Governo do Estado do Rio de Janeiro
Secretaria de Estado da Educação e Cultura
Laboratório de Currículos

matemática

reformulação de currículos

Matemática
5.ª à 8.ª série

Governo do Estado do Rio de Janeiro
Secretaria de Estado de Educação e Cultura
Laboratório de Currículos

reformulação de currículos

Matemática
5.ª à 8.ª série

Subsídios teóricos e sugestões de atividades

Ministério da Educação e Cultura
Fundação Nacional de Material Escolar
Rio de Janeiro
1982

Este trabalho, elaborado por equipe técnica do Laboratório de Currículos, foi editado sendo
Governador do Estado do Rio de Janeiro
Antônio de Pádua Chagas Freitas

Secretário de Estado de Educação e Cultura
Arnaldo Niskier

Subsecretária de Estado de Educação e Cultura
Edília Coelho Garcia

Chefe de Gabinete
Cylene Castellões Gallart

Diretora do Laboratório de Currículos
Fátima Cunha Ferreira Pinto

Na elaboração deste trabalho, o Laboratório de Currículos contou com a participação dos seguintes técnicos:

Diva Maria Brêtas de Noronha

José Guilherme Peixoto Barbosa

Leila Pereira Pinto Alcure

Luiz Antonio Garcia

Estela Kaufman Fainguelernt

Amélia Maria Noronha Pessoa de Queiroz

Maria José Araújo Montes

Sumário

Edição promovida pela Secretaria de Estado de Educação e Cultura do Rio de Janeiro em convênio com a Fundação Nacional de Material Escolar.

Impresso no Brasil

Depósito legal na Biblioteca Nacional, conforme Decreto n.º 1.825, de 20 de dezembro de 1907.

ISBN 85-222-0012-2 Geral
ISBN 85-222-0021-1 v.9

S446r Rio de Janeiro. Secretaria Estadual de Educação e Cultura. Laboratório de Currículos.
Reformulação de currículos; subsídios teóricos e sugestões de atividades / Laboratório de Currículos da Secretaria Estadual de Educação e Cultura — Rio de Janeiro: FENAME, 1982.
9 v.: il., gráf., mapas, 28 cm.
Bibliografia.
Notas de rodapé.

CONTEÚDO: v. 1. Iniciação escolar e alfabetização. — v. 2. Primeira e segunda séries. — v. 3. Terceira série. — v. 4. Quarta série. — v. 5. Língua Portuguesa. — v. 6. Educação artística. — v. 7. Estudos sociais. — v. 8. Ciências. — v. 9. Matemática (os v. 5.º ao 9.º são específicos da 5.ª à 8.ª série do 1.º Grau).
1. Currículo escolar. 2. Método de ensino. 3. Educação. I. Fundação Nacional de Material Escolar, **Rio de Janeiro, ed.** II. Título.

82-022 MEC/FENAME/RJ CDD — 375

Capítulo 9
Grupos

Diva Maria Brêtas de Noronha
Leila Pereira Pinto Alcure

As estruturas algébricas desempenham papel importante em todo campo da Matemática. No ensino de 1.º grau interessa-nos mais seu aspecto unificador que seu desenvolvimento formal.

Sendo **grupo**, entre as atividades de maior aplicabilidade em Matemática, a mais simples, damos, aqui, algumas atividades introdutórias e de aplicação deste conceito. Este será desenvolvido e aplicado mais tarde quando do estudo dos racionais, reais e equações. Procuramos dar ênfase aos conceitos e propriedades em vez de aos métodos e habilidades para seu uso.

São apresentados vários jogos introdutórios à referida noção, mas, caberá ao professor julgar da necessidade de dar uma ou várias dessas atividades, assim como elaborar outras quando perceber que a noção não foi bem apreendida.

Os primeiros jogos são estruturados em conjuntos finitos não numéricos, onde é mais fácil destacar as propriedades que caracterizam esta estrutura. Seguem-se atividades em conjuntos finitos numéricos.

Uma vez identificadas as propriedades da estrutura, seguem-se atividades onde cada propriedade é trabalhada separadamente. À descoberta da estrutura não se devem seguir exigências quanto ao rigor do raciocínio nem elegância da escrita.

Finalmente são apresentadas equações simples em $\mathbf{Z}$, $+$, primeiro grupo infinito que o aluno encontra, como exemplo da aplicação do conceito.

Atividade 1

Objetivo: Introduzir a noção de grupo.

Modo operacional

a) Pedir a um aluno que se coloque de pé na frente da sala, virado para a turma. Dar um nome a essa posição; por exemplo, frente (F). Pedir que dê uma, duas, três voltas em torno de si mesmo. Qual a posição final após um número inteiro de voltas completas? Verificar o que aconteceu.

b) Pedir agora a outro aluno que se coloque de pé na frente da sala, mas de costas para a turma. Dar um nome a essa outra posição; por exemplo, costas (C). Pedir que dê uma, duas, três, quatro voltas em torno de si mesmo. Qual a posição final após um número inteiro de voltas completas? Verificar o que aconteceu.

c) Identificar F e C como estados ou posições e a volta (V) como movimento e comparar a posição inicial e final de cada aluno.
Observar que um número inteiro de voltas completas não altera a posição inicial.

Atividade 2

Objetivo: Introduzir a noção de grupo.

Modo operacional

a) Pedir a um aluno que se coloque de pé, na frente da sala, virado para a turma. Dar um nome a essa posição, como por exemplo, frente (F). Pedir que dê meia-volta em torno de si mesmo (MV). Qual a posição final após a meia-volta?

b) Pedir a outro aluno que se coloque de pé, na frente da sala mas de costas para a turma. Dar um nome a essa outra posição; por exemplo, costas (C). Pedir que gire meia-volta, em torno de si mesmo. Qual a posição final após a meia-volta?

c) Comparar a posição inicial e final de cada aluno.
Observar que uma meia-volta altera a posição inicial.

Atividade 3

Objetivo: Introduzir a noção de grupo.

Modo operacional

a) Pedir a um aluno que se coloque de pé, na frente da sala em qualquer posição. Fazê-lo dar uma volta seguida de meia-volta em torno de si mesmo.

Depois, meia-volta seguida de meia-volta e finalmente meia-volta seguida de uma, duas ou três voltas.

b) Analisar cada uma das posições finais após os movimentos.

c) Pedir que completem, em seguida, frases como:

— volta seguida de volta equivale a ____________________

— volta seguida de meia-volta equivale a ____________________

— meia-volta seguida de meia-volta equivale a ____________________

— meia-volta seguida de uma volta equivale a ____________________

d) Pedir ainda que completem a tabela:

seguida de	V	MV
V		
MV		

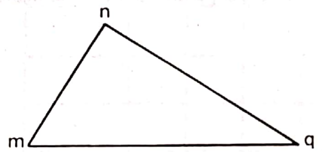
Fazer observações a respeito da tabela acima.

Atividade 4

Objetivo: Introduzir a noção de grupo.

Modo operacional

a) Traçar um triângulo no chão e propor o seguinte jogo aos alunos:



— Neste jogo temos três estados, pois podemos estar em m, n ou q.
Vamos dar como regras do jogo as três situações possíveis:
p = permanecer no mesmo lugar.
H = caminhar de um vértice ao seguinte no sentido horário.
A = caminhar de um vértice ao seguinte no sentido anti-horário.

— Um aluno colocar-se-á sobre um dos vértices; por exemplo m. Fazendo o movimento H, verificar onde chegou. Partindo daí, fazer novamente o movimento H e verificar onde chegou. Há alguma maneira de ir do vértice m ao vértice q, com um só movimento?
Os alunos deverão concluir que H o H = A.

b) Repetir a atividade partindo dos outros vértices. Verificar que há três estados: m, n, q e três movimentos: H, A, P.

c) Fazer todas as composições possíveis.

d) Preencher a seguir o quadro com os resultados dessas composições:

O	H	A	P
H	A		
A			
P			

Atividade 5

Objetivo: Introduzir a noção de grupo.

Modo operacional

a) Considerar o conjunto A = { 1, 2, 3 }. Escolher dois elementos quaisquer de A e adicioná-los. Os números escolhidos podem ser iguais. Depois de adicioná-los, dividir a soma por 3 e escrever o **resto** da divisão.

b) Fazer o mesmo para todos os pares possíveis.

c) Completar:

dupla	soma	resto da divisão por 3
(1, 1)	2	2
(1, 2)	3	0
(1, 3)	___	___
(2, 1)	___	___
(2, 2)	___	___
(2, 3)	___	___
(3, 1)	___	___
(3, 2)	___	___
(3, 3)	___	___

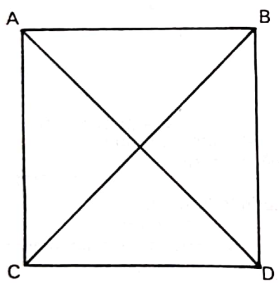
d) Verificar se o resultado encontrado pode ser relacionado com o da Atividade 4.

Atividade 6

Objetivo: Introduzir a noção de grupo.

Modo operacional

a) Desenhar um quadrado no chão da sala com os lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ paralelos à parede desta.



b) Pedir a um aluno X para se colocar de pé no ponto A e a uma aluna Y para escolher outro vértice para ficar. X e Y poderão se deslocar sobre as linhas do quadrado. Teremos assim quatro movimentos: **paralelo, perpendicular, diagonal** e **nulo**, que serão as regras do nosso jogo.

c) Pedir a X para fazer os movimentos paralelo e perpendicular e verificar onde chegou. Poderia com um único movimento chegar ao mesmo ponto?

d) Pedir a Y para fazer os movimentos paralelo, diagonal e perpendicular. Onde deve chegar? Com um único movimento poderia chegar ao mesmo local?

e) Repetir o exercício achando outras relações entre os diferentes movimentos. Combinar dois, três ou os quatro movimentos.

f) Os movimentos podem ser combinados dois a dois de 16 maneiras diferentes. Encontrá-las. Esses 16 pares podem ser substituídos por um único movimento equivalente. Fazer uma tabela com os resultados.

Atividade 7

Objetivo: Introduzir o conceito de grupo.

Modo operacional

Considerando o conjunto: $A = \{ 1, 3, 5, 7 \}$, multiplicar os elementos dois a dois e dividir o produto por 8. Escrever o resto.

a) Completar:

dupla	produto	resto da divisão por 8
(1, 1)	1	1
(1, 3)	3	3
(1, 5)	____	____
(1, 7)	____	____
(3, 1)	____	____
(3, 3)	____	____
(3, 5)	____	____
(3, 7)	____	____
(5, 1)	____	____
(5, 3)	____	____
(5, 5)	____	____
(5, 7)	____	____
(7, 1)	____	____
(7, 3)	____	____
(7, 5)	____	____
(7, 7)	____	____

— Observar os restos. Há algum número par? Quantos são os restos possíveis?

b) Completar a tabela:

$\otimes$	1	3	5	7
1	----	----	----	----
3	----	----	7	----
5	----	----	----	3
7	----	----	----	----

— Observar que:

- **1 é elemento neutro** porque
  $a \otimes 1 = 1 \otimes a = a$
  qualquer que seja $a \in A$
- Todo elemento composto com ele mesmo tem como resultado 1, o que traduzimos por: todo elemento é **simétrico** de si mesmo.
- Se aplicarmos a operação $\otimes$ a dois elementos quaisquer de A, o resultado é um elemento de A.

A essa propriedade chamaremos **lei interna** ou **fechamento.**

c) Completar:

$(1 \otimes 3) \otimes 5 =$ ______ $\quad 1 \otimes (3 \otimes 5) =$ ______
$(1 \otimes 3) \otimes 7 =$ ______ $\quad 1 \otimes (3 \otimes 7) =$ ______
$(1 \otimes 5) \otimes 7 =$ ______ $\quad 1 \otimes (5 \otimes 7) =$ ______
$(3 \otimes 5) \otimes 7 =$ ______ $\quad 3 \otimes (5 \otimes 7) =$ ______
$(5 \otimes 1) \otimes 3 =$ ______ $\quad 5 \otimes (1 \otimes 3) =$ ______

d) Propor exercícios como estes até que os alunos sejam capazes de concluir que para quaisquer a, b, c $\in$ A.

$$a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c.$$

o que significa que a operação $\otimes$ é **associativa.**

e) Concluir com os alunos que um conjunto A com uma operação $\otimes$ com as propriedades anteriores, isto é,

- fechada
- associativa
- possui elemento neutro
- todo elemento tem um simétrico

é chamado **grupo.**

Atividade 8

Objetivo: Identificar o 0 (zero) como elemento neutro da adição em $\mathbb{Z}$.

Modo operacional

a) Completar:

$0 + 3 =$ ____________
$0 + 5 =$ ____________
$0 + (-18) =$ ____________
$0 + (-131) =$ ____________

$3 + 0 =$ ____________
$5 + 0 =$ ____________
$-18 + 0 =$ ____________
$-131 + 0 =$ ____________

b) Completar a seguir a tabela:

+	0	− 8	2	− 3	− 6	21	284
0							
− 8							
2							
− 3							
− 6							
21							
284							

c) Concluir que se $a \in \mathbb{Z}$, então, $a + 0 = a = 0 + a$, o que mostra que **0** é o elemento neutro para a adição dos inteiros.

Atividade 9

Objetivo: Identificar a associatividade da adição em $\mathbb{Z}$.

Modo operacional

a) Completar a tabela:

a	b	c	a+b	b+c	(a+b) + c	a + (b+c)
3	5	4				
− 2	3	− 5				
8	− 4	− 1				
− 6	− 3	− 7				
− 1	8	− 9				
⋮						

b) Concluir a partir tabela que:
se a, b, c ∈ ℤ, então a + (b+c) = (a+b) + c, o que significa que a adição é associativa em ℤ.

Atividade 10

Objetivo: Identificar o simétrico em ℤ, + de um elemento.

Modo operacional

a) Pedir aos alunos que completem adições de inteiros, tais como:

3 + ... = 0
− 5 + ... = 0
..... +(− 6) = 0
a + ... = 0

b) Concluir que todo inteiro tem **simétrico** aditivo.

Atividade 11

Objetivo: Identificar estrutura de grupo.

Modo operacional

a) No conjunto M = { 0, 1, 2, 3 } vamos definir uma operação ⊕ fazendo x ⊕ y = r, onde r é o resto da divisão de x + y por 4.

— Completar a tabela abaixo:

⊕	0	1	2	3
0				
1				
2				
3				

b) Verificar se a operação ⊕ é associativa. É comutativa? Qual o elemento neutro de ⊕?

Atividade 12

Objetivo: Identificar estrutura de grupo comutativo.

Modo operacional

a) $\mathbb{Z}$ é o conjunto dos inteiros. Verifique que $\mathbb{Z}$, + é um grupo comutativo.
Verifique se $\mathbb{Z}_0$, • é um grupo?
b) $\mathbb{N}$ é o conjunto dos naturais. Verique se $\mathbb{N}$, + é um grupo comutativo.

Atividade 13

Objetivo: Introduzir a simplificação nos grupos.

Modo operacional

a) Se x e y são elementos de A, dizer que x = y significa que **x** e **y** são duas representações do **mesmo elemento** de A.
Se x e y são números inteiros e x = y, indagar o que se pode afirmar a respeito de:

$x + 1$ e $y + 1$
$x + 2$ e $y + 2$
$x + 5$ e $y + 5$
$x + 92$ e $y + 92$

Concluir daí que:

se $x, y, z \in \mathbb{Z}$, $x = y$, então $x + z = y + z$
que chamaremos de regra de simplificação.

b) Reciprocamente o que se pode concluir a respeito dos inteiros x e y se $x + z = y + z$?

Observação: Como $\mathbb{Z}$, + é um grupo, todo elemento $z \in \mathbb{Z}$ admite um simétrico $-z$; então,

$$\begin{aligned} x + z = y + z &\Rightarrow x + z + (-z) = y + z + (-z) \\ &\Rightarrow x + 0 = y + 0 \\ &\Rightarrow x = y \end{aligned}$$

Concluir que para todo $x, y, z \in \mathbb{Z}$

$x = y \Leftrightarrow x + z = y + z$

Atividade 14

Objetivo: Resolver equações em um grupo.

Modo operacional

a) Resolver as equações em $\mathbb{Z}$, destacando cada propriedade utilizada:

a) $x + 5 = 12$
b) $x + (-8) = 21$
c) $2(x - 5) = 0$
d) $4x - 6 = 3x + 4$

Observação: Pedir aos alunos que justifiquem cada etapa da resolução dessas equações por uma das propriedades do grupo $\mathbb{Z}$, +.

Atividade 15

Objetivo: Utilizar o conceito de grupo.

Modo operacional

a) No conjunto M = { a, b, c, d, e } definir a operação * pelas regras seguintes que chamaremos de axiomas:

axioma A_1: a é o elemento neutro para a operação * em M
axioma A_2: a operação * é comutativa
axioma A_3: a operação * é associativa
axioma A_4: $a * a = c$, $a * b = d$, $a * c = b$, $a * d = e$

b) Pedir aos alunos para preencherem a primeira linha da tabela abaixo:

*	a	b	c	d	e
a					
b					
c					
d					
e					

A seguir, perguntar ou propor:

— Quais os axiomas que utilizaram acima?
— Como deduzir a primeira coluna? Completar.
— Quais os axiomas que foram utilizados?
— Completar a última linha e última coluna.
— Para calcular c * c, utilizar as equivalências

$$x = c * c \underset{\square}{\Longleftrightarrow} x = (a * a) * c \underset{\square}{\Longleftrightarrow} x = a * (a * c) \underset{\square}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Longleftrightarrow x = a * b \underset{\square}{\Longleftrightarrow} x = d$$

e indicar em cada retângulo o axioma utilizado.

— Calcular c * d e c * b.
— Quais resultados você pode deduzir?
— Completar a tabela dada no início.
— Completar o simétrico, pela operação *, de

a é ____________________
b é ____________________
c é ____________________
d é ____________________
e é ____________________

c) Calcular:

c * c
c * c * c
c * c * c * c
c * c * c * c * c
c * c * c * c * c * c

d) Fazer o mesmo com a, b, d, e. O que você observa?