeficientes* de cada uma das seguintes equações do segundo grau:

1.ª) $2x^2 - 8x + 3 = 0$	7.ª) $5y^2 - \frac{3}{4}y + 0 = 0$
2.ª) ${}^-x^2 + x - 1 = 0$	8.ª) $u^2 - u = 0$
3.ª) $\frac{1}{3}y^2 + 2\sqrt{3}.y = 0$	9.ª) $\sqrt{5}.t^2 = 0$
4.ª) $z^2 = 0$	10.ª) $\frac{-2}{3}y^2 + 0,4y - 2\sqrt[4]{3} = 0$
5.ª) $\frac{x^2}{5} - 1 = 0$	11.ª) ${}^-5x^2 + \frac{x}{2} + 6 = 0$
6.ª) $x^2 + (a + b)x - ab = 0$ (x, variável) ($a \neq {}^-b$, $a \neq 0$, $b \neq 0$)	12.ª) $my^2 - (m - n)y + mn = 0$ (y, variável) ($m \neq 0$, $n \neq 0$, $m \neq n$)

2. Assinale com (i) ou (l), respectivamente, as equações do segundo grau do Exercício 1 que sejam *incompletas* ou *literais*.

3. Assinale quais das seguintes sentenças matemáticas não representam equações do segundo grau, na variável x:

1.ª) $3x^2 + 5x = 0$	5.ª) $0x^3 + 5x^2 - 3x + 1 = 0$
2.ª) $0x^2 - 5x + \sqrt{6} = 0$	6.ª) $0x^2 = 0$
3.ª) $5x^4 + 3x^2 - 5 = 0$	7.ª) $ax^2 + bx + c = 0$ $(a = 0)$
4.ª) $8x^2 = 0$	8.ª) $4x^3 - x = 0$

2. *Como resolver uma equação do segundo grau*

Você já sabe que resolver uma equação é determinar o seu *Conjunto-Verdade.* Logo, uma *raiz* ou *solução* da equação do segundo grau: $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$, é qualquer elemento do *Conjunto-Verdade* dessa equação.

Como determinar tal *Conjunto-Verdade?*

Você vai "descobrir" os elementos dêsse conjunto, "explorando" por enquanto a resolução de equações do segundo grau que possuam o coeficiente $a = 1$, como por exemplo a equação:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Vamos "adiantar" que o Conjunto-Verdade dessa equação é constituído pelos elementos 2 e 3, isto é:

$$V = \{2, 3\}$$

É fácil verificar que 2 e 3 são as *raízes* da equação:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

pois, substituindo x por êsses valôres, obtém-se, respectivamente:

$$\text{raiz } 2 \Longrightarrow 2^2 - 5(2) + 6 \overset{?}{=} 0 \qquad 4 - 10 + 6 \overset{?}{=} 0 \qquad ^-6 + 6 \overset{?}{=} 0 \qquad 0 = 0\ (V)$$

$$\text{raiz } 3 \Longrightarrow 3^2 - 5(3) + 6 \overset{?}{=} 0 \qquad 9 - 15 + 6 \overset{?}{=} 0 \qquad ^-6 + 6 \overset{?}{=} 0 \qquad 0 = 0\ (V)$$

Então a equação:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

tem por *raízes* os números 2 e 3. ATENÇÃO, pois vamos agora relacionar as *raízes* 2 e 3 com o *coeficiente* 5 e o *têrmo constante* 6 da equação. Observe que estas raízes são tais que:

1.º) a *soma* $(2+3=5)$ nada mais é que o *oposto* do coeficiente de $x(b = {}^-5)$;

2.º) o *produto* $(2 \times 3 = 6)$ é precisamente o *têrmo constante* c da equação $(c = 6)$, isto é:

$$\boxed{x^2 - \underbrace{5x}_{(2+3)} + \underbrace{6}_{(2\times 3)} = 0}$$

Quais são, então, as raízes da equação:

$$x^2 - 7x + 12 = 0\ ?$$

Basta procurar dois números cujo *produto* seja 12 e cuja *soma* seja 7.

Para isso, fatora-se o 12 como produto de dois números:

1 e 12   2 e 6   3 e 4

Os únicos, entre êsses números, que, adicionados, dão por soma 7 são 3 e 4, isto é:

$$x^2 - \underbrace{7x}_{(3+4)} + \underbrace{12}_{(3\times 4)} = 0$$

Logo: $V = \{3, 4\}$ e as *raízes* da equação são os números 3 e 4.

TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 7

1. Determine o Conjunto-Verdade de cada uma das seguintes equações do segundo grau:

1.ª)	$x^2 - 6x + 8 = 0$	$V = \{2, --\}$
2.ª)	$x^2 - 6x + 9 = 0$	$V = \{--, 3\}$
3.ª)	$x^2 - 6x + 5 = 0$	$V = \{--, --\}$
4.ª)	$x^2 - 7x + 10 = 0$	$V = \{--, --\}$
5.ª)	$x^2 - 15x + 56 = 0$	$V = \{7, --\}$
6.ª)	$x^2 - 4x + 0 = 0$	$V = \{0, --\}$
7.ª)	$x^2 - 5x + 0 = 0$	$V = \{--, --\}$
8.ª)	$x^2 - 20x + 100 = 0$	$V = \{--, --\}$
9.ª)	$x^2 - (a+b)x + ab = 0$	$V = \{a, --\}$
10.ª)	$x^2 - (m+n)x + mn = 0$	$V = \{--, --\}$

2. Você já resolveu muitas equações incompletas do segundo grau, no Conjunto $\mathbb{R}$, desde a 3.ª série ginasial(*). Eram equações da forma:

$$x^2 = 16$$

cujo Conjunto-Verdade $V = \{^-4, 4\}$ é facilmente determinado, pois tanto $^-4$ como 4 satisfazem à equação. Verifique.

Determine agora o Conjunto-Verdade de cada uma das seguintes equações:

1.ª)	$x^2 = 25$	$V = \{^-5, --\}$
2.ª)	$x^2 = 1$	$V = \{--, --\}$
3.ª)	$x^2 = 0$	$V = \{0, --\}$
4.ª)	$x^2 = 8$	$V = \{--, 2\sqrt{2}\}$
5.ª)	$x^2 = 9$	$V = \{--, --\}$

(*) *Matemática, 3* — Curso Moderno, pág. 31.

6.ª) $x^2 = 10$ $\quad V = \{-\sqrt{10}, \ldots\}$
7.ª) $x^2 = 20$ $\quad V = \{\ldots, \ldots\}$
8.ª) $x^2 = a^2$ $\quad V = \{-a, \ldots\}$
9.ª) $x^2 = a \quad (a > 0)$ $\quad V = \{\ldots, \sqrt{a}\}$
10.ª) $x^2 = \frac{1}{16}$ $\quad V = \{\ldots, \ldots\}$

3. Lembre-se de que no Conjunto $\mathbb{R}$ a equação do segundo grau:

$$x^2 = -4$$

não tem solução, isto é, o seu Conjunto-Verdade é *vazio,* porque *não existe* em $\mathbb{R}$ número algum cujo quadrado dê como resultado um *número negativo!*

Logo: se $x^2 = -4$, então $V = \varnothing$

Dê você, agora, o Conjunto-Verdade de cada uma das seguintes equações do segundo grau:

1.ª) $x^2 = -1$
2.ª) $x^2 = 1$
3.ª) $2x^2 = -8$
4.ª) $2x^2 = 8$

3. *Resolução de uma equação completa do segundo grau; fórmula resolutiva*

Seja a equação *completa* do segundo grau, na variável x:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \text{com } a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0$$

A determinação de seu *Conjunto-Verdade* em $\mathbb{R}$ é feita por intermédio de equações que lhe sejam *equivalentes* e de *soluções simples,* como será visto a seguir.

A obtenção das equações equivalentes à equação: $ax^2 + bx + c = 0$, é conseguida, inicialmente, transformando o seu primeiro membro numa expressão *fatorável* que seja o *quadrado* de um binômio, na variável x. Para isso:

1.º) multipliquemos ambos os membros da equação por $4a$:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

2.º) transportemos o têrmo $4ac$ do primeiro para o segundo membro:

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

3.º) adicionemos b^2 a ambos os membros:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

Ora, o primeiro membro dessa equação é o *quadrado* de $2ax + b$, isto é:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

e supondo $b^2 - 4ac \geqslant 0$, é possível extrair-se a *raiz quadrada* dos dois membros:

$$2ax + b = \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\,(*)$$

Logo, já conseguimos a *equivalência:*

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff 2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

Por outro lado (preste atenção agora!), temos que:

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac} \iff$$
$$\iff 2ax + b = +\sqrt{b^2 - 4ac} \quad \text{ou} \quad 2ax + b = -\sqrt{b^2 - 4ac} \iff$$
$$\iff 2ax = -b + \sqrt{b^2 - 4ac} \quad \text{ou} \quad 2ax = -b - \sqrt{b^2 - 4ac} \iff$$
$$\iff x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Portanto, $\forall a, b, c$ e $a \neq 0$:

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ ou } x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

e chegamos a estabelecer as *equações mais simples possíveis, equivalentes* à equação: $ax^2 + bx + c = 0$, cujo Conjunto-Verdade é dado, de imediato, por:

$$V = \left\{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},\ \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right\}$$

Desta forma as *raízes* da equação do segundo grau:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

são os *números reais:* $\dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ e $\dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

As *equações equivalentes* a $ax^2 + bx + c = 0$, ora deduzidas, são geralmente indicadas do *modo único:*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(*) Desde a 2.ª série, você deve saber que: uma sentença *aberta* composta de duas sentenças simples ligadas pelo conectivo *ou* é *verdadeira* se qualquer uma das sentenças simples é verdadeira.
(Exemplo: $x = \pm 5 \iff x = +5$ ou $x = -5$.)

atribuindo-se à expressão: $\boxed{\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$ o nome de *fórmula resolutiva* da equação do segundo grau. Observe que na *fórmula resolutiva* não figura a variável x, que participa sòmente da *equação* (que é sempre uma sentença aberta!).

O $b^2 - 4ac$, geralmente indicado por Δ (letra grega maiúscula, *delta*), isto é:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

é denominado *discriminante* da equação do segundo grau e desempenha papel importantíssimo no estudo dessas equações.

Observação: Se $b^2 - 4ac < 0$, a sentença:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

equivalente a: $ax^2 + bx + c = 0$, tem o seu *Conjunto-Verdade* ***vazio***, isto é:

$$V = \varnothing$$

pois nenhum número real elevado ao quadrado pode ser igual a um número negativo!

Exemplos práticos: As seguintes *equações do segundo grau* serão resolvidas no Conjunto-Universo $\mathbb{R}$.

1.ª) $2x^2 - 9x - 5 = 0$

Temos: $a = 2$, $b = -9$, $c = -5$

Aplicando a *fórmula:*

$$\boxed{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

você já tem as *raízes* "prontinhas". Então:

$$x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \times 2 \times -5}}{2 \times 2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 40}}{4} = \frac{9 \pm \sqrt{121}}{4} =$$

$$= \frac{9 \pm 11}{4} \iff x = \frac{9 + 11}{4} = \frac{20}{4} = 5 \text{ ou } x = \frac{9 - 11}{4} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

Logo: $V = \left\{5, \dfrac{-1}{2}\right\}$ e as *raízes* são os *números reais* 5 e $\dfrac{-1}{2}$.

Verificação: Basta substituir na equação: $2x^2 - 9x - 5 = 0$, x por 5 ou x por $\dfrac{-1}{2}$.

raiz 5 $\Longrightarrow$ $2(5)^2 - 9(5) - 5 \overset{?}{=} 0$

$2 \times 25 - 45 - 5 \overset{?}{=} 0$

$50 - 50 = 0$ (V)

raiz $\dfrac{-1}{2}$ $\Longrightarrow$ $2\left(\dfrac{-1}{2}\right)^2 - 9\left(\dfrac{-1}{2}\right) - 5 \overset{?}{=} 0$

$2\left(\dfrac{1}{4}\right) + \dfrac{9}{2} - 5 \overset{?}{=} 0$

$\dfrac{1}{2} + \dfrac{9}{2} - 5 \overset{?}{=} 0$

$\dfrac{10}{2} - 5 = 0$ (V)

Observação importante:

O *discriminante:* $\Delta = b^2 - 4ac = 121$, é um *número positivo* (121), isto é:

$$\Delta > 0$$

e, tôda vez que você encontrar um *discriminante positivo*, o *Conjunto-Verdade* da equação é constituído de *dois elementos diferentes* $\left(\text{no exemplo: } 5 \text{ e } \dfrac{-1}{2}\right)$.

Então:

> se $\Delta > 0$, a equação do segundo grau admite *duas raízes reais desiguais.*

2.ª) $x^2 - 5x + 6 = 0$

Você já aprendeu a determinar as *raízes* (2 e 3) dessa equação (que possui $a = 1$), lembra-se? Porém, querendo aplicar a *fórmula:*

$\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ onde $a = 1$, $b = -5$, $c = 6$ elas aparecerão ràpidamente. . .

De fato: $x^2 - 5x + 6 = 0$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \times 1 \times 6}}{2 \times 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} =$$

$$= \frac{5 \pm 1}{2} \iff x = \frac{5 + 1}{2} = 3 \text{ ou } x = \frac{5 - 1}{2} = 2$$

Nota: À medida que você vai resolvendo as equações do segundo grau, irá empregando os recursos de *cálculo* já conhecidos. Assim, por exemplo, no lugar de $-(-5)$ você já escreve 5, etc.

3.ª) $y^2 - 10y + 25 = 0$

Temos: $a = 1$, $b = -10$, $c = 25$

$$y = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \times 1 \times 25}}{2 \times 1} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 100}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{0}}{2} =$$

$$= \frac{10 \pm 0}{2} \Longleftrightarrow y = \frac{10 + 0}{2} = 5 \text{ ou } y = \frac{10 - 0}{2} = 5$$

Neste caso o Conjunto-Verdade *só tem um elemento* (5) e por isso não precisa figurar duas vêzes. Então:

$V = \{5\}$ e diz-se que a *raiz* é de *multiplicidade dois*

Verificação:

$$\text{raiz } 5 \Longrightarrow (5)^2 - 10 \times 5 + 25 \stackrel{?}{=} 0$$
$$25 - 50 + 25 \stackrel{?}{=} 0$$
$$-25 + 25 = 0 \; (V)$$

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE:

Agora o *discriminante* $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, e tôda vez que você encontrar um *discriminante nulo*, isto é:

$$\Delta = 0$$

o *Conjunto-Verdade* da equação é constituído *sòmente de um elemento* (no exemplo o 5), que é denominado *raiz de multiplicidade dois*.

Então:

> se $\Delta = 0$, a equação do segundo grau admite *duas raízes reais iguais*.

4.ª) $7z^2 - z + 1 = 0$

Temos: $a = 7$, $b = -1$, $c = 1$

$$z = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 7 \times 1}}{2 \times 7} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 28}}{14} = \frac{1 \pm \sqrt{-27}}{14}$$

Como $\sqrt{-27} \notin \mathbb{R}$ (pois não existe no conjunto $\mathbb{R}$ raiz quadrada de um número negativo)

o Conjunto-Verdade dessa equação é *vazio*, isto é: $V = \varnothing$, e a equação: $7z^2 - z + 1 = 0$ *não tem solução* em $\mathbb{R}$, ou é *impossível* em $\mathbb{R}$.

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE:

O *discriminante* é agora *negativo*, ou seja, $\Delta = -27$, e tôda vez que você encontrar um *discriminante negativo:*

$$\Delta < 0$$

o *Conjunto-Verdade* da equação é *vazio:* $V = \varnothing$

Então:

> se $\Delta < 0$, a equação do segundo grau *não admite raízes reais* e, portanto, *não tem solução* em $\mathbb{R}$.

NOTA: Mais tarde, quando fôr ampliado o Universo de trabalho para o *conjunto dos números complexos* ($\mathbb{C}$), então já será possível resolver equações do segundo grau de *discriminante negativo*.

LEMBRETE AMIGO

Guarde bem a importante *equivalência:*

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} \text{ e } a \neq 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou } x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

onde o *Conjunto-Verdade* da segunda sentença é:

$$V = \left\{ \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right\}$$

e, portanto, as *raízes* da equação do segundo grau: $ax^2 + bx + c = 0$, são os *números reais:*

$$\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

desde que $\Delta \geqslant 0$.

EXERCICIOS DE APLICAÇÃO — GRUPO 8

Resolva as seguintes *equações do segundo grau* em $\mathbb{R}$:

1.ª) $\boxed{{}^-5x^2 + 3x + 1 = 0}$

Como $a = {}^-5$ é negativo, pode-se (mas não há obrigação nenhuma...) multiplicar ambos os membros da equação por $^-1$, o que equivale a "trocar" o sinal qualificativo de todos os coeficientes:

$$5x^2 - 3x - 1 = 0 \quad \begin{cases} a = 5 \\ b = {}^-3 \\ c = {}^-1 \end{cases}$$ e, aplicando a *fórmula*, vem:

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 5 \times {}^-1}}{2 \times 5} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 20}}{10} = \frac{3 \pm \sqrt{29}}{10} \iff x = \frac{3 + \sqrt{29}}{10} \text{ ou } x = \frac{3 - \sqrt{29}}{10}$$

Logo: $V = \left\{\frac{3 + \sqrt{29}}{10}, \frac{3 - \sqrt{29}}{10}\right\}$ *raízes:* $\frac{3 + \sqrt{29}}{10}$ e $\frac{3 - \sqrt{29}}{10}$

Verificação: *raiz* $\frac{3 + \sqrt{29}}{10} \implies {}^-5\left[\frac{3 + \sqrt{29}}{10}\right]^2 + 3\left[\frac{3 + \sqrt{29}}{10}\right] + 1 = 0$

$$^-5\left[\frac{9 + 6\sqrt{29} + 29}{100}\right] + 3\left[\frac{3 + \sqrt{29}}{10}\right] + 1 = 0$$

$$\frac{^-45 - 30\sqrt{29} - 145}{100} + \frac{9 + 3\sqrt{29}}{10} + 1 = 0$$

$$\frac{\cancel{^-190} - \cancel{30\sqrt{29}} + \cancel{90} + \cancel{30\sqrt{29}} + \cancel{100}}{100} = 0$$

$$0 = 0 \ (V)$$

2.ª) $\boxed{y^2 - 2y - 1 = 0}$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = {}^-2 \\ c = {}^-1 \end{cases} \quad y = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \times 1 \times {}^-1}}{2 \times 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2} \iff$$

$$\iff y = 1 + \sqrt{2} \text{ ou } y = 1 - \sqrt{2}$$

Logo: $V = \{1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}\}$ *raízes:* $1 + \sqrt{2}$ e $1 - \sqrt{2}$

Verifique você mesmo.

3.ª) $\boxed{u^2 + 2\sqrt{5}u - 1 = 0}$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 2\sqrt{5} \\ c = {}^-1 \end{cases} \quad u = \frac{^-2\sqrt{5} \pm \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - 4 \times 1 \times {}^-1}}{2 \times 1} = \frac{^-2\sqrt{5} \pm \sqrt{4 \times 5 + 4}}{2} =$$

$$= \frac{^-2\sqrt{5} \pm \sqrt{24}}{2} = \frac{^-2\sqrt{5} \pm 2\sqrt{6}}{2} = {}^-\sqrt{5} \pm \sqrt{6} \iff u = {}^-\sqrt{5} + \sqrt{6} \text{ ou } u = {}^-\sqrt{5} - \sqrt{6}$$

Logo: $V = \{^-\sqrt{5} + \sqrt{6}, {}^-\sqrt{5} - \sqrt{6}\}$ *raízes:* $^-\sqrt{5} + \sqrt{6}$ e $^-\sqrt{5} - \sqrt{6}$

Verifique você mesmo.

4.ª) $\boxed{3x^2 - 27 = 0}$ (equação do segundo grau *incompleta!*)

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = \mathbf{0} \text{ (tome nota!)} \\ c = {}^-27 \end{cases}$$

Se quiser aplicar a *fórmula* na equação: $3x^2 + 0x - 27 = 0$, vem:

$$x = \frac{0 \pm \sqrt{0 - 4 \times 3 \times {}^-27}}{2 \times 3} = \frac{0 \pm \sqrt{0 + 324}}{6} = \frac{0 \pm \sqrt{324}}{6} =$$

$$= \frac{\pm\sqrt{324}}{6} = \frac{\pm 18}{6} = \pm 3 \iff x = 3 \text{ ou } x = {}^-3$$

Logo: $V = \{3, {}^-3\}$ *raízes:* 3 e $^-3$

NOTA: Você pode, nesse caso ($b = 0$), deixar de usar a *fórmula*, pois as técnicas que já conhece permitem determinar as raízes de equações do segundo grau *incompletas* mais ràpidamente, porque:

$$3x^2 - 27 = 0 \iff 3x^2 = 27 \iff x^2 = \frac{27}{3} = 9$$

$$\text{ou } x^2 = 9 \iff x = \pm\sqrt{9} = \pm 3(*) \iff x = 3 \text{ ou } x = {}^-3$$

Logo: $V = \{3, {}^-3\}$ *raízes:* 3 e $^-3$

A *verificação* é imediata.

OBSERVAÇÃO: Se a equação proposta fôsse: $\boxed{3x^2 + 27 = 0}$ (observe que só diferem pelo *sinal*), então: $3x^2 + 27 = 0 \iff 3x^2 = {}^-27 \iff x^2 = {}^-9 \iff x = \pm\sqrt{^-9}$.

Como: $\sqrt{^-9} \notin \mathbb{R}$, o *Conjunto-Verdade é vazio*, isto é, $V = \varnothing$ e a equação $3x^2 + 27 = 0$ *não admite solução* em $\mathbb{R}$.

(*) Já foi visto na 3.ª série ginasial que: $\pm\sqrt{9} = \pm 3$, e que $\sqrt{9} = 3$.

5.ª) $\boxed{4z^2 + 3z = 0}$ (equação do segundo grau *incompleta!*)

$$\bullet \begin{cases} \nearrow a = 4 \\ \rightarrow b = 3 \\ \searrow c = 0 \text{ (tome nota!)} \end{cases}$$

Também agora, se você quiser aplicar a *fórmula*, vem:

$$z = \frac{^-3 \pm \sqrt{9 + 4 \times 4 \times 0}}{2 \times 4} = \frac{^-3 \pm \sqrt{9 + 0}}{8} = \frac{^-3 \pm \sqrt{9}}{8} =$$

$$= \frac{^-3 \pm 3}{8} \iff z = \frac{^-3 + 3}{8} = \frac{0}{8} = 0 \text{ ou } z = \frac{^-3 - 3}{8} = \frac{^-6}{8} = \frac{^-3}{4}$$

Logo: $V = \left\{0, \frac{^-3}{4}\right\}$ *raízes:* 0 e $\frac{^-3}{4}$

Verifique.

NOTA: Quando $c = 0$, pode-se dispensar o uso da fórmula, pois:

$4z^2 + 3z = 0 \iff z(4z + 3) = 0$ (pela propriedade *distributiva*)

Como: $z(4z + 3) = 0 \iff z = 0$ ou $4z + 3 = 0$

isto é, a última sentença compõe-se de *equações do primeiro grau*, e temos: a raiz da primeira equação ($z = 0$) é 0, e a da segunda: $4z + 3 = 0$, é:

$$4z + 3 = 0 \iff 4z = {^-3} \iff z = \frac{^-3}{4}, \text{ isto é, } \frac{^-3}{4}$$

Logo: $V = \left\{0, \frac{^-3}{4}\right\}$ *raízes:* 0 e $\frac{^-3}{4}$

6.ª) $\boxed{5x^2 = 0}$ (equação do segundo grau *incompleta!*)

$$\bullet \begin{cases} \nearrow a = 5 \\ \rightarrow b = 0 \text{ (tome nota!)} \\ \searrow c = 0 \text{ (tome nota!)} \end{cases}$$

O "bom senso" manda agora *não aplicar a fórmula:*

Se $5x^2 = 0$, então $x^2 = 0$ (pois o primeiro fator, 5, é diferente de 0 e o produto é *nulo*).

Logo: $x^2 = 0 \iff x \cdot x = 0 \iff x = 0$ ou $x = 0$

Portanto: $V = \{0\}$ o 0 é *raiz de multiplicidade dois.*

Verifique.

EXERCICIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 9

Resolva as seguintes equações do segundo grau (na variável x, ou y, ou z, ou t) em $\mathbb{R}$:

1.ª) $3x^2 - 10x + 3 = 0$
2.ª) $y^2 - 7y + 12 = 0$
3.ª) $4z^2 - 12z + 9 = 0$
4.ª) $t^2 + 8t + 15 = 0$
5.ª) $2x^2 + x + 5 = 0$
6.ª) ${^-x^2} + 10x + 25 = 0$
7.ª) $y^2 - 10y - 25 = 0$
8.ª) $1{,}2x^2 + 0{,}1x - 0{,}6 = 0$
9.ª) ${^-3x^2} + 2x - 6 = 0$
10.ª) $2t^2 - 4t + 2 = 0$
11.ª) $x^2 - 2x - 1 = 0$
12.ª) ${^-5y^2} + 3y + 1 = 0$
13.ª) $2y^2 - 4\sqrt{2} \cdot y + 2 = 0$
14.ª) $5x^2 - 45 = 0$
15.ª) $5x^2 + 45 = 0$
16.ª) $8y^2 = 0$
17.ª) $3t^2 - 12t = 0$
18.ª) $3t^2 + 12t = 0$
19.ª) $z^2 - 1 = 0$
20.ª) $\frac{2}{3}x^2 - 5x = 0$
21.ª) $4x^2 + 20 = 0$
22.ª) $5z^2 - 20 = 0$
23.ª) $10x^2 - 1.000 = 0$
24.ª) ${^-10x^2} - 1.000 = 0$

LEMBRETE AMIGO

Embora você possa sempre aplicar a fórmula:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

na resolução da equação do segundo grau: $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) pode, também (principalmente tendo pressa...), dispensar o seu uso, no caso de a equação do segundo grau ser incompleta.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO — GRUPO 10

Neste Grupo serão resolvidas algumas equações do segundo grau que não se apresentam diretamente na forma: $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$). Também algumas equações *literais* do segundo grau, bem como equações "fracionárias" cuja resolução depende de equações do segundo grau, serão estudadas.

Tôdas as equações propostas serão resolvidas em $\mathbb{R}$.

1.ª) $\boxed{x^2 + 12x = 160}$

Procurando escrever a equação sob a forma $ax^2 + bx + c = 0$, temos:

$x^2 + 12x - 160 = 0$, cuja resolução, aplicando a fórmula, é imediata.

Você encontrará: $V = \{{^-20}, 8\}$ *raízes:* $^-20$ e 8

2.ª) $\boxed{\sqrt{2}\,.\,x^2 = 2x}$

Procedendo da mesma forma, obtém-se:

$\sqrt{2}\,.\,x^2 - 2x = 0$, que é uma equação do segundo grau *incompleta*. Portanto:

$$x(\sqrt{2}\,.\,x - 2) = 0 \text{ ou } \bullet \begin{cases} x = 0 \\ \sqrt{2}\,.\,x - 2 = 0 \iff \sqrt{2}\,.\,x = 2 \iff x = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\,.\,\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \end{cases}$$

Logo: $V = \{0, \sqrt{2}\}$ *raízes:* 0 e $\sqrt{2}$

3.ª) $\boxed{(2x + 1)^2 = -4}$

Desenvolvendo o quadrado:

$$4x^2 + 4x + 1 = -4 \iff 4x^2 + 4x + 1 + 4 = 0 \iff 4x^2 + 4x + 5 = 0$$

Como nessa equação do segundo grau o $\Delta = 16 - 4 \times 4 \times 5 = 16 - 80 = -64 \iff \Delta < 0$, a equação *não tem solução* em $\mathbb{R}$, isto é: $V = \varnothing$.

NOTA: Uma observação mais cuidadosa da equação proposta mostraria que a mesma não tem solução em $\mathbb{R}$, pois não existe algum valor de x que faça o primeiro membro, que é um *quadrado*, ser igual a um *número negativo* (-4).

4.ª) $\boxed{\dfrac{x - 1}{2} - \dfrac{3x - x^2}{3} = x + \dfrac{1}{3}}$

"Eliminando" os denominadores (m.m.c. $(2, 3) = 6$), vem:

$$3(x - 1) - 2(3x - x^2) = 6x + 2 \iff 3x - 3 - 6x + 2x^2 = 6x + 2$$

"Reduzindo" os têrmos semelhantes:

$$2x^2 - 6x - 6x + 3x - 3 - 2 = 0$$

$$\text{ou } 2x^2 - 9x - 5 = 0$$

Aplicando a fórmula: $V = \left\{5, \dfrac{-1}{2}\right\}$ *raízes:* 5 e $\dfrac{-1}{2}$

5.ª) $\boxed{x^2 - (a + b)x + ab = 0}$

Aplicando diretamente a fórmula, vem:

$$x = \frac{(a + b) \pm \sqrt{(a + b)^2 - 4ab}}{2} = \frac{(a + b) \pm \sqrt{a^2 + 2ab + b^2 - 4ab}}{2} =$$

$$= \frac{(a + b) \pm \sqrt{a^2 - 2ab + b^2}}{2} = \frac{(a + b) \pm \sqrt{(a - b)^2}}{2} =$$

$$= \frac{(a + b) \pm (a - b)}{2} = \bullet \begin{cases} \dfrac{a + b + a - b}{2} = \dfrac{2a}{2} = a \\ \dfrac{a + b - a + b}{2} = \dfrac{2b}{2} = b \end{cases}$$

Logo, $\forall a, b$, o *Conjunto-Verdade* é:

$V = \{a, b\}$ *raízes:* a e b

6.ª) $\boxed{\dfrac{x + 5}{x - 3} - \dfrac{x - 7}{x + 2} = 3}$ Excluídos de $\mathbb{R}$ os valôres 3 e -2 (que anulam o denominador, isto é, $x \neq 3$ e $x \neq -2$)

Eliminando os denominadores (m.m.c. $(x - 3)(x + 2)$), vem:

$$(x + 2)(x + 5) - (x - 3)(x - 7) = 3(x - 3)(x + 2)$$

ou $\quad x^2 + 7x + 10 - x^2 + 10x - 21 = 3x^2 - 3x - 18$

ou $\quad -3x^2 + 20x + 7 = 0$

e, multiplicando por -1: $3x^2 - 20x - 7 = 0$

Aplicando a fórmula, vem: $V = \left\{7, \dfrac{-1}{3}\right\}$ *raízes:* 7 e $\dfrac{-1}{3}$

7.ª) $\boxed{(x - k)^2 = k^2}$ (x *variável*, $k \in \mathbb{R}$)

Desenvolvendo o quadrado, vem:

$$x^2 - 2kx + k^2 = k^2 \iff x^2 - 2kx + k^2 - k^2 = 0$$

$$\text{ou } x^2 - 2kx + 0 = 0$$

$$\text{ou } x(x - 2k) = 0 \bullet \begin{cases} x = 0 \\ x - 2k = 0 \iff x = 2k \end{cases}$$

Logo, $\forall k$, temos:

$V = \{0, 2k\}$ *raízes:* 0 e $2k$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — Grupo 11

Resolva as seguintes equações em $\mathbb{R}$:

1.ª) $x^2 - 32 = 4x$

2.ª) $x^2 + 24x = 15 + 10x$

3.ª) $0{,}2 + 0{,}8y = y^2$

4.ª) $x^2 + 140 = 20 - 26x$

5.ª) $x(x - 1) - 60 = 60 + x$

6.ª) $t(t - 15) - 100 = 0$

7.ª) $(x + 5)(x + 2) = 40$

8.ª) $(x + 20)(x - 20) = 0$

9.ª) $(y + 1)^2 = 3 + y$

10.ª) $(2x + 2)^2 = {}^{-}16$

11.ª) $(2x + 1)^2 = 0$

12.ª) $\dfrac{8}{100} = 0{,}6x - x^2$

13.ª) $\left(\dfrac{x}{3} - 4\right)^2 = 0$

14.ª) $x^2 + \dfrac{3}{32} = \dfrac{7x}{8}$

15.ª) $\dfrac{7z}{24} = \dfrac{1}{4} - z^2$

16.ª) $3y^2 + \dfrac{4}{3} = {}^{-}4y$

17.ª) $6u + 5u^2 + \dfrac{9}{5} = 0$

18.ª) $x + 1 = {}^{-}3x^2$

19.ª) $(x - 8)^2 + (x - 1)^2 = (x + 1)^2$

20.ª) $\dfrac{x - 1}{2} - \dfrac{3x - x^2}{3} = x + \dfrac{1}{3}$

21.ª) $\dfrac{3x - 1}{7} - \dfrac{9x + 3}{16} = \dfrac{x^2 - 4}{7} - \dfrac{(x - 1)^2}{4}$

22.ª) $\dfrac{9}{x} - \dfrac{x}{3} = 2 \quad (x \neq 0)$

23.ª) $y + \dfrac{1}{y - 3} = 5 \quad (y \neq 3)$

24.ª) $\dfrac{x}{7} + \dfrac{21}{x + 5} = \dfrac{47}{7} \quad (x \neq {}^{-}5)$

25.ª) $x\left(\dfrac{10}{3} + x\right) = \dfrac{8}{3}$

26.ª) $\dfrac{x}{x + 1} + \dfrac{x}{x + 4} = 1 \quad (x \neq {}^{-}1,\ x \neq {}^{-}4)$

27.ª) $\dfrac{15}{x} - \dfrac{72 - 6x}{2x^2} = 2 \quad (x \neq 0)$

28.ª) $\dfrac{x + 1}{x} + 1 = \dfrac{x}{x - 1} \quad (x \neq 0,\ x \neq 1)$

29.ª) $(3y + 1)^2 + 17 = 6y + 1$

30.ª) $\dfrac{2}{x^2 - 1} + \dfrac{1}{x + 1} = {}^{-}1 \quad (x \neq 1, x \neq {}^{-}1)$

31.ª) $\dfrac{2y - 1}{y + 1} = \dfrac{y + 1}{y - 1} \quad (y \neq {}^{-}1,\ y \neq 1)$

33.ª) $3t^2 = \dfrac{2}{5}\left(t + \dfrac{4}{5}\right) + 2t^2$

33.ª) $\left(x + \dfrac{1}{3}\right)\left(x - \dfrac{1}{3}\right) = 3x - \dfrac{1}{9}$

34.ª) $\dfrac{6}{x^2 - 1} - \dfrac{3}{x + 1} = 2 - \dfrac{3}{x + 1} \quad (x \neq 1,\ x \neq {}^{-}1)$

35.ª) $\dfrac{x + 1}{x} - \dfrac{5}{x - 2} = 2 \quad (x \neq 0,\ x \neq 2)$

36.ª) $\dfrac{2y + 1}{y + 1} - \dfrac{y + 1}{y + 2} = \dfrac{y - 1}{y - 2} \quad (y \neq {}^{-}1,\ y \neq {}^{-}2,\ y \neq 2)$

37.ª) $\dfrac{1}{3x^2 - 27} + \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{x - 3} = 1 \quad (x \neq 3,\ x \neq {}^{-}3)$
(m.m.c.: $3 \times 4 \times (x^2 - 9)$)

38.ª) $(x - a)^2 = a^2$ (x variável, $a \in \mathbb{R}$)

39.ª) $kx^2 = m$ (x variável, $m \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$ e $k \neq 0$)

40.ª) $mx^2 + mx = 0$ (x variável, $m \in \mathbb{R}$ e $m \neq 0$)

41.ª) $x^2 - 4ax + 3a^2 = 0$ (x variável)

42.ª) $y^2 - 8ay + 15a^2 = 0$ (y variável)

43.ª) $x^2 + (a + b)x + ab = 0$ (x variável)

44.ª) $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$ (x variável)

45.ª) $t^2 - 2abt - a^2b^2 = 0$ (t variável)

46.ª) $4y^2 - 2(a + b)y + ab = 0$ (y variável)

47.ª) $\dfrac{x^2 - a^2}{4b} = x - b$ (x variável, $b \neq 0$)

48.ª) $y^2 + \dfrac{a + b}{m}y + \dfrac{ab}{m^2} = 0$ (y variável, $m \neq 0$)

49.ª) $z^2 - \left(\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}\right)z + 1 = 0$ (z variável, $a \neq 0$, $b \neq 0$)

50.ª) $\dfrac{x}{x - a} - \dfrac{2a}{x + a} = \dfrac{8a^2}{x^2 - a^2}$ (x variável, $x \neq a$, $x \neq {}^{-}a$)

EXERCÍCIOS EXPLORATÓRIOS — Grupo 12

Será que conhecendo sòmente os sinais de a e de c na equação $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$), você poderia "adiantar" que tal equação admite *raízes reais?* Preste atenção em alguns exemplos:

A equação: $2x^2 - 9x - 5 = 0$, tem $a = 2$ e $c = {}^{-}5$, isto é, a e c têm *sinais diferentes*. Resolvendo-a, você encontrará: $V = \left\{5, \dfrac{{}^{-}1}{2}\right\}$

A equação: ${}^{-}12x^2 + 6 = 0$, tem $a = {}^{-}12$ e $c = 6$, isto é, a e c têm *sinais diferentes* e, resolvendo-a, você encontrará: $V = \left\{\dfrac{2}{3}, \dfrac{{}^{-}3}{4}\right\}$

O mesmo ocorre com a equação: $x^2 - 2x - 1 = 0$, onde a e c têm *sinais diferentes* e $V = [1 + \sqrt{2},\ 1 - \sqrt{2}]$

Será que tôda vez que a e c tiverem *sinais diferentes* a equação admitirá *raízes reais?*

Escolha ou invente qualquer equação do segundo grau que tenha a e c com *sinais diferentes* e responda à pergunta.

Nota: Depois que você defender o seu resultado, dê uma "olhada" no *discriminante:* $\Delta = b^2 - 4ac$, de uma equação do segundo grau que possua a e c com *sinais contrários*. Êsse discriminante é *sempre positivo*, pois:

b^2 é *positivo* (porque é um *quadrado*)

${}^{-}4ac$ também é *positivo* (porque, se a e c têm *sinais diferentes*, o produto ac é negativo e, multiplicando-o por ${}^{-}4$, torna-se positivo)

Logo: $\Delta > 0$ e, como você já sabe, quando o discriminante é *positivo*, a equação sempre admite *raízes reais!*

Diga, agora, sem resolver, quais das seguintes equações você *tem certeza* de que possuem *raízes reais:*

1.ª) $x^2 - 10x - 25 = 0$

2.ª) $3x^2 - x + 8 = 0$

3.ª) ${}^{-}8x^2 + 5x + 6 = 0$

4.ª) $x^2 - 5x + 6 = 0$

5.ª) $5x^2 - x - 1 = 0$

6.ª) ${}^{-}x^2 + 2 = 0$

7.ª) $x^2 + 2 = 0$

8.ª) $x^2 - 2 = 0$

9.ª) ${}^{-}x^2 - 4 = 0$

10.ª) ${}^{-}4x^2 + 64 = 0$

4. *Discussão das raízes de uma equação do segundo grau em* $\mathbb{R}$

Recordemos que a "alma" de uma equação do segundo grau: $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$, é o *discriminante:*

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$$

pois o seu valor indicará a *existência* ou *não* das raízes em $\mathbb{R}$.

Você já estudou, por intermédio de exercícios (aplicando a *fórmula*), que:

1.º) Se $\Delta > 0$, então $\sqrt{\Delta} \neq 0$ e o Conjunto-Verdade: $V = \left\{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$

indica como *raízes* os números reais: $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ que, de agora em diante, para simplificar a *discussão*, serão indicados, respectivamente, por:

$$x' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } x'' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Sabe, também, que: $x' \neq x''$, pelo fato de x' representar a *soma* e x'' a *diferença* de duas quantidades não-nulas. Portanto, as raízes x' e x'' representam *números reais desiguais*.

Verifique tudo isso com o exemplo: $x^2 - 5x + 6 = 0$.

2.º) Se $\Delta = 0$, então $\sqrt{\Delta} = 0$, e o Conjunto-Verdade: $V = \left\{\frac{-b}{2a}\right\}$

Nesse caso $x' = x'' = \frac{-b}{2a}$, isto é, as raízes são *números reais iguais*, e diz-se que a raiz é de *multiplicidade dois*.

Tire a prova com o exemplo: $-2x^2 + 8x - 8 = 0$

3.º) Se $\Delta < 0$, então $\sqrt{\Delta} \notin \mathbb{R}$ e $V = \varnothing$

Nesse caso *não existem raízes reais* e a equação diz-se *impossível* em $\mathbb{R}$.

Confirme êsse resultado com o exemplo: $3x^2 - 2x + 5 = 0$.

RESUMO

$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$ $(a \neq 0)$

1) $\Delta > 0 \iff \exists x', x'' \in \mathbb{R} \mid x' \neq x''$ e são raízes da equação
2) $\Delta = 0 \iff \exists x', x'' \in \mathbb{R} \mid x' = x''$ e são raízes da equação
3) $\Delta < 0 \iff \nexists$ raízes reais da equação

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO — GRUPO 13

1. Por intermédio do *discriminante* discuta a *existência* das raízes das seguintes equações do segundo grau em $\mathbb{R}$:

1.ª) $\boxed{3x^2 - 11x - 4 = 0}$

Temos: $\Delta = (-11)^2 - 4 \times 3 \times (-4) = 121 + 48 = 169 \Longrightarrow \Delta > 0$

Logo, se $\Delta > 0 \iff$ existem *duas raízes reais desiguais*

Verifique como exercício.

NOTA: Observando que a e c têm *sinais diferentes*, segue-se imeditamente que $\Delta > 0$.

2.ª) $\boxed{4x^2 - 4x + 1 = 0}$

Temos: $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 4 \times 1 = 16 - 16 = 0 \Longrightarrow \Delta = 0$

Logo, se $\Delta = 0 \iff$ existem *duas raízes reais iguais* (escreve-se sòmente uma delas, que é de *multiplicidade dois*).

Verifique como exercício.

3.ª) $\boxed{5x^2 + x + 3 = 0}$

Temos: $\Delta = 1^2 - 4 \times 5 \times 3 = 1 - 60 = -59 \Longrightarrow \Delta < 0$

Logo, se $\Delta < 0 \iff$ *não existem raízes reais*

2. Diga para que valôres de m a equação:

$$x^2 - 6x + m = 0$$

1.º) admite raízes reais desiguais
2.º) admite raízes reais iguais
3.º) não admite raízes reais

Tudo vai depender do *discriminante* da equação. Como:

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \text{ou} \quad \Delta = 36 - 4m$$

e atendendo às questões propostas, quando:

1.º) $36 - 4m > 0 \iff$ *raízes reais desiguais*

$$\text{ou } {}^{-}4m > {}^{-}36$$
$$\text{ou } m < 9$$

2.º) $36 - 4m = 0 \iff$ *raízes reais iguais*

$$\text{ou } 4m = 36$$
$$\text{ou } m = 9$$

3.º) $36 - 4m < 0 \iff$ *não há raízes reais*

$$\text{ou } {}^{-}4m < {}^{-}36$$
$$\text{ou } m > 9$$

Logo:

1.º) Se $m < 9$, a equação $x^2 - 6x + m = 0$ admite duas *raízes reais desiguais*; "tire" a prova fazendo, por exemplo, $m = 8$, isto é, resolvendo a equação: $x^2 - 6x + 8 = 0$.

2.º) Se $m = 9$, a equação $x^2 - 6x + m = 0$, ou seja, $x^2 - 6x + 9 = 0$ admitirá duas *raízes reais iguais*. Confirme.

3.º) Se $m > 9$, a equação $x^2 - 6x + m = 0$ *não admitirá raízes reais*; verifique, resolvendo a equação: $x^2 - 6x + 10 = 0$, por exemplo.

3. Qual deve ser o valor (ou valôres) de k, a fim de que sejam *reais iguais* as raízes da equação: $x^2 + (k-1)x + k - 1 = 0$ em $\mathbb{R}$?

Ora, as raízes serão *reais iguais* se $\Delta = 0$, isto é:

$$(k-1)^2 - 4(k-1) = 0$$
$$k^2 - 2k + 1 - 4k + 4 = 0$$
$$k^2 - 6k + 5 = 0$$

As raízes dessa equação são: 1 e 5.

Portanto, se $k = 1$ ou $k = 5$, a equação: $x^2 + (k-1)x + k - 1 = 0$, terá raízes *reais iguais*.

Verificação: se $k = 1$, a equação será: $x^2 + 0x + 0 = 0$, ou seja, $x^2 = 0$, cujas raízes são iguais a 0.

se $k = 5$, a equação será: $x^2 + 4x + 4 = 0$, cujas raízes são iguais a $^{-}2$.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 14

1. Por intermédio do *discriminante*, discuta a *existência* das raízes das seguintes equações do segundo grau em $\mathbb{R}$:

1.ª) $3x^2 - 10x + 3 = 0$	6.ª) $5z^2 - 6z = 0$
2.ª) $x^2 - x + 5 = 0$	7.ª) $t^2 - 2t + 1 = 0$
3.ª) $^{-}4y^2 - y + 1 = 0$	8.ª) $3x^2 = {}^{-}1$
4.ª) $z^2 + 4z + 4 = 0$	9.ª) $5k^2 - 65k + 9 = 0$
5.ª) $6x^2 - 46x + 4 = 0$	10.ª) $2x^2 - 4x + 2 = 0$

2. Diga para que valôres de m a equação: $x^2 - 4x + m = 0 \quad (m \in \mathbb{R})$

1.º) admite raízes *reais desiguais*

2.º) admite raízes *reais iguais*

3.º) *não admite raízes reais*

3. Mesmo problema com relação a equação: $x^2 - 8x - n = 0$.

4. Determine o valor (ou valôres) de n para que as raízes da equação:

$$(n - 1)\, x^2 + 2\,(1 - n)\, x + 3n = 0 \quad (n \in \mathbb{R})$$

sejam *reais iguais*.

5. Determine o valor (ou valôres) de k, a fim de que a equação:

$$x^2 + 2kx + 7k^2 = 0 \quad (k \in \mathbb{R})$$

admita raízes *reais desiguais*.

6. Determine o valor (ou valôres) de m, a fim de que a equação:

$$(4m - 1)\, x^2 + 12mx + 9m - 8 = 0 \quad (m \in \mathbb{R})$$

não admita raízes reais.

Relações entre os coeficientes e as raízes

5. *Propriedades principais*

Você já sabe que na equação do segundo grau:

$$x^2 - 5x + 6 = 0, \text{ onde } a = 1$$

as *raízes* 2 e 3 são tais que:

a *soma* $(2 + 3 = 5)$ é o oposto do coeficiente de x $(b = {}^{-}5)$

o *produto* $(2 \times 3 = 6)$ é o têrmo constante da equação $(c = 6)$

Agora você irá *demonstrar* que no caso geral da equação:

$$ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0)$$

quando $\Delta \geqslant 0$, valem as seguintes *relações* entre as raízes x' e x'' e os números a, b e c:

1. a *soma* das raízes é igual a $\dfrac{{}^{-}b}{a}$

2. o *produto* das raízes é igual a $\dfrac{c}{a}$

Em símbolos, temos:

$$x' + x'' = \frac{-b}{a}$$

$$x' \times x'' = \frac{c}{a}$$

A *demonstração* é fácil de ser obtida, pois sendo as raízes expressas, respectivamente, por:

$$x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

basta *adicioná-las* para que o primeiro resultado seja obtido:

$$x' + x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b + \cancel{\sqrt{\Delta}} + -b - \cancel{\sqrt{\Delta}}}{2a} = \frac{-\cancel{2}b}{\cancel{2}a} = \frac{-b}{a}$$

Multiplicando-as, obtemos o segundo resultado, pois:

$$x' \times x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b + \sqrt{\Delta})(-b - \sqrt{\Delta})}{4a^2} = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2}$$

e substituindo Δ pelo seu valor: $b^2 - 4ac$:

$$x' \times x'' = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a} \text{ c.q.d.}$$

Exemplo prático:

Quanto vale a *soma* e o *produto* das raízes da equação:

$$6x^2 + 7x - 3 = 0\ ?$$

Como: $\Delta = 49 + 72 = 121 \Longrightarrow \Delta > 0$ e $a = 6$, $b = 7$ e $c = -3$, temos:

$$x' + x'' = \frac{-b}{a} = \frac{-7}{6} \quad \text{(soma das raízes)}$$

$$x' \times x'' = \frac{c}{a} = \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2} \quad \text{(produto das raízes)}$$

TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 15

Determine a *soma* e o *produto* das raízes das seguintes equações:

1.ª) $2x^2 - 9x - 5 = 0$
2.ª) $-3y^2 + 10y - 3 = 0$
3.ª) $x^2 + x + 5 = 0$ **(cuidado!)**
4.ª) $-t^2 + 10t - 25 = 0$
5.ª) $y^2 + 8y = 0$
6.ª) $x^2 - 16 = 0$
7.ª) $x^2 + 16 = 0$ **(cuidado!)**
8.ª) $px^2 + qx + r = 0$ $(p \neq 0)$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO — GRUPO 16

1.º) Na equação $x^2 - mx + 36 = 0$, determine m de modo que uma de suas raízes seja igual a 9.

Aplicando as *propriedades* das raízes e supondo $\Delta \geqslant 0$, devemos ter:

$$\begin{cases} x' = 9 & \text{(dado do problema)} \\ x' + x'' = m & \left(\text{porque } \frac{-b}{a} = \frac{m}{1} = m\right) \\ x' \times x'' = 36 & \left(\text{porque } \frac{c}{a} = \frac{36}{1} = 36\right) \end{cases}$$

Como $x' = 9$ e, sendo $x' \times x'' = 36$, segue-se que:

$$9 \times x'' = 36 \Longleftrightarrow x'' = \frac{36}{9} = 4$$

Logo: $m = x' + x'' = 9 + 4 = 13$

Verificação: Se $m = 13$, temos a equação: $x^2 - 13x + 36 = 0$, cujas raízes são 9 e 4, que satisfazem ao problema.

2.º) Determine p na equação: $x^2 - 8x + p = 0$, de modo que uma das raízes seja o *triplo* da outra.

Com a condição imposta pelo problema e mais as propriedades das raízes, devemos ter as seguintes equações:

$$\begin{cases} x' = 3x'' \\ x' + x'' = 8 \\ x' \times x'' = p \end{cases}$$

Substituindo x' por $3x''$ na segunda equação, temos:

$$3x'' + x'' = 8 \Longleftrightarrow 4x'' = 8 \Longleftrightarrow x'' = 2 \text{ e, portanto:}$$

$$x' = 3x'' \Longleftrightarrow x' = 3 \times 2 = 6$$

Logo: $p = x' \times x'' = 6 \times 2 = 12$

Verifique você mesmo que $p = 12$.

3.º) Determine o valor de m na equação:

$$3x^2 - \left(2m + \frac{1}{5}\right)x + 1 = 0$$

de modo que a *soma* de suas raízes seja igual a $\frac{1}{3}$.

Como $a = 3$ e $b = -\left(2m + \frac{1}{5}\right)$ vem, pela propriedade das raízes:

$$x' + x'' = \frac{-b}{a} = \frac{2m + \frac{1}{5}}{3} = \frac{1}{3} \text{ (dado do problema)}$$

Resolvendo a equação: $\frac{2m + \frac{1}{5}}{3} = \frac{1}{3} \iff 2m + \frac{1}{5} = 1 \iff 2m = \frac{4}{5} \iff$

$$\iff m = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

Logo: $m = \frac{2}{5}$. Verifique.

4.º) Calcule m de modo que a equação: $x^2 - 15x + (8m + 2) = 0$, tenha a *diferença* das raízes igual a 5.

Agora, podem ser escritas as seguintes equações:

$$\begin{cases} x' + x'' = 15 & (1) \\ x' \times x'' = 8m + 2 & (2) \\ x' - x'' = 5 & (3) \end{cases}$$

De (1) e (3), vem: $\begin{cases} x' + x'' = 15 \\ x' - x'' = 5 \end{cases}$ que dá: $x' = 10$ e $x'' = 5$

Como: $x' \times x'' = 8m + 2$, segue-se que: $8m + 2 = 10 \times 5$

ou $8m + 2 = 50 \iff 8m = 48 \iff m = 6$

Portanto: $m = 6$. Verifique.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 17

1. Na equação: $x^2 - nx + 36 = 0$, determine n de modo que:

1.º) $x' = 4$ (é o mesmo que dizer: uma das raízes é igual a 4)

2.º) $x' = x''$ (. . . . . as raízes são iguais)

3.º) $x' = -x''$ (. . . . . as raízes são opostas)

4.º) $x' = 4\sqrt{3}$ (. . . . . uma das raízes é $4\sqrt{3}$)

2. Determine m na equação: $x^2 - 8x + m = 0$, de modo que:

1.º) uma das raízes seja igual a $\frac{4}{5}$

2.º) uma das raízes seja *nula*

3.º) as raízes sejam *inversas* entre si $\left(x' = \frac{1}{x''}\right)$

4.º) a soma dos quadrados das raízes seja igual a 40 $[(x')^2 + (x'')^2 = 40]$

3. Determine k na equação: $x^2 - (k + 4)x + (4k + 1) = 0$, a fim de que:

1.º) as raízes sejam reais iguais

2.º) as raízes sejam reais e opostas

3.º) uma das raízes seja nula

4. Calcule n de modo que as raízes da equação:

$$x^2 - (13 + n)x - 6n^2 + 14n + 40 = 0$$

sejam *reais iguais*.

5. Calcule m de modo que a equação:

$$x^2 - 12x + (17m - 2) = 0$$

tenha a *diferença* das raízes igual a 4.

Conseqüências das propriedades das raízes de uma equação do segundo grau

6. *Forma (S, P) de uma equação do segundo grau*

Se $a = 1$ e $\Delta \geqslant 0$, costuma-se representar a equação do segundo grau: $x^2 + bx + c = 0$, de raízes x' e x'', sob a forma:

$$\boxed{x^2 - Sx + P = 0} \text{ (forma } S, P)$$

onde $\begin{cases} x' + x'' = S \text{ (Soma das raízes)} \\ x' \times x'' = P \text{ (Produto das raízes)} \end{cases}$

De fato, se $a = 1 \Longrightarrow x^2 + bx + c = 0$ e, portanto:

$$\left.\begin{aligned} x' + x'' &= \frac{-b}{1} = -b = S \\ x' \times x'' &= \frac{c}{1} = c = P \end{aligned}\right\} \text{ e vale a equivalência:}$$

$$x^2 + bx + c = 0 \iff x^2 - Sx + P = 0$$

7. *Composição de uma equação do segundo grau, conhecidas as raízes*

O problema agora é *inverso:* conhecem-se as *raízes* de uma equação do segundo grau e quer-se saber qual é essa equação.

Ora, se x' e x'' representam as raízes conhecidas, isso significa que procuramos uma equação do segundo grau, cujo Conjunto-Verdade é:

$$V = \{x', x''\}$$

A forma (S, P) de tal equação será, necessàriamente:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

onde: $x' + x'' = S$ e $x' \times x'' = P$.

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE:

$x^2 - Sx + P = 0$ é *uma* das equações que possui o $V = \{x', x''\}$, pois tôdas as equações que lhe são *equivalentes*, da forma:

$k(x^2 - Sx + P) = 0$ $(k \in \mathbb{R})$, têm o mesmo Conjunto-Verdade: $V = \{x', x''\}$

Exemplos:

1.º) Escrever uma equação do segundo grau que possua 2 e 5 como raízes.

A equação procurada tem a forma:

$$x^2 - Sx + P = 0, \text{ onde } V = \{2, 5\}$$

Como: $\begin{cases} 2 + 5 = 7 = S \text{ (cuidado que na equação deve figurar } {}^-S) \\ 2 \times 5 = 10 = P \text{ (aqui é o mesmo sinal...)} \end{cases}$

Substituindo os valôres encontrados para S e P na equação (S, P), temos:

$$\boxed{x^2 - 7x + 10 = 0}$$

equação que responde à questão proposta.

Verificação: $x = \dfrac{7 \pm \sqrt{49-40}}{2} = \dfrac{7 \pm \sqrt{9}}{2} = \dfrac{7 \pm 3}{2} \Longleftrightarrow x = \dfrac{7+3}{2} = 5 \text{ ou } x = \dfrac{7-3}{2} = 2$

NOTA:

$x^2 - 7x + 10 = 0$ tem $V = \{2, 5\}$

mas também: $2(x^2 - 7x + 10) = 0$

ou $2x^2 - 14x + 20 = 0$ tem $V = \{2, 5\}$

e também: $3(x^2 - 7x + 10) = 0$

ou $3x^2 - 21x + 30 = 0$ tem $V = \{2, 5\}$

2.º) Compor uma equação do segundo grau cujas raízes são: $^-3$ e $\dfrac{1}{4}$.

Temos: $x^2 - Sx + P = 0$ e $V = \left\{^-3, \dfrac{1}{4}\right\}$

Como: $\begin{cases} S = {}^-3 + \dfrac{1}{4} = \dfrac{^-12 + 1}{4} = \dfrac{^-11}{4} \text{ (...lembre-se do \textit{sinal} que deve ser trocado!)} \\ P = {}^-3 \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{^-3}{4} \end{cases}$

Logo: $x^2 + \dfrac{11}{4}x - \dfrac{3}{4} = 0$ ou, eliminando os denominadores:

$\boxed{4x^2 + 11x - 3 = 0}$ que é a equação procurada.

Verifique você mesmo que as raízes dessa equação são: $^-3$ e $\dfrac{1}{4}$.

3.º) Formar uma equação do segundo grau cujas raízes são: $u + v$ e $u - v$.

Temos: $x^2 - Sx + P = 0$ e $V = \{u + v, u - v\}$

Como: $\begin{cases} S = (u + v) + (u - v) = 2u \\ P = (u + v) \cdot (u - v) = u^2 - v^2 \end{cases}$

Logo, a equação procurada é: $\boxed{x^2 - 2u + u^2 - v^2 = 0}$

Verifique.

4.º) Compor uma equação do segundo grau cujas raízes são: $1 + \sqrt{2}$ e $1 - \sqrt{2}$.

Temos: $x^2 - Sx + P = 0$ e $V = \{1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}\}$

Como: $\begin{cases} S = (1 + \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2}) = 1 + \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} = 2 \\ P = (1 + \sqrt{2}) \cdot (1 - \sqrt{2}) = 1^2 - (\sqrt{2})^2 = 1 - 2 = {}^-1 \end{cases}$

Logo, a equação procurada é: $\boxed{x^2 - 2x - 1 = 0}$

Verifique.

8. *Determinação de dois números dos quais se conhecem a soma e o produto*

Ora, conhecida a *soma* (S) de dois números e o *produto* (P) dêles, é fácil concluir que êsses números são precisamente *as raízes da equação do segundo grau que se pode formar:* $\boxed{x^2 - Sx + P = 0}$. *Exemplo:*

Determinar quais os números cuja *soma* é 19 e cujo *produto* é 84.

Como: $S = 19$ e $P = 84$, os números procurados são as raízes da equação:

$$x^2 - 19x + 84 = 0$$

Resolvendo-a, encontramos as raízes 12 e 7, que representam os números procurados.

Verificação: *Soma:* $12 + 7 = 19\,(S)$; *Produto:* $12 \times 7 = 84\,(P)$.

LEMBRETE AMIGO

Você já sabe resolver (e bem!) os dois problemas:

Problema (direto): dada uma equação do segundo grau, *determinar as suas raízes.*

Problema (inverso): dadas as raízes, *determinar uma equação do segundo grau que possua tais raízes.*

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 18

1. Determine a *equação do segundo grau* (vamos supor $a = 1$) que possua como *raízes*, respectivamente:

1.º) $V = \{2, 5\}$

2.º) $V = \{7, ^-3\}$

3.º) $V = \{^-1, 1\}$

4.º) $V = \{^-8, ^-7\}$

5.º) $V = \{0, ^-2\}$

6.º) $V = \left\{\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right\}$

7.º) $V = \left\{\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}\right\}$

8.º) $V = \{3; 0{,}5\}$

9.º) $V = \left\{^-4, \frac{2}{9}\right\}$

10.º) $V = \left\{^-0{,}002; \frac{1}{5}\right\}$

11.º) $V = \{3 + \sqrt{2}, 3 - \sqrt{2}\}$

12.º) $V = \{\sqrt{3} + 1, \sqrt{3} - 1\}$

13.º) $V = \left\{\frac{1 + \sqrt{21}}{2}, \frac{1 - \sqrt{21}}{2}\right\}$

14.º) $V = \{a, b\}$

15.º) $V = \left\{\frac{a}{2}, \frac{-b}{3}\right\}$

16.º) $V = \{a + b, a - b\}$

17.º) $V = \left\{\frac{1}{a + b}, \frac{1}{a - b}\right\}$ $\left(\begin{matrix} a \neq b \neq 0 \\ a \neq {}^-b \end{matrix}\right)$

18.º) $V = \left\{\frac{a + b}{a - b}, \frac{a - b}{a + b}\right\}$ (idem)

19.º) $V = \{a^2 - b^2, a^2 + b^2\}$

20.º) $V = \{a + \sqrt{b}, a - \sqrt{b}\}$ $(b \geqslant 0)$

2. Determine os números que tenham, respectivamente, por *soma* e por *produto:*

1.º) 18 e 45

2.º) 14 e 49

3.º) 4 e $^-12$

4.º) $^-10$ e 16

5.º) $\frac{17}{12}$ e $\frac{1}{2}$

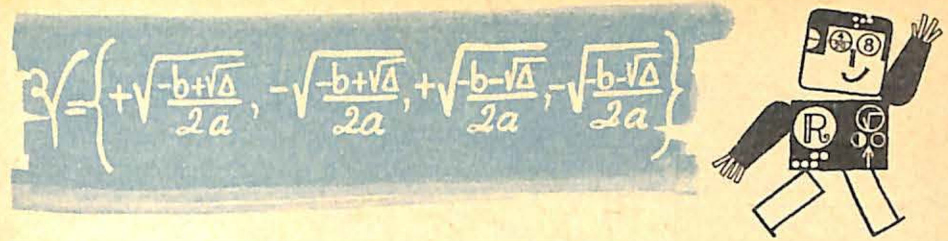
6.º) $\frac{19}{2}$ e 22

7.º) 2 e $\frac{-1}{2}$

8.º) $(a + b)$ e ab

9.º) $2a$ e $a^2 + b^2$

10.º) $2a$ e $a^2 - b^2$



3.ª Parte

- Equações biquadradas; equações irracionais
- Sistemas simples do segundo grau
- Problemas do segundo grau

Equações biquadradas

1. *Definição*

Equação *biquadrada* na variável x é tôda sentença aberta da forma:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \qquad \forall a, b, c \in \mathbb{R} \text{ e } a \neq 0$$

Exemplo: $\quad x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

Observe que numa equação *biquadrada* a variável x figura *sòmente* com expoentes *pares:* x^4, x^2, x^0 (não se esqueça de que $x^0 = 1$ e, portanto: $c = cx^0$) e, como o maior expoente da variável é 4, a equação biquadrada é uma particular equação do *quarto grau.*

Nestas condições, as equações biquadradas admitem até *quatro raízes reais.*

2. *Resolução*

A resolução da equação *biquadrada:*

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \qquad (a \neq 0)$$

ou seja, a determinação de seu Conjunto-Verdade, é feita por intermédio de equações que lhe sejam *equivalentes* e de *soluções simples.*

Todo o seu conhecimento de equações do segundo grau será aplicado agora, a partir da primeira *equivalência:*

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \iff a(x^2)^2 + bx^2 + c = 0$$

Como: $a(x^2)^2 + bx^2 + c = 0 \iff$

$$\iff x^2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad ou \quad x^2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \iff$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\iff x = +\sqrt{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}} \text{ ou } x = -\sqrt{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}} \text{ ou } x = +\sqrt{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}} \text{ ou } x = -\sqrt{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}$$

e, portanto, o Conjunto-Verdade da equação: $ax^4 + bx^2 + c = 0$ é:

$$V = \left\{ +\sqrt{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}},\ -\sqrt{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}},\ +\sqrt{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}},\ -\sqrt{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}} \right\}$$

e as suas *raízes* são os *números reais:*

$$+\sqrt{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}},\ -\sqrt{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}},\ +\sqrt{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}},\ -\sqrt{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}$$

se $\Delta \geqslant 0$ e $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \geqslant 0$.

Exemplos práticos: Resolver as seguintes *equações biquadradas* em $\mathbb{R}$:

1.ª) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

Temos:

$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \iff (x^2)^2 - 5x^2 + 4 = 0$

$$(x^2)^2 - 5x^2 + 4 = 0 \iff x^2 = \frac{5+\sqrt{25-16}}{2} \quad ou\ x^2 = \frac{5-\sqrt{25-16}}{2} \iff$$

$$\iff x^2 = \frac{5+\sqrt{9}}{2} \quad ou\ x^2 = \frac{5-\sqrt{9}}{2} \iff$$

$$\iff x^2 = \frac{5+3}{2} \quad ou\ x^2 = \frac{5-3}{2} \iff$$

$$\iff x^2 = 4 \quad ou\ x^2 = 1 \iff$$

$$\iff x = \sqrt{4} \text{ ou } x = -\sqrt{4} \quad ou\ x = \sqrt{1} \text{ ou } x = -\sqrt{1} \iff$$

$$\iff x = 2 \text{ ou } x = -2 \quad ou\ x = 1 \text{ ou } x = -1$$

Logo: $V = \{2, -2, 1, -1\}$

e as *raízes* são os *números reais:* 2, −2, 1 e −1

2.ª) $6x^4 - x^2 - 1 = 0$

Temos:

$$6(x^2)^2 - x^2 - 1 = 0 \iff x^2 = \frac{1+\sqrt{1+24}}{12} \quad ou\ x^2 = \frac{1-\sqrt{1+24}}{12} \iff$$

$$\iff x^2 = \frac{1+\sqrt{25}}{12} \quad ou\ x^2 = \frac{1-\sqrt{25}}{12} \iff$$

$$\iff x^2 = \frac{1+5}{12} \quad ou\ x^2 = \frac{1-5}{12} \iff$$

$$\iff x^2 = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \quad ou\ x^2 = \frac{-4}{12} = \frac{-1}{3} \iff$$

$$\iff x = \sqrt{\frac{1}{2}} \text{ ou } x = -\sqrt{\frac{1}{2}} \text{ ou } x = \sqrt{\frac{-1}{3}} \text{ ou } x = -\sqrt{\frac{-1}{3}} \iff$$

$$\notin \mathbb{R} \qquad \notin \mathbb{R}$$

$$\iff x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } x = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

Logo: $V = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right\}$, isto é, o Conjunto-Verdade é constituído sòmente de *dois elementos*, em virtude de os outros dois *não serem* números reais.

As *raízes* da equação: $6x^4 - x^2 - 1 = 0$, são, portanto, os *números reais:* $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\frac{-\sqrt{2}}{2}$.

3.ª) $2x^4 + 3x^2 + 1 = 0$

Temos:

$$2(x^2)^2 + 3x^2 + 1 = 0 \iff x^2 = \frac{-3+\sqrt{9-8}}{4} \quad ou\ x^2 = \frac{-3-\sqrt{9-8}}{4} \iff$$

$$\iff x^2 = \frac{-3+\sqrt{1}}{4} \quad ou\ x^2 = \frac{-3-\sqrt{1}}{4} \iff$$

$$\iff x^2 = \frac{-3+1}{4} \quad ou\ x^2 = \frac{-3-1}{4} \iff$$

$$\iff x^2 = \frac{-1}{2} \quad ou\ x^2 = -1 \iff$$

$$\iff x = \sqrt{\frac{-1}{2}} \text{ ou } x = -\sqrt{\frac{-1}{2}} \text{ ou } x = \sqrt{-1} \text{ ou } x = -\sqrt{-1}$$

$$\notin \mathbb{R} \qquad \notin \mathbb{R} \qquad \notin \mathbb{R} \qquad \notin \mathbb{R}$$

Portanto: $V = \varnothing$

e a equação: $2x^4 + 3x^2 + 1 = 0$, *não admite solução* em $\mathbb{R}$, pois *não existem raízes reais.*

4.ª) $3x^4 - x^2 + 5 = 0$

Temos: $3(x^2)^2 - x^2 + 5 = 0 \iff x^2 = \dfrac{1 + \sqrt{1-60}}{6}$ *ou* $x^2 = \dfrac{1 - \sqrt{1-60}}{6} \iff$

$$\iff x^2 = \frac{1 + \sqrt{-59}}{6} \quad ou\ x^2 = \frac{1 - \sqrt{-59}}{6} \iff$$

$$\notin \mathbb{R} \qquad \notin \mathbb{R}$$

nem é preciso continuar. . .

$V = \varnothing$, e a equação *não admite solução* em $\mathbb{R}$.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 19

Resolva as seguintes *equações biquadradas* em $\mathbb{R}$:

1.ª) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

2.ª) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

3.ª) $4x^4 - 37x^2 + 9 = 0$

4.ª) $2x^4 - 18x^2 + 28 = 0$

5.ª) $x^4 - 16 = 0$

6.ª) $5x^4 - x^2 + 4 = 0$

7.ª) $-x^4 + 8x^2 + 9 = 0$

8.ª) $x^4 - x^2 = 0$

9.ª) $(4x^2 - 1)(x^2 + 1) = 26$

10.ª) $(x^2 - 1)^2 + (x^2 - 3)^2 = 20$

11.ª) $(x-1)(x+2)(x-4)(x+3) + 10x = 274$

12.ª) $4x^2 + 91 = \dfrac{225}{x^2} \quad (x \neq 0)$

13.ª) $25x^2 + \dfrac{12}{5x^2} = \dfrac{47}{3} \quad (x \neq 0)$

14.ª) $x^4 + 81 = 0$

15.ª) $x^4 + 4abx^2 - (a^2 - b^2)^2 = 0$

16.ª) $x^4 - (9a^2 + 1)x^2 + 9a^2 = 0$

17.ª) $4(a^2x^4 + 1) = (16a^2 + 1)x^2 \quad (a \neq 0)$

18.ª) $a^2b^2x^4 - (a^4 + b^4)x^2 + a^2b^2 = 0 \quad (a \neq 0 \wedge b \neq 0)$

19.ª) $x^4 - 2(a + b)x^2 + (a + b)^2 = 0$

20.ª) $\dfrac{a}{2x^2 - 2} + \dfrac{a + 2}{2x^2 + 2} = 1 \quad (x \neq 1 \text{ e } x \neq -1)$

Equações irracionais

3. *Definição*

Equação irracional é tôda sentença aberta que possui *radicais* e cuja variável figura no *radicando*. Exemplos:

$$\sqrt{x} = 6$$

$$\sqrt{2x + 12} = x - 6$$

$$\sqrt[3]{x^2 - 2} = \sqrt[3]{1 - x}$$

4. *Resolução*

A resolução de uma *equação irracional* é feita, geralmente, *elevando-se* ambos os membros da equação a uma *potência conveniente*, a fim de transformá-la numa equação *sem radicais*, de resolução conhecida.

A seguir, verificam-se quais os elementos do Conjunto-Verdade desta última equação que *pertencem* ao Conjunto-Verdade da equação irracional proposta.

Esta verificação é necessária, pois, elevando-se ambos os membros de uma equação ao quadrado, por exemplo, *não obtemos* necessàriamente uma equação equivalente à equação dada. De fato:

a equação: $x = a \ (a \neq 0)$, tem por Conjunto-Verdade: $V = \{a\}$

Elevando-se ambos os membros ao quadrado:

a equação: $x^2 = a^2$, tem o Conjunto-Verdade: $V = \{a, -a\}$

Então, as equações: $x = a$ e $x^2 = a^2$, *não são equivalentes*, por *não possuírem* o mesmo Conjunto-Verdade.

5. *Tipos diversos*

Por intermédio de exemplos, serão resolvidos alguns tipos mais freqüentes de *equações irracionais*.

1.º) $\sqrt{x} = 6$

Elevando ao *quadrado* ambos os membros da equação (isto porque o índice do radical é *dois*), temos:

$$(\sqrt{x})^2 = (6)^2 \text{ ou } x = 36$$

Foi assim obtida uma equação do *primeiro grau* na variável x, cujo Conjunto-Verdade é: $V = \{36\}$.

Será que 36 é *raiz* da equação irracional proposta?

Basta *verificar*, substituindo na equação proposta x por 36:

$$\sqrt{36} \overset{?}{=} 6$$
$$6 = 6\ (V)$$

Logo: 36 é *raiz* da equação irracional $\sqrt{x} = 6$.

2.º) $\boxed{x - 2\sqrt{x} = 15}$

Isolando o radical do primeiro membro (a finalidade é deixar o radical "sòzinho"...) e transpondo para o segundo membro os outros têrmos:

$$^-2\sqrt{x} = 15 - x$$

Elevando ao *quadrado* (já sabe porque...):

$$(^-2\sqrt{x})^2 = (15 - x)^2$$

ou

$$4x = 225 - 30x + x^2$$

ou

$$^-x^2 + 30x + 4x - 225 = 0$$
$$^-x^2 + 34x - 225 = 0 \iff x^2 - 34x + 225 = 0$$

que é uma equação do *segundo grau* na variável x, cujo Conjunto-Verdade é:

$V = \{25, 9\}$ (é só aplicar a *fórmula*...)

Será que os dois valôres 25 e 9 do Conjunto-Verdade da equação: $x^2 - 34x + 225 = 0$, são *raízes* da equação irracional proposta:

$$x - 2\sqrt{x} = 15\ ?$$

Vamos *testar:*

Substituindo x por 25

$$25 - 2\sqrt{25} \overset{?}{=} 15$$
$$25 - 2 \times 5 \overset{?}{=} 15$$
$$25 - 10 \overset{?}{=} 15$$
$$15 = 15\ (V)$$

Substituindo x por 9

$$9 - 2\sqrt{9} \overset{?}{=} 15$$
$$9 - 2 \times 3 \overset{?}{=} 15$$
$$9 - 6 \overset{?}{=} 15$$
$$3 = 15\ (F)$$

Logo: a *solução* da equação irracional proposta é sòmente o número 25.

3.º) $\boxed{x = 3 + \sqrt{x^2 - 5x + 6}}$

Isolando o radical, agora no segundo membro:

$$x - 3 = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$$

Elevando ao *quadrado*:

$$(x - 3)^2 = (\sqrt{x^2 - 5x + 6})^2$$

ou $\quad x^2 - 6x + 9 = x^2 - 5x + 6$

ou $\quad ^-6x + 5x = 6 - 9 \iff {^-x} = {^-3} \iff x = 3$

Obtemos uma equação do *primeiro grau* cujo Conjunto-Verdade é $V = \{3\}$

Fácil é verificar que 3 também é *raiz* da equação irracional proposta:

$$3 \overset{?}{=} 3 + \sqrt{9 - 15 + 6}$$
$$3 \overset{?}{=} 3 + \sqrt{0}$$
$$3 = 3 \qquad (V)$$

4.º) $\boxed{\sqrt{2x + 7} = 4 - \sqrt{2 - x}}$

Neste caso existem radicais nos *dois membros*. Primeiramente, eleva-se ao *quadrado* ambos os membros:

$$(\sqrt{2x + 7})^2 = (4 - \sqrt{2 - x})^2$$

ou $\quad 2x + 7 = 16 - 8\sqrt{2 - x} + 2 - x$

A seguir, *isola-se* o radical que restou num dos membros (caso já conhecido), reduzindo-se os têrmos semelhantes:

$$3x - 11 = {^-8}\sqrt{2 - x}$$

Elevando ao *quadrado* novamente:

$$9x^2 - 66x + 121 = 64(2 - x)$$

ou $\quad 9x^2 - 66x + 121 = 128 - 64x \iff 9x^2 - 2x - 7 = 0$

que é uma equação do *segundo grau*, cujo Conjunto-Verdade é:

$$V = \left\{1, \frac{-7}{9}\right\}$$

Ambos os valôres: 1 e $\frac{-7}{9}$ são *raízes* da equação irracional proposta.

Verifique você mesmo.

5.º) $\sqrt{x + \sqrt{x-1}} = \sqrt{2x-3}$

Elevando ao *quadrado* ambos os membros:

$$x + \sqrt{x-1} = 2x - 3$$

Isolando o radical:

$$\sqrt{x-1} = 2x - x - 3$$

ou $\sqrt{x-1} = x - 3$ (caso conhecido)

Elevando ao *quadrado* novamente:

$x - 1 = x^2 - 6x + 9 \iff x^2 - 7x + 10 = 0$ onde $V = \{5, 2\}$

Dos valôres encontrados 5 e 2, o *único* que é *raiz* da equação irracional proposta é o 5. Verifique!

6.º) $2\sqrt[3]{4x-1} = \sqrt[3]{2x+7}$

Elevando ambos os membros ao *cubo* (. . .agora o índice do radical é 3):

$(2\sqrt[3]{4x-1})^3 = (\sqrt[3]{2x+7})^3$ ou $8(4x-1) = 2x+7$

ou $32x - 8 = 2x + 7 \iff 30x = 15 \iff x = \dfrac{1}{2}$

Obtemos, pois, uma equação do *primeiro grau* cujo $V = \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

Verifique que $\dfrac{1}{2}$ é *raiz* da equação proposta.

7.º) $\sqrt[4]{17 - \sqrt[3]{7x-6}} = 2$

Elevando ambos os membros à *quarta potência*:

$$\left(\sqrt[4]{17 - \sqrt[3]{7x-6}}\right)^4 = (2)^4 \quad \text{ou} \quad 17 - \sqrt[3]{7x-6} = 16$$

$$\text{ou} \quad -\sqrt[3]{7x-6} = -1$$

Elevando, agora, ao *cubo:*

$$-(7x-6) = -1$$

ou $-7x + 6 = -1 \iff -7x = -7 \iff 7x = 7 \iff x = 1$

Equação do *primeiro grau*, cujo $V = \{1\}$

O número 1 é também *raiz* da equação irracional proposta. Verifique.

Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes *equações irracionais:*

1.ª) $\sqrt{x} = 5$

2.ª) $\sqrt{x} + 2x = 21$

3.ª) $\sqrt{2x} = 4x - 21$

4.ª) $-\sqrt{25 - x^2} = 1 - x$

5.ª) $\sqrt{18 - 2x} = \sqrt{x + 6}$

6.ª) $\sqrt{4x^2 + 7x - 2} = x + 2$

7.ª) $2\sqrt{5x-1} = 3\sqrt{3x-2}$

8.ª) $8x - 1 = 5\sqrt{x^2 + 4x - 3}$

9.ª) $\sqrt{4x+1} - \sqrt{3x-2} = 1$

10.ª) $6\sqrt{4x+13} - 7\sqrt{5x-9} = 0$

11.ª) $\sqrt{5x+6} = 2 + \sqrt{5x-6}$

12.ª) $3\sqrt{x+3} = 2\sqrt{x-12} + 5\sqrt{x-9}$

13.ª) $\sqrt{5 + \sqrt{1 + 5x}} = 3$

14.ª) $\sqrt{1 - x\sqrt{x^2 - 1}} = x - 1$

15.ª) $3\sqrt{1 - \dfrac{1}{x}} = \sqrt{1 - x}$ $(x \neq 0)$

16.ª) $\sqrt{x+4} - \sqrt{x-4} - \sqrt{x+11} + \sqrt{x-1} = 0$

17.ª) $\sqrt[3]{x^2 - 1} = \sqrt[3]{8}$

18.ª) $\sqrt[4]{8 - \sqrt[3]{2x-1}} = 1$

19.ª) $3a - x = \sqrt{5a^2 - x^2}$

20.ª) $\sqrt{a+x} + \sqrt{b-x} = \sqrt{a+b}$

Sistemas simples do segundo grau

6. *Apresentação e resolução*

A resolução de *sistemas simples do segundo grau*, que envolvem uma equação do *segundo grau* e outra do *primeiro grau*, é feita geralmente por intermédio do *método da substituição.*

Os exemplos a seguir esclarecerão a resolução preconizada:

1.º) $\begin{cases} x^2 - 2y = 5 \\ y - 2x = 20 \end{cases}$

"Tirando" o valor de y na segunda equação e *substituindo* na primeira:

$$y = 20 + 2x \implies x^2 - 2(20 + 2x) = 5$$

$$\text{ou } x^2 - 40 - 4x - 5 = 0 \iff x^2 - 4x - 45 = 0$$

$$\text{cujo: } V_1 = \{9, -5\}$$

Voltando à equação: $y = 20 + 2x$, e substituindo x uma vez por 9 e outra vez por -5, obtemos:

$x = 9 \implies y = 20 + 2 \times 9$ ou $x = -5 \implies y = 20 + 2 \times -5$

$y = 20 + 18 \qquad y = 20 - 10$

$y = 38 \qquad y = 10$

Logo: $V = \{(9, 38), (^-5, 10)\}$ e a *solução* do sistema é dada pelos *pares ordenados:* (9, 38) e (⁻5, 10).

Verificação: *par* (9, 38) $\begin{cases} 9^2 - 2\times 38 \overset{?}{=} 5 \\ 38 - 2\times 9 \overset{?}{=} 20 \end{cases}$ ou $\begin{cases} 81 - 76 = 5 \ (V) \\ 38 - 18 = 20 \ (V) \end{cases}$

par (⁻5, 10) $\begin{cases} (^-5)^2 - 2(10) \overset{?}{=} 5 \\ 10 - 2(^-5) \overset{?}{=} 20 \end{cases}$ ou $\begin{cases} 25 - 20 = 5 \ (V) \\ 10 + 10 = 20 \ (V) \end{cases}$

2.º) $\begin{cases} 3x - 2y = 11 \\ x \cdot y = 10 \end{cases}$

"Tirando" o valor de x da primeira equação e *substituindo* na segunda:

$$3x - 2y = 11 \Longrightarrow x = \frac{11 + 2y}{3}$$

$$x \cdot y = 10 \Longleftrightarrow \left(\frac{11 + 2y}{3}\right) y = 10$$

$$\text{ou} \quad \frac{11y + 2y^2}{3} = 10$$

$$11y + 2y^2 = 30 \Longleftrightarrow 2y^2 + 11y - 30 = 0, \text{ cujo: } V_1 = \left\{2, \frac{^-15}{2}\right\}$$

Para êstes valôres de y a equação: $x = \dfrac{11 + 2y}{3}$, fornece os valôres de x:

$$y = 2 \Longrightarrow x = \frac{11 + 2\times 2}{3} = \frac{11 + 4}{3} = 5 \text{ ou } y = \frac{^-15}{2} \Longrightarrow x = \frac{11 + 2\times\frac{^-15}{2}}{3} = \frac{11 - 15}{3} = \frac{^-4}{3}$$

Logo: $V = \left\{(5, 2), \left(\frac{^-4}{3}, \frac{^-15}{2}\right)\right\}$

Solução do sistema: os *pares ordenados* (5, 2) e $\left(\frac{^-4}{3}, \frac{^-15}{2}\right)$

Verifique.

3.º) $\begin{cases} x + y = 8 \\ x^2 + y^2 = 34 \end{cases}$

"Tirando" o valor de x da primeira equação e substituindo na segunda:

$x = 8 - y \Longrightarrow \quad (8 - y)^2 + y^2 = 34$

ou $64 - 16y + y^2 + y^2 = 34 \Longleftrightarrow 2y^2 - 16y + 30 = 0$

ou $y^2 - 8y + 15 = 0$, cujo $V_1 = \{5, 3\}$

Logo: $y = 5 \Longrightarrow x = 8 - 5 = 3$ ou $y = 3 \Longrightarrow x = 8 - 3 = 5$

Portanto: $V = \{(3, 5), (5, 3)\}$

Solução do sistema: os *pares ordenados* (3, 5) e (5, 3)

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — Grupo 21

Resolva, em $\mathbb{R}$, os seguintes *sistemas simples do segundo grau:*

1.º) $\begin{cases} x^2 - 3y = {^-20} \\ y - 4x = 0 \end{cases}$

2.º) $\begin{cases} 3x + 4y = 39 \\ xy = 30 \end{cases}$

3.º) $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ xy = 10 \end{cases}$

4.º) $\begin{cases} x + y = \frac{5}{6} \\ 3xy = \frac{1}{2} \end{cases}$

5.º) $\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{4}{3} \\ xy = 3 \end{cases}$

6.º) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \\ x + y = 7 \end{cases}$

7.º) $\begin{cases} 5x^2 + 4y^2 = 41 \\ 2x + 3y = 11 \end{cases}$

8.º) $\begin{cases} x + y = a \\ xy = b \end{cases}$

9.º) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ \frac{x - y}{x + y} = \frac{1}{7} \end{cases}$ $(x \neq {^-y})$

10.º) $\begin{cases} 2x + y = a \\ x^2 + 2y = b \end{cases}$

Problemas do segundo grau

7. *Que é um problema do segundo grau?*

Diz-se que um *problema* é do *segundo grau* quando a sua resolução depende de uma equação ou de um sistema do segundo grau.

A resolução de um problema do segundo grau — a exemplo do que já foi estudado com os problemas do primeiro grau — consta das seguintes fases:

a) construir a *sentença* (ou sentenças) *matemática(s)* correspondentes ao problema;

b) *resolução* da equação (ou sistema) relativa à sentença matemática estabelecida;

c) *interpretação* das raízes obtidas.

Os *exemplos* seguintes porão em evidência tais fases.

1.º) Qual é o número cujo quadrado é igual ao seu triplo aumentado de 28?

Representando por: x o número procurado; x^2 o seu quadrado

a seguinte *sentença matemática* corresponde ao problema:

$$x^2 = 3x + 28$$
$$\text{ou } x^2 - 3x + 28 = 0$$

equação do segundo grau cujo $V = \{7, ^-4\}$ (... é só resolver...). Logo, o problema admite *duas soluções*, pois tanto o número 7 como o número $^-4$ satisfazem à sentença estabelecida.

Verificação:

$$7 \Longrightarrow 7^2 \stackrel{?}{=} 3 \times 7 + 28 \qquad 49 \stackrel{?}{=} 21 + 28 \qquad 49 = 49\ (V)$$

$$^-4 \Longrightarrow (^-4)^2 \stackrel{?}{=} 3 \times ^-4 + 28 \qquad 16 \stackrel{?}{=} ^-12 + 28 \qquad 16 = 16\ (V)$$

2.º) Determinar dois números inteiros consecutivos tais que a soma de seus inversos seja igual a $\frac{5}{6}$.

Representando por: x um dos números (1.º); $x + 1$ seu consecutivo

então: $\frac{1}{x}$ representará o inverso de x; $\frac{1}{x+1}$ representará o inverso de $x + 1$

Sentença matemática correspondente ao problema:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{5}{6}$$

Resolvendo a equação obtida, vem:

m.m.c.: $6x(x + 1)$ $\qquad 6(x + 1) + 6x = 5x(x + 1)$

ou $\qquad 6x + 6 + 6x = 5x^2 + 5x$

e daí $\qquad 5x^2 - 7x - 6 = 0$, cujo $V = \left\{2, \frac{^-3}{5}\right\}$

É preciso agora saber interpretar as duas raízes obtidas, que podem ou não representar *solução* do problema.

No caso de se tomar para x o número inteiro 2, então o *consecutivo* $x + 1$ será 3, e os números procurados (solução) são:

2 e 3 *Verificação:* $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \stackrel{?}{=} \frac{5}{6}$

$$\frac{3+2}{6} \stackrel{?}{=} \frac{5}{6}$$

$$\frac{5}{6} = \frac{5}{6}\ (V)$$

O valor $\frac{^-3}{5}$ é *rejeitado*, porque a natureza do problema exige como resposta *número inteiro*.

3.º) Determinar um número positivo que, diminuído de sete vêzes a sua raiz quadrada, dê como resultado 44.

A *sentença matemática* correspondente é:

$$x - 7\sqrt{x} = 44$$

que é uma equação *irracional* cuja resolução vai depender de uma equação do segundo grau. Basta isolar o radical e elevar ao quadrado a seguir:

$$^-7\sqrt{x} = 44 - x$$

$$49x = 1.936 - 88x + x^2$$

ou $\qquad x^2 - 137x + 1.936 = 0$, cujo $V = \{121, 16\}$

Dêsses valôres, sòmente 121 satisfaz às condições do problema. Por quê?

4.°) Perguntado sôbre sua idade, Mário, para ser "esnobe", respondeu: "O quadrado de minha idade menos o décuplo dela é igual a 56". Qual é a idade de Mário?

Representando por x a idade de Mário, a *sentença matemática* correspondente ao problema é:

$$x^2 - 10x = 56$$

ou

$$x^2 - 10x - 56 = 0, \text{ cujo } V = \{14, {}^-4\}$$

O valor $^-4$ é rejeitado em virtude de a idade de Mário não poder ser negativa! (. . .se não não teria nascido. . .).

Logo: a idade de Mário é 14 *anos*. Tire a prova.

5.°) A importância de NCr\$ 72,00 vai ser repartida igualmente entre um certo número de colegiais premiados durante o ano letivo. Por ocasião da distribuição cinco colegiais desistiram da importância que iriam receber a favor dos demais colegas, que eram mais necessitados. Dêste modo os colegiais restantes foram beneficiados com NCr\$ 2,40 a mais cada um. Qual o número de todos os colegiais premiados?

Representando por x o número de todos os colegiais premiados, então:

$\dfrac{72}{x}$ representa a importância que cada um dos colegiais deveria receber

$\dfrac{72}{x-5}$ representa a importância que cada um dos $x - 5$ colegiais recebeu depois que 5 desistiram.

A *sentença matemática* correspondente é:

$$\frac{72}{x-5} = \frac{72}{x} + 2{,}40$$

Resolvendo essa equação, e depois de "muita simplificação", daí resulta:

$$x^2 - 5x - 150 = 0, \text{ cujo } V = \{15, {}^-10\}$$

Rejeitando a raiz negativa $^-10$, você terá como resposta o *número de colegiais premiados:* 15. Tire a prova.

6.°) Determinar dois números cuja soma é 25 e cujo produto é 150.

1.ª Solução: Os números procurados são as raízes da equação:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

ou

$$x^2 - 25x + 150 = 0, \text{ cujo } V = \{10, 15\}$$

Logo, os números procurados são: 10 e 15 ou 15 e 10.

2.ª Solução: Resolvendo o sistema do segundo grau:

$$\begin{cases} x + y = 25 \\ x \cdot y = 150 \end{cases} \text{ (método da substituição)}$$

cuja solução é o *par ordenado* (10, 15) ou o *par ordenado* (15, 10).

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 22

Resolva os seguintes *problemas do segundo grau:*

1.°) Determine o número cujo triplo de seu quadrado somado com êsse número seja igual a 2.

2.°) Diga qual o número que, somando 10 ao quíntuplo de seu quadrado, dá como resultado 27 vêzes o seu valor.

3.°) A diferença entre o quadrado de um certo número e o seu próprio dôbro é igual a $^-1$. Qual é êsse número?

4.°) Ache dois números consecutivos tais que a soma dos seus quadrados seja 25.

5.°) Decomponha o número 28 em dois fatôres tais que a sua soma seja igual a 11.

6.°) Determine o número que, multiplicado pelos seus $\frac{3}{4}$, dê o produto 12.

7.°) Se do quadrado de um número subtrairmos 6, o resto será 30. Qual é êsse número?

8.°) Qual é o número que é excedido de 6 pelo dôbro de seu quadrado?

9.°) Determine dois números cuja soma é 25 e cujo produto é 156.

10.°) A soma dos quadrados de três números consecutivos é 194. Determine êsses números.

11.°) Determine um número tal que o seu quadrado seja igual ao seu triplo aumentado de 28.

12.°) Ache dois números pares consecutivos, sabendo que o produto dêles é 2.808. (NOTA: lembre-se de que, se x representar um *número par*, o *par consecutivo* será representado por: $x + 2$.)

13.°) Determine três números ímpares consecutivos, sabendo que o seu produto é igual a sete vêzes a sua soma. (NOTA: representação de três números ímpares consecutivos: x, $x + 2$, $x + 4$, onde x representa um número ímpar qualquer.)

14.º) Determine dois números inteiros consecutivos tais que a soma de seus inversos seja $\frac{5}{6}$.

15.º) Ache cinco números inteiros consecutivos, sabendo que a soma dos quadrados dos quatro primeiros números é igual a quarenta e duas vêzes o quinto número.

16.º) Ache o número inteiro que, aumentado de 43, dá o quadrado do número sucessivo.

17.º) Ache dois números ímpares consecutivos tais que a diferença de seus quadrados seja igual a 8.000.

18.º) Uma fração tem o denominador superando de 2 o numerador. Somando 2 ao numerador e 1 ao denominador, a fração aumenta de $\frac{7}{30}$. Determine-a.

19.º) O quociente de uma divisão é os $\frac{3}{8}$ do divisor, e o resto 36 é a qüinquagésima quinta parte do dividendo. Ache o divisor.

20.º) O dividendo de uma divisão é 1.235. Sabendo que o divisor é igual ao quociente e que o resto é os $\frac{2}{7}$ do divisor, determine o divisor.

21.º) O divisor de uma divisão ultrapassa de 5 o quociente que, por sua vez, ultrapassa o resto também de 5. Determine o divisor dessa divisão, sabendo que o dividendo é 1.075.

22.º) Dividindo um número de dois algarismos, cuja soma é 9, pelo quociente da divisão do algarismo das unidades pelo algarismo das dezenas, obtém-se o quociente 18. Qual é êsse número?

23.º) Um pai tem 54 anos e seu filho 12. Há quanto tempo a idade do pai foi igual ao quadrado da do filho?

24.º) Um pai tinha 24 anos ao nascer o seu filho. O produto das atuais idades de ambos é o triplo do quadrado da idade do filho. Quais são as duas idades?

25.º) A idade de uma criança daqui a 6 anos será o quadrado da idade que tinha há 6 anos. Pergunta-se a idade atual dessa criança.

26.º) Determine as idades de Vera Maria e Sílvia Maria, sabendo que a sua diferença é 4 e o seu produto 32.

27.º) Dois garotos têm juntos 240 figurinhas. Quantas tem cada um, se a soma de seus quadrados é igual a 29.600?

28.º) Vendendo um objeto por NCr$ 255,00, ganho duas vêzes a raiz quadrada do preço pago. Quanto paguei por êsse objeto?

29.º) Calcule as dimensões de um retângulo, sabendo que tem 78m de perímetro e 360m² de área.

30.º) Uma quantia de NCr$ 4.000,00 deveria ser repartida em partes iguais por um certo número de pessoas. No momento da partilha, quatro delas desistiram em benefício das demais. Nessas condições a parte relativa a cada uma das pessoas remanescentes aumentou de NCr$ 50,00. Qual o número de pessoas que deveriam ser beneficiadas e quanto recebeu cada uma depois das quatro desistências?

31.º) Duas fontes podem, juntas, encher um recipiente em 18 horas. Qual o tempo que cada uma, sòzinha, leva para encher êsse recipiente, se a primeira emprega nessa operação 27 horas mais que a segunda?

32.º) Um reservatório, com a capacidade de 270 litros, é alimentado por uma torneira. Se essa torneira despejar mais um litro por segundo, o tempo necessário para encher o reservatório diminui de 45 segundos. Quantos litros a torneira despeja por segundo?

33.º) Um trem, num percurso de 260km, reduziria de 36 minutos a duração de sua viagem se aumentasse de 5km sua velocidade horária. Determine a sua velocidade nestas condições.

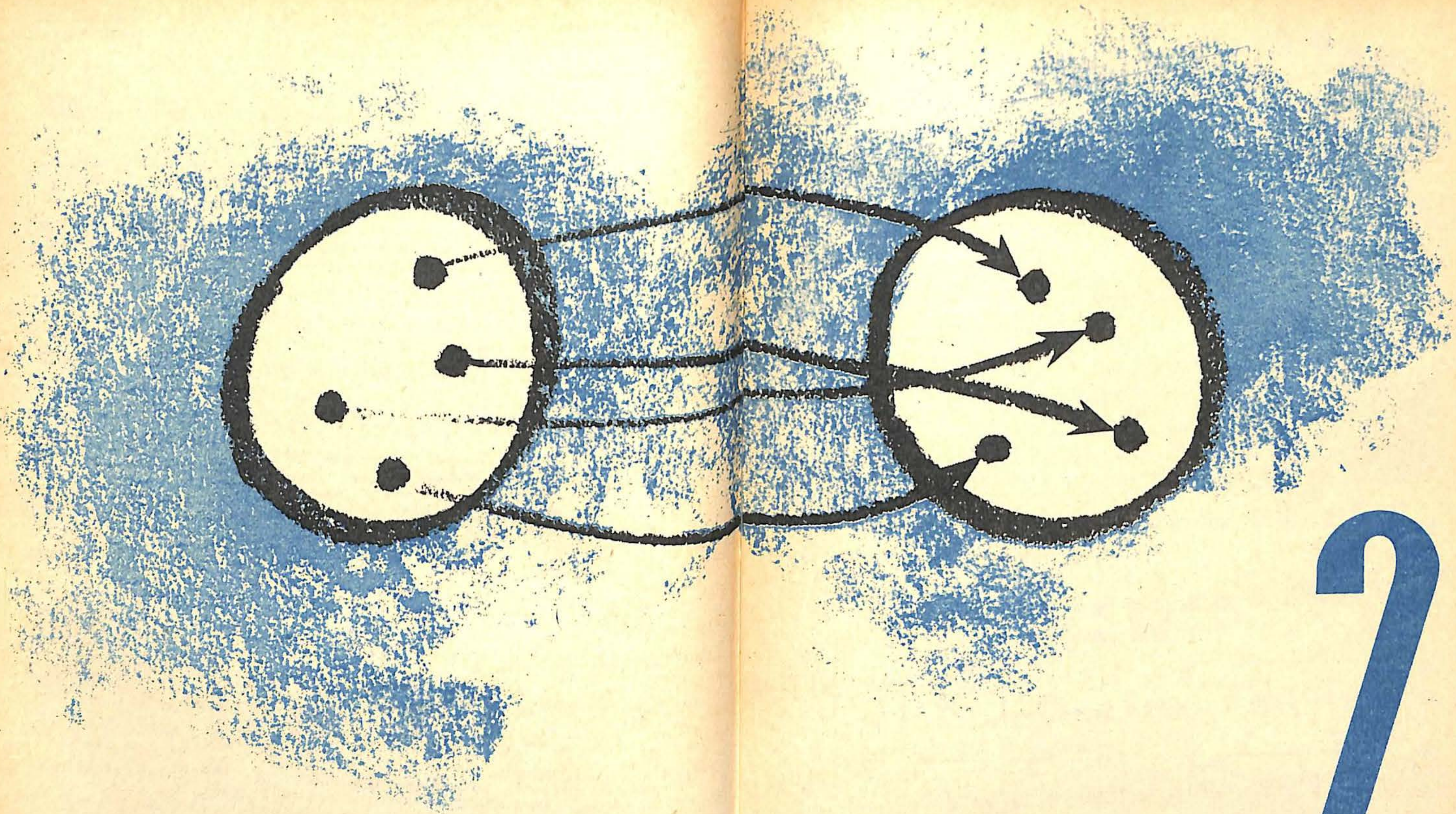
34.º) Dois ciclistas partem ao mesmo tempo em direção a uma vila distante 90km. O primeiro, que percorre 1km por hora mais que o segundo, chega ao destino uma hora antes do outro. Qual a velocidade de cada um?

35.º) Repartir o número m em duas partes tais que o produto delas seja igual a n. (NOTA: se x representar a primeira parte procurada, a segunda parte será representada por: $m - x$, e a sentença correspondente é:

$$x(m - x) = n \text{ ou } x^2 - mx + n = 0 \text{ (equação do segundo grau literal)}$$

Para que as raízes sejam reais, é suficiente que o discriminante: $m^2 - 4n \geqslant 0 \iff n \leqslant \left(\frac{m}{2}\right)^2$. Se $n = \frac{m}{2}$, o discriminante será nulo e as duas partes tornar-se-ão iguais a $\frac{m}{2}$; a igualdade dessas duas partes acarretará o *máximo* valor para n. Observe que, se $n > \left(\frac{m}{2}\right)^2$, a equação correspondente ao problema não admitirá raízes reais e, portanto, o problema *não será possível*.)

36.º) Reparta o número a em duas partes tais que a soma do quadrado da primeira com o dôbro da segunda seja igual a b.



capítulo 2

Funções

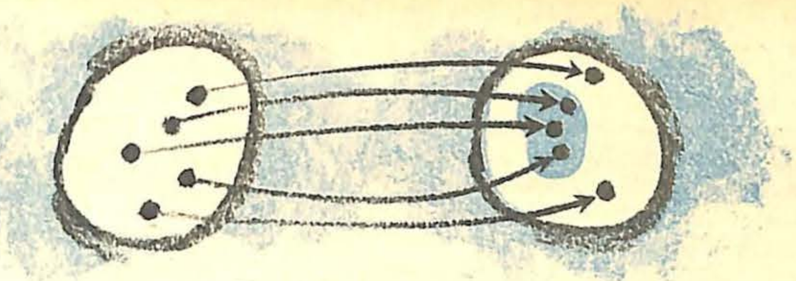
1.ª Parte · Funções; domínio e conjunto-imagem

2.ª Parte · Sistema de coordenadas cartesianas; gráfico das funções

3.ª Parte · Funções lineares; iniciação à Geometria Analítica

4.ª Parte · Função trinômio do segundo grau; gráfico

· Estudo algébrico do trinômio; inequações do segundo grau



1.ª Parte · Funções; domínio e conjunto-imagem

Funções

1. Conceito de função

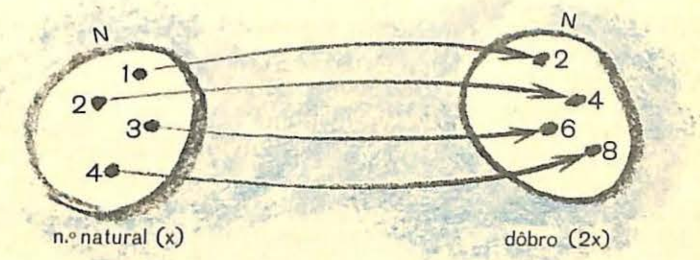
Alguns exemplos vão permitir-lhe, agora, "explorar" a idéia de *função*, que é das mais importantes de tôda a Matemática. É bom saber que o significado de *função*, a ser estudado, difere ligeiramente daquele usado na linguagem diária.

Em Matemática a palavra *função* (ou *aplicação* ou, ainda, *transformação*) é empregada para designar uma *relação especial* entre *dois counjntos*, mediante uma certa *correspondência* entre os seus elementos.

1.º) Seja a *relação* entre conjuntos de *números naturais:*

*"associar a **cada número natural** x o **número** $2x$"*

Desenhando, temos a seguinte representação:



Essa relação é uma **função,** porque:

*"a **cada elemento** x* (número natural) *está associado um **único elemento** $2x$* (dôbro do número natural)"

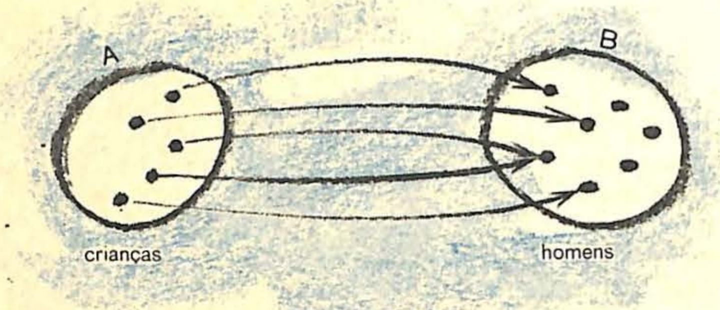
Assim, por exemplo:

ao *número* 1 está associado o *único* elemento 2 (dôbro de 1)
ao *número* 2 está associado o *único* elemento 4 (dôbro de 2)
ao *número* 3 está associado o *único* elemento 6 (dôbro de 3)
. . . .

2.º) Seja a *relação:*

*"associar a **cada criança** o **seu pai**"*

entre o conjunto A (de crianças) e o conjunto B (de homens):



Essa relação também é uma **função,** pois:

*"a **cada elemento** (criança) do conjunto A está associado um **único elemento** (pai) do conjunto B"*

Observações (que podem ser apreciadas fàcilmente pelo desenho):

1) como *cada criança* possui apenas *um pai,* então de cada ponto do conjunto A parte apenas uma *única flecha* dirigida a um ponto do conjunto B;
2) se acontecer de *várias crianças* terem o *mesmo pai* (ou seja, crianças irmãs), êste fato no desenho é traduzido da seguinte maneira: no conjunto B vão existir pontos que são extremidades de *mais de uma flecha*, que partem de *pontos distintos* do conjunto A (no desenho, um ponto de B é extremidade de *duas* flechas que partem de *dois pontos distintos* de A);
3) como existem homens que *não são pais,* existem no desenho pontos do conjunto B que *não são associados* (ou correspondentes) de nenhum ponto do conjunto A.

De qualquer maneira, êstes dois exemplos já lhe permitem compreender bem o *traço característico* de uma **função:**

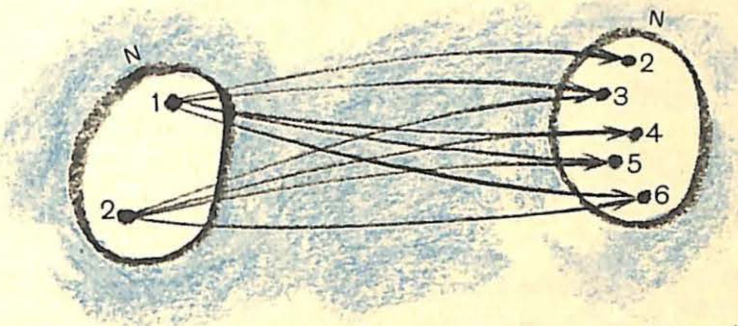
*"a **cada elemento** do conjunto A está associado um **único elemento** do conjunto B"*

Contra-exemplos:

1.º) A *relação:*

"associar a *um número natural* x um *número maior que* x"

entre conjuntos de números naturais, *não é* uma função. Por quê?



Porque a *cada elemento* x (número natural) *não está associado um único elemento* e, sim, **muitos** (*todos* os números naturais maiores que x).

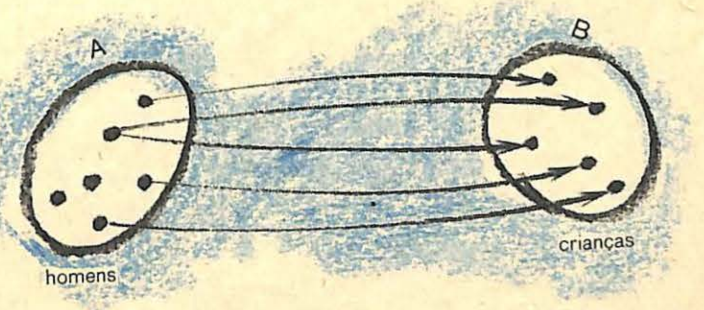
Assim, por exemplo:

ao *número* 1 estão associados *os elementos:* 2, 3, 4, 5,. . .(todos maiores que 1)
ao *número* 2 estão associados *os elementos:* 3, 4, 5, 6,. . .(todos maiores que 2)
ao *número* 3 estão associados *os elementos:* 4, 5, 6, 7,. . .(todos maiores que 3)
. . . .

2.º) A *relação:*

"associar a *cada pai* o *seu filho*"

entre o conjunto A (de homens) e o conjunto B (de crianças), também *não é* função!



De fato: existem elementos (pais) do conjunto *A* (de homens) aos quais estão associados *mais de um elemento* (filhos) do conjunto *B*.

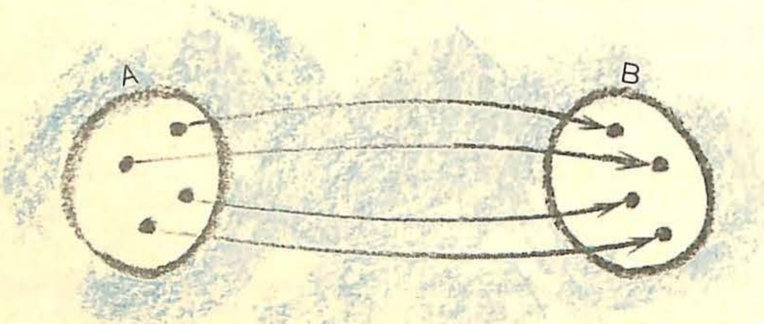
O desenho mostra que a *um mesmo pai* (um ponto de *A*) estão associados *dois filhos* (dois pontos distintos de *B*). Além disso, existem pontos de *A* (conjunto de homens) que *não representam pais* e, portanto, a êles *não está* associado ponto algum de *B*.

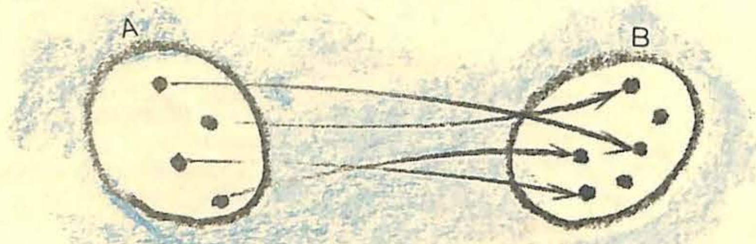
E é bom lembrar, mais uma vez: para haver *função*, é necessário que a *cada elemento* de *A* (isto é, *qualquer!*) esteja associado um *único elemento* de *B*.

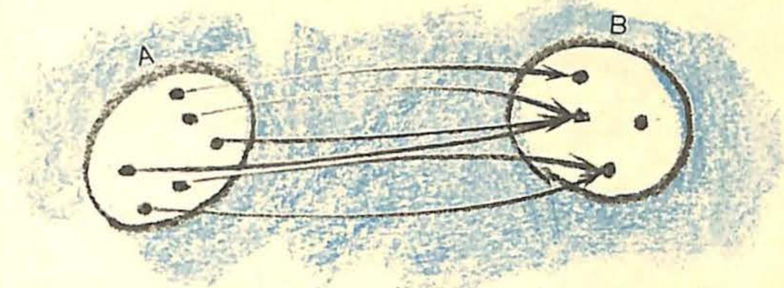
RESUMO

Função** é uma relação especial entre dois conjuntos* A *e* B *que associa a* ***cada elemento *do conjunto* A *um* ***único elemento*** *do conjunto* B.

Observe: nos desenhos que traduzem essa definição, *cada ponto* do conjunto *A* é origem *sòmente* de uma *única flecha*, não importando que no conjunto *B* possam sobrar pontos, ou que seus pontos possam ser extremidades de mais de uma flecha.

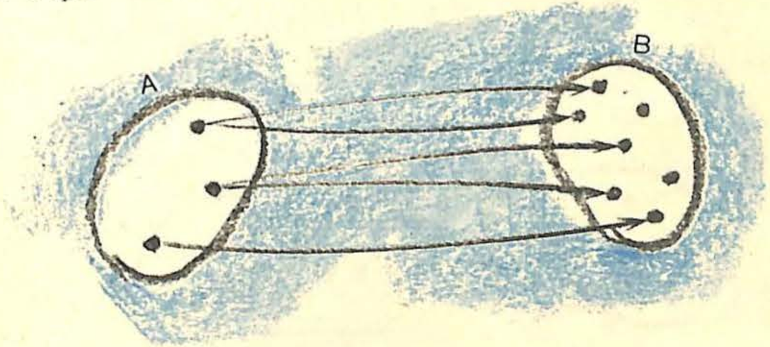


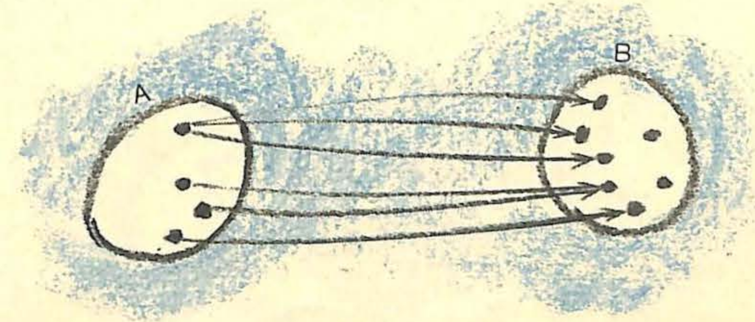


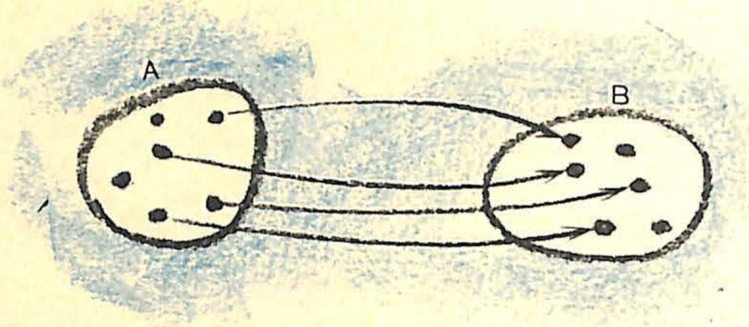


Quando algum ponto do conjunto *A* é origem de *mais de uma* flecha ou *não é origem* de nenhuma flecha, então a relação *não é* função!

É o que nos dizem os seguintes desenhos:



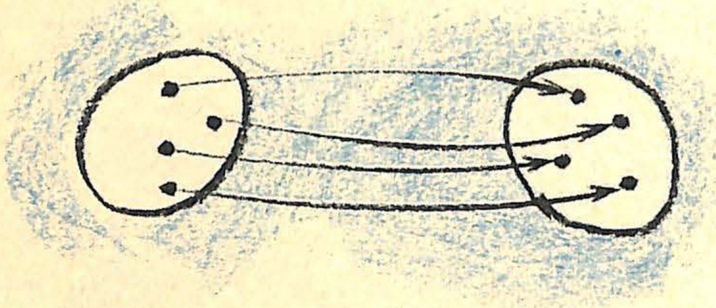




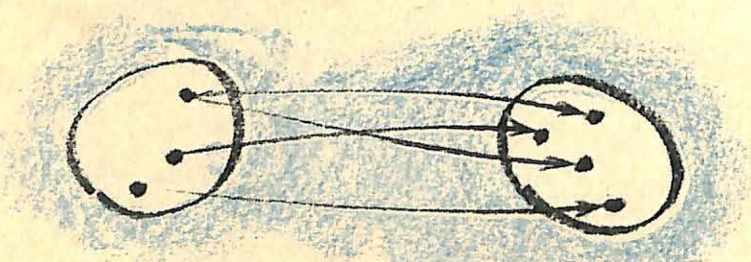
TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 23

Assinale quais dos seguintes desenhos de *relações* representam *funções:*

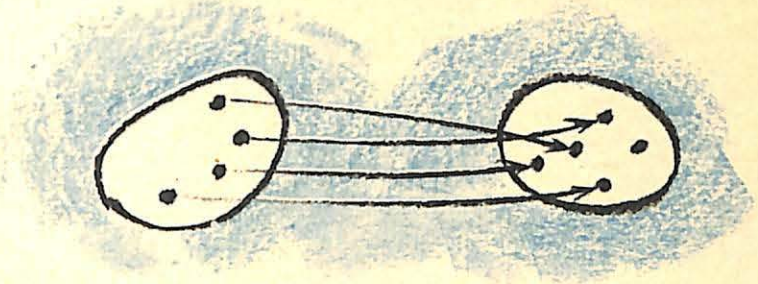
1.º)



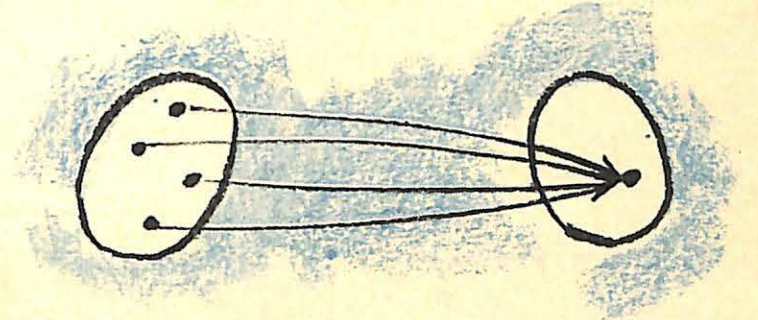
2.º)



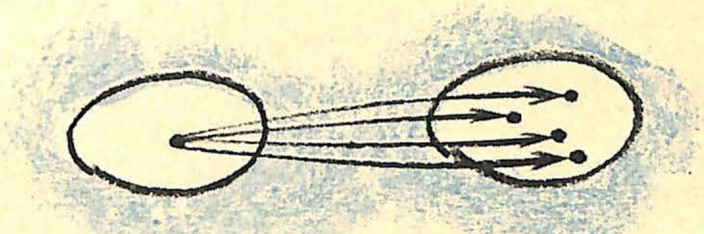
3.º)



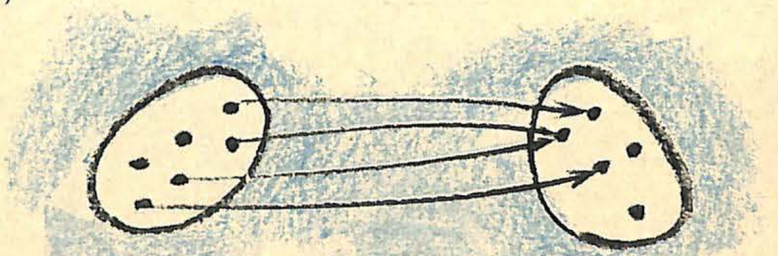
4.º)



5.º)



6.º)



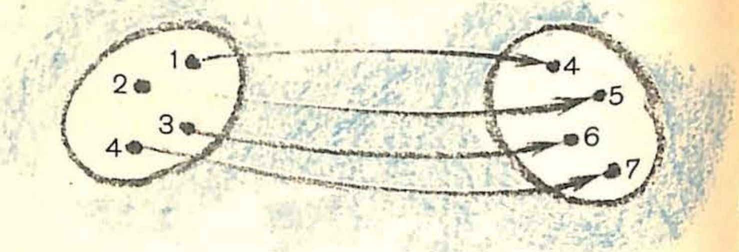
EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO — GRUPO 24

Caracterize cada uma das seguintes *funções*, destacando a correspondência entre os conjuntos por intermédio de desenho.

1.ª) "Associar a cada número natural x o número $x + 3$"

$\boxed{x \longrightarrow x + 3}$

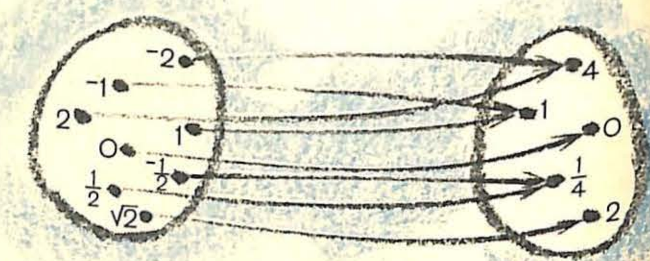
$x=1 \Longrightarrow 1+3=4$
$x=2 \Longrightarrow 2+3=5$
$x=3 \Longrightarrow 3+3=6$
$x=4 \Longrightarrow 4+3=7$



2.ª) "Associar a cada número real x o número x^2"

$\boxed{x \longrightarrow x^2}$

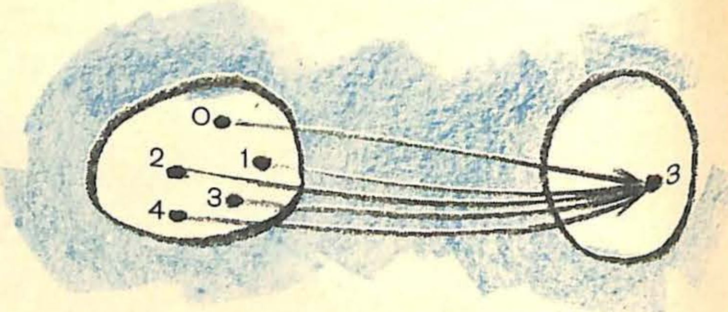
$x={}^-2 \Longrightarrow ({}^-2)^2 = 4$
$x={}^-1 \Longrightarrow ({}^-1)^2 = 1$
$x=\frac{{}^-1}{2} \Longrightarrow \left(\frac{{}^-1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$
$x=0 \Longrightarrow 0^2 = 0$
$x=\frac{1}{2} \Longrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$
$x=1 \Longrightarrow 1^2 = 1$
$x=\sqrt{2} \Longrightarrow (\sqrt{2})^2 = 2$
$x=2 \Longrightarrow 2^2 = 4$



3.ª) "Associar a cada número real x o número 3"

$\boxed{x \longrightarrow 3}$

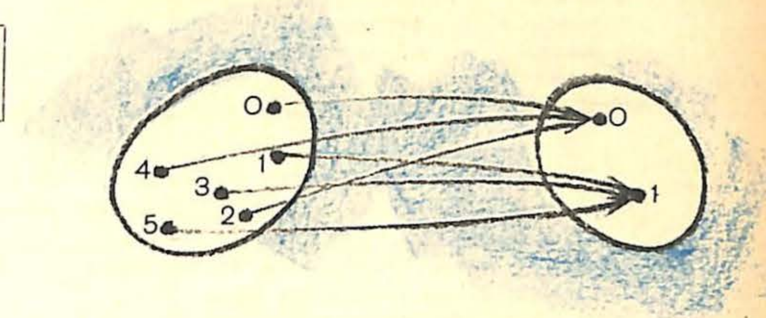
NOTA: A qualquer valor atribuído a x está sempre *associado*, pela função, o *único* valor 3. Neste caso a função é denominada CONSTANTE.



4.ª) "Associar a cada número inteiro par o número 0 e a cada número inteiro ímpar o número 1"

$\boxed{\begin{array}{l} x \text{ (par)} \longrightarrow 0 \\ x \text{ (ímpar)} \rightarrow 1 \end{array}}$

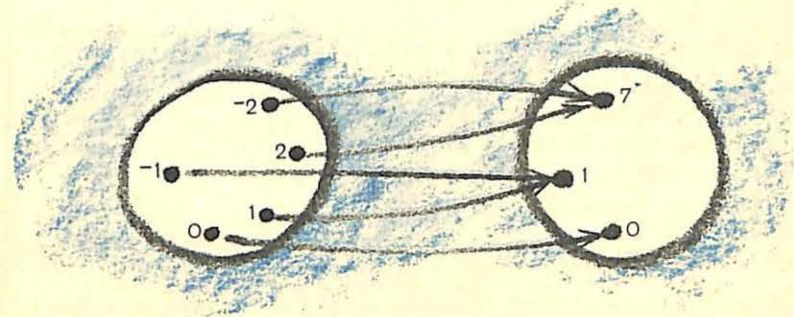
$x = 0 \Longrightarrow 0$
$x = 1 \Longrightarrow 1$
$x = 2 \Longrightarrow 0$
$x = 3 \Longrightarrow 1$
$x = 4 \Longrightarrow 0$



5.ª) "Associar a cada número real x o número $2x^2 - 1$"

$\boxed{x \longrightarrow 2x^2 - 1}$

$x = {}^-2 \Longrightarrow 2({}^-2)^2 - 1 = 2 \times 4 - 1 = 7$
$x = {}^-1 \Longrightarrow 2({}^-1)^2 - 1 = 2 \times 1 - 1 = 1$
$x = 0 \Longrightarrow 2(0)^2 - 1 = 2 \times 0 - 1 = {}^-1$
$x = 1 \Longrightarrow 2 \times 1^2 - 1 = 2 \times 1 - 1 = 1$
$x = 2 \Longrightarrow 2 \times 2^2 - 1 = 2 \times 4 - 1 = 7$



EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 25

1. Caracterize cada uma das seguintes *funções*, destacando a correspondência entre os conjuntos por intermédio de desenho.

   1.ª) Associar a cada número natural x o número $3x$
   2.ª) Associar a cada número inteiro x o número $x - 2$
   3.ª) Associar a cada número real x o número $2x + 1$
   4.ª) Associar a cada número real x o número 5
   5.ª) Associar a cada número real x o número x^2

6.ª) Associar a cada número real x o número $4x^2$

7.ª) Associar a cada número real x o número $3x^2 - x$

8.ª) Associar a cada número real x o número $x^2 - 5x + 4$

9.ª) Associar a cada número inteiro par o número 2 e a cada número inteiro ímpar o número 3

2. Assinale, entre as relações seguintes, as que são *funções*. Justifique:

1.ª) Associar a cada pessoa o seu nome

2.ª) Associar a cada nome a pessoa que atende por êsse nome

3.ª) Associar a cada animal a classe zoológica a que pertence (Ex.: cachorro → mamífero)

4.ª) Associar a cada Estado do Brasil a sua capital

5.ª) Associar a cada jovem a sua altura

6.ª) Associar a cada altura (dada por uma medida) o jovem que possui essa altura

7.ª) Associar a cada aluno a sua nacionalidade

8.ª) Associar a cada palavra em Português a sua classificação gramatical

9.ª) Associar a cada pessoa o seu tio

10.ª) Associar a cada pessoa o seu sobrinho

11.ª) Associar a cada Estado brasileiro a pessoa nascida nesse Estado

12.ª) Associar a cada ano entre 1960 e 1967 o atual presidente do Brasil

LEMBRETE AMIGO

As *funções* estão presentes na maioria de nossas atividades.

Quando os jornais dão destaque ao "gráfico" que mostra o crescimento da produção anual de automóveis no Brasil, estão ressaltando a *relação* entre o *ano de produção* e o *número de automóveis produzidos nesse ano*.

Está, pois, presente uma *função:* a que associa a *cada ano* (elementos de um conjunto A de anos) um *único número de automóveis produzidos* (que são elementos de um conjunto B de números inteiros).

Também a *relação* entre a *temperatura* e o *volume de mercúrio* de um termômetro é uma *função*, porque:

"*a cada temperatura* está associado *um único valor para o volume de mercúrio* que o termômetro registra"

Você já pensou que confusão seria se essa relação não fôsse função? Num mesmo instante o doente poderia ter duas febres diferentes!. . .

2. *Notação usual; domínio e conjunto-imagem de uma função*

É comum representarem-se as *funções* pelas letras minúsculas:

$$f, \; g, \; h, \ldots$$

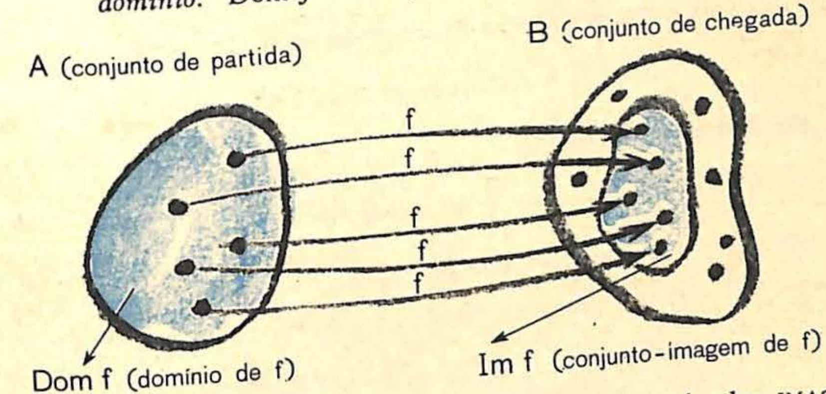
Uma *função f* é, pois, a relação que associa a *cada elemento* de um conjunto A um *único elemento do conjunto* B. Nestas condições, diz-se que:

a *função f* está ● ↗ *definida* em A ↘ *com valôres* em B

e escreve-se: $\qquad f\colon\; A \longrightarrow B$

O conjunto A é denominado *domínio* da função f, e o conjunto de todos os elementos de B, associados aos elementos de A pela função f, é denominado *conjunto-imagem* ou *contra-domínio* da função f. Indicações:

domínio: Dom f $\qquad$ *conjunto-imagem:* Im f



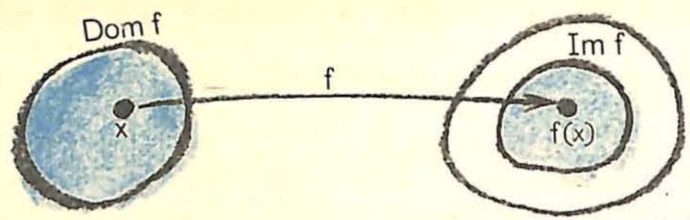
Os elementos do *conjunto-imagem* (Im f) são denominados IMAGENS dos respectivos elementos do *domínio* (Dom f).

OBSERVAÇÃO: Nas *relações gerais* que se podem estabelecer entre dois conjuntos, não-vazios, A e B, o conjunto A é denominado **conjunto de partida** e, o conjunto B, **conjunto de chegada.** No caso particular das *funções*, que são *relações especiais* entre dois conjuntos A e B, o *domínio* da função é o próprio *conjunto de partida A*, isto é, Dom $= A$, e o *conjunto-imagem* é um subconjunto do *conjunto de chegada B*, ou seja, Im $\subset B$.

Se x fôr algum elemento do domínio, a *imagem* de x, pela função f, é indicada por $f(x)$ (lê-se: "f de x"), e escrevemos:

$$f\colon\; x \longrightarrow f(x)$$

que se lê: f "leva" x em $f(x)$.



Quando o conjunto-imagem é constituído sòmente de *números*, a função é denominada *numérica* (os exercícios do Grupo 27 são de *funções numéricas*).

As funções numéricas que iremos estudar nesta série são *definidas* em $\mathbb{R}$ *com valôres* em $\mathbb{R}$. A maioria delas possui como *domínio* o *conjunto* $\mathbb{R}$ e como *conjunto-imagem* um *subconjunto de* $\mathbb{R}$.

Exemplos:

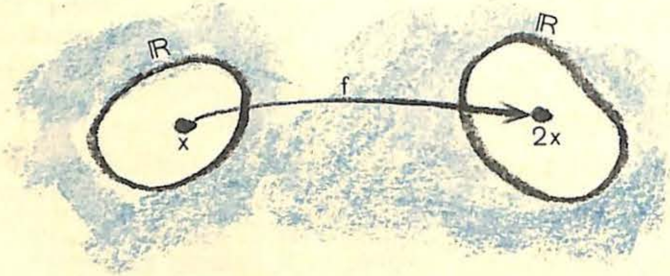
1.º) Construir o *domínio* e o *conjunto-imagem* da função numérica f:

"*associar a cada número real* x *o número* 2x"

Simbòlicamente, temos:

$$f\colon x \longrightarrow 2x$$

que se lê: (f "leva" x em $2x$).



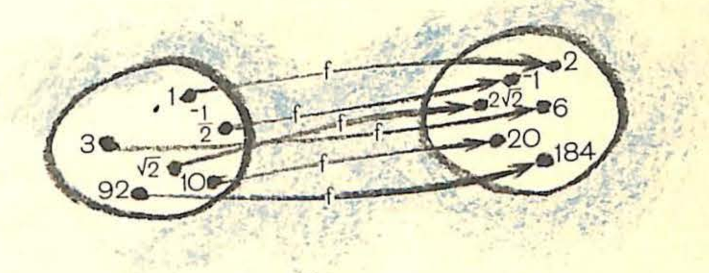
Tanto o *domínio* (constituído pelos *números reais*) como o *conjunto-imagem* (constituído pelo *dôbro* daqueles números reais) são o próprio conjunto $\mathbb{R}$.

Logo:

$$\text{Dom}\, f = \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \text{Im}\, f = \mathbb{R}$$

A determinação prática das *imagens* já é de seu conhecimento:

$$f\colon x \longrightarrow f(x) = 2x$$
$$1 \Longrightarrow f(1) = 2 \times 1 = 2$$
$$\frac{-1}{2} \Longrightarrow f\left(\frac{-1}{2}\right) = 2 \times \frac{-1}{2} = -1$$
$$3 \Longrightarrow f(3) = 2 \times 3 = 6$$
$$\sqrt{2} \Longrightarrow f(\sqrt{2}) = 2 \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$



Qual é a *imagem* do elemento 10 pela função f?

Temos: $f(10) = 2 \times 10 = 20$. Logo, a imagem de 10, pela função f, é 20.

Qual é o *elemento* do *domínio* cuja imagem pela f é 184?

Agora, temos que resolver uma equação, pois:

$$f(x) = 2x = 184 \Longleftrightarrow x = 184 : 2 \Longleftrightarrow x = 92$$

Logo, o *elemento* cuja imagem pela f é 184, é 92.

2.º) Qual é o *domínio* e o *conjunto-imagem* da função numérica g:

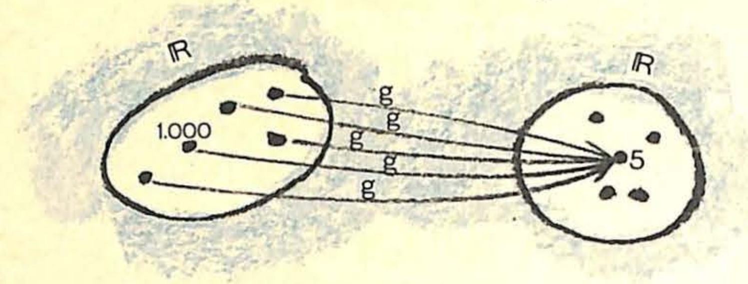
"*associar a cada número real* x *o número* 5"?

Temos: $g\colon x \longrightarrow 5$

que se lê: (g "leva" x em 5)

Portanto:

$$\text{Dom}\, f = \mathbb{R} \ \text{e} \ \text{Im}\, f = \{5\} \ \text{(que é um subconjunto de } \mathbb{R}\text{)}$$



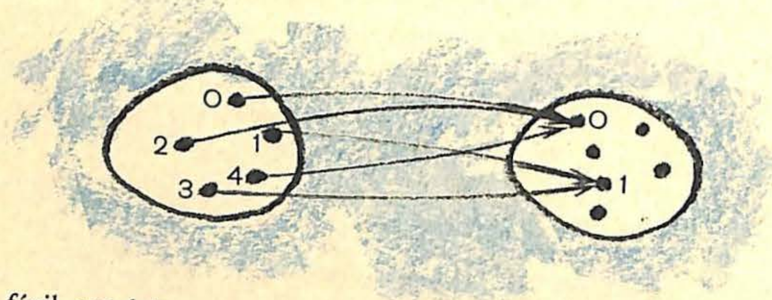
Qual é a *imagem* do elemento 1.000 pela função g?

Temos: $g(1.000) = 5$, isto é, a imagem de 1.000 pela função g é 5 (como de resto é a imagem de *qualquer número real*, pela g, por ser esta *constante*).

3.º) Construir o *domínio* e o *conjunto-imagem* da função numérica h: *"associar a cada número inteiro par o número 0 e a cada número inteiro ímpar o número 1"*

Temos: $h: \begin{cases} x\ (par) \longrightarrow 0 \\ x\ (ímpar) \longrightarrow 1 \end{cases}$

que se lê: (h "leva" x *par* em 0 e x *ímpar* em 1)



É fácil concluir que:

$$\text{Dom} f = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5, \ldots\} \text{ e } \text{Im} f = \{0,\ 1\}$$

Qual é a *imagem* do elemento 28 pela função h?

28 é *par*; portanto, segue-se que: $h(28) = 0$

TESTE DE ATENÇÃO — Grupo 26

Descreva o *domínio* e o *conjunto-imagem* das seguintes funções não-numéricas:

1.ª) "Associar a cada pessoa o seu nariz" (Modêlo)
Temos: $\text{Dom} f = \{\text{pessoas}\}$ e $\text{Im} f = \{\text{narizes das pessoas que pertencem ao domínio}\}$
2.ª) "Associar a cada pessoa o seu nome"
3.ª) "Associar a cada pessoa a sua idade"
4.ª) "Associar a cada pessoa a sua bôca"
5.ª) "Associar a cada pessoa a sua cabeça"

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — Grupo 27

Supondo como *domínio* o conjunto **ℝ**, determine o *conjunto-imagem* das seguintes funções numéricas:

1.ª) $f: x \longrightarrow x$

2.ª) $g: x \longrightarrow 4x$

3.ª) $h: x \longrightarrow x^2$

4.ª) $j: \begin{cases} x\ (\text{par}) \longrightarrow 10 \\ x\ (\text{ímpar}) \rightarrow 15 \end{cases}$

5.ª) $f: x \longrightarrow 5$

6.ª) $g: x \longrightarrow \frac{x}{2}$

7.ª) $h: x \longrightarrow 3x^2$

8.ª) $j: x \longrightarrow \sqrt{x}$

3. *Funções definidas por sentenças matemáticas (equações)*

É usual exprimirem-se as funções *definidas* em **ℝ**, *com valôres* em **ℝ**, mediante *sentenças matemáticas* que se traduzem em *equações*. Assim, por exemplo, a equação:

$$y = 3x + 1$$

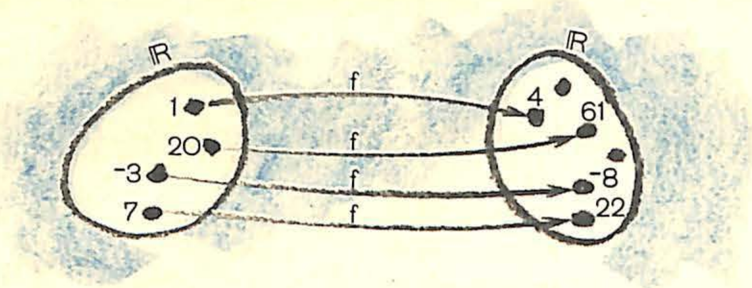
define a *função f*: "*y é o triplo de* x *mais um*" ou, simbòlicamente:

$$f: x \longrightarrow 3x + 1 \qquad (f \text{ "leva" } x \text{ em } 3x + 1)$$

entendendo-se que a *qualquer* valor real de x está associada a *imagem* $y = f(x) = 3x + 1$.

Assim, para os elementos 1, 20 e $^-3$ (do *domínio*) estão associadas respectivamente as *imagens* 4, 61 e $^-8$ (do *conjunto-imagem*), pois:

$$\text{para} \bullet \begin{cases} \nearrow x = 1 \Longrightarrow f(1) = 3 \times 1 + 1 = 4 \\ \rightarrow x = 20 \Longrightarrow f(20) = 3 \times 20 + 1 = 61 \\ \searrow x = {}^-3 \Longrightarrow f({}^-3) = 3 \times {}^-3 + 1 = {}^-8 \end{cases}$$



Qual é o *elemento* x (do domínio) cuja *imagem* pela função f é 22?

Temos: $f(x) = 3x + 1 = 22 \iff 3x = 21 \iff x = 7$

Logo: 7 é o elemento do domínio cuja imagem, pela função f, é 22.

Observação: Salvo aviso em contrário, o *domínio* das funções que iremos estudar será sempre o conjunto ℝ.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO — Grupo 28

1.º) Seja a *função f*, definida pela equação:

$$\boxed{y = x^2 - 1}$$

Então:

$f: x \longrightarrow x^2 - 1$ (f "leva" x em $x^2 - 1$)

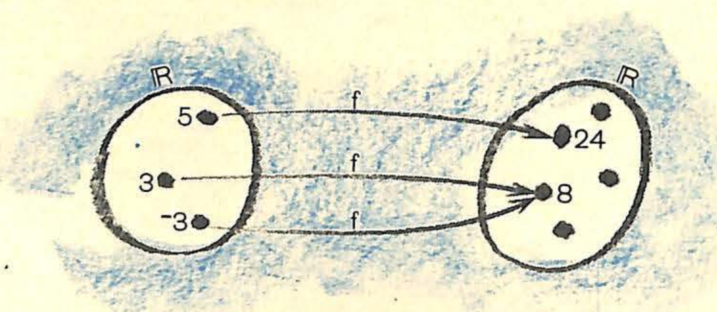
a) Calcular: $f(5)$ (é o mesmo que dizer: calcular a *imagem* do elemento 5 pela função f)

Temos: $f(5) = 5^2 - 1 = 25 - 1 = 24$ (que é a *imagem* de 5)

b) Qual é o elemento do domínio cuja *imagem* pela f é 8? (é o mesmo que escrever: $f(x) = 8$, $x = ?$)

Temos: $f(x) = 8 \iff x^2 - 1 = 8 \iff x^2 = 9 \iff x = \pm 3 \iff x = 3$ ou $x = {}^-3$

Portanto, são *dois* (3 e $^-3$) os elementos do domínio cuja *imagem* é 8.



2.º) Seja a *função f*, definida pela equação:

$$\boxed{y = x^2 - 5x + 6}$$

ou seja: $f: x \longrightarrow x^2 - 5x + 6$ (f "leva" x em $x^2 - 5x + 6$)

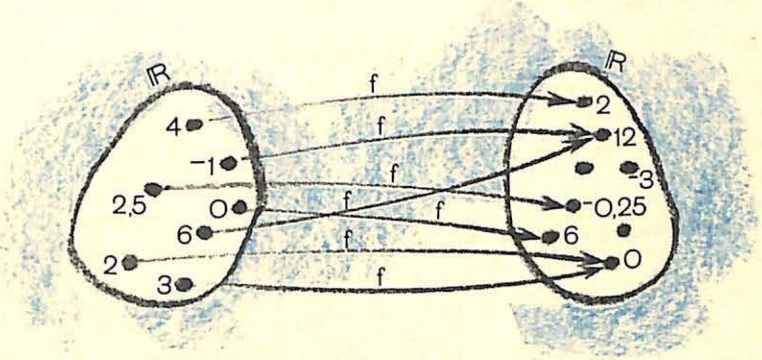
a) Calcular: $f(4)$, $f(^-1)$, $f(6)$ e $f(0)$

Temos: $f(4) = 4^2 - 5 \times 4 + 6 = 16 - 20 + 6 = 2$

$f(^-1) = (^-1)^2 - 5 \times {}^-1 + 6 = 1 + 5 + 6 = 12$

$f(6) = 6^2 - 5 \times 6 + 6 = 36 - 30 + 6 = 12$

$f(0) = 0^2 - 5 \times 0 + 6 = 0 - 0 + 6 = 6$



b) Qual é o elemento do domínio cuja *imagem* pela f é 0?

Temos: $f(x) = 0 \iff x^2 - 5x + 6 = 0$

equação do *segundo grau* que tem: $V = \{2, 3\}$

Portanto, os elementos procurados são 2 e 3.

c) Qual é o elemento do domínio cuja imagem pela f é $^-0{,}25$?

Temos: $f(x) = {}^-0{,}25 \iff x^2 - 5x + 6 = {}^-0{,}25$, cujo $V = \{2{,}5\}$

Agora, o *único* elemento 2,5 do domínio é que tem por imagem $^-0{,}25$.

d) Existe algum elemento do domínio que tenha, pela função f, a imagem $^-3$?

Vejamos: $f(x) = {}^-3 \iff x^2 - 5x + 6 = {}^-3$, cujo $V = \varnothing$

Logo, *não há elementos* do domínio que tenham $^-3$ por *imagem*, isto é: $^-3 \in \text{Im} f$.

As seguintes *funções f*, onde Dom $f = \mathbb{R}$, são definidas por *equações*. Responda às perguntas constantes em cada exercício e ilustre as respostas com desenho:

1.º) $y = 2x + 5$

onde: $f: x \longrightarrow 2x + 5$

Calcule:

a) $f(0)$, $f(^-2)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f\left(\frac{^-5}{2}\right)$

b) $f(x) = 5 \quad x = ?$ *d)* $f(x) = 0 \quad x = ?$

c) $f(x) = \frac{1}{2} \quad x = ?$ *e)* $f(x) = {^-1} \quad x = ?$

2.º) $y = x^2 - 3$

onde: $f: x \longrightarrow x^2 - 3$

Calcule:

a) $f(^-1)$, $f(1)$, $f(0)$, $f(\sqrt{3})$

b) $f(x) = 13 \quad x = ?$ *d)* $f(x) = {^-5} \quad x = ?$

c) $f(x) = 0 \quad x = ?$ *e)* $f(x) = 1 \quad x = ?$

3.º) $y = x^2 - 7x + 10$

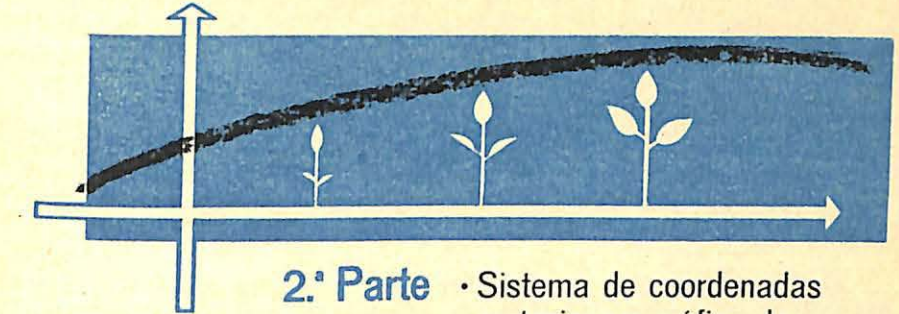
onde: $f: x \longrightarrow x^2 - 7x + 10$

Calcule:

a) $f(2)$, $f(^-3)$, $f(5)$, $f(\sqrt{2})$

b) $f(x) = 0 \quad x = ?$ *d)* $f(x) = 10 \quad x = ?$

c) $f(x) = {^-2{,}25} \quad x = ?$ *e)* $f(x) = {^-5} \quad x = ?$



2.ª Parte · Sistema de coordenadas cartesianas; gráfico das funções

Gráfico das funções

4. *Coordenadas cartesianas no plano*

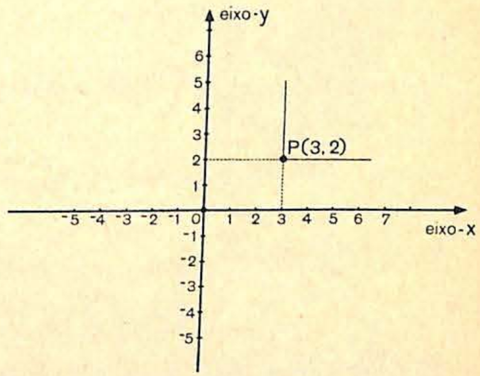
Você já aprendeu, nas outras séries, a localizar exatamente a *posição de um ponto* na *reta numerada*, mediante a sua *abscissa* (que é um número real, lembra-se?).

Agora você vai aprender a localizar a *posição* exata de um *ponto* no *plano*. Como?

Por intermédio de *duas retas numeradas* — também chamadas *eixos* — que se interceptam num ponto *O*, denominado *origem*. De preferência, consideram-se:

1) os eixos *perpendiculares* entre si;

2) a *mesma unidade de medida* nos eixos.



O eixo horizontal é denominado *eixo-x* e, o outro, *eixo-y*.

A localização de *um ponto* (*P* na figura) *no plano* (determinado pelos eixos) é feita por intermédio de um *par ordenado de números reais* (3 e 2 na figura). Êstes números reais são conhecidos quando se traçam por *P* as *paralelas* aos eixos-*x* e *y*, respectivamente. A paralela ao eixo-*y* intercepta o eixo-*x* num ponto que possui determinada abscissa (3, na figura), assim como a paralela ao eixo-*x* intercepta o eixo-*y*, num ponto de determinado valor (2, na figura).

Nestas condições, ao *ponto* P corresponde *um par ordenado de números reais* $(3, 2)$ e, recìprocamente, conhecido o *par ordenado de números reais*, fica determinado o *ponto*, como *intersecção* das retas paralelas aos respectivos eixos (na figura, a reta que passa por 3 no eixo-x e a reta que passa por 2 no eixo-y). Há, pois:

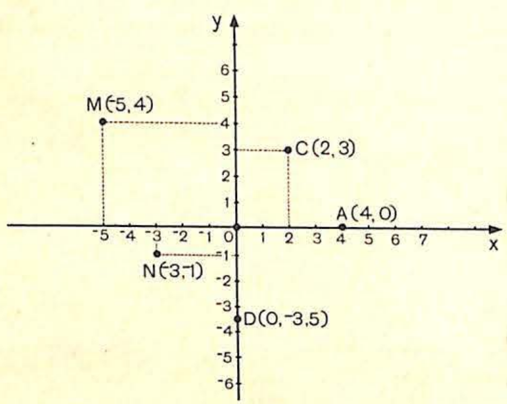
uma correspondência biunívoca (ou *um a um*) *entre pares ordenados de números reais e pontos do plano.*

Na figura temos: $(3, 2) \rightleftarrows P$

O *primeiro* número do par é denominado *abscissa* de P e, o *segundo*, *ordenada*. São ambos chamados de *coordenadas cartesianas do ponto* P, em homenagem ao matemático e filósofo francês do século XVII, René DESCARTES (CARTESIUS, em latim).

Indicação: $P(3, 2)$

$$P(3,\ 2) \quad \left.\begin{array}{l} 3 \longrightarrow \text{abscissa} \\ 2 \longrightarrow \text{ordenada} \end{array}\right\} \text{coordenadas cartesianas de } P$$



Os pontos pertencentes ao eixo-x têm *ordenada nula*, e os pontos pertencentes ao eixo-y têm *abscissa nula*. A *origem* O tem como coordenadas o par $(0, 0)$.

Na figura, estão localizados os pontos:

$C(2, 3)$; $A(4, 0)$; $D(0, -3{,}5)$; $N(-3, -1)$; $M(-5, 4)$; $O(0, 0)$

pertencentes a um plano determinado pelos eixos-x e y, que, assim em conjunto, constituem um *sistema de referência cartesiano*.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 30

Localize, num plano, por intermédio de um *sistema de referência cartesiano*, os seguintes pontos dados pelas suas coordenadas:

$A(-1, -2)$	$E(2, 4)$	$M\left(\frac{-2}{3}, 0\right)$
$B(3, -1)$	$F(-1{,}5;\ 2{,}4)$	$N\left(0, \frac{1}{2}\right)$
$C(0, 3)$	$G(0, 0)$	$P(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$
$D(-2, 4)$	$H(\sqrt{2}, 0)$	$Q(-5, -5)$

TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 31

Num *sistema cartesiano de referência* de eixos perpendiculares (também chamado *ortogonal*):

1.º) Marque os pontos: $A(-2, 0)$, $B(0, 2)$ e $C(0, 3)$.
Unindo êsses pontos, que espécie de *triângulo* você obterá:
a) eqüilátero? *b*) isósceles? *c*) escaleno?

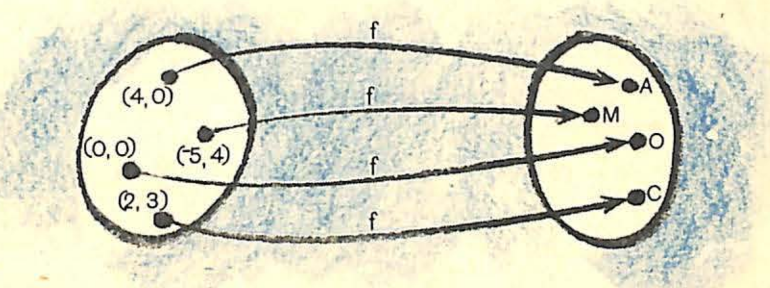
2.º) Mesma questão para os pontos: $M(-2, 0)$, $N(0, 2)$ e $P(0, \sqrt{2})$.

3.º) Que figura geométrica você obterá unindo consecutivamente (A, B, C, D) os pontos $A(2, 3)$, $B(6, 3)$, $C(6, 7)$ e $D(2, 7)$?

LEMBRETE AMIGO

Uma vez fixadas duas retas perpendiculares no plano como eixos, você entra em contacto com mais uma função f:

"a que associa a *cada par ordenado de números reais* um *único ponto do plano*"



5. *Gráficos das funções cujo domínio é o conjunto* $\mathbb{R}$, *definidas por equações*

1.º) Seja a *função f*, definida pela *equação do primeiro grau* nas variáveis x e y:

$$\boxed{y = 2x}$$

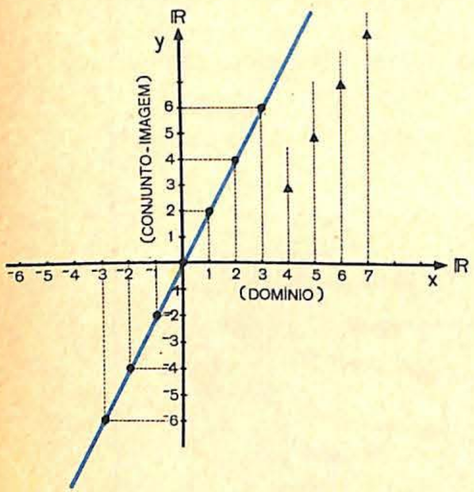
Você já sabe que o domínio e o conjunto-imagem dessa função é o próprio conjunto $\mathbb{R}$ e que:

$f\colon x \longrightarrow 2x$ (f "leva" x em $2x$)

O *gráfico* dessa função vai ser construído por intermédio de um *sistema cartesiano de referência*, onde o *eixo-x* representará o *domínio* ($\mathbb{R}$) e, o *eixo-y*, o *conjunto-imagem* ($\mathbb{R}$).

Cada ponto (x, y), de coordenadas $(x, 2x)$ (basta lembrar que, se $y = 2x$, a segunda coordenada é o *dôbro* da primeira), *pertence* ao gráfico.

Para facilitar a determinação dos pontos que pertencem ao gráfico dessa função, atribua a x os valôres reais que você quiser (de preferência escolha números inteiros) e calcule o valor correspondente de y:



$x = 0 \Longrightarrow y = 2 \times 0 = 0$ ou
$x = 1 \Longrightarrow y = 2 \times 1 = 2$
$x = 2 \Longrightarrow y = 2 \times 2 = 4$
$x = 3 \Longrightarrow y = 2 \times 3 = 6$
. . . .

x	y	pontos
0	0	(0, 0)
1	2	(1, 2)
2	4	(2, 4)
3	6	(3, 6)
.	.	.
.	.	.
.	.	.

Escolhendo para x *números inteiros negativos*:

$x = {}^-3 \Longrightarrow y = 2 \times {}^-3 = {}^-6$ ou
$x = {}^-2 \Longrightarrow y = 2 \times {}^-2 = {}^-4$
$x = {}^-1 \Longrightarrow y = 2 \times {}^-1 = {}^-2$
. . . .

x	y	pontos
$^-3$	$^-6$	$(^-3, {}^-6)$
$^-2$	$^-4$	$(^-2, {}^-4)$
$^-1$	$^-2$	$(^-1, {}^-2)$
.	.	.
.	.	.
.	.	.

O conjunto de todos os pontos de coordenadas $(x, 2x)$ é a *curva* representativa da função: $y = 2x$.

O gráfico obtido mostra que a *curva* é uma RETA (. . .a "mais simples" das curvas!) e as coordenadas (x, y) de todo ponto *pertencente* a essa *reta* satisfazem à equação: $y = 2x$. Assim, por exemplo:

— para $x = 6 \Longrightarrow y = 2 \times 6 = 12$ e o ponto $(6, 12) \in$ à reta $y = 2x$
— para $x = {}^-1 \Longrightarrow y = 2 \times {}^-1 = {}^-2$ e o ponto $(^-1, {}^-2) \in$ à reta $y = 2x$
— para $x = 1.000 \Longrightarrow y = 2 \times 1.000 = 2.000$ e o ponto $(1.000, 2.000) \in$ à reta $y = 2x$

(Êsse ponto não é "visto" no desenho da *reta* porque a fôlha do livro é pequena e a *reta*. . .)

Então:

a *cada valor de x* (do domínio) está associado *um único valor y* (do conjunto-imagem) que, nessa ordem, constituem as coordenadas cartesianas de um ponto da reta: $y = 2x$.

Também existem pontos do plano que *não pertencem* à reta $y = 2x$. É o caso, por exemplo, do ponto $(1, 5)$, cujas coordenadas não satisfazem à equação: $y = 2x$.

Logo: $(1, 5) \in$ à reta $y = 2x$, pois: $5 = 2 \times 1$ (falso)

E o ponto $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ *pertence* ou *não* à reta $y = 2x$? Verifique.

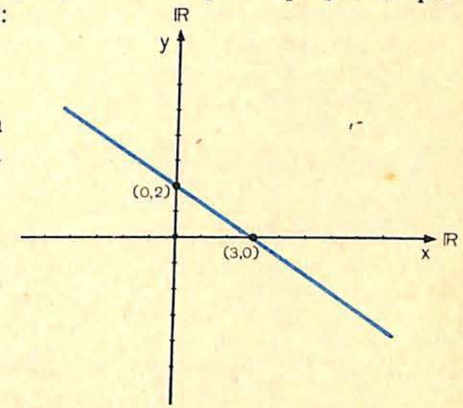
2.º) Representar gràficamente a *função f* definida pela *equação do primeiro grau* em duas variáveis:

$$2x + 3y = 6$$

"Tirando" o valor de y, essa equação pode ser escrita sob a forma equivalente:

$$y = \frac{6 - 2x}{3}$$

Logo: $f\colon x \longrightarrow \frac{6 - 2x}{3}$



Construção do *gráfico:*

$x = 0 \Longrightarrow y = \frac{6 - 2 \times 0}{3} = \frac{6 - 0}{3} = 2$ ou
$x = 1 \Longrightarrow y = \frac{6 - 2 \times 1}{3} = \frac{6 - 2}{3} = \frac{4}{3}$
$x = 2 \Longrightarrow y = \frac{6 - 2 \times 2}{3} = \frac{6 - 4}{3} = \frac{2}{3}$
$x = 3 \Longrightarrow y = \frac{6 - 2 \times 3}{3} = \frac{6 - 6}{3} = 0$
$x = 6 \Longrightarrow y = \frac{6 - 2 \times 6}{3} = \frac{6 - 12}{3} = {}^-2$

x	y	pontos
0	2	$(0, 2) \longrightarrow$ intersecção com o eixo-y
1	$\frac{4}{3}$	$\left(1, \frac{4}{3}\right)$
2	$\frac{2}{3}$	$\left(2, \frac{2}{3}\right)$
3	0	$(3, 0) \longrightarrow$ intersecção com o eixo-x
6	$^-2$	$(6, {}^-2)$

Observação importante:

A função f: $2x + 3y = 6$ é, como no primeiro exemplo, definida por uma equação do *primeiro* grau com duas variáveis, e o seu gráfico continua sendo... RETA.

Será que tôda *equação do primeiro grau com duas variáveis* tem por gráfico, no plano, uma RETA?

Sim. A demonstração dêsse fato será feita mais tarde. Por enquanto você vai verificando experimentalmente pelo desenho...

Agora, para a construção rápida da RETA — que é o *gráfico de uma equação do primeiro grau com duas variáveis* — você vai desfrutar da vantagem da *unidade* dos diversos assuntos da Matemática, preconizada nestes quatro anos de curso:

Diz a Geometria (3.ª série):

"*Dois pontos distintos determinam uma e sòmente uma reta*" (*P*1)

Então basta conhecer as coordenadas de *dois pontos* para que a *reta* possa ser desenhada e o gráfico estar pronto...

De preferência, êsses dois pontos podem ser os da *intersecção* da reta com os *eixos-x* e *y*, respectivamente. As suas coordenadas são obtidas assim: faz-se, primeiro, $x = 0$ e calcula-se o valor de y (que é o ponto de intersecção com o eixo-y); a seguir, faz-se $y = 0$ e calcula-se o valor de x (que é o ponto de intersecção com o eixo-x).

Os pontos de intersecção da reta: $2x + 3y = 0$, com os eixos são, respectivamente:

$$x = 0 \Longrightarrow y = \frac{6 - 2 \times 0}{3} = \frac{6 - 0}{3} = 2 \text{ isto é: } (0,\ 2) \text{ (intersecção com o eixo-}y)$$

$$y = 0 \Longrightarrow x = \frac{6 - 3 \times 0}{2} = \frac{6 - 0}{2} = 3 \text{ isto é: } (3,\ 0) \text{ (intersecção com o eixo-}x)$$

3.º) Representar gràficamente a *função f* definida pela equação:

$$\boxed{y = x^2 - x - 6}$$

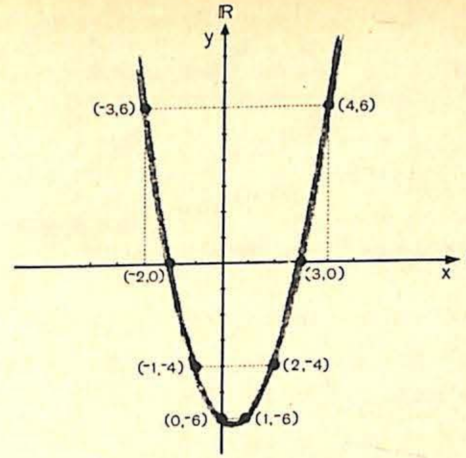
que é do *segundo grau em duas variáveis.*

Temos: f: $x \longrightarrow x^2 - x - 6$

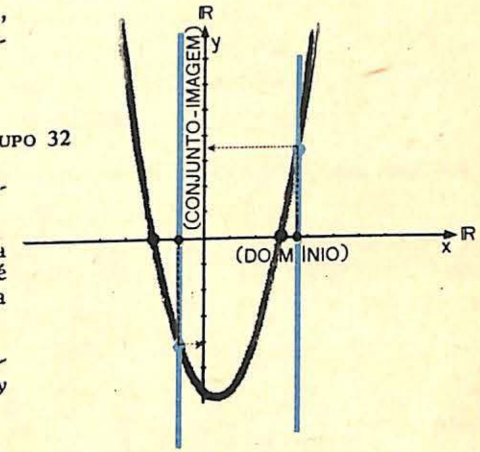
A equação que agora define a função f *não é do primeiro grau*, portanto *não espere obter uma* RETA como gráfico... Você terá idéia da *curva* que representa a função f, construindo o maior número de pontos (cujas coordenadas satisfaçam à equação: $y = x^2 - x - 6$) e traçando uma linha contínua por êsses pontos. Iniciemos construindo os pontos de abscissa $^-3$, em seguida $^-2$, $^-1$, 0, 1, 2,... e obteremos:

$x = {}^-3 \Longrightarrow y = ({}^-3)^2 - {}^-3 - 6 = 9 + 3 - 6 = 6$
$x = {}^-2 \Longrightarrow y = ({}^-2)^2 - {}^-2 - 6 = 4 + 2 - 6 = 0$
$x = {}^-1 \Longrightarrow y = ({}^-1)^2 - {}^-1 - 6 = 1 + 1 - 6 = {}^-4$
$x = 0 \Longrightarrow y = 0^2 - 0 - 6 = 0 - 6 = {}^-6$
$x = 1 \Longrightarrow y = 1^2 - 1 - 6 = 1 - 1 - 6 = {}^-6$
$x = 2 \Longrightarrow y = 2^2 - 2 - 6 = 4 - 2 - 6 = {}^-4$
$x = 3 \Longrightarrow y = 3^2 - 3 - 6 = 9 - 3 - 6 = 0$
$x = 4 \Longrightarrow y = 4^2 - 4 - 6 = 16 - 4 - 6 = 6$

x	y	pontos	
$^-3$	6	($^-3$, 6)	
$^-2$	0	($^-2$, 0)	→ intersecção com o eixo-x
$^-1$	$^-4$	($^-1$, $^-4$)	
0	$^-6$	(0, $^-6$)	
1	$^-6$	(1, $^-6$)	
2	$^-4$	(2, $^-4$)	
3	0	(3, 0)	→ intersecção com o eixo-x
4	6	(4, 6)	



A curva que se vai "esboçando" recebe o nome de *parábola.* O seu estudo, com mais pormenores, será feito com as *funções quadráticas* (segundo grau).



EXERCÍCIO EXPLORATÓRIO — Grupo 32

Revendo a definição de *função*, justifique a seguinte sentença:

"O gráfico que representa, num sistema cartesiano de referência, uma *função* é interceptado por qualquer reta paralela ao eixo-*y* num ÚNICO ponto."

Lembre-se de que o eixo-*x* está representando o *domínio* da função e o eixo-*y* o *conjunto-imagem*...

LEMBRETE AMIGO

No *plano:*

1.º) Tôda equação do *primeiro grau* com *duas variáveis:*

$$y = ax + b \ (a \neq 0)$$

tem por gráfico uma *reta.*

2.º) Tôda equação do *segundo grau* com *duas variáveis* da forma:

$$y = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$$

tem por gráfico uma *parábola.*

1. Represente o *gráfico* das seguintes *funções*, definidas por equações cujo domínio é o conjunto $\mathbb{R}$, e o conjunto-imagem também é $\mathbb{R}$:

1.ª) $y = x + 3$	5.ª) $y - x = 4$
2.ª) $y = 3x + 1$	6.ª) $y = 2x^2 + 1$
3.ª) $y = \frac{x}{2}$	7.ª) $y = x^2$
4.ª) $3x + 2y = 6$	8.ª) $y = x^2 - 5x + 6$

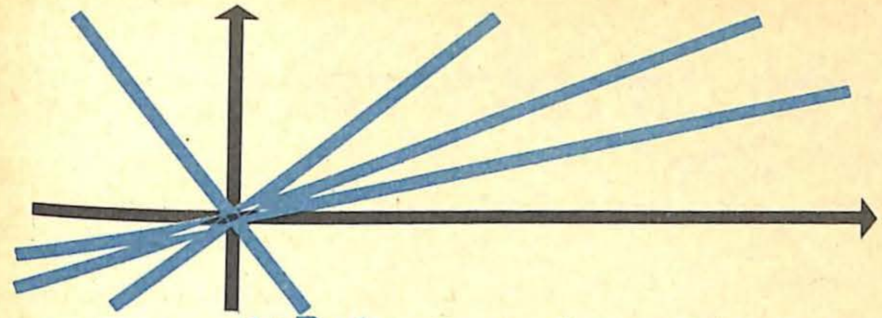
2. Assinale quais das seguintes sentenças são *verdadeiras:*

1.ª) $(4, 6) \in$ à reta $y = x + 3$
2.ª) $(^-1, 2) \notin$ à reta $y = x + 3$
3.ª) $(0, 0) \in$ à reta $y = \frac{x}{2}$
4.ª) $(1, 2) \notin$ à reta $3x + 2y = 6$
5.ª) $(0, ^-1) \in$ à parábola $3x^2 - 1$
6.ª) $(0, 0) \notin$ à parábola $y = x^2$
7.ª) $(3, 0) \notin$ à parábola $y = x^2 - 5x + 6$
8.ª) $(3, 0) \in$ à parábola $y = x^2 - 5x + 6$

3. Quais dos seguintes pontos:

$$(3, 2),\ (\sqrt{2}, 5),\ \left(^-1\tfrac{1}{2}, 5\tfrac{1}{2}\right) \text{ e } (^-2, ^-1)$$

pertencem à parábola: $y = 2x^2 + 1$?



3.ª Parte Funções lineares; iniciação à Geometria Analítica

Funções lineares

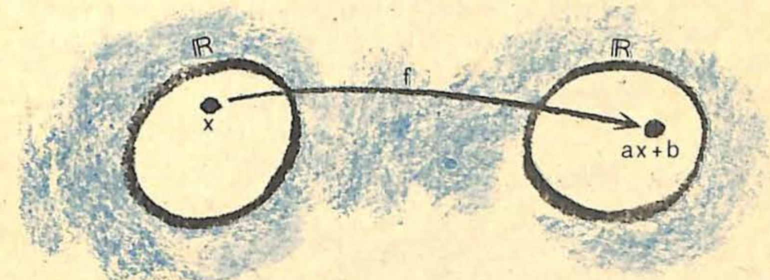
6. *Definição; gráfico*

Uma *função f* diz-se *linear*(*) quando é definida pela seguinte sentença aberta do *primeiro grau* com *duas variáveis:*

$$\boxed{y = ax + b \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \text{ e } a \neq 0}$$

O nome *linear* neste caso decorre do fato de o *gráfico* dessa função ser uma *reta* (conforme foi visto nos exemplos das págs. 88-89). Tanto o domínio como o conjunto-imagem de uma *função linear* são o conjunto $\mathbb{R}$ e:

$$f\colon x \longrightarrow ax + b \quad (f \text{ "leva" } x \text{ em } ax + b)$$



Exemplo: f definida por: $y = 3x + 1$ é uma *função linear*, onde:

$$f : x \longrightarrow 3x + 1 \quad (f \text{ "leva" } x \text{ em } 3x + 1)$$

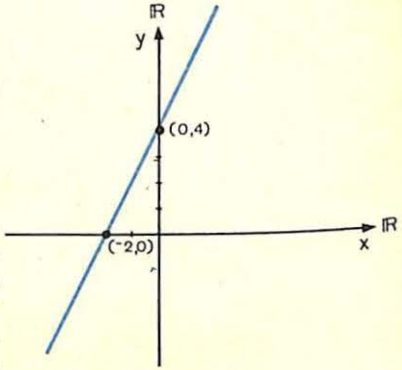
(*) Atualmente é chamada *função afim*, por ser composta da *função* $y = ax$ (que é chamada *linear*) com uma *translação b*.

7. *Raiz ou zero de uma função linear*

O valor de x que tem por *imagem* 0 é denominado *raiz* ou *zero* da função linear. Nestas condições a *raiz* ou *zero* da função linear: $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ é: $\frac{-b}{a}$, pois:

$$ax + b = 0 \iff ax = -b \iff x = \frac{-b}{a}$$

Exemplos:



1.º) Seja a *função linear* f definida por:

$$y = 2x + 4$$

ou seja: $f: x \longrightarrow 2x + 4$

O *gráfico* dessa função — que é uma *reta* — pode ser determinado mediante *dois* de *seus pontos* (em particular pelos *pontos de intersecção* com os eixos-x e y, respectivamente). Assim:

$x = 0 \Longrightarrow y = 2 \times 0 + 4 = 0 + 4 = 4$

$y = 0 \Longrightarrow 2x + 4 = 0 \iff 2x = -4 \iff x = -2$

ou

x	y	pontos
0	4	(0, 4)
-2	0	$(-2, 0)$

A *raiz* ou *zero* da função linear é obtida resolvendo-se a equação:

$$2x + 4 = 0 \iff x = -2 \text{ e, portanto, a } raiz \text{ ou } zero \text{ é } -2.$$

Observe, no gráfico, que a *raiz* ou *zero* da função linear: $y = 2x + 4$, é a *abscissa* do *ponto-intersecção* da reta, que a representa, com o *eixo-x*.

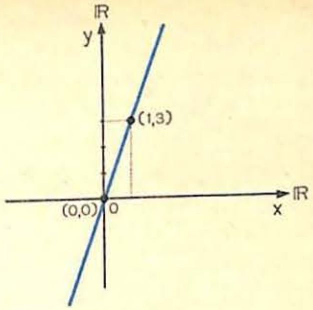
2.º) Seja a *função linear* f definida por:

$$\boxed{y = 3x}$$

isto é: $f: x \longrightarrow 3x$

O ponto-intersecção da reta $y = 3x$ com o eixo-x é a *origem*, pois para $x = 0 \Longrightarrow y = 3 \times 0 = 0$, o mesmo podendo dizer-se da intersecção com o eixo-y.

Dêsse modo, o *gráfico* é obtido construindo-se outro ponto que, juntamente com a origem, determinarão a reta (por exemplo: o ponto (1, 3)).



x	y	pontos
0	0	(0, 0)
1	3	(1, 3)

A *raiz* ou *zero* da função linear $y = 3x$ é 0.

NOTA: No caso particular da função linear: $y = x$, o seu gráfico é a reta que contém a *bissetriz* do ângulo formado pelos eixos. Construa o gráfico e certifique-se.

OBSERVAÇÕES:

1) Se a equação do primeiro grau com duas variáveis se apresenta, por exemplo, como: $2x + 3y = 6$, basta "tirar" o valor de y para colocá-la na forma: $y = ax + b$ $(a \neq 0)$, isto é:

$$y = \frac{-2}{3}x + 2$$

cujo gráfico figura na pág. 89.

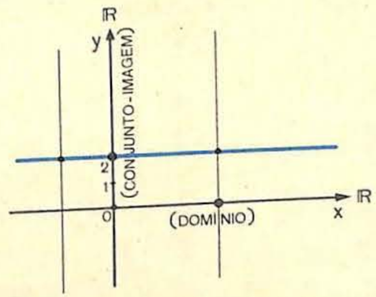
2) Se acontecer de uma equação do primeiro grau apresentar-se sòmente com a variável y, como por exemplo:

$\boxed{y = 2}$ cujo significado é: $f: x \longrightarrow 2$,

então temos uma *função constante*, pois a *imagem* de cada valor atribuído a x é sempre 2. O seu gráfico é uma *reta paralela* ao eixo-x, porque a equação $y = 2$ se verifica para *qualquer* valor atribuído a x. Basta lembrar que você pode escrevê-la sob a forma:

$$y = 0x + 2$$

para se convencer de que todos os pontos com *qualquer abscissa*, mas de *ordenada* 2, pertencem à reta paralela ao eixo-x.



Lembre-se: a reta $y = 2$ — por representar uma *função* — é interceptada por *qualquer* reta paralela ao eixo-y num *único* ponto!

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 34

Construa o *gráfico* das *funções lineares* definidas pelas seguintes equações:

1.ª) $y = x + 2$

2.ª) $y = 3x - 1$

3.ª) $y = \frac{-1}{2}x + 4$

4.ª) $y = \sqrt{2}x - 3$

5.ª) $2x + 3y = 12$

6.ª) $y - 2x = 8$

7.ª) $x + y = 0$

8.ª) $y = x$

9.ª) $y = 4$ **(cuidado!)**

10.ª) $y = {}^-2$ **(cuidado!)**

Iniciação à Geometria Analítica

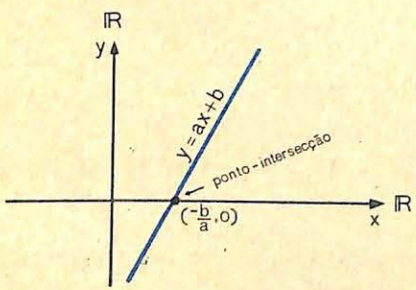
8. *Problemas equivalentes tratados algèbricamente e geomètricamente*

O estudo das *funções lineares* e dos respectivos *gráficos* permite que você faça o tratamento algébrico e geométrico de um *mesmo problema*, dentro daquela *unidade* da *Matemática*, preconizada por René DESCARTES em sua *Geometria Analítica*.

1.º) *-a- Problema* (em Geometria): Determinar as coordenadas do *ponto-intersecção* da reta $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ com o *eixo-x*.

1.º) *-b- Problema equivalente* (em Álgebra): Resolver a *equação do primeiro grau:* $ax + b = 0$ $(a > 0)$

1.º) *-a-*



1.º) *-b-*

$$ax + b = 0 \Longleftrightarrow ax = {}^-b \Longleftrightarrow x = \frac{-b}{a}$$

Logo: $V = \left\{\frac{-b}{a}\right\}$

$\frac{-b}{a}$ é a *raiz* ou *zero* da função:

$$y = ax + b$$

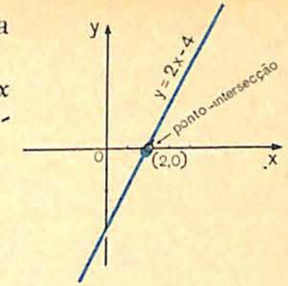
Exemplo: Determinar o *ponto-intersecção* da reta $y = 2x - 4$ com o *eixo-x*.

O *ponto-intersecção* dessa reta com o eixo-x tem a ordenada $y = 0$, e a abscissa (x) correspondente é a *raiz* da equação:

$$2x - 4 = 0 \Longleftrightarrow 2x = 4 \Longleftrightarrow x = 2$$

isto é: 2

Logo, o ponto-intersecção é $(2, 0)$.

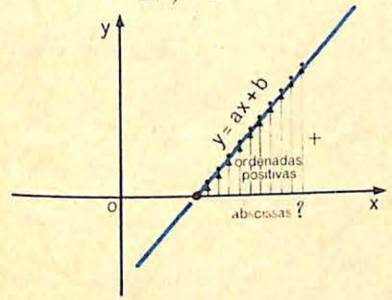


2.º) *-a- Problema* (em Geometria): Determinar as *abscissas* dos pontos da reta $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ localizados *"acima" do eixo-x*.

2.º) *-b- Problema* (em Álgebra): Resolver a *inequação do primeiro grau:* $ax + b > 0$ $(a > 0)$

Como os pontos da reta $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ situados *"acima" do eixo-x* têm as ordenadas positivas, isto é, $y > 0$, a resolução da inequação: $ax + b > 0$ $(a > 0)$, permite determinar as abscissas (x) dêsses pontos.

2.º) *-a*



2.º) *-b-*

$$ax+b > 0 \Longleftrightarrow ax > {}^-b \Longleftrightarrow x > \frac{-b}{a}$$

Logo: $V = \left\{x \mid x > \frac{-b}{a}\right\}$

(lê-se: "conjunto dos números x tais que $x > \frac{-b}{a}$)

Exemplo: Determinar, no conjunto dos números inteiros, as *abscissas* dos pontos da reta $y = 2x - 4$ localizados *"acima" do eixo-x*.

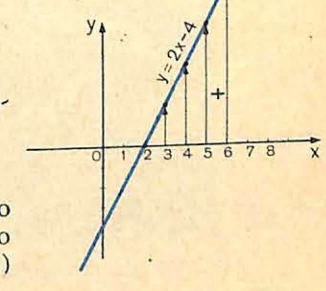
Basta resolver a inequação:

$$2x - 4 > 0 \Longleftrightarrow 2x > 4 \Longleftrightarrow x > 2$$

e a *solução* é constituída dos números inteiros maiores que 2, isto é:

$$V = \{x \mid x > 2\} = \{3, 4, 5, 6, \ldots\}$$

e, portanto, os *pontos* localizados "acima" do eixo-x são: $(3, 2)$, $(4, 4)$, $(5, 6)$, . . . (fazendo $x = 3 \Longrightarrow y = 2 \times 3 - 4 = 6 - 4 = 2$, etc.)



OBSERVAÇÃO: O problema equivalente ao de determinar as *abscissas* dos pontos da reta $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ localizadas "abaixo" do eixo-x é *resolver* a inequação: $ax + b < 0$ $(a > 0)$.

3.°) -a- *Problema* (em Geometria): Determinar o *ponto-intersecção* das retas r e s, respectivamente de equações:

$$\text{reta } r\text{: } y = a_1x + b_1 \quad (a_1 \neq 0)$$
$$\text{reta } s\text{: } y = a_2x + b_2 \quad (a_2 \neq 0)$$

3.°) -b- *Problema equivalente* (em Álgebra): Resolver o *sistema das duas equações simultâneas* do primeiro grau nas variáveis x e y:

$$\begin{cases} y = a_1x + b_1 & (a_1 \neq 0) \\ y = a_2x + b_2 & (a_2 \neq 0) \end{cases}$$

Como o ponto (x, y), *intersecção das retas r e s*, deve satisfazer, *simultâneamente*, as equações dessas retas, segue-se que a *solução* do sistema formado pelas equações:

$$\begin{cases} y = a_1x + b_1 & (a_1 \neq 0) \\ y = a_2x + b_2 & (a_2 \neq 0) \end{cases}$$

que é *um par ordenado de números reais*, representa as coordenadas do *ponto-intersecção*.

Exemplos:

1. Determinar o *ponto-intersecção* P das retas r e s, respectivamente de equações:

$$\text{reta } r\text{: } y = {}^-2x + 8 \qquad \text{reta } s\text{: } y = \frac{4x - 6}{3}$$

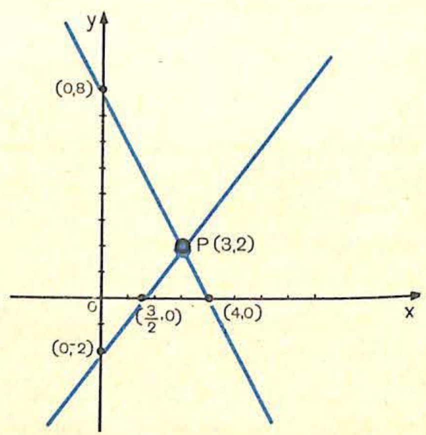
Solução *geométrica:*

reta r: $y = {}^-2x + 8$

x	y	pontos
0	8	(0, 8)
4	0	(4, 0)

reta s: $y = \dfrac{4x - 6}{3}$

x	y	pontos
0	$^-2$	$(0, {}^-2)$
$\frac{3}{2}$	0	$\left(\frac{3}{2}, 0\right)$



Na figura as retas se **interceptam** no ponto $P(3, 2)$.

Solução *algébrica:*

Basta resolver o sistema formado pelas *equações das retas:*

$$\begin{cases} y = {}^-2x + 8 \\ y = \dfrac{4x - 6}{3} \end{cases}$$

Pelo método da *substituição* (nesse caso é só *comparar*), temos:

$${}^-2x + 8 = \frac{4x - 6}{3} \iff {}^-6x + 24 = 4x - 6 \iff {}^-10x = {}^-30 \iff x = 3$$

Portanto: $\quad y = {}^-2 \times 3 + 8 = {}^-6 + 8 = 2$ e $V = \{(3, 2)\}$

Geomètricamente as coordenadas do *ponto-intersecção* são dadas pelo par (3, 2), isto é, $P(3, 2)$.

2. Determinar o *ponto-intersecção* das retas: $x + y = 3$ e $x + y = 5$

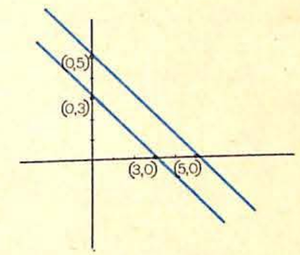
Solução *geométrica:*

reta: $x + y = 3$

x	y	pontos
0	3	(0, 3)
3	0	(3, 0)

reta: $x + y = 5$

y	x	pontos
0	5	(0, 5)
5	0	(5, 0)



Na figura as retas *não se interceptam*, isto é, são **paralelas.**

Solução *algébrica:*

Seja o sistema: $\begin{cases} x + y = 3 \\ x + y = 5 \end{cases}$

Substituindo o valor de $x = 3 - y$ (da primeira equação) na segunda:

$$3 - y + y = 5 \iff {}^-y + y = 5 - 3 \iff 0.y = 2$$

portanto:

$\nexists y | 0.y = 2$ (*não existe* valor de y tal que multiplicado por 0 dê 2)

Portanto, o sistema proposto é *impossível* de ser resolvido, ou seja, *não admite solução*, por envolver *duas condições incompatíveis*.

Geomètricamente, não existindo a ordenada y do ponto procurado, *não existirá* o ponto-intersecção das retas desenhadas e, por isso, elas são **paralelas.**

3. Determinar o *ponto-intersecção* das retas: $x + y = 3$ e $2x + 2y = 6$

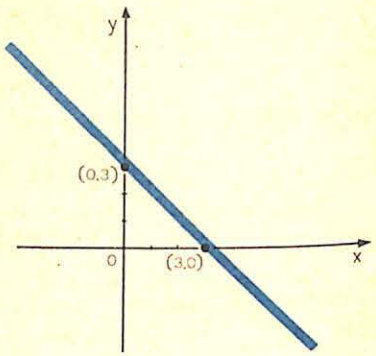
Solução *geométrica:*

reta: $x + y = 3$

x	y	pontos
0	3	(0, 3)
3	0	(3, 0)

reta: $2x + 2y = 6$

x	y	pontos
0	3	(0, 3)
3	0	(3, 0)



Na figura as retas são **coincidentes.**

Solução *algébrica:*

Escrito o sistema: $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$

nem adianta tentar resolvê-lo, pois uma simples observação mostra que as equações que o compõem são *equivalentes* (para constatá-lo, basta multiplicar ambos os membros da primeira equação por 2) e, portanto, os *infinitos pares ordenados de números reais* que satisfazem à primeira equação satisfarão também à segunda.

Portanto, o sistema proposto é *possível* e *indeterminado*, isto é, *admite mais de uma solução* por envolver duas condições *idênticas.*

Geomètricamente: as retas representadas por essas equações, tendo *infinitos pontos em comum*, são **coincidentes.** Assim, por exemplo, os pontos que têm como coordenadas números inteiros:

$$(0, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 0), (4, -1), \ldots$$

pertencem às "duas retas" (na verdade é uma só!).

Observação: Maneira *prática* (sem resolver o sistema de equações...) para se saber o "comportamento" de duas retas no plano, dadas pelas respectivas equações:

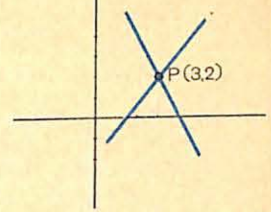
$$y = a_1x + b_1 \quad (a_1 \neq 0)$$
$$y = a_2x + b_2 \quad (a_2 \neq 0)$$

se $a_1 \neq a_2$, as retas *se interceptam*, isto é, são **incidentes** num *ponto*
se $a_1 = a_2$ e $b_1 \neq b_2$, as retas *não se interceptam*, isto é, são **paralelas**
se $a_1 = a_2$ e $b_1 = b_2$, as retas são **coincidentes**

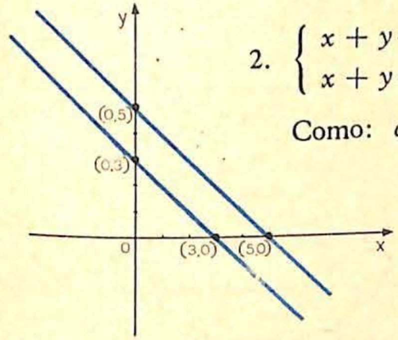
Os números reais: a_1 e a_2, denominam-se **coeficientes angulares** das respectivas retas.

Assim, nos exemplos estudados, pode-se saber a posição relativa das retas, examinando os seus *coeficientes angulares:*

1. $\begin{cases} y = -2x + 8 \Longrightarrow a_1 = -2 \\ y = \frac{4}{3}x - \frac{6}{3} \Longrightarrow a_2 = \frac{4}{3} \end{cases}$

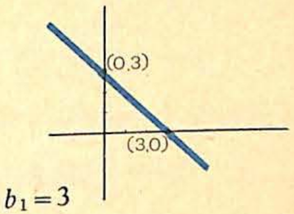


Como: $a_1 \neq a_2$, as retas são **incidentes**



2. $\begin{cases} x + y = 3 \\ x + y = 5 \end{cases}$ ou $\begin{cases} y = -x + 3 \Longrightarrow a_1 = -1,\ b_1 = 3 \\ y = -x + 5 \Longrightarrow a_2 = -1,\ b_2 = 5 \end{cases}$

Como: $a_1 = a_2$ e $b_1 \neq b_2$, as retas são **paralelas**



3. $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$ ou $\begin{cases} y = -x + 3 \Longrightarrow a_1 = -1 \text{ e } b_1 = 3 \\ y = -x + 3 \Longrightarrow a_2 = -1 \text{ e } b_2 = 3 \end{cases}$

Como: $a_1 = a_2$ e $b_1 = b_2$, as retas são **coincidentes**

Nota: Considerando o paralelismo como uma *relação de equivalência*, as retas *coincidentes* também seriam *paralelas* (a distancia entre elas é nula).

TESTE DE ATENÇÃO — Grupo 35

Complete as seguintes sentenças, de modo a torná-las *verdadeiras:*

1.ª) Se duas retas são *incidentes*, então os seus *coeficientes angulares* são ....

2.ª) Se duas retas são *paralelas* (ou *coincidentes*), então os seus *coeficientes angulares* são..........

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — Grupo 36

1. Determine as coordenadas do *ponto-intersecção* das seguintes retas com o *eixo-x:*

1.ª) $y = x + 2$
2.ª) $y = 4x - 1$
3.ª) $y = \frac{-1}{2}x + 5$
4.ª) $2x + 3y = 6$
5.ª) $y = 3x + 2$
6.ª) $y = x$ (cuidado!)
7.ª) $x = 4$ (cuidado!)
8.ª) $3x = 6$
9.ª) $y = mx + n \quad (m \neq 0)$
10.ª) $ax + by = c \quad (a \neq 0 \text{ e } b \neq 0)$

2. Determine as *abscissas* dos pontos das seguintes retas:

1.ª)	$y = 2x - 8$	localizados "acima" do eixo-x
2.ª)	$y = {}^-x + 6$	localizados "abaixo" do eixo-x
3.ª)	$2y + 3x = 12$	localizados "acima" do eixo-x
4.ª)	$y = x$	localizados "abaixo" do eixo-x

3. Determine o *ponto-intersecção* (caso exista!) das retas dadas, respectivamente, pelos seguintes *sistemas de duas equações simultâneas* do primeiro grau com duas variáveis (resoluções geométrica e algébrica):

1.º) $\begin{cases} y = x + 1 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$ 6.º) $\begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = 2x + 5 \end{cases}$

2.º) $\begin{cases} 2x + y = 8 \\ 4x - 3y = 6 \end{cases}$ 7.º) $\begin{cases} x - 2y = {}^-4 \\ 2x - 4y = 4 \end{cases}$

3.º) $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 3y - 2x = 6 \end{cases}$ 8.º) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 2 \end{cases}$

4.º) $\begin{cases} y = x \\ y = {}^-x + 3 \end{cases}$ 9.º) $\begin{cases} y = x - 3 \\ 3y = 3x - 9 \end{cases}$

5.º) $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$ 10.º) $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$ (fácil. . .)

Modêlo de uma prova mensal(*)

Represente, num mesmo sistema cartesiano de referência, as retas:

$$y = x + 5 \quad \text{e} \quad y = {}^-x + 1$$

Considere a reta: $y = {}^-x + 1$ e responda:

1.º) quais as coordenadas do *ponto-intersecção* com o eixo-x?
2.º) quais as coordenadas do *ponto-intersecção* com o eixo-y?
3.º) para que valôres de x, $y < 0$? (o mesmo que: quais as *abscissas* dos pontos localizados "abaixo" do eixo-x?)
4.º) para que valôres de y, $x > 0$? (o mesmo que: quais as *ordenadas* dos pontos localizados "à direita" do eixo-y?)
5.º) resolva o sistema formado pelas duas equações dadas e verifique a solução com o gráfico das respectivas retas

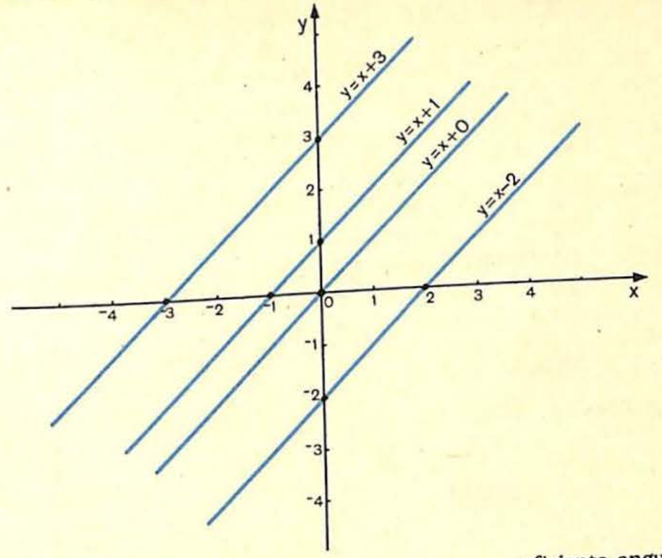
LEMBRETE AMIGO

Quem fala em *funções lineares:* $y = ax + b$ $(a \neq 0)$, está falando:

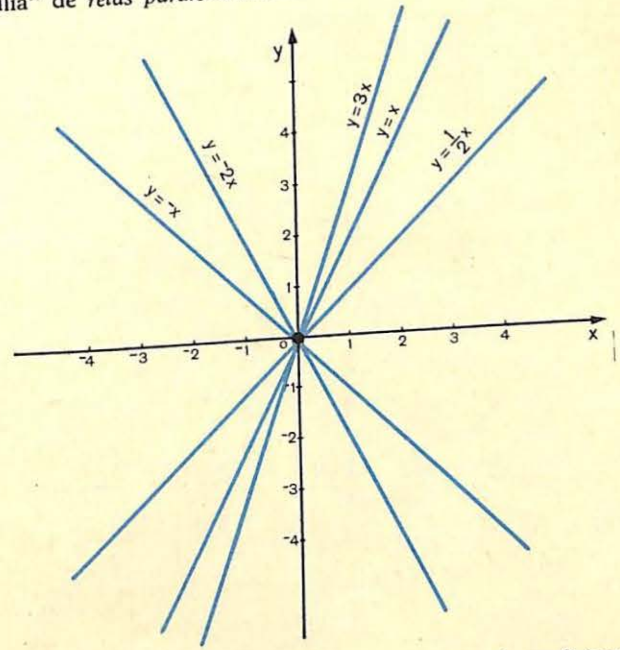
em *equações do primeiro grau com duas variáveis* e/ou em *retas situadas num plano*

(*) A *Prova* foi elaborada e dada em classe (4.ª série) pela Prof.ª Renate G. Watanabe, do C. E. "Virgília Rodrigues Alves de Carvalho Pinto".

Conheça algumas "famílias" de retas . . .



Uma "família" de *retas paralelas* (tôdas têm o mesmo coeficiente angular: 1).



Uma "família" de retas que *passam pela origem* (. . . e de coeficientes angulares diferentes).

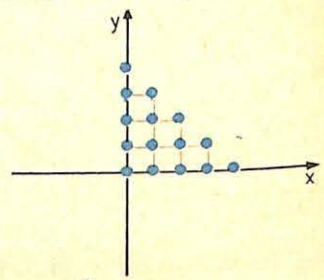
9. *Gráficos de inequações do primeiro grau com duas variáveis e de sistemas*

Seja a *inequação do primeiro grau com duas variáveis:*

$$\boxed{x + y < 5}$$

Qual seria o *gráfico* dessa inequação num sistema cartesiano de referência?

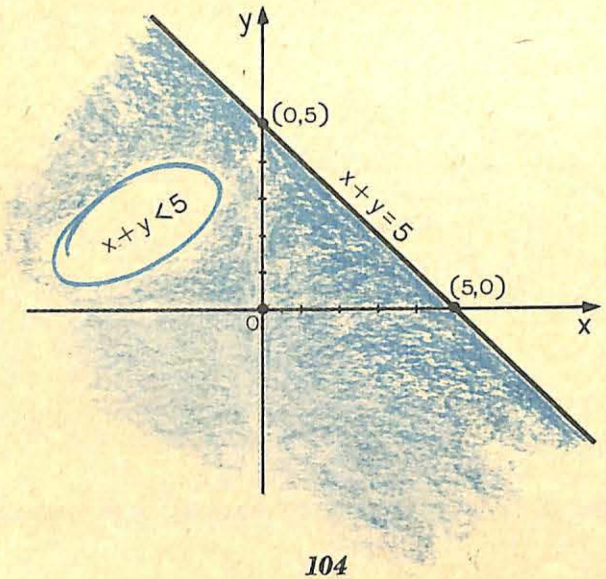
Você pode encontrar, fàcilmente, alguns pontos do gráfico, procurando aquêles cujas coordenadas satisfaçam à inequação: $x + y < 5$. De preferência, comece com os pontos que possuam, como coordenadas, números inteiros não-negativos. Assim, por exemplo:



(0, 0), (1, 0), (2, 0), (3, 0), (4, 0)
(0, 1), (1, 1), (2, 1), (3, 1)
(0, 2), (1, 2), (2, 2)
(0, 3), (1, 3)
(0, 4)

são pontos que satisfazem à inequação: $x + y < 5$ (basta substituir as coordenadas . . .) e, portanto, pertencem ao seu *gráfico.*

Para entender melhor o *gráfico da inequação:* $x + y < 5$, temos necessidade de um "gráfico auxiliar", que é a *reta* representativa da equação: $x + y = 5$ ou $y = {}^{-}x + 5$.



Traçada essa *reta* (gráfico auxiliar), os pontos do plano ficam repartidos nos *dois semi-planos* determinados por ela. Um dêles contém todos os pontos cujas coordenadas satisfazem à inequação: $x + y < 5$, e o seu "reconhecimento" é baseado no fato de que um semi-plano é determinado pela *reta* que o define e mais *um ponto* não-situado nessa reta.

Basta, pois, tomar um ponto qualquer *que não pertença* ao gráfico auxiliar e "testá-lo":

— se as coordenadas do ponto *satisfazem à inequação*, então êle e a reta *determinam o semi-plano procurado;*

— se as coordenadas do ponto *não satisfazem à inequação*, o semi-plano procurado é o *oposto.*

Se possível, emprega-se a *origem* O (0, 0) para "testar" o semi-plano procurado. Com o (0, 0) da origem os cálculos ficam bem mais simples.

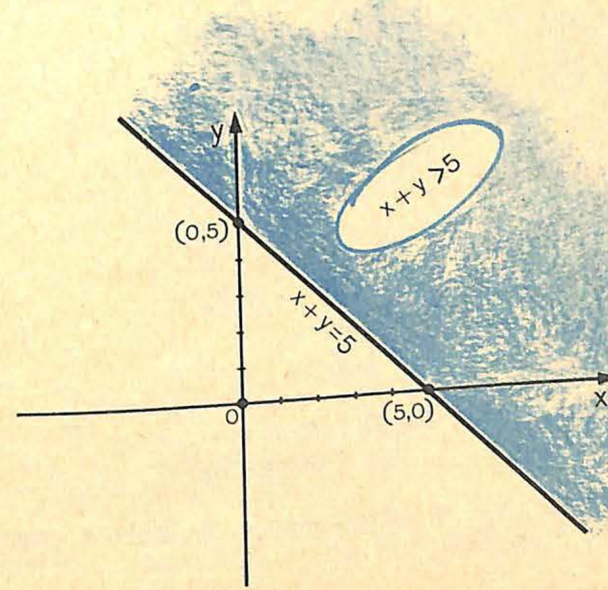
Para o *gráfico* da inequação: $x + y < 5$, temos:

$$x + y < 5$$
$$\text{ou } 0 + 0 \overset{?}{<} 5 \text{ (testando a origem)}$$
$$0 < 5 \; (V)$$

Logo, a *origem pertence* ao semi-plano procurado e o *gráfico* da inequação $x + y < 5$ é o semi-plano (colorido na figura) que a contém.

NOTA: O gráfico da inequação:

$$x + y > 5$$



é o *semi-plano oposto* ao que contém a origem, pois:

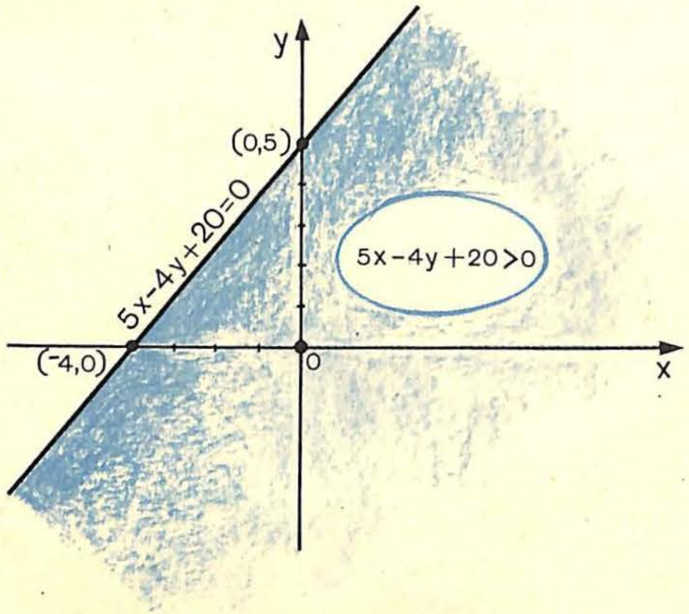
$$x + y > 5$$
$$0 + 0 \overset{?}{>} 5$$
$$0 > 5 \ (F)$$

Outros exemplos:

1. Construir o *gráfico* da inequação: $\boxed{5x - 4y + 20 > 0}$

Inicialmente construímos como "gráfico auxiliar" a *reta*:

$$5x - 4y + 20 = 0$$



A seguir "testamos" a *origem:*

$$5x - 4y + 20 > 0$$
$$5 \times 0 - 4 \times 0 + 20 \overset{?}{>} 0$$
$$0 - 0 + 20 \overset{?}{>} 0$$
$$20 > 0 \ (V)$$

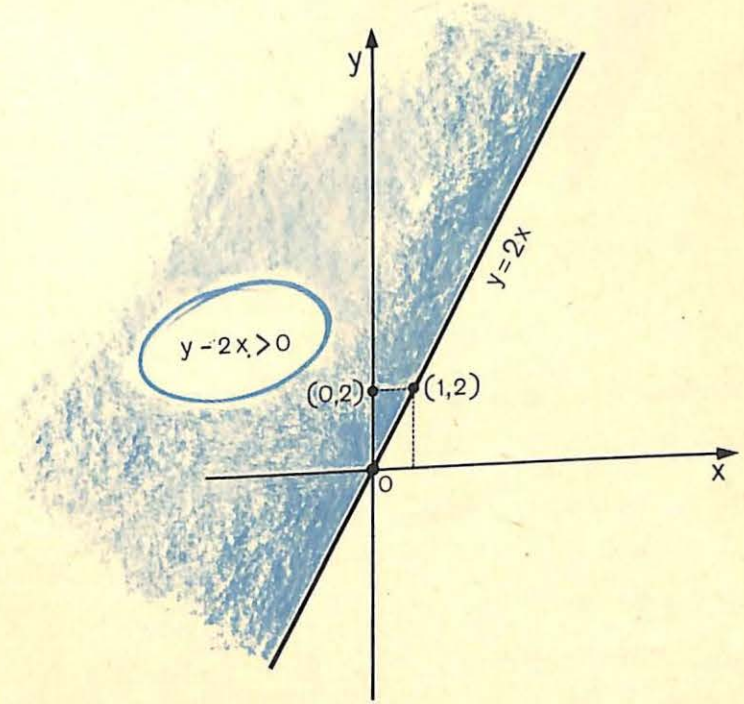
Logo, a origem *pertence* ao *semi-plano* que representa o *gráfico* da inequação: $5x - 4y + 20 > 0$.

2. Construir o *gráfico* da inequação: $\boxed{y - 2x > 0}$

Como o "gráfico auxiliar" (reta: $y - 2x = 0$) *passa pela origem*, emprega-se um *outro ponto* para "testar" o semi-plano procurado. Assim, por exemplo, para o ponto (0, 2), temos:

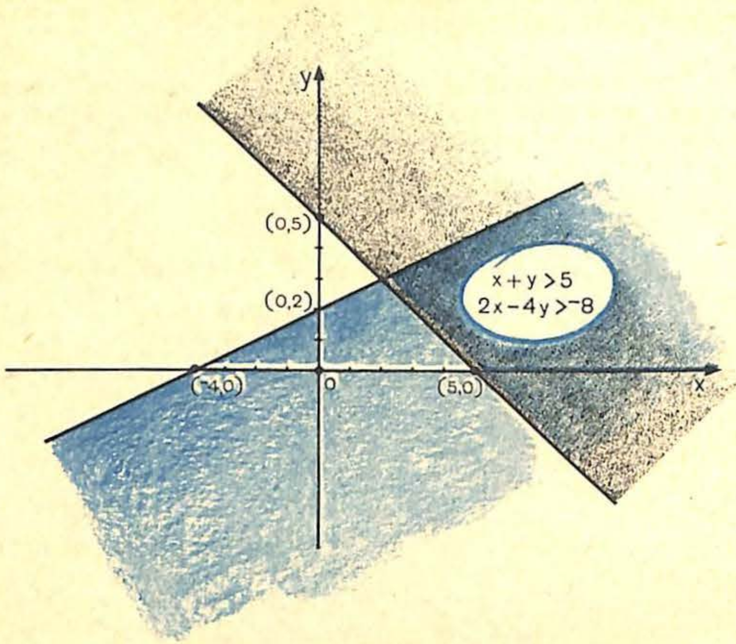
$$y - 2x > 0$$
$$2 - 2 \times 0 \overset{?}{>} 0$$
$$2 - 0 \overset{?}{>} 0 \quad \text{ou} \quad 2 > 0 \ (V)$$

Logo, o semi-plano procurado é o que contém o ponto (0, 2).



No caso de um *sistema de duas inequações do primeiro grau com duas variáveis*, procede-se de forma análoga à estudada com cada uma das inequações que o compõem.

O *gráfico* do sistema é o *conjunto-intersecção* dos dois semi-planos que correspondem às inequações do sistema. Exemplo:



Construir o *gráfico* do *sistema de inequações:*

$$\begin{cases} x + y > 5 \\ 2x - 4y > {}^{-}8 \end{cases}$$

Inicialmente construímos os "gráficos auxiliares":

retas: $x + y = 5$ e $2x - 4y = {}^{-}8$

A seguir, "testamos" a *origem:*

$x + y > 5$	$2x - 4y > {}^{-}8$
$0 + 0 \overset{?}{>} 5$	$2 \times 0 - 4 \times 0 \overset{?}{>} {}^{-}8$
$0 > 5\ (F)$	$0 - 0 \overset{?}{>} {}^{-}8$
	$0 > {}^{-}8\ (V)$
(a origem *não pertence* ao semi-plano)	(a origem *pertence* ao semi-plano)

O *conjunto-intersecção* (gráfico do sistema) está no desenho colorido duplamente.

LEMBRETE AMIGO

O *gráfico* de:

— uma inequação do primeiro grau com duas variáveis é um **semi-plano**

— um sistema de duas inequações do primeiro grau com duas variáveis é um **conjunto-intersecção de dois semi-planos**

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — Grupo 37

1. Construa o *gráfico* das seguintes inequações do primeiro grau com duas variáveis:

1.º) $x + y > 4$ — 5.º) $3x + 2y - 6 < 0$

2.º) $4x - 5y < 20$ — 6.º) $y - x > 0$

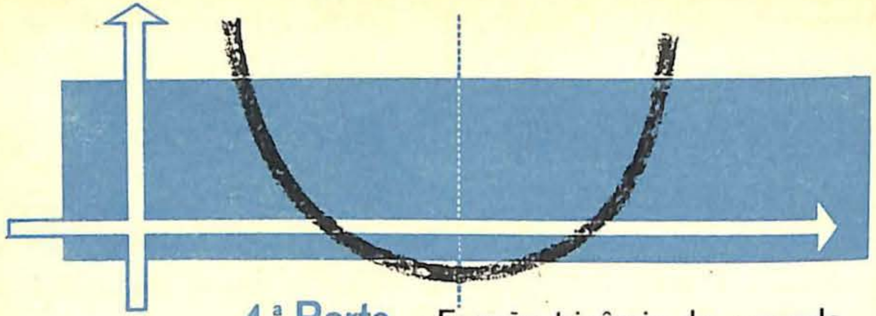
3.º) $y - 2x < {}^{-}8$ — 7.º) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} < 12$

4.º) $y - 4x > 0$ — 8.º) $x > y$

2. Construa o gráfico dos seguintes *sistemas:*

1.º) $\begin{cases} x + y < 4 \\ 4x - 5y > 20 \end{cases}$ — 3.º) $\begin{cases} 2x + 3y < 12 \\ x - 2y < {}^{-}4 \end{cases}$

2.º) $\begin{cases} 2y + 3x > 6 \\ y + x > 5 \end{cases}$ — 4.º) $\begin{cases} y - 2x > 0 \\ y < x \end{cases}$



4.ª Parte

- Função trinômio do segundo grau; gráfico
- Estudo algébrico do trinômio; inequações do segundo grau

Função trinômio do segundo grau

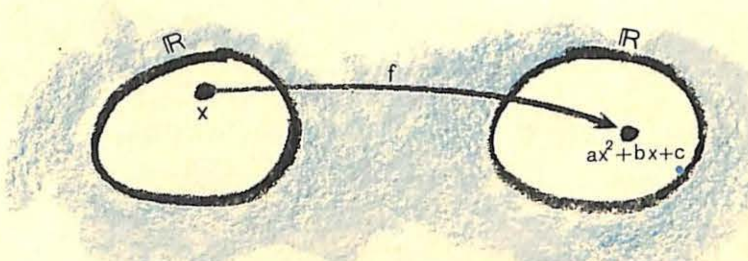
10. *Definição*

Diz-se que f é uma *função trinômio do segundo grau* (ou simplesmente *função trinômio*) quando é definida pela seguinte sentença aberta do *segundo grau com duas variáveis:*

$$\boxed{y = ax^2 + bx + c \qquad \forall a, b, c \in \mathbb{R} \text{ e } a \neq 0}$$

O *domínio* da função trinômio do segundo grau é o conjunto $\mathbb{R}$, e o *conjunto-imagem* é um *subconjunto de* $\mathbb{R}$ e:

$f\colon x \longrightarrow ax^2 + bx + c \qquad$ (f "leva" x em $ax^2 + bx + c$)



Exemplo: f definida por $y = 3x^2 + 5x + 1$ é uma *função trinômio do segundo grau*, onde:

$f\colon x \longrightarrow 3x^2 + 5x + 1$

11. *Gráfico; raízes ou zeros; outros pontos principais*

A construção, por pontos, do *gráfico* da função trinômio já foi feita quando você estudou o gráfico da função: $y = x^2 - x - 6$, à pág. 90, lembra-se?

A curva obtida — denominada **parábola** — merecerá agora maior atenção, por intermédio de outros exemplos, nos quais serão destacados os seus *pontos* mais importantes (*vértice, pontos de intersecção com os eixos*, etc.).

Como no caso das funções lineares, será usada a *equivglência* existente nos tratamentos *algébrico* e *geométrico* de um mesmo problema.

Chama-se *raiz* ou *zero* do trinômio $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ ao valor de x que tem 0 por *imagem*. Um trinômio pode ter *duas raízes, uma* ou *nenhuma*.

Algèbricamente a determinação das *raízes* de um trinômio *equivale* a resolver, em $\mathbb{R}$, a equação do segundo grau:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

NOTA: $\Delta = b^2 - 4ac$ é o *discriminante* tanto da equação como do trinômio do segundo grau.

Se o *Conjunto-Verdade* dessa equação:

— contém *dois números distintos,* o trinômio (cujo $\Delta > 0$) possui *duas raízes* ou *zeros;*

— contém *sòmente um número,* o trinômio (cujo $\Delta = 0$) possui *uma raiz* ou *zero* de *multiplicidade dois;*

— é *vazio,* então o trinômio (cujo $\Delta < 0$) *não possui raiz* ou *zero.*

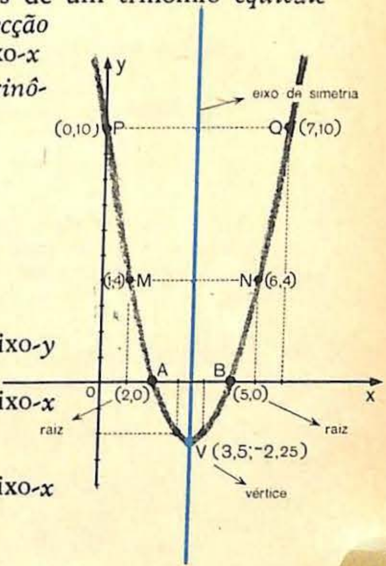
Geomètricamente a determinação das *raízes* de um trinômio *equivale* a determinar as *abscissas* dos *pontos de intersecção* (dois, um ou nenhum) da *parábola* com o eixo-x

Exemplos: Estudar as seguintes *funções trinômio do segundo grau:*

1.º) $\boxed{y = x^2 - 7x + 10}$

1) *gráfico:*

	x	y	pontos	
	0	10	(0, 10)	→ intersecção com eixo-y
	1	4	(1, 4)	
raiz →	2	0	(2, 0)	→ intersecção com eixo-x
	3	−2	(3, −2)	
	4	−2	(4, −2)	
raiz →	5	0	(5, 0)	→ intersecção com eixo-x
	6	4	(6, 4)	
	7	10	(7, 10)	



2) *raízes* ou *zeros:*

Determinação (*algébrica*): basta resolver a equação:

$$x^2 - 7x + 10 = 0, \text{ cujo } V = \{2, 5\}$$

e, portanto, as *raízes* ou *zeros* são: 2 e 5.

Por outro lado (*geomètricamente*), a parábola *intercepta* o eixo-*x* nos pontos (2, 0) e (5, 0), e as abscissas dêsses pontos dão as *raízes* ou *zeros:* 2 e 5.

3) *pontos principais:*

a) *Vértice:* é o ponto (V) da parábola que representa o seu ponto "mais baixo" (*mínimo*) ou o "mais alto" (*máximo*).

Geomètricamente, o vértice é o *ponto-intersecção* da parábola com o *eixo de simetria*, dessa curva, que passa pelo ponto médio do segmento ($\overline{AB}$ no exemplo), cujas extremidades são os pontos de intersecção da parábola com o eixo-*x* ((2, 0) e (5, 0) no exemplo) ou pelo ponto médio de qualquer segmento ($\overline{MN}$ no exemplo), cujos extremos são pontos da parábola que possuem a mesma ordenada ((1, 4) e (6, 4) no exemplo).

Algèbricamente, basta determinar as coordenadas do ponto V.

Nesse exemplo, conhece-se a *abscissa* 3,5 (pois: $x = \dfrac{2+5}{2} = 3{,}5$, abscissa do ponto médio de $\overline{AB}$) e, portanto, a *ordenada* será:

$$y = (3{,}5)^2 - 7 \times 3{,}5 + 10 = {}^-2{,}25. \text{ Logo: } V\,(3{,}5;\ {}^-2{,}25).$$

NOTA: Nesse exemplo o *vértice* V representa o ponto "mais baixo", isto é, MÍNIMO da parábola (como bem mostra o gráfico), onde a *ordenada* y assume o *menor valor possível*. *Algèbricamente*, êsse *mínimo* é o menor número do *conjunto-imagem* da função trinômio: $y = x^2 - 7x + 10$.

b) *Ponto-intersecção com o eixo-y:* basta procurar a ordenada do ponto de *abscissa nula*, para determinar as suas coordenadas.

No exemplo, fazendo $x = 0$ em $y = x^2 - 7x + 10$, obtemos:

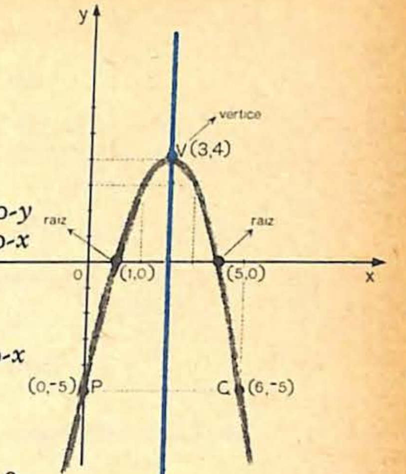
$$y = 0^2 - 7 \times 0 + 10 = 10, \text{ para ordenada do ponto } P.$$

Logo: $P(0, 10)$ é o *ponto de intersecção* da parábola com o eixo-*y*.

2.º) $y = {}^-x^2 + 6x - 5$

1) *gráfico:*

	x	y	pontos	
	0	$^-5$	(0, $^-5$)	→ intersecção com eixo-*y*
raiz →	1	0	(1, 0)	→ intersecção com eixo-*x*
	2	3	(2, 3)	
	3	4	(3, 4)	→ **vértice**
	4	3	(4, 3)	
raiz →	5	0	(5, 0)	→ intersecção com eixo-*x*
	6	$^-5$	(6, $^-5$)	



2) *raízes* ou *zeros:*

Basta resolver a equação: $^-x^2+6x-5=0$ (determinação algébrica) cujo $V=\{1, 5\}$ e, portanto, as *raízes* ou *zeros* são: 1 e 5.

Os pontos de intersecção da parábola com o eixo-*x* (determinação geométrica) são: (1, 0) e (5, 0), cujas *abscissas* (1 e 5) são as *raízes* ou *zeros* do trinômio.

3) *pontos principais:*

a) *Vértice:* representa o ponto "mais alto", isto é, **máximo** da parábola.

Coordenadas de V: $x = \dfrac{1+5}{2} = 3$; $y = {}^-3^2+6\times3-5 = {}^-9+18-5 = 4$

Logo: $V(3, 4)$

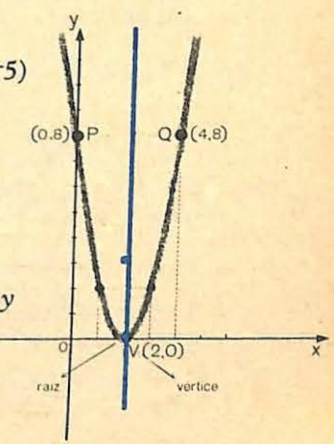
b) *Ponto-intersecção com o eixo-y:*

P: $x = 0$; $y = 0^2+6\times0-5={}^-5$ Logo: $P(0, {}^-5)$

3.º) $y = 2x^2 - 8x + 8$

1) *gráfico:*

	x	y	pontos	
	0	8	(0, 8)	→ intersecção com eixo-*y*
	1	2	(1, 2)	
raiz →	2	0	(2, 0)	→ **vértice**
	3	2	(3, 2)	
	4	8	(4, 8)	



2) *raízes* ou *zeros:*

$$2x^2 - 8x + 8 = 0 \quad \text{cujo } V = \{2\}$$

Logo, o trinômio só tem *uma raiz* ou *zero:* 2, e geomètricamente diz-se que a parábola tem um *ponto de contato* (ou de tangência) com o eixo-x.

3) *pontos principais:*

a) *Vértice:* representa o ponto "mais baixo", isto é, **mínimo** da parábola.

$$\text{Coordenadas de } V \begin{matrix} \nearrow x = 2 \\ \searrow y = 0 \end{matrix} \quad \text{Logo: } V(2,\ 0)$$

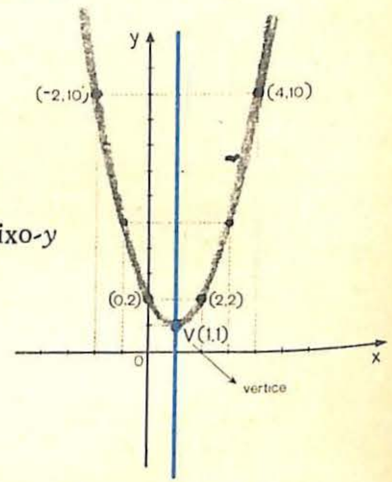
b) *Ponto-intersecção com o eixo-y:*

$$P \begin{matrix} \nearrow x = 0 \\ \searrow y = 8 \end{matrix} \quad \text{Logo: } P(0,\ 8)$$

4.º) $y = x^2 - 2x + 2$

1) *gráfico:*

x	y	pontos	
-2	10	$(-2,\ 10)$	→ intersecção com eixo-y
-1	5	$(-1,\ 5)$	
0	2	$(0,\ 2)$	→ **vértice**
1	1	$(1,\ 1)$	
2	2	$(2,\ 2)$	
3	5	$(3,\ 5)$	
4	10	$(4,\ 10)$	



2) *raízes* ou *zeros:*

$$x^2 - 2x + 2 = 0 \text{ cujo } V = \varnothing \text{ (pois: } \Delta = -4 \Longrightarrow \Delta < 0)$$

Logo, o trinômio *não possui raízes* ou *zeros* e, geomètricamente, diz-se que a parábola *não intercepta nem tem ponto de contato* com o eixo-x.

3) *pontos principais:*

a) *Vértice:* representa o ponto "mais baixo", isto é, **mínimo** da parábola.

$$\text{Coordenadas de } V \begin{matrix} \nearrow x = 1 \\ \searrow y = 1 \end{matrix} \quad \text{Logo: } V(1,\ 1)$$

b) *Ponto-intersecção com o eixo-y:*

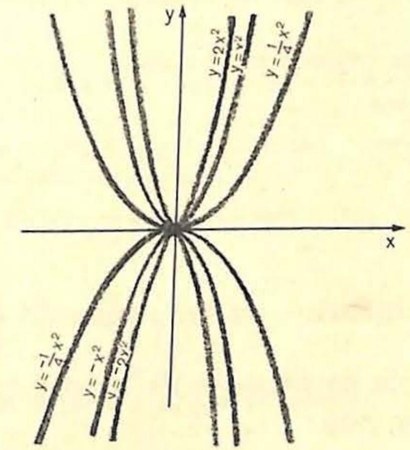
$$P \begin{matrix} \nearrow x = 0 \\ \searrow y = 2 \end{matrix} \quad \text{Logo: } P(0,\ 2)$$

LEMBRETE AMIGO

O gráfico da *função trinômio do segundo grau:*

$$y = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$$

é a curva denominada **parábola.**



Uma "família" de *parábolas que passam pela origem...*

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 38

Estude as seguintes *funções trinômio do segundo grau,* construindo o *gráfico,* determinando as *raízes* ou *zeros* e os *pontos principais:*

1.ª) $y = x^2 - 8x + 7$
2.ª) $y = -x^2 + 5x - 4$
3.ª) $y = -x^2 + 2x - 2$
4.ª) $y = -2x^2 + 8x - 8$
5.ª) $y = 2x^2 - x + 4$
6.ª) $y = x^2 + 8x + 15$
7.ª) $y = -x^2 + 2x + 15$
8.ª) $y = 3x^2 - 6x$
9.ª) $y = x^2$
10.ª) $y = -2x^2$

"Travessuras" do coeficiente a . . .

Seria possível — sem desenhar — reconhecer a *posição* do *vértice* da parábola ($y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$) como um *mínimo* ($\cup$) ou *máximo* ($\cap$), conhecendo-se *sòmente* o *sinal* do coeficiente a?

SIM. Basta você prestar bem atenção ao *sinal qualificativo* do coeficiente a nos exemplos há pouco estudados.

Assim, no trinômio:

$$y = x^2 - 7x + 10 \quad (1.^{\circ} \text{ exemplo, pág. } 111)$$

o coeficiente $a = {}^{+}1$ tem o sinal qualificativo *positivo* e o *vértice* da parábola correspondente é um ponto de *mínimo* ($\cup$) (o mesmo ocorrendo nos exemplos 3.º e 4.º).

Já no trinômio:

$$y = {}^{-}x^2 + 6x - 5 \quad (2.^{\circ} \text{ exemplo, pág. } 113)$$

cujo coeficiente $a = {}^{-}1$ tem o sinal qualificativo *negativo*, o *vértice* da parábola correspondente é um ponto de *máximo* ($\cap$) (o mesmo ocorrendo com alguns exercícios do Grupo 37).

Conclusão: Agora você já pode reconhecer — **sem desenhar!** — se o *vértice* da parábola $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) é um ponto de *mínimo* ou de *máximo*:

$$\text{se } a > 0 \Longrightarrow V \text{ é um ponto de } \textit{mínimo}$$
$$\text{se } a < 0 \Longrightarrow V \text{ é um ponto de } \textit{máximo}$$

Procure verificar, com outros exemplos, esta *conclusão*.

Estudo algébrico do trinômio do segundo grau

12. *Decomposição do trinômio do segundo grau em fatôres do primeiro grau*

Seja o trinômio:

$$y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

onde $\Delta \geqslant 0$, isto é, admite *raízes* ou *zeros*.

Nestas condições é possível *decompor* o trinômio no *produto de dois fatôres do primeiro grau*, envolvendo tais raízes. De fato, lembrando as *propriedades principais* das raízes de uma equação do segundo grau:

$$\begin{cases} x' + x'' = \dfrac{-b}{a} \quad \text{ou} \quad \dfrac{b}{a} = {}^{-}(x' + x'') \\[2ex] x' \times x'' = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

o trinômio $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) pode ser escrito:

$$y = ax^2+bx+c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) =$$
$$= a[x^2-(x'+x'')x+x'x''] = (\ldots \text{substituindo } \frac{b}{a} \text{ e } \frac{c}{a} \text{ pelos valôres acima})$$
$$= a(x^2-x'x-x''x+x'x'') = (\ldots \text{propriedade distributiva})$$
$$= a[x(x-x')-x''(x-x')] = (\ldots \text{fatorando})$$
$$= a(x-x')\,(x-x'') \qquad (\ldots \text{fatorando})$$

Logo: $\boxed{y = a(x-x')\,(x-x'')}$

e o trinômio está *decomposto* no *produto de dois fatôres do primeiro grau* $(x - x')$ e $(x - x'')$.

No caso particular de o trinômio ter: $\Delta = 0$, isto é, $x' = x''$, então a *decomposição* terá a forma:

$$\boxed{y = a(x - x')^2}$$

Exemplos: Decompor em *fatôres do primeiro grau* os seguintes trinômios:

1.º) $y = 2x^2 - 5x - 3$

Temos: $a = 2$ e $\Delta = 49 \Longrightarrow \Delta > 0$ (é só calcular. . .) e, portanto:

$$V = \left\{\frac{-1}{2},\ 3\right\} \qquad \text{(é só resolver a equação. . .)}$$

Como: $y = a(x - x')\,(x - x'')$

vem: $y = 2\left(x - \dfrac{-1}{2}\right)(x - 3)$ ou $y = (2x + 1)\,(x - 3)$

2.º) $y = {}^{-}x^2 + 6x - 9$

Temos: $a = {}^{-}1$ e $\Delta = 0$ e, portanto: $V = \{3\}$

Como: $y = a(x - x')^2$

vem: $y = {}^{-}1(x - 3)^2$ ou $y = {}^{-}(x - 3)^2$

3.º) $\boxed{y = x^2 - 3}$

Temos: $a = 1$ e $\Delta = 12 \Longrightarrow \Delta > 0$ e, portanto: $V = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

vem: $y = 1(x - -\sqrt{3})(x - \sqrt{3})$ ou $y = (x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 40

Decompor em *fatôres do primeiro grau* os seguintes trinômios:

1.º) $y = 2x^2 - 10x + 12$	6.º) $y = \frac{-2}{3}x^2 + x + \frac{1}{2}$
2.º) $y = -x^2 + 9x - 18$	7.º) $y = x^2 - 1$
3.º) $y = x^2 - 6x + 9$	8.º) $y = 4x^2 - 8x$
4.º) $y = 2x^2 + 3x - 2$	9.º) $y = x^2 - 25$
5.º) $y = -x^2 + 3x + 10$	10.º) $y = x^2 + x$

13. *1.ª aplicação: variação do sinal do trinômio*

Em Álgebra o problema *equivalente* ao problema:

reconhecer os pontos da parábola $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ *que estão situados "acima" ou "abaixo" do eixo-*x

é

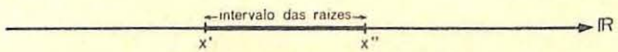
estudar a variação do sinal do trinômio $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ *quando* x *varia em* $\mathbb{R}$

Nestas condições, sempre que possível, será feita a *interpretação geométrica* do tratamento *algébrico* a ser dado ao trinômio do segundo grau.

Seja o trinômio: $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, e o seu discriminante: $\Delta = b^2 - 4ac$, que pode satisfazer aos seguintes casos:

1.º CASO: $\Delta > 0 \Longrightarrow \exists x', x'' \mid x' \neq x''$

O conjunto de valôres de x compreendidos entre as raízes x' e x'' é denominado *intervalo das raízes* (x', x''). No *intervalo das raízes* que figura na reta numerada (conjunto $\mathbb{R}$), a raiz x' é suposta *menor* que x'', isto é, $x' < x''$:



Nesse primeiro caso, dado que $\Delta > 0$, o trinômio $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ pode ser decomposto no *produto de fatôres do primeiro grau:*

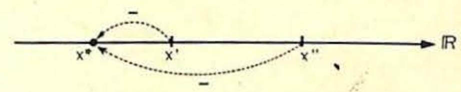
$$y = a(x - x')(x - x'')$$

Todo valor de x tal que: $x < x'$ ou $x > x''$, é *exterior* ("fora") ao intervalo das raízes, e todo valor de x tal que: $x' < x < x''$, é *interior* ("dentro") ao intervalo das raízes.

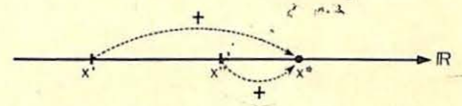
Qual será o **sinal do trinômio** (y) *à medida que* x, *percorrendo os valôres de* $\mathbb{R}$, *é exterior ou interior ao intervalo das raízes?*

A resposta será dada representando um determinado valor de x por x^* (número real) e supondo:

1) x^* *exterior* ao intervalo das raízes:



ou



Então, as *diferenças:*

$x^* - x' < 0$	ou	$x^* - x' > 0$
$x^* - x'' < 0$		$x^* - x'' > 0$
são *ambas negativas*		são *ambas positivas*

e, portanto, em qualquer um dos casos o *produto* dessas diferenças será *sempre positivo.*

A decomposição do trinômio:

$$y = a\underbrace{(x^* - x')}_{\substack{- \\ +}}.\underbrace{(x^* - x'')}_{\substack{- \\ +}} \quad \begin{matrix}\text{(ambas negativas)}\\ \text{(ambas positivas)}\end{matrix}$$

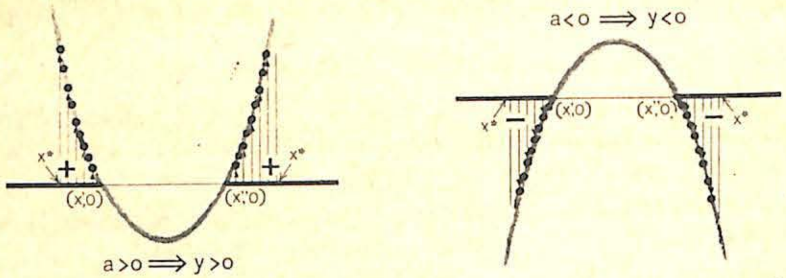
$$\downarrow \quad \downarrow \quad \underbrace{\qquad\qquad}_{+}$$

$$? \quad ?$$

mostra que, sendo o produto $(x^* - x')(x^* - x'')$ *sempre positivo,* o sinal de y (trinômio) será o **mesmo sinal de** $\boldsymbol{a}$, isto é:

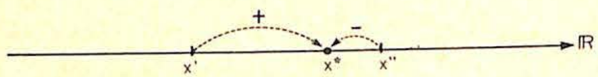
$$a > 0 \Longrightarrow y > 0$$
$$a < 0 \Longrightarrow y < 0$$

Gràficamente, temos:



isto é, *pontos de abscissa* ***"fora"*** *do intervalo das raízes têm ordenada com o* ***sinal igual*** *ao sinal de* **a**.

2) x^* *interior* ao intervalo das raízes:



Nesta hipótese as *diferenças* têm *sinais contrários*, pois:

$$x^* - x' > 0 \text{ (positivo) e } x^* - x'' < 0 \text{ (negativo)}$$

e o *produto* delas será *sempre negativo:*

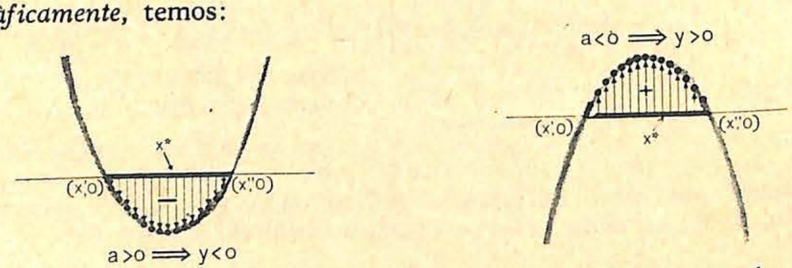
$$\underset{?}{y} = \underset{?}{a}\underbrace{\underbrace{(x^* - x')}_{+} \cdot \underbrace{(x^* - x'')}_{-}}_{-}$$

Então o sinal de y (trinômio) será sempre **contrário ao sinal de** a, isto é:

$$a > 0 \Longrightarrow y < 0$$
$$a < 0 \Longrightarrow y > 0$$

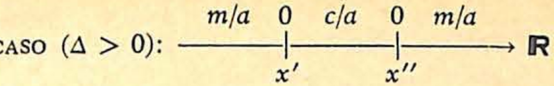
NOTA: Se $x^* = x'$ ou $x^* = x''$, o trinômio (y) *se anula* (pois x' e x'' são as *raízes* ou *zeros* do trinômio).

Gràficamente, temos:



isto é, *pontos com abscissa* ***"dentro"*** *do intervalo das raízes têm ordenada com o* ***sinal contrário*** *ao sinal de* **a**.

CONCLUSÃO DO 1.° CASO ($\Delta > 0$):

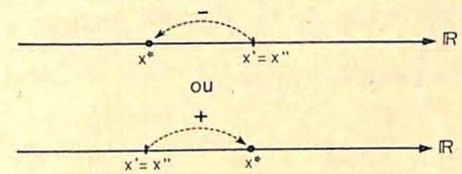


Se $\Delta > 0$: o sinal do trinômio (y) *é o mesmo* de a (abreviatura: m/a) para valôres de x *exteriores* ao intervalo das raízes, e é *contrário* ao de a (abreviatura: c/a) para valôres de x *interiores* ao intervalo das raízes.

O valor do trinômio (y) é nulo (0) quando x é igual a x' ou x''.

2.° CASO: $\Delta = 0 \Longrightarrow \exists x', x'' \mid x' = x''$

O *intervalo das raízes* será representado, agora, na reta real por um ponto de abscissa $x' = x''$:



A decomposição do trinômio, neste caso, é:

$$y = a(x - x')^2$$

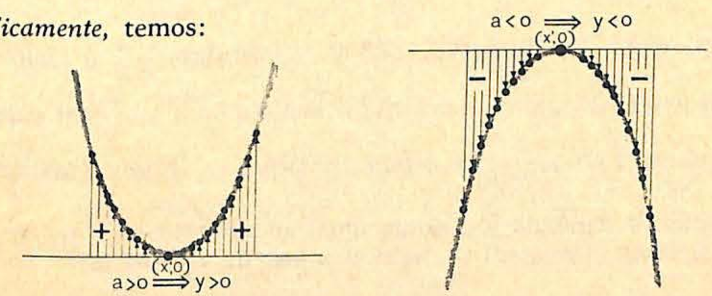
e para qualquer valor x^*, diferente das raízes, o quadrado da diferença:

$$\underbrace{(x^* - x')^2}_{\substack{- \\ +}}$$

é *sempre positivo* e, portanto, o sinal de y (trinômio) será sempre o *mesmo* de a. Logo:

$$a > 0 \Longrightarrow y > 0$$
$$a < 0 \Longrightarrow y < 0$$

Gràficamente, temos:



Agora, *a ordenada de todos os pontos da parábola, com exceção do vértice, tem* ***o mesmo*** *sinal que* **a**.

CONCLUSÃO DO 2.º CASO ($\Delta = 0$): $\xrightarrow[\quad x'=x'' \quad]{m/a \quad 0 \quad m/a} \mathbb{R}$

Se $\Delta = 0$: o sinal do trinômio (y) *é o mesmo* de a (m/a) para *qualquer valor de* x *diferente* da raiz *dupla* ($\forall x,\ x \neq x'$).

3.º CASO: $\quad \Delta < 0 \Longrightarrow \nexists$ *raízes reais*

Neste caso *não é possível* decompor o trinômio em fatôres do primeiro grau. Todavia, o estudo do *sinal do trinômio* (y) é feito por intermédio de uma outra decomposição do trinômio, conhecida pelo nome de *forma canônica* e obtida da seguinte maneira:

$$y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

$$\text{ou } y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

$$\text{ou } y = a\Bigg(\underbrace{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}}_{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} + \underbrace{\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a}}_{\frac{4ac - b^2}{4a^2}}\Bigg)\left(\text{somando e subtraindo } \frac{b^2}{4a^2}\right)$$

$$(4ac - b^2 = {}^-\Delta)$$

$$\text{ou } y = a\Bigg[\underbrace{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{{}^-\Delta}{4a^2}}_{+}\Bigg]$$

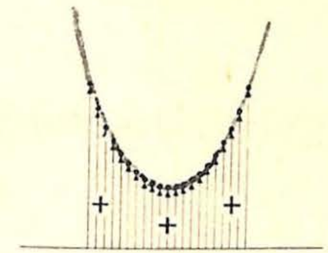
Ora, como $\Delta < 0$, então ${}^-\Delta > 0$ e, portanto, $\frac{{}^-\Delta}{4a^2}$ *é sempre positivo* (lembre-se de que $4a^2$ é positivo); *também* para qualquer valor x^* de x o têrmo $\left(x^* + \frac{b}{2a}\right)^2$ é sempre positivo (. . .é um quadrado).

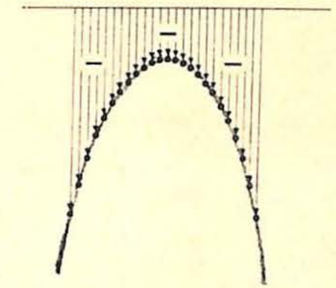
Então, o trinômio (y), sendo igual ao produto de a por um número *sempre positivo*, terá o **mesmo sinal de** a, isto é:

$$a > 0 \Longrightarrow y > 0$$
$$a < 0 \Longrightarrow y < 0$$

Gràficamente, temos:

a<o ⟹ y<o





a>o ⟹ y>o

No caso de a parábola não interceptar o eixo-x, a *ordenada de qualquer de seus pontos tem* ***o mesmo*** *sinal que o de* a.

CONCLUSÃO DO 3.º CASO ($\Delta < 0$): $\xrightarrow{\quad m/a \quad} \mathbb{R}$

Se $\Delta < 0$: o sinal do trinômio (y) para *qualquer valor de* x ($\forall x$) é o *mesmo* de a (m/a).

LEMBRETE AMIGO

É bem fácil conhecer o *sinal* do trinômio:

$$y = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$$

quando x varia no conjunto $\mathbb{R}$: basta conhecer *qual é o* Δ *e qual é o sinal de* a. Assim:

se $\Delta > 0$, então $\xrightarrow[\quad x' \qquad\quad x'' \quad]{m/a \quad 0 \quad c/a \quad 0 \quad m/a} \mathbb{R}$

se $\Delta = 0$, então $\xrightarrow[\quad x'=x'' \quad]{m/a \quad 0 \quad m/a} \mathbb{R}$

se $\Delta < 0$, então $\xrightarrow{\quad m/a \quad} \mathbb{R}$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO — GRUPO 41

Estude a *variação do sinal* dos seguintes trinômios do segundo grau:

1.º) $y = 5x^2 + 9x - 2$

Temos: $a = {}^{+}5$ e $\Delta = 121 \Longrightarrow \Delta > 0 \Longrightarrow V = \left({}^{-}2,\ \frac{1}{5}\right)$ (só resolver a equação. . .)

Se $\Delta > 0$, então $\dfrac{m/a \quad | \quad c/a \quad | \quad m/a}{\quad x' \qquad x'' \quad}$ ou $\dfrac{+ \quad 0 \quad - \quad 0 \quad +}{\quad {}^{-}2 \qquad \frac{1}{5} \quad}$

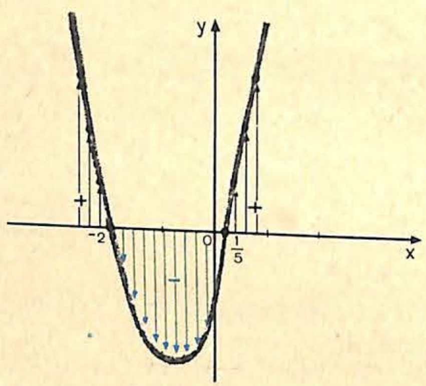
Portanto, o trinômio y será:

1) *positivo:* para $x < {}^{-}2$ ou $x > \frac{1}{5}$ (. . . valôres de x *exteriores* ao intervalo das raízes $^{-}2$ e $\frac{1}{5}$)

2) *negativo:* para $x > {}^{-}2$ ou $x < \frac{1}{5}$ (ou $^{-}2 < x < \frac{1}{5}$) (. . . valôres de x *interiores*. . .)

OBSERVAÇÕES: 1.ª) O trinômio y é *nulo* para as *raízes*: $x' = {}^{-}2$ ou $x'' = \frac{1}{5}$.

2.ª) Você pode apreciar tôda essa *variação do sinal* do trinômio y desenhando a *parábola* que o representa:



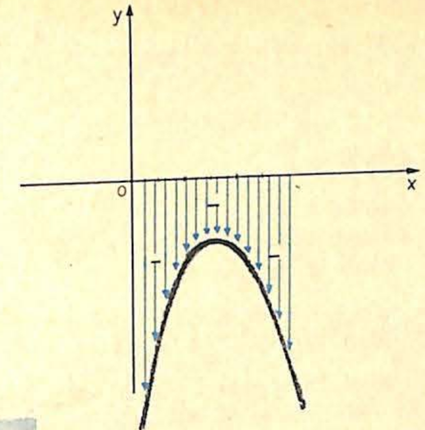
2.º) $y = {}^{-}3x^2 + 9x - 9$

Temos: $a = {}^{-}3$ e $\Delta = {}^{-}27 \Longrightarrow \Delta < 0 \Longrightarrow V = \varnothing$, isto é, *não existem* raízes reais.

Se $\Delta < 0$, então $\dfrac{m/a}{\qquad}$ ou $\dfrac{-}{\qquad}$

Portanto, o trinômio y, para qualquer valor de x, é *negativo* (que é o sinal de $a = {}^{-}3$).

Gràficamente. . .

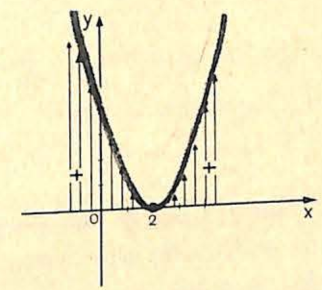


3.º) $y = x^2 - 4x + 4$

Temos: $a = {}^{+}1$ e $\Delta = 0 \Longrightarrow V = \{2\}$

Se $\Delta = 0$, então $\dfrac{m/a \quad | \quad m/a}{x' = x''}$ ou $\dfrac{+ \quad 0 \quad +}{2}$

Portanto, o trinômio y, para qualquer valor de $x \neq 2$, é *positivo* (que é o sinal de $a = {}^{+}1$).

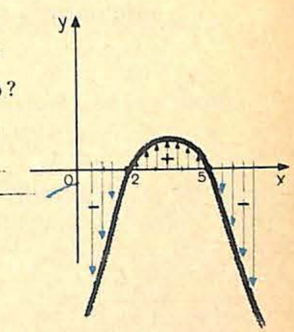


4.º) Para que valôres de x o trinômio: $y = {}^{-}x^2 + 7x - 10$, é:

1) positivo? 2) nulo? 3) negativo?

Temos: $a = {}^{-}1$ e $\Delta = 9 \Longrightarrow \Delta > 0 \Longrightarrow V = \{2, 5\}$

Se $\Delta > 0$, então $\dfrac{m/a \quad | \quad c/a \quad | \quad m/a}{\quad x' \qquad x'' \quad}$ ou $\dfrac{- \quad 0 \quad + \quad 0 \quad -}{\quad 2 \qquad 5 \quad}$

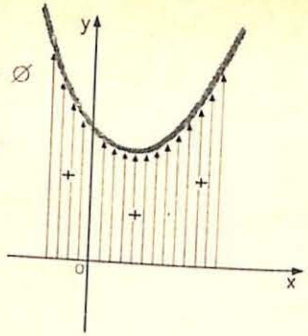


e, portanto, o trinômio y será:

1) *positivo:* para $x > 2$ e $x < 5$ $(2 < x < 5)$
2) *nulo:* para $x = 2$ ou $x = 5$
3) *negativo:* para $x < 2$ ou $x > 5$

5.º) Idem, para o trinômio: $y = 2x^2 - 3x + 4$

Temos: $a = 2$ e $\Delta = {}^-23 \Longrightarrow \Delta < 0 \Longrightarrow V = \varnothing$



Se $\Delta < 0$, então $\xrightarrow{\quad m/a \quad}$ ou $\xrightarrow{\quad + \quad}$

e, portanto, o trinômio y será:

1) *positivo:* para *qualquer* x $(\forall x)$
2) *nulo:* para *nenhum* x $(\nexists x \mid y = 0)$
3) *negativo:* para *nenhum* x $(\nexists x \mid y < 0)$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 42

1. Estude a *variação do sinal* dos seguintes *trinômios do segundo grau:*

1.º) $y = x^2 - 5x + 6$
2.º) $y = {}^-3x^2 - x + 2$
3.º) $y = x^2 - 4x + 4$
4.º) $y = {}^-2x^2 + x - 4$
5.º) $y = x^2 - 25$
6.º) $y = {}^-3x^2 + 12x$
7.º) $y = 15x^2 - x - 6$
8.º) $y = \dfrac{{}^-x^2}{4} + 36$
9.º) $y = x^2 - 6x + 7$
10.º) $y = 4x^2 - 6$

2. Determine para que *valôres de x* os seguintes trinômios do segundo grau são, respectivamente: *positivo, negativo* ou *nulo:*

1.º) $y = x^2 - 6x + 8$
2.º) $y = {}^-3x^2 + x - 6$
3.º) $y = {}^-x^2 + 25$
4.º) $y = 2x^2 + 4$
5.º) $y = {}^-2x^2 + 6x$
6.º) $y = {}^-x^2 - 8x + 16$
7.º) $y = 3x^2 - 9x$
8.º) $y = x^2 - 1$

14. 2.ª *aplicação: reconhecimento da posição de um número real em relação às raízes de um trinômio do segundo grau, sabendo-se que elas existem*

Você pode — *sem determinar as raízes!* — saber se um dado número real é *interior* ou *exterior* ao intervalo das raízes do trinômio: $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.

Suponhamos, por exemplo, que o número real n seja *exterior* ao intervalo das raízes (no desenho: $n < x'$):

$$\underset{n}{|} \qquad \underset{x'}{|} \qquad \underset{x''}{|} \longrightarrow \mathbb{R}$$

para $x = n \Longrightarrow y = an^2 + bn + c = y_{(n)}$ (valor numérico do trinômio y para $x = n$).

Como n é *exterior*, então $y_{(n)}$ tem o *mesmo sinal de a* e, portanto, o *produto:*

$$a.y_{(n)} > 0 \text{ (é } \textit{positivo}\text{)}$$

Se n fôsse *interior* ao intervalo das raízes:

para $x = n \Longrightarrow y = an^2 + bn + c = y_{(n)}$ tem *sinal contrário ao de a* e, portanto, o *produto:*

$$a.y_{(n)} < 0 \text{ (é } \textit{negativo}\text{)}$$

Logo:

$$\text{se} \bullet \begin{cases} a.y_{(n)} > 0, \text{ então } n \text{ é } \textit{exterior} \\ a.y_{(n)} < 0, \text{ então } n \text{ é } \textit{interior} \end{cases}$$

Exemplo: Dizer, em relação ao intervalo das raízes do trinômio:

$$y = {}^-12x^2 + 246x - 120,$$

qual a *posição* dos números ${}^-2$ e 4.

Nota: Os coeficientes do trinômio são, propositalmente, números "grandes", para evitar que se queira determinar as raízes do trinômio...

Temos: $y_{({}^-2)} = {}^-12({}^-2)^2 + 246({}^-2) - 120 = {}^-660$

$y_{(\ 4)} = {}^-12(\ 4)^2 + 246(\ 4) - 120 = \ 672$

e sendo: $a = {}^-12$ (negativo), basta considerar o *sinal do produto:*

$$a.y_{({}^-2)} = {}^-12({}^-660) \Longrightarrow\ > 0 \Longrightarrow {}^-2 \text{ é } \textit{exterior}$$
$$a.y_{(\ 4)} = {}^-12(\ 672) \Longrightarrow\ < 0 \Longrightarrow 4 \text{ é } \textit{interior}$$

Observação: Se você quiser precisar melhor a posição de um número real em relação às raízes x' e x'' do trinômio do segundo grau, basta confrontá-lo com a *semi-soma:* $\dfrac{x' + x''}{2} = \dfrac{{}^-b}{2a}$.

Assim, por exemplo, com relação ao número ${}^-2$ — que é *exterior* ao intervalo das raízes — você ainda pode saber se êle é *menor* que a menor raiz (x') ou *maior* que a maior raiz (x''), confrontando-o com o número:

$$\frac{x' + x''}{2} = \frac{{}^-b}{2a} = \frac{{}^-246}{{}^-24} = \frac{41}{4} = 10\frac{1}{4}$$

Logo: $\underset{{}^-2}{|} \quad \underset{x'}{|} \quad \underset{4}{|} \quad \underset{10\frac{1}{4}}{|} \quad \underset{x''}{|} \longrightarrow \mathbb{R}$

${}^-2$ está à "esquerda" de x' porque ${}^-2 < 10\frac{1}{4}$

4 (que é *interno*) também está à "esquerda" do ponto médio, pois $4 < 10\frac{1}{4}$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 43

Dê a *posição dos seguintes números*, em relação ao intervalo das raízes, dos trinômios:

1.º) números: $^-1$ e 10	trinômio: $y = x^2 - 39x + 270$
2.º) números: $^-5$ e 8	trinômio: $y = 2x^2 - 64x + 480$
3.º) número: 1	trinômio: $y = {}^-63x^2 + 55x - 12$
4.º) número: 0	trinômio: $y = 36x^2 - 9$

Inequações do segundo grau

15. *Definição e resolução algébrica*

Chama-se *inequação do segundo grau* na variável x a tôda sentença aberta da forma:

$$ax^2 + bx + c > 0 \quad (a \neq 0)$$
$$\text{ou } ax^2 + bx + c < 0 \quad (a \neq 0)$$

A *resolução* de uma inequação do segundo grau, em $\mathbb{R}$, isto é, a determinação de seu *Conjunto-Verdade*, reduz-se ao estudo do *sinal do trinômio*. Isto porque se procuram os valôres de x que tornam o primeiro membro da inequação — *que é o trinômio* $y = ax^2 + bx + c$ — *positivo* ou *negativo*.

Portanto, as "peças" fundamentais na resolução de uma inequação do segundo grau são: o *sinal do coeficiente a* e o *discriminante* Δ.

Exemplos: Resolver as seguintes *inequações do segundo grau*, no conjunto $\mathbb{R}$:

1.ª) $\boxed{4x^2 - 3x - 1 > 0}$

Temos: $a = {}^+4$ (positivo) e procuram-se os valôres de x que tornam o trinômio $4x^2 - 3x - 1$ *positivo* (> 0), ou seja, com o *mesmo sinal de a* (m/a).

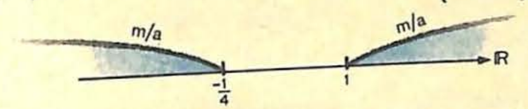
Simbòlicamente, pode-se simplificar da seguinte maneira:

$$\underbrace{\underset{\text{positivo}}{4x^2} - 3x - 1 \underset{\text{positivo}}{>} 0}_{m/a} \quad (m/a)$$

Tudo depende, agora, do Δ:

Como: $\Delta = 9 + 16 = 25 \Longrightarrow \Delta > 0 \Longrightarrow V = \left\{\frac{-1}{4}, 1\right\}$

e, portanto:



isto é, os valôres de x que dão ao trinômio o m/a são os *exteriores* ao intervalo das raízes. Logo:

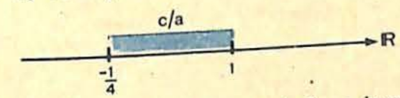
$$x < \frac{-1}{4} \text{ ou } x > 1$$

e a *solução* da inequação proposta será indicada:

$V = \{x \mid x < \frac{-1}{4} \text{ ou } x > 1\}$ (lê-se: "conjunto dos n.os x tais que sejam menores que $\frac{-1}{4}$ ou maiores que 1)

NOTA: Se a inequação fôsse: $\underbrace{\underset{\text{positivo}}{4x^2} - 3x - 1 \underset{\text{negativo}}{<} 0}_{c/a}$ (c/a)

a *solução* seria constituída pelos valôres de x *interiores* ao intervalo das raízes, isto é: $\frac{-1}{4} < x < 1$, ou seja:



$V = \{x \mid \frac{-1}{4} < x < 1\}$

Está claro que terá a *mesma solução* a inequação:

$$\underbrace{\underset{\text{negativo}}{-4x^2} + 3x + 1 \underset{\text{positivo}}{>} 0}_{c/a} \quad (c/a)$$

pois, multiplicando por $^-1$ ambos os membros dessa inequação, obteremos a inequação já resolvida: $4x^2 - 3x - 1 > 0$. Lembre-se de que, multiplicando por $^-1$, a inequação **muda de sentido**.

2.ª) $\boxed{\frac{x^2 - 1}{3} - 2(3x + 1) > 3 + \frac{2x^2 - 5}{2}}$

Primeiramente, procuramos colocar a inequação dada sob forma conhecida ($ax^2 + bx + c > 0$ ou $ax^2 + bx + c < 0$):

$2(x^2-1)-12(3x+1) > 18+3(2x^2-5)$ (m.m.c. dos denominadores: 6)

ou $2x^2-2-36x-12 > 18+6x^2-15$

ou $-4x^2-36x-17 > 0$ e, se quiser:

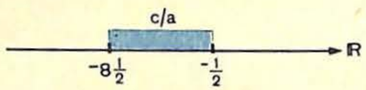
$4x^2+36x+17 < 0$

Logo, a inequação a resolver é:

$$\underbrace{\overset{\text{positivo}}{4x^2} + 36x + 17 \overset{\text{negativo}}{<} 0}_{c/a} \quad (c/a)$$

Como: $\Delta = 1.024 \Longrightarrow \Delta > 0 \Longrightarrow V = \left\{-8\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\right\}$

vem:



Solução: $V = \left\{x \mid -8\frac{1}{2} < x < \frac{-1}{2}\right\}$

3.ª) $5x^2-2x+5 < 0$

Temos: $\underbrace{\overset{\text{positivo}}{5x^2} - 2x + 5 \overset{\text{negativo}}{<} 0}_{c/a} \quad (c/a)$

Sendo: $\Delta = -96 \Longrightarrow \Delta < 0 \Longrightarrow V = \varnothing$ (não existem raízes reais)

e, portanto: $\overline{\quad m/a \quad}$

Então, como para $\forall x$ o sinal do trinômio é o m/a e, de acôrdo com a inequação proposta, procuramos os valôres de x que dão ao trinômio o sinal c/a, segue-se que a inequação *não tem solução*, ou seja:

$$V = \varnothing$$

NOTA: Se a inequação fôsse: $5x^2-2x+5 > 0$ (m/a), a *solução* seria: *qualquer valor atribuído a x*, isto é:

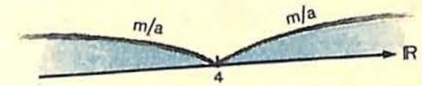
$$V = \mathbb{R}$$

4.ª) $-x^2+8x-16 < 0$

Temos: $\underbrace{\overset{\text{negativo}}{-x^2} + 8x - 16 \overset{\text{negativo}}{<} 0}_{m/a} \quad (m/a)$

Como: $\Delta = 64-64 = 0 \Longrightarrow \Delta = 0 \Longrightarrow V = \{4\}$

e, portanto:



Logo, $\forall x$, $x \neq 4$ é *solução* da inequação, isto é:

$$V = \{x \mid x \neq 4\}$$

NOTA: Se fôsse para resolver a inequação: $-x^2+8x-16 \leqslant 0$ (lê-se: "menor ou igual a zero"), sua *solução* seria dada por *todos* os valôres que tornam o *trinômio negativo*, *mais* os que o *anulam*, isto é, para qualquer número real.

Logo: $V = \mathbb{R}$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 44

Resolva as seguintes *inequações do segundo grau* no conjunto $\mathbb{R}$:

1.ª) $x^2-7x+10 > 0$

2.ª) $-x^2+8x-7 > 0$

3.ª) $-7x^2+x+6 > 0$

4.ª) $3x^2-x+8 \leqslant 0$

5.ª) $x^2-6x+9 > 0$

6.ª) $x^2+16x-80 < 0$

7.ª) $9x^2-30x+25 < 0$

8.ª) $2x^2-5x+8 \geqslant 0$

9.ª) $-x^2+x-8 \leqslant 0$

10.ª) $-4x^2+2x-3 < 0$

11.ª) $16x^2 \geqslant 9$

12.ª) $(x-1)^2-130 < -(x+1)^2$

13.ª) $3x^2-12x < 0$

14.ª) $5x^2-1 \geqslant 0$

15.ª) $3x^2-30 > 51+2x^2$

16.ª) $\frac{3x^2}{8}-\frac{x}{4} < 0$

17.ª) $4x^2+(x+2)^2 > 4x(x+2)$

18.ª) $3(x-1)-6x \geqslant 2-2x(x-3)$

19.ª) $(2x-1)^2-4x^2 > x^2-4x+8$

20.ª) $\frac{x^2}{3}-4(x+1) < \frac{3x^2}{2}-4$

21.ª) $\frac{x-2}{3} \leqslant 3-\frac{(x+1)(x-3)}{6}$

22.ª) $(2-3x)^2-5x < -3-(2x-1)^2$

23.ª) $\frac{3}{4}(x-1)^2-\frac{5}{3}x \geqslant 1-(x+1)^2$

24.ª) $\left(1-\frac{5}{2}x\right)^2 < 0$

16. *Inequações cuja resolução se reduz à de uma inequação do segundo grau*

Exemplos: Resolver as seguintes inequações no conjunto $\mathbb{R}$:

1.ª) $\dfrac{x+2}{x-1} < \dfrac{3x-1}{x+3}$ $(x \neq 1,\ x \neq {}^{-}3)$

"Transportando" $\dfrac{3x-1}{x+3}$ para o primeiro membro:

$$\frac{x+2}{x-1} - \frac{3x-1}{x+3} < 0 \qquad (\ldots \text{ e sendo o m.m.c.: } (x-1)\,(x+3))$$

$$\frac{(x+3)\,(x+2) - (x-1)\,(3x-1)}{(x-1)\,(x+3)} < 0$$

ou $\dfrac{x^2 + 5x + 6 - 3x^2 + 4x - 1}{(x-1)\,(x+3)} < 0 \iff \dfrac{{}^{-}2x^2 + 9x + 5}{x^2 + 2x - 3} < 0$

Pode-se, ainda, multiplicar por $^{-}1$ ambos os membros da inequação (neste caso só afeta o numerador do primeiro membro), pois na prática interessa trabalhar com o coeficiente *a* positivo, isto é:

$\dfrac{2x^2 - 9x - 5}{x^2 + 2x - 3} > 0$, que é *equivalente* à inequação proposta

Esta última inequação é resolvida estudando-se a *variação do sinal* dos trinômios que figuram, respectivamente, no numerador e denominador, o que permite determinar os valôres reais de x que tornam *positivo* o quociente dêsses trinômios.

Indicando, respectivamente, por y_1 e y_2 os trinômios que figuram no numerador e denominador, temos:

$$y_1 = 2x^2 - 9x - 5$$

$$a = {}^{+}2 \text{ e } \Delta_1 = 121 \Longrightarrow \Delta > 0 \Longrightarrow V_1 = \left\{\frac{-1}{2},\ 5\right\}$$

+	$\frac{-1}{2}$	−	5	+

$$y_2 = x^2 + 2x - 3$$

$$a = {}^{+}1 \text{ e } \Delta_2 = 16 \Longrightarrow \Delta > 0 \Longrightarrow V_2 = \{{}^{-}3,\ 1\}$$

+	$^{-}3$	−	1	+

Dispondo as raízes dos trinômios segundo o seu valor crescente, vem:

$$^{-}3,\ \frac{-1}{2},\ 1,\ 5$$

A *variação* de sinal que sofre a inequação proposta, ao variar x em $\mathbb{R}$, pode ser melhor apreciada no seguinte *quadro*, onde a separação dos intervalos é feita por traços "fortes", quando se referem às raízes do respectivo trinômio:

x		$^{-}3$		$\frac{-1}{2}$		1		5	
y_1	+		+		−		−		+
y_2	+		−		−		+		+
$\frac{y_1}{y_2}$	+		−		+		−		+

Observando a *última linha* do quadro (que dá a variação do quociente $\left.\frac{y_1}{y_2}\right)$, concluímos que o quociente dos trinômios é *positivo* para os seguintes valôres de x, que constituem a *solução* da inequação proposta:

$$x < {}^{-}3 \text{ ou } \frac{-1}{2} < x < 1 \text{ ou } x > 5$$

Logo: $\quad V = \{x \mid x < {}^{-}3 \text{ ou } \frac{-1}{2} < x < 1 \text{ ou } x > 5\}$

2.ª) $(x^2 - 7x + 12)(3x^2 - x + 5) < 0$

Temos, indicando:

$$y_1 = x^2 - 7x + 12$$

$$a = {}^+1 \text{ e } \Delta_1 = 1 \Longrightarrow \Delta > 0 \Longrightarrow V_1 = \{3, 4\}$$

+	3	−	4	+

$$y_2 = 3x^2 - x + 5$$

$$a = {}^+3 \text{ e } \Delta_2 = {}^-59 \Longrightarrow \Delta < 0 \Longrightarrow V_2 = \varnothing$$

+	+	+

x		3		4	
y_1	+		−		+
y_2	+		+		+
$y_1 . y_2$	+		−		+

Agora, o quadro correspondente mostra que os valôres de x que tornam *negativo* (de acôrdo com a inequação proposta) o *produto* $y_1 y_2$ dos trinômios são aquêles compreendidos entre 3 e 4: $3 < x < 4$.

Logo: $V = \{x \mid 3 < x < 4\}$

3.ª) $\dfrac{x^2 - 11}{2x + 1} > 1 \left(x \neq \dfrac{-1}{2}\right)$

Temos: $\dfrac{x^2 - 11}{2x + 1} - 1 > 0$

ou $\dfrac{x^2 - 11 - 1(2x + 1)}{2x + 1} > 0 \Longleftrightarrow \dfrac{x^2 - 2x - 12}{2x + 1} > 0$

$$y_1 = x^2 - 2x - 12$$

$$a_1 = {}^+1 \text{ e } \Delta_1 = 52 \Longrightarrow \Delta > 0 \Longrightarrow V_1 = \{1 - \sqrt{13},\ 1 + \sqrt{13}\}$$

+	$1 - \sqrt{13}$	−	$1 + \sqrt{13}$	+

$y_2 = 2x + 1$ (*função linear*) $\quad V_2 = \left\{\dfrac{-1}{2}\right\}$

−	$\dfrac{-1}{2}$	+

x		$1 - \sqrt{13}$		$\dfrac{-1}{2}$		$1 + \sqrt{13}$	
y_1	+		−		−		+
y_2	−		−		+		+
$\dfrac{y_1}{y_2}$	−		+		−		+

Logo: $\dfrac{y_1}{y_2} > 0$ para $1 - \sqrt{13} < x < \dfrac{-1}{2}$ ou $x > 1 + \sqrt{13}$

e, portanto: $V = \{x \mid 1 - \sqrt{13} < x < \dfrac{-1}{2} \text{ ou } x > 1 + \sqrt{13}\}$

4.ª) Quais os *valôres* que devemos atribuir a k, a fim de que o *trinômio:*

$$y = kx^2 + (k-1)x + k - 1$$

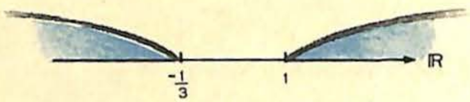
seja *negativo* para $\forall x,\ x \in \mathbb{R}$?

Ora, para que tal trinômio tenha sempre um *único sinal* — no exemplo, *negativo* — é necessário que o seu discriminante Δ seja *negativo* (m/a), o que obriga k a ser *negativo*.

$$\Delta < 0 \Longrightarrow (k-1)^2 - 4k(k-1) < 0$$

$$\text{ou } \; {}^{-}3k^2 + 2k + 1 < 0 \Longleftrightarrow 3k^2 - 2k - 1 > 0 \;\; (m/a)$$

$$\text{onde: } a = {}^{+}3 \text{ e } \Delta_1 = 16 \Longrightarrow \Delta_1 > 0 \Longrightarrow V_1 = \left\{\frac{-1}{3}, 1\right\}$$



$$k < \frac{-1}{3} \quad \text{ou} \quad k > 1$$

Como, atendendo à condição imposta pelo problema, k deve ser *negativo*, rejeitam-se os valôres de $k > 1$. Logo, a *solução* do problema é:

$$V = \left\{k \mid k < \frac{-1}{3}\right\}$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 45

1. Resolva as seguintes *inequações* no conjunto $\mathbb{R}$:

1.ª) $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - x + 5} < 0$

2.ª) $\dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 3x - 28} > 0$

3.ª) $(x^2 + 2x - 3)(3x^2 - 4x + 8) < 0$

4.ª) $\dfrac{{}^{-}2x^2 - x - 5}{x^2 - 6x + 9} \leqslant 0$

5.ª) $({}^{-}x^2 + 6x - 5)(4x^2 - 5x + 1)(x^2 - 4x + 4) > 0$
(NOTA: Agora são três: y_1, y_2 e y_3. . .)

6.ª) $\dfrac{{}^{-}5x^2 + 2x - 4}{x^2 - x + 3} > 0$

7.ª) $(x^2 + 13x + 40)({}^{-}3x^2 + 14x - 8) \geqslant 0$

8.ª) $\dfrac{x - 1}{x + 2} \geqslant \dfrac{2x + 1}{x + 1}$

9.ª) $\dfrac{1}{x - 1} - \dfrac{1}{2x + 1} > {}^{-}3$

10.ª) $\dfrac{x^2 - 25}{3x - 6} < 0$

11.ª) $\dfrac{x + 4}{2x^2 - x + 5} \geqslant 0$

12.ª) $\dfrac{(x - 5)x - (7x + 6)}{x^2 - 2x + 4} > 0$

2. Para que valôres de k o trinômio: $y = (k + 1)x^2 - 2(k - 1)x + 1$, é *positivo* para qualquer que seja x?

   NOTA: Condições a serem impostas: $\Delta < 0$ e $(k + 1) > 0$.

3. Para que valôres de n o número 3 está compreendido entre as raízes do trinômio: $y = {}^{-}2x^2 + 3nx - 9$?

   NOTA: Condições a serem impostas: $\Delta > 0$ (porque existem as raízes) e ${}^{-}2.y_{(3)} < 0$ (porque o número 3 deve estar entre as raízes).

   Resposta: $n > 3$

4. Para que valôres de k o número ${}^{-}4$ não está compreendido entre as raízes do trinômio: $y = 3x^2 + 5kx + 2k^2$?

   NOTA: Condições a serem impostas: $\Delta > 0$ e $3.y^{(-4)} < 0$.

   Resposta: $4 < k$ ou $k > 6$

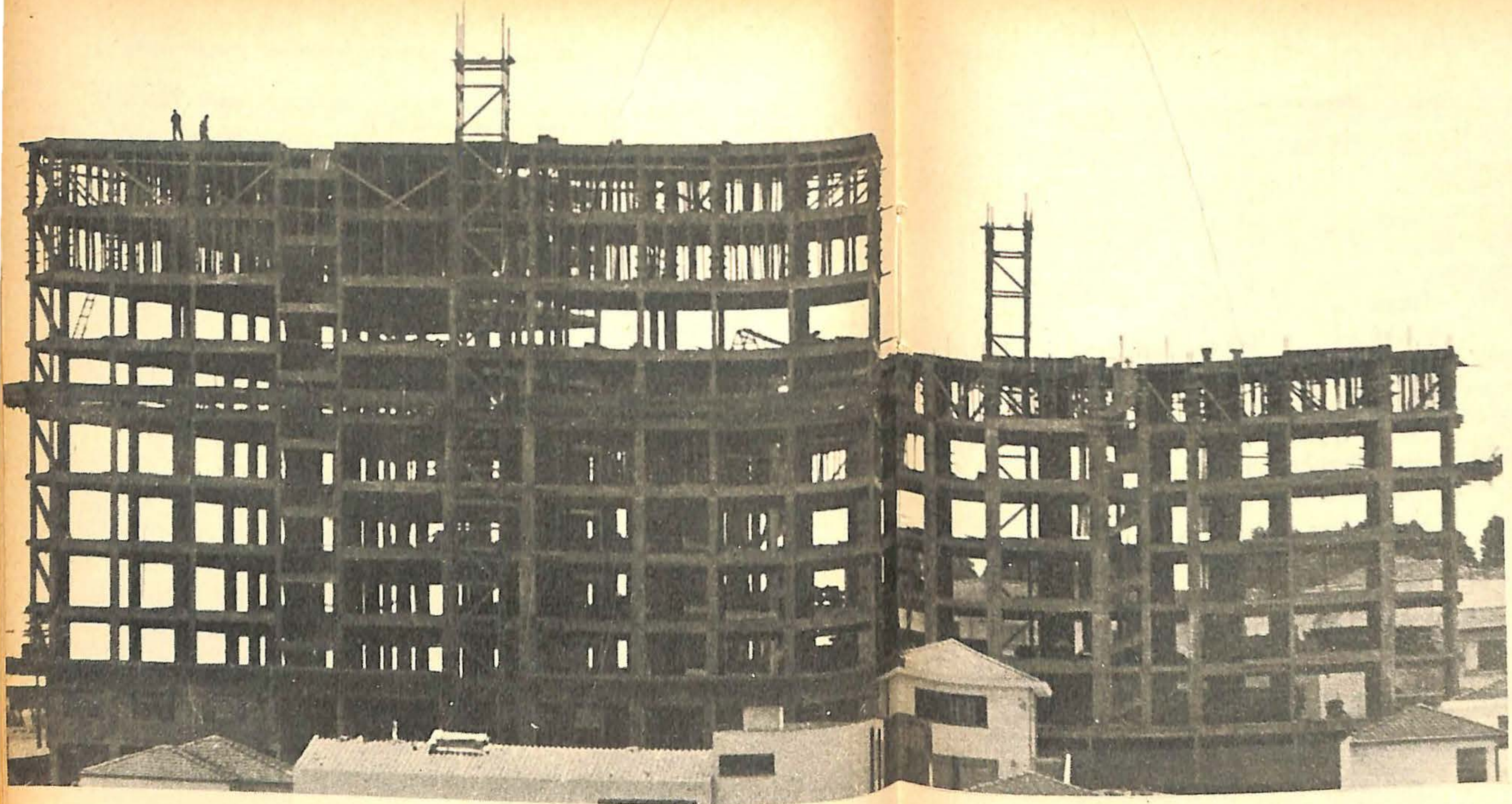
5. Determine o valor de m, a fim de que a desigualdade:

$$x^2 + 2x + m > 10$$

   seja verificada para *qualquer valor* de x.

   Resposta: $m > 11$

   NOTA: Única condição: $\Delta < 0$.



capítulo 3

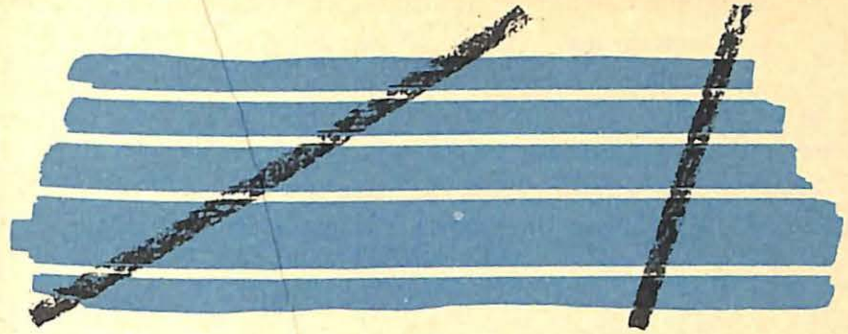
Semelhança

1.ª Parte · Razão e proporção de segmentos
· Feixe de paralelas
· Teorema de Tales

2.ª Parte · Semelhança entre figuras geométricas
· Triângulos semelhantes
· Razões trigonométricas de um ângulo
· Similitude central ou homotetia

3.ª Parte · Relações métricas no triângulo retângulo
· Teorema de Pitágoras
· Relações métricas num triângulo qualquer
· Relações métricas no círculo

4.ª Parte · Polígonos regulares
· Medida da circunferência; cálculo de π

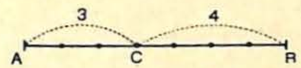


1.ª Parte · Razão e proporção de segmentos · Feixe de paralelas · Teorema de Tales

Razão e proporção de segmentos

1. *Razão de segmento*

Seja o segmento $\overline{AB}$ e um ponto C que o divide em dois segmentos: $\overline{AC}$ e $\overline{CB}$, cujas medidas (na mesma unidade, cm, por exemplo) são respectivamente: 3 e 4.



Nestas condições, diz-se que o ponto C divide o segmento $\overline{AB}$, *de A para B*, na *razão* 3 : 4 ou $\frac{3}{4}$. Indicações:

$$\frac{m(\overline{AC})}{m(\overline{CB})} = \frac{3}{4} \text{ ou, usando a notação simplificada: } \frac{AC}{CB} = \frac{3}{4}$$

NOTA: É mais cômoda, agora, a indicação de $m(\overline{AC})$ por AC e $m(\overline{CB})$ por CB, nos estudos que se seguem. Portanto, AC e CB estão representando *números reais*.

Diz-se, também, que C divide o segmento $\overline{AB}$, *de B para A*, na *razão* 4 : 3 ou $\frac{4}{3}$, cuja indicação é, anàlogamente: $\frac{CB}{AC} = \frac{4}{3}$.

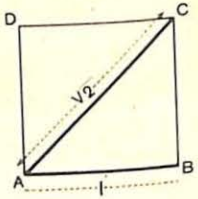
OBSERVAÇÃO IMPORTANTE: Se a *razão* entre as medidas de dois segmentos é um *número racional*, os segmentos são denominados *comensuráveis*.

No exemplo estudado os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{CB}$ são *comensuráveis*, pois:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{3}{4} \text{ (número racional)}$$

Se a *razão* das medidas é um *número irracional*, então os segmentos são denominados *incomensuráveis*.

Assim, por exemplo, a *diagonal* e o *lado* de um mesmo quadrado, *ABCD*, são *segmentos incomensuráveis*, porque a *razão* de suas medidas (sempre na mesma unidade) é igual ao *número irracional* $\sqrt{2}$, isto é:



$$\frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{1} \text{ (número irracional)}$$

De qualquer maneira, a *razão* entre dois segmentos é um *número real*.

LEMBRETE AMIGO

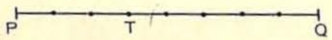
$\overline{AB}$ representa um *segmento*.

$m(\overline{AB}) = AB$, representa a *medida* do segmento $\overline{AB}$.

$\dfrac{AB}{CD}$ representa a *razão* entre os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.

TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 46

1. Na figura:

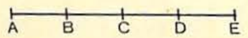


1.º) qual a *razão* entre $\overline{PT}$ e $\overline{TQ}$?

2.º) qual a *razão* entre $\overline{TQ}$ e $\overline{PT}$?

3.º) quanto vale: *a*) $\dfrac{PQ}{PT}$; *b*) $\dfrac{PT}{PT}$; *c*) $\dfrac{PQ}{TQ}$?

2. Na figura:



os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DE}$ são *congruentes*, isto é: $AB = BC = CD = DE$.

Complete as seguintes sentenças, tornando-as *verdadeiras*:

1.ª) $\dfrac{AB}{BE} = \ldots$ 2.ª) $\dfrac{BA}{DA} = \ldots$ 3.ª) $\dfrac{BD}{DE} = \ldots$

4.ª) $\dfrac{AB}{BC} = \ldots$ 5.ª) $\dfrac{AC}{AB} = \ldots$ 6.ª) $\dfrac{EA}{EC} = \ldots$

7.ª) a *razão* entre os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{CE}$ é ...

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 47

1. Suponha um segmento $\overline{AB}$ e $P \in \overline{AB}$. Se P divide o segmento $\overline{AB}$ na *razão* 2 : 3 e $AB = 20$, determine o valor de AP e o valor de PB.

(Modêlo)

Temos: $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{2}{3}$ e $AB = 20$

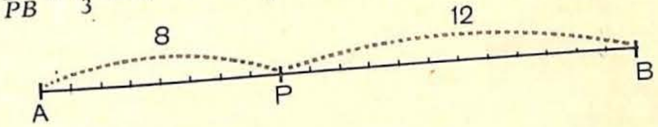
Como: $\dfrac{AP + PB}{AP} = \dfrac{2+3}{2}$ (propriedade das proporções)

vem: $\dfrac{20}{AP} = \dfrac{5}{2}$ (porque: $AP + PB = AB = 20$)

ou $AP = \dfrac{20 \times 2}{5} = 8$

Também: $\dfrac{20}{PB} = \dfrac{5}{3} \Longleftrightarrow PB = \dfrac{20 \times 3}{5} = 12$

Logo:



Verificação: $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3}$

2. M divide o segmento $\overline{PQ}$ na *razão* 3 : 2 e $PQ = 10$. Calcule o valor de PM e o valor de MQ.

3. $P \in \overline{AB}$, $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{2}{5}$ e $AB = 21$. Calcule AP e PB.

4. $P \in \overline{AB}$, $\dfrac{AP}{PB} = 6$ e $AP = 12$. Calcule AB e PB.

5. $P \in \overline{AB}$, $\dfrac{AP}{PB} = 3$ e $AB = 8$. Calcule AP e PB.

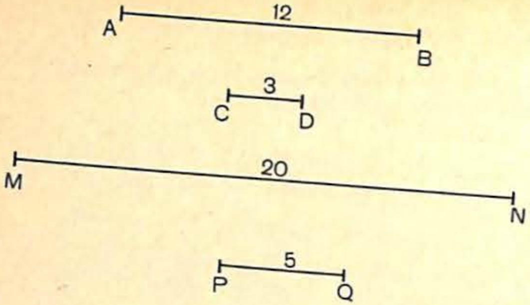
2. Proporção de segmentos

Os segmentos: $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{MN}$ e $\overline{PQ}$ dizem-se *proporcionais* nessa ordem, quando a *razão* dos dois primeiros *é igual* à *razão* dos dois últimos.

Indicação:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{MN}{PQ}$$

Diz-se também que os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são *proporcionais* aos segmentos $\overline{MN}$ e $\overline{PQ}$ ou que os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{MN}$ e $\overline{PQ}$ estão em *proporção*.



Será que os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{MN}$ e $\overline{PQ}$ (da figura ao lado) estão em *proporção?* Sim, pois:

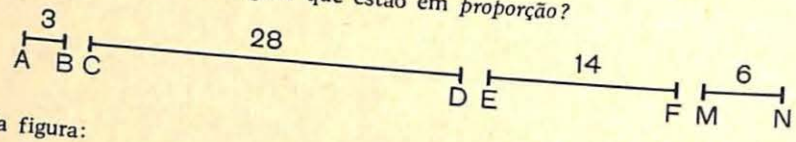
$$\frac{AB}{CD} = \frac{12}{3} = 4 \text{ e } \frac{MN}{PQ} = \frac{20}{5} = 4$$

$$\text{Logo: } \frac{AB}{CD} = \frac{MN}{PQ}$$

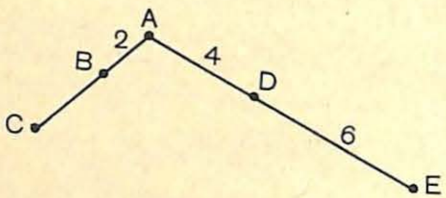
E os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{MN}$, $\overline{CD}$ e $\overline{PQ}$ seriam *proporcionais?* Responda.

TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 48

1. Quais os segmentos da figura que estão em *proporção?*



2. Na figura:



1.º) Se $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$ são *proporcionais* a $\overline{BC}$ e $\overline{DE}$, então $BC = \ldots$

2.º) Se $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AD}$ e $\overline{DE}$ estão em *proporção*, será que $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ e $\overline{AE}$ também estão em proporção? Por quê?

3. Para dizer que: $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ e $\overline{EF}$ são proporcionais a $\overline{MN}$, $\overline{PQ}$ e $\overline{RS}$, escreve-se:

$$\frac{AB}{MN} = \frac{CD}{PQ} = \frac{EF}{RS}$$

Complete, agora: se $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ e $\overline{EF}$ são proporcionais a $\overline{MN}$, $\overline{PQ}$ e $\overline{RS}$, respectivamente, e a razão entre $\overline{AB}$ e $\overline{MN}$ é 2 : 3, então a razão entre $\overline{CD}$ e $\overline{PQ}$ é ... e a razão entre $\overline{RS}$ e $\overline{EF}$ é ...

4. $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são *proporcionais* a $\overline{CD}$ e $\overline{EF}$:

   1.º) se $AB = 8$ e $EF = 2$, então $CD = \ldots$

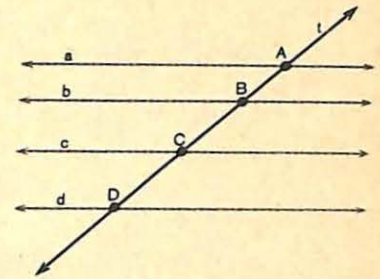
   2.º) se $AB = 4$ e $EF = 9$, então $CD = \ldots$

Feixe de paralelas — Teorema de Tales

3. *Feixe de paralelas*

Ao conjunto de três ou mais retas de um plano, *paralelas* entre si, dá-se o nome de *feixe de paralelas.*

Qualquer reta (*t*, na figura) que não pertença ao feixe é uma *transversal* que intercepta tôdas as retas do feixe (corolário do Postulado de Euclides).

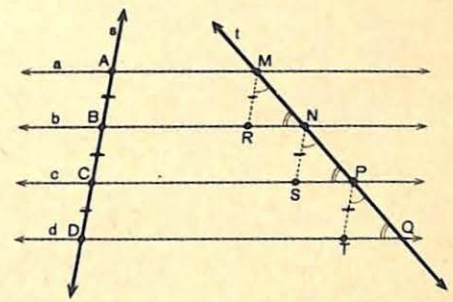


Os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, ..., determinados sôbre a transversal por um feixe de paralelas, gozam de certas propriedades que serão estudadas pelos *teoremas* que se seguem:

T.1 : *Se um feixe de paralelas determina segmentos* ***congruentes*** *sôbre uma transversal, então determina sôbre outra qualquer transversal dêsse feixe segmentos também* ***congruentes.***

$$H \begin{cases} a \parallel b \parallel c \parallel d \\ s \text{ e } t \text{ transversais} \\ \overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \end{cases}$$

$$T \{ \overline{MN} \cong \overline{NP} \cong \overline{PQ}$$



DEMONSTRAÇÃO:

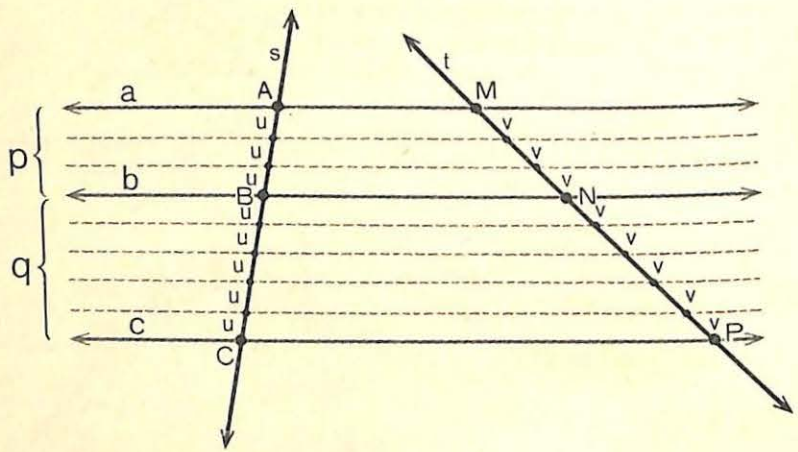
Afirmações	*Justificações*
1. $\overline{MR} \parallel \overline{AB}$; $\overline{NS} \parallel \overline{BC}$ e $\overline{PT} \parallel \overline{CD}$ (... construindo)	1. Postulado de Euclides
2. Os quadriláteros *AMRB*, *BNSC* e *CPTD* são paralelogramos	2. Lados opostos paralelos dois a dois
3. $\overline{AB} \cong \overline{MR}$, $\overline{BC} \cong \overline{NS}$ e $\overline{CD} \cong \overline{PT}$	3. Lados opostos de um paralelogramo são congruentes
4. $\overline{MR} \cong \overline{NS} \cong \overline{PT}$	4. Hipótese e propriedade transitiva da congruência
5. $\triangle MRN \cong \triangle NSP \cong \triangle PTQ$	5. Caso A.L.A. (por quê?)
6. $\overline{MN} \cong \overline{NP} \cong \overline{PQ}$	6. Lados correspondentes de triângulos congruentes

c.q.d.

T.2 : Teorema de Tales: *Um feixe de retas paralelas determina sôbre duas transversais segmentos proporcionais.*

$$H \begin{cases} a \parallel b \parallel c; \quad s \text{ e } t, \text{ transversais} \\ \overline{AB} \text{ e } \overline{BC} \in s; \quad \overline{MN} \text{ e } \overline{NP} \in t \end{cases}$$

$$T \begin{cases} \overline{AB}, \overline{BC}, \overline{MN} \text{ e } \overline{NP} \text{ são proporcionais} \\ \text{ou } \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{MN}{NP} \end{cases}$$



Demonstração:

Se $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são *comensuráveis*, então existe um segmento de medida u contido um número p de vêzes em $\overline{AB}$ e um número q de vêzes em $\overline{BC}$. Vale, pois, a *razão:*

$$\frac{AB}{BC} = \frac{p}{q} \quad \left(\text{na figura: } \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5}\right)$$

Traçando-se, pelos pontos de divisão dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, as *retas paralelas* às retas do feixe, elas interceptarão os segmentos $\overline{MN}$ e $\overline{NP}$ respectivamente em *segmentos congruentes entre si* (pelo T. 1). Nestas

condições, existe um segmento de medida v, também contido p vêzes em $\overline{MN}$ e q vêzes em $\overline{NP}$, isto é, vale a *razão:*

$$\frac{MN}{NP} = \frac{p}{q} \quad \left(\text{na figura: } \frac{MN}{NP} = \frac{3}{5}\right)$$

Portanto, as razões $\dfrac{AB}{BC}$ e $\dfrac{MN}{NP}$ são *iguais*, isto é:

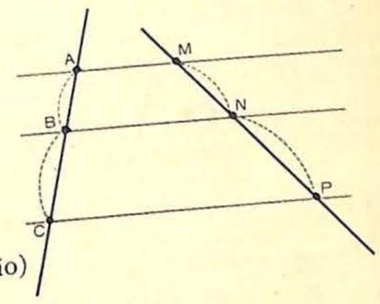
$$\frac{AB}{BC} = \frac{MN}{NP}$$

e os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{MN}$ e $\overline{NP}$ são *proporcionais*. c.q.d.

Nota: Por escapar ao conteúdo dêste livro, será admitido *sem prova* o caso no qual $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são *segmentos incomensuráveis*.

Conseqüência importante:

Lembrando o estudo das *transformações* de proporções, você sabe que:

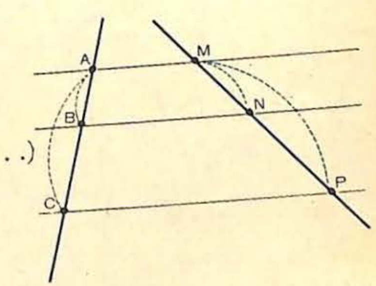


se $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{MN}{NP}$

então: $\boxed{\dfrac{AB}{MN} = \dfrac{BC}{NP}}$

(alternando os *meios* da primeira proporção)

e também:



se $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{MN}{NP}$

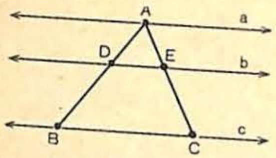
então: $\dfrac{AB + BC}{AB} = \dfrac{MN + NP}{MN}$

(a soma dos dois primeiros têrmos está para . . .)

ou $\boxed{\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{MP}{MN}}$

TESTE DE ATENÇÃO — Grupo 49

1. Se $a \parallel b \parallel c$, preencha os claros:



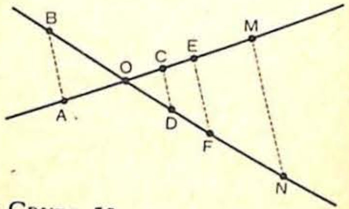
1.º) $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{\ldots}$ 2.º) $\dfrac{AB}{\ldots} = \dfrac{AC}{AE}$

3.º) $\dfrac{\ldots}{AC} = \dfrac{AD}{AE}$ 4.º) $\dfrac{AC}{EC} = \dfrac{\ldots}{DB}$

2. Se $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{EF} \parallel \overleftrightarrow{MN}$, preencha os claros:

1.º) $\dfrac{OC}{OD} = \dfrac{OE}{\ldots}$ 2.º) $\dfrac{OA}{OC} = \dfrac{\ldots}{OD}$ 3.º) $\dfrac{\ldots}{DF} = \dfrac{EM}{FN}$

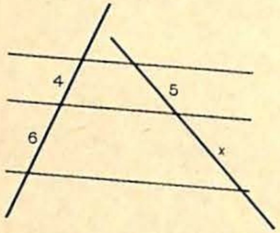
4.º) $\dfrac{DN}{DF} = \dfrac{CM}{\ldots}$ 5.º) $\dfrac{\ldots}{ON} = \dfrac{OC}{OD}$ 6.º) $\dfrac{OC}{\ldots} = \dfrac{OD}{DF}$



EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO — Grupo 50

Nos diversos *feixes de paralelas*, calcular o valor de x:

1.º)

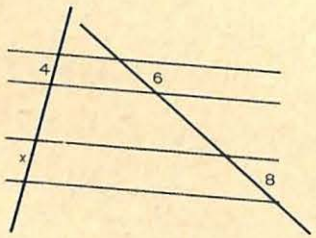


Temos: $\dfrac{4}{6} = \dfrac{5}{x}$ (Tales)

ou $x = \dfrac{6 \times 5}{4} = \dfrac{30}{4} = 7{,}5$

Logo: o valor de x é 7,5

2.º)

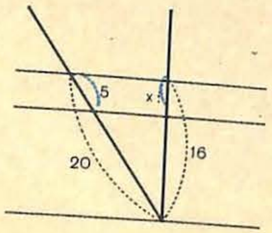


Temos: $\dfrac{4}{x} = \dfrac{6}{8}$ (Tales)

ou $x = \dfrac{4 \times 8}{6} = \dfrac{16}{3} = 5\dfrac{1}{3}$

Logo: o valor de x é $5\dfrac{1}{3}$

3.º)



Temos: $\dfrac{5}{20} = \dfrac{x}{16}$ (Tales)

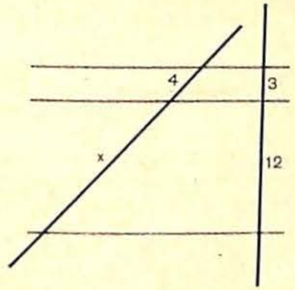
ou $x = \dfrac{5 \times 16}{20} = 4$

Logo: o valor de x é 4

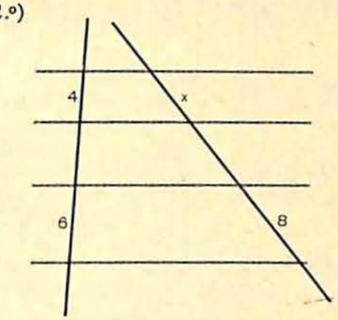
EXERCICIOS DE FIXAÇAO — Grupo 51

Calcule o valor de x nos seguintes *feixes de retas paralelas:*

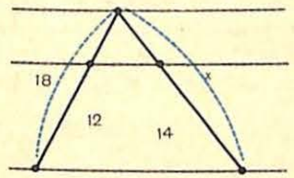
1.º)



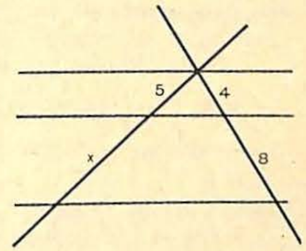
2.º)



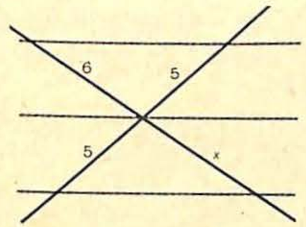
3.º)



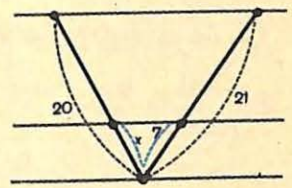
4.º)



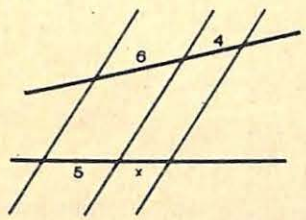
5.º)



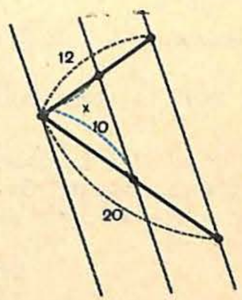
6.º)



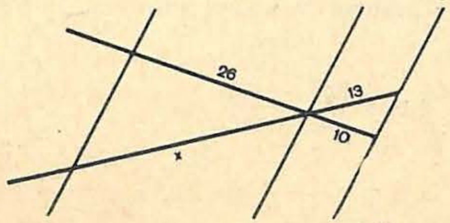
7.º)



8.º)



9.º)

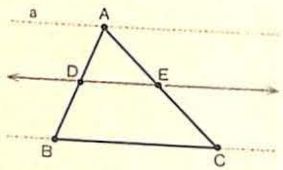


4. *Tales no triângulo . . .*

T.3 : *Tôda paralela a um lado de um triângulo determina sôbre os outros dois lados segmentos proporcionais.*

$H \; \{ \; \overleftrightarrow{DE} \; // \; \overline{BC}$

$T \left\{ \dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{EC} \right.$



DEMONSTRAÇÃO:

Traçando pelo vértice A: $a \; // \; \overline{BC}$, obtemos juntamente com $\overleftrightarrow{DE} \; // \; \overline{BC}$ um *feixe* de *paralelas* tal que:

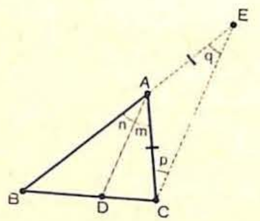
$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \text{ (Tales)}$$

c.q.d.

T.4 : *A bissetriz de um ângulo interno de um triângulo divide o lado oposto em segmentos proporcionais aos lados adjacentes.*

$H \; \{ \; \overrightarrow{AD}$ bissetriz do $\hat{A}$ $(n = m)$

$T \left\{ \dfrac{BD}{DC} = \dfrac{BA}{AC} \right.$



DEMONSTRAÇÃO:

Traça-se, por C, $\overleftrightarrow{CE} \; // \; \overline{AD}$ tal que: $\overleftrightarrow{CE} \cap \overleftrightarrow{BA} = \{E\}$

No $\triangle$ BCE, como $\overline{AD} \; // \; \overleftrightarrow{CE} \Longrightarrow \dfrac{BD}{DC} = \dfrac{BA}{AE}$ (T.3)

Como $\triangle$ ACE é isósceles, pois: $p = q$ (porque $p = m$ (alternos internos), $q = n$ (correspondentes de lados paralelos) e $n = m$ (hipótese)), segue-se que $AE = AC$ e, portanto:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AE} \Longleftrightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$$

c.q.d.

1. Num triângulo, dois lados medem, respectivamente, 16cm e 20cm. Sôbre o primeiro, a 4cm do vértice, toma-se um ponto, traçando-se a seguir por êste ponto a paralela ao terceiro lado. Determine os comprimentos dos segmentos que essa paralela determina sôbre o segundo lado.

2. A paralela a um dos lados de um triângulo divide os outros dois na razão 3 : 4. Ache os comprimentos dos segmentos determinados por essa paralela sôbre êstes dois lados, sabendo que êles medem, respectivamente, 21cm e 42cm.

3. Num trapézio os lados não-paralelos prolongados determinam um triângulo de lados 24dm e 36dm, respectivamente. O menor dos lados não-paralelos do trapézio mede 10dm. Calcule o comprimento do outro lado do trapézio.

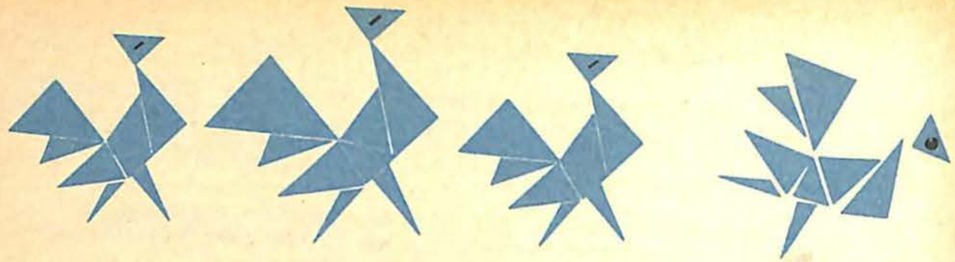
4. Os lados de um triângulo medem, respectivamente, 14cm, 18cm e 24cm. Calcule os segmentos determinados sôbre o maior lado pela *bissetriz* do ângulo interno oposto a êsse lado.

5. O perímetro do triângulo ABC é igual a 54cm. A *bissetriz* do ângulo interno B divide o lado oposto (de medida b) em dois segmentos, que medem 10cm e 14cm, respectivamente. Calcule as medidas (a e c) dos lados $\overline{BC}$ e $\overline{AB}$, respectivamente.

6. Num trapézio, uma paralela às bases divide um dos lados na razão $\dfrac{3}{4}$. Medindo o outro lado não-paralelo, encontra-se 14cm. Calcule os comprimentos determinados sôbre êle pela referida paralela.

7. Prolongando os lados não-paralelos ($\overline{AD}$ e $\overline{BC}$) de um trapézio $ABCD$ ($\overline{AB}$, base maior), determine o valor do lado $\overline{BE}$, do triângulo ABE assim formado, sabendo que $AE = 12$, $AD = 5$ e $BC = 3$ (medidas em cm).

8. No triângulo ABC, temos: $\overline{MN} \; // \; \overline{AB}$, $\dfrac{CM}{MA} = \dfrac{2}{3}$ e $BC = 20$. Calcule, em cm, as medidas dos segmentos $\overline{CN}$ e $\overline{NB}$.



2.ª Parte

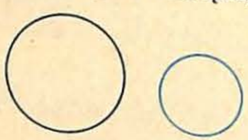
- Semelhança entre figuras geométricas
- Triângulos semelhantes
- Razões trigonométricas de um ângulo
- Similitude central ou homotetia

Semelhança como correspondência

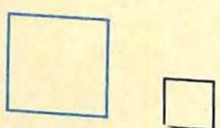
5. Idéia geral sôbre semelhança entre figuras geométricas

Quando se diz que duas figuras *são semelhantes*, você já sabe que elas possuem exatamente a *mesma forma*, mas não necessàriamente o mesmo tamanho.

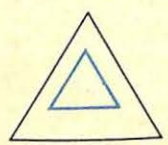
Assim, por exemplo, são semelhantes:



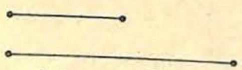
duas circunferências



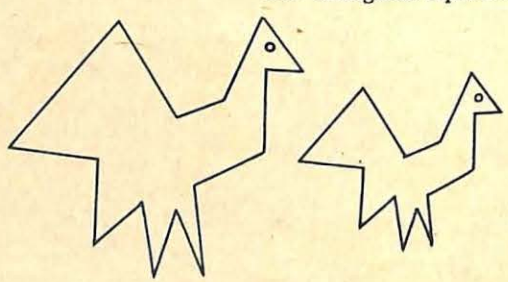
dois quadrados



dois triângulos eqüiláteros



dois segmentos



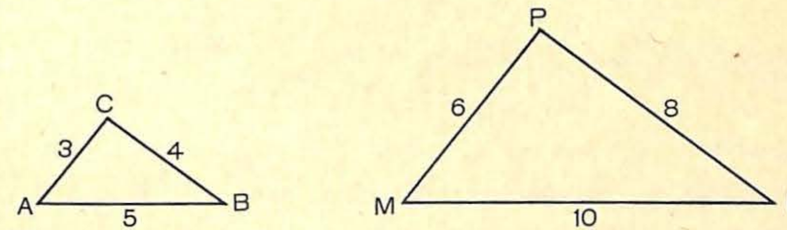
. . . estas duas figuras

LEMBRETE AMIGO

> A *ampliação* e a *redução* de uma *fotografia* são exemplos de *figuras semelhantes* "usuais" . . .
>
> Os *mapas do Brasil* de diferentes "tamanhos" que você costuma ver no Colégio, no seu Atlas, etc., são outros exemplos de *figuras semelhantes*.

6. Semelhança de triângulos

Considere os triângulos escalenos, ABC e MNP, cujas medidas dos lados (sempre na mesma unidade) estão indicadas nas figuras:



Êstes dois triângulos estão numa *relação especial*, pois existe uma *correspondência* entre os seus vértices, a saber:

$$ABC \leftrightarrow MNP$$

tal que:

1.º) os *lados correspondentes* são ***proporcionais***

2.º) os *ângulos correspondentes*(*) são ***congruentes***

Uma correspondência dêsse tipo é denominada **semelhança.**

OBSERVAÇÃO: A *semelhança* do exemplo acima *não é* uma congruência, pois os lados correspondentes *não são* congruentes (basta ver que os lados do $\triangle ABC$ medem, respectivamente, o *dôbro* dos correspondentes lados do $\triangle MNP$).

Logo:

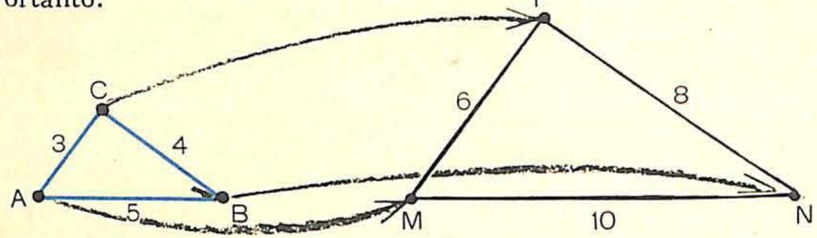
> Dados dois triângulos, chama-se *semelhança* a uma *correspondência* entre seus vértices, tal que os *lados correspondentes* são *proporcionais* e os *ângulos correspondentes* são *congruentes*.

(*) Subentendem-se os ângulos como elementos correspondentes na correspondência.

O símbolo que indica a *semelhança* é: $\sim$ (lê-se: "é semelhante a").

Se existe uma *semelhança* entre dois triângulos ABC e MNP, dizemos que são *semelhantes*. Indicação: $\triangle ABC \sim \triangle MNP$

Portanto:



ABC $\longleftrightarrow$ MNP

$$\triangle ABC \sim \triangle MNP \iff \begin{cases} \dfrac{AB}{MN} = \dfrac{BC}{NP} = \dfrac{CA}{PM} \\ \hat{A} \cong \hat{M};\ \hat{B} \cong \hat{N};\ \hat{C} \cong \hat{P} \end{cases}$$

O *valor comum* das *razões iguais:* $\dfrac{AB}{MN} = \dfrac{BC}{NP} = \dfrac{CA}{PM} = k$, é denominado *razão de semelhança* e caracteriza a "passagem" do $\triangle ABC$ ao seu *semelhante*, $\triangle MNP$. No exemplo, a *razão de semelhança* é $k = \dfrac{1}{2}$, pois, sendo

$\dfrac{AB}{MN} = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{BC}{NP} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$ e $\dfrac{CA}{PM} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$, então: $\dfrac{AB}{MN} = \dfrac{BC}{NP} = \dfrac{CA}{PM} = \dfrac{1}{2}$.

ATENÇÃO: Você já sabe que numa correspondência é fundamental a *ordem* com que são tomados os elementos. Assim, nos triângulos ABC e MNP da figura acima:

a correspondência: $ABC \leftrightarrow MNP$ *é uma semelhança*

enquanto a correspondência: $ABC \leftrightarrow MPN$ *não é uma semelhança*

pois $\hat{A} \cong \hat{M}$, mas $\hat{B} \not\cong \hat{P}$ e $\hat{C} \not\cong \hat{N}$, bem como $\dfrac{AB}{MP} \neq \dfrac{BC}{PN} \neq \dfrac{CA}{NM}$.

Exceção: Sòmente no caso de os triângulos serem *eqüiláteros* (onde há sempre *semelhança!*) é que a ordem dos vértices não importa.

A *semelhança* é uma **Relação de Equivalência.**

De fato, a *semelhança* de triângulos, como a *congruência*, é uma *Relação de Equivalência*, porque:

1. $\triangle ABC \sim \triangle ABC$ (propriedade *reflexiva*)
2. Se $\triangle ABC \sim \triangle MNP$, então $\triangle MNP \sim \triangle ABC$ (propriedade *simétrica*)
3. Se $\triangle ABC \sim \triangle MNP$ e $\triangle MNP \sim \triangle DEF$, então $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ (propriedade *transitiva*)

Procure fixar bem a distinção entre as duas correspondências:

congruência ($\cong$) e **semelhança** ($\sim$)

já estudadas entre os vértices A, B, C e M, N, P de dois triângulos:

se $\triangle ABC \cong \triangle MNP$, então $\begin{cases} \overline{AB} \cong \overline{MN},\ \overline{BC} \cong \overline{NP},\ \overline{CA} \cong \overline{PM} \text{ (lados correspondentes congruentes)} \\ \hat{A} \cong \hat{M},\ \hat{B} \cong \hat{N},\ \hat{C} \cong \hat{P} \text{ (ângulos correspondentes congruentes)} \end{cases}$

se $\triangle ABC \sim \triangle MNP$, então $\begin{cases} \dfrac{AB}{MN} = \dfrac{BC}{NP} = \dfrac{CA}{PM} \text{ (lados correspondentes proporcionais)} \\ \hat{A} \cong \hat{M},\ \hat{B} \cong \hat{N},\ \hat{C} \cong \hat{P} \text{ (ângulos correspondentes congruentes)} \end{cases}$

Por outro lado, dois triângulos *congruentes* são necessàriamente *semelhantes* (a razão de semelhança é igual a 1), porém dois triângulos *semelhantes* não são necessàriamente *congruentes!*

LEMBRETE AMIGO

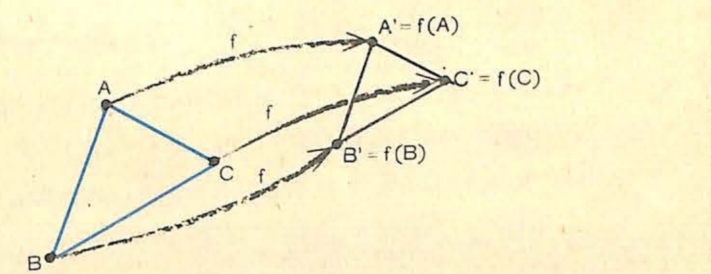
Relembrando novamente as *funções . . .*:

Uma correspondência f entre os vértices A, B, C e A', B', C' de dois triângulos é uma SEMELHANÇA se:

1. f é uma *função*
2. $\hat{A} \cong f(\hat{A})$, $\hat{B} \cong f(\hat{B})$, $\hat{C} \cong f(\hat{C})$
3. $\dfrac{AB}{f(A) \cdot f(B)} = \dfrac{BC}{f(B) \cdot f(C)} = \dfrac{CA}{f(C) \cdot f(A)}$

sendo: Dom $f = \{A, B, C\}$

Im $f = \{A', B', C'\}$



A Natureza e os triângulos semelhantes . . .

A ilustração mostra o corte de uma turmalina (Foto *Life*).

7. *Semelhança entre polígonos*

Considerados dois polígonos convexos, de mais de três lados, se entre os seus vértices existe uma correspondência tal que:

1.°) os *lados correspondentes* são *proporcionais*
2.°) os *ângulos correspondentes* são *congruentes*

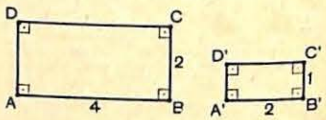
então essa correspondência é uma **semelhança,** e os polígonos dizem-se *semelhantes.*

Exemplos:

1. Os retângulos $ABCD$ e $A'B'C'D'$ são *semelhantes,* porque a correspondência:

$$ABCD \leftrightarrow A'B'C'D'$$

é uma *semelhança,* por ter:



$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DA}{D'A'} = \frac{2}{1}$$

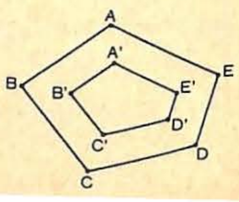
e $\hat{A} \cong \hat{A}'$, $\hat{B} \cong \hat{B}'$, $\hat{C} \cong \hat{C}'$, $\hat{D} \cong \hat{D}'$ (todos medem 90°)

Logo: $\square ABCD \sim \square A'B'C'D'$

2. Os pentágonos $ABCDE$ e $A'B'C'D'E'$ serão *semelhantes* se:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'}$$

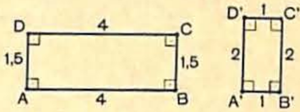
e $\hat{A} \cong \hat{A}'$, $\hat{B} \cong \hat{B}'$, $\hat{C} \cong \hat{C}'$, $\hat{D} \cong \hat{D}'$, $\hat{E} \cong \hat{E}'$



Contra-exemplos:

1. A correspondência: $ABCD \sim A'B'C'D'$ entre os vértices dos dois retângulos:

não é uma semelhança, apesar de terem os ângulos correspondentes congruentes (são todos *retos*), pois *não possuem os lados correspondentes proporcionais.* Como não existe nenhuma correspondência que seja *semelhança,* então:

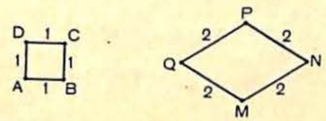


$$\square ABCD \not\sim \square A'B'C'D'$$

2. A correspondência:

$$ABCD \leftrightarrow MNPQ$$

entre os vértices dos dois quadriláteros da figura também *não é uma semelhança,* pois, embora os lados correspondentes sejam *proporcionais:*



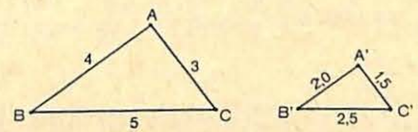
$$\frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP} = \frac{CD}{PQ} = \frac{DA}{QM} = \frac{1}{2}$$

os ângulos correspondentes *não são congruentes,* como é fácil de se constatar.

Logo: $\square ABCD \not\sim \lozenge MNPQ$

TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 53

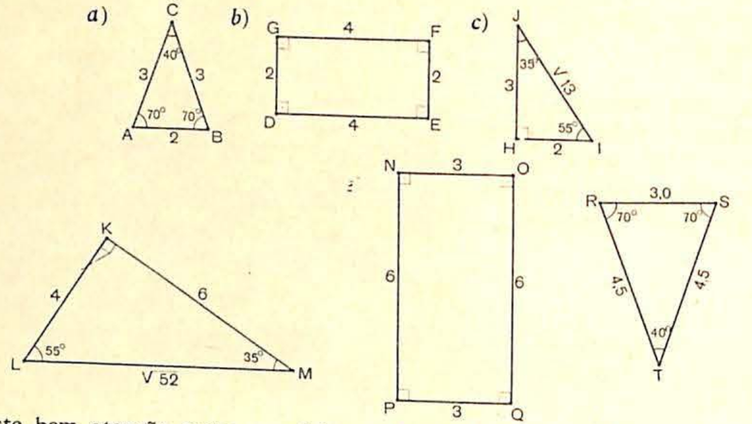
1. Assinale com *V* quais das seguintes correspondências, estabelecidas entre os vértices dos triângulos ABC e $A'B'C'$, são *semelhanças* (cuidado com a *ordem* dos vértices!):



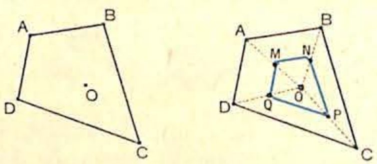
1.ª) $ABC \leftrightarrow A'B'C'$
2.ª) $ABC \leftrightarrow B'A'C'$
3.ª) $CAB \leftrightarrow C'A'B'$
4.ª) $BAC \leftrightarrow C'B'A'$
5.ª) $BAC \leftrightarrow B'A'C'$
6.ª) $CBA \leftrightarrow A'B'C'$

2. Se os triângulos ABC e MNP são eqüiláteros, então $ABC \leftrightarrow MNP$ é uma *semelhança.* É verdadeira ou falsa esta sentença?

3. Escreva a *semelhança* que você pode estabelecer entre pares das seguintes figuras, destacando a *razão de semelhança* de cada uma delas:



4. Preste bem atenção neste exercício porque você terá que fazer o seguinte ... : $ABCD$ é um quadrilátero e O pertence a sua região interior:



Se M, N, P, Q são respectivamente os pontos médios dos segmentos $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ e $\overline{OD}$, então:

$$\text{quadrilátero } ABCD \sim \text{quadrilátero } MNPQ$$

De fato, no $\triangle OAB$, por exemplo, tem-se:

$$\left.\begin{array}{l} M \text{ é ponto médio de } \overline{OA} \\ N \text{ é ponto médio de } \overline{OB} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \overleftrightarrow{MN} \,//\, \overleftrightarrow{AB} \text{ (Teorema já conhecido)} \\ MN = \frac{1}{2}AB \text{ (idem...)} \end{array}\right.$$

Anàlogamente ocorre com os triângulos OBC, OCD e ODA, onde, sendo:

$$NP = \frac{1}{2}BC,\ PQ = \frac{1}{2}CD \text{ e } QM = \frac{1}{2}DA \Longrightarrow \frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP} = \frac{CD}{PQ} = \frac{DA}{QM} = 2$$

Como:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A} \cong \hat{M} \\ \hat{B} \cong \hat{N} \\ \hat{C} \cong \hat{P} \\ \hat{D} \cong \hat{Q} \end{array}\right\} \text{(por terem lados respectivamente paralelos)}$$

segue-se que: quadrilátero $ABCD \sim$ quadrilátero $MNPQ$

5. Considere um pentágono convexo $ABCDE$ e um ponto O pertencente a sua região interior. Depois de traçados $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{OD}$ e $\overline{OE}$, e considerados os respectivos pontos médios: M, N, P, Q e R, demonstre que:

$$\text{pentágono } ABCDE \sim \text{pentágono } MNPQR$$

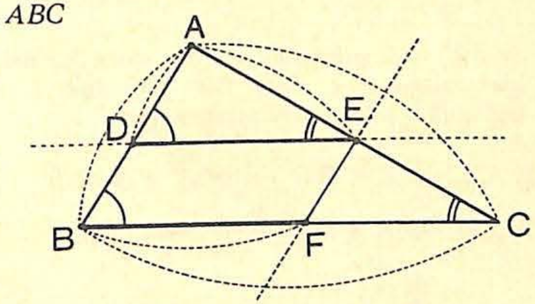
Principais teoremas sôbre triângulos semelhantes

8. *Teorema fundamental sôbre triângulos semelhantes*

T.5 : *Se uma reta paralela a um dos lados de um triângulo intercepta os outros dois lados* (não pelo vértice comum!), *então o triângulo que ela determina é* **semelhante** *ao primeiro.*

$H\{\triangle ABC \mid \overleftrightarrow{DE} \,//\, \overline{BC},\ D \in \overline{AB},\ D \neq A \text{ e } D \neq B$

$T\{\triangle ADE \sim \triangle ABC$



DEMONSTRAÇÃO:

Afirmações	*Justificações*
1. $D \in \overline{AB}$ e $\overleftrightarrow{DE} \,//\, \overline{BC} \Longrightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$	1. Hipótese e T.3
2. $\hat{A} \cong \hat{A}$, $\hat{D} \cong \hat{B}$ e $\hat{E} \cong \hat{C}$	2. Propriedade *reflexiva* da congruência e ângulos correspondentes em retas //s
3. $F \in \overline{BC}$ e $\overleftrightarrow{EF} \,//\, \overline{AB} \Longrightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{BF}{BC}$	3. Construção e T.3
4. $\overline{BF} \cong \overline{DE} \Longrightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$	4. Lados opostos do paralelogramo $DBFE$ e de 3
5. $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$	5. De 1 e 3
6. $\triangle ADE \sim \triangle ABC$	6. De 2 e 5

c.q.d.

Casos clássicos de semelhança de triângulos

9. *Uma nova "economia"* ...

Assim como para reconhecer se dois triângulos são *congruentes* (. . .desde a 3.ª série) não é necessário verificar se possuem todos os *três lados* correspondentes congruentes e todos os *três ângulos* correspondentes congruentes, pois basta verificar se os dois triângulos possuem *sòmente* *três* dos elementos correspondentes congruentes (casos: L.A.L., A.L.A., L.L.L. e $L.A.A_0$). Também, para reconhecer se dois triângulos são *semelhantes*, não é necessário verificar se todos os três lados correspondentes são proporcionais e se todos os três ângulos correspondentes são congruentes: basta usar sòmente **dois** ou **três** dos elementos correspondentes.

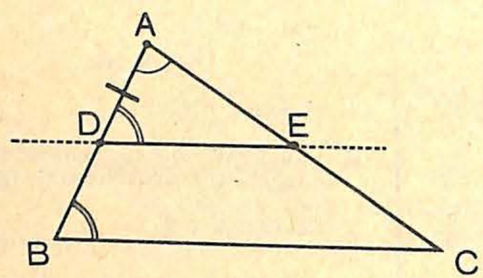
Essa nova "economia" constitui os chamados *Casos clássicos de semelhança de triângulos.*

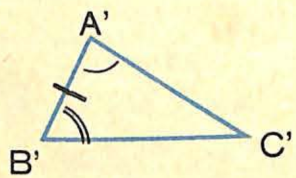
1.º Caso de semelhança de triângulos (Caso A-A)

T.6 : *Se dois triângulos são tais que* ***dois*** *dos* ***ângulos*** *de um dêles são* ***congruentes*** *a* ***dois*** *dos* ***ângulos*** *do outro, então os dois triângulos são* ***semelhantes.***

$H\{ \triangle ABC$ e $\triangle A'B'C' \mid \hat{A} \cong \hat{A}'$ e $\hat{B} \cong \hat{B}'$

$T\{ \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$





DEMONSTRAÇÃO:

Afirmações	*Justificações*
1. $D \in \overline{AB} \mid \overline{AD} \cong \overline{A'B'}$ e $E \in \overline{AC} \mid \overleftrightarrow{DE} \parallel \overline{BC}$	1. Construção
2. $\triangle ABC \sim \triangle ADE$	2. T.5
3. $\triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$	3. Caso A.L.A. (congruência de $\triangle$s) $\left\{ \begin{array}{l} \hat{A} \cong \hat{A} \text{ (propr. reflexiva)} \\ \overline{AD} \cong \overline{A'B'} \text{ (por construção)} \\ \hat{D} \cong \hat{B}' \text{ (congruentes ao } \hat{B}) \end{array} \right.$
4. $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$	4. De 2 e 3

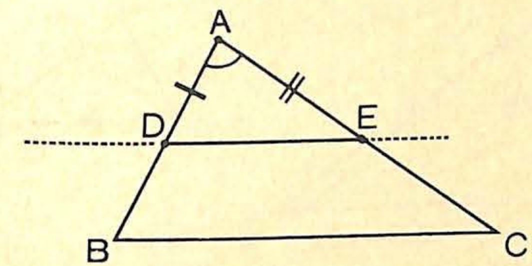
c.q.d.

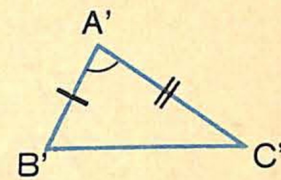
2.º Caso de semelhança de triângulos (Caso L-A-L)

T.7 : *Se dois triângulos possuem* ***dois lados*** *correspondentes* ***proporcionais*** *e os* ***ângulos compreendidos congruentes,*** *então os triângulos são* ***semelhantes.***

$H\{ \triangle ABC$ e $\triangle A'B'C' \left| \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} \right.$ e $\hat{A} \cong \hat{A}'$

$T\{ \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$





DEMONSTRAÇÃO:

De maneira análoga ao T.6, constrói-se o $\triangle ADE$, tal que:

$$\triangle ABC \sim \triangle ADE \Longrightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

e como: $\overline{AD} \cong \overline{A'B'}$ (por construção), vem:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{AE} \\ \\ \text{e, por hipótese: } \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{AC}{A'C'} \text{ (propriedade transitiva)}$$

Sendo as frações $\dfrac{AC}{AE}$ e $\dfrac{AC}{A'C'}$ *iguais* e de *mesmo numerador*, então os denominadores também serão iguais, isto é: $AE = A'C'$.

Então: $\triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$ (caso L.A.L. de congruência de $\triangle$s, pois: $\overline{AD} \cong \overline{A'B'}$, $\hat{A} \cong \hat{A}'$ e $\overline{AE} \cong \overline{A'C'}$)

Como: $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ e $\triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$

vem: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

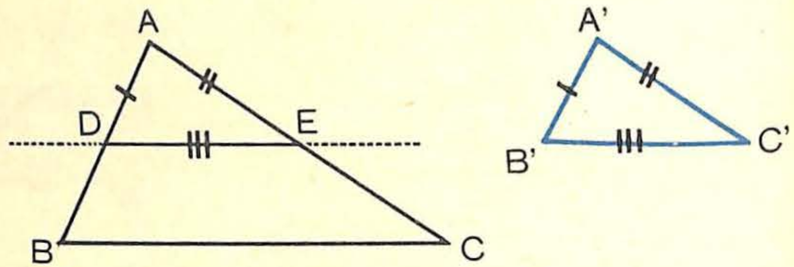
c.q.d.

3.º Caso de semelhança de triângulos (Caso L-L-L)

T.8 : *Se dois triângulos possuem os* ***três lados*** *correspondentes* ***proporcionais****, então os triângulos são* ***semelhantes****.*

$$H\{\triangle ABC \text{ e } \triangle A'B'C' \mid \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$$

$$T\{\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$



DEMONSTRAÇÃO:

Como no caso anterior, constrói-se:

$$\triangle ADE \sim \triangle ABC \Longrightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$$

Sendo $\overline{AD} \cong \overline{A'B'}$ (por construção), vem:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{AE} \\ \text{e, por hipótese: } \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{AC}{A'C'} \Longrightarrow AE = A'C'$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Também: } \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{DE} \\ \text{e, por hipótese: } \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{BC}{DE} = \frac{BC}{B'C'} \Longrightarrow DE = B'C'$$

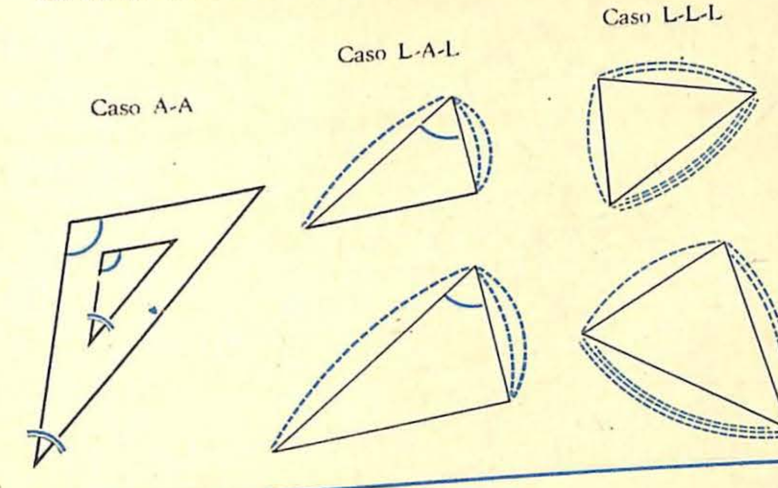
Logo: $\triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$ (caso L.L.L. de congruência de $\triangle$s, pois: $\overline{AD} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{AE} \cong \overline{A'C'}$ e $\overline{DE} \cong \overline{B'C'}$)

Como: $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ e $\triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$

vem: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ c.q.d.

LEMBRETE AMIGO

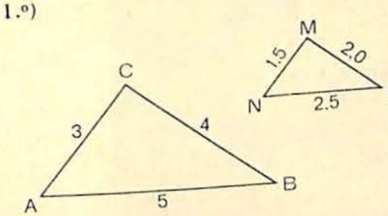
Os *Casos de semelhança de triângulos* são *três:*



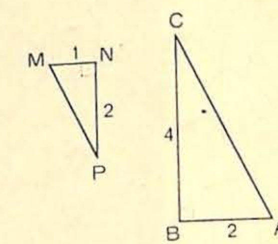
TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 54

1. São dados seis pares de triângulos semelhantes. Destaque, para cada par de triângulos (ABC e MNP, nas figuras), o *caso de semelhança* que permite afirmar que os triângulos são *semelhantes:*

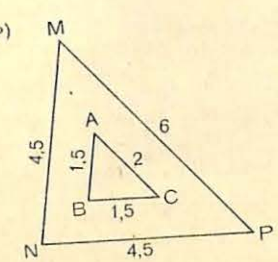
1.º)



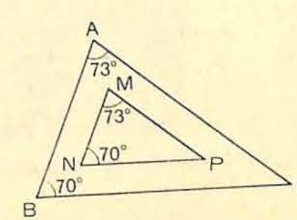
2.º)



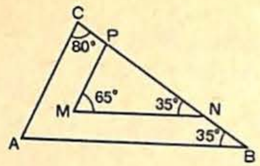
3.º)



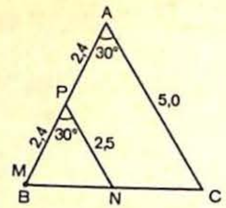
4.º)



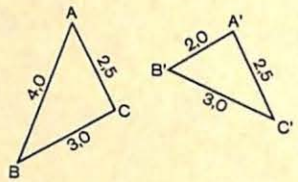
5.º)



6.º)

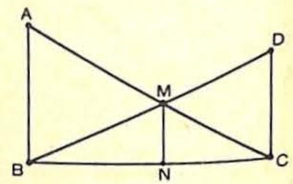


2. São semelhantes ou não os triângulos ABC e $A'B'C'$ da figura. Por quê?



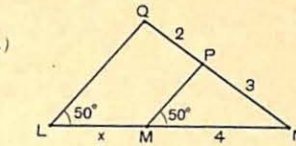
3. Se $\overline{AB} \perp \overline{BC}$
$\overline{MN} \perp \overline{BC}$
$\overline{DC} \perp \overline{BC}$

quantos pares de *triângulos semelhantes* você encontra na figura?



Figuras semelhantes nascidas do espelho (Foto *Life*).

1. Calcular o valor de x na figura:

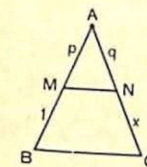


Temos: $\triangle NPM \sim \triangle NQL$ (porque $\overline{PM} \parallel \overline{QL}$)

Logo: $\frac{3}{2} = \frac{4}{x} \iff x = \frac{4 \times 2}{3} = 2\frac{2}{3}$

isto é, o *valor* de x é $2\frac{2}{3}$

2. No triângulo ABC, $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overline{BC}$. Provar que $x = \frac{q}{p}$



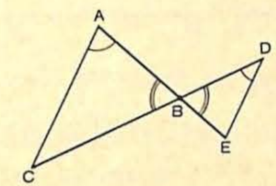
Temos: $\overline{MN} \parallel \overline{BC} \Longrightarrow \triangle AMN \sim \triangle ABC \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \frac{p}{1} = \frac{q}{x} \iff x = \frac{q \times 1}{p} = \frac{q}{p}$

Logo: $x = \frac{q}{p}$

c.q.d.

3. *Dado:* $\hat{A} \cong \hat{D}$, *provar* que: $AB \,.\, BE = DB \,.\, BC$



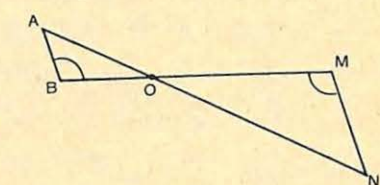
Como:

$$\left.\begin{array}{r} \hat{A} \cong \hat{D} \text{ (hipótese)} \\ \text{e } A\hat{B}C \cong B\hat{D}E \text{ (o.p.v.)} \end{array}\right\} \Longrightarrow \triangle ABC \sim \triangle DBE \text{ (caso A-A)}$$

$$\Longrightarrow \frac{AB}{DB} = \frac{BC}{BE} \iff AB \,.\, BE = DB \,.\, BC$$

c.q.d.

4. *Dados:*



$\hat{B} \cong \hat{M}$

$AB = \frac{1}{2}\, NM \left(\text{o mesmo que } \frac{AB}{NM} = \frac{1}{2}\right)$

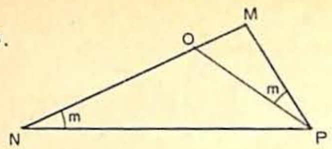
Provar que: $\boxed{BM = 1\frac{1}{2}\, OM}$

Como: $\triangle A\overset{\frown}{O}B \sim \triangle N\overset{\frown}{O}M$ (caso A-A, por quê?)

vem: $\frac{AB}{NM} = \frac{OB}{OM} \underset{\text{(hip.)}}{=} \frac{1}{2} \Longrightarrow OB = \frac{1}{2}\, OM$

Sendo: $BM = BO + OM$, então $BM = \frac{1}{2}\, OM + OM = 1\frac{1}{2}\, OM$

c.q.d.

5. 

Dado: $M\hat{P}O \simeq M\hat{N}P$

Provar que: $(MP)^2 = MN \cdot MO$

$\triangle\, MPO \sim \triangle\, MNP$ (caso A-A, por quê?) $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow \dfrac{MP}{MN} = \dfrac{MO}{MP}$ (Observe, com *atenção*, a *ordem* com que foram consideradas as letras: $\overset{\frown}{MPO} \leftrightarrow \overset{\frown}{MNP}$)

Logo:

$MP \cdot MP = MN \cdot MO \Longleftrightarrow (MP)^2 = MN \cdot MO$ c.q.d.

LEMBRETE AMIGO

Ao exprimir a *proporcionalidade* dos *lados correspondentes* em dois triângulos semelhantes, obedeça à ORDEM com que são tomadas as letras que representam os vértices. Assim, por exemplo:

$$\triangle\, \overset{\frown}{LPM} \sim \triangle\, \overset{\frown}{XYZ} \Longrightarrow \frac{LP}{XY} = \frac{PM}{YZ} = \frac{ML}{ZX}$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 56

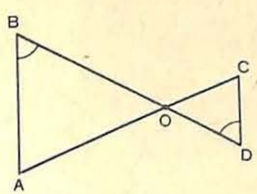
1. Escreva V nas sentenças *verdadeiras* e F nas *falsas*. Justifique as respostas:

   1.ª) Todos os triângulos eqüiláteros são semelhantes
   2.ª) Todos os triângulos isósceles são semelhantes
   3.ª) Todos os triângulos isósceles e retângulos são semelhantes
   4.ª) Todos os retângulos são semelhantes
   5.ª) Todos os quadrados são semelhantes
   6.ª) Todos os triângulos semelhantes são congruentes
   7.ª) Todos os triângulos congruentes são semelhantes

2. Dois ângulos de um triângulo medem, respectivamente, 60° e 40°, enquanto que dois ângulos de um outro triângulo medem, respectivamente, 60° e 80°. São semelhantes ou não êsses triângulos? Por quê?

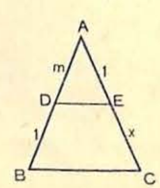
3. *Dado:* $\hat{B} \simeq \hat{D}$

   Prove que: $AO \cdot DO = BO \cdot CO$



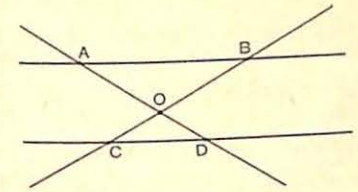
4. *Dado:* $\overleftrightarrow{DE} \,//\, \overline{BC}$

   Prove que: $x = \dfrac{1}{m}$



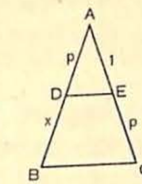
5. *Dados:* $\overleftrightarrow{AB} \,//\, \overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{AD} \cap \overleftrightarrow{BC} = \{O\}$

   Prove que: $AB = DC \cdot \dfrac{BO}{CO}$



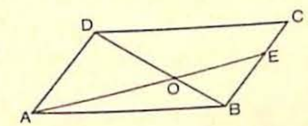
6. *Dado:* $\overleftrightarrow{DE} \,//\, \overline{BC}$

   Prove que: $x = p^2$



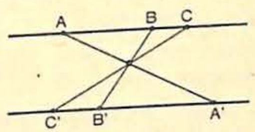
7. *Dado:* paralelogramo $ABCD$

   Prove que: $DO \cdot EO = BO \cdot AO$



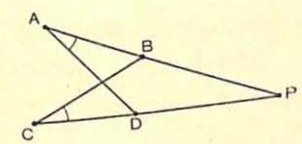
8. *Dado:* $\overleftrightarrow{AC} \,//\, \overleftrightarrow{A'C'}$

   Prove que: $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{A'B'}{A'C'}$



9. *Dado:* $\hat{A} \simeq \hat{C}$

   Prove que: $PA \cdot PB = PC \cdot PD$

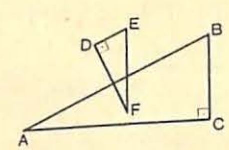


10. *Dados:* $\hat{C} \simeq \hat{D}$ (retos)

    $\overleftrightarrow{ED} \,//\, \overline{AB}$ e $\overleftrightarrow{EF} \,//\, \overline{BC}$

    Prove que: $ED = EF \cdot \dfrac{BC}{BA}$

    $DF = EF \cdot \dfrac{CA}{BA}$

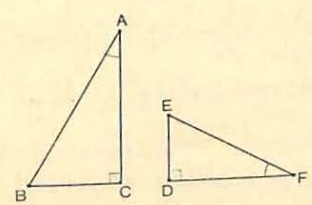


11. *Dados:* $\hat{C} \simeq \hat{D}$ (retos)

    $\hat{B}$ e $\hat{F}$ complementares

    Prove que: $\triangle\, BCA \sim \triangle\, EDF$

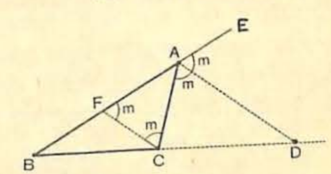
    (*Sugestão:* Lembrar que ângulos de mesmo complemento são congruentes)



12. *Dado:* $\overline{AD}$ bissetriz de $C\hat{A}E$

    Prove que: $\dfrac{BD}{CD} = \dfrac{BA}{CA}$

    (*Sugestão:* Traçar $\overleftrightarrow{CF} \,//\, \overline{AD}$, usar o T.5 e lembrar que o $\triangle\, FAC$ é isósceles...)



PROBLEMAS (acêrca de Semelhança) — GRUPO 57

1. As alturas de duas árvores estão entre si assim como 2 está para 3. A menor delas mede 6m. Quanto mede a maior?
2. Qual é a altura de uma coluna de pé cuja sombra tem 5m no mesmo instante em que um bastão de 0,45m, colocado verticalmente, projeta uma sombra de 0,15m?
3. Qual é a *escala* da planta de um terreno, na qual um comprimento de 50m foi representado por um segmento de 5cm?

   (*Sugestão:* Reduzir 50m em cm e determinar a razão... que é 1:1.000)
4. Qual o comprimento do segmento que representa numa planta, na *escala* 1:10.000, uma rua de 800m de comprimento?
5. A distância entre duas estações ferroviárias, na planta de uma cidade, na *escala* de 1:8.000, é de 15cm. Determine a distância real entre as duas estações.
6. Numa planta na escala 1:1.000, que dimensões devem ser atribuídas a um compartimento de 5m por 6m?
7. Qual a razão de semelhança dos pisos de dois quartos cujos perímetros valem, respectivamente, 14m e 56m?
8. A "bôca" de uma piscina tem forma quadrangular e suas dimensões são 10m por 20m. Determine o perímetro de uma piscina semelhante na qual a dimensão correspondente à menor das dimensões da outra é de 15m.
9. As bases de um trapézio medem 9cm e 12cm, respectivamente, e a altura é igual a 5cm. Ache a altura do triângulo formado pela base menor e os prolongamentos dos lados não-paralelos.
10. Dois polígonos convexos são semelhantes e uma das diagonais do primeiro é igual a $\frac{2}{3}$ de sua correspondente no segundo polígono. Sabendo que o perímetro do primeiro polígono é igual a 32cm, calcule o perímetro do segundo.

TEOREMAS (acêrca de Semelhança) — GRUPO 58

Demonstre que

1. Dois triângulos isósceles são semelhantes quando os seus ângulos dos vértices são congruentes.
2. Dois triângulos retângulos são semelhantes quando um ângulo agudo de um dêles é congruente a um ângulo agudo do outro.
3. Dois triângulos que têm os lados correspondentes paralelos ou perpendiculares, são semelhantes.
4. Em dois triângulos semelhantes, as alturas, as medianas e as bissetrizes são proporcionais aos lados correspondentes.
5. Os segmentos que unem dois a dois os pés das medianas de um triângulo determinam quatro triângulos semelhantes ao triângulo dado.
6. Se num trapézio a base maior é o dôbro da menor, as diagonais se dividem na razão de 2 para 1.
7. As diagonais de um trapézio dividem-se mùtuamente em partes proporcionais.
8. Dois polígonos regulares, com o mesmo número de lados, são semelhantes.

Similitude Central ou Homotetia

9. *Uma importante transformação para reduzir e ampliar figuras*

Você, que já estudou a *semelhança* entre figuras geométricas planas, vai agora aprender a *ampliar* ou a *reduzir* figuras, graças a uma *transformação* geométrica plana denominada **similitude central** ou **homotetia.**

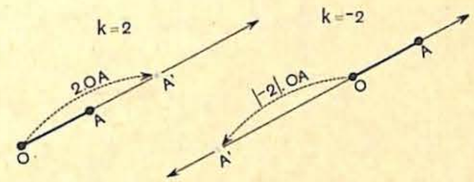
Um ponto A' de um plano diz-se *transformado homotético* de um ponto A em relação a um *centro* O e a um número real k se as seguintes condições forem satisfeitas:

1.ª) o ponto A' *pertence* à reta $\overleftrightarrow{OA}$

2.ª) existe um número real k tal que $OA' = |k| \cdot OA$

3.ª) Se $k > 0$, o ponto O é *exterior* ao segmento $\overline{AA'}$ e se $k < 0$ o ponto O é *interior* ao segmento $\overline{AA'}$.

O ponto O é chamado *centro da similitude* ou *centro da homotetia* e o número real k, *coeficiente da similitude* ou *coeficiente da homotetia*. Exemplo:

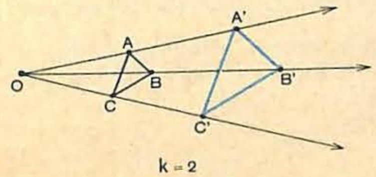


Logo:

Uma transformação na qual qualquer ponto A de um plano é transformado num ponto A', homotético de A em relação a um centro O e a um número real k (constante para todos os pontos), é denominada uma ***similitude central*** ou ***homotetia*** do plano.

Exemplos:

1.º) Se $k = 2$, o *transformado homotético* do $\triangle ABC$, de centro O, é o $\triangle A'B'C'$ cujos vértices A', B' e C' pertencem, respectivamente, às semi-retas $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$.



Então:

$$OA' = 2 \cdot OA$$
$$OB' = 2 \cdot OB$$
$$OC' = 2 \cdot OC$$

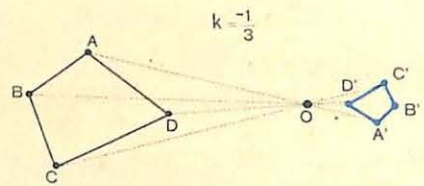
É fácil concluir que nessa *transformação*, também:

1. $\left.\begin{aligned} A'B' &= 2 \,.\, AB \\ B'C' &= 2 \,.\, BC \\ C'A' &= 2 \,.\, CA \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \boxed{\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{B'C'}{BC} = \dfrac{C'A'}{CA} = 2}$ (os lados correspondentes dos triângulos ABC e $A'B'C'$ são *proporcionais*)

2. $\boxed{\begin{aligned} \hat{A} &\cong \hat{A}' \\ \hat{B} &\cong \hat{B}' \\ \hat{C} &\cong \hat{C}' \end{aligned}}$ (os ângulos correspondentes dos triângulos ABC e $A'B'C'$ são *congruentes*)

$\Longrightarrow \boxed{\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'}$

2.°) Se $k = \dfrac{-1}{3}$, o *transformado homotético* do quadrilátero $ABCD$, de centro O, é o quadrilátero $A'B'C'D'$ cujos vértices pertencem, respectivamente, às retas $\overleftrightarrow{OA}$, $\overleftrightarrow{OB}$, $\overleftrightarrow{OC}$ e $\overleftrightarrow{OD}$, e $OA' = \dfrac{1}{3}\,OA$, $OB' = \dfrac{1}{3}\,OB$, $OC' = \dfrac{1}{3}\,OC$ e $OD' = \dfrac{1}{3}\,OD$.



Também, agora, você conclui que:

$$\boxed{\text{quadrilátero } ABCD \sim \text{quadrilátero } A'B'C'D'}$$

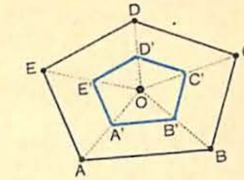
Portanto:

> *As figuras geométricas que se correspondem numa homotetia são **semelhantes.***

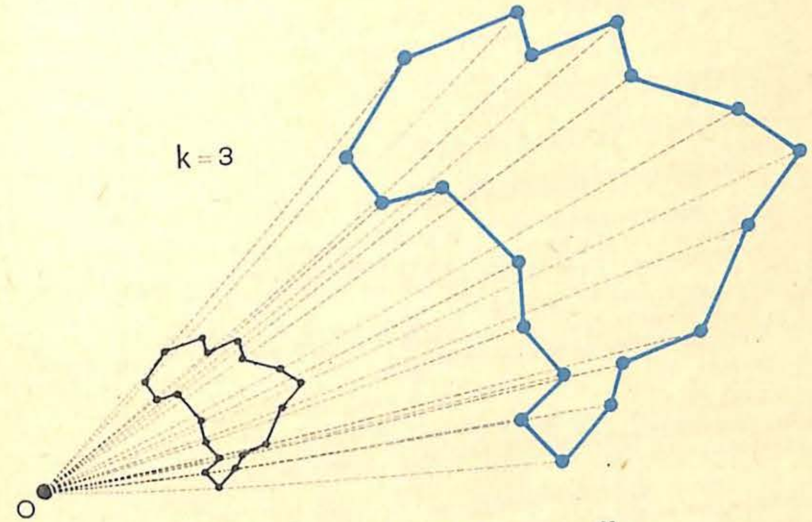
Isto significa que a *proporcionalidade* entre segmentos correspondentes e a *congruência* entre ângulos correspondentes são *preservadas* numa homotetia, ou seja, são *invariantes*.

Nestas condições você já tem um método para *ampliar* ou *reduzir* qualquer figura geométrica plana. Basta usar uma *homotetia*. Exemplos:

1. *Reduzir* à *metade* o polígono $ABCD$, que é um pentágono convexo. Temos: $k = \dfrac{1}{2}$. O centro O é *interior* ao polígono.



2. *Ampliar* de *três vêzes* o seguinte mapa do Brasil. Agora, $k = 3$ e o centro O foi escolhido no *exterior* da figura dada.

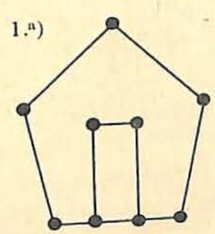


TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 59

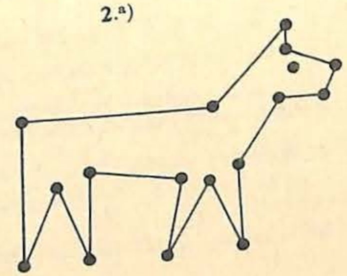
1. *Amplie* de *duas vêzes* o tamanho das seguintes figuras:

NOTA:. Escolha o *centro O* como quiser.

1.ª)

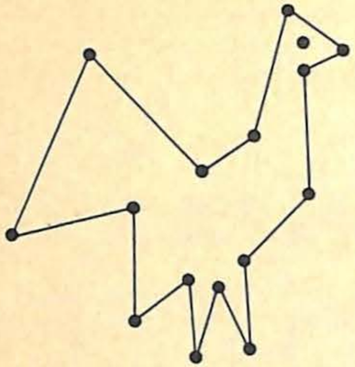


2.ª)

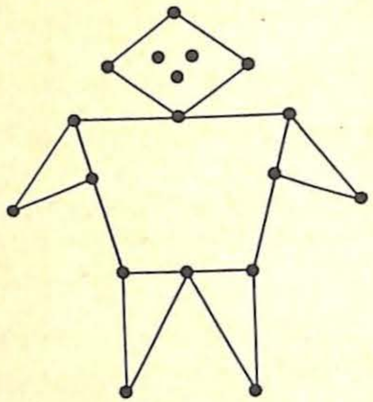


2. *Reduza de três vêzes* o tamanho das seguintes figuras:

1.ª)



2.ª)



NOTA IMPORTANTE

Mais uma *estrutura de* GRUPO . . .

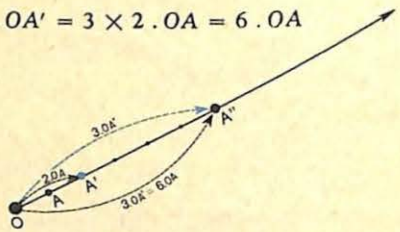
A operação *composição* de duas transformações homotéticas sucessivas de *mesmo centro* O e de coeficientes, respectivamente, k_1 e k_2, é ainda uma *transformação homotética* de centro O e coeficiente $k = k_1 \cdot k_2$.

Assim, por exemplo: se A' é o transformado de A, de centro O e coeficiente 2, e A'' o transformado de A', de centro O e coeficiente 3, então A'' é o transformado de A, de centro O e coeficiente 6.

De fato: $OA' = 2 . OA$ e $OA'' = 3 . OA' = 3 \times 2 . OA = 6 . OA$

Verifique que, para três transformações homotéticas sucessivas, vale a propriedade *associativa* (**A**).

Por outro lado, existe a transformação homotética *neutra*, de mesmo centro O e coeficiente $k = 1$, pois neste caso: $OA' = 1 . OA = OA$, e o transformado A' é o próprio A.



Também, para cada transformação homotética, de centro O e coeficiente k (por ex.: 2), existe a transformação homotética *inversa:* é a que possui o mesmo centro O e coeficiente $\frac{1}{k}$ $\left(\text{por ex.: } \frac{1}{2}\right)$.

Logo, o Sistema Matemático constituído:

$\begin{cases} \text{pelo } \textit{conjunto de tôdas as homotetias do plano, de mesmo centro} \\ \text{pela } \textit{operação composição de duas homotetias consecutivas} \end{cases}$

possui *estrutura de* GRUPO COMUTATIVO, porque valem as propriedades:

Associativa, Existência do *elemento neutro*, Existência do *elemento inverso* e a *Comutativa* (**A-N-I-C**)

LEMBRETE AMIGO

No curso de *Geometria* da 3.ª série (ver *Apêndice* do Volume 3) você estudou as seguintes *transformações geométricas:*

translação, rotação e **simetrias** (central e axial)

que transformam *polígonos* em *polígonos congruentes*, isto é, transformações que **conservam as distâncias.**

Agora, você estudou a *transformação geométrica:*

homotetia (ou similitude central)

que transforma *polígonos* em *polígonos semelhantes*, ou seja, transformações que **conservam as proporções.**

Razões trigonométricas de ângulos agudos

10. *Seno, co-seno e tangente de um ângulo*

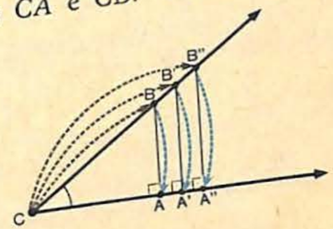
Seja o ângulo *agudo* $\hat{C}$, de lados $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$. Tracemos as perpendiculares:

$\overline{BA} \perp \overrightarrow{CA}$

$\overline{B'A'} \perp \overrightarrow{CA}$

$\overline{B''A''} \perp \overrightarrow{CA}$

. . .   . . .



que determinarão, respectivamente, os triângulos retângulos *semelhantes* (caso A-A): CAB, $CA'B'$, $CA''B''$, . . .

Nestas condições, os lados correspondentes dêsses triângulos são *proporcionais* e ficam estabelecidas as seguintes *razões iguais:*

$$\frac{BA}{CB} = \frac{B'A'}{CB'} = \frac{B''A''}{CB''} = \ldots$$

O *valor comum* de tais *razões iguais* é denominado **seno** da *medida do ângulo* $\hat{C}$ e é indicado por: sen C.

NOTA: A medida, em graus, do ângulo $\hat{C}$ está sendo indicada simplesmente por C.

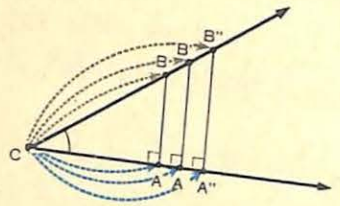
Logo:

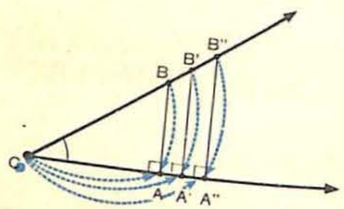
$$\boxed{\text{sen } C = \frac{BA}{CB} = \frac{B'A'}{CB'} = \frac{B''A''}{CB''} = \dots}$$

Observe que o valor do sen C pode ser dado por *qualquer* das razões iguais das medidas dos lados do triângulo retângulo, de mesmo ângulo agudo $\hat{C}$, usado para defini-lo. Assim, por exemplo, se o ângulo $\hat{C}$ mede 36°, então:

$$\text{sen } 36° = \frac{BA}{CB}$$

Da mesma forma com que foi definido o sen C você pode, dada a *semelhança* dos triângulos retângulos CAB, $CA'B'$, $CA''B''$, ..., deter-





minar outras razões iguais, usando para isso os demais lados correspondentes. Assim, as *razões iguais:*

$$\frac{CA}{CB} = \frac{CA'}{CB'} = \frac{CA''}{CB''} = \dots \qquad \frac{BA}{CA} = \frac{B'A'}{CA'} = \frac{B''A''}{CA''} = \dots$$

definem, respectivamente, as *razões trigonométricas:*

co-seno da *medida do ângulo* $\hat{C}$ (cos C) e **tangente** da *medida do ângulo* $\hat{C}$ (tg C)

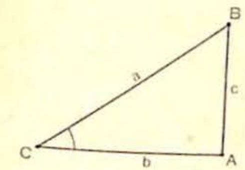
Logo:

$$\boxed{\cos C = \frac{CA}{CB} = \frac{CA'}{CB'} = \frac{CA''}{CB''} = \dots} \qquad \boxed{\text{tg } C = \frac{BA}{CA} = \frac{B'A'}{CA'} = \frac{B''A''}{CA''} = \dots}$$

Para o ângulo agudo $\hat{C}$, cuja medida é 36°, temos:

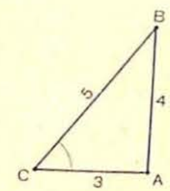
$$\cos 36° = \frac{CA}{CB} \quad \text{e} \quad \text{tg } 36° = \frac{BA}{CA}$$

Então, usando sòmente o *triângulo retângulo CAB* (que é *semelhante* aos triângulos $CA'B'$, $CA''B''$, ...), você pode *resumir* as definições das *razões trigonométricas*(*): **seno, co-seno** e **tangente** da medida do ângulo agudo $\hat{C}$, da seguinte maneira:



$$\Longrightarrow \begin{cases} \text{sen } C = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\text{medida (cateto oposto)}}{\text{medida (hipotenusa)}} \\[2ex] \cos C = \dfrac{b}{a} = \dfrac{\text{medida (cateto adjacente)}}{\text{medida (hipotenusa)}} \\[2ex] \text{tg } C = \dfrac{c}{b} = \dfrac{\text{medida (cateto oposto)}}{\text{medida (cateto adjacente)}} \end{cases}$$

Exemplo prático:



$$\Longrightarrow \begin{cases} \text{sen } C = \dfrac{4}{5} = 0{,}8 \\[2ex] \cos C = \dfrac{3}{5} = 0{,}6 \\[2ex] \text{tg } C = \dfrac{4}{3} = 1{,}333\dots \end{cases}$$

As razões que definem o *seno* e o *co-seno*, da medida de um ângulo *agudo*, são números reais *sempre menores do que* 1 (por quê?), enquanto que a *razão* que define a *tangente* da medida de um ângulo agudo é *qualquer número real positivo* (por quê?).

Em virtude do uso freqüente das *razões trigonométricas* na resolução de uma grande variedade de problemas, constroem-se *tabelas*, onde são registrados os valôres de tais razões, dos ângulos de 1° a 89°, com uma *certa aproximação*. Essas tabelas — que mais tarde você irá aprender a construir — denominam-se *tábuas das razões trigonométricas naturais*.

Neste compêndio consta uma *tábua* (pág. 181), onde as razões trigonométricas (sen, cos e tg) dos ângulos de 1° a 89° são dadas com a aproximação de 0,000.1 por falta. A sua leitura é simples: basta procurar na coluna do *sen*, *cos* ou *tg* o valor da razão trigonométrica correspondente à medida (em graus) do ângulo dado.

Inversamente, conhecido o valor da razão trigonométrica da medida de um certo ângulo — que deve figurar numa das colunas (sen, cos ou tg) — procura-se, na linha horizontal correspondente, a medida do ângulo desejado.

(*) No Curso Colegial serão estudadas as *funções trigonométricas:* seno, co-seno e tangente, com significado muito mais amplo.

Exemplos:

1. Determinar as *razões trigonométricas* do ângulo de 30°.

   Basta, na tábua, procurar o valor na correspondente coluna, para obter:

   sen 30° = 0,500.0 cos 30° = 0,866.0 tg 30° = 0,577.4

2. Idem, para o ângulo de 72°.

   Temos: sen 72° = 0,951.1 cos 72° = 0,309.0 tg 72° = 3,077.7

3. *Problema inverso:* Usando a tábua trigonométrica como *Conjunto-Universo*, resolver a seguinte *equação trigonométrica:*

   $$\text{sen } x^\circ = 0{,}422.6$$

   Procurando na coluna dos *senos* (cujos valôres estão dispostos em ordem *crescente*), você encontrará que 0,422.6 corresponde ao *seno* do ângulo de 25°, isto é: sen 25° = 0,422.6.

   Logo, a *raiz* da equação proposta é 25.

4. Idem, resolver a seguinte *equação trigonométrica:*

   $$\cos 2x^\circ = 0{,}927.2$$

   Agora, você procura na coluna dos *co-senos* (cujos valôres estão dispostos em ordem *decrescente*), onde vai encontrar 0,927.2, correspondendo ao ângulo de medida: 22°. Então:

   $$2x^\circ = 22^\circ \iff x^\circ = 22^\circ : 2 = 11^\circ$$

   Portanto, a raiz da equação: cos 2x° = 0,927.2 é 11.

TESTE DE ATENÇÃO — Grupo 60

1. Usando a tábua trigonométrica (pág. 181), determine os valôres das seguintes *razões trigonométricas:*

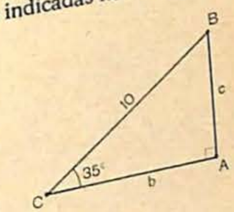
1.ª) sen 32°	6.ª) tg 45°	11.ª) cos 75°
2.ª) cos 15°	7.ª) cos 30°	12.ª) sen 15°
3.ª) tg 60°	8.ª) sen 60°	13.ª) tg 13°
4.ª) sen 45°	9.ª) tg 89°	14.ª) sen 30°
5.ª) cos 45°	10.ª) sen 1°	15.ª) cos 77°

2. Resolva as seguintes *equações trigonométricas*, tomando para *Conjunto-Universo* a tábua trigonométrica da pág. 181:

1.ª) sen $x^\circ = 0{,}707.1$	6.ª) tg $\frac{x^\circ}{2} = 0{,}577.4$
2.ª) cos $x^\circ = 0{,}500.0$	7.ª) sen $\frac{x^\circ}{3} = 0{,}258.8$
3.ª) tg $x^\circ = 1{,}000.0$	8.ª) cos $(x - 1)^\circ = 0{,}515.0$ (cuidado!)
4.ª) sen $2x^\circ = 0{,}484.8$	9.ª) tg $(x + 2)^\circ = 0{,}932.5$
5.ª) cos $3x^\circ = 0{,}913.5$	10.ª) sen $x^\circ = 0{,}999.8$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO — Grupo 61

1. Determine, usando a *tábua trigonométrica*, o valor das medidas indicadas nos seguintes triângulos:



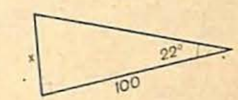
1.º) No triângulo retângulo ABC temos, por definição:

$$\text{sen } 35^\circ = \frac{c}{10} \iff c = 10 \times \text{sen } 35^\circ$$

e, usando a *tábua:*

$$c = 10 \times 0{,}573.6 = 5{,}736$$

Logo: o valor de c é 5,736.



2.º) Como, por definição:

$$\text{tg } 22^\circ = \frac{x}{100} \iff x = 100 \times \text{tg } 22^\circ$$

$$\text{ou } x = 100 \times 0{,}404.0 = 40{,}4$$

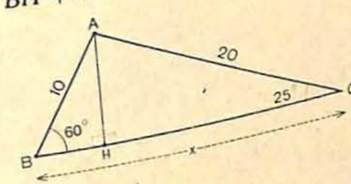
Portanto: o valor de x é 40,4.

3.º) Construindo $\overline{AH} \perp \overline{BC}$, temos os triângulos retângulos AHB e AHC, onde:

$$\cos 60^\circ = \frac{BH}{10} \iff BH = 10 \times \cos 60^\circ \iff BH = 10 \times 0{,}5 = 5$$

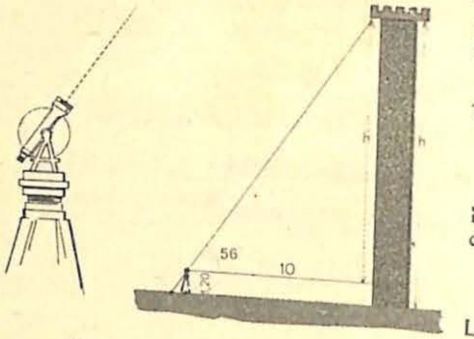
$$\cos 25^\circ = \frac{HC}{20} \iff HC = 20 \times \cos 25^\circ \iff HC = 20 \times 0{,}906.3 = 18{,}126$$

$$x = BH + HC = 5 + 18.126 = 23{,}126$$



Logo: o valor de x é 23,126.

2. O instrumento medidor de ângulos de elevação (conhecido com o nome de *teodolito*) encontra-se à altura de 1,20m do solo, onde se encontra, também, uma tôrre. Sabendo-se que o instrumento dista 10m da tôrre e que o ponto mais alto desta é visto sob um ângulo de 56º, qual é a altura da tôrre?



Temos: $\frac{h'}{10} = \text{tg } 56° \iff h' = 10 \times \text{tg } 56°$

ou $h' = 10 \times 1,482.6 = 14,826$

Portanto, somando-se 1,20 a 14,826, determina-se a altura da tôrre, isto é:

$$h = 14,826 + 1,20 = 16,026$$

Logo: a altura da tôrre é de 16,026m.

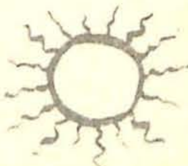
OBSERVAÇÃO: Por questão de comodidade, a *visada* de um ponto mais alto, nos demais problemas, será considerada como se fôsse feita ao nível do solo.

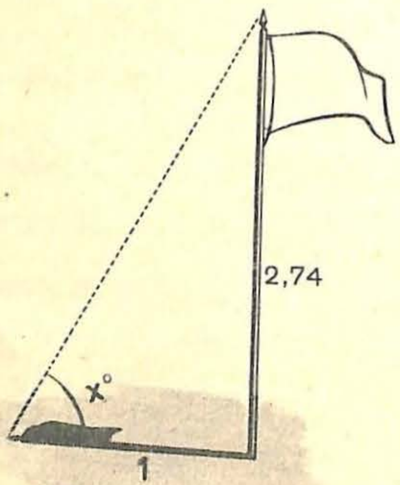
3. Determinar a medida do *ângulo de elevação* do Sol quando o ponto mais alto do mastro de uma bandeira, que mede 2,74m, projeta uma SOMBRA de 1m de comprimento.

Temos: $\text{tg } x° = \frac{2,74}{1} = 2,74$

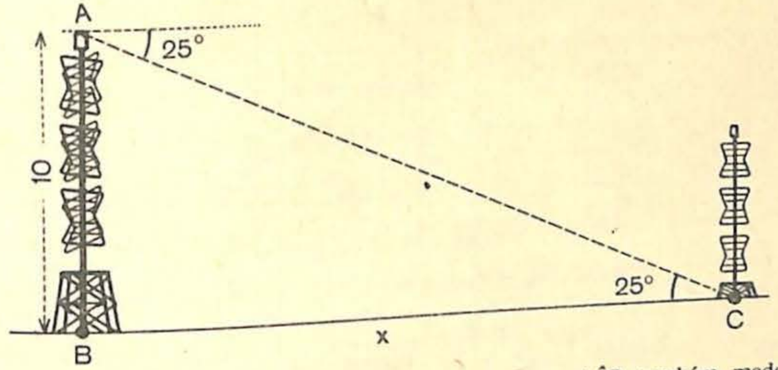
e a *tábua* indica: $x° = 70°$

Logo: o ângulo de elevação mede 70º.





4. Do alto de uma tôrre de T.V. avista-se a base de uma outra tôrre de T.V. sob um *ângulo de depressão* de 25º. Qual a distância entre as duas tôrres de T.V., sabendo-se que a altura da primeira é de 10m?



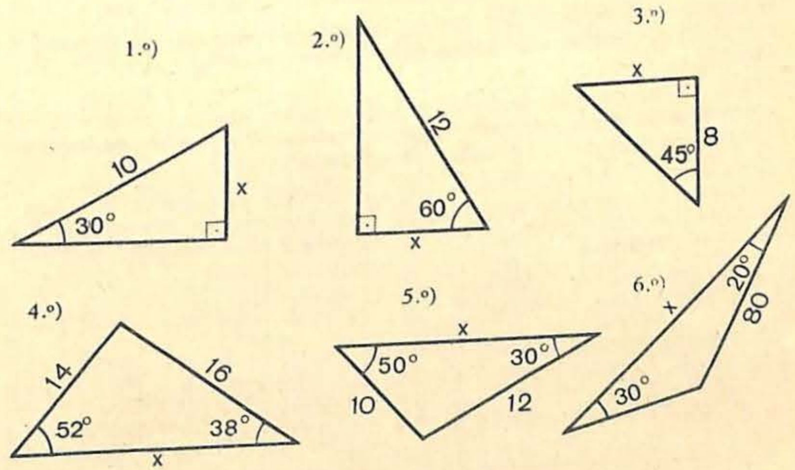
Se o ângulo de depressão é igual a 25º, então o ângulo $A\hat{C}B$ também mede 25º (por quê?). Daí:

$$\frac{10}{x} = \text{tg } 25° \iff x = \frac{10}{\text{tg } 25°} = \frac{10}{0,466.3} = 21,445$$

Logo: a distância entre as duas tôrres de T.V. é de 21,445m

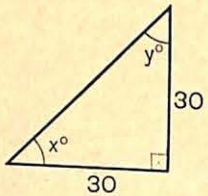
EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 62

1. Determine, empregando a tábua trigonométrica, o valor de x nos seguintes triângulos:

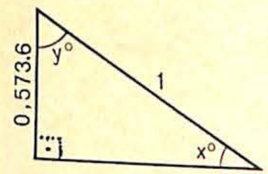


2. Usando a tábua trigonométrica, determine a medida dos ângulos assinalados nos seguintes triângulos:

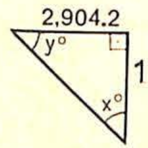
1.º)



2.º)



3.º)



PROBLEMAS — GRUPO 63

(Acêrca do emprêgo das razões trigonométricas)

1. Sabendo que de um pôsto de observação, a 50m da base, se vê o ponto mais alto de um prédio sob um ângulo de 48°, determine a altura dêsse prédio.
2. Um navio se encontra a 100m de um farol. Calcule a altura dêsse farol, que é visto de um ponto de observação do navio sob um ângulo de 8°.
3. Calcule o ponto em que se encontra, afastado de um muro de 4m de altura, um observador que vê o alto dêsse muro sob um ângulo de 30°.
4. Qual é o ângulo sob o qual é visto o ponto mais alto de um eucalipto de 18m de altura por um observador que se encontra afastado 18m da árvore?
5. Sob que ângulo é vista uma estátua de 16m de altura, sabendo-se que a distância do observador ao ponto mais alto da estátua é de 32m?
6. Sendo de 70° o ângulo de elevação do Sol em dado instante, qual será o comprimento da sombra projetada, nesse mesmo instante, por uma antena de T.V. de 35m de altura?
7. Do alto de um farol, cuja altura é de 20m, avista-se um navio sob um ângulo de depressão de 6°. A que distância do farol se encontra tal navio?
8. O ângulo de elevação de uma nuvem, vista de um ponto que se encontra a 100m do ponto situado diretamente abaixo dessa nuvem, mede 60°. Qual é a altitude dessa nuvem?
9. A base de um canteiro de forma retangular tem 50m de comprimento. Sabe-se que a diagonal dêsse retângulo forma com a base um ângulo cuja medida é de 30°. Quanto mede a outra dimensão dêsse retângulo?
10. Um avião que está a 2.000m de altura é visto por dois observadores que se encontram num mesmo pátio de um campo de aviação, sob ângulos que medem, respectivamente, 75° e 72°. Qual a distância que separa êsses dois observadores? (Estudar os casos possíveis.)

TÁBUA DE RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS(*)

Ângulo	*sen*	*cos*	*tg*	*Ângulo*	*sen*	*cos*	*tg*
1°	0,0175	0,9998	0,0175	46°	0,7193	0,6947	1 0355
2°	0,0349	0,9994	0,0349	47°	0,7314	0,6820	1,0724
3°	0,0523	0,9986	0,0524	48°	0,7431	0,6691	1,1106
4°	0,0698	0,9976	0,6099	49°	0,7547	0,6561	1,1504
5°	0,0872	0,9962	0,0875	50°	0,7660	0,6428	1,1918
6°	0,1045	0,9945	0,1051	51°	0,7771	0,6293	1,2349
7°	0,1219	0,9925	0,1228	52°	0,7880	0,6157	1,2799
8°	0,1392	0,9903	0,1405	53°	0,7986	0,6018	1,3270
9°	0,1564	0,9877	0,1584	54°	0,8090	0,5878	1,3764
10°	0,1736	0,9848	0,1763	55°	0,8192	0,5736	1,4281
11°	0,1908	0,9816	0,1944	56°	0,8290	0,5592	1,4826
12°	0,2079	0,9781	0,2126	57°	0,8387	0,5446	1,5399
13°	0,2250	0,9744	0,2309	58°	0,8480	0,5299	1,6003
14°	0,2419	0,9703	0,2493	59°	0,8572	0,5150	1,6643
15°	0,2588	0,9659	0,2679	60°	0,8660	0,5000	1,7321
16°	0,2756	0,9613	0,2867	61°	0,8746	0,4848	1,8040
17°	0,2924	0,9563	0,3057	62°	0,8829	0,4695	1,8807
18°	0,3090	0,9511	0,3249	63°	0,8910	0,4540	1,9626
19°	0,3256	0,9455	0,3443	64°	0,8988	0,4384	2,0503
20°	0,3420	0,9397	0,3640	65°	0,9063	0,4226	2,1445
21°	0,3584	0,9336	0,3839	66°	0,9135	0,4067	2,2460
22°	0,3746	0,9272	0,4040	67°	0,9205	0,3907	2,3559
23°	0,3907	0,9205	0,4245	68°	0,9272	0,3746	2,4751
24°	0,4067	0,9135	0,4452	69°	0,9336	0,3584	2,6051
25°	0,4226	0,9063	0,4663	70°	0,9397	0,3420	2,7475
26°	0,4384	0,8988	0,4877	71°	0,9455	0,3256	2,9042
27°	0,4540	0,8910	0,5095	72°	0,9511	0,3090	3,0777
28°	0,4695	0,8829	0,5317	73°	0,9563	0,2924	3,2709
29°	0,4848	0,8746	0,5543	74°	0,9613	0,2756	3,4874
30°	0,5000	0,8660	0,5774	75°	0,9659	0,2588	3,7321
31°	0,5150	0,8572	0,6009	76°	0,9703	0,2419	4,0108
32°	0,5299	0,8480	0,6249	77°	0,9744	0,2250	4,3315
33°	0,5446	0,8387	0,6494	78°	0,9781	0,2079	4,7046
34°	0,5592	0,8290	0,6745	79°	0,9816	0,1908	5,1446
35°	0,5736	0,8192	0,7002	80°	0,9848	0,1736	5,6713
36°	0,5878	0,8090	0,7265	81°	0,9877	0,1564	6,3138
37°	0,6018	0,7986	0,7536	82°	0,9903	0,1392	7,1154
38°	0,6157	0,7880	0,7813	83°	0,9925	0,1219	8,1443
39°	0,6293	0,7771	0,8098	84°	0,9945	0,1045	9,5144
40°	0,6428	0,7660	0,8391	85°	0,9962	0,0872	11,4301
41°	0,6561	0,7547	0,8693	86°	0,9976	0,0698	14,3007
42°	0,6691	0,7431	0,9004	87°	0,9986	0,0523	19,0811
43°	0,6820	0,7314	0,9325	88°	0,9994	0,0349	28,6363
44°	0,6947	0,7193	0,9657	89°	0,9998	0,0175	57,2900
45°	0,7071	0,7071	1,0000				

(*) Note que na tabela não constam as razões trigonométricas correspondentes a 0° e 90° porque se trata sòmente de *ângulos agudos*.

3.ª Parte

- Relações métricas no triângulo retângulo
- Teorema de Pitágoras
- Relações métricas num triângulo qualquer
- Relações métricas no círculo

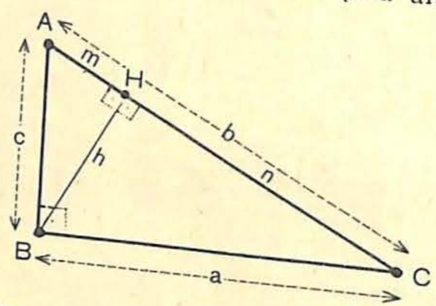
Relações métricas no triângulo retângulo

11. *Com vistas ao Teorema de Pitágoras*

Considere o triângulo retângulo ABC, onde:

$\overline{BH}$ é a *altura* relativa à hipotenusa $\overline{AC}$, isto é, $\overline{BH} \perp \overline{AC}$;

$\overline{AH}$ e $\overline{HC}$ são os segmentos determinados pela altura $\overline{BH}$ sôbre a hipotenusa $\overline{AC}$.



Com relação à mesma unidade, sejam:

$m(\overline{AB}) = AB = c \qquad m(\overline{BH}) = BH = h$

$m(\overline{BC}) = BC = a \qquad m(\overline{AH}) = AH = m$

$m(\overline{AC}) = AC = b \qquad m(\overline{HC}) = HC = n$

as *medidas* dos segmentos que figuram no triângulo retângulo ABC.

T.9 : ***A altura** de um triângulo retângulo, relativa à hipotenusa, divide-o em dois triângulos retângulos, **ambos semelhantes** a êle.*

$H\{\triangle ABC \mid \hat{B}$ é reto e $\overline{BH} \perp \overline{AC}$

$T\{\triangle AHB \sim \triangle ABC \sim \triangle BHC$

DEMONSTRAÇÃO:

A altura $\overline{BH}$ relativa à hipotenusa $\overline{AC}$ determina os dois triângulos retângulos: AHB e BHC (ver figura da pág. 182).

Consideremos o triângulo AHB (um dos "pequenos"...) e o triângulo ABC (... o "grande"), onde:

1. $\hat{A} \cong \hat{A}$ (propriedade reflexiva da congruência)
2. $\hat{H} \cong \hat{B}$ (ângulos retos)
3. $\triangle AHB \sim \triangle ABC$ (por causa de 1, 2 e o 1.º caso de semelhança: A-A)

O mesmo ocorre com os triângulos retângulos ABC (... "o grande") e BHC (...é o outro "pequeno"), pois:

1. $\hat{C} \cong \hat{C}$ (propriedade reflexiva da congruência)
2. $\hat{B} \cong \hat{H}$ (ângulos retos)
3. $\triangle ABC \sim \triangle BHC$ (por causa de 1, 2 e o 1.º caso de semelhança: A-A)

Logo:

$\triangle AHB \sim \triangle ABC \sim \triangle BHC$ (propriedade transitiva da semelhança)

c.q.d.

12. *Conseqüências do T.9*

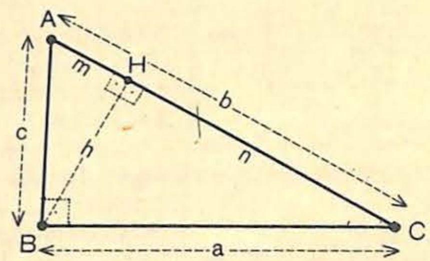
No triângulo retângulo ABC, valem as seguintes relações métricas:

(1.ª) $\boxed{c^2 = b \cdot m}$

(2.ª) $\boxed{a^2 = b \cdot n}$

(3.ª) $\boxed{h^2 = m \cdot n}$

(4.ª) $\boxed{a \cdot c = b \cdot h}$



De fato, pelo T.9 temos:

$$\triangle \widehat{AHB} \sim \triangle \widehat{ABC} \Longrightarrow \frac{AH}{AB} = \frac{HB}{BC} = \frac{AB}{AC} \text{ ou } \frac{m}{c} = \frac{h}{a} = \frac{c}{b}$$

Portanto: $\frac{m}{c} = \frac{c}{b}$ e $\frac{h}{a} = \frac{c}{b}$.

ou $\boxed{c^2 = b \cdot m}$ (1.ª) $\boxed{a \cdot c = b \cdot h}$ (4.ª)

$$\triangle \widehat{ABC} \sim \triangle \widehat{BHC} \Longrightarrow \frac{AB}{BH} = \frac{BC}{HC} = \frac{AC}{BC} \text{ ou } \frac{c}{h} = \frac{a}{n} = \frac{b}{a}$$

Portanto: $\frac{a}{n} = \frac{b}{a}$

ou $\boxed{a^2 = b \cdot n}$ (2.ª)

$$\triangle \widehat{AHB} \sim \triangle \widehat{BHC} \Longrightarrow \frac{AH}{BH} = \frac{HB}{HC} = \frac{AB}{BC} \text{ ou } \frac{m}{h} = \frac{h}{n} = \frac{c}{a}$$

Portanto: $\frac{m}{h} = \frac{h}{n}$

ou $\boxed{h^2 = m \cdot n}$ (3.ª)

Essas *relações* podem ser enunciadas lembrando-se o conceito de *média proporcional.* Da 2.ª série você sabe que numa *proporção contínua* $\left(\text{ex.: } \frac{2}{4} = \frac{4}{8}\right)$ o meio comum é denominado *média proporcional* ou *média geométrica* dos extremos (no ex.: $4^2 = 2 \times 8$).

Dêsse modo as *relações métricas no triângulo retângulo* passam a ter a seguinte redação:

(1.ª) $c^2 = b \cdot m$ (2.ª) $a^2 = b \cdot n$	$\Longleftrightarrow$	*A medida de cada cateto é média proporcional entre as medidas da hipotenusa e a de um dos segmentos determinados sôbre a hipotenusa pela altura.*
(3.ª) $h^2 = m \cdot n$	$\Longleftrightarrow$	*A medida da altura, relativa à hipotenusa, é média proporcional entre as medidas dos segmentos que ela determina sôbre a hipotenusa.*
(4.ª) $a \cdot c = b \cdot h$	$\Longleftrightarrow$	*O produto das medidas dos catetos é igual ao produto das medidas da hipotenusa pela medida da altura relativa à hipotenusa.*

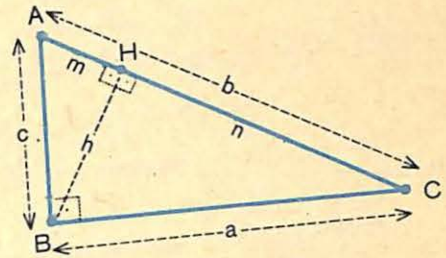
T.10 : **Teorema de Pitágoras** (*)

Se um triângulo é retângulo, então o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

NOTA: Comumente, o *Teorema de Pitágoras* é enunciado: *Num triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.*

H { $\triangle ABC \mid \hat{B}$ é reto

T { $b^2 = a^2 + c^2$



DEMONSTRAÇÃO:

Já sabemos que:

$c^2 = bm$ (1.ª Relação)

$a^2 = bn$ (2.ª Relação)

$\overline{c^2 + a^2} = \overline{bm + bn}$ (somando membro a membro)

ou $c^2 + a^2 = b(m+n)$ (propriedade distributiva)

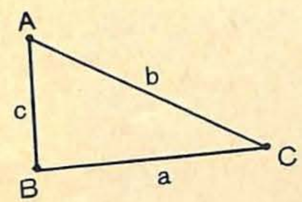
ou $c^2 + a^2 = b \cdot b$ (porque: $m + n = b$)

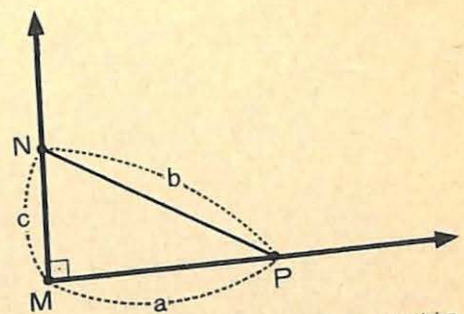
ou $\boxed{c^2 + a^2 = b^2}$ c.q.d.

T.11 : **Teorema recíproco**

Se num triângulo ABC, *cujos lados medem* c, a *e* b, *respectivamente, tem-se:* $b^2 = a^2 + c^2$, *então o triângulo é retângulo, sendo o ângulo reto oposto ao lado de medida* b.

H { $\triangle ABC \mid b^2 = a^2 + c^2$ T { $\triangle ABC$ é retângulo, sendo $\hat{B}$ reto





(*) PITÁGORAS, um dos maiores filósofos da Antiguidade, fundou a escola ítálico-pitagórica, transformando o estudo da Matemática numa verdadeira Ciência.

DEMONSTRAÇÃO:

Seja $\hat{M}$ um ângulo reto e N e P pontos sôbre os lados do $\hat{M}$, tal que:

$$MN = c \text{ e } MP = a$$

Pelo Teorema de Pitágoras:

$$\left.\begin{array}{l} (NP)^2 = a^2+c^2 \\ \text{e como, por hipótese: } b^2 = a^2+c^2 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow (NP)^2 = b^2 \Longrightarrow NP = b \Longrightarrow \overline{NP} \cong \overline{AC}$$

Então: $\triangle ABC \sim \triangle MNP$ (caso L-L-L) e, portanto: $\hat{M} \cong \hat{B}$

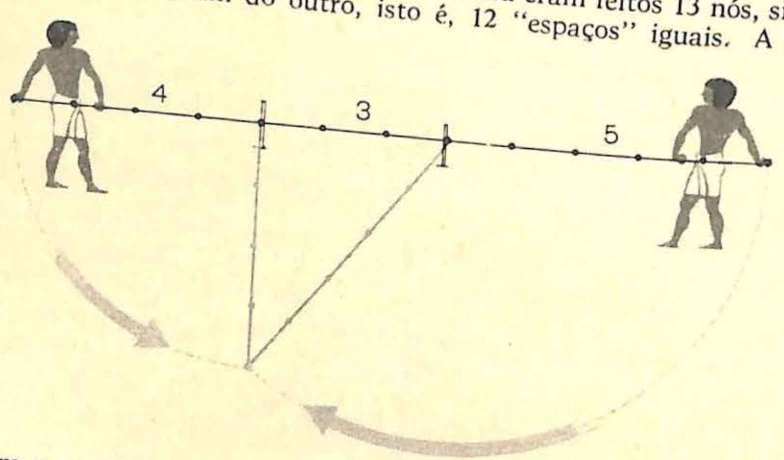
Como $\hat{M}$ é reto, segue-se que $\hat{B}$ também é reto, ou seja, o $\triangle ABC$ é retângulo.

c.q.d.

OBSERVAÇÃO: Os triângulos retângulos, cujas medidas dos lados são expressas por *números naturais*, denominam-se **pitagóricos**. Assim, são pitagóricos os triângulos cujos lados medem, numa mesma unidade:

3, 4 e 5 (porque: $3^2 + 4^2 = 5^2$)
6, 8 e 10 (porque: $6^2 + 8^2 = 10^2$)
9, 12 e 15 (porque: $9^2 + 12^2 = 15^2$)

Para medirem suas terras, os antigos egípcios usavam *ângulos retos* construídos da seguinte maneira: numa corda eram feitos 13 nós, situados em igual distância um do outro, isto é, 12 "espaços" iguais. A seguir,

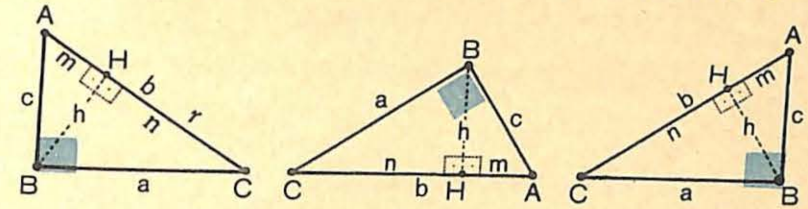


fixavam a corda no chão e marcavam com estacas (conforme a figura) os nós correspondentes a 3, 4 e 5, que são *números pitagóricos!*

Tôda essa arte era baseada na noção que tinham do *Teorema de Pitágoras!*

LEMBRETE AMIGO

Se o triângulo ABC é *retângulo* (em QUALQUER POSIÇÃO!):



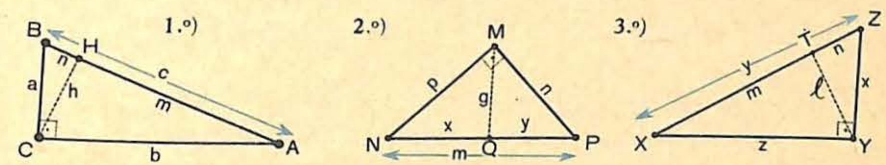
então valem as seguintes *relações métricas:*

$\boxed{c^2 = b.m}$ — $\boxed{a^2 = b.n}$ — $\boxed{h^2 = m.n}$ — $\boxed{a.c = b.h}$ — $\boxed{b^2 = a^2+c^2}$

(Pitágoras)

TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 64

1. Os triângulos ABC, MNP e XYZ são retângulos. Complete as seguintes sentenças, que dizem respeito às relações métricas:



1.º)

$a^2 + b^2 = \ldots$
$\ldots = c \times \ldots$
$b^2 = c \times \ldots$
$h^2 = \ldots \times n$
$\ldots \times b = \ldots \times h$

2.º)

$p \times n = \ldots \times g$
$p^2 = m \times \ldots$
$\ldots = x \times y$
$m^2 = p^2 + \ldots$
$\ldots = m \times y$

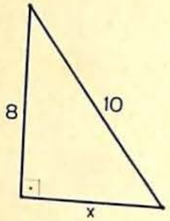
3.º)

$y^2 = \ldots + \ldots$
$\ldots = m \times n$
$x^2 = y \times \ldots$
$z \times \ldots = l \times \ldots$
$\ldots = y \times m$

2. Complete o seguinte quadro, relativo a triângulos retângulos cujas medidas dos lados são números inteiros, sendo a medida da hipotenusa representada por c:

a	3	6	...	...	24	30	36
b	4	...	12	20	...	40	...
c	5	10	15	25	40	...	60

1. Determinar x:



Temos: $x^2 + 8^2 = 10^2$ (Pitágoras)

ou $x^2 + 64 = 100 \iff x^2 = 100 - 64$

ou $x^2 = 36 \implies x = \sqrt{36} = 6$

Logo: o valor de x é 6.

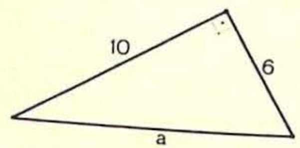
2. Determinar a:

Temos: $a^2 = 10^2 + 6^2$ (Pitágoras)

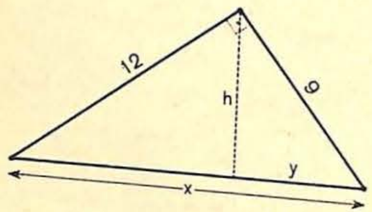
$a^2 = 100 + 36 = 136$

$a = \sqrt{136} = \sqrt{4 \times 34} = 2\sqrt{34}$

Logo: o valor de a é $2\sqrt{34}$.



3. Determinar h, x, y:



Temos: $x^2 = 12^2 + 9^2$ (Pitágoras)

$x^2 = 144 + 81 = 225 \implies x = \sqrt{225} = 15$

Como: $12 \times 9 = x \times h$ (pelo T.11)

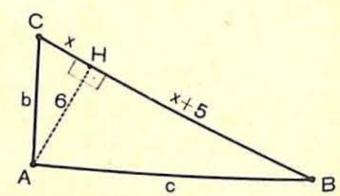
ou $108 = 15 \times h \iff h = \dfrac{108}{15} = 7{,}2$

Como: $9^2 = x \times y$ (pelo T.12)

ou $81 = 15y \iff y = \dfrac{81}{15} = 5{,}4$

Portanto: $h = 7{,}2$, $x = 15$ e $y = 5{,}4$

4. Determinar b e c:



Como: $6^2 = x(x + 5)$ (T.11)

então: $36 = x^2 + 5x \iff x^2 + 5x - 36 = 0$

cujo: $V = \{-9, 4\}$

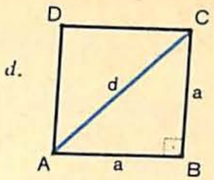
Rejeitada a raiz -9, temos $x = 4$ e, portanto, no triângulo retângulo AHC, por Pitágoras:

$$b^2 = 6^2 + 4^2 = 36 + 16 = 52 \implies b = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}.$$

No $\triangle AHB$, retângulo: $c^2 = b^2 + (x + 5)^2$ ou $c^2 = 6^2 + (4 + 5)^2 \iff c^2 = 36 + 81 \iff c^2 = 117 \implies c = \sqrt{117} = 3\sqrt{13}$

Portanto: $b = 2\sqrt{13}$ e $c = 3\sqrt{13}$

1.ª) **Cálculo da diagonal de um quadrado:**



Seja o quadrado *ABCD*, cujo lado mede a e a diagonal d. No triângulo retângulo *ABC* (que é isósceles):

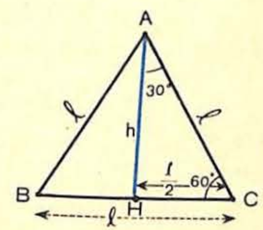
$d^2 = a^2 + a^2$ (Pitágoras)

ou $d^2 = 2a^2 \implies d = a\sqrt{2}$

Logo: $\boxed{d = a\sqrt{2}}$

2.ª) **Cálculo da altura de um triângulo eqüilátero:**

Seja o triângulo eqüilátero *ABC*, cujo lado mede l e cuja altura, relativa à base *BC*, tem por medida h. No triângulo retângulo *AHC*:



$h^2 + \left(\dfrac{l}{2}\right)^2 = l^2$ (Pitágoras)

ou $h^2 = l^2 - \dfrac{l^2}{4} \iff h^2 = \dfrac{3l^2}{4} \implies h = \dfrac{l\sqrt{3}}{2}$

Logo: $\boxed{h = \dfrac{l\sqrt{3}}{2}}$

Conseqüência: No caso de um triângulo retângulo possuir um ângulo agudo medindo 30° (como o $H\hat{A}C$ da figura) e, portanto, o outro medindo 60°, então o cateto oposto ao ângulo agudo de 30° vale a *metade* da *hipotenusa*.

Exemplos:

1.º) O perímetro de um *quadrado* é de 12m. Qual a medida de sua *diagonal?*
Como o lado dêsse quadrado mede: 12m : 4 = 3m, e o valor da sua diagonal é dado pela "fórmula": $d = l\sqrt{2}$, segue-se que:

$d = 3\sqrt{2}$ ou, com aproximação de 0,01: $d = 3 \times 1{,}41 = 4{,}23$

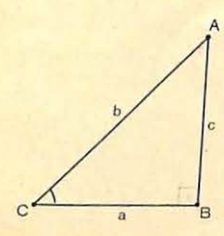
Logo, a diagonal do quadrado mede 4,23m.

2.º) Calcular a *altura* de um *triângulo eqüilátero* cujo lado mede $2\sqrt{3}$m.

Sendo: $h = \dfrac{l\sqrt{3}}{2}$, temos: $h = \dfrac{2\sqrt{3} \times \sqrt{3}}{2} = \dfrac{2\sqrt{3} \times \sqrt{3}}{2} = \dfrac{2 \times 3}{2} = 3$

Portanto, a altura do triângulo eqüilátero mede 3m.

3.ª) **Relação entre o seno e o co-seno de um mesmo ângulo:**



Qualquer que seja o ângulo agudo $\hat{C}$, vale sempre a *relação:*

$(\text{sen } C)^2 + (\cos C)^2 = 1$

ou $\boxed{\text{sen}^2\, C + \cos^2 C = 1}$

De fato, por definição temos:

$$\left.\begin{aligned} \text{sen } C = \frac{c}{b} &\Longrightarrow (\text{sen } C)^2 = \frac{c^2}{b^2} \\ \cos C = \frac{a}{b} &\Longrightarrow (\cos C)^2 = \frac{a^2}{b^2} \end{aligned}\right\} +$$

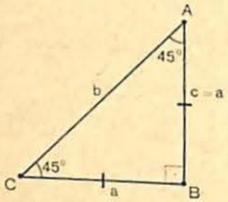
$$(\text{sen } C)^2 + (\cos C)^2 = \frac{c^2}{b^2} + \frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2 + a^2}{b^2} = \frac{b^2}{b^2} = 1 \quad (c^2 + a^2 = b^2, \text{ Pitágoras})$$

Logo:

$$\boxed{\text{sen}^2\ C + \cos^2\ C = 1}$$

Algumas aplicações:

1.ª) Calcular os valôres do sen 45°, cos 45° e tg 45°, respectivamente.
Seja o triângulo retângulo e isósceles ABC:



Então:

$$\left.\begin{aligned} \text{sen } 45° &= \frac{a}{b} \\ \cos 45° &= \frac{a}{b} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \text{sen } 45° = \cos 45°$$

$$\text{tg } 45° = \frac{a}{a} \Longrightarrow \text{tg } 45° = 1$$

Como: $(\text{sen } 45°)^2 + (\cos 45°)^2 = 1$

ou $2(\text{sen } 45°)^2 = 1$ (porque: sen 45° = cos 45°)

ou $(\text{sen } 45°)^2 = \frac{1}{2} \Longrightarrow \text{sen } 45° = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

ou sen 45° = 0,707.1 (aprox. 0,000.1)

e também: cos 45° = 0,707.1

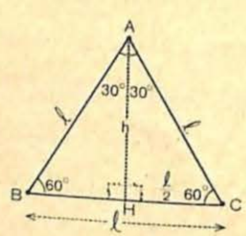
2.ª) Calcular os valôres do sen 30°, cos 30° e tg 30°, respectivamente.
Seja o triângulo eqüilátero ABC, onde:

no $\triangle\ AHC$, retângulo:

$$\text{sen } 30° = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{1}{2} = 0{,}500.0$$

$$\cos 30° = \frac{h}{l} = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866.0$$

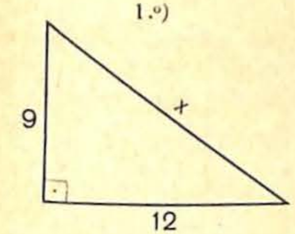
$$\text{tg } 30° = \frac{\frac{l}{2}}{h} = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{l\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0{,}577.4$$



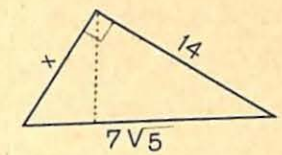
EXERCICIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 67

1. Determine o valor de x em cada um dos seguintes triângulos:

1.º)



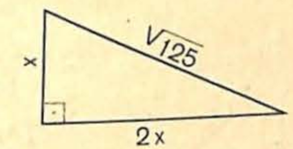
2.º)



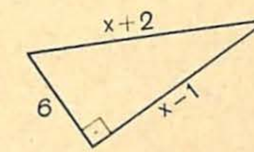
3.º)

4.º)

5.º)



6.º)

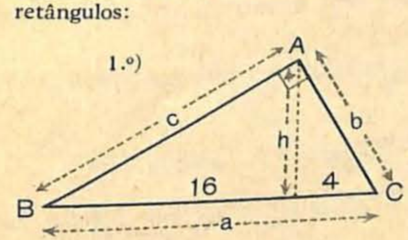


2. Complete a seguinte tabela, cujos números se referem aos lados do triângulo retângulo ABC, sendo $\hat{B}$ o ângulo reto:

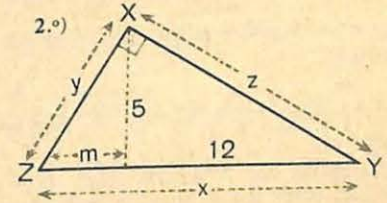
AB	3	...	$5\sqrt{8}$	5	...
BC	4	5	...	2	$\sqrt{2}$
CA	...	13	40	...	$\sqrt{26}$

3. Determine o valor das medidas dos segmentos que figuram nos seguintes triângulos retângulos:

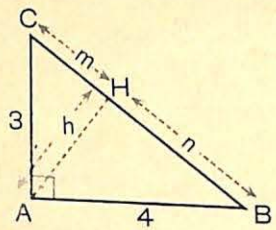
1.º)



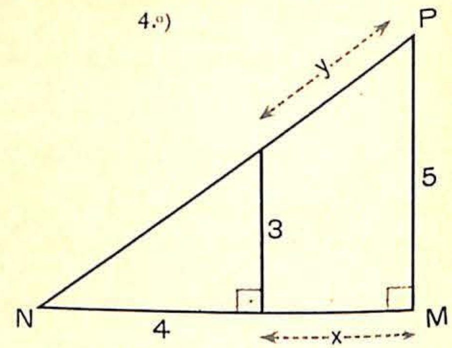
2.º)



3.º)

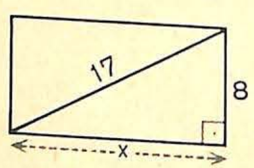


4.º)

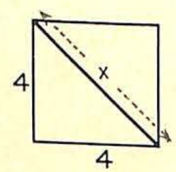


4. Idem nos retângulos:

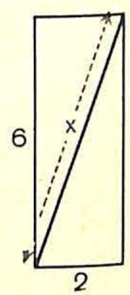
1.º)



2.º)



3.º)



5. Calcule os valôres do sen 60º, cos 60º e tg 60º, respectivamente. (*Sugestão:* Use o triângulo eqüilátero.)

PROBLEMAS — GRUPO 68

(Acêrca das relações métricas num triângulo retângulo)

1. Num triângulo retângulo um dos catetos mede 15m e a altura, relativa à hipotenusa, 12m. Determine as medidas da hipotenusa, do outro cateto e dos segmentos que a altura determina sôbre a hipotenusa.

2. A hipotenusa de um triângulo retângulo mede 15m e a soma das medidas dos catetos é 21m. Calcule as medidas dos catetos.

   Sugestão: Sendo $c = 15$, então $a^2 + b^2 = 15^2$ (Pitágoras) e agora é só resolver o sistema:

$$\begin{cases} a + b = 21 \\ a^2 + b^2 = 225 \end{cases}$$

3. A base de um retângulo mede 24m e o comprimento de sua diagonal, 25m. Quanto mede a altura dêsse retângulo?

4. As diagonais de um losango medem 12m e 16m, respectivamente. Calcule o comprimento do lado.

5. A diagonal maior de um losango mede 16m. O perímetro dêsse losango é de $4\sqrt{80}$m. Calcule a medida da diagonal menor.

6. O perímetro de um triângulo eqüilátero é de $30\sqrt{3}$m. Quanto mede a sua altura?

7. Num triângulo isósceles, os lados congruentes medem 10m cada. Se o comprimento da altura é equivalente aos $\frac{2}{3}$ do comprimento da base, quais os comprimentos da base e da altura dêsse triângulo?

8. Num triângulo retângulo ABC temos $b = 60$ (cateto) e $c = 100$ (hipotenusa). Calcule, em metros, o perímetro de cada um dos triângulos determinados pela altura relativa à hipotenusa.

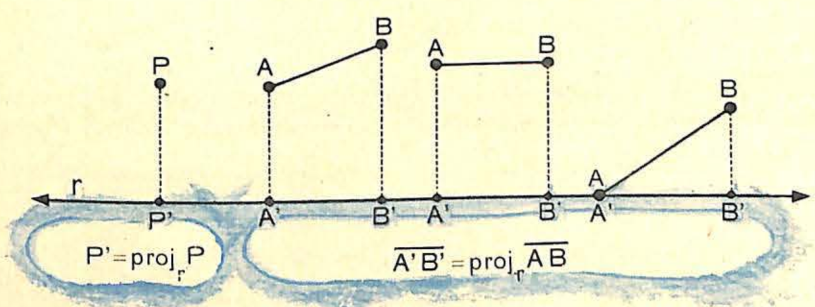
9. Num trapézio retângulo, as bases medem 10m e 14m, respectivamente. Sabendo-se que a altura dêsse trapézio mede 3m, quanto mede o lado oblíquo?

10. A que altura uma escada de 5m toca num muro, se o pé da escada está a 3m do mesmo?

13. *Projeção ortogonal de um ponto e de um segmento sôbre uma reta*

Projeção ortogonal ou *vertical* de um *ponto* P sôbre uma reta r é o *ponto* P', pé da perpendicular traçada de P a r.

Projeção ortogonal de um *segmento* AB sôbre uma reta r (não sendo AB perpendicular à r) é o *segmento* $A'B'$, cujos extremos são as projeções ortogonais de A e de B sôbre r.

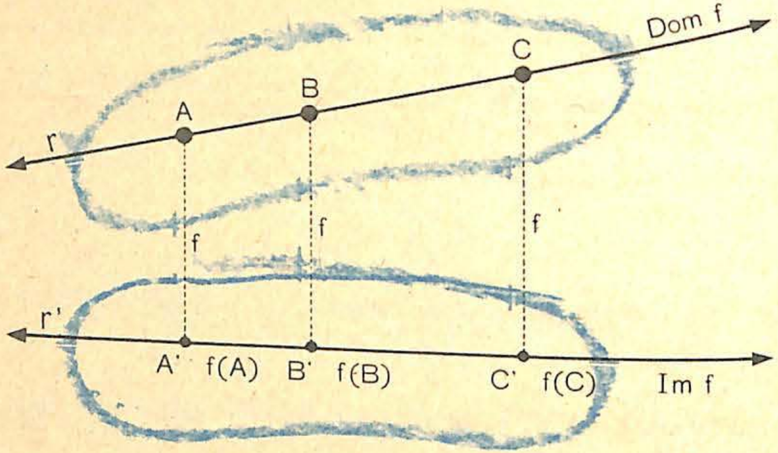


Não se fazendo referência em contrário, a palavra *projeção* já subentende ser ela ortogonal.

LEMBRETE AMIGO

Mais um exemplo de *função* para a sua coleção . . .

Você já sabe que a *perpendicular baixada* de um ponto a uma reta sempre existe e *é única*. Consideradas duas retas distintas r e r' do mesmo plano, a *projeção ortogonal* ou *vertical* dos pontos de r sôbre r' é uma **função** f porque associa a *cada ponto* $A \in r$ um *único* ponto $A' = f(A) \in r'$, que é o pé da perpendicular traçada de A à reta r.



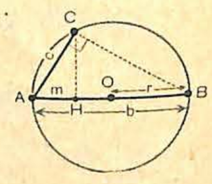
TEOREMAS — Grupo 69

(*Acêrca das relações métricas no triângulo retângulo*)

1.º) Em qualquer circunferência, uma *corda* que passe pela extremidade de um diâmetro é *média proporcional* entre o diâmetro e a sua projeção sôbre êle.

(*Sugestão:* Uso direto das conseqüências do T.9, não se esquecendo de que todo △ inscrito numa semi-circunferência é retângulo . . .)

2.º) O *segmento da perpendicular* baixada de um ponto qualquer da circunferência sôbre o diâmetro é *média proporcional* entre os dois segmentos que determina sôbre o diâmetro.



(*Sugestão:* Conseqüência 3.ª do T.9.)

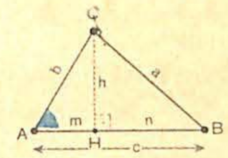
Relações métricas num triângulo qualquer

14. *Relação com o ângulo agudo*

T.12 : *Num triângulo qualquer o quadrado da medida do lado oposto a um ângulo* ***agudo*** *é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados,* ***menos*** *duas vêzes o produto da medida de um dêstes lados pela medida da projeção do outro sôbre aquêle lado.*

H { $\triangle ABC \mid \hat{A}$ é agudo

T { $a^2 = b^2 + c^2 - 2cm$



Demonstração:

Traçando $\overline{CH} \perp \overline{AB}$, vem:

$\triangle CHB$, retângulo $\Longrightarrow a^2 = h^2 + n^2$ (Pitágoras)

$\triangle CHA$, retângulo $\Longrightarrow h^2 = b^2 - m^2$ e $n = c - m$ (porque: $c = m + n$)

Substituindo êsses valôres em:

$$a^2 = h^2 + n^2$$

temos:

$$a^2 = b^2 - m^2 + (c - m)^2$$

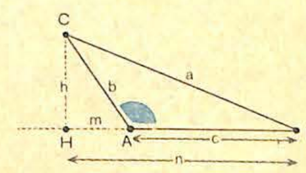
ou $a^2 = b^2 - m^2 + c^2 - 2cm + m^2 \Longleftrightarrow \boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2cm}$ c.q.d.

15. *Relação com o ângulo obtuso*

T.13 : *Num triângulo obtusângulo, o quadrado da medida do lado oposto ao ângulo* ***obtuso*** *é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados,* ***mais*** *duas vêzes o produto da medida de um dêstes lados pela medida da projeção do outro sôbre a reta que contém aquêle lado.*

H { $\triangle ABC \mid \hat{A}$ é obtuso

T { $a^2 = b^2 + c^2 + 2cm$



Demonstração:

Traçando $\overline{CH} \perp \overleftrightarrow{AB}$, vem:

$\triangle CHB$, retângulo $\Longrightarrow a^2 = h^2 + n^2$; $\triangle CHA$, retângulo $\Longrightarrow h^2 = b^2 - m^2$ e $n = m + c$

e substituindo: $a^2 = b^2 - m^2 + (m + c)^2$

ou $a^2 = b^2 - m^2 + m^2 + 2cm + c^2 \Longleftrightarrow \boxed{a^2 = b^2 + c^2 + 2cm}$ c.q.d.

EXERCÍCIOS EXPLORATÓRIOS — GRUPO 70

(Acêrca da natureza de um triângulo)

Você sabia que pode reconhecer se um triângulo é *retângulo, acutângulo* ou *obtusângulo* — SEM DESENHÁ-LO — conhecidas as medidas de seus lados?

É só aplicar *Pitágoras*, sua recíproca ou as duas *Relações* agora estudadas. Como?

Basta comparar o *quadrado da medida* correspondente ao MAIOR LADO com a *soma dos quadrados das medidas* dos *outros dois lados*.

Se o primeiro número é *igual* ao segundo, o Teorema de Pitágoras resolve. Por quê?

Se o primeiro número fôr *maior* que o segundo, a *Relação com o ângulo obtuso* resolve. Por quê?

Se o primeiro número fôr *menor* que o segundo, a *Relação com o ângulo agudo* resolve. Por quê?

Exemplos:

Reconhecer a natureza do $\triangle ABC$ nos casos:

1.º) $a = 10$ quadrando: $a^2 = 100$
$b = 8$ $\quad b^2 = 64$
$c = 6$ $\quad c^2 = 36$ $\}\ 100$ $\Longrightarrow a^2 = b^2 + c^2$ (Pitágoras)

Logo, o $\triangle ABC$ é *retângulo*.

2.º) $a = 13$ quadrando: $a^2 = 169$
$b = 8$ $\quad b^2 = 64$
$c = 7$ $\quad c^2 = 49$ $\}\ 113$ $\Longrightarrow a^2 > b^2 + c^2$
(pela Relação com o ângulo obtuso equivale a dizer: $a^2 = b^2 + c^2 + 2cm$)

Logo, o $\triangle ABC$ é *obtusângulo*.

3.º) $a = 12$ quadrando: $a^2 = 144$
$b = 8$ $\quad b^2 = 64$
$c = 9$ $\quad c^2 = 81$ $\}\ 145$ $\Longrightarrow a^2 < b^2 + c^2$
(pela Relação com o ângulo agudo equivale a dizer: $a^2 = b^2 + c^2 - 2cm$)

Verifique você mesmo que, nesse caso, o $\triangle ABC$ é *acutângulo*.

TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 71

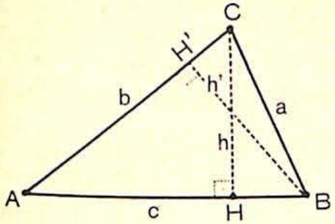
Reconheça a natureza dos triângulos cujos lados medem, em dm, respectivamente:

1.º) 9, 12 e 15	2.º) 8, 11 e 9	3.º) 14, 8 e 7
4.º) 3, 4 e 5	5.º) 18, 24 e 30	6.º) 7, 8 e 14

EXERCÍCIOS EXPLORATÓRIOS — GRUPO 72

(Acêrca das razões trigonométricas seno e co-seno)

Lei dos senos: *Num triângulo qualquer as medidas de seus lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos.*



Consideremos o caso do triângulo *acutângulo*, que é o de maior interêsse para nós. Então:

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}}$$

De fato, traçadas as alturas: $\overline{CH} \perp \overline{AB}$ e $\overline{BH'} \perp \overline{AC}$, vem:

no $\triangle CHB$, retângulo: $\frac{h}{a} = \text{sen } B$ (por quê?) $\Longleftrightarrow h = a \cdot \text{sen } B$

no $\triangle CHA$, retângulo: $\frac{h}{b} = \text{sen } A$ (por quê?) $\Longleftrightarrow h = b \cdot \text{sen } A$

Portanto: $a \cdot \text{sen } B = b \cdot \text{sen } A$ (por quê?)

ou $\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B}$

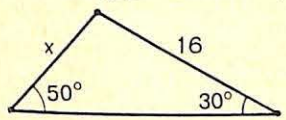
Agora é a sua vez de "tirar" as seguintes relações dos triângulos retângulos $BH'A$ e $BH'C$, respectivamente:

$$\left.\begin{array}{l} h' = c \cdot \text{sen } A \\ h' = a \cdot \text{sen } C \end{array}\right\} \Longrightarrow c \cdot \text{sen } A = a \cdot \text{sen } C \Longleftrightarrow \frac{a}{\text{sen } A} = \frac{c}{\text{sen } C}$$

e, finalmente, tôdas essas razões iguais permitem concluir que:

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$$

APLICAÇÃO: Calcular x, com aproximação de 0,1 por falta, no seguinte triângulo:

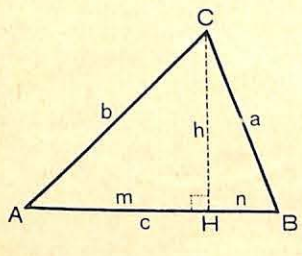


Temos: $\frac{x}{\text{sen } 30^\circ} = \frac{16}{\text{sen } 50^\circ}$ (Lei dos senos)

ou $\frac{x}{0{,}5} = \frac{16}{0{,}7}$ $\quad x = \frac{16 \times 0{,}5}{0{,}7} = 11{,}4$

Logo, o valor de x é 10.

Lei dos co-senos: *Num triângulo qualquer o quadrado da medida de um lado é igual à soma das medidas dos quadrados dos outros dois lados, menos duas vêzes o produto dêstes pelo co-seno do ângulo oposto ao primeiro lado.*



Agora, no triângulo acutângulo ABC:

$$\Longrightarrow \boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A}$$

De fato: no $\triangle CHA$, retângulo: $\frac{m}{b} = \cos A$ (por quê?)

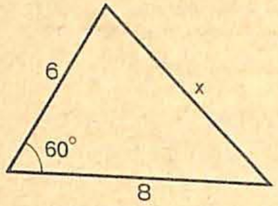
ou $m = b \cdot \cos A$

Como $a^2 = b^2 + c^2 - 2cm$ (T.12), vem:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2c(b \cdot \cos A)$$

ou $$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

Aplicação: Calcular x, com aproximação de 0,1 por falta, no seguinte triângulo:



Temos: $x^2 = 6^2 + 8^2 - 2 \times 6 \times 8 \times \cos 60^\circ$

$x^2 = 36 + 64 - 2 \times 6 \times 8 \times 0{,}5$

$x^2 = 100 - 48 = 52 \Longrightarrow x = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$

ou $x = 2 \times 3{,}6 = 7{,}2$

Logo, o valor de x é 7,2.

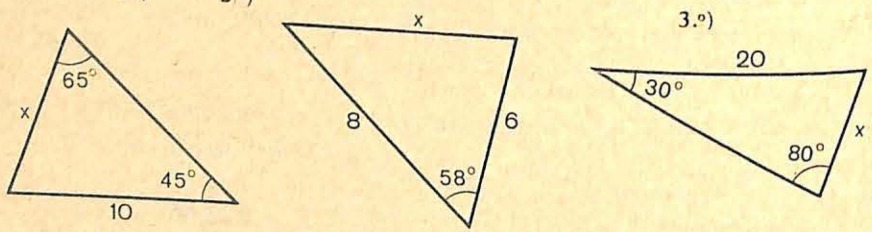
Conclusão: Se você conhecer num triângulo acutângulo:

1.º) as medidas de *dois ângulos* e a de *um lado*, então as medidas dos outros dois lados serão determinadas aplicando a lei dos senos;

2.º) as medidas de *dois lados* e a do *ângulo compreendido*, então a medida do outro lado será determinada aplicando a lei dos co-senos;

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — Grupo 73

1. Consultando a tabela da pág. 181, com a aproximação de 0,1 por falta, determine em décimos, por falta, o valor de x nos seguintes triângulos:



2. Num paralelogramo, os lados consecutivos, que medem 6m e 8m respectivamente, formam entre si um ângulo de 60º. Calcule a medida da diagonal oposta a êsse ângulo.

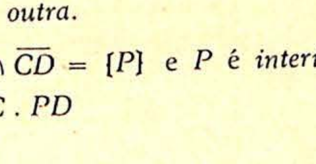
3. Num triângulo, dois ângulos medem respectivamente 65º e 48º. O lado oposto ao ângulo de 65º mede 15cm. Quanto medem os outros dois lados?

4. Num trapézio isósceles, a base maior mede 12dm. O lado não-paralelo, que mede 10dm, forma com a base maior um ângulo de 60º. Calcule a medida da diagonal dêsse trapézio.

5. Num trapézio a base maior, que mede 30cm, forma com um dos lados não-paralelos um ângulo de 45º. Êsse lado não-paralelo forma com a diagonal que passa pela sua extremidade um ângulo de 60º. Quanto mede essa diagonal?

16. 1.ª *Relação: corda com corda*

T.14 *Se duas cordas se interceptam num ponto interior à circunferência, então o produto das medidas dos segmentos determinados por uma delas é igual ao produto das medidas dos segmentos determinados pela outra.*



H $\{C(O, r) \mid \overline{AB} \cap \overline{CD} = \{P\}$ e P é *interior*

T $\{PA \cdot PB = PC \cdot PD$

Demonstração:

Unindo-se A a D e C a B, formam-se os triângulos PAD e PCB, tais que:

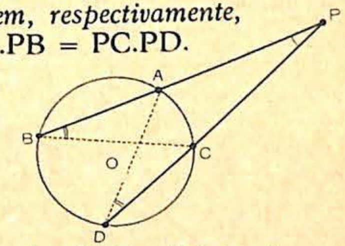
$$\triangle \underbrace{PAD} \sim \triangle \underbrace{PCB} \text{ (caso A-A) porque } \begin{cases} m(B\hat{A}D) = m(B\hat{C}D) = \frac{1}{2}m(\widehat{BD}) \\ m(P\hat{B}C) = m(P\hat{D}A) = \frac{1}{2}m(\widehat{AC}) \end{cases}$$

Logo: $$\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB} \Longleftrightarrow \boxed{PA.PB = PC.PD}$$ c.q.d.

Observação: Compare o T.14 com o exercício 3 do Grupo 55 (pág. 165) e conclua.

17. 2.ª *Relação: secante com secante*

T.15 *Se* P *é um ponto exterior a uma circunferência e dêle forem traçadas duas secantes que a interceptem, respectivamente, nos pontos* A, B, *e* C, D, *então:* PA.PB = PC.PD.



H $\{C(O, r) \mid P$ é *exterior*

T $\{PA.PB = PC.PD$

Demonstração:

Unindo A a D e B a C, formam-se os triângulos PAD e PCB, tais que:

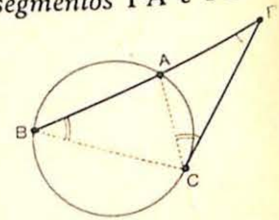
$$\triangle \underbrace{PAD} \sim \triangle \underbrace{PCB} \text{ (caso A-A) porque } \begin{cases} \hat{P} \text{ comum} \\ \hat{B} \cong \hat{D} \left(\text{valem } \frac{1}{2}m(\widehat{AC})\right) \end{cases}$$

Logo: $$\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB} \Longleftrightarrow \boxed{PA.PB = PC.PD}$$ c.q.d.

Observação: Compare o T.15 com o exercício 9 do Grupo 56 (pág. 167) e conclua.

18. *3.ª Relação: secante com tangente*

T.16 : *Se P é um ponto exterior a uma circunferência e dêle forem traçadas a secante $\overleftrightarrow{PA}$ e a tangente (geométrica) $\overleftrightarrow{PC}$, então o segmento $\overline{PC}$ da tangente é* ***média proporcional*** *entre os segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$.*



H {C(O, *r*) | *P* é *exterior*

T $\begin{cases} \overline{PC} \text{ é média proporcional entre } \overline{PA} \text{ e } \overline{PB} \\ (\text{ou } (PC)^2 = PA \cdot PB) \end{cases}$

DEMONSTRAÇÃO:

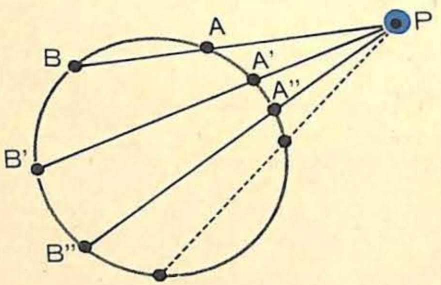
Unem-se C a *A* e *B*. Formam-se os triângulos *PCA* e *PBC*, tais que:

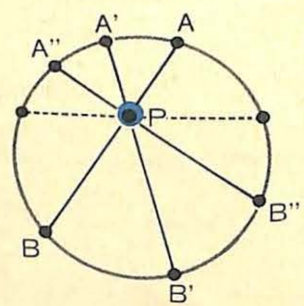
$$\triangle PCA \sim \triangle PBC \text{ (caso A-A) porque } \begin{cases} \hat{P} \text{ é comum} \\ \hat{B} \cong \hat{C} \left(\text{valem } \frac{1}{2} m(\widehat{AC})\right) \end{cases}$$

Logo: $\dfrac{PC}{PB} = \dfrac{PA}{PC} \iff \boxed{(PC)^2 = PA \cdot PB}$

19. *Potência de um ponto em relação a uma circunferência*

Consideremos várias *secantes* a uma circunferência, passando tôdas por um ponto *P*, *exterior* ou *interior* à circunferência e que a interceptem nos pontos: *A* e *B*, *A'* e *B'*, *A''* e *B''*, . . .

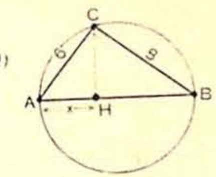




Pelos teoremas T.15 e T.16 os *produtos* das medidas: *PA.PB*, *PA'.PB'*, *PA''.PB''*, . . . têm *valor constante*, qualquer que seja a secante.

Tal produto denomina-se: **potência do ponto** ***P*** em relação à *circunferência*.

Determinar o valor de *x* nas figuras:



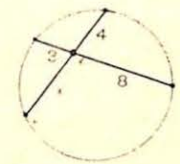
1.ª) Temos: $6^2 = AB \cdot x$ (Conseqüência (1.ª Relação) do T.9)

Como: $(AB)^2 = (BC)^2 + (CA)^2$ (Pitágoras)

ou $(AB)^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100 \Longrightarrow AB = 10$

Logo: $36 = 10 \cdot x \iff x = 3{,}6$

Portanto, o valor de *x* é 3,6.



2.ª) Temos: $4 \times x = 3 \times 8$ (1.ª Relação)

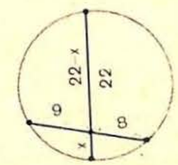
Logo: $x = \dfrac{24}{4} = 6$

$x = 6$

Portanto, o valor de *x* é 6.

3.ª) Temos: $9 \times 8 = x(22 - x)$ (1.ª Relação)

ou $72 = 22x - x^2 \iff x^2 - 22x + 72 = 0 \Longrightarrow V = \{18, 4\}$

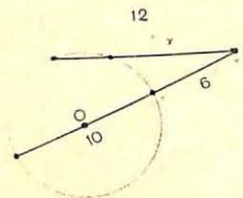


Portanto:

se $x = 4$, o menor dos segmentos mede 4 e o maior, 18

se $x = 18$, o maior dos segmentos mede 18 e o menor, 4

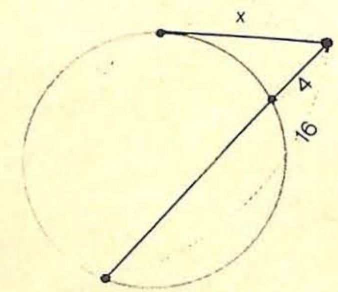
4.ª)



Temos: $12 \times x = 16 \times 6$ (2.ª Relação)

$x = \dfrac{96}{12} = 8$

Portanto, o valor de *x* é 8.



5.ª) Temos: $x^2 = 4 \times 16 = 64$ (3.ª Relação)

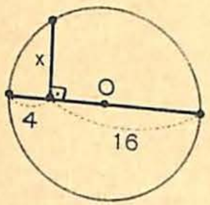
$x = \sqrt{64} = 8$

Logo, o valor de *x* é 8.

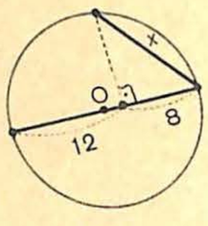
EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 75

1. Determine o valor de x nas seguintes figuras:

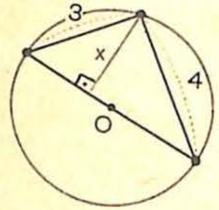
1.ª)



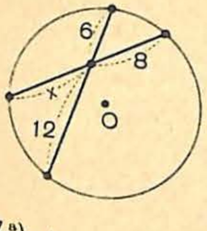
2.ª)



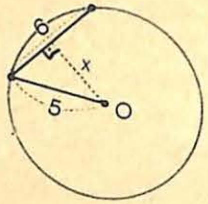
3.ª)



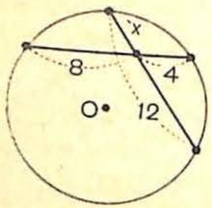
4.ª)



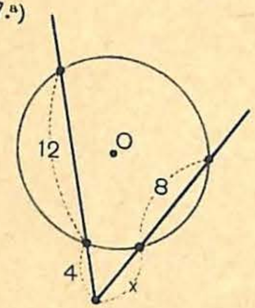
5.ª)



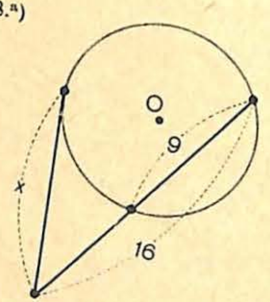
6.ª)



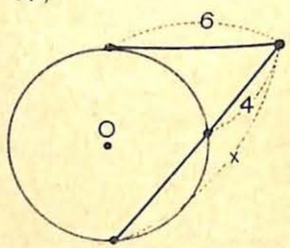
7.ª)



8.ª)



9.ª)



2. Na figura (pág. 200, embaixo), que definiu a *potência de P* em relação à circunferência, demonstre que, traçada a tangente $\overleftrightarrow{PM}$, então:

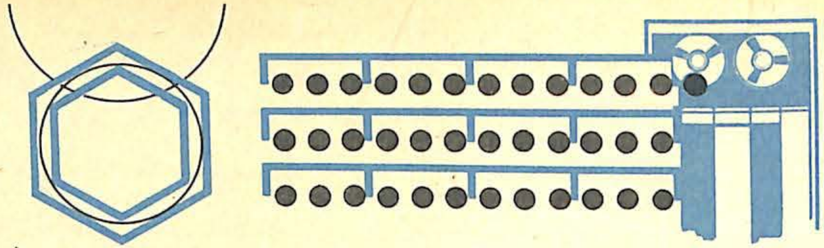
$$PA \cdot PB = PA' \cdot PB' = PA'' \cdot PB'' = \ldots = (PM)^2$$

PROBLEMAS — GRUPO 76

(Acêrca das relações métricas no círculo)

1. Numa circunferência de 10cm de raio, traça-se uma corda de 12cm de comprimento. Calcule a distância da corda ao centro dessa circunferência.
2. As cordas que unem um ponto C da circunferência às extremidades A e B de um diâmetro medem 9m e 12m, respectivamente. Calcule a distância CH de C ao diâmetro $\overline{AB}$, as medidas das projeções $\overline{AH}$ e $\overline{HB}$ das cordas sôbre o diâmetro e a medida do raio da circunferência (com aproximação de 0,1).

3. Uma circunferência tem raio igual a 8cm. Pela extremidade de um seu diâmetro traça-se uma corda, cuja projeção sôbre êsse diâmetro mede 4cm. Qual o comprimento da corda?
4. Duas cordas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ interceptam-se em M. Sabendo que $AM = 5$, $MB = 6$ e $MC = 7{,}5$, calcule CD e MD (unidade: cm).
5. Duas cordas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ interceptam-se em P. Sabendo que $AP = 9$, $PB = 4$ e $CD = 15$, calcule PC e PD (unidade: dm).
6. Uma corda é dividida por uma outra em dois segmentos de 8m e 9m, respectivamente. Sabendo que um dos segmentos em que a segunda divide a primeira é duplo do outro, determine o comprimento da segunda corda.
7. Uma corda e um diâmetro se interceptam num círculo de 8dm de raio. As duas menores partes que resultam dessa intersecção medem respectivamente 3dm na corda e 2dm no diâmetro. Quanto mede a corda? (Aproximação: 0,1)
8. Uma corda $\overline{CD}$ intercepta um diâmetro $\overline{AB}$, que mede 8cm, no ponto médio M do raio. Determine as medidas dos segmentos $\overline{CM}$ e $\overline{MD}$, sabendo que o primeiro dêles mede a metade do segundo.
9. Duas secantes são traçadas de um mesmo ponto exterior a uma circunferência. As partes interna e externa de uma delas medem, respectivamente, 13dm e 23dm, e a parte externa da outra, 17dm. Calcule a medida da parte interna da última.
10. O diâmetro de uma circunferência mede 32,50m e é prolongado de 4,50m. Calcule o comprimento do segmento da tangente traçada do ponto extremo assim obtido.
11. Num círculo de 6m de raio e por um ponto exterior, situado a 10m do centro, traça-se uma tangente. Calcule o comprimento do segmento dessa tangente, cujos extremos são o ponto exterior e o ponto de contato.
12. De um ponto exterior a uma circunferência traça-se uma secante que passa pelo seu centro e cujo segmento maior mede 32cm. Pelo ponto exterior traça-se também uma tangente, cujo segmento mede 24cm. Quanto mede o raio dessa circunferência?
13. Seja uma circunferência de centro O e raio medindo 6cm. Determine sôbre o prolongamento do raio $\overline{OA}$ um ponto P tal que a tangente traçada por êsse ponto, cujo ponto de contato com a circunferência é B, satisfaça à condição: $PB = 2 \cdot PA$.
14. De um ponto exterior a uma circunferência, de 2dm de raio, traça-se uma secante que passa pelo seu centro e que a intercepta nos pontos A e B, respectivamente. Se dêsse ponto fôr traçada uma tangente que "toca" a circunferência num ponto C, qual a medida de PA, sabendo-se que PC é igual à medida do diâmetro AB?
15. De um ponto exterior a uma circunferência, de 6cm de raio, traçam-se duas secantes, que medem, respectivamente, o dôbro e o triplo do que mede o raio. Calcule a medida da parte externa da segunda secante, sabendo que a parte externa da primeira mede uma vez e meia o raio.

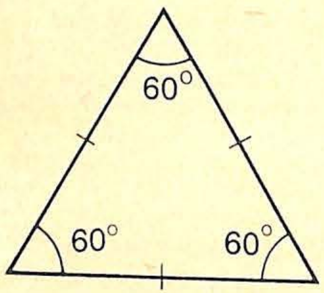


4.ª Parte · Polígonos regulares · Medida da circunferência; cálculo de π

Polígonos regulares

20. *Definição*

Um polígono convexo é **regular,** se e sòmente se, os seus *lados são congruentes* e seus *ângulos são congruentes.*



Assim, por exemplo, o *triângulo eqüilátero* é *regular,* porque possui todos os *lados congruentes,* bem como todos os *ângulos* (cada um mede 60°).

O *quadrado* também é um polígono *regular.*

Por quê?

TESTE DE ATENÇÃO — Grupo 77

1. Por que um *retângulo* nem sempre é um polígono regular? Qual é o caso em que o retângulo é um polígono regular?
2. E o *losango,* por que nem sempre é um polígono regular?
3. Quanto mede, em graus, cada *ângulo interno* dos seguintes polígonos regulares:

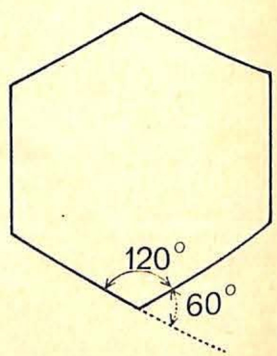
1.°) *hexágono? (Modêlo:* Lembre-se de que a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo é dada pela "fórmula":

$$S_i = (n - 2)\ 180°$$

No caso do hexágono ($n = 6$), temos:

$$S_i = (6 - 2)\ 180° = 4 \times 180° = 720°$$

Se o hexágono é *regular,* os ângulos são todos *congruentes* e, portanto, cada um dêles mede: $720° : 6 = 120°$.
O ângulo externo mede: $180° - 120° = 60°$. Por quê?



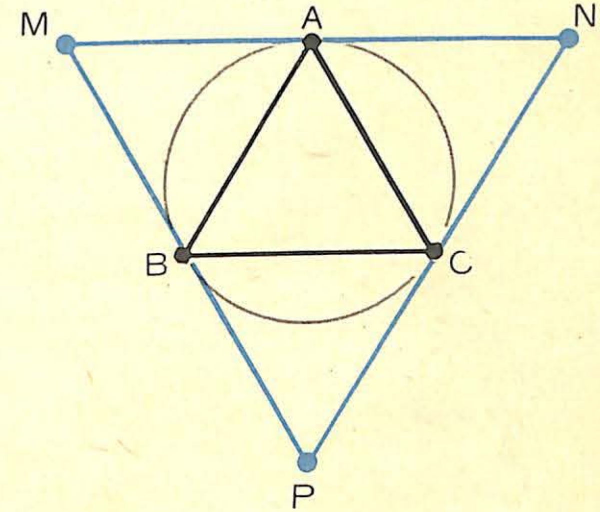
2.°) *pentágono?* 3.°) *decágono?* 4.°) *icoságono?*

4. Quanto mede cada ângulo *externo* de um polígono *regular,* se a medida de cada ângulo interno dêsse polígono é:

1.°) 108°? 2.°) 135°? 3.°) 168°? 4.°) 160°?

21. *Polígonos regulares inscritos e circunscritos a uma circunferência*

Se você dividir uma circunferência, por exemplo, em *três partes de mesma medida* (isto é, em *três arcos congruentes*), então as *cordas* que unem os pontos de divisão formam um triângulo eqüilátero *inscrito* (*ABC* na figura), e as *tangentes* (isto é, os *segmentos* de tangentes) formam um triângulo eqüilátero *circunscrito* (*MNP* na figura).



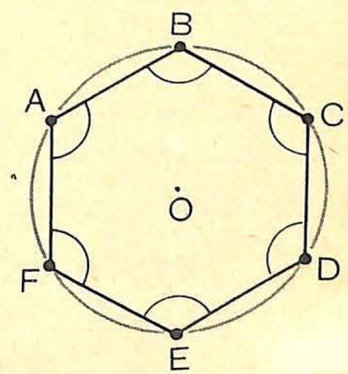
Fato análogo ocorrerá se você dividir a circunferência em 4, 5, 6, ... arcos congruentes.

T.17 : *Se uma circunferência fôr dividida em um certo número* n ($n \in I$, $n > 2$) *de arcos congruentes, então:*

1.°) *as* ***cordas*** *consecutivas formam um* ***polígono regular inscrito*** *de* n *lados;*

2.°) *as* ***tangentes*** *nos pontos cosnecutivos de divisão determinam um* ***polígono regular circunscrito*** *de* n *lados.*

1.°) $\begin{cases} H \begin{cases} C(O,\ r) \mid \overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{BC} \cong \overset{\frown}{CD} \cong \dots \\ \overline{AB},\ \overline{BC},\ \overline{CD},\ \overline{DE},\ \overline{EF}, \dots \text{ são cordas} \end{cases} \\ T \{ ABCD \dots \text{ é polígono regular inscrito} \end{cases}$



Demonstração:

1. Se $\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{BC} \cong \overset{\frown}{CD} \ldots$, então $\overline{AB} \cong \overline{CD} \cong \overline{DE} \ldots$ como cordas correspondentes de arcos congruentes.

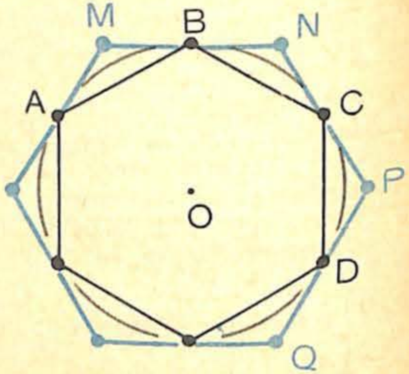
2. Se cada ângulo interno (que é um ângulo *inscrito*) intercepta $n-2$ arcos congruentes, então as suas medidas são *iguais*. Assim, por exemplo:

$$m(\hat{A}) = m(\hat{B}) = \frac{360° - 2 \times m(\overset{\frown}{AB})}{2} \quad \text{(observar a figura)}$$

1 e 2 *implicam* que o polígono é *regular* e *inscrito*.

c.q.d.

2.°) $\begin{cases} H \begin{cases} C(O, r) \mid \overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{BC} \cong \overset{\frown}{CD} \cong \ldots \\ \overleftrightarrow{MN}, \overleftrightarrow{NP}, \overleftrightarrow{PQ}, \ldots \text{ são tangentes} \end{cases} \\ T \begin{cases} MNPQ \ldots \text{ é polígono regular circunscrito} \end{cases} \end{cases}$



Demonstração:

Traçadas as cordas $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \ldots$ e como:

$$m(M\hat{A}B) = m(M\hat{B}A) = m(B\hat{N}C) = \ldots = \frac{1}{2} m(\overset{\frown}{AB}) \text{ tem-se:}$$

$\triangle AMB \cong \triangle BNC \cong \triangle CPQ \ldots$ (caso A.L.A.) e sendo êsses triângulos isósceles, segue-se que: $\begin{cases} \overline{AM} \cong \overline{MB} \cong \overline{BN} \cong \overline{NC} \cong \ldots \Longrightarrow \overline{MN} \cong \\ \cong \overline{NP} \cong \overline{PQ} \cong \ldots \hat{M} \cong \hat{N} \cong \hat{P} \cong \hat{Q} \end{cases}$

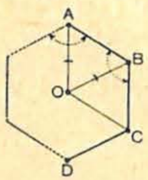
isto é, $MNPQ \ldots$ é um polígono regular circunscrito.

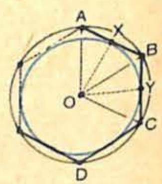
c.q.d.

T.18 – (**Teorema recíproco do T.17**): *Todo polígono regular é inscritível e circunscritível a uma circunferência.*

H {$ABCD \ldots$ é um polígono regular

T {$ABCD \ldots$ é inscritível e circunscritível





Demonstração:

Como as bissetrizes dos ângulos consecutivos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ se interceptam em O e $\hat{A} \cong \hat{B}$ (por hipótese o polígono é regular), então:

$$\frac{\hat{A}}{2} = \frac{\hat{B}}{2} \text{ e, portanto, o } \triangle AOB \text{ é isósceles.}$$

Logo: $\overline{OA} \cong \overline{OB}$

Unindo O com C, temos:

$$\underset{\text{(L.A.L.)}}{\triangle AOB \cong \triangle BOC} \begin{cases} \overline{AB} \cong \overline{BC} & \text{(por hipótese)} \\ A\hat{B}O \cong O\hat{B}C & (\overrightarrow{BO}, \text{ bissetriz}) \\ \overline{OB} \cong \overline{OB} & \text{(propr. reflexiva da congruência)} \end{cases}$$

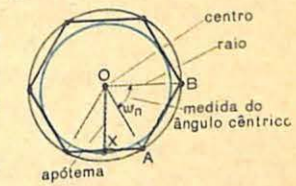
Logo: $\overline{OB} \cong \overline{OC}$

Sendo $\overline{OA} \cong \overline{OB} \cong \overline{OC}$, então o ponto O é *eqüidistante* de A, B e C.

Da mesma maneira, demonstra-se que O é eqüidistante de A, B, C, D,... e que, portanto, o polígono $ABCD\ldots$ é *inscritível* na $C(O, \overline{OA})$.

Como: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, ... são *cordas congruentes* de uma mesma circunferência, segue-se que o ponto O é *eqüidistante* de todos os lados ($\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$,...) do polígono, ou seja, O é o centro da circunferência de raio $\overline{OX}$, inscrita no polígono que, por sua vez, é *circunscritível* à mesma.

22. *Elementos principais de um polígono regular*



Centro do polígono: é o centro (O, na figura) comum das circunferências *inscrita* e *circunscrita*.

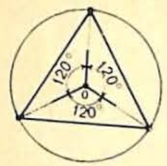
Raio do polígono: é o raio da circunferência *circunscrita*.

Apótema do polígono: é o raio da circunferência *inscrita*.

Ângulo cêntrico (ou central): é o ângulo cujo vértice é o centro O e cujos lados são semi-retas que contêm dois raios consecutivos.

A medida (w_n) do ângulo cêntrico de um polígono regular de n ($n > 2$) lados é (como é fácil perceber):

$$\boxed{w_n = \frac{360°}{n}}$$



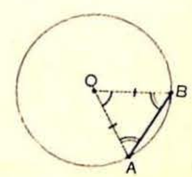
Exemplos: ângulo cêntrico do *triângulo eqüilátero:* $w_3 = \dfrac{360^\circ}{3} = 120^\circ$

ângulo cêntrico do *quadrado:* $w_4 = \dfrac{360^\circ}{4} = 90^\circ$

ângulo cêntrico do *hexágono regular:* $w_6 = \dfrac{360^\circ}{6} = 60^\circ$

A *relação* existente entre o *ângulo cêntrico* e o *ângulo interno* de um mesmo polígono regular é a seguinte: são **suplementares.**

De fato, no triângulo isósceles AOB, temos:



$$\text{âng. cêntrico} + 2 \cdot \frac{\text{âng. interno}}{2} = 180^\circ$$

ou $\boxed{\text{âng. cêntrico} + \text{âng. interno} = 180^\circ}$

TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 78

1. Calcule, em graus, as medidas do ângulo cêntrico e do ângulo interno dos seguintes polígonos regulares:

   1.º) octógono 2.º) decágono 3.º) dodecágono 4.º) icoságono

2. Qual é o polígono regular cujo ângulo cêntrico mede:

   1.º) 36°? (*Modêlo:* Como $w_n = \dfrac{360^\circ}{n} = 36^\circ \iff n = \dfrac{360^\circ}{36^\circ} = 10$, então o polígono regular é um *decágono*)

   2.º) 60°? 3.º) 72°? 4.º) 30°? 5.º) 18°?

3. A razão entre os ângulos internos de dois polígonos regulares é $\dfrac{4}{3}$ e a diferença entre os mesmos é 30°. Quais são êsses polígonos?

EXERCÍCIOS EXPLORATÓRIOS — GRUPO 79

(*Com relação a polígonos semelhantes. . .*)

1. *Dois polígonos regulares, de mesmo número de lados, são semelhantes.*

   Não é preciso figura. . . Se os polígonos $ABCD\ldots$ e $A'B'C'D'\ldots$ de n ($n>2$) lados são regulares e de mesmo número de lados, então:

$$1.^\circ \begin{cases} m(\hat{A}) = m(\hat{B}) = \ldots = \dfrac{(n-2)\,180^\circ}{n} \text{ (por quê?)} \\ m(\hat{A}') = m(\hat{B}') = \ldots = \dfrac{(n-2)\,180^\circ}{n} \text{ (por quê?)} \end{cases} \Longrightarrow \hat{A} \cong \hat{A}', \hat{B} \cong \hat{B}', \ldots$$

$$2.^\circ \begin{cases} \overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \ldots \text{ (por quê?)} \\ \overline{A'B'} \cong \overline{B'C'} \cong \overline{C'D'} \ldots \text{ (por quê?)} \end{cases} \Longrightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \ldots$$

isto é: polígono $ABCD\ldots \sim$ polígono $A'B'C'D'\ldots$

2. *Os perímetros de dois polígonos regulares, de mesmo número de lados, são proporcionais às medidas dos raios e dos apótemas.*

   Agora é sua vez de resolver. . . Basta lembrar:

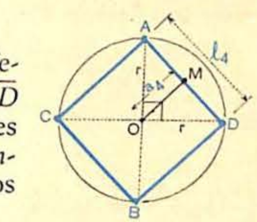
   1.º) a transformação, já conhecida, das proporções:

$$\text{se } \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \ldots \quad \text{então } \frac{AB + BC + \ldots}{A'B' + B'C' + \ldots}$$

   2.º) que tanto os raios como os apótemas são segmentos correspondentes na semelhança dos triângulos, que se obtêm unindo-se o centro de cada um dos polígonos aos respectivos vértices. . .

Relações métricas nos polígonos regulares

23. *Construção do quadrado; cálculo da medida do lado (l_4) e do apótema (a_4) do quadrado inscrito*



Para se inscrever um quadrado numa circunferência $C(O, r)$, basta traçar dois diâmetros ($\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ na figura) perpendiculares entre si. Nestas condições a circunferência ficará dividida em *quatro arcos congruentes*, pois a êles correspondem ângulos cêntricos congruentes (todos retos).

Unindo-se os pontos de divisão A, B, C e D, obtém-se, então, o *quadrado ABCD*. Indicando por:

l_4 — a *medida do lado* do quadrado inscrito
a_4 — a *medida do apótema* do quadrado inscrito

tem-se, no triângulo retângulo AOD, por Pitágoras:

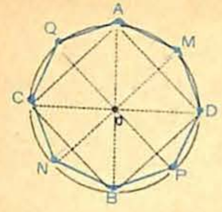
$$l_4^2 = r^2 + r^2 \iff l_4^2 = 2r^2 \Longrightarrow l_4 = \sqrt{2r^2} \iff l_4 = r\sqrt{2}$$

Lembrando que $\overline{OM} \perp \overline{AD}$ faz o $\triangle OMA$ ser retângulo e isósceles, conclui-se que: a medida do apótema é a metade da do lado do quadrado, isto é:

$$a_4 = \frac{l_4}{2} = \frac{r\sqrt{2}}{2}$$

Logo, para o *quadrado inscrito* temos: $\boxed{l_4 = r\sqrt{2}}$ e $\boxed{a_4 = \dfrac{r\sqrt{2}}{2}}$

NOTA: O índice 4, que figura em l_4 e a_4, indica tratar-se das medidas do lado e do apótema do polígono regular quadrado, nada tendo a ver com as operações indicadas.



Observação: Traçando-se outros dois diâmetros ($\overline{MN}$ e $\overline{PQ}$ na figura) perpendiculares entre si e que bisseccionem os ângulos retos formados por $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$, a circunferência ficará dividida em *oito* arcos congruentes; unindo-se êsses pontos de divisão, obtém-se o *octógono regular inscrito*.

Bisseccionando-se novamente os ângulos internos com novos diâmetros perpendiculares entre si, pode-se construir polígonos regulares de:

16, 32, 64, ..., 2^n $(n > 1)$ lados, respectivamente.

TESTE DE ATENÇÃO — Grupo 80

1. Indicando por l_4 a medida do lado do *quadrado circunscrito* à $C(O, r)$, "deduza" que $l_4 = 2r$ (é fácil...).
2. Um quadrado está inscrito numa circunferência de raio igual a 6cm. Qual a medida de seu lado? E a de seu apótema?

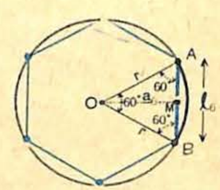
   (*Modêlo:* Aplicando as "fórmulas": $l_4 = r\sqrt{2}$ e $a_4 = \dfrac{r\sqrt{2}}{2}$, temos: $l_4 = 6\sqrt{2}$ e $a_4 = 3\sqrt{2}$, e substituindo $\sqrt{2}$ por 1,41, isto é, tomando $\sqrt{2}$ com aproximação de 0,01 por falta:

   $$l_4 = 6 \times 1{,}41 = 8{,}46 \quad \text{e} \quad a_4 = 8{,}46 : 2 = 4{,}23$$

   Logo, nesse quadrado o lado mede 8,46m e o apótema, 4,23m.
3. Qual o perímetro (com aproximação de 0,01) do quadrado inscrito do exercício anterior?
4. Se $l_4 = 3\sqrt{2}$ é a medida do lado de um quadrado inscrito numa circunferência, calcule, em cm, os valôres de r e de l_4.

24. *Construção do hexágono regular; cálculo das medidas do lado (l_6) e do apótema (a_6) do hexágono regular inscrito*

Para inscrever um hexágono regular na circunferência $C(O, r)$, é preciso dividi-la em *seis arcos congruentes*. Como o ângulo cêntrico do hexágono regular vale: $w_6 = \dfrac{360^\circ}{6} = 60^\circ$, seja $\frown{AB}$ o arco, de medida 60°, cuja corda $\overline{AB}$ (de medida l_6) é um dos lados dêsse hexágono.



No $\triangle AOB$, que é isósceles (por quê?), a soma dos outros dois ângulos ($O\hat{A}B$ e $O\hat{B}A$) é igual a 120° e, portanto, cada um dêles mede 60°. Então, o $\triangle AOB$ é *eqüiângulo* e também *eqüilátero*, isto é: $\overline{OA} \simeq \overline{OB} \simeq \overline{AB}$. Sendo: $OA = OB = r$, segue-se que $AB = r$, ou seja, $l_6 = r$.

Logo, a *medida do lado do hexágono regular inscrito* na $C(O, r)$ é a *própria medida do raio* da circunferência:

$$\boxed{l_6 = r}$$

A medida do apótema (a_6) é obtida aplicando-se o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo OMA, onde:

$$(OA)^2 = (OM)^2 + (MA)^2 \text{ ou } r^2 = a_6^2 + \left(\frac{l_6}{2}\right)^2$$

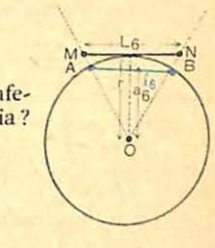
Como $l_6 = r$, temos: $r^2 = a_6^2 + \left(\dfrac{r}{2}\right)^2 \Longleftrightarrow r^2 = a_6^2 = \dfrac{r^2}{4}$

e, portanto: $a_6^2 = r^2 - \dfrac{r^2}{4} = \dfrac{3r^2}{4} \Longrightarrow a_6 = \dfrac{\sqrt{3r^2}}{2} \Longleftrightarrow \boxed{a_6 = \dfrac{r\sqrt{3}}{2}}$

Observação: Dividida a circunferência em seis arcos congruentes e traçando-se os diâmetros bissetores dos ângulos formados pelos diâmetros $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$, ..., a circunferência resultará dividida em *doze* arcos congruentes.

Anàlogamente, dividindo-se a circunferência em 24, 48, 96, ..., 3×2^n $(n \geq 1)$ arcos congruentes e unindo-se os pontos de divisão, obtêm-se os respectivos polígonos regulares inscritos.

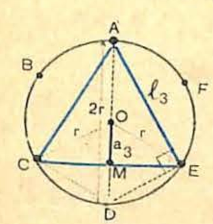
TESTE DE ATENÇÃO — Grupo 81



1. Se na $C(O, 5)$ $r = 5$, então $l_6 = \ldots$ (medida em cm)
2. Se o perímetro de um hexágono regular inscrito, numa certa circunferência, é igual a 42cm, quanto mede o diâmetro dessa circunferência?
3. Indicando por L_6 o lado do hexágono regular circunscrito à $C(O, r)$ e valendo-se da semelhança dos triângulos: AOB e MON, "deduza" que:

   $$L_6 = \frac{r^2}{a_6}$$

25. *Construção do triângulo eqüilátero; cálculo das medidas do lado (l_3) e do apótema (a_3) do triângulo eqüilátero inscrito*



Dividindo-se a $C(O, r)$ em seis arcos congruentes ($\frown{AB}$, $\frown{BC}$, $\frown{CD}$, $\frown{DE}$, $\frown{EF}$ e $\frown{FA}$ na figura) e unindo-se, alternadamente, os pontos de divisão, obtém-se um *triângulo eqüilátero* (ACE na figura).

O cálculo de l_3 é feito traçando-se o diâmetro $\overline{AD}$ e considerando-se o $\triangle AED$, que é *retângulo*, porque está inscrito numa semi-circunferência. Temos:

$$(AD)^2 = (l_3)^2 + (ED)^2 \quad \text{(Pitágoras)}$$

Como: $AD = 2r$ e $DE = r$ (lembre-se de que $\overline{DE}$ é lado do hexágono regular!), vem:

$$(2r)^2 = l_3^2 + r^2 \iff 4r^2 = l_3^2 + r^2$$

Logo: $l_3^2 = 4r^2 - r^2 \iff l_3^2 = 3r^2 \implies l_3 = \sqrt{3r^2} \iff l_3 = r\sqrt{3}$

Portanto: $\boxed{l_3 = r\sqrt{3}}$

O cálculo da medida do apótema (a_3) é simples: o quadrilátero $OCDE$ é um losango (todos os lados medem r) e, como as diagonais devem interceptar-se ao meio, segue-se que:

$$a_3 = \frac{1}{2}\, OD = \frac{1}{2}\, r = \frac{r}{2} \qquad \text{Logo:} \quad \boxed{a_3 = \frac{r}{2}}$$

Observação: Sendo $l_6 = r$ e $a_3 = \frac{r}{2}$, pode-se dizer que: o *apótema do triângulo eqüilátero mede a metade da medida do lado do hexágono regular inscrito na* C(O, r).

TESTE DE ATENÇÃO — Grupo 82

1. Na C(O, 6) estão inscritos um *quadrado*, um *hexágono regular* e um *triângulo eqüilátero*. Usando o cm como unidade de medida, calcule, com aproximação de 0,01, os valôres de:

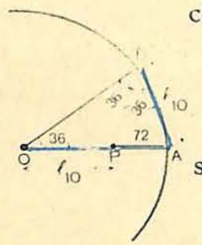
   l_4, a_6, l_3 e d_4 (diagonal do quadrado)

2. Se o $a_3 = 5$, então o raio da circunferência em que está inscrito o triângulo eqüilátero mede............(unidade dm).

3. Indicando por l_3 a medida do lado do triângulo eqüilátero circunscrito à $C(O, r)$ e usando a semelhança de triângulos, "deduza" que: $l_3 = \dfrac{r^2\sqrt{3}}{a_3}$.

26. Construção do decágono regular; cálculo da medida do lado (l_{10}) do decágono regular inscrito

Seja $\overline{AB}$ o lado do decágono regular inscrito na $C(O, r)$. O ângulo cêntrico $A\hat{O}B$ vale: $w_{10} = \dfrac{360°}{10} = 36°$ e, portanto:



$$m(O\hat{A}B) + m(A\hat{B}O) = 180° - 36° = 144°$$

Como os ângulos $O\hat{A}B$ e $A\hat{B}O$ são congruentes, por ser o $\triangle AOB$ isósceles ($OA = OB = r$), tem-se:

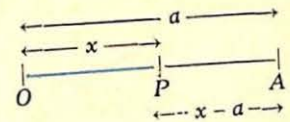
$$m(O\hat{A}B) = m(A\hat{B}O) = 72°$$

Traçada a bissetriz BP do ângulo $\hat{B}$, obtemos:

$$\left.\begin{array}{l} \triangle APB, \text{ isósceles} \iff AB = PB = l_{10} \\ \triangle OPB, \text{ isósceles} \iff OP = PB = l_{10} \end{array}\right\} \implies \boxed{OP = l_{10}}$$

Observação: Diz-se que se efetua uma *divisão áurea* de um segmento $\overline{OA}$, por meio de um ponto P, quando êsse ponto divide o segmento $\overline{OA}$ em duas partes desiguais, tais que a maior delas é *média proporcional* entre o segmento todo e a menor.

O segmento maior $\overline{OP}$, resultante da divisão, é denominado *segmento áureo* do segmento $\overline{OA}$.



Logo: [$\overline{OP}$, segmento *áureo* de $\overline{OA}$] $\iff$ [$\overline{OP}$ *é média proporcional* entre $\overline{OA}$ e $\overline{PA}$] $\iff$

$$\iff \left[\frac{OP}{OA} = \frac{PA}{OP}\right] \iff \left[(OP)^2 = OA \,.\, PA\right]$$

Qual é a relação, no estudo que está sendo feito, entre o lado do *decágono* e o *segmento áureo* de um segmento? É a seguinte:

O segmento $\overline{OP}$, que representa o *lado do decágono*, é o *segmento áureo do raio* ($OA = r$), onde se acha inscrito o decágono.

De fato, pelo T.4 (sôbre a bissetriz do ângulo interno de um triângulo) tem-se, no $\triangle OAB$:

$$\frac{OP}{PA} = \frac{OB}{AB} \quad \text{e, como:} \quad \begin{cases} OP = PB = AB \\ OB = OA = r \end{cases}$$

vem:

$$\frac{OP}{PA} = \frac{OA}{OP} \iff (OP)^2 = OA \,.\, PA$$

ou seja, o segmento $\overline{OP}$, cuja medida é l_{10}, é o *segmento áureo* do *raio r*.

O valor de l_{10} é tirado de:

$$(OP)^2 = OA \,.\, PA$$

ou $$l_{10}^2 = r(r - l_{10}) \iff l_{10}^2 + r \,.\, l_{10} - r^2 = 0$$

cujo $$V = \left\{\frac{-r}{2}(\sqrt{5} - 1),\ \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)\right\}$$

Rejeitando-se a raiz negativa, temos:

$$\boxed{l_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)}$$

RESUMO

As medidas do *lado* e *apótema* dos polígonos regulares mais usuais: QUADRADO, HEXÁGONO e TRIÂNGULO EQÜILÁTERO são, respectivamente:

quadrado $l_4 = r\sqrt{2}$, $a_4 = \dfrac{r\sqrt{2}}{2}$

hexágono regular $l_6 = r$, $a_6 = \dfrac{r\sqrt{3}}{2}$

triângulo eqüilátero $l_3 = r\sqrt{3}$, $a_3 = \dfrac{r}{2}$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 83

1. Preencha os claros do seguinte quadro:

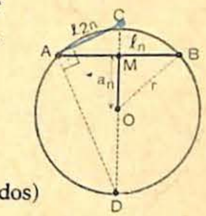
$C(O, r)$	l_4	a_4	l_6	a_6	l_3	a_3
$C(O, 5)$	...	...	...	...	...	...
$C(O, \ldots)$	...	$\sqrt{2}$	...	...	...	...
$C(O, \ldots)$	...	...	$\sqrt{3}$	...	...	...
$C(O, \ldots)$	...	...	...	...	...	4

2. Calcule o perímetro de um quadrado inscrito numa circunferência, onde também está inscrito um hexágono regular cujo lado mede 5cm (aprox. 0,01).
3. O perímetro de um hexágono regular inscrito é igual a 35dm. Calcule a medida do lado do triângulo eqüilátero inscrito na mesma circunferência (aprox. 0,01).
4. Calcule a medida do apótema do hexágono regular inscrito numa circunferência cujo diâmetro mede 16cm (aprox. 0,01)
5. Um quadrado tem o apótema medindo 5dm. Calcule o perímetro dêsse quadrado e o diâmetro da circunferência que o circunscreve (aprox. 0,01).
6. O lado de um quadrado circunscrito a uma circunferência mede 10dm. Calcule o perímetro do hexágono regular inscrito na mesma circunferência.
7. Um triângulo eqüilátero está inscrito numa circunferência de raio igual a 14cm. Determine as medidas da altura e do apótema dêsse triângulo.
8. Um triângulo eqüilátero tem 24cm de perímetro. Calcule as medidas do lado, do apótema e do raio da circunferência que o circunscreve.
9. Unindo os pontos médios consecutivos dos lados de um quadrado inscrito numa circunferência de 4m de raio, obtém-se um nôvo quadrado. Determine o perímetro dêsse nôvo quadrado.

10. A soma dos lados dos quadrados inscrito e circunstrito a uma mesma circunferência é 17,05m. Quanto mede o raio dessa circunferência?
11. A soma das medidas da diagonal e do lado de um mesmo quadrado é igual a $\sqrt{2}$cm. Quais as medidas da diagonal e do lado dêsse quadrado?
12. Quanto medem as diagonais de um hexágono regular de 24dm de perímetro?
13. O lado de um polígono regular, inscrito numa circunferência de 12cm de raio, mede 8cm. Calcule a medida do lado de um polígono regular de mesmo número de lados (portanto semelhante) inscrito numa circunferência de 36cm de raio.
14. O lado de um hexágono regular mede 2m. Calcule (com aproximação de 0,01) a diagonal de um quadrado e o lado do decágono regular, ambos inscritos na circunferência em que está inscrito o hexágono regular.
15. Uma circunferência tem 1m de raio. Calcule (com aproximação de 0,01) os perímetros dos seguintes polígonos regulares nela inscritos: triângulo, quadrado, hexágono e decágono.

EXERCÍCIOS EXPLORATÓRIOS — GRUPO 84

1. *Cálculo da medida do lado do polígono regular convexo de* 2n *lados* (l_{2n}). Conhecida a medida $AB = l_n$ do lado $\overline{AB}$ de um polígono regular convexo de n lados, inscrito na $C(O, r)$, queremos calcular a medida $AC = l_{2n}$ do lado $\overline{AC}$ do polígono regular convexo inscrito, de número *duplo de lados*.
No triângulo retângulo CAD:



$$(AC)^2 = CD \cdot CM \quad \text{(por quê?)}$$

$$\text{ou} \quad (l_{2n})^2 = 2r \cdot (r - OM)$$

Como: $OM = a_n$ (medida do apótema do polígono de n lados)

vem: $$(l_{2n})^2 = 2r \cdot (r - a_n) \qquad (1)$$

Sendo: $$a_n^2 = (OB)^2 - (MB)^2 \ (\triangle \text{ retângulo } OMB)$$

$$\text{ou} \quad a_n^2 = r^2 - \left(\frac{l_n}{2}\right)^2 \Longrightarrow a_n = \sqrt{r^2 - \frac{l_n^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - l_n^2}$$

Substituindo êsse valor de a_n na (1), encontramos:

$$l_{2n}^2 = 2r\left(r - \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - l_n^2}\right) = 2r^2 - r \cdot \sqrt{4r^2 - l_n^2}$$

$$\text{ou} \quad \boxed{l_{2n} = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - l_n^2}}}$$

2. *Prática:* Calcular a medida do lado do *octógono* (l_8) regular inscrito na $C(O, r)$.
Você já sabe que a medida l_8 vai ser expressa em função da medida l_4, da seguinte maneira:

$$l_8 = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - l_4^2}} \ \text{e, como } l_4 = r\sqrt{2}, \text{ vem:}$$

$$l_8 = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - 2r^2}} = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{2r^2}} = \sqrt{2r^2 - r^2\sqrt{2}}$$

Logo: $$\boxed{l_8 = \sqrt{2r^2 - r^2\sqrt{2}}}$$

3. Calcule, como exercício, a *medida do lado do dodecágono regular* (l_{12}) inscrito na $C(O, r)$, usando o $l_6 = r$.

27. *Medida-comprimento da circunferência*

Desde a 1.ª série ginasial, você tem empregado a "fórmula":

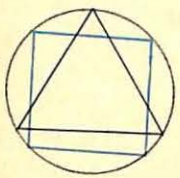
$$C = 2 \cdot \pi \cdot r$$

para calcular o *comprimento* ou *medida* de uma *circunferência*, quando eram conhecidos a medida do raio (r) e o número irracional $\pi = 3{,}1415\ldots$ Lembra-se?

Como surgiu essa "fórmula"? Por que é sempre verdadeira para qualquer circunferência?

O estudo dos polígonos regulares, inscritos e circunscritos em uma mesma circunferência, facilitará a resposta a essas perguntas.

Se você **inscrever** *dois polígonos regulares*, de diferentes número de lados, na $C(O, r)$ (na figura $r = 2$) e calcular seus *perímetros*, encontrará que o polígono de **maior número de lados** possui o **maior perímetro.** Assim, por exemplo, se p_3 e p_4 representam respectivamente os perímetros de um triângulo eqüilátero e de um quadrado inscritos na $C(O, 2)$, temos:



$$p_3 < p_4.$$

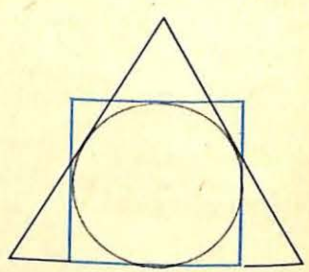
Se p_n ($n \geqslant 3$) é o perímetro de um polígono regular de n lados inscrito na $C(O, r)$, então:

$$p_3 < p_4 < p_5 < p_6 < \ldots < p_k < \ldots$$

Agora, se você **circunscrever** dois polígonos regulares, de diferentes número de lados, na $C(O, r)$ e calcular seus *perímetros*, encontrará que o polígono de **maior número de lados** possui o **menor perímetro.**

Nesse caso, se p'_3 e p'_4 representam respectivamente os perímetros do triângulo eqüilátero e do quadrado circunscritos na $C(O, 2)$, temos:

$$p'_3 > p'_4$$



Se p'_n ($n \geqslant 3$) é o perímetro de um polígono regular de n lados circunscrito na $C(O, r)$, então:

$$p'_3 > p'_4 > p'_5 > p'_6 > \ldots\ldots > p'_k > \ldots$$

Dêsse modo, para *cada polígono regular de* n *lados*, tem-se:

$$p_n < p'_n \text{ (ex.: } p_3\, p'_3,\ p_4\, p'_4,\ \ldots)$$

e, apesar de:

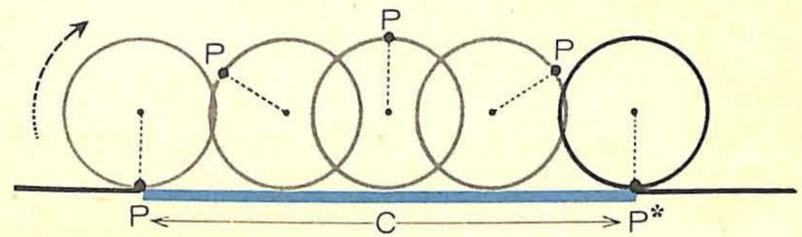
1.º) os números da seqüência: p_3, p_4, p_5, ... *crescerem* cada vez mais, *jamais ultrapassarão* um certo *número C;*

2.º) os números da seqüência p'_3, p'_4, p'_5, ... *decrescerem* cada vez mais, *sempre ultrapassam* um certo *número C'.*

Por outro lado, prova-se que $C = C'$, isto é, há um LIMITE COMUM para as duas seqüências de perímetros dos polígonos regulares inscritos e circunscritos respectivamente, e que se denomina MEDIDA-COMPRIMENTO da circunferência.

28. *Razão da medida-comprimento* (C) *da circunferência para a medida* (2r) *de seu diâmetro*

Essa *razão* é um número famosíssimo que, desde a 1.ª série ginasial, o acompanha. Intuitivamente:



considerando-se uma roda qualquer sôbre um certo suporte, cujo ponto de contato é o ponto P, e fazendo-a rodar até que P volte novamente a ser ponto de contato com o suporte, ficará determinado um *segmento* ($\overline{PP^*}$, na figura), cuja medida é o número C (*medida-comprimento* da circunferência).

Assim, por exemplo, se numa certa unidade o raio da roda é 2, então a medida do segmento, com aproximação de 0,01, é o número 12,56 (verifique você mesmo êsse resultado). A *razão* entre essa medida e o diâmetro da roda (4) é o número:

$$\frac{12{,}56}{4} = 3{,}14$$

Se o raio fôsse 3, então seria encontrado um segmento cuja medida se aproximaria de 18,84, e a *razão* entre ela e o novo diâmetro (6) é ainda:

$$\frac{18{,}84}{6} = 3{,}14$$

E se você considerasse a *razão* entre a medida conhecida da circunferência terrestre (aproximadamente 40.003km) e a medida conhecida do diâmetro da Terra (cêrca de 12.470km)? O seu valor seria ainda:

$$\frac{40.003}{12.470} = 3,14\ldots$$

Então: é sempre *constante* (3,14 . . .) a RAZÃO entre a *medida-comprimento* (C) da *circunferência* e a *medida* (2r) de seu *diâmetro*. Tal constante é o famoso número "pi", indicado pela letra grega π (letra inicial da palavra περιφέρεια, que equivale a *periferia*), sendo consideradas *verdadeiras* as seguintes sentenças:

$$\boxed{\frac{C}{2r} = \pi} \iff \boxed{C = 2r\pi} \iff \boxed{C = 2\pi r}$$

Como só possuímos valôres aproximados de π (3,1415. . .), só obtemos valôres aproximados de C. Na prática, emprega-se:

$\pi = 3,14$ (aproximação de 0,01 por falta)
$\pi = 3,1416$ (aproximação de 0,000.1 por excesso)

Exemplos:

1. Calcular, com aproximação de 0,01 por falta, a *medida-comprimento* da circunferência cujo raio mede 4dm.

   Temos: $C = 2 \cdot \pi \cdot r$ ou $C = 2 \times 3,14 \times 4 = 25,12$

   Logo, a *medida-comprimento* da circunferência é 25,12dm.

2. Quanto mede, em cm, o raio de uma circunferência cuja *medida-comprimento* é 125,60cm? ($\pi = 3,14$)

   Temos: $C = 2 \cdot \pi \cdot r \iff r = \frac{C}{2} = \frac{125,60}{6,28} = 20$

   Portanto, o *raio* mede 20cm.

29. *Medida-comprimento de um arco de circunferência*

Conhecida a *medida-comprimento* C da circunferência e dada a *proporcionalidade*(*) entre a medida-comprimento l dos arcos e respectivas medidas n, em graus, temos a seguinte proporção:

$$\frac{C}{l} = \frac{360}{n}$$

*) É possível demonstrar tal proporcionalidade; para o atual curso a demonstração é muito difícil

$$\text{ou} \quad \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{l} = \frac{360}{n} \iff \begin{cases} l = \dfrac{2\pi rn}{360} = \dfrac{\pi rn}{180} \\[2mm] n = \dfrac{360l}{2\pi r} = \dfrac{180l}{\pi r} \end{cases}$$

fórmulas que permitem calcular, respectivamente, a *medida-comprimento* e a *medida-grau* de um arco. *Exemplos:*

1. Calcular a *medida-comprimento* do arco de 60° que pertence à circunferência de raio igual a 5cm.

   Temos: $l = \frac{\pi \cdot r \cdot n}{180}$ ou $l = \frac{\pi \times 6 \times 60}{180} = 2\pi$

   Ou, também: $l = 2 \times 3,14 = 6,28$

   Logo, a *medida-comprimento* do arco de 60° na $C(O, 6)$ é 6,28cm.

2. Calcular a *medida-grau* de um arco cuja medida-comprimento é 3cm e que pertence a uma circunferência de raio igual a 12cm.

   Temos: $l = \frac{\pi \cdot r \cdot n}{180} \iff n = \frac{180 \cdot l}{\pi \cdot r}$

   ou $n = \frac{180 \times 3}{3,14 \times 12} = 14,33$

   ou $14,33° = 14° \, 19' \, 48''$ é a medida-grau do arco.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 85

(Use $\pi = 3,14$)

1. Calcule a *medida-comprimento* das seguintes circunferências:
   1.ª) raio mede 5dm   2.ª) diâmetro mede 1m   3.ª) raio mede 10cm
2. Qual o comprimento de um meridiano da Terra, sabendo-se que o raio terrestre é aproximadamente igual a 6.378km?
3. Quanto mede o raio de uma circunferência cujo comprimento é de 18,84m?
4. Quanto mede a diagonal de um quadrado inscrito numa circunferência de 31,40m de comprimento?
5. O apótema de um triângulo eqüilátero mede 5cm. Calcule o comprimento da circunferência que o circunscreve.
6. Quantas voltas deve dar uma roda de 0,80m de diâmetro para percorrer 2.512m?
7. As rodas de um automóvel têm 0,36m de raio. Quantas voltas dá cada roda, enquanto o carro percorre 4.521,6m?
8. Determine a *medida-comprimento* de um arco de 45° nas seguintes circunferências:
   1.ª) raio mede 15cm   2.ª) diâmetro mede 20cm   3.ª) raio mede 1m

9. Determine a *medida-grau* de um arco de 10cm de medida-comprimento, pertencente a uma circunferência de 18cm de raio.

10. Qual a medida-comprimento de um arco de $45° 30'$, pertencente a uma circunferência de 1m de raio?

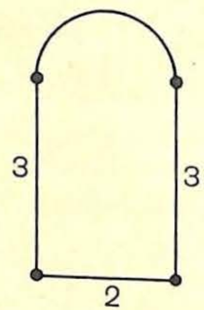
11. Quanto mede o raio de uma circunferência na qual um arco de 30° tem 6,28m de comprimento?

12. Calcule o número de graus de um arco cujo comprimento é igual ao dôbro do raio.

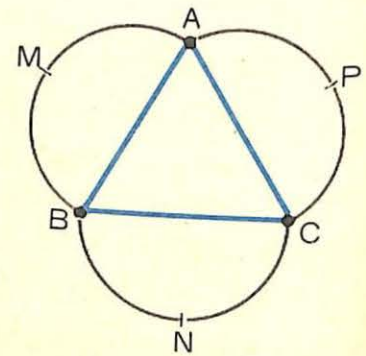
TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 86

(Use $\pi = 3{,}14$)

1. Calcule, em *m*, o perímetro do contôrno da seguinte porta:



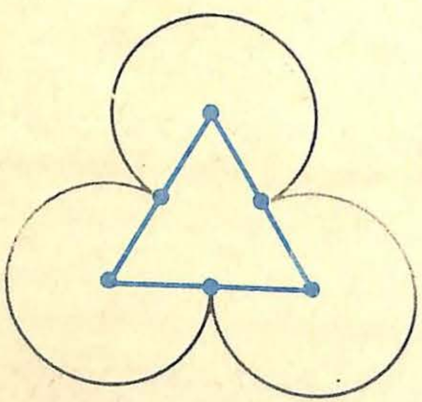
2. O $\triangle ABC$ é eqüilátero, medindo cada lado 2cm.



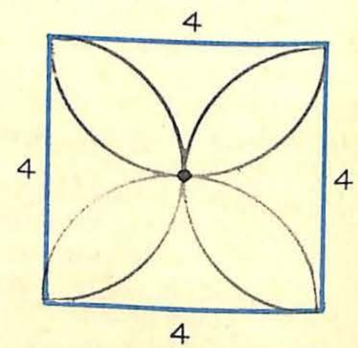
Calcule a medida-comprimento de:

$$\widehat{AMB} \cup \widehat{BNC} \cup \widehat{CPA}$$

3. Se cada lado do $\triangle$ eqüilátero ABC mede 2cm, então o perímetro do trevo de "3 fôlhas":



4. Calcule, em dm, o perímetro do trevo de "4 fôlhas":



Cálculo de π

30. *Métodos elementares*

Do fato de π ser dado pela razão:

$$\pi = \frac{C}{2r}$$

pode-se fixar arbitràriamente r ou C e obter, assim, dois métodos elementares para o seu cálculo:

1.°) *Método dos perímetros ou de Arquimedes*

2.°) *Método dos isoperímetros ou de Schwab*

Pelo **Método dos perímetros** é dado o valor de r e calcula-se C. Assim, por exemplo, se $r = \frac{1}{2}$, obtém-se:

$$\pi = \frac{C}{2 \times \frac{1}{2}} = \frac{C}{1} = C$$

Então, sendo π dado pela medida-comprimento C da circunferência, encontramos valôres aproximados de π por falta ou por excesso, calculando os *perímetros* p dos polígonos regulares inscritos e os perímetros p' dos polígonos regulares circunscritos à circunferência de raio $r = \frac{1}{2}$.

Como em todos os casos: $p < C < p'$, também $p < \pi < p'$ e obtém-se maior aproximação tomando $\pi = \frac{p + p'}{2}$.

Assim, por exemplo, trabalhando com o *quadrado*, onde $l_4 = r\sqrt{2}$ e $L_4 = 2r$, temos:

$$\left.\begin{array}{l} p_4 = \frac{1}{2}\sqrt{2}.4 = 2\sqrt{2} = 2{,}828\ldots \\ \\ p'_4 = 2.\frac{1}{2}.4 = 4 \end{array}\right\} \Longrightarrow \pi = \frac{2{,}828\ldots + 4}{2} \sim 3{,}41$$

Quanto maior fôr o número de lados dos polígonos regulares que se inscrevem e circunscrevem, tanto maior será a aproximação do valor de π. Foi com êsse processo que Arquimedes (famoso matemático grego da Antiguidade), partindo do hexágono regular (l_6 e L_6) e duplicando sucessivamente o número de lados, chegou às expressões que dão os perímetros dos polígonos de 96 lados (l_{96} e L_{96}), encontrando para π o valor compreendido entre $3 + \frac{10}{71}$ e $3 + \frac{10}{70}$, isto é:

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{10}{70}$$

O segundo valor: $3 + \frac{10}{70} = \frac{22}{7}$, por excesso, é exato até os centésimos. Que maravilha de resultado para a época!

Pelo **Método dos isoperímetros**, procura-se determinar o raio e o apótema de um polígono qualquer, cujo perímetro tenha uma medida fixada e a seguir calcula-se, sucessivamente, os raios e os apótemas de polígonos, cada vez com um número duplo de lados, porém de *igual perímetro* que o primeiro.

O *limite-comum* dessas duas seqüências de raios e apótemas é o raio da circunferência de "mesmo perímetro" de tais polígonos.

LEMBRETE AMIGO

As vinte primeiras "casas" de π são:

3,141.592.653.589.793.238.46 . . .

Na prática, são empregados com freqüência nos problemas, os valôres aproximados:

3,14 (por falta) ou 3,141.6 (por excesso)

Os "calculadores" de π estiveram por longo tempo com esperança de obterem um seu valor exato (!) depois de um certo número de algarismos. Porém, você já sabe que isso é impossível, pois π é um *número irracional* e, como tal, não possui representação decimal *nem exata nem periódica*.

O "campeão" do cálculo de π com maior aproximação (sem processo mecânico) foi o matemático Shawks, que o exprimiu com 707 casas decimais!

A partir de 1950, em plena era eletrônica, os computadores eletrônicos dos diversos Centros de Matemática dos E. U. A. e da Europa começaram a calcular π com milhares de "casas" de aproximação.

Hoje em dia, calcula-se π com aproximações fantásticas e em apenas alguns segundos!

Curiosidade

Você quer guardar o valor de π até a oitava casa? Então lembre-se desta sentença:

COM O ZERO O LENTE REPROVARÁ OS ALUNOS . . .
3 1 4 1 5 9 2 6

ou esta, mais na moda. . .:

COM O JÚRI A VOTAR, "DISPARADA" JÁ GANHOU . . .
3 1 4 1 5 9 2 6

NOTA: "Disparada", juntamente com "A banda", foram as músicas classificadas em primeiro lugar no *1.º Festival de Música Popular Brasileira*, realizado em São Paulo em outubro de 1966.

TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 87

Calcule um valor aproximado de π, pelo *Método dos perímetros*, trabalhando com:

1.º) hexágonos regulares e 2.º) decágonos regulares inscritos e circunscritos, respectivamente, a uma circunferência de raio $\frac{1}{2}$, em relação a uma unidade de medida.

Qui j'aime a faire apprendre
3 1 4 1 5 9
un nombre utile aux ~~sag~~
2 6 5 3 5
~~sag~~ sages: entendez: Archimède
5 8 9
artiste ingenieur qui de ton
7 9 3 2 3
jugement peut briser la
8 4 6 2
valeur
6

apêndice

Números Complexos

Área de regiões planas

Mapas Topológicos

Números complexos

1. *Nôvo ente matemático: número imaginário*

Você já sabe que nenhum dos números até agora estudados satisfaz a uma equação do tipo:

$$\boxed{x^2 + 1 = 0} \text{ no } U = \mathbb{R}$$

De fato:

$$x^2 + 1 = 0 \iff x^2 = {}^-1 \iff x = \sqrt{{}^-1} \text{ ou } x = {}^-\sqrt{{}^-1}$$

Como: $\sqrt{{}^-1} \notin \mathbb{R}$ e ${}^-\sqrt{{}^-1} \notin \mathbb{R}$ (lembre-se de que não é possível, em $\mathbb{R}$, extrair a raiz quadrada de um número negativo), conclui-se que o Conjunto-Verdade dessa equação é *vazio,* ou seja:

$$V = \emptyset$$

Por esta "insuficiência" do conjunto $\mathbb{R}$ em resolver equações do tipo:

$$x^2 + 1 = 0$$

ampliou-se o conceito de número, construindo-se novos entes — denominados **números imaginários** — da seguinte maneira: criou-se um número i, chamado *unidade imaginária,* que elevado ao quadrado dá ${}^-1$. Então:

$$i = \sqrt{{}^-1} \text{ ou } i^2 = {}^-1$$

Agora, para a extração da raiz quadrada de qualquer número negativo ($\sqrt{{}^-9}$, por exemplo), procede-se assim:

$$\sqrt{{}^-9} = \sqrt{9} \times \sqrt{{}^-1}$$

$$\text{ou } \sqrt{{}^-9} = \underset{\downarrow}{3} \times \underset{\downarrow}{i} = 3i$$

$3i$ é um nôvo número para você. É um **número imaginário.**

Dessa forma, pode-se escrever *quantos números imaginários se quiser,* pois qualquer *raiz quadrada de um número negativo pode ser expressa em* i. Exemplos:

$$\sqrt{{}^-25} = \sqrt{25} \times \sqrt{{}^-1} = 5i \qquad \frac{{}^-1}{3}\sqrt{{}^-1} = \frac{{}^-1}{3}i$$

$$\sqrt{{}^-2} = \sqrt{2} \times \sqrt{{}^-1} = \sqrt{2}\,.\,i \qquad \sqrt{{}^-4} = \sqrt{4} \times \sqrt{{}^-1} = 2i$$

Outros exemplos de *números imaginários:* ^-3i, ^-2i, ^-i, $\frac{1}{2}i$, $0{,}04i$, ...

Logo, todo número da forma bi é um **número imaginário**(*), onde b é um número real e i é a unidade imàginária.

O número real b é denominado *coeficiente* do imaginário. Assim, por exemplo, 3 é o coeficiente do número imaginário $3i$.

LEMBRETE AMIGO

1 é a *unidade dos números reais*

i é a *unidade imaginária*

e, não se esqueça: $i = \sqrt{-1}$ ou $i^2 = {^-1}$

2. *Número complexo. Conjunto* $\mathbb{C}$

À primeira vista pode parecer que, construído o número imaginário bi, todos os problemas que envolvessem raiz quadrada de números negativos ficariam resolvidos. É fácil, porém, mostrar que isso não ocorre. Basta querer resolver, por exemplo, a equação:

$$x^2 - 4x + 13 = 0$$

onde:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-52}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2} \iff x = \frac{4+6i}{2} \text{ ou } x = \frac{4-6i}{2} \iff$$

$$\iff x = 2 + 3i \text{ ou } x = 2 - 3i$$

Que números são: $2 + 3i$ e $2 - 3i$?

Para responder a essa pergunta, os matemáticos criaram o **número complexo.**

Chama-se *número complexo* a todo número da forma:

$$\boxed{a + bi}$$

onde a e b são números reais e i é a unidade imaginária, já conhecida.

a também é chamada *parte real*
bi também é chamada *parte imaginária* $\Big\rangle$ do *número complexo* $\boldsymbol{a + bi}$

(*) Também chamado *imaginário puro.*

Exemplos:

$$\left.\begin{array}{l} 3 + 2i \\ \frac{1}{2} - 7i \\ 0 + 4i \\ \sqrt{2} + 0i \end{array}\right\} \text{ são } \textit{números complexos}$$

Dois números complexos são **iguais** quando possuem a *mesma parte real* e a *mesma parte imaginária*. Assim, por exemplo:

$$a + bi = c + di \iff a = c \wedge b = d$$

$$a + 3i = 2 - bi \iff a = 2 \wedge b = {^-3}$$

Observações:

1.ª) Se $a = 0$ e $b \neq 0$, então o número complexo é um *imaginário* (puro).

Exemplo: $0 + 3i = 3i$ (imaginário)
$0 - 2i = {^-2i}$ (imaginário)

2.ª) Se $a \neq 0$ e $b = 0$, então o número complexo é um *real*.

Exemplo: $2 + 0i = 2$ (real)
$\frac{-1}{3} + 0i = \frac{-1}{3}$ (real)

3.ª) Se $a = 0$ e $b = 0$, então o número complexo diz-se *nulo*.

Exemplo: $0 + 0i$

4.ª) Os números complexos: $a + bi$ e $a - bi$, que diferem pelos sinais qualificativos de b, denominam-se *conjugados*.

Exemplo: $2 + 5i$ e $2 - 5i$
$^-7 + 8i$ e $^-7 - 8i$

Sendo $i^2 = {^-1}$, então
$$i^3 = i^2.i = {^-1}.i = {^-i}$$
$$i^4 = i^2.i^2 = {^-1}.{^-1} = 1$$
$$i^5 = i^4.i = 1.i = i$$

Acrescentando-se que $i^0 = 1$ e $i^1 = i$, chega-se à conclusão de que as *potências sucessivas de i* reproduzem-se, periòdicamente, de 4 em 4, assumindo sòmente os valôres: 1, i, $^-1$ e ^-i. Assim, por exemplo:

$$i^6 = i^4.i^2 = 1.{^-1} = {^-1}$$
$$i^7 = i^4.i^3 = 1.{^-i} = {^-i}$$
$$i^9 = i^{2\times4}.i^1 = 1.i = i$$

O conjunto de *todos os números complexos* constitui o conjunto $\mathbb{C}$, do qual o conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$) é um subconjunto.

Logo:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

n.os naturais — n.os inteiros — n.os racionais — n.os reais — n.os complexos

LEMBRETE AMIGO

Dar o *número complexo* $a + bi$, equivale a dar **um par ordenado de números reais** (a, b), onde a representa a parte real e b o coeficiente da parte imaginária.

TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 88

1. Complete as seguintes sentenças com números imaginários:

1.ª) $\sqrt{-16} = \ldots$ 2.ª) $\sqrt{-2} = \ldots$ 3.ª) $-\sqrt{-1} = \ldots$ 4.ª) $\sqrt{-13} = \ldots$

5.ª) $\frac{1}{2}\sqrt{-4} = \ldots$ 6.ª) $\sqrt{-8} = \ldots$ 7.ª) $\sqrt{-1} = \ldots$ 8.ª) $0{,}9\sqrt{-1} = \ldots$

2. Indique a parte real e o coeficiente do imaginário de cada um dos seguintes números complexos:

1.º) $2 - 3i$ 2.º) $\frac{-1}{5} + \sqrt{2}i$ 3.º) $0 + 8i$ 4.º) $3\sqrt{5} - 0i$ 5.º) $a + 0{,}1i$

3. Complete as seguintes sentenças:

1.ª) $a + bi = 3 + 8i \iff a = \ldots \wedge b = \ldots$

2.ª) $0 + 2i = x + yi \iff x = \ldots \wedge y = \ldots$

3.ª) $m + ni = 3i \iff m = \ldots \wedge n = \ldots$

4.ª) $c + di = \frac{-2}{5} \iff c = \ldots \wedge d = \ldots$

4. Complete as seguintes potências de i:

1.ª) $i^8 = \ldots$ 2.ª) $i^{10} = \ldots$ 3.ª) $i^{11} = \ldots$ 4.ª) $i^{12} = \ldots$

5. Complete as seguintes sentenças:

1.ª) O *conjugado* do número complexo $12 + 3i$ é ....

2.ª) $1 - 2i$ e $1 + 2i$ são números complexos ....

3.ª) $^{-}8 - 5i$ é *conjugado* do número complexo ....

3. *Aplicações: resolução de equações no conjunto* $\mathbb{C}$

Resolver as seguintes equações no conjunto $\mathbb{C}$:

1.ª) $\boxed{x^2 + 9 = 0}$ $U = \mathbb{C}$

Temos: $x^2 + 9 = 0 \iff x^2 = {}^{-}9 \iff x = \sqrt{-9}$ ou $x = -\sqrt{-9} \iff x = 3i$ ou $x = {}^{-}3i$

Logo: $V = \{3i, {}^{-}3i\}$ raízes: $3i$ e ${}^{-}3i$

2.ª) $\boxed{2x^2 - 9x - 5 = 0}$ $U = \mathbb{C}$

Temos: $x = \dfrac{9 \pm \sqrt{81 + 40}}{4} = \dfrac{9 \pm \sqrt{121}}{4} = \dfrac{9 \pm 11}{4} \iff x = 5$ ou $x = \dfrac{-1}{2}$

Logo: $V = \left\{5, \dfrac{-1}{2}\right\}$

NOTA: As raízes reais 5 e $\frac{-1}{2}$ equivalem, respectivamente, aos complexos: $5 + 0i$ e $\frac{-1}{2} + 0i$.

3.ª) $\boxed{(2x - 1)^2 = {}^{-}1}$ $U = \mathbb{C}$

Temos: $(2x - 1)^2 = {}^{-}1 \iff 4x^2 - 4x + 1 = {}^{-}1 \iff 4x^2 - 4x + 2 = 0 \iff$

$\iff 2x^2 - 2x + 1 = 0 \iff x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{4} = \dfrac{2 \pm \sqrt{-4}}{4} = \dfrac{2 \pm 2i}{4} \iff$

$\iff x = \dfrac{2 + 2i}{4}$ ou $x = \dfrac{2 - 2i}{4} \iff x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$ ou $x = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$

Logo: $V = \left\{\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i\right), \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i\right)\right\}$ raízes: $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$ e $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$

4.ª) $2x^4 + x^2 - 3 = 0 \quad U = \mathbb{C}$

Temos: $2x^4 + x^2 - 3 = 0 \iff 2(x^2)^2 + x^2 - 3 = 0 \iff$

$$\iff x^2 = \frac{^-1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \frac{^-1 \pm 5}{4} \iff$$

$$\iff x^2 = \frac{^-1+5}{4} \text{ ou } x^2 = \frac{^-1-5}{4} \iff$$

$$\iff x^2 = 1 \text{ ou } x^2 = \frac{^-3}{2} \iff$$

$$\iff x = \sqrt{1} \text{ ou } x = -\sqrt{1} \text{ ou } x = \sqrt{\frac{^-3}{2}} \text{ ou } x = -\sqrt{\frac{^-3}{2}} \iff$$

$$\iff x = 1 \text{ ou } x = ^-1 \text{ ou } x = \sqrt{\frac{3}{2}}\,i \text{ ou } x = -\sqrt{\frac{3}{2}}\,i$$

Logo: $V = \left\{1, ^-1, \sqrt{\frac{3}{2}}\,i, -\sqrt{\frac{3}{2}}\,i\right\}$ raízes: $1, ^-1, \sqrt{\frac{3}{2}}\,i$ e $-\sqrt{\frac{3}{2}}\,i$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 89

Resolva as seguintes equações no conjunto $\mathbb{C}$:

1.ª) $x^2 + 4 = 0$

2.ª) $3x^2 = 3$

3.ª) $^-y^2 + 1 = 0$

4.ª) $x^2 - 6x + 13 = 0$

5.ª) $2z^2 + 3z + 25 = 0$

6.ª) $4t^2 = ^-1$

7.ª) $z(z-1) - 60 = 60 + z$

8.ª) $x^2 + 2x + 2 = 0$

9.ª) $(2x+2)^2 = ^-16$

10.ª) $^-y^2 + 10y - 25 = 0$

11.ª) $y^2 - 2y - 1 = 0$

12.ª) $x - 5 = 2$

13.ª) $2x = 2$

14.ª) $x^2 - 1 = x^2 - x + 1$

15.ª) $3t^2 + t + 1 = 0$

16.ª) $x^4 - 18x^2 - 81 = 0$

17.ª) $^-y^4 + 10y^2 - 9 = 0$

18.ª) $(x^2-1)^2 + (x^2-3)^2 = 20$

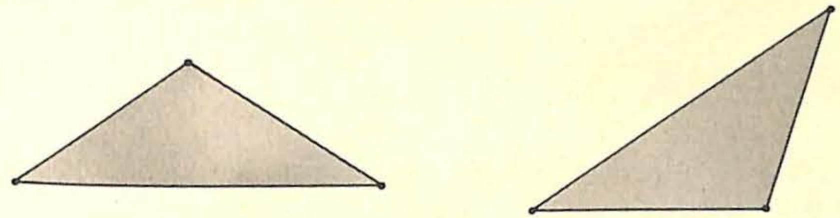
19.ª) $9x^2 = \frac{225}{x^2}$

20.ª) $x^4 - x^2 + 5 = 0$

Área de regiões planas — Práticas usuais

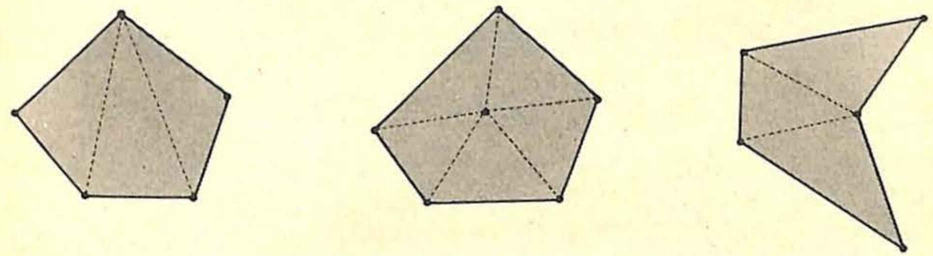
1. *Regiões poligonais*

Uma *região triangular* é a figura constituída pela **reunião** de um *triângulo e do seu interior.* Assim, por exemplo:



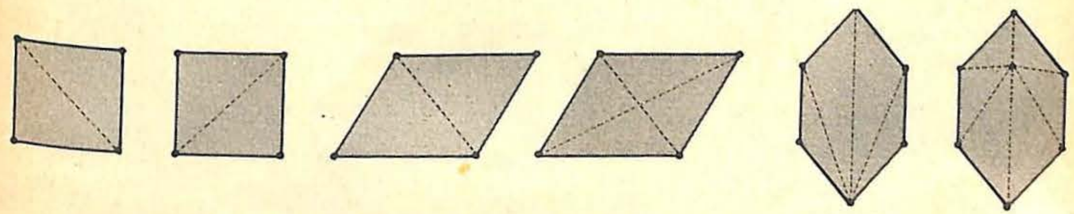
são *regiões triangulares.*

Uma *região poligonal* é uma figura plana que pode ser decomposta em regiões triangulares, como mostram as figuras:



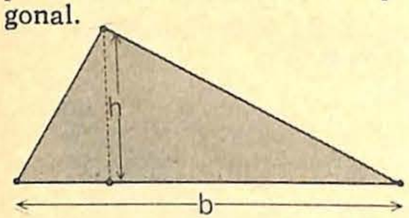
Mais precisamente, uma *região poligonal* é a **reunião** de um número finito de regiões triangulares tais que, se duas delas se interceptam, então a intersecção é um *lado* ou um *vértice* de cada uma delas.

Uma *região poligonal* pode ser decomposta em regiões triangulares de uma porção de maneiras. Exemplos:



2. *Área de uma região poligonal*

A cada região poligonal, numa determinada unidade, faz-se corresponder um *único número real positivo A*, denominado *área* da região poligonal.



A *área A* de uma região triangular, abreviadamente conhecida como "área do triângulo", é um *número* que você já conhece desde a 1.ª série ginasial:

$$A = \frac{1}{2}\, b \cdot h$$

onde *b* é a medida da "base" $\overline{AC}$ e *h* é a medida da altura correspondente ao lado $\overline{AC}$, consideradas na mesma unidade de comprimento.

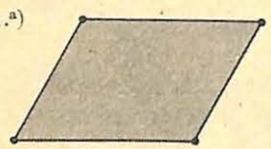
Como o produto da medida de um lado do triângulo pela medida da correspondente altura é *o mesmo que* o produto da medida de qualquer outro lado pela medida de sua correspondente altura, assume-se como *verdadeira* a seguinte proposição, considerada neste estudo como *Postulado* P1:

P1: **A área de um triângulo(*) é igual à metade do produto da medida de qualquer um de seus lados pela medida da altura correspondente.**

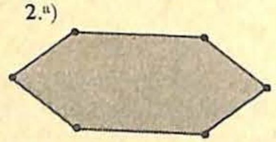
TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 90

1. Decomponha as seguintes regiões poligonais no menor número possível de regiões triangulares:

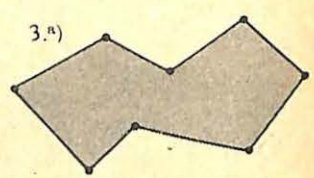
1.ª)



2.ª)

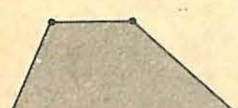


3.ª)



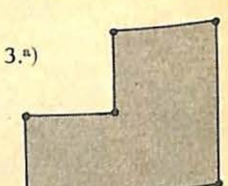
2. Decomponha, de duas maneiras diferentes, as seguintes regiões poligonais em regiões triangulares:

1.ª)



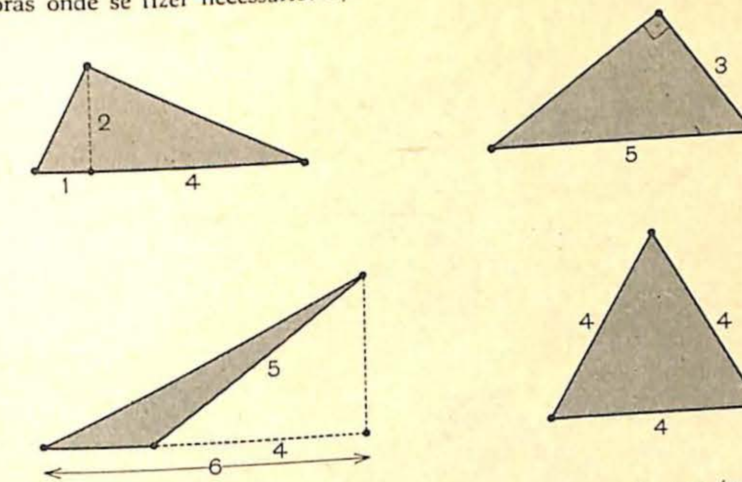
2.ª)

3.ª)



(*) Por "área de um triângulo" entenda-se a área da *região triangular*, isto é, da REUNIÃO do triângulo com o seu interior.

3. Calcule a *área* dos seguintes triângulos (não se esquecendo de aplicar o Teorema de Pitágoras onde se fizer necessário...):



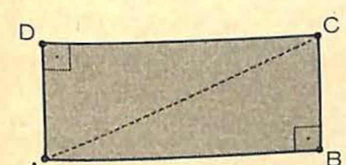
NOTA: Na prática, a adoção de uma mesma unidade de comprimento (por exemplo o cm, do S.M.D.) para exprimir *b* e *h*, nomeará a unidade de área da resposta (no caso, cm², do S.M.D.).

3. *Dois novos Postulados acêrca de áreas*

P2: **Se dois triângulos são congruentes, então as respectivas regiões triangulares têm a mesma área.**

P3: **A área de uma região poligonal é a soma das áreas das regiões triangulares que a compõem.**

Assim, por exemplo, na *região poligonal retangular ABCD*, temos:



$$\triangle ABC \sim \triangle CDA \Longrightarrow A_{\triangle ABC} = A_{\triangle CDA} \quad \text{(P2)}$$

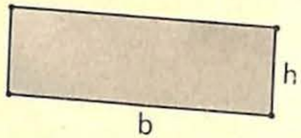
$$A_{\square ABCD} = A_{\triangle ABC} + A_{\triangle CDA} \quad \text{(P3)}$$

EXERCÍCIOS EXPLORATÓRIOS — GRUPO 91

1. Usando os Postulados P1, P2 e P3, calcule as *áreas* das seguintes regiões poligonais:

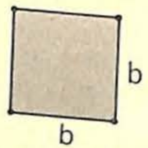
Resultado

1.ª) *Retângulo*



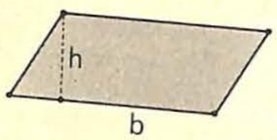
$A = b \cdot h$

2.ª) *Quadrado*



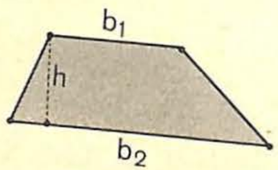
$A = b^2$

3.ª) *Paralelogramo*



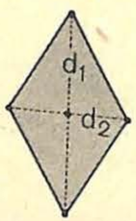
$A = b \cdot h$

4.ª) *Trapézio*



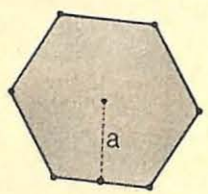
$A = \frac{1}{2}(b_1 + b_2) \cdot h$

5.ª) *Losango*



$A = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$

6.ª) *Polígono regular* (convexo)



$A = \frac{1}{2} p \cdot a$

Como modelos, serão calculadas as áreas do *retângulo* e do *polígono regular*.

Retângulo:

No retângulo $ABCD$ (pág. 235), a diagonal $\overline{AC}$ decompõe a região poligonal $ABCD$ em duas regiões triangulares ABC e ADC.

Como $\overline{BC} \perp \overline{AB}$ (por quê?), então:

$$A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB.BC \text{ e } A_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} DC.BC \qquad \text{(P1)}$$

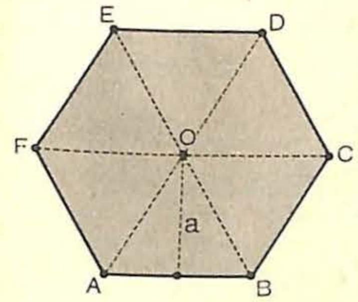
Sendo: $A_{\square ABCD} = A_{\triangle ABC} + A_{\triangle ADC}$ (P3)

então: $A_{\square ABCD} = \frac{1}{2} AB.BC + \frac{1}{2} DC.BC$ ou $A_{\square ABCD} = \frac{1}{2}(AB + DC)BC$

Como $AB = DC$, $A_{\square ABCD} = \frac{1}{2}(2AB)BC = AB.BC$ ou $A_{\square ABCD} = b \cdot h$

c.q.d.

Polígono regular:



$A_{ABCDEF} = A_{AOB} + A_{BOC} + \ldots + A_{FOA}$ (P3)

$A_{AOB} = A_{BOC} = \ldots = A_{FOA}$ (P2)

Como: $A_{AOB} = \frac{1}{2} AB.a$ (P1)

vem: $A_{ABCDEF} = \frac{1}{2}(AB + BC + \ldots + FA)a = \frac{1}{2} p.a$

onde $p = AB + BC + \ldots + FA$ c.q.d.

PROBLEMAS DE APLICAÇÃO — GRUPO 92

1.º) Determine a área de um quadrado cuja diagonal mede 10dm.

2.º) As medidas de dois lados consecutivos de um paralelogramo são respectivamente 15cm e 25cm, e a medida do ângulo por êles formado é 60º. Determine a área dêsse paralelogramo.

3.º) Determine a área de um triângulo eqüilátero cuja altura mede $5\sqrt{3}$m.

4.º) A área de um trapézio é 126cm². Uma das suas bases mede 12cm e a altura 9cm. Quanto mede a outra base?

5.º) Qual é a área de um quadrado inscrito numa circunferência de raio igual a 6cm?

6.º) Se M, N e P são, respectivamente, os pontos médios dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$ do triângulo ABC, prove que: $A_{\triangle ABC} = 4 \times A_{\triangle MNP}$.

7.º) Quais as dimensões de um retângulo de área igual a 48m², se estas dimensões estão na razão de 1 para 3?

8.º) Um retângulo tem por dimensões 5,5m e 4,5m. Diminuindo-se a primeira delas de meio metro, de quanto se deve aumentar a outra para que o retângulo obtido tenha a mesma área que o primeiro?

9.º) Num paralelogramo a base mede 18m e a altura 12m. Une-se um dos vértices ao meio dos lados opostos. Calcule a área de cada uma das regiões poligonais determinadas.

10.º) A soma das medidas das diagonais de um losango é 8,4m. Sabendo que as diagonais são proporcionais, respectivamente, aos números 3 e 4, calcule a área do losango.

11.º) Num trapézio isósceles a soma das medidas das bases é 14cm, e a sua área é igual a 28cm². Calcule a medida das bases, da altura e dos lados não-paralelos, sabendo que o perímetro do trapézio é de 24cm.

4. *Alguns resultados de importância sôbre área de triângulos*

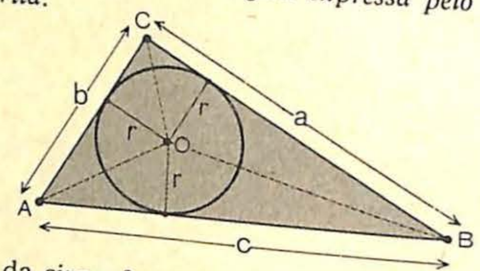
1.°) *Com relação à área de um triângulo eqüilátero:*

Se l é a medida do lado de um triângulo eqüilátero ABC, então:

$$A_{\triangle ABC} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

Procure justificar êsse resultado.

2.°) *Com relação à área de um triângulo expressa pelo raio da circunferência inscrita:*



Se r é o raio da circunferência inscrita no triângulo ABC, então:

$$A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}p \cdot r \qquad \text{onde } p = a + b + c$$

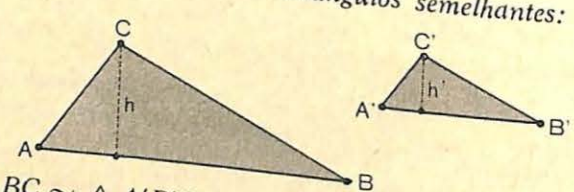
De fato: $A_{\triangle ABC} = A_{\triangle AOB} + A_{\triangle BOC} + A_{\triangle COA}$ (P3)

ou $A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}c \cdot r + \frac{1}{2}a \cdot r + \frac{1}{2}b \cdot r$ (P1)

Logo: $A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}(c+a+b)r = \frac{1}{2}p \cdot r$

c.q.d.

3.°) *Com relação às áreas de dois triângulos semelhantes:*



Se $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, então:

$$\frac{A_{\triangle ABC}}{A_{\triangle A'B'C'}} = \frac{(AB)^2}{(A'B')^2}$$

isto é: *as áreas de dois triângulos semelhantes são proporcionais aos quadrados das medidas dos lados correspondentes.*

$$A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB.h \quad \text{(P1)}$$

Como: e $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Longrightarrow$

$$A_{\triangle A'B'C'} = \frac{1}{2}A'B'.h' \quad \text{(P1)}$$

$$\Longrightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{h}{h'}$$

De $\frac{AB}{A'B'} = \frac{h}{h'}$ segue-se que: $\frac{AB.h}{A'B'.h'} = \frac{(AB)^2}{(A'B')^2}$ (Propriedade das proporções)

e, portanto: $\frac{A_{\triangle ABC}}{A_{\triangle A'B'C'}} = \frac{AB.h}{A'B'.h'} = \frac{(AB)^2}{(A'B')^2}$

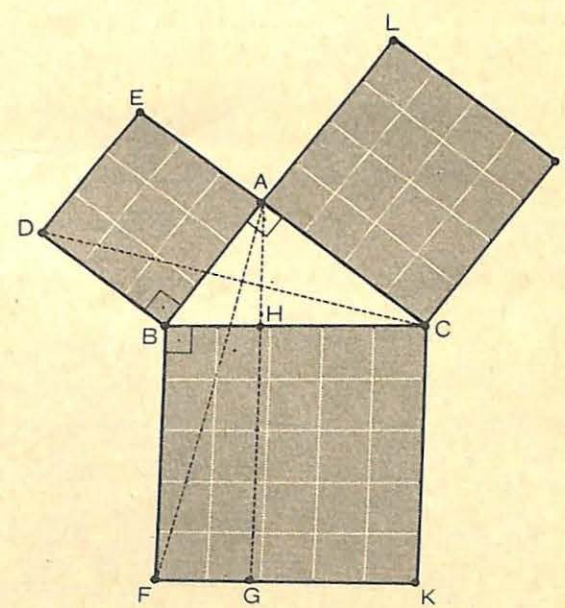
c.q.d.

4.°) *Com relação ao Teorema de Pitágoras:*

1. O *Teorema de Pitágoras* — que você já demonstrou ao estudar as relações métricas nos triângulos retângulos — foi enunciado por Euclides, célebre geômetra da Antiguidade, da seguinte maneira:

"O quadrado construído sôbre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados construídos sôbre os catetos"

e demonstrado, por intermédio das áreas, assim:



Na figura, temos: $\begin{cases} \overleftrightarrow{AH} \perp \overline{BC} \text{ e } \overleftrightarrow{AG} \parallel \overleftrightarrow{BF} \\ \triangle ABF \sim \triangle DBC \text{ (por quê?)} \end{cases}$

e, como: $A_{\triangle ABF} = \frac{1}{2} A_{\square BFGH}$ (por quê?)

e $A_{\triangle DBC} = \frac{1}{2} A_{\square BAED}$ (por quê?)

segue-se que: $A_{\square BFGH} = A_{\square BAED}$

Da mesma forma, prova-se que:

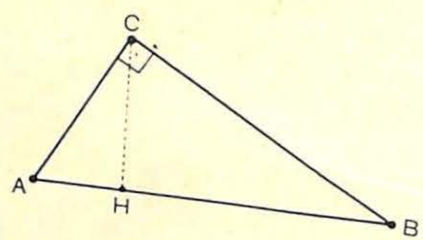
$$A_{\square HGKC} = A_{\square ACML}$$

Sendo: $A_{\square BFKC} = A_{\square BFGH} + A_{\square HGKC}$ (P3)

vem: $\underline{\overline{A_{\square BFKC} = A_{\square BAED} + A_{\square ACML}}}$

c.q.d.

2. Uma das mais "elegantes" demonstrações do *Teorema de Pitágoras* — baseada em áreas — é a que se segue:



Na figura, temos:

$$\triangle ABC \sim \triangle ACH \sim \triangle CHB \text{ (resultado conhecido)}$$

e, como: $\frac{A_{\triangle ABC}}{(AB)^2} = \frac{A_{\triangle ACH}}{(AC)^2} = \frac{A_{\triangle CHB}}{(CB)^2} = k$ (pág. 238, 3.º)

Sendo: $A_{\triangle ABC} = A_{\triangle ACH} + A_{\triangle CHB}$ (P3)

vem: $k(AB)^2 = k(AC)^2 + k(CB)^2$

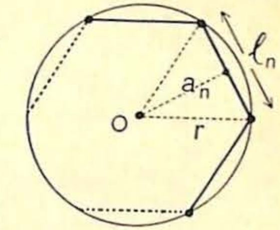
e, dividindo por $k \neq 0$: $\underline{\overline{(AB)^2 = (AC)^2 + (CB)^2}}$

c.q.d.

5. *Área do círculo (disco fechado); aplicações*

O perímetro de um polígono regular inscrito na $C(O, r)$, cujo lado mede l_n, é $p_n = n \cdot l_n$.

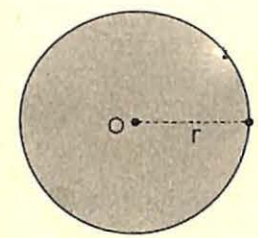
Se o apótema dêsse polígono mede a_n, então você já sabe que a área do polígono regular de n lados é:



$$A = \frac{1}{2} \cdot p_n \cdot a_n$$

Considerando-se, agora, uma seqüência de polígonos regulares inscritos que possuam, sucessivamente, um número de lados cada vez maior, então os perímetros dêsses polígonos aproximam-se, cada vez mais, do comprimento $2\pi r$ da circunferência onde estão inscritos.

Também a medida do apótema se aproximará, cada vez mais, da medida do raio r da circunferência. Portanto, a área de tais polígonos aproximar-se-á cada vez mais de $\frac{1}{2}(2\pi r)r$ ou de πr^2.

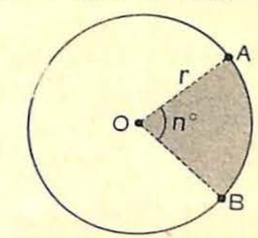


Temos, então, para a área do círculo:

$$\underline{\overline{A_{\odot} = \pi r^2}}$$

6. *Área de um setor circular*

Seja AOB um setor circular de n graus. Como a área do círculo (que pode ser pensado como um setor de 360º) é o número πr^2, temos:



$$\text{área do setor de } 1^\circ = \frac{\pi r^2}{360}$$

$$\text{área do setor de } n^\circ = \frac{\pi r^2 n}{360}$$

Lembrando, ainda, que $l = \frac{\pi r n}{180}$ dá a medida do comprimento de um arco, pode-se exprimir a área de um setor circular por intermédio de l:

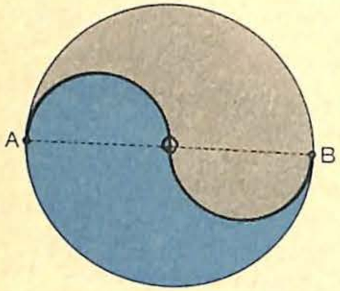
$$\frac{\pi r^2 n}{360} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot \frac{\pi r n}{180} = \frac{1}{2}\, r \cdot l$$

Logo: $A_{\text{setor}} = \frac{1}{2} r l$

Aplicação: Determinar a área do setor circular de 60° inscrito num círculo de raio igual a 10cm.

Temos: $A = \dfrac{\pi r^2 n}{360} = \dfrac{\pi(10)^2.60}{360} = \dfrac{100\pi}{6} = \dfrac{50\pi}{3}$

Logo: a área do setor é igual a $\dfrac{50\pi}{3}$ cm².

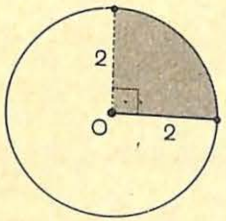


TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 93

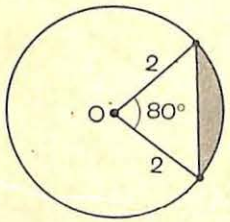
1. Se $\overline{AB}$ é o diâmetro, demonstre que as regiões coloridas têm a mesma área. (NOTA: A parte azul "acima" de $\overline{AB}$ é um semi-círculo de diâmetro $\overline{AO}$; anàlogamente para a região cinza "abaixo" de $\overline{AB}$.)

2. Calcule as áreas das partes coloridas nas seguintes figuras:

1.ª)

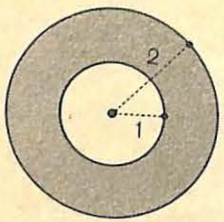


2.ª)



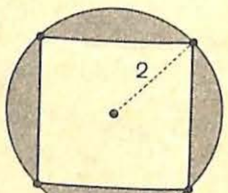
NOTA: A figura colorida chama-se *segmento circular*.

3.ª)

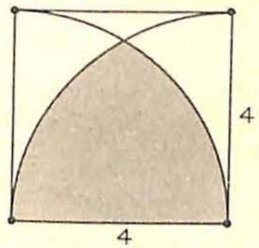


NOTA: A figura colorida é chamada *coroa circular*.

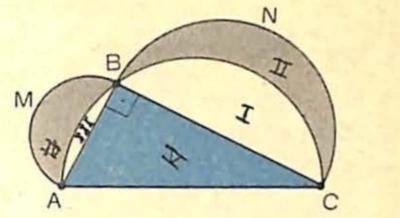
4.ª)



5.ª)



6.ª)



Se $\overset{\frown}{ABC}$, $\overset{\frown}{AMB}$ e $\overset{\frown}{BNC}$ são semi-circunferências, prove que a *soma das áreas* das regiões coloridas de cinza (denominadas *lúnulas*) é igual *à área* da região triangular ABC.

PROBLEMAS — GRUPO 94

(Acêrca de áreas)

1.º) As diagonais de um quadrilátero convexo, que medem 10cm e 15cm, respectivamente, interceptam-se em ângulo reto. Calcule a área dêsse quadrilátero.

2.º) Determine a área de um hexágono regular inscrito numa circunferência de raio igual a 4dm.

3.º) Calcule a área de um círculo de 30cm de diâmetro e a do setor circular de 75° pertencente a êsse círculo (use $\pi = 3{,}14$).

4.º) Qual a área de uma praça circular, se o comprimento da circunferência que a cerca é de 124m?

5.º) Qual o raio de um setor circular de 45,40m² de área, se o ângulo correspondente mede 36°?

6.º) Num círculo de 10m de raio calcule a área de um setor circular cujo arco mede 5m.

7.º) Dois círculos concêntricos têm raios que medem 6m e 4m, respectivamente. Calcule a área da coroa por êles determinada.

8.º) Calcule a área de um segmento circular de um círculo de 10m de raio e de 36° de arco.

9.º) Qual é a área de um triângulo de 12m de perímetro e que circunscreve uma circunferência de 3m de raio?

10.º) Num triângulo retângulo as projeções dos catetos sôbre a hipotenusa medem 4m e 6m, respectivamente. Calcule a área do triângulo.

11.º) Os lados de um triângulo medem 12m, 8m e 6m, respectivamente. Traçando-se de cada vértice dêsse triângulo a paralela ao lado oposto, obtém-se um nôvo triângulo. Calcule a área do triângulo obtido.

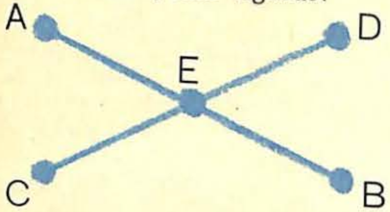
12.º) Qual a relação existente entre as áreas de um triângulo eqüilátero e de um hexágono regular, inscritos numa mesma circunferência?

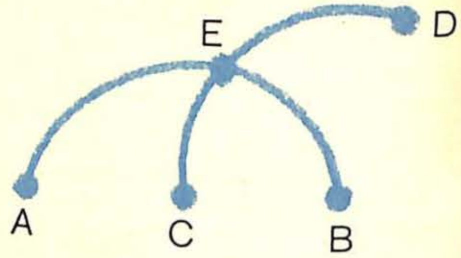
Mapas topológicos

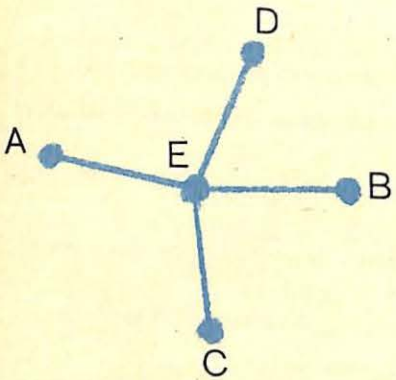
Ainda a Topologia . . .

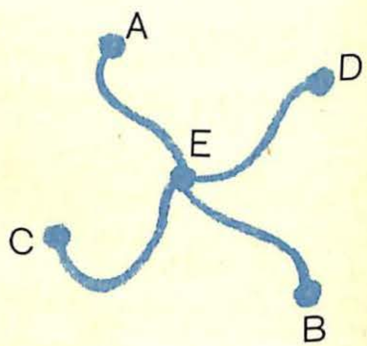
Você já teve algumas informações de que a *Topologia* é a mais geral das Geometrias. Aspectos relativos a tamanho, forma, área, perímetro, distâncias, por exemplo, não interessam a um topologista.

Assim, nas figuras:



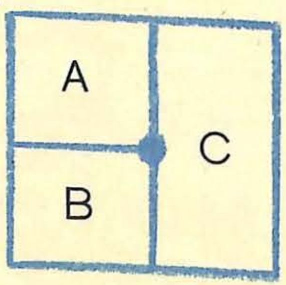






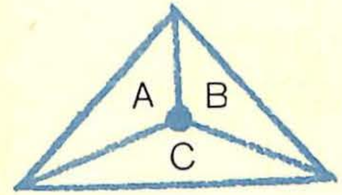
que não são "idênticas", os quatro "ramos" (*EA*, *EC*, *EB* e *ED*) possuem contudo "algo" em *comum:* o ponto E. Nestas condições, independentemente das formas das figuras acima, os pontos *A*, *B*, *C*, *D* e *E* guardam certas *propriedades comuns.*

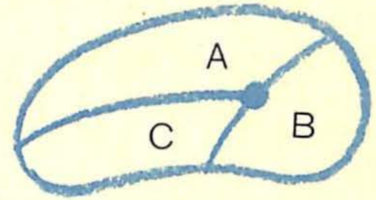
Por outro lado, na figura seguinte *A*, *B* e *C* representam três países distintos:

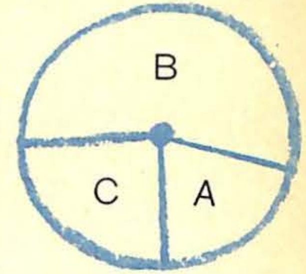


onde • → *A* é vizinho de *B* e *C*
→ *B* é vizinho de *A* e *C*
→ *C* é vizinho de *A* e *B*

Observe que essas mesmas vizinhanças *permanecem* com as figuras:

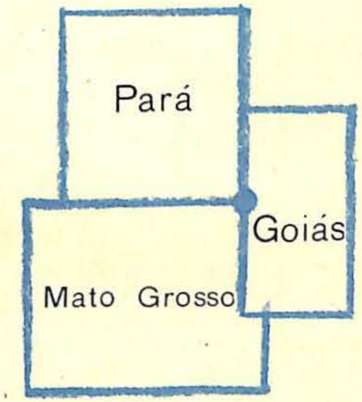






Êstes *aspectos topológicos*, destacados nessas figuras, podem ser usados com vantagem no estudo da Geografia, principalmente quando se deseja saber num mapa os limites de um Estado com os demais. Agora, *forma* e *tamanho* não têm tanto interêsse para solucionar tal problema.

Por exemplo, há vários lugares no Brasil onde três Estados se encontram num *ponto comum*, como:



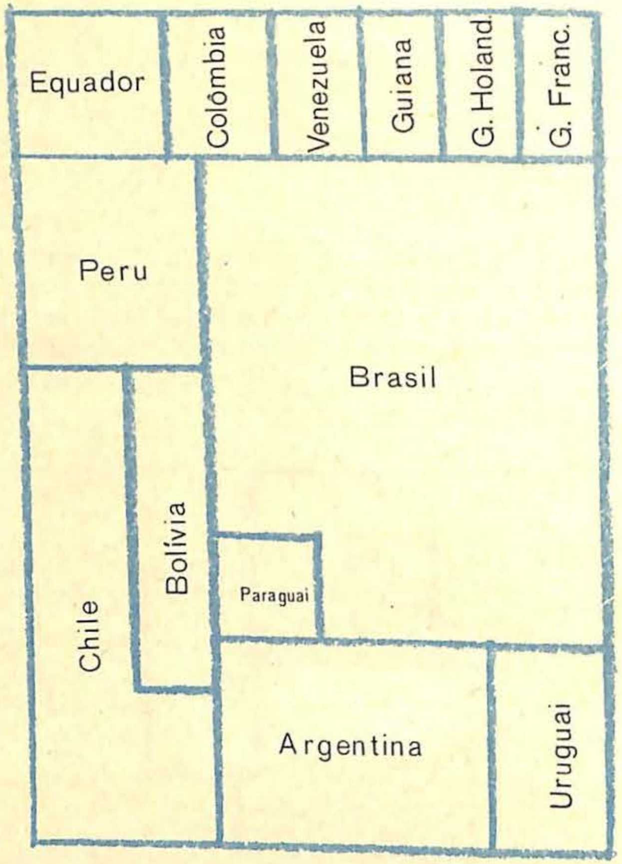
As relações entre êles não mudarão, mesmo que êsses três Estados apareçam desenhados com outras formas.

Nestas condições é possível simplificar topològicamente o mundo físico em que vivemos, sem perder de vista as informações principais que se desejam.

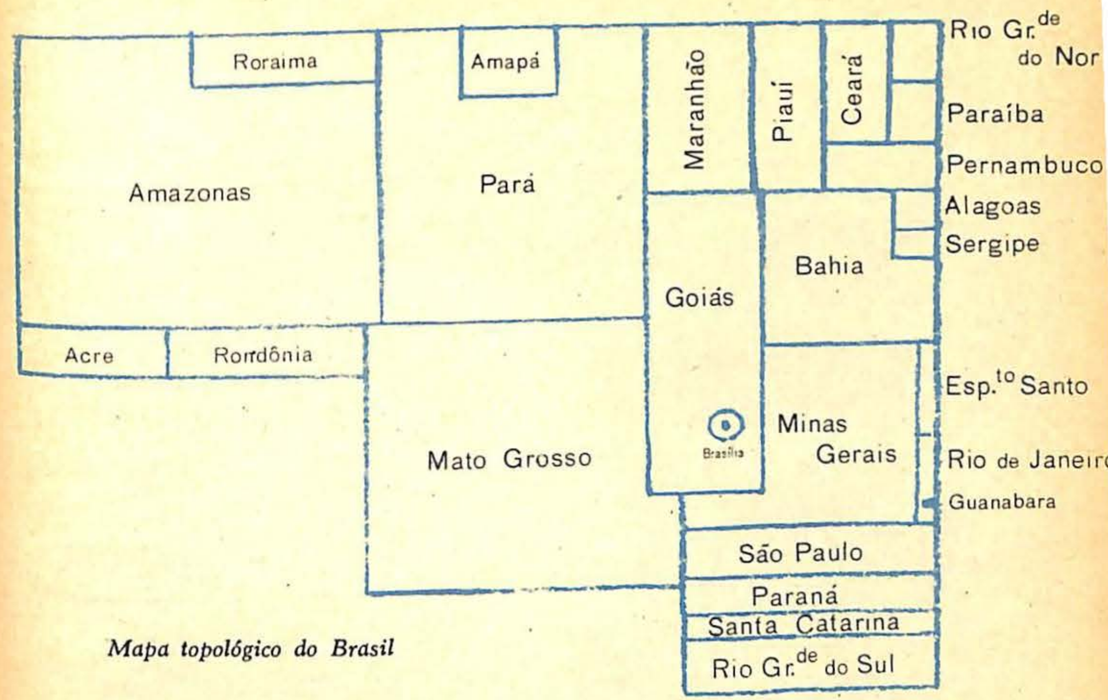
A seguir, temos os *mapas topológicos*(*) da América do Sul e do Brasil, os quais fornecem ràpidamente informações sôbre os limites (vizinhanças) entre países.

(*) Sugestão do Prof. Ernest R. Ranucci, da State University of New York, nas Sessões de Estudos realizadas no *Grupo de Estudos de Ensino da Matemática* — GEEM de São Paulo, em 1964.

Veja como é fácil, por exemplo, concluir que o Brasil tem fronteiras com todos os países da América do Sul, menos com o Chile e o Equador.



Mapa topológico da América do Sul



Mapa topológico do Brasil

TESTE DE ATENÇÃO — Grupo 95

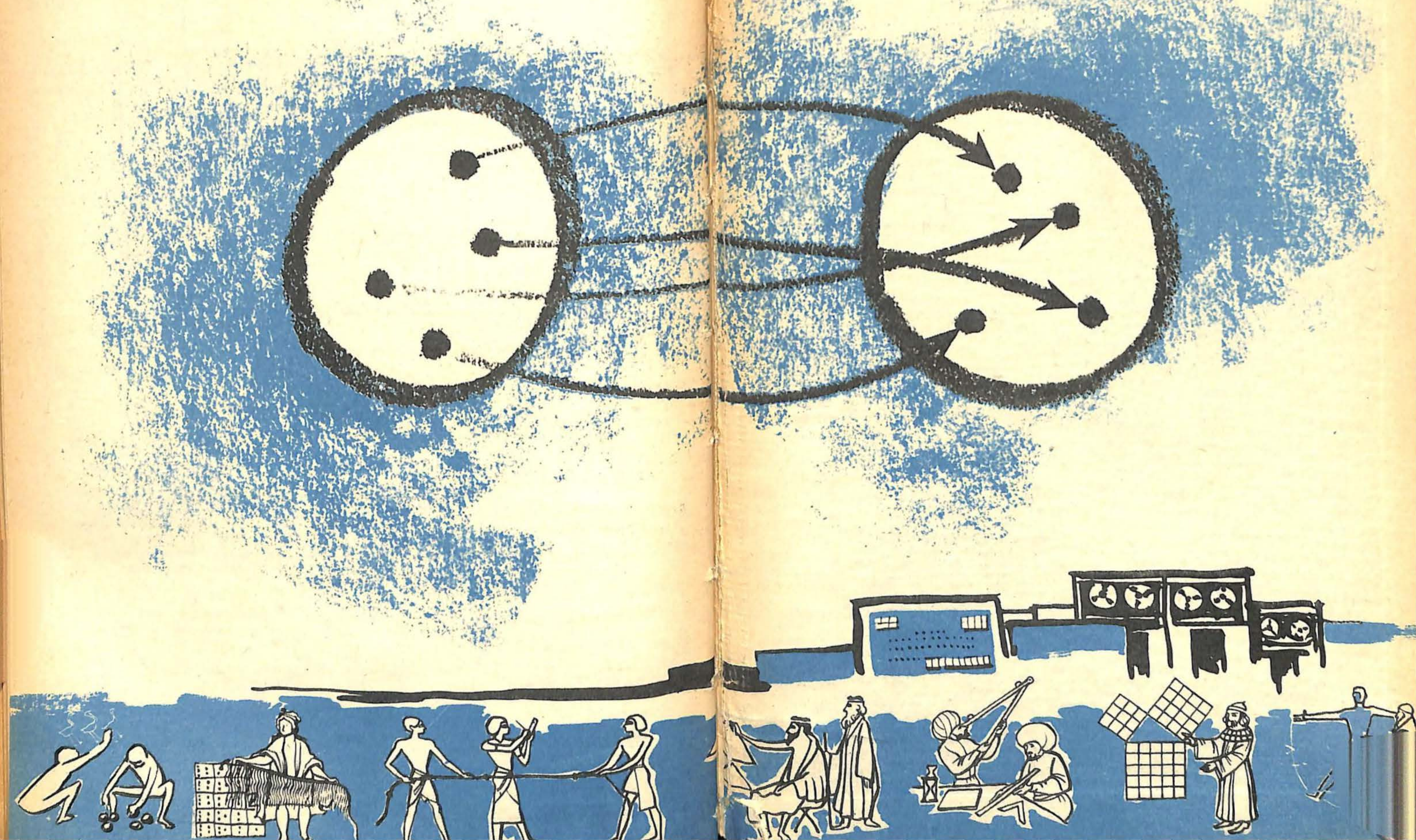
1. Qual o Estado brasileiro que possui maior número de fronteiras com outras unidades da Federação? Há mais de um?

2. Assinale alguns lugares do Nordeste brasileiro onde três Estados se encontram num ponto comum.

   Nota: Você percebeu que os Estados do Maranhão, Piauí, Goiás e Bahia por pouco (pouquíssimo. . .) não têm um ponto em comum? Seria o único lugar no Brasil com essa propriedade.

3. Você sabia que 4 côres distintas são suficientes para diferenciar cada Estado de todos os seus vizinhos imediatos nos mapas comuns? Verifique êsse fato com os mapas da América do Sul e do Brasil.

8,00



COMPANHIA EDITORA NACIONAL