



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO SOCIOECONÔMICO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA

Pierre Joseph Nelcide

Uma análise das políticas fiscal e monetária no Brasil via um modelo macrodinâmico:
Previsão e controle estocástico via lógica *Fuzzy*.

Florianópolis
2020

Pierre Joseph Nelcide

Uma análise das políticas fiscal e monetária no Brasil via um modelo macrodinâmico:

Previsão e controle estocástico via lógica *Fuzzy*.

Tese submetida ao Programa de Pós-graduação em
Economia da Universidade Federal de Santa Catarina
para a obtenção do título de doutor em Economia
Orientador: Prof. Milton Biagi, Dr.

Florianópolis

2020

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Nelcide, Pierre Joseph

Uma análise das políticas fiscal e monetária no Brasil
via um modelo macrodinâmico: Previsão e controle
estocástico via lógica Fuzzy. / Pierre Joseph Nelcide ;
orientador, Milton Biage, 2020.
223 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro Sócio-Econômico, Programa de Pós-Graduação em
Economia, Florianópolis, 2020.

Inclui referências.

1. Economia. 2. Política fiscal e Política monetária. 3.
Modelo macrodinâmico. 4. Controle estocástico. 5. Lógica
Fuzzy. I. Biage, Milton . II. Universidade Federal de
Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Economia. III.
Título.

Pierre Joseph Nelcide

Uma análise das políticas fiscal e monetária no Brasil via um modelo macrodinâmico:

Previsão e controle estocástico via lógica *Fuzzy*.

O presente trabalho em nível de doutorado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Profª. Patrícia Bonini, Dra.

Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC)

Prof. Guilherme Jonas Costa Da Silva, Dr.

Universidade Federal de Uberlândia (UFU)

Prof. Silvio Antônio Ferraz Cário, Dr.

Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC)

Prof. Gilson Geraldino Silva Júnior, Dr.

Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC)

Prof. Helberte João França Almeida, Dr.

Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC)

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de doutor em Economia.

Coordenação do Programa de Pós-Graduação

Prof. Milton Biage, Dr.

Orientador

Florianópolis, 2020.

Este trabalho é dedicado a todos aqueles que acreditam que o conhecimento é capaz de mudar a vida de qualquer pessoa.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela vida e inteligência que me deu a fim de concluir esta etapa tão importante na minha vida.

Agradeço à toda minha família especialmente à minha mãe, Marie Lourdes Joseph, por estar sempre presente o tempo todo em minha vida.

Um agradecimento especial à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo auxílio através da minha bolsa de pesquisa.

Agradeço ao meu orientador, Professor Dr. Milton Biage, pela atenção dada ao meu trabalho, especialmente, pela grande ajuda na parte computacional. Agradeço também pela sua amizade, pelo tratamento de pai que ele me deu, além de outros apoios psicológicos. Realmente, eu não sei em qual língua agradecer ao senhor, “*merci beaucoup*”, “*mèsi anpil*”.

Não posso esquecer-me de agradecer a um amor de pessoa, Luiza Gabriela de Souza Pessoa, pelo carinho, pela sua sensibilidade comigo, e por me aguentar nos momentos difíceis.

Agradeço uma grande pessoa, Thais Fernanda Lima, pela amizade, pela sinceridade e pelos conselhos. “Te adoro menina”.

Um agradecimento especial a uma grande amiga, Verônica Alves, pela ajuda nas correções ortográficas, pelos momentos de risadas e conversas.

Um grande agradecimento a todos os meus colegas de pós-graduação em Economia da UFSC, especialmente, Guilherme e Gustavo, pela amizade e pelas brincadeiras. Realmente, vocês são demais.

Agradeço a todos os outros haitianos que estudam no Brasil comigo, especialmente, Gusner, Laurent e Yves, pela “irmandade”. “*Yon gwo akolad pou nou tout*”

E por último, agradeço ao povo brasileiro como todo, por me aceitar e me receber no Brasil com todo apoio, carinho e amor. Que Deus abençoe cada um de vocês.

RESUMO

A análise da conjunção entre as políticas fiscal e monetária é importante e fundamental para se obter a eficiência na execução do processo econômico. Portanto, o presente trabalho tem por meta contribuir na análise das interações entre estas duas políticas em economias em desenvolvimento. Com base nas ideias de Blanchard (2004), estruturou-se um modelo macrodinâmico de equações diferenciais que define as inter relações entre as políticas fiscal e monetária. Tendo em vista que as economias emergentes são expostas aos choques externos e/ou internos, políticos e/ou econômicos, o modelo macrodinâmico proposto foi perturbado transformando-o em um sistema estocástico. Fazendo um estudo de caso sobre Brasil, utilizando os dados mensais de janeiro de 1998 a dezembro de 2018, os resultados do Sistema Dinâmico mostraram que a economia nacional (Brasileira) depende muito de uma alta taxa de crescimento econômico, uma baixa taxa de juros reais e um câmbio desvalorizado (depreciado) para poder controlar a inflação e a dívida pública. Ao impor choques ao modelo em questão, estes transformam o sistema dinâmico em um sistema dinâmico estocástico. Os efeitos destas perturbações se propagam com maior intensidade nas variáveis monetárias, especialmente no Índice de inflação e no câmbio. As previsões estocásticas mostraram que a economia local deve exibir uma taxa de crescimento anual próxima de 1% (se referindo ao índice de Quantum contabilizado pelo índice de Laspeyres de quantidade) para os próximos cinco anos. Esta taxa de crescimento se revela muito baixa comparativamente aos grandes competidores no mercado internacional (por exemplo, a China possui uma taxa de crescimento anual maior que 6 %). Portanto, baseando nos resultados estocásticos concluiu-se que o futuro da economia brasileira não é encorajador. Também, tendo em vista a impossibilidade dos modelos dinâmicos determinístico e estocástico em estabelecer algum controle sistemático na evolução do processo (a não ser por tentativas de acerto e erro), utilizou-se um modelo de lógica *Fuzzy*, a fim de estabelecer análises de controle do sistema sob distúrbios estocásticos. Os modelos de regressão de lógica *Fuzzy* determinam trajetórias de evolução no tempo, tendo como base um jogo não cooperativo (obtendo ótimos locais) entre as autoridades fiscais e monetárias. Neste estudo, os modelos *Fuzzy* foram implementados, supondo-se que o jogo estocástico entre as autoridades fiscais e monetárias no processo de previsão da dinâmica da economia brasileira tratava-se de um jogo de referência cooperativo. Com base nessa premissa conflitante com a concepção do modelo *Fuzzy*, dois casos de controle foram analisados, cujos resultados indicaram pouca possibilidade de crescimento controlado da economia brasileira. Segundo Kirsanova et al. (2006), neste jogo não cooperativo, a autoridade fiscal joga contra a autoridade monetária um jogo de Nash. Portanto, quando ocorre um choque inflacionário, o bem-estar social será

prejudicado e, possivelmente, muito prejudicado, se a autoridade fiscal deseja obter um aumento de produção.

Palavras-chave: Política fiscal. Política monetária. Modelo macrodinâmico. Controle estocástico. Lógica *Fuzzy*.

ABSTRACT

The analysis of the conjunction between fiscal and monetary policies is important and fundamental to obtain efficiency in the execution of the economic process. Therefore, this paper aims to contribute to the analysis of the interactions between these two policies in developing economies. Based on the ideas of Blanchard (2004), a macrodynamic model of differential equations was structured that defines the interrelationships between fiscal and monetary policies. Bearing in mind that emerging economies are exposed to external and / or internal, political and / or economic shocks, the proposed macrodynamic model was disturbed, transforming it into a stochastic system. Making a case study about Brazil, using monthly data from January 1998 to December 2018, the results of the Dynamic System showed that the national (Brazilian) economy depends a lot on a high economic growth rate, a low real interest rate and a devalued (depreciated) exchange rate in order to control inflation and public debt. By imposing shocks on the model in question, they transform the dynamic system into a stochastic dynamic system. The effects of these disturbances spread more intensely in monetary variables, especially in the inflation index and the exchange rate. Stochastic forecasts showed that the local economy should experience an annual growth rate close to 1% (referring to the Quantum index accounted for by the Laspeyres index of quantity) for the next five years. This growth rate proves to be very low compared to the major competitors in the international market (for example, China has an annual growth rate greater than 6%). Therefore, based on the stochastic results, was concluded that the future of the Brazilian economy is not encouraging. Also, in view of the impossibility of the deterministic and stochastic dynamic models to establish some systematic control in the evolution of the process (except for attempts at success and error), a *Fuzzy* logic model was used in order to establish control analyzes of the system under stochastic disturbances. *Fuzzy* logic regression models determine trajectories of evolution over time, based on a non-cooperative game (obtaining optimal locations) between the fiscal and monetary authorities. In this study, the *Fuzzy* models were implemented, assuming that the stochastic game between the fiscal and monetary authorities in the process of forecasting the dynamics of the Brazilian economy was a cooperative reference game. Based on this premise conflicting with the conception of the *Fuzzy* model, two control cases were analyzed, the results of which indicated little possibility of controlled growth in the Brazilian economy. According to Kirsanova et al. (2006), in this non-cooperative game, the fiscal authority plays a Nash game against the monetary authority. Therefore, when an inflationary shock occurs, social welfare

will be harmed and, possibly, severely harmed, if the fiscal authority wishes to obtain an increase in production.

Keywords: Fiscal policy. Monetary policy. Macrodynamic Model. Stochastic control. *Fuzzy* Logic.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 - Pertinência de indivíduos com relação à estatura Elementos do trabalho acadêmico.....	46
Figura 2.2 - Sistema da lógica fuzzy.....	49
Figura 2.3 - Inferência <i>Fuzzy</i>	51
Figura 5.1 - Desenho esquemático do procedimento de calibração de funções e sistema de equações diferenciais ordinárias	83
Figura 5.2 - (a) Produto potencial; e (b) Hiato do produto	85
Figura 5.3 - (a) Componente $\pi_t - \pi^e$ para vários níveis de filtragem; e (b) Componente $\pi_t - \pi^e$ e metas de inflação	87
Figura 6.1 - Comparação entre os dados empíricos do Índice SELIC e do Diferencial da inflação e sua meta.....	95
Figura 6.2 - Comparação entre a dívida pública real, a Senhoriagem e o Saldo primário de Brasil	99
Figura 6.3 - Comparação entre o hiato de produto e inflação	101
Figura 6.4 - Comparação entre o câmbio real e a taxa de juros real.....	102
Figura 6.5 - Ajuste do modelo dinâmico com os dados reais (pontos vermelhos) para o sistema de Eq. (3.29).....	104
Figura 6.6 - Ajuste do modelo dinâmico com os dados reais (pontos vermelhos) para as estimativas dos impactos relativos das variáveis explicativas da Tabela 6.2.....	109
Figura 6.7 - Evolução dos Passeios aleatórios impostos sobre cada variável endógena	116
Figura 6.8 - Histogramas das perturbações estocásticas nos coeficientes de impactos do modelo (3.29): lê-se as distribuições da esquerda para a direita, para a seguinte sequência de os coeficientes: $\gamma_1, \gamma_2, \mu_1, \mu_2, \theta_1, \theta_2, \sigma_1, \sigma_2$ e δ_1	118
Figura 6.9 - Histogramas das perturbações estocásticas adicionadas as variáveis endógenas: PIB, SELIC, DLSP real, IPCA e CÂMBIO real: lê-se os histogramas, de cima para baixo e, da esquerda para a direita, para as variáveis GDP real, SELIC, DLSP real, IPCA e CÂMBIO real.....	122
Figura 6.10 - Histogramas das realizações de Monte Carlo para as variáveis GDP real e SELIC, para cada período de previsão de 2019.1-2023.12. Lê-se os histogramas, de cima para baixo e, da esquerda para a direita, para as variáveis GDP real e SELIC.....	124

Figura 6.11 - Histogramas das realizações de Monte Carlo para as variáveis DLSP real, IPCA e CÂMBIO real, para cada período de previsão de 2019.1-2023.12. Lê-se os histogramas, de cima para baixo e, da esquerda para a direita, para as variáveis DLSP real, IPCA e CÂMBIO real.....	129
Figura 6.12 - Evoluções das previsões das variáveis endógenas GDP real, índice SELIC nominal, Dívida Pública real, índice IPCA nominal e Câmbio real, para 200 realizações de Monte-Carlo: (a) perturbações estocásticas somente nos parâmetros não controláveis; (b) somente perturbações estocásticas adicionadas nas variáveis endógenas, e; (c) perturbações estocásticas nos parâmetros não controláveis, simultaneamente, com perturbações estocásticas adicionadas nas variáveis endógenas	134
Figura 6.13 - Evoluções das médias geométricas, para 200 realizações de Monte-Carlo, das variáveis endógenas GDP real, índice SELIC nominal, Dívida Pública real, índice IPCA nominal e Câmbio real: Est. Est.=0 , perturbações estocásticas somente nos parâmetros não controláveis; Est. Est.=1 , somente perturbações estocásticas adicionadas nas variáveis endógenas; Est. Est.=2 , perturbações estocásticas nos parâmetros não controláveis, simultaneamente, com perturbações estocásticas adicionadas nas variáveis endógenas, e; Est. Determ. , estimativas com o modelo determinístico	136
Figura 6.14 - evoluções das soluções das variáveis endógenas do sistema dinâmico estocástico, Equação (3.29), devido a perturbações em u_1 : (a) Evolução das variáveis endógenas, devido às perturbações sobre u_1 , e; (b) histograma das distribuições das perturbações estocásticas sobre u_1	138
Figura 6.15 - evoluções das soluções das variáveis endógenas do sistema dinâmico estocástico, Equação (3.29), devido a perturbações em u_2 : (a) Evolução das variáveis endógenas, devido às perturbações estocásticas sobre u_2 , e; (b) histograma das distribuições das perturbações estocásticas sobre u_2	139
Figura 6.16 - evoluções das soluções das variáveis endógenas do sistema dinâmico estocástico, Equação (3.29), devido a perturbações em u_3 : (a) evolução das variáveis endógenas, devido às perturbações sobre u_3 , e; (b) histograma das distribuições das perturbações estocásticas sobre u_3	140
Figura 6.17 - evoluções das soluções das variáveis endógenas do sistema dinâmico estocástico, Equação (3.29), devido a perturbações em u_4 : (a) evolução das variáveis endógenas, devido às perturbações sobre u_4 , e; (b) histograma das distribuições das perturbações estocásticas sobre u_4	141

Figura 6.18 - evoluções das soluções das variáveis endógenas do sistema dinâmico estocástico, Equação (3.29), devido a perturbações em u_5 : (a) evolução das variáveis endógenas, devido às perturbações sobre u_5 , e; (b) histograma das distribuições das perturbações estocásticas sobre u_5	142
Figura 7.1 - Funções de pertinência para os estados do sistema	158
Figura 7.2 - Comparações do modelo <i>Fuzzy</i> , modelo de referência, modelo puramente estocástico e dados empíricos: (a) regressão <i>Fuzzy</i> , assumindo as curvas de referência estabelecidas no CASO 2, e; (b) regressão <i>Fuzzy</i> , assumindo as curvas de referência estabelecidas no CASO 1	162

LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1 - Variáveis utilizadas no modelo dinâmico	79
Tabela 6.1 - Parâmetros do modelo ajustado.....	92
Tabela 6.2 - Estimativas dos impactos relativos das variáveis explicativas	107
Tabela 6.3 - Valores calibrados dos parâmetros, intervalos de choques introduzidos nos parâmetros e nas variáveis endógenas	117
Tabela 6.4 - Características dos histogramas da taxa de crescimento do PIB (Figura 6.10.a): intervalos de variabilidade do crescimento relativo, estimativas das taxas de crescimento médias mensais e médias anuais, correspondentes a cada ano de previsibilidade	125
Tabela 6.5 - Características dos histogramas da taxa de crescimento do índice SELIC nominal (Figura 6.10.b): intervalos de variabilidade do crescimento relativo, estimativas das taxas de crescimento médias mensais e médias anuais, correspondentes a cada ano de previsibilidade	128
Tabela 6.6 - Características dos histogramas da taxa de crescimento da dívida pública relativa ao PIB de 1998 (Figura 6.11.a): intervalos de variabilidade do crescimento relativo, estimativas das taxas de crescimento médias mensais e médias anuais, correspondentes a cada ano de previsibilidade	130
Tabela 6.7 - Características dos histogramas da taxa de crescimento do índice de inflação (Figura 6.11.b): intervalos de variabilidade do crescimento relativo, estimativas das taxas de crescimento médias mensais e médias anuais, correspondentes a cada ano de previsibilidade	131
Tabela 6.8 - Características dos histogramas da taxa de crescimento do Câmbio real (Figura (6.11.c)): intervalos de variabilidade do crescimento relativo, estimativas das taxas de crescimento médias mensais e médias anuais, correspondentes a cada ano de previsibilidade	132

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BACEN Banco Central do Brasil

FIESP/DEPECON Federação das Indústrias do Estado de São Paulo/Departamento de Pesquisas e Estudo Econômicos

DLSP Dívida Líquida do Setor Público

DSIGMF Difference between two Sigmoidal Functions Membership Function

EMBI Emerging Market Bond Index

EME Economias Emergentes

ERPT Exchange Rate Pass-Trough

FMI Fundo Monetário Internacional

GAUSSMF Gaussian curve membership function

GAUSS2MF Gaussian combination membership function

GBELLMF Generalized bell-shaped membership function

GDP Gross Domestic Product

HP Hodrick-Prescott

IBGE Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística

IFCP Interval-Fuzzy Chance-Constrained Programming

IMF International Monetary Fund

IPCA Índice de Preço ao Consumidor Amplo

IPEA Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada

IS Investment Saving

LM Liquidity Preference Money

LMI Linear Matrix Inequalities

MATLAB MATrix LABoratory

MC Monte Carlo

PCHIP Piecewise Cubic Hermithe Interpolating Polynomial

PIB Produto Interno Bruto

PIMF Π -shaped Membership Function

PPC Paridade de Poder de Compra

PSIGMF Product of two Sigmoidal Membership Function

RAM Random Access Memory

SELIC Sistema Especial de Liquidação e de Custódia

SIGMF Sigmoidal Membership Function

SMF S-shaped Membership Function

STN Secretaria do Tesouro Nacional

SVAR Structural Vector AutoRegression

TS Takagi-Sugeno

TFNP Teoria Fiscal de Nível de Preço

TJLP Taxa de Juros de Longo Prazo

TRAPMF Trapezoidal-shaped Membership Function

TRIMF Triangular-shaped Membership Function

Util Cap Utilização da Capacidade Produtiva

ZMF Z-shaped Membership Function

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	21
1.1	OBJETIVO GERAL E OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	28
1.2	ESTRUTURA DO ESTUDO.....	29
2	REVISÃO DE LITERATURA.....	31
2.1	INTERAÇÕES ENTRE POLÍTICAS FISCAL E MONETÁRIA.....	31
2.2	POLÍTICAS FISCAL E MONETÁRIA NAS ECONOMIAS EMERGENTES (EMES)	35
2.3	LÓGICA <i>FUZZY</i> E MODELOS DINÂMICOS NA MACROECONOMIA	40
2.3.1	Lógica <i>Fuzzy</i>, aplicações e teoria.....	40
2.3.2	Conjunto <i>Fuzzy</i>	44
2.3.3	Função de pertinência (<i>Membership function</i>).....	45
2.3.4	Regras <i>Fuzzy</i>	48
2.3.5	Sistema da lógica <i>Fuzzy</i>	49
2.3.6	Modelo <i>Fuzzy</i> Takagi-Sugeno (<i>TS</i>).....	51
3	METODOLOGIA.....	55
3.1	FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO MODELO MACRODINÂMICO	55
3.2	TRANSFORMAÇÃO DO MODELO DINÂMICO EM MODELO ESTOCÁSTICO	64
4	MODELO DE REFERÊNCIA E MODELO ROBUSTO DE CONTROLE DA TRAJETÓRIA DE REFERÊNCIA	67
4.1	INTERAÇÕES ENTRE POLÍTICAS FISCAL E MONETÁRIA.....	67
4.2	MODELO ROBUSTO DE CONTROLE DA TRAJETÓRIA DE REFERÊNCIA	67
4.3	O TRAJETO DE CONTROLE ROBUSTO MINIMAX VIA MÉTODO DE INTERPOLAÇÃO <i>FUZZY</i>	73
5	SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL	78
5.1	BASES DE DADOS PARA CALIBRAÇÃO DO MODELO	78
5.2	IDENTIFICAÇÃO DOS PARÂMETROS DO MODELO DETERMINÍSTICO	80

5.2.1	Calibração do modelo determinístico da equação (3.29)	80
5.2.2	Obtenção do hiato do produto e da meta de inflação	83
5.2.2.1	<i>Obtenção do hiato do produto</i>	83
5.2.2.2	<i>Obtenção da Meta de inflação</i>	86
5.3	O MODELO <i>FUZZY</i>	88
6	RESULTADOS DOS MODELOS DETERMINÍSTICOS E ESTOCÁSTICOS	91
6.1	CALIBRAÇÃO DO MODELO DINÂMICO E ANÁLISES DO COMPORTAMENTO DOS COEFICIENTES DO MODELO PARA A ECONOMIA BRASILEIRA.....	91
6.2	ANÁLISES DA ESTRUTURA MACROECONÔMICA E MONETÁRIA DA ECONOMIA BRASILEIRA	92
6.3	ESTIMATIVAS DOS IMPACTOS RELATIVOS DAS VARIÁVEIS EXPLICATIVAS NO MODELO DINÂMICO E ANÁLISES DO COMPORTAMENTO DA ECONOMIA BRASILEIRA	106
6.4	ANÁLISES DE BIFURCAÇÕES ESTOCÁSTICAS	110
6.4.1	Realizações de Monte Carlo (MC)	113
6.4.2	Simulação do modelo estocástico do Sistema (3.30)	113
6.5	RESULTADOS DAS PERTURBAÇÕES ESTOCÁSTICAS INTRODUZIDAS NOS COEFICIENTES NÃO CONTROLÁVEIS E NAS VARIÁVEIS ENDÓGENAS	115
6.6	RESULTADOS DAS PERTURBAÇÕES ESTOCÁSTICAS INTRODUZIDAS NOS COEFICIENTES DE CONTROLE..	137
7	LÓGICA <i>FUZZY</i>	144
7.1	MODELO DE REFERÊNCIA	147
7.1.1	A teoria dos jogos na interação das variáveis fiscais e monetárias: regime de cooperação mútua entre tomadores de decisões	148
7.1.1.1	<i>CASO 1: as duas autoridades decidam manter o câmbio nominal constante</i>	152
7.1.1.2	<i>CASO 2: o câmbio continua depreciar (apreciar) ao longo do tempo</i>	154
7.1.2	Resolução do modelo de referência	156
7.2	PROCESSO <i>Fuzzy</i>	158
7.2.1	Resultados do modelo de regressão <i>Fuzzy</i>	160

7.3	TRAJETÓRIA DE CONTROLE ROBUSTO MINIMAX.....	165
7.4	RESULTADOS	167
8	CONSIDERAÇÕES FINAIS	169
	REFERÊNCIAS.....	172
	APÊNDICE A – Diferentes tipos de funções de Pertinência	183
	APÊNDICE B – Teoria dos Jogos (Método Minimax)	188
	APÊNDICE C – Prova do Teorema 1 segundo Chen & Lin (2011).....	191
	APÊNDICE D – Prova do Teorema 2 segundo Chen & Lin (2011)	193
	APÊNDICE E – Complemento de Schur	195
	APÊNDICE F – Desigualdades Matriciais Lineares (em inglês <i>Linear Matrix Inequality, LMI</i>)	196
	APÊNDICE G – Senhoriagem.....	198
	APÊNDICE H – Método de Runge-Kutta	200
	APÊNDICE I – Interpolação cúbica por partes de conservação de forma (em inglês: <i>Piecewise Cubic Hermite Interpolating Polynomial PCHIP</i>).....	203
	APÊNDICE J – Método Simplex de Nelder-Mead	204
	APÊNDICE K – Regra do Taylor	207
	APÊNDICE L – Filtro Hodrick-Prescott (HP)	209
	APÊNDICE M – Câmbio Real	215
	APÊNDICE N – Simulação de Monte Carlo.....	219
	APÊNDICE O – FEASP	220

1 INTRODUÇÃO

O controle da política fiscal é importante e fundamental no processo econômico de um país. No entanto, é preciso que o processo de execução da política fiscal seja sempre desenvolvido em conjunção com as políticas monetárias e macroeconômicas, para atingir o objetivo de toda economia que é a eficiência. Portanto, a literatura econômica tem se preocupado em estudar a relação entre essas políticas econômicas, com a finalidade de verificar como essas políticas podem interagir entre si.

Segundo Sargent e Wallace (1981), se a política fiscal domina a política monetária, as autoridades fiscais têm como premissa definir os seus orçamentos, fixando os *déficits* e *superávits*, e, com isso, determinando as receitas a serem adquiridas com vendas de títulos. Neste sentido, as autoridades monetárias são obrigadas a financiar via senhoriagem às autoridades fiscais, após atingir a quantidade máxima de título que pode ser vendida no mercado financeiro, e estabelecerem as políticas de controle da inflação. Mas esse controle torna-se difícil quando o mercado não consegue absorver o volume de títulos impostos na comercialização. Assim, as autoridades monetárias são forçadas a tolerar a inflação adicional, criar moeda e gerar renda de senhoriagem, a ser utilizada no complemento do financiamento das metas da política fiscal.

Por outro lado, se a política monetária domina a fiscal, as autoridades monetárias definem a sua política, anunciando as taxas de crescimento da base monetária para os períodos atual e futuro, determinando a receita de senhoriagem que eles vão fornecer ao governo. Portanto, as autoridades fiscais serão obrigadas a ajustar seus orçamentos com a venda de títulos no mercado e com a receita de senhoriagem. Nesse regime de dominância monetária, o Banco Central (BACEN) pode controlar com sucesso, permanentemente, a inflação.

Segundo o relatório do Fundo Monetário Internacional, FMI (2003), a dominância fiscal pode tornar uma questão importante para os países em desenvolvimento, uma vez que, de forma geral, essas economias experimentaram ao longo das últimas décadas, aumentos de suas dívidas públicas, com desequilíbrios fiscais. Nesse sentido, a política fiscal tornou-se uma grande preocupação para a política monetária em economias emergentes. Pois, *Déficits* fiscais insustentáveis e níveis de dívida pública geram um ambiente de dominância fiscal em muitos países, levando a inflação a níveis altos e voláteis, e prêmios de risco elevados sobre a dívida pública. Uma fraca credibilidade nas políticas fiscal e monetária conduz à taxa de

câmbio a níveis desfavoráveis, o que expõe as economias emergentes a fluxos de saídas de capitais. Conforme resumido por Yörükoğlu e Kılınç (2012), tal cenário fiscal encontra-se associado aos baixos níveis de desenvolvimento financeiro, um alto grau de dolarização, e alta taxa de repasse cambial. A consequência disso é que ambas as políticas, fiscal e monetária, tendem a ser pró-cíclicas em muitos países, acentuando a volatilidade econômica.

Além dos aspectos acima apresentados, a realidade econômica dos países em desenvolvimento torna-se ainda mais complexa, uma vez que a maioria deles está, quase sempre, exposta a choques políticos e econômicos, externos e internos. Esses choques reduzem o ritmo de crescimento dessas economias e, também, o ritmo de recuperação diante de qualquer crise. Embora, muitas vezes, diante de alguns choques internacionais, as economias emergentes tenham uma tendência de se saírem bem melhor do que algumas economias avançadas, mas a interconexão entre a economia global e os mercados financeiros não as deixam totalmente poupadas frente a tal cenário. Um exemplo típico dessa situação ocorreu em 2012, momento em que a maioria das economias emergentes apresentou uma recuperação rápida, em função da liquidez vigente na economia americana, devido aos programas de *Quantitative Easing* (ver Morgan, 2011) que conduziram as taxas de juros a níveis próximos de zero nessa economia. Esta situação conduziu a fuga de parte de capitais desse programa, devido as altas taxas de juros vigente nas economias emergentes. No entanto, as economias desenvolvidas, especialmente da Comunidade Europeia, apresentaram um processo de recuperação bastante lento. Porém, as previsões de alguns economistas em 2012 eram de um crescimento moderado na maioria das economias emergentes, previsões estabelecidas com base na expectativa de uma lenta solução da crise da dívida europeia e do impasse na política fiscal dos Estados Unidos.

Muitos estudos empíricos se concentraram na análise da vulnerabilidade das economias emergentes, devidos aos choques, tanto internos como externos. Portanto, vários instrumentos estatísticos foram utilizados para este fim. O método Vetor Auto Regressivo estrutural (SVAR) tem se demonstrado ser uma ferramenta apropriada para este tipo de estudo, porque permite impor determinadas hipóteses sobre as reações das variáveis para diferentes tipos de choques, em referência à teoria econômica, o que garante uma melhor interpretação dos resultados. Alguns estudos envolvendo esta metodologia estavam interessados (como Canova, 2003 e Mackowiak, 2006) nas consequências de uma mudança na política monetária dos Estados Unidos sobre os países emergentes, e concluíram que as reações das economias

emergentes diferiram daquelas observadas nos países industrializados, conforme conclusões de Cushman e Zha (1997) e Kim e Roubini (2000).

De fato, os países emergentes são muito sensíveis a choques exógenos por causa de sua dependência das condições econômicas externas, geralmente respondendo às políticas monetárias restritivas dos EUA, causadas por aumentos acentuados em suas taxas de juros, o que provoca contração da produção nessas economias emergentes. A metodologia SVAR apresenta como característica positiva na análise do comportamento de economias emergentes, pois possibilita identificar o grau de simetria dos choques entre várias economias e verificar a velocidade com que as economias emergentes se ajustam aos choques exógenos. Um exemplo típico de aplicação do SVAR é o estudo de Canova (2003). Com base nesse estudo, o autor concluiu que o nível de convergência das estruturas macroeconômicas e financeiras explica a natureza assimétrica das respostas dos países em desenvolvimento aos choques exógenos. O autor ainda identificou um núcleo de países com perfis econômicos e financeiros semelhantes e, portanto, apresentando reações idênticas às inovações estocásticas.

Bianchi (2012) estudou as relações entre as variáveis fiscais e monetárias usando um modelo dinâmico estocástico de equilíbrio geral DSGE (*dynamic stochastic general equilibrium*). O autor demonstra que a evolução ao longo do tempo das interações entre as políticas monetária e fiscal pode fazer com que tenha mudança de regime de dominância. Isso pode acontecer em um dos três casos seguintes: (i) política fiscal ativa - política monetária passiva; (ii) política fiscal passiva - política monetária ativa e; (iii) as duas políticas ativas. Nesse modelo, os agentes estão conscientes da possibilidade de mudanças de regime e levam isso em consideração, ao formar expectativas. Portanto, a lei do movimento das variáveis de interesse depende não apenas dos parâmetros tradicionais micro fundamentados, mas também das crenças em torno de regimes alternativos.

Kirsanova et al. (2006) usaram um modelo macrodinâmico de cinco equações para mostrar os resultados de políticas monetárias e fiscais ótimas, quando são usadas cooperativamente e não cooperativamente para estabilizar a economia contra choques. Os autores usam como técnica de solução a análise de uma função impulso-resposta após choques na inflação e na demanda. Assumindo o caso onde as autoridades monetárias eram benevolentes, os autores estudaram o que acontece com a economia, se as autoridades fiscais não são benevolentes. Três resultados são possíveis usando simulações numéricas desses jogos: (i) as autoridades fiscais e as autoridades monetárias forem benevolentes e cooperando entre si no estabelecimento de seus instrumentos de política macroeconômica. Portanto, a

resposta a um choque inflacionário será aquela em que as autoridades fiscais deixam a política monetária desempenhar quase todo o peso da estabilização da economia diante do choque. A dívida será controlada pela política fiscal, mas apenas lentamente; (ii) o mesmo resultado do primeiro caso ocorrerá se a autoridade fiscal puder atuar como líder de Stackelberg¹, mesmo se a autoridade fiscal visa um aumento da produção. (iii) se a autoridade fiscal jogar contra a autoridade monetária em um jogo de Nash, então o bem-estar social será prejudicado e, possivelmente, muito prejudicado, se a autoridade fiscal visar um aumento da produção.

Portanto, tendo em vista os aspectos de comportamentos relativos às economias emergentes destacadas acima, e as conclusões levantadas pelos estudos empíricos, também descritas anteriormente, algumas questões podem ser estabelecidas nos estudos a serem conduzidos, associados ao tema de interação de políticas macroeconômicas (fiscal e monetária) em economias emergentes. De forma geral, estas questões podem ser: Quais são as interações existentes entre as variáveis fiscais e monetárias, como dívida pública, PIB, Taxa de juros, Câmbio e Inflação? Qual é a capacidade de uma economia emergente em absorver choques externos e internos? Como pré-definir trajetórias de controle para uma economia emergente e quais são os seus custos?

Tendo em vista que o estudo a ser conduzido nessa pesquisa será a análise das interações entre políticas macroeconômicas na economia brasileira, consideraremos como instrumento para responder às questões estabelecidas acima, um modelo macrodinâmico que, além de identificar a natureza das respostas dos países em desenvolvimento aos choques exógenos (conforme Canova, 2003; Kirsanova et al., 2006; e Bianchi, 2012), permite também otimizar trajetórias de controle para uma economia emergente, e encontrar os custos desse processo otimizado.

Blanchard (2004) argumentou que uma das maneiras de estudar as inter-relações entre as variáveis fiscais e monetárias nas economias emergentes, como no caso do Brasil, seria através de um modelo macrodinâmico. Porém, devido às complexidades das realidades econômicas, segundo este autor, seria preciso introduzir no modelo dinâmico, alguns choques para que este se adapte melhor à realidade macroeconômica, e estabelecer uma maneira de controlar as evoluções de tais choques.

Portanto, tendo em vista as considerações acima, uma primeira proposição do estudo a ser conduzido será estruturar um modelo macrodinâmico, caracterizado por equações

¹ O modelo de liderança da Stackelberg é um jogo estratégico em economia em que a empresa líder se move primeiro e depois as empresas seguidoras se movem sequencialmente.

diferenciais ordinárias estocásticas, a ser resolvido e analisado, com a finalidade de verificar o grau de reação da economia brasileira aos choques exógenos, e verificar a velocidade com que esta economia se ajusta a esses choques.

Quanto ao segundo aspecto destacado por Blanchard (2004), o de estabelecer o controle das evoluções dos choques exógenos, será utilizado neste estudo a técnica da lógica *Fuzzy*. Esse método é uma ferramenta que permite capturar informações imprecisas, descritas em linguagem natural e convertê-las para um formato numérico. Segundo Jang e Gulley (1995), a lógica *Fuzzy* é uma maneira conveniente de mapear um espaço de entrada para um espaço de saída. Segundo Von Altrock (1996), a lógica *Fuzzy* se aplica em diversas áreas, com maior ênfase, nos campos de conhecimentos da engenharia, como em sistemas de controle em processos de produção (Lee, 1996), em sistemas de controle inteligentes em telecomunicações (Erman et Al., 2009), em sistemas de apoio à tomada de decisão em processos logísticos militares (Teague, 2013), e assim por diante. Com relação às áreas de ciências sociais aplicadas, pode se citar a aplicação da lógica *Fuzzy* no controle de estoques, na avaliação do comportamento de fornecedores, no controle da qualidade da produção, na otimização de inventários, na avaliação de crédito, na avaliação de marketing, na análise de riscos, no controle de fluxo de caixas, e nos processos de controle de impactos ambientais (ENACHE, 2015; Lee, 1996; Li et Al., 2010; Lu et Al., 2010).

Para McNeil e Thro (1994), a aplicação da Lógica *Fuzzy* em processos de controle é viável se os sistemas dinâmicos apresentarem algumas das características de sistemas, como: (i) serem sistemas complexos, difíceis ou impossíveis de modelar; (ii) serem sistemas controlados por especialistas (seres humanos); (iii) serem sistemas com entradas e saídas complexas, e contínuas; (iv) serem sistemas que se utilizam observações humanas como base de entradas, e; (v) serem sistemas não observáveis², como os envolvidos nas ciências sociais e comportamentais, cuja descrição é extremamente complexa.

Bočková et Al. (2012) estudou a relação entre a ética nos negócios e o desempenho econômico das pequenas e médias empresas para a região da Morávia do Sul (República Tcheca), utilizando a lógica *Fuzzy*. Os resultados indicaram que as pequenas e médias empresas, assim como as empresas maiores, têm melhor desempenho, e são mais competitivas se não tiverem muitas mudanças na estrutura de propriedade, e os princípios éticos forem importantes para a administração. Isto é, uma empresa terá uma base necessária para o

² Os sistemas não observáveis são aqueles cujas variáveis geradas são exógenas, características de processos econômicos e sociais.

crescimento e o sucesso, se existirem relações positivas entre a gerência, os funcionários e o ambiente externo.

Korol (2012) avaliou a eficiência do modelo de lógica *Fuzzy* na previsão da situação financeira (na previsão de falência) de empresas e consumidores. O autor concluiu que todos os modelos da lógica *Fuzzy* são eficazes para prever falência de empresa e de consumidores. O autor mostrou que a lógica *Fuzzy* pode ser uma ferramenta muito útil e poderosa na análise financeira. Estes modelos podem ser facilmente utilizados pelos gestores financeiros como uma ferramenta importante no processo de avaliação da situação financeira de empresas e consumidores, além de apresentar altos valores práticos. Por fim, ele acrescentou que os modelos apresentados (modelos da lógica fuzzy) são superiores até mesmo aos métodos sofisticados de inteligência artificial, como modelos de redes neurais artificiais.

No meio ambiente, Dos Santos (2015) utilizou a lógica *Fuzzy* para analisar o comportamento da economia brasileira, no que se refere ao estabelecimento de um processo de controle de emissões de CO₂, preservação de área florestal e crescimento econômico. O autor esquematizou um sistema com cinco equações dinâmicas estocásticas, tendo como base as equações de crescimento endógenas para o Produto Interno, o Estoque de capital físico, Estoque de Trabalho, Estoque de capital humano, Conhecimento, Preservação de Áreas Florestais e Emissão de CO₂. Para a otimização de controle do sistema dinâmico foi utilizada a metodologia da lógica *Fuzzy*, esquematizada por Chen e Lin (2011). Os resultados do processo de controle indicaram os níveis de investimento e as inovações tecnológicas necessárias a serem implementados, para a preservação e recuperação da área florestal, e diminuição do impacto ambiental. As soluções para o processo de controle apontam para a necessidade de investimentos em práticas inovadoras, ampliação de áreas florestais e melhoria nas tecnologias de produção que conduzirão para o controle de emissões de gases do efeito estufa, nos anos futuros.

Na economia, o uso da lógica *Fuzzy* não é muito comum, porém alguns autores já mostraram a necessidade de usar essa metodologia na tomada de decisão econômica. Isso foi o caso de Klir e Yuan (1997, capítulo 17, seção 3) que, em uma pequena revisão, criticaram o uso da matemática clássica na economia. Os autores mostraram como o uso da matemática clássica convencional pode conduzir a resultados que apresentem uma grande diferença entre a previsão e a realidade econômica. Segundo os autores, a lógica *Fuzzy* pode modelar fenômenos econômicos com grande precisão, e facilitar a vida dos tomadores de decisões. A

lógica *Fuzzy* é constituída por várias ferramentas, tais como: otimização *Fuzzy*, regressões *Fuzzy*, jogos *Fuzzy* e tomada de decisão *Fuzzy*, etc.

Segundo Mcneill e Freiburger (1993, p.96) as variáveis econômicas como recessão, desemprego, inflação, são noções *Fuzzy* pelas suas imprecisões e incertezas. Portanto, os autores sugeriram o uso dos conjuntos *Fuzzy* na economia (como nas outras ciências sociais), como a ferramenta matemática mais aceitável e esclarecedora para a economia.

Tendo em vista os aspectos destacados acima sobre a importância da lógica *Fuzzy* no controle e otimização de processos dinâmicos, e tendo em consideração as incertezas inerentes às variáveis macroeconômicas de uma economia, então, será aplicada na segunda parte desta pesquisa a lógica *Fuzzy* no controle de um sistema macrodinâmico estocástico estruturado para a economia brasileira. Em particular, será aplicada para controle deste sistema macrodinâmico, a técnica de controle *Fuzzy* desenvolvida em Chen e Lin (2011).

Nesse estudo, primeiramente, o sistema macrodinâmico estocástico estruturado para a economia brasileira será calibrado e estimado, tendo como base de dados, as seguintes séries mensais da economia brasileira, de Jan/1998-Dez/2018: PIB (produto interno bruto), taxa de juros SELIC, taxa de Inflação (IPCA), Dívida do Setor Público, Câmbio, Metas de Inflação, Receita Fiscal e Despesas; além da taxa de juros dos USA. Em seguida, serão realizadas simulações, com a finalidade de observar o comportamento da economia brasileira, quando esta for exposta a choques políticos e econômicos, externos e internos. Nesse caso, o modelo dinâmico será perturbado, introduzindo choques estocásticos generalizados nos parâmetros de impactos incontroláveis, e choques em inovações estocásticas aditivas nas variáveis endógenas do modelo, a fim de observar como o sistema dinâmico irá reagir aos efeitos dessas inovações. Para isso, bandas de perturbações seguindo distribuições normais, em torno dos parâmetros calibrados, serão geradas para os parâmetros incontroláveis e introduzidos aleatoriamente nas equações do modelo macrodinâmico. Da mesma forma, perturbações estocásticas seguindo distribuições normais serão adicionadas às variáveis endógenas em cada momento do tempo. Com esse procedimento, serão obtidas soluções estocásticas para o sistema. A partir dessas soluções poder-se-á observar se ocorrerão bifurcações sistemáticas nas previsões futuras das variáveis da economia brasileira, devido às combinações de choques nos parâmetros (mudança na estrutura da economia) e choques adicionais nas variáveis (efeitos de choques exógenos nas variáveis), a partir das quais poder-se-á evidenciar várias situações operacionais para a economia brasileira. Supõe-se que esses distúrbios se

caracterizam como efeitos de curto e longo prazo na economia brasileira, devidos às inovações estocásticas nas economias internacional e/ou doméstica.

Em segundo lugar, um modelo de referência será desenvolvido, seguindo as premissas desejadas pelos gestores de política econômica, para gerar uma dinâmica futura controlada para o sistema de política macroeconômica da economia, no caso, a brasileira. Para que o sistema estocástico siga a trajetória desejada do modelo de referência, na presença dos choques, Chen e Lin (2011) propuseram um modelo robusto de referência de trajetória de controle, com a finalidade de gerenciar os recursos disponíveis. Nessa linha, podemos seguir Kirsanova et al. (2006), e estruturar alguns modelos de referência a serem otimizados pela técnica de jogos *Fuzzy*, considerando um dos três resultados apresentados anteriormente.

Do ponto de vista da teoria de jogos dinâmicos, pode se considerar a presença de dois jogadores. O primeiro jogador seria a existência dos choques (nos parâmetros e equações) e a incerteza nas condições iniciais que maximiza a trajetória de erro. O segundo jogador seria os controles do gerenciamento de recursos que minimizam a trajetória de erro. Este problema de jogo estocástico pode ser equivalente a um problema de trajeto robusto minimax, para alcançar uma trajetória de referência pré-estabelecida, apesar dos efeitos gerados pela presença dos choques e incerteza nas condições iniciais. Uma maneira eficiente de encontrar esta solução, Chen e Lin (2011) utilizou o algoritmo *Fuzzy* de Takagi-Sugeno (TS).

No estudo aqui realizado será utilizado o procedimento de Chen e Lin (2011) para interpolar o sistema estocástico não-linear, em diferentes pontos de operação, utilizado para aproximar a dinâmica do sistema de política econômica brasileira. Com a ajuda deste método de aproximação *Fuzzy*, o jogo estocástico poderá ser resolvido via um jogo estocástico *Fuzzy* utilizando a técnica de Desigualdades Matriciais Lineares (Linear Matrix Inequalities, LMI)³.

1.1. OBJETIVO GERAL E OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Tendo como base as questões estabelecidas na seção anterior, o objetivo geral deste trabalho é subdividido em duas partes: (i) a primeira, trata-se em calibrar e estimar o sistema macrodinâmico estocástico estruturado para a economia brasileira, e analisar a presença de bifurcações sistemáticas nas previsões futuras das variáveis da economia brasileira, em função de combinações de choques nos parâmetros (mudança na estrutura da economia) e choques adicionais nas variáveis (efeitos de choques exógenos nas variáveis). Tendo como base de

³ Mais detalhes sobre LMI em Boyd et al. (1994)

dados mensais da economia brasileira, de janeiro/1998-dezembro/2018; (ii) a segunda, trata-se em identificar a capacidade da economia brasileira em responder trajetórias de controle, previamente definidas, seguindo as premissas desejadas pelos gestores de política econômica, e estimar os custos necessários para que se atinjam tais metas. Portanto, para atingir esses objetivos gerais, foram estabelecidos alguns objetivos específicos, descritos a seguir:

- a) Revisão da literatura, a fim de se esclarecer conceitualmente as inter-relações existentes entre as políticas monetária e fiscal, detalhar teoricamente a política fiscal e monetária nos países emergentes e, finalmente, entender teoricamente a importância da lógica *Fuzzy* para a economia;
- b) Estruturar-se conceitualmente um modelo macrodinâmico de equações simultâneas que descrevesse as interações entre as políticas macroeconômicas para ser calibrado e estimado. Nesta abordagem esboça-se um modelo de cinco equações diferenciais ordinárias, com a finalidade de estudar as inter-relações dinâmicas entre as variáveis do modelo.
- c) Transformar o modelo macrodinâmico em modelo estocástico, com a finalidade de verificar a capacidade da economia brasileira em absorver choques, considerando três etapas: (i) introdução de choques estocásticos generalizados nos parâmetros de impactos incontornáveis; (ii) introdução de choques em inovações estocásticas aditivas nas variáveis endógenas do modelo, e; (iii) Introdução de choques estocásticos individuais em cada parâmetro de impacto incontornável, para verificar como a economia absorve os efeitos das inovações relativos aos respectivos parâmetros, e identificar como esses choques estocásticos perturbam o processo macroeconômico;
- d) Definir-se trajetórias futuras para as variáveis endógenas do modelo, e por meio de um processo de controle via lógica *Fuzzy* desenvolvida por Chen e Lin (2011), estimou-se os custos exigidos no controle do sistema;
- e) Finalmente, analisar se os resultados e verificar se onde a política brasileira pode chegar, ao estabelecer certas metas de controle.

1.2 ESTRUTURA DO ESTUDO

A pesquisa proposta será apresentada, além desta introdução, em seis capítulos. No capítulo dois, é feita uma revisão bibliográfica sobre as interações entre as políticas fiscal e

monetária nos países emergentes e sobre a aplicação da lógica *Fuzzy*. O capítulo três é dedicado à estrutura e formulação do modelo dinâmico da macroeconomia a ser usado, assim como do modelo estocástico. O modelo de referência e o modelo robusto de controle da trajetória de referência para a lógica *Fuzzy* são apresentados no capítulo quatro. O capítulo cinco detalha os procedimentos computacionais. Os resultados dos modelos determinísticos e estocásticos são detalhados, apresentados e interpretados no sexto capítulo. Os resultados do controle da lógica *Fuzzy* são mostrados no capítulo sete. Por fim, no capítulo oito são mostradas as considerações finais do estudo.

2 REVISÃO DE LITERATURA

As interações entre as políticas fiscal e monetária podem ser consideradas sob diferentes ângulos. Primeiramente, de forma estritamente técnica, como em momentos de normalidade econômica, as autoridades fiscais e monetárias se interagem entre si na gestão da dívida pública. No entanto, dentro de uma perspectiva mais ampla, as políticas fiscal e monetária determinam conjuntamente a produção e a inflação. Esta interação é qualificada de *estratégica*, pois o *Policy Mix* é o produto das ações autônomas destas autoridades, onde cada uma se esforça para atingir o resultado mais próximo das suas preferências.

Assim, com a finalidade de facilitar a análise dos resultados do estudo à ser implementado, serão analisados neste capítulo os aspectos teóricos sobre as relações entre as políticas fiscais e monetárias nos países emergentes, com a finalidade de estabelecer uma ideia geral sobre o tema estudado. Também, será feita uma revisão sobre os campos de aplicação da lógica *Fuzzy* e sua importância na otimização de processos de controle. A lógica *Fuzzy* será aplicada para o controle do sistema macrodinâmico estruturado nesse estudo, aplicação original, ainda não implementada em sistemas econômicos.

Portanto, na sequência, este capítulo será dividido em três seções: uma primeira seção sobre as interações entre as políticas fiscais e monetárias; uma segunda seção sobre as políticas fiscais e monetárias nos países emergentes e, por fim, a terceira seção aborda a questão relacionada à teoria da lógica *Fuzzy* e seus campos de aplicação.

2.1 INTERAÇÕES ENTRE POLÍTICAS FISCAL E MONETÁRIA

Geralmente, a política fiscal se refere à escolha do governo em relação ao uso da tributação e gastos do governo para regular o nível agregado da atividade econômica. No mesmo sentido, o uso da política fiscal implica em alterações no nível ou na composição dos gastos do governo ou na tributação e, conseqüentemente, na posição financeira do governo. As principais variáveis dos detentores de poder de decisão de política fiscal concentram-se em controlar os *déficits* orçamentais e a dívida pública e, em consequência, os níveis de tributação e de despesa.

A política monetária refere-se ao controle do Banco Central da disponibilidade de crédito na economia, para atingir os objetivos gerais da política econômica. O controle pode ser exercido através do sistema monetário, operando em agregados como a oferta de moeda, o

nível e a estrutura das taxas de juros, e em outros instrumentos monetários que afetam o crédito na economia. O objetivo mais importante dos bancos centrais é a estabilidade de preços. Porém, pode haver outros, como intervenções na compra e venda de moeda estrangeira, ao nível interno e externo, para garantir a estabilidade da taxa de câmbio e do balanço de pagamentos, a estabilidade financeira e a definição de políticas de créditos ao consumidor, com a finalidade de promover o desenvolvimento econômico e o crescimento. Na política monetária, as variáveis-chaves são: a taxa de juros, a oferta de moeda e de crédito e a taxa de câmbio.

Embora as políticas monetária e fiscal sejam implementadas por dois órgãos governamentais diferentes, elas estão longe de serem independentes. A mudança de uma vai influenciar a eficácia da outra, alterando os níveis de impacto global das variáveis macroeconômicas no sistema econômico. No entanto, o interesse é sobre como cada variável contribui para a estabilidade macroeconômica e o crescimento. Por isso, é crucial estabelecer um processo de coordenação consistente das políticas monetária e fiscal, e de outras políticas, com a finalidade de evitar o desequilíbrio macroeconômico da economia.

Nesse contexto, a coordenação das políticas fiscal e monetária é uma componente-chave nas orientações de política macroeconômica sugeridas pelo *IMF (International Monetary Fund)*, para o ajustamento de programas econômicos, em conjunção com as políticas externas, estruturais e financeiras da economia. Na prática, o desequilíbrio ou equilíbrio da situação orçamental, em muitos casos, é um elemento para a geração de problemas macroeconômicos ou de sua solução, respectivamente. Na realidade, os problemas macroeconômicos que os países enfrentam consistem em um desequilíbrio misto, o que faz necessário a implementação de um amplo conjunto de respostas de políticas macroeconômicas. Por isso, nas últimas décadas, os tomadores de decisões de políticas econômicas preocupam-se muito com as interações entre as políticas macroeconômicas, especialmente, entre aquelas de caráter fiscal e monetária. Existem dois tipos de canais pelo quais a política fiscal afeta a política monetária e, conseqüentemente, aos bancos centrais: os canais diretos e os indiretos.

Nos canais diretos, há uma série de maneiras pela qual a política fiscal pode entrar em conflito com a política monetária. Em primeiro lugar, uma política fiscal expansionista pode resultar em *déficits* orçamentais excessivos, o que pode criar uma forte tentação para que os governos recorram ao Banco Central para financiar os *déficits*. Por conseguinte, a política fiscal expansionista induz uma política monetária expansionista, alimentando pressões inflacionárias. Estas pressões inflacionárias causam uma possível depreciação real da moeda

local, conseqüentemente, impondo dificuldades no balanço de pagamentos e resultando em uma crise de moeda (e/ou bancária). Um caminho para contornar essa situação é o financiamento dos *déficits* do governo, por meio de uma forma não monetária, ou seja, através dos mercados financeiros. No entanto, esse procedimento pode ser motivo de preocupação, devido ao efeito de *crowding out*⁴, pois, se os governos assumirem muitos financiamentos no mercado financeiro interno, o resultado pode conduzir a uma deficiência de crédito para o setor privado. Isso pode prejudicar o desenvolvimento econômico e o crescimento, o que seria, certamente, uma preocupação do Banco Central. No lado externo, o excesso de dependência de financiamento externo da dívida interna compromete a estabilidade da taxa de câmbio e/ou do balanço de pagamentos.

Outro canal direto através do qual a política fiscal afeta os bancos centrais, é o canal estabelecido pelo impacto dos tributos sobre o nível de preços e, portanto, sobre a inflação. Se os governos se sentem forçados a recorrerem à aumentos substanciais nos impostos indiretos, como, impostos sobre as vendas e impostos sobre valor adicionado, em vez de impostos sobre as várias formas de tributação de renda, isso terá um impacto direto sobre os preços. Neste caso, a principal preocupação é que um aumento pontual leva à um espiral salários-preços e, portanto, há uma alta na inflação, com conseqüentes expectativas inflacionárias altas.

Além dos canais de relações diretas entre a política fiscal e monetária, existem os canais indiretos que atuam por meio das expectativas. As percepções e expectativas de grandes e contínuos *déficits* orçamentários resultam em grandes necessidades de financiamento, podendo abrir uma falta de confiança nas perspectivas econômicas. Isso pode se tornar um risco para a estabilidade dos mercados financeiros. Essa falta de confiança na sustentabilidade da posição financeira do governo pode também tornar-se um fator desestabilizador dos mercados de títulos e de câmbio, eventualmente, até mesmo levando ao colapso do regime monetário.

Nessa linha de interação das políticas fiscal e monetária, Sargent e Wallace (1981) usou o tema “dominância fiscal/monetária” para descrever o efeito da política fiscal sobre a política monetária ou vice-versa. Segundo estes autores, no caso de dominância fiscal, quando a taxa da dívida pública atinge um nível que não deveria ser superado, o Banco Central é obrigado a mudar o objetivo da política monetária (controle do nível de preço) para monetizar os *déficits*

⁴Em português “*crowding out*” significa “*Efeito de Deslocamento ou de Eviscção*”, o que corresponde a uma redução no investimento e de outras componentes da despesa agregada sensíveis às taxas de juros, sempre que o Estado aumenta a despesa pública.

públicos, a fim de estabilizar a taxa de endividamento público. Isto leva à uma rápida criação de moeda, tendo como principal desvantagem o crescimento na inflação, mas garantindo a solvência fiscal.

Ainda, de acordo com Sargent e Wallace (1981), inicialmente, os *déficits* orçamentais excessivos são financiados através da emissão de dívida, e não pela criação de moeda, pois o Banco Central assume uma posição conservadora, com a finalidade de evitar a criação excessiva de moeda. No entanto, quando o endividamento público atingir um nível máximo aceitável, se a política fiscal não for alterada, o Banco Central deverá recorrer à renda por senhoriagem para estabilizar a taxa da dívida pública, ou seja, utilizar a inflação para o controle da dívida. Neste caso, o Banco Central deve abandonar a meta de estabilidade de preços e assumir o objetivo da estabilidade da taxa da dívida pública, portanto, havendo a dominância fiscal. Nesse contexto, a inflação cresce e se torna alta, cujo nível será diretamente proporcional ao grau de conservadorismo do Banco Central.

Em resumo, baseando-se na abordagem de Sargent e Wallace (1981), pode-se concluir que, em circunstâncias extremas, nas quais um nível de dívida elevado é atingido, a governabilidade simultânea pelo Banco Central das metas restrição orçamentária⁵ e estabilidade de preços tornam-se impossíveis na prática. Os gestores do Banco Central devem escolher uma ou outra entre essas metas. Nesse contexto, pode-se afirmar que um nível elevado de endividamento público aumenta a probabilidade de dominância fiscal, condição em que a política monetária perderá, no futuro, a sua independência diante da política fiscal.

Outra abordagem da dominância fiscal é a teoria fiscal do nível de preço, TFNP, desenvolvido por Leeper (1991), Sims (1994) e Woodford (1994; 1995). Esta teoria chamou a atenção dos economistas, mostrando que para controlar o nível de preço, a política monetária não é suficiente, sendo também necessária a participação da política fiscal. Na TFNP, as autoridades fiscais são responsáveis pelo *superávit* primário, as autoridades monetárias responsáveis pelo estoque nominal de moeda, e o público sendo responsável pelo nível de encaixes reais e, portanto, pelo nível de preço. Assim sendo, a TFNP surgiu num contexto de desaparecimento da teoria monetária de nível de preço.

⁵ Segundo Rossi (1992), existe duas metas de restrição orçamentária: a restrição orçamentária intertemporal ($G_t - T_t + B_{t-1}(1 + r_{t-1}) = B_t + \frac{H_t - H_{t-1}}{P_t}$) e a restrição orçamentária como proporção do PIB ($\frac{B_t}{Y_t} - \frac{B_{t-1}}{Y_{t-1}(1 + \rho_{t-1})} = \frac{G_t - T_t}{Y_t} + r_{t-1} \frac{B_{t-1}}{Y_{t-1}(1 + \rho_{t-1})}$) onde G, T, B, H, r, Y, ρ são, respectivamente, os gastos do governo, as receitas tributárias, a dívida pública, a base monetária, os juros da dívida, o PIB e a taxa de expansão do PIB real entre o tempo $t - 1$ e t . Na primeira restrição, o Banco Central age através da receita por senhoriagem enquanto na segunda a ação do Banco Central é mais lenta e indireta a través somente da taxa de juros da dívida.

Com base nos entendimentos de Buiter (2000) e Woodford (2001) e Leith e Wren-Lewis (2000), foi proposto um quadro macroeconômico para a TFNP. Estes autores examinaram as interações entre as políticas fiscais e monetárias em uma economia com preços rígidos, e os consumidores não-ricardianos. Estes desvios do quadro neoclássico implicaram em um conjunto mais rico de interações entre as políticas macroeconômicas que as interações estabelecidas pelo canal clássico de receitas de senhoriagem ou inflação surpresa no núcleo do TFNP. Em particular, Leith e Wren-Lewis (2000) demonstraram que dois regimes políticos estáveis poderiam ser identificados: no primeiro, a política monetária seria "ativa", no sentido definido por Leeper (1991), ou seja, reagiria com dureza aos desvios da inflação de seu valor de estado estacionário, enquanto que a política fiscal seria "passiva", ou seja, reagiria com dureza aos desvios da dívida pública (isto é, se preocupando muito com a solvência da dívida), de seu valor de estado estacionário. No segundo regime, as reações de política monetária para a inflação seriam mais fracas, considerando que o governo iria estabilizar a dívida pública de forma muito lenta. Este caso foi, claramente, o que mais se aproximou à concepção do trabalho de Woodford (2001), tratando-se da TFNP. Neste ponto, Leith e Wren-Lewis (2000) também concluíram que o comportamento ricardiano dos consumidores não se caracteriza de forma contraditória com a concepção da TFNP.

Tendo em vista os fatos acima enfatizados, pode-se resumir que uma coordenação entre as políticas fiscal e monetária é necessária para assegurar um equilíbrio macroeconômico. A seguir, na próxima seção, será feita uma revisão teórica sobre as interações das duas políticas (fiscal e monetária) nas economias emergentes. Esta revisão sobre o comportamento das interações entre as políticas fiscal e monetária em economias emergentes possibilitará compreender melhor o primeiro objetivo do trabalho, que é analisar interação entre política fiscal e monetária nas economias emergentes.

2.2 POLÍTICAS FISCAL E MONETÁRIA NAS ECONOMIAS EMERGENTES (EMES)

Nos anos 1980 e 1990, os choques econômicos que tornaram as economias emergentes vulneráveis foram, na maioria das vezes, causados por déficits fiscais elevados e pela inequação dos mercados de títulos domésticos nas economias em desenvolvimento. Em muitas situações, as respostas fiscais e monetárias nestas economias foram pró-cíclicas⁶. A

⁶ Pró-cíclico: que esta positivamente correlacionado com variações positivas do ciclo econômico. Um fenômeno pró-cíclico tende a se reforçar em momento de crescimento econômico e tornar fraco em momento de recessão.

política de gestão da dívida pública influenciou pouco na adequação dos períodos de vencimentos da dívida, ou no processo de estabilização da economia. No entanto, a partir dos anos 2000, o debate sobre o papel das políticas fiscal e monetária ganhou mais atenção. Alguns desenvolvimentos aconteceram nas EMEs, especialmente, do lado fiscal. Uma diminuição substancial dos déficits fiscais e dos níveis de dívida pública nas EMEs aconteceu: os financiamentos internos aumentaram, a dívida pública em moeda estrangeira diminuiu e melhor gestão do prazo médio de vencimento da dívida pública também aconteceu.

Durante a recente crise financeira global de 2008⁷, muitas economias emergentes usaram políticas fiscais e monetárias anticíclicas para estabilizar suas atividades econômicas, isso graças à melhoria das suas posições fiscais. Embora a ancoragem das expectativas fiscais de médio prazo fosse crucial, isto não foi suficiente para isolar completamente essas economias do choque desta crise de 2008, pela sua interconexão entre a economia global e os mercados financeiros. O maior acesso ao financiamento interno e a consequente apreciação cambial, em função do aprimoramento das atividades dos mercados de títulos em moeda nacional, desempenharam um papel importante nesse processo. Apesar desse aprimoramento no desempenho das economias emergentes, algumas restrições foram feitas, uma vez que alguns riscos de médio e longo prazo ainda permaneceram nas EMEs. Por exemplo, o envelhecimento da população dessas economias causa um aumento da taxa de aposentadoria e uma diminuição do fundo de previdência e um aumento dos gastos públicos. Adicionalmente, os números de títulos emitidos em moedas domésticas pelos bancos centrais da maioria dessas EMEs aumentaram muito, embora os níveis de dívida do seu governo ainda foram moderados. Mas, em muitos países emergentes, uma parte considerável da dívida pública consiste de títulos de curto prazo. Esses fatos têm uma repercussão no mercado cambial.

Nas últimas décadas, a política fiscal também foi uma grande preocupação para a política monetária em economias emergentes. *Déficits* fiscais insustentáveis e os níveis de dívida pública criaram um ambiente de dominância fiscal em muitos países, levando à inflação alta e volátil, e prêmios de risco elevados sobre a dívida pública. Uma taxa de câmbio desfavorável, ligada à uma fraca credibilidade nas políticas fiscal e monetária, expuseram as economias emergentes aos fluxos de saídas de capitais. Conforme resumido por Yörükoğlu e Kılınç (2012), tal cenário fiscal foi associado com baixos níveis de desenvolvimento

⁷ Conhecido como crise *suprime* é uma crise que desencadea em 24 de julho de 2007 com a queda do índice Dow Jones motivada pela concessão de empréstimos hipotecários de alto risco. Esta crise se desenvolveu ainda mais em 2008 a partir do colapso do mercado imobiliário norte-americano e contagiou todo o sistema financeiro, quanto daquele país como também de grande parte do capitalismo global.

financeiro, um alto grau de dolarização e alto repasse da taxa de câmbio⁸. A consequência foi que ambas as políticas, fiscal e monetária, tendem a ser pró-cíclicas em muitos países, acentuando a volatilidade econômica.

Segundo Montoro, Takáts e Yetman (2012), diversas economias emergentes tinham uma dívida pública elevada durante os anos 1980 e 1990, o que restringiu a efetividade da política monetária. Porém, ao longo da década de 1990, os níveis das dívidas públicas das EMEs caíram e, com isso, melhorou as suas posições orçamentais. Os declínios dos *déficits* orçamentais e da dívida pública reduziram o problema da dominância fiscal, e possibilitaram políticas anticíclicas mais viáveis. Ainda, segundo estes autores, as médias dos *déficits* fiscais relativos ao PIB das EMEs caíram gradativamente durante a década de 1990, no entanto, no período de 2000-2007, a redução dessas dívidas das EMEs foi significativa e impressionante, chegando, em média, a uma redução de 1,8% ao ano (queda limitada pela crise financeira “*subprime*” de 2008). Ao medir o grau de ciclicidade da política fiscal, a partir de duas funções de reação separadas das políticas fiscal e monetária (a partir de uma regra de Taylor), os autores mostraram que na maioria das economias emergentes, tanto a política fiscal como a monetária foi utilizada para suavizar as volatilidades dos produtos nas EMEs, durante os anos de 2000-2011.

A sustentabilidade orçamental e a credibilidade da política monetária desempenharam um papel decisivo para fortalecimento das economias em desenvolvimento, no médio prazo. O Brasil fornece um exemplo típico desse fortalecimento, saindo de uma situação dramática na década de 1980 e no início dos anos 1990, se caracterizando nesse período como uma economia muito vulnerável às crises e às políticas pró-cíclica. Araújo *et al.* (2012) destacou que a flexibilização da política econômica no Brasil foi estabelecida por uma série de reformas políticas críticas nos anos de 1990-2000, tais como: (i) ações concentradas pelo Banco Central e Tesouro Nacional, com a finalidade de reduzir a magnitude das dívidas de curto prazo indexadas à economia; (ii) a transição para um regime de metas de inflação; e (iii) a introdução da Lei de Responsabilidade Fiscal, com a finalidade de fortalecer as instituições financeiras e estabelecer a transparência, bem como reforçar o objetivo de manter *superávits* primários consistentes. Os aspectos dessas reformas políticas serão destacados posteriormente.

⁸ em inglês: *Exchange rate pass-through (ERPT)* é uma medida que explica como os preços internacionais respondem a taxa de câmbio.

Braude e Flug (2011) chamou atenção à maneira de como Israel respondeu aos choques globais de 2001-03 e 2008-09, que foram ditados principalmente pelas condições fiscais que o país enfrentou. Antes das condições fiscais impostas na política econômica de Israel nesses períodos, qualquer aumento no déficit fiscal fazia com que os títulos do governo tivessem maiores rendimentos, isto devido à alta dívida pública e fraca credibilidade fiscal. Diante desta situação, qualquer diminuição na taxa de juros era considerada pelos investidores como insustentável, causando fortes depreciações cambiais e subsequente aperto monetário. Porém, durante a recessão global de 2008-09, o governo deixou o déficit fiscal aumentar, e o banco central passou a cortar as taxas de juros de forma acentuada. Na expectativa de melhoria de credibilidade fiscal e monetária, os mercados financeiros tiveram poucas dúvidas sobre a sustentabilidade das políticas anticíclicas impostas naquele momento, o que contribuiu para a melhoria do desempenho da economia.

A sustentabilidade orçamental e a credibilidade da política monetária fizeram com que vários países exportadores de commodities conseguissem reduzir sua vulnerabilidade ao potencial de volatilidade associada aos ciclos de preços das commodities. Segundo Rossini et al. (2012), no Peru, as novas regras fiscais implementadas em 2000 estabeleceram uma meta de déficit nominal, e um limite máximo para o crescimento das despesas não financeiras do setor público, o que foi essencial para reduzir a dívida líquida do setor público. Diante desse novo quadro fiscal, os superávits acumulados, contabilizados em um fundo de estabilização fiscal, fortaleceram o papel da política monetária. Claro e Soto (2012) afirmaram que a introdução da Lei de Responsabilidade Fiscal no Chile, em 2006, demonstrou ser um importante marco para a economia chilena e se caracterizou como um ponto de transição para a melhoria do desempenho desta economia. Com essa lei, o governo adotou uma meta de equilíbrio orçamentário estrutural, constituída por um saldo fiscal, a ser corrigido em função das flutuações nas receitas e despesas, devido aos ciclos de negócios.

De uma forma geral, as políticas fiscal e monetária interagem através do impacto da política fiscal sobre as taxas de juros. Teoricamente, esse impacto depende de o ambiente econômico ser ricardiano ou não. No mundo ricardiano, nem a dívida pública, nem os déficits fiscais influenciam a taxa de juros, pois o setor privado poupa a totalidade do aumento da renda para pagar os impostos futuros. No entanto, em um mundo não-ricardiano, alterações nos déficits fiscais podem provocar mudanças nas taxas de juros.

O fato é que um aumento de déficits fiscais, acompanhado de uma oferta monetária inalterada, aumenta a taxa de juros (*crowding out*). Em economias onde a política fiscal é

dominante e dependente de crédito externo, o prêmio de risco da dívida pública é alto. Isso aconteceu em várias economias latino-americanas, de 1990 até o início dos anos 2000.

Em diversas economias emergentes, a partir da metade da década de 2000, aumentos do saldo fiscal e quedas da dívida pública foram acompanhados por quedas da taxa de juros. Montoro et al. (2012), analisando o comportamento de várias economias emergentes, concluíram que as taxas de juros e os saldos orçamentários relativos ao PIB são negativamente correlacionados nesses países. Vargas et al. (2012), analisando o comportamento da economia colombiana no período de 2002-2011, estabeleceram a mesma conclusão enfatizadas por Montoro et al. (2012). Segundo Vargas et al. (2012), além dos “*sovereign spreads*”⁹ do país caírem após a consolidação fiscal da economia, eles tornaram-se também menos sensíveis à aversão ao risco global. De acordo com suas estimativas, cerca de 60% do declínio do *spread* do EMBI da Colômbia entre 2002 e 2011 (excluindo 2008 e 2009) poderia ser atribuído aos fatores locais, particularmente reduções nos desajustes das moedas e da dívida pública relativa ao PIB. Para os autores, uma redução permanente na taxa de juros de longo prazo, não apenas reduziria a taxa de juros natural¹⁰ (taxa que prevalece com inflação e gap de produto zero), mas também levaria a mudanças na taxa de câmbio real de equilíbrio, por fim isso teria importantes implicações para a política monetária.

Deve-se enfatizar também os riscos da política fiscal, pois em muitos países em desenvolvimento, a sustentabilidade de médio prazo da política fiscal ainda preocupou bastante, pelo menos até o final da década de 2000, uma vez que os déficits fiscais e os níveis de dívida pública ainda eram altos, como no caso da Hungria e da Índia, respectivamente, conforme Baksay et al. (2012), e Gandhi (2012). Ainda hoje, existem várias EMEs com problemas relacionados à medição dos saldos fiscais e da dívida pública. Por exemplo, na China, segundo o relatório do *People’s Bank of China* (2012), embora o orçamento do governo cobrisse as finanças centrais e locais, nem todas as receitas e despesas do governo local estão incluídas em seu processo de contabilização, além de os saldos orçamentais publicados excluírem os lucros e perdas das empresas públicas. Segundo Kirakul (2011), na

⁹ Isso está relacionado ao risco-país, é a diferença entre a taxa de juros (o rendimento) da emissão de títulos de um país e o rendimento de um título comparável emitido por um país de referência, como os Estados Unidos.

¹⁰ A taxa natural de juros é a taxa de juros consistente com a manutenção do crescimento econômico em sua taxa de tendência e inflação estável. A taxa de juros real consistente com o PIB real, igualando seu nível potencial (PIB potencial) na ausência de choques transitórios à demanda. Em outras palavras, a taxa natural de juros é aquela taxa de juros que não causa superaquecimento (boom) ou falta de demanda (recessão). A política monetária está essencialmente preocupada em encontrar a taxa natural - porque isso dará o melhor resultado econômico de baixa inflação e crescimento econômico.

Tailândia, passivos futuros relacionados às garantias implícitas do governo ao sistema financeiro eram difíceis de serem avaliadas com precisão. Portanto, vale ressaltar que embora os passivos explicitados em muitas EMEs sejam moderados, os passivos contingenciados permanecem altos.

considera-se na análise que as economias emergentes utilizam somente políticas monetárias convencionais para o controle da economia, diferentes das economias desenvolvidas que usam política não convencional em momentos de bolhas financeiras, levando em consideração que as economias EMEs passaram a assumir altos riscos com a integração financeira internacionais, com a implementação de taxas cambiais flutuantes, em relação a este caso analisaremos somente as potencialidades da política monetárias convencionais.

2.3 LÓGICA *FUZZY* E MODELOS DINÂMICOS DA MACROECONOMIA

Nesta seção será feita uma revisão sobre a lógica *Fuzzy*, estabelecendo alguns conceitos básicos desta metodologia, e enfatizando alguns campos de sua aplicação. As descrições a serem apresentadas visa destacar o potencial da lógica *Fuzzy* em processo de controle em sistemas macrodinâmicos.

2.3.1 Lógica *Fuzzy*, aplicações e teoria.

A lógica *Fuzzy* é uma ferramenta que permite capturar informações imprecisas, descritas em linguagem natural e convertê-las para um formato numérico. Ela permite analisar informações imprecisas, via processo de otimização computacional. Segundo Jang e Gulley (1995), a lógica *Fuzzy* é uma maneira conveniente de mapear um espaço de entrada para um espaço de saída.

O termo Lógica *Fuzzy* foi introduzido em 1930 pelo polonês Jan Lukasiewicz (Ross, 2010). Mas as bases teóricas da lógica *Fuzzy* foram estabelecidas no início dos anos 1965 por Zadeh (Ross, 2010). Esta técnica relaciona as noções de “subconjunto *Fuzzy*” e de “teoria das possibilidades”. A abordagem *Fuzzy* baseia-se no raciocínio humano sobre cálculos rígidos.

Diferentemente da lógica clássica, o raciocínio da lógica *Fuzzy* é mais intuitivo. Ele permite apreender melhor os fenômenos naturais, imprecisos e difíceis de serem modelados, baseando-se nas definições de regras e de funções que pertencem aos conjuntos chamados de

“conjunto *Fuzzy*”. Por isso, a lógica *Fuzzy* é utilizada como um dos principais instrumentos para a análise adequada de informações estocásticas, devido à sua capacidade de lidar com incertezas.

A lista de aplicação da lógica *Fuzzy* é ampla, especialmente nas áreas de engenharia, em processos de controle (Ross, 2010; Hayward and Davidson, 2003). No entanto, o uso dessa teoria nas ciências aplicadas vem aumentando gradativamente. Lu et al. (2010) usaram a lógica *Fuzzy* na análise de um processo operacional descrito por um sistema não linear, sob influências de incertezas caracterizadas por perturbações estocásticas, para estabelecer a ordem de integração de execução de projetos, e o seu controle operacional. Bočková et al., (2012) utilizaram a lógica *Fuzzy* na análise da relação entre ética nos negócios e desempenho econômico de pequenas e médias empresas. Korol (2012) avaliou a eficiência da lógica *Fuzzy* na previsão das situações financeiras de empresas e consumidores, especialmente, na previsão de falências.

A lógica *Fuzzy* foi também utilizada em pesquisas de controle de problemas ambientais. Li et al., (2010) desenvolveram um método de *Interval-Fuzzy Chance-Constrained Programming* (IFCP) para estabelecer o planejamento de sistemas regionais, econômicos e ambientais, sob múltiplas incertezas. O trabalho visou atender diversas implicações, como: (i) desenvolver um método IFCP, com as incertezas sendo expressas em intervalos, e abordados por conjuntos *Fuzzy* e distribuições de probabilidade; (ii) Estabelecer o planejamento de atividades industriais regionais e ações de controle de poluição para um caso real, via a metodologia IFCP; (iii) Analisar os resultados, identificando os benefícios do sistema sob diferentes exigências ambientais, a fim de estabelecer as alternativas desejadas para o desenvolvimento econômico regional, sujeito ao controle da poluição da água, e; (iv) Analisar as interações entre critérios de *layout* industrial, custo e benefício econômico, esforço de mitigação de poluentes, e proteção da qualidade da água.

Como resultado, um método IFCP foi desenvolvido para o planejamento de sistemas econômicos e ambientais regionais sob múltiplas incertezas. Este método pode lidar com incertezas expressas como valores de intervalo, conjuntos *Fuzzy* e distribuições de probabilidade no objetivo e nas restrições. Um algoritmo iterativo, com um requisito computacional relativamente baixo, foi fornecido para resolver o modelo IFCP. As soluções do modelo ofereceram uma flexibilidade na interpretação dos resultados e na geração de decisão alternativa. O IFCP desenvolvido foi aplicado a um caso real para o planejamento do desenvolvimento econômico regional preocupando com a poluição d'água no Novo Distrito

de Binhai, no Município de Tianjin, na China. Soluções úteis para o planejamento dos sistemas econômicos e ambientais regionais foram geradas, refletindo as compensações entre as atividades da indústria, os requisitos ambientais e as considerações econômicas.

Na economia, o ambiente econômico é complexo e imprevisível, devido às incertezas nas atividades econômicas. Por isso, é difícil prever as mudanças que podem ocorrer no ambiente interno e externo. Nesse sentido, para reduzir essas incertezas, geralmente, os tomadores de decisão econômica recorrem ao planejamento, tendo como base previsões via modelos macrodinâmicos. Nestas previsões, quanto maior for o período de previsão, maior será o erro, o que torna difícil o controle das incertezas futuras. Keller (2014) destacou que os modelos macroeconômicos enfrentam níveis de incertezas elevadas, pelos simples fatos de que eles tentam descrever a dinâmica de uma economia, tanto para períodos de curto-prazo, como para períodos de longo-prazo. Segundo esse autor, as variáveis macroeconômicas introduzidas em um sistema de equações diferenciais são definidas em três categorias: (i) variáveis endógenas que descrevem o estado da economia, (ii) Variáveis de controle, instrumentos de política econômica que possibilita orientar as trajetórias das variáveis endógenas em direção ao equilíbrio, e; (iii) variáveis exógenas que descrevem os efeitos de ambientes externos ao sistema, de caráter incontrolável. Keller (2014) também destacou duas formas, pelas quais as equações diferenciais macroeconômicas são afetadas pelas incertezas estocásticas: (i) afetando os parâmetros por meio de choques multiplicativos, e; (ii) afetando as equações por choques aditivos.

Devido à complexidade dos modelos macroeconômicos, o uso de métodos matemáticos formais clássicos apresentam limitações na solução de problemas semiestruturados, características desses sistemas macrodinâmicos. Nesses casos, o uso da lógica *Fuzzy* na solução desses problemas torna-se quase necessário. Esta técnica é adequada para avaliar a eficácia e o risco de projetos econômicos, diante de situações de incertezas que inviabilizam a aplicação dos métodos econômicos e matemáticos não estatísticos, tornando-os limitados, pois: (i) falta de informação estatística para a adequada aplicação de métodos probabilísticos; (ii) alta proporção de subjetividade na atribuição de probabilidades de avaliações de especialistas, ou tomadores de decisões, e; (iii) falta de completude das incertezas inerentes aos sistemas macrodinâmicos. Estes itens integram o princípio da incompatibilidade de Zadeh (1973), em destaque abaixo:

“...State informally, the essence of this principle is that as the complexity of a system increases,

our ability to make precise and yet significant statements about its behavior diminishes until a threshold is reached beyond which precision and significance (or relevance) become almost mutually exclusive characteristics.” (p. 165)

A lógica *Fuzzy* constitui um ramo da matemática que possibilita operacionalizar a lógica clássica complexa e a teoria dos conjuntos *Fuzzy*. A principal característica da teoria dos conjuntos *Fuzzy* é a manipulação de um componente como uma variável linguística. Métodos baseados na teoria de conjuntos *Fuzzy* referem-se aos métodos de avaliação e tomada de decisão sob incerteza. O processo de modelagem *Fuzzy* consiste de duas etapas principais: (i) identificar as características estruturais, ou o número de regras *Fuzzy* (termos linguísticos), e; (ii) estabelecer a seleção de parâmetros antecedentes e consequentes. É nesta última fase que se minimiza o erro do sistema, ao qual se deve dar especial atenção, pois é na otimização desta fase que ocorre a modelação de problemas econômicos.

Muitos outros autores destacaram o uso da metodologia lógica *Fuzzy* na economia. Este é o caso de Klir e Yuan (1995, capítulo 17, seção 3) que, em uma pequena revisão, criticaram o uso da matemática clássica na economia. Esses autores mostraram como o uso da matemática convencional na previsão de problemas econômicos pode conduzir a resultados bastante diferentes daqueles referentes à realidade econômica. Esses autores enfatizaram que a lógica *Fuzzy* pode constituir uma técnica importante na modelagem dos fenômenos econômicos, se os tomadores de decisões econômicas usarem algumas ferramentas desta técnica, tais como: otimização *Fuzzy*, regressões *Fuzzy*, jogos *Fuzzy* e tomada de decisão *Fuzzy*, etc.

... Most modern economists define economics as a social science that studies how societies deal with problems that result from relative scarcity...we can see at this core a sequence of axiomatic theories, which are increasingly more precise and more mathematically sophisticated. At the same time, we can see a persistent gap between economic reality and predictions derived from these ever sophisticated theories.

Several reasons could easily be identified why economic theories have not been successful in modeling economic reality. One reason...is that these theories are formulated in terms of classical mathematics, based on classical set theory, two-valued logic, and classical theory of additive measures...human reasoning and decision making a natural language, which plays an essential role in economic

phenomena, is based on genuine uncertainty embedded in natural language. Classical mathematics is not capable of expressing this kind of uncertainty. Moreover, human preferences for complex choices are not determined, in general, by the rules of additives measures... (Klir e Yuan, 1995, P. 450)

Segundo Mcneill e Freiberger (1993, p.96) as variáveis econômicas como recessão, desemprego, inflação são noções *Fuzzy* pelas suas imprecisões e incertezas. Portanto, os autores sugerem o uso dos conjuntos *Fuzzy* na economia, como a mais aceitável e esclarecedora metodologia da matemática para a análise de problemas econômicos.

No entanto, até o momento, a lógica *Fuzzy* tem sido utilizada com maior intensidade em gestão de processos produtivos. Nestes processos, a tomada decisão exige considerar várias incertezas, como variações no desempenho dos operadores do processo, imprecisões dos equipamentos do sistema e volatilidade das condições ambientais. Por isso, a lógica *Fuzzy* (e as ferramentas associadas) permitem enfrentar os desafios relacionados à otimização de gestão de sistemas produtivos (Lee, 1996). Exemplos típicos do uso da lógica *Fuzzy* na otimização de processos podem ser citados, como a aplicação da programação linear *Fuzzy* no planejamento agregado de sistemas produtivos (Chen, 2003; Mula et al., 2006), e o uso da programação linear *Fuzzy* nas tomadas de decisões de terceirização e seleção de fornecedores (Bayrak et al., 2007; Chan et al., 2008; Kahraman et al., 2010).

2.3.2 Conjunto *Fuzzy*

O conjunto *Fuzzy* é um conjunto sem um limite nítido e claramente definido, contendo elementos com apenas um grau parcial de associação. O conjunto *Fuzzy* foi uma alternativa para tratar de maneira formal, problemas de caráter subjetivo que tipicamente envolvam informações vagas e imprecisas, que necessitem de um raciocínio aproximado (Zadeh, 1965). Na lógica clássica, o conjunto clássico é bem definido. Ele define situações em que um recipiente inclui ou exclui completamente um elemento. Isso é, no conjunto clássico, um dado elemento tem caráter binário: o elemento pertence ou não pertence ao conjunto. Esse procedimento torna a análise de problemas com a lógica clássica mais simples.

Portanto, definindo X como o universo de discurso, no qual x representa um elemento genérico, e A um conjunto qualquer. No conjunto clássico, um dado elemento tem caráter binário. Isso é o elemento pertence ao conjunto A ($x \in A$), ou não pertence a A ($x \notin A$).

O conjunto *Fuzzy* é totalmente caracterizado pela sua função de pertinência. Enquanto o conjunto clássico é totalmente caracterizado pela sua função característica. Através da função característica é possível mapear os elementos do universo de discurso no conjunto binário $\{0;1\}$.

$$\mu_A(x): X \rightarrow \{0; 1\} \quad (2.1)$$

Ou seja,

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se e somente se } x \in A \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.2)$$

Por exemplo, se X é definido no universo dos números primos, o conceito clássico de conjunto é suficiente, uma vez que os números primos possuem uma definição rigorosa. No entanto, se X é definido no conjunto dos números reais ($X \in \mathbb{R}$), e A é o conjunto de números muito maiores que " a ", o problema se torna mais subjetivo. Essa subjetividade está ligada ao fato de que, dependendo do contexto, o critério que define quais são os números muito maiores, que " a " pode mudar.

Além da subjetividade, a necessidade de se definir um limiar rigoroso para separar elementos em conjuntos é outra dificuldade relacionada à noção clássica de conjunto. Por essas limitações, a utilização de um conceito mais abrangente, como o sistema *Fuzzy*, revela-se necessária.

2.3.3 Função de Pertinência (*Membership Function*)¹¹

Um conjunto *Fuzzy* é definido pela sua função de pertinência, o que corresponde à noção de função característica da lógica clássica. Uma função de pertinência é uma curva que define como cada ponto no espaço de entrada é mapeado para um valor de pertinência (ou grau de pertinência) entre 0 e 1. Supõe F esse conjunto *Fuzzy*, $\mu_F(x)$ a função de pertinência que associa a cada elemento do universo de discurso X a um número real que pertence a $[0, 1]$. A representação desta função de pertinência é feita por meio do seguinte conjunto de pares ordenados (Tsoukalas e Uhrig, 1997):

¹¹ Diferentes tipos de funções de pertinência: Apêndice A

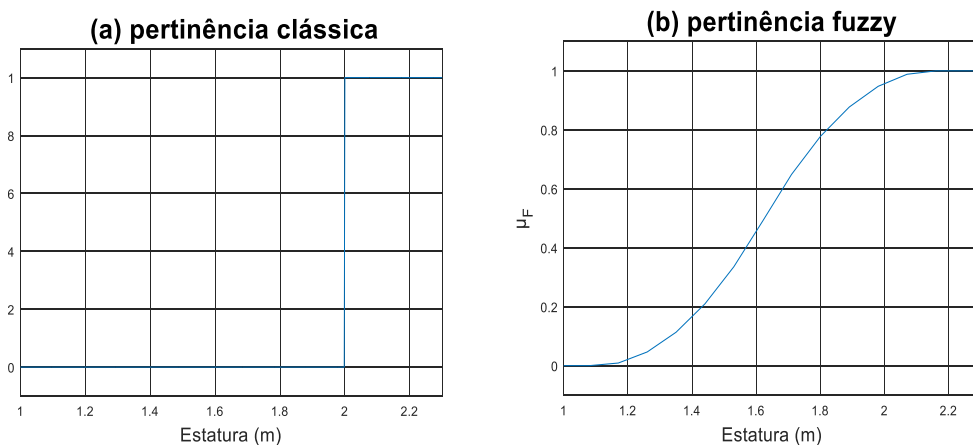
$$F = \{(x, \mu_F(x)) \mid x \in X\} \quad (2.3)$$

A ideia tradicional de que um elemento x pertence ou não a um conjunto é aqui abandonada e substituída pela noção de pertinência. Aqui, o valor da função de pertinência $\mu_F(x)$ indica o grau de pertinência de x ao conjunto F . Quando este valor tende a 1, maior será o grau de pertinência de x em F .

Como exemplo, considera-se a tarefa de classificar um grupo de indivíduos em relação a altura (Jang et al., 1997). Segundo a concepção clássica, é possível adotar como métrica que indivíduos altos são aqueles cuja estatura é superior ou igual a dois metros. A função característica teria o padrão mostrado na Figura 2.1.a. Segundo essa classificação, um indivíduo com 2,01 m é alto ao passo que um indivíduo medindo 1,98 metros (2 centímetros a menos) não faz parte do mesmo conjunto. Tal critério não parece razoável.

Contudo, segundo a concepção de grau de pertinência, pode-se atribuir valores decrescentes de pertinência na medida em que a estatura reduz: $\mu_F(2) = 1$, $\mu_F(1,9) = 0,9$, $\mu_F(1,65) = 0,4$, e $\mu_F(1) = 0$, como ilustrado pela Figura 2.1.b. Neste caso, indivíduos com 1,99 m possuem um alto grau de pertinência ao conjunto de indivíduos altos.

Figura 2.1 - Pertinência de indivíduos com relação à estatura.



Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

Conforme enfatizado no Apêndice A, o toolbox do Matlab 2019a estrutura onze tipos de funções de pertinência. Essas funções são, por sua vez, construídas a partir de várias funções básicas: funções lineares por partes, função de distribuição gaussiana, funções sigmoidal e

funções polinomiais quadráticas e cúbicas. Todas as funções de pertinências possuem letras “mf”, no final.

Como se observa no Apêndice A, as funções de pertinências mais simples são formadas usando linhas retas. Destas, a mais simples é a função de pertinência triangular, e o nome do código da função é *trimf*. Isso não é mais do que uma coleção de três pontos formando um triângulo. A função de pertinência trapezoidal, *trapmf*, tem uma cabeça plana, sendo simplesmente apenas uma curva de triângulos truncados. Essas funções de pertinência de linha reta têm como vantagem, a simplicidade.

Duas funções de pertinência são construídas com base na curva de distribuição gaussiana. Uma com base numa curva gaussiana simples, o nome código é *gaussmf*. Esta função de pertinência *gaussmf* é caracterizada por dois parâmetros: um representando a média da distribuição, e o outro o desvio-padrão. A outra função de pertinência construída com base na curva de distribuição é *gauss2mf*. Esta última estabelece um compasso que envolve dois lados, à esquerda e à direita. Também, a função de pertinência *gauss2mf* é caracterizada por quatro parâmetros: dois representando as médias das distribuições, e outros dois representando os desvios-padrão das respectivas distribuições.

Outra função de pertinência é a função de pertinência generalizada, em forma de sino, especificada por três parâmetros. Denominada de *gbellmf*, esta função tem um parâmetro a mais do que a função de pertinência Gaussiana *gaussmf*, para que ela possa se aproximar de um conjunto não *Fuzzy*, se o parâmetro livre estiver sintonizado.

Devido às suas suavidades e notações concisas, as funções de pertinência de Gauss e Sino são métodos bastante utilizados nas especificações de conjuntos *Fuzzy*. Ambas funções de pertinências têm a vantagem de serem suaves e não-zero em todos os pontos. No entanto, as funções de pertinência gaussianas e as funções de pertinência em forma de sino não conseguem especificar funções de pertinência assimétricas, que são importantes em muitas aplicações na análise de conjuntos *Fuzzy*.

Ainda, o Toolbox (Matlab 2019a) define uma função de pertinência sigmoideal, função aberta à esquerda ou à direita, denominada de *sigmf*. No entanto, funções de pertinência assimétricas e fechadas (ou seja, não abertas à esquerda ou à direita) são sintetizadas no Toolbox, utilizando-se de duas funções sigmoideais adjuntas, definidas, respectivamente, pela diferença entre duas funções sigmoideais, denominada de *dsigmf*, e pelo produto de duas funções sigmoideais, denominada de *psigmf*.

As curvas baseadas em polinômios representam várias das funções de pertinência na caixa de ferramentas (toolbox). Três funções de pertinência relacionadas são as curvas Z , S e P_i , todas chamadas devido à sua forma. A função zmf é a curva polinomial assimétrica aberta para a esquerda, smf é a função de imagem espelhada que se abre para a direita e o $pimf$ é zero em ambos os extremos com um aumento no meio. Para maiores detalhes sobre as onze funções de pertinência, consulte o Apêndice A.

2.3.4 Regras *Fuzzy*

A lógica *Fuzzy* visa formalizar e implementar o modo de raciocínio de um ser humano. É assim que ela é definida no campo da inteligência artificial. A ferramenta mais utilizada em aplicações da lógica *Fuzzy* é conhecida como regra *Se-Então* (*if-then*), ou regra *Fuzzy*, constituindo a base da lógica *Fuzzy*. A regra *Fuzzy* é composta por regras comumente estruturadas de forma paralela, mas em algumas aplicações também podem ser estruturadas de forma encadeadas. A regra *Fuzzy* e o raciocínio *Fuzzy* formam o cerne da vasta gama de sistema *Fuzzy* (Jang et al., 1997).

Para criar as regras *Fuzzy* é preciso de um raciocínio coerente com o que se deseja manusear e obter. Para isso, este raciocínio deve ser dividido em duas etapas: (i) avaliar o antecedente da regra, e; (ii) aplicar o resultado no consequente. Portanto, neste caso, a regra *Fuzzy* tem a seguinte forma:

$$R: \begin{cases} \text{Se} & x \text{ é } A \\ \text{Então} & y \text{ é } B \end{cases} \quad (2.4)$$

onde R identifica a regra, A e B são variáveis linguísticas, e x e y são elementos dos universos X e Y , respectivamente. Geralmente, a proposição " x é A " é chamado de antecedente, enquanto que a proposição " y é B " é chamado de consequente (ou conclusão), x é chamado de variável premissa, e y de variável consequente.

Na concepção clássica, a regra *Se-Então* se usa quando a variável premissa é igual ao antecedente. Na concepção *Fuzzy*, a regra *Se-Então* é usada quando houver um grau de similaridade não nulo entre a variável premissa e o antecedente. Portanto, se a variável premissa x possui total similaridade com o antecedente A , então tem-se como conclusão que y é o próprio B .

Uma regra *Fuzzy* pode ter mais de um antecedente, como a seguir:

$$R: \begin{cases} \text{Se} & x \text{ é } A \text{ e } z \text{ é } C \\ \text{Então} & y \text{ é } B \end{cases} \quad (2.5)$$

Na situação exemplificada em (2.5), a conclusão é bem mais complicada. Além de depender da similaridade $x \text{ é } A$, a conclusão também depende da similaridade $z \text{ é } C$, e da relação entre os antecedentes, assim como da relação destes antecedentes com o consequente.

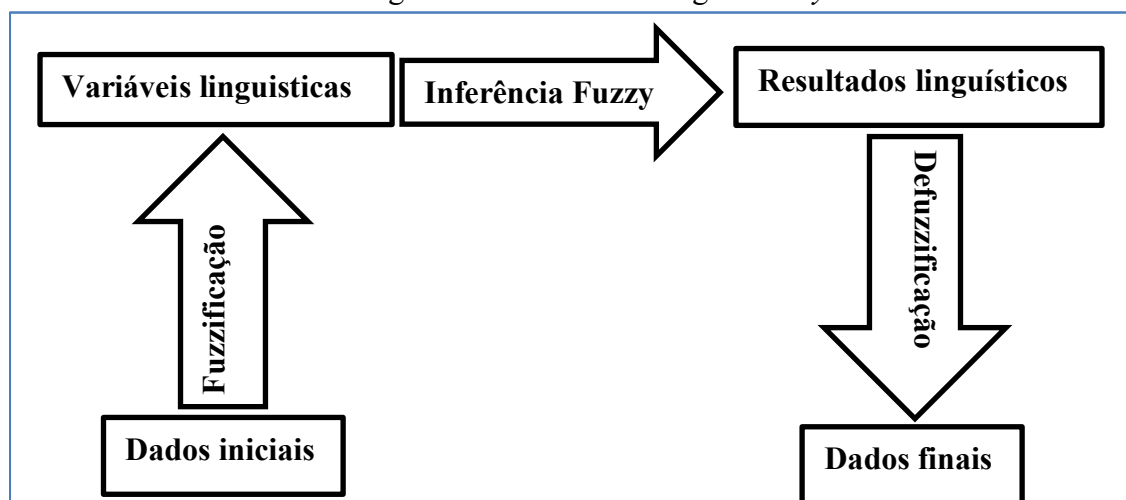
Uma conclusão é produzida pela interação dos antecedentes entre si e com o consequente da regra em diversas configurações. Estas configurações são chamadas de mecanismos de inferência, e podem ser vistos com maiores detalhes em (Jang et al., 1997; Tsoukalas e Uhrig, 1997; Pedrycz e Gomide, 1998; citados por Mozelli, 2008).

2.3.5 Sistema da lógica *Fuzzy*

O sistema da lógica *Fuzzy* pode ser resumido em três operações seguintes: fuzzificação, inferências *Fuzzy*, defuzzificação. Estas operações estão explicitadas na Figura 2.2, conforme Cox (1995).

A *fuzzificação* é um conceito importante na lógica *Fuzzy*. É o processo onde os dados iniciais se transformam em suas respectivas variáveis linguísticas. Nesta etapa, todas as informações relativas à imprecisão ou incerteza associada a estas variáveis devem ser consideradas.

Figura 2.2 - Sistema da lógica *Fuzzy*.



Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

A operação de fuzzificação permite passar de um domínio real para um domínio *Fuzzy*. Essa operação consiste em determinar o grau de pertinência de um valor em um conjunto *Fuzzy*. O resultado da fuzzificação sempre pertence ao intervalo $[0; 1]$.

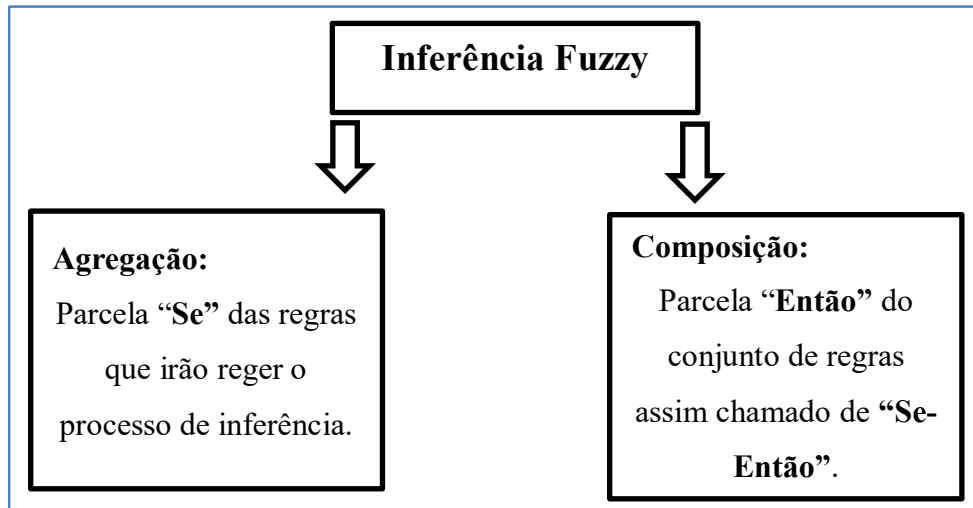
No entanto, a finalidade da *Inferência Fuzzy* é relacionar as possíveis variáveis entre si, através de regras pré-estabelecidas, cumprindo assim com os objetivos do algoritmo. Segundo Von Altrock (1996), pode-se separar a fase de Inferência *Fuzzy* em dois componentes, denominados de Agregação e Composição, conforme esquematizados na Figura 2.3, abaixo. O primeiro diz respeito à chamada parcela “Se” das regras que vão reger o processo de inferência, e o segundo, refere-se à parcela “Então” de conjunto de regras, assim chamadas de “*Se-Então*”. Tais componentes de Agregação e Composição compõem o chamado processo de inferência lógica *Fuzzy*, controlando as relações entre variáveis linguísticas através de seus respectivos operadores lógicos. Jang et al. (1997) resumiram a inferência em quatro etapas, como segue:

- a) Avalia-se através das regras “*Se-Então*” os graus de compatibilidade das variáveis premissas com seus respectivos antecedentes. Por exemplo, na regra (2.4) atribui-se uma pertinência para a variável x , no conjunto A ;
- b) Determina-se o grau de ativação de uma regra, dado pela combinação dos graus de compatibilidade das variáveis premissas com seus antecedentes. Na regra (2.5), esse procedimento é estruturado, de modo que cada antecedente (x é A e z é C) produz um grau de compatibilidade, respectivamente, $\mu_A(x)$ e $\mu_C(z)$;
- c) Baseando-se no grau de ativação, determina-se um conseqüente, gerado por uma regra específica. Este conseqüente é chamado de conseqüente induzido. Por exemplo, na regra (2.5), se o grau de ativação dessa regra é um, o conseqüente produzido será o próprio B , caso contrário, o conseqüente terá um grau de pertinência em B , e;
- d) Em casos raros, se um sistema de inferência possui mais de uma regra, cada regra produz um conseqüente. Neste caso, o resultado global da etapa de inferência dependerá da combinação desses conseqüentes. Os autores chamam esta etapa de agregação.

Finalmente, a *Defuzzificação* trata-se da Transformação, após inferência, de um conjunto *Fuzzy* de uma variável linguística de saída em um valor numérico. Segundo Von Altrock (1996), a defuzzificação é a tradução do resultado linguístico do processo de

inferência *Fuzzy*, em um valor numérico. Cox (1995) definiu a defuzzificação como um processo de conversão de um número fuzzy em um número real.

Figura 2.3 - Inferência *Fuzzy*.



Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

2.3.6 Modelo *Fuzzy* Takagi-Sugeno (TS)

Takagi e Sugeno (1985) introduziram uma ferramenta para modelagem de sistemas baseada na teoria *Fuzzy*. Neste artigo, os autores também discutem duas aplicações industriais: uma relacionada ao tratamento de água e outra com respeito à produção de ferro. Baseando-se nas implicações *Fuzzy* e no método de raciocínio *Fuzzy* sugerido por Takagi e Sugeno (1985), Sugeno e Kang (1986) publicaram novos critérios para ajustar os parâmetros do método *Fuzzy*.

O modelo *Fuzzy* “TS” desenvolvido por Takagi e Sugeno (1985) consiste na representação de um sistema não-linear como uma combinação *Fuzzy* de sistemas lineares. Esse esquema denominado de “*modelo local*” descreve o comportamento do sistema não-linear em diferentes pontos do espaço-estado. Em outras palavras, o modelo *Fuzzy* TS consiste em uma combinação de sistema de inferência capaz de descrever, de forma exata ou aproximada, sistemas dinâmicos não lineares por meio de um conjunto de sistemas dinâmicos lineares, localmente válidos, interpolados de forma suave, não-linear e convexa.

O método de Takagi-Sugeno (TS), também é conhecido na literatura como Takagi-Sugeno-Kang (TSK) devido aos trabalhos de Sugeno e Kang (1986). O método TS possui

aplicações em diversas áreas, entre estas pode-se citar processos de automação e controle e modelos de previsão de séries temporais.

Como exemplo do uso da metodologia TS pode-se citar Machado (2003) que abordou um problema de modelagem e controle, definido por uma classe de sistemas não lineares, e resolvido através dos modelos TS *Fuzzy*, com a finalidade de obter ótimos locais de sistema dinâmicos, utilizando restrições de Desigualdades Matriciais Lineares (LMI). Teixeira et al. (2011) propuseram um método para a estabilização de sistemas não-lineares, usando esquemas de realimentação derivativa. Neste estudo, os sistemas não-lineares também foram representados por modelos TS *Fuzzy*, permitindo o uso de LMIs para a solução do problema. Por meio de comparação entre o método de modelagem TS proposto e o método de aproximação exata, os autores concluíram que o método desenvolvido apresentou controladores mais simples e, em geral, com melhores desempenhos.

Zeng et al. (2000) e Tanaka e Wang (2001) destacaram que os modelos TS têm a capacidade de aproximação universal. Isto é, os modelos TS têm a capacidade de aproximar uniformemente, funções quaisquer em um domínio compacto. Para Johansen et al. (2000), os modelos *Fuzzy* TS têm vantagens sobre outros modelos *Fuzzy*. Uma dessas vantagens é o fato dos conseqüentes serem sistemas dinâmicos, demandando uma menor quantidade de regras Se-Então, o que facilita substancialmente a tarefa de identificação de modelos. Sob o ponto de vista de controle, Teixeira e Assunção (2007) destacou que os modelos TS permitem conciliar técnicas de controle não-linear e, ao mesmo tempo, estender de forma rigorosa resultados da teoria de controle de sistemas lineares.

Para o entendimento da técnica TS *Fuzzy*, considere um sistema dinâmico não-linear no tempo discreto, de duas equações em diferença de primeira ordem, descrito a seguir:

$$\begin{cases} x_{k+1} = f(x_k) + g(u_k) \\ y_k = h(x_k) \end{cases}, \quad (2.6)$$

onde $x_k \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $u_k \in \mathbb{R}^n$ o vetor de entrada, $y_k \in \mathbb{R}^q$ é o vetor de saída medida, e Δ_t é o período de amostragem entre x_{k+1} e x_k .

O modelo TS, dado por um conjunto de r regras “**Se-Então**”, tem a seguinte forma:

$$R_i: \begin{cases} \text{Se} & q_k^1 \text{ é } \Phi_1^i \text{ e } q_k^2 \text{ é } \Phi_2^i, \text{ e } \dots, \text{ e } q_k^s \text{ é } \Phi_s^i \\ \text{Então} & x_{k+1} = A_i x_k + B_i u_k, \text{ e } y_k = C_i x_k \end{cases} \quad (2.7)$$

onde, para R_i , $i \in R$ representa o i -ésimo regra fuzzy. Na regra R_i , $\Phi_j^i, j \in S$ são variáveis linguísticas. $q_k^j, j \in S$ são variáveis premissas no instante k , Q é o universo de discurso, A_i , B_i e C_i são matrizes reais de dimensão apropriada, representando o modelo local da regra R_i .

Segundo Tanaka e Wang (2001), as variáveis premissas podem ser funções de estados, distúrbios externos ou condições de operação. Em outras palavras, essas variáveis não são funções de vetor de entrada para evitar um processo complicado para a defuzzificação de controladores *Fuzzy*.

Para simplificar a notação, as variáveis premissas são agrupadas no vetor que se segue:

$$q_k = [q_k^1 \ q_k^2 \ \dots \ q_k^s] \quad (2.8)$$

O grau de compatibilidade de q_k^j aos respectivos conjuntos *Fuzzy* das variáveis linguísticas Φ_j^i foi avaliado na premissa das regras, a fim de obter o grau de pertinência $\mu_j^i(q_k^j)$.

O grau de ativação de antecedente da regra R_i tem a seguinte forma:

$$\omega_i[q_k] = \prod_{j=1}^s \mu_j^i(q_k^j) \quad (2.9)$$

A Equação (2.9) significa que a norma-t adotada para determinar o grau de ativação do antecedente é o produto algébrico das pertinências.

Para que a propriedade a seguir seja garantida, é preciso ao menos uma das regras do modelo esteja ativa:

$$\omega_i[q_k] \geq 0, \text{ e } \sum_{i=1}^r \omega_i[q_k] > 0 \quad (2.10)$$

O consequente induzido por cada regra R_i é uma ponderação do modelo local:

$$\text{consequente } i \begin{cases} \omega_i[q_k](A_i x_k + B_i u_k) \\ \omega_i[q_k]C_i x_k \end{cases} \quad (2.11)$$

A agregação é dada pela média ponderada das regras. Portanto, o modelo TS final é dado por:

$$\begin{cases} x_{k+1} = \sum_{i=1}^r h_i[q_k](A_i x_k + B_i u_k) \\ y_k = \sum_{i=1}^r h_i[q_k]C_i x_k \end{cases}, \quad (2.12)$$

Sendo que a ponderação normalizada de cada regra é dada por:

$$h_i[q_k] = \frac{\omega_i[q_k]}{\sum_{i=1}^r \omega_i[q_k]} \quad (2.13)$$

Que satisfaz a seguinte propriedade da combinação convexa:

$$\sum_{i=1}^r h_i[q_k] = 1, \quad \sum_{i=1}^r \omega_i[q_k] \geq 0, \quad \forall i \in R. \quad (2.14)$$

Portanto, o modelo TS busca modelar a dinâmica não-linear em (2.6), por meio da interpolação de modelos dinâmicos lineares. Como as funções de pertinência, geralmente, são não-lineares e possuem derivadas contínuas (Tanaka e Wang, 2001), o modelo resultante é uma combinação convexa de modelos locais que é suave e não-linear.

A seguir, no próximo capítulo, um modelo macrodinâmico de equações diferenciais ordinárias será estruturado. Este modelo será utilizado como base no estudo das interações entre as variáveis fiscais e monetárias das economias emergentes.

3 METODOLOGIA

O presente capítulo tem como objetivo de formular e estruturar o modelo dinâmico a ser utilizado ao longo do estudo. O modelo macrodinâmico estruturado será perturbado, transformando-o em um modelo sob efeitos de choques, a fim de aproximá-lo da realidade econômica. Portanto, este capítulo é dividido em duas seções: a primeira seção apresenta a estrutura do sistema dinâmico e a segunda seção tem como finalidade detalhar, matematicamente, a transformação do sistema dinâmico em um sistema estocástico.

3.1 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO MODELO MACRODINÂMICO

Na formula deste modelo, pressupõe-se que economias que utilizam o regime de metas de inflação podem estar expostas a choques na taxa de câmbio, uma vez que a flexibilidade cambial é condição básica na instrumentalização de tal regime monetário.

No debate sobre a dominância fiscal, um comportamento não-ricardiano da dívida pública pode fazer com que a autoridade monetária perca o controle sobre a inflação. Portanto, o estabelecimento de uma dívida específica em relação ao Produto Interno Bruto pode garantir ser um indicador de sucesso (ou não) do regime de metas de inflação e indicaria uma maneira de a autoridade fiscal garantir a solvência de longo prazo da dívida. No entanto, de forma diferente, considera-se no estudo formulado que simplesmente o nível da dívida já se caracteriza como um indicativo à necessidade de estabelecer ajustes fiscais, no sentido de garantir a solvência da dívida pública.

Assim, consideram-se os seguintes fatores que influenciam a taxa nominal de juros intertemporal:

- a) Se a inflação (π) desvia da meta (π^e) pré-estabelecida, a autoridade monetária reage positivamente de forma a conter tal desvio;
- b) quanto maior for o diferencial entre as taxas de juros nominais no mercado interno i e externo \bar{i} , menor é a necessidade de a autoridade monetária recorrer a aumentos da própria taxa de juros interna;
- c) tendo em vista que reduções da taxa de juros estrangeira, mantida constante a taxa de juros interna, estimula uma apreciação cambial, o que contribui para a estabilidade dos preços.

Primeiramente, supondo que a taxa nominal de juros da economia em questão, i , é definida pela regra de Fisher, ou seja:

$$i(t) = r(t) + \pi(t) \quad (3.1)$$

onde π e r representam, respectivamente, a taxa de inflação observada e a taxa de juros real. Esta taxa nominal de juros de curto prazo i é definida pelo Banco Central, que, no caso da economia brasileira, é denominada de Taxa SELIC.

Uma das restrições intertemporais à política governamental sobre a economia é a dívida pública. Cafiso (2012) obteve uma equação em forma de diferença que permite estimar os fatores que afetam a variação da dívida pública. Nessa formulação, considerou-se a inflação explicitamente. As equações da dívida pública foram desenvolvidas sob a hipótese de que a dívida encontra-se estruturada em moeda doméstica e em moeda estrangeira. A parte da dívida em moeda estrangeira geralmente é emitida em dólar americano nos países em desenvolvimento e países de baixa renda.

Seguindo Walsh (2003), a equação da dívida pública é derivada, a partir da identidade do orçamento consolidado do setor governamental, tal como segue:

$$\underbrace{G_t + i_t B_{t-1}}_{\text{gastos}} = \underbrace{T_t + (B_t - B_{t-1}) + (H_t - H_{t-1})}_{\text{receitas}} \quad (3.2)$$

onde G_t são os gastos governamentais, B_t é a dívida pública no tempo t (em nível), T_t é a receita fiscal do governo, e H_t é a base monetária.

Na equação (3.2), tem-se que $i_t B_{t-1}$ representa as despesas com a dívida, no período $t - 1$, indexada a uma taxa de juros nominal i_t , implícita à maturidade t , sobre B_{t-1} . As despesas do governo são pagas com receitas fiscais, como a renda por senhoriagem no tempo t , $S_t = H_t - H_{t-1}$, ou através da emissão de títulos de dívida, dado por $B_t - B_{t-1}$. A Equação (3.2) pode ainda ser manipulada, isolando b_t no lado esquerdo e os demais termos à direita, e fazendo $W_t = T_t - G_t$:

$$B_t = B_{t-1} + i_t B_{t-1} - (W_t + S_t) \quad (3.3)$$

Como a dívida pública é geralmente monitorada em percentual do PIB, isso, por que a dívida é relacionada ao recurso disponível para o seu pagamento e é comparável entre países. Portanto, a equação (3.3) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{B_t}{P_t Y_t} &= \frac{B_{t-1}}{P_t Y_t} + \frac{i_t B_{t-1}}{P_t Y_t} - \left(\frac{W_t + S_t}{P_t Y_t} \right) \rightarrow b_t = \frac{(1+i_t)B_{t-1}}{P_t Y_t} - \left(\frac{W_t + S_t}{P_t Y_t} \right) \rightarrow \\ b_t &= \frac{(1+i_t)B_{t-1}}{(1+\alpha_t)P_{t-1}Y_{t-1}} - \left(\frac{W_t + S_t}{P_t Y_t} \right) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Na Equação (3.4), P_t é o preço de custo de uma unidade na economia, Y_t é a produção da economia, $P_t Y_t = (1 + \alpha_t) \cdot P_{t-1} Y_{t-1}$ é o PIB nominal e α_t representa a taxa de variação do PIB.

$$b_t = \frac{(1+i_t)}{(1+\alpha_t)} b_{t-1} - (w_t + s_t) \quad (3.5)$$

Na Equação (3.5), a dívida pública é representada, em termos relativos ao PIB. Ainda na Equação (3.5), definiu-se $P_t Y_t = (1 + \pi_t) P_{t-1} (1 + \eta_t) Y_{t-1}$, onde $(1 + \pi_t)$ é o índice de inflação atual, e $(1 + \eta_t)$ é o índice de crescimento do PIB, conseqüentemente, definindo $(1 + \alpha_t) = (1 + \pi_t)(1 + \eta_t)$.

$$b_t = \frac{(1+i_t)}{(1+\pi_t)(1+\eta_t)} b_{t-1} - (w_t + s_t) \quad (3.6)$$

Cafiso (2012) ainda definiu a taxa de juros nominal e a inflação da seguinte forma:

$$i_t = \hat{i}_t + \epsilon_t \theta^f (1 + i_t^f), \text{ e } \pi_t = \hat{\pi}_t + \epsilon_t \mu^f (1 + \pi_t^f) \quad (3.7 \text{ e } 3.8)$$

onde $\hat{i}_t = \theta^h i_t^h + \theta^f i_t^f$ é a média ponderada das taxas de juros domésticas e estrangeiras, $\hat{\pi}_t = \mu^h \pi_t^h + \mu^f \pi_t^f$ é a média ponderada das inflações domésticas e estrangeiras, $\epsilon_t = \Delta E_t / E_{t-1}$ é a taxa de depreciação da moeda local (E_t é o câmbio nominal, se $\epsilon_t > 0$ significa depreciação), i_t^h e i_t^f são, respectivamente, as taxas de juros doméstica e estrangeira, π_t^h e π_t^f as inflações doméstica e estrangeira. θ^h e θ^f são, respectivamente, a participação da taxa de

juros doméstica e da taxa de juros estrangeira na taxa de juros nominal, com $\theta^h + \theta^f = 1$. Da mesma forma, μ^h e μ^f são, respectivamente, a participação da taxa de inflação doméstica e da taxa de inflação estrangeira na taxa de inflação nominal, com $\mu^h + \mu^f = 1$.

Substituindo i_t e π_t e diminuindo b_{t-1} nos dois lados da equação (3.6), tem-se:

$$\Delta b_t = \left[\frac{[1 + \hat{i}_t + \epsilon_t \theta^f (1 + i_t^f)]}{(1 + \eta_t) [1 + \hat{\pi}_t + \epsilon_t \mu^f (1 + \pi_t^f)]} - 1 \right] b_{t-1} - (w_t + s_t) \quad (3.9)$$

A taxa de juros real pode ser definida da seguinte forma segundo Cafiso (2012):

$$r_t = \frac{[1 + \hat{i}_t + \epsilon_t \theta^f (1 + i_t^f)]}{[1 + \hat{\pi}_t + \epsilon_t \mu^f (1 + \pi_t^f)]} - 1 \rightarrow r_t = \frac{(\hat{i}_t - \hat{\pi}_t) + \epsilon_t [\theta^f (1 + i_t^f) - \mu^f (1 + \pi_t^f)]}{[1 + \hat{\pi}_t + \epsilon_t \mu^f (1 + \pi_t^f)]} \quad (3.10)$$

A equação (3.9) pode ser escrita da seguinte forma, usando a taxa de juros real r_t da equação (3.10) e aplicando um parâmetro de impacto a cada tema:

$$\Delta b_t = \theta_1 \left[\frac{r_t - \eta_t}{(1 + \eta_t)} \right] b_{t-1} + u_3 w_t + \theta_2 s_t \quad (3.11)$$

aonde η_t é a taxa de crescimento do PIB real. Espera-se um sinal negativo para os parâmetros u_3 e θ_2 , e positivo para θ_1 .

A Equação (3.11) pode ser na forma diferencial contínua, como segue:

$$\frac{db_t}{dt} = \theta_1 \left[\frac{r_t - \eta_t}{(1 + \eta_t)} \right] b_{t-1} + u_3 w_t + \theta_2 s_t \quad (3.12)$$

Segundo Guender (2006) a taxa de inflação é, *a priori*, determinada por uma curva de Phillips com expectativas para uma economia aberta (acrescida do componente câmbio nominal) é dada por:

$$\pi(t) = \tau [y(t) - \bar{y}(t)] + \pi^e(t) + \theta e(t) \quad (3.13)$$

onde na Eq. (3.13) y é produto, \bar{y} o produto potencial, então, o termo $(y - \bar{y})$ representa o hiato do produto, π^e a inflação esperada¹² e, e o câmbio real, e $\tau > 0$ e $\theta > 0$ representam as relações de impactos, respectivamente, entre o hiato do produto e a taxa de câmbio, com a inflação.

Na análise a seguir, subtrai-se a inflação do período prévio em ambos os lados da Equação (3.13), como segue:

$$\pi(t) - \pi(t - 1) = \tau[y(t) - \bar{y}(t)] + [\pi^e(t) - \pi(t - 1)] + \theta e(t) \quad (3.14)$$

Finalmente, aplicando um termo de controle sobre o hiato do produto, a Equação (3.14) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{d\pi(t)}{dt} = \sigma_1 e(t) + u_4[y(t) - \bar{y}(t)] + \sigma_2[\pi(t) - \pi^e(t)] \quad (3.15)$$

onde $\sigma_1 > 0$ representa a variação da inflação em relação ao câmbio. O parâmetro de controle, $u_4 < 0$, é o efeito do hiato do produto sobre a variação da inflação. $\sigma_2 > 0$, conforme sustenta a teoria macroeconômica, é o efeito do diferencial da inflação e meta de inflação sobre a variação da inflação.

A regra de Taylor, enunciada por Taylor (1993), trata-se de uma determinação exógena da taxa de juros que pode ser escrita como:

$$i(t) - r^* = \pi(t) + [\pi(t) - \pi^*(t)] + \tau[y(t) - \bar{y}(t)] \quad (3.16)$$

onde i é a taxa de juros nominal estimada pela regra de Taylor, r^* a taxa de juros real de equilíbrio (taxa de juros natural), π a taxa de inflação observada, $\pi^*(\simeq \pi^e)$ a meta de

¹² A meta de inflação do Banco Central do Brasil será usada, neste estudo, como uma aproximação da inflação esperada.

inflação do Banco Central, $y - \bar{y}$ o hiato do produto, (y é o produto Interno Bruto, PIB, e \bar{y} é o produto potencial), e τ o coeficiente de sensibilidade à variação do produto.

Na equação (3.16) pode ser subtraído em ambos os lados, o termo $i(t - 1)$, o que conduz a:

$$\Delta i(t) = (i^*(t) - i(t - 1)) + [\pi(t) - \pi^e(t)] + \tau[y(t) - \bar{y}(t)] \quad (3.17)$$

onde $i^*(t) = r^* + \pi(t)$.

A regra de Taylor sustenta que os bancos centrais devem determinar uma taxa de juros, visando uma meta inflacionária explícita ou implícita e manter o crescimento do PIB próximo de seu potencial. A regra de Taylor é aceita, tanto pela teoria monetária ortodoxa (*orthodox mainstream*), como pela heterodoxa (Lavoie, 2004; Setterfield, 2005; Arestis e Sawyer, 2005). A regra de Taylor embute a hipótese de que a taxa de juros natural não varia ao longo do tempo.

A regra de Taylor, dada pela Equação (3.17), aplica-se para uma economia fechada. Portanto, numa economia aberta não se justifica o uso de uma função de fixação de taxa de juros de curto prazo, deduzida para economia fechada. No caso de uma economia aberta, deve-se observar os diferentes canais de integração da economia do país com os mercados financeiros internacionais, como a securitização de dívidas externas que dependem das taxas de títulos públicos americanos, do risco país, e do risco cambial, o que induz que a taxa de juros doméstica passa depender da taxa de juros internacional. Portanto, tendo em vista que analisaremos uma relação de fixação da taxa de juros interna para uma economia aberta, poderia introduzir na Equação (3.17) a taxa de câmbio, variável de interação das relações de atividades financeiras nos mercados internacionais. O que não mudaria a estrutura da equação da taxa de juros.

Portanto, para atender as explicações feitas nos parágrafos anteriores basta isolar o termo $\tau[y(t) - \bar{y}(t)]$ na Equação (3.13), substituindo o resultado na Equação (3.17), e introduzindo os parâmetros de proporcionalidades das relações de impactos de cada termo da seguinte forma:

$$\Delta i(t) = a_1(i^*(t) - i(t - 1)) + a_2[\pi(t) - \pi^e(t)] + a_3e(t) \quad (3.18)$$

onde espera-se que $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ e $a_3 > 0$.

Na forma diferencial, a equação (3.18) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{di(t)}{dt} = a_1(i^*(t) - i(t-1)) + a_2[\pi(t) - \pi^e(t)] + a_3e(t) \quad (3.19)$$

Tendo como base a Relação (3.17) e (3.19), pode-se conjecturar que o desenvolvimento da taxa de variação da taxa de juros nominal pode ser descrita uma equação diferencial ordinária. Neste caso, considera-se que a taxa de juros do período passado tem uma forte ligação com a taxa de juros do presente período, pode substituir $i(t-1)$ por uma fração de $i(t)$; e aplicando um termo de controle, u_2 , sobre o hiato de produto (ou sobre câmbio se mantivesse a mudança), temos:

$$\frac{di(t)}{dt} = \mu_1(i^*(t) - i(t)) + \mu_2[\pi(t) - \pi^e(t)] + u_2[y(t) - \bar{y}(t)] \quad (3.20)$$

onde $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$, e $u_2 > 0$ são constantes.

A equação (3.20) visa estabelecer os efeitos do controle do hiato de produto sobre a taxa de juros nominal, estabelecendo metas futuras para o hiato e estimando o desenvolvimento do fator de controle u_2 , que representa os custos para atingir tais metas.

Considerando a relação de variação da taxa de câmbio real estabelecida em Ball (1999):

$$e(t) = \omega_1 r(t) + \vartheta(t) \quad (3.21)$$

onde e é a taxa de câmbio real, r a taxa de juros real, com o coeficiente $\omega_1 < 0$ e ϑ uma perturbação estocástica se comportando como ruído branco.

Adicionando e subtraindo na equação (3.21), o termo $e(t-1)$ e, por hora, desprezando termo estocástico (que será considerado mais tarde), obtém-se:

$$\Delta e(t) = \delta_1 e(t-1) + \delta_2 r(t) \quad (3.22)$$

onde $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 < 0$.

Tendo como base a relação (3.22), pode-se conjecturar que o desenvolvimento da taxa de câmbio real pode ser descrito pela seguinte equação diferencial ordinária contínua, como segue:

$$\frac{de(t)}{dt} = \delta_1 e(t-1) + \delta_2 r(t) \quad (3.23)$$

Como assumido anteriormente, sem perda de generalidade, pode-se supor que $e(t-1) \approx e(t)$, tendo em vista que em uma equação diferencial contínua, o tempo de integração é infinitesimal. Finalmente, a equação (3.23) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{de(t)}{dt} = \delta_1 e(t) + u_5 r(t) \quad (3.24)$$

onde $u_5 = \delta_2 < 0$ é um fator de controle, e esperamos um sinal negativo, $\delta_1 > 0$ é o impacto da taxa de câmbio sobre si mesmo.

Ball (1999) assume uma relação para o produto, na forma de uma equação de diferença, considerando os conceitos da curva IS, como segue:

$$y(t) = \varphi_1 y(t-1) - \varphi_2 r(t-1) - \varphi_3 e(t-1) \quad (3.25)$$

onde y é o produto interno bruto, r a taxa de juros real, e e é a taxa de câmbio real. As constantes $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ são positivos.

Adicionando e subtraindo na Equação (3.25), o termo $y(t-1)$, obtém-se:

$$\Delta y(t) = \gamma_1 r(t-1) + \gamma_2 e(t-1) + \gamma_3 y(t-1) \quad (3.26)$$

onde espera-se que $\gamma_3 = \varphi_1 - 1 > 0$, $\gamma_2 = -\varphi_2 < 0$, e $\gamma_3 = -\varphi_3 < 0$.

Sem perda de generalidade, a Equação (3.26) será transformada em uma relação, na forma de uma equação diferencial contínua determinística, escrita como segue:

$$\frac{dy(t)}{dt} = \gamma_1 r(t) + \gamma_2 e(t) + \gamma_3 y(t) \quad (3.27)$$

Os coeficientes da equação (3.27) serão calibrados posteriormente; no entanto, consideraremos γ_3 como um parâmetro de controle impactando sobre o Produto Interno Bruto, como segue:

$$\frac{dy(t)}{dt} = u_1 y(t) + \gamma_1 r(t) + \gamma_2 e(t) \quad (3.28)$$

Observando a Eq. (3.28), verifica-se que o impacto da taxa de juros real sobre y , γ_1 , deve ser negativo, e o impacto da taxa de câmbio real sobre y , γ_2 , deve ser negativo. Em particular, deseja-se estabelecer metas de taxa de crescimento para a economia, cujos impactos serão caracterizados pelo desenvolvimento do parâmetro de controle u_1 , a ser estimado. Espera-se que este termo de controle apresente um sinal positivo.

Considerando as equações (3.12), (3.15), (3.20), (3.24), e (3.28) destacadas acima, pode-se agora estabelecer o modelo dinâmico que permite estabelecer os processos evolutivos das principais variáveis fiscais e monetárias da economia. O sistema que descreve esse modelo é caracterizado por cinco equações diferenciais ordinária, conforme descrito a seguir:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy(t)}{dt} = u_1 y(t) + \gamma_1 r(t) + \gamma_2 e(t) \\ \frac{di(t)}{dt} = \mu_1 [i^*(t) - i(t)] + \mu_2 [\pi(t) - \pi^e(t)] + u_2 [y(t) - \bar{y}(t)] \\ \frac{db_t}{dt} = \theta_1 \left[\frac{r_t - \eta_t}{(1 + \eta_t)} \right] b_{t-1} + u_3 w_t + \theta_2 s_t \\ \frac{d\pi(t)}{dt} = \sigma_1 e(t) + u_4 [y(t) - \bar{y}(t)] + \sigma_2 [\pi(t) - \pi^e(t)] \\ \frac{de(t)}{dt} = \delta_1 e(t) + u_5 r(t) \end{array} \right. \quad (3.29)$$

3.2. TRANSFORMAÇÃO DO MODELO DINÂMICO EM MODELO ESTOCÁSTICO

O sistema (3.29), acima, tem algumas limitações tais como: (i) ausência de variações dos parâmetros no tempo para adaptar o modelo com a realidade, e; (ii) a negligência de alguns fatores, ou seja, a não modelagem de algumas dinâmicas. Portanto, o sistema (3.29) foi transformado com a finalidade de captar as ineficiências destacadas acima, por meio de uma dinâmica estocástica para a política econômica brasileira, considerando-se flutuações nos parâmetros e perturbações externas e internas, por meio de choques impostos nos parâmetros e nas variáveis endógenas, a fim de identificar a dificuldade da economia brasileira em absorver choques externos e internos. Neste sentido, o sistema dinâmico da Eq. (3.29) pode ser reescrito na seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy(t)}{dt} = u_1(t)y(t) + (\gamma_1 + \Delta\gamma_1)r(t) + (\gamma_2 + \Delta\gamma_2)e(t) + v_1(t) \\ \frac{di(t)}{dt} = (\mu_1 + \Delta\mu_1)[i^*(t) - i(t)] + (\mu_2 + \Delta\mu_2)[\pi(t) - \pi^e(t)] + u_2[y(t) - \bar{y}(t)] + v_2(t), \\ \frac{db(t)}{dt} = (\theta_1 + \Delta\theta_1) \left[\frac{r_t - \eta_t}{(1 + \eta_t)} \right] b_{t-1} + u_3 w_t + (\theta_2 + \Delta\theta_2) s_t + v_5(t) \\ \frac{d\pi(t)}{dt} = (\sigma_1 + \Delta\sigma_1)e(t) + u_4[y(t) - \bar{y}(t)] + (\sigma_2 + \Delta\sigma_2)[\pi(t) - \pi^e(t)] + v_3(t), \\ \frac{de(t)}{dt} = (\delta_1 + \Delta\delta_1)e(t) + u_5(t)r(t) + v_4(t) \end{array} \right. \quad (3.30)$$

onde o símbolo Δ indica flutuação paramétrica dos coeficientes, para adaptar-se o modelo às mudanças de comportamento devido as inovações estocásticas que causam mudanças no comportamento da economia; $v_1(t)$, $v_2(t)$, $v_3(t)$, $v_4(t)$ e $v_5(t)$ captam as perturbações externas de forma aditiva, que perduram por um determinado período cíclico.

Supõe-se que as variações paramétricas podem ser divididas de duas maneiras, uma parte determinística e outra parte aleatória: $\Delta\gamma_1 = \omega_1 n(t)$, $\Delta\gamma_2 = \omega_2 n(t)$, $\Delta\mu_1 = \omega_3 n(t)$, $\Delta\mu_2 = \omega_4 n(t)$, $\Delta\sigma_1 = \omega_5 n(t)$, $\Delta\sigma_2 = \omega_6 n(t)$, $\Delta\delta_1 = \omega_7 n(t)$, $\Delta\theta_1 = \omega_8 n(t)$, $\Delta\theta_2 = \omega_9 n(t)$ onde ω_i representa o desvio padrão da flutuação paramétrica estocástica, $n(t)$ um ruído branco padrão com variância unitária, ou seja, $var(\Delta\gamma_1) = \omega_1^2$, $var(\Delta\gamma_2) = \omega_2^2$ e assim por diante.

Considerando as definições apresentadas no parágrafo acima, o modelo estocástico para o dinâmico da política econômica pode ser representado na seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \frac{dy(t)}{dt} \\ \frac{di(t)}{dt} \\ \frac{db(t)}{dt} \\ \frac{d\pi(t)}{dt} \\ \frac{de(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(t)y(t) + \gamma_1 r(t) + \gamma_2 e(t) \\ \mu_1 [i^*(t) - i(t)] + \mu_2 [\pi(t) - \pi^e(t)] + u_2 [y(t) - \bar{y}(t)] \\ \theta_1 \left[\frac{r_t - \eta_t}{(1 + \eta_t)} \right] b(t-1) + u_3 W(t) + \theta_2 s(t) \\ \sigma_1 e(t) + u_4 [y(t) - \bar{y}(t)] + \sigma_2 [\pi(t) - \pi^e(t)] \\ \delta_1 e(t) + u_5 r(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_1 r(t) + \omega_2 e(t) \\ \omega_3 [i^*(t) - i(t)] + \omega_4 [\pi(t) - \pi^e(t)] \\ \left[\omega_5 \left[\frac{r_t - \eta_t}{(1 + \eta_t)} \right] b_{t-1} + \omega_6 s(t) \right] n(t) \\ \omega_7 e(t) + \omega_8 [\pi(t) - \pi^e(t)] \\ \omega_9 e(t) \end{bmatrix} n(t) + \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \\ v_4(t) \\ v_5(t) \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Para facilitar a análise, escreve-se o sistema estocástico acima da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} dy(t) \\ di(t) \\ db(t) \\ d\pi(t) \\ de(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 r(t) + \gamma_2 e(t) \\ \mu_1 [i^*(t) - i(t)] + \mu_2 [\pi(t) - \pi^e(t)] \\ \theta_1 \left[\frac{r_t - \eta_t}{(1 + \eta_t)} \right] b(t-1) + \theta_2 s(t) \\ \sigma_1 e(t) + \sigma_2 [\pi(t) - \pi^e(t)] \\ \delta_1 e(t) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} y(t) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [y(t) - \bar{y}(t)] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [y(t) - \bar{y}(t)] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \\ v_4(t) \\ v_5(t) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \omega_1 r(t) + \omega_2 e(t) \\ \omega_3 [i^*(t) - i(t)] + \omega_4 [\pi(t) - \pi^e(t)] \\ \omega_5 \left[\frac{r_t - \eta_t}{(1 + \eta_t)} \right] b(t-1) + \omega_6 s(t) \\ \omega_7 e(t) + \omega_8 [\pi(t) - \pi^e(t)] \\ \omega_9 e(t) \end{bmatrix} dp(t) \quad (3.32)$$

onde $p(t)$, com $dp(t) = n(t)dt$, é um processo Wiener padrão, ou movimento browniano.

O sistema estocástico da Eq. (3.32) pode ser escrito num sistema estocástico geral, como segue:

$$dx(t) = \left(f(x(t)) + g(x(t))u(t) + v(t) \right) dt + h(x(t))dp(t), \quad (3.33)$$

com

$$x(0) = x_0 \quad (3.34)$$

$x(t) = [x_1(t) \dots x_n(t)]^T$, $u(t) = [u_1(t) \dots u_m(t)]^T$, $v(t) = [v_1(t) \dots v_n(t)]^T$ representam, respectivamente, vetor de estados, vetor dos parâmetros de controle e vetor de distúrbios externos. $f(x(t)) \in R^{n*1}$ denota o vetor de interação não-linear entre as variáveis da política fiscal e monetária, $g(x(t)) \in R^{n*1}$ denota a matriz insumo de controle, e $h(x(t)) \in R^{n*1}$ representa o vetor de flutuações paramétricos dos ruídos impostos sobre as variáveis dependentes. De uma forma geral, a equação acima demonstra que $x_1(t) = y(t)$, $x_2(t) = i(t)$, $x_3(t) = b(t)$, $x_4(t) = e(t)$ e $x_5(t) = \pi(t)$. O sistema (3.33) será usado posteriormente nos estudos do modelo estocástico e para estabelecer controle via lógica *fuzzy*. Para estabelecer este controle, uma dinâmica desejada para o sistema estocástico (3.33) deve ser reproduzida via um modelo de referência assim como um modelo de trajeto robusto de controle de referência; o que será detalhado no próximo capítulo.

4 MODELO DE REFERÊNCIA E MODELO DE CONTROLE ROBUSTO DA TRAJETÓRIA DE REFERÊNCIA

Este capítulo tem como objetivo: na primeira seção, definir o modelo de referência que reproduza uma dinâmica desejada para o sistema estocástico (3.33) segundo Chen & Lin (2011); na segunda seção, propor um modelo de controle robusto da trajetória de referência; e na terceira seção, aplicar o modelo Takagi e Sugeno (T-S) de Chen & Lin (2011) a fim de aproximar um sistema não linear interpolando vários sistemas linearizados em diferentes pontos de operação.

4.1 MODELO DE REFERÊNCIA

Após definir o modelo estocástico (3.33), interação entre as políticas fiscal e monetária, nesta seção, será definido um modelo de referência. Este modelo de referência deve reproduzir uma dinâmica desejada para o sistema estocástico (3.33), e tem a seguinte forma, segundo Chen & Lin (2011):

$$\dot{x}_{rf}(t) = A_{rf}x_{rf}(t) + rf(t) \quad (4.1)$$

onde $x_{rf}(t) \in R^{n*1}$ é um vetor do estado de referência, $A_{rf}(t) \in R^{n*n}$ é uma matriz estável assintoticamente, definida de forma específica para satisfazer o estado de referência e $rf(t)$ é o sinal de referência desejada. $A_{rf}(t)$ e $rf(t)$ são especificados, a priori, pelo pesquisador para determinar a resposta transitória e o estado estacionário do modelo de referência desejado.

4.2 MODELO ROBUSTO DE CONTROLE DA TRAJETÓRIA DE REFERÊNCIA.

Nesta seção, um modelo de controle robusto da trajetória de referência será proposto. Este modelo robusto fará com que o Sistema Estocástico (3.33) possa rastrear o resultado desejado no modelo de referência, apesar das flutuações paramétricas e distúrbios externos.

Porém, como o conhecimento estatístico das flutuações paramétricas, distúrbios externos e a incerteza na condição inicial nem sempre estão disponíveis, baseado em uma teoria de controle robusto H^∞ , o pior caso de efeito das flutuações paramétricas dos distúrbios externos e das incertezas nas condições iniciais das trajetórias de erro devem ser minimizadas pelos esforços de controle, de tal forma que todos os possíveis efeitos no caminho de referência desejado, devido a estas incertezas, podem ser atenuados o máximo possível (CHEN; LIN, 2011).

Portanto, o modelo de controle robusto de rastreamento é projetado para conceber o vetor $u(t)$, para que $x(t)$ em (3.33) siga com precisão o desejado estado de referência $x_{rf}(t)$ tal que o termo de erro de rastreamento $\tilde{x}(t) = x(t) - x_{rf}(t)$ seja o menor possível, apesar das flutuações dos parâmetros estocásticos, das perturbações externas e das incertezas nas condições iniciais, $x(0)$, da Eq. (3.34). Assim, as flutuações paramétricas, distúrbios externos e incerteza na condição inicial são considerados um jogador que maximiza a trajetória de erro. Enquanto que o controle do gerenciamento dos recursos é considerado outro jogador que minimiza a trajetória de erro. Este problema de jogo estocástico pode ser equivalente a um problema de trajetória robusto minimax.

Tanto o rastreamento de minimax¹³, como a robustez contra as incertezas $v(t)$, $x(0)$ e $rf(t)$ deverá ser atingido simultaneamente seguindo o jogo estocástico:

$$\min_{u(t)} \max_{v(t), rf(t)} \frac{E \int_0^{t_f} (\tilde{x}^T(t)Q\tilde{x}(t) + u^T(t)RFu(t))dt}{E \int_0^{t_f} (v^T(t)v(t) + rf^T(t)rf(t))dt + \tilde{x}^T(0)\tilde{x}(0)} \leq \tau^2, \quad \forall \tilde{x}(0) \quad (4.2)$$

onde E denota a expectativa, e as matrizes de ponderações Q e RF são matrizes diagonais, definidas como segue:

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & q_{nn} \end{bmatrix}, RF = \begin{bmatrix} rf_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & rf_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & rf_{nn} \end{bmatrix} \quad (4.3 \text{ e } 4.4)$$

$q_{11}, q_{22}, \dots, q_{nn}$, os elementos da diagonal principal da matriz Q representam punições sobre o erro de rastreamento e $rf_{11}, rf_{22}, \dots, rf_{nn}$, os elementos da diagonal principal da matriz RF são os custos de controle relativo. τ^2 , é um limite superior do jogo.

¹³ Para mais detalhes sobre o método minimax, consulte o Apêndice B.

Uma vez que o efeito $v(t)$, $rf(t)$ e $x(0)$ sobre o erro $\tilde{x}(t)$ seja minimizado pelo esforço de controle $u(t)$, o problema do jogo estocástico na Eq.(4.2) é adequado para um problema de trajetória robusto minimax, onde as estatísticas $v(t)$, $\tilde{x}(t)$ e $rf(t)$ são desconhecidas ou incertas, o que é sempre encontrado em um caso prático de projeto de controle.

Se $v(t)$ e $rf(t)$ foram determinísticos, então a expectativa E no denominador da Eq.(4.2) pode ser negligenciada. Isso porque não é fácil resolver o problema da Eq. (4.2) sujeito as Eqs. (3.33) e (4.2) diretamente, e por isto, um limite superior τ^2 para o problema de trajetória minimax é proposto acordo ao índice de desempenho H^∞ , para formular uma trajetória do problema subótimo. Uma vez que o problema subótimo seja resolvido, τ^2 é diminuído ao menor valor possível, para que o problema real de trajetória robusto minimax seja aproximado do sistema estocástico (BASAR; OLSDER, 1999; CHEN; TSENG; UANG, 1999).

Desde que o denominador de Eq. (4.2) seja independente de $u(t)$ é diferente de zero, ela pode ser escrita da seguinte forma:

$$\min_{u(t)} \max_{v(t), rf(t)} E \int_0^{t_f} (\tilde{x}^T(t)Q\tilde{x}(t) + u^T(t)RFu(t) - \tau^2 v^T(t)v(t) - \tau^2 rf^T(t)rf(t))dt \leq \tau^2 E\{\tilde{x}^T(0)\tilde{x}(0)\}, \quad \forall \tilde{x}(0) \quad (4.5)$$

De uma maneira mais explícita, pode-se notar que o primeiro termo da Eq. (4.5) assume a seguinte forma:

$$\min_{u(t)} \max_{v(t), rf(t)} J(u(t), v(t), rf(t)) = \min_{u(t)} \max_{v(t), rf(t)} E \int_0^{t_f} (\tilde{x}^T(t)Q\tilde{x}(t) + u^T(t)RFu(t) - \tau^2 v^T(t)v(t) - \tau^2 rf^T(t)rf(t))dt \quad (4.6)$$

Baseando na análise descrita acima, o problema do jogo estocástico na Eq. (4.5) ou (4.6) é equivalente a encontrar o pior caso de perturbação $v^*(t)$ e do sinal de referência $rf^*(t)$ que maximizam $J(u(t), v(t), rf(t))$, e a trajetória de controle minimax $u^*(t)$, que minimiza $J(u(t), v^*(t), rf^*(t))$, tal que o valor do minimax $J(u^*(t), v^*(t), rf^*(t))$ seja menor do que $\tau^2 E\{\tilde{x}^T(0)\tilde{x}(0)\}$. Isto é:

$$J(u^*(t), v^*(t), rf^*(t)) = \min_{u(t)} J(u(t), v^*(t), rf^*(t)) = \min_{u(t)} \max_{v(t), rf(t)} J(u(t), v(t), rf(t)) \leq \tau^2 E\{\tilde{x}^T(0)\tilde{x}(0)\}, \quad \forall \tilde{x}(0) \quad (4.7)$$

Portanto, se existir $u^*(t), v^*(t)$ e $rf^*(t)$, tal que o problema robusto minimax na Eq.(4.7) seja resolvido, então, eles podem também satisfazer o problema do jogo estocástico da Eq.(4.2). Enquanto, a primeira etapa do projeto da trajetória de controle robusto minimax é resolver o seguinte problema (minimax):

$$\min_{u(t)} \max_{v(t), rf(t)} J(u(t), v(t), rf(t)) \quad (4.8)$$

sujeito ao sistema apresentado nas Eqs. (3.33) e (4.1). A etapa seguinte constitui-se em verificar se $J(u^*(t), v^*(t), rf^*(t)) \leq \tau^2 E\{\tilde{x}^T(0)\tilde{x}(0)\}$, ou não, para qualquer $\tilde{x}(0)$.

Não é fácil resolver o problema minimax da Eq. (4.8); por isso, Chen e Lin (2011) propõe transformá-lo em um problema equivalente de regulação minimax. Desta forma, admitindo que:

$$F(\bar{x}(t)) = \begin{bmatrix} f(x(t)) \\ A_{rf}x_{rf}(t) \end{bmatrix}, \bar{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x_{rf}(t) \end{bmatrix}, \bar{v}(t) = \begin{bmatrix} v(t) \\ rf(t) \end{bmatrix}, G(\bar{x}(t)) = \begin{bmatrix} g(x(t)) \\ 0 \end{bmatrix}, H(\bar{x}(t)) = \begin{bmatrix} h(x(t)) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

O sistema estocástico aumentado de Eq. (3.33) e (4.1) é obtido da seguinte forma:

$$d\bar{x}(t) = \left(F(\bar{x}(t)) + G(\bar{x}(t))u(t) + \bar{C}\bar{v}(t) \right) dt + H(\bar{x}(t))dp(t) \quad (4.10)$$

$$\bar{x}(0) = \bar{x}_0$$

onde $\bar{C} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$. I é uma matriz de identidade com a dimensão do sistema estocástico.

Portanto o problema de trajetória robusto minimax estabelecido na Eq. (4.7) é equivalente ao seguinte problema restrita de regulação minimax:

$$\min_{u(t)} \max_{\bar{v}(t)} J(u(t), \bar{v}(t)) = \min_{u(t)} \max_{\bar{v}(t)} E \int_0^{t_f} \left(\bar{x}^T(t) \bar{Q} \bar{x}(t) + u^T(t) R F u(t) - \tau^2 \bar{v}^T(t) \bar{v}(t) \right) dt, \quad \forall \bar{x}(0) \quad (4.11)$$

onde $\bar{Q} = \begin{bmatrix} Q & -Q \\ -Q & Q \end{bmatrix}$.

Então, baseando na Eq. (4.11), o problema de trajetória robusto minimax estabelecido na Eq. (4.8) é equivalente ao problema de regulação minimax restrito seguinte:

$$\min_{u(t)} \max_{\bar{v}(t)} E \int_0^{t_f} \left(\bar{x}^T(t) \bar{Q} \bar{x}(t) + u^T(t) R F u(t) - \tau^2 \bar{v}^T(t) \bar{v}(t) \right) dt \leq \tau^2 E \{ \bar{x}^T(0) \bar{I} \bar{x}(0) \} \quad (4.12)$$

onde $\bar{I} = \begin{bmatrix} I & -I \\ -I & I \end{bmatrix}$.

Teorema 1¹⁴: O problema do jogo estocástico na Eq. (4.12), definido para o controle robusto do sistema estocástico da política econômica, pode ser resolvido pelo seguinte controle de trajeto minimax u^* e pelo pior caso de perturbação \bar{v}^* :

$$u^*(t) = -\frac{1}{2} R F^{-1} G^T(\bar{x}(t)) \frac{\partial V(\bar{x}(t))}{\partial \bar{x}(t)} \quad (4.13)$$

$$\bar{v}^*(t) = \frac{1}{2\tau^2} \bar{C}^T \frac{\partial V(\bar{x}(t))}{\partial \bar{x}(t)} \quad (4.14)$$

onde $V(\bar{x}(t)) > 0$ é a solução positiva para a seguinte desigualdade de Hamilton-Jacobi-Isaacs (*Hamilton-Jacobi-Isaacs inequality: HJI*):

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial V(\bar{x}(t))}{\partial \bar{x}(t)} \right)^T F(\bar{x}(t)) + \bar{x}^T(t) \bar{Q} \bar{x}(t) - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial V(\bar{x}(t))}{\partial \bar{x}(t)} \right)^T G(\bar{x}(t)) R F^{-1} G^T \bar{x}(t) \frac{\partial V(\bar{x}(t))}{\partial \bar{x}(t)} + \\ & \frac{1}{4\tau^2} \left(\frac{\partial V(\bar{x}(t))}{\partial \bar{x}(t)} \right)^T \bar{C}^T \bar{C} \frac{\partial V(\bar{x}(t))}{\partial \bar{x}(t)} + \frac{1}{2} H^T(\bar{x}(t)) \left(\frac{\partial^2 V(\bar{x}(t))}{\partial \bar{x}^2(t)} \right)^T H(\bar{x}(t)) < 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

com

$$E \left(V(\bar{x}(0)) \right) \leq \tau^2 E \{ \bar{x}^T(0) \bar{I} \bar{x}(0) \} \quad (4.16)$$

¹⁴ Prova: ver Apêndice C.

Uma vez que τ^2 seja o limite superior do problema de trajetória minimax da Eq. (4.2), baseado na análise acima, a trajetória de controle minimax $u^*(t)$ e o pior caso de perturbação $\bar{v}^*(t)$ são necessários para minimizar τ^2 , da seguinte forma:

$$\tau_0^2 = \min_{V(\bar{x}(0)) > 0} \tau^2 \quad (4.17)$$

sujeito a (4.15) e (4.16)

Depois de resolver $V(\bar{x})$ e τ_0^2 , a partir da otimização restrita na Eq.(4.17), a solução $V(\bar{x})$ é substituída na Eq. (4.13) para obter a trajetória de controle robusto minimax $u^*(t)$, para a política econômica estocástica estabelecida na eq. (3.33), a fim de alcançar a trajetória robusto minimax do modelo de referência desejado da Eq. (4.1), apesar das flutuações paramétricas estocásticas intrínsecas e perturbações externas.

Observação: Se $\tau \rightarrow \infty$ na Eq. (4.2), o efeito de $v(t)$, $rf(t)$ e $\tilde{x}(0)$ sobre o erro de trajeto $\tilde{x}(t)$ e o esforço de controle $u(t)$ serão negligenciados no procedimento do projeto de trajeto. Assim, o problema de trajetória robusto minimax na Equação (4.2) é reduzido ao seguinte problema de trajetória ótimo:

$$\min_{u(t)} E \int_0^{t_f} (\tilde{x}^T(t)Q\tilde{x}(t) + u^T(t)RFu(t))dt \quad (4.18)$$

Neste caso, a trajetória de controle ótimo $u^*(t)$ é dada pela Eq.(4.13), ou seja, $u^*(t) = -\frac{1}{2}RF^{-1}G^T(\bar{x}(t))\frac{\partial V(\bar{x}(t))}{\partial \bar{x}(t)}$. Portanto, $V(\bar{x})$ nesta equação pode ser substituído resolvendo o seguinte HJI:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial V(\bar{x}(t))}{\partial \bar{x}(t)}\right)^T F(\bar{x}(t)) + \bar{x}^T(t)\bar{Q}\bar{x}(t) - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial V(\bar{x}(t))}{\partial \bar{x}(t)}\right)^T G(\bar{x}(t))RF^{-1}G^T(\bar{x}(t))\frac{\partial V(\bar{x}(t))}{\partial \bar{x}(t)} + \\ & \frac{1}{2}H^T(\bar{x}(t))\frac{\partial^2 V(\bar{x}(t))}{\partial \bar{x}^2(t)}H(\bar{x}(t)) \leq 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

que é obtido a partir da Eq. (4.15), mas com $\tau \rightarrow \infty$. Portanto, se $\tau \rightarrow \infty$ no problema de trajetória robusto minimax, é equivalente ao problema de trajetória ótimo.

Em geral, não existe uma solução analítica ou numérica para resolver o HJI descrito na Eq. (4.15), para resolver o problema de otimização descrito na Eq. (4.17). Segundo Chen e Lin (2011) o modelo *Fuzzy* Takagi e Sugeno (T-S) é aplicado para aproximar um sistema não linear interpolando vários sistemas linearizados em diferentes pontos de operação. O que será desenvolvido na seção 4.3 a seguir.

4.3 A TRAJETÓRIA DE CONTROLE ROBUSTO MINIMAX VIA MÉTODO DE INTERPOLAÇÃO FUZZY

Pelo método de interpolação *Fuzzy* T-S, o problema do jogo estocástico não linear pode ser transformado em um problema de jogo estocástico *Fuzzy*. Nesta abordagem, o HJI na Eq. (4.15) poderia ser substituído por um conjunto de matrizes lineares desiguais (Linear matrix inequalities, LMI). Nesta situação, o problema do jogo estocástico não linear em (4.2) poderia ser facilmente resolvido por abordagem do jogo estocástico *Fuzzy* para definir a trajetória de controle robusto minimax da política econômica estocástica.

Suponha que o sistema estocástico não linear da política econômica representada na Eq.(3.33) pode ser representado pelo modelo *Fuzzy* T-S. A i -ésima regra do modelo *Fuzzy* para o sistema estocástico não linear em (3.33) é representada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} &\text{Se } z_1(t) \text{ é } F_{i1} \text{ e... e } z_k(t) \text{ é } F_{ik}, \text{ então} \\ &dx(t) = (A_i x(t) + B_i u(t) + C v(t))dt + D_i x(t)dp(t), \quad i = 1 \dots L \end{aligned} \quad (4.20)$$

onde F_{ij} é o conjunto *Fuzzy*, A_i , B_i e D_i são sistemas matriciais linearizados, k é o número de variáveis pressupostas e $z_1(t), \dots, z_k(t)$ são estas variáveis pressupostas.

O sistema *Fuzzy* da Eq. (4.20) é deduzido da seguinte forma:

$$\begin{aligned} dx(t) &= \frac{\sum_{i=1}^L \mu_i(z(t)) \{ (A_i x(t) + B_i u(t) + C v(t))dt + D_i x(t)dp(t) \}}{\sum_{i=1}^L \mu_i(z(t))} \\ &= \sum_{i=1}^L h_i(z(t)) \{ (A_i x(t) + B_i u(t) + C v(t))dt + D_i x(t)dp(t) \} \end{aligned} \quad (4.21)$$

onde

$$\mu_i(z(t)) = \prod_{j=1}^k F_{ij}(z(t)), h_i(z(t)) = \frac{\mu_i(z(t))}{\sum_{i=1}^L \mu_i(z(t))}, z(t) = (z_1(t), \dots, z_k(t))^T$$

e $F_{ij}(z(t))$ é o grau de adesão do $z_j(t)$ no F_{ij} . Assume-se que $\mu_i(z(t)) \geq 0$ e $\sum_{i=1}^L \mu_i(z(t)) > 0$, assim, tem-se:

$$h_i(z(t)) \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^L h_i(z(t)) = 1 \quad (4.22)$$

O modelo *Fuzzy* T-S descrito pela Equação (4.21), é desenvolvido para interpolar sistemas estocásticos lineares (conforme Equação (4.20)), a fim de aproximar o sistema estocástico não linear da Equação (3.33) via função básica *Fuzzy* $h_i(z(t))$. Este modelo fuzzy T-S possibilita especificar facilmente os parâmetros A_i , B_i e D_i na Eq.(4.21), tal que $\sum_{i=1}^L h_i(z(t)) A_i x(t)$, $\sum_{i=1}^L h_i(z(t)) B_i$ e $\sum_{i=1}^L h_i(z(t)) D_i x(t)$ podem aproximar, respectivamente, as funções não-lineares $f(x(t))$, $g(x(t))$ e $h(x(t))$ na Equação (3.33), pelo método de identificação *Fuzzy*.

A Equação (4.21) permite também usar outros métodos de interpolação de sistemas estocásticos lineares, tais como o método de spline cúbica, para aproximar o sistema estocástico não linear da Equação (3.33); ou seja, as bases de alisamento $h_i(z(t))$ podem ser substituídas por outras bases de interpolação de outros métodos de interpolação.

Depois que o sistema estocástico não linear da Equação (3.33) for aproximado pelo sistema *Fuzzy* T-S em (4.21), o sistema estocástico aumentado de (3.33) definido na eq. (4.10), também pode ser aproximado pelo seguinte sistema *Fuzzy* T-S:

$$d\bar{x}(t) = \sum_{i=1}^L h_i(z(t)) \left\{ \left(\bar{A}_i \bar{x}(t) + \bar{B}_i u(t) + \bar{C} \bar{v}(t) \right) dt + \bar{D}_i \bar{x}(t) dp(t) \right\} \quad (4.23)$$

onde

$$\bar{A}_i = \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ 0 & A_{rf} \end{bmatrix}, \bar{B}_i = \begin{bmatrix} B_i \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{C} = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \bar{D}_i = \begin{bmatrix} D_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e A_{rf} caracteriza o processo de evolução do sistema de referência a ser previsto, associados aos custos de controle a serem estimados para o processo de evolução desejado.

Uma vez que o sistema estocástico não linear aumentado na Eq. (4.10) seja aproximado pelo sistema *Fuzzy* T-S na Equação (4.23), o jogo estocástico não linear nas Eqs. (4.10) e (4.12) pode ser substituído pela resolução do jogo estocástico *Fuzzy* nas Eqs. (4.23) e (4.12).

Teorema 2¹⁵: O controle de trajetória minimax e o pior caso das perturbações para o jogo estocástico *Fuzzy* da Eq. (4.12) sujeito a (4.23) são registrados, respectivamente, da seguinte forma (Chen; Lin, 2011):

$$u^*(t) = -\sum_{j=1}^L h_j(z(t))RF^{-1}\bar{B}_j^T P\bar{x}(t), \bar{v}^*(t) = \frac{1}{\tau^2}\bar{C}^T P\bar{x}(t) \quad (4.24)$$

onde a solução do sistema *Fuzzy* é globalmente e assintoticamente estável se existir P , uma matriz simétrica e positiva definida tal que seja a solução das seguintes inequações de Riccati:

$$P\bar{A}_i + \bar{A}_i^T P + \bar{Q} - P\bar{B}_i R F^{-1} \bar{B}_i^T P + \frac{1}{\tau^2} P^T \bar{C} \bar{C}^T P + D_i^T P D_i < 0; \quad i, j = 1 \dots L; \quad (4.25)$$

$$P \leq \tau^2 \bar{I}$$

Por aproximação *Fuzzy*, o HJI em (4.15) é aproximado por um conjunto de desigualdades algébricas em (4.25) e a desigualdade em (4.16) também é equivalente à segunda desigualdade em (4.25). Desde que τ^2 seja o limite superior do problema de trajeto minimax na Equação (4.2), então o problema de trajeto robusto minimax ainda necessita minimizar τ^2 da seguinte forma:

$$\tau_0^2 = \min_{P>0} \tau^2, \text{ sujeito à equação (4.25)} \quad (4.26)$$

A fim de resolver o problema de otimização condicionado, mencionado na Eq. (4.26), pelo método convencional das matrizes lineares desiguais (Linear Matrix Inequalities, LMI), as desigualdades em (4.25) podem ser reescritas como as seguintes condições:

¹⁵ Prova: ver Apêndice D.

$$\begin{aligned}
& P\bar{A}_i + \bar{A}_i^T P + \bar{Q} - P\bar{B}_i R F^{-1} \bar{B}_i^T P + \frac{1}{\tau^2} P^T \bar{C} \bar{C}^T P + \left(\frac{D_i + D_j}{2}\right)^T P \left(\frac{D_i + D_j}{2}\right)^T < 0; i \neq j \\
& P \leq \tau^2 \bar{I}
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Supõe $W = P^{-1} > 0$, a desigualdade na Eq.(4.27) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{A}_i W + W \bar{A}_i^T + W \bar{Q}^T \bar{Q} W - \bar{B}_i R F^{-1} \bar{B}_i^T + \frac{1}{\tau^2} \bar{C} \bar{C}^T + W D_i^T W^{-1} D_i W \leq 0; \text{ com } i = j \\ \bar{A}_i W + W \bar{A}_i^T + W \bar{Q}^T \bar{Q} W - \bar{B}_i R F^{-1} \bar{B}_i^T + \frac{1}{\tau^2} \bar{C} \bar{C}^T + W \left(\frac{D_i + D_j}{2}\right)^T W^{-1} \left(\frac{D_i + D_j}{2}\right) W \leq 0; \text{ com } i \neq j \\ \tau^2 W > \bar{I} \end{array} \right. \tag{4.28}$$

onde $\bar{Q} = [Q_1^{\frac{1}{2}} \quad -Q_2^{\frac{1}{2}}]$

Pelo complemento de Schur¹⁶, o problema de otimização condicionado na Eq. (4.26) é equivalente ao seguinte problema de otimização restrita LMI¹⁷:

$$\tau_0^2 = \min_{W > 0} \tau^2 \tag{4.29}$$

sujeito a

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{ccc} \bar{A}_i W + W \bar{A}_i^T - \bar{B}_i R F^{-1} \bar{B}_i^T + \frac{1}{\tau^2} \bar{C} \bar{C}^T & W D_i^T & W \bar{Q}^T \\ D_i W & -W & 0 \\ \bar{Q} W & 0 & -I \end{array} \right] < 0; i = j; \\ \left[\begin{array}{ccc} \bar{A}_i W + W \bar{A}_i^T - \bar{B}_i R F^{-1} \bar{B}_i^T + \frac{1}{\tau^2} \bar{C} \bar{C}^T & W \left(\frac{D_i + D_j}{2}\right)^T & W \bar{Q}^T \\ W \left(\frac{D_i + D_j}{2}\right) & -W & 0 \\ \bar{Q} W & 0 & -I \end{array} \right] < 0; i \neq j; \\ \tau^2 W > \bar{I} \end{array} \right. \tag{4.30}$$

Esta otimização restrita para resolver τ^0 e W em (4.29) e (4.30) pode ser resolvida decrescendo τ^2 até que $W > 0$ não exista. Depois de resolver W , e assim $W = P^{-1}$ deste problema de otimização restrita, τ^0 pode ser resolvido pelo *toolbox* de controle robusto do Matlab eficientemente.

¹⁶ Ver Apêndice E para detalhes sobre Complemento de Schur.

¹⁷ Ver Apêndice F para detalhes sobre LMI.

Portanto, de acordo com as análises feitas no capítulo quatro, o controle da trajetória robusto minimax da política econômica via método de interpolação *Fuzzy* é resumido nos seguintes procedimentos de lógica *Fuzzy*:

A Eq. (4.1) esquematiza um modelo de referência desejado para a política econômica estocástica, definida na Equação (3.33);

- a) As matrizes de ponderação Q e RF do problema de trajetória minimax são definidas pelas, respectivamente, Equações (4.3) e (4.4);
- b) Funções de referência são selecionadas e regras *Fuzzy* de política são construídas pelas Equações (4.20) e (4.21);
- c) Finalmente, a trajetória de controle robusto minimax $u^*(t)$ é estimado pela Equação (4.24).
- d) O processo de otimização condicionada LMI é definido pelas Equações (4.29) e (4.30), o que permite encontrar W (assim como $P = W^{-1}$) e τ_0^2 .

No próximo capítulo, serão detalhados os procedimentos da calibração do modelo dinâmico, modelo estocástico e do modelo da lógica *Fuzzy*. Este capítulo dará uma noção das simulações computacionais do trabalho.

5 SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL

Este capítulo tem como finalidades: (i) descrever as características e preparações da base de dados a ser utilizada no estudo; (ii) descrever o procedimento e desenvolvimento do programa computacional utilizado no estudo; (iii) descrever o procedimento de calibração dos parâmetros de impactos estabelecidos no modelo macrodinâmico (3.29) e por fim; (iv) descrever o procedimento da lógica *Fuzzy*.

5.1 BASES DE DADOS PARA CALIBRAÇÃO DO MODELO.

Tendo em vista a necessidade de identificar os parâmetros de impactos no modelo dinâmico formulado, conforme a Eq. (3.29), por meio de um processo de calibração para o sistema, a fim de obter os níveis dos parâmetros característicos da economia brasileira, deve-se utilizar bases de dados, tais como: Taxa nominal de juros (taxa SELIC), $i(t)$, Dívida Líquida real do Setor Público, $B(t)$, Receitas Tributárias reais, $R(t)$, Despesas Financeiras reais do Governo, $G(t)$, com $R(t) - G(t) = W(t)$, o Câmbio real, $e(t)$, o índice de Inflação (IPCA), $\pi(t)$, Produto Interno Bruto real (PIB), $Y(t)$, a taxa de juros de longo prazo do Brasil, $i^*(t)$, a receita por senhoriagem, $S(t)$, a meta de inflação¹⁸, $\pi^*(t)$, o produto potencial (que será calculado), $\bar{Y}(t)$ e Taxa Nominal de Juros Externa, $\bar{i}(t)$, (será considerado a taxa de juros americana como *proxy*).

Na análise empírica utilizaram-se dados mensais, para o período de 1998.1-2018.12, pois antes deste período os dados apresentaram várias mudanças devido a perturbações internas e externas na economia brasileira que dificultaram a calibração do modelo. Estes dados foram extraídos das seguintes fontes: Secretaria Tesouro Nacional (STN), Banco Central do Brasil (BACEN), Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada (IPEA), e Fundo Monetário Internacional (FMI). A descrição completa desses dados, com as devidas fontes e detalhes sobre transformações efetuadas encontram-se na Tabela 5.1, abaixo.

Os dados reais utilizados para as variáveis como PIB, dívida líquida do setor público, receitas tributárias, gastos governamentais e o câmbio representam uma transformação dos

¹⁸ As metas de inflação só existem anualmente, e a partir de setembro de 1999. Portanto, elas foram complementadas de Jan/1998 pela inflação potencial, estimadas a partir do filtro HP, e interpoladas mensalmente pelo procedimento de interpolação de Hermite, conforme será explicado posteriormente.

dados nominais destas respectivas variáveis à base de dezembro de 2005. Estes dados, exceto o câmbio e a dívida (normalizada com relação ao PIB), foram também normalizados dividindo-os pelos seus respectivos valores iniciais da amostra, a fim de facilitar a convergência do procedimento de calibração. As taxas de juros SELIC, de juros de longo prazo, de juros internacionais, e a inflação foram utilizadas em forma de número de índice nominal mensal anualizado, dividindo-os por cem e adicionando-se um, isso também para facilitar a convergência do procedimento de calibração.

O câmbio nominal foi transformado em câmbio real multiplicando o câmbio nominal pelo índice de inflação dos Estados Unidos, com base em dezembro de 2005, e dividindo o resultado pelo índice de inflação do Brasil, também transformado a base de dezembro 2005. Uma aproximação da receita por senhoriagem foi feita, fazendo uma média das três formas de calculo de senhoriagem (Senhoriagem monetária, Senhoriagem Imposto inflacionário, Senhoriagem custo de oportunidade) descritas no Apêndice G, para depois a transformando a base dezembro de 2005. Um resumo da transformação feita nos dados encontra-se na Tabela 5.1 a seguir.

Tabela 5.1 - Variáveis utilizadas no modelo dinâmico.

VARIÁVEL	DESCRIÇÃO
PIB_t	Produto Interno Bruto nominal foi obtido mensalmente em www.ibge.gov.br , transformado para valores reais, a preço de dezembro de 2005 e normalizado com relação ao valor inicial da amostra.
$i(t), \pi(t), i^*(t)$	Respectivamente a taxa de juros nominal (SELIC), a inflação (IPCA) e a taxa de juros de longo prazo (TJLP) são obtidas mensalmente em www.bcb.gov.br e foram transformadas em forma de índice nominal.
R_t, D_t, b_t	Respectivamente Receitas Tributárias, Gastos do Governo e Dívida Líquida do Setor Público são obtidos mensalmente em www.tesouro.fazenda.gov.br . Estas variáveis foram transformadas para valores reais a preço de dezembro de 2005 e depois foram normalizadas com relação ao valor inicial do PIB.
$e(t), \bar{i}(t)$	Respectivamente o câmbio real e Taxa de Juros norte americana são obtidos mensalmente em www.imf.org . A primeira variável é uma transformação do câmbio nominal, com base em dezembro de 2005, e a segunda foi transformada de taxa para índice mensal anualizado.
$S(t)$	A receita de senhoriagem foi aproximada usando uma media das três formas de calculo de senhoriagem descrito no parágrafo acima para depois ser normalizada em relação ao valor inicial do PIB.
$\pi^e(t)$	A meta de inflação foi encontrada anualmente em www.bcb.gov.br e depois foi transformada mensalmente usando a técnica de interpolação segmentada de Hermithe conforme citado acima.
<i>Demais</i>	Outra variável visivelmente ausente no modelo (3.29), porém tão importante que as outras acima citada foi a inflação norte americana. Esta variável foi utilizada para determinar a taxa de juros norte americana real, que por última será utilizada na equação da dívida.

Fonte: Elaborada pelo autor (2019).

5.2 IDENTIFICAÇÃO DOS PARÂMETROS DO MODELO DETERMINÍSTICO

Após a coleta dos dados, foi implementado um programa na plataforma MATLAB para calibrar o modelo econômico estabelecido no estudo. O processo de calibração do sistema dinâmico da Equação (3.29) foi realizado, utilizando-se a função *fminsearch*. Nesse processo foi utilizado a técnica de Runge-kutta¹⁹ de quarta ordem (William et al., 2007), por meio da função ODE45 do Matlab 2019a. Como essa técnica subdivide intervalos segmentados das variáveis em subintervalos, de modo a atingir a precisão de ajuste especificada (10^{-8}), então, para estimar o sistema de equações das variáveis endógenas nesses pontos, torna-se necessário estimar as variáveis endógenas em pontos dos subintervalos, o que foi feito via interpolação de segmentada de Hermite. Estes procedimentos serão explicados detalhadamente nas subseções que se segue.

5.2.1 Calibração do modelo determinístico da equação (3.29)

Primeiro, deve-se considerar que o modelo econômico em análise, descrito pelo Sistema Dinâmico (3.29), se caracteriza como um sistema contínuo no tempo. Portanto, para a calibração de seus coeficientes, ou a integração desse sistema para estabelecer previsões futuras do comportamento macroeconômico da economia, os valores das variáveis exógenas devem ser especificados em qualquer momento de tempo, além daqueles fornecidos discretamente pela base de dados (enfim, deve-se obter os valores dessas variáveis exógenas também de forma contínua no tempo). Estas variáveis são as receitas totais do governo (T), despesas totais do governo (D), o hiato de produto ($Y - \bar{y}$), a meta de inflação (π^e), as receitas por senhoriagem (S), a taxa de juros de longo prazo (i^*), a taxa de juros norte americana (\bar{i}) e a inflação norte americana. Isso foi possível utilizando-se o polinômio de interpolação cúbica de Hermite por partes, especificamente, denominado de Interpolação Cúbica por Partes de Conservação de Forma (em inglês, *PCHIP: Piecewise Cubic Hermite Interpolating Polynomial*), conforme detalhes no Apêndice I. De forma geral, um procedimento de interpolação pode (ou deve) modelar a função entre os pontos conhecidos (no caso aqui, os dados reais) por alguma forma funcional plausível. Existem vários procedimentos, mas a função *PCHIP* é considerada a mais apropriada para interpolação de qualquer tipo de função.

¹⁹ Mais detalhes sobre esta técnica encontra-se no Apêndice H.

No processo de calibração do sistema dinâmico dado pela Eq. (3.29), utilizou-se a sub-rotina *fminsearch*²⁰, desenvolvida na plataforma Matlab. Esta sub-rotina permite ajustar os coeficientes para funções ou sistemas dinâmicos não lineares sem restrições, minimizando a norma dos erros entre as funções ajustadas e os dados empíricos para cada variação endógena do sistema dinâmico. Particularmente, nesse estudo detalharemos o procedimento por meio de um diagrama explicativo, conforme a Figura 5.1 abaixo.

Conforme se destaca na Figura 5.1, no primeiro passo do diagrama deve-se especificar arbitrariamente valores para os coeficientes da função ou do sistema dinâmico a ser calibrado. Em seguida, no segundo passo, com os coeficientes dados, resolve-se o Sistema Dinâmico (3.29), via um processo de integração no tempo, utilizando o método de Runge-kutta (William et Al., 2007). Assim, obtendo-se uma solução para o vetor de variáveis endógenas do Sistema (3.29), $X(t)$. No terceiro passo do procedimento descrito na Figura 5.1, utiliza-se a norma acumulada, como medida de distância entre os valores estimados para $X(t)$ e os respectivos valores empíricos (X^*), nos correspondentes momentos de tempo, via a seguinte fórmula conceitual de norma: $|E| = \sum(X(t) - X^*)^2$. Em seguida, aplica-se o método SIMPLEX DOWN HILL de Nelder-Mead para a minimização do erro $|E|$, conforme especificado em Jeffrey et al. (1998), e detalhado no Apêndice J. O algoritmo simplex de Nelder-Mead tornou-se um dos métodos mais utilizados para otimização irrestrita não-linear, bastante utilizado, especialmente, nas áreas de engenharia e medicina. Especificamente, o método de Nelder-Mead minimiza uma função (ou um sistema de n variáveis) não linear, com valores na escala de números reais, utilizando apenas os valores da função, sem qualquer informação explícita ou implícita.

Esse procedimento é repetido seguidamente, e sendo finalizado quando o erro atingir um nível de tolerância que nesse estudo foi da ordem de $|E| = 10^{-8}$. Quando essa situação é atingida, os últimos valores dos coeficientes $P(i)$ estimados correspondem aos coeficientes calibrados.

O método de Runge-Kutta de quarta ordem se caracteriza pelo procedimento de expansão numa série de Taylor de quarta ordem, conforme abaixo:

²⁰ *Fminsearch* utiliza o método de pesquisa SIMPLEX de Jeffrey L. C. et Al (1998). Este é um método de pesquisa direta que não usa gradientes numéricos ou analíticos. Mais detalhes sobre este método serão dados nos parágrafos a seguir.

$$y(x_{n+1}) = y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_n) + \frac{h^4}{4!}y^{(4)}(x_n) + \frac{h^5}{5!}y^{(5)}(c) \quad (5.1)$$

Este procedimento de quarta ordem consiste em encontrar as constantes apropriadas, de tal forma que:

$$y_{n+1} = y_n + ak_1 + bk_2 + ck_3 + dk_4, \quad (5.2)$$

De tal modo que,

$$y(x_{n+1}) = y_n + h\varphi(x_n, y_n, h),$$

e

$$k_1 = hf(x_n, y_n),$$

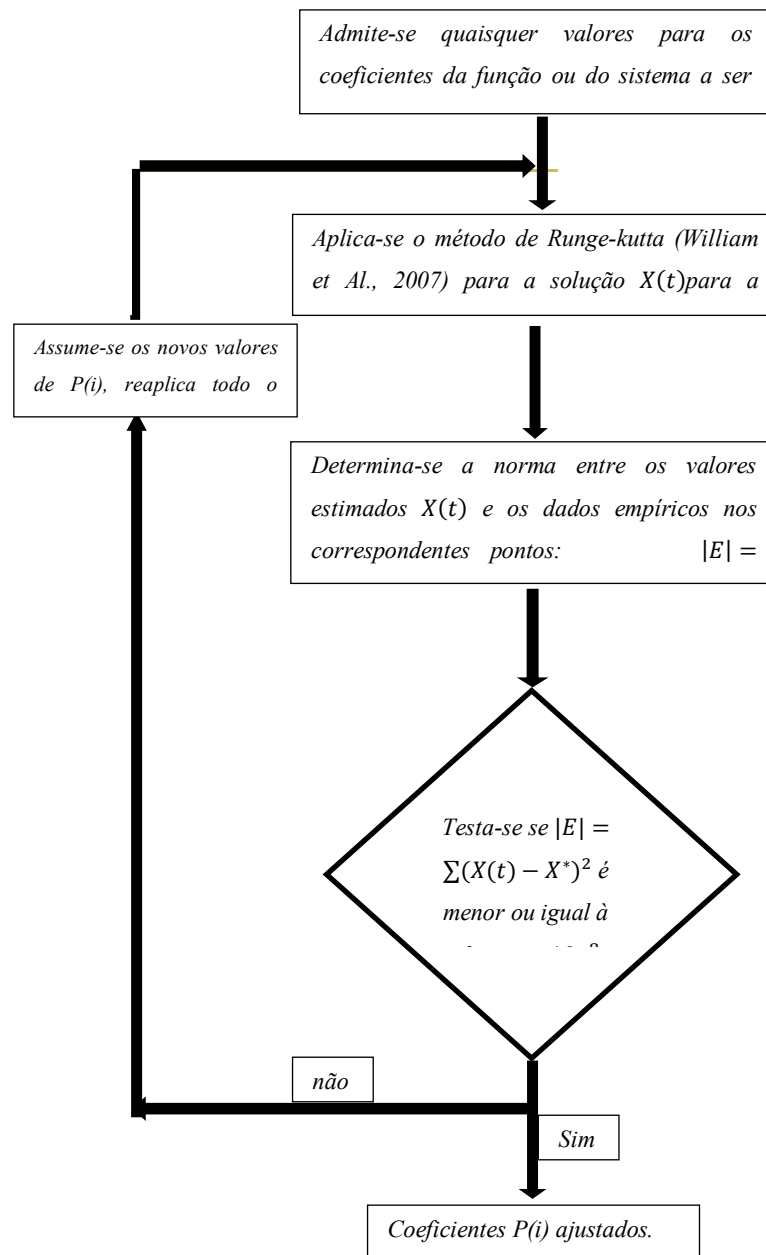
$$k_2 = hf(x_n + \alpha_1 h, y_n + \beta_1 k_1),$$

$$k_3 = hf(x_n + \alpha_2 h, y_n + \beta_2 k_1 + \beta_3 k_2),$$

$$k_4 = hf(x_n + \alpha_3 h, y_n + \beta_4 k_1 + \beta_5 k_2 + \beta_6 k_3),$$

Para maiores detalhes sobre esse procedimento, veja o Apêndice K.

Figura 5.1 - Desenho esquemático do procedimento de calibração de funções e sistema de equações diferenciais ordinárias.



Fonte: Elaborada pelo autor (2019).

5.2.2 Obtenção do hiato do produto e da meta de inflação.

5.2.2.1 Obtenção do hiato do produto

Para calcular o hiato de produto e a meta de inflação, foi utilizado o filtro de Hodrick-Prescott (HP), conforme Cusinato et al. (2010), para o qual foi testado o desempenho da

estimativa, utilizando diferentes valores de banda de filtragem, λ , tal como: $\lambda = 400$, $\lambda = 1600$ e $\lambda = 6400$, $\lambda \sim \infty$, o que é explicado em detalhes no Apêndice L.

O filtro HP é implementado no Matlab 2019a, por meio da função *hpfiter*, a qual tem argumentos de entradas, a série de tempo a ser filtrada e o nível de alisamento, dado pelo parâmetro λ , e como saída, a componente cíclica e a componente de tendência. Certamente, a forma dessas componentes cíclica e de tendência dependem do grau de alisamento implementado. Portanto, consideramos nessas estimativas como produto potencial a componente de tendência do PIB, correspondente ao maior nível de alisamento, que assume uma forma de evolução que se mantém sem alguma alteração significativa na sua forma, quando se impõe níveis de alisamento superiores. Por exemplo, observa-se na Figura 5.2 que tanto o produto potencial como o hiato do produto não se altera para alisamentos entre 400 e 6400. Portanto, manteve-se como produto potencial e hiato do produto os resultados correspondentes ao $\lambda = 6400$.

O hiato de produto (y_t^*) é a componente flutuante de curto prazo do produto (componente cíclica) obtida pelo filtro HP. O hiato é dado pela diferença entre o logaritmo natural do produto efetivo (y_t) e o produto potencial (\bar{y}_t), a tendência de longo prazo do produto:

$$(y_t^*) = (y_t) - (\bar{y}_t) \quad (5.3)$$

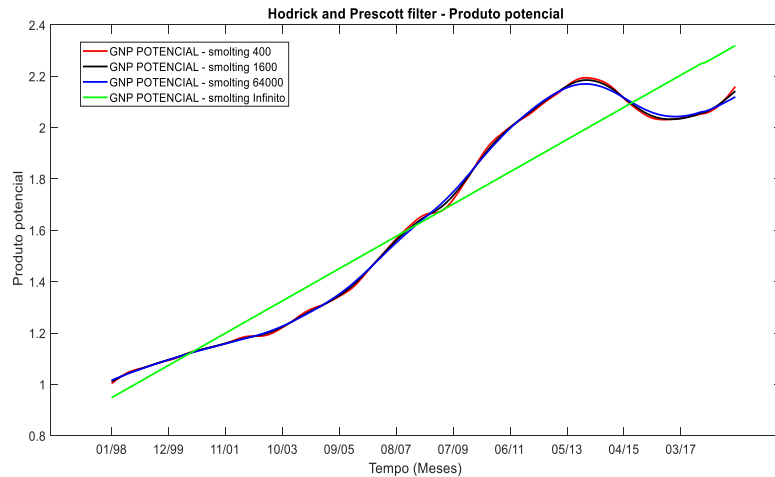
Com o filtro de Hodrich-Prescott, o hiato do produto é obtido extraíndo-se a componente de tendência da série de tempo do produto, portanto, sendo a componente cíclica obtida pelo filtro HP. A parcela da tendência do PIB é obtida minimizando a seguinte função de perda, para um dado nível de alisamento λ , e um dado período de tempo T de amostragem, conforme a equação abaixo:

$$L = \sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y}_t)^2 + \lambda \sum_{t=2}^{T-1} (\Delta \bar{y}_{t+1} - \Delta \bar{y}_t)^2 \quad (5.4)$$

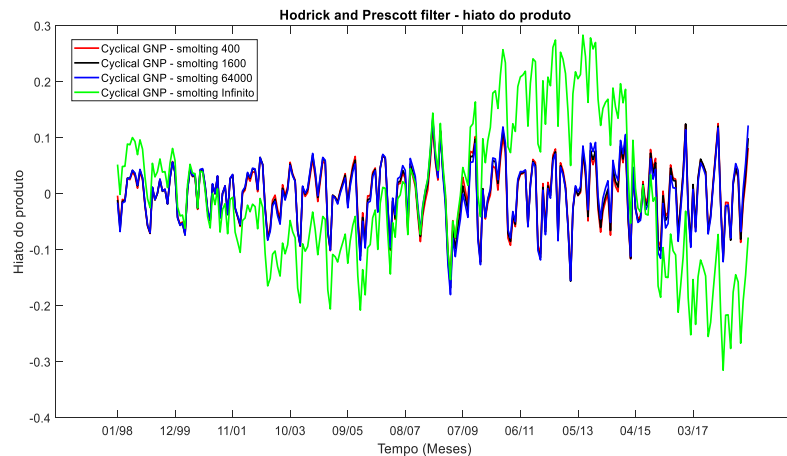
Tanto o produto potencial como o hiato do produto, estimados pelo filtro HP, são séries discretas, de forma similar à série de dados empírica do PIB, utilizada como entrada de cálculo no filtro HP. No entanto, a solução do sistema dinâmico em análise (Equação (3.29))

exige que as variáveis exógenas introduzidas no sistema possam ser representadas em qualquer momento de tempo.

Figura 5.2 - (a) Produto potencial; e (b) Hiato do produto.



(a)



(b)

Fonte: Elaborada pelo autor (2019).

Assim, devido às dificuldades de obter um ajuste por meio de uma função contínua no tempo para representar o comportamento do hiato de produto, em função dos níveis de oscilações de curto-prazo apresentados pelo o hiato do produto, recorreu-se à estimação de valores do produto potencial, em pontos discretos intermediários aos valores descritos pela série do hiato do produto, estimados pelo filtro HP, via interpolação cúbica de Hermite por partes (função *PCHIP: Piecewise Cubic Hermite Interpolating Polynomial*). Esse

procedimento é necessário, tendo em vista o uso da técnica de Runge-Kutta de quarta ordem (William et al., 2007), via função ODE45 do Matlab 2019a, para estimar o sistema de equações das variáveis endógenas do modelo (Equação (3.29)).

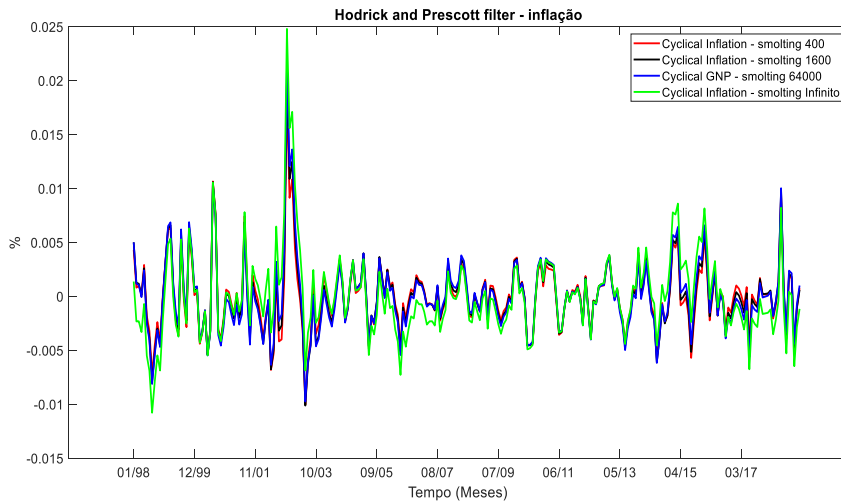
5.2.2.2 *Obtenção da meta de inflação.*

Deve-se observar que a dinâmica da taxa de juros, dado pela segunda equação do Sistema dinâmico (3.29), envolve a diferença entre a inflação efetiva e a meta de inflação, $\pi_t - \pi^e$, estabelecida para o período t . Consequentemente, a meta de inflação constitui uma variável exógena que também deve ser estabelecida para cada momento de tempo, de forma a possibilitar o uso da técnica de Runge-Kutta de quarta ordem, via função ODE45 do MATLAB 2019a, para estimar o sistema de equações das variáveis endógenas do modelo.

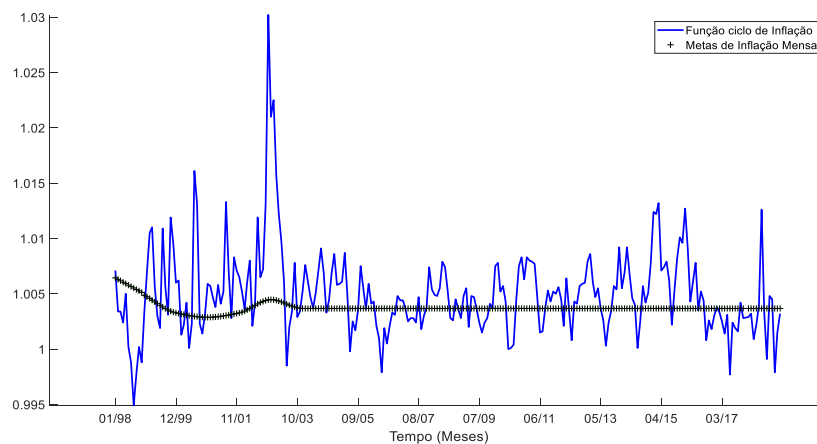
Resumidamente, à meta de inflação é estabelecida pelo Banco Central, caracterizando a antecipação da inflação pelo Banco Central, com a finalidade de afetar a expectativa de inflação, com consequentes impactos sobre a inflação efetiva e o produto da economia, constituindo, assim, uma maneira de antecipar os movimentos dessas variáveis macroeconômicas. O papel central das expectativas de inflação na tomada de decisão monetária se caracteriza, em estabelecer a transparência do processo de decisão do Banco Central. As autoridades monetárias devem ser capazes de estimar o nível de inflação futura com base nas informações internas e condicionais.

Tendo em vista que o regime de metas de inflação no Brasil iniciou somente em 21 de junho de 1999, portanto estes dados estão disponíveis somente a partir 1999.6, em bases de dados anualizados. No entanto, por conveniência, a base de dados empíricos do modelo foi tomada, envolvendo dados mensais, no período de 1998.1-2018.12. Assim, assumiu-se que a variável meta de inflação seja caracterizada pelo componente permanente de longo prazo da inflação efetiva para o período de 1998.1-1999.6, com transição suave para as metas de inflação estabelecidas pelo Banco Central do Brasil, a partir de junho de 1999. A estimativa da componente de longo prazo para esse período foi obtida via filtro Hodrich-Prescott, procedimento similar dado na Subseção anterior. A componente cíclica desse processo de filtragem constitui a variável exógena $\pi_t - \pi^e$, a ser utilizada na solução do Sistema Dinâmico (3.29).

Figura 5.3 - (a) Componente $\pi_t - \pi^e$ para vários níveis de filtragem; e (b) Componente $\pi_t - \pi^e$ e metas de inflação.



(a)



(b)

Fonte: Elaborada pelo autor (2019).

Finalmente, tendo em vista que a base de dados para o período de 1999.6 - 2018.12 trata-se de dados anuais de meta de inflação, portanto, foi usada a técnica da interpolação de hermithe (*PCHIP*) para obter uma base de dados, com representação mensal para a variável metas de inflação. Também, no processo de calibração e solução do sistema dinâmico da Equação (3.29), utiliza-se seguidamente para a integração do Sistema Dinâmico (3.29), a técnica de Runge-kutta de quarta ordem, por meio da função ODE45 do Matlab 2019a. Neste caso, como anteriormente, estima-se a variável metas de inflação em pontos de subintervalos da série discretizada, via interpolação segmentada de Hermite.

Finalmente, a Figura 5.3.a acima, mostra as componentes cíclicas filtradas, com vários níveis de filtragem λ , o que demonstra que identificação de $\pi_t - \pi^e$ mantém-se independente do nível de filtragem. A Figura 5.3.b mostra comparativamente, a componente $\pi_t - \pi^e$ com a componente metas de inflação.

5.3 O MODELO *FUZZY*

De uma forma geral o modelo *Fuzzy* aplicado no sistema econômico dinâmico deste estudo tem como finalidade estabelecer o controle do sistema, sob distúrbios estocásticos. Numa situação econômica real, na qual a economia de um determinado país que se encontra inserida no sistema econômico internacional, é afetada diretamente por distúrbios estocásticos na economia internacional ou doméstica; seja por meio de crises sociais, econômicas e/ou políticas.

Nesse caso, quando uma economia em análise está sujeita às perturbações estocásticas, o processo de evolução futura da estrutura macroeconômica e monetária torna, em muitas situações, completamente imprevisível. Assim, o que se pretende com o modelo *Fuzzy* estruturado neste estudo é demonstrar a possibilidade do estabelecimento de controle de evolução da estrutura da economia, sob incidência de bolhas de crises nacionais e internacionais.

O primeiro passo na estruturação de modelo *Fuzzy* trata-se em definir trajetórias de evolução futuras de referência para cada variável endógena do modelo econômico dinâmico em estudo, considerado como o processo ótimo do comportamento para a economia no futuro. Esse modelo de referência da dinâmica da economia é estabelecido, seguindo as premissas desejadas pelos gestores de política econômica. Portanto, nesse caso, a lógica *Fuzzy* é utilizada para gerar uma dinâmica controlada para o sistema macroeconômico da economia, no caso, a economia brasileira.

O segundo passo para a estruturação do modelo *Fuzzy* trata-se em definir as condições iniciais para as variáveis endógenas do modelo dinâmico do sistema, no processo de previsão futura. Estas condições iniciais são assumidas como sendo os últimos valores das variáveis endógenas dos dados empíricos da amostra, correspondente a 2018.12. A partir dessas condições iniciais e dos menores e maiores valores assumidos para cada variável endógena, estabelece-se para cada variável endógena um conjunto relativamente grande de valores randômicos, envolvendo para cada variável um intervalo com limites [min – range, max +

range], onde min e max são, respectivamente, o menor e o maior valor compreendido na curva de previsão de cada variável endógena, e $range$ é um valor assumido como sendo da ordem de 5% do maior valor de cada curva de previsão de cada variável endógena do sistema dinâmico. Nesse processo de geração de dados randômicos, foi gerado um total de 3000 pontos para cada intervalo especificado para cada variável; ou seja, definido por $[min - range, max + range]$. A função *unifrnd* do Matlab 2019a gera, a partir de distribuições uniformes contínuas, entre pontos de extremos, respectivamente; ou seja, inferior e superior aos especificados no intervalo definido anteriormente.

Num terceiro passo, define-se um conjunto clássico de funções de pertinência do conjunto *Fuzzy* que melhor adapte ao problema em estudo, no processo de mapeamento dos elementos estocásticos do intervalo de cada variável, $[min - range, max + range]$, no universo de discurso do conjunto binário $\{0;1\}$. Nesse processo de mapeamento do discurso binário, necessita-se definir um limiar rigoroso para separar elementos em conjuntos, o que é feito via um conjunto de funções de pertinência. Assim, precisa-se escolher o conjunto de funções de pertinência adequado para o problema em estudo. O MATLAB 2019a estrutura onze tipos de funções de pertinência. Essas funções são, por sua vez, construídas a partir de várias funções básicas, como destacado anteriormente. No nosso estudo, as funções de pertinências que melhor se adaptaram na estrutura do problema são a seguinte sequência de funções: *zmf-trim-smf* (a função *zmf* é uma curva polinomial assimétrica aberta à esquerda, a função *smf* é a imagem espelhada da função *zmf*, que se abre para a direita, e *trimf* é uma função de pertinência triangular). Essa sequência de funções de pertinência devem ser repetidas, numa sequência de no mínimo seis vezes, para que o modelo *Fuzzy* seja ajustado. Quanto maior o número de repetições das sequências de funções de pertinências, melhor será o ajuste do modelo *Fuzzy*, no entanto, para sequências maiores que seis, o processo de cálculo torna extremamente longo, e um excessivo uso de memória, o que inviabiliza o uso de repetições maior que seis para computadores com 16 gbytes de memória.

O conjunto binário, juntamente com os dados de valores estocásticos gerados no intervalo $[min - range, max + range]$, permitem estruturar uma matriz, via funções *kron* e *pinv* do Matlab 2019a, e classificar os seus elementos, dado uma tolerância, em sub-matrizes que se caracterizam como singulares e naquelas que permitem multissoluções; e, conseqüentemente, estabelecer através desse último conjunto o processo de otimização da solução.

Num quarto passo, é estimado o sistema econômico dinâmico *Fuzzy* para a trajetória de previsão, considerando o Equacionamento Estocástico do sistema econômico dinâmico estabelecido (3.29), com perturbações estocásticas nos parâmetros não controláveis, impostos sobre os seus valores calibrados no modelo determinístico, e com distúrbios externos e internos adicionados, caracterizados como passeios aleatórios. A solução foi obtida, por um processo de integração de Runge-Kutta de sexta ordem, utilizando-se incrementos de tempo bastante pequenos da ordem de 10^{-8} .

Finalmente, num último passo do modelo *Fuzzy*, foi estabelecido a otimização da solução, tendo como base o ajuste dos parâmetros de controle do problema, o vetor $u(t)$, no seu processo de evolução ao longo das trajetórias de previsão, de forma a adequá-los às necessidades exigidas para tornar possível à implementação da política de previsão estabelecida para o problema.

A seguir, no próximo capítulo, serão apresentados e interpretados os resultados obtidos na calibração dos modelos dinâmico e estocástico.

6 RESULTADOS DOS MODELOS DETERMINÍSTICOS E ESTOCÁSTICOS

Este capítulo visa primeiro, estabelecer as interpretações dos parâmetros calibrados para o modelo determinístico, analisando as inter-relações estabelecidas por estes parâmetros, diante da estrutura macroeconômica e monetária da economia brasileira. Em seguida, será desenvolvido um modelo estocástico, tendo como base realizações de Monte-Carlo, diante de perturbações estocásticas nos parâmetros do modelo, e inserindo perturbações estocásticas, adicionadas às variáveis endógenas, em forma de um passeio aleatório. Finalmente, pretende-se estabelecer uma análise do processo de evolução das estimativas desse modelo estocástico, e levantar o seu potencial de previsões futuras para a estrutura macroeconômica e monetária da economia brasileira.

Este capítulo é dividido em seis seções. Na primeira seção, serão apresentados os resultados obtidos para Sistema Dinâmico (3.29). A segunda seção analisa o comportamento dos coeficientes do modelo para a economia brasileira. Na terceira seção, serão mostradas as estimativas dos impactos relativos das variáveis explicativas no modelo dinâmico e as análises do comportamento da economia brasileira. As análises de bifurcações estocásticas serão feitas na quarta seção. Na quinta seção, serão apresentados e analisados os resultados das perturbações estocásticas introduzidas nos coeficientes não controláveis e nas variáveis endógenas. Finalmente, os resultados das perturbações estocásticas introduzidas nos coeficientes de controle serão detalhados na seção 6.6.

6.1 CALIBRAÇÃO DO MODELO DINÂMICO E ANÁLISES DO COMPORTAMENTO DOS COEFICIENTES DO MODELO PARA A ECONOMIA BRASILEIRA

Procede-se nesta seção a calibração do Sistema Dinâmico (3.29). Conforme já discutido amplamente, foi utilizada a função *fminsearch* do Matlab para calibrar este sistema. O procedimento de ajustes dos coeficientes de impactos e minimização do erro entre as funções de estimações e os dados empíricos utilizados pela função *fminsearch* foi detalhado nas seções 5.2 e 5.3.

O processo de calibração inicia-se assumindo um conjunto de valores iniciais arbitrários²¹ para os parâmetros do Sistema Dinâmico (3.29), cujos valores encontram-se destacados na segunda coluna da Tabela 6.1.

A função *fminsearch* permite estabelecer a tolerância de erro exigida no processo de minimização, que no caso deste estudo foi de 10^{-8} . Na Tabela 6.1 são apresentados na terceira coluna, os valores dos parâmetros ajustados para o sistema do modelo dinâmico, após atingir a precisão especificada pela tolerância de erro (10^{-8}), fato que ocorreu após 485.201 interações, tomando um longo tempo de processamento.

Tabela 6.1 - Parâmetros do modelo ajustado.

Parâmetros	Valor inicial	Coefficientes identificados para o Sistema (3.29)	Significado
γ_1	-0.0642	-0,0453130	Impacto da taxa de juros real sobre o PIB.
γ_2	0.0012	0,0017913	Impacto do câmbio real sobre o PIB.
μ_1	2.2328	1,1586964	Impacto do diferencial da taxa de juros de longo e curto prazo sobre SELIC.
μ_2	-1.6147	-0,2718378	Impacto do diferencial da inflação sobre SELIC.
θ_1	0.0808	0,0733534	Impacto do aumento da dívida sobre a dívida.
θ_2	0.0200	0,0261000	Impacto da senhoriagem sobre a dívida.
σ_1	0.0004	0,0000768	Impacto do câmbio real sobre a inflação.
σ_2	-0.0058	0,0041093	Impacto do diferencial da inflação sobre a inflação.
δ_1	0.0082	0,0038892	Impacto do câmbio sobre si mesmo.
u_1	-0.0012	0,00012394	Impacto do PIB sobre si mesmo.
u_2	-0.2783	-0,33931206	Impacto do hiato de produto sobre SELIC.
u_3	0.0249	0,02809019	Impacto do diferencial de receita e despesa públicas sobre a dívida.
u_4	-0.0096	-0,01831027	Impacto do hiato de produto sobre a inflação.
u_5	0.2329	0,25172354	Impacto da taxa de juros real sobre o câmbio real.

Fonte: Elaborada pelo autor (2019).

6.2 ANÁLISES DA ESTRUTURA MACROECONÔMICA E MONETÁRIA DA ECONOMIA BRASILEIRA

Nesta seção serão feitas interpretações de alguns parâmetros de impacto do modelo dinâmico da Equação (3.29), assim como análises dos mecanismos de transmissão de cada um desses parâmetros na economia brasileira.

²¹ Estes valores iniciais foram arbitrados por meio de modelos de regressões simples entre cada variável de impacto e a diferença da variável explicativa em cada equação, pois, no modelo de Equações dinâmicas (3.29) tem-se equações diferenciais ordinárias.

O trabalho de Amaral (2006) procurou identificar as relações de causalidade entre as variáveis: Taxa SELIC, Taxa de Câmbio, Taxa de Utilização da Capacidade Produtiva na indústria (Util. Cap.), Índice de Preço ao Consumidor Amplo (IPCA) e Expectativas do IPCA. Neste trabalho, o autor mostrou a importância do canal do câmbio na função de reação do Banco Central do Brasil utilizando a técnica econométrica Vetor Auto Regressivo (VAR) como método de análise. Portanto, após fazer uma análise do teste de causalidade de Granger, o autor, acima destacado, mostrou que a taxa SELIC é causada unidirecionalmente pela Taxa de Câmbio, unidirecionalmente pela expectativa de IPCA, e mantém relações de causalidade bidirecional com o IPCA. Também, o IPCA é causado unidirecionalmente pela sua própria expectativa de inflação e pelo câmbio. As expectativas do IPCA são causadas pelo câmbio e o nível de utilização da capacidade produtiva é causado pela taxa SELIC.

Nas relações de causalidades destacadas no parágrafo anterior entre taxa de câmbio e taxa de juros SELIC, e entre o Câmbio e a Inflação, Amaral (2006) considerou o câmbio como uma variável de precedência (ou seja, ela causa as demais variáveis, contudo, não sendo causada por elas). Desta forma, estabeleceu-se que o câmbio determina diretamente e indiretamente (via IPCA e sua expectativa) mudanças positivas na taxa de juros SELIC. Ao estabelecer que a taxa SELIC seja determinada por estes dois canais (câmbio e inflação), Amaral (2006) concluiu, por meio de análise de função impulso resposta, que indiretamente, a taxa de IPCA (ou taxa de meta de Inflação) determina um aumento na taxa de juros SELIC, tendo como consequência uma leve queda no nível de utilização da capacidade do setor produtivo. Também, utilizando a função impulso resposta, o autor mostrou que o impacto da taxa Selic sobre o IPCA, e também o nível de utilização da capacidade produtiva, é consideravelmente modesto, o que pode estar implicando na necessidade de se utilizar “doses elevadas de juros” para conter a demanda agregada e a taxa de inflação.

Nesta mesma linha de raciocínio, consideramos para análise a primeira equação dinâmica do Sistema (3.29), e com base no resultado de calibração encontrado para o parâmetro $\gamma_1 = -0,045313$ (coeficiente da taxa de juros SELIC real, impactando sobre a variação do PIB), conclui-se que, como esperado, uma relação negativa entre a taxa de juros e o PIB brasileiro, confirmando a relação existente entre as duas variáveis na curva IS. Na equação desta curva, subteve-se que a taxa de juros tem um efeito direto sobre o investimento privado (I) da economia, que, por conseguinte tem um efeito sobre o crescimento econômico. Portanto, enseja-se que um aumento na taxa de juros diminui o investimento e, em consequência, também o PIB que se relaciona de forma linear com I.

O valor do $\gamma_2 = 0.0017913$ (o coeficiente da taxa de câmbio real²², na primeira equação do Sistema (3.29)) impacta positivamente sobre o PIB. Esse resultado da ordem de 0.0017913 mostra-se consistente ao esperado, pois uma depreciação cambial (uma perda de valor do Real frente ao dólar) tem um efeito positivo sobre a taxa de crescimento da indústria e, de forma mais acentuada, sobre a indústria de transformação, em comparação com os outros setores da economia doméstica (Branchieri (2002); FIESP/DEPECON (2014)). A explicação por trás desta relação positiva é que a depreciação da moeda local causa uma perda de poder de compra de produtos importados, e um consequente aumento do poder de exportação da economia doméstica.

Em particular, Branchieri (2002) utilizou a equação do modelo de ultrapassagem de Dornusch para o câmbio, para detalhar o fato de que a depreciação cambial causa aumento na exportação. Em resumo, a depreciação do câmbio nominal causa a perda do poder de compra da moeda nacional diante do valor da moeda estrangeira (por exemplo, o Real perde valor frente ao dólar). Assim, a cesta de produtos estrangeiros, em moeda da economia doméstica, torna-se mais expansiva, devido a um processo inflacionário da economia estrangeira ou depreciação da moeda estrangeira diante da doméstica; e, finalmente, os produtos nacionais se tornam mais baratos, estimulando as suas demandas, com consequente aumento das exportações e diminuição das importações. Isto causa uma diminuição do nível inflacionário da economia doméstica, conduzindo-a a um nível inflacionário menor ao da economia estrangeira.

Por último, analisando ainda a primeira equação dinâmica do Sistema (3.29), consideramos o fator de impacto u_1 (o coeficiente do PIB sobre a taxa de variação do próprio PIB). O valor estimado para este coeficiente foi positivo e da ordem de 0.0001239, o que induz um efeito positivo do PIB sobre o crescimento do próprio PIB, caracterizando a presença de um crescimento sustentável de longo prazo para economia brasileira, embora significativamente fraco.

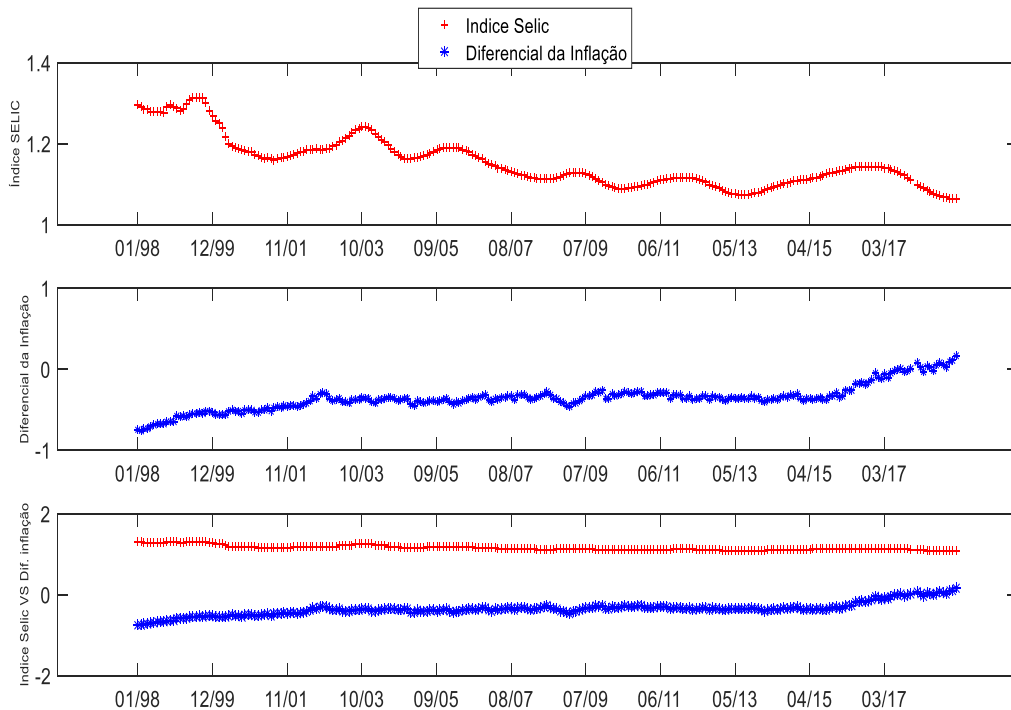
Na segunda equação dinâmica do Sistema (3.29), O coeficiente μ_1 (coeficiente do diferencial entre as taxas nominais de juros de longo-prazo e SELIC; isto é, entre as taxas de juros de equilíbrio e SELIC) apresentou uma relação positiva igual à 1,1586964. É natural esperar uma relação positiva entre taxa de juros de curto-prazo, SELIC, e taxas de juros de longo-prazo, TJLP, pois a taxa de juros de longo prazo deve obedecer aos critérios estabelecidos na lei 10.183, de 12 de fevereiro de 2001. De acordo com esta lei, a TJLP é

²² Para mais detalhes sobre o câmbio real, veja Apêndice M.

fixada pelo BACEN, sendo igual à meta de inflação mais um prêmio de risco; isto é, a TJLP dever aumentar caso a inflação aumente, o que faz com que a TJLP age na mesma direção da taxa SELIC.

Ainda de acordo com a mesma equação do Sistema (3.29), o coeficiente μ_2 (impacto do diferencial da inflação sobre a SELIC) apresentou um sinal negativo e igual a -0.2718378 . Este resultado é contrário ao esperado uma vez que se espera que a inflação e a taxa SELIC movimentem na mesma direção pela equação de reação do Banco Central. Portanto, para justificar o fato desse coeficiente ser negativo (isto é, a inflação impactando negativamente à taxa de juros) apresenta-se os gráficos da Figura 6.1. Nos dois primeiros gráficos, foi plotado os dados empíricos da taxa SELIC e do diferencial da inflação e sua meta, respectivamente. Percebe-se a relação negativa entre as duas variáveis; isto é, quando a taxa de juros diminui ao longo do período, o diferencial de inflação encontra-se aumentando. No terceiro gráfico (junção dos dois primeiros), observa-se os dois gráficos indo na direção contrária, isso, quando a taxa de juros decai ao longo do período, o diferencial de inflação cresce, contudo, causando impacto negativo entre estas variáveis.

Figura 6.1 - Comparação entre os dados empíricos do Índice SELIC e do Diferencial da inflação e sua meta.



Fonte: Elaborada pelo autor (2019).

Ainda com relação à segunda equação do Sistema (3.29), o coeficiente u_2 estimado (coeficiente de impacto do hiato do produto sobre a taxa de variação da taxa de juros nominal) apresentou uma relação negativa e igual a -0.3393120 . Isto é, para o período analisado, quanto mais o produto efetivo se afasta do produto potencial mais a taxa SELIC na economia brasileira cai. A explicação por trás desse comportamento está associado ao fato de que quanto à economia produz acima do seu potencial, os preços dos produtos têm uma tendência a cair, pelo excesso de produto. Esta queda de preço pode diminuir o investimento. Para evitar esta redução de investimento interno e para controlar o nível do preço da economia, o banco central reduz a taxa de juros nominal, uma vez que a taxa de juros se relaciona negativamente com o investimento, conforme teoricamente estabelecido pela equação da curva IS.

Na terceira equação do Sistema (3.29), o coeficiente θ_1 caracteriza o impacto do termo de montante de juros pagos sobre a taxa de variação da dívida pública real. Este coeficiente apresentou um sinal positivo da ordem 0,07335342 (Tabela 6.1). O sinal identificado se apresenta conforme ao esperado, pois se tem ideia de que pagamentos de juros devem impactar positivamente no montante da dívida. Isso por que quanto maior a dívida, maior o prêmio de risco relacionado e, portanto, maior o montante pago e vice-versa. Conforme Equação (3.12), o coeficiente θ_1 representa o impacto do montante da dívida no período imediatamente anterior, b_{t-1} , corrigido pela taxa de juros real, r_t , e pela taxa de crescimento da economia real, η_t , conforme o termo $\left[\frac{r_t - \eta_t}{1 + \eta_t} \right]$.

A taxa de juros real, r_t , e a taxa de crescimento da economia real, η_t , são definidas respectivamente, por:²³

$$r_t = \frac{(\hat{i}_t - \hat{\pi}_t) + \epsilon_t [\theta^f (1 + i_t^f) - \mu^f (1 + \pi_t^f)]}{[1 + \hat{\pi}_t + \epsilon_t \mu^f (1 + \pi_t^f)]}, \text{ e } \eta_t = \frac{Y_t}{Y_{t-1}} - 1 = \frac{1 + \alpha_t}{1 + \pi_t} - 1 \quad (6.1 \text{ e } 6.2)$$

²³ $\hat{i}_t = \theta^h i_t^h + \theta^f i_t^f$ é a média ponderada das taxas de juros domésticas e estrangeiras, $\hat{\pi}_t = \mu^h \pi_t^h + \mu^f \pi_t^f$ é a média ponderada das inflações domésticas e estrangeiras, $\epsilon_t = \Delta e_t / e_{t-1}$ é a taxa de depreciação da moeda local (se $\epsilon_t > 0$ significa depreciação), i_t^h e i_t^f são, respectivamente, as taxas de juros doméstica e estrangeira, π_t^h e π_t^f as inflações doméstica e estrangeira. θ^h e θ^f são, respectivamente, a participação da taxa de juros doméstica e da taxa de juros estrangeira na taxa de juros nominal, com $\theta^h + \theta^f = 1$. Da mesma forma, μ^h e μ^f são, respectivamente, a participação da taxa de inflação doméstica e da taxa de inflação estrangeira na taxa de inflação nominal, com $\mu^h + \mu^f = 1$.

Deve ser enfatizado que neste estudo foi considerado que $\theta^h = 0,9$, $\vartheta^f =$ Importações/PIB. Assim, o montante de juros pagos devido à dívida foi corrigido envolvendo as taxas de juros internas e externas, as taxas de inflação interna e externa, e a variação cambial. Portanto, o coeficiente θ_1 capta o real efeito do montante de juros pagos devido à dívida.

Consideraremos, a seguir, os efeitos dos coeficientes θ_2 que representa o impacto da senhoriagem sobre o diferencial da dívida e o coeficiente de impacto u_3 que representa o impacto do diferencial das receitas tributárias reais e despesas com gastos governamentais reais, sobre a variação da dívida, conforme definições na terceira equação dinâmica do Sistema (3.29). Observa-se na Tabela 6.1 que o valor de θ_2 estimado foi de 0,0261000, apresentando um sinal positivo, o que significa uma relação positiva entre a variável variação da dívida pública real e a renda por senhoriagem real. Observa-se também na Tabela 6.1 que o valor de u_3 estimado foi de 0,02809019, também apresentando um sinal positivo, o que significa uma relação positiva entre variação da dívida pública real e superávit primário real. Esses coeficientes são acompanhados por um sinal negativo na Equação (3.5), o que referênciamos que eles impactam negativamente sobre a dívida. No entanto, isto não significa que os coeficientes de impactos θ_2 e u_3 sejam negativos, como explicaremos posteriormente. A senhoriagem é definida como $S_t = H_t - H_{t-1}$ (onde H_t é a base monetária). Neste caso, parte das despesas da dívida são pagas com a senhoriagem e não através da emissão de títulos de dívida, o que implica num incremento negativo da dívida. No caso do saldo primário, representado por $W_t = T_t - G_t$, se positivo, este permite que as despesas do governo sejam pagas com receitas fiscais (onde G_t são os gastos governamentais e T_t a receita fiscal do governo); também, neste caso, W_t implica num incremento negativo da dívida.

Num modelo que estabelece as relações dinâmicas de impacto entre variáveis, os sentidos dos sinais de impactos dependem, essencialmente, das evoluções das variáveis, no caso, ao longo do período em análise. Como se observa na Figura 6.2.a, abaixo, a variável montante real da dívida evolui de forma crescente enquanto o montante de renda por senhoriagem evolui de forma constante. Isto significa que com a evolução da renda por senhoriagem, o diferencial da dívida apresenta incrementos positivos, induzindo um impacto positivo sobre a dívida. Da mesma forma, como se observa na Figura 6.2.b,

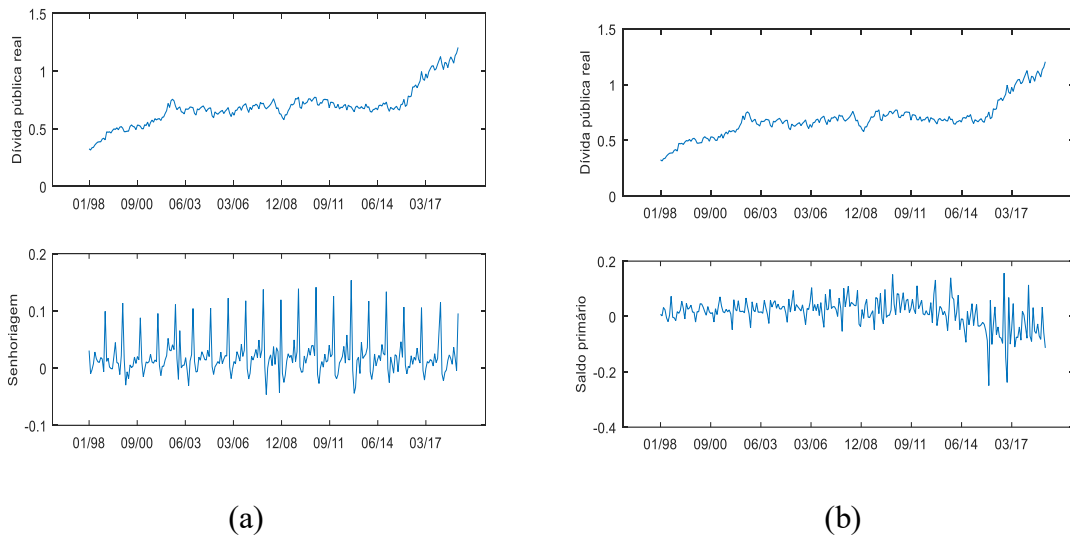
abaixo, a variável montante real da dívida evolui também de forma crescente enquanto o montante do saldo primários real possui uma evolução constante. Também, neste caso, o diferencial da dívida apresenta incrementos positivos, em função dos saldos primários reais, induzindo um impacto positivo sobre a dívida.

Primeiro, deve ser evidenciado que para que os coeficientes θ_2 e u_3 apresentem sinais negativos, são necessários que, respectivamente, os montantes da senhoriagem e do saldo primário evoluam de forma mais acentuadas que a dívida pública (isto é, de tal forma que estas variáveis impactem diretamente sobre a queda da dívida). Esta situação é quase impossível de acontecer numa economia em desenvolvimento, pois tanto os montantes gerados por senhoriagem quanto por saldos primários deveriam ser bastante significativos. Então, o entendimento que se tem de impacto negativo da senhoriagem e saldo primário sobre a dívida é que estes ocorrem indiretamente, pois estes saldos impactam negativamente sobre o crescimento da dívida, dirimindo os efeitos do montante de juros pagos devido à dívida. Ou seja, tanto a senhoriagem como o saldo primário inibem o crescimento de b_{t-1} na Equação (3.5).

Em resumo, subentende-se desses resultados que os gastos com juros da dívida tornam-se cada vez menos onerosos, ao longo do tempo, quando a senhoriagem e o saldo primário positivo encontram-se atuando no processo econômico, apesar deste não impactarem diretamente na dívida. Este comportamento será melhor entendido quando da análise das relações de impactos relativos, a ser apresentada posteriormente. O valor de σ_1 (o coeficiente do variável câmbio, na quarta equação do Sistema (3.29)) impacta positivamente na variação da inflação, com um valor de 0.00007684. Esta relação positiva entre a taxa de câmbio e política monetária foi abordada por Dornbusch, 1976. Isso é, quando o banco central adota uma política monetária contracionista (aumentando a taxa de juros) com o objetivo de diminuir a inflação, a taxa de câmbio se deprecia por um curto tempo e depois aprecia e esta apreciação cambial permanece por um bom tempo (*overshooting*). Esse processo de repasse cambial é chamado de *pass-through*. Conforme foi interpretada para a primeira equação do Sistema (3.29), a depreciação do Real tende a ter impactos relevantes sobre o crescimento econômico, via melhoria no desempenho da balança comercial, com diminuição dos níveis de importação e aumento nos níveis de exportação. O resultado disso é maior poupança doméstica e menor dependência da poupança externa, com possibilidade de aumentos nos investimentos produtivos. No entanto, com a diminuição de produtos importados, os incrementos na produção são

direcionados para exportação, portanto, havendo consequências para o incremento inflacionário da economia (isto é o que possivelmente ocorreu no processo econômico brasileiro, durante o período analisado). Por esses motivos, a depreciação cambial real na economia brasileira ocorrido no período impactou positivamente na inflação, diminuindo o poder de compra da população.

Figura 6.2 - Comparação entre a dívida pública real, a Senhoriagem e o Saldo primário de Brasil.



Fonte: Elaborada pelo autor (2019).

O valor de σ_2 (o coeficiente do diferencial da inflação a sua meta preestabelecida, na quarta equação do Sistema (3.29)) impacta positivamente na variação da inflação, com um valor de 0.0041093. Um impacto positivo do desvio da inflação de sua meta se caracteriza como um processo de repasse corretamente do desvio da inflação de sua meta para a inflação. Assim, um desvio de inflação negativo (inflação abaixo da meta) impacta negativamente na inflação; e, por outro lado, um desvio positivo da inflação de sua meta induz um aumento na inflação. Este comportamento está de acordo com o comportamento esperado. No caso da economia brasileira, como se observa no terceiro gráfico da Figura 6.1, acima, os desvios da inflação de sua meta, em quase todo o período de análise são negativos (exceto, para o período após maio de 2018), contudo, diminuindo em seu módulo quando se avança ao longo do período de análise. Este processo contribuiu significativamente para manter a inflação da economia brasileira, num patamar baixo, dentro da banda da meta de inflação esperada.

O valor de u_4 (o coeficiente do hiato do produto, na quarta equação do Sistema (3.29)) impacta negativamente na variação da inflação, com um valor de -0.0183102 . Por este valor, conclui-se que o hiato do produto positivo produz queda na inflação. Na Figura 5.2 do capítulo anterior, são plotadas as curvas do hiato do produto e o produto potencial, para vários níveis de filtragem. Nesse estudo, tomou-se como hiato do produto (e produto potencial) aqueles valores estimados com o nível de filtragem 6400 (usando um filtro HP), correspondente ao maior nível de filtragem, para o qual não ocorreu uma mudança significativa na média móvel da série. Essa tendência estimada foi assumida como o produto potencial.

A Figura 6.3, abaixo mostra os gráficos das evoluções da inflação e do hiato do produto, a partir dos quais fica difícil de observar visualmente uma correlação negativa entre estas variáveis. No entanto, a correlação negativa entre hiato do produto e inflação pode ser observada por meio dos valores médios do hiato do produto e do diferencial de inflação, respectivamente $-0,0409511$ e $0,0254$ que apresentam sinais contrários; conseqüentemente, induzindo uma correlação negativa. Ainda, como se observa na Figura 6.3, abaixo, o hiato do produto definido nesse estudo se caracteriza somente por oscilações de curto prazo, portanto, conjecturamos impactos negativos do hiato de produto sobre a inflação se caracteriza de forma consistente.

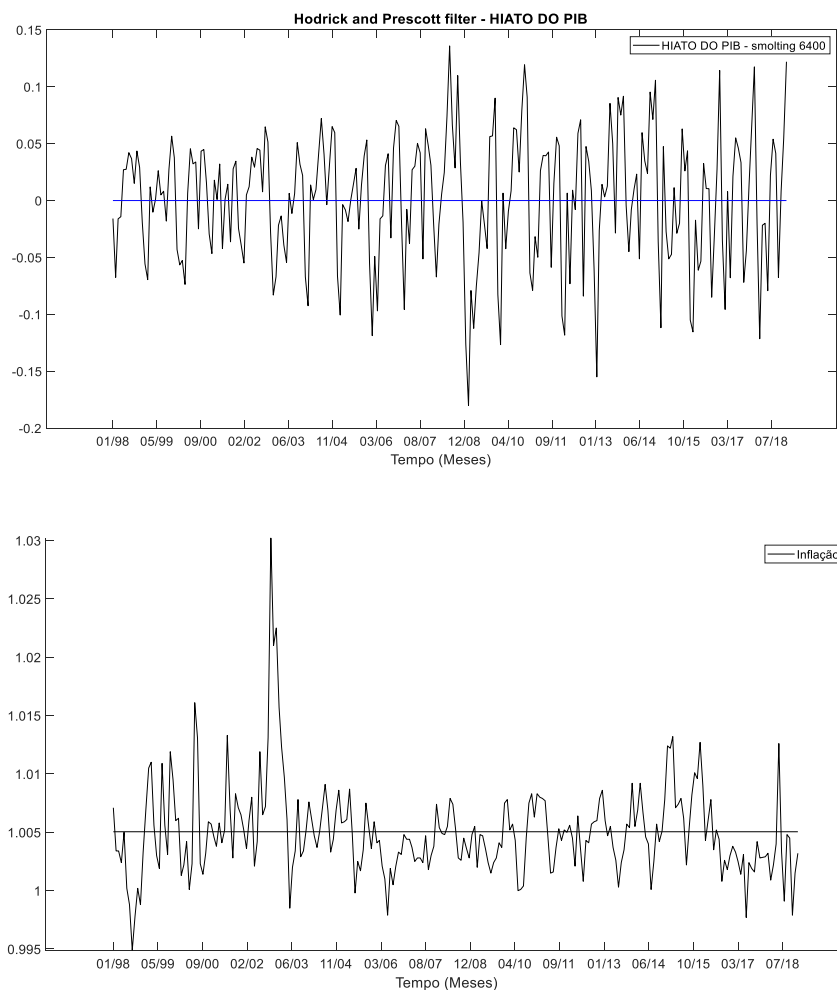
A explicação para que ocorram impactos negativos do hiato do produto sobre a inflação, dá-se quando a economia produz acima do seu potencial, os preços dos produtos tendem a cair pelo excesso de bens produzidos. Este comportamento é contrário ao esperado pela curva de Phillips²⁴ que estabelece que para hiato de produto positivo (acima do seu potencial), este deve afetar positivamente a inflação. No entanto, os efeitos de impacto direto do hiato do produto sobre a inflação têm demonstrado ser inconsistentes. Summa e Macrini (2011) analisaram os determinantes da inflação brasileira após 1999, utilizando um modelo de Redes Neurais para estimar a curva de Phillips tradicional. Os resultados deste estudo mostraram que o hiato de produto não apresentou nenhuma relação sistemática com a inflação. Não obstante, os resultados do estudo de Summa e Macrini (2011) mostraram que a inflação de produtos importados e a variação da taxa SELIC apresentam relações mais claras com a inflação, evidenciando-se como fortes componentes de pressão de custos para a dinâmica inflacionária brasileira. Ainda na análise, os autores afirmam que no Brasil, a inflação não é controlada

²⁴ $\pi = \pi^* + \omega(Y - \bar{Y})$ com $\omega > 0$

onde π é a inflação, π^* é a inflação antecipada, Y o produto da economia e \bar{Y} o produto potencial (Romer, David Advanced Macroeconomics, fourth edition, P 259).

pela demanda, mas pela apreciação do câmbio, uma vez que este último diminui a inflação dos bens importados. Entretanto, diferente dessa premissa, conjecturamos que para que haja um impacto sistemático positivo do hiato do produto sobre a inflação, efeitos sistemáticos de longo prazo devem estar intrinsicamente imbuídos no hiato do produto, para que se desenvolva uma relação inflação-hiato do produto, conforme estabelecido pela curva de Phillips. No entanto, nas economias em desenvolvimento efeitos sistemáticos sobre o hiato do produto são destruídos seguidamente por choques exógenos na economia. Por isso, os choques inflacionários sofridos por economias de países em desenvolvimento se caracterizam, essencialmente, pelas crises econômicas internacionais e domésticas. Finalmente, enfatizamos que o principal componente de explicação de inflação, em nosso estudo, caracteriza-se pelo termo de desvio da inflação de sua meta, conforme será visto posteriormente.

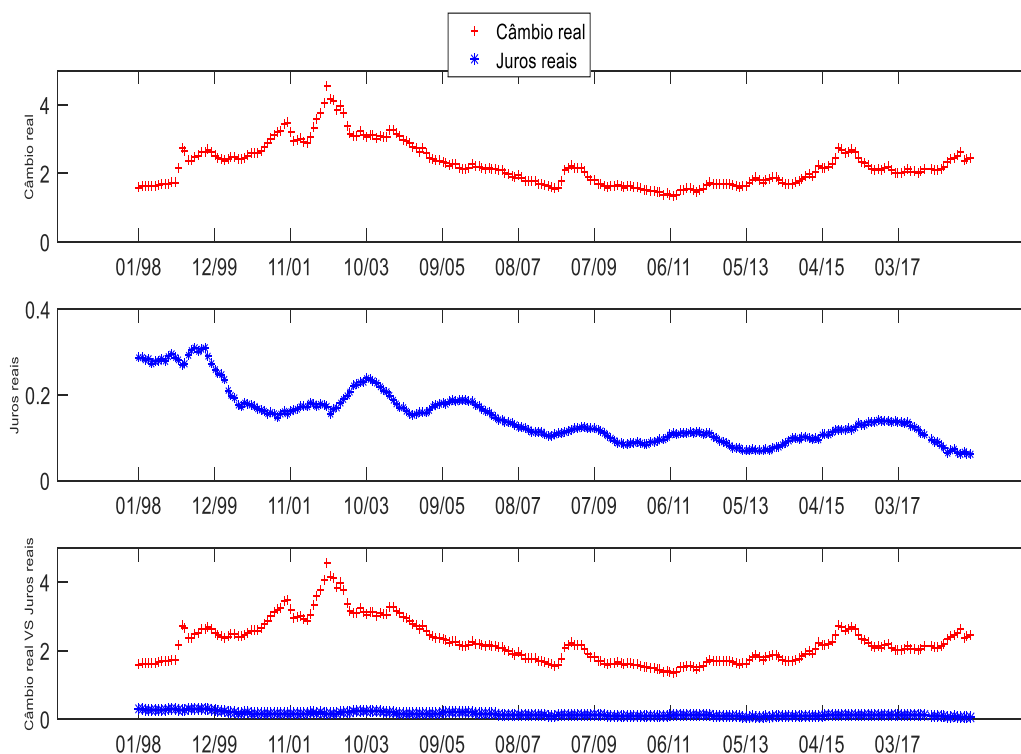
Figura 6.3 - Comparação entre o hiato de produto e inflação.



Fonte: Elaborada pelo autor (2019).

Na última equação dinâmica do Sistema (3.29), a Tabela 6.1 mostra que o coeficiente $\delta_1 = 0.00388925$ (coeficiente do câmbio real sobre si mesmo) impacta positivamente sobre si mesmo. O sinal positivo apresentado por δ_1 permite concluir que uma depreciação do câmbio real da moeda doméstica (no caso do Real), diante da moeda estrangeira (no caso de dólar), induz um processo de depreciação cambial da moeda, que pode ser estagnado somente pela indução de novas perspectivas na economia, ou por um processo de intervenção do banco central que, as vezes, se mostra eficiente somente no curtíssimo prazo. Este resultado de δ_1 mostra ser consistente com a teoria econômica que, de acordo com a sua concepção teórica, o câmbio impacta positivamente sobre si mesmo.

Figura 6.4 - Comparação entre o câmbio real e a taxa de juros real



Fonte: Elaborada pelo autor (2019).

Também, na última equação dinâmica do Sistema (3.29), a Tabela 6.1 mostra que o coeficiente u_5 (coeficiente do Índice de juros real de curto prazo, SELIC, impactando sobre o câmbio real) apresenta uma relação positiva entre a taxa de juros real e o câmbio real, com um valor de 0.25172353. Isto significa que o aumento da taxa de juros real causa uma depreciação do câmbio real (apreciação de Dólar ou depreciação do Real), diminuindo o poder de importações da economia doméstica e aumentando o seu poder de exportação, o que

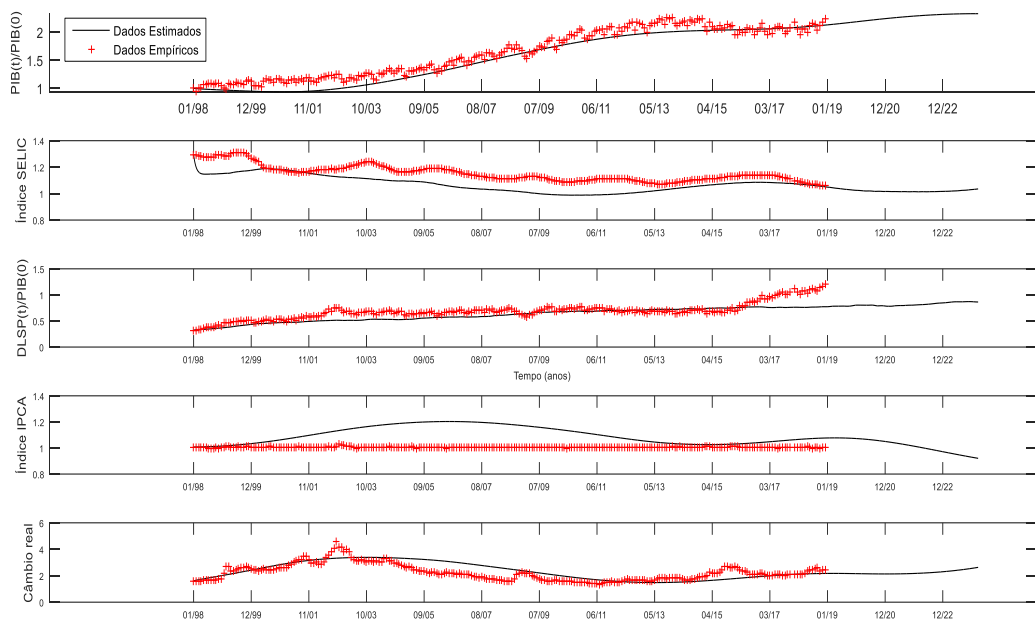
parece contrário ao esperado. Uma forma de explicar este resultado inesperado seria plotar as duas variáveis em questão, o que foi feito na Figura 6.4 acima. Nesta figura e nos dois primeiros gráficos, observa-se que na maioria parte dos tempos, nos períodos antes de dezembro de 1999, entre outubro de 2003 e maio de 2015, o câmbio real e a taxa de juros real da economia brasileira evolui na mesma direção. Portanto, quando o câmbio aumenta, a taxa de juros real também aumenta e quando o câmbio cai, a taxa de juros também cai. Como este período acima destacado representa a maior parte do período em estudo, isso pode fazer com que surja a relação positiva entre as duas variáveis.

A Figura 6.5, a seguir, mostra as curvas de ajuste das variáveis endógenas do modelo dinâmico, Sistema de Equações (3.29), juntamente com os correspondentes dados empíricos das respectivas variáveis (pontos vermelhos). Observa-se nesta figura que todas as variáveis endógenas do modelo dinâmico (3.29), como PIB, taxas de juros SELIC real, Dívida Líquida do Setor Público real, Inflação e Câmbio real se ajustaram satisfatoriamente, considerando-se os coeficientes ajustados para o sistema.

Observa-se na Figura 6.5 algumas distorções mais acentuadas na curva de inflação de 1999 a 2014, e na curva da DLSP após 2016. No entanto, deve ser enfatizado que as escalas de variação vertical dos gráficos da Figura 6.5 são bastante pequenas, o que acentua as discrepâncias entre dados empíricos e as curvas estimadas. No entanto, deve-se considerar que o sistema dinâmico econômico (Sistema (3.29)) envolve conceitos intrínsecos das teorias macroeconômicas e monetárias, caracterizando-se suas inter-relações típicas. Mas, por outro lado, os dados empíricos trazem na sua estrutura, não só as inter-relações dessas teorias, mas também os efeitos exógenos de perturbações estocásticas inseridos pela economia internacional, e pela própria economia doméstica. Por exemplo, pode-se dizer que os principais canais de controle da inflação são a taxa de juros de curto-prazo (taxa SELIC) e a taxa de câmbio. Portanto, observa-se que o desvio positivo entre a estimativa da inflação e seus dados empíricos, entre 1999-2014, é acompanhada por quedas das taxas de juros de curto prazo e apreciação cambial. Com a queda das taxas de juros, deveria esperar-se um crescimento da inflação no período, o que não foi evidenciado nos dados empíricos. No entanto, a apreciação cambial induz queda da inflação, e este fato foi observado. Nesse contexto, pode-se afirmar que, de acordo com os dados empíricos, a apreciação cambial foi o principal canal de controle inflacionário na economia brasileira, período de 1999-2014, havendo pouca influência da evolução das taxas de juros sobre os dados empíricos no período. Diferentemente, acreditamos que o modelo determinístico estruturado nesse estudo absorve

todas as interações da dinâmica do modelo econômico definido (inter-relações entre taxas de juros de curto-prazo e taxas de câmbio). De maneira semelhante, podem-se analisar as distorções entre a curva de estimação da DLSP e os dados empíricos, após 2016. Observa-se na Figura 6.5 que em 2016, a taxa SELIC se encontrava baixa, e estável, e assim permaneceu. A taxa de cambio encontrava-se apreciada e estável, e assim continuou durante o período dos dados empíricos; finalmente a inflação também se encontrava baixa e estabilizada, e, assim permaneceu. Esta situação caracteriza uma situação típica para que a DLSP mantivesse estável ou em queda, mas isto não aconteceu, pois, a DLSP cresceu acentuadamente após 2016, em função de perturbações estocásticas exógenas ao processo econômico, devido às instabilidades políticas no país. Um modelo determinístico não capta em suas simulações estes tipos de efeitos estocásticos.

Figura 6.5 - Ajuste do modelo dinâmico com os dados reais (pontos vermelhos) para o sistema de Eq. (3.29).²⁵



Fonte: Elaborada pelo autor (2019).

²⁵ A simbologia das variáveis utilizadas no modelo é: $y(t)/y(0)$ é o PIB normal normalizado pelo seu valor de Jan/1998; *Índice SELIC* é índice de juros nominal de curto prazo, representado pela taxa SELIC; *Índice IPCA* é o índice de inflação nominal, dado pela taxa de inflação IPCA; $TX(t)$ é a taxa de câmbio nominal brasileira, e; $DLSP(t)/PIB(t)$ é a dívida líquida do setor público, normalizado pelo PIB nominal.

A Figura 6.5 mostra também a previsão do comportamento da economia brasileira para os próximos cinco anos, conforme estimativas realizadas, considerando um cenário caracterizado por um comportamento determinístico, sem qualquer interferência por inovações estocásticas interpostas no processo econômico por meio de perturbações de caráter político ou econômico internacional ou doméstico.

A Figura 6.5 acima apresenta graficamente a evolução do processo econômico brasileiro, estabelecidas pelas interações dinâmicas conforme o modelo (3.29) que é composto por cinco equações diferenciais, descrito por políticas macroeconômicas e monetárias que atendam as condições pré-estabelecidas e identificadas no processo de calibração do modelo. Conforme se observa na Figura 6.5, nas previsões, percebe-se que, em termos médios, o PIB do país manterá a sua trajetória de crescimento respondendo por uma taxa de crescimento instantânea média de 0,2059 % por mês, ou seja, com uma taxa de crescimento anual de 2,5 %. Para que este crescimento aconteça, a taxa de juros SELIC nominal deverá evoluir a uma baixa taxa de crescimento média mensal de ordem de 0,002866 %. Ainda, é observado nesse processo de previsão que a dívida pública em percentual do PIB demonstra quase constante ao longo dos sessenta meses de previsão, ou seja, igual a 98% do mês anterior. Os níveis de inflação deverão apresentar uma queda com uma taxa instantânea média mensal de 0,00465 vezes o hiato de produto; e, finalmente, o câmbio real demonstra-se estabilizar até dezembro de 2021, e volta a depreciar entre de janeiro 2022 em diante, em uma taxa de crescimento de 0,012%.

Logo, percebe-se uma situação em que a economia brasileira não esteja sujeita a inovações estocásticas a nível internacional e/ou doméstico, demonstrando os resultados que o comportamento da economia se desenvolverá de forma bem semelhante durante os próximos cinco anos (sessenta meses).

Tendo em vista as limitações apresentadas nos ajustes do modelo dinâmico com os dados reais para o Sistema (3.29), limitações apresentadas especialmente na calibração da dívida pública, será apresentado na sessão 6.3 às estimativas dos impactos relativos de cada variável explicativas do Sistema (3.29).

6.3 ESTIMATIVAS DOS IMPACTOS RELATIVOS DAS VARIÁVEIS EXPLICATIVAS NO MODELO DINÂMICO E ANÁLISES DO COMPORTAMENTO DA ECONOMIA BRASILEIRA

Nessa subseção foram estimados impactos relativos de cada variável independente (explicativa) do sistema dinâmico econômico (3.29). Estes impactos são estimados via a definição à taxa de crescimento média de uma variável do vetor de variável endógena, $x = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ do sistema dinâmico econômico, definida como $\left[\left(\frac{dx_i(t)}{x_i}\right)/dt\right] \times 100$, onde x_i , com $i = 1, 2, \dots, 5$ é a média para a variável x_i no período da amostra. dt é o incremento de tempo (no caso desse estudo, sendo um, pois as bases de dados são mensais). Nesse caso, a taxa de crescimento representa a taxa de variação percentual média na variável x_i , num período mensal, devido a uma respectiva variável independente de cada equação i do modelo.

Estimadas cada taxa de crescimento devido a cada variável independente, estima-se a variação relativa de impacto dessas variáveis independentes. Considerando que o $dt = 1$, então, a taxa de crescimento é a taxa de variação de impacto relativo sobre uma variável dependente devido a uma determinada variável independente (ou seja, $\left(\frac{dx_i(t)}{x_i}\right) \times 100 = C_{ri}$). Por exemplo, considere a primeira equação do sistema (3.29), a partir da qual obtemos a variação de impacto da taxa de câmbio, conforme segue:

$$\frac{dy(t)}{dt} = u_5 y(t) + \gamma_1 r(t) + \gamma_2 e(t) \quad (6.3)$$

Assim, pode-se obter a evolução de variação de uma variável dependente (PIB, na equação de cima), considerando somente estas taxas de variação e os valores prévios estimados para cada variável dependente (PIB, câmbio e taxa de juros real), a partir de um valor inicial; isto é:

$$\begin{aligned} \frac{dx_i(t)}{x_i(t-1)} \times 100 &= C_{r1} + C_{r2} + \dots \rightarrow x_i(t) - x_i(t-1) = \frac{C_{r1} + C_{r2} + \dots}{100} x_i(t-1) \rightarrow \\ x_i(t) &= \frac{C_{r1} + C_{r2} + \dots}{100} x_i(t-1) + x_i(t-1), \end{aligned} \quad (6.4)$$

onde $C_{r1} + C_{r2} + \dots$ representa as taxas de crescimento média estimadas, apresentadas na Tabela 6.2.

Tabela 6.2 Estimativas dos impactos relativos das variáveis explicativas.

Parâmetros	Taxa de crescimento médio (%) $\left[\left(\frac{dx_i(t)}{\bar{x}_i} \right) / dt \right] \times 100$	Descrição
γ_1	-0,032214	Variação média do PIB, em percentual mensal, devido à taxa de juros real.
γ_2	0.3250571	Variação média do PIB, em percentual mensal, devido ao câmbio real.
μ_1	-0,055021	Variação média da SELIC, em percentual mensal, devido ao diferencial entre as taxas de juros nominais TJLP e SELIC.
μ_2	0.0781060	Variação média da SELIC, em percentual mensal, devido ao diferencial entre as taxas de inflação e metas de inflação.
θ_1	0,0825012	Variação média da Dívida (DLSP), em percentual mensal, devido aos juros da dívida.
θ_2	0.3628754	Variação média da Dívida (DLSP), em percentual mensal, devido à senhoriação.
σ_1	0.0019576	Variação média da Inflação, em percentual mensal, devido ao câmbio real.
σ_2	-0.001001	Variação média da Inflação, em percentual mensal, devido ao diferencial entre as taxas de inflação e metas de inflação.
δ_1	0,0324420	Variação média do câmbio, em percentual mensal, devido a si mesmo.
u_1	0,0123943	Variação média do PIB, em percentual mensal, devido a si mesmo.
u_2	-0.082888	Variação média da SELIC, em percentual mensal, devido ao hiato de produto.
u_3	0,0556969	Variação média da Dívida (DLSP), em percentual mensal, devido ao saldo primário.
u_4	-0.003259	Variação média da Inflação, em percentual mensal, devido ao hiato de produto.
u_5	0,1373000	Variação média do câmbio, em percentual mensal, devido à taxa de juros real.

Fonte: Elaborada pelo autor (2019).

Os resultados da Equação (6.4) estão resumidos graficamente na Figura 6.6 a seguir. No primeiro gráfico (do PIB) desta Figura, percebe-se que as estimativas relacionadas ao PIB brasileiro caracterizam uma trajetória de crescimento constante, até o último mês de previsão. Baseando nas taxas de crescimento médio da Tabela 6.2, observa-se que para uma taxa de

crescimento médio de 2.2409 % do cambio real, o PIB brasileiro tem uma variação média mensal de 0.3250571 % enquanto para uma taxa de crescimento médio mensal de 0,1478 % da taxa de juros real, o produto interno bruto tem uma variação média de -0,032214 %. Portanto, as autoridades econômicas devem se preocupar mais com desvalorização cambial do que com uma taxa de juros baixa se quiserem garantir um crescimento econômico ao longo dos próximos sessenta meses.

No segundo gráfico da Figura 6.6, é apresentado o índice da taxa SELIC aonde pode perceber que os dados estimados e empíricos se aproximam razoavelmente e a taxa de juros SELIC deve apresentar uma queda nos próximos sessenta meses. Assim, para uma taxa de crescimento médio de -0,005599319 % do diferencial de juros de longo e curto prazo, uma taxa de crescimento médio de -0,0409511 % do diferencial da inflação e uma taxa de crescimento médio mensal de 0,025430447 % do hiato de produto, o índice SELIC tem uma variação média mensal de -0,0550212141%, 0,0781060% e -0.082888 %, respectivamente. Portanto, a variável hiato de produto é a variável que mais pesa no crescimento médio da taxa SELIC. Isso é, se as autoridades econômicas quiserem manter a taxa de juros nominal num patamar razoável é importante pensar num aumento da taxa de crescimento econômico.

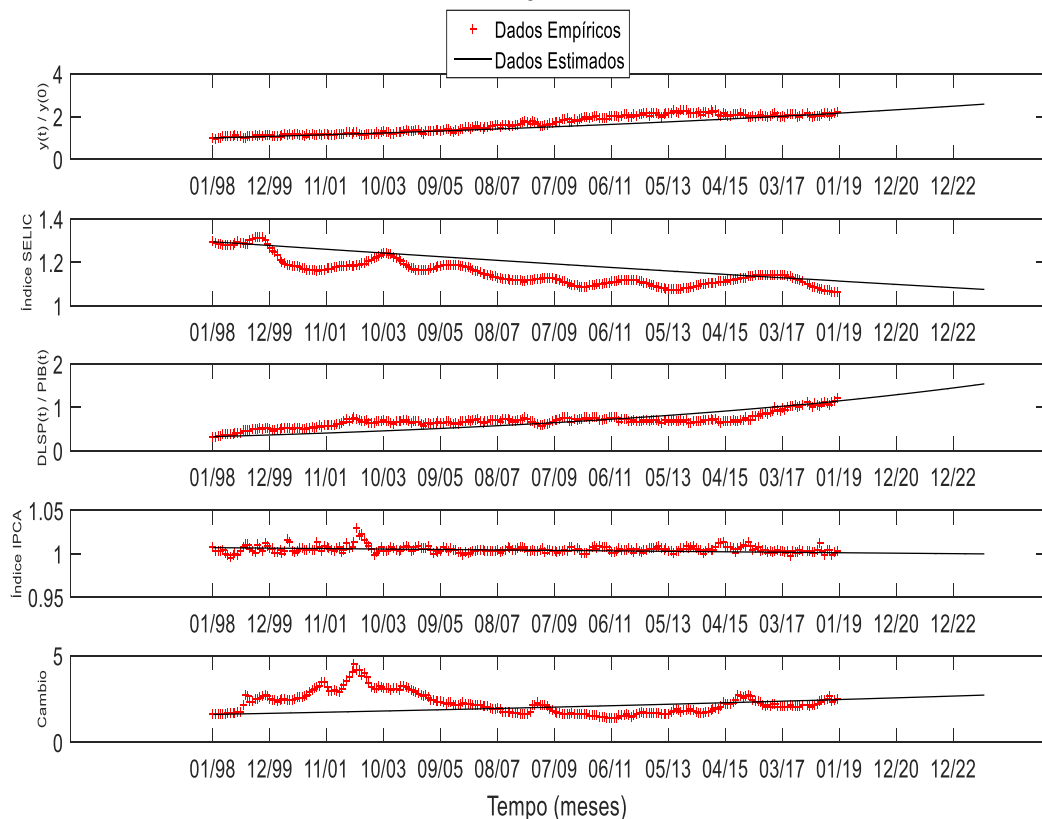
O terceiro gráfico da Figura 6.6 apresenta a dívida pública real da economia brasileira. Neste gráfico, a variável em questão (dívida) segue a sua trajetória de crescimento ao longo do tempo de previsão. Portanto, as taxas de crescimento médio de 0,093120508 % dos juros da dívida, de 0,09555261 % da senhoriagem e de 0,013622 % do superávit primário causam, respectivamente, uma variação média da Dívida (DLSP), em percentual mensal de 0,082501279 %, de 0,36287543574 % e de 0,055696 %. Observa-se nesses resultados que a senhoriagem é o que mais impactou no crescimento da dívida pública e em segunda posição veio os juros da dívida $\left(\left[\frac{r_t - \eta_t}{(1 + \eta_t)}\right] b_{t-1}\right)$. Assim, se as autoridades econômicas quiserem diminuir a dívida, a ação do Banco Central na diminuição da senhoriagem (preço da inflação) é indispensável. Baseando nas variáveis juros da dívida e saldo primário, pode concluir que o incentivo ao crescimento econômico (aumento de η_t) terá mais efeito na diminuição da dívida do que a diminuição dos gastos públicos.

O IPCA é representado no quarto gráfico da Figura 6.6 e percebe-se que a inflação brasileira deve se manter estável ao longo do tempo da previsão. Portanto, as taxas de crescimento médio do câmbio real (2,2409 %), do diferencial da inflação (-0,0409511 %) e

do hiato de produto (0,0254 %) implicam, respectivamente, as seguintes variações médias em percentual mensal da Inflação: 0,00195765866 %, $-0,00100177319\%$ e $-0,00325915233\%$. Em resumo, o maior impacto do aumento do hiato de produto na diminuição da inflação pode reforçar a necessidades das autoridades econômicas incentivarem o crescimento econômico no combate à inflação.

Por último, no último gráfico da Figura 6.6, apresentam-se as estimativas para o câmbio real. Percebe-se que o câmbio real deve ficar estável ao longo dos cinco próximos anos de previsão. Portanto, as taxas de crescimento médio do próprio câmbio e da taxa de juros real (0,1478%) impactam, respectivamente, nas variações médias em percentual mensal do câmbio com os seguintes valores: 0,032442050460091148%, 0,1373000840%. Observa-se que a taxa de juros real apresentou um maior peso na variação média percentual do câmbio o que é consistente com os resultados anteriores aonde uma baixa taxa de juros causa uma queda na dívida pública e um incentivo ao crescimento econômico.

Figura 6.6 - Ajuste do modelo dinâmico com os dados reais (pontos vermelhos) para as estimativas dos impactos relativos das variáveis explicativas da Tabela 6.2



Fonte: Elaborada pelo autor (2019).

Em resumo a esta seção, o que pode dizer é que as autoridades fiscais e monetárias têm muito a ganhar se incentivarem um crescimento econômico. Este aumento da produção causa um aumento no hiato de produto, uma queda no nível geral de preços da economia e uma diminuição da dívida pública via taxa de crescimento. Primeiro, as autoridades monetárias não tem o que se preocupar com a depreciação cambial, pois isso deve favorecer um aumento do PIB brasileiro via aumento da demanda internacional por produtos locais, ou seja, aumento das exportações. Segundo, as autoridades fiscais não precisam se preocupar em criar superávit primário, via corte de gastos, pois a resposta do saldo primário na dívida é pouca e se for comparar com a resposta da taxa de crescimento nesta mesma equação.

No entanto, a realidade econômica de países em desenvolvimento é muito mais complexa do que se apresenta, pois estes se encontram frequentemente sujeitos a choques econômicos e políticos, externos e internos. Neste sentido, com o intuito de verificar a estabilidade do Sistema Dinâmico (3.29) aplicado à economia brasileira, este foi transformado em um sistema estocástico, com a finalidade de verificar a capacidade da economia brasileira em absorver os choques que afetam o comportamento dos parâmetros de impactos do modelo. A resolução deste sistema estocástico será apresentada na próxima seção aonde uma análise de instabilidade da economia brasileira será feita.

6.4 ANÁLISES DE BIFURCAÇÕES ESTOCÁSTICAS

Neste capítulo será feito um estudo sobre a transformação estocástica do sistema dinâmico da Equação (3.29), a fim de definir o comportamento da economia brasileira após considerar a presença dos choques externos e internos em função de inovações estocásticas que ocorrem na economia ou política internacional e/ou no ambiente econômico e/ou político doméstico.

Como demonstrado no desenvolvimento do modelo matemático e anunciado no final da seção anterior, a ausência de variações dos parâmetros no tempo impede que o modelo se adeque melhor à realidade e não permita que os fatores de impactos evoluam ao longo do tempo e se adaptem a realidade momentânea da economia. Estas características podem enfraquecer a capacidade de previsão de novos componentes dinâmicos que surgem no contexto de uma economia. Assim, no mundo econômico atual, um modelo determinístico pode, às vezes, destoar em muitas situações da realidade do contexto em que se pretende prever. Com a finalidade de contornar estas limitações do modelo determinístico, o modelo

dinâmico dado pela Equação (3.29) foi transformado em um modelo estocástico, a fim de introduzir nele as incertezas sobre o contexto econômico futuro (este procedimento encontra-se detalhado matematicamente no Sistema Estocástico (3.30)).

Esta transformação do modelo dinâmico determinístico para o modelo estocástico foi feita considerando-se a possibilidade de que ocorram variações estocásticas em cada parâmetro do Sistema Dinâmico (3.29), exceto para os parâmetros de impactos controláveis $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$, os quais são subtendidos na formulação como fatores passíveis de controle por meio de políticas endógenas à economia. O termo fatores de controle foi escolhido, pois, se considerar que os comportamentos destes parâmetros se encontram relacionados com variáveis macroeconômicas e/ou monetárias endógenas, variáveis que o governo e/ou o Banco Central podem estabelecer controles sobre elas. No caso do coeficiente u_1 do PIB, na equação do próprio PIB, no Sistema Dinâmico (3.29), é um fator que caracteriza a taxa de crescimento instantânea média do PIB sobre ele próprio. Esta taxa de crescimento pode ser implementada por políticas econômicas específicas estabelecidas pelo governo e/ou Banco Central como políticas de créditos com taxas de juros atrativas para o financiamento do setor produtivo e do setor de consumo, de forma que se possa intensificar o crescimento econômico alterando endogenamente os efeitos do fator u_1 ao longo do tempo. O parâmetro de controle u_2 do Sistema Dinâmico (3.29) representa a evolução da taxa de juros SELIC devido à apreciação ou depreciação cambial na economia. Portanto, é possível dizer que o Banco Central tem o poder de escolher políticas de intervenções por meio de injeção ou compra de moedas estrangeiras, com o objetivo de manter a taxa SELIC dentro de um patamar para o melhor controle da inflação. No caso do fator de impacto u_3 , este se encontra diretamente relacionado com as políticas de *superávit* primário e seus impactos sobre a variação da dívida pública no Sistema Dinâmico (3.29). Assim, pode-se dizer que o governo pode escolher a política de definição do nível de *superávit* primário, via fixação da sua receita tributária e/ou redução dos seus gastos, a fim de sustentar a sua dívida deixando o Banco Central controlar a inflação. Quanto ao parâmetro u_4 , coeficiente do hiato de produto na equação da inflação no Sistema Dinâmico (3.29), o governo e o Banco central podem lançar políticas para aumentar o produto efetivo (e por consequência o hiato de produto) via políticas de créditos com taxas de juros atrativas para o financiamento do setor produtivo e do setor de consumo. Este estímulo à produtividade pode inibir a inflação da economia com efeitos que podem alterar o comportamento do parâmetro u_4 . Por último, o termo de controle u_5 , coeficiente da taxa de juros na equação do câmbio no Sistema Dinâmico (3.29), representa a taxa de apreciação ou

depreciação do câmbio devido às evoluções da taxa de juros real. Portanto, é possível dizer que o Banco Central tem o poder de escolher políticas de escolha da taxa de juros real via o canal da taxa de juros SELIC, com principal objetivo de controlar a inflação e manter o câmbio dentro de um patamar saudável para o bom funcionamento da economia, o que pode mudar o impacto de u_5 ao longo do tempo.

Assim, tendo em vista que os fatores controláveis podem ser estabelecidos por meio de políticas endógenas, seus efeitos de impactos ao longo do tempo não devem ser tratados nas previsões de forma estocástica. No entanto, somente para se ter uma noção de como os parâmetros de controle afetam a evolução das variáveis endógenas do modelo, fizemos na seção 6.6, simulações impondo efeitos estocásticos individualizados em cada parâmetro de controle, e analisamos o seu impacto sobre a estrutura de evolução das variáveis endógenas.

A análise deste estudo, na atual sessão, restringe-se a introduzir inovações estocásticas, de forma generalizada, nos parâmetros de impactos não controláveis do modelo dinâmico, sujeitos a efeitos políticos ou econômicos exógenos, que possam alterar as ordens das relações de impactos nas variáveis macroeconômicas e monetárias da economia. Com isso, estas variações estocásticas nos parâmetros do sistema podem causar perda ou ganho na qualidade delas; portanto, podendo se tornar mais eficientes ou deficientes. Estas mudanças de comportamento (perdas ou ganhos) são chamadas de bifurcações. Então, como é possível observar, as variações estocásticas introduzidas nos parâmetros não controláveis causam efeitos de mudança de comportamento da economia diante de efeitos exógenos políticos e econômicos.

De forma similar, também analisamos os efeitos aditivos de inovações estocásticas advindas de efeitos econômicos e políticos domésticos, e/ou internacionais sobre o desempenho das variáveis macroeconômicas ou monetárias da economia. De forma genérica, também foram introduzidos, simultaneamente, tanto os efeitos estocásticos sobre os coeficientes de impactos não controláveis, e os efeitos aditivos sobre as variáveis endógenas do modelo.

De uma forma geral, em muitas situações as alternâncias de comportamento, devido às variações nos coeficientes ou os efeitos aditivos sobre variáveis macroeconômicas, podem evoluir para situações irreais, sobre as quais a economia exige mudanças significativas no seu percurso. Portanto, a finalidade do estudo introduzido neste capítulo é identificar a flexibilidade do comportamento da economia doméstica em estudo, no caso, a economia brasileira.

Esta seção é dividida em duas subseções: na primeira, será feito um resumo sobre o procedimento de uso das realizações de Monte-Carlo e na segunda, serão abordados os procedimentos das simulações do modelo estocástico, apresentando as técnicas usadas.

6.4.1 Realizações de Monte Carlo (MC)

Para representar as incertezas econômicas ou políticas destacadas no subitem anterior é utilizado o formalismo probabilístico, pois, uma solução analítica para um modelo econômico dinâmico é, muitas vezes, inconsistente com a evolução do processo da economia real. Nesses casos, a única maneira de estimar o sistema dinâmico, de forma mais consistente com a realidade, é por meio de simulações estocásticas, utilizando perturbações aleatórias nos parâmetros não controláveis (ou nas condições iniciais do modelo que se propaga ao longo do tempo); e perturbações estocásticas aditivas nas variáveis endógenas.

No caso desse estudo, as perturbações estocásticas foram impostas sobre os parâmetros não controláveis, geradas por meio de uma distribuição de probabilidade normal, em torno de cada valor de calibração de cada parâmetro não controlável, para uma dada variância, a maior possível para a qual as realizações estocásticas do modelo econômico dinâmico foram convergentes. No entanto, com relação aos efeitos estocásticos introduzidos de forma aditiva, estes foram gerados como um passeio aleatório, evoluindo ao longo de todo o período de previsão, estimadas por meio de uma sub-rotina computacional, elaborada para esta finalidade na plataforma MATLAB 2019a, conforme a teoria explanada no Apêndice N.

6.4.2 Simulação do modelo estocástico do Sistema (3.30)

No caso deste estudo, a variável $\frac{dx(t)}{dt}$ do sistema (3.30) representa a primeira derivada em relação ao tempo das variáveis endógenas: PIB real, índice de juros índice SELIC nominal, dívida pública real relativa ao PIB, índice de inflação (IPCA) e o câmbio real. as demais matrizes representam a estrutura de choques estocásticos impostos sobre o modelo econômico dinâmico. Esses choques simulam as perturbações exógenas na economia brasileira, com distribuição normal em torno do valor determinístico calibrado para o sistema (observe que estes choques são efetivados somente nos parâmetros de impactos não controláveis). No estudo aqui conduzido utilizamos condições iniciais determinísticas,

assumidas em consonância com os valores iniciais empíricos das variáveis endógenas. Foram impostos também choques estocásticos adicionados nas variáveis endógenas no sistema (3.29), com estrutura de passeio aleatório, de média zero e variância especificada para cada variável endógena.

Os choques estocásticos nos parâmetros de impactos têm por finalidade absorver efeitos de inovações de curto e longo prazo (três anos ou mais), devido às economias internacionais e/ou domésticas, que possibilitam mudanças mais significativas no curso do comportamento da dinâmica da economia doméstica. Por outro lado, os choques aditivos tiveram como finalidade absorver os efeitos de inovações estocásticas que interagem na economia e evoluem de forma similar a um passeio aleatório, durante um período de curto-prazo, devido aos efeitos de economias internacionais e/ou na própria economia doméstica.

Portanto, o objetivo aqui é o de proceder à simulação do modelo estocástico, definido pelo Sistema (3.30), com a finalidade de determinar os efeitos das variabilidades impostas sobre o vetor de variáveis endógenas, $dx(t)$, e seus consequentes impactos sobre a estabilidade do comportamento da economia doméstica em estudo. Conforme o Sistema (3.33) (transformação do Sistema (3.30)), definiu-se o vetor de interações não lineares entre as variáveis fiscais e monetárias, denotado por $f(x(t))$, a matriz insumo de controle denotada por $g(x(t))$, o vetor de flutuações paramétricas de ruídos estocásticos, representado pela variável $h(x(t))$, imbuídas por efeitos de um processo Wiener, ou movimento browniano, $dp(t)$, e o vetor de distúrbios externos e internos (perturbações estocásticas adicionais), $v(t)$.

Para a obtenção dos resultados foi elaborado um programa computacional e realizadas simulações, gerando, para cada unidade de tempo, os vetores aleatórios de parâmetros de impactos por meio de funções randômicas estruturadas no Matlab. A solução foi obtida, por um processo de integração de Runge-Kutta de sexta ordem, utilizando-se incrementos de tempo bastante pequenos da ordem de 10^{-8} , e obtendo duzentas realizações de Monte Carlo para cada caso estudado, para o período de 1998.1-2023.12 (sendo de 1998.1-2018.12, o período de calibração dos parâmetros, e de 2019.1-2023.12, o período previsão). As bandas e amplitudes de perturbações geradas para todos os parâmetros foram testadas, e mantidas as máximas combinações entre elas, em que as soluções das realizações de Monte Carlo convergissem.

A seguir, na próxima seção, serão apresentados e comentados os resultados das perturbações estocásticas introduzidas nos coeficientes não controláveis e nas variáveis endógenas.

6.5 RESULTADOS DAS PERTURBAÇÕES ESTOCÁSTICAS INTRODUZIDAS NOS COEFICIENTES NÃO CONTROLÁVEIS E NAS VARIÁVEIS ENDÓGENAS

Nesta subseção descrevemos a estrutura e análise do modelo dinâmico estocástico, dado pelo Sistema (3.33), com a finalidade de determinar os efeitos das variabilidades impostas sobre o vetor de variáveis endógenas, $dx(t)$, e seus consequentes impactos sobre a estabilidade do comportamento da economia doméstica em estudo. Conforme o Sistema (3.33), será introduzido o vetor de flutuações paramétricas de ruídos estocásticos, representado pela variável $h(x(t))$, imbuídas por efeitos de um processo Wiener (movimento browniano), $dp(t)$, e o vetor de distúrbios externos e internos à economia doméstica (perturbações estocásticas adicionais), $v(t)$.

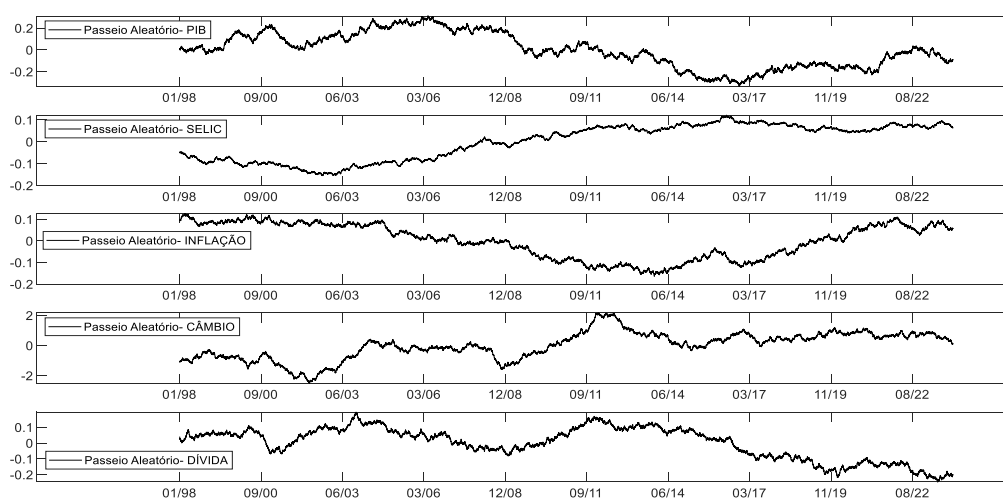
Essa análise será conduzida por três processos diferentes: (i) Num primeiro caso, será analisado o caso em que se introduzem as perturbações estocásticas nos coeficientes não controláveis, definidos por $h(x(t))$ do Sistema (3.33); (ii) Num segundo caso, serão estudados os efeitos de perturbações estocásticas adicionadas às variáveis endógenas, seguindo um passeio aleatório, definidos por $v(t)$ do Sistema (3.33), e; (iii) Finalmente, será analisado o caso em que serão introduzidas tanto as perturbações estocásticas nos coeficientes não controláveis, como as perturbações estocásticas adicionadas às variáveis endógenas, seguindo um passeio aleatório.

Para o primeiro caso, foram introduzidas perturbações nos parâmetros não controláveis, por meio de funções randômicas, seguindo uma distribuição normal, definidas como média o valor de cada parâmetro calibrado e, como dispersão para cada parâmetro, uma variância definida especificamente para cada parâmetro através de testes²⁶. A ordem de dispersão limite da variância foi estabelecida de tal modo que possibilitasse as convergências das realizações de Monte-Carlo, obtidas pelo método de Runge-Kutta aplicado para determinar as soluções do sistema dinâmico em análise. Da mesma forma, foram introduzidas perturbações nos parâmetros adicionais às variáveis endógenas, por meio de passeio aleatório unidimensional (1D), gerados por saltos uniformemente distribuídos (Grimmett e Stirzaker, 2001) e seguindo uma variância de dispersão unitária. A Figura 6.7, abaixo, mostra o processo de evolução dos passeios aleatórios, para uma amostra de tempo de doze mil e seiscentos, distribuídas no intervalo de 312 meses, representado os 252 meses da base de dados empírica, e 60 meses de

²⁶ Perturbações estocásticas com grandes níveis de dispersão impedem a obtenção do vetor solução para o Sistema Dinâmico (3.29).

previsão. Observa-se na Figura 6.7 que os ruídos estocásticos adicionados às variáveis endógenas evoluem em conformidade com as características de passeio aleatório ao longo de todo período de tempo de estimativa das variáveis endógenas do modelo dinâmico estocástico.

Figura 6.7 - Evolução dos Passeios aleatórios impostos sobre cada variável endógena.



Fonte: Elaborada pelo autor (2019).

Na Tabela 6.3 abaixo, são mostradas, em termos absolutos, as médias das perturbações e os valores mínimos e máximos das distribuições das perturbações estocásticas aplicadas sobre os coeficientes não controláveis, assim como para aquelas perturbações estocásticas adicionadas às variáveis endógenas. Os intervalos de distribuições estocásticas mostradas na Tabela 6.3 são os máximos suportados, tal que as convergências das soluções das realizações de Monte-Carlo pudessem ser obtidas.

A Figura 6.8 mostra as distribuições das perturbações introduzidas nos parâmetros com correspondentes distribuições normais (linha em vermelho), estimadas em função de percentuais de variabilidade assumidos para cada parâmetro, garantindo a convergência do modelo para cada realização de Monte Carlo. A Figura 6.9 apresenta as distribuições das perturbações introduzidas de forma aditiva em cada variável endógena do modelo dinâmico em estudo.

Tabela 6.3 - Valores calibrados dos parâmetros, intervalos de choques introduzidos nos parâmetros e nas variáveis endógenas.

Parâmetros e variáveis endógenas	Coeficientes identificados para o Sistema (3.24)	Valores após choques	
		Min	Max
PIB	0,000	-0,3346000	0,31130000
SELIC	0,000	-0,1548000	0,12170000
Dívida	0,000	-0,1638000	0,12600000
Inflação	0,000	-2,5099000	2,16770000
Câmbio	0,000	-0,2457000	0,19660000
γ_1	-0,0453130	-0,0766581	-0,0184169
γ_2	0,00179131	$-1,6504 \times 10^{-4}$	0,00349385
μ_1	1,15869642	0,54284975	1,72639825
μ_2	-0,2718378	-0,41508995	-0,12718191
θ_1	0,07335341	0,03744736	0,12157982
θ_2	0,02610000	0,01415939	0,04142447
σ_1	$0,7682 \times 10^{-4}$	$0,4158 \times 10^{-4}$	$1,1577 \times 10^{-4}$
σ_2	0,00410932	0,00091714	0,00760000
δ_1	0,00388922	0,00170000	0,00613250

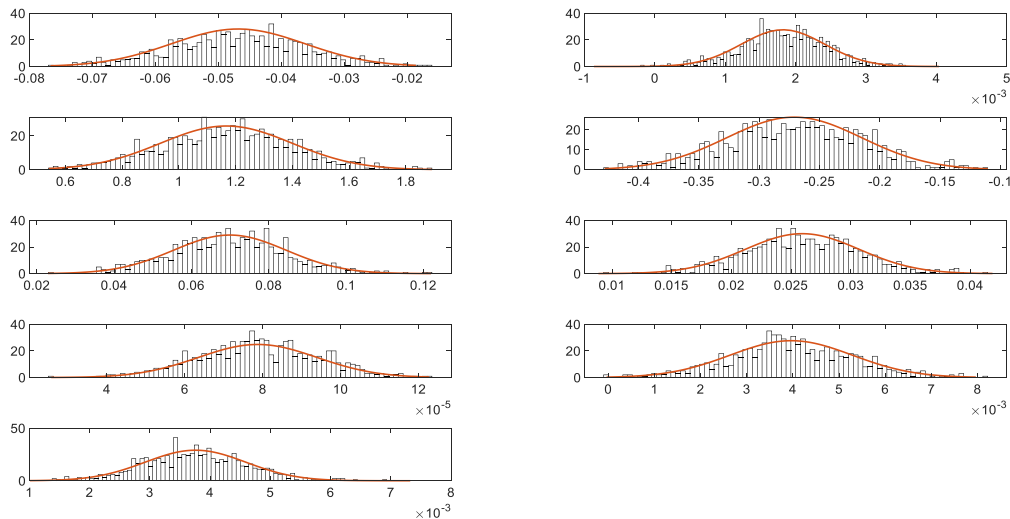
Fonte: Elaborada pelo autor (2019).

Observa-se na Figura 6.8, abaixo, por meio dos histogramas, que os choques estocásticos impostos sobre os coeficientes seguem uma distribuição normal (conforme evidencia a linha vermelha) com média igual ao valor calibrados dos coeficientes e os valores máximos e mínimos das perturbações estocásticas, ambos destacados na Tabela 6.3, para cada coeficiente.

Na Figura 6.8, abaixo, o primeiro histograma na parte superior à esquerda representa as perturbações estocásticas introduzidas no parâmetro γ_1 , coeficiente da taxa de juros na equação do GDP no Sistema Dinâmico (3.29). Percebe-se que as perturbações introduzidas seguem uma distribuição Normal, com média $\gamma_1 = -0,0453130$ (valor identificado no processo de calibração). Neste histograma (e na Tabela 6.3) pode ser observado que o intervalo de variabilidades aceitáveis nas convergências das realizações de Monte-Carlo introduzidas nas simulações de Monte-Carlo, foi da ordem de $\left[\frac{-0,0766581}{-0,0453130}; \frac{-0,0184169}{-0,0453130} \right] \times \gamma_1 = [1,691746; 0,40643745] \times \gamma_1$ (ou seja, da ordem de $1,691746 \times \gamma_1$ como limite inferior e $0,406437 \times \gamma_1$ como limite superior). Neste caso, como γ_1 trata do impacto da taxa de juros real sobre o PIB, a probabilidade de aceitação de variabilidade estocástica negativa, abaixo de γ_1 , é de $(\gamma_1 \times (1,691746 - 1) / \gamma_1) \times 100 = 69,174\%$, e de aceitação de impacto estocástico negativo, acima de γ_1 , é de $\gamma_1 \times (1 - 0,406437) / \gamma_1 \times 100 = 59,35\%$. Portanto, imposições de γ_1 como negativo se caracterizam como soluções realizáveis,

determinando impactos negativos da taxa de juros real sobre o PIB, tendo em vista que as taxas de juros reais são predominantemente positivas²⁷ em economias em desenvolvimento. Observa-se aqui que uma situação de variabilidade negativa de γ_1 , acima de seu valor de calibração, induz uma situação que, mantido γ_1 com o valor calibrado, seria similar à taxa de juros real aumentar na proporção esperada. Da mesma forma que, mantido γ_1 com o valor calibrado, seria similar à taxa de juros real diminuir na proporção esperada.

Figura 6.8 - Histogramas das perturbações estocásticas nos coeficientes de impactos do modelo (3.29): lê-se as distribuições da esquerda para a direita, para a seguinte sequência de os coeficientes: $\gamma_1, \gamma_2, \mu_1, \mu_2, \theta_1, \theta_2, \sigma_1, \sigma_2$ e δ_1 .



Fonte: Elaborada pelo autor (2019).

Por exemplo, tomando a taxa de juros real média para o período dos dados empíricos, de 0,1478 (14,78%), e considerando o limite superior de variabilidade estocástica positiva para γ_1 , um crescimento da taxa de juros real média de até $0,1478 + 0,5935 \times 0,1478 = 0,235$ (23,55%) é admissível e, da mesma forma, um decréscimo médio de $0,1478 - 0,6917 \times 0,1478 = 0,0456$ (4,56%) também poder ser admissível. Portanto, a taxa de juros real (TJR) aceitável na convergência do modelo deve atender o intervalo de $4,56\% \leq \text{TJR} \leq 23,55\%$, isto dentro do contexto das identificações estabelecidas pelas estimativas das realizações de

²⁷ Taxas de juros reais são essencialmente positivas. Somente em situações atípicas (em momento de crises, com alta recessão na produção) que taxas de juros reais podem ser negativas, sendo atingidas somente quando as taxas de juros nominais tendem para um limite inferior zero; taxas de juros são efetivamente delimitadas a valores próximos de zero, o que impede uso da regra de Taylor na implementação de política monetária para o estabelecimento das taxas de juros.

Monte-Carlo. No período de previsão, tomando a taxa de juros reais de 0,06059, correspondente ao mês 2018/Dezembro (o último mês da série de dados empíricos), obtém-se o seguinte intervalo de previsão para a variabilidade da taxa de juros reais $2,462\% \leq \text{Juros Reais} \leq 9,65\%$.

Também, no primeiro histograma, na parte superior à direita da Figura 6.8, encontra-se representadas as perturbações estocásticas introduzidas no parâmetro γ_2 , coeficiente do câmbio real na equação do GDP no Sistema Dinâmico (3.29). A distribuição das perturbações nesse parâmetro também segue uma distribuição normal, com média igual a $\gamma_2 = 0.00179131$, e com variabilidade máxima aceitável para convergência das simulações de Monte Carlo, da ordem de $\left[\frac{-0,00016504}{0,0017913}; \frac{0,00349385}{0,0017913} \right] \times \gamma_2 = [-0,0921342; 1,95045498] \times \gamma_2$ (ou seja, da ordem de $-0,0921342 \times \gamma_2$ como limite inferior e $1,95045498 \times \gamma_2$ como limite superior). Para este caso, como γ_2 trata do impacto do câmbio real sobre o PIB, a probabilidade de aceitação de variabilidade estocástica positiva sobre γ_2 (acima de γ_2) é de $((1,95045 - 1) \times \gamma_2 / \gamma_2) \times 100 = 95,045498\%$. Também, a probabilidade de aceitação de variabilidade estocástica positiva sobre γ_2 (abaixo de γ_2) é de $((1 + (-0,0921342)) \times \gamma_2 / \gamma_2) \times 100 = 90,786\%$. Observa-se aqui que uma situação de variabilidade positiva de γ_2 (acima de γ_2) induz uma situação que, mantido γ_2 com o valor calibrado, seria similar ao câmbio se depreciar na proporção esperada. Por exemplo, tomando a taxa de câmbio real média de 2,24091, e considerando o limite superior de variabilidade de estocástica positiva para γ_2 , uma depreciação cambial de $2,24091 + 0,95048 \times 2,24091 = 4,3707$ é ser admissível, dentro do contexto das estimativas das realizações de Monte-Carlo. Da mesma forma, uma situação de variabilidade positiva de γ_2 (abaixo de γ_2) induz uma situação que, mantido γ_2 com o valor calibrado, seria similar ao câmbio se apreciar na proporção esperada, ou seja, $2,24091 - 0,9078 \times 2,24091 = 0,2064$. No período de previsão, tomando a taxa de câmbio real de 2,4636, correspondente ao mês 2018/dezembro (o último mês da série de dados empíricos), obtém-se o seguinte intervalo de previsão para a variabilidade da taxa de câmbio real $0,2271 \leq \text{TCR} \leq 4.805$. Por outro lado, o impacto de tomarmos as variabilidades estocásticas no intervalo negativo, para o qual as realizações de Monte-Carlo convergiram é de $(-0,0921342 \times \gamma_2 / \gamma_2) \times 100 = 9,21\%$. Neste contexto consideramos essas soluções de Monte-Carlo envolvendo variabilidade de γ_2 negativas, como irrealizáveis, apesar de envolver estimativas de soluções de Monte-Carlo convergentes. Esta faixa de γ_2

negativas induz impactos negativos de apreciação ou depreciação do câmbio, o que não apresenta sentido econômico.

De uma forma geral, observa-se na Figura 6.8, na sequência gráfica, da esquerda para a direita e de cima para baixo, a partir da primeira linha de histogramas, que todas as distribuições de perturbações estocásticas introduzidas nos parâmetros atendem os requisitos de distribuições normais, fato evidenciado nos gráficos, por meio das linhas vermelhas, na Figura 6.8.

Essas distribuições de perturbações estocásticas introduzidas nos parâmetros apresentam variabilidades máximas aceitáveis para convergência das simulações das realizações de Monte Carlo. Seguindo o mesmo procedimento aplicado para estimar os intervalos de variabilidade para γ_1 e γ_2 apresentados acima, tem-se o Vetor (6.5) de intervalos de perturbações estocásticas estimadas, para os coeficientes não controláveis do modelo. Nas equações do Vetor (6.5), abaixo, $\gamma_{1_{est}}$, $\gamma_{2_{est}}$, $\mu_{1_{est}}$, $\mu_{2_{est}}$, $\theta_{1_{est}}$, $\theta_{2_{est}}$, $\sigma_{1_{est}}$, $\sigma_{2_{est}}$, e $\delta_{1_{est}}$ representam as bandas de variabilidades estocásticas estimadas com relação aos correspondentes coeficientes calibrados; ou seja, γ_1 , γ_2 , μ_1 , μ_2 , θ_1 , θ_2 , σ_1 , σ_2 e δ_1 .

$$\left\{ \begin{array}{l} [1,691746; 0,40643745] \times \gamma_1; \text{Prob}\{\gamma_{1_{est}} < \gamma_1\} = 69,17\% \text{ e; } \text{Prob}\{\gamma_1 > \gamma_{1_{est}}\} = 59,35\% \\ [-0,09213; 1,95045] \times \gamma_2; \text{Prob}\{\gamma_{2_{est}} < 0\} = 9,21\%; \text{Prob}\{0 < \gamma_{2_{est}} < \gamma_2\} = 90,78\% \text{ e; } \text{Prob}\{\gamma_2 < \gamma_{2_{est}}\} = 95,0489\% \\ [0,46850042; 1,489948748] \times \mu_1; \text{Prob}\{\mu_{1_{est}} < \mu_1\} = 53,1499\% \text{ e; } \text{Prob}\{\mu_1 < \mu_{1_{est}}\} = 48,9948\% \\ [1,526976; 0,467859] \times \mu_2; \text{Prob}\{\mu_{2_{est}} < \mu_2\} = 52,697656\% \text{ e; } \text{Prob}\{\mu_2 < \mu_{2_{est}}\} = 53,214045\% \\ [0,510506; 1,657452] \times \theta_1; \text{Prob}\{\theta_{1_{est}} < \theta_1\} = 48,949394\% \text{ e; } \text{Prob}\{\theta_1 < \theta_{1_{est}}\} = 65,745287\% \\ [0,542505; 1,587141] \times \theta_2; \text{Prob}\{\theta_{2_{est}} < \theta_2\} = 45,749463\% \text{ e; } \text{Prob}\{\theta_2 < \theta_{2_{est}}\} = 58,714176\% \\ [0,541340; 1,507029] \times \sigma_1; \text{Prob}\{\sigma_{1_{est}} < \sigma_1\} = 45,865920\% \text{ e; } \text{Prob}\{\sigma_1 < \sigma_{1_{est}}\} = 50,702941\% \\ [0,223185; 1,849454] \times \sigma_2; \text{Prob}\{\sigma_{2_{est}} < \sigma_2\} = 77,681465\% \text{ e; } \text{Prob}\{\sigma_2 < \sigma_{2_{est}}\} = 84,945441\% \\ [0,437105; 1,576794] \times \delta_1; \text{Prob}\{\delta_{1_{est}} < \delta_1\} = 56,289435\% \text{ e; } \text{Prob}\{\delta_1 < \delta_{1_{est}}\} = 57,679431\% \end{array} \right\} \quad (6.5)$$

De uma maneira geral, ao impor choques estocásticos nos coeficientes de impactos não controláveis, é importante definir, através de uma análise minuciosa, as máximas bandas de choques que permitiram atingir a convergência para as estimativas das variáveis endógenas do sistema e para todas as realizações de Monte Carlo possíveis. Assim, procedendo de maneira similar aos exemplos das estimativas para γ_1 e γ_2 , é possível induzir as variabilidades nos coeficientes e associá-las às variabilidades possíveis para às variáveis independentes associadas aos correspondentes coeficientes. Este procedimento pode ser aplicado para análise de qualquer coeficiente não controlável submetido ao processo de perturbação estocástica. Para tanto, as informações para estas análises estão inclusas no Vetor (6.5), para todos os coeficientes perturbados.

Nota-se no Vetor de Equações (6.5) que as estimativas são dadas em forma de intervalo de variabilidade dos coeficientes e variabilidades proporcionais (em percentuais) de perturbações estocásticas estimadas, relativas, abaixo e acima, aos correspondentes coeficientes de calibração. Estas bandas de variabilidades dos coeficientes caracterizam as bandas de perturbações aceitas na convergência das realizações de Monte Carlo (somente o coeficiente γ_2 apresentou uma banda de variabilidade não condizente com o sinal esperado, com $\text{Prob}\{\gamma_{2_{est}} < 0\} = 9,21\%$. Esta banda foi considerada irrealizável e desprezada na análise).

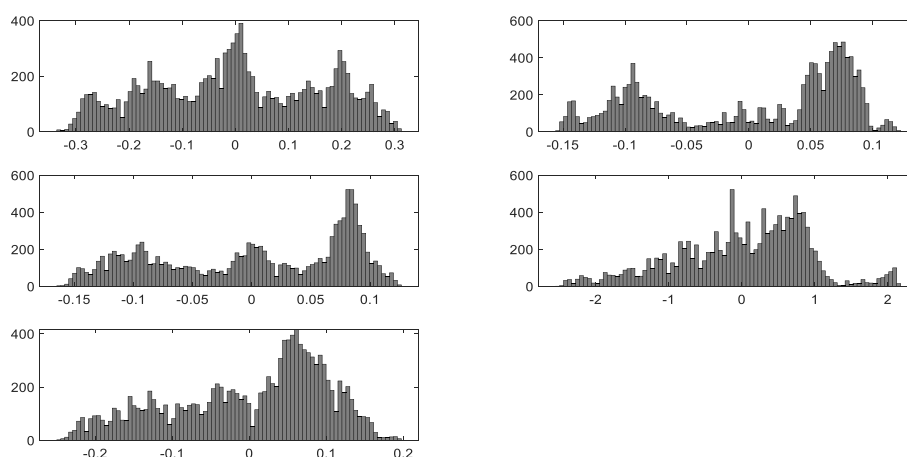
Em resumo, deve-se ter em mente que os impactos estocásticos nos coeficientes do modelo se caracterizam de forma que ocorram variações nas variabilidades das variáveis explicativas correspondentes aos coeficientes perturbados, de modo que aconteça uma diminuição das alternâncias na direção de seus cursos de evoluções. Portanto, o que se conclui com base nas bandas de oscilações de perturbações estocásticas aceitáveis, para cada coeficiente, é que a operacionalidade da economia brasileira, nos padrões regidos atualmente, demonstra ser acentuadamente instável e apresenta certa maleabilidade para absorver efeitos que possibilitam estabelecer alternâncias em seu curso de evolução.

A Figura 6.9 abaixo mostra os histogramas dos choques estocásticos adicionados às variáveis endógenas do modelo. Os histogramas dessa figura devem ser observados a partir da esquerda para à direita e de cima para baixo associando-os às variáveis endógenas na seguinte sequência: PIB, SELIC, DLSP real, IPCA e CÂMBIO real. Os histogramas representam os choques estocásticos adicionados em cada interação de tempo caracterizando um passeio aleatório unidimensional (1D), gerados por saltos uniformemente distribuídos e seguindo uma variância de dispersão unitária (Grimmett e Stirzaker, 2001). As bandas dos choques adicionados para estas variáveis envolvem os respectivos intervalos de variabilidade estocásticos formados pelos seus valores mínimo e máximo conforme apresentado na Tabela 6.3 com média zero.

É importante observar que os choques em inovações (choques adicionais em forma de passeio aleatório) sobre as variáveis endógenas do modelo possibilitam captar os efeitos de perturbações no processo econômico por meio de ações políticas e/ou econômicas ao nível doméstico ou internacional. Portanto, estes choques permitem descrever evoluções de tendências estocásticas (ou quebras de tendências no processo evolutivo) que, por conseguinte, descrevem a presença de ciclos econômicos alterando as relações de impactos dos

coeficientes do modelo. Nesse estudo, preocupou-se em introduzir esses choques aditivos em um nível tal que não impossibilitassem a convergência nas soluções de Monte Carlo. Eles foram introduzidos com a finalidade de tornar as simulações de Monte Carlo mais realistas.

Figura 6.9 - Histogramas das perturbações estocásticas adicionadas as variáveis endógenas: PIB, SELIC, DLSP real, IPCA e CÂMBIO real: lê-se os histogramas, de cima para baixo e, da esquerda para a direita, para as variáveis GDP real, SELIC, DLSP real, IPCA e CÂMBIO real.



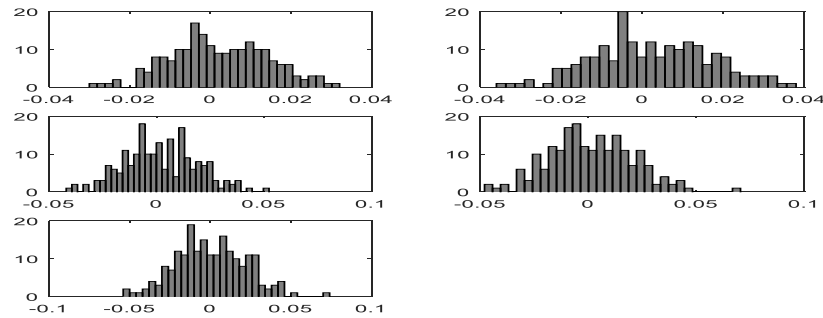
Fonte: Elaborada pelo autor (2019).

É importante ressaltar que as perturbações foram impostas no sistema de equações dinâmica em estudo, de três formas: (i) Somente choques estocásticos aditivos, na forma de passeio aleatório, nas variáveis endógenas (resultados comentados no final desta seção, Figuras 6.12 e 6.13); (ii) somente choques estocásticos nos parâmetros de impactos não controláveis (resultados comentados no final desta seção, Figuras 6.12 e 6.13) e, por último; (iii) Simultaneamente, choques adicionais, na forma de passeio aleatório, nas variáveis endógenas e choques nos parâmetros de impactos não controláveis. Apresentaremos, a seguir, os resultados referentes às previsões obtidas com este último caso. A Figura 6.10 a seguir representa os histogramas das previsões para as taxas de crescimento mensais das variáveis endógenas PIB e índice SELIC determinadas a partir de duzentas estimativas das realizações de Monte Carlo para estas variáveis endógenas do modelo econômico dinâmico e para o período 2019.1-2023.12 (os dados empíricos usados neste estudo foram de 1998.1-2018.12). As previsões mostradas na Figura 6.10 foram obtidas para o caso (iii), cujas perturbações foram impostas no sistema de equações dinâmica em estudo envolvendo, simultaneamente, às perturbações estocásticas nos coeficientes de impactos não controláveis e às perturbações

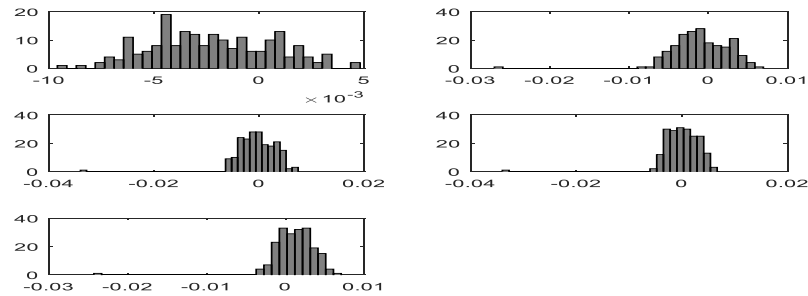
estocásticas estruturadas como passeio aleatório, inseridas de forma aditiva. Conforme são mostradas nos histogramas da Figura 6.10, as previsões mensais referentes ao período enfatizado acima foram segmentadas em representações anuais. Por exemplo, na Figura 6.10.a estão representadas as taxas de crescimento mensais para o GDP real. O primeiro histograma, na parte superior, à esquerda, mostra as taxas de crescimento mensais para o GDP real para o ano de 2019, obtidas a partir das estimativas das realizações de Monte-Carlo. O segundo histograma na parte superior à direita representa as taxas de crescimento mensais para o GDP para o ano de 2020. Assim, subsequentemente, observando a partir da parte superior para baixo e da esquerda para a direita, são mostradas as distribuições das taxas de crescimento para os demais anos, sendo que o último histograma da Figura 6.10.a representa as distribuições das taxas de crescimento para o GDP em 2023. A Figura 6.10.b abaixo mostra as taxas de crescimento mensais para o índice SELIC também segmentadas por ano de previsões com a mesma composição do GDP descrita acima.

Como mencionado, na Figura (6.10.a) são apresentados os histogramas para as taxas de crescimento do PIB estimadas com referências às duzentas realizações de Monte Carlo do PIB relativo ao PIB de 1998.1, para os meses de 2019.1 a 2023.12. Percebe-se, nestes histogramas, as evoluções da taxa de crescimento do PIB devido às perturbações estocásticas introduzidas no processo de simulação, em cada momento de tempo e em cada realização de Monte Carlo. Nesse processo, os valores possíveis para a taxa de crescimento relativa ao PIB real, para cada mês, são condicionados às características do conjunto de inovações estocásticas introduzidas ao longo do processo de simulação. De acordo com os histogramas da Figura 6.10.a, os valores possíveis para a taxa de crescimento do PIB podem atingir níveis diversos que se encontram inclusos em uma ampla banda de distribuição com significativas variabilidades positivas e negativas e para todos os meses de previsões de 2019.1 a 2023.12. Contudo, de acordo com esses histogramas, pode-se observar também que em termos médios (o valor mais provável de cada distribuição) a taxa de crescimento média da economia prevista é positiva (como se observa na Tabela 6.4, abaixo). Estes resultados induzem que o PIB brasileiro tende a crescer durante o período de previsão, atingindo valores positivos de crescimentos médios. Todavia, estes resultados serão analisados posteriormente.

Figura 6.10 - Histogramas das realizações de Monte Carlo para as variáveis GDP real e SELIC, para cada período de previsão de 2019.1-2023.12. Lê-se os histogramas, de cima para baixo e, da esquerda para a direita, para as variáveis GDP real e SELIC.



(a)



(b)

Fonte: Elaborada pelo autor (2019).

Na Figura 6.10.a, observa-se especificamente no primeiro histograma, referente aos doze primeiros meses (ano de 2019) que as previsões das taxas de crescimento do PIB oscilam num intervalo de $[-0.0292; 0.0320]$. Estas taxas de crescimento foram determinadas, primeiro considerando-se que em dezembro de 2018, o valor do PIB relativo a janeiro de 1998 foi de $y_{2018.12}/y_{1998.1} = 2.24$. Portanto, tomando os PIBs relativos de janeiro de 2019 gerados em função das perturbações estocásticas, determina-se as taxas de crescimento correspondentes a janeiro de 2019, por exemplo, pela seguinte relação: $\frac{2,43-2,24}{2,24} = 0,08482$ (este cálculo é realizado para cada uma das duzentas realizações de Monte-Carlo obtidas para cada mês de previsão); e para os meses subsequentes, as taxas de crescimento foram estimadas com relação às previsões prévias em cada série. Portanto, o primeiro histograma, na parte superior, à esquerda, da Figura 6.10.a foi estruturado tendo como base todas as previsões de janeiro a dezembro de 2019 (sendo que cada mês conteve duzentas previsões). Em seguida, foi

estimada a média geométrica²⁸ entre as duzentas previsões estocásticas realizadas para cada mês, o que induz uma taxa de crescimento média mensal. Em seguida, separou-se essas médias mensais para cada ano e, também, utilizando o conceito de média geométrica estimou-se a taxa de crescimento média mensal para cada ano. Finalmente, estimou-se a taxa de crescimento anual, utilizando a seguinte fórmula da capitalização: $(1 + i_m)^{12} = (1 + i_p)^1$; isto é, para a primeira estimativa referente ao ano de 2019, conforme Tabela (6.4), abaixo, $i_a = ((1 + 0,002199)^{12} - 1) \times 100 = 2,6706\%$. A Tabela (6.4) mostra o intervalo de variabilidade da taxa de crescimento do PIB, devidas às perturbações estocásticas (Figura (6.10.a)), estimativas das taxas de crescimento médias mensais para cada ano e médias anuais, correspondentes a cada ano de previsibilidade.

Tabela 6.4 - Características dos histogramas da taxa de crescimento do PIB (Figura 6.10.a): intervalos de variabilidade do crescimento relativo, estimativas das taxas de crescimento médias mensais e médias anuais, correspondentes a cada ano de previsibilidade.

Intervalo de tempo do histograma	Intervalo de taxas de crescimento mensais	Taxa de crescimento média mensal (%)	Taxa de crescimento média anual (%)
2018.01-2018.12	[-0.0486; 0.0533]	0.2300%	2.7950%
2019.01-2019.12	[-0.0292; 0.0320]	0.2199%	2.6706%
2020.01-2020.12	[-0.0354; 0.0376]	0.2260%	2.7456%
2021.01-2021.12	[-0.0418; 0.0523]	0.1806%	2.1889%
2022.01-2022.12	[-0.0480; 0.0679]	0.1135%	1.3704%
2023.01-2023.12	[-0.0539; 0.0738]	0.0319%	0.3831%

Fonte: Elaborada pelo autor (2019).

Observa-se na Tabela 6.4 que tanto as taxas médias mensais de crescimento, como as taxas de crescimento anuais, são compatíveis com a estrutura da economia brasileira, diante de um conjunto de perturbações estocásticas generalizadas impostas, estranhas à estrutura do sistema econômico. Nesse contexto, o PIB mensal deverá evoluir no intervalo especificado para a taxa de crescimento, para cada ano, conforme esperado. No entanto, esse processo pode ser alterado, dependendo da intensidade dos níveis das perturbações estocásticas generalizadas impostas e das combinações dos níveis de perturbações de cada parâmetro.

²⁸ Utilizou-se a fórmula de média geométrica para estimar as médias mensais, tendo em vista que números relativos tendem a seguir uma distribuição log-normal. Nestas situações as médias geométricas aproximam melhor as respectivas médias.

De uma forma geral, observa-se através da Tabela 6.4 que o processo de evolução da taxa de crescimento anual²⁹ para a variável GDP evolui de forma crescente até 2020, tornando decrescente, entre 2021 e 2023. Entretanto, as previsões de taxas de crescimentos anuais encontram-se num mesmo patamar, com exceção à correspondente ao ano de 2023 (0.3831%). O que se pode dizer é que o processo de crescimento da economia depende significante, tanto positivamente como negativamente, das características das inovações estocásticas que se estabelece como um passeio aleatório (tanto no mundo real como nas estimativas do modelo). Este passeio aleatório que se interfere no processo econômico ao longo do tempo (podendo ser virtuoso ou contracionista) pode alterar toda perspectiva determinada pela estrutura da economia. Geralmente, estes passeios aleatórios são devidos às crises na economia mundial como atualmente, assim como devido às crises econômicas e/ou políticas na economia doméstica aumentando cada vez a instabilidade da economia desviando-a do processo natural determinado pela estrutura da economia.

As taxas de crescimento anuais médias previstas para os próximos anos são completamente realizáveis, pois estamos diante de um cenário de baixa inflação, taxas de juros decrescentes, taxa de câmbio depreciada. A taxa de câmbio depreciada favorece as exportações, entretanto, afeta negativamente as importações, especialmente, aqueles bens de produção, fator que inibe os investimentos no setor produtivo. Mas, de uma forma geral, pode-se dizer que a atual da estrutura da economia é favorável para um crescimento da economia nos níveis previstos.

A Figura 6.10.b a seguir representa os histogramas das previsões para as taxas de crescimento mensais da variável SELIC determinadas a partir de duzentas estimativas das realizações de Monte Carlo e para o período 2019.1-2023.12 (os dados empíricos usados neste estudo foram de 1998.1-2018.12). As previsões mostradas na Figura 6.10.b foram obtidas para o caso (iii) cujas perturbações foram impostas no sistema de equações dinâmica em estudo, envolvendo, simultaneamente, às perturbações estocásticas nos coeficientes de impactos não controláveis e às perturbações estocásticas estruturadas como passeio aleatórios, inseridas de forma aditiva. De forma similar ao realizado para PIB, nos histogramas da Figura 6.10.b, as previsões mensais referentes ao período enfatizado acima, foram segmentadas em

²⁹ Na Tabela 6.4 constam dados referentes a 2018, estimados a partir dos dados empíricos utilizados no estudo. Observa-se que a taxa de crescimento anual estimada se trata de um índice de valor (IV), diferentemente das estimativas de crescimento da economia que se refere ao índice de Quantum, contabilizados pelo índice de Laspeyres de quantidade. Para calcular o índice de Quantum IQ usa-se a seguinte fórmula: $IQ = (IV/DI)$, onde DI é o deflator do GDP que foi de aproximadamente de 3.03. Portanto, $IQ \approx 1\%$. Portanto, as taxas de crescimento estimadas no modelo devem ser corrigidas pelo deflator implícito da economia. Mantendo a mesma ordem do DI no futuro, a taxa de crescimento da economia será próxima de 1%.

representações anuais. O primeiro histograma, na parte superior, à esquerda, mostra as taxas de crescimento mensais para o índice SELIC nominal, para o ano de 2019, obtidos a partir das estimativas das realizações de Monte-Carlo. O segundo histograma na parte superior, à direita, representa as taxas de crescimento mensais para o índice SELIC, para o ano de 2020. Assim, subsequentemente, observando da parte superior para baixo e da esquerda para a direita, são mostradas as distribuições das taxas de crescimento para os demais anos. O último histograma da Figura 6.10.b representa as distribuições das taxas de crescimento para o índice SELIC em 2023.

Na Figura 6.10.b, observa-se especificamente no primeiro histograma referente aos doze primeiros meses (ano de 2019) que as previsões das taxas de crescimento do índice SELIC oscilam num intervalo de $[-0.0093; 0,0048]$. Estas taxas de crescimento foram determinadas, primeiro, considerando-se que em dezembro de 2018 o valor do índice SELIC foi de 1.0336, então, tomando os índices de janeiro de 2019 gerados em função das perturbações estocásticas, determina-se as taxas de crescimento correspondentes a janeiro de 2019. Este cálculo é realizado para cada uma das duzentas realizações de Monte-Carlo obtidas para cada mês de previsão; e para os meses subsequentes, as taxas de crescimento foram estimadas com relação às previsões prévias em cada série. Em seguida, foi estimada a média geométrica entre as duzentas previsões estocásticas realizadas para cada mês, o que induz uma taxa de crescimento média mensal. Em seguida, separou-se essas médias mensais para cada ano e, também, utilizando o conceito de média geométrica estimou-se a taxa de crescimento média mensal para cada ano. Finalmente, estimou-se a taxa de crescimento anual utilizando a seguinte fórmula da capitalização: $(1 + i_m)^{12} = (1 + i_p)^1$. A Tabela 6.5 abaixo mostra o intervalo de variabilidade da taxa de crescimento do índice SELIC devidas às perturbações estocásticas (Figura 6.10.b), estimativas das taxas de crescimento médias mensais para cada ano e médias anuais correspondentes a cada ano de previsibilidade.

Como mencionado, na Figura 6.10.b são apresentados os histogramas para as taxas de crescimento do índice SELIC estimados com referências às duzentas realizações de Monte Carlo para os meses de 2019.1 a 2023.12. Percebe-se nos histogramas da Figura 6.10.b que as evoluções das taxas de crescimento do índice SELIC, devido às perturbações estocásticas introduzidas no processo de simulação (aditivas e nos parâmetros não controláveis), apresentam, em cada momento de tempo, distribuições com bandas menos espessas do que as bandas de distribuições para GDP. Assim, os intervalos de distribuição das perturbações estocásticas do índice SELIC demonstram que esta variável é mais restritiva aos impactos das

perturbações estocásticas. Os valores possíveis para a taxa de crescimento do índice SELIC nominal para cada mês podem atingir níveis diversos com pequenas variabilidades positivas ou negativas e para todos os meses de previsões de 2019.1 a 2023.12. Também, observa-se que, em termos médios (o valor mais provável de cada distribuição), a taxa de crescimento média do índice SELIC prevista pode ser positiva ou negativa dependendo do período analisado (como se observa na Tabela 6.5 abaixo). Estes resultados induzem que o índice de juros de curto prazo da economia brasileira para o período previsto primeiro tende a decrescer durante o período de previsão atingindo valores negativos em termos de decrescimentos médios e posteriormente, revertendo para uma taxa de crescimento média positiva conforme se observa na Tabela 6.5.

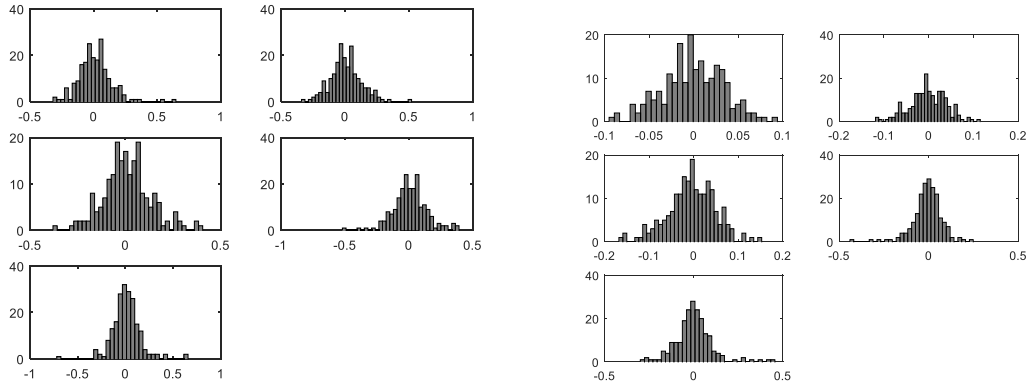
Tabela 6.5 - Características dos histogramas da taxa de crescimento do índice SELIC nominal (Figura 6.10.b): intervalos de variabilidade do crescimento relativo, estimativas das taxas de crescimento médias mensais e médias anuais, correspondentes a cada ano de previsibilidade.

Intervalo de tempo do histograma	Intervalo de taxas de crescimento mensais	Taxa de crescimento média mensal (%)	Taxa de crescimento média anual (%)
2018.01-2018.01	$[-0.0053; -3.9769 \times 10^{-4}]$	-0,250%	-2,959%
2019.01-2019.12	$[-0.0093; 0,0048]$	-0.2278%	-2,6998%
2020.01-2020.12	$[-0.0269; 0,0069]$	-0.1046%	-1,2478%
2021.01-2021.12	$[-0.0333; 0,0072]$	-0.0410%	-0,4904%
2022.01-2022.12	$[-0.0334; 0,0065]$	0.009324%	0,1119%
2023.01-2023.12	$[-0.0235; 0.0068]$	0.12015%	1,4514%

Fonte: Elaborada pelo autor (2019).

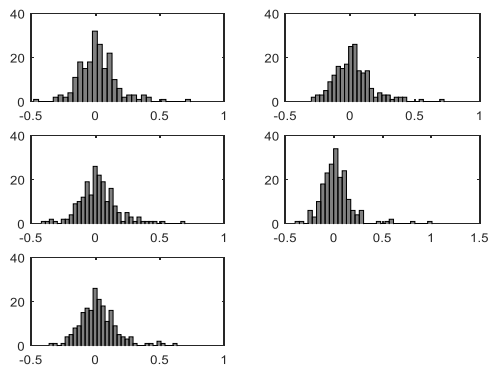
Da mesma forma, a Figura 6.11.a, Figura 6.11.b e Figura 6.11.c representam, respectivamente, as taxas de crescimento mensais para a DLSP real, IPCA, e CÂMBIO real; estas são também apresentadas no mesmo padrão descrito para os histogramas do GDP.

Figura 6.11 - Histogramas das realizações de Monte Carlo para as variáveis DLSP real, IPCA e CÂMBIO real, para cada período de previsão de 2019.1-2023.12. Lê-se os histogramas, de cima para baixo e, da esquerda para a direita, para as variáveis DLSP real, IPCA e CÂMBIO real



(a)

(b)



(c)

Fonte: Elaborada pelo autor (2019).

De forma similar às análises apresentadas anteriormente para as variáveis endógenas, os histogramas da Figura 6.11.a representam as evoluções das taxas de crescimento da dívida pública real relativa ao PIB de janeiro de 1998, estimadas com referências às duzentas realizações de Monte Carlo para os meses de 2019.1 a 2023.12. Percebe-se nestes histogramas as evoluções da taxa de crescimento da dívida devido às perturbações estocásticas introduzidas no processo de simulação em cada momento de tempo e em cada realização de Monte Carlo. Nesse processo, os valores possíveis para a taxa de crescimento relativa da dívida real, para cada mês, são condicionados às características do conjunto de inovações estocásticas introduzidas ao longo do processo de simulação. De acordo com os histogramas da Figura 6.11.a, os valores possíveis para a taxa de crescimento da dívida podem atingir

níveis diversos que se encontram inclusos em uma ampla banda de distribuição com significativas variabilidades positivas e negativas e para todos os meses de previsões de 2019.1 a 2023.12. Contudo, de acordo com esses histogramas, pode-se observar também que em termos médios (o valor mais provável de cada distribuição) a taxa de crescimento média prevista da dívida pública da economia é positiva para os quatro primeiros anos de previsão, 2019 a 2022 (como se observa na Tabela 6.6 abaixo). Estes resultados induzem que a dívida pública brasileira tende a crescer durante os quatro primeiros anos do período de previsão, porém com uma taxa menor para os anos 2020, 2021 e 2022 comparativamente ao ano 2019. No ano de 2023, a dívida pública brasileira deve uma taxa de crescimento médio negativo isso é uma queda comparativamente ao ano 2022. Todavia, estes resultados serão analisados posteriormente.

Na Figura 6.11.a no primeiro histograma que corresponde aos doze primeiros meses de 2019, as previsões das taxas de crescimento da dívida pública variam num intervalo de $[-0.3097; 0.6442]$. Estas taxas de crescimento foram determinadas considerando-se o valor da dívida pública real relativa ao PIB de 1998. Portanto, o primeiro histograma na parte superior à esquerda da Figura 6.11.a foi estruturado tendo como base todas as previsões de janeiro a dezembro de 2019 (sendo que cada mês conteve duzentas previsões). Em seguida, foi feito os mesmos procedimentos de cálculos feitos na previsão do PIB isso utilizando os dados da dívida pública em percentual do PIB. A Tabela 6.6 mostra o intervalo de variabilidade da taxa de crescimento da dívida, devidas às perturbações estocásticas (Figura 6.11.a), estimativas das taxas de crescimento médias mensais para cada ano e médias anuais correspondentes a cada ano de previsibilidade.

Tabela 6.6 - Características dos histogramas da taxa de crescimento da dívida pública relativa ao PIB de 1998 (Figura 6.11.a): intervalos de variabilidade do crescimento relativo, estimativas das taxas de crescimento médias mensais e médias anuais, correspondentes a cada ano de previsibilidade.

Intervalo de tempo do histograma	Intervalo de taxas de crescimento mensais	Taxa de crescimento média mensal (%)	Taxa de crescimento média anual (%)
2018.01-2018.12	$[-0.0589; 0.0613]$	0.5700%	7.0586%
2019.01-2019.12	$[-0.3097; 0.6442]$	0.5397%	6,6725%
2020.01-2020.12	$[-0.3303; 0.5201]$	0.0599%	0.7212%
2021.01-2021.12	$[-0.3731; 0.4025]$	0.1570%	1.9004%
2022.01-2022.12	$[-0.5169; 0.3912]$	0.0434%	0.5220%
2023.01-2023.12	$[-0.7092; 0.6329]$	-0.2157%	-2.5586%

Fonte: Elaborada pelo autor (2019).

O que se pode dizer é que, assim como o PIB, as taxas de crescimento anuais médias previstas para a dívida pública e para os próximos anos são completamente realizáveis, pois estamos diante de um cenário de crescimento econômico, taxas de juros decrescentes e diminuição dos gastos públicos. A depreciação da taxa de câmbio não afetou a dívida pública brasileira pelo fato que atualmente somente 10% desta dívida encontra-se em moeda estrangeira.

Na Figura 6.11.b acima são plotados os histogramas das previsões para as taxas de crescimento mensais da variável índice de inflação. Essas previsões são determinadas a partir de mesmo procedimento anteriormente detalhado para as variáveis PIB, Taxa Selic e dívida pública. Na Figura 6.11.b, observa-se que os valores possíveis para a taxa de crescimento do índice IPCA nominal, para cada mês, podem atingir níveis diversos com pequenas variabilidades, positivas ou negativas e para todos os meses de previsões de 2019.1 a 2023.12. Também, observa-se que, em termos médios (o valor mais provável de cada distribuição), a taxa de crescimento média do índice IPCA prevista apresenta só valores negativos para todo período analisado (como se observa na Tabela 6.7 abaixo). Estes resultados sugerem que o índice de inflação da economia brasileira para o período previsto tende a cair durante o período de previsão em termos de decrescimentos médios atingindo o sua maior queda em 2022 e esta queda deve diminuir em 2023 conforme se observa na Tabela 6.7.

Tabela 6.7 - Características dos histogramas da taxa de crescimento do índice de inflação (Figura 6.11.b): intervalos de variabilidade do crescimento relativo, estimativas das taxas de crescimento médias mensais e médias anuais, correspondentes a cada ano de previsibilidade.

Intervalo de tempo do histograma	Intervalo de taxas de crescimento mensais	Taxa de crescimento média mensal (%)	Taxa de crescimento média anual (%)
2018.01-2018.12	[-0.0092; 0.0086]	0,0025%	0,0299%
2019.01-2019.12	[-0.0906; 0.0915]	-0,1043%	-1,2444%
2020.01-2020.12	[-0.1144; 0.1129]	-0,3346%	-3,9421%
2021.01-2021.12	[-0.1612; 0.1522]	-0,6421%	-7,4388%
2022.01-2022.12	[-0.4320; 0.2472]	-1,2835%	-14,3599%
2023.01-2023.12	[-0.2914; 0.4532]	-0,6548%	-7,5807%

Fonte: Elaborada pelo autor (2019).

Até agora, como esperado as previsões mostram uma queda nas variáveis Índice da SELIC e Índice da inflação; esta relação positiva confirma a movimentação das variáveis pela equação de reação do Banco Central.

Por fim, os histogramas das previsões para as taxas de crescimento mensais da variável Câmbio real são plotados na Figura 6.11.c acima. Essas previsões são determinadas a partir de duzentas estimativas das realizações de Monte Carlo e para o período 2019.1-2023.12 conforme foram discutidos anteriormente para as variáveis PIB, Índice da SELIC, Dívida pública e IPCA.

Portanto, observa-se que, em termos médios (o valor mais provável de cada distribuição), a taxa de crescimento média do Câmbio real prevista apresenta só valores positivos para todo período analisado (como se observa na Tabela 6.8 abaixo). Estes resultados induzem que a economia brasileira para o período previsto tende a seguir uma desvalorização cambial durante o período de previsão em termos de decrescimentos médios atingindo o seu maior valor percentual em 2022. A desvalorização cambial deve ser mais vantajosa para a economia brasileira uma vez que esta desvalorização aumenta a demanda internacional dos bens locais. Ainda, vale lembrar que a economia brasileira tende a crescer nos próximos cinco anos (2019 a 2023); o que significa que será possível diminuir as importações (geralmente afetadas pela desvalorização cambial) e melhorar o saldo do balanço comercial.

Tabela 6.8 - Características dos histogramas da taxa de crescimento do Câmbio real (Figura 6.11.c): intervalos de variabilidade do crescimento relativo, estimativas das taxas de crescimento médias mensais e médias anuais, correspondentes a cada ano de previsibilidade.

Intervalo de tempo do histograma	Intervalo de taxas de crescimento mensais	Taxa de crescimento média mensal (%)	Taxa de crescimento média anual (%)
2018.01-2018.12	[-0.0881; 0.0650]	1,2402%	15,9407%
2019.01-2019.12	[-0.4535; 0.7166]	0,7530%	9,4197%
2020.01-2020.12	[-0.2994; 0.7190]	1.0855%	13.8325%
2021.01-2021.12	[-0.4004; 0.6891]	0.9890%	12.5349%
2022.01-2022.12	[-0.3643; 0.9864]	1.5576%	20.3785%
2023.01-2023.12	[-0.3590; 0.6308]	1.2567%	16.1673%

Fonte: Elaborada pelo autor (2019).

Observa-se que sobre efeitos de choques, o índice de inflação e o câmbio real apresentam relações negativas. Isso é, enquanto inflação tende a diminuir nos próximos anos, o câmbio tende a depreciar no mesmo momento. Esta relação entre a taxa de câmbio e política monetária foi abordada por Dornbusch, 1976. Isso é, quando o banco central adota uma política monetária contracionista (aumentando a taxa de juros) com o objetivo de diminuir a inflação, a taxa de câmbio se deprecia por um curto tempo e depois aprecia e está apreciação

cambial permanece por um bom tempo (*overshooting*). Esse processo de repasse cambial é chamado de *pass-through*. Aqui, os choques mostram que esta depreciação cambial pode permanecer mais tempo do que foi previsto por Dornbusch.

Em resumo, as Figuras 6.10 e 6.11 mostram que o futuro da economia brasileira depende muito do crescimento econômico, seja para garantir a diminuição da dívida pública, ou para aproveitar a depreciação cambial aumentando a sua competitividade no mercado internacional via ao aumento da exportação. Assim, a Tabela 6.4 consta dados referentes a 2018, estimados a partir dos dados empíricos utilizados no estudo. Observa-se que a taxa de crescimento média anual estimada trata-se de um índice de valor (IV), diferentemente das estimativas de crescimento da economia que se refere ao índice de Quantum, contabilizados pelo índice de Laspeyres de quantidade. Para calcular o índice de Quantum IQ usa-se a seguinte fórmula: $IQ = IV/DI$, onde DI é o deflator do PIB que foi de aproximadamente de 3.03%. Supondo que este deflator do PIB brasileiro mantenha-se igual ao longo do tempo da previsão, a taxa de crescimento anual estimada pelo índice de Quantum para os anos de

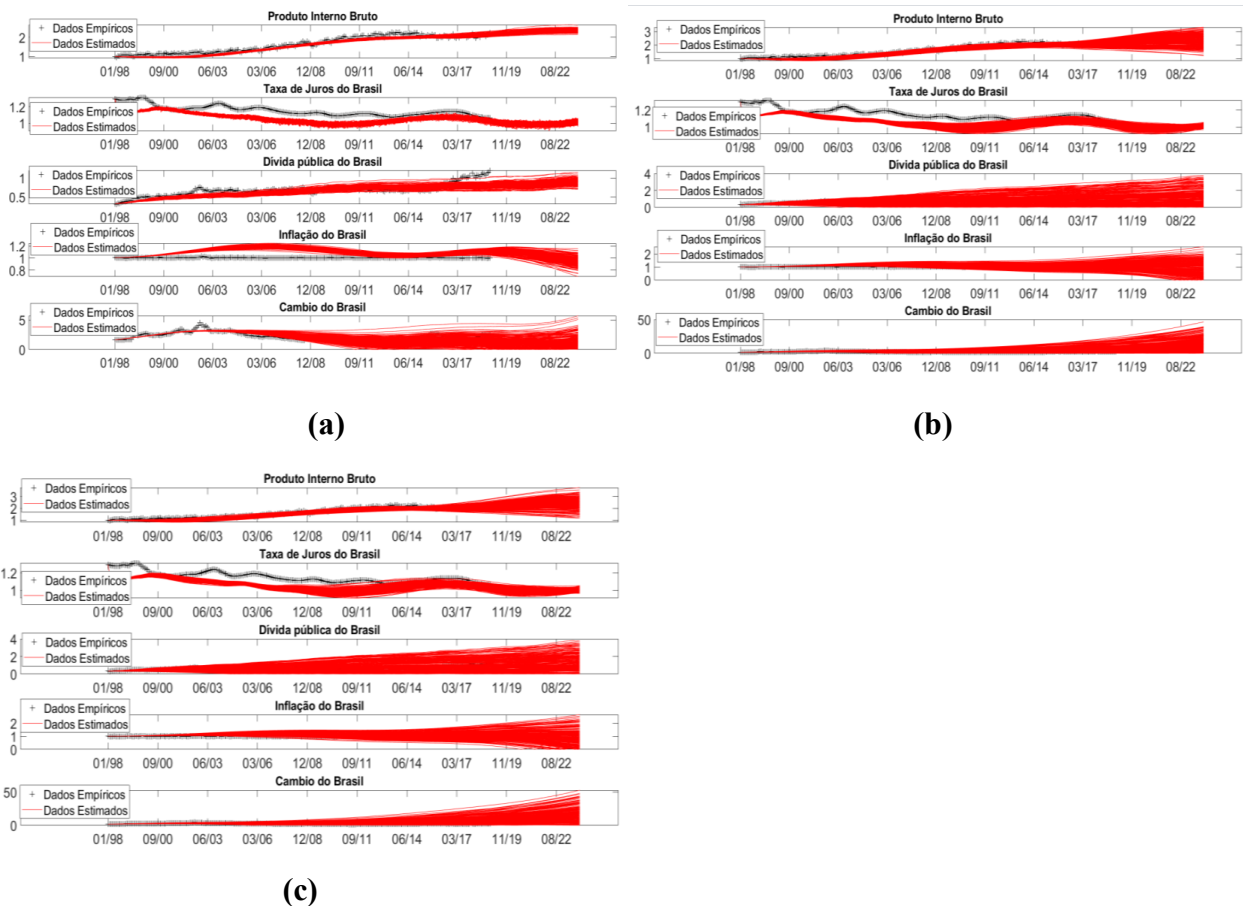
previsão deve ser $IQ \approx 1\%$. Isto é $\frac{\left(\frac{2.7456}{100}+1\right)}{\left(\frac{3.03}{100}+1\right)} = 0.997239638\%$ correspondente ao ano 2020

quando a economia deve conhecer a sua maior taxa de crescimento média anual (última coluna da Tabela 6.4). A ideia aqui é, corrigindo, pelo deflator implícito da economia, as taxas de crescimento estimadas do modelo para o tempo de previsão e mantendo a mesma ordem do DI no futuro, a taxa de crescimento da economia será próxima de 1%. Esta taxa de crescimento estimada do modelo se revela baixa se considerar os outros países competidores do Brasil no mercado internacional como a China (taxa de crescimento anual é mais que 6 %). Em resumo, pelas previsões aqui feitas, pode concluir que o futuro da economia brasileira para os cinco próximos anos é desencorajador.

A seguir, apresentaremos os resultados das evoluções no tempo das estimativas das realizações de Monte-Carlo, envolvendo o período de previsão, e as conclusões subjacentes. A Figura 6.12 representa, de forma conjunto, as estimativas das realizações de Monte Carlo, num total de duzentas, as quais foram submetidas às perturbações estocásticas, para todo o período de tempo envolvido no estudo; ou seja, envolvendo o período da amostra dos dados empíricos (de Janeiro de 1998 a Dezembro de 2018) e o período de previsão (de Janeiro de 2019 a Dezembro de 2023). A Figura 6.12.a representa as evoluções de duzentas realizações de Monte-Carlo, cujo sistema dinâmico econômico foi submetido às perturbações estocásticas somente nos coeficientes de impactos não controláveis, e a Figura 6.12.b representa as

evoluções de duzentas realizações de Monte-Carlo, para as quais o sistema dinâmico econômico foi submetido somente às perturbações estocásticas inseridas de forma aditiva. Finalmente, a Figura 6.12.c representa as evoluções de duzentas realizações de Monte-Carlo, cujo sistema dinâmico econômico foi submetido, simultaneamente, tanto às perturbações estocásticas nos parâmetros não controláveis como às perturbações estocásticas adicionadas nas variáveis endógenas.

Figura 6.12 - Evoluções das previsões das variáveis endógenas GDP real, índice SELIC nominal, Dívida Pública real, índice IPCA nominal e Câmbio real, para 200 realizações de Monte-Carlo: **(a)** perturbações estocásticas somente nos parâmetros não controláveis; **(b)** somente perturbações estocásticas adicionadas nas variáveis endógenas, e; **(c)** perturbações estocásticas nos parâmetros não controláveis, simultaneamente, com perturbações estocásticas adicionadas nas variáveis endógenas.



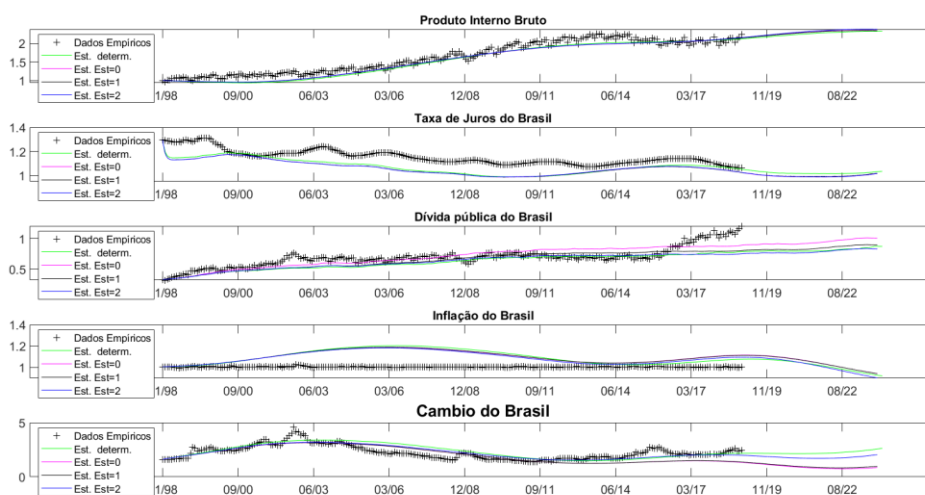
Fonte: Elaborada pelo autor (2019).

Um dos objetivos da análise a ser realizada aqui é destacar, visualmente, quais tipos de inovações estocásticas perturbam mais às evoluções das realizações de Monte-Carlo. Observamos na Figura 6.12.a os espalhamentos das soluções perturbadas por inovações

estocásticas somente nos parâmetros não controláveis. Verifica-se nesta figura que as variáveis mais sensíveis às perturbações estocásticas são o índice de Inflação e o Câmbio real. A Figura 6.12.a também enfatiza, visualmente, que as duzentas realizações de Monte-Carlo evoluem em uma banda mais restrita de valores da respectiva variável endógena que as bandas correspondentes aos dois outros casos de perturbações estocásticas analisados (Figuras 6.12.b e 6.12.c). Este comportamento é natural, tendo em vista que perturbações estocásticas nos parâmetros não controláveis causam menor instabilidade na solução do sistema dinâmico que as perturbações adicionais, limitando as bandas de variação estocásticas desses parâmetros introduzidas no sistema dinâmico. De acordo com esta observação, verificamos que as perturbações adicionais (Figura 6.12.b) causam maior espalhamento às estimativas das variáveis endógenas que aquelas obtidas por bandas de perturbações nos coeficientes não controláveis (Figura 6.12.a). Da mesma forma, observa-se que a soma das perturbações adicionais e perturbações nos parâmetros não controláveis (Figura 6.12.c) apresentam maior espalhamento às estimativas das variáveis endógenas que aquelas obtidas com as bandas de perturbações somente adicionais às variáveis (Figura 6.12.b); isto logicamente devido à soma dos dois tipos de perturbações estocásticas. Finalmente, podemos dizer que as perturbações adicionais, na forma de passeio aleatório causam espalhamentos generalizados em todas as bandas das variáveis endógenas (com menor ênfase para a variável índice SELIC), conforme se observa na Figura 6.12.b.

Também, deve ser enfatizado que as perturbações estocásticas foram introduzidas no sistema dinâmico econômico ao longo de todo período de análise (período da amostra dos dados empíricos e o período de previsão), de janeiro de 1998 a dezembro de 2023. Observa-se na Figura 6.12 que as bandas de espalhamentos estimadas para as variáveis endógenas evoluem ao longo do período de tempo dos dados de calibração (Jan/1998 a Dez/2018). Portanto, estes espalhamentos de valores de estimativas das variáveis endógenas são menores apesar das perturbações estocásticas introduzidas no sistema dinâmico, em qualquer momento de tempo, serem provenientes das mesmas gamas de perturbações estocásticas. Esse comportamento enfatiza que as perturbações em cada equação do sistema se interagem e evoluem para tendências estocásticas que se amplificam cada vez mais ao longo do tempo (devido aos processos de soma e multiplicação dos efeitos prévios) em cada simulação de Monte-Carlo aumentando as incertezas à medida que o tempo se passa e atingindo maiores níveis de perturbações nas estimativas nas regiões de previsão.

Figura 6.13 - Evoluções das médias geométricas, para 200 realizações de Monte-Carlo, das variáveis endógenas GDP real, índice SELIC nominal, Dívida Pública real, índice IPCA nominal e Câmbio real: **Est. Est.=0**, perturbações estocásticas somente nos parâmetros não controláveis; **Est. Est.=1**, somente perturbações estocásticas adicionadas nas variáveis endógenas; **Est. Est.=2**, perturbações estocásticas nos parâmetros não controláveis, simultaneamente, com perturbações estocásticas adicionadas nas variáveis endógenas, e; **Est. Determ.**, estimativas com o modelo determinístico.



Fonte: Elaborada pelo autor (2019).

A Figura 6.13 mostra as evoluções das médias geométricas para duzentas realizações de Monte-Carlo para as variáveis endógenas PIB real, índice SELIC nominal, Dívida Pública real, índice IPCA nominal e Câmbio real. A curva referente à *Est. Est. = 0* refere-se à evolução da média das simulações de Monte-Carlo envolvendo somente perturbações estocásticas nos parâmetros não controláveis. A curva referente à *Est. Est. = 1* refere-se à evolução da média das simulações de Monte-Carlo envolvendo somente perturbações estocásticas adicionadas nas variáveis endógenas. Da mesma forma, a curva referente à *Est. Est. = 2* refere-se à evolução da média das simulações de Monte-Carlo envolvendo perturbações estocásticas nos parâmetros não controláveis, simultaneamente, com perturbações estocásticas adicionadas nas variáveis endógenas. Finalmente, a curva referente à *Est. Determ.* refere-se à evolução da média das simulações de Monte-Carlo envolvendo as estimativas com o modelo determinístico. Observa-se que, visualmente, os casos envolvendo perturbações estocásticas nos parâmetros não controláveis (*Est. Est. = 1*), envolvendo perturbações estocásticas adicionadas nas variáveis endógenas (*Est. Est. = 0*) e envolvendo a junção das duas primeiras perturbações (*Est. Est. = 2*) seguem a mesma trajetória e são muito

próximos na Figura 6.13. Além disso, deve enfatizar que, visualmente, as três curvas em questão ($Est.Est. = 0$, $Est.Est. = 1$ e $Est.Est. = 2$) evoluem em uma banda muito restrita de valores, o que confirma as suas mesmas trajetórias no modelo estocástico. Portanto, pode concluir que os resultados do caso $Est.Est. = 2$ não devem ser muito diferentes dos dois outros casos ($Est.Est. = 0$ e $Est.Est. = 1$).

Até então, os choques introduzidos no modelo (3.29) não atingem os parâmetros controláveis, pois se espera que as variáveis relacionadas a estes parâmetros sejam menos sensíveis aos efeitos estocásticos. Portanto, com a finalidade de destacar estes efeitos, procuramos excitar, na próxima seção, estes parâmetros denominados controláveis por perturbações estocásticas e verificar como eles afetam as variáveis endógenas do modelo.

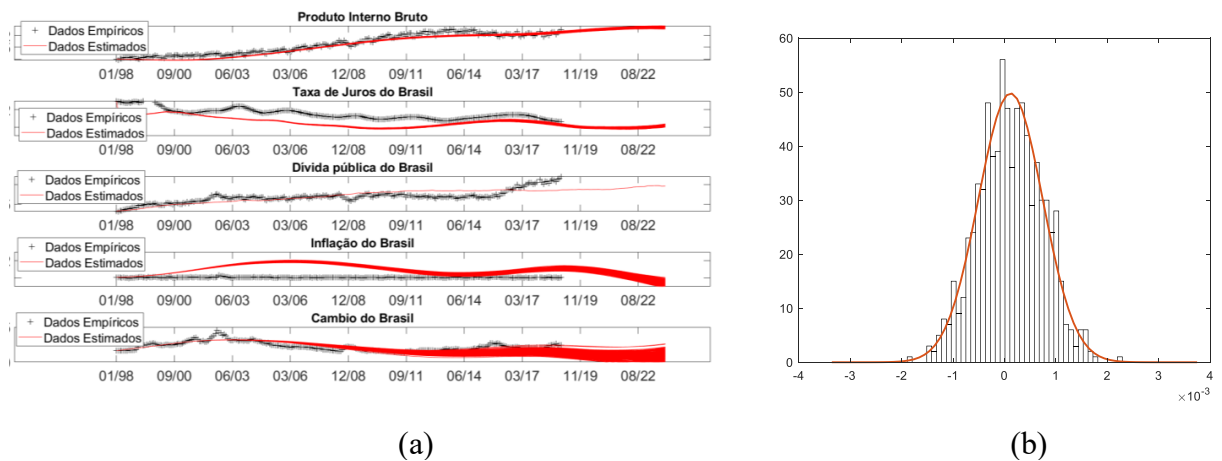
6.6 RESULTADOS DAS PERTURBAÇÕES ESTOCÁSTICAS INTRODUZIDAS NOS COEFICIENTES DE CONTROLE

Deve ser observado que se escolheu para solução do sistema dinâmico estocástico alguns coeficientes os quais foram caracterizados como parâmetros controláveis, subtendidos na formulação como fatores passíveis de controle por meio de políticas endógenas. Estes parâmetros são u_1 , u_2 , u_3 , u_4 e u_5 . O termo fatores de controle foi escolhido, pois, considera-se que os comportamentos destes parâmetros se encontram relacionados com variáveis macroeconômicas (e/ou monetárias) endógenas, variáveis que o governo e/ou o Banco Central podem estabelecer algum tipo de controle sobre elas. Portanto, espera-se que as variáveis relacionadas a estes parâmetros sejam menos sensíveis aos efeitos estocásticos. Cada um destes parâmetros encontra-se em uma única equação do sistema dinâmico. Portanto, com a finalidade de destacar estes efeitos, procuramos excitar estes parâmetros denominados controláveis por perturbações estocásticas e verificar como eles afetam as variáveis endógenas do modelo.

Iniciamos esta análise com o parâmetro u_1 que caracteriza o impacto do GDP sobre a variabilidade em si mesmo (com valor de calibração de $u_1 = 0,0001239$) que foi perturbado por uma banda estocástica bastante acentuada (33,89 vezes o valor de u_1), no intervalo de $[-0,0019; 0,0023]$, conforme se observa na Figura 6.14.b. A Figura 6.14.a ilustra as perturbações sofridas pelas variáveis endógenas do modelo, devido perturbações estocásticas no parâmetro u_1 . Perturbações neste parâmetro afetam, de forma significativa, somente a

variável câmbio real; e, com menor intensidade, o índice de inflação e o índice SELIC, como que se espera. Talvez, estes efeitos sejam um resultado da flexibilidade da desvalorização da moeda local com a baixa taxa de crescimento econômico. Portanto, estabelecer controle sobre u_1 permite identificar a evoluções das trajetórias das variáveis endógenas índice de Inflação e índice SELIC e, especialmente, a trajetória do câmbio real.

Figura 6.14 evoluções das soluções das variáveis endógenas do sistema dinâmico estocástico, Equação (3.29), devido a perturbações em u_1 : (a) Evolução das variáveis endógenas, devido às perturbações sobre u_1 , e; (b) histograma das distribuições das perturbações estocásticas sobre u_1 .



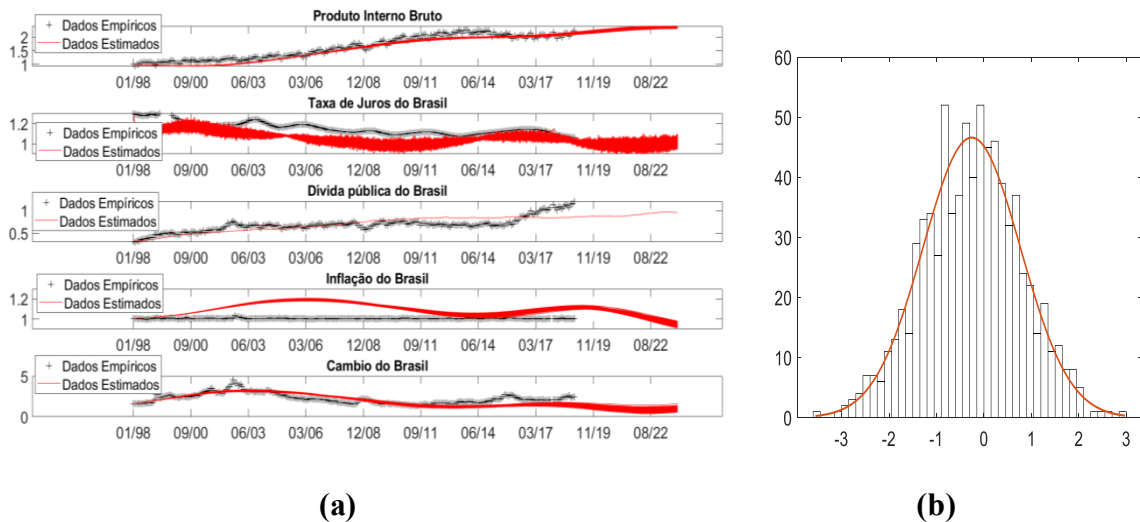
Fonte: Elaborada pelo autor (2019).

O parâmetro u_2 que caracteriza o coeficiente de impacto do hiato de produto sobre a taxa de juros SELIC nominal (com valor de calibração de $u_2 = -0,3393$), foi perturbado com uma ampla banda estocástica com variabilidade de 15,55 vezes o coeficiente de calibração u_2 (ou seja, no intervalo de $[-2,9772; 2,3007]$), conforme se observa na Figura 6.15.b. A Figura 6.15.a ilustra as perturbações sofridas pelas variáveis endógenas do modelo, devido às perturbações estocásticas no parâmetro u_2 . Perturbações neste parâmetro afetam de forma significativa, principalmente, a variável índice de SELIC nominal e com menor intensidade a variável câmbio real, índice de inflação e PIB real, como se espera; e, praticamente, não perturba a dívida pública. Neste caso, o controle deve ser estabelecido, de tal modo que o hiato de produto mantenha dentro de uma banda de controle, sem qualquer risco para as outras variáveis endógenas do modelo.

O parâmetro u_3 que se caracteriza como o impacto do diferencial de receita e despesa sobre a dívida (com valor de calibração de $u_3 = 0,0281$), foi perturbado com uma banda

estocástica, com variabilidade de seis vezes o valor de calibração de u_3 (ou seja, no intervalo de $[-0,0558; 0,1164]$), envolvendo bandas positivas e negativas, o que simula a possibilidade de saldos primários positivos e negativos (Figura 6.16.b). O parâmetro u_3 transmite os efeitos dos saldos fiscais primários sobre a variação da dívida pública, devidos às mudanças nos saldos primários fiscais. Portanto, é natural estabelecer controle sobre este parâmetro, com a finalidade de verificar a evolução da trajetória da dívida pública, em função das políticas fiscais adotadas para a economia.

Figura 6.15 - evoluções das soluções das variáveis endógenas do sistema dinâmico estocástico, Equação (3.29), devido a perturbações em u_2 : (a) Evolução das variáveis endógenas, devido às perturbações estocásticas sobre u_2 , e; (b) histograma das distribuições das perturbações estocásticas sobre u_2 .

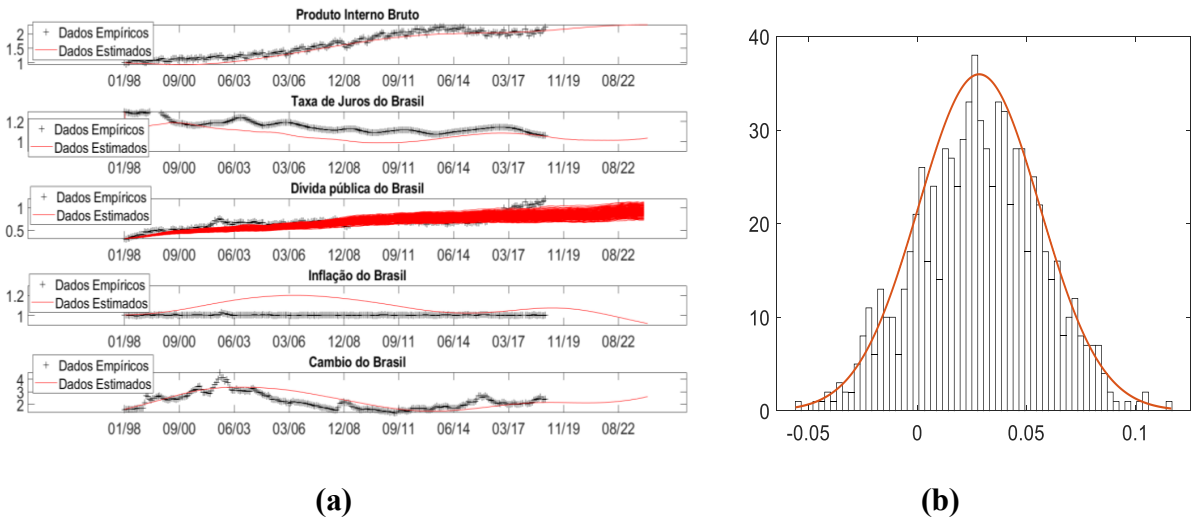


Fonte: Elaborada pelo autor (2019).

A Figura 6.16.b abaixo mostra que perturbações estocásticas em u_3 que afetam unicamente a evolução da dívida pública. Este resultado foi esperado uma vez que a Dívida Pública, conforme estruturado no modelo econômico dinâmico desse estudo, recebe efeitos das demais variáveis endógenas do modelo na determinação do impacto do montante de juros sobre a dívida (como da taxa de crescimento do PIB, da taxa de câmbio, da taxa SELIC, da taxa de Inflação interna, IPCA e taxa de juros internacional); contudo, nenhuma outra variável endógena está sendo impactada sobre ela. Também, deve ficar claro que testamos na segunda equação do modelo (Equação diferencial referente à variável dependente do Índice SELIC nominal), impondo a Dívida Pública como variável explicativa nessa equação, entretanto, nenhum efeito foi constatado da Dívida Pública sobre o Índice SELIC nominal. Por este

motivo esta variável foi retirada da estrutura da segunda equação do modelo, pois a dívida não afeta diretamente a estrutura da política econômica do país.

Figura 6.16 - evoluções das soluções das variáveis endógenas do sistema dinâmico estocástico, Equação (3.29), devido a perturbações em u_3 : (a) evolução das variáveis endógenas, devido às perturbações sobre u_3 , e; (b) histograma das distribuições das perturbações estocásticas sobre u_3 .



Fonte: Elaborada pelo autor (2019).

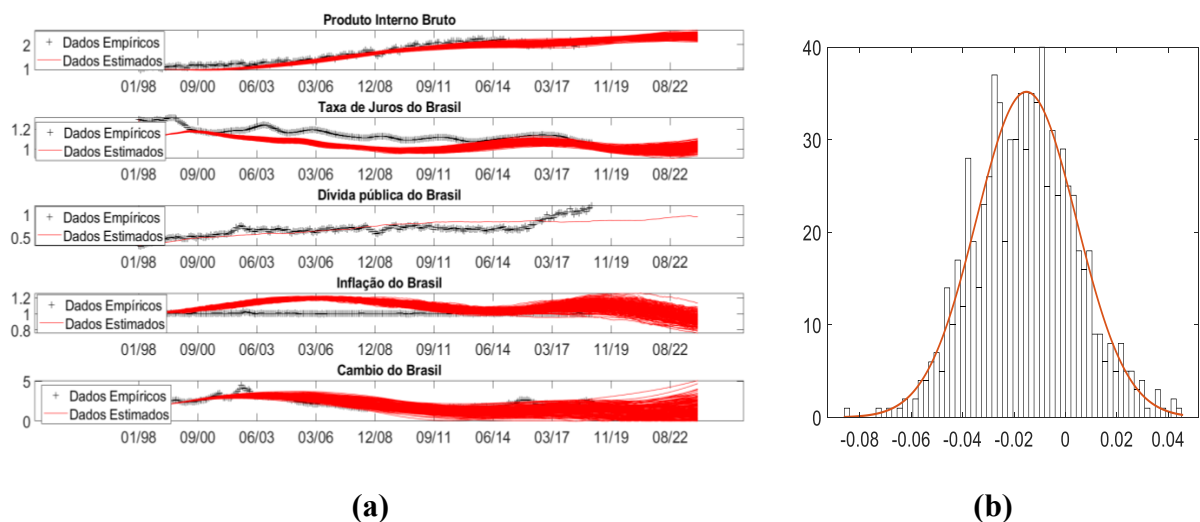
Outro fato a ser observado nessa análise do comportamento da dívida pública é que os saldos primários pouco afetam a evolução da dívida pública, seja ele positivo ou negativo, conforme se observa na Figura 6.16.a acima. Esse resultado pode fornecer argumentos para um embate econômico clássico entre correntes das escolas de pensamento econômico (heterodoxos e novos clássicos), com relação ao fato da necessidade de gerar saldos primários positivos. Os novos clássicos defendem a ideia de que saldos primários positivos contribuem para a amenização da dívida pública, enquanto os heterodoxos defendem a importância de intercambiar saldos primários positivos por investimentos públicos em diversas áreas. Os resultados da Figura 6.16.a demonstra que os saldos primários estão longe de ser uma variável que impõe impactos importantes à evolução da dívida pública com significantes efeitos no seu saldo. O combate do crescimento da dívida pública passa pela redução do impacto de juros da dívida sobre a dívida, o que está intrinsicamente relacionada ao controle da evolução das variáveis monetárias como inflação, taxas de juros interna e taxa de câmbio.

O parâmetro u_4 que se caracteriza como o impacto do hiato de produto sobre a inflação (com valor de calibração de $u_4 = -0,018310$) foi perturbado com uma banda estocástica seguindo uma distribuição normal, com variabilidade de 7,42 vezes u_4 calibrado, num

intervalo de variabilidade de $[-0,0852; 0,0507]$), conforme pode ser observado na Figura 6.17.b. As soluções do sistema perturbado através do parâmetro u_4 foram realizadas considerando a maior banda de inovações estocásticas para a qual o sistema permaneceu convergente. Foram realizadas 200 simulações de Monte Carlo.

Observa-se na Figura 6.17.a abaixo que as inovações estocásticas impostas sobre u_4 perturbaram as evoluções das demais variáveis endógenas do modelo dinâmico estocástico causando instabilidades nessas variáveis ao longo do tempo, com maior intensidade sobre o câmbio real e sobre o índice de inflação. Esses efeitos diminuem gradualmente para o índice SELIC e PIB; e com pouca intensidade sobre a dívida pública a um nível consideravelmente menor do que nas outras variáveis, porém com uma tendência estocástica que pode conduzi-la ao *default*. Estes efeitos são associados às inovações estocásticas que afetam a economia nacional via baixa taxa de crescimento. Esses efeitos propagam-se às demais variáveis macroeconômicas, via o canal inflação, com maior intensidade sobre o câmbio real, o índice SELIC e o PIB. Por isso, o controle dos efeitos do hiato de produto é importante, e permite observar o quanto as variáveis endógenas do modelo podem ser afetadas pelo crescimento econômico, acima ou abaixo do produto potencial.

Figura 6.17 - evoluções das soluções das variáveis endógenas do sistema dinâmico estocástico, Equação (3.29), devido a perturbações em u_4 : (a) evolução das variáveis endógenas, devido às perturbações sobre u_4 , e; (b) histograma das distribuições das perturbações estocásticas sobre u_4 .

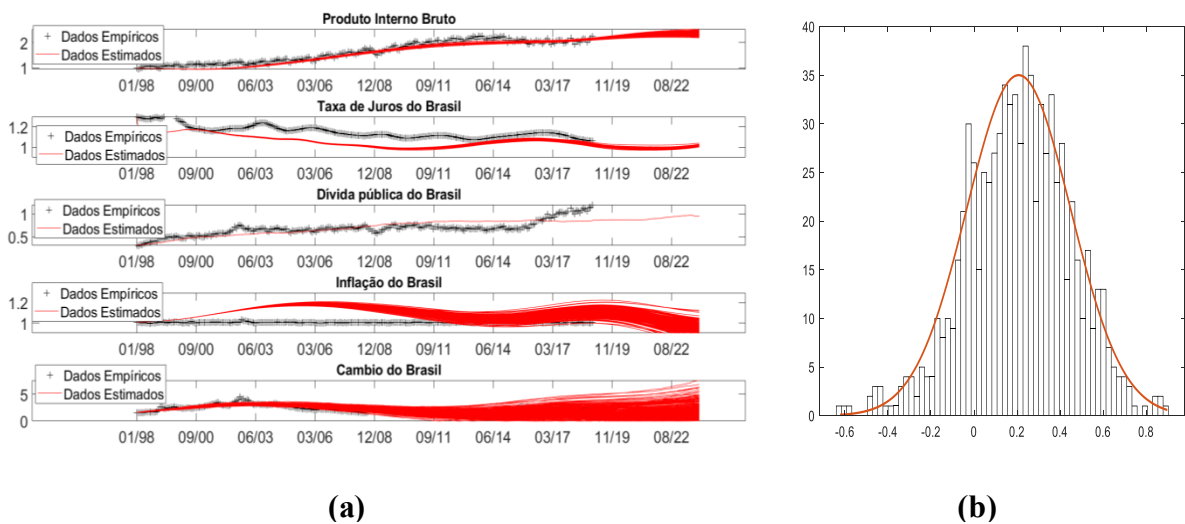


Fonte: Elaborada pelo autor (2019)

Do mesmo modo, o parâmetro u_5 que caracteriza o coeficiente de impacto da taxa de juros real sobre o câmbio real (com valor de calibração de $u_5 = 0,2517$) foi perturbado com

uma banda estocástica com variabilidade igual seis vezes maior que u_5 (ou seja, no intervalo de $[-0,6223; 0,8976]$, conforme se observa na Figura 6.18.b. Os efeitos estocásticos sobre este parâmetro também perturbaram as evoluções das demais variáveis endógenas do modelo dinâmico estocástico, (porém, com uma intensidade bastante pequena sobre a dívida pública real), causando instabilidade sobre essas variáveis ao longo do tempo. Por isso, conjectura-se que o índice de juros real (outra variável explicativa da variabilidade do câmbio real) apresenta um efeito bem mais acentuado sobre a variabilidade do câmbio real, diminuído a importância do impacto do câmbio real sobre o si mesmo. Mas, o controle de u_5 é importante, e deve ser estabelecido com a finalidade de verificar se não há alguma contaminação sistêmica do câmbio real, devido a efeitos de contágio (por exemplo, verificar se diante de situações em que o índice de juros real é mantido constante, o câmbio real mantém dentro de uma banda aceitável para a flutuação cambial).

Figura 6.18 - evoluções das soluções das variáveis endógenas do sistema dinâmico estocástico, Equação (3.29), devido a perturbações em u_5 : (a) evolução das variáveis endógenas, devido às perturbações sobre u_5 , e; (b) histograma das distribuições das perturbações estocásticas sobre u_5 .



Fonte: Elaborada pelo autor (2019)

Considerando que neste capítulo as características de um modelo determinístico e as soluções do modelo dinâmico perturbado estocasticamente permitiram obter soluções que evoluem dentro de um contexto completamente perturbado, mas sem qualquer possibilidade de estabelecer algum controle sistemático na evolução do processo, a não ser por tentativas de

acerto e erro, o próximo capítulo fará o uso da lógica *Fuzzy* com o objetivo de estabelecer alguns controles na evolução do processo estocástico estudado.

7 LÓGICA FUZZY

Na calibração do modelo determinístico, assumem-se constantes os efeitos de todos os termos de controle, isso para facilitar que o modelo se ajuste aos dados reais. Porém, a invariância destes termos de controle torna o comportamento do sistema rígido, o que pode não garantir a habilidade de controle do sistema sob distúrbios estocásticos (CHEN; LIN, 2011).

Considerando essa característica de um modelo determinístico e considerando que as soluções do modelo dinâmico perturbado estocasticamente, como no caso analisado no capítulo anterior, permite obter soluções que evoluem dentro de um contexto completamente perturbado (similar ao mundo econômico real), mas sem qualquer possibilidade de estabelecer algum controle sistemático na evolução do processo, a não ser que seja por tentativas de acerto e erro, no presente capítulo é feito o uso da lógica *Fuzzy* com o objetivo de estabelecer alguns controles na evolução do processo estocástico estudado.

Diferentemente, o modelo *Fuzzy* aplicado no sistema econômico dinâmico deste estudo tem como finalidade estabelecer um controle do sistema sob distúrbios estocásticos. Numa situação econômica real, a economia de um determinado país se encontra inserida no sistema econômico internacional e afetada diretamente por distúrbios estocásticos tanto devido à economia internacional e/ou devido à economia doméstica; seja por meio de crises sociais, econômicas e/ou políticas.

A estruturação de um modelo *Fuzzy* é estabelecida por meio de vários procedimentos, os quais já foram descritos em detalhes na Seção 5.3 que reenfatizaremos abaixo:

- a) O primeiro passo é transformar o sistema determinístico em um sistema estocástico, introduziu-se três tipos de efeitos aleatórios que como já descrito, deve-se introduzir as seguintes perturbações estocásticas no sistema:
 - o Os impactos sobre os níveis dos parâmetros não controláveis do modelo, por meio de distribuições normais, tendo como tendências os valores dos parâmetros calibrados e como dispersão os desvios padrões dos parâmetros que induzem choques no modelo envolvendo as máximas bandas de perturbações estocásticas admissíveis para a obtenção de soluções convergentes; isto é, $\omega_1 = 0.6|\gamma_1|$, $\omega_2 = 0.9|\gamma_2|$, $\omega_3 = 0.3|\mu_1|$, $\omega_4 = 0.3|\mu_2|$, $\omega_5 = 0.10|\sigma_1|$, $\omega_6 = 0.13|\sigma_2|$, $\omega_7 = 0.6|\delta_1|$, $\omega_8 = 0.25|\theta_1|$, $\omega_9 = 0.3|\theta_2|$;

- o Choques aditivos nas variáveis endógenas, $\{v_1(t), v_2(t), v_3(t), v_4(t), v_5(t)\}$ que se caracterizam como perturbações adicionais nas variáveis endógenas $\{PIB(t), SELIC(t), DLSP(t), IPCA(t), Câmbio(t)\}$, por meio de passeio aleatório unidimensional (1D), gerados por saltos uniformemente distribuídos (Grimmett e Stirzaker, 2001), seguindo uma variância de dispersão unitária.
- b) Definir trajetórias de evolução futuras de referência para cada variável endógena do modelo econômico dinâmico em estudo, considerado como o processo ótimo do comportamento para a economia no futuro. Esse modelo de referência da dinâmica da economia é estabelecido seguindo as premissas desejadas pelos gestores de política econômica. No processo *Fuzzy* é utilizada para gerar uma dinâmica controlada para o sistema macroeconômico da economia, no caso, a economia brasileira. Estas trajetórias serão detalhadas posteriormente;
- c) No modelo *Fuzzy* deve-se definir as condições iniciais para as variáveis endógenas do modelo dinâmico do sistema, no processo de previsão futura. Estas condições iniciais são assumidas como sendo os últimos valores das variáveis endógenas dos dados empíricos da amostra, correspondente a 2018.12. A partir dessas condições iniciais e dos menores e maiores valores assumidos para cada variável endógena, estabelece-se para cada variável endógena um conjunto relativamente grande de valores randômicos, envolvendo para cada variável um intervalo com limites $[\min - \text{range}, \max + \text{range}]$, onde *min* e *max* são, respectivamente, o menor e o maior valor compreendido na curva de previsão de cada variável endógena, e *range* é um valor assumido como sendo da ordem de 5% do maior valor de cada curva de previsão de cada variável endógena do sistema dinâmico. Nesse processo de geração de dados randômicos, foi gerado um total de 3000 pontos para cada intervalo especificado para cada variável; ou seja, definido por $[\min - \text{range}, \max + \text{range}]$. A função *unifrnd* do MATLAB 2019a gera valores randômicos a partir de distribuições uniformes contínuas, entre pontos de extremos, respectivamente; ou seja, inferior ao valor máximo e superior ao mínimo, especificados no intervalo definido anteriormente;
- d) Define-se um conjunto clássico de funções de pertinência do conjunto *Fuzzy* que melhor adapte ao problema em estudo no processo de mapeamento dos elementos estocásticos do intervalo de cada variável, $[\min - \text{range}, \max + \text{range}]$, no universo de discurso do conjunto binário $\{0;1\}$. Nesse processo de mapeamento do discurso

binário necessita-se definir um limiar rigoroso para separar elementos em conjuntos, o que é feito via um conjunto de funções de pertinência. Assim, precisa-se escolher o conjunto de funções de pertinência adequado para o problema em estudo. O Matlab 2019a estrutura onze tipos de funções de pertinência. Essas funções são, por sua vez, construídas a partir de várias funções básicas, como destacadas na revisão de literatura (Seção (2.3)). Nesse estudo, as funções de pertinências que melhor se adaptaram na estrutura do problema foram a seguinte sequência de funções: *zmf-trimf-smf* (a função *zmf* é uma curva polinomial assimétrica aberta à esquerda, a função *smf* é a imagem espelhada da função *zmf* que se abre para a direita e *trimf* é uma função de pertinência triangular. Essa sequência de funções de pertinência deve ser repetida numa sequência de no mínimo seis vezes, para que o modelo *Fuzzy* seja ajustado. Quanto maior o número de repetições das sequencias de funções de pertinências, melhor será o ajuste do modelo *Fuzzy*, no entanto, para sequências maiores que seis, o processo de cálculo torna extremamente longo e um excessivo uso de memória, o que inviabiliza o uso de repetições maior que seis para computadores com 16 gbytes de memória;

- e) O conjunto binário, juntamente com os dados de valores estocásticos gerados no intervalo $[\min - \text{range}, \max + \text{range}]$ permitem estruturar uma matriz, via funções *kron* e *pinv* do MATLAB 2019a e classificar os seus elementos, dado uma tolerância, em submatrizes que se caracterizam como singulares e naquelas que permitem multi-soluções; e, conseqüentemente, estabelecer através desse último conjunto o processo de otimização da solução;
- f) Nesse passo, estima-se o sistema econômico dinâmico *Fuzzy* para a trajetória de previsão, via uma solução pelo processo de integração de Runge-Kutta de sexta ordem, utilizando-se incrementos de tempo bastante pequenos da ordem de 10^{-8} ;
- g) Finalmente, o modelo *Fuzzy* é otimizado tendo como base o ajuste dos parâmetros controláveis do problema, o vetor $u(t)$, no seu processo de evolução ao longo das trajetórias de previsão, de forma a adequá-los às necessidades exigidas para tornar possível à implementação da política de previsão estabelecida para o problema.

É importante ressaltar que, mesmo com um conjunto considerável de perturbações afetando os parâmetros controláveis e não controláveis e com inovações estocásticas mudando os cursos de evoluções das variáveis endógenas, por meio de efeitos estocásticos evoluindo como um passeio aleatório, ainda é possível atingir determinadas demandas da sociedade.

Para tanto, é preciso definir um modelo robusto de controle da trajetória de referência a partir de uma perspectiva da teoria dos jogos dinâmicos.

Este modelo robusto será resolvido por uma abordagem de jogo estocástico *Fuzzy*. No entanto, para resolver este modelo é preciso definir as curvas de referência que levam em consideração os desejos da sociedade e, ao mesmo tempo, deve-se estar ciente de que esses desejos sejam realistas, considerando o período de tempo estabelecido no estudo. A finalidade da *Inferência Fuzzy* é relacionar as possíveis variáveis entre si através de regras pré-estabelecidas, cumprindo assim com os objetivos do algoritmo. Segundo Von Altrock (1996), pode-se separar a fase de Inferência *Fuzzy* em dois componentes, denominados de Agregação e Composição (veja o diagrama esquematizado na Figura 2.3). A Agregação diz respeito à chamada parcela “*Se*” das regras que vão reger o processo de inferência, e a Composição, refere-se à parcela “*Então*” de conjunto de regras, assim chamadas de “*Se-Então*”. Tais componentes de Agregação e Composição compõem o chamado processo de inferência lógica *Fuzzy*, controlando as relações entre variáveis linguísticas através de seus respectivos operadores lógicos.

Este capítulo é dividido em quatro seções: na primeira seção, dois modelos de referência serão elaborados. Na segunda seção é apresentado o processo de otimização do modelo da lógica *Fuzzy* para os dois casos envolvendo os respectivos modelos de referências, na terceira subseção, será apresentada a trajetória de controle robusto MINIMAX e por fim, um resumo dos resultados do processo da lógica *Fuzzy* é apresentado na quarta seção.

7.1 MODELO DE REFERÊNCIA

Por meio de um processo de controle via lógica *Fuzzy*, será estabelecido um processo de controle ótimo do comportamento da economia no futuro. Para tanto, um modelo de referência para a dinâmica da economia será estabelecido, seguindo as premissas desejadas pelos gestores de política econômica, para gerar uma dinâmica controlada para o sistema macroeconômico da economia brasileira. Para que o sistema estocástico siga a trajetória desejada do modelo de referência, na presença de choques, um modelo robusto de referência de trajetória de controle, com a finalidade de gerenciar os recursos disponíveis, deverá ser definido. Nessa linha, podemos seguir Kirsanova et al. (2006) e estruturar alguns modelos de referência a serem otimizados pela técnica de jogos *Fuzzy*, considerando os seguintes

elementos: (i) se as autoridades fiscais e monetárias forem benevolentes e cooperando entre si no estabelecimento de seus instrumentos de política macroeconômica. Nesse caso, à resposta a um choque inflacionário será aquela em que as autoridades fiscais deixam a política monetária desempenhar quase todo o peso da estabilização da economia diante do choque. A dívida será controlada pela política fiscal, mas apenas lentamente; (ii) o mesmo resultado do primeiro caso ocorrerá se a autoridade fiscal puder atuar como líder de Stackelberg, mesmo se a autoridade fiscal desejar obter um aumento de produção; (iii) se a autoridade fiscal jogar contra a autoridade monetária em um jogo de Nash, então o bem-estar social será prejudicado e, possivelmente, muito prejudicado se a autoridade fiscal desejar obter um aumento de produção.

Do ponto de vista da teoria de jogos dinâmicos, pode se considerar a presença de dois jogadores. O primeiro jogador seria a existência dos choques (nos parâmetros e equações) e a incerteza nas condições iniciais que maximiza a trajetória de erro. O segundo jogador seria os controles do gerenciamento de recursos que minimizam a trajetória de erro. Este problema de jogo estocástico permite alcançar uma trajetória de referência pré-estabelecida, apesar dos efeitos gerados pela presença dos choques e incerteza nas condições iniciais, por meio de um processo de obtenção de um conjunto de ótimos locais para cada variável endógena do sistema. Uma maneira eficiente de encontrar esta solução é utilizar o algoritmo *Fuzzy* de Takagi-Sugeno (TS).

Através desse procedimento, podemos estimar a evolução ao longo do tempo dos parâmetros de controle do Sistema (3.33), dado um conjunto de perturbações estocásticas nos coeficientes não controláveis, e adições de inovações estocásticas em cada equação do sistema. As trajetórias estocásticas ao longo do tempo, no período futuro, para os fatores de controle estabelecem os custos operacionais a serem introduzidas no processo econômico, para atingir as metas pré-estabelecidas. Portanto, nesta seção, serão estabelecidos alguns procedimentos de como serão determinadas as trajetórias futuras de previsão de comportamentos da economia brasileira, para as variáveis como PIB real, o índice SELIC, a Dívida Pública real, o índice IPCA e o câmbio real.

7.1.1 A teoria dos jogos na interação das variáveis fiscais e monetárias: regime de cooperação mútua entre tomadores de decisões

Utilizaremos a teoria dos jogos para estudar as interações entre as políticas fiscal e monetária, e identificar três regimes diferentes que resultam em três diferentes formas desta

interação entre as duas autoridades (de políticas fiscal e monetária) frente a choques. Portanto, a seguir, será considerado o primeiro caso que se enquadra adequadamente no contexto deste trabalho com a finalidade de estabelecer as evoluções futuras das variáveis endógenas no processo de otimização via lógica *Fuzzy*.

Neste regime, a política monetária ótima surge do jogo coordenado pela política fiscal por meio de uma regra convencional de Taylor. A política fiscal ótima controla a dívida pública de forma a torná-la estável. Isto é, a estabilização da economia é essencialmente conduzida pela política monetária. Nesse contexto, a equidade deve-se, em parte, à perfeita substituição entre política fiscal e política monetária no controle do produto e da inflação. Mesmo depois de um choque inflacionário, a tarefa de estabilização da economia deve ser executada pelas políticas monetárias. Por isso, o efeito da política fiscal no equilíbrio da inflação e da dívida tem um peso muito pequeno.

Considerando que as autoridades fiscais e monetárias fixam os seguintes objetivos (anuais) para a economia brasileira para os próximos sessenta meses: um aumento de 2.5% do PIB real anual brasileiro, cr_a (ou seja, um crescimento econômico de 2.5% em relação ao PIB do dezembro de 2018). Esta previsão foi conservadora, uma vez que alguns analistas econômicos previram uma taxa de crescimento do PIB brasileiro na ordem de 2.8% para o ano 2019 em relação ao ano 2018. Já que este estudo envolve dados empíricos mensais, portanto, a previsão para o modelo deverá ser mensal. Assim, deve-se proceder a transformação da taxa de crescimento anual, cr_a , para mensal, cr_m , usando a seguinte fórmula:

$$(1 + cr_m)^{12} = (1 + cr_a)^1 \rightarrow cr_m = (1 + cr_a)^{1/12} - 1 \rightarrow$$

$$cr_m = (1 + 0,025)^{1/12} - 1 = 1,002059 - 1 = 0,002059 = 0,2059\% \quad (7.1)$$

Assim, o PIB que determina o valor do produto interno bruto de cada mês de previsão pode ser estimado como segue:

$$X_{t+1} = X_t + cr_m \cdot X_t \quad \text{ou} \quad PIB_{t+1} = PIB_t + cr_m \cdot PIB_t \quad (7.2)$$

A equação (7.1) e (7.2) serão usadas para a previsão de outras variáveis tais como: a taxa de juros norte americano, a taxa de juros SELIC, a taxa de juros de longo prazo do Brasil e a dívida pública. No caso em que uma variável é mantida constante no período de previsão, a sua taxa de variação ao longo deste período é nula, ou seja, na equação (7.2), $X_{t+1} = X_t$. É importante ressaltar que neste jogo cooperativo, embora a política monetária possa influenciar a acumulação da dívida, as autoridades monetárias devem deixar às autoridades fiscais a responsabilidade de estabilizar a dívida, com a finalidade de evitar a passividade da política monetária. Assim, os formuladores de política monetária reagem pouco à dívida, deixando a cargo das autoridades fiscais, o encargo de cuidar desta tarefa. Como a estabilização fiscal da dívida torna-se cara, a autoridade fiscal deixa a dívida acumular até o limite da solvabilidade, e apenas mantendo o seu nível estacionário.

Supondo que as autoridades fiscais mantêm a dívida pública constante para o período de previsão; isto é, a dívida é mantida igual à do último mês da base de dados empíricos (dezembro de 2018). Ainda, pressupõe-se que, de acordo com a realidade brasileira, aproximadamente 90% da dívida pública brasileira são interna e somente aproximadamente 10% externa. Pode-se expressar a equação para o futuro da dívida (B_{t+1}), como segue:

$$[0.9(1 + i_t) + 0.1(1 + \bar{i}_t E_t)]B_{t+1}/PIB_{t+1} = B_t \quad (7.3)$$

onde B_t é a dívida pública do último mês de estudo, E_t é o cambio nominal, i_t é a taxa de juros nominal (SELIC), \bar{i}_t a taxa de juros internacional, no caso deste estudo é a taxa norte americana (USA).

Segundo Cafiso (2012) a evolução da dívida no tempo pode ser expressa da seguinte forma:

$$B_{t+1} - B_t = \theta_1 i_t B_t + \theta_2 [\bar{i}_t + \epsilon_t + \bar{i}_t \epsilon_t] B_t - W_t - S_t \quad (7.4)$$

Na equação de cima $\epsilon_t = \frac{E_{t+1} - E_t}{E_t}$ é a taxa de depreciação da moeda local, no caso deste estudo a taxa de depreciação do Real. Desta forma, a equação (7.4) torna:

$$B_{t+1} - B_t = \theta_1 i_t B_t + \theta_2 \left[\bar{i}_t + \frac{E_{t+1} - E_t}{E_t} + \bar{i}_t \frac{E_{t+1} - E_t}{E_t} \right] B_t - W_t - S_t \rightarrow$$

$$B_{t+1} - B_t - \left[\theta_1 i_t + \theta_2 \left[\bar{i}_t + \frac{E_{t+1} - E_t}{E_t} + \bar{i}_t \frac{E_{t+1} - E_t}{E_t} \right] \right] B_t = -W_t - S_t \rightarrow$$

$$B_{t+1} - \left[1 + \theta_1 i_t + \theta_2 \left[\bar{i}_t + \frac{E_{t+1} - E_t}{E_t} + \bar{i}_t \frac{E_{t+1} - E_t}{E_t} \right] \right] B_t = -W_t - S_t \quad (7.5)$$

A dívida se mante constante, se as autoridades fiscais abrirem mão do superávit primário e as autoridades monetárias mantiverem a geração da renda por senhoriagem nos níveis atuais. Isto induz que essas duas variáveis sejam mantidas constantes ao longo do período de previsão. Neste caso, supondo que o saldo primário seja da ordem de -0.5% do PIB, e que a senhoriagem seja de 0.5% do PIB. É importante ressaltar que esta renda por senhoriagem não é criada com o objetivo de financiar a dívida pública, uma vez que o Banco Central deseja controlar a inflação próxima à meta estabelecida. Portanto, com a suposição de que a dívida se mante constante $B_{t+1} = B_t$ et $-W_t - S_t = 0$ conduz a equação (7.4) torna:

$$B_{t+1} - \left[1 + \theta_1 i_t + \theta_2 \left[\bar{i}_t + \frac{E_{t+1} - E_t}{E_t} + \bar{i}_t \frac{E_{t+1} - E_t}{E_t} \right] \right] B_{t+1} = 0 \quad (7.6)$$

Para que a igualdade da equação (7.6) se manter, a seguinte relação deve prevalecer:

$$1 + \theta_1 i_t + \theta_2 \left[\bar{i}_t + \frac{E_{t+1} - E_t}{E_t} + \bar{i}_t \frac{E_{t+1} - E_t}{E_t} \right] = 1 \quad (7.7)$$

O que implica:

$$\theta_1 i_t + \theta_2 \left[\bar{i}_t + \frac{E_{t+1} - E_t}{E_t} + \bar{i}_t \frac{E_{t+1} - E_t}{E_t} \right] = 0 \rightarrow \theta_1 i_t = -\theta_2 \left[\bar{i}_t + \frac{E_{t+1} - E_t}{E_t} + \bar{i}_t \frac{E_{t+1} - E_t}{E_t} \right] \quad (7.8)$$

Relembrando que θ_1 é a parcela da dívida em moeda local, θ_2 é a parcela da dívida em moeda estrangeira, consequentemente, $\theta_1 = 1 - \theta_2$. Portanto,

$$\theta_1 i_t = -(1 - \theta_1) \left[\bar{i}_t + \frac{E_{t+1} - E_t}{E_t} + \bar{i}_t \frac{E_{t+1} - E_t}{E_t} \right] \quad (7.9)$$

7.1.1.1 CASO 1: as duas autoridades decidam manter o câmbio nominal constante

Um primeiro caso a ser analisado que denominamos de *CASO 1*, as duas autoridades (monetária e fiscal) decidam manter o câmbio nominal constante (por exemplo, em R\$ 3,89 reais, o valor do câmbio de dezembro de 2018), ao longo do período de previsão. Neste caso, a taxa de depreciação da moeda local seria nula, isto é $\epsilon_t = \frac{E_{t+1} - E_t}{E_t} = 0$, e a equação (7.9) torna:

$$\theta_1 i_t = -(1 - \theta_1) \bar{i}_t \quad (7.10)$$

No caso da economia brasileira, assumimos que $\theta_1 = 0.9$, conseqüentemente, de acordo com a Equação (7.10), a taxa de juros de curto prazo (a taxa SELIC) deve diminuir na seguinte proporção da taxa de juros dos US, \bar{i}_t :

$$i_t = \frac{-0.1 \bar{i}_t}{0.9} \quad (7.11)$$

Suponha-se que os gestores de política econômica brasileira, através de análise da estrutura da política do Fed (*Federal Reserve Bank of US*), presumem que o Fed encontra-se assumindo uma política não expansionista, reduzindo, em pequenas frações, a taxa de juros anual norte americano. Com base nesta informação e na perspectiva da estrutura da economia mundial, os gestores da política econômica brasileira conjectura que nos próximos cinco anos, a taxa de juros dos US devem ter uma expansão de aproximadamente de 2.25% para 2.56%. Portanto, esses gestores de política econômica brasileira, através do COPOM (Comitê de Política Monetária) decidem usar essas informações, e considera-las como base para definir a evolução da taxa de juros SELIC para os próximos cinco anos (60 meses), e reduzir a taxa SELIC proporcionalmente.

Neste caso, transformando a diferença da taxa de crescimento de juros dos US, entre 0,0225 (2,25%) e 0,0256 (2.56%), para uma distribuição mensal (apesar de que este impacto ocorra em forma de saltos), considera-se uma aproximação gradual, como segue que:

$$(1 + \bar{i})^{12} = (1 + \bar{i})^1 \rightarrow \bar{i}_m = (1 + \bar{i}_a)^{1/12} - 1 = (1 + 0,0256 - 0,0225)^{1/12} - 1 = 1,000258 - 1 \rightarrow$$

$$\bar{i}_m = 0,000258 = 0,0258\% \quad (7.12)$$

De acordo com as relações (7.11) e (7.12), a taxa juros mensal de evolução da Selic, dá-se de forma proporcional à taxa de juros dos US, como segue:

$$i_t = \frac{-0.1\bar{i}_t}{0.9} = -0,1111\bar{i}_t = -0,1111 \times 0,000258 = -0,00002866 = -0,002866\% \quad (7.13)$$

Para este caso (*CASO I*), o câmbio real deve ser mantido estabilizado, no patamar de dezembro de 2018, para que este não influencie a evolução da taxa de juros SELIC e a evolução da taxa de inflação.

Agora, supondo que as autoridades brasileira, monetária e fiscal, cooperem para ter um hiato de produto com oscilações pequenas; ou seja, aumentar ou diminuir a produção do PIB efetivo para valores próximos ao do PIB potencial. Uma oscilação menor da produção (por conseguinte, do hiato de produto) irá diminuir o seu impacto sobre a inflação, ou torná-la constante, em termos médios; isto devido à relação negativa entre o hiato de produto e a inflação, definida na seguinte curva de Philips:

$$\pi_{t+1} = \pi_t^e + u_1(y - \bar{y})_t \quad (7.14)$$

Neste caso, ao definir-se a evolução do hiato do produto, da taxa de câmbio, da taxa de juros, poderemos obter a taxa de inflação, dado que as autoridades monetárias decidem estabilizar a inflação próxima ao centro da meta (4.25%), para os 60 próximos meses. A inflação estável deve incentivar o consumo da família e, portanto, um aumento da demanda agregada.

Para a estimação da equação (7.14), será definida, a seguir, uma equação para o hiato de produto. Devido às dificuldades (função com grandes oscilações) de obter um ajuste por meio de uma função contínua no tempo, para representar o comportamento do hiato de produto, optou-se por estimar o produto potencial discreto usando o filtro Hodrick-Prescott e, em

seguida, ajustando-o por uma função contínua. E depois foi feita a diferença entre o produto efetivo contínuo no tempo (y_t) e o produto potencial, também contínuo no tempo (\bar{y}), para achar o hiato do produto. A função contínua no tempo para $\bar{y}(t)$ é representada da seguinte forma:

$$\bar{y}(t) = \bar{y}(0)e^{\alpha t} \quad (7.15)$$

onde α representa a taxa de crescimento instantânea média do Produto potencial na qual é assumido como sendo $cr_m = 0.2059\%$, estimado na Equação (7.1). O valor inicial do Produto Interno Bruto (PIB) potencial, $\bar{y}(0)$, é tomado como sendo o valor do PIB referente a dezembro de 2018, da base de dados, sendo igual a 2.24.

Por fim, considera-se as seguintes equações de previsões (7.16) e (7.17), para as receitas e os gastos tributários do governo, respectivamente:

$$T_{t+1} = T_{2018.2} + \omega T_t \quad (7.16)$$

e

$$G_{t+1} = G_{2018.12} + \vartheta G_t \quad (7.17)$$

onde $\omega = \vartheta = cr_m$, a taxa de crescimento do PIB.

7.1.1.2 CASO 2: o câmbio continua depreciar (apreciar) ao longo do tempo

Por outro lado, consideraremos um segundo modelo de previsão para a análise, denominado de *CASO 2*. Neste modelo assumimos que o câmbio continua a depreciar (aumentar) ao longo do tempo, então a previsão da taxa de juros SELIC será afetada pela taxa de depreciação da moeda local, e a previsão da taxa de juros SELIC será dada pela equação (7.9). Quando o Real depreciar frente ao dólar, a taxa de depreciação será negativa, caso contrário esta taxa será negativa.

Portanto, consideramos como *CASO 2* de estudo, o fato que as autoridades decidam depreciar o câmbio gradualmente até chegar a 3,89, no final dos 60 meses, isto é, até que um

dólar americano iguale a 3,89 reais. Portanto, o cálculo para atingir este objetivo, em termos fracionários anuais é o seguinte:

$$\epsilon_t - \epsilon_{t+5} = \frac{[(3,89-2,5)/2,5]}{5} = 0,1112 \quad (7.18)$$

Calculando a taxa mensal de depreciação do câmbio, temos:

$$\begin{aligned} (1 + i_m)^{12} &= (1 + i_a)^1 \rightarrow i_m = (1 + i_a)^{1/12} - 1 = (1 + 0,1112)^{1/12} - 1 = \\ &1,00888254 - 1 \rightarrow \\ i_m &= 0,008825 = 0,8825\% \end{aligned} \quad (7.19)$$

Para atingir esta meta de depreciação, as autoridades monetárias precisam introduzir mecanismos para que o câmbio deprecie a uma taxa de 0,8825 % por mês, para que no final dos 60 meses de previsão, 1 dólar equivaleria a 3.89 Reais.

Logicamente, com uma taxa de depreciação imposta sobre o câmbio, usaremos a Equação (7.9) para determinar a taxa de juros SELIC a ser imposta no processo de previsão, estimada a seguir, considerando $\theta_1 = 0,9$:

$$\begin{aligned} \theta_1 i_t &= -(1 - \theta_1) \left[\bar{i}_t + \frac{E_{t+1} - E_t}{E_t} + \bar{i}_t \frac{E_{t+1} - E_t}{E_t} \right] \rightarrow i_t = -\frac{(1 - \theta_1)}{\theta_1} \left[\bar{i}_t + \frac{E_{t+1} - E_t}{E_t} (1 + \bar{i}_t) \right] \rightarrow \\ i_t &= -\frac{0,1}{0,9} \left[\bar{i}_t + 0,008825(1 + \bar{i}_t) \right] \rightarrow i_t = -\frac{0,1}{0,9} (1,008825\bar{i}_t + 0,008825) \end{aligned} \quad (7.20)$$

Para estimar a trajetória da dívida, usaremos a Equação (7.5), com a suposição de que $W_t + S_t = 0$, obtém-se que:

$$B_{t+1} - \left[1 + \theta_1 i_t + \theta_2 \left[\bar{i}_t + \frac{E_{t+1} - E_t}{E_t} + \bar{i}_t \frac{E_{t+1} - E_t}{E_t} \right] \right] B_t = 0 \quad (7.21)$$

De acordo com a Equação (7.21), a taxa de crescimento da dívida, TCD, é dada por:

$$\text{TCD} = 1 + \theta_1 i_t + \theta_2 \left[\bar{i}_t + \frac{E_{t+1} - E_t}{E_t} + \bar{i}_t \frac{E_{t+1} - E_t}{E_t} \right] - 1,$$

e assumindo os valores de $\theta_1 = 0,9$, $\theta_2 = 0,1$, e os valores estimados acima para i_t , $\frac{E_{t+1} - E_t}{E_t}$ e \bar{i}_t , obteremos que:

$$\text{TCD} = 0,9 \times i_t + 0,1 \times \left[0,008825 + 1,008825 \bar{i}_t \right] \quad (7.22)$$

As demais curvas de previsão das variáveis endógenas PIB e índice de Inflação seguem o mesmo processo de cálculo já estabelecido para o CASO 1, estimadas anteriormente.

7.1.2 Resolução do modelo de referência

A fim de gerar uma dinâmica controlada para o sistema macroeconômico da economia brasileira, dois modelos de referência foram elaborados, seguindo as premissas estabelecidas pelos gestores de política econômica, conforme as definições de modelos de referência dadas nos CASO 1 e CASO 2. O CASO 1 refere-se a uma situação, na qual a dívida e o câmbio foram mantidos constantes, o PIB, e a inflação evoluem com crescimento positivo, e o índice SELIC desenvolve com uma taxa decrescente, cujos valores das taxas de crescimento para cada variável endógena encontram referenciados na subseção anterior. Este modelo de referência possui a mesma estrutura da Equação (4.1).

A fórmula que determina o conjunto de trajetórias de referência para o modelo dinâmico esquematizado é a seguinte:

$$x_{t+1,rf}(t) = x_{t,rf}(t) + A_{rf} x_{t,rf}(t), \text{ com } x_{t,rf}(t = 0) = x_{Dezembro/2018} \quad (7.23)$$

onde $x_{t,rf}$ é o vetor de trajetórias de referência das variáveis endógenas, A_{rf} é uma matriz diagonal contendo as correspondentes taxas de crescimento para as variáveis endógenas, na zona de previsão, e $x_{Dezembro/2018}$ é o vetor de condições iniciais para as variáveis endógenas

do sistema, as quais correspondem aos valores destas variáveis contidos na base de dados empírica, no mês de dezembro de 2018.

As matrizes A_{rf} e $x_{Dezembro/2018}$ são definidas para o CASO 1, em acordo com as Estimativas (7.1), (7.13), e (7.14), e assumindo evoluções com taxas de crescimento zero para a dívida e para o câmbio. Os resultados destas estimativas são os seguintes:

$$A_{rf} = \begin{bmatrix} 0.00205984 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0000295 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.00576617 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.24)$$

com

$$x_{Dezembro/2018} = \begin{bmatrix} Y_{(Dez/2018)} \\ i_{(Dez/2018)} \\ b_{(Dez/2018)} \\ \pi_{(Dez/2018)} \\ e_{(Dez/2018)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,2416 \\ 1.0637 \\ 1.2053 \\ 1.0032 \\ 2.4636 \end{bmatrix} \quad (7.25)$$

O CASO 2 refere-se a uma situação, na qual é permitido ao câmbio depreciar, conforme Relação (7.19). Com a depreciação do câmbio, a taxa de juros SELIC evolui numa trajetória de decrescimento, conforme Equação (7.20), e a dívida desenvolve uma trajetória que pode ser tanto crescente como decrescente, dependendo da ordem de decrescimento do índice SELIC, conforme (7.22). A inflação evolui com crescimento positivo, de forma similar à definição para o CASO 1 (Equação (7.14)), e o PIB evolui com a mesma taxa de crescimento estabelecida para o CASO 1 (Relação (7.1)). Os resultados destas estimativas são os seguintes:

$$A_{rf} = \begin{bmatrix} 0.00205984 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,001043 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,001075 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,005766 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,028502 \end{bmatrix}, \quad (7.26)$$

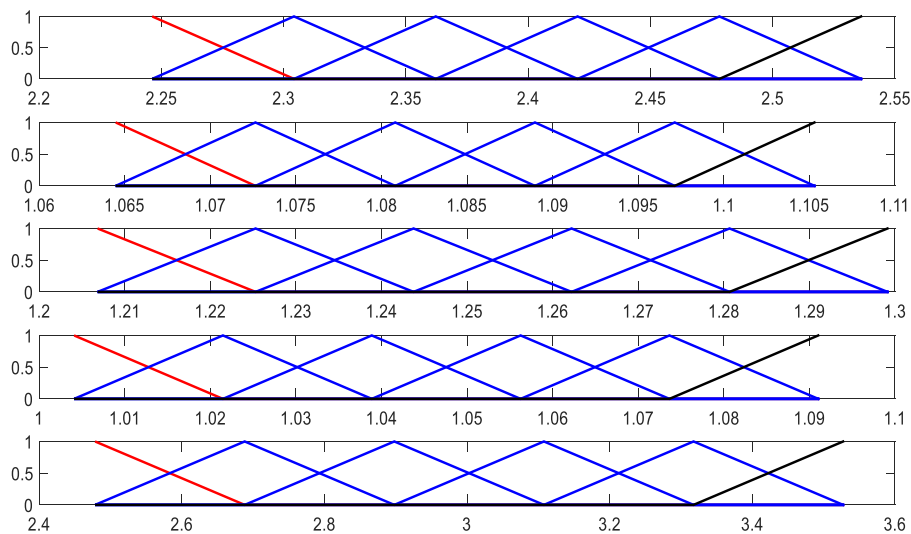
onde as condições iniciais para a estimativa de A_{rf} é também dada por (7.25).

7.2 PROCESSO *Fuzzy*

No capítulo quatro (seção 4.2), foi visto que o HJI detalhado não possui uma solução analítica ou numérica para resolver o problema de otimização que foi descrito, desta forma, um modelo *Fuzzy T-S* do Chen e Lin deve ser usado para aproximar o modelo estocástico não linear interpolando vários sistemas linearizados em diferentes pontos de operação. Para obter um modelo *Fuzzy T-S*, vários passos devem ser seguidos.

Inicialmente, deve-se definir a quantidade de funções de pertinência. Existe uma relação entre a função de pertinência e o número de regras do modelo, pois, o número de regras é igual ao número de funções de pertinência elevado ao número de estados do sistema (no caso deste estudo é o número de equações diferenciais; ou seja, cinco). Assumindo que cada equação (estado) é interpolada por seis funções de pertinências, desta forma, o modelo possuirá $6^5 = 7776$ regras, conforme ilustrado na Figura 7.1 abaixo.

Figura 7.1 - Funções de pertinência para os estados do sistema.



Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

Em seguida, utiliza-se um conjunto nebuloso de dados aleatórios gerados por uma distribuição uniforme. O modelo Takagi-Sugeno utiliza funções “*crisp*” (funções matemáticas não nebulosas), que podem ser equações diferenciais ordinárias, na parte consequente. Assim, os antecedentes descrevem regiões nebulosas no espaço de entrada, nas quais as funções consequentes são válidas. Neste caso, o conjunto *Fuzzy* F_{ij} foi criado a partir de valores

nebulosos gerados por uma distribuição randômica uniforme, com espectro de frequência infinito (3000 pontos para cada variável endógena) e identificado, por meio de reaplicação das estimativas de máximos e mínimos delimitados pelo modelo determinístico, e aplicando as funções de pertinência do primeiro passo. Para relembrar, reenfatizamos que o objetivo aqui é aproximar o sistema estocástico não linear, descrito na equação (3.33), via função básica *Fuzzy* $h_i(z(t))$; ou seja, aproximar a seguinte relação:

$$dx(t) = \left(f(x(t)) + g(x(t))u(t) + v(t) \right) dt + h(x(t))dp(t) \quad (7.27)$$

usando o modelo *Fuzzy* T-S dado em (4.21):

$$\begin{aligned} dx(t) &= \frac{\sum_{i=1}^L \mu_i(z(t)) \{ (A_i x(t) + B_i u(t) + C v(t)) dt + D_i x(t) dp(t) \}}{\sum_{i=1}^L \mu_i(z(t))} \rightarrow \\ dx(t) &= \sum_{i=1}^L h_i(z(t)) \{ (A_i x(t) + B_i u(t) + C v(t)) dt + D_i x(t) dp(t) \} \end{aligned} \quad (7.28)$$

Portanto, depois de criar o conjunto *Fuzzy*, é preciso obter os graus de pertinência, $\mu_i(z(t))$. Para isso, avalia-se, na premissa das regras, o grau da compatibilidade de $z_k(t)$, aos respectivos conjuntos *Fuzzy* F_{ij} . A lembrar de que o grau de ativação dos antecedentes é igual ao produto algébrico das pertinências, $\mu_i(z(t)) = \prod_{j=1}^k F_{ij}(z(t))$, e a ponderação normalizada de cada regra é dada por:

$$h_i(z(t)) = \frac{\mu_i(z(t))}{\sum_{i=1}^L \mu_i(z(t))} \quad (7.29)$$

O próximo passo será o de definir as matrizes A, B e D da equação (4.21). Para isso as seguintes formulas são usadas:

$$\begin{cases} A = \Phi^{-1} F_x \\ B = h^{-1} G_x \\ D = \Phi^{-1} H_x \end{cases} \quad (7.30)$$

No Sistema (7.30), Φ é o vetor de dados estimado pelo produto tensorial entre o vetor h e o vetor de dados nebulosos. O conjunto de dados nebulosos, gerados pela função randômica com distribuição uniforme, são utilizados na estimação das funções analíticas $f(x(t))$, $g(x(t))$, $h(x(t))$ da equação (3.33) para achar as funções vetoriais F_x , G_x , H_x .

A partir dos dados do vetor de variáveis de estados, $x(t)$, do vetor dos parâmetros de impactos controláveis u , do vetor de perturbações estocásticas, $v(t)$, do vetor dos choques nos coeficientes $dw(t)$ e da definindo a matriz identidade C (uma matriz de ordem 5×5 , o número de equações diferenciais), estima-se o modelo *Fuzzy* T-S, descrito pela equação (7.28), iniciando-se um processo de integração pelo método de Runge-Kutta. A partir das condições iniciais do sistema (Dezembro de 1998), obtém-se o vetor de incremento dx , por meio das interpolações de *Runge – Kutta*; e conseqüentemente, os novos valores do vetor $x(t + 1)$. À medida que t aumenta, define-se $x(t) = x(t - 1) + dx(t)$, com $x(t - 1)$ sendo o vetor de valores estimados para $x(t)$ em $t - 1$. Esse processo repetido subsequentemente. Portanto, com este procedimento, obteve-se o vetor das variáveis estado do modelo *Fuzzy*.

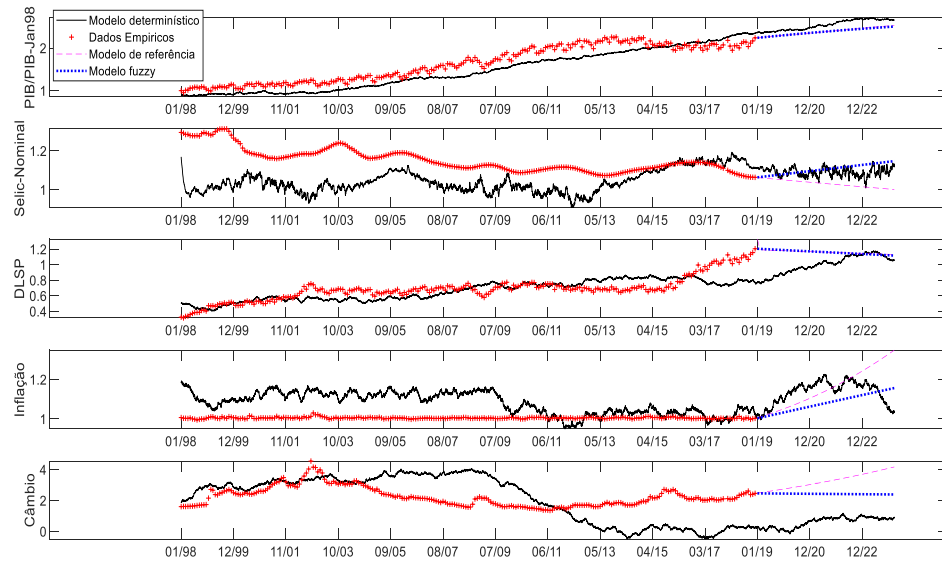
7.2.1 Resultados do modelo de regressão *Fuzzy*

O que temos que ter em conta é que o modelo de regressão *Fuzzy* é um modelo de regressão sob as condições de um jogo estocástico não cooperativo. Portanto, o que obtemos nesse processo de regressão *Fuzzy* não é o melhor ajuste possível, mas um ajuste das melhores escolhas, diante de um conjunto de inovações estocásticas que produzem as melhores opções, diante das tomadas de decisões dos competidores. De um lado, temos como competidores os agentes de política econômica do governo definindo as suas ações macroeconômicas e monetárias e, em contrapartida, existem às ações intrínsecas à estrutura do sistema dinâmico que determinam a conformação do processo de evolução do sistema, de forma altamente não cooperativa. Para entender melhor esta estrutura não cooperativa das equações do sistema econômico dinâmico em análise neste estudo, basta observar os resultados da Subseção 6.6, acima, onde as perturbações de alguns parâmetros controláveis do modelo se espalham para as demais variáveis endógenas do sistema. Diante desse quadro de jogos não cooperativo, o que se pode esperar pelos dois agentes no jogo é obter um ótimo local (e não um ótimo global para as suas ações), de tal forma que as suas ações inibem, parcialmente, à evolução do processo econômico em curso. Para ilustrar os resultados das estimativas dos modelos de regressão estimados, apresentaremos os gráficos de ajustes nas Figuras 7.2.a e 7.2.b abaixo.

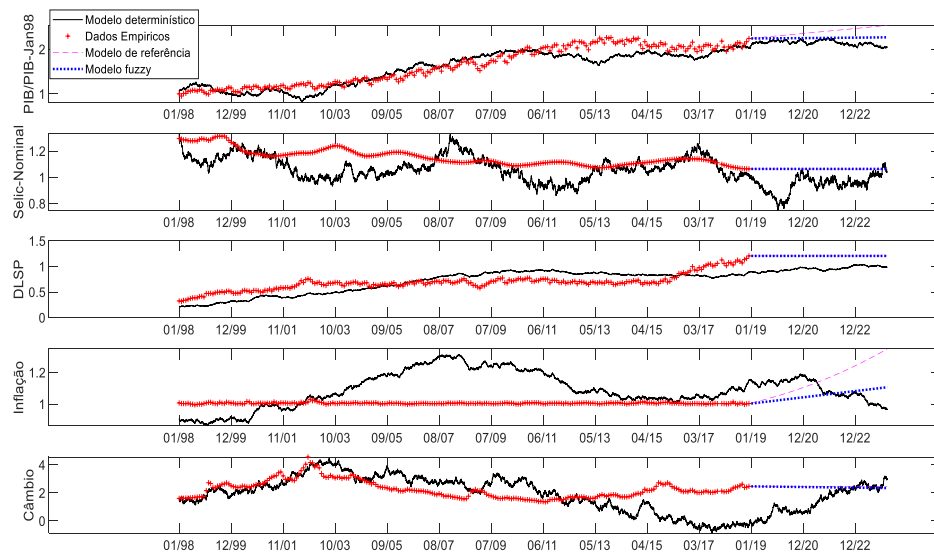
A Figura 7.2.a ilustra a regressão *Fuzzy*, assumindo as curvas de referência estabelecidas no CASO 2, dadas as taxas de crescimento na Equação (7.25), com as condições iniciais (7.24). Como claramente definido na descrição anterior para o CASO 2, este trata da tentativa de estabelecer interações de políticas fiscal e monetária, para enfrentar um quadro econômico estruturado por uma dinâmica não cooperativa. Da mesma forma, A Figura 7.2.b ilustra a regressão *Fuzzy*, assumindo as curvas de referência estabelecidas no CASO 1, conforme as taxas de crescimento na Equação (7.23), sob as condições iniciais (7.24). Como definido anteriormente para o CASO 2, este trata da tentativa de estabelecer interações de políticas fiscal e monetária, também de forma cooperativa, para enfrentar um quadro econômico estruturado por uma dinâmica não cooperativa, mas mais restritivo que as condições estabelecidas para o CASO 2. Nestas figuras, os modelos de regressão *Fuzzy* foram comparados com os modelos de referência, com os modelos puramente estocásticos estimados, e os dados empíricos.

Na Figura 7.2.a, observa-se que os ajustes da regressão *Fuzzy* foram completamente satisfatórios, somente para curvas de referências do PIB e da dívida pública, demonstrando que um crescimento instantâneo médio (crescimento simples) de 0,2059% ao mês é possível, assim como é possível uma queda da dívida pública de -0,1075% ao mês. No entanto, para atingir esta situação de crescimento do PIB e a queda da dívida, a taxa de juros SELIC deverá apresentar um crescimento da ordem de 0,1043%, ao invés de decrescer como inicialmente previsto pela previsão da política econômica. Este crescimento da SELIC, possivelmente, irá impactar negativamente na inflação, e com isso, a taxa de inflação deverá crescer de forma mais moderada que a prevista pela trajetória de previsão, de 0,5766%. Finalmente, o câmbio real deve manter constante, ao invés de depreciar na ordem de 2,8502%, conforme a previsão de depreciação especificada pela curva de referência. Uma depreciação acentuada para o câmbio deve estar associada com uma taxa de juros real consideravelmente baixa, e um nível de inflação bastante alto. Um modelo de regressão *Fuzzy*, com máximos locais que atendam estas condições, não foi possível de ser obtido.

Figura 7.2 - Comparações do modelo *Fuzzy*, modelo de referência, modelo puramente estocástico e dados empíricos: **(a)** regressão *Fuzzy*, assumindo as curvas de referência estabelecidas no CASO 2, e; **(b)** regressão *Fuzzy*, assumindo as curvas de referência estabelecidas no CASO 1.



(a)



(b)

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

Para melhor entender esta situação, mostramos a Matriz (7.31) que apresenta as taxas de crescimento de referência, transcrita abaixo, em termos percentuais:

$$A_{rf} = \begin{bmatrix} 0,205984\% & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,1043\% & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,1075\% & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5766\% & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2,8502\% \end{bmatrix} \quad (7.31)$$

e a matriz das estimações das taxas de crescimento (ou decrescimento) estimadas no processo de regressão *Fuzzy*, mostrada abaixo.

$$A_{xf} = \begin{bmatrix} 0,1928\% & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0275\% & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,09989\% & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0511\% & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,0231\% \end{bmatrix} \quad (7.32)$$

Comparando as matrizes (7.31) e (7.32), observamos que no processo de regressão *Fuzzy*, as evoluções estabelecidas pelas taxas de referência (Matriz (7.31), de crescimento para o PIB e de decrescimento para a dívida pública, foram atendidas satisfatoriamente, pela previsão do jogo não cooperativo. No entanto, foi sugerido pelo modelo um crescimento da taxa de juros SELIC de 0,0275% ao mês, ao invés de decrescer 0,1043%. Também, o modelo sugeriu um crescimento da taxa inflação de 0,0511% ao mês, ao invés de crescer 0,5766%, e um decrescimento do câmbio real de 0,0231%, ao invés de crescer em 2,8502%. Portanto, observa-se que uma combinação ótima de controle para o crescimento da economia brasileira foi estabelecida, de tal modo que é possível estabelecer políticas econômicas para o decrescimento da dívida pública e crescimento do PIB. No entanto, atenção deve ser concentrada sobre o processo de decrescimento da taxa de juros SELIC, crescimento da taxa de inflação e a necessidade de estabelecer a apreciação cambial.

Na Figura 7.2.b, observa-se que os ajustes da regressão *Fuzzy* foram completamente satisfatórios, somente para curvas de referências da taxa de juros SELIC, da dívida pública, e do câmbio real. Estes resultados demonstram uma possibilidade de estabelecer controle da política monetária sobre as evoluções da taxa de juros de curto prazo e sobre a depreciação ou apreciação do câmbio real; e um controle fiscal da dívida pública. Observamos que com o controle destas três variáveis é possível estabilizar a economia, mantendo a taxa de

decréscimento da SELIC de $-0,00205\%$, um valor muito próximo do especificada pela curva de previsão, de $-0,00295\%$. Da mesma forma, a taxa de decrecscimento do câmbio real de $-0,020186\%$, também um valor muito próximo do especificada pela curva de previsão, de $0,0\%$. Finalmente, a taxa de decrecscimento da dívida pública de $0,000167\%$, também um valor muito próximo do especificada pela curva de previsão, de $0,0\%$.

O sucesso do controle das variáveis especificadas no parágrafo acima se dá de forma que o crescimento instantâneo médio (crescimento simples) do PIB (em torno de $0,041626\%$) fique muito aquém do crescimento esperado, de $0,2059\%$ ao mês; no entanto, o crescimento inflacionário para o período, de $0,172179\%$, também é bem mais moderado que o esperado, conforme a previsão para o período, de $0,576617\%$. Enfim, o que se pode visualizar desse processo de controle estabelecido no CASO 1 é que, simplesmente, ele estabelece o controle das variáveis monetárias, o que é desejável, assim como estabelece o controle da dívida, o que também, é desejável; mas, o crescimento da economia é bastante constrangido, tendo em vista que se espera através da curva de previsão do PIB um crescimento de $0,205984\%$, mas o crescimento possível, conforme identificado no processo de controle é bem mais moderado, da ordem de $0,041626\%$.

Para melhor entender esta situação, mostramos na Matriz (7.32) que apresenta as taxas de crescimento de referência, transcrita abaixo, em termos percentuais:

$$A_{rf} = \begin{bmatrix} 0,205984\% & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,00295\% & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,576617\% & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (7.33)$$

e a matriz das estimações das taxas de crescimento (ou decrecscimento) estimadas no processo de regressão *Fuzzy*, mostrada abaixo.

$$A_{xf} = \begin{bmatrix} 0,041626\% & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,00205\% & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,000167\% & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,172179\% & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,020186\% \end{bmatrix} \quad (7.34)$$

A comparação entre as taxas de crescimento das Matrizes (7.33) e (7.34) evidenciam as conclusões especificadas nos parágrafos acima.

Após determinar os modelos de regressão *Fuzzy* para o sistema estocástico, utilizando o modelo *Fuzzy* T-S, o próximo passo seria o de definir o controle de trajeto *minimax* e o pior caso das perturbações para o problema de jogo estocástico *Fuzzy* na Eq. (4.12), transcrito da seguinte forma:

$$u^*(t) = -\sum_{j=1}^L h_j(z(t))RF^{-1}\bar{B}_j^T P\bar{x}(t) \text{ e } \bar{v}^*(t) = \frac{1}{\tau^2}\bar{C}^T P\bar{x}(t) \quad (7.35)$$

7.3 TRAJETÓRIA DE CONTROLE ROBUSTO MINIMAX

Para obter o modelo robusto de controle *minimax*, seguindo a trajetória de referência em situações de choques externos e internos (já definidas nas subseções anteriores), também duas matrizes de penalização, Q e R, devem ser definidas. A matriz Q tem por finalidade de penalizar os níveis de erros devidos às autuações cíclicas e de ruídos estocásticos, enquanto a matriz R tem como finalidade estabelecer um baixo esforço de controle. Estas matrizes devem ser especificadas pelo método de tentativa e erro.

As matrizes Q e R são matrizes quadradas cinco por cinco (cinco é quantidade de equações diferenciais do Sistema (3.29)). Os elementos da diagonal principal destas matrizes representam a grandeza dos amortecimentos dos efeitos a serem penalizados. Não existe uma regra prática para o estabelecimento destes elementos.

Após definir as matrizes Q e R, é preciso obter a trajetória de controle robusto *minimax*. Portanto, é preciso resolver o seguinte problema de otimização:

$$\tau_0^2 = \min_{W>0} \tau^2 \quad (7.36)$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_i W + W \bar{A}_i^T - \bar{B}_i R F^{-1} \bar{B}_i^T + \frac{1}{\tau^2} \bar{C} \bar{C}^T & W D_i^T & W \bar{Q}^T \\ D_i W & -W & 0 \\ \bar{Q} W & 0 & -I \end{bmatrix} < 0; \text{ se } i = j, \quad (7.37)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_i W + W \bar{A}_i^T - \bar{B}_i R F^{-1} \bar{B}_i^T + \frac{1}{\tau^2} \bar{C} \bar{C}^T & W \left(\frac{D_i + D_j}{2} \right)^T & W \bar{Q}^T \\ W \left(\frac{D_i + D_j}{2} \right) & -W & 0 \\ \bar{Q} W & 0 & -I \end{bmatrix} < 0; \text{ se } i \neq j \quad (7.38)$$

e

$$\tau^2 W > \bar{I} \quad (7.39)$$

Para resolver o problema da equação (7.36) sujeito a (7.39) é preciso definir uma otimização restrita para encontrar τ_0^2 (o valor mínimo para τ^2), onde os valores de W não sejam positivos. Isto é, descrever τ^2 até que $W > 0$ não exista, e com este valor de W é possível encontrar $P = W^{-1}$ e $\tau_0 = \sqrt{\tau^2}$. Para achar esta solução, deve ser usado o solver *feasp*³⁰ com o auxílio do comando *dec2mat* do *toolbox* de controle robusto do Matlab.

Porém para conseguir resolver o problema de otimização acima, é preciso 7776 interações, o que demoraria um ano para obter solução do sistema de equações de (7.36) a (7.39), isso usando a versão 2019a do Matlab instalado em um computador de 16 GB de memória RAM. Portanto, a conclusão desses cálculos, determinando as evoluções dos parâmetros de controle ótimos, $u^* = \{u_1(t), u_2(t), \dots, u_5(t)\}$, só será possível através de computadores de grande performance, tanto do ponto de vista de processo de processamento (processo paralelo), como do ponto de vista de memória RAM, e com alta velocidade de processamento.

Entretanto, somente para efeito de explicação do procedimento de obtenção das trajetórias otimizada de u^* , tendo encontrado τ_0 e P , a trajetória de controle robusto minimax, $u^*(t)$ poderá ser obtida, substituindo os seus valores na Equação (7.35), transcrita abaixo:

$$u^*(t) = -\sum_{j=1}^L h_j(z(t)) R F^{-1} \bar{B}_j^T P \bar{x}(t) \text{ e } \bar{v}^*(t) = \frac{1}{\tau^2} \bar{C}^T P \bar{x}(t) \quad (7.40)$$

³⁰ Ver Apêndice O para mais detalhes.

Finalmente, usando o método de integração numérica de *Runge-Kutta*, uma curva de evolução de u^* será ajustada, tendo como valores de entrada os parâmetros de controle invariantes no tempo. O vetor incremento du nas interpolações de *Runge-Kutta* e os novos valores para o vetor incrementado $u(t + 1)$ (t começa em janeiro de 2019, primeiro mês da trajetória de referência) são obtidos associando, na integração numérica, a ponderação das regras *Fuzzy*, $h_j(z(t))$, bem como as estimativas das matrizes R , B e \bar{x} , isso conforme, a regra de controle definida na equação (7.40). Desta forma, com a evolução de t , $u(t)$ passa a ser $u(t - 1) + du(t)$ e assim em diante. Com a implementação deste método, é possível obter a trajetória de controle robusto minimax no espaço de tempo aplicado para a trajetória de referência deste estudo.

A obtenção da trajetória de u^* , em relação ao modelo de referência desejado, dá-se por meio da obtenção de uma trajetória de controle robusta minimax, mesmo sob a influência de flutuações paramétricas e choques econômicos. Os valores de u^* encontrados devem ser utilizados como procedimento de controle a ser seguido, para que as metas de controle modeladas pelo procedimento *Fuzzy* sejam atendidas. Esses resultados não serão apresentados neste estudo, tendo em vista a dificuldade de resolver o problema de otimização, conforme evidenciado no parágrafo acima.

7.4 RESULTADOS

Na previsão do comportamento dinâmico da economia brasileira (seção 7.1), foi realizado, supondo que o jogo estocástico entre as autoridades fiscais e monetárias trata-se de um jogo de referência cooperativo. Porém, pelos gráficos da Figura 7.2, percebe-se que a aproximação do modelo *Fuzzy* com os modelos estocásticos e de referência, na parte de previsão não foi perfeita. Isso é por que a trajetória dos jogos *Fuzzy* é feita através de um jogo não cooperativo entre as autoridades fiscais e monetárias. Segundo Kirsanova et al. (2006), neste jogo não cooperativo, a autoridade fiscal joga contra a autoridade monetária um jogo de Nash. Portanto, quando ocorre um choque inflacionário, o bem-estar social será prejudicado e, possivelmente, muito prejudicado, se a autoridade fiscal deseja obter um aumento de produção.

Seguindo o procedimento das Seções 7.1 e 7.2, dever-se-ia obter as trajetórias de evolução dos parâmetros de controle $u^* = \{u_1(t), u_2(t), \dots, u_5(t)\}$ gerados pela Equação (7.35). O desempenho do modelo destas trajetórias seria garantido sob um limite superior τ_0 , não importando qual a propriedade estocástica do ruído $v(t)$ e qual o valor da condição inicial $x(0)$. Porém, como enfatizado anteriormente, para conseguir este resultado, é preciso 7776 interações, o que demoraria um ano para obter resultados satisfatórios, isso usando a versão 2019a do Matlab instalado em um computador de 16 GB de memória RAM. Portanto, a conclusão desses cálculos, determinando as evoluções dos parâmetros de controle ótimos, $u^* = \{u_1(t), u_2(t), \dots, u_5(t)\}$, só será possível através de computadores grande performance, tanto do ponto de vista de processo de processamento (processo paralelo), como do ponto de vista de memória RAM, e velocidade de processamento. Portanto, tendo em vista desta limitação computacional apresentado, o resultado do processo ótimo da lógica *fuzzy* será apresentado e interpretado em um próximo estudo.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho estudou as interações entre as políticas fiscal e monetária nas economias em desenvolvimento mostrando como elas são interligadas utilizando, baseado nas ideias de Blanchard (2004), um modelo macrodinâmico de equações diferenciais. Este sistema dinâmico estruturado no capítulo três contém cinco equações diferenciais representando cada uma delas: $PIB(t)$, $SELIC(t)$, $DLSP(t)$, $IPCA(t)$, $Câmbio(t)$. Tendo em vista que as economias emergentes são expostas aos choques externos e/ou internos, políticos e/ou econômicos, o modelo macrodinâmico proposto foi perturbado transformando-o em um sistema estocástico. Neste modelo estocástico, utilizou-se as seguintes perturbações estocásticas:

- Os impactos sobre os níveis dos parâmetros não controláveis do modelo, por meio de distribuições normais, tendo como tendências os valores dos parâmetros calibrados e como dispersão os desvios padrões dos parâmetros que induzem choques no modelo envolvendo as máximas bandas de perturbações estocásticas admissíveis para a obtenção de soluções convergentes; isto é, $\omega_1 = 0.6|\gamma_1|$, $\omega_2 = 0.9|\gamma_2|$, $\omega_3 = 0.3|\mu_1|$, $\omega_4 = 0.3|\mu_2|$, $\omega_5 = 0.10|\sigma_1|$, $\omega_6 = 0.13|\sigma_2|$, $\omega_7 = 0.6|\delta_1|$, $\omega_8 = 0.25|\theta_1|$, $\omega_9 = 0.3|\theta_2|$;
- Choques aditivos nas variáveis endógenas, $\{v_1(t), v_2(t), v_3(t), v_4(t), v_5(t)\}$ que se caracterizam como perturbações adicionais nas variáveis endógenas $\{PIB(t), SELIC(t), DLSP(t), IPCA(t), Câmbio(t)\}$, por meio de passeio aleatório unidimensional (1D), gerados por saltos uniformemente distribuídos (Grimmett e Stirzaker, 2001), seguindo uma variância de dispersão unitária.

Fazendo um estudo de caso sobre Brasil, utilizando os dados mensais de janeiro de 1998 a dezembro de 2018, os resultados do Sistema Dinâmico mostraram que a economia nacional (Brasileira) depende muito de uma alta taxa de crescimento econômico, uma baixa taxa de juros reais e de um câmbio desvalorizado para poder controlar a inflação e a dívida pública. Ainda, estes resultados provam que uma criação de superávit primário, pela diminuição de gastos, não tem muitos efeitos sobre a diminuição da dívida pública brasileira. Ao impõe choques ao modelo em questão, isso transformando o sistema dinâmico em um sistema estocástico, observou-se que os efeitos destas perturbações se propagam com maior intensidade nas variáveis monetárias, especialmente no Índice de inflação e no câmbio. Ainda,

as previsões estocásticas mostraram que a economia local deve conhecer uma taxa de crescimento anual próxima de 1% (se referindo ao índice de Quantum contabilizado pelo índice de Laspeyres de quantidade) para os próximos cinco anos. Esta taxa de crescimento se revela muito baixa comparativamente aos grandes competidores no mercado internacional (por exemplo, a China possui uma taxa de crescimento anual maior que 6 %). Portanto, baseado nos resultados estocásticos concluiu-se que o futuro da economia brasileira não é encorajador.

Tendo em vista da impossibilidade do modelo determinístico e do modelo dinâmico perturbado a estabelecer algum controle sistemático na evolução do processo, a não ser por tentativas de acerto e erro, foi feita a utilização da lógica *Fuzzy* a fim de estabelecer um controle do sistema sob distúrbios estocásticos. A estruturação do modelo *Fuzzy* foi estabelecida por meio de vários procedimentos tais: (i) a definição das trajetórias de evolução futuras de referência para cada variável endógena do modelo econômico dinâmico em estudo; (ii) a definição das condições iniciais para as variáveis endógenas do modelo dinâmico do sistema, no processo de previsão futura; (iii) a definição de um conjunto clássico de funções de pertinência do conjunto *Fuzzy* que melhor adapte ao problema em estudo no processo de mapeamento dos elementos estocásticos do intervalo de cada variável, $[\min - \text{range}, \max + \text{range}]$, no universo de discurso do conjunto binário $\{0;1\}$; (iv) a estruturação de uma matriz, via funções *kron* e *pinv* do Matlab 2019a e a classificação dos seus elementos, dado uma tolerância, em submatrizes que se caracterizaram como singulares e naquelas que permitiram multi-soluções; (v) a estimação do sistema econômico dinâmico *Fuzzy* para a trajetória de previsão, via uma solução pelo processo de integração de Runge-Kutta de sexta ordem, utilizando-se incrementos de tempo bastante pequenos da ordem de 10^{-8} ; (vi) finalmente, o modelo *Fuzzy* foi otimizado tendo como base o ajuste dos parâmetros controláveis do problema, o vetor $u(t)$, no seu processo de evolução ao longo das trajetórias de previsão, de forma a adequá-los às necessidades exigidas para tornar possível à implementação da política de previsão estabelecida para o problema.

Os resultados mostraram que a aproximação do modelo *Fuzzy* com os modelos estocásticos e de referência, na parte de previsão não foi perfeita. Isso é por que a trajetória dos jogos *Fuzzy* foi feita através de um jogo não cooperativo entre as autoridades fiscais e monetárias, diferentemente do que foi suposto na previsão do comportamento dinâmico da economia brasileira, supondo que o jogo estocástico entre as autoridades fiscais e monetárias trata-se de um jogo de referência cooperativo. Segundo Kirsanova et al. (2006), neste jogo não

cooperativo, a autoridade fiscal joga contra a autoridade monetária um jogo de Nash. Portanto, quando ocorre um choque inflacionário, o bem-estar social será prejudicado e, possivelmente, muito prejudicado, se a autoridade fiscal deseja obter um aumento de produção.

Seguindo o procedimento da lógica *Fuzzy*, dever-se-ia obter as trajetórias de evolução dos parâmetros de controle $u^* = \{u_1(t), u_2(t), \dots, u_5(t)\}$. O desempenho do modelo destas trajetórias seria garantido sob um limite superior τ_0 , não importando qual a propriedade estocástica do ruído $v(t)$ e qual o valor da condição inicial $x(0)$. Porém, para conseguir este resultado, é preciso 7776 interações, o que demoraria um ano para obter resultados satisfatórios, isso usando a versão 2019a do Matlab instalada em um computador de 16 GB de memória RAM. Portanto, a conclusão desses cálculos, determinando as evoluções dos parâmetros de controle ótimos, $u^* = \{u_1(t), u_2(t), \dots, u_5(t)\}$, só será possível através de computadores grande performance, tanto do ponto de vista de processo de processamento (processo paralelo), como do ponto de vista de memória RAM, e velocidade de processamento. Desta forma, os resultados da otimização do modelo *Fuzzy* foi deixado para um estudo futuro.

REFERÊNCIAS

- AMARAL, Rafael Quevedo do. **A dinâmica da Função de Reação do Banco Central do Brasil: uma possível fonte da perda de eficácia da política monetária.** Revista Economia & Tecnologia, Curitiba, Vol. 2, Nº 3, Julho/Setembro, 2006. Disponível em: <https://revistas.ufpr.br/ret/article/view/29595/19265>. Acesso em: 20 Mar. 2018
- ARAÚJO, Carlos Hamilton; AZEVEDO, Cyntia; COSTA, Sílvio. **Fiscal consolidation and macroeconomic challenges in Brazil.** BIS Working Papers, Basel/Switzerland, Nº 67, 2012.
- ARESTIS, Philip; SAWYER, Malcolm. **Aggregate demand, conflict and capacity in the inflationary process.** Cambridge Journal of Economics, 29:959–974, 2005.
- BACKUS, David; DRIFILL, John. **Rational expectations and policy credibility following a change in regime.** Review of Economic Studies, v. 52, n. 2, p. 211-221, 1985. Disponível em: <https://academic.oup.com/restud/article-abstract/52/2/211/1544556>. Acesso: 15 Abril 2018
- BAKSAY, Gergely.; KARVALITS, Ferenc; KUTI, Zsolt.: **The impact of public debt on foreign exchange reserves and central bank profitability: the case of Hungary.** BIS Working Papers, Monetary and Economic Department, Switzerland, Nº 67, 2012.
- BALL, Laurence: **Policy Rules for Open Economies.** Monetary Policy Rules. John B. Taylor, editor. University of Chicago Press. ISBN: 0-226-79124-6, 1999. Disponível em: <https://www.nber.org/chapters/c7415.pdf> . Acesso em: 10 Mar. 2018.
- BASAR, Tamer; OLSDER, Geert, Jan. **Dynamic noncooperative game theory.** 2nd, edn. SIAM, Philadelphia, PA, 1999.
- BAYRAK, M.; CELEBI, N.; TASKIN, H.: **A fuzzy approach method for supplier selection.** Production Planning & Control 18 (1), 54–63, 2007. Disponível em: <https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/09537280600940713>. Acesso em: 10 dec. 2019.
- BIANCHI, Francesco: **Evolving Monetary/Fiscal Policy Mix in the United States.** *American Economic Review*, 102(3):167-72, 2012. Disponível em: <https://www.aeaweb.org/articles?id=10.1257/aer.102.3.167>. Acesso em: 10 Abr. 2018.
- BIBI, Sadia; AHMAD, Syed Tauqeer; RASHID, Hina. **Impact of Trade Openness, FDI, Exchange Rate and Inflation on Economic Growth: A Case Study of Pakistan.** International Journal of Accounting and Financial Reporting, Las Vegas, Vol. 4, Nº 2, September, 2014.
- BLANCHARD, Olivier (2004): **Fiscal dominance and inflation targeting: lessons from Brazil.** Cambridge, MA: Massachusetts Institute of Technology (MIT) Press, mar, 2004.
- BOČKOVÁ, N.; BROŽ, Z.; DOHNAL, M.: **Fuzzy model of relationship among economic performance, competitiveness and business ethics of small and medium-sized**

enterprises. Acta univ. agric. et silvic. Mendel. Brun., 2012, LX, No. 4, pp. 71–78. Disponível em: https://acta.mendelu.cz/media/pdf/actaun_2012060040071.pdf. Acesso em: 05 Mai. 2018.

BOYD, Stephen; EL GHAOUI, Laurent; FERON, Eric; BALAKRISHNAN, Venkataramanan. **Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory** SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 1994. Disponível em: <https://web.stanford.edu/~boyd/lmibook/lmibook.pdf>. Acesso em: 10 Mar. 2018.

BRANCHIERI, Claudio Maximiliano. **Taxa de câmbio: um estudo sobre os determinantes, taxa de câmbio real e efetiva e crises cambiais.** 141 f. Dissertação de Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Economia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2002.

BRAUDE, Kobi; FLUG, Karnit. **The interaction between monetary and fiscal policy: insights from two business cycles in Israel.** 2011, Disponível em: <https://www.boi.org.il/deptdata/neumim/neum434e.pdf>. Acesso em: 13 junho. 2018.

BRITO, Ricardo Dias de Oliveira; ALVES, Felipe Alduíno. **Uma análise do hiato de produto brasileiro.** Revista de Economia e Administração, São Paulo, Vol. 11, Nº 4, Out/Dez, 2012.

BUITER, Willem Hendrik. **The Fiscal Theory of the Price Level: a Critique.** London: forthcoming in the Economic Journal, 2000.

CAFISO, GIANLUCA. **A guide to Public Debt equations.** University of Catania, 2012. Disponível em: https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1975710. Acesso em: 13 junho. 2018.

CAGAN, Phillip. **The Monetary Dynamics of Hyperinflation.** In Friedman, Milton (ed.), Studies in the Quantity Theory of Money, Chicago UP, Chicago, 1956.

CANOVA, Fabio. **Detrending and Business Cycles Facts.** Journal of Monetary Economics, London, Elsevier, Vol. 41, Nº 3, July, 1998.

CANOVA, Fabio. **The transmission of US shocks to Latin America.** CEPR Discussion Paper Series 3963, 2003. Disponível em: <http://apps.eui.eu/Personal/Canova/Articles/latin-final.pdf>. Acesso em: 25 junho. 2018.

CHAN, Felix T. S.; KUMAR, Niraj; TIWARI, Manoj Kumar; LAU, Henry C. W.; CHOY, King Lun. **Global supplier selection: a fuzzy-AHP approach.** International Journal of Production Research 46 (14), 3825–3857, 2008. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/245331278_Global_supplier_selection_A_fuzzy-AHP_approach. Acesso em: 25 junho. 2019.

CHEN, Toly. **“A fuzzy mid-term single-fab production planning model.”** Journal of Intelligent Manufacturing 14 (3–4), 273–285, 2003.

CHEN, Bor-Sen; LIN, Ying-Po. **Robust Resource Management Control for CO₂ Emission and Reduction of Greenhouse Effect: Stochastic Game Approach**. Journal of Environmental Protection. Taiwan, China, 2011.

CHEN, Bor-Sen; TSENG, Chung-shi; UANG, Huey-Jian. **Robustness Design of Nonlinear Dynamic Systems via Fuzzy Linear Control**. IEEE transactions on fuzzy systems, vol. 7, no. 5, October 1999.

CHEN, Bor-Sen; TSENG, Chung-shi; UANG, Huey-Jian. **Mixed H_2/H_∞ Fuzzy Output Feedback Control Design for Nonlinear Dynamic Systems: An LMI Approach**. IEEE transactions on fuzzy systems, vol. 8, no. 3, June 2000 381.

CHEN, Bor-Sen; TSENG, Chung-shi; UANG, Huey-Jian. **Fuzzy Tracking Control Design for Nonlinear Dynamic Systems via T-S Fuzzy Model**. IEEE transactions on fuzzy systems, vol. 9, no. 3, June 2001 381.

CHIANG, Alpha C. **Dynamic Optimization**, New York: McGraw-Hill, Inc, 1972. Disponível em: <http://www2.imm.dtu.dk/courses/02711/DO.pdf>. Acesso em: 25 Agosto. 2019.

CLARO, Sebastián; SOTO, Claudio. **Macro policies and public debt in Chile**. JEL classification: E52, E62, H6, 2012 Disponível em: <https://pdfs.semanticscholar.org/2b7e/297e41fe22a3227eddc44b4bef49537fd04aed.pdf>. Acesso em: 10 Nov. 2018.

COHEN, Benjamin J. **The Seigniorage Gain of an International Currency: an Empirical Test**. The Quarterly Journal of Economics, Vol. 85, n.o 3, pp. 494-507, August/1971.

COTTARELLI, Carlo; FORNI, Lorenzo; GOTTSCHALK, Jan; MAURO, Paolo. **Default in today's advanced economies: *Unnecessary, undesirable, and unlikely***. IMF Staff Position Note SPN/10/12, International Monetary Fund, 2010. Disponível em: http://www.lforni.it/ResearchAndPublications/Papers/8-SPN_default.pdf. Acesso em: 5 Nov. 2018.

COX, Earl. **Fuzzy logic for business and industry**. Massachusetts: Charles River Media Inc., 1995.

CUSHMAN, David O.; ZHA, Tao: **Identifying monetary policy in small open economy under flexible exchange rate**. Journal of Monetary Economics 39, 433-448, 1997. Disponível em: <https://www.econstor.eu/bitstream/10419/100814/1/wp1995-07.pdf>. Acesso em: 03out. 2018.

CUSINATO, Rafael Tiecher; MINELLA, André; PÔRTO JÚNIOR, Sabino da Silva. **Hiato de produto e PIB no Brasil: uma Análise de Dados em Tempo Real**. Trabalhos para discussão 203. Banco Central do Brasil, 2010.

DORNBUSCH, Rudiger. **Expectations and exchange rate dynamics**. Journal of Political Economy, v. 84, n. 6, p. 1161-1176, 1976. Disponível em: https://www.uni-erfurt.de/fileadmin/user-docs/Makroökonomie/SS2013/MA_MakroII/Dornbusch_1976_-_Expectations_and_Exchange_Rate_Dynamics.pdf. Acesso em: 03out. 2018.

DOS SANTOS, Pedro Baptista. **Crescimento econômico e controle de emissões de CO₂: uma abordagem utilizando sistemas fuzzy takagi-sugeno**. Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Economia da Universidade Federal de Santa Catarina, 2015.

DRAZEN, Allan. **A General Measure of Inflation Tax Revenues**. *Economics Letters*, vol. 17, pp. 327-330, 1985.

ENACHE, Ioan Constantin. **Fuzzy logic marketing models for sustainable development**. *Bulletin of the Transilvania, University of Braşov, Series V: Economic Sciences*. Vol. 8 (57) No. 1, 2015. Disponível em:
http://webbut.unitbv.ro/BU2015/Series%20V/BULETIN%20I%20PDF/29_Enache_C_I.pdf

ERMAN, Maria; ABBAS, Mohammed; RAKUS-ANDERSSON, Elisabeth. **Fuzzy Logic Applications in Wireless Communications**. 2009. Disponível em:
http://www.eusflat.org/proceedings/IFSA-EUSFLAT_2009/pdf/tema_0763.pdf. Acesso em: 03 dez. 2019.

EUROSTAT. **Stock-flow adjustment report**, october 2010, note. Disponível em:
https://ec.europa.eu/eurostat/documents/4187653/5798141/STOCK_FLOW_2014_OCT-EN.PDF/f4a1b352-1f08-48d6-8303-f94f792caeab. Acesso em: 14 dez. 2018.

FAVERO, Carlo A.; GIAVAZZI, Francesco. **Inflation Targeting and Debt: Lessons from Brazil**. NBER Working Paper Series, Massachusetts, N° 10390, 2004.

FIESP/DEPECON - Departamento de Pesquisas e Estudos Econômicos: **Estudos sobre a Taxa de Câmbio no Brasil**. São Paulo, 2014.

FRIEDMAN, Milton. **Government Revenue from Inflation**. *Journal of Political Economy*, vol. 79, pp. 846-856, 1971.

FUNDO MONETARIO INTERNACIONAL. **World Economic Outlook**. Washington D.C., September, 2003.

FURMAN, Jason; STIGLITZ, Joseph E. **Economic crises: evidence and insights from East Asia**. *Brookings Papers on Economic Activity*, p. 1-135, 1998. Disponível em:
https://www.brookings.edu/wp-content/uploads/1998/06/1998b_bpea_furman_stiglitz_bosworth_radelet.pdf. Acesso em: 04 jul. 2018.

GANDHI, Rama Subramaniam. **Sovereign debt management in India: interaction with monetary policy**. BIS Working Papers, Monetary and Economic Department, Switzerland, N° 67, 2012.

GAHINET, Pascal M.; NEMIROVSKI, Arkadi; LAUB, Alan J.; CHILALI, Mahmoud. **LMI Control Toolbox: for use with Matlab**. The Math Works, Inc., 1 edição, 1995. Disponível em:
https://www.academia.edu/38220437/LMI_Control_Toolbox_For_Use_with_MATLAB. Acesso em: 15 maio. 2019.

GUENDER, ALFRED V. **Stabilising properties of discretionary monetary policies in a small open economy.** The Economic Journal, 116 (January), 309–326. Royal Economic Society 2006. Published by Blackwell Publishing, 9600 Garsington Road, Oxford OX4 2DQ, UK and 350 Main Street, Malden, MA 02148, USA.

GRIMMETT, Geoffrey R; STIRZAKER, David R. **Probability and Random Processes.** 3ª edição, Oxford Science Publications, 2001.

HAYWARD, Gordon; DAVIDSON, Valerie. **Fuzzy logic applications.** Analyst, 2003, 128, 1304–1306. Disponível em: <http://nathan.instras.com/ResearchProposalDB/doc-172.pdf>. Acesso em: 04 jul. 2018.

HERMANN, Jennifer. **A Macroeconomia da Dívida Pública:** Notas sobre o Debate Teórico e a Experiência Brasileira Recente (1999-2002). 2003. Disponível em: http://www.ie.ufrj.br/moeda/pdfs/a_macroconomia_da_divida_publica.pdf. Acesso em: 04 jul. 2018.

HORCHREITER, Eduard; ROVELLI, Riccardo. **The Generation and Distribution of Central Bank Seignorage in the Czech Republic, Hungary and Poland.** Banca Nazionale del Lavoro Quarterly Review, n 223, pp. 391-415, December/2002.

JANG, Jyh-Shing Roger; GULLEY Ned. **MATLAB Fuzzy Logic Toolbox User's Guide.** The MathWorks, Inc. 24 Prime Park Way Natick, MA 01760-1500, 1995.

JANG, Jyh-Shing Roger; SUN, Chuen-Tsai; MIZUTANI, Eiji. **Neuro-fuzzy and soft computing : a computational approach to learning and machine intelligence.** Prentice Hall, 1997. Disponível em: http://www.soukalfi.edu.sk/01_NeuroFuzzyApproach.pdf. Acesso em: 04 jul. 2018.

JĘDRZEJOWICZ, Tomasz; KOZIŃSKI, Witold. **A framework for fiscal vulnerability assessment and its application to Poland.** 2012. Disponível em: <https://pdfs.semanticscholar.org/c494/0af8b9563cc5965dd01daeaceb8a0ca93edb.pdf>. Acesso em: 04 jul. 2018.

JEFFREY, Lagarias C.; JAMES, A. Reeds; MARGARET, H. Wright; PAUL, A. Wright **Convergence Properties of the Nelder-Mead Simplex Method in Low Dimensions.** Society for Industrial and Applied Mathematics, United States Vol. 9, N° 1, 1998.

JOHANSEN, Tor Arne; SHORTEN, Robert. MURRAY-SMITH, Roderick. **On the interpretation and identification of dynamic Takagi-Sugeno models.** IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 8(3):297–313, 2000. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/3335893_On_the_Interpretation_and_Identification_of_Dynamic_Takagi-Sugeno_Fuzzy_Models. Acesso em: 04 jul. 2018.

KAHRAMAN, Cengiz; BESKESE, Ahmet; KAYA, Ihsan. **Selection among ERP outsourcing alternatives using a fuzzy multi-criteria decision making methodology.** International Journal of Production Research 48 (2), 547, 2010.

KAISER, Regina; MARAVALL, Agustín: **Estimation of the Business Cycle: A Modified Hodrick-Prescott Filter**. Banco de Espana, Servicio de Estudios, Documento de Trabajo, N° 9912. 1999.

KELLER, André A. **Fuzzy control of macroeconomic models**. international journal of applied mathematics and computer sciences 5:2 2009. université de paris 1 panthéon-sorbonne, . disponível em:

https://www.researchgate.net/publication/228659938_fuzzy_control_of_macro-economic_models. Acesso em: 04 jul. 2019.

KIM, Soyoung; ROUBINI, Nouriel. **Exchange rate anomalies in industrialized countries: a solution with a structural var approach**. journal of monetary economics 45, 561-586, 2000. Disponível em:

<http://www.lingnan.sysu.edu.cn/UploadFiles/xsbg/2016/3/201603280815021747.pdf>. Acesso em: 04 jul. 2019.

KIRAKUL, Suchada. **Fiscal policy and its implication for central banks**". 2011. Disponível em: <https://www.bis.org/publ/bppdf/bispap67y.pdf>. Acesso em: 04 jul. 2018.

KIRSANOVA, Tatiana; STEHN Sven Jari; VINES, David. **Five-equation macroeconomics a simple view of the interactions between fiscal policy and monetary policy**. Economics Department Discussion Papers Series, ISSN 1473 – 3307, 2006.

KLIR, George Jiří ; YUAN, Bo. **Fuzzy sets and fuzzy logic: theory and applications**. New jersey, prentice hall, 1995 . Disponível em:

<http://www.wearealgerians.com/up/uploads/139955152739491.pdf>. Acesso em: 04 jul. 2019.

KOROL, Tomasz. **Fuzzy logic in financial management**. chapter in book: fuzzy logic - emerging technologies and applications. 2012. disponível em:

<http://cdn.intechopen.com/pdfs/32889.pdf>. Acesso em: 12 Abr. 2019.

LAVOIE, Marc. **The new consensus on monetary policy seen from a post-Keynesian perspective**. in M. Lavoie and M. Seccareccia (eds), Central Banking in the Modern World: Alternative Perspectives, Edward Elgar, Cheltenham, pp. 15-34. 2004.

LEE, Edward T. **Intelligent factories using fuzzy expert systems**. Kybernetes 25 (3), 51. 1996. Disponível em:

<https://www.emerald.com/insight/content/doi/10.1108/03684929610116428/full/html>. Acesso em: 04 jul. 2019.

LEEPER, Eric M. **Equilibrium under ‘Active’ and ‘Passive’ Monetary Policies**. Journal of Monetary Economics, Washington, Vol. 27, N° 1, February, 1991.

LEITH, Campbell; WREN-LEWIS, Simon. **Interactions between Monetary and Fiscal Policies**. Economic Journal, England, Vol. 110, N° 462, March, 2000.

LI, Yongping; HUANG, Gordon Huang; NIE, Songlin Ling. **Optimization of regional economic and environmental systems under fuzzy and random uncertainties.** Journal of Environmental Management, 2010.

LU, Xinjiang; LI, Han-Xiong; DUAN, Ji-An; SUN, Dong. **Integrated Design and Control under Uncertainty: A Fuzzy Modeling Approach.** Ind. Eng. Chem. Res. 2010, 49, 1312–1324.

LÖFBERG, Johan. **YALMIP : A toolbox for modeling and optimization in MatLab.** In Proceedings of the CACSD Conference, Taipei, Taiwan, 2004. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/4124388_A_toolbox_for_modeling_and_optimization_in_MATLAB. Acesso em: 04 mar. 2019.

MACHADO, Erica Regina Marani Daruichi. **Modelagem e Controle de Sistemas Fuzzy Takagi-Sugeno.** PhD thesis, Universidade Estadual Paulista. 2003. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/handle/11449/101978>. Acesso em: 04 fev. 2019.

MACKOWIAK, Bartosz. **External shocks, us monetary policy and macroeconomic fluctuations in emerging markets.** sfb 649 discussion papers. 2006. Disponível em: <http://isiarticles.com/bundles/Article/pre/pdf/26251.pdf>. Acesso em: 04 Abr. 2018.

MANKIWI, Gregory. **The Optimal Collection of Seigniorage: Theory and Evidence.** Journal of Monetary Economics, n.o20, pp. 327-341 North Holland Publishing Company, 1987.

MCNEILL, F. Martin; THRO, Ellen. **Fuzzy Logic: A practical approach.** AP Professional/Academic Press. 1993. disponível em: <http://www.boente.eti.br/boente2012/fuzzy/ebook/ebook-fuzzy-mcneil.pdf>. Acesso em: 25 Abr. 2019.

METROPOLIS Nicholas; ULAM, Stanislaw Marcin. The Monte Carlo method. Journal of the American Statistical Association, Vol. 44, No. 247. (Sep., 1949), pp. 335-341.

MONTORO, Carlos; TAKÁTS, Elöd; YETMAN, James. **Is monetary policy constrained by fiscal policy?** BIS Working Papers, Monetary and Economic Department, Switzerland, N° 67, 2012.

MORGAN, Peter J. **Impact of US quantitative easing policy on emerging Asia.** ADBI Working Paper No 321. 2011. Disponível em: <https://www.adb.org/sites/default/files/publication/156176/adbi-wp321.pdf>. Acesso em: 17 Abr. 2018.

MULA, Josefa; POLER, Raul; GARCIA, José. **MRP with flexible constraints: a fuzzy mathematical programming approach.** Fuzzy Sets and Systems 157 (1), 74–97. 2006.

NOBREGA, Wellington Charles Lacerda; MAIA, Sinézio Fernandes; BESSARIA, Cássio da Nóbrega. N. **Interação entre a Política Fiscal e Monetária: Uma análise sobre o regime de dominância vigente na economia brasileira.** JEL: C32, E52, E62. 2016. Disponível em:

https://www.anpec.org.br/encontro/2016/submissao/files_I/i4-f0fe1ee90bb73e0418ddb970f6a09292.pdf. Acesso em: 17 Dez. 2018.

PALHARES, Reinaldo Martinez; GONÇALVES, Eduardo Nunes. **Desigualdades matriciais lineares em controle**. In Aguirre, L. A., editor, Enciclopédia de Automática: Controle & Automação, volume 1, pp. 155–195. Blucher. 2007.

PEDERSEN, Torben Mark. **The Hodrick-Prescott Filter, The Slutsky Effect, and the Distortionary Effect of Filters**. Institute of Economics Discussion Paper, Copenhagen, N° 98/09, 1998.

PEDRYCZ, Witold; GOMIDE, Fernando. **An introduction to fuzzy sets: analysis and design**. MIT Press. 1998. Disponível em: http://taskin.sakarya.edu.tr/sites/taskin.sakarya.edu.tr/file/instructors_manual.pdf. Acesso em: 27 Abr. 2019.

PEOPLE'S BANK OF CHINA. **Monetary policy, fiscal policy and public debt management**. BIS Working Papers, Monetary and Economic Department, Switzerland, N° 67, 2012.

PHELPS, Edmund Strother. **Inflation in a Theory of Public Finance**. Swedish Economic Journal, Vol. 75, n.o 1, pp. 67-82, March/1973.

PITCHFORD, John David; TURNOVSKY, Stephen J. **Applications of Control Theory to Economic Analysis**, Amsterdam: North-Holland, 1977.

RAO, Manohar J. **Filtering and Control of Macroeconomic Systems**, Amsterdam:North-Holland, 1987. Disponível em: <https://www.elsevier.com/books/filtering-and-control-of-macroeconomic-systems/rao/978-0-444-70188-6>. Acesso em: 27 Abr. 2019.

ROMER, David. **Advanced macroeconomics**. 4 ed". disponível em: <https://www.passeidireto.com/arquivo/37765323/advanced-macroeconomics-4-ed-david-romer>. Acesso em: 14 dez. 2018.

ROSS, Timothy J. **Fuzzy Logic with engineering applications** Terceira edição, 2010. Disponível em: <https://pdfs.semanticscholar.org/dbca/7e7255bd1653d9895217da185440a04acf4c.pdf>. Acesso em: 14 dez. 2018.

ROSSI, José W. **A equação da orçamentária do governo: uma resenha dos usos e interpretações**. Rio de Janeiro, IPEA, abr. 1992, 48 p. (Texto para Discussão Interna, 254).

ROSSINI, Renzo; QUISPE, Zenón; LOYOLA, Jorge. **Fiscal policy considerations in the design of monetary policy in Peru**. DT. N° 2012-022 Serie de Documentos de Trabajo. Working Paper series Noviembre 2012.

ROVELLI, Riccardo. **Reserve Requirements, Seigniorage and the financing of the government in a economics and monetary union.** European Economy, Reports and Studies, n 1, pp. 11-56, 1994

SARGENT, Thomas J.; WALLACE, Neil. **Some unpleasant monetarist arithmetic.** Federal Reserve Bank of Minneapolis Quarterly Review, fall, pp 1–17. 1981.

SETTERFIELD, Mark. **Is inflation targeting compatible with post keynesian economics?** 2005. Disponível em: <http://emp.trincoll.edu>. Acesso em: 14 out. 2018.

SIMS, Christofer Albert. **A simple model for study of the determination of the price level and the interaction of monetary and fiscal policy.** Economic Theory, Vol. 4, 3. 1994. 381–99.

STRUM, Jos F. **Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones.** Optimization Methods and Software, 11(1-4):625–653. 1999.

SUGENO, Michio; KANG, G. T. **Structure identification of fuzzy model.** Fuzzy Sets and Systems, 28:329–346. 1986.

SUMMA, Ricardo; MACRINI, José Leonardo. **Estimando a curva de Phillips brasileira no período do sistema de metas de inflação por redes neurais.** Grupo de economia política. IE-UFRJ, 8 de novembro de 2011.

TAKAGI, Tomohiro; SUGENO, Michio. **Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control.** IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 15(1):116–132. 1985. Disponível em: <https://pdfs.semanticscholar.org/d79e/eb61bc8960242550234e7a801d6863c58aec.pdf>. Acesso em: 19 jul. 2019.

TANAKA, Kazuo; WANG, Hua O. **Fuzzy Control Systems Design and Analysis: A Linear Matrix Inequality Approach.** A Wiley-Interscience Publication JOHN WILEY & SONS, INC. ISBN 0-471-22459-6. 2001. Disponível em: <https://doc.lagout.org/science/Artificial%20Intelligence/Fuzzy%20systems/Fuzzy%20Control%20Systems%20Design%20and%20Analysis%20A%20Linear%20Matrix%20Inequality%20Approach%20-%20Kazuo%20Tanaka%2C%20Hua%20O.%20Wang.pdf>. Acesso em: 21 agost. 2019.

TAYLOR, John Brian. **Discretion versus Policy Rules in Practice.** Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy, N° 39, 1993.

TEAGUE, Karen Johnson. **Fuzzy comprehensive evaluation (FCE) in military decision support processes.** Monterey, California: Naval Postgraduate School. 2013. Disponível em: https://calhoun.nps.edu/bitstream/handle/10945/39023/13Dec_Teague_Karen.pdf;sequence=3. Acesso em: 02 dez. 2019.

TEIXEIRA, Marcelo C. M. e ASSUNÇÃO, Edvaldo. **Extensões para sistemas não-lineares.** In Aguirre, L. A., editor, Enciclopédia de Automática: Controle & Automação, volume 1, pp. 218–246. Blucher. 2007.

TEIXEIRA, Marcelo C. M.; DA SILVA, Emerson Ravazzi Pires; ASSUNÇÃO, Edvaldo; FARIA, Flávio Andrade. **Estabilização de sistemas fuzzy T-S incertos usando realimentação derivativa**. Revista Controle & Automação/Vol.22 no.3/Maio e Junho 2011. Disponível em:

<http://www.scielo.br/pdf/ca/v22n3/a05v22n3.pdf>. Acesso em: 21 dez. 2018.

TOMA, Mark; GOFF, Brian L. **Optimal Seigniorage, the Gold Standard and Central Bank Financing**. Journal of Money, Credit and Banking, vol 25, n , pp. 79-95, February/1993.

TSOUKALAS, Lefteri H; UHRIG, Robert E. **Fuzzy and Neural approaches in engineering**. John Wiley & Sons. 1997.

VARGAS, Hernando; GONZÁLEZ, Andrés; LOZANO, Ignacio. **Macroeconomic effects of structural fiscal policy changes in Colombia**. 2012. Disponível em:

<https://www.bis.org/publ/bppdf/bispap67i.pdf>. Acesso em: 21 fev 2018.

VON, ALTROCK C. **Fuzzy logic and neuro Fuzzy applications in business and finance**. New Jersey: Prentice Hall PTR, 1996.

WALSH, Carl Eugene. **Monetary theory and policy, the MIT Press**. 2003. <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.466.387&rep=rep1&type=pdf>. Acesso em: 21 janv. 2018.

WOODFORD, MICHAEL. **Monetary policy and price level determinacy in a cash-in advance economy**. Economic Theory, Vol. 4, 1994.

WOODFORD, MICHAEL. **Price level determinacy without control of a monetary aggregate**. NBER Working Papers, Switzerland, N° 5204, August, 1995.

WOODFORD, MICHAEL. **Pitfalls of Forward-Looking Monetary Policy**. American Economic Review 90(2): 100-104 (2000a)

WOODFORD, MICHAEL. **A Neo-Wicksellian Framework for the Analysis of Monetary Policy**. Unpublished, Princeton University, September 2000b.

WOODFORD, MICHAEL. **Fiscal requirements for price stability**. Journal of Money, Credit and Banking, Ohio, Vol. 33, N° 3, 2001.

YÖRÜKOĞLU, Mehmet; KILINÇ, Mustafa. **Globalization of the interaction between fiscal and monetary policy**. BIS Working Papers, Switzerland, N° 67, 2012.

ZADEH, Lotfi Aliasker. **Fuzzy sets**. Information and Control Volume 8, Issue 3, June 1965, Pages 338-353.

ZADEH, Lotfi Aliasker. **Outline of a New Approach to the Analysis of Complex Systems and Decision Processes**. IEEE transactions on systems, man, and cybernetics, vol. smc-3, no. 1, january 1973. Disponível em:

<https://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?tp=&arnumber=5408575>. Acesso em: 21 Abr. 2018.

ZENG, Ke; ZHANG, Nai-Yao; XU, Wen-Li. **A comparative study on sufficient conditions for Takagi-Sugeno fuzzy systems as universal approximators.** IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 8(6):773–780. 2000.

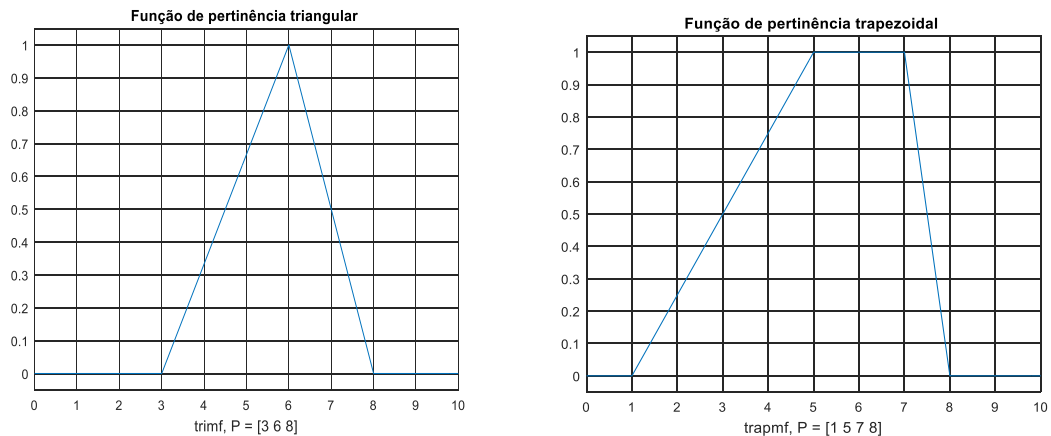
ZOLI, Edda. **How does fiscal policy affect monetary policy in emerging market countries?** BIS Working Papers, No 174, Monetary and Economic Department. 2000.

APÊNDICE A – Diferentes tipos de funções de Pertinência

O Toolbox (Matlab 2019a) estrutura onze tipos de funções de pertinência para a lógica *Fuzzy*. Essas funções são, por sua vez, construídas a partir de várias funções básicas: funções lineares por partes, funções de distribuição gaussiana, funções sigmoidais (logísticas) e funções polinomiais quadráticas e cúbicas. Todas essas funções de pertinências possuem letras “*mf*” no final, como designação.

As funções de pertinências mais simples são formadas usando linhas retas. Destas, a mais simples é a função de pertinência triangular, denominada de função *trimf*, caracterizada por uma coleção de três pontos, formando um triângulo, conforme se observa na Figura A.1 e na Tabela A.1 abaixo. A função de pertinência trapezoidal, *trapmf*, tem uma cabeça plana, definida por uma curva de triângulos truncados (ver Figura A.1 abaixo), com parâmetros definidos na Tabela A.1. Essas funções de pertinência de linha reta têm como principal vantagem, as suas simplicidades.

Figura A.1 - Funções de pertinência lineares por partes: *trimf*; e *trapmf*.



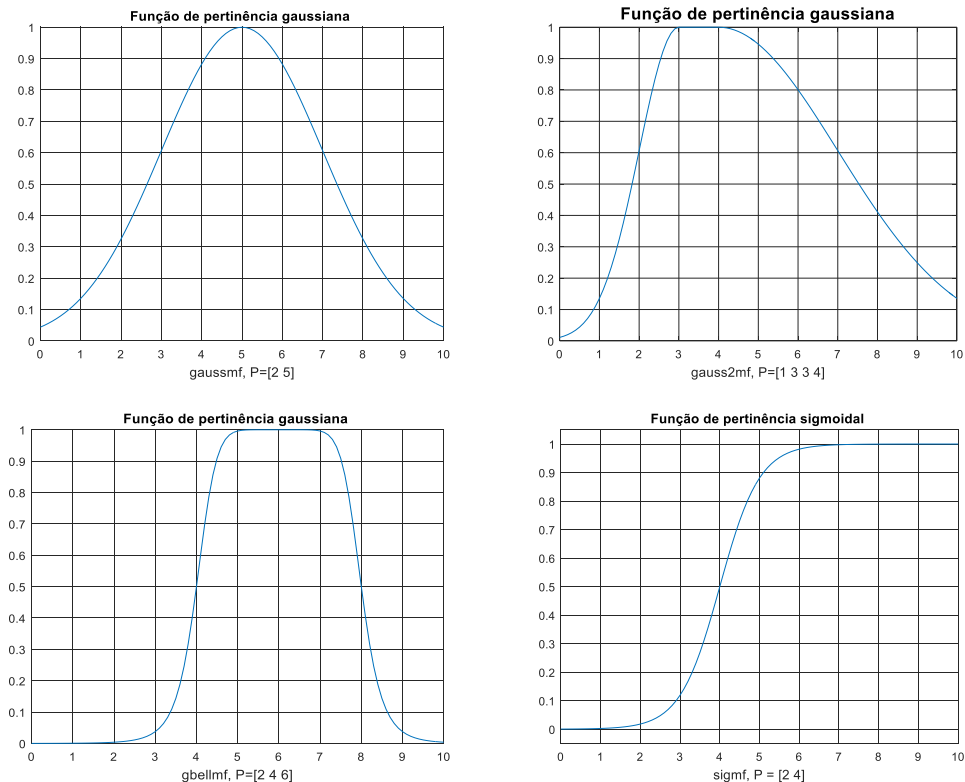
Fonte: Elaborada pelo autor (2019).

No Toolbox, duas funções de pertinência são construídas com base na curva de distribuição gaussiana: uma com base numa curva gaussiana simples e outra, estabelecendo um compasso que envolve dois lados, à esquerda e à direita, respectivamente, de duas curvas gaussianas diferentes, denominadas de *gaussmf* e *gauss2mf* conforme se observa na Figura A.2 e na Tabela A.1, abaixo. A função de pertinência *gaussmf* é caracterizada por dois parâmetros: um representando a média da distribuição, e o outro o desvio-padrão. Por outro

lado, a função de pertinência *gauss2mf* é caracterizada por quatro parâmetros: dois representando as respectivas médias das distribuições, e outros dois representando os desvios-padrão das respectivas distribuições.

Também é estruturada uma função de pertinência generalizada, em forma de sino, especificada por três parâmetros (conforme Tabela A.1 abaixo), denominada de *gbellmf* (Figura A.2 abaixo). A função de pertinência generalizada em forma de sino tem um parâmetro a mais do que a função de pertinência Gaussiana *gaussmf*, para que ela possa se aproximar de um conjunto não *Fuzzy*, se o parâmetro livre estiver sintonizado. Dois destes parâmetros da função *gbellmf* são similares aos da função *gaussmf* (um representando a média da distribuição, e o outro o desvio-padrão, conforme Tabela A.1), o que permite normalizar os dados do conjunto *Fuzzy* do universo de discurso. O terceiro parâmetro da função *gbellmf* permite elevar à exponencial os dados do conjunto *Fuzzy* normalizada, com a finalidade de tornar a função de pertinência mais ou menos pontiaguda, na sua forma sigmoidal.

Figura A.2 - Funções de pertinência de distribuição gaussiana e em forma de sino: (a) *gaussmf*; (b) *gauss2mf*, e; (c) *gbellmf*.

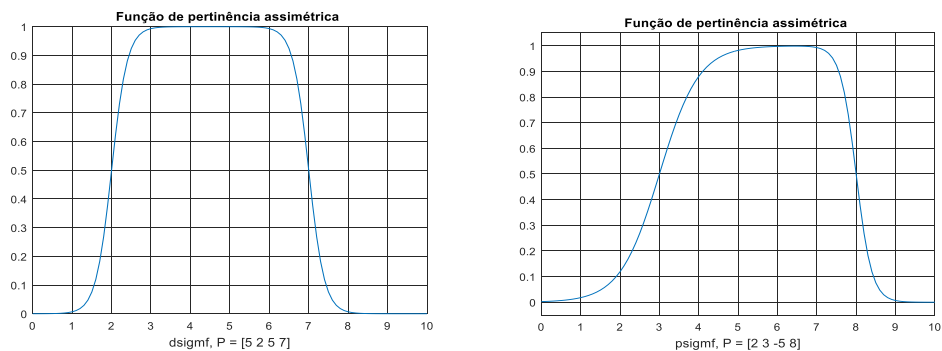


Fonte: Elaborada pelo autor (2019).

Devido às suas suavidades e notações concisas, as funções de pertinência de Gauss e Sino são métodos bastante utilizados nas especificações de conjuntos *Fuzzy*. Ambas as funções de pertinências têm a vantagem de ser suave e não zero em todos os pontos. No entanto, as funções de pertinência gaussianas e as funções de pertinência em forma de sino não conseguem especificar funções de pertinência assimétricas, que são importantes em muitas aplicações na análise de conjuntos *Fuzzy*.

Ainda, o Toolbox (Matlab 2019a) define uma função de pertinência sigmoidal, função aberta à esquerda ou à direita, denominada de *sigmf* (Figura A.2). Esta função de pertinência sigmoidal possui dois parâmetros a e c conforme a Tabela A.1. Dependendo do sinal do parâmetro a , a função sigmoidal é aberta à direita ou à esquerda e, portanto é apropriada a representar conceitos como “muito grande” ou “muito negativo”. No entanto, funções de pertinência assimétricas e fechadas (ou seja, não abertas à esquerda ou à direita) são sintetizadas no Toolbox, utilizando-se de duas funções sigmoidais adjuntas, definidas, respectivamente, pela diferença entre duas funções sigmoidais, denominada de *dsigmf*, e pelo produto de duas funções sigmoidais, denominada de *psigmf*. As funções de pertinências *dsigmf* e *psigmf* possuem quatro parâmetros conforme apresentados na Figura A.3 e na Tabela A.1.

Figura A.3 - Funções de pertinência sigmoidal e assimétricas

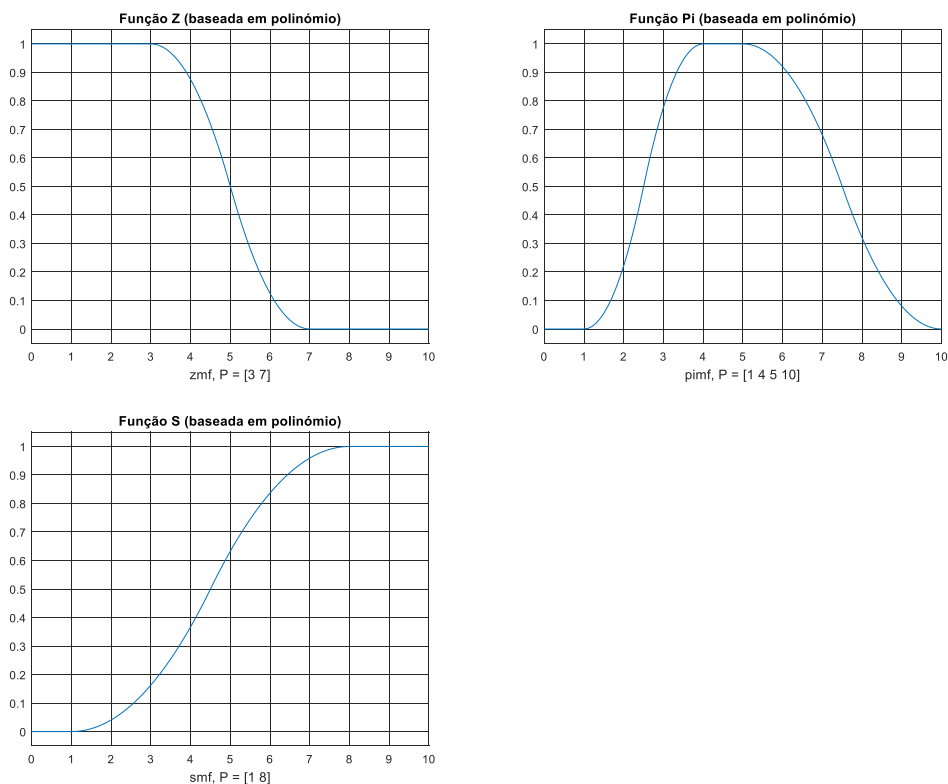


Fonte: Elaborada pelo autor (2019).

As curvas de pertinência baseadas em polinômios representam várias das funções de pertinência na caixa de ferramentas (toolbox). Três funções de pertinência relacionadas são as curvas Z, S e Pi, todas chamadas devido à sua forma conforme se observa na Figura A.4 e na Tabela A.1, abaixo. A função *zmf* é a curva polinomial assimétrica aberta para a esquerda. *zmf* depende de dois parâmetros que localizam os extremos da porção inclinada da sua curva. *smf*

é a função de imagem espelhada que se abre para a direita. smf depende também de dois parâmetros localizam os extremos da porção inclinada da curva. Finalmente, $pimf$ é zero em ambos os extremos com um aumento no meio. $pimf$ depende de quatro parâmetros. Dois desses parâmetros os "pés" da curva, enquanto os dois outros localizam seus "ombros". A função de pertinência $pimf$ é um produto das funções zmf e smf . Mais informações sobre as funções zmf , smf e $pimf$ estão na Tabela A.1.

Figura A.4 - Funções de pertinência Z, S, Pi



Fonte: Elaborada pelo autor (2019).

Existe uma lista muito ampla de funções de pertinência para análises de conjuntos *Fuzzy*. Além do mais, o Toolbox da lógica *Fuzzy* permite criar suas próprias funções de pertinência, caso a lista acima apresentada seja restritiva. Portanto, existem várias possibilidades de seleção de funções de pertinências, e até mesmo estabelecer a sua própria estrutura de função de pertinência que seja apropriada ao seu conjunto *Fuzzy* do universo de discurso. No entanto, funções de pertinência exóticas não são de nenhuma maneira necessária para inferência *Fuzzy* de sistemas dinâmicos estocásticos (para maiores detalhes veja Jang e Gulley (1995)).

Tabela A.1 - Funções de pertinência.

Nome da função	Nome do código	Parâmetros (números reais)	Fórmulas	Vetor
Triangular	trimf	a, b, c	$trimf(x; a, b, c) = \max(\min(\frac{x-a}{b-a}, \frac{c-x}{c-b}), 0)$	x
Trapezoidal	trapmf	a, b, c, d	$trapmf(x; a, b, c, d) = \max(\min(\frac{x-a}{b-a}, 1, \frac{d-x}{d-c}), 0)$	x
Gaussiana	gaussmf	σ, c	$gaussmf(x; \sigma, c) = e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-c}{\sigma})^2}$	x
Gaussiana	gauss2mf	$\sigma_1, c_1, \sigma_2, c_2$	$gauss2mf(x; \sigma_1, c_1, \sigma_2, c_2) = e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-c}{\sigma})^2}$	
Sino Generalizada	gbellmf	a, b > 0 c (centro da curva)	$gbellmf(x; a, b, c) = \frac{1}{1 + \frac{x-c}{b} ^{2b}}$	x
Sigmoidal	sigmf	a, c	$sigmf(x; a, c) = \frac{1}{1 + e^{-a(x-c)}}$	x
Sigmoidal (dif.)	dsigmf	a_1, c_1, a_2, c_2	$dsigmf(x; a_1, c_1, a_2, c_2) = sigmf_1(x; a_1, c_1) - sigmf_1(x; a_2, c_2) = \frac{1}{1 + e^{-a(x-c)}}$	x
Sigmoidal (prod.)	psigmf	a_1, c_1, a_2, c_2	$dsigmf(x; a_1, c_1, a_2, c_2) = sigmf_1(x; a_1, c_1) * sigmf_1(x; a_2, c_2) = \frac{1}{1 + e^{-a(x-c)}}$	x
Polinômios (Z)	zmf	a, b	$zmf(x; a, b) \begin{cases} 1, & x \leq a \\ 1 - 2\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2, & a \leq x \leq \frac{a+b}{2} \\ 2\left(\frac{x-b}{b-a}\right)^2, & \frac{a+b}{2} \leq x \leq b \\ 0, & x \geq b \end{cases}$	x
Polinômios (S)	smf	a, b	$smf(x; a, b) \begin{cases} 0, & x \leq a \\ 2\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2, & a \leq x \leq \frac{a+b}{2} \\ 1 - 2\left(\frac{x-b}{b-a}\right)^2, & \frac{a+b}{2} \leq x \leq b \\ 1, & x \geq b \end{cases}$	x
Polinômios (pi)	pimf	a, b, c, d	$smf(x; a, b, c, d) \begin{cases} 0, & x \leq a \\ 2\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2, & a \leq x \leq \frac{a+b}{2} \\ 1 - 2\left(\frac{x-b}{b-a}\right)^2, & \frac{a+b}{2} \leq x \leq b \\ 1, & b \leq x \leq c \\ 1 - 2\left(\frac{x-c}{d-c}\right)^2, & c \leq x \leq \frac{c+d}{2} \\ 2\left(\frac{x-d}{d-c}\right)^2, & \frac{c+d}{2} \leq x \leq d \\ 0, & x \geq d \end{cases}$	x

Fonte: Elaborada pelo autor (2019).

APÊNDICE B - Teoria dos Jogos (Método Minimax)

A teoria dos jogos é uma disciplina teórica que permite entender (formalmente) situações em que os jogadores, os decisores interagem. Um jogo é então definido como um universo no qual cada tomador de decisão possui um conjunto de ações possíveis determinadas pelas regras do jogo. O resultado do jogo depende, em conjunto, das ações tomadas por cada tomador de decisão.

A teoria dos jogos é uma fonte conhecida de problemas minimax, onde se trabalha com estratégias envolvendo-se dois ou mais participante com interesses conflitantes. Além dos jogos propriamente ditos, existem outras situações de conflito em que a teoria dos jogos se aplica; como ciências econômicas por exemplo. Com o conhecimento de informação suficiente, resultados da teoria dos jogos podem determinar qual o comportamento mais racional possível ou qual a melhor estratégia para cada jogador. Naturalmente, a teoria dos jogos não nos permite prever qual será o comportamento das pessoas, mas sim estudar maneiras de se atuar racionalmente em situações de conflito. Ela está preocupada com a modelagem e análise de interações estratégicas entre os agentes; ou seja, situações em que as escolhas dos agentes são afetadas pelas escolhas dos outros neste caso se diz um jogo a soma nula, em que para um jogador ganhar, o outro tem necessariamente de perder.

B.1 TEOREMA MINIMAX

John Von Neumann, um matemático húngaro naturalizado americano, foi o primeiro a falar sobre o teorema minimax em 1944; isso em parceria com Oskar Morgenstern, um economista austríaco. Este teorema fornece a descrição matemática completa de um jogo e prova um resultado fundamental, além de esgotar de todas as maneiras a análise de jogos de duas pessoas e soma zero, sendo os quais considerados jogos de conflito total.

B.2 PONTO MINIMAX:

Esta noção faz da Teoria dos jogos uma “teoria”, ou seja, um conjunto de estratégias ótimas para todos os jogadores em jogo. Para explicar o ponto de minimax, se usa um exemplo simples de competição que pode ser verificado em situação do mundo real. A

situação é de duas redes de televisão competidoras X e Y, querem levar ao ar programas de uma hora de duração. A rede X pode escolher entre os programas A e B e a rede Y entre C e D. Nenhuma delas sabe a escolha do outro e as duas contratam a mesma empresa de pesquisa para estimar como a transmissão dos programas vai dividir a audiência. O resultado da pesquisa feita pela instituição é representado na Tabela B.1 abaixo:

Tabela B.1 - Resultado da pesquisa pela audiência.

		Programa da Rede Y	
		C	D
Programa da Rede X	A	30	55
	B	45	60

Fonte: Elaborada pelo autor (2019)

Os dados representados na matriz são os ganhos da rede X e o negativo destes são os ganhos da rede Y. Isso significa que as redes têm interesses diametralmente opostos, ou seja, o que é bom para uma é ruim para outra. Neste sentido, temos um jogo a soma nula, pois os ganhos das redes X e Y somam zero.

Encontrar a estratégia ótima das duas redes representa a solução deste problema, de forma a maximizar a audiência. Neste sentido cada jogador toma decisões que chamamos de anti-risco, onde eles renunciam a alguns ganhos para evitar perdas desnecessárias. Ao generalizar esta análise, digamos que o decisor racional procurara um modo de atuação que lhe dê o melhor ganho possível na pior situação enquanto o oponente faz o contrário.

A rede X deseja maximizar sua audiência mínima esperada assim escolheu a percentagem mínima de cada linha para depois destacar o máximo destas percentagens. Deste modo, a rede Y deseja minimizar a sua audiência máxima esperada, por isso marcamos a percentagem máxima de cada coluna e a partir destes resultados, destacamos o mínimo. A Tabela B.2 apresenta a solução para as duas redes:

Tabela B.2 - Solução mini-max para as redes X e Y

	C	D	Mínimo da linha
A	30	55	30
B	45	60	45
Máximo da coluna	45	60	45

Fonte: Elaborada pelo autor (2019).

Percebe-se que o máximo dos mínimos da linha (max-mini) é igual ao mínimo dos máximos das colunas (mini-max), isso que se chama o ponto mini-max do jogo. Então o ponto é (B, C), onde a estratégia ótima para a rede X é levar ao ar o programa B e para a rede Y o programa C. Já que o valor da tabela é ganho da rede X, resultando em 45% da audiência para a rede X, que significa a perda da rede Y e 55% da audiência para rede Y.

APÊNDICE C - Prova do Teorema 1 segundo Chen & Lin (2011)

Para o sistema estocástico aumentado da Eq. (4.10), seja a função de energia de Lyapunov $V(\bar{x}(t)) = \bar{x}^T(t)P\bar{x}(t) > 0$ para $\bar{x}(0) \neq 0$ com $V(0) = 0$. Então o problema de regulação da eq. (4.11) é equivalente ao seguinte problema:

$$\begin{aligned} & \min_{u(t)} \max_{\bar{v}(t)} J(u(t), \bar{v}(t)) = \\ & \min_{u(t)} \max_{\bar{v}(t)} E \left\{ V(\bar{x}(0)) - V(\bar{x}(t_f)) + \right. \\ & \left. \int_0^{t_f} \left(\bar{x}^T(t)\bar{Q}\bar{x}(t) + u^T(t)Ru(t) - \rho^2\bar{v}^T(t)\bar{v}(t) + \frac{dV(\bar{x}(t))}{dt} \right) dt \right\}, \forall \bar{x}(0) \end{aligned} \quad (C.1)$$

Pela formula de Ito na Lemma 1, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{dV(\bar{x}(t))}{dt} &= \left(\frac{\partial V(\bar{x}(t))}{\partial \bar{x}(t)} \right)^T \frac{d\bar{x}(t)}{dt} + \frac{1}{2} H^T(\bar{x}(t)) \frac{\partial^2 V(\bar{x}(t))}{\partial \bar{x}^2(t)} H(\bar{x}(t)) = \\ & \left(\frac{\partial V(\bar{x}(t))}{\partial \bar{x}(t)} \right)^T \left((F(\bar{x}(t)) + G(\bar{x}(t)))u(t) + \bar{C}\bar{v}(t) + H(\bar{x}(t)) \frac{dw(t)}{dt} \right) + \\ & \frac{1}{2} H^T(\bar{x}(t)) \frac{\partial^2 V(\bar{x}(t))}{\partial \bar{x}^2(t)} H(\bar{x}(t)) \end{aligned} \quad (C.2)$$

Substituindo (C.2) em (C.1) e pelo fato de que $E \left\{ \frac{dw(t)}{dt} \right\} = 0$, tem-se:

$$\begin{aligned} &= \min_{u(t)} \max_{\bar{v}(t)} J(u(t), \bar{v}(t)) = \min_{u(t)} \max_{\bar{v}(t)} E \left\{ V(\bar{x}(0)) - V(\bar{x}(t_f)) + \right. \\ & \int_0^{t_f} \left(\bar{x}^T(t)\bar{Q}\bar{x}(t) + u^T(t)Ru(t) - \rho^2\bar{v}^T(t)\bar{v}(t) + \left(\frac{dV(\bar{x}(t))}{dt} \right)^T + F(\bar{x}(t)) + \right. \\ & \left. \left. \left(\frac{dV(\bar{x}(t))}{dt} \right)^T \bar{C}\bar{v}(t) + \frac{1}{2} H^T(\bar{x}(t)) \frac{\partial^2 V(\bar{x}(t))}{\partial \bar{x}^2(t)} H(\bar{x}(t)) \right) dt \right\}, \forall \bar{x}(0). \\ &= \min_{u(t)} \max_{\bar{v}(t)} E \left\{ V(\bar{x}(0)) - V(\bar{x}(t_f)) + \int_0^{t_f} \left(\left(\frac{\partial V(\bar{x}(t))}{\partial \bar{x}(t)} \right)^T F(\bar{x}(t)) + \right. \right. \\ & \left. \left. \bar{x}^T(t)\bar{Q}\bar{x}(t) - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial V(\bar{x}(t))}{\partial \bar{x}(t)} \right)^T G(\bar{x}(t))R^{-1}G^T(\bar{x}(t)) \frac{\partial V(\bar{x}(t))}{\partial \bar{x}(t)} + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\rho^2} \left(\frac{\partial V(\bar{x}(t))}{\partial \bar{x}(t)} \right)^T \bar{C} \bar{C}^T \frac{\partial V(\bar{x}(t))}{\partial \bar{x}(t)} + \frac{1}{2} H^T(\bar{x}(t)) \frac{\partial^2 V(\bar{x}(t))}{\partial \bar{x}^2(t)} H(\bar{x}(t)) + \\ & \left(u(t) \frac{1}{2} R^{-1} G^T(\bar{x}(t)) \frac{\partial V(\bar{x}(t))}{\partial \bar{x}(t)} \right)^T R \left(u(t) \frac{1}{2} R^{-1} G^T(\bar{x}(t)) \frac{\partial V(\bar{x}(t))}{\partial \bar{x}(t)} \right) - \left(\rho \bar{v}(t) - \right. \\ & \left. \frac{1}{2\rho} \bar{C}^T \frac{\partial V(\bar{x}(t))}{\partial \bar{x}(t)} \right)^T \left(\rho \bar{v}(t) - \frac{1}{2\rho} \bar{C}^T \frac{\partial V(\bar{x}(t))}{\partial \bar{x}(t)} \right) dt \Big\}, \forall \bar{x}(0). \end{aligned}$$

Assim a solução mínimax é dada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} J(u^*(t), \bar{v}^*(t)) = E \Big\{ & V(\bar{x}(0)) - V(\bar{x}(t_f)) + \int_0^{t_f} \left(\left(\frac{\partial V(\bar{x}(t))}{\partial \bar{x}(t)} \right)^T F(\bar{x}(t)) + \right. \\ & \bar{x}^T(t) \bar{Q} \bar{x}(t) - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial V(\bar{x}(t))}{\partial \bar{x}(t)} \right)^T G(\bar{x}(t)) R^{-1} G^T(\bar{x}(t)) \frac{\partial V(\bar{x}(t))}{\partial \bar{x}(t)} + \\ & \left. \frac{1}{4\rho^2} \left(\frac{\partial V(\bar{x}(t))}{\partial \bar{x}(t)} \right)^T \bar{C} \bar{C}^T \frac{\partial V(\bar{x}(t))}{\partial \bar{x}(t)} + \frac{1}{2} H^T(\bar{x}(t)) \frac{\partial^2 V(\bar{x}(t))}{\partial \bar{x}^2(t)} H(\bar{x}(t)) \right) dt \Big\}, \forall \bar{x}(0), \end{aligned}$$

Com

$$u^*(t) = -\frac{1}{2} R^{-1} G^T(\bar{x}(t)) \frac{\partial V(\bar{x}(t))}{\partial \bar{x}(t)}, \quad \bar{v}^*(t) = \frac{1}{2\rho^2} \bar{C}^T \frac{\partial V(\bar{x}(t))}{\partial \bar{x}(t)}.$$

Se a eq. (4.15) for verdade, então:

$$J(u^*(t), \bar{v}^*(t)) \leq E \{ V(\bar{x}(0)) - V(\bar{x}(t_f)) \}.$$

Para a desigualdade (4.12), a solução minimax seria menor que $\rho^2 E \{ \bar{x}^T(0) \bar{I} \bar{x}(0) \}$.

Depois que a desigualdade (4.16) seja obtida como segue:

$$\begin{aligned} J(u^*(t), \bar{v}^*(t)) & \leq E \{ V(\bar{x}(0)) - V(\bar{x}(t_f)) \} \leq E \{ V(\bar{x}(0)) \} \leq \rho^2 E \{ \bar{x}^T(0) \bar{I} \bar{x}(0) \}, \\ & \forall \bar{x}(0) \end{aligned}$$

APÊNDICE D - Prova do Teorema 2 segundo Chen & Lin (2011)

Para o sistema *Fuzzy* da Eq. (4.23), seja $V(\bar{x}(t)) = \bar{x}^T(t)P\bar{x}(t) > 0$, para $\bar{x}(0) \neq 0$ com $V(0) = 0$. Então o problema de regulação minimax da Eq. (4.12) é equivalente á seguinte equação:

$$\min_{u(t)} \max_{\bar{v}(t)} J(u(t), \bar{v}(t)) = \min_{u(t)} \max_{\bar{v}(t)} E \left\{ \bar{x}^T(0)P\bar{x}(0) - \bar{x}^T(t_f)P\bar{x}(t_f) + \int_0^{t_f} \left(\bar{x}^T(t)\bar{Q}\bar{x}(t) + u^T(t)Ru(t) - \rho^2\bar{v}^T(t)\bar{v}(t) + \frac{dv(\bar{x}(t))}{dt} \right) dt \right\}, \forall \bar{x}(0) \quad (D.1)$$

Pela formula de Ito em lemma 1, tem-se:

$$\frac{dv(\bar{x}(t))}{dt} = 2\bar{x}^T(t)P \sum_{i=1}^L h_i(z(t)) \left(\bar{A}_i\bar{x}(t) + \bar{B}_i u(t) + \bar{C}\bar{v}(t) + \bar{D}_i \frac{dw(t)}{dt} \right) + \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L h_i(z(t))h_j(z(t))\bar{x}^T(t)\bar{D}_i P \bar{D}_j \bar{x}(t) \quad (D.2)$$

Substituindo (D.2) em (D.1) e pelo fato que $E \left\{ \frac{dw(t)}{dt} \right\} = 0$, tem-se:

$$\begin{aligned} & \min_{u(t)} \max_{\bar{v}(t)} E \left\{ \bar{x}^T(0)P\bar{x}(0) - \bar{x}^T(t_f)P\bar{x}(t_f) + \int_0^{t_f} \left(\bar{x}^T(t)\bar{Q}\bar{x}(t) + u^T(t)Ru(t) - \rho^2\bar{v}^T(t)\bar{v}(t) + \right. \right. \\ & 2\bar{x}^T(t)P \cdot \sum_{i=1}^L h_i(z(t)) \left(\bar{A}_i\bar{x}(t) + \bar{B}_i u(t) + \bar{C}\bar{v}(t) \right) + \\ & \left. \left. \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L h_i(z(t))h_j(z(t))\bar{x}^T(t)\bar{D}_i P \bar{D}_j \bar{x}(t) \right) dt \right\}. \\ & = \min_{u(t)} \max_{\bar{v}(t)} E \left\{ \bar{x}^T(0)P\bar{x}(0) - \bar{x}^T(t_f)P\bar{x}(t_f) + \int_0^{t_f} \left(\bar{x}^T(t)\bar{Q}\bar{x}(t) + \right. \right. \\ & \sum_{i=1}^L h_i(z(t)) \left(\bar{x}^T(t)P\bar{A}_i\bar{x}(t) + \bar{x}^T(t)\bar{A}_j^T P\bar{x}(t) \right) + \frac{1}{\rho^2} \bar{x}^T(t)P\bar{C}\bar{C}^T P\bar{x}(t) - \\ & \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L h_i(z(t))h_j(z(t))\bar{x}^T(t)P\bar{B}_i R^{-1} \bar{B}_j^T P\bar{x}(t) + \\ & \left. \left. \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L h_i(z(t))h_j(z(t))\bar{x}^T(t)\bar{D}_i^T P \bar{D}_j \bar{x}(t) + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(Ru(t) + \sum_{i=1}^L h_i(z(t)) \bar{B}_i^T P \bar{x}(t) \right)^T R^{-1} \left(Ru(t) + \sum_{i=1}^L h_i(z(t)) \bar{B}_i^T P \bar{x}(t) \right) - \\
& \left(\rho \bar{v}(t) - \frac{1}{\rho} \bar{C}^T P \bar{x}(t) \right)^T \left(\rho \bar{v}(t) - \frac{1}{\rho} \bar{C}^T P \bar{x}(t) \right) dt \Big\}. \\
= & \\
& \min_{u(t)} \max_{\bar{v}(t)} E \left\{ \bar{x}^T(0) P \bar{x}(0) - \bar{x}^T(t_f) P \bar{x}(t_f) + \right. \\
& \int_0^{t_f} \left(\sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L h_i(z(t)) h_j(z(t)) \bar{x}^T(t) \left(P \bar{A}_i + \bar{A}_i^T P + \bar{Q} - P \bar{B}_i R^{-1} \bar{B}_j^T P + \frac{1}{\rho^2} P \bar{C} \bar{C}^T + \right. \right. \\
& \left. \left. \bar{D}_i^T P \bar{D}_j \right) \bar{x}(t) + \right. \\
& \left. \left(Ru(t) + \sum_{i=1}^L h_i(z(t)) \bar{B}_i^T P \bar{x}(t) \right)^T R^{-1} \left(Ru(t) + \sum_{i=1}^L h_i(z(t)) \bar{B}_i^T P \bar{x}(t) \right) - \right. \\
& \left. \left(\rho \bar{v}(t) - \frac{1}{\rho} \bar{C}^T P \bar{x}(t) \right)^T \left(\rho \bar{v}(t) - \frac{1}{\rho} \bar{C}^T P \bar{x}(t) \right) \right) dt \Big\}.
\end{aligned}$$

A solução minimax é dada da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
J(u^*(t), \bar{v}^*(t)) = & \\
& \left\{ \bar{x}^T(0) P \bar{x}(0) - \bar{x}^T(t_f) P \bar{x}(t_f) + \int_0^{t_f} \left(\sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L h_i(z(t)) h_j(z(t)) \bar{x}^T(t) \left(P \bar{A}_i + \bar{A}_i^T P + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \bar{Q} - P \bar{B}_i R^{-1} \bar{B}_j^T P + \frac{1}{\rho^2} P \bar{C} \bar{C}^T + \bar{D}_i^T P \bar{D}_j \right) \bar{x}(t) \right) dt \Big\}.
\end{aligned}$$

Com

$$u^*(t) = - \sum_{j=1}^L h_j(z(t)) R^{-1} \bar{B}_j^T P \bar{x}(t), \quad \bar{v}^*(t) = \frac{1}{\rho^2} \bar{C}^T P \bar{x}(t)$$

$$\begin{aligned}
\min_{u(t)} \max_{\bar{v}(t)} J(u(t), \bar{v}(t)) &= J(u^*(t), \bar{v}^*(t)) \leq E \{ \bar{x}^T(0) P \bar{x}(0) - \bar{x}^T(t_f) P \bar{x}(t_f) \} \leq \\
& E \bar{x}^T(0) P \bar{x}(0) \leq \rho^2 E \{ \bar{x}^T(0) \bar{I} \bar{x}(0) \}.
\end{aligned}$$

Para simplificar a equação, supõe a desigualdade (4.25), então:

$$P \leq \rho^2 \bar{I}$$

APÊNDICE E - Complemento de Schur

O complemento de Schur é uma ferramenta utilizada para converter inequações não-lineares convexas em LMIs.

Supõe M uma matriz formada por quatro blocos e definida da seguinte forma:

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

onde D é uma matriz quadrada e não-singular. Segundo Palhares e Gonçalves (2007), o complemento de Schur de D em M , denotado por (M/D) é definido da seguinte forma:

$$\left(\frac{M}{D}\right) = A - BD^{-1}C$$

Considere a seguinte matriz simétrica:

$$M = M' = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_2' & M_3 \end{bmatrix}$$

e os seguintes complementos de Schur:

$$\left(\frac{M}{M_1}\right) = M_3 - M_2' M_1^{-1} M_2$$

$$\left(\frac{M}{M_3}\right) = M_1 - M_2 M_3^{-1} M_2'$$

Para Palhares e Gonçalves (2007), as seguintes duas propriedades importantes são válidas:

$$M \succ 0 \text{ sse } = M_1 \succ 0 \text{ e } \left(\frac{M}{M_1}\right) \succ 0$$

$$\text{Se } M \succ 0 \text{ então } M = M' \succ 0 \text{ sse } \left(\frac{M}{M_1}\right) \succ 0$$

que valem também para M_3 e $\left(\frac{M}{M_3}\right)$.

APÊNDICE F - Desigualdades Matriciais Lineares (em inglês *Linear Matrix Inequality, LMI*).

Segundo Palhares e Gonçalves (2007), a partir dos anos 90, as descrições LMIs despontaram como ferramentas poderosas para resolver problemas de controle, inclusive para sistemas *Fuzzy*, impulsionadas pelo desenvolvimento de algoritmos eficientes de otimização convexa. Porém, segundo Boyd et al. (1994), a história da relação entre LMIs e análise de sistemas dinâmicos remonte mais de um século.

Boyd et al. (1994) definem a LMI como uma desigualdade na seguinte forma:

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0 \quad (\text{F.1})$$

sendo que $x \in \mathbb{R}^n$ é uma variável vetorial também chamada de variável de decisão e é desconhecida (suas componentes x_i , $i = 1, \dots, m$) e $F_i = F_i' \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 0, 1, \dots, m$ são matrizes simétricas e conhecidas (Boyd et al., 1994). O sinal positivo da equação (F.1) significa que $F(x)$ é definida positiva. A LMI (F.1) é uma restrição convexa em x , ou seja, o conjunto $\{x/F(x)\}$ é convexo. A desigualdade (F.1) pode representar uma ampla variedade de restrições convexas em x , tais como desigualdades lineares, desigualdades quadráticas, desigualdades de norma matricial e restrições utilizadas em teoria de controle, como a desigualdade de Lyapunov e outras desigualdades matriciais. De forma geral, uma LMI é uma desigualdade com elementos matriciais e simétrica. Um conjunto LMI pode ser interpretado como uma única LMI

$$\text{diag} \{F_1(x), F_2(x), \dots, F_k(x)\} \geq 0 := \begin{cases} F_1(x) \geq 0 \\ F_2(x) \geq 0 \\ \vdots \\ F_k(x) \geq 0 \end{cases} \quad (\text{F.2})$$

Quando as matrizes F_i são diagonais, a LMI $F(x) > 0$ é apenas um conjunto de desigualdades lineares. As desigualdades (convexas) não lineares são convertidas na forma de LMI utilizando complemento de Schur. A ideia básica é a seguinte LMI:

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S_T(x) & R(x) \end{bmatrix} > 0, \quad (\text{F.3})$$

onde $Q(x) = Q(x)^T$ e $R(x) = R(x)^T$ matrizes simétricas, e $S(x)$ uma variável matricial, todas dependem afinadamente de x e equivalentes a:

$$R(x) > 0, Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T > 0 \quad (\text{F.4})$$

Em outras palavras, o conjunto de desigualdades não lineares (F.4) pode ser representado como a LMI (F.3).

Por exemplo, considera o LMI com uma restrição na seguinte forma:

$$F(x) = F_0 + x_1F_1 + \dots + x_mF_m < 0 \quad (\text{F.5})$$

onde $X = (x_1, \dots, x_m)$ é um vetor de escalares desconhecidos ou seja, x_i são variáveis de decisão ou otimização. F_0, \dots, F_m são matrizes simétricas conhecidas.

< 0 significa “definida negativa”: maior autovalor de $F(x)$ é menor que 0.

Supondo que precisa escrever a seguinte LMI na forma da LMI da Eq. (F.5):

$$F^T X + X F < 0 \quad (\text{F.6})$$

sendo

$$F = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \text{ e } X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{bmatrix}$$

$$F^T X + X F = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$F^T X + X F = \begin{bmatrix} -2x_1 & 2x_1 - 3x_2 \\ 2x_1 - 3x_2 & 4x_2 - 4x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} x_3 = x_1F_1 + x_2F_2 + x_3F_3 = F_0 + \sum_{i=1}^3 x_iF_i < 0$$

APÊNDICE G – Senhoriagem

Varias definições são apropriadas à senhoriagem. Segundo Rovelli (1994), a senhoriagem é a capacidade do governo de financiar as despesas pela emissão de papel moeda. Cohen (1971) usa a seguinte definição da senhoriagem: “*Seigniorage referred to the difference between the circulating value of a coin and the cost of bullion and minting, involving a once-for-all gain to the coin’s issuer. Later the term was extended to describe the gain, over and above cost of production, to the issuer of any kind of money-including also international money*”.

Existe varias formas de mensuração da senhoriagem. Primeiramente, a senhoriagem pode ser medida senhoriagem monetária, isso é a variação nominal da base monetária. Uma forma de obter esta mensuração é pela multiplicação da taxa de crescimento do estoque nominal de moeda pelo valor da base monetária real. Este primeiro conceito surgiu nos trabalhos de Cagan (1956), Cohen (1971), Mankiw (1987) entre outros.

Uma segunda forma de mensuração da senhoriagem é pelo imposto inflacionário, obtido pelo produto da taxa de inflação pelo valor da base monetária real. Esta segunda forma surgiu no trabalho de Friedman (1953). A última forma de medir a senhoriagem é pelo custo de oportunidade da própria senhoriagem dado pela multiplicação da taxa de juros nominal pela base monetária. Esta maneira surgiu no trabalho de Toma e Goff (1993).

Os três conceitos acima definidos podem ser resumido pelas seguintes equações:

1) Senhoriagem monetária: $\frac{\Delta M}{P}$

2) Imposto inflacionário: $\pi \frac{M}{P}$

3) Senhoriagem custo de oportunidade: $i \frac{M}{P} = (r + \pi) \frac{M}{P}$

onde M é a base monetária, p o nível de preço, π a taxa de inflação, i a taxa de juros nominal, r a taxa de juros real.

Existem outras abordagens em relação à mensuração da moeda. Uma destas abordagens é a de Drazen (1984). O autor considerou duas fontes distintas de receitas derivadas da emissão de moeda: a receita da expansão da oferta nominal de moeda quando os indivíduos já detêm um dado nível de encaixe real e os lucros derivados do monopólio de emissão de moeda.

A medida proposta por Drazen para a receita total associada com a criação de moeda, em uma economia em estado estacionário de equilíbrio, seria: $S = \mu m + (r + y)a$.

a é o ativo líquido do governo adquirido com emissão monetária.

μm é a receita decorrente da expansão da oferta monetária.

$(r + y)a$ é o lucro do governo pelo monopólio de emissão, que permite a venda de títulos sem remuneração (moeda) em troca da aquisição de títulos privados, com remuneração.

O segundo termo da equação de Drazen corresponde à soma algébrica das receitas dos ativos adquiridos com a emissão monetária (ia) menos parcela desta receita utilizada para manter esses ativos constantes em relação ao produto $(\pi + y)a$.

Segundo Hochreiter e Rovelli (2001), a equação de Drazen pode ser escrita como:

$$S = ia - (\pi + y)a + \frac{\Delta m}{Y} = (r - y)a + \frac{\Delta m}{m} \frac{m}{Y},$$

Se assumirmos que a política monetária é feita totalmente por operações de mercado aberto, então $a = m$, e considerando que $\frac{\Delta m}{m} = (\pi + y - v)$, temos:

$$S = (r - y)m + (\pi + y - v)m = im - vm,$$

Portanto, a medida de senhoriagem proposta por Drazen coincide com o conceito de senhoriagem custo de oportunidade quando a velocidade de circulação da base monetária é constante $v = 0$.

APÊNDICE H - Método de Runge-Kutta

Procura-se resolver a seguinte equação diferencial ordinária:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (\text{H.1})$$

y sendo um vetor \mathbb{R}^n e f uma função de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Em busca da solução desta equação diferencial ordinária, três maneiras diferentes podem ser usadas: a analítica, a qualitativa e a que mais nos interessa neste trabalho, a numérica. Na primeira maneira, a prioridade é dada para buscar a solução da equação diferencial via processo de integração. Na segunda, busca-se o comportamento geométrico das soluções e os aspectos das curvas integrais descritos por meios de campos de direções. Esta é baseada na interpretação da derivada. Por último, na abordagem numérica, métodos numéricos (método de Euler, método de Runge-Kutta...) são usados para aproximar a solução de problema de valor inicial de equações diferenciais de primeira ordem.

O método Runge-Kutta, dos matemáticos alemães Carl David Runge (1856-1927) e M. Wilhelm Kutta (1867-1944) é considerado um dos mais populares. Cada ordem do método de Runge-Kutta consiste em comparar um polinômio de Taylor apropriado para eliminar o cálculo das derivadas. Assim, o método de quarta ordem é um dos mais preciosos para se obter soluções aproximadas do valor inicial.

Supõe-se o seguinte problema do valor inicial, formado pela equação diferencial ordinária abaixo:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (\text{H.2})$$

Admite-se $y = y(x)$ como sendo a solução exata do problema. Pelo polinômio de Taylor, se a função $y(x)$ tiver $k + 1$ derivada contínua em um intervalo aberto contendo a e x , podemos escrever:

$$y(x) = y(a) + y'(a) \frac{x-a}{1!} + \dots + y^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!} + y^{(k+1)}(c) \frac{(x-a)^{(k+1)}}{(k+1)!} \quad (\text{H.3})$$

onde c é entre a e x .

Substituindo a por x_n e x por $x_{n+1} = x_n + h$, a equação de Taylor de cima se torna:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) + \dots + \frac{h^{k+1}}{(k+1)!}y^{(k+1)}(c) \quad (\text{H.4})$$

onde c é entre x_n e x_{n+1} .

Segundo William *et Al.* (2007), o procedimento Runge-Kutta de primeira ordem ($k = 1$), é o método Euler básico. Portanto, o método de Runge-Kutta de quarta ordem ($k = 4$) torna:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_n) + \frac{h^4}{4!}y^{(4)}(x_n) + \frac{h^5}{5!}y^{(5)}(c) \quad (\text{H.5})$$

Este procedimento de quarta ordem consiste em encontrar n constantes apropriadas de tal forma que:

$$y_{n+1} = y_n + ak_1 + bk_2 + ck_3 + dk_4 \quad (\text{H.6})$$

Considerando que:

$$y(x_{n+1}) = y_n + h\varphi(x_n, y_n, h).$$

onde

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf(x_n + \alpha_1 h, y_n + \beta_1 k_1)$$

$$k_3 = hf(x_n + \alpha_2 h, y_n + \beta_2 k_1 + \beta_3 k_2)$$

$$k_4 = hf(x_n + \alpha_3 h, y_n + \beta_4 k_1 + \beta_5 k_2 + \beta_6 k_3)$$

coincide com o polinômio de Taylor de grau quatro.

O método mais utilizado é o seguinte:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6} + 0(h^5) \quad (\text{H.7})$$

onde

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3)$$

e $0(h^5)$ é o erro de truncamento local deste método.

**APÊNDICE I - Interpolação cúbica por partes de conservação de forma (em inglês:
Piecewise Cubic Hermite Interpolating Polynomial PCHIP):**

O pchip encontra valores de uma função de interpolação subjacente $P(x)$ em pontos intermediários, tais que:

- Em cada subintervalo $x_k \leq x \leq x_{k+1}$, $P(x)$ é o interpolante de Hermite cúbico para os valores fornecidos e as determinadas inclinações nos dois pontos finais.
- $P(x)$ interpola y , isto é, $P(x_j) = y_j$, e a primeira derivada $\frac{dP}{dx}$ é contínua. A segunda derivada $\frac{d^2P}{dx^2}$ é, provavelmente, não contínua; pode haver saltos no x_j .
- Os aumentos no x_j são escolhidos de maneira que $P(x)$ preserve a forma dos dados e respeita a monotonicidade. Isso significa que, nos intervalos em que os dados são monotônicos, $P(x)$ também é monotônico; nos pontos em que os dados têm um extremo local, $P(x)$ também tem.

Note que: Se y é uma matriz, $P(x)$ satisfaz as regras acima mencionadas para cada coluna de y .

Exemplo:

Na interpolação $y_i = pchip(x, y, x_i)$ retorna o vetor y_i contendo elementos correspondentes aos elementos de x_i e determinados por interpolação cúbica por partes nos vetores x e y . O vetor x especifica os pontos nos quais os dados y são fornecidos, portanto x e y devem ter o mesmo comprimento. Se y é uma matriz, os valores na última dimensão, $y(:, \dots, :, j)$, são tomados como valores correspondentes a x . Nesse caso, a última dimensão de y deve ter o mesmo comprimento que x . Se y tiver n dimensões, a saída y_i será do tamanho $size [size(y, 1) \ size(y, 2) \ \dots \ size(y, n - 1) \ length(x_i)]$. Por exemplo, se y é uma matriz, então y_i é do tamanho $size [size(y, 1) \ length(x_i)]$.

Na interpolação $PP = pchip(x, y)$ retorna uma estrutura polinomial composta para uso pelo *ppval*. x pode ser um vetor linha ou coluna. y é um vetor linha ou coluna do mesmo comprimento que y ou uma matriz com colunas de comprimento (x).

O valor interpolado em um ponto de consulta é baseado em uma interpolação cúbica por partes de preservação de forma dos valores em pontos de grade vizinhos.

APÊNDICE J - Método Simplex de Nelder-Mead

Desde sua publicação em 1965, o algoritmo simplex de Nelder-Mead tornou-se um dos métodos mais utilizados para otimização irrestrita não linear. Bastante popular, especialmente nas áreas de química, engenharia química e medicina, o método de Nelder-Mead tenta minimizar uma função não linear com valor escalar de n variáveis reais, utilizando apenas os valores da função sem qualquer informação derivada (explícita ou implícita), Lagarias *et Al.* (1998).

O algoritmo Nelder-Mead foi proposto como um método para minimizar uma função de valor real $f(x)$ para $x \in R^n$. Quatro parâmetros escalares devem ser especificados para definir um método de Nelder-Mead completo: coeficientes de reflexão (ρ), de expansão (χ), de contração (γ), e de encolhimento (σ). De acordo com o artigo original de Nelder-Mead citado por Jeffrey *et al.* (1998), estes parâmetros devem satisfazer as seguintes condições:

$$\rho > 0, \quad \chi > 1, \quad \chi > \rho, \quad 0 < \gamma < 1 \text{ e } 0 < \sigma < 1 \quad (\text{J.1})$$

As escolhas quase universais utilizadas no algoritmo padrão de Nelder-Mead são:

$$\rho = 1, \quad \chi = 2, \quad \gamma = \frac{1}{2}, \text{ e } \sigma = \frac{1}{2} \quad (\text{J.2})$$

As condições gerais da Eq. (J.1) são assumidas para o caso unidimensional, mas o caso padrão (J.2) é usado na análise bidimensional.

No início da iteração de ordem k , $k \geq 0$, um simplex não degenerada Δ_k é dado, juntamente com os seus $n+1$ vértices, cada um dos quais é um ponto em R^n . É assumido que a iteração k começa ordenando, e denominando esses vértices como $x_1^{(k)}, \dots, x_{n+1}^{(k)}$, de tal forma que:

$$f_1^{(k)} \leq f_2^{(k)} \leq \dots \leq f_{n+1}^{(k)} \quad (\text{J.3})$$

onde $f_i^{(k)}$ representa $f(x_i^{(k)})$. A k -ésima iteração gera um conjunto de $n + 1$ vértices que definem um simplex diferente para a iteração seguinte, de modo que $\Delta_{k+1} \neq \Delta_k$. Já que se procura minimizar f , referir-se a $x_1^{(k)}$ como o melhor ponto ou vértice, para $x_{n+1}^{(k)}$ como o pior

ponto, e $x_n^{(k)}$ como o próximo pior ponto. Da mesma forma, refere-se a $f_{n+1}^{(k)}$ como o pior valor de função, e assim por diante.

J.1 ITERAÇÃO DO ALGORITMO DE NELDER-MEAD

O processo de iteração do algoritmo de minimização de Nelder-Mead pode ser esquematizado como segue:

- a) **Ordem.** Ordenar os $n + 1$ vértices para satisfazer $f(x_1) \leq f(x_2) \leq \dots \leq f(x_{n+1})$ usando as regras de desempate abaixo.
- b) **Reflexão.** Calcule o ponto de reflexão x_r :

$$x_r = \bar{x} + \rho(\bar{x} - x_{n+1}) = (1 + \rho)\bar{x} - \rho x_{n+1} \quad (\text{J.4})$$

onde $\bar{x} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n}$ representa o centróide dos n melhores pontos (todos os vértices exceto para x_{n+1}). Avaliar $f_r = f(x_r)$. Se $f_1 \leq f_r \leq f_n$, o ponto refletido x_r é aceitado e a iteração termina.

- c) **Expansão.** Se $f_r < f_1$, o ponto de expansão x_c é calculado como segue:

$$x_c = \bar{x} + \chi(x_r - \bar{x}) = \bar{x} + \rho\chi(\bar{x} - x_{n+1}) = (1 + \rho\chi)\bar{x} - \rho\chi x_{n+1} \quad (\text{J.5})$$

e avaliar $f_c = f(x_c)$. Se $f_c < f_r$, x_c é aceito e a iteração termina; caso contrário ($f_c \geq f_r$), x_r é aceito e a iteração termina.

- d) **Contração.** Se $f_r \geq f_n$ executa-se uma contração entre \bar{x} e o melhor de x_{n+1} e x_r .

Lado de fora. Se $f_n \leq f_r < f_{n+1}$ (x_r é estritamente melhor que x_{n+1}) executa uma contração do lado de fora. Calcula como segue:

$$x_c = \bar{x} + \gamma(x_r - \bar{x}) = \bar{x} + \rho\gamma(\bar{x} - x_{n+1}) = (1 + \rho\gamma)\bar{x} - \rho\gamma x_{n+1} \quad (\text{J.6})$$

e avaliar $f_c = f(x_c)$. Se $f_c \leq f_r$, x_c é aceito e a iteração termina; caso contrário, ir à etapa v.

Lado de dentro. Se $f_r \geq f_{n+1}$, executa uma contração dentro calcula-se:

$$x_{cc} = \bar{x} - \gamma(\bar{x} - x_{n+1}) = (1 + \gamma)\bar{x} - \gamma x_{n+1} \quad (\text{J.7})$$

e avaliar $f_{cc} = f(x_{cc})$. Se $f_{cc} < f_{n+1}$, x_{cc} é aceito e a iteração termina; caso contrário, ir à etapa v.

- e) **Execução da etapa psiquiatra.** Avaliar f nos n pontos $v_i = x_1 + \sigma(x_i - x_1)$,
 $i = 2, \dots, n + 1$. Os vértices (não ordenados) do simplex na próxima iteração são x_1 ,
 v_2, \dots, v_{n+1} .

A conclusão geral sobre o algoritmo de Nelder-Mead, é que o principal mistério a ser resolvido não é se, em última análise, ele converge para um estado minimizador para as funções gerais (não convexas). Isso não é o caso, mas sim, por que ele tende a funcionar tão bem na prática produzindo uma diminuição inicial rápida em valores da função.

APÊNDICE K - Regra de Taylor

A regra de Taylor consiste em expressar a taxa de juros nominal (i) em função da inflação e do hiato de produto. Segundo Taylor (1993), a inflação e o hiato de produto são endógenos, neste sentido existe varias maneiras de expressar a função de reação do banco central.

Supondo a seguinte curva de otimização do Banco Central (curva que equilibra os custos e benefícios das ações da política do Banco Central):

$$\pi = \pi^T - \alpha(x) \quad (\text{K.1})$$

Supondo a seguinte equação da oferta agregada:

$$\pi = \pi^e + ax + e \quad (\text{K.2})$$

aonde π é a inflação, π^T é a meta de inflação, x é o hiato de produto em %, π^e é a inflação esperada.

Supondo a seguinte curva IS corrigida pelo produto de pleno emprego:

$$\frac{y}{y^n} = \frac{y_0}{y^n} - b(i - \pi^e) + u \quad (\text{K.3})$$

y é o produto observado, y^n é o produto de pleno emprego, i é taxa de juros nominal e u é choque.

$$\begin{aligned} \frac{y}{y^n} - 1 &= \frac{y_0}{y^n} - 1 - b(i - \pi^e) + u \\ x &= x_0 - b(i - \pi^e) + u \end{aligned} \quad (\text{K.4})$$

a taxa de juros de equilibrio de longo prazo é dado por:

$$\begin{aligned} r^* &= \frac{y_0 - y^n}{by^n} \\ r^* &= \frac{x_0}{b} \rightarrow x_0 = br^* \end{aligned} \quad (\text{K.5})$$

Portanto, substituindo (K.5) em (K.4), tem-se:

$$\begin{aligned} x &= br^* - b(i - \pi^e) + u \\ x &= br^* - b(i - \pi^e) + u \\ x &= -b(i - \pi^e - r^*) + u \end{aligned} \tag{K.6}$$

A equação (K.6) é uma outra forma de escrever a curva IS.

Aproximando as duas equações da inflação (K.1 e K.2) e isolando x , o hiato de produto, temos:

$$x = \frac{\pi^T - \pi^e - e}{(a + \alpha)} \tag{K.7}$$

Substituindo (K.5) e (K.7) em (K.4) tem-se:

$$\frac{\pi^T - \pi^e - e}{(a + \alpha)} = -b(i - \pi^e - r^*) + u \tag{K.8}$$

Resolvendo para i , temos:

$$i = \pi^e + r^* - \frac{\pi^T - \pi^e - e}{b(a + \alpha)} \tag{K.9}$$

Somando e subtraindo π^T no lado direito da equação (K.8), temos:

$$\begin{aligned} i &= \pi^e + \pi^T - \pi^T + r^* - \frac{\pi^T - \pi^e - e}{b(a + \alpha)} \rightarrow i \\ &= (\pi^e - \pi^T) + \pi^T + r^* + \frac{(\pi^e - \pi^T)}{b(a + \alpha)} + \frac{e}{b(a + \alpha)} \rightarrow \\ i &= i^T + \left[1 + \frac{1}{b(a + \alpha)} \right] (\pi^e - \pi^T) + \frac{e}{b(a + \alpha)} \end{aligned} \tag{K.10}$$

$i^T = \pi^T + r^*$ é a taxa nominal de juros de equilíbrio de longo prazo. Esta taxa de juros nominal é plenamente ajustada a qualquer mudança de r^* , taxa de juros real de equilíbrio de longo prazo.

APÊNDICE L - Filtro Hodrick-Prescott (HP)

O filtro HP é um dos métodos preferenciais para extrair o componente de tendência de uma série macroeconômica. Este filtro é, portanto, transparente e fácil de programar. Uma literatura elaborada por Pedersen (1998), Kaiser e Maravall (1999) mostra que ele tem propriedades estatísticas satisfatórias. Além disso, embora ele conduza aos efeitos colaterais, a filtragem dos últimos pontos da amostra é relativamente pouco sensível às previsões usadas para estender as séries em médio prazo. Assim, se explica o seu uso comum em muitos estudos empíricos de organizações nacionais e internacionais.

No entanto, a literatura puramente estatística não considera esse filtro como ideal, pois, ele não permite alocar ciclos de diferentes comprimentos entre a componente cíclica e a componente tendencial. Além disso, como outras técnicas estatísticas, ele não é baseado em fundamentos teóricos econômicos, embora a sua utilização exija hipóteses que contenham pressupostos econômicos. Ele difere neste do outro grande tipo de métodos permitindo extrair a tendência do PIB com base na avaliação de uma função de produção.

Cada método (filtros estatísticos univariados como o filtro HP, multivariados como os modelos VAR estruturais, de funções de produção como no método estrutural, neste último caso, a função de produção do setor comercial é representado por uma Cobb-Douglas, enquanto do setor sem fins lucrativos é exógena) tem vantagens e desvantagens, de acordo com estatísticas ou propriedades econômicas que você deseja verificar ou pela utilização que pode ser feita a partir destes cálculos. Em consequência, nem a literatura teórica ou nem as múltiplas aplicações empíricas destes procedimentos permitem favorecer "*ex ante*" um método entre outros.

O filtro HP assume que uma série X é dividida em uma tendência e um ciclo:

$$X_t = T_t + C_t$$

onde a tendência T resulta do seguinte cálculo de otimização:

$$\min_{X_t^*} \sum_{t=1}^N [(X_t - T_t)^2 + \lambda(\Delta T_{t+1} - \Delta T_t)]$$

Este filtro é semelhante a uma média móvel simétrica de comprimento infinito. Para filtrar um ponto específico da amostra, atribui-se pesos às observações que o cercaram, isso, dependendo de um lado do tamanho da amostra, do outro lado do valor do parâmetro λ . A escolha do valor do parâmetro λ irá condicionar um lado, do número de observações que devem ser adicionados no final (ou, mais raramente, no início) da amostra inicial para evitar o problema dos efeitos colaterais, do outro lado, certas propriedades da tendência, em particular, o seu grau de ciclicidade. A escolha do valor do parâmetro deve ser baseada em critérios econômicos e estatísticas.

Se na maior parte do tempo, as instituições que utilizaram o filtro HP para calcular a tendência ou o ciclo de uma série utilizou os valores recomendados por Hodrick e Prescott (100 em dados anuais e 1600 em dados trimestrais), muitos trabalhos recentes usaram valores muito diferentes. Alguns defendem valores mais elevados (Baxter e King que defendem um λ entre 100 e 400 para os dados anuais). Outros, principalmente nos estudos estatísticos recentes, preferem valores muito inferiores que variam de 4 a 10 (Maravall (1999), Pedersen (1998)...). A ausência de uma definição única da tendência e de suas propriedades pode explicar a variedade de resultados. Como Canova aponta (1998, pp.475-476):

« ...with in the empirical literature, there is a fundamental disagreement on the properties of the trend and on its relationship with the cyclical component of a series. (CANOVA, 1998, p. 475-476)»

L.1. ARGUMENTOS ESTATÍSTICOS.

A análise no domínio da frequência de uma série econômica mostra que qualquer série estacionária pode ser decomposta em uma soma ponderada de série cíclica de diferentes frequências. Um filtro ideal permitiria afetar certos ciclos, tais como aqueles superiores a 8 anos a um componente tendencial, e os ciclos de tempos inferiores a um componente cíclico. O comprimento limite (aqui 8 anos) depende da escolha do economista. No caso do cálculo de um PIB tendencial, é comum escolher o tempo que corresponde, em média, ao comprimento dos ciclos de atividades deduzidos do passado da variável.

No caso do cálculo de um déficit ajustado do ciclo, é desejável isolar os movimentos cíclicos relacionados às mudanças de conjuntura. Na economia, a duração (comprimento) de um ciclo de atividade não é constante e é difícil de medir com precisão um comprimento

médio. Consequentemente, a divisão entre as mudanças que se enquadram dentro do curto prazo e a conjuntura, e aquelas que afetam em longo prazo e a tendência, é difícil de executar. O objetivo não é, necessariamente, recorrer a um filtro ideal para separar os dois componentes.

Na prática, o filtro HP (como outros filtros) não permite prejudicar substancialmente um ciclo de um dado comprimento para o componente ao qual se liga. Isto significa que um ciclo com um comprimento inferior ao comprimento crítico (por exemplo, um ciclo de 5 anos para um comprimento crítico de 8 anos), em vez de ser completamente atribuída ao componente cíclico, será apenas parcialmente. Uma parte das flutuações que teria sido da componente cíclica da série será atribuída à tendência. Isto é o que é chamado de efeito de "compressão" que tem como consequência subestimar a volatilidade da componente cíclica e super estimativa da tendência. Por outro lado, é possível superestimar a variabilidade da componente cíclica a incluindo em uma porção das flutuações, de intervalos mais longos, que deveria pertencer a tendência. Este fenômeno é chamado efeito de "leakage". O filtro HP dá origem, em conjunto com estes dois, efeitos que o afetaram do comportamento do filtro ideal.

Tabela L.1 - Valor do parâmetro λ e distorção do filtro de Hodrick-Prescott.

	Valor do Parâmetro λ	Definição	Desvantagens
Efeito de compressão	Valor baixo	Erradamente, afeta uma parte de intervalos de ciclos curtos á tendência.	Tendência muito volátil Componente cíclica subestimada
Efeito de leakage	Valor elevado	Erradamente, afeta uma parte de intervalos de ciclos longos ás componentes cíclicos.	Componente cíclica superestimada Tendência muito suave

Fonte: Elaborada pelo autor (2019).

Do ponto de vista de Pedersen (1998), o melhor valor de λ é aquele que leva a minimizar uma função de perda construída a partir da expressão dos efeitos de leakage e de compressão. Quanto maior é λ mais fortes são os efeitos de leakage, mas quanto menor é λ mais importantes são os efeitos de compressão. Este raciocínio puramente estatístico conduz a valores muito baixos do parâmetro. No entanto, do ponto de vista econômico, estes dois efeitos não têm as mesmas desvantagens, e a minimização da função de perda não é necessariamente desejável.

Segundo Kaiser e Maravall (1999), o melhor valor é aquele que permite a variância da componente cíclica de ser determinado, principalmente, pelos ciclos de comprimento perto do comprimento crítico selecionado (um ciclo de atividade de cerca de 8 anos). Em outras palavras, o espectro do componente cíclico deve apresentar um pico a esta frequência crítica, associada aos ciclos muito próximos de um período de 8 anos. Este raciocínio leva a um valor λ entre 6 e 8, uma série integrada de ordem 1, para um período crítico de 8 anos, e λ entre 30 e 40 para um período crítico de 12 anos. De acordo com esta abordagem, $\lambda = 100$ corresponde a um período crítico de 16 anos.

L.2. ARGUMENTOS ECONÔMICOS.

A escolha de um valor relativamente alto para λ corresponde a uma forte aversão para o efeito de compressão e uma insensibilidade relativa para os efeitos de leakage. Esta escolha, por razões descritas abaixo, pode ser inadequada para a análise da política fiscal através do cálculo do déficit ajustado do ciclo.

a) As implicações de um efeito de compressão forte: tendência muito volátil:

Quanto mais forte é efeito de compressão, mais a componente cíclica apresenta uma baixa volatilidade. Fortes efeitos de compressão levam as tendências muito voláteis, o risco de subestimar as variações na tendência. Calcular tendências altamente voláteis pode ser inconsistente com a ideia de que esta componente representa flutuações de longo prazo que afetam uma série. Assim, o PIB potencial conhece uma evolução relativamente estável. Escolher uma tendência muito volátil contradiz o principal objetivo de analisar os *déficits* ajustados do ciclo, ou seja, caracterizar a orientação das finanças públicas em um ambiente econômico mais estável que aquele descrito pela observação de série não filtrada. Subestimar os desvios em relação à tendência, ou seja, escolher λ muito fraco é subestimar a contribuição da conjuntura para melhorar o saldo público em período de expansão do crescimento. Se o saldo orçamental se recuperar, então, conclui-se, erradamente, que as medidas estruturais visíveis no saldo ajustado do ciclo são a causa da melhoria. Na realidade, isso vem em parte do impacto da conjuntura favorável.

b) Implicações de um forte efeito de leakage: flutuações cíclicas muito voláteis

Existe também um perigo de erro de análise da política fiscal em forte efeito de Leakage, ou seja, se superestimar-se os desvios em relação à tendência. Nos períodos de baixo crescimento, se o saldo da administração pública se deteriorar, uma grande parte será atribuída à contribuição da conjuntura. A posição subjacente das finanças públicas seria mal avaliada. Além disso, a contribuição da parte conjuntural do saldo público para a evolução deste último é suposto ser igual a zero em média sobre um ciclo inteiro de negócios. Por isso, é importante escolher um comprimento médio de ciclos de negócios razoáveis. No entanto, quando se utiliza o filtro HP com λ relativamente alto, admite-se implicitamente que a neutralidade da componente cíclica do *déficit* é observada em períodos excessivamente longos. Em seguida, se sai do horizonte chamado de "médio prazo". O efeito de leakage (λ muito alto) conduziria a um comprimento médio implícito do ciclo de atividade muito comprido. Finalmente, fortes efeitos de leakage podem alterar a medida do ritmo do crescimento do componente tendencial, por exemplo, em caso de choque de produtividade. Portanto, uma parte da variância da tendência é erroneamente atribuída ao ciclo. Do ponto de vista da análise da política fiscal, este viés impede o reconhecimento de uma mudança sobre o crescimento tendencial que serve de referência para o cálculo da evolução de um conjunto de situações orçamentais de curto e médio prazo.

A ESCOLHA DO PARÂMETRO λ :

A escolha do valor do parâmetro é sempre arbitrária. Portanto, ela deve basear-se em critérios estatísticos e econômicos para escolher um valor. No caso da filtragem do PIB ou série macroeconômico ligado a este conceito, os critérios recuperados são apresentados na tabela abaixo:

A satisfação conjunta de todos estes critérios não é possível, pois alguns levam a valores elevados de λ e outros a valores baixos.

Tabela L.2 - Critérios e resultados do valor do parâmetro λ .

Critério	Objetivo	Valor do λ
Forma da tendência	Volatilidade suave e baixa.	λ elevado: >100
Atribuição dos ciclos curtos	Os ciclos de comprimento inferior a 10 anos vão na componente cíclica.	λ elevado: >100
Atribuição dos ciclos longos	Os ciclos >10 anos vão na tendencial.	λ baixo: <10
Duração média dos ciclos de atividade	8-10 anos.	λ intermediário: entre 10 e 100
Proximidade de um filtro ideal	Minimização dos efeitos de compressão e leakage.	λ baixo: <10

Fonte: Elaborada pelo autor (2019)

APÊNDICE M - Câmbio real

O câmbio real é o preço relativo dos bens entre os países. Ele mede o custo de um bem estrangeiro em relação ao bem doméstico, da uma medida da competitividade e é uma variável útil para explicar o comportamento do comércio e da renda nacional. Enquanto que o câmbio nominal se refere ao preço de uma moeda estrangeira em moeda nacional, ou vice-versa.

Segundo Branchieri (2002), as taxas de câmbio entre as diversas moedas variam a todo instante e estas variações são chamadas de apreciações ou depreciações nominais. A apreciação de uma moeda doméstica é o aumento do seu preço em relação a outra moeda estrangeira e a depreciação é a inversa. Portanto, a apreciação de uma moeda significa diminuição na taxa de câmbio e a depreciação corresponde ao aumento desta taxa.

Supõe que o câmbio real “e” seja definido da seguinte forma:

$$e = \frac{EP^*}{P} \quad (\text{M.1})$$

onde P^* é o nível de preço no país estrangeiro, P é o preço doméstico e E representa o câmbio nominal. Seguindo a Eq. (M.1) estabelecida acima, uma depreciação de e acontece se houver um aumento de P^* , ou uma redução de P . Neste sentido, uma depreciação da taxa real de câmbio (perda do valor do Real frente ao dólar) significa que o produto brasileiro ficou relativamente mais barato que o produto dos Estados Unidos, estimulando a demanda interna por produtos brasileiros, aumentando as exportações ou diminuindo as importações.

A lembrar de que segundo Branchieri (2002) uma depreciação na taxa nominal de câmbio não significa necessariamente, depreciação na taxa de câmbio real. Por exemplo, se um aumento dos preços nacionais for maior do que a depreciação nominal da moeda nacional, então haverá uma apreciação da taxa real de câmbio, tornando o produto nacional mais caro em relação ao produto estrangeiro.

Um caso a ser considerado é que quando a taxa de câmbio real é constante ao longo do tempo supõe-se que o conjunto de bens produzidos no território seja igual aos do país estrangeiro, e que todos estes bens sejam negociáveis. Neste caso, existe a lei do preço único: a arbitragem seria garantir que os preços, em moeda local, de vários bens sejam idênticos em

todos os países. Isso produz uma teoria da determinação da taxa de câmbio conhecida como a Paridade de Poder de Compra (PPC). Assim, tirando E na Eq.(M.1) tem-se:

$$E = \frac{eP}{P^*} \quad (\text{M.2})$$

Supondo que e seja constante no tempo, então $e = \bar{e}$ para todo tempo.

$$E = \frac{\bar{e}P}{P^*} \quad (\text{M.3})$$

A Eq.(M.3) explica que mudanças no preço nacional movimentam a taxa de câmbio nominal. Assim, PPC determina a taxa de câmbio pelo movimento no nível de preços relativos. Se a inflação doméstica for maior que a estrangeira, o câmbio vai apreciar e a moeda nacional irá se desvalorizar em relação à moeda estrangeira. Isso faz com que se precise de mais moeda nacional para comprar uma unidade de moeda estrangeira. Em resumo, o câmbio nominal é preço relativo da moeda e a inflação é a medida da diminuição do poder de compra de uma moeda.

Isto pode ser visto, de forma mais clara, tomando o log. de ambos os lados da Eq.(M.3):

$$E_t = \bar{e} + p_t - p_t^* \quad (\text{M.4})$$

Com a diferença primeira da Eq. (M.4) tem-se:

$$\Delta E_t = \Delta p_t - \Delta p_t^* \quad (\text{M.5})$$

A Eq. (M.5) explica que mudança percentual na taxa de câmbio nominal é igual à diferença entre as taxas de inflação no mercado doméstico e estrangeiro.

A PPC fornece uma teoria muito eficaz sobre o movimento da taxa de câmbio. Um exemplo simples desta teoria é fornecido pelo índice Big Mac. O Big Mac é essencialmente o mesmo bem em todos os países. Assim, é fácil de comparar o preço em uma única moeda de todos os países do Big Mac. Onde a moeda é sobrevalorizada, espera-se que a taxa de câmbio se valorize e vice-versa.

Com a hipótese da paridade de poder de compra, as diferenciais de juros são uma função das diferenças da inflação esperada. A lei do preço único sugere que taxa de câmbio seja determinada por níveis de preços relativos:

$$E = \frac{P}{P^*} \quad (\text{M.6})$$

A Eq. (M.6) é uma teoria da determinação da taxa de câmbio, paridade de poder de compra, com base no pressuposto de que todos os bens sejam comercializados. Assim, esta equação assume que as taxas de câmbio reais sejam constantes. Não é um mau pressuposto para longo prazo, mas pode ser problemático para curto prazo. Se cada país produzir um e o mesmo bem, e se não existir os custos de transporte e prejuízos nacionais, a Eq. (M.6) teria sentido.

A Eq. (M.6) permite escrever:

$$\frac{E_t}{E_{t-1}} = \frac{\frac{P_t}{P_t^*}}{\frac{P_{t-1}}{P_{t-1}^*}} = \frac{\frac{P_t}{P_{t-1}}}{\frac{P_t^*}{P_{t-1}^*}} \quad (\text{M.7})$$

Agora, se define a inflação como $\pi_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1$. A Eq. (M.7) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{E_t - E_{t-1}}{E_{t-1}} = \frac{1 + \pi_t}{1 + \pi_t^*} - 1 = \frac{1 + \pi_t}{1 + \pi_t^*} - \frac{1 + \pi_t^*}{1 + \pi_t^*} = \frac{\pi_t - \pi_t^*}{1 + \pi_t^*} \quad (\text{M.8})$$

Então, é claro que $\pi_t - \pi_t^* = (\pi_t - \pi_t^*) (1 + \pi_t^* - \pi_t^*)$, a Eq.(M.8) admite a seguinte forma:

$$\frac{(1 + \pi_t^*)(\pi_t - \pi_t^*)}{1 + \pi_t^*} - \frac{\pi_t^*(\pi_t - \pi_t^*)}{1 + \pi_t^*} = (\pi_t - \pi_t^*) - \frac{\pi_t^*(\pi_t - \pi_t^*)}{1 + \pi_t^*} \quad (\text{M.9})$$

Se as taxas de inflação forem muito baixas, as diferenças entre elas serão muito baixas também, e o produto desta diferença com a inflação é ainda muito mais baixo. Neste sentido, o último termo do lado direito da Eq. (M.9) tende a zero, o que permite escrever a Eq. (M.9) da seguinte forma:

$$\frac{E_t - E_{t-1}}{E_{t-1}} = (\pi_t - \pi_t^*) \quad (\text{M.10})$$

A Eq. (M.10) acima é chamada de paridade de poder de compra relativo. Esta equação explica que mudança percentual na taxa de câmbio nominal é igual à diferença entre a taxa de inflação doméstica e do país estrangeiro. Em resumo, o PPC fornece uma teoria muito eficaz sobre o movimento da taxa de câmbio.

APÊNDICE N - Simulação de Monte Carlo

As técnicas de simulação de Monte Carlo são empregadas para simular sistemas determinísticos com parâmetros estocásticos. Dentro os métodos pioneiros de Monte Carlo, destacam-se o de Metropolis e Ulam (1949). Este método é, na atualidade, usado para simular fenômenos físicos complexos em muitos campos científicos, entre outros, na econometria e na logística. A técnica de simulação MC é baseada na amostragem da distribuição de quantidades incertas.

Como exemplo ilustrativo, pode-se supor um sistema dinâmico, cujo crescimento ou decrescimento de suas variáveis endógenas é descrito pela seguinte equação diferencial:

$$\dot{x}(t) = Kx(t) + A, \quad x(0) = IN \quad (\text{N.1})$$

onde a randomissidade do modelo pode ser assumida nas condições iniciais IN ou no vetor de parâmetros não controláveis K , e A caracteriza os efeitos estocásticos aditivos, representando passeios aleatórios.

Se os efeitos estocásticos são impostos no modelo via condições iniciais, o vetor de parâmetros $IN = \{IN_1, IN_2, \dots, IN_n\}$, não são conhecidos de maneira exata, mas que pode ser descritos por distribuições de probabilidade uniforme, tal que cada fator IN_i , com $i = 1, 2, \dots, n$, possa assumir aleatoriamente qualquer valor no intervalo de $IN_{i,inf} \leq IN_i \leq IN_{i,sup}$. Por outro lado, se os efeitos estocásticos são impostos via o vetor de parâmetros $K = \{K_1, K_2, \dots, K_n\}$, descritos por distribuições de probabilidade uniforme, tal que cada fator K_i , com $i = 1, 2, \dots, n$, possa assumir aleatoriamente qualquer valor no intervalo de $K_{i,inf} \leq K_i \leq K_{i,sup}$. Observe que aqui assumimos as perturbações no vetor de parâmetros K ou em IN , como estes são vetor aleatórios, as quantidades de $x(t)$ também serão aleatórias. No entanto, podemos impor perturbações aditivas no sistema (N.1), individualmente, ou simultaneamente, por meio do vetor $A = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$, os quais assumem valores aleatórios no intervalo de $A_{i,inf} \leq A_i \leq A_{i,sup}$. Para essas situações, a simulação de Monte Carlo é usada, e caracteriza o comportamento do sistema, por meio das evoluções das variáveis endógenas, descritas por densidade de probabilidade das variáveis endógenas de $x(t)$, no caso deste exemplo.

APÊNDICE O – FEASP

Para $[tmin, xfeas] = feasp(lmisys, options, target)$, a função *feasp* calcula uma solução *xfeas* (se houver) do sistema de *LMIs* descrito por *lmisys*. O vetor *xfeas* é um valor particular das variáveis de decisão para as quais todos os *LMIs* são satisfeitos.

Dado o sistema LMI a seguir:

$$N^T LxN \leq M^T R(x)M.$$

O *xfeas* é calculado para resolver o programa convexo auxiliar:

$$\text{Minimiza } t \text{ sujeito a } N^T L(x)N - M^T R(x)M \leq tl$$

O mínimo global deste programa é o valor escalar *tmin* retornado como primeiro argumento de saída por *feasp*. As restrições de *LMI* são possíveis se $tmin \leq 0$ e estritamente possível se $tmin < 0$. Se o problema for possível, mas não estritamente possível, *tmin* é positivo e muito pequeno. Algumas análises posteriores podem ser necessárias para decidir se o *xfeas* está próximo o suficiente para ser viável.

O argumento opcional *target* define um valor de destino para *tmin*. O código de otimização termina assim que um valor de *t* abaixo dessa *target* é atingido. O valor padrão é $target = 0$.

Observe que o *xfeas* é uma solução em termos das variáveis de decisão e não em termos das variáveis da matriz do problema. Use *dec2mat* para derivar valores possíveis das variáveis da matriz de *xfeas*.

Parâmetros de controle

Os argumentos opcionais *options* dão acesso a determinados parâmetros de controle para o algoritmo de otimização. Esse vetor de cinco entradas está organizado da seguinte maneira:

- a) *options* (1) não é usada.
- b) *options* (2) define o número máximo de iterações que podem ser executadas pelo procedimento de otimização (100 por padrão).

- c) *options* (3) redefine o raio de viabilidade. Definir *options* (3) para um valor $R > 0$ restringe ainda mais o vetor de decisão $x = (x_1, \dots, x_N)$ para ficar dentro da bola $\sum_{i=1}^N x_i^2 < R^2$. Em outras palavras, a norma euclidiana de *xfeas* não deve exceder R . O raio de viabilidade é um meio simples de controlar a magnitude das soluções. Após o término, o *feasp* exhibe a saturação do raio f , ou seja, a norma da solução como uma porcentagem do raio de viabilidade R . O valor padrão é $R = 109$. A configuração da *options* (3) para um valor negativo ativa o modo "*flexible bound*". Nesse modo, o raio de viabilidade é inicialmente definido como 108 e aumentado, se necessário, durante o curso da otimização.
- d) *options* (4) ajuda a acelerar a rescisão. Quando definido como um valor inteiro $J > 0$, o código termina se t não diminuiu em mais de um por cento em termos relativos durante as últimas J iterações. O valor padrão é 10. Esse parâmetro negocia velocidade vs precisão. Se definido como um valor pequeno (< 10), o código termina rapidamente, mas sem garantia de precisão. Pelo contrário, um grande valor resulta em convergência natural à custa de um número possivelmente grande de iterações.
- e) *options* (5) = 1 desativa o rastreamento da execução do procedimento de otimização. Redefinir *options* (5) para zero (valor padrão) ativa novamente.

Definir a *options* (i) como zero é equivalente a definir o parâmetro de controle correspondente ao seu valor padrão. Conseqüentemente, não há necessidade de redefinir o vetor inteiro ao alterar apenas um parâmetro de controle. Para definir o número máximo de iterações para 10, por exemplo, basta digitar

```
options = zeros (1,5) % valor padrão para todos os parâmetros
options (2) = 10.
```

Problemas de memória

Quando o problema dos mínimos quadrados resolvido a cada iteração fica mal condicionado, o solucionador *feasp* muda da álgebra linear baseada em Cholesky para baseada em QR (consulte Problemas de memória para obter detalhes). Como o modo QR normalmente requer muito mais memória, o *MATLAB*[®] pode ficar sem memória e exibir a mensagem:

```
error using ==> feaslv.
out of memory.Type HELP MEMORY for your options.
```

Você deve pedir ao gerente do sistema para aumentar o seu espaço de troca ou, se não houver espaço de troca adicional disponível, defina as *options* (4) = 1. Isso impedirá a mudança para o QR e o *feasp* terminará quando Cholesky falhar devido a instabilidades numéricas.

Exemplos:

Considere o problema de encontrar $P > 1$ tal que:

$$A_1^T P + P A_1 < 0 \quad (\text{O.1})$$

$$A_2^T P + P A_2 < 0 \quad (\text{O.2})$$

$$A_3^T P + P A_3 < 0 \quad (\text{O.3})$$

com $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -0.8 & 1.5 \\ 1.3 & -2.7 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} -1.4 & 0.9 \\ 0.7 & -2.0 \end{pmatrix}$

Esse problema surge quando se estuda a estabilidade quadrática do politopo das matrizes $Co\{A_1, A_2, A_3\}$.

Para avaliar a viabilidade com *feasp*, primeiro insira a Equações de LMIs (O.1) e (O.2):

```
setlmis([]).
P = limvar(1,[2 1]).
lmiterm([1 1 1 p],1,a1,'s')           % LMI #1
lmiterm([2 1 1 p],1,a2,'s')           % LMI #1
lmiterm([3 1 1 p],1,a3,'s')           % LMI #1
lmiterm([-4 1 1 p],1,1)                % LMI #1
lmiterm([4 1 1 0],1)                   % LMI #1
lmis = getlmis.
```

Em seguida, chame *feasp* para encontrar um vetor de decisão viável:

$$[tmin, xfeas] = feasp(lims),$$

Isso retorna $tmin = -3.1363$. Portanto, as Equações (O.1) e (O.2) são viáveis e o sistema dinâmico $\dot{x} = A(t)x$ é quadraticamente estável para $A(t) \in Co\{A_1, A_2, A_3\}$.

Para obter a matriz Lyapunov P comprovando a estabilidade quadrática, digite:

$$P = dec2mat(lmis, xfeas, p),$$

Isso retorna

$$P = \begin{pmatrix} 270.8 & 126.4 \\ 126.4 & 155.1 \end{pmatrix}.$$

É possível adicionar mais restrições a esse problema de viabilidade. Por exemplo, você pode vincular a norma de Frobenius de P por 10 enquanto solicita que $tmin$ seja menor ou igual a -1 . Isso é feito por:

$$[tmin, xfeas] = feasp(lmis, [0,0,10,0,0], -1).$$

A terceira entrada 10 de *options* define o raio de viabilidade para 10, enquanto o terceiro argumento -1 define o valor padrão para $tmin$. Isso produz $tmin = -1.1745$ e uma matriz P com o maior valor próprio $\lambda_{max}(P) = 9.6912$.