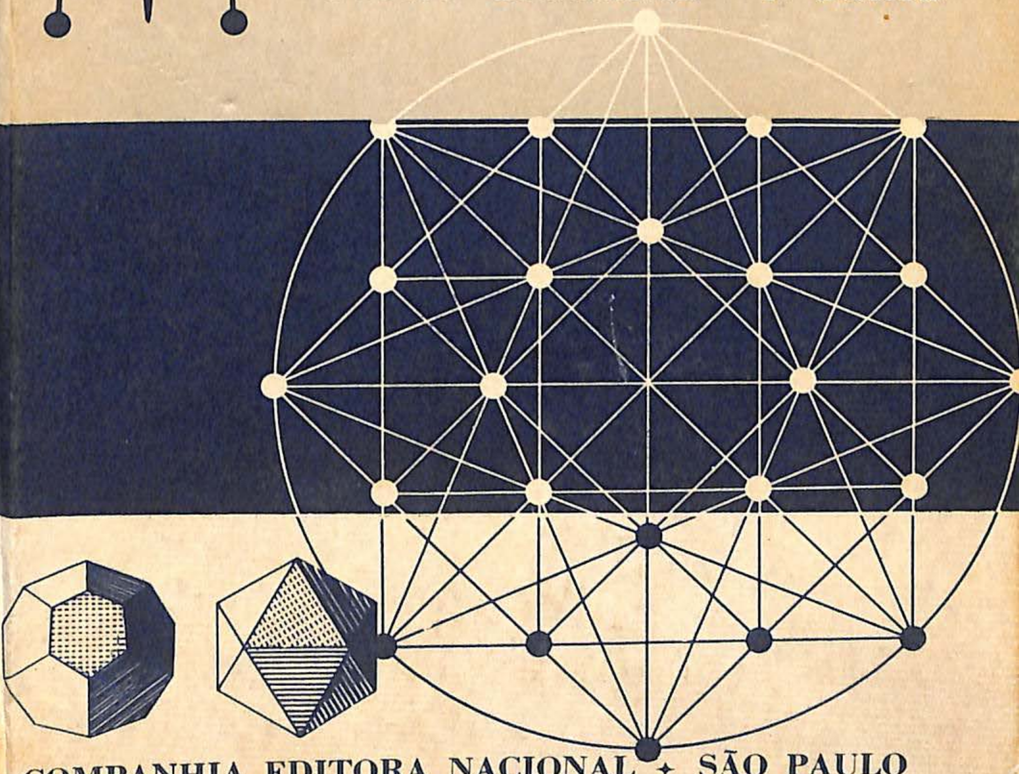
OSVALDO SANGIORGI

Matemática

CURSO GINASIAL ✦ 4.ª SÉRIE



COMPANHIA EDITORA NACIONAL ✦ SÃO PAULO

MATEMÁTICA

para a

QUARTA SÉRIE GINASIAL

De acôrdo com os programas em vigor, conforme portarias n.º 966, de 2/10/51 e 1 045, de 14/12/51, e de uso autorizado pelo Ministério da Educação e Cultura. Registrado na Comissão Nacional do Livro Didático sob n.º 2727.

Exemplar **Nº** 31945

1961

Obra executada nas oficinas da
São Paulo Editora S. A. — São Paulo, Brasil

OSVALDO SANGIORGI

Licenciado em Ciências Matemáticas, pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo. Ex-professor do Ginásio do Estado da Capital. Professor do Instituto Feminino de Educação "Padre Anchieta". Professor de Geometria Analítica da Faculdade de Filosofia, da Universidade Mackenzie

*

MATEMÁTICA

para a

QUARTA SÉRIE GINASIAL

44.ª EDIÇÃO

Revista e *Ampliada (sistemas algébricos do segundo grau; sistema de coordenadas cartesianas)*

COMPANHIA EDITORA NACIONAL
SÃO PAULO

DO MESMO AUTOR

Matemática, primeira série ginasial.

Matemática, segunda série ginasial.

Matemática, terceira série ginasial.

Matemática e Estatística, para os Institutos de Educação e Escolas Normais.

Programa de Admissão (em colaboração).

★

EDIÇÕES DA

COMPANHIA EDITORA NACIONAL

Rua dos Gusmões, 639 - São Paulo

À memória de minha querida mãe

INDICE

CAPÍTULO I

TRINÔMIO DO SEGUNDO GRAU. EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU COM UMA INCÓGNITA

CAPÍTULO II

RELAÇÕES MÉTRICAS NOS POLÍGONOS E NO CÍRCULO CÁLCULO DE π.

CAPÍTULO III

ÁREAS DAS FIGURAS PLANAS

APÊNDICE

PROGRAMA DE MATEMÁTICA

Quarta Série Ginasial (*)

I) TRINÔMIO DO SEGUNDO GRAU; EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU COM UMA INCÓGNITA

1. Equações do segundo grau. Resolução das equações incompletas; resolução da equação completa; estabelecimento da fórmula de resolução por um dos métodos clássicos; fórmulas simplificadas. Discussão das raízes; casos de raízes diferentes, de raízes iguais e de não existência de raízes. Relações entre os coeficientes e as raízes. Composição da equação dadas as raízes.
2. Trinômio do segundo grau; decomposição em fatôres; sinais do trinômio; forma canônica. Variação em sinal e em valor. Posição de um número em relação às raízes do trinômio. Valor máximo ou mínimo do trinômio do segundo grau. Inequações do segundo grau. Tipos. Resolução de inequações do segundo grau.
3. Problemas do segundo grau; discussão. Divisão áurea.
4. Equações redutíveis ao segundo grau; equações biquadradas; equações irracionais. Transformação das expressões da forma:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$$

II) RELAÇÕES MÉTRICAS NOS POLÍGONOS E NO CÍRCULO; CÁLCULO DE π

1. Relações métricas no triângulo retângulo. Teorema de Pitágoras, triângulos pitagóricos.
2. Relações métricas num triângulo qualquer; relação dos co-senos.
3. Cálculo das medianas, das alturas e das bissetrizes de um triângulo.
4. Relações métricas no círculo. Corda e diâmetro que partem de um mesmo ponto. Ordenada de um ponto da circunferência. Cordas que se cortam. Potência de um ponto em relação a um círculo; expressões da potência. Construções geométricas elementares.
5. Polígonos inscritíveis e circunscritíveis. Teorema de Hiparco. Teorema de Pitot.
6. Polígonos regulares; propriedades.
7. Construção e cálculo do lado do quadrado, do hexágono regular, do triângulo equilátero e do decágono regular convexos. Cálculo dos apótemas.
8. Lado do polígono regular convexo de $2n$ lados em função do de n lados.
9. Medição da circunferência. Comprimento de um arco de curva. Razão da circunferência para o diâmetro. Expressões do comprimento de uma circunferência e de um arco qualquer.
10. Cálculo de π pelo método dos perímetros.

III) ÁREAS DAS FIGURAS PLANAS

1. Medição das áreas das principais figuras planas. Área do triângulo equilátero em função do lado; área do triângulo equilátero em função dos três lados, em função do raio do círculo circunscrito e em função do raio do círculo inscrito.
2. Relações métricas entre áreas; áreas dos polígonos semelhantes; teorema de Pitágoras. Construções geométricas. Problemas de equivalência.

(*) *Portarias: 966, 2/10/51 e 1045, 14/12/51 (3 aulas semanais, no mínimo).*

PREFÁCIO

Com êste volume terminamos a coleção de livros de Matemática, 1.º ciclo, oferecida aos ilustres colegas e aos estudantes de nosso curso secundário.

Seguimos, tanto quanto possível, as instruções metodológicas constantes da Portaria 1045, de 14/12/51. Achamos conveniente, no início da parte algébrica, dar o conceito de número real, a fim de melhor estudar as equações do segundo grau. A resolução dos problemas do segundo grau sucedeu o estudo das equações redutíveis ao segundo grau, pelo fato das soluções de inúmeros problemas dependerem da resolução destas equações.

Deixamos, de acôrdo com as citadas instruções, de introduzir o sistema de referência cartesiano, cujo estudo deve ser feito de um modo mais completo no segundo ciclo.

Esperamos continuar merecendo de nossos prezados colegas a mesma acolhida que tivemos com relação aos três primeiros livros. Confessamo-nos sumamente gratos pelas sugestões recebidas — pois, nunca alimentamos a pretenção de ter realizado obra perfeita, e pelas colaborações que visem melhorar as futuras edições.

Mais uma vez, agradecemos aos professôres, a confiança e o estímulo que, com felicidade, temos recebido na elaboração desta coleção didática.

São Paulo, novembro de 1954

O Autor

Observação à 20.ª edição:

A atual edição, revista e ampliada, tem a seu favor o aproveitamento de sugestões apresentadas por distintos colegas. Assim é que no APÊNDICE, constante da parte final, acrescentamos o estudo de *Sistemas simples do segundo grau*, bem como introduzimos as *Representações gráficas de funções*, usando o *Sistema cartesiano* (na reta e no plano).

A necessidade que o aluno de segundo ciclo, logo ao iniciá-lo, tem dos conhecimentos da Geometria Analítica, levou-nos à presente ampliação.

Não temos palavras para exprimir o nosso reconhecimento e agradecimento sincero aos professôres secundários de nossa terra, pela magnífica colaboração que nos têm proporcionado mediante cartas, palestras e mesas redondas de que, por convites amáveis, nos têm feito participar.

Cremos, assim, ser a colaboração de todos, a melhor maneira de aprimorar o nosso ensino secundário.

São Paulo, Janeiro de 1960

O. S.
Rua Macapá, 17
São Paulo

CAPITULO I

Trinômio do segundo grau. Equações e inequações do segundo grau com uma incógnita

§ 1. Números reais.

1. Números racionais. Já estudamos na aritmética e na álgebra, das primeiras séries ginasiais, os números inteiros e fracionários, positivos e negativos. Êsses números, que foram denominados *racionais* (absolutos ou relativos), constituem o que se chama *campo dos números racionais.*

Nêsse campo, são sempre *possíveis* as quatro operações fundamentais, a saber: adição, subtração, multiplicação e divisão (com o divisor diferente de zero). A potenciação de expoente inteiro, que é um caso particular da multiplicação, também é sempre possível.

2. Números irracionais. O confronto de grandezas incomensuráveis (*) levou-nos à criação de outros números: os *irracionais.* A necessidade dos números irracionais foi realçada na aritmética, quando estudamos o processo de extração da raiz quadrada dos números naturais que não eram quadrados perfeitos, pois, para êsses casos, só se obtinham extrações com *valores aproximados.* Assim, por exemplo, a $\sqrt{2}$ pode ser obtida sòmente com uma aproximação desejada ($\sqrt{2} = 1,414213\ldots$).

Estamos agora em condições de dar uma definição de número irracional. Calculemos, para isso, os valores da $\sqrt{2}$, com erros inferiores, respectivamente, a uma *unidade*, um *décimo*, um *centésimo*, etc. por falta e por excesso. Obteremos

(*) Grandezas incomensuráveis – ver *Matemática*, Curso Ginasial. 2.ª Série, pág. 55 do mesmo autor.

as duas seguintes sucessões, ou classes, de números racionais, sendo a primeira *por falta* e a segunda *por excesso*:

			N.º irracional			
Primeira classe dos números racionais por falta	1	$<$	$\sqrt{2}$	$<$	2	*Segunda classe dos números racionais por excesso*
	1,4	$<$	$\sqrt{2}$	$<$	1,5	
	1,41	$<$	$\sqrt{2}$	$<$	1,42	
	1,414	$<$	$\sqrt{2}$	$<$	1,415	
	.		.		.	
	.		.		.	
	.		.		.	

com as seguintes propriedades:

1.ª) *Todos* os números racionais estão distribuídos nestas duas classes;

2.ª) Os quadrados dos números racionais da primeira classe são *menores* que 2, *crescentes* e cada vez *mais próximos* de 2, enquanto os quadrados dos números racionais da segunda são *maiores* que 2, *decrescentes* e também cada vez *mais próximos* de 2;

3.ª) A diferença entre dois valores correspondentes, um da primeira e outro da segunda classe, vai se tornando cada vez *menor*, nunca chegando, porém, a ser zero.

Nestas condições o número $\sqrt{2}$ ***está separando*** essas duas classes de números racionais, não pertencendo, portanto, ao campo racional, por não ser possível encontrar um número racional cujo quadrado seja igual a 2. As duas classes de números racionais, com as propriedades enunciadas, serviram para definir a $\sqrt{2}$.

De forma semelhante poderíamos definir outros números irracionais ($\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt{6}$, etc.) como *números que **separam** duas classes de números racionais*, uma por falta e outra por excesso, satisfazendo propriedades da mesma natureza das que foram enunciadas para definir a $\sqrt{2}$.

Para os números irracionais, definem-se operações análogas às dos números racionais, e no cálculo numérico (radiciação ou potências de expoente fracionário) substituem-se os números irracionais pelos racionais que sejam os seus valores aproximados.

3. Números reais. Os números racionais e os números irracionais formam a classe dos *números reais*. *Campo real* ou *campo dos números reais* é o constituído pelos números reais (racionais e irracionais). Temos, assim:

$$\text{NÚMEROS REAIS}\begin{cases}\textit{números racionais}\begin{cases}\text{número inteiro}\\ \text{número fracionário}\end{cases}\\[2ex] \textit{números irracionais}\end{cases}$$

Os números reais, podem ser *absolutos* ou *relativos* (positivos ou negativos, segundo estejam ou não relacionados com os sinais + ou −).

OBSERVAÇÃO. **Já foi encontrada no estudo dos radicais (Segunda série ginasial) uma** *outra espécie* de números que não se enquadram na definição de número real. Com efeito, *a raiz de índice par de um número negativo* não tem existência no campo real. De fato, a $\sqrt{-4}$, por exemplo, não é um número real, pois, não existe nenhum número racional ou irracional que elevado ao quadrado seja igual a − 4. Números como a $\sqrt{-4}$, que representam *uma raiz de índice par de um número negativo*, dão origem a outra espécie de números — os *números imaginários*, que serão estudados, a seu tempo, no curso colegial.

§ 2. Equações do segundo grau.

4. Generalidades. Já aprendemos a resolver as equações do primeiro grau, e vimos suas aplicações na solução de um certo número de problemas. Existem, no entanto, outras questões cujas soluções dependem da resolução de equações de grau superior ao primeiro. Entre essas equações destacam-se, pela grande aplicação que têm, as denominadas *equações do segundo grau*.

5. Definição. Uma equação, racional e inteira (*), com uma incógnita, diz-se do *segundo grau* quando o maior expoente

(*) Ver Classificações das equações - *Matemática*, Curso Ginasial, 2.ª série, pág. 116, do mesmo autor.

com que a incógnita figura nessa equação é *dois*. É evidente que uma equação do segundo grau pode conter têrmos do primeiro grau, em relação à incógnita, e têrmos conhecidos (grau zero em relação à incógnita).

Tôda equação do segundo grau com uma incógnita, x por exemplo, pode, depois de efetuadas as transformações convenientes (eliminação de denominadores, redução de têrmos semelhantes, etc.), ser reduzida à forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

denominada *normal* ou *geral*, onde a, b e c são números reais (*), positivos, negativos ou nulos, com exceção de a que deve ser *sempre diferente de zero*, pois, do contrário, a equação se reduziria ao primeiro grau.

Os números a, b e c são os *coeficientes* ou *parâmetros* da equação; a é o coeficiente de x^2, b o coeficiente de x e c o *têrmo conhecido* ou *constante*. Exemplo:

$$3x^2 + 2x - 5 = 0$$

é uma equação do segundo grau na incógnita x, onde:

$$a = 3,\ b = 2 \text{ e } c = -5$$

Observação: É sempre possível, para vantagem dos estudos que virão a seguir, supor o coeficiente a *positivo*. Caso êle se apresente negativo, basta multiplicar ambos os membros da equação por -1 que todos os têrmos da equação mudarão de sinal.

6. Equação completa e equações incompletas. Uma equação do segundo grau, com a, b e c diferentes de zero é chamada *completa*. No caso de, pelo menos, um dos números b ou c ser nulo, a equação do segundo grau é denominada *incompleta*. Assim, as equações incompletas têm as formas:

$$\begin{array}{lll} ax^2 = 0 & \text{quando} & b = c = 0 \\ ax^2 + c = 0 & \text{quando} & b = 0 \\ ax^2 + bx = 0 & \text{quando} & c = 0 \end{array}$$

(*) a, b e c, podem representar, também, expressões literais quaisquer.

Exemplos:

$$20x^2 - 13x + 30 = 0 \quad \text{equação completa}$$

$$\left.\begin{array}{r} 7x^2 = 0 \\ \frac{3}{5}x^2 - x = 0 \\ x^2 - 8 = 0 \end{array}\right\} \text{equações incompletas}$$

7. Resolução das equações incompletas. Resolver uma equação do segundo grau, com uma incógnita, significa procurar todos os números positivos, negativos ou nulos, que verificam a equação. Êsses valores são denominados *raízes da equação.*

Observemos, atentamente, que uma equação do segundo grau, com uma incógnita, *não pode ter mais de duas raízes*, geralmente indicadas por x' e x''.

Passemos, agora, a resolver as equações incompletas, na ordem em que foram apresentadas:

1. *Equação da forma:* $ax^2 = 0$ $(a \neq 0)$

Dividindo ambos os membros da equação por a, vem:

$$x^2 = 0,$$

expressão que também pode ser escrita do seguinte modo:

$$x \cdot x = 0$$

Esta equação se verifica quando qualquer dos fatôres que compõem o primeiro membro fôr nulo, ou seja, para

$$x = 0 \text{ (indicada por } x' = 0)$$

e

$$x = 0 \text{ (indicada por } x'' = 0)$$

Diz-se, então, que:

> *Tôda equação do segundo grau da forma* $ax^2 = 0$ *tem uma* ***raiz dupla*** *nula, isto é, as suas duas raízes são iguais a zero* $(x' = 0,\ x'' = 0)$.

Exemplo: A equação $8x^2 = 0$, tem como raízes: $x' = 0$ e $x'' = 0$

2. *Equação da forma:* $ax^2 + c = 0$ $(a \neq 0,\ c \neq 0)$.

Transpondo c para o segundo membro, temos:

$$ax^2 = -c$$

$$\therefore\ x^2 = \frac{-c}{a}$$

Supondo que $\frac{-c}{a}$ seja um número positivo $\left(\frac{-c}{a} > 0\right)$, vem:

$$x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

e a equação proposta terá as duas raízes *simétricas:*

$$\begin{cases} x' = +\sqrt{\frac{-c}{a}} \\ x'' = -\sqrt{\frac{-c}{a}} \end{cases}$$

Se $\frac{-c}{a}$ fôr um número negativo $\left(\frac{-c}{a} < 0\right)$, a raiz $\pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$ será um número *imaginário*, e a equação *não terá raízes no campo real,* isto é, será IMPOSSÍVEL nesse campo. Logo:

> *Tôda equação do segundo grau, da forma:* $ax^2 + c = 0$, *quando possível, admite duas raízes simétricas, diferentes de zero* $\left(x' = +\sqrt{\frac{-c}{a}},\ x'' = -\sqrt{\frac{-c}{a}}\right)$.

Exemplo: Resolver a equação $3x^2 - 75 = 0$

Temos:

$$3x^2 = 75$$

$$x^2 = \frac{75}{3} = 25$$

$$\therefore x = \pm\sqrt{25} = \pm 5$$

Logo, as raízes são: $x' = +5$ e $x'' = -5$

3. *Equação da forma:* $ax^2 + bx = 0$ $(a \neq 0,\ b \neq 0)$.

Pondo x em evidência, vem:

$$x(ax + b) = 0$$

Como nesse produto de dois fatôres pelo menos um dêles deve ser nulo, temos:

$$x = 0$$

ou

$$ax + b = 0$$

A primeira destas equações tem raiz nula e a outra $x = -\frac{b}{a}$. Portanto, as raízes da equação proposta são:

$$\begin{cases} x' = 0 \\ x'' = -\frac{b}{a} \end{cases}$$

Logo:

> *Tôda equação do segundo grau, da forma:* $ax^2 + bx = 0$, *admite uma raiz nula e outra diferente de zero* $\left(x' = 0,\ x'' = -\frac{b}{a}\right)$

Exemplo: Resolver a equação $4x^2 - 12x = 0$

Colocando-se x em evidência, temos:

$$x(4x - 12) = 0$$

donde

$$x' = 0$$

e

$$4x - 12 = 0 \therefore 4x = 12 \text{ e } x'' = 3$$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

Resolver as seguintes equações incompletas do segundo grau:

1.ª) $\frac{x^2}{18} - 2 = 0$

Temos:

$x^2 - 36 = 0$

ou $x^2 = 36 \therefore x = \pm\sqrt{36} = \pm 6 \therefore \begin{cases} x' = +6 \\ x'' = -6 \end{cases}$

2.ª) $\frac{3y^2}{4} - \frac{1}{3} = 7 + \frac{y^2}{6}$

Eliminando os denominadores (m. m. c.: 12), temos:

$9y^2 - 4 = 84 + 2y^2$

Reduzindo os têrmos semelhantes, vem

$7y^2 = 88 \therefore y = \pm\sqrt{\frac{88}{7}}$

e portanto as raízes são $\begin{cases} y' = +\sqrt{\dfrac{88}{7}} \\ y'' = -\sqrt{\dfrac{88}{7}} \end{cases}$

3.ª) $-x + \dfrac{2}{5} = \dfrac{3x^2}{5} - \dfrac{4(x-1)}{10}$

Efetuando as transformações necessárias, vem

$-10x + 4 = 6x^2 - 4x + 4$

$-6x^2 - 6x = 0$

Multiplicando ambos os membros dessa equação por -1 e pondo x em evidência, temos:

$$x(6x + 6) = 0$$

donde $x = 0$ ou $6x + 6 = 0 \therefore 6x = -6 \therefore x = -1$

Logo, as raízes são $\begin{cases} x' = 0 \\ x'' = -1 \end{cases}$

EXERCÍCIOS SÔBRE EQUAÇÕES INCOMPLETAS DO SEGUNDO GRAU

Resolver as seguintes equações incompletas do segundo grau:

1. $5x^2 = 0$
2. $-7x^2 = 0$
3. $2x^2 = 50$
4. $x^2 - 1 = 0$
5. $4x^2 - 9 = 0$
6. $x^2 + 4 = 0$
7. $1 + 8x^2 = 1$
8. $-3x^2 + 27 = 0$
9. $10x^2 = 1\,000$
10. $\dfrac{x^2}{4} = 0$
11. $4x^2 - 5 = 5x^2 - 6$
12. $\dfrac{9x^2}{5} + 3 = \dfrac{1}{2} + x^2$
13. $4x^2 - 20 = 0$
14. $5x^2 - \dfrac{3}{4} = 3x^2 + \dfrac{1}{8}$
15. $\dfrac{7}{6x^2} - \dfrac{1}{2x^2} = 6$
16. $\dfrac{5x^2 - 1}{3} - \dfrac{2x^2 + 5}{2} = \dfrac{1}{6}$
17. $x^2 + \dfrac{3x}{4} = 0$
18. $\dfrac{-2x^2}{5} + 10x = 0$
19. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{3x}{2} = 0$
20. $\sqrt{2} \,.\, x^2 = 2x$
21. $3x^2 + 0{,}5x = 0$

22. $5x^2 - 2{,}3x + 0{,}08 = 0{,}08$
23. $(x - 2)\ (x - 3) = 6$
24. $(2x + 1)^2 - 1 = 0$
25. $2(x - 3)^2 - 1 = 17$
26. $(2x + 5)\ (2x - 5) = -44$
27. $(3x + 1)^2 + 17 = 6x + 1$
28. $\dfrac{x^2}{9} = x$
29. $\dfrac{2x^2 + 3x}{4} = \dfrac{4x^2}{3} - \dfrac{5x}{4}$
30. $3\left(\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x}{4}\right) = \dfrac{5x^2}{3}$
31. $\left(x + \dfrac{1}{3}\right)\left(x - \dfrac{1}{3}\right) = 3x - \dfrac{1}{9}$
32. $\dfrac{3x^2}{5} - \dfrac{x^2 + 5}{10} = x - \dfrac{1}{2}$
33. $\dfrac{1}{x - 1} - \dfrac{1}{x + 1} = 1$
34. $\dfrac{2}{x^2 - 1} + \dfrac{1}{x + 1} = -1$
35. $ax^2 = d\ (a \neq 0)$
36. $mx^2 - n = p\ (m \neq 0)$
37. $\dfrac{1}{x^2} = a\ (a \neq 0)$
38. $mx^2 + nx = 0\ (m \neq 0)$
39. $\dfrac{1}{k}x^2 = \dfrac{1}{m}x\ (m \neq 0,\ k \neq 0)$
40. $(x - t)^2 = t^2$

Respostas:

1. $x' = x'' = 0$
2. $x' = x'' = 0$
3. $x' = +5,\ x'' = -5$
4. $x' = +1,\ x'' = -1$
5. $x' = +\dfrac{3}{2},\ x'' = -\dfrac{3}{2}$
6. Impossível (no campo real)
7. $x' = x'' = 0$
8. $x' = +3,\ x'' = -3$
9. $x' = +10,\ x'' = -10$
10. $x' = x'' = 0$
11. $x' = +1,\ x'' = -1$
12. Impossível
13. $x' = +\sqrt{5},\ x'' = -\sqrt{5}$
14. $x' = +\dfrac{\sqrt{7}}{4},\ x'' = -\dfrac{\sqrt{7}}{4}$
15. $x' = +\dfrac{1}{3},\ x'' = -\dfrac{1}{3}$
16. $x' = +\dfrac{3}{\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2},\ x'' = \dfrac{-3}{\sqrt{2}} = -\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$
17. $x' = 0,\ x'' = -\dfrac{3}{4}$
18. $x' = 0,\ x'' = 25$
19. $x' = 0,\ x'' = -6$
20. $x' = 0,\ x'' = \sqrt{2}$
21. $x' = 0,\ x'' = -\dfrac{1}{6}$
22. $x' = 0,\ x'' = \dfrac{23}{50}$
23. $x' = 0,\ x'' = 5$
24. $x' = 0,\ x'' = -1$
25. $x' = 0,\ x'' = 6$
26. Impossível
27. Impossível
28. $x' = 0,\ x'' = 9$
29. $x' = 0,\ x'' = 2\dfrac{2}{5}$

30. $x' = 0,\ x'' = 4\frac{1}{2}$

31. $x' = 0,\ x'' = 3$

32. $x' = 0,\ x'' = 2$

33. $x' = +\sqrt{3},\ x'' = -\sqrt{3}$

34. $x' = 0$, ($x'' = -1$, não é solução, pois, anula os denominadores).

35. *para* $\frac{d}{a} \geqslant 0,\ x' = +\sqrt{\frac{d}{a}},\quad x' = -\sqrt{\frac{d}{a}}$

36. *para* $\frac{p+n}{m} \geqslant 0,\ x' = +\sqrt{\frac{p+n}{m}},\ x'' = -\sqrt{\frac{p+n}{m}}$

37. *para* $a > 0,\ x' = +\frac{\sqrt{a}}{a},\ x'' = -\frac{\sqrt{a}}{a}$

38. *para* $m \neq 0,\ x' = 0,\ x'' = -\frac{n}{m}$

39. *para* $m \neq 0,\ k \neq 0,\ x' = 0,\ x'' = \frac{k}{m}$

40. $x' = 0,\ x'' = 2t$

Ex

8. Resolução da equação completa. Seja a equação

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (1)$$

onde a, b e c, são todos os três diferentes de zero e a positivo. Essa equação é resolvida transformando-a numa equivalente, cujo primeiro membro, único que contém a incógnita, seja um *quadrado perfeito*. Para isso, faremos as seguintes transformações:

1.ª) multipliquemos ambos os membros da equação (1) por $4a$, obtemos:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

2.ª) somemos b^2 aos dois membros dessa equação e transportemos $4ac$ para o segundo membro; temos:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

Ora, o primeiro membro dessa equação é o *quadrado de* $2ax + b$; então:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac \qquad (2)$$

O binômio

$$b^2 - 4ac$$

que, com o seu *sinal*, caracteriza o estudo das equações do segundo grau, é denominado *discriminante* da equação

$ax^2 + bx + c = 0$ e é geralmente, representado por Δ (lê-se *delta*).

Com relação ao discriminante $b^2 - 4ac$, três hipóteses são possíveis:

1.ª) $b^2 - 4ac > 0$. Neste caso, podemos extrair a raiz quadrada de ambos os membros da (2), e temos:

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

donde

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

e portanto

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

A equação completa do segundo grau admitirá, assim, duas *raízes reais distintas* e que são respectivamente:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\[2ex] x'' = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{cases}$$

2.ª) $b^2 - 4ac = 0$. A equação (2), agora, se reduzirá a

$$(2ax + b)^2 = 0$$

ou

$$(2ax + b)\,(2ax + b) = 0$$

que é uma equação que se verifica com o anulamento de qualquer um dos fatôres que a compõem, isto é:

$$2ax + b = 0 \;\therefore\; x = \frac{-b}{2a}$$

e

$$2ax + b = 0 \;\therefore\; x = \frac{-b}{2a}$$

ou

$$\begin{cases} x' = \dfrac{-b}{2a} \\[2ex] x'' = \dfrac{-b}{2a} \end{cases}$$

Logo, no caso do discriminante *nulo*, a equação completa do segundo grau admitirá uma *raiz dupla* igual a $\frac{-b}{2a}$ ou seja, duas *raízes reais coincidentes*.

3.ª) $b^2 - 4ac < 0$. Neste caso, não é possível extrair a raiz quadrada de ambos os membros da equação (2) no campo real. Portanto, a equação completa do segundo grau, não admitindo raízes reais, diz-se *impossível nêsse campo*. As raízes da equação completa, nêsse caso, são *imaginárias*(**).

Concluímos, assim, que a limitação:

$$\boxed{b^2 - 4ac \geqslant 0} \quad (*)$$

dada pelas duas primeiras hipóteses, exprime a *condição de existência das raízes reais* (distintas ou coincidentes) de uma equação completa do segundo grau.

Pelo fato da fórmula

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

se manter verdadeira, como é fácil verificar, ainda nos casos particulares de $b = 0$ e $c = 0$, que originaram as equações incompletas, ela é denominada *fórmula resolutiva geral* da equação do segundo grau.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

Resolver as seguintes equações completas do segundo grau:

1.ª) $$6x^2 + 7x - 3 = 0$$

Nesta equação, temos: $a = 6$, $b = 7$ e $c = -3$.

Aplicando a fórmula resolutiva geral

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

e substituindo as letras pelos valores numéricos dados, obtemos:

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \times 6 \times (-3)}}{2 \times 6}$$

(*) Lê-se: discriminante *maior ou igual* a zero.

(**) A rigor a expressão exata seria *complexas*, que será vista no colégio.

ou

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 72}}{12} = \frac{-7 \pm \sqrt{121}}{12} = \frac{-7 \pm 11}{12}$$

donde as *raízes*

$$\begin{cases} x' = \dfrac{-7 + 11}{12} = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3} \\[2ex] x'' = \dfrac{-7 - 11}{12} = \dfrac{-18}{12} = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Observação: Essa mesma equação pode ser resolvida sem o auxílio da fórmula resolutiva, bastando para tanto aplicar o artifício usado para a dedução dessa fórmula. É evidente que êste modo de resolver a equação é mais trabalhoso. A título de exercício, porém, apliquemos o artifício em questão no exemplo estudado.

Seja $$6x^2 + 7x - 3 = 0$$

Multipliquemos por 4×6 ($4a$):

$$4 \times 6 \times 6x^2 + 4 \times 6 \times 7x - 4 \times 6 \times 3 = 0$$

Somemos 7^2 (b^2) a ambos os membros e transportemos $4 \times 6 \times 3$ ($4ac$):

$$4 \times 6 \times 6x^2 + 4 \times 6 \times 7x + 7^2 = 7^2 + 4 \times 6 \times 3$$

ou $$2^2 \times 6^2 \times x^2 + 2 \times 2 \times 6 \times 7x + 7^2 = 7^2 + 4 \times 6 \times 3$$

e portanto

$$(2 \times 6x + 7)^2 = 7^2 + 4 \times 6 \times 3$$

e como $$7^2 + 4 \times 6 \times 3 = 121 > 0$$

vem: $$2 \times 6x = -7 \pm \sqrt{7^2 + 4 \times 6 \times 3}$$

ou

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{121}}{2 \times 6} = \frac{-7 \pm 11}{12} \begin{cases} x' = -\dfrac{1}{3} \\[2ex] x'' = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

2.ª) $$-2x^2 + 6x - 3 = 0$$

Multiplicando ambos os membros por -1, vem:

$$2x^2 - 6x + 3 = 0$$

onde: $$a = 2,\ b = -6 \text{ e } c = 3$$

Aplicando a fórmula resolutiva, temos:

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \times 2 \times 3}}{2 \times 2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 24}}{4} =$$

$$= \frac{6 \pm \sqrt{12}}{4} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{4}$$

donde as raízes $\begin{cases} x' = \dfrac{6 + 2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3 + \sqrt{3}}{2} \\ x'' = \dfrac{6 - 2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3 - \sqrt{3}}{2} \end{cases}$

3.ª) $4x^2 = 12x - 9$

Transpondo os têrmos do segundo membro para o primeiro, vem:

$$4x^2 - 12x + 9 = 0$$

onde: $a = 4$, $b = -12$ e $c = 9$, que, substituidos na fórmula, dão:

$$x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \times 4 \times 9}}{2 \times 4} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 144}}{8} = \frac{12 \pm 0}{8}$$

donde: $\begin{cases} x' = \dfrac{12}{8} = \dfrac{3}{2} \\ x'' = \dfrac{12}{8} = \dfrac{3}{2} \end{cases}$ isto é, as raízes são *coincidentes*.

4.ª) $$\frac{x^2}{4} - 3(x - 1) = -\frac{3x^2}{2} - 1$$

Eliminando os denominadores (m. m. c. = 4), vem:

$$x^2 - 12(x - 1) = -6x^2 - 4$$

ou

$$x^2 - 12x + 12 = -6x^2 - 4$$

Reduzindo os têrmos semelhantes no primeiro membro, temos:

$$7x^2 - 12x + 16 = 0$$

Aplicando a fórmula, resulta:

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 448}}{14} = \frac{12 \pm \sqrt{-304}}{14} \text{ (raízes imaginárias)}$$

Logo, a equação proposta é *impossível* no campo dos números reais.

5.ª) $$\frac{x + 5}{x - 3} - \frac{x - 7}{x + 2} = 3 \quad (*)$$

Temos, m. m. c. = $(x - 3)(x+2)$. Eliminando os denominadores, vem:

$$(x+2)(x+5) - (x - 3)(x - 7) = 3(x - 3)(x+2)$$

ou $x^2 + 7x + 10 - x^2 + 10x - 21 = 3x^2 - 3x - 18$

ou ainda:

$$-3x^2 + 20x + 7 = 0$$

Multiplicando por -1:

$$3x^2 - 20x - 7 = 0$$

Donde:

$$x = \frac{20 \pm \sqrt{400 + 84}}{6} = \frac{20 \pm \sqrt{484}}{6} = \frac{20 \pm 22}{6} \therefore$$

$$\therefore \begin{cases} x' = \dfrac{20 + 22}{6} = 7 \\ x'' = \dfrac{20 - 22}{6} = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

6.ª) $x^2 - (a + b)x + ab = 0$ (equação literal)

Aplicando a fórmula, temos:

$$x = \frac{(a+b) \pm \sqrt{(a+b)^2 - 4ab}}{2} = \frac{(a+b) \pm \sqrt{a^2+2ab+b^2 - 4ab}}{2}$$

ou

$$x = \frac{(a+b) \pm \sqrt{a^2 - 2ab + b^2}}{2} = \frac{(a+b) \pm \sqrt{(a - b)^2}}{2} =$$

$$= \frac{(a+b) \pm (a - b)}{2}$$

(*) Os valores de x não devem *anular* os denominadores que figuram na equação, que é *fracionária*, porém, redutível ao segundo grau (estudo a ser feito no § 4, pág. 75) donde as raízes $\begin{cases} x' = \dfrac{a+b+a-b}{2} = \dfrac{2a}{2} = a \\ x'' = \dfrac{a+b-a+b}{2} = \dfrac{2b}{2} = b \end{cases}$

9. Discussão das raízes. Recordemos que a *existência*, ou *não*, das raízes da equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$ no campo real, depende do *discriminante*

Assim, temos: $\Delta = b^2 - 4ac$

1. se $\Delta > 0$ a equação admite duas *raízes reais:*

$$x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

que são *desiguais*, pelo fato de uma ser dada pela soma e outra pela diferença de duas quantidades não nulas;

2. se $\Delta = 0$, a equação admite *duas raízes reais e iguais* a $\dfrac{-b}{2a}$, pois,

$$x' = \frac{-b - \sqrt{0}}{2a} \quad \text{e} \quad x'' = \frac{-b - \sqrt{0}}{2a}$$

o que acarreta $x' = x'' = -\dfrac{b}{2a}$

3. se $\Delta < 0$, a equação é *impossível*, isto é, não admite raízes no campo real; as raízes são *imaginárias*.

Resumo $\begin{cases} \Delta > 0, & \textit{raízes reais e desiguais} \\ \Delta = 0, & \textit{raízes reais e iguais} \\ \Delta < 0, & \textit{não há raízes reais} \text{ (as raízes são imaginárias)} \end{cases}$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. Discutir a *existência* das raízes das seguintes equações:

1.ª) $3x^2 - 11x - 4 = 0$

Como: $a = 3$, $b = -11$ e $c = -4$, vem:

$$\Delta = (-11)^2 - 4 \times 3 \times (-4) = 121 + 48 = 169 > 0$$

(raízes reais e desiguais)

Temos, pois, as raízes $\begin{cases} x' = \dfrac{11 - \sqrt{169}}{6} = \dfrac{11 - 13}{6} = -\dfrac{1}{3} \\ x'' = \dfrac{11 + \sqrt{169}}{9} = \dfrac{11 + 13}{6} = 4 \end{cases}$

2.ª) $4x^2 - 4x + 1 = 0$

Temos: $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 4 \times 1 = 16 - 16 = 0$ *(raízes reais e iguais)*

Logo, $x' = x'' = \dfrac{4 \pm 0}{8} = \dfrac{1}{2}$

3.ª) $5x^2 + x + 3 = 0$

Temos: $\Delta = 1^2 - 4 \times 5 \times 3 = 1 - 60 = -59 < 0$ *(raízes imaginárias)*

Logo, não há raízes reais.

2. Dizer para que valores de m a equação

$$x^2 - 6x + m = 0$$

1.º) tem raízes reais e desiguais;
2.º) tem raízes reais e iguais;
3.º) não tem raízes reais.

Consideremos, inicialmente, o discriminante da equação proposta:

$$b^2 - 4ac = 36 - 4m$$

Devemos fazer as hipóteses:

1. $36 - 4m > 0$, que acarreta $-4m > -36 \therefore m < 9$;
2. $36 - 4m = 0$, „ „ $-4m = -36 \therefore m = 9$;
3. $36 - 4m < 0$, „ „ $-4m < -36 \therefore m > 9$.

Resposta: As raízes da equação proposta serão *desiguais* se $m < 9$; *iguais* se $m = 9$ e *não existirão no campo real* se $m > 9$.

3. Qual deve ser o valor de k, a fim de que as raízes da equação

$$x^2 + (k-1)\,x + k - 2 = 0$$

sejam *iguais?*

Para que as raízes da equação do segundo grau sejam iguais, é necessário que o discriminante seja nulo. Logo, fazendo $\Delta = 0$, vem

$$(k-1)^2 - 4(k-2) = 0$$

ou

$$k^2 - 2k + 1 - 4k + 8 = 0$$

$$k^2 - 6k + 9 = 0$$

cujas raízes são: $k' = k'' = 3$

Resposta: O valor de k, que torna *iguais* as raízes da equação proposta, é 3.

10. Fórmulas simplificadas A fórmula resolutiva se simplifica nos seguintes casos:

1.º) *O coeficiente de x^2 é igual à unidade* ($a = 1$). Nesse caso, a equação é escrita sob a forma

$$x^2 + px + q = 0$$

conhecida pelo nome de *forma p, q*. Aplicando a fórmula resolutiva, vem:

$$x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = \frac{-p}{2} \pm \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

ou

$$x = \frac{-p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2 - 4q}{4}} = \frac{-p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

e, finalmente:

$$\boxed{x = \frac{-p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$$

Aplicação: Resolver a equação

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

Temos: $p = 6$ e $q = 8$; aplicando a *forma p, q* vem:

$$x = \frac{6}{2} \pm \sqrt{\frac{36}{4} - 8} = 3 \pm \sqrt{9-8} = 3 \pm 1$$

donde as raízes $\begin{cases} x' = 3 + 1 = 4 \\ x'' = 3 - 1 = 2 \end{cases}$

2.º) *O coeficiente de x é um número par* ($b = 2k$) (*) Se b é par, temos $b = 2k$; aplicando a fórmula resolutiva na equação.

$$ax^2 + 2kx + c = 0$$

vem:

$$x = \frac{-2k \pm \sqrt{4k^2 - 4 \times a \times c}}{2a} = \frac{-2k \pm \sqrt{4(k^2 - ac)}}{2a}$$

e, finalmente:

$$\boxed{x = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}}$$

Aplicação: Resolver a equação

$$5x^2 + 8x - 4 = 0$$

Temos: $2k = 8 \therefore k = 4$; aplicando a fórmula acima, vem:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{5} = \frac{4 \pm 6}{5} \therefore \begin{cases} x' = 2 \\ x'' = -\dfrac{2}{5} \end{cases}$$

EXERCÍCIOS SÔBRE EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU

Resolver as equações do segundo grau que se seguem. Como prática, as três primeiras devem ser resolvidas, também, *sem o auxílio* da fórmula resolutiva.

1. $2x^2 - 9x - 5 = 0$
2. $-3x^2 + 10x - 3 = 0$
3. $y^2 + 8y + 15 = 0$
4. $4x^2 - 12x + 9 = 0$
5. $2z^2 + 3z + 25 = 0$
6. $-x^2 + 10x - 25 = 0$
7. $x^2 + 12x = 160$
8. $x^2 - 32 = 4x$
9. $x^2 + 24x = 15 + 10x$
10. $0{,}2 + 0{,}8y = y^2$
11. $1{,}2x^2 + 0{,}1x - 0{,}6 = 0$
12. $x^2 + 140 = 20 - 26x$
13. $x(x-1) - 60 = 60 + x$
14. $t(t-15) - 100 = 0$
15. $(x+5)(x+2) = 40$
16. $(x-20)(x+20) + 42x = 0$
17. $(y+1)^2 = 3 + y$
18. $(2x+2)^2 = -16$

(*) Forma geral dos números pares: $2k$ (ou seja, um múltiplo de 2).

19. $(2x+1)^2 = 0$

20. $u^2 - 2u - 1 = 0$

21. $x^2 + 4x - 1 = 0$

22. $\dfrac{8}{100} = 0{,}6x - x^2$

23. $x^2 + 2\sqrt{5}.x - 1 = 0$

24. $3t^2 + t + 1 = 0$

25. $2x^2 - 4\sqrt{2}.x + 2 = 0$

26. $\left(\dfrac{x}{3} - 4\right)^2 = 0$

27. $z^2 + \dfrac{3}{32} = \dfrac{7z}{8}$

28. $\dfrac{y^2}{3} - \dfrac{y}{9} = \dfrac{8}{3}$

29. $x^2 - \dfrac{x}{12} = \dfrac{1}{12}$

30. $\dfrac{7x}{24} = \dfrac{1}{4} - x^2$

31. $3x^2 + \dfrac{4}{3} = -4x$

32. $6v + 5v^2 + \dfrac{9}{5} = 0$

33. $(x-8)^2 + (x-1)^2 = (x+1)^2$

34. $\dfrac{x-1}{2} - \dfrac{3x - x^2}{3} = x + \dfrac{1}{3}$

35. $\dfrac{3x-1}{7} - \dfrac{9x+3}{16} = \dfrac{x^2-4}{7} - \dfrac{(x-1)^2}{4}$

36. $\dfrac{9}{x} - \dfrac{x}{3} = 2$

37. $y + \dfrac{1}{y-3} = 5$

38. $\dfrac{x}{7} + \dfrac{21}{x+5} = \dfrac{47}{7}$

39. $x\left(\dfrac{10}{3} + x\right) = \dfrac{8}{3}$

40. $\dfrac{x}{x+1} + \dfrac{x}{x+4} = 1$

41. $\dfrac{15}{x} - \dfrac{72-6x}{2x^2} = 2$

42. $\dfrac{x+1}{x} + 1 = \dfrac{x}{x-1}$

43. $\dfrac{2x-1}{x+1} = \dfrac{x+1}{x-1}$

44. $3t^2 = \dfrac{2}{5}\left(t + \dfrac{4}{5}\right) + 2t^2$

45. $\dfrac{6}{x^2-1} - \dfrac{3}{x+1} = 2 - \dfrac{3}{x+1}$

46. $\dfrac{2x-1}{x+1} - \dfrac{2x-3}{x-2} + \dfrac{7}{6} = 0$

47. $\dfrac{x+1}{x} - \dfrac{5}{x-2} = 2$

48. $\dfrac{x+1}{x-1} + \dfrac{x+2}{x-2} = \dfrac{2x+13}{x+1}$

49. $\dfrac{2x+1}{x+1} - \dfrac{x+1}{x+2} = \dfrac{x-1}{x-2}$

50. $\dfrac{1}{3x^2-27} + \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{x-3} = 1$

Equações literais

51. $x^2 - 4ax + 3a^2 = 0$

52. $x^2 - 8ax + 15a^2 = 0$

53. $x^2 + (a+b)x + ab = 0$

54. $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$

55. $x^2 - 2abx - a^2b^2 = 0$

56. $4x^2 - 2(a+b)x + ab = 0$

57. $\dfrac{x^2 - a^2}{4b} = x - b$

58. $x^2 + \dfrac{a+b}{m}x + \dfrac{ab}{m^2} = 0$

59. $x^2 - \left(\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}\right)x + 1 = 0$

60. $\dfrac{x}{x-a} - \dfrac{2a}{x+a} = \dfrac{8a^2}{x^2-a^2}$

Discussão da existência das raízes

61. $3x^2 - 10x + 3 = 0$

62. $x^2 - 8x + 16 = 0$

63. $-2y^2 + y - 5 = 0$

64. $5x^2 - 6x = 0$

65. $6t^2 + 5 = 0$

66. Para que valores de m a equação $x^2 - 4x + m = 0$: 1.º) admite raízes reais desiguais; 2.º) admite raízes reais iguais; 3.º) não admite raízes (no campo real).

67. Mesmo problema com a equação $x^2 - 8x - n = 0$.

68. Determinar o valor de n para que as raízes da equação

$$(n-1)x^2 + 2(1-n)x + 3n = 0$$

sejam iguais.

69. Determinar os valores de k, a fim de que a equação

$$x^2 + 2kx + 7k^2 = 0$$

admita raízes desiguais.

70. Para que valores de m a equação

$$(4m-1)x^2 + 12mx + 9m - 8 = 0$$

tem raízes desiguais?

Respostas:

1. $x' = 5,\ x'' = -\dfrac{1}{2}$
2. $x' = 3,\ x'' = \dfrac{1}{3}$
3. $y' = -3,\ y'' = -5$
4. $x' = x'' = \dfrac{3}{2}$
5. Impossível (*no campo real*).
6. $x' = x'' = 5$
7. $x' = 8,\ x'' = -20$
8. $x' = -4,\ x'' = 8$
9. $x' = 1,\ x'' = -15$
10. $y' = 1,\ y'' = -0{,}2$
11. $x' = \dfrac{2}{3},\ x'' = -\dfrac{3}{4}$
12. $x' = -6,\ x'' = -20$
13. $x' = 12,\ x'' = -10$
14. $t' = +20,\ t'' = -5$
15. $x' = 3,\ x'' = -10$
16. $x' = 8,\ x'' = -50$
17. $y' = 1,\ y'' = -2$
18. Impossível
19. $x' = x'' = -\dfrac{1}{2}$
20. $u' = 1 + \sqrt{2},\ u'' = 1 - \sqrt{2}$

21. $x' = -2 + \sqrt{5}, x'' = -2 - \sqrt{5}$ | 22. $x' = 0{,}2;\ x'' = 0{,}4$

23. $x' = -\sqrt{5} + \sqrt{6},\ x'' = -\sqrt{5} - \sqrt{6}$

24. Impossível

25. $x' = \sqrt{2} + 1,\ x'' = \sqrt{2} - 1$

26. $x' = x'' = 12$

27. $z' = \frac{3}{4},\ z'' = \frac{1}{8}$

28. $y' = 3,\ y'' = -\frac{8}{3}$

29. $x' = \frac{1}{3},\ x'' = -\frac{1}{4}$

30. $x' = \frac{3}{8},\ x'' = -\frac{2}{3}$

31. $x' = x'' = -\frac{2}{3}$

32. $v' = v'' = -\frac{3}{5}$

33. $x' = 16,\ x'' = 4$

34. $x' = 5,\ x'' = -\frac{1}{2}$

35. $x' = \frac{11}{12},\ x'' = 5$

36. $x' = 3,\ x'' = -9$

37. $y' = y'' = 4$

38. $x' = 44,\ x'' = -2$

39. $x' = \frac{2}{3},\ x'' = -4$

40. $x' = +2,\ x'' = -2$

41. $x' = 6,\ x'' = 3$

42. $x' = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},\ x'' = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$

43. $x' = 0,\ x'' = 5$

44. $t' = \frac{4}{5},\ t'' = -\frac{2}{5}$

45. $x' = 2,\ x'' = -2$

46. $x' = \frac{31 + 3\sqrt{57}}{14},\ x'' = \frac{31 - 3\sqrt{57}}{14}$

47. Impossível

48. $x' = 5,\ x'' = 1{,}2$

49. $x' = 0,\ x'' = -4$

50. $x' = \frac{-6 + \sqrt{21}}{3},\ x'' = \frac{-6 - \sqrt{21}}{3}$

51. $x' = 3a,\ x'' = a$

52. $x' = 5a,\ x'' = 3a$

53. $x' = -a,\ x'' = -b$

54. $x' = a + b,\ x'' = a - b$

55. $x' = ab\,(1 + \sqrt{2}),\ x'' = ab\,(1 - \sqrt{2})$

56. $x' = \frac{a}{2},\ x'' = \frac{b}{2}$

57. $x' = 2b + a,\ x'' = 2b - a$

58. $x' = \frac{-a}{m},\ x'' = \frac{-b}{m}\ (m \neq 0)$

59. $x' = \frac{a}{b},\ x'' = \frac{b}{a}\ (a \neq 0,\ b \neq 0)$

60. $x' = 3a,\ x'' = -2a$

61. raízes reais e desiguais

62. raízes reais e iguais

63. não há raízes reais

64. raízes reais e desiguais

65. não há raízes reais

66. 1.º) $m < 4$, 2.º) $m = 4$, 3.º) $m > 4$

67. 1.º) $n > -16$, 2.º) $n = -16$, 3.º) $n < -16$

68. $-\frac{1}{2}$ (*) 69. Impossível 60. $m > \frac{8}{41}\ \left(\neq \frac{1}{4}\right)$

Ex

RELAÇÕES ENTRE OS COEFICIENTES E AS RAÍZES

11. Relações principais. Das relações existentes entre os coeficientes a, b, c e as raízes x' e x'' da equação $ax^2+bx+c=0$ $(\Delta \geqslant 0)$, as mais importantes são as relativas à *soma* e ao *produto* das raízes. Essas relações serão estudadas a seguir.

Primeira relação: *A soma das raízes da equação do segundo grau* $ax^2 + bx + c = 0$ *é igual a* $\frac{-b}{a}$.

$$\boxed{x' + x'' = -\frac{b}{a}}$$

De fato, sejam as raízes

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Somando, membro a membro, obtemos:

$$x' + x'' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ou

$$x' + x'' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} - b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

(*) O outro valor de n $(n = 1)$, como é óbvio, não pode ser considerado.

portanto

$$x' + x'' = -\frac{b}{a}$$

Segunda relação: *O produto das raízes da equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$ é igual a $\frac{c}{a}$.*

$$\boxed{x' \cdot x'' = \frac{c}{a}}$$

Com efeito, multiplicando, agora, membro a membro, as igualdades que dão as raízes x' e x'', temos

$$x' \cdot x'' = \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) \cdot \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) =$$

$$= \frac{(-b + \sqrt{b^2 - 4ac}) \quad (-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}{4a^2} \ (*)$$

$$x' \cdot x'' = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{b^2 - 4ac})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} =$$

$$= \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Portanto:

$$x' \cdot x'' = \frac{c}{a}.$$

Exemplo:

Na equação $3x^2 - 10x + 3 = 0$, onde $a = 3$, $b = -10$ e $c = 3$ e as raízes são $x' = 3$ e $x'' = \frac{1}{3}$, temos:

$$x' + x'' = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3} = \frac{-b}{a}$$

$$x' \cdot x'' = 3 \times \frac{1}{3} = 1 = \frac{c}{a}$$

e as relações entre os coeficientes e as raízes se verificaram.

(*) Produto da *soma* pela *diferença* de duas expressões, que é igual à *diferença dos quadrados* dessas expressões.

Observação. Se na equação do segundo grau o coeficiente $a = 1$, vem:

$$x^2 + px + q = 0 \qquad \text{(forma } p,\ q\text{)}$$

$$\text{onde} \begin{cases} x' + x'' = \dfrac{-p}{1} = -p \\ x' \cdot x'' = \dfrac{q}{1} = q \end{cases}$$

deduz-se que tôda equação do segundo grau, cujo coeficiente de x^2 é igual a 1, satisfaz as duas seguintes relações:

1.ª) *A soma das raízes é igual ao coeficiente de x com o sinal trocado* $(-p)$.

2.ª) *O produto das raízes é igual ao têrmo constante* (q).

Representando p por S (soma) e q por P (produto) podemos, para melhor memorizar êstes resultados, escrever a equação em estudo da seguinte maneira:

$$\boxed{x^2 - Sx + P = 0}$$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1.º) Na equação $x^2 - mx + 36 = 0$, determinar m de modo que uma de suas raízes seja igual a 9.

Pelas relações entre as raízes e os coeficientes, devemos ter:

$$x' + x'' = m$$
$$x' \cdot x'' = 36$$

Sendo $x' = 9$, segue-se, em virtude do produto ser 36, que $x'' = 4$, e, portanto:

$$m = x' + x'' = 9 + 4 = 13$$

Resposta: O valor de m é 13.

2.º) Determinar p na equação $x^2 - 8x + p = 0$, de modo que uma das raízes seja o *triplo* da outra.

Temos, pela condição do problema e pelas relações estudadas, as seguintes equações:

$$x' = 3x''$$
$$x' + x'' = 8$$
$$x' \cdot x'' = p$$

Substituindo o valor de x' na segunda equação, vem:

$$3x'' + x'' = 8 \;.\dot{}.\; 4x'' = 8 \;.\dot{}.\; x'' = 2$$

e, portanto:

$$x' = 3x'' = 3 \times 2 = 6$$

Logo, $p = x' \,.\, x'' = 6 \times 2 = 12$

Resposta: O valor de p deve ser 12.

3.ª) Determinar o valor de m na equação

$$3x^2 - \left(2m + \frac{1}{5}\right)x + 1 = 0$$

de modo que a soma de suas raízes seja igual a $\frac{1}{3}$.

Sendo $a = 3$ e $b = -\left(2m + \frac{1}{5}\right)$, pelas relações conhecidas, temos:

$$x' + x'' = \frac{2m + \frac{1}{5}}{3}$$

e como no problema a soma das raízes é igual a $\frac{1}{3}$, vem:

$$\frac{2m + \frac{1}{5}}{3} = \frac{1}{3} \text{ ou } 2m + \frac{1}{5} = 1 \;.\dot{}.\; 2m = \frac{4}{5} \;.\dot{}.\; m = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

Resposta: m deve ser igual a $\frac{2}{5}$.

4.º) Calcular m de modo que a equação $x^2 - 15x + (8m+2) = 0$, tenha a diferença das raízes igual a 5.

Temos:

$$x' + x'' = 15 \qquad (1)$$
$$x' \,.\, x'' = 8m + 2 \qquad (2)$$
$$x' - x'' = 5 \qquad (3)$$

De (1) e (3) vem $\begin{cases} x' + x'' = 15 \\ x' - x'' = 5 \end{cases}$ que dá: $x' = 10$ e $x'' = 5$

Como: $x' \,.\, x'' = 8m+2$, vem $8m+2 = 50 \;.\dot{}.\; m = \frac{48}{8} = 6$

Resposta: $m = 6$

Ex

CONSEQÜÊNCIAS

Ex

12. Primeira aplicação: ***composição da equação dadas as raízes.*** Podemos, agora, resolver o seguinte problema: *formar a equação do segundo grau que tenha como raízes dois números* (*) *dados.*

A equação procurada será da forma:

$$x^2 - Sx + P = 0,$$

onde o coeficiente de x^2 é a unidade, S a *soma* e P o *produto* das raízes.

Exemplos:

1.º) *Formar* a equação do segundo grau que admita 2 e 5 como *raízes.*

Como $x' = 2$, $x'' = 5$ e sendo $S = 2 + 5 = 7$, $P = 2 \times 5 = 10$

temos, substituindo êstes valores na equação $x^2 - Sx + P = 0$,

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

que é a equação procurada.

2.º) Qual a equação do segundo grau que tem -3 e $\frac{1}{4}$ como raízes?

Temos $x' = -3$, $x'' = \frac{1}{4}$ onde $\begin{cases} S = -3 + \frac{1}{4} = \frac{-12+1}{4} = \frac{-11}{4} \\ P = (-3) \,.\, \frac{1}{4} = \frac{-3}{4} \end{cases}$

e a equação procurada será:

$$x^2 + \frac{11}{4}x - \frac{3}{4} = 0$$

ou

$$4x^2 + 11x - 3 = 0$$

(*) Ou expressões.

3.º) Formar a equação do segundo grau cujas raízes sejam $u + v$ e $u - v$.

Temos: $\begin{aligned} x' &= u + v \\ x'' &= u - v \end{aligned}$ onde $\begin{cases} S = u + v + u - v = 2u \\ P = (u+v)(u-v) = u^2 - v^2 \end{cases}$

e a equação que se quer formar é:

$$x^2 - 2ux + u^2 - v^2 = 0$$

13. Segunda aplicação: ***Determinação de dois números (ou duas expressões) conhecidos a sua soma e o seu produto.***

Os números procurados são as raízes da equação

$$x^2 - Sx + P = 0$$

Exemplo.

Determinar dois números cuja soma é 19 e cujo produto é 84.

Devemos ter:

$$S = 19 \quad \text{e} \quad P = 84$$

e, portanto, os números procurados são as raízes da equação

$$x^2 - 19x + 84 = 0$$

isto é:

$$x' = 12 \text{ e } x'' = 7$$

Resposta: Os números procurados são 12 e 7.

14. Terceira aplicação: ***Determinação dos sinais das raízes (Regra de Descartes).***

Seja a equação do segundo grau

$$ax^2 + bx + c = 0$$

onde a é considerado positivo. Os coeficientes a, b e c podem apresentar as seguintes combinações de sinais:

	a	b	c
I.	+	+	+
II.	+	−	+
III.	+	+	−
IV.	+	−	−

Lembrando que

$$x' + x'' = -\frac{b}{a} \quad \text{e} \quad x' \,.\, x'' = \frac{c}{a}$$

observemos os sinais das raízes x' e x'' estudando as combinações acima:

	$x' \,.\, x''$	$x' + x''$	Sinais das raízes (x' e x'')
I	+	−	ambas negativas
II	+	+	ambas positivas
III	−	−	uma negativa e outra positiva (a negativa é a de maior valor absoluto)
IV	−	+	uma positiva e outra negativa (a positiva é a de maior valor absoluto)

Portanto

	a	b	c	x'	x''
I	+	+	+	−	−
II	+	−	+	+	+
III	+	+	−	−	+
IV	+	−	−	+	−

Êstes resultados podem ser guardados pela *Regra dos Sinais de Descartes*, baseada na *permanência* e na *variação* dos sinais dos números a, b e c. Tôda vez que dois dêsses números consecutivos tenham *sinais iguais*, êles apresentam uma *permanência*, e tôda vez que os sinais são diferentes, uma *variação*. Dessa forma, vem imediatamente:

I. com duas *permanências* (+ + +) temos { *duas raízes negativas*

II. com *duas variações*.... (+ − +) temos { *duas raízes positivas*

III. com *1 perm.* e *1 varia.* (+ + −) temos { *duas raízes de sinais contrários* (a neg. é a maior em v. absoluto)

IV. com *1 varia.* e *1 perm.* (+ − −) temos { *duas raízes de sinais contrários* (a pos. é a maior em v. absoluto)

Temos, assim, a seguinte *Regra dos Sinais de Descartes*:

"Uma equação do segundo grau, de *discriminante positivo*, tem tantas *raízes positivas* quantas as *variações* apresentadas pelos seus coeficientes e tantas *raízes negativas* quantas as *permanências;* no caso da equação apresentar *uma variação* e *uma permanência* (nessa ordem) as duas raízes são de *sinais contrários*, sendo positiva a de maior valor absoluto, e em caso oposto (*permanência* e *variação*) as duas raízes têm *sinais contrários*, sendo, porém, negativa a de maior valor absoluto".

EXERCÍCIOS DE APLICAÇAO

Determinar os *sinais* das raízes das seguintes equações:

1.ª) $x^2 + 5x + 6 = 0$ como $\Delta = 1 > 0$

temos: $+ + +$ (2 permanências), e portanto as duas raízes são *negativas* $(x' = -3,\ x'' = -2)$.

2,ª) $3x^2 + 11x - 4 = 0$ $(\Delta = 169 > 0)$

Temos: $+ + -$ (1 perm. e 1 varia.), logo as duas raízes têm *sinais contrários*, sendo negativa a de maior valor absoluto $\left(x' = \frac{1}{3},\ x'' = -4\right)$.

3.ª) $6x^2 - 5x + 1 = 0$ $(\Delta = 1 > 0)$

Temos: $+ - +$ (2 variações), logo as duas raízes são *positivas* $\left(x' = \frac{1}{2},\ x'' = \frac{1}{3}\right)$.

4.ª) $-3x^2 + x + 10 = 0$ $(\Delta = 121 > 0)$

Temos: $- + +$ (1 varia. e 1 perm.), logo as duas raízes têm *sinais contrários*, sendo positiva a de maior valor absoluto $\left(x' = 2,\ x'' = -\frac{5}{3}\right)$.

NOTA: Ver no *Apêndice*, pág. 207, o estudo de *sistemas simples do segundo grau.*

EXERCÍCIOS SÔBRE AS RELAÇÕES ENTRE OS COEFICIENTES E AS RAÍZES

1. Determinar m na equação $x^2 - 8x + m = 0$, de modo que

1.º) uma das raízes seja igual a $\frac{4}{5}$;

2.º) uma das raízes seja nula;

3.º) as raízes sejam inversas entre si $\left(x' = \frac{1}{x''}\right)$;

4.º) a soma dos quadrados das raízes seja igual a 40.

2. Na equação $x^2 - nx + 36 = 0$, determinar n de modo que:

1.º) $x' = 4$

2.º) $x' = x''$

3.º) $x' = -x''$ (simétricas)

4.º) $x' = 4\sqrt{3}$.

3. Determinar k na equação: $x^2 - (k + 4)x + (4k + 1) = 0$, a fim de que

1.º) as raízes sejam reais e iguais;

2.º) as raízes sejam reais e simétricas;

3.º) uma das raízes seja nula.

4. Calcular m, a fim de que a equação $x^2 - 12x + (17m - 2) = 0$ tenha a diferença das raízes igual a 4.

5. Formar as equações do segundo grau que tenham como raízes, respectivamente:

idem pag 50

1.º) 2 e 5;

2.º) 7 e -3;

3.º) -1 e $+1$;

4.º) -8 e -7;

5.º) $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$;

6.º) $\frac{2}{5}$ e $-\frac{3}{4}$;

7.º) $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{3}$

8.º) 3 e 0,5;

9.º) -4 e $\frac{2}{9}$;

10.º) $-0{,}02$ e $\frac{1}{5}$;

11.º) -4 e $-\frac{11}{2}$;

12.º) $\frac{15}{2}$ e $\frac{45}{2}$;

13.º) $3 + \sqrt{2}$ e $3 - \sqrt{2}$

14.º) $\sqrt{2} + 1$ e $\sqrt{2} - 1$;

15.º) $\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}$ e $\dfrac{1-\sqrt{21}}{2}$;

16.º) $\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$ e $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$

17.º) a e b;

18.º) a e $-a$;

19.º) $\dfrac{a}{2}$ e $\dfrac{-b}{3}$;

20.º) $a+b$ e $a-b$;

21.º) $\dfrac{1}{a+b}$ e $\dfrac{1}{a-b}$

22.º) $a+b$ e $\dfrac{1}{a+b}$;

23.º) $\dfrac{a+b}{a-b}$ e $\dfrac{a-b}{a+b}$;

24.º) a^2-b^2 e a^2+b^2;

25.º) $a+\sqrt{b}$ e $a-\sqrt{b}$;

6. Determinar dois números que tenham, respectivamente, por *soma* e por *produto*:

1.º) 18 e 45;

2.º) 14 e 49;

3.º) 4 e -12;

4.º) -10 e 16;

5.º) -10 e 21;

6.º) $\dfrac{17}{12}$ e $\dfrac{1}{2}$;

7.º) $\dfrac{19}{2}$ e 22;

8.º) 6 e 7

9.º) 2 e $\dfrac{1}{2}$;

10.º) $(a+b)$ e ab;

11.º) $2a$ e a^2-b^2;

12.º) $2a$ e a^2-b;

7. Determinar, pela Regra de Descartes, os sinais das raízes das seguintes equações:

1.ª) $x^2+8x+12=0$

2.ª) $5x^2-12x-50=0$

3.ª) $3x^2+5x-4=0$

4.ª) $3x^2-\dfrac{5}{2}x+\dfrac{1}{2}=0$

5.ª) $x^2-8x+16=0$

6.ª) $-2x^2-x+1=0$

NOTA: *Exercícios* sôbre *sistemas do 2.º grau*, pág. 212.

RESPOSTAS:

1. 1.º) $\dfrac{144}{25}$; 2.º) 0; 3.º) 1; 4.º) 12.

2. 1.º) 13; 2.º) ± 12; 3.º) impossível ($n=0$); 4.º) $7\sqrt{3}$.

3. 1.º) 6 e 2; 2.º) -4; 3.º) $-\dfrac{1}{4}$.

4. $m=2$

5. 1.º) $x^2-7x+10=0$; 2.º) $x^2-4x-21=0$; 3.º) $x^2-1=0$; 4.º) $x^2+15x+56=0$; 5.º) $12x^2-17x+6=0$; 6.º) $20x^2+$

$+7x-6=0$; 7.º) $9x^2-6x+1=0$; 8.º) $2x^2-7x+3=0$; 9.º) $9x^2+34x-8=0$; 10.º) $250x^2-45x-1=0$; 11.º) $2x^2+19x+44=0$; 12.º) $4x^2-120x+675=0$; 13.º) $x^2-6x+7=0$; 14.º) $x^2-2\sqrt{2}x+1=0$; 15.º) $x^2-x-5=0$; 16.º) $2x^2-4x+1=0$; 17.º) $x^2-(a+b)x+ab=0$; 18.º) $x^2-a^2=0$; 19.º) $6x^2-(3a-2b)x-ab=0$; 20º) $x^2-2ax+a^2-b^2=0$; 21.º) $(a^2-b^2)x^2-2ax+1=0$; 22.º) $(a+b)x^2-[(a+b)^2+1]x+(a+b)=0$; 23.º) $(a^2-b^2)x^2-2(a^2+b^2)x+(a^2-b^2)=0$; 24.º) $x^2-2a^2x+(a^4-b^4)=0$; 25.º) $x^2-2ax+a^2-b=0$.

6. 1.º) 3 e 15; 2.º) 7 e 7; 3.º) -2 e 6; 4.º) -8 e -2; 5.º) -3 e -7; 6.º) $\dfrac{2}{3}$ e $\dfrac{3}{4}$; 7.º) $+4$ e $+\dfrac{11}{2}$; 8.º) $3+\sqrt{2}$ e $3-\sqrt{2}$; 9.º) $\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$ e $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$; 10.º) a e b; 11.º) $a+b$ e $a-b$; 12.º) $a+\sqrt{b}$ e $a-\sqrt{b}$.

7. 1.ª) negativas; 2.ª) sinais contrários, sendo positiva a de maior valor absoluto; 3.ª) sinais contrários, sendo negativa a de maior valor absoluto; 4.ª) positivas; 5.ª) positivas; 6.ª) sinais contrários, sendo negativa a de maior valor absoluto.

§3. Trinômio do segundo grau. Inequações do segundo grau.

ESTUDO DO TRINÔMIO DO SEGUNDO GRAU

15. Definição. Chama-se *trinômio do segundo grau* a todo polinômio da forma

$$ax^2+bx+c \text{ (*)}$$

onde a, b e c, são números reais, sendo o coeficiente *a diferente de zero*, e x uma variável que pode assumir todos os valores do campo real, ou, como se costuma dizer, uma variável que pode tomar todos os valores desde $-\infty$ até $+\infty$ (lê-se "de menos infinito a mais infinito").

Exemplo: $3x^2-10x+3$

(*) Não confundir o trinômio do segundo grau com a equação do segundo grau, é que uma igualdade ($ax^2+bx+c=0$).

falar com o meio

Ex

16. Valor numérico. Supondo que a variável x assuma sucessivamente, em ordem crescente, os valores do campo real, teremos que, em correspondência, variará também o valor do trinômio $ax^2 + bx + c$. Indicando por y o valor numérico que o trinômio assume para um determinado valor de x, podemos escrever:

$$y = ax^2 + bx + c$$

e dizer que y (valor do trinômio) é ***função*** da variável x.

Determinemos, por exemplo, o valor numérico do trinômio

$$y = 3x^2 - 10x + 3$$

Para cada um dos seguintes valores de x: -1, 0, $\frac{1}{2}$ e 3, obteremos:

para $x = -1$, $y = 3(-1)^2 - 10(-1) + 3 = 3 + 10 + 3 = 16$

donde $y_{(-1)}^{(*)} = 16$

para $x = 0$, $y = 3(0)^2 - 10(0) + 3 = 3$, donde $y_{(0)} = 3$

para $x = \frac{1}{2}$, $y = 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 10\left(\frac{1}{2}\right) + 3 = \frac{3}{4} - 5 + 3 = -\frac{5}{4}$

donde $y_{(\frac{1}{2})} = -\frac{5}{4}$

para $x = 3$, $y = 3 \,.\, (3)^2 - 10(3) + 3 = 27 - 30 + 3 = 0$

donde $y_{(3)} = 0$

17. Raízes ou zeros. Os valores de x que anulam o trinômio, isto é que tornam y nulo, são denominados *raízes* ou *zeros* do trinômio. É óbvio que essas raízes são as raízes da equação do segundo grau que se obtém igualando a zero o trinômio, ou seja

$$ax^2 + bx + c = 0$$

As raízes do trinômio do segundo grau serão também indicadas por x' e x''.

(*) Representação do valor numérico do trinômio y para $x = -1$

No exemplo dado, 3 é uma das raízes do trinômio $3x^2 - 10x + 3$.

Lembrando o que estudamos sôbre as equações do segundo grau (n.º 9), onde $\Delta = b^2 - 4ac$ é o *discriminante*, temos que:

1. Se $\Delta > 0$, x' e x'' são reais e desiguais;
2. Se $\Delta = 0$, x' e x'' são reais e iguais;
3. Se $\Delta < 0$, não há raízes reais, ou seja, nenhum número real anulará o trinômio.

Ex

18. Decomposição em fatôres do primeiro grau. Consideremos o trinômio do segundo grau

$$ax^2 + bx + c$$

e suponhamos que admita *raízes reais*, isto é, $\Delta \geqslant 0$. Sejam x' e x'' as suas raízes. Recordemos as relações entre os coeficientes e as raízes de uma equação do segundo grau (n.º 11), onde

$$\begin{cases} x' + x'' = -\dfrac{b}{a} \quad \therefore \quad \dfrac{b}{a} = -(x'+x'') \\ x' \,.\, x'' = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

Colocando o coeficiente a do trinômio considerado em evidência, vem:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

e, substituindo $\frac{b}{a}$ e $\frac{c}{a}$ pelos valores dados acima, temos:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left[x^2 - (x'+x'')\,x + x'x''\right] = \\ &= a\left[x^2 - x'x - x''x + x'x''\right] = \\ &= a\left[x\,(x - x') - x''(x - x')\right] = \\ &= a\,(x - x')\,(x - x'') \end{aligned}$$

Logo, a igualdade

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a\,(x - x')\,(x - x'')}$$

dá a *decomposição do trinômio do segundo grau em fatôres do primeiro grau.*

No caso particular em que $x' = x''$, a decomposição se reduzirá à forma:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x')^2$$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1.º) Decompor em fatôres do primeiro grau o trinômio

$$2x^2 - 5x - 3$$

Temos:

$$a = 2, \qquad b = -5 \qquad \text{e} \qquad c = -3$$

e, portanto, $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 25 + 24 = 49 > 0$ (raízes reais desiguais).

Sendo $x' = 3$ e $x'' = -\frac{1}{2}$ as raízes, a decomposição será:

$$2x^2 - 5x - 3 = 2(x-3)\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

ou, multiplicando por 2 o último fator:

$$2x^2 - 5x - 3 = (x-3)\ (2x+1)$$

2.º) Decompor o trinômio

$$y = -4x^2 + 12x - 9$$

Temos: $a = -4$, $b = 12$, $c = -9$ e $\Delta = (12)^2 - 4(-4)(-9) = 144 - 144 = 0$ (raízes reais e iguais).

Como $x' = x'' = \frac{3}{2}$, a decomposição será:

$$y = -4\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

ou

$$y = -4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2$$

3.º) Decompor, em fatôres do primeiro grau, o trinômio

$$5x^2 - 2x + 8.$$

Como, nesse caso, $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 5 \times 8 = 4 - 160 = -156 < 0$, *não é possível* efetuar tal decomposição.

19. Forma canônica. É a melhor forma com que o trinômio se apresenta para o estudo de sua variação. Seja o trinômio:

$$ax^2 + bx + c$$

Pondo a em evidência, vem

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

Somando e subtraindo à expressão entre parênteses o número $\frac{b^2}{4a^2}$ o valor do trinômio não se altera, e obtemos:

$$ax^2 + bx + c = a\Bigg[\underbrace{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}}_{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} + \underbrace{\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}}_{\frac{4ac - b^2}{4a^2}}\Bigg] =$$

ou

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

cujo segundo membro é denominado *forma canônica* do trinômio: (*)

20. Variação em sinal e valor (sinal do trinômio). Consideremos o trinômio: $y = ax^2 + bx + c$

e estudemos a *variação* de seu *sinal*, quando à variável se atribuem os valores do campo real desde $-\infty$ até $+\infty$. Nesse estudo, como logo verificaremos, é de muita importância o *sinal do coeficiente* a. Três casos temos a considerar:

1º) $\Delta > 0$. Neste caso, as raízes x' e x'' são reais e desiguais e o trinômio pode ser decomposto em seus fatôres do primeiro grau:

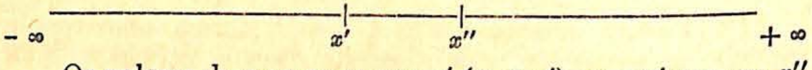
$$(1) \quad y = a(x - x')\ (x - x'')$$

Sôbre uma reta orientada (**), representemos os valores das raízes x' e x'', supondo, agora por questão de ordem, que

(*) Que também pode ser escrita: $y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$

(**) Aquela em que se fixa um sentido de percurso.

x' sempre *preceda* x'', isto é, que x' seja um número *menor* que x''. Os valores de x, *compreendidos* entre as raízes x' e x'', constituem o *intervalo das raízes.*



Os valores de x *menores* que x' $(x < x')$ ou *maiores* que x'' $(x > x'')$, são denominados *externos* ao intervalo das raízes e os valores de x *maiores* que x' e *menores* que x'' $(x' < x < x'')$, dizem-se *internos* ao intervalo das raízes.

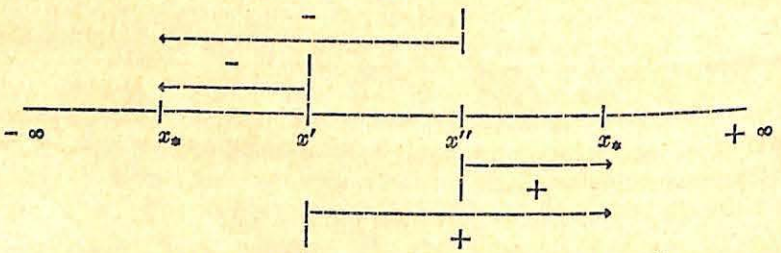
Vejamos os sinais que o trinômio y passa a ter quando x percorre o campo real $(-\infty \; a + \infty)$:

1. Se x fôr um valor *externo* ao intervalo das raízes, isto é, se $x < x'$ ou $x > x''$, as diferenças

$$x - x' \qquad \text{e} \qquad x - x''$$

que constam da decomposição (1), serão ambas negativas (no caso de $x < x'$) ou ambas positivas (no caso de $x > x''$), e o produto delas será, portanto sempre *positivo.*

Logo, o sinal de y dependerá sòmente do sinal do coeficiente a, e, precisamente, terá o *mesmo sinal* dêsse coeficiente. Ilustremos êsse resultado usando a representação das raízes sôbre a reta, onde um valor qualquer de x será indicado por x_*



para $x < x'$

$$\begin{array}{ccccc} y & = & a & \underbrace{(x-x')}_{-} \;\cdot & \underbrace{(x-x'')}_{-} \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ + & = & + & \cdot & + \\ - & = & - & \cdot & + \end{array}$$

para $x > x''$

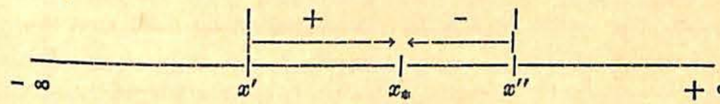
$$\begin{array}{ccccc} y & = & a & \underbrace{(x-x')}_{+} \;\cdot & \underbrace{x-x'')}_{+} \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ + & = & + & \cdot & + \\ - & = & - & \cdot & + \end{array}$$

2. Se x fôr um valor *interno* ao intervalo das raízes, isto é, $x' < x < x''$, as diferenças

$$x - x' \qquad \text{e} \qquad x - x''$$

terão sinais contrários e, portanto, sendo o produto delas, negativo, o sinal do trinômio y será *contrário* ao sinal de a.

Da mesma forma, agora, temos:



para $x' < x < x''$

$$\begin{array}{ccccc} y & = & a & \underbrace{(x-x')}_{+} \;\cdot & \underbrace{(x-x'')}_{-} \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ - & = & + & \cdot & - \\ + & = & - & \cdot & - \end{array}$$

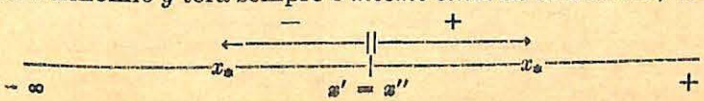
CONCLUSÃO: *Se $\Delta > 0$ o trinômio terá o mesmo sinal de a para os valores de x externos ao intervalo das raízes e contrário ao sinal de a para os valores internos.*

NOTA: É óbvio que para um valor de x igual ao das raízes, o trinômio *se anula.*

2.º) $\Delta = 0$. Neste caso, as raízes x' e x'' são reais e iguais $(x' = x'')$ e não há intervalo das raízes. A decomposição do trinômio será então:

$$y = a\,(x - x')^2$$

Como para todo valor de x, diferente do valor das raízes, o quadrado da diferença $(x - x')$ é sempre positivo, deduzimos que o trinômio y terá sempre o *mesmo sinal* de a. Na reta, temos:



para $$x \neq x' = x''$$

$$\begin{array}{ccccc} y & = & a & \underbrace{(x - x')^2}_{(+ \text{ ou } -)^2} & \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \\ + & = & + & . & + \\ - & = & - & . & + \end{array}$$

Conclusão: *Se $\Delta = 0$, o trinômio terá o mesmo sinal de a para todo valor de x diferente do valor da raiz comum.*

3.° $\Delta < 0$. Neste caso, o trinômio não tem raízes reais. E, para o estudo de seu sinal, devemos usar a forma canônica do trinômio:

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

ou

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Sendo $\Delta < 0$, tem-se que $-\Delta > 0$, e portanto $-\dfrac{\Delta}{4a^2} > 0$, pelo fato de ser $4a^2$ sempre positivo. Da mesma forma, o têrmo $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$, por se tratar de um quadrado, nunca será negativo, seja qual fôr o valor de x isto é, $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0$.

Logo, o sinal de y é precisamente o mesmo sinal de a, qualquer que seja o valor atribuído a x. Na representação sôbre a reta, temos:

$$-\infty \; \text{———————}|_{x_*}\text{———————} \; +\infty$$

para *qualquer* valor de x

$$\begin{array}{ccccc} y & = & a & \underbrace{\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]} & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ + & = & + & . & + \\ - & = & - & . & + \end{array}$$

Conclusão: *Se $\Delta < 0$, o trinômio terá o mesmo sinal de a para qualquer valor atribuído a x.*

RESUMO DO ESTUDO DO SINAL DO TRINÔMIO

$$\begin{cases} \Delta > 0 \; .\dot{}. \quad \overset{m/a}{\text{———}}|_{x'}\overset{c/a}{\text{———}}|_{x''}\overset{m/a}{\text{———}} \\ \Delta = 0 \; .\dot{}. \quad \overset{m/a}{\text{————}}|_{x' = x''}\overset{m/a}{\text{————}} \\ \Delta < 0 \; .\dot{}. \quad \overset{m/a}{\text{————————}} \end{cases}$$

Abreviações

m/a — *mesmo* sinal de a

c/a — *contrário* ao sinal de a

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1.°) Estudar a variação do trinômio $y = 5x^2 + 9x - 2$.

Como $\Delta = 9^2 - 4 \times 5 \times (-2) = 81 + 40 = 121 > 0$

temos: $\overset{m/a}{\text{——}}|_{x'}\overset{c/a}{\text{——}}|_{x''}\overset{m/a}{\text{——}}$

Sendo: $a = +5 > 0$, vem

$$\overset{+}{\text{——}}|_{x'}\overset{-}{\text{——}}|_{x''}\overset{+}{\text{——}}$$

Determinando as raízes, que são: $x' = -2$ e $x'' = \dfrac{1}{5}$, a resposta será:

para $x < -2$ e $x > \dfrac{1}{5}$, o sinal do trinômio y é *positivo* (m/a);

para $-2 < x < \dfrac{1}{5}$, o sinal do trinômio y é *negativo* (c/a).

2.°) Estudar a variação do sinal do trinômio $y = -3x^2 + 2x - 5$.

Temos: $\Delta = 2^2 - 4 \times (-3)(-5) = 4 - 60 = -56 < 0 \; .\dot{}. \; m/a$

Sendo $a = -3 < 0$, segue-se que o sinal do trinômio y, para qualquer valor atribuído a x, é *negativo* (m/a).

3.°) Estudar a variação do sinal do trinômio $x^2 - 12x + 36$.

Temos: $\Delta = 12^2 - 4 \times 1 \times 36 = 144 - 144 = 0 \therefore$

$$\underset{x' = x''}{\overset{m/a \quad m/a}{\text{———|———}}}$$

Sendo $a = +1 > 0$, segue-se que o sinal do trinômio proposto será, para qualquer valor de x, diferente de sua raiz dupla (que é 6), *positivo* (m/a).

4.°) Dizer para que valores de x o trinômio: $-x^2 + 7x - 10$ é

I. positivo

II. negativo

III. nulo

Sendo $\Delta = 7^2 - 4(-1)(-10) = 49 - 40 = 9 > 0$

temos

$$\overset{m/a \qquad c/a \qquad m/a}{\text{———|———|———}} \qquad x' \quad x''$$

Logo:

$$\overset{- \qquad + \qquad -}{\text{———|———|———}} \qquad x' \quad x''$$

Como as raízes dêsse trinômio são: $x' = 2$ e $x'' = 5$, a resposta será:

I. o trinômio é *negativo* para os valores *externos* ao intervalo das raízes, isto é, para $x < 2$ e $x > 5$;

II. o trinômio é *positivo* para os valores de x *internos* ao intervalo das raízes, isto é, $2 < x < 5$;

III. o trinômio é *nulo* para os valores de x *igual às suas raízes*, isto é, $x' = 2$ e $x'' = 5$.

5.°) Mesmo problema anterior para o trinômio $y = 2x^2 - 3x + 8$

Sendo: $\Delta = 9 - 64 = -55 < 0$ (m/a), segue-se que qualquer valor atribuido a x dá ao trinômio o sinal *positivo*.

Daí as respostas:

I. o trinômio é *positivo* para *qualquer valor atribuido a x*;

II. o trinômio *nunca é negativo*;

III. o trinômio *nunca é nulo*.

21. Posição de um número em relação às raízes do trinômio. Como aplicação do estudo do sinal de um trinômio, é possível determinar a *posição* de um *número dado* em relação às *raízes* de um trinômio do segundo grau. Seja $\Delta > 0$ e x' e x'' as raízes do trinômio

$$y = ax^2 + bx + c$$

Se n fôr, por exemplo, um número *externo* ao intervalo das raízes (vamos supor $n < x'$)

$$\text{———|———|———|———|———} \qquad n \quad x' \quad m \quad x''$$

segue, pelo estudo já feito, que o valor numérico do trinômio y para $x = n$ terá o mesmo sinal de a. Representando êsse valor numérico de y por $y_{(n)}$, devemos ter que o produto de a por $y_{(n)}$ deve ser *positivo*, por serem ambos do *mesmo sinal*, isto é

$$a \, . \, y_{(n)} > 0$$

Se m fôr, por exemplo, um número *interno* ao intervalo das raízes ($x' < x < x''$), o valor numérico do trinômio y terá sinal *contrário* ao de a, e, portanto, o produto dêles será *negativo*, isto é

$$a \, . \, y_{(m)} < 0$$

Dessa forma, é fácil saber a posição de um número dado em relação ao intervalo das raízes. Basta calcular o valor numérico de y para x igual ao número dado e examinar o *sinal do produto* dêsse valor numérico pelo coeficiente a. Se tal produto fôr *positivo*, o número dado é *externo* ao intervalo das raízes; e se fôr *negativo*, o número dado é *interno* ao intervalo das raízes.

Exemplo.

Determinar as posições respectivas dos números -2 e 4, em relação às raízes do trinômio:

$$y = -12x^2 + 246x - 120$$

Temos: $a = -12$. Basta calcular os valores numéricos do trinômio y para $x = -2$ e $x = 4$. São êles:

$$y_{(-2)} = -12(-2)^2 + 246(-2) - 120 = -660$$
$$y_{(4)} = -12(4)^2 + 246(4) - 120 = 672$$

Examinemos o sinal de cada um dos seguintes produtos, para saber a posição dos números propostos:

$$a \cdot y_{(-2)} = (-12) \cdot (-660) > 0 \;\therefore\; -2 \text{ é } \textit{externo}$$
$$a \cdot y_{(4)} = (-12) \cdot (+672) < 0 \;\therefore\; 4 \text{ é } \textit{interno}$$

NOTA. Pode-se, ainda, precisar melhor a posição de um número dado, em relação às raízes de um trinômio, desde que o confrontemos com o número que representa a semi-soma das raízes dêsse trinômio e cujo valor é conhecido pela relação

$$\frac{x' + x''}{2} = \frac{-b}{2a}$$

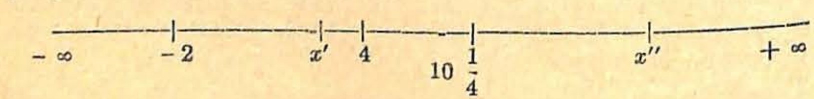
(fácil de calcular, por serem conhecidos a e b no trinômio dado).

Dêsse modo, se o número proposto foi reconhecido como externo ao intervalo das raízes, poderemos saber se tal número é menor que a menor das raízes (x') ou maior que a maior das raízes (x''), segundo êle seja menor ou maior que a semi-soma dessas raízes. O mesmo confronto se poderá fazer com um número interno ao intervalo das raízes.

Para o exemplo acima, como a semi-soma das raízes é igual a

$$\frac{x' + x''}{2} = \frac{-b}{2a} = \frac{-246}{-24} = \frac{41}{4} = 10\frac{1}{4}$$

temos que o número -2 *precede* x' e o número 4, interno ao intervalo das raízes, *precede* o ponto médio dessas raízes $\left(10\frac{1}{4}\right)$. Sôbre a reta, as posições dêsses números são



22. Valor máximo e valor mínimo do trinômio. Sendo o trinômio

$$y = ax^2 + bx + c$$

uma *função* de x, poderemos, agora, estudar o modo com que variam os valores numéricos dêsse trinômio quando x percorre todo o campo real desde $-\infty$ até $+\infty$, realçando o *menor* (mínimo) ou o *maior* (máximo) dos valores assumidos pelo trinômio.

Essa variação é estudada pela forma canônica

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

que permite apreciá-la, a partir dos valores que assume $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ ao variar de x. Para $x = -\frac{b}{2a}$ a expressão $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ se anula e, em correspondência, da forma canônica vem:

$$y = a\left[\frac{-\Delta}{4a^2}\right] = \frac{-\Delta}{4a}$$

que é o valor *mínimo* ou *máximo* que o trinômio pode assumir, segúndo seja $a > 0$ ou $a < 0$.

O valor numérico expresso por $y = \frac{-\Delta}{4a^2}$ dependerá de Δ. Vamos estudar os três casos que se apresentam:

PRIMEIRO CASO: $\Delta > 0$. O trinômio admite as raízes x' e x'', sendo $\frac{-b}{2a}$ o valor de sua semi-soma. Quanto ao coeficiente a, podemos ter:

1. $a > 0$. Façamos x percorrer o seu campo de variação em ordem crescente. Quando x assume valores de $-\infty$ a x', o trinômio y assume valores de $+\infty$ a 0; entre x' e x'', y terá valores negativos (de sinal contrário ao de a) e, para $x = \frac{-b}{2a}$, passará pelo seu *valor mínimo*: $\frac{-\Delta}{4a} < 0$.

Dêsse valor, y crescerá até x atingir x'', quando, então, y se anula. Em seguida, x variando de x'' a $+\infty$, os valores de y variarão de 0 a $+\infty$ novamente. Representando essa variação sôbre a reta, temos:

$$\begin{cases} \Delta > 0 & x \text{ variando de: } -\infty \quad x' \quad \dfrac{-b}{2a} \quad x'' \quad +\infty \\ a > 0 & y \text{ variará de: } +\infty \; ++++\, 0 \,----\, \dfrac{-\Delta}{4a} \,-----\, 0 \; +++++ \; +\infty \end{cases}$$

(v. mínimo)

2. $a < 0$. Quando x percorre o seu campo de variação, o trinômio y terá uma variação contrária à anterior, assumindo, para $x = -\dfrac{b}{2a}$, o seu *valor máximo:* $\dfrac{-\Delta}{4a} > 0$. Sôbre a reta, vem:

$$\begin{cases} \Delta > 0 & x \text{ variando de: } -\infty \quad x' \quad \dfrac{-b}{2a} \quad x'' \quad +\infty \\ a < 0 & y \text{ variará de: } -\infty \,------\, 0 \; +++ \; \dfrac{+\Delta}{4a} \; +++ \; 0 \,------\, -\infty \end{cases}$$

(v. máximo)

Segundo caso: $\Delta = 0$. O trinômio admite as raízes $x' = x'' = -\dfrac{b}{2a}$.

Para $a > 0$, teremos $y \geqslant 0$ (mesmo sinal de a), e o *valor mínimo* do trinômio, visto ser $\Delta = 0$, será, para $x = -\dfrac{b}{2a}$ (que coincide com o valor da raiz comum): $y = \dfrac{-\Delta}{4a} = 0$.

Para $a < 0$, teremos $y \leqslant 0$, (mesmo sinal de a), e o *valor máximo* do trinômio, visto ser $\Delta = 0$, será também: $y = \dfrac{-\Delta}{4a} = 0$.

Sôbre a reta, temos, respectivamente:

$$\begin{cases} \Delta = 0 & x \text{ variando de: } -\infty \quad x' = x'' = \dfrac{-b}{2a} \quad +\infty \\ a > 0 & y \text{ variará de: } +\infty \; ++++++++ \; 0 \; ++++++++ \; +\infty \end{cases}$$

(v. mínimo)

$$\begin{cases} \Delta = 0 & x \text{ variando de: } -\infty \quad x' = x'' = \dfrac{-b}{2a} \quad +\infty \\ a < 0 & y \text{ variará de: } -\infty \,-------------\, 0 \,-------------\, -\infty \end{cases}$$

(v. máximo)

Terceiro caso: $\Delta < 0$. O trinômio não admite raízes reais. Para $a > 0$, virá $y > 0$ (mesmo sinal de a).

Logo, x percorrendo de $-\infty$ a $\dfrac{-b}{2a}$, o trinômio y virá de $+\infty$ ao seu *valor mínimo* $\dfrac{-\Delta}{4a} > 0$, crescendo em seguida até $+\infty$ enquanto x percorre de $\dfrac{-b}{2a}$ até $+\infty$.

Para $a < 0$, y assumirá valores negativos (mesmo sinal de a) desde $-\infty$ até seu *valor máximo* $\dfrac{-\Delta}{4a} < 0$ quando percorre desde $-\infty$ até $\dfrac{-b}{2a}$, decrescendo em seguida até $-\infty$ enquanto x varia de $\dfrac{-b}{2a}$ a $+\infty$.

Agora, temos a seguinte representação:

$$\begin{cases} \Delta < 0 & x \text{ variando de: } -\infty \quad \dfrac{-b}{2a} \quad +\infty \\ a > 0 & y \text{ variará de: } +\infty \; ++++++++ \; \dfrac{\Delta}{4a} \; ++++++++ \; +\infty \end{cases}$$

(v. mínimo)

$$\begin{cases} \Delta < 0 & x \text{ variando de: } -\infty \quad \dfrac{-b}{2a} \quad +\infty \\ a < 0 & y \text{ variará de: } -\infty \,-------------\, \dfrac{-\Delta}{4a} \,-------------\, -\infty \end{cases}$$

(v. máximo)

RESUMO DA VARIAÇÃO DO TRINÔMIO

	x	$-\infty$	———	$\dfrac{-b}{2a}$	———	$+\infty$
$a > 0$ (*v. mínimo*)	y	$+\infty$	↘	$\dfrac{-\Delta}{4a}$	↗	$+\infty$
$a < 0$ (*v. máximo*)	y	$-\infty$	↗	$\dfrac{-\Delta}{4a}$	↘	$-\infty$

Nota. — A flecha ↗ indica que o trinômio assume valores crescentes e a flecha ↘ indica que o trinômio assume valores decrescentes.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

Estudar a variação dos seguintes trinômios:

1.º) $y = 2x^2 - 12x + 1$.

Temos: $a = 2 > 0$ (portanto y assume *valor mínimo*).
$b = -12$
$c = 1$
$\Delta = b^2 - 4ac = 144 - 8 = 136 > 0$

Logo, para $x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{12}{4} = 3$, o trinômio y passará por um *valor mínimo*, dado por

$$y = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-136}{8} = -17$$

Podemos ainda dizer que, quando x cresce de $-\infty$ a 3, y decresce de $+\infty$ a -17, e quando x cresce de 3 a $+\infty$, y cresce de -17 a $+\infty$.

2.º) $y = -x^2 + 8x - 16$

Temos: $a = -1 < 0$ (portanto y assume *valor máximo*).
$b = 8$
$c = -16$
$\Delta = b^2 - 4ac = 64 - 64 = 0$

Logo, para $\dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-8}{-2} = 4$, o trinômio y passará por um *valor máximo* igual a $y = \dfrac{-\Delta}{4a} = \dfrac{0}{-4} = 0$

3.º) $y = 3x^2 - x + 5$

Temos: $a = 3 > 0$ (portanto y assume *valor mínimo*)
$b = -1$
$c = 5$
$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 60 = -59 < 0$

Logo, para $x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{1}{6}$, o trinômio y passará por um *valor mínimo* igual a $y = \dfrac{-\Delta}{4a} = \dfrac{59}{12} = 4\dfrac{11}{12}$

NOTA: Ver no *Apêndice*, pág. 213, o estudo das *Representações gráficas; sistemas de coordenadas cartesianas.*

INEQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU

23. Definição. Chama-se *inequação do segundo grau*, com uma incógnita x, a tôda inequação que pode ser reduzida a uma das formas:

$$ax^2 + bx + c > 0$$
$$ax^2 + bx + c < 0$$

onde o primeiro membro é um trinômio do segundo grau em x (logo $a \neq 0$).

24. Resolução. Decorre da definição que, a *resolução* de uma inequação do segundo grau reduz-se ao estudo do *sinal do trinômio* (n.º 20), pois, procuramos, ao resolver essas inequações, determinar quais os valores de x que tornam o primeiro membro positivo ou negativo. Vai depender êsse estudo, portanto, do valor de Δ e do sinal de a de um trinômio do segundo grau, como veremos nos exercícios a seguir.

Exemplos de resolução.

1.º) Resolver a inequação: $4x^2 - 3x - 1 > 0$.

Precisamos determinar os valores de x que tornam o primeiro membro *positivo*. Como $a = 4 > 0$, também é *positivo* segue-se que procuramos determinar os valores de x que acarretem ao trinômio do primeiro membro o *mesmo sinal de a*. Logo, para facilitar a resolução, podemos escrever:

$$4x^2 - 3x - 1 > 0 \ (m/a)$$

Sendo $\Delta = 9 + 16 = 25 > 0$, vem

$$\begin{array}{ccccc} m/a & & c/a & & m/a \\ \text{———} & | & \text{———} & | & \text{———} \\ & x' & & x'' & \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{ccccc} + & & - & & + \\ \text{———} & | & \text{———} & | & \text{———} \\ & x' & & x'' & \end{array}$$

e a solução é constituída pelos valores de x *externos* ao intervalo das raízes, pois êsses valores dão ao trinômio o sinal *positivo* (m/a). Determinando as raízes $x' = -\frac{1}{4}$ e $x'' = 1$, a *resposta* será:

$$\begin{cases} x < -\frac{1}{4} \\ x > 1 \end{cases}$$

solução ← | | → solução

$-\frac{1}{4}$ $\quad$ 1

2.º) Resolver a inequação:

$$\frac{x^2-1}{3} - 2(3x+1) > 3 + \frac{2x^2-5}{2}$$

M. m. c : 6

$$2(x^2-1) - 12(3x+1) > 18 + 3(2x^2-5)$$
$$2x^2 - 2 - 36x - 12 > 18 + 6x^2 - 15$$
$$-4x^2 - 36x - 17 > 0$$

Multiplicando ambos os membros por -1, a inequação muda de sentido (*)

e, portanto, temos $4x^2 + 36 + 17 < 0$.

Como $a = 4 > 0$ (*positivo*) e procuramos os valores de x que tornam o primeiro membro *negativo*, podemos escrever

$$4x^2 + 36x + 17 < 0 \quad (c/a)$$

Sendo $\quad \Delta = 36^2 - 272 = 1\,296 - 272 = 1\,024 > 0$,

vem $\quad m/a \quad c/a \quad m/a \qquad$ ou $\qquad + \quad - \quad +$

$x' \quad x'' \qquad\qquad x' \quad x''$

isto é, os valores que interessam trinômio em estudo são os *internos* ao intervalo das raízes. Determinando as raízes:

$$x' = \frac{-36 - \sqrt{1\,024}}{8} = \frac{-36 - 32}{8} = -\frac{68}{8} = -8\frac{1}{2}$$

$$x'' = \frac{-36 + \sqrt{1\,024}}{8} = \frac{-36 + 32}{8} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$$

(*) Propriedades das desigualdades - Ver *Matemática*, Curso Ginasial, 2.ª Série pág. 146, do mesmo autor.

temos a *solução:*

$$-8\frac{1}{2} < x < -\frac{1}{2}$$

solução ← →

$-8\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2}$

3.º) Resolver a inequação: $5x^2 - 2x + 5 < 0$.

Temos: $a = 5 > 0$ e os valores de x procurados deve se tornar o primeiro membro negativo. Logo:

$$5x^2 - 2x + 5 < 0 \qquad (c/a)$$

Sendo $\quad \Delta = 4 - 100 = -96 < 0$, vem

$m/a \qquad$ ou $\qquad + \quad + \quad +$

isto é, qualquer valor atribuido a x torna o trinômio *positivo*. Como os valores de x que interessam ao trinômio são os que o tornam *negativo* (c/a), concluímos que a inequação proposta *não admite solução.*

OBSERVAÇÃO. Se, ao invés, tivéssemos a inequação;

$$5x^2 - 2x + 5 > 0 \quad (m/a)$$

qualquer valor atribuido a x daria ao trinômio o mesmo sinal de a, isto é, positivo. Logo, a *solução* seria *qualquer valor* atribuido a x, desde $-\infty$ até $+\infty$.

4.º) Resolver a inequação: $-x^2 + 8x - 16 < 0$.

Multiplicando ambos os membros por -1, vem:

$$x^2 - 8x + 16 > 0 \qquad (m/a)$$

Como $\Delta = 64 - 64 = 0$ (m/a), segue-se que a *solução* é constituída por *qualquer valor de x diferente do valor da raiz comum* (4 no caso), isto é $x \neq 4$.

OBSERVAÇÃO. Se tivéssemos: $-x^2 + 8x - 16 \leqslant 0$ (que se lê "menor ou igual" a zero) a solução deveria constar dos valores de x que tornam o trinômio *negativo* e mais os que o *anulam*, isto é, as *suas raízes*. Logo a solução seria *qualquer valor de x*.

25. Inequações cuja resolução reduz-se a de uma inequação do segundo grau. Estudaremos os diversos *tipos* nos exemplos que seguem:

Primeiro exemplo.

Resolver a inequação

$$\frac{x+2}{x-1} < \frac{3x-1}{x+3} \qquad (1)$$

Transpondo o segundo membro:

$$\frac{x+2}{x-1} - \frac{3x-1}{x+3} < 0 \qquad \Big(\text{m. m. c.} = (x-1) \, . \, (x+3)\Big)$$

donde

$$\frac{(x+3)\,(x+2) - (x-1)\,(3x-1)}{(x-1)\,(x+3)} < 0$$

ou

$$\frac{x^2 + 5x + 6 - 3x^2 + 4x - 1}{x^2 + 2x - 3} < 0$$

ou ainda:

$$\frac{-2x^2 + 9x + 5}{x^2 + 2x - 3} < 0$$

e, multiplicando ambos os membros por -1 (no primeiro membro, só afetará o numerador, onde justamente interessa a troca do sinal do coeficiente a), temos:

$$\frac{2x^2 - 9x - 5}{x^2 + 2x - 3} > 0 \qquad (2)$$

Essa inequação é resolvida estudando os sinais dos trinômios que figuram, respectivamente, no numerador e no denominador, e que permitem determinar os *valores de x* que tornam o seu *quociente positivo.* Temos, assim, que estudar os trinômios:

$$y_1 = 2x^2 - 9x - 5 \qquad \text{e} \qquad y_2 = x^2 + 2x - 3$$

de $\Delta_1 = 81 + 40 = 121 > 0$ e $\Delta_2 = 4 + 12 = 16 > 0$

$$\begin{array}{ccccc} + & & - & & + \\ \hline & x_1 & & x_2 & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} + & & - & & + \\ \hline & x_3 & & x_4 & \end{array}$$

onde x_1 e x_2 são as raízes de y_1; x_3 e x_4 as raízes de y_2:

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{121}}{4} \begin{cases} x_1 = \dfrac{9-11}{4} = -\dfrac{1}{2} \\[2mm] x_2 = \dfrac{9+11}{4} = 5 \end{cases} \qquad x = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} \begin{cases} x_3 = -3 \\[2mm] x_4 = 1 \end{cases}$$

Dispondo essas raízes segundo o seu valor crescente, vem:

$$-3, \qquad \frac{-1}{2} \qquad 1, \qquad 5$$

A variação que sofre a inequação proposta ao variar de x pode ser apreciada ràpidamente no seguinte quadro(*):

x	$-\infty$ — -3	-3 — $-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$ — $+1$	$+1$ — $+5$	$+5$ — $+\infty$
y_1	+	+	−	−	+
y_2	+	−	−	+	+
$\frac{y_1}{y_2}$	+	−	+	−	+

A solução da inequação proposta (1) é a mesma solução de sua equivalente (2), isto é, a constituida pelos valores de x que tornam o quociente dos trinômios y_1 e y_2, *positivo.* Observando o quadro construido, concluimos que êsse quociente é positivo para os seguintes valores de x:

$$\begin{cases} x < -3 \\ -\dfrac{1}{2} < x < 1 \\ x > 5 \end{cases}$$

que constituem a *solução* da inequação dada.

Segundo exemplo.

Resolver a inequação

$$(x^2 - 7x + 12)\,(3x^2 - x + 5) < 0$$

(*) A separação dos intervalos é feita por traços fortes quando se referem às raízes do respectivo trinômio.

Chamemos

$y_1 = x^2 - 7x + 12$ e $y^2 = 3x^2 - x + 5$

$\Delta_1 = 49 - 48 = 1 > 0$ $\Delta_2 = 1 - 60 = -59 < 0$ (m/a)

$$\begin{array}{ccccc} + & & - & & + \\ \hline & x_1 & & x_2 & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} + & & + & & + \\ \hline & & & & \end{array}$$

onde..... $\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 4 \end{cases}$ *não há raízes reais*

e o quadro correspondente será:

x	$-\infty$ —— $+3$	—— $+4$	—— $+\infty$
y_1	+	-	+
y_2	+	+	+
$y_1 \cdot y_2$	+	-	+

Solução: $\boxed{3 < x < 4}$

Terceiro exemplo.

Resolver a inequação $\dfrac{x^2 - 9}{2x + 1} > 0$

Temos:

$y_1 = x^2 - 9$ e $y_2 = 2x + 1$ (binômio linear) (*)

$\Delta_1 = 81 > 0$ raiz: $-\dfrac{1}{2}$

$$\begin{array}{ccccc} + & & - & & + \\ \hline & x_1 & & x_2 & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} - & & + \\ \hline & x_3 = -\frac{1}{2} & \end{array}$$

onde ... $\begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = +3 \end{cases}$ $x_3 = -\dfrac{1}{2}$

(*) Binômio linear - Ver *Matemática*, Curso Ginasial, 2.ª Série, pág. 140, do mesmo autor.

O quadro relativo a essa inequação é:

x	$-\infty$ —— -3	—— $-\frac{1}{2}$	—— $+3$	—— $+\infty$
y_1	+	-	-	+
y_2	-	-	+	+
$\dfrac{y_1}{y_2}$	-	+	-	+

Solução $\begin{cases} -3 < x < -\dfrac{1}{2} \\ x > 3 \end{cases}$

EXERCÍCIOS SÔBRE O TRINÔMIO DO SEGUNDO GRAU

Valor numérico do trinômio

1. Calcular o valor numérico do trinômio $y = -2x^2 + x + 3$, para os seguintes valores de x: -1, 2, $\frac{1}{2}$, 0.

2. Calcular o valor numérico do trinômio $y = \dfrac{2x^2}{3} + 3x - \dfrac{1}{2}$, para os seguintes valores de x: 2, $-\frac{1}{2}$, 0, 3.

Decomposição em fatôres do primeiro grau

3. Decompor, em fatôres do primeiro grau, os seguintes trinômios:

1.º) $y = 3x^2 - 21x + 36$
2.º) $y = -x^2 + 9x - 18$
3.º) $y = 2x^2 - 12x + 18$
4.º) $z = 2t^2 + 3t - 2$
5.º) $y = x^2 - 3x - 10$
6.º) $y = \frac{2}{3}x^2 - x - \frac{1}{2}$
7.º) $u = -v^2 + 7v - 12$
8.º) $y = x^2 - 1$
9.º) $y = 12x^2 - 17x + 6$
10.º) $z = 4t^2 - 12t$
11.º) $y = x^2 - x + 4$
12.º) $y = a^2 - 1$
13.º) $y = m^2 + 1$
14.º) $y = b^2 - 25$
15.º) $y = x^2 - (m + n)x + mn$
16.º) $y = x^2 - 2a^2x + a^4 - b^4$

Sinal do trinômio

4. Estudar a variação do sinal dos seguintes trinômios:

1.º) $y = x^2 - 5x + 6$
2.º) $y = -3x^2 - x + 2$
3.º) $y = 4t^2 + 4t + 1$
4.º) $y = -2x^2 + x - 4$
5.º) $y = x^2 - 25$
6.º) $y = -3z^2 + 12z$
7.º) $y = 15x^2 - x - 6$
8.º) $y = \frac{-t^2}{4} + 36$
9.º) $y = m^2 - 6m + 7$
10.º) $y = 4x^2 - 3x + 8$

5. Determinar os valores de x para os quais os trinômios abaixo são, respectivamente, positivo, negativo e nulo:

1.º) $y = x^2 - 6x + 8$
2.º) $y = -3x^2 + x - 6$
3.º) $y = -2x^2 + 6$
4.º) $y = x^2 - 8x + 16$
5.º) $y = 3x^2 - 9x$

Posição de um número em relação às raízes

6. Verificar a posição dos números -1 e 10 em relação às raízes do trinômio: $y = x^2 - 39x + 270$
7. Verificar a posição dos números -5 e 8 em relação às raízes do trinômio: $y = 2x^2 - 64x + 480$
8. Verificar a posição dos números 5 e 9 em relação às raízes do trinômio: $y = x^2 - 10x + 16$

Valor máximo e valor mínimo de um trinômio

9. Estudar a variação dos seguintes trinômios:

1.º) $y = 2x^2 + 3x - 2$
2.º) $y = -x^2 + 8x - 12$
3.º) $y = 3x^2 - 2x + 6$
4.º) $y = -x^2 + 6x - 9$
5.º) $y = 5x^2 - 10x$
6.º) $y = -x^2 + 36$
7.º) $y = 2x^2 - 5x + 2$
8.º) $y = \frac{-x^2}{4} + x - 13$

NOTA: Outros *exercícios* sôbre *trinômio do segundo grau* na pág. 231.

Inequações do segundo grau

10. Resolver as seguintes inequações:

1.ª) $x^2 - 7x + 10 > 0$
2.ª) $-x^2 + 8x - 7 > 0$
3.ª) $-7x^2 + x + 6 > 0$
4.ª) $3x^2 - x + 8 < 0$

5.ª) $x^2 + 16x - 80 < 0$
6.ª) $9x^2 - 30x + 25 > 0$
7.ª) $-6x^2 - 4x + 10 \leqslant 0$
8.ª) $x^2 - 6x + 9 < 0$
9.ª) $2x^2 - 5x + 8 > 0$
10.ª) $-x^2 + x - 8 \geqslant 0$
11.ª) $-4x^2 + 2x - 3 < 0$
12.ª) $2x^2 - 12x + 18 > 0$
13.ª) $-x^2 + 10x - 25 > 0$
14.ª) $3x^2 - 12x < 0$
15.ª) $5x^2 - 1 \geqslant 0$
16.ª) $3x^2 - 30 > 51 + 2x^2$
17.ª) $\frac{3x^2}{8} - \frac{x}{4} < 0$
18.ª) $4x^2 + (x + 2)^2 > 4x(x + 2)$
19.ª) $3(x - 1) - 6x > 2 - 2x(x - 3)$
20.ª) $5x^2 - 7x > 1 - 3x^2$
21.ª) $(1 - 3x)^2 \leqslant (3x + 1)^2 - 8$
22.ª) $(2x - 1)^2 - 4x^2 > x^2 - 4x + 8$
23.ª) $(x - 1)^2 - 130 > -(x + 1)^2$
24.ª) $\frac{x^2}{3} - 4(x + 1) < \frac{3x^2}{2} - 4$
25.ª) $(2 - 3x)^2 - 5x < -3 - (2x - 1)^2$
26.ª) $\frac{x - 2}{3} \leqslant 3 - \frac{(x + 1)\ (x - 3)}{6}$
27.ª) $16x^2 \geqslant 9$
28.ª) $-4x^2 + 3x + 8 \geqslant 8$
29.ª) $\frac{3}{4}(x - 1)^2 - \frac{5}{3}x < 1 - (x + 1)^2$
30.ª) $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - x + 5} < 0$
31.ª) $\frac{x - 1}{x + 2} > \frac{2x + 1}{x + 1}$
32.ª) $\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{2x + 1} > -3$
33.ª) $\frac{x^2 - 25}{3x - 6} < 0$
34.ª) $\frac{x + 4}{2x^2 - x + 5} > 0$
35.ª) $(x^2 + 2x - 3)\ (3x^2 - 4x + 8) < 0$
36.ª) $(-x^2 + 6x - 5)\ (4x^2 - 5x + 1)\ (x^2 - 4x + 4) > 0$
37.ª) $\frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 3x - 28} > 0$
38.ª) $\frac{-2x^2 - x - 5}{x^2 - 6x + 9} < 0$
39.ª) $\frac{(x - 5)\ (x^2 - 7x + 6)}{x^2 - 2x + 4} > 0$
40.ª) $\frac{-5x^2 + 2x - 4}{x^2 - x + 3} \geqslant 0$

RESPOSTAS:

1. 0; -3; $+3$; $+3$.
2. $\frac{49}{6}$; $\frac{-11}{6}$; $\frac{-1}{2}$; $\frac{29}{2}$.
3. 1.º) $3(x - 4)\ (x - 3)$; 2.º) $-(x - 6)\ (x - 3)$; 3.º) $2(x - 3)^2$; 4.ª) $(t + 2)\ (2t - 1)$; 5.ª) $(x - 5)\ (x + 2)$; 6.ª) $\frac{1}{24}(4x - 3 + \sqrt{21})\ (4x - 3 - \sqrt{21})$; 7.ª) $-(v - 3)\ (v - 4)$; 8.ª) $(x + 1)\ (x - 1)$; 9.ª) $(3x - 2)\ (4x - 3)$; 10.ª) $4t(t - 3)$; 11.ª) não é possível; 12.ª) $(a + 1)\ (a - 1)$; 13.ª) Impossível;

14.ª) $(b+5)(b-5)$; 15.ª) $(x-m)(x-n)$; 16.ª) $(x-a^2+b^2)$ $(x-a^2-b^2)$.

4. 1.º) $p/x < 2$ e $x > 3$, positivo e $p/2 < x < 3$, negativo;
2.º) $p/ -1 < x < \frac{2}{3}$ positivos $p/x < -1$ e $x > \frac{2}{3}$, negativo;
3.º) sempre positivo $p/t \neq -\frac{1}{2}$; 4.º) sempre negativo;
5.ª) $p/x < -5$ e $x > 5$, positivo e $p/ -5 < x < 5$, negativo;
6.ª) $p/0 < z < 4$, positivo e $p/z < 0$ e $z > 4$, negativo;
7.ª) $p/x < -\frac{3}{5}$ e $x > \frac{2}{3}$, positivo e $p/ -\frac{3}{5} < x < \frac{2}{3}$, negativo;
8.ª) $p/ -12 < t < +12$, positivo e $p/t < -12$ e $t > 12$, negativo;
9.ª) $p/m < 3-\sqrt{2}$ e $m > 3+\sqrt{2}$, positivo e $p/3-\sqrt{2} < m <$ $< 3+\sqrt{2}$, negativo;
10.ª) sempre positivo.

5. 1.ª) positivo $p/x < 2$ e $x > 4$; negativo $p/2 < x < 4$ e nulo $p/x = 2$ e $x = 4$; 2.ª) o trinômio é sempre negativo;
3.ª) positivo $p/ -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$; negativo $p/x < -\sqrt{3}$ e $x > \sqrt{3}$ e nulo $p/x = -\sqrt{3}$ e $x = \sqrt{3}$. 4.º) positivo p/ qualquer valor de $x \neq 4$; nenhum valor e nulo $p/x = 4$; 5.ª) positivo $p/x < 0$ e $x > 3$; negativo $p/0 < x < 3$ e nulo $p/x = 0$ e $x = 3$.

6. -1 externo e 10 interno;

7. -5 e 8, ambos externos;

8. 5 interno e 8 externo;

9. 1.ª) $p/x = -0{,}75$, $y = -3{,}125$ (v. mínimo); 2.º) $p/x = 4$, $y = 4$ (v. máximo); 3.º) $p/x = \frac{1}{3}$, $y = 5\frac{2}{3}$ (v. mínimo); 4.º) $p/x = 3$, $y = 0$ (v. máximo); 5.ª) $p/x = 1$, $y = -5$ (v. mínimo); 6.ª) $p/x = 0$. $y = 36$ (v. máximo); 7.ª) $p/x = \frac{5}{4}$, $y = -\frac{9}{8}$ (v. mínimo); 8.ª) $p/x = 2$, $y = 12$ (v. máximo).

10. 1.ª) $x < 2$, $x > 5$; 2.ª) $1 < x < 7$; 3.ª) $\frac{-6}{7} < x < 1$; 4.ª) não admite solução; 5.ª) $-20 < x < 4$; 6.ª) $x \neq \frac{5}{3}$; 7.ª) $x \leqslant -\frac{5}{3}$, $x \geqslant 1$; 8.ª) não admite solução; 9.ª) qualquer valor de x; 10.ª) não admite solução; 11.ª) qq. valor de x; 12.ª) $x \neq 3$; 13.ª) não admite solução; 14.ª) $0 < x < 4$; 15.ª) $x \leqslant -\frac{\sqrt{5}}{5}$, $x \geqslant \frac{\sqrt{5}}{5}$ 16.ª) $x < -9$, $x > 9$; 17.ª) $0 < x < \frac{2}{3}$; 18.ª) $x \neq 2$; 19.ª) $x < \frac{-1}{2}$, $x > 5$;

20.ª) $x < -\frac{1}{8}$, $x > 1$; 21.ª) $x \geqslant \frac{2}{3}$; 22.ª) Não admite solução; 23.ª) $x < -8$, $x > 8$; 24.ª) $x < -\frac{24}{7}$, $x > 0$; 25.ª) $\frac{8}{13} < x < 1$; 26.ª) $-5 \leqslant x \leqslant 5$; 27.ª) $x \leqslant -\frac{3}{4}$ e $x \geqslant \frac{3}{4}$ 28.ª) $0 < x < \frac{3}{4}$; 29.ª) não admite solução; 30.ª) $2 < x < 3$; 31.ª) $\frac{-5-\sqrt{13}}{2} < x < -2$, $-1 < x < -\frac{5+\sqrt{13}}{2}$; 32.ª) $x < -\frac{1}{2}$, $\frac{1-\sqrt{7}}{6} < x < \frac{1+\sqrt{7}}{6}$, $x > 1$; 33.ª) $x < -5$, $2 < x < 5$; 34.ª) $x > -4$; 35.ª) $-3 < x < 1$; 36.ª) $\frac{1}{4} < x < 5$; 37.ª) $x < -4$; $1 < x < 4$, $x > 7$; 38.ª) $x \neq 3$; 39.ª) $1 < x < 5$, $x > 6$; 40.ª) não admite solução.

§ 4. Equações redutíveis ao segundo grau. Aplicações.

26. Generalidades. Existem tipos especiais de equações de grau superior ao segundo, e outras, cujas raízes podem ser determinadas resolvendo sòmente equações do segundo grau. Daremos, a seguir, alguns tipos dos mais usados na prática.

EQUAÇÕES BIQUADRADAS

27. Definição. Chama-se *equação biquadrada* a tôda equação do quarto grau, cujos têrmos contenham a incógnita *sòmente* com *expoentes pares*. Assim, por exemplo, as equações:

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0, \qquad 3t^4 - 25t^2 - 18 = 0$$

são *biquadradas*.

28. Resolução. A forma geral de uma equação biquadrada completa é:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

com *a* diferente de zero e positivo. Nesta equação, pondo

$$x^2 = y \quad (y \text{ é chamada } \textit{incógnita auxiliar})$$

temos $\quad x^4 = y^2$

e, substituindo êsses valores na equação biquadrada acima, vem:

$$ay^2 + by + c = 0$$

que é denominada *equação resolvente* da equação biquadrada.

A equação resolvente nos dá:

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

e sendo $x^2 = y$, deduzimos $x = \pm\sqrt{y}$, e portanto:

$$\boxed{x = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}}}$$

que toma o nome de *fórmula resolutiva da equação biquadrada*.

Combinando, de todos os modos possíveis, os sinais + e − da fórmula supra, teremos, *quando possível* a equação, quatro valores de x, *dois a dois iguais em valor absoluto e de sinais contrários*, que são as quatro raízes x_1, x_2, x_3, x_4 da equação biquadrada:

$$x_1 = +\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}} \qquad x_3 = +\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}\;;$$

$$x_2 = -\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}} \qquad x_4 = -\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

29. Discussão das raízes. Segundo a equação resolvente admita *duas* raízes positivas, *uma* ou *nenhuma*, a equação biquadrada admitirá *quatro raízes* (duas a duas iguais em valor absoluto e de sinais contrários) ou *duas* (iguais em valor absoluto e de sinais contrários) ou *nenhuma*. Portanto, a natureza das raízes da equação biquadrada vai depender das *variações* e das *permanências* (n.º 14) da equação resolvente.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

Resolver as seguintes equações biquadradas:

1.ª) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

Temos duas *variações* e, portanto, a equação resolvente, cujo discriminante é positivo, admite raízes *positivas*; e a

equação biquadrada proposta admitirá *quatro raízes reais*, duas a duas iguais em valor absoluto e de sinais contrários.

De fato;

$$x = \pm\sqrt{\frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{5 \pm \sqrt{9}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{5 \pm 3}{2}}$$

donde

$$x_1 = +\sqrt{\frac{5+3}{2}} = +2 \qquad x_3 = +\sqrt{\frac{5-3}{2}} = +1$$

$$x_2 = -\sqrt{\frac{5+3}{2}} = -2 \qquad x_4 = -\sqrt{\frac{5-3}{2}} = -1$$

e as raízes são: ± 2 e ± 1.

2.ª) $3t^4 - 25t^2 - 18 = 0$ (uma variação e uma permanência)

Temos agora:

$$t = \pm\sqrt{\frac{25 \pm \sqrt{625+216}}{6}} = \pm\sqrt{\frac{25 \pm \sqrt{841}}{6}} = \pm\sqrt{\frac{25 \pm 29}{6}}$$

$$t_1 = +\sqrt{\frac{25+29}{6}} = +\sqrt{9} = +3$$

$$t_2 = -\sqrt{\frac{25+29}{6}} = -\sqrt{9} = -3$$

$$t_3 = +\sqrt{\frac{25-29}{6}} = +\sqrt{-\frac{2}{3}}$$ (imaginária)

$$t_4 = -\sqrt{\frac{25-29}{6}} = -\sqrt{-\frac{2}{3}}$$ (imaginária)

3.ª) $2x^4 + 3x^2 + 1 = 0$ (duas permanências)

Temos:

$$x = \pm\sqrt{\frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{4}} = \pm\sqrt{\frac{-3 \pm 1}{4}}$$ (imaginária)

Logo, *não há raízes reais*.

Observação. O mesmo método aplicado na resolução das equações biquadradas permite resolver, também, tôdas as outras *equações trinômias* elementares (*), isto é, as equações do tipo:

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0$$

onde n significa um número inteiro absoluto. Se $n = 2$, obtém-se a equação biquadrada.

EQUAÇÕES IRRACIONAIS

30. Definição. Uma equação diz-se *irracional* quando contém a incógnita submetida a *radiciação* ou sujeita a expoente fracionário. Exemplos:

1. $\sqrt{2x + 12} = x - 6$
2. $x = 3 + \sqrt{x^2 - 5x + 6}$
3. $\sqrt[3]{x^2 - 2} = \sqrt[3]{1 - x}$

Ex

31. Resolução. A resolução de uma equação irracional é feita transformando-a numa equação racional de resolução conhecida. Para isso, é necessário *elevar os dois membros*, da equação irracional que se estuda, *a uma mesma potência, resolver a nova equação obtida* e *verificar* quais as raízes, caso existam, que verificam a equação dada. Esta verificação é necessária, pois com êste artifício nem sempre a nova equação obtida é equivalente à dada.

De fato, no caso de uma equação irracional conter raízes quadráticas, por exemplo, a elevação de ambos os seus membros ao quadrado acarretará uma nova equação que, além das raízes da equação proposta, admitirá outras. Basta notar, com efeito, que, se elevarmos ao quadrado os dois membros da equação:

$$A = B$$

obteremos

$$A^2 = B^2$$

ou seja

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$$

que é uma equação que, além das raízes da equação $A = B$, admite as raízes da equação $A = -B$.

(*) Ver *Elementi di Algebra*, de U. Amaldi - F. Enriques, pág. 167.

32. Tipos diversos. Estudaremos, a seguir, os tipos mais importantes de equações irracionais de coeficientes numéricos e que se apresentam com mais freqüência.

I) Resolver a equação irracional: $\sqrt{2x + 12} = x - 6$.

Elevando ambos os membros ao quadrado, obtemos:

$$2x + 12 = x^2 - 12x + 36$$

e daí a equação do segundo grau:

$$x^2 - 14x + 24 = 0$$

cujas raízes são: $x' = 12$ e $x'' = 2$.

Dessas raízes, *sòmente* a primeira satisfaz a equação dada,

pois, para $x = 12$, temos $\begin{cases} \sqrt{2(12) + 12} = 12 - 6 \\ \text{ou } \sqrt{36} \quad = 6 \end{cases}$

enquanto

para $x = 2$, vem $\sqrt{2(2) + 12} \neq 2 - 6$

Nota: Não estamos resolvendo a equação $-\sqrt{2x + 12} = x - 6$ que equivale a equação: $\sqrt{2x + 12} = 6 - x$

II) Resolver a equação: $x = 3 + \sqrt{x^2 - 5x + 6}$

Isolando o radical, obtemos:

$$x - 3 = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, vem:

$$x^2 - 6x + 9 = x^2 - 5x + 6$$

donde, simplificando, temos a equação do primeiro grau:

$$-x = -3$$

ou

$$x = 3$$

que é a raiz da equação irracional dada.

III) Resolver a equação: $\sqrt{x^2 - 3x - 3} - x + 6 = x - 3$

Isolando o radical, temos:

$$\sqrt{x^2 - 3x - 3} = 2x - 9$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, vem:

$$x^2 - 3x - 3 = 4x^2 - 36x + 81$$

donde

$$x^2 - 11x + 28 = 0$$

cujas raízes são: $x' = 7$ e $x'' = 4$. Substituindo êstes valores na equação dada, verificamos que o único valor que a satisfaz é 7, que fica sendo sua raiz. O outro valor $x'' = 4$ é, ao invés, raiz da equação:

$$-\sqrt{x^2-3x-3} - x + 6 = x - 3$$

IV) Resolver a equação: $\sqrt{2x+7} = 4 - \sqrt{2-x}$

Elevando os dois membros ao quadrado:

$$2x + 7 = 16 - 8\sqrt{2-x} + 2 - x$$

Isolando o radical e reduzindo os têrmos semelhantes, temos:

$$3x - 11 = -8\sqrt{2-x}$$

Elevando novamente ao quadrado, vem:

$$9x^2 - 66x + 121 = 64(2-x)$$

ou

$$9x^2 - 66x + 121 = 128 - 64x$$

$$\therefore 9x^2 - 2x - 7 = 0$$

cujas raízes são: $x' = 1$ e $x'' = -\frac{7}{9}$, que satisfazem, ambas, a equação irracional dada.

V) Resolver a equação: $\sqrt{x + \sqrt{x-1}} = \sqrt{2x-3}$.

No primeiro membro, temos um radical duplo. Elevando ao quadrado ambos os membros, vem:

$$x + \sqrt{x-1} = 2x - 3$$

Isolando o radical

$$\sqrt{x-1} = x - 3$$

e elevando ao quadrado novamente, temos:

$$x - 1 = x^2 - 6x + 9$$

ou

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

cujas raízes são: $x' = 5$ e $x'' = 2$. Destas raízes a única que satisfaz a equação dada é *5*, pois, a outra (2) satisfaz a equação:

$$\sqrt{x - \sqrt{x-1}} = \sqrt{2x-3}$$

VI) Resolver a equação: $2\sqrt[3]{4x-1} = \sqrt[3]{2x+7}$.

Elevando ambos os membros ao cubo, obtemos:

$$8(4x-1) = 2x + 7$$

ou

$$32x - 8 = 2x + 7$$

e

$$30x = 15 \therefore x = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$$

que é a solução da equação irracional proposta.

VII) Resolver a equação: $\sqrt[4]{17 - \sqrt[3]{7x-6}} = 2$.

Elevando ambos os membros à quarta potência, vem:

$$17 - \sqrt[3]{7x-6} = 16$$

ou

$$-\sqrt[3]{7x-6} = -1$$

Elevando, agora, ao cubo, temos:

$$-(7x-6) = -1$$

ou

$$7x = 7 \therefore x = 1$$

que é a raiz da equação irracional proposta.

Observação. Para a resolução de equações irracionais diferentes dos tipos apresentados é necessário usar de artifícios especiais, recorrendo na maioria das vêzes, a incógnitas auxiliares, a fim de se reduzir a equação a um tipo conhecido Exemplo:

Resolver a equação

$$\sqrt[3]{(x-1)^2} - 4\sqrt[3]{x-1} = -3$$

Fazendo a substituição $y = \sqrt[3]{x-1}$ a equação dada se transformará em

$$y^2 - 4y + 3 = 0$$

cujas raízes são $y' = 3$ e $y'' = 1$. As raízes da equação proposta serão, então, as raízes das duas equações de tipos conhecidos

$$\sqrt[3]{x-1} = 3 \qquad \sqrt[3]{x-1} = 1$$

as quais admitem, respectivamente, as raízes:

$$x = 28 \qquad \text{e} \qquad x = 2$$

que satisfazem a equação irracional proposta.

TRANSFORMAÇÃO DAS EXPRESSÕES DA FORMA

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$$

33. Generalidades. É de importância no cálculo de expressões irracionais, que envolvem *radicais duplos da forma* $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ (*), transformá-las na *soma* ou *diferença* de dois *radicais simples*. Nestas condições, partamos da igualdade:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, vem

$$A \pm \sqrt{B} = x \pm 2\sqrt{xy} + y$$

ou

$$A \pm \sqrt{B} = x + y \pm \sqrt{4xy}$$

Esta igualdade é verificada sòmente no caso em que:

$$\begin{cases} A = x + y \\ B = 4xy \end{cases}$$

Elevando A ao quadrado e subtraindo B do resultado temos:

$$A^2 - B = x^2 + 2xy + y^2 - 4xy = x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2$$

e portanto $x - y = \sqrt{A^2 - B}$

Obtemos, assim o sistema $\begin{cases} x + y = A \\ x - y = \sqrt{A^2 - B} \end{cases}$

cuja resolução nos dá x e y, isto é,

$$x = \frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2} \quad \text{e} \quad y = \frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}$$

Temos, assim, a igualdade procurada:

$$\boxed{\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}}$$

(*) Estamos supondo $(A \pm \sqrt{B}) > 0$, com $B > 0$.

É preciso observar, porém, que para os radicais $\sqrt{x}$ e $\sqrt{y}$ serem *simples* é necessário que x e y sejam *racionais* positivos e portanto também $x - y$. E, para $x - y$ ser racional, basta $A^2 - B$ ser *quadrado perfeito*. No caso de $A^2 - B$ não ser quadrado perfeito, a transformação não é vantajosa, pois, acabará dando dois radicais duplos e, portanto, uma expressão *mais complicada* que a proposta.

Logo:

A transformação da expressão $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ *na soma ou diferença de dois radicais simples é possível sòmente no caso de* $A^2 - B$ *ser um quadrado perfeito.*

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1.º) Transformar $\sqrt{8 + \sqrt{60}}$

Temos: $\begin{cases} A = 8 \\ B = 60 \\ A^2 - B = 64 - 60 = 4 \text{ (quadrado perfeito)} \end{cases}$

Logo:

$$\sqrt{8 + \sqrt{60}} = \sqrt{\frac{8+2}{2}} + \sqrt{\frac{8-2}{2}}$$

ou

$$\sqrt{8 + \sqrt{60}} = \sqrt{5} + \sqrt{3}$$

2.º Transformar $\sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$

Temos:

$$\begin{cases} A = 6 \\ B = 4 \times 5 = 20 \; (2\sqrt{5} = \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{20}) \\ A^2 - B = 36 - 20 = 16 \text{ (quadrado perfeito)} \end{cases}$$

Logo

$$\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{6+4}{2}} - \sqrt{\frac{6-4}{2}}$$

ou

$$\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 1$$

3.º Transformar $\sqrt{5 + \sqrt{3}}$

Temos: $\begin{cases} A = 5 \\ B = 3 \\ A^2 - B = 25 - 3 = 22 \end{cases}$ (não é quadrado perfeito)

Neste caso, a transformação é desaconselhável, pois, teríamos:

$$\sqrt{5 + \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{22}}{2}} + \sqrt{\frac{5 - \sqrt{22}}{2}}$$

isto é, dois radicais duplos ao invés de um.

4.º) Transformar $\sqrt{a + 3 - \sqrt{12a}}$

Temos $\begin{cases} A = a + 3 \\ B = 12a \\ A^2 - B = (a + 3)^2 - 12a = a^2 + 6a + 9 - 12a = \\ \qquad = a^2 - 6a + 9 = (a - 3)^2 \end{cases}$ (quadrado perfeito)

Logo:

$$\sqrt{a + 3 - \sqrt{12a}} = \sqrt{\frac{a + 3 + a - 3}{2}} - \sqrt{\frac{a + 3 - a + 3}{2}}$$

ou

$$\sqrt{a + 3 - \sqrt{12a}} = \sqrt{a} - \sqrt{3}$$

EXERCÍCIOS SÔBRE EQUAÇÕES REDUTÍVEIS A EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU E SÔBRE RADICAIS DUPLOS

Equações biquadradas

1. Resolver as seguintes equações biquadradas:

1.ª) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$
2.ª) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$
3.ª) $- x^4 + 8x^2 + 9 = 0$
4.ª) $x^4 - 18x^2 + 81 = 0$
5.ª) $x^4 - 24x^2 - 25 = 0$
6.ª) $4x^4 - 37x^2 + 9 = 0$
7.ª) $x^4 - 9x^2 + 14 = 0$
8.ª) $6x^4 - x^2 - 1 = 0$
9.ª) $2x^4 - 6x^2 - 108 = 0$
10.ª) $- 4x^4 - 2x^2 + 6 = 0$
11.ª) $x^4 - 34x^2 + 225 = 0$
12.ª) $x^4 - 19x^2 + 48 = 0$
13.ª) $3x^4 - 22x^2 - 45 = 0$
14.ª) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$
15.ª) $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$
16.ª) $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$
17.ª) $(4x^2 - 1)(x^2 + 1) = 26$
18.ª) $(x^2 - 1)^2 + (x^2 - 3)^2 = 20$

19.ª) $25x^2 + \frac{12}{5x^2} = \frac{47}{3}$
20.ª) $3ax^4 - (9a^2 + 1)x^2 + 3a = 0$
21.ª) $4x^2 + 91 = \frac{225}{x^2}$
22.ª) $(x - 1)(x + 2)(x - 4)(x + 3) + 10x = 274$
23.ª) $\frac{19x^2 + 2x - 1}{2x^2 + 7x + 1} = \frac{10x^2 - x + 1}{4x - 4x^2 + 5}$
24.ª) $x^4 - (9a^2 + 1)x^2 + 9a^2 = 0$
25.ª) $4(a^2x^4 + 1) = (16a^2 + 1)x^2$
26.ª) $x^4 - 3(a^2 + b^2)x^2 + 9a^2b^2 = 0$
27.ª) $a^2b^2x^4 - (a^4 + b^4)x^2 + a^2b^2 = 0$
28.ª) $x^4 + 4abx^2 - (a^2 - b^2)^2 = 0$
29.ª) $x^4 - 2(a+b)x^2 + (a+b)^2 = 0$
30.ª) $\frac{a}{2x^2 - 2} + \frac{a + 2}{2x^2 + 2} = 1$

Equações irracionais

2. Resolver as seguintes equações irracionais:

1.ª) $\sqrt{x} = 5$
2.ª) $\sqrt{2x} = 4$
3.ª) $\sqrt{x} = 20 - x$
4.ª) $x - 2\sqrt{x} = 15$
5.ª) $\sqrt{x} = 21 - 2x$
6.ª) $5\sqrt{x} = 2(x + 1)$
7.ª) $\sqrt{x - 13} = 2$
8.ª) $3\sqrt{2x} = 4x - 20$
9.ª) $-\sqrt{25 - x^2} = 1 - x$
10.ª) $\sqrt{18 - 2x} = \sqrt{x + 6}$
11.ª) $6\sqrt{4x + 13} - 7\sqrt{5x - 9} = 0$
12.ª) $2\sqrt{5x - 1} = 3\sqrt{3x - 2}$
13.ª) $\sqrt{4x^2 + 7x - 2} = x + 2$
14.ª) $\sqrt{5x^2 - x - 2} = 5x - 6$
15.ª) $8x - 1 = 5\sqrt{x^2 + 4x - 3}$
16.ª) $\sqrt{4x + 1} - \sqrt{3x - 2} = 1$
17.ª) $\sqrt{5x + 6} = 2 + \sqrt{5x - 6}$
18.ª) $\sqrt{16x - 7} = 4\sqrt{x + 7} - 7$
19.ª) $3\sqrt{x + 3} = 2\sqrt{x - 12} + 5\sqrt{x - 9}$
20.ª) $\sqrt{10x - 1} - \sqrt{2x - 1} = \sqrt{1 + 3x}$
21.ª) $\sqrt{5 + \sqrt{1 + 5x}} = 3$
22.ª) $\sqrt{1 - x\sqrt{x^2 - 1}} = x - 1$
23.ª) $3\sqrt{1 - \frac{1}{x}} = \sqrt{1 - x}$

24.ª) $\dfrac{21-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \dfrac{5}{2} - \dfrac{\sqrt{x}}{21-\sqrt{x}}$

25.ª) $\sqrt{x+4} - \sqrt{x-4} - \sqrt{x+11} + \sqrt{x-1} = 0$

26.ª) $\sqrt[3]{x^2-1} = \sqrt[3]{8}$

27.ª) $\sqrt[4]{8-\sqrt[3]{2x-1}} = 1$

28.ª) $3a - x = \sqrt{5a^2 - x^2}$

29.ª) $\sqrt{a+x} + \sqrt{b-x} = \sqrt{a+b}$

30.ª) $\sqrt{x+m} - \sqrt{x-m} = \dfrac{x+m-n}{\sqrt{x+m}}$

Radicais duplos

3. Transformar, na soma ou diferença de radicais simples, os seguintes radicais duplos:

1.º) $\sqrt{7+\sqrt{24}}$

2.º) $\sqrt{5-\sqrt{21}}$

3.º) $\sqrt{4+\sqrt{7}}$

4.º) $\sqrt{13 \pm \sqrt{48}}$

5.º) $\sqrt{7-\sqrt{40}}$

6.º) $\sqrt{6+2\sqrt{5}}$

7.º) $\sqrt{8+\sqrt{15}}$

8.º) $\sqrt{9-\sqrt{17}}$

9.º) $\sqrt{7+\sqrt{13}}$

10.º) $\sqrt{11-\sqrt{21}}$

11.º) $\sqrt{10+\sqrt{19}}$

12.º) $\sqrt{5-2\sqrt{6}}$

13.º) $\sqrt{28+10\sqrt{3}}$

14.º) $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$

15.º) $\sqrt{6-2\sqrt{5}}$

16.º) $\sqrt{\dfrac{5}{6}-\sqrt{\dfrac{2}{3}}}$

17.º) $\sqrt{\dfrac{13}{3}-\dfrac{4}{3}\sqrt{3}}$

18.º) $\sqrt{2a+\sqrt{4(a^2-b^2)}}$

19.º) $\sqrt{\dfrac{a}{2}-\sqrt{a-1}}$

20.º) $\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}$

RESPOSTAS:

1. 1.ª) ± 2, ± 1; 2.ª) ± 3, ± 2; 3.ª) ± 3; 4.ª) ± 3; 5.ª) ± 5; 6.ª) ± 3, $\pm \dfrac{1}{2}$; 7.ª) $\pm\sqrt{2}$, $\pm\sqrt{7}$; 8.ª) $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; 9.ª) ± 3; 10.ª) ± 1; 11.ª) ± 3, ± 5; 12.ª) ± 4, $\pm\sqrt{3}$; 13.ª) ± 3; 14.ª) ± 1.

± 3; 15.ª) ± 2, ± 4; 16.ª) ± 1; 17.ª) $\pm\dfrac{3}{2}$; 18.ª) $\pm\sqrt{5}$; 19.ª) $\pm\dfrac{3}{5}$, $\pm\dfrac{2}{\sqrt{15}} = \dfrac{\pm 2\sqrt{15}}{15}$; 20.ª) $\pm\sqrt{3a}$, $\pm\sqrt{\dfrac{1}{3a}}$ 21.ª) $\pm\dfrac{3}{2}$; 22.ª) ± 5; 23.ª) ± 1, $\pm\dfrac{1}{4}$; 24.ª) $\pm 3a$, ± 1; 25.ª) ± 2, $\pm\dfrac{1}{2a}$ 26.ª) $\pm a\sqrt{3}$, $\pm b\sqrt{3}$; 27.ª) $\pm\dfrac{a}{b}$, $\pm\dfrac{b}{a}$; 28.ª) $\pm(a-b)$ 29.ª) $\pm(a+b)$; 30.ª) 0, $\pm\sqrt{a+1}$.

2. 1.ª) 25; 2.ª) 8; 3.ª) 16; 4.ª) 25; 5.ª) 9; 6.ª) 4 e $\dfrac{1}{4}$; 7.ª) 17; 8.ª) 8; 9.ª) 4; 10.ª) 4; 11.ª) 9; 12.ª) 2; 13.ª) 1 e -2; 14.ª) 2; 15.ª) 2 e $\dfrac{38}{39}$; 16.ª) 2 e 6; 17.ª) 2; 18.ª) 2; 19.ª) 13; 20.ª) 1 e 5; 21.ª) 3; 22.ª) $\dfrac{5}{4}$ 23.ª) 1; 24.ª) 49 e 196; 25.ª) 5; 26.ª) ± 3; 27.ª) 172; 28.ª) $2a$; 29.ª) $-a$ e b; 30.ª) $\pm\sqrt{m^2+n^2}$.

3. 1.ª) $\sqrt{6}+1$; 2.ª) $\sqrt{\dfrac{7}{2}}-\sqrt{\dfrac{3}{2}}$; 3.º) $\sqrt{\dfrac{7}{2}}+\sqrt{\dfrac{1}{2}}$; 4.ª) $\sqrt{12}\pm 1$ 5.ª) $\sqrt{5}-\sqrt{2}$; 6.ª) $1+\sqrt{5}$; 7.º) $\sqrt{\dfrac{15}{2}}+\sqrt{\dfrac{1}{2}}$; 8.ª) $\sqrt{\dfrac{17}{2}} - \sqrt{\dfrac{1}{2}}$; 9.ª) $\sqrt{\dfrac{13}{2}}\pm\sqrt{\dfrac{1}{2}}$; 10.ª) $\sqrt{\dfrac{21}{2}}-\sqrt{\dfrac{1}{2}}$; 11.ª) $\sqrt{\dfrac{19}{2}}+\sqrt{\dfrac{1}{2}}$; 12.ª) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$; 13.ª) $5+\sqrt{3}$; 14.ª) $\sqrt{3}-1$; 15.ª) $\sqrt{5}-1$; 16.ª) $\sqrt{\dfrac{1}{2}}-\sqrt{\dfrac{1}{3}}$; 17.ª) $2-\sqrt{\dfrac{1}{3}}$; 18.ª) $\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}$; 19.ª) $\sqrt{\dfrac{a-1}{2}}-\sqrt{\dfrac{1}{2}}$; 20.ª) $\sqrt{a}-\sqrt{b}$

§ 5. Problemas do segundo grau. Aplicações à geometria.

34. Definição. Um problema diz-se do *segundo grau* quando a sua resolução depende de uma equação do segundo grau ou de uma equação redutível a uma outra do segundo grau (biquadrada, irracional, etc.).

35. Fases da resolução. Discussão. A resolução de um problema do segundo grau, a exemplo do que já foi estudado nos problemas do primeiro (*), compreende às seguintes fases:

1.ª) *pôr o problema em equação* (ou um sistema de equações);

2.ª) *resolver a equação* (ou o sistema de equações);

3.ª) *discutir as soluções.*

Na resolução de um problema, não se pode estabelecer regras fixas para *pô-lo em equação*. Uma vez armada a equação, correspondente ao problema proposto, devem-se ter presentes tôdas as simplificações e artifícios estudados para *resolvê-la*.

Para a *discussão*, é necessário, primeiramente, determinar as condições para as quais as raízes sejam *reais*, pois, tais condições implicarão na *possibilidade* do problema. Dependendo da natureza do problema que se vai resolver, as incógnitas podem estar sujeitas a certas condições restritivas, como por exemplo, serem só números inteiros, ou positivos ou positivos ou ainda pertencerem a um intervalo de limites conhecidos. Nessas condições, deve-se examinar se as raízes encontradas satisfazem a tais restrições e se os problemas propostos admitem *uma* ou *mais* soluções ou ainda *nenhuma*.

Nos tipos que serão estudados a seguir, procuraremos esclarecer as fases de resolução de cada um dêles.

36. Tipos de problemas do segundo grau.

1.º) Determinar o número cujo quadrado seja igual ao seu triplo aumentado de 28.

Resolução. Representemos por

x – o número procurado

Logo: x^2 – será o seu quadrado

Seguindo o enunciado do problema, obteremos a seguinte equação:

$$x^2 = 3x + 28$$

(*) Ver Problemas do primeiro grau – *Matemática*, Curso Ginasial, 2.ª Série pág. 151, do mesmo autor.

Resolvendo-a, vem

$$x^2 - 3x - 28 = 0$$

cujas raízes são: 7 e -4.

Resposta: o problema admite duas soluções, isto é, os números 7 e -4 que satisfazem o seu enunciado. Verificação:

$$7^2 = 3 \times 7 + 28 \qquad (-4)^2 = 3(-4) + 28$$
$$49 = 21 + 28 \qquad 16 = -12 + 28$$
$$49 = 49 \qquad 16 = 16$$

2.º) Osvaldo Luís perguntado sôbre a sua idade, respondeu: "A diferença entre o quadrado de minha idade e o quíntuplo dela é igual ao quadrado de 6". Qual a idade de Osvaldo Luís?

Temos: x – idade que se procura

e, portanto, a equação correspondente ao enunciado será:

$$x^2 - 5x = 6^2$$

ou

$$x^2 - 5x - 36 = 0$$

cujas raízes são: 9 e -4.

Respostas: Osvaldo Luís tem 9 anos. A raiz negativa (-4) é rejeitada, em virtude da idade em questão não poder ser negativa.

3.º) Achar dois números inteiros consecutivos tais que a soma de seus inversos seja igual a $\frac{5}{6}$,

Temos: x — um dos números

$x + 1$ — seu consecutivo

$\frac{1}{x}$ — inverso do primeiro

$\frac{1}{x+1}$ — inverso do segundo

equação correspondente ao enunciado:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{5}{6}$$

Resolvendo-a, vem:

m. m. c.: $6x(x+1)$

$$6(x+1)+6x=5x(x+1)$$
$$6x+6+6x=5x^2+5x$$
$$\therefore 5x^2-7x-6=0$$

donde as raízes: $x'=2$ e $x''=-\dfrac{3}{5}$

Resposta: Os números são 2 e 3 (consecutivo de 2). A raiz $-\dfrac{3}{5}$ é desprezada, porque a natureza do problema exige resposta inteira.

4.º) Deseja-se distribuir igualmente entre um certo número de pessoas, a importância de Cr\$ 720,00. Por ocasião da distribuição faltaram 5 pessoas e, dêste modo, os presentes puderam receber Cr\$ 24,00 a mais cada um. Quantas eram as pessoas?

Temos: x — número de pessoas existentes

$\dfrac{720}{x}$ — importância que cada uma das x pessoas deveria receber

$\dfrac{720}{x-5}$ — importância que cada uma das $x-5$ pessoas recebeu

Logo, de acôrdo com o enunciado do problema, vem

$$\frac{720}{x-5}=\frac{720}{x}+24$$

Resolvendo-a, temos:

$$720x=720(x-5)+24x(x-5)$$
$$720x=720x-3\,600+24x^2-120x$$
$$24x^2-120x-3\,600=0$$
$$(\div 24)\qquad x^2-5x-150=0$$

cujas raízes são: 15 e -10.

Resposta: As pessoas eram 15 (a raiz negativa deve ser rejeitada.

5.º) Determinar um número positivo que, diminuido de sete vêzes a sua raiz quadrada aritmética, resulte 44.

Temos a seguinte equação que corresponde ao enunciado acima:

$$x-7\sqrt{x}=44 \qquad \text{(equação irracional)}$$

Isolando o radical, vem

$$-7\sqrt{x}=44-x$$

Elevando ao quadrado, obtemos:

$$49x=1936-88x+x^2$$

ou

$$x^2-137x+1936=0$$

cujas raízes são: 121 e 16. Dessas raízes só a primeira satisfaz as condições do problema, como é fácil verificar.

Resposta: O número procurado é 121.

6.º) Dois ciclistas partem ao mesmo tempo de uma cidade em direção a uma outra, distante 180 km. O primeiro, que percorre por hora 2 km mais que o segundo, chega ao destino uma hora antes do outro. Qual a velocidade de cada corredor?

Temos: x — velocidade do segundo ciclista

$x+2$ — velocidade do primeiro ciclista

$\dfrac{180}{x}$ — tempo gasto pelo segundo ciclista

$\dfrac{180}{x+2}$ — tempo gasto pelo primeiro ciclista

De acôrdo com o enunciado do problema, vem a equação:

$$\frac{180}{x}-\frac{180}{x+2}=1$$

ou

$$x^2+2x-360=0$$

cujas raízes são: 18 e -20 (rejeitada)

Resposta: A velocidade do primeiro ciclista é de 20 km/h e a do segundo 18 km/h.

7.º) Repartir o número m em duas partes tais que o produto delas seja igual a n.

Temos: x — a primeira parte procurada

$m - x$ — a segunda parte procurada

A equação correspondente será

$$x(m - x) = n$$

ou

$$mx - x^2 = n$$

$$x^2 - mx + n = 0$$

$$\therefore \quad x = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 4n}}{2}$$

Discussão: Para que as raízes sejam reais, é necessário que

$$m^2 - 4n \geqslant 0 \;\therefore\; n \leqslant \left(\frac{m}{2}\right)^2$$

Se $n = \left(\frac{m}{2}\right)^2$, o discriminante será nulo e as duas partes tornar-se-ão iguais a $\frac{m}{2}$. A igualdade dessas duas partes acarretará o *máximo* valor para n.

Se $n > \left(\frac{m}{2}\right)^2$ a equação, correspondente ao problema, não admitirá raízes reais e, portanto, o problema *não será possível*.

37. Aplicações à geometria. Divisão áurea. Nas demonstrações dos teoremas relativos às propriedades das figuras geométricas, vimos (*) a grande *aplicação da álgebra à geometria*. Estudaremos, agora, a aplicação denominada *divisão áurea* (**), que tem a sua importância assinalada desde a antiguidade.

Dado um segmento AB, diz-se que se efetua uma *divisão áurea* de AB por meio de um ponto P, quando êsse ponto divide o segmento dado em duas partes desiguais tais que a maior seja *média proporcional* (***) entre a menor e o segmento

(*) Estudos feitos na 3.ª Série ginasial.

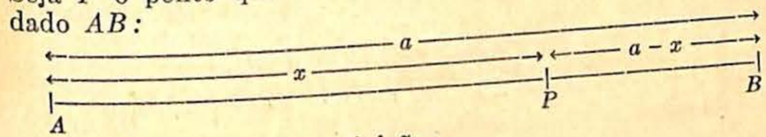
(**) Também chamada por PACIOLI de *divina proporção*, por ser, das proporções a mais agradável à vista, tanto na *arquitetura* como no *corpo humano*.

(***) *Proporção contínua* (meios iguais).

todo. A parte maior resultante da divisão é denominada *secção áurea* ou *segmento áureo* de AB.

A divisão áurea de um segmento foi, por Euclides, chamada *divisão em média e extrema razão*.

Coloquemos o problema em equação supondo-o resolvido. Seja P o ponto que efetua uma *divisão áurea* no segmento dado AB:



Devemos ter, por definição:

$$\frac{AP}{AB} = \frac{PB}{AP} \quad (AP \text{ é } \textit{média proporcional} \text{ entre } PB \text{ e } AB).$$

Chamando as medidas algébricas dos segmentos em questão, respectivamente, de: $AB = a$ (*)

$AP = x$

$PB = a - x$

teremos:

Substituindo êsses valores na proporção contínua acima, vem:

$$\frac{x}{a} = \frac{a - x}{x}$$

Donde $\quad x^2 = a(a - x)$

ou $\quad x^2 + ax - a^2 = 0$

Pelas condições impostas ao problema, a incógnita x (medida algébrica de AP) deve satisfazer a condição: $0 < x < a$ e, como o discriminante é $a^2 + 4a^2 = 5a^2 > 0$, temos o seguinte valor para x:

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{5a^2}}{2} = \frac{-a \pm a\sqrt{5}}{2}$$

onde

$$\begin{cases} x' = -\left(\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)a \\ x'' = \left(\dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)a \end{cases}$$

(*) Por comodidade, estamos usando a representação do valor algébrico de AB por AB (ao invés de $\overline{AB}$).

A raiz negativa é rejeitada como *estranha* ao problema, enquanto a *positiva* (que é menor que a) é a *solução*. Logo: $x = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)a$.

Entre as *aplicações* da divisão está a construção do *decágono regular*, que será estudada no capítulo relativo à geometria.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

Calcular o valor do *segmento áureo* do segmento de 8 cm de comprimento. (Usar a $\sqrt{5}$ com a aproximação de 0,01).

Aplicando a fórmula $x = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)a$, temos:

ou
$$x = \left(\frac{2,23-1}{2}\right) 8 \text{ cm}$$

$$x = 1,23 \times 4 \text{ cm} = \mathit{4,92\ cm}$$

Ex

EXERCÍCIOS SÔBRE PROBLEMAS DO SEGUNDO GRAU

1. Determinar o número cujo triplo de seu quadrado somado com êsse número seja igual a 2.
2. Dizer qual o número que, somando 10 ao quíntuplo de seu quadrado, resulta 27 vêzes o seu valor?
3. A diferença entre o quadrado de um certo número e o seu próprio dôbro é igual a -1. Qual é êsse número?
4. Achar dois números consecutivos tais que a soma dos seus quadrados seja 25.
5. Decompôr o número 28 em dois fatôres tais que a sua soma seja igual a 11.
6. Determinar o número que multiplicado pelos seus $\frac{3}{4}$ dê o produto 12.
7. Se do quadrado de um número subtrairmos 6, o resto será 30. Qual é êsse número?
8. Qual é o número que é excedido de 6 pelo dôbro de seu quadrado?
9. A soma dos quadrados de três números consecutivos é 194. Determinar êsses números.

10. Determinar um número tal que o seu quadrado seja igual ao seu triplo aumentado de 28.
11. Achar dois números pares consecutivos sabendo que o produto dêles é 2 808.
12. Determinar três números ímpares consecutivos sabendo que o seu produto é igual a sete vêzes a sua soma. (*)
13. Achar cinco números inteiros consecutivos sabendo que a soma dos quadrados dos quatro primeiros números é igual a quarenta e duas vêzes o quinto número.
14. Determinar dois números inteiros consecutivos tais que a soma de seus inversos seja $\frac{5}{6}$.
15. Achar o número inteiro que, aumentado de 43, dá o quadrado do número sucessivo.
16. Achar dois números ímpares consecutivos tais que a diferença de seus quadrados seja igual a 8 000.
17. Uma fração tem o denominador superando de 2 o numerador. Somando 2 ao numerador e 1 ao denominador, a fração aumenta de $\frac{7}{30}$. Determiná-la.
18. O quociente de uma divisão é os $\frac{3}{8}$ do divisor, e o resto 36 é a quinquagésima quinta parte do dividendo. Achar o divisor.
19. O dividendo de uma divisão é 1 235. Sabendo que o divisor é igual ao quociente e que o resto é os $\frac{2}{7}$ do divisor, determinar o divisor.
20. O divisor de uma divisão ultrapassa de 5 o quociente que, por sua vez, ultrapassa o resto também de 5. Determinar o divisor dessa divisão, sabendo que o dividendo é 1 075.
21. Dividindo um número de dois algarismos, cuja soma é 9, pelo quociente da divisão do algarismo das unidades pelo algarismo das dezenas, obtém-se o quociente 18. Qual é êsse número?
22. Um pai tem 54 anos e seu filho 12. Há quanto tempo a idade do pai foi igual ao quadrado da do filho?
23. Um pai tinha 24 anos ao nascer o seu filho. O produto das atuais idades de ambos é o triplo do quadrado da idade do filho. Quais as duas idades?
24. A idade de uma criança daqui a 6 anos será o quadrado da idade que tinha há 6 anos. Pergunta-se a idade atual dessa criança.
25. Determinar as idades de Vera Maria e Sílvia Maria, sabendo que a sua diferença é 4 e o seu produto 32.

(*) Resolver por fatoração: $(2x+1).(2x+3).(2x+5) = 7(6x+9) = 21(2x+3)$

26. Dois garotos têm juntos 240 figurinhas. Quantas tem cada um, se a soma de seus quadrados é igual a 29 600?

27. Vendendo um objeto por Cr$ 255,00, ganho duas vêzes a raiz quadrada do preço pago. Quanto paguei por êsse objeto?

28. Calcular as dimensões de um retângulo, sabendo-se que tem 78m de perimetro e $360m^2$ de área.

29. Uma quantia de Cr$ 4 000,00 deveria ser distribuida em partes iguais por um certo número de pessoas. No momento da partilha, 4 delas se retiram, acarretando um aumento de Cr$ 50,00 na parte relativa a cada uma das remanescentes. Quantas pessoas eram?

30. Certa pessoa destinou Cr$ 12 000,00 para ser em distribuidos igualmente entre um certo número de órfãos. Tendo dois dêstes desistido de suas partes, as dos demais foram acrescidas de Cr$ 1600,00 cada uma. Qual o número de órfãos?

31. Duas fontes podem, juntas, encher um recipiente em 18 horas. Qual o tempo que cada uma, sòzinha, leva para encher êsse recipiente, se a primeira emprega nessa operação 27 horas mais que a segunda.

32. Um reservatório, cuja capacidade é de 270 litros, é alimentado por uma torneira. Se essa torneira despejar mais um litro por segundo, o tempo necessário para encher o reservatório diminui de 45 segundos. Quantos litros a torneira despeja por segundo?

33. Dois operários, trabalhando juntos, fazem certo trabalho em 6 dias. Quantos dias empregará o primeiro operário para fazer sòzinho o mesmo trabalho, se êle emprega 5 dias menos que o outro trabalhando sòzinho?

34. Um trem, num percurso de 270 km, reduziria de $\frac{3}{5}$ de hora a duração de sua viagem se aumentasse de 5 km a sua velocidade horária. Determinar a sua velocidade nestas condições.

35. Um homem fez uma viagem de 240 km. Se caminhasse mais 4 km por dia, do que realmente caminha, teria gasto dois dias menos na viagem. Pergunta-se quantos dias gastou na viagem e quantos quilômetros andou por dia.

36. Antonio percorreu 90 km em 7 horas, andando os primeiros 18 km a pé e o restante em bicicleta. Sabendo que, de bicicleta, faz 12 km por hora mais que a pé, pergunta-se quantos quilômetros faz Antonio, por hora, a pé.

37. Dois ciclistas partem ao mesmo tempo em direção a uma vila distante 90 km. O primeiro, que percorre 1 km por hora mais que o segundo, chega ao destino uma hora antes do outro. Qual a velocidade de cada um?

38. Calcular, com a aproximação de 0,01, o valor do segmento áureo do segmento de 12 cm de comprimento.

39. Qual a área de um quadrado, cujo lado é o segmento áureo do segmento de 10 cm de comprimento. (Aproximação de 0,01).

40. As dimensões de um retângulo são 8 cm e 6 cm. Calcular a área do retângulo cujas dimensões são, respectivamente, os segmentos áureos das dimensões do primeiro retângulo. (Aproximação de 0,01).

Respostas:

1. $\frac{2}{3}$ ou -1.
2. 5 ou $\frac{2}{5}$
3. 1
4. 3 e 4 (ou -4 e -3)
5. 4 e 7
6. 4 ou -4
7. 6 ou -6
8. 2 ou $-\frac{3}{2}$
9. 7, 8, 9 ou -7, -8, -9
10. 7 ou -4
11. 52 e 54
12. 3, 5 e 7
13. 11, 12, 13, 14 e 15
14. 2 e 3
15. 6 ou -7
16. 1 999 e 2 001
17. $\frac{3}{5}$
18. 72
19. 35
20. 30
21. 36
22. 5 anos
23. 36 anos e 12 anos
24. 10 anos
25. 8 anos e 4 anos
26. 100 e 140
27. Cr$ 225,00
28. 24 m e 15 m
29. 20
30. 5
31. 54h e 27h
32. 21
33. 10
34. 45 km/h
35. 12 d; 20 km
36. 6 km
37. 10 km/k e 9km/h
38. 7,38cm
39. $37,8225cm^2$
40. $18,1548cm^2$

CAPÍTULO II

Relações métricas nos polígonos e no círculo. Calculo de π

§1. Relações métricas no triângulo retângulo. Teorema de Pitágoras.

1. Conceito de projeção ortogonal. Chama-se *projeção ortogonal de um ponto* sôbre uma reta ao *pé da perpendicular* traçada do ponto à reta. Na fig. 1, a projeção ortogonal de P sôbre r é P'. Denomina-se *projeção ortogonal de um segmento de reta* sôbre uma *reta* ao *segmento de reta* determinado pelas projeções ortogonais dos extremos do segmento dado sôbre a mesma reta. Na fig. 1, temos:

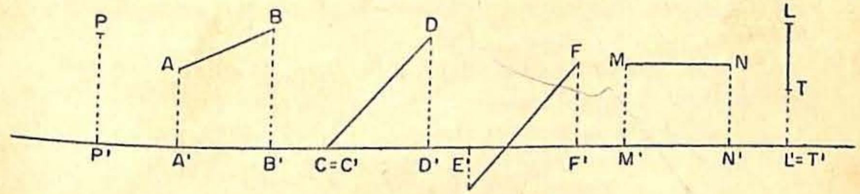


FIG. 1

$A'B'$	é a *projeção ortogonal* de AB sôbre r ($A'B' < AB$, porque $AB \,\underline{/}\, r$)
$C'D'$	é a *projeção ortogonal* de CD sôbre r ($C'D' < CD$, porque $CD \,\underline{/}\, r$)
$E'F'$	é a *projeção ortogonal* de EF sôbre r ($E'F' < EF$, porque $EF \,\underline{/}\, r$)
$M'N'$	é a *projeção ortogonal* de MN sôbre r ($M'N' = MN$, porque $MN \parallel r$)
$L' \equiv T'$	é a *projeção ortogonal* de LT sôbre r ($L' \equiv T'$, reduz-se a um ponto, porque $LT \perp r$)

2. Relações métricas. As relações entre os números que representam as medidas, expressas na mesma unidade, dos elementos lineares de um triângulo são denominadas *relações métricas*. Êsses elementos lineares são os lados (a, b, c, na fig. 2), as projeções de dois dêsses lados sôbre o outro (n e m na fig. 2), as alturas (h na fig. 2), as medianas e as bissetrizes.

Nos triângulos retângulos, estudaremos as relações métricas que se seguem.

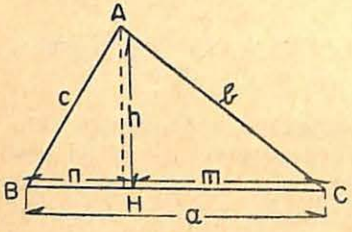


FIG. 2

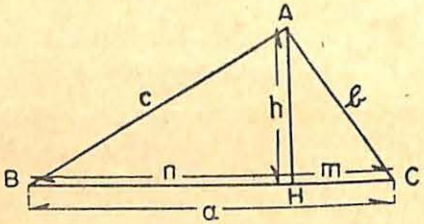


FIG. 3

3. Primeira relação. *Teorema: Cada cateto* (*) *é média proporcional entre a hipotenusa e a sua projeção sôbre a hipotenusa.*

Seja o triângulo retângulo ABC (fig. 3) onde $\hat{A}$ é reto.

Temos: $H \begin{cases} a \text{ — hipotenusa} \\ c \text{ e } b \text{ — catetos} \\ n \text{ e } m \text{ — proj. dos catetos sôbre} \\ \quad \text{a hipotenusa} \end{cases}$ $T \begin{cases} b^2 = am \\ c^2 = an \end{cases}$

Demonstração:

1. Tracemos a altura AH que dividirá a hipotenusa nos segmentos n e m; êstes são, respectivamente, as projeções dos catetos c e b sôbre a hipotenusa.
2. Os triângulos retângulos ABC e AHC são semelhantes por terem, ambos, um ângulo reto ($\hat{A}$ no $\triangle ABC$ e $\hat{H}$ no $\triangle AHC$) e um ângulo igual em C (**). Logo,

(*) A expressão *cateto* (a hipotenusa, ou ainda projeção) implica que já estamos nos referindo à sua *medida*.

(**) Primeiro clássico de semelhança de triângulos, ver *Matemática*, Curso Ginasial, 3.ª Série, pág. 262, do mesmo autor.

os lados homólogos dêsses triângulos são proporcionais, isto é:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{m}$$

pois, são lados homólogos $\begin{cases} a \text{ do } \triangle ABC \\ b \text{ do } \triangle AHC \end{cases}$ por serem ambos hipotenusas e $\begin{cases} b \text{ do } \triangle ABC \\ m \text{ do } \triangle AHC \end{cases}$ por serem ambos catetos adjacentes ao ângulo C.

Donde: $\boxed{b^2 = am}$ *c.q.d.*

Da mesma forma, são semelhantes os triângulos ABC e AHB (um ângulo reto cada um e o ângulo comum B), e portanto:

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{n} \quad \text{ou} \quad \boxed{c^2 = an}$$ *c.q.d.*

4. Segunda relação. *Teorema: A altura traçada sôbre a hipotenusa é média proporcional entre os dois segmentos que ela determina sôbre a hipotenusa.*

Consideremos o triângulo retângulo ABC (fig. 4). Temos:

$H \begin{cases} AH = h \text{ (altura)} \\ m \text{ e } n \text{ — projeções} \end{cases}$

$T \; \{ h^2 = mn$

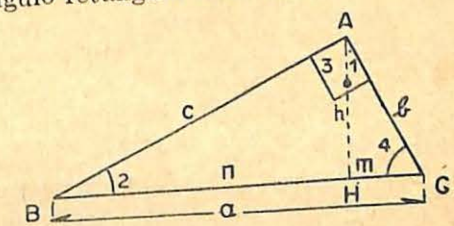


FIG. 4

Demonstração:

De fato, os dois triângulos AHC e AHB, ambos semelhantes ao $\triangle ABC$, são semelhantes entre si (propriedade transitiva da semelhança (*)). Logo:

$$\frac{m}{h} = \frac{h}{n}$$ sendo homologos os lados $\begin{cases} m \text{ do } \triangle AHC \\ h \text{ do } \triangle AHB \end{cases}$

(*) *Idem*, pág. 260, (*Matemática* — 3.ª Série Ginasial).

opostos a ângulos iguais ($\hat{1} = \hat{2}$, por admitirem o mesmo complemento $\hat{3}$) e $\begin{cases} h \text{ do } \triangle AHC \\ n \text{ do } \triangle AHB, \end{cases}$

como opostos a ângulos iguais ($\hat{3} = \hat{4}$, por admitirem o mesmo complemento $\hat{1}$). Portanto

$$\boxed{h^2 = mn} \qquad c.q.d.$$

Ex

5. Terceira relação. ***Teorema:*** *O produto dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela respectiva altura.*

Devemos demonstrar (fig. 4) que: $T \{ \; bc = ah$

Demonstração:

Com efeito, consideremos as relações já deduzidas:

$$b^2 = am$$
$$c^2 = an$$

Multiplicando-as, membro a membro, vem:

$$b^2c^2 = a^2mn$$

Como $h^2 = mn$ (Segunda relação)

substituindo, temos:

$$b^2c^2 = a^2h^2$$

e, extraindo a raiz quadrada de ambos os membros, vem:

$$\boxed{bc = ah} \qquad c.q.d.$$

Ex

6. Quarta relação. ***Teorema de Pitágoras:*** (*) *O quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.*

A tese é agora (fig. 4) a seguinte: $T \{ \; a^2 = b^2 + c^2$

(*) PITÁGORAS, um dos maiores filósofos da antiguidade. Nascido em Samos, cêrca de 580 a. C. Discípulo de *Tales*. Fundou a escola itálico-pitagórica, que suscitou muitos inimigos. Transformou o estudo da matemática numa verdadeira ciência, contribuindo com inúmeras descobertas no campo da geometria, devendo-se destacar a que tomou feição monumental — o *Teorema de Pitágoras*.

Demonstração:

Consideremos as relações já deduzidas

$$b^2 = am$$
$$c^2 = an$$

Somando, membro a membro, vem

$$b^2 + c^2 = am + an$$

ou $b^2 + c^2 = a(m + n)$ e como $m + n = a$, obtemos:

$$b^2 + c^2 = a.a$$

e, portanto: $\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$ c.q.d.

OBSERVAÇÕES: 1.ª) Os triângulos retângulos, dos quais as medidas dos lados são expressas por *números inteiros*, denominam-se *pitagóricos*. Assim, por exemplo, o triângulo retângulo de lados $a = 10$ cm, $b = 8$ cm a $c = 6$ cm é *pitagórico*, pois, êsses valores satisfazem o Teorema de Pitágoras ($10^2 = 8^2 + 6^2$). Entre os triângulos pitagóricos, destaca-se equêle cujos lados são expressos pelos números 3, 4 e 5. Pode-se verificar que *3*, *4* e *5* são os únicos três números naturais consecutivos tais que o quadrado do maior é igual à soma dos quadrados dos outros dois.

2.ª) Do Teorema de Pitágoras, decorre imediatamente que:

$$b^2 = a^2 - c^2 \qquad \text{e} \qquad c^2 = a^2 - b^2$$

isto é, o *quadrado de cada cateto é igual ao quadrado da hipotenusa menos o quadrado do outro cateto.*

RESUMO

As relações métricas nos triângulos retângulos, expressas pelos teoremas estudados, no presente capítulo denomina-se *propriedades caracteristas do triângulo retângulo* e fornecem as seguintes *fórmulas*, de uso freqüente no cálculo:

Ex $\boxed{b^2 = am}$ $\boxed{c^2 = an}$ $\boxed{h^2 = mn}$ $\boxed{bc = ah}$ $\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1.º) No triângulo *ABC*, retângulo em $\hat{A}$ (fig. 4), tem-se $b = 3$ cm, $c = 4$ cm. Calcular a hipotenusa (*a*), a altura (*h*) e os segmentos (*m* e *n*) que a altura determina sôbre a hipotenusa.

Temos:

1. cálculo da hipotenusa: $a^2 = b^2 + c^2$

$$a^2 = 9 + 16 = 25$$

ou $\quad a = \sqrt{25} = 5 \quad \therefore a = 5\ cm$

2. cálculo da altura: $bc = ah$

$$3 \times 4 = 5h$$

ou $\quad h = \frac{12}{5} = 2{,}4 \quad \therefore h = 2{,}4\ cm$

3. cálculo de m e n: $b^2 = am$

ou $\quad 9 = 5m \therefore m = \frac{9}{5} \therefore m = 1{,}8\ cm$

$$c^2 = an$$

ou $\quad 16 = 5n \therefore n = \frac{16}{5} \therefore n = 3{,}2\ cm$

2.º) Num triângulo retângulo, as projeções dos catetos sôbre a hipotenusa medem 36 cm e 64 cm. Calcular a altura relativa à hipotenusa e os catetos.

Temos: $n = 64$ cm, $m = 36$ cm. A altura, agora, será dada pela fórmula $h^2 = mn$. Logo, $h^2 = 64 \times 36 = 2\,304$ e portanto $h = \sqrt{2\,304} = 48 \therefore h = 48\ cm$.

Os catetos serão dados pelas fórmulas: $b^2 = am$ e $c^2 = an$, onde $a = m + n = 36 + 64 = 100$. Logo:

$$b^2 = 100 \times 36 = 3\,600, \text{ donde } b = \sqrt{3\,600} \therefore b = 60\ cm$$

$$c^2 = 100 \times 64 = 6\,400, \text{ donde } c = \sqrt{6\,400} \therefore c = 80\ cm$$

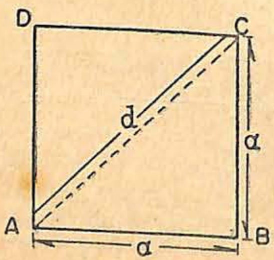


FIG. 5

7. Cálculo da diagonal de um quadrado. Seja o quadrado de lado a (fig. 5). Calculemos o valor de sua diagonal d. No triângulo retângulo isósceles ABC, pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$$

e como $AB = BC = a$ e $AC = d$, obtemos:

$$d^2 = a^2 + a^2$$

ou $\quad d^2 = 2a^2$

donde, extraindo a raiz quadrada de ambos os membros, vem:

$$\boxed{d = a\sqrt{2}}$$

8. Cálculo da altura de um triângulo equilátero. Seja o triângulo equilátero ABC (fig. 6), cujo lado tem por medida l, e cuja altura, relativa à base BC, tem por medida h. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo AHC, vem:

$$AC^2 = AH^2 + HC^2$$

ou $\quad l^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2$

Tirando o valor de h^2:

$$h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} = \frac{3l^2}{4}$$

donde, extraindo a raiz quadrada:

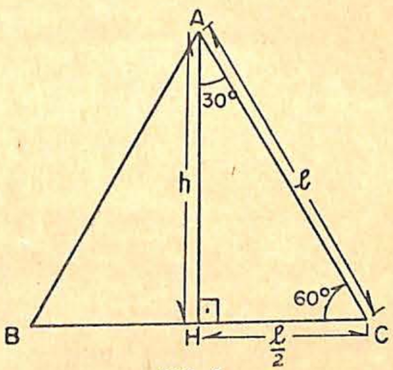


FIG. 6

$$\boxed{h = \frac{l\sqrt{3}}{2}}$$

OBSERVAÇÕES:

1.ª) No triângulo retângulo em que um dos ângulos agudos vale 30° (e portanto o outro agudo vale 60°), o *cateto oposto ao ângulo de 30° vale a metade da hipotenusa* (no $\triangle AHC$, fig. 6, o cateto HC vale $\frac{l}{2}$);

2.ª) Para o *cálculo*, os valores de $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$, assim como outros números irracionais, serão tomados com a aproximação por falta, a menos de 0,01, de preferência.

Exemplos:

1. Calcular a altura de um triângulo equilátero cujo perímetro igual a 15 dm.

Como o perímetro é 15 dm, cada lado valerá 5 dm e, portanto, aplicando a fórmula que dá a altura do triângulo equilátero, temos:

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2} \text{ ou } h = \frac{5 \times 1{,}73}{2} = \frac{8{,}65}{2} = 4{,}325$$

Logo, a altura é igual a *4,325 dm.*

2. Calcular o perímetro de um quadrado cuja diagonal mede $3\sqrt{2}$ cm.

Como $d = a\sqrt{2}$, segue-se que $a = \frac{d}{\sqrt{2}}$, onde substituindo $d = 3\sqrt{2}$, obtemos:

$$a = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 3$$

Logo, o perímetro do quadrado será 4×3 cm = *12cm*

EXERCÍCIOS

1. Calcular o valor da hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem 5 m e 12 m.
2. Qual a hipotenusa do triângulo retângulo cujos catetos medem 20 cm e 21 cm?
3. Num triângulo retângulo, os catetos medem 0,8 dm e 0,6 dm. Achar a hipotenusa.
4. A hipotenusa de um triângulo mede $\sqrt{130}$ m e um dos catetos 7 m. Calcular o valor do outro cateto.
5. A altura de um triângulo retângulo determina sôbre a hipotenusa segmentos de 4 m e 16 m. Calcular a altura.
6. A altura de um triângulo retângulo determina sôbre a hipotenusa dois segmentos, um de 32 dm e outro de 18 dm. Calcular os catetos.
7. Os catetos de um triângulo retângulo medem 3 m e 4 m. Calcular o valor das respectivas projeções sôbre a hipotenusa.
8. Num triângulo retângulo, um cateto é igual a 15 m e a altura relativa à hipotenusa 12 m. Determinar a hipotenusa, o outro cateto e as projeções dos catetos sôbre a hipotenusa.
9. A hipotenusa de um triângulo retângulo mede 15 m e a soma dos catetos é 21 m. Calcular os catetos.
10. Os catetos de um triângulo retângulo medem 6 m e 8 m. Calcular a altura relativa à hipotenusa.

11. Quanto mede a diagonal do retângulo cujas dimensões são: base = 8 m e altura = 15 m?
12. A base de um retângulo é igual a 24 m, e o comprimento de sua diagonal 25 m. Calcular a altura dêsse retângulo.
13. As diagonais de um losango medem 12 m e 16 m. Calcular o lado.
14. Calcular o perímetro do losango cujas diagonais valem 1,8 m e 8 m (aprox. de 0,1).
15. A diagonal maior de um losango vale 15 m. O lado dêsse losango mede 9,604 m (aprox. 0,001). Qual o valor da diagonal menor?
16. Num triângulo retângulo, um dos catetos mede 15 dm e a hipotenusa 25 dm. Calcular o valor da altura relativa à hipotenusa.
17. Num triângulo isósceles, os lados iguais medem 10 m. Determinar-lhe a altura e a base, sabendo que a altura é $\frac{2}{3}$ da base.
18. A que altura uma escada de 5 m toca num muro, se o pé da escada está a 3 m do mesmo?
19. Calcular a altura de um triângulo equilátero cujo lado mede 4 m.
20. A altura de um triângulo equilátero é igual a $5\sqrt{3}$ m. Calcular o perímetro dêsse triângulo.
21. A diagonal de um retângulo mede 10 m e a diferença entre dois lados consecutivas é de 2 m. Calcular os lados.
22. Num triângulo retângulo *ABC*, temos: $b + c = 35$, $a = 25$. Determinar: b, c, h e as projeções (m e n) de b e c sôbre a.
23. Calcular os três lados de um triângulo retângulo, sabendo que a altura é igual a 12 dm e que os segmentos que ela determina sôbre a hipotenusa valem, respectivamente 9 dm e 16 dm.
24. Num triângulo retângulo *ABC*, temos: $a = 100$, $b = 60$. Calcular o perímetro de cada um dos triângulos determinados pela altura relativa à hipotenusa.
25. Num trapézio retângulo, as bases têm 10 m e 14 m, e a altura 3 m. Calcular o valor do lado oblíquo.

RESPOSTAS:

1. 13 m
2. 29 cm
3. 1 dm
4. 9 m
5. 8 m
6. 40 dm e 30 dm
7. 1,8 m e 3,2 m
8. 25 m, 20 m, 9 m e 16 m
9. 9 m e 12 m
10. 4,8 m
11. 17 m
12. 7 m
13. 10 m
14. 16,4 m
15. 11,996 m
16. 12 dm
17. 12 m e 8 m
18. 4 m

19. 3,46 m | 20. 30 m
21. 6 m e 8 m
22. $b = 20$, $c = 15$, $h = 12$, $m = 16$ $n = 9$.
23. $a = 25$m, $b = 15$m e $c = 20$m
24. 192 e 144 | 25. 5 m

§ 2. Relações métricas num triângulo qualquer. Relação dos co-senos.

RELAÇÕES MÉTRICAS NUM TRIÂNGULO QUALQUER

9. Primeira relação. ***Teorema:*** *Num triângulo qualquer, o quadrado do lado oposto a um ângulo* ***agudo*** *é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados,* ***menos*** *duas vêzes o produto de um dêstes lados pela projeção do outro sôbre êle.*

Seja ABC um triângulo qualquer (fig. 7). Temos:

$H \{ \hat{A} < 90°$ $T \{ a^2 = b^2 + c^2 - 2cn$

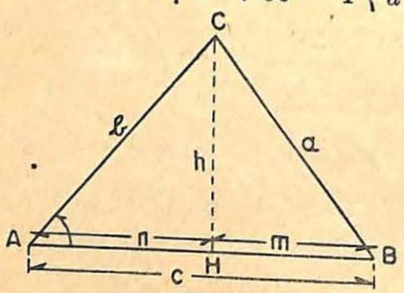


FIG. 7

Demonstração:

1. Tracemos a altura $CH = h$. Aplicando o Teorema de Pitágoras no $\triangle CHB$, vem:

$$a^2 = h^2 + m^2 \quad (1)$$

2. Como no $\triangle CHA$, temos

$$h^2 = b^2 - n^2$$

e $m = c - n$

podemos substituir êstes valores na relação (1), e obtemos:

$$a^2 = b^2 - n^2 + (c - n)^2$$

ou

$$a^2 = b^2 - n^2 + c^2 - 2cn + n^2$$

e finalmente

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2cn}$$

c.q.d.

10. Segunda relação. ***Teorema:*** *Num triângulo obtusângulo, o quadrado do lado oposto ao ângulo* ***obtuso*** *é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados,* ***mais*** *duas vêzes o produto de um dêstes lados pela projeção do outro sôbre êle.*

Consideremos o triângulo obtusângulo ABC (fig. 8).

Temos:

$H \{ \hat{A} > 90°$

$T \{ a^2 = b^2 + c^2 + 2cn$

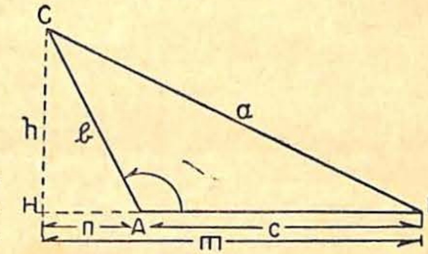


FIG. 8

Demonstração:

1. Tracemos a altura $CH = h$ (que, nesse caso, incide sôbre o prolongamento da base do $\triangle ABC$). Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo CHB, vem:

$$a^2 = h^2 + m^2$$

Como $h^2 = b^2 - n^2$ (no $\triangle CHA$) e $m = n + c$, na expressão acima, obtemos:

$$a^2 = b^2 - n^2 + (n + c)^2$$

ou

$$a^2 = b^2 - n^2 + n^2 + 2cn + c^2$$

e finalmente

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 + 2cn}$$

c.q.d.

APLICAÇÕES:

11. Reconhecimento da natureza de um triângulo. Das relações métricas estudadas, concluímos que:

se $\hat{A} = 90° \rightarrow a^2 = b^2 + c^2$ $\therefore a^2 = b^2 + c^2$ e o $\triangle ABC$ é *retângulo*
se $\hat{A} < 90° \rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2cn$ $\therefore a^2 < b^2 + c^2$ e o $\triangle ABC$ é *acutângulo*
se $\hat{A} > 90° \rightarrow a^2 = b^2 + c^2 + 2cn$ $\therefore a^2 > b^2 + c^2$ e o $\triangle ABC$ é *obtusângulo*

e, reciprocamente, dados os três lados a, b, c (o maior lado deve ser sempre menor que a soma dos outros dois), de um triângulo ABC, podemos saber se o mesmo *é retângulo, acutângulo* ou *obtusângulo*, comparando o *quadrado do maior lado* com a *soma dos quadrados dos outros dois*.

EXERCÍCIOS

1.º) Reconhecer a natureza dos seguintes triângulos:

I. $\begin{cases} a = 12 \\ b = 8 \\ c = 9 \end{cases}$ II. $\begin{cases} a = 10 \\ b = 8 \\ c = 6 \end{cases}$ III. $\begin{cases} a = 13 \\ b = 8 \\ c = 7 \end{cases}$

Temos

I. $a^2 = 12^2 = 144$

$\left.\begin{matrix} b^2 = 8^2 = 64 \\ c^2 = 9^2 = 81 \end{matrix}\right\}$ 145 (soma)

$\therefore a^2 < b^2 + c^2$

II. $a^2 = 100$

$\left.\begin{matrix} b^2 = 64 \\ c^2 = 36 \end{matrix}\right\}$ 100 (soma)

$\therefore a^2 = b^2 + c^2$

III. $a^2 = 169$

$\left.\begin{matrix} b^2 = 64 \\ c^2 = 49 \end{matrix}\right\}$ 113 (soma)

$\therefore a^2 > b^2 + c^2$

Logo, em I o triângulo é *acutângulo*, em II *retângulo* e em III *obtusângulo*.

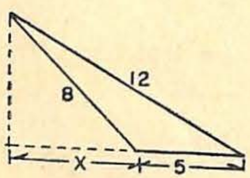


FIG. 9

2.º) Os lados de um triângulo medem 5 cm, 8 cm e 12 cm. Calcular o valor da projeção do lado maior sôbre o menor (fig. 9).

Reconheçamos primeiramente a natureza do triângulo. Como: $12^2 = 144$, $8^2 = 64$, $5^2 = 25$, segue-se que: $12^2 > 8^2 + 5^2$ e, portanto, o triângulo é *obtusângulo*. Logo, temos (n.º 11):

$$12^2 = 8^2 + 5^2 + 2 \times 5 \times x$$

ou

$$144 = 64 + 25 + 10x$$

e

$$144 = 89 + 10x$$

donde

$$x = \frac{144 - 89}{10} = 5{,}5$$

Portanto, a projeção procurada vale 10,5cm (5cm + 5,5cm).

RELAÇÃO DOS CO-SENOS

12. Relação fundamental. ***Teorema:*** *Num triângulo qualquer, o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, menos duas vêzes o produto dêstes pelo co-seno do ângulo por êles formado.* Devemos (figs. 7 e 8), pois, ter:

$H \{ \triangle ABC$ qualquer $\qquad T \{ a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$

Para a *demonstração*, devemos considerar dois casos:

Primeiro caso: O triângulo é *acutângulo* (fig. 7). Vigora, então, a relação (n.º 9):

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cn$$

Como, para o triângulo retângulo CHA, vale a relação (*)

$$n = b \cdot \cos A$$

substituindo êste valor de n na relação acima, obtemos:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A}$$

Segundo caso: O triângulo é *obtusângulo* (fig. 8). Vigora, então, a relação (n.º 11):

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2cn$$

Como, no triângulo retângulo CHA, vale a relação

$$n = b \cdot \cos (180° - A)$$

e $\cos (180° - A) = - \cos A$ (**), substituindo o valor de n na relação acima, vem:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2c \cdot (-b \cdot \cos A)$$

ou

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A}$$ c.q.d.

(*) Num triângulo retângulo *cada cateto é igual ao produto da hipotenusa pelo co-seno do ângulo adjacente* (Ver *Matemática*, Curso Ginasial, 3.ª Série, pág. 286, do mesmo autor).

(**) Ângulos *suplementares* têm co-seno iguais em valor absoluto e de *sinais contrários*.

EXERCÍCIO DE APLICAÇÃO

Num triângulo ABC os lados b e c valem, respectivamente, 8 cm e 6 cm e formam entre si um ângulo de 60°. Calcular o valor do lado a (aprox. 0,01).

Aplicando a relação dos co-senos, vem:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos 60°$$

como $\cos 60° = \frac{1}{2}$, substituindo, temos:

$$a^2 = 64 + 36 - 2 \times 8 \times 6 \times \frac{1}{2}$$

$$a^2 = 100 - 48 = 52$$

$$a^2 = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} = 2 \times 3{,}60 = 7{,}20$$

Logo, o lado a vale 7,20 cm (aprox. 0,01).

EXERCÍCIOS

1. Reconhecer a natureza do triângulo cujos lados medem 9 m, 12 m e 15 m.
2. Idem para o triângulo de lados: 8 m, 11 m e 9 m.
3. Idem para o triângulo de lados: 14 m, 8 m e 7 m.
4. Idem para o triângulo de lados: 18 dm, 24 dm e 30 dm.
5. No triângulo ABC, os lados medem: $a = 10$ m, $b = 8$ m e $c = 6$ m. Calcular o valor da projeção de c sôbre a.
6. Os lados de um triângulo são: 13 cm, 8 cm e 7 cm. Calcular o valor da projeção do maior sôbre o menor.
7. Idem para o triângulo de lados: 3 dm, 4 dm e 5 dm.
8. Num triângulo ABC, os lados $b = 5$ m e $c = 4$ m formam um ângulo de 45.°. Calcular o valor de a (aprox. 0,01).
9. Num paralelogramo, os lados consecutivos, que medem 6 m e 8 m, respectivamente, formam entre si um ângulo de 60.° Calcular o valor da diagonal oposta a êsse ângulo.
10. Num trapézio isósceles, a base maior mede 12 cm. O lado não paralelo, que mede 10 cm, forma com a base maior um ângulo de 60.°. Calcular o valor da diagonal do trapézio.
11. A altura de um trapézio isósceles mede 8 dm e as suas bases 27 dm e 15 dm. Determinar o valor da diagonal.
12. Dois lados consecutivos de um triângulo, que valem 5 m e 10 m, formam entre si um ângulo de 30°. Quanto mede o outro lado?

13. A base maior de um trapézio retângulo mede 10 m e o lado oblíquo, que mede 8 m, forma com a base maior um ângulo de 45.°. Calcular o valor da diagonal menor.
14. A base menor de um trapézio retângulo mede 30 dm e a altura 40 dm. Quanto mede a diagonal menor dêsse trapézio?
15. No triângulo ABC: $a = \sqrt{52}$ cm, $b = 8$ cm e $c = 6$ cm. Calcular o o ângulo formado pelos lados b e c. *Sugestão:* (Aplicar a lei dos co-senos).

RESPOSTAS:

1. Retângulo
2. Acutângulo
3. Obtusângulo
4. Retângulo
5. 3,6 m
6. 4 cm + 7 cm = 11 cm
7. 3 dm
8. 3,59 cm
9. 7,20 m
10. 11,13 cm
11. 22,4 dm
12. 6,20 m
13. 7,15 m
14. 50 dm
15. 60°

§ 3. Cálculo das medianas, das alturas e das bissetrizes de um triângulo.

14. Cevianas. Chama-se *ceviana* de um triângulo a tôda reta pertencente ao mesmo plano do triângulo, que passa por um de seus vértices. Usualmente empregamos os *segmentos de ceviana*, cujos extremos são o vértice do triângulo e o ponto de encontro da ceviana com o lado oposto a êsse vértice. Assim, as *medianas*, as *alturas*, as *bissetrizes* (internas e externas) de um triângulo são suas cevianas. As relações métricas determinadas por uma ceviana qualquer dependem, na sua maioria, da relação de Stewart (*), estudada a seguir.

15. Relação de Stewart. Dado um triângulo ABC e sendo D um ponto do lado BC, vale a seguinte relação: $\overline{AB}^2 \cdot CD + \overline{AC}^2 \cdot BD - \overline{AD}^2 \cdot BC = CD \cdot BD \cdot BC$ (**).

Demonstremos a relação, considerando o triângulo ABC (fig. 10). Tracemos a perpendicular AE e apliquemos aos

(*) STEWART – Matemático escossês (1717-1785).

(**) Não estamos levando em conta os *sentidos* dos segmentos.

triângulos ABD e ADC as relações métricas para triângulos quaisquer (n.º 10 e n.º 9):

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 + 2BD \, . \, DE$$
$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 - 2CD \, . \, DE$$

Multiplicando a primeira igualdade por CD e a segunda por BD, vem:

$$\overline{AB}^2 \, . \, CD = \overline{AD}^2 \, . \, CD + \overline{BD}^2 \, . \, CD + 2BD \, . \, DE \, . \, CD$$
$$\overline{AC}^2 \, . \, BD = \overline{AD}^2 \, . \, BD + \overline{CD}^2 \, . \, BD - 2CD \, . \, DE \, . \, BD$$

e, somando membro a membro, obtemos:

$$\overline{AB}^2 \, . \, CD + \overline{AC}^2 \, . \, BD = AD^2(CD+BD) + CD \, . \, BD(CD+BD)$$

Como $BC = CD + BD$, substituindo na última igualdade, vem:

$$\overline{AB}^2 \, . \, CD + \overline{AC}^2 \, . \, BD = \overline{AD}^2 \, . \, BC + CD \, . \, BD \, . \, BC$$

ou

$$\boxed{\overline{AB}^2 \, . \, CD + \overline{AC}^2 \, . \, BD - \overline{AD}^2 \, . \, BC = CD \, . \, BD \, . \, BC}$$

c.q.d.

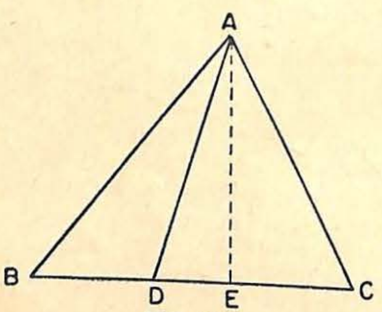


FIG. 10

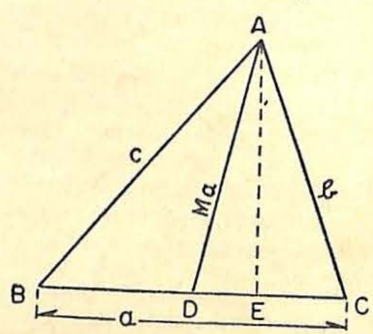


FIG. 11

Ex **16. Cálculo das medianas.** ***Teorema:*** *A soma dos quadrados de dois lados de um triângulo qualquer é igual a duas vêzes o quadrado da mediana relativa ao terceiro lado, mais a metade do quadrado dêste lado.*

Seja o triângulo ABC (fig. 11). Temos:

$$H \begin{cases} m_a \text{ - mediana relativa ao lado } a \\ BD = DC \end{cases} \qquad T \left\{ b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2} \right.$$

Demonstração:

1. Tracemos $AE \perp DC$. No triângulo acutângulo ADC, pelas relações métricas conhecidas, temos:

$$b^2 = m_a^2 + \overline{DC}^2 - 2DC \, . \, DE$$

No triângulo obtusângulo ADB, temos também:

$$c^2 = m_a^2 + \overline{BD}^2 + 2BD \, . \, DE$$

2. Somando, membro a membro, estas expressões, obtemos:

$$b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \overline{DC}^2 + \overline{BD}^2$$

e, visto ser $BD = DC = \frac{a}{2}$, vem:

$$b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}$$

ou

$$\boxed{b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2}}$$

c.q.d.

Nota. Dessa relação, podemos tirar o valor de m_a a fim de simplificar a sua aplicação nos cálculos. Assim, temos:

$$2m_a^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}$$

ou $$m = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} \quad \therefore \quad \boxed{\mathbf{m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}} \text{ (*)}$$

e, da mesma forma, as medianas relativas aos lados b e c, terão, respectivamente os valores:

$$\boxed{\mathbf{m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}}} \qquad \boxed{\mathbf{m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}}$$

(*) Esta fórmula pode ser obtida *diretamente* aplicando-se, ao $\triangle ABC$ (fig. 11), a *Relação de Stewart*).

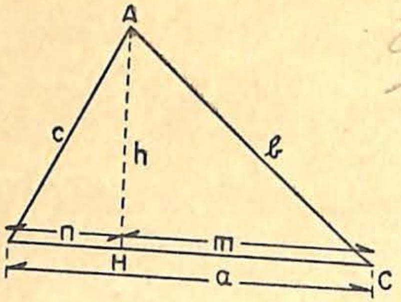


FIG. 12

17. Cálculo das alturas. Seja o triângulo ABC (fig. 12), onde h é a altura relativa ao lado BC. Sendo $\hat{B}$ um ângulo agudo, temos:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2an$$

donde

$$n = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$$

Do triângulo retângulo AHB, tiramos:

$$h^2 = c^2 - n^2$$

e, substituindo o valor de n nessa relação, vem:

$$h^2 = c^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)^2 = c^2 - \frac{(a^2 + c^2 - b^2)^2}{4a^2} =$$

$$= \frac{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}{4a^2}$$

Decompondo o numerador, como diferença de dois quadrados:

$$h^2 = \frac{(2ac + a^2 + c^2 - b^2)\ (2ac - a^2 - c^2 + b^2)}{4a^2}$$

ou

$$h^2 = \frac{[(a + c)^2 - b^2)]\ [b^2 - (a - c)^2]}{4a^2}$$

Decompondo, novamente, o numerador, obtemos:

$$h^2 = \frac{(a + c + b)\ (a + c - b)\ (b + a - c)\ (b - a + c)}{4a^2} \quad (1)$$

Indicando o perímetro do triângulo ABC por $2p = a + b + c$, podemos determinar o valor de cada um dos fatôres que compõem o numerador assim:

$$a + c - b = a + b + c - 2b = 2p - 2b = 2(p - b)$$
$$b + a - c = a + b + c - 2c = 2p - 2c = 2(p - c)$$
$$b - a + c = a + b + c - 2a = 2p - 2a = 2(p - a)$$

Substituindo êstes valores na relação (1), temos:

$$h^2 = \frac{2p\,.\,2(p - c)\,.\,2(p - b).\,2(p - a)}{4a^2} = \frac{4p\,.\,(p - a)\,(p - b)\,(p - c)}{a^2}$$

e, finalmente:

$$h = \sqrt{\frac{4p(p - a)\ (p - b)\ (p - c)}{a^2}} = \frac{2}{a}\sqrt{p(p - a)\ (p - b)\ (p - c)}$$

De modo análogo, obter-se-iam as alturas relaticas aos lados a e c.

Representando as alturas do triângulo ABC, respectivamente, por h_a, h_b, e h_c, as fórmulas correspondentes, serão:

$$\boxed{\mathbf{h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p - a)\ (p - b)\ (p - c)}}} \qquad \boxed{\mathbf{h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p(p - a)\ (p - b)\ (p - c)}}}$$

$$\boxed{\mathbf{h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p(p - a)\ (p - b)\ (p - c)}}}$$

18. Cálculo das bissetrizes. I) ***Bissetrizes internas:*** Seja o triângulo ABC (fig. 13), no qual AD é a bissetriz interna

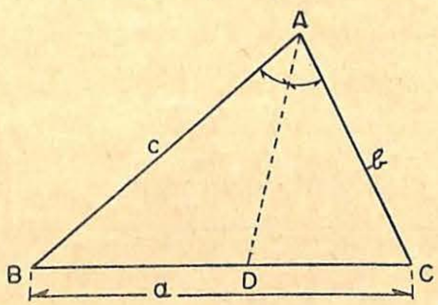


FIG. 13

relativa ao $\hat{A}$. O *teorema da bissetriz interna* (*); aplicado à bissetriz AD, permite escrever:

$$\frac{BD}{c} = \frac{CD}{b}$$

(*) Ver *Matemática*, Curso Ginasial, 3.ª Série, pág. 253, do mesmo autor.

Pela propriedade das proporções (relativa aos antecedentes), segue-se que:

$$\frac{BD + CD}{c + b} = \frac{BD}{c} = \frac{CD}{b}$$

Como $BD + CD = a$, temos: $\frac{a}{c+b} = \frac{BD}{c} = \frac{CD}{b}$ donde tiramos:

$$BD = \frac{ac}{c+b} \text{ e } CD = \frac{ab}{c+b}$$

Aplicando ao triângulo ABC a relação de Stewart (n.º 15), vem:

$$\overline{AB}^2 \cdot CD + \overline{AC}^2 \cdot BD - \overline{AD}^2 \cdot BC = CD \cdot BD \cdot BC$$

Substituindo CD e BD pelos valores dados acima e AB, AC e BC, respectivamente, por a, b e c, obtemos:

$$c^2 \cdot \frac{ab}{c+b} + b^2 \cdot \frac{ac}{c+b} - \overline{AD}^2 \cdot a = \frac{ab}{c+b} \cdot \frac{ac}{c+b} \cdot a$$

Dividindo tudo por a, temos:

$$\frac{bc^2}{c+b} + \frac{b^2c}{c+b} - \overline{AD}^2 = \frac{a^2bc}{(c+b)^2}$$

ou

$$\overline{AD}^2 = \frac{bc^2 + b^2c}{c+b} - \frac{a^2bc}{(c+b)^2}$$

donde:

$$\overline{AD}^2 = \frac{bc(c+b)}{(c+b)} - \frac{a^2bc}{(c+b)^2} = bc - \frac{a^2bc}{(c+b)^2}$$

Colocando, agora, bc em evidência, obtemos:

$$\overline{AD}^2 = bc\left[1 - \frac{a^2}{(c+b)^2}\right] = bc\left[\frac{(c+b)^2 - a^2}{(c+b)^2}\right]$$

ou

$$\overline{AD}^2 = bc\left[\frac{(c+b+a)(c+b-a)}{(c+b)^2}\right] \text{ e como } \begin{cases} a+b+c = 2p \\ c+b-a = 2(p-a) \end{cases}$$

vem:

$$\overline{AD}^2 = bc\left[\frac{2p \cdot 2(p-a)}{(c+b)^2}\right] = \frac{4bc \cdot p(p-a)}{(c+b)^2}$$

Donde, extraindo a raiz quadrada de AD^2:

$$AD = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$$

Indicando, respectivamente, por $\beta_{\hat{A}}$, $\beta_{\hat{B}}$ e $\beta_{\hat{C}}$ as bissetrizes internas relativas aos ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$, obtemos as seguintes fórmulas:

$$\boxed{\beta_{\hat{A}} = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}} \qquad \boxed{\beta_{\hat{B}} = \frac{2}{a+c}\sqrt{acp(p-b)}}$$

$$\boxed{\beta_{\hat{C}} = \frac{2}{a+b}\sqrt{abp(p-c)}}$$

Ex

II) ***Bissetrizes externas:*** Consideremos o triângulo ABC (fig. 14), onde AD é a bissetriz externa relativa ao ângulo $\hat{A}$.

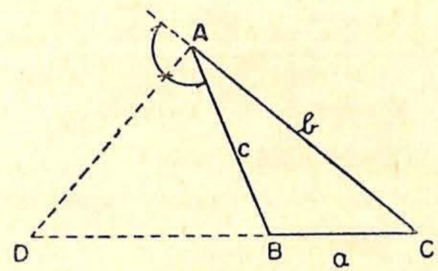


FIG. 14

O *teorema da bissetriz externa*, aplicado a AD, permite escrever:

$$\frac{CD}{b} = \frac{BD}{c} \text{ ou } \frac{CD - DB}{b - c} = \frac{CD}{b} = \frac{BD}{c}$$

Como $CD - BD = a$, temos:

$$\frac{a}{b-c} = \frac{CD}{b} = \frac{BD}{c}$$

Donde

$$CD = \frac{ab}{b-c} \quad \text{e} \quad BD = \frac{ac}{b-c}$$

Aplicando ao triângulo ACD a relação de Stewart, obtemos:

$$\overline{AD}^2 \cdot BC + \overline{AC}^2 \cdot BD - \overline{AB}^2 \cdot CD = BD \cdot BC \cdot CD$$

Substituindo nesta igualdade BC, AC, AB, respectivamente, por a, b, c, e, CD e BD pelos valores encontrados, seguindo o mesmo processo do cálculo anterior, obteremos o seguinte valor para a bissetriz externa DA:

$$DA = \frac{2}{b-c}\sqrt{bc(p-b)(p-c)}$$

Indicando por $\gamma_{\hat{A}}$, $\gamma_{\hat{B}}$ e $\gamma_{\hat{C}}$ as bissetrizes externas relativas aos ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$, obtemos as seguintes fórmulas:

$$\boxed{\gamma_{\hat{A}} = \frac{2}{b-c}\sqrt{bc(p-b)(p-c)}} \qquad \boxed{\gamma_{\hat{B}} = \frac{2}{c-a}\sqrt{ac(p-a)(p-c)}}$$

$$\boxed{\gamma_{\hat{C}} = \frac{2}{a-b}\sqrt{ab(p-a)(p-b)}}$$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇAO

No triângulo ABC, onde $a = 4dm$, $b = 6dm$ e $c = 8dm$. calcular, em relação à base BC; 1.º) a *mediana* (m_a); 2.º) a *altura* (h_a) 3.º) a *bissetriz interna* ($\beta_{\hat{A}}$); 4.º) a *bissetriz externa* ($\gamma_{\hat{A}}$) (aprox. 0,01).

Temos:

1.º) cálculo da *mediana:*

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(36) + 2(64) - 16} = \frac{1}{2}\sqrt{184} = 86{,}7$$

2.º) cálculo da *altura:*

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(-a)(p-b)(p-c)}$$

$$h_a = \frac{2}{4}\sqrt{9 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1} = \frac{1}{2}\sqrt{135} = 5{,}80$$

3.º) cálculo da *bissteriz interna:*

$$\beta_{\hat{A}} = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$$

$$\beta_{\hat{A}} = \frac{2}{6+8}\sqrt{6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 5} = \frac{1}{7}\sqrt{2\,126} = 6{,}62$$

4.º) cálculo da *bissetriz externa:*

$$\gamma_{\hat{A}} = \frac{2}{c-b}\sqrt{bc(p-b)(p-c)}$$

$$\gamma_{\hat{A}} = \frac{2}{8-6}\sqrt{6 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 1} = \frac{1}{2}\sqrt{144} = 6$$

Logo:

$m_a = 6{,}78$ dm; $h_a = 5{,}80$ dm; $\beta_{\hat{A}} = 6{,}62$ dm; $\gamma_{\hat{A}} = 6$ dm

NOTA: No cálculo de $\gamma_{\hat{A}}$ foi usada a diferença $c-b$ porque c é o maior lado.

EXERCÍCIOS

1. Calcular o valor da *mediana* relativa ao lado b, do triângulo ABC, cujos lados medem: $a = 6$ m, $b = 9$ m e $c = 12$ m.
2. Os lados de um triângulo medem 7 cm, 10 cm e 13 cm. Calcular as *alturas* relativas aos três lados.
3. Os lados de um triângulo valem 5 m, 7 m e 9 m. Calcular a mediana relativa ao maior lado.
4. Calcular h_b no triângulo ABC, sabendo que $a = 9$ cm, $b = 6$ cm e $c = 11$ cm.
5. Determinar o valor da bissetriz interna ao ângulo B no triângulo ABC do exercício anterior.
6. Calcular a bissetriz externa ao ângulo C no triângulo ABC, onde $a = 9$ cm, $b = 7$ cm e $c = 10$ cm.
7. Que é maior no triângulo ABC do exercício anterior: a altura relativa ao lado c ou a bissetriz interna do $\hat{A}$?
8. No triângulo ABC, temos: $a = 12$ dm, $b = 8$ dm e $c = 6$ dm. Calcular: 1.º) a mediana relativa ao lado a; 2.º) a bissetriz interna do $\hat{A}$: 3.º) a altura relativa ao lado c.

9. Os lados de um triângulo ABC são: $a = 13$ cm, $b = 12$ cm e $c = 15$ cm. Calcular: 1.º) a altura relativa ao lado b; 2.º) a bissetriz externa do C; 3.º) a mediana relativa ao lado a.

10. No triângulo ABC, onde $a = 12$ m, $b = 8$ m e $c = 6$ m, calcular: 1.º) a mediana m_a; 2.º) a altura h_a; 3.º) a bissetriz $\beta_{\hat{A}}$; 4.º) a bissetriz a γ_C.

RESPOSTAS:

1. 8,35 m
2. 9,9 cm; 6,9 cm; 5,33 cm
3. 4,09 m
4. 8,99 cm
5. 9,48 cm
6. 6,12 cm
7. A bissetriz
8. 3,74 dm; 3,56 dm; 7,11 dm
9. 12,46cm; 186,88cm; 11,92cm
10. 3,74m; 3,55m; 3,56m; 10,95m

§4. Relações métricas no círculo. Aplicações. Potência de um ponto em relação a um círculo.

RELAÇÕES MÉTRICAS NO CÍRCULO

Ex

19. Primeira relação. ***Teorema:*** *Qualquer corda que passe pela extremidade de um diâmetro é média proporcional entre o diâmetro e a sua projeção sôbre êle.*

Seja o círculo de centro O e raio OA (fig. 15). Temos:

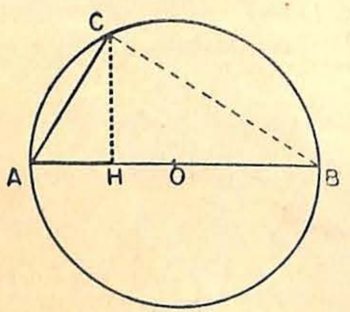


FIG. 15

$$H \begin{cases} AC \text{ corda} \\ AB \text{ diâmetro} \end{cases}$$

$$T \{ \overline{AC}^2 = AB \cdot AH$$

Demonstração:

1. Unindo C a B, obtemos o $\triangle ABC$, que é retângulo em $\hat{C}$ por estar inscrito num semi-círculo.

2. Como AC é cateto, AB hipotenusa e AH projeção de AC sôbre o diâmetro temos pela primeira relação estudada nos triângulos retângulos (n.º 3):

$$\boxed{\overline{AC}^2 = AB \cdot AH} \qquad \text{c.q.d.}$$

20. Segunda relação. ***Teorema:*** *O segmento da perpendicular baixada de um ponto qualquer da circunferência sôbre um diâmetro* (ao qual êste ponto não pertença) *é média proporcional entre os dois segmentos que ela determina sôbre êsse diâmetro.*

Temos, agora, considerando a mesma figura 15:

$$H \begin{cases} AB \text{ diâmetro} \\ CH \perp AB \end{cases} \qquad T \{ \overline{CH}^2 = AH \cdot HB$$

Demonstração:

1. Unimos C aos pontos A e B, obtendo o $\triangle ABC$, retângulo em $\hat{C}$.

2. Como CH é a altura dêsse triângulo, em relação à base AB, vem pela segunda relação métrica nos triângulos retângulos (n.º 4):

$$\boxed{\overline{CH}^2 = AH \cdot HB} \qquad \text{c.q.d.}$$

Ex

21. Terceira relação. ***Teorema:*** *Em duas cordas que se interceptam, o produto dos dois segmentos de uma é igual ao produto dos dois segmentos da outra.*

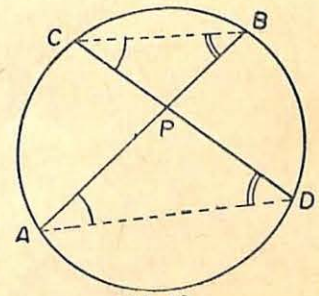


FIG. 16

Temos (fig. 16):

$$H \begin{cases} AB \text{ e } CD \text{ cordas} \\ \text{que se interceptam em } P \end{cases}$$

$$T \{ PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

Demonstração:

1. Unindo A com D e B com C, formaremos os triângulos PAD e PBC.
2. Nesses triângulos, temos:

$$\hat{A} = \hat{C} \left(\text{pois, ambos têm por medida } \frac{\widehat{BD}}{2}\right)$$

$$\hat{B} = \hat{D} \left(\text{pois, ambos têm por medida } \frac{\widehat{AC}}{2}\right)$$

Logo,

$\triangle PAD \sim \triangle PBC$ (Primeiro caso de semelhança)

ou seja:

e, portanto: $$\frac{AP}{PC} = \frac{PD}{PB}$$

$$\boxed{AP \,.\, PB = PC \,.\, PD}$$

c.q.d.

22. Quarta relação. ***Teorema:*** *Em duas secantes, traçadas de um ponto exterior a um círculo, o produto da primeira secante (*) pela sua parte externa é igual ao produto da segunda pela sua parte externa.*

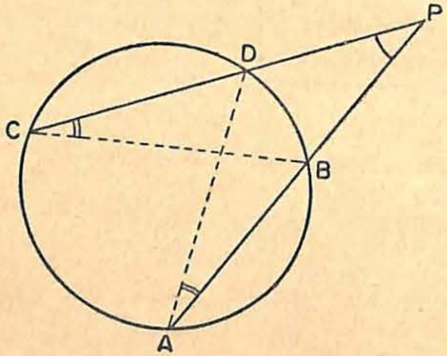


FIG. 17

Temos (fig. 17):

H { PA e PC secante

T { $PA \,.\, PB = PC \,.\, PD$

Demonstração:

1. Unamos A com D e B com C. Obteremos os triângulos PAD e PBC.

(*) Devemos entender: *segmento de secante.*

2. Nesses triângulos, temos:

$$A\hat{P}D = C\hat{P}B \text{ (comum)}$$

$$\hat{A} = \hat{C} \quad \left(\text{ambos valem } \frac{\widehat{BD}}{2}\right)$$

Logo,

$\triangle PAD \sim \triangle PBC$ (Primeiro caso de semelhança)

e, portanto: $$\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}$$

ou

$$\boxed{PA \,.\, PB = PC \,.\, PD}$$

c.q.d.

23. Quinta relação. ***Teorema:*** *Se, de um ponto exterior a um círculo, traçarmos uma tangente e uma secante, a tangente é média proporcional entre a secante e sua parte externa* (*).

Temos (fig. 18):

$H \begin{cases} PA \text{ tangente} \\ PC \text{ secante} \end{cases}$ $\qquad T \{ \overline{PA}^2 = PC \,.\, PB$

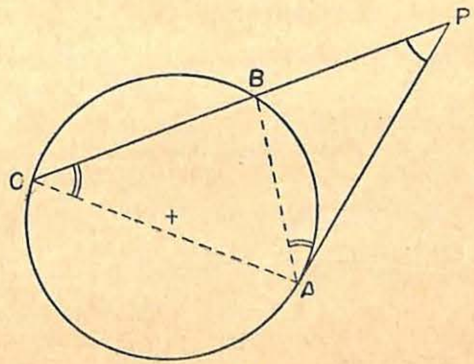


FIG. 18

(*) Subtenda-se: *segmento de tangente e segmento de secante.*

Demonstração:

1. Unamos A com B e C, obtendo, assim, os triângulos PAB e PAC.
2. Nêsses triângulos, temos:

$$\hat{P} \text{ é comum}$$

$$\hat{A} = \hat{C} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$$

Logo,

$$\triangle PAB \sim \triangle PAC \quad \text{(Primeiro caso de semelhança)}$$

e portanto:

$$\frac{PA}{PC} = \frac{PB}{PA}$$

ou

$$\boxed{\overline{PA}^2 = PC \cdot PB}$$

c.q.d.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1.º) As cordas PA e PB que unem um ponto P da circunferência às extremidades de um diâmetro medem, respectivamente, 6 cm e 8 cm. Calcular: a *distância* de P ao diâmetro, as *projeções* das cordas sôbre o diâmetro, e o *raio* da circunferência.

Temos (fig. 19), pela primeira relação (n.º 19):

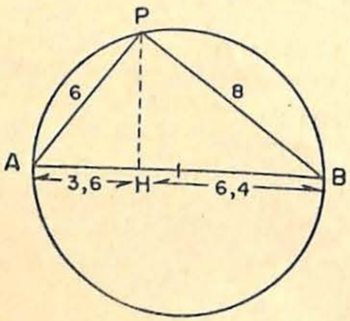


FIG. 19

$$\overline{PA}^2 = AB \cdot AH$$

Como

$$\overline{AB}^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$$

e, portanto, $AB = 10$,

segue-se que:

$$AH = \frac{\overline{PA}^2}{AB} = \frac{36}{10} = 3,6$$

e, para HB, vem:

$$HB = 10 - 3,6 = 6,4$$

A determinação da distância de P ao diâmetro será dada por (n.º 20):

$$\overline{PH}^2 = AH \cdot HB \quad \text{ou} \quad \overline{PH}^2 = (3,6) \times (6,4) = 23,04$$

$$PH = \sqrt{23,04} = 4,8$$

O raio será: $\frac{AB}{2} = \frac{10}{2} = 5$

Logo: a *distância* de P ao diâmetro é 4,8 cm; as *projeções* das cordas são, respectivamente, 3,6 cm e 6,4 cm e o *raio* da circunferência 5 cm.

2.º) Numa circunferência de 5 cm de raio, traça-se uma corda de 6 cm. Calcular a distância da corda ao centro da circunferência.

Temos (fig. 20): o triângulo OMA é retângulo, sendo os seus catetos $AM = 3$ cm, $OM = x$ e a hipotenusa $OA = 5$ cm. Pelo Teorema de Pitágoras, obtemos:

$$x^2 = 5^2 - 3^2$$

$$x^2 = 25 - 9 = 16$$

donde

$$x = 4$$

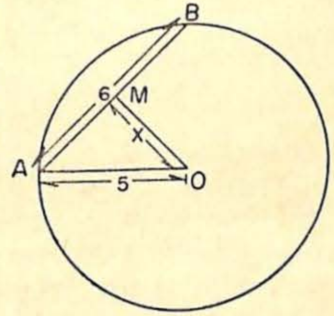


FIG. 20

Logo, a distância procurada é de 4 cm.

3.º) Uma corda $AB = 16$ cm é dividida por uma segunda corda em dois segmentos $AP = 6$ cm e $PB = 10$ cm, respectivamente. Sabendo que a segunda corda $CD = 28$ cm, determinar os segmentos em que a primeira a divide.

De acôrdo com a relação que liga duas cordas que se interceptam (n.º 21), devemos ter:

$$AP \cdot PB = PC \cdot PD$$

ou $\quad 6 \cdot 10 = x(28 - x)$

isto é: $60 = 28x - x^2$ ou $x^2 - 28x + 60 = 0$

que, resolvida, determina x, com a aproximação de 0,01, igual a 23,32 (a raiz negativa é desprezada). Logo, os segmentos componentes da segunda corda medem 23,32 dm e 4,68 cm, respectivamente.

4.º) De um ponto P são traçadas, a uma circunferência de raio igual a 5 cm, uma secante e uma tangente. Sabendo que a secante mede 16 cm e a tangente 12 cm, calcular o valor da parte externa da secante.

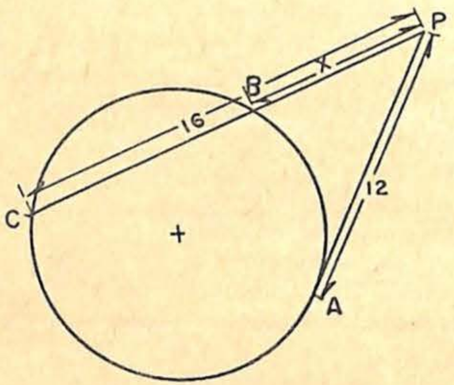


FIG. 21

Temos (fig. 21): $PA^2 = PC \cdot PB$ (n.º 23)

ou $12^2 = 16 \cdot x$

donde $x = \dfrac{144}{16} = 9$

Logo: a parte externa da secante mede 9 cm.

NOTA: O comprimento do raio foi dado para garantir a possibilidade do problema.

POTÊNCIA DE UM PONTO EM RELAÇÃO A UM CÍRCULO

24. Definição. Consideremos a circunferência de centro O e raio r (fig. 22). Seja P um ponto do mesmo plano. Por êste ponto tracemos a secante s, que irá interceptar a circunferência nos pontos A e B.

Chama-se *potência de P*, em relação ao círculo de centro O, o produto $\overline{PA} \cdot \overline{PB}$. Indicação:

$$p_{P(O)} = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$$

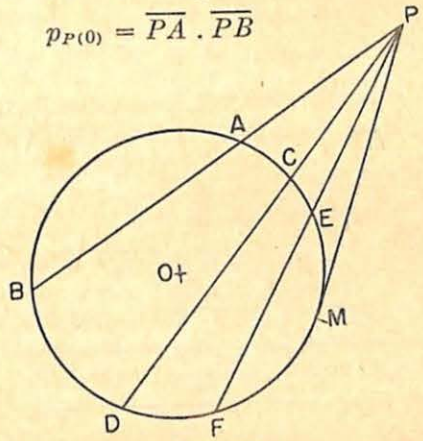


FIG. 22

25. Propriedade característica. Conservando fixo o ponto P e fazendo a reta a girar em tôrno de P, obteremos as secantes PD, PF, ... e a tangente PM. De acôrdo com os teoremas anteriores, temos:

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD} = \overline{PE} \cdot \overline{PF} = \ldots\ldots\ldots = \overline{PM}^2$$

isto é, *mantêm-se constantes os produtos* $\overline{PA} \cdot \overline{PB}$, $\overline{PC} \cdot \overline{PF}$, $PE \cdot PF$, ... e, portanto, *qualquer dêles define a potência de P em relação ao círculo O.*

Quando P é exterior ao círculo (fig. 22), os segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ (assim como $\overline{PC}$ e $\overline{PD}$, $\overline{PE}$ e $\overline{PF}$, etc.) têm o *mesmo sentido* e dizemos que a sua potência é *positiva*. Quando P é interior ao círculo (fig. 23), os segmentos PA e PB têm sentidos opostos, e, então, a potência será *negativa*.

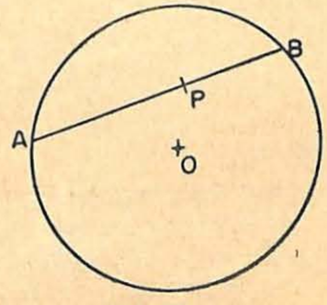


FIG. 23

26. Expressões da potência de um ponto.

1.ª) A potência de um ponto, em relação a um círculo, é igual à *diferença entre o quadrado de sua distância ao centro e o do raio do círculo.*

Assim (fig. 24), sendo r o raio e d a distância do ponto P ao centro O, a expressão que dá a potência de P será:

$$p_{P(O)} = d^2 - r^2$$

De fato, a potência de P é:

$$p_{P(O)} = \overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PM} \cdot \overline{PN}$$

Como $PM = d - r$ e $PN = d + r$, segue-se que

$$\boxed{p_{P(o)} = (d+r)\,(d-r) = d^2 - r^2}$$

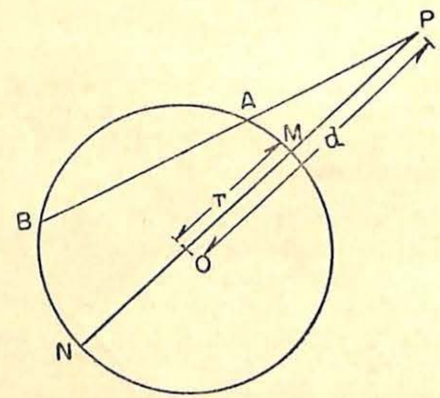


FIG. 24

OBSERVAÇÃO:

se P é *interior*, temos $d < r$ e portanto $p_{P(o)} < 0$ (negativa);
se P é *exterior*, temos $d > r$ e portanto $p_{P(o)} > 0$ (positiva);
se P *pertencer a circunferência*, temos $d = r$ e a $p_{P(o)} = 0$ (nula) (*)

(*) Logo, o lugar geométrico dos *pontos de potência nula*, em relação a uma circunferência, é a *própria circunferência*.

2.ª) A potência de um ponto *exterior* a um círculo, em relação a êsse círculo, é igual *ao quadrado do valor do segmento da tangente traçada do ponto ao círculo.*

Com efeito, da fig. 22, deduzimos que

$$p_{P(O)} = \overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PM}^2$$

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS ELEMENTARES

27. Problema I. Dados os segmentos de comprimentos a e b (fig. 25), construir o segmento c, tal que $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Basta traçar um ângulo reto qualquer xOy; transportar o segmento de comprimento $a = OA$ sôbre um dos lados, e $b = OB$ sôbre o outro. O segmento AB, hipotenusa do triângulo retângulo AOB, resolve o problema, pois:

$$\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 \qquad \text{(Teorema de Pitágoras)}$$

ou

$$c^2 = a^2 + b^2$$

e, portanto:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

O problema é *sempre possível.*

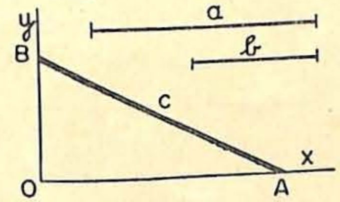


FIG. 25

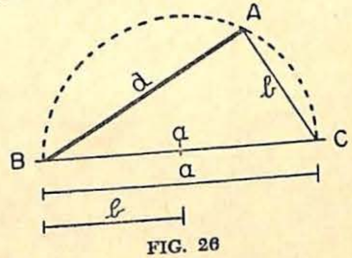


FIG. 26

28. Problema II. Dados os segmentos de comprimentos a e b (fig. 26), construir um segmento d, tal que $d = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Construimos o triângulo ABC, retângulo em A, que tenha por hipotenusa $BC = a$ e como um dos catetos $AC = b$. Basta, para isso, traçar a circunferência de diâmetro $BC = a$

e, com o compasso centrado em uma das extremidades de BC, traçar b, que irá encontrar a circunferência no ponto A. O outro cateto $d = AB$ é a *solução*, pois:

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2$$

ou

$$d^2 = a^2 - b^2$$

e, portanto:

$$d = \sqrt{a^2 - b^2}$$

O problema é *possível sòmente se* $a > b$.

29. Problema III: *Média proporcional*. Construir a *média proporcional* entre dois segmentos OA e OB de comprimentos, respectivamente, iguais a a e b.

Devemos construir um segmento x (fig. 27), tal que $x^2 = ab$.

Primeiro processo: sôbre a mesma reta AB (fig. 27), e a partir de O, tracemos os segmentos opostos $OA = a$ e $OB = b$. Tomando AB como diâmetro, descrevamos a semi-circunferência $\overset{\frown}{ADB}$. O comprimento x da perpendicular OD, traçada por O, é a solução do problema.

De fato, traçado o triângulo retângulo ADB, pela segunda relação dos triângulos retângulos (n.º 4), temos:

$$x^2 = ab$$

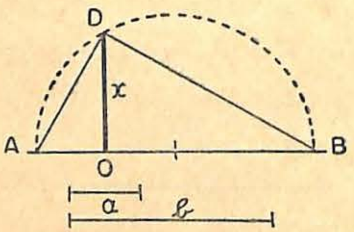


FIG. 27

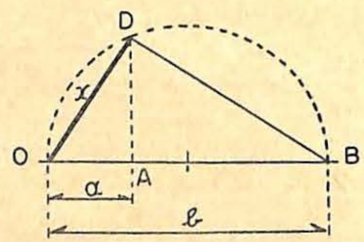


FIG. 28

Segundo processo: A partir de O, sôbre a mesma reta, coloquemos os segmentos $OA = a$ e $OB = b$ (fig. 28). Descrevamos a semi-circunferência de diâmetro OB e tracemos $AD \perp OB$. A solução será $x = OD$, pois, unindo D com O e B, formamos o triângulo retângulo ODB, no qual vale a relação:

$$x^2 = ab$$

30. Problema IV. Construir dois segmentos de reta a e b, conhecendo-se a sua soma $s = a + b$ e a sua média proporcional $m = \sqrt{ab}$. Sôbre $AB = s$ (fig. 29) como diâmetro, descrevemos uma semi-circunferência. A uma distância $AC = m$, tracemos x paralela a s, que interceptará a semicircunferência em D. A perpendicular DH determinará, sôbre AB, dois segmentos AH e HB que representam a solução do problema, pois:

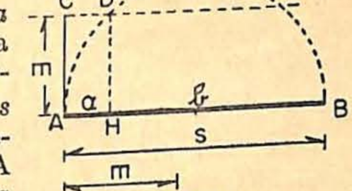


FIG. 29

$$AH + HB = s \quad \text{e} \quad AH \cdot HB = m^2$$

$$\text{Logo: } a = AH \quad \text{e} \quad b = HB$$

31. Problema V: *Divisão áurea*. Construir o *segmento áureo* de um segmento dado (divisão em média e extrema razão). Seja AB o segmento (fig. 30).

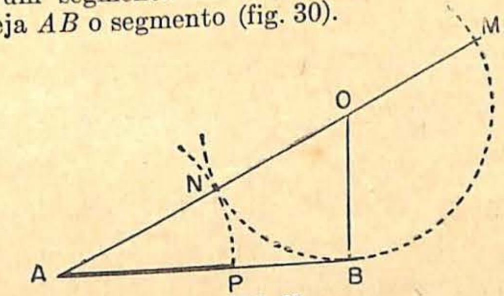


FIG. 30

Devemos encontrar um ponto P, sôbre AB, tal que

$$\overline{AP}^2 = AB \cdot PB$$

ou

$$\frac{AP}{AB} = \frac{PB}{AP}$$

Para isso, sôbre a perpendicular a AB, traçada por B, tomemos o ponto O de modo que $OB = \dfrac{AB}{2}$.

Com centro em O, descrevamos a circunferência de raio OB e a secante AM que passa pelo centro O e intercepta essa circunferência também no ponto N. Com centro em A e raio AN, tracemos o arco NP. O ponto P, determinado sôbre AB, efetua a divisão áurea, e o segmento AP é o *segmento áureo* procurado, como passaremos a demonstrar.

De fato, sendo AB tangente e AM secante à mesma circunferência, temos (n.º 23):

$$\overline{AB}^2 = AM \cdot AN$$

ou

$$\frac{AB}{AN} = \frac{AM}{AB} \quad (1)$$

Como: $AN = AP$ e $MN = 2OB = AB$

vem: $AM = AN + NM = AP + AB$;

a substituindo na igualdade (1), obtemos:

que: $$\frac{AB}{AP} = \frac{AP + AB}{AB}.$$

Pela propriedade da decomposição das proporções, segue-se

que: $$\frac{AB - AP}{AP} = \frac{AP + AB - AB}{AB}$$

ou $$\frac{PB}{AP} = \frac{AP}{AB}$$

donde $$\overline{AP}^2 = AB \cdot PB$$

como queríamos demonstrar.

EXERCÍCIOS

1. Numa circunferência de 10 cm de raio, traça-se uma corda de 12 cm. Calcular a distância da corda ao centro da circunferência.
2. As cordas que unem um ponto C da circunferência às extremidades A e B de um diâmetro medem 9 m e 12 m, respectivamente. Calcular a distância CH de C ao diâmetro AB, as projeções AH e HB das cordas sôbre o diâmetro, e o raio da circunferência. (aprox. 0,1).
3. Uma circunferência de raio igual a 8cm, traça-se pela extremidade de um diâmetro, uma corda cuja projeção sôbre êsse diâmetro é igual a 4cm. Qual o comprimento da corda?

4. Duas cordas AB e CD interceptam-se em M. Sabendo que AM = 5 dm MB = 6 dm e MC = 7,5 dm, calcular CD e MD.
5. Duas cordas AB e CD interceptam-se em P. Sabendo que AP = 9 m, PB = 4 m e CD = 15 m, calcular PC e PD.
6. Uma corda é dividida por uma outra em dois segmentos de 8 m e 9 m. Sabendo que um dos segmentos em que a segunda divide a primeira é duplo do outro, determinar o comprimento da segunda.
7. Uma corda e um diâmetro se interceptam num círculo de 8 dm de raio. As duas menores partes que resultam dessa intersecção medem respectivamente, 3 dm na corda e 2 dm no diâmetro. Quanto mede a corda? (Aprox. 0,1).
8. Uma corda CD intercepta um diâmetro AB = 8 cm no ponto médio M do raio. Determinar os valores dos segmentos CM e MD, sabendo que o primeiro dêles vale a metade do segundo.
9. Duas secantes são traçadas dum mesmo ponto exterior a uma circunferência. As partes interna, e externa de uma delas medem, respectivamente, 13 dm e 23 dm, e, a parte externa da outra 17 dm. Calcular a parte interna da última.
10. Duas secantes são traçadas dum mesmo ponto exterior a uma circunferência. Numa delas, a parte externa é m e a parte interna n; na outra, a parte externa é m'. Determinar a parte interna desta última.
11. O diâmetro de um círculo mede 32,50 m e é prolongado de 4,50 m. Calcular o comprimento da tangente traçada do ponto extremo assim obtido.
12. Num círculo de 6 m de raio, e por um ponto situado a 10 m do centro, traça-se uma tangente. Calcular o comprimento dessa tangente (subtende-se segmento de tangente).
13. De um ponto exterior a uma circunferência, traça-se uma secante, de 32 cm, que passa pelo seu centro, e também uma tangente, cujo comprimento é de 24 cm. Determinar o raio da circunferência.
14. Seja um círculo de centro O e raio 6 cm. Determinar, sôbre o prolongamento do raio OA, um ponto P tal que a tangente $PB = 2PA$.
15. De um ponto P exterior a uma circunferência de 2 dm de raio, traça-se a secante PAB que passa pelo centro, e a tangente PC. Quanto mede PA, sabendo que PC é igual ao diâmetro AB.
16. De um ponto exterior a uma circunferência, de 6 cm de raio, traçam-se duas secantes que medem, respectivamente, o dôbro e o triplo do raio. Calcular a parte externa da segunda, sabendo que a parte externa da primeira é igual à uma vez e meia o raio.
17. Calcular a potência de um ponto P situado a 15 cm do centro de uma circunferência de 5 cm de raio.

18. De um ponto P, exterior a uma circunferência de centro O, traça-se uma tangente e também uma secante que passa pelo centro O. Calcular a potência de P em relação a essa circunferência, sabendo que o comprimento da tangente é igual a 10 cm.

19. Um ponto interior a um círculo, de raio igual a 9 cm, dista 4 cm do centro. Qual a sua potência?

20. A potência de um ponto em relação a um círculo é igual a 256, e o raio do círculo mede 12 dm. Calcular a distância dêsse ponto ao centro do círculo.

RESPOSTAS:

1. 8 cm	11. 12,90 m
2. 7,2 m, 9,6 m; 5,4 m; 7,5 m;	12. 8 cm
3. 8 cm	13. 7 cm
4. 11,5 dm e 4 dm	14. 4 cm
5. 12 m e 3 m	15. 2,45 dm
6. 18 m	16. 6 cm
7 9,3 dm	17. 200
8. 2,44 cm e 4,88 cm	18. 100
9. 31,70 dm	19. − 65
10. $\frac{m^2 + mn - m'^2}{m'}$	20. 20 dm

§5. Polígonos inscritíveis e circunscritíveis. Teorema de Hiparco. Teorema de Pitot.

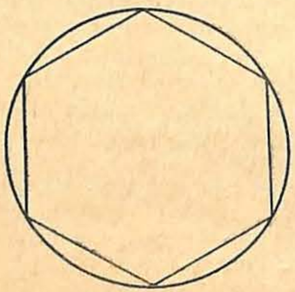


FIG. 31

POLÍGONOS INSCRITOS A UMA CIRCUNFERÊNCIA

32. Definição. Um polígono diz-se *inscrito* em (ou inscritível a) uma circunferência (fig. 31) quando todos os seus vértices pertencem a essa circunferência. A circunferência, por sua vez, é denominada *circunscrita* ao polígono.

Como por três pontos, não alinhados, passa uma circunferência e uma só, (*) conclui-se que *todo triângulo é inscritível.*

QUADRILÁTEROS CONVEXOS INSCRITÍVEIS

33. Primeira relação. ***Teorema:*** *Num quadrilátero convexo inscritível, os ângulos opostos são suplementares.*

Seja $ABCD$ (fig. 32) um quadrilátero inscrito numa circunferência. Temos:

$H \{ ABCD$ quadrilátero inscrito

$$T \begin{cases} \hat{A} + \hat{C} = 2 \text{ retos (ou } 180^\circ) \\ \hat{B} + \hat{D} = 2 \text{ retos (ou } 180^\circ) \end{cases}$$

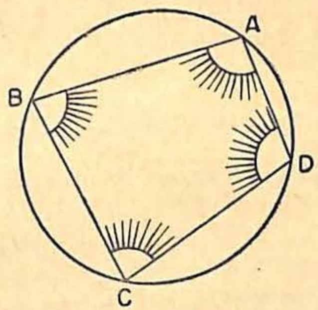


FIG. 32

Demonstração:

1. Consideremos dois ângulos opostos do quadrilátero $ABCD$, $\hat{A}$ e $\hat{C}$ por exemplo, que têm por medidas, respectivamente:

$$\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD}}{2} \qquad \hat{C} = \frac{\overset{\frown}{DA} + \overset{\frown}{AB}}{2}$$

2. Somando, membro a membro, vem:

$$\hat{A} + \hat{C} = \frac{\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{DA} + \overset{\frown}{AB}}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ \text{ (medida em graus)}$$

c.q.d.

Recíproca. *Todo quadrilátero convexo que possui dois ângulos opostos suplementares é inscritível.*

Seja $ABCD$ (fig. 33) um quadrilátero convexo tal que:

$$\hat{A} + \hat{C} = 2 \text{ retos}$$

Tracemos a circunferência passando pelos três vértices A, B e D, e demonstremos que ela passa por C. Seja C' um ponto qualquer do arco situado no semi-plano oposto ao em

(*) Ver *Matemática*, Curso Ginasial, 3.ª Série, pág. 202, do mesmo autor.

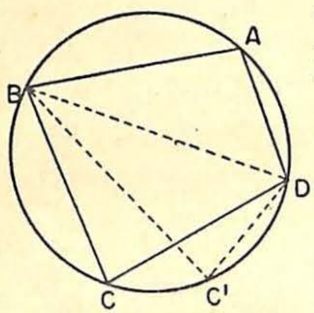


FIG. 33

que se encontra A, em relação à corda BD. Em virtude do teorema direto, no quadrilátero $ABC'D$, temos:

$$\hat{A} + \hat{C}' = 180^\circ$$

Como: $\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$ (por hipótese)

concluímos que $\hat{C} = \hat{C}'$

Logo, os pontos C e C' situados no mesmo semi-plano, em relação a BD, vêm BD segundo o mesmo ângulo, isto é, êstes dois pontos estão sôbre o mesmo segmento circular capaz do mesmo ângulo $\left(\hat{C} = C' = \dfrac{\overset{\frown}{BD}}{2}\right)$. Portanto, C está sôbre a circunferência que passa por A, B e D, e o quadrilátero é inscritível, como queríamos demonstrar.

34. Observação. O retângulo e o trapézio isósceles são quadriláteros inscritíveis, pois, têm os ângulos opostos suplementares. Para demonstrar que quatro pontos pertencem à mesma circunferência, é suficiente demonstrar que o quadrilátero determinado por êsses pontos é inscritível. Os problemas em que são dados maior número de pontos, *seis* ou *nove*, por exemplo, reduzem-se à consideração do quadrilátero inscritível.

35. Segunda relação. ***Teorema de Hiparco*** (*). *Em todo o quadrilátero inscritível, o produto* (**) *das diagonais é igual à soma dos produtos dos lados opostos.*

Seja o quadrilátero $ABCD$ (fig. 34). Temos:

$H \{ ABCD$ é inscritível $\quad T \{ AC . BD = AB . CD + AD . BC$

Demonstração:

1. Tracemos as diagonais AC e BD, e, no triângulo ABD, consideremos a ceviana AE tal que $\hat{2} = \hat{1}$. Segue daí que:

(*) Hiparco, notável e astrônomo grego. Viveu 150 anos A. C. Pertenceu à primeira escola de Alexandria.

(**) Referimo-nos aos produtos das *medidas* dos segmentos que figuram nestes teoremas.

$$\triangle ABC \sim \triangle ADE$$

(Primeiro caso de semelhança)

pois, $\hat{1} = \hat{2}$ e $\hat{C} = \hat{D} = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2}$. Logo:

$$\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{ED} \therefore AC.ED = AD.BC \quad (1)$$

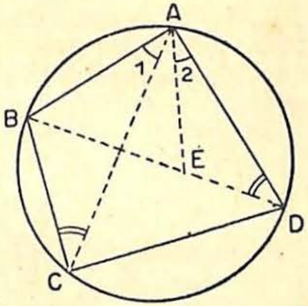


FIG. 34

2. Da mesma forma, são semelhantes os triângulos ABE e ACD (têm dois ângulos respectivamente iguais), e, portanto:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{BE} \therefore AC . BE = AB . CD \quad (2)$$

3. Somando, membro a membro, as igualdades (1) e (2), vem:

$$AC(BE + ED) = AB . CD + AD . BC$$

e, como $BE + ED = BD$, obtemos:

$$AC . BD = AB . CD + AD . BC \qquad \text{c.q.d.}$$

POLÍGONOS CIRCUNSCRITOS A UMA CIRCUNFERÊNCIA

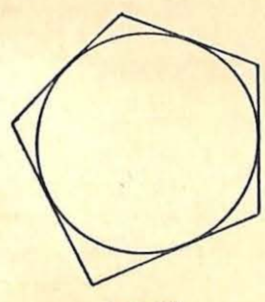


FIG. 35

36. Definição. Um polígono diz-se *circunscrito* (ou circunscritível) a uma circunferência (fig. 35) quando todos os seus lados são tangentes a essa circunferência. A circunferência, por sua vez, diz-se *inscrita* no polígono.

Como em todo triângulo pode inscrever-se uma circunferência, e uma só, cujo centro é o ponto de encontro das bissetrizes de seus ângulos internos, podemos dizer que *todo triângulo é circunscritível.*

37. Teorema. *Os segmentos de tangentes a uma circunferência, traçados de um mesmo ponto exterior são iguais e o ângulo por êles formado é o suplemento do ângulo formado pelos raios que passam pelos pontos de contato.*

Seja a circunferência de centro O e P um ponto exterior (fig. 36), do qual são traçadas as tangentes PA e PB.

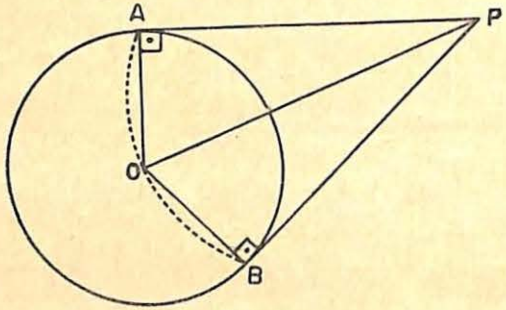


FIG. 36

Como os triângulos retângulos PAO e PBO (retângulos porque tôda tangente é perpendicular ao raio no ponto de contacto) são iguais, segue-se que $PA = PB$. Por outro lado, sendo $PAOB$ um quadrilátero, onde a soma dos ângulos internos vale 360° e $\hat{A} = \hat{B} = 90°$, concluímos que os 180° restantes são dados pela soma $\hat{O} + \hat{P} = 180°$, ou seja, os ângulos $\hat{O}$ e $\hat{P}$ são *suplementares*, como queríamos demonstrar.

QUADRILÁTEROS CIRCUNSCRITÍVEIS

38. Teorema de Pitot (*). *Em todo quadrilátero circunscritível, a soma de dois lados opostos é igual à soma dos outros dois.*

Seja o quadrilátero $ABCD$ (fig. 37). Temos:

$H \{ ABCD$ é circunscritível $\qquad T \{ AB + DC = AD + BC$

(*) PITOT (1695-1771), engenheiro francês, autor da célebre teoria do manejo de navios.

Demonstração:

1. Sendo iguais os segmentos das tangentes traçadas de um ponto à circunferência (teorema anterior), temos:

$$AM = AN$$
$$BM = BP$$
$$CQ = CP$$
$$DQ = DN$$

2. Somando, membro a membro, as igualdades acima, vem:

$$\underbrace{AM + BM}_{\downarrow} + \underbrace{CQ + DQ}_{\downarrow} = AN + BP + CP + DN$$

ou $$AB + DC = \underbrace{AN + ND}_{\downarrow} + \underbrace{BP + CP}_{\downarrow}$$

e, portanto $$AB + DC = AD + BC$$

c.q.d.

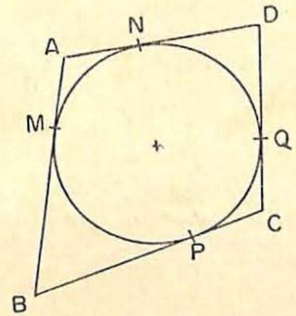


FIG. 37

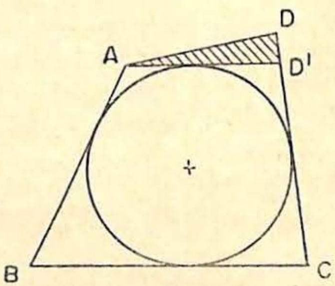


FIG. 38

Recíproca. *Se um quadrilátero* ***ABCD*** *é tal que a soma de dois lados opostos é igual à soma dos outros dois, o quadrilátero é circunscritível.*

Seja o quadrilátero $ABCD$ (fig. 38). Para a demonstração desta recíproca, tracemos a circunferência que tangência os três lados AB, BC e CD e a reta AD' que tangencia tal circunferência. No quadrilátero $ABCD'$, pelo teorema direto, temos: $AB + CD' = BC + AD'$

Como supusemos $AB + CD = BC + AD$,

subtraindo membro a membro, vem:

$$CD - CD' = AD - AD'$$

donde $$DD' = AD - AD'$$

que é uma igualdade absurda, pois, DD' sendo lado do triângulo ADD', deverá necessàriamente ser maior que a diferença dos outros dois lados. Logo, o triângulo ADD' é *impossível*, e, portanto, AD e AD' devem confundir-se. Dêsse modo o quadrilátero $ABCD$ é circunscritível, como queríamos demonstrar.

§6. Polígonos regulares. Propriedades. Semelhança.

39. Definição. Um polígono convexo denomina-se *regular* quando possui *todos os lados iguais*, assim como *todos os ângulos*. Se um polígono tiver sòmente os lados iguais, diz-se *equilátero*. Se tiver só os ângulos iguais diz-se *equiângulo*. Logo, um polígono regular é equilátero e equiângulo. O triângulo equilátero e o quadrado são, pois, polígonos regulares.

Observação: O fato de podermos dizer, por exemplo, que um triângulo equilátero ou equiângulo é regular não autoriza, afirmar outro tanto, em relação a outros polígonos. Assim, o retângulo, que é equiângulo, não é equilátero; o losango, que é equilátero, não é equiângulo.

não

PROPRIEDADES

40. Teorema. *Dividindo uma circunferência em um certo número* n ($n > 2$) *de arcos iguais:*

1.º) *as cordas que unem os pontos de divisão consecutivos formam um polígono regular inscrito de* n *lados;*

2.º) *as tangentes nos pontos de divisão formam um polígono regular circunscrito de* n *lados.*

Seja a circunferência de centro O (fig. 39), dividida em seis ($n = 6$) arcos iguais, por exemplo. Temos:

$$H\begin{cases} \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{EF} = \overset{\frown}{FA} \\ AB,\ BC,\ CD,\ DE,\ EF,\ FA \text{ são cordas} \\ MN,\ NP,\ PQ,\ QR,\ RS,\ SM \text{ são seg. de tangentes} \end{cases}$$

$$T\begin{cases} ABCDEF \text{ pol. regular inscrito.} \\ MNPQRS \text{ pol. regular circunscrito.} \end{cases}$$

Demonstração:

1. Unindo os pontos de divisão, obteremos o polígono inscrito $ABCDE$, que é *regular* porque os lados são todos iguais (como cordas subtendidas por arcos iguais) e também os ângulos são todos iguais (porque são inscritos em arcos iguais: cada um dêles vale, na fig. 39,

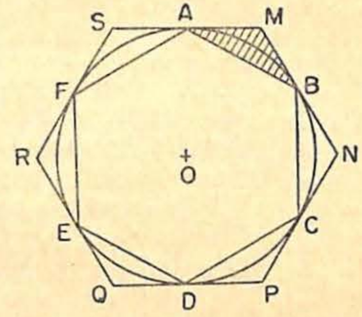


FIG. 39

$$\frac{360° - 2 \times 60°}{2} = 120°).$$

2. Pelos pontos de divisão, traçando as tangentes, obtemos o polígono circunscrito $MNPQRS$, que é *regular*, pois, sendo $\triangle AMB = \triangle BNC = \triangle CPD = \ldots$ (caso ALA), temos:

$$\hat{M} = \hat{N} = \hat{P} = \ldots \text{ (ângulos iguais)}$$

e $$AM = MB = BN = \ldots \text{ (n.º 37)}$$

ou seja

$$MN = NP = PQ = \ldots \text{ (lados iguais)}$$

c.q.d.

41. Teorema recíproco. *Todo polígono regular pode ser inscrito ou circunscrito a um círculo.*

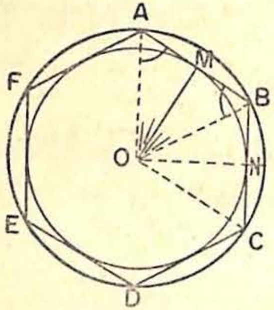


FIG. 40

Seja o polígono regular $ABCDEF$ (fig. 40). Temos:

$H \{ ABCDEF$ polígono regular

$T \{ ABCDEF$ é inscritível e circunscritível

Demonstração:

1. Tracemos as bissetrizes dos ângulos iguais $\hat{A}$ e $\hat{B}$. Essas bissetrizes encontrar-se-ão em O e o $\triangle AOB$ assim formado é isósceles, pois, são iguais os ângulos da base (como metade de ângulos iguais). Logo: $OA = OB$.
2. Unindo O com C, obtemos os triângulos AOB e BOC, que são iguais porque $AB = BC$ (por hip.); OB é comum e $A\hat{B}O = O\hat{B}C$. Logo: $OB = OC$.
3. Anàlogamente, demonstraríamos que O é equidistante de todos os outros vértices do polígono e é portanto, o centro do círculo circunscrito ao polígono, que por sua vez, é *circunscritível*. Da mesma forma, o ponto O é equidistante de todos os lados (porque são cordas iguais de um mesmo círculo) e é, portanto, o centro do círculo de raio OM, inscrito no polígono, que, por sua vez, é *inscritível*.

c.q.d.

OBSERVAÇÃO: A inscrição de um polígono regular de 2^n lados ($n > 1$) ou de 3×2^n ($n \geqslant 0$) lados, depende da divisão da circunferência em 2^n partes ou em 3×2^n partes iguais, respectivamente. Algumas dessas divisões serão estudadas neste capítulo.

42. Elementos principais de um polígono. O centro comum das circunferências inscrita e circunscrita a um polígono chama-se *centro do polígono regular* (ponto O na fig. 40). O raio do círculo circunscrito (OA na fig. 40) denomina-se *raio do polígono regular*, e o raio do círculo inscrito (OM na fig. 40), diz-se *apótema* do polígono regular. O apótema é então, a distância do centro a qualquer lado do polígono.

Chama-se *ângulo cêntrico* ou *ângulo central de um polígono regular* ao ângulo formado por dois raios consecutivos ($A\hat{O}B$ na fig. 40). O valor do ângulo cêntrico de um polígono regular é igual ao arco correspondente subtendido por um lado do polígono $\left(A\hat{O}B = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ\right)$ (*). O ângulo cêntrico de um polígono de n lados é indicado, geralmente, por: ω_n Daí a fórmula:

$$\boxed{\omega_n = \frac{360^\circ}{n}}$$

Como a soma dos ângulos internos de um polígono de n lados é dada pela fórmula $S_i = (n-2)180^\circ$ (medida em graus), segue-se que o valor de um ângulo interno de um polígono regular, onde todos os ângulos internos são iguais, é dado por

$$\boxed{a_i = \frac{(n-2)\ 180^\circ}{n}}$$

Para os ângulos ora definidos, temos a seguinte relação: *o ângulo interno de um polígono regular e o ângulo cêntrico dêsse polígono são suplementares*, isto é, $\omega_n + a_i = 180^\circ$. Para demonstrá-la, basta verificar (fig. 40) que o ângulo formado por dois apótemas consecutivos OM e ON (que é igual ao ângulo cêntrico) é o suplemento do ângulo interno.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1.º) Calcular, em graus, o ângulo cêntrico e o ângulo interno de um pentágono regular.

Temos:

a) para o ângulo cêntrico: $\omega_n = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$

b) para o ângulo interno: $a_i = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$

(*) O valor do ângulo cêntrico pode ser dado, também, pelo valor do ângulo formado por dois apótemas consecutivos.

2.º) Qual o polígono regular convexo cujo ângulo cêntrico vale 36º?

O ângulo procurado é dado pela fórmula $\omega_n = \frac{360^\circ}{n}$ onde $\omega_n = 36^\circ$ e n é a incognita. Logo,

$$36^\circ = \frac{360^\circ}{n} \quad \text{donde} \quad n = \frac{360^\circ}{36^\circ} = 10$$

Portanto, o polígono procurado é o decágono regular.

43. Relações métricas entre o lado, o raio e o apótema de um polígono regular. Indiquemos por

l o lado do polígono regular;
R o raio do círculo circunscrito;
a o apótema (raio do círculo inscrito).

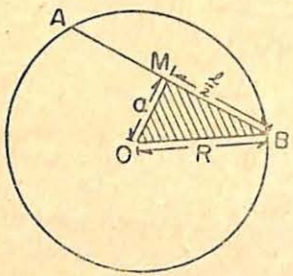


FIG. 41

O raio R, o apótema a e o semi-lado $\frac{l}{2}$, de um polígono regular (fig. 41) formam um triângulo retângulo, que, pelo teorema de Pitágoras, nos dá:

$$R^2 = a^2 + \frac{l^2}{4}$$

donde são deduzidas as seguintes relações métricas:

$$\boxed{R = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 + l^2}} \qquad \boxed{a = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - l^2}} \qquad \boxed{l = 2\sqrt{R^2 - a^2}}$$

SEMELHANÇA

44. Teorema. *Dois polígonos regulares de mesmo número de lados são semelhantes.*

Sejam O e O' os centros de dois polígonos regulares de n lados ($n = 6$, fig. 42). Unindo O aos vértices A, B, C, D, E, F

e O' aos vértices A', B', C', D', E', F', decompomos o primeiro polígono em seis triângulos iguais e em seis triângulos iguais também o segundo. Os $\triangle AOB$ e $\triangle A'O'B'$, $\triangle BOC$ e $\triangle B'O'C'$, etc. formam pares de triângulos *semelhantes*, pois, são isósceles e têm os ângulos

$$A\hat{O}B = A'\hat{O}'B' = B\hat{O}C = B'\hat{O}'C' = \ldots = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ.$$

Concluimos, portanto, que êsses polígonos, sendo compostos de um mesmo número de triângulos, *ordenadamente semelhantes* (*), são também *semelhantes*.

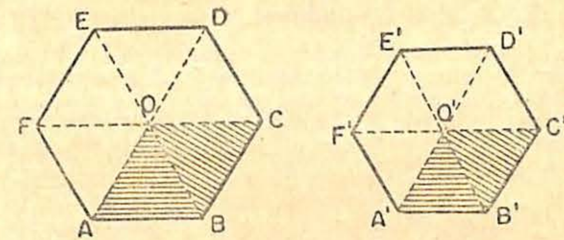


FIG. 42

45. Teorema. *Os lados de dois polígonos regulares do mesmo número de lados são proporcionais aos respectivos apótemas.*

Consideremos os polígonos regulares $ABCDEF$ e $A'B'C'D'E'F'$ (fig. 42). Como os apótemas são segmentos homólogos, as suas relações são as de semelhança, e esta é, precisamente, a mesma relação de dois lados homólogos dos polígonos.

Ainda, aplicando uma propriedade conhecida das proporções, temos:

Os perímetros de dois polígonos regulares de mesmo número de lados são proporcionais aos respectivos apótemas.

(*) Ver *Matemática*, Curso Ginasial 3.ª Série, pág. 270, do mesmo autor

§7. Relações métricas nos polígonos regulares convexos em função do raio R. Construção de polígonos regulares.

QUADRADO INSCRITO

46. Construção. Para inscrever um quadrado num círculo de centro O (fig. 43), traçamos dois diâmetros perpendiculares AC e BD. A circunferência ficará, assim, dividida em quatro arcos iguais, porque têm em correspondência ângulos cêntricos iguais (ângulos retos). Portanto, unindo os pontos de divisão A, B, C e D, obteremos o *quadrado ABCD*.

Observação: Traçando dois outros diâmetros (MN e PQ na fig. 43), perpendiculares entre si e que bissequem os ângulos retos formados por AC e BD, dividiremos a circunferência em oito partes iguais. Unindo os pontos de divisão, obteremos o *octogono regular AMDPCNBQA*. Anàlogamente, poderemos construir um polígono regular de 16, 32, 64 ... 2^n $(n > 1)$ lados.

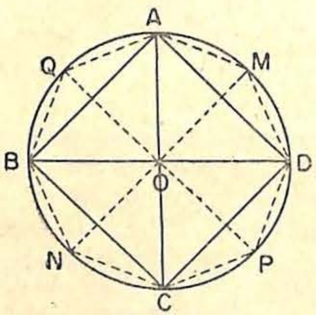


FIG. 43

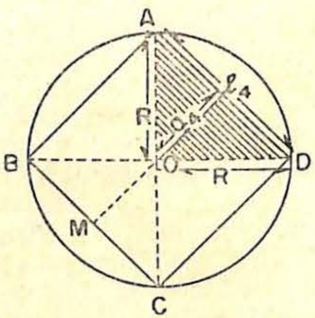


FIG. 44

47. Cálculo do lado e do apótema. Seja o quadrado inscrito $ABCD$ (fig. 44) Indiquemos por:

l_4 ..... — o lado do quadrado inscrito

a_4 ..... — o apótema do quadrado inscrito

R ..... — raio do círculo circunscrito

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo AOD, temos:

$$\overline{AD}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{OD}^2$$

ou

$$l_4^2 = R^2 + R^2$$

$$\therefore \quad l_4^2 = 2R^2$$

donde:

$$\boxed{l_4 = R\sqrt{2}}$$

Traçado $OM \perp AD$, temos:

$$AB = OM + OM$$

ou

$$l_4 = a_4 + a_4$$

$$\therefore \quad l_4 = 2a_4$$

donde

$$\boxed{a_4 = \frac{l_4}{2}}$$

e como $l_4 = R\sqrt{2}$, vem: $\boxed{a_4 = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}}$

isto é, *o apótema do quadrado inscrito é igual à metade do lado do quadrado.*

HEXÁGONO REGULAR INSCRITO

48. Construção. Consideremos a circunferência de centro O e raio R (fig. 45). Com centro num ponto qualquer A da circunferência e raio R, marquemos o vértice B sôbre a circunferência. Em seguida, com centro em B e raio R, marquemos o vértice C, e, assim, sucessivamente, até encontrar os demais vértices (D, E, F) do hexágono. A justificação dessa construção, onde *o lado do hexágono é o próprio raio do círculo circunscrito*, será dada à seguir.

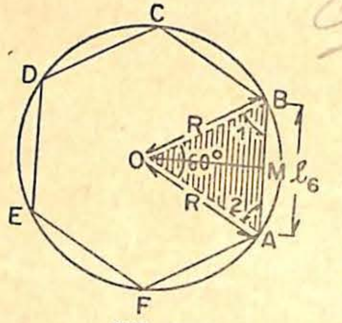


FIG. 45

49. Cálculo do lado e do apótema. Seja $AB = l_6$ (fig. 45) o lado do hexágono regular inscrito na circunferência. Unindo A e B com o centro O, obtemos o triângulo AOB, que é isósceles. Demonstremos que êsse triângulo é também equilátero. De fato, o ângulo cêntrico $A\hat{O}B$ vale 60°, em virtude da sua medida ser dada pelo arco AB, que é a sexta parte da circunferência (por hipótese). Como a soma dos outros dois ângulos ($\hat{1}$ e $\hat{2}$) é igual a 120° segue-se, pela igualdade entre êles existente, que cada um vale 60°.

Logo, o triângulo AOB é equiângulo, e, portanto, será equilátero. Temos, assim que: $AB = OA = OB = R$ ou

$$\boxed{l_6 = R}$$

Calculemos, agora, o valor do *apótema* OM (fig. 45), que será indicado por a_6. Aplicando o teorema de Pitágoras ao $\triangle OMA$, vem:

$$\overline{OA}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{MA}^2$$

ou

$$R^2 = a_6^2 + \left(\frac{l_6}{2}\right)^2$$

e sendo $l_6 = R$, temos:

$$R^2 = a_6^2 + \frac{R^2}{4}$$

donde

$$a_6 = R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{3R^2}{4}$$

e, portanto:

$$\boxed{a_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}}$$

OBSERVAÇÃO: Dividida uma circunferência (fig. 46) em 6 partes iguais e traçando os diâmetros bissetores dos ângulos formados pelos diâmetros AD, BE, CF, dividiremos a circunferência em 12 partes iguais. Unindo os pontos de divisão, encontraremos o *dodecágono regular* inscrito. De modo análogo, podemos dividir a circunferência em 24, 48, 96, ... 3×2^n partes iguais e, unindo os pontos de divisão obter os respectivos polígonos regulares inscritos.

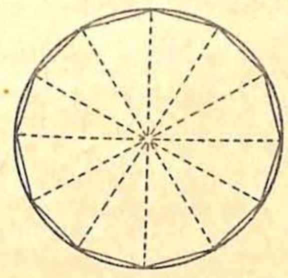


FIG. 46

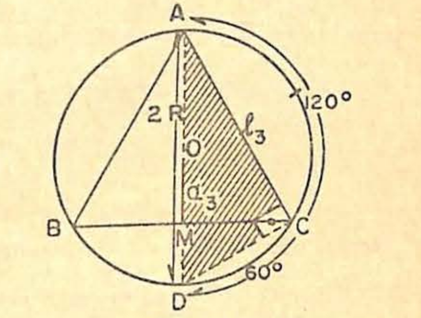


FIG. 47

TRIÂNGULO EQUILÁTERO INSCRITO

50. Construção. Dividamos a circunferência de centro O e raio R (fig. 47) em 6 partes iguais (problema anterior) e unamos os vértices alternados por meio das cordas AB, BC e CA. O triângulo ABC é equilátero, pois, $AB = BC = CA$ (como cordas de arcos iguais).

51. Cálculo do lado e do apótema. Seja $l_3 = AC$ (fig. 47) o lado do triângulo equilátero inscrito no círculo de centro O e raio R. Tracemos o diâmetro AD. O triângulo ACD é retângulo, pois, é inscrito num semi-círculo e, pelo teorema de Pitagoras, temos:

$$\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{DC}^2$$

Mas $AD = 2R$ (diâmetro) e $DC = R$ (por ser corda que subtende um arco de 60°); portanto:

$$(2R)^2 = l_3^2 + R^2$$

$$\text{ou} \quad l_3^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2$$

donde $$\boxed{l_3 = R\sqrt{3}}$$

Calculemos o valor do *apótema* $a_3 = OM$ do triângulo ABC (fig. 47). No triângulo retângulo OMB, que se obtém unindo O com B, pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$\overline{OB}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{BM}^2 \quad \left(\text{onde } BM = MC = \frac{l_3}{2}\right)$$

$$\text{ou} \quad R^2 = a_3^2 + \left(\frac{l_3}{2}\right)^2$$

donde $a_3^2 = R^2 - \dfrac{l_3^2}{4}$ e como $l_3 = R\sqrt{3}$, vem:

$$a_3^2 = R^2 - \frac{3R^2}{4} = \frac{R^2}{4}$$

e, portanto: $$\boxed{a_3 = \frac{R}{2}}$$

OBSERVAÇÃO: Sendo $l_6 = R$ e $a_3 = \dfrac{R}{2}$, podemos dizer que o apótema do triângulo eqüilátero é a metade do lado do hexágono regular inscrito no mesmo círculo.

DECÁGONO REGULAR INSCRITO

52. Construção. Consideremos o círculo de centro O e raio $R = OA$. (fig. 48).

Construamos o segmento áureo do raio OA, (já estudada no n.º 31) isto é, determinemos um segmento OP tal que

$$\overline{OP}^2 = OA \,.\, PA.$$

Com centro em A e com uma abertura de compasso igual a OP, marquemos o ponto B. A corda AB é o lado l_{10} do decágono regular inscrito. Com centro em B e a mesma abertura OP, determinemos o ponto C, e assim sucessivamente.

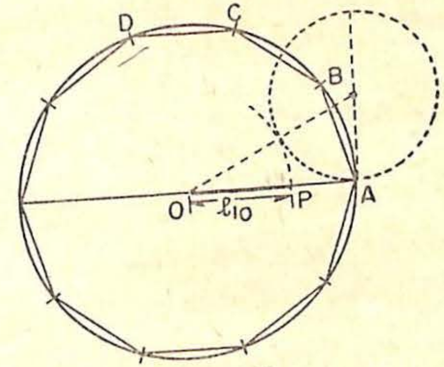


FIG. 48

Unindo os pontos A, B, C, D, ... encontraremos o *decágono regular inscrito*, cuja construção será adiante justificada.

53. Cálculo do lado e do apótema. Seja $AB = l_{10}$ o lado do decágono regular inscrito no círculo de centro O e raio R (fig. 49).

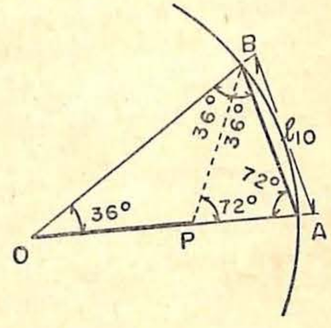


FIG. 49

Logo: $A\hat{O}B = 36°$ (valor do ângulo cêntrico).

Como $O\hat{A}B + A\hat{B}O = 180° - 36° = 144°$ e os ângulos $O\hat{A}B$ e $A\hat{B}O$ são iguais, por ser isósceles o $\triangle AOB$, concluímos:

$$O\hat{A}B = A\hat{B}O = 72°$$

Traçando a bissetriz BP do ângulo ABO, temos:

$\triangle APB$ isósceles e portanto $AB = PB = l_{10}$

$\triangle OPB$ isósceles e portanto $OP = PB$

Logo: $$OP = l_{10}$$

Demonstremos, agora, que OP é o segmento áureo de $OA = R$.

De fato, em virtude do teorema da bissetriz interna, podemos escrever:

$$\frac{OP}{OB} = \frac{PA}{AB}$$

Como $OB = OA = R$ e $OP = PB = AB$, vem:

$$\frac{OP}{OA} = \frac{PA}{OP}$$

Donde

$$\overline{OP}^2 = OA \cdot PA$$

isto é, $OP = l_{10}$ é o *segmento áureo* do raio, como queríamos demonstrar.

Lembrando que o valor algébrico de um segmento áureo é dado pela fórmula (Cap. 1, n.º 28):

$$x = \frac{(\sqrt{5}-1)}{2} \cdot a$$

substituindo a por R e x por l_{10}, temos:

$$l_{10} = \frac{(\sqrt{5}-1)}{2} R \quad \text{ou} \quad \boxed{l_{10} = \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)}$$

Calculemos, agora, o valor do *apótema* a_{10}. Seja $AB = l_{10}$ o lado do decágono regular inscrito (fig. 50). Traçado o apótema $OM = l_{10}$, o $\triangle OMA$, pelo teorema de Pitágoras, dá:

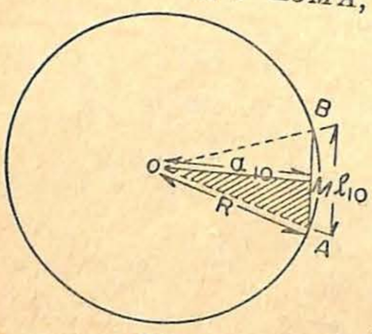


FIG. 50

$$\overline{OA}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{MA}^2$$

(onde $AM = MB$)

ou

$$R^2 = a_{10}^2 + \left(\frac{l_{10}}{2}\right)^2$$

donde

$$a_{10}^2 = R^2 - \frac{l_{10}^2}{4}$$

e, substituindo l_{10} pelo seu valor $\left[\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)\right]$, vem:

$$a_{10}^2 = R^2 - \frac{R^2(\sqrt{5}-1)^2}{16} = R^2 - \frac{R^2(5-2\sqrt{5}+1)}{16} =$$

$$= \frac{16R^2 - 6R^2 + 2\sqrt{5}R^2}{16}$$

ou $$a_{10}^2 = \frac{(10+2\sqrt{5})R^2}{16}$$

donde

$$\boxed{a_{10} = \frac{R\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}}$$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇAO

1.º) Um quadrado está inscrito num círculo de raio igual a 6 cm. Calcular o valor do perímetro e do apótema.

Temos que aplicar as fórmulas relativas ao quadrado inscrito:

$l_4 = R\sqrt{2} \therefore l_4 = 6\sqrt{2} = 8{,}46$ e o perímetro: $4 \times 8{,}46 = 33{,}84$

$a_4 = \frac{l_4}{2} \therefore a_4 = \frac{8{,}46}{2} = 4{,}23$

Logo, o perímetro é igual a 33,84 cm e o apótema é 4,23cm.

2.º) O raio de um círculo mede 4m. Calcular: *a*) o lado do triângulo equilátero; *b*) o apótema do hexágono regular, ambos inscritos nesse círculo.

Temos: *a*) $l_3 = R\sqrt{3} \therefore l_3 = 4 \times 1{,}73 = 6{,}92$

b) $a_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2} \therefore a_6 = \frac{6{,}92}{2} = 3{,}46$

Logo, $l_3 = 6{,}92$ m e $a_6 = 3{,}46$ m, são os valores procurados.

3.º) O lado de um hexágono regular mede 2 m. Calcular: *a*) a diagonal do quadrado; *b*) o lado do decágono regular, ambos inscritos no círculo em que está inscrito o hexágono regular.

Determinemos primeiramente o raio. Como $l_6 = R$ e no problema dado $l_6 = 2$ m, segue-se que $R = 2$ m. Portanto:

a) $d_4 = l\sqrt{2} = R\sqrt{2}\,.\sqrt{2} = 2R \;.\cdot.\; d_4 = 2 \times 2 = 4$

b) $l_{10} = \dfrac{R}{2}(\sqrt{5} - 1) = \dfrac{2\,(\sqrt{5} - 1)}{2} \;.\cdot.\; l_{10} = 2{,}23 - 1 = 1{,}23$

Logo, os elementos procurados valem:

$d_4 = 4$ m e $l_{10} = 1{,}23$ m.

§ 8. Lado do polígono regular convexo de $2n$ lados em função do de n lados.

54. Cálculo do l_{2n}. Resolvamos o seguinte problema: *conhecido o lado $AB = l_n$ de um polígono regular convexo de n lados, inscrito em um círculo de centro O e raio R* (fig. 51), *calcular o lado $AC = l_{2n}$ do polígono regular convexo inscrito de número duplo de lados.*

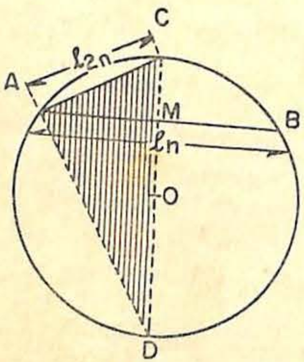


FIG. 51

Na figura 51, temos:

$$\overline{AC}^2 = CD\,.\,CM$$

(o $\triangle CAD$ é retângulo em $\hat{A}$)

$$\text{Como}\begin{cases} AC = l_{2n} \\ CD = 2R \\ CM = OC - OM = R - OM \end{cases}$$

vem: $\quad l_{2n}^2 = 2R(R - OM).$

Sendo OM o apótema do polígono de lado $l_n = AB$, podemos substituí-lo pelo seu valor (n.º 43), isto é,

$$OM = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - l_n^2};$$

e, portanto: $\quad l_{2n}^2 = 2R\left(R - \dfrac{1}{2}\sqrt{4R^2 - l_n^2}\right)$

ou $\quad l_{2n}^2 = 2R^2 - R\sqrt{4R^2 - l_n^2}$

donde $\quad \boxed{l_{2n} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - l_n^2}}}$

EXERCÍCIO DE APLICAÇAO

Calcular o valor do lado do *octógono* (l_8) regular convexo inscrito num círculo de raio R.

Na fórmula

$$l_{2n} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - l_n^2}}$$

substituindo l_{2n} por l_8 e l_n por l_4, obtemos:

$$l_8 = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - l_4^2}}.$$

Como $l_4 = R\sqrt{2}$, e, portanto, $l_4^2 = 2R^2$, vem:

$$l_8 = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - 2R^2}} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{2R^2}} = \sqrt{2R^2 - R^2\sqrt{2}}$$

ou, pondo R^2 em evidência:

$$l_8 = \sqrt{R^2(2 - \sqrt{2})}$$

donde: $\quad \boxed{l_8 = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}}$

EXERCÍCIOS

1. Calcular, em graus, o ângulo cêntrico e o ângulo interno de um decágono regular.
2. Qual o valor do ângulo cêntrico e qual o valor do ângulo interno de um hexágono regular?
3. O ângulo interno de um polígono regular convexo é igual a 135°. Qual o polígono?
4. Qual o polígono regular convexo cujo ângulo cêntrico vale 72°?
5. Um quadrado está inscrito num círculo de raio igual a 4 dm. Calcular: l_4, d_4 e a_4 (aproximação até 0,01).

6. A razão entre o ângulo cêntrico de um polígono regular e o ângulo interno dêsse polígono é igual a $\frac{2}{3}$. Qual o polígono?
7. Calcular o perímetro de um quadrado inscrito num círculo onde também está inscrito um hexágono regular cujo lado mede 5 cm.
8. O perímetro de um hexágono regular inscrito é igual a 36 dm. Calcular o lado do triângulo equilátero inscrito no mesmo círculo.
9. Calcular o apótema do hexágono regular inscrito num círculo de diâmetro igual a 16 cm.
10. O lado de um quadrado inscrito num círculo mede $3\sqrt{2}$ cm. Calcular o raio dêsse círculo.
11. Um quadrado tem o apótema igual a 5 dm. Calcular o perímetro dêsse quadrado e o diâmetro do círculo que o circunscreve.
12. O lado de um quadrado circunscrito a um círculo mede 10 dm. Calcular o perímetro do hexágono regular inscrito no mesmo círculo.
13. Um triângulo equilátero está inscrito num círculo de raio igual a 14 cm. Calcular a altura e o apótema do triângulo.
14. O apótema de um quadrado inscrito num círculo vale 5 m. Calcular o perímetro do quadrado circunscrito a êsse mesmo círculo.
15. Calcular o lado do decágono regular inscrito num círculo onde também se encontra inscrito um hexágono regular de perímetro igual a 60 dm.
16. Determinar o perímetro do decágono regular inscrito no círculo de raio igual a 6 m.
17. Calcular quanto mede o lado do octógono inscrito num círculo de 8 dm de diâmetro.
18. Calcular a expressão de l_{16} em função de R, usando a fórmula do l_{2n}.
19. Calcular o perímetro do octógono regular convexo, inscrito num círculo de 10 cm de diâmetro.
20. Calcular o lado do dodecágono regular convexo, inscrito num círculo de raio 2 m de raio. (l_{12} é determinado pela fórmula do l_{2n}).
21. Calcular o l_{20} (icoságono regular), inscrito num círculo de $R = 10$ dm.
22. Um círculo tem 1 m de raio. Calcular os perímetros dos seguintes polígonos regulares convexos nêle inscritos: triângulo, quadrado, hexágono, octógono, decágono.
23. Um triângulo equilátero tem 24 dm de perímetro. Calcular os valores do lado, do apótema e do raio do círculo que o circunscreve.
24. Ligando os pontos-médios consecutivos dos lados de um quadrado inscrito num círculo de 4 dm de raio, encontra-se um novo quadrado. Determinar o perímetro do novo quadrado obtido.
25. A soma dos lados dos quadrados inscrito e circunscrito a um mesmo círculo é 17,05 m. Quanto mede o raio dêsse círculo?
26. A soma da diagonal e do lado de um mesmo quadrado é igual a $\sqrt{2}$. Quanto mede a diagonal e quanto mede o lado?
27. Quanto medem as diagonais de um hexágono regular convexo que tem 24 dm de perímetro?

28. O lado de um polígono regular, inscrito num círculo de 12 cm de raio, mede 8 cm. Calcular o lado de um polígono regular de mesmo numero de lados (portanto semelhante) inscrito num círculo de 36 cm de raio.
29. O lado de um hexágono regular convexo, inscrito num círculo, mede 10 dm. Determinar o lado do hexágono regular convexo semelhante inscrito num círculo de raio igual a 8 dm.
30. O perímetro de um polígono regular convexo, inscrito num círculo de 20 dm de diâmetro, é 51,90 dm. Calcular o raio do círculo onde está inscrito um outro polígono regular convexo de mesmo número de lados que o primeiro e cujo perímetro é igual a 103,80 dm.

Respostas:

1. 36° e 144°
2. 60° e 120°
3. Octógono
4. Pentágono
5. 5,64 dm; 8 dm e 2,82 dm
6. Pentágono
7. 28,20 cm
8. 10,39 dm
9. 6,92 cm
10. 3 cm
11. 40 dm e 14,10 dm
12. 30 dm
13. 21 cm e 7 cm
14. 56,40 m
15. 6,15 dm
16. 36,9 m
17. 3,04 m
18. $l_{16} = R\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$
19. 30,4 cm
20. 1,02 m
21. 3,14 m
22. 5,19m; 5,64 m; 6 m; 6,08 m e 6,15 m
23. 8 dm; 2,30 dm e 4,61 dm
24. 16 dm
25. 5 m
26. $2-\sqrt{2}$; $2(\sqrt{2}-1)$
27. 8 dm
28. 24 cm
29. 8 dm
30. 20 dm

§ 9. Medição da circunferência. Cálculo de π.

COMPRIMENTO DA CIRCUNFERÊNCIA

55. Generalidades. Até agora, comparámos apenas segmentos retilíneos entre si, e arcos de igual raio entre si. Adiante veremos que é possível, também, comparar arcos de raios desiguais, entre si ou com segmentos retilíneos.

Sob o ponto de vista estritamente intuitivo (experimental), poderíamos considerar a circunferência como um fio flexível que se poderia dispor ao longo de uma reta. O segmento assim obtido daria idéia da *retificação da circunferência* e representaria o seu *comprimento.*

Todavia, tal modo de considerar o comprimento da circunferência não encontra, em virtude do que foi estudado sôbre as medidas dos segmentos retilíneos, uma justificativa racional, pois, nunca fizemos alusão alguma à possibilidade de *deformação dos segmentos retilíneos.* Daí a necessidade de determinar o comprimento de uma circunferência por *via puramente geométrica.* É o que faremos a seguir.

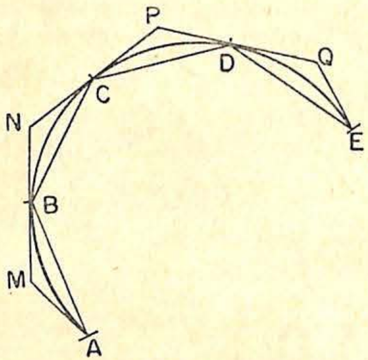


FIG. 52

56. Comprimento de um arco de circunferência. Seja $\overset{\frown}{AE}$ um arco de circunferência (fig. 52). Consideremos a poligonal convexa $ABCDE$ nêle inscrita, isto é, que tenha os seus vértices sôbre o arco, e a poligonal $AMNPQE$ a êle circunscrita, ou seja, que tenha todos os seus lados tangentes ao arco.

O comprimento do arco $\overset{\frown}{AE}$ será dado confrontando-o com os perímetros dessas duas poligonais. Tomando para comprimento do arco AE o perímetro da poligonal inscrita $ABCDE$, teremos um *valor aproximado por falta* do comprimento do arco. Se, ao invés, tomarmos o perímetro da poligonal circunscrita $AMNPQE$, teremos um *valor aproximado por excesso* do $\overset{\frown}{AE}$.

É evidente que o perímetro da poligonal circunscrita é maior que o da inscrita, pois, *qualquer poligonal convexa envolvente é maior que a poligonal convexa envolvida de mesmas extremidades.* (*) Se desejarmos obter maior aproximação do

(*) Ver Terceiro ano de *Matemática* Curso Ginasial, pág. 138, do mesmo autor.

verdadeiro comprimento do arco $\overset{\frown}{AE}$, basta duplicar sucessivamente o número de lados de cada uma dessas poligonais.

De fato, ao mesmo tempo em que se vae aumentando o número de lados das poligonais, temos que os perímetros das inscritas vão *crescendo* enquanto os das circunscritas vão *decrescendo*, tendendo ambos a se *confundirem* com o arco $\overset{\frown}{AE}$. Nestas condições, a *diferença entre os respectivos perímetro pode tornar-se menor que qualquer quantidade tão pequena quanto quisermos.* Temos, assim, a seguinte definição:

O comprimento de um arco de circunferência é o limite comum para o qual tendem os perímetros de duas linhas poligonais, convexas, uma inscrita e outra circunscrita, quando o número de seus lados aumenta indefinidamente.

Observação: Existem na geometria problemas análogos aos já encontrados na álgebra. Realmente, na definição que demos do *número irracional* $\sqrt{2}$ (Cap. I, n.º 2), usamos duas sucessões de números racionais, uma por falta e outra por excesso. Agora, para definir o *comprimento de um arco de circunferência*, necessitámos, também, de duas sucessões de linhas poligonais, umas inscritas e outras circunscritas.

57. Comprimento de uma circunferência. O estudo feito para a medida do comprimento de um arco pode ser estendido para a de uma circunferência. Basta inscrever um polígono regular convexo $ABCDEF$ (fig. 53) e circunscrever um outro $MNPQRS$, também convexo e regular. À medida que vamos duplicando o número de lados dêsses polígonos, temos:

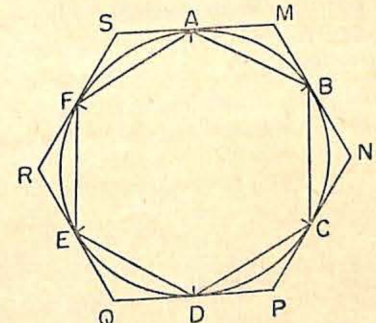


FIG. 53

1.º) os perímetros dos polígonos inscritos vão *crescendo*. e consequentemente se *aproximando*, cada vez mais, do comprimento da circunferência;

2.º) os perímetros dos polígonos circunscritos vão *decrescendo*, e conseqüentemente se *aproximando*, cada vez mais, do comprimento da circunferência;

3.º) a diferença entre os perímetros dos dois polígonos, o do circunscrito e o do inscrito, pode tornar-se menor que qualquer quantidade, tão pequena quanto quisermos. Daí a definição:

"O comprimento de uma circunferência é o limite comum para o qual tendem os perímetros de dois polígonos regulares convexos, um inscrito e outro circunscrito, quando o número de lados dêsses polígonos cresce indefinidamente."

Indicaremos êsse *limite*, que é o elemento de separação das duas classes de perímetros, por C (comprimento da circunferência).

Observe-se que, aumentando indefinidamente o número de lados de um polígono regular inscrito, o comprimento do *apótema* do polígono, ao mesmo tempo, aproxima-se, cada vez mais, do comprimento do *raio* da circunferência em que o polígono se acha inscrito.

58. Razão da circunferência para o diâmetro. *Teorema: Os comprimentos de duas circunferências são proporcionais aos comprimentos dos respectivos diâmetros.*

De fato, dadas duas circunferências de raios R e R' (fig. 54), imaginemos que nelas estejam inscritos e circunscritos dois polígonos regulares convexos de mesmo número de lados.

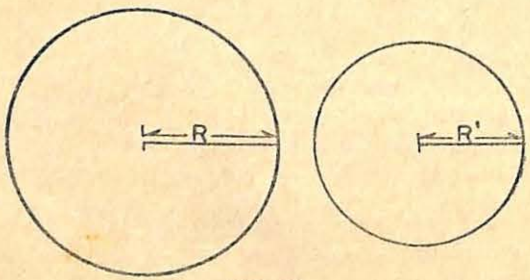


FIG. 54

Já vimos (n.º 45) que *os perímetros de dois polígonos regulares de mesmo número de lados são proporcionais aos respectivos apótemas*, e como essa proposição é válida qualquer que seja o número de lados dos polígonos, podemos supô-la verdadeira, também, quando aumentamos indefinidamente o número de lados dêsses polígonos. Logo, a relação permanecerá verdadeira mesmo para os elementos de separação das duas classes de perímetros, isto é, para os comprimentos C e C' das duas circunferências, bem como para as posições limites dos apótemas dos polígonos, que são, respectivamente, os raios R e R'. Temos, assim, que: $\dfrac{C}{C'} = \dfrac{R}{R'}$

Multiplicando o numerador e o denominador da segunda razão por 2, obtemos:

$$\boxed{\frac{C}{C'} = \frac{2R}{2R'}}$$

como queríamos demonstrar.

59. Conseqüência. *A razão entre o comprimento de uma circunferência e o comprimento de seu diâmetro é constante, isto é, sempre a mesma, quaisquer que sejam as circunferências.*

Com efeito, de $\dfrac{C}{C'} = \dfrac{2R}{2R'}$

temos: $\dfrac{C}{2R} = \dfrac{C'}{2R'}$

Considerando mais as circunferências C'', C''', ... de raios, respectivamente, R'', R''' ... e seguindo o mesmo raciocínio, obteremos:

$$\frac{C}{2R} = \frac{C'}{2R'} = \frac{C''}{2R''} = \frac{C'''}{2R'''} = \ldots\ldots$$

que permite ainda escrever: $\dfrac{C}{2R} = \textit{constante}$

Essa *constante*, que é um *número irracional* (*), foi indicada desde os gregos pela letra π (lê-se "pi"), e o seu valor aproximado com os nove primeiros algarismos decimais é:

$$\pi = 3{,}141592653\ldots\ldots\ldots$$

Logo:

$$\boxed{\frac{C}{2R} = \pi}$$

Na prática, usa-se comumente o valor de π aproximado por falta 3,14 (a menos de 0,01), ou o aproximado por excesso 3,1416 (a menos de 0,0001).

60. Expressão do comprimento de circunferência.

De $$\frac{C}{2R} = \pi$$

deduzimos $C = 2R\pi$ ou $\boxed{C = 2\pi R}$

fórmula clássica que permite determinar, com a aproximação desejada, o comprimento (C) de uma circunferência de raio R.

Exemplo: Calcular, com êrro inferior a 0,01, o comprimento da circunferência de 5 dm de raio ($\pi = 3{,}14$).

Temos: $R = 5$ dm. Aplicando a fórmula $C = 2\pi R$, vem:

$$C = 2 \times 3{,}14 \times 5 \text{ dm} = \mathit{31{,}4\ dm}$$

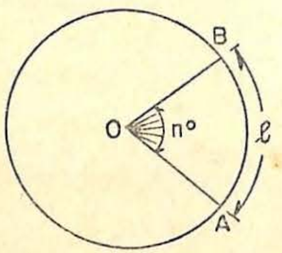


FIG. 55

61. Expressão do comprimento de um arco de circunferência. A medida de um arco de circunferência pode ser expressa ou mediante a *medida do ângulo central correspondente* ($A\hat{O}B$ na fig. 55) ou tomando como unidade de medida uma unidade de comprimento, por exemplo, *o metro*.

(*) Há uma distinção entre o número irracional π e um número irracional da forma por exemplo $\sqrt{2}$, pois, enquanto o quadrado da $\sqrt{2}$ é o número *racional* 2 o quadrado de π continua sendo irracional. Daí o nome que se atribui ao número π de *irracional transcendente*, para o distinguir dos outros irracionais.

A medida expressa pelo ângulo central denomina-se *amplitude* do arco, e, expressa em metros, denomina-se *comprimento*. O comprimento e a amplitude de um arco são grandezas diretamente proporcionais; e como para a *circunferência*, temos:

$$\textit{comprimento } (C) = 2\pi R$$
$$\textit{amplitude} \text{ (em graus)} = 360^\circ$$

indicando por l o *comprimento de um arco* e por n a sua *amplitude*, vale a seguinte proporção:

$$\frac{2\pi R}{l} = \frac{360^\circ}{n^\circ}$$

Donde $\boxed{l = \frac{\pi R n}{180}}$ e $\boxed{n = \frac{180 l}{\pi R}}$

fórmulas que permitem calcular, respectivamente, o comprimento e a amplitude de um arco. *Exemplos:*

1.º) Calcular o comprimento de um arco de amplitude igual a 45°, pertencente a uma circunferência de 10 cm de raio. (Usar $\pi = 3{,}14$).

Temos: $$l = \frac{\pi R n}{180}$$

ou $$l = \frac{3{,}14 \times 10 \times 45}{180} = \frac{31{,}4}{4} = 7{,}85$$

Logo, o comprimento do arco procurado é 7,85 cm.

2.º) Determinar, em graus, a amplitude de um arco de 3 cm de comprimento, pertencente a um círculo de 12 cm de raio.

Temos: $$n = \frac{180 l}{\pi R}$$ ou

$$n = \frac{180 \times l}{3{,}14 \times 12} = 14{,}33\text{; e, portanto, } n = 14{,}33^\circ = 14^\circ 19' 48''$$

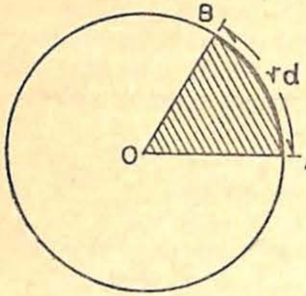


FIG. 56

62. Radiano. O confronto feito entre os arcos de circunferência e os segmentos de retas permite criar mais uma unidade de medida para os ângulos: o *radiano*. Chama-se *radiano* ao ângulo central (fig. 56) que determina sôbre a circunferência um arco de comprimento igual ao raio.

Indicação: *rd*. Calcula-se o número de radianos que uma circunferência contém, dividindo o seu comprimento ($C = 2\pi R$) pelo do raio (R), isto é:

$$\frac{C}{R} = \frac{2\pi R}{R} = 2\pi.$$

Logo, qualquer circunferência contém sempre 2π radianos.

Com um valor aproximado, a menos de 0,01, podemos dizer, também, que a circunferência possui:

$$2\pi = 2 \times 3{,}14 = 6{,}28$$

radianos, isto é, o seu comprimento vale aproximadamente 6,28 vêzes o comprimento do raio. Temos, então:

uma circunferência contém........ 360° ou 400 gr ou $2\pi\, rd$

meia circunferência contém........ 180° ou 200 gr ou $\pi\, rd$

um quarto de circunferência contém.. 90° ou 100 gr ou $\frac{\pi}{2} rd$

Para relacionar as três unidades de medidas de ângulos, a saber o *grau*, o *grado* e o *radiano*, basta armar as proporções da medida de um mesmo ângulo nessas três unidades. Assim, o valor de *1rd*, em *graus*, será dado pela proporção:

$$\left.\begin{array}{l} 2\pi rd \text{ —— } 360^\circ \\ 1\ rd \text{ —— } x \end{array}\right\} \text{ donde } x = \frac{360^\circ \times 1rd}{2\pi rd} =$$

$$= \frac{180^\circ}{\pi} = 57{,}\cancel{2958^\circ = 57^\circ 17' 44{,}}8''$$

57°19'29"

O valor de *1rd*, em *grados*, por sua vez, será:

$$\left.\begin{array}{l} 2\pi rd \text{ —— } 400gr \\ 1\ rd \text{ —— } x \end{array}\right\} \text{ donde } x = \frac{400gr \times 1rd}{2\pi rd} = \frac{200\,gr}{\pi} = 63{,}69gr$$

Exemplos:

1.°) Reduzir a radianos um arco de 135°.

$$\text{Temos: } \left.\begin{array}{l} 180^\circ \text{ —— } \pi rd \\ 135^\circ \text{ —— } x \end{array}\right\} \text{ donde } x = \frac{135^\circ \times 1rd}{180^\circ} = \frac{3\pi}{4} rd$$

ou, usando π com a aproximação 3,14, vem:

$$\frac{3\pi}{4} rd = \frac{3 \times 3{,}14}{4} rd = 2{,}355\ rd$$

Logo, o arco de 135° equivale a 2,355 *rd* (c/ aprox. 0,001).

2.°) Converter em graus, minutos e segundos os arcos:

$$a)\ \frac{4\pi}{5} rd; \quad b)\ \frac{7\pi}{5} rd.$$

$$\text{Temos: } a) \left.\begin{array}{l} \pi\, rd \text{ —— } 180^\circ \\ \frac{4\pi}{5} rd \text{ —— } x \end{array}\right\} \text{ donde } x = \frac{\frac{4\pi}{5} rd \times 180^\circ}{\pi rd} = 144^\circ$$

b) pode-se, também, substituir diretamente πrd por 180°:

$$\frac{7\pi rd}{5} = \frac{7 \times 180^\circ}{5} = 128{,}57^\circ = 128^\circ 34' 12''.$$

3.°) Converter em grados o arco de 2,5 *rd*.

Temos:

$$\left.\begin{array}{l} 1\ rd \text{ —— } 63{,}69gr \\ 2{,}5\ rd \text{ —— } x \end{array}\right\} \text{ donde } x = \frac{2{,}5\ rd \times 63{,}69gr}{1\ rd} = 159{,}22gr$$

CÁLCULO DE π

63. Generalidades. Sendo π um número irracional, não é possível encontrar um valor exato para a sua representação decimal. Dêsse modo, temos de contentar-nos com valores aproximados, *por falta* ou *por excesso*.

Do fato de π ser dado pela relação:

$$\pi = \frac{C}{2R} \qquad (1)$$

podemos fixar, arbitràriamente, R ou C, e obter, assim, dois métodos elementares para o seu *cálculo*.

1.º) Dado R, calcular C. Êste é o *método dos perímetros ou de Arquimedes;*

2.º) Dado C, calcular R. Êste é o *métodos dos isoperímetros ou de Schwab.*

Estudaremos sòmente o primeiro método.

64. Método dos perímetros. Tomando, por exemplo, $R = 1$, a relação (1) dá-nos:

$$\pi = \frac{C}{2 \times 1} = \frac{C}{2}$$

isto é, *π é o número que mede o semi-comprimento* $\left(\frac{C}{2}\right)$ *de uma circunferência de raio igual a 1.* Logo, obteremos os valores aproximados de π, por falta ou por excesso, calculando os semi-perímetros dos polígonos regulares inscritos, ou circunscritos, à circunferência de $R = 1$.

Se, para o comprimento da circunferência (C), usarmos o perímetro do hexágono regular inscrito, obteremos 3 como valor aproximado, por falta, de π, pois:

$l_6 = R = 1$; e, portanto, o semi-perímetro sera: $\dfrac{6 \times 1}{2} = 3$

Empregando a fórmula que dá o lado de polígono regular inscrito de número duplo de lados:

$$l_{2n} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - l_n^2}}$$

e fazendo $R = 1$, podemos, agora, calcular o l_{12}, l_{24}, l_{48}, ... e, portanto, os semi-perímetros dos polígonos correspondentes. Obteremos, dessa forma, *o valor de π com um grau de aproximação que será tanto maior quanto maior fôr o número de lados dos polígonos que se inscrevam.*

Foi com êste proceder que Arquimedes, partindo dos hexágonos regulares, inscrito e circunscrito, e duplicando sucessivamente o número de seus lados, chegou à expressão que dá o semi-perímetro do polígono de 96 lados, encontrando o valor de π compreendido entre

$$3 + \frac{10}{71} \text{ (semi-perímetro do } l_{96} \text{ inscrito)}$$

$$3 + \frac{10}{70} \text{ (semi-perímetro do } l_{96} \text{ circunscrito)}$$

O segundo valor, $3 + \dfrac{10}{70} = \dfrac{22}{7}$, por excesso, é exato até os centésimos e supera π por menos de 0,01. Atualmente, o valor de π calculado por *Shaukes*, vem expresso por 707 casas decimais. Na prática, porém, são usados os valores: *3,14* (aproximação de 0,01 por falta) e *3,1416* (aproximação de 0,0001 por excesso).

Observação. As vinte primeiras casas de π são: 3,1415926535897932 3846 ... Os calculadores de π estiveram, por longo tempo, com esperança de obter um seu valor exato depois de um certo número de algarismos. Foi *Lambert* que, em 1770, demonstrou não ser isso possível.

A partir de 1947, os *computadôres electrônicos*, dos diversos Centros de Matemática, da Europa e dos U.S.A., calculam π com *milhares* de casas, de aproximação, em alguns segundos.

EXERCÍCIOS

1. Calcular o comprimento de uma circunferência que tem como raio:
   1.º) 5 dm; 2.º) 1 m; 3.º) 4 cm.
2. Qual o comprimento de um meridiano da Terra, sabendo que o raio terrestre é aproximadamente igual a 6 378 km?
3. Calcular o comprimento de uma circunferência de diâmetro igual a 8 dm.
4. Quanto vale o raio de uma circunferência cujo comprimento é de 18,84 m?
5. Quanto mede a diagonal de um quadrado inscrito num círculo de 31,40 m de comprimento?
6. O apótema de um triângulo equilátero mede 5 cm. Calcular o comprimento da circunferência que o circunscreve.

7. Quantas voltas deve dar uma roda de 0,80 m de diâmetro para percorrer 2 512 m?
8. As rodas de um automóvel têm 0,36 m de raio. Quantas voltas dá cada roda enquanto o carro percorre 4 521,6 m?
9. Determinar o comprimento de um arco de 60° num círculo de 12 dm de raio.
10. Num círculo de 20 cm de raio, determinar o comprimento de um arco de 40°.
11. Determinar, em graus, a amplitude de um arco de 10 cm de comprimento num círculo de 18 cm de raio.
12. Calcular o comprimento de um arco de 50° pertencente a uma circunferência de 4 dm de raio.
13. Quanto mede o arco de 45°30′ inscrito num círculo de 1 m de raio?
14. Determinar a amplitude de um arco de 2,5 m de comprimento num círculo de 3 m de diâmetro.
15. Calcular o raio de uma circunferência na qual um arco de 30° tem 6,28 m de comprimento.
16. Quanto mede uma circunferência na qual um arco de 60° tem 12,42 m de comprimento?
17. Calcular o número de graus de um arco, cujo comprimento é igual ao dôbro do do raio.
18. Numa circunferência, o arco do primeiro grau mede 1 m. Qual o raio dessa circunferência?
19. Converter em radianos os arcos de: 1.°) 30°; 2.°) 45°; 3.°) 60°; 4.°) 90°.
20. Idem para os arcos de: 1.°) 120°; 2.°) 135°; 3.) 180°.
21. Reduzir a *rd* o arco de 44°32′.
22. Converter em graus os arcos de: 1.°) $\frac{3\pi}{5}\,rd$; 2.°) $\frac{2\pi}{9}\,rd$; 3.°) $2\pi rd$.
23. Exprimir em graus um arco de 2,09*rd*.
24. Reduzir 70 grados a radianos.
25. Calcular em radianos o arco de 60,83 gr.

Respostas:

1. 1.°) 31,40 dm
   2.°) 6,28 m;
   3.°) 25,12 dm
2. 40 053 *km*
3. 25,12 dm
4. 3 m
5. 10 m
6. 62,80 cm
7. 1 000
8. 2 000
9. 12,56 dm
10. 13,95 cm
11. 31°50′49″
12. 3,49 dm

13. 0,793 m
14. 95°32′29″
15. 12 m
16. 74,52 m
17. 114°38′58′
18. 57,3 m
19. 1.°) $\frac{\pi}{6}\,rd = 0{,}52\,rd;$
    2.°) $\frac{\pi}{4}\,rd = 0{,}78\,rd;$
    3.°) $\frac{\pi}{3}\,rd = 1{,}04\,rd;$
    4.°) $\frac{\pi}{2}\,rd = 1{,}57\,rd$
20. 1.°) $\frac{2\pi}{3}\,rd = 2{,}09\,rd$
    2.°) $\frac{\pi}{4}\,rd = 2{,}35\,rd$
    3.°) $\pi rd = 3{,}14\,rd$
21. 0,77 *rd*
22. 1.°) 108°; 2.°) 40°; 3.°) 360°;
23. 120°
24. 1,09 *rd*
25. 0,96 *rd*

CAPÍTULO III

Áreas das Figuras Planas

§ 1. Definições e propriedades fundamentais.

1. Definição. Chama-se *área* de uma superfície ao *número* que exprime a sua medida. Na linguagen, corrente, confundem-se, às vêzes, as expressões *superfície* e *área*. A palavra superfície está intimamente ligada à *forma* da figura, enquanto a área é um *número* resultante do confronto de uma superfície com outra tomada como unidade. A área depende, pois, da unidade escolhida.

A unidade legal de área é o *metro quadrado* (m^2) que é a área de um quadrado de 1 m de lado. Usam-se, também, seus múltiplos (dam^2, hm^2, km^2) e submúltiplos (dm^2, cm^2, mm^2).

2. Superfícies equivalentes. Quando duas superfícies, distintas quanto à forma e medidas com a mesma unidade, têm a *mesma área*, dizemos que elas são *equivalentes*. Logo, *duas superfícies são equivalentes quando, medidas com a mesma unidade, têm a mesma área.*

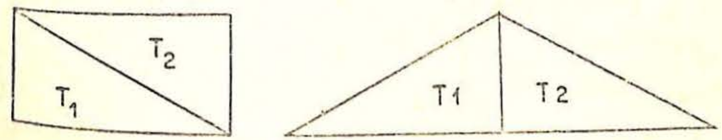


FIG. 57

Nestas condições, é evidente que duas figuras *iguais* ou *eqüicompostas*, isto é, compostas de partes iguais, são *sempre equivalentes*.

Exemplo: o retângulo e o triângulo da fig. 57 são equivalentes, porque ambos podem ser decompostos em dois triângulos iguais T_1 e T_2

Devemos notar, ainda, que:

1.º) *duas figuras equivalentes a uma terceira são equivalentes entre si (propriedade transitiva da equivalência);*

2.º) *a soma das áreas de várias figuras é igual a soma das áreas de figuras a elas equivalentes;*

3.º) *duas figuras iguais são equivalentes, mas nem tôdas as figuras equivalentes são iguais.*

3. Propriedades fundamentais. As regras para determinar as áreas das superfícies dos polígonos decorrem dos teoremas que se seguem.

Ex

Primeiro teorema. *As áreas de dois retângulos de mesma base estão entre si como suas alturas.* (*)

Sejam os retângulos $ABCD$ e $A'B'C'D'$ de mesma base b (fig. 58). Temos:

$$H \begin{cases} h \text{ altura de } ABCD \\ h' \text{ altura de } A'B'C'D' \end{cases} \qquad T \left\{ \frac{\text{área } ABCD}{\text{área } A'B'C'D'} = \frac{h}{h'} \right.$$

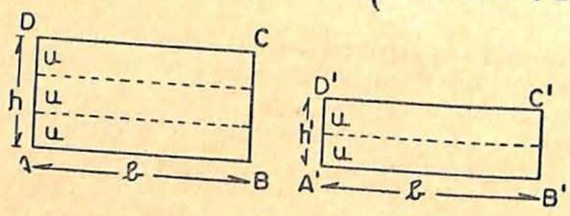


FIG. 58

Demonstração:

1. Suponhamos que h e h' sejam comensuráveis (**), isto é, admitam uma medida comum u que caiba m vêzes em h e n vêzes em h' (na fig. 58, $m = 3$ e $n = 2$)

Logo:

$$h = m \,.\, u$$
$$h' = n \,.\, u$$

(*) Referimo-nos às *medidas* das alturas.

(**) O teorema ainda é verdadeiro quando h e h' não são comensuráveis.

Dividindo, membro a membro, vem: $\dfrac{h}{h'} = \dfrac{m}{n}$ (1)

2. Pelas extremidades de cada unidade de medida e sôbre h e h', tracemos paralelas às respectivas bases. Obteremos, assim, retângulos iguais entre si, por terem a mesma base (b) e a mesma altura (u) e portanto retângulos de mesma área. Chamando a a área de cada um dêles, temos:

$$\text{área } ABCD \quad = m \,.\, a$$
$$\text{área } A'B'C'D' = n \,.\, a$$

Dividindo, membro a membro, resulta:

$$\frac{\text{área } ABCD}{\text{área } A'B'C'D'} = \frac{m}{n} \qquad (2)$$

3. Confrontando (1) e (2), obtemos:

$$\frac{\text{área } ABCD}{\text{área } A'B'C'D'} = \frac{h}{h'}$$

c.q.d.

NOTA: O mesmo teorema poderia ter sido enunciado para retângulos de mesma altura, ao invés de mesma base, pois, é indiferente considerar qualquer das dimensões como altura ou base.

Ex

Segundo teorema. *As áreas de dois retângulos quaisquer estão entre si como os produtos das bases pelas alturas.*

Sejam os retângulos $ABCD$ e $A'B'C'D'$ (fig. 59). Temos:

$$H \begin{cases} (h,\, b) \text{ dimensões de } ABCD \\ (h',\, b') \text{ dimensões de } A'B'C'D' \end{cases} \qquad T \left\{ \frac{\text{área } ABCD}{\text{área } A'B'C'D'} = \frac{bh}{b'h'} \right.$$

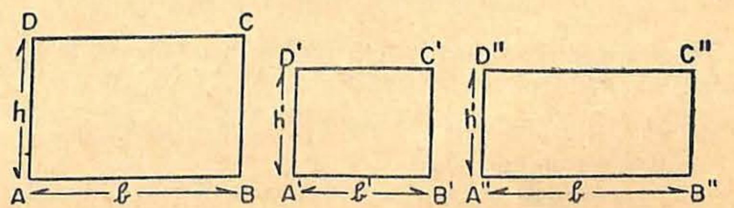


FIG. 59

Demonstração:

1. Construamos um terceiro retângulo $A''B''C''D''$ que tenha a base b do primeiro e a altura h' do segundo. Aplicando o teorema anterior, primeiramente nos retângulos $ABCD$ e $A''B''C''D''$, que têm a *mesma base* (b), obtemos:

$$\frac{\text{área } ABCD}{\text{área } A''B''C''D''} = \frac{h}{h'} \qquad (1)$$

e em seguida nos retângulos $A''B''C''D''$ e $A'B'C'D'$, que têm a *mesma altura* (h), vem:

$$\frac{\text{área } A''B''C''D''}{\text{área } A'\,B'\,C'\,D'} = \frac{b}{b'} \qquad (2)$$

2. Multiplicando, membro a membro, as igualdades (1) e (2), temos:

$$\frac{\text{área } ABCD}{\text{área } A''B''C''D''} \times \frac{\text{área } A''B''C''D''}{\text{área } A'\,B'\,C'\,D'} = \frac{h}{h'} \times \frac{b}{b'}$$

ou, simplificando:

$$\frac{\text{área } ABCD}{\text{área } A'B'C'D'} = \frac{bh}{b'h'}$$

c.q.d.

§2. Área dos polígonos.

RETÂNGULO

4. Área do retângulo. *A área de um retângulo é igual ao produto das medidas de suas dimensões.*

Seja o retângulo $ABCD$ (fig. 60). Temos:

$$H \begin{cases} b \text{ base} \\ h \text{ altura} \\ S \text{ área} \end{cases} \qquad T \{ S = bh$$

Demonstração:

1. Seja U o quadrado de lado u, adotado como unidade de medida. De acôrdo com o *Segundo teorema* (n.º 3), vem:

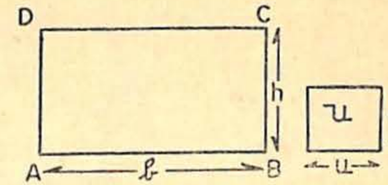


FIG. 60

$$\frac{\text{área } ABCD}{\text{área } U} = \frac{b}{u} \times \frac{h}{u}$$

2. Como o primeiro membro exprime a medida da superfície do retângulo $ABCD$, quando se toma o quadrado U como unidade, e, os fatôres do segundo membro representam as medidas de b e h, em relação a mesma unidade, concluímos que:

$$\text{área } ABCD = b \times h \quad \text{ou} \quad \boxed{S = bh}$$

QUADRADO

5. Área do quadrado. *A área de um quadrado é igual ao quadrado da medida do lado.*

De fato, o quadrado é um retângulo cujas dimensões são iguais. Na fórmula anterior, fazendo $b = h = a$, temos:

$$\boxed{S = a^2}$$

PARALELOGRAMO

6. Área do paralelogramo. *A área de um paralelogramo é igual ao produto da medida de sua base pela de sua altura.*

Seja o paralelogramo $ABCD$ (fig. 61). Temos:

$$H \begin{cases} b - \text{base} \\ h - \text{altura} \\ S - \text{área} \end{cases} \qquad T \{ S = bh$$

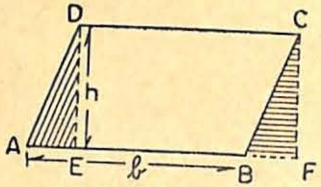


FIG. 61

Demonstração:

1. Prolonguemos AB e tracemos $DE \perp AB$ e $CF \perp AB$. Os triângulos retângulos DEA e CFB são iguais, por terem igual hipotenusa (como lados opostos um paralelogramo) e um cateto igual (segmentos de paralelas compreendidos entre paralelas).

2. Logo, o paralelogramo $ABCD$ é *equivalente* ao retângulo $DEFC$ por serem eqüicompostos (compostos de partes iguais). Quando medidos com a mesma unidade têm, portanto, a *mesma área*, isto é:

$$\text{área } ABCD = \text{área } DEFC$$

ou

$$\text{área } ABCD = EF \, . \, h;$$

e como

$$EF = AB = b,$$

vem:

$$\text{área } ABCD = b \times h \quad \text{ou} \quad \boxed{S = bh}$$

c.q.d.

TRIÂNGULO

7. Área de um triângulo. *A área de um triângulo é igual à metade do produto das medidas de sua base e de sua altura.*

Seja o triângulo ABC (fig. 62). Temos:

$$H \begin{cases} b \text{ base} \\ h \text{ altura} \\ S \text{ área} \end{cases} \qquad T \left\{ S = \frac{bh}{2} \right.$$

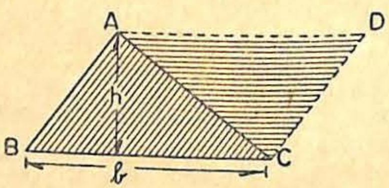


FIG. 62

Demonstração:

1. Por A, tracemos $AD \parallel BC$; e por C, $CD \parallel AB$. Obtemos, assim, o paralelogramo $ABCD$.

2. Êsse paralelogramo é *equivalente* à soma dos dois triângulos ABC e ACD. Como $\triangle ABC = \triangle ACD$ (caso LLL), segue-se que a área do $\triangle ABC$ é igual à metade da área do paralelogramo $ABCD$. Sendo:

$$\text{área do paralelogramo } ABCD = bh$$

temos

$$\text{área do triângulo } ABC = \frac{bh}{2} \quad \text{ou} \quad \boxed{S = \frac{bh}{2}}$$

c.q.d.

Nota. No caso do triângulo ser *retângulo*, um dos catetos pode ser considerado como base e o outro como altura. A área do triângulo retângulo será, portanto, igual ao *semiproduto das medidas dos catetos:*

8. Área do triângulo equilátero em função do lado. A altura h do triângulo equilátero (fig. 6) em função do lado l é dada (Cap. II, n.º 9) pela fórmula: $h = \dfrac{l\sqrt{3}}{2}$. Como a área de um triângulo é dada por

$$S = \frac{bh}{2}$$

vem, substituindo b por l e h pelo valor já conhecido:

$$S = \frac{l \times \dfrac{l\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\dfrac{l^2\sqrt{3}}{2}}{2}$$

donde

$$\boxed{S = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}}$$

9. Área de um triângulo em função dos lados. Seja o triângulo ABC, onde h é altura em relação à base $AC = b$ (fig. 63). O valor de h, em relação à base b, já foi estudado (Cap. *II*, n.º 17) e é expresso, em função dos lados a, b e c, pela fórmula:

$$h = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Sendo a área do $\triangle ABC$ dada por

$$S = \frac{bh}{2}$$

substituindo h pelo valor supra mencionado, temos:

$$S = \frac{b}{2} \times \frac{2}{b} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Simplificando, vem:

$$\boxed{S = \sqrt{p(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}}$$

fórmula atribuída a *Herão*. (*)

NOTA. No caso do $\triangle ABC$ ser equilátero, isto é, quando $a = b = c =$ e $p = \frac{3l}{2}$, podemos obter, a partir da fórmula de Herão, a área do triângulo equilátero em função do lado, já encontrada no parágrafo anterior (nº. 8). De fato, substituindo, obtemos:

$$S = \sqrt{\frac{3l}{2}\left(\frac{3l}{2} - l\right)^3} = \sqrt{\frac{3l}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^3} = \sqrt{\frac{3l^4}{2^4}} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

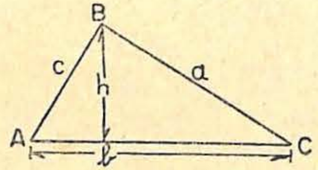


FIG. 63

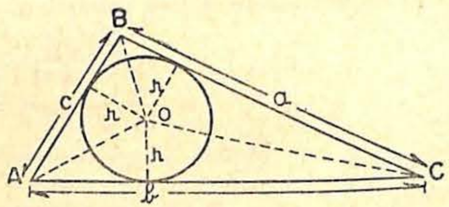


FIG. 64

10. Área de um triângulo em função do raio do círculo inscrito. Seja o $\triangle ABC$ (fig. 64), onde r é o raio do círculo inscrito de centro O. Unindo O aos vértices A, B e C, obteremos os triângulos OBC, OCA e OAB, que têm por bases, respectivamente, a, b e c, todos com a mesma altura

(*) HERÃO DE ALEXANDRIA – viveu no primeiro século da era cristã. Muito conhecido pelo seu tratado de Geometria Prática.

r (em virtude da tangente ser perpendicular ao raio que passa pelo ponto de contacto). Como a área do triângulo ABC é igual à soma das áreas dos triângulos componentes, e

$$\text{área } \triangle OBC = \frac{ar}{2}$$

$$\text{área } \triangle OAC = \frac{br}{2}$$

$$\text{área } \triangle OAB = \frac{cr}{2}$$

a área do triângulo ABC será:

$$\text{área } \triangle ABC = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = \frac{(a+b+c)r}{2}$$

ou, indicando o perímetro $a + b + c$ por $2p$, vem:

$$\boxed{S = pr}$$

que é a fórmula que dá a *área de um triângulo em função do raio do círculo inscrito*.

NOTA. No caso do triângulo ser equilátero, isto é, se $p = \frac{3l}{2}$, temos:

$$S = \frac{3lr}{2}$$

11. Área de um triângulo equilátero em função do raio do círculo circunscrito. Seja o triângulo ABC, inscrito no círculo de centro O e raio R (fig. 65). Temos, pelas fórmulas já conhecidas:

$$l = R\sqrt{3} \quad \text{e} \quad h = \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{3R}{2}$$

Como $\quad S = \frac{l \times h}{2}$

vem

$$S = \frac{R\sqrt{3} \times \frac{3R}{2}}{2} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$$

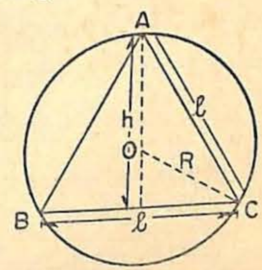


FIG. 65

isto é:

$$\boxed{S = \frac{3}{4} R^2 \sqrt{3}}$$

TRAPÉZIO

12. Área do trapézio. *A área de um trapézio é igual ao produto da semi-soma das medidas de suas bases pela de sua altura.*

Seja o trapézio $ABCD$ (fig. 66). Temos:

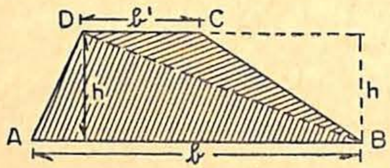


FIG. 66

$$H \begin{cases} AB = b & \text{base maior} \\ CD = b' & \text{base menor} \\ h & \text{altura} \\ S & \text{área} \end{cases}$$

$$T \left\{ S = \frac{(b+b')h}{2} \right.$$

Demonstração:

1. Tracemos a diagonal DB, que decompõe o trapézio nos triângulos ABD e CDB, os quais, em relação às bases b e b', respectivamente, possuem a altura igual a h.
2. Como a área do trapézio é igual à soma das áreas dos triângulos ABD e CDB, temos:

$$\text{área } ABCD = \frac{bh}{2} + \frac{b'h}{2}$$

ou

$$\boxed{S = \frac{(b+b')\,h}{2}}$$

c.q.d.

LOSANGO

13. Area do losango. *A área do losango é igual ao semi-produto das medidas de suas diagonais.*

Seja o losango $ABCD$ (fig. 67). Temos:

$$H \begin{cases} d = DB & \text{diagonal menor} \\ d' = AC & \text{diagonal maior} \\ S & \text{área} \end{cases} \qquad T \left\{ S = \frac{dd'}{2} \right.$$

Demonstração:

1. Traçando pelos vértices paralelas às respectivas diagonais, obtemos o retângulo $MNPQ$, composto de oito triângulos retângulos todos iguais entre si (caso LLL) e dos quais quatro pertencem ao losango.
2. Portanto, a área do losango é a metade da área dêsse retângulo; e como

$$\text{área do retângulo } MNPQ = d \times d'$$

segue-se que:

$$\text{área do losango } ABCD = \frac{d \times d'}{2}$$

ou

$$\boxed{S = \frac{dd'}{2}}$$

c.q.d.

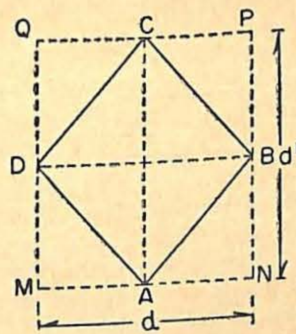


FIG. 67

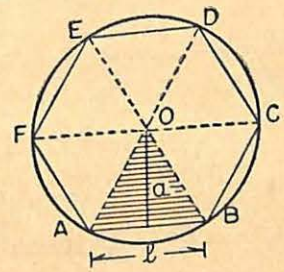


FIG. 68

POLÍGONO REGULAR

14. Área de um polígono regular inscrito: *A área de um polígono regular inscrito é igual ao semi-produto das medidas de seu perímetro e de seu apótema.*

Seja o polígono regular $ABCDEF$ de n lados (na fig. 68, $n = 6$). Temos:

$$H \begin{cases} p \text{ semi-perímetro} \\ a \text{ apótema} \\ S \text{ área} \end{cases} \qquad T \{ S = pa$$

Demonstração:

1. Tracemos os raios OA, OB, OC, ..., que decompõem o polígono em tantos triângulos quantos forem os lados (n). Êsses triângulos são todos iguais (caso LLL) entre si e têm por altura o apótema a do polígono.
2. Como a área total do polígono é igual à soma das áreas dos triângulos que o compõem, temos:

área de um dos triângulos (AOB por ex.) $= \dfrac{l \times a}{2}$

área dos n triângulos................ $= \dfrac{n \times l \times a}{2}$

Sendo $n \times l = 2p$ (perímetro do polígono), vem:

$$S = \frac{2p \times a}{2} = p \times a$$

ou $\boxed{S = pa}$ c.q.d.

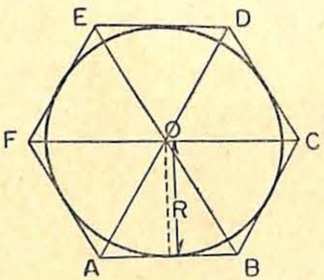


FIG. 69

15. Área de um polígono regular circunscrito: *A área de um polígono regular circunscrito é igual ao semi-produto das medidas de seu perímetro e de seu raio.*

Seja o polígono regular $ABCDEF$ de n lados (na fig. 69, $n = 6$).

Temos:

$$H \begin{cases} p \text{ semi-perímetro} \\ R \text{ raio do círculo inscrito} \\ S \text{ área} \end{cases} \qquad T \{ S = pR$$

Demonstração:

1. Unindo o centro O aos vértices do polígono, obtemos seis triângulos iguais tendo por bases, respectivamente, os lados do polígono, e por altura o raio R do círculo inscrito.

2. Sendo a área do polígono igual à soma das áreas dos triângulos que o compõem, temos:

$$\text{área do polígono } ABCDEF = \frac{AB \times R}{2} + \frac{BC \times R}{2} + \ldots\ldots = \frac{(AB + BC + \ldots)R}{2}$$

Como: $AB + BC + \ldots\ldots = 2p$ (perímetro), vem:

$$S = \frac{2p \times R}{2} \quad \text{ou} \quad \boxed{\boldsymbol{S = pR}}$$

NOTA. A área de um *polígono qualquer* pode ser determinada decompondo-o em triângulos, convenientemente dispostos. Na prática, traçamos uma diagonal qualquer e, pelos outros vértices, conduzimos perpendiculares a essa diagonal, de modo que o polígono resulte dividido em triângulos retângulos e trapézios também retângulos.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1.º) A área de um retângulo é de 17,28 m² e a medida da base é os $\frac{3}{5}$ da medida da diagonal. Determinar a diagonal e as dimensões do retângulo.

Seja x a diagonal (fig. 70). A base será $\frac{3}{5}x$; a altura h, pelo teorema de Pitágoras, é expressa pela relação:

$$h^2 = x^2 - \left(\frac{3}{5}x\right)^2 = x^2 - \frac{9x^2}{25} = \frac{16x^2}{25};$$

donde $\qquad h = \dfrac{4x}{5}$

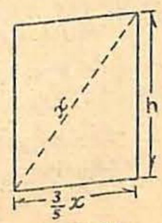


FIG. 70

Como a área do retângulo é 17,28 m², vem a equação:

$$\frac{3x}{5} \times \frac{4x}{5} = 17{,}28$$

ou $$\frac{12x^2}{25} = 17{,}28$$

donde $12x^2 = 432; \qquad x^2 = 36 \therefore x = 6$

Logo: a diagonal mede 6 m e as dimensões do retângulo medem, respectivamente:

$$\text{base} = \frac{3}{5} \times 6\text{m} = \boldsymbol{3{,}60m} \text{ e altura} = \frac{4}{5} \times 6\text{m} = \boldsymbol{4{,}80m}$$

2.º) Dois lados consecutivos de um paralelogramo (fig. 71) medem 4m e 6m, respectivamente, e formam um ângulo de 60º. Calcular a área do paralelogramo.

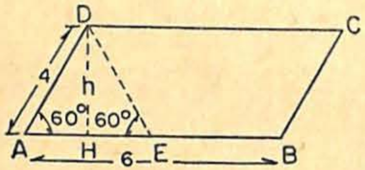


FIG. 71

Temos já a base: $AB =$ 6m. A altura DH será dada pelo valor da altura h do triângulo equilátero ADE, que, como sabemos (Cap. II, n.º 8), vale $\frac{l\sqrt{3}}{2}$.

Logo: $$h = \frac{4 \times \sqrt{3}}{2} = 2 \times 1{,}73 = 3{,}46; \text{ e área será}$$

$$S = 6\text{m} \times 3{,}46\text{m} = \boldsymbol{20{,}76\ m^2}$$

3.º) Calcular a área de um triângulo retângulo isósceles inscrito num círculo de 8dm de raio.

Como a hipotenusa do triângulo proposto é o diâmetro do círculo, (fig. 72) isto é, vale 16 dm, segue-se que, indicando por x o valor do cateto comum, pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$x^2 + x^2 = 16^2$$

ou $$2x^2 = 256 \text{ e } x^2 = 128$$

Sendo a área do triângulo o semi-produto das medidas dos catetos, temos:

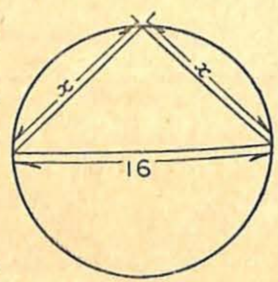


FIG. 72

$$S = \frac{x \cdot x}{2} = \frac{x^2}{2} = \frac{128}{2} = 64$$

Logo, a área do triângulo é de $\boldsymbol{64\ m^2}$.

4.º) Determinar a área de um hexágono regular inscrito num círculo de 8dm de raio.

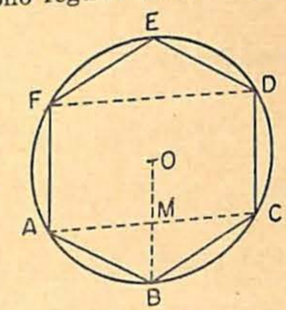


FIG. 73

Temos (fig. 73): $l_6 = R = 8$

$$AC = l_3 = R\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$$

e $$MB = \frac{R}{2}$$

Como:

área do hexágono $ABCDEF$ = área retângular $ACDF$ + 2 vêzes área $\triangle ABC$

vem

$$\text{área do hexágono } ABCDEF = 64\sqrt{3} + 8\sqrt{3} \times 4 =$$
$$= 64\sqrt{3} + 32\sqrt{3} = 96\sqrt{3}$$

Logo. á area do hexágono é igual a $96\sqrt{3}\text{m}^2$ ou $166{,}08\ \text{m}^2$ (aprox. 0,01).

§3. Área das figuras circulares.

16. Área do círculo. *A área do círculo é igual ao produto de π pelo quadrado da medida do raio.*

De fato, considerando a circunferência como o *limite* para o qual tendem os perímetros dos polígonos regulares convexos inscritos cujo número de lados cresce indefinidamente, podemos, também, pensar a *área de um círculo* como o *limite* para o qual tendem as áreas dêsses mesmos polígonos regulares. Dêsse modo, o valor da área de um círculo é deduzido a partir da fórmula:

$$S = pa$$

onde p (semi-perímetro do polígono regular inscrito) tende a $\frac{C}{2}$ (semi-comprimento da circunferência)

e a (apótema do polígono regular inscrito) tende a R (raio da circunferência)

Substituindo êstes valores na fórmula acima, obtemos:

$$S = \frac{C}{2} R$$

e como $C = 2\pi R$ (n.º 60), vem:

$$S = \frac{2\pi R \times R}{2} = \pi R^2$$

ou

$$\boxed{S = \pi R^2}$$

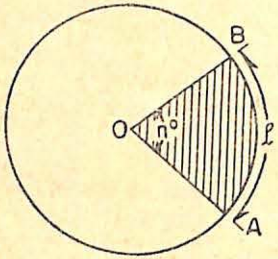


FIG. 74

17. Área do setor circular. *A área de um setor circular é igual ao semi-produto do comprimento do arco pela medida do raio.*

Seja o setor circular $A\hat{O}B$ de n graus (fig. 74). Como a área do círculo (que possui 360°) é dada por πR^2 a área de um setor circular de 1° será dada pela expressão:

$$\frac{\pi R^2}{360}$$

e a de n graus por $\boxed{S = \frac{\pi R^2 n}{360}}$

Lembrando (Cap. II, n.º 61) que $l = \frac{\pi R n}{180}$, podemos escrever a fórmula acima do seguinte modo:

$$S = \frac{\pi R n}{180} \times \frac{R}{2}$$

ou

$$\boxed{S = \frac{lR}{2}}$$

18. Área do segmento circular: *A área de um segmento circular é igual ao semi-produto da medida do raio pela diferença entre os comprimentos do arco e da metade da corda do arco duplo.*

Seja o segmento circular ACB (fig. 75) menor que um semi-círculo. Observamos na fig. 75 que a área do segmento ACB é igual a diferença entre as áreas do setor $OACB$ e a do triângulo isósceles OAB. Logo:

área do segmento circular ACB = área setor circular OAB − área $\triangle OAB$

Sendo

l comprimento do arco AB

h altura do $\triangle OAB$ (em relação a OA) e metade da corda BB' do arco BB', duplo de AB.

S área do segmento circular ACB

temos:

$$S = \frac{Rl}{2} - \frac{Rh}{2} = \frac{R(l-h)}{2}$$

ou

$$\boxed{S = \frac{R\,(l-h)}{2}}$$

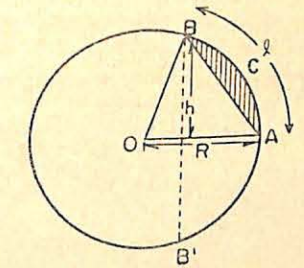


FIG. 75

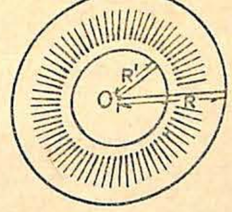


FIG. 76

19. Área da coroa circular. Chama-se *coroa circular* a superfície compreendida entre duas circunferências concêntricas de raios distintos (fig. 76). Como é fácil deduzir, *a área de uma coroa circular é igual à diferença entre as áreas dos dois círculos limitados pelas circunferências que a definem.*

Se R e R' ($R > R'$) são os raios respectivos dessas circunferências, temos:

$$S = \pi R^2 - \pi R'^2$$

$$\boxed{S = \pi(R^2 - R'^2)}$$

EXERCÍCIOS

Áreas do retângulo, quadrado e paralelogramo

1. Calcular a área de um retângulo cujas dimensões são: base = 6,3 m e altura = 3,5 m.
2. A altura de um retângulo é os $\frac{3}{4}$ da base. Esta mede 16 m. Qual a área do retângulo?
3. O perímetro de um retângulo é de 24 m; a base é o dôbro da altura. Calcular a área.
4. A diagonal de um retângulo mede 10 m e um de seus lados tem 8 m. Calcular a área.
5. A diagonal de um retângulo mede 40 m e os lados estão na razão 5 : 3. Determinar a área (aproximação: 0,01).
6. Determinar as dimensões de um retângulo de 72 m² de área. Sabendo que uma das dimensões é metade da outra.
7. Determinar as dimensões de um retângulo de área igual a 28 m², sabendo que essas dimensões diferem de 3 m.
8. A base de um retângulo, inscrito num círculo de 10 dm de raio, mede 16 dm. Determinar a área do retângulo.
9. Calcular a área de um retângulo cujo perímetro vale 28 dm e a diagonal 10 dm.
10. Quais as dimensões de um retângulo de área igual a 48 m², se estas dimensões estão na razão de 1 para 3.
11. Uma sala de aula de 9 m de comprimento por 5 m de largura deve ser pavimentada com ladrilhos quadrados de 15 cm de lado. Quantos ladrilhos são necessários?
12. Quanto mede a frente de um terreno de forma retangular que tem 1 000 m² de área e 50 m de fundo?
13. Um retângulo tem por dimensões 5,5 m e 4,5 m. Diminuindo-se a primeira delas de meio metro, de quanto se precisa aumentar a outra para que o retângulo obtido seja equivalente o primeiro?
14. Quanto deve medir o lado de um quadrado para que a sua área seja igual à de um retângulo de dimensões iguais a 4 m e 16 m?

15. A razão das áreas de dois retângulos é $\frac{1}{3}$. As dimensões do primeiro são 6 m e 2 m. Achar a altura do segundo retângulo, sabendo que a sua base mede 9 m.
16. A altura de um paralelogramo é um têrço do valor de sua base, que mede 12 m. Calcular a área.
17. No paralelogramo $ABCD$, temos: $AB = 12$ cm, $AD = 5$ cm e a projeção do lado AD sôbre AB é igual a 4 cm. Calcular a área.
18. Dois lados consecutivos de um paralelogramo medem 12 m e 9 m. O ângulo compreendido entre êsses lados é de 60°. Calcular a área do paralelogramo.
19. Num paralelogramo, a base mede 18 m e a altura 12 m. Une-se um vértice ao meio dos lados opostos. Calcular a área de cada uma das partes assim determinadas.
20. Os lados de um paralelogramo medem 8 dm e 5 dm e a diagonal maior mede, 11 dm. Calcular a área.
21. Calcular a diagonal de um quadrado de 256 m² de área.
22. Dois lados consecutivos de um paralelogramo medem 12 m e 15 m, e o ângulo por êles compreendido é de 30°. Calcular a área.

Área do triângulo

23. Calcular a área de um triângulo, sabendo que a base mede 12 m e a altura 80 dm.
24. A área de um triângulo é de 400 m². A altura é de 20 m. Calcular a base.
25. Calcular a área de um triângulo isósceles de lados iguais a ~~6~~ 5 m, 8 m base.
26. Determinar a área de um triângulo retângulo cujos catetos medem e ~~6~~ 5 m. 0,4 m e 0,3 m.
27. Determinar as medidas da base e da altura de um triângulo cuja área é 94,40 m², sendo a altura igual aos oito quintos da base.
28. Determinar a área de um triângulo eqüilátero cujo lado mede 6 cm.
29. A base e a altura de um triângulo são iguais. Determinar o seu valor comum, sabendo que a área dêsse triângulo é de 20,48 m².
30. Calcular os catetos de um triângulo retângulo cuja área é de 24 m², sendo a hipotenusa igual a 10 m.
31. A soma dos catetos de um triângulo retângulo é igual a 17 m. A área dêsse triângulo é de 35 m². Calcular os catetos.
32. Calcular a área de um triângulo eqüilátero, inscrito num círculo de raio igual a 10 cm.
33. Calcular a área de um triângulo eqüilátero cuja altura mede 16 cm.

34. Qual a área do triângulo cujos lados medem 4 cm; 6 cm e 8 cm.

35. Os lados de um triângulo são: $a = 12$ m; $b = 8$ m e $c = 6$ m. Traçando, de cada um dos vértices, as paralelas respectivas aos lados opostos, obtém-se um novo triângulo. Calcular a área do triângulo obtido.

36. Calcular a área de um triângulo de perímetro igual a 12 m e que circunscreve um círculo de 3 m de raio.

37. A área de um triângulo eqüilátero inscrito é igual a $12\sqrt{3}\ m^2$ Calcular a área do quadrado inscrito no mesmo círculo.

38. Determinar a área de um triângulo, sabendo que dois de seus lados medem 3,4 m e 5,6 m, e que o ângulo por êles compreendido mede 60°.

39. Num triângulo retângulo, as projeções dos catetos sôbre a hipotenusa medem 4 m e 6 m, respectivamente. Calcular a área do triângulo.

Área do losango

40. Num losango de lado igual a 10 dm, a diagonal maior mede 16 dm. Calcular a área.

41. Determinar a área do losango que tem 3,4 m de lado e cuja diagonal menor mede 2 m.

42. A soma das diagonais de um losango é igual a 8,4 m. Sabe-se que as diagonais são proporcionais, respectivamente, aos números 3 e 4. Calcular a área do losango.

43. A diagonal maior de um losango mede 4 m. Calcular o valor da outra diagonal, sabendo que a área do losango é equivalente à área de um triângulo que possui 3,4 m de base e 2,6 m de altura.

Área do trapézio

44. As bases de um trapézio medem 12 m e 8 m e a altura 5 m. Qual a sua área?

45. Determinar a área de um trapézio isósceles, sabendo que as bases medem 44 dm e 56 dm, respectivamente, e que os lados não paralelos somam 20 dm.

46. Num trapézio isósceles, a soma das medidas das bases é 14 cm e a sua área é igual a 28 cm². Calcular as bases, a altura, os lados não paralelos, sabendo que o perímetro do trapézio é de 24 cm.

47. A área de um trapézio isósceles é igual a 330 m². As medidas das bases, que estão na razão 5 : 6, somadas valem 55 m. Calcular a altura e as bases.

48. Calcular a área de um trapézio retangular cujas bases medem 324 m e 572 m, respectivamente, e a diagonal maior 715 m.

49. As bases de um trapézio valem 80 m e 29 m e os lados 37 m e 20 m, respectivamente. Calcular a área, sabendo que a projeção do maior lado sôbre a maior base é igual a 35 m.

50. Um trapézio isósceles tem por bases 100 dm e 60 dm e por altura 40 dm. Calcular a área dos quatro triângulos determinados pelo ponto de encontro das diagonais.

Polígonos quaisquer

51. As diagonais de um quadrilátero convexo, que medem 10 cm e 15 cm interceptam-se em ângulo reto. Calcular a área dêsse quadrilátero

52. Num quadrilátero $ABCD$, os lados AB, BC e AD são iguais e os ângulos $\hat{A}$ e B medem, respectivamente, 60° e 90°. Calcular: 1.°) as diagonais AC e BD em função de a (medida dos lados iguais); 2.°) os ângulos do triângulo BDC; 3.°) a área do quadrilátero em função de a.

53. Calcular a área dos polígonos constantes das figs. 77-A e 77-B, onde as medidas dos segmentos são expressos em cm.

Polígonos regulares e círculo

54. Calcular a área de um círculo de 30 cm de diâmetro e a do setor circular de 75° pertencentes a êsse círculo (Usar $\pi = 3{,}14$).

55. Determinar a área de uma praça circular, cuja circunferência mede 124 m.

56. Qual o comprimento da circunferência que limita um círculo de área igual a 50,26 m².

57. Qual o raio de um setor circular de 45,40 m² de área, se o ângulo correspondente mede 36°.

58. Determinar a área do quadrado inscrito num círculo de raio igual a 5 cm.

59. Calcular a área de um triângulo eqüilátero inscrito em um círculo de 28 mm de diâmetro.

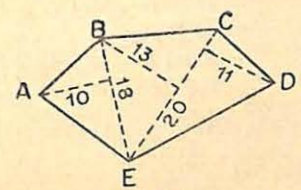


FIG. 77-A

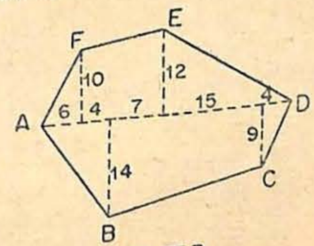


FIG. 77-B

60. Determinar a área de um hexágono regular inscrito num círculo de raio igual a 4 dm.

61. Qual a área do octógono regular inscrito no círculo de 6,4 dm de diâmetro?

62. Num círculo de 10 m de raio, calcular a área de um setor circular cujo arco mede 5 m.

63. Detetermіnar a área do segmento circular limitado pelo arco de 60° e pela corda que o subentende num círculo de 4 m de diâmetro.

64. Dois círculos concêntrico têm raios que medem 6 m e 4 m, respectivamente. Calcular a área da coroa por êles determinada.

65. A área de uma coroa determinada por dois círculos concêntricos é de 28,26 m². A diferença dos raios dêsses dois círculos é 1 m. Quanto mede cada um dos raios?

66. Calcular o raio de um círculo, sabendo que êste raio, aumentando de 10 mm, faz com que a área do círculo aumente de 1 m².

67. Calcular a área de um hexágono regular, inscrito num círculo de 12 cm de diâmetro.

68. Calcular a área de um segmento circular de 120° num círculo de 9 m de raio.

69. Calcular a área de um setor circular de 60°, inscrito num círculo de 6 m de diâmetro.

70. Qual a relação entre a área de um triângulo eqüilátero e a de um hexágono regular, inscritos num mesmo círculo?

RESPOSTAS:

1. 22,05 m²
2. 192 m²
3. 32 m²
4. 48 m²
5. 705,1396 m²
6. 6 m e 12 m
7. 7 m e 4 m
8. 192 dm²
9. 48 dm²
10. 4 m e 12 m
11. 2 000
12. 20 m
13. 0,45 m
14. 8 m
15. 4 m
16. 48 m²
17. 36 cm²
18. 93,42 m²
19. 54 m², 108 m², 54 m²,
20. 36,64 dm²
21. 22,56 m
22. 90 m²
23. 48 m²
24. 40 m
25. 17,88 m²
26. 0,06 m²
27. 10,86 m e 17,376 m
28. 15,57 cm²
29. 6,4 m
30. 6 m e 8 m
31. 10 m e 7 m
32. 129,75 cm²

33. 147,60 cm²
34. 11,61 cm²
35. 85,32 m²
36. 18 m²
37. 32 m²
38. 8,234 m²
39. 24,45 m²
40. 96 dm²
41. 6,4 m²
42. 8,64 m²
43. 2,27 m
44. 50 m²
45. 400 dm²
46. 4 cm; 10 cm; 4 cm; 5 cm
47. 12 m, 25 m e 30 m
48. 192 192 m²
49. 654 cm²
50. 1 250 dm², 450 dm² e 750 dm²
51. 75 cm²
52. 1.º) $AC = a\sqrt{2}$; $BD = a$
    2.º) $\hat{D} = C = 75°$; $D\hat{B}C = 30°$
    3.º) $\frac{a^2}{4}(1 + \sqrt{3})$
53. 330 cm² e 232 cm²
54. 706,50 cm² e 147,18 cm²
55. 1 223,58 m²
56. 25,13 m
57. 12 m
58. 50 cm²
59. 84,77 mm²
60. 41,52 dm²
61. 28,95 m²
62. 25 m²
63. 36 dm²
64. 62,80 m²
65. 4 m e 5 m
66. 15,91 m
67. 93,42 cm²
68. 49,75 m²
69. 4,71 m²
70. 1 : 2

§ 4. Relações métricas entre as áreas das figuras planas. Construções de figuras equivalentes.

RELAÇÕES MÉTRICAS

20. Em triângulos semelhantes. ***Teorema:*** *As áreas de dois triângulos semelhantes estão entre si como os quadrados das medidas de dois lados homólogos quaisquer.*

Sejam os triângulos semelhantes ABC e $A'B'C'$ (fig. 78).

Temos:

$$H \begin{cases} \triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \\ S \quad \text{área do } \triangle ABC \\ S' \quad \text{área do } \triangle A'B'C' \end{cases} \qquad T \left\{ \frac{S}{S'} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2} \right.$$

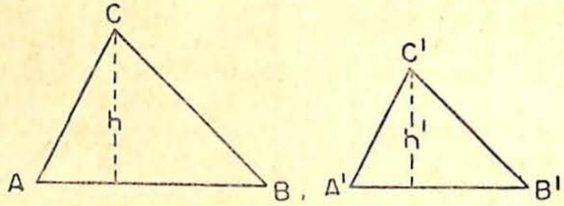


FIG. 78

Demonstração:

1. Tracemos as alturas h e h', dos triângulos ABC e $A'B'C'$, respectivamente; as suas áreas serão:

$$S = \frac{AB \times h}{2} \quad \text{e} \quad S' = \frac{A'B' \times h'}{2}$$

2. Dividindo, membro a membro, as igualdades acima, vem:

$$\frac{S}{S'} = \frac{AB \times h}{A'B' \times h'}$$

e como os triângulos são semelhantes vale, entre elementos homólogos, a relação:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{h}{h'}$$

que, substituida na anterior, permite escrever:

$$\frac{S}{S'} = \frac{AB}{A'B'} \times \frac{AB}{A'B'}$$

ou

$$\boxed{\frac{S}{S'} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}}$$

c.q.d.

21. Em polígonos semelhantes. ***Teorema:*** *As áreas de dois polígonos semelhantes estão entre si como os quadrados das medidas de dois lados homólogos quaisquer.*

Sejam os polígonos $ABCDE$ e $A'B'C'D'E'$ (fig. 79). Temos:

$$H \begin{cases} \text{pol. } ABCDE \sim \text{pol. } A'B'C'D'E' \\ S \text{ área do pol. } ABCDE \\ S' \text{ área do pol. } A'B'C'D'E' \end{cases} \qquad T \left\{ \frac{S}{S'} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2} \right.$$

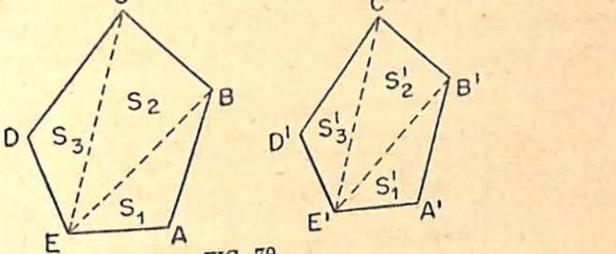


FIG. 79

Demonstração:

1. Traçadas as diagonais de dois vértices homólogos, E e E' por exemplo, os polígonos ficam decompostos nos triângulos S_1, S_2, S_3, e S'_1, S'_2, S'_3, ordenadamente semelhantes, (*) para os quais vale o teorema anterior, isto é:

$$\frac{S_1}{S'_1} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}, \quad \frac{S_2}{S'_2} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{B'C'}^2}, \quad \frac{S_3}{S'_3} = \frac{\overline{CD}^2}{\overline{C'D'}^2}$$

2. Pelo fato dos triângulos serem semelhantes, podemos escrever:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'}$$

ou também

$$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{B'C'}^2} = \frac{\overline{CD}^2}{\overline{C'D'}^2} = \frac{S_1}{S'_1} = \frac{S_2}{S'_2} = \frac{S_3}{S'_3}$$

donde, aplicando a propriedade conhecida das proporções (a de composição), obtemos:

$$\frac{S_1 + S_2 + S_3}{S'_1 + S'_2 + S'_3} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{B'C'}^2} = \frac{\overline{CD}^2}{\overline{C'D'}^2}$$

Como $S = S_1 + S_2 + S_3$ e $S' = S'_1 + S'_2 + S'_3$ vem, finalmente:

$$\boxed{\frac{S}{S'} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}}$$

c.q.d.

(*) Ver *Matemática*, Curso Ginasial, 3.ª Série, pág. 262, do mesmo autor.

22. Teorema de Pitágoras (com relação a figuras equivalentes): *O quadrado construído sôbre a hipotenusa de um triângulo retângulo é equivalente à soma dos quadrados construídos sôbre os catetos.*

Seja o triângulo retângulo ABC (fig. 80), onde $\hat{A}$ é reto. Temos:

$$H \begin{cases} BCDE & \text{quadrado de lado } a \\ ACFG & \text{quadrado de lado } b \\ ABMN & \text{quadrado de lado } c \end{cases}$$

$$T \{ \text{ área } BCDE = \text{área } ABMN + \text{área } ACFG$$

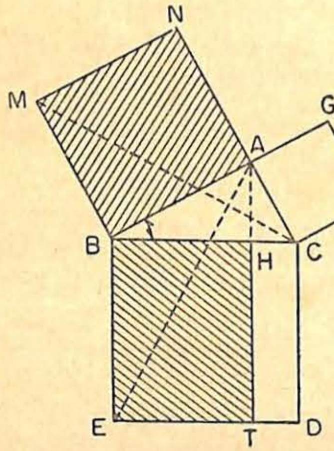


FIG. 80

Demonstração:

1. Do vértice A tracemos a altura AH, relativa à base BC, e, prolonguemo-la até o ponto T sôbre ED. BC, e, prolonguemo-la até o ponto T sôbre ED. O quadrado $BCDE$ ficou, assim, decomposto nos retângulos $BHTE$ e $HCDT$. Devemos demonstrar que o retângulo $BHTE$ é *equivalente* ao quadrado $ABMN$ e que o retângulo $HCDT$ é *equivalente* ao quadrado $ACFG$.

2. Unamos, para isso, A com E e M com C. Os triângulos obtidos ABE e MBC são iguais (caso LAL), pois:

$AB = MB$ (lados do quadrado $ABMN$)
$A\hat{B}E = M\hat{B}C$ (ambos valem $90°$ mais $\hat{B}$)
$\hat{B}C = BE$ (lados do quadrado $BCD\hat{E}$)

Logo, êsses triângulos têm a *mesma área*, isto é
área $\triangle ABE$ = área $\triangle MBC$

ou

$$\frac{BE \times BH}{2} = \frac{MB \times AB}{2}, \quad \text{sendo} \begin{cases} BH \text{ altura do } \triangle ABE \text{ em relação a } BE \\ AB \text{ altura do } \triangle MBC \text{ em relação a } MB \end{cases}$$

donde $BE \times BH = MB \times AB$

Como o primeiro membro desta igualdade representa a área do retângulo $BHTE$ e o segundo a área do quadrado $ABMN$, temos:

área retângulo $BHTE$ = área quadrado $ABMN$ (1)

3. Da mesma forma provaríamos que
área retângulo $HCDT$ = área quadrado $ACFG$ (2)
e somando (1) com (2), obtemos, finalmente:
área retângulo $BHTE$ + área retângulo $HCDT$ = área quadrado $ABMN$ + área quadrado $ACFG$

ou $\boxed{\text{área } \mathbf{BCDE} = \text{área } \mathbf{ABMN} + \text{área } \mathbf{ACFG}}$ c.q.d.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇAO

1.º) Dado um triângulo ABC (fig. 81) de altura $AH = 12$ cm, determinar a que distância do vértice A se deve traçar a paralela DE à base BC, de modo que o triângulo dado fique dividido em duas partes equivalentes.

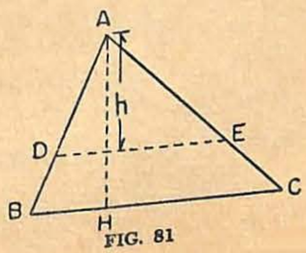


FIG. 81

Seja h, altura do triângulo ADE, a distância procurada. Como o $\triangle ADE$ deve ser equivalente ao trapézio $BCED$, concluimos que o $\triangle ADE$ equivale à metade do $\triangle ABC$, e, portanto:

$$\frac{\text{área } \triangle ADE}{\text{área } \triangle ABC} = \frac{1}{2} \qquad (1)$$

Sendo semelhantes êstes triângulos, *as suas áreas estão entre si como os quadrados de dois lados homólogos* (n.º 21). Logo:

$$\frac{\text{área } \triangle ADE}{\text{área } \triangle ABC} = \frac{h^2}{AH^2} = \frac{h^2}{144} \qquad (2)$$

De (1) e (2), temos:

$$\frac{h^2}{144} = \frac{1}{2}$$

donde

$$h^2 = 72$$

e

$$h = 8{,}48$$

Resposta: DE deve ser traçada 8,48 m de A.

2.º) Um círculo de raio igual a 10 dm (fig. 82) deve ser dividido por uma circunferência, de mesmo centro, em duas partes equivalentes. Determinar o raio da circunferência.

Indicando por R o raio do círculo dado, por r o raio da circunferência procurada, e por S e S_1 as respectivas áreas, devemos ter a seguinte relação métrica:

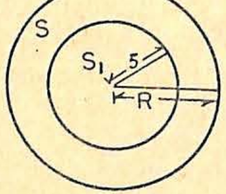


FIG. 82

$$S_1 = \frac{S}{2}$$

ou

$$\pi r^2 = \frac{\pi R^2}{2}$$

$$r^2 = \frac{R^2}{2} \quad \therefore \quad r = \sqrt{\frac{R^2}{2}}$$

Portanto: $r = \sqrt{\dfrac{100}{2}} = \sqrt{50} = 7{,}07$

RESPOSTA: O raio da circunferência procurada mede 7,07 m.

CONSTRUÇÕES DE FIGURAS EQUIVALENTES

23. Problema I: *Transformar um triângulo em um retângulo equivalente.*

Seja ABC o triângulo dado (fig. 83). Construindo o retângulo $BMND$ de base $BM = \dfrac{BC}{2}$ e de altura $NM = h$ altura dó triângulo), resulta que estas duas figuras são *equivalentes*. De fato:

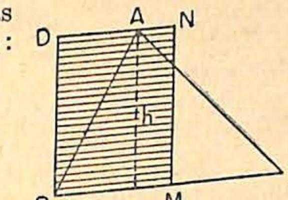


FIG. 83

$$\text{área do } \triangle ABC = \frac{BC \times h}{2}$$

área do retângulo

$$BMND = BM \times h = \frac{BC \times h}{2}$$

isto é, ás áreas do $\triangle ABC$ e do retângulo $BMND$ são iguais.

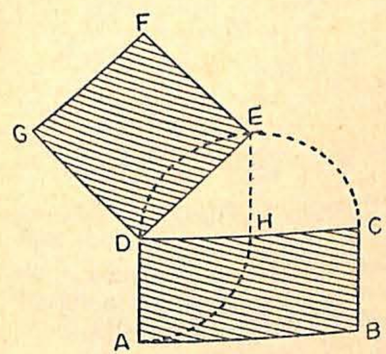


FIG. 84

24. Problema II: *Transformar um retângulo em um quadrado equivalente.* Seja $ABCD$ (fig. 84) o retângulo dado. Com o lado maior CD, como diâmetro, construamos a semi-circunferência CED. Sôbre DC tomemos $DH = DA$, e por H tracemos $HE \perp DC$. Unindo D com E, obtemos o lado do quadrado $DEFG$, *equivalente* ao retângulo $ABCD$. De fato:

área retangular

$$ABCD = DC \times DA = DC \times DH$$

$$\text{área quadrada } DEFG = \overline{DE}^2 = DC \times DH \text{ (Cap. II, n.º 3)}$$

Logo, o retângulo $ABCD$ e o quadrado $DEFG$ são *equivalentes.*

25. Problema III: *Transformar um polígono em outro equivalente que tenha menos um lado.*

Seja o polígono $ABCDEF$, de 6 lados (fig. 85). Transformemos êsse polígono n'outro de 5 lados, que lhe seja *equivalente.* Para isso, consideremos três vértices consecutivos quaisquer, A, B e C por exemplo, e usamos os dois não consecutivos A e C.

Pelo vértice remanescente B, tracemos a paralela *a* AC, que encontrará o prolongamento de CD em D' com A, obteremos o polígono $AD'DEF$, de 5 lados, *equivalente* ao polígono $ABCDEF$. Com efeito, êsses polígonos são compostos de partes equivalentes, a saber: a parte $ACDEF$, comum aos dois polígonos, e, os dois triângulos ABC e $AD'C$, que têm a mesma base (AC) e a mesma altura (h).

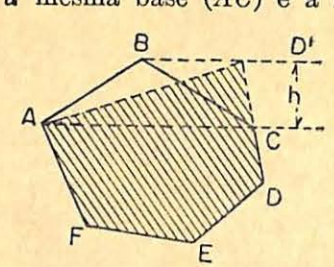


FIG. 85

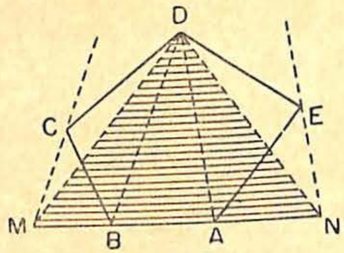


FIG. 86

26. Problema IV: *Transformar um polígono em um triângulo equivalente.*

Seja o polígono $ABCDE$ (fig. 86). Aplicando, sucessivamente, o processo usado no problema anterior, transformamos, primeiramente, o polígono $ABCDE$ no polígono equivalente $AMDE$, com um lado menos; e, a seguir, o polígono $AMDE$ no triângulo MND, que é a solução procurada.

OBSERVAÇÃO: Com êsses problemas, notamos a possibilidade de *transformar um polígono dado num quadrado equivalente,* pois, o polígono seria transformado num triângulo equivalente; êste, por sua vez, seria transformado num retângulo eqüivalente, o qual, finalmente, se transformaria nüm quadrado eqüivalente.

27. Problema V: *Construir um círculo equivalente à soma outros de dois círculos, de raios R_1 e R_2, respectivamente.*

Representando o raio do círculo pedido por R, (fig. 87) devemos ter, pelo enunciado:

$$\pi R^2 = \pi R_1^2 + \pi R_2^2$$

ou

$$R^2 = R_1^2 + R_2^2$$

isto é, o raio do círculo procurado será a hipotenusa do triângulo retângulo cujos catetos são os raios dos dois círculos dados.

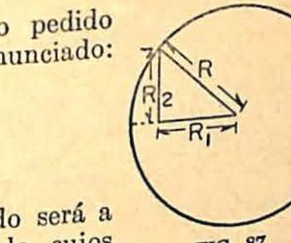


FIG. 87

EXERCÍCIOS

Relações métricas

1. A altura de um triângulo ABC é igual a 10 dm. A que distância do vértice A se deve traçar a paralela à base BC, de modo que o triângulo dado fique dividido em duas partes eqüivalentes?
2. Um triângulo tem por base 20 m e a altura mede 15 m. Calcular quanto mede o segmento de reta, paralelo à base, que divide o triângulo em duas partes eqüivalentes.
3. Um triângulo tem 48 m de base e 16 m de altura. Traçando uma paralela à base, obtemos novo triângulo de mesmo vértice, que tem 54 m² de área. A que distância do vértice se deve traçar tal paralela?
4. No problema anterior, a que distância do vértice se deve traçar outra paralela à base, a fim de determinar outro triângulo, eqüivalente aos $\frac{9}{16}$ do triângulo primitivo?
5. Um trapézio tem as bases medindo 12 m e 7 m, e a altura 6 m. Calcular o comprimento do segmento paralelo às bases que divide o trapézio dado em duas partes eqüivalentes.
6. Determinar a razão das áreas de um hexágono regular inscrito e um hexágono regular circunscrito ao mesmo círculo.
7. Idem para os quadrados inscrito e circunscrito.
8. Idem para os triângulos inscrito e circunscrito.
9. Unem-se os meios D. E, F dos lados de um triângulo ABC. Calcular a razão entre as áreas dos triângulos DEF e ABC.
10. Dado um quadrilátero $ABCD$, comparar a sua área com a do que se obtém quando se traçam pelos vértices do primeiro paralelas às suas diagonais.

Construções geométricas

11. Dado um hexágono regular de lado a, construir um triângulo eqüilátero que lhe seja eqüivalente. (Nota: o l_3 é média geométrica entre 2a e 3a).
12. Dado um hexágono regular de lado a, construir um quadrado que lhe seja equivalente. (Nota: o l_4 é média geométrica entre $\frac{3a}{2}$ e a $\sqrt{3}$)
13. Transformar um paralelogramo $ABCD$ em um triângulo eqüivalente. (Nota: prolonga-se a base AB de um comprimento $BE = AB$; todos os triângulos de base AE e cujo vértice M se encontra sôbre CD, ou sôbre o seu prolongamento, são equivalentes ao paralelogramo dado).
14. Dividir um triângulo em três partes eqüivalentes por meio de semi-retas que partam de um mesmo vértice. (Nota: basta dividir a base em três partes iguais e unir os pontos de divisão ao vértice oposto).
15. Dividir um triângulo em três partes proporcionais aos comprimentos dados m, n, p, por meio de semi-retas que partam de um mesmo vértice. (Nota: basta dividir a base em três segmentos proporcionais aos comprimentos m, n, p e unir os pontos de divisão ao vértice oposto).

Respostas:

1. 7,05 dm	6. $\frac{3}{4}$
2. 14,142 m	7. $\frac{1}{2}$
3. 6 m	8. $\frac{1}{4}$
4. 12 m	9. $\frac{1}{4}$
5. 9,823 m	10. $\frac{1}{2}$

APÊNDICE

I — Sistemas simples do segundo grau.

1. **Grau de um sistema de equações algébricas racionais inteiras.** O grau de um sistema de equações é dado pelo *produto* dos graus das diversas equações que o compõem. Assim, por exemplo, o sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x - 6y = 13 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$$

é do *segundo grau*, pois, a primeira equação é do segundo grau (2), a segunda é do primeiro grau(1) e portanto o produto (2×1) é do *segundo grau.*

Um sistema de n equações $(n \geqslant 2)$ com n incógnitas é do *segundo grau* quando uma, e sòmente uma, das equações é do segundo grau e as outras $n - 1$ do primeiro. Exemplo: O sistema

$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 - 3x = y - 3x + 2yz + 1 & \text{(grau 2)} \\ 5x + z = y - 2 & \text{(grau 1)} \\ x - 3y = z + 1 & \text{(grau 1)} \end{cases}$$

é do *segundo grau.*

2. **Resolução de sistemas simples do segundo grau.** A resolução dêsses sistemas, via de regra, é feita usando-se o *método da substituição*, já estudado na 2.ª série ginasial. Resolvamos, para esclarecer, o sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x - 6y = 13 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$$

Tirando o valor de x na segunda equação: $x = \dfrac{1 + 2y}{3}$ e substituindo na primeira, vem

$$\left(\frac{1+2y}{3}\right)^2 + y^2 + 4\left(\frac{1+2y}{3}\right) - 6y = 13$$

ou $$\frac{1+4y+4y^2}{9} + y^2 + \frac{4+8y}{3} - 6y = 13$$

$$13y^2 - 26y - 104 = 0 \qquad (:13)$$

$$y^2 - 2y - 8 = 0$$

onde: $$y = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} y' = -2 \\ y'' = 4 \end{cases}$$

Substituindo os valores de y na equação $x = \dfrac{1+2y}{3}$, obtemos:

para $y = -2$, $\quad x = \dfrac{1-4}{3} = \dfrac{-3}{3} = -1$

para $y = 4$, $\quad x = \dfrac{1+8}{3} = \dfrac{9}{3} = 3$

As soluções do sistema dado são:

$$1.^a \begin{cases} x_1 = -1 \\ y_1 = -2 \end{cases} \qquad 2.^a \begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = 4 \end{cases}$$

Segundo exemplo; Resolver o sistema do *segundo grau* (*)

$$\begin{cases} 7x + 5y = 41 & \text{(grau 1)} \\ xy = 12 & \text{(grau 2)} \end{cases}$$

Da primeira equação vem:

$$x = \frac{41-7x}{5}$$

Substituindo na segunda $x \,.\, y = 12$ vem:

$$x\left(\frac{41-7x}{5}\right) = 12$$

ou $$41x - 7x^2 = 60$$

(*) Exemplo estudado no Instituto "Peixoto Gomide", Itapetininga — Estado de São Paulo (Aula do prof. João C. Salém).

e $$7x^2 - 41x + 60 = 0 \qquad \text{onde} \qquad \begin{cases} x' = 3 \\ x'' = \dfrac{20}{7} \end{cases}$$

Daí as soluções:

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = 4 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x_2 = \dfrac{20}{7} \\ y_2 = \dfrac{21}{5} \end{cases}$$

Outros exemplos: Para sistemas *especiais* do segundo grau, isto é, para àqueles onde é possível aplicar-se resultados já conhecidos, a resolução é bastante rápida. Vejamos alguns

1.º) Resolver o sistema do *segundo grau* $\begin{cases} x + y = 7 \\ x \,.\, y = 12 \end{cases}$

Como já foi visto a solução dêsse sistema poderia ser obtida pelo método da substituição. Lembrando, porém (pág. 44) que conhecidas a *soma* e o *produto* de duas quantidades é sempre possível determiná-las como *raízes* de uma equação do segundo grau, podemos resolver o sistema proposto determinando as raízes da equação do segundo grau em z (incógnita auxiliar):

$$z^2 - 7z + 12 = 0 \qquad \text{(Soma: 7; Produto: 12)}$$

Donde as raízes

$\begin{cases} z' = 4 \\ z'' = 3 \end{cases}$ e portanto as soluções: $\begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = 3 \end{cases}$ e $\begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = 4 \end{cases}$

NOTA: Mesmo no exemplo já estudado

$$\begin{cases} 7x + 5y = 41 \\ x \,.\, y = 12 \end{cases}$$

podemos, com simples artifício, resolvê-lo pelo processo anterior. De fato o sistema em causa é *equivalente* ao sistema:

$$\begin{cases} 7x + 5y = 41 \\ 7x \,.\, 5y = 35.12 \end{cases} \qquad \text{ou} \qquad \begin{cases} 7x + 5y = 41 \\ 7x \,.\, 5y = 420 \end{cases}$$

Logo, a equação resultante do segundo grau, em z, cuja soma das raízes ($z' = 7x$; $z'' = 5y$) é 41 e cujo produto é 420, será:

$$z^2 - 41z + 420 = 0$$

Resolvendo, temos:

$$\begin{cases} z' = 21 \text{ ou } 7x = 21 \therefore x_1 = 3 \\ z'' = 20 \text{ ou } 5y = 20 \therefore y_1 = 4 \end{cases}$$

ou senão:

$$\begin{cases} 7x = 20 \therefore x_2 = \dfrac{20}{7} \\ \\ 5y = 21 \therefore y_2 = \dfrac{21}{5} \end{cases}$$

soluções, aliás, já encontradas.

2.º) Resolver o sistema do *segundo grau*

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ x^2 + y^2 = 34 \end{cases}$$

Eleva-se ambos os membros da primeira equação ao quadrado:

$$x^2 + y^2 + 2xy = 64$$

e substitui-se na equação resultante $x^2 + y^2$ por 34 (da 2.ª equação), obtendo a equação:

$$34 + 2xy = 64$$

ou

$$2xy = 30 \therefore xy = 15$$

Basta agora resolver o sistema equivalente:

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ xy = 15 \end{cases}$$

de solução já conhecida:

$$z^2 - 8z + 15 = 0, \quad \text{onde} \quad \begin{cases} z' = 5 \\ z'' = 3 \end{cases}$$

e portanto

$$\begin{cases} x_1 = 5 \\ y_1 = 3 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = 5 \end{cases}$$

3. **Sistemas redutíveis ao segundo grau.** Seja o sistema do *quarto grau:*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 29 & \text{(grau 2)} \\ x.y = 10 & \text{(grau 2)} \end{cases}$$

Já temos o *produto* $xy = 10$. A *soma* é obtida multiplicando-se a segunda equação por 2 (a fim de aparecer o têrmo "duas vêzes o primeiro pelo segundo") e somando, membro a mebro, com a primeira. Em partes, temos:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \\ 2xy = 20 \end{cases} \quad \text{e somando: } x^2 + 2xy + y^2 = 49$$

$$\text{ou} \quad (x + y)^2 = 49$$

$$\therefore \quad x + y = \pm 7$$

Encontramos assim os dois sistemas do segundo grau (caso anterior):

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ xy = 10 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} x + y = -7 \\ xy = 10 \end{cases}$$

cujas respectivas soluções são:

$$\begin{cases} x_1 = 5 \\ y_1 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 2 \\ y_2 = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = -5 \\ x_3 = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = -2 \\ y_3 = -5 \end{cases}$$

Segundo exemplo: Resolver o sistema do *quarto grau:*

$$\begin{cases} 4x^2 + 9y^2 = 180 \\ xy = 12 \end{cases}$$

Somando, membro a membro, depois de multiplicar a segunda equação por 12, obtemos:

$$4x^2 + 12xy + 9y^2 = 324$$

ou

$$(2x + 3y)^2 = 324$$

e, portanto:

$$2x + 3y = \pm 18$$

Resulta daí os sistemas do segundo grau:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 18 \\ xy = 12 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} 2x + 3y = -18 \\ xy = 12 \end{cases}$$

ou os seus equivalentes:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 18 \\ 2x \,.\, 3y = 72 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} 2x + 3y = -18 \\ 2x \,.\, 3y = 72 \end{cases}$$

que são resolvidos por processo já conhecido, mediante as equações:

$$z^2 - 18z + 72 = 0 \quad \text{e} \quad t^2 + 18t + 72 = 0$$

As raízes dessas equações são as soluções (quatro) do sistema dado; são elas:

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 6 \\ y_2 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 = -3 \\ y_3 = -4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_4 = -6 \\ y_4 = -2 \end{cases}$$

EXERCÍCIOS

Resolver os seguintes sistemas de equações:

1. $\begin{cases} x^2 - 2y = 5 \\ y - 2x = 20 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x + 4y = 39 \\ xy = 30 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x - 2y = 11 \\ xy = 10 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ xy = 7 \end{cases}$

5. $\begin{cases} xy = 3 \\ 3x = 5 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x + 3y = 18 \\ xy = 12 \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{4}{3} \\ xy = 3 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 34 \\ x + y = 8 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ \dfrac{x - y}{x + y} = \dfrac{1}{7} \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ x^2 - 3xy + 2y^2 - 3y = -7 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \\ x + y = 7 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 5x^2 + 4y^2 = 41 \\ 2x + 3y = 11 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x + y = 17 \\ xy = 42 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x + y = -8 \\ xy = 12 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x + y = \dfrac{5}{6} \\ 3xy = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

16. $\begin{cases} x + y = a \\ xy = b \end{cases}$

17. $\begin{cases} x - y = 5 \\ xy = 84 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 2x + y = a \\ x^2 + 2y = b \end{cases}$

19. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 40 \\ xy = 12 \end{cases}$ (4.º grau)

20. $\begin{cases} 4x^2 + 9y^2 = 180 \\ xy = 12 \end{cases}$ (4.º grau)

Respostas:

1. -5 e 10; 9 e 38
2. 8 e $15/4$; 5 e 6
3. 5 e 2; $-4/3$ e $-15/2$
4. 7 e 1; -2 e $-7/2$
5. 1 e 3; -1 e -3
6. 6 e 2; 3 e 4
7. 2 e $3/2$; -2 e $-3/2$
8. 5 e 3; 3 e 5
9. 4 e 3; -4 e -3
10. 9 e 11; 3 e 2
11. 5 e 2; 2 e 5
12. 1 e 3; $115/61$ e $147/61$
13. 14 e 3; 3 e 14
14. -6 e -2; -2 e -6
15. $\frac{1}{2}$ e $1/3$; $1/3$ e $\frac{1}{2}$
16. $\dfrac{a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$ $(a^2 - 4b \geqslant 0)$
17. 12 e 7; -7 e -12
18. $2 \pm \sqrt{4 - 2a + b}$
    $a - 4 \pm 2\sqrt{4 - 2a + b}$
    $(4 - 2a + b \geqslant 0)$
19. 6 e 2; 2 e 6; $-2, -6$; -6 e -2
20. 6 e 2; 3 e 4; -6 e -2; -3 e -4

II — Representações gráficas. Sistemas de coordenadas cartesianas (Na reta e no plano).

1. **Coordenadas cartesianas na reta.** Consideremos uma reta r (fig. 1) e sôbre ela um ponto 0, ao qual chamaremos origem.

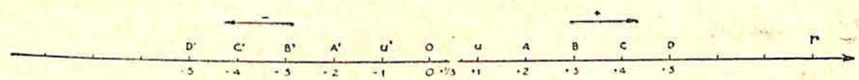


Fig. 1

Escolhido como *positivo* o sentido que vai da *esquerda* para a *direita* e como unidade de comprimento o segmento OU (que pode ser o *cm*, por exemplo) podemos dar a ***posição*** de qualquer ponto da reta r: A, B, C, ... A', B', . . . , efetuando a *medida algébrica* dos segmentos OA, OB, OC, . . . OA', OB', . . . ,

Temos assim:

$\overline{OA} = +2$ e dizemos que ao *ponto A* corresponde o *número* $+2$
$\overline{OB} = +3$ „ „ „ „ *ponto B* „ „ *número* $+3$
.
.
.

$\overline{OA'} = -2$ e dizemos que ao *ponto A'* corresponde o *número* -2
$\overline{OB'} = -3$ „ „ „ „ *ponto B'* „ „ *número* -3

.　　　.　　　.

É evidente que se um segmento OX tiver por medida algébrica um número menor que a unidade considerada, ao *ponto X* corresponderá um *número fracionário relativo* $\left(+\frac{1}{3}\right.$ na fig. 1). À *origem* corresponde o número 0 (zero).

Indicação:

$$A(+2)\ ;\ A'(-2)\ ;\ X\left(+\frac{1}{3}\right)\ ;\ U'(+1)$$
$$B(+3)\ ;\ B'(-3)\ ;\ O(O)\ ;\ U'(-1)$$

Os *números reais* (*) *relativos* obtidos em correspondência aos pontos de uma reta *orientada* (pelo fato de ter sido escolhido um sentido positivo de percurso) são denominados ***coordenadas abscissas*** ou ***abscissas*** dêsses pontos.

Convém notar que a correspondência é verdadeira partindo agora dos números, isto é, a cada número real relativo corresponde um e um só ponto de uma reta orientada. Por essa razão a correspondência entre oos *números reais relativos* e os *pontos* de uma reta orientada é denominada ***biunívoca***.

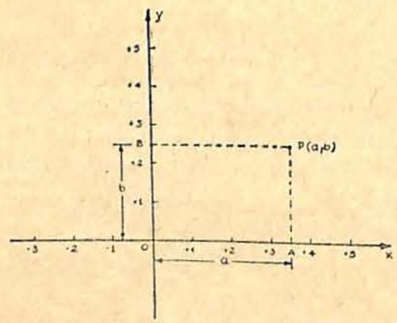


FIG. 2

2. Coordenadas cartesianas no plano. A *posição* de um ponto sôbre um plano (ou numa superfície qualquer) pode ser dada de diversas maneiras, por intermédio dos *sistemas de coordenadas*. Já é

(*) Números reais (relativos) $\begin{cases} \text{racionais} \begin{cases} \text{inteiros} \\ \text{fracionários} \end{cases} \\ \text{irracionais} \end{cases}$

conhecida de todos os estudantes a representação de um ponto na superfície do globo terrestre mediante os *dois números: latitude* e *longitude*, que constituem as *coordenadas geográficas* dêsse ponto.

Para os pontos de um plano usamos o sistema de *coordenadas cartesianas*(*) que é constituido por duas retas orientadas, também chamada *eixos*, que se interceptam em um ponto O, denominado *origem* do sistema (fig. 2).

De preferência os eixos são tomados perpendiculares entre si e nesse caso o sistema diz-se *cartesiano ortogonal*. O eixo Ox é denominado *eixo das abscissas* e o eixo Oy, das *ordenadas*.

Qualquer ponto P do plano xOy, determinado por êsses eixos, é representado por *dois números a* e *b*, que indicam, respectivamente, as medidas algêbricas dos segmentos OA e OB (geralmente em relação a mesma unidade), quando se traçam por P as respectivas paralelas aos eixos (fig. 2). O primeiro número (a) é a *abscissa* e o segundo (b) é a *ordenada* do ponto P. Ambos dizem-se *coordenadas cartesianas* do do ponto P, e a correspondência entre os *pontos de um plano* e um *par ordenado de números reais relativos* (onde o primeiro representa a abscissa e o segundo a ordenada) também é *biunívoca*. Indicação: $P(a, b)$.

Os eixos coordenados dividem o plano em quatro *quadrantes* (fig. 3) tais que:

I Qte.	abscissa positiva; ordenada positiva	II Qte.	abscissa negativa; ordenada positiva
III Qte.	abscissa negativa; ordenada negativa	IV Qte.	abscissa positiva; ordenada negativa

Os pontos de *ordenadas nulas* estão sôbre o eixo das abscissas (Ox) e os de *abscissas nulas* sôbre o eixo das ordenadas (Oy). A origem tem as coordenadas nulas: $O(0,0)$. Na fig. 3 temos representados os pontos:

(*) O nome *cartesiana* é em homenagem ao grande matemático e filósofo francês do século XVII: René Descartes (Cartesius, em Latim).

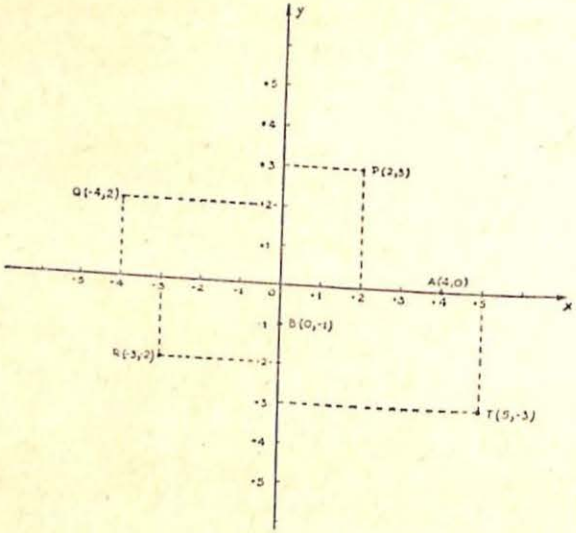


Fig. 3

$P(+2, +3) \begin{cases} \text{absc: } +2 \\ \text{orden.: } +3 \end{cases}$ $\quad Q(-4, +2) \begin{cases} \text{absc.: } -4 \\ \text{orden.: } +2 \end{cases}$

$R(-3, -2) \begin{cases} \text{absc.: } -3 \\ \text{orden.: } -2 \end{cases}$ $\quad T(+5, -3) \begin{cases} \text{absc.: } +5 \\ \text{orden.: } -3 \end{cases}$

$A(+4, 0) \begin{cases} \text{absc.: } +4 \\ \text{orden.: } 0 \end{cases}$ $\quad B(0, -1) \begin{cases} \text{absc.: } 0 \\ \text{orden.: } -1 \end{cases}$

3. **Noções de geometria analítica.** Com os matemáticos Descartes e Fermat, foi iniciada nos meados do século XVII o *estudo das figuras geométricas* mediante *relações algébricas*. Êsse estudo — que representou um marco notável no desenvolvimento da Matemática — é hoje em dia empregado com abundância em todos os ramos do saber. Sabemos da Geometria (*) que *dois pontos bastam para determinar uma reta*. Nestas condições, os pontos $A(-2{,}2)$ e $B(3{,}4)$ determinam uma reta (r na fig. 4) e portanto quem "vê" os pontos $A(-2{,}2)$ e $B(3{,}1)$ estará "vendo" a reta r.

(*) Ver Geometria Dedutiva, 3.ª Série — pág. 87, do mesmo autor.

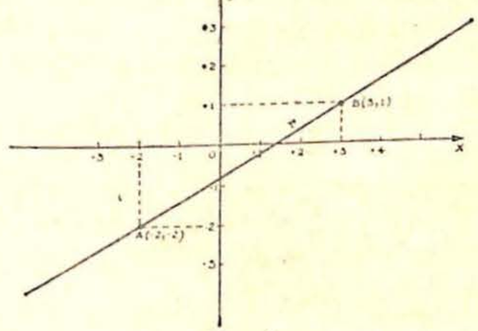


Fig. 4

4. **Representações gráfica das funções.** Já vimos no estudo da variação do trinômio do segundo grau (pág. 50) que tôda *correspondência* entre valores de duas variáveis x e y define uma *função*.

Da mesma forma a equação do primeiro grau

$$y + 2x = 6$$

define a *função* $\quad y = 6 - 2x$

que variará a medida que atribuirmos valores diversos a x. Para se ter uma idéia da variação numérica entre x (também chamada *variável independente*) e y (*variável dependente*) podemos organizar uma tabela em que se correspondam êsses valores. Assim, para

$x = 0$, temos $y = 6 - 2(0) = 6$ e o ponto correspondente será $A(0{,}6)$
$x = 1$, temos $y = 6 - 2(1) = 4$ e o ponto correspondente será $B(1{,}4)$
$x = 2$, temos $y = 6 - 2(2) = 2$ e o ponto correspondente será $C(2{,}2)$
. . .
. . .
.

Marcando, num sistema de coordenadas cartesianas, os pontos correspondentes aos valores de cada par (x, y) podemos ter uma idéia da variação da função $y = 6 - 2x$, por *via geo-*

métrica, unindo os pontos obtidos. Obteremos, então, a *imagem geométrica* ou *gráfico* da função:

$y = 6 - 2x$ ou equação $y + 2x = 6$

que é uma *reta* (fig. 5)

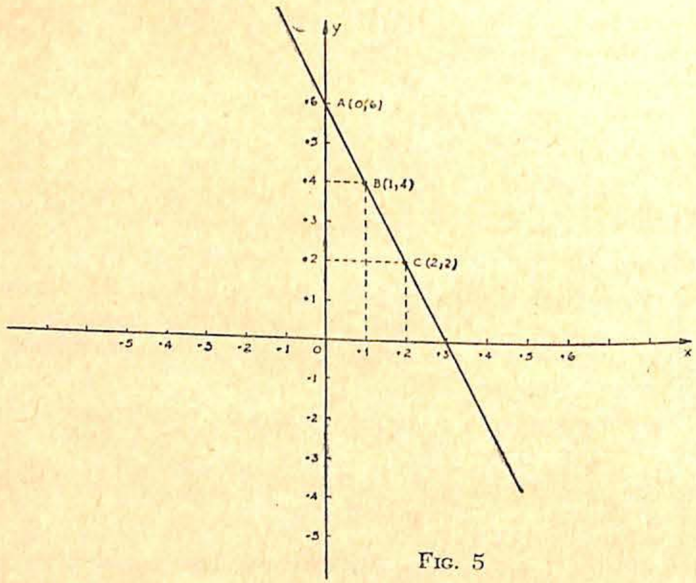


FIG. 5

A tabela das variações algébrica e geométrica da função acima será:

x	y	Ponto
0	6	A(0,6)
1	4	$B(1,4)$
2	2	$C(2,2)$
.	.	.
.	.	.

NOTA: Deixaremos para ocasião mais oportuna a demonstração dêste fato: *a representação gráfica de uma equação do primeiro grau com duas incógnitas é uma* ***reta*** (no plano).

Outros exemplos:

1.º) Traçar o gráfico da equação: $y = 3x - 6$

Como se trata de uma *reta*, bastam dois pontos para determiná-la. Escolhemos então dois pontos fáceis de serem representados, isto é, aqueles em que a reta intercepta os eixos coordenados e que se caracterizam por terem uma das coordenadas nulas. Assim, fazendo-se na equação $x = 0$, temos: $y = 3(0) - 6 = -6$ e fazendo-se $y = 0$, obtemos: $0 = 3x - 6$ ou $x = 2$.

A tabela e o gráfico (fig. 6) correspondentes são:

x	y	Ponto
0	-6	$A(0,-6)$
2	0	$B(2,0)$

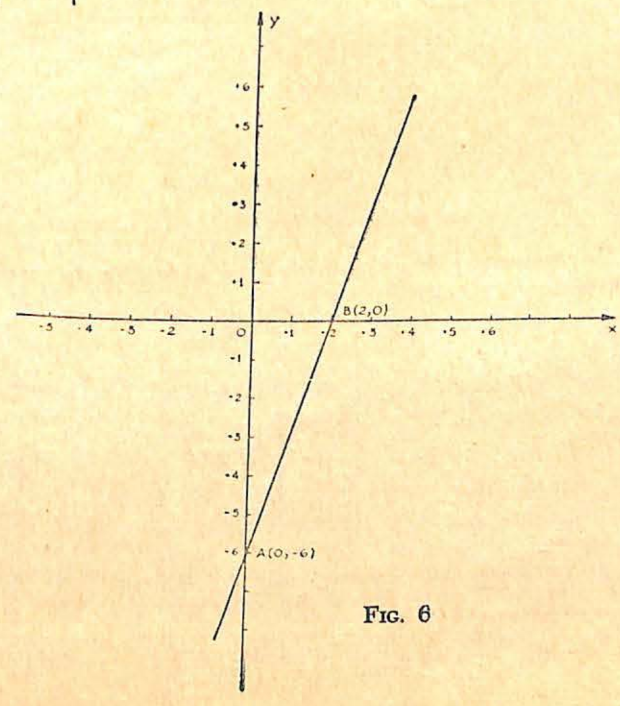


FIG. 6

2.º) Traçar o gráfico da equação: $3x + 2y = 4$

A tabela e o gráfico (fig. 7) correspondentes são:

x	y	Ponto
0	2	$A(0,2)$
$1\frac{1}{3}$	0	$B\left(1\frac{1}{3}, 0\right)$

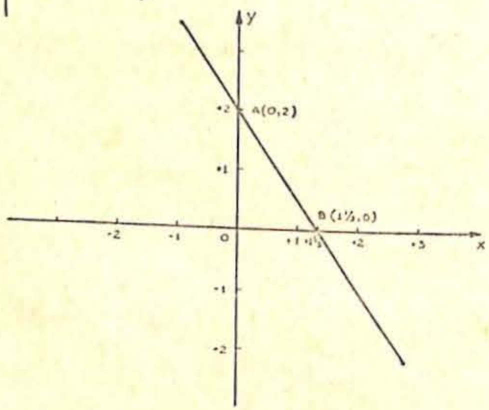


Fig. 7

5. Representação gráfica de um sistema de equações. Seja o sistema:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ x - 3y = -7 \end{cases}$$

Indiquemos *as retas* representativas (fig. 8) dêsse sistema, respectivamente por r e s. Temos:

$3x + 2y = 12$ (reta r)

x	y	Ponto
0	6	$A(0,6)$
4	0	$B(4,0)$

$x - 3y = -7$ (reta s)

x	y	Ponto
0	$2\frac{1}{3}$	$C\left(0, 2\frac{1}{3}\right)$
-7	0	$D(-7,0)$

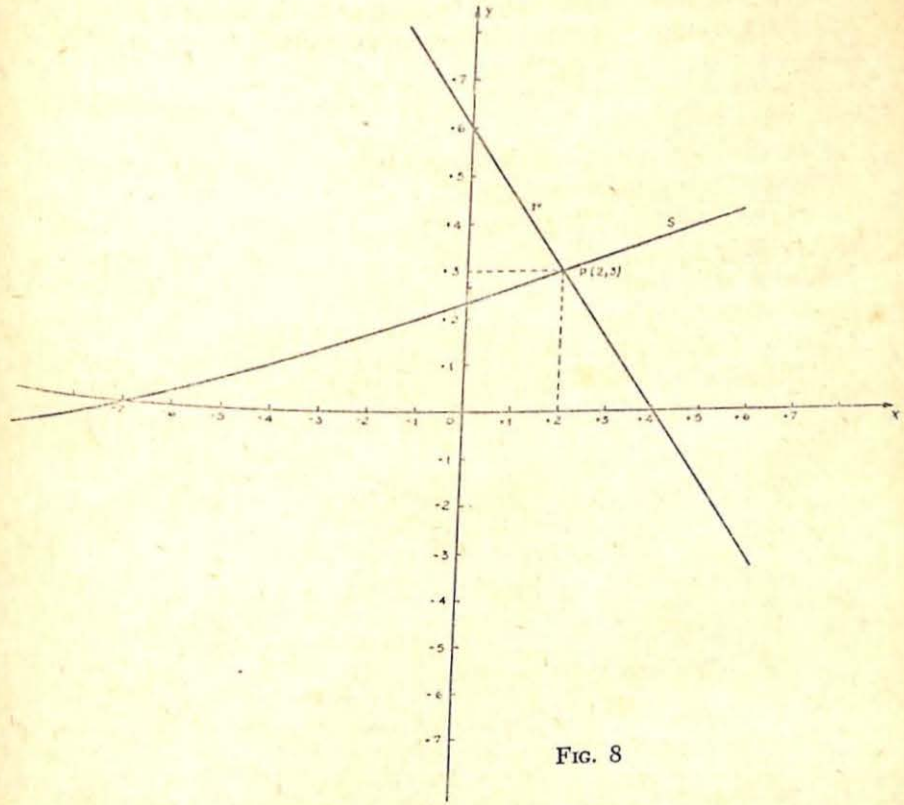


Fig. 8

Observamos agora que as retas se encontram num *ponto P* de coordenadas (2, 3). Êsse ponto, por pertencer a ambas as retas, têm as suas coordenadas 2 e 3 satisfazendo algèbricamente as equações que compõem o sistema acima.

Ora, resolvendo algèbricamente o sistema, por qualquer dos processos já conhecidos (*) encontraremos justamente para solução: $x = 2$, $y = 3$ que constituem as coordenadas do ponto P de encontro das retas r e s.

(*) Ver *Matemática*, Curso ginasial, 2.ª Série, pág. 154. do mesmo autor.

Encontramos assim mais um resultado da Geometria Analítica: quem "vê" *duas equações do primeiro grau a duas incógnitas*, poderá estar "vendo" um *ponto*. É essa, aliás, a a razão de se chamar de *linear* a um sistema do primeiro grau com duas incógnitas.

A *discussão* algébrica feita para os sistemas se traduzirá gràficamente no seguinte (fig. 9):

Sistema *possível* e *determinado:* as retas se *interceptam;* as coordenadas do ponto de encontro representa, a solução algébrica (fig. 9–a).

Sistema *impossível*: as retas são *paralelas;* não existe o ponto de encontro (fig. 9–b).

Sistema *indeterminado:* as retas são *coincidentes;* existem infinitos pontos comuns e o sistema admite infinitas soluções (fig. 9–c).

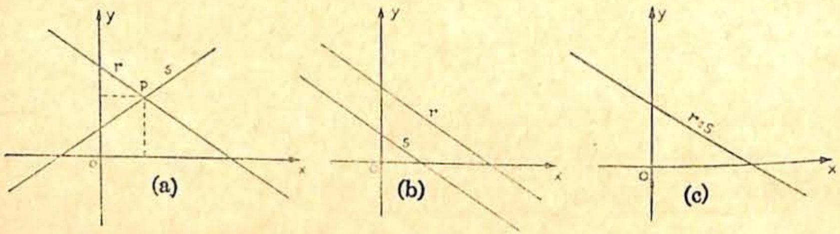


Fig. 9

6. **Representação gráfica das funções do segundo grau. Parábola.** Consideremos o trinômio.

$$y = ax^2 + bx + c \quad (1)$$

que é uma função racional inteira do segundo grau e cuja *variação* algébrica já foi estudada (pág. 53). Construindo os pontos (x, y), tais que as suas coordenadas satisfaçam a relação (1), obteremos uma série de pontos que permitirão ter uma idéia da variação geométrica do trinômio.

Assim, unindo-se os pontos assinalados num sistema de referência cartesiano, encontraremos o *gráfico* de uma função

do segundo grau. A curva obtida, que é de *segunda ordem*, denomina-se ***parábola*** (fig. 10) e o seu estudo completo será feito no curso colegial. Exemplos:

1.º) Representar o gráfico (*parábola*) da função (trinômio do segundo grau):

$$y = x^2 - x - 2 \qquad \text{(fig. 10)}$$

x	y	ponto
0	-2	$A(0,-2)$
1	-2	$B(1,-2)$
2	0	$C(2,0)$
3	4	$D(3,4)$
⋮	⋮	⋮
-1	0	$A'(-1,0)$
-2	4	$B'(-2,4)$
-3	10	$C'(-3,10)$
⋮	⋮	⋮

2.º) Representar o gráfico da função:

$y = x^2 - 2x$ (fig. 11)

x	y	Ponto
0	0	0(0,0)
1	-1	$(1,-1)$
2	0	$(2,0)$
3	3	$(3,3)$
4	8	$(4,8)$
⋮	⋮	⋮
-1	3	$(-1,3)$
-2	8	$(-2,8)$

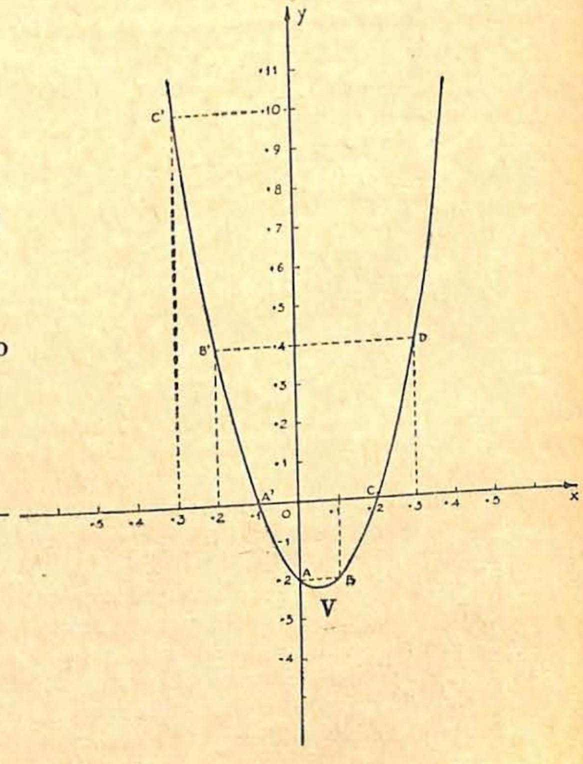


Fig. 10

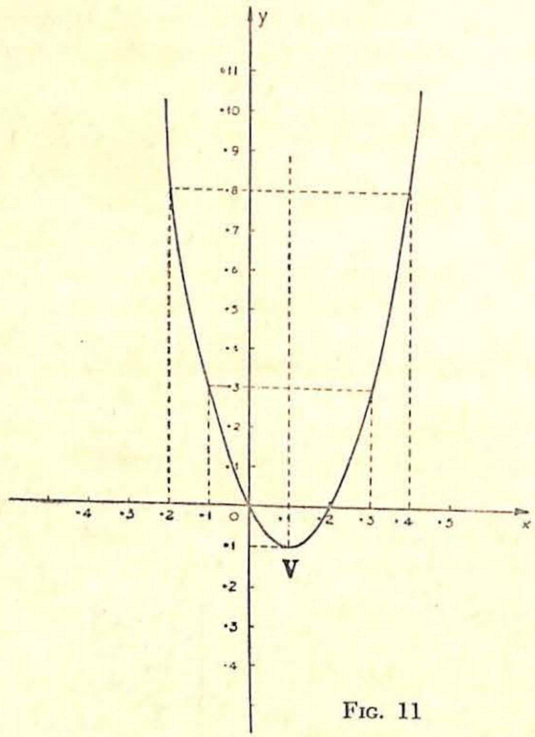


Fig. 11

Com a introdução do gráfico de uma função do segundo grau já é possível dar uma interpretação geométrica ao *valor máximo* ou ao *valor mínimo* de um trinômio do segundo grau.

O ponto em que a função atinge o máximo ou mínimo é denominado ***vértice*** da parábola (V nas figs. 11, 12,) que reparte a curva em duas partes denominadas *ramos* da parábola. A reta que passa pelo vértice V e é paralela ao eixo das ordenadas é chamada *eixo* da parábola (*).

Os pontos, quando existem, em que a parábola intercepta o eixo dos x, têm as suas abscissas iguais as *raízes* do trinômio e as ordenadas nulas.

(*) O eixo da parábola é um *eixo de simetria.*

O vértice da parábola tem as suas coordenadas expressas pelos valores algébricos que determinam o *máximo* ou o *mínimo* (pág. 60) do trinômio. Logo:

$$V(x,\ y) \quad \text{onde} \begin{cases} x = \dfrac{-b}{2a} \\[2ex] y = \dfrac{-\Delta}{4a} \end{cases}$$

Nos exemplos seguintes iremos descrever o comportamento da parábola em relação aos eixos, bem como ressaltar o vértice V que é o ponto máximo ou mínimo da curva. As posições dos vértices para ambos os casos são, respectivamente (fig. 12):

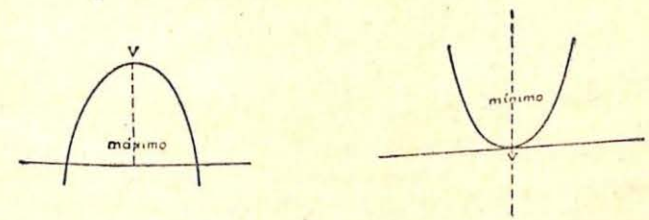


Fig. 12

Exemplos:

1.º) Estudar a *variação* do trinômio: $y = x^2 - 6x + 5$, interpretando *gràficamente* os resultados.

Convém lembrar que o sinal do coeficiente a é decisivo para se saber o se trinômio $y = ax^2 + bx + c$ atingirá um máximo valor ou mínimo; se $a > 0$ o trinômio atinge um *mínimo* e se $a < 0$, atingirá um máximo (pág. 63).

No exemplo em causa, temos:

$a = +1$, portanto a curva atinge um *mínimo;*

$\Delta = 36 - 20 = 16 > 0$, logo admite *raízes reais e distintas* e a *parábola* (fig. 13), interceptará o eixo das abscissas nos pontos correspondentes às raízes do trinômio e que são:

$$x' = 1 \quad \text{e} \quad x'' = 5$$

O vértice V será:

$$V \begin{cases} x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{6}{2} = 3 \\ y = \dfrac{-\Delta}{4a} = \dfrac{-16}{4} = -4 \end{cases} \quad \text{ou } V(3, -4)$$

significando êsse fato que para $x = 3$ o trinômio y assume o *mínimo valor* (-4) entre todos os valores que pode ter.

x	y	Ponto	
0	5	(0,5)	(auxiliar)
1	0	(1,0)	(raiz)
2	-3	(2, -3)	
3	-4	(3, -4)	(vértice)
4	-3	(4, -3)	
5	0	(5, 0)	(raiz)
6	5	6, 5)	

NOTA: O ponto que se obtém fazendo $x = 0$, isto é, (0,5) representa o ponto em que a parábola intercepta o eixo das ordenadas (ponto auxiliar).

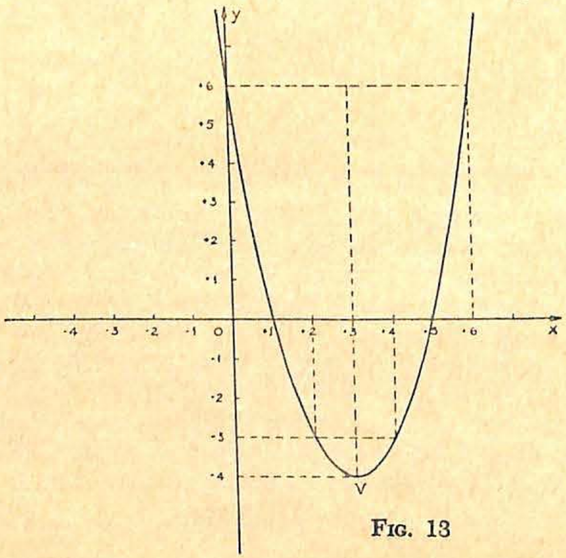


FIG. 13

2.°) O mesmo *estudo* para o trinômio: $y = -2x^2 + 8x - 8$

$a = -2$, logo a parábola passa por um *máximo;*

$\Delta = 64 - 64 = 0$, portanto as raízes são *reais e coincidentes* e a curva (fig. 14) "toca" o eixo das abscissas no ponto correspondente a raiz dupla: $x' = x'' = 2$, isto é, a parábola *tangencia* o eixo dos x.

Para o vértice, temos:

$$V \begin{cases} x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-8}{-4} = 2 \\ y = \dfrac{-\Delta}{4a} = \dfrac{0}{-8} = 0 \end{cases} \quad \text{ou } V(2,0)$$

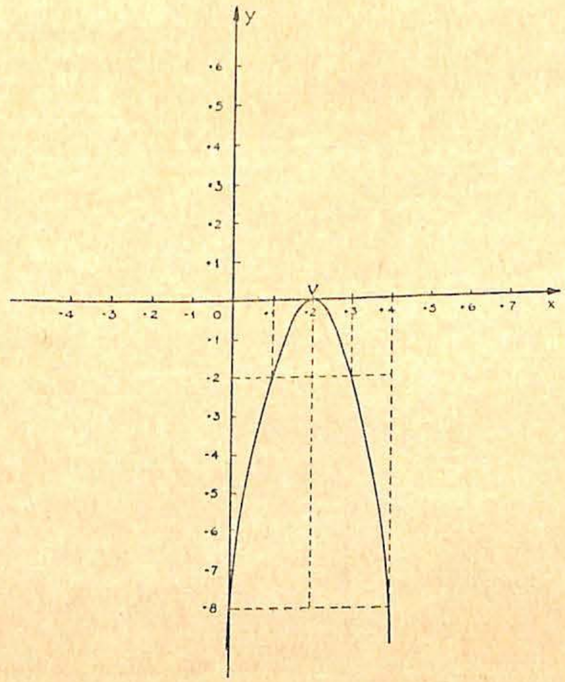


FIG. 14

O *máximo* valor que o trinômio pode assumir é 0 (zero) e que é obtido para $x = 2$; para qualquer outro valor de x o trinômio y é negativo.

x	y	Ponto	
0	-8	$(0, -8)$	(auxiliar)
1	-2	$(1, -2)$	
2	0	$(2,0)$	(raiz dupla e vértice)
3	-2	$(3, -2)$	
4	-8	$(4, -8)$	

3.°) Idem para o trinômio: $y = 3x^2 - 2x + 1$

$a = +3 \;\therefore\;$ *mínimo*

$\Delta = 4 - 12 = -8 < 0$, logo *não há raízes reais* e a parábola (fig. 15) *não intercepta* o eixo das abscissas, situando-se no semi-plano *acima* dêsse eixo.

$$\text{Vértice}\begin{cases} x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3} \\[2ex] y = \dfrac{-\Delta}{4a} = \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3} \end{cases} \quad \text{ou } V\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

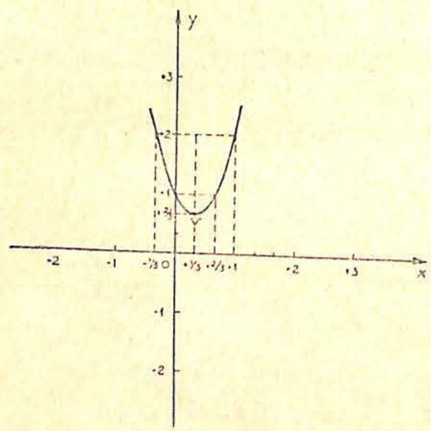


FIG. 15

x	y	Ponto	
0	1	$(0,1)$	(auxiliar)
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{2}$	$\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$	(vértice)
$\frac{2}{3}$	1	$\left(\frac{2}{3}, 1\right)$	
1	2	$(1,2)$	
2	9	$(2, 9)$	
$-\frac{1}{3}$	$+2$	$\left(-\frac{1}{3}, 2\right)$	

4.°) Idem para o trinômio: $y = -3x^2$ (fig. 16)

$a = -3 \;\therefore\;$ *máximo*

$\Delta = 0 \;\therefore\; x' = x'' = 0$

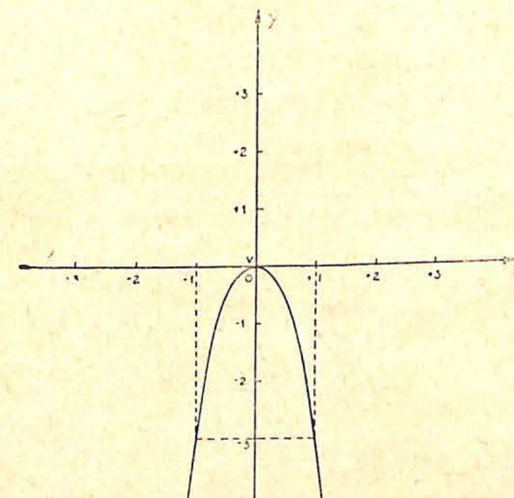


FIG. 16

$$\text{vértice: } V\begin{cases} x = \dfrac{0}{-6} = 0 \\[2mm] y = \dfrac{0}{-12} = 0 \end{cases}$$

x	y	Ponto	
0	0	(0,0)	(vértice)
± 1	-3	$\begin{cases}(1, -3)\\(-1, -3)\end{cases}$	
± 2	-12	$\begin{cases}(2, -12)\\(-2, -12)\end{cases}$	

RESUMO: A ***parábola***, *gráfico do trinômio do segundo, grau tem a sua* ***posição***, *em relação aos eixos coordenados, caracterizada pelo par;*

$$a, \ \Delta$$

do trinômio $y = ax^2 + bx + c$.

Assim:

para $a < 0$, o *trinômio passa por um* ***máximo***, e, conforme o sinal do discriminante Δ teremos em correspondência as seguintes *parábolas* (figs. 17).

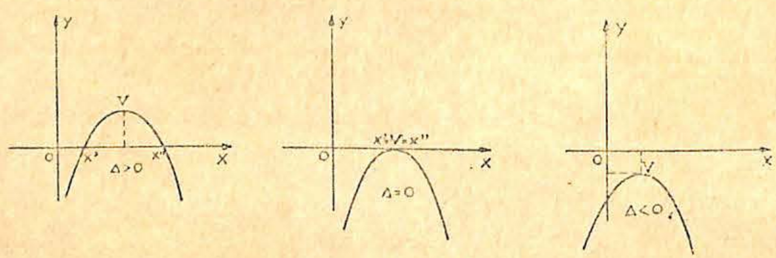


FIG. 17

para $a > 0$, o *trinômio passa por* ***mínimo***, e as *parábolas* correspondentes, uma para cada sinal de Δ serão (figs. 18):

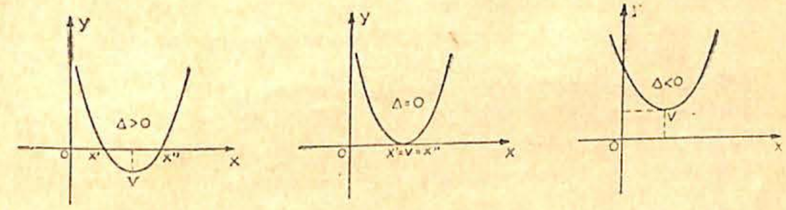


FIG. 18

EXERCÍCIOS

1. Construir o gráfico (reta) das seguintes funções do primeiro grau:

1.ª) $y = 4 - 2x$ 3.ª) $y = 3x$ 5.ª) $2y = -6$ 7.ª) $3y + 2x = 12$

2.ª) $y = x + 3$ 4.ª) $3x = 12$ 6.ª) $y = x + 1$ 8.ª) $y = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{3}$

2. Resolver gràficamente (sistema de duas retas) os seguintes sistemas:

1.º) $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 4x - 3y = 6 \end{cases}$ 5.º) $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ 2x - 4y = 4 \end{cases}$

2.º) $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 3y - 2x = 6 \end{cases}$ 6.º) $\begin{cases} y - x = 1 \\ 3y - 3x = 6 \end{cases}$

3.º) $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x + y = 3 \end{cases}$ 7.º) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 2 \end{cases}$

4.º) $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$ 8.º) $\begin{cases} y = x - 3 \\ 3y = 3x - 9 \end{cases}$

3. Construir o gráfico (parábola) das seguintes funções do segundo grau:

1.ª) $y = x^2 - 8x + 12$
2.ª) $y = -x^2 + 2x$
3.ª) $y = 2x^2 - 8x + 8$
4.ª) $y = -5x^2 + 2x - 3$
5.ª) $y = 2x^2 - 8$
6.ª) $y = -\dfrac{2}{5}x^2$

7.ª) $y = x^2 - 7x + 6$
8.ª) $y = x^2 + 8x + 15$
9.ª) $y = -2x^2 + 12x - 18$
10.ª) $y = x^2 + 2x - 8$
11.ª) $y = x^2 - 2x + 2$
12.ª) $y = x^2 + 4x$

RESPOSTAS:

1. 1.ª) Pontos de intersecção com os eixos: (0,4) e (2,0)
   2.ª) Pontos de intersecção com os eixos: (0,3) e (– 3,0)
   3.ª) Reta passando pela origem (é necessário mais um ponto para determiná-la).
   4.ª) Reta paralela ao eixo dos y pelo ponto (4,0)
   5.ª) Reta paralela ao eixo dos x pelo ponto (0, – 3)
   6.ª) Pontos de intercessão com os eixos: (0,1) e (– 1,0)
   7.ª) Pontos de intersecção com os eixos: (0,4) e (6,0)
   8.ª) Pontos de intersecção com os eixos: $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ e $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$
2. 1.º) Retas que se interceptam no ponto (3,2)
   2.º) Retas que se interceptam no ponto (– 1,2)
   3.º) Retas que se interceptam no ponto (– 1,4)
   4.º) Retas que se interceptam no ponto (4,2)
   5.º) Retas paralelas.
   6.º) Retas paralelas.
   7.º) Retas coincidentes.
   8.º) Retas coincidentes.
3. 1.ª) V $V(4, -4)$, mínimo (a parábola intercepta os eixos dos x)
   2.ª) $V(1, 1)$, máximo (a parábola intercepta o eixos dos x)
   3.ª) $V(2,0)$, mínimo (a parábola tangencia o eixo dos x)
   4.ª) $V\left(\frac{1}{5}, 2\frac{4}{5}\right)$, máximo (a parábola se situa no semi-plano abaixo do eixo dos x)
   5.ª) $V(0, -8)$, mínimo (a parábola intercepta o eixo dos x)
   6.ª) $V(0,0)$, máximo (a parábola tangencia o eixo dos x na origem)
   7.ª) $V\left(3\frac{1}{2}, -6\frac{1}{4}\right)$, mínimo (a parábola intercepta o eixo dos x)
   8.ª) $V(-4, 1)$, mínimo (a parábola intercepta o eixo dos x)
   9.ª) $V(3, 0)$, máximo (a parábola tangencia o eixo dos x)
   10.ª) $V(-1, -9)$, mínimo (a parábola intercepta o eixo dos x)
   11.ª) $V(1, 1)$, mínimo (a parábola se situa no semi-plano acima do eixo dos x)
   12.ª) $V(-2, -4)$, mínimo (a parábola intercepta o eixo dos x)

HOMENS DE AMANHÃ!

Explicação e Agradecimento

Há mais de trinta e cinco anos que nossa política editorial vem sendo a de produzir livros de alto valor cultural, ou de grande utilidade prática, a preços ao alcance do poder aquisitivo médio do povo brasileiro.

Recentemente, contudo, a marcha incontrolada da inflação vem pondo em perigo essa norma de trabalho e de dedicação à causa pública, pois que torna insuficientes nossos recursos financeiros próprios. Recorremos, então, às instituições de crédito, expondo-lhes, além das garantias materiais que estávamos capacitados a oferecer, a importância de nossa presença no terreno cultural brasileiro: acima de cinqüenta por cento de todos os livros didáticos adotados no Brasil nos cursos secundário, normal e comercial, são lançados por nós, além de alta percentagem nas escolas primárias.

Quatro dêsses estabelecimentos de crédito,

Banco Nacional de Minas Gerais S. A.,

Banco da Lavoura de Minas Gerais S. A.,

Banco Português do Brasil S. A.,

Banco do Estado de São Paulo S. A.,

graças ao alto espírito público de suas administrações, contribuíram pronta e substancialmente para que não modificássemos nossa política de alta qualidade a preço acessível. A êles, pois, queremos deixar consignado desta forma pública o nosso agradecimento sincero. Mais, ainda, queremos que cada estudante, cada leitor brasileiro saiba que *êste* livro, com *esta* apresentação moderna e funcional, *é fruto também dessa cooperação*, que beneficiando as partes diretamente interessadas, beneficia de modo mais amplo e não menos profundo tôda a Nação brasileira.

A DIRETORIA DA

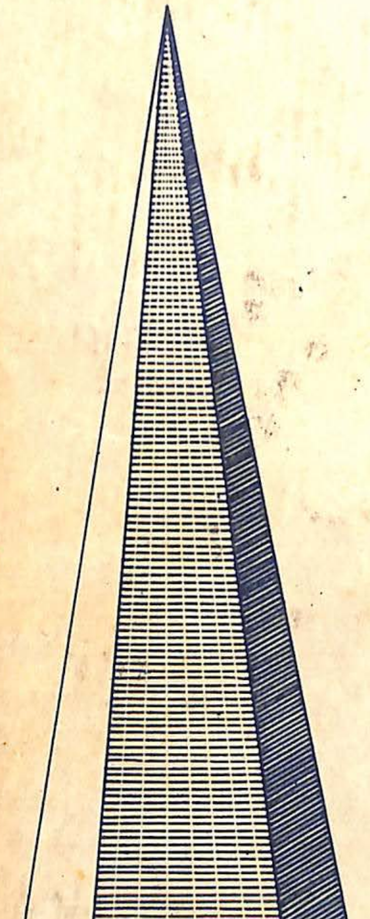
COMPANHIA EDITORA NACIONAL

São Paulo, julho de 1960.

10,00

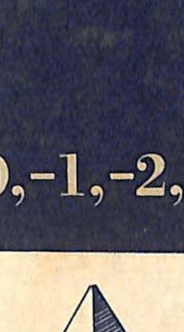
Moacir Edgar Kroth

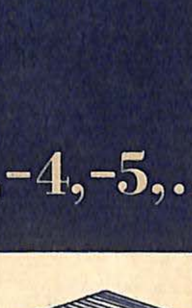
Moacir



$$35 + \frac{4}{9}$$

$0, -1, -2, -3, -4, -5, \ldots$





São Paulo Editora S.A. imprimiu