

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CENTRO TECNOLÓGICO DE JOINVILLE  
CURSO DE ENGENHARIA CIVIL DE INFRAESTRUTURA

GUILHERME CONTI FLORIANI

**PUNÇÃO EM LAJES DE CONCRETO ARMADO: ESTUDO DE CASO**

Joinville

2019

GUILHERME CONTI FLORIANI

**PUNÇÃO EM LAJES DE CONCRETO ARMADO: ESTUDO DE CASO**

Trabalho apresentado como requisito para obtenção do título de bacharel no Curso de Graduação em Engenharia Civil de Infraestrutura do Centro Tecnológico de Joinville da Universidade Federal de Santa Catarina.

Orientador (a): M<sup>a</sup>. Valéria Bennack

Joinville

2019

GUILHERME CONTI FLORIANI

PUNÇÃO EM LAJES DE CONCRETO ARMADO: ESTUDO DE CASO

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado para obtenção do título de bacharel em Engenharia Civil de Infraestrutura, na Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico de Joinville.

**Banca Examinadora:**

---

Prof. M<sup>a</sup> Valéria Bennack  
Universidade Federal de Santa Catarina

---

Prof. M<sup>a</sup> Juliana Cristina Frankowiak  
Universidade do Estado de Santa Catarina

---

Prof. Dr. Helena Paula Nierwinski  
Universidade Federal de Santa Catarina

*Dedico este trabalho aos meus pais e irmãos,  
por todo amor e carinho.*

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente quero agradecer a Deus, que sempre me acompanhou, por me dar sabedoria e persistência durante toda minha graduação e para conclusão deste trabalho.

A todos meus professores responsáveis pela minha formação que são também meu exemplo e inspiração.

A minha orientadora Prof.<sup>a</sup> Valéria Bennack, que me ajudou bastante a entender alguns conceitos deste tema, e teve paciência e dedicação para me ajudar a concluir este trabalho.

A todos os profissionais que tive contato nos últimos anos e que complementaram meus conhecimentos preparando-me mais para o futuro.

Agradeço a meus avós, pelas rezas, velas acendidas e pelo carinho.

A meus familiares e amigos, que sempre apoiaram minha decisão pela Engenharia Civil e incentivaram desde o início para me tornar um grande profissional.

Em especial agradeço meus pais, Milton e Patrícia, por serem meus heróis, que apesar de todas às dificuldades, sempre incentivaram e lutaram pela minha graduação e nunca me deixaram perder a fé nos estudos. Foram muito importantes por me deram apoio, incentivo e conselhos nas horas mais difíceis, de desânimo e cansaço.

Aos meus irmãos Henrique e Caroline, com quem tive muito apoio, risadas e demonstração de paciência nos últimos anos e que respectivamente, também serão um grande engenheiro e física no futuro.

Agradeço a minha namorada, Maria, por todo seu amor e carinho, que me estimulou durante todo esse tempo e compreendeu minha ausência pelo tempo dedicado aos estudos.

Agradeço a família dos meus sogros, que sempre me acolheram nos últimos anos e estiveram ao meu lado para me fazer mais forte e confiante.

Por fim a todos meus colegas e amigas especiais que fiz na UFSC, durante esta jornada que preencheram os dias nessa universidade.

*“Procure ser um homem de  
valor em vez de ser um homem de sucesso”.*

**(Albert Einstein)**

## RESUMO

Atualmente a solução estrutural mais convencional utilizada para pavimentos em edificações de concreto armado é o sistema formado por lajes, vigas e pilares. Uma alternativa comum, crescente na última década, é o emprego de lajes lisas ou lajes cogumelo, onde a laje se apoia diretamente sobre os pilares, sem o auxílio de vigas na transmissão do carregamento. Porém essa alternativa gera uma zona frágil na ligação entre laje-pilar devido à alta tensão de cisalhamento gerada, que se concentra nesta região, podendo ocorrer o fenômeno da punção. A punção pode interferir na integridade da estrutura, levando ao colapso total mediante a acidentes catastróficos e sem sinais prévios. Este trabalho apresenta um estudo de caso do efeito de punção em laje de concreto armado com base na norma brasileira NBR 6118, através da avaliação de diferentes espessuras, teve como resultado, nos pilares de centro e borda, a necessidade da utilização de armadura de punção para todas as espessuras avaliadas, principalmente nos contornos C' e C''. Para o caso do pilar de canto não houve necessidade de armadura de punção para nenhum contorno crítico.

**Palavras-chave:** Puncionamento. Lajes Lisas. Dimensionamento estrutural. Concreto Armado.

## ABSTRACT

Nowadays the most conventional structural solution used for floors in reinforced concrete buildings is the system consisting of slabs, beams and columns. A common alternative, growing over the last decade, is the use of flat slabs or mushroom slabs, where the slab rests directly on the pillars, without the aid of beams in the transmission of the load. However, this alternative generates a fragile zone in the slab-column connection due to the high shear stress generated, which is concentrated in this region, and the puncture phenomenon may occur. The puncture may interfere in the integrity of the structure, leading to total collapse by catastrophic accidents and without previous signs. This work presents a case study of the puncture effect on reinforced concrete slab based on the Brazilian standard NBR 6118, through the evaluation of different thicknesses. As a result, the center and edge pillars required the use of puncture reinforcement. for all thicknesses evaluated, especially in the contours C 'and C' '. For the corner pillars analyzed there was no need for punching reinforcement for any critical contour.

**Keywords:** Punching. Flat slabs. Dimensioning structural. Reinforced concrete.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Sistema estrutural de Laje Lisa.....	4
Figura 2 - Surgimento de fissuras radiais e tangenciais em lajes lisas .....	5
Figura 3 - Superfície de ruína para casos simétricos .....	5
Figura 4 - Pilar sem armadura contra colapso progressivo .....	9
Figura 5 - Pilar com armadura contra colapso progressivo.....	10
Figura 6 - Definição da superfície de controle .....	11
Figura 7 - Modelo de bielas e tirantes para a punção sem momentos .....	12
Figura 8 - Modelo de bielas e tirantes para a punção com momentos.....	13
Figura 9 - Hipótese de ruptura do modelo mecânico de Kinnunen e Nylander .....	14
Figura 10 - Rotação do elemento rígido.....	15
Figura 11 - Superfícies críticas para o modelo de cálculo .....	18
Figura 12 - Perímetro crítico em pilares internos .....	19
Figura 13 - Perímetro crítico em pilares de borda .....	22
Figura 14 - Perímetro crítico em pilares de canto.....	23
Figura 15 - Altura útil no caso de capitel.....	24
Figura 16 - Perímetro crítico no caso do contorno C apresentar reentrância .....	25
Figura 17 - Perímetro crítico junto a abertura na laje .....	26
Figura 18 - Disposição da armadura de punção em planta .....	29
Figura 19 - Armadura de punção tipo <i>studs</i> .....	30
Figura 20 - Armadura contra colapso progressivo .....	31
Figura 21 - Distância da face do pilar até última linha de conectores .....	33
Figura 22 - Perímetro crítico para pilares de seção circular e para alguns casos .....	33
Figura 23 - Perímetro crítico e perímetro crítico reduzido em pilares de borda .....	35
Figura 24 - Excentricidade do perímetro crítico reduzido para o contorno C' .....	36
Figura 25 – Situações de consideração de momentos para cálculo de pilares de canto .....	38
Figura 26 - Definição da região para cálculo de $\rho_x$ e $\rho_y$ , e da altura útil $d$ .....	40
Figura 27 - Planta de forma da laje adotada para estudo .....	42

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Valores de K .....	20
Tabela 2 - Perímetros Críticos .....	32
Tabela 3 - Expressões de $W_p$ para pilares internos de seção retangular .....	34
Tabela 4 - Perímetros críticos .....	35
Tabela 5 - Excentricidade dos perímetros críticos reduzidos para pilares de borda de seção retangular.....	36
Tabela 6 - Módulo de resistência plástica para pilares de borda de seção retangular sem momento paralelo à borda livre .....	37
Tabela 7 - Módulo de resistência plástica para pilares de borda de seção retangular com momento paralelo à borda livre .....	37
Tabela 8 - Perímetros críticos para pilares de borda.....	39
Tabela 9 - Excentricidade dos perímetros críticos reduzidos para pilares de canto de seção retangular.....	39
Tabela 10 - Módulo de resistência plástica para pilares de canto de seção .....	40
Tabela 11 - Reações concentradas de cálculo .....	43
Tabela 12 - Momentos de cálculo transferidos aos pilares .....	43
Tabela 13 - Armadura negativa nas regiões dos pilares.....	43
Tabela 14 - Esforços atuantes no pilar 28 .....	44
Tabela 15 - Características do pilar P28 .....	46
Tabela 16 - Módulos de Resistencia Plástica (W) .....	47
Tabela 17 - Verificação de punção no Contorno C do pilar.....	48
Tabela 18 - Taxa de armadura do pilar 28 .....	49
Tabela 19 - Verificação de punção no Contorno C' do pilar .....	51
Tabela 20 - Determinação do As dos conectores no contorno C.....	53
Tabela 21 - Verificação de punção no Contorno C'' do pilar .....	55
Tabela 22 - Esforços atuantes no pilar 43 .....	55
Tabela 23 - Características do pilar P43 .....	57
Tabela 24 - Módulos de Resistencia Plástica (W) .....	58
Tabela 25 - Excentricidade no contorno C.....	60
Tabela 26 - Verificação de punção no Contorno C do pilar.....	61
Tabela 27 - Taxa de armadura do pilar 43 .....	62
Tabela 28 - Excentricidade no contorno C' .....	64

Tabela 29 - Verificação de punção no Contorno C' do pilar .....	65
Tabela 30 - Determinação do As dos conectores para o contorno C' .....	67
Tabela 31 - Excentricidade no contorno C' .....	69
Tabela 32 - Verificação de punção no Contorno C'' do pilar 43 .....	70
Tabela 33 - Esforços atuantes no pilar 44 .....	71
Tabela 34 - Superfícies críticas no pilar 44 com $C_1 = 20$ cm.....	72
Tabela 35 - Superfícies críticas no pilar 44 com $C_1 = 60$ cm.....	72
Tabela 36 – Excentricidade no contorno C no pilar 44 com $C_1 = 20$ cm.....	76
Tabela 37 - Excentricidade no contorno C no pilar 44 com $C_1 = 60$ cm .....	76
Tabela 38 – Verificação da punção no pilar 44 com $C_1 = 20$ cm.....	77
Tabela 39 - Verificação da punção no pilar 44 com $C_1 = 60$ cm.....	77
Tabela 40 - Excentricidade no contorno C no pilar 44 com $C_1 = 20$ cm .....	78
Tabela 41 - Excentricidade no contorno C no pilar 44 com $C_1 = 60$ cm .....	78
Tabela 42 - Verificação da punção no pilar 44 com $C_1 = 20$ cm.....	79
Tabela 43 - Verificação da punção no pilar 44 com $C_1 = 60$ cm.....	79
Tabela 44 - Taxa de armadura para $C_1 = 20$ cm .....	80
Tabela 45 - Taxa de armadura para $C_1 = 60$ cm.....	81
Tabela 46 - Excentricidade no pilar 44 com $C_1 = 20$ cm.....	84
Tabela 47 - Excentricidade no pilar 44 com $C_1 = 60$ cm.....	84
Tabela 48 - Verificação de armadura no pilar 44 com $C_1 = 20$ cm.....	85
Tabela 49 – Verificação de armadura no pilar 44 com $C_1 = 60$ cm.....	85
Tabela 50 - Excentricidade no pilar 44 com $C_1 = 20$ cm .....	86
Tabela 51 - Excentricidade no pilar 44 com $C_1 = 60$ cm.....	87
Tabela 52 - Verificação de armadura no pilar 44 com $C_1 = 20$ cm .....	87
Tabela 53 - Verificação de armadura no pilar 44 com $C_1 = 60$ cm.....	87
Tabela 54 - Excentricidade no pilar 44 com $C_1 = 20$ cm.....	90
Tabela 55 - Excentricidade no pilar 44 com $C_1 = 60$ cm.....	91
Tabela 56 – Verificação do contorno C'' com $C_1 = 20$ cm.....	91
Tabela 57 - Verificação do contorno C'' com $C_1 = 60$ cm .....	91

## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

ABNT – Associação Brasileira de Normas Técnicas

NBR – Norma Brasileira

IBRACON – Instituto Brasileiro do Concreto

## LISTA DE SIMBOLOS

- $\alpha_v$  – coeficiente de efetividade do concreto;
- $\alpha$  – é o ângulo de inclinação entre o eixo da armadura de punção e o plano da laje;
- $\theta, \eta$  – ângulos dados em graus e relacionados, respectivamente, a  $x'$  e a  $y'$ ;
- $\rho$  – taxa geométrica de armadura de flexão aderente (armadura não aderente deve ser desprezada);
- $\rho_x, \rho_y$  – taxas de armadura nas duas direções ortogonais;
- $a$  – menor valor entre  $1,5d$  e  $0,5c_1$ ;
- $C_1$  e  $C_2$  – dimensões do pilar;
- $C$  – contorno crítico na face do pilar;
- $C'$  – contorno crítico distante a  $2d$  da face pilar;
- $C''$  – contorno crítico distante a  $2d$  a última linha de armadura;
- $d$  – altura útil da laje;
- $dl$  – comprimento infinitesimal no perímetro crítico  $u$ ;
- $D$  – diâmetro do pilar.
- $e$  – distância de  $dl$  ao eixo que passa pelo centro do pilar e sobre o qual atua o momento fletor  $M_{sd}$ .
- $e^*$  – excentricidade do perímetro crítico reduzido no contorno  $C, C', C''$
- $f_{cd}$  – resistência de cálculo à compressão do concreto;
- $f_{ck}$  – resistência característica do concreto a compressão em MPa.
- $f_{wyk}$  – resistência de cálculo da armadura de punção.
- $F_{sd}$  – força normal de cálculo;
- $K, K_1$  e  $K_2$  – coeficiente de forma do pilar.
- $lc$  – distância entre a borda do capitel e a face do pilar;
- $M_{sd}, M_{sd1}$  e  $M_{sd2}$  – momento desbalanceado de cálculo;
- $M_{sd}^*$  – momento resultante da excentricidade do perímetro crítico reduzido  $u^*$  em relação ao centro do pilar;
- $p$  – distância da face do pilar até a última linha de armadura de punção.
- $S_r$  – espaçamento radial entre linhas de armadura de punção, não maior que  $0,75d$ ;
- $\tau_{sd}$  – tensão solicitante de cálculo;
- $\tau_{rd2}$  – tensão resistente de compressão diagonal do concreto no perímetro  $C$ ;
- $\tau_{rd1}$  – tensão resistente ao cisalhamento no perímetro  $C'$  sem armadura de punção;

$\tau_{rd3}$  – tensão resistente ao cisalhamento no perímetro C' com armadura de punção;

$u$  – perímetro crítico do contorno considerado

$u^*$  – perímetro crítico reduzido;

$W_p, W_{p1}, W_{p2}$  – módulo da resistência plástica dos perímetros críticos.

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	<b>1</b>
1.1 OBJETIVOS .....	2
<b>1.1 Objetivo Geral</b> .....	<b>2</b>
<b>1.2 Objetivos Específicos</b> .....	<b>2</b>
<b>2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b> .....	<b>3</b>
2.1. PUNÇÃO.....	3
2.2 FATORES QUE INFLUENCIAM NA RESISTÊNCIA À PUNÇÃO.....	6
<b>2.2.1 Resistência do concreto</b> .....	<b>6</b>
<b>2.2.2 Espessura da laje</b> .....	<b>6</b>
<b>2.2.3 Dimensões e formato do pilar</b> .....	<b>7</b>
<b>2.2.4 Armadura de Punção</b> .....	<b>7</b>
<b>2.2.5 Taxa de Armadura de Flexão</b> .....	<b>8</b>
<b>2.2.6 Efeito de tamanho (<i>Size effect</i>)</b> .....	<b>8</b>
<b>2.2.7 Colapso Progressivo</b> .....	<b>9</b>
2.3 MÉTODOS DE CÁLCULO À PUNÇÃO .....	10
<b>2.3.1 Método da superfície de controle</b> .....	<b>10</b>
<b>2.3.2 Método das bielas e tirantes</b> .....	<b>12</b>
<b>2.3.3 Modelos mecânico</b> .....	<b>13</b>
<b>3 METODOLOGIA</b> .....	<b>16</b>
3.1 CRITÉRIOS DE VERIFICAÇÃO DA PUNÇÃO DA NBR 6118 (2014) .....	16
<b>3.1.1 Tensões Solicitantes nas Superfícies Críticas</b> .....	<b>18</b>
<u>3.1.1.1 Pilar Interno com Carregamento Simétrico</u> .....	<u>18</u>
<u>3.1.1.2 Pilar Interno, com efeito de momento</u> .....	<u>19</u>
<u>3.1.1.3 Pilares de borda</u> .....	<u>21</u>
<u>3.1.1.4 Pilares de canto</u> .....	<u>23</u>
<b>3.1.2 Uso de Capitéis</b> .....	<b>24</b>
<b>3.1.3 Casos especiais de definição da superfície de contorno crítico</b> .....	<b>25</b>
<b>3.1.4 Tensões Resistentes nas Superfícies Críticas</b> .....	<b>26</b>
<u>3.1.4.1 Tensão resistente de compressão diagonal do concreto (Superfície C)</u> .....	<u>26</u>
<u>3.1.4.2 Tensão resistente na superfície crítica C'</u> .....	<u>27</u>
<b>3.1.5 Definição da superfície crítica C''</b> .....	<b>29</b>
<b>3.1.6 Armadura de Punção Obrigatória</b> .....	<b>31</b>

<b>3.1.7 Colapso Progressivo .....</b>	<b>31</b>
<b>3.1.8 Informações adicionais.....</b>	<b>32</b>
<b>4 ESTUDO DE CASO.....</b>	<b>41</b>
4.1 PLANTA DE FORMA DA LAJE DO PROJETO ESTRUTURAL .....	41
4.2 REAÇÕES E MOMENTOS DOS PILARES NA LAJE .....	42
4.3 ARMADURAS DA LAJE DE ESTUDO .....	43
<b>5 VERIFICAÇÃO À PUNÇÃO.....</b>	<b>44</b>
5.1 PILAR DE CENTRO P28 .....	44
<b>5.1.1 Tensão resistente e solicitante no contorno C (Pilar P28).....</b>	<b>46</b>
<b>5.1.2 Tensão resistente e solicitante no contorno C' (Pilar P28) .....</b>	<b>48</b>
<b>5.1.3 Tensão resistente e solicitante no contorno C'' (Pilar P28) .....</b>	<b>53</b>
5.2 PILAR DE BORDA P43 .....	55
<b>5.2.1 Tensão resistente e solicitante no contorno C (Pilar P43).....</b>	<b>57</b>
<b>5.2.2 Tensão resistente e solicitante no contorno C' (Pilar P43) .....</b>	<b>61</b>
<b>5.2.3 Tensão resistente e solicitante no contorno C'' (Pilar P43) .....</b>	<b>67</b>
5.3 PILAR DE CANTO P44 .....	70
<b>5.3.1 Tensão resistente e solicitante no contorno C (Pilar P44).....</b>	<b>73</b>
<b>5.3.2 Tensão resistente e solicitante no contorno C' (Pilar P44) .....</b>	<b>79</b>
<b>5.3.3 Tensão resistente e solicitante no contorno C'' (Pilar P44) .....</b>	<b>88</b>
<b>6. CONCLUSÃO .....</b>	<b>93</b>
<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>95</b>



## 1 INTRODUÇÃO

Nos últimos anos o mercado da construção civil mostra-se cada vez mais movimentado, dado que muitas construtoras e incorporadoras vem comercializando diferentes tipos de edifícios pelo Brasil, assim a busca pela redução de custos em obras tornou-se mais abrangente no país. Diversas alternativas podem ser apontadas pelo engenheiro como: posicionamento da edificação num local mais econômico da cidade, nova concepção da estrutura da edificação, uso de fontes renováveis, diferenciais arquitetônicos, controle de desperdício na obra (DAL PRÁ, 2012).

Para Rabello (2010) “[...] estruturas de edifícios podem ser concebidas de diversas maneiras, o sistema reticulado de lajes, vigas e pilares, chamado de estrutura convencional, a mais usada até hoje no Brasil. Atualmente tem sido adotada uma solução onde se suprimem as vigas [...] as lajes apoiadas diretamente nos pilares”.

As opções de lajes sem vigas podem ser vantajosas por diversos fatores, devido a sua simplicidade de execução, em razão de não haver necessidade de executar formas das vigas. (RABELLO, 2010). Em questão do projeto arquitetônico, as lajes lisas causam menos interferências nos andares subjacentes, permitindo aumento do pé direito nas unidades ou a construção de mais pavimentos sem alteração da altura total, havendo assim, melhor aproveitamento da construção (WERNECK, 2017).

Mesmo havendo diferentes vantagens neste sistema estrutural, existem também desvantagens, devido ao fato da diminuição da estabilidade global da estrutura, sendo necessária a vinculação da laje com elementos estruturais. A ausência de vigas pode ocasionar maiores deslocamentos verticais maiores num mesmo vão, assim à necessidade de utilização de peças protendidas. Nas lajes lisas, ocorre uma concentração de cargas em uma área reduzida na região da ligação laje-pilar, que geram tensões elevadas. A ruptura por punção ocorre em uma superfície em forma de um tronco de pirâmide a partir da interface de contato entre pilar e laje. Esse efeito acontece de forma frágil, ou seja, com mínimo ou sem nenhum aviso prévio. Portanto, a ruptura por puncionamento pode ser responsável por acidentes como o colapso da laje ou até a ruína total da estrutura. (LOURENÇO, 2018).

## 1.1 OBJETIVOS

### 1.1 Objetivo Geral

O objetivo geral do trabalho é analisar o mecanismo de ruptura por punção causados em lajes de concreto armado, variando sua espessura.

### 1.2 Objetivos Específicos

Tendo em vista efetuar o objetivo geral, alguns objetivos específicos podem-se destacar, sendo eles:

- Analisar os fatores que influenciam à punção;
- Verificar as metodologias de cálculo apresentadas pela literatura;
- Aplicação da metodologia usada pela NBR6118/2014 no estudo de caso de um pavimento, mostrando os resultados calculados sobre pilares em diferentes posições na laje, com a variação de espessura da mesma;

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Bastos (2015) define que “as lajes são definidas como elementos planos bidimensionais, onde duas dimensões, o comprimento e a largura, são da mesma ordem de grandeza e muito maiores que a terceira dimensão, a espessura”. Seja em qualquer tipo de estrutura, as lajes recebem grande parte das ações aplicadas, normalmente de pessoas, móveis, paredes e os mais variados tipos de carga que podem existir. As ações são comumente perpendiculares ao plano da laje, podendo ser distribuídas na área, linearmente ou forças concentradas. Embora menos comuns, também podem ocorrer ações externas na forma de momentos fletores, normalmente aplicados nas bordas das lajes (BASTOS, 2015).

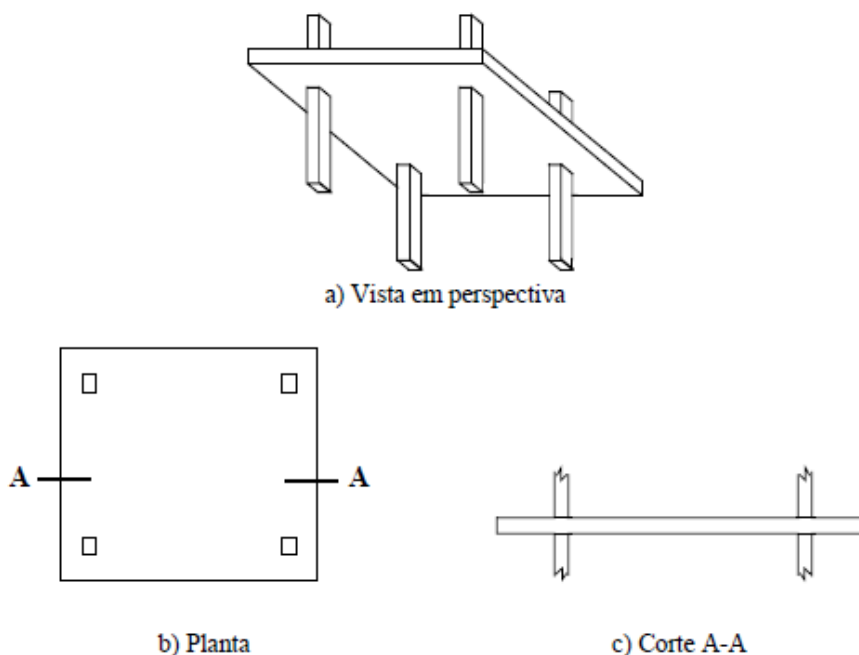
As lajes maciças são aquelas que tem toda sua espessura composta por concreto, contendo armaduras longitudinais de flexão, eventualmente armaduras transversais, e são apoiadas em vigas ou paredes ao longo das bordas. Um outro tipo de laje utilizado no Brasil são as lajes-cogumelo, lajes planas ou lajes lisas, onde são também lajes maciças de concreto, porém, nessas lajes as cargas e outras ações são transferidas diretamente aos pilares, sem intermédio de apoios nas vigas. (BASTOS, 2015).

### 2.1. PUNÇÃO

As lajes lisas, tabuleiros planos ou lajes planas lisas são algumas nomenclaturas que podem ser utilizados para definir um sistema estrutural constituído por lajes de concreto armado, sejam elas protendidas ou não, que estejam diretamente apoiadas e rigidamente ligadas em pilares (MELGES, 1995).

Segundo a norma NBR 6118 (ABNT, 2014) existe uma simples diferença entre lajes lisas e lajes-cogumelos. Para lajes cogumelo são apoiadas diretamente em pilares com capitéis, enquanto lajes lisas são lajes apoiadas nos pilares sem capitéis, como mostra a Figura 1. Nestes tipos de sistema estruturais não existem vigas, independente do modelo de laje, com as lajes sendo apoiadas diretamente sobre os pilares.

Figura 1 - Sistema estrutural de Laje Lisa



Fonte: MELGES (1995)

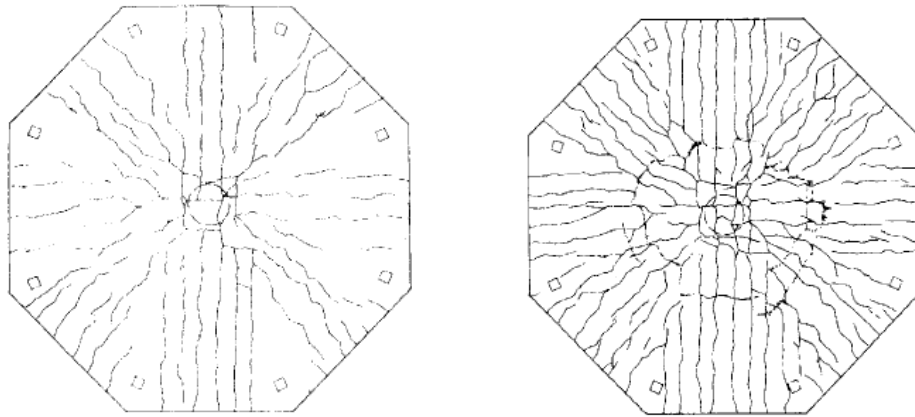
Neste sistema estrutural o uso de lajes sem vigas exige em prevenir a ruptura por punção. Como a laje está diretamente apoiada nos pilares, as forças de reação que atuam em pequenas áreas, geram tensões elevadas na região da laje-pilar, podendo chegar ao rompimento nesta região. A ruptura por punção é caracterizada pela inexistência do escoamento da armadura, sendo basicamente ocasionada pela devastação local do concreto da zona comprimida em torno do pilar ou da área carregada. A ruptura, portanto, é súbita, o que não acontece numa ruptura dúctil. Como a ruptura por punção acontece sem aviso, ou seja, é do tipo frágil, deve-se, como diretriz de projeto, garantir que, caso a ruína ocorra, ela não se dê por punção, mas sim por flexão (PINTO, 1993).

Ainda segundo a NBR 6118 (ABNT, 2014) a punção é definida como um Estado Limite Último (ELU), no entorno de forças concentradas, determinado por cisalhamento. Assim a análise estrutural de lajes lisas e cogumelo deve ser realizada mediante emprego de procedimento numérico adequado, por exemplo, diferenças finitas, elementos finitos ou elementos de contorno.

Em ensaios de lajes lisas sob efeito de carregamentos concentrados foi observado o aparecimento de fissurações radiais nas lajes, as quais começam quase no centro das lajes e se estendem na direção do perímetro das mesmas, dividindo assim as lajes em segmentos radiais, conforme é apresentado na Figura 2. Ainda é possível notar que momentos antes da ruptura,

algumas fissuras tangenciais na região da punção apareceram, indicando a formação de uma fissuração inclinada interna causada pela tração diagonal (SHEHATA, 1993)

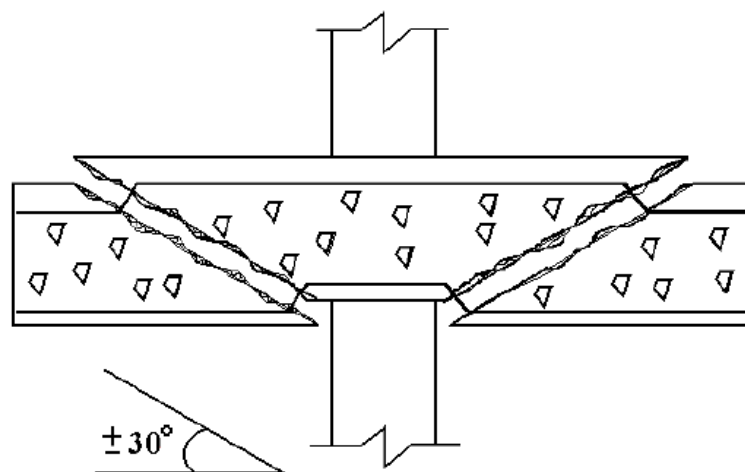
Figura 2 - Surgimento de fissuras radiais e tangenciais em lajes lisas



Fonte: MELGES (1995)

A ruína para pilares internos, com lajes e carregamento simétricos, apresenta uma superfície de ruína tronco-cônica ou tronco piramidal, conforme pode ser visto na Figura 3, partindo do contorno da área carregada e se estendendo até a outra face, com uma inclinação entre 30° a 35° em relação ao plano médio da laje (MELGES, 1995).

Figura 3 - Superfície de ruína para casos simétricos



Fonte: MELGES (1995)

## 2.2 FATORES QUE INFLUENCIAM NA RESISTÊNCIA À PUNÇÃO

Devido a diversas quantidades de fatores, a resistência a punção se torna um estudo muito complexo para ser definido com modelos matemáticos. As formulações mais aceitas no meio científico, sendo elas utilizadas pelas normas, são baseadas em modelos empíricos, desenvolvidos a partir de ensaios realizados onde se variou cada fator de influência até obter uma relação plausível. O método mais difundido atualmente entre as normas mundiais, consiste na definição de superfícies de controle, onde são verificadas as tensões atuantes e resistentes, garantindo a segurança da estrutura (WERNECK, 2017).

O efeito da punção em lajes lisas de concreto armado sofre influência de diversos fatores. Além do grande problema da ligação laje pilar estar situada em uma região de nós, a variação na forma, textura, tamanho do agregado, com os fenômenos de micro fissuração (microfissuras que ocorrem na zona de transição entre os agregados e a pasta de cimento endurecida, antes mesmo da peça ou modelo ser submetido a carregamento externo), determinantes do comportamento não-linear do concreto, aliada à presença das barras das armaduras de aço estrutural conduzem o material concreto armado a uma heterogeneidade de materiais e comportamentos que agravam a indefinição do sistema (RABELLO, 2010).

### 2.2.1 Resistência do concreto

A ruptura por cisalhamento de um elemento de concreto sem armadura de combate a tal esforço é governada, dentre outros fatores, pela resistência à tração do concreto. Como para fins de projeto de uma estrutura o estabelecimento da resistência à compressão é o passo inicial desse processo e as formulações normativas costumam relacionar a resistência à tração do concreto como uma função de sua resistência à compressão (IBRACON, 2015).

### 2.2.2 Espessura da laje

Para Rabello (2010) a superfície de ruptura por punção acontece ao longo de uma superfície cônica na estrutura. Ao aumentar a espessura da laje com a finalidade de combater o efeito da punção, pode-se optar por duas soluções: aumentar a espessura de toda a laje ou simplesmente na região da sua ligação com o pilar, o que é chamado de capitel ou engrossamento da laje.

Ao se modificar a altura útil para toda a laje, as ações permanentes também aumentam, portanto aumenta-se a tensão resistente, mas também as tensões solicitantes, de tal forma que o processo não se torna vantajoso tanto economicamente quanto tecnicamente. Mas o uso de capitéis pode apresentar a perda das vantagens oferecidas pelo teto liso e prejudicar em alguns aspectos arquitetônicos (RABELLO, 2010).

### **2.2.3 Dimensões e formato do pilar**

Segundo Leonhardt (1977) a geometria e as dimensões do pilar também afetam a resistência de uma laje, pois determinam a forma como as tensões se distribuem na ligação laje-pilar. A relação de rigidez entre os pilares e lajes podem ser muito diferentes e o fato se torna ainda mais relevante para pilares de cantos e bordas.

Os momentos principais longitudinais e transversais podem ser muito diferentes, sendo o momento transversal dependente primordialmente da rigidez à flexão do pilar; este também decresce no surgimento de fissuras de flexão na laje, caracterizando a entrada no estado de ruptura. Porém, os momentos fletores longitudinais ao bordo da laje que são os determinantes para a punção, geralmente. Assim, o dimensionamento à punção deve ser feito com os momentos fletores máximos e em uma área de punção reduzida (LEONHART, 1977).

No caso de pilares quadrados, os pilares retangulares com relação entre lado maior e lado menor maior que 2 têm uma ruína mais abrupta, o tamanho do cone de punção é menor e a resistência da ligação também é menor pelo fato de terem as tensões concentradas nos lados de menor dimensão. Os autores afirmam ainda que quanto ao formato, pilares retangulares têm resistência em torno de 15% menor em relação a pilares circulares de mesma área, e isto se deve ao fato de existir uma concentração de tensões nos cantos nos pilares retangulares (MELGES 2001).

### **2.2.4 Armadura de Punção**

É incontestável que o uso de armaduras de punção proporciona um aumento na resistência da ligação laje-pilar. Esse tipo de armadura variar em tipos e formatos, e seu uso permite que se adotem espessuras mais delgadas da laje sem haver necessidade do uso de capitéis e aumento da espessura da laje (RABELLO, 2010).

Ainda segundo Rabello (2010) os benefícios do uso da armadura de punção são o aumento da resistência e da ductilidade da ligação laje-pilar. Isso significa que sua ruptura não

ocorrerá mais de maneira frágil e sem aviso, permitindo que a estrutura se deforme antes de romper repentinamente. Apesar das vantagens, é necessário que haja cuidados especiais no uso da armadura de punção. Folgas na ancoragem e má disposição das armaduras podem provocar escorregamentos e fazer com que elas percam sua função estrutural.

A norma brasileira NBR 6118/2014 recomenda que no caso da estabilidade global da estrutura depender da resistência da laje à punção, deve-se prever uma armadura, mesmo que a ligação passe pela verificação de punção. Essa armadura deve equilibrar no mínimo 50% da força de reação proveniente da laje no pilar.

### **2.2.5 Taxa de Armadura de Flexão**

A taxa de armadura de flexão tracionada é definida como a razão entre a área de armadura de flexão tracionada pela área de concreto, a qual é dada pelo produto da altura útil da laje por uma determinada largura a ser considerada (IBRACON, 2015).

O aumento na taxa de armadura de flexão tem como efeito o aumento da zona comprimida, reduzindo a fissuração na ligação laje-pilar por flexão, o que é benéfico uma vez que facilita a formação de mecanismos para a transmissão de cisalhamento. Além disso, a espessura das fissuras de flexão é reduzida, o que facilita a transferência de forças através do engrenamento de agregados (IBRACON, 2015).

### **2.2.6 Efeito de tamanho (*Size effect*)**

Segundo Rabello (2010) este efeito refere-se ao fato de que, em iguais condições, as lajes de menor altura útil são mais resistentes do que as lajes mais espessas. Um princípio justificável pela possibilidade de maior heterogeneidade do concreto das lajes mais espessas. Além disso, mesmo com uma mesma taxa de armadura longitudinal, nas lajes de maior espessura, a armadura de tração perde sua capacidade de controlar a abertura das fissuras ao longo de toda a altura da seção fissurada.

Deste modo, a espessura da peça condiciona o engrenamento dos agregados, fazendo com que a altura útil também seja um fator que controla a resistência das lajes à punção. O engrenamento dos agregados permite o cruzamento das bielas de compressão pela região de concentração de fissuras. A falta de consideração desse fato pode levar ao superdimensionamento das peças estruturais em função da significativa subestimação da resistência ao cisalhamento do concreto. (CORDOVIL, 1997).



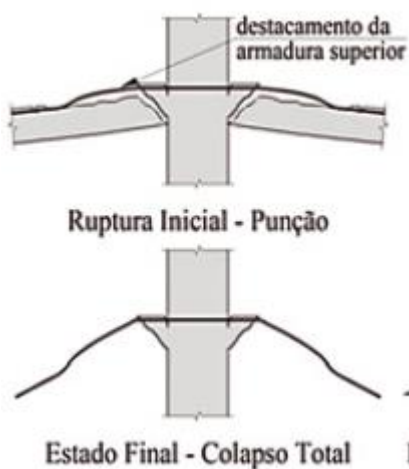
Alguns resultados experimentais mostram que a partir de uma determinada espessura a influência da variação da altura útil deixa de ser significativa. Essa limitação da influência da espessura a um determinado valor decorre de um efeito de escala entre a altura útil da peça e o diâmetro máximo dos agregados empregados na fabricação do concreto (RABELLO, 2010).

### 2.2.7 Colapso Progressivo

O colapso progressivo é caracterizado pelo rompimento da ligação laje-pilar que provoca a queda da laje sobre o pavimento inferior, aumentando significativamente o carregamento sobre esta, que na ausência de dimensionamento para tal esforço, colapsa também, gerando um ciclo de destruição que pode colapsar as lajes subsequentes até a ruína completa da edificação. Este fenômeno ocorre devido à falta de capacidade da ligação de absorver completamente as tensões cisalhantes residuais do comportamento pós-punção (WERNECK, 2017).

Ainda Werneck (2017) mostra que a principal medida para evitar o colapso progressivo é a garantia da ductilidade local. Assim, no caso de colapso, a ruptura que seria abrupta se torna mais lenta e com o ganho de tempo, há a possibilidade de evacuação do local. A Figura 4 demonstra o efeito de punção em seu estado inicial, frisando o destacamento da armadura superior e final, apresentando o colapso total da estrutura, considerando uma ligação laje-pilar realizada sem a utilização da armadura contra colapso progressivo.

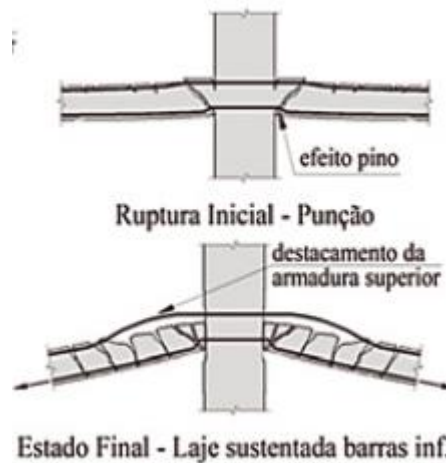
Figura 4 - Pilar sem armadura contra colapso progressivo



Fonte: ABERE/IBRACON (2015)

Segundo Werneck (2017) a solução que mostra melhores resultados é a utilização de barras na face inferior da laje, passando pelos pilares ou ancoradas neles, conforme a Figura 5, onde é representado a situação da utilização da armadura contra colapso progressivo. É possível perceber que a laje colapsada passa a ser sustentada por estas barras inferiores, impedindo que esta caia completamente sobre o pavimento inferior.

Figura 5 - Pilar com armadura contra colapso progressivo



Fonte: ABERE/IBRACON (2015)

### 2.3 MÉTODOS DE CÁLCULO À PUNÇÃO

O método mais conhecido e desenvolvido para verificar a punção na ligação entre laje-pilar é o de superfície de controle, sendo a base para vários códigos normativos como o brasileiro, europeu, americano, entre outros. A sua vantagem é sua aplicação, pois pode ser configurada para qualquer configuração de pilar, no entanto é uma solução empírica e deve ser calibrada por ensaios experimentais. Outro modelo de cálculo é o método de bielas e tirantes e o modelo mecânico proposto por Kinnunen e Nylander (1960).

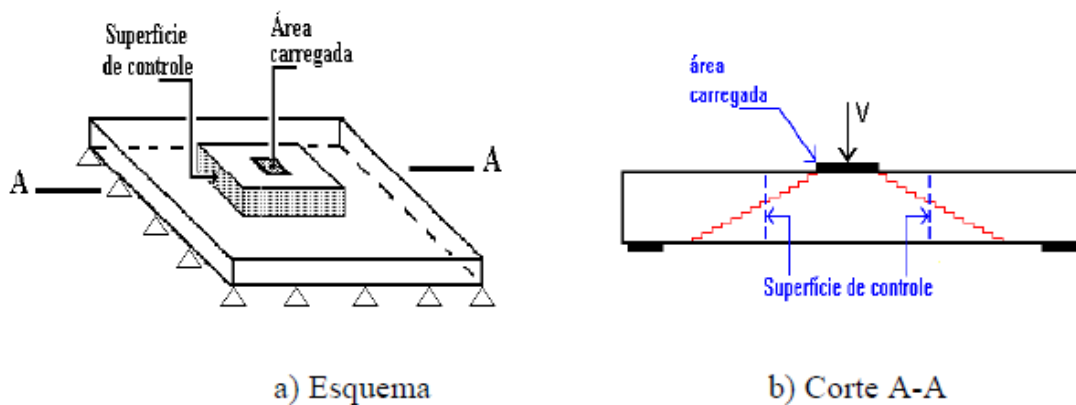
#### 2.3.1 Método da superfície de controle

O método da superfície de controle, conforme mostra a Figura 6, consiste em se calcular uma tensão uniforme solicitante de punção em uma determinada superfície de controle, perpendicular ao plano médio da laje, localizada a uma determinada distância da face do pilar

ou da área carregada e comparar o valor do esforço solicitante com um determinado parâmetro de resistência do concreto para aquele perímetro. Se naquele perímetro o esforço resistente for maior que o solicitante não é necessário o uso de armadura de punção (RABELLO, 2010).

Ainda segundo Rabello (2010) esta tensão atuante, geralmente calculada em função da posição do pilar, da força concentrada e da presença ou não de momentos fletores, é então comparada com uma tensão resistente, geralmente calculada em função da resistência do concreto, da taxa de armadura de flexão e da presença ou não de armadura de punção.

Figura 6 - Definição da superfície de controle



Fonte: MELGES (1995)

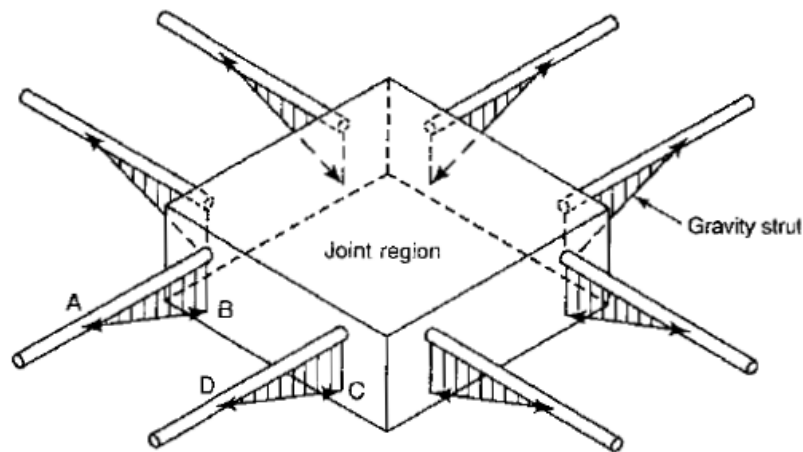
A área desta superfície é dada pela multiplicação do perímetro da superfície de controle pela respectiva altura. O perímetro é definido por uma linha situada no plano da laje, a uma certa distância da área carregada, sendo que esta distância varia conforme o regulamento utilizado. Se o contorno da área carregada for côncavo, a seção da superfície de controle, paralela ao plano médio da laje, terá a forma de um polígono convexo, circunscrito à área carregada, com os cantos podendo ou não ser arredondados, de acordo com cada regulamento (MELGES, 1995).

O método da superfície de controle é visto em vários códigos e normas, por exemplo, a NBR 6118/2014, o CEB/FIB 90, o EUROCODE 2/92 e EUROCODE 2/04, a BS 8110/97 e o ACI 318-05.

### 2.3.2 Método das bielas e tirantes

Os primeiros a usarem o modelo de bielas e tirantes para explicarem a punção sem efeitos de momentos foram Alexander e Simmonds, como menciona McGregor (1997). A seguir na Figura 7 mostra a representação do modelo de bielas e tirantes de um pilar interno.

Figura 7 - Modelo de bielas e tirantes para a punção sem momentos



Fonte: MCGREGOR (1997)

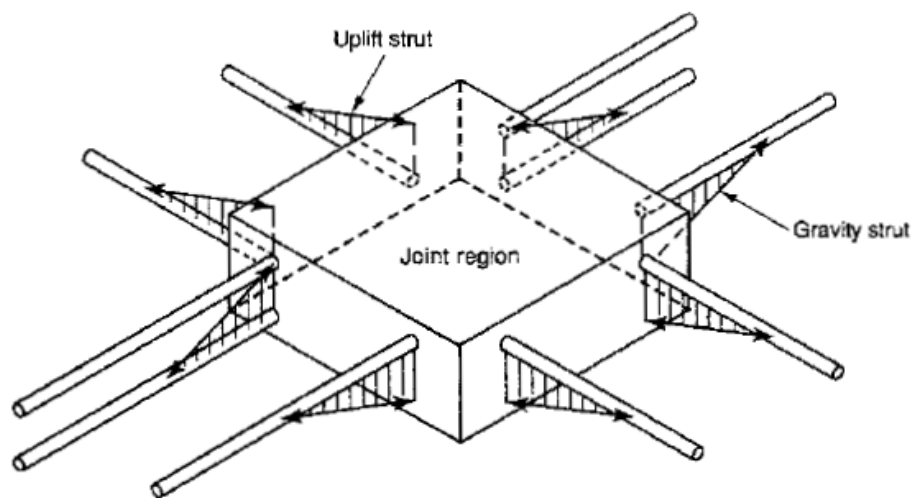
Ensaio mostraram que as deformações tangenciais são, inicialmente, maiores que as deformações radiais. Por isso, surgem primeiro as fissuras radiais. Somente para elevados estágios de carga aparecem algumas fissuras circulares, a partir das quais se desenvolvem as superfícies de ruptura por cisalhamento do cone de punção com inclinação média da ordem de 30° (LEONHARDT e MÖNNIG, 1979).

Para Leonhardt e Mönnig, (1979) a formação das fissuras inclinadas na região da laje próxima ao pilar, os esforços de punção são resistidos também pela tração no concreto. Uma vez que se formam estas fissuras, os esforços de punção não podem mais ser resistidos por tração. Após a formação das fissuras, os esforços são resistidos pelas bielas A-B e D-C, estendendo-se da face inferior da laje no pilar até a armadura de flexão negativa, nos pontos A e D. As bielas são consideradas nos quatro lados do pilar, no caso de pilares retangulares.

A componente horizontal dos esforços nas bielas causa mudanças nos esforços da armadura de flexão, nos tirantes A e D. A componente vertical “empurra” a armadura de flexão para cima, e é resistida pela tensão de tração no concreto entre as barras. Consequentemente, esse concreto rompe no plano das armaduras de flexão, o que resulta em falha por punção (MCGREGOR, 1997).

Quando cargas laterais ou cargas verticais desbalanceadas causam transferência de momentos entre a laje e o pilar, o comportamento da ligação se torna mais complexo, envolvendo flexão, tração e torção na região de ligação da laje com o pilar. Dependendo da amplitude destes três fatores, a falha pode se dar de diversas maneiras. O modelo proposto por Alexander e Simmonds pode ser adaptado para o caso de pilares internos com transferência de momentos. A Figura 8 mostra um modelo de bielas e tirantes de um pilar interno sujeito a um momento grande.

Figura 8 - Modelo de bielas e tirantes para a punção com momentos



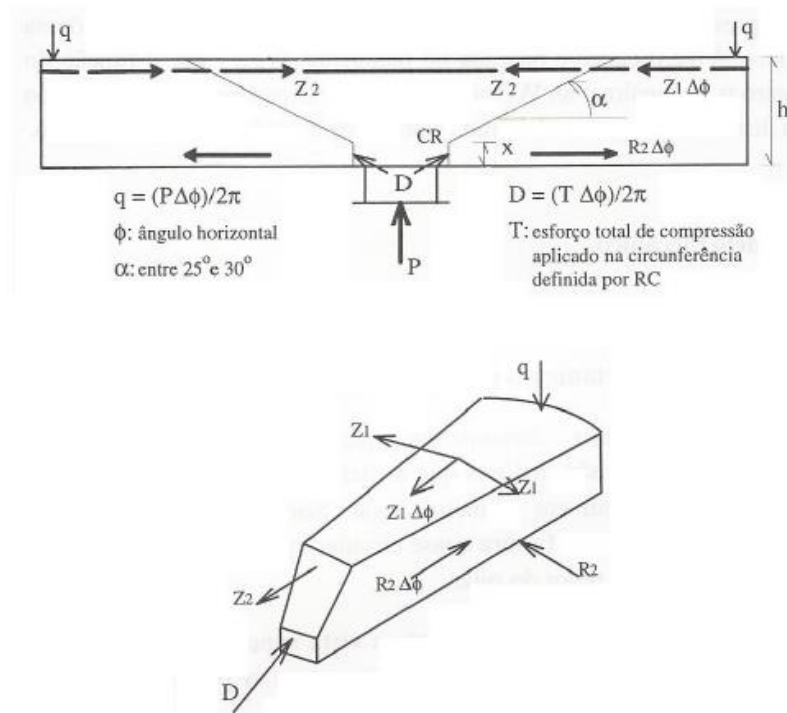
Fonte: MCGREGOR (1997)

### 2.3.3 Modelos mecânico

Os modelos mecânicos, também ditos “racionais”, são fundamentados pelos modelos constitutivos do concreto e do aço e se baseiam no comportamento da ligação, observado em ensaios. A resistência da ligação, nesse caso, é obtida pelo equilíbrio entre as ações aplicadas e os esforços internos (RABELLO, 2010).

No ano de 1960, Kinnunen e Nylander desenvolveram um modelo mecânico, embora complexo, apresenta a grande vantagem de se poder visualizar o comportamento real da ligação laje-pilar. Esse modelo apresenta uma hipótese para o equacionamento do problema de laje circular, solicitada por um pilar central também com seção circular. Trata-se do modelo em que a ruptura da laje ocorre a partir do pilar, como mostra a Figura 9, com o deslocamento de um sólido interno. Esse sólido teria a forma aproximada de um tronco de cone, com a superfície inclinada entre 25° e 30° graus em relação ao plano da laje (CORDOVIL, 1997).

Figura 9 - Hipótese de ruptura do modelo mecânico de Kinnunen e Nylander

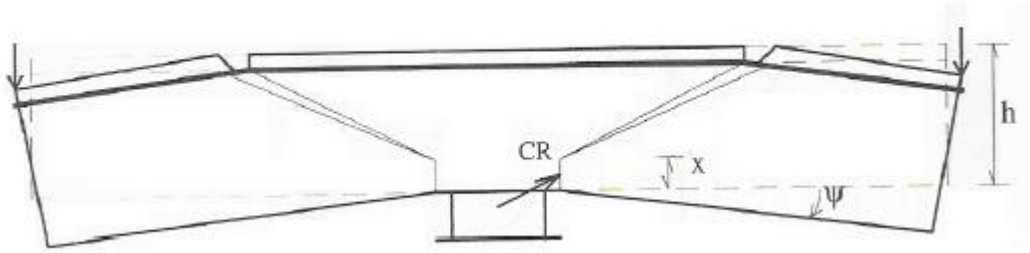


Fonte: CORDOVIL (1977)

Na zona contígua ao tronco do cone, a laje seria dividida em elementos rígidos iguais, limitados pela superfície inclinada e por fissuras radiais. Cada elemento rígido produziria um trabalho decorrente da rotação em torno de um ponto chamado “centro de rotação” CR. Esse centro de rotação seria o limite entre dois estágios ideais de fissuração: as fissuras que limitam a superfície inclinada, bem como as fissuras radiais, seriam formadas antes da ruptura da laje, e a fissura localizada entre a periferia do pilar e o CR somente seria formada no instante da ruptura da laje (CORDOVIL, 1997).

Ainda segundo Cordovil (1997) nessas circunstâncias, há condições de se estabelecer uma teoria próxima da realidade, bastando para isso, aplicar o princípio dos trabalhos virtuais, supondo a rotação do elemento, conforme mostra a Figura 10. Porém, quando se tenta estender essa teoria para formas quadradas ou retangulares, afirma que não há como definir uma formulação confiável.

Figura 10 - Rotação do elemento rígido



Fonte: CORDOVIL (1977)

### 3 METODOLOGIA

Os códigos e as normas internacionais, em geral, são baseados no método da superfície de controle, nas verificações para a punção em lajes de concreto armado. Neste método, calcula-se uma tensão uniforme solicitante de punção sob uma determinada superfície de controle, perpendicular ao plano médio da laje, localizada a uma estipulada distância da face do pilar ou da área carregada. Assim com o resultado da tensão solicitante, compara-se o valor do esforço solicitante a um parâmetro de resistência do concreto para aquele perímetro. Se naquele perímetro o esforço resistente for maior que o solicitante não é necessário o uso de armadura de punção.

Para o presente estudo, foram apresentados os critérios e o roteiro de verificação à punção, segundo a norma NBR 6118/2014, para ligações da laje com pilares internos, de borda e de canto. No estudo de caso, para cada tipo de ligação, foi avaliada a influência da espessura da laje considerando a armadura de punção.

#### 3.1 CRITÉRIOS DE VERIFICAÇÃO DA PUNÇÃO DA NBR 6118 (2014)

O modelo de cálculo proposto na NBR 6118 (2014) corresponde à verificação do cisalhamento em duas ou mais superfícies críticas definidas no entorno das forças concentradas.

Na primeira superfície crítica (contorno C), do pilar ou da carga concentrada deve ser verificada indiretamente a tensão de compressão diagonal do concreto, através da tensão de cisalhamento. Essa verificação deve ser feita em lajes com ou sem armadura.

Na segunda superfície crítica (contorno C') afastada  $2d$  do pilar ou carga concentrada, deve ser verificada a capacidade de ligação à punção, associada à resistência à tração diagonal. Esta verificação também se faz através de uma tensão de cisalhamento, no contorno C'. Caso haja necessidade, a ligação deve ser reforçada por armadura transversal.

A terceira superfície crítica (contorno C'') apenas deve ser verificada quando for necessário colocar armadura transversal. Essa verificação é semelhante à situação da segunda superfície crítica, admitindo uma superfície de ruptura mais longe do ponto da aplicação da carga concentrada.



Essas superfícies críticas estão relacionadas às regiões com possibilidade de ruína por punção, localizadas entre a face do pilar e o início da armadura, dentro da região armada e além dela. Em resumo a NBR 6118 (2014) determina as seguintes verificações:

I. Para quando não for prevista a armadura de punção, realizam-se duas verificações:

- Compressão no concreto no contorno C, limitada pela expressão:

$$\tau_{sd} \leq \tau_{Rd2} \text{ (item 19.5.3.1 da NBR 6118/2014)}$$

- Punção no contorno C', limitada pela expressão:

$$\tau_{sd} \leq \tau_{Rd1} \text{ (item 19.5.3.2 da NBR 6118/2014)}$$

II. Quando for prevista a armadura de punção, realizam-se três verificações:

- Compressão no concreto no contorno C, limitada pela expressão:

$$\tau_{sd} \leq \tau_{Rd2} \text{ (item 19.5.3.1 da NBR 6118/2014)}$$

- Punção no contorno C', limitada pela expressão:

$$\tau_{sd} \leq \tau_{Rd3} \text{ (item 19.5.3.2 da NBR 6118/2014)}$$

- Punção no contorno C'', limitada pela expressão:

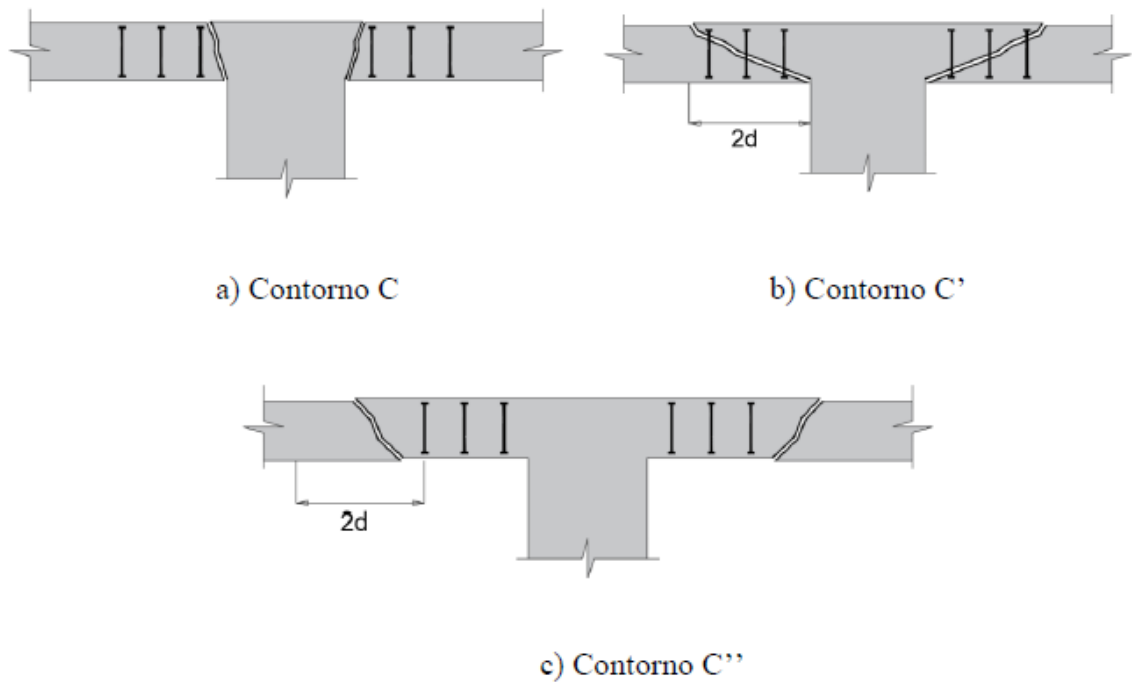
$$\tau_{sd} \leq \tau_{Rd1} \text{ (item 19.5.3.2 da NBR 6118/2014)}$$

Ainda segundo a NBR 6118 (2014) considera também que o cálculo da tensão cisalhante resistente dependerá se o pilar for interno com carregamento simétrico ou com momento, de borda ou de canto. A seguir serão detalhados os modelos para os quatro casos citados acima.

Algumas informações adicionais são necessárias para o completo dimensionamento da ligação laje-pilar, sendo eles: determinação das excentricidades, perímetros e dos módulos de resistência plástica para os diferentes perímetros de controle. O Ibracon (2015) apresenta os comentários e exemplos de aplicação da norma NBR6118:2014, onde são definidas expressões para esses parâmetros.

A Figura 11 apresenta as superfícies críticas de acordo com o modelo da superfície de controle, adotado pela ABNT NBR 6118 (2014).

Figura 11 - Superfícies críticas para o modelo de cálculo



Fonte: FARIA (2018)

### 3.1.1 Tensões Solicitantes nas Superfícies Críticas

O cálculo das tensões solicitantes na superfície crítica, deve ser considerada a posição dos pilares na estrutura, sejam eles interno, borda ou canto, o tipo de carregamento e a geometria dos pilares.

#### 3.1.1.1 Pilar Interno com Carregamento Simétrico

No caso em que o efeito do carregamento pode ser considerado simétrico nos pilares internos, a influência de flexão nos pilares pode ser desprezada, ou seja, a tensão de cisalhamento que atua no contorno C' tem distribuição uniforme, conforme é mostrado a seguir na Equação 3.1

$$\tau_{Sd} = \frac{F_{Sd}}{u \cdot d} \quad (3.1)$$

Sendo:

$$d = \frac{(d_x + d_y)}{2} \quad (3.2)$$

Onde:

$\tau_{sd}$  é a tensão cisalhante solicitante de cálculo no contorno considerado;

$F_{sd}$  é a força ou reação de punção de cálculo;

$u$  é o perímetro do contorno crítico  $C'$ , externo ao contorno  $C$  da área de aplicação da força e distante  $2d$  deste, no plano da laje;

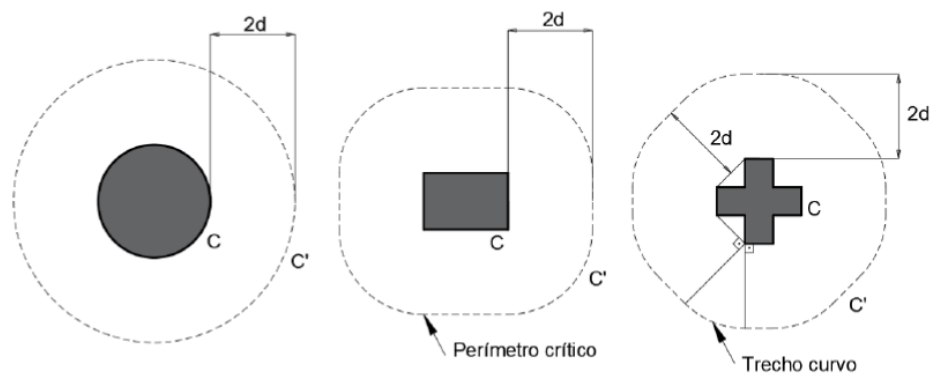
$u \cdot d$  é a área da superfície crítica

$d$  é a altura útil da laje ao longo do contorno crítico  $C'$ ;

$d_x$  e  $d_y$  são as alturas úteis nas duas direções ortogonais, nas direções  $x$  e  $y$ ;

A força de punção  $F_{sd}$  pode ser reduzida da força distribuída aplicada na face oposta da laje, dentro do contorno considerado na verificação,  $C$  ou  $C'$ , conforme a Figura

Figura 12 - Perímetro crítico em pilares internos



Fonte: NBR 6118 (2014)

### 3.1.1.2 Pilar Interno, com efeito de momento

Além de forças verticais, caso exista transferência de momento da laje para o pilar, o efeito da assimetria deve ser considerado e a tensão de cisalhamento, que atua no contorno  $C'$ , não mais terá distribuição uniforme. No entanto, a ruptura por punção devido ao momento na ligação pilar-laje acontece com distribuição uniforme de tensão de cisalhamento no perímetro crítico, tal que:

$$\tau_{Sd} = \frac{F_{Sd}}{u \cdot d} + \frac{K M_{Sd}}{W_p \cdot d} \quad (3.3)$$

Onde:

$K$  é o coeficiente que fornece a parcela de  $M_{Sd}$  transmitida ao pilar por cisalhamento, que depende da relação  $C_1/C_2$ . Sendo  $C_1$  e  $C_2$  as dimensões do pilar, respectivamente, paralela e perpendicular à excentricidade da força;

$M_{Sd}$  é o momento fletor de cálculo transmitido pela laje ao pilar;

$W_p$  é o módulo de resistência plástica do perímetro crítico  $u$ .

A norma NBR 6118 (2014) prescreve os valores para o parâmetro  $K$  apresentados na Tabela 1 a seguir:

Tabela 1 - Valores de  $K$

$C_1/C_2$	0,5	1,0	2,0	3,0
$K$	0,45	0,60	0,70	0,80
onde $C_1$ é a dimensão do pilar paralela à excentricidade da força; $C_2$ é a dimensão do pilar perpendicular à excentricidade da força.				

Fonte: NBR 6118 (2014)

Os valores de  $W_p$  devem ser calculados pelas expressões a seguir:

- Para pilares retangulares:

$$W_p = \frac{C_1^2}{2} + C_1 C_2 + 4C_2 d + 16d^2 + 2\pi d C_1 \quad (3.4)$$

- Para pilares circulares:

$$W_p = (D + 4d)^2 \quad (3.5)$$

Onde:

$D$  é o diâmetro do pilar

O módulo de resistência plástica,  $W_p$ , pode ser calculado desprezando a curvatura dos cantos do perímetro crítico, por meio da expressão:

$$W_p = \int_0^u |e| dl \quad (3.6)$$

Onde:

$dl$  é o comprimento infinitesimal no perímetro crítico  $u$ ;

$e$  é a distância de  $dl$  ao eixo que passa pelo centro do pilar e sobre o qual atua o momento fletor  $M_{sd}$ .

### 3.1.1.3 Pilares de borda

Para os pilares de borda e de canto, o puncionamento é mais crítico. Nestes casos, um perímetro crítico reduzido, que leva em consideração a presença de uma borda livre da seção crítica. A diferença está na definição do perímetro crítico e do momento solicitante de cálculo, que leva em conta a excentricidade da ligação laje/pilar.

- a. Quando não agir momento no plano paralelo à borda livre:

$$\tau_{sd} = \frac{F_{sd}}{u \cdot d} + \frac{K_1 M_{sd1}}{W_{p1} \cdot d} \quad (3.7)$$

Sendo:

$$M_{sd1} = (M_{sd} - M_{sd}^*) \geq 0 \quad (3.8)$$

Onde:

$u^*$  é o perímetro crítico reduzido;

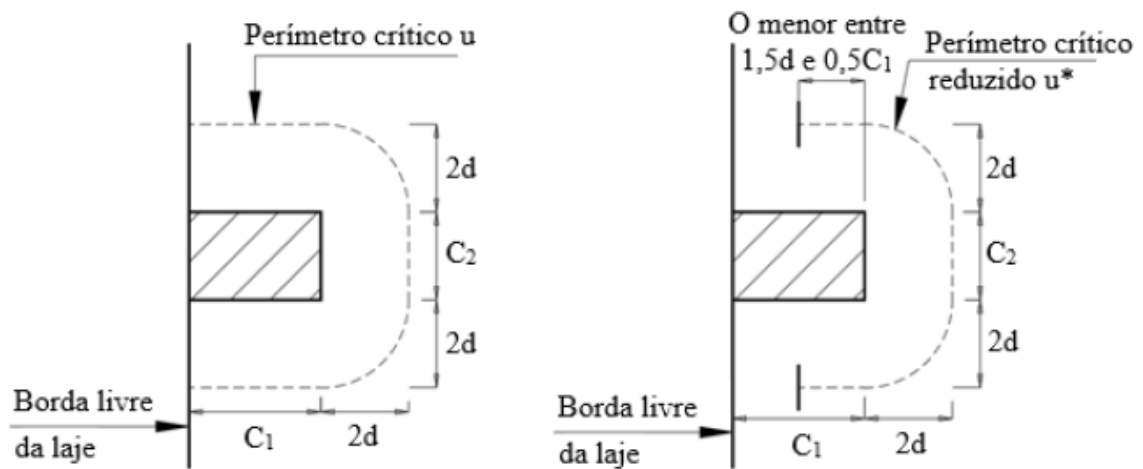
$M_{sd}$  é o momento de cálculo no plano perpendicular à borda livre;

$M_{sd}^*$  é o momento de cálculo resultante da excentricidade do perímetro crítico reduzido  $u^*$  em relação ao centro do pilar, calculado por  $M_{sd}^* = F_{sd} \cdot e^*$

$W_{p1}$  é o módulo de resistência plástica perpendicular à borda livre, calculado para o perímetro  $u$ .

Neste caso  $a$  o coeficiente  $K_1$ , assume os valores fornecidos na Tabela 1, com  $C_1$  e  $C_2$  de acordo com a Figura 13, ilustrando a redução do perímetro  $u$  para o perímetro reduzido  $u^*$  em pilares de borda.

Figura 13 - Perímetro crítico em pilares de borda



Fonte: NBR 6118 (2014)

b. Quando agir momento no plano paralelo à borda livre:

$$\tau_{sd} = \frac{F_{sd}}{u \cdot d} + \frac{K_1 M_{sd1}}{W_{p1} \cdot d} + \frac{K_2 M_{sd2}}{W_{p2} \cdot d} \quad (3.9)$$

Onde:

$M_{sd1}$  é o momento de cálculo no plano perpendicular à borda livre;

$M_{sd2}$  é o momento de cálculo no plano paralelo à borda livre;

$W_{p1}$  é o módulo de resistência plástica perpendicular à borda livre, calculado para o perímetro  $u$ ;

$W_{p2}$  é o módulo de resistência plástica na direção paralela à borda livre, calculado para o perímetro  $u$ .

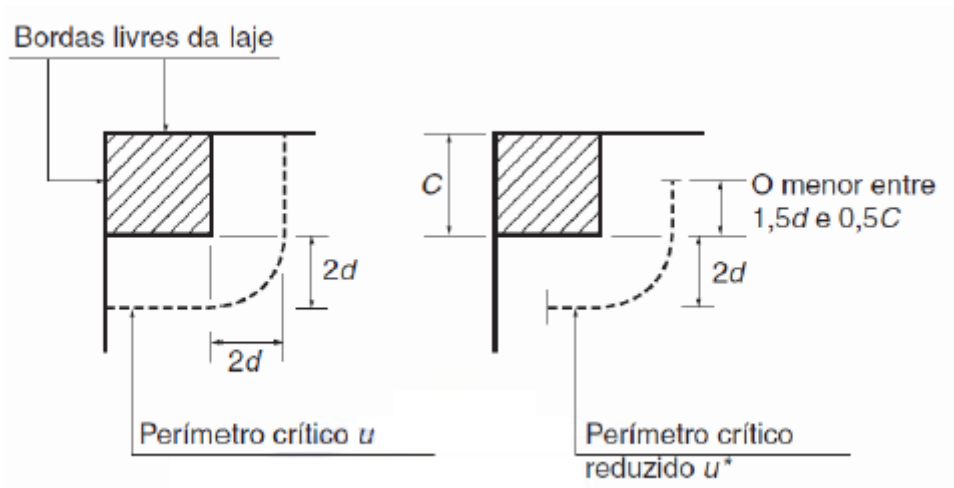
$K_2$ : assume os valores estabelecidos para  $K$  dados na Tabela 1, substituindo-se  $C_1/C_2$  por  $C_2/(2 \cdot C_2)$ .

Neste caso  $b$ , os coeficientes  $K_1$  e  $K_2$  assumem os valores fornecidos na Tabela 1, mas no caso, substituindo-se a razão de entrada  $C_1/C_2$  por  $C_2/2C_1$ , com  $C_1$  e  $C_2$  definidos conforme a Figura 13.

#### 3.1.1.4 Pilares de canto

A verificação à punção de pilares de canto é feita de forma semelhante aos pilares de borda, quando não há ação de momento no plano paralelo à borda. Como o pilar de canto apresenta duas bordas livres, deve ser feita a verificação separadamente para cada uma delas, considerando o momento fletor, cujo plano é perpendicular à borda livre adotada. A Figura 14 apresenta o perímetro crítico para um pilar retangular de canto

Figura 14 - Perímetro crítico em pilares de canto



Fonte: NBR 6118 (2014)

Os valores de  $K$  devem ser calculados em função da proporção  $C_1/C_2$ , sendo  $C_1$  e  $C_2$ , respectivamente, os lados do pilar perpendicular e paralelo à borda livre adotada, conforme Tabela 1.

A tensão de cisalhamento atuante no perímetro crítico em pilares de canto, devido aos momentos e à força axial, pode ser determinada considerando o princípio da superposição dos efeitos, logo:

$$\tau_{sd} = \frac{F_{sd}}{u \cdot d} + \frac{K_y M_y^*}{W_{py} \cdot d} + \frac{K_x M_x^*}{W_{px} \cdot d} \quad (3.10)$$

Sendo:

$$M_y^* = (M_{Sdy} - M_{uy}^*) \geq 0 \quad (3.11)$$

$$M_x^* = (M_{Sdx} - M_{ux}^*) \geq 0 \quad (3.12)$$

Onde:

$F_{sd}$  é a força ou reação do apoio;

$u^*$  é o perímetro do crítico reduzido;

$M_{Sdy}$  e  $M_{Sdx}$  são os momentos de cálculo;

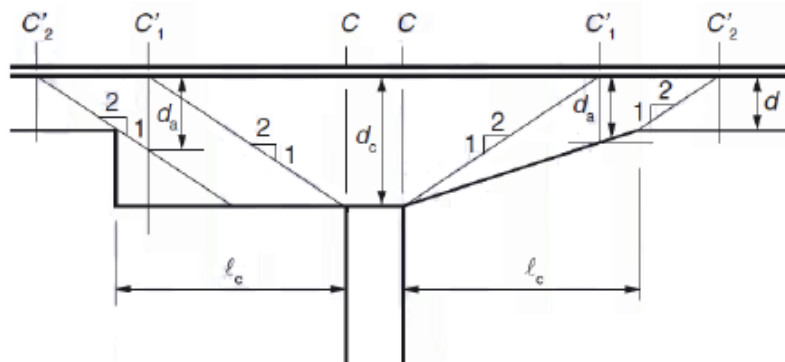
$M_{ux}^*$  e  $M_{uy}^*$  são os momentos de cálculo resultantes da excentricidade do perímetro crítico reduzido  $u$  em relação aos eixos  $x$  e  $y$  passando pelo centro do pilar;

$W_{px}$  e  $W_{py}$  são os módulos de resistência plástica nas direções  $x$  e  $y$ , ambos calculados para o perímetro  $u$ .

### 3.1.2 Uso de Capitéis

Com a finalidade de aumentar a capacidade resistente ao cisalhamento, é possível fazer uso de capitéis. Assim, quando utilizar o capitel, conforme indica a NBR 6118 (2014), deve-se fazer verificações adicionais, considerando dois novos contornos críticos  $C1'$  e  $C2'$ , conforme representado pela Figura 15

Figura 15 - Altura útil no caso de capitel



Fonte: NBR 6118 (2014)



Onde:

$d$  é a altura útil da laje no contorno  $C_2'$ ;

$d_c$  é a altura útil da laje na face do pilar;

$d_a$  é a altura útil da laje no contorno  $C_1'$ ;

$l_c$  é a distância entre a borda do capitel e a face do pilar.

A avaliação da punção em lajes com capitel se faz de forma análoga aos casos de lajes sem a presença de capitel. Para o caso de lajes com capitel, deve-se determinar a posição de cada perímetro crítico, a sua altura útil e verificar a necessidade de avaliação desses perímetros críticos de acordo com os critérios a seguir:

$l_c \leq 2(d_c - d) \Rightarrow$  basta verificar o contorno  $C_2'$ ;

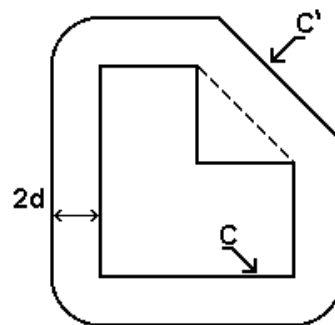
$2(d_c - d) < l_c \leq 2d_c \Rightarrow$  basta verificar o contorno  $C_1'$ ;

$l_c > 2d_c \Rightarrow$  é necessário verificar os contornos  $C_1'$  e  $C_2'$ .

### 3.1.3 Casos especiais de definição da superfície de contorno crítico

Segundo a NBR 6118 (2014) se o contorno  $C$  apresentar reentrâncias, o contorno crítico  $C'$  deve ser paralelo ao polígono circunscrito ao contorno  $C$ , conforme é representado na Figura 16.

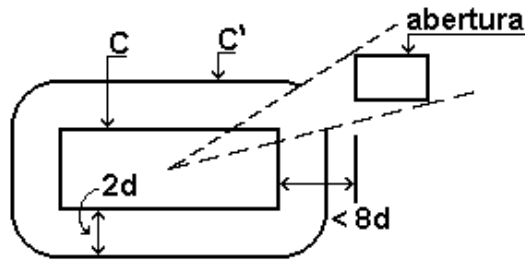
Figura 16 - Perímetro crítico no caso do contorno  $C$  apresentar reentrância



Fonte: NBR 6118 (2014)

Se existir na laje uma abertura, conforme mostra a Figura 17, situada a menos de  $8d$  do contorno  $C$ , não será considerado o trecho do contorno crítico  $C'$  entre as duas retas que passam pelo centro de gravidade da área de aplicação da carga e tangenciam o contorno da abertura.

Figura 17 - Perímetro crítico junto a abertura na laje



Fonte: NBR 6118 (2014)

### 3.1.4 Tensões Resistentes nas Superfícies Críticas

Nas sessões anteriores, foram definidas as tensões solicitantes de cisalhamento para as variadas posições relativas dos pilares na laje. De modo a garantir a segurança estrutural, é preciso verificar se essas tensões solicitantes são menores que a tensão resistente.

#### 3.1.4.1 Tensão resistente de compressão diagonal do concreto (Superfície C)

Essa verificação deve ser feita no contorno  $C$ , em lajes submetidas a punção, com ou sem armadura. A tensão de cisalhamento que leva a seção crítica à plastificação, para momentos e força axial atuantes, deve ser comparada com a tensão resistente do concreto sob compressão diagonal, ou seja:

$$\tau_{Sd} \leq \tau_{Rd2} = 0,27\alpha_v f_{cd} \quad (3.13)$$

Onde:

$$\alpha_v = \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right) \quad (3.14)$$

Sendo:

$\alpha_v$  é o fator de correção da resistência do concreto;

$f_{cd}$  é a resistência de cálculo do concreto à compressão (MPa);

$f_{ck}$  é a resistência característica à compressão do concreto

A norma NBR 6118 (2014) ainda comenta que o valor de  $\tau_{Rd2}$  pode ser ampliado de 20 % por efeito de estado múltiplo de tensões junto a um pilar interno, quando os vãos que chegam a esse pilar não diferem mais de 50 % e não existem aberturas junto ao pilar.

Se a verificação no contorno C não for atendida, pode-se aumentar a espessura da laje na região com o auxílio de capitéis, aumentar as dimensões do pilar ou ainda aumentar o  $f_{ck}$  do concreto.

#### 3.1.4.2 Tensão resistente na superfície crítica C'

##### a) Trecho sem armadura de punção

Essa verificação deve ser feita em elementos estruturais ou trechos sem armadura de punção, a tensão resistente crítica C' deve ser calculada:

$$\tau_{Sd} \leq \tau_{Rd1} = 0,13 \left( 1 + \sqrt{20/d} \right) (100\rho f_{ck})^{\frac{1}{3}} + 0,10\sigma_{cp} \quad (3.15)$$

Sendo:

$$\rho = \sqrt{\rho_x \rho_y} \quad (3.16)$$

$$d = \frac{(d_x + d_y)}{2} \quad (3.17)$$

Onde:

$\sigma_{cp}$  é a tensão normal no concreto devida à protensão

$d$  é a altura útil da laje ao longo do contorno crítico C' da área de aplicação da força, em centímetros;

$\rho$  é a taxa geométrica de armadura de flexão aderente (armadura não aderente deve ser desprezada);

$\rho_x$  e  $\rho_y$  são as taxas de armadura nas duas direções ortogonais assim calculadas:

- Na largura igual à dimensão ou área carregada do pilar acrescida de 3d para cada um dos lados;
- No caso de proximidade da borda, prevalece a distância até a borda, quando menor que 3d.

Na existência de capitel, esta verificação deve ser realizada nos contornos críticos  $C_1'$  e  $C_2'$ .

b) Trecho com armadura de punção

No caso de elementos estruturais ou trechos com armadura de punção, a tensão resistente crítica  $C'$  deve ser calculada como se segue:

$$\tau_{sd} \leq \tau_{Rd3} = 0,10 \left( 1 + \sqrt{20/d} \right) (100\rho fck)^{\frac{1}{3}} + 0,10\sigma_{cp} + 1,5 \frac{d}{S_r} \frac{A_{sw} f_{ywd} \sin \alpha}{ud} \quad (3.18)$$

Onde:

$S_r$  é o espaçamento radial entre linhas de armadura de punção, não maior que 0,75d;

$A_{sw}$  é a área da armadura de punção em um contorno completo paralelo a  $C'$ ;

$\alpha$  é o ângulo de inclinação entre o eixo da armadura de punção e o plano da laje;

$f_{ywd}$  é a resistência de cálculo da armadura de punção, não maior que 300 MPa para conectores ou 250MPa para estribos de aço CA-50 ou CA-60.

$u$  é o perímetro crítico ou perímetro crítico reduzido no caso de pilares de borda ou de canto.

A NBR 6118 (2014) ainda especifica que, no caso de lajes com espessura maior que 15cm, os valores de  $f_{ywd}$  podem ser aumentados. Para lajes com espessura até 15cm, é considerado o valor de 250 MPa e, para lajes com espessura maior que 35cm, é considerado o valor de 435MPa. Para quaisquer valores entre 15cm e 35cm, deve ser feita interpolação linear.

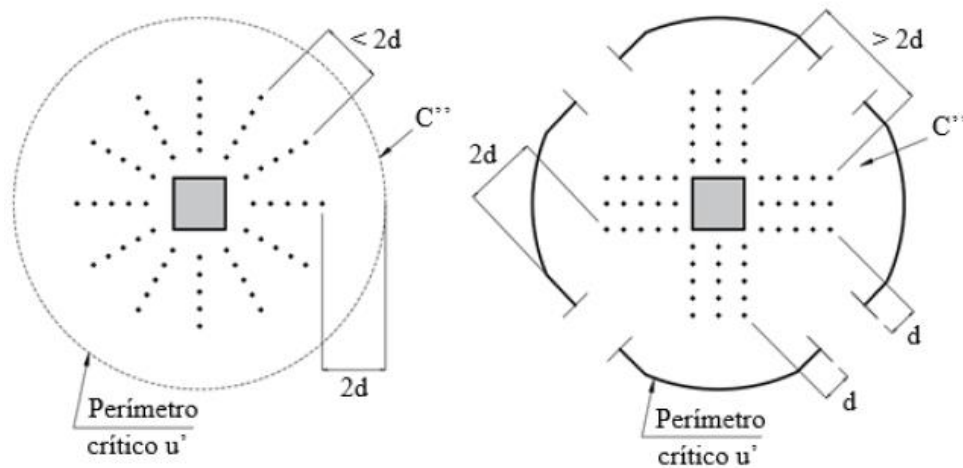
Ainda segundo NBR 6118 (2014) a armadura determinada deve conter três ou mais linhas de conectores tipo pino com extremidade alargada, dispostas radialmente a partir do

perímetro do pilar. Cada extremidade deve estar ancorada fora do plano da armadura de flexão correspondente.

### 3.1.5 Definição da superfície crítica $C''$

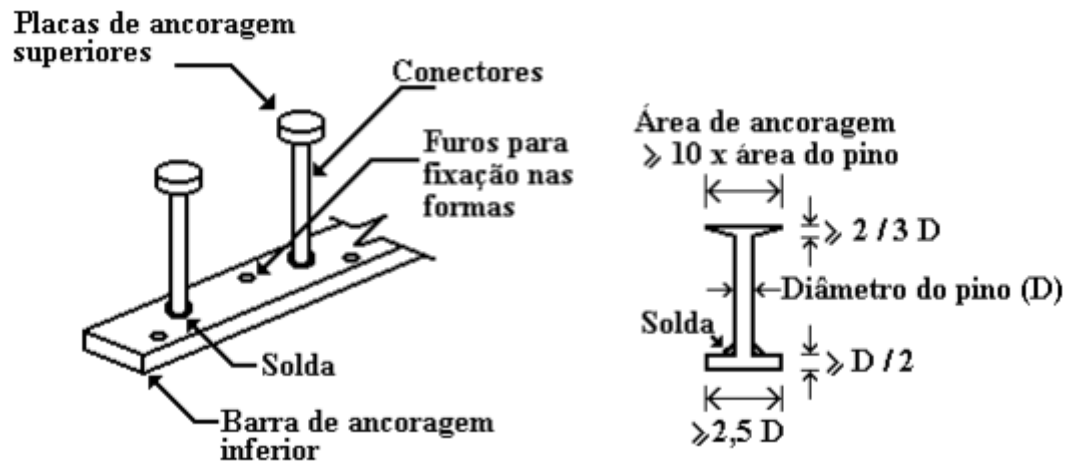
Quando for necessário utilizar armadura transversal, ela deve ser estendida em contornos paralelos a  $C'$  até que, em um contorno  $C''$  afastado  $2d$  do último contorno de armadura, não seja mais necessária armadura, isto é,  $\tau_{Sd} \leq \tau_{Rd1}$ . A norma sugere uma distribuição de armadura de punção conforme mostra a Figura 18.

Figura 18 - Disposição da armadura de punção em planta



Fonte: NBR 6118 (2014)

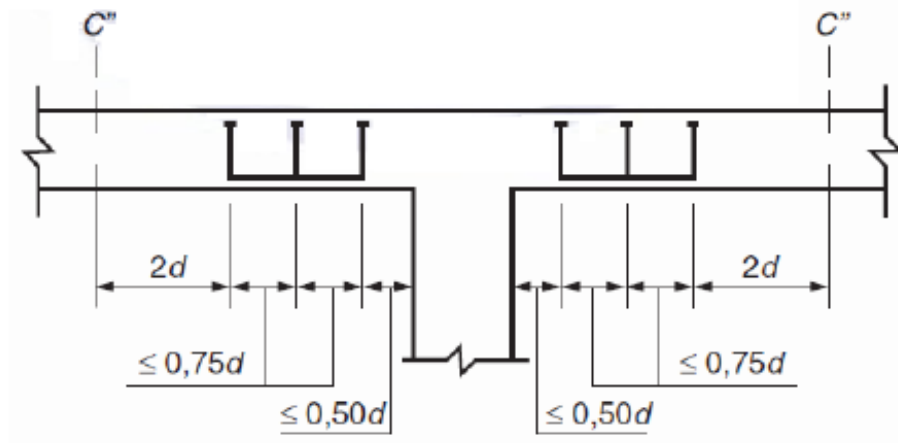
Segundo recomendações da NBR6118 (2014), quando necessárias, as armaduras para resistir à punção devem ser constituídas por estribos verticais ou conectores (*studs*), com preferência pela utilização destes últimos. O diâmetro da armadura de estribos não pode superar  $h/20$  da laje e deve haver contato mecânico das barras longitudinais com os cantos dos estribos.

Figura 19 - Armadura de punção tipo *studs*

Fonte: MELGES (1995)

A Figura 20 apresenta a disposição da armadura transversal na ligação laje-pilar. Deve-se atentar aos espaçamentos mínimos entre as linhas de conectores e entre o pilar e o início da disposição da armadura, estabelecidos pela norma brasileira.

Figura 20 - Disposição da armadura de punção em corte



Fonte: NBR 6118 (2014)

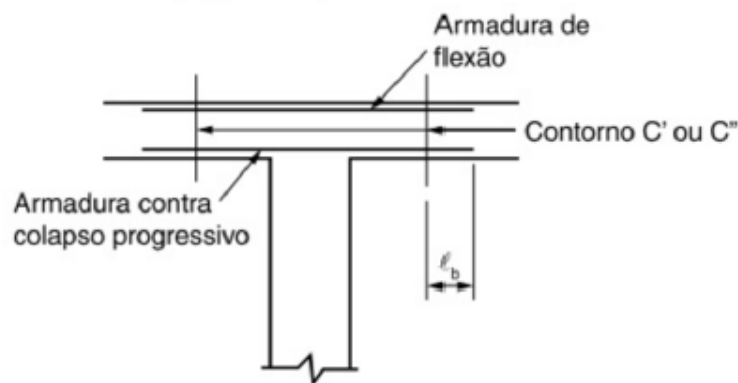
### 3.1.6 Armadura de Punção Obrigatória

Segundo a NBR 6118 (2014) se a estabilidade global da estrutura depender da resistência da laje à punção, deve ser prevista armadura de punção, mesmo que  $\tau_{Sd} \leq \tau_{Rd1}$ . Essa armadura deve equilibrar um mínimo de 50% de  $F_{Sd}$ .

### 3.1.7 Colapso Progressivo

A norma NBR 6118 (2014) ainda diz que para garantir a ductilidade local e proteger a estrutura contra o colapso progressivo, a armadura de flexão inferior que atravessa o contorno  $C$  deve ser empregada em todos os pilares em que há caracterização de puncionamento, conforme ilustra a Figura 20.

Figura 20 - Armadura contra colapso progressivo



Fonte: NBR 6118 (2014)

Assim, essa armadura deve ser ancorada além do contorno  $C'$  ou  $C''$ , de um comprimento de ancoragem  $l_b$ , e deve ser tal que:

$$f_{yd} \cdot A_{sd,ccp} \geq 1,5 F_{sd} \quad (3.19)$$

Onde:

$A_{sd,ccp}$  é o somatório de todas as áreas das barras inferiores que cruzam cada uma das faces do pilar;

$F_{sd}$  pode ser calculado com  $\gamma_f$  igual a 1,2

Ainda segundo a norma NBR 6118 (2014), no item 20.3.2.6, prevê que no caso da utilização de armaduras de protensão na estrutura, é possível dispensar a armadura passiva contra colapso progressivo, desde que, em cada direção ortogonal, pelo menos um cabo passe pelo interior da armadura longitudinal presente na seção transversal dos pilares ou elementos de apoio das lajes lisas.

### 3.1.8 Informações adicionais

Devido a generalização das verificações imposta pela norma brasileira, algumas formulações adicionais são necessárias para o completo dimensionamento contra o efeito de punção, sendo eles a determinação das excentricidades, os perímetros críticos e os módulos de resistência plástica para os diferentes perímetros de controle. Tendo como referência o trabalho de Ferreira (2005), são apresentados comentários e exemplos de aplicação da norma, onde são definidas expressões para esses parâmetros:

- **Pilar Interno com Carregamento Simétrico:**

O cálculo dos perímetros do contorno crítico  $C$ ,  $C'$  e  $C''$ , e para pilares retangulares e contidas na Tabela 2:

Tabela 2 - Perímetros Críticos

Contorno	$u$ – para pilares retangulares	$u$ – para pilares circulares
$C$	$u = 2.(c_1 + c_2)$	$u = \pi.2.r$
$C'$	$u = 2.(c_1 + c_2) + 4.\pi.d$	$u = \pi.2.r'$
$C''$	$u = 2.(c_1 + c_2) + 4.\pi.d + 2.\pi.i$	$u = \pi.2.r''$

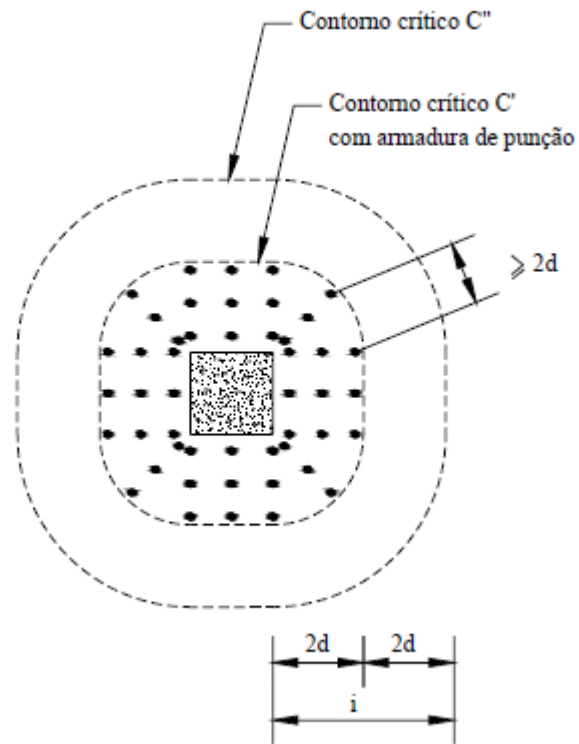
Fonte: GUARDA (2012)

Onde:

- $C_1$  e  $C_2$ : são as dimensões do respectivo pilar;
- $i$ : é a distância da face do pilar até a última linha de conectores, conforme a Figura 21.

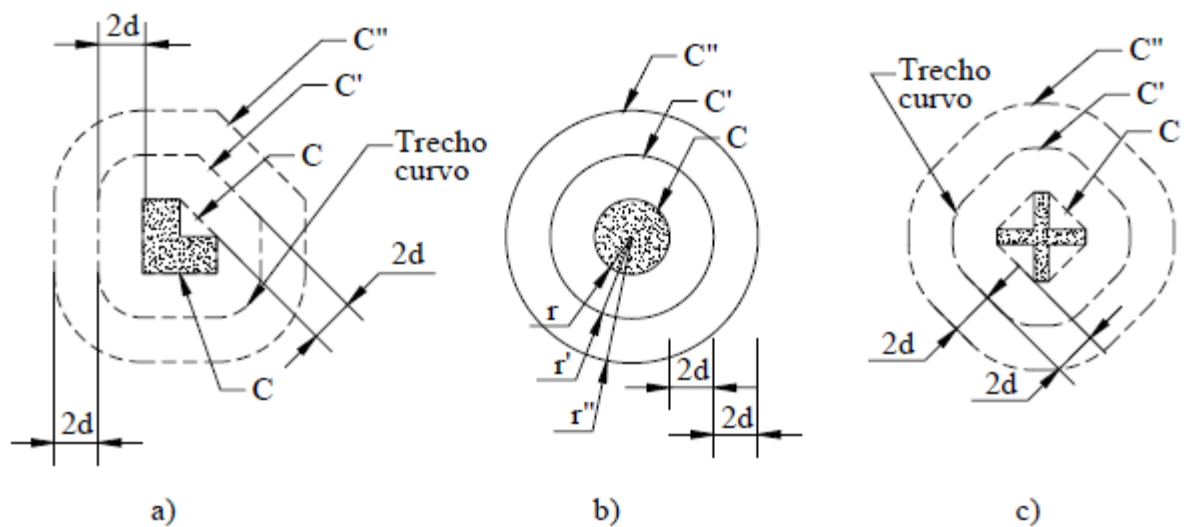


Figura 21 - Distância da face do pilar até última linha de conectores



Fonte: FERREIRA (2005)

Figura 22 - Perímetro crítico para pilares de seção circular e para alguns casos



Fonte: FERREIRA (2005)

- **Pilar Interno com efeito de momento fletor em uma das direções ou nas duas direções:**

Para pilares internos e de seção retangular, o momento resistência plástico ( $W_p$ ) pode ser determinado pelas expressões contidas na Tabela 3:

Tabela 3 - Expressões de  $W_p$  para pilares internos de seção retangular

Contorno	$W_p$
C	$W_p = \frac{C_1^2}{2} + C_1.C_2$
C'	$W_p = \frac{C_1^2}{2} + C_1.C_2 + 4.C_2.d + 16.d^2 + 2.\pi.d.C_1$
C''	$W_p = \frac{C_1^2}{2} + C_1.C_2 + 4.C_2.d + 16.d^2 + 2.\pi.d.C_1 + 2.C_2.i + 16.d.i + 4.i^2 + \pi.C_1.i$

Fonte: FERREIRA (2005)

- **Pilar de borda**

Para o caso de pilares de borda, duas situações devem ser verificadas: uma delas é quando não agir momento fletor no plano paralelo à borda livre e a outra é quando existir momento fletor nas duas direções.

- **Pilares de borda quando não age momento fletor no plano paralelo à borda livre**

Neste caso, o cálculo dos perímetros do contorno crítico C, C' e C'' estão nas formulações contidas na Tabela 4:

Tabela 4 - Perímetros críticos

Contorno	$u^*$ – para pilares retangulares
C	$u^* = 2.a + C_2$
C'	$u^* = 2.a + C_2 + 2.\pi.d$
C''	$u^* = 2.a + C_2 + 2.\pi.d + \pi.i$

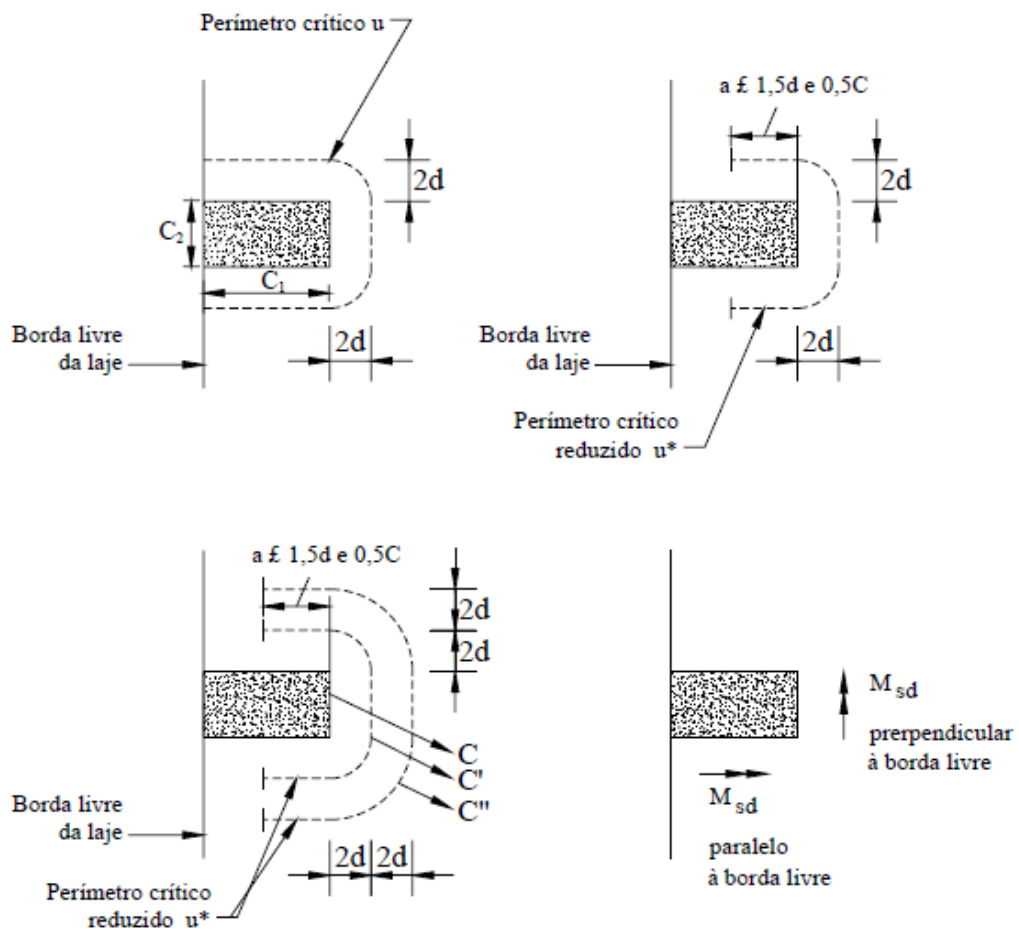
Fonte: FERREIRA (2005)

Onde:

-  $a$  : é o menor valor entre  $1,5d$  ou  $0,5.C_1$ ;

-  $i$  : é a distância da face do pilar até a última linha de conectores, conforme já visto na Figura 21.

Figura 23 - Perímetro crítico e perímetro crítico reduzido em pilares de borda



Fonte: FERREIRA (2005)

Para o caso de pilares de borda e canto é necessário calcular a resultante da excentricidade do perímetro crítico reduzido  $u^*$  em relação ao centro do pilar, no plano perpendicular à borda livre. No caso de pilares de borda a excentricidade é calculada a partir das expressões na Tabela 5:

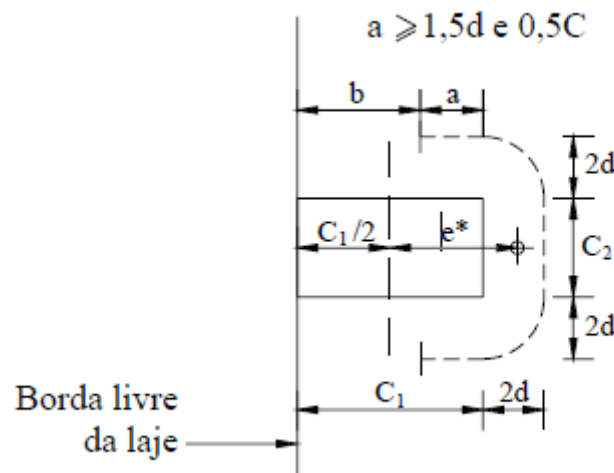
Tabela 5 - Excentricidade dos perímetros críticos reduzidos para pilares de borda de seção retangular

Contorno	$E^*$ – para pilares retangulares
C	$e^* = \frac{C_1 \cdot a - a^2 + \frac{C_1 \cdot C_2}{2}}{2 \cdot a + C_2}$
C'	$e^* = \frac{C_1 \cdot a - a^2 + \frac{C_1 \cdot C_2}{2} + 2 \cdot C_2 \cdot d + 8 \cdot d^2 + \pi \cdot d \cdot C_1}{2 \cdot a + C_2 + 2 \cdot \pi d}$
C''	$e^* = \frac{C_1 \cdot a - a^2 + \frac{C_1 \cdot C_2}{2} + 2 \cdot C_2 \cdot d + 8 \cdot d^2 + \pi \cdot d \cdot C_1 + C_2 \cdot i + 8 \cdot d \cdot i + \frac{\pi \cdot i \cdot C_1}{2} + 2 \cdot i^2}{2 \cdot a + C_2 + 2 \cdot \pi d + \pi \cdot i}$

Fonte: FERREIRA (2005)

Na Figura 24 mostra uma representação da excentricidade do perímetro crítico reduzido para o contorno C', em pilares de borda

Figura 24 - Excentricidade do perímetro crítico reduzido para o contorno C'



Fonte: FERREIRA (2005)

O módulo de resistência plástica ( $W_p$ ) para pilares de borda de seção retangular, podem ser determinados pelas expressões das Tabelas 6 e 7:

Tabela 6 - Módulo de resistência plástica para pilares de borda de seção retangular sem momento paralelo à borda livre

Contorno	$W_{p1}$
C	$W_{p1} = \frac{C_1^2}{2} + \frac{C_1.C_2}{2}$
C'	$W_{p1} = \frac{C_1^2}{2} + \frac{C_1.C_2}{2} + 2.C_2.d + 8.d^2 + \pi.d.C_1$
C''	$W_{p1} = \frac{C_1^2}{2} + \frac{C_1.C_2}{2} + 2.C_2.d + 8.d^2 + \pi.d.C_1 + C_2.i + 8.d.i + \frac{\pi.i.C_1}{2} + 2.i^2$

Fonte: FERREIRA (2005)

Tabela 7 - Módulo de resistência plástica para pilares de borda de seção retangular com momento paralelo à borda livre

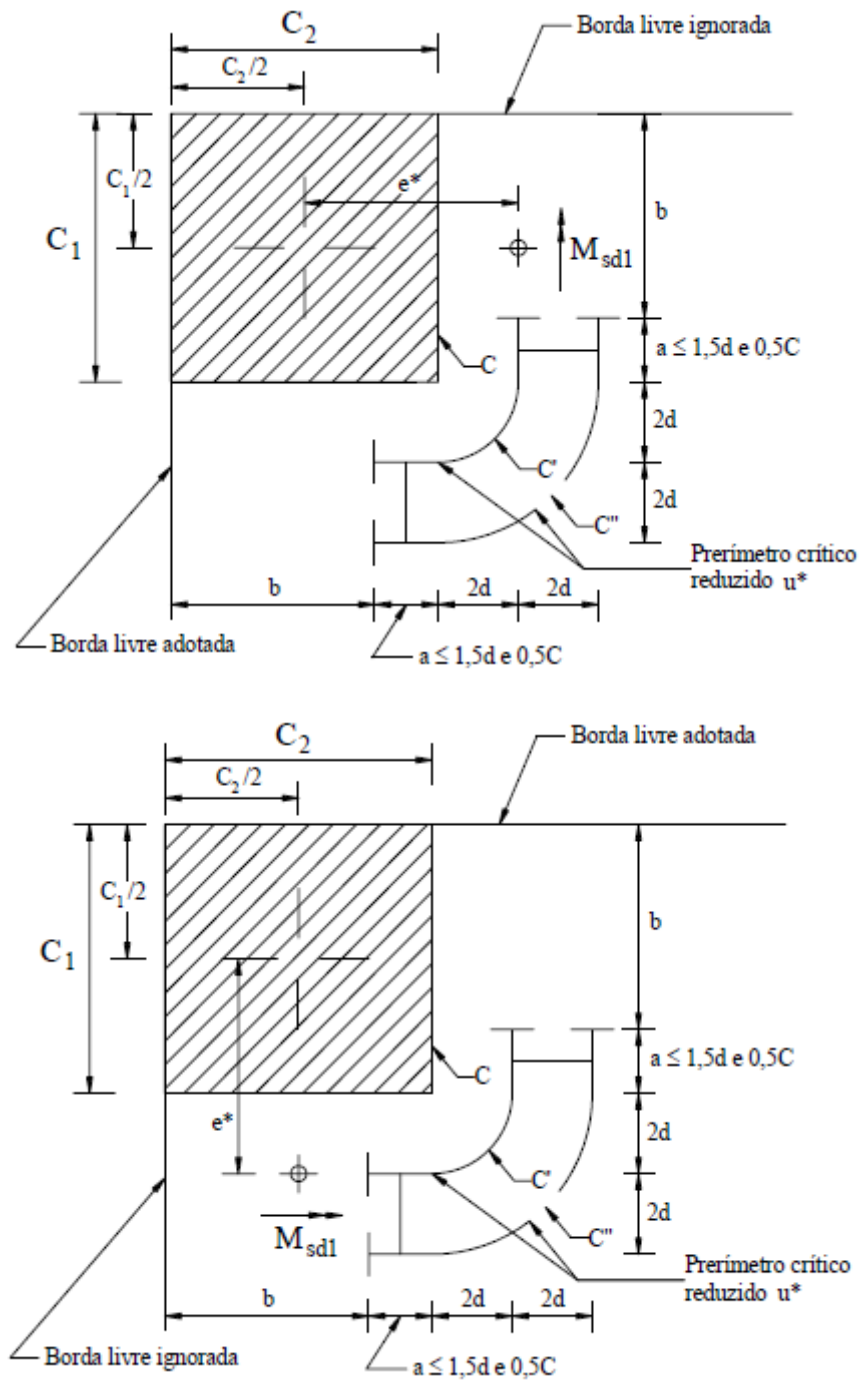
Contorno	$W_{p2}$
C	$W_{p2} = \frac{C_2^2}{4} + C_1.C_2$
C'	$W_{p2} = \frac{C_2^2}{4} + C_1.C_2 + 4.C_1.d + 8.d^2 + \pi.d.C_2$
C''	$W_{p2} = \frac{C_2^2}{4} + C_1.C_2 + 4.C_1.d + 8.d^2 + \pi.d.C_2 + 2.C_1.i + 8.d.i + \frac{\pi.i.C_2}{2} + 2.i^2$

Fonte: FERREIRA (2005)

- **Pilar de canto**

Para o pilar de canto, são feitas verificações separadas para cada uma das direções, considerando o momento fletor cujo plano é perpendicular à borda livre adotada, conforme a Figura 25

Figura 25 – Situações de consideração de momentos para cálculo de pilares de canto



O perímetro crítico reduzido  $u^*$  pode ser determinado pelas expressões contidas na Tabela 8:

Tabela 8 - Perímetros críticos para pilares de borda

Contorno	$u^*$ – para pilares retangulares
C	$u^* = a_1 + a_2$
C'	$u^* = a_1 + a_2 + \pi \cdot d$
C''	$u^* = a_1 + a_2 + \pi \cdot d + (\pi \cdot i) / 2$

Fonte: FERREIRA (2005)

E como mencionado anteriormente, também no caso de pilares de canto, deve-se calcular a excentricidade para cada momento fletor perpendicular atuante na borda do pilar de canto. Conforme mostra a Tabela 9:

Tabela 9 - Excentricidade dos perímetros críticos reduzidos para pilares de canto de seção retangular

Contorno	$e^*$ – para pilares de seção retangular
C	$e^* = \frac{C_1 \cdot a_1 - a_1^2 + a_2 \cdot C_1}{2 \cdot (a_1 + a_2)}$
C'	$e^* = \frac{C_1 \cdot a_1 - a_1^2 + a_2 \cdot C_1 + 4 \cdot a_2 \cdot d + 8 \cdot d^2 + \pi \cdot d \cdot C_1}{2 \cdot (a_1 + a_2 + \pi \cdot d)}$
C''	$e^* = \frac{C_1 \cdot a_1 - a_1^2 + a_2 \cdot C_1 + 4 \cdot a_2 \cdot d + 8 \cdot d^2 + \pi \cdot d \cdot C_1 + 2 \cdot a_2 \cdot i + 8 \cdot d \cdot i + \frac{\pi \cdot i \cdot C_1}{2} + 2 \cdot i^2}{2 \cdot (a_1 + a_2 + \pi \cdot d + \frac{\pi \cdot i}{2})}$

Fonte: FERREIRA (2005)

O módulo de resistência plástica  $W_{p1}$  pode ser determinado pelas expressões contidas na Tabela 10:

Tabela 10 - Módulo de resistência plástica para pilares de canto de seção

Contorno	$W_{p2}$
C	$W_{p1} = \frac{C_1^2}{4} + \frac{C_1 \cdot C_2}{2}$
C'	$W_{p1} = \frac{C_1^2}{4} + \frac{C_1 \cdot C_2}{2} + 2 \cdot C_2 \cdot d + 4 \cdot d^2 + \frac{\pi \cdot d \cdot C_1}{2}$
C''	$W_{p1} = \frac{C_1^2}{4} + \frac{C_1 \cdot C_2}{2} + 2 \cdot C_2 \cdot d + 4 \cdot d^2 + \frac{\pi \cdot d \cdot C_1}{2} + C_2 \cdot i + 8 \cdot d \cdot i + \frac{\pi \cdot i \cdot C_1}{4} + i^2$

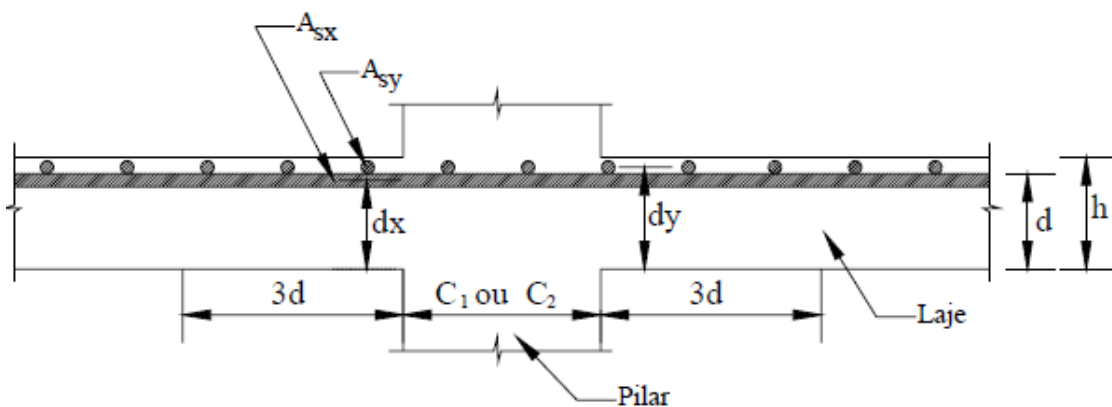
Fonte: FERREIRA (2005)

- Taxa de Armadura ( $\rho$ )

A taxa de armadura ( $\rho$ ) pode ser determinada pela à dimensão ou área da seção do pilar carregado, acrescida  $3d$  para cada um dos lados. Quanto ao pilar de borda ou de canto, prevalece a distância até a borda, quando essa for menor que  $3d$ . A Figura

$$\rho_x = \frac{A_{sx}}{d \cdot (y + 2 \cdot (3 \cdot d))} \quad (3.20)$$

$$\rho_y = \frac{A_{sy}}{d \cdot (x + 2 \cdot (3 \cdot d))} \quad (3.21)$$

Figura 26 - Definição da região para cálculo de  $\rho_x$  e  $\rho_y$ , e da altura útil  $d$ 

Fonte: FERREIRA (2005)



## 4 ESTUDO DE CASO

Este trabalho visa dimensionar um pavimento de edifício com o sistema estrutural de lajes lisas considerando seu comportamento em relação à punção. Para fazer uma aplicação direta das verificações do modelo de cálculo da NBR 6118 (2014), apresentadas no capítulo 3, considerou-se um projeto de edifício residencial em que há ligações diretas entre a laje e os pilares, semelhante ao apresentado por Zigoski (2016).

O edifício foi escolhido por se tratar de um caso real de lajes lisas, aproximando a execução desta análise a uma problemática típica. Este estudo foi feito variando a espessura da laje e conseqüentemente a necessidade ou não de armadura de punção, sendo assim possível avaliar qual solução seria mais vantajosa, assim tendo como efeito de comparação e análise dos resultados.

No estudo foram analisadas todas as posições de pilares previstas na norma, sendo um pilar de centro, pilar de borda e pilar de canto. O estudo foi realizado com quatro espessuras diferentes, 30, 25, 20 e 18cm.

A consideração foi de um  $f_{ck}$  de projeto de 30 MPa e com um cobrimento de 3cm, com dimensões dos preenchimentos das lajes nervuradas de dimensões de 40x40x25cm e as áreas adjacentes da laje maciça em torno dos pilares P28, P43 e P44 são:

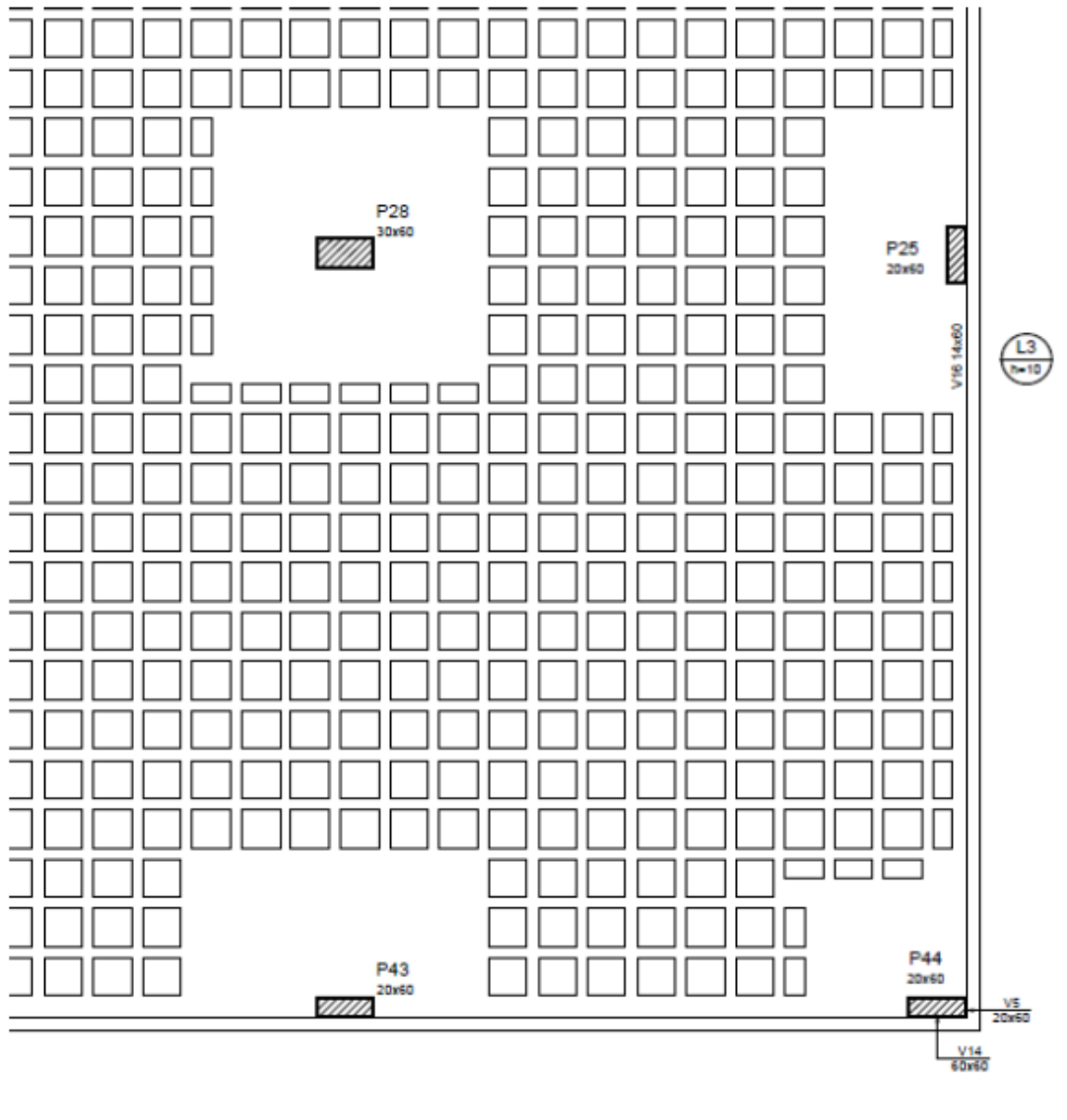
- **Pilar 28:** 2,8 x 2,8m;
- **Pilar 43:** 2,8 x 1,8m;
- **Pilar 44:** 1,8 x 1,8m

Para cada espessura de laje analisada, foram fornecidos todos os esforços atuantes, as reações atuantes na laje e a reação nos apoios, junto com momentos de cálculo para cada pilar estudado. Todos estes valores foram determinados por analogia ao estudo de Zigoski (2016).

### 4.1 PLANTA DE FORMA DA LAJE DO PROJETO ESTRUTURAL

O desenho do pavimento tipo utilizado considera uma laje nervurada com regiões maciças próximas aos pilares. Na Figura 21 abaixo está apresentada parte da laje em que se encontram os pilares escolhidos para o estudo

Figura 27 - Planta de forma da laje adotada para estudo



Fonte: ZIGOSKI (2016)

Como mostra a Figura 21 o pavimento foi projetado com vigas em todo o contorno da laje, o que garante a estrutura maior estabilidade lateral, usando as vigas como elementos de travamento da estrutura. Porém para fins de análise e verificação da laje à punção, estas vigas foram desconsideradas na análise.

#### 4.2 REAÇÕES E MOMENTOS DOS PILARES NA LAJE

Considerando o projeto base os valores de reações e momentos atuantes em cada pilar foram readequados a este estudo e seguem apresentados nas Tabelas 11 e 12

Tabela 11 - Reações concentradas de cálculo

ESPESSURA DA LAJE (cm)	PILAR 28 (30x60)			PILAR 43 (20x60)			PILAR 44 (20x60)		
	Reação		Fsd	Reação		Fsd	Reação		Fsd
	tf	kN	kN	tf	kN	kN	tf	kN	kN
30	65,32	640,14	896,20	31,28	306,54	429,16	8,30	81,32	113,85
25	57,96	568,01	795,21	30,36	297,53	416,54	5,11	50,04	70,05
20	52,44	513,91	719,48	29,44	288,51	403,92	4,14	40,57	56,80
18	56,00	548,80	768,32	32,00	313,60	439,04	4,16	40,77	57,08

Fonte: AUTOR (2019)

Tabela 12 - Momentos de cálculo transferidos aos pilares

ESPESSURA DA LAJE (cm)	PILAR 28 (30x60)		PILAR 43 (20x60)		PILAR 44 (20x60)	
	Momento		Momento		Momento	
	Mx (kN.cm)	My (kN.cm)	Mx (kN.cm)	My (kN.cm)	Mx (kN.cm)	My (kN.cm)
30	1769,16	5258,72	2667,08	1442,56	563,04	3730,60
25	1484,88	5524,60	3087,52	1849,20	356,04	3929,32
20	2212,60	3941,28	3524,52	2403,96	508,76	4161,16
18	2707,00	6450,00	4031,00	2960,00	718,00	4643,00

Fonte: AUTOR (2019)

### 4.3 ARMADURAS DA LAJE DE ESTUDO

O projeto base fornece a quantidade de armadura negativa para as regiões maciças próximas dos pilares, como segue na Tabela 13

Tabela 13 - Armadura negativa nas regiões dos pilares

Pilar	Armaduras	
	Direção	
	x	y
PILAR 28 (30x60)	∅ 20 c/ 6 cm	∅ 16 c/ 6 cm
PILAR 43 (20x60)	∅ 16 c/ 6 cm	∅ 16 c/ 11 cm
PILAR 44 (20x60)	∅ 16 c/ 8 cm	∅ 16 c/ 10 cm

Fonte: AUTOR (2019)

## 5 VERIFICAÇÃO À PUNÇÃO

Nessa verificação, foi realizado os cálculos sugeridos pela norma brasileira NBR 6118/2014 quanto à resistência da ligação laje-pilar ao efeito de punção, considerando a altura da região maciça da laje variando de 18, 20, 25 e 30 cm, bem como as três variações de posições dos pilares.

De acordo com o método já citado da NBR 6118 (2014) os esforços de punção devem ser avaliados nas sessões  $C$  e  $C'$ , obedecendo às equações quando a punção for simétrica, considerando carga centrada ou quando a punção for assimétrica, ou seja, atuam momentos fletores juntos ao pilar.

Em todos os casos as superfícies críticas  $C$  e  $C'$  irão variar, já que todos os pilares apresentam diferentes seções e variação da altura útil. Logo abaixo será descrito a verificação dos três pilares P28, P43 e P44 em relação à punção.

### 5.1 PILAR DE CENTRO P28

O pilar P28 possui como dimensões  $C_1 = 30$  cm e  $C_2 = 60$  cm, um  $f_{ck}$  de projeto de 30 MPa e cobrimento de 3cm, que foram utilizados para todos os cálculos dos pilares. A seguir, nas Tabelas 14 mostram o resumo dos esforços atuantes no pilar do pilar P28.

Tabela 14 - Esforços atuantes no pilar 28

Espessura da laje (cm)	Carga no pilar P28			
	Esforços	Fsd	Msd1	Msd2
	Direção	-	x	y
30		896,196	1769,2	5258,72
25		795,2112	1484,9	5524,6
20		719,4768	2212,6	3941,28
18		768,32	2707,0	6450

Fonte: AUTOR (2019)

Devido a variação da espessura de laje, cada altura útil “d” foi calculada conforme a Equação 3.2, em relação a cada direção do pilar. Assim, para a espessura da laje de 30 cm com um cobrimento superior de 3 cm:

-  $A_{sx}$  superior “x”: Ø 20 mm

-  $A_{sy}$  superior “y”: Ø 12,50 mm

$$d_x = h_{laje} - \left( c_{superior} + \frac{\varphi_{principal}}{2} \right) = 30 - \left( 3 + \frac{2,0}{2} \right) = 26 \text{ cm}$$

$$d_y = h_{laje} - \left( c_{sup} + \varphi_{principal} + \frac{\varphi_{secundário}}{2} \right) = 30 - \left( 3 + 2, + \frac{1,6}{2} \right) = 24,2 \text{ cm}$$

$$d = \left( \frac{d_x + d_y}{2} \right) = \left( \frac{26 + 24,2}{2} \right) = 25,1 \text{ cm}$$

Cada superfície crítica foi determinada a partir das equações mostradas na Tabela 2. Os resumos dos cálculos são mostrados na Tabela 15. Segue abaixo um exemplo para a espessura da laje de 30 cm, sendo  $C_1 = 30$  cm e  $C_2 = 60$  cm.

Contorno C  $u = 2 (30 + 60) = 180 \text{ cm}$

Contorno C'  $u' = 2 \cdot (30 + 60) + 4 \cdot \pi \cdot 25,1 = 495,42 \text{ cm}$

Contorno C''  $u'' = 2 \cdot (30 + 60) + 4 \cdot \pi \cdot 25,1 + 2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 25,1 = 810,83 \text{ cm}$

Tabela 15 - Características do pilar P28

Espessura da laje (cm)	Altura útil			Superfícies Críticas		
	$dx$ (cm)	$dy$ (cm)	$d$ (cm)	Superfície C (cm)	Superfície C' (cm)	Superfície C'' (cm)
30	26	24,2	25,1	180	495,42	810,83
25	21	19,2	20,1	180	432,58	685,17
20	16	14,2	15,1	180	369,75	559,50
18	14	12,2	13,1	180	344,62	509,24

Fonte: AUTOR (2019)

### 5.1.1 Tensão resistente e solicitante no contorno C (Pilar P28)

- **Tensão Resistente (contorno C):** Pela a Equação (3.13) determinamos:

$$\tau_{sd} \leq \tau_{Rd2} = 0,27\alpha_v f_{cd}$$

$$\tau_{sd} = 0,27 \cdot \left(1 - \frac{30}{250}\right) \cdot \frac{30}{1,4} = 5,09 \text{ MPa}$$

- **Tensão solicitante (contorno C):**

O cálculo da tensão solicitante deve ser obtido através da Equação 3.3 adaptada para as duas direções x e y:

$$\tau_{sd} = \frac{F_{sd}}{u \cdot d} + \frac{K_1 M_{sd1}}{W_{p1} \cdot d} + \frac{K_2 M_{sd2}}{W_{p2} \cdot d}$$

Mas antes do cálculo da tensão atuante no contorno da região C, equivalente ao perímetro do pilar, é necessário conhecer os valores os módulos de resistência plástica  $W_{p1}$  e  $W_{p2}$ , dispostos na Tabela 3, que são demonstrados pelas equações dispostas na Tabela 3.

Com a atuação de momentos fletores nas duas direções do pilar, é recomendado calcular o modulo de resistência plástica para cada direção x e y. Logo abaixo segue um exemplo de cálculo dos módulos de resistência plástica  $W_{p1}$  e  $W_{p2}$ , para a espessura da laje de 30 cm

$$W_{p1} = \frac{C_1^2}{2} + C_1 C_2 = \frac{30^2}{2} + 30 \cdot 60 = 2250 \text{ cm}^2$$

$$W_{p2} = \frac{C_2^2}{2} + C_1 C_2 = \frac{60^2}{2} + 30 \cdot 60 = 3600 \text{ cm}^2$$

Assim na Tabela 16 mostra o resumo dos cálculos dos módulos de resistência

Tabela 16 - Módulos de Resistencia Plástica (W)

<i>Módulo de Resistência Plástica (W)</i>					
<i>Direção</i>	<i>Coefficiente K</i>		<i>Valores de Wp</i>		
x	0,5	0,45	Wp1	2250	cm <sup>2</sup>
y	2	0,7	Wp2	3600	cm <sup>2</sup>

Fonte: AUTOR (2019)

Mas para o cálculo da tensão atuante, é preciso saber o valor do coeficiente K, conforme mostra a Tabela 16, que fornece a parcela de momento transmitida ao pilar por cisalhamento, que depende da relação  $C_1/C_2$ , e devem ser calculados segundo a Tabela 1.

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{30}{60} = 0,5 \rightarrow (\text{Tabela 1}) \rightarrow K_1 = 0,45$$

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{60}{30} = 2 \rightarrow (\text{Tabela 1}) \rightarrow K_2 = 0,7$$

Assim, como exemplo, a laje de espessura de 30 cm, o cálculo da tensão solicitante deve ser obtido através da Equação 3.3 adaptada para as duas direções x e y:

$$\tau_{sd} = \frac{F_{sd}}{u \cdot d} + \frac{K_1 M_{sd1}}{W_{p1} \cdot d} + \frac{K_2 M_{sd2}}{W_{p2} \cdot d}$$

$$\tau_{sd} = \frac{896,2}{180 \cdot 25,1} + \frac{0,45 \cdot 1769,2}{2250 \cdot 25,1} + \frac{0,7 \cdot 5258,72}{3600 \cdot 25,1} = 2,53 \text{ MPa}$$

Com as tensões resistentes e solicitantes para o contorno C, é possível obter o resultado das verificações em relação ao efeito de punção. Os resultados das verificações podem ser vistos na Tabela 17 a seguir

Tabela 17 - Verificação de punção no Contorno C do pilar

<i>Contorno C</i>			
<i>Espessura da laje (cm)</i>	<i>Tensão Solicitante (MPa)</i>	<i>Tensão Resistente (MPa)</i>	<i>Verificação à punção</i>
30	2,53	5,09	OK
25	2,88	5,09	OK
20	3,45	5,09	OK
18	4,63	5,09	OK

Fonte: AUTOR (2019)

### 5.1.2 Tensão resistente e solicitante no contorno C' (Pilar P28)

a) Trecho sem armadura de punção

- **Taxa de Armadura ( $\rho$ )**

Antes do cálculo da tensão resistente, é preciso calcular a taxa de armadura presente no pilar, onde é determinada pela à dimensão ou área da seção do pilar carregado, acrescida 3d para cada um dos lados. Assim para a laje de espessura de 30cm, o cálculo da taxa fica segue as Equações 3.20 e 3.21

$$\rho_x = \frac{(6 \cdot 3,14)}{25,1 \cdot (60 + 2 \cdot (3 \cdot 25,1))} = 0,0036$$



$$\rho_y = \frac{(6 \cdot 2,01)}{25,1 \cdot (30 + 2 \cdot (3 \cdot 25,1))} = 0,0027$$

Segundo a Equação 3.16 a taxa de armadura é dada por:

$$\rho = \sqrt{\rho_x \cdot \rho_y} = 0,0031$$

A seguir na Tabela 18 podemos determinar todos os valores da taxa de armadura para cada espessura de laje:

Tabela 18 - Taxa de armadura do pilar 28

Espessura da laje (cm)	Taxa de armadura		
	$\rho_x$	$\rho_y$	taxa $\rho$
30	0,0036	0,0027	0,0031
25	0,0052	0,0040	0,0045
20	0,0083	0,0066	0,0074
18	0,0104	0,0085	0,0094

Fonte: AUTOR (2019)

- **Tensão Resistente (contorno C’):** Com a taxa de armadura é possível calcular a tensão resistente pela a Equação (3.15):

$$\tau_{Rd1} = 0,13 \left( 1 + \sqrt{20/d} \right) (100\rho fck)^{\frac{1}{3}} + 0,10\sigma_{cp}$$

Como não se trata de uma laje protendida o valor de  $\sigma_{cp} = 0$ , a tensão resistente da laje com espessura de 30 cm pode ser calculada como:

$$\tau_{Rd1} = 0,13 \left( 1 + \sqrt{20/d} \right) (100\rho fck)^{\frac{1}{3}}$$

$$\tau_{Rd1} = 0,13 \left( 1 + \sqrt{20/25,1} \right) (100 \cdot 0,0031 \cdot 30)^{\frac{1}{3}} = 0,52 \text{ Mpa}$$

- **Tensão solicitante (contorno C'):**

Da mesma forma que para o contorno C, para o cálculo da tensão atuante no contorno C', é necessário antes determinar os módulos de resistência plástica  $W_{p1}$  e  $W_{p2}$  segundo as equações da Tabela 3:

$$W_{p1} = \frac{C_1^2}{2} + C_1C_2 + 4C_2d + 16d^2 + 2\pi dC_1$$

$$W_{p1} = \frac{30^2}{2} + 30 \cdot 60 + 4 \cdot 60 \cdot 25,1 + 16 \cdot 25,1^2 + 2 \cdot \pi \cdot 25,1 \cdot 30$$

$$W_{p1} = 23085,40 \text{ cm}^2$$

De forma análoga para  $W_{p2}$  :

$$W_{p2} = \frac{C_2^2}{2} + C_1C_2 + 4C_1d + 16d^2 + 2\pi dC_2$$

$$W_{p2} = \frac{60^2}{2} + 30 \cdot 60 + 4 \cdot 30 \cdot 25,1 + 16 \cdot 25,1^2 + 2 \cdot \pi \cdot 25,1 \cdot 60$$

$$W_{p2} = 26154,64 \text{ cm}^2$$

Da mesma forma que para o contorno C, é preciso saber o valor do coeficiente K, mas como ainda se trata do mesmo pilar os valores de K1 e K2 calculados anteriormente permanecem o mesmo.

Assim o cálculo da tensão solicitante na região C', sendo a superfície crítica u', obtida através da Equação 3.3:

$$\tau_{sd} = \frac{F_{sd}}{u' \cdot d} + \frac{K_1 M_{sd1}}{W_{p1} \cdot d} + \frac{K_2 M_{sd2}}{W_{p2} \cdot d}$$

$$\tau_{sd} = \frac{896,2}{495,42 \cdot 25,1} + \frac{0,45 \cdot 1769,2}{23085,40 \cdot 25,1} + \frac{0,7 \cdot 5258,72}{26154,64 \cdot 25,1} = 0,79 \text{ MPa}$$

$$\tau_{sd} > \tau_{Rd1} = 0,79 \text{ MPa} > 0,52 \text{ MPa}$$

NÃO OK! Neste caso é necessária armadura de punção.

Assim para o contorno C', é possível obter o resultado das verificações em relação ao efeito de punção, junto com a necessidade, ou não, de armadura para combater a punção. Os resultados das verificações podem ser vistos na Tabela 18:

Tabela 19 - Verificação de punção no Contorno C' do pilar

Espessura da laje (cm)	Contorno C'				Verificação da necessidade de Armadura Punção
	Tensão Solicitante (MPa)	Tensão Resistente (MPa)	Valores de Wp na superfície C'		
			Wp1 (cm <sup>2</sup> )	Wp2 (cm <sup>2</sup> )	
30	0,79	0,37	23085,40	26154,64	Armadura punção
25	1,03	0,43	17326,92	20053,68	Armadura punção
20	1,47	0,52	12368,44	14752,73	Armadura punção
18	2,06	0,57	10609,05	12856,34	Armadura punção

Fonte: AUTOR (2019)

b) Trecho com armadura de punção

Para determinação da quantidade de armadura necessária para combater a punção, um caminho é adotar um exemplo de conector e encontrar a área de aço necessária, em relação ao mesmo. Lembrando de respeitar as recomendações referentes ao espaçamento mínimo entre os conectores de acordo com item 19.5.3.4 da NBR 6118/2014.

Para esta armadura de punção, como indicado na NBR6118/2014, sejam usados conectores tipo pino com extremidades alargadas dispostas radialmente a partir do perímetro do pilar. Para o uso deste tipo de armadura o primeiro item a ser analisado é a resistência desses pinos. Segundo a norma brasileira, permite-se uma interpolação linear entre 300 MPa, para lajes

de até 15 cm, e 435 MPa, quando a espessura é maior que 35 cm. Como a laje em questão tem 30 cm:

$$f_{ywd} = \frac{30 - 15}{35 - 15} \cdot (435 - 300) + 300 = 401,25$$

Com isso, na Equação 3.18 igualamos o valor de resistência da região do pilar ao valor de esforço solicitante, assim conseguimos encontrar a quantidade de aço por cada linha referentes ao espaçamento mínimo entre os conectores. Para obtenção da resistência de cálculo do aço  $f_{ywd}$  para o tipo de armadura adotada, é necessário a interpolação linear que depende da espessura da laje adotada:

Neste exemplo, será adotada armadura de conectores tipo pinos de diâmetro 8,0 mm em aço CA-50;

$$\tau_{Rd3} = 0,10 \left( 1 + \sqrt{20/d} \right) (100 \rho f c k)^{\frac{1}{3}} + 1,5 \frac{d}{S_r} \cdot \frac{A_{sw} \cdot f_{ywd} \cdot \sin \alpha}{u \cdot d}$$

O ângulo  $\alpha$  presente na equação refere-se à inclinação da armadura usada em relação ao plano da laje. Por facilitar a execução o ângulo foi  $\alpha = 90^\circ$  e  $\tau_{Rd3} = \tau_{Sd}$ :

$$0,79 = 0,10 \left( 1 + \sqrt{20/25,1} \right) (100 \cdot 0,0031 \cdot 30)^{\frac{1}{3}} + 1,5 \frac{A_{sw} \cdot 401,25 \cdot \sin 90}{495,12 \cdot S_r}$$

Resolvendo a equação acima e isolando a área de armadura de punção dividida pelo espaçamento entre linhas, temos que:

$$\frac{A_{sw}}{S_r} = 0,32 \text{ cm}^2/\text{linha}$$

Conforme a recomendação, para  $S_r$  seja menor que  $0,75d$  ( $s_r < 18,825$  cm), o espaçamento entre linhas  $S_r$  adotado foi de 18cm. Logo:

$$A_{sw} = 5,83 \text{ cm}^2/\text{linha}$$

Assim é possível obter o resultado da quantidade de área de armadura de punção necessária para cada espessura de laje. Os resultados podem ser vistos na Tabela 19:

Tabela 20 - Determinação do  $A_s$  dos conectores no contorno C

<i>Contorno C' - 2d da face do pilar</i>						
<i>Espessura da laje (cm)</i>	<i>Tensão Solicitante (MPa)</i>	<i>Valores de <math>f_{ywd}</math> (MPa)</i>	<i><math>A_s / S_r</math> (<math>cm^2/m</math>)</i>	<i><math>S_r</math> (cm)</i>	<i><math>A_s</math> (<math>cm^2/linha</math>)</i>	<i><math>n^\circ</math> conectores <math>c/\phi = 8\text{ mm}</math> (<math>0,50\text{ cm}^2</math>)</i>
30	0,79	401,25	0,32	18	5,83	12
25	1,03	367,5	0,43	15	6,50	14
20	1,47	333,75	0,64	11	7,00	14
18	2,06	320,25	0,99	9	8,89	18

Fonte: AUTOR (2019)

### 5.1.3 Tensão resistente e solicitante no contorno C'' (Pilar P28)

- **Tensão solicitante (contorno C'')**

De forma análoga ao contorno C', esta região que está afastada distante 2d da última linha de armadura, será necessária determinar os módulos de resistência plástica  $W_{p1}$  e  $W_{p2}$  novamente, e os valores do coeficiente K permanecem os mesmo por se tratarem ainda mesmo pilar.

Desta forma, como exemplo, a laje de espessura de 30 cm possui os valores de  $W_{p1}$  e  $W_{p2}$  conforme a Tabela 3:

$$W_{p1} = \frac{C_1^2}{2} + C_1 C_2 + 4C_2 d + 16d^2 + 2\pi d C_1 + 2C_2 i + 16di + 4i^2 + \pi C_1 i$$

$$W_{p1} = \frac{30^2}{2} + 30 \cdot 60 + 4 \cdot 60 \cdot 25,1 + 16 \cdot 25,1^2 + 2 \cdot \pi \cdot 25,1 \cdot 30 + 2 \cdot 60 \cdot 4 \cdot 25,1 + 16 \cdot 25,1 \cdot 4 \cdot 25,1 + \pi \cdot 30 \cdot 4 \cdot 25,1$$

$$W_{p1} = 125237,16\text{ cm}^2$$

De forma análoga para  $W_{p2}$ :

$$W_{p2} = \frac{C_2^2}{2} + C_1C_2 + 4C_1d + 16d^2 + 2\pi dC_2 + 2C_1i + 16di + 4i^2 + \pi C_2i$$

$$W_{p2} = \frac{60^2}{2} + 30 \cdot 60 + 4 \cdot 30 \cdot 25,1 + 16 \cdot 25,1^2 + 2 \cdot \pi \cdot 25,1 \cdot 60 + 2 \cdot 30 \cdot 4 \cdot 25,1 + 16 \cdot 25,1 \cdot 4 \cdot 25,1 + \pi \cdot 60 \cdot 4 \cdot 25,1$$

$$W_{p2} = 129944,87 \text{ cm}^2$$

Assim o cálculo da tensão solicitante na superfície crítica  $u''$ , é obtida através da Equação 3.3:

$$\tau_{sd} = \frac{F_{sd}}{u'' \cdot d} + \frac{K_1 M_{sd1}}{W_{p1} \cdot d} + \frac{K_2 M_{sd2}}{W_{p2} \cdot d}$$

$$\tau_{sd} = \frac{896,2}{810,83 \cdot 25,1} + \frac{0,45 \cdot 1769,2}{125237,16 \cdot 25,1} + \frac{0,7 \cdot 5258,72}{129944,87 \cdot 25,1} = 0,05 \text{ MPa}$$

- **Tensão resistente (contorno C'')**:

De forma análoga ao contorno C', a tensão resistente no contorno C'' é dada por:

$$\tau_{Rd2} = 0,13 \left( 1 + \sqrt{20/d} \right) (100 \rho f_{ck})^{\frac{1}{3}}$$

$$\tau_{Rd1} = 0,13 \left( 1 + \sqrt{20/25,1} \right) (100 \cdot 0,0031 \cdot 30)^{\frac{1}{3}} = 0,37 \text{ MPa}$$

Assim,

$$\tau_{sd} < \tau_{Rd2} = 0,05 \text{ MPa} < 0,52 \text{ MPa OK!}$$

A verificação da região de contorno C'', para cada espessura de laje, podem ser vistos na Tabela

Tabela 21 - Verificação de punção no Contorno C'' do pilar

Espessura da laje (cm)	Tensão Solicitante (MPa)	Tensão Resistente (MPa)	Contorno C''		Verificação Punção
			Valores de Wp na superfície C'		
			Wp1 (cm <sup>2</sup> )	Wp2 (cm <sup>2</sup> )	
30	0,05	0,52	125237,16	129944,87	OK
25	0,06	0,62	86265,72	89946,00	OK
20	0,09	0,79	54494,29	57147,14	OK
18	0,12	0,88	43801,72	46043,59	OK

Fonte: AUTOR (2019)

## 5.2 PILAR DE BORDA P43

O pilar P43 possui como dimensões  $C_1 = 20$  cm e  $C_2 = 60$  cm, um  $f_{ck}$  de projeto de 30 MPa e cobrimento de 3cm, que foram utilizados para todos os cálculos dos pilares. A seguir, nas Tabelas 22 mostram o resumo dos esforços atuantes no pilar do pilar P43.

Tabela 22 - Esforços atuantes no pilar 43

Espessura da laje (cm)	Carga no pilar P43			
	Esforços	Fsd	Msd <sub>x</sub>	Msd <sub>y</sub>
	Direção	-	x	y
30		429,16	2667,08	1442,56
25		416,54	3087,52	1849,20
20		403,92	3524,52	2403,96
18		439,04	4031,00	2960,00

Fonte: AUTOR (2019)

De forma análoga ao pilar 28, cada altura útil "d" foi calculada conforme a Equação 3.2, em relação a cada direção do pilar. Assim, para a espessura da laje de 30 cm com um cobrimento superior de 3 cm:

- $A_{sx}$  superior “x”: Ø 16 mm
- $A_{sy}$  superior “y”: Ø 16 mm

$$d_x = h_{laje} - \left( c_{superior} + \frac{\varphi_{principal}}{2} \right) = 30 - \left( 3 + \frac{1,6}{2} \right) = 26,2 \text{ cm}$$

$$d_y = h_{laje} - \left( c_{sup} + \varphi_{principal} + \frac{\varphi_{secundário}}{2} \right) = 30 - \left( 3 + 1,6 + \frac{1,6}{2} \right) = 24,6 \text{ cm}$$

$$d = \left( \frac{d_x + d_y}{2} \right) = \left( \frac{26,2 + 24,6}{2} \right) = 25,4 \text{ cm}$$

Como determina a norma, deve-se utilizar o valor de “a” para calcular cada superfície crítica. Este valor deve ser o menor entre  $1,5 \cdot d$  ou  $0,5 \cdot C_1$ . Como exemplo, para a laje de espessura de 30cm, o valor de “a”

$$a \leq (1,5d ; 0,5 C_1) = (38,1 ; 10)$$

$$a = 10 \text{ cm}$$

Desse modo cada superfície crítica foi determinada a partir das equações mostradas na Tabela 4.

Contorno C  $u = (2 \cdot a) + C_2 = (2 \cdot 10) + 60 = 80 \text{ cm}$

Contorno C'  $u' = (2 \cdot a) + C_2 + 2 \cdot \pi \cdot d = (2 \cdot 10) + 60 + 2 \cdot \pi \cdot 25,4 = 239,59 \text{ cm}$

Contorno C''  $u'' = (2 \cdot a) + C_2 + 2 \cdot \pi \cdot d + \pi \cdot i$   
 $u'' = (2 \cdot 10) + 60 + 2 \cdot \pi \cdot 25,4 + \pi \cdot (4 \cdot 25,4) = 558,78 \text{ cm}$



O resumo dos cálculos de cada superfície crítica são mostrados na Tabela 22.

Tabela 23 - Características do pilar P43

Espessura da laje (cm)	Altura útil			Valores de a			Superfícies Críticas (Perímetro Reduzido)		
	dx (cm)	dy (cm)	d (cm)	1,5d (cm)	0,5C1 (cm)	a (cm)	Superfície C (cm)	Superfície C' (cm)	Superfície C'' (cm)
30	26,2	24,6	25,4	38,1	10	10	80	239,59	558,78
25	21,2	19,6	20,4	30,6	10	10	80	208,18	336,35
20	16,2	14,6	15,4	23,1	10	10	80	176,76	273,52
18	14,2	12,6	13,4	20,1	10	10	80	164,19	248,39

Fonte: AUTOR (2019)

### 5.2.1 Tensão resistente e solicitante no contorno C (Pilar P43)

- **Tensão Resistente (contorno C):** Pela a Equação (3.13) determinamos:

$$\tau_{Sd} \leq \tau_{Rd2} = 0,27\alpha_v f_{cd}$$

$$\tau_{Sd} = 0,27 \cdot \left(1 - \frac{30}{250}\right) \cdot \frac{30}{1,4} = 5,09 \text{ MPa}$$

- **Tensão solicitante (contorno C):**

O cálculo da tensão solicitante deve ser obtido através da Equação 3.9:

$$\tau_{Sd} = \frac{F_{Sd}}{u \cdot d} + \frac{K_1 M_{Sd1}}{W_{p1} \cdot d} + \frac{K_2 M_{Sd2}}{W_{p2} \cdot d}$$

Mas antes do cálculo da tensão, é necessário conhecer os valores os módulos de resistência plástica  $W_{p1}$  e  $W_{p2}$

Para o cálculo do momento de resistência plástica  $W_{p1}$ , considera-se que o pilar não recebe momento paralelo à borda livre. Já no caso de  $W_{p2}$  é definido que momento de resistência plástica acontece com a atuação de momentos fletores paralelos à borda livre. Como mencionado no caso do pilar 28, é recomendado calcular o modulo de resistência plástica para cada direção x e y. Assim os módulos de resistência plástica  $W_{p1}$  e  $W_{p2}$  são definidos por:

Segundo a Tabela 6, o valor de  $W_{p1}$  é:

$$W_{p1} = \frac{C_1^2}{2} + \frac{C_1 C_2}{2} = \frac{30^2}{2} + \frac{30 \cdot 60}{2} = 800 \text{ cm}^2$$

Para o valor de  $W_{p2}$ , seguimos as equações presentes na Tabela 7:

$$W_{p2} = \frac{C_2^2}{4} + C_1 C_2 = \frac{60^2}{4} + 30 \cdot 60 = 2100 \text{ cm}^2$$

Assim na Tabela 16 mostra o resumo dos cálculos dos módulos de resistência

Tabela 24 - Módulos de Resistência Plástica (W)

<i>Módulo de Resistência Plástica (W)</i>					
<i>Direção</i>	<i>Coefficiente K</i>		<i>Valores de Wp</i>		
x	0,33	0,3999	Wp1	800	cm <sup>2</sup>
y	1,5	0,65	Wp2	2100	cm <sup>2</sup>

Fonte: AUTOR (2019)

O valor do coeficiente K, que depende da relação  $C_1/C_2$ , e devem ser calculados segundo a Tabela 1.

Segundo Heinen (2013) a norma brasileira não estabelece limites sob as dimensões dos pilares e não fornece nenhuma informação a mais sobre o que fazer nestas situações. De acordo com o analisado na norma americana ACI-318 (2011), existe uma fórmula para cálculo do coeficiente de transmissão de momento por flexão e por cisalhamento ao pilar. Para a norma americana as dimensões são lançadas sem nenhuma restrição de relação  $C_1/C_2$ . Por isso entende-se que para não há motivos para o valor de K manter-se 0,45 para relações menores que 0,5 ou manter-se 0,8 para relações maiores que 3,0.

Assim, para este trabalho, optou-se por considerar uma distribuição linear entre os valores da norma, mantendo a mesma inclinação desta reta para cálculo do coeficiente  $K_1$  para relação  $C_1/C_2 = 0,333$ . O mesmo foi considerado para valor de  $K_2$ , sendo  $C_2/(2 \cdot C_1) = 1,5$ . Assim os valores de K foram definidos como:

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{20}{60} = 0,5 \rightarrow (\text{interpolação}) \rightarrow K_1 = 0,3999$$

$$\frac{C_2}{2 \cdot C_1} = \frac{60}{2 \cdot 20} = 1,5 \rightarrow (\text{interpolação}) \rightarrow K_2 = 0,65$$

- **Excentricidade “e” (contorno C):**

No caso de pilares de borda e canto é necessário calcular a resultante da excentricidade do perímetro crítico em relação ao centro do pilar, no plano perpendicular à borda livre. Assim deve-se calcular a excentricidade para cada contorno C, C' e C''. No caso do contorno C, o cálculo da excentricidade é dado pelas equações da Tabela 5

$$e = \frac{C_1 \cdot a - a^2 + \frac{C_1 \cdot C_2}{2}}{2 \cdot a + C_2} = \frac{20 \cdot 10 - 10^2 + \frac{20 \cdot 60}{2}}{2 \cdot 10 + 60} = 8,75 \text{ cm}$$

Antes de calcular a tensão solicitante, é preciso verificar, segundo a norma NBR 6118/2014 se o momento resultante é maior que diferença entre o momento de cálculo no plano perpendicular e o momento de cálculo resultante da excentricidade do perímetro crítico reduzido  $u^*$  em relação ao centro do pilar, todos em relação ao bordo livre do pilar. Assim:

$$M_{sd1} = (M_{sd1} - M_{sd}^*) \geq 0$$

Sendo que:

$$M_{sd}^* = (F_{sd} \cdot e)$$

Desta forma, podemos determinar que o momento de cálculo resultante da excentricidade do perímetro crítico reduzido é igual:

$$M_{sd}^* = (429,16 \cdot 8,75) = 3755,16 \text{ kN.cm}$$

Comparando com o momento no plano perpendicular à borda livre temos que:

$$M_{sd1} = (1442,56 - 3755,16) < 0$$

$$\therefore M_{sd1} = 0$$

A Tabela 25 mostra os valores de excentricidade, no contorno C, para cada valor de espessura:

Tabela 25 - Excentricidade no contorno C

Espessura da laje (cm)	Excentricidade - contorno C			
	e (cm)	Msd*	Msd1	Msd2
30	8,75	3755,16	0,00	2667,08
25	8,75	3644,72	0,00	3087,52
20	8,75	3534,27	0,00	3524,52
18	8,75	3841,60	0,00	4031,00

Fonte: AUTOR (2019)

Assim, a tensão solicitante no contorno C no pilar 43, pela Equação 3.9:

$$\tau_{sd} = \frac{F_{sd}}{u \cdot d} + \frac{K_1 M_{sd1}}{W_{p1} \cdot d} + \frac{K_2 M_{sd2}}{W_{p2} \cdot d}$$

$$\tau_{sd} = \frac{429,16}{80 \cdot 25,4} + \frac{0,399 \cdot 0}{800 \cdot 25,4} + \frac{0,65 \cdot 1442,56}{2100 \cdot 25,4} = 2,44 \text{ MPa}$$

Com as tensões resistentes e solicitantes para o contorno C, é possível obter o resultado das verificações em relação ao efeito de punção. A seguir, os resultados das verificações podem ser vistos na Tabela 26:

Tabela 26 - Verificação de punção no Contorno C do pilar

<i>Espessura da laje (cm)</i>	<i>Contorno C</i>		
	<i>Tensão Solicitante (MPa)</i>	<i>Tensão Resistente (MPa)</i>	<i>Verificação à punção</i>
30	2,44	5,09	OK
25	3,02	5,09	OK
20	3,99	5,09	OK
18	5,03	5,09	OK

Fonte: AUTOR (2019)

### 5.2.2 Tensão resistente e solicitante no contorno C' (Pilar P43)

a) Trecho sem armadura de punção

- **Taxa de Armadura ( $\rho$ )**

Da mesma forma ao que foi calculado para o pilar P28, a taxa de armadura presente no pilar é calculada pelas as Equações 3.20 e 3.21

$$\rho_x = \frac{(6 \cdot 2,01)}{25,4 \cdot (60 + 2 \cdot (3 \cdot 25,4))} = 0,0022$$

$$\rho_y = \frac{(11 \cdot 2,01)}{25,4 \cdot (20 + 2 \cdot (3 \cdot 25,4))} = 0,0051$$

Segundo a Equação 3.16 a taxa de armadura é dada por:

$$\rho = \sqrt{\rho_x \cdot \rho_y} = 0,0034$$

Assim, podemos determinar todos os valores da taxa de armadura para cada espessura de laje como mostra a Tabela 27:

Tabela 27 - Taxa de armadura do pilar 43

Espessura da laje (cm)	Taxa de armadura		
	$\rho_x$	$\rho_y$	taxa $\rho$
30	0,0022	0,0051	0,0034
25	0,0032	0,0076	0,0050
20	0,0051	0,0128	0,0081
18	0,0064	0,0164	0,0103

Fonte: AUTOR (2019)

- **Tensão solicitante (contorno C'):**

Com a taxa de armadura é possível calcular a tensão resistente pela a Equação (3.15), como não se trata de uma laje protendida o valor de  $\sigma_{cp} = 0$ , pode ser calculada:

$$\tau_{Rd1} = 0,13 \left( 1 + \sqrt{20/d} \right) (100\rho fck)^{\frac{1}{3}}$$

Podemos então determinar que a tensão resistente no contorno C' é:

$$\tau_{Rd1} = 0,13 \left( 1 + \sqrt{20/25,1} \right) (100 \cdot 0,0034 \cdot 30)^{\frac{1}{3}} = 0,53 \text{ Mpa}$$

- **Tensão solicitante (contorno C''):**

Da mesma forma que foi calculado para o pilar 37, os módulos de resistência plástica  $W_{p1}$  e  $W_{p2}$  são definidos pelas as equações da Tabela 6 e 7:

Segundo a Tabela 6 o valor de  $W_{p1}$  é dado por:

$$W_{p1} = \frac{C_1^2}{2} + \frac{C_1 C_2}{2} + 2C_2 d + 8d^2 + \pi d C_1$$

$$W_{p1} = \frac{20^2}{2} + \frac{20 \cdot 60}{2} + 2 \cdot 60 \cdot 25,4 + 8 \cdot 25,4^2 + \pi \cdot 25,4 \cdot 20$$

$$W_{p1} = 10605,21 \text{ cm}^2$$

A Tabela 7 define que o valor de  $W_{p2}$  é:

$$W_{p2} = \frac{C_2^2}{4} + C_1 C_2 + 4C_1 d + 8d^2 + \pi d C_2$$

$$W_{p2} = \frac{60^2}{4} + 30 \cdot 60 + 4 \cdot 20 \cdot 25,4 + 8 \cdot 25,4^2 + \pi \cdot 25,4 \cdot 60$$

$$W_{p2} = 14081,07 \text{ cm}^2$$

- **Excentricidade (contorno C’):**

Da mesma forma que para o contorno C, é preciso calcular a resultante da excentricidade do perímetro crítico em relação ao centro do pilar, no plano perpendicular à borda livre.

No caso do contorno C’, o cálculo da excentricidade é dado pelas equações da Tabela 5:

$$e = \frac{C_1 \cdot a - a^2 + \frac{C_1 \cdot C_2}{2} + 2 \cdot C_2 \cdot d + 8d^2 + \pi \cdot d \cdot C_1}{2 \cdot a + C_2 + 2 \cdot \pi \cdot d}$$

$$e = \frac{20 \cdot 10 - 10^2 + \frac{20 \cdot 60}{2} + 2 \cdot 60 \cdot 25,4 + 8 \cdot 25,4^2 + \pi \cdot 25,4 \cdot 20}{2 \cdot 10 + 60 + 2 \cdot \pi \cdot 25,4}$$

$$e = 43,85 \text{ cm}$$

Da mesma forma calculada para o contorno C, é preciso verificar se o momento resultante é maior que diferença entre o momento de cálculo no plano perpendicular e o

momento de cálculo resultante da excentricidade do perímetro crítico reduzido  $u^*$  em relação ao centro do pilar, todos em relação ao bordo livre do pilar. Assim:

$$M_{sd1} = (M_{sd1} - M_{sd}^*) \geq 0$$

Sendo que:

$$M_{sd}^* = (F_{sd} \cdot e)$$

Desta forma, podemos determinar que o momento de cálculo resultante da excentricidade do perímetro crítico reduzido é igual:

$$M_{sd}^* = (429,16 \cdot 43,75) = 18817,05 \text{ kN.cm}$$

Comparando com o momento no plano perpendicular à borda livre temos que:

$$M_{sd1} = (1442,56 - 18817,05) < 0$$

$$\therefore M_{sd1} = 0$$

A Tabela 25 mostra todos os valores de excentricidade, no contorno C', referente a cada espessura:

Tabela 28 - Excentricidade no contorno C'

Espessura da laje (cm)	Excentricidade - contorno C'			
	e (cm)	Msd*	Msd1	Msd2
30	43,85	18817,05	0,00	2667,08
25	37,27	15525,00	0,00	3087,52
20	30,62	12369,00	0,00	3524,52
18	27,93	12263,64	0,00	4031,00

Fonte: AUTOR (2019)

Logo, podemos definir a tensão solicitante no contorno C' pela Equação 3.9:



$$\tau_{sd} = \frac{F_{sd}}{u' \cdot d} + \frac{K_1 M_{sd1}}{W_{p1} \cdot d} + \frac{K_2 M_{sd2}}{W_{p2} \cdot d}$$

$$\tau_{sd} = \frac{896,2}{495,42 \cdot 25,1} + \frac{0,399 \cdot 0}{10605,21 \cdot 25,4} + \frac{0,65 \cdot 2667,08}{14081,07 \cdot 25,4} = 0,75 \text{ MPa}$$

$$\tau_{sd} > \tau_{Rd1} = 0,75 \text{ MPa} > 0,53 \text{ MPa}$$

NÃO OK! Neste caso é necessária armadura de punção.

Para o contorno C', é possível obter o resultado das verificações em relação ao efeito de punção. Os resultados das verificações podem ser vistos na Tabela 29:

Tabela 29 - Verificação de punção no Contorno C' do pilar

Espessura da laje (cm)	Contorno C'				
	Tensão Solicitante (MPa)	Tensão Resistente (MPa)	Valores de Wp na superfície C'		Verificação da necessidade de Armadura Punção
			Wp1 (cm <sup>2</sup> )	Wp2 (cm <sup>2</sup> )	
30	0,75	0,53	10605,21	14081,07	Armadura punção
25	1,07	0,64	7859,05	10906,59	Armadura punção
20	1,67	0,81	5512,89	8132,11	Armadura punção
18	2,27	0,91	4686,43	7134,32	Armadura punção

Fonte: AUTOR (2019)

b) Trecho com armadura de punção

De forma análoga ao contorno C, para determinar a quantidade de armadura necessária para combater a punção, foi considerado um tipo conector e encontrado a área de aço necessária, em relação ao mesmo.

Para esta armadura de punção foram usados conectores tipo pino com extremidades alargadas, igualmente ao disposto no contorno C.

Como mostra a norma NBR 6118/2014 permite-se uma interpolação linear entre 300 MPa, para lajes de até 15 cm, e 435 MPa, quando a espessura é maior que 35 cm. Igualmente ao contorno, a laje em questão tem 30 cm de espessura, assim:

$$f_{ywd} = \frac{30 - 15}{35 - 15} \cdot (435 - 300) + 300 = 401,25$$

Com isso, na Equação 3.18 igualamos o valor de resistência da região do pilar ao valor de esforço solicitante, assim conseguimos encontrar a quantidade de aço por cada linha referentes ao espaçamento mínimo entre os conectores. Neste exemplo, será adotada armadura de conectores tipo pinos de diâmetro 8,0 mm em aço CA-50:

$$\tau_{Rd3} = 0,13 \left( 1 + \sqrt{20/d} \right) (100\rho fck)^{\frac{1}{3}} + 1,5 \frac{d}{S_r} \cdot \frac{A_{sw} \cdot f_{ywd} \cdot \sin \alpha}{u \cdot d}$$

O ângulo  $\alpha$  presente na equação refere-se à inclinação da armadura usada em relação ao plano da laje. Por facilitar a execução o ângulo escolhido foi  $\alpha = 90^\circ$  e  $\tau_{Rd3} = \tau_{Sd}$ :

$$0,75 = 0,13 \left( 1 + \sqrt{20/25,1} \right) (100 \cdot 0,0034 \cdot 30)^{\frac{1}{3}} + 1,5 \frac{A_{sw} \cdot 401,25 \cdot \sin 90}{239,59 \cdot S_r}$$

Resolvendo a equação acima e isolando a área de armadura de punção dividida pelo espaçamento entre linhas, temos que:

$$\frac{A_{sw}}{S_r} = 0,14 \text{ cm}^2/\text{linha}$$

Conforme a recomendação, para  $S_r$  seja menor que  $0,75d$  ( $s_r < 18,825 \text{ cm}$ ), o espaçamento entre linhas  $S_r$  adotado foi de 18cm. Logo:

$$A_{sw} = 2,62 \text{ cm}^2/\text{linha}$$

Assim é possível obter o resultado da quantidade de área de armadura de punção necessária para cada espessura de laje. Os resultados podem ser vistos na Tabela 30:

Tabela 30 - Determinação do As dos conectores para o contorno C'

Espessura da laje (cm)	Contorno C' - 2d da face do pilar							
	Tensão Solicitante (MPa)	Valores de fywd (MPa)			As / Sr (cm <sup>2</sup> /m)	Sr (cm)	As (cm <sup>2</sup> /linha)	n° conectores c/ φ = 8 mm (0,50 cm <sup>2</sup> )
			1 parcela	parce				
30	0,75	401,25	0,41	2,51	0,14	19	2,62	6
25	1,07	367,5	0,49	2,65	0,22	15	3,29	7
20	1,67	333,75	0,62	2,83	0,37	11	4,07	9
18	2,27	320,25	0,70	2,93	0,54	10	5,38	11

Fonte: AUTOR (2019)

### 5.2.3 Tensão resistente e solicitante no contorno C'' (Pilar P43)

- **Tensão solicitante (contorno C'')**

De forma análoga ao contorno C', será necessária determinar os módulos de resistência plástica  $W_{p1}$  e  $W_{p2}$  novamente, e os valores do coeficiente K permanecem os mesmo por se tratarem ainda mesmo pilar.

Conforme Ferreira (2005) recomenda que o cálculo do momento de resistência plástica  $W_{p1}$ , considera-se que o pilar não recebe momento paralelo à borda livre, e no caso de  $W_{p2}$  é definido que momento de resistência plástica acontece com a atuação de momentos fletores paralelos à borda livre.

Desta forma, os valores de  $W_{p1}$  e  $W_{p2}$  conforme a Tabela 6 e 7, respectivamente, são:

Segundo a Tabela 6, o valor de  $W_{p1}$ :

$$W_{p1} = \frac{C_1^2}{2} + \frac{C_1 C_2}{2} + 2C_2 d + 8d^2 + \pi d C_1 + C_2 i + 8di + \frac{\pi d C_1}{2} + 2i^2$$

$$W_{p1} = \frac{30^2}{2} + \frac{30 \cdot 60}{2} + 2 \cdot 60 \cdot 25,4 + 8 \cdot 25,4^2 + 60 \cdot 4 \cdot 25,4 + 8 \cdot 4 \cdot 25,4 + \frac{\pi \cdot 4 \cdot 25,4 \cdot 20}{2} + 2 \cdot (4 \cdot 25,4)^2$$

$$W_{p1} = 61183,31 \text{ cm}^2$$

Segundo a Tabela 7, o valor de  $W_{p2}$ :

$$W_{p2} = \frac{C_2^2}{4} + C_1 C_2 + 4C_1 d + 8d^2 + \pi d C_2 + 2C_1 i + 8di + \frac{\pi d C_2}{2} + 2i^2$$

$$W_{p2} = \frac{60^2}{2} + 20 \cdot 60 + 4 \cdot 20 \cdot 25,4 + 8 \cdot 25,4^2 + \pi \cdot 25,4 \cdot 60 + 2 \cdot 20 \cdot 4 \cdot 25,4 \\ + 8 \cdot 25,4 \cdot 4 \cdot 25,4 + \frac{\pi \cdot 4 \cdot 25,4 \cdot 60}{2} + 2 \cdot (4 \cdot 25,1)^2$$

$$W_{p2} = 67810,88 \text{ cm}^2$$

- **Excentricidade (contorno C'')**:

Da mesma forma que para o contorno C e C'', é preciso calcular a resultante da excentricidade do perímetro crítico em relação ao centro do pilar, no plano perpendicular à borda livre.

No caso do contorno C'', o cálculo da excentricidade é dado pelas equações da Tabela 5:

$$e = \frac{C_1 \cdot a - a^2 + \frac{C_1 \cdot C_2}{2} + 2 \cdot C_2 \cdot d + 8d^2 + \pi \cdot d \cdot C_1 + C_2 \cdot i + 8 \cdot d \cdot i + \frac{\pi \cdot i \cdot C_1}{2} + 2 \cdot i^2}{2 \cdot a + C_2 + 2 \cdot \pi \cdot d + \pi \cdot i}$$

$$e = 73,82 \text{ cm}$$

Da mesma forma calculada para o contorno C e C', a verificação do momento resultante:

$$M_{sd1} = (M_{sd1} - M_{sd} *) \geq 0$$

Sendo que:

$$M_{sd} * = (F_{sd} \cdot e)$$

Desta forma, podemos determinar que o momento de cálculo resultante da excentricidade do perímetro crítico reduzido é igual:

$$M_{sd}^* = (429,16 \cdot 73,82) = 106494,79 \text{ kN.cm}$$

Comparando com o momento no plano perpendicular à borda livre temos que:

$$M_{sd1} = (1442,56 - 106494,79) < 0$$

$$\therefore M_{sd1} = 0$$

A Tabela 31 mostra todos os valores de excentricidade, no contorno C', referente a cada espessura:

Tabela 31 - Excentricidade no contorno C'

Espessura da laje (cm)	Excentricidade - contorno C''			
	e (cm)	Msd*	Msd1	Msd2
30	73,82	106494,79	0	2667,08
25	62,83	116193,32	0	3087,52
20	51,65	124170,42	0	3524,52
18	47,09	139383,35	0	4031,00

Fonte: AUTOR (2019)

Assim o cálculo da tensão solicitante na superfície crítica u'', é obtida através da Equação 3.9:

$$\tau_{sd} = \frac{F_{sd}}{u'' \cdot d} + \frac{K_1 M_{sd1}}{W_{p1} \cdot d} + \frac{K_2 M_{sd2}}{W_{p2} \cdot d}$$

$$\tau_{sd} = \frac{429,16}{558,78 \cdot 25,4} + \frac{0,399 \cdot 0}{61183,31 \cdot 25,4} + \frac{0,7 \cdot 2667,08}{67810,88 \cdot 25,4} = 0,03 \text{ MPa}$$

- **Tensão resistente (contorno C'')**:

De forma análoga ao contorno C', a tensão resistente no contorno C'' é dada por:

$$\tau_{Rd2} = 0,13 \left( 1 + \sqrt{20/d} \right) (100\rho f_{ck})^{\frac{1}{3}}$$

$$\tau_{Rd1} = 0,13 \left( 1 + \sqrt{20/25,1} \right) (100 \cdot 0,0034 \cdot 30)^{\frac{1}{3}} = 0,53 \text{ Mpa}$$

Assim,

$$\tau_{Sd} < \tau_{Rd2} = 0,03 \text{ MPa} < 0,53 \text{ MPa OK!}$$

A verificação da região de contorno C'', para cada espessura de laje, podem ser vistos na Tabela 32:

Tabela 32 - Verificação de punção no Contorno C'' do pilar 43

Espessura da laje (cm)	Contorno C'' - 2d da região armada				Verificação Armadura a Punção
	Tensão Solicitante (MPa)	Tensão Resistente (MPa)	Valores de Wp na superfície C'		
			Wp1 (cm <sup>2</sup> )	Wp2 (cm <sup>2</sup> )	
30	0,03	0,53	61183,31	67810,88	OK
25	0,06	0,64	41952,83	47295,45	OK
20	0,10	0,81	26322,35	30380,01	OK
18	0,14	0,91	21078,16	24621,84	OK

Fonte: AUTOR (2019)

### 5.3 PILAR DE CANTO P44

O pilar P44 possui como dimensões  $C_1 = 20$  cm e  $C_2 = 60$  cm, um  $f_{ck}$  de projeto de 30 MPa e cobrimento de 3cm, que foram utilizados para todos os cálculos dos pilares. Os valores dos esforços atuantes no pilar estão mostrados a seguir na Tabela 33:

Tabela 33 - Esforços atuantes no pilar 44

		<b>Carga no pilar P44</b>			
		<b>Esforços</b>	<b>Fsd</b>	<b>Msd<sub>x</sub></b>	<b>Msd<sub>y</sub></b>
<b>Espessura da laje (cm)</b>	<b>Direção</b>	-	x	y	
	30	113,85	563,04	3730,60	
	25	70,05	356,04	3929,32	
	20	56,80	508,76	4161,16	
	18	57,08	718,00	4643,00	

Fonte: AUTOR (2019)

No caso de pilares de canto as verificações são feitas separadas para cada uma das direções, considerando o momento fletor cujo plano é perpendicular à borda livre adotada. Sendo assim cada verificação irá variar com os valores de  $C_1 = 20$  cm e  $C_1 = 60$  cm.

De forma análoga ao pilar 28 e 43, a altura útil “d” foi calculada conforme a Equação 3.2, em relação a cada direção do pilar. Assim, para a espessura da laje de 30 cm com um cobrimento superior de 3 cm:

-  $A_{sx}$  superior “x”: Ø 16 mm

-  $A_{sy}$  superior “y”: Ø 16 mm

$$d_x = h_{laje} - \left( c_{superior} + \frac{\varphi_{principal}}{2} \right) = 30 - \left( 3 + \frac{1,6}{2} \right) = 26,2 \text{ cm}$$

$$d_y = h_{laje} - \left( c_{sup} + \varphi_{principal} + \frac{\varphi_{secundário}}{2} \right) = 30 - \left( 3 + 1,6 + \frac{1,6}{2} \right) = 24,6 \text{ cm}$$

$$d = \left( \frac{d_x + d_y}{2} \right) = \left( \frac{26,2 + 24,6}{2} \right) = 25,4 \text{ cm}$$

Para o caso de pilares de canto, deve-se utilizar os valores de “ $a_1$ ” e “ $a_2$ ” para calcular cada superfície crítica. Assim para a borda livre  $C_1 = 20$  cm:

$$a_1 \leq (1,5d ; 0,5 C_1) = (38,1 ; 10)$$

$$a_1 = 10 \text{ cm}$$

$$a_2 \leq (1,5d ; 0,5 C_2) = (38,1 ; 10)$$

$$a_2 = 30 \text{ cm}$$

Desse modo cada superfície crítica determinada para a borda livre  $C_1 = 20 \text{ cm}$ :

Contorno C  $u = a_1 + a_2 = 10 + 30 = 40 \text{ cm}$

Contorno C'  $u' = a_1 + a_2 + \pi \cdot d = 10 + 30 + \pi \cdot 25,4 = 119,80 \text{ cm}$

$$u'' = (2 \cdot a) + C_2 + \pi \cdot d + \frac{(\pi \cdot i)}{2}$$

Contorno C''

$$u'' = 10 + 30 + \pi \cdot 25,4 + \frac{\pi \cdot (4 \cdot 25,4)}{2} = 279,39 \text{ cm}$$

Nas Tabela 34 e 35 mostram cada valor de superfícies críticas segundo cada espessura de laje e a direção da borda livre adotada:

Tabela 34 - Superfícies críticas no pilar 44 com  $C_1 = 20 \text{ cm}$

Espessura da laje (cm)	Altura útil			Valores de a (menor valor entre 1,5d e 0,5C1)						Superfícies Críticas (Perímetro Reduzido)		
	dx (cm)	dy (cm)	d (cm)	1,5d	0,5C1	1,5d	0,5C2	a1	a2	Superfície C (cm)	Superfície C' (cm)	Superfície C'' (cm)
30	26,2	24,6	25,4	38,1	10	38,1	30	10	30	40	119,80	279,39
25	21,2	19,6	20,4	30,6	10	30,6	30	10	30	40	104,09	232,27
20	16,2	14,6	15,4	23,1	10	23,1	30	10	23,1	33,1	81,48	178,24
18	14,2	12,6	13,4	20,1	10	20,1	30	10	20,1	30,1	72,20	156,39

Fonte: AUTOR (2019)

Tabela 35 - Superfícies críticas no pilar 44 com  $C_1 = 60 \text{ cm}$

Espessura da laje (cm)	Altura útil			Valores de a (menor valor entre 1,5d e 0,5C1)						Superfícies Críticas (Perímetro Reduzido)		
	dx (cm)	dy (cm)	d (cm)	1,5d	0,5C1	1,5d	0,5C2	a1	a2	Superfície C (cm)	Superfície C' (cm)	Superfície C'' (cm)
30	26,2	24,6	25,4	38,1	30	38,1	10	10	10	20	99,80	259,39
25	21,2	19,6	20,4	30,6	30	30,6	10	10	10	20	84,09	212,27
20	16,2	14,6	15,4	23,1	30	23,1	10	10	10	20	68,38	165,14
18	14,2	12,6	13,4	20,1	30	20,1	10	10	10	20	62,10	146,29

Fonte: AUTOR (2019)



### 5.3.1 Tensão resistente e solicitante no contorno C (Pilar P44)

Para o caso de pilares de canto, deve-se analisar o cálculo das tensões considerando apenas o momento aplicado perpendicularmente ao plano da borda em estudo, desconsiderando o outro momento atuante. Além disso, todas as verificações devem levar em consideração qual direção será adotada como borda livre.

Considerando o lado perpendicular à borda livre, podemos adotar que o  $M_{sd}$  é o momento fletor perpendicular à borda livre. Para a primeira análise o  $M_{sd}$  será o valor de  $M_{sdy}$  e na segunda análise será o  $M_{sdx}$ .

- **Tensão resistente (contorno C):** Pela a Equação (3.13) determinamos:

$$\tau_{sd} \leq \tau_{Rd2} = 0,27\alpha_v f_{cd}$$

$$\tau_{sd} = 0,27 \cdot \left(1 - \frac{30}{250}\right) \cdot \frac{30}{1,4} = 5,09 \text{ MPa}$$

- **Tensão solicitante (contorno C):**

O cálculo da tensão solicitante deve ser obtido através da Equação 3.7:

$$\tau_{sd} = \frac{F_{sd}}{u \cdot d} + \frac{K_1 M_{sd1}}{W_{p1} \cdot d}$$

De forma análoga para o caso dos outros pilares, é necessário conhecer o valor do módulo de resistência plástica  $W_{p1}$ .

Para  $C_1 = 20$  cm, o cálculo do momento de resistência plástica  $W_{p1}$  utilizamos a Tabela 10:

$$W_{p1} = \frac{C_1^2}{4} + \frac{C_1 C_2}{2} = \frac{20^2}{4} + \frac{20 \cdot 60}{2} = 700 \text{ cm}^2$$

O valor do coeficiente  $K_1$  s e mantém o mesmo pelo fato do pilar analisado ter as mesmas dimensões de  $C_1 = 20$  cm e  $C_2 = 60$  cm. Logo o valor de  $K_1$

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{20}{60} = 0,5 \rightarrow (\text{interpolação}) \rightarrow K_1 = 0,3999$$

Para  $C_1 = 60$  cm, o cálculo do momento de resistência plástica  $W_{p1}$  utilizamos a Tabela 10:

$$W_{p1} = \frac{C_1^2}{4} + \frac{C_1 C_2}{2} = \frac{60^2}{4} + \frac{20 \cdot 60}{2} = 1500 \text{ cm}^2$$

O valor do coeficiente  $K_1$  altera pôr as dimensões de análise serem de  $C_1 = 60$  cm e  $C_2 = 20$  cm. Logo o valor de  $K_1$ :

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{60}{20} = 3 \rightarrow (\text{Tabela 1}) \rightarrow K_1 = 0,8$$

- **Excentricidade “e” (contorno C):**

No caso de pilares de borda e canto é necessário calcular a resultante da excentricidade do perímetro crítico em relação ao centro do pilar, no plano perpendicular à borda livre. Assim deve-se calcular a excentricidade para cada contorno C, C' e C''. No caso do contorno C, o cálculo da excentricidade é dado pelas equações da Tabela 9:

Para  $C_1 = 20$  cm:

$$e = \frac{C_1 \cdot a_1 - a_1^2 + a_2 \cdot C_1}{2 \cdot (a_1 + a_2)} = \frac{20 \cdot 10 - 10^2 + 30 \cdot 20}{2 \cdot (10 + 30)} = 8,75 \text{ cm}$$

Para  $C_1 = 60$  cm:

$$e = \frac{C_1 \cdot a_1 - a_1^2 + a_2 \cdot C_1}{2 \cdot (a_1 + a_2)} = \frac{60 \cdot 10 - 10^2 + 10 \cdot 60}{2 \cdot (10 + 10)} = 27,50 \text{ cm}$$

➤ **Primeira Análise ( $M_{sd} = M_{sdy}$ )**

Antes de calcular a tensão solicitante, é preciso verificar, segundo a norma NBR 6118/2014 se o momento resultante é maior que diferença entre o momento de cálculo no plano perpendicular e cálculo resultante da excentricidade do perímetro crítico reduzido  $u^*$  em relação ao centro do pilar, todos em relação ao bordo livre do pilar. Assim:

$$M_{sd1} = (M_{sd1} - M_{sd} *) \geq 0$$

Sendo que:

$$M_{sd} * = (F_{sd} \cdot e)$$

Desta forma, podemos determinar que o momento de cálculo resultante da excentricidade do perímetro crítico reduzido é igual:

Para  $C_1 = 20$  cm:

$$M_{sd} * = (113,85 \cdot 8,75) = 996,22 \text{ kN.cm}$$

Comparando com o momento no plano perpendicular à borda livre temos que:

$$M_{sd1} = (3730,60 - 996,22) > 0$$

$$\therefore M_{sd1} = 2734,38 \text{ kN.cm}$$

Para  $C_2 = 60$  cm:

$$M_{sd} * = (113,85 \cdot 27,50) = 3130,99 \text{ kN.cm}$$

Comparando com o momento no plano perpendicular à borda livre temos que:

$$M_{sd1} = (3730,60 - 3130,99) > 0$$

$$\therefore M_{sd1} = 599,61 \text{ kN.cm}$$

As Tabela 36 e 37 mostra os valores de excentricidade, no contorno C, para cada valor de espessura e a direção da borda livre adotada.

Tabela 36 – Excentricidade no contorno C no pilar 44 com  $C_1 = 20$  cm

<b>Espessura da laje (cm)</b>	<b>Excentricidade - contorno C</b>			
	<b>e (cm)</b>	<b>Msd*</b>	<b>Msd1</b>	<b>Msd2</b>
30	8,75	996,22	2734,38	563,04
25	8,75	612,98	3316,34	356,04
20	8,75	497,01	3664,15	508,76
18	8,75	499,41	4143,59	718,00

Fonte: AUTOR (2019)

Tabela 37 - Excentricidade no contorno C no pilar 44 com  $C_1 = 60$  cm

<b>Espessura da laje (cm)</b>	<b>Excentricidade - contorno C</b>			
	<b>e (cm)</b>	<b>Msd*</b>	<b>Msd1</b>	<b>Msd2</b>
30	27,50	3130,99	599,61	563,04
25	27,50	1926,49	2002,83	356,04
20	27,50	1562,02	2599,14	508,76
18	27,50	1569,57	3073,43	718,00

Fonte: AUTOR (2019)

Assim, a tensão solicitante no contorno C no pilar 43 de  $C_1 = 20$  cm, pela Equação 3.3:

$$\tau_{sd} = \frac{F_{sd}}{u \cdot d} + \frac{K_1 M_{sd1}}{W_{p1} \cdot d}$$

$$\tau_{sd} = \frac{113,85}{700 \cdot 25,4} + \frac{0,399 \cdot 2734,38}{700 \cdot 25,4} = 1,74 \text{ MPa}$$

A seguir, os resultados das verificações podem ser vistos, conforme a direção da borda livre adotada, nas Tabelas 38 e 39:

Tabela 38 – Verificação da punção no pilar 44 com  $C_1 = 20$  cm

<i>Espessura da laje (cm)</i>	<i>Contorno C</i>		
	<i>Tensão Solicitante (MPa)</i>	<i>Tensão Resistente (MPa)</i>	<i>Verificação à punção</i>
30	1,74	5,09	OK
25	1,79	5,09	OK
20	2,47	5,09	OK
18	3,18	5,09	OK

Fonte: AUTOR (2019)

Tabela 39 - Verificação da punção no pilar 44 com  $C_1 = 60$  cm

<i>Espessura da laje (cm)</i>	<i>Contorno C</i>		
	<i>Tensão Solicitante (MPa)</i>	<i>Tensão Resistente (MPa)</i>	<i>Verificação à punção</i>
30	2,30	5,09	OK
25	1,98	5,09	OK
20	2,29	5,09	OK
18	2,74	5,09	OK

Fonte: AUTOR (2019)

➤ **Segunda Análise ( $M_{sd} = M_{sdx}$ )**

Nesta segunda análise define-se que o momento aplicado perpendicularmente ao plano da borda será o valor de  $M_{sdx}$ . Assim, o valor do momento resultante, seguindo a verificação indica pela norma, é igual:

Para  $C_1 = 20$  cm:

$$M_{sd} * = (113,85 \cdot 8,75) = 996,22 \text{ kN. cm}$$

Comparando com o momento no plano perpendicular à borda livre temos que:

$$M_{sd1} = (563,04 - 996,22) < 0$$

$$\therefore M_{sd1} = 0$$

Para  $C_2 = 60$  cm:

$$M_{sd}^* = (113,85 \cdot 27,50) = 3130,99 \text{ kN.cm}$$

Comparando com o momento no plano perpendicular à borda livre temos que:

$$M_{sd1} = (563,04 - 3130,99) < 0$$

$$\therefore M_{sd1} = 0 \text{ kN.cm}$$

As Tabela 40 e 41 mostra os valores de excentricidade, no contorno C, para cada valor de espessura e a direção da borda livre adotada.

Tabela 40 - Excentricidade no contorno C no pilar 44 com  $C_1 = 20$  cm

Espessura da laje (cm)	Excentricidade - contorno C			
	e (cm)	Msd*	Msd1	Msd2
30	8,75	996,22	0,00	563,04
25	8,75	612,98	0,00	356,04
20	8,75	497,01	11,75	508,76
18	8,75	499,41	218,59	718,00

Fonte: AUTOR (2019)

Tabela 41 - Excentricidade no contorno C no pilar 44 com  $C_1 = 60$  cm

Espessura da laje (cm)	Excentricidade - contorno C			
	e (cm)	Msd*	Msd1	Msd2
30	27,50	3130,99	0,00	563,04
25	27,50	1926,49	0,00	356,04
20	27,50	1562,02	0,00	508,76
18	27,50	1569,57	0,00	718,00

Fonte: AUTOR (2019)

Conforme calculado na primeira análise ( $M_{sd} = M_{sdy}$ ), as tensões solicitantes foram calculadas segundo a Equação 3.3. A seguir, os resultados das verificações podem ser vistos, conforme a direção da borda livre adotada, nas Tabelas 42 e 43:

Tabela 42 - Verificação da punção no pilar 44 com  $C_1 = 20$  cm

<i>Contorno C</i>			
<i>Espessura da laje (cm)</i>	<i>Tensão Solicitante (MPa)</i>	<i>Tensão Resistente (MPa)</i>	<i>Verificação à punção</i>
30	1,12	5,09	OK
25	0,86	5,09	OK
20	1,12	5,09	OK
18	1,51	5,09	OK

Fonte: AUTOR (2019)

Tabela 43 - Verificação da punção no pilar 44 com  $C_1 = 60$  cm

<i>Contorno C</i>			
<i>Espessura da laje (cm)</i>	<i>Tensão Solicitante (MPa)</i>	<i>Tensão Resistente (MPa)</i>	<i>Verificação à punção</i>
30	2,24	5,09	OK
25	1,72	5,09	OK
20	1,84	5,09	OK
18	2,13	5,09	OK

Fonte: AUTOR (2019)

### 5.3.2 Tensão resistente e solicitante no contorno C' (Pilar P44)

a) Trecho sem armadura de punção

- **Taxa de Armadura ( $\rho$ )**

Da mesma forma ao que foi calculado para o pilar P28 e P43, a taxa de armadura presente no pilar é calculada pelas as Equações 3.20 e 3.21:

Para  $C_1 = 20$  cm:

$$\rho_x = \frac{(8 \cdot 2,01)}{25,4 \cdot (60 + 2 \cdot (3 \cdot 25,4))} = 0,0030$$

$$\rho_y = \frac{(10 \cdot 2,01)}{25,4 \cdot (20 + 2 \cdot (3 \cdot 25,4))} = 0,0029$$

Segundo a Equação 3.16 a taxa de armadura é dada por:

$$\rho = \sqrt{\rho_x \cdot \rho_y} = 0,0029$$

Para  $C_1 = 60$  cm:

$$\rho_x = \frac{(8 \cdot 2,01)}{25,4 \cdot (20 + 2 \cdot (3 \cdot 25,4))} = 0,0037$$

$$\rho_y = \frac{(10 \cdot 2,01)}{25,4 \cdot (60 + 2 \cdot (3 \cdot 25,4))} = 0,0047$$

Segundo a Equação 3.16 a taxa de armadura é dada por:

$$\rho = \sqrt{\rho_x \cdot \rho_y} = 0,0042$$

Assim, podemos determinar todos os valores da taxa de armadura para cada espessura de laje e direção da borda adotada, como mostra a Tabela 44 e 45:

Tabela 44 - Taxa de armadura para  $C_1 = 20$  cm

<i>Espessura da laje (cm)</i>	<i>Taxa de armadura</i>		
	<i><math>\rho_x</math></i>	<i><math>\rho_y</math></i>	<i>taxa <math>\rho</math></i>
<b>30</b>	0,0030	0,0029	0,0029
<b>25</b>	0,0043	0,0035	0,0039
<b>20</b>	0,0069	0,0054	0,0061
<b>18</b>	0,0085	0,0067	0,0075

Fonte: AUTOR (2019)



Tabela 45 - Taxa de armadura para  $C_1 = 60$  cm

Espessura da laje (cm)	Taxa de armadura		
	$\rho_x$	$\rho_y$	taxa $\rho$
30	0,0037	0,0047	0,0042
25	0,0055	0,0055	0,0055
20	0,0093	0,0066	0,0078
18	0,0120	0,0072	0,0093

Fonte: AUTOR (2019)

- **Tensão resistente (contorno C'):**

Com a taxa de armadura é possível calcular a tensão resistente pela a Equação (3.15), como não se trata de uma laje protendida o valor de  $\sigma_{cp} = 0$ , pode ser calculada:

$$\tau_{Rd1} = 0,13 \left( 1 + \sqrt{20/d} \right) (100\rho fck)^{\frac{1}{3}}$$

Podemos então determinar que a tensão resistente no contorno C' é:

$$\tau_{Rd1} = 0,13 \left( 1 + \sqrt{20/25,1} \right) (100 \cdot 0,0034 \cdot 30)^{\frac{1}{3}} = 0,53 \text{ Mpa}$$

- **Tensão solicitante (contorno C'):**

De forma análoga para o caso dos outros pilares, é necessário conhecer o valor do módulo de resistência plástica  $W_{p1}$ .

Para  $C_1 = 20$  cm, o cálculo do momento de resistência plástica  $W_{p1}$  utilizamos a Tabela 10:

$$W_{p1} = \frac{C_1^2}{4} + \frac{C_1 C_2}{2} + 2C_2 d + 4d^2 + \frac{\pi d C_1}{2}$$

$$W_{p1} = 7126,60 \text{ cm}^2$$

O valor do coeficiente  $K_1$  se mantém o mesmo pelo fato do pilar analisado ter as mesmas dimensões de  $C_1 = 20 \text{ cm}$  e  $C_2 = 60 \text{ cm}$ . Logo o valor de  $K_1$

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{20}{60} = 0,5 \rightarrow (\textit{interpolação}) \rightarrow K_1 = 0,3999$$

Para  $C_1 = 60 \text{ cm}$ , o cálculo do momento de resistência plástica  $W_{p1}$  utilizamos a Tabela 10:

$$W_{p1} = 7490,53 \text{ cm}^2$$

O valor do coeficiente  $K_1$  altera pôr as dimensões de análise serem de  $C_1 = 60 \text{ cm}$  e  $C_2 = 20 \text{ cm}$ . Logo o valor de  $K_1$ :

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{20}{60} = \frac{1}{3} \rightarrow (\textit{Tabela 1}) \rightarrow K_1 = 0,8$$

- **Excentricidade (contorno C'):**

Da mesma forma que para o contorno C, é preciso calcular a resultante da excentricidade do perímetro crítico em relação ao centro do pilar, no plano perpendicular à borda livre.

No contorno C', o cálculo da excentricidade é dado pelas equações da Tabela 9:

Para  $C_1 = 20 \text{ cm}$ :

$$e = \frac{C_1 \cdot a_1 - a_1^2 + a_2 \cdot C_1 + 4 \cdot a_2 \cdot d + 8d^2 + \pi \cdot d \cdot C_1}{2 \cdot (a_1 + a_2 + \pi \cdot d)}$$

$$e = 43,85 \text{ cm}$$

Para  $C_1 = 60$  cm:

$$e = \frac{C_1 \cdot a_1 - a_1^2 + a_2 \cdot C_1 + 4 \cdot a_2 \cdot d + 8d^2 + \pi \cdot d \cdot C_1}{2 \cdot (a_1 + a_2 + \pi \cdot d)}$$

$$e = 60,45 \text{ cm}$$

➤ **Primeira Análise ( $M_{sd} = M_{sdy}$ )**

Antes de calcular a tensão solicitante, é preciso verificar, segundo a norma NBR 6118/2014 se o momento resultante é maior que diferença entre o momento de cálculo no plano perpendicular e cálculo resultante da excentricidade do perímetro crítico reduzido  $u^*$  em relação ao centro do pilar, todos em relação ao bordo livre do pilar. Assim:

$$M_{sd1} = (M_{sd} - M_{sd}^*) \geq 0$$

Sendo que:

$$M_{sd}^* = (F_{sd} \cdot e)$$

Desta forma, podemos determinar que o momento de cálculo resultante da excentricidade do perímetro crítico reduzido é igual:

Para  $C_1 = 20$  cm:

$$M_{sd}^* = (113,85 \cdot 43,85) = 4992,05 \text{ kN.cm}$$

Comparando com o momento no plano perpendicular à borda livre temos que:

$$M_{sd1} = (3730,60 - 4992,05) < 0$$

$$\therefore M_{sd1} = 0$$

Para  $C_2 = 60$  cm:

$$M_{sd}^* = (113,85 \cdot 60,45) = 6882,29 \text{ kN} \cdot \text{cm}$$

Comparando com o momento no plano perpendicular à borda livre temos que:

$$M_{sd1} = (3730,60 - 6882,29) < 0$$

$$\therefore M_{sd1} = 0$$

As Tabelas 46 e 77 mostra os valores de excentricidade, no contorno  $C'$ , para cada valor de espessura e a direção da borda livre adotada.

Tabela 46 - Excentricidade no pilar 44 com  $C_1 = 20$  cm

Espessura da laje (cm)	Excentricidade - contorno $C'$			
	$e$ (cm)	$M_{sd}^*$	$M_{sd1}$	$M_{sd2}$
30	43,85	4992,05	0,00	563,04
25	37,27	2611,02	1318,30	356,04
20	29,76	1690,44	2470,72	508,76
18	26,72	1524,88	3118,12	718,00

Fonte: AUTOR (2019)

Tabela 47 - Excentricidade no pilar 44 com  $C_1 = 60$  cm

Espessura da laje (cm)	Excentricidade - contorno $C'$			
	$e$ (cm)	$M_{sd}^*$	$M_{sd1}$	$M_{sd2}$
30	60,45	6882,29	0,00	563,04
25	54,05	3786,70	142,62	356,04
20	47,65	2706,33	1454,83	508,76
18	45,08	2572,78	2070,22	718,00

Fonte: AUTOR (2019)

As tensões solicitantes no contorno  $C'$ , são calculadas pela Equação 3.3. A seguir, os resultados das verificações podem ser vistos, conforme a direção da borda livre adotada, nas Tabelas 48 e 49:

Tabela 48 - Verificação de armadura no pilar 44 com  $C_1 = 20$  cm

<i>Contorno C' - Sem Armadura - 2d da face do pilar</i>				
<i>Espessura da laje (cm)</i>	<i>Tensão Solicitante (MPa)</i>	<i>Tensão Resistente (MPa)</i>	<i>Valores de Wp na superfície C'</i>	<i>Verificação da necessidade de Armadura Punção</i>
			<i>Wp1 (cm<sup>2</sup>)</i>	
30	0,37	0,51	7126,60	OK
25	0,38	0,59	5453,52	OK
20	0,61	0,73	3980,45	OK
18	0,80	0,82	3447,21	OK

Fonte: AUTOR (2019)

Tabela 49 – Verificação de armadura no pilar 44 com  $C_1 = 60$  cm

<i>Contorno C' - Sem Armadura - 2d da face do pilar</i>				
<i>Espessura da laje (cm)</i>	<i>Tensão Solicitante (MPa)</i>	<i>Tensão Resistente (MPa)</i>	<i>Valores de Wp na superfície C'</i>	<i>Verificação da necessidade de Armadura Punção</i>
			<i>Wp1 (cm<sup>2</sup>)</i>	
30	0,45	0,57	7490,53	OK
25	0,41	0,66	5903,29	OK
20	0,62	0,80	4516,06	OK
18	0,84	0,87	4017,16	OK

Fonte: AUTOR (2019)

Como é visto, nas duas direções do pilar,  $C_1 = 20$  cm e  $C_1 = 60$  cm, a verificação em relação as tensões resistentes foram maiores do que as solicitantes, portanto, não há necessidade de uso de armadura de punção para o pilar P44 para esta primeira análise ( $M_{sd} = M_{sdy}$ ).

➤ **Segunda Análise ( $M_{sd} = M_{sdx}$ )**

Nesta segunda análise define-se que o momento aplicado perpendicularmente ao plano da borda será o valor de  $M_{sdx}$ . Assim, o valor do momento resultante, seguindo a verificação indica pela norma, é igual:

Para  $C_1 = 20$  cm:

$$M_{sd}^* = (113,85 \cdot 43,85) = 4992,05 \text{ kN.cm}$$

Comparando com o momento no plano perpendicular à borda livre temos que:

$$M_{sd1} = (563,04 - 4992,05) < 0$$

$$\therefore M_{sd1} = 0$$

Para  $C_2 = 60$  cm:

$$M_{sd}^* = (113,85 \cdot 60,45) = 3130,99 \text{ kN.cm}$$

Comparando com o momento no plano perpendicular à borda livre temos que:

$$M_{sd1} = (563,04 - 6882,29) < 0$$

$$\therefore M_{sd1} = 0$$

As Tabela 50 e 51 mostra os valores de excentricidade, no contorno  $C'$ , para cada valor de espessura e a direção da borda livre adotada.

Tabela 50 - Excentricidade no pilar 44 com  $C_1 = 20$  cm

Espessura da laje (cm)	Excentricidade - contorno $C'$			
	$e$ (cm)	$M_{sd}^*$	$M_{sd1}$	$M_{sd2}$
30	43,85	4992,05	0,00	563,04
25	37,27	2611,02	0,00	356,04
20	29,76	1690,44	0,00	508,76
18	26,72	1524,88	0,00	718,00

Fonte: AUTOR (2019)

Tabela 51 - Excentricidade no pilar 44 com  $C_1 = 60$  cm

Espessura da laje (cm)	Excentricidade - contorno $C'$			
	$e$ (cm)	$Msd^*$	$Msd1$	$Msd2$
30	60,45	6882,29	0,00	563,04
25	54,05	3786,70	0,00	356,04
20	47,65	2706,33	0,00	508,76
18	45,08	2572,78	0,00	718,00

Fonte: AUTOR (2019)

Logo, as tensões solicitantes no contorno  $C'$ , são calculadas pela Equação 3.3. A seguir, os resultados das verificações podem ser vistos, conforme a direção da borda livre adotada, nas Tabelas 52 e 53

Tabela 52 - Verificação de armadura no pilar 44 com  $C_1 = 20$  cm

Espessura da laje (cm)	Contorno $C'$ - Sem Armadura			
	Tensão Solicitante (MPa)	Tensão Resistente (MPa)	Valores de $Wp$ na superfície $C'$	Verificação da necessidade de Armadura Punção
			$Wp1$ (cm <sup>2</sup> )	
30	0,37	0,51	7126,60	OK
25	0,33	0,59	5453,52	OK
20	0,45	0,73	3980,45	OK
18	0,59	0,82	3447,21	OK

Fonte: AUTOR (2019)

Tabela 53 - Verificação de armadura no pilar 44 com  $C_1 = 60$  cm

Espessura da laje (cm)	Contorno $C'$ - Sem Armadura			
	Tensão Solicitante (MPa)	Tensão Resistente (MPa)	Valores de $Wp$ na superfície $C'$	Verificação da necessidade de Armadura Punção
			$Wp1$ (cm <sup>2</sup> )	
30	0,45	0,57	7490,53	OK
25	0,41	0,66	5903,29	OK
20	0,54	0,80	4516,06	OK
18	0,69	0,87	4017,16	OK

Fonte: AUTOR (2019)

Como resumo das verificações, é visto que nas duas direções do pilar,  $C_1 = 20$  cm e  $C_2 = 60$  cm, a verificação em relação as tensões resistentes foram maiores do que as solicitantes, portanto, não há necessidade de uso de armadura contra o efeito de punção.

### 5.3.3 Tensão resistente e solicitante no contorno C'' (Pilar P44)

- **Tensão solicitante (contorno C'')**

De forma análoga para o caso dos outros pilares, é necessário conhecer o valor do módulo de resistência plástica  $W_{p1}$ .

Para  $C_1 = 20$  cm, o cálculo do momento de resistência plástica  $W_{p1}$  utilizamos a Tabela 10:

$$W_{p1} = \frac{C_1^2}{4} + \frac{C_1 C_2}{2} + 2C_2 d + 4d^2 + \frac{\pi d C_1}{2} + C_2 i + 8di + \frac{\pi i C_1}{4} + i^2$$

$$W_{p1} = 45886,21 \text{ cm}^2$$

O valor do coeficiente  $K_1$  se mantém o mesmo pelo fato do pilar analisado ter as mesmas dimensões de  $C_1 = 20$  cm e  $C_2 = 60$  cm. Logo o valor de  $K_1$

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{20}{60} = 0,5 \rightarrow (\text{interpolação}) \rightarrow K_1 = 0,3999$$

Para  $C_1 = 60$  cm, o cálculo do momento de resistência plástica  $W_{p1}$  utilizamos a Tabela 10:

$$W_{p1} = 46178,00 \text{ cm}^2$$

O valor do coeficiente  $K_1$  se mantém o mesmo pelo fato do pilar analisado ter as mesmas dimensões de  $C_1 = 60$  cm e  $C_2 = 20$  cm. Logo o valor de  $K_1$

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{60}{20} = 3 \rightarrow (\text{Tabela}) \rightarrow K_1 = 0,8$$



- **Excentricidade (contorno C'')**:

Da mesma forma que para o contorno C e C', é preciso calcular a resultante da excentricidade do perímetro crítico em relação ao centro do pilar, no plano perpendicular à borda livre.

No caso do contorno C'', o cálculo da excentricidade é dado pelas equações da Tabela 5:

Para  $C_1 = 20$  cm:

$$e = \frac{C_1 a_1 - a_1^2 + a_2 C_1 + 4a_2 d + 8d^2 + \pi d C_1 + 2a_2 i + 8di + \frac{\pi \cdot i \cdot C_1}{2} + 2i^2}{2 \cdot \left( a_1 + a_2 + \pi \cdot d + \frac{\pi \cdot i}{2} \right)}$$

$$e = 109,32 \text{ cm}$$

Para  $C_1 = 60$  cm:

$$e = \frac{C_1 a_1 - a_1^2 + a_2 C_1 + 4a_2 d + 8d^2 + \pi d C_1 + 2a_2 i + 8di + \frac{\pi \cdot i \cdot C_1}{2} + 2i^2}{2 \cdot \left( a_1 + a_2 + \pi \cdot d + \frac{\pi \cdot i}{2} \right)}$$

$$e = 125,22 \text{ cm}$$

➤ **Primeira Análise ( $M_{sd} = M_{sdy}$ )**

Antes de calcular a tensão solicitante, é preciso verificar, segundo a norma NBR 6118/2014 se o momento resultante é maior que diferença entre o momento de cálculo no plano perpendicular e cálculo resultante da excentricidade do perímetro crítico reduzido  $u^*$  em relação ao centro do pilar, todos em relação ao bordo livre do pilar. Assim:

$$M_{sd1} = (M_{sd} - M_{sd}^*) \geq 0$$

Sendo que:

$$M_{sd}^* = (F_{sd} \cdot e)$$

Desta forma, podemos determinar que o momento de cálculo resultante da excentricidade do perímetro crítico reduzido é igual:

Para  $C_1 = 20$  cm:

$$M_{sd}^* = (113,85 \cdot 109,32) = 407813,29 \text{ kN.cm}$$

Comparando com o momento no plano perpendicular à borda livre temos que:

$$M_{sd1} = (3730,60 - 407813,29) < 0$$

$$\therefore M_{sd1} = 0$$

Para  $C_1 = 60$  cm:

$$M_{sd}^* = (113,85 \cdot 125,22) = 467155,87 \text{ kN.cm}$$

Comparando com o momento no plano perpendicular à borda livre temos que:

$$M_{sd1} = (3730,60 - 467155,87) < 0$$

$$\therefore M_{sd1} = 0$$

As Tabela 54 e 55 mostra os valores de excentricidade, no contorno C'', para cada valor de espessura e a direção da borda livre adotada.

Tabela 54 - Excentricidade no pilar 44 com  $C_1 = 20$  cm

Espessura da laje (cm)	Excentricidade - contorno C''			
	e (cm)	Msd*	Msd1	Msd2
30	109,32	407813,29	0	563,04
25	90,10	354019,82	0	356,04
20	69,59	289593,43	0	508,76
18	61,35	284832,30	0	718,00

Fonte: AUTOR (2019)

Tabela 55 - Excentricidade no pilar 44 com  $C_1 = 60$  cm

Espessura da laje (cm)	Excentricidade - contorno C''			
	e (cm)	Msd*	Msd1	Msd2
30	125,22	467155,87	0	563,04
25	106,11	416944,50	0	356,04
20	86,99	361987,91	0	508,76
18	79,34	368379,16	0	718,00

Fonte: AUTOR (2019)

As tensões solicitantes no contorno C'', são calculadas pela Equação 3.3. A seguir, os resultados das verificações podem ser vistos, conforme a direção da borda livre adotada, nas Tabelas 56 e 57:

Tabela 56 – Verificação do contorno C'' com  $C_1 = 20$  cm

Espessura da laje (cm)	Contorno C'' - 2d da região armada			
	Tensão Solicitante (MPa)	Tensão Resistente (MPa)	Valores de Wp na superfície C'	Verificação Armadura Punção
			Wp1 (cm <sup>2</sup> )	
30	0,08	0,51	45786,21	OK
25	0,10	0,59	34170,51	OK
20	0,13	0,73	26322,35	OK
18	0,17	0,82	21078,16	OK

Fonte: AUTOR (2019)

Tabela 57 - Verificação do contorno C'' com  $C_1 = 60$  cm

Espessura da laje (cm)	Contorno C'' - 2d da região armada			
	Tensão Solicitante (MPa)	Tensão Resistente (MPa)	Valores de Wp na superfície C'	Verificação Armadura Punção
			Wp1 (cm <sup>2</sup> )	
30	0,09	0,57	45278,00	OK
25	0,12	0,66	28792,74	OK
20	0,16	0,80	30032,01	OK
18	0,20	0,87	24513,84	OK

Fonte: AUTOR (2019)

➤ **Segunda Análise ( $M_{sd} = M_{sdx}$ )**

Nesta segunda análise define-se que o momento aplicado perpendicularmente ao plano da borda será o valor de  $M_{sdx}$ . Assim, o valor do momento resultante, seguindo a verificação indica pela norma, é igual.

Como era previsto, a diferença entre o momento resultante com o momento de cálculo no plano perpendicular e cálculo resultante da excentricidade ao centro do pilar, ainda se mantém menor do que zero, como visto para a primeira análise ( $M_{sd} = M_{sdy}$ )

Logo, todos os resultados de excentricidade e tensões solicitantes no contorno C'', para cada valor de espessura, se mantém os mesmo para este caso.

## 6 CONCLUSÃO

Após todos os estudos e análises nos pilares, pode-se destacar dois fatores que tiveram maior relevância no efeito de punção: a espessura de laje e posição do pilar.

Foi possível ver como a tensão resistente à punção tende a aumentar quando se reduz a espessura da laje, principalmente ao longo das análises nos contornos C' e C''. Mas, segundo a norma, o fenômeno da punção é dado como uma ruptura transversal da laje, referente às altas tensões de cisalhamento, provocadas por forças concentradas, agindo em pequenas áreas. E a resistência das superfícies críticas são dadas pela resistência a compressão diagonal do concreto, o empacotamento dos agregados ao longo das fissuras e pelo efeito pino da armadura de flexão.

Para os contornos C' e C'', a norma estabelece uma relação direta entre altura útil e a taxa de armadura com a resistência destas superfícies. Na qual, matematicamente, a taxa de armadura está diretamente proporcional a resistência das mesmas, e também, é ela, que entre às armaduras de flexão, vai resistir os esforços cisalhantes. Por isso, ao diminuir a altura útil da laje, a taxa de armadura seria menor, com espaçamento menor entre elas, assim o perímetro crítico do pilar iria se aproximar cada vez mais do pilar, gerando maiores esforços e aumentando a carga que deveria ser resistida pela armadura longitudinal.

Entretanto, ao longo do contorno C foi possível perceber que, para esta primeira avaliação da tensão resistente, a mesma responde pela compressão diagonal do concreto, ou seja, apenas depende das características do concreto em si. Mas, caso essa verificação não fosse atendida, seria mais aconselhável voltar e rever alguns parâmetros, como por exemplo, o emprego de capitéis, aumento da seção do pilar, ou aumentar a resistência do concreto. O concreto por natureza não apresenta uma boa resistência ao cisalhamento, fazendo com que a necessidade de armadura seja quase que recorrente a esforços superiores. Entretanto, o aumento do  $f_{ck}$  do concreto, de modo a evitar a punção sobre todos os pilares, é muito inviável, devido a necessidade de valores extremamente elevados, a sua dificuldade de atingir o valor necessário e o alto custo para empregar esta solução.

Assim, caso não haja empecilhos arquitetônicos para tal, o ideal seria o uso de capitéis nos pilares, pois todas as verificações provavelmente ficariam compatíveis, e comportaria uma solução mais econômica e viável.

Quanto a metodologia de verificações, exemplos como o CEB/FIB 90, o EUROCODE 2/92, BS 8110/97 e o ACI 318-05, utilizam o método da superfície de controle para suas prescrições normativas. Mas a norma brasileira NBR6118/2014 possui textos e formulações simplificadas. Por isso, para prosseguir com os cálculos, foi preciso recorrer a literatura acadêmicos, como Ferreira (2005), e comentários publicados pelo Ibracon (2015). Assim, foi permitido apresentar as formulações da norma de modo mais detalhado e completo.

Por fim, percebe-se que neste trabalho, que deve ser feito um estudo mais amplo em relação ao assunto, junto à utilização de programas computacionais para a verificação à punção, principalmente naquelas situações onde há necessidade de armadura transversal e a influência da protensão na resistência à punção de lajes lisas.

## REFERÊNCIAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS **NBR 6118: Projeto de Estruturas de Concreto Armado**. Rio de Janeiro, 2014.

BASTOS, Dr. Paulo Sérgio dos Santos. **Disciplina: 2117 - Estruturas de Concreto I: Notas de aula lajes de concreto**. 2015. Disponível em: <<http://www.feb.unesp.br/pbastos/concreto1/Lajes.pdf>>. Acesso em: 15 out. 2019.

CORDOVIL, Fábio Armando Botelho. **Lajes de Concreto Armado - Punção**. Florianópolis: Editora da UFSC, 1997.

FERREIRA, Antônio Mário. **Análise da punção e flechas em lajes maciças sem vigas de concreto armado de acordo com as prescrições da NBR 6118:2003**. 2005. 182 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Civil, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2005.

IBRACON, Instituto Brasileiro do Concreto. **ABNT NBR 6118:2014 comentários e exemplos de aplicação**. São Paulo, 2015.

KINNUNEN, S.; NYLANDER, H. **Punching of concrete slabs without shear reinforcement**. Kungl. Tekniska Hoegskolans Handlingar, n.158. Estocolmo, 1960.

LEONHARDT, F.; MÖNNIG, E.. **Construções de concreto: casos especiais de dimensionamento de estruturas de concreto armado**. Interciência, v.2. Rio de Janeiro, 1978

LOURENÇO, Diego da Silva. **Punção em lajes lisas de concreto armado com aberturas: análise experimental**. 2018. 179 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Civil, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2018.

MELGES, José Luiz Pinheiro. **Punção em lajes: Exemplos de cálculo e análise teórico experimental**. Dissertação de mestrado, EESC-USP, 1995.

PINTO, Roberto Caldas de Andrade. **Punção Assimétrica em Lajes**. 1993. 145 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1993.

PRÁ, Artur Antônio Dal. **Análise de alternativas de projeto para pavimentos sem vigas em concreto armado**. 2012. 126 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Civil, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2012.

RABELLO, Fernando Toppan. **Análise comparativa de normas para a punção em lajes de concreto armado**. 2010. 248 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Civil, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2010.

TRAUTWEIN, Leandro Moura. **Punção em Lages Cogumelo de Concreto Armado: Análise Experimental e Numérica**. 2006. 329 f. Tese (Doutorado) - Curso de Engenharia, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2006.

SHEHATA, I.A.E.M. **Simplified model for estimating the punching resistance of reinforced concrete slabs**. Material and Structures, n.23, p.364-371, 1993.

WERNECK, Priscila Pinheiro de Toledo. **Avaliação da punção em lajes lisas de concreto armado**. 2017. 149 f. TCC (Graduação) - Curso de Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2017.

ZIGOSKI, Gabriela Ullmann. **Punção em lajes de concreto armado**. 2016. 82 f. TCC (Graduação) - Curso de Engenharia Civil, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2016.