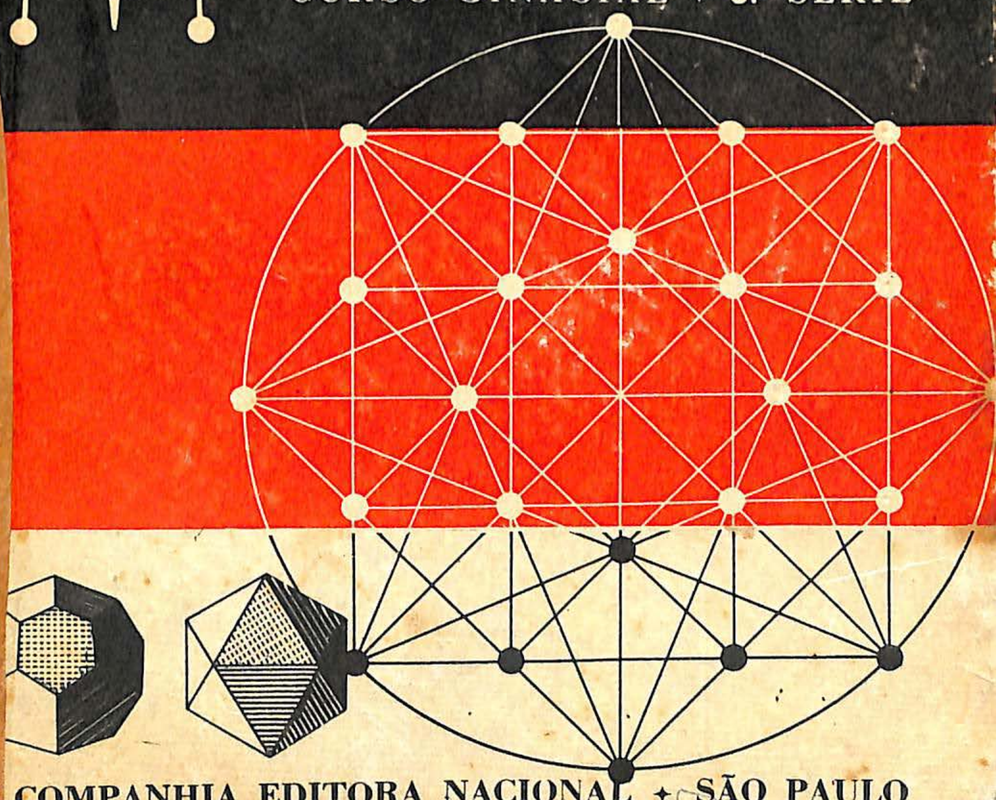
OSVALDO SANGIORGI

Matemática

CURSO GINASIAL + 3.ª SÉRIE



COMPANHIA EDITORA NACIONAL + SÃO PAULO

De acôrdo com os programas em vigor, e de uso autorizado pelo Ministério da Educação e Cultura. Registrado na Comissão Nacional do Livro Didático sob n.º 2 729.

Exemplar Nº 1808

OSVALDO SANGIORGI

Licenciado em Ciências Matemáticas, pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo. Ex-professor do Ginásio do Estado da Capital. Professor do Instituto Feminino de Educação "Padre Anchieta". Professor de Geometria Analítica da Faculdade de Filosofia, da Universidade Mackenzie.

MATEMÁTICA

para a

TERCEIRA SÉRIE GINASIAL

77.ª EDIÇÃO

(Revista e ampliada com 200 novos exercícios de Aritmética e de algumas observações interessantes sôbre a Geometria Dedutiva)

COMPANHIA EDITORA NACIONAL

SÃO PAULO

DO AUTOR

Matemática (Curso Moderno), para a primeira série ginasial.

Matemática, para a segunda série ginasial.

Matemática, para a quarta série ginasial.

Matemática e Estatística, para os Institutos de Educação e Escolas Normais.

★

EDIÇÕES DA

COMPANHIA EDITORA NACIONAL
Rua dos Gusmões, 639 — São Paulo 2, SP

ÍNDICE

CAPÍTULO II

Figuras geométricas planas. Reta e círculo

CAPÍTULO IV

Relações trigonométricas no triângulo retângulo. Tábuas naturais

APÊNDICE

PROGRAMA DE MATEMÁTICA

Terceira Série Ginasial

I) Razões e proporções; Aplicações aritméticas

1. Razão de dois números; razão de duas grandezas. Propriedades das razões. Razões iguais; propriedades. Proporção. Propriedade fundamental; recíproca. Transformações. Quarta proporcional. Cálculo de um têrmo qualquer de uma proporção. Proporção contínua; média proporcional; terceira proporcional. Propriedades mais usuais das proporções. Idéia geral de média; média aritmética, média geométrica e média harmônica. Medidas ponderadas.
2. Números proporcionais; propriedades. Divisão em partes diretamente proporcionais e em partes inversamente proporcionais a números dados.
3. Regra de três. Resolução de problemas de regra de três simples e composta.
4. Percentagem; problemas. Taxa milesimal.
5. Juros simples; problemas.

II) Figuras geométricas planas; Reta e círculo

1. Figuras geométricas; ponto, linha, superfície, reta e plano. Congruência.
2. Ângulos; definições; classificação e propriedades.
3. Linha poligonal; polígonos; classificação. Número de diagonais de um polígono.
4. Triângulos; definições; classificação. Grandeza relativa dos lados. Triângulo isósceles; propriedades. Casos clássicos de congruência de triângulos. Correspondência na desigualdade, entre os lados e os ângulos. Comparação de linhas de mesmas extremidades.
5. Perpendiculares e oblíquas. Mediatriz e bissetriz como lugares geométricos.
6. Paralelas. Ângulos formados por duas retas quando cortadas por uma transversal; propriedades. Propriedades de duas retas perpendiculares a uma terceira. Postulado de Euclides; conseqüências. Propriedades dos segmentos de paralelas compreendidos entre paralelas. Propriedades dos ângulos de lados paralelos ou de lados perpendiculares.
7. Soma dos ângulos internos de um triângulo; conseqüências. Soma dos ângulos internos e dos ângulos externos de um polígono.

8. Quadriláteros; classificação dos quadriláteros convexos; classificação dos paralelogramos e dos trapézios. Propriedades do paralelogramo e do trapézio. Translação. Retas concorrentes no triângulo.
9. Circunferência e círculo; definições. Propriedades do diâmetro. Arcos e cordas; propriedades. Distância de um ponto a uma circunferência. Tangente e normal. Posições relativas de dois círculos. Rotação.
10. Correspondência de arcos e ângulos. Medida do ângulo central, do ângulo inscrito, do ângulo de segmento, do ângulo excêntrico interior, do ângulo excêntrico exterior. Segmento capaz de um ângulo dado.

III) **Linhas proporcionais; Semelhança de polígonos**

1. Pontos que dividem um segmento numa razão dada. Divisão harmônica.
2. Segmentos determinados sôbre transversais por um feixe de paralelas.
3. Linhas proporcionais no triângulo; propriedades das bissetrizes de um triângulo; lugar geométrico dos pontos cuja razão das distâncias a dois pontos fixos é constante.
4. Semelhança de triângulos; casos clássicos. Semelhança de polígonos.

IV) **Relações trigonométricas no triângulo retângulo; Tábuas naturais**

1. Definição do seno, do co-seno e da tangente de um ângulo dado. Construção de um ângulo, sendo dado o seno, o co-seno ou a tangente.
2. Uso das tábuas naturais. Cálculo dos lados de um triângulo retângulo; projeção de um segmento.

PREFÁCIO

Tem êste terceiro volume, a nosso ver, grande responsabilidade na iniciação geométrica dedutiva dos alunos da escola secundária. De fato, é nesta fase do curso, que os conhecimentos geométricos devem ser aprofundados, de modo a permitir uma assimilação segura aos alunos, dentro de uma *técnica demonstrativa*, acessível e uniforme, tanto quanto possível.

Com êste objetivo, o processo demonstrativo que, empregamos, é composto de partes numeradas, das quais a primeira visa, quase sempre, às construções auxiliares necessárias à demonstração, acompanhadas de propriedades evidentes; a segunda envolve dedução, à base de raciocínios sucessivos, e a conclusão. Só, excepcionalmente, existe uma terceira parte com a finalidade de dividir um raciocínio muito extenso da segunda.

As construções geométricas, *com a régua e com o compasso*, mereceram de nossa parte um trato especial, não só pela importância que representam na formação do espírito dedutivo do aluno, como, também, na aplicação, que realmente são, da Geometria ao Desenho.

Esperamos continuar merecendo de nossos prezados colegas a mesma acolhida que estamos tendo com os dois primeiros volumes. Acreditem os nossos amigos, com o trabalho comum, estímulo e sugestões recebidos, podemos aprimorar o que fazemos com a máxima dedicação.

São Paulo, janeiro de 1954. O Autor.

Observação à 9.ª edição

A presente edição, revista e ampliada, pôde ser enriquecida de sugestões, apresentadas por distintos colegas, e sanada das omissões notadas nas edições anteriores.

Somos de parecer que o conteúdo de uma obra didática deve, continuadamente, ser arejado pela contribuição dos que efetivamente militam no magistério. É essa uma das razões por que agradecemos, sensibilizados, as inúmeras cartas que nos têm chegado, bem como as atenções recebidas de viva voz.

São Paulo, junho de 1955.

O. S.

Observação à 40.ª edição

Em aditamento ao já escrito, a nova edição desta 3.ª Série traz, na sua parte final, 200 exercícios de recapitulação sôbre Aritmética.

As questões propostas, que visam a dar ao professor maior material para fixação do que foi ensinado (principalmente para o estudo dirigido), incluem dados bem atuais.

Algumas observações interessantes sôbre a Geometria Dedutiva — principal responsável pela educação mental do adolescente — constam a seguir. São amostras de demonstrações feitas por alunos de 13 e 14 anos, que sob a influência benéfica de seus mestres, aprenderam a "pensar bem", e, portanto, estão credenciados a ser cidadãos bem formados.

Nesse sentido, apelamos a outros colegas de todo o Brasil que, ao registrarem resultados análogos com seus alunos, no-los enviem com o nome do respectivo autor, a fim de que possamos mencionar gradativamente, nas próximas edições do livro, êsse enriquecimento que honra e dignifica a nossa juventude.

Agradecidos.

São Paulo, janeiro de 1961.

O. S.

Rua Macapá, 17
São Paulo

NOTA AO LEITOR

(A propósito da 77.ª edição)

É DO CONHECIMENTO de todos os estudiosos a atual reformulação do ensino da Matemática. Em boa hora a chamada Matemática Moderna irá permitir, também aos jovens brasileiros, conhecer o verdadeiro caráter estrutural da Matemática, sem que isto implique alteração radical dos programas até agora vigentes, embora desenvolvidos de maneira diversa daquela tradicionalmente usada.

A nossa coleção de livros didáticos, acompanhando o presente estado de modernização da Matemática, iniciou *progressivamente*, a partir da 1.ª série ginasial — "Curso Moderno", edição de 1964 — a usar de uma nova linguagem baseada nas idéias de *conjunto* e de *estruturas*, o que faremos sucessivamente com os livros da 2.ª série, com êste, da 3.ª série, e finalmente com o da 4.ª.

Essa a principal razão porque o atual livro da 3.ª série ainda permanece sem modificações, na expectativa de que — continuando a prestar a mesma colaboração que até agora tem prestado por indicação de prezados colegas — chegue ràpidamente sua vez de usar *da mesma linguagem* ora iniciada com a 1.ª série.

Agradecemos mais uma vez, e sensibilizados, o estímulo que sempre temos recebido dos professôres secundários em exercício, que são, na realidade, os principais fautores do progresso do nosso ensino.

São Paulo, novembro de 1963

O. SANGIORGI

CAPÍTULO I

Razões e proporções. Aplicações aritméticas

§ 1. Razões e proporções. Propriedades e aplicações.

1. Razão de dois números. Chama-se *razão de dois números*, dados numa certa ordem e sendo o segundo diferente de zero, ao *quociente do primeiro pelo segundo*. O primeiro número é chamado *antecedente*, o segundo *conseqüente* e os dois números dizem-se *têrmos da razão*.

Em simbolos, a razão entre os números a e b (diferente de zero) é

$$\frac{a}{b} \quad \text{ou} \quad a : b \quad \text{(lê-se: } a \text{ está para } b\text{)}$$

onde a é o antecedente e b o conseqüente. Exemplos :

A razão entre 6 e 3 é $\frac{6}{3} = 2$.

" " " 0,15 e 6 é $\frac{0,15}{6} = 0,025$.

" " " $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{5}$ é $\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{4} \times \frac{5}{3} = \frac{5}{12}$,

" " " 8 e $\frac{1}{7}$ é $\frac{8}{\frac{1}{7}} = 8 \times \frac{7}{1} = 56$.

A razão entre 0,5 e 3,5 é $\frac{0,5}{3,5} = \frac{5}{10} \times \frac{10}{35} = \frac{1}{7}$.

" " " $\sqrt{24}$ e $\sqrt{12}$ é $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{12}} = \sqrt{\frac{24}{12}} = \sqrt{2}$.

2. Razão de duas grandezas. Chama-se *razão de duas grandezas*, da mesma espécie, *à razão dos números que exprimem as suas medidas*, referidas à mesma unidade.

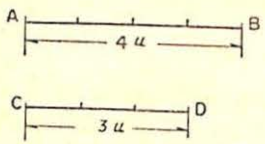


FIG. 1

Assim, por exemplo, dados os segmentos AB e CD (fig. 1) e adotando-se a unidade u de medida (suponhamos que seja o cm), se tivermos:

$$\overline{AB} = 4u \quad \text{e} \quad \overline{CD} = 3u,$$

dizemos que a razão entre as grandezas AB e CD é $\frac{4}{3}$ e indicamos $\frac{AB}{CD} = \frac{4}{3}$.

3. Propriedade das razões. Podendo escrever a razão de dois números como um *quociente indicado*, valem para as razões as seguintes propriedades, análogas às estudadas nas frações (*) :

1.ª) *Multiplicando-se* (ou dividindo-se) o ***antecedente*** de uma razão por um certo número, diferente de zero, o valor da razão fica *multiplicado* (ou dividido), por êsse número. Exemplo:

Seja a razão $\frac{1}{5}$.

Multiplicando-se o antecedente por 3, temos a razão $\frac{3}{5}$ que *é três vêzes maior* que $\frac{1}{5}$.

(*) Ver *Matemática*, Curso Ginasial, 1.ª Série, pág. 121, do mesmo autor.

2.ª) *Multiplicando-se* (ou dividindo-se) o ***conseqüente*** de uma razão por um certo número, diferente de zero, o valor da razão fica *dividido* (ou multiplicado), por êsse número. Exemplo:

Seja a razão $\frac{2}{5}$.

Multiplicando-se o conseqüente por 2, temos a razão $\frac{2}{10}$ que é a *metade* de $\frac{2}{5}$.

3.ª) *Multiplicando-se* (ou dividindo-se) ***ambos os têrmos*** de uma razão por um mesmo número, diferente de zero, o valor da razão *não se altera.* Exemplo:

Seja a razão $\frac{3}{4}$.

Multiplicando-se os seus têrmos por 5, temos $\frac{15}{20}$, que é de *mesmo valor* que $\frac{3}{4}$, denominada *razão simplificada de* $\frac{15}{20}$.

4. Razões iguais. ***Propriedade.*** Duas razões são *iguais* quando os quocientes que elas indicam são iguais. Dêsse modo, as razões $\frac{6}{3}$ e $\frac{14}{7}$, por exemplo, são iguais, pois ambas exprimem o quociente 2.

Duas razões iguais gozam da seguinte *propriedade:*

> **O produto do antecedente da primeira razão pelo conseqüente da segunda é igual ao produto do conseqüente da primeira pelo antecedente da segunda.**

Exemplo: $\frac{6}{3}$ é igual a $\frac{14}{7}$, pois:

$6 \times 7 = 42$ (antecedente da 1.ª pelo conseqüente da 2.ª).

$3 \times 14 = 42$ (conseqüente da 1.ª pelo antecedente da 2.ª).

5. Razões inversas. ***Propriedade.*** Duas razões (simplificadas) são *inversas* ou *recíprocas* uma da outra, quando o antecedente e o conseqüente de uma delas forem, respectivamente, iguais ao conseqüente e ao antecedente da outra (*).

Assim, por exemplo, as razões $\frac{4}{3}$ e $\frac{3}{4}$ são *inversas uma da outra.*

Agora, temos a seguinte propriedade:

> **Se duas razões são inversas uma da outra o produto delas é igual à unidade.**

De fato, as razões $\frac{4}{3}$ e $\frac{3}{4}$, por exemplo, têm por produto a unidade.

De um modo geral, sendo $\frac{a}{b}$ e $\frac{b}{a}$ inversas uma da outra, devemos ter:

$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1.$$

6. Proporção. Chama-se *proporção a igualdade entre duas razões.* Assim, as razões $\frac{2}{5}$ e $\frac{10}{25}$, que são iguais, constituem uma proporção e podemos indicar a igualdade do modo que comumente se faz, isto é:

$$\frac{2}{5} = \frac{10}{25} \text{ (ambas as razões valem 0,4).}$$

De um modo geral, dados, em certa ordem, quatro números, a, b, c e d, diferentes de zero, diz-se que *formam uma proporção,* quando a razão dos dois primeiros é igual à razão dos dois últimos. Logo, se

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

a, b, c *e* d *formam uma proporção* e dizemos: a *está para* b *assim como* c *está para* d.

(*) Chama-se também *razão inversa* de dois números à razão do 2.º para o 1.º.

A proporção acima é também indicada das seguintes maneiras:

$a : b = c : d$ (indicação de Leibnitz).
$a : b :: c : d$ (indicação de Gregory).

Exemplos:

$$\frac{8}{4} = \frac{144}{72} \text{ ou } 8 : 4 = 144 : 72 \text{ ou } 8 : 4 :: 144 : 72.$$

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{5}} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{1}{2}} \text{ ou } \frac{2}{3} : \frac{1}{5} = \frac{5}{3} : \frac{1}{2} \text{ ou } \frac{2}{3} : \frac{1}{5} :: \frac{5}{3} : \frac{1}{2}.$$

Os números dados, a, b, c e d, são chamados *têrmos da proporção.* O antecedente da primeira razão e o conseqüente da segunda chamam-se *extremos* e o conseqüente da primeira razão e o antecedente da segunda, *meios* da proporção.

Na proporção: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

a e d são os *extremos* e b e c, os *meios.*

7. Propriedade fundamental das proporções. Recíproca. A propriedade fundamental das proporções é a seguinte:

> **Em tôda proporção o produto dos extremos é igual ao produto dos meios.**

Seja, por exemplo, a proporção

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}.$$

Temos: $3 \times 8 = 24$ (produto dos extremos).
$6 \times 4 = 24$ (produto dos meios).

Pode-se mostrar que, partindo-se de uma proporção qualquer, essa propriedade sempre se verifica. De fato, consideremos a proporção acima:

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}.$$

Multiplicando-se as duas razões por 4×8 (produto dos conseqüentes), vêm

$$\frac{3}{4} \times 4 \times 8 = \frac{6}{8} \times 4 \times 8.$$

ou, simplificando: $3 \times 8 = 6 \times 4.$

No caso geral da proporção

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d}}$$

devemos ter: $\boxed{a \times d = c \times b}$

De fato, basta multiplicar ambas as razões que constituem essa proporção por $b \times d$ (produto dos conseqüentes) para obtermos:

$$\frac{a}{b} \times b \times d = \frac{c}{d} \times b \times d$$

ou $a \times d = c \times b.$

Propriedade recíproca. *Se o produto de dois números é igual ao produto de outros dois* (com um dêles diferente de zero), *os quatro números formam uma proporção sendo extremos os fatôres de um dos produtos e meios, os do outro.*

Seja, por exemplo:

$$10 \times 4 = 8 \times 5.$$

Êsses produtos iguais permitem formar as seguintes proporções:

$$\frac{10}{5} = \frac{8}{4}$$

$$\frac{8}{4} = \frac{10}{5}.$$

Com efeito, partindo da igualdade

$$10 \times 4 = 8 \times 5$$

e dividindo ambos os membros pelo produto de um dos fatôres do primeiro membro por um dos fatôres do segundo, por exemplo, 4×5, temos:

$$\frac{10 \times 4}{4 \times 5} = \frac{8 \times 5}{4 \times 5}$$

ou, simplificando: $\frac{10}{5} = \frac{8}{4}.$

No caso geral de

$$\boxed{a \times d = c \times b}$$

podemos ter as proporções:

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d}} \quad \text{e} \quad \boxed{\frac{c}{d} = \frac{a}{b}}$$

seguindo o mesmo raciocínio feito para o exemplo numérico.

8. Transformações. APLICAÇÃO. *Transformar uma proporção é dispor de seus têrmos de modo que a igualdade dos produtos dos meios e dos extremos não sofra alteração.* As principais transformações denominadas, respectivamente, *alternar*, *inverter* e *transpor*, serão estudadas a seguir:

1.ª) ***Alternar*** os têrmos de uma proporção é *trocar entre si as posições dos meios ou dos extremos.* Exemplo:

Seja a proporção:

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}, \text{ onde } 3 \times 8 = 6 \times 4 \text{ (prop. fundamental).}$$

Alternando os *meios* (4 e 6), temos:

$$\frac{3}{6} = \frac{4}{8}, \text{ onde } 3 \times 8 = 4 \times 6 \text{ (prop. fundamental).}$$

Alternando os *extremos* (3 e 8), temos:

$$\frac{8}{4} = \frac{6}{3}, \text{ onde } 8 \times 3 = 6 \times 4 \text{ (prop. fundamental).}$$

2.ª) **Inverter** os têrmos de uma proporção é *trocar as suas razões pelas respectivas inversas.* Exemplo:

Seja ainda a proporção $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$, onde $3 \times 8 = 6 \times 4$.

Invertendo os seus têrmos, temos:

$$\frac{4}{3} = \frac{8}{6}, \text{ onde } 4 \times 6 = 8 \times 3.$$

3.ª) **Transpor** os têrmos de uma proporção é *trocar a ordem das suas razões.* Exemplo:

Na proporção $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$, onde $3 \times 8 = 6 \times 4$,

transpondo os seus têrmos, temos:

$$\frac{6}{8} = \frac{3}{4}, \text{ onde } 6 \times 4 = 3 \times 8.$$

Aplicação. Com as transformações estudadas, pode-se escrever uma proporção de *oito modos diferentes.*

Consideremos, por exemplo, a proporção:

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} \quad (2 \times 6 = 4 \times 3) \quad (1)$$

Alternando os meios: $\frac{2}{4} = \frac{3}{6}$ $(2 \times 6 = 3 \times 4)$ (2)

Alternando os extremos: $\frac{6}{3} = \frac{4}{2}$ $(6 \times 2 = 4 \times 3)$ (3)

Invertendo os têrmos: $\frac{3}{2} = \frac{6}{4}$ $(3 \times 4 = 6 \times 2)$ (4)

Transpondo os têrmos das proporções (1), (2), (3) e (4):

$$\frac{4}{6} = \frac{2}{3} \quad (4 \times 3 = 2 \times 6) \quad (5)$$

$$\frac{3}{6} = \frac{2}{4} \quad (3 \times 4 = 2 \times 6) \quad (6)$$

$$\frac{4}{2} = \frac{6}{3} \quad (4 \times 3 = 6 \times 2) \quad (7)$$

$$\frac{6}{4} = \frac{3}{2} \quad (6 \times 2 = 3 \times 4) \quad (8)$$

9. Quarta proporcional. Chama-se *quarta proporcional* de três números, dados numa certa ordem, um quarto número que forme com os três primeiros uma proporção.

Assim, se os números a, b, c e d formam uma proporção, dizemos que o número d é a *quarta proporcional* depois de a, b e c. Exemplo:

Como $3 : 4 :: 6 : 8$, temos que 8 é a quarta proporcional depois de 3, 4 e 6.

10. Proporção contínua. Média proporcional. Terceira proporcional. Uma proporção diz-se *contínua* quando os seus meios são iguais. Exemplos:

$$\frac{2}{4} = \frac{4}{8}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}.$$

Numa proporção contínua, temos:

1.º) O valor comum dos meios (b) é denominado *média proporcional* (ou geométrica) entre os extremos (a e c).

Exemplo:

Na proporção $\frac{9}{6} = \frac{6}{4}$, 6 é a média proporcional entre 9 e 4.

2.º) O quarto têrmo (c), diz-se *terceira proporcional* depois dos dois primeiros (a e b). Exemplo:

Na proporção $\frac{9}{6} = \frac{6}{4}$, 4 é a terceira proporcional depois de 9 e 6.

3.º) O produto dos extremos (a e c) é *igual ao quadrado do meio comum* (b). Exemplo:

Na proporção $\frac{9}{6} = \frac{6}{4}$

temos: $9 \times 4 = 6 \times 6$

ou $9 \times 4 = 6^2$.

11. Cálculo de um têrmo qualquer de uma proporção. Utilizando a *propriedade fundamental das proporções* é sempre possível calcular o valor de um têrmo de uma proporção quando são conhecidos os outros três. Indiquemos por x o têrmo desconhecido da proporção

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}.$$

Em virtude do teorema fundamental, temos:

$$a \times x = b \times c$$

donde:

$$x = \frac{b \times c}{a}.$$

Logo:

Numa proporção um extremo desconhecido é igual ao produto dos meios dividido pelo extremo conhecido.

Exemplo:

Calcular x na proporção $\frac{5}{12} = \frac{15}{x}$.

Devemos ter: $5 \times x = 12 \times 15$

$$\therefore \quad x = \frac{12 \times 15}{5} = \frac{180}{5} = 36.$$

Anàlogamente, temos que:

Numa proporção um meio desconhecido é igual ao produto dos extremos dividido pelo meio conhecido.

Exemplo:

Calcular o valor de y na proporção $\frac{14}{y} = \frac{7}{4}$.

Devemos ter: $y = \frac{14 \times 4}{7} = \frac{56}{7} = 8.$

Se a proporção fôr contínua, temos:

1.º) *Um extremo desconhecido é igual ao quadrado do meio comum dividido pelo extremo conhecido;*

2.º) *Um meio desconhecido é igual à raiz quadrada do produto dos extremos.*

Assim, nas proporções contínuas

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{x} \quad \text{e} \quad \frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$

temos respectivamente:

$$a \times x = b^2 \quad \text{e} \quad a \times b = x^2$$

$\therefore \; x = \frac{b^2}{a}$ (valor do extremo) e $x = \sqrt{a \times b}$ (valor do meio).

Exemplos:

1) Calcular o valor de y na proporção:

$$\frac{16}{8} = \frac{8}{y}.$$

Devemos ter: $y = \frac{8^2}{16} = \frac{64}{16} = 4.$

2) Calcular o valor de a na proporção:

$$\frac{3}{a} = \frac{a}{75}.$$

Temos:

$$a \times a = 3 \times 75$$

ou $a^2 = 225$

$\therefore \; a = \sqrt{225} = 15$ (média proporcional entre 3 e 75).

NOTA: No caso da raiz quadrada não ser exata a média proporcional é determinada de acôrdo com a aproximação desejada.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1.º) Determinar x na proporção:

$$\frac{\frac{2}{3}}{x} = \frac{\frac{4}{5}}{8}.$$

Devemos ter: $x = \frac{\frac{2}{3} \times 8}{\frac{4}{5}} = \frac{\frac{16}{3}}{\frac{4}{5}}$

ou $x = \frac{16}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{20}{3}.$

2.º) Calcular o valor de y na proporção:

$$2y : 5 = 4 : 10.$$

Temos: $2y = \frac{5 \times 4}{10}$

$$2y = \frac{20}{10} = 2$$

$$\therefore \; y = \frac{2}{2} = 1$$

3.º) Calcular o valor da *quarta proporcional* depois de 12, 3 e 8.

Devemos formar a proporção:

$$\frac{12}{3} = \frac{8}{x},$$

onde $x = \frac{3 \times 8}{12} = \frac{24}{12} = 2$ (4.ª proporcional).

4.º) Determinar a *terceira proporcional* depois de 2 e 4.

Devemos, agora, formar a proporção contínua:

$$\frac{2}{4} = \frac{4}{x},$$

onde $x = \frac{4^2}{2} = \frac{16}{2} = 8$ (3.ª proporcional).

5.º) Calcular o valor de x na proporção:

$$\frac{\frac{2}{3} + x}{\frac{x}{2} - \frac{1}{8}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}}.$$

Devemos aplicar as propriedades das proporções (aplicação aritmética) e a resolução de equações algébricas (aplicação algébrica) (*). Assim, temos:

$$\frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}+x\right)=2\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{8}\right)$$

ou $$\frac{6}{12}+\frac{3x}{4}=\frac{2x}{2}-\frac{2}{8}$$

m.m.c. (12,8) = 24 $$12+18x=24x-6$$
$$-6x=-18$$
$$\therefore\ x=\frac{18}{6}=3.$$

6.º) Determinar a média proporcional entre 2,5 e 3,2 a menos de $\frac{1}{100}$.

A média proporcional (x) será dada pela extração da raiz quadrada do produto $2{,}5\times 3{,}2$, a menos de $\frac{1}{100}$, isto é:

$$x=\sqrt{2{,}5\times 3{,}2}$$
$$x=\sqrt{8{,}00}=2{,}82 \text{ (a menos de 0,01).}$$

12. Propriedades mais usuais das proporções.

1.ª) ***Propriedade da composição.*** *Em tôda proporção a soma dos dois primeiros têrmos está para o primeiro (ou para o segundo) assim como a soma dos dois últimos está para o terceiro (ou quarto).*

Assim, da proporção

$$\boxed{\frac{a}{b}=\frac{c}{d}}$$

(*) Ver *Matemática*, Curso Ginasial, 2.ª Série, pág. 117, do mesmo autor.

podemos *compor* as seguintes proporções:

$$\boxed{\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c}} \quad \text{e} \quad \boxed{\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}}$$

Exemplo:

Aplicar a *propriedade da composição* na proporção $\frac{3}{4}=\frac{15}{20}$.

Aplicando a propriedade, temos as seguintes proporções:

$$\frac{3+4}{3}=\frac{15+20}{15} \quad \text{e} \quad \frac{3+4}{4}=\frac{15+20}{20}.$$

Verificação:

$$\frac{7}{3}=\frac{35}{15} \qquad \frac{7}{4}=\frac{35}{20}$$

ou $$7\times 15=35\times 3 \qquad 7\times 20=35\times 4$$
$$105=105 \qquad 140=140.$$

Aplicações.

1.ª) Calcular dois números sabendo-se que a soma dêles é 33 e a razão $\frac{5}{6}$.

Indicando os números procurados por a e b, o problema se traduz nas expressões

$$\begin{cases} a+b=33 \\ \dfrac{a}{b}=\dfrac{5}{6}. \end{cases}$$

Aplicando a propriedade da composição na proporção $\frac{a}{b}=\frac{5}{6}$, temos:

$$\frac{a+b}{a}=\frac{5+6}{5}$$

e como $a + b = 33,$

segue que $\frac{33}{a} = \frac{11}{5}$

e, portanto, $a = \frac{33 \times 5}{11} = \frac{165}{11} = 15.$

A determinação de b é feita aplicando-se novamente a propriedade da composição (em relação ao segundo têrmo) ou levando-se em conta o valor já conhecido de a, pois, sendo $a + b = 33$ e $a = 15$ temos que $b = 33 - 15 = 18$.

Logo, os números procurados são 15 e 18.

Verificação: $\begin{cases} a + b = 15 + 18 = 33 \\ \frac{a}{b} = \frac{15}{18} = \frac{5}{6}. \end{cases}$

X

2.ª) Determinar o valor de x na proporção $\frac{12 - x}{x} = \frac{3}{8}$.

Aplicando a propriedade da composição (em relação ao segundo têrmo), temos:

$$\frac{12 - x + x}{x} = \frac{3 + 8}{8}$$

ou

$$\frac{12}{x} = \frac{11}{8}$$

e, portanto,

$$x = \frac{96}{11} = 8\frac{8}{11}.$$

2.ª) ***Propriedade da decomposição.*** *Em tôda proporção a diferença dos dois primeiros têrmos está para o primeiro (ou para o segundo), assim como a diferença dos dois últimos está para o terceiro (ou quarto).*

Assim, da proporção

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d}}$$

podemos chegar, pela *propriedade da decomposição*, às proporções:

$$\boxed{\frac{a - b}{a} = \frac{c - d}{c}} \quad \text{e} \quad \boxed{\frac{a - b}{b} = \frac{c - d}{d}}.$$

Exemplo:

Aplicar a *propriedade da decomposição* na proporção $\frac{5}{2} = \frac{20}{8}$.

Da aplicação da propriedade resultam as seguintes proporções:

$$\frac{5 - 2}{5} = \frac{20 - 8}{20} \quad \text{e} \quad \frac{5 - 2}{2} = \frac{20 - 8}{8}.$$

A *verificação* ficará ao encargo do aluno.

Aplicações.

1.ª) Calcular dois números sabendo-se que a diferença dêles é 20 e a razão $\frac{7}{3}$.

O problema conduz-nos à proporção $\frac{a}{b} = \frac{7}{3}$ onde $a - b = 20$

Pela propriedade da decomposição, temos:

$$\frac{a - b}{a} = \frac{7 - 3}{7}$$

ou

$$\frac{20}{a} = \frac{4}{7}$$

e, portanto, $a = \frac{20\times 7}{4} = \frac{140}{4} = 35.$

Logo: $b = 35 - 30 = 15$

e os dois números procurados são, respectivamente, *35* e *15*.

2.ª) Determinar o valor de x na proporção $\frac{5+x}{x} = \frac{12}{10}$.

Aplicando a propriedade (em relação ao segundo têrmo), temos:

$$\frac{5+x-x}{x} = \frac{12-10}{10}$$

ou

$$\frac{5}{x} = \frac{2}{10} \therefore x = \frac{50}{2} = 25.$$

3.ª) ***Propriedade dos antecedentes e dos conseqüentes relativa à soma (ou diferença).*** *Em tôda a proporção a soma* (ou diferença) *dos antecedentes está para a soma* (ou diferença) *dos conseqüentes, assim como um antecedente está para o seu conseqüente.*

Assim, da proporção

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d}}$$

chegamos, graças a esta propriedade, às proporções:

$$\boxed{\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} \text{ ou } \frac{c}{d}} \quad \text{e} \quad \boxed{\frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b} \text{ ou } \frac{c}{d}}$$

Exemplo:

Aplicar a propriedade dos antecedentes e dos conseqüentes na proporção $\frac{12}{8} = \frac{9}{6}$.

Com a aplicação da propriedade estudada, temos as seguintes proporções:

$$\frac{12+9}{8+6} = \frac{12}{8} \text{ ou } \frac{9}{6} \quad \text{e} \quad \frac{12-9}{8-6} = \frac{12}{8} \text{ ou } \frac{9}{6}.$$

A *verificação* ficará ao encargo do aluno.

NOTA: Esta propriedade ainda é verdadeira se as razões iguais forem mais de duas.

Assim sendo, $\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}}$

temos, também, $\boxed{\frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}}$.

APLICAÇÃO. Repartir o número 18 em três números tais que estejam entre si como 2, 3 e 4, respectivamente.

Indicando por a, b e c os três números procurados, temos, pela condição imposta pelo problema:

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} \quad \text{onde} \quad a+b+c = 18.$$

Pela *nota* há pouco referida, temos:

$$\frac{a+b+c}{2+3+4} = \frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}$$

ou

$$\frac{18}{9} = \frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}.$$

Dessas igualdades podemos formar as proporções:

$$\frac{18}{9} = \frac{a}{2} \quad \text{onde} \quad a = \frac{18\times 2}{9} = 4.$$

$$\frac{18}{9} = \frac{b}{3} \quad \text{onde} \quad b = \frac{18\times 3}{9} = 6.$$

$$\frac{18}{9} = \frac{c}{4} \quad \text{onde} \quad c = \frac{18 \times 4}{9} = 8.$$

Logo, os números procurados são: 4, 6 e 8.

4.ª) ***Propriedade dos antecedentes e dos conseqüentes relativa ao produto.*** *Em tôda a proporção o produto dos antecedentes está para o produto dos conseqüentes, assim como o quadrado de um antecedente está para o quadrado de seu conseqüente.*

Assim, da proporção

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d}}$$

chegamos à proporção

$$\boxed{\frac{a \times c}{b \times d} = \frac{a^2}{b^2} \text{ ou } \frac{c^2}{d^2}}$$

Conseqüência: *Em tôda a proporção os quadrados de seus têrmos também formam uma proporção* (conservadas as ordens dos têrmos).

Logo, da proporção

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d}}$$

temos a proporção

$$\boxed{\frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2}}$$

Aplicações.

1.ª) Determinar dois números sabendo-se que a razão entre êles é $\frac{4}{5}$ e o produto 180.

Indicando por a e b os números procurados, temos a proporção

$$\frac{a}{b} = \frac{4}{5} \quad \text{onde } a \times b = 180.$$

Alternando os meios da proporção formada e aplicando a 4.ª propriedade, vem:

$$\frac{a}{4} = \frac{b}{5} \quad \text{ou} \quad \frac{a \times b}{20} = \frac{a^2}{4^2} \quad \text{ou} \quad \frac{180}{20} = \frac{a^2}{16}$$

e, portanto, $a^2 = \frac{180 \times 16}{20} = 144.$

Logo, $a = \sqrt{144} = 12.$

Sendo o produto dos dois números igual a 180 e um dêles 12, o outro será:

$$b = \frac{180}{12} = 15.$$

Logo, os números procurados são: 12 e 15.

2.ª) Determinar dois números na razão $\frac{2}{3}$, sabendo-se que a soma de seus quadrados é 52.

Representando por a e b os números procurados, formamos a proporção

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{3}, \quad \text{onde } a^2 + b^2 = 52.$$

Aplicando a conseqüência ora estudada, temos:

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{4}{9},$$

e, pela propriedade da composição:

$$\frac{a^2+b^2}{a^2}=\frac{4+9}{4}$$

ou

$$\frac{52}{a^2}=\frac{13}{4}$$

e

$$a^2=\frac{52\times 4}{13}=16$$

$$\therefore\ a=\sqrt{16}=4.$$

Como a soma dos quadrados dos números procurados é 52, concluímos:

$$b^2=52-16=36\ \therefore\ b=6.$$

Logo, os números são: 4 e 6.

13. Idéia geral de média. Tipos diversos. Têm larga aplicação na vida prática certos resultados denominados *médias*, que nada mais são que *valores resumos* de um conjunto de valores que se estudam. Dentre elas destacamos as seguintes:

1.ª) média aritmética;
2.ª) média geométrica;
3.ª) média harmônica.

14. Média aritmética. Chama-se *média aritmética* de dois ou mais números dados, o quociente da divisão de sua soma pelo número dêles. Indicação: m_a. Exemplos:

1. A média aritmética dos números 3,4 e 6,8 é:

$$m_a=\frac{3{,}4+6{,}8}{2}=\frac{10{,}2}{2}=5{,}1.$$

2. A média aritmética dos números 7, 12 e 17 é:

$$m_a=\frac{7+12+17}{3}=\frac{36}{3}=12.$$

15. Média geométrica. Chama-se *média geométrica* de dois números a raiz quadrada do produto dêsses números. Se

fôrem três números, a média geométrica será igual à raiz cúbica do produto dos números dados. Indicação: m_g. Exemplos:

1. A média geométrica dos números 4 e 16 é:

$$m_g=\sqrt{4\times 16}=\sqrt{64}=8.$$

2. A média geométrica dos números 2, 4 e 8 é:

$$m_g=\sqrt[3]{2\times4\times8}=\sqrt[3]{64}=4.$$

NOTA: No caso das raízes não serem exatas, calculam-se as médias geométricas de acôrdo com a aproximação desejada.

16. Média harmônica. Chama-se *média harmônica* entre vários números o inverso da média aritmética de seus inversos. Indicação: m_h. Exemplo:

Calcular a média harmônica entre 5 e 8.

Determina-se, primeiramente, a média aritmética dos inversos dêsses números, isto é, de $\frac{1}{5}$ e $\frac{1}{8}$.

Logo,
$$\frac{\frac{1}{5}+\frac{1}{8}}{2}=\frac{\frac{13}{40}}{2}=\frac{13}{80}.$$

O inverso dêsse resultado é a média harmônica procurada, ou seja:

$$m_h=\frac{80}{13}.$$

17. Medidas ponderadas. Atribui-se o nome de *pêso*, de um certo número, ao valor que se faz corresponder a êsse número e que indica as vêzes que tal número figura num conjunto de valores. As medidas que se fazem com números afetados de pesos constituem as *medidas ponderadas*. Assim é que encontramos as médias aritmética ponderada, geométrica ponderada e harmônica ponderada. Dentre elas, destacamos a *média aritmética ponderada* pela importância que tem na prática.

Chama-se *média aritmética ponderada* de vários números, aos quais se atribuem determinados pesos, ao quociente da divisão, cujo dividendo é constituído da soma dos produtos dêsses números pelos respectivos pesos e cujo divisor é a soma dos pesos. Indicação: $m_{a.p}$.

Assim, por exemplo, a média aritmética ponderada dos números 4 e 6, aos quais se atribuem, respectivamente, os *pesos* 2 e 3, é:

$$m_{a.p} = \frac{4\times2+6\times3}{2+3} = \frac{8+18}{5} = \frac{26}{5} = 5{,}2.$$

Exemplo:

Sabendo-se que os *pesos* relativos às notas: mensal, 1.º exame, 2.º exame e exame oral são, respectivamente: 2, 2, 3 e 3, calcular a média aritmética das notas de Matemática de um aluno, que obteve as seguintes notas durante o ano letivo de 1960:

média mensal = 5; 1.º exame = 4; 2.º exame = 4; exame oral = 6.

A média aritmética ponderada será:

$$m_{a.p} = \frac{5\times2+4\times2+4\times3+6\times3}{2+2+3+3} = \frac{10+8+12+18}{10} = \frac{48}{10} = 4{,}8.$$

EXERCÍCIOS (*)

RAZÕES:

1. Determinar as seguintes *razões* entre:

1.º) 12 e 4 4.º) -2 e $\frac{1}{2}$ 7.º) 0,01 e 100

2.º) $\frac{1}{3}$ e 5 5.º) $-\frac{3}{4}$ e $-\frac{3}{4}$ 8.º) 1,3 e $\frac{13}{10}$

9.º) $6\sqrt{8}$ e $3\sqrt{4}$

3.º) 100 e 50 6.º) $\sqrt{12}$ e $\sqrt{3}$ 10.º) 0,222... e 0,111...

2. Calcular o valor das seguintes *razões*:

1.ª) 0,06 : 0,0001 3.ª) $\left(2+\frac{1}{3}\right) : \frac{4}{3}$ 5.ª) $\left(3-\frac{1}{8}\right) : \left(1-\frac{7}{4}\right)$

2.ª) $-\frac{1}{2} : 0{,}2$ 4.ª) $1 : \left(-3+\frac{2}{5}\right)$ 6.ª) $0{,}8 : -\frac{8}{10}$.

(*) Os EXERCÍCIOS envolvem também *números relativos*, já estudados nas séries anteriores.

3. Exprimir o valor da *razão* entre as seguintes grandezas:

1.º) 2dam e 10m 3.º) $4m^3$ e $10m^3$

2.º) 30dl e 4hl 4.º) 12°30′ e 15°.

4. Lúcia recebeu um pacote com 16 balas e Laís um pacote com 18 balas. A primeira chupou 6 balas e a segunda, 8. Estabelecer as *razões* das balas recebidas e chupadas por Lúcia e Laís, respectivamente.

5. Determinar o valor do *antecedente* da razão de valor igual a $\frac{3}{4}$ e cujo conseqüente é $\frac{8}{3}$.

6. Determinar o valor do *conseqüente* da razão de valor igual a $\left(1-\frac{3}{5}\right)$ e cujo antecedente é $-\frac{4}{9}$.

7. Escrever as *razões inversas* das seguintes razões:

1.ª) $\frac{3}{4}$ 2.ª) $-\frac{a}{2}$ 3.ª) $\frac{1}{8}$ 4.ª) -9.

PROPORÇÕES: (*)

8. Formar as *proporções* respectivas dos seguintes conjuntos de número:

1.º) 18, 48, 3 e 8 3.º) 2m, 6m, 3hl e 9hl

4.º) x, x^2, x^3 e x^4

2.º) $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{4}$, 5 e $\frac{5}{6}$ 5.º) a, b, c e d

6.º) $0{,}5m^2$, $2m^2$, $4m^3$ e $16m^3$.

9. Verificar, mediante a propriedade fundamental, se são ou não *proporções*, as seguintes expressões:

1.ª) $\frac{4}{7} = \frac{5}{8}$ 3.ª) $\frac{0{,}3}{8} = \frac{2{,}4}{0{,}09}$ 5.ª) $\frac{0{,}5}{-6} = \frac{-\frac{1}{3}}{4}$

2.ª) $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$ 4.ª) $\frac{10}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{0{,}3}$ 6.ª) $\frac{8}{5} = \frac{4}{3}$.

10. Escrever, em forma de proporção, mediante a *recíproca* da propriedade fundamental, os seguintes produtos:

1.º) $4\times6=3\times8$ 3.º) $0{,}32\times0{,}01=0{,}008\times4$ 5.º) $a\times d=b\times c$

2.º) $m\times q=n\times p$ 4.º) $\frac{1}{3}\times120=(-5)\times(-8)$ 6.º) $1\times10=2\times5$.

11. Escrever, de *todos os modos possíveis*, as seguintes proporções:

1.ª) $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$ 2.ª) $\frac{0{,}1}{4} = \frac{0{,}5}{20}$ 3.ª) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

12. Calcular a 4.ª *proporcional* nos seguintes grupos de números:

1.º) 4, 9 e 8 2.º) 10, $\frac{1}{4}$, -30 3.º) $\left(2-\frac{1}{5}\right)$; 3; 0,1 4.º) -1, -2, -3.

(*) No fim do livro encontram-se exercícios de recapitulação.

13. Calcular a 3.ª *proporcional* nos seguintes grupos de números:

1.º) 2 e 4 (meio comum)   2.º) 0,12 e 0,6 (meio comum).

14. Calcular o *têrmo desconhecido* nas seguintes proporções:

1.ª) $\dfrac{x}{15} = \dfrac{12}{6}$

2.ª) $\dfrac{\frac{1}{2}}{x} = \dfrac{3}{4}$

3.ª) $\dfrac{-0{,}01}{4} = \dfrac{x}{1{,}2}$

4.ª) $\dfrac{5 - \frac{1}{2}}{\frac{3}{11}} = \dfrac{1}{x}$

5.ª) $\dfrac{x}{\sqrt{12}} = \dfrac{\sqrt{12}}{4}$

6.ª) $2{,}3 : x = 3 : 9$

7.ª) $0{,}4 : -2 :: -18 : x$

8.ª) $\dfrac{2x}{5} = \dfrac{\frac{1}{3}}{4 - \frac{1}{5}}$

9.ª) $\dfrac{2 + \frac{1}{3}}{1 - \frac{4}{7}} = \dfrac{x}{\frac{9}{49}}$

10.ª) $\left(3 + \dfrac{1}{2}\right) : \dfrac{11}{3} :: \left(3 - \dfrac{1}{2}\right) : x$

11.ª) $\dfrac{3 + \frac{4}{5} \times 15}{1 - \frac{2}{3} : 4} = \dfrac{\frac{1}{3} + \frac{2}{5} : 2}{x}$

12.ª) $(2{,}56 - 3{,}12 \times 0{,}5) : (2{,}2 - 1{,}2 \times 6) = x : (0{,}4 + 0{,}8 \times 2)$.

15. Calcular o valor de x nas seguintes *proporções contínuas*:

1.ª) $24 : x :: x : 6$

2.ª) $\dfrac{56}{x} = \dfrac{x}{14}$

3.ª) $\dfrac{6{,}3}{x} = \dfrac{x}{0{,}7}$

4.ª) $\left(1 - \dfrac{3}{5}\right) : x :: x : \dfrac{72}{45}$.

16. Calcular, por aproximação a menos de 0,1, o valor de x nas seguintes *proporções contínuas*:

1.ª) $18 : x :: x : 34$

2.ª) $3{,}9 : x = x : 12{,}1$

3.ª) $\dfrac{\frac{1}{3}}{x} = \dfrac{x}{\frac{2}{7}}$

4.ª) $\dfrac{1 - \frac{7}{10}}{x} = \dfrac{x}{4 - \frac{1}{3} \times 2}$

17. Calcular x aplicando as propriedades da *composição* e da *decomposição* nas seguintes proporções:

1.ª) $\dfrac{5+x}{x} = \dfrac{13}{8}$ 2.ª) $\dfrac{x-7}{x} = \dfrac{3}{4}$ 3.ª) $\dfrac{x+1}{x} = \dfrac{a+1}{a}$ 4.ª) $\dfrac{6-x}{6+x} = \dfrac{2}{5}$.

18. Determinar a e b, de modo que:

1.º) $\begin{cases} a + b = 11 \\ \dfrac{a}{b} = \dfrac{4}{7} \end{cases}$ 3.º) $\begin{cases} \dfrac{a}{12} = \dfrac{b}{32} \\ a + b = 11 \end{cases}$ 5.º) $\begin{cases} \dfrac{a}{b} = \dfrac{3}{5} \\ a^2 + b^2 = 136 \end{cases}$

2.º) $\begin{cases} a - b = 13 \\ \dfrac{a}{b} = \dfrac{-16}{10} \end{cases}$ 4.º) $\begin{cases} \dfrac{14}{a} = \dfrac{10}{b} \\ a + b = 9{,}6 \end{cases}$ 6.º) $\begin{cases} \dfrac{a}{2} = \dfrac{b}{3} \\ b^2 - a^2 = 45. \end{cases}$

19. Calcular, aplicando a propriedade de uma *série de razões iguais*, os números x, y e z, sabendo-se que:

$$\begin{cases} x + y + z = 34 \\ \dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{z}{9}. \end{cases}$$

20. Os ângulos de um quadrilátero estão entre si como os números 2 3, 5 e 8. Determinar os valores dêsses ângulos sabendo-se que a soma dêles é igual a 360º.

21. Os volumes de dois cubos estão entre si assim como 3 está para 4. Calcular o volume de cada cubo sabendo-se que a soma dêles é igual 21dm^3.

22. O produto de dois números é 60. A razão entre êles é $\dfrac{3}{5}$. Determinar êsses números.

23. Determinar dois números sabendo-se que a razão entre êles é $\dfrac{1}{3}$ e a soma de seus quadrados 90.

24. O produto de dois números é igual a 1 200 e um dêles vale três vêzes o outro. Quais são êsses números?

25. Determinar as dimensões de um retângulo sabendo-se que elas estão na razão $\dfrac{4}{3}$ e que a área dêsse retângulo é igual a 48m^2.

26. Determinar a base e altura de um triângulo de área igual a 48m^2 sabendo-se que a razão entre elas é $\dfrac{3}{2}$.

27. Calcular a *média aritmética* entre os seguintes números:

1.º) 3, 4, 5 e 6   2.º) $\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{1}{2}$, 1, 3, 8   3.º) a, b, c, d.

28. Calcular a *média geométrica* entre os seguintes números:

1.º) 32 e 72

2.º) 8, 27 e 64

3.º) 5.4 e 17,2 (aprox. de 0,1)

4.º) 2,5; 4,1 e 0,5 (aprox. de 0,1).

29. Calcular a *média harmônica* entre os seguintes números:

1.º) 12 e 36 2.º) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$ 3.º) a, b, c e d.

30. Calcular a *média aritmética ponderada* dos seguintes grupos de números com os respectivos pesos:

1.º) 9, 12, 4 e 6 (pesos: 2, 3, 1 e 4)
2.º) 30, 10, 20 e 24 (pesos: 3, 7, 5 e 10)
3.º) a, b, c e d (pesos: m, n, p e q).

NOTA: Outros exercícios no fim do livro, à pág. 295.

Respostas:

1. 1.º) 3 2.º) 1/15 3.º) 2 4.º) -4 5.º) 1 6.º) 2 7.º) 0,000 1 8.º) 1 9.º) $2\sqrt{2}$ 10.º) 2.

2. 1.º) 600 2.º) $-\frac{5}{2}$ 3.º) $\frac{7}{4}$ 4.º) $-\frac{5}{13}$ 5.º) $-\frac{23}{6}$ 6.º) -1.

3. 1.º) 2 2.º) $\frac{3}{400}$ 3.º) $\frac{2}{5}$ 4.º) $\frac{5}{6}$. 4. Lúcia: $2\frac{2}{3}$; Laís: $2\frac{1}{4}$.

5. 2. 6. $-\frac{10}{9}$. 7. 1.ª) $\frac{4}{3}$ 2.ª) $-\frac{2}{a}$ 3.ª) 8 4.ª) $-\frac{1}{9}$.

8. 1.º) $18 : 48 :: 3 : 8$ 2.º) $3/2 : 1/4 :: 5 : 5/6$ 3.º) $2 : 6 :: 3 : 9$ 4.º) $x : x^2 :: x^3 : x^4$ 5.º) $a : b :: c : d$ 6.º) $0,5 : 2 :: 4 : 16$.

9. 1.ª) Não 2.ª) Sim 3.ª) Não 4.ª) Sim 5.ª) Sim 6.ª) Não.

10. 1.º) $4 : 3 :: 8 : 6$ 2.º) $m : n :: p : q$ (uma das maneiras) 3.º) $0,32 : 0,008 :: 4 : 0,01$ 4.º) $1/3 : (-5) :: (-8) : 120$ 5.º) $a : b :: c : d$ 6.º) $1 : 2 :: 5 : 10$.

11. 8 modos diferentes cada uma delas.

12. 1.º) 18 2.º) $-\frac{3}{4}$ 3.º) $\frac{1}{6}$ 4.º) -6. 13. 1.º) 8 2.º) 3.

14. 1.ª) 30 2.ª) $\frac{2}{3}$ 3.ª) $-0,003$ 4.ª) $\frac{2}{33}$ 5.ª) 3 6.ª) 6,9 7.ª) 90 8.ª) $\frac{25}{114}$ 9.ª) 1 10.ª) $\frac{55}{21}$ 11.ª) $\frac{4}{135}$ 12.ª) $-0,4$.

15. 1.ª) 12 2.ª) 28 3.ª) 2,1 4.ª) $\frac{4}{5}$.

16. 1.ª) 24,7 2.ª) 6,8 3.ª) 0,3 4.ª) 1.

17. 1.ª) 8 2.ª) 28 3.ª) a 4.ª) $\frac{18}{7}$.

18. 1.º) 4 e 7 2.º) 8 e -5 3.º) 3 e 8 4.º) 5,6 e 4 5.º) 6 e 10 6.º) 6 e 9.

19. $x=6$, $y=10$ e $z=18$. 20. 40°, 60°, 100° e 160°. 21. 9dm³ e 12dm³.

22. 6 e 10. 23. 3 e 9. 24. 60 e 20. 25. 8m e 6m. 26. 12m e 8m.

27. 1.º) 4,5 2.º) $2\frac{19}{30}$ 3.º) $\frac{a+b+c+d}{4}$.

28. 1.º) 48 2.º) 24 3.º) 9,6 4.º) 1,7.

29. 1.º) 18 2.º) $\frac{1}{3}$ 3.º) $\frac{4}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}$.

30. 1.º) 8,2 2.º) 20 3.º) $\frac{a \times m + b \times n + c \times p + d \times q}{m+n+p+q}$.

§ 2. Números proporcionais. Propriedades e aplicações.

18. Números diretamente proporcionais. ***Propriedade característica.*** Diz-se que os números

$$a, \ b, \ c, \ d, \ \ldots$$

são *diretamente proporcionais* aos correspondentes números da sucessão

$$a', \ b', \ c', \ d', \ \ldots$$

quando a *razão entre qualquer um dos números que compõem a primeira sucessão e o seu correspondente na segunda é constante,* isto é, sempre a mesma. O valor constante das razões é denominado *fator* ou *coeficiente* de proporcionalidade. Exemplo:

Os números 5, 8, 10 e 13

são *diretamente proporcionais* aos números

$$10, \ 16, \ 20 \text{ e } 26,$$

porque as razões $\frac{5}{10}$, $\frac{8}{16}$, $\frac{10}{20}$ e $\frac{13}{26}$

são tôdas iguais a $\frac{1}{2}$, que é o *fator de proporcionalidade* entre estas duas sucessões de números.

A propriedade que caracteriza a existência de duas sucessões de números diretamente proporcionais é a seguinte:

Em duas sucessões de números diretamente proporcionais o quociente de dois números correspondentes é constante.

Assim, se forem diretamente proporcionais as sucessões:

$$a, \ b, \ c, \ d, \ \ldots$$
$$a', \ b', \ c', \ d', \ \ldots$$

devemos ter

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \ldots = k \text{ (coef. de proporcionalidade).}$$

Conhecidos os números de uma sucessão e o fator de proporcionalidade que os liga aos números correspondentes de uma outra sucessão, a determinação dos números que compõem a segunda sucessão é feita *dividindo-se*, respectivamente, os números da primeira pelo fator de proporcionalidade. Exemplo:

Sejam os números: 6, 12, 21 e 27 *diretamente proporcionais* aos números de uma outra sucessão segundo o fator de proporcionalidade *3*. Os números que constituem a segunda sucessão serão obtidos dividindo por 3, respectivamente, os números que formam a primeira, ou seja

$$2, \ 4, \ 7 \ \text{e} \ 9.$$

19. Números inversamente proporcionais. ***Propriedade característica.*** Diz-se que os números da sucessão

$$a, \ b, \ c, \ d, \ \ldots$$

são *inversamente proporcionais* aos correspondentes números da sucessão

$$a', \ b', \ c', \ d', \ \ldots$$

quando forem *diretamente proporcionais aos inversos dos correspondentes* números da segunda sucessão, isto é, quando

$$\frac{a}{\frac{1}{a'}} = \frac{b}{\frac{1}{b'}} = \frac{c}{\frac{1}{c'}} = \ldots = k' \text{ (coef. de proporcionalidade)}$$

ou

$$a\,a' = b\,b' = c\,c' = \ldots = k'.$$

A propriedade que caracteriza a existência de duas sucessões de números inversamente proporcionais é a seguinte:

Em duas sucessões de números inversamente proporcionais o produto de dois números correspondentes é constante.

Conhecidos, agora, os números da primeira sucessão e o coeficiente de proporcionalidade que os liga aos números inversos correspondentes de uma outra sucessão, a determinação dos números que compõem a segunda é feita *dividindo-se* o fator de proporcionalidade, respectivamente, pelos números da segunda. Exemplo:

Sejam os números: 3, 5, 6 e 10, *inversamente proporcionais* aos números de uma outra sucessão segundo o fator de proporcionalidade *60*. Os números que constituem a segunda sucessão serão obtidos dividindo o fator 60, respectivamente, pelos números que formam a primeira, isto é,

$$20, \ 12, \ 10 \ \text{e} \ 6.$$

20. Divisão em partes diretamente proporcionais e em partes inversamente proporcionais a números dados.

I) ***Divisão de um número em partes diretamente proporcionais a números dados.*** *Dividir um número em partes diretamente proporcionais a números dados é determinar outros números na proporção exigida e cuja soma seja igual ao número dado.* Exemplo:

Dividir o número 36 em partes diretamente proporcionais aos números 3, 4 e 5.

Indicando por x, y e z as partes procuradas, devemos ter:

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5},$$

e, pela propriedade das proporções (3.ª), vem:

$$\frac{x+y+z}{3+4+5} = \frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5}.$$

Como $x + y + z = 36$, segue-se que:

$$\frac{36}{12} = \frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5}.$$

Das proporções:

$$\frac{36}{12} = \frac{x}{3}, \quad \frac{36}{12} = \frac{y}{4} \quad \text{e} \quad \frac{36}{12} = \frac{z}{5}$$

tiramos, respectivamente:

$$x = \frac{36 \times 3}{12} = 9, \quad y = \frac{36 \times 4}{12} = 12 \quad \text{e} \quad z = \frac{36 \times 5}{12} = 15$$

e as partes procuradas são: 9, 12 e 15.

De um modo geral, simbolizando por N o número que se quer dividir em partes diretamente proporcionais aos números a, b e c, temos, seguindo o mesmo raciocínio:

$$N \begin{cases} a \to x \\ b \to y \\ c \to z \end{cases} \qquad \text{sendo } \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

$$\text{com} \quad x + y + z = N.$$

Como: $$\frac{x+y+z}{a+b+c} = \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \quad \text{(Prop. das proporções)}$$

ou $$\frac{N}{a+b+c} = \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c},$$

temos as seguintes fórmulas, que fornecem os valores das partes procuradas:

$$\boxed{x = \frac{Na}{a+b+c}} \qquad \boxed{y = \frac{Nb}{a+b+c}} \qquad \boxed{z = \frac{Nc}{a+b+c}}$$

NOTA: Se a divisão deve ser diretamente proporcional a números fracionários, pode-se reduzir ao caso da divisão em partes diretamente proporcionais a números inteiros, desde que se reduzam estas frações ao mesmo denominador, desprezando-se, a seguir, o denominador comum. Exemplo:

Dividir 92 em partes diretamente proporcionais a $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{2}$.

Reduzindo as frações ao mesmo denominador, vem:

$$\frac{9}{12}, \frac{8}{12}, \frac{6}{12}.$$

Divide-se, agora, 92 em partes diretamente proporcionais aos números 9, 8 e 6, isto é:

$$92 \begin{cases} 9 \to x \\ 8 \to y \\ 6 \to z \end{cases} \qquad \text{onde:} \quad \begin{aligned} x &= \frac{92 \times 9}{23} = 36 \\ y &= \frac{92 \times 8}{23} = 32 \\ z &= \frac{92 \times 6}{23} = 24. \end{aligned}$$

As partes procuradas são: 36, 32 e 24.

II) *Divisão de um número em partes inversamente proporcionais a números dados.* *Dividir um número em partes inversamente proporcionais a números dados é dividir o número em partes diretamente proporcionais aos inversos dos números dados.* Exemplo:

Dividir 144 em partes inversamente proporcionais a 3, 4 e 12.

Ora, as partes procuradas x, y e z devem ser diretamente proporcionais aos inversos dos números 3, 4 e 12, respectivamente, isto é,

$$\frac{x}{\frac{1}{3}} = \frac{y}{\frac{1}{4}} = \frac{z}{\frac{1}{12}}$$

ou,
reduzindo-se as frações ao mesmo denominador $\left(\frac{4}{12}, \frac{3}{12}, \frac{1}{12}\right)$,

pode-se dividir 144 em partes diretamente proporcionais aos números 4, 3 e 1. Logo,

$$\frac{x+y+z}{4+3+1} = \frac{x}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z}{1}$$

ou $\frac{144}{8} = \frac{x}{4} \therefore x = 72$; $\frac{144}{8} = \frac{y}{3} \therefore y = 54$; $\frac{144}{8} = \frac{z}{1} \therefore z = 18$,

e as partes procuradas são: 72, 54 e 18.

III) ***Divisão de um número em partes diretamente proporcionais a alguns números dados e inversamente (ou diretamente) proporcionais a outros*** (divisão composta). Neste caso, *basta dividir o número em partes diretamente proporcionais aos números que se obtêm multiplicando os números que compõem a primeira sucessão pelos inversos (ou diretos) dos correspondentes números da segunda.* Exemplo:

Dividir 360 em partes *diretamente proporcionais* a 5, 8 e 10 e *inversamente proporcionais* a 6, 3 e 4.

Devemos ter:

$$360 \begin{cases} 5 \times \frac{1}{6} \to x \\ 8 \times \frac{1}{3} \to y \\ 10 \times \frac{1}{4} \to z \end{cases} \qquad \frac{x}{\frac{5}{6}} = \frac{y}{\frac{8}{3}} = \frac{z}{\frac{10}{4}}$$

ou, reduzindo ao mesmo denominador,

$$\frac{x}{10} = \frac{y}{32} = \frac{z}{30}.$$

e, portanto, $$\frac{x+y+z}{10+32+30} = \frac{x}{10} = \frac{y}{32} = \frac{z}{30}$$

ou $$\frac{360}{72} = \frac{x}{10} = \frac{y}{32} = \frac{z}{30},$$

que, resolvidas, fornecem as partes procuradas:

$$x = 50, \quad y = 160 \quad \text{e} \quad z = 150.$$

21. Aplicação. Regra de sociedade. Quando o número que se divide em partes diretamente ou inversamente proporcionais a outros números, representa o *lucro* ou o *prejuízo* de uma determinada *sociedade* e as partes proporcionais *às partes de cada sócio* no lucro ou prejuízo, a divisão recebe o nome de *regra de sociedade*. Dependendo tal divisão dos *capitais* e dos *tempos* dos sócios, que participam da sociedade destacamos os seguintes casos:

1.º) ***O capital é o mesmo*** para todos os sócios e os ***tempos de participação*** na sociedade ***são diferentes.***

A divisão de lucros ou prejuízos, neste caso, é *diretamente proporcional aos tempos.* Exemplo:

Dois sócios entraram com o mesmo capital para a constituição de uma sociedade. O primeiro trabalhou durante três anos e o segundo durante dois anos. Tendo havido um lucro de Cr$ 450 000,00, pergunta-se: qual é a parte que cabe a cada sócio?

Devemos dividir Cr$ 450 000,00 em partes diretamente proporcionais aos números 3 e 2.

Logo: $\frac{x}{3} = \frac{y}{2}$, onde $x + y = 450\,000{,}00$.

Portanto: $\frac{x+y}{3+2} = \frac{x}{3} = \frac{y}{2}$,

ou $\frac{45}{5} = \frac{x}{3} \therefore x = 270\,000{,}00$,

e $\frac{45}{5} = \frac{y}{2} \therefore y = 180\,000{,}00.$

Assim, ao primeiro sócio coube Cr\$ 270 000,00 e ao segundo, Cr\$ 180 000,00.

2.º) ***O tempo é o mesmo*** e os ***capitais diferentes.***

Neste caso a divisão é *diretamente proporcional aos capitais*. Exemplo:

Três sócios, A, B e C, entraram respectivamente com os capitais de Cr\$ 60 000,00, Cr\$ 40 000,00 e Cr\$ 50 000,00. No fim do primeiro ano de sociedade houve um prejuízo de Cr\$ 30 000,00. Qual é a perda correspondente a cada sócio?

Devemos dividir Cr\$ 30 000,00 em partes diretamente proporcionais a Cr\$ 60 000,00, Cr\$ 40 000,00 e Cr\$ 50 000,00, ou seja:

$$\frac{x}{60} = \frac{y}{40} = \frac{z}{50} \quad \text{onde} \quad x + y + z = 30.$$

Determinando x, y e z pelo modo já conhecido, encontramos os valores:

$$x = 12, \quad y = 8 \quad \text{e} \quad z = 10,$$

que mostram os prejuízos dos três sócios, respectivamente: A = Cr\$ 12 000,00, B = Cr\$ 8 000,00 e C = Cr\$ 10 000,00.

3.º) Os ***capitais*** e os ***tempos são diferentes.***

Neste caso a divisão é *diretamente proporcional aos produtos dos capitais pelos tempos*. Exemplo:

Dissolveu-se uma sociedade na qual o primeiro sócio entrara com o capital de Cr\$ 450 000,00, durante 2 anos e 3 meses, o segundo com Cr\$ 540 000,00 durante 1 ano e 3 meses. O lucro final desta sociedade foi de Cr\$ 160 000,00. Qual a parte do lucro relativa a cada sócio?

O tempo do 1.º sócio foi de 2a 3me = 24me + 3me = 27me.

O tempo do 2.º sócio foi de 1a 3me = 12me + 3me = 15me.

Temos assim:

$$1.^{\circ}\text{ sócio}\begin{cases}\text{capital: } 450\,000{,}00\\ \text{tempo: } 27 \text{ meses}\end{cases} \qquad 2.^{\circ}\text{ sócio}\begin{cases}\text{capital: } 540\,000{,}00\\ \text{tempo: } 15 \text{ meses.}\end{cases}$$

Logo,
$$\frac{x}{450 \times 27} = \frac{y}{540 \times 15},$$

ou
$$\frac{x}{1\,215} = \frac{y}{810},$$

onde
$$\frac{x+y}{2\,025} = \frac{x}{1\,215} = \frac{y}{810},$$

e, portanto,
$$\frac{160}{2\,025} = \frac{x}{1\,215} = \frac{y}{810}$$

o que acarreta para x = Cr\$ 96 000,00 (lucro do 1.º sócio) e y = Cr\$ 64 000,00 (lucro do 2.º sócio).

EXERCÍCIOS

1. Verificar se os números da sucessão: 6, 8, 10 e 12 são *diretamente proporcionais* aos correspondentes da sucessão: 15, 20, 25 e 30.
2. Qual é o coeficiente de proporcionalidade entre as seguintes sucessões de números, *diretamente proporcionais*: 24, 32, 56, 72 e 3, 4, 7, 9?
3. Os números 36, 48, 52 e 60 são *diretamente proporcionais* aos números de uma outra sucessão, sendo o fator de proporcionalidade 4. Quais são os correspondentes números que constituem a segunda sucessão?
4. O número a é *diretamente proporcional* ao número 5 e o coeficiente de proporcionalidade é 10. Qual é o valor de a?
5. Determinar os valores de m e n, nos seguintes grupos de números *diretamente proporcionais*:

   5, 6, 7
   75, m, n.
6. Verificar se os números: 3, 4 e 5 são *inversamente proporcionais* aos números 20, 15 e 12, respectivamente.
7. Qual é o coeficiente de proporcionalidade entre as seguintes sucessões de números *inversamente proporcionais*: 6, 10, 12, 20 e 20, 12, 10, 6?
8. Determinar os valores de m e n, nos seguintes grupos de números *inversamente proporcionais*:

   4, 6, 12
   3, m, n.

9. Verificar se a sucessão de números: 18, 48 e 72 é *inversamente proporcional* aos correspondentes números da sucessão: $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ e $\frac{1}{6}$.

10. Dividir 625 em partes *diretamente proporcionais* a 5, 7 e 13.

11. Repartir 1 200 em partes *diretamente proporcionais* a 26, 34 e 40.

12. Decompor 96 em partes *diretamente proporcionais* a 1,2; $\frac{2}{5}$ e 8.

13. Dividir 21 em partes *inversamente proporcionais* a 9 e 12.

14. Repartir 444 em partes *inversamente proporcionais* a 4, 5 e 6.

15. Decompor 1 090 em partes *inversamente proporcionais* a $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$ e $\frac{7}{8}$.

16. Dividir 380 em partes *inversamente proporcionais* a 0,4; 3,2 e 6,4.

17. Dividir 560 em partes *diretamente proporcionais* a 3, 6 e 7 e *inversamente proporcionais* a 5, 4 e 2.

18. Repartir 108 em partes *diretamente proporcionais* a $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$, e, *inversamente proporcionais* a 5 e 6.

19. Dividir 88 em partes *diretamente proporcionais* a 0,2 e 2, e *inversamente proporcionais* a $\frac{3}{5}$ e $\frac{2}{7}$.

20. Três amigos formaram uma sociedade. O primeiro entrou com Cr$ 60 000,00, o segundo, com Cr$ 75 000,00 e o terceiro, com Cr$ 45 000,00. No balanço anual houve um lucro de Cr$ 30 000,00. Quanto coube do lucro para cada sócio?

21. Repartir uma herança de Cr$ 460 000,00 entre três pessoas na razão direta do número de filhos e na razão inversa das idades de cada uma delas. As três pessoas têm, respectivamente, 2, 4 e 5 filhos e as idades respectivas são 24, 32 e 45 anos.

22. Duas pessoas constituem uma sociedade, entrando cada uma delas com o mesmo capital. O primeiro pemaneceu na sociedade 2a 4me e o segundo 1a 6me. Tendo havido Cr$ 92 000,00 de lucro, qual a parte relativa de cada sócio?

23. Três pessoas, A, B e C, combinaram a 2/1/53 organizar uma casa comercial. Nesse dia, A entrou com Cr$ 150 000,00 de capital. Três meses depois, B figurou na sociedade com o capital de Cr$ 260 000,00 e no dia 2/10/53, C entrou com o capital de Cr$ 440 000,00. O balanço realizado em 2/1/54 registrou um lucro de Cr$ 218 400,00. Qual a parte do lucro que cabe a cada sócio?

24. Um pai deixou a seus dois filhos uma herança para que fôsse dividida em partes diretamente proporcionais às idades. Sabe-se que os filhos receberam, respectivamente, Cr$ 38 000,00 e Cr$ 22 000,00 e as suas idades somam 30 anos. Qual é a idade de cada um?

25. Certa quantia em dinheiro foi distribuída a duas instituições de caridade em partes proporcionais a 2 e 3. A segunda recebeu Cr$ 10 000,00 mais que a primeira. Determinar a quantia distribuída e a parte relativa a cada instituição.

Nota: Outros exercícios no fim do livro, à pág. 297.

Respostas:

1. Sim. Coef. proporc. $= \frac{2}{5}$.
2. 8.
3. 9, 12, 13 e 15.
4. 50.
5. $m = 90$, $n = 105$.
6. Sim. Coef. proporc. = 60.
7. 120.
8. $m = 2$, $n = 1$.
9. Não é.
10. 125, 175 e 325.
11. 312, 408 e 480.
12. 12, 4 e 80.
13. 9 e 12.
14. 180, 144 e 120.
15. 420, 350 e 330.
16. 320, 40 e 20.
17. 60, 150 e 350.
18. 48 e 60.
19. 4 e 84.
20. 1.º) Cr$ 10 000,00, 2.º) Cr$ 12 500,00 e 3.º) Cr$ 7 500,00.
21. Cr$ 120 000,00, Cr$ 180 000,00 e Cr$ 160 000,00.
22. Cr$ 56 000,00 e Cr$ 36 000,00.
23. A = Cr$ 72 000,00, B = Cr$ 93 600,00 e C = Cr$ 52 800,00.
24. 19 e 11 anos.
25. Cr$ 50 000,00, Cr$ 20 000,00 e Cr$ 30 000,00.

§ 3. Grandezas proporcionais. Regras de três. Aplicações.

GRANDEZAS PROPORCIONAIS

22. **Grandezas diretamente proporcionais.** ***Propriedade característica.*** Duas grandezas variáveis (*) dizem-se *diretamente proporcionais* ou simplesmente *proporcionais* quando *aumentando* (ou diminuindo) uma delas de *duas*, *três*, *quatro*, etc., vêzes o seu valor, a outra *também aumenta* (ou diminui) de *duas*, *três*, *quatro*, etc., vêzes o respectivo valor. Exemplo:

(*) *Grandezas variável* é aquela que pode assumir infinitos valores.

Consideremos as grandezas variáveis :

	Comprimento de uma fazenda	e	*quantia de dinheiro*
Se	$3m$	custam	*Cr$* 180,00
temos que	$6m$	custarão	*Cr$* 360,00
e	$9m$	custarão	*Cr$* 540,00

Logo, quando o comprimento da fazenda torna-se duplo, triplo, etc., *o mesmo acontece* com o respectivo custo e as duas grandezas *comprimento da fazenda* e *quantia de dinheiro* são *diretamente proporcionais.*

A propriedade que caracteriza a existência de grandezas diretamente proporcionais é a seguinte:

> **Em duas grandezas diretamente proporcionais a razão entre dois valores de uma delas é igual à razão entre os dois valores correspondentes da outra.**

Assim, no exemplo citado, temos :

$$\downarrow \frac{3}{6} = \frac{180}{360} \downarrow \quad \text{e} \quad \downarrow \frac{6}{9} = \frac{360}{540} \downarrow$$

indicando as flechas do *mesmo sentido*, que, as razões resultaram de grandezas diretamente proporcionais.

23. Grandezas inversamente proporcionais. *Propriedade característica.* Duas grandes variáveis, dizem-se *inversamente proporcionais* quando *aumentando* (ou diminuindo) uma delas de *duas, três, quatro,* etc., vêzes o seu valor, a outra *diminui* (ou aumenta) de *duas, três, quatro,* etc., vêzes o respectivo valor. Exemplo :

Sejam as grandezas variáveis :

	Número de operários	e	*tempo*
Se	5 ***operários*** fazem um certo trabalho em		12 ***dias,***
temos que	10 ***operários*** farão o mesmo trabalho em		6 ***dias,***
e	15 ***operários*** farão o mesmo trabalho em		4 ***dias.***

Logo, quando o *número de operários* torna-se *duplo, triplo,* etc., o *tempo* empregado para realizar o mesmo trabalho, torna-se a *metade,* um *têrço,* etc., e as duas grandezas são *inversamente proporcionais.*

A propriedade que caracteriza a existência de grandezas inversamente proporcionais é a seguinte :

> **Em duas grandezas inversamente proporcionais a razão entre dois valores de uma delas é igual ao inverso da razão entre os dois valores correspondentes da outra.**

Assim, no exemplo considerado, temos :

$$\downarrow \frac{5}{10} = \frac{6}{12} \uparrow \quad \text{e} \quad \downarrow \frac{10}{15} = \frac{4}{6} \uparrow$$

tendo agora as flechas, *sentido contrário.*

Observação. Para a caracterização da proporcionalidade de duas grandezas não basta verificar se o aumento de uma delas acarreta o aumento da outra. É necessário que *duplicando* o valor de uma delas, por exemplo, o valor correspondente da outra também *duplique.*

Assim : o *lado de um quadrado* e a sua *área* não são grandezas proporcionais, pois, quando o lado *duplica* de valor a área *quadruplica;* a *aresta de um cubo* e o seu volume, também não são grandezas proporcionais, pois, se a aresta *duplica,* o volume do cubo torna-se *oito vêzes maior.*

24. Grandezas proporcionais a várias outras. *Propriedade característica.* Diz-se que uma grandeza variável é *proporcional a várias outras,* se é diretamente ou inversamente proporcional a cada uma delas, *quando as demais não variam.* Exemplos :

1.º) A *área de um retângulo* é diretamente proporcional tanto à *base* como à *altura* dêste retângulo.

De fato, seja o retângulo :

base = 4cm, altura = 3cm, área = 12cm².

Duplicando a base, conservada a *altura fixa,* a *área também duplicará,* pois, agora temos :

base = 8cm, altura = 3cm, área = 24cm².

2.º) O *tempo* empregado para se efetuar a escavação de um buraco é diretamente proporcional ao *volume de terra extraída* e inversamente proporcional ao *número de homens* empregados.

De fato, basta observar que:

se	4 homens	em	12 dias	extraem	$100m^3$	de terra,
temos que	8 "	"	6 "	extrairão	$100m^3$	" "
e	8 "	"	12 "	"	$200m^3$	" "

isto é, não variando, nas duas primeiras linhas, a grandeza *volume* ($100m^3$), as grandezas *número de homens* e *tempo* são *inversamente proporcionais* e não variando, na terceira linha, a grandeza *número de homens* (8), as grandezas *tempo* e *volume* são *diretamente proporcionais.*

A propriedade que caracteriza a existência de uma grandeza diretamente proporcional a várias outras é a seguinte:

> **Se uma grandeza é diretamente proporcional a várias outras os valores que exprimem sua medida são diretamente proporcionais aos produtos dos valores correspondentes das outras.**

No caso das grandezas serem inversamente proporcionais à mesma propriedade, será aplicada em relação aos *inversos* dos valores correspondentes às medidas das outras.

Regras de três

25. Regra de três simples. Chama-se *regra de três simples* ao processo de cálculo mediante o qual são resolvidos problemas que envolvem *duas grandezas direta ou inversamente proporcionais.* Conhecidos *um par de valores correspondentes* das duas grandezas, procura-se *um segundo valor de uma delas* que corresponda a um segundo valor assinalado para a outra.

Se as grandezas são diretamente proporcionais a regra de três diz-se *direta.* Sendo as grandezas inversamente proporcionais a regra de três é denominada *inversa.*

26. Resolução de problemas de regra de três simples. Temos dois métodos:

1.º) das proporções;

2.º) da redução à unidade.

Método das proporções. Consiste em obter com os três dados e a incógnita procurada uma *proporção* e dela tirar o valor desejado. Exemplos:

1. Se 15m de certa fazenda custam Cr$ 900,00, quanto custarão 32m dessa fazenda?

Indicando por x o preço dos 32m de fazenda, temos a seguinte *disposição prática:*

$$\downarrow \begin{array}{lcl} 15m & \text{———} & 900{,}00 \\ 32m & \text{———} & x \end{array} \downarrow$$

Como nesse exemplo as grandezas *comprimento de fazenda* e *quantia em dinheiro* são diretamente proporcionais, assinalamos essa variação na disposição prática mediante flechas no *mesmo sentido.*

A proporção resultante é:

$$\frac{15}{32} = \frac{900}{x},$$

$$x = \frac{32 \times 900}{15} = 1920.$$

Logo, os 32m de fazenda custarão Cr$ 1920,00.

2. Se 6 operários levam 10 dias para levantar um muro ao redor de um campo de futebol, quantos operários seriam necessários para levantar o mesmo muro em 3 dias?

Como o *tempo* necessário para efetuar uma obra é *inversamente proporcional* ao *número de operários* empregados, temos a seguinte disposição prática, agora assinalada com flechas de *sentidos contrários:*

$$\downarrow \begin{array}{lcl} 6 \text{ op.} & \text{———} & 10 \text{ dias} \\ x & \text{———} & 3 \text{ dias} \end{array} \uparrow$$

Invertendo a segunda razão $\left(\frac{10}{3}\right)$, resultará a seguinte proporção:

$$\frac{6}{x} = \frac{3}{10},$$

onde

$$x = \frac{6 \times 10}{3} = 20.$$

Portanto, são necessários 20 operários para levantar o muro em 3 dias.

Método da redução à unidade. Neste método reduz-se o valor conhecido de uma grandeza à *unidade*, e, a seguir, da unidade determina-se o *valor procurado* da grandeza. Resolvamos, como exemplos, os dois problemas anteriores por êste método:

1. Se 15m de certa fazenda custam Cr$ 900,00, quanto custarão 32m dessa fazenda?

Temos o seguinte raciocínio:

Se 15m custam 900,00

$\boxed{1m}$ custará 15 *vêzes menos*, ou $\frac{900,00}{15} = 60,00$

e 32m custarão 32 *vêzes mais*, ou $32 \times 60,00 = 1920,00$.

2. Se 6 operários levam 10 dias para levantar um muro ao redor de um campo de futebol, quantos operários seriam necessários para levantar o mesmo muro em 3 dias?

Temos:

Se o muro é levantado

em 10 dias por .... 6 op.

em $\boxed{1 \text{ dia}}$ será por um n.º de op. 10 *vêzes maior*, ou 10×6 op. = 60 op.

e em 3 dias será por um n.º de op. 3 vêzes menor, ou $\frac{60 \text{ op.}}{3}$

27. Regra de três composta. Enquadram-se sob êste nome os problemas que envolvem *mais de duas grandezas variáveis*. A grandeza cujo valor é procurado pode ser diretamente ou inversamente proporcional a tôdas as outras ou ainda diretamente proporcional a umas e inversamente proporcional a outras.

28. Resolução de problemas de regra de três composta. Usam-se os métodos já estudados na regra de três simples: o das proporções e o da redução à unidade.

Método das proporções. Exemplo:

Em 6 dias de trabalho aprontam-se 720 uniformes escolares fazendo funcionar 16 máquinas de costura. Em quantos dias se podem aprontar 2 160 uniformes escolares, fazendo funcionar sòmente 12 máquinas iguais às primeiras?

Temos a seguinte disposição prática:

6 dias	720 unif.	16 máq.
x	2 160	12.

Fixando a 3.ª grandeza (*n.º de máquinas*), vemos que a 1.ª grandeza (*n.º de dias*) e a 2.ª (*n.º de uniformes*) são *diretamente proporcionais*, pois, *duplicando* o valor de uma delas *duplicará* também o valor da outra. Fixando, agora, a 2.ª grandeza, observamos que a 1.ª e a 3.ª são *inversamente proporcionais*, pois, *duplicando* o número de máquinas, o número de dias (tempo) empregado para fazer a mesma quantidade de uniformes reduz-se *à metade*.

Assim sendo, a disposição prática passará a ser:

↓ 6	| 720	↑ 16
x	↓ 2 160	| 12

ou, invertendo os correspondentes valores da 3.ª grandeza:

6	720	12
x	2 160	16.

Lembrando a propriedade que caracteriza a existência de uma grandeza diretamente proporcional a várias outras (os valores que exprimem sua medida são diretamente proporcionais aos *produtos* dos valores correspondentes das outras), vem:

$$\begin{array}{cc} 6 & 720 \times 12 \\ x & 2\,160 \times 16. \end{array}$$

Construindo a respectiva proporção, temos:

$$\frac{6}{x} = \frac{720 \times 12}{2\,160 \times 16},$$

ou

$$x = \frac{6 \times 2\,160 \times 16}{720 \times 12} = 24.$$

Logo, serão necessários 24 dias para se aprontarem 2 160 uniformes, fazendo funcionar 12 máquinas.

Método da redução à unidade. (O mesmo exemplo)

Se com 16 máq. se fazem 720 unif. em 6 dias,

com 1 máq. se fazem 720 unif. em 6×16 dias,

e, com $\boxed{\text{1 máq.}}$ se faz $\boxed{\text{1 unif.}}$ em $\dfrac{6 \times 16}{720}$ dias.

Logo, 12 máq. farão 1 unif. em $\dfrac{6 \times 16}{12 \times 720}$ dias,

e 12 máq. farão 2 160 unif. em $\dfrac{2\,160 \times 6 \times 16}{12 \times 720}$ dias $= 24$ dias.

Observação. Na resolução de problemas de regra de três composta, em qualquer dos dois métodos, pode-se usar a seguinte *regra prática:*

a) colocam-se na disposição prática, já conhecida, as diversas grandezas que figuram no problema;

b) invertem-se as posições dos dois valores correspondentes das diversas grandezas que são inversamente proporcionais (16 e 12 foram os valores trocados no exemplo dado), em relação à grandeza, cuja variação x se procura;

c) o valor de x é dado pela fração que tem para *numerador* os seguintes valores da disposição prática: o oposto a x (6 no exemplo) e os pertencentes à mesma linha de x (2 160 e 16, no exemplo) e para *denominador* o produto dos valores pertencentes à outra linha (720 e 12 no exemplo).

Assim, no exemplo já estudado, temos com a aplicação da *regra prática:*

a)
$$\begin{array}{lll} \downarrow 6d & \downarrow 720 \text{ unif.} & \uparrow 16 \text{ máq.} \\ x & 2\,160 & 12 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{ccc} 6 & 720 & 12 \\ x \text{-------} & 2\,160 \text{---------} & 16 \end{array}$$

c)
$$x = \frac{6 \times 2\,160 \times 16}{720 \times 12} = 24 \text{ (dias).}$$

Outros exemplos:

1. Foram empregados 24kg de fio para tecer 120m de fazenda de 0,82m de largura. Quantos metros de fazenda de 1,23m de largura serão tecidos com 30kg do mesmo fio?

a)
$$\begin{array}{lll} \downarrow 24\text{kg} & \downarrow 120\text{m} & \uparrow 0{,}82\text{m} \\ 30 & x & 1{,}23 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{ccc} 24 & 120 & 1{,}23 \\ 30 \text{---------} & x \text{--------} & 0{,}82 \end{array}$$

c)
$$x = \frac{120 \times 20 \times 0{,}82}{24 \times 1{,}23} = 100.$$

Resposta: 100m.

2. Quantos dias levarão 18 operários, que trabalham 7 horas por dia, para construir um canal de 42m de comprimento, 5m de largura e 2m de profundidade, num certo terreno A, sabendo-se que 10 operários trabalhando 9 horas por dia, levaram 21 dias para construir um canal de 15m de comprimento, 3m de largura e 4m de profundidade, num terreno B que apresentou *metade* das dificuldades das que estão sendo apresentadas pelo terreno A?

a)

↓ x dias	↑ 18 op.	↑ 7 h/d	42m×5m×2m	1 dificuld.
21	10	9	↓ 15m×3m×4m	↓ $\frac{1}{2}$

b)

x	10	9	420	1
21	18	7	180	$\frac{1}{2}$

c)

$$x = \frac{21 \times 10 \times 9 \times 420 \times 1}{18 \times 7 \times 180 \times \frac{1}{2}} = 70.$$

Resposta: 70 dias.

EXERCÍCIOS

GRANDEZAS PROPORCIONAIS :

1. A *soma* de dois números é diretamente proporcional a cada uma da parcelas?
2. Verificar se a *diferença* entre dois números é inversamente proporcional ao subtraendo.
3. Como é o *produto* de dois números em relação a cada um de seus fatôres? E o *quociente* em relação ao divisor?
4. Como é a variação de uma *fração* em relação ao seu numerador e a seu denominador?
5. Como são as grandezas variáveis ; *velocidade* de um automóvel e *tempo* necessário para percorrer a via Presidente Dutra (S. Paulo - Rio de Janeiro)?
6. Exprimir, em símbolos, que a *densidade* de um corpo é diretamente proporcional à sua massa e inversamente proporcional ao seu volume.

REGRA DE TRÊS SIMPLES :

7. Se 4kg de uma certa substância custam Cr$ 72,00, quanto custarão 5,5kg desta substância?
8. Se um corte de 2,80m de tecido custa Cr$ 840,00, quanto custará 20,50m deste tecido?
9. Cem quilogramas de trigo fornecem 85 de farinha. Que quantidade de farinha se obterá com 150 sacas de trigo de 75 quilogramas cada uma?

10. Se 14 pedreiros levam 180 dias para construir uma casa, quanto tempo levarão para fazê-la 10 pedreiros?
11. Um automóvel percorre 240km em 3 horas. Quanto tempo levará para percorrer 400km?
12. Um trem, com a velocidade de 60km/h, faz o percurso entre as cidades A e B, em 2 horas. Quanto tempo levará o trem para fazer êste mesmo percurso se a sua velocidade passa a ser de 80km/h?
13. Uma roda dá 2 376 voltas em 9 minutos. Quantas voltas dará em 1h 27min?
14. Duas rodas dentadas que estão engrenadas uma na outra têm, respectivamente, 12 e 54 dentes. Quantas voltas dará a menor enquanto a maior dá 8?
15. Calcular a altura de um edifício que projeta uma sombra de 19,60m no mesmo instante em que um bambu, de 3,8m, plantado verticalmente, projeta uma sombra de 4,9m?
16. Se um relógio adianta 18 minutos em 1 dia, quanto adiantará em $6\frac{3}{4}$ horas?
17. De duas fontes, a primeira jorra 18*l* por hora e a segunda 80*l*. Qual é o tempo necessário para esta última jorrar a mesma quantidade de água que a primeira jorra em 25 minutos?
18. Num acampamento 30 homens dispõem de víveres para 2 mêses. Tendo chegado ao acampamento mais 90 homens, pergunta-se por quanto tempo o acampamento disporá de víveres?
19. Um avião comercial, com a velocidade de 450km por hora, efetua a viagem entre São Paulo e Pôrto Alegre em 2h. Em quanto tempo, um avião a jacto, de velocidade igual a 1 200km por hora, faria a mesma viagem?
20. Um negociante pagou Cr$ 330,00 por uma peça de fita e Cr$ 264,00 por outra de mesma qualidade. Qual é o comprimento de cada uma das peças se a primeira tem 12m mais que a segunda?

REGRA DE TRÊS COMPOSTA :

21. Num internato, 35 alunos gastam Cr$ 15 400,00 pelas refeições de 22 dias. Quanto gastariam 100 alunos pelas refeições de 83 dias neste internato?
22. Empregaram-se 27,4kg de lã para tecer 24m de fazenda de 60cm de largura. Qual será o comprimento da fazenda que se poderia tecer com 3,425 toneladas de lã para se obter uma largura de 90cm?
23. Os 2/5 de um trabalho foram feitos em 10 dias por 24 operários, que trabalharam 7 horas por dia. Em quantos dias se poderá terminar êsse trabalho, sabendo que foram licenciados 4 operários e que se trabalham agora 6 horas por dia? (NOTA : lembrar que faltam 3/5 do trabalho para o seu término).

24. Se com 36kg de fio foram tecidos 126m de fazenda de 0,60m de largura, pergunta-se, quantos metros de fazenda de 0,72m de largura se podem tecer com 48kg do mesmo fio?

25. Uma adega de vinho abastece 35 homens por um mês dando a cada um dêles 3/5 de litro por dia. Se os homens ficassem reduzidos a 20 e se cada um dêles recebesse 3/4 de litro, quantos dias a adega poderia abastecer êstes homens? (NOTA: lembrar que 3/5 é menor que 3/4).

26. Um automobilista percorre certa distância em 70 horas caminhando 10 horas por dia. Aumentando a velocidade de seu automóvel em 2/5, quantas horas diárias deverá fazer para percorrer a mesma distância sòmente em 50 horas? (NOTA: a nova velocidade será representada por 7/5 (5/5+2/5)].

27. Uma equipe de mineiros composta de 15 homens extraiu, em 30 dias, 3,5 toneladas de carvão. Se esta equipe fôr aumentada para 20 homens, em quanto tempo será extraída a mesma quantidade de carvão?

28. Dois cavalos, cujos valores têm sido apreciados como diretamente proporcionais às suas fôrças e inversamente proporcionais às suas idades, têm: o primeiro 3a 9me e o segundo 5a 4me, sendo que sua fôrças estão entre si (1.º para o 2.º), assim como 3 está para 4. Se o primeiro foi vendido por Cr$ 2 400,00, qual deve ser o preço de venda do segundo?

29. Um andarilho percorre certa distância em 56 horas, andando 10 horas por dia. Aumentando a sua velocidade em 2/5, pergunta-se, quantas horas diárias deve andar para vencer a mesma distância em 48 horas?

30. Para alimentar 15 cavalos durante 11 dias são necessários 2 200kg de alfafa. Retirando-se 7 cavalos, em quanto tempo serão consumidos 1 280kg de alfafa?

31. Se 8 homens recebem £ 11, por 5 dias de trabalho de 9h diárias, quantas horas diárias deverão trabalhar 5 homens para ganhar £ 13-15 em 9 dias?

32. Se três homens podem arar um campo de 8ha em 5 dias, trabalhando 8 horas diárias, em quantos dias 8 homens poderão arar 192ha trabalhando 12 horas diárias?

33. Com 16 máquinas de costura aprontaram-se 720 uniformes em 6 dias de trabalho. Quantas máquinas serão necessárias para confeccionarem 2 160 uniformes em 24 dias?

34. Se 54 operários trabalhando 5 horas por dia levaram 45 dias para construir uma praça de forma retangular de 225m de comprimento por 150m de largura, quantos operários serão necesásrios para construir em 18 dias, trabalhando 12 horas por dia, outra praça retangular de 195m de comprimento por 120m de largura?

35. Para construir um canal de 104m de comprimento por 5m de profundidade e 7m de largura, 100 operários, trabalhando 7 horas por dia levaram 2 mêses e meio. Aumentando, de 40 o número de operários e fazendo-os trabalhar 10 horas por dia, pergunta-se: em quanto tempo os operários construiriam um segundo canal com o mesmo comprimento do primeiro, porém de profundidade e largura duplas das do primeiro?

36. Se com 1 000m³ de água se rega um campo de 450 hectares durante 20 dias, qual é a quantidade de água necessária para se regar outro campo de 200 hectares, durante 30 dias?

37. Para o piso de uma sala empregaram-se 750 tacos de madeira de 45cm de comprimento por 8cm de largura. Quantos tacos de 40cm de comprimento por 7,5cm de largura são necessários para um piso cuja superfície é dupla da anterior?

38. Se 10 operários, trabalhando 8 horas diárias, levantam em $5\frac{1}{2}$ dias uma parede de 22m de comprimento por 0,45m de espessura, em quanto tempo 16 operários, trabalhando também 8 horas por dia, levantam outra parede de 18m de comprimento, 0,30m de espessura e de altura duas vêzes maior que a primeira?

39. Um bloco de mármore de 3m de comprimento, 1,50m de largura e 0,60 de altura pesa 4 350kg. Quanto pesará um outro bloco do mesmo mármore cujas dimensões são: comprimento 2,20m, largura 0,75m e altura 1,20m?

40. Para a construção de um atêrro 18 operários trabalhando 10 horas por dia, durante 6 dias, conduziram 1 680m³ de terra a 30 metros de distância. Qual o volume de terra que seria transportado a 35m de distância, se êstes operários trabalhassem 11 dias de 12 horas de trabalho?

NOTA: Outros exercícios no fim do livro, às págs. 299 e 300.

Respostas:

1. Não (duplicando só uma parcela não duplica a soma).
2. Não é.
3. O produto é diretamente proporcional aos fatôres e o quociente inversamente proporcional ao divisor.
4. Diretamente proporcional em relação ao numerador e inversamente proporcional em relação ao denominador.
5. Inversamente proporcionais.
6. $d = \frac{m}{v}$.
7. Cr$ 99,00.
8. Cr$ 6 150,00.
9. 9 562,5kg.
10. 252 dias.
11. 5h.
12. 1h 30m.
13. 22 968 voltas.
14. 36.
15. 15,20m.
16. 5min 3,72seg.
17. 5min 37,5seg.
18. 15 dias.
19. 45min.
20. 60m e 48m.
21. Cr$ 166 000,00.
22. 2 000m.
23. 21 dias.
24. 140m.
25. 42 dias.

26. 10 horas.	31. 10 horas.	37. 1 800.
27. $22\frac{1}{2}$ dias.	32. 30 dias.	
	33. 12.	38. $3\frac{3}{4}$ d = 3d 18h
28. Cr$ 2 250,00.	34. 39 op.	
29. 8h 20m.	35. 5 mêses.	39. 3 190kg.
30. 12 dias.	36. 666,666m³.	40. 3 168m³.

§ 4. Percentagem ou Porcentagem. Taxa milesimal. Juros simples. Aplicações.

29. Cálculos por cento e por mil. Os *descontos* que geralmente são concedidos nas compras e nos pagamentos assim como os *confrontos* de um conjunto de unidades com um conjunto maior de unidades, da mesma espécie, são calculados, comumente, tomando por *base* os fatôres 100 e 1 000 sob os nomes de ***tanto por cento*** (ou *percentagem*, e ***tanto por mil***.

O valor que se toma em cada 100 unidades é chamado *taxa centesimal* e o valor que se toma em cada 1 000 unidades, *taxa milesimal*. Exemplos:

1. *Taxa de 5 por cento* significa que para cada 100 unidades se calculam 5. Indicação: 5%.
2. *Taxa de 12 por mil* significa que para cada 1 000 unidades se calculam 12. Indicação: 12 ‰.

Usando os seguintes símbolos:

i para *taxa*;

C para o número que se opera, também denominado *principal* ou *capital*;

p para indicar o valor de *tanto por cento* ou *percentagem*;

P para indicar *tanto por mil*;

já consagrados nesses problemas, que ***são de regra de três***, podemos estabelecer certas fórmulas para facilidade do cálculo. Assim, empregando o raciocínio já conhecido, temos:

se a 100 corresponde i ou $\downarrow 100 \quad \downarrow i$
a C corresponderá p $\quad\ \ C \quad\ p$

Armando a proporção:

$$\frac{100}{C} = \frac{i}{p}$$

e tirando os valores, respectivamente, de p, i e C, vem as *fórmulas*:

$p = \dfrac{C \times i}{100}$ (dá a *percentagem*)	$i = \dfrac{100 \times p}{C}$ (dá a *taxa*)	$C = \dfrac{100 \times p}{i}$ (dá o *capital*)

Da mesma forma:

se a 1 000 corresponde i ou $\downarrow 1\,000 \quad \downarrow i$
a C corresponderá P $\quad\ \ C \quad\ P$

donde:

$$\frac{1\,000}{C} = \frac{i}{P}$$

e as fórmulas serão:

$P = \dfrac{C \times i}{1\,000}$ (dá *tanto por mil*)	$i = \dfrac{1000 \times P}{C}$ (dá a *taxa*)	$C = \dfrac{1000 \times P}{i}$ (dá o *capital*)

Aplicações.

1.ª) Calcular 5% de Cr$ 720,00.

Aplicando a fórmula: $p = \dfrac{C \times i}{100}$ onde $\begin{cases} C = 720,00 \\ i = 5 \end{cases}$

temos:

$$p = \frac{720,00 \times 5}{100} = 36,00.$$

Logo, 5% de Cr$ 720,00 são Cr$ 36,00.

2.ª) Sabendo-se que 2 ‰ da população de uma cidade de 120 000 habitantes são paraquedistas, pede-se o número de paraquedistas dessa cidade.

Aplicando a fórmula: $P = \dfrac{C \times i}{1\,000}$ onde $\begin{cases} C = 120\,000 \\ i = 2 \end{cases}$

temos: $$P = \frac{120\,000 \times 2}{1\,000} = 240.$$

Logo, nessa cidade existem 240 paraquedistas.

3.ª) Em um negócio de Cr\$ 48 000,00 perdeu-se a importância de Cr\$ 2 400,00. Determinar a *taxa por cento* da perda

De $i = \dfrac{100 \times p}{C}$, temos: $i = \dfrac{100 \times 2\,400{,}00}{48\,000{,}00} = 5.$

Portanto, a perda foi de 5%.

4.ª) Numa firma houve um lucro de Cr\$ 36 000,00 à taxa de 6%. Determinar o capital inicial (principal).

De $C = \dfrac{100 \times p}{i}$, temos: $C = \dfrac{100 \times 36\,000{,}00}{6} = 600\,000{,}00.$

Portanto, o capital inicial foi de Cr\$ 600 000,00.

30. Juros simples. Chama-se *juro* ou *interêsse* a compensação, em dinheiro, que se recebe emprestando uma certa quantia por um determinado tempo. O *juro* (j) é diretamente proporcional à quantia emprestada, que se denomina *capital* (c), ao *tempo* (t) de duração do empréstimo e é estabelecido sob a forma de *percentagem* (i) por um ano. Assim, a taxa de 5% ao ano significa que o capital 100 produz 5 em um ano. Exemplo:

A importância de Cr\$ 100,00 com a taxa de 5% produzirá Cr\$ 5,00 em um ano.

A época em que finda a duração do empréstimo é denominada *vencimento*.

Chama-se *montante* ou *capital acumulado* a soma de um certo capital com os próprios juros.

O juro é *simples* quando não é somado ao capital para o cálculo de novos juros nos tempos seguintes. Caso contrário, diz-se *juro composto*. Estudaremos em nosso curso, sòmente o juro simples.

31. Fórmulas sôbre juros simples. Sejam:

c — ***capital***
i — ***taxa*** por ano
t — ***tempo*** expresso em anos
j — ***juro simples*** produzido.

O cálculo dos juros simples reduz-se a um problema de *regra de três composta*, pois, se:

o capital 100 em 1 ano produz i
o capital c em t anos produzirá j

ou

$$\begin{array}{ccc} 100 & 1 & i \\ \downarrow c & \downarrow t & \downarrow j \end{array}$$

Armando a proporção:

$$\frac{i}{j} = \frac{100 \times 1}{c \times t},$$

tiramos o valor de j para a obtenção da *fórmula do juro*, isto é:

$$\boxed{j = \frac{c \times i \times t}{100} = \frac{cit}{100}}$$

Desta fórmula podemos tirar os valores de c, i, t, pois, escrita sob a forma:

$$cit = 100j$$

encontramos fàcilmente:

$$\boxed{c = \frac{100j}{it} \quad \text{(dá o } capital\text{)}} \qquad \boxed{i = \frac{100j}{ct} \quad \text{(dá a } taxa\text{)}} \qquad \boxed{t = \frac{100j}{ci} \quad \text{(dá o } tempo\text{)}}$$

Observação. No emprêgo das fórmulas deve-se sempre referir i e t à mesma unidade, isto é, a taxa sendo ao *ano*, ao *mês* ou ao *dia*, o tempo deve ser reduzido, respectivamente, a *ano*, a *mês* ou a *dia*. Para facilidade do cálculo prefere-se, às vêzes, o emprêgo das fórmulas de juro já tendo i e t reduzidos à mesma unidade.

Assim, se m designa o tempo em meses e d em dias, as fórmulas correspondentes, levando em conta que:

$$1\text{m} = \frac{1}{12} \text{ do ano e } 1\text{d} = \frac{1}{360} \text{ do ano (*)}$$

serão

$$j = \frac{c \times i \times \frac{1}{12} m}{100} \quad \text{ou} \quad \boxed{j = \frac{cim}{1\,200}}$$

$$j = \frac{c \times i \times \frac{1}{360} d}{100} \quad \text{ou} \quad \boxed{j = \frac{cid}{36\,000}}$$

Aplicações.

1.ª) Qual é o *juro* produzido por um capital de Cr$ 8 500,00 emprestado a 10% ao ano, durante *4 anos*?

Temos:
$c = 8\,500{,}00$
$i = 10\%$ (ao ano)
$t = 4$ anos
$j = ?$

Fórmula a ser empregada: $j = \dfrac{cit}{100}$.

Portanto: $j = \dfrac{8\,500{,}00 \times 10 \times 4}{100} = 3\,400{,}00.$

(*) Ano *comercial*: 360 dias.

Logo, o *juro* produzido é de Cr$ 3 400,00.

2.ª) Que *juro* rendeu um capital de Cr$ 12 000,00, empregado a 9% ao ano, durante 2a 3me?

Temos: $c = 12\,000{,}00$
$i = 9\%$ (ao ano)
$t = 2\text{a } 3\text{me} = 24\text{me} + 3\text{me} = 27\text{me}$ (meses)
$j = ?$

Fórmula a ser empregada: $j = \dfrac{cim}{1\,200}$, onde $m = 27$.

Portanto: $j = \dfrac{12\,000{,}00 \times 9 \times 27}{1\,200} = 2\,430{,}00.$

Logo, o *juro* rendido foi de Cr$ 2 430,00.

3.ª) Um certo *capital* à taxa de 11 % ao ano, rendeu Cr$ 22 000,00 de juro durante 5 anos. Determinar êsse capital.

Temos:
$i = 11\%$ (ao ano)
$j = 22\,000{,}00$
$t = 5$ anos
$c = ?$

Fórmula a ser empregada: $c = \dfrac{100j}{it}$.

Portanto: $c = \dfrac{100 \times 22\,000{,}00}{11 \times 5} = 40\,000{,}00.$

Logo, o *capital* foi de Cr$ 40 000,00.

4.ª) A que *taxa* foi empregado um capital de Cr$ 90 000,00 que, em 150 dias, rendeu um juro de Cr$ 4 500,00?

Temos:
$c = 90\,000{,}00$
$t = 150\text{d}$ (dias)
$j = 4\,500{,}00$
$i = ?$

Fórmula a ser empregada:

a partir de $j = \dfrac{cid}{36\,000}$, onde $36\,000j = cid$ e $i = \dfrac{36\,000j}{cd}$.

Portanto: $i = \dfrac{36\,000 \times 4\,500{,}00}{90\,000 \times 150} = 12.$

Logo, a *taxa* foi de 12% ao ano.

5.ª) Determinar o *tempo* em que foi empregado o capital de Cr\$ 18 000,00 que a $9\frac{1}{2}\%$ ao ano produziu um juro de Cr\$ 3 800,00.

Temos: $c = 18\,000{,}00$

$$i = 9\frac{1}{2}\% = \frac{19}{2}\% \text{ (ao ano)}$$

$$j = 3\,800{,}00$$
$$t = ?$$

Fórmula a ser empregada: $t = \dfrac{100j}{ci}$.

Portanto: $t = \dfrac{100 \times 3\,800{,}00}{18\,000{,}00 \times \dfrac{19}{2}} = \dfrac{20}{9} = 2\dfrac{2}{9}$.

Logo, o *tempo* foi de $2\frac{2}{9}$ anos ou reduzindo: 2a 2me 20d.

32. Operações com o montante. Indicando por M o *montante*, devemos ter por definição:

$$M = c + j,$$

onde c é o capital primitivo e j o juro rendido por tal capital.

Substituindo na expressão do montante o valor de $j = \dfrac{cit}{100}$, vem:

$$M = c + \frac{cit}{100} = \frac{100c + cit}{100} = \frac{c\,(100 + it)}{100},$$

onde podemos ressaltar as duas fórmulas:

$$\boxed{M = \frac{c\,(100 + it)}{100} \quad \text{(dá o } \textit{montante}\text{)}} \quad \text{e} \quad \boxed{c = \frac{100M}{100 + it} \quad \text{(dá o } \textit{capital primitivo}\text{)}}$$

Aplicação. Sabendo-se que o montante no fim de 2a 3m, à taxa de 6% ao ano, é de Cr\$ 13 620,00, calcular o *capital primitivo* e o *juro*.

Aplicando a fórmula $c = \dfrac{100M}{100 + it}$, temos:

$$c = \frac{100 \times 13\,620{,}00}{100 + 6 \times \dfrac{27}{12}} \qquad \left(t = 2 + \frac{3}{12} = \frac{27}{12}\right)$$

$$c = \frac{1\,362\,000{,}00 \times 2}{227} = 12\,000{,}00.$$

Sendo $c =$ Cr\$ 12 000,00, o juro será:

Cr\$ 13 620,00 − Cr\$ 12 000,00 = Cr\$ 1 620,00

Nota: Poder-se-ia, também, aplicar diretamente a fórmula

$$C = \frac{1\,200 \,.\, M}{1\,200 + im}.$$

33. Divisor fixo. Nas Caixas Econômicas, nos bancos e nas demais emprêsas comerciais onde os movimentos de depósitos e retiradas de dinheiro é bastante intenso, usam-se métodos mais rápidos para o cálculo de juros. Um dêles é o método chamado do *divisor fixo*, para cálculo de juros, por dia, de um capital c a uma taxa i. Deve-se usar a fórmula do juro, expressa em dias, isto é, $j = \dfrac{cid}{36\,000}$.

Chamando de *divisor fixo em relação à taxa* i ao quociente da divisão de 36 000 por i, e indicando-o com a notação:

$$D = \frac{36000}{i},$$

temos, substituindo êste valor na fórmula $j = \dfrac{cid}{36\,000}$ $\left(\text{onde } \dfrac{i}{36\,000} = \dfrac{1}{D}\right)$:

$$\boxed{j = \frac{cd}{D}}$$

Aplicação. Na Caixa Econômica do Estado de São Paulo, que paga juro de 5% ao ano, o *divisor fixo* é $D = \dfrac{36\,000}{5} = 7\,200$.

Logo, se alguém quiser saber o juro que o capital de Cr$ 64 800,00 rendeu, em 13 dias, nessa Caixa, basta aplicar a fórmula acima usando para D o valor 7 200, isto é:

$$j = \frac{cd}{7\,200} = \frac{64\,800 \times 13}{7\,200} = 117{,}00.$$

Portanto, o juro procurado é de Cr$ 117,00.

Os divisores fixos mais usados, para as diferentes taxas existentes, constam do quadro:

i	5%	6%	8%	9%	10%	12%
D	7 200	6 000	4 500	4 000	3 600	3 000

EXERCÍCIOS

Percentagens e taxa milesimal:

1. Calcular:
   1.º) 6% de Cr$ 1 210,00.
   2.º) $9\frac{1}{2}$ % de Cr$ 500,00.
   3.º) 0,5% de 146 gramas.
   4.º) 3 ‰ de 25 000 toneladas.
   5.º) 1,5 ‰ de 3 000 000 habitantes.

2. Determinar *quanto por cento* é:
   1.º) Cr$ 500,00 de Cr$ 2 500,00.
   2.º) 12 gramas de 96 gramas.
   3.º) 1 200m² de 60km².

3. Determinar *quanto por mil* é: 5kg de 1000kg
   1.º) 5kg de uma tonelada.
   2.º) 250 000 km² de 8 000 000 km².
4. Dizer: 1.º) Cr$ 50,00 é 8% de que importância?
   2.º) 120 habitantes é 3‰ de que população?
5. Uma casa é comprada por Cr$ 345 000,00 e vendida por Cr$ 386 400,00. Qual é a taxa do lucro?
6. Quanto pago por um terreno que, comprando à vista, ganho um desconto de 10% eqüivalente a Cr$ 20 000,00?
7. Num colégio 32% dos alunos são meninas e os meninos somam 340. Quantos são os alunos?
8. Em certa fábrica trabalham 648 homens e sabe-se que 46% dos operários são mulheres. Qual é o total de operários dessa fábrica?
9. Sabendo-se que 12 ‰ dos habitantes de uma cidade representam pessoas com idade superior a 85 anos e que os demais habitantes somam 49 400, pergunta-se qual é a população dessa cidade?
10. Uma pessoa entrou numa firma comercial com Cr$ 78 000,00 e saiu com um capital de Cr$ 105 300,00. De quanto por cento foi o seu lucro?
11. Um escritório emprestou a mesma quantia em dinheiro a três pessoas. Com a primeira ganhou 15% e com as demais perdeu 6%. Quanto lucrou com êstes empréstimos?
12. O material de construção comprado numa casa comercial importa em Cr$ 12 136,00. A despesa do transporte dêste material é de 6% sôbre o valor da compra e o pagamento à vista dá ao comprador um desconto de 3% sôbre o gasto total. Quanto se gastou ao adquirir êste material?
13. Em uma cidade de 676 000 habitantes os católicos são em número de 671 268. Calcular a taxa milesimal dos habitantes não católicos.
14. Uma certa qualidade de vinho tem a graduação de 13% de álcool. Sabendo-se que na destilação dêsse vinho obteve-se 55,64l de álcool, determinar a quantidade de vinho empregada.
15. Em 448kg de água salgada a 15% (em cada 100kg de mistura há 15kg de sal) leva-se a evaporar 128kg de água. Determinar a taxa de percentagem de sal que restou.

Juros simples. Montante. Divisor fixo(*)

16. Calcular o juro produzido por Cr$ 3 600,00, em 3 anos, à taxa de 6%.
17. Qual é o juro de Cr$ 24 600,00 a 3,6% por 10 meses?

(*) A taxa é sempre referida *ao ano*.

18. Qual é o juro de Cr$ 1 200 000,00, à taxa de 10%, por 2 anos e 3 meses?
19. Calcular o juro de Cr$ 4 000,00, a $9\frac{1}{2}$ %, durante 1a 11m 12d.
20. Determinar o juro produzido por Cr$ 36 000,00 em 150 dias a 12%.
21. Qual é o capital que empregado a 10%, durante 2 anos, rendeu Cr$ 19 200,00 de juro?
22. Um capital empregado a 12% rende, no fim de 36 dias, o juro de Cr$ 3 600,00. Qual foi êsse capital?
23. Determinar qual foi a quantia em dinheiro que, empregada a $10\frac{1}{2}$ % ao ano, rendeu, em 6 meses, Cr$ 6 300,00?
24. Qual é a taxa que foi empregada para que, em 2 anos, um capital de Cr$ 50 000,00 rendesse um juro de Cr$ 10 000,00?
25. Calcular o capital que rende Cr$ 612,00 de juro em 100 dias, à taxa de 12%?
26. Um capital emprestado a $3\frac{3}{5}$ % rendeu, em 1a 1m 10d, o juro de Cr$ 367,20. Qual foi êsse capital?
27. Uma pessoa tomou Cr$ 15 000,00 emprestados pelo prazo de 60 dias e pagou Cr$ 300,00 de juro. Qual foi a taxa dessa transação?
28. Um capital de Cr$ 2 700,00 rendeu em 13 meses e 10 dias o juro de Cr$ 243,75. Qual foi a taxa empregada?
29. Qual é o tempo em que um capital de Cr$ 9 648,00, a 5%, rende Cr$ 1 587,90?
30. Durante quantos meses esteve emprestada a quantia de Cr$ 3 030,00 a fim de render o juro de Cr$ 155,54 à taxa de 5,6%?
31. Por quanto tempo um capital deve ser empregado a 8% para que o juro obtido seja os $\frac{4}{5}$ do capital? $\left(j = \frac{4}{5}c\right)$.
32. Sabendo-se que um certo capital foi duplicado em 20 anos a juros simples, pergunta-se, a que taxa foi empregado êsse capital? ($j=c$).
33. Em quanto tempo um capital triplica de valor à taxa de 10%? ($j=2c$).
34. Coloca-se 1/3 de um capital a 7% e o restante a 9%, obtendo-se assim um ganho anual de Cr$ 36 000,00. Qual é o valor dêsse capital?
35. É mais vantajoso empregar: Cr$ 18 000,00 a 6% ou Cr$ 12 500,00 a 3,5%, e o restante a 5,6%?
36. Qual é o montante de um capital de Cr$ 20 000,00 durante 1a 2me à taxa de 12%?
37. Qual é o capital que depois de 8 meses, à taxa de $11\frac{1}{2}$ %, dá um montannte de Cr$ 12 920,00.

38. Qual é o divisor fixo de um Banco cuja taxa é $5\frac{1}{3}$ %?
39. O *D* de uma casa bancária é igual a 3 789. Qual é a taxa cobrada por essa casa bancária? (aproximação decimal).
40. Por quantos dias ficou depositada a importância de Cr$ 126 000,00 num estabelecimento bancário de divisor fixo igual a 3 000, sabendo-se que rendeu durante êsse tempo um juro de Cr$ 2 100,00?

NOTA: Outros exercícios no fim do livro, às págs. 302 e 304.

Respostas:

1. 1.º) Cr$ 72,60; 2.º) Cr$ 47,50; 3.º) 0,73g; 4.º) 75t; 5.º) 4 500hb.
2. 1.º) 20%; 2.º) 12,5%; 3.º) 0,002%.
3. 1.º) 5 ‰; 2.º) 31,25 ‰.
4. 1.º) Cr$ 625,00; 2.º) 40 0000hb.
5. 12%.
6. Cr$ 180 000,00.
7. 500.
8. 1 200.
9. 50 00.
10. 35%.
11. 3%.
12. Cr$ 12 478,24.
13. 7 ‰.
14. 428 *l*.
15. 21%.
16. Cr$ 648,00.
17. Cr$ 738,00.
18. Cr$ 270 000,00.
19. Cr$ 741,00.
20. Cr$ 1 800,000.
21. Cr$ 96 000,00.
22. Cr$ 300 000,00.
23. Cr$ 120 000,00.
24. 10%.
25. Cr$ 18 360,,00.
26. Cr$ 9 180,00.
27. 12%.
28. $8\frac{1}{8}$ %.
29. 3a 3me 15d.
30. 11.
31. 10 anos.
32. 5%.
33. 20 anos.
34. Cr$ 432 000,00.
35. Cr$ 18 000,00 a 6%
36. Cr$ 22 800,00.
37. Cr$ 12 000,00.
38. 6 750.
39. 9,5%.
40. 50 dias.

CAPÍTULO II

Figuras geométricas planas. Reta e círculo

§ 1. Entes geométricos. Proposições geométricas. Congruência.

INTRODUÇÃO À GEOMETRIA DEDUTIVA

1. Geometria intuitiva. Objetivos da Geometria dedutiva. O nosso primeiro contato consciente com a Geometria — denominada *intuitiva* ou *experimental* — foi no Curso Primário. A *observação* e a *experiência* foram, nesse tempo, os meios empregados para realçar as propriedades relativas à forma e à extensão dos corpos.

Agora, numa fase mais avançada, em que a Geometria passa a estudar estas mesmas propriedades dos corpos, fazendo uso sòmente da *razão*, recebe o nome de *dedutiva* ou *racional*. As propriedades relativas à forma e à extensão dos corpos denominam-se, então, *propriedades geométricas* e o objetivo da Geometria dedutiva fica sendo, precisamente, o de *estudar as propriedades geométricas dos corpos por meio de um encadeamento lógico de raciocínios.*

Para atingir êsse objetivo, necessita a Geometria dedutiva do conhecimento de dois importantes grupos: o grupo dos *entes* (*) *geométricos* e o grupo das *proposições* (**) *geométricas.*

2. Grupo dos entes geométricos: ponto, linha, superfície, reta e plano. Como tôda ciência, a Geometria dedutiva tem por ponto de partida um conjunto de noções primitivas que atingem o nosso espírito através de os sentidos.

(*) *Ente* — do latim *ēns, ĕntĭs* — que significa : *aquilo que existe.*
(**) *Proposição* — do latim *prōpŏsĭtĭo* — que significa : *ato de propor*

Estas noções constituem o grupo dos *entes geométricos*, que ***não se definem*** e dos quais todo ser humano tem idéia já formada por intermédio da observação e da experiência.

Assim, por exemplo, temos idéia dos seguintes entes geométricos:

1. *ponto:* observando um grão de areia, uma estrêla ou o sinal deixado por uma agulha sôbre um objeto plástico;
2. *linha:* observando um risco deixado na lousa ou um fio de sêda bem delgado;
3. *reta:* observando um raio luminoso ou um fio bem esticado;
4. *superfície:* observando as partes visíveis dos corpos;
5. *plano:* observando o chão onde pisamos ou a face de um cristal.

Dos entes geométricos, são considerados *fundamentais:* o *ponto*, a *reta* e o *plano* (*).

Observação. Os exemplos materiais dados dos entes geométricos fornecem apenas: a *idéia sensorial de um ponto*, que é pensado geomètricamente sem dimensões; a imagem de *uma parte da reta*, que é pensada em Geometria como indefinida (uma dimensão), bem como a imagem de *uma parte do plano*, que é geomètricamente indefinido (duas dimensões).

As imagens dos entes geométricos fundamentais e as respectivas indicações, que serão usadas neste curso, constam da fig. 2.

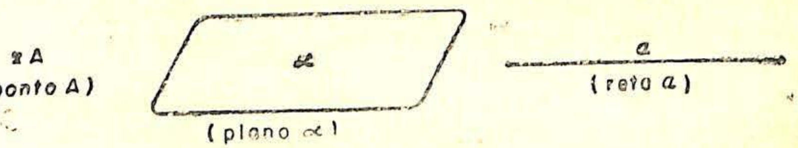


Fig. 2

Nota: Os *pontos* serão sempre indicados com as letras maiúsculas do alfabeto latino: $A, B, C, D, \ldots$; as *retas*, com as letras minúsculas $a, b, c, d, \ldots$ e os *planos*, com as letras minúsculas do alfabeto grego: α (alfa), β (beta), γ (gama), δ (delta), ...

(*) A rigor poder-se-ia considerar como único ente fundamental o *ponto* e os demais como decorrentes dêle. Todavia, a consideração dos outros entes facilitará o estudo que ora empreendemos.

3. Figura geométrica. Espaço. Chama-se *figura geométrica* ou simplesmente *figura* a todo conjunto de pontos. Ao conjunto de *todos os pontos* atribui-se o nome de *espaço* Se todos os pontos de uma figura geométrica estão sôbre o mesmo plano a figura diz-se *plana*; caso estejam em planos diferentes a figura diz-se do *espaço* ou *sólida*. Exemplos:

1. Um triângulo, desenhado na lousa ou numa fôlha de papel, é uma figura geométrica plana.
2. Uma bolinha, dessas de jôgo de gude, é uma figura geométrica do espaço denominada *esfera*.

4. Grupo das proposições geométricas: postulados e teoremas. Fazem parte dêste grupo: *proposições intuitivas* e *proposições deduzidas*. *Proposição intuitiva* é aquela proveniente diretamente da observação e da experiência, e, *aceita como verdadeira*. Atribui-se a esta proposição o nome de *axioma* ou *postulado*. Exemplo:

Da observação de um pequeno foco luminoso, *que pode considerar-se como um ponto*, de onde partem infinitos raios de luz, *que podem ser interpretados como retas*, resulta o seguinte postulado:

Por um ponto passam infinitas retas (fig. 3).

Proposição deduzida é aquela que deriva de um ou mais postulados. Esta proposição recebe o nome de ***teorema***.

O enunciado de um teorema é composto de três partes (*):

1.ª) o *sujeito*, que é a figura que se estuda;

2.ª) a *hipótese*, que é o conjunto de verdades *atribuídas* ao sujeito;

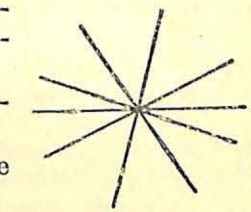


Fig. 3

3.ª) a *tese*, que é o conjunto das verdades que *se deduzem*.

O raciocínio que se faz para deduzir a tese da hipótese é denominado *demonstração* (**) do teorema. Exemplo:

(*) Ver C. Baffi: *Geometria Piana*, pág. 115.

(**) Pode-se, agora, dizer que o *postulado* é tôda proposição *aceita* como verdadeira e que o *teorema* é a proposição *sòmente aceita* como verdadeira por *demonstração*.

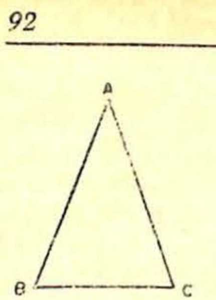


Fig. 4

Num triângulo isósceles* (*) *os ângulos da base são iguais.

Nesse teorema, temos:

sujeito: triângulo (fig. 4);
hipótese (H): o triângulo é isósceles;
tese (T): os ângulos da base dêsse triângulo são iguais.

Disposição prática: H $\{ AB = AC$ $\quad T \{ \hat{B} = \hat{C}$

Enunciado um teorema, que é também chamado *teorema direto*, podem-se deduzir os seguintes outros teoremas:

1. *Recíproco*, quando se *trocam* a hipótese e a tese entre si;
2. *Contrário*, quando se *negam* a hipótese e a tese. Ex.:

Teorema *direto*: Dois ângulos opostos pelo vértice são iguais.

Teorema *recíproco* (ou recíproca): Dois ângulos iguais são opostos pelo vértice.

Teorema *contrário*: Dois ângulos que não são opostos pelo vértice são diferentes.

Deve-se notar que nem sempre as recíprocas são *verdadeiras*. No exemplo dado a recíproca não é verdadeira, pois, nem sempre dois ângulos iguais são opostos pelo vértice. O mesmo pode-se dizer quanto a *veracidade* do teorema contrário de um teorema dado.

Chama-se *corolário* a uma conseqüência *imediata* de um ou mais teoremas, ou postulados ou definições.

A demonstração de um teorema pode ser feita:

a) *diretamente* : quando partindo da hipótese deduz-se a verdade pedida pela tese;
b) *indiretamente* ou *por redução ao absurdo:* quando, negando-se a tese, tem-se como conseqüência a negação da hipótese, ou qualquer outra proposição já aceita (**).

Observação. As demonstrações *diretas* são as preferidas, por colocarem uma verdade em tôda sua evidência, satisfazendo assim inteiramente ao espírito. As demonstrações, *por absurdo*, são mais cômodas para demonstrarem as recíprocas de teoremas conhecidos, no caso de verdadeiras.

5. Proposições geométricas fundamentais. São denominadas proposições geométricas fundamentais *os postulados*

(*) Triângulo isósceles é o que tem dois lados iguais.
(**) Lembramos a existência de *teoremas contraditórios*, isto é, aquêles que, partindo da mesma hipótese, chegam a conclusões diferentes.

que permitem deduzir outras proposições. Numerêmo-las:

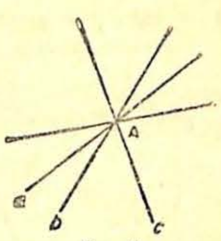


Fig. 5

1.ª) *Existem infinitos pontos, infinitas retas e infinitos planos. Numa reta existem infinitos pontos; num plano existem infinitas retas e, portanto, infinitos pontos.*

2.ª) *Por um ponto passam infinitas retas.* Exemplo : Pelo *ponto A* passam as *retas a, b, c, d, ...* (fig. 5).

3.ª) *Por dois pontos passa uma reta e uma só* (*). Exemplo : Pelos *pontos A* e *B* só passa a *reta r* (fig. 6).

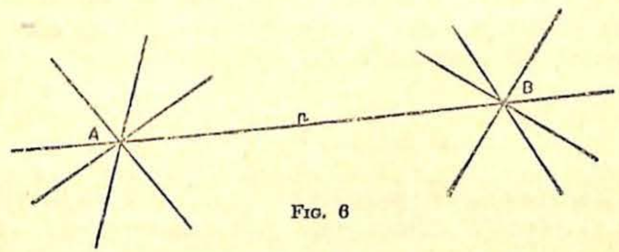


Fig. 6

4.ª) *Por uma reta passam infinitos planos.* Exemplo : Pela *reta r* passam os *planos α, β, γ, δ, ...* (fig. 7).

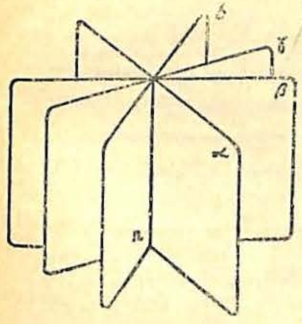


Fig. 7

5.ª) *Três pontos, não pertencentes à mesma reta, determinam um plano e um só.* Exemplo :

Os *pontos A, B e C*, que não pertencem à mesma reta, determinam o *plano α* (fig. 8).

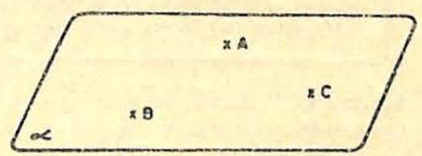


Fig. 8

(*) Êste postulado também pode ser enunciado, *dois pontos determinam uma só reta à qual pertencem.*

6.ª) *A reta que passa por dois pontos quaisquer de um plano pertence a êsse plano.* Exemplo:

A *reta* r que passa pelos pontos A e B, do plano α, pertence ao *plano* α (fig. 9).

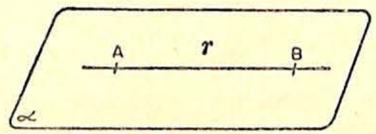


FIG. 9

7.ª) *Uma figura geométrica pode mover-se no plano* (ou no espaço) *sem se deformar.* (Postulado do movimento).

8.ª) *Uma figura geométrica é igual à soma* (*) *de suas partes e maior que qualquer destas partes.*

DEFINIÇÕES

6. Semi-reta. Seja a reta r (fig. 10) e P um de seus pontos. O ponto P divide r em duas partes: a dos infinitos

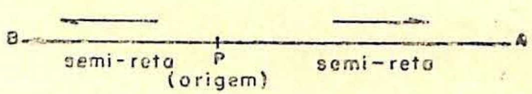


FIG. 10

pontos que precedem P e a dos infinitos pontos que sucedem P. Cada uma dessas partes é denominada *semi-reta*. Logo:

> **Semi-reta é cada uma das duas partes em que fica dividida uma reta por um de seus pontos.**

O ponto P diz-se *origem* das semi-retas, que por sua vez, são chamadas *opostas* uma da outra. Cada semi-reta é ilimitada num só sentido, também denominado *sentido de percurso*,

(*) O conceito de soma das diversas figuras geométricas será estudado nos § § seguintes.

e indicada pela origem P e mais um de seus pontos. Assim, na fig. 10, temos as semi-retas PA e PB.

7. Segmento de reta. Distância entre dois pontos. Sejam A e B dois pontos da reta r (fig. 11). Temos a definição:

> **Segmento de reta ou segmento é o conjunto de todos os pontos de r compreendidos entre A e B e mais os pontos A e B.**

Os pontos A e B são denominados *extremos* do segmento, sendo o primeiro (A) *origem* e o segundo (B) *extremidade*. Indicação: AB (lê-se: *segmento* AB).

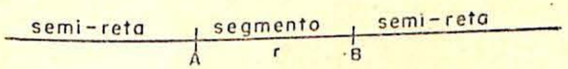


FIG. 11

As duas semi-retas que têm por origens, respectivamente, A e B e que não contêm o segmento AB, são denominadas *prolongamentos* do segmento. Os pontos compreendidos entre A e B, dizem-se *internos* e os situados nos prolongamentos, *externos* ao segmento AB. O segmento AB é também chamado de *distância* entre os pontos A e B.

8. Segmentos consecutivos. Segmentos colineares. Segmentos adjacentes. Dois segmentos (AB e BC na fig. 12) que tenham um *extremo comum* dizem-se *consecutivos*. Segmentos pertencentes a uma mesma reta denominam-se *colineares* e a reta que os contêm, *reta suporte*. Dois segmentos colineares que sejam consecutivos são chamados *adjacentes* (AB e BC na fig. 13).

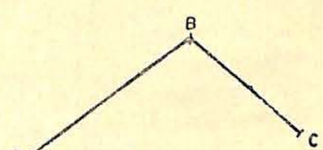


FIG. 12

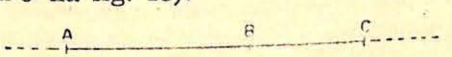


FIG. 13

9. Semi-plano. Consideremos um plano e uma de suas retas (r) que vai dividí-lo em duas partes (fig. 14). Temos, agora, a seguinte definição:

> **Semi-plano é cada uma das duas partes em que ficou dividido um plano por uma de suas retas.**

A reta r é denominada *reta origem* ou *contôrno* dos dois semi-planos que são *opostos* um do outro.

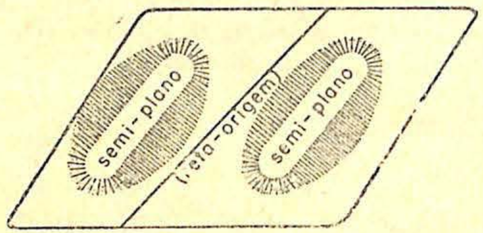


Fig. 14

CONGRUÊNCIA(*)

10. Figuras geométricas iguais ou congruentes. Duas figuras geométricas são *iguais* ou *congruentes* quando, por intermédio de um movimento, elas podem *coincidir*, isto é, se *superpor* (**). As duas figuras se superpondo fazem com que a cada ponto de uma delas *corresponda* um ponto da outra, e, portanto, a *todos os pontos de uma* correspondem *todos os pontos da outra*. Os pontos que se correspondem em figuras iguais dizem-se *correspondentes* ou *homólogos*. Assim, por exemplo, se as figuras geométricas $ABCDE$ e $A'B'C'D'E'$ (fig. 15), são *congruentes*, a cada ponto da primeira corresponde um ponto da segunda e as duas figuras, depois do movimento (da 1.ª para a 2.ª), *coincidem ponto a ponto*.

(*) *Congruência* — do latim *cōngrŭĕntĭă* — que significa: *harmonia de uma coisa com o fim a que se destina*. Os autores francêses e italianos usam mais freqüentemente, em matemática, a expressão *igualdade* (égalité, eguaglianza) ao invés de *congruência* (*Kongruenz*) que é a preferida pelos autores alemães.

(**) A possibilidade da coincidência está garantida pelo *Postulado do movimento*.

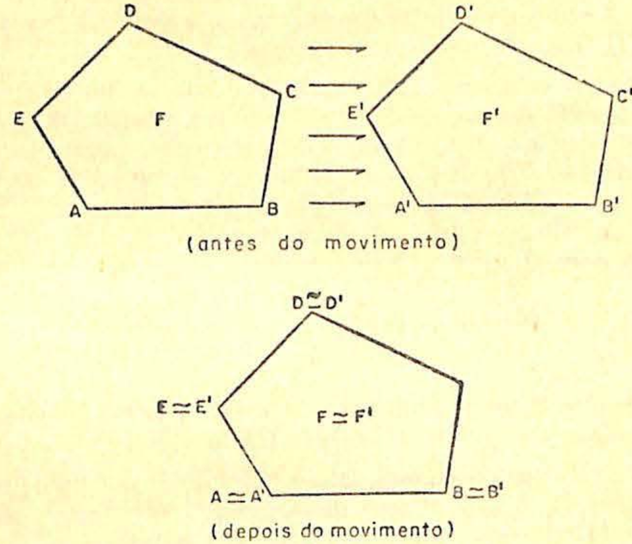


Fig. 15

A congruência das figuras geométricas, que é indicada pelo sinal $\cong$, ou, mais comumente pelo sinal $=$, goza das seguintes *propriedades:*

1.ª) ***Reflexiva:*** *Tôda figura é igual a si mesma.*

Assim, temos: fig. F = fig. F.

2.ª) ***Simétrica:*** *Se uma figura é igual a outra, esta é igual à primeira.*

Logo, se fig. F = fig. F′, temos que: fig. F′ = fig. F.

3.ª) ***Transitiva:*** *Se uma figura é igual a uma segunda figura e esta igual a uma terceira, então a primeira figura é igual à terceira.*

Portanto: se fig. F = fig. F′ e fig. F′ = fig. F″, temos que: fig. F = fig. F″.

Nota: Com estas propriedades, podemos dizer que:

1. *Tôdas as retas são iguais;*
2. *Tôdas as semi-retas são iguais: As origens são pontos homólogos;*
3. *Todos os planos são iguais;*
4. *Todos os semi-planos são iguais. As retas origens são retas homólogas.*

11. Confronto de segmentos. Dados dois segmentos AB e CD (fig. 16), pode acontecer que:

1.º) AB e CD *coincidam*, isto é, por efeito de um movimento (*) é possível fazer com que AB ocupe a posição de CD, de modo que a todos os pontos de AB correspondam todos os pontos de CD. É lógico que nestas condições os extremos são pontos homólogos, ou seja, se A coincide com C, então B coincide com D e se A coincide com D, então B coincide com C.

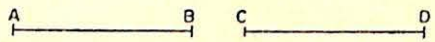


FIG. 16

Nesse caso os segmentos AB e CD dizem-se *iguais* (**) e indicamos: $AB = CD$ ou $CD = AB$,

2.º) AB e CD *não coincidam*, isto é, o ponto B depois do movimento de AB assumirá uma posição B' que se situará entre C e D ou também sôbre o prolongamento de CD. No primeiro caso, diz-se que AB *é menor que* CD (fig. 17)

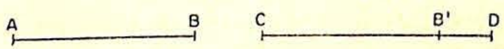


FIG. 17

e no segundo caso que AB *é maior que* CD (fig. 18). Em ambos os casos os segmentos são *desiguais*, sendo as indicações respectivas:

$$AB < CD \quad \text{e} \quad AB > CD.$$

FIG. 18

Logo, dados dois segmentos, o primeiro ou *é igual* ou *menor* ou *maior* que o segundo. Admite-se que qualquer um dêstes casos exclua os outros dois.

(*) Êsse movimento pode ser assegurado pelo *Postulado do Transporte de Segmentos* (HILBERT): "Dado um segmento AB e uma semi-reta CX *existe* sôbre esta semi-reta um *único* ponto D, tal que $AB = CD$."

(**) O *compasso* é o instrumento utilizado para verificar se dois segmentos são *iguais*.

OPERAÇÕES COM SEGMENTOS

12. Soma de dois ou mais segmentos. Para *somar* dois segmentos AB e CD, tomam-se sôbre uma reta dois segmentos adjacentes $A'B'$ e $C'D'$ (fig. 19), respectivamente iguais aos dois segmentos dados. O segmento $A'D'$ é a *soma* dos dois segmentos AB e CD e indica-se:

$$A'D' = AB + CD.$$

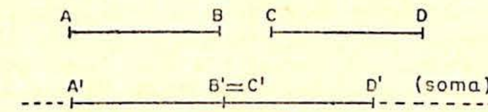


FIG. 19

A soma de *mais de dois segmentos* é feita efetuando-se a soma dos dois primeiros com o terceiro, a seguir a soma dos três com o quarto segmento (caso exista) e assim sucessivamente.

13. Múltiplos e submúltiplos de segmentos. O segmento soma de dois segmentos iguais a AB, diz-se *duplo* de AB ou *múltiplo de* AB, *segundo o número 2*. Da mesma forma os segmentos somas de três, quatro, etc., segmentos iguais a AB, dizem-se *múltiplos de* AB *segundo os números 3, 4, . . .* (fig. 20).

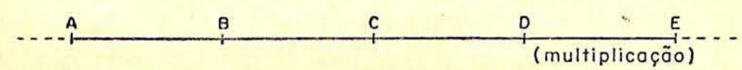


FIG. 20

Escreve-se: $AC = 2AB$; $AD = 3AB$; $AE = 4AB$; . . .

Por outro lado o segmento AB diz-se, respectivamente, *metade, têrça, quarta*, . . . parte de AC, AD, AE, . . . ou também *parte alíquota* ou *submúltiplo*, segundo os números 2, 3, 4, . . .

Escreve-se:

$$AB = \frac{1}{2}AC; \quad AB = \frac{1}{3}AD; \quad AB = \frac{1}{4}AE \ldots$$

Relacionando os múltiplos e submúltiplos de um segmento tem-se o seguinte *Postulado de Arquimedes* (*) :

Dados dois segmentos desiguais, existe um múltiplo do menor que supera o maior. Exemplo:

Suponhamos que um homem de passo eqüivalente a 0,30m (segmento de 0,30m), percorra um trecho de estrada de 300m (segmento de 300m). É evidente que o homem percorrendo êsse trecho de estrada deverá, num certo instante, superá-la o que vem justificar a existência de um múltiplo de 0,30m maior que 300m.

14. Diferença de dois segmentos. Dados dois segmentos AB e CD, sendo $AB > CD$, chama-se *diferença* entre êles ao segmento DB, que, somado com CD, reproduz AB (fig. 21).

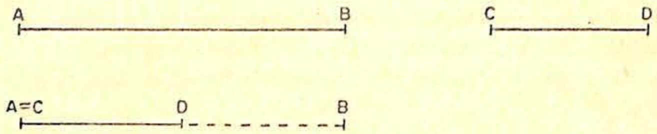


Fig. 21

Indica-se : $DB = AB - CD$.

Se os segmentos dados são iguais ($AB = CD$) a diferença é nula.

EXERCÍCIOS

1. Dar exemplos materiais de pontos, retas e planos.
2. Que figuras geométricas representam: um dado dêsses de jôgo e uma bolinha de pingue-pongue?
3. Por um ponto quantas retas passam? E quantos planos passam?
4. Por dois pontos, distintos, quantas retas passam? E quantos planos?
5. Por três pontos quantos planos passam?
6. Qual é o postulado que pode garantir que as mesas de três pés sempre se assentam no chão que pisamos?
7. Que tipo de proposição geométrica é o enunciado : duas quantidades iguais a uma terceira são iguais entre si?

(*) Arquimedes — ilustre geômetra grego da Antigüidade (287-212 A.C.).

8. O que acontece com um segmento de reta que possui os seus extremos contidos num mesmo plano?
9. Dizer o sujeito, a hipótese e a tese dos seguintes teoremas:
   a) Dois ângulos opostos pelo vértice são iguais;
   b) A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois ângulos retos.
10. Enunciar as recíprocas dos teoremas seguintes:
    a) Todos os ângulos retos são iguais;
    b) Um triângulo eqüilátero tem todos os ângulos iguais.
11. Demonstrar, usando os postulados fundamentais, que duas retas, a e b, que se interceptam num ponto P, determinam um plano.
12. Demonstrar, usando os postulados (3.ª e 5.ª proposições fundamentais), que uma reta r e um ponto P, fora dessa reta, determinam um plano.
13. Dados os pontos M, N e P, que não pertencem à mesma reta, dizer as retas, as semi-retas e os segmentos que êles determinam.
14. Qual é a condição para que dois pontos pertençam ao mesmo semiplano?
15. Quando é que um segmento é múltiplo ou submúltiplo de um outro segmento, segundo o número 5? E segundo o número n?

Respostas :

2. Cubo e esfera.
3. Infinitas. Infinitos.
4. Uma só reta. Infinitos planos (2 pontos determinam uma reta e pela reta passam infinitos planos).
5. Se os pontos não pertencerem à mesma reta, só passa um plano. Se pertencerem à mesma reta, passam infinitos planos.
6. O da 5.ª proposição fundamental.
7. Postulado.
8. O segmento está contido nesse plano.
9. a) suj.: ângulos; hip.: ângulos opostos pelo vértice; tese: êsses ângulos são iguais.
   b) suj.: triângulo; hip.: ângulos internos do triângulo; tese : a soma dêsses ângulos é igual a dois ângulos retos.
10. a) Todos os ângulos iguais são retos (recíproca falsa).
    b) Um triângulo que tem todos os ângulos iguais é eqüilátero.
11. A reta a é determinada por dois pontos: P e A (3.ª). A reta b por dois pontos: P e B. Os três pontos P, A e B, não alinhados, determinam um plano (5.ª).
12. A reta r é determinada por dois pontos: A e B (3.ª). Os pontos P A e B, não alinhados, determinam um plano (5.ª).

13. Retas dadas pelos pares de pontos: MeN; MeP; PeN. Segmentos: MN; MP; PN. Semi-retas: dadas pelos prolongamentos (6) dos segmentos.

14. É que o segmento de reta determinado por êles não encontre a reta origem.

15. Múltiplo: quando é soma de 5 segmentos iguais ao segundo. Submúltiplo: quando é a quinta parte do segundo. Múltiplo segundo o número n: quando é soma de n segmentos iguais ao segundo; submúltiplo quando fôr a n-ésima $\left(\frac{1}{n}\right)$ parte do segundo.

§ 2. Ângulos. Classificação e propriedades.

DEFINIÇÕES

15. Ângulo. Sejam OA e OB duas semi-retas com a mesma origem O (fig. 22). Estas semi-retas dividem o plano em duas regiões denominadas, cada uma delas, *ângulo* ou *região angular*. Logo:

Ângulo é a região do plano limitada por duas semi-retas que têm a mesma origem.

O ponto O chama-se *vértice* e as semi-retas OA e OB, *lados* dos dois ângulos. Usualmente, toma-se como *sentido* dos lados o sentido de percurso das semi-retas OA e OB. Pode-se designar um ângulo por uma letra ou número (com acento circunflexo) colocada no seu interior ou pelas três letras que indicam o vértice e os lados, sendo que nesse caso a letra representativa do vértice vem entre as outras duas. Assim, na figura 22, temos:

$$\text{ângulo } AOB = A\hat{O}B \text{ ou } \hat{1}.$$

Observação. Um ângulo é constituído por infinitos pontos entre os quais se encontram aquêles dos lados. Os pontos do ângulo, excetuando os dos lados, dizem-se *internos*; os pontos do mesmo plano, que não pertencem ao ângulo, dizem-se *externos*. Uma semi-reta, partindo do vértice, é denominada *interna* ou *externa* ao ângulo, segundo passa por um ponto interno ou externo do ângulo.

O ângulo pode ser assim considerado como uma *figura geométrica* (fig. 23) formada pelas infinitas semi-retas que partem do vértice e passantes pelos infinitos pontos do ângulo.

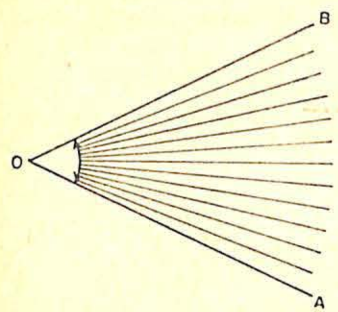


Fig. 22

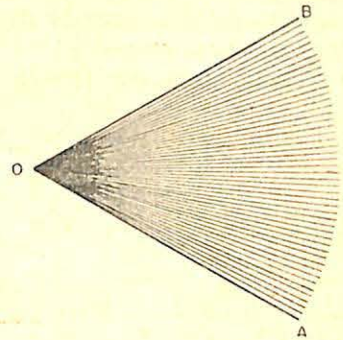


Fig. 23

CLASSIFICAÇÃO DOS ÂNGULOS

16. Ângulos convexo e côncavo. No caso do ângulo não conter as semi-retas opostas aos seus lados, êle é chamado *convexo* (fig. 24) e caso contrário, *côncavo* (fig. 25).

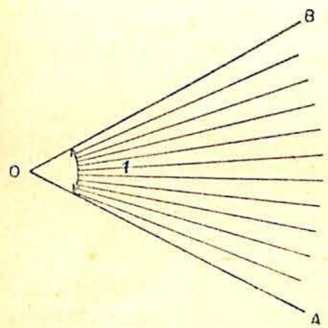


Fig. 24

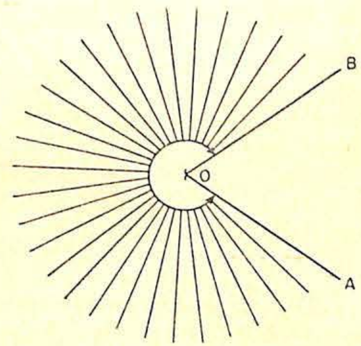


Fig. 25

Nota: Quando o ângulo não vem discriminado, fica convencionado que se trata de ângulo convexo.

17. Angulo de meia volta ou ângulo raso. No caso dos lados do ângulo serem *semi-retas opostas* (OA e OB na fig. 26), ângulo é denominado de *meia volta* ou *raso*. Neste caso, o ângulo é tôda a região de um semi-plano. Da igualdade de todos os semi-planos (n.º 10) - Nota 4) segue-se que: *todos os ângulos rasos são iguais.*

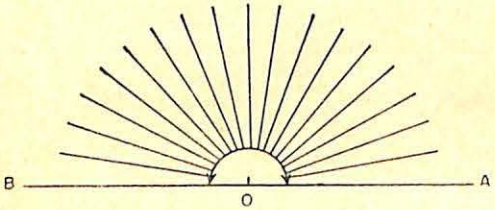


Fig. 26

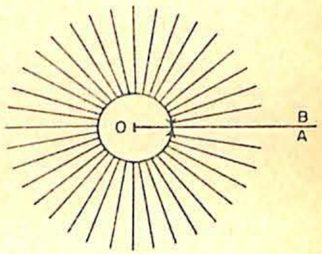


Fig. 27

18. Ângulo nulo e ângulo de uma volta. Quando os dois lados *coincidem* (fig. 27), o ângulo é chamado *nulo* ou *de uma volta.* Como a figura é a mesma para os dois ângulos, a distinção entre êles é feita pelas medidas respectivas (*).

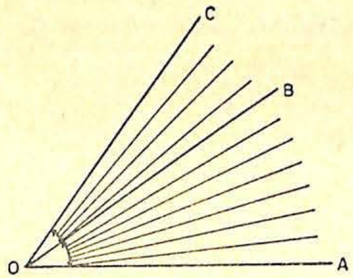


Fig. 28

19. Ângulos consecutivos. Dois ângulos são *consecutivos* ($A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ na fig. 28), quando possuem o mesmo vértice, um lado comum e os outros dois lados situados em semi-planos opostos em relação ao lado comum.

(*) Ver "Unidades do ângulo plano". *Matemática*, Curso Ginasial, 1.ª Série, do mesmo autor.

Os lados não comuns (OA e OC) são denominados *lados exteriores.*

Vários ângulos são consecutivos, numa certa ordem ($A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$, $C\hat{O}D$ na fig. 29), quando cada um dêles é consecutivo em relação ao anterior.

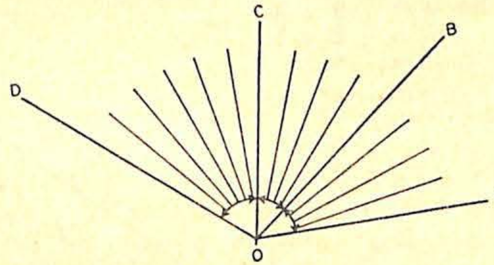


Fig. 29

20. Ângulos adjacentes. São chamados *adjacentes*, dois ângulos consecutivos, cujos lados exteriores são semi-retas opostas ($A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ na fig. 30) (*).

21. Bissetriz. Chama-se *bissetriz* de um ângulo a semi-reta que, a partir do vértice, o divide em *dois ângulos iguais* (OC na fig. 31).

Postulado: *Todo ângulo tem uma bissetriz e uma só.*

22. Ângulos opostos pelo vértice (o. p. v.). Dois ângulos são *opostos pelo vértice* (o.p.v.), quando os lados de um são as semi-retas opostas dos lados do outro ($A\hat{O}B$ e $A'\hat{O}B'$ na fig. 32).

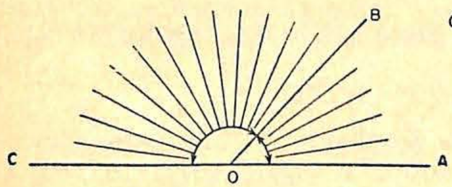


Fig. 30

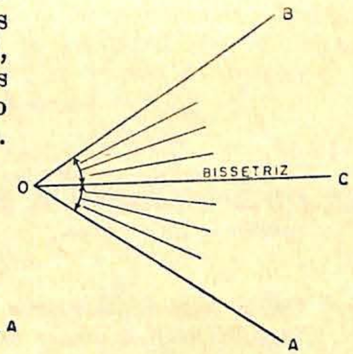


Fig. 31

(*) Preferimos êste conceito de ângulos adjacentes, a fim de evitar, em teoremas que serão estudados, o uso da expressão *lados exteriores em linha reta* que, a rigor, deve ser substituída por *lados exteriores como semi-retas opostas.*

NOTA: Quando duas retas se interceptam num ponto (r e s na fig. 33), os ângulos por elas determinados se distribuem em *pares* de ângulos adjacentes e opostos pelo vértice.

Assim na figura 33, temos:

$$\text{ângulos adjacentes} \begin{cases} \hat{1} \text{ e } \hat{2} \\ \hat{2} \text{ e } \hat{3} \\ \hat{3} \text{ e } \hat{4} \\ \hat{4} \text{ e } \hat{1} \end{cases} \qquad \text{ângulos o.p.v.} \begin{cases} \hat{1} \text{ e } \hat{3} \\ \hat{2} \text{ e } \hat{4} \end{cases}$$

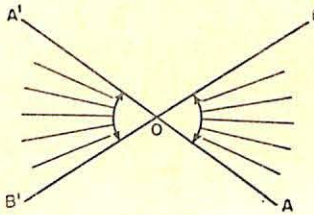


FIG. 32

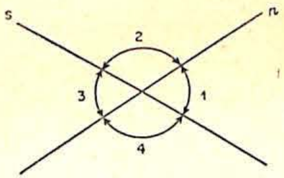


FIG. 33

Confronto de ângulos

23. Igualdade e desigualdade. Dados dois ângulos $A\hat{O}B$ e $A'\hat{O}'B'$ (fig. 34) e transportando-se o primeiro sôbre o segundo, de modo que OA e $O'A'$ se superponham, pode acontecer que:

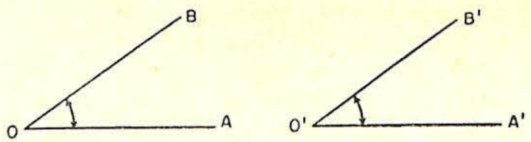


FIG. 34

1.º) OB *coincida* com $O'B'$; nesse caso os dois ângulos dizem-se *iguais* e indicamos:

$$A\hat{O}B = A'\hat{O}'B'.$$

2.º) OB é semi-reta *interna* ao ângulo $A'\hat{O}'B'$; nesse caso o ângulo AOB é *menor* do que o ângulo $A'\hat{O}'B'$ (fig. 35) e indicamos:

$$A\hat{O}B < A'\hat{O}'B'.$$

3.º) OB é semi-reta *externa* ao ângulo $A'\hat{O}'B'$; nesse caso o ângulo $A\hat{O}B$ é *maior* do que $A'\hat{O}'B'$ (fig. 36) e indicamos:

$$A\hat{O}B > A'\hat{O}'B'.$$

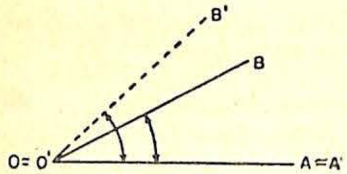


FIG. 35

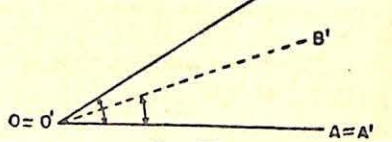


FIG. 36

Nos dois últimos casos os ângulos $A\hat{O}B$ e $A'\hat{O}'B'$ dizem-se *desiguais*. Logo, dados dois ângulos podemos dizer que: o primeiro é *igual*, ou *menor* ou *maior* que o segundo e qualquer um dêstes casos *exclui* os outros dois. Convém frisar também que: cada *ângulo é invertível*, isto é, $A\hat{O}B = B\hat{O}A$.

NOTA: O transporte de ângulos pode ser assegurado pelo *Postulado do Transporte de Ângulos* (HILBERT): "Dado um ângulo $A\hat{O}B$ e uma semi-reta $O'A'$ *existe*, num dos semi-planos determinado pelo suporte de $O'A'$, uma *única* semi-reta $O'B'$, tal que: $A\hat{O}B = A'\hat{O}'B'$."

Adição e subtração de ângulos. Conseqüências

24. Adição. Denomina-se *soma de dois ou mais ângulos consecutivos* ao ângulo que tem por lados os lados não comuns dos ângulos dados e contém o lado ou lados comuns. Assim, a soma dos ângulos consecutivos $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ (fig. 37) é o ângulo $A\hat{O}C$, também chamado *ângulo soma*. Indicação:

$$A\hat{O}B + B\hat{O}C = A\hat{O}C.$$

No caso dos ângulos dados não serem consecutivos, transportam-se os ângulos de modo a torná-los consecutivos e a soma é feita de acôrdo com o que já foi visto.

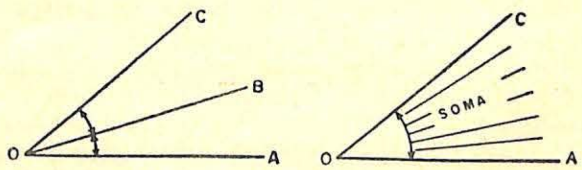


FIG. 37

OBSERVAÇÕES:

1.ª) Assim como para os segmentos, também para os ângulos ***podem ser considerados os múltiplos e os submúltiplos segundo qualquer número*** (inteiro).

2.ª) ***Postulado da divisão:*** *Um segmento ou um ângulo podem ser sempre divididos em um número qualquer de partes iguais.*

25. Subtração. Sejam os ângulos $A\hat{O}B$ e $A'\hat{O}'B'$, com $A\hat{O}B > A'\hat{O}'B'$ (fig. 38). Chama-se *ângulo diferença* dêstes dois ângulos ao ângulo ($B'\hat{O}B$ na fig. 38), que, somado a $A'\hat{O}'B'$, reproduz $A\hat{O}B$.

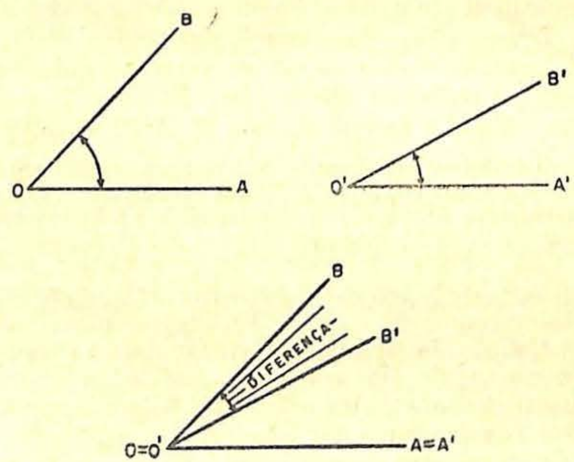


FIG. 38

26. Ângulos: reto, agudo e obtuso. Dados dois ângulos adjacentes ($A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ na fig. 39), a soma dêles é *um ângulo raso,* pois, o ângulo-soma, neste caso, tem por lados, semi-retas opostas.

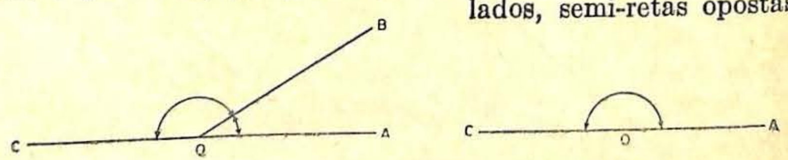


FIG. 39

Quando os ângulos adjacentes dados são *iguais* êles são denominados *ângulos retos* (fig. 40). É evidente, pelo que foi dito acima, que o *ângulo reto é a metade do ângulo raso,* Como todos os ângulos rasos são iguais (n.º 17), resultam iguais também as suas metades, e, portanto, *todos os ângulos retos são iguais.*

Um ângulo diz-se *agudo* quando é menor do que um ângulo reto ($A\hat{O}B$ na fig. 41) e *obtuso* quando é maior que um *ângulo reto* e menor do que um ângulo raso ($B\hat{O}C$ na fig. 41).

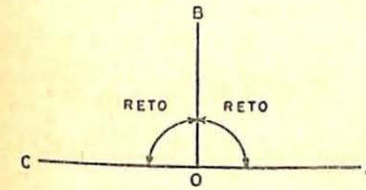


FIG. 40

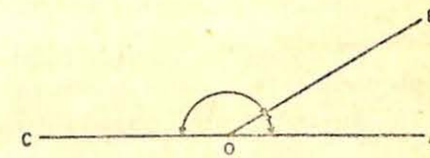


FIG. 41

OBSERVAÇÕES:

1.ª) Duas retas que, ao se interceptarem, formam ângulos adjacentes iguais (portanto, retos), dizem-se *perpendiculares entre si* (retas r e s na fig. 42). Indicação: $r \perp s$.

No caso dos ângulos adjacentes serem diferentes, as retas dizem-se *oblíquas* entre si (retas r e s na fig. 43). Indicação: $r \not\perp s$.

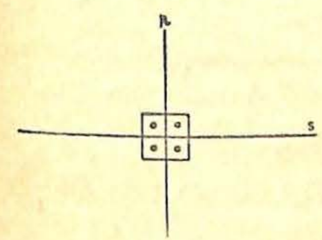


FIG. 42

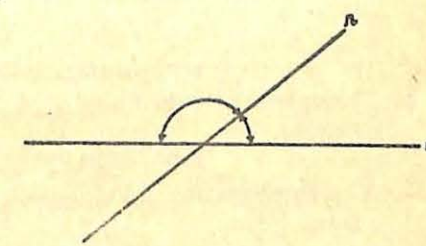


FIG. 43

2.ª) Do estudo de medidas de ângulos planos feito na 1.ª série ginasial, temos que (fig. 44):

a) o ângulo *reto* ***vale*** 90° (ou 100 grados);

b) o ângulo *agudo é* ***menor*** *do que* 90°;

c) o ângulo *obtuso é* ***maior*** *do que* 90° *e* ***menor*** *que* 180° (ou 200 grados);

d) o ângulo *raso, que é* ***igual*** *a* 2 *retos,* ***vale*** 180° (ou 200 gr);

e) o ângulo *de uma volta, que é* ***igual*** *a* 4 *retos,* ***vale*** 360° (ou 400 grados).

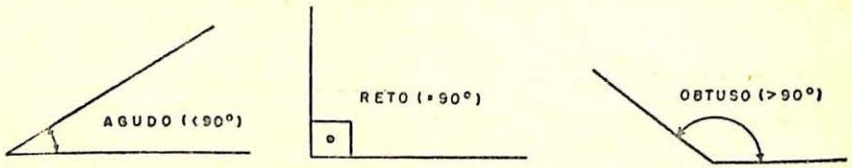


FIG. 44

27. Ângulos complementares, suplementares e replementares. Dois ângulos são:

complementares, quando a sua soma vale *um ângulo reto* (90°);

suplementares, quando a sua soma vale *um ângulo raso* (180°);

replementares, quando a sua soma vale *um ângulo de uma volta* (360°). Exemplos:

1. Dado o ângulo de 60°, o valor de seu complemento, suplemento e replemento é respectivamente:

complemento: 90° − 60° = *30°*.

suplemento: 180° − 60° = *120°*.

replemento: 360° − 60° = *300°*.

2. O suplemento do ângulo de 53° 32′ 45″ é dado pela diferença:

$$180° - 53° 32' 45'' = 126° 27' 15''.$$

3. O complemento do ângulo de 48,32gr é dado pela diferença:

$$100gr - 48{,}32gr = 51{,}68gr.$$

OBSERVAÇÃO. É evidente que:

Ângulos complementares de um mesmo ângulo ou de ângulos iguais são iguais.

Basta lembrar que *duas figuras iguais a uma terceira são iguais entre si* O mesmo se aplica para ângulos suplementares e replementares.

PROPRIEDADES DOS ÂNGULOS

28. Primeiras propriedades. São imediatas as seguintes, que serão, agora, estudadas como teoremas:

PRIMEIRA PROPRIEDADE: *Todos os ângulos rasos são iguais.*

De fato, como todos os semi-planos são iguais (n.° 10 Nota) (*), segue-se que, os ângulos rasos que são semi-planos (n.° 17), também o são.

SEGUNDA PROPRIEDADE: *Todos os ângulos retos são iguais.*

Com efeito, sendo todos os ângulos rasos iguais (teorema anterior), resultam iguais as suas metades.

TERCEIRA PROPRIEDADE: *Dois ângulos adjacentes são suplementares.*

Como a soma de dois ângulos adjacentes é um ângulo raso (n.° 26), segue-se que, dois ângulos adjacentes são suplementares (n.° 27).

29. Outras propriedades. Temos mais os seguintes teoremas, não tão imediatos como os anteriores, porém fáceis de serem demonstrados. Destacaremos a *hipótese* e a *tese* de cada um dêles.

QUARTA PROPRIEDADE — ***Teorema:*** *A soma de todos os ângulos consecutivos formados em tôrno de um ponto, num mesmo semi-plano, em relação a uma reta que contém o referido ponto, é igual a um ângulo raso* (ou dois ângulos retos). Sejam os ângulos: $A\hat{O}C$, $C\hat{O}D$, $D\hat{O}E$, e $E\hat{O}B$ (fig. 45).

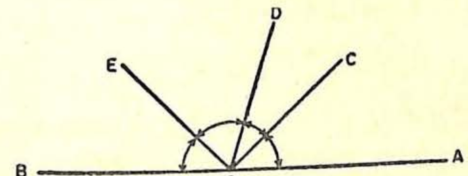


FIG. 45

Temos:

H { $A\hat{O}C$, $C\hat{O}D$, $D\hat{O}E$, $E\hat{O}B$ são ângulos consecutivos.

T { $A\hat{O}C + C\hat{O}D + D\hat{O}E + E\hat{O}B = 1$ raso (180°).

(*) Todos os números que estão sendo referido são relativos ao Capítulo II.

DEMONSTRAÇÃO :

1. O ângulo $A\hat{O}B$, é todo um semi-plano (por hip.) (*) e portanto, tendo os lados como semi-retas opostas, é um ângulo raso.
2. Como : $A\hat{O}B = A\hat{O}C + C\hat{O}D + D\hat{O}E + E\hat{O}B$, segue-se que :

$$A\hat{O}C + C\hat{O}D + D\hat{O}E + E\hat{O}B = 1 \text{ raso } (180^\circ)$$

c.q.d. (**)

QUINTA PROPRIEDADE – ***Teorema:*** *A soma de todos os ângulos consecutivos formados no mesmo plano, em tôrno de um ponto, é igual a dois ângulos rasos* (ou quatro ângulos retos).

Sejam os ângulos: $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$, $C\hat{O}D$, $D\hat{O}E$ e $E\hat{O}A$ (fig. 46).

Temos :

H { $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$, $C\hat{O}D$, $D\hat{O}E$, $E\hat{O}A$, ângulos consecutivos

T { $A\hat{O}B + B\hat{O}C + C\hat{O}D + D\hat{O}E + E\hat{O}A = 2$ rasos (360°).

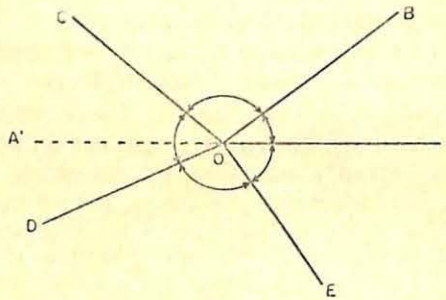


FIG. 46

DEMONSTRAÇÃO :

1. Consideremos a semi-reta OA', oposta à semi-reta OA.
2. Pelo teorema anterior segue-se que :

$$A\hat{O}B + B\hat{O}C + C\hat{O}A' = 1 \text{ raso.}$$

e $$A'\hat{O}D + D\hat{O}E + E\hat{O}A = 1 \text{ raso.}$$

(*) *por hip.* : significa : *por hipótese.*

(**) *c. q. d.* : significa : *como queríamos demonstrar* (abreviatura geralmente usada para indicar a obtenção da tese do teorema que se quer demonstrar).

Somando, membro a membro, estas igualdades, vem :

$$A\hat{O}B + B\hat{O}C + C\hat{O}A' + A'\hat{O}D + D\hat{O}E + E\hat{O}A = 2 \text{ rasos}$$

e como $$C\hat{O}A' + A'\hat{O}D = C\hat{O}D,$$

temos: $$A\hat{O}B + B\hat{O}C + C\hat{O}D + D\hat{O}E + E\hat{O}A = 2 \text{ rasos } (360^\circ)$$

c.q.d.

SEXTA PROPRIEDADE – ***Teorema:*** *Dois ângulos opostos pelo vértice são iguais.*

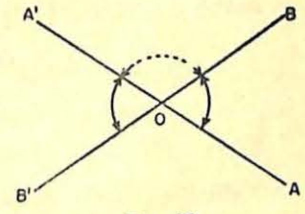


FIG. 47

Sejam os ângulos $A\hat{O}B$ e $A'\hat{O}B'$ (fig. 47). Temos:

H { $A\hat{O}B$ e $A'\hat{O}B'$ são o.p.v.

T { $A\hat{O}B = A'\hat{O}B'$.

DEMONSTRAÇÃO :

1. De fato, $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}A'$ são adjacentes e, portanto, suplementares (3.º teorema). Também $B\hat{O}A'$ e $A'\hat{O}B'$, sendo adjacentes, são suplementares.
2. Logo: $A\hat{O}B = A'\hat{O}B'$ porque admitem o mesmo suplemento $B\hat{O}A'$ (n.º 27 – Obs.).

c.q.d.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1.º) Determinar o valor dos 3/4 do suplemento de um ângulo de 60º.

Se o ângulo dado vale 60º o seu suplemento valerá $120^\circ = (180^\circ - 60^\circ)$ e os 3/4 dêste suplemento valerão :

$$\frac{3}{4} \times 120^\circ = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ.$$

Resp.: 90º (ângulo reto).

2.º) Calcular o valor de um ângulo que é igual ao *dôbro* de seu complemento.

Seja x o valor do ângulo procurado. O seu complemento será: $90^\circ - x$ e a equação resultante do problema:

$$x = 2\,(90^\circ - x).$$

Resolvendo, temos: $x = 180° - 2x$

ou $3x = 180°$

e $x = 60°$.

Resp.: 60°.

3.°) O triplo do complemento de um ângulo é igual à têrça parte do suplemento dêste ângulo. Determinar o valor do ângulo.

Seja x o valor do ângulo procurado. Devemos ter:

$90° - x$ como valor de seu complemento,

e $180° - x$ como valor de seu suplemento.

Pelo enunciado do problema, resulta a equação:

$$3\,(90° - x) = \frac{1}{3}\,(180° - x).$$

Resolvendo-a, vem:

$$9\,(90° - x) = 180° - x$$
$$810° - 9x = 180° - x$$
$$8x = 630°$$
$$\therefore\ x = \frac{630°}{8} = 78°\,45'.$$

Resp.: 78° 45′.

4.°) Demonstrar que as bissetrizes de dois ângulos adjacentes formam um ângulo reto.

Sejam os ângulos: $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ (fig. 48). Temos:

$$\text{H}\begin{cases} A\hat{O}B \text{ e } B\hat{O}C \text{ são adjacentes} \\ OE \text{ é bissetriz de } A\hat{O}B \\ OF \text{ é bissetriz de } B\hat{O}C \end{cases}$$

$$\text{T}\ \{\ E\hat{O}F = 1 \text{ reto}.$$

DEMONSTRAÇÃO:

1. Sendo OE bissetriz de $A\hat{O}B$, temos que:

$$E\hat{O}B = \frac{A\hat{O}B}{2} \text{ (def. de bissetriz)}$$

Sendo OF bissetriz de $B\hat{O}C$, temos que:

$$B\hat{O}F = \frac{B\hat{O}C}{2} \text{ (def. de bissetriz).}$$

2. Somando, membro a membro, as duas igualdades, vem:

$$E\hat{O}B + B\hat{O}F = \frac{A\hat{O}B}{2} + \frac{B\hat{O}C}{2}$$

ou $$E\hat{O}F = \frac{A\hat{O}B + B\hat{O}C}{2} = \frac{A\hat{O}C}{2} = \frac{1 \text{ raso}}{2}$$

e, portanto, $E\hat{O}F = 1$ reto. c.q.d.

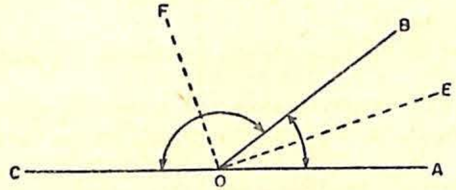


FIG. 48

EXERCÍCIOS

1. Dado o ângulo de 36° 12′ 30″, calcular, respectivamente, o *complemento*, o *suplemento* e o *replemento* dêste ângulo.
2. Calcular o *complemento*, o *suplemento* e o *replemento* do ângulo de 79,36gr.
3. O dôbro do valor de um ângulo é igual a 106° 18′ 22″. Qual é o valor de seu *complemento*?
4. O triplo do valor de um ângulo é igual a 162,3gr. Qual é o valor do *suplemento* dêste ângulo?
5. Achar dois ângulos suplementares cuja diferença é um ângulo reto.
6. Dois ângulos iguais são complementares do ângulo de 36,482gr. Quanto valem êstes ângulos?
7. Determinar o valor de dois ângulos replementares cuja diferença é igual a 100°.
8. Um ângulo é a têrça parte de seu *complemento*. Qual é o valor dêste ângulo?
9. Calcular o valor do ângulo que é igual a 2/5 do *suplemento* de 126° 12′?

10. O complemento do suplemento de um ângulo é 32° 50'. Calcular o valor dêsse ângulo.
11. Na figura 49, tem-se que: $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ são ângulos retos; OE e OF são as bissetrizes dos ângulos $A\hat{O}C$ e $B\hat{O}D$, respectivamente. Demonstrar que: $A\hat{O}E = D\hat{O}F$.

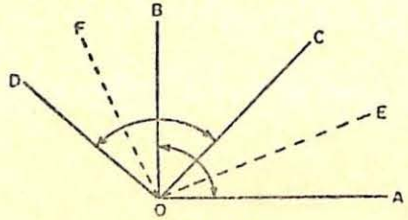


Fig. 49

Demonstrar que:

12. As bissetrizes de dois ângulos suplementares adjacentes formam um ângulo reto.
13. Se dois ângulos são suplementares, as suas metades são complementares.
14. As bissetrizes de dois ângulos opostos pelo vértice formam um ângulo raso.
15. Se OE é bissetriz de $A\hat{O}B$ e OD uma reta qualquer *externa* dêste ângulo, o ângulo DOE é igual à semi-soma dos ângulos DOA e DOB.

Respostas:

1. 53° 47' 30" ; 143° 47' 30" e 323° 47' 30".
2. 20,64gr ; 120,64gr e 320,64gr.
3. 46° 50' 49".
4. 145,9gr.
5. 135° e 45°.
6. 63,518gr.
7. 230° e 130°.
8. 22° 30'.
9. 21° 31' 12".
10. 122° 50'.

§ 3. Linha poligonal. Polígonos. Classificação e propriedades.

30. Linha poligonal. Chama-se *linha poligonal* ou simplesmente *poligonal* ao conjunto de segmentos de retas sucessivamente consecutivos, cada um com o anterior, de modo que dois segmentos consecutivos não sejam colineares. A origem do primeiro segmento diz-se *origem da poligonal*, a extremidade do último, *extremidade da poligonal*, e os segmentos que a compõem, *lados da poligonal*.

Uma linha poligonal é:

convexa, quando os prolongamentos de um lado qualquer (BC na fig. 50) — que dividem o plano em dois semi-planos — deixam os demais lados da poligonal num só dêstes semi-planos.

côncava, em caso contrário (fig. 51) e

entrelaçada, quando dois lados não consecutivos se interceptam (fig. 52).

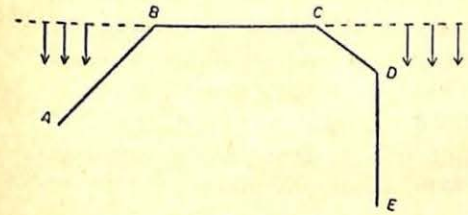


Fig. 50

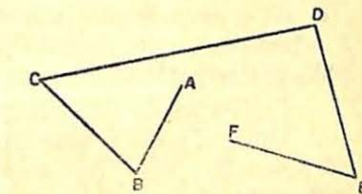


Fig. 51

Se a *extremidade* da poligonal coincidir com a *origem*, a linha poligonal diz-se ***fechada.***

31. Polígonos (*). Classificação. Chama-se *polígono* à parte do plano limitada por uma linha poligonal fechada (fig. 53).

A linha poligonal que limita o polígono chama-se *contôrno* do polígono. O contôrno de um polígono divide o plano em duas regiões: uma finita, denominada *região interior* do polígono e outra infinita, denominada *região exterior*. Daí o fato de se dizer, também, que o polígono $ABCDEF$ (fig. 53) é

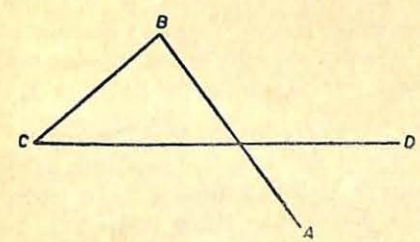


Fig. 52

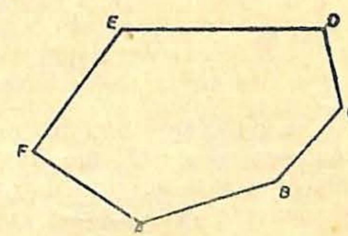


Fig. 53

(*) Neste estudo elementar, não consideramos os polígonos *entrelaçados*, *estrelados* e *reversos*.

o conjunto dos infinitos pontos comuns aos ângulos $A\hat{B}C$, $B\hat{C}D$, $C\hat{D}E$, $D\hat{E}F$, $E\hat{F}A$ e $F\hat{A}B$.

Os segmentos que compõem a linha poligonal fechada (AB, BC, CD, DE, EF e FA, na fig. 53), dizem-se *lados* do polígono; as extremidades comuns aos lados (A, B, C, D, E e F, na fig. 53), *vértices* do polígono e os ângulos formados por dois lados consecutivos ($A\hat{B}C$, $B\hat{C}D$, $C\hat{D}E$, $D\hat{E}F$, $E\hat{F}A$ e $F\hat{A}B$, na fig. 53), dizem-se *ângulos internos* ou simplesmente *ângulos* do polígono.

Chama-se *ângulo externo* de um polígono ao ângulo que é adjacente a um ângulo interno, ou seja o ângulo formado pelo prolongamento de um lado com o lado sucessivo.

Perímetro de um polígono é a soma de seus lados.

Um polígono é *convexo* (fig. 54) ou *côncavo* (fig. 55), conforme o seu contôrno seja uma linha poligonal convexa ou côncava.

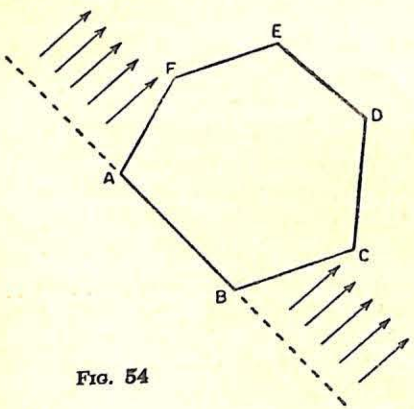


Fig. 54

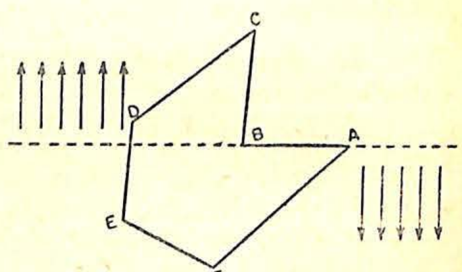


Fig. 55

A verificação de que um polígono é convexo é feita observando-se se o polígono fica situado só num semi-plano, em relação à reta suporte de qualquer lado e côncavo se o prolongamento de ao menos um dos ~~qualquer~~ lado o divide em duas partes.

O polígono recebe denominações especiais de acôrdo com o número de lados que possui. Assim, o polígono de *três* lados

recebe o nome de *triângulo*; de *quatro* lados, *quadrilátero*; de *cinco*, *pentágono*; de *seis*, *hexágono*; de *sete*, *heptágono*; de *oito*, *octógono*; de *nove*, *eneágono*; de *dez*, *decágono*; de *onze*, *undecágono*; de *doze*, *dodecágono*; de *quinze*, *pentadecágono*; de *vinte*, *icoságono*. De um modo geral, costuma-se dizer *polígono n-látero* ou *polígono n-ágono* ao polígono de n *lados*, onde n representa um número inteiro maior que 2.

Diz-se que um polígono é *regular* (fig. 56), quando possui *todos os seus lados iguais*, assim como *todos os seus ângulos*. Chama-se *apótema* de um polígono regular a distância do centro (*) do polígono a um de seus lados.

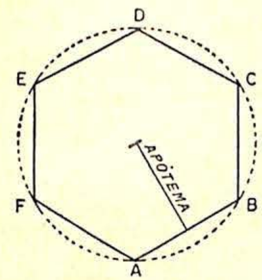


Fig. 56

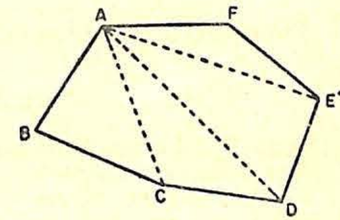


Fig. 57

32. Diagonais de um polígono. Chama-se *diagonal* de um polígono ao segmento que une dois vértices não consecutivos do polígono.

Consideremos um polígono convexo de n lados (na fig. 57, $n=6$). De cada vértice (A na figura) pode-se traçar *tantas diagonais quantos são os lados menos três*, isto é, $n-3$, pois, de um vértice não se pode traçar a diagonal a êle mesmo, nem aos vértices antecedente (F) e seguinte (B). Como são n os vértices do polígono, a primeira impressão é de que podemos traçar ao todo $n\,(n-3)$, pois, se 1 vértice permite traçar $n-3$ diagonais, n vértices permitirão n vêzes mais. Êsse produto representa, porém, o *dôbro* do número de diagonais pelo fato de cada diagonal ter sido contada duas vêzes (AC e CA por

(*) *Centro de um polígono regular* é o centro da circunferência que o circunscreve, isto é, da que contém todos os seus vértices.

exemplo). Logo, representando por d o número de diagonais de um polígono convexo de n lados ($n>3$), temos a seguinte fórmula, que dá êsse número de diagonais:

$$\boxed{d = \frac{n(n-3)}{2}}$$

Exemplo:

Determinar o número de diagonais de um hexágono.

Sendo o polígono de 6 lados ($n=6$), temos, aplicando a fórmula que dá o número de diagonais:

$$d = \frac{6\,(6-3)}{2} = \frac{6 \times 3}{2} = 9.$$

Portanto, um hexágono tem 9 diagonais.

EXERCÍCIOS

1. Se $ABCDE$ é um polígono convexo de 5 lados e P um ponto interno dêsse polígono, pergunta-se, em quantos triângulos fica decomposto o polígono quando se une o ponto P aos seus vértices?
2. Em quantos triângulos fica decomposto um polígono convexo, de n lados ($n>3$), quando se unem os seus vértices a um ponto qualquer interno dêsse polígono?
3. Unindo-se um dos vértices de um hexágono convexo aos demais vértices dêsse polígono, em quantos triângulos fica dividido o hexágono?
4. Em quantos triângulos fica dividido um polígono convexo, de n lados ($n>3$), quando se une um de seus vértices aos demais?
5. Quantas diagonais tem um polígono convexo de 7 lados?
6. Qual é o número de diagonais de um icoságono convexo?
7. Quantas diagonais tem um triângulo?
8. Qual é o polígono que tem tantas diagonais quantos são os lados? ($d=n$).
9. Quantos lados tem um polígono cujo número de diagonais é o *dôbro* do número de lados? ($d=2n$).
10. Qual é o polígono cujo número de diagonais é o *triplo* do número de lados? ($d=3n$).

Respostas:

1. 5.	3. 4.	5. 14.	7. Nenhuma.	9. 7.
2. n	4. $n-2$.	6. 170.	8. Pentágono.	10. Eneágono.

§ 4. Triângulos. Congruência. Aplicações.

ELEMENTOS DE UM TRIÂNGULO. CLASSIFICAÇÃO

33. Triângulo. Elementos principais. Chama-se *triângulo* ou *trilátero* ao polígono de três lados. Um triângulo (fig. 58) possui *três lados, três vértices* e, portanto, *três ângulos* (ou ângulos internos).

Todo triângulo é convexo e *não possui diagonais*. Os três lados e os três ângulos (*) dizem-se *elementos principais* do triângulo.

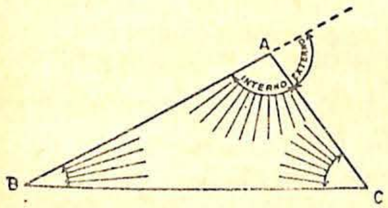


FIG. 58

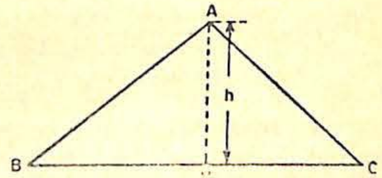


FIG. 59

A linha poligonal fechada, que define o triângulo (ABC, na fig. 58), constitui o *contôrno* do triângulo e a soma de seus lados, o *perímetro*. Num triângulo, cada lado é *oposto* ao ângulo formado pelos outros dois lados e, portanto, também ao vértice dêste ângulo. Assim, no triângulo ABC (que se indica $\triangle ABC$), o lado BC é *oposto* ao ângulo $B\hat{A}C$ e ao vértice A. Os ângulos adjacentes aos ângulos internos são os *ângulos externos* do triângulo.

34. Outros elementos de um triângulo. Num triângulo, destacam-se mais os seguintes *elementos:* alturas, medianas e bissetrizes.

1. ***Altura*** de um triângulo, em relação a um vértice do triângulo é o *segmento da perpendicular* (AH nas figs. 59 e 60)

(*) Os ângulos internos do $\triangle ABC$ são comumente indicados, respectivamente, por $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$.

traçada dêste vértice ao lado oposto (*BC* na fig. 59) *ou ao prolongamento dêste lado* (*BH* na fig. 60). O lado oposto ao vértice ao qual se relaciona a altura, é denominado *base* do triângulo.

É evidente que: *um triângulo tem três alturas.*

2. ***Mediana*** de um triângulo, em relação a um lado do triângulo, *é o segmento* (*AM* na fig. 61) *que une o ponto médio dêste lado ao vértice oposto.*

Um triângulo, também *tem três medianas.*

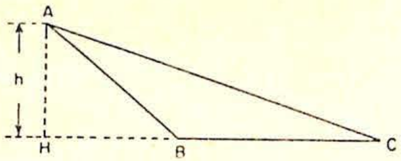


FIG. 60

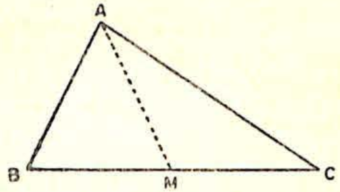


FIG. 61

3. ***Bissetriz*** de um triângulo, relativa a um ângulo (interno) do triângulo, é o segmento da bissetriz (*AD* na fig. 62) dêste ângulo compreendido entre o vértice e o lado oposto.

Um triângulo *tem três bissetrizes* (internas).

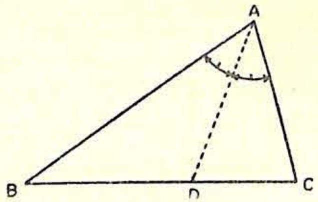


FIG. 62

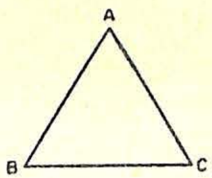


FIG. 63

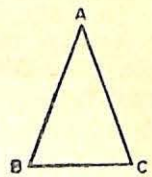


FIG. 64

35. Classificação dos triângulos. Em relação aos lados, um triângulo pode ser:

eqüilátero, quando possui os *três lados iguais* (fig. 63) ;

isósceles, quando possui *dois lados iguais*(*) (fig. 64) e

escaleno, quando possui os *três lados desiguais* (fig. 65).

(*) Ao terceiro lado (*BC*) damos o nome de *base.*

Em relação aos ângulos, um triângulo pode ser:

acutângulo, quando possui os três ângulos agudos (fig. 66); caso êstes três ângulos sejam iguais, o triângulo diz-se *eqüiângulo* ;

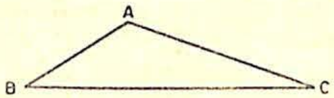


FIG. 65

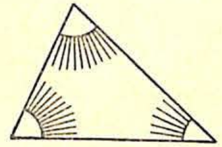


FIG. 66

retângulo, quando possui um ângulo reto (fig. 67); neste triângulo o lado oposto ao ângulo reto é denominado *hipotenusa* e os outros dois lados, *catetos* e

obtusângulo, quando possui um ângulo obtuso (fig. 68).

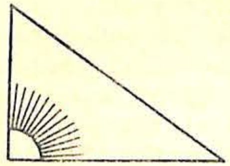


FIG. 67

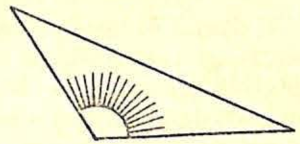


FIG. 68

NOTA : Costuma-se atribuir o nome de *obliquângulos* aos triângulos que não são retângulos (os lados são segmentos de retas oblíquas, figs. 66 e 68).

CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

36. Casos clássicos de congruência de triângulos. Dois triângulos são *iguais* ou *congruentes* quando por intermédio de um movimento êles *coincidem*, isto é, se superpõem. Nestas condições, os vértices e os lados de um triângulo vão coincidir, após o movimento, com os vértices e os lados *correspondentes* do outro (figs. 69 e 70).

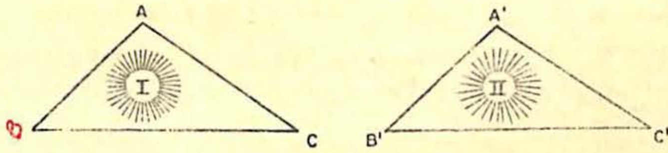


FIG. 69

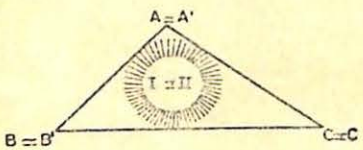


FIG. 70

Os vértices correspondentes A e A', B e B' C e C' são os *pontos homólogos* e os lados correspondentes AB e $A'B'$, BC e $B'C'$, CA e $C'A'$, são os *lados homólogos*. Pode-se afirmar, assim que :

> **Dois triângulos são congruentes ou iguais quando têm todos os lados e todos os ângulos respectivamente iguais.**

Todavia é possível saber se dois triângulos são congruentes sem verificar se *todos os lados* e *todos os ângulos* são respectivamente iguais, isto é, não usando os *seis* elementos principais de cada um. Para isso, basta verificar, como iremos demonstrar mais adiante, se os dois triângulos têm, respectivamente iguais, sòmente *três* dos elementos principais, dentre os quais esteja compreendido, pelo menos, um lado. Surgem, assim, os *casos clássicos de congruência* ou *critérios de igualdade de triângulos* de muita importância e grande uso na Geometria dedutiva.

37. Primeiro caso de congruência. (*) É dado pelo seguinte

Teorema: *Dois triângulos são congruentes quando têm dois lados e o ângulo compreendido, respectivamente, iguais* (L.A.L.) (**).

(*) Poderíamos considerar êste caso de igualdade e outros como *postulado*. Preferimos, na idade em que se encontram os alunos, introduzí-lo como *teorema*, admitindo, no entretanto, o *Postulado do movimento* (pág. 94).

(**) Abreviatura do 1.º caso — L.A.L. — significa : *lado, ângulo, lado*.

Sejam os triângulos ABC e $A'B'C'$ (fig. 71). Temos :

$$\text{H} \begin{cases} AB = A'B' \\ \hat{A} = \hat{A}' \\ AC = A'C' \end{cases} \qquad \text{T} \;\{\; \triangle ABC = \triangle A'B'C'$$

(L.A.L.)

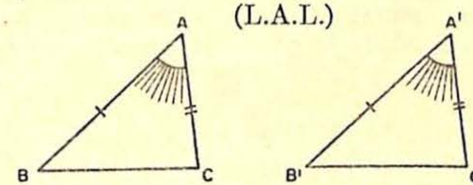


FIG. 71

DEMONSTRAÇÃO :

1. Transportemos o $\triangle ABC$ sôbre o $\triangle A'B'C'$, de modo que $\hat{A}$ coincida com o seu igual $\hat{A}'$ e que os lados AB e AC se situem, respectivamente, sôbre os lados $A'B'$ e $A'C'$.
2. Como, por hipótese, $AB = A'B'$ e $AC = A'C'$, o vértice B coincidirá com o vértice B' e C com o C'. Logo, sendo coincidentes os vértices dos dois triângulos, segue-se que :

$$\triangle ABC = \triangle A'B'C'$$

c.q.d.

NOTA: Êste teorema permite afirmar que: em dois triângulos iguais a *lados iguais* opõem-se *ângulos iguais* e a *ângulos iguais* opõem-se *lados iguais*.

Aplicações do 1.º caso de congruência

38. Propriedades do triângulo isósceles.

a) ***Teorema:*** *Em todo triângulo isósceles os ângulos da base são iguais.*

Seja o triângulo ABC (fig. 72). Temos :

$$\text{H} \;\{\; AB = AC$$
$$\text{T} \;\{\; \hat{B} = \hat{C}.$$

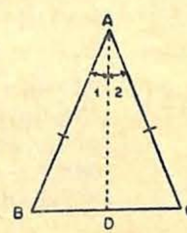


FIG. 72

DEMONSTRAÇÃO :

1. Tracemos a bissetriz do ângulo do vértice A que encontra BC no ponto D. Logo : $\hat{1} = \hat{2}$ (def. de bissetriz).
2. Os triângulos ABD e ADC são iguais, pelo 1.º caso de congruência (L.A.L.), e, portanto, são necessàriamente iguais os ângulos correspondentes $\hat{B}$ e $\hat{C}$. Logo:

$$\hat{B} = \hat{C}$$ c.q.d.

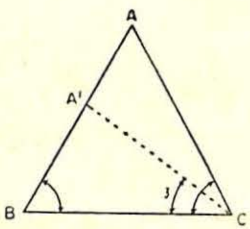


FIG. 73

b) ***Teorema recíproco:*** (*) *O triângulo que tem dois ângulos iguais é isósceles.*

Seja o triângulo ABC (fig. 73). Temos :

H { $\hat{B} = \hat{C}$

T { $AB = AC$.

DEMONSTRAÇÃO (por redução ao absurdo) :

1. Neguemos a tese, isto é, se não fôsse $AB = AC$, então deveríamos ter forçosamente: $AB > AC$ ou $AB < AC$ (n.º 11).
2. Se fôsse $AB > AC$, poderíamos determinar sôbre AB um ponto A' tal que $A'B = AC$ e unindo A' com C obteríamos o $\triangle A'BC = \triangle ABC$ (pelo 1.º caso L.A.L.), pois,

$$\begin{cases} A'B = AC & \text{(por construção)} \\ \hat{B} = \hat{C} & \text{(por hipótese)} \\ BC \text{ é comum} & \end{cases}$$ e, portanto,: $\hat{B} = \hat{3}$.

3. Como, por hipótese : $\hat{B} = \hat{C}$ segue-se, então, que $\hat{3} = \hat{C}$ (propriedade transitiva, n.º 10 - 3.ª),

isto é, *um absurdo*, pois, o ângulo $\hat{3}$ sendo *parte* do ângulo $\hat{C}$ nunca poderia ser igual a $\hat{C}$. Portanto, não poder ser $AB > AC$. Com raciocínio análogo verificaríamos não ser possível $AB < AC$ o que nos leva a concluir ser

$$AB = AC$$ c.q.d.

(*) Ver algumas observações interessantes sôbre a Geometria Dedutiva da 3.ª Série (pág. 311).

c) ***Corolários:***

1.º) *Todo triângulo eqüilátero é também eqüiângulo.*

Seja o triângulo ABC (fig. 74). Temos:

H { $AB = BC = AC$ T { $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$

DEMONSTRAÇÃO :

1. Sendo $AB = AC$, segue que $\hat{B} = \hat{C}$ (I) (teorema *a*)
 " $AB = BC$, " " $\hat{A} = \hat{C}$ (II) (teorema *a*).

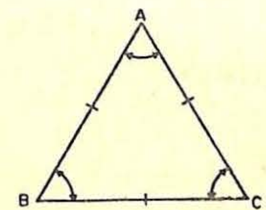


FIG. 74

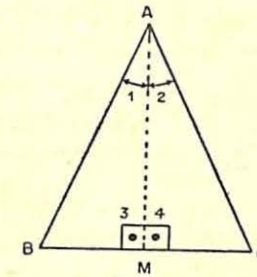


FIG. 75

2. Das igualdades (I) e (II), segue pela propriedade transitiva (n.º 10, 3.ª) que :

$$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$$

c.q.d.

2.º) *Em todo triângulo isósceles a bissetriz do ângulo do vértice, a altura e a mediana relativas à base, coincidem.*

Seja o triângulo ABC (fig. 75). Temos :

H $\begin{cases} AB = AC \\ AM \text{ é bissetriz } (\hat{1} = \hat{2}) \end{cases}$

T { AM é altura e mediana.

DEMONSTRAÇÃO :

1. Sendo AM bissetriz do $\hat{A}$, isto é, $\hat{1} = \hat{2}$, temos que : $\triangle AMB = \triangle AMC$ (caso L.A.L.).

2. Logo, os elementos correspondentes são iguais, isto é:

$$BM = MC \quad \text{(I)}$$

$$\hat{3} = \hat{4} \quad \text{(II) (âng. adjacentes iguais).}$$

A igualdade (I) mostra que AM *é mediana* e a igualdade (II) que AM é *altura* (perpendicular à base BC) do triângulo ABC em relação à base BC.

c.q.d.

39. Teorema do ângulo externo. *Em todo triângulo um ângulo externo é maior do que cada um dos ângulos internos não adjacentes.* (*)

Seja o triângulo ABC (fig. 76). Temos:

$$\text{H} \begin{cases} \hat{\alpha} \text{ ângulo externo} \\ \hat{A} \text{ e } \hat{B} \text{ ângulos não adj. de } \hat{\alpha} \end{cases} \qquad \text{T} \begin{cases} \hat{\alpha} > \hat{A} \\ \hat{\alpha} > \hat{B}. \end{cases}$$

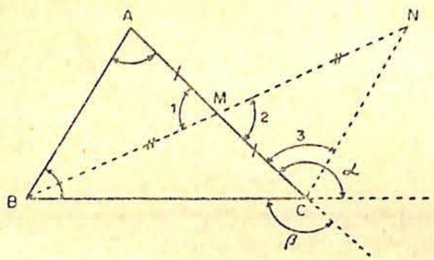


FIG. 76

DEMONSTRAÇÃO:

1. Seja M o ponto médio do lado AC; unamos M a B e prolonguemos BM de um segmento $MN = BM$. Liguemos N a C e consideremos os triângulos ABM e MCN.
2. Êstes triângulos são iguais, pelo caso L.A.L., isto é:

$$\triangle ABM = \triangle MCN$$

$$\text{(L.A.L.)} \begin{cases} BM = MN \text{ (por construção)} \\ \hat{1} = \hat{2} \text{ (o.p.v.)} \\ MA = MC \text{ (por construção)} \end{cases}$$

e, portanto, $\hat{A} = \hat{3}$ (âng. homólogos em $\triangle$ iguais).

(*) Com relação ao seu ângulo adjacente, o ângulo externo não está subordinado a nenhuma relação, podendo ser *menor, igual* ou *maior*, conforme o ângulo interno seja *obtuso, reto* ou *agudo*, respectivamente.

3. Como: $\hat{\alpha} > \hat{3}$ (α contém $\hat{3}$)

segue-se que $\hat{\alpha} > \hat{A}$ ($\hat{A} = \hat{3}$).

Com raciocínio análogo, prova-se que $\hat{\beta} > \hat{B}$ ($\hat{\beta}$ também é externo) e como $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$ (o.p.v.), vem

$$\hat{\alpha} > \hat{B}$$

c.q.d.

Corolário: *Em todo triângulo a soma de dois ângulos é menor que 2 retos.*

Seja o triângulo ABC (fig. 77). Temos:

H { $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ ângulos internos   T { $\hat{A} + \hat{C} < 2$ retos.

DEMONSTRAÇÃO:

1. Prolonguemos o lado BC e representemos por $\hat{\alpha}$ o ângulo externo adjacente a $\hat{C}$.
2. Pelo teorema do ângulo externo:

$$\hat{\alpha} > \hat{A}$$

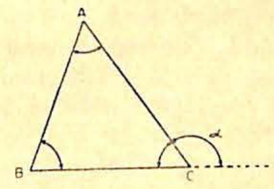


FIG. 77

e somando $\hat{C}$ aos dois membros dessa desigualdade (*), temos:

$$\hat{\alpha} + \hat{C} > \hat{A} + \hat{C}.$$

Sendo $\hat{\alpha} + \hat{C} = 2$ retos (n.º 28, 3.º), segue-se que:

$$2 \text{ retos} > \hat{A} + \hat{C}$$

ou $$\hat{A} + \hat{C} < 2 \text{ retos}$$

c.q.d.

40. Segundo caso de congruência. É dado pelo seguinte

Teorema: *Dois triângulos são congruentes quando têm um lado igual e os dois ângulos adjacentes a êste lado, respectivamente, iguais.* (A.L.A.) (**).

(*) Propriedades das desigualdades. Ver *Matemática*, Curso Ginasial, 2.ª Série, pág. 147, do mesmo autor.

(**) Abreviatura do 2.º caso — A.L.A. — significa: *ângulo, lado ângulo.*

Sejam os triângulos ABC e $A'B'C'$ (fig. 78). Temos:

$$\text{H}\begin{cases}\hat{B} = \hat{B}' \\ BC = B'C' \\ \hat{C} = \hat{C}'\end{cases} \qquad \text{T}\ \{\ \triangle ABC = \triangle A'B'C'.$$

(A.L.A.)

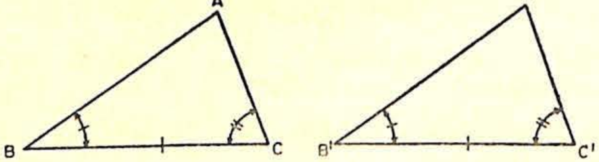


FIG. 78

DEMONSTRAÇÃO:

1. Transportemos o triângulo ABC sôbre o triângulo $A'B'C'$ de modo que o lado BC coincida com o seu igual $B'C'$. Como $\hat{B} = \hat{B}'$, o lado BA tomará a direção de $B'A'$ e como $\hat{C} = \hat{C}'$, CA tomará a direção de $C'A'$.
2. O vértice A devendo estar simultâneamente sôbre as semi-retas $B'A'$ e $C'A'$, estará forçosamente no ponto de encontro das duas, isto é, em A'. Logo, coincidindo os três vértices, temos que

$$\triangle ABC = \triangle A'B'C'$$

c.q.d.

Corolário: *Todo triângulo eqüiângulo é também eqüilátero.*

A *demonstração* ficará a cargo do aluno.

41. Terceiro caso de congruência. É dado pelo seguinte

Teorema: *Dois triângulos são congruentes quando têm os três lados respectivamente iguais* (L.L.L.) (*).

Sejam os triângulos ABC e $A'B'C'$ (fig. 79). Temos:

$$\text{H}\begin{cases}AB = A'B' \\ BC = B'C' \\ CA = C'A'\end{cases} \qquad \text{T}\ \{\ \triangle ABC = \triangle A'B'C'.$$

(*) Abreviatura do 3.º caso — L.L.L. — significa: *lado, lado, lado.*

(L.L.L.)

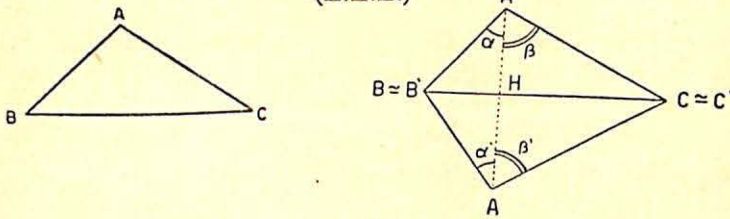


FIG. 79

DEMONSTRAÇÃO:

1. Transportemos o triângulo ABC sôbre o triângulo $A'B'C'$ de modo que BC coincida com o seu igual $B'C'$. Nada podemos dizer, por enquanto, sôbre a coincidência dos outros lados, pois, nada sabemos (hipótese) acêrca dos ângulos. Giremos, então, o $\triangle ABC$ em tôrno do lado comum $BC = B'C'$, de sorte que o vértice A fique no semi-plano oposto de A' em relação a êste lado comum e unamos A' com A formando os triângulos $A'B'A$ e $A'C'A$;
2. Os triângulos $A'B'A$ e $A'C'A$ são isósceles ($AB = A'B'$, $CA = C'A'$, por hip.) e, portanto, os ângulos da base são iguais (n.º 38 – a):

$$\alpha = \alpha'$$
$$\hat{\beta} = \hat{\beta}'.$$

Somando, membro a membro, estas igualdades, temos:

$$\hat{\alpha} + \hat{\beta} = \hat{\alpha}' + \beta'$$

ou

$$\hat{A} = \hat{A}'.$$

Logo, os triângulos ABC e $A'B'C'$ são iguais pelo caso L.A.L., pois têm os dois lados iguais (por hip.) e os ângulos compreendidos ($\hat{A}$ e $\hat{A}'$) respectivamente iguais.

c.q.d.

NOTA: O ponto de intersecção de $A'A$ com BC (H na fig. 79) pode ser também *externo* ao segmento BC (é o caso dos triângulos ABC e $A'B'C'$ serem obtusângulos) ou *coincidente* com um dos vértices B ou C (é o caso dos triângulos ABC e $A'B'C'$ serem retângulos em B e B').

não

42. Quarto caso de congruência. É dado pelo seguinte

Teorema: *Dois triângulos são congruentes, quando têm um lado, um ângulo adjacente e um ângulo oposto a êste lado, respectivamente iguais.* (L.A.Aₒ.) (*).

Sejam os triângulos ABC e $A'B'C'$ (fig. 80). Temos:

$$\text{H}\begin{cases} BC = B'C' \\ \hat{B} = \hat{B}' \\ \hat{A} = \hat{A}' \end{cases} \qquad \text{T}\ \{\ \triangle ABC = \triangle A'B'C'.$$

(L.A.Aₒ.)

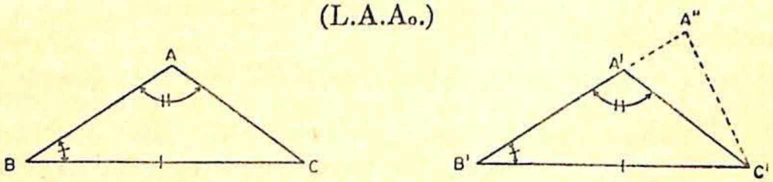


Fig. 80

Demonstração:

1. Transportemos o triângulo ABC sôbre o triângulo $A'B'C'$, de modo que BC coincida com o seu igual $B'C'$. Nas condições da hipótese ($\hat{B} = \hat{B}'$), dizemos que $\hat{A}$ deve coincidir com $\hat{A}'$, ou seja, $AB = A'B'$ e os dois triângulos serão iguais pelo caso L.A.L.;
2. Com efeito, se não fôsse $AB = A'B'$, deveria ser, por exemplo, $AB > A'B'$ e então existiria um ponto A'', tal que $A''B' = AB$ e unindo A'' com C resultaria

$$\triangle A''B'C' = \triangle ABC \text{ (L.A.L.)},$$

e, portanto: $\hat{A} = \hat{A}''$.
Como $\hat{A} = \hat{A}'$ (por hip.)
segue-se que: $\hat{A}' = \hat{A}''$,

isto é, *um absurdo*, pois, $\hat{A}'$ sendo ângulo externo ao $\triangle A''A'C'$ é maior que o ângulo interno não adjacente $\hat{A}''$ (n.º 39). Chegaríamos a absurdo análogo, caso fôsse $AB < A'B'$. Logo,

$$AB = A'B' \quad \text{e} \quad \triangle ABC = \triangle A'B'C'$$

c.q.d.

(*) Abreviatura do 4.º caso — L.A.Aₒ. — significa: *lado, ângulo adj., ângulo oposto.*

43. Congruência de triângulos retângulos. O caso particular de dois triângulos retângulos, significa que êles já trazem sempre um elemento igual, que é o ângulo reto (n.º 26). Nestas condições concluímos que *dois triângulos retângulos são congruentes, quando têm respectivamente iguais:*

1.º) *os dois catetos* (imediato pelo caso L.A.L.);
2.º) *um cateto e o ângulo agudo adjacente* (imediato pelo caso A.L.A.);
3.º) *a hipotenusa e um ângulo agudo* (imediato pelo caso L.A.Aₒ.);
4.º) *um cateto e o ângulo agudo oposto* (imediato pelo caso L.A.Aₒ.), e podemos demonstrar, ainda baseados nos casos já estudados,
5.º) *a hipotenusa e um cateto.*

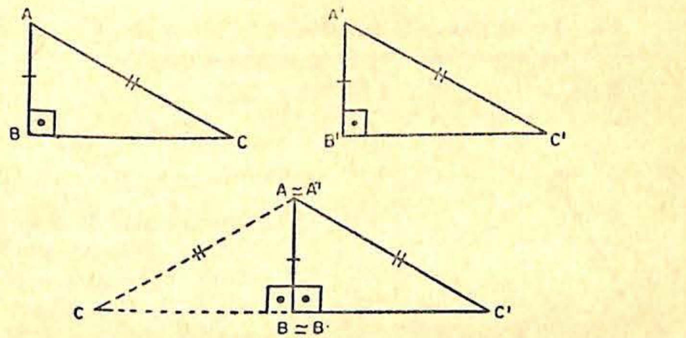


Fig. 81

De fato, sejam os triângulos ABC e $A'B'C'$ (fig. 81), onde temos:

$$\text{H}\begin{cases} \hat{B} = \hat{B}' \text{ (1 reto)} \\ AB = A'B' \text{ (cateto)} \\ AC = A'C' \text{ (hipotenusa)} \end{cases} \qquad \text{T}\ \{\ \triangle ABC = \triangle A'B'C'.$$

Demonstração:

1. Construamos o $\triangle ABC$ ao lado do $\triangle A'B'C'$, de modo que o cateto AB coincida com o seu igual $A'B'$ e que

o vértice C se situe no semi-plano oposto de C' em relação a AB (esta operação eqüivale a girar o $\triangle ABC$ em tôrno do cateto comum $AB = A'B'$).

2. Como os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{B}'$ são retos e adjacentes segue-se que o ângulo $C\hat{B}C'$ é *raso* e BC é semi-reta oposta de $B'C'$. O triângulo ACC' é isósceles ($AC = A'C'$, por hip.) e, por conseguinte, os ângulos da base são iguais (n.º 38), isto é, $\hat{C} = \hat{C}'$. Logo, os dois triângulos retângulos ABC e $A'B'C'$, tendo a *hipotenusa* e *um ângulo agudo*, respectivamente iguais, são *congruentes* (3.º).

c.q.d.

Relações de desigualdades entre lados e ângulos

44. Teorema. *Se dois lados de um triângulo são desiguais, ao maior lado opõe-se o maior ângulo.*

Seja o triângulo ABC (fig. 82). Temos:

$H \{ AC > AB$ $\qquad$ $T \{ \hat{B} > \hat{C}.$

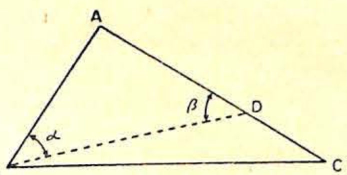


Fig. 82

Demonstração:

1. Sendo $AC > AB$, tomemos sôbre AC um ponto D, tal que $AB = AD$ e unamos D com B. Resultam os triângulos ABD e DBC;

2. O triângulo ABD é isósceles ($AB = AD$) e, portanto:

$$\hat{\alpha} = \hat{\beta}.$$

O ângulo $\hat{\beta}$ é externo ao triângulo DBC, logo:

$$\hat{\beta} > \hat{C} \quad \text{e} \quad \therefore \quad \hat{\alpha} > \hat{C} \quad (\hat{\alpha} = \hat{\beta}).$$

Como $\hat{B} > \hat{\alpha}$ ($\hat{B}$ contém $\hat{\alpha}$) e pelo fato de ser $\hat{\alpha} > \hat{C}$ (*), concluímos que:

$$\hat{B} > \hat{C}$$

c.q.d.

(*) Propriedade transitiva das desigualdades: se $\hat{A} > \hat{B}$ e $\hat{B} > \hat{C}$, segue-se que: $\hat{A} > \hat{C}$.

45. Teorema recíproco. *Se os dois ângulos de um triângulo são desiguais, ao maior ângulo opõe-se o maior lado.*

Seja o triângulo ABC (fig. 83). Temos:

$H \{ \hat{B} > \hat{C}$ $\qquad$ $T \{ AC > AB.$

Demonstração (por redução ao absurdo):

1. Se não fôsse verdadeira a relação $AC > AB$, forçosamente deveria ser $AC = AB$ ou $AC < AB$;

2. Ora, se $AC = AB$, o triângulo ABC é isósceles e, portanto, os ângulos da base são iguais, isto é, $\hat{B} = \hat{C}$ que contraria a hipótese; se $AC < AB$, pelo teorema direto, teríamos: $\hat{B} < \hat{C}$ que também contradiz a hipótese. Logo, como AC não pode ser igual e nem menor do que AB, segue-se que:

$$AC > AB$$

c.q.d.

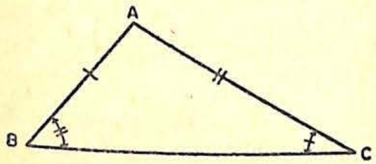


Fig. 83

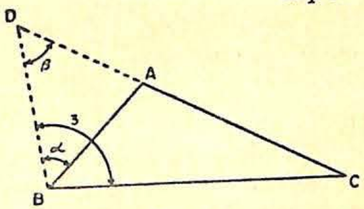


Fig. 84

46. Teorema. *Em todo triângulo, qualquer lado é menor que a soma dos outros dois.*

Seja o triângulo ABC (fig. 84). Suponhamos BC o maior lado. Temos:

$H \{ BC$ maior lado $\qquad$ $T \{ BC < AB + CA.$

Demonstração:

1. Prolonguemos o lado CA e tomemos sôbre o prolongamento um ponto D, tal que $AD = AB$. No triângulo isósceles ADB, resulta portanto: $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$.

2. Sendo: $\hat{\alpha} < \hat{3}$ ($\hat{\alpha}$ está contido em $\hat{3}$) segue que $\hat{\beta} < \hat{3}$ e como ao maior ângulo opõe-se o maior lado (teorema anterior), temos no $\triangle DBC$:

$$BC < CD$$

ou
$$BC < CA + AD \qquad (CD = CA + AD),$$

sendo, porém, $AD = AB$, vem finalmente:

$$BC < AB + CA$$

c.q.d

Corolário: *Em todo triângulo, qualquer lado é maior do que a diferença dos outros dois.* (*)

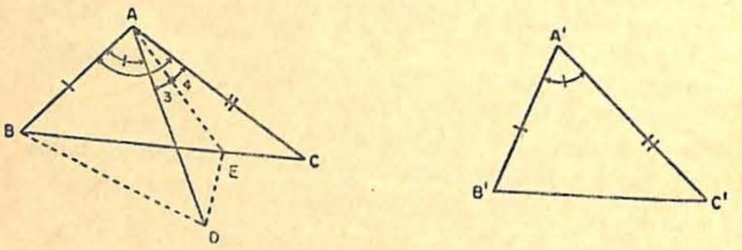


FIG. 85

De fato, da tese anterior $BC < AB + AC$, concluímos, transpondo um dos têrmos do segundo membro para o primeiro membro, que:

$$BC - AB < AC \quad \text{ou} \quad AC > BC - AB$$

c.q.d.

47. **Teorema.** *Se dois triângulos têm dois lados respectivamente iguais e os ângulos compreendidos desiguais, os terceiros lados são desiguais e ao maior ângulo opõe-se o maior lado.*

Sejam os triângulos ABC e $A'B'C'$ (fig. 85). Temos:

$$H \begin{cases} AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ \hat{A} > \hat{A}' \end{cases} \qquad T \; \{ \; BC > B'C'.$$

(*) Ver outra demonstração à (direita) pág. 315.

DEMONSTRAÇÃO:

1. Tracemos pelo vértice do $\hat{A}$ (maior ângulo por hip.) uma semi-reta que forme com AB um ângulo igual a $\hat{A}'$. Sôbre esta semi-reta tomemos o ponto D, tal que: $AD = A'C'$. Construamos, a seguir, a bissetriz do ângulo DAC ($\hat{3} = \hat{4}$) que encontrará BC no ponto E. Unamos B com D e D com E resultando o triângulo BED no qual: $BD < BE + ED$ (n.º 46);

2. Temos, assim: $\triangle DAE = \triangle EAC$ (L.A.L.)

pois,
$$\begin{cases} AD = AC \; (AD = A'C', \text{por cont.}) \\ \hat{3} \;\; = \hat{4} \; (\text{por construção}) \\ AE \; \text{é comum.} \end{cases}$$

Logo, $ED = EC$.

Sendo $BD < BE + ED$,

ou $BD < BE + EC \quad (ED = EC)$,

vem $BD < BC$.

Pelo fato de ser $BD = B'C'$ ($\triangle ABD = \triangle A'B'C'$, caso L.A.L.),

segue-se que: $B'C' < BC$,

ou $BC > B'C'$

c.q.d.

NOTA: O *teorema recíproco* dêste teorema, que pode ser demonstrado pelo *método da redução ao absurdo*, fica como exercício.

Comparação de linhas de mesmas extremidades

48. **Teorema.** *Um segmento de reta é menor que qualquer linha poligonal de mesmas extremidades* (*).

Sejam: o segmento AB e a poligonal $ADEFB$ (fig. 86). Temos:

$$H \begin{cases} AB \text{ segmento de reta} \\ ADEFB \text{ linha poligonal} \end{cases}$$

$$T \; \{ \; AB < AD + DE + EF + FB.$$

(*) Êste teorema permite afirmar que: *o menor caminho entre dois pontos é o segmento de reta compreendido entre êles.*

DEMONSTRAÇÃO:

1. Unamos o ponto E às extremidades comuns A e B, obtendo os triângulos AED e EBF.
2. No triângulo AED, temos: $AE < AD + DE$ (n.º 46).
No triângulo EBF, temos: $EB < EF + FB$ (n.º 46).
Somando, membro a membro:
$$AE + EB < AD + DE + EF + FB.$$
Como: $AB < AE + EB$ (no $\triangle EAB$)
segue-se, *por mais forte razão*, que:
$AB < AD + DE + EF + FB$
c.q.d.

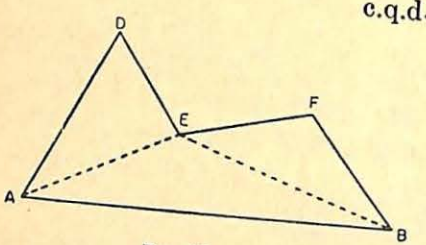


FIG. 86

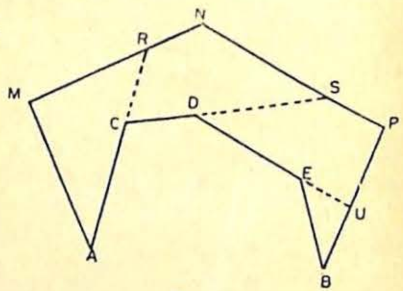


FIG. 87

49. Teorema. *Qualquer linha poligonal envolvente é maior que a poligonal convexa envolvida de mesmas extremidades.*

Sejam as poligonais $AMNPB$ e $ACDEB$ (fig. 87). Temos:

H $\begin{cases} AMNPB \text{ é envolvente} \\ ACDEB \text{ é convexa envolvida} \end{cases}$

T $\{ AC+CD+DE+EB<AM+MN+NP+PB.$

DEMONSTRAÇÃO:

1. Prolonguemos os segmentos AC, CD e DE, da poligonal envolvida, até encontrar a poligonal envolvente, respectivamente, nos pontos R, S e U.

2. Pela propriedade dos lados de um triângulo (n.º 46) e pelo teorema anterior, temos:

no triângulo AMR : $AR < AM + MR$ (n.º 46)
no polígono $CSNR$: $CS < CR + RN + NS$ (teorema anterior)
no polígono $DUPS$: $DU < DS + SP + PU$ (teorema anterior)
no triângulo EUB : $EB < EU + UB$ (n.º 46).

Somando, membro a membro, tôdas estas desigualdades:

$$AR + CS + DU + EB < AM + MR + CR + RN + NS + DS + SP + PU + EU + UB$$

ou como:
$$AC+CR+CD+DS+DE+EU+EB < AM + MN + CR + NP + DS + PB+EU$$

e suprimindo, nos dois membros, os segmentos comuns (CR, DS e EU), vem:
$$AC + CD + DE + EB < AM + MN + NP + PB$$
c.q.d.

EXERCÍCIOS

1. No quadrado $ABCD$ (fig. 88), demonstrar que as diagonais AC e BD são iguais.
2. Na fig. 88, se M é o ponto médio do lado AD, provar que $MC = MB$.
3. Na fig. 88, se M, N, P e Q são os pontos médios dos lados consecutivos do quadrado, demonstrar que $MN = NP = PQ = QM$.
4. Demonstrar que dois triângulos retângulos são iguais quando têm os catetos respectivamente iguais.
5. Na fig. 89, temos: $AB = AC$ e $EB = CD$. Demonstrar que $BD = EC$.
6. Demonstrar que as alturas de um triângulo eqüilátero são iguais.

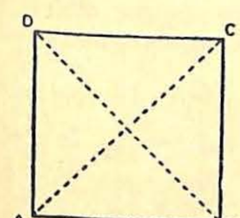


FIG. 88

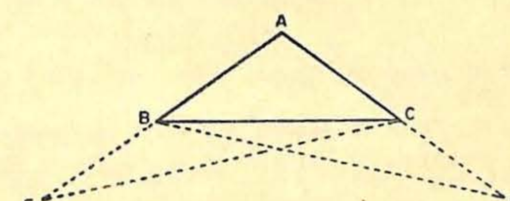


FIG. 89

7. Provar que num triângulo retângulo isósceles a mediana em relação à hipotenusa o divide em dois triângulos iguais.
8. Se no triângulo isósceles ABC (fig. 90), toma-se sôbre os prolongamentos da base BC dois segmentos CD e BE, iguais entre si, os triângulos ACD e ABE resultam iguais.

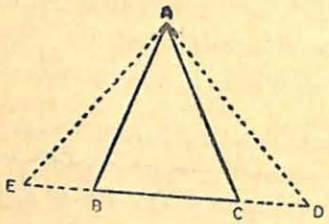


FIG. 90

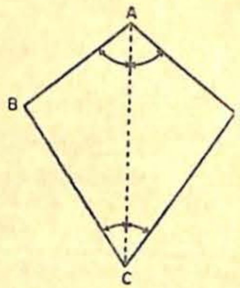


FIG. 91

9. Provar que um triângulo isósceles tem duas bissetrizes iguais.
10. No quadrilátero $ABCD$ (fig. 91), AC é bissetriz dos ângulos $B\hat{A}D$ e BCD. Provar que os triângulos ABC e ADC são iguais.
11. Na figura 92, temos: $AM = MB$, $PA \perp AB$, $BQ \perp AB$. Demonstrar que: $\triangle AMP = \triangle BMQ$.

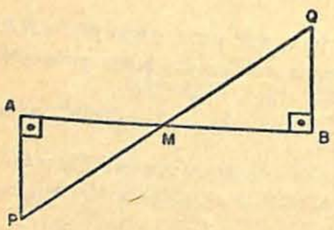


FIG. 92

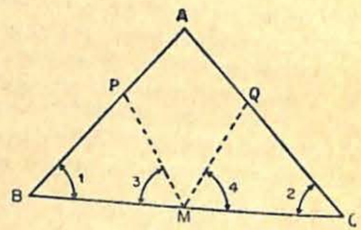


FIG. 93

12. Na figura 93, temos: $BM = MC$, $\hat{1} = \hat{2}$ e $\hat{3} = \hat{4}$. Provar que: $PM = QM$.
13. Na figura 94, temos: $AB = DC$, $AC = BD$. Provar que: $\hat{1} = \hat{2}$.
14. Na figura 95, temos: $AB = AC$, $BP = PC$. Provar que: $\hat{1} = \hat{2}$ e $AM \perp BC$.
15. Demonstrar que dois triângulos retângulos são iguais quando têm um ângulo agudo e o cateto adjacente, respectivamente iguais.

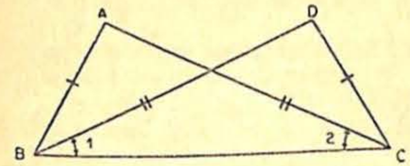


FIG. 94

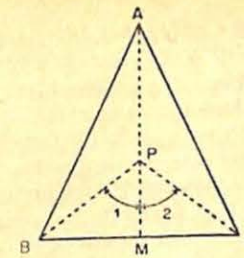


FIG. 95

16. Provar que os dois segmentos que unem os meios dos lados de um triângulo isósceles ao meio da base dêste triângulo, são iguais.
17. Pode-se construir um triângulo que tenha por lados 3cm, 5cm e 9cm? Por que?
18. Na figura 96, o triângulo ABC é isósceles e $AD = AE$. Provar que: $BE = CD$.

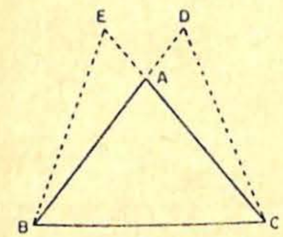


FIG. 96

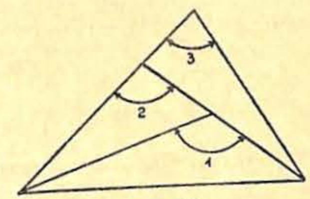


FIG. 97

19. Demonstrar que dois quadriláteros convexos, tendo respectivamente iguais os quatro lados e um ângulo compreendido entre lados iguais, são congruentes.
20. Dois polígonos convexos são congruentes, quando, possuindo o mesmo número de lados respectivamente iguais, as diagonais que partem de um determinado vértice comum a lados iguais são iguais.
21. Na figura 97, provar que: $\hat{1} > \hat{2}$ e $\hat{1} > \hat{3}$.
22. Na figura 98, provar que: $\hat{1} > \hat{2}$ e $\hat{1} > \hat{3}$.

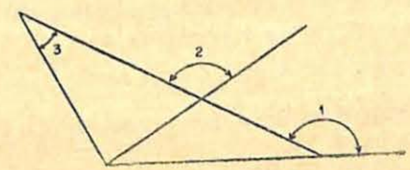


FIG. 98

23. No triângulo ABC (fig. 99), sabendo-se que: DB é bissetriz de $\hat{B}$ ($\hat{1}=\hat{2}$), DC é bissetriz de $\hat{C}$ ($\hat{3}=\hat{4}$) e $AB>AC$. Demonstrar que: $BD>DC$.
24. Usando a mesma hipótese do Ex. 23 e ainda que $DM \perp BC$ (fig. 99), demonstrar que $BM > MC$.
25. Unindo-se os três vértices de um triângulo a um ponto qualquer O no interior do mesmo, a soma dos segmentos obtidos é menor que o perímetro e maior que o semi-perímetro.
26. Num triângulo as somas das distâncias de um ponto interno O aos extremos de um lado BC é menor que a soma dos dois lados concorrentes ao vértice oposto.

NOTA: Ver algumas observações interessantes sôbre a Geometria Dedutiva (pág. 311).

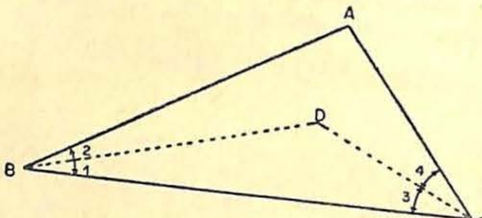


FIG. 99

SUGESTÕES

Para os exercícios 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 8, usar o caso L.A.L.
Para os exercícios 9, 10, 11 e 12, usar o caso A.L.A.
Para os exercícios 7, 13 e 14, usar o caso L.L.L.
Para os exercícios 16 e 18, usar o caso L.A.L.
Para o exercício 15, usar o caso A.L.A.
Para o exercício 19, usar os casos L.A.L. e L.L.L.
Para o exercício 20, usar o caso L.L.L.
Para os exercícios 21 e 22, usar o teorema do ângulo externo.
Para o exercício 23, usar o teorema n.º 44.
Para o exercício 24, usar os teoremas ns. 46 e 49.
Para o exercício 25, usar o teorema n.º 49.

Resposta:

17. Não, porque um lado qualquer deve ser menor que a soma dos outros dois.

§ 5. Perpendiculares e oblíquas. Lugares geométricos.

RETAS PERPENDICULARES E RETAS OBLÍQUAS

50. Definições. Já vimos (n.º 26 – Obs. 1.ª) que:

Duas retas são perpendiculares entre si, quando ao se interceptarem formam ângulos adjacentes iguais (fig. 100).

Cada um dos quatro ângulos, que elas formam, é *reto* (metade de um ângulo raso). Recìprocamente: se duas retas se interceptam de modo que um dos quatro ângulos formados seja reto, elas são *perpendiculares entre si*. Indicação: $r \perp s$.

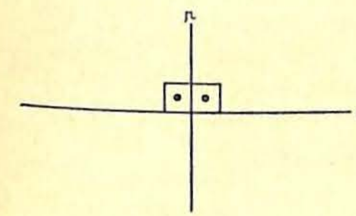


FIG. 100

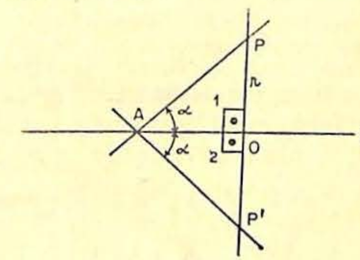


FIG. 101

Geralmente são denominadas, também, perpendiculares entre si, duas semi-retas ou dois segmentos, ou ainda uma semi-reta e um segmento, quando são perpendiculares as respectivas retas suportes.

Quando as retas, ao se interceptarem, não formam ângulos adjacentes iguais elas dizem-se *oblíquas*.

51. Teorema fundamental sôbre retas perpendiculares. *No plano, por um ponto dado fora de uma reta ou sôbre ela, pode-se traçar* (*) *uma e uma só perpendicular à reta dada.*

1.º) Sejam o ponto P e a reta s *que não se pertencem* (fig. 101).

Temos:

H { P fora de s T $\begin{cases} r \perp s \text{ (passando por } P) \\ r \text{ é única.} \end{cases}$

(*) No caso do ponto estar fora da perpendicular, diz-se também *abaixar* a perpendicular e, no caso do ponto pertencer à reta, *levantar* a perpendicular.

Demonstração:

1. Tracemos pelo ponto P uma oblíqua qualquer PA que forma com a reta s um ângulo $\hat{\alpha}$. No semi-plano oposto ao de P, tracemos pelo ponto A a oblíqua que forma com s o ângulo $\hat{\alpha}$ e tomemos sôbre esta oblíqua um segmento $AP' = AP$;
2. Unamos P a P' e teremos a reta r que interceptará s no ponto O. Temos, então:

$$\triangle POA = \triangle P'OA \text{ (caso L.A.L.).}$$

Nestas condições, segue-se que: $\hat{1} = \hat{2}$ (ângulos homólogos em triângulos iguais) e como são ângulos *adjacentes* concluímos ser

$$r \perp s \qquad \text{c.q.d.}$$

Esta perpendicular r à reta s, pelo ponto P, é *única* (*). De fato, suponhamos por um instante, que além de r passasse por P uma outra reta $r' \perp s$. Neste caso (fig. 102), teríamos:

$$\hat{\beta} > \hat{1} \text{ (ângulo externo)}$$

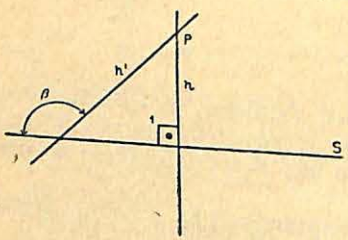


Fig. 102

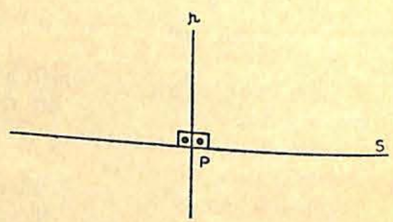


Fig. 103

e sendo $\hat{1}$ reto, segue-se que deverá ser $\hat{\beta}$ forçosamente *obtuso*, ou seja, a reta r' *não é* perpendicular a s.

2.º) Sejam o ponto P e a reta s, *que se pertencem* (fig. 103).

Temos:

H { P pertence a s T $\begin{cases} r \perp s \text{ (passando por } P) \\ r \text{ é única.} \end{cases}$

(*) Esta parte do teorema é também denominada *unicidade* da perpendicular (r).

Demonstração:

1. A reta s pode ser considerada como suporte dos lados de um ângulo raso de vértice P. Seja r a bissetriz dêste ângulo.
2. Como a bissetriz divide o ângulo (neste caso raso) em dois ângulos iguais, cada um dêles será *reto* e, portanto: $r \perp s$ c.q.d.

Esta perpendicular é *única*, pois, qualquer outra reta do plano passando por P dividirá o ângulo raso em duas partes desiguais (todo ângulo tem uma bissetriz e uma só) e conseqüentemente não poderá ser perpendicular.

Observação. O problema do traçado da perpendicular r à reta s, por um ponto P, é resolvido fàcilmente mediante o *esquadro* (fig. 104). O ponto O onde a perpendicular encontra s é denominado *pé da perpendicular*. Por extensão, o ponto onde uma oblíqua encontra uma reta é denominado *pé da oblíqua*.

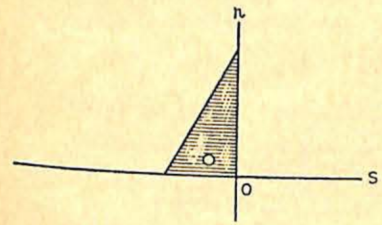


Fig. 104

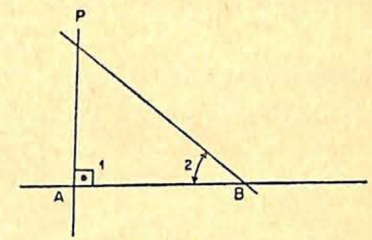


Fig. 105

52. Teorema sôbre a perpendicular e oblíquas a uma reta. *Se de um ponto fora de uma reta, traçarmos até ela o segmento perpendicular e vários segmentos oblíquos, temos:*

a) *o perpendicular é menor que qualquer oblíquo;*
b) *dois oblíquos, cujos pés se afastam igualmente do pé do perpendicular, são iguais;*
c) *de dois oblíquos, é maior aquêle cujo pé está mais afastado do pé do perpendicular.*

Parte *a*): Sejam PA perpendicular e PB oblíquo, respectivamente à reta s (fig. 105). Temos:

H $\begin{cases} PA \perp s \\ PB \not\perp s \end{cases}$ T { $PA < PB$.

DEMONSTRAÇÃO :

1. Com efeito, sendo o triângulo PAB retângulo (por hip. $PA \perp s$), o ângulo $\hat{1}$ é reto e, portanto, maior que o ângulo agudo $\hat{2}$, ou seja :
$$\hat{2} < \hat{1}.$$
2. Como num triângulo, se dois ângulos são desiguais, ao maior ângulo opõe-se o maior lado (n.º 45), segue-se que :
$$PA < PB \qquad \text{c.q.d.}$$

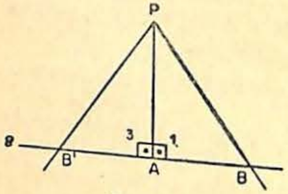


FIG. 106

Parte *b*) : Sejam PA perpendicular, PB e PB' oblíquos, respectivamente, à reta s (fig. 106). Temos :

$$\text{H} \begin{cases} PA \perp s, \ PB \underline{\angle} s, \ PB' \underline{\angle} s \\ AB = AB' \end{cases}$$

$$\text{T} \ \{ \ PB = PB'.$$

DEMONSTRAÇÃO :

1. De fato, $\Delta PAB = \Delta PAB'$ (caso L.A.L.), pois :
$$\begin{cases} PA \text{ é comum} \\ \hat{1} = \hat{3} \text{ (reto)} \\ AB = AB' \text{ (por hip.)} \end{cases}$$
2. Logo: $PB = PB'$ (lados homólogos iguais)

c.q.d.

Parte *c*) : Sejam PA perpendicular, PB e PC oblíquos, respectivamente, à reta s (fig. 107). Temos :

$$\text{H} \begin{cases} PA \perp s, \ PB \underline{\angle} s, \ PC \underline{\angle} s \\ AC > AB \end{cases} \qquad \text{T} \ \{ \ PC > PB.$$

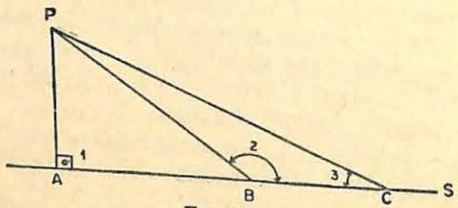


FIG. 107

DEMONSTRAÇÃO :

1. De fato, o $\hat{2}$ é externo ao triângulo PAB e, portanto:
$$\hat{2} > \hat{1}.$$
2. Sendo $\hat{1}$ reto (por hip. $PA \perp s$), segue-se que $\hat{2}$ é obtuso, isto é, o maior ângulo do triângulo PBC. Logo :
$$\hat{2} > \hat{3}.$$
Como num triângulo ao maior ângulo opõe-se o maior lado, temos :
$$PC > PB \qquad \text{c.q.d.}$$

OBSERVAÇÕES :

1.ª) Como de todos os segmentos que unem P à reta s, o *menor* é o que é perpendicular a s, denomina-se a êsse segmento de *distância* do ponto P à reta s. Na figura 107, PA é a *distância* de P a s.

2.ª) Chama-se *mediatriz* de um segmento a *perpendicular* a êsse segmento traçada pelo ponto médio do mesmo. Na figura 108, a reta r é a *mediatriz* do segmento BC.

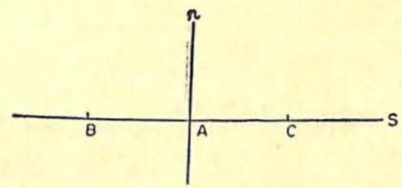


FIG. 108

LUGARES GEOMÉTRICOS

53. Definição. Denomina-se *lugar geométrico* a um conjunto de pontos, e sòmente êsses, que gozam de uma mesma propriedade. Para concluir que uma figura é um lugar geométrico é preciso *demonstrar* que :

a) cada ponto da figura goza da propriedade indicada ;

b) cada ponto que goze de tal propriedade pertence à figura, ou cada ponto fora da figura não goza daquela propriedade.

Estas propriedades que caracterizam um lugar geométrico são uma *inversa* da outra. Estudaremos, a seguir, a *mediatriz* e a *bissetriz* como *lugares geométricos*.

54. Teorema. *A mediatriz de um segmento é o lugar geométrico dos pontos eqüidistantes dos extremos dêste segmento.*

Parte *a*) : Seja o segmento AB e a mediatriz r dêste segmento (fig. 109). Temos :

$$\text{H} \begin{cases} r \text{ mediatriz de } AB \text{ ou } \begin{cases} r \perp AB \\ AM = MB \end{cases} \\ P \in r \, (*) \; (P \text{ pertence à mediatriz } r) \end{cases}$$

$$\text{T} \, \{ \; PA = PB.$$

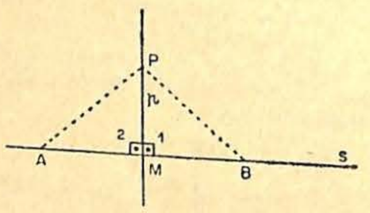


Fig. 109

Demonstração :

1. De fato, $\triangle PMA = \triangle PMB$ (caso L.A.L.), pois :

$$\begin{cases} PM \text{ é comum} \\ \hat{1} = \hat{2} \text{ (reto, por hip.)} \\ AM = MB \; (r \text{ é mediatriz por hip.)} \end{cases}$$

2. Logo, elementos correspondentes são iguais, isto é :

$$PA = PB$$

c.q.d.

Parte *b*) : Seja a figura 109. Temos agora :

$$\text{H} \, \{ \; P \text{ é eqüidistante de } A \text{ e } B \; (PA = PB)$$
$$\text{T} \, \{ \; P \in \text{ mediatriz de } AB.$$

(*) O símbolo $\in$ significa : *pertencer*. Ver algumas observações interessantes sôbre a Geometria Dedutiva, pág. 313, com relação à mediatriz de um segmento.

Demonstração :

1. Como $PA = PB$ (por hip.), o triângulo PAB é isósceles.
2. Unindo P a M, temos que PM é mediana e, portanto, é também *altura* (n.° 38 - *c* - 2.°), isto é, perpendicular a AB no seu ponto médio M, ou seja r é mediatriz de AB. c.q.d.

55. Teorema. *A bissetriz de um ângulo é o lugar geométrico dos pontos eqüidistantes dos lados dêste ângulo.*

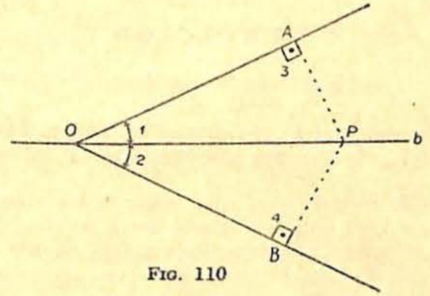


Fig. 110

Parte *a*) : Seja o ângulo $A\hat{O}B$ e a bissetriz b dêste ângulo (fig. 110). Temos :

$$\text{H} \begin{cases} b \text{ bissetriz de } A\hat{O}B \; (\hat{1} = \hat{2}) \\ P \in b, \text{ isto é } \begin{cases} PA \perp OA \\ PB \perp OB \end{cases} \end{cases} \qquad \text{T} \, \{ \; PA = PB.$$

Demonstração :

1. Com efeito : $\triangle PAO = \triangle PBO$ (caso L.A.A$_o$.), pois :

$$\begin{cases} PO \text{ é comum} \\ \hat{1} = \hat{2} \text{ (por hip.)} \\ \hat{3} = \hat{4} \text{ (retos, por hip.).} \end{cases}$$

2. Logo, elementos correspondentes são iguais, isto é :

$$PA = PB$$

c.q.d.

Parte *b*) : Seja a figura 110. Temos agora :

$$\text{H} \begin{cases} P \text{ é eqüidistante dos lados de } A\hat{O}B \; (PA = PB) \\ PA \text{ distância a } OA \; (PA \perp OA) \\ PB \text{ distância a } OB \; (PB \perp OB). \end{cases} \qquad \text{T} \, \{ \; P \in b.$$

DEMONSTRAÇÃO :

1. De fato, unindo P a O temos dois triângulos retângulos: PAO e PBO;
2. Êstes triângulos retângulos são congruentes, pois, têm a hipotenusa e um cateto, respectivamente, iguais (n.º 43 - 5.º). Logo, elementos correspondentes são iguais, ou seja: $\hat{1} = \hat{2}$ o que significa ser b bissetriz de $A\hat{O}B$ e P um de seus pontos. c.q.d.

EXERCÍCIOS

1. Demonstrar que as bissetrizes de dois ângulos adjacentes são perpendiculares.
2. Do vértice de um ângulo, traçam-se as perpendiculares aos lados. Demonstrar que o ângulo por elas formado é o suplemento do ângulo dado.
3. Se de um ponto fora de uma reta traçarmos a esta reta o segmento perpendicular e dois oblíquos iguais, êstes se afastam igualmente do pé do perpendicular (recíproca do teorema do n.º 52-b).
4. Um ponto qualquer fora da mediatriz de um segmento, dista desigualmente dos extremos dêsse segmento.
5. Demonstrar que traçando-se as perpendiculares aos meios dos lados iguais de um triângulo isósceles elas se encontram sôbre a bissetriz do ângulo do vértice.
6. As três bissetrizes internas de um triângulo encontram-se num mesmo ponto eqüidistante dos três lados.
7. Um ponto qualquer, fora da bissetriz de um ângulo, dista desigualmente dos lados do ângulo.
8. Duas bissetrizes dos ângulos externos de um triângulo e a bissetriz do ângulo interno, não adjacente aos ângulos externos, encontram-se num mesmo ponto.

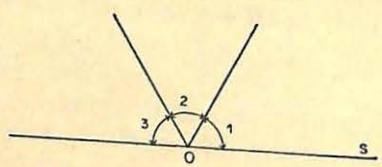


FIG. 111

9. Na figura 111, temos: $\hat{1} = \hat{2} = \hat{3}$. A que fração do ângulo reto corresponde um dêstes ângulos?
10. Se, na figura 111 traçarmos $r \perp s$, pelo ponto O, provar que r é bissetriz do ângulo 2.

§ 6. Teoria das paralelas. Aplicações.

56. Retas concorrentes (incidentes) e retas paralelas. Duas retas distintas *de um plano* podem ter, uma em relação a outra, duas posições:

a) podem ter *um ponto em comum*; nesse caso dizem-se *concorrentes* ou que se *interceptam* em tal ponto (fig. 112);

b) *não têm ponto em comum* e, nesse caso, dizem-se *paralelas* (fig. 113).

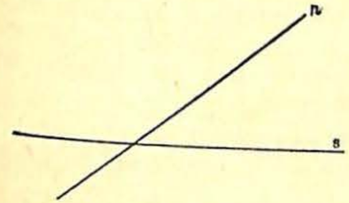


FIG. 112

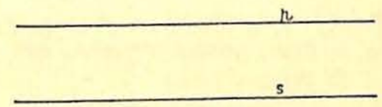


FIG. 113

Logo :

Duas retas são paralelas quando, situadas no mesmo plano, não têm ponto em comum. Indicação : $r \parallel s$.

OBSERVAÇÕES :

1.ª) Duas semi-retas ou dois segmentos, ou ainda uma semi-reta e um segmento, são denominados *paralelos*, quando são paralelas as respectivas retas suportes.

2.ª) Duas retas situadas no mesmo plano, quer sejam concorrentes, quer sejam paralelas, são chamadas *coplanares*. Assim, por exemplo, as retas r e s, das figuras 112 e 113 são *coplanares*. Caso as retas não estejam situadas no mesmo plano elas são denominadas *não coplanares* ou *reversas*.

57. Ângulos formados por duas retas coplanares e uma transversal. Duas retas coplanares r e s (fig. 114), interceptadas por uma terceira reta t, que é chamada *transversal* ou *secante*, formam em tôrno dos pontos de intersecção (M e N na fig. 114), *oito ângulos* que recebem nomes especiais. Os ângulos situados na região do plano limitada pelas retas r e s ($\hat{2}$, $\hat{3}$, $\hat{5}$ e $\hat{8}$, na fig. 114), dizem-se *ângulos internos*. Os que não pertencem a tal região ($\hat{1}$, $\hat{4}$, $\hat{6}$ e $\hat{7}$) são denominados

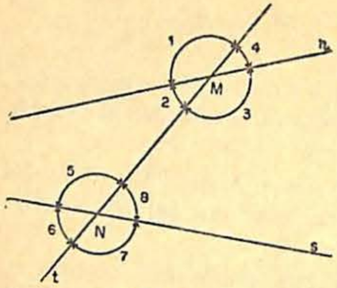


FIG. 114

ângulos externos. Êstes oito ângulos combinados dois a dois, recebem os seguintes nomes:

1. *correspondentes*, quando um dêles é interno e o outro externo, não adjacentes e situados num mesmo semi-plano, em relação à transversal;
2. *alternos-internos*, quando ambos são internos, não adjacentes, porém situados em semi-planos opostos em relação à transversal;
3. *alternos-externos*, quando ambos são externos, não adjacentes, porém situados em semi-planos opostos em relação à transversal;
4. *colaterais-internos*, quando ambos são internos e situados num mesmo semi-plano, em relação à transversal;
5. *colaterais-externos*, quando ambos são externos e situados num mesmo semi-plano, em relação à transversal.

Na figura 114, os ângulos ora mencionados são:

correspondentes $\begin{cases} \hat{1} \text{ e } \hat{5}; & \hat{4} \text{ e } \hat{8} \\ \hat{2} \text{ e } \hat{6}; & \hat{3} \text{ e } \hat{7} \end{cases}$

alternos-internos $\begin{cases} \hat{2} \text{ e } \hat{8} \\ \hat{3} \text{ e } \hat{5} \end{cases}$ *alternos-externos* $\begin{cases} \hat{1} \text{ e } \hat{7} \\ \hat{4} \text{ e } \hat{6} \end{cases}$

colaterais-internos $\begin{cases} \hat{2} \text{ e } \hat{5} \\ \hat{3} \text{ e } \hat{8} \end{cases}$ *colaterais-externos* $\begin{cases} \hat{1} \text{ e } \hat{6} \\ \hat{4} \text{ e } \hat{7} \end{cases}$

O *reconhecimento* de que as duas retas r e s, coplanares, interceptadas por uma transversal t, encontram-se num dos semi-planos determinados pela transversal (isto é, são *concorrentes*) ou não têm ponto comum (isto é, são *paralelas*) é feito confrontando-se os quatro pares de ângulos que as retas r e s formam com a transversal t.

58. Teorema fundamental sôbre retas paralelas. *Se uma transversal forma com duas retas coplanares dois ângulos correspondentes iguais, as duas retas são paralelas.*

Sejam as retas coplanares: r, s e t (fig. 115). Temos:

H $\{ \hat{4} = \hat{8}$ (âng. correspondentes) T $\{ r \parallel s$.

DEMONSTRAÇÃO: (por redução ao absurdo):

1. Se r e s não fôssem paralelas, encontrar-se-iam num ponto P e teríamos o triângulo MNP.
2. Neste triângulo vale a relação: $\hat{4} > \hat{8}$ (teorema do ângulo externo), o que é contra a hipótese ($\hat{4} = \hat{8}$).

Logo, r e s não se encontram e, portanto, são paralelas. c.q.d.

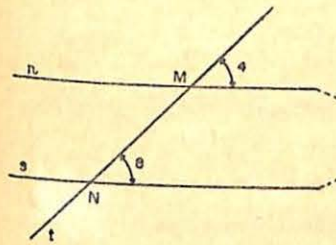


FIG. 115

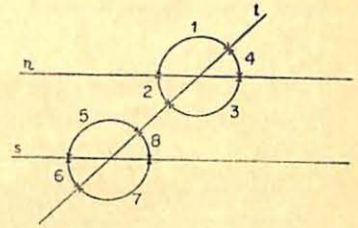


FIG. 116

59. Corolários.

1.º) *Se uma transversal forma com duas retas coplanares dois ângulos alternos-internos (ou alternos-externos) iguais, as duas retas são paralelas.*

Sejam as retas coplanares: r, s e t (fig. 116). Temos:

H $\{ \hat{2} = \hat{8}$ (âng. alternos-internos) T $\{ r \parallel s$.

DEMONSTRAÇÃO:

1. De fato, temos: $\hat{2} = \hat{4}$ (o.p.v.) e $\hat{2} = \hat{8}$ (por hip.) e, portanto, pela propriedade transitiva da igualdade: $$\hat{4} = \hat{8}.$$
2. Como êstes ângulos são *correspondentes*, segue-se pelo teorema fundamental que: $r \parallel s$ c.q.d.

2.º) *Se uma transversal forma com duas retas coplanares dois ângulos colaterais internos (ou externos) suplementares as duas retas são paralelas.*

Sejam as retas coplanares: r, s e t (fig. 116). Temos:
H { $\hat{3} + \hat{8} = 2$ retos ($\hat{3}$ e $\hat{8}$ são âng. colaterais-internos)
T { $r \parallel s$.

DEMONSTRAÇÃO :

1. De fato, temos: $\hat{3} + \hat{4} = 2$ retos (são adjacentes e suplementares)
   e $\hat{3} + \hat{8} = 2$ retos (por hip.).
   Logo, $\hat{3} + \hat{4} = \hat{3} + \hat{8}$
   ou $\hat{4} = \hat{8}$
2. Como êstes dois ângulos são *correspondentes*, segue-se pelo teorema fundamental que:

$r \parallel s$ c.q.d.

60. Retas perpendiculares a uma terceira.

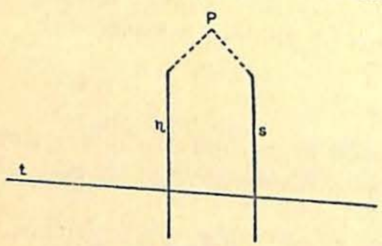


FIG. 117

Teorema: No mesmo plano, duas retas perpendiculares a uma terceira são paralelas entre si.

Sejam as retas coplanares: r, s e t (fig. 117). Temos:

$$H \begin{cases} r \perp t \\ s \perp t \end{cases}$$

T { $r \parallel s$.

DEMONSTRAÇÃO (por redução ao àbsurdo) : (*)

1. Caso r e s não fôssem paralelas, encontrar-se-iam num ponto P;
2. Neste caso, pelo ponto P, poderiam ser traçadas *duas* perpendiculares à reta t ou seja uma construção *impossível* pelo teorema fundamental sôbre retas perpendiculares (n.º 51 – unicidade). Logo:

$r \parallel s$ c.q.d.

(°) Ver outra demonstração, pág. 314.

61. Corolário (Construção da paralela a uma reta dada). *Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma paralela a esta reta.*

Sejam : a reta s e o ponto P (fig. 118). Temos :
H { P fora de s T { $r \parallel s$ (passando por P).

DEMONSTRAÇÃO :

1. Com efeito, pelo ponto P, fora de s, pode-se abaixar a reta t perpendicular a s e por êste ponto pode-se também levantar a reta r perpendicular a t (n.º 51) ;
2. As duas retas r e s, sendo perpendiculares à reta t, são *paralelas* entre si (n.º 60), isto é :

$r \parallel s$ c.q.d.

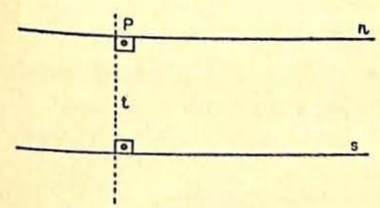


FIG. 118

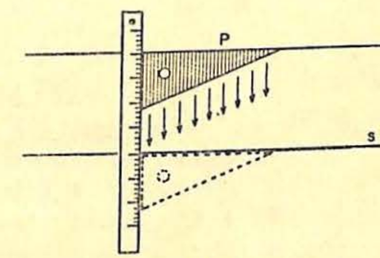


FIG. 119

OBSERVAÇÃO. O problema do traçado da reta r paralela a uma reta s, por um ponto P, fora de s, é resolvido com uma régua e um esquadro ou dois esquadros (fig. 119). Tal traçado é baseado na igualdade de dois ângulos correspondentes formados por duas paralelas e uma transversal.

62. Postulado de Euclides (*) (ou das paralelas). *Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar* ***sòmente uma*** *paralela a esta reta.*

Pelo corolário anterior (n.º 61), demonstrou-se que, por um ponto fora de uma reta, pode-se sempre traçar uma reta paralela a esta reta. Admite-se como *evidente* que, por um

(*) EUCLIDES : denominado também o *príncipe dos geômetras gregos*. A rigor, não foi da forma que enunciamos que o célebre geômetra escreveu a sua famosa proposição nos seus *Elementos de Geometria*, livro superado, em número de edições, sòmente pela Bíblia; mas, a *essência* é a mesma.

ponto fora de uma reta, só se pode traçar *uma paralela* a esta reta (*unicidade da paralela*). A importância dêste postulado será realçada no decorrer do curso.

63. Conseqüências do Postulado de Euclides.

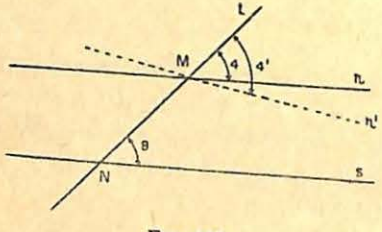


FIG. 120

1.ª) ***Teorema recíproco do teorema fundamental:*** *Duas retas paralelas formam, com uma transversal, ângulos correspondentes iguais.*

Sejam as retas: r, s e t (fig. 120). Temos:

H { $r \parallel s$, t – transversal

T { $\hat{4} = \hat{8}$.

DEMONSTRAÇÃO (por redução ao absurdo):

1. Se $\hat{4}$ não fôsse igual a $\hat{8}$, poderíamos traçar pelo ponto M a reta r', tal que formasse com t um ângulo $\hat{4}' = \hat{8}$. Neste caso, pelo teorema fundamental (n.º 58) devemos ter:

$$r' \parallel s.$$

2. Como, por hipótese: $r \parallel s$, e as retas r e r' passam por M, segue, ***necessàriamente*** pelo Postulado de Euclides, que r e r' coincidem e, portanto:

$$\hat{4} = \hat{4}' = \hat{8} \qquad \text{c.q.d.}$$

Corolários:

a) Duas paralelas formam, com uma transversal, ângulos alternos-internos (ou alternos-externos) iguais;

b) Duas paralelas formam, com uma transversal, ângulos colaterais-internos (ou colaterais-externos) suplementares.

As demosntrações respectivas, são análogas à anterior.

2.ª) ***Teorema:*** *No plano, duas retas paralelas a uma terceira são paralelas entre si.*

Sejam as retas: r, s e t (fig. 121). Temos:

H $\begin{cases} r \parallel t \\ s \parallel t \end{cases}$ T { $r \parallel s$.

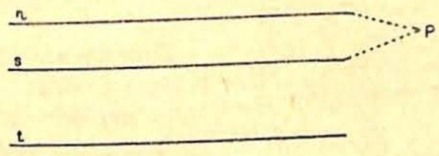


FIG. 121

DEMONSTRAÇÃO (por redução ao absurdo):

1. De fato, caso r e s não fôssem paralelas, encontrar-se-iam num ponto P.

2. Então, por êste ponto P, poderíamos traçar *duas* retas paralelas à reta t, o que é contra o Postulado de Euclides. Logo: $r \parallel s$ c.q.d.

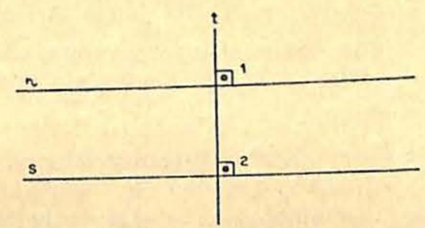


FIG. 122

3.ª) ***Teorema:*** *No plano, se duas retas são paralelas, tôda perpendicular a uma delas é também perpendicular a outra.*

Sejam as retas: r, s e t (fig. 122). Temos:

H $\begin{cases} r \parallel s \\ t \perp r \end{cases}$ T { $t \perp s$.

DEMONSTRAÇÃO:

1. De fato, sendo $r \parallel s$ (por hip.) os ângulos correspondentes $\hat{1}$ e $\hat{2}$ são iguais (n.º 63);

2. Como $\hat{1}$ é reto (por hip.), segue que $\hat{2}$ também será reto, isto é:

$$t \perp s \qquad \text{c.q.d.}$$

64. Segmentos de paralelas compreendidos entre paralelas.

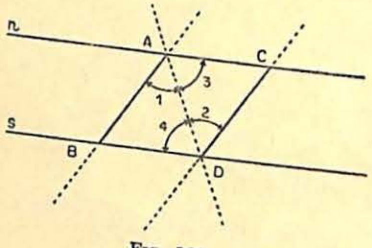


FIG. 123

Teorema: *Os segmentos de retas paralelas compreendidos entre paralelas são iguais.*

Sejam as retas r, s e os segmentos AB e CD (fig. 123). Temos:

$$\text{H} \begin{cases} r \parallel s \\ AB \parallel CD \end{cases}$$

$$\text{T} \; \{ \; AB = CD.$$

DEMONSTRAÇÃO:

1. Com efeito, tracemos a transversal AD. Obteremos os triângulos ABD e ADC.
2. Temos: $\triangle ABD = \triangle ADC$ (caso A.L.A.), pois:

$$\begin{cases} \hat{1} = \hat{2} \text{ (âng. alternos-internos formados pelas paralelas } AB \text{ e } CD \text{ com a transversal } AD) \\ AD \text{ é comum} \\ \hat{3} = \hat{4} \text{ (âng. alternos-internos formados pelas paralelas } r \text{ e } s \text{ com a transversal } AD). \end{cases}$$

Logo, os elementos correspondentes são iguais, isto é:

$$AB = CD \qquad \text{c.q.d.}$$

65. Ângulos de lados paralelos.

Teorema: *Dois ângulos, que têm os lados respectivamente paralelos, são iguais ou suplementares. São* ***iguais*** *quando os lados correspondentes são dirigidos nos mesmos sentidos ou em sentidos contrários; são* ***suplementares*** *quando dois lados correspondentes são num mesmo sentido e os outros dois em sentidos contrários.*

Primeiro caso: Sejam os ângulos formados pelas retas: r e s e r' e s' (fig. 124). Temos:

$$\text{H} \begin{cases} r \parallel r' \text{ (mesmo sentido)} \\ s \parallel s' \text{ (mesmo sentido)} \end{cases} \qquad \text{T} \; \{ \; \hat{1} = \hat{2}.$$

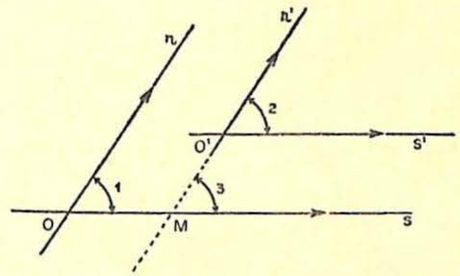


FIG. 124

DEMONSTRAÇÃO:

1. Consideremos a intersecção M da reta r' com a reta s e os ângulos formados $\hat{2}$ e $\hat{3}$.
2. Como: $\hat{2} = \hat{3}$ (âng. correspondentes formados pelas paralelas s e s' com a transversal r')

   e $\hat{1} = \hat{3}$ (âng. correspondentes formados pelas paralelas r e r' com a transversal s')

   segue-se, pela propriedade transitiva da igualdade, que:

$$\hat{1} = \hat{2} \qquad \text{c.q.d.}$$

No caso de serem consideradas as semi-retas opostas dos lados dos ângulos $\hat{1}$ e $\hat{2}$, os ângulos formados ainda serão iguais por serem, respectivamente opostos a $\hat{1}$ e $\hat{2}$.

Segundo caso: Sejam os ângulos formados pelas retas r e s e r' e s' (fig. 125). Temos:

$$\text{H} \begin{cases} r \parallel r' \text{ (mesmo sentido)} \\ s \parallel s' \text{ (sentidos contrários)} \end{cases}$$

$$\text{T} \; \{ \; \hat{1} + \hat{4} = 2 \text{ retos}.$$

Demonstração:

1. De fato: $\hat{4} + \hat{2} = 2$ retos ($\hat{4}$ e $\hat{2}$ são adjacentes e, portanto, suplementares).
2. Como: $\hat{1} = \hat{2}$ (pelo 1.º caso), segue que:
$\hat{1} + \hat{4} = 2$ retos c.q.d.

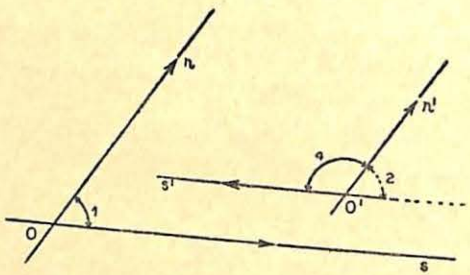


Fig. 125

66. Ângulos de lados perpendiculares.

Teorema: *Dois ângulos que têm os lados respectivamente perpendiculares são iguais ou suplementares.* ***Iguais,*** *se ambos são agudos ou obtusos;* ***suplementares*** *se um é agudo e outro é obtuso.*

Primeiro caso: Sejam os ângulos formados pelas retas: r e s e r' e s' (fig. 126). Temos:

$$H \begin{cases} r \perp r' \\ s \perp s' \\ \hat{1} \text{ e } \hat{2} \text{ agudos (ou obtusos)} \end{cases} \qquad T \{ \hat{1} = \hat{2}.$$

Demonstração:

1. Tracemos pelo ponto O: $s'' \parallel s'$ e $r'' \parallel r'$; as retas r'' e s'' formarão o ângulo $\hat{3}$, tal que:
$\hat{2} = \hat{3}$ (âng. de lados paralelos, n.º 65).
2. Como: $s'' \perp s$ (porque $s' \perp s$ e $s'' \parallel s'$ -n.º 63 - 3.º)
e $r'' \perp r$ (porque $r' \perp r$ e $r'' \parallel r'$ - n.º 63 - 3.º).

segue-se que, os ângulos $s''\hat{O}s$ e $r''\hat{O}r$ são ângulos retos e, portanto, $\hat{1} = \hat{3}$, por admitirem o mesmo complemento ($s''\hat{O}r$). Logo, se:

$$\hat{2} = \hat{3} \text{ e } \hat{3} = \hat{1}$$

temos que: $\hat{1} = \hat{2}$ c.q.d.

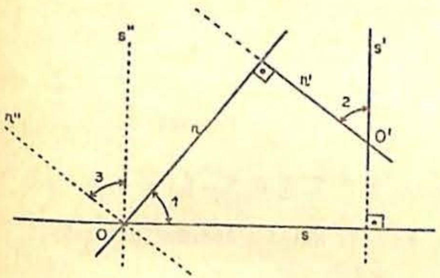


Fig. 126

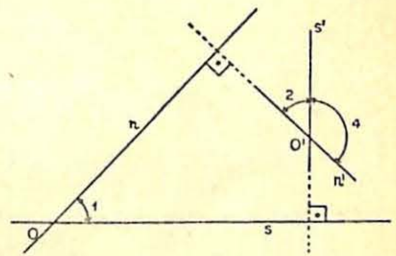


Fig. 127

Segundo caso: Sejam os ângulos formados pelas retas: r e s e r' e s' (fig. 127). Temos:

$$H \begin{cases} r \perp r' \\ s \perp s' \\ \hat{1} \text{ agudo e } \hat{4} \text{ obtuso} \end{cases} \qquad T \{ \hat{1} + \hat{4} = 2 \text{ retos}.$$

Demonstração:

1. De fato: $\hat{2} + \hat{4} = 2$ retos ($\hat{2}$ e $\hat{4}$ são adjacentes e, portanto, suplementares).
2. Como: $\hat{1} = \hat{2}$ (pelo 1.º caso), segue-se que:
$\hat{1} + \hat{4} = 2$ retos
c.q.d.

EXERCÍCIOS

1. Na figura 128, indicar quais os ângulos que são: correspondentes, alternos-internos, alternos-externos, colaterais-internos e colaterais-externos.
2. Calcular o valor dos seguintes ângulos: $\hat{2}$, $\hat{3}$, $\hat{4}$, $\hat{5}$, $\hat{6}$, $\hat{7}$ e $\hat{8}$ (fig. 129), sabendo-se que: $r\hat{O}s$ e $\hat{1} = 64° 12' 30''$.

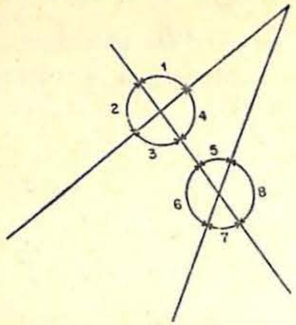


Fig. 129

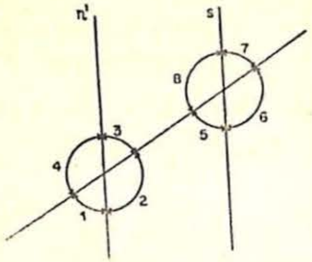


Fig. 128

3. Calcular, na figura 129, os ângulos $\hat{2}$, $\hat{3}$, $\hat{4}$, $\hat{5}$, $\hat{6}$, $\hat{7}$ e $\hat{8}$, no caso do $\hat{1}$ ser a metade do $\hat{2}$.
4. Na figura 129, calcular o valor de cada um dos ângulos, sabendo-se que: $\hat{4} - \hat{3} = 38°$.
5. Como devem ser os ângulos 1, 2, 3 e 4 (fig. 130), para se poder afirmar que $r \parallel s$?
6. Se $a \parallel b$ e $c \parallel d$ (fig. 131), como são $\hat{3}$ e $\hat{4}$?
7. Calcule na figura 131, o valor do $\hat{3}$ no caso do $\hat{1}$ valer 48° 12'.
8. A diferença dos ângulos colaterais-internos formados por uma transversal com duas paralelas é de 32° 14'. Determinar êstes ângulos.
9. Um dos quatro ângulos que duas retas paralelas formam com uma transversal vale os 3/7 de seu adjacente. Quanto vale cada um dos restantes ângulos?
10. Como são duas retas que formam com uma transversal ângulos colaterais-internos cuja soma vale 200°? E se a soma valesse 200gr?
11. A diferença entre os ângulos colaterais-internos formados por duas retas paralelas interceptadas por uma terceira é de 20°. Determinar o valor dêstes ângulos.

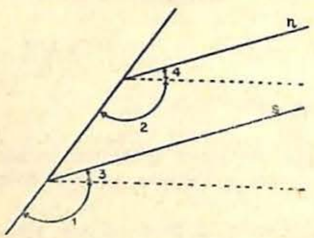


Fig. 130

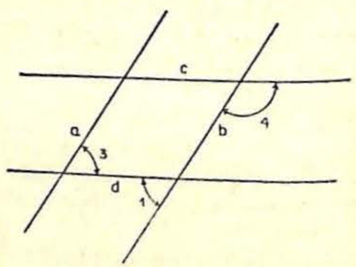


Fig. 131

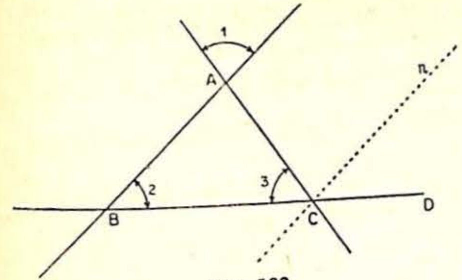


Fig. 132

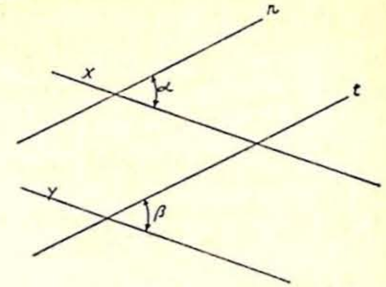


Fig. 133

12. Na figura 132, temos: $\hat{1} = 54° 12'$; r é bissetriz do ângulo ACD e paralela a AB. Calcular o valor dos ângulos $\hat{2}$ e $\hat{3}$.
13. Na figura 133, temos: $r \parallel t$ e $x \parallel y$. Como são os ângulos $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$?

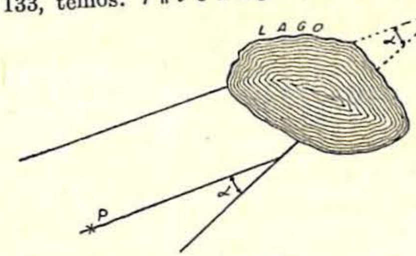


Fig. 134

14. Na figura 134, justifique como foi possível construir sôbre um terreno um ângulo igual ao formado por duas retas que se encontram além de um obstáculo.
15. Demonstrar que, num plano, se uma reta encontra outra reta, encontrará também qualquer outra reta paralela à segunda. (Sugestão: *Postulado de Euclides*).

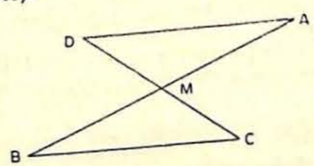


Fig. 135

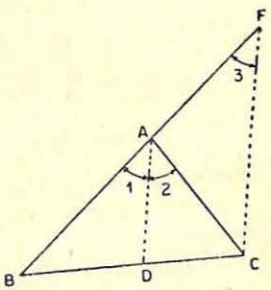


Fig. 136

16. Se de um ponto da bissetriz de um ângulo dado, traçam-se as semi-retas paralelas aos lados do ângulo, demonstrar que o ângulo formado por essas semi-retas é igual (ou suplementar) ao ângulo dado.
17. Demonstrar que, se dois ângulos têm os lados paralelos, suas bissetrizes são paralelas ou perpendiculares.
18. Na figura 135, M é ponto médio de AB e de CD. Demonstrar que $AD \parallel BC$.
19. Na figura 136, temos: $\hat{1}=\hat{2}$; $CF \parallel AD$. Demonstrar que: $\hat{2}=\hat{3}$.
20. Na figura 136, demonstrar que: $AF=AC$.

Respostas:

1. Correspondentes: $\hat{1}$ e $\hat{5}$, $\hat{4}$ e $\hat{8}$, $\hat{2}$ e $\hat{6}$, $\hat{3}$ e $\hat{7}$; alternos-internos: $\hat{4}$ e $\hat{5}$, $\hat{3}$ e $\hat{5}$; alternos-externos: $\hat{2}$ e $\hat{8}$, $\hat{1}$ e $\hat{7}$; colaterais-internos: $\hat{4}$ e $\hat{5}$ $\hat{3}$ e $\hat{6}$; colaterais-externos: $\hat{1}$ e $\hat{8}$, $\hat{2}$ e $\hat{7}$.
2. $\hat{1}=\hat{3}=\hat{5}=\hat{7}=64^\circ\,12'\,30''$; $\hat{2}=\hat{4}=\hat{6}=\hat{8}=115^\circ\,47'\,30''$.
3. $\hat{1}=\hat{3}=\hat{5}=\hat{7}=60^\circ$; $\hat{2}=\hat{4}=\hat{6}=\hat{8}=120^\circ$.
4. $\hat{1}=\hat{3}=\hat{5}=\hat{7}=71^\circ$; $\hat{2}=\hat{4}=\hat{6}=\hat{8}=109^\circ$.
5. $\hat{1}=\hat{2}$ e $\hat{3}=\hat{4}$.
6. Suplementares.
7. $\hat{3}=48^\circ\,12'$.
8. $106^\circ\,7'$ e $73^\circ\,53'$.
9. 126° e 54°.
10. Soma 200°, retas concorrentes; soma 200gr, retas paralelas.
11. 100° e 80°.
12. $\hat{2}=44^\circ\,12'$ e $\hat{3}=71^\circ\,36'$.
13. Iguais (lados paralelos).
14. Traçando por um ponto do mesmo plano do ângulo a paralela a um dos lados do ângulo.

§ 7. Soma dos ângulos de um triângulo e de um polígono. Conseqüências.

67. Soma dos ângulos internos de um triângulo.

Teorema: *A soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é igual a dois ângulos retos* (180° ou 200gr) (*).

(*) Se a medida dos ângulos fôr feita em *graus*, como geralmente se faz, a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°; se fôr em *grados* a soma é igual a 200gr. Êste teorema é conhecido também como *Lei angular de Tales*.

Seja o triângulo ABC (fig. 137). Temos:

H { $\hat{1}$, $\hat{2}$ e $\hat{3}$ âng. internos do $\triangle ABC$

T { $\hat{1}+\hat{2}+\hat{3}=\hat{2}$ retos (180°).

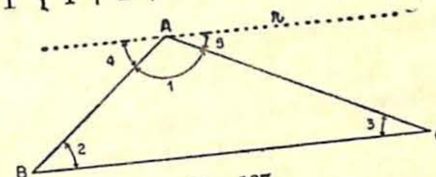


Fig. 137

Demonstração:

1. Pelo vértice A tracemos $r \parallel BC$. Esta paralela é *única* pelo Postulado de Euclides. Os ângulos formados $\hat{4}$ e $\hat{5}$, são tais que:

$$\begin{cases} \hat{4}=\hat{2} & \text{(âng. alternos-internos formados por duas paralelas e uma transversal).} \\ \hat{5}=\hat{3} & \text{(idem).} \end{cases}$$

2. Como: $\hat{4}+\hat{1}+\hat{5}=\hat{2}$ retos (n.° 29 – 4.°), segue-se, substituindo $\hat{4}$ e $\hat{5}$ pelos valores dados acima, que:

$$\hat{1}+\hat{2}+\hat{3}=2 \text{ retos}$$ c.q.d.

68. Conseqüências.

Teoremas:

1.°) *Um ângulo externo de um triângulo é igual à soma dos ângulos internos não adjacentes.*

Seja o triângulo ABC (fig. 138). Temos:

H { $\hat{4}$ âng. externo do $\triangle ABC$ T { $\hat{4}=\hat{1}+\hat{2}$.

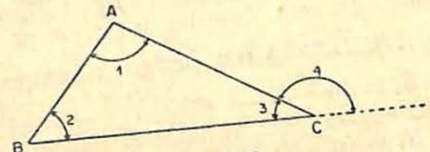


Fig. 138

DEMONSTRAÇÃO :

1. Já sabemos que : $\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} = 2$ retos (n.° 67)
   e $\hat{4} + \hat{3} = 2$ retos (n.° 28 – 3.°).
2. Confrontando estas duas igualdades, temos :
$$\hat{4} + \hat{3} = \hat{1} + \hat{2} + \hat{3},$$
   e, eliminando o ângulo comum $\hat{3}$, vem :
$$\hat{4} = \hat{1} + \hat{2} \qquad \text{c.q.d.}$$

2.°) *Num triângulo um só ângulo pode ser reto ou obtuso.*

3.°) *Num triângulo cada ângulo é o suplemento da soma dos outros dois.*

4.°) *Num triângulo eqüiângulo cada ângulo vale 60°.*

5.°) *Num triângulo retângulo os ângulos agudos são complementares.*

6.°) *Num triângulo isósceles os ângulos da base são agudos.*

7.°) *Se dois triângulos têm dois ângulos respectivamente iguais, os terceiros ângulos também serão iguais.*

As demonstrações dêstes seis últimos teoremas (conseqüências de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois ângulos retos), são imediatas e ficarão a cargo do aluno.

69. Soma dos ângulos internos de um polígono.

Teorema: *A soma dos ângulos internos de um polígono convexo é igual a tantas vêzes dois ângulos retos quantos são os lados menos dois.*

Seja um polígono de n lados (na fig. 139, $n = 6$). Representemos a soma de seus ângulos internos por S_i. Temos :

H { *ABCDEF* é um polígono convexo

$$T \begin{cases} S_i = (n-2) \,.\, 2 \text{ retos} \\ \quad\text{ou} \\ S_i = (n-2) \,.\, 180°. \end{cases}$$

DEMONSTRAÇÃO :

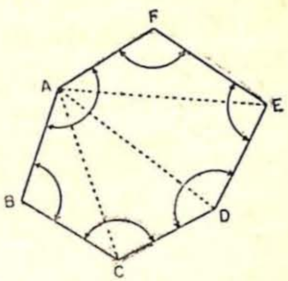


FIG. 139

1. Traçando-se por um vértice (*A* na fig. 139), tôdas as diagonais do polígono, êste ficará decomposto em n–2 triângulos (4 na fig. 139) ;
2. Como a soma dos ângulos internos de cada triângulo é igual a 2 retos (n.° 67) e sendo a soma dos ângulos internos do polígono igual à soma dos ângulos internos dêstes $n - 2$ triângulos, segue-se que :
$$S_i = (n-2) \,.\, 2 \text{ retos} \qquad \text{c.q.d.}$$

No caso da figura 139, onde o polígono é um hexágono, devemos ter para a soma de seus ângulos internos :

$$S_i = (6-2) \,.\, 2 \text{ retos}$$

ou $S_i = 4 \,.\, 2 \text{ retos} = 8 \text{ retos}$

ou $S_i = 720°$ (se os ângulos forem medidos em graus).

CONSEQÜÊNCIA : *O valor do ângulo interno de um polígono regular de* n *lados*, onde os n ângulos são iguais entre si, é dado pela fórmula :

$$a_i = \frac{S_i}{n} \quad \text{ou} \quad a_i = \frac{(n-2)\,180°}{n} \quad \text{(medido em graus).}$$

APLICAÇÃO : Calcular o valor do ângulo interno do pentágono regular.

Aplicando a fórmula que dá o valor do ângulo interno, temos:

$$a_i = \frac{(5-2)\,180°}{5} = \frac{3 \times 180°}{5} = 108°.$$

Logo : o ângulo interno de um pentágono regular vale 108° (medido em graus).

70. Soma dos ângulos externos de um polígono.

Teorema: A soma dos ângulos externos de um polígono convexo é igual a quatro ângulos retos (360° ou 400gr).

Seja um polígono de n lados (na fig. 140, $n=5$). Representemos a soma de seus ângulos externos por S_e. Temos:

H { $ABCDE$ é um polígono convexo

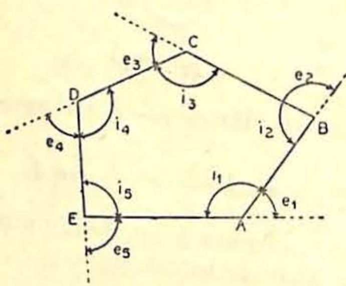


Fig. 140

T $\begin{cases} S_e = 4 \text{ retos} \\ \text{ou} \\ S_e = 360°. \end{cases}$

Demonstração:

1. Prolonguemos, num mesmo sentido, todos os lados do polígono. Temos, assim, que cada ângulo interno somado com o seu externo adjacente (i_1+e_1, por exemplo na fig. 140) vale 2 ângulos retos;
2. Como são n ângulos internos (tantos quantos são os vértices), segue-se que a soma dos ângulos internos do polígono (S_i) mais a soma dos ângulos externos (S_e) vale n *vêzes* 2 retos, isto é:

$$S_i + S_e = n \cdot 2 \text{ retos}$$

ou

$$S_e = n \cdot 2 \text{ retos} - S_i$$

Como: $S_i = (n-2) \cdot 2$ retos (n.° 69) temos:

$$S_e = n \cdot 2 \text{ retos} - (n-2) \cdot 2 \text{ retos}$$

ou

$$S_e = n \cdot 2 \text{ retos} - n \cdot 2 \text{ retos} + 4 \text{ retos}$$

donde:

$$S_e = 4 \text{ retos}$$

c.q.d.

Conseqüências:

1.ª) *O valor do ângulo externo de um polígono regular de n lados* é dado pela fórmula:

$$a_e = \frac{S_e}{n} \quad \text{ou} \quad a_e = \frac{360°}{n} \text{ (medido em graus).}$$

Aplicação: Calcular o valor do ângulo externo de um hexágono regular.

Aplicando a fórmula, temos:

$$a_e = \frac{360°}{6} = 60° \text{ (medido em graus).}$$

2.ª) *Um polígono convexo não pode ter mais de três ângulos agudos internos.*

De fato, se um polígono tivesse quatro ângulos agudos internos, a soma dos ângulos externos dêsse polígono deveria ser *maior* que quatro ângulos retos, o que viria contrariar o teorema (n.° 70) já demonstrado.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. Calcular a *soma dos ângulos internos* e a *soma dos ângulos externos* de um octógono. Calcular os valores respectivos do *ângulo interno* e do *ângulo externo* no caso dêsse octógono ser regular.

A soma dos ângulos internos será dada pela fórmula:

$$S_i = (n-2)\ 180°$$

ou seja, para $n = 8$

$$S_i = (8-2)\ 180° = 6 \times 180° = 1\,080°.$$

A soma dos ângulos externos será dada pela fórmula:

$S_e = 360°$ (*igual* para todos os polígonos convexos).

No caso do octógono ser regular, o ângulo interno e o ângulo externo valem, respectivamente:

$$a_i = \frac{1\,080°}{8} = 135° \quad \text{e} \quad a_e = \frac{360°}{8} = 45°.$$

2. Sabendo-se que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo é igual a 8 retos, qual é o *número de lados* dêsse polígono?

Medindo os ângulos em graus, temos que 8 retos eqüivalem a 720° e, portanto:

$$720° = (n - 2) \cdot 180° \text{ (fórmula do } S_i).$$

A resolução desta equação dará o valor de n procurado. Ou seja:

$$4 = n - 2 \text{ (dividindo os dois membros por } 180°)$$

$$\therefore \; n = 4 + 2$$

e $$n = 6.$$

Logo, trata-se de um hexágono ($n = 6$).

3. Qual é o *polígono regular* cujo ângulo externo vale 36°?

Como a fórmula que dá o valor de um ângulo externo de um polígono regular é:

$$a_e = \frac{360°}{n},$$

onde, o valor de a_e no problema em questão é 36°, segue-se que o valor de n procurado será dado pela resolução da equação:

$$36° = \frac{360°}{n},$$

ou seja:

$$n = 10.$$

Portanto: o polígono é um decágono.

4. Quantos lados tem um polígono regular, cujo ângulo interno, é o triplo do ângulo externo?

A fórmula que dá o valor do ângulo interno de um polígono regular de n lados é:

$$\frac{(n - 2) \cdot 180°}{n},$$

A fórmula que dá o valor do ângulo externo de um polígono regular de n lados é:

$$\frac{360°}{n}.$$

Pelas condições do problema (o ângulo interno é o *triplo* do externo), temos:

$$\frac{(n - 2) \cdot 180°}{n} = 3 \times \frac{360°}{n}$$

ou

$$(n - 2) \cdot 180° = 3 \times 360° \text{ (dividindo os dois membros por } n),$$

e dividindo os dois membros por 180°, vem:

$$n - 2 = 3 \times 2$$

ou

$$n = 6 + 2$$

$$\therefore \; n = 8.$$

Logo, o polígono tem 8 lados, isto é, é um octógono.

EXERCÍCIOS

1. Calcular o valor dos ângulos da base de um triângulo isósceles sabendo-se que o ângulo do vértice vale 48° 12′.
2. Se um triângulo é eqüilátero, qual é o valor de seus ângulos?
3. Cada um dos ângulos da base de um triângulo isósceles mede 58° 12′ 30″. Calcular o valor do ângulo do vértice.
4. Se um triângulo retângulo é isósceles quanto valem os seus ângulos agudos?
5. Os ângulos de um triângulo valem respectivamente, $3x$, $4x$ e $5x$. Calcular os ângulos dêsse triângulo.
6. Sabendo-se que, num triângulo isósceles cada ângulo da base é o dôbro do ângulo do vértice, calcular os ângulos dêsse triângulo.
7. Num triângulo ABC, temos: $\hat{A} + \hat{B} = 130°$, $\hat{A} - \hat{B} = 10°$. Calcular: $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$.
8. Um dos ângulos agudos de um triângulo retângulo mede 68° 12′ 45″ Calcular o valor dos ângulos internos e dos ângulos externos dêsse triângulo.
9. Num triângulo retângulo um ângulo agudo é o dôbro do outro. Quanto vale cada ângulo agudo?
10. Num triângulo ABC, tem-se que $\hat{A}$ é o triplo de $\hat{B}$ e $\hat{B}$ é o dôbro de $\hat{C}$. Calcular: $\hat{A}$, $\hat{B}$, C.
11. Num triângulo retângulo um dos ângulos agudos vale 1/7 da soma dos outros dois. Calcular os ângulos agudos dêsse triângulo.
12. Num triângulo dois ângulos externos medem 110° e 120°, respectivamente. Quanto medem os ângulos internos dêsse triângulo?

13. Num triângulo isósceles um dos ângulos iguais vale 1/4 da soma dos outros dois. Calcular o valor dêsses ângulos.
14. O ângulo do vértice de um triângulo isósceles é igual a 1/5 do ângulo formado pelas bissetrizes dos ângulos da base. Calcular os ângulos dêsse triângulo.
15. Calcular os ângulos de um triângulo ABC sabendo-se que o $\hat{C}$ excede $\hat{A}$ de 30° e excede $\hat{B}$ de 48°.
16. Num triângulo isósceles o ângulo do vértice é igual a 1/10 da soma dos ângulos externos da base. Calcular o valor do ângulo do vértice.
17. Num triângulo ABC, tem-se que: $\hat{A}$ é a metade do $\hat{C}$ e $\hat{B}$ é o triplo do $\hat{C}$. Calcular $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$.
18. Calcular a soma dos ângulos internos de um decágono. Se êste decágono fôr regular, quanto mede o seu ângulo interno?
19. Calcular S_i e S_e de um quadrado.
20. Calcular o S_i e o S_e de um pentadecágono regular. Dar também o valor de um ângulo interno e um ângulo externo respectivamente.
21. Sabendo-se que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo é igual a 6 retos, qual é o número de lados dêsse polígono?
22. Quantos lados tem o polígono regular, cujo ângulo externo mede 72°?
23. Quantos lados tem o polígono regular, cuja soma dos ângulos internos, é 900°?
24. Quantos lados tem o polígono regular, cujo ângulo externo, mede 12°?
25. O ângulo externo de um polígono regular aumentado de 45° é igual a 1/9 da soma dos ângulos internos de um pentágono. Quantos lados tem êsse polígono?
26. Qual é o polígono cuja S_e vale o dôbro do S_i?
27. Quantos lados tem um polígono regular cujo ângulo interno é igual ao ângulo externo?
28. Qual é o polígono regular cujo ângulo interno é 1/10 da somados internos?
29. Demonstrar que num triângulo isósceles as bissetrizes dos ângulos da base são iguais.
30. Demonstrar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 2 retos, traçando-se por um ponto pertencente a um dos lados (distinto do vértice) as paralelas respectivas aos outros dois lados.
31. Une-se um ponto O interno de um triângulo ABC com B e C. Demonstrar que o ângulo $B\hat{O}C$ é maior que $B\hat{A}C$.
32. Demonstrar que a bissetriz do ângulo externo, adjacente ao ângulo do vértice, de um triângulo isósceles é paralela à base.
33. Demonstrar que num triângulo retângulo a diferença entre os ângulos agudos é igual ao dôbro do ângulo formado pela altura e pela bissetriz relativas à hipotenusa.

34. Demonstrar que a soma dos complementos dos ângulos de um triângulo acutângulo é um ângulo reto.
35. Dado um triângulo ABC, prolonga-se o lado BC de um segmento $CD = CA$ e une-se A com D. Demonstrar que a reta AD é paralela à bissetriz do ângulo ACB.
36. Dado um triângulo ABC, prolongam-se os dois lados BA e CA de dois segmentos AB' e AC' iguais, respectivamente, a AB e AC. Demonstrar que $B'C' \parallel BC$.
37. Num triângulo retângulo ABC, conduz-se BD do vértice do ângulo reto $\hat{B}$, de modo que $D\hat{B}C = B\hat{C}D$. Demonstrar que o triângulo vem dividido em dois triângulos isósceles.
38. Demonstrar que num triângulo isósceles a soma dos ângulos externos em relação à base, supera de dois retos o ângulo do vértice.
39. Demonstrar que as bissetrizes dos ângulos de um quadrilátero convexo formam um novo quadrilátero cujos ângulos opostos são suplementares.
40. Demonstrar que num triângulo ABC, o ângulo formado pelas bissetrizes dos ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$, respectivamente, é igual a 1 reto mais a metade do $\hat{A}$.

Respostas:

1. 65° 54'.
2. 60°.
3. 63° 35'.
4. 45°.
5. 45°, 60° e 75°.
6. 36°, 72°, 72°.
7. $\hat{A} = 70°$, $\hat{B} = 60°$ e $\hat{C} = 50°$.
8. internos: 90°, 21° 47' 15'', 68° 12' 45''; externos: 90°, 158° 12' 45'', 111° 47' 15''.
9. 30° e 60°.
10. $\hat{A} = 120°$, $\hat{B} = 40°$ e $\hat{C} = 20°$.
11. 22° 30' e 67° 30'.
12. 60°, 70° e 50°.
13. 36°, 36° e 108°.
14. 20°, 80° e 80°.
15. $\hat{A} = 56°$, $\hat{B} = 38°$ e $\hat{C} = 86°$.
16. 20°.
17. $\hat{A} = 20°$, $\hat{B} = 120°$ e $\hat{C} = 40°$.
18. 1 440° e 144°.
19. $S_i = S_e = 360°$.
20. $S_i = 2\,340°$, $S_e = 360°$, $a_i = 156°$, $a_e = 24°$.
21. 5.
22. 5.
23. 7.
24. 30.
25. 24.
26. Triângulo.
27. 4.
28. Decágono.

§ 8. Quadriláteros. Classificação e propriedades. Translação. Retas concorrentes no triângulo.

QUADRILÁTEROS CONVEXOS

71. Definição. Classificação. *Quadrilátero é o polígono de quatro lados.* Num quadrilátero dois lados ou dois ângulos não consecutivos dizem-se *opostos*. Na figura 141, temos o quadrilátero $ABCD$, onde:

AB e CD, BC e AD são *lados opostos* e

$\hat{A}$ e $\hat{C}$, $\hat{B}$ e $\hat{D}$ são *ângulos opostos*.

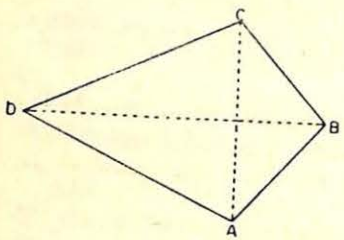


FIG. 141

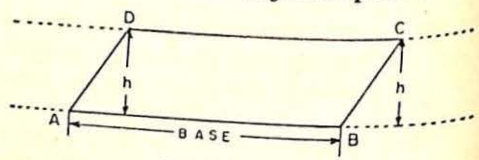


FIG. 142

Num *quadrilátero convexo*, destacamos ainda:

1. quatro ângulos internos e quatro ângulos externos;
2. duas diagonais (AC e BD);
3. soma dos ângulos internos igual a 4 retos ($S_i = (4 - 2) \cdot 180° = 360°$);
4. soma dos ângulos externos ($S_e = 360°$).

Os principais quadriláteros convexos são: os *paralelogramos* e os *trapézios*.

Paralelogramos

72. Definição. Classificação. *Paralelogramo é o quadrilátero que tem os lados opostos paralelos.* Chama-se *altura* de um paralelogramo (h na fig. 142), em relação à base AB,

a *distância* entre a base e o lado CD que lhe é paralelo. Os *paralelogramos* classificam-se em:

1. *retângulo* (fig. 143), quando têm os *quatro ângulos* (internos) *retos;*
2. *losango* ou *rombo* (fig. 144), quando têm os *quatro lados iguais;*
3. *quadrado* (fig. 145), quando têm os *quatro ângulos iguais* e os *quatro lados iguais.*

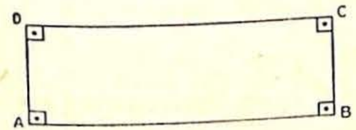


FIG. 143

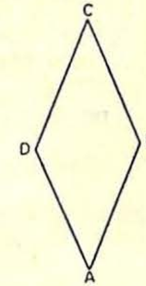


FIG. 144

73. Propriedades dos paralelogramos.

1.º) ***Teorema:*** Num paralelogramo, temos:

a) *os lados opostos são iguais;*
b) *cada diagonal o divide em dois triângulos iguais;*
c) *os ângulos opostos são iguais;*
d) *as diagonais interceptam-se mutuamente ao meio.*

Seja o paralelogramo $ABCD$ (fig. 146). Temos:

$$\text{H} \begin{cases} AB \parallel CD \\ AD \parallel BC \end{cases} \qquad \text{T.} \begin{cases} a) \ AB = CD, \ AD = BC \\ b) \ \triangle ABD = \triangle BCD \\ c) \ \hat{A} = \hat{C}, \ \hat{B} = \hat{D} \\ d) \ AM = MC, \ DM = MB. \end{cases}$$

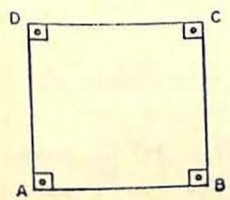


FIG. 145

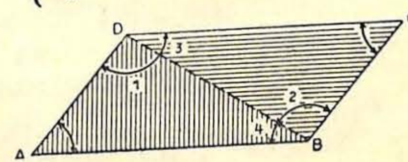


FIG. 146

DEMONSTRAÇÃO :

Parte *a*) : Os lados opostos (AB e CD, AD e BC) são iguais, pois, são segmentos de paralelas compreendidos entre paralelas (n.º 64). Logo : $AB = CD$ e $AD = BC$. c.q.d.

Parte *b*) : Traçando-se a diagonal BD, o quadrilátero fica decomposto nos triângulos ABD e BCD. Êstes triângulos têm os três lados respectivamente iguais, pois, BD é comum e $AB = CD$ e $BC = AD$ (parte *a*) e, portanto, são iguais (caso L.L.L.). Logo :

$$\triangle ABD = \triangle BCD$$

c.q.d.

Parte *c*) : Sendo $\triangle ABD = \triangle BCD$, segue-se que :

$\hat{A} = \hat{C}$ (âng. correspondentes em triângulos iguais).

$\hat{1} = \hat{2}$ (âng. correspondentes em triângulos iguais).

$\hat{3} = \hat{4}$ (âng. correspondentes em triângulos iguais).

Somando estas duas últimas igualdades, membro a membro, vem :

$$\hat{1} + \hat{3} = \hat{2} + \hat{4}$$

ou

$$\underbrace{\hat{1} + \hat{3}}_{\hat{D}} = \underbrace{\hat{2} + \hat{4}}_{\hat{B}}$$

Logo, $\hat{A} = \hat{C}$ e $\hat{B} = \hat{D}$ c.q.d.

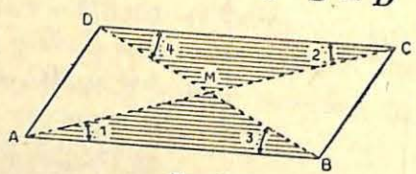


FIG. 147

Parte *d*) : Traçando-se as diagonais BD e AC do paralelogramo $ABCD$ (fig. 147), temos :

$$\triangle ABM = \triangle DCM \text{ (caso A.L.A.)}$$

pois, $\begin{cases} \hat{1} = \hat{2} & \text{(alternos-internos)} \\ AB = CD & \text{(parte } a) \\ \hat{3} = \hat{4} & \text{(alternos-internos).} \end{cases}$

Portanto, os lados correspondentes são iguais, isto é : $AM = MC$ e $DM = MB$ c.q.d.

2.º) ***Teorema recíproco:*** Um quadrilátero convexo é paralelogramo se:

a) *os lados opostos são iguais;*

b) *os ângulos opostos são iguais;*

c) *as diagonais interceptam-se mutuamente ao meio.*

Deixaremos a cargo dos alunos a demonstração relativa à parte *a*), dada a semelhança com as demonstrações anteriores. Demonstraremos as partes *b*) e *c*).

Parte *b*) : Seja o quadrilátero $ABCD$ (fig. 148). Temos :

H $\begin{cases} \hat{A} = \hat{C} \\ \hat{B} = \hat{D} \end{cases}$ T $\begin{cases} ABCD \text{ é um } \square \text{ (*)} \\ \text{ou} \\ AB \parallel CD \text{ e } AD \parallel BC. \end{cases}$

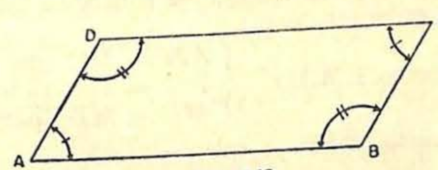


FIG. 148

DEMONSTRAÇÃO :

1. Sendo a soma dos ângulos internos de um quadrilátero igual a 360° (n.º 71 - 3), temos que :
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360°.$$

2. Como, por hipótese, $\hat{A} = \hat{C}$ e $\hat{B} = \hat{D}$, podemos escrever a igualdade acima do modo seguinte :
$$2\hat{A} + 2\hat{D} = 360°$$
ou
$$\hat{A} + \hat{D} = 180°$$

(*) Indicação do paralelogramo $ABCD$.

isto é, $\hat{A}$ e $\hat{D}$ são suplementares. Do fato de $\hat{A}$ e $\hat{D}$ serem colaterais-internos em relação a AB, CD e a transversal AD, concluimos (n.º 59 – 2.º) que $AB \parallel CD$. Da mesma forma, demonstra-se que $AD \parallel BC$, isto é, o quadrilátero $ABCD$ é um *paralelogramo*.

c.q.d.

Parte *c*) : Seja o quadrilátero $ABCD$ (fig. 149). Temos :

$$H \begin{cases} AM = MC \\ MB = MD \end{cases} \qquad T \begin{cases} ABCD \text{ é um } \square \\ \text{ou} \\ AB \parallel CD \quad \text{e} \quad AD \parallel BC. \end{cases}$$

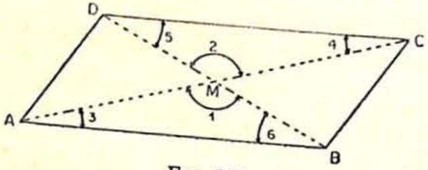


Fig. 149

Demonstração :

1. Tracemos as diagonais AC e BD que se interceptam no ponto M. Os triângulos formados MAB e MCD são congruentes, pois :

$$\text{(caso L.A.L.)} \quad \begin{cases} AM = MC \text{ (por hip.)} \\ \hat{1} = \hat{2} \quad \text{(o.p.v.)} \\ MB = MD \text{ (por hip.)} \end{cases}$$

e, portanto, segue-se que :

$$\hat{3} = \hat{4} \quad \text{e} \quad \hat{5} = \hat{6}.$$

2. Sendo êstes ângulos alternos-internos, em relação a AB, CD e a transversal AC, concluímos (n.º 59 – 1.º) que $AB \parallel CD$. Da mesma forma chegamos à conclusão que $AD \parallel BC$. Logo : o quadrilátero $ABCD$ é um *paralelogramo*.

c.q.d.

3.º) **Teorema:** *O quadrilátero convexo que possui dois lados opostos iguais e paralelos é um paralelogramo.*

Seja o quadrilátero $ABCD$ (fig. 149). Temos :

$$H \begin{cases} AB = CD \\ AB \parallel CD \end{cases} \qquad T \; \{ \; ABCD \text{ é um } \square$$

Demonstração :

1. A diagonal AC divide o quadrilátero $ABCD$ nos triângulos ABC e CDA, iguais pelo caso L.A.L. (AC – comum; $\hat{3} = \hat{4}$ (alt. int.) ; $AB = CD$ (p/ hip.)). Portanto : $BC = AD$.
2. Tendo o quadrilátero $ABCD$ os pares de lados opostos iguais ($AB = CD$ e $BC = AD$) concluímos que é um paralelogramo (Teorema anterior – *a*).

c.q.d.

74. Propriedade característica do retângulo. Além das propriedades gerais dos paralelogramos, o retângulo possui mais uma (constituída dos teoremas direto e recíproco) que lhe é *característica* e que permite reconhecer se um dado paralelogramo é ou não retângulo.

1.º) **Teorema:** *As diagonais de um retângulo são iguais.*

Seja o retângulo $ABCD$ (fig. 150). Temos :

$$H \begin{cases} ABCD \text{ é um } \square \\ \text{ou} \\ \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 1 \text{ reto } (90^\circ) \end{cases}$$

$$T \; \{ \; AC = BD.$$

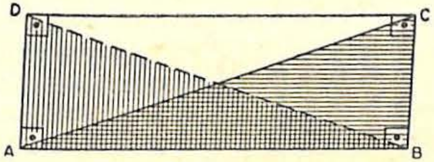


Fig. 150

Demonstração :

1. Tracemos as diagonais AC e BD. Temos que :

$$\triangle ABD = \triangle ABC \text{ (caso L.A.L.)},$$

$$\text{pois :} \begin{cases} AB \text{ é comum} \\ \hat{A} = \hat{B} \text{ (retos por hip.)} \\ AD = BC \text{ (lados opostos de um } \square). \end{cases}$$

2. Logo : $AC = BD$

c.q.d.

2.º) ***Teorema recíproco:*** *O paralelogramo, que tem diagonais iguais, é um retângulo.*

Seja o paralelogramo $ABCD$ (fig. 151). Temos:

$$\text{H}\ \{\ AC = BD \qquad \text{T} \begin{cases} ABCD \text{ é um } \square \\ \text{ou} \\ \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 1 \text{ reto } (90^\circ). \end{cases}$$

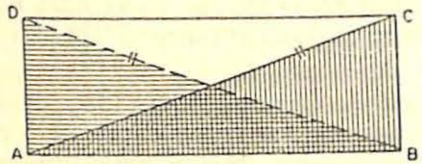


FIG. 151

DEMONSTRAÇÃO:

1. Consideremos as diagonais AC e BD. Temos que:
$$\triangle ABD = \triangle ABC \text{ (caso L.L.L.),}$$
$$\text{pois: } \begin{cases} AD = BC \text{ (lados opostos de um } \square) \\ AB \text{ é comum} \\ AC = BD \text{ (por hip.)} \end{cases}$$
e portanto: $\hat{A} = \hat{B}$;
2. Como $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são colaterais-internos em relação às paralelas AD e BC, interceptadas pela transversal AB, segue-se que êles são suplementares (n.º 63 - b), isto é:
$$\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ$$
e como $\hat{A} = \hat{B}$, vem: $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$.

Sendo iguais os ângulos opostos de um paralelogramo, temos finalmente:
$$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ$$
ou seja o paralelogramo $ABCD$ é um retângulo.

c.q.d.

75. Propriedade característica do losango. Também o losango, além das propriedades do paralelogramo, goza da seguinte propriedade característica:

1.º) ***Teorema:*** *As diagonais de um losango são perpendiculares entre si e bissetrizes dos ângulos internos.*

Seja o losango $ABCD$ (fig. 152). Temos:

$$\text{H} \begin{cases} ABCD \text{ é um } \Diamond \\ \text{ou} \\ AB = BC = CD = DA \end{cases} \qquad \text{T} \begin{cases} BD \perp AC \\ \hat{1} = \hat{2} \text{ e } \hat{3} = \hat{4}. \end{cases}$$

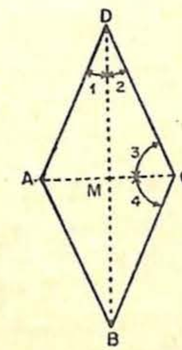


FIG. 152

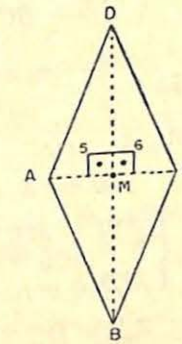


FIG. 153

DEMONSTRAÇÃO:

1. Tracemos as diagonais AC e BD que se cortam mùtuamente ao meio no ponto M (n.º 73 - d). Como o losango tem os lados iguais, os pontos D e B são eqüidistantes de A e de C e, portanto, pertencem à mediatriz de AC (n.º 54 - b). Dêste modo já podemos concluir que $BD \perp AC$ (1.ª parte da tese);
2. Sendo o triângulo DAC isósceles e DM mediana dêste triângulo, segue-se que DM é também bissetriz (n.º 38 - c - 2.º) e, portanto: $\hat{1} = \hat{2}$ (2.ª parte da tese).

Da mesma forma demonstra-se que AC é mediatriz de BD e que: $\hat{3} = \hat{4}$.

c.q.d.

2.º) ***Teorema recíproco.***

Parte *a*): *O paralelogramo que possui as diagonais perpendiculares entre si é losango.*

Seja o paralelogramo $ABCD$ (fig. 153). Temos:

$$H \; \{ BD \perp AC \; (\hat{5} = \hat{6} = 90^\circ)$$

$$T \begin{cases} ABCD \text{ é um } \Diamond \\ \text{ou} \\ AB = BC = CD = DA \end{cases}$$

Demonstração:

1. De fato, temos:

$$\triangle AMD = \triangle CMD \text{ (caso L.A.L.),}$$

$$\text{pois: } \begin{cases} AM = MC & (M \text{ ponto médio das diagonais}). \\ \hat{5} \;\;\; = \hat{6} & \text{(retos por hip.)} \\ MD \text{ é comum.} \end{cases}$$

Logo: $AD = DC$.

2. Como os lados opostos de um paralelogramo são iguais (n.° 73 - 1.° - c), segue-se que:

$$AB = BC = CD = DA \qquad \text{c.q.d.}$$

Parte b): *O paralelogramo que possui uma diagonal bissetriz de dois ângulos opostos é losango.*

A demonstração desta parte fica a cargo do aluno.

76. Propriedades características do quadrado. Sendo o quadrado um paralelogramo que possui todos os ângulos iguais e todos os lados iguais, segue-se que o *quadrado* é ao mesmo tempo *retângulo* e *losango*. Logo: *num quadrado as diagonais são iguais, perpendiculares entre si e bissetrizes dos ângulos.*

Recìprocamente, *se num paralelogramo as suas diagonais são iguais e perpendiculares ou também iguais e bissetrizes dos ângulos, êsse paralelogramo é um quadrado.*

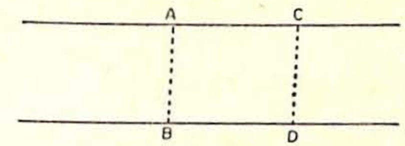


Fig. 154

77. Aplicações.

1.ª) ***Distância entre duas retas paralelas.*** Dadas duas retas paralelas (fig. 154), traçando-se por dois pontos distintos, de uma delas, as perpendiculares respectivas à outra, obtém-se dois segmentos iguais pelo fato de serem lados opostos de um retângulo. Logo:

Dadas duas retas paralelas, todos os pontos de uma tem igual distância da outra. Tal distância diz-se: *distância entre duas retas paralelas.*

2.ª) ***Teorema:*** *O segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e igual à sua metade.*

Seja o triângulo ABC (fig. 155). Temos:

$$H \begin{cases} AM = MB \\ AN = NC \end{cases} \qquad T \begin{cases} MN \parallel BC \\ MN = \dfrac{BC}{2}. \end{cases}$$

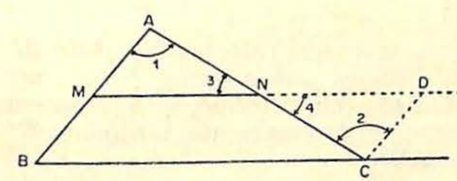


Fig. 155

Demonstração:

1. Tracemos pelo vértice C a paralela ao lado AB e prolonguemos MN até encontrá-la em D. Temos, assim:

$$\triangle AMN = \triangle CND \text{ (caso A.L.A.),}$$

pois: $\begin{cases} \hat{1} = \hat{2} & \text{(alternos-internos formados por duas paralelas)} \\ AN = NC & \text{(por hip.)} \\ \hat{3} = \hat{4} & \text{(o.p.v.).} \end{cases}$

Logo : $CD = AM$.

2. Como $AM = MB$ (por hip.), segue-se que: $CD = MB$ e sendo por construção $CD \parallel MB$, temos que $MBCD$ é um paralelogramo (n.º 73 - 3.º) e, portanto

$$MN \parallel BC \text{ (1.ª parte da tese).}$$

Sendo, também, $MN = ND$ ($\triangle AMN = \triangle CND$), concluímos que:

$$BC = MD = 2MN \text{ ou } MN = \frac{BC}{2} \text{ (2.ª parte da tese).}$$

c.q.d.

3.ª) ***Teorema recíproco:*** *O segmento traçado pelo ponto médio de um dos lados de um triângulo, paralelamente a um segundo lado, divide o terceiro lado ao meio.*

Seja o triângulo ABC (fig. 155). Temos:

$$\text{H} \begin{cases} AM = MB \\ MN \parallel BC \end{cases} \qquad \text{T } \{ AN = NC$$

DEMONSTRAÇÃO:

De fato, traçando pelo ponto médio M o segmento $MN \parallel BC$, dizemos que o ponto N de encontro com o lado AC é o seu ponto médio, pois, caso contrário teríamos que admitir, forçosamente, um ponto N' como ponto médio de AC.

Nestas condições o segmento MN' deveria ser paralelo a BC (teorema direto) e, portanto, estariam passando *duas paralelas* (MN e MN') ao lado BC pelo mesmo ponto M, contra o Postulado de Euclides. Logo, N coincide com N', isto é, $AN = NC$.

c.q.d.

Trapézios

78. Definição. Classificação. *Trapézio é o quadrilátero que tem sòmente dois lados opostos paralelos* (fig. 156). Os dois lados paralelos dizem-se *bases* e a distância entre êles, *altura* do trapézio. Os trapézios *classificam-se* em:

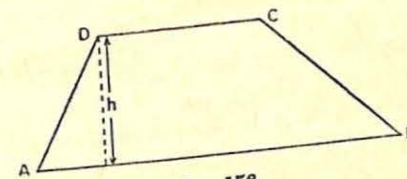


FIG. 156

1. *isósceles* (fig. 157), quando têm os lados não paralelos iguais;
2. *escaleno* (fig. 156), quando têm os lados não paralelos desiguais;
3. *retângulo* (fig. 158), quando têm dois ângulos retos.

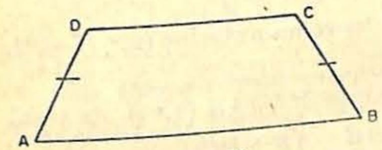


FIG. 157

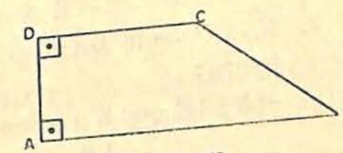


FIG. 158

79. Propriedade dos trapézios convexos.

1.º) ***Teorema:*** *O segmento que une os pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio é paralelo às bases e igual à sua semi-soma.*

Seja o trapézio $ABCD$ (fig. 159). Temos:

$$H \begin{cases} AM = MD \\ BN = NC \end{cases} \qquad T \begin{cases} MN \parallel AB \parallel DC \\ MN = \dfrac{AB + DC}{2}. \end{cases}$$

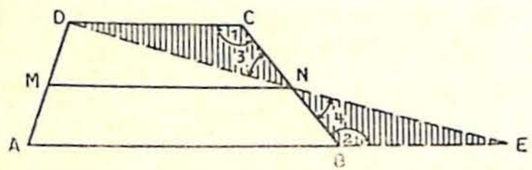


FIG. 159

DEMONSTRAÇÃO:

1. Tracemos DN prolongando-o, a seguir, até encontrar o prolongamento de AB em E. Dêste modo:

$$\triangle NDC = \triangle NBE \text{ (caso A.L.A.)},$$

$$\text{pois: } \begin{cases} \hat{1} = \hat{2} & \text{(alternos-internos formados por duas paralelas)} \\ NC = BN & \text{(por hip.)} \\ \hat{3} = \hat{4} & \text{(o.p.v.).} \end{cases}$$

Logo: $DN = NE$ e $DC = BE$.

2. No triângulo DAE, pelo teorema anterior (n.º 77-2.ª), temos:

$MN \parallel AE$ que é o mesmo que $MN \parallel AB$ (1.ª p. da tese)

e $\quad MN = \dfrac{AE}{2} = \dfrac{AB+BE}{2} = \dfrac{AB+DC}{2}$ (2.ª p. da tese).

c.q.d.

NOTA: O segmento MN é denominado *base média* do trapézio.

Corolário: *A paralela às bases de um trapézio traçada pelo ponto médio de um dos lados não paralelos, divide ao meio o outro lado não paralelo.* (Imediato pelo Postulado de Euclides).

2.º) ***Teorema:*** *O segmento da base média de um trapézio compreendido entre as duas diagonais é igual à semi-diferença das bases.*

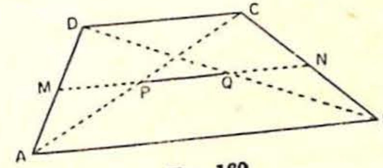


FIG. 160

Seja o trapézio $ABCD$ (fig. 160). Temos:

$$H \{ MN \text{ é base média} \qquad T \left\{ PQ = \frac{AB - DC}{2}. \right.$$

DEMONSTRAÇÃO:

1. No triângulo ABD, temos (n.º 77-3.ª): $MQ = \dfrac{AB}{2}$.

No triângulo CDA, temos (n.º 77-3.ª): $MP = \dfrac{DC}{2}$.

2. Como $PQ = MQ - MP$, segue-se substituindo MQ e MP pelos valores acima, que:

$$PQ = \frac{AB}{2} - \frac{DC}{2} = \frac{AB - DC}{2} \qquad \text{c.q.d.}$$

80. Propriedade característica do trapézio isósceles.

Teorema: *No trapézio isósceles os ângulos contíguos à mesma base são iguais.*

Seja o trapézio $ABCD$ (fig. 161).

Temos:

$$H \{ AD = BC$$

$$T \begin{cases} \hat{A} = \hat{B} \\ \hat{C} = \hat{D}. \end{cases}$$

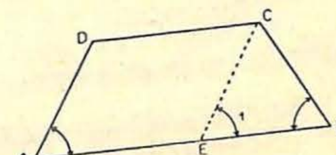


FIG. 161

DEMONSTRAÇÃO :

1. Tracemos $CE \parallel AD$ pelo ponto C. O quadrilátero formado $AECD$ é um paralelogramo e, portanto: $AD = CE$. Sendo $AD = BC$ (por hip.), segue-se que: $BC = CE$.

2. Logo, o triângulo CEB é isósceles e conseqüentemente $\hat{I} = \hat{B}$ (n.º 38 – *a*). Como $\hat{I} = \hat{A}$ (ângulos correspondentes formados por duas paralelas), segue-se que:

$$\hat{A} = \hat{B} \text{ (1.ª parte da tese).}$$

Sendo $\hat{C}$ e $\hat{D}$, respectivamente, suplementos dos ângulos iguais $\hat{A}$ e $\hat{B}$, concluímos que:

$$\hat{C} = \hat{D} \text{ (2.ª parte da tese).}$$

c.q.d.

TRANSLAÇÃO

81. Definição. Diz-se que uma figura sofre um movimento de *translação*, no plano, quando todos os seus pontos descrevem *segmentos iguais e paralelos* a um segmento de reta dado. Êste segmento, que caracteriza uma translação, é denominado *segmento característico da translação*.

Se uma figura, por exemplo, um triângulo, passa de uma posição (I) ($\triangle ABC$, fig. 162), a outra (II) ($\triangle A'B'C'$), mediante uma *translação t*, a cada ponto (A) da figura, na posição (I), corresponde um ponto (A') da figura, na posição (II), assim como a todo segmento (AB) corresponde um segmento ($A'B'$).

Os elementos correspondentes neste movimento são denominados *homólogos na translação*.

82. Propriedade fundamental. *Duas figuras correspondentes em uma translação, têm os segmentos homólogos iguais, paralelos e do mesmo sentido.*

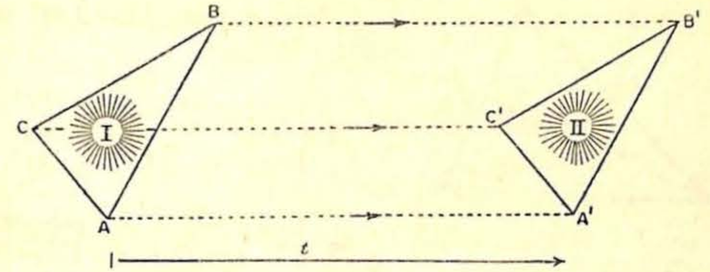


FIG. 162

Sejam os triângulos ABC e $A'B'C'$ (fig. 162), êste obtido a partir do triângulo ABC, mediante a translação cujo *segmento característico* é t. Temos:

H { AB e $A'B'$ são segmentos homólogos

$$T \begin{cases} AB = A'B' \\ AB \parallel A'B'. \end{cases}$$

DEMONSTRAÇÃO :

1. Pela definição de translação, decorre que: $AA' = BB'$ e $AA' \parallel BB'$ (do mesmo sentido);

2. Logo, o quadrilátero $AA'B'B$ é um paralelogramo por ter dois lados opostos (AA' e BB') iguais e paralelos. Portanto, os outros dois lados (AB e $A'B'$) são iguais e paralelos, isto é:

$$AB = A'B'$$

e $$AB \parallel A'B'$$ c.q.d.

RETAS CONCORRENTES NO TRIÂNGULO

83. Ponto de encontro das mediatrizes dos lados de um triângulo: circuncentro.

Teorema: *As três mediatrizes de um triângulo concorrem em um mesmo ponto, eqüidistante dos três vértices.*

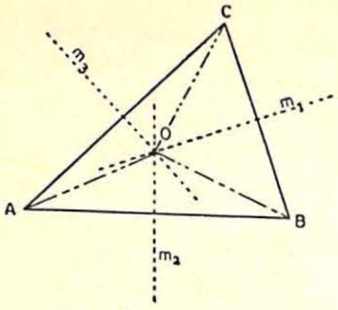


Fig. 163

Seja o triângulo ABC (fig. 163). Temos:

$$H \begin{cases} m_1 \text{ mediatriz de } BC \\ m_2 \quad " \quad\quad " \ AB \\ m_3 \quad " \quad\quad " \ AC \end{cases}$$

$$T \begin{cases} m_1,\ m_2 \text{ e } m_3 \text{ concorrem} \\ \text{em } O\ (OA = OB = OC). \end{cases}$$

Demonstração:

1. Seja O o ponto de encontro das mediatrizes m_1 e m_2. Devemos ter:

$$OB = OC \quad (O \text{ pertence a } m_1)$$
$$OB = OA \quad (\text{,, } \quad \text{,, } \quad \text{,, } m_2).$$

Logo: $\quad OA = OB = OC.$

2. Do fato de ser $OA = OC$, segue que o ponto O também pertence a m_3 (n.º 54 - b) e, portanto, as três mediatrizes concorrem, em um mesmo ponto (O), eqüidistantes dos três vértices.

Nota: O ponto O, eqüidistante dos três vértices do triângulo, diz-se *circuncentro* do triângulo.

84. Ponto de encontro das alturas de um triângulo: ortocentro.

Teorema: *As três alturas de um triângulo concorrem em um mesmo ponto.*

Seja o triângulo ABC (fig. 164). Temos:

$$H \begin{cases} h_1 \text{ altura relativa a } BC \\ h_2 \quad " \quad\quad " \quad " \ AB \\ h_3 \quad " \quad\quad " \quad " \ AC \end{cases}$$

$$T \ \{ \ h_1,\ h_3 \text{ e } h_2 \text{ concorrem em } P.$$

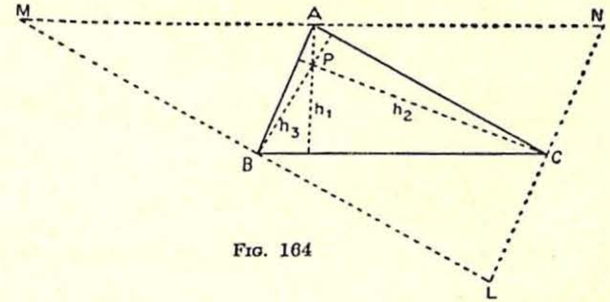


Fig. 164

Demonstração:

1. Tracemos de cada vértice a paralela respectiva ao lado oposto. Obteremos o triângulo LMN, onde os vértices A, B e C são os pontos médios, respectivamente, dos lados MN, ML e LN, pois:

   $AMBC$ é um paralelogramo, e, portanto: $MA = BC$
   $ABCN$ é um paralelogramo, e, portanto: $AN = BC$,

   ou seja $MA = AN$ e A é ponto médio de MN. Da mesma forma justificaríamos que B é o ponto médio de ML e C o ponto medio de LN;

2. Ora, como as mediatrizes dos lados do $\triangle LMN$ passam pelo mesmo ponto P (n.º 83) e contendo estas mediatrizes, respectivamente, as alturas h_1, h_2 e h_3, concluímos que estas alturas concorrem no mesmo ponto P. c.q.d.

Nota: O ponto P é denominado *ortocentro* do triângulo ABC. O ortocentro é *interno* ou *externo* ao triângulo, segundo êste seja *acutângulo* ou *obtusângulo*. No triângulo retângulo o ortocentro coincide com o vértice do ângulo reto.

85. Ponto de encontro das bissetrizes internas de um triângulo: incentro.

Teorema: *As três bissetrizes internas de um triângulo concorrem em um mesmo ponto, eqüidistante dos três lados.*

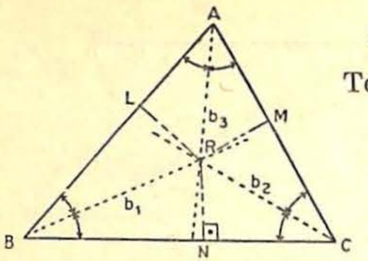


FIG. 165

Seja o triângulo ABC (fig. 165).

Temos:

$$H \begin{cases} b_1 \text{ bissetriz do } \hat{B} \\ b_2 \quad " \quad\quad " \ \hat{C} \\ b_3 \quad " \quad\quad " \ \hat{A} \end{cases}$$

T { b_1, b_2 e b_3 concorrem em R

DEMONSTRAÇÃO:

1. Seja R o ponto de encontro das bissetrizes b_1 e b_2.

   Devemos ter:

   $RN = RL$ (R pertencendo a b_1 é eqüidistante dos lados AB e BC)

   $RN = RM$ (R pertencendo a b_2 é eqüidistante dos lados BC e AC).

   Logo: $RL = RM$.

2. Do fato de ser $RL = RM$, segue-se que o ponto R é eqüidistante dos lados AB e AC e, portanto, pertence à bissetriz b_3 (n.° 55 – b).

c.q.d.

NOTA: O ponto R, eqüidistante dos lados do triângulo, diz-se *incentro* do triângulo.

OBSERVAÇÃO: *A bissetriz interna de um ângulo e as bissetrizes dos ângulos externos, não adjacentes, concorrem em um mesmo ponto.*

No triângulo ABC (fig. 166), tracemos a bissetriz b_1 do $\hat{A}$ e as bissetrizes b'_2 e b'_3 dos ângulos externos não adjacentes ao $\hat{A}$. Seja R o ponto de encontro de b'_2 e b'_3. Êste ponto é eqüidistante dos lados AB e AC e portanto, pertence, também, à bissetriz b_1.

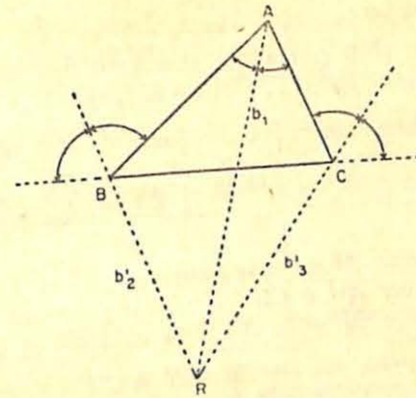


FIG. 166

86. Ponto de encontro das medianas de um triângulo: baricentro.

Teorema: *As três medianas de um triângulo concorrem em um mesmo ponto situado a dois terços de cada uma a partir do vértice.*

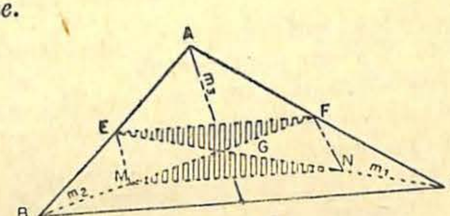


FIG. 167

Seja o triângulo ABC (fig. 167). Temos:

$$H \begin{cases} m_1 \text{ mediana relativa a } AB \\ m_2 \quad " \quad\quad " \quad " \ AC \\ m_3 \quad " \quad\quad " \quad " \ BC \end{cases}$$

T { m_1, m_2 e m_3 concorrem em G (a $\frac{2}{3}$ de cada uma a partir do vértice).

DEMONSTRAÇÃO:

1. Seja G o ponto de encontro das medianas $m_1 = CE$ e $m_2 = BF$. Tracemos EF, que liga os pontos médios.

Temos, assim:

$$\text{(I)} \begin{cases} EF \parallel BC & (\text{n.° } 77-2.^a) \\ EF = \dfrac{BC}{2} & (\text{n.° } 77-2.^a) \end{cases}$$

2. Sejam: M e N, os pontos médios respectivos dos segmentos BG e CG. No triângulo GMN, que se obtém unindo M com N, temos também (n.° 77 – 2.ª):

$$\text{(II)} \begin{cases} MN \parallel BC \\ MN = \dfrac{BC}{2} \end{cases}$$

e das relações (I) e (II), segue-se que:

$$EF \parallel MN$$
$$EF = MN$$

ou seja, o quadrilátero que resulta unindo E com M e F com N é um paralelogramo e, portanto, as suas diagonais interceptam-se mùtuamente em partes iguais (n.° 73 – d). Logo: $MG = GF$ e $NG = GE$.

Sendo $BM = MG$ (por construção M é ponto médio de BG)

e $CN = NG$ (por construção N é ponto médio de BG)

vem: $MG = GF = BM = \dfrac{BF}{3}$

e $NG = GE = CN = \dfrac{CE}{3}$.

Logo, as duas medianas BF e CE ficaram divididas em três partes iguais e o ponto G está situado a

dois têrços de cada uma delas, a partir do vértice. Com raciocínio idêntico mostraríamos que a terceira mediana (m_3) passa também por G.

c.q.d.

NOTA: O ponto G é denominado *baricentro* ou *centro de gravidade* do triângulo.

O *circuncentro*, o *ortocentro*, o *incentro* e o *baricentro*, são denominados ***pontos notáveis*** do triângulo.

EXERCÍCIOS

1. Os ângulos consecutivos de um paralelogramo medem, respectivamente: 42° 30′ e 137° 30′. Quanto valem os outros ângulos?
2. Em um paralelogramo um ângulo agudo é a quinta parte do ângulo obtuso. Calcular os ângulos dêsse paralelogramo.
3. Calcular os ângulos de um losango, sabendo-se que uma de suas diagonais forma com um dos lados um ângulo de 39° 12′ 10″.
4. Num paralelogramo o ângulo obtuso é o dôbro do ângulo agudo. Calcular os ângulos dêsse paralelogramo (medida em graus).
5. Em um losango o ângulo formado pela bissetriz com um dos lados é igual a 42,36gr. Calcular os demais ângulos.
6. Num trapézio os dois ângulos da base maior medem, respectivamente. 36° e 45° 20′. Calcular o ângulo formado pelas bissetrizes dos outros dois ângulos.
7. Sabendo-se que num quadrilátero, cada ângulo excede o anterior de 15°, pedem-se os ângulos dêsse quadrilátero.
8. Em um trapézio a soma de dois ângulos opostos é igual a 176° e um dêles excede o outro de 36° 15′. Calcular os ângulos dêsse trapézio.
9. Num trapézio retângulo, um dos ângulos é os 2/5 do ângulo reto (medido em graus). Qual é o valor do outro ângulo?
10. O ângulo formado pelas bissetrizes do ângulo reto e do ângulo consecutivo da base maior de um trapézio retângulo, mede 92°. Calcular os ângulos agudo e obtuso dêsse trapézio.
11. São conhecidos os lados $AB = 9$cm, $BC = 6$cm e $CA = 8$cm, do $\triangle ABC$. Determinar o perímetro do $\triangle MNP$, sendo M, N e P, respectivamente, os pontos médios dos lados AB, BC e CA.
12. Um trapézio tem base menor igual a 30cm e a base maior, 50cm. Determinar os comprimentos dos segmentos cujas extremidades são, respectivamente, os pontos que dividem os lados não paralelos do trapézio em quatro partes iguais.
13. Demonstrar que as perpendiculares baixadas dos vértices opostos de um paralelogramo a uma mesma diagonal são iguais.
14. Demonstrar que as duas bissetrizes dos ângulos opostos de um paralelogramo são paralelas.

15. Provar que o ponto onde as diagonais de um losango se interceptam é eqüidistante dos lados.
16. Demonstrar que as bissetrizes dos ângulos de um paralelogramo formam um retângulo.
17. Provar que o segmento de reta que une os meios dos lados opostos de um paralelogramo é paralelo aos outros dois lados.
18. Provar que os segmentos que unem, ordenadamente, os pontos médios dos lados consecutivos de um quadrilátero formam um paralelogramo.
19. Provar que, unindo-se, consecutivamente, os pontos médios dos lados de um retângulo, obtém-se um losango.
20. Demonstrar que são iguais os segmentos que unem dois vértices opostos de um retângulo, aos pontos que dividem a diagonal, dêss retângulo, em três partes iguais.
21. Demonstrar que, num trapézio isósceles : os ângulos da base são iguais e as diagonais são iguais.
22. Demonstrar que as bissetrizes dos ângulos internos de um quadrilátero determinam um outro quadrilátero cujos ângulos opostos são suplementares.
23. Demonstrar que um paralelogramo que tem um ângulo reto é um retângulo.

Respostas :

1. $42°\,30'$ e $137°\,30'$.
2. $30°$ e $150°$.
3. $78°\,24'\,20''$ e $101°\,35'\,40''$.
4. $60°$ e $120°$.
5. 84,72gr e 115,28gr.
6. $40°\,40'$.
7. $67°30'$; $82°30'$; $97°30'$ e $112°30'$.
8. $69°\,52'\,30''$; $106°\,7'\,30'$; $110°\,7'\,30''$; $73°\,52'\,30''$.
9. $144°$.
10. $86°$ e $94°$.
11. 11,5cm.
12. 35cm; 40cm; 45cm.

§ 9. Circunferência e círculo.

DEFINIÇÕES

87. Circunferência. Chama-se *circunferência* o lugar geométrico dos pontos de um plano eqüidistantes de um ponto dado no mesmo plano. O ponto dado recebe o nome de *centro* da circunferência e a distância comum de todos os pontos do lugar ao centro é denominada *raio*. Uma circunferência está

determinada quando são conhecidos o seu centro e o seu raio. Em Desenho, o instrumento que, de posse dêstes dois elementos, traça a circunferência (fig. 168), é o *compasso.*

Cada ponto do plano que tenha do centro de uma circunferência distância *menor* que o respectivo raio, diz-se *interno* à circunferência, ao passo que, cada ponto que tenha do centro uma distância *maior*, diz-se *externo*. Na figura 168, temos : ponto *A interno*, ponto *B externo* e ponto *P pertence* à circunferência.

Corda de uma circunferência é o segmento que une dois quaisquer de seus pontos (fig. 169). As cordas que passam pelo centro são chamadas de *diâmetro*. Das definições dadas, segue-se que :

1. o *centro* de uma circunferência é *único* ;
2. numa circunferência têm-se *infinitos raios*, todos *iguais* entre si ;
3. um *diâmetro* é eqüivalente a *dois raios*, situados no prolongamento um do outro ;
4. numa circunferência têm-se *infinitos diâmetros* todos *iguais* entre si ;
5. duas circunferências são *congruentes* (iguais), quando têm *raios iguais*.

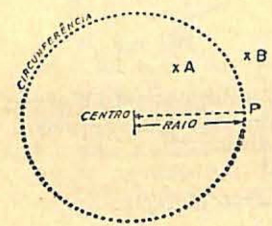


Fig. 168

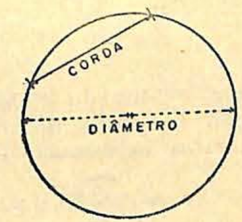


Fig. 169

88. Círculo. Denomina-se *círculo* a figura constituída por uma circunferência e por todos os pontos internos à mesma (fig. 170). O círculo é, portanto, uma *parte do plano* ou *uma superfície* (2 dimensões), enquanto que a circunferência é *uma* *linha* (1 dimensão), que limita esta superfície. A circunferência diz-se também *contôrno* do círculo.

O centro, os raios e os diâmetros de uma circunferência são chamados, da mesma forma, de *centro, raios* e *diâmetros* do respectivo círculo.

Dois círculos são *congruentes* (iguais), quando têm *raios iguais.*

89. Arco circular. Segmento circular. Sejam os pontos A e B da circunferência (fig. 171), que a dividem em duas partes: AMB e ANB. Chama-se *arco circular*, ou simplesmente *arco, qualquer uma das duas partes em que ficou dividida uma circunferência por dois de seus pontos.*

Os pontos A e B são denominados *extremos* do arco, sendo A a *origem* e B a *extremidade*, quando se escolhe um sentido de percurso.

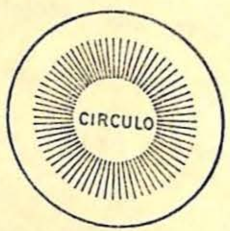


FIG. 170

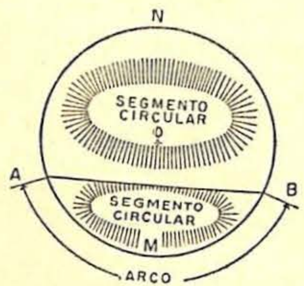


FIG. 171

Os extremos são considerados comuns aos dois arcos. Para distinguir um arco do outro, basta dar um terceiro ponto distinto dos extremos. Indicação :

$$\overset{\frown}{AMB} \quad \text{(que se lê: } \textit{arco } AMB\text{)}$$

$$\overset{\frown}{ANB} \quad \text{(que se lê: } \textit{arco } ANB\text{)}.$$

Quando se faz menção de um só dos arcos deve-se entender que se trata sempre do *arco menor* e, nesse caso, pode-se evitar o terceiro ponto. Assim, dizer *arco* AB, que se escreve $\overset{\frown}{AB}$, significa dizer *arco* AMB, na fig. 171.

O arco $\overset{\frown}{AB}$ diz-se *subtendido* pela corda AB ou também diz-se que a corda AB *subtende* o arco $\overset{\frown}{AB}$. Cada diâmetro divide a circunferência em dois arcos iguais, cada um dos quais é denominado *semi-circunferência.* Os extremos de um diâmetro dizem-se *diametralmente opostos.*

Tôda corda de um círculo o divide em duas partes, cada uma das quais recebe o nome de *segmento circular*, ou simplesmente *segmento* (fig. 171).

Se a corda fôr um diâmetro o círculo fica dividido em dois segmentos circulares iguais denominados *semi-círculos.*

90. Ângulo central. Setor circular. Seja uma circunferência ou um círculo de centro O (fig. 172). Traçando por O as duas semi-retas OA e OB, qualquer um dos dois arcos determinados por A e B estão contidos num dos dois ângulos $A\hat{O}B$, dos quais um é convexo e outro côncavo, salvo o caso em que A e B são diametralmente opostos quando, então, os ângulos são rasos.

Os ângulos $A\hat{O}B$ chamam-se *ângulos centrais* e os arcos por êles compreendidos dizem-se seus *correspondentes.* Na figura 172, temos o ângulo central $A\hat{O}B$ correspondente ao arco AB.

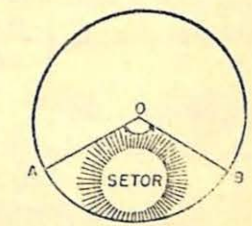


FIG. 172

A parte do círculo compreendida entre dois raios e o arco que êles determinam na circunferência é denominada *setor circular* ou simplesmente *setor.* Os raios OA e OB individuam dois setores que se dizem *correspondentes* aos ângulos centrais respectivos. Para distinguir dois setores valem as observações feitas para os arcos.

Confronto de arcos e de setores

91. Igualdade e desigualdade. Como para os segmentos e para os ângulos, pode-se *estender* para os arcos e para os setores os conceitos de *igualdade* e de *desigualdade*, desde que os arcos e os setores pertençam a circunferências e a círculos iguais. Assim, também, podemos dizer que:

a) se um ângulo central é *soma* de outros dois, o arco e o setor correspondentes, são *somas* dos arcos e dos setores correspondentes aos dois ângulos centrais;

b) em uma mesma circunferência ou em circunferências iguais, a *ângulos centrais iguais* (ou *desiguais*) correspondem *arcos* e *setores iguais* (ou *desiguais*) e a *ângulo central, soma de dois ângulos,* corresponde *arco* e *setor, soma dos dois arcos e dos dois setores* correspondentes, e reciprocamente.

Propriedades do diâmetro

92. Primeira propriedade.

Teorema: *Em uma circunferência o diâmetro é maior que qualquer outra corda.*

Seja a circunferência de centro O e raio OB (fig. 173).

Temos: $H \begin{cases} MN \text{ corda} \\ AB \text{ diâmetro} \end{cases}$ $\quad T \{ AB > MN.$

Demonstração:

1. Unindo-se M e N ao centro O, obteremos o triângulo MON, onde:

$MN < OM + ON$ (um lado é menor que a soma dos outros dois - n.º 46).

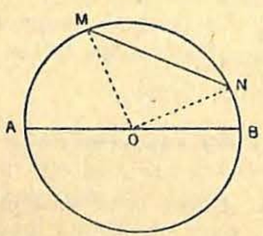


Fig. 173

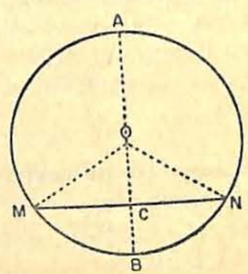


Fig. 174

2. Sendo OM e ON raios da circunferência, segue-se que a sua soma é igual ao diâmetro AB, isto é:

$$MN < AB \quad \text{ou} \quad AB > MN \qquad \text{c.q.d.}$$

93. Segunda propriedade.

Teorema: *Em uma circunferência o diâmetro perpendicular a uma corda divide-a ao meio.*

Seja a circunferência de centro O e raio OB (fig. 174).

Temos:

$$H \begin{cases} AB \text{ diâmetro} \\ MN \text{ corda (não passante por } O) \\ AB \perp MN \end{cases}$$

$$T \{ MN = CN.$$

Demonstração:

1. Unindo-se M e N ao centro O, obteremos o triângulo isósceles OMN, pois $OM = ON$, como raios de uma mesma circunferência;
2. Como num triângulo isósceles a altura e a mediana relativas à base coincidem (n.º 38 - c - 2.º), segue-se que a perpendicular AB baixada de O à corda MN, divide-a ao meio, isto é:

$$MC = CN \qquad \text{c.q.d.}$$

Nota: A demonstração da *recíproca* dêste teorema, a título de exercício, fica por conta do aluno.

94. Conseqüências. (*)

1.ª) Com êste teorema pode-se dizer que: *os extremos de uma corda são simétricos em relação ao diâmetro que lhe é perpendicular.*

(*) F. Enriques, U. Amaldi, *Elementi di Geometria*, pág. 807.

2ª.) *Em uma circunferência a mediatriz de uma corda qualquer passa pelo centro.*

Com efeito, a mediatriz da corda MN (fig. 174) é o lugar geométrico dos pontos eqüidistantes de M e N (n.º 54) e, como, por definição, o centro da circunferência é eqüidistante de todos os pontos da circunferência, segue-se que será de M e N (que são pontos da circunferência), e, portanto esta mediatriz passará forçosamente pelo centro.

3.ª) *Por três pontos, não em linha reta (não alinhados), passa uma circunferência e uma só.*

De fato, sejam A, B e C, três pontos não alinhados (fig. 175). Traçando as mediatrizes m_1 e m_2 dos segmentos AB e BC, elas se encontrarão num ponto O. Êste ponto, por pertencer a m_1 é eqüidistante de A e B e por pertencer a m_2 é eqüidistante de B e C. Desta forma O é eqüidistante dos três pontos A, B e C, isto é:

$$OA = OB = OC,$$

o que permite concluir que, a circunferência de centro O e raio OA passa também por B e C. Esta circunferência é *única* pelo fato de não existir outro ponto que goze da propriedade de ser eqüidistante de A, B e C.

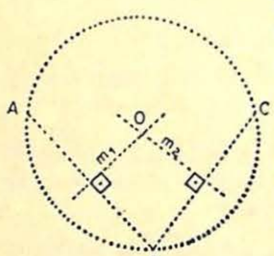


Fig. 175

Nota: A demonstração dessa conseqüência fornece-nos o processo da determinação do *centro de uma circunferência*, quando êste não é dado. Para isso, basta tomar três pontos quaisquer A, B e C sôbre a circunferência e traçar as mediatrizes dos segmentos AB e BC. O ponto de intersecção dessas mediatrizes será o centro procurado.

Na figura 175, diz-se que o triângulo ABC está *inscrito* numa circunferência ou que, a circunferência é *circunscrita* ao triângulo ABC.

Propriedades dos arcos e das cordas

95. Primeira propriedade.

a) ***Teorema:*** ***Na mesma circunferência ou em circunferências iguais, cordas iguais subtendem arcos iguais e recíprocamente, arcos iguais são subtendidos por cordas iguais.***

Sejam as circunferências iguais de centro O e O' e raios OB e $O'B'$, respectivamente (fig. 176). Temos:

H { $AB = A'B'$ T { $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B'}$.

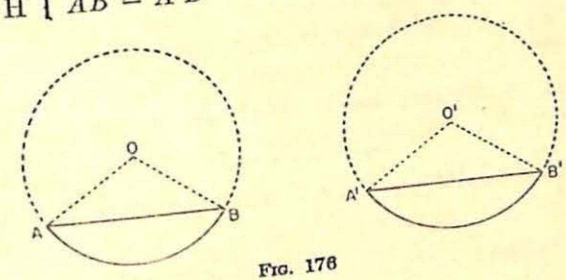


Fig. 176

1. Tracemos os raios OA e $O'A'$ e formemos os triângulos AOB e $A'O'B'$;
2. Como: $\triangle AOB = \triangle A'O'B'$ (caso L.L.L.),

pois: $\begin{cases} OA = O'A' & \text{(raios de circunferências iguais).} \\ OB = O'B' & (\;\text{"}\quad\text{"}\quad\text{"}\quad\text{"}\;). \\ AB = A'B' & \text{(por hip.)} \end{cases}$

segue-se que são iguais os ângulos centrais $A\hat{O}B$ e $A'\hat{O}'B'$ e pelo que foi estudado no confronto de arcos e setores (n.º 91), decorre que são iguais também os arcos interceptados por êstes ângulos, isto é:

$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B'} \qquad \text{c.q.d.}$$

b) ***Teorema recíproco:***

H { $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B'}$ T { $AB = A'B'$.

De fato, se os dois arcos $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{A'B'}$ (fig. 176) são iguais, os ângulos centrais $A\hat{O}B$ e $A'\hat{O}'B'$ também serão iguais (n.º 91) e, portanto, verifica-se a igualdade dos triângulos AOB e $A'O'B'$ (caso L.A.L.). Segue-se daí que:

$$AB = A'B' \qquad \text{c.q.d.}$$

96. Segunda propriedade.

a) ***Teorema:*** *Na mesma circunferência ou em circunferências iguais, cordas desiguais subtendem arcos desiguais (menores que uma semi-circunferência) sendo que o arco subtendido pela maior corda é o maior; recìprocamente, se dois arcos são desiguais, a corda, que subtende o arco maior, é a maior.*

Sejam as circunferências iguais do centros O e O' e raios OB e $O'B'$, respectivamente (fig. 177). Temos:

H { $AB > A'B'$ T { $\widehat{AB} > \widehat{A'B'}$.

DEMONSTRAÇÃO:

1. Unindo-se os pontos A e B e A' e B', respectivamente, aos centros O e O', temos os triângulos isósceles AOB $A'O'B'$;

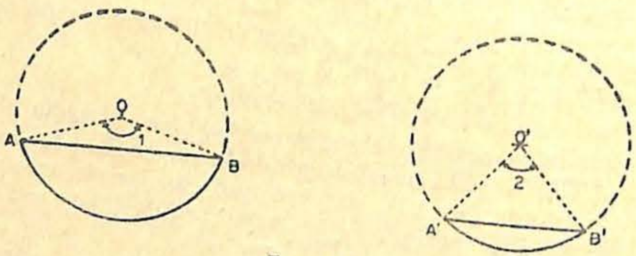


FIG. 177

2. Êstes triângulos possuem dois lados iguais e os terceiros desiguais, por hipótese ($AB > A'B'$) e, portanto, os ângulos 1 e 2 que se opõem a êstes lados são desiguais, sendo o maior o que se opõe ao maior lado (n.º 47 - Recíproca).

$$\hat{1} > \hat{2}$$

e, portanto, (n.º 91 - b): $\widehat{AB} > \widehat{A'B'}$

c.q.d.

b) ***Teorema recíproco:***

H { $\widehat{AB} > \widehat{A'B'}$ T { $AB > A'B'$.

Com efeito, caso não fôsse $AB > A'B'$ deveríamos ter, forçosamente: $AB = A'B'$ ou $AB < A'B'$. Mas, nenhum dêstes dois casos pode acontecer, pois, se isto ocorresse, deveríamos ter, pela 1.ª propriedade (n.º 95), $\widehat{AB} = \widehat{A'B'}$ e pelo teorema direto (a) $\widehat{AB} < \widehat{A'B'}$, que contrariam a hipótese. Logo, só podemos concluir que:

$AB > A'B'$ c.q.d.

97. Terceira propriedade.

a) ***Teorema:*** *Na mesma circunferência, ou em circunferências iguais, cordas iguais são eqüidistantes do centro e recìprocamente.*

Sejam as circunferências iguais de centros O e O' e raios OA e $O'A'$, respectivamente (fig. 178). Temos:

H { $AB = A'B'$ T { $OC = O'C'$.

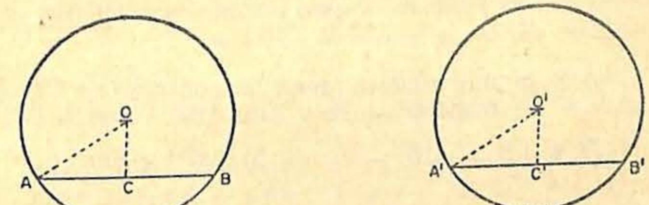


FIG. 178

DEMONSTRAÇÃO:

1. Tracemos as perpendiculares de O e O', respectivamente às cordas AB e $A'B'$. Estas perpendiculares dividirão as cordas ao meio (n.º 93), e, portanto: $AC = A'C'$.

2. Como : $OA = O'A'$ (raios iguais), segue-se que, os dois triângulos retângulos OCA e $O'C'A'$ são iguais (têm a hipotenusa e um cateto respectivamente iguais) e, portanto, são iguais os catetos correspondentes, isto é :

$$OC = O'C'$$

c.q.d.

b) ***Teorema recíproco:***

H { $OC = O'C'$ T { $AB = A'B'$.

De fato, os triângulos retângulos da figura 178, são congruentes, pois, têm a hipotenusa igual ($OA = O'A'$) e dois catetos respectivamente iguais ($OC = O'C'$). Logo : $AC = A'C'$ e como $AB = 2AC$ e $A'B' = 2A'C'$ segue que :

$$AB = A'B'$$

c.q.d.

98. Quarta propriedade.

a) ***Teorema:*** *Se na mesma circunferência ou em circunferências iguais duas cordas são desiguais, a maior delas tem do centro uma distância menor; recìprocamente, se duas cordas têm do respectivo centro distâncias desiguais, aquela, que tiver distância menor, é a maior.*

Sejam as circunferências iguais de centros O e O' e raios OA e $O'A'$, respectivamente (fig. 179). Temos :

H { $AB > A'B'$ T { $OC < O'C'$.

Demonstração :

1. Tomemos na circunferência de centro O, a partir de A, uma corda $AM = A'B'$. Evidentemente o ponto M cairá entre A e B, pois $AB > A'B'$ (por hip.). Tracemos de O a perpendicular a AM. Sejam E e F os pontos de encontro dessa perpendicular, respectivamente, com AB e AM ;

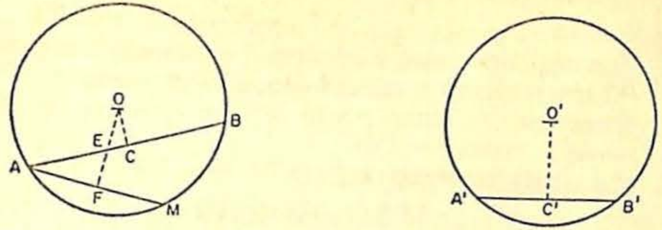


Fig. 179

2. Como : $OF = O'C'$ (n.º 97 – *a*) e $OC < OE$ ($OC \perp AB$, $OE \perp AB$) e ainda: $OE < OF$ (OE está contido em OF), concluímos que :

$$OC < OF$$

ou

$$OC < O'C'$$

c.q.d.

b) ***Teorema recíproco:***

H { $OC < O'C'$ T { $AB > A'B'$.

Com efeito, caso não fôsse $AB > A'B'$, deveríamos necessàriamente ter : $AB = A'B'$ ou $AB < A'B'$. Se $AB = A'B'$, então (n.º 97 – *a*) : $OC = O'C'$, contra a hipótese feita; se $AB < A'B'$, teríamos pelo teorema direto (*a*) : $OC > O'C'$, também contra a hipótese. Logo, só pode ser :

$$AB > A'B'$$

c.q.d.

Distância de um ponto a uma circunferência

99. Teorema. *Dados uma circunferência e um ponto, do mesmo plano, o menor segmento de reta que se pode traçar dêste ponto à circunferência é o segmento do raio, ou de seu prolongamento, compreendido entre o ponto e a circunferência.*

Parte *a*) : Consideremos o caso em que o ponto dado seja *externo* à circunferência dada (fig. 180). Temos:

H { P externo à ○ (*) T { $PA < PM$.

(*) Indicação de circunferência.

DEMONSTRAÇÃO :

1. Unindo P (externo) ao centro O (interno), o segmento PO interceptará a circunferência num ponto A. Consideremos um outro ponto M, qualquer da circunferência e tracemos PM ;
2. No triângulo PMO, temos:

$$PO < OM + PM \quad (\text{n.° } 46)$$

ou

$$\underbrace{PA + AO}_{PO} < OM + PM$$

e sendo $AO = OM$ (raios da mesma ○), segue-se que:

$$PA < PM$$

c.q.d.

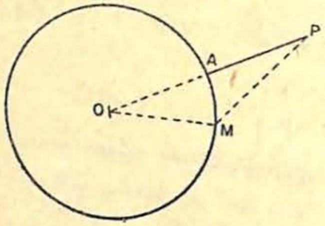


FIG. 180

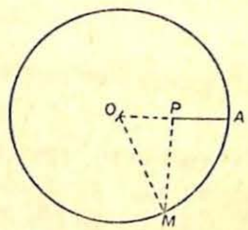


FIG. 181

Parte *b*) : Consideremos o caso em que o ponto dado seja *interno* à circunferência dada (fig. 181). Temos:

H { P interno à ○ T { $PA < PM$.

DEMONSTRAÇÃO :

1. Construamos o raio que passa por P e cuja extremidade na circunferência é A. Consideremos um ponto M qualquer da circunferência e tracemos PM ;
2. No triângulo PMO, temos:

$$PM > OM - OP \quad (\text{n.° } 46 \text{ - Cor.})$$

ou

$$PM > \underbrace{OA - OP}_{PA} \quad (OA = OM \text{ como raios da mesma ○})$$

$$\therefore PM > PA$$

isto é :

$$PA < PM$$

c.q.d.

Chama-se ***distância** de um ponto a uma circunferência*, situados no mesmo plano, ao *menor segmento* compreendido entre o ponto e a circunferência.

Posições relativas de uma reta e de uma circunferência

100. Possibilidades da reta ocupar três posições em relação a uma circunferência do mesmo plano. Desenhemos numa fôlha de papel uma certa reta a e um ponto O fora dela. Tracemos a *distância d* do ponto O à reta a (fig. 182) e com centro O e raios:

$$r_1 < d, \quad r_2 = d \quad \text{e} \quad r_3 > d$$

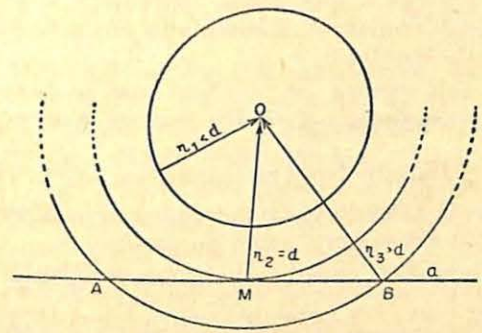


FIG. 182

descrevamos as respectivas circunferências. Observaremos então que a primeira circunferência *não encontra* a reta a, a segunda tem *sòmente um ponto comum* com a reta e a terceira a *encontra em dois pontos.*

Dêste modo, podemos dizer que a reta pode ocupar, em relação a uma circunferência do mesmo plano, *três posições distintas* (fig. 183), a saber :

1.ª) *Não tem ponto em comum com a circunferência;* nesta posição a reta diz-se *externa* à circunferência.

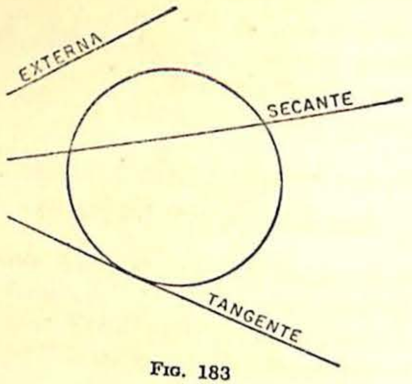


FIG. 183

2.ª) *Tem um só ponto em comum com a circunferência;* nesta posição a reta diz-se *tangente* à circunferência e o ponto comum é denominado *ponto de contacto* ou *ponto de tangência.*

3.ª) *Tem dois pontos em comum com a circunferência;* nesta posição a reta diz-se *secante* à circunferência.

101. Propriedade fundamental da tangente.

a) ***Teorema:*** *A tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio que passa pelo ponto de contacto.*

Seja a circunferência de centro O e raio OM (fig. 184). Temos:

H { t tangente à O T { $t \perp OM$.

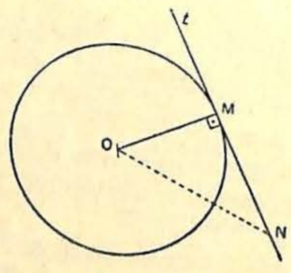


FIG. 184

DEMONSTRAÇÃO:

1. Como t é *tangente*, segue-se que existe um único ponto em comum (M) com a circunferência, sendo os demais (N por ex.) externos à mesma;
2. Nestas condições OM é o *menor* segmento que une O à reta t, isto é:

$t \perp OM$ (n.º 52 - a) c.q.d.

b) ***Teorema recíproco:*** *Tôda reta perpendicular à extremidade do raio de uma circunferência é tangente à circunferência neste ponto.*

Consideremos a mesma figura 184, onde:

H { $t \perp OM$ T { t é tangente à O.

Sendo, por hipótese, $t \perp OM$; segue-se que qualquer outro segmento que unir O com um ponto de t (N por ex.) será necessàriamente oblíqua (n.º 51 - 1.º, unicidade da perpendicular) e, portanto: $ON > OM$. Dêste modo, N é exterior à circunferência e o único ponto comum à reta t e à circunferência é o ponto M. Logo, t é tangente à circunferência.

NOTA: Do fato de ser única a perpendicular ao segmento OM, pelo ponto M, decorre que *de um ponto da circunferência só se pode traçar apenas, uma tangente.* O traçado dessa tangente é feito construindo-se por M a perpendicular ao raio cuja extremidade é M.

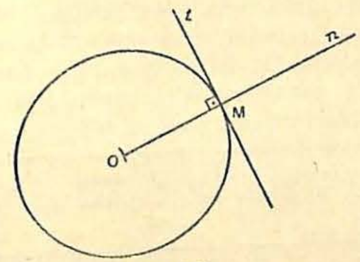


FIG. 185

102. Normal à circunferência. Chama-se *normal à circunferência*, em um ponto dado desta circunferência, a reta perpendicular à tangente neste ponto (fig. 185).

Pela propriedade fundamental da tangente (n.º 101), a normal à circunferência, num de seus pontos M, é a reta n (suporte) que contém o raio traçado por êsse ponto.

Posições relativas de duas circunferências (*)

103. Definições. Duas circunferências distintas, situadas no mesmo plano, podem ocupar, uma em relação a outra, *cinco posições diferentes*. Nessas posições as circunferências recebem nomes especiais, a saber:

1.º) *exteriores* uma a outra;
2.º) *tangentes exteriormente*;
3.º) *secantes*;
4.º) *tangentes interiormente*;
5.º) *interiores* uma a outra.

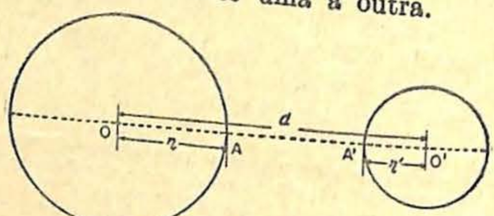


Fig. 186

1.º) São ***exteriores*** uma a outra (fig. 186), quando todos os pontos de uma circunferência são exteriores a outra. Chama-se *linha dos centros* de duas circunferências a reta que passa pelos respectivos centros. A propriedade característica de *duas circunferências exteriores* é a seguinte:

A distância dos centros de duas circunferências exteriores é maior que a soma dos respectivos raios.

(*) Estudo análogo pode ser feito com relação a dois círculos.

De fato, sendo: $OO' = OA + AA' + A'O'$ (fig. 186),
segue-se que: $OO' > OA + A'O'$
ou, chamando: $OA = r$, $O'A' = r'$ e $OO' = d$, temos:

$$\boxed{d > r + r'}$$

2.º) São ***tangentes exteriormente*** (fig. 187), quando as duas circunferências têm um só ponto em comum e todos os demais pontos de cada uma delas são *externos* em relação a outra. O ponto comum é denominado *ponto de contacto* ou *ponto de tangência*. A propriedade característica, neste caso, é:

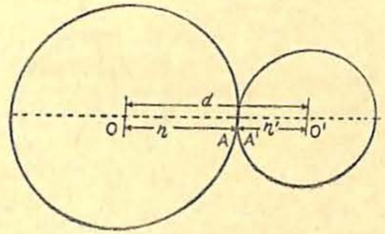


Fig. 187

A distância dos centros de duas circunferências tangentes exteriormente é igual à soma dos respectivos raios

Com efeito, observando a figura 187, temos:

$$OO' = OA + A'O'$$

ou

$$\boxed{d = r + r'}$$

3.º) São ***secantes*** (fig. 188), quando as duas circunferências têm dois pontos em comum (*). A propriedade que caracteriza duas circunferências secantes é a seguinte:

(*) É de se notar que duas circunferências não podem ter *mais que dois pontos em comum*, pois, caso contrário, coincidem (três pontos não alinhados determinam uma circunferência).

A distância dos centros de duas circunferências secantes é menor que a soma dos respectivos raios e maior que a sua diferença.

De fato, unindo-se P, um dos pontos de intersecção, com os centros O e O', obteremos o triângulo OPO'. Como, num triângulo um lado é menor que a soma dos outros dois e maior que a sua diferença (n.º 46), temos:

$$d < r + r' \quad \text{e} \quad d > r - r' \quad (\text{com } r \geqslant r')$$

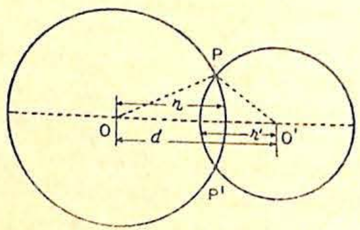


FIG. 188

$$\boxed{r - r' < d < r + r'}$$

NOTA: Demonstração que ficará a cargo do aluno: *A linha dos centros de duas circunferências secantes é mediatriz da corda comum.*

4.º) São ***tangentes interiormente*** (fig. 189) quando as duas circunferências têm um só ponto comum e todos os pontos de uma delas são *internos* a outra.

A propriedade característica é a seguinte:

A distância dos centros de duas circunferências tangentes interiormente é igual à diferença dos respectivos raios.

Da figura 189, deduzimos que:

$$OO' + O'A' = OA$$
$$\therefore \; OO' = OA - O'A' \quad (\text{com } OA > O'A'$$

ou $$\boxed{d = r - r'}$$

5.º) São ***interiores*** uma a outra (fig. 190), quando as duas circunferências não têm ponto em comum e todos os pontos de uma são *internos* a outra. Em particular, se ambas

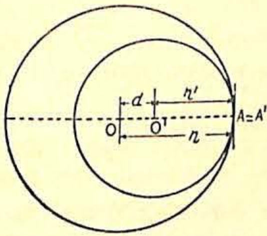


FIG. 189

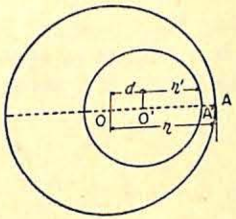


FIG. 190

têm o mesmo centro ($O \cong O'$), as circunferências dizem-se *concêntricas*. A propriedade característica de duas circunferências interiores é a seguinte:

A distância dos centros de duas circunferências interiores é menor que a diferença dos respectivos raios.

Da figura 190, temos:

$$\underbrace{OA'}_{\downarrow} < OA$$

ou $$\overbrace{OO' + O'A'} < OA$$
$$\therefore \; OO' < OA - O'A' \quad (\text{com } OA > O'A')$$

ou $$\boxed{d < r - r'}$$

Resumo:

POSIÇÕES RELATIVAS DAS DUAS CIRCUNFERÊNCIAS	NÚMERO DE PONTOS EM COMUM	RELAÇÕES ENTRE d, r, r′
Exteriores uma a outra......	0	$d > r + r'$
Tangentes exteriormente.......	1	$d = r + r'$
Secantes..................	2	$\left\{\begin{array}{l} d < r + r' \\ d > r - r' \end{array}\right.$
Tangentes interiormente.......	1	$d = r - r'$
Interiores uma a outra......	0	$d < r - r'$

104. Recíprocas. As cinco propriedades características sôbre as posições relativas de duas circunferências, admitem *recíprocas*, que são respectivamente:

1.ª) se $d > r + r'$, as circunferências são *exteriores* uma a outra;

2.ª) se $d = r + r'$, as circunferências são *tangentes exteriormente*;

3.ª) se $d < r + r'$ ou $d > r - r'$ as circunferências são *secantes*;

4.ª) se $d = r - r'$, as circunferências são *tangentes interiormente*;

5.ª) se $d < r - r'$, as circunferências são *interiores* uma a outra.

ROTAÇÃO

105. Definição. Diz-se que uma figura sofre um movimento de *rotação* no plano, quando todos os seus pontos descrevem arcos de circunferências correspondentes a ângulos iguais de mesmo vértice e mesmo sentido.

O vértice comum dos arcos descritos é denominado *centro de rotação* e o ângulo de vértice, no centro de rotação, que corresponde a êstes arcos é chamado *ângulo de rotação* ou *amplitude*. Se uma figura, por exemplo um triângulo (fig. 191), passa de uma posição (ABC) a outra ($A'B'C'$), mediante uma *rotação de amplitude* α, a cada ponto (A por ex.) do triângulo ABC corresponde um ponto (A') do triângulo $A'B'C'$, assim como a todo segmento (AB por ex.) corresponde um segmento ($A'B'$). Os elementos correspondentes, nesse movimento, são denominados *homólogos na rotação de amplitude* $\hat{\alpha}$.

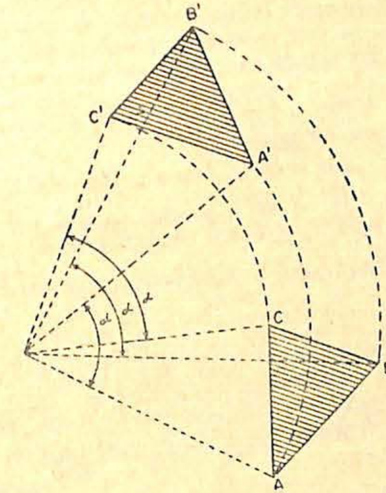


Fig. 191

EXERCÍCIOS

1. Dado um ponto interno a uma circunferência traçar uma corda de modo que seja dividida ao meio por êste ponto.
2. Demonstrar que duas cordas paralelas traçadas pela extremidade de um diâmetro são iguais.
3. Provar que todo triângulo pode ser inscrito e circunscrito a uma circunferência.
4. Demonstrar que, num círculo, cordas paralelas determinam arcos iguais. (Sugestão: considerar o diâmetro $\perp$ às cordas e usar igualdade de $\triangle$s; ver demonstração à pág. 311).
5. Provar que todo trapézio inscrito num círculo é isósceles.
6. Demonstrar que, se duas cordas iguais, de um círculo, se interceptam em um ponto P da circunferência, os ângulos que elas formam, com o diâmetro, que passa por P, são iguais.

7. De um ponto de uma circunferência traçam-se duas cordas iguais. Demonstrar que a bissetriz do ângulo destas retas passa pelo centro da circunferência.
8. Se duas cordas iguais de uma circunferência se interceptam, as partes de uma são respectivamente iguais às partes da outra.
9. Numa circunferência traça-se uma corda MN. Traçado o diâmetro $AB \parallel MN$, demonstrar que: 1.º) os arcos AM e BN são iguais; 2.º) as cordas AN e BM se interceptam, de modo que as partes de uma são respectivamente iguais às partes da outra.
10. Demonstrar que, os dois segmentos, pertencentes, cada um dêles, às tangentes traçadas a uma circunferência por um ponto externo, são iguais.
11. Na figura 192, temos: $\hat{A} = \hat{B}$, provar que $\widehat{AC} = \widehat{BC}$.
12. Na figura 193, provar que se:

$$AM = BN, \quad \text{temos}: \quad AN = BM$$
$$\text{e} \quad \widehat{AN} = \widehat{BM}, \quad \text{temos}: \quad \widehat{AM} = \widehat{BN}.$$

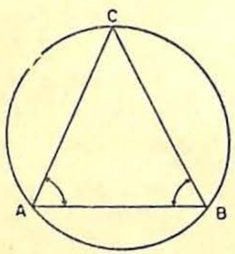


Fig. 192

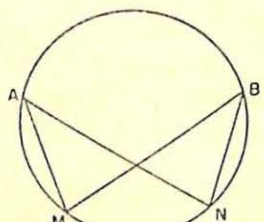


Fig. 193

13. Demonstrar que, o paralelogramo circunscrito a uma circunferência, é um losango.
14. Demonstrar que, traçada uma secante a duas circunferências concêntricas, os segmentos das secantes compreendidos entre as circunferências são iguais.
15. Por dois pontos dados, quantas circunferências passam? Onde estão situados os centros?
16. Por um ponto dado, quantas circunferências de raio dado passam? Onde estão situados os centros?
17. Duas circunferências têm, respectivamente, 5cm e 7cm de raio. A distância dos centros é de 14cm. Que posições ocupam estas circunferências?
18. Os raios de duas circunferências valem, respectivamente, 8dm e 5dm, e a distância entre os centros é de 10dm. Como são estas circunferências quanto às posições?

19. Quais são as posições relativas de duas circunferências que têm 7cm e 4cm de raios, respectivamente, sendo a distância entre os seus centros 2cm?
20. Duas circunferências são tangentes exteriormente e a distância entre os respectivos centros é de 18cm. Sabendo-se que o raio da menor é de 6cm, qual é o valor do raio da maior?

Respostas:

15. Infinitas. Os centros estão situados na mediatriz do segmento cujas extremidades são os dois pontos.
16. Infinitas. Os centros pertencem à circunferência cujo centro é o ponto dado e cujo raio é o raio dado.
17. Exteriores.
18. Secantes.
19. Interiores.
20. 12cm.

§ 10. Correspondência entre arcos e ângulos. Medidas respectivas. Construções geométricas.

ÂNGULOS NO CÍRCULO

106. Definições. Dependendo da posição que ocupa em relação a um círculo, do mesmo plano, um ângulo recebe os seguintes nomes:

1) ***central*** — *quando o seu vértice está no centro do círculo* (fig. 194);
2) ***inscrito*** — *quando o seu vértice está na circunferência e os seus lados são cordas* (fig. 195);

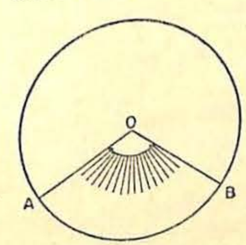


Fig. 194

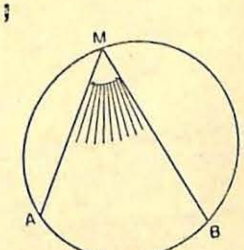


Fig. 195

3) **de segmento** — *quando o seu vértice está na circunferência e os seus lados são: um tangente à circunferência e outro corda que passa pelo ponto de contacto* (fig. 196) ;

4) **excêntrico interior** — *quando o seu vértice é um ponto interno à circunferência, distinto do centro, e os seus lados são segmentos de cordas* (fig. 197) ;

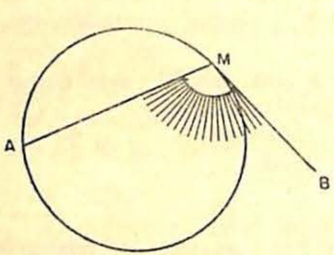


Fig. 196

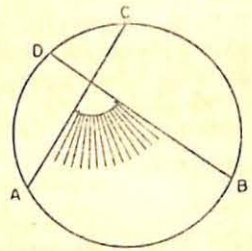


Fig. 197

Nota : Quando o ponto de encontro de duas cordas pertence à circunferência costuma-se considerar o ângulo cujos lados são uma das cordas e o prolongamento da outra, sob o nome de *ângulo ex-inscrito* (fig. 198).

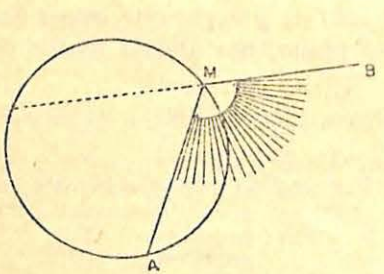


Fig. 198

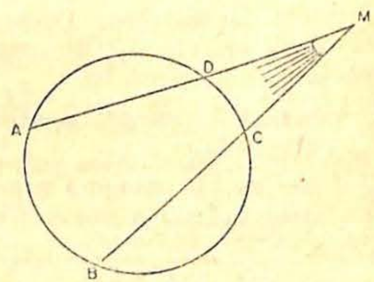


Fig. 199 (a)

5) **excêntrico exterior** — *quando o seu vértice é um ponto externo à circunferência e os seus lados são ambos secantes* (fig. 199-a), *ou um é secante e o outro tangente* (fig. 199-b) *ou ainda ambos são tangentes à circunferência* (fig. 199-c); neste último caso o ângulo também é denominado *circunscrito.*

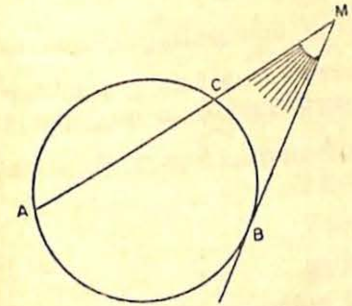


Fig. 199 (b)

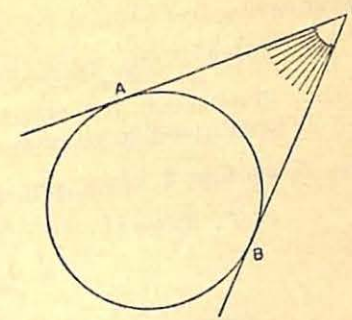


Fig. 199 (c)

107. Medida do ângulo central. A medida de um ângulo central é dada pelo

Teorema: *Em uma mesma circunferência ou em circunferências iguais, a razão de dois ângulos é igual à razão dos arcos compreendidos entre os seus lados.*

Sejam as circunferências de centros O e O' e raios OA e $O'A'$ ($OA = O'A'$), respectivamente (fig. 200). Temos :

H { $A\hat{O}B$ e $A'\hat{O}'B'$ ângulos centrais de círculos iguais

$$T \left\{ \frac{A\hat{O}B}{A'\hat{O}'B'} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{A'B'}} \right. .$$

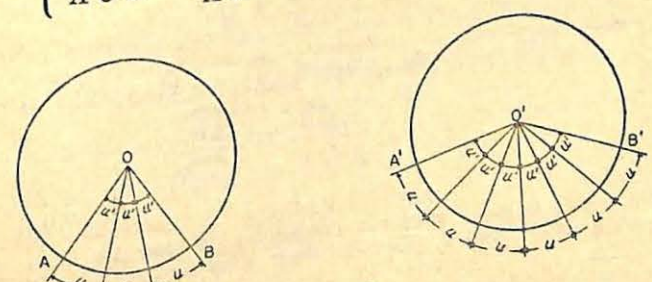


Fig. 200

DEMONSTRAÇÃO :

1. Suponhamos, para facilitar a demonstração, que os arcos $\overparen{AB}$ e $\overparen{A'B'}$ sejam *comensuráveis*, isto é, admitam como medida comum um certo arco $\widehat{u}$, o qual esteja contido 3 vêzes, por exemplo, em $\overparen{AB}$ e 6 vêzes em $\overparen{A'B'}$. Logo :

$$\overparen{AB} = 3\widehat{u}$$
$$\overparen{A'B'} = 6\widehat{u}$$

e êstes arcos estão entre si como os números 3 e 6, isto é :

$$\text{(I)} \quad \frac{\overparen{AB}}{\overparen{A'B'}} = \frac{3}{6}.$$

2. Unamos os centros O e O' aos pontos de divisão dos dois arcos ; os *arcos parciais* ($\widehat{u}$) *sendo iguais* determinam *ângulos centrais iguais* ($\widehat{u}'$) (n.º 91 – b), e, portanto, temos :

$$A\hat{O}B = 3\widehat{u}'$$
$$A'\hat{O}'B' = 6\widehat{u}'$$

e êstes ângulos, também estarão entre si como 3 está para 6, ou seja :

$$\text{(II)} \quad \frac{A\hat{O}B}{A'\hat{O}'B'} = \frac{3}{6}.$$

Igualando as relações (I) e (II), vem:

$$\frac{A\hat{O}B}{A'\hat{O}'B'} = \frac{\overparen{AB}}{\overparen{A'B'}}$$

c.q.d.

NOTA : O teorema continua verdadeiro no caso dos arcos serem incomensuráveis (*), isto é, não admitirem uma medida comum.

(*) Grandezas incomensuráveis: *Matemática*, Curso Ginasial, 2.ª série, do mesmo autor.

108. Conseqüência. *O ângulo central tem a mesma medida que o arco correspondente, desde que se tome para unidade de arco o arco correspondente à unidade de ângulo.*

Assim, se $A\hat{O}B$ é um ângulo central e $A'\hat{O}'B' = \hat{u}'$ a unidade de ângulo que intercepta a unidade $\overparen{A'B'} = \widehat{u}'$ de arco (fig. 201), vem de acôrdo o teorema (n.º 107) :

$$\frac{A\hat{O}B}{A'\hat{O}'B'} = \frac{\overparen{AB}}{\overparen{A'B'}}$$

$$\text{ou} \quad \underbrace{\frac{A\hat{O}B}{\hat{u}'}}_{\boxed{\text{medida do ângulo central}}} = \underbrace{\frac{\overparen{AB}}{\widehat{u}'}}_{\boxed{\text{medida do arco correspondente}}}$$

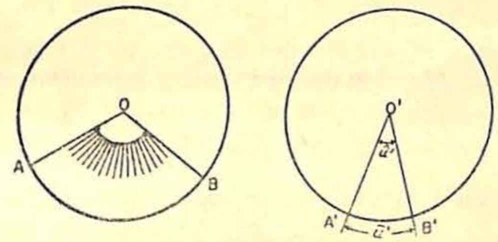


FIG. 201

Em outras palavras, podemos dizer que (fig. 202) :

O ângulo central tem por medida a do arco compreendido entre os seus lados.

Na figura 202, temos : $\hat{\alpha} = \overparen{AB}$. (*)

109. Medida do ângulo inscrito.

Teorema: *O ângulo inscrito tem por medida a metade da do arco compreendido entre os seus lados.*

(*) Assim indicaremos que a *medida* do ângulo α é igual à *medida* do arco AB, a fim de simplificar as indicações doravante.

Consideremos os três casos possíveis :

1.º) *Um dos lados do ângulo é um diâmetro* (fig. 203).
Temos :

H { $\hat{\beta}$ ângulo inscrito T { $\hat{\beta} = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2}$.

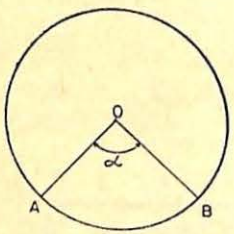


Fig. 202

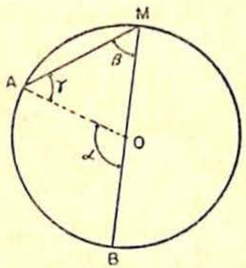


Fig. 203

Demonstração :

1. Unamos O com A. O triângulo AOM é isósceles, pois: $OA = OM$ (raios de uma mesma circunferência). Logo, os ângulos da base são iguais (n.º 38 - a), isto é :

$$\hat{\beta} = \hat{\gamma}.$$

2. Sendo α externo ao triângulo AOM, temos (n.º 39) :

$$\hat{\alpha} = \hat{\beta} + \hat{\gamma}$$

ou levando em conta que : $\hat{\beta} = \hat{\gamma}$, vem :

$$\hat{\alpha} = 2\,\hat{\beta}.$$

$$\therefore\ \hat{\beta} = \frac{\hat{\alpha}}{2}.$$

Como a medida do ângulo central α é dada pela medida de $\overset{\frown}{AB}$ (n.º 108), segue-se que:

$$\hat{\beta} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{}$$

c.q.d.

2.º) *O centro do círculo está no interior do ângulo* (fig. 204).
Temos :

H { β ângulo inscrito T { $\hat{\beta} = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2}$.

Demonstração :

1. Tracemos o diâmetro MC. Temos : $\hat{\beta} = \hat{1} + \hat{3}$.

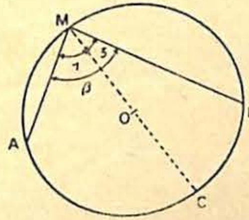


Fig. 204

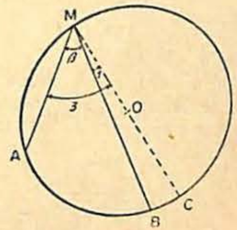


Fig. 205

2. Em virtude do caso anterior, segue-se que :

$$\hat{1} = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2} \quad \text{e} \quad \hat{3} = \frac{\overset{\frown}{CB}}{2}$$

e, portanto :

$$\hat{\beta} = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2} + \frac{\overset{\frown}{CB}}{2}$$

ou

$$\hat{\beta} = \frac{\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{CB}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} \quad \text{c.q.d.}$$

3.º) *O centro do círculo é um ponto exterior do ângulo* (fig. 205). Temos :

H { $\hat{\beta}$ ângulo inscrito T { $\hat{\beta} = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2}$.

DEMONSTRAÇÃO :

1. Tracemos o diâmetro MC. Temos: $\hat{\beta} = \hat{3} - \hat{1}$
2. Pelo 1.º caso, segue-se que:

$$\hat{\beta} = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2} - \frac{\overset{\frown}{BC}}{2}$$

ou

$$\beta = \frac{\overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{BC}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} \qquad \text{c.q.d.}$$

CONSEQÜÊNCIAS :

1.ª) *O ângulo inscrito num semi-círculo é reto.*

De fato, o ângulo inscrito AMB (fig. 206) tem por medida

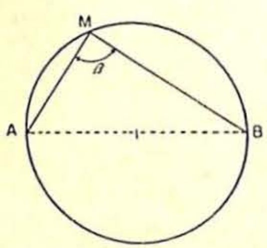


FIG. 206

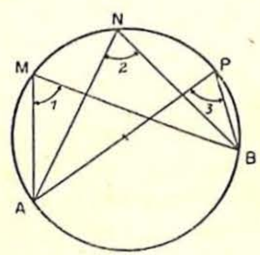


FIG. 207

a metade da do arco $\overset{\frown}{AB}$ que vale, por construção, uma semi-circunferência, ou seja, metade de 180° que é 90° (reto).

2.ª) *Todos os ângulos inscritos num mesmo segmento circular, ou em segmentos circulares iguais, são iguais.*

Com efeito (fig. 207), êstes ângulos têm todos por medida a metade da do arco AB. Logo:

$$\hat{1} = \hat{2} = \hat{3} = \ldots\ldots = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}.$$

110. Medida do ângulo de segmento.

Teorema: *O ângulo do segmento tem por medida a metade da do arco compreendido entre seus lados.*

Seja o ângulo de segmento $B\hat{A}N = \hat{\beta}$ (fig. 208). Temos:

H { $\hat{\beta}$ ângulo de segmento T $\left\{ \hat{\beta} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}. \right.$

DEMONSTRAÇÃO :

1. Tracemos o diâmetro AC. Observemos os ângulos β e $\hat{1}$ que, somados, dão o ângulo reto NAC, porque NA é tangente (definição de ângulo de segmento, n.º 106, 3). Sendo o arco $\overset{\frown}{AC}$ uma semi-circunferência (180°), segue-se que:

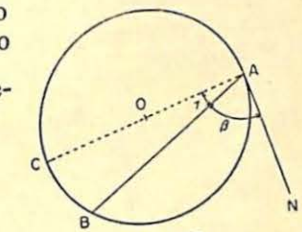


FIG. 208

$$N\hat{A}C = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}.$$

2. Como: $\hat{\beta} + \hat{1} = N\hat{A}C$

e $\hat{1}$, sendo inscrito, vale a metade do arco compreendido entre os seus lados $\left(\frac{\overset{\frown}{BC}}{2}\right)$, temos, substituindo $N\hat{A}C$ e $\hat{1}$ pelos respectivos valores:

$$\hat{\beta} + \frac{\overset{\frown}{BC}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$$

ou

$$\beta = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2} - \frac{\overset{\frown}{BC}}{2}$$

$$\therefore\ \hat{\beta} = \frac{\overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{BC}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} \qquad \text{c.q.d.}$$

111. Medida do ângulo excêntrico interior.

Teorema: *O ângulo excêntrico interior tem por medida a semi-soma das medidas dos arcos compreendidos entre seus lados e os respectivos prolongamentos.*

Seja o ângulo excêntrico interior $AMB = \hat{\beta}$ e A', B' os pontos determinados pelos prolongamentos dos lados, sôbre a circunferência (fig. 209). Temos:

$$\text{H} \; [\; \beta \text{ ângulo excêntrico interior}$$

$$\text{T} \left\{ \hat{\beta} = \frac{\widehat{AB} + \widehat{A'B'}}{2}. \right.$$

DEMONSTRAÇÃO :

1. Tracemos a corda AB' e consideremos o triângulo AMB' onde:

$$\hat{\beta} = \hat{1} + \hat{3} \text{ } (\hat{\beta} \text{ é ângulo externo}).$$

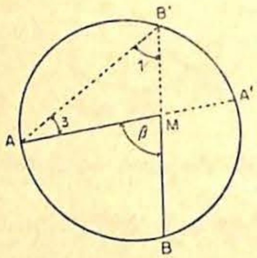


FIG. 209

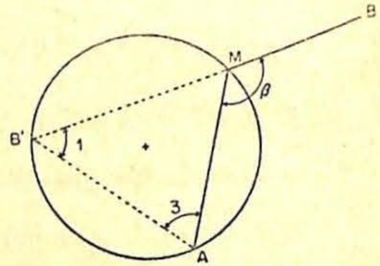


FIG. 210

2. Como $\hat{1}$ e $\hat{3}$ são inscritos, temos (n.º 109) :

$$\hat{1} = \frac{\widehat{AB}}{2} \quad \text{e} \quad \hat{3} = \frac{\widehat{A'B'}}{2},$$

e, portanto, $\hat{\beta} = \dfrac{\widehat{AB}}{2} + \dfrac{\widehat{A'B'}}{2} = \dfrac{\widehat{AB} + \widehat{A'B'}}{2}$ c.q.d.

NOTA : No caso de o ângulo ser *ex-inscrito* (fig. 210), o vértice M estará sôbre a circunferência e ainda vale a mesma fórmula, pois, no $\triangle MAB'$, temos :

$$\hat{\beta} = \hat{1} + \hat{3} \text{ } (\hat{\beta} \text{ ângulo externo})$$

ou $$\hat{\beta} = \frac{\widehat{AM} + \widehat{MB'}}{2}.$$

112. Medida do ângulo excêntrico exterior.

Teorema: *O ângulo excêntrico exterior tem por medida a semi-diferença das medidas dos arcos compreendidos entre os seus lados.*

Seja o ângulo excêntrico exterior $AMB = \hat{\beta}$ (fig. 211).

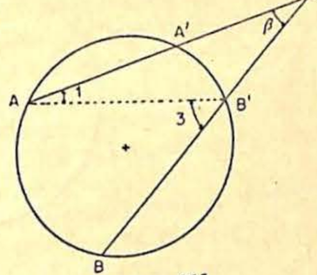


FIG. 211

meTos :

$$\text{H} \; [\; \hat{\beta} \text{ ângulo excêntrico exterior}$$

$$\text{T} \left\{ \hat{\beta} = \frac{\widehat{AB} - \widehat{A'B'}}{2}. \right.$$

DEMONSTRAÇÃO :

1. Tracemos a corda AB'. No triângulo $AB'M$ o ângulo $\hat{3}$ é externo, logo :

$$\hat{3} = \hat{1} + \hat{\beta}$$

ou $$\hat{\beta} = \hat{3} - \hat{1}.$$

2. Sendo os ângulos $\hat{3}$ e $\hat{1}$ inscritos, vem (n.º 109) :

$$\hat{\beta} = \frac{\widehat{AB}}{2} - \frac{\widehat{A'B'}}{2}$$

$$\therefore \; \hat{\beta} = \frac{\widehat{AB} - \widehat{A'B'}}{2} \qquad \text{c.q.d.}$$

NOTA : Da mesma forma demonstra-se que o teorema é verdadeiro para os casos em que os lados se apresentam um como secante e outro como tangente (fig. 212) ou ambos tangentes à circunferência (*ângulo circunscrito* (fig. 213), onde temos, respectivamente:

$$\hat{\beta} = \frac{\overset{\frown}{ACB} - \overset{\frown}{AB'}}{2} \quad \text{e} \quad \hat{\beta} = \frac{\overset{\frown}{ACB} - \overset{\frown}{ADB}}{2}.$$

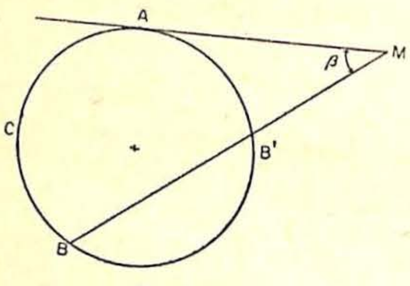


FIG. 212

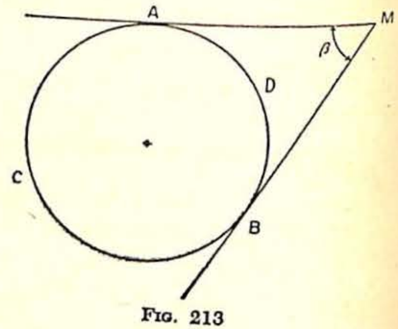


FIG. 213

113. Segmento capaz de um ângulo dado. Diz-se que um *segmento circular é capaz de um ângulo dado*, quando os ângulos nele inscritos são iguais ao ângulo dado.

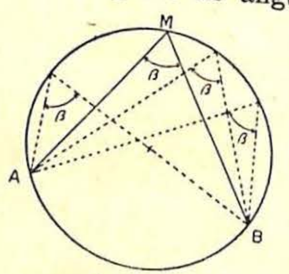


FIG. 214

Assim, por exemplo, dado o ângulo inscrito $\hat{\beta}$, de vértice M (fig. 214), temos que o segmento circular AMB é capaz do ângulo $\hat{\beta}$, pois, todos os ângulos nele inscritos são iguais a $\hat{\beta}$ $\left(\text{têm a mesma medida } \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}\right)$.

Da mesma forma, podemos dizer que, o ***segmento capaz de um ângulo reto é o semi-círculo.***

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

com a régua e o compasso

114. Aplicações da Geometria. O *Desenho*, como uma das aplicações da Geometria, serve-se de uma fôlha de papel como representação do *plano* sôbre o qual podemos assinalar quantos *pontos* quisermos, assim como *retas, segmentos de retas, ângulos, triângulos e outros polígonos.*

Com os instrumentos: *régua, esquadro* e *compasso*, são efetuadas determinadas construções geométricas, denominadas *fundamentais* e que são utilizadas, necessàriamente, para as demais construções.

As construções fundamentais que se podem efetuar com a *régua*, com o *esquadro* e com o *compasso* são as seguintes (*):

1. *Com a régua:* unir dois pontos (por meio da reta por êles determinada).
2. *Com o esquadro:* traçar por um ponto dado a perpendicular a uma reta dada.
3. *Com a régua e o esquadro:* traçar por um ponto a paralela a uma reta dada.
4. *Com o compasso:* construir a circunferência que tem um centro dado e um raio dado.

Como, em particular, o compasso serve para *transportar segmentos* e, conseqüentemente, *transportar ângulos*, podemos dizer que, *com a régua* e *com o compasso* se resolvem os problemas fundamentais da Geometria.

115. Construções geométricas.

1.ª) *Traçar a mediatriz de um segmento.*

Seja AB o segmento dado (fig. 215). A mediatriz dêste segmento é o lugar geométrico dos pontos eqüidistantes de A e B (n.º 54). Portanto, descrevendo com centros em A e B duas circunferências (**) iguais, cujo raio seja maior que

(*) FEDERICO ENRIQUES: *Le matematiche elementari* (II volume).
(**) No desenho não é necessário traçar as circunferências completas; bastam pequenos arcos para individualizar as intersecções procuradas.

a metade de AB, estas circunferências se interceptarão em dois pontos C e C' (n.º 103 – 3.º), que pertencem à mediatriz de AB, pois, são eqüidistantes de A e B. Unindo-se êstes dois pontos obteremos a mediatriz procurada.

OBSERVAÇÃO. Esta construção fornece, também, a maneira para se construir o *ponto médio* (M) de *um dado segmento* (AB).

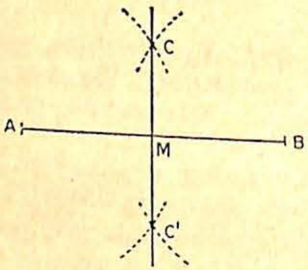


FIG. 215

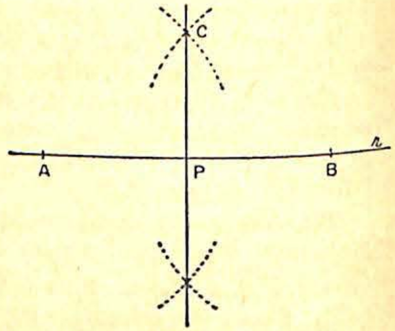


FIG. 216

2.ª) *Traçar por um ponto de uma reta a perpendicular a essa reta.*

Seja a reta r e o ponto P (fig. 216). Com centro em P e raio qualquer marquemos sôbre r dois pontos A e B eqüidistantes de P. A seguir, com centro, respectivamente, em A e B, tracemos com um mesmo raio (maior que PA), dois arcos que se interceptam em C. A reta PC será a perpendicular procurada, pois, P e C são eqüidistantes de A e B e, portanto, PC é a mediatriz de AB ou seja $PC \perp AB$.

3.ª) *Traçar por um ponto fora de uma reta a perpendicular a essa reta.*

Seja a reta r e o ponto P (fig. 217). Do ponto P como centro tracemos uma circunferência que intercepte r em A e B. Para isso, basta traçar uma circunferência que passa por um ponto N do semi-plano oposto de A em relação a r. Com centros, respectivamente, em A e B, e com um mesmo raio descrevemos dois arcos (problema anterior), que se interceptam em C. A perpendicular procurada será PC.

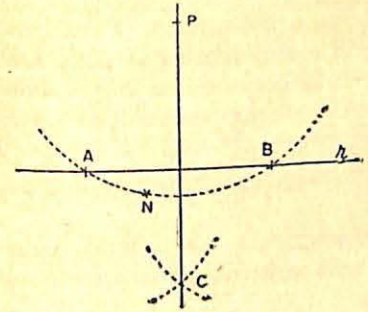


FIG. 217

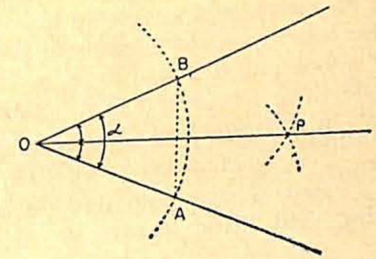


FIG. 218

4.ª) *Construir a bissetriz de um ângulo dado.*

Seja o ângulo $\hat{\alpha}$ (fig. 218). Com centro no vértice O de α e a abertura de compasso qualquer, descrevamos uma circunferência que corte os lados do ângulo, respectivamente, nos pontos A e B. Com centro nos pontos A e B e abertura maior que a metade do segmento AB, tracemos, com um mesmo raio, dois arcos que se interceptem em P. Como OP é mediatriz de AB (construções anteriores) e, portanto, mediana da base do triângulo isósceles AOB, segue-se que OP é bissetriz do ângulo do vértice, isto é, de $\hat{\alpha}$.

OBSERVAÇÃO. Esta construção permite, também, *dividir um arco ao meio*, pois, para tal basta construir a bissetriz do correspondente ângulo central.

5.ª) *Construir um triângulo tendo os lados, respectivamente, iguais a três segmentos dados.*

Sejam os segmentos: MN, PQ e RS (fig. 219). Tomemos um segmento $AB = MN$ e descrevamos as duas circunferências de centros A e B e de raios, respectivamente, iguais a PQ e RS. Se estas duas circunferências tiverem um ponto em comum C (e, portanto, também um outro

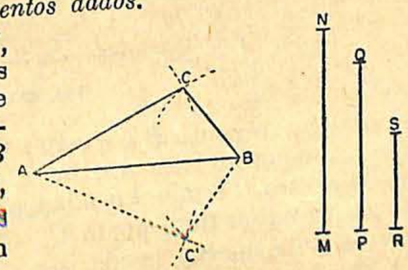


FIG. 219

C'), fora de AB o $\triangle ABC$ é o triângulo procurado. Para que o problema seja *possível* é necessário e suficiente que *cada um dos três segmentos dados seja menor que a soma dos outros dois e maior que a sua diferença* (basta lembrar a condição para que duas circunferências sejam secantes, n.º 103 - 3.º).

6.ª) *Dada uma semi-reta, como lado, construir um ângulo igual a um ângulo dado.*

Seja $\hat{\alpha}$ o ângulo dado e a a semi-reta como lado dado (fig. 220). Com centro em O e raio arbitrário descrevamos

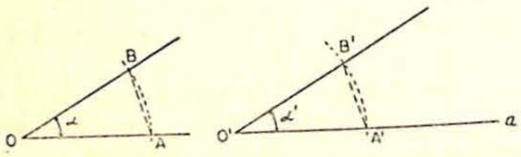


Fig. 220

uma circunferência que intercepte os lados de $\hat{\alpha}$ nos pontos A e B, unindo-os obtemos o triângulo isósceles AOB. A seguir, tomando sôbre a semi-reta a, um segmento $O'A' = OA$, construímos o triângulo que tenha para lados $O'B' = OB$ e $A'B' = AB$. O ângulo $\hat{\alpha}'$ é o ângulo procurado.

7.ª) *Traçar por um ponto, fora de uma reta, a paralela a essa reta.*

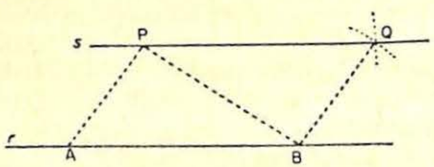


Fig. 221

Sejam: o ponto P e a reta r (fig. 221). Sôbre r tomemos dois pontos arbitrários A e B. A seguir, tracemos dois arcos, um de centro P e raio AB e outro de centro B e raio AP, que se interceptarão num ponto Q. Como o quadrilátero $ABQP$ tem os lados opostos iguais, segue-se que é um paralelogramo n.º 73 - 2.º - a). Logo: $s \parallel r$.

8.ª) *Traçar, pelo extremo de um ponto dado, a perpendicular a êsse segmento.*

Seja AB o segmento dado (fig. 222). Queremos traçar a perpendicular por B. Para isso, tomemos um ponto O arbitrário, fora de AB, e com raio OB descrevamos um arco que intercepte AB em M. Unindo-se M com O, o prolongamento de MO encontrará a circunferência em N. A perpendicular procurada será NB, pois, o ângulo MBN sendo inscrito num semi-círculo é reto (n.º 109 - Cons. 1.ª).

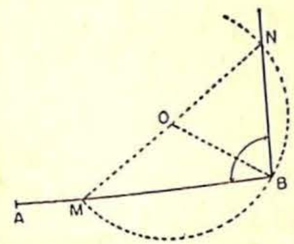


Fig. 222

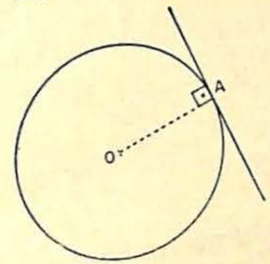


Fig. 223

9.ª) *Traçar por um ponto de uma circunferência dada a tangente a essa circunferência.*

Seja a circunferência de centro O e raio OA (fig. 223). Para se traçar a tangente à circunferência pelo ponto A, basta traçar a perpendicular ao raio OA pelo ponto A (problema anterior).

10.ª) *Traçar por um ponto externo a uma circunferência dada, as tangentes a essa circunferência.*

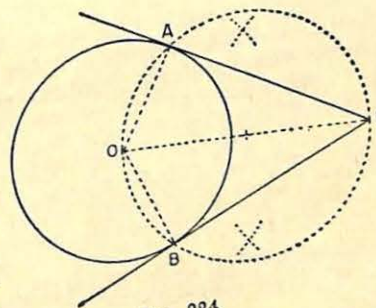


Fig. 224

Sejam a circunferência de centro O e raio OA e o ponto externo P (fig. 224). Com centro no ponto médio de OP, tomado como diâmetro, traça-se a circunferência que interceptará a circunferência dada nos pontos A e B. Dizemos que os segmentos PA e PB são tangentes à circunferência. De fato, OP sendo diâmetro, os ângulos $O\hat{A}P$ e $O\hat{B}P$, inscritos num semi-círculo, são retos e, portanto, PA e PB são perpendiculares, respectivamente, aos raios OA e OB.

11.ª) *Construir um triângulo conhecendo-se dois de seus lados e o ângulo formado por êles.*

Sejam os segmentos a e b e o ângulo 1, os lados e o ângulo (fig. 225), dados do triângulo que se procura. Devemos supor

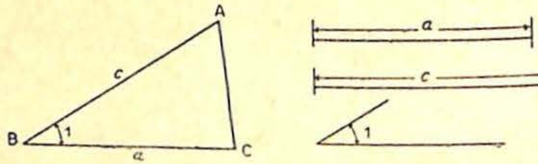


FIG. 225

o problema resolvido e, a seguir, verificar quais as construções que devem ser feitas para solucioná-lo. No caso presente basta construir um segmento $BC = a$, em seguida, traçar por B uma semi-reta que forme com BC um ângulo igual ao $\hat{1}$ dado. Sôbre esta semi-reta toma-se, a partir de B, um segmento $c = BA$. Unindo-se os extremos A e C dos segmentos, já construídos, obtemos o triângulo procurado.

12.ª) *Construir um triângulo, conhecendo-se um lado e os dois ângulos adjacentes a êle.*

Sejam: o segmento a e os ângulos *1* e *2*, o lado e os ângulos (fig. 226), dados do triângulo que se procura. Suposto o problema resolvido basta tomar um segmento $BC = a$ e

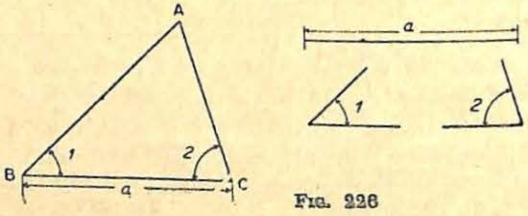


FIG. 226

pelos seus extremos traçar as semi-retas que formam com êste segmento, respectivamente, ângulos iguais a $\hat{1}$ e $\hat{2}$. Estas semi-retas encontrar-se-ão num ponto A e o triângulo ABC assim formado é o pedido.

EXERCÍCIOS

1. Calcular o valor do ângulo inscrito num círculo cujos lados compreendem um arco de 72° 10′ 18″.
2. A medida de um ângulo inscrito num círculo é 68° 12′ 30″. Qual é o valor do arco compreendido entre seus lados?
3. Os lados de um ângulo inscrito subtendem arcos de 83° 15′ e 60° 17′. Calcular o valor dêste ângulo.

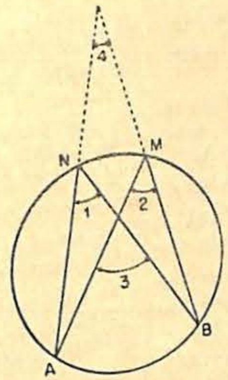


FIG. 227

4. Um ângulo inscrito é formado por um diâmetro e uma corda e mede 52gr. Achar o valor do arco subtendido pela corda.
5. Um ângulo inscrito é formado por uma corda e um diâmetro. O arco subtendido pela corda é o duplo do arco compreendido entre os lados do ângulo inscrito. Qual é o seu valor (em graus)?
6. Os vértices de um triângulo inscrito numa circunferência dividem-na em três partes tais que a primeira é tripla da segunda e esta dupla da terceira. Determinar, em graus, as medidas dos ângulos do triângulo.
7. Na figura 227, calcular os valores dos ângulos: $\hat{1}$, $\hat{2}$, $\hat{3}$ e $\hat{4}$, sabendo-se que: $\widehat{AB} = 88°\ 14'$ e $\widehat{MN} = 46°\ 20'$.

8. Duas cordas AB e CD se interceptam num ponto M, distinto do centro. Sendo $\widehat{AC}=64°\,12'$ e $\widehat{BD}=76°\,8'$, calcular o ângulo excêntrico interior $A\hat{M}D$.

9. Duas secantes formam um ângulo excêntrico exterior de 45°. O menor dos arcos interceptados pelas secantes vale 72°. Calcular o valor do maior arco interceptado por estas secantes.

10. Os lados de um ângulo circunscrito são tangentes que tocam a circunferência em dois pontos tais que um dos arcos formados é o triplo do outro. Qual é o valor dêsse ângulo?

11. O arco $\widehat{AC}$ excede o arco $\widehat{BD}$ de 30°. Calcular êsses arcos sabendo-se que o ângulo formado pelas cordas AB e CD mede 80°.

12. Seja AB o diâmetro de uma circunferência e C um ponto tal que o arco $\widehat{BC}$ seja igual a 32°. Traçando-se a corda BC, calcular os ângulos $A\hat{B}C$ e ACB.

13. AB e CD são duas cordas que se interceptam num mesmo círculo. Sabendo-se que: $\widehat{AC}=62°$ e $\widehat{BD}=114°$, calcular o valor do ângulo excêntrico interior.

14. As bases de um trapézio inscrito são AB e CD. Calcular os ângulos internos dêsse trapézio, sabendo-se que AB e CD subtendem arcos, respectivamente, iguais a 1/3 e 1/10 da circunferência (medida em graus).

15. Um quadrilátero $ABCD$ é inscrito num círculo. Sabendo-se que: $\widehat{AB}=74°$, $\widehat{BC}=116°$ e $\widehat{CD}=80°$, determinar os ângulos internos dêsse quadrilátero e o ângulo formado pelas suas diagonais.

16. As cordas AB e CD interceptam-se num ponto M, distinto do centro. Sabe-se que o ângulo excêntrico interior de vértice M é excedido em 26° pelo arco de 54° e que as medidas dos arcos BD e AC estão entre si na razão 3/2. Determinar o valor dos arcos $\widehat{BD}$ e $\widehat{AC}$.

17. Demonstrar que, se A, B, C e D são quatro pontos sôbre uma circunferência, êstes pontos são vértices de um quadrilátero cujos ângulos opostos são suplementares.

18. Se num quadrilátero $ABCD$, inscrito em um círculo, traçam-se as diagonais AC e BD. Provar que os ângulos $D\hat{A}C$ e $D\hat{B}C$ são iguais.

19. Se num quadrilátero os ângulos $D\hat{A}C$ e $D\hat{B}C$ são iguais, o quadrilátero é inscritível.

20. Demonstrar que as bissetrizes dos ângulos inscritos em um mesmo segmento circular AMB passam tôdas pelo meio do arco AB, que não contém M.

21. Demonstrar que todo trapézio inscrito em um círculo é isósceles.

22. Construir um triângulo retângulo dado um cateto e a hipotenusa.

23. Construir um triângulo retângulo dada a hipotenusa e um ângulo agudo.

24. Construir um triângulo retângulo conhecendo-se um cateto e o raio do círculo inscrito.

25. Construir um triângulo isósceles conhecendo-se a base e o ângulo do vértice.

26. Construir um triângulo isósceles conhecendo-se o ângulo do vértice e a altura em relação à base.

27. Construir um triângulo conhecendo-se dois lados e o ângulo oposto a um dêles.

28. Construir um triângulo conhecendo-se o perímetro e os ângulos.

29. Construir um triângulo conhecendo-se as suas três medianas.

30. Construir um paralelogramo dados os lados e uma diagonal.

Respostas:

1. 36° 5′ 9″.
2. 136° 25′.
3. 108° 14′.
4. 96gr.
5. 30°.
6. 120°, 40° e 20°.
7. $\hat{1}=\hat{2}=44°\,7'$; $\hat{3}=67°\,17'$ e $\hat{4}=20°\,57'$.
8. 109° 50′.
9. 162°.
10. 90°.
11. 65° e 95°.
12. 74° e 90°.
13. 88°.
14. 69° e 111°.
15. 98°, 85°, 82°, 95° e 77°.
16. 22° 24′ e 33° 36′.

CAPÍTULO III

Linhas proporcionais. Semelhança de polígonos

§ 1. Divisões de um segmento. Divisão harmônica.

1. Sinal de um segmento. Consideremos o segmento AB (fig. 228). Êste segmento pode ser percorrido em dois sentidos opostos, a saber:

1.°) *da esquerda para a direita* (de A para B);

2.°) *da direita para a esquerda* (de B para A).

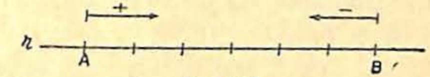


Fig. 228

Dependendo do sentido que supomos percorrido um segmento, podemos atribuir-lhe um *sinal algébrico*. Assim, por convenção, atribuímos o sinal + ao segmento AB quando percorrido de A para B e o sinal − quando percorrido de B para A. Dêste modo, se o segmento AB mede 6m, escrevemos:

$$\overline{AB} = +6\text{cm}\begin{pmatrix}A \text{ é origem} \\ B \text{ é extremidade}\end{pmatrix} \text{ e } \overline{BA} = -6\text{cm}\begin{pmatrix}B \text{ é origem} \\ A \text{ é extremidade}\end{pmatrix}$$

Os segmentos que vêm relacionados ao sinal + ou ao sinal −, dizem-se *orientados*. Para os segmentos orientados, do exemplo acima, temos que:

$$\overline{AB} = -\overline{BA}$$

Observação. Na indicação da *medida* de um segmento orientado, será omitido, para maior facilidade de representação, o traço colocado acima dos seus extremos. Assim, por exemplo, a medida do segmento orientado AB ($\overline{AB}$) será indicada por AB.

2. Divisão interna e divisão externa de um segmento. Um segmento pode ser dividido de *duas maneiras diferentes* por um ponto pertencente ao segmento ou à reta que o suporta.

a) ***Divisão interna. Segmentos aditivos.*** Seja o segmento AB e M um ponto interno a êsse segmento (fig. 229). O ponto M determina sôbre AB dois segmentos AM e MB, tais que:

$$AM + MB = AB.$$

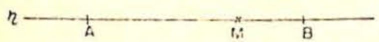


Fig. 229

Neste caso, diz-se que o segmento AB está *dividido internamente* pelo ponto M em dois *segmentos aditivos* AM e MB.

b) ***Divisão externa. Segmentos subtrativos.*** Consideremos um ponto N externo ao segmento AB e pertencente à sua reta suporte (fig. 230). O ponto N, também, divide AB nos segmentos AN e BN, tais que:

$$AN - BN = AB.$$

Fig. 230

Diz-se, agora, que o segmento AB está *dividido externamente* pelo ponto N em dois *segmentos subtrativos* AN e BN.

3. Razão de secção. Dados um segmento AB, numa reta r, e um ponto P dessa reta (que pode ser interno ou externo a AB), chama-se *razão de secção* do segmento AB à razão:

$$\frac{AP}{PB}.$$

Esta razão é *positiva* se P fôr interno ao segmento, pois, nesse caso AP e PB têm o mesmo sentido e sinais positivos e *negativa* se P fôr externo, pelo fato de AP e PB terem sentidos opostos e, portanto, sinais diferentes (fig. 231).

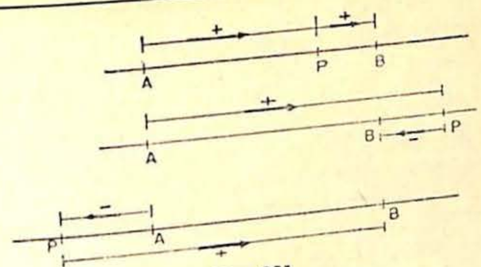


Fig. 231

$\frac{AP}{PB} > 0$ (P interno a AB)

$\frac{AP}{PB} < 0$ (P externo a AB, à direita de B ou à esquerda de A).

Exemplos:

1.º) O segmento AB, de comprimento igual a 7cm (fig. 232) é dividido pelo ponto P, internamente, na razão de secção $\frac{3}{4}$.

Logo:
$$\frac{AP}{PB} = \frac{3}{4}.$$

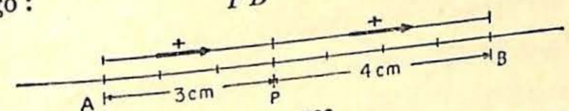


Fig. 232

2.º) O segmento AB de comprimento igual a 7cm (fig. 233) é dividido externamente pelo ponto P, que se encontra na reta suporte de AB a 3cm de B, na razão de secção $-\frac{10}{3}$.

Logo:
$$\frac{AP}{PB} = -\frac{10}{3}.$$

Com estas considerações, podemos dizer que: *sôbre uma reta existe* ***um*** *e* ***sòmente um*** *ponto que divide um segmento*

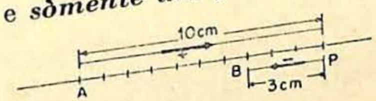


Fig. 233

dessa reta numa ***razão de secção*** *dada. Se a razão é* ***positiva*** *o ponto é* ***interno*** *ao segmento e se é* ***negativa*** *o ponto é* ***externo.***

4. Divisão harmônica. Um segmento AB, diz-se dividido *harmônicamente* por dois pontos M e N, se êstes o dividem *interna* e *externamente* na *mesma razão de secção, tomada em valor absoluto.*

Assim, se M e N dividem *harmônicamente* o segmento AB (fig. 234), devemos ter:

$$\frac{AM}{MB} = -\frac{AN}{NB}.$$

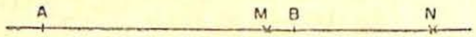


FIG. 234

Os pontos M e N dizem-se *conjugados harmônicos* em relação aos pontos A e B e os pontos A, B, M e N constituem uma *divisão harmônica*.

5. Aplicações.

1.ª) Determinar a posição do ponto M que divide o segmento $AB = 16$cm na razão de secção $\frac{3}{5}$.

Devemos ter: $\frac{AM}{MB} = \frac{3}{5}$, onde M é ponto *interno* a AB (razão positiva).

Pela propriedade da composição das proporções (Cap. 1 – n.º 12 – 1.ª), vem:

$$\frac{AM + MB}{AM} = \frac{3+5}{3}$$

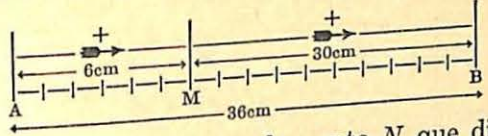
e como: $AM + MB = AB = 16$, segue-se que:

$$\frac{16}{AM} = \frac{8}{3} \text{ e, portanto: } AM = \frac{48}{8} = 6.$$

Da mesma forma, temos:

$$\frac{16}{BM} = \frac{8}{5} \text{ donde: } BM = \frac{80}{8} = 10.$$

Logo, o ponto interno M dista 6cm de A e 10cm de B satisfazendo à condição do problema, isto é: $\frac{AM}{MB} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.



2.ª) Determinar a posição do ponto N que divide o segmento $AB = 15$cm na razão $-\frac{3}{2}$.

Devemos ter: $\frac{AN}{NB} = -\frac{3}{2}$, onde N é ponto *externo* a AB (razão negativa).

Como $NB = -BN$, substituindo-se êsse valor na razão anterior, vem:

$$\frac{AN}{BN} = \frac{3}{2}.$$

Pela propriedade da decomposição das proporções (Cap. I – n.º 12 – 2.ª), temos:

$$\frac{AN - BN}{AN} = \frac{3-2}{3}$$

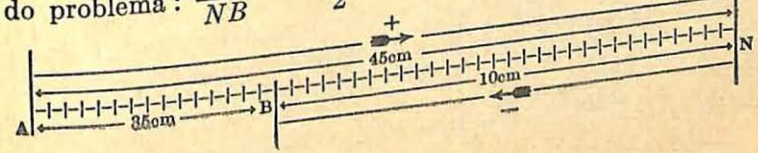
e como: $AN - BN = AB = 15$, segue-se que:

$$\frac{15}{AN} = \frac{1}{3} \text{ e, portanto: } AN = 45.$$

Da mesma forma:

$$\frac{15}{BN} = \frac{1}{2} \text{ e, portanto: } BN = 30.$$

Logo, o ponto externo N dista 45cm de A (à direita, porque AN é positivo) e 30cm de B satisfazendo à condição do problema: $\frac{AN}{NB} = -\frac{3}{2}$.



3.ª) Determinar as posições dos pontos M e N que dividem harmônicamente o segmento $AB = 24$cm na razão, cujo valor absoluto é $\frac{3}{5}$.

Devemos ter : $\frac{AM}{MB} = -\frac{AN}{NB} = \frac{3}{5}$.

Desdobrando as proporções :

$$\frac{AM}{MB} = \frac{3}{5} \quad \text{e} \quad \frac{AN}{NB} = -\frac{3}{5},$$

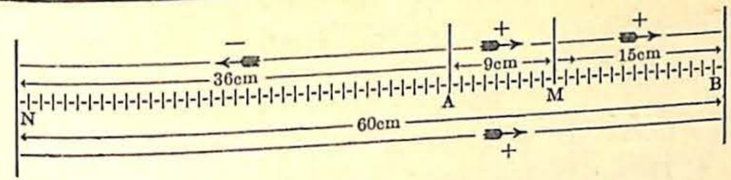
e resolvendo-as da mesma forma que as precedentes, respectivamente, temos :

$$\frac{AM}{MB} = \frac{3}{5} \left\{ \begin{array}{l} \frac{AM + MB}{AM} = \frac{8}{3} \therefore \frac{24}{AM} = \frac{8}{3} \\ \qquad \text{donde : } AM = 9 \text{ cm} \\ \frac{AM + MB}{MB} = \frac{8}{5} \therefore \frac{24}{MB} = \frac{8}{5} \\ \qquad \text{donde : } MB = 15 \text{ cm} \end{array} \right.$$

$$\frac{AN}{NB} = -\frac{3}{5} \text{ ou } \frac{AN}{BN} = \frac{3}{5} \left\{ \begin{array}{l} \frac{AN - BN}{AN} = \frac{-2}{3} \therefore \frac{24}{AN} = \frac{-2}{3} \\ \qquad \text{donde : } AN = -36 \text{ cm} \\ \frac{AN - BN}{BN} = \frac{-2}{5} \therefore \frac{24}{BN} = \frac{-2}{5} \\ \qquad \text{donde : } BN = -60 \text{ cm} \\ \qquad \text{ou : } NB = 60 \text{ cm} \end{array} \right.$$

Logo : o ponto M é *interno*, situado a 9cm de A e 15cm de B; o ponto N é *externo*, situado a 36cm de A (à esquerda, porque AN é negativo) e a 60cm de B e ambos dividem harmônicamente o segmento AB, pois :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{AM}{MB} = \frac{9}{15} \\ \frac{AN}{NB} = -\frac{36}{60} \end{array} \right\} \text{ ou } \frac{AM}{MB} = -\frac{AN}{NB}.$$



EXERCÍCIOS

1. Determinar a posição do ponto P que divide o segmento $AB = 21$cm, na razão de secção $\frac{3}{4}$.
2. Determinar a razão de secção, em que foi dividido o segmento AB, por um ponto P, sabendo-se que $AP = 8$cm e $PB = 12$cm.
3. Dividir, internamente, o segmento $AB = 14$cm na razão $\frac{2}{5}$.
4. Dividir o segmento de 24cm na razão $-\frac{5}{3}$.
5. Determinar a posição do ponto P que divide o segmento $AB = 15$cm na razão de secção igual a $-\frac{7}{2}$.
6. Dividir externamente o segmento de 6cm na razão igual a -3.
7. Determinar as posições dos pontos M e N que dividem harmônicamente o segmento $AB = 21$cm na razão cujo valor absoluto é 4/3.
8. Efetuar a divisão harmônica do segmento $AB = 12$cm, na razão cujo valor absoluto é 2.
9 Um segmento $AB = 60$cm. Os pontos M e N são conjugados harmônicos em relação aos pontos A e B. Calcular, AM, sabendo-se que $\frac{AM}{MB} = 4$.
10. Um segmento $AB = 14$cm é dividido internamente por um ponto M na razão 4/3. Determinar: 1.º) os segmentos em que M divide AB; 2.º) a posição do ponto N, conjugado harmônico de M, em relação a A e B.

Respostas :

1. P interno ao segmento ; $AP = 9$cm e $PB = 12$cm.
2. $\frac{2}{3}$.
3. Os segmentos aditivos são : 4cm e 10cm.
4. Os segmentos subtrativos são : 60cm e 36cm.
5. P externo ao segmento : $AP = 21$cm e $PB = 6$cm.
6. 9cm e 3cm.
7. $AM = 12$cm, $MB = 9$cm, $AN = 84$cm e $NB = 63$cm.

8. Os segmentos da divisão são : 8cm, 4cm, 24cm e 12cm.
9. $AM = 48$cm.
10. $AM = 8$cm, $MB = 6$cm, $AN = 56$cm e $NB = 42$cm.

§ 2. Feixe de paralelas.

6. Definição. Num plano, chama-se *feixe de retas paralelas* a um sistema de três ou mais retas paralelas entre si, situadas nesse plano. Qualquer reta dêsse plano, que não pertença ao feixe, intercepta tôdas as retas do feixe e é denominada *transversal* ou *secante do feixe*. Na figura 235, o *feixe de paralelas* é constituído pelas retas a, b, c, d ($a \parallel b \parallel c \parallel d$) e a transversal do feixe é a reta t.

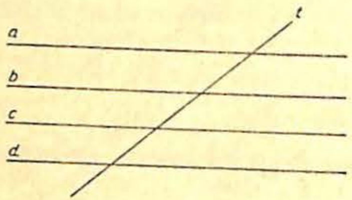


Fig. 235

Os *segmentos determinados sôbre transversais por um feixe de paralelas*, gozam de certas propriedades que serão estudadas com os teoremas que se seguem.

7. Teorema. *Se um feixe de paralelas determina segmentos iguais sôbre uma transversal, determina também segmentos iguais sôbre outra qualquer transversal* (*).

Seja o feixe formado pelas retas paralelas a, b, c e d e as transversais s e t (fig. 236). Temos :

$$\text{H} \begin{cases} a \parallel b \parallel c \parallel d \\ s \text{ e } t \text{ transversais} \\ AB = BC = CD \end{cases}$$

$$\text{T} \; \{ \; MN = NP = PQ.$$

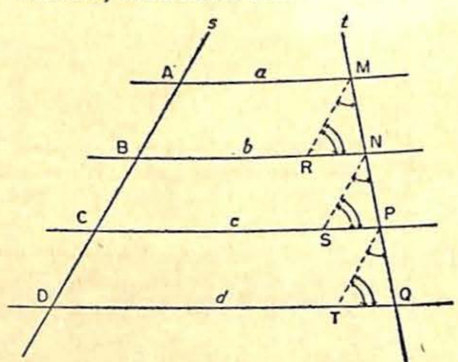


Fig. 236

Demonstração:

1. Pelos pontos M, N e P da reta t tracemos as respectivas paralelas à reta s. Encontraremos sôbre as retas do feixe, respectivamente, os pontos R, S e T.

(*) Ver outra demonstração, a pág. 315 (Observações sôbre a Geometria Dedutiva da 3.ª série).

2. Os quadriláteros formados : $AMRB$, $BNSC$ e $CPTD$ são paralelogramos, pois, em cada um dêles, os lados opostos são paralelos. Portanto :

$$AB = MR, \quad BC = NS \quad \text{e} \quad CD = PT.$$

Sendo iguais os triângulos : MRN, NSP e PTQ pelo caso A.L.A., pois, $\hat{M} = \hat{N} = \hat{P}$ (correspondentes) e $\hat{R} = \hat{S} = \hat{T}$ (correspondentes) e $MR = NS = PT$ (são iguais a AB), segue-se que :

$$MN = NP = PQ \qquad \text{c.q.d.}$$

8. Teorema de Tales (*): *Um feixe de retas paralelas determina sôbre duas transversais duas sucessões de segmentos diretamente proporcionais.*

Sejam a, b, c e d, as retas paralelas, de um feixe, interceptadas pelas transversais s e t (fig. 237). Consideremos o caso para dois segmentos. Temos:

$$\text{H} \begin{cases} a \parallel b \parallel c \parallel d \\ s \text{ e } t \text{ transversais} \end{cases} \qquad \text{T} \left\{ \frac{AB}{CD} = \frac{MN}{PQ} \right. .$$

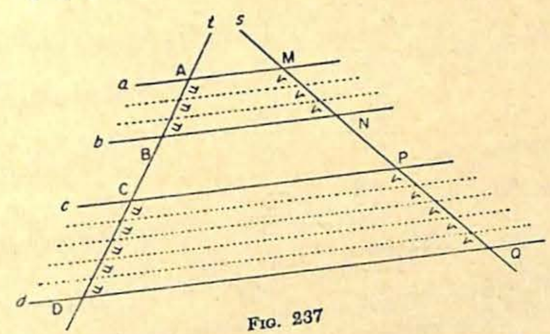


Fig. 237

Demonstração :

1. Suponhamos que os segmentos AB e CD sejam comensuráveis, isto é, admitam uma medida comum u

(*) Tales, filósofo grego, de Mileto (619-548 A.C.). O mais ilustre dos sete sábios, que se tornou célebre por ter previsto um eclipse solar, considerado como um dos criadores da Geometria.

que esteja contida, por exemplo, três vêzes em AB e cinco vêzes em CD. Logo: $AB = 3u$ e $CD = 5u$, sendo a razão entre êstes segmentos:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{3}{5} \quad (\mathrm{I})$$

2. Pelos pontos de divisão dos segmentos AB e CD, tracemos paralelas às respectivas retas do feixe. Estas retas, que pertencem ao feixe, dividirão MN e PQ também em partes iguais pelo que foi estudado no teorema anterior (n.º 7). Chamando de v a nova medida comum de MN e PQ, temos então:

$$MN = 3v \quad \text{e} \quad PQ = 5v$$

e a razão: $$\frac{MN}{PQ} = \frac{3}{5} \quad (\mathrm{II})$$

Comparando as relações (I) e (II), vem:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{MN}{PQ}$$

c.q.d.

Observações:

1.ª) Demonstra-se êste teorema também no caso em que os segmentos AB e CD são *incomensuráveis*.

2.ª) Como aplicação das propriedades das proporções estudadas no Cap. I, é conveniente realçar que, de:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{MN}{PQ}$$

segue-se também, que:

1. $$\frac{AB}{MN} = \frac{CD}{PQ} \quad \text{(alternando os meios).}$$

2. $$\frac{AB + CD}{AB} = \frac{MN + PQ}{MN} \quad \text{(propriedade da composição).}$$

3.ª) Aplicando o Teorema de Tales nos segmentos adjacentes AB, BC e MN, NP (fig. 237), temos:

1. $$\frac{AB}{BC} = \frac{MN}{NP}$$

2. $$\frac{AB + BC}{AB} = \frac{MN + NP}{MN} \quad \text{ou} \quad \frac{AC}{AB} = \frac{MP}{MN},$$

que são relações de uso freqüente nos exercícios.

EXERCÍCIOS

1. No feixe: $a \| b \| c$, as transversais s e t determinam, respectivamente, os pontos: A, B, C e M, N, P. Sabendo-se que: $AB = 4$cm, $BC = 6$cm e $MN = 12$cm, calcular o valor de NP.
2. No exercício anterior são dados: $BC = 5$cm, $AC = 14$cm e $MN = 18$cm. Calcular MP.
3. No feixe: $a \| b \| c \| d$, as transversais s e t determinam, respectivamente, os pontos: A, B, C, D e M, N, P, Q. Sabendo-se que: $CD = 5$cm, $AD = 12$cm e $PQ = 6$cm. Calcular: MP.
4. Duas transversais são interceptadas por um feixe de três paralelas. Os segmentos determinados sôbre as transversais pelas duas primeiras paralelas medem, respectivamente, 3cm e 8cm. Calcular o comprimento que as duas últimas paralelas determinam sôbre a segunda transversal, sabendo-se que elas determinam sôbre a primeira um segmento igual a 12cm.
5. Um feixe de quatro paralelas intercepta uma transversal em três segmentos que medem, respectivamente: 4, 6 e 9 centímetros. Calcular os comprimentos dos segmentos determinados pelo mesmo feixe numa outra transversal sabendo que o segmento dessa transversal, compreendido entre as paralelas extremas, mede 38cm.
6. Num trapézio, uma paralela às bases, divide um dos lados não paralelos na razão 3/4. Medindo o outro lado não paralelo encontra-se 14cm. Calcular os comprimentos determinados sôbre êle pela referida paralela.
7. Prolongando os lados não paralelos (AD e BC) de um trapézio $ABCD$, (AB = base maior) determinar o valor do lado BE, do triângulo ABE assim formado, sabendo-se que: $AE = 12$cm, $AD = 5$cm e $BC = 3$cm.
8. No triângulo ABC, temos: $MN \| AB$, $\dfrac{CM}{MA} = \dfrac{2}{3}$ e $BC = 20$cm. Calcular: CN e NB.

Respostas:

1. 18cm.
2. 28cm.
3. $MP = 8{,}4$cm.
4. 32cm.
5. 8cm, 12cm e 18cm.
6. 6cm e 8cm.
7. $AE = 7{,}2$cm.
8. $CN = 8$cm e $NB = 12$cm.

§ 3. Linhas proporcionais no triângulo.

9. Teorema. *Tôda paralela a um lado de um triângulo determina sôbre os outros dois lados (ou sôbre os respectivos prolongamentos) segmentos diretamente proporcionais.*

Seja o triângulo ABC e a reta DE (fig. 238). Temos:

H { $DE \parallel BC$ T $\left\{ \dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{EC} \right.$ (Ver *Nota* abaixo).

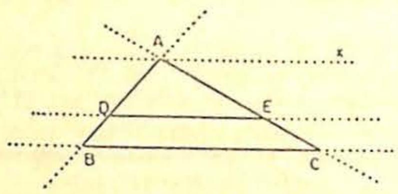


FIG. 238

DEMONSTRAÇÃO:

1. Tracemos pelo vértice A a reta x paralela a BC;
2. Pelo Teorema de Tales (n.º 8), vem:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \qquad \text{c.q.d.}$$

NOTA: A tese dêste teorema também pode ser escrita sob a forma

$$\frac{AD + DB}{AD} = \frac{AE + EC}{AE} \quad \text{ou} \quad \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}.$$

10. Teorema recíproco. *Tôda reta que determina sôbre dois lados de um triângulo segmentos ordenadamente proporcionais é paralela ao terceiro lado.*

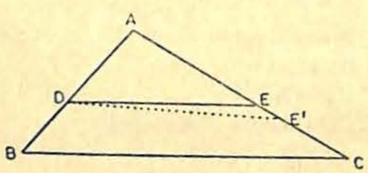


FIG. 239

Seja o triângulo ABC e a reta DE (fig. 239). Temos:

H $\left\{ \dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{EC} \right.$

T { $DE \parallel BC$.

DEMONSTRAÇÃO (por redução ao absurdo):

1. Se não fôsse $DE \parallel BC$, poderíamos então traçar $DE' \parallel BC$, sendo E' um ponto interno a EC ou AE;

2. Supondo E' interno a EC, temos pelo teorema direto (ver *Nota anterior*): $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{AE'}$ (I)

Como a hipótese $\left(\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{EC}\right)$ pode ser escrita sob a forma: $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{AE}$ (II) (propriedade da *composição* nas proporções), concluímos, confrontando (I) e (II) que $AE = AE'$ isto é, um resultado impossível, a menos que E coincida com E'. O mesmo raciocínio seria feito caso E' fôsse interno a AE. Logo:

$DE \parallel BC$ c.q.d.

Propriedades das bissetrizes de um triângulo

11. Teorema da bissetriz interna. *A bissetriz de um ângulo interno de um triângulo divide o lado oposto em segmentos (aditivos) proporcionais (*) aos lados adjacentes.*

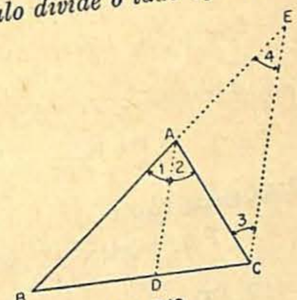


FIG. 240

Seja o triângulo ABC e a bissetriz AD (fig. 240). Temos:

H { AD bissetriz do $\hat{A}$ ($\hat{2} = \hat{1}$)

T $\left\{ \dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC}. \right.$

DEMONSTRAÇÃO:

1. Pelo vértice C, tracemos a paralela à bissetriz AD que irá encontrar o prolongamento do lado AB no ponto E; e, portanto, temos: $AD \parallel CE$
2. No triângulo BCE, temos (Teorema n.º 9):

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AE} \ \text{(I)}.$$

(*) Subentende-se: *diretamente proporcionais*.

Como o $\triangle ACE$ é isósceles, pois, de: $\hat{1}=\hat{4}$ (correspondentes, $\hat{2}=\hat{3}$ (alternos-internos) e $\hat{1}=\hat{2}$ (por hip.), vem: $\hat{3}=\hat{4}$, que são ângulos da base, segue-se que:

$AE=AC$ (lados opostos a ângulos iguais num $\triangle$ isósceles).

Substituindo êste valor de AE na relação (I), temos:

$$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$$

c.q.d.

12. **Teorema da bissetriz externa.** *A bissetriz de um ângulo externo de um triângulo divide o lado oposto, externamente, em segmentos (subtrativos) proporcionais aos lados adjacentes.*

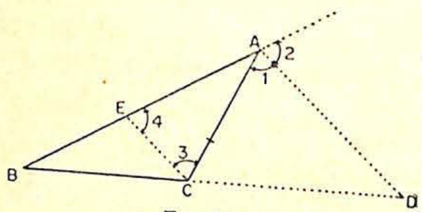


FIG. 241

Seja o triângulo ABC e a bissetriz AD (fig. 241). Temos:

H { AD bissetriz externa do $\hat{A}$ ($\hat{1}=\hat{2}$)

T $\left\{ \frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}. \right.$

DEMONSTRAÇÃO:

1. Pelo vértice C tracemos: $CE \parallel AD$;

2. No $\triangle ABD$, temos: (I) $\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AE}$ (n.º 9 - *Nota*).

Como o $\triangle AEC$ é isósceles, pois $\hat{3}=\hat{4}$ (pelo fato de ser $\hat{3}=\hat{1}$, $\hat{4}=\hat{2}$ e $\hat{1}=\hat{2}$), segue-se que: $AE = AC$. Substituindo êste valor na (I), vem:

$$\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}$$

c.q.d.

13. **Conseqüência.** *As bissetrizes, uma interna e outra externa, de um ângulo e de seu adjacente, de um triângulo, dividem harmônicamente o lado oposto.*

Seja o triângulo ABC e AM e AN as bissetrizes, interna e externa, respectivamente (fig. 242). Temos:

H $\left\{ \begin{array}{l} AN \text{ bissetriz interna} \\ AM \text{ bissetriz externa} \end{array} \right.$

T $\left\{ \frac{BM}{MC}=-\frac{BN}{NC}. \right.$

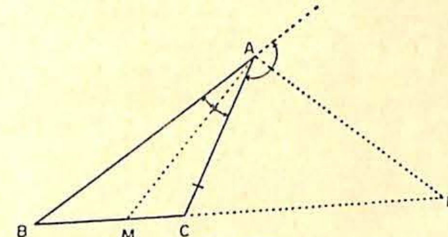


FIG. 242

DEMONSTRAÇÃO:

1. Pelo teorema da bissetriz interna (n.º 11), segue-se que:

$$\frac{BM}{MC}=\frac{AB}{AC} \text{ (I)}.$$

Pelo teorema da bissetriz externa (n.º 12), segue-se que:

$$\frac{BN}{CN}=\frac{AB}{AC} \text{ (II)}.$$

2. Confrontando as relações (I) e (II), vem:

$$\frac{BM}{MC}=\frac{BN}{CN}$$

e como: $CN = -NC$, segue-se que:

$$\frac{BM}{MC}=-\frac{BN}{NC}$$

c.q.d.

14. **Lugar geométrico dos pontos cuja razão das distâncias a dois pontos fixos é constante.** Como aplicação das propriedades das bissetrizes de um triângulo vamos demonstrar o seguinte

Teorema: *O lugar geométrico dos pontos de um plano, cuja razão das distâncias a dois pontos fixos dêsse plano é constante, é uma* ***circunferência.***

Parte *a*) : *Qualquer ponto do lugar pertence a uma circunferência.*

Sejam A e B, so pontos fixos e P um ponto, todos situados no mesmo plano (fig. 243). Temos

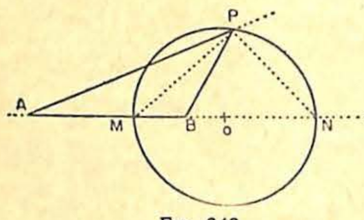


Fig. 243

H $\left\{ \dfrac{PA}{PB} = k \right.$ (valor absoluto)

T $\left\{ \right.$ O lugar descrito por P é uma circunferência.

Demonstração :

1. Sejam M e N os pontos que dividem, interna e externamente, o segmento AB na razão, cujo valor absoluto é k, isto é :
$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NB} = k.$$
2. Como, por hipótese, $\dfrac{PA}{PB} = k$, temos :
$$\frac{AM}{MB} = \frac{PA}{PB} \quad \text{e} \quad \frac{AN}{NB} = \frac{PA}{PB},$$
relações que permitem concluir que P é vértice de um triângulo cujo lado AB é interceptado pela bissetriz interna (PM) do ângulo de vértice P no ponto M e cujo prolongamento é interpretado pela bissetriz externa (PN), do ângulo adjacente, em N (n.° 11 e n.° 12). Sendo PM e PN bissetrizes de ângulos adjacentes (*suplementares*), segue-se (n.° 29 – Ex. aplic. – 4.°) que

são perpendiculares entre si e, portanto, o ângulo $M\hat{P}N$ é reto.
3. Como o segmento capaz de um ângulo reto (n.° 113) é o semi-círculo, podemos afirmar que *o ponto P pertence à circunferência de diâmetro MN.* c.q.d.

Parte *b*) : *Qualquer ponto da circunferência pertence ao lugar.*

Seja a circunferência de diâmetro MN e P um de seus pontos (fig. 244). Temos :

H $\{ P \in$ circunferência de diâmetro MN

T $\left\{ P \in \text{ao lugar} \left(\dfrac{PA}{PB} = k\right). \right.$

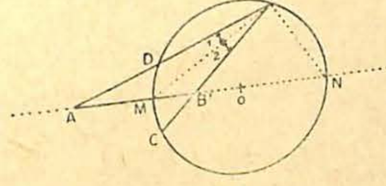


Fig. 244

Demonstração :

1. Consideremos os arcos iguais $\overset{\frown}{MC}$ e $\overset{\frown}{MD}$ ($\hat{1} = \hat{2}$) e unamos P aos pontos D e C. O segmento PC e o prolongamento de PD encontram a reta MN, respectivamente, nos pontos A e B' ;
2. Unindo P a M temos que PM é bissetriz do ângulo $D\hat{P}C$. Ligando P a N o triângulo MNP é retângulo, pois, está inscrito num semi-círculo e, portanto :
$$PM \perp PN.$$

Nestas condições, PN é bissetriz do ângulo externo ao ângulo $D\hat{P}C$. Logo :

$$(1) \quad \frac{AM}{MB'} = -\frac{AN}{NB'} = \frac{PA}{PB'} = k \quad (\text{n.° } 13)$$

ou (II) $\dfrac{AM}{AN} = -\dfrac{MB'}{NB'} = k.$

3. Por outro lado se A e B são pontos de uma reta e M e N seus conjugados harmônicos, temos :

$\dfrac{AM}{MB} = -\dfrac{AN}{NB}$ ou (III) $\dfrac{AM}{AN} = -\dfrac{MB}{NB}$ (alternando os meios).

Confrontando as relações (II) e (III), vem :

$$\frac{MB'}{NB'} = \frac{MB}{NB} = k,$$

igualdade esta que permite concluir que B' coincide com B e, portanto, da (I) segue-se que : $\dfrac{PA}{PB} = k.$ ou seja : P pertence ao lugar.

c.q.d.

EXERCÍCIOS

1. Traça-se a paralela ao lado de um triângulo que determina sôbre um dos outros lados segmentos de 5cm e 8cm, respectivamente. Sabendo-se que o menor dos dois segmentos que tal paralela determina sôbre o outro lado mede 15cm, calcular o comprimento do maior segmento.
2. O lado AB de um triângulo ABC tem 16cm. Por um ponto D, do lado AB, distante 5cm de A, traçamos a paralela ao lado BC que encontra o lado AC em um ponto E a 8cm de A. Calcular o comprimento do lado AC.
3. Uma das diagonais de um trapézio é dividida, por uma paralela às bases, na razão de 3 para 5. Achar os segmentos determinados sôbre os lados não paralelos do trapézio, sabendo-se que êles medem, respectivamente, 18cm e 22cm.
4. Num triângulo, dois lados medem, respectivamente, 16cm e 20cm. Sôbre o primeiro, a 4cm do vértice, toma-se um ponto, traçando-se, a seguir, por êste ponto a paralela ao terceiro lado. Determinar os comprimentos dos segmentos que essa paralela determina sôbre o segundo lado.
5. A paralela a um dos lados de um triângulo divide os outros dois na razão 3/4. Achar os comprimentos dos segmentos determinados por essa paralela sôbre êstes dois lados, sabendo-se que êles medem, respectivamente, 21cm e 42cm.
6. Num trapézio os lados não paralelos prolongados determinam um triângulo de lados 24dm e 36dm, respectivamente. O menor dos lados não paralelos do trapézio mede 10dm. Calcular o comprimento do outro lado do trapézio.

7. Os lados de um triângulo medem, respectivamente, 14cm, 18cm e 24cm. Calcular os segmentos determinados sôbre o maior lado pela bissetriz interna do ângulo oposto a êsse lado.
8. Um triângulo tem por lados : $a=12$dm, $b=6$dm e $c=14$dm. Quanto medem os segmentos determinados sôbre o lado a pela bissetriz interna do $\hat{A}$? E os segmentos determinados pela bissetriz externa do $\hat{A}$ (adjacente) sôbre o prolongamento de BC?
9. Os lados de um triângulo medem: 12cm, 13cm e 15cm, respectivamente. Traçam-se as bissetrizes interna e externa do ângulo oposto ao maior lado. Determinar o valor do segmento cujos extremos são os pontos de intersecção destas bissetrizes com o maior lado e o seu prolongamento.
10. O perímetro do triângulo ABC é igual a 54cm. A bissetriz do ângulo interno B divide o lado oposto b em dois segmentos aditivos que medem 10cm e 14cm, respectivamente. Calcular os lados a e c.

Respostas :

1. 24cm.
2. 25,6cm.
3. 6,75cm e 11,25cm ; 13,75cm e 8,25cm.
4. 5cm e 15cm.
5. 9cm, 12cm, 18cm e 24cm.
6. 15dm.
7. 13,5cm e 10,5cm.
8. 8,4dm e 3,6dm ; 21dm e 9dm.
9. 187,2cm.
10. $a = 17,5$cm, $b = 24$cm, $c = 12,5$cm.

§ 4. Semelhança de triângulos. Semelhança de polígonos.

TRIÂNGULOS SEMELHANTES

15. Definição. Dois triângulos são *semelhantes* quando têm os *ângulos ordenadamente iguais* e os *lados correspondentes ordenadamente proporcionais*. Os lados correspondentes, isto é, aquêles que unem vértices de ângulos iguais, são denominados, também, de *lados homólogos*.

Assim, por exemplo, os triângulos ABC e $A'B'C'$ (fig. 245) são *semelhantes* quando têm:

$$\begin{cases} \hat{A}' = \hat{A} \\ \hat{B}' = \hat{B} \\ \hat{C}' = \hat{C} \end{cases} \quad \text{e} \quad \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} = k.$$

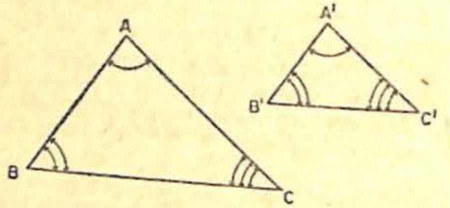


Fig. 245

O valor comum k das razões dos lados correspondentes é denominado *razão de semelhança* dos dois triângulos e sempre caracteriza a passagem do $\triangle ABC$ ao *seu semelhante* $\triangle A'B'C'$. Indicação de que dois triângulos são semelhantes:

$$\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC.$$

A *igualdade* (ou sobreponibilidade) de dois triângulos é um *caso particular* de semelhança, quando a razão $k=1$, pois, teremos nesse caso: $A'B' = AB$, $B'C' = BC$ e $C'A' = CA$. Se a razão de semelhança é maior do que 1 ($k > 1$), diz-se que o $\triangle ABC$ ao passar para o seu semelhante $\triangle A'B'C'$ sofreu uma *ampliação* (nesse caso: $A'B' > AB$, $B'C' > BC$, $C'A' > CA$, na mesma proporção) e no caso de ser menor do que 1 ($k < 1$), o $\triangle A'B'C'$ sofreu uma *redução* (fig. 245).

As propriedades *reflexiva*, *simétrica*, e *transitiva* existentes na igualdade dos ângulos ou das razões, também, subsistem para a semelhança. Dêste modo, podemos dizer:

1. *Todo triângulo é semelhante a si mesmo.* Isto é:

$$\triangle ABC \sim \triangle ABC$$

2. *Se um triângulo é semelhante a outro, êste é semelhante ao primeiro.*

Logo, se $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, temos que: $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$.

3. *Se um triângulo é semelhante a um segundo triângulo e êste semelhante a um terceiro, então o primeiro triângulo é semelhante ao terceiro.*

Logo, se $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ e $\triangle DEF \sim \triangle A'B'C'$, temos que:

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'.$$

16. Teorema fundamental. *Tôda reta paralela a um dos lados de um triângulo, que intercepta os outros dois* (não pelo vértice comum), *determina um segundo triângulo semelhant ao primero.*

Seja o triângulo ABC e a reta determinada pelos pontos M e N (fig. 246). Temos:

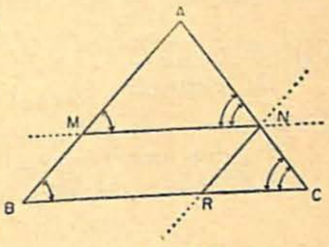


Fig. 246

H { $MN \parallel BC$

T { $\triangle ABC \sim \triangle AMN$ ou

$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{A} \\ \hat{B} = \hat{M} \\ \hat{C} = \hat{N} \end{cases} \quad \text{e} \quad \frac{AB}{AM} = \frac{BC}{MN} = \frac{AC}{AN}.$$

Demonstração:

1. A paralela MN ao lado BC determina o $\triangle AMN$. Os triângulos AMN e ABC têm ordenadamente iguais os ângulos (1.ª condição de semelhança), pois:

$\hat{A}$ é comum
$\hat{B} = \hat{M}$ (correspondentes)
$\hat{C} = \hat{N}$ (")

Como: $MN \parallel BC$, segue (n.º 9 - *Nota*) que:

$$\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} \quad \text{(I)}.$$

2. Tracemos por N a paralela ao lado AB. Obtemos, assim, $NR \parallel AB$ e pela mesma razão:

$$\frac{AC}{AN} = \frac{BC}{BR}$$

ou $$\frac{AC}{AN} = \frac{BC}{MN} \quad \text{(II)}$$ ($BR = MN$, como lados opostos do paralelogramo $BRNM$.)

De (I) e (II) concluímos :

$$\frac{AB}{AM} = \frac{BC}{MN} = \frac{AC}{AN},$$

isto é, os lados correspondentes são ordenadamente proporcionais (2.ª condição de semelhança).

c.q.d.

Casos clássicos de semelhança

17. Primeiro caso de semelhança de triângulos.

Teorema: *Dois triângulos são semelhantes quando têm dois ângulos ordenadamente iguais.*

Sejam os triângulos ABC e $A'B'C'$ (fig. 247). Temos :

$$\text{H} \begin{cases} \hat{A} = \hat{A}' \\ \hat{B} = \hat{B}' \end{cases} \qquad \text{T} \{ \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'.$$

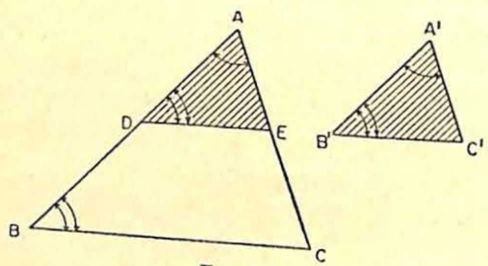


Fig. 247

Demonstração :

1. Tomemos sôbre AB (suposto maior que $A'B'$) um segmento $AD = A'B'$ e pelo ponto D tracemos a paralela ao lado BC. Pelo teorema fundamental (n.º 16) temos :

$$\triangle ABC \sim \triangle ADE.$$

2. Como : $\triangle ADE = \triangle A'B'C'$ (caso A.L.A.), pois :

$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{A}' \text{ (por hip.)} \\ AD = A'B' \text{ (por construção)} \\ \hat{D} = \hat{B}' \text{ (porque ambos são iguais ao } \hat{B}\text{).} \end{cases}$$

segue-se pela propriedade *transitiva*, existente na semelhança, que :

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

c.q.d.

18. Segundo caso de semelhança de triângulos.

Teorema: *Dois triângulos são semelhantes quando têm um ângulo igual compreendido entre lados homólogos proporcionais.*

Consideremos os triângulos ABC e $A'B'C'$ (fig. 247), onde agora temos :

$$\text{H} \begin{cases} \hat{A} = \hat{A}' \\ \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} \end{cases} \qquad \text{T} \{ \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'.$$

Demonstração :

1. Da mesma forma que no 1.º caso de semelhança, construamos o triângulo ADE, tal que :

$$\triangle ABC \sim \triangle ADE.$$

Em virtude desta semelhança, temos :

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \quad \text{(I)}.$$

Como na construção feita foi tomado $AD = A'B'$, substituindo na (I) vem :

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{AE} \text{ e sendo por hipótese } \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'},$$

segue-se, pela propriedade transitiva da igualdade que:

$$\frac{AC}{AE} = \frac{AC}{A'C'}.$$

Sendo estas duas frações iguais e de mesmo numerador, concluímos que os denominadores, também, são iguais, isto é: $AE = A'C'$.

2. Nestas condições: $\triangle ADE = \triangle A'B'C'$ (caso L.A.L.), pois:

$$\begin{cases} AD = A'B' & \text{(por construção)} \\ \hat{A} = \hat{A}' & \text{(por hip.)} \\ AE = A'C' & \text{(provado),} \end{cases}$$

e, portanto, sendo $\triangle ABC \sim \triangle ADE$, temos finalmente que:

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

c.q.d.

19. Terceiro caso de semelhança de triângulos.

Teorema: Dois triângulos são semelhantes quando têm os três lados ordenadamente proporcionais.

Sejam ainda os triângulos ABC e $A'B'C'$ (fig. 247), onde:

$$\text{H}\left\{ \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'} \right.$$

$$\text{T}\ \{\ \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'.$$

Demonstração:

1. Com a mesma construção dos dois casos anteriores, temos:

$$\triangle ABC \sim \triangle ADE,$$

onde, aplicando a definição de triângulos semelhantes, vem:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE} = \frac{CA}{EA}$$

e, como $AD = A'B'$ (por construção), segue-se que:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{DE} = \frac{CA}{EA} \quad (\text{I}).$$

2. Sendo, por hipótese: $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{CA}{C'A'}$ (II), confrontando as razões que integram (I) e (II) temos:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{DE} \\ \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} \end{array}\right\} \text{ ou } DE = B'C'$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{CA}{EA} \\ \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{CA}{C'A'} \end{array}\right\} \text{ ou } EA = C'A'.$$

3. Nestas condições: $\triangle ADE = \triangle A'B'C'$ (caso L.L.L.), pois:

$$\begin{cases} AD = A'B' & \text{(por construção)} \\ DE = B'C' & \text{(provado)} \\ EA = C'A' & \text{(provado).} \end{cases}$$

e, concluímos, sendo $\triangle ABC \sim \triangle ADE$, que:

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

c.q.d.

Observação. Confrontando-se os casos clássicos de *igualdade de triângulos* com os casos clássicos de *semelhança de triângulos*, notamos que para a igualdade de triângulos são necessárias *três condições*, enquanto que para a semelhança bastam *duas*.

20. Aplicações. Construções geométricas.

1.ª) *Divisão de um segmento em partes proporcionais a vários segmentos dados.*

Seja dividir o segmento AB em partes proporcionais aos segmentos x, y e z (fig. 248). Traça-se por A uma semi-reta que forme com AB um ângulo qualquer, diferente de 90°, e, sôbre a qual se mede, a partir de A, os segmentos:

$$x = AR, \quad y = RS \quad \text{e} \quad z = ST.$$

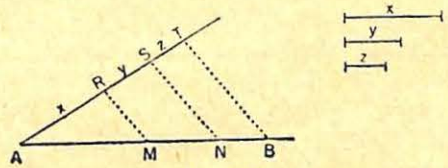


Fig. 248

Unindo-se a extremidade T com a extremidade B do segmento e traçando-se as paralelas a TB pelos pontos R e S obtêm-se sôbre AB os pontos M e N. Os segmentos AM, MN e NB são os procurados. De fato, as paralelas RM, SN e TB determinam sôbre as transversais AB e AT, segmentos proporcionais (Teorema de Tales).

Nota: É evidente que esta construção é empregada para dividir um segmento AB em um número qualquer de partes iguais, pois, é o caso de $x=y=z=\ldots$.

2.ª) *Construir a quarta proporcional a três segmentos dados.*

Sejam x, y e z, os três segmentos dados (fig. 249). Nos lados de um ângulo arbitrário $B\hat{A}C$, toma-se: $x = AR$ e $y=RS$ sôbre o lado AC e $z=AT$, sôbre o lado AB. Unindo-se R a T e traçando-se por S a paralela a RT, determina-se sôbre AB o ponto M. O segmento TM é a 4.ª proporcional procurada.

De fato, no triângulo AMS, $RT \parallel SM$ e, portanto, determina sôbre os outros lados segmentos proporcionais, isto é:

$$\frac{x}{y} = \frac{z}{TM}.$$

Nota: A construção da *terceira proporcional* entre dois segmentos dados x e y é feita da mesma forma, substituindo-se no problema anterior z por y.

3.ª) *Dividir um segmento dado, interna e externamente, numa razão dada.*

Seja dividir o segmento AB na razão dada $\frac{m}{n}$ (fig. 250) Basta traçar pelas extremidades do segmento AB, respectivamente, as retas r e s, paralelas entre si, porém, arbitrárias.

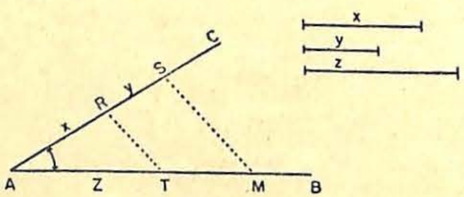


Fig. 249

Sôbre r toma-se, a partir de A, $AR=m$ e sôbre s, a partir de B, nos dois sentidos, $BT = n$ e $BT' = n$. Unindo-se R com T' e R com T, obtêm-se os pontos M sôbre AB e N sôbre o prolongamento de AB. Os pontos M e N dividem AB na razão $\frac{m}{n}$ (valor absoluto), pois:

$$\triangle MAR \sim \triangle MBT' \;\therefore\; \frac{AM}{MB} = \frac{m}{n},$$

$$\triangle NAR \sim \triangle NBT \;\therefore\; \frac{AN}{NB} = \frac{m}{n}.$$

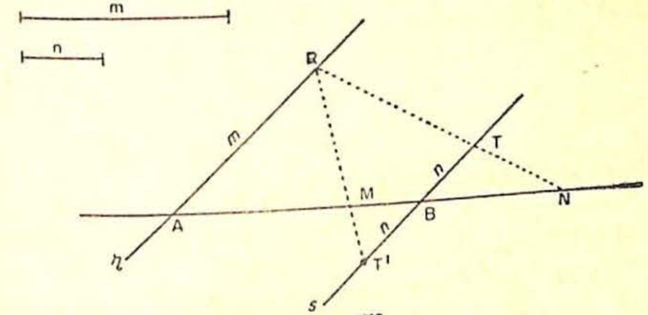


Fig. 250

Nota: Como os pontos M e N são conjugados harmônicos em relação aos pontos A e B, segue-se que a divisão feita por êstes pontos é *harmônica*. A resolução do problema anterior permite, pois, construir os pontos M e N, conjugados harmônicos em relação aos pontos A e B.

POLÍGONOS SEMELHANTES

21. Definição. Dois polígonos, com o mesmo número de lados, são *semelhantes* quando têm os *ângulos ordenadamente iguais* e os *lados correspondentes ordenadamente proporcionais*. Como para os triângulos, os lados correspondentes chamam-se *homólogos* e a razão comum k, de todos os pares de lados correspondentes, *razão de semelhança* entre os dois polígonos. A semelhança entre dois polígonos reduz-se à igualdade, quando a razão de semelhança é 1. Na figura 251, os polígonos $ABCDE$

e $A'B'C'D'E'$ são *semelhantes*, segundo a razão de semelhança 2, isto é, o polígono $ABCDE$ ao passar ao polígono $A'B'C'D'E'$ foi *duplicado*. Logo: $\hat{A}'=\hat{A}$, $\hat{B}'=\hat{B}$, $\hat{C}'=\hat{C}$, $\hat{D}'=\hat{D}$ e $\hat{E}'=\hat{E}$,

e $$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{C'D'}{CD}=\frac{D'E'}{DE}=\frac{E'A'}{EA}=2.$$

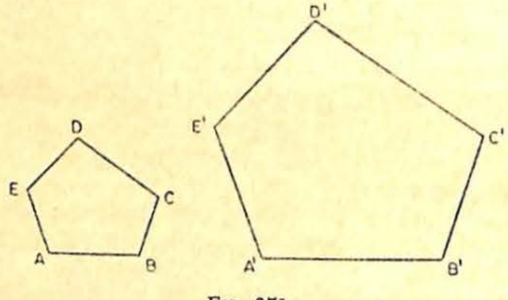


Fig. 251

Também, agora, podemos dizer:

1. *Se um polígono é semelhante a outro, êste é semelhante ao primeiro.*
2. *Dois polígonos semelhantes a um terceiro são semelhantes entre si.*

22. **Teorema.** *Dois polígonos semelhantes podem ser decompostos em triângulos ordenadamente semelhantes.*

Sejam os polígonos $ABCDE$ e $A'B'C'D'E'$ (fig. 252).

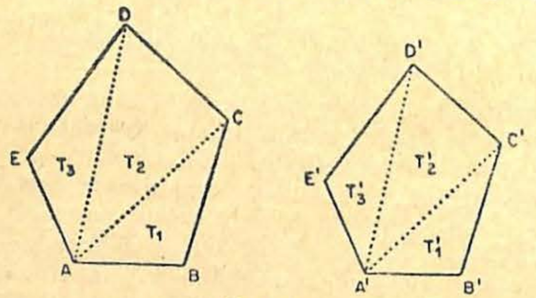


Fig. 252

Temos:

$$\text{H} \; \{ \; \text{Pol. } ABCDE \sim \text{Pol. } A'B'C'D'E'$$

$$\text{T} \begin{cases} \triangle T_1 \sim \triangle T'_1 \\ \triangle T_2 \sim \triangle T'_2 \\ \triangle T_3 \sim \triangle T'_3. \end{cases}$$

Demonstração:

1. Tracemos tôdas as diagonais dos polígonos $ABCDE$ e $A'B'C'D'E'$, respectivamente, a partir dos vértices A e A' e consideremos os triângulos formados: T_1, T_2, T_3 e T'_1, T'_2, T'_3.
2. Como, por hipótese (os polígonos são semelhantes), temos: $\hat{A}=\hat{A}'$, $\hat{B}=\hat{B}'$, $\hat{C}=\hat{C}'$, $\hat{D}=\hat{D}'$, $\hat{E}=\hat{E}'$

e $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{CD}{C'D'}=\dfrac{DE}{D'E'}=\dfrac{EA}{E'A'}$ e, portanto:

$\triangle T_1 \sim \triangle T'_1$, pelo 2.º caso clássico de semelhança $\left(\hat{B}=\hat{B}' \text{ e } \dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}\right)$.

Da semelhança dêstes triângulos, decorre que:

$$\text{(I)} \quad \frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'} \text{ e } A\hat{C}B=A'\hat{C}'B'.$$

Como, por hipótese:

$$\text{(II)} \quad \frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'} \text{ e } \hat{C}=\hat{C}'$$

segue-se de (I) e (II) que:

$$\frac{AC}{A'C'}=\frac{CD}{C'D'} \text{ e } A\hat{C}D=A'\hat{C}'D' \text{ (como diferenças entre ângulos iguais).}$$

e, portanto: $\triangle T_2 \sim \triangle T'_2$.

Anàlogamente, demonstra-se que: $\triangle T_3 \sim \triangle T_3'$.

c.q.d.

Conseqüência : *Em dois polígonos semelhantes duas diagonais correspondentes (homólogas) estão entre si como dois lados correspondentes (homólogos).*

De fato, basta notar a igualdade : $\frac{AC}{A'C'} = \frac{CD}{C'D'}$, (fig. 252), para que a conseqüência fique demonstrada.

23. Teorema recíproco. *Dois polígonos formados por triângulos semelhantes e ordenadamente dispostos, são semelhantes.*

Consideremos a figura 252, onde :

$$H \begin{cases} \Delta T_1 \sim \Delta T'_1 \\ \Delta T_2 \sim \Delta T'_2 \\ \Delta T_3 \sim \Delta T'_3 \end{cases} \qquad T \{ \text{Pol. } ABCDE \sim \text{Pol. } A'B'C'D'E'.$$

Demonstração :

1. Da semelhança dos triângulos T_1 e T'_1, concluímos que:

$$\text{(I)} \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$

e (1) $C\hat{A}B = C'\hat{A}'B'$; $\hat{B} = \hat{B}'$; (4) $B\hat{C}A = B'\hat{C}'A'$.

Da semelhança dos triângulos T_2 e T'_2, resulta que:

$$\text{(II)} \quad \frac{AC}{A'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{AD}{A'D'}$$

e (2) $D\hat{A}C = D'\hat{A}'C$; (5) $A\hat{C}D = A'\hat{C}'D'$;

(6) $C\hat{D}A = C'\hat{D}'A'$

e da semelhança dos triângulos T_3 e T'_3 :

$$\text{(III)} \quad \frac{AD}{A'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'}$$

e (3) $E\hat{A}D = E'\hat{A}'D'$; $\hat{C} = \hat{C}'$;

(7) $A\hat{D}E = A'\hat{D}'E'$.

3. Como as proporções (I), (II) e (III) têm sempre uma razão em comum, segue-se que elas são tôdas iguais entre si e podemos escrever :

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'}$$

e, somando, membro a membro, as relações :

(1), (2) e (3), temos : $\hat{A} = \hat{A}'$

(4) e (5) " $\hat{C} = \hat{C}'$

(6) e (7) " $\hat{D} = \hat{D}'$

e, levando em conta que $\hat{B} = \hat{B}'$ e $\hat{E} = \hat{E}'$, chegamos às duas condições para a semelhança dos polígonos em questão, isto é, *igualdade de ângulos homólogos* e *proporcionalidade de lados homólogos*.

c.q.d.

24. Teorema. *Os perímetros de dois polígonos semelhantes estão entre si como dois lados homólogos quaisquer.*

Consideremos os polígonos $ABCDE$ e $A'B'C'D'E'$ da figura 252, onde os perímetros respectivos serão indicados por:

$$p = AB + BC + CD + DE + EA$$

e $$p' = A'B' + B'C' + C'D' + D'E' + E'A'.$$

Temos :

$$H \{ \text{Pol. } ABCDE \sim \text{Pol. } A'B'C'D'E'$$

$$T \left\{ \frac{p}{p'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \ldots \right.$$

1. Sendo os polígonos semelhantes, temos por definição :

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'}$$

2. Pela propriedade das proporções (Cap. 1 - n.º 12 - 3.ª), vem :

$$\frac{AB + BC + CD + DE + EA}{A'B' + B'C' + C'D' + D'E' + E'A'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \ldots$$

ou $\frac{p}{p'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \dots$

c.q.d.

25. Aplicações: redução e ampliação de desenhos. Escalas. O estudo da semelhança feito no caso dos polígonos, estende-se a *quaisquer figuras planas*. Uma fotografia, uma sua ampliação ou redução, nada mais são que exemplos de figuras semelhantes. Também a representação de um terreno, de uma casa, de uma cidade, etc., pode ser feita mediante desenhos, denominados geralmente de *plantas* e *cartas*, que guardam, com a figura real, uma determinada semelhança (*).

Chama-se *escala de medida* a razão de semelhança entre a *figura reduzida e a dada*. Esta escala é indicada por uma fração de numerador 1. Assim, por exemplo, se numa planta a escala fôr $\frac{1}{1\,000}$ (que se lê : *um por mil*), isto significa que a razão entre a distância de dois pontos da figura reduzida e a distância entre dois pontos correspondentes da figura real é $\frac{1}{1\,000}$. É simples, como veremos nos exemplos a seguir, o cálculo que permite achar as dimensões da figura na planta, numa determinada escala, conhecidas as suas dimensões reais e vice-versa, a determinação da escala, conhecidas as dimensões de segmentos proporcionais da figura real e a da planta. Exemplos :

1. Determinar o comprimento com o qual se deve representar na planta de uma vila, na escala de $\frac{1}{10\,000}$ ou (1:10 000) uma rua de 800m de comprimento.

A escala de $\frac{1}{10\,000}$ significa que as dimensões reais (no exemplo uma rua de 800m) são 10 000 vêzes maiores que as que devem figurar na planta. Logo, as dinensões da planta são obtidas dividindo-se as reais por 10 000.

(*) O instrumento usado na prática para reduzir ou ampliar desenhos é denominado *pantógrafo*.

Portanto, o comprimento da rua na planta será de :

$$\frac{800\text{m}}{10\,000} = 0{,}08\text{m} = 8cm.$$

2. Qual é a *escala* da planta de um terreno na qual um comprimento de 50 metros foi representado por um segmento de 5cm?

Como : 50m = 5 000cm, segue-se que a escala é :

$$\frac{5}{5\,000} = \frac{1}{1\,000} \text{ ou de } 1:1\,000$$

EXERCÍCIOS

1. Os lados de um triângulo medem, respectivamente, 8cm, 10cm e 15cm. Num triângulo semelhante, o lado correspondente ao primeiro mede 16cm. Determinar as medidas dos demais lados do segundo triângulo.
2. A paralela MN ao lado BC, do triângulo ABC, determina sôbre o lado AC segmentos de 5cm e 7cm, respectivamente. Calcular os lados do triângulo AMN semelhante ao triângulo ABC, sabendo-se que AB mede 36cm e BC mede 42cm.
3. Os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes e a razão de semelhança é $\frac{3}{4}$. Sabendo-se que os lados do maior medem, respectivamente, 12cm, 18cm e 20cm, calcular o comprimento de cada lado correspondente do menor.
4. Os lados de um triângulo ABC, medem : $AB = 20$cm, $BC = 18$cm e $CA = 16$cm. O segmento MN da paralela à base AB mede 10cm. Quanto mede cada um dos lados CM e CN do triângulo CMN semelhante ao primeiro?
5. Prolongam-se os lados não paralelos de um trapézio isósceles até se encontrarem. As bases dêste trapézio medem, respectivamente, 42cm e 30cm e a altura 10cm. Calcular as alturas de cada um dos triângulos assim formados.
6. Qual é a razão de semelhança de dois triângulos semelhantes cujos perímetros valem, respectivamente, 16cm e 64cm?
7. Os lados de um triângulo medem 14cm, 17cm e 19cm, respectivamente. Determinar o perímetro do triângulo semelhante em que o lado correspondente ao primeiro mede 42cm.
8. As bases de um trapézio medem 9cm e 12cm, respectivamente, e a altura é igual a 5cm. Achar a altura do triângulo formado pela base menor e os prolongamentos dos lados não paralelos.

9. As alturas de duas árvores estão entre si assim como 2 está para 3. A menor delas mede 6m. Quanto mede a maior?
10. Os lados de um quadrilátero medem 12cm, 6cm, 9cm e 15cm, respectivamente. Determinar o perímetro do quadrilátero semelhante em que o lado correspondente ao primeiro mede 16cm.
11. Dois hexágonos são semelhantes na razão de 2 para 5. Determinar o perímetro do primeiro hexágono sabendo-se que o do segundo é de 36cm.
12. Dois polígonos são semelhantes e uma das diagonais do primeiro é igual a 2/3 de sua correspondente no segundo polígono. Sabendo-que o perímetro do primeiro polígono é igual a 32cm, calcular o perímetro do segundo.
13. Qual é a altura de uma coluna de pé, cuja sombra tem 5m no mesmo instante em que um bastão de 0,45m, colocado verticalmente, projeta uma sombra de 0,15m?
14. Qual é a distância entre duas cidades, se numa planta de 1/1 000 000 essa mesma distância é de 5cm?
15. Numa planta na escala de 1/100, que dimensões devem ser atribuídas a um compartimento de 5m por 6m?
16. A distância entre duas estações ferroviárias, na planta de uma cidade, na escala de 1/8 000, é de 15cm. Determinar a distância real entre as duas estações.
17. Dar as medidas da divisão de um segmento de 36cm em três partes proporcionais aos números 5, 6 e 7, respectivamente.
18. Construir a 4.ª proporcional aos segmentos: 6cm, 9cm e 10cm. Qual é o seu valor?
19. Construir a 3.ª proporcional aos segmentos de 16cm e 4cm. Qual é o seu valor?

Demonstrar que:

20. Dois triângulos isósceles são semelhantes quando têm um ângulo igual.
21. Dois triângulos retângulos são semelhantes quando têm um ângulo agudo igual.
22. Dois triângulos que têm os lados respectivamente paralelos ou perpendiculares, são semelhantes.
23. Em dois triângulos semelhantes, as alturas, as medianas e as bissetrizes são proporcionais aos lados correspondentes.
24. Os segmentos que unem dois a dois os pés das medianas de um triângulo, determinam três triângulos semelhantes ao triângulo dado.
25. Se num trapézio a base maior é dupla da menor, as diagonais se dividem na razão de 2 para 1.
26. **As diagonais de um trapézio dividem-se mutuamente em partes proporcionais.**

27. Um quadrilátero inscrito num círculo é dividido pelas diagonais em quatro triângulos, dos quais os não adjacentes, são semelhantes.
28. Se de um ponto O traçam-se três retas OM, ON e OP e sôbre elas tomam-se os pontos A e A', B e B', C e C', tais que: $\frac{OA}{O'A'}=\frac{OB}{O'B'}=\frac{OC}{O'C'}$, os triângulos ABC e $A'B'C'$ têm os lados homólogos paralelos e são semelhantes.
29. Em dois triângulos semelhantes os raios dos círculos iscrito e circunscrito estão entre si como os lados homólogos.
30. Dois polígonos regulares, com o mesmo número de lados, são semelhantes.

Respostas:

1. 20cm e 30cm.
2. 5cm, 17,5cm e 15cm.
3. 9cm, 13,5cm e 15cm.
4. 8cm e 9cm.
5. 25cm e 35cm.
6. 4 (do 2.º para o 1.º).
7. 150cm.
8. 15cm.
9. 9m.
10. 56cm.
11. 14,4cm.
12. 48cm.
13. 15m.
14. 50km.
15. 5cm por 6cm.
16. 1 200m.
17. 10cm, 12cm e 14cm.
18. 15cm.
19. 8cm.

CAPÍTULO IV

Relações trigonométricas no triângulo retângulo. Tábuas naturais

§ 1. Razões trigonométricas.

1. Trigonometria. *O objetivo da Trigonometria é a resolução de triângulos. Resolver* um triângulo é calcular os seus elementos incógnitos a partir dos elementos conhecidos. Assim, dos *seis* elementos principais de um triângulo: três ângulos e três lados, *conhecidos três* dêstes elementos, entre os quais pelo menos um lado, *pode-se determinar os outros três.*

2. Razões trigonométricas. Consideremos o ângulo C determinado pelas retas s e r (fig. 253). De um ponto qualquer B do lado s tracemos a perpendicular BA ao lado r. Fica assim determinado o triângulo retângulo CAB ($\hat{A}$ reto), que permite a definição das seguintes *razões trigonométricas* do ângulo C: *seno, co-seno, tangente* e *co-tangente.*

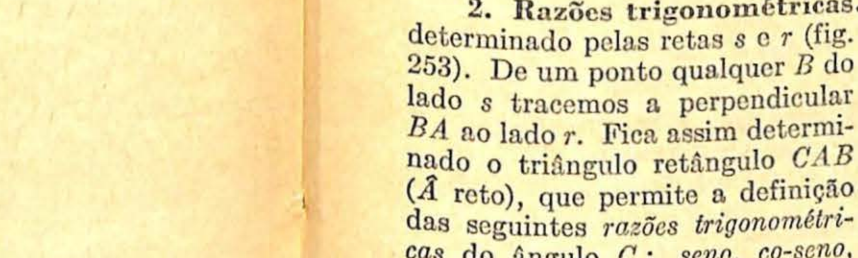


Fig. 253

Seno. *Chama-se seno do ângulo* C *a razão entre o cateto oposto* BA *e a hipotenusa* CB. Indicação:

$$\operatorname{sen} C = \frac{BA}{CB}.$$

Co-seno. *Chama-se co-seno do ângulo* C *a razão entre o cateto adjacente* CA *e a hipotenusa* CB. Indicação:

$$\operatorname{sen} C = \frac{CA}{CB}.$$

Tangente. *Chama-se tangente trigonométrica* (*) *ou simplesmente tangente do ângulo* C *a razão entre o cateto oposto* BA *e o cateto adjacente* CA. Indicação :

$$\operatorname{tg} C = \frac{BA}{CA}.$$

Co-tangente. *Chama-se co-tangente do ângulo* C *a razão entre o cateto adjacente* CA *e o cateto oposto* BA. Indicação :

$$\operatorname{cotg} C = \frac{CA}{BA}.$$

Nota : As definições de $\operatorname{tg} C$ e $\operatorname{cotg} C$ possibilitam dizer que a $\operatorname{cotg} C$ é o *inverso* da $\operatorname{tg} C$.

O *seno*, o *co-seno*, a *tangente* e a *co-tangente* de um ângulo são denominadas *razões trigonométricas* ou *linhas trigonométricas* dêsse ângulo. Sendo a razão entre dois segmentos (no caso presente catetos e hipotenusa do $\triangle CAB$) a razão de suas medidas, relativas à mesma unidade, e, portanto, um *número*, segue-se que as razões trigonométricas de um ângulo *são números*, escritos geralmente sob a *forma decimal*. Exemplo :

Calcular as razões trigonométricas, com aproximação até centésimos, do ângulo C, no triângulo retângulo CAB, cujos lados medem : $CA = 4$cm, $BA = 3$cm e $CB = 5$cm (fig. 254).

Temos :

$$\operatorname{sen} C = \frac{BA}{CB} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

$$\cos C = \frac{CA}{CB} = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

$$\operatorname{tg} C = \frac{BA}{CA} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

$$\operatorname{cotg} C = \frac{CA}{BA} = \frac{4}{3} = 1{,}33.$$

(*) A designação tangente *trigonométrica* é para se diferençar da tangente *geométrica*, que é uma reta (Cap. II, n.º 100, 2.º).

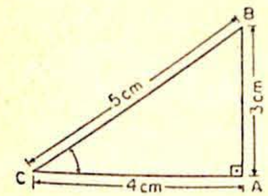


Fig. 254

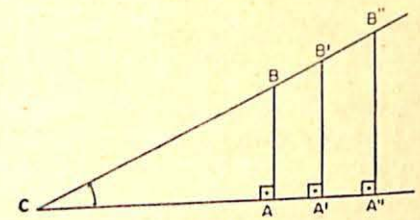


Fig. 255

3. Propriedade fundamental. Seja o ângulo C (fig. 255). Tracemos as perpendiculares BA, $B'A'$, $B''A''$, ... que determinarão, respectivamente, os triângulos retângulos semelhantes (1.º caso de semelhança, Cap. III - n.º 15) : CAB, $CA'B'$, $CA''B''$, ...

Logo : $$\frac{BA}{CB} = \frac{B'A'}{CB'} = \frac{B''A''}{CB''} = \ldots$$

Ora, como, por definição, $\operatorname{sen} C = \frac{BA}{CB}$, segue-se que :

$$\operatorname{sen} C = \frac{BA}{CB} = \frac{B'A'}{CB'} = \frac{B''A''}{CB''} = \ldots$$

Portanto: *o valor do seno do ângulo* C *permanece constante qualquer que seja o triângulo retângulo, de mesmo ângulo agudo* C, *usado para defini-lo.*

O mesmo podemos concluir, quanto às outras razões trigonométricas, dada a semelhança dos triângulos retângulos construídos (fig. 255).

4. Razões trigonométricas de ângulos complementares. *Quando dois ângulos são complementares o seno de um é igual ao co-seno do outro e a tangente de um é igual à co-tangente do outro.*

Seja o triângulo retângulo CAB (fig. 255), onde os ângulos C e B são *complementares* (Cap. II - n.º 27), isto é, têm por soma um ângulo reto (90º ou 100gr).

Por definição, temos :

$$\operatorname{sen} C = \frac{BA}{CB}, \quad \cos C = \frac{CA}{CB}, \quad \operatorname{tg} C = \frac{BA}{CA}, \quad \operatorname{cotg} C = \frac{CA}{BA}$$

$$\operatorname{sen} B = \frac{CA}{CB}, \quad \cos B = \frac{BA}{CB}, \quad \operatorname{tg} B = \frac{CA}{BA}, \quad \operatorname{cotg} B = \frac{BA}{CA}$$

Êstes resultados mostram que:

$\operatorname{sen} C = \cos B$, $\cos C = \operatorname{sen} B$, $\operatorname{tg} C = \operatorname{cotg} B$ e $\operatorname{cotg} C = \operatorname{tg} B$

isto é:

1. *o seno de um ângulo é igual ao co-seno de seu complemento;*
2. *o co-seno de um ângulo é igual ao seno de seu complemento;*
3. *a tangente de um ângulo é igual à co-tangente de seu complemento;*
4. *a co-tangente de um ângulo é igual à tangente de seu complemento.*

Conseqüência: *Conhecendo-se as razões trigonométricas dos ângulos de 0° a 45°* (ou de 0gr a 50gr), *obtém-se as razões dos ângulos de 45° a 90°* (ou de 50gr a 100gr). Exemplos:

$$\operatorname{sen} 60^\circ = \cos(90^\circ - 60^\circ) = \cos 30^\circ$$
$$\cos 75^\circ = \operatorname{sen}(90^\circ - 75^\circ) = \operatorname{sen} 15^\circ$$
$$\operatorname{tg} 50^\circ = \operatorname{cotg}(90^\circ - 50^\circ) = \operatorname{cotg} 40^\circ$$
$$\operatorname{cotg} 85^\circ = \operatorname{tg}(90^\circ - 85^\circ) = \operatorname{tg} 5^\circ.$$

5. Variações do seno e do co-seno de um ângulo. Consideremos o ângulo $\alpha = \hat{C}$ (fig. 256). Tracemos com raio $CB = 1$ (unidade) o quarto de circunferência $\overset{\frown}{MN}$. Temos:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{BA}{CB} = \frac{BA}{1} = BA \qquad \cos \alpha = \frac{CA}{CB} = \frac{CA}{1} = CA.$$

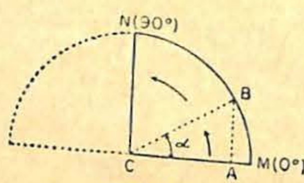


Fig. 256

Para se fazer o estudo da variação do seno (BA) e do co-seno (CA) do ângulo α, basta considerar o deslocamento do ponto B desde M até N, percorrendo o arco $\overset{\frown}{MN}$. O ângulo α assumirá, desta forma, todos os valores de 0° a 90° e poderemos concluir que:

1.°) Quando B estiver em M, isto é, quando $\alpha = 0^\circ$, temos BA nulo e CA confundindo-se com $CB = 1$. Logo: $\operatorname{sen} 0^\circ = 0$ e $\cos 0^\circ = 1$.

2.°) Quando B estiver percorrendo o arco MN o seno (BA) cresce e o co-seno (CA) decresce e, portanto, a coincidência de B com N, acarretará a coincidência de BA com $NC = 1$ e o anulamento de CA. Logo:

$$\operatorname{sen} 90^\circ = 1 \quad \text{e} \quad \cos 90^\circ = 0.$$

Resumindo êstes resultados, temos o seguinte quadro:

ângulo α	0° 90°
sen α	$0 \xrightarrow{\text{cresce}} 1$
cos α	$1 \xrightarrow[\text{decresce}]{} 0$

6. Razões trigonométricas dos ângulos de 30°, 45° e 60°. O cálculo das razões trigonométricas de um *ângulo qualquer* não é simples. Todavia para os ângulos de 30°, 45° e 60°, bem como os já vistos 0° e 90°, que são os mais usados na prática, elas são determinadas mediante relações geométricas.

1.°) ***Ângulo de* 30°.** Seja o triângulo retângulo CAB cujo ângulo C vale 30° (fig. 257). Temos:

a) *sen 30°:* Prolonguemos BA de um segmento $AB' = BA$ e liguemos C a B'. O ângulo B, complemento do $\hat{C}$, vale 60° e é igual a $\hat{B}'$ (propriedade do triângulo isósceles aplicada ao $\triangle CB'B$). Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° (Cap. II – n.° 67), segue-se que o ângulo BCB' também vale 60° e

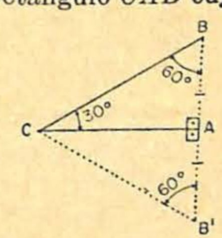


Fig. 257

o triângulo CBB' sendo eqüiângulo é eqüilátero. Disso resulta que BA é a *metade* de $BB' = CB$, isto é: $BA = \frac{CB}{2}$. Portanto:

$$\text{sen } 30^\circ = \frac{BA}{CB} = \frac{\frac{CB}{2}}{CB} = \frac{1}{2}.$$

b) *cos 30°:* Sendo a razão $\frac{CA}{CB}$, que define o cos 30°, igual ao número irracional $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (*), temos:

$$\cos 30^\circ = \frac{CA}{CB} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

c) *tg 30°:* Como a razão $\frac{CA}{CB}$, que define a tg 30°, pode ser obtida dividindo-se a razão $\frac{BA}{CB}$ (que representa o sen 30°) pela razão $\frac{CA}{CB}$ (que representa cos 30°) pois, $\frac{BA}{CB} : \frac{CA}{CB} = \frac{BA}{CB} \times \frac{CB}{CA} = \frac{BA}{CB}$, segue-se que:

$$\text{tg } 30^\circ = \frac{\text{sen } 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

d) *cotg 30°:* Basta inverter o resultado obtido na tg 30°, isto é:

$$\text{cotg } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}.$$

Nota: *Conhecendo-se o seno e o co-seno de um ângulo, pode-se determinar a tangente dêsse ângulo, dividindo-se o seno pelo co-seno, e, a co-tangente dividindo-se o co-seno pelo seno.*

(*) A justificação geométrica (que exige o Teorema de Pitágoras) será feita na 4.ª série ginasial.

2.°) ***Ângulo de*** **60°**. Sendo *complementares* os ângulos de 30° e de 60°, segue-se (n.° 4) que:

a) $\text{sen } 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos 60^\circ = \text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2}$

c) $\text{tg } 60^\circ = \text{cotg } 30^\circ = \sqrt{3}$

d) $\text{cotg } 60^\circ = \text{tg } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

3.°) ***Ângulo de*** **45°**. Seja o triângulo retângulo isósceles CAB (fig. 258), isto é: $BA = CA$ e os ângulos agudos com o valor de 45° cada. Como a razão $\frac{BA}{CB}$, que define o sen 45°, é o número irracional $\frac{\sqrt{2}}{2}$, segue-se que:

a) $\text{sen } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\cos 45^\circ = \text{sen } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (complementares)

c) $\text{tg } 45^\circ = \frac{\text{sen } 45^\circ}{\cos 45^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$

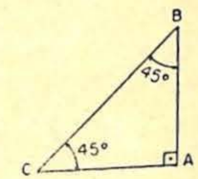


Fig. 258

d) $\text{cotg } 45^\circ = \frac{\cos 45^\circ}{\text{sen } 45^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1.$

Resumo:

	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
cotg	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

§ 2. Tábuas naturais. Cálculo dos lados de um triângulo retângulo.

TÁBUA TRIGONOMÉTRICA

7. Conceito. A fim de facilitar o emprêgo das razões trigonométricas dos ângulos, nos cálculos em geral, construiram-se tabelas onde figuram os valores das razões trigonométricas dos ângulos de 0° a 90° com a aproximação desejada. Êsses valores são denominados *valores naturais* (*) das razões trigonométricas e as tabelas, *tábuas naturais trigonométricas*.

8. Uso das tábuas. A tábua natural que vamos estudar (pág. 291), contém os valores das razões trigonométricas (seno, co-seno, tangente, co-tangente) dos ângulos de 0° a 90°, de grau em grau. Para os ângulos de 0° a 45°, o *nome* da razão trigonométrica procurada está escrito *em cima* de uma das

(*) O nome *natural* é para distinguir do valor logarítmico que a razão trigonométrica possa ter. O valor logarítmico será estudado no curso colegial.

colunas que compõem a tábua e o valor correspondente na coluna respectiva, *à direita do ângulo*. Para os ângulos de 45° a 90°, o *nome* da razão trigonométrica procurada está escrito *em baixo* das colunas e o valor correspondente na coluna respectiva, *à esquerda*.

Esta disposição, que auxilia a construção das tábuas, é uma aplicação da propriedade das razões trigonométricas dos ângulos complementares (n.° 4).

No uso das tábuas destacamos dois problemas: *procurar a razão trigonométrica de um ângulo dado* e *determinar o ângulo, conhecido o valor de uma de suas razões trigonométricas*.

1.°) *Procurar a razão trigonométrica de um ângulo dado.*

Suponhamos o ângulo dado em graus. Basta atender à disposição da tábua descrita acima. Assim, temos:

sen 20° = 0,342 0 sen 60° = 0,866 0 (valor de $\frac{\sqrt{3}}{2}$ com
cos 33° = 0,838 7 cos 90° = 0
tg 45° = 1 tg 75° = 3,732 1 aproximação de
cotg 17° = 3,270 9 cotg 66° = 0,445 2 0,000 1)

2.°) *Determinar o ângulo, conhecido o valor de uma de suas razões trigonométricas.*

Consideremos sòmente o caso em que o valor da razão trigonométrica dada *figure na tábua* que estamos usando. Basta, agora, procurar o ângulo que corresponda ao valor dado, na coluna relativa à razão trigonométrica proposta, observando, por exemplo, que se o valor dado constar da 1.ª coluna, o seu ângulo correspondente será *no máximo igual a 45°* (figurando na coluna dos ângulos à esquerda) se a razão proposta fôr *seno* e *no mínimo igual a 45°* (figurando na coluna dos ângulos à direita) se a razão proposta fôr *co-seno*. O mesmo critério se aplica em relação às *tangentes* e *co-tangentes*. Assim, por exemplo:

se sen A = 0,225 0, temos que: $\hat{A}$ = 13°
" cos B = 0,874 6, " " $\hat{B}$ = 29°
" tg C = 0,809 8, " " $\hat{C}$ = 39°
" cotg D = 5,671 3, " " $\hat{D}$ = 10°

e

se sen $A = 0,766\,0$, temos que: $\hat{A} = 50^\circ$
„ cos $B = 0,500\,0$, „ „ $\hat{B} = 60^\circ$
„ tg $C = 19,081\,0$, „ „ $\hat{C} = 87^\circ$
„ cotg $D = 1,000\,0$, „ „ $\hat{D} = 45^\circ$.

CÁLCULO DOS LADOS DE UM TRIÂNGULO RETÂNGULO. PROJEÇÃO DE UM SEGMENTO

9. Cálculo dos catetos, conhecendo-se a hipotenusa e um ângulo agudo. *Num triângulo retângulo, cada cateto* (*) *é igual ao produto da hipotenusa pelo seno do ângulo oposto ou pelo co-seno do ângulo adjacente.*

Seja o triângulo retângulo CAB (fig. 259). Por definição temos:

$$\text{sen}\, C = \frac{BA}{CB}$$

ou

$$\text{sen}\, C = \frac{c}{a} \therefore \boxed{c = a\,.\,\text{sen}\, C} \quad (\text{I})$$

Como $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são complementares, vem:

$$\text{sen}\, C = \cos B$$

e substituindo na (I), segue-se que:

$$\boxed{c = a\,.\,\cos B}$$

Anàlogamente, deduz-se que:

$$\boxed{b = a\,.\,\text{sen}\, B} \quad \text{e} \quad \boxed{b = a\,.\,\cos C}$$

Aplicação: No triângulo retângulo CAB ($\hat{A}$ reto) temos: $a = 15\text{m}$, $\hat{C} = 38^\circ$. Calcular os catetos c e b.

(*) Para o cálculo, a expressão *cateto* (ou *segmento*) já implica que estamos nos referindo a sua *medida*.

Basta aplicar as fórmulas acima e usar a tábua da pág. 291. Assim:

$c = a\,.\,\text{sen}\, C$ | $b = a\,.\,\cos C$

ou $c = 15\text{m} \times \text{sen}\, 38^\circ$ | ou $b = 15\text{m} \times \cos 38^\circ$

$c = 15\text{m} \times 0,615\,7 = \mathit{9,235\,5m}$ | $b = 15\text{m} \times 0,788\,0 = \mathit{11,82m}$.

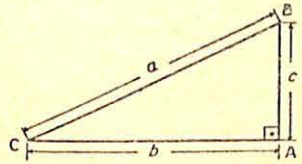


Fig. 259

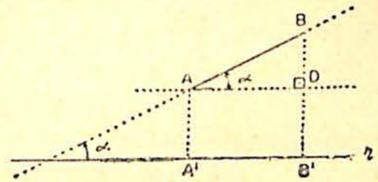


Fig. 260

10. Conseqüência. Cálculo do valor da projeção de um segmento de reta sôbre uma reta. *O valor da projeção de um segmento sôbre uma reta é igual ao produto do valor do segmento* (*) *pelo co-seno do ângulo agudo* (**) *que a reta suporte do segundo forma com a segunda.*

Consideremos o segmento AB e a sua projeção $A'B'$ sôbre a reta r que forma com a reta suporte do segmento um ângulo α (fig. 260). No triângulo retângulo ADB ($\hat{D}$ reto), formado quando se traça $AD \parallel A'B'$, o cateto AD vale, pelas fórmulas deduzidas:

$$AD = AB\,.\,\cos\alpha.$$

Como: $A'B' = AD$ (segmentos de ||s compreendidos entre ||s),

segue-se que:

$$\boxed{A'B' = AB\,.\,\cos\alpha}$$

Aplicação: Calcular o valor da projeção do segmento $AB = 12\text{cm}$ sôbre uma reta que forma com a reta suporte do segmento um ângulo de 60°.

Aplicando a fórmula: $A'B' = AB\,.\,\cos\alpha$
temos: $A'B' = 12\text{cm}\,.\,\cos 60^\circ$
ou $A'B' = 12\text{cm} \times 0,5 = \mathit{6cm}$.

(*) Vide nota página anterior.

(**) No caso da reta suporte do segmento formar com a reta, sôbre a qual se projeta, um ângulo de 90° (retas ⊥) ou de 0° (retas ||), ainda é verdadeiro o teorema.

11. Cálculo de um cateto, conhecendo-se o outro cateto e um ângulo agudo. *Num triângulo retângulo cada cateto é igual ao produto do outro cateto pela tangente do ângulo oposto ou pela co-tangente do ângulo adjacente.*

Seja o triângulo retângulo CAB (fig. 259). Por definição, temos:

$$\text{tg}\, C = \frac{BA}{CA} \text{ ou } \text{tg}\, C = \frac{c}{b} \therefore \boxed{c = b \cdot \text{tg}\, C} \quad (\text{I}).$$

Como $\hat{C}$ e $\hat{B}$ são complementares, vem: $\text{tg}\, C = \text{cotg}\, B$ e substituindo na (I), segue-se que:

$$\boxed{c = b \cdot \text{cotg}\, B}$$

Da mesma forma, deduz-se que:

$$\boxed{b = c \cdot \text{tg}\, B} \quad \text{e} \quad \boxed{b = c \cdot \text{cotg}\, C}$$

Aplicação: No triângulo retângulo CAB ($\hat{A}$ reto), temos: $b = 20\text{m}$ e $\hat{C} = 62°$. Calcular o cateto c.

Aplicando a fórmula que dá o valor de um cateto, conhecendo-se o outro e um ângulo agudo, temos:

$$c = b \cdot \text{tg}\, C$$

ou

$$c = 20\text{m} \times \text{tg}\, 62°$$

$$c = 20\text{m} \times 1{,}880\,7 = 37{,}614\text{m}.$$

EXERCÍCIOS

1. Determinar as razões trigonométricas do ângulo C no triângulo retângulo CAB, cujos lados medem, respectivamente, 10cm, 8cm e 6cm, sabendo-se que C é oposto ao lado de 6cm.
2. Determinar, no triângulo anterior, as razões trigonométricas do ângulo B oposto ao cateto de 8cm.
3. Usar a propriedade das razões trigonométricas de dois ângulos complementares, no cálculo de: cos 60°, sen 90° e tg 60°.
4. Verificar que no triângulo retângulo CAB, onde $CA = 12\text{cm}$ $AB = 9\text{cm}$ e $BC = 15\text{cm}$ valem as relações: $\text{tg}\, C = \text{cotg}\, B$ e $\cos B = \text{sen}\, C$.
5. No triângulo anterior verificar as relações:

$$\text{tg}\, B = \frac{\text{sen}\, B}{\cos B} \text{ e } \text{cotg}\, C = \frac{\cos C}{\text{sen}\, C}.$$

6. Procurar na tábua natural trigonométrica (pag. 291), os valores das seguintes razões trigonométricas:

   1.°) sen 15° 3.°) sen 60° 5.°) sen 82° 7.°) cos 36° 8.°) cos 60°
   2.°) sen 45° 4.°) sen 75° 6.°) cos 0° 8.°) cos 50° 10.°) cos 90°.

7. Procurar na tábua natural trigonométrica (pág. 291), os valores das seguintes razões trigonométricas:

   1.°) tg 8° 3.°) tg 45° 5.°) tg 88° 7.°) cotg 15° 9.°) cotg 60°
   2.°) tg 30° 4.°) tg 70° 6.°) cotg 2° 8.°) cotg 44° 10.°) cotg 85°.

8. Determinar, usando a tábua natural, os valores dos ângulos cujas razões trigonométricas se seguem:

$$\begin{array}{llll} \text{sen}\, A = 0{,}342\,0 & & \text{sen}\, \alpha = 0{,}777\,1 \\ \cos B = 0{,}933\,6 & & \cos \beta = 0{,}342\,0 \\ \text{tg}\, C = 0{,}577\,4 & & \text{tg}\, \gamma = 2{,}246\,0 \\ \text{cotg}\, D = 3{,}077\,7 & & \text{cotg}\, \delta = 1. \end{array}$$

9. Qual é o ângulo cujo co-seno vale 0,5? E o ângulo cuja tangente vale 1?
10. Qual é o ângulo cujo seno vale 0,694 7? E o ângulo cuja co-tangente vale 0,364 0?
11. Calcular o valor dos catetos c e b no triângulo retângulo CAB, sabendo-se que $a = 12\text{m}$ e $C = 36°$.
12. A hipotenusa de um triângulo retângulo vale 18m. Calcular o valor do cateto que se opõe ao ângulo de 52°, dêsse triângulo.
13. Calcular o valor dos catetos de um triângulo retângulo isósceles cuja hipotenusa mede 16cm.
14. Calcular o valor do cateto c no triângulo retângulo CAB, sabendo-se que $b = 13\text{cm}$ e $C = 30°$.
15. O cateto de um triângulo retângulo vale 5,4m. Calcular o valor do outro cateto dêsse triângulo, sabendo-se que o ângulo agudo que lhe é adjacente vale 38°.
16. Qual é o valor do cateto c no triângulo retângulo CAB, onde a hipotenusa $a = 2\text{dm}$ e o ângulo $B = 35°$?
17. Calcular a hipotenusa a e o cateto c de um triângulo retângulo, sabendo-se que $b = 1{,}4\text{dm}$ e $C = 48°$.
18. Determinar o valor da projeção de um segmento de 32cm sôbre uma reta que forma com a reta suporte do segmento um ângulo de 60°.
19. Quanto mede um segmento cuja projeção sôbre uma reta, que forma com a sua reta suporte um ângulo de 30°, vale 15cm?
20. Calcular o valor da projeção da hipotenusa $CB = 10\text{cm}$, do triângulo retângulo CBA, sôbre a reta suporte do cateto CA, sabendo-se que $C = 45°$.

21. Qual é a altura de uma tôrre, sabendo-se que *de um ponto de observação* a 10m de sua base vê-se o seu ponto mais alto sob um ângulo de 60°?

22. Calcular o ponto em que se encontra afastado de um muro, de 4m de altura, um observador (*) que vê o alto dêste muro sob um ângulo de 30°.

23. Um navio se encontra a 100 metros de um farol. Calcular a altura dêste farol que é visto do navio sob um ângulo de 8°.

24. Qual é o ângulo sob o qual é visto um eucalipto de 18m de altura por um observador que se encontra afastado 18m da árvore?

25. Qual é o ângulo sob o qual é vista uma estátua de 16m de altura, sabendo-se que a distância do observador ao ponto mais alto da estátua é de 32m?

Respostas:

1. $\text{sen}\, C = 0{,}6$; $\cos C = 0{,}8$; $\text{tg}\, C = 0{,}75$; $\text{cotg}\, C = 1{,}33$.
2. $\text{sen}\, B = 0{,}8$; $\cos B = 0{,}6$; $\text{tg}\, B = 1{,}33$; $\text{cotg}\, B = 0{,}75$.
3. $\cos 60° = \text{sen}\, 30° = 0{,}5$; $\text{sen}\, 90° = \cos 0° = 1$; $\text{tg}\, 60° = \text{cotg}\, 30° = \sqrt{3}$.
4. $\text{tg}\, C = \dfrac{3}{4} = \text{cotg}\, B$; $\cos B = \dfrac{3}{5} = \text{sen}\, C$.
5. $\text{tg}\, B = \dfrac{4}{3} = \dfrac{\text{sen}\, B}{\cos B}$; $\text{cotg}\, C = \dfrac{4}{3} = \dfrac{\cos C}{\text{sen}\, C}$.
6. 1.°) 0,258 8 2.°) 0,707 1 3.°) 0,866 0 4.°) 0,965 9 5.°) 0,990 3 6.°) 1 7.°) 0,809 0 8.°) 0,642 8 9.°) 0,5 10.°) 0.
7. 1.°) 0,140 6 2.°) 0,577 4 3.°) 1 4.°) 2,747 5 5.°) 28,636 6.°) 28,636 7.°) 3,732 1 8.°) 1,035 5 9.°) 0,577 4 10.°) 0,087 5.
8. $\hat{A} = 20°$; $\hat{B} = 21°$; $C = 30°$; $\hat{D} = 18°$; $\hat{\alpha} = 51°$; $\hat{\beta} = 70°$; $\hat{\gamma} = 66°$; $\hat{\delta} = 45°$.
9. 60°; 45°.
10. 44°, 70°.
11. $c = 7{,}053\,6$m, $b = 9{,}708\,0$m.
12. 14,184 0m.
13. 11,313 6m cada um.
14. 7,506 2m.
15. 6,911 46m.
16. 1,638 4dm.
17. $c = 1{,}554\,84$dm; $a = 2{,}09$dm

$$\left(b = a \cos 48° \;\therefore\; a = \frac{b}{\cos 48°}\right).$$

18. 16cm.
19. 17,32cm
20. 7,071cm.
21. 17,321m.
22. 6,928 4m.
23. 14,06m.
24. 45°.
25. 30°.

(*) Subentende-se, para os nossos problemas, *ponto de observação*.

Tábua das razões trigonométricas naturais

(Ângulos expressos em graus)

DE 0° A 45°, TÍTULOS DE CIMA

ÂNGULOS	SENOS	TANGENTES	CO-TANG.	CO-SENOS	
0°	0,0000	0,0000	∞ (*)	1,0000	90°
1	0,0175	0,0175	57,290	0,9998	89
2	0,0349	0,0349	28,636	0,9994	88
3	0,0523	0,0524	19,081	0,9986	87
4	0,0698	0,0699	14,301	0,9976	86
5	0,0872	0,0875	11,430	0,9962	85
6	0,1045	0,1051	9,5144	0,9945	84
7	0,1219	0,1228	8,1444	0,9925	83
8	0,1392	0,1406	7,1154	0,9903	82
9	0,1564	0,1584	6,3138	0,9877	81
10°	0,1736	0,1763	5,6713	0,9848	80°
11	0,1908	0,1944	5,1446	0,9816	79
12	0,2079	0,2126	4,7046	0,9781	78
13	0,2250	0,2309	4,3315	0,9744	77
14	0,2419	0,2493	4,0108	0,9703	76
15	0,2588	0,2679	3,7321	0,9659	75
16	0,2756	0,2867	3,4874	0,9612	74
17	0,2924	0,3057	3,2709	0,9563	73
18	0,3090	0,3249	3,0777	0,9510	72
19	0,3256	0,3443	2,9042	0,9455	71
20°	0,3420	0,3640	2,7475	0,9397	70°
21	0,3584	0,3839	2,6051	0,9336	69
22	0,3746	0,4040	2,4751	0,9272	68
23	0,3907	0,4245	2,3559	0,9205	67
24	0,4067	0,4452	2,2460	0,9135	66
25	0,4226	0,4663	2,1445	0,9063	65
26	0,4384	0,4878	2,0503	0,8988	64
27	0,4540	0,5095	1,9626	0,8910	63
28	0,4695	0,5318	1,8807	0,8829	62
29	0,4848	0,5544	1,8040	0,8746	61
30°	0,5000	0,5774	1,7321	0,8660	60°
31	0,5150	0,6009	1,6643	0,8572	59
32	0,5299	0,6249	1,6003	0,8480	58
33	0,5446	0,6494	1,5399	0,8387	57
34	0,5592	0,6745	1:4826	0,8290	56
35	0,5736	0,7002	1,4281	0,8192	55
36	0,5878	0,7265	1,3764	0,8090	54
37	0,6018	0,7536	1,3270	0,7986	53
38	0,6157	0,7813	1,2799	0,7880	52
39	0,6293	0,8098	1,2349	0,7771	51
40°	0,6428	0,8391	1,1918	0,7660	50°
41	0,6561	0,8693	1,1504	0,7547	49
42	0,6691	0,9004	1,1106	0,7431	48
43	0,6820	0,9325	1,0724	0,7314	47
44	0,6947	0,9657	1,0355	0,7193	46
45	0,7071	1,0000	1,0000	0,7071	45
	CO-SENOS	CO-TANG.	TANGENTES	SENOS	ÂNGULOS

DE 45° A 90°, TÍTULOS DE BAIXO

(*) O sinal ∞ lê-se: *infinito*.

APÊNDICE

EXERCÍCIOS DE RECAPITULAÇÃO
SÔBRE O
PROGRAMA DE ARITMÉTICA

PROPORÇÕES

Calcular o *têrmo desconhecido* (x) nas seguintes proporções:

1. $\frac{x}{13} = \frac{8}{4}$ 2. $\frac{7}{9} = \frac{x}{18}$ 3. $\frac{-4}{x} = \frac{-12}{9}$

4. $\frac{-\frac{1}{3}}{2} = \frac{x}{6}$ 5. $\frac{5}{\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{20}}{x}$ 6 $\frac{2x}{0,01} = \frac{-1}{0,1}$

7. $\frac{7-\frac{3}{4}\times 8}{3x} = 6$ 8. $\left(4-\frac{1}{3}\right) : x :: \frac{5}{6} : \left(5+\frac{1}{2}\right)$

9. $\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+3\right) : \frac{1}{2} :: \left(5+\frac{1}{2}\times 6\right) : x$

10. $\frac{-x}{b^2} = \frac{a}{b}$ 11. $\frac{4p^2q^4}{a} = \frac{8p^2q^3}{x}$ 12. $\frac{m\sqrt{n}}{x} = \frac{2n}{m\sqrt{n}}$

13. $\frac{1}{2a^3b^2} = \frac{x}{8a^4b^3}$ 14. $\frac{6+x}{2} = 3$ 15. $\frac{4-2x}{x} = 2$

Calcular a *média proporcional* (x) nas proporções contínuas:

16. $\frac{567}{x} = \frac{x}{28}$ 17. $\frac{0,7}{x} = \frac{x}{6,3}$ 18. $\frac{1}{x} = \frac{x}{552,25}$

19. $\frac{9m^3}{x} = \frac{x}{4m}$ 20. $\frac{4\,(a+b)}{x} = \frac{x}{16\,(a+b)}$ 21. $\frac{\frac{4}{9}\,(p+q)^2}{x} = \frac{x}{9\,(p+q)^2}$

Calcular x aplicando as propriedades da *composição* e da *decomposição* nas seguintes proporções:

22. $\frac{8+x}{x}=\frac{11}{3}$ 23. $\frac{x}{x-5}=\frac{3}{2}$ 24. $\frac{x+1}{x}=\frac{a+1}{a}$

25. $\frac{5-x}{5+x}=9$ 26. $\frac{2x-1}{2x+1}=\frac{7}{9}$ 27. $\frac{a+x}{a}=\frac{a+b}{a}$

Determinar a e b, de modo que:

28. $\begin{cases} a+b=12 \\ \frac{a}{b}=\frac{1}{2} \end{cases}$ 29. $\begin{cases} a+b=84 \\ \frac{a}{b}=\frac{13}{15} \end{cases}$ 30. $\begin{cases} a-b=12 \\ \frac{a}{b}=\frac{5}{2} \end{cases}$

31. $\begin{cases} 3a+2b=36 \\ \frac{a}{2}=\frac{b}{3} \end{cases}$

NOTA: Multiplicamos os dois têrmos da primeira razão por 3 e os da 2.ª por 2; a seguir aplicamos a propriedade da soma dos antecedentes...

32. $\begin{cases} 5a-3b=32 \\ \frac{a}{b}=\frac{5}{3} \end{cases}$

NOTA: Podemos, primeiramente, alternar os meios da proporção e a seguir aplicar a propriedade da diferença dos antecedentes...

33. $\begin{cases} \frac{a}{b}=\frac{2}{3} \\ a^2+b^2=117 \end{cases}$ 34. $\begin{cases} \frac{a}{b}=\frac{4}{3} \\ a^2-b^2=7 \end{cases}$ 35. $\begin{cases} \frac{a}{5}=\frac{b}{4} \\ a^2+b^2=656 \end{cases}$

36. $\begin{cases} a=\frac{b}{2} \\ b^2-a^2=27 \end{cases}$ 37. $\begin{cases} \frac{a}{3}=\frac{b}{5} \\ a \cdot b=135 \end{cases}$ 38. $\begin{cases} \frac{a}{b}=\frac{1}{3} \\ a \cdot b=12 \end{cases}$

Calcular x, y e z, aplicando a propriedade de uma *série de razões iguais*:

39. $\begin{cases} x+y+z=18 \\ \frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4} \end{cases}$ 40. $\begin{cases} x+y+z=40 \\ \frac{x}{3}=\frac{y}{5}=\frac{z}{2} \end{cases}$ 41. $\begin{cases} x+y-z=12 \\ \frac{x}{3}=\frac{y}{5}=\frac{z}{4} \end{cases}$

42. $\begin{cases} 3x+2y-z=44 \\ \frac{x}{7}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3} \end{cases}$ 43. $\begin{cases} x=\frac{y}{3}=\frac{z}{4} \\ x+y+z=-24 \end{cases}$ 44. $\begin{cases} \frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{5} \\ x^2+y^2+z^2=50 \end{cases}$

Resolver os seguintes problemas:

45. A idade de um pai e a do seu filho estão na razão 7/2. Se a soma das idades é 45 anos, qual a idade de cada um?

46. As áreas de dois retângulos estão entre si como 3 está para 4. Calcular a área de cada retângulo sabendo-se que a soma delas é 42m².
47. A razão entre os volumes de dois recipientes é 2/3 e o menor dêles tem 12 *l*. Determinar o número de litros do maior.
48. Decompor 42 em duas parcelas tais que estejam na razão 3/4.
49. Qual a fração equivalente a 7/3 cuja diferença dos têrmos é igual a 16?
50. Os ângulos de um triângulo estão entre si como os números 3, 4 e 5; Determinar os valores dêsses ângulos sabendo-se que a soma dos mesmos é 180°.
51. A razão entre a base e a altura de um triângulo é de 7 para 4 e a área dêsse triângulo é de 56m². Calcular a base e a altura.
52. As dimensões de um retângulo de área igual a 48m² estão na razão igual a $1\frac{1}{3}$. Determinar essas dimensões.
53. Um terreno de 6 912m² foi repartido por quatro pessoas em partes proporcionais aos números 2, 3, 5 e 8. Calcular a área recebida por pessoa.
54. Um salão de festas, de forma retangular, tem a área de 1 000m². Calcular as dimensões dêsse salão, sabendo-se que elas estão na razão 5/8.
55. Osvaldo possui 39 anos e sua idade é os 3/5 da idade de seus irmãos. Qual a idade de cada um de seus irmãos se elas estão entre si assim como 4 está para 9.

NÚMEROS PROPORCIONAIS

56. Dividir 280 em partes *diretamente* proporcionais a 9, 12 e 14.
57. Repartir 5 600 em partes *diretamente* proporcionais a 0,3; 3,2 e 1,5.
58. Dividir 96 em partes *diretamente* proporcionais a 6/5, 2/5 e 8.
59. Repartir 703 em partes *inversamente* proporcionais a 2, 4 e 5.
60. Dividir 126 em partes *inversamente* proporcionais a 1/2, 1/3 e 1/4.
61. Dividir 3 610 em partes *inversamente* proporcionais a 0,2; 1,2 e 0,4.
62. Dividir 285 em partes *diretamente* proporcionais a 5, 7 e 11 e *inversamente proporcionais* a 4, 8 e 6 (ao mesmo tempo).
63. Dividir 80 em partes *diretamente* proporcionais às duas séries de números: 2, 3 e 4 e 5, 2 e 6 (ao mesmo tempo).
64. Dividir 47/4 em partes *diretamente* proporcionais aos números: 1/2, 2 e 7/16.
65. Divide-se um número em três partes *diretamente* proporcionais a 4, 5 e 6. A primeira parte vale 12. Determinar o número e as outras duas partes.

66. Certa importância foi distribuida entre duas pessoas em partes proporcionais (subentende-se diretamente) a 4 e 5. Sabendo-se que a segunda recebeu Cr$ 5 000,00 mais que a primeira, qual a quantia repartida e qual a parte de cada uma?
(NOTA: Lembrar que: $\frac{x}{4} = \frac{x+5000}{5}$)

67. Determinar os ângulos de um triângulo sabendo que a soma é 180° e que são *inversamente* proporcionais aos números 1, 6 e 3.

68. Os ângulos de um quadrilátero (têm por soma 360°) são *inversamente* proporcionais aos números 3/2, 2, 8/3 e 3. Determinar as suas medidas.

69. Um prêmio de agricultura no valor de Cr$ 380 000,00 deve ser dividido em partes *diretamente* proporcionais às áreas cultivadas por três agricultores e que são respectivamente 50a, 70a e 75a. Qual a parte de cada?

70. A quantia de Cr$ 45 000,00 deve ser repartida entre três pessoas de modo que a segunda receba o dôbro da primeira e a terceira o triplo da segunda. Qual a quantia recebida por pessoa?

REGRA DA SOCIEDADE

71. Três pessoas formaram uma sociedade. A primeira entrou com Cr$ 200 000,00, a segunda, com Cr$ 350 000,00 e a terceira com Cr$ 250 000,00. No balanço anual houve um lucro de Cr$ 160 000,00. Qual foi a parte de cada uma?

72. Registrou-se um prejuízo de Cr$ 540 000,00 no fechamento de uma loja de comércio pertencente a três pessoas. A primeira permaneceu na sociedade durante 3 anos, a segunda 2 anos e a terceira 4 anos. Qual o prejuízo de cada sócio?

73. Uma herança foi repartida entre dois irmãos em partes diretamente proporcionais às idades. Sabe-se que êles receberam, respectivamente, Cr$ 120 000,00 e Cr$ 80 000,00 e as suas idades somam 40 anos. Qual a idade de cada um?
(NOTA: Lembrar que: $\frac{120}{x} = \frac{80}{40-x}$)

74. Três sócios combinaram a 3/1/58 organizarem uma casa comercial. Nesse dia o primeiro entrou com Cr$ 300 000,00 de capital. Dois meses depois o segundo figurou na sociedade com Cr$ 420 000,00 e no dia 3/9/58 o terceiro sócio entrou com Cr$ 560 000,00. O balanço realizado em 3/1/59 registrou um lucro de Cr$ 200 800,00. Qual a parte de cada sócio?

75. A, B e C empregaram, respectivamente, Cr$ 230 000,00 por 6 meses; Cr$ 190 000,00 por 4 meses e Cr$ 320 000,00 por meses. Determinar a parte que A, B e C ganharam, sabendo que o lucro a ser distribuído é de Cr$ 37 400,00.

76. Três irmãos formaram uma sociedade. O primeiro colocou o capital de Cr$ 200 000,00, durante 8me 18d; o segundo empregou Cr$ 350 000,00 durante 7me 15d e o terceiro Cr$ 420 000,00 por 1a 2m 10d. Houve um lucro de Cr$ 310 950,00. Qual a parte de cada um?

77. Quatro sócios organizaram uma sociedade nas seguintes condições: o capital do primeiro é a metade do segundo; o do terceiro é a têrça parte do primeiro e o do quarto é o triplo do do terceiro. O primeiro sócio permaneceu 2a 4me; o segundo 3a 4me; o terceiro, 5a 6me e o quarto, 4 anos. Tendo a sociedade apurado um lucro de Cr$ 890 000,00, qual a parte de cada um?

REGRA DE TRÊS SIMPLES

78. Uma perua gasta 11 *l* para percorrer 121km. Quantos litros gastaria para percorrer 330km?

79. Uma máquina rotula 500 garrafas em cada 10 minutos. Quantas garrafas serão rotuladas por essa máquina em 2 horas?

80. Um rancho foi feito em 30 dias por 10 operários. Em quantos dias seria feito o mesmo rancho dispondo de apenas 6 operários?

81. 20 operários efetuam 50m de uma parede que cerca um campo de futebol. Quantos metros de parede farão, no mesmo tempo que os primeiros, se empregarmos 10 operários a mais?

82. Se cada pacote de lã, com 4 novelos, custa Cr$ 200,00, quanto custarão três dúzias de pacotes dessa lã?

83. Um forno elétrico consome 600 watt-hora de corrente em 1h 20m. Quanta corrente consumirá em 6h 40m?

84. Um relógio atrasou em 14 horas de funcionamento 2min 20s. Quanto atrasará em 6 dias?

85. As dificuldades de duas tarefas estão entre si assim como 4 está para 5. Um operário faz 40m da primeira tarefa. Quantos metros êsse êsse mesmo operário faria da segunda no mesmo espaço de tempo?

86. Uma bomba eleva 240 litros de água em 8 minutos. Quantos decalitros elevará em 2h 40m?

87. Um ciclista com a velocidade média de 18km por hora leva 2h 40m para efetuar um certo percurso. Quanto tempo levaria para efetuar a mesma viagem se a velocidade fôsse de 20km por hora?

88. Para fazer a metade de uma obra 10 operários levaram 30 dias. Quanto tempo levarão para terminar essa obra se se empregar mais 5 operários?

89. Em 27 dias 20 operários fizeram um têrço de uma obra. Quanto tempo levariam para terminá-la com 2 operários a menos?

90. Foram tecidos 120m de tecido, de 90cm de largura, com uma certa quantidade de algodão. Quantos metros de tecido de 60cm de largura podem ser tecidos com a mesma quantidade de algodão?

91. Foram empregadas 108 garrafas, de capacidade de 7dl, para engarrafar uma certa porção de vinho. Quantas garrafas seriam necessárias se cada uma delas tivesse 3,5cl de capacidade?

92. Duas rodas dentadas, engrenadas uma na outra, têm respectivamente, 24 e 108 dentes. Quantas voltas dará a menor enquanto a maior dá 16?

93. Numa cocheira existem 30 cavalos, para os quais uma certa quantidade de feno dura 40 dias. Tendo sido retirados 10 cavalos, quanto tempo durará agora aquela quantidade de feno?

94. Uma pessoa, que em cada minuto dá 51 passos, demora 15 minutos para percorrer certa distância. Que tempo demoraria para percorrer essa mesma distância se em cada minuto desse 45 passos?

95. Um automóvel rodando 8h por dia, empregou 15 dias para percorrer certa distância entre duas cidades. Pergunta-se quantos dia empregaria na volta se rodasse 10h por dia.

96. Para forrar as paredes de uma sala de aula são necessárias 30 peças de papel de 60cm de largura cada uma. Quantas peças seriam necessárias se elas tivessem 90cm de largura?

97. Se de cada 30kg de café cru resulta 26kg de café torrado, quantos quilos de café cru serão necessários para se obter 208kg de café torrado?

REGRA DE TRÊS COMPOSTA

98. Um circo é armado por 15 homens que trabalharam 10 horas por dia, em 3 dias. Em quanto tempo armariam êsse mesmo circo 25 homens que trabalhassem 9 horas por dia?

99. Empregaram-se 36kg de fio para tecer 126m de fazenda de 60cm de largura. Pergunta-se : quantos quilos do mesmo fio serão necessários para tecer 140m de fazenda de 72cm de largura?

100. Com uma bomba elétrica eleva-se 4 200 litros de água à altura de 12m em 1h 20min. Quanto tempo empregará essa bomba para elevar 12 600 litros à altura de 8m?

101. Com 20 tecelões fazem-se 1 600m de um determinado tecido em 8 dias. Quantos dias levarão 30 tecelões com a mesma capacidade dos primeiros para fazerem 3 000m do mesmo tecido?

102. Um têrço de uma certa obra foi feito em 12 dias por 21 operários que trabalharam 8h por dia. Quantos dias levariam para terminar tal obra 24 operários que trabalhassem 7h por dia?

103. Com 15 operários em 18 dias gastou-se Cr$ 40 500,00 para efetuarem um certo trabalho. Quanto se gastaria para um trabalho semelhante, dispensando-se 8 operários, sendo que os restantes efetuariam o mesmo trabalho em 12 dias?

104. Um trecho de estrada de 300m de comprimento por 8m de largura foi asfaltado em 4 dias por 16 homens que trabalharam 6h por dia. Quantas horas por dia deveriam trabalhar 18 homens para asfaltarem em 2 dias um trecho de estrada de 200m de comprimento por 9m de largura (nas mesmas condições que a primeira)?

105. Um automóvel com a velocidade média de 60km por hora, viajando 7h por dia, leva 10 dias para fazer o percurso entre duas cidades. Quantos dias levaria êsse mesmo automóvel para efetuar aquele percurso se viajasse 12h por dia, a velocidade média de 70km/h?

106. Se um ciclista aumentasse de 1/5 a sua velocidade, quantas horas por dia deveria pedalar para refazer em 4 dias o caminho, que havia feito em 5 dias, pedalando 6h por dia?

107. Certa máquina funcionando 4h por dia rotulou durante 6 dias, 2 000 garrafas. Quantas horas deveria essa máquina funcionar por dia para rotular 20 000 garrafas num mês (30d)?

108. Um livro tem 250 páginas de 40 linhas cada página, sendo que cada linha possui 66 letras. Reimprimindo-se êsse livro com os mesmos caracteres, porém com páginas de 30 linhas cada uma e com 50 letras em cada linha, pergunta-se quantas páginas deverá ter o novo livro?

109. Num forte existem 4 000 homens que possuem alimentação para 8 meses. Tendo partido do forte 1 000 homens e a alimentação se reduzido a 2/3 daquela estabelecida, por quantos meses durarão os víveres agora?

110. Uma adega de vinho abastece 30 homens durante 16 dias dando a cada um 0,75 *l* por dia. Por quantos dias aquela mesma adega abasteceria 20 homens que consumissem 0,6 *l* por dia?

111. Se 80 operários, trabalhando 10 horas por dia, teceram 750m de certo tecido em 25 dias, pergunta-se quantos metros dêsse mesmo tecido poderão tecer 54 operários trabalhando 8h por dia, durante um mês (30d)?

112. 24 lavradores podem arar um campo em 6 dias trabalhando 10 horas por dia. Deslocando-se 9 lavradores para outro trabalho e exigindo-se que os restantes trabalhassem 8 horas por dia, pergunta-se em quantos dias arariam o mesmo campo?

113. Quantas horas diárias deverão trabalhar 6 homens para semear um campo em 5 dias, se um grupo com dois homens a menos o semeia em 10 dias, trabalhando 12 horas diárias?

114. Teceram-se, com certa quantidade de algodão, 15m de tecido da meio metro de largura. Quantos metros se poderia tecer com e

mesma quantidade de algodão a fim de se obter um tecido que em relação ao anterior, tivesse o dôbro da largura e a espessura igual a 3/4.

115. Em 50 dias com 15 homens que trabalharam 8 horas por dia foram feitos os 3/5 de um atêrro. Tendo sido empregados mais 5 homens e fazendo-os trabalhar 2 horas a mais por dia, em quanto tempo foi terminado o atêrro?

116. Dando-se a 400 homens durante 4me 24d, 840 gramas de pão por homem e por dia, são necessárias 336 sacas de farinha de 100kg cada uma. Quantas sacas de farinha, de 125kg cada uma, são necessárias para alimentar 500 homens durante 10 meses, dando-se agora 900 gramas de pão por homem e por dia?

117. Um trem que marcha com uma velocidade de 42km por hora deve percorrer certa distância em 9 horas. Depois de percorrer 126km deteve-se 45 minutos. Com que velocidade deve continuar a sua marcha para chegar à hora fixada?

118. Um rio desemboca num lago vertendo 850m³ de água em cada 5 minutos. Calculou-se que 8m² de superfície do lago evaporam 1 litro de água por hora. Mantendo-se o nível do lago inalterável pergunta-se qual a sua superfície (supõe-se para resolver o problema que as paredes bem como o fundo do lago sejam impermeáveis).

PORCENTAGEM - TANTOS POR MIL

Calcular:

119. 10% de Cr$ 18 460,00

120. 0,5% de Cr$ 1 500 000,00

121. $9 \frac{1}{2}$ % de uma tonelada

122. 2‰ de 50 000 habitantes

123. 1,5‰ de 80 000 toneladas

124. 5‰ de 1 000g.

Determinar "quanto por cento" é:

125. 5 l de 250 l

126. 9,6kg de 64kg

127. 3cm de 1,5dm

128. Cr$ 1 000,00 de Cr$ 25 000,00

Dizer:

129. Cr$ 500,00 é 10% de que importância?

130. 120g é 0,5% de que quantidade?

131. 45 habitantes é 5‰ de que população?

Resolver os seguintes problemas:

132. No ano de 1959 havia em uma escola 625 alunos matriculados. Quantos alunos foram matriculados em 1960 se as matrículas aumentaram em 12%?

133. Um aluno ao fazer um ditado de 240 palavras cometeu 12 erros. De quanto por cento foram os erros cometidos?

134. Uma loja comercial vendeu num mês Cr$ 720 000,00. No mês seguinte vendeu Cr$ 864 000,00. De quanto por cento foi o aumento das vendas?

135. Um pedaço de sabão pesando 320g contém 65% de substâncias gordurosas. Qual o pêso dessas substâncias?

136. Um vinho tem graduação alcoólica de 12%. Quanto de álcool existe em 320hl dêsse vinho?

137. Num colégio 42% são meninas e os meninos somam 580. Quantos são os alunos?

138. 44% dos operários de uma fábrica são mulheres. Existem 280 homens trabalhando nessa fábrica. Qual o total de operários?

139. Em uma escola apresentaram-se aos exames de admissão 108 candidatos. Foram reprovados 42. Determinar a taxa de porcentagem da reprovação.

140. Há 10 anos a população de uma cidade era de 85 500 habitantes. Tendo aumentado de 20%, qual a população atual?

141. Um corretor cobra 3% de comissão sôbre negócios imobiliários. Vendendo uma casa por Cr$ 2 500 000,00, qual foi o valor de sua comissão?

142. Revende-se um objeto por Cr$ 4 255,00 com lucro de 15%. Qual o preço de custo?
(NOTA: Lembrar que Cr$ 4 255,00 representa 115% e com uma regra de três simples determina-se 100% equivalente ao preço de custo).

143. Uma pessoa teve que vender sua casa por Cr$ 1 900 000,00 tendo um prejuízo de 5%. Qual o preço que pagara pela casa?
(NOTA: Lembrar que Cr$ 1 900 000,00 representa 95%).

144. Um relógio foi vendido por Cr$ 2 400,00. Neste preço de venda está incluído 20% de lucro. Qual o preço de custo dêsse relógio?

145. Quanto paga um aluno que, comprando cadernos, um de Cr$ 75,00 e outro de Cr$ 90,00, teve uma bonificação de 10%?

146. Uma escola tem 6 classes de 40 alunos cada. As faltas da semana, que teve sexta-feira e sábado como feriados, foram: 17 alunos na segunda-feira, 5 na têrça, 18 na quarta e 8 na quinta. Qual foi a taxa de porcentagem da presença nessa semana?

147. Um negociante compra uma partida de 500 latas de embalagem à razão de Cr$ 10 000,00 a centena. Vende 1/5 das latas com lucro de 30%; 1/4 com lucro de 25% e o resto com lucro de 35%. Quanto recebeu de lucro?

JUROS SIMPLES

Calcular o *juro* produzido por:

148. Cr$ 125 000,00 em 2 anos à taxa de 12% (*)
149. Cr$ 300 000,00 em 6 meses à taxa de 11%
150. Cr$ 86 000,00 em 90 dias, à taxa de $9\frac{1}{2}$ %
151. Cr$ 13 200,00 em 2a 4me à taxa de 6%
152. Cr$ 468 000,00 em 1a 3me 10d à taxa de 7%
153. Cr$ 252 000,00 em 72 dias à taxa de 3,6%

Determinar o *capital* que produz de juro:

154. Cr$ 20 700,00 à taxa de 4,5% durante 4 anos
155. Cr$ 6 300,00 à taxa de $10\frac{1}{2}$ % em 6 meses
156. Cr$ 41 860,00 à taxa de 7% durante 1a 3me
157. Cr$ 270 000,00 à taxa de 10% em 2a 3me
158. Cr$ 1 800,00 à taxa de 12% durante 150 dias

Qual a *taxa* empregada para que o capital de:

159. Cr$ 14 000,00 renda um juro de Cr$ 4 200,00 em 6 anos?
160. Cr$ 26 400,00 renda um juro de Cr$ 1 980,00 em 1a 8me?
161. Cr$ 36 000,00 renda um juro de Cr$ 1 800,00 em 150 dias?
162. Cr$ 120 000,00 renda um juro de Cr$ 6 300,00 em 6 meses?
163. Cr$ 27 000,00 renda um juro de Cr$ 1 680,00 em 8 meses?

Calcular o *tempo* empregado pelo capital de:

164. Cr$ 3 600,00 que à taxa de 6% rendeu um juro de Cr$ 648,00
165. Cr$ 27 000,00 que à taxa de $9\frac{1}{3}$ % rendeu Cr$ 1 680,00
166. Cr$ 90 000,00 que à taxa de 6% rendeu um juro de Cr$ 11 025,00

(*) A taxa é sempre referida ao ano

167. Cr$ 3 650 000,00 à taxa de 8% rendeu um juro de Cr$ 430 000,00
168. Cr$ 2 700,00 à taxa de $8\frac{1}{8}$ % rendeu de juro Cr$ 243,75

Resolver os seguintes *problemas*:

169. Em quanto tempo um capital duplica com juro simples à taxa de 5%?
(NOTA: Lembrar que nesse caso $j = C$)

170. A que taxa deve ser empregado um certo capital para que possa duplicar depois de 10 anos?

171. É mais vantajoso empregar Cr$ 58 500,00 a 6 % ou também Cr$ 39 000,00 a 5,5% e o resto a 7%?

172. Emprega-se 2/3 de um capital a 6% e o restante á 8%, obtendo-se assim um ganho anual de Cr$ 48 000,00. Qual é o valor dêsse capital?
(NOTA: Calcula-se, primeiramente, a média aritmética ponderada das taxas empregadas durante o ano: $\frac{6\times2+8\times1}{2+1} = \frac{20}{3}$ e a seguir calcula-se o capital)

173. Um capital empregado por 5 anos aumentou de 5/18. A que taxa foi empregado?

174. Duas pessoas têm juntas Cr$ 844 000,00 e empregam o que têm à taxa de 8% ao ano. A primeira recebe Cr$ 20 640,00 de juros a mais que a segunda. Qual o capital de cada uma?
(NOTA: Primeiramente calcula-se o juro do capital total; a seguir o juro da segunda e daí os capitais respectivos).

175. Uma pessoa empresta 2/3 de seu capital a 12% e o resto a 6%. No fim de um ano recebe Cr$ 72 000,00 de juros. Qual o capital emprestado?

176. Dois sócios têm juntos Cr$ 1 200 000,00 e o colocam à taxa de 10% ao ano. O primeiro recebe Cr$ 60 000,00 a mais de juros de que o segundo. Qual o capital de cada um?

177. Um negociante empregou 3/4 de seu capital a 11% e o resto a 10%. Como no fim de um ano recebeu Cr$ 86 000,00 de juros, pergunta-se o capital empregado.

178. Um capitalista depositou 2/5 de seu capital num banco durante 1a 6me à taxa de 9% e recebeu no fim dêsse tempo Cr$ 54 000,00 de juros. Qual foi a quantia depositada? Qual o capital?

179. Uma pessoa emprega a juros simples um certo capital à taxa de 6%. Depois de 4a 2me retira o capital e juros e reemprega tudo a 7%, obtendo assim no fim de um ano o juro de Cr$ 47 250,00. Determinar o capital primitivo.

180. Foi empregado 1/4 de um certo capital a 8%; 1/5 a 5% e o resto a 6%. No fim de um ano recebeu-se Cr$ 36 540,00 de juros. Determinar o capital inicial.

181. Um capitalista depositou 2/3 de seu capital num banco, durante 1a 8me, à taxa de 6% ao ano, recebendo no fim dêsse tempo Cr$ 60 000,00 de juros. Qual foi a importância depositada no banco e qual o capital inicial?

182. Certo capital colocado à taxa de 9% ao ano produz no fim de 1a 4me, Cr$ 48 000,00 de juros. Quanto produziria de juros colocado à taxa de 10% ao ano no fim de 6 meses?

183. Um comerciante recebeu emprestado, à taxa de 9%, as seguintes importâncias: Cr$ 24 800,00 por 90 dias; Cr$ 12 800,00 por 25 dias e Cr$ 38 000,00 por 5 meses. Qual o total de juros que deve pagar?

184. Uma pessoa dividiu seu capital de Cr$ 120 000,00 em duas partes iguais. Empregou a primeira durante 2 anos à taxa de 6% e a segunda à taxa de 9% durante 1a 4me. Qual parte rendeu mais?

185. Repartido um capital de Cr$ 420 000,00 em três partes iguais, a primeira foi empregada, à taxa de 12%, durante 1 ano; a segunda, à taxa de 8%, por 2a 3me e a terceira, à taxa de 10%, por 6 meses. Teria sido melhor negócio aplicar todo o capital à taxa de 9%, durante 15 meses? Por quê?

186. Qual o montante de um capital de Cr$ 120 000,00, colocado à taxa de 6%, depois de 4 anos?

187. A quanto se eleva um capital de Cr$ 60 000,00, empregado à taxa de 12%, depois de 1a 3me?

188. Empreguei Cr$ 40 000,00 à taxa de $9\frac{1}{2}$ % durante 1a 11me 12d. Qual o montante?

189. Quanto acumulou no fim de 1a 3me 10d um capital de Cr$ 468 000,00 à 7% ao ano?

190. Qual o montante, no fim de 10 meses, se o capital de Cr$ 24 6000,00 foi aplicado à taxa de 3,6% ao ano?

191. Qual o capital que depois de 1a 2me, à taxa de 12%, dá um montante de Cr$ 22 800,00?

192. Um certo capital, reunido aos respectivos juros, elevou-se no fim de 8 anos a Cr$ 562 800,00 à taxa de 5%. Qual foi êsse capital?

193. Em que tempo o capital de Cr$ 140 000,00, colocado à taxa de 5% ao ano, produz reunido ao respectivo juro a importância de Cr$ 182 000,00?

194. Empregou-se Cr$ 33 750,00 à taxa de 8% ao ano. Depois de quanto tempo êsse capital reunido ao respectivo juro dá o montante de Cr$ 36 600,00?

195. A que taxa o capital de Cr$ 90 000,00 acumulou Cr$ 101 025,00 durante 2a 15d?

196. Uma pessoa emprega os 2/5 de um certo capital a 4% e o resto a 6%. No fim de um ano há um montante de Cr$ 33 664,00. Determinar o capital primitivo.

197. Um banqueiro emprega um capital à taxa de 5% e depois de 6 anos retira capital e juros, paga um débito de Cr$ 180 000,00 e emprega o resto a 8%. Dessa maneira recebe uma renda anual de Cr$ 75 040,00. Qual o capital primitivo?

198. Qual o divisor fixo de um banco cuja taxa é 6%?

199. Se a taxa de uma Caixa Econômica é 1% ao mês, qual é o seu divisor fixo?

200. O divisor fixo de uma casa bancária é igual a 4 000. Qual a taxa cobrada por essa casa bancária?

Respostas:

1. 26
2. 14
3. 3
4. −1
5. 4
6. −1/20
7. 1/18
8. 121/5
9. 6/5
10. −ab
11. 2a/q
12. $m^2/_2$
13. 4ab
14. 0
15. 1
16. 126
17. 2,1
18. 53,5
19. $6m^2$
20. $8(a+b)$
21. $2(p+q)^2$
22. 3
23. 15
24. a
25. −4
26. 4
27. b
28. 4 e 8
29. 39 e 45
30. 20 e 8
31. 6 e 9
32. 10 e 6
33. 6 e 9
34. 4 e 3
35. 20 e 16
36. 3 e 6
37. 9 e 15
38. 2 e 6
39. 4, 6 e 8
40. 12, 20 e 8
41. 9, 15 e 12
42. 14, 4 e 6
43. −3, −9, −12
44. 3, 4 e 5
45. 35 e 10
46. $18m^2$ e $24m^2$
47. 18 *l*
48. 18 e 24
49. 28 e 12
50. 45°, 60° e 75°
51. 14m e 8m
52. 8m e 6m

53. $768m^2$, $1152m^2$, $1920m^2$ e $3072m^2$
54. 25m e 40m
55. 20 e 45 anos
56. 72, 96 e 112
57. 336, 3584 e 1680
58. 12, 4 e 80
59. 148, 185 e 370
60. 28, 42 e 56
61. 2166, 361 e 1083
62. 90, 63 e 132
63. 20, 12 e 48
64. 2, 8 e 7/4
65. 45, 15 e 18
66. Cr$ 20 000,00 e Cr$ 25 000,00
67. 120°, 20° e 40°
68. 128°, 96°, 72° e 64°
69. Cr$ 100 000,00; Cr$ 140 000,00 e Cr$ 150 000,00
70. Cr$ 5 000,00, Cr$ 10 000,00 e Cr$ 30 000,00
71. Cr$ 40 000,00, Cr$ 70 000,00 e Cr$ 50 000,00
72. Cr$ 180 000,00, Cr$ 120 000,00 e Cr$ 240 000,00
73. 24 anos e 16 anos
74. Cr$ 72 000,00, Cr$ 84 000,00 e Cr$ 44 800,00
75. Cr$ 13 800,00, Cr$ 7 600,00 e Cr$ 16 000,00
76. Cr$ 51 600,00, Cr$ 78 750,00 e Cr$ 180 600,00
77. Cr$ 140 000,00, Cr$ 400 000,00, Cr$ 110 000,00 e Cr$ 240 000,00
78. 30 l
79. 6 000
80. 50d
81. 75m
82. Cr$ 7 200,00
83. 3 000 watt-hora
84. 24min
85. 32m
86. 480dl
87. 2h 24min
88. 20d
89. 60d
90. 180m
91. 216
92. 72
93. 60d
94. 17
95. 12d
96. 20
97. 240kg
98. 2d
99. 48kg
100. 2h 40min
101. 10d
102. 24d
103. Cr$ 12 600,00
104. 8h
105. 5d
106. 6h 15min
107. 8h
108. 440 pgs.
109. 16me
110. 30d
111. 486m
112. 12d
113. 4h
114. 5,625m
115. 20d
116. 750 sacas
117. 48km/h
118. 81 600 $000m^2$
119. Cr$ 1 846,00
120. Cr$ 7 500,00
121. 95kg
122. 100 hb
123. 120kg
124. 5g
125. 2%
126. 15%
127. 20%
128. 4%
129. Cr$ 5 000,00
130. 24kg
131. 9 000hb.
132. 700 al.
133. 5%
134. 20%
135. 208g
136. 38,4 l
137. 1 000 al
138. 500 op.
139. 38,88%
140. 102 600 hb

141. Cr$ 75 000,00
142. Cr$ 3 700,00
143. Cr$ 2 000 000,00
144. Cr$ 2 000,00
145. Cr$ 148,50
146. 95%
147. Cr$ 15 750,00
148. Cr$ 30 000,00
149. Cr$ 16 500,00
150. Cr$ 2 042,50
151. Cr$ 1 848,00
152. Cr$ 41 860,00
153. Cr$ 1 814,40
154. Cr$ 115 000,00
155. Cr$ 120 000,00
156. Cr$ 478 400,00
157. Cr$ 1 200 000,00
158. Cr$ 36 000,00
159. 5%
160. 4,5%
161. 12%
162. $10 \frac{1}{2}$ %
163. $9 \frac{1}{3}$ %
164. 3 anos
165. 8me
166. 2a 15d
167. 1a 6me
168. 1a 1me 10d
169. 20 anos
170. 10%
171. rendem igual
172. Cr$ 720 000,00
173. $5 \frac{5}{9}$ %
174. Cr$ 551 000,00 e Cr$ 293 000,00
175. Cr$ 720 000,00
176. Cr$ 900 000,00 e Cr$ 300 000,00
177. Cr$ 800 000,00
178. Cr$ 400 000,00 e Cr$ 1 000 000,00
179. Cr$ 540 000,00
180. Cr$ 180 000,00
181. Cr$ 600 000,00 e Cr$ 900 000,00
182. Cr$ 20 000,00
183. Cr$ 2 063,00
184. rendem igual
185. Não. O 1.° neg. rende Cr$ 49 000,00 e o segundo Cr$ 47 250,00
186. Cr$ 148 800,00
187. Cr$ 69 000,00
188. Cr$ 47 410,00
189. Cr$ 509 860,00
190. Cr$ 253 380,00
191. Cr$ 20 000,00
192. Cr$ 402 000,00
193. 6 anos
194. 1a 20d
195. 6%
196. Cr$ 32 000,00
197. Cr$ 860 000,00
198. 6 000
199. 3 000
200. 9%

ALGUMAS OBSERVAÇÕES INTERESSANTES

SÔBRE A

GEOMETRIA DEDUTIVA DA 3.ª SÉRIE

Continuamos afirmando que a *Geometria Dedutiva*, iniciada na 3.ª série ginasial, tem por objetivo principal *ensinar o aluno a pensar* e portanto *formá-lo* e não apenas informá-lo. Nestas condições não poderíamos deixar de mencionar o de quanto é capaz o nosso estudante quando "provocado" a bem raciocinar.

Não dispondo de muito espaço, queremos, todavia, em homenagem aos milhares de ginasianos que cursam as 3.as séries, citar algumas amostras da possibilidade dos jovens a partir dos 13 anos, surpreendendo-nos com uma antecipação de raciocínio digna de elogio e que todos nós, professôres, encontramos em nossas aulas de *Geometria Racional*. São exemplos simples como demonstrações, mas extraordinários como realizações de alunos, que autorizam a afirmar: a Geometria Racional por êles assimilada há de projetar-se, com certeza, na formação de um digno e útil cidadão.

Os exemplos são de colégios de São Paulo, por serem os únicos que temos em mãos, neste instante, graças à gentileza de ilustres colegas. (*)

Com relação a cordas de um círculo (Usando igualdade de $\triangle$).

1. Demonstrar: *"Num círculo cordas paralelas determinam arcos iguais"*

Seja o círculo de centro 0 (fig. 1). Temos:

$H \left\{ AB \parallel CD \right.$ $\qquad\qquad$ $T \left\{ \widehat{AC} = \widehat{BD} \right.$

DEMONSTRAÇÃO: Tracemos por 0 a perpendicular à corda CD (que será também à corda AB). Tal perpendicular encontrará as cordas AB e CD, respectivamente, nos pontos médios M e N. Logo:

$$AM = MB \quad \text{e} \quad CN = ND$$

(*) Apelamos e agradecemos aos demais professôres de todo o Brasil o envio de resultados interessantes encontrados no ensino da Geometria Dedutiva. Êles serão divulgados em edições posteriores em homenagem aos nossos jovens estudantes.

Unindo-se C e D a M obteremos os triângulos: $\triangle CNM$ e $\triangle DNM$ *iguais*, pelo caso L.A.L., pois, MN é comum; $\hat{1}=\hat{2}$ (retos) e $CN=ND$ (por construção).

Unindo-se, agora, A a C e B a D, encontramos os triângulos $\triangle ACM$ e $\triangle BMD$, também *iguais*, pelo caso L.A.L., pois, $MC=MD$ (como lados correspondentes de triângulos iguais, já provado); $\hat{5}=\hat{6}$, por serem complementos de angulos iguais (respectivamente de $\hat{3}$ e $\hat{4}$) e $AM=MB$, por construção.

Logo: $AC = BD$

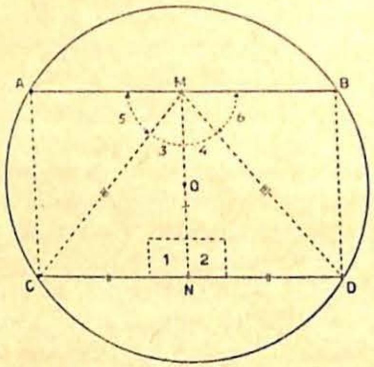


FIG. 1

Como, em uma mesma circunferência, *cordas iguais subtendem arcos iguais*, segue que:

$\widehat{AC} = \widehat{BD}$ c.q.d.

Solução apresentada pelo aluno Marco Aurélio Gelpi, do Colégio Dante Alighieri (1955).

Com relação à igualdade de triângulos (Caso novo?)

2. Por que não é *suficiente*, para a igualdade de dois triângulos, o caso L.L.A., isto é: "*Dois triângulos são congruentes (iguais) quando têm dois lados respectivamente iguais e o ângulo, não compreendido entre êles, igual*"?

Considerado o $\triangle ABC$, isósceles (fig. 2), onde $AB=AC$ e $\hat{B}=\hat{C}$, observemos os triângulos $\triangle ABM$ e $\triangle ACM$, formados quando se une A a um ponto M da base BC, com a condição de M não ser o ponto médio. Êles possuem:

$$\begin{cases} AB = AC & \text{(por hip.) L} \\ AM = AM & \text{(comum) L} \\ \hat{B} = C & \text{(por hip.) A} \end{cases}$$

satisfazendo o caso L.L.A. e *não são iguais*, como é fácil constatar.

Solução apresentada pelo aluno Paulo de Souza Moraes, do Colégio Santa Cruz (1957)

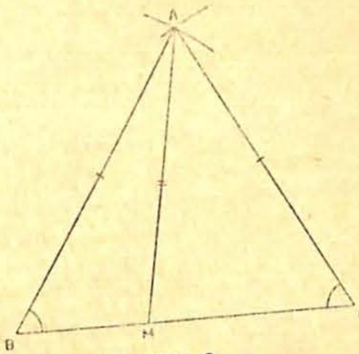


FIG. 2

Com relação à mediatriz de um segmento (Usando propriedade da ⊥ e ∡).

3. Demonstrar: "*Todo ponto que não pertence à mediatriz de um segmento (no mesmo plano) não é equidistante dos extremos dêsse segmento*".

Seja a figura 3, onde:

$H \begin{cases} r \text{ é mediatriz de } AB \\ P \text{ não pertence a } r \end{cases}$ $T \{ PA \neq PB$

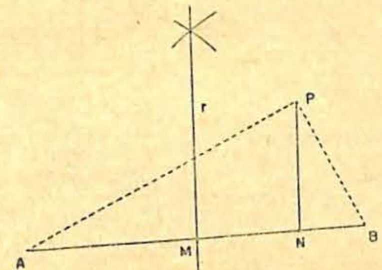


FIG. 3

Demonstração : Se P não pertence à mediatriz r temos que traçando-se a perpendicular (que é única) de P ao segmento AB ela irá encontrar AB num ponto N (distinto do ponto médio M) determinando sôbre AB, dois segmentos diferentes : $AN \neq NB$. Podemos considerar (como é feito na fig. 3) : $AN > NB$. Unindo-se P aos extremos A e B, obteremos dois segmentos oblíquos cujos pés se afastam desigualmente do pé da perpendicular r e portanto: $PA > PB$ (o maior é aquêle cujo pé está mais afastado [n.° 52, c]). Logo:

$PA \neq PB$ c.q.d.

Solução apresentada pelo aluno Antônio Edison Ribeiro, do Ginásio Caetano de Campos (1954).

Com relação a retas perpendiculares (Demonstrando diretamente).

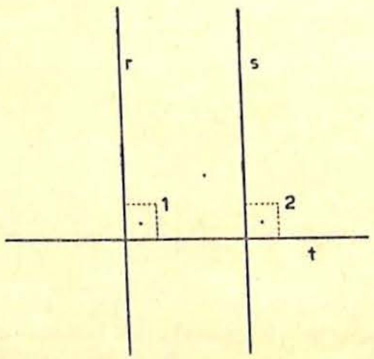


Fig. 4

4. Demonstrar: *"No mesmo plano, duas retas perpendiculares a uma terceira são paralelas entre si".*

Sejam as retas coplanares r, s e t (fig. 4), onde:

$$H \begin{cases} r \perp t \\ s \perp t \end{cases} \qquad T \{ r \parallel s$$

Demonstração : Ora, se $r \perp t$ e $s \perp t$, os ângulos $\hat{1}$ e $\hat{2}$ são *retos* e, portanto, *iguais*, isto é : $\hat{1} = \hat{2}$. Como êsses ângulos são *correspondentes* e *iguais*, formados pela transversal t com as retas coplanares r e s, segue (pelo Teorema fundamental, n.° 58) que:

$r \parallel s$ c.q.d.

Solução apresentada pela aluna Sônia Freitas, do Instituto Feminino de Educação "Padre Anchieta" (1956).

Com relação a feixe de paralelas (Usando propriedade do trapézio).

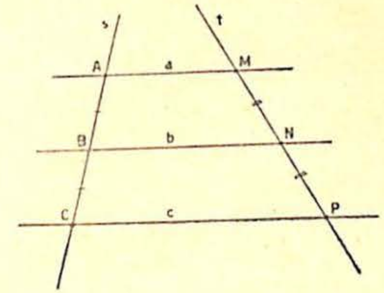


Fig. 5

5. Demonstrar: *"Se um feixe de paralelas determina segmentos iguais sôbre uma transversal, determina também segmentos iguais sôbre qualquer outra transversal".*

Consideremos o feixe formado pelas paralelas a, b e c e as transversais s e t, tôdas coplanares (fig. 5). Temos :

$$H \begin{cases} a \parallel b \parallel c; \ s \text{ e } t \text{ transversais} \\ AB = BC \end{cases} \qquad T \{ MN = NP$$

Demonstração : Sendo a figura $ACPM$ um trapézio (basta consultar a hipótese) e B ponto médio de um dos lados não paralelos dêsse trapézio (também por hip. $AB = BC$), segue-se que a paralela por êsse ponto encontrará necessàriamente o lado MP no meio (n.° 79 Corolário), isto é:

$MN = NP$ c.q.d.

Solução apresentada pelo aluno Antônio Gilioli, do Instituto de Educação "Caetano de Campos" (1958).

Com relação a desigualdade entre lados de um triângulo (demonstrando diretamente).

6. Demonstrar: *"Em todo triângulo, qualquer lado é maior do que a diferença dos outros dois".*

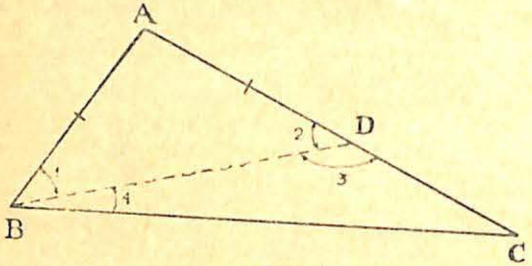


Fig. 6

Seja o $\triangle ABC$ (fig. 6), onde

$H \{ AC > AB$

$T \{ BC > AC - AB$

Demonstração:

1. Sôbre AC tomemos D, tal que $AD = AB$. Logo:

$$DC = AC - AB$$

2. Com relação ao $\triangle ABD$ (isósceles), temos: $\hat{1} = \hat{2}$; $\hat{3} > \hat{1}$ (externo) e, portanto:

$$\hat{3} > \hat{2}.$$

3. Sendo: $\hat{2} > \hat{4}$ (externo, em relação ao $\triangle BDC$), segue que: $\hat{3} > \hat{4}$ e como num $\triangle$ "ao maior ângulo opõe-se o maior lado" (n.º 45, recíproca), temos ($\triangle BDC$):

$$BC > DC$$

ou, substituindo DC, que $BC > AC - AB$.

c.q.d.

Solução apresentada pela aluna Michaela Beresteanu, 3.ª Série X, do Colégio Rio Branco, São Paulo (1960).

Com relação aos ângulos externos de um triângulo equilátero

7. Demonstrar: *"Em todo triângulo equilátero, qualquer ângulo externo é maior que qualquer ângulo interno".* (*)

Seja o $\triangle ABC$ equilátero (fig. 7)

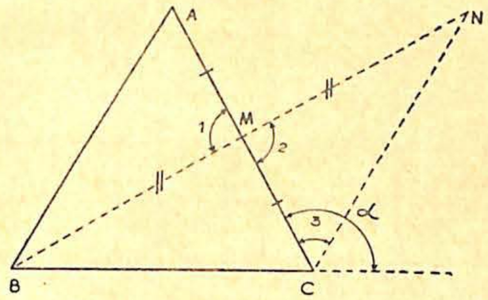


Fig. 7

Logo:

$H \begin{cases} AB = BC = AC \\ \alpha \text{ ângulo ext. qualquer} \end{cases}$

$T \{ \hat{\alpha} > \hat{A};\ \hat{\alpha} > \hat{B};\ \hat{\alpha} > C$

Demonstração:

1. Seja M o ponto médio do lado AC; unamos M a B e prolonguemos BM de um segmento $MN = BM$. Liguemos N a C e consideremos os $\triangle$s ABM e MNC;

2. $\triangle ABM = \triangle MNC$

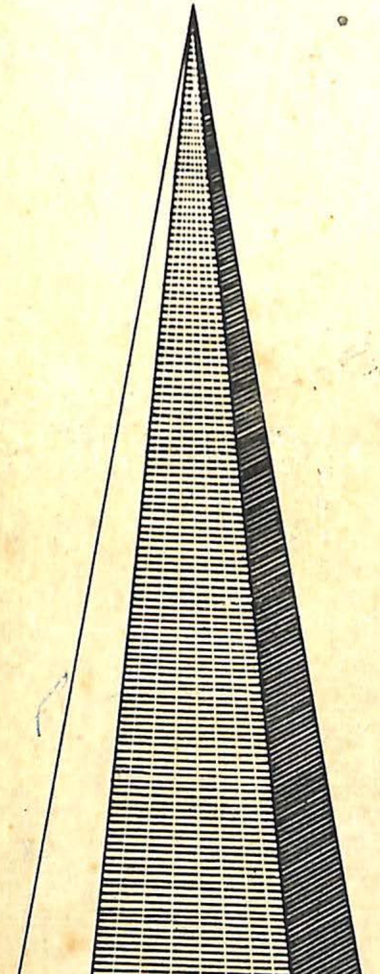
$$\text{(L.A.L.)} \begin{cases} BM = MN \text{ (p/construção)} \\ \hat{1} = \hat{2} \text{ (o.p.v.)} \\ MA = MC \text{ (p/construção)} \end{cases} \quad \text{e portanto: } \hat{A} = \hat{3}$$

3. Sendo $\hat{\alpha} > \hat{3}$ ($\hat{\alpha}$ contém $\hat{3}$), temos que $\hat{\alpha} > \hat{A}$, e como um triângulo equilátero tem todos os ângulos internos iguais ($\hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$), concluímos que: $\hat{\alpha} > \hat{A}$, $\hat{\alpha} > \hat{B}$ e $\hat{\alpha} > \hat{C}$.

c.q.d.

Solução apresentada pelo aluno Cloves Marques da Silva, do Colégio Diocesano de Garanhuns, *Pernambuco* (1961).

(*) Sem usar a teoria das paralelas.



35+

0,-1,-2,-3,-4,

São Paulo Editora S. A.