



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Claver Francisco Palomino Avalos

Simulação Quântica da Eletrodinâmica Quântica com Espinores

Florianópolis
2020

Claver Francisco Palomino Avalos

Simulação Quântica da Eletrodinâmica Quântica com Espinores

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de mestre em Física.
Orientador: Prof. Bruno G. Taketani, Dr.

Florianópolis
2020

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Avalos, Claver Francisco Palomino
Simulação quântica da eletrodinâmica quântica com espinores
/ Claver Francisco Palomino Avalos ; orientador, Bruno
Gouvêa Taketani , 2020.
121 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas,
Programa de Pós-Graduação em Física, Florianópolis, 2020.

Inclui referências.

1. Física. 2. Simulação quântica. 3. Eletrodinâmica
quântica. 4. Jordan-Wigner. 5. Computação quântica. I. ,
Bruno Gouvêa Taketani. II. Universidade Federal de Santa
Catarina. Programa de Pós-Graduação em Física. III. Título.

Claver Francisco Palomino Avalos

Simulação Quântica da Eletrodinâmica Quântica com Espinores

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Eduardo Souza Fraga, Dr.
Instituição Universidade Federal do Rio de Janeiro

Prof. Emmanuel Grãve De Oliveira, Dr.
Instituição Universidade Federal de Santa Catarina

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestre em Física.

Coordenação do Programa de
Pós-Graduação

Prof. Bruno G. Taketani, Dr.
Orientador

Florianópolis, 2020.

Este trabalho é dedicado à minha mãe, ao meu querido
irmão Angel e a minha querida irmã Yulissa.

AGRADECIMENTOS

À minha mãe, meu irmão Angel e minha irmã Yulissa pelo apoio incondicional e motivação para eu continuar a estudar, pois sem eles esse trabalho não seria possível. Também, sou grato aos demais membros da minha família que ajudaram direta ou indiretamente para que seja possível continuar meus estudos

Ao meu orientador Bruno G. Taketani pelo apoio, compreensão e paciência durante meu mestrado. Da mesma forma, agradeço aos professores Paulo Henrique Souto Ribeiro e Eduardo Inácio Duzzioni.

Aos professores e colegas do Grupo de Informação Quântica do Sul- GIQSUL, pela convivência e discussões.

Aos membros da banca por terem aceitado avaliar o meu trabalho, assim como pelas sugestões feitas.

Aos professores de Pós-Graduação em Física da UFSC que direta e indiretamente contruíram para minha formação acadêmica. Também, ao secretário da Pós-Graduação, Antônio Marcos Machado, que me ajudou muito em diversos momentos.

À todos os meus amigos e colegas que de alguma forma contruíram para a finalização deste trabalho.

À CAPES pelo apoio financeiro, à FAPESC e ao PPGFSC pelo auxílio a eventos.

*“ Nature isn’t classical, dammit,
and if you want to make a simulation of
nature, you’d better make it quantum mechanical,
and by golly it’s a wonderful problem,
because it doesn’t look so easy.”
(FEYNMAN, R., 1982)*

RESUMO

Atualmente, a computação clássica é uma ferramenta útil que permite simular e descrever muitos fenômenos da Física. No entanto, os computadores clássicos não são eficientes na simulação de fenômenos quânticos. Foi em 1982, quando R. Feynman propôs usar um computador quântico capaz de imitar a dinâmica de um sistema quântico que não pode ser implementado em laboratório ou analisado com os computadores clássicos atuais. A simulação quântica é um processo pelo qual um sistema é criado para imitar outro. Levando em consideração a proposta de Feynman, propõe-se um protocolo de simulação quântica das interações que ocorrem na eletrodinâmica quântica no gauge de Coulomb, considerando graus de liberdade internos como o spin do elétron e polarização do fóton. O mapeamento de férmions para qubits é realizado usando a transformação de Jordan-Wigner. Este protocolo mostra um desafio para a simulação quântica da QED, devido aos 64 termos de interação descrito pelo Hamiltoniano de interação. A implementação de um sistema análogo ou digital desse protocolo poder ser útil em alguns fenômenos descritos na teoria quântica de campo e química quântica onde a auto-interação de elétrons ou interação elétron-pósitron é estudada considerando o spin.

Palavras-chave: Simulação Quântica; Eletrodinâmica Quântica; Jordan-Wigner; Computação Quântica; Teoria Quântica de Campos; Feynman.

ABSTRACT

Currently, classical computing is a useful tool that allows you to simulate and describe many physics phenomena. However, classical computers are not efficient in simulating quantum phenomena. It was in 1982, when R. Feynman proposed to use a quantum computer capable of imitating the dynamics of a quantum system that cannot be implemented in the laboratory or analyzed with today's classic computers. Quantum simulation is a process by which one system is created to mimic another. Taking into account Feynman's proposal, a protocol for quantum simulation of interactions that occur in quantum electrodynamics in Coulomb's gauge is proposed considering internal degrees of freedom such as electron spin and photon polarization. The mapping of fermions to qubits is performed using the Jordan-Wigner transformation. This protocol presents a challenge for the quantum simulation of QED, due to the 64 interaction terms described by the interaction Hamiltonian. The implementation of an analog or digital system of this protocol can be useful in some phenomena described in quantum field theory and Quantum chemistry where electron self-interaction or electron-positron interaction is studied considering the spin.

Keywords: Quantum Simulation; Quantum Electrodynamics; Jorda-Wigner; Quantum Computing; Quantum Field Theory; Feynman.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Teoria dos buracos	28
Figura 2 – Processo de aniquilação e^+e^-	30
Figura 3 – Quadri vetor de Polarização	42
Figura 4 – Representação esquemática da simulação quântica	50
Figura 5 – Simulação quântica digital	53
Figura 6 – Representação esquemática do protocolo de simulação quântica da QED usando gauge de Coulomb	56
Figura 7 – Transformação de Jordan-Wigner	58
Figura 8 – Representação esquemática do mapeamento dos operadores de férmions e antiférmions em operadores de spin dos qubits	74
Figura 9 – Esquema de um Sistema Quântico Digital	82

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	19
2	CAMPOS QUÂNTICOS	25
2.1	Equação de Dirac	25
2.1.1	Forma Covariante da Equação de Dirac	25
2.1.2	Antipartículas	27
2.1.2.1	Teoria dos buracos	27
2.1.2.2	Interpretação de Feynman-Stückelberg	29
2.2	Quantização Canônica do Campo de Dirac	30
2.3	Campo Eletromagnético Clássico	34
2.3.1	Transformação de gauge	35
2.3.1.1	Gauge de Lorenz	36
2.3.1.2	Gauge de Coulomb	37
2.4	Quantização do Campo Eletromagnético livre	38
2.5	Quadrivetor de Polarização	41
2.6	Interações	43
2.6.1	Eletrodinâmica Quântica	43
2.6.1.1	Representação de Interação	46
3	SIMULAÇÃO	49
3.1	Simulação Quântica	50
3.1.1	Diferença entre a Simulação Quântica Análoga e Digital	51
3.2	Simulação Quântica da QED	53
3.2.1	Transformação de Jordan-Wigner	57
4	PROTOCOLO DE SIMULAÇÃO QUÂNTICA DA QED	61
4.1	Método	61
4.2	Representação da Transformada de Fourier $\tilde{G}_{f,\bar{f}}$	66
4.3	Mapeamento	73
4.4	Discussões	80
5	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS	83
	REFERÊNCIAS	85
	APÊNDICE A – NOTAÇÕES	91
	APÊNDICE B – DECOMPOSIÇÃO DA DENSIDADE DE CORRENTE	93
	APÊNDICE C – REPRESENTAÇÃO DE INTERAÇÃO	95
	APÊNDICE D – EXPANSÃO DO CAMPO FERMIÔNICO	99

APÊNDICE E – TRANSFORMADA DE FOURIER $\widetilde{G}_{f,\bar{f}}(p_{f,\bar{f}}, x, s)$	103
APÊNDICE F – HAMILTONIANO FÉRMION-FÉRMION $\mathcal{H}_{f,f}$	105
APÊNDICE G – HAMILTONIANO ANTIFÉRMION-ANTIFÉRMION $\mathcal{H}_{\bar{f},\bar{f}}$	109
APÊNDICE H – HAMILTONIANO FÉRMION-ANTIFÉRMION $\mathcal{H}_{f,\bar{f}}$	113
APÊNDICE I – HAMILTONIANO ANTIFÉRMION-FÉRMION $\mathcal{H}_{\bar{f},f}$	117

1 INTRODUÇÃO

A Física consiste em interpretar fenômenos que ocorrem na natureza por meio da linguagem matemática, construindo modelos que nos permitem interpretar, descrever e prever a natureza. Geralmente, grandes cálculos são necessários para extrair informações dos modelos. Por este motivo, são criados algoritmos adequados que podem ser implementados em um computador, sendo capazes de realizar cálculos mais rapidamente do que qualquer ser humano.

A computação clássica é uma ferramenta que nos permite simular e descrever muitos fenômenos da física. No entanto, ela tem algumas limitações ao tentar simular sistemas que exibem crescimento exponencial devido ao crescimento exponencial de recursos computacionais (tempo de execução e memória) com o tamanho do sistema. Outra limitação dos computadores clássicos é que, conforme os transistores diminuem de tamanho por um fator de 2 a cada dois anos, o desempenho do computador aumenta. No entanto, conforme os transistores diminuem, eles atingirão um tamanho em que os efeitos quânticos se tornarão significativos. A computação descrita pelas leis da mecânica quântica é denominada de computação quântica, ela tem como objetivo aproveitar o regime quântico para realizar cálculos de uma maneira diferente e presumivelmente mais eficiente.

Os computadores clássicos utilizam linguagem binária, tendo como unidade fundamental de informação ao *bit*, que pode assumir apenas dois valores, 0 e 1. O bit pode ser representado fisicamente, por exemplo, como um capacitor descarregado para registrar um 0 e um capacitor carregado para registrar um 1. Enquanto um computador quântico tem como unidade fundamental de informação ao bit quântico ou *qubit*, um conceito análogo ao bit clássico. O qubit é representado pelos estados quânticos $|0\rangle$ e $|1\rangle$, que podem corresponder aos estados 0 e 1 dos bits clássicos. A diferença entre bits e qubits é que um qubit pode ser uma combinação linear dos estados $|0\rangle$ ou $|1\rangle$,

$$|\psi\rangle = a_1|0\rangle + a_2|1\rangle, \quad (1.1)$$

onde a_1 e a_2 são números complexos. A probabilidade de medir o estado $|0\rangle$ é $|a_1|^2$, e o estado $|1\rangle$ com probabilidade $|a_2|^2$. O qubit pode ser representado como um sistema quântico de dois níveis, por exemplo, o qubit $|0\rangle$ pode ser o estado fundamental do elétron; e o qubit $|1\rangle$, o primeiro estado excitado do elétron. Alguns sistemas físicos usados para representar aos bits quânticos são: fótons ópticos, íons aprisionados, spins nucleares, circuitos supercondutores, etc. [1] A simulação de sistemas quânticos mediante um computador clássico é limitado, devido a que os sistemas quânticos crescem exponencialmente. Por isso, em 1982, R. Feynman propôs usar um computador quântico para simular a dinâmica dos sistemas quânticos [2], levando cientistas ao desenvolvimento da computação quântica. A conjectura de Feynman de que um com-

putador quântico poderia simular outros sistemas quânticos com mais eficiência do que um computador clássico deu a base da simulação quântica, um processo pela qual um sistema é desenvolvido para imitar outro [3], permitindo o estudo de sistemas que crescem exponencialmente (por exemplo, os sistemas quânticos) que são difíceis de implementar em laboratório ou de analisar com os computadores clássicos atuais.

Um sistema quântico controlável que pode ser usado para simular outros sistemas é chamado de simulador quântico. Os simuladores quânticos podem fornecer informações sobre fenômenos quânticos que não podem ser previstos ou simulados de maneira clássica nem são acessíveis experimentalmente. Além disso, eles poderiam fornecer um meio para explorar novos fenômenos Físicos [4].

A simulação pode ser realizada usando sistemas quânticos análogos ou digitais. Para isso, é necessário utilizar métodos ou transformações que relacionem a álgebra do sistema a simular com a álgebra do simulador quântico. Normalmente, o *hardware* do simulador é implementado por qubits e osciladores harmônicos; e a álgebra dos qubits é a álgebra das matrizes de Pauli, portanto, os qubits não se comportam como férmions ou bósons. Para realizar uma simulação análoga, é necessário realizar um mapeamento adequado, de forma que o Hamiltoniano (H_{sis}) que descreve o sistema seja semelhante ao Hamiltoniano (H_{sim}) que descreve ao sistema análogo; sendo assim capaz de extrair as informações desejadas do sistema a simular. Alguns sistemas análogos são de átomos neutros em redes óptica, íons aprisionados, circuitos supercondutores, fótons, etc. [4, 5]. Em contraste, em simuladores quânticos digitais, o operador de evolução do sistema simulado é implementado por uma sequência de portas lógicas quânticas. Devido à não comutatividade da mecânica quântica, muitas vezes é necessário usar a fórmula de *Baker-Campbell-Hausdorff* para aproximar a evolução total do sistema como o produto da evolução temporal de cada componente que compõe o Hamiltoniano do sistema simulado, considerando um pequeno intervalo de tempo. A vantagem da simulação digital é que ela é universal, uma vez que qualquer operador unitário pode ser escrito em termos de portas lógicas quânticas. Porém, esta simulação apresenta um termo de erro que vai depender do número de etapas em que o intervalo de tempo é dividido.

O processo de simulação quântica apresenta diversas aplicações em muitas áreas da Física: em cosmologia [6, 7], Física de altas energias [8–21], Física da matéria condensada [22, 23], etc. Além disso, é aplicado em química quântica [24].

Na *Mecânica Quântica Relativística* [8–13], protocolos de simulação quântica foram propostos para analisar o paradoxo de Klein [10] e Zitterbewegung [9]; em *Teoria Quântica de Campos* [14–21], o protocolo de simulação quântica na dimensão $1 + 1$ das interações entre férmions-antiférmions mediados por modos de campo bosônico maciço lento usando íons aprisionados foi proposto por *Casanova et al.* [15] e implementado experimentalmente considerando quatro níveis internos de um íon aprisi-

onado $^{171}\text{Yb}^+$ [18]. No entanto, para espaço-tempo contínuo, protocolos de simulação quântica da teoria quântica de campos considerando o grau interno de liberdade dos férmions e bósons ainda não foram propostos.

Os fenômenos de interação são comumente estudados na física, desde a colisão de dois corpos descritos pela física clássica até a interação das partículas fundamentais. Atualmente, as partículas fundamentais são classificadas pelo modelo padrão, onde os férmions descrevem as partículas da matéria e os bósons são partículas mediadoras de interação. Na natureza, são conhecidos quatro tipos de interações, a interação gravitacional, a eletromagnética, a fraca e forte, das quais as três últimas são mediadas por partículas bosônicas de spin-1 [25, 26].

A interação de partículas fundamentais pode ser descrita pela teoria quântica de campos, uma teoria que relaciona os conceitos da mecânica quântica, a relatividade restrita e o conceito de campos [27–31], onde os observáveis são chamados de operadores de campo. A Eletrodinâmica Quântica (QED, sigla em inglês) [32–34], parte da Teoria Quântica de Campos, descreve as interações da matéria-luz, isto é, as interações entre os campos de Dirac e o campo eletromagnético quantizado. A QED é considerada uma das teorias mais precisas da Física porque descreve com boa precisão o momento anômalo do elétron, o deslocamento de Lamb, etc. [32].

O campo de Dirac é um campo fermiônico de spin-1/2, cujos graus internos de liberdade são descritos pelos espinores de Dirac. O campo descreve a expansão de onda plana da aniquilação e criação de partículas (e antipartículas). Enquanto o campo eletromagnético livre é um campo vetorial que descreve partículas bosônicas sem massa de spin-1, o fóton; onde o grau interno de liberdade é dado pelo quadrivetor de polarização. A quantização do campo eletromagnético é difícil porque o fóton tem apenas dois graus de liberdade (as polarizações transversais), porém, o campo é definido por quatro componentes; mostrando assim que existe dois graus de liberdade que não apresentam significado físico. Portanto, para quantizar o campo, é necessário reduzir os graus internos de liberdade usando algumas condições de gauge. Por exemplo, o gauge de radiação, onde $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ e $A^0 = 0$, elimina dois graus internos de liberdade, tornando possível quantizar apenas as polarizações transversais. Porém, este gauge não é válido para todos os referenciais inerciais, ou seja, a invariância sob as transformações de Lorentz é perdida.

As interações na Teoria Quântica de Campos, assim como na QED, teoricamente, podem ser descritas por métodos perturbativos e pelos diagramas de Feynman [25, 27, 28]. Experimentalmente, são difíceis de implementar em laboratório ou de analisar usando computadores clássicos devido ao crescimento exponencial dos recursos computacionais. No entanto, o estudo da dinâmica do sistema quântico considerando todos os termos perturbativos pode ser possível através do processo de simulação quântica [15, 35]. Pode-se notar que um protocolo para imitar as interações que ocor-

rem na QED pode ser um desafio para a simulação quântica, porque muitas partículas com graus de liberdade, como o spin e a polarização, estão envolvidas.

Este trabalho propõe um protocolo para simular as interações que ocorrem na QED considerando os espinores de Dirac e as polarizações do fóton. Ou seja, é proposto um mapeamento para as interações de elétrons e pósitrons (com grau de liberdade dado pelo espinor) mediado por fótons (cujo grau de liberdade é sua polarização). Generalizando o método proposto por *Casanova et al.* [15, 35], para poder adicionar os graus internos de liberdade dos férmions de spin-1/2 e dos fótons, é possível definir modos de campo fermiônico e antifermiônico localizados. Como os simuladores quânticos são tipicamente representados por qubits, é necessário realizar um mapeamento para relacionar a álgebra dos férmions do sistema a simular, descrito pelo Hamiltoniano de interação da QED, com a álgebra dos férmion. Para isso, o mapeamento é construído usando a transformação de Jordan-Wigner unidimensional. [36–38], uma representação de férmions e antiférmions para diferentes configurações de spin para cima e para baixo pode ser mapeado usando quatro qubits.

Este trabalho, composto por 5 capítulos, detalha a parte teórica dos campos quantizados e o mapeamento para o protocolo de simulação quântica. No capítulo 2, os campos quantizados são descritos, começando com a equação da mecânica quântica relativística de Dirac e sua interpretação para funções de onda de energia positiva e negativa. Também é estudada a quantização do campo de Dirac usando a quantização canônica ou a segunda quantização. O campo eletromagnético clássico é expressa em forma covariante, definindo o quadri vetor potencial e a transformação de gauge local. Além disso, a quantização do campo eletromagnético livre é realizada considerando o gauge de radiação para quantizar apenas as polarizações transversais. O grau interno de liberdade dado pelo quadri vetor de polarização é descrito na mesma seção. Na última seção, a eletrodinâmica quântica é discutida, descrevendo a interação do campo de Dirac e o campo eletromagnético livre sob o gauge de Coulomb. As equações de interação são detalhadas e o Hamiltoniano de interação, e sua expressão quantizada, é obtida.

O capítulo 3 detalha o conceito de simulação quântica e suas aplicações. Além disso, se descreve as etapas a serem desenvolvidas para alcançar o protocolo de simulação quântica da QED. Neste capítulo, a transformação de Jorda-Wigner é discutida. No capítulo 4, é detalhado o desenvolvimento de todas as etapas descritas no capítulo 3. O hamiltoniano do sistema é mapeado usando a transformação de Jorda-Wigner unidimensional e, assim, o Hamiltoniano do simulador é obtido. Concluindo este capítulo, algumas discussões sobre o Hamiltoniano do simulador são descritas. Finalmente, no capítulo 5, se tem as conclusões e perspectivas futuras deste trabalho.

2 CAMPOS QUÂNTICOS

2.1 Equação de Dirac

A mecânica quântica relativística é uma teoria quântica que trabalha no contexto da relatividade restrita, isto é, trabalha com partículas que se propagam a velocidades próximas à velocidade da luz. Pode-se dizer que a teoria da mecânica quântica relativística começa em 1926 com a equação de Klein-Gordon¹, a partir da consideração da energia da relatividade restrita ($E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$) na equação de Schrödinger e usando os correspondentes operadores da mecânica quântica para energia $E = i\partial_t$ e momento linear $\mathbf{p} = -i\nabla$ da partícula. Usando as unidades naturais $\hbar = c = 1$ e a notação de Einstein, a equação de Klein-Gordon pode ser escrita como

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\psi(x) = 0 \quad (2.1)$$

onde m é a massa do elétron e $\psi(x)$ é a solução da equação de onda.

A energia relativística apresenta valores positivos e negativos, por isso, dois tipos de soluções de função de onda são obtidas. Soluções com energia positiva satisfazem as propriedades probabilísticas da mecânica quântica, no entanto, para soluções com energia negativa, a interpretação probabilística das funções de onda não é obtido. Devido a essa desvantagem, a densidade de probabilidade assumida é definida e interpretada como uma densidade de carga e, assim, os problemas de interpretação como probabilidades desaparecem. Além disso, a Eq. (2.1) não expressa exatamente as correções relativísticas da estrutura fina do átomo de hidrogênio de acordo como os resultados experimentais [26]. Contudo, a equação de Klein-Gordon é útil na teoria quântica de campos para descrever campos escalares (bósons com carga elétrica e spin-)[39].

2.1.1 Forma Covariante da Equação de Dirac

Devido à inconsistência da equação de Klein-Gordon em descrever o elétron no regime relativístico, em 1928, Paul Dirac propôs uma equação linear e invariante sob transformações de Lorentz [40], isto é, válida em qualquer sistema de referência inercial. Além disso, tem duas soluções (de energia positiva e negativa) que apresentam comportamento probabilístico; essas soluções satisfazem a equação de Klein-Gordon. A equação de Dirac é uma equação de matrizes de dimensão mínima 4×4 , cujas soluções são matrizes colunas [39, 41, 42].

¹ Originalmente, a equação de Klein-Gordon foi proposta por Schrödinger ao considerar a energia relativística em sua tentativa de descrever uma equação para a função de onda de uma partícula quântica. No entanto, essa equação teve algumas desvantagens em detalhar o comportamento probabilístico da função de onda do elétron, razão pela qual Schrödinger considerou a versão não-relativística da energia para obter a famosa *equação de Schrödinger*[32].

Na representação covariante, a equação de Dirac é

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) = 0 \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \quad , \quad (2.2)$$

onde m é a massa do elétron e $\psi(x)$ é a matriz coluna que representa a solução da equação de Dirac. As matrizes γ^μ de dimensão 4×4 , na representação de Dirac, são definidas mediante

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^k \\ -\sigma^k & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad k = x, y, z \quad , \quad (2.3)$$

onde a representação reduzida de matrizes 2×2 é usada, ou seja, $\mathbf{0}$ e $\mathbb{1}$ (matriz nula e unitária, respectivamente) são matrizes 2×2 , e σ_k são as matrizes de Pauli². γ^0 é hermitiana e γ^k é anti-hermitiana, e satisfazem

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \mathbb{1}, \quad (2.4)$$

onde $g^{\mu\nu}$ é o tensor métrico.

A função de onda de Dirac $\psi(x)$ é interpretada como um vetor coluna de quatro componentes, o chamado espinor de Dirac [34], ou seja, a solução da Eq. (2.2) deve ser expressa em forma de onda plana

$$\psi(x) = N w^r(\mathbf{p}) e^{-i\epsilon_r p \cdot x} \quad , \quad (2.5)$$

onde N é a constante de normalização, $w^r(\mathbf{p})$ é um espinor de quatro componentes descrito no espaço de momentos, e o termo de Euler determina a propagação e evolução temporal da onda. O valor do índice r determina se a solução é de energia positiva ou negativa. Para $r = 1, 2$, $\epsilon_r = 1$ descreve as soluções de energia positiva e, para $r = 3, 4$, $\epsilon_r = -1$ descreve as soluções de energia negativa [28].

Uma maneira de determinar os elementos do espinor de Dirac é substituindo a Eq. (2.5) na Eq. matricial (2.2) [43]. Outra maneira é aplicar uma transformação de Lorentz ao espinor de uma partícula em repouso, para obter a solução de uma partícula livre observada com velocidade v [39, 41].

Os espinores normalizados para soluções de energia positiva ($r = 1, 2$) e negativa ($r = 3, 4$) são

$$\begin{aligned} w^1(p) &= \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_+}{E+m} \end{pmatrix} \quad , \quad w^2(p) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_-}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix} \quad , \\ w^4(p) &= \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} \frac{p_-}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad w^3(p) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_+}{E+m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \end{aligned} \quad (2.6)$$

² A presença das matrizes de Pauli na equação de Dirac descreve ao spin como uma propriedade intrínseca do elétron. O sucesso de Dirac é fornecer a relação giromagnética exata do elétron $g = 2$. Além disso, descrever a correção relativística da estrutura fina do átomo de hidrogênio.

onde $p_{\pm} = p_x \pm ip_y$, E é a energia total do sistema e m é a massa do elétron. Os termos à esquerda descrevem os espinores de spin para cima e à direita descrevem os espinores de spin para baixo. Além disso, eles devem atender às seguintes condições de ortonormalização [Equações (2.7a, 2.7b)] e completude [Equações (2.7c, 2.7d)] [39, 44], dadas por

$$w_{r'}^{\dagger}(\epsilon_{r'}\mathbf{p})w_r(\epsilon_r\mathbf{p}) = \frac{E}{m}\delta_{rr'}, \quad (2.7a)$$

$$\bar{w}_{r'}(\mathbf{p})w_r(\mathbf{p}) = \epsilon_r\delta_{rr'}, \quad (2.7b)$$

$$\sum_{r=1}^4 w_{r\alpha}(\epsilon_r\mathbf{p})w_{r\beta}^{\dagger}(\epsilon_r\mathbf{p}) = \frac{E}{m}\delta_{\alpha\beta}, \quad (2.7c)$$

$$\sum_{r=1}^4 \epsilon_r w_{r\alpha}(\mathbf{p})\bar{w}_{r\beta}(\mathbf{p}) = \delta_{\alpha\beta}, \quad (2.7d)$$

onde α e β descrevem os elementos do espinor, e $\bar{w} = w^{\dagger}\gamma^0$. A Eq. (2.7a) mostra que a ortonormalização adquire um fator $\frac{E}{m}$ que compensa a contração de Lorentz do elemento de volume ao longo da direção do movimento, assim, a normalização da probabilidade é invariante [41]. A Eq. (2.6) pode ser reescrita usando

$$u(p, +s) = w^1(p), \quad u(p, -s) = w^2(p), \quad v(p, -s) = w^3(p), \quad v(p, +s) = w^4(p), \quad (2.8)$$

onde $u(p, \pm s)$ descreve o espinor para as partículas, e $v(p, \pm s)$ é o espinor para antipartículas. O spin é $+s$ se estiver na mesma direção que o momento linear \mathbf{p} da partícula e, $-s$ quando a direção do spin estiver na direção oposta ao momento linear.

A partir da Eq. (2.8), a solução de onda plana da equação de Dirac pode ser descrita.

2.1.2 Antipartículas

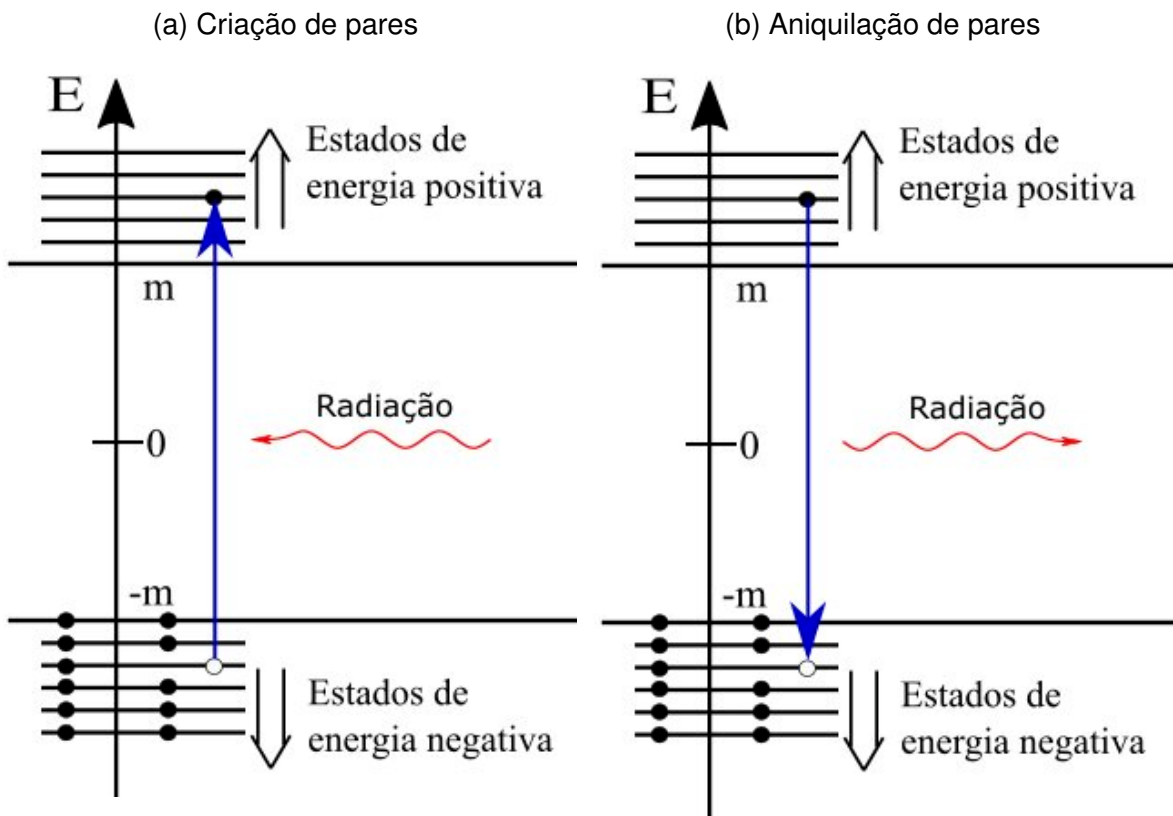
Como descrito anteriormente, as soluções da equação de Dirac têm uma densidade de probabilidade positiva. Em 1930, P. Dirac apresentou uma interpretação para soluções de energia negativa postulando a existência antipartículas [45]. A idéia de antipartículas se origina da interpretação proposta por P. Dirac com sua *Teoria dos buracos* ("Hole theory"). No entanto, apresenta algumas complicações e é inadequado para os bósons, levando a uma nova interpretação proposta por Stuckelberg e R. Feynman; abandonando assim a teoria dos buracos. As duas interpretações são explicadas nesta seção.

2.1.2.1 Teoria dos buracos

Devido ao sucesso da equação de Dirac na descrição do elétron, foi necessário fazer uma interpretação física para soluções de energia negativa. Dirac postulou que

todos os estados de energia negativa são preenchidos com elétrons de carga elétrica $-e$ e energia negativa $-E$ (com $E > 0$) e, para evitar transições entre níveis de energia negativa, esses elétrons devem satisfazer o princípio de exclusão de Pauli. Além disso, o vácuo é considerado com todos os níveis de energia negativa ocupados e os níveis de energia positiva vazios [41] (ver figura 1).

Figura 1 – Teoria dos buracos, os níveis de energia estão cheios de elétrons (representados por bolas pretas), a ausência de elétrons é representada por um buraco (pósitron). **a)** Criação de elétron-pósitron: um elétron ($-E < 0$) é excitado para um estado de energia positiva pela radiação criando um pósitron. **b)** Aniquilação elétron-pósitron: um elétron ($+E > 0$) interage com um buraco no estado de energia negativa (positrón) emitindo radiação.



Fonte – Figura retirada de [39]

Os elétrons em níveis de energia negativa podem absorver fótons e serem excitados para um estado de energia positiva. Quando isso ocorre, um buraco é criado no mar de energia negativa e uma transição de um elétron de carga $-e$ é observada no estado de energia positiva $+E$ (veja a figura 1a). A ausência de um elétron com carga $-e$ e energia $-E$, no mar de Dirac, representa a presença de uma antipartícula com carga $+e$ e energia positiva $+E$ denominada pósitron; assim, o efeito de excitação é conhecido como a produção de um par partícula-antipartícula, neste caso, elétron-pósitron. Além disso, um processo de aniquilação de partículas e antipartículas pode

ocorrer com a emissão de radiação, quando um elétron no estado de energia positivo $+E$ emite um fóton e interage com um pósitron [39, 42] (veja a figura 1b).

A existência de soluções de energia negativa leva à presença de antipartículas [41], então, a existência de antipartículas é uma propriedade geral de férmions e bósons. No entanto, a interpretação de Dirac não é aplicada aos bósons, já que não estão sujeitos ao princípio de exclusão de Pauli e nada impediria as transições entre os níveis de energia negativo. Diante desses problemas, é necessário reinterpretar soluções de energia negativa para férmions e bósons.

2.1.2.2 Interpretação de Feynman-Stückelberg

Outra interpretação para soluções de energia negativa, tanto para férmions quanto para bósons, foi inicialmente proposta por Stückelberg (1941) e Feynman (1948), considerando que partículas de energia negativa viajando para trás no tempo, equivale à uma antipartícula (com carga oposta) de energia positiva que se propaga para frente no tempo. Estabelecendo, assim, as bases para os diagramas de Feynman [46].

Considerando a solução dada na Eq. (2.5), a frequência da onda plana é $\omega = E$, portanto, a solução de energia negativa pode ser descrita como uma função de onda com frequência negativa, ou seja, tendo em conta o quadrimomento $-p^\mu = (-E, -\mathbf{p})$, $E > 0$, isso pode ser escrito como

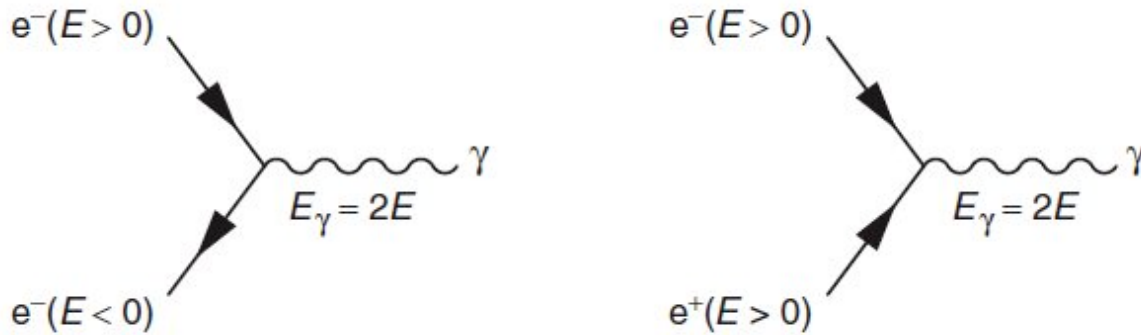
$$e^{-i(p^0 t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} \Rightarrow e^{i\{(-E)(-t) - (-\mathbf{p})(-\mathbf{x})\}} = e^{i(Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})}, \quad (2.9)$$

onde o termo à esquerda representa uma onda plana. Substituindo o quadrimomento $-p^\mu$ é obtida a expressão do meio, em que uma onda de frequência negativa e momento oposto $(-\mathbf{p})$ viaja na direção oposta ao espaço-tempo. Isso é equivalente a uma onda de frequência positiva e momento \mathbf{p} que viaja para a frente no espaço-tempo [25].

A interpretação de Feynman-Stückelberg foi desenvolvida no contexto da teoria quântica de campos e é usada nos diagramas de Feynman, essa interpretação é válida para férmions e bósons, portanto, a idéia sobre o mar de energia negativa é abandonada e o conceito de partículas com energia negativa viajando para trás no tempo é aplicado. A interpretação de Feynman-Stückelber considerada no processo de aniquilação elétron-pósitron é mostrado na figura 2.

A mecânica quântica relativística é uma teoria limitada, porque a equação de Dirac estabelece uma teoria de partícula única, o elétron. No entanto, as soluções mostradas e a interpretação para soluções de energia negativa exibem a presença de mais partículas. Por esse motivo, é necessária uma teoria que descreva muitas partículas[39], a teoria quântica de campos, onde a equação de Dirac para funções de onda é substituída pela equação de Dirac para campos quânticos [26].

Figura 2 – Processo de aniquilação e^+e^- . (esquerda) Um elétron de energia positiva E (entrando) emite um fóton de energia $2E$ e, para conservar energia, produz um elétron com energia $-E$ (saindo). Na interpretação de Feynman-Stückelberg, um pósitron de energia positiva E é aniquilado com o elétron com energia E para produzir um fóton de energia $2E$. Nesse caso, a partícula e a antipartícula se propaga para frente no tempo.



Fonte – Figura retirada de [47]

2.2 Quantização Canônica do Campo de Dirac

A teoria quântica de campos combina as principais teorias da física moderna: a teoria quântica, a relatividade de Einstein e o conceito de campo [27]. Ele descreve sistemas de muitas partículas que têm infinitos graus de liberdade [34], usando suas variáveis dinâmicas conhecidas como operadores de campo que são definidas em todos os pontos no espaço-tempo. Os operadores de campo, observáveis da teoria quântica de campos, são análogos aos observáveis da teoria clássica de campos e podem ser definidos usando métodos de quantização³.

O método de *quantização canônica* (também chamado de segunda quantização) é o primeiro método desenvolvido para quantizar teorias de campo, ele usa o formalismo Lagrangiano e expande campos quantizados em termos de operadores de criação e aniquilação. O método de *quantização por integrais de caminho* (ou *quantização funcional*) que é uma ferramenta poderosa para lidar com os aspectos formais da teoria quântica de campos, generaliza mais facilmente outras teorias em interação, como a eletrodinâmica quântica escalar e, especialmente, a teoria de gauge não-Abelianas [25, 27]. Outros métodos incluem quantização matemática, como *quantização geométrica*, *quantização em loop* e *quantização por deformação* [26].

O campo de Dirac descreve partículas fermiônicas com carga elétrica e spin-1/2, como o elétron. A quantização do campo livre de Dirac é obtida usando o método

³ Lembre-se de que na mecânica quântica a primeira quantização é usada para definir os observáveis (operadores de posição, momento linear, energia, etc.) que têm análogos aos observáveis da física clássica.

de quantização canônica, por meio do formalismo lagrangiano⁴ [28]. A densidade Lagrangiana na ausência de interações é descrita por⁵

$$\mathcal{L} = \hat{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\hat{\psi}, \quad (2.10)$$

onde $\hat{\psi} = \hat{\psi}^\dagger \gamma^0$ e $\hat{\psi}$ satisfazem a equação de campo de Dirac; além disso, $\bar{\psi}$ e ψ podem variar independentemente porque são considerados como campos dinamicamente independentes [26]. Usando a equação de Euler-Lagrange, é obtida a equação do campo de Dirac

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \hat{\psi})} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \hat{\psi}} = (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \hat{\psi} = 0. \quad (2.11)$$

A equação de Dirac para o campo $\hat{\psi}$ é calculada usando a equação de Euler-Lagrange e derivando em relação ao campo $\hat{\psi}$, ou aplicando a adjunta à equação de Dirac. Isso mostra que $\hat{\psi} \gamma^0$ é o conjugado hermitiano de $\hat{\psi}$.

Seguindo esse formalismo, pode-se obter a densidade hamiltoniana usando os campos canônicos conjugados $\Pi_{\hat{\psi}}^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \hat{\psi}}$ e $\Pi_{\hat{\psi}^\dagger}^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \hat{\psi}^\dagger}$ dos campos $\hat{\psi}$ e $\hat{\psi}^\dagger$, respectivamente. Então, a densidade Hamiltoniana é

$$\mathcal{H}_D = \Pi_{\hat{\psi}}^0 \partial_0 \hat{\psi} + \Pi_{\hat{\psi}^\dagger}^0 \partial_0 \hat{\psi}^\dagger - \mathcal{L}. \quad (2.12)$$

Usando a Eq. (2.10), a densidade hamiltoniana pode ser escrita na forma

$$\mathcal{H}_D = \hat{\psi}(-i\gamma^i \cdot \partial_i + m)\hat{\psi}, \quad (2.13)$$

nesta expressão apenas as derivadas espaciais estão presentes, mas pode ser convertida em derivada temporal usando a equação do campo de Dirac, obtendo a densidade Hamiltoniana $\mathcal{H} = \hat{\psi}^\dagger i \partial_t \hat{\psi}$. Isso permite expressar o Hamiltoniano do campo de Dirac na forma:

$$H_D = \int d^3x \mathcal{H}_D = \int d^3x \hat{\psi}(-i\gamma^i \partial_i + m)\hat{\psi} = \int d^3x \hat{\psi}^\dagger i \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial t}, \quad (2.14)$$

onde o Hamiltoniano depende do operador de campo de Dirac.

A partir da Eq. (2.5) é possível definir o campo de Dirac com as mesmas características, ou seja, expressar o campo em uma expansão na forma de ondas planas para partículas e antipartículas. Usando a segunda quantização, o campo de Dirac pode ser expresso por operadores de criação e aniquilação de partículas (e antipartículas)

⁴ De maneira análoga aos campos clássicos, os campos são obtidos definindo sua densidade lagrangiana.

⁵ Às vezes, uma versão simétrica é usada

$$\mathcal{L}_{Dirac} = \frac{1}{2} \left[(-i\partial_\mu \hat{\psi} \gamma^\mu \hat{\psi} - m\hat{\psi} \hat{\psi}) + \hat{\psi} (\gamma^\mu i\partial_\mu - m) \hat{\psi} \right].$$

Difere de (2.10) por uma integral de superfície [25].

como uma combinação linear dos campos que descrevem partículas e antipartículas, isto é

$$\hat{\psi}(\mathbf{x}, t) = \sum_{s'=\pm s} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{w_p}} \left(\hat{b}(\mathbf{p}, s') u(\mathbf{p}, s') e^{-ip \cdot x} + \hat{d}^\dagger(\mathbf{p}, s') v(\mathbf{p}, s') e^{ip \cdot x} \right), \quad (2.15)$$

onde, $\hat{\psi}(\mathbf{x}, t)$ é descrito no espaço-tempo com valores de projeção spin $\pm s$ para as partículas e antipartículas. O termo $\int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}}$ descreve o volume da caixa que contém o campo e $\sqrt{\frac{m}{w_p}}$ é um fator de normalização que aparece devido à contração do espaço na relatividade restrita [39, 42], se não for considerado na expressão (2.15), então, ele aparecerá nas relações de anticomutação dos férmions. A soma detalha os valores de projeção spin do campo, é $+s$ se o spin estiver na mesma direção do momento linear \mathbf{p} e $-s$ se estiver na direção oposta do momento \mathbf{p} . O primeiro termo à direita descreve a aniquilação de partículas com espinor $u(\mathbf{p}, s) e^{-ip \cdot x}$, ou seja, as partículas com momento \mathbf{p} e spin s são aniquiladas. O segundo termo da direita descreve a criação de antipartículas⁶ de momento \mathbf{p} e spin s com espinor $v(\mathbf{p}, s) e^{ip \cdot x}$ [26].

Conforme descrito na densidade Lagrangiana da Eq. (2.10) o campo conjugado $\hat{\bar{\psi}} = \hat{\psi}^\dagger \gamma^0$ pode ser definido. Usando a adjunta dos espinores $\bar{u}(\mathbf{p}, s) = u^\dagger(\mathbf{p}, s) \gamma^0$ e $\bar{v}(\mathbf{p}, s) = v^\dagger(\mathbf{p}, s) \gamma^0$, obtém-se

$$\hat{\bar{\psi}}(\mathbf{x}, t) = \sum_{s'=\pm s} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{w_p}} \left(\hat{b}^\dagger(\mathbf{p}, s') \bar{u}(\mathbf{p}, s') e^{+ip \cdot x} + \hat{d}(\mathbf{p}, s') \bar{v}(\mathbf{p}, s') e^{-ip \cdot x} \right), \quad (2.16)$$

onde o primeiro termo cria partículas de momento \mathbf{p} e projeção spin s , o segundo termo aniquila antipartículas de momento \mathbf{p} e projeção spin s .

O termo de Euler nas equações (2.15) e (2.16), descreve a propagação e evolução temporal do campo em forma de onda plana. Pode-se notar que essas equações estão implicitamente na representação de Heisenberg (o Apêndice C mostra a representação de interação do campo de Dirac).

Agora, o Hamiltoniano pode ser expresso em termos de operadores de criação e aniquilação de partículas e antipartículas, inserindo os operadores de campos (2.15) e (2.16) no Hamiltoniano (2.14), resulta

$$\hat{H} = \sum_{s'=\pm s} \int d^3p w_p \left(\hat{b}^\dagger(\mathbf{p}, s') \hat{b}(\mathbf{p}, s') - \hat{d}(\mathbf{p}, s') \hat{d}^\dagger(\mathbf{p}, s') \right). \quad (2.17)$$

Se as relações de comutação para os operadores de criação e aniquilação forem consideradas, não haverá limite inferior de energia. Por conseguinte, o Hamiltoniano não seria definido positivo e descreveria sistemas instáveis [42]. Por esse motivo, são

⁶ Da interpretação de soluções de energia negativa (subseção 2.1.2.2), a criação de antipartículas pode ser considerada como aniquilação de partículas com frequência negativa e momento $-\mathbf{p}$ e spin $-s$. Portanto, pode-se dizer que a Eq. (2.15) descreve um operador de campo de Dirac que aniquila partículas de energia (ou frequência) positiva e negativa.

consideradas as relações de anticomutação, ou seja, os campos (2.15) e (2.16) devem satisfazer a relação de anticomutação para férmions em intervalos de tempo iguais [28], isto é

$$\begin{aligned} \left\{ \hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}, t), \hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{x}', t) \right\} &= \delta_{\alpha\beta} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ \left\{ \hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}, t), \hat{\psi}_\beta(\mathbf{x}', t) \right\} &= \left\{ \hat{\psi}_\alpha^\dagger(\mathbf{x}, t), \hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{x}', t) \right\} = 0, \end{aligned} \quad (2.18)$$

descreve a relação de anticomutação para os diferentes elementos da matriz coluna do campo de Dirac, para campos em posições diferentes e em tempos iguais. Também pode-se escrever a relação anticomutação dos operadores de criação e aniquilação de partículas e antipartículas[42], isto é,

$$\begin{aligned} \left\{ \hat{b}(\mathbf{p}, s), \hat{b}^\dagger(\mathbf{p}', s') \right\} &= \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta_{ss'} \\ \left\{ \hat{d}(\mathbf{p}, s), \hat{d}^\dagger(\mathbf{p}', s') \right\} &= \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta_{ss'} \\ \left\{ \hat{b}(\mathbf{p}, s), \hat{b}(\mathbf{p}', s') \right\} &= \left\{ \hat{b}^\dagger(\mathbf{p}, s), \hat{b}^\dagger(\mathbf{p}', s') \right\} = 0 \\ \left\{ \hat{d}(\mathbf{p}, s), \hat{d}(\mathbf{p}', s') \right\} &= \left\{ \hat{d}^\dagger(\mathbf{p}, s), \hat{d}^\dagger(\mathbf{p}', s') \right\} = 0 \\ \left\{ \hat{b}(\mathbf{p}, s), \hat{d}(\mathbf{p}', s') \right\} &= \left\{ \hat{b}^\dagger(\mathbf{p}, s), \hat{d}^\dagger(\mathbf{p}', s') \right\} = 0. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Usando relação de anticomutação de \hat{d} e \hat{d}^\dagger com momento linear \mathbf{p} se tem que

$$\hat{d}(\mathbf{p}, s) \hat{d}^\dagger(\mathbf{p}, s) = -\hat{d}^\dagger(\mathbf{p}, s) \hat{d}(\mathbf{p}, s) + \delta^{(3)}(\mathbf{0}),$$

então, substituindo no Hamiltoniano (2.17), pode-se subtrair a energia no ponto zero ou energia do vácuo [28–30, 44], de tal maneira que

$$H - E_0 = H_D =: H := \sum_{s=\pm s} \int d^3p w_{\mathbf{p}} \left(\hat{b}^\dagger(\mathbf{p}, s) \hat{b}(\mathbf{p}, s) + \hat{d}^\dagger(\mathbf{p}, s) \hat{d}(\mathbf{p}, s) \right). \quad (2.20)$$

onde $w_{\mathbf{p}}$ é a energia relativística de partículas e antipartículas com momento linear \mathbf{p} . Os dois pontos descreve o produto de ordenamento normal⁷. Adotando as regras e anticomutação, o Hamiltoniano pode ser definido positivo. A energia do vácuo E_0 é uma quantidade não observável e pode ser subtraído do Hamiltoniano, ela é escrita como [44]

$$E_0 \equiv +\delta^3(\mathbf{0}) \int d^3p \sum_{s=\pm s'} w_{\mathbf{p}} = + \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} \int d^3p \sum_{s=\pm s'} w_{\mathbf{p}}, \quad (2.21)$$

Pode-se construir o espaço de Fock para os operadores de criação e aniquilação do campo de Dirac [34], aplicando esses operadores ao estado de vácuo $|0\rangle$, resulta

$$\hat{b}(\mathbf{p}, s)|0\rangle = 0 \quad , \quad \hat{d}(\mathbf{p}, s)|0\rangle = 0, \quad \text{Para todo } \mathbf{p} \text{ e } s = \pm s. \quad (2.22)$$

⁷ Exige que todos os operadores de criação estejam à esquerda dos operadores de aniquilação. No caso de operadores fermiônicos, um sinal de menos é adicionado ao trocar a posição de dois deles [48]

Além disso, para um estado de duas partículas (e para antipartículas)

$$\hat{b}^\dagger(\mathbf{p}, s)\hat{b}^\dagger(\mathbf{p}', s')|0\rangle \propto |\mathbf{p}, s; \mathbf{p}', s'\rangle \quad , \quad \hat{d}^\dagger(\mathbf{p}, s)\hat{d}^\dagger(\mathbf{p}', s')|0\rangle \propto |\mathbf{p}, s; \mathbf{p}', s'\rangle. \quad (2.23)$$

Da relação de anticomutação de férmions $\hat{b}^\dagger(\mathbf{p}, s)$ e $\hat{b}^\dagger(\mathbf{p}', s')$, operando no estado de vácuo, se obtém

$$\hat{b}^\dagger(\mathbf{p}, s)\hat{b}^\dagger(\mathbf{p}', s') + \hat{b}^\dagger(\mathbf{p}', s')\hat{b}^\dagger(\mathbf{p}, s) = 0 \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{p}, s; \mathbf{p}', s'\rangle = -|\mathbf{p}', s'; \mathbf{p}, s\rangle, \quad (2.24)$$

isso mostra que os estados são antissimétricos. Se eles tiverem o mesmo momento \mathbf{p} e spin s , então

$$\{\hat{b}^\dagger(\mathbf{p}, s), \hat{b}^\dagger(\mathbf{p}, s)\} = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{b}^\dagger(\mathbf{p}, s)\hat{b}^\dagger(\mathbf{p}, s)|0\rangle = 0, \quad (2.25)$$

isso implica que um estado não pode conter duas partículas do mesmo momento \mathbf{p} e spin s , o mesmo acontece com os antiférmions.

Portanto, conclui-se que os operadores b , b^\dagger (ou d e d^\dagger) do campo de Dirac descrevem férmions de spin-1/2 (ou antiférmions), que satisfazem a estatística de Fermi-Dirac de acordo com o teorema spin-estatística; assim, obedecendo ao princípio de exclusão de Pauli [26].

2.3 Campo Eletromagnético Clássico

Classicamente, o campo eletromagnético é descrito pelas equações de Maxwell, sintetizando as propriedades e inter-relações entre eletricidade e magnetismo. Além disso, prevê a existência de ondas eletromagnéticas em qualquer meio. No caso de campos eletromagnéticos que se propagam no vácuo com densidade de carga ρ e densidade de corrente \mathbf{j} , considerando o sistema de unidades Lorentz-Heaviside com $c = 1$, pode-se escrever as equações de Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \quad (\text{Lei de Gauss}) \quad (2.26a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{Lei de Gauss do magnetismo}) \quad (2.26b)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{j} \quad (\text{Lei de Ampère}) \quad (2.26c)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (\text{Lei de Faraday}), \quad (2.26d)$$

onde $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ e $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ são os campos elétrico e magnético, respectivamente. Esses campos dependentes do tempo são acoplados, mais especificamente, os campos elétricos (magnéticos) dependentes do tempo dão origem a campos magnéticos (elétricos).

As equações de Maxwell descrevem o campo elétrico e magnético. Apesar disso, esses campos podem ser calculados usando a definição do quadrivetor potencial⁸

⁸ Isso mostra que o potencial escalar é a componente temporal do quadrivetor A^μ .

$A^\mu = (A^0, \mathbf{A})$, com potencial escalar A^0 e potencial vetorial \mathbf{A} . A partir das equações homogêneas (2.26b) e (2.26d), outra expressão é obtida para o campo elétrico e magnético

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A} \quad , \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (2.27)$$

Esses potenciais reduzem o número de funções a serem determinadas, de seis componentes escalares de \mathbf{E} e \mathbf{B} para os quatro componentes de A^μ (Para mais detalhes sobre eletromagnetismo clássico, consulte nas referências [49, 50]).

As equações de Maxwell são consistentes na relatividade restrita porque essas equações são invariantes sob as transformações de Lorentz, ou seja, são válidas para qualquer observador em um referencial inercial. As equações (2.26) podem ser expressas em uma forma covariante combinando os campos para formar um tensor de segunda ordem, chamado tensor de campo eletromagnético (ver [28])

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

Usando as equações (2.27), o tensor $F^{\mu\nu}$ em termos do quadripotencial pode ser escrito como

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad (2.29)$$

onde $F^{\mu\nu}$ é um tensor contravariante e anti-simétrico que descreve as equações de Maxwell

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \quad (\text{Equações não homogêneas}) \quad (2.30)$$

$$\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} = 0 \quad (\text{Equações homogêneas}) \quad (2.31)$$

onde $j^\mu = (\rho, \mathbf{j})$ é o quadrivetor da densidade da corrente eletromagnética e satisfaz a equação de continuidade, ele descreve a conservação de carga, $\partial_\mu j^\mu = 0$. Para equações não homogêneas, aplicar a quadri-divergência implica que

$$\square A^\mu - \partial^\mu \partial_\nu A^\nu = j^\mu, \quad (2.32)$$

onde \square é o operador D'Alembertiano (ver Apêndice A). Essa equação descreve o comportamento dinâmico dos componentes do potencial, \mathbf{A} e ϕ .

2.3.1 Transformação de gauge

A Eq. (2.32) não é suficiente para determinar exclusivamente o quadripotencial, pois é possível adicionar uma função escalar arbitrária, $\Lambda = \Lambda(x)$, de modo que a transformação (para mais detalhe, consulte a referência [42])

$$A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \Lambda, \quad (2.33)$$

não modifique o tensor $F^{\mu\nu}$ e, portanto, também não modifica os campos E e B . A Eq. (2.33) é chamada *transformação de gauge local* ou *transformações de gauge de segunda espécie*. Portanto, as equações de Maxwell e $F^{\mu\nu}$ são invariantes de gauge. A transformação (2.33) mostra que A^μ possui valores diferentes em cada ponto no espaço-tempo, ou seja, não assume um único valor [28, 34, 50]. Além disso, nem todos os seus componentes são variáveis dinâmicas independentes e, escolhendo uma função $\Lambda = \Lambda(x)$ adequadamente, certas condições podem ser impostas aos componentes de A^μ [50], ou seja, transformar-se em uma determinada condição de gauge [42]. Várias condições de gauge são usadas com frequência, das quais as mais comuns são:

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad (\text{gauge de Lorenz}) \quad (2.34)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (\text{gauge de Coulomb}) \quad (2.35)$$

$$A_0 = 0 \quad (\text{gauge temporal}) \quad (2.36)$$

$$A_3 = 0 \quad (\text{gauge axial}) \quad (2.37)$$

2.3.1.1 Gauge de Lorenz⁹

A vantagem do gauge de Lorenz é sua invariância sob as transformações de Lorenz, Ou seja, o gauge de Lorenz permanece válido para qualquer sistema de referência inercial. Considerando que um potencial arbitrário A^μ satisfaz o gauge de Lorenz, é possível definir um novo potencial A'^μ usando a transformação apresentada em (2.33), de modo que o novo potencial satisfaça o gauge de Lorenz, ou seja, $\partial_\mu A'^\mu = 0$. Isso leva a considerar uma função arbitrária $\Lambda(x)$ que cumpre a equação (para mais detalhes, consulte as referências [26, 28, 48])

$$\partial_\mu \partial^\mu \Lambda(x) = \square \Lambda(x) = 0, \quad (2.38)$$

isso garante que o gauge de Lorenz ainda seja satisfeito.

Aplicando a condição (2.34) na Eq. (2.32), para o caso de campo eletromagnético sem fontes, quer dizer, com $j^\mu = 0$, é obtida a equação de onda para os componentes do quadrivetor potencial A^μ

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 A^0 - \frac{\partial^2}{\partial t^2} A^0 &= 0 \\ \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A} &= 0 \end{aligned} \right\} \longrightarrow \square A^\mu = 0. \quad (2.39)$$

Essa equação tem a forma da equação de Klein-Gordon (2.1) para o caso sem massa, e cuja solução (de caráter vetorial) pode ser expressa como ondas planas

$$A^\mu(x) = \epsilon^\mu(\mathbf{k}) e^{-ik \cdot x}, \quad (2.40)$$

⁹ Muitos autores apontam que o gauge (2.34) foi publicado pela primeira vez pelo físico dinamarquês L. Lorenz em 1867, em seu trabalho *On the Identity of the Vibrations of Light with Electrical Currents*, Philos. Mag. 34. E é incorretamente atribuído a H. A. Lorentz (Para mais detalhes, consulte [51])

onde $\epsilon^\mu(\mathbf{k})$ é o quadrivetor de polarização e é ortogonal à direção da propagação, quer dizer, $k_\mu \cdot \epsilon^\mu = 0$, isso reduz o número de componentes independentes de quatro para três. Substituindo a solução (2.40) na Eq. (2.39) resulta que $k^2 = k_0^2 - \mathbf{k}^2 = 0$, isso mostra que o campo eletromagnético sem fonte descreve uma partícula sem massa conhecida como fóton. O fóton é uma partícula real que possui dois componentes independentes definidos como polarizações transversais.

Tendo em conta o gauge de Lorenz (os componentes independentes são reduzidos a três), o gauge temporal ($A_0 = 0$) pode ser imposto, conseqüentemente $\epsilon_0 = 0$, de modo que o gauge de Lorenz seja substituído pelo gauge de Coulomb satisfazendo que o vetor de propagação é perpendicular à polarização, $\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\epsilon} = 0$. No entanto, ao fazer isso, a invariância sob transformações de Lorenz é perdida [26] (para mais detalhes sobre o gauge de Lorenz, consulte [26, 46, 48]).

2.3.1.2 Gauge de Coulomb

O gauge de Coulomb exige que a divergência do componente espacial de A^μ desapareça, ou seja, $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, isso reduz de três a dois componentes espaciais independentes. No entanto, se o vetor potencial \mathbf{A} não satisfizer o gauge de Coulomb, a transformação (2.33) poderá ser realizada para descrever um novo potencial A'^μ cujos componentes espaciais satisfazem $\nabla \cdot \mathbf{A}' = 0$, de modo que a função arbitrária Λ respeite a equação [42]

$$\nabla^2 \Lambda = -\nabla \cdot \mathbf{A}. \quad (2.41)$$

Inserindo o gauge de Coulomb (2.35) na Eq. (2.32), as equações para os componentes de A^μ são reduzidas,

$$\nabla^2 A^0 = -\rho, \quad (2.42a)$$

$$\square \mathbf{A} = -\mathbf{j} + \nabla \frac{\partial A^0}{\partial t}. \quad (2.42b)$$

A Eq. (2.42a) é a equação de Poisson e tem como solução

$$A^0(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int d^3x' \frac{\rho(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (2.43)$$

Esse potencial escalar é o potencial instantâneo de Coulomb devido à densidade de carga $\rho(\mathbf{x}, t)$ ser dada no mesmo instante de tempo que o potencial escalar. Isso significa que o potencial escalar se propaga instantaneamente em todo o espaço [49], enquanto o potencial vetorial \mathbf{A} satisfaz a equação de onda não homogênea (2.42b). No entanto, como mostrado no Apêndice B, a densidade de corrente \mathbf{j} pode ser considerada como a soma de duas componentes (transversal e longitudinal), ou seja, $\mathbf{j} = \mathbf{j}_\perp + \mathbf{j}_\parallel$. De tal maneira que o termo à direita da Eq. (2.42b) seja descrito pela corrente transversal

$$\square \mathbf{A} = \mathbf{j}_\perp, \quad (2.44)$$

isso mostra que o potencial vetorial, no gauge de Coulomb, descreve componentes transversais independentes [49, 50].

Considerando o caso de um campo eletromagnético livre (sem fontes), se tem que a Eq. (2.44) se torna uma equação de onda homogênea, onde A descreve duas componentes transversais devido ao gauge de Coulomb, que reduz de três para dois o número de componentes espaciais independentes [26]. Além disso, quando a densidade de carga ρ é zero, pode-se considerar que $A^0 = 0$, sendo válido para um sistema de referência inercial específico. Movendo-se para outro sistema de referência, a componente temporal de A^μ pode aparecer, porque o gauge de Coulomb não é invariante sob as transformações de Lorentz [48].

A equação de onda do potencial vetorial A é semelhante à Eq. (2.39), portanto, pode descrever uma solução de onda plana e apresenta uma solução semelhante a (2.40), com a condição

$$\nabla \cdot A \quad \text{e} \quad A^0 = 0, \quad (2.45)$$

conhecida como *gauge de radiação*, isso mostra que o quadrivetor de polarização ϵ^μ tem duas componentes transversais perpendiculares à direção de propagação, ou seja, $k \cdot \epsilon = 0$ (a componente temporal não é considerada porque $A^0 = 0$).

Observa-se que o quadrivetor de polarização descreve as componentes independentes ou graus de liberdade do potencial A^μ . Por esse motivo, é importante entender o significado físico e algumas propriedades da polarização ϵ^μ (Isso será mostrado na seção 2.5).

2.4 Quantização do Campo Eletromagnético livre

A quantização do campo eletromagnético apresenta algumas dificuldades devido ao fato de descrever uma partícula sem massa e com caráter vetorial [26, 30]. Aqui, a quantização do campo eletromagnético é mostrada considerando o gauge de Coulomb com o potencial escalar $A^0 = 0$, portanto, apenas os dois componentes transversais (graus de liberdade) são quantizados. Lembre-se de que o gauge de Coulomb não é invariante de Lorentz, por esse motivo, nessa quantização do campo, a invariância é perdida.

Usando o método de quantização canônica descrito na seção 2.2, a densidade lagrangiana do campo eletromagnético sem fontes é definida como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (2.46)$$

onde, nesse caso, A^μ é chamado de campo potencial. Além disso, a equação de Euler-Lagrange é

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} = 0, \quad (2.47)$$

considerando a Eq. (2.46), obtém-se que $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} = -F^{\nu\mu}$ e $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = 0$. Portanto, a equação que descreve o comportamento do campo potencial é

$$\square A^\mu - \partial^\mu \partial_\nu A^\nu = 0, \quad (2.48)$$

como esperado, essa equação é igual à Eq. (2.32) para o caso $j^\mu = 0$. Além disso, considerando o gauge de Coulomb, a equação de onda $\square \mathbf{A} = 0$ é obtida, conforme descrito na seção 2.3.1.2.

Para quantizar o campo usando a quantização canônica, é necessário definir o momento canônico conjugado π^μ associado à A^μ , de maneira que, quando considerados como operadores de campo, eles possam cumprir as relações de comutação. O momento canônico conjugado é escrito como

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)} = -F^{0\mu} \Rightarrow \begin{cases} \pi^0 = F^{00} = 0 \\ \pi^i = -F^{0i} = E^i \end{cases}, \quad (2.49)$$

isso mostra um problema ao ser considerado operador de campo, porque π^0 não seria um observável e não iria satisfazer as relações de comutação. Esse problema aparece ao considerar todos os componentes do campo A^μ , dado que o fóton possui apenas dois graus de liberdade física (os componentes transversais). No entanto, removendo o campo potencial escalar A^0 , a quantização poderia ser realizada apenas para os componentes transversais [48].

Para quantizar o campo, as seguintes relações de comutação em tempos iguais são impostas [28, 42]

$$\left[\hat{A}^i(\mathbf{x}, t), \hat{\pi}^j(\mathbf{x}', t) \right] = -i \left(\delta_{ik} - \frac{\partial_i \partial_j}{\nabla^2} \right) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \equiv -i \delta_{\perp ij}^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (2.50a)$$

$$\left[\hat{A}^i(\mathbf{x}, t), \hat{A}^j(\mathbf{x}', t) \right] = 0 \quad \left[\hat{\pi}^i(\mathbf{x}, t), \hat{\pi}^j(\mathbf{x}', t) \right] = 0 \quad (2.50b)$$

onde $\delta_{\perp ij}^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ é a função delta de Dirac projetada na direção transversal (consulte o Apêndice B), isso mostra que os operadores de campo \hat{A} e $\hat{\pi}$ contêm modos de campos transversais.

Usando as equações (2.46) e (2.49), a densidade hamiltoniana é obtida como

$$\mathcal{H} = \pi^\mu \partial_0 A_\mu - \mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{B}|^2 \right). \quad (2.51)$$

A densidade Hamiltoniana depende dos operadores de campo elétrico e magnético, esses campos podem ser obtidos a partir da Eq. (2.27) considerando o gauge de radiação, dado por $\mathbf{E} = -\partial_0 \mathbf{A}$ e $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$.

É necessário definir A^μ como um operador de campo, isso pode ser feito através de uma expansão de onda plana (semelhante à Eq. (2.40)), restringindo os graus de liberdade à duas polarizações transversais

$$\hat{A}^\mu(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \sum_{r=1}^2 \left(\epsilon^\mu(\mathbf{k}, r) \hat{a}(\mathbf{k}, r) e^{-ik \cdot x} + \epsilon^{*\mu}(\mathbf{k}, r) \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, r) e^{ik \cdot x} \right), \quad (2.52)$$

onde o termo $\int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}$ representa o volume da caixa que contém o campo, o quadrivetor $\epsilon_\mu(\mathbf{k}, r)$ descreve a polarização do fóton e o operador $\hat{a}(\mathbf{k}, r)$ ($\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, r)$) aniquila (cria) um fóton com momento \mathbf{k} no modo de polarização transversal dado por r . A soma em $r = 1, 2$ descreve as duas componentes de polarizações transversais do fóton, ou seja, descreve as duas componentes independentes do campo. O termo de Euler expressa a propagação e evolução temporal do campo. Como a expressão (2.15), o campo A^μ está implicitamente na representação de Heisenberg¹⁰[28, 30, 48].

A equação de onda para o quadripotencial possui soluções em termos de $e^{-ik \cdot x}$ e $e^{ik \cdot x}$, e pode ser interpretada como soluções de energia (frequência) positiva e negativa, respectivamente. Após a aplicação da segunda quantização, o campo é descrito pelos operadores de criação e aniquilação de partículas e antipartículas. No caso do campo de Dirac, os operadores \hat{b} (\hat{b}^\dagger) e \hat{d} (\hat{d}^\dagger) aparecem, correspondendo a partículas e antipartículas, respectivamente. No caso do campo da Eq. (2.52), os operadores \hat{a} e \hat{a}^\dagger correspondem aos operadores de aniquilação e criação de fótons, respectivamente. No entanto, da interpretação de Feynman-Stückelberg descrita na seção 2.1.2.2, o operador \hat{a}^\dagger corresponde à criação da antipartícula do fóton. Portanto, o fóton coincide com sua antipartícula, ou seja, é sua própria antipartícula [33]

A Eq. (2.52) pode ser interpretada como a combinação linear de campos que aniquilam e criam fótons (partículas bosônicas) transversais que se propagam com momento linear \mathbf{k} e energia $w = |\mathbf{k}|$. Portanto, os operadores \hat{a} e \hat{a}^\dagger devem satisfazer a relação de comutação, ou seja,

$$[\hat{a}(\mathbf{k}', r'), \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, r)] = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta_{rr'}, \quad (2.53a)$$

$$[\hat{a}(\mathbf{k}', r'), \hat{a}(\mathbf{k}, r)] = [\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}', r'), \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, r)] = 0. \quad (2.53b)$$

O campo potencial A^μ é usado para calcular os campos quantizados do campo elétrico e magnético. Usando as equações (2.52) e (2.27), no gauge de radiação, os campos são dados por

$$\hat{\mathbf{E}}(x) = -\frac{\partial \hat{\mathbf{A}}}{\partial t} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2w_k}} \sum_{r=1}^2 i w_k \left(\epsilon(\mathbf{k}, r) \hat{a}(\mathbf{k}, r) e^{-ik \cdot x} - \epsilon^*(\mathbf{k}, r) \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, r) e^{+ik \cdot x} \right), \quad (2.54)$$

$$\hat{\mathbf{B}}(x) = \nabla \times \hat{\mathbf{A}} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2w_k}} \sum_{r=1}^2 i \mathbf{k} \times \left(\epsilon(\mathbf{k}, r) \hat{a}(\mathbf{k}, r) e^{-ik \cdot x} - \epsilon^*(\mathbf{k}, r) \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, r) e^{+ik \cdot x} \right). \quad (2.55)$$

Usando as equações (2.54) e (2.55) na densidade hamiltoniana, obtém-se o hamiltoniano do sistema

$$H_{EM} =: H := \sum_{r=1}^2 \int d^3k w_k \left(\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, r) \hat{a}(\mathbf{k}, r) \right), \quad (2.56)$$

¹⁰ O Apêndice C mostra a representação de interação.

onde é considerado o ordenamento normal para operadores bosônicos. A Eq. (2.51) mostra que a energia do sistema é a soma da energia dos fótons transversais.

Os operadores de criação $\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, r)$ e aniquilação $\hat{a}(\mathbf{k}, r)$ agindo no vácuo resultam em

$$\hat{a}(\mathbf{k}, r)|0\rangle = 0 \quad \text{Para todo } \mathbf{k} \text{ e } r = 1, 2 \quad (2.57a)$$

$$\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_1, r_1)\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_2, r_2)\cdots\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_n, r_n)|0\rangle \propto |\mathbf{k}_1, r_1; \mathbf{k}_2, r_2; \cdots; \mathbf{k}_n, r_n\rangle \quad (2.57b)$$

2.5 Quadrivetor de Polarização

O quadrivetor de polarização descreve os graus de liberdade de um campo vetorial de quatro componentes, A^μ , no qual os graus de liberdade físicos¹¹ dependerão se o campo vetorial descreve partículas com massa ou sem massa. Os campos vetoriais que descrevem bósons com massa têm três graus de liberdade físicos, determinados por duas polarizações transversais e uma polarização longitudinal. Enquanto para partículas sem massa, como o fóton, os graus de liberdade que o definem são dados por duas polarizações transversais. Isso implica que o componente temporal do quadrivetor de polarização não apresenta significado físico para as partículas, é apenas uma definição matemática para trabalhar no espaço de Minkowski [28, 48].

O quadrivetor de polarização é definido para um campo vetorial sem massa, em que os quatro componentes do campo A^μ são restringidos pelas condições de gauge. Em geral, o quadrivetor de polarização é definido da seguinte forma

$$\epsilon^\mu(\mathbf{k}, r) = \left(\epsilon^0(\mathbf{k}, r), \epsilon^1(\mathbf{k}, r), \epsilon^2(\mathbf{k}, r), \epsilon^3(\mathbf{k}, r) \right) = \left(\epsilon^0(\mathbf{k}, r), \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, r) \right) \quad , \quad r = 0, 1, 2, 3 \quad (2.58)$$

onde $\mu = 0$ é o componente temporal do quadrivetor de polarização. $\mu = 1, 2, 3$ representa as componentes espaciais. O valor de r descreve a polarização; para $r = 0$, a polarização temporal, não apresenta significado físico e é definido como

$$\epsilon^\mu(\mathbf{k}, 0) = \boldsymbol{\eta} = (1, 0, 0, 0). \quad (2.59)$$

Essa polarização não possui componentes espaciais. Para $r = 1, 2$, tem-se as polarizações transversais, isso é definido mediante

$$\epsilon^\mu(\mathbf{k}, 1) = (0, \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, 1)) \quad \epsilon^\mu(\mathbf{k}, 2) = (0, \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, 2)). \quad (2.60)$$

Além disso, para $r = 3$, tem-se o vetor de polarização longitudinal, em um sistema de referência arbitrário, é definido por

$$\epsilon^\mu(\mathbf{k}, 3) = \frac{k^\mu - \eta^\mu(k \cdot \boldsymbol{\eta})}{(k \cdot \boldsymbol{\eta})}, \quad (2.61)$$

¹¹ Referem-se aos componentes que têm um significado físico.

onde $k = (k_0 = \omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k})$.

Para um sistema de referência específico, o quadrivetor de polarização longitudinal é definido como

$$\epsilon^\mu(\mathbf{k}, 3) = \left(0, \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}\right). \quad (2.62)$$

O quadrivetor de polarização deve satisfazer a condição de ortonormalidade

$$\epsilon_\mu(\mathbf{k}, r) \cdot \epsilon^\mu(\mathbf{k}, r') = g_{rr'} \quad (2.63)$$

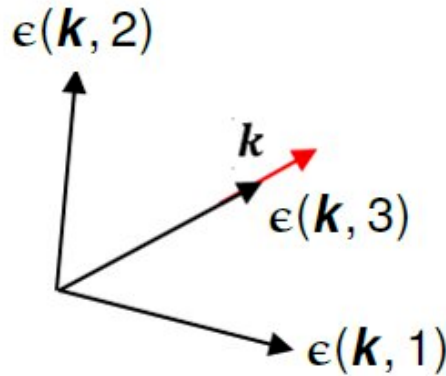
e a condição de completudeza

$$\sum_{r, r'=0}^3 g_{rr'} \epsilon_\mu(\mathbf{k}, r) \epsilon_\nu(\mathbf{k}, r') = g_{\mu\nu} \quad (2.64)$$

Agora, considerando o gauge de Coulomb (com $A^0 = 0$), o quadrivetor de polarização pode ser considerado para o caso tridimensional (veja figura 3), uma vez que o componente temporal do campo não aparece. As polarizações transversais devem satisfazer a condição de ortonormalidade (polarizações transversais são ortogonais uma à outra)

$$\epsilon(\mathbf{k}, r) \cdot \epsilon(\mathbf{k}, r') = \delta_{r, r'}. \quad (2.65)$$

Figura 3 – Quadrivetores de polarização, quando $r = 1, 2$, descreve as polarizações transversais, para $r = 3$ é a polarização longitudinal. Essas polarizações são ortogonais uma à outra.



Fonte – Figura retirada de [39]

Aliás, essas polarizações são ortogonais à direção de propagação do fóton (polarização longitudinal), ou seja,

$$\mathbf{k} \cdot \epsilon(\mathbf{k}, 1) = \mathbf{k} \cdot \epsilon(\mathbf{k}, 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \epsilon(\mathbf{k}, 1) \cdot \epsilon(\mathbf{k}, 3) = \epsilon(\mathbf{k}, 2) \cdot \epsilon(\mathbf{k}, 3) = 0. \quad (2.66)$$

Ainda, a relação de completudeza é

$$\sum_{r=1}^2 \epsilon_i(\mathbf{k}, r) \epsilon_j(\mathbf{k}, r) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{|\mathbf{k}|^2} \quad (2.67)$$

2.6 Interações

A quantização do campo de Dirac e do campo eletromagnético foram analisados, considerando-os como campos livres, ou seja, sem interagir com uma fonte externa. No estudo de campos livres, as características presentes em cada partícula (energia, momento linear, etc.) permanecem imutáveis, de modo que são conservadas separadamente [43]. No entanto, os fenômenos presentes na natureza são mostrados a nós por meio de interações de campos [31, 43]. Por esse motivo, estudar as interações entre os campos ajudaria a descrever alguns fenômenos que acontecem na natureza. Atualmente, se conhecem quatro interações fundamentais que ocorrem na natureza, as interações eletromagnética, fraca, forte e gravitacional. As três primeiras interações mencionadas também são chamadas de interações de gauge [26] e são mediadas por bósons de spin-1. Essas partículas mediadoras de forças ou interações são: *glúons* para a interação forte, *bósons fracos* (W^\pm , Z^0) para a força fraca e *fótons* para a interação eletromagnética [25].

2.6.1 Eletrodinâmica Quântica

A interação eletromagnética atua sobre partículas que possuem carga elétrica, férmions, por meio da emissão e absorção de fótons. Matematicamente, é descrito pela Eletrodinâmica Quântica (ou *Quantum Electrodynamics - QED* em inglês), considerada uma das teorias mais precisas da física; ela estuda as interações entre partículas fermiônicas de spin-1/2, descrita pelo campo de Dirac, mediadas por fótons, descrito pelo campo eletromagnético quantizado.

A interação da matéria com um campo de gauge pode ser obtida através da substituição de acoplamento mínimo. No caso da interação eletromagnética, o acoplamento mínimo é escrito na forma

$$i\partial_\mu \rightarrow i\partial_\mu - eA_\mu \equiv iD_\mu \quad (2.68)$$

onde D_μ é a derivada covariante, a carga do elétron $e = -|e|$ é a constante de acoplamento para interações eletromagnéticas.

Na mecânica quântica relativista, a equação de Dirac é acoplada a um campo eletromagnético externo, definindo a derivada covariante $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$. No caso da teoria quântica de campos, se pode escrever a densidade Lagrangiana livre usando as equações (2.10) e (2.46)

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi} (i\gamma_\mu \partial_\mu - m) \psi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (2.69)$$

inserindo o acoplamento mínimo, ou seja, introduzindo a Eq. (2.68), obtém-se a densidade Lagrangiana que descreve a interação entre o campo de Dirac e o campo

eletromagnético,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{QED} &= -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi(x) \\ &= -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) - e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu A_\mu\psi(x),\end{aligned}\quad (2.70)$$

onde o último termo do lado direito da equação define a interação desses campos. Isso mostra que a densidade Lagrangiana do sistema é $\mathcal{L}_{QED} = \mathcal{L}_{Dirac} + \mathcal{L}_{EM} + \mathcal{L}_{int} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int}$, e a densidade Lagrangiana de interação é

$$\mathcal{L}_{int} = -e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu A_\mu\psi(x) = -j^\mu A_\mu, \quad (2.71)$$

onde $j^\mu = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ é a densidade de corrente produzida pelo campo de Dirac.

Aplicando a transformação de gauge do quadripotencial, definida na Eq. (2.33), obtém-se que \mathcal{L}_0 é invariante sob esta transformação, mas para \mathcal{L}_{int} resulta $\mathcal{L}_{int} \rightarrow \mathcal{L}'_{int} = \mathcal{L}_{int} - e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi(x)\partial_\mu\Lambda(x)$, isso mostra que \mathcal{L}_{QED} não é invariante. No entanto, aplicando uma transformação ao campo de Dirac se pode obter que a Eq. (2.70) é invariância de gauge, ou seja, aplicando a transformação de gauge local ao campo de Dirac [26]

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{-ie\Lambda(x)}\psi, \quad (2.72a)$$

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi}e^{ie\Lambda(x)} = e^{ie\Lambda(x)}\bar{\psi}, \quad (2.72b)$$

e a transformação dada na Eq. (2.33) em (2.70), mostra-se que a densidade Lagrangiano \mathcal{L}_{QED} é invariante de gauge¹². Isso significa que os observáveis são independentes da escolha do gauge, no entanto, a forma de \mathcal{L}_{QED} depende da escolha do gauge [26].

Na Eq. (2.70), as interações eletromagnéticas de outros leptons com carga e spin-1/2 podem ser adicionadas, como o múon (μ) e o tau (τ). Do mesmo modo que foi feito para o elétron, são consideradas as densidades Lagrangianas do campo dessas partículas e seus termos de interação correspondentes, semelhante à Eq. (2.71). No entanto, para o próton e o nêutron (partículas nucleares) o acoplamento mínimo não reproduz corretamente suas interações eletromagnéticas [43]. Isso é devido à sua estrutura interna, que é descrita pela Cromodinâmica Quântica (ou *Quantum Chromodynamics* - *QCD* em inglês) [25, 26].

Usando a equação de Euler-Lagrange mostrada nas equações (2.11) e (2.47), se obtém as equações de campo acoplado elétron-fóton

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = +e\gamma^\mu A_\mu\psi, \quad (2.73a)$$

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = \square A^\mu - \partial^\mu(\partial_\nu A^\nu) = +e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi = j^\mu. \quad (2.73b)$$

¹² Pode-se notar que \mathcal{L}_0 e \mathcal{L}_{int} , separadamente, não são invariantes de gauge.

A Eq. (2.73a) mostra o campo de Dirac acoplado a um campo eletromagnético externo, e a Eq. (2.73b) possui uma densidade de corrente j^μ criada pelo campo de Dirac (o elétron). Considerando o gauge de Coulomb ($\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$) na Eq. (2.73b), obtém-se que o potencial escalar não é zero, $A^0 \neq 0$. Assim a equação de Poisson do potencial escalar, $\nabla^2 A^0 = -e\psi^\dagger\psi$, apresenta uma densidade de carga $-e\psi^\dagger\psi = -j^0$ originada pelo campo de Dirac¹³ [31]. Essa equação apresenta uma solução semelhante à Eq. (2.43), ou seja,

$$A^0(\mathbf{x}, t) = +e \int \frac{d^3x' \psi^\dagger(\mathbf{x}', t)\psi(\mathbf{x}', t)}{4\pi|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|} = e \int \frac{d^3x' \rho(\mathbf{x}', t)}{4\pi|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|}, \quad (2.74)$$

onde A^0 não é uma variável independente. Seguindo o método de quantização canônica, para quantizar os campos que compõem a densidade lagrangiana da Eq. (2.70), as relações de anticomutação (ou comutação) são definidas considerando os campos como operadores de campos. Pode-se observar que as variáveis dinâmicas independentes são iguais às variáveis independentes do campo livre, por esse motivo, as relações de anticomutação e comutação são satisfeitas como nas equações (2.18) e (2.50), respectivamente. Além disso, impõe-se que as variáveis dinâmicas do campo de Dirac e do campo eletromagnético comutam, ou seja, a relação de comutação entre as variáveis desses campos é

$$\left[\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}, t), \hat{A}_i(\mathbf{x}', t) \right] = 0, \quad \left[\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}, t), \hat{\pi}_i(\mathbf{x}', t) \right] = 0. \quad (2.75)$$

Como \hat{A}^0 não é uma variável dinâmica independente, ele satisfaz as seguintes relações de comutação [31, 33]

$$\left[\hat{A}^0(\mathbf{x}, t), \hat{A}_i(\mathbf{x}', t) \right] = \left[\hat{A}^0, \hat{\pi}_i \right] = 0, \quad (2.76a)$$

$$\left[\hat{A}^0(\mathbf{x}, t), \hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}', t) \right] = -\frac{e}{4\pi|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|} \hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}', t), \quad (2.76b)$$

onde a Eq. (2.76a) é satisfeita devido às relações de comutação impostas em (2.75), isso pode ser verificado inserindo a Eq. (2.74) no comutador. Da mesma forma a Eq. (2.76b) é obtida usando a equação (2.74).

Com isso se pode obter a densidade Hamiltoniana do sistema $\mathcal{H}_{QED} = \pi_\psi^0 \partial_0 \psi + \pi^\mu \partial_0 A_\mu - \mathcal{L}_{QED}$, usando os campos canônicos conjugados, mostrados nas equações (2.12) e (2.49), na Eq. (2.70)

$$\mathcal{H}_{QED} = \bar{\psi}(-i\gamma^i \partial_i + m)\psi + \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) + \mathbf{E} \cdot \nabla A^0 + e\psi^\dagger\psi A_0 - e\bar{\psi}\gamma^i\psi A_i, \quad (2.77)$$

onde o primeiro termo do lado direito da equação é a densidade Hamiltoniana do campo de Dirac. A quantização do campo eletromagnético pode ser levada em consideração usando o gauge de Coulomb. Conforme mostrado na seção 2.4 e no Apêndice B, o potencial escalar contribui para a componente longitudinal do campo elétrico,

¹³ Lembre-se de que a densidade Lagrangiana está sendo considerado para o campo eletromagnético sem fonte. Portanto, a fonte é dada pela interação com o campo de Dirac.

$\mathbf{E}_{\parallel} = -\nabla A^0$, enquanto o potencial vetorial contribui para a componente transversal $\mathbf{E}_{\perp} = -\partial_0 \mathbf{A}$. Então, o campo elétrico na Eq. (2.77) pode ser separado em componentes longitudinais e transversais, de modo que $\mathbf{E}^2 = \mathbf{E}_{\perp}^2 + \mathbf{E}_{\parallel}^2$, reduzindo

$$\mathcal{H}_{QED} = \mathcal{H}_{Dirac} + \frac{1}{2}(\mathbf{E}_{\perp}^2 + \mathbf{B}^2) + \frac{1}{2}\mathbf{E}_{\parallel}^2 - e\bar{\psi}\gamma^i\psi A_i, \quad (2.78)$$

onde, o segundo termo à direita corresponde à densidade Lagrangiana do campo eletromagnético livre (2.46). Na Eq. (2.78) não foram considerados os termos $\mathbf{E} \cdot \nabla A^0$ e $e\psi^{\dagger}\psi A_0$, porque ao aplicar a integral de volume à densidade Hamiltoniana, esses termos se cancelam. Isso poderia ser demonstrado usando a primeira identidade de Green [52] e eliminando o termo da integral de superfície¹⁴ [31]. Além disso, a terceira componente do lado direito da Eq. (2.78) descreve a interação entre partículas com cargas elétricas [31, 33], que é definida através da componente longitudinal do campo \mathbf{E} . Este termo descreve a energia total associada ao campo de Coulomb, dada por

$$H_{coulomb} = \int d^3x \mathcal{H}_{coulomb} = \frac{1}{2} \int d^3x \mathbf{E}_{\parallel}^2 = \frac{e^2}{8\pi} \int d^3x d^3y \frac{\psi^{\dagger}(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x})\psi^{\dagger}(\mathbf{y})\psi(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \quad (2.79)$$

onde a Eq. (2.74) foi usada. Portanto, a densidade Hamiltoniana da QED, considerando o gauge de Coulomb, pode ser escrita como

$$\mathcal{H}_{QED} = \mathcal{H}_{Dirac} + \mathcal{H}_{EM} - e\bar{\psi}\gamma^i\psi A_i + \mathcal{H}_{coulomb}, \quad (2.80)$$

onde o Hamiltoniano de interação descreve a energia do campo de radiação transversal acoplado à corrente $j^i = e\bar{\psi}\gamma^i\psi$ e a interação tipo coulomb descrita pela Eq. (2.79). Então, a densidade Hamiltoniana de interação é

$$\mathcal{H}_i = -e\bar{\psi}\gamma^i\psi A_i + \mathcal{H}_{coulomb}, \quad (2.81)$$

isso pode se escrever em função dos operadores de criação e aniquilação de partículas fermiônicas e bosônicas usando as equações (2.15), (2.16) e (2.52) em (2.81). Deve-se notar que a constante de acoplamento é descrita por $\alpha = e^2 \sim 1/137$, onde α é a constante de estrutura fina.

2.6.1.1 Representação de Interação

Para analisar o termo de interação Hamiltoniana do sistema, teoria de perturbação e diagramas de Feynman podem ser usados. Existem três tipos comuns de representações: a representação de Schrödinger apresenta estados que variam no tempo, enquanto os observáveis (operadores Hermitianos) permanecem constantes ao longo do tempo. Enquanto a representação de Heisenberg tem a característica de

¹⁴ Levando em consideração $\mathbf{E}_{\parallel} = -\nabla A^0$, se obtém $\int d^3x \mathbf{E} \cdot \nabla A^0 = -\int d^3x (\nabla A^0 \cdot \nabla A^0) = -e \int d^3x \psi^{\dagger}\psi A_0$.

que os observáveis variam no tempo, enquanto os estados permanecem os mesmos a qualquer instante de tempo. Na representação de interação tanto observáveis e quanto estados do sistema variam no tempo. Isso mostra algumas vantagens ao usar teorias de perturbação.

Para o Hamiltoniano de interação (2.81), pode-se transformar na representação de interação usando

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{H}}_I &= e^{iH_0 t} \mathcal{H}_i(\mathbf{x}) e^{-iH_0 t} = e^{iH_0 t} \left(-e\bar{\psi}\gamma^i\psi A_i + \mathcal{H}_{coulomb} \right) e^{-iH_0 t}, \\ &= -e\bar{\psi}(\mathbf{x}, t)\gamma^i\psi(\mathbf{x}, t)A_i(\mathbf{x}, t) + \mathcal{H}_{coulomb}(\mathbf{x}, t)\end{aligned}\quad (2.82)$$

onde $H_0 = H_{Dirac} + H_{EM}$ é o Hamiltoniano não perturbado, formado pelo Hamiltoniano dos campos livres (Dirac e eletromagnético). Além disso, $\mathcal{H}_i(\mathbf{x})$ é considerado na representação de Schrödinger ou de Heisenberg para um tempo $t = 0$. Portanto, observa-se que os operadores de campo que definem a interação Hamiltoniana também são encontrados para a representação de Schrödinger.

Pode-se observar que o Hamiltoniano de interação da Eq. (2.82) envolve muitos termos na interação, devido aos graus internos de liberdade das partículas fermiônicas e bosônicas. Para reduzir alguns termos de interação, neste trabalho apenas o Hamiltoniano que descreve a interação com bósons transversais é considerado $-e\bar{\psi}(\mathbf{x}, t)\gamma^i\psi(\mathbf{x}, t)A_i(\mathbf{x}, t)$. Por esse motivo, a interação do tipo Coulomb é omitida, de forma que seja viável realizar o processo de simulação quântica. No entanto, o termo de interação Coulombiana pode ser adicionado considerando um mapeamento adequado para realizar a referida simulação. Levando isso em consideração, é escrito o Hamiltoniano de interação que será usado para o protocolo de simulação quântica,

$$H_{int} = -e \int d^3x : \bar{\psi}(\mathbf{x}, t)\gamma^i\psi(\mathbf{x}, t)A_i(\mathbf{x}, t) : . \quad (2.83)$$

onde a transformação na representação de interação se encontra no Apêndice C, isso também é válido para obter $\mathcal{H}_{coulomb}(\mathbf{x}, t)$.

Os operadores de campo são os mesmos definidos nas equações (2.15), (2.16) e (2.52) e, substituindo essas equações na equação anterior, resulta

$$\begin{aligned}H_{int} &= -e \int d^3x \sum_{s=\pm s} : \left[\int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{w_p}} (\hat{b}^\dagger(\mathbf{p}, s)\bar{u}(\mathbf{p}, s)e^{+ip\cdot x} + \hat{d}(\mathbf{p}, s)\bar{v}(\mathbf{p}, s)e^{-ip\cdot x}) \right] \times \\ &\quad \gamma^i \sum_{s'=\pm s'} \left[\int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{w_p}} (\hat{b}(\mathbf{p}, s')u(\mathbf{p}, s')e^{-ip\cdot x} + \hat{d}^\dagger(\mathbf{p}, s')v(\mathbf{p}, s')e^{ip\cdot x}) \right] \times \\ &\quad \sum_{r=1}^2 \left[\int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2w_{\mathbf{k}}}} \left(\epsilon_i(\mathbf{k}, r)\hat{a}(\mathbf{k}, r)e^{-ik\cdot x} + \epsilon_i^*(\mathbf{k}, r)\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, r)e^{ik\cdot x} \right) \right] : .\end{aligned}\quad (2.84)$$

Devem-se fazer algumas observações sobre a condição do gauge de Coulomb nessa interação. Conforme explicado na seção 2.3.1.2, a vantagem desse gauge é que

ele reduz as quatro variáveis que definem o campo A^μ em duas variáveis dinâmicas para descrever o campo. A eletrodinâmica no gauge de Coulomb possui uma vantagem para os fenômenos de baixa energia, uma vez que simplifica o formalismo teórico. Mas deve ser enfatizado que, usando esse gauge, o uso de equações evidentemente covariantes para o campo eletromagnético é abandonado, mas isso não significa a perda de invariância relativística [31, 33]. Para processos que envolvem altas energia, como emissão e absorção de fótons virtuais, o campo eletromagnético sob esse gauge não descreve satisfatoriamente os efeitos associados a esse fenômeno. Além disso, as correções nos modos de alta energia (ou alta frequência) levariam a resultados errados [33].

3 SIMULAÇÃO

Atualmente, sabe-se que muitos fenômenos (ou sistemas) físicos que ocorrem na natureza podem ser implementados em laboratório ou analisados por meio de algoritmos numéricos que são criados e executados em um computador clássico, ou seja, a dinâmica desses sistemas pode ser total ou parcialmente recriado. Porém, existem sistemas físicos que não são exploráveis experimentalmente e apresentam um crescimento exponencial de recursos ao serem analisados em um computador clássico, devido ao tamanho do sistema. Entende-se por recursos computacionais como o tempo de execução e memória necessário para que um computador execute algoritmos numéricos que descreva o sistema. Além disso, o tamanho do sistema é entendido como o número de partículas, fundamental para descrever o sistema.

A simulação é frequentemente usada para analisar sistemas físicos. Simulação é um processo pelo qual um sistema físico é criado para imitar outro [3]. Por exemplo, dentro da física clássica, alguns fenômenos podem ser implementados em laboratório usando sistemas análogos descritos pela mesma equação de movimento. No entanto, o mesmo não acontece para o caso de fenômenos no regime quântico, pois um sistema quântico não apresenta um sistema clássico análogo [3], impossibilitando a imitação da sua dinâmica através de um sistema clássico.

É possível desenvolver algoritmos que podem ser executados em um computador de maneira tal que sua dinâmica possa ser imitada aproximadamente. Atualmente, existem algoritmos numéricos que podem analisar alguns fenômenos quânticos, porém de forma ineficiente [1] devido ao crescimento exponencial do sistema. Por exemplo, Métodos de Monte Carlo foram desenvolvidos para analisar a teoria quântica de campos em espaço-tempo discreto para o modelo ϕ^4 [53], o método Monte Carlo Quântico de Difusão é usado para analisar interações spin-órbitas na estrutura eletrônica dos átomos de Pb e Bi [54] e para resolver a equação de Schrödinger dependente do tempo [55, 56]. No entanto, para alguns sistemas quânticos, especialmente sistemas fermiônicos, esses algoritmos podem apresentar o problema de sinal [5, 36, 57].

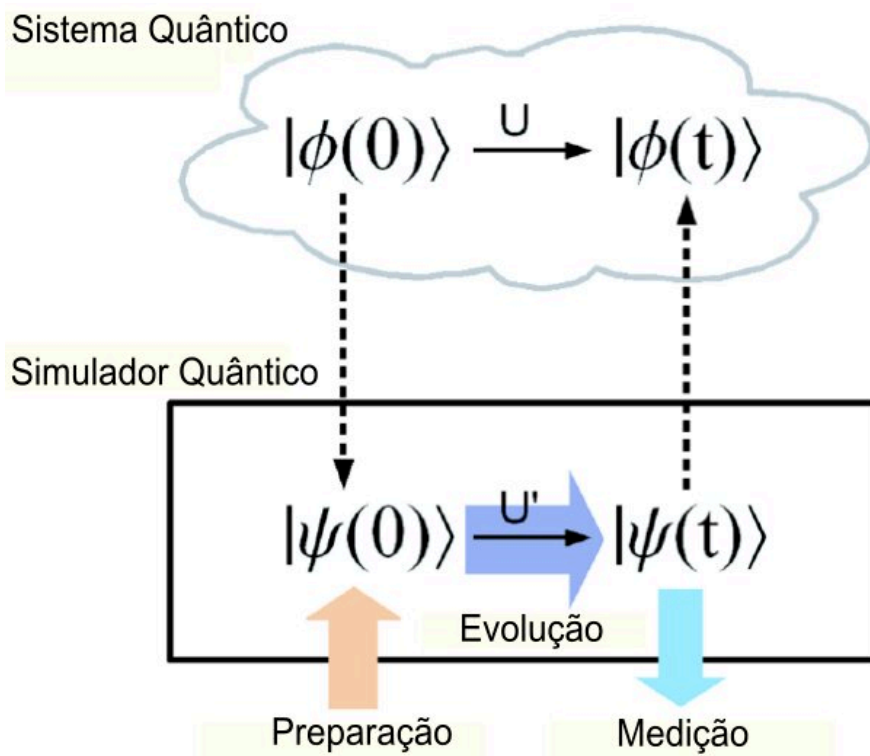
A simulação (exata) de fenômenos quânticos usando um computador clássico é intratável [2]; devido ao crescimento exponencial de recursos computacionais com o tamanho do sistema. Além disso, a simulação da evolução do sistema requer uma série de operações que aumentam exponencialmente com o tamanho do sistema [4, 5]. Para registrar o estado de um sistema de N partículas de spin-1/2 na memória de um computador clássico, são necessários 2^N números, enquanto para calcular a evolução temporal do sistema, uma exponenciação de uma matriz $2^N \times 2^N$ é necessária [3–5]. Se N for aproximadamente maior que 50, a capacidade dos computadores clássicos será muito excedida, tornando a simulação do sistema praticamente impossível [57, 58]. Assim, para entender melhor a dinâmica do sistema a ser simulado, pode-se recorrer

à ideia de R. Feynman sobre *Simulação Quântica*.

3.1 Simulação Quântica

Em 1982, R. Feynman propõe usar um computador quântico de forma que seja capaz de simular fenômenos quânticos [2], ou seja, usar um sistema cujo tamanho e complexidade também aumentam exponencialmente. Em 1996, Seth Lloyd demonstra que a ideia de Feynman é correta, ele mostra a eficiência de um computador quântico sobre um computador clássico para simular sistema quânticos que evoluem de acordo com as interações locais [3]. Esse processo pode ser realizado por meio de sistemas quânticos análogos ou digitais, também chamados de simuladores quânticos [4].

Figura 4 – Esquema da simulação quântica. As setas coloridas indicam processos ou operações controláveis, as setas pretas descrevem a evolução temporal do sistema e do simulador. As setas tracejadas representam a equivalência entre os estados quânticos do sistema a serem simulados e o simulador quântico.



Fonte – Figura retirada de [5].

Para entender como a simulação quântica funciona, a representação esquemática do processo é mostrada na Figura 4, a qual descreve a relação entre o sistema quântico não controlável (ou experimentalmente não acessível) e seu correspondente simulador quântico. O sistema quântico a ser simulado pode evoluir de um estado inicial $|\phi(0)\rangle$ para um estado final $|\phi(t)\rangle$ por meio de uma evolução unitária U definida pelo

Hamiltoniano do sistema H_{sis} , ou seja, teoricamente o sistema é conhecido. Enquanto o simulador quântico é construído de tal maneira que o estado inicial $|\psi(0)\rangle$ possa ser preparado e evoluído para um estado final $|\psi(t)\rangle$ que possa ser medido, isso é feito por uma evolução unitária controlada U' definida pelo Hamiltoniano do simulador H_{sim} . Se houver um mapeamento entre o sistema e o simulador, ou seja, um relacionamento entre os estados $|\phi(0)\rangle \leftrightarrow |\psi(0)\rangle$, $|\phi(t)\rangle \leftrightarrow |\psi(t)\rangle$, e o operador de evolução $U \leftrightarrow U'$, então o sistema quântico poderá ser simulado [5].

O processo de simulação quântica apresenta diversas aplicações em muitas áreas da Física: em cosmologia [6, 7], Física de altas energias [8–21], Física da matéria condensada [22, 23], etc. Além disso, é aplicado em química quântica [24]. As tabelas II e III da referência [5] mostram algumas aplicações da simulação quântica e os simuladores quânticos usados ou propostos.

Na Física de alta energia, foram desenvolvidos protocolos de simulação quântica para estudar a dinâmica da mecânica quântica relativística, as interações entre partículas fundamentais na teoria quântica de campos, campos de gauge na rede, etc. Na mecânica quântica relativística, simulação quântica da equação de Dirac tem sido de grande interesse [8–13], no caso unidimensional (dimensão $1 + 1$), fenômenos como Zitterbewegung [9], o paradoxo de Klein [10] foram implementados usando íons aprisionados. Esses mesmos fenômenos foram analisados usando a eletrodinâmica quântica de circuitos [59]. Considerando a dinâmica interna do espinor, a simulação de espinores de dois e quatro componentes na dimensão $1 + 1$ [11] e na dimensão $2 + 1$ considerando a interação com um campo de gauge artificial [13] foram elaboradas usando átomos ultrafrios em redes ópticas; Além disso, na dimensão $3 + 1$, o mapeamento da dinâmica interna do espinor em um sistema de quatro níveis é implementado em circuitos superconductores [12].

Na teoria quântica de campos, protocolos de simulação quântica para estudar interações entre partículas foram desenvolvidos [14–18] usando diferentes simuladores quânticos analógicos. Por exemplo, interações dos modos de campo fermiônico (antifermiônico) mediado pelos modos de campo bosônico foi proposto usando íons aprisionados [15] e, posteriormente, o espalhamento férmion-antiférmion foi desenvolvida experimentalmente [18]. Além disso, foram simulados campos de gauge em espaço-tempo discreto (ou também conhecido como teoria de gauge na rede) na dimensão $1 + 1$ [19–21]. Por exemplo, o modelo de Schwinger ou QED unidimensional foi analisado em circuitos quânticos superconductores [19], átomos ultra-frios [20] e férmions com spin usando íons aprisionados [21].

3.1.1 Diferença entre a Simulação Quântica Análoga e Digital

Os simuladores quânticos podem ser implementados usando sistemas análogos ou digitais. A simulação quântica análoga consiste em construir um sistema quântico

controlável que poder ser implementado em laboratório para imitar a dinâmica de outro sistema. Alguns sistemas análogos podem ser: átomos neutros em redes ópticas, íons aprisionados, circuitos supercondutores, fótons, etc. [4, 5]. Uma vantagem importante deste simulador é que pode ser útil mesmo na presença de erros, até um determinado nível de tolerância. Além disso, como o sistema e o simulador são considerados semelhantes, espera-se que as grandezas físicas possam ser medidas diretamente [5].

Na simulação quântica análoga, o mapeamento adequado deve ser realizado de modo que o Hamiltoniano do sistema, H_{sis} , possa coincidir diretamente com o Hamiltoniano que descreve ao sistema análogo, H_{sim} , ou seja,

$$H_{sis} \Leftrightarrow H_{sim}, \quad (3.1)$$

pode-se dizer que deve haver uma relação direta entre os sistemas. Encontrar este mapeamento pode parecer simples, no entanto, na maioria dos casos, isso não acontece. Devem ser realizados mapeamentos adequados, introduzindo campos externos ou sistemas auxiliares para mediar várias interações [5].

Na simulação quântica digital, o operador de evolução temporal, descrito pelo Hamiltoniano do simulador H_{sim} , pode ser implementado por meio de um algoritmo quântico construído por portas lógicas quânticas. Como qualquer operação unitária pode ser escrita em termos de portas quânticas universais [1, 3], portanto, pode-se dizer que a vantagem deste simulador é que ele é universal [4, 5].

Para dividir o Hamiltoniano, H_{sim} em uma sequência de portas quânticas, é necessário que todos os seus componentes expressem individualmente, e independentemente, um operador de evolução temporal. Por exemplo, o hamiltoniano do simulador pode ser considerado como uma soma de N termos que descrevem as interações locais, isto é,

$$H = \sum_{i=1}^N H_i. \quad (3.2)$$

Se suas componentes comutam, $[H_i, H_j] = 0$, para qualquer i e j , então, a evolução temporal pode ser escrita como,

$$U = e^{-iHt} = \prod_{i=1}^N e^{-iH_i t}, \quad (3.3)$$

ou seja, a evolução pode ser decomposta como o produto das evoluções unitárias de cada componentes, portanto, pode ser escrita como uma sequência de portas quântica. No entanto, infelizmente, na maioria dos casos, isso não acontece, porque as componentes do Hamiltoniano H_{sim} não comutam, conseqüentemente, não poderia ser decomposto conforme a equação (3.3). Usando a fórmula de *Baker-Campbell-Hausdorff*, dois operadores A e B que não comutam, é possível aproximar deles usando

intervalos de tempo muito pequeno

$$e^{(A+B)\Delta t} \approx e^{A\Delta t} e^{B\Delta t} e^{-\frac{1}{2}[A,B]\Delta t}, \quad (3.4)$$

onde $\Delta t = \frac{t}{n}$, com n é o número de partes em que o tempo é dividido.

Para o caso de um intervalo de tempo muito pequeno, ou seja, um valor muito maior de n , de modo que o comutador $[A, B]$ pode ser omitido, resulta na formula de aproximação de Trotter [1],

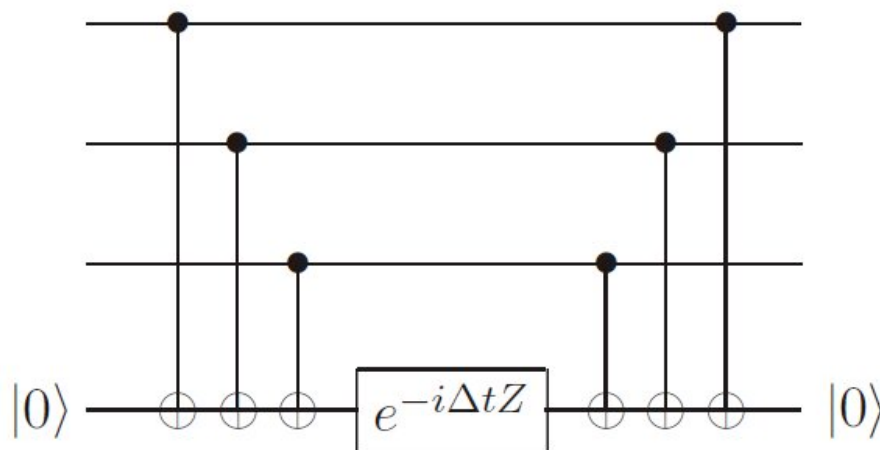
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(e^{iAt/n} e^{iBt/n} \right)^n \approx e^{i(A+B)t} \quad (3.5)$$

onde A e B são operadores que não necessariamente comutam. Então, para o Hamiltoniano da Eq. (3.2), o operador de evolução temporal é $U = e^{-iH_{sim}t} = e^{-i\sum_{i=1}^N H_i t}$, e aplicando a fórmula de Trotter, obtém-se

$$e^{-iH_{sim}t} \approx \lim_{n \rightarrow \infty} \left[e^{-iH_1 \frac{t}{n}} e^{-iH_2 \frac{t}{n}} \dots e^{-iH_N \frac{t}{n}} \right]^n. \quad (3.6)$$

Isso mostra que, para intervalos de tempo muito pequenos, a evolução temporal do sistema pode ser decomposto de tal forma que pode ser implementado usando portas quânticas. Entende-se por portas lógicas como evoluções temporais por um tempo fixo, que em geral realizam uma tarefa específica. Por exemplo modificar um qubit $|0\rangle$ para um qubit $|1\rangle$. Um exemplo de simulação digital pode ser visto na figura 5.

Figura 5 – Circuito quântico para a simulação do Hamiltoniano $H = Z_1 \times Z_2 \otimes Z_3$ para tempo Δt .



Fonte – Figura retirada de [1].

3.2 Simulação Quântica da QED

Conforme explicado na seção anterior, a maioria das aplicações de simulação quântica na Física de alta energia é implementada considerando sistemas quânticos

reduzidos, sem considerar o grau interno de liberdade. Apesar disso, simulações da equação de Dirac considerando o espinor de dois e quatro componentes já foram desenvolvidas [11–13]. No caso da teoria quântica de campo, os fenômenos de espalhamento de partículas fundamentais foram simulados sem considerar seu grau interno de liberdade ou spin das partículas [14–16, 18]. Além disso, modelos de QED unidimensionais foram simulados [19–21]. Portanto, pode-se perceber que a implementação de um protocolo de simulação quântica para estudar a interação de partículas, levando em consideração o seu spin, poderia trazer importantes aplicações na Física de partículas, química quântica, etc.; e implementar um simulador quântico capaz de imitar esses fenômenos pode ser um desafio para a simulação quântica e, portanto, para a computação quântica.

Lembre-se de que a eletrodinâmica quântica descreve a interação entre os férmions de spin-1/2 e os bósons sem massa de spin-1 (fótons). Usando o gauge de Coulomb, este sistema quântico é descrito pelo Hamiltoniano de interação H_i da Eq. (2.82), que mostra infinitos modos de campos; Além disso, os graus internos de liberdade são levados em conta por meio do espinor para férmions (e antiférmions) e do quadrivetor de polarização dos fótons. Seguindo a ideia de Feynman, é possível construir um sistema quântico (análogo ou digital) capaz de emular as interações descritas pela QED.

O objetivo deste trabalho é elaborar um protocolo de simulação quântica da QED no gauge de Coulomb, levando em consideração os graus internos de liberdade. Para isso, pretende-se partir do Hamiltoniano de interação descrita pela Eq. (2.84), pois envolve 64 termos de interação. Para entender o desenvolvimento deste trabalho, o protocolo pode ser construído seguindo três etapas: **(1)** Descrever o sistema quântico para simular. **(2)** Generalizar o método elaborado por Casanova *et. al.* na referência [15] para campos de dimensão $3 + 1$. **(3)** Escrever o Hamiltoniano do simulador em termos de operadores de spin do qubit, como ilustrado na Figura 6.

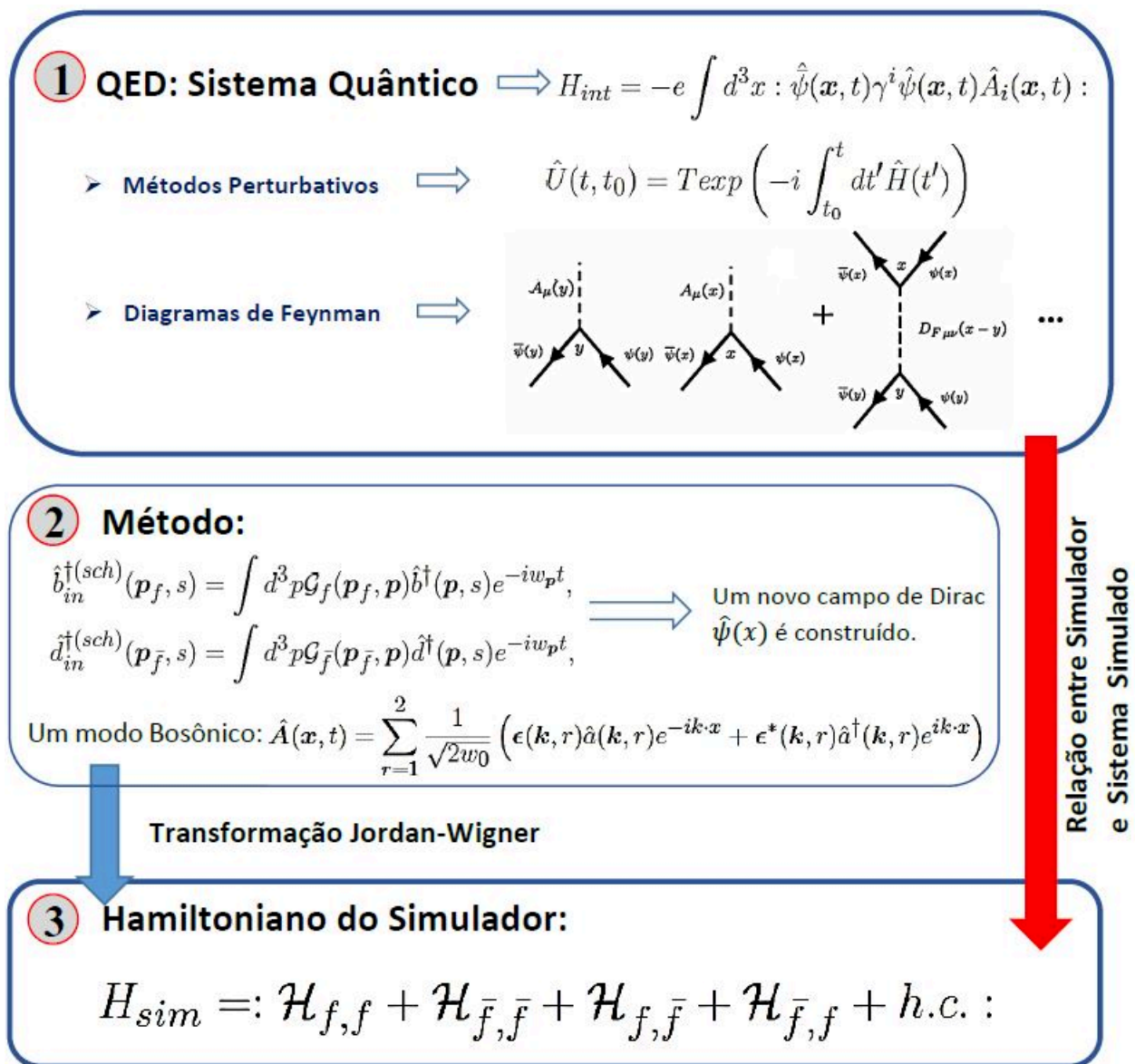
O passo **(1)** nos diz que, para simular um sistema quântico, as características do sistema devem ser teoricamente definidas. A partir dos postulados da mecânica quântica, sabe-se que um sistema quântico é definido por seu Hamiltoniano, pois com esse operador é possível construir um operador de evolução temporal capaz de descrever a dinâmica do sistema. Neste caso, a QED na representação de interação e usando o gauge de Coulomb, é considerado o Hamiltoniano de interação mostrada na Eq. (2.84). Além disso, analiticamente, as interações podem ser calculadas por meio de métodos perturbativos ou usando os diagramas de Feynman, porque o Hamiltoniano de interação é dependente do tempo (veja as referências [27, 28]). A seção transversal, a taxa de decaimento e outras características das interações na QED podem ser obtidas usando o elemento matriz de espalhamento, matriz S . Se forem considerados métodos perturbativos, os infinitos termos da série de Dyson devem ser calculados para obter

uma solução aproximada; e usando os diagramas de Feynman, se deve somar todos os possíveis diagramas que podem ser construídos para cada ordem de expansão dos elementos da matriz S (veja a caixa (1) da Figura 6).

Na etapa **(2)** o método desenvolvido na referência [15] é generalizado para o caso de campos de dimensão $3 + 1$, considerando campos espinoriais e campo vetorial. Ou seja, são considerados modos de férmion ($\hat{b}_{in}^{\dagger(sch)}$) e antiférmion ($\hat{d}_{in}^{\dagger(sch)}$), definindo pacotes de ondas quando são aplicados ao vácuo. Usando esses operadores é possível criar um novo campo que satisfaz as mesmas propriedades do campo de Dirac, dada pelas equações (2.15) e (2.16), de forma que esse novo campo descreva a mesma dinâmica do campo de Dirac. Para isso, os operadores \hat{b}_{in} e \hat{d}_{in} e seus hermitianos conjugados devem satisfazer as relações de anticomutação definido na Eq. (2.19). Além disso, é considerado um único modo de campo bosônico. Usando esses campos, é possível construir o Hamiltoniano de Interação da QED para esse sistema simplificado. Esta etapa é descrito em detalhes na seção 4.1.

Finalmente, uma vez obtida o Hamiltoniano da QED que descreve a interação entre férmions (e antiférmions) localizados e um único modo de campo bosônico, a transformação de Jordan-Wigner é aplicada para mapear os operadores de férmion (e antiférmions) em qubits, de tal maneira que o Hamiltoniano obtido possa descrever um simulador quântico análogo ou digital (veja a caixa (3) da Figura 6). O Hamiltoniano do simulador quântico descreve as auto interações de férmions (e antiférmions), pares de criação e aniquilação férmion-antiférmion. Esta etapa é detalhada na seção 4.3.

Figura 6 – Representação esquemática do protocolo de simulação quântica da QED usando gauge de Coulomb. **(1)** o sistema quântico é definido pelo Hamiltoniano da Eq. (2.84); analiticamente, os processos de espalhamento podem ser calculados usando métodos perturbativo ou diagramas de Feynman. **(2)** Um novo campo de Dirac é definido generalizando o método de [15] e é considerado um modo de campo bosônico. Usando esses campos, um novo Hamiltoniano da QED é construído. **(3)** A transformação de Jordan-Wigner (seta azul) é aplicada para mapear os operadores fermiônicos e antifermiônicos em qubits, a fim de construir o Hamiltoniano do simulador quântico. A seta vermelha descreve a relação entre o sistema quântico e o simulador quântico, conforme a Figura 4. Os diagramas de Feynman foram retirados de [48].



3.2.1 Transformação de Jordan-Wigner

O Hamiltoniano de interação a ser simulado é expresso em termos de férmions idênticos (indistinguíveis), obedecendo à estatística de Fermi-Dirac. No entanto, na simulação quântica, os simuladores usam partículas localizadas e distinguíveis denominados como qubits. Por essa razão, é necessário encontrar um jeito de impor as regras de férmions idênticos a partículas distinguíveis de dois níveis.

A transformação de Jordan-Wigner estabelece o isomorfismo entre a álgebra do férmion e a álgebra das matrizes de Pauli [36]. De outra maneira, ele realiza uma transformação (reversível) de modelos de férmion para modelos de spin-1/2. Portanto, o mapeamento dos operadores de criação e aniquilação de férmion para qubits pode ser realizado usando essa transformação.

Usando as matrizes de Pauli (discutidas no Apêndice A), se pode definir os operadores de spin do qubit $S^k = \frac{1}{2}\sigma^k$ para $k = x, y, z$. Além disso, os operadores de levantamento e abaixamento $S^\pm = S^x \pm i S^y = \frac{1}{2}\sigma^\pm$, na representação matricial na base de autovalores de σ^z são

$$S^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Também, consegue-se que $S^z = S^+S^- - \frac{1}{2}$. Esses operadores satisfazem as seguintes propriedades:

$$[S^j, S^k] = i\epsilon^{jkl}S^l, \quad \{S^j, S^k\} = \frac{1}{2}\delta_{jk}, \quad (3.8)$$

onde ϵ^{jkl} é o símbolo de Levi-Civita. Isso mostra que os operadores de spin (do qubit) não se comportam como bósons ou férmions canônicos [38]. Sob certas considerações, os operadores de spin do qubit podem satisfazer a mesma álgebra dos operadores de spin do férmion e vice-versa. Por exemplo, o estado de spin para baixo $|\downarrow\rangle$ e para cima $|\uparrow\rangle$ de um único qubit pode ser relacionado aos estados de férmion vazios e ocupados individualmente, ou seja, $|\downarrow\rangle = |0\rangle$ e $|\uparrow\rangle = f^\dagger|0\rangle$, respectivamente. Então, mostra-se que existe um mapeamento de um único qubit para um único férmion, isso é dada pela relação $S^+ = f^\dagger$ e $S^- = f$.

No entanto, esse mapeamento deve ser modificado ao considerar mais do que um férmion. Nesse caso, se considera aos férmions como se estivessem dispostos em uma cadeia unidimensional de N sítios¹. Fazendo isso, pode-se usar uma cadeia unidimensional de N qubits para representar os férmions, como mostrado na Figura 7. Os operadores de spin do qubit comutam em sítios diferentes e anticomutam no

¹ Deve-se ressaltar que esta é apenas uma visualização do procedimento, uma vez que os férmions continuam sendo partículas idênticas, descritas por campos estendidos por todo o volume considerado.

mesmos sítios [37]

$$[S_n^+, S_m^+] = [S_n^-, S_m^-] = [S_n^+, S_m^-] = 0 \quad \text{para } m \neq n, \quad (3.9a)$$

$$\{S_n^+, S_n^-\} = 1, \quad \{S_n^+, S_n^+\} = \{S_n^-, S_n^-\} = 0, \quad (3.9b)$$

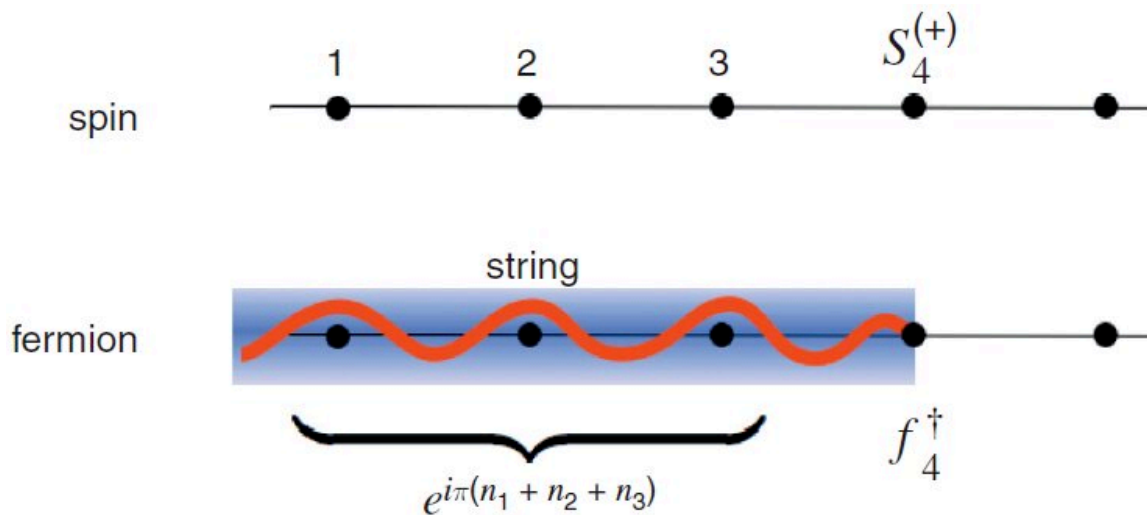
onde m e n representam os sítios onde os operadores de spin do qubit atuam.

Para realizar o mapeamento é necessário adicionar um fator de fase (chamado de *string*) aos operadores dos férmions. Ou seja,

$$S_j^+ = f_j^+ e^{i\phi_j}, \quad (3.10)$$

onde f_j^+ é o operador de criação de férmions atuando no sítio j , o operador de fase $\phi_j = \pi \sum_{l < j} n_l$ contém a soma de todos os férmions "ocupados" nos sítios à esquerda de j , com $n_j = f_j^\dagger f_j$. Por exemplo, na Figura 7, um spin do qubit localizado no sítio 4 é mapeado para um férmion esquematicamente posicionado no mesmo sítio (ou vice-versa), juntamente com um fator de fase $e^{i(n_1+n_2+n_3)}$ definido pelos três férmions situados à esquerda de f_4^\dagger .

Figura 7 – Representação esquemática da transformação de Jordan-Wigner unidimensional. Os operadores de spin do qubit no sítio j , S_j^+ , é mapeado em férmions, multiplicando ao operador de criação f_j^\dagger por um fator de fase definido por todos os operadores de férmions localizados à sua esquerda.



Fonte – Figura retirada de [38].

Portanto, transformação de Jordan-Wigner em uma dimensão é

$$S_j^z = f_j^\dagger f_j - \frac{1}{2}, \quad (3.11a)$$

$$S_j^+ = f_j^+ e^{i\pi \sum_{i < j} n_i}, \quad (3.11b)$$

$$S_j^- = e^{-i\pi \sum_{i < j} n_i} f_j, \quad (3.11c)$$

onde f^\dagger (f) são os operadores de criação (aniquilação) do férmion no sítio j . Consequentemente, o inverso da transformação de Jordan-Wigner também é obtido

$$f_j^\dagger = S_j^+ e^{-i\pi \sum_{i<j} n_i}, \quad (3.12a)$$

$$f_j = e^{+i\pi \sum_{l<j} n_l} S_j^-. \quad (3.12b)$$

Para mais detalhes sobre a transformação de Jordan-Wigner, consultar [37, 38, 60].

O mapeamento de férmions para qubits, conforme explicado nas etapas que mostra a Figura 6, é realizado usando a transformação de Jordan-Wigner unidimensional. Em outras palavras, usando as equações (3.12), os operadores de criação e aniquilação do férmion (e antiférmion) são transformados em qubits, conforme mostrado na seção 4.3.

4 PROTOCOLO DE SIMULAÇÃO QUÂNTICA DA QED

Desenvolvendo o objetivo do trabalho, são descritas as etapas do processo de simulação quântica da QED usando o gauge de Coulomb, levando em consideração os graus internos de liberdade dos férmions de spin-1/2 e bósons de spin-1 sem massa.

4.1 Método

Conforme descrito no capítulo anterior o objetivo deste trabalho é propor um novo protocolo de simulação quântica para a QED usando o gauge de Coulomb, levando em consideração o spin das partículas. Seguindo as etapas descritas na Figura 6; o primeiro passo, a definição do sistema quântico a ser simulado, foi descrito no capítulo 2. As outras etapas serão detalhadas neste capítulo.

Na segunda etapa, é generalizado o protocolo de simulação quântica para teoria quântica de campos, elaborado por *Casanova et. al.* [15], que considera as interações de férmions e bósons maciços em dimensão $1 + 1$, sem levar em consideração seus graus internos de liberdade.

Para fazer a simulação quântica da QED considerando os graus internos de liberdade das partículas fermiônicas e bosônicas, são impostas três condições:

- (i) Campos de dimensões $3 + 1$, devido à representação covariante do campo de Dirac e ao sentido físico do fóton,
- (ii) Campo espinorial (férmions de spin-1/2 elétrons) e campo vetorial (bósons sem massa e de spin-1),
- (iii) Um modo de campo bosônico e um modo de campo fermiônico e antifermiônico em co-movimento (modos *comoving*).

As premissas (i) e (ii) estabelecem que o campo de Dirac e o campo eletromagnético devem ser considerados na representação covariante, mostrada nas equações (2.15) e (2.52), de tal maneira que os graus internos de liberdade dados pelo espinor de Dirac e pelo quadrivetor de polarização não sejam omitidos. Com isso em mente,

$$H_{int} = -e \int d^3x : \hat{\psi}(\mathbf{x}, t) \gamma^i \hat{\psi}(\mathbf{x}, t) \hat{A}_i(\mathbf{x}, t) :, \quad (4.1)$$

descreve o Hamiltoniano na representação de interação, onde os campos que o compõem são encontrados, explicitamente, na representação de interação (consulte a seção 2.6 e o Apêndice C).

Da premissa (iii), apenas um modo de campo bosônico é considerado, portanto, para um modo de campo¹ $\hat{A}(\mathbf{x}, t)$ definido pela Eq. (2.52) reduz-se a

$$\hat{A}(\mathbf{x}, t) = \sum_{r=1}^2 \frac{1}{\sqrt{2w_0}} \left(\epsilon(\mathbf{k}, r) \hat{a}(\mathbf{k}, r) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \epsilon^*(\mathbf{k}, r) \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, r) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right), \quad (4.2)$$

onde $|\mathbf{k}| = w_{\mathbf{k}} = w_0$.

A premissa (iii) introduz a idéia da interação (espalhamento) de dois pacotes de onda. Esses pacotes de ondas são definidos por os operadores $\hat{b}_{in}^{\dagger(sch)}(\mathbf{p}_f, s)$ e $\hat{d}_{in}^{\dagger(sch)}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, s)$ que descreverão modos de campo fermiônico e antifermiônico, respectivamente. Esses operadores estão na representação de Schrödinger, quando aplicados ao vácuo, eles criarão pacotes de ondas de entrada para cada instante de tempo, t , com apenas uma excitação em média [15]. Eles operadores são definidos como

$$\hat{b}_{in}^{\dagger(sch)}(\mathbf{p}_f, s) = \int d^3p \mathcal{G}_f(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}) \hat{b}^\dagger(\mathbf{p}, s) e^{-i\mathbf{w}_p t}, \quad (4.3a)$$

$$\hat{d}_{in}^{\dagger(sch)}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, s) = \int d^3p \mathcal{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}) \hat{d}^\dagger(\mathbf{p}, s) e^{-i\mathbf{w}_p t}, \quad (4.3b)$$

onde, $\hat{b}_{in}^{\dagger(sch)}(\mathbf{p}_f, s)$ ($\hat{d}_{in}^{\dagger(sch)}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, s)$), criam partículas (antipartículas) localizados com momento \mathbf{p}_f ($\mathbf{p}_{\bar{f}}$) e projeção spin s . A função $\mathcal{G}_f(\mathbf{p}_f, \mathbf{p})$ ($\mathcal{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p})$) descreve o envelope do pacote de onda para partículas (antipartículas). Esses envelopes são de forma gaussiana quando o limite ultrarelativista é aplicado ($w_p = |\mathbf{p}|$) [35].

Os novos operadores de criação definidos nas equações (4.3) podem redefinir um campo de Dirac da Eq. (2.15) no qual férmions (antiférmions) possam ser criados e aniquilados com novos espinores \mathcal{U} (\mathcal{V}), semelhante aos espinores do campo de Dirac definidos no capítulo 2. O campo fermiônico independente do tempo pode ser expandido tal que, (os cálculos detalhados referentes a esta seção são apresentados no Apêndice D)

$$\hat{\psi}(\mathbf{x}) = \sum_{s=\pm s} \left\{ \hat{b}_{in}^{\dagger(sch)}(\mathbf{p}_f, s) C_b \mathcal{U}(\mathbf{p}_f, s) + \hat{d}_{in}^{\dagger(sch)}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, s) C_d \mathcal{V}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, s) \right\}, \quad (4.4)$$

onde C_b e C_d são os coeficientes de normalização do novo campo de Dirac. Além disso, $\mathcal{U}(\mathbf{p}_f, s)$ e $\mathcal{V}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, s)$ têm as mesmas propriedades dos espinores de Dirac, mas eles não são necessariamente os mesmos que os espinores $u(\mathbf{p}, s)$ e $v(\mathbf{p}, s)$. O campo $\hat{\psi}(\mathbf{x})$ deve ter as mesmas propriedades que o campo de Dirac, ou seja, deve satisfazer as equações (2.18). Portanto, os operadores $\hat{b}_{in}^{\dagger(sch)}$ ($\hat{b}_{in}^{\dagger(sch)}$) e $\hat{d}_{in}^{\dagger(sch)}$ ($\hat{d}_{in}^{\dagger(sch)}$) satisfazem as relações de anticomutação definidas na Eq. (2.19).

A dependência em x na equação (4.4) está inclusa nos coeficientes² $C_b \mathcal{U}(\mathbf{p}_f, s)$ e $C_d \mathcal{V}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, s)$. Esses coeficientes podem ser obtidos construindo as seguintes relações

¹ Lembre-se de que o gauge de Coulomb é considerado e o potencial escalar intervém apenas na interação do tipo Coulomb que foi omitido neste trabalho.

² Assim como os espinores de Dirac, esses termos são representados por matrizes coluna de quatro componentes.

de anticomutação

$$C_b \mathcal{U}(\mathbf{p}_f, s) = \left\{ \hat{\psi}(\mathbf{x}), \hat{b}_{in}^{\dagger(sch)}(\mathbf{p}_f, s) \right\} \quad \text{e} \quad C_d \mathcal{V}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, s) = \left\{ \hat{\psi}(\mathbf{x}), \hat{d}_{in}^{\dagger(sch)}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, s) \right\}. \quad (4.5)$$

Esta equação faz sentido porque a mesma dimensão dos espinores é mantida. Como o novo campo dado pela Eq. (4.4) e o campo de Dirac da Eq. (2.15) precisam descrever as mesmas propriedades físicas, então a Eq. (2.15) pode ser substituído nas relações (4.5) e, usando a Eq. (4.3), a relação de anticomutação pode ser calculada, obtendo (para mais detalhes, ver equações (D.6) e (D.8))

$$\begin{aligned} C_b \mathcal{U}(\mathbf{p}_f, s) &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{w_{\mathbf{p}}}} \mathcal{G}_f(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}) u(\mathbf{p}, s) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} e^{-i w_{\mathbf{p}} t}, \\ C_d \mathcal{V}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, s) &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{w_{\mathbf{p}}}} \mathcal{G}_{\bar{f}}^*(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}) v(\mathbf{p}, s) e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} e^{i w_{\mathbf{p}} t}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Para reduzir a expressão, a seguinte definição pode ser feita

$$\begin{aligned} G_f(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}, s) &= \sqrt{\frac{m}{w_{\mathbf{p}}}} \mathcal{G}_f(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}) u(\mathbf{p}, s), \\ G_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}, s) &= \sqrt{\frac{m}{w_{\mathbf{p}}}} \mathcal{G}_{\bar{f}}^*(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}) v(\mathbf{p}, s). \end{aligned} \quad (4.7)$$

As equações (4.7) podem ser interpretadas como uma matriz coluna que descreve um novo envelope de onda³. Substituindo as equações (4.6) e (4.7) na expansão do campo de Dirac da Eq. (4.4), obtém-se

$$\hat{\psi}(\mathbf{x}) = \sum_{s=\pm s} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2}} \left[\hat{b}_{in}^{(sch)} G_f(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}, s) e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} - w_{\mathbf{p}} t)} + \hat{d}_{in}^{\dagger(sch)} G_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}, s) e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} - w_{\mathbf{p}} t)} \right]. \quad (4.8)$$

Para a integral da equação anterior, pode-se definir

$$\tilde{G}_f(\mathbf{p}_f, \mathbf{x}, s) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2}} G_f(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}, s) e^{i[(\mathbf{p} - \mathbf{p}_f)\cdot\mathbf{x} - (w_{\mathbf{p}} - w_f)t]}, \quad (4.9a)$$

$$\tilde{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{x}, s) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2}} G_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}, s) e^{-i[(\mathbf{p} - \mathbf{p}_{\bar{f}})\cdot\mathbf{x} - (w_{\mathbf{p}} - w_{\bar{f}})t]}, \quad (4.9b)$$

onde se multiplicou $e^{\pm i\mathbf{p}_{f,\bar{f}}\cdot\mathbf{x}} e^{\pm i w_{f,\bar{f}} t}$ na expansão do campo. As equações (4.9) descrevem a transformada de Fourier de cada componente da matriz coluna definida pelos espinores de Dirac na Eq. (4.7). Portanto, as expressões (4.9) apresentam a mesma dimensão que os espinores de Dirac.

Substituindo as equações (4.9) na Eq. (4.8), a expansão do campo de Dirac, $\hat{\psi}(\mathbf{x})$, na representação de Schrödinger é obtida, portanto, na representação de interação, ela pode ser escrita como (consulte os Apêndices C e D)

$$\hat{\psi}(\mathbf{x}) = \sum_{s=\pm s} \left[\hat{b}_{in}(\mathbf{p}_f, s) \tilde{G}_f(\mathbf{p}_f, \mathbf{x}, s) e^{-i\mathbf{p}_f\cdot\mathbf{x}} + \hat{d}_{in}^{\dagger}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, s) \tilde{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{x}, s) e^{i\mathbf{p}_{\bar{f}}\cdot\mathbf{x}} \right], \quad (4.10)$$

³ Deve ser enfatizado que no campo de Dirac, o espinor depende do momento da partícula, portanto, ao considerar o envelope de um pacote de onda que também depende de \mathbf{p} , se tem uma expressão matricial cujo significado físico não é claro.

onde $p_f \cdot x = w_f t - \mathbf{p}_f \cdot \mathbf{x}$ e $p_{\bar{f}} \cdot x = w_{\bar{f}} t - \mathbf{p}_{\bar{f}} \cdot \mathbf{x}$, e os operadores $\hat{b}_{in}(\mathbf{p}_f, s) = \int d^3p \mathcal{G}_f(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}) \hat{b}(\mathbf{p}, s)$ e $\hat{d}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_{\bar{f}}, s) = \int d^3p \mathcal{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}) \hat{d}^\dagger(\mathbf{p}, s)$ são independentes do tempo e estão na representação de interação. A dependência temporal está no termo definido pela transformada de Fourier, que é descrita pelo espinor e pelo envelope do pacote de ondas considerado.

Analogamente, o campo conjugado de Dirac é obtido na representação de interação [demonstrado no Apêndice D, Eq. (D.17)]

$$\hat{\psi}(x) = \sum_{\pm s} \left[\hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_f, s) \tilde{\mathcal{G}}_f(\mathbf{p}_f, x, s) e^{+ip_f \cdot x} + \hat{d}_{in}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, s) \tilde{\mathcal{G}}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, x, s) e^{-ip_{\bar{f}} \cdot x} \right]. \quad (4.11)$$

Essas equações expressam o operador de campo de Dirac na representação de interação considerando o pacote de ondas. Isso será útil porque as partículas fermiônicas e antifermiônicas estão localizadas no pacote de ondas.

Agora tem-se uma nova expressão do campo de Dirac dada pelas equações (4.10) e (4.11), além disso, é considerado um modo de campo bosônico descrito pela Eq. (4.2). Substituindo essas equações no Hamiltoniano de interação, Eq. (4.1), obtém-se o Hamiltoniano do sistema para simular (considerando $g = \frac{-e}{\sqrt{2w_0}}$)

$$\begin{aligned} H_{int} = g : & \int d^3x \sum_{s=\pm s} \left[\hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_f, s) \tilde{\mathcal{G}}_f(\mathbf{p}_f, x, s) e^{+ip_f \cdot x} + \hat{d}_{in}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, s) \tilde{\mathcal{G}}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, x, s) e^{-ip_{\bar{f}} \cdot x} \right] \gamma^i \times \\ & \sum_{s=\pm s} \left[\hat{b}_{in}(\mathbf{p}_f, s) \tilde{\mathcal{G}}_f(\mathbf{p}_f, x, s) e^{-ip_f \cdot x} + \hat{d}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_{\bar{f}}, s) \tilde{\mathcal{G}}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, x, s) e^{ip_{\bar{f}} \cdot x} \right] \times \\ & \sum_{r=1}^2 \left(\epsilon_i(\mathbf{k}, r) \hat{a}(\mathbf{k}, r) e^{-ik \cdot x} + \epsilon_i^*(\mathbf{k}, r) \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, r) e^{ik \cdot x} \right) : . \end{aligned} \quad (4.12)$$

A equação (4.12) já descreve as auto-interações de férmion de Dirac (e anti-férmion), criação e aniquilação de pares partícula-antipartícula mediadas pela troca de fótons físicos. Esse Hamiltoniano possui 64 termos de interação descrito por cada valor do projeção spin s do férmion (antiférmion) e a polarização do fóton, sendo 32 termos mais seus hermitianos conjugados.

Antes de começar a descrever as interações dadas pelo Hamiltoniano H_{int} , é necessário fazer algumas observações. O sistema acima descreve férmions localizados em um pacote de ondas definido pelo envelope $\mathcal{G}_{f, \bar{f}}$. Ao considerar o espinor de Dirac, é obtido um novo espinor que depende da forma do envelope e dos componentes dos espinores definidos na Eq. (2.8). A transformada de Fourier $\tilde{\mathcal{G}}_{f, \bar{f}}(\mathbf{p}_{f, \bar{f}}, x, s)$ pode ser simplificada, por exemplo, reduzindo as dimensões do sistema, isto é, se forem considerados férmions unidimensionais ou bidimensionais.

A aplicação do gauge de Coulomb na quantização do campo reduz os graus de liberdade de quatro para dois, no entanto, algumas características do campo eletromagnético são perdidas. Se o gauge de Lorenz (2.34) é considerado, o campo quantizado

A^μ descreveria quatro componentes, isso nos levaria a adicionar dois graus de liberdade (polarização escalar e longitudinal) no Hamiltoniano do sistema, Eq. (4.12) e obteríamos 96 termos de interação, 48 termos mais seus hermitianos conjugados. Isso descreve um sistema completo e seria possível analisar novos fenômenos que ocorrem na eletrodinâmica quântica. Apesar disso, considerando o gauge de Coulomb, existem 32 termos de interação de H_{int} que já representam um grande desafio para uma implementação experimental da simulação quântica da QED. O trabalho continua em uma representação generalizada (apesar de usar o gauge de Coulomb) de forma que o número de termos pode ser diminuído sob certos limites no final do mapeamento do sistema.

Para simplificar a notação da Hamiltoniana, os 64 da Eq. (4.12) podem ser expressos através de funções \mathcal{F} e suas conjugadas \mathcal{F}^\dagger , tendo em conta que: $(\hat{b}_{in}^\dagger \hat{b}_{in} \hat{a})^\dagger = \hat{b}_{in}^\dagger \hat{b}_{in} \hat{a}^\dagger$, $(\hat{d}_{in} \hat{d}_{in}^\dagger \hat{a})^\dagger = \hat{d}_{in} \hat{d}_{in}^\dagger \hat{a}^\dagger$, $(\hat{d}_{in}^\dagger \hat{d}_{in} \hat{a})^\dagger = \hat{d}_{in} \hat{b}_{in} \hat{a}^\dagger$ e $(\hat{d}_{in} \hat{b}_{in} \hat{a})^\dagger = \hat{b}_{in}^\dagger \hat{d}_{in}^\dagger \hat{a}^\dagger$.

- Para férmion-férmion $(: \hat{b}_{in}^\dagger \hat{b}_{in} \hat{a} : \quad \mathbf{e} \quad : \hat{b}_{in}^\dagger \hat{b}_{in} \hat{a}^\dagger :)$

$$\mathcal{F}_{f,f}^i(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_f, \mathbf{k}, t, s', s) = \left(\int d^3x \quad \tilde{G}_f(\mathbf{p}_f, x, s') \gamma^i \tilde{G}_f(\mathbf{p}_f, x, s) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right) e^{-iw_0 t}, \quad (4.13a)$$

$$\mathcal{F}_{f,f}^{i\dagger}(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_f, \mathbf{k}, t, s', s) = \left(\int d^3x \quad \tilde{G}_f(\mathbf{p}_f, x, s') \gamma^i \tilde{G}_f(\mathbf{p}_f, x, s) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right) e^{iw_0 t}. \quad (4.13b)$$

- Para antiférmion-antiférmion $(: \hat{d}_{in} \hat{d}_{in}^\dagger \hat{a} : \quad \mathbf{e} \quad : \hat{d}_{in} \hat{d}_{in}^\dagger \hat{a}^\dagger :)$

$$\mathcal{F}_{\bar{f},\bar{f}}^i(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{k}, t, s', s) = \left(\int d^3x \quad \tilde{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, x, s') \gamma^i \tilde{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, x, s) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right) e^{-iw_0 t}, \quad (4.14a)$$

$$\mathcal{F}_{\bar{f},\bar{f}}^{i\dagger}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{k}, t, s', s) = \left(\int d^3x \quad \tilde{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, x, s') \gamma^i \tilde{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, x, s) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right) e^{iw_0 t}. \quad (4.14b)$$

- Para férmion-antiférmion $(: \hat{b}_{in}^\dagger \hat{d}_{in}^\dagger \hat{a} : \quad \mathbf{e} \quad : \hat{d}_{in} \hat{b}_{in} \hat{a}^\dagger :)$

$$\mathcal{F}_{f,\bar{f}}^i(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{k}, t, s', s) = \left(\int d^3x \quad \tilde{G}_f(\mathbf{p}_f, x, s') \gamma^i \tilde{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, x, s) e^{-i(\mathbf{p}_f + \mathbf{p}_{\bar{f}} - \mathbf{k})\cdot\mathbf{x}} \right) e^{i(w_f + w_{\bar{f}} - w_0)t}, \quad (4.15a)$$

$$\mathcal{F}_{f,\bar{f}}^{i\dagger}(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{k}, t, s', s) = \left(\int d^3x \quad \tilde{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, x, s') \gamma^i \tilde{G}_f(\mathbf{p}_f, x, s) e^{i(\mathbf{p}_f + \mathbf{p}_{\bar{f}} - \mathbf{k})\cdot\mathbf{x}} \right) e^{-i(w_f + w_{\bar{f}} - w_0)t}. \quad (4.15b)$$

- Para antiférmion-férmion $(: \hat{d}_{in} \hat{b}_{in} \hat{a} : \quad \mathbf{e} \quad : \hat{b}_{in}^\dagger \hat{d}_{in}^\dagger \hat{a}^\dagger :)$

$$\mathcal{F}_{\bar{f},f}^i(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}_f, \mathbf{k}, t, s', s) = \left(\int d^3x \tilde{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, x, s') \gamma^i \tilde{G}_f(\mathbf{p}_f, x, s) e^{i(\mathbf{p}_f + \mathbf{p}_{\bar{f}} + \mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}} \right) e^{-i(w_f + w_{\bar{f}} + w_0)t}, \quad (4.16a)$$

$$\mathcal{F}_{\bar{f},f}^{i\dagger}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}_f, \mathbf{k}, t, s', s) = \left(\int d^3x \tilde{G}_f(\mathbf{p}_f, x, s') \gamma^i \tilde{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, x, s) e^{-i(\mathbf{p}_f + \mathbf{p}_{\bar{f}} + \mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}} \right) e^{i(w_f + w_{\bar{f}} + w_0)t}, \quad (4.16b)$$

onde $s', s = \pm s$. Para as equações (4.15b) e (4.16b), foram consideradas as propriedades dos espinores de Dirac, $[\bar{u}(\mathbf{p}', s') \gamma^{\mu\nu} u(\mathbf{p}, s)]^\dagger = \bar{v}(\mathbf{p}, s) \gamma^{\mu\nu} u(\mathbf{p}', s')$. As oito expressões mostradas apresentam quatro termos cada, dependendo dos valores assumidos por s' e s . Então, se escreve o Hamiltoniano de forma reduzida, verifica-se

$$H_{int} = g : \sum_{m,n=f,\bar{f}} \sum_{r=1}^2 \sum_{j,l=s,-s} \mathcal{F}_{m,n}^i(\mathbf{p}_m, \mathbf{p}_n, \mathbf{k}, t, j, l) \epsilon_i(\mathbf{k}, r) \Theta_{\mathbf{p}_m,j}^m \Theta_{\mathbf{p}_n,l}^{n\dagger} \hat{a}(\mathbf{k}, r) + h.c. :, \quad (4.17)$$

com

$$\left\{ \Theta_{\mathbf{p}_m,j}^m \right\}_{m=f} = \hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_m, j) \quad , \quad \left\{ \Theta_{\mathbf{p}_m,j}^m \right\}_{m=\bar{f}} = \hat{d}_{in}(\mathbf{p}_m, j) \quad ; \quad j = s, -s$$

onde, $h.c.$ é o hermitiano conjugado.

4.2 Representação da Transformada de Fourier $\tilde{G}_{f,\bar{f}}$

A Eq. (4.12) é uma descrição extensa do Hamiltoniano de interação da QED, e (4.17) é a notação mais simples para expressar esse Hamiltoniano. A partir das duas equações observa-se que é necessário saber a transformada de Fourier das equações (4.9), e aplicando o conjugado e multiplicando por γ^0 se pode obter as equações (D.19). Eles são vetores colunas dependentes de cada elemento do espinor de Dirac e do envelope do pacote de onda. Então, se pode considerar os espinores de Dirac definidos na Eq. (2.8) para obter a representação da transformada de Fourier $\tilde{G}_{f,\bar{f}}(\mathbf{p}_{f,\bar{f}}, x, s)$,

- Da Eq. (4.9a), para os espinores de soluções de frequência positiva,

$$\begin{aligned} \tilde{G}_f(\mathbf{p}_f, x, +s) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{w_{\mathbf{p}+m}}{2w_{\mathbf{p}}}} \mathcal{G}_f(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{w_{\mathbf{p}+m}} \\ \frac{p_+}{w_{\mathbf{p}+m}} \end{pmatrix} e^{i[(\mathbf{p}-\mathbf{p}_f)\cdot\mathbf{x}-(w_{\mathbf{p}}-w_f)t]} \\ &\equiv \begin{pmatrix} \tilde{G}_f(\mathbf{p}_f, x) \\ 0 \\ \tilde{G}_{f_z}(\mathbf{p}_f, x) \\ \tilde{G}_{f_+}(\mathbf{p}_f, x) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.18a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_f(\mathbf{p}_f, x, -s) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{w_{\mathbf{p}+m}}{2w_{\mathbf{p}}}} \mathcal{G}_f(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_-}{w_{\mathbf{p}+m}} \\ \frac{-p_z}{w_{\mathbf{p}+m}} \end{pmatrix} e^{i[(\mathbf{p}-\mathbf{p}_f)\cdot\mathbf{x}-(w_{\mathbf{p}}-w_f)t]} \\ &\equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{G}_f(\mathbf{p}_f, x) \\ \tilde{G}_{f_-}(\mathbf{p}_f, x) \\ -\tilde{G}_{f_z}(\mathbf{p}_f, x) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.18b)$$

- De maneira análogo, usando a Eq. (4.9b), obtém-se a transformada de Fourier para os espinores de frequência negativa

$$\tilde{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, x, +s) \equiv \begin{pmatrix} \tilde{G}_{\bar{f}_-}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, x) \\ -\tilde{G}_{\bar{f}_z}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, x) \\ 0 \\ \tilde{G}_{\bar{f}_+}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, x) \end{pmatrix}, \quad (4.19a)$$

$$\tilde{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, x, -s) \equiv \begin{pmatrix} \tilde{G}_{\bar{f}_z}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, x) \\ \tilde{G}_{\bar{f}_+}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, x) \\ \tilde{G}_{\bar{f}_-}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, x) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.19b)$$

onde cada componente do vetor coluna é definido como uma transformada de Fourier, na forma

$$\begin{aligned} \tilde{G}_f(\mathbf{p}_f, x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{w_{\mathbf{p}+m}}{2w_{\mathbf{p}}}} \mathcal{G}_f(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}) e^{i[(\mathbf{p}-\mathbf{p}_f)\cdot\mathbf{x}-(w_{\mathbf{p}}-w_f)t]} \\ \tilde{G}_{f_\alpha}(\mathbf{p}_f, x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{p_\alpha}{\sqrt{2w_{\mathbf{p}}(w_{\mathbf{p}}+m)}} \mathcal{G}_f(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}) e^{i[(\mathbf{p}-\mathbf{p}_f)\cdot\mathbf{x}-(w_{\mathbf{p}}-w_f)t]}, \quad \alpha = x, y, z. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Além disso, $p_{\pm} = p_x \pm ip_y$, e foi definido $\tilde{G}_{f_{\pm}}(\mathbf{p}_f, x) = \tilde{G}_{f_x}(\mathbf{p}_f, x) \pm i\tilde{G}_{f_y}(\mathbf{p}_f, x)$.

De maneira análoga, os termos descritos nas equações (4.19a) e (4.19b)

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{w_{\mathbf{p}} + m}{2w_{\mathbf{p}}}} \mathcal{G}_{\bar{f}}^*(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}) e^{-i[(\mathbf{p}-\mathbf{p}_{\bar{f}})\cdot\mathbf{x} - (w_{\mathbf{p}} - w_{\bar{f}})t]} \\ \tilde{G}_{\bar{f}_{\alpha}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{p_{\alpha}}{\sqrt{2w_{\mathbf{p}}(w_{\mathbf{p}} + m)}} \mathcal{G}_{\bar{f}}^*(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}) e^{-i[(\mathbf{p}-\mathbf{p}_{\bar{f}})\cdot\mathbf{x} - (w_{\mathbf{p}} - w_{\bar{f}})t]} \quad , \alpha = x, y, z\end{aligned}\quad (4.21)$$

Pode-se notar que a matriz coluna possui componentes definidos pelas equações (4.20) e (4.21). No Apêndice E é mostrada a transformada de Fourier de $\tilde{G}_{f, \bar{f}}(\mathbf{p}_f, \bar{f}, x, s)$.

Usando essas expressões para $\tilde{G}_{f_{\alpha}}(\mathbf{p}_{f_{\alpha}}, x, s)$ e $\tilde{G}_{\bar{f}_{\alpha}}(\mathbf{p}_{\bar{f}_{\alpha}}, x, s)$ com $\alpha = f, \bar{f}$, as funções \mathcal{F}^i da seção anterior são calculadas. Considerando a propagação do fóton no eixo z , ou seja, $\mathbf{k} = k_z \hat{z}$ e $w_0 = |\mathbf{k}| = k_z$, o campo potencial \mathbf{A} e, portanto, $\epsilon(\mathbf{k}, r)$ tem componentes no eixo $x - y$ perpendiculares a \mathbf{k} . Isso é $\epsilon(\mathbf{k}, r) = (0, \epsilon_1(\mathbf{k}, r), \epsilon_2(\mathbf{k}, r), 0)$, então, pode-se definir a polarização circular direita ϵ_+ e esquerda ϵ_-

$$\tilde{\epsilon}_+(\mathbf{k}, r) = (\epsilon_1(\mathbf{k}, r) + i\epsilon_2(\mathbf{k}, r)) \quad \tilde{\epsilon}_-(\mathbf{k}, r) = (\epsilon_1(\mathbf{k}, r) - i\epsilon_2(\mathbf{k}, r)). \quad (4.22)$$

Os Apêndices F, G, H e I, contem a demonstração completa e abaixo mostra-se o Hamiltoniano obtido para cada termo do sistema

- Termos de auto-interação férmion-férmion, para cada valor do spin, se obtém (consulte o Apêndice F)

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{f_{\uparrow}, f_{\uparrow}} &= \frac{g}{2} \sum_{r=1}^2 \int d^3p [A_p p_+ \tilde{\epsilon}_-(\mathbf{k}, r) + B_p p_- \tilde{\epsilon}_+(\mathbf{k}, r)] \times \\ &\quad \mathcal{G}_f^*(\mathbf{p}_f, \mathbf{p} + \mathbf{k}) \mathcal{G}_f(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}) e^{i(w_{\mathbf{p}+\mathbf{k}} - w_{\mathbf{p}} - w_0)t} \hat{b}_{in}^{\dagger}(\mathbf{p}_f, +s) \hat{b}_{in}(\mathbf{p}_f, +s) \hat{a}(\mathbf{k}, r) + h.c.,\end{aligned}\quad (4.23a)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{f_{\uparrow}, f_{\downarrow}} &= \frac{g}{2} \sum_{r=1}^2 \int d^3p [-A_p p_z \tilde{\epsilon}_-(\mathbf{k}, r) + B_p (p_z + k_z) \tilde{\epsilon}_-(\mathbf{k}, r)] \times \\ &\quad \mathcal{G}_f^*(\mathbf{p}_f, \mathbf{p} + \mathbf{k}) \mathcal{G}_f(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}) e^{i(w_{\mathbf{p}+\mathbf{k}} - w_{\mathbf{p}} - w_0)t} \hat{b}_{in}^{\dagger}(\mathbf{p}_f, +s) \hat{b}_{in}(\mathbf{p}_f, -s) \hat{a}(\mathbf{k}, r) + h.c.,\end{aligned}\quad (4.23b)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{f_{\downarrow}, f_{\uparrow}} &= \frac{g}{2} \sum_{r=1}^2 \int d^3p [A_p p_z \tilde{\epsilon}_+(\mathbf{k}, r) - B_p (p_z + k_z) \tilde{\epsilon}_+(\mathbf{k}, r)] \times \\ &\quad \mathcal{G}_f^*(\mathbf{p}_f, \mathbf{p} + \mathbf{k}) \mathcal{G}_f(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}) e^{i(w_{\mathbf{p}+\mathbf{k}} - w_{\mathbf{p}} - w_0)t} \hat{b}_{in}^{\dagger}(\mathbf{p}_f, -s) \hat{b}_{in}(\mathbf{p}_f, +s) \hat{a}(\mathbf{k}, r) + h.c.,\end{aligned}\quad (4.23c)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{f_{\downarrow}, f_{\downarrow}} &= \frac{g}{2} \sum_{r=1}^2 \int d^3p [A_p p_- \tilde{\epsilon}_+(\mathbf{k}, r) + B_p p_+ \tilde{\epsilon}_-(\mathbf{k}, r)] \times \\ &\quad \mathcal{G}_f^*(\mathbf{p}_f, \mathbf{p} + \mathbf{k}) \mathcal{G}_f(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}) e^{i(w_{\mathbf{p}+\mathbf{k}} - w_{\mathbf{p}} - w_0)t} \hat{b}_{in}^{\dagger}(\mathbf{p}_f, -s) \hat{b}_{in}(\mathbf{p}_f, -s) \hat{a}(\mathbf{k}, r) + h.c.. \end{aligned} \quad (4.23d)$$

- Termos de auto-interação antiférmion-antiférmion, para cada valor do spin, obtém-se (consulte o Apêndice G)

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\bar{f}_{\uparrow}, \bar{f}_{\uparrow}} &= \frac{g}{2} \sum_{r=1}^2 \int d^3p [A_p p_+ \tilde{\epsilon}_-(\mathbf{k}, r) + B_p p_- \tilde{\epsilon}_+(\mathbf{k}, r)] \times \\ &\quad \mathcal{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}) \mathcal{G}_{\bar{f}}^*(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p} + \mathbf{k}) e^{i(w_{\mathbf{p}+\mathbf{k}} - w_{\mathbf{p}} - w_0)t} \hat{d}_{in}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, +s) \hat{d}_{in}^{\dagger}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, +s) \hat{a}(\mathbf{k}, r) + h.c., \end{aligned} \quad (4.24a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\bar{f}_{\uparrow}, \bar{f}_{\downarrow}} &= \frac{g}{2} \sum_{r=1}^2 \int d^3p [-A_p p_z \tilde{\epsilon}_+(\mathbf{k}, r) + B_p (p_z + k_z) (\tilde{\epsilon}_+(\mathbf{k}, r))] \\ &\quad \mathcal{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}) \mathcal{G}_{\bar{f}}^*(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p} + \mathbf{k}) e^{i(w_{\mathbf{p}+\mathbf{k}} - w_{\mathbf{p}} - w_0)t} \hat{d}_{in}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, +s) \hat{d}_{in}^{\dagger}(\mathbf{p}_f, -s) \hat{a}(\mathbf{k}, r) + h.c., \end{aligned} \quad (4.24b)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\bar{f}_{\downarrow}, \bar{f}_{\downarrow}} &= \frac{g}{2} \sum_{r=1}^2 \int d^3p [A_p p_- \tilde{\epsilon}_+(\mathbf{k}, r) + B_p p_+ \tilde{\epsilon}_-(\mathbf{k}, r)] \\ &\quad \mathcal{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}) \mathcal{G}_{\bar{f}}^*(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p} + \mathbf{k}) e^{i(w_{\mathbf{p}+\mathbf{k}} - w_{\mathbf{p}} - w_0)t} \hat{d}_{in}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, -s) \hat{d}_{in}^{\dagger}(\mathbf{p}_f, -s) \hat{a}(\mathbf{k}, r) + h.c., \end{aligned} \quad (4.24c)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\bar{f}_{\downarrow}, \bar{f}_{\uparrow}} &= \frac{g}{2} \sum_{r=1}^2 \int d^3p [A_p p_z \tilde{\epsilon}_-(\mathbf{k}, r) - B_p (p_z + k_z) \tilde{\epsilon}_-(\mathbf{k}, r)] \\ &\quad \mathcal{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}) \mathcal{G}_{\bar{f}}^*(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p} + \mathbf{k}) e^{i(w_{\mathbf{p}+\mathbf{k}} - w_{\mathbf{p}} - w_0)t} \hat{d}_{in}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, -s) \hat{d}_{in}^{\dagger}(\mathbf{p}_f, +s) \hat{a}(\mathbf{k}, r) + h.c., \end{aligned} \quad (4.24d)$$

- Termos de interação férmions-antiférmions para cada valor de spin, resulta-se (consulte o Apêndice H)

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{f_{\uparrow}, \bar{f}_{\uparrow}} &= \frac{g}{2} \sum_{r=1}^2 \int d^3p [C_p \tilde{\epsilon}_-(\mathbf{k}, r) - D_p p_z (k_z - p_z) \tilde{\epsilon}_-(\mathbf{k}, r) - D_p p_- p_- \tilde{\epsilon}_+(\mathbf{k}, r)] \times \\ &\quad \mathcal{G}_f^*(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}) \mathcal{G}_{\bar{f}}^*(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{k} - \mathbf{p}) e^{i(w_{\mathbf{p}} + w_{\mathbf{k}-\mathbf{p}} - w_0)t} \hat{b}_{in}^{\dagger}(\mathbf{p}_f, +s) \hat{d}_{in}^{\dagger}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, +s) \hat{a}(\mathbf{k}, r) + h.c., \end{aligned} \quad (4.25a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{f_{\uparrow}, \bar{f}_{\downarrow}} &= \frac{g}{2} \sum_{r=1}^2 \int d^3p \left[-D_p p_z p_+ \tilde{\epsilon}_-(\mathbf{k}, r) + D_p p_-(k_z - p_z) \tilde{\epsilon}_+(\mathbf{k}, r) \right] \times \\ &\quad \mathcal{G}_f^*(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}) \mathcal{G}_{\bar{f}}^*(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{k} - \mathbf{p}) e^{i(w_{\mathbf{p}} + w_{\mathbf{k} - \mathbf{p}} - w_0)t} \hat{b}_{in}^{\dagger}(\mathbf{p}_f, +s) \hat{d}_{in}^{\dagger}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, -s) \hat{a}(\mathbf{k}, r) + h.c., \end{aligned} \quad (4.25b)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{f_{\downarrow}, \bar{f}_{\uparrow}} &= \frac{g}{2} \sum_{r=1}^2 \int d^3p \left[-D_p p_+(k_z - p_z) \tilde{\epsilon}_-(\mathbf{k}, r) + D_p p_z p_- \tilde{\epsilon}_+(\mathbf{k}, r) \right] \times \\ &\quad \mathcal{G}_f^*(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}) \mathcal{G}_{\bar{f}}^*(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{k} - \mathbf{p}) e^{i(w_{\mathbf{p}} + w_{\mathbf{k} - \mathbf{p}} - w_0)t} \hat{b}_{in}^{\dagger}(\mathbf{p}_f, -s) \hat{d}_{in}^{\dagger}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, +s) \hat{a}(\mathbf{k}, r) + h.c., \end{aligned} \quad (4.25c)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{f_{\downarrow}, \bar{f}_{\downarrow}} &= \frac{g}{2} \sum_{r=1}^2 \int d^3p \left[C_p \tilde{\epsilon}_+(\mathbf{k}, r) - D_p p_+ p_+ \tilde{\epsilon}_-(\mathbf{k}, r) - D_p p_z (k_z - p_z) \tilde{\epsilon}_+(\mathbf{k}, r) \right] \times \\ &\quad \mathcal{G}_f^*(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}) \mathcal{G}_{\bar{f}}^*(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{k} - \mathbf{p}) e^{i(w_{\mathbf{p}} + w_{\mathbf{k} - \mathbf{p}} - w_0)t} \hat{b}_{in}^{\dagger}(\mathbf{p}_f, -s) \hat{d}_{in}^{\dagger}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, -s) \hat{a}(\mathbf{k}, r) + h.c., \end{aligned} \quad (4.25d)$$

- Termos de interação antiférmions-férmions para cada valor de spin, obtém-se (consulte o Apêndice I)

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\bar{f}_{\uparrow}, f_{\uparrow}} &= \frac{g}{2} \sum_{r=1}^2 \int d^3p \left[-M_p p_+ p_+ \tilde{\epsilon}_-(\mathbf{k}, r) + M_p p_z (k_z + p_z) \tilde{\epsilon}_+(\mathbf{k}, r) + N_p \tilde{\epsilon}_+(\mathbf{k}, r) \right] \times \\ &\quad \mathcal{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}) \mathcal{G}_f(\mathbf{p}_f, -\mathbf{k} - \mathbf{p}) e^{-i(w_{\mathbf{p}} + w_{\mathbf{k} + \mathbf{p}} + w_0)t} \hat{d}_{in}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, +s) \hat{b}_{in}(\mathbf{p}_f, +s) \hat{a}(\mathbf{k}, r) + h.c., \end{aligned} \quad (4.26a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\bar{f}_{\uparrow}, f_{\downarrow}} &= \frac{g}{2} \sum_{r=1}^2 \int d^3p \left[M_p p_+(k_z + p_z) \tilde{\epsilon}_-(\mathbf{k}, r) + M_p p_z p_- \tilde{\epsilon}_+(\mathbf{k}, r) \right] \times \\ &\quad \mathcal{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}) \mathcal{G}_f(\mathbf{p}_f, -\mathbf{k} - \mathbf{p}) e^{-i(w_{\mathbf{p}} + w_{\mathbf{k} + \mathbf{p}} + w_0)t} \hat{d}_{in}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, +s) \hat{b}_{in}(\mathbf{p}_f, -s) \hat{a}(\mathbf{k}, r) + h.c., \end{aligned} \quad (4.26b)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\bar{f}_{\downarrow}, f_{\uparrow}} &= \frac{g}{2} \sum_{r=1}^2 \int d^3p \left[-M_p p_z p_+ \tilde{\epsilon}_-(\mathbf{k}, r) - M_p p_-(k_z + p_z) \tilde{\epsilon}_+(\mathbf{k}, r) \right] \times \\ &\quad \mathcal{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}) \mathcal{G}_f(\mathbf{p}_f, -\mathbf{k} - \mathbf{p}) e^{-i(w_{\mathbf{p}} + w_{\mathbf{k} + \mathbf{p}} + w_0)t} \hat{d}_{in}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, -s) \hat{b}_{in}(\mathbf{p}_f, +s) \hat{a}(\mathbf{k}, r) + h.c., \end{aligned} \quad (4.26c)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\bar{f}_{\downarrow}, f_{\downarrow}} &= \frac{g}{2} \sum_{r=1}^2 \int d^3p \left[M_p p_z (k_z + p_z) \tilde{\epsilon}_-(\mathbf{k}, r) - M_p p_- p_- \tilde{\epsilon}_+(\mathbf{k}, r) + N_p \tilde{\epsilon}_-(\mathbf{k}, r) \right] \times \\ &\quad \mathcal{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}) \mathcal{G}_f(\mathbf{p}_f, -\mathbf{k} - \mathbf{p}) e^{-i(w_{\mathbf{p}} + w_{\mathbf{k} + \mathbf{p}} + w_0)t} \hat{d}_{in}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, -s) \hat{b}_{in}(\mathbf{p}_f, -s) \hat{a}(\mathbf{k}, r) + h.c., \end{aligned} \quad (4.26d)$$

onde A_p , B_p , C_p , D_p , M_p e N_p são coeficientes que dependem de energia m ; por conseguinte, do momento linear. Esses coeficientes são definidos por

$$A_p = \sqrt{\frac{w_{\mathbf{p}+\mathbf{k}} + m}{w_{\mathbf{p}+\mathbf{k}}w_{\mathbf{p}}(w_{\mathbf{p}} + m)}} \quad B_p = \sqrt{\frac{w_{\mathbf{p}} + m}{w_{\mathbf{p}+\mathbf{k}}w_{\mathbf{p}}(w_{\mathbf{p}+\mathbf{k}} + m)}}, \quad (4.27a)$$

$$C_p = \sqrt{\frac{(w_{\mathbf{p}} + m)(w_{\mathbf{k}-\mathbf{p}} + m)}{w_{\mathbf{p}}w_{\mathbf{k}-\mathbf{p}}}} \quad D_p = \frac{1}{\sqrt{w_{\mathbf{p}}w_{\mathbf{k}-\mathbf{p}}(w_{\mathbf{p}} + m)(w_{\mathbf{k}-\mathbf{p}} + m)}}, \quad (4.27b)$$

$$M_p = \frac{1}{\sqrt{w_{\mathbf{p}}w_{\mathbf{k}+\mathbf{p}}(w_{\mathbf{p}} + m)(w_{\mathbf{k}+\mathbf{p}} + m)}} \quad N_p = \sqrt{\frac{(w_{\mathbf{p}} + m)(w_{\mathbf{k}+\mathbf{p}} + m)}{w_{\mathbf{p}}w_{\mathbf{k}+\mathbf{p}}}}, \quad (4.27c)$$

A partir das equações (4.23-4.26) se tem o Hamiltoniano para cada termo do sistema. Portanto, o Hamiltoniano do sistema pode ser escrito como

$$H_{int} =: \mathcal{H}_{f,f} + \mathcal{H}_{\bar{f},\bar{f}} + \mathcal{H}_{f,\bar{f}} + \mathcal{H}_{\bar{f},f} + h.c. \quad (4.28)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{f,f} = & \frac{g}{2} e^{-iw_0 t} \sum_{r=1}^2 \{ \\ & + \hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_f, +s) \hat{b}_{in}(\mathbf{p}_f, +s) \hat{a}(\mathbf{k}, r) [\mathcal{R}_+(\mathbf{p}_f, \mathbf{k}, t) \tilde{\epsilon}_-(\mathbf{k}, r) + \mathcal{Q}_-(\mathbf{p}_f, \mathbf{k}, t) \tilde{\epsilon}_+(\mathbf{k}, r)] \\ & + \hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_f, +s) \hat{b}_{in}(\mathbf{p}_f, -s) \hat{a}(\mathbf{k}, r) [-\mathcal{R}_z(\mathbf{p}_f, \mathbf{k}, t) + \mathcal{Q}_z(\mathbf{p}_f, \mathbf{k}, t) + k_z \mathcal{Q}(\mathbf{p}_f, \mathbf{k}, t)] \tilde{\epsilon}_-(\mathbf{k}, r) \\ & + \hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_f, -s) \hat{b}_{in}(\mathbf{p}_f, +s) \hat{a}(\mathbf{k}, r) [\mathcal{R}_z(\mathbf{p}_f, \mathbf{k}, t) - \mathcal{Q}_z(\mathbf{p}_f, \mathbf{k}, t) - k_z \mathcal{Q}(\mathbf{p}_f, \mathbf{k}, t)] \tilde{\epsilon}_+(\mathbf{k}, r) \\ & + \hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_f, -s) \hat{b}_{in}(\mathbf{p}_f, -s) \hat{a}(\mathbf{k}, r) [\mathcal{R}_-(\mathbf{p}_f, \mathbf{k}, t) \tilde{\epsilon}_+(\mathbf{k}, r) + \mathcal{Q}_+(\mathbf{p}_f, \mathbf{k}, t) \tilde{\epsilon}_-(\mathbf{k}, r)] \} + h.c., \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\bar{f},\bar{f}} = & \frac{g}{2} e^{-iw_0 t} \sum_{r=1}^2 \{ \\ & + \hat{d}_{in}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, +s) \hat{d}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_{\bar{f}}, +s) \hat{a}(\mathbf{k}, r) [\mathcal{Z}_+(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{k}, t) \tilde{\epsilon}_-(\mathbf{k}, r) + \mathcal{W}_-(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{k}, t) \tilde{\epsilon}_+(\mathbf{k}, r)] \\ & + \hat{d}_{in}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, +s) \hat{d}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_{\bar{f}}, -s) \hat{a}(\mathbf{k}, r) [-\mathcal{Z}_z(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{k}, t) + \mathcal{W}_z(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{k}, t) + k_z \mathcal{W}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{k}, t)] \tilde{\epsilon}_+(\mathbf{k}, r) \\ & + \hat{d}_{in}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, -s) \hat{d}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_{\bar{f}}, +s) \hat{a}(\mathbf{k}, r) [\mathcal{Z}_z(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{k}, t) - \mathcal{W}_z(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{k}, t) - k_z \mathcal{W}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{k}, t)] \tilde{\epsilon}_-(\mathbf{k}, r) \\ & + \hat{d}_{in}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, -s) \hat{d}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_{\bar{f}}, -s) \hat{a}(\mathbf{k}, r) [\mathcal{Z}_-(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{k}, t) \tilde{\epsilon}_+(\mathbf{k}, r) + \mathcal{W}_+(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{k}, t) \tilde{\epsilon}_-(\mathbf{k}, r)] \} + h.c., \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{f,\bar{f}} = & \frac{g}{2} e^{-i\omega_0 t} \sum_{r=1}^2 \{ \\
& \hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_f, +s) \hat{d}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_{\bar{f}}, +s) \hat{a}(\mathbf{k}, r) \left[-\mathcal{M}_{p-p_-}(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{k}, t) \tilde{\epsilon}_+(\mathbf{k}, r) \right. \\
& + \left(\mathcal{N}(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{k}, t) - k_z \mathcal{M}_{p_z}(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{k}, t) + \mathcal{M}_{p_z p_z}(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{k}, t) \right) \tilde{\epsilon}_-(\mathbf{k}, r) \left. \right] \\
& + \hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_f, +s) \hat{d}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_{\bar{f}}, -s) \hat{a}(\mathbf{k}, r) \times \\
& \left[-\mathcal{M}_{p_z p_+}(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{k}, t) \tilde{\epsilon}_-(\mathbf{k}, r) + \left(k_z \mathcal{M}_{p_-}(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{k}, t) - \mathcal{M}_{p_- p_z}(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{k}, t) \right) \tilde{\epsilon}_+(\mathbf{k}, r) \right] \\
& + \hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_f, -s) \hat{d}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_{\bar{f}}, +s) \hat{a}(\mathbf{k}, r) \times \\
& \left[\mathcal{M}_{p_z p_-}(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{k}, t) \tilde{\epsilon}_+(\mathbf{k}, r) + \left(-k_z \mathcal{M}_{p_+}(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{k}, t) + \mathcal{M}_{p_+ p_z}(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{k}, t) \right) \tilde{\epsilon}_-(\mathbf{k}, r) \right] \\
& + \hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_f, -s) \hat{d}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_{\bar{f}}, -s) \hat{a}(\mathbf{k}, r) \left[-\mathcal{M}_{p_+ p_+}(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{k}, t) \tilde{\epsilon}_-(\mathbf{k}, r) \right. \\
& \left. + \left(\mathcal{N}(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{k}, t) - k_z \mathcal{M}_{p_z}(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{k}, t) + \mathcal{M}_{p_z p_z}(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{k}, t) \right) \tilde{\epsilon}_+(\mathbf{k}, r) \right] \left. \right\} + h.c., \tag{4.31}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{\bar{f},f} = & \frac{g}{2} e^{-i\omega_0 t} \sum_{r=1}^2 \{ \\
& \hat{d}_{in}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, +s) \hat{b}_{in}(\mathbf{p}_f, +s) \hat{a}(\mathbf{k}, r) \left[-\mathcal{O}_{p_+ p_+}(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{k}, t) \tilde{\epsilon}_-(\mathbf{k}, r) \right. \\
& + \left(\mathcal{J}(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{k}, t) + k_z \mathcal{O}_{p_z}(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{k}, t) + \mathcal{O}_{p_z p_z}(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{k}, t) \right) \tilde{\epsilon}_+(\mathbf{k}, r) \left. \right] \\
& + \hat{d}_{in}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, +s) \hat{b}_{in}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, -s) \hat{a}(\mathbf{k}, r) \times \\
& \left[\mathcal{O}_{p_z p_-}(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{k}, t) \tilde{\epsilon}_+(\mathbf{k}, r) + \left(k_z \mathcal{O}_{p_+}(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{k}, t) + \mathcal{O}_{p_+ p_z}(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{k}, t) \right) \tilde{\epsilon}_-(\mathbf{k}, r) \right] \\
& - \hat{d}_{in}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, -s) \hat{b}_{in}(\mathbf{p}_f, +s) \hat{a}(\mathbf{k}, r) \times \\
& \left[\mathcal{O}_{p_z p_+}(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{k}, t) \tilde{\epsilon}_-(\mathbf{k}, r) + \left(k_z \mathcal{O}_{p_-}(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{k}, t) + \mathcal{O}_{p_- p_z}(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{k}, t) \right) \tilde{\epsilon}_+(\mathbf{k}, r) \right] \\
& + \hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_f, -s) \hat{d}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_{\bar{f}}, -s) \hat{a}(\mathbf{k}, r) \left[-\mathcal{O}_{p_- p_-}(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{k}, t) \tilde{\epsilon}_+(\mathbf{k}, r) \right. \\
& \left. + \left(\mathcal{J}(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{k}, t) + k_z \mathcal{O}_{p_z}(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{k}, t) + \mathcal{O}_{p_z p_z}(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{k}, t) \right) \tilde{\epsilon}_-(\mathbf{k}, r) \right] \left. \right\} + h.c., \tag{4.32}
\end{aligned}$$

onde foram utilizadas as seguintes funções auxiliares para o Hamiltoniano $\mathcal{H}_{f,f}$ (para $\alpha = x, y, z$)

$$\mathcal{R}_\alpha(\mathbf{p}_f, \mathbf{k}, t) = \int d^3 p A_p p_\alpha \mathcal{G}_f(\mathbf{p}_f, \mathbf{p} + \mathbf{k}) \mathcal{G}_f^*(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}) e^{i(w_{\mathbf{p}+\mathbf{k}} - w_{\mathbf{p}})t}, \tag{4.33a}$$

$$\mathcal{Q}_\alpha(\mathbf{p}_f, \mathbf{k}, t) = \int d^3 p B_p p_\alpha \mathcal{G}_f(\mathbf{p}_f, \mathbf{p} + \mathbf{k}) \mathcal{G}_f^*(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}) e^{i(w_{\mathbf{p}+\mathbf{k}} - w_{\mathbf{p}})t}, \tag{4.33b}$$

$$\mathcal{Q}(\mathbf{p}_f, \mathbf{k}, t) = \int d^3 p B_p \mathcal{G}_f(\mathbf{p}_f, \mathbf{p} + \mathbf{k}) \mathcal{G}_f^*(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}) e^{i(w_{\mathbf{p}+\mathbf{k}} - w_{\mathbf{p}})t}. \tag{4.33c}$$

As funções do Hamiltoniano $\mathcal{H}_{\bar{f},\bar{f}}$ (para $\alpha = x, y, z$)

$$\mathcal{Z}_\alpha(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{k}, t) = \int d^3p A_p p_\alpha \mathcal{G}_{\bar{f}}^*(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p} + \mathbf{k}) \mathcal{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}) e^{i(w_{\mathbf{p}+\mathbf{k}} - w_{\mathbf{p}})t}, \quad (4.34a)$$

$$\mathcal{W}_\alpha(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{k}, t) = \int d^3p B_p p_\alpha \mathcal{G}_{\bar{f}}^*(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p} + \mathbf{k}) \mathcal{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}) e^{i(w_{\mathbf{p}+\mathbf{k}} - w_{\mathbf{p}})t}, \quad (4.34b)$$

$$\mathcal{W}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{k}, t) = \int d^3p B_p \mathcal{G}_{\bar{f}}^*(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p} + \mathbf{k}) \mathcal{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}) e^{i(w_{\mathbf{p}+\mathbf{k}} - w_{\mathbf{p}})t}. \quad (4.34c)$$

As funções do Hamiltoniano $\mathcal{H}_{f,\bar{f}}$ (para $\beta = \alpha = x, y, z$)

$$\mathcal{N}(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{k}, t) = \int d^3p C_p \mathcal{G}_f^*(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}) \mathcal{G}_{\bar{f}}^*(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{k} - \mathbf{p}) e^{i(w_{\mathbf{p}} + w_{\mathbf{k}+\mathbf{p}})t}, \quad (4.35a)$$

$$\mathcal{M}_{p_\alpha}(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{k}, t) = \int d^3p D_p p_\alpha \mathcal{G}_f^*(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}) \mathcal{G}_{\bar{f}}^*(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{k} - \mathbf{p}) e^{i(w_{\mathbf{p}} + w_{\mathbf{k}+\mathbf{p}})t}, \quad (4.35b)$$

$$\mathcal{M}_{p_\alpha p_\beta}(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{k}, t) = \int d^3p D_p p_\alpha p_\beta \mathcal{G}_f^*(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}) \mathcal{G}_{\bar{f}}^*(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{k} - \mathbf{p}) e^{i(w_{\mathbf{p}} + w_{\mathbf{k}+\mathbf{p}})t}. \quad (4.35c)$$

As funções do Hamiltoniano $\mathcal{H}_{\bar{f},f}$ (para $\beta = \alpha = x, y, z$)

$$\mathcal{J}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}_f, \mathbf{k}, t) = \int d^3p N_p \mathcal{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}) \mathcal{G}_f(\mathbf{p}_f, -\mathbf{k} - \mathbf{p}) e^{-i(w_{\mathbf{p}} + w_{\mathbf{k}+\mathbf{p}})t}, \quad (4.36a)$$

$$\mathcal{O}_{p_\alpha}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}_f, \mathbf{k}, t) = \int d^3p M_p p_\alpha \mathcal{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}) \mathcal{G}_f(\mathbf{p}_f, -\mathbf{k} - \mathbf{p}) e^{-i(w_{\mathbf{p}} + w_{\mathbf{k}+\mathbf{p}})t}, \quad (4.36b)$$

$$\mathcal{O}_{p_\alpha p_\beta}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}_f, \mathbf{k}, t) = \int d^3p M_p p_\alpha p_\beta \mathcal{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}) \mathcal{G}_f(\mathbf{p}_f, -\mathbf{k} - \mathbf{p}) e^{-i(w_{\mathbf{p}} + w_{\mathbf{k}+\mathbf{p}})t}. \quad (4.36c)$$

Essas funções dependem da forma do envelope a ser considerado.

O sistema quântico a ser simulado com o método proposto é descrito pelo Hamiltoniano (4.28) cujos componentes são detalhados pelas equações (4.29 - 4.32).

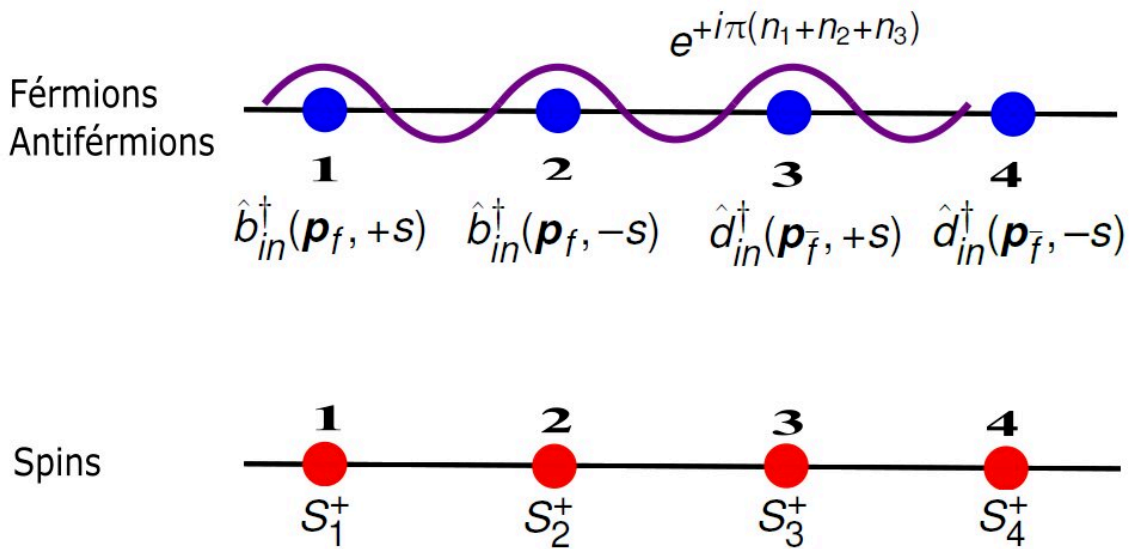
4.3 Mapeamento

O Hamiltoniano da Eq. (4.28) define o sistema quântico a simular, que é descrito pelos operadores de criação e aniquilação de férmions (e antiférmions) e bósons para cada combinação da projeção de spin $\pm s$. Para implementar esse Hamiltoniano em um simulador quântico (seja análogo ou Digital), é necessário transformar os operadores de criação e aniquilação de férmions em qubits, de modo que os qubits simulem a álgebra dos férmions. Porque os sistemas quânticos que compõem os simuladores quânticos são, em geral, sistemas com dois níveis distinguíveis, portanto, eles não respeitam a álgebra correta. Nesse caso, o mapeamento dos operadores de férmion e antiférmion deve ser realizado para cada projeção de spin $\pm s$; para isso, é usada a transformação de Jordan-Wigner (seção 3.2.1).

A transformação de Jordan-Wigner unidimensional mostra o mapeamento entre os operadores de spin do qubit como operadores de spin dos férmions e vice-versa.

Nesse caso, devem ser considerados os operadores do férmion $\hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_f, \pm s)$ e antiférmion $\hat{d}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \pm s)$, sendo esquematicamente representados em quatro sítios diferentes, formando uma cadeia de férmions (e antiférmions) que são mapeados em qubits no sítio correspondente, como mostra a Figura 8. Deve-se notar que os férmions não estão localizados ou formam uma cadeia de férmions, é apenas uma representação para o desenvolvimento matemático da transformação de Jordan-Wigner, ou seja, o esquema mostrado na Figura 8 ajuda a entender o mapeamento entre os operadores de férmions e antiférmions em operadores de spin dos qubits.

Figura 8 – Representação esquemática do mapeamento férmion e antiférmions em qubits.



Fonte – Figura criada pelo autor

Usando de as equações (3.12a) e (3.12b) da transformação de Jordan-Wigner, resulta o seguinte:

- O operador de férmion de spin \uparrow é representado no sítio 1. Portanto, ele não apresenta um operador de fase por que não há operadores de férmions representados à sua esquerda. Ele é transformado como

$$\hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_f, +s) = S_1^+ \otimes \mathbb{1}_2 \otimes \mathbb{1}_3 \otimes \mathbb{1}_4, \quad (4.37a)$$

$$\hat{b}_{in}(\mathbf{p}_f, +s) = S_1^- \otimes \mathbb{1}_2 \otimes \mathbb{1}_3 \otimes \mathbb{1}_4. \quad (4.37b)$$

- O operador de férmion de spin \downarrow é representado no sítio 2, e o operador de fase é definido pelo operador número do férmion do sítio 1, $e^{+i\pi n_1}$, onde $n_1 =$

$\hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_f, +s)\hat{b}_{in}(\mathbf{p}_f, +s) = S_1^+ S_1^-$. Então, ele é transformado como

$$\hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_f, -s) = e^{+i\pi S_1^+ S_1^-} \otimes S_2^+ \otimes \mathbf{1}_3 \otimes \mathbf{1}_4, \quad (4.38a)$$

$$\hat{b}_{in}(\mathbf{p}_f, -s) = e^{-i\pi S_1^+ S_1^-} \otimes S_2^- \otimes \mathbf{1}_3 \otimes \mathbf{1}_4. \quad (4.38b)$$

- O operador de antiférmion de spin \uparrow é representado no sitio 3 e o operador de fase é definido pelos operadores $e^{+i\pi(n_1+n_2)}$. Ele é transformado como

$$\hat{d}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_{\bar{f}}, +s) = e^{+i\pi S_1^+ S_1^-} \otimes e^{+i\pi S_2^+ S_2^-} \otimes S_3^+ \otimes \mathbf{1}_4, \quad (4.39a)$$

$$\hat{d}_{in}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, +s) = e^{-i\pi S_1^+ S_1^-} \otimes e^{-i\pi S_2^+ S_2^-} \otimes S_3^- \otimes \mathbf{1}_4. \quad (4.39b)$$

- No caso do operador de antiférmion de spin \downarrow , é representado no último sitio e o operador de fase é $e^{+i\pi(n_1+n_2+n_3)}$. Então, ele é transformado de acordo com

$$\hat{d}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_{\bar{f}}, -s) = e^{+i\pi S_1^+ S_1^-} \otimes e^{+i\pi S_2^+ S_2^-} \otimes e^{+i\pi S_3^+ S_3^-} \otimes S_4^+, \quad (4.40a)$$

$$\hat{d}_{in}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, -s) = e^{-i\pi S_1^+ S_1^-} \otimes e^{-i\pi S_2^+ S_2^-} \otimes e^{-i\pi S_3^+ S_3^-} \otimes S_4^-. \quad (4.40b)$$

O arranjo da representação dos operadores de férmions e antiférmions (mostrada na Figura 8) é arbitrário. Ou seja, os férmions e antiférmions podem ser representados em qualquer sitio, de modo que, dependendo do local, eles terão as mesmas expressões mostrados nas equações anteriores.

Agora, usando a propriedade

$$\begin{aligned} e^{\pm i\pi S_n^+ S_n^-} &= 1 + \frac{\pm i\pi}{1!} S_n^+ S_n^- + \frac{(\pm i\pi)^2}{2!} \underbrace{(S_n^+ S_n^-)^2}_{S_n^+ S_n^-} + \dots \\ &= 1 - \left[\underbrace{e^{\pm i\pi}}_{-1} S_n^+ S_n^- - S_n^+ S_n^- \right] \\ &= 1 - 2S_n^+ S_n^- = -2S_n^z, \end{aligned} \quad (4.41)$$

onde, usando a notação matricial (3.7) se tem que $S_n^+ S_n^- = (S_n^+ S_n^-)^2 = \dots$.

Aplicando a Eq. (4.41) nas equações (4.37 - 4.40), elas podem ser modificadas e escritas como

$$\hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_f, +s) = S_1^+ \otimes \mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{1}_3 \otimes \mathbf{1}_4, \quad (4.42a)$$

$$\hat{b}_{in}(\mathbf{p}_f, +s) = S_1^- \otimes \mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{1}_3 \otimes \mathbf{1}_4,$$

$$\hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_f, -s) = -2S_1^z \otimes S_2^+ \otimes \mathbf{1}_3 \otimes \mathbf{1}_4, \quad (4.42b)$$

$$\hat{b}_{in}(\mathbf{p}_f, -s) = -2S_1^z \otimes S_2^- \otimes \mathbf{1}_3 \otimes \mathbf{1}_4,$$

$$\hat{d}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_{\bar{f}}, +s) = 4S_1^z \otimes S_2^z \otimes S_3^+ \otimes \mathbf{1}_4, \quad (4.42c)$$

$$\hat{d}_{in}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, +s) = 4S_1^z \otimes S_2^z \otimes S_3^- \otimes \mathbf{1}_4,$$

$$\hat{d}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_{\bar{f}}, -s) = -8S_1^z \otimes S_2^z \otimes S_3^z \otimes S_4^+, \quad (4.42d)$$

$$\hat{d}_{in}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, -s) = -8S_1^z \otimes S_2^z \otimes S_3^z \otimes S_4^-.$$

As equações de (4.42) mostram aos operadores de férmion e antiférmion transformados em função dos operadores de spin dos qubits. Para que o mapeamento esteja correto, a combinação dos operadores de spin na esquerda das equações de (4.42) devem satisfazer as relações de anticomutação definida na Eq. (2.19). Para isso, considera-se a Eq. (3.9a) onde os operadores de spin dos qubits (S_n^\pm com $n = 1, 2, 3, 4$) comutam em sítios diferentes. Além disso, da Eq. (4.41), se tem que os operadores S_n^z e S_m^z comutam em qualquer sítio, isto é, $[S_n^z, S_m^z] = 0$. As relações de anticomutação em sítios iguais dadas pela Eq. (3.9b) também devem ser consideradas. Com isso, obtêm-se as relações de anticomutação:

- Começando com o operador $\hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_f, +s)$:

$$\left\{ \hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_f, +s), \hat{b}_{in}(\mathbf{p}_f, +s) \right\} = \{S_1^+, S_1^-\} \otimes \mathbb{1}_2 \otimes \mathbb{1}_3 \otimes \mathbb{1}_4 = \mathbb{1}_1 \otimes \mathbb{1}_2 \otimes \mathbb{1}_3 \otimes \mathbb{1}_4, \quad (4.43a)$$

$$\left\{ \hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_f, +s), \hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_f, +s) \right\} = \{S_1^+, S_1^+\} \otimes \mathbb{1}_2 \otimes \mathbb{1}_3 \otimes \mathbb{1}_4 = \mathbb{O}_1 \otimes \mathbb{1}_2 \otimes \mathbb{1}_3 \otimes \mathbb{1}_4, \quad (4.43b)$$

$$\left\{ \hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_f, +s), \hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_f, -s) \right\} = -2 \{S_1^+, S_1^z\} \otimes S_2^- \otimes \mathbb{1}_3 \otimes \mathbb{1}_4 = \mathbb{O}_1 \otimes S_2^- \otimes \mathbb{1}_3 \otimes \mathbb{1}_4, \quad (4.43c)$$

$$\left\{ \hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_f, +s), \hat{b}_{in}(\mathbf{p}_f, -s) \right\} = -2 \{S_1^+, S_1^z\} \otimes S_2^- \otimes \mathbb{1}_3 \otimes \mathbb{1}_4 = \mathbb{O}_1 \otimes S_2^- \otimes \mathbb{1}_3 \otimes \mathbb{1}_4, \quad (4.43d)$$

$$\left\{ \hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_f, +s), \hat{d}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_{\bar{f}}, +s) \right\} = 4 \{S_1^+, S_1^z\} \otimes S_2^z \otimes S_3^+ \otimes \mathbb{1}_4 = \mathbb{O}_1 \otimes S_2^z \otimes S_3^+ \otimes \mathbb{1}_4, \quad (4.43e)$$

$$\left\{ \hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_f, +s), \hat{d}_{in}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, +s) \right\} = 4 \{S_1^+, S_1^z\} \otimes S_2^z \otimes S_3^- \otimes \mathbb{1}_4 = \mathbb{O}_1 \otimes S_2^z \otimes S_3^- \otimes \mathbb{1}_4, \quad (4.43f)$$

$$\left\{ \hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_f, +s), \hat{d}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_{\bar{f}}, -s) \right\} = -8 \{S_1^+, S_1^z\} \otimes S_2^z \otimes S_3^z \otimes S_4^+ = \mathbb{O}_1 \otimes S_2^z \otimes S_3^z \otimes S_4^+, \quad (4.43g)$$

$$\left\{ \hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_f, +s), \hat{d}_{in}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, -s) \right\} = -8 \{S_1^+, S_1^z\} \otimes S_2^z \otimes S_3^z \otimes S_4^- = \mathbb{O}_1 \otimes S_2^z \otimes S_3^z \otimes S_4^-. \quad (4.43h)$$

Aplicando a adjunta às equações mostradas, as relações de anticomutação de $\hat{b}_{in}(\mathbf{p}_f, +s)$ com os operadores de férmion e antiférmion são obtidas.

- Para o operador $\hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_f, -s)$:

$$\left\{ \hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_f, -s), \hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_f, -s) \right\} = \mathbb{1}_1 \otimes \mathbb{O}_2 \otimes \mathbb{1}_3 \otimes \mathbb{1}_4, \quad (4.44a)$$

$$\left\{ \hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_f, -s), \hat{b}_{in}(\mathbf{p}_f, -s) \right\} = \mathbb{1}_1 \otimes \mathbb{1}_2 \otimes \mathbb{1}_3 \otimes \mathbb{1}_4, \quad (4.44b)$$

$$\left\{ \hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_f, -s), \hat{d}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_{\bar{f}}, +s) \right\} = \mathbb{1}_1 \otimes \mathbb{O}_2 \otimes S_3^+ \otimes \mathbb{1}_4, \quad (4.44c)$$

$$\left\{ \hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_f, -s), \hat{d}_{in}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, +s) \right\} = \mathbb{1}_1 \otimes \mathbb{O}_2 \otimes S_3^- \otimes \mathbb{1}_4, \quad (4.44d)$$

$$\left\{ \hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_f, -s), \hat{d}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_{\bar{f}}, -s) \right\} = \mathbb{1}_1 \otimes \mathbb{O}_2 \otimes S_3^z \otimes S_4^+, \quad (4.44e)$$

$$\left\{ \hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_f, -s), \hat{d}_{in}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, -s) \right\} = \mathbb{1}_1 \otimes \mathbb{O}_2 \otimes S_3^z \otimes S_4^-. \quad (4.44f)$$

As relações de anticomutação com o operador $\hat{b}_{in}(\mathbf{p}_f, +s)$ e seu conjugado foram obtidas no item anterior. Aplicando a adjunta às equações mostradas, as relações de anticomutação de $\hat{b}_{in}(\mathbf{p}_f, -s)$ com os operadores de férmion e antiférmion são obtidas.

- Para o operador $\hat{d}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_{\bar{f}}, +s)$:

$$\left\{ \hat{d}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_{\bar{f}}, +s), \hat{d}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_{\bar{f}}, +s) \right\} = 16S_1^z S_1^z \otimes S_2^z S_2^z \otimes \{S_3^+, S_3^+\} \otimes \mathbb{1}_4 = \mathbb{1}_1 \otimes \mathbb{1}_2 \otimes \mathbb{O}_3 \otimes \mathbb{1}_4, \quad (4.45a)$$

$$\left\{ \hat{d}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_{\bar{f}}, +s), \hat{d}_{in}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, +s) \right\} = 16S_1^z S_1^z \otimes S_2^z S_2^z \otimes \{S_3^+, S_3^-\} \otimes \mathbb{1}_4 = \mathbb{1}_1 \otimes \mathbb{1}_2 \otimes \mathbb{1}_3 \otimes \mathbb{1}_4, \quad (4.45b)$$

$$\left\{ \hat{d}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_{\bar{f}}, +s), \hat{d}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_{\bar{f}}, -s) \right\} = -32S_1^z S_1^z \otimes S_2^z S_2^z \otimes \{S_3^+, S_3^z\} \otimes S_4^+ = \mathbb{1}_1 \otimes \mathbb{1}_2 \otimes \mathbb{O}_3 \otimes S_4^+, \quad (4.45c)$$

$$\left\{ \hat{d}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_{\bar{f}}, +s), \hat{d}_{in}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, -s) \right\} = -32S_1^z S_1^z \otimes S_2^z S_2^z \otimes \{S_3^+, S_3^z\} \otimes S_4^- = \mathbb{1}_1 \otimes \mathbb{1}_2 \otimes \mathbb{O}_3 \otimes S_4^-. \quad (4.45d)$$

As relações de anticomutação de $\hat{d}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_{\bar{f}}, +s)$ com os demais operadores de férmions e antiférmions foram obtidos nos itens anteriores. Além disso, aplicando a adjunta, as relações de anticomutação para $\hat{d}_{in}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, +s)$ serão obtidas.

- Para o operador $\hat{d}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_{\bar{f}}, -s)$, só é necessário calcular as seguintes relações de anticomutação porque as outras relações foram obtidas anteriormente. Então, obtém-se

$$\left\{ \hat{d}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_{\bar{f}}, -s), \hat{d}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_{\bar{f}}, -s) \right\} = 64S_1^z S_1^z \otimes S_2^z S_2^z \otimes S_3^z S_3^z \otimes \{S_4^+, S_4^+\} = \mathbb{1}_1 \otimes \mathbb{1}_2 \otimes \mathbb{1}_3 \otimes \mathbb{O}_4, \quad (4.46a)$$

$$\left\{ \hat{d}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_{\bar{f}}, -s), \hat{d}_{in}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, -s) \right\} = 64S_1^z S_1^z \otimes S_2^z S_2^z \otimes S_3^z S_3^z \otimes \{S_4^+, S_4^-\} = \mathbb{1}_1 \otimes \mathbb{1}_2 \otimes \mathbb{1}_3 \otimes \mathbb{1}_4. \quad (4.46b)$$

Assim, todas as relações de anticomutação dos operadores de criação e aniquilação de férmion e antiférmion para cada valor de spin foram derivadas. Isso mostra que

combinação dos operadores de spin dos qubits, dada pelas equações (4.42), pode se comportar como férmions.

O Hamiltoniano da Eq. (4.17), descreve as seguintes interações: auto-interação de férmion-férmion, $\hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_f, \pm s)\hat{b}_{in}(\mathbf{p}_f, \pm s)$; auto-interação de antiférmion-antiférmion, $\hat{d}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \pm s)\hat{d}_{in}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \pm s)$; interação de férmion-antiférmion, $\hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_f, \pm s)\hat{d}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \pm s)$ e interação antiférmion-férmion, $\hat{d}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \pm s)\hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_f, \pm s)$. Portanto, usando o mapeamento, da Eq. (4.42), esses termos de interação podem ser expressos da seguinte maneira:

Auto-interação de Férmion - Férmion

$$\hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_f, +s)\hat{b}_{in}(\mathbf{p}_f, +s) = S_1^+ S_1^- \otimes \mathbb{1}_2 \otimes \mathbb{1}_3 \otimes \mathbb{1}_4, \quad (4.47a)$$

$$\hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_f, +s)\hat{b}_{in}(\mathbf{p}_f, -s) = -2S_1^+ S_1^z \otimes S_2^- \otimes \mathbb{1}_3 \otimes \mathbb{1}_4, \quad (4.47b)$$

$$\hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_f, -s)\hat{b}_{in}(\mathbf{p}_f, +s) = -2S_1^z S_1^+ \otimes S_2^+ \otimes \mathbb{1}_3 \otimes \mathbb{1}_4, \quad (4.47c)$$

$$\hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_f, -s)\hat{b}_{in}(\mathbf{p}_f, -s) = \mathbb{1}_1 \otimes S_2^+ S_2^- \otimes \mathbb{1}_3 \otimes \mathbb{1}_4. \quad (4.47d)$$

$$(4.47e)$$

Auto-interação de Antiférmion-Antiférmion

$$\hat{d}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_{\bar{f}}, +s)\hat{d}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_{\bar{f}}, +s) = \mathbb{1}_1 \otimes \mathbb{1}_2 \otimes S_3^- S_3^+ \otimes \mathbb{1}_4, \quad (4.48a)$$

$$\hat{d}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_{\bar{f}}, +s)\hat{d}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_{\bar{f}}, -s) = -2(\mathbb{1}_1 \otimes \mathbb{1}_2 \otimes S_3^- S_3^z \otimes S_4^+), \quad (4.48b)$$

$$\hat{d}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_{\bar{f}}, -s)\hat{d}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_{\bar{f}}, +s) = -2(\mathbb{1}_1 \otimes \mathbb{1}_2 \otimes S_3^z S_3^+ \otimes S_4^-), \quad (4.48c)$$

$$\hat{d}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_{\bar{f}}, -s)\hat{d}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_{\bar{f}}, -s) = \mathbb{1}_1 \otimes \mathbb{1}_2 \otimes \mathbb{1}_3 \otimes S_4^- S_4^+. \quad (4.48d)$$

Interação Fermion-Antifermion

$$\hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_f, +s)\hat{d}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_{\bar{f}}, +s) = 4S_1^+ S_1^z \otimes S_2^z \otimes S_3^+ \otimes \mathbb{1}_4, \quad (4.49a)$$

$$\hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_f, +s)\hat{d}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_{\bar{f}}, -s) = -8S_1^+ S_1^z \otimes S_2^z \otimes S_3^z \otimes S_4^+, \quad (4.49b)$$

$$\hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_f, -s)\hat{d}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_{\bar{f}}, +s) = -2(\mathbb{1}_1 \otimes S_2^+ S_2^z \otimes S_3^+ \otimes \mathbb{1}_4), \quad (4.49c)$$

$$\hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_f, -s)\hat{d}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_{\bar{f}}, -s) = 4(\mathbb{1}_1 \otimes S_2^+ S_2^z \otimes S_3^z \otimes S_4^+). \quad (4.49d)$$

Interação Antifermion-Fermion

$$\hat{d}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_{\bar{f}}, +s)\hat{b}_{in}(\mathbf{p}_f, +s) = 4S_1^z S_1^- \otimes S_2^z \otimes S_3^- \otimes \mathbb{1}_4, \quad (4.50a)$$

$$\hat{d}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_{\bar{f}}, +s)\hat{b}_{in}(\mathbf{p}_f, -s) = -2(\mathbb{1}_1 \otimes S_2^z \otimes S_3^z \otimes S_4^-), \quad (4.50b)$$

$$\hat{d}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_{\bar{f}}, -s)\hat{b}_{in}(\mathbf{p}_f, +s) = -8S_1^z S_1^- \otimes S_2^z \otimes S_3^z \otimes S_4^-, \quad (4.50c)$$

$$\hat{d}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_{\bar{f}}, -s)\hat{b}_{in}(\mathbf{p}_f, -s) = 4(\mathbb{1}_1 \otimes S_2^z S_2^- \otimes S_3^z \otimes S_4^-). \quad (4.50d)$$

Inserindo essas equações no Hamiltoniano do sistema, obtém-se o Hamiltoniano do simulador quântico H_{sim} que é expresso em termos dos operadores de spin dos qubits para cada termo do Hamiltoniano de interação, H_{int} .

Substituindo as equações (4.47) em (4.29), se obtém o mapeamento do Hamiltoniano de interação férmion-férmion (para reduzir a expressão, as variáveis das funções definidas nas equações (4.33 - 4.36) não são colocadas)

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{f,f} = \frac{g}{2} e^{-w_0 t} \sum_{r=1}^2 \hat{a}(\mathbf{k}, r) \{ & S_1^+ S_1^- \otimes \mathbb{1}_2 \otimes \mathbb{1}_3 \otimes \mathbb{1}_4 [\mathcal{R}_+ \tilde{\epsilon}_-(\mathbf{k}, r) + \mathcal{Q}_- \tilde{\epsilon}_+(\mathbf{k}, r)] \\ & - 2S_1^+ S_1^z \otimes S_2^- \otimes \mathbb{1}_3 \otimes \mathbb{1}_4 [-\mathcal{R}_z + \mathcal{Q}_z + k_z \mathcal{Q}] \tilde{\epsilon}_-(\mathbf{k}, r) \\ & - 2S_1^z S_1^+ \otimes S_2^+ \otimes \mathbb{1}_3 \otimes \mathbb{1}_4 [\mathcal{R}_z - \mathcal{Q}_z - k_z \mathcal{Q}] \tilde{\epsilon}_+(\mathbf{k}, r) \\ & + \mathbb{1}_1 \otimes S_2^+ S_2^- \otimes \mathbb{1}_3 \otimes \mathbb{1}_4 [\mathcal{R}_- \tilde{\epsilon}_+(\mathbf{k}, r) + \mathcal{Q}_+ \tilde{\epsilon}_-(\mathbf{k}, r)] \} + h.c. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Substituindo a Eq. (4.48) em (4.30), o mapeamento do Hamiltoniano de interação antiférmion-antiférmions é

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\bar{f},\bar{f}} = \frac{g}{2} e^{-w_0 t} \sum_{r=1}^2 \hat{a}(\mathbf{k}, r) \{ & \mathbb{1}_1 \otimes \mathbb{1}_2 \otimes S_3^- S_3^+ \otimes \mathbb{1}_4 [\mathcal{Z}_+ \tilde{\epsilon}_-(\mathbf{k}, r) + \mathcal{W}_- \tilde{\epsilon}_+(\mathbf{k}, r)] \\ & - 2(\mathbb{1}_1 \otimes \mathbb{1}_2 \otimes S_3^- S_3^z \otimes S_4^+) [-\mathcal{Z}_z + \mathcal{W}_z + k_z \mathcal{W}] \tilde{\epsilon}_+(\mathbf{k}, r) \\ & - 2(\mathbb{1}_1 \otimes \mathbb{1}_2 \otimes S_3^z S_3^+ \otimes S_4^-) [\mathcal{Z}_z - \mathcal{W}_z - k_z \mathcal{W}] \tilde{\epsilon}_-(\mathbf{k}, r) \\ & + \mathbb{1}_1 \otimes \mathbb{1}_2 \otimes \mathbb{1}_3 \otimes S_4^- S_4^+ [\mathcal{Z}_- \tilde{\epsilon}_+(\mathbf{k}, r) + \mathcal{W}_+ \tilde{\epsilon}_-(\mathbf{k}, r)] \} + h.c. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Inserindo a Eq. (4.49) em (4.31), o mapeamento do Hamiltoniano de interação Férmion-Antiférmion é

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{f,\bar{f}} = \frac{g}{2} e^{-iw_0 t} \sum_{r=1}^2 \hat{a}(\mathbf{k}, r) \{ & 4S_1^+ S_1^z \otimes S_2^z \otimes S_3^+ \otimes \mathbb{1}_4 [(\mathcal{N} - k_z \mathcal{M}_{p_z} + \mathcal{M}_{p_z p_z}) \tilde{\epsilon}_-(\mathbf{k}, r) - \mathcal{M}_{p_- p_-} \tilde{\epsilon}_+(\mathbf{k}, r)] \\ & - 8S_1^+ S_1^z \otimes S_2^z \otimes S_3^z \otimes S_4^+ [-\mathcal{M}_{p_z p_+} \tilde{\epsilon}_-(\mathbf{k}, r) + (k_z \mathcal{M}_{p_-} - \mathcal{M}_{p_- p_z}) \tilde{\epsilon}_+(\mathbf{k}, r)] \\ & - 2(\mathbb{1}_1 \otimes S_2^+ S_2^z \otimes S_3^+ \otimes \mathbb{1}_4) [\mathcal{M}_{p_z p_-} \tilde{\epsilon}_+(\mathbf{k}, r) + (-k_z \mathcal{M}_{p_+} + \mathcal{M}_{p_+ p_z}) \tilde{\epsilon}_-(\mathbf{k}, r)] \\ & + 4(\mathbb{1}_1 \otimes S_2^+ S_2^z \otimes S_3^z \otimes S_4^+) [(\mathcal{N} - k_z \mathcal{M}_{p_z} + \mathcal{M}_{p_z p_z}) \tilde{\epsilon}_+(\mathbf{k}, r) - \mathcal{M}_{p_+ p_+} \tilde{\epsilon}_-(\mathbf{k}, r)] \} + h.c. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Substituindo a Eq. (4.50) em (4.32), se obtém o mapeamento do Hamiltoniano de interação Antiférmion-Férmion

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\bar{f},f} = \frac{g}{2} e^{-iw_0 t} \sum_{r=1}^2 \hat{a}(\mathbf{k}, r) \{ & + 4S_1^z S_1^- \otimes S_2^z \otimes S_3^- \otimes \mathbb{1}_4 [(\mathcal{J} + k_z \mathcal{O}_{p_z} + \mathcal{O}_{p_z p_z}) \tilde{\epsilon}_+(\mathbf{k}, r) - \mathcal{O}_{p_+ p_+} \tilde{\epsilon}_-(\mathbf{k}, r)] \\ & - 2(\mathbb{1}_1 \otimes S_2^z \otimes S_3^z \otimes S_4^-) [\mathcal{O}_{p_z p_-} \tilde{\epsilon}_+(\mathbf{k}, r) + (k_z \mathcal{O}_{p_+} + \mathcal{O}_{p_+ p_z}) \tilde{\epsilon}_-(\mathbf{k}, r)] \\ & + 8S_1^z S_1^- \otimes S_2^z \otimes S_3^z \otimes S_4^- [\mathcal{O}_{p_z p_+} \tilde{\epsilon}_-(\mathbf{k}, r) + (k_z \mathcal{O}_{p_-} + \mathcal{O}_{p_- p_z}) \tilde{\epsilon}_+(\mathbf{k}, r)] \\ & + 4(\mathbb{1}_1 \otimes S_2^z S_2^- \otimes S_3^z \otimes S_4^-) [(\mathcal{J} + k_z \mathcal{O}_{p_z} + \mathcal{O}_{p_z p_z}) \tilde{\epsilon}_-(\mathbf{k}, r) - \mathcal{O}_{p_- p_-} \tilde{\epsilon}_+(\mathbf{k}, r)] \} + h.c. \end{aligned} \quad (4.54)$$

O Hamiltoniano do sistema H_{int} , foi mapeado usando a transformação de Jordan-Wigner unidimensional, onde os operadores de criação e aniquilação de férmions (e antiférmions) foram transformados em qubits; portanto, o Hamiltoniano do simulador é

$$H_{sim} =: \mathcal{H}_{f,f} + \mathcal{H}_{\bar{f},\bar{f}} + \mathcal{H}_{f,\bar{f}} + \mathcal{H}_{\bar{f},f} + h.c. \quad ;, \quad (4.55)$$

onde suas componentes são expressas pelas equações (4.51 - 4.54). O Hamiltoniano do simulador que pode ser implementado em um sistema quântico análogo (se possível implementar em laboratório) ou através de um sistema digital.

Pode-se observar que o simulador quântico definido por H_{sim} apresenta os mesmos termos de interação do Hamiltoniano da Eq. (4.1). No entanto, com o simulador quântico, pode-se analisar todos os termos da série de Dyson para um número finito de modos de campos (fermiônico e bosônico), ao contrário do sistema quântico (QED) no qual, para alguns termos da expansão de Dyson, tem-se infinitos modos de campo. Isso oferece uma vantagem ao usar o simulador quântico para analisar as interações ou fenômenos descritos pela QED.

4.4 Discussões

Para entender o Hamiltoniano do simulador, H_{sim} , descrito pela Eq. (4.55), alguns pontos importantes devem ser lembrados (pode-se orientar com a Figura 6)

- O Hamiltoniano do sistema a ser simulado é descrito pela Eq. (2.84), mostrado na seção 2.6; teoricamente, pode ser analisado por meio de métodos perturbativos e diagramas de Feynman para poder analisar as interações que descreve. Além disso, a simulação por meio de um computador clássico é limitada devido ao crescimento exponencial dos recursos computacionais com o tamanho do sistema. Porém usando a simulação quântica é possível evitar a explosão exponencial dos recursos computacionais.
- Os simuladores quânticos trabalham com partículas localizadas e distinguíveis (qubits). Por esse motivo, o sistema a ser simulado é redefinido considerando três premissas, de forma que possa ser mapeado para descrever as interações localizadas das partículas fermiônicas. A Eq. (4.3), define aos férmions e antiférmions localizados através de pacotes de ondas, onde o sistema é reduzido a modos de campos finitos que podem calcular todos os termos da série de Dyson. Além disso, é considerado um modo de campo bosônico. Nessas condições, o sistema a ser simulado foi redefinido pelo Hamiltoniano H_{int} , dada pela Eq. (4.12).
- Para implementar H_{int} em um simulador quântico, foi necessário definir o mapeamento, dado pela Eq. (4.42), onde os operadores de criação e aniquilação de férmion e antiférmion são transformados em operadores globais atuando em

qubits; obtendo assim o Hamiltoniano do simulador, H_{sim} . O simulador quântico pode descrever as interações que H_{int} descreve. Além disso, pode ser implementado usando um sistema quântico análogo ou digital, porque o *hardware* quântico atual é tipicamente implementado por qubits e osciladores harmônicos. Para o mapeamento, 4 qubits foram necesarios. Isso mostra que H_{sim} pode ser descrito por 4 qubits para analisar as interações de um modo de campo fermiônico, antifermiônico e bosônico. Se mais modos de campos forem considerados, então mais qubits precisam ser adicionados.

Levando em consideração tudo o que foi descrito acima, é necessário definir se H_{sim} pode ser implementado em um sistema análogo ou digital. Observa-se que H_{sim} possui 64 termos de interação, que são descritos pelas equações (4.51 - 4.54). É por esta razão que, a implementação análoga de H_{sim} se mostra desafiadora atualmente. No entanto, esse Hamiltoniano pode ser implementado usando um sistema quântico digital.

Na simulação quântica digital, o operador de evolução temporal descrito por H_{sim} pode ser implementado usando portas lógicas quânticas, conforme discutido no cap. 3. Para isso, sabe-se que a dinâmica de um sistema quântico, é

$$|\psi(\tau)\rangle = U(t, 0)|\psi(0)\rangle \quad (4.56)$$

onde o operador de evolução temporal $U(t, 0)$ pode ser expresso como

$$U(t, 0) = e^{-iH_{sim}t} = \left(e^{-iH_{sim}\Delta t} \right)^n. \quad (4.57)$$

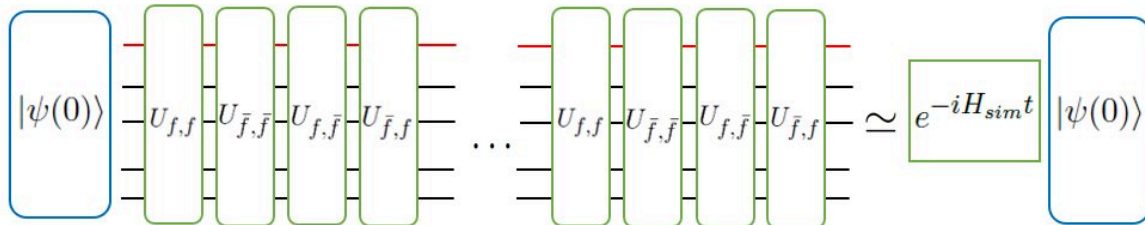
O termo à direita da equação mostra o tempo dividido em n partes, então a evolução deve ser aplicada n vezes para descrever a evolução total. Se $\Delta t = \frac{t}{n} \ll t_0$, onde t_0 é um tempo típico no qual o sistema já mudou consideravelmente, então, pode-se aplicar a fórmula de aproximação de Trotter, definida na Eq. (3.5), obtendo

$$U(\Delta t, 0) \equiv e^{-iH_{sim}\Delta t} \simeq U_{f,f}U_{\bar{f},\bar{f}}U_{f,\bar{f}}U_{\bar{f},f} \quad (4.58)$$

onde $U_{f,f} = e^{-i\mathcal{H}_{f,f}\Delta t}$ é o operador de evolução temporal definido pelo Hamiltoniano da Eq. (4.51); analogamente, os operadores de evolução temporal $U_{\bar{f},\bar{f}} = e^{-i\mathcal{H}_{\bar{f},\bar{f}}\Delta t}$, $U_{f,\bar{f}} = e^{-i\mathcal{H}_{f,\bar{f}}\Delta t}$ e $U_{\bar{f},f} = e^{-i\mathcal{H}_{\bar{f},f}\Delta t}$ são definidas pelos Hamiltonianos das equações (4.52), (4.53) e (4.54), respectivamente.

A Eq. (4.58) descreve que, para um intervalo de tempo muito pequeno, a evolução total do sistema pode ser aproximada à evolução temporal de cada componente do Hamiltoniano do simulador H_{sim} ; obtendo assim o produto do operador de evolução temporal de cada componente de H_{sim} . Os operadores de evolução temporal podem ser implementados por meio de uma sequência de portas quânticas que devem ser aplicados n vezes para obter a evolução total do sistema, conforme mostrado na figura

Figura 9 – Esquema de um sistema quântico digital para o protocolo de simulação quântica da QED usando o gauge de Coulomb. A sequência de portas quânticas, definidas pelas componentes de H_{sim} , deve ser aplicada n vezes para poder reproduzir a evolução total do sistema. As linhas pretas representam os 4 qubits e a linha vermelha representa o modo bosônico.



Fonte – Figura criada pelo autor

9. Considerando isso, se tem que por meio da simulação quântica digital poderia ser possível simular as interações descritas pela QED no gauge de Coulomb.

Pode-se notar que o sistema a simular pode ser reduzido considerando o caso unidimensional ou bidimensional, ou ainda aplicando limites ultra-relativísticos ou não relativísticos. Com isso, o simulador quântico pode ser mais fácil de implementar em um sistema análogo ou digital. No entanto, o desenvolvimento de uma expressão geral permite observar algumas limitações ou desafios ao tentar simular sistemas quânticos de muitas partículas com graus internos de liberdade, bem como simular fenômenos descritos pela teoria quântica de campos.

5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

Neste trabalho, foi generalizado o método proposto por *Casanova et al.* [15], para simular campos quantizados de dimensões $3 + 1$, a vantagem desse método é que ele pode analisar todos os termos da expansão de Dyson considerando um número finito de modos de campo. Isso mostra uma vantagem em imitar algumas interações descritas pela QED.

O protocolo de simulação quântica proposto apresenta dificuldades para ser implementado usando um sistema quântico análogo; pois o Hamiltoniano, H_{sim} , possui 64 termos de interação que são difíceis de implementar experimentalmente através de sistemas análogos conhecidos, tais como: íons, pontos quânticos, circuitos supercondutores, fótons, etc. Isso, mostra um desafio para a simulação quântica e computação quântica. Pode-se esperar que novas tecnologias quânticas sejam capazes de imitar grandes sistemas quântico, incluindo o protocolo proposto neste trabalho. No entanto, a versão digital deste protocolo pode ser aplicada utilizando tecnologias atuais onde todos os termos de interação poderiam ser implementados pela construção adequada de uma sequência de portas lógicas quânticas.

As funções definidas nas equações (4.33 - 4.36) descrevem a amplitude de cada interação das componentes de H_{sim} , dada pelas equações (4.51 - 4.54). Observa-se que, para cada processo de interação que envolve as diferentes combinações de spin do férmion (e antiférmion) e as polarizações transversais do fóton, existem diferentes amplitudes de espalhamento. Essas amplitudes dependem da forma do envelope do pacote de onda escolhido e do espinor de Dirac.

O protocolo proposto estabelece que para um modo de campo fermiônico, anti-fermiônico e bosônico, são necessários 4 qubits para poder imitar as interações que ocorrem. Entretanto, se mais modos de campo forem adicionados, no caso de férmions, é necessário adicionar mais qubits. Por exemplo, para dois modos de campos fermiônicos (e antifermiônicos) serão necessários 8 qubits, de acordo com o mapeamento realizado neste trabalho.

Na perspectivas futuras do trabalho, espera-se que, ao adicionar mais modos de campo, o protocolo possa ser usado para estudar fenômenos da QED no gauge de Coulomb como: o espalhamento Compton de elétron e de pósitron; espalhamento elétron-elétron, elétron-múon, etc. Além disso, pretende-se fazer uma sequência de portas quânticas para implementar um sistema quântico digital que possa simular e analisar as interações descritas, levando em consideração a interação tipo Coulomb que foi omitida neste trabalho.

REFERÊNCIAS

- [1] NIELSEN, Michael A; CHUANG, Isaac L. **Quantum Computation and Quantum Information**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2010.
- [2] FEYNMAN, Richard P. Simulating physics with computers. **International journal of theoretical physics**, Springer, v. 21, n. 6, p. 467–488, 1982. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02650179>.
- [3] LLOYD, Seth. Universal quantum simulators. **Science**, JSTOR, v. 273, n. 5278, p. 1073–1078, 1996. DOI: [10.1126/science.273.5278.1073](https://doi.org/10.1126/science.273.5278.1073).
- [4] BULUTA, Iulia; NORI, Franco. Quantum simulators. **Science**, American Association for the Advancement of Science, v. 326, n. 5949, p. 108–111, 2009. ISSN 0036-8075. DOI: [10.1126/science.1177838](https://doi.org/10.1126/science.1177838).
- [5] GEORGESCU, I. M.; ASHHAB, S.; NORI, Franco. Quantum simulation. **Rev. Mod. Phys.**, American Physical Society, v. 86, p. 153–185, 1 2014. DOI: [10.1103/RevModPhys.86.153](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.86.153).
- [6] HU, Jiazhong *et al.* Quantum simulation of Unruh radiation. **Nature Physics**, Nature Publishing Group, v. 15, n. 8, p. 785–789, 2019. DOI: doi.org/10.1038/s41567-019-0537-1.
- [7] LI, Keren *et al.* Quantum spacetime on a quantum simulator. **Communications Physics**, Nature Publishing Group, v. 2, n. 1, p. 1–6, 2019. DOI: doi.org/10.1038/s42005-019-0218-5.
- [8] LAMATA, L. *et al.* Dirac Equation and Quantum Relativistic Effects in a Single Trapped Ion. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 98, p. 253005, 25 2007. DOI: [10.1103/PhysRevLett.98.253005](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.98.253005).
- [9] GERRITSMA, Rene *et al.* Quantum simulation of the Dirac equation. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 463, n. 7277, p. 68–71, 2010. DOI: doi.org/10.1038/nature08688.
- [10] GERRITSMA, R. *et al.* Quantum Simulation of the Klein Paradox with Trapped Ions. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 106, p. 060503, 6 2011. DOI: [10.1103/PhysRevLett.106.060503](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.106.060503).

- [11] GARREAU, Jean Claude; ZEHNLÉ, Véronique. Simulating Dirac models with ultracold atoms in optical lattices. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 96, p. 043627, 4 2017. DOI: [10.1103/PhysRevA.96.043627](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.96.043627).
- [12] SVETITSKY, Elisha; KATZ, Nadav. Dirac particle dynamics of a superconducting circuit. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 99, p. 042308, 4 2019. DOI: [10.1103/PhysRevA.99.042308](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.99.042308).
- [13] GARREAU, Jean Claude; ZEHNLÉ, Véronique. Analog quantum simulation of the spinor-four Dirac equation with an artificial gauge field. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 101, p. 053608, 5 2020. DOI: [10.1103/PhysRevA.101.053608](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.101.053608).
- [14] CIRAC, J. Ignacio; MARANER, Paolo; PACHOS, Jiannis K. Cold Atom Simulation of Interacting Relativistic Quantum Field Theories. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 105, p. 190403, 19 2010. DOI: [10.1103/PhysRevLett.105.190403](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.105.190403).
- [15] CASANOVA, J. *et al.* Quantum Simulation of Quantum Field Theories in Trapped Ions. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 107, p. 260501, 26 2011. DOI: [10.1103/PhysRevLett.107.260501](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.107.260501).
- [16] GARCÍA-ÁLVAREZ, L. *et al.* Fermion-Fermion Scattering in Quantum Field Theory with Superconducting Circuits. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 114, p. 070502, 7 2015. DOI: [10.1103/PhysRevLett.114.070502](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.114.070502).
- [17] MARSHALL, Kevin *et al.* Quantum simulation of quantum field theory using continuous variables. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 92, p. 063825, 6 2015. DOI: [10.1103/PhysRevA.92.063825](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.92.063825).
- [18] ZHANG, Xiang *et al.* Experimental quantum simulation of fermion-antifermion scattering via boson exchange in a trapped ion. **Nature communications**, Nature Publishing Group, v. 9, n. 1, p. 1–8, 2018. DOI: doi.org/10.1038/s41467-017-02507-y.
- [19] MARCOS, D. *et al.* Superconducting Circuits for Quantum Simulation of Dynamical Gauge Fields. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 111, p. 110504, 11 2013. DOI: [10.1103/PhysRevLett.111.110504](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.111.110504).

- [20] KÜHN, Stefan; CIRAC, J. Ignacio; BAÑULS, Mari-Carmen. Quantum simulation of the Schwinger model: A study of feasibility. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 90, p. 042305, 4 2014. DOI: [10.1103/PhysRevA.90.042305](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.90.042305).
- [21] YANG, Dayou *et al.* Analog quantum simulation of $(1 + 1)$ -dimensional lattice QED with trapped ions. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 94, p. 052321, 5 2016. DOI: [10.1103/PhysRevA.94.052321](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.94.052321).
- [22] SIMON, Jonathan *et al.* Quantum simulation of antiferromagnetic spin chains in an optical lattice. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 472, n. 7343, p. 307–312, 2011. DOI: doi.org/10.1038/nature09994.
- [23] STRUCK, Julian *et al.* Quantum simulation of frustrated classical magnetism in triangular optical lattices. **Science**, American Association for the Advancement of Science, v. 333, n. 6045, p. 996–999, 2011. DOI: [10.1126/science.1207239](https://doi.org/10.1126/science.1207239).
- [24] ARGÜELLO-LUENGO, Javier *et al.* Analogue quantum chemistry simulation. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 574, n. 7777, p. 215–218, 2019. DOI: doi.org/10.1038/s41586-019-1614-4.
- [25] NAGASHIMA, Y.; NAMBU, Y. **Elementary Particle Physics: Quantum Field Theory and Particles**. [S.l.]: Wiley, 2011. v. 1. ISBN 9783527643967.
- [26] OHLSSON, Tommy. **Relativistic quantum physics: from advanced quantum mechanics to introductory quantum field theory**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2011.
- [27] PESKIN, M.E.; SCHROEDER, D.V. **An Introduction To Quantum Field Theory**. [S.l.]: Perseus Publishing, 1995. (Frontiers in Physics). ISBN 9780813345437.
- [28] GREINER W.; REINHARDT, J. **Field Quantization**. [S.l.]: Springer, 1996. ISBN 3540591796.
- [29] PADMANABHAN, Thanu. **Quantum field theory: the why, what and how**. [S.l.]: Springer, 2016.
- [30] RYDER, Lewis H. **Quantum field theory**. [S.l.]: Cambridge university press, 1996.

- [31] JD, Bjorken; DRELL, SD. **Relativistic Quantum Fields**. [S.l.]: McGraw Hill, New York, 1965.
- [32] SCHWEBER, SS. **An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory**. [S.l.]: Harper & Row Pubs, New York, 1961.
- [33] COHEN-TANNOUJDI, Claude; DUPONT-ROC, Jacques; GRYNBERG, Gilbert. **Photons and Atoms-Introduction to Quantum Electrodynamics**. [S.l.]: Wiley-VCH, 1997. P. 486. ISBN 0-471-18433-0.
- [34] AITCHISON, Ian JR; HEY, Anthony JG. **Gauge Theories in Particle Physics: A Practical Introduction: From Relativistic Quantum Mechanics to QED**. [S.l.]: CRC Press, 2012. v. 1.
- [35] CASANOVA, Jorge. **From Relativistic Quantum Dynamics to Quantum Field Theories in Trapped Ions**. 2012. International Doctoral Thesis – Department of Physical Chemistry, University of the Basque Country UPV / EHU.
- [36] ORTIZ, G. *et al.* Quantum algorithms for fermionic simulations. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 64, p. 022319, 2 2001. DOI: [10.1103/PhysRevA.64.022319](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.64.022319).
- [37] TSVELIK, Alexei M. **Quantum field theory in condensed matter physics**. [S.l.]: Cambridge university press, 2007.
- [38] COLEMAN, Piers. **Introduction to many-body physics**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2015.
- [39] GREINER, Walter. **Relativistic Quantum Mechanics: Wave Equations**. 3. ed. [S.l.]: Springer, 2000.
- [40] DIRAC, Paul Adrien Maurice. The quantum theory of the electron. **Proc. R. Soc. Lond. A**, The Royal Society London, v. 117, n. 778, p. 610–624, 1928. DOI: doi.org/10.1098/rspa.1928.0023.
- [41] BJORKEN, James D; DRELL, Sidney D. **Relativistic quantum mechanics**. [S.l.]: McGraw-Hill, 1965.

- [42] SCHWABL, F. **Advanced Quantum Mechanics**. 4. ed. [S./]: Springer, 2008. ISBN 9783540850618.
- [43] MAIANI, Luciano; BENHAR, Omar. **Relativistic Quantum Mechanics: An Introduction to Relativistic Quantum Fields**. [S./]: CRC Press, 2015.
- [44] NI, Jun. **Principles of Physics**. [S./]: WORLD SCIENTIFIC, 2014. DOI: [10.1142/9056](https://doi.org/10.1142/9056).
- [45] DIRAC, P. A. M. A Theory of Electrons and Protons. **Proc. R. Soc. Lond. A**, The Royal Society, v. 126, n. 801, p. 360–365, 1930. ISSN 09501207. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.1930.0013>.
- [46] FRANCIS HALZEN, Allen Martin. **Quarks and Leptons**. [S./]: John Wiley e Sons, 1984.
- [47] THOMSON, Mark. **Modern particle physics**. [S./]: Cambridge University Press, 2013.
- [48] D'AURIA, Riccardo; TRIGIANTE, Mario. **From special relativity to Feynman diagrams: a course of theoretical particle physics for beginners**. [S./]: Springer, 2016.
- [49] JACKSON, John David. **Classical electrodynamics**. [S./]: American Association of Physics Teachers, 1999.
- [50] ZANGWILL, Andrew. **Modern Electrodynamics**. [S./]: Cambridge University Press, 2012. DOI: [10.1017/CB09781139034777](https://doi.org/10.1017/CB09781139034777).
- [51] JACKSON, J. D.; OKUN, L. B. Historical roots of gauge invariance. **Rev. Mod. Phys.**, American Physical Society, v. 73, p. 663–680, 3 2001. DOI: [10.1103/RevModPhys.73.663](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.73.663).
- [52] ARFKEN, G.; WEBER, Hans Hermann. **Física matemática: métodos matemáticos para engenharia e física**. [S./]: Elsevier, 2007.
- [53] GOODMAN, Jonathan; SOKAL, Alan D. Multigrid Monte Carlo Method for Lattice Field Theories. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 56, p. 1015–1018, 10 1986. DOI: [10.1103/PhysRevLett.56.1015](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.56.1015).

- [54] MELTON, Cody A. *et al.* Spin-orbit interactions in electronic structure quantum Monte Carlo methods. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 93, p. 042502, 4 2016. DOI: [10.1103/PhysRevA.93.042502](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.93.042502).
- [55] REYNOLDS, Peter J.; TOBOCHNIK, Jan; GOULD, Harvey. Diffusion Quantum Monte Carlo. **Computers in Physics**, v. 4, n. 6, p. 662–668, 1990. DOI: [10.1063/1.4822960](https://doi.org/10.1063/1.4822960).
- [56] KOLORENČ, Jindřich; MITAS, Lubos. Applications of quantum Monte Carlo methods in condensed systems. **Reports on Progress in Physics**, IOP Publishing, v. 74, n. 2, p. 026502, 2011. DOI: [10.1088/0034-4885/74/2/026502](https://doi.org/10.1088/0034-4885/74/2/026502).
- [57] CIRAC, J Ignacio; ZOLLER, Peter. Goals and opportunities in quantum simulation. **Nature Physics**, Nature Publishing Group, v. 8, n. 4, p. 264–266, 2012. DOI: doi.org/10.1038/nphys2275.
- [58] FRIEDENAUER, Axel *et al.* Simulating a quantum magnet with trapped ions. **Nature Physics**, Nature Publishing Group, v. 4, n. 10, p. 757–761, 2008. DOI: <https://doi.org/10.1038/nphys1032>.
- [59] PEDERNALES, J S *et al.* Quantum simulations of relativistic quantum physics in circuit QED. **New Journal of Physics**, IOP Publishing, v. 15, n. 5, p. 055008, 2013. DOI: [10.1088/1367-2630/15/5/055008](https://doi.org/10.1088/1367-2630/15/5/055008).
- [60] FRADKIN, Eduardo. **Field theories of condensed matter physics**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2013.

APÊNDICE A – NOTAÇÕES

Neste trabalho, o espaço tempo é considerado sob a assinatura métrica $(+, -, -, -)$. Então, o tensor métrico é definido

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Além disso, ao longo do texto são usadas as unidades naturais ($\hbar = c = 1$), onde

$$[tempo] = [comprimento], \quad [massa] = [energia] = \frac{1}{[comprimento]}.$$

Para equações do campo eletromagnético, as unidades de Lorentz-Heaviside são usadas, onde a carga elétrica tem dimensão de $[massa]^{1/2} [comprimento]^{3/2} [tempo]^{-1}$. Além disso, alguns valores considerados são

$$e = 0.3026, \quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi} \sim \frac{1}{137},$$

onde $|e|$ é a carga do elétron e α é a constante da estrutura fina.

A representação covariante e contravariante dos quadrivetores são

$$\begin{aligned} x^\mu &= (t, x, y, z) = (t, \mathbf{x}) \quad \rightarrow \quad x_\mu = (t, -\mathbf{x}) \quad (\text{Vetor espaço-tempo}), \\ p^\mu &= (E, p_x, p_y, p_z) = (E, \mathbf{p}) \quad \rightarrow \quad p_\mu = (E, -\mathbf{p}) \quad (\text{quadrivetor momento}), \\ \partial^\mu &= \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right) \quad \rightarrow \quad \partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) \quad (\text{quadrivetor diferencial}). \end{aligned}$$

O quadrivetor potencial e a densidade de corrente são

$$\begin{aligned} A^\mu &= (A_0, A_y, A_x, A_z) = (A_0, \mathbf{A}) \quad \rightarrow \quad A_\mu = (A_0, -\mathbf{A}), \\ j^\mu &= (j^0, \mathbf{j}) = (\rho, \mathbf{j}) \quad \rightarrow \quad j_\mu = (j_0, -\mathbf{j}). \end{aligned}$$

A notação de Einstein é usado. Pode-se escrever o produto escalar no espaço-tempo como

$$\begin{aligned} x \cdot p &= x^\mu p_\mu = x_\mu p^\mu = Et - \mathbf{x} \cdot \mathbf{p}, \\ x^\mu x_\mu &= t^2 - \mathbf{x}^2, \\ p^\mu p_\mu &= E^2 - \mathbf{p}^2. \end{aligned}$$

O operador D'Alembertiano \square é definido como

$$\square = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2.$$

O operador quadrimomento é definido como

$$\hat{p}^\mu = i\partial_\mu = i\frac{\partial}{\partial x_\mu} = i\left\{\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right\}$$

As matrizes de Pauli são

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

As matrizes γ^μ na representação de Dirac são

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}, & \quad \gamma^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^x \\ -\sigma^x & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \\ \gamma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^y \\ -\sigma^y & \mathbf{0} \end{pmatrix}, & \quad \gamma^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^z \\ -\sigma^z & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

e considerando a métrica $(+, -, -, -)$, as matrizes γ podem ser escritas como

$$\gamma^\mu = \{\gamma^0, -\gamma^1, -\gamma^2, -\gamma^3\}, \quad \text{e} \quad \gamma_\mu = g_{\mu\nu}\gamma^\nu = \{\gamma^0, +\gamma^1, +\gamma^2, +\gamma^3\}.$$

APÊNDICE B – DECOMPOSIÇÃO DA DENSIDADE DE CORRENTE

A densidade de corrente \mathbf{j} pode ser decomposta usando o teorema de Helmholtz (ver [50, 52]), que afirma que um vetor $\mathbf{j}(\mathbf{x})$ pode ser escrito como a soma de duas partes, uma das quais é irrotacional e a outra selenoidal. Especificamente

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\parallel} + \mathbf{j}_{\perp}, \quad (\text{B.1})$$

onde \mathbf{j}_{\parallel} é irrotacional e \mathbf{j}_{\perp} é selenoidal

$$\nabla \times \mathbf{j}_{\parallel} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{j}_{\parallel} = -\nabla\varphi, \quad (\text{B.2})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_{\perp} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{j}_{\perp} = \nabla \times \mathbf{F}. \quad (\text{B.3})$$

A equação (B.1) pode ser expressa como

$$\mathbf{j} = -\nabla\varphi + \nabla \times \mathbf{F}. \quad (\text{B.4})$$

Quando as seguintes integrais sobre todo o espaço convergem, φ e \mathbf{F} são dadas exclusivamente por

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3x' \frac{\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad (\text{B.5})$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3x' \frac{\nabla' \times \mathbf{j}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad (\text{B.6})$$

isso também é válido para vetores dependentes do tempo.

Para a densidade de corrente, substituindo (B.5) e (B.6) em (B.4), resulta

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{j}_{\parallel} + \mathbf{j}_{\perp} = -\nabla \int \frac{d^3x'}{4\pi} \frac{\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \nabla \times \int \frac{d^3x'}{4\pi} \frac{\nabla' \times \mathbf{j}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (\text{B.7})$$

Usando as equações (2.43) e (2.42b), observa-se que

$$\square \mathbf{A} = -\mathbf{j} + \nabla \frac{\partial}{\partial t} A^0 = -\mathbf{j} + \nabla \int \frac{d^3x'}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \frac{\partial \rho(\mathbf{x}', t)}{\partial t'}, \quad (\text{B.8})$$

considerando a equação de continuidade $\partial_{\mu} j^{\mu} = 0$, a última expressão à direita de (B.8) se reduz para

$$\nabla \frac{\partial}{\partial t} A^0 = -\frac{1}{4\pi} \nabla \int d^3x' \frac{\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (\text{B.9})$$

Agora, no caso de vetores dependentes do tempo, se pode substituir a equação (B.5) em (B.2) e comparar com (B.9), obtendo

$$\nabla \frac{\partial}{\partial t} A^0 = \mathbf{j}_{\parallel}, \quad (\text{B.10})$$

isso mostra que o termo dependente do potencial escalar na equação (B.8) contribui para a densidade de corrente longitudinal. Assim, a partir da equação (B.7), a corrente transversal é definida por

$$\mathbf{j}_\perp = \nabla \times \int \frac{d^3x'}{4\pi} \frac{\nabla' \times \mathbf{j}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (\text{B.11})$$

Finalmente, substituindo (B.10) na equação de onda não homogênea (B.8), obtém-se

$$\square \mathbf{A} = -\mathbf{j}_\perp, \quad (\text{B.12})$$

mostrando que os componentes espaciais do potencial A^μ , usando o gauge de Coulomb, são reduzidos a dois componentes independentes transversais (ver referências [49, 50]).

Outra maneira de representar a corrente transversal é considerando que (consulte [42])

$$\nabla^2 A^0 = -\rho, \quad (\text{B.13})$$

é representado como

$$A^0 = \int \frac{d^3x'}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \rho(\mathbf{x}', t) \equiv -\frac{1}{\nabla^2} \rho. \quad (\text{B.14})$$

Então, a corrente transversal é

$$\mathbf{j}_\perp = \mathbf{j} - \nabla \int \frac{d^3x'}{4\pi} \frac{\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad (\text{B.15})$$

usando a Eq. (B.14), para cada componente transversal da corrente se obtém

$$j_i^\perp \equiv \left(\delta_{ik} - \frac{\partial_i \partial_k}{\nabla^2} \right) j_k, \quad (\text{B.16})$$

onde j_k são os componentes da corrente \mathbf{j} . O termo entre parênteses de (B.16) pode ser interpretado como um operador de projeção (consulte [28]), ou seja

$$(P_\perp)_{ik} = \delta_{ik} - \frac{\partial_i \partial_k}{\nabla^2} \quad \text{e} \quad (P_\parallel)_{ik} = \frac{\partial_i \partial_k}{\nabla^2}, \quad (\text{B.17})$$

onde (P_\perp) e (P_\parallel) são os operadores de projeção transversal e longitudinal.

APÊNDICE C – REPRESENTAÇÃO DE INTERAÇÃO

O Hamiltoniano da Eletrodinâmica Quântica é descrito por

$$H_{QED} = H_D + H_{EM} + H_i, \quad (\text{C.1})$$

onde cada termo é definido pelas equações (2.20), (2.56) e (2.81). O Hamiltoniano não perturbado é a soma dos Hamiltonianos dos campos livres, $H_0 = H_D + H_{EM}$, e H_i é o Hamiltoniano de interação.

O campo de Dirac (2.15) e o campo eletromagnético (2.52) são expressos implicitamente na representação de Heisenberg, essas expressões são mostradas como sendo iguais na representação de Interação. Para isso, as seguintes propriedades dos operadores hermitianos \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} são considerados

$$e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}} = \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2!} [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots, \quad (\text{C.2})$$

$$[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}\{\hat{B}, \hat{C}\} - \{\hat{A}, \hat{C}\}\hat{B}, \quad (\text{C.3})$$

$$[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}. \quad (\text{C.4})$$

• Representação de Interação de Operadores Fermiônicos.

Os operadores de criação \hat{b}^\dagger e aniquilação \hat{b} estão na representação de Schrödinger, para expressar esses operadores na representação de interação, usamos

$$\hat{b}_I(t, \mathbf{p}, s) = e^{+iH_0 t} \hat{b}(\mathbf{p}, s) e^{-iH_0 t}. \quad (\text{C.5})$$

Além disso, os operadores fermiônicos comutam com os operadores bosônicos, isto é, $[\hat{b}(\mathbf{p}, s), \hat{a}(\mathbf{k}, r)] = 0$, $[\hat{b}(\mathbf{p}, s), \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, r)] = 0$ e suas conjugadas comutam. Então,

$$[\hat{b}(\mathbf{p}, s), H_{EM}] = [\hat{b}^\dagger(\mathbf{p}, s), H_{EM}] = 0, \quad (\text{C.6})$$

substituindo na Eq. (C.5), o termo H_{EM} é cancelado. Usando a propriedade (C.2), a Eq. (C.5) se torna

$$e^{+iH_D t} \hat{b}(\mathbf{p}, s) e^{-iH_D t} = \hat{b}(\mathbf{p}, s) + (it)[H_D, \hat{b}(\mathbf{p}, s)] + \frac{(it)^2}{2!} [H_D, [H_D, \hat{b}(\mathbf{p}, s)]] + \dots \quad (\text{C.7})$$

Usando a propriedade (C.3) o comutador é calculado

$$\begin{aligned} [H_0, \hat{b}(\mathbf{p}, s)] &= \sum_{s'=\pm s'} \int d^3 p' w_{\mathbf{p}'} \left([\hat{b}^\dagger(\mathbf{p}', s') \hat{b}(\mathbf{p}', s'), \hat{b}(\mathbf{p}, s)] + [\hat{d}^\dagger(\mathbf{p}', s') \hat{d}(\mathbf{p}', s'), \hat{b}(\mathbf{p}, s)] \right), \\ &= \sum_{s'=\pm s'} \int d^3 p' \left[\hat{b}^\dagger(\mathbf{p}', s') \{ \hat{b}(\mathbf{p}', s'), \hat{b}(\mathbf{p}, s) \} - \underbrace{\{ \hat{b}^\dagger(\mathbf{p}', s'), \hat{b}(\mathbf{p}, s) \}}_{\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \delta_{ss'}} \hat{b}(\mathbf{p}', s'), \right. \\ &\quad \left. + \hat{d}^\dagger(\mathbf{p}', s') \{ \hat{d}(\mathbf{p}', s'), \hat{b}(\mathbf{p}, s) \} - \{ \hat{d}^\dagger(\mathbf{p}', s'), \hat{b}(\mathbf{p}, s) \} \hat{d}(\mathbf{p}', s') \right], \\ &= -w_{\mathbf{p}} \hat{b}(\mathbf{p}, s), \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

onde as relações de anticomutação (2.19) foram consideradas. Substituindo em (C.7), verifica-se

$$\begin{aligned}\hat{b}_I(t, \mathbf{p}, s) &= \hat{b}(\mathbf{p}, s) \left[1 + \frac{(-iw_{\mathbf{p}}t)}{1!} + \frac{(-iw_{\mathbf{p}}t)^2}{2!} + \frac{(-iw_{\mathbf{p}}t)^3}{3!} + \dots \right], \\ &= \hat{b}(\mathbf{p}, s)e^{-iw_{\mathbf{p}}t}.\end{aligned}\quad (\text{C.9})$$

A representação de interação do operador $\hat{b}^\dagger(\mathbf{p}, s)$ é a conjugada da Eq. (C.9). Isto é,

$$\hat{b}_I^\dagger(t, \mathbf{p}, s) = \hat{b}^\dagger(\mathbf{p}, s)e^{iw_{\mathbf{p}}t}.\quad (\text{C.10})$$

Do mesmo modo, para os operadores antifermiônicos, é obtido

$$\hat{d}_I(t, \mathbf{p}, s) = \hat{d}(\mathbf{p}, s)e^{-iw_{\mathbf{p}}t}, \quad \hat{d}_I^\dagger(t, \mathbf{p}, s) = \hat{d}^\dagger(\mathbf{p}, s)e^{iw_{\mathbf{p}}t}.\quad (\text{C.11})$$

Portanto, o operador de campo $\hat{\psi}(\mathbf{x})$ e $\hat{\bar{\psi}}(\mathbf{x})$ na representação de interação são

$$\begin{aligned}\hat{\psi}_I &= e^{iH_0t}\hat{\psi}(\mathbf{x})e^{-H_0t} \\ &= \sum_{s=\pm s} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{w_{\mathbf{p}}}} \left(\hat{b}_I u(\mathbf{p}, s)e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + \hat{d}_I^\dagger v(\mathbf{p}, s)e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \right) = \hat{\psi}(\mathbf{x}, t).\end{aligned}\quad (\text{C.12})$$

$$\begin{aligned}\hat{\bar{\psi}}_I &= e^{iH_0t}\hat{\bar{\psi}}(\mathbf{x})e^{-H_0t} \\ &= \sum_{s=\pm s} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{w_{\mathbf{p}}}} \left(\hat{d}_I \bar{v}(\mathbf{p}, s)e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + \hat{b}_I^\dagger \bar{u}(\mathbf{p}, s)e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \right) = \hat{\bar{\psi}}(\mathbf{x}, t).\end{aligned}\quad (\text{C.13})$$

Mostrando assim que os campos definidos nas equações (2.15) e (2.16) estão, implicitamente, na representação de Heisenberg e, portanto, na representação de interação.

• Representação de Interação de Operadores Bosônicos.

Os operadores de criação, \hat{a}^\dagger , e aniquilação, \hat{a} , do campo eletromagnético estão na representação de Schrödinger. Considerando que os operadores bosônicos comutam com os operadores fermiônicos, obtém-se que $[\hat{a}(\mathbf{k}, r), H_D] = 0$, então, a representação de interação de \hat{a} é definida como

$$\hat{a}_I(t, \mathbf{k}, r) = e^{+iH_{EM}t}\hat{a}(\mathbf{k}, r)e^{-iH_{EM}t}.\quad (\text{C.14})$$

Usando as propriedades (C.2), resulta

$$e^{+iH_{EM}t}\hat{a}(\mathbf{k}, r)e^{-iH_{EM}t} = \hat{a}(\mathbf{k}, r) + (it)[H_{EM}, \hat{a}(\mathbf{k}, r)] + \frac{(it)^2}{2!} [H_{EM}, [H_{EM}, \hat{a}(\mathbf{k}, r)]] + \dots.\quad (\text{C.15})$$

Usando a propriedade (C.4), verifica-se que

$$[H_{EM}, \hat{a}(\mathbf{k}, r)] = \sum_{r'=1}^2 \int d^3k' w_{\mathbf{k}'} \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}', r') \hat{a}(\mathbf{k}', r'), \hat{a}(\mathbf{k}, r) \right] = -w_{\mathbf{k}} \hat{a}(\mathbf{k}, r),\quad (\text{C.16})$$

onde as relações de comutação (2.53) foram consideradas. Substituindo em (C.15), obtém-se

$$\begin{aligned}\hat{a}_I(t, \mathbf{k}, r) &= \hat{a}(\mathbf{k}, r) \left[1 + \frac{(-iw_{\mathbf{k}}t)}{1!} + \frac{(-iw_{\mathbf{k}}t)^2}{2!} + \frac{(-iw_{\mathbf{k}}t)^3}{3!} + \dots \right], \\ &= \hat{a}(\mathbf{k}, r)e^{-iw_{\mathbf{k}}t}.\end{aligned}\quad (\text{C.17})$$

E a representação de interação do operador $\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, r)$ é a conjugada da Eq. (C.17). Isto é,

$$\hat{a}_I^\dagger(t, \mathbf{k}, r) = \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, r)e^{iw_{\mathbf{k}}t}.\quad (\text{C.18})$$

Portanto, o operador de campo quadripotencial $\hat{A}_\mu(\mathbf{x})$ na representação de interação é

$$\begin{aligned}\hat{A}_{\mu I} &= e^{iH_0t} \hat{A}_\mu(\mathbf{x}) e^{-H_0t}, \\ &= \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2w_k}} \left(\epsilon_\mu(\mathbf{k}, r) \hat{a}_I e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \epsilon_\mu^*(\mathbf{k}, r) \hat{a}_I^\dagger e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right) = \hat{A}_\mu(\mathbf{x}, t).\end{aligned}\quad (\text{C.19})$$

Isso mostra que o campo quadripotencial definido em (2.52) está implicitamente na representação de interação.

A representação de Interação do Hamiltoniano de interação, (2.81), é

$$\tilde{H}_I = e^{iH_0t} H_i(\mathbf{x}) e^{-iH_0t} = \tilde{H}_{int} + \tilde{H}_{coulomb}\quad (\text{C.20})$$

onde \tilde{H}_{int} é o hamiltoniano que descreve a interação com modos bosônicos transversais, dada por

$$\begin{aligned}\tilde{H}_{int} &= e^{iH_0t} \left(-e^{\hat{\psi}(\mathbf{x})} \gamma^i \hat{\psi}(\mathbf{x}) \hat{A}_i(\mathbf{x}) \right) e^{-iH_0t}, \\ &= -e \int d^3x \underbrace{e^{iH_0t} \hat{\psi}(\mathbf{x}) e^{-iH_0t}}_{\hat{\psi}_I} \gamma^i \underbrace{e^{iH_0t} \hat{\psi}(\mathbf{x}) e^{-iH_0t}}_{\hat{\psi}_I} \underbrace{e^{iH_0t} \hat{A}_i(\mathbf{x}) e^{-iH_0t}}_{\hat{A}_{iI}}, \\ &= -e \int d^3x \hat{\psi}(\mathbf{x}, t) \gamma^i \hat{\psi}(\mathbf{x}, t) \hat{A}_i(\mathbf{x}, t).\end{aligned}\quad (\text{C.21})$$

Além disso, a interação tipo Coulomb na representação de interação é $\tilde{H}_{coulomb}$, isto é

$$\begin{aligned}\tilde{H}_{coulomb}(\mathbf{x}, t) &= e^{iH_0t} H_{coulomb}(\mathbf{x}) e^{-iH_0t} \\ &= \frac{e^2}{8\pi} \int d^3x d^3y \frac{\psi^\dagger(\mathbf{x}, t) \psi(\mathbf{x}, t) \psi^\dagger(\mathbf{y}, t) \psi(\mathbf{y}, t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}\end{aligned}\quad (\text{C.22})$$

APÊNDICE D – EXPANSÃO DO CAMPO FERMIÔNICO

Partindo da premissa (iii) do método proposto, os operadores de criação de férmion e antiférmion são definidos, as equações (4.3a) e (4.3b) respectivamente. Em seguida, é possível escrever uma expansão de campo (tipo campo de Dirac) de maneira que o campo $\hat{\psi}(\mathbf{x})$ tenha as mesmas propriedades do campo de Dirac definido na Eq. (2.15). Portanto, esses novos operadores criarão férmions e antiférmions em cada tempo t com momento linear $\mathbf{p}_{f,\bar{f}}$ e projeção spin s . Isto é,

$$\hat{\psi}(\mathbf{x}) = \sum_{\pm s} \left[\hat{b}_{in}^{(sch)}(\mathbf{p}_f, s) C_b \mathcal{U}(\mathbf{p}_f, s) + \hat{d}_{in}^{\dagger(sch)}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, s) C_d \mathcal{V}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, s) \right], \quad (\text{D.1})$$

onde $\mathcal{U}(\mathbf{p}_f, s)$ e $\mathcal{V}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, s)$ são os espinores deste novo campo de Dirac da mesma maneira que os espinores descritas nas equações (2.6) e (2.8). Além disso, C_b e C_d são os coeficientes.

Esses operadores satisfazem as relações de anticomutação dada na Eq. (2.19), ou seja,

$$\begin{aligned} \left\{ \hat{b}_{in}^{(sch)}(\mathbf{p}_f, s), \hat{b}_{in}^{\dagger(sch)}(\mathbf{p}'_f, s') \right\} &= \delta^3(\mathbf{p}_f - \mathbf{p}'_f) \delta_{ss'}, \\ \left\{ \hat{d}_{in}^{(sch)}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, s), \hat{d}_{in}^{\dagger(sch)}(\mathbf{p}'_{\bar{f}}, s') \right\} &= \delta^3(\mathbf{p}_{\bar{f}} - \mathbf{p}'_{\bar{f}}) \delta_{ss'}, \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

onde as outras configurações da relação de anticomutação entre esse operadores são nulos. Da Eq. (D.2) a relação de anticomutação é 1 quando $\mathbf{p}_f = \mathbf{p}'_f$ e $s = s'$ (o mesmo para o antiférmion) e, portanto, usando as definições (4.3), obtém-se que

$$\int d^3p |\mathcal{G}_f(\mathbf{p}_f, \mathbf{p})|^2 = 1 \quad \text{e} \quad \int d^3p |\mathcal{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p})|^2 = 1, \quad (\text{D.3})$$

descrevem a distribuição de probabilidade do pacote de onda do fermion e antiférmion.

O objetivo é encontrar termos desconhecidos como $C_b \mathcal{U}(\mathbf{p}_f, s)$ y $C_d \mathcal{V}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, s)$, para isso, construímos a relação de anticomutação entre os operadores $\hat{b}_{in}^{\dagger(sch)}$ com o campo $\hat{\psi}(\mathbf{x})$. Multiplicando pela direita por $\hat{b}_{in}^{\dagger(sch)}(\mathbf{p}_f, s)$ e, depois, pela esquerda de tal maneira que uma relação de anticomutação possa ser construída, como

$$\begin{aligned} \sum_{\pm s'} C_b \mathcal{U}(\mathbf{p}'_f, s') \underbrace{\left\{ \hat{b}_{in}^{(sch)}(\mathbf{p}'_f, s'), \hat{b}_{in}^{\dagger(sch)}(\mathbf{p}_f, s) \right\}}_{\delta^{(3)}(\mathbf{p}'_f - \mathbf{p}_f) \delta_{ss'}} &= \left\{ \hat{\psi}(\mathbf{x}), \hat{b}_{in}^{\dagger(sch)}(\mathbf{p}_f, s) \right\}, \\ C_b \mathcal{U}(\mathbf{p}_f, s) &= \left\{ \hat{\psi}(\mathbf{x}), \hat{b}_{in}^{\dagger(sch)}(\mathbf{p}_f, s) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

Do mesmo jeito para $C_d \mathcal{V}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, s)$, usando o operador e $\hat{d}_{in}^{(sch)}$, a seguinte relação de anticomutação pode ser construída,

$$C_d \mathcal{V}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, s) = \left\{ \hat{\psi}(\mathbf{x}), \hat{d}_{in}^{(sch)}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, s) \right\}. \quad (\text{D.5})$$

Nas equações (D.4) e (D.5) foi aplicado a relação de anticomutação dos operadores $\hat{b}^{(sch)}$ ($\hat{b}^{\dagger(sch)}$) e $\hat{d}^{(sch)}$ ($\hat{d}^{\dagger(sch)}$). No lado direito das equações, como o campo $\hat{\psi}(x)$ deve ser o mesmo que o campo de Dirac, então $\hat{\psi}(x)$ pode ser considerado como o campo definido em (2.15). Para a Eq. (D.4), isto é

$$C_b \mathcal{U}(\mathbf{p}_f, s) = \sum_{\pm s'} \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{w_{p'}}} \underbrace{\left\{ \hat{b}(\mathbf{p}', s'), \hat{b}_{in}^{\dagger(sch)}(\mathbf{p}_f, s) \right\}}_{\mathcal{G}_f(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}') \delta_{ss'} e^{-i w_{p'} t}} u(\mathbf{p}', s') e^{i \mathbf{p}' \cdot \mathbf{x}}, \quad (\text{D.6})$$

$$C_b \mathcal{U}(\mathbf{p}_f, s) = \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{w_{p'}}} \mathcal{G}_f(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}') u(\mathbf{p}', s) e^{i \mathbf{p}' \cdot \mathbf{x}} e^{-i w_{p'} t},$$

onde a relação de anticomutação $\left\{ \hat{b}(\mathbf{p}', s'), \hat{b}_{in}^{\dagger(sch)}(\mathbf{p}_f, s) \right\}$ é obtida usando (4.3a) e (2.19),

$$\begin{aligned} \left\{ \hat{b}(\mathbf{p}', s'), \hat{b}_{in}^{\dagger(sch)}(\mathbf{p}_f, s) \right\} &= \int d^3 p \mathcal{G}_f(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}) \left\{ \hat{b}(\mathbf{p}', s'), \hat{b}^{\dagger}(\mathbf{p}, s) \right\} e^{-i w_{p'} t}, \\ &= \int d^3 p \mathcal{G}_f(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}) \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \delta_{s's} e^{-i w_{p'} t} = \mathcal{G}_f(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}') \delta_{ss'} e^{-i w_{p'} t}. \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

Da mesma forma para a Eq. (D.5), usando a adjunta de (4.3b), resulta

$$C_d \mathcal{V}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, s) = \sum_{\pm s'} \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{w_{p'}}} \underbrace{\left\{ \hat{d}^{\dagger}(\mathbf{p}', s'), \hat{d}_{in}^{(sch)}(\mathbf{p}_f, s) \right\}}_{\mathcal{G}_{\bar{f}}^*(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}') \delta_{ss'} e^{+i w_{p'} t}} v(\mathbf{p}', s') e^{-i \mathbf{p}' \cdot \mathbf{x}}, \quad (\text{D.8})$$

$$C_d \mathcal{V}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, s) = \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{w_{p'}}} \mathcal{G}_{\bar{f}}^*(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}') v(\mathbf{p}', s) e^{-i \mathbf{p}' \cdot \mathbf{x}} e^{i w_{p'} t}.$$

Para reduzir as expressões anteriores, pode-se fazer

$$G_f(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}', s) = \sqrt{\frac{m}{w_{p'}}} \mathcal{G}_f(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}') u(\mathbf{p}', s), \quad (\text{D.9a})$$

$$G_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}', s) = \sqrt{\frac{m}{w_{p'}}} \mathcal{G}_{\bar{f}}^*(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}') v(\mathbf{p}', s). \quad (\text{D.9b})$$

Reescrevendo as equações (D.6) e (D.8)

$$C_b \mathcal{U}(\mathbf{p}_f, s) = \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^{3/2}} \mathcal{G}_f(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}') e^{i \mathbf{p}' \cdot \mathbf{x}} e^{-i w_{p'} t}, \quad (\text{D.10a})$$

$$C_d \mathcal{V}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, s) = \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^{3/2}} \mathcal{G}_{\bar{f}}^*(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}') e^{-i \mathbf{p}' \cdot \mathbf{x}} e^{i w_{p'} t}. \quad (\text{D.10b})$$

Ora, substituindo (D.10) na Eq. (D.1), obtém-se o novo campo de Dirac em termos do espinor e o envelope de onda

$$\hat{\psi}(\mathbf{x}) = \sum_{\pm s} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2}} \left[\hat{b}_{in}^{(sch)}(\mathbf{p}_f, s) G_f(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}, s) e^{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - w_{p'} t)} + \hat{d}_{in}^{\dagger(sch)}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, s) G_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}, s) e^{-i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - w_{p'} t)} \right]. \quad (\text{D.11})$$

A partir da equação (D.11), as seguintes transformadas de Fourier são definidas

$$\tilde{G}_f(\mathbf{p}_f, x, s) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} G_f(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}, s) e^{i[(\mathbf{p}-\mathbf{p}_f)\cdot\mathbf{x} - (w_p - w_f)t]}, \quad (\text{D.12})$$

$$\tilde{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, x, s) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} G_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}, s) e^{-i[(\mathbf{p}-\mathbf{p}_{\bar{f}})\cdot\mathbf{x} - (w_p - w_{\bar{f}})t]}, \quad (\text{D.13})$$

onde foi multiplicado por $e^{\pm i p_f \cdot x}$ com $p_f \cdot x = w_f t - \mathbf{p}_f \cdot \mathbf{x}$ (o mesmo para $p_{\bar{f}} \cdot x$), para que a expressão seja

$$\hat{\psi}(\mathbf{x}) = \sum_{\pm s} \left[\hat{b}_{in}^{(sch)}(\mathbf{p}_f, s) \tilde{G}_f(\mathbf{p}_f, x, s) e^{-i p_f \cdot x} + \hat{d}_{in}^{\dagger(sch)}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, s) \tilde{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, x, s) e^{+i p_{\bar{f}} \cdot x} \right]. \quad (\text{D.14})$$

Na representação de interação [usando a Eq. (C.7), ver Apêndice C]

$$\hat{b}_{In}^{(sch)}(\mathbf{p}_f, s) = e^{+i H_D t} \hat{b}_{in}^{(sch)}(\mathbf{p}_f, s) e^{-i H_D t} = \hat{b}_{in}(\mathbf{p}_f, s) = \int d^3p \mathcal{G}_f(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}) \hat{b}(\mathbf{p}, s), \quad (\text{D.15a})$$

$$\hat{d}_{In}^{(sch)}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, s) = e^{+i H_D t} \hat{d}_{in}^{(sch)}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, s) e^{-i H_D t} = \hat{d}_{in}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, s) = \int d^3p \mathcal{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}) \hat{d}(\mathbf{p}, s), \quad (\text{D.15b})$$

onde \hat{b}_{in} e \hat{d}_{in} são independentes do tempo. Na representação de interação, o campo de Dirac é

$$\hat{\psi}(x) = \sum_{\pm s} \left[\hat{b}_{in}(\mathbf{p}_f, s) \tilde{G}_f(\mathbf{p}_f, x, s) e^{-i p_f \cdot x} + \hat{d}_{in}^{\dagger}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, s) \tilde{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, x, s) e^{+i p_{\bar{f}} \cdot x} \right]. \quad (\text{D.16})$$

Pode-se notar que os operadores de criação e aniquilação não têm a dependência espacial, a sua dependência espacial está no termo do envelope que foi colocado junto com o seu espinor $\tilde{G}_f(\mathbf{p}_f, x, s)$ e $\tilde{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, x, s)$.

De maneira análoga para a conjugada do operador de campo de Dirac

$$\hat{\bar{\psi}}(x) = \sum_{\pm s} \left[\hat{b}_{in}^{\dagger}(\mathbf{p}_f, s) \tilde{G}_f(\mathbf{p}_f, x, s) e^{+i p_f \cdot x} + \hat{d}_{in}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, s) \tilde{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, x, s) e^{-i p_{\bar{f}} \cdot x} \right], \quad (\text{D.17})$$

onde foi usado o operador de campo conjugado de Dirac $\hat{\bar{\psi}} = \psi^{\dagger} \gamma^0$, já que $\bar{u}(\mathbf{p}, s) = u^{\dagger}(\mathbf{p}, s) \gamma^0$ e $\bar{v}(\mathbf{p}, s) = v^{\dagger}(\mathbf{p}, s) \gamma^0$, Além de fazer a seguinte definição

$$\bar{G}_f(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}, s) = G_f^{\dagger}(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}, s) \gamma^0 = \sqrt{\frac{m}{w_p}} \mathcal{G}_f^*(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}) \bar{u}(\mathbf{p}, s), \quad (\text{D.18a})$$

$$\bar{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}, s) = G_{\bar{f}}^{\dagger}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}, s) \gamma^0 = \sqrt{\frac{m}{w_p}} \mathcal{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}) \bar{v}(\mathbf{p}, s). \quad (\text{D.18b})$$

Da mesma forma, para o campo conjugado, as equações (D.12) e (D.13) são definidas como

$$\tilde{\bar{G}}_f(\mathbf{p}_f, x, s) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \bar{G}_f(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}, s) e^{-i[(\mathbf{p}-\mathbf{p}_f)\cdot\mathbf{x} - (w_p - w_f)t]}, \quad (\text{D.19a})$$

$$\tilde{\bar{G}}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, x, s) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \bar{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}, s) e^{+i[(\mathbf{p}-\mathbf{p}_{\bar{f}})\cdot\mathbf{x} - (w_p - w_{\bar{f}})t]}. \quad (\text{D.19b})$$

APÊNDICE E – TRANSFORMADA DE FOURIER $\widetilde{G}_{f,\bar{f}}(p_{f,\bar{f}}, x, s)$

A transformada de Fourier $\widetilde{G}_{f,\bar{f}}(p_{f,\bar{f}}, x, s)$ é representada em uma matriz coluna cujos elementos são definidos pelas equações (4.20) e (4.21). Para a transformada de Fourier $\widetilde{G}_{f,\bar{f}}$, basta aplicar a adjunta de $\widetilde{G}_{f,\bar{f}}$ e multiplicar pela matriz γ^0 , ou seja,

$$\widetilde{G}_{f,\bar{f}} = \widetilde{G}_{f,\bar{f}}^\dagger \gamma^0. \quad (\text{E.1})$$

Usando as equações de (4.18), resulta

$$\widetilde{G}_f(\mathbf{p}_f, x, +s) = \begin{pmatrix} \widetilde{G}_f^*(\mathbf{p}_f, x) & 0 & -\widetilde{G}_{f_z}^*(\mathbf{p}_f, x) & -\widetilde{G}_{f_+}^*(\mathbf{p}_f, x) \end{pmatrix}, \quad (\text{E.2a})$$

$$\widetilde{G}_f(\mathbf{p}_f, x, -s) = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{G}_f^*(\mathbf{p}_f, x) & -\widetilde{G}_{f_-}^*(\mathbf{p}_f, x) & +\widetilde{G}_{f_z}^*(\mathbf{p}_f, x) \end{pmatrix}. \quad (\text{E.2b})$$

Usando as equações (4.19), obtém-se as matrizes

$$\widetilde{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, x, +s) = \begin{pmatrix} \widetilde{G}_{\bar{f}_-}^*(\mathbf{p}_{\bar{f}}, x) & -\widetilde{G}_{\bar{f}_z}^*(\mathbf{p}_{\bar{f}}, x) & 0 & -\widetilde{G}_{\bar{f}_+}^*(\mathbf{p}_{\bar{f}}, x) \end{pmatrix}, \quad (\text{E.3a})$$

$$\widetilde{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, x, -s) = \begin{pmatrix} \widetilde{G}_{\bar{f}_-z}^*(\mathbf{p}_{\bar{f}}, x) & \widetilde{G}_{\bar{f}_+}^*(\mathbf{p}_{\bar{f}}, x) & -\widetilde{G}_{\bar{f}_+}^*(\mathbf{p}_{\bar{f}}, x) & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{E.3b})$$

onde cada componente é definido como uma transformada de Fourier, na forma

$$\begin{aligned} \widetilde{G}_f^*(\mathbf{p}_f, x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{w_{\mathbf{p}} + m}{2w_{\mathbf{p}}}} \mathcal{G}_f^*(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}) e^{-i[(\mathbf{p}-\mathbf{p}_f) \cdot \mathbf{x} - (w_{\mathbf{p}} - w_f)t]}, \\ \widetilde{G}_{f_\alpha}^*(\mathbf{p}_f, x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{p_\alpha}{\sqrt{2w_{\mathbf{p}}(w_{\mathbf{p}} + m)}} \mathcal{G}_f^*(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}) e^{-i[(\mathbf{p}-\mathbf{p}_f) \cdot \mathbf{x} - (w_{\mathbf{p}} - w_f)t]} \quad , \alpha = x, y, z. \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

De maneira análoga, os termos descritos nas equações (E.3a) e (E.3b)

$$\begin{aligned} \widetilde{G}_{\bar{f}}^*(\mathbf{p}_{\bar{f}}, x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{p_\alpha}{\sqrt{2w_{\mathbf{p}}(w_{\mathbf{p}} + m)}} \mathcal{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}) e^{+i[(\mathbf{p}-\mathbf{p}_{\bar{f}}) \cdot \mathbf{x} - (w_{\mathbf{p}} - w_{\bar{f}})t]}, \\ \widetilde{G}_{\bar{f}_\alpha}^*(\mathbf{p}_{\bar{f}}, x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{p_\alpha}{\sqrt{2w_{\mathbf{p}}(w_{\mathbf{p}} + m)}} \mathcal{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}) e^{+i[(\mathbf{p}-\mathbf{p}_{\bar{f}}) \cdot \mathbf{x} - (w_{\mathbf{p}} - w_{\bar{f}})t]} \quad , \alpha = x, y, z. \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

APÊNDICE F – HAMILTONIANO FÉRMION-FÉRMION $\mathcal{H}_{f,f}$

Tendo em conta o gauge de Coulomb com $A^0 = 0$ no campo eletromagnético (livre) e com propagação do fóton no eixo z , as componentes espaciais do campo A são definidos no plano $x - y$. Portanto, o quadrivetor de polarização ϵ_μ possui apenas duas componentes espaciais, sendo perpendicular à propagação, isto é (ver seção 2.5)

$$\epsilon_\mu(\mathbf{k}, r) = (0, \epsilon_1(\mathbf{k}, r), \epsilon_2(\mathbf{k}, r), 0) \quad , \quad r = 1, 2. \quad (\text{F.1})$$

Além disso, definindo

$$\tilde{\epsilon}_+(\mathbf{k}, r) = (\epsilon_1(\mathbf{k}, r) + i\epsilon_2(\mathbf{k}, r)) \quad \tilde{\epsilon}_-(\mathbf{k}, r) = (\epsilon_1(\mathbf{k}, r) - i\epsilon_2(\mathbf{k}, r)), \quad (\text{F.2a})$$

$$\tilde{\epsilon}_+^*(\mathbf{k}, r) = (\epsilon_1^*(\mathbf{k}, r) + i\epsilon_2^*(\mathbf{k}, r)) \quad \tilde{\epsilon}_-^*(\mathbf{k}, r) = (\epsilon_1^*(\mathbf{k}, r) - i\epsilon_2^*(\mathbf{k}, r)), \quad (\text{F.2b})$$

onde r define a polarização transversal do fóton. Considerando isso, o Hamiltoniano de interação é analisado para operações com $\gamma^{1,2}$.

Da expressão (4.17), o Hamiltoniano para férmions é

$$\mathcal{H}_{f,f} = \sum_{r=1,2} \sum_{s,s'} \mathcal{F}_{f,f}^i(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_f, \mathbf{k}, t, s', s) \epsilon_i(\mathbf{k}, r) \hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_f, s') \hat{b}_{in}(\mathbf{p}_f, s) \hat{a}(\mathbf{k}, r) + h.c., \quad (\text{F.3})$$

onde a função \mathcal{F}^i é definida na Eq. (4.13). Observa-se que o Hamiltoniano depende das diferentes combinações de spin, portanto, haverá 4 termos do Hamiltoniano para férmions-férmions.

- Para férmions com spin $+s$ e $+s$

A função \mathcal{F}^i é

$$\mathcal{F}_{f,f}^i(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_f, \mathbf{k}, t, +s, +s) = \left(\int d^3x \quad \tilde{\overline{G}}_f(\mathbf{p}_f, x, +s) \gamma^i \tilde{G}_f(\mathbf{p}_f, x, +s) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right) e^{-i\omega_0 t}. \quad (\text{F.4})$$

Usando as expressões das matrizes $\tilde{\overline{G}}_f(\mathbf{p}_f, x, +s)$ e $\tilde{G}_f(\mathbf{p}_f, x, +s)$ definidas nas equações (E.2a) e (4.18a), respectivamente. Obtém-se

$$\tilde{\overline{G}}_f(\mathbf{p}_f, x, +s) \gamma^i \tilde{G}_f(\mathbf{p}_f, x, +s) = \begin{cases} \tilde{\overline{G}}_f(\mathbf{p}_f, x, +s) \gamma^1 \tilde{G}_f(\mathbf{p}_f, x, +s) \\ \tilde{\overline{G}}_f(\mathbf{p}_f, x, +s) \gamma^2 \tilde{G}_f(\mathbf{p}_f, x, +s) \end{cases}. \quad (\text{F.5})$$

Essa redução é devido à polarização transversal do fóton ($r = 1, 2$).

Calculando cada componente

$$\begin{aligned}
& \tilde{\bar{G}}_f(\mathbf{p}_f, x, +s) \gamma^1 \tilde{G}_f(\mathbf{p}_f, x, +s) = \\
& = \left(\tilde{G}_f^*(\mathbf{p}_f, x) \quad 0 \quad -\tilde{G}_{f_z}^*(\mathbf{p}_f, x) \quad -\tilde{G}_{f_+}^*(\mathbf{p}_f, x) \right) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{G}_f(\mathbf{p}_f, x) \\ 0 \\ \tilde{G}_{f_z}(\mathbf{p}_f, x) \\ \tilde{G}_{f_+}(\mathbf{p}_f, x) \end{pmatrix}, \\
& = \tilde{G}_f^*(\mathbf{p}_f, x) \tilde{G}_{f_+}(\mathbf{p}_f, x) + \tilde{G}_{f_+}^*(\mathbf{p}_f, x) \tilde{G}_f(\mathbf{p}_f, x).
\end{aligned} \tag{F.6}$$

De maneira análoga, usando γ^2 , resulta

$$\tilde{\bar{G}}_f(\mathbf{p}_f, x, +s) \gamma^2 \tilde{G}_f(\mathbf{p}_f, x, +s) = -i \left[\tilde{G}_f^*(\mathbf{p}_f, x) \tilde{G}_{f_+}(\mathbf{p}_f, x) - \tilde{G}_{f_+}^*(\mathbf{p}_f, x) \tilde{G}_f(\mathbf{p}_f, x) \right]. \tag{F.7}$$

Substituindo (F.6) em (F.4) e usando as equações (4.20) e (E.4), a função \mathcal{F}^1 resulta

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{f,f}^1(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_f, \mathbf{k}, t, +s, +s) & = \left(\int d^3x \tilde{\bar{G}}_f(\mathbf{p}_f, x, +s) \gamma^1 \tilde{G}_f(\mathbf{p}_f, x, +s) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right) e^{-i\omega_0 t} \\
& = \iiint \frac{d^3x d^3p d^3p'}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{w_p + m}{2w_p}} \mathcal{G}_f^*(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}) \frac{p'_+}{\sqrt{2w_{p'}(w_{p'} + m)}} \mathcal{G}_f(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}') e^{i(\mathbf{p}' - \mathbf{p} + \mathbf{k})\cdot\mathbf{x}} e^{-i(w_{p'} - w_p + \omega_0)t} \\
& + \iiint \frac{d^3x d^3p d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{p'_+}{\sqrt{2w_p(w_p + m)}} \mathcal{G}_f^*(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}) \sqrt{\frac{w_{p'} + m}{2w_{p'}}} \mathcal{G}_f(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}') e^{i(\mathbf{p}' - \mathbf{p} + \mathbf{k})\cdot\mathbf{x}} e^{-i(w_{p'} - w_p + \omega_0)t}
\end{aligned}$$

Pode-se notar que os termos de \mathbf{p}_f e w_f na exponencial foram cancelados, e a expressão $\int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{i(\mathbf{p}' - \mathbf{p} + \mathbf{k})\cdot\mathbf{x}} = \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p} + \mathbf{k})$ é obtida. Agora, integrando em relação a \mathbf{p} , resulta

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{f,f}^1(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_f, \mathbf{k}, t, +s, +s) & = \\
& + \frac{1}{2} \int d^3p' \sqrt{\frac{w_{\mathbf{p}'+\mathbf{k}} + m}{w_{\mathbf{p}'+\mathbf{k}} w_{\mathbf{p}'}(w_{\mathbf{p}'} + m)}} \mathcal{G}_f^*(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}' + \mathbf{k}) \mathcal{G}_f(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}') p'_+ e^{i(w_{\mathbf{p}'+\mathbf{k}} - w_{\mathbf{p}'} - \omega_0)t}, \\
& + \frac{1}{2} \int d^3p' \sqrt{\frac{w_{\mathbf{p}'} + m}{w_{\mathbf{p}'} w_{\mathbf{p}'+\mathbf{k}}(w_{\mathbf{p}'+\mathbf{k}} + m)}} \mathcal{G}_f^*(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}' + \mathbf{k}) \mathcal{G}_f(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}') p'_- e^{i(w_{\mathbf{p}'+\mathbf{k}} - w_{\mathbf{p}'} - \omega_0)t},
\end{aligned}$$

para reduzir a expressão anterior, se pode definir

$$A_p = \sqrt{\frac{w_{\mathbf{p}+\mathbf{k}} + m}{w_{\mathbf{p}+\mathbf{k}} w_{\mathbf{p}}(w_{\mathbf{p}} + m)}} \quad B_p = \sqrt{\frac{w_{\mathbf{p}} + m}{w_{\mathbf{p}} w_{\mathbf{p}+\mathbf{k}}(w_{\mathbf{p}+\mathbf{k}} + m)}}, \tag{F.8}$$

substituindo em \mathcal{F}^1 ,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{f,f}^1(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_f, \mathbf{k}, t, +s, +s) & = \\
& + \frac{1}{2} \int d^3p' [A_{p'} p'_+ + B_{p'} p'_-] \mathcal{G}_f^*(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}' + \mathbf{k}) \mathcal{G}_f(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}') e^{i(w_{\mathbf{p}'+\mathbf{k}} - w_{\mathbf{p}'} - \omega_0)t}.
\end{aligned} \tag{F.9}$$

Analogamente, substituindo a Eq. (F.7) em (F.4) e usando a Eq. (F.8), resulta

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{f,f}^2(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_f, \mathbf{k}, t, +s, +s) = \\ + \frac{i}{2} \int d^3 p' [B_{p'p'_-} - A_{p'p'_+}] \mathcal{G}_f^*(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}' + \mathbf{k}) \mathcal{G}_f(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}') e^{i(w_{\mathbf{p}'+\mathbf{k}} - w_{\mathbf{p}'} - w_0)t}. \end{aligned} \quad (\text{F.10})$$

Agora, inserindo as equações (F.9) e (F.10) no Hamiltoniano definido em (F.3), verifica-se

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{f_\uparrow, f_\uparrow} = \frac{g}{2} \sum_{r=1}^2 \int d^3 p' [(A_{p'p'_+} + B_{p'p'_-}) \epsilon_1(\mathbf{k}, r) + i (B_{p'p'_-} - A_{p'p'_+}) \epsilon_2(\mathbf{k}, r)] \times \\ \mathcal{G}_f^*(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}' + \mathbf{k}) \mathcal{G}_f(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}') e^{i(w_{\mathbf{p}'+\mathbf{k}} - w_{\mathbf{p}'} - w_0)t} \hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_f, +s) \hat{b}_{in}(\mathbf{p}_f, +s) \hat{a}(\mathbf{k}, r) \end{aligned} \quad (\text{F.11})$$

Da Eq. (F.2), obtém-se uma notação mais simples

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{f_\uparrow, f_\uparrow} = \frac{g}{2} \sum_{r=1}^2 \int d^3 p [A_p p_+ \tilde{\epsilon}_-(\mathbf{k}, r) + B_p p_- \tilde{\epsilon}_+(\mathbf{k}, r)] \\ \times \mathcal{G}_f^*(\mathbf{p}_f, \mathbf{p} + \mathbf{k}) \mathcal{G}_f(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}) e^{i(w_{\mathbf{p}+\mathbf{k}} - w_{\mathbf{p}} - w_0)t} \hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_f, +s) \hat{b}_{in}(\mathbf{p}_f, +s) \hat{a}(\mathbf{k}, r) \end{aligned} \quad (\text{F.12})$$

Da mesma forma, o Hamiltoniano pode ser calculado para as outras configurações de spin

- Considerando férmions com spin $+s$ e $-s$,

Verifica-se que o Hamiltoniano de interação é

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{f_\uparrow, f_\downarrow} = \frac{g}{2} \sum_{r=1}^2 \int d^3 p [-A_p p_z \tilde{\epsilon}_-(\mathbf{k}, r) + B_p (p_z + k_z) \tilde{\epsilon}_-(\mathbf{k}, r)] \\ \times \mathcal{G}_f^*(\mathbf{p}_f, \mathbf{p} + \mathbf{k}) \mathcal{G}_f(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}) e^{i(w_{\mathbf{p}+\mathbf{k}} - w_{\mathbf{p}} - w_0)t} \hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_f, +s) \hat{b}_{in}(\mathbf{p}_f, -s) \hat{a}(\mathbf{k}, r) \end{aligned} \quad (\text{F.13})$$

- Considerando férmions com spin $-s$ e $+s$,

Verifica-se que o Hamiltoniano de interação é

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{f_\downarrow, f_\uparrow} = \frac{g}{2} \sum_{r=1}^2 \int d^3 p [A_p p_z \tilde{\epsilon}_+(\mathbf{k}, r) - B_p (p_z + k_z) \tilde{\epsilon}_+(\mathbf{k}, r)] \times \\ \mathcal{G}_f^*(\mathbf{p}_f, \mathbf{p} + \mathbf{k}) \mathcal{G}_f(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}) e^{i(w_{\mathbf{p}+\mathbf{k}} - w_{\mathbf{p}} - w_0)t} \hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_f, -s) \hat{b}_{in}(\mathbf{p}_f, +s) \hat{a}(\mathbf{k}, r) \end{aligned} \quad (\text{F.14})$$

- Considerando férmions com spin $-s$ e $-s$,

Verifica-se que o Hamiltoniano de interação é

$$\mathcal{H}_{f_{\downarrow},f_{\downarrow}} = \frac{g}{2} \sum_{r=1}^2 \int d^3p [A_p p - \tilde{\epsilon}_+(\mathbf{k}, r) + B_p p + \tilde{\epsilon}_-(\mathbf{k}, r)] \times$$

$$\mathcal{G}_f^*(\mathbf{p}_f, \mathbf{p} + \mathbf{k}) \mathcal{G}_f(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}) e^{i(w_{\mathbf{p}+\mathbf{k}} - w_{\mathbf{p}} - w_0)t} \hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_f, -s) \hat{b}_{in}(\mathbf{p}_f, -s) \hat{a}(\mathbf{k}, r)$$

(F.15)

Portanto, o Hamiltoniano de interação férmion-férmion é

$$\mathcal{H}_{f,f} = \mathcal{H}_{f_{\uparrow},f_{\uparrow}} + \mathcal{H}_{f_{\uparrow},f_{\downarrow}} + \mathcal{H}_{f_{\downarrow},f_{\downarrow}} + \mathcal{H}_{f_{\downarrow},f_{\uparrow}} + h.c. \quad (F.16)$$

onde $h.c$ é o Hamiltoniano conjugado.

APÊNDICE G – HAMILTONIANO ANTIFÉRMION-ANTIFÉRMION

$$\mathcal{H}_{\bar{f},\bar{f}}$$

Do mesmo modo que foi feito no Apêndice F, o Hamiltoniano da expressão (4.17) para termo antiférmion-antiférmion é

$$\mathcal{H}_{\bar{f},\bar{f}} = \sum_{r=1}^2 \sum_{s,s'} \mathcal{F}_{\bar{f},\bar{f}}^i(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{k}, t, s', s) \epsilon_i(\mathbf{k}, r) \hat{d}_{in}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, s') \hat{d}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_{\bar{f}}, s) \hat{a}(\mathbf{k}, r) + h.c., \quad (\text{G.1})$$

onde a função \mathcal{F}^i é definida pela Eq. (4.14). Observa-se que o Hamiltoniano depende das diferentes combinações de spin, portanto, haverá 4 termos do Hamiltoniano para antiférmion-antiférmion.

- Para Antiférmions com spin $+s$ e $+s$

O Hamiltoniano é

$$\mathcal{H}_{\bar{f}_\uparrow, \bar{f}_\uparrow} = g \sum_{r=1}^2 \mathcal{F}^i(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{k}, t, +s, +s) \epsilon_i(\mathbf{k}, r) \hat{d}_{in}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, +s) \hat{d}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_{\bar{f}}, +s) \hat{a}(\mathbf{k}, r), \quad (\text{G.2})$$

onde,

$$\mathcal{F}^i(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{k}, t, +s, +s) = \int d^3x \tilde{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, x, +s) \gamma^i \tilde{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, x, +s) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} e^{-iw_0t}. \quad (\text{G.3})$$

Usando as matrizes das equações (4.19a) e (E.3a), o produto $\tilde{G} \gamma^i \tilde{G}$ para $i = 1, 2$, é

$$\tilde{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, x, +s) \gamma^1 \tilde{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, x, +s) = \tilde{G}_{\bar{f}-}^*(\mathbf{p}_{\bar{f}}, x) \tilde{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, x) + \tilde{G}_{\bar{f}}^*(\mathbf{p}_{\bar{f}}, x) \tilde{G}_{\bar{f}-}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, x), \quad (\text{G.4})$$

$$\tilde{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, x, +s) \gamma^2 \tilde{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, x, +s) = -i \left[\tilde{G}_{\bar{f}-}^*(\mathbf{p}_{\bar{f}}, x) \tilde{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, x) - \tilde{G}_{\bar{f}}^*(\mathbf{p}_{\bar{f}}, x) \tilde{G}_{\bar{f}-}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, x) \right]. \quad (\text{G.5})$$

Substituindo (G.4) na Eq. (G.3) o termo \mathcal{F}^1 é obtido

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\bar{f},\bar{f}}^1(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{k}, t, +s, +s) &= \int d^3x \tilde{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, x, +s) \gamma^1 \tilde{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, x, +s) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} e^{-iw_0t} \\ &= \iiint \frac{d^3x d^3p d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{p_-^*}{\sqrt{2w_p(w_p+m)}} \mathcal{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}) \sqrt{\frac{w_{p'}+m}{2w_{p'}}} \mathcal{G}_{\bar{f}}^*(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}') e^{i[(\mathbf{p}-\mathbf{p}'+\mathbf{k})\cdot\mathbf{x}-(w_p-w_{p'}+w_0)t]}, \\ &+ \iiint \frac{d^3x d^3p d^3p'}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{w_p+m}{2w_p}} \mathcal{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}) \frac{p'_-}{\sqrt{2w_{p'}(w_{p'}+m)}} \mathcal{G}_{\bar{f}}^*(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}') e^{i[(\mathbf{p}-\mathbf{p}'+\mathbf{k})\cdot\mathbf{x}-(w_p-w_{p'}+w_0)t]} \end{aligned}$$

onde a expressão $\int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{p}'+\mathbf{k})\cdot\mathbf{x}} = \delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}'+\mathbf{k})$ é obtida e, integrando em relação a \mathbf{p}' , resulta

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\bar{f},\bar{f}}^1(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{k}, t, +s, +s) = & \\ & + \frac{1}{2} \int d^3p \sqrt{\frac{w_{\mathbf{p}+\mathbf{k}} + m}{w_{\mathbf{p}+\mathbf{k}} w_{\mathbf{p}} (w_{\mathbf{p}} + m)}} \mathcal{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}) \mathcal{G}_{\bar{f}}^*(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p} + \mathbf{k}) p_+ e^{i(w_{\mathbf{p}+\mathbf{k}} - w_{\mathbf{p}} - w_0)t} \\ & + \frac{1}{2} \int d^3p \sqrt{\frac{w_{\mathbf{p}} + m}{w_{\mathbf{p}} w_{\mathbf{p}+\mathbf{k}} (w_{\mathbf{p}+\mathbf{k}} + m)}} \mathcal{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}) \mathcal{G}_{\bar{f}}^*(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p} + \mathbf{k}) p_- e^{i(w_{\mathbf{p}+\mathbf{k}} - w_{\mathbf{p}} - w_0)t} \end{aligned}$$

Usando as definições de A_p e B_p da Eq. (F.8), a equação acima é reduzida

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\bar{f},\bar{f}}^1(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{k}, t, +s, +s) = & \\ & + \frac{1}{2} \int d^3p [A_p p_+ + B_p p_-] \mathcal{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}) \mathcal{G}_{\bar{f}}^*(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p} + \mathbf{k}) e^{i(w_{\mathbf{p}+\mathbf{k}} - w_{\mathbf{p}} - w_0)t} \end{aligned} \quad (\text{G.6})$$

Analogamente se obtém \mathcal{F}^2 , substituindo (G.5) na Eq. (G.3)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\bar{f},\bar{f}}^2(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{k}, t, +s, +s) = & \\ & + \frac{i}{2} \int d^3p [-A_p p_+ + B_p p_-] \mathcal{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}) \mathcal{G}_{\bar{f}}^*(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p} + \mathbf{k}) e^{i(w_{\mathbf{p}+\mathbf{k}} - w_{\mathbf{p}} - w_0)t} \end{aligned} \quad (\text{G.7})$$

Substituindo as equações (G.6) e (G.7) em (G.2), o hamiltoniano é

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\bar{f}_{\uparrow}, \bar{f}_{\uparrow}} = & \frac{g}{2} \sum_{r=1}^2 \int d^3p [A_p p_+ \tilde{\epsilon}_-(\mathbf{k}, r) + B_p p_- \tilde{\epsilon}_+(\mathbf{k}, r)] \times \\ & \mathcal{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}) \mathcal{G}_{\bar{f}}^*(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p} + \mathbf{k}) e^{i(w_{\mathbf{p}+\mathbf{k}} - w_{\mathbf{p}} - w_0)t} \hat{d}_{in}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, +s) \hat{d}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_{\bar{f}}, +s) \hat{a}(\mathbf{k}, r) \end{aligned} \quad (\text{G.8})$$

Da mesma forma, obtém-se o Hamiltoniano de interação antiférmion-antiférmion para diferentes combinações de spin.

- Para Antiférmions com spin $+s$ e $-s$

Verifica-se o Hamiltoniano

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\bar{f}_{\uparrow}, \bar{f}_{\downarrow}} = & \frac{g}{2} \sum_{r=1}^2 \int d^3p [-A_p p_z \tilde{\epsilon}_+(\mathbf{k}, r) + B_p (p_z + k_z) \tilde{\epsilon}_-(\mathbf{k}, r)] \\ & \mathcal{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}) \mathcal{G}_{\bar{f}}^*(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p} + \mathbf{k}) e^{i(w_{\mathbf{p}+\mathbf{k}} - w_{\mathbf{p}} - w_0)t} \hat{d}_{in}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, +s) \hat{d}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_{\bar{f}}, -s) \hat{a}(\mathbf{k}, r) \end{aligned} \quad (\text{G.9})$$

- Para Antiférmions com spin $-s$ e $-s$

O Hamiltoniano é

$$\mathcal{H}_{\bar{f}_\downarrow, \bar{f}_\downarrow} = \frac{g}{2} \sum_{r=1}^2 \int d^3p [A_p p_- \tilde{\epsilon}_+(\mathbf{k}, r) + B_p p_+ \tilde{\epsilon}_-(\mathbf{k}, r)]$$

$$\mathcal{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}) \mathcal{G}_{\bar{f}}^*(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p} + \mathbf{k}) e^{i(w_{\mathbf{p}+\mathbf{k}} - w_{\mathbf{p}} - w_0)t} \hat{d}_{in}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, -s) \hat{d}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_f, -s) \hat{a}(\mathbf{k}, r)$$

(G.10)

- Para Antiférmions com spin $-s$ e $+s$

Verifica-se o Hamiltoniano

$$\mathcal{H}_{\bar{f}_\downarrow, \bar{f}_\uparrow} = \frac{g}{2} \sum_{r=1}^2 \int d^3p [A_p p_z \tilde{\epsilon}_-(\mathbf{k}, r) - B_p (p_z + k_z) \tilde{\epsilon}_-(\mathbf{k}, r)]$$

$$\mathcal{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}) \mathcal{G}_{\bar{f}}^*(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p} + \mathbf{k}) e^{i(w_{\mathbf{p}+\mathbf{k}} - w_{\mathbf{p}} - w_0)t} \hat{d}_{in}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, -s) \hat{d}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_f, +s) \hat{a}(\mathbf{k}, r)$$

(G.11)

Portanto, o Hamiltoniano dos antiférmions descrito pela Eq. (G.1) é

$$\mathcal{H}_{\bar{f}, \bar{f}} = \mathcal{H}_{\bar{f}_\uparrow, \bar{f}_\uparrow} + \mathcal{H}_{\bar{f}_\uparrow, \bar{f}_\downarrow} + \mathcal{H}_{\bar{f}_\downarrow, \bar{f}_\downarrow} + \mathcal{H}_{\bar{f}_\downarrow, \bar{f}_\uparrow} + h.c., \quad (G.12)$$

onde $h.c.$ é o Hamiltoniano conjugado.

APÊNDICE H – HAMILTONIANO FÉRMION-ANTIFÉRMION $\mathcal{H}_{f,\bar{f}}$

Nesse caso o Hamiltoniano envolvendo férmion e antiférmion, nessa ordem, é definido pela Eq. (4.17), ou seja,

$$\mathcal{H}_{f,\bar{f}} = \sum_{r=1}^2 \sum_{s,s'} \mathcal{F}_{f,\bar{f}}^i(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{k}, t, s', s) \epsilon_i(\mathbf{k}, r) \hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_{\bar{f}}, s') \hat{d}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_{\bar{f}}, s) \hat{a}(\mathbf{k}, r) + h.c., \quad (\text{H.1})$$

onde a função \mathcal{F}^i é definida na Eq. (4.15).

- Para férmions de spin $+s$ e antiférmion de spin $+s$

O Hamiltoniano é

$$\mathcal{H}_{f_\uparrow, \bar{f}_\uparrow} = g \sum_{r=1}^2 \mathcal{F}_{f,\bar{f}}^i(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{k}, t, +s, +s) \epsilon_i(\mathbf{k}, r) \hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_f, +s) \hat{d}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_{\bar{f}}, +s) \hat{a}(\mathbf{k}, r), \quad (\text{H.2})$$

onde a função \mathcal{F}^i é

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{f,\bar{f}}^i(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{k}, t, +s, +s) = \\ + \int d^3x \tilde{G}_f(\mathbf{p}_f, x, +s) \gamma^i \tilde{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, x, +s) e^{-i(\mathbf{p}_f + \mathbf{p}_{\bar{f}} - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}} e^{i(w_f + w_{\bar{f}} - w_0)t}, \end{aligned} \quad (\text{H.3})$$

ela pode ser obtida usando as matrizes das equações (E.2a) e (4.19a), resultando

$$\begin{aligned} \tilde{G}_f(\mathbf{p}_f, x, +s) \gamma^1 \tilde{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, x, +s) = \\ + \tilde{G}_{f^*}(\mathbf{p}_f, x) \tilde{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, x) - \tilde{G}_{f_z^*}(\mathbf{p}_f, x) \tilde{G}_{\bar{f}_z}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, x) + \tilde{G}_{f_+^*}(\mathbf{p}_f, x) \tilde{G}_{\bar{f}_-}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, x), \end{aligned} \quad (\text{H.4})$$

e

$$\begin{aligned} \tilde{G}_f(\mathbf{p}_f, x, +s) \gamma^2 \tilde{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, x, +s) = \\ - i \left[\tilde{G}_{f^*}(\mathbf{p}_f, \mathbf{x}, t) \tilde{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, x) - \tilde{G}_{f_z^*}(\mathbf{p}_f, x) \tilde{G}_{\bar{f}_z}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, x) - \tilde{G}_{f_+^*}(\mathbf{p}_f, x) \tilde{G}_{\bar{f}_-}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, x) \right] \end{aligned} \quad (\text{H.5})$$

Substituindo (H.4) em (H.3), achamos \mathcal{F}^1

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{f,\bar{f}}^1(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{k}, t, +s, +s) = \int d^3x \tilde{G}_f(\mathbf{p}_f, x, +s) \gamma^1 \tilde{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, x, +s) e^{-i(\mathbf{p}_f + \mathbf{p}_{\bar{f}} - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}} e^{i(w_f + w_{\bar{f}} - w_0)t} \\ = \frac{1}{2} \iiint \frac{d^3x d^3p d^3p'}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{(w_p + m)(w_{p'} + m)}{w_p w_{p'}}} \mathcal{G}_{f^*}(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}) \mathcal{G}_{\bar{f}}^*(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}') e^{-i(\mathbf{p} + \mathbf{p}' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}} e^{i(w_p + w_{p'} - w_0)t} \\ - \frac{1}{2} \iiint \frac{d^3x d^3p d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{p_z}{\sqrt{w_p(w_p + m)}} \frac{p'_z}{\sqrt{w_{p'}(w_{p'} + m)}} \mathcal{G}_{f^*}(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}) \mathcal{G}_{\bar{f}_z}^*(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}') e^{-i(\mathbf{p} + \mathbf{p}' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}} e^{i(w_p + w_{p'} - w_0)t} \\ + \frac{1}{2} \iiint \frac{d^3x d^3p d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{p_+^*}{\sqrt{w_p(w_p + m)}} \frac{p_-'}{\sqrt{w_{p'}(w_{p'} + m)}} \mathcal{G}_{f^*}(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}) \mathcal{G}_{\bar{f}_-}^*(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}') e^{-i(\mathbf{p} + \mathbf{p}' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}} e^{i(w_p + w_{p'} - w_0)t} \end{aligned}$$

Observamos que os termos de \mathbf{p}_f e w_f na exponencial foram cancelados, além obtém-se a expressão $\int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{-i(\mathbf{p}+\mathbf{p}'-\mathbf{k})\cdot\mathbf{x}} = \delta^3(\mathbf{p}+\mathbf{p}'-\mathbf{k})$. Logo, integrando em relação a \mathbf{p}' , resulta

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{f,\bar{f}}^1(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{k}, t, +s, +s) = & \\ & + \frac{1}{2} \int d^3p \sqrt{\frac{(w_{\mathbf{p}}+m)(w_{\mathbf{k}-\mathbf{p}}+m)}{w_{\mathbf{p}}w_{\mathbf{k}-\mathbf{p}}}} \mathcal{G}_f^*(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}) \mathcal{G}_{\bar{f}}^*(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{k}-\mathbf{p}) e^{i(w_{\mathbf{p}}+w_{\mathbf{k}-\mathbf{p}}-w_0)t} \\ & - \frac{1}{2} \int d^3p \frac{p_z}{\sqrt{w_{\mathbf{p}}(w_{\mathbf{p}}+m)}} \frac{k_z-p_z}{\sqrt{w_{\mathbf{k}-\mathbf{p}}(w_{\mathbf{k}-\mathbf{p}}+m)}} \mathcal{G}_f^*(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}) \mathcal{G}_{\bar{f}}^*(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{k}-\mathbf{p}) e^{i(w_{\mathbf{p}}+w_{\mathbf{k}-\mathbf{p}}-w_0)t} \\ & + \frac{1}{2} \int d^3p \frac{p_-}{\sqrt{w_{\mathbf{p}}(w_{\mathbf{p}}+m)}} \frac{-p_-}{\sqrt{w_{\mathbf{k}-\mathbf{p}}(w_{\mathbf{k}-\mathbf{p}}+m)}} \mathcal{G}_f^*(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}) \mathcal{G}_{\bar{f}}^*(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{k}-\mathbf{p}) e^{i(w_{\mathbf{p}}+w_{\mathbf{k}-\mathbf{p}}-w_0)t} \end{aligned}$$

Para reduzir a expressão acima, é definido

$$C_p = \sqrt{\frac{(w_{\mathbf{p}}+m)(w_{\mathbf{k}-\mathbf{p}}+m)}{w_{\mathbf{p}}w_{\mathbf{k}-\mathbf{p}}}} \quad D_p = \frac{1}{\sqrt{w_{\mathbf{p}}w_{\mathbf{k}-\mathbf{p}}(w_{\mathbf{p}}+m)(w_{\mathbf{k}-\mathbf{p}}+m)}}, \quad (\text{H.6})$$

obtendo

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{f,\bar{f}}^1(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{k}, t, +s, +s) = & \\ & + \frac{1}{2} \int d^3p [C_p - D_p p_z (k_z - p_z) - D_p p_- p_-] \mathcal{G}_f^*(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}) \mathcal{G}_{\bar{f}}^*(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{k}-\mathbf{p}) e^{i(w_{\mathbf{p}}+w_{\mathbf{k}-\mathbf{p}}-w_0)t} \end{aligned} \quad (\text{H.7})$$

Analogamente, substituindo (H.5) em (H.3) e usando a Eq. (H.6), obtém-se \mathcal{F}^2

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{f,\bar{f}}^2(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{k}, t, +s, +s) = & \\ & + \frac{i}{2} \int d^3p [-C_p + D_p p_z (k_z - p_z) - D_p p_- p_-] \mathcal{G}_f^*(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}) \mathcal{G}_{\bar{f}}^*(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{k}-\mathbf{p}) e^{i(w_{\mathbf{p}}+w_{\mathbf{k}-\mathbf{p}}-w_0)t} \end{aligned} \quad (\text{H.8})$$

Substituindo as equações (H.7) e (H.8) em (H.2), obtém-se o Hamiltoniano

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{f_{\uparrow}, \bar{f}_{\uparrow}} = & \frac{g}{2} \sum_{r=1}^2 \int d^3p [C_p \tilde{\epsilon}_-(\mathbf{k}, r) - D_p p_z (k_z - p_z) \tilde{\epsilon}_-(\mathbf{k}, r) - D_p p_- p_- \tilde{\epsilon}_+(\mathbf{k}, r)] \times \\ & \mathcal{G}_f^*(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}) \mathcal{G}_{\bar{f}}^*(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{k}-\mathbf{p}) e^{i(w_{\mathbf{p}}+w_{\mathbf{k}-\mathbf{p}}-w_0)t} \hat{b}_{in}^{\dagger}(\mathbf{p}_f, +s) \hat{d}_{in}^{\dagger}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, +s) \hat{a}(\mathbf{k}, r) \end{aligned} \quad (\text{H.9})$$

- Para férmions de spin $+s$ e antiférmion de spin $-s$

O Hamiltoniano é

$$\mathcal{H}_{f_{\uparrow}, \bar{f}_{\downarrow}} = \frac{g}{2} \sum_{r=1}^2 \int d^3p \left[-D_p p_z p_+ \tilde{\epsilon}_-(\mathbf{k}, r) + D_p p_- (k_z - p_z) \tilde{\epsilon}_+(\mathbf{k}, r) \right] \times \\ \mathcal{G}_f^*(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}) \mathcal{G}_{\bar{f}}^*(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{k} - \mathbf{p}) e^{i(w_{\mathbf{p}} + w_{\mathbf{k}-\mathbf{p}} - w_0)t} \hat{b}_{in}^{\dagger}(\mathbf{p}_f, +s) \hat{d}_{in}^{\dagger}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, -s) \hat{a}(\mathbf{k}, r) \quad (\text{H.10})$$

- Para férmions de spin $-s$ e antiférmion de spin $+s$

O Hamiltoniano é

$$\mathcal{H}_{f_{\downarrow}, \bar{f}_{\uparrow}} = \frac{g}{2} \sum_{r=1}^2 \int d^3p \left[-D_p p_+ (k_z - p_z) \tilde{\epsilon}_-(\mathbf{k}, r) + D_p p_z p_- \tilde{\epsilon}_+(\mathbf{k}, r) \right] \times \\ \mathcal{G}_f^*(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}) \mathcal{G}_{\bar{f}}^*(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{k} - \mathbf{p}) e^{i(w_{\mathbf{p}} + w_{\mathbf{k}-\mathbf{p}} - w_0)t} \hat{b}_{in}^{\dagger}(\mathbf{p}_f, -s) \hat{d}_{in}^{\dagger}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, +s) \hat{a}(\mathbf{k}, r) \quad (\text{H.11})$$

- Para férmions de spin $-s$ e antiférmion de spin $-s$

O Hamiltoniano é

$$\mathcal{H}_{f_{\downarrow}, \bar{f}_{\downarrow}} = \frac{g}{2} \sum_{r=1}^2 \int d^3p \left[C_p \tilde{\epsilon}_+(\mathbf{k}, r) - D_p p_+ p_+ \tilde{\epsilon}_-(\mathbf{k}, r) - D_p p_z (k_z - p_z) \tilde{\epsilon}_+(\mathbf{k}, r) \right] \times \\ \mathcal{G}_f^*(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}) \mathcal{G}_{\bar{f}}^*(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{k} - \mathbf{p}) e^{i(w_{\mathbf{p}} + w_{\mathbf{k}-\mathbf{p}} - w_0)t} \hat{b}_{in}^{\dagger}(\mathbf{p}_f, -s) \hat{d}_{in}^{\dagger}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, -s) \hat{a}(\mathbf{k}, r) \quad (\text{H.12})$$

Portanto, o Hamiltoniano férmion-antiférmion descrito por (H.1) é

$$\mathcal{H}_{f, \bar{f}} = \mathcal{H}_{f_{\uparrow}, \bar{f}_{\uparrow}} + \mathcal{H}_{f_{\uparrow}, \bar{f}_{\downarrow}} + \mathcal{H}_{f_{\downarrow}, \bar{f}_{\downarrow}} + \mathcal{H}_{f_{\downarrow}, \bar{f}_{\uparrow}} + h.c.. \quad (\text{H.13})$$

APÊNDICE I – HAMILTONIANO ANTIFÉRMION-FÉRMION $\mathcal{H}_{\bar{f},f}$

Nesse caso o Hamiltoniano envolvendo antiférmions e férmions, nessa ordem, é definido pela Eq. (4.17), ou seja,

$$\mathcal{H}_{\bar{f},f} = \sum_{r=1}^2 \sum_{s,s'} \mathcal{F}_{\bar{f},f}^i(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}_f, \mathbf{k}, t, s', s) \epsilon_i(\mathbf{k}, r) \hat{d}_{in}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, s') \hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{p}_{\bar{f}}, s) \hat{a}(\mathbf{k}, r) + h.c., \quad (1.1)$$

onde a função \mathcal{F}^i é definida na Eq. (4.16).

- Para antiférmion com spin $+s$ e férmion com spin $+s$

O Hamiltoniano é

$$\mathcal{H}_{\bar{f}_\uparrow, f_\uparrow} = g \sum_{r=1}^2 \mathcal{F}_{\bar{f},f}^i(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}_f, \mathbf{k}, t, +s, +s) \epsilon_i(\mathbf{k}, r) \hat{d}_{in}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, +s) \hat{b}_{in}(\mathbf{p}_f, +s) \hat{a}(\mathbf{k}, r), \quad (1.2)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\bar{f},f}^i(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}_f, \mathbf{k}, t, +s, +s) = \\ \int d^3x \tilde{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, x, +s) \gamma^i \tilde{G}_f(\mathbf{p}_f, x, +s) e^{i(\mathbf{p}_f + \mathbf{p}_{\bar{f}} + \mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}} e^{-i(w_f + w_{\bar{f}} + w_0)t} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Usando as matrizes das equações (E.3a) e (4.18a), obtém-se

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, x, +s) \gamma^1 \tilde{G}_f(\mathbf{p}_f, x, +s) = \\ + \tilde{G}_{\bar{f}_-}^*(\mathbf{p}_{\bar{f}}, x) \tilde{G}_{f_+}(\mathbf{p}_f, x) - \tilde{G}_{\bar{f}_z}^*(\mathbf{p}_{\bar{f}}, x, t) \tilde{G}_{f_z}(\mathbf{p}_f, x) + \tilde{G}_{\bar{f}}^*(\mathbf{p}_{\bar{f}}, x) \tilde{G}_f(\mathbf{p}_f, x), \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, x, +s) \gamma^2 \tilde{G}_f(\mathbf{p}_f, x, +s) = \\ - i \left[\tilde{G}_{\bar{f}_-}^*(\mathbf{p}_{\bar{f}}, x) \tilde{G}_{f_+}(\mathbf{p}_f, x) + \tilde{G}_{\bar{f}_z}^*(\mathbf{p}_{\bar{f}}, x) \tilde{G}_{f_z}(\mathbf{p}_f, x) - \tilde{G}_{\bar{f}}^*(\mathbf{p}_{\bar{f}}, x) \tilde{G}_f(\mathbf{p}_f, x) \right]. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Substituindo (1.4) na Eq. (1.3) resulta

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\bar{f},f}^1(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}_f, \mathbf{k}, t, +s, +s) = \int d^3x \tilde{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, x, +s) \gamma^1 \tilde{G}_f(\mathbf{p}_f, x, +s) e^{i(\mathbf{p}_f + \mathbf{p}_{\bar{f}} + \mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}} e^{-i(w_f + w_{\bar{f}} + w_0)t} \\ = \frac{1}{2} \iiint \frac{d^3x d^3p d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{p_-^*}{\sqrt{w_p(w_p + m)}} \frac{p'_+}{\sqrt{w_{p'}(w_{p'} + m)}} \mathcal{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}) \mathcal{G}_f(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}') e^{i(\mathbf{p} + \mathbf{p}' + \mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}} e^{-i(w_p + w_{p'} + w_0)t} \\ - \frac{1}{2} \iiint \frac{d^3x d^3p d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{p_z}{\sqrt{w_p(w_p + m)}} \frac{p'_z}{\sqrt{w_{p'}(w_{p'} + m)}} \mathcal{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}) \mathcal{G}_f(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}') e^{i(\mathbf{p} + \mathbf{p}' + \mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}} e^{-i(w_p + w_{p'} + w_0)t} \\ + \frac{1}{2} \iiint \frac{d^3x d^3p d^3p'}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{(w_p + m)(w_{p'} + m)}{w_p w_{p'}}} \mathcal{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}) \mathcal{G}_f(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}') e^{i(\mathbf{p} + \mathbf{p}' + \mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}} e^{-i(w_p + w_{p'} + w_0)t}, \end{aligned}$$

onde a expressão $\int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{i(\mathbf{p}+\mathbf{p}'+\mathbf{k})\cdot\mathbf{x}} = \delta^3(\mathbf{p} + \mathbf{p}' + \mathbf{k})$ é obtida. Então, integrando em relação a \mathbf{p}' , fica

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\bar{f},f}^1(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}_f, \mathbf{k}, t, +s, +s) = & \\ & + \frac{1}{2} \int d^3p \frac{p_+}{\sqrt{w_{\mathbf{p}}(w_{\mathbf{p}} + m)}} \frac{-p_+}{\sqrt{w_{\mathbf{k}+\mathbf{p}}(w_{\mathbf{k}+\mathbf{p}} + m)}} \mathcal{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}) \mathcal{G}_f(\mathbf{p}_f, -\mathbf{k} - \mathbf{p}) e^{-i(w_{\mathbf{p}}+w_{\mathbf{k}+\mathbf{p}}+w_0)t} \\ & - \frac{1}{2} \int d^3p \frac{p_z}{\sqrt{w_{\mathbf{p}}(w_{\mathbf{p}} + m)}} \frac{-k_z - p_z}{\sqrt{w_{\mathbf{k}+\mathbf{p}}(w_{\mathbf{k}+\mathbf{p}} + m)}} \mathcal{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}) \mathcal{G}_f(\mathbf{p}_f, -\mathbf{k} - \mathbf{p}) e^{-i(w_{\mathbf{p}}+w_{\mathbf{k}+\mathbf{p}}+w_0)t} \\ & + \frac{1}{2} \int d^3p \sqrt{\frac{(w_{\mathbf{p}} + m)(w_{\mathbf{k}+\mathbf{p}} + m)}{w_{\mathbf{p}}w_{\mathbf{k}+\mathbf{p}}}} \mathcal{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}) \mathcal{G}_f(\mathbf{p}_f, -\mathbf{k} - \mathbf{p}) e^{-i(w_{\mathbf{p}}+w_{\mathbf{k}+\mathbf{p}}+w_0)t} \end{aligned}$$

Para reduzir a expressão acima, a seguinte expressão é definida

$$M_p = \frac{1}{\sqrt{w_{\mathbf{p}}(w_{\mathbf{p}} + m)} \sqrt{w_{\mathbf{k}+\mathbf{p}}(w_{\mathbf{k}+\mathbf{p}} + m)}} \quad N_p = \sqrt{\frac{w_{\mathbf{p}} + m}{w_{\mathbf{p}}}} \sqrt{\frac{w_{\mathbf{k}+\mathbf{p}} + m}{w_{\mathbf{k}+\mathbf{p}}}}, \quad (1.6)$$

então, a função \mathcal{F}^1 é

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\bar{f},f}^1(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}_f, \mathbf{k}, t, +s, +s) = & \\ & + \frac{1}{2} \int d^3p [-M_p p_+ p_+ + M_p p_z (k_z + p_z) + N_p] \mathcal{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}) \mathcal{G}_f(\mathbf{p}_f, -\mathbf{k} - \mathbf{p}) e^{-i(w_{\mathbf{p}}+w_{\mathbf{k}+\mathbf{p}}+w_0)t} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Analogamente, substituindo (1.5) em (1.2), obtém-se \mathcal{F}^2

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\bar{f},f}^2(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}_f, \mathbf{k}, t, +s, +s) = & \\ & + \frac{i}{2} \int d^3p [M_p p_+ p_+ + M_p p_z (k_z + p_z) + N_p] \mathcal{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}) \mathcal{G}_f(\mathbf{p}_f, -\mathbf{k} - \mathbf{p}) e^{-i(w_{\mathbf{p}}+w_{\mathbf{k}+\mathbf{p}}+w_0)t} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Agora, substituindo as equações (1.7) e (1.8) em (1.2), o Hamiltoniano é obtido, isto é

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\bar{f}\uparrow, f\uparrow} = & \frac{g}{2} \sum_{r=1}^2 \int d^3p [-M_p p_+ p_+ \tilde{\epsilon}_-(\mathbf{k}, r) + M_p p_z (k_z + p_z) \tilde{\epsilon}_+(\mathbf{k}, r) + N_p \tilde{\epsilon}_+(\mathbf{k}, r)] \times \\ & \mathcal{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}) \mathcal{G}_f(\mathbf{p}_f, -\mathbf{k} - \mathbf{p}) e^{-i(w_{\mathbf{p}}+w_{\mathbf{k}+\mathbf{p}}+w_0)t} \hat{d}_{in}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, +s) \hat{b}_{in}(\mathbf{p}_f, +s) \hat{a}(\mathbf{k}, r) \end{aligned} \quad (1.9)$$

Da mesma forma, obtém-se o Hamiltoniano para as outras combinações de spin

- Para Antiférmion com spin $+s$ e férmion com spin $-s$

O Hamiltoniano é

$$\mathcal{H}_{\bar{f}\uparrow, f\downarrow} = \frac{g}{2} \sum_{r=1}^2 \int d^3p \left[M_p p_+ (k_z + p_z) \tilde{\epsilon}_-(\mathbf{k}, r) + M_p p_z p_- \tilde{\epsilon}_+(\mathbf{k}, r) \right] \times \\ \mathcal{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}) \mathcal{G}_f(\mathbf{p}_f, -\mathbf{k} - \mathbf{p}) e^{-i(w_{\mathbf{p}} + w_{\mathbf{k}+\mathbf{p}} + w_0)t} \hat{d}_{in}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, +s) \hat{b}_{in}(\mathbf{p}_f, -s) \hat{a}(\mathbf{k}, r) \quad (1.10)$$

- Para Antiférmion com spin $-s$ e férmion com spin $-s$

O Hamiltoniano é

$$\mathcal{H}_{\bar{f}\downarrow, f\downarrow} = \frac{g}{2} \int d^3p \left[M_p p_z (k_z + p_z) \tilde{\epsilon}_-(\mathbf{k}, r) - M_p p_- p_- \tilde{\epsilon}_+(\mathbf{k}, r) + N_p \tilde{\epsilon}_-(\mathbf{k}, r) \right] \times \\ \mathcal{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}) \mathcal{G}_f(\mathbf{p}_f, -\mathbf{k} - \mathbf{p}) e^{-i(w_{\mathbf{p}} + w_{\mathbf{k}+\mathbf{p}} + w_0)t} \hat{d}_{in}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, -s) \hat{b}_{in}(\mathbf{p}_f, -s) \hat{a}(\mathbf{k}, r) \quad (1.11)$$

- Para Antiférmion com spin $-s$ e férmion com spin $+s$

O Hamiltoniano é

$$\mathcal{H}_{\bar{f}\downarrow, f\uparrow} = \frac{g}{2} \int d^3p \left[-M_p p_z p_+ \tilde{\epsilon}_-(\mathbf{k}, r) - M_p p_- (k_z + p_z) \tilde{\epsilon}_+(\mathbf{k}, r) \right] \times \\ \mathcal{G}_{\bar{f}}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, \mathbf{p}) \mathcal{G}_f(\mathbf{p}_f, -\mathbf{k} - \mathbf{p}) e^{-i(w_{\mathbf{p}} + w_{\mathbf{k}+\mathbf{p}} + w_0)t} \hat{d}_{in}(\mathbf{p}_{\bar{f}}, -s) \hat{b}_{in}(\mathbf{p}_f, +s) \hat{a}(\mathbf{k}, r) \quad (1.12)$$

Portanto, o Hamiltoniano férmion-antiférmion descrito por (1.1) é

$$\mathcal{H}_{\bar{f}, f} = \mathcal{H}_{\bar{f}\uparrow, f\uparrow} + \mathcal{H}_{\bar{f}\uparrow, f\downarrow} + \mathcal{H}_{\bar{f}\downarrow, f\downarrow} + \mathcal{H}_{\bar{f}\downarrow, f\uparrow} + h.c. \quad (1.13)$$