



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Marcos Kendi Yamasaki

**Escala de fatorização ótima do processo Drell–Yan e suas
variáveis cinemáticas.**

Florianópolis

2020

Marcos Kendi Yamasaki

**Escala de fatorização ótima do processo
Drell–Yan e suas variáveis cinemáticas.**

Tese submetida ao Programa de Pós-graduação em Física da Universidade Federal de Santa Catarina para obtenção do título de doutor em física.

Orientador: Prof. Emmanuel Gräve de Oliveira, Dr.

Florianópolis

2020

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Yamasaki, Marcos Kendi

Escala de fatorização ótima do processo Drell-Yan e suas
variáveis cinemáticas. / Marcos Kendi Yamasaki ;
orientador, Emmanuel Gräve de Oliveira, 2020.

72 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas,
Programa de Pós-Graduação em Física, Florianópolis, 2020.

Inclui referências.

1. Física. 2. Drell-Yan. 3. função de distribuição de
pártons. 4. escala de fatorização ótima. 5. corte em ângulo
azimutal. I. de Oliveira, Emmanuel Gräve . II. Universidade
Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em
Física. III. Título.

Marcos Kendi Yamasaki

Escala de fatorização ótima do processo Drell–Yan e suas variáveis cinemáticas.

O presente trabalho em nível de doutorado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Pawel Klimas, Dr.

Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Sidney Dos Santos Avancini, Dr.

Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Fernando Silveira Navarra, Dr.

Universidade de São Paulo

Certificamos que esta é a versão original e final do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de doutor em física pelo Programa de Pós-graduação em Física da Universidade Federal de Santa Catarina.

Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Física

Prof. Emmanuel Gräve de Oliveira, Dr.

Orientador

Florianópolis, 2020

Sumário

Resumo	p. 6
Abstract	
Agradecimentos	
Glossário	
1 Introdução	p. 10
1.1 Colisores de partículas	p. 11
1.2 Modelo padrão de partículas	p. 12
1.3 Teoria quântica de campos perturbativa	p. 13
1.4 Modelo de pártons	p. 16
1.5 Funções de distribuição de pártons	p. 16
2 Processo Drell–Yan	p. 21
2.1 Visão geral	p. 21
2.2 Ordem dominante	p. 22
2.3 Ordem seguinte à dominante	p. 24
3 Espaço de fase do processo Drell–Yan	p. 29
3.1 Espaço de fase integrado sem corte	p. 29
3.1.1 Espaço de fase leptônico	p. 30
3.1.2 Espaço de fase hadrônico	p. 31
3.2 Espaço de fase com integração explícita em ângulo azimutal	p. 33

Sumário

3.2.1	Integral nas variáveis do quark C	p. 34
3.2.2	Integral nas variáveis do lépton D	p. 34
3.2.3	Integral nas variáveis do antilépton E	p. 37
3.3	Limites de integração	p. 40
3.4	Expressão final para a integral no espaço de fase	p. 41
3.5	Validação da seção de choque partônica	p. 42
4	Escala de fatorização ótima e cortes cinemáticos	p. 45
4.1	Fatorização e escolha da escala	p. 45
4.2	Origem da dependência na escala	p. 47
4.3	Cálculo da escala ótima	p. 48
4.4	Fator de Sudakov	p. 50
4.5	Corte no ângulo azimutal	p. 51
5	Predições teóricas com a escala ótima e o corte no ângulo azimutal	p. 56
5.1	Seção de choque hadrônica	p. 56
5.2	Predições teóricas	p. 59
6	Conclusão	p. 62
Referências Bibliográficas		
Apêndice A – Regras de Feynman		
	Fator de cor	p. 70
Apêndice B – Espaço de fase com as variáveis de Sudakov		
		p. 72

Resumo

Colisão entre hádrons dando origem a um par de léptons (dilépton) é identificado como o processo Drell–Yan, que é analisado perturbativamente, em ordem dominante e em ordem seguinte à dominante, neste trabalho. As predições teóricas para este processo são feitas através do cálculo da seção de choque hadrônica, obtida por meio da seção de choque partônica e da função de distribuição de pártons. Essas quantidades tendo suas contribuições determinadas, elas escalam através de uma escala de fatorização. A seção de choque partônica é obtida ao integrarmos o elemento de matriz invariante no espaço de fase do dilépton. A função de distribuição de pártons descreve os constituintes do hádron em função da fração de momentum do hádron e da escala de fatorização, cuja dependência segue as equações de evolução DGLAP, que consideram desdobramentos de pártons conforme as distribuições de pártons variam com a escala de fatorização. A escolha da escala de fatorização, a princípio arbitrária, reflete uma grande incerteza na seção de choque hadrônica. A incerteza pode ser diminuída ao determinarmos uma *escala ótima*, que é obtida ao igualarmos a convolução do elemento de matriz em ordem dominante com a função de desdobramento da DGLAP com o elemento de matriz em ordem seguinte à dominante, sob o fluxo de glúons apropriado às altas energias. Com a escala ótima, as predições teóricas são mais estáveis frente a alterações no valor da escala de fatorização utilizada nas distribuições de pártons. A redução do espaço de fase é feito através de cortes cinemáticos com a inclusão do fator de forma de Sudakov, que corresponde a possibilidade de não emissão de pártons durante a evolução da função de distribuição de pártons com as DGLAP. Nesta tese, calculamos explicitamente o espaço de fase do dilépton de maneira a possibilitar um corte no ângulo azimutal entre os momenta transversais do dilépton. Este corte, inédito na literatura, permitiu reduzir a escala ótima e assim, sondar as funções de distribuição de pártons em menor escala de fatorização e em uma região de pequena fração de momentum.

Palavras-chave: Cromodinâmica quântica, Drell–Yan, função de distribuição de pártons, escala de fatorização ótima, corte em momentum transversal, corte em ângulo azimutal.

Abstract

The collision between hadrons producing a pair of leptons (dilepton) is identified as a Drell–Yan process, which is analyzed perturbatively in this work, at leading and at next-to-leading order. The theoretical predictions of this process are made by calculating the hadronic cross-section, which is obtained by the partonic cross-section in convolution with the parton distribution function. These quantities have their contributions determined through a factorization scale. The partonic cross-section is obtained by the integration of the invariant matrix element in the dilepton phase space. The parton distribution function describes the constituents of the hadron as a function of the momentum fraction of the hadron and the factorization scale, whose dependence follows the DGLAP evolution equations that take into account parton splitting according as the parton distribution varies with the factorization scale. The choice of the factorization scale, in principle arbitrary, causes a large uncertainty in the hadronic cross-section. The uncertainty can be decreased if we determine an optimal scale, which is obtained by equating a convolution of matrix element at leading order with the DGLAP splitting function with the matrix element at next-to-the leading order, under the appropriate gluon flux at high energies. With the optimal scale, the theoretical predictions are more stable in front of alterations in the value of the factorization scale used in the parton distribution functions. The reduction of the phase space is done through kinematic cuts with the inclusion of the Sudakov form factor, which corresponds to the possibility of non-emission of partons during the parton distribution function evolution under the DGLAP. In this thesis, we explicitly calculated the dilepton phase space in a manner to enable a cut in the azimuthal angle between the dilepton transverse momenta. This cut, unknown in the literature, allowed reducing the optimal scale and this way, probe the parton distribution function in a lower factorization scale and at a small momentum fraction region.

Keywords: Quantum Chromodynamics, Drell–Yan, parton distribution function, optimal factorization scale, transverse momentum cut, azimuthal angle cut

Agradecimentos

Muito obrigado à Universidade Federal de Santa Catarina que me forneceu todas as condições necessárias para a minha formação e além disso se tornou meu lar nos últimos 6 anos que compuseram meu mestrado e doutorado. Em especial, agradeço a todos os técnicos administrativos em educação, professores, colegas de curso não só do Departamento de Física mas de toda a universidade que me acolheram neste período.

Gostaria de agradecer ao meu orientador Emmanuel por todos esses anos de incentivos e ensinamentos que me tornaram o melhor físico que eu poderia ser.

Agradeço ao Caetano Ternes, a Cheryl Henkels e ao Haimon Trebien pelas discussões que levaram na melhora deste texto. Ao Edgar Huayra, Mateus Pelicer e Bruna Stahlhöfer não só pelas discussões em Física como nos anos de amizade. Ainda na parte da minha vida relacionada à Física, mas não necessariamente de mesma área agradeço a Susane Calegari, Renné Araújo e Natacha Zanon.

Em especial, muito obrigado ao amigo Guilherme Grams que não só me acolheu área, não relacionada a essa tese, de estrela de nêutrons, onde tive a oportunidade de fazer um doutorado sanduíche no LPC - Caen, como também me privilegia com uma amizade que prezo muito.

Por último, mas não menos importante agradeço à minha família que me apoia em todos os aspectos desde o nascimento.

Este doutorado recebeu apoio financeiro da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), do Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia – Física Nuclear e Aplicações (INCT-FNA), Fundação de Amparo à Pesquisa e Inovação do Estado de Santa Catarina (FAPESC).

Glossário

- AGS - Alternating Gradient Synchrotron
- ALICE - A Large Ion Collider
- ATLAS - A Toroidal LHC ApparatuS
- CERN - Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire
- CMS - Compact Muon Solenoid
- DGLAP - Dokshitzer, Gribov–Lipatov e Altarelli–Parisi
- EIC - Electron Ion-Collider
- FEWZ - Fully Exclusive W and Z Production
- FCC - Future Circular Colider
- IHEP - Institute of High Energy Physics
- LO - Leading Order
- LHC - Large Hadron Collider
- LHCb - Large Hadron Collider beauty
- MMHT - Martin, Motylinski, Harland-Lang, Thorne
- NLO - Next-to-Leading Order
- NNLO - Next-to-next-to Leading Order
- PDF - Parton Distribution Functions
- QED - Quantum eletrodynamics
- QCD - Quantum Chromodynamics
- RHIC - Relativistic Heavy Ion Collider

1 *Introdução*

Com o intuito de investigar os menores constituintes da matéria, são construídos os colisores de partículas. Em uma colisão, quanto maior a energia em uma pequena região do espaço, melhor a investigação das partículas que compõem a matéria. Seguindo o avanço experimental em encontrar e determinar as propriedades e as interações das partículas conforme aumentamos a energia envolvida, adequamos e desenvolvemos a teoria da física de partículas.

Neste trabalho, nos concentraremos no regime de altas energias onde as interações são melhor descritas através da teoria quântica de campos, em especial, a cromodinâmica quântica. Em particular, estudaremos a colisão entre prótons quando há a produção de um par de léptons, a esse processo é dado o nome de Drell–Yan [1]. A importância deste processo se dá por ele ter um estado final relativamente simples e bem descrito pela eletrodinâmica quântica.

No limite de altas energias, os constituintes do próton (quarks e glúons) são considerados pontuais e são chamados genericamente de pártons [2]. A ocorrência dos pártons no próton é dada por uma função de distribuição. Nesta tese, vamos calcular o espaço de fase de estado final do processo Drell–Yan para selecionar os casos em que os momenta transversais dos léptons tem orientações aproximadamente opostas; esta seleção se mostrará uma excelente ferramenta para extrair informações das distribuições de pártons.

Neste capítulo resumimos brevemente os colisores de partículas, o embasamento teórico partindo do modelo padrão de partículas até as funções de distribuição de pártons. Nos Caps. 2 e 3, apresentamos o processo Drell–Yan, bem como seu espaço de fase, com a aplicação de um corte no ângulo entre os momenta transversais dos léptons. No Cap. 4, revemos como diminuir a incerteza na escala escolhida para o cálculo das distribuições de pártons, usando uma *escala de fatorização ótima* e aplicamos esta técnica para o caso com o corte. No Cap. 5, fazemos previsões teóricas utilizando o corte aplicado, de maneira que há grande redução de incertezas teóricas. Finalmente, concluímos no Cap. 6.

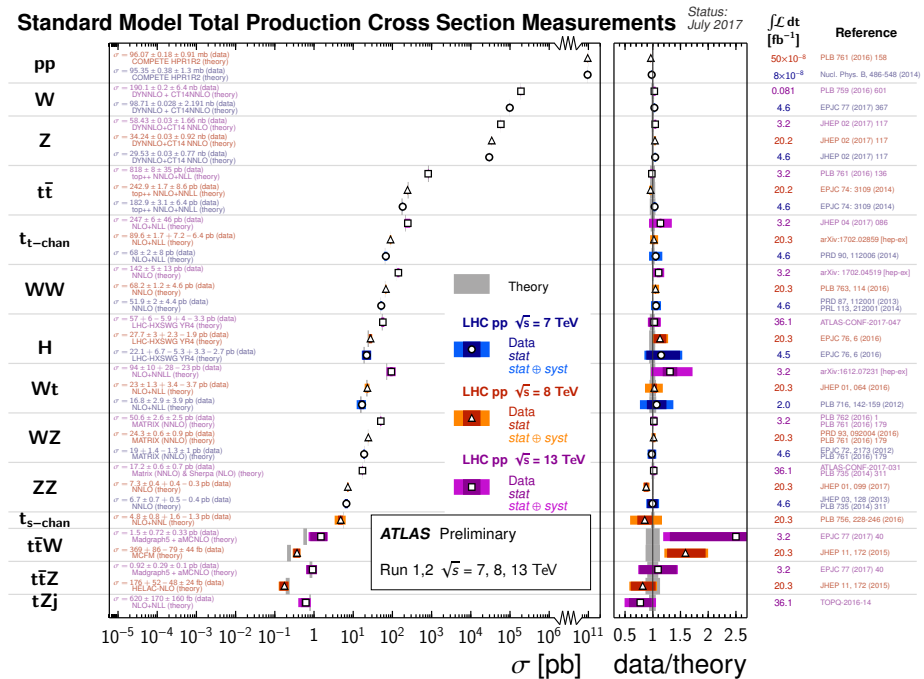


Figura 1.1: Resumo das medidas no ATLAS de seção de choque para diferentes observáveis a energias de centro de momento de 7, 8 e 13 TeV. Figura retirada da Ref. [3].

1.1 Colisores de partículas

Atualmente, o colisor mais energético é o LHC (*Large Hadron Collider*), que é um estrutura circular de 27 km de extensão localizada na fronteira franco-suíça cuja organização responsável é o CERN (*Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire*), que reúne diversos países colaboradores. No LHC, dois feixes de próton são acelerados em sentidos opostos e nos pontos onde há colisão, estão localizados os quatro grandes experimentos: o ALICE (*A Large Ion Collider*), o ATLAS (*A Toroidal LHC ApparatuS*), o CMS (*Compact Muon Solenoid*) e o LHCb (*Large Hadron Collider beauty*). Os colisores de partículas possibilitam uma rica área de estudo em diversos processos e seus observáveis medidos, como mostra a Fig. 1.1, referente a parte dos trabalhos publicados pelo ATLAS.

Dentre as detecções no LHC, bem como esforços teóricos para se interpretar as medidas destacam-se o bóson de Higgs em 2012 [4, 5] e os hádrons exóticos: os tetraquarks em 2014 [6] e os pentaquarks em 2015 [7] que são hádrons diferentes dos que eram descritos até então: os bárions, como sendo constituídos por 3 quarks e os mésons por 2 quarks.

O projeto do próximo colisor do CERN, o *Future Circular Colider* (FCC) será apresentado este ano ao conselho do CERN. Estudos para a construção do túnel de 80 a 100 km na

área de Geneva necessários para tal instalação, design do detector e avaliação de custo estão em andamento, com início das operações previsto entre 2035-2040, com energia de centro de momentum de 100 TeV [8].

Além dos esforços europeus na construção de colisores, o *Institute of High Energy Physics* (IHEP) da academia chinesa de ciências planeja finalizar a construção do *Circular Electron-Positron Collider* (CEPC) até aproximadamente 2030, uma estrutura com o dobro do tamanho do LHC [9]. O colisor chinês será capaz de atingir energias maiores que as do CERN e assim recriará condições próximas às existentes nos instantes iniciais do Big Bang possibilitando novas descobertas sobre a matéria, a energia e talvez o espaço-tempo.

Já os Estados Unidos estabeleceu como prioridade para física nuclear a construção de um colisor de elétron-íon (*Electron Ion-Collider* - EIC). A proposta do acelerador de partículas é de colidir feixes de elétrons com prótons e núcleos. O Brookhaven National Laboratory é responsável pelo projeto e planeja finalizar a construção até 2030, adicionando um anel ao já existente RHIC (*Relativistic Heavy Ion Collider*) [10].

1.2 Modelo padrão de partículas

O objeto de estudo dos colisores, simplificado, é agrupado no dito modelo padrão de partículas e energia que reúne o que se acredita serem as partículas elementares, ou seja indivisíveis, e as interações fundamentais: a eletromagnética, a forte e a fraca. As partículas são classificadas de acordo com o spin, sendo que as com spin semi inteiro são os **férmions**, em especial, no modelo padrão, possuem spin $1/2$. Os férmions do modelo padrão são classificados de acordo com maneira de que interagem. Assim, os **quarks** interagem através da força forte, e os **léptons**, caso não interajam por meio desta. As partículas de spin inteiro são chamadas de **bósons**, elas são responsáveis por mediar as forças entre os férmions, e no modelo padrão apresentam spin 0 ou 1. Essa divisão pelo spin se faz necessária para compor as configurações simétricas (bósons) e antissimétricas (férmions) da função de onda.

Por sua vez, os férmions também são divididos com base no critério da carga elétrica. Os léptons possuem uma unidade de carga elétrica elementar, ou seja, a carga do elétron, e se apresentam nos sabores: elétron, muon, tau e seus respectivos neutrinos, que como o próprio nome sugere são eletricamente neutros. Os quarks possuem uma fração da carga elementar e podem ser encontrados em seis sabores: *down*, *up*, *strange*, *charm*, *bottom* e *top*.

As interações entre partículas do modelo padrão é feita através dos bósons. Estes são categorizados pelo tipo de força que eles mediam. O glúon é a partícula mediadora da força forte

entre os quarks; a força eletromagnética é intercedida pelo fóton; os bósons Z e W intermedeiam as forças fracas e finalmente o bóson de Higgs é responsável pela obtenção de massa das partículas.

No hádron, os quarks ainda podem ser categorizados como quarks de valência que contribuem para os números quânticos (n, l, m, s, \dots) e os que não contribuem, formando os chamados de quarks de mar que se encontram em pares de quark-antiquark e também os glúons. A probabilidade de encontrarmos determinado sabor de um quark de valência ou de mar é diferente para cada sabor, como será mostrado na Subsec. 1.5.

No modelo padrão de partículas, teoricamente, cada uma das interações ocorre através da troca de uma partícula mediadora, porém, experimentalmente a partícula mediadora da força gravitacional, o gráviton, ainda não foi detectada. Isto faz com que a gravitação não seja incluída no modelo padrão. A exclusão do gráviton do modelo padrão se deve à ordem de grandeza da força gravitacional. Se normalizarmos a força forte como sendo da ordem de 10, a força gravitacional será da ordem de 10^{-42} , que é muito fraca se comparada à força fraca, que é da ordem de 10^{-13} .

1.3 Teoria quântica de campos perturbativa

A cromodinâmica quântica (*Quantum Chromodynamics*, QCD) tem como base fundamental a interpretação dos quarks como partículas elementares que interagem por intermédio do glúon. A concepção de quarks surge como uma necessidade de cumprir a estatística fermiônica. Porém, para manter o princípio de exclusão de Pauli, fez-se a necessidade de mais um grau de liberdade, surge então o conceito de cores dos quarks.

No limite de altas energias, os quarks comportam-se aproximadamente como partículas livres, esse conceito é chamado de *liberdade assintótica*. Essa concepção simplifica os cálculos da QCD que é uma teoria não linear, e portanto, muito complexa. Essa simplificação permite outros métodos perturbativos e tratamentos teóricos como, por exemplo, o modelo de pártons e técnicas, como a fatorização.

Começaremos pela eletrodinâmica quântica (*Quantum electrodynamics* - QED) cujos princípios servem de base para a QCD. Na QED, surgiu o conceito de antipartícula, com a formulação da equação de Dirac, e conseqüentemente a teorização e observação do pósitron. As interações entre as partículas elementares são representadas através de diagramas que se tornaram famosos após Feynman tê-los usado para representar partes dos cálculos. A interação fundamental da eletrodinâmica quântica pode ser representado pelo vértice primitivo onde um férmion emite ou

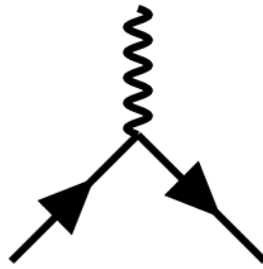


Figura 1.2: Diagrama de Feynman do vértice primitivo da QED: um férmion representado pela linha reta em sentido ao vértice, onde diferentes tipos de linha se encontram, emite um fóton representado pela linha ondulada e vai em sentido oposto ao vértice.

absorve um fóton perdendo parte de seu momentum para o mesmo. Esse processo é ilustrado no diagrama de Feynman mostrado na Fig. 1.2. A ordem de grandeza dessa interação é dada pela constante de estrutura fina, ou também chamada de parâmetro de acoplamento, $\alpha \cong \frac{1}{137}$.

Nas regras de Feynman, convencionalmente, utiliza-se uma seta para representar um férmion; o glúon é representado por uma mola, o fóton e os bósons Z e W são representados por uma linha ondulada. Um ponto no diagrama onde as linhas, fermiônicas e/ou bosônicas, se encontram é denominado de vértice. Para cada uma dessas partes do diagrama é necessário aplicar uma regra de Feynman correspondente. Assim, neste trabalho serão usadas apenas algumas das regras de Feynman que estão apresentadas no Apêndice A, uma relação completa é encontrada na Ref. [11].

Assim como a QED possui cargas elétricas positiva e negativa, na QCD, os quarks¹ possuem cargas de cor: *red*, *green* e *blue*, que são representadas pelas letras *R*, *G* e *B*, respectivamente. Essas cargas de cor não tem relação com a percepção humana de cor, são apenas representações para um grau de liberdade adicional necessário para respeitar o Princípio de exclusão de Pauli. A necessidade dessa carga foi encontrada no estudo do decaimento do Δ^{++} , que é um bárion formado por três quarks *up*.

Enquanto quarks carregam uma cor e os antiquarks carregam uma anticor, os glúons precisam carregar uma cor e uma anticor para manter a conservação das cargas. Quarks podem mudar de cor, mas não de sabor, através da emissão de um glúon, de forma que a carga de cor seja preservada. Por exemplo, um quark *up* carregando a cor azul, *B*, emite um glúon de cargas azul e antivermelha, *B* e \bar{R} , conserva seu sabor e passa a carregar a cor vermelha, *R*, esse processo é mostrado na Fig. 1.3, através de um diagrama de Feynman.

Em contraste à liberdade assintótica, no caso de baixas energias, temos o confinamento de

¹os léptons não carregam cor, portanto não interagem pela força forte

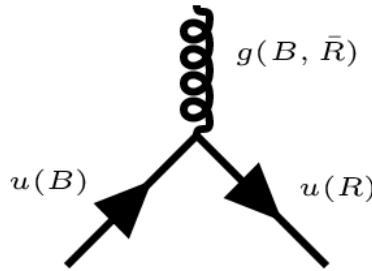


Figura 1.3: Diagrama de Feynman de um quark up , carregando a cor azul (B) emite um glúon, de cargas azul e antivermelha (\bar{R}), conserva seu sabor, u , e passa a carregar a cor vermelha (R). Notamos que ao somarmos a cor do quark final com as cores do glúon, teremos a cor do quark inicial.

cor, sendo que não observamos partículas coloridas livres. No caso de um par quark-antiquark formando, por exemplo, um méson, o quark terá uma cor e o antiquark terá a anticor oposta e portanto o méson será branco. O par interage por meio do campo do glúon que o mantém unido, com energia potencial que cresce com a distância de separação do par. Desta forma, conforme um quark é afastado do antiquark, a energia do campo aumenta, de modo que se torna favorável a criação de um novo par de quark-antiquark. Nesta situação, o antiquark liga-se ao quark inicial, assim como o quark, ao antiquark inicial, produzindo um novo par de mésons para substituir o inicial e mantendo as cargas de cor visíveis apenas dentro dos hádrons.

A magnitude das interações eletromagnética e forte é dada pelas constantes de acoplamento α e α_s , respectivamente. No cenário da QCD perturbativa, as previsões para observáveis são dadas em termos de uma constante renormalizada α_s , como uma função de uma escala de renormalização μ_R . Quando μ_R se aproxima do momentum transferido Q de um dado processo, então μ_R indica a relevância da força forte no processo. A constante de acoplamento, α_s satisfaz a equação do grupo de renormalização:

$$\mu_R \frac{d\alpha_s}{d\mu_R^2} = \beta(\alpha_s) = -(b_0\alpha_s^2 + b_1\alpha_s^3 + b_2\alpha_s^4 + \dots) \quad (1.1)$$

A solução para a Eq. 1.1 com o primeiro termo, b_0 , é também uma série em α_s , cuja soma é dada por:

$$\alpha_s(Q) = \frac{\alpha_s(\mu_R)}{1 + b_0\alpha_s(\mu_R)\ln(Q/\mu_R)}, \quad (1.2)$$

sendo $b_0 = (33 - 2N_f)/12\pi$ e N_f o número de sabores dos quarks. Notamos que temos situações a considerar: a primeira ocorre quando a escala de energia, Q , é pequena, de maneira que a constante de acoplamento aumenta e, portanto, a força forte será dominante, mantendo os quarks unidos. A segunda situação é o limite de grande escala de energia: $\lim_{Q \rightarrow \infty} \alpha_s = 0$, o qual

consiste na liberdade assintótica [12, 13]. Nessa situação, os quarks podem ser considerados livres.

1.4 Modelo de pártons

Com o intuito de investigar os constituintes do próton, é necessário considerar em qual escala de energia a sondagem é feita. A medida que aumentamos a escala de energia, melhor se torna a resolução da sondagem, de modo que, em certo valor, a dimensão se torna independente da escala e os constituintes do próton se tornam pontuais, assim os quarks e os glúons passam a ser denominados pártons. Essa interpretação foi feita por Feynman e denominado posteriormente, de modelo de pártons.

Na Ref. [14], Bjorken trabalha com o espalhamento profundamente inelástico, onde um elétron emite um fóton que sonda um próton. No artigo, ele utiliza o referencial onde o momentum do próton é infinito, em outras palavras, o momentum do próton ao quadrado é muito maior do que a massa do próton e do quark. Neste modelo, entre a colisão do fóton com o elétron resultando em outros hádrons, há um estado intermediário com as seguintes características:

- Ser constituído de um certo número de pártons livres;
- O momentum longitudinal do i -ésimo párton é uma fração x_i do momentum total do próton: $\vec{p}_i = x_i \vec{P}$;
- A massa do párton, antes e depois da colisão é pequena ou não muda significativamente;
- O momentum transversal do párton antes da colisão é desprezível, em comparação ao momentum do próton.

Com essas hipóteses, considera-se uma boa aproximação escrever, no momentum infinito, onde as massas das partículas são desprezíveis em comparação ao momentum do próton: $p_i^\mu \cong x_i P^\mu$. Nesse modelo, a probabilidade de um párton carregar certa fração de momentum x do próton é dada pela função de distribuição de pártons (*Parton Distribution Functions* - PDF), sendo que a soma de todas as probabilidades deve ser igual a 1.

1.5 Funções de distribuição de pártons

As funções de distribuição de pártons, ou simplesmente distribuições, são uma questão em aberto da QCD não perturbativa representando nossa concepção dos hádrons. As distribuições

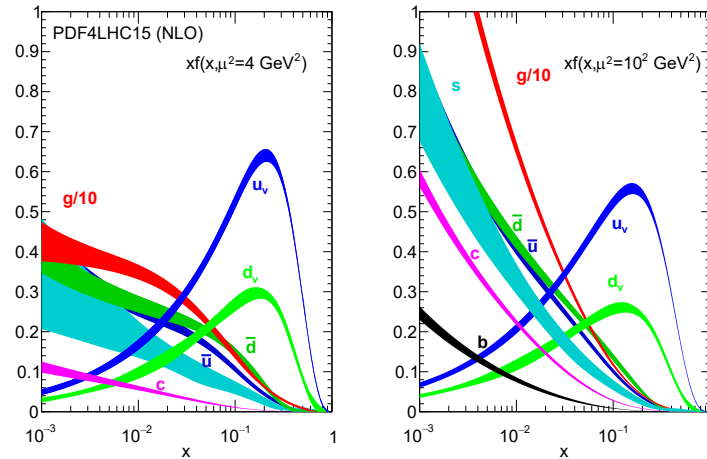


Figura 1.4: Função PDF4LHC15 em ordem seguinte a dominante em baixa escala $\mu^2 = Q^2 = 4 \text{ GeV}^2$ à esquerda e em $\mu^2 = Q^2 = 100 \text{ GeV}^2$ à direita em função de x . São mostradas as PDFs dos quarks de valência u_v e d_v , dos quarks de mar \bar{u} , \bar{d} , s , c e do glúon que é dividido por um fator 10. Figura retirada da Ref. [16]

são bibliotecas numéricas construídas por vários grupos de físicos que utilizam diferentes dados de entrada em suas parametrizações para que as distribuições sejam globais, isto é, independentes do processo utilizado em sua aplicação. O processo Drell–Yan pode ser utilizado como teste fundamental para construir PDFs como pode-se ver nas figuras da Ref. [15] e também para que sejam construídas com menor incerteza. As distribuições mais simples (e que serão utilizadas nesta tese) dependem apenas da fração de momentum longitudinal que o párton carregada do hádron, representada por x .

A seção de choque hadrônica é a seção de choque para produzir o estado final desejado quando no estado inicial temos os hádrons, no caso do estudo desta tese, a colisão entre dois prótons. É a seção de choque que pode ser medida. Já a seção de choque partônica têm no estado inicial os pártons. Para obter a hadrônica, precisa-se, além da partônica, das probabilidades de encontrarem-se pártons dentro dos hádrons; estas são dadas pelas já discutidas PDFs. A este procedimento damos o nome de fatorização, que funciona muito bem em altas energias e quando a massa invariante do estado final é suficientemente grande.

No desenvolvimento formal da teoria de perturbação aplicada à fatorização, as distribuições de pártons ganham uma dependência na escala de fatorização a partir das equações DGLAP. As equações DGLAP em ordem dominante foram feitas independentemente por Dokshitzer, um trabalho por Gribov e Lipatov e também outra publicação por Altarelli e Parisi [17–19]. Por isso, é necessário cuidado no cálculo da seção de choque hadrônica de modo a atribuir corretamente os devidos pesos na fatorização à seção de choque partônica e às PDFs usando a

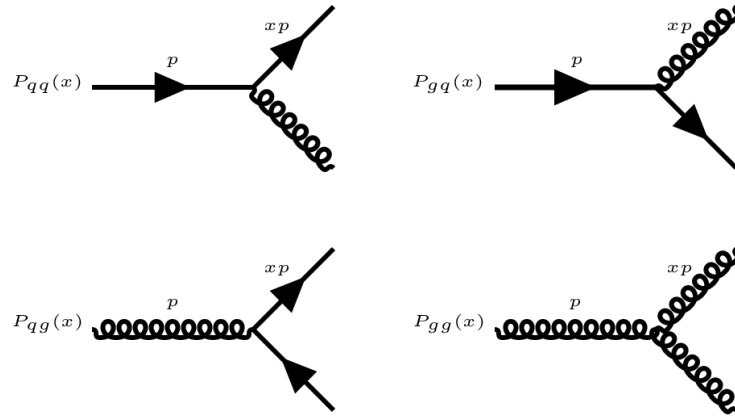


Figura 1.5: Desdobramentos de pártons. Da esquerda para a direita temos, um quark se desdobrando em outro quark, um quark se desdobrando em um glúon, um glúon se desdobrando em um quark e um glúon se desdobrando em outro glúon. Figura produzida pelo autor.

escala de fatorização mais adequada.

Essa evolução com a escala considera os desdobramentos de pártons em outros pártons como mostra a Fig. 1.5, onde o párton inicial tem momentum p e consideramos o párton final de momentum xp , sendo x uma fração desse momentum. Os desdobramentos são inseridos através da inclusão das *funções de desdobramento*:

$$P_{qq}(x) = \frac{4}{3} \left[\frac{1+x^2}{(1-x)_+} + \frac{3}{2} \delta(1-x) \right] \quad (1.3)$$

que representa o desdobramento de um quark em outro quark,

$$P_{qg}(x) = \frac{1}{2} [x^2 + (1-x)^2] \quad (1.4)$$

um glúon em um quark,

$$P_{gq}(x) = \frac{4}{3} \left[\frac{1+(1-x)^2}{x} \right] \quad (1.5)$$

um quark em um glúon,

$$P_{gg}(x) = 6 \left[\frac{(1-x)}{x} + \frac{x}{(1-x)_+} + x(1-x) + \left(\frac{11}{12} - \frac{n_f}{18} \right) \delta(1-x) \right] \quad (1.6)$$

e finalmente um glúon emitindo outro glúon. A delta de Dirac $\delta(1-x)$ vem das correções virtuais para os diagramas de árvore de mais baixa ordem.

Nas Eqs. 1.3 e 1.6 utiliza-se a prescrição '+' que pode ser integrada subtraindo uma função

1.5 Funções de distribuição de pártons

delta desse termo singular:

$$\frac{1}{(1-x)_+} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{1-x} \theta(1-x-\varepsilon) - \delta(1-x) \int_0^{1-\varepsilon} dx' \frac{1}{1-x'} \right], \quad (1.7)$$

Na prática, utilizamos o procedimento de integração [11]:

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{(1-x)_+} dx = \int_0^1 \frac{f(x) - f(1)}{1-x} dx \quad (1.8)$$

Para elucidar as equações que serão expostas a seguir, explicaremos brevemente o que é a convolução representada pelo símbolo \otimes . Trata-se de uma operação matemática na qual se obtém uma função a partir de outras duas. Por exemplo, seja uma função C e uma função f , a convolução das duas é dada por [20]:

$$C \otimes f = \int_x^1 \frac{dy}{y} C(y) f\left(\frac{x}{y}\right) \quad (1.9)$$

Desta maneira, o resultado será a soma das densidades de probabilidade de $C(y)$ e de $f(\frac{x}{y})$. As equações DGLAP são dadas pelas funções de desdobramento $P_{gq}(\frac{x}{z}, Q)$ e $P_{gg}(\frac{x}{z}, Q)$ que correspondem às densidades de probabilidade dos desdobramentos, em convolução com a PDF que está relacionada à densidade de probabilidade de um párton possuir certa fração de momentum do próton.

Sendo assim, a equação que descreve a evolução da PDF do glúon com a escala de energia é:

$$Q^2 \frac{d}{dQ^2} f_g(x, Q^2) = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \left(P_{gq} \otimes \sum_q [f_q + f_{\bar{q}}] + P_{gg} \otimes f_g \right) \quad (1.10)$$

A evolução para o quark de sabor q deve considerar a probabilidade de um quark ou de um glúon emitir o quark de sabor q :

$$Q^2 \frac{d}{dQ^2} f_q(x, Q) = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} (P_{qq} \otimes f_q + P_{qg} \otimes f_g) \quad (1.11)$$

Para o antiquark de sabor \bar{q} a evolução deve considerar a probabilidade de um quark ou um glúon emitir o antiquark de sabor \bar{q} :

$$Q^2 \frac{d}{dQ^2} f_{\bar{q}}(x, Q) = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} (P_{q\bar{q}} \otimes f_{\bar{q}} + P_{qg} \otimes f_g) \quad (1.12)$$

Ao investigar-se as distribuições em função da fração de momentum x , observa-se uma grande incerteza na região de baixo x , onde há a dominância da distribuição do glúon, que deve ser dividida por 10 para que esteja no mesmo gráfico que os demais sabores, como podemos ver na Fig. 1.4. Neste trabalho, calcularemos uma escala com menor incerteza e a reduziremos

1.5 Funções de distribuição de pártons

através de um corte no ângulo azimutal formado entre os momenta transversais dos léptons.

2 *Processo Drell–Yan*

2.1 Visão geral

Em maio de 1970, Sidney Drell e Tung-Mow Yan teorizaram a produção de par de léptons (dilépton) maciços em colisões de hádrons em altas energias [1], por meio da aniquilação de quarks e antiquarks (pártons). Em setembro do mesmo ano, Christenson *et al* obtiveram a confirmação experimental no Síncrotron de Gradiente Alternado - AGS [21]. Medidas mais recentes, de 2016, no CMS e no ATLAS [22,23] para a seção de choque diferencial em relação a massa de dilépton do processo Drell–Yan apresentam boa concordância com previsões teóricas, como mostrado na Fig. 2.1. O processo Drell–Yan é utilizado também como uma importante ferramenta para construção das distribuições de pártons [15, 24]. Outra aplicação do processo se dá em assuntos envolvendo a fatorização como podemos ver nas Refs. [25, 26].

Como foi mencionado no Cap. 1, a força eletrofraca tem como partículas mediadoras os bósons W^\pm , que possuem carga elétrica mas não possuem carga de cor, e o bóson Z, que não possui carga elétrica nem carga de cor. A aniquilação do par quark-antiquark pode gerar fóton ou um bóson Z, que possui uma massa de aproximadamente 91 GeV, que é comumente detectada nos colisores, como pode ser visto na Fig. 2.2. Porém, para evitar interações eletrofracas, utilizaremos um fóton no processo Drell–Yan, que é justificado se a massa do dilépton for muito menor que a massa do bóson Z.

Para as previsões teóricas, temos de calcular a seção de choque hadrônica, que é obtida ao fazermos a convolução da seção de choque partônica, $\hat{\sigma}$, com as distribuições de pártons e integrada no espaço de fase. Numa aproximação colinear (sem considerar momentum transversal dos pártons A e B), a convolução será:

$$\int d\sigma = \int dx_A dx_B f(x_A) f(x_B) \hat{\sigma} \quad (2.1)$$

onde A e B são os pártons de estado inicial, x_A e x_B as respectivas frações de momentum carregadas pelos pártons e $f(x_A)$ e $f(x_B)$ as funções de distribuição de pártons.

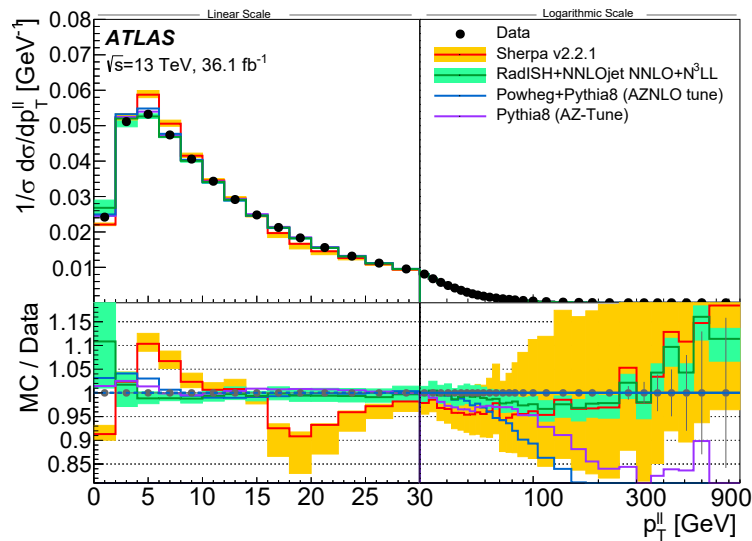


Figura 2.1: Predições teóricas da seção de choque diferencial em relação ao momentum transversal do dilépton do processo Drell–Yan comparada com medidas obtidas em 2016 no ATLAS utilizando diferentes métodos computacionais. As incertezas das medidas são mostradas por barras verticais e as incertezas dos métodos Sherpa e RadISH são indicadas pelas barras coloridas. Na parte inferior, comparação do método de Monte Carlo com as medidas. Figura retirada de [23].

O cálculo da seção de choque partônica, $\hat{\sigma}$, pode ser feito como uma série perturbativa. Nesta série, a ordem dominante não considera desdobramentos de pártons de estado inicial, apenas a aniquilação quark-antiquark. Já a ordem seguinte à dominante inclui desdobramentos envolvendo o glúon. A seguir veremos como obter a seção de choque partônica em ordem dominante e em ordem seguinte à dominante.

2.2 Ordem dominante

Em ordem dominante (*leading order* -LO) os quarks A e B se aniquilam e resultam nos léptons C e D. Aplicando as regras de Feynman, apresentadas no Apêndice A, da QED para o diagrama da Fig. 2.3, obtemos o elemento de matriz invariante:

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{e_q^2 e^4}{q^4} (\bar{v}_B^s \gamma^\mu u_A^s) (\bar{u}_C^r \gamma_\mu v_D^{r'}) (\bar{v}_D^{r'} \gamma_{\mu'} u_C^r) (\bar{u}_A^s \gamma^{\mu'} v_B^s). \quad (2.2)$$

Sendo que e_q é a carga elétrica do quark em unidades da carga elementar e e q^2 é o momentum ao quadrado do fóton virtual, que é igual a massa invariante ao quadrado, M^2 , do dilépton. Os spinores são representados por u e v , os spins por s e r e a matriz de Dirac γ de índice μ .

Com o elemento de matriz invariante, podemos calcular a seção de choque partônica, que

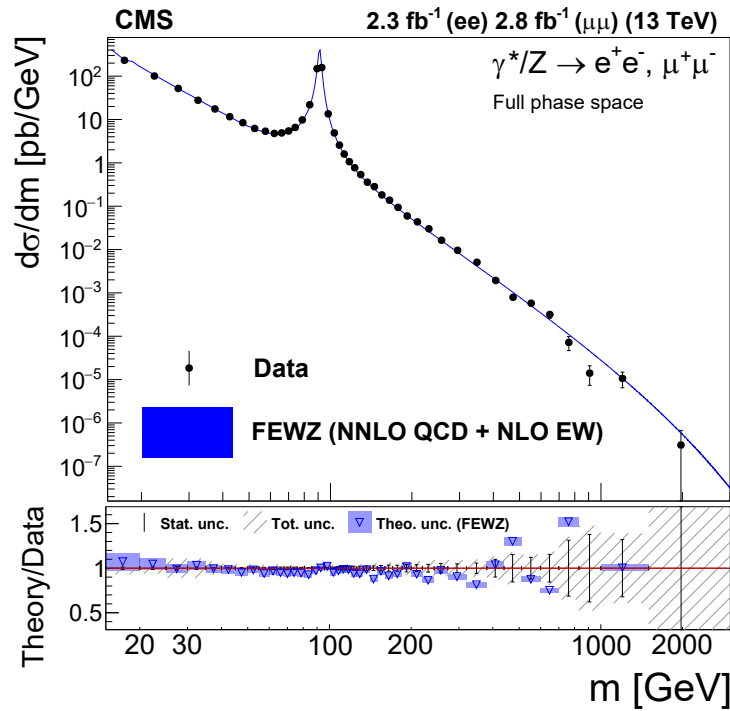


Figura 2.2: Ressonância da massa (91 GeV) do bóson Z na produção de elétrons e múons obtida no CMS à energia de centro de momentum de 13 TeV, dados experimentais com pontos e cálculos teóricos obtidos com o software FEWZ utilizando a distribuição NNPDF 3.0, abaixo, a comparação de dados com a previsão teórica. Note que a figura não continua para pequenas massas de dilépton ($m \leq 10$ GeV). Figura retirada de [22].

está relacionado com a probabilidade de ocorrência das partículas no estado final. A interação em ordem dominante é puramente eletromagnética.

Para o cálculo da seção de choque partônica, $\hat{\sigma}$, fazemos a normalização da quantidade de partículas A e B através do fator de fluxo, esse fator depende do referencial. Para duas partículas A e B colidindo colinearmente com velocidades \vec{v}_A e \vec{v}_B , respectivamente, teremos, utilizando unidades naturais:

$$\begin{aligned}
 F &= |\vec{v}_A - \vec{v}_B| \cdot 2E_A \cdot 2E_B \\
 &= 4(|\vec{p}_A|E_B + |\vec{p}_B|E_A) \\
 &= 4\sqrt{(p_A \cdot p_B)^2 - m_A^2 m_B^2}
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

As massas dos quarks A e B são da ordem MeV, enquanto que a energia de centro de momentum é da ordem de TeV, portanto, podemos desprezar as massas. Assim, teremos o fator de fluxo dado por:

$$F = 2\hat{s}. \tag{2.4}$$

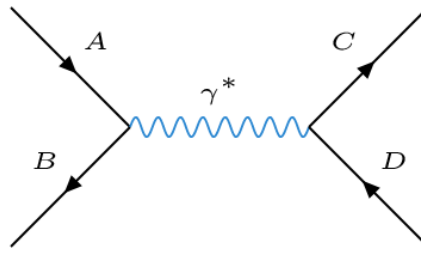


Figura 2.3: Processo Drell–Yan em ordem dominante. O quark, A , de um próton se aniquilando com o antiquark, B , de outro próton. Da aniquilação teorizamos um fóton virtual, γ^* , que se desdobra em um par de léptons, C e D . Figura produzida pelo autor.

sendo que $\hat{s} = (p_A + p_B)^2$ é a energia de centro de momentum. O acento circunflexo sobre a grandeza indica que ela se refere aos pártons e não aos hádrons. O fator de fluxo é o mesmo para a ordem dominante e para a ordem seguinte à dominante.

O espaço de fase para duas partículas, lépton C e D , é dado por:

$$\int d\text{PS}^{(2)} = \int \frac{d^3 p_C}{2E_C(2\pi)^3} \frac{d^3 p_D}{2E_D(2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - p_C - p_D) \quad (2.5)$$

Integrando o elemento de matriz em todo o espaço de fase para duas partículas, somando sobre os spins das partículas finais e tirando a média sobre os dois possíveis spins das iniciais, temos um fator $1/4$. Analogamente, fazendo a média das cores dos estados iniciais e somando as cores dos estados finais, temos um fator $1/3$. Substituindo a massa de dilépton $M^2 = q^2$ e a carga elementar, $e^2 = 4\pi\alpha$, a seção de choque partônica integrada em todo o ângulo sólido, $\int d\Omega$, do espaço de fase, será:

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{2\hat{s}} \int d\Omega \frac{1}{64\pi M^2} \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \sum_{\text{spins, cores}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{4\pi e_q^2 \alpha^2}{9M^2}. \quad (2.6)$$

Note que o resultado possui a constante de acoplamento eletromagnética α elevada ao quadrado, isso será importante adiante para discriminar à qual ordem de perturbação os termos calculados pertencem.

2.3 Ordem seguinte à dominante

Em 1977, os cálculos em ordem seguinte à dominante (*Next to Leading Order* - NLO) foram feitos por G. Altarelli, G. Parisi e R. Petronzio [27]. A ordem seguinte à dominante terá correções da QCD (α_s) na série perturbativa do processo Drell–Yan, por meio do vértice de três partículas: quark–antiquark–glúon. Além do mais, em ordem dominante, o dilépton não

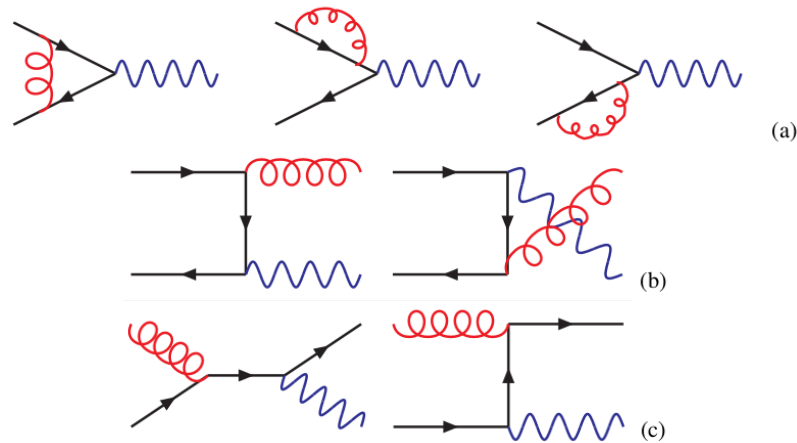


Figura 2.4: Diagramas dos sub-processos que compõem o processo Drell–Yan em ordem seguinte a dominante. Os itens (a), (b) e (c) são descritos no texto - Figura retirada da Ref. [28].

tem momentum transversal, ou seja, é colinear aos pártons, que, por sua vez, são colineares aos hádrons. Nesta referência citada, foi demonstrado que em NLO (correções de ordem α_s) o dilépton pode ter momentum transversal não nulo.

Assim, a ordem seguinte à dominante terá correções da QCD envolvendo um glúon nos diagramas de Feynman, como mostrado na Fig. 2.4, de três tipos diferentes:

- (a) Correções virtuais à ordem dominante. O glúon é emitido pelo quark (antiquark) e absorvido pelo antiquark (quark). Outra maneira é o glúon sendo emitido e reabsorvido pelo próprio quark (antiquark);
- (b) Diagramas de aniquilação com glúon no estado final, sendo emitido pelo quark (canal \hat{t}) ou pelo antiquark (canal \hat{u}), na esquerda e na direita respectivamente;
- (c) Espalhamento Compton entre quark e glúon é assim chamado devido à semelhança ao espalhamento original, que consiste em um fóton incidindo sobre um elétron e espalhado com certo ângulo. O glúon é uma partícula de estado inicial, canal \hat{s} à esquerda e canal \hat{t} à direita.

Para os diagramas de espalhamento Compton, ao calcular o elemento de matriz deve-se considerar os canais \hat{t} e \hat{s} , bem como a interferência entre eles. Tomando cuidado com o propagador do férmion (linha vertical do diagrama) cuja regra de Feynman correspondente terá um fator -1. Na aniquilação temos os canais \hat{t} e \hat{u} , que possuem ambos a linha vertical, fazendo com que o fator multiplicativo seja 1.

Na Fig. 2.5, temos o canal \hat{t} para o espalhamento Compton. Esse caso tem destaque devido

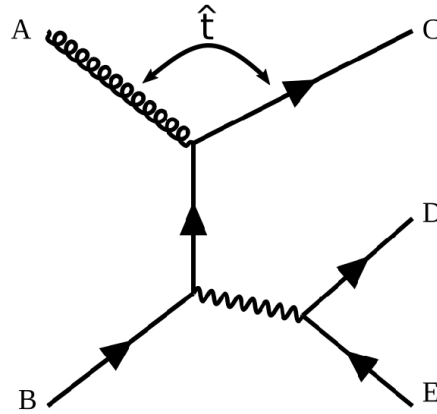


Figura 2.5: Diagrama do canal \hat{t} do espalhamento Compton: glúon A e um quark B são as partículas iniciais, resultando em um quark C e um fóton que se desdobra nos léptons D e E. O diagrama tem uma divergência no canal \hat{t} e é o mais importante para pequeno x devido à distribuição do glúon. Figura produzida pelo autor.

ao fato da distribuição do glúon dominar na região de pequeno x em comparação às distribuições de outros sabores. Através dos momenta das partículas mostradas, sendo elas o glúon de momentum p_A , o quark B de momentum p_B , o quark C de momentum p_C , o fóton com momentum q , podemos calcular as variáveis de Mandelstam, desprezando-se as massas:

$$\hat{s} = (p_A + p_B)^2, \quad (2.7)$$

$$\hat{t} = (p_B - q)^2 \approx M^2 - 2p_B \cdot q, \quad (2.8)$$

$$\hat{u} = (p_A - q)^2 \approx M^2 - 2p_A \cdot q. \quad (2.9)$$

Os lépton são D e E, mas não são utilizadas para o cálculo dessas variáveis, que podem ser relacionados com a massa de dilépton:

$$M^2 = \hat{s} + \hat{t} + \hat{u} \quad (2.10)$$

Outra forma conveniente de se colocar as variáveis de Mandelstam, é em função das variáveis de Sudakov. As variáveis são definidas, por exemplo, para um quadrimomentum $p = [p_0, p_x, p_y, p_z]$ como:

$$p^+ = p_0 + p_z \quad \text{e} \quad p^- = p_0 - p_z \quad (2.11)$$

Essas variáveis não têm relação com os fatores de Sudakov, além de possuírem mesma autoria. Assim, as Eqs. 2.8 e 2.9 se tornam:

$$\hat{t} = M^2 - \sqrt{\hat{s}}q^+ \quad (2.12)$$

$$\hat{u} = M^2 - \sqrt{\hat{s}q^-} \quad (2.13)$$

Note a semelhança das Eqs. 2.12 e 2.13, que permite escrever equivalentemente a seção de choque diferencial partônica em relação a qualquer uma delas. Além disso, observamos que as variáveis \hat{t} e \hat{u} são negativas.

Antes de integrar o elemento de matriz (aniquilação e Compton) no espaço de fase, é feita a média sobre as spins das partículas iniciais e a soma das finais contribuindo com um fator de $1/4$. O glúon possui spin 1, mas é um bóson de calibre sem massa, sendo assim, terá apenas duas possibilidades de projeção de spin, portanto a média é dada por $1/2$. Equivalentemente, teremos a média sobre as cores das partículas iniciais e a soma das cores dos estados finais. No caso do (anti)quark teremos uma de três possibilidades, ou seja, um fator $1/3$. Para o glúon, teremos uma configuração de oito possíveis cores, portanto, um fator $1/8$ para a média. O fator que considera as cores do processo Drell–Yan é mostrado com mais detalhes no Apêndice A.

No caso dos diagramas de aniquilação, Fig. 2.4 (b), calculando para os canais \hat{t} (esquerda) e \hat{u} (direita), o elemento de matriz será:

$$|\mathcal{M}_{\text{aniq}}|^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{9} \sum_{\text{spins, cores}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{16(4\pi)^3 \alpha^2 \alpha_s e_q^2}{9M^2} \left\{ \frac{4}{\hat{t}\hat{u}} (2(p_A \cdot p_D)^2 + 2(p_B \cdot p_D)^2) + \right. \\ \left. \frac{4}{\hat{t}\hat{u}} M^2 (-(p_A \cdot p_D) - (p_B \cdot p_D)) + \frac{4}{\hat{u}} (p_A \cdot p_D) + \frac{4}{\hat{t}} (p_B \cdot p_D) + \frac{2M^2 \hat{s} + \hat{u}^2 + \hat{t}^2}{\hat{t}\hat{u}} \right\}. \quad (2.14)$$

Para o espalhamento Compton, Fig. 2.4 (c), calculando para os canais s (esquerda) e t (direita), o elemento de matriz é dado por:

$$|\mathcal{M}_{\text{Comp}}|^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{24} \sum_{\text{spins, cores}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{8(4\pi)^3 \alpha^2 \alpha_s e_q^2}{3M^2} \left\{ \frac{1}{\hat{s}\hat{t}} [-4(p_A \cdot p_D)(p_B \cdot p_D) - 4(p_A \cdot p_D)^2 - 2(p_B \cdot p_D)^2] + \frac{M^2}{\hat{s}\hat{t}} [2(p_A \cdot p_D) + (p_B \cdot p_D)] - \frac{1}{\hat{s}} (p_A \cdot p_D) + \frac{1}{\hat{t}} [(p_A \cdot p_D) + (p_B \cdot p_D)] - \frac{2M^2(\hat{s} + \hat{u}) + 4t^2 + 4\hat{s}^2}{\hat{s}\hat{t}} \right\}. \quad (2.15)$$

As Eqs. 2.14 e 2.15 explicitamente em termos dos momenta das partículas inicial p_A e final p_D , não são encontrados literatura. Os elementos de matriz devem ser função desses momenta para que possamos integrar no espaço de fase determinado no próximo capítulo. Notamos aqui, que os elementos de matriz possuem o fator α_s , constante de acoplamento da força forte, devido a inserção do glúon na análise.

Analogamente ao cálculo em ordem dominante, utilizamos o elemento de matriz invariante para calcular a seção de choque. Porém, integrada em todo o espaço de fase para três partículas,

2.3 Ordem seguinte à dominante

$dPS^{(3)}$:

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{F} \int dPS^{(3)} |\mathcal{M}|^2. \quad (2.16)$$

Como os elementos de matriz são dados em função das variáveis de Mandelstam, calculamos a seção de choque partônica na forma diferencial em relação a massa invariante do dilépton e na variável de Mandelstam \hat{t} , o resultado para a aniquilação em todo o espaço de fase será:

$$\frac{d\hat{\sigma}_{\text{aniq}}}{dM^2 d\hat{t}} = \frac{8}{27} \frac{\alpha^2 \alpha_s e_q^2}{M^2 \hat{s}^2} \left(\frac{2M^2 \hat{s} + \hat{u}^2 + \hat{t}^2}{\hat{t} \hat{u}} \right). \quad (2.17)$$

Para o espalhamento Compton, temos dois casos a se considerar:

$$\frac{d\hat{\sigma}_{\text{Compt},A}}{dM^2 d\hat{t}} = \frac{1}{9} \frac{\alpha^2 \alpha_s e_q^2}{M^2 \hat{s}^2} \left(\frac{2M^2 \hat{u} + \hat{s}^2 + \hat{t}^2}{-\hat{s} \hat{t}} \right) \quad (2.18)$$

e

$$\frac{d\hat{\sigma}_{\text{Compt},B}}{dM^2 d\hat{t}} = \frac{1}{9} \frac{\alpha^2 \alpha_s e_q^2}{M^2 \hat{s}^2} \left(\frac{2M^2 \hat{t} + \hat{s}^2 + \hat{u}^2}{-\hat{s} \hat{u}} \right). \quad (2.19)$$

O primeiro resultado é para os casos em que o glúon é a partícula A e o quark a B, Eq. 2.18. Já no segundo, Eq. 2.19, o quark é a partícula A e o glúon a B.

Estes resultados, disponíveis na Ref. [28], foram integrados em todo o espaço de fase, com exceção a variável \hat{t} , do dilépton, por isso, impossibilita impor um corte cinemático. Sendo assim, no Cap. 3 encontraremos uma expressão não integrada para fazê-lo.

3 *Espaço de fase do processo Drell–Yan*

Os elementos de matriz obtidos no Cap. 2 são integrados no espaço de fase, resultando na seção de choque partônica, sendo assim, a forma com que trabalhamos o espaço de fase afeta a seção de choque. Em ordem dominante, temos duas partículas no estado inicial (quarks) colineares resultando em duas no estado final (léptons) que também serão colineares, impossibilitando a investigação do corte em ângulo azimutal, que sempre será igual a π . Então neste capítulo estudaremos a ordem seguinte à dominante, que tem três partículas no estado final. Neste caso, o ângulo azimutal entre os momenta transversais dos léptons pode assumir qualquer valor. Inicialmente na Sec. 3.1 calcularemos a integral em todo o espaço de fase, ou seja, consideramos todos os valores de ângulo azimutal entre os léptons. Na Sec. 3.2 calcularemos o espaço de fase de maneira a permitir uma restrição neste ângulo.

3.1 Espaço de fase integrado sem corte

O chamado espaço de fase representa todos os estados, caracterizados pelos possíveis momenta, que as partículas finais podem ocupar. Calcularemos a integral no espaço de fase como feito na Ref. [29], nos limitando ao caso quadridimensional e tomando a diferencial em relação a massa de dilépton ao quadrado M^2 e à transferência de momentum \hat{t} . Desta maneira, poderemos visualizar a forma da expressão que obteremos ao considerarmos todo o espaço de fase sem nenhum corte imposto.

Calcularemos o espaço de fase de duas partículas A e B no estado inicial resultando em três partículas de estado final C , D e E . Como exemplo, utilizaremos o subprocesso do espalhamento Compton, mostrado na Fig. 2.5, sendo que o glúon A e o quark B são os pártons do estado inicial, resultando num quark C e num fóton, este último que se desdobra no par de lépton D e E . A integral no espaço de fase dos momenta para o referido subprocesso é dada por:

$$\int d\text{PS}^{(3)} = \int \frac{d^3 p_C}{2E_C(2\pi)^3} \frac{d^3 p_D}{2E_D(2\pi)^3} \frac{d^3 p_E}{2E_E(2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - p_C - p_D - p_E), \quad (3.1)$$

sendo que a delta de Dirac garante a conservação de momentum entre as partículas de estado inicial, A e B , e as partículas de estado final. O caso em que a partícula A é o quark e o glúon a partícula B , terá a mesma integral no espaço de fase, com as mesmas partículas C , D e E de estado final. Também os subprocessos de aniquilação terão a mesma integral no espaço de fase, mas o quark A se aniquila com o antiquark B , resultando no glúon C e num fóton que se desdobra no par de léptons D e E .

A integral no espaço de fase, Eq. 3.1, pode ser separada em duas integrais de duas partículas no estado final de cada, inserindo a identidade cuja delta de Dirac garante a conservação de momentum do fóton, $q = [q_0, 0, 0, 0] = p_D + p_E$, que se desdobra em um par de léptons:

$$1 = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3 2q_0} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q - p_D - p_E). \quad (3.2)$$

Assim, a integral no espaço de fase de três partículas pode ser fatorada em duas integrais de duas finais: no espaço de fase hadrônico ($\text{PS}_H^{(2)}$) e no leptônico ($\text{PS}_L^{(2)}$). Com a identidade, Eq. 3.2, multiplicando a Eq. 3.1, temos:

$$\begin{aligned} \int \frac{d\text{PS}^{(3)}}{dM^2} &= \frac{1}{2\pi} \int d\text{PS}_H^{(2)} d\text{PS}_L^{(2)} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(4 \int \frac{d^3 p_C}{2E_C (2\pi)^3} \frac{d^3 q}{2q_0 (2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - p_C - q) \right) \\ &\times \left(\int \frac{d^3 p_D}{2E_D (2\pi)^3} \frac{d^3 p_E}{2E_E (2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q - p_D - p_E) \right). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Aqui substituímos o momentum ao quadrado do fóton pela massa de dilépton ($q^2 = M^2$), obtendo um espaço de fase diferencial na massa de dilépton. Faremos separadamente as integrais no espaço de fase leptônico e hadrônico, começando pelo primeiro.

3.1.1 Espaço de fase leptônico

Iniciaremos o cálculo pela integral no espaço de fase dos momenta para os léptons D e E no estado final: $\int d\text{PS}_L^{(2)}$. Se os léptons têm massas desprezíveis, comparadas à escala de energia, temos a relação com uma delta unidimensional cujo argumento tem dimensão do inverso da energia ao quadrado: $\int dE_E \delta(E_E^2 - |\vec{p}_E|^2) = \frac{1}{2E_E}$. Utilizando essa última relação na integral do espaço de fase leptônico e integrando p_E com a delta quadridimensional, ficaremos apenas com

a delta com o quadrimomentum ao quadrado do lépton D:

$$\begin{aligned}\int d\text{PS}_L^{(2)} &= \frac{1}{2(2\pi)^2} \int \frac{d^3 p_D}{E_D} d^4 p_E \delta(p_E^2) \delta^{(4)}(q - p_D - p_E) \\ &= \frac{1}{2(2\pi)^2} \int \frac{d^3 p_D}{E_D} \delta(q^2 - 2q \cdot p_D).\end{aligned}\quad (3.4)$$

Para integrar o momentum do lépton D, reescreveremos o elemento de integração em coordenadas esféricas: $d^3 p_D = |\vec{p}_D|^2 d|\vec{p}_D| d\Omega$. Assim como o lépton E, o lépton D também possui massa desprezível, assim, temos que $|\vec{p}_D| = E_D$, simplificando o denominador:

$$\int d\text{PS}_L^{(2)} = \frac{1}{2(2\pi)^2} \int d|\vec{p}_D| |\vec{p}_D| \delta(q^2 - 2q \cdot p_D) \int d\Omega. \quad (3.5)$$

No referencial do fóton, podemos reescrever o argumento da delta em termos as energias do lépton D, E_D e do fóton, q_0 , ao invés dos quadrimomenta: $q^2 - 2q \cdot p_D = q_0^2 - 2q_0 E_D$. Para integrar em $|\vec{p}_D|$ temos de usar a relação:

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}, \quad f(x_i) = 0. \quad (3.6)$$

Sendo assim, integrando o ângulo sólido e reescrevendo a delta com as energias:

$$\int d\text{PS}_L^{(2)} = \frac{1}{2\pi} \int d|\vec{p}_D| |\vec{p}_D| \frac{1}{2q_0} \delta\left(|\vec{p}_D| - \frac{q_0}{2}\right) = \frac{1}{8\pi}. \quad (3.7)$$

Note que aqui integramos em todo o espaço de fase leptônico, de forma que não é possível impor um corte.

3.1.2 Espaço de fase hadrônico

Agora que fizemos a integral leptônica, partiremos para a integral hadrônica, $\int d\text{PS}_H^{(2)}$, que é dada pelo quark C e o fóton maciço no estado final:

$$\int d\text{PS}_H^{(2)} = \int \frac{d^3 p_C}{2E_C(2\pi)^3} \frac{d^3 q}{2q_0(2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\sqrt{\hat{s}} - p_C - q). \quad (3.8)$$

As integrais são feitas ao escrevermos o elemento de integração com as variáveis de Sudakov (Eq. 2.11):

$$\frac{d^3 p_C}{E_C} = d^2 p_{Ct} \frac{d p_C^+}{p_C^+}, \quad (3.9)$$

sendo que o elemento de integração do momentum transversal é $d^2 p_{Ct} = d p_{Cx} d p_{Cy}$.

Para integrar nessas variáveis, reescreveremos a delta fatorada de maneira conveniente. Por exemplo, uma delta quadridimensional pode ser escrita para os momenta inicial, a , e final, b ,

com as variáveis de Sudakov e os momenta transversais:

$$\delta^{(4)}(a-b) = 2\delta(a^+ - b^+)\delta(a^- - b^-)\delta^{(2)}(\vec{a}_t - \vec{b}_t), \quad (3.10)$$

sendo que o fator 2 se deve ao jacobiano da transformação da energia e do momentum longitudinal para as variáveis de Sudakov. No nosso caso, o momentum inicial é $a = p_A + p_B = \sqrt{\hat{s}}$ e o momentum final $b = p_C + q$, portanto, teremos:

$$\delta^{(4)}(p_A + p_B - p_C - q) = 2\delta(\sqrt{\hat{s}} - p_C^+ - q^+)\delta(\sqrt{\hat{s}} - p_C^- - q^-)\delta^{(2)}(-\vec{p}_{Ct} - \vec{q}_t). \quad (3.11)$$

Primeiro integramos a variável de Sudakov do pártion C, com a delta na variável "+" de Sudakov, definindo: $p_C^+ = \sqrt{\hat{s}} - q^+$. Ao passo que num referencial onde os momenta transversais das partículas iniciais são nulos, teremos para o momentum transversal do pártion C: $\vec{p}_{Ct} = -\vec{q}_t$. Assim, terminamos de integrar no trimomentum do quark C, que definiram a variável '-' de Sudakov para o quark C de massa desprezível, como sendo:

$$p_C^- = \frac{\vec{p}_{Ct}^2}{p_C^+} = \frac{\vec{q}_t^2}{\sqrt{\hat{s}} - q^+}, \quad (3.12)$$

que deverá ser incluída no segundo fator da Eq. 3.11.

Com a delta na variável '-' de Sudakov, $\delta(\sqrt{\hat{s}} - p_C^- - q^-)$, poderemos fazer a integral do fóton:

$$\int d\text{PS}_H^{(2)} = \frac{1}{2(2\pi)^2} \int \frac{d^3q}{q_0} \frac{1}{\sqrt{\hat{s}} - q^+} \delta\left(\sqrt{\hat{s}} - \frac{q_t^2}{\sqrt{\hat{s}} - q^+} - q^-\right), \quad (3.13)$$

O elemento de integração do fóton podem ser escrito em termos das variáveis de Sudakov como: $\frac{d^3q}{q_0} = -\frac{dq_t^2 dq^- d\phi}{2q^-}$. Antes de integrarmos, notamos que o argumento da delta é uma função do momentum transversal do fóton, já que q^+ também depende deste, então teremos de calcular a derivada desta função:

$$\frac{d}{dq_t^2} \left(\sqrt{\hat{s}} - \frac{q_t^2}{\sqrt{\hat{s}} - q^+} - q^- \right) = -\frac{1}{\sqrt{\hat{s}} - q^+} \left(1 + \frac{q_t^2}{(\sqrt{\hat{s}} - q^+)q^-} \right). \quad (3.14)$$

Utilizando o valor do momentum transversal ao quadrado do fóton que ficou definido pela delta: $q_t^2 = (\sqrt{\hat{s}} - q^-)(\sqrt{\hat{s}} - q^+)$, as integrais no momentum transversal e no ângulo azimutal, $\int d\phi = 2\pi$ resultarão em:

$$\int d\text{PS}_H^{(2)} = \frac{1}{2^3 \pi \sqrt{\hat{s}}} \int dq^-. \quad (3.15)$$

Podemos obter um espaço de fase hadrônico diferencial a partir da Eq. 3.16, a seguir veremos em qual variável é mais conveniente.

Espaço de fase em função massa de dilépton e variável \hat{t}

Como os elementos de matriz são dados em função das variáveis de Mandelstam e da massa de dilépton, temos de encontrar um espaço de fase nessas grandezas, para que os elementos de matriz, Eqs. 2.14 e 2.15, sejam integrados. Podemos transformar a integral em q^- para a variável de Mandelstam de transferência de momentum: $\hat{t} = M^2 - \sqrt{\hat{s}}q^- \rightarrow dq^- = -\frac{d\hat{t}}{\sqrt{\hat{s}}}$, resultando em:

$$\int \frac{d\text{PS}_H^{(2)}}{d\hat{t}} = \frac{1}{2^3\pi\hat{s}}. \quad (3.16)$$

Com a integral do espaço de fase leptônico e hadrônico feitas, podemos calcular a Eq. 3.3, dividindo pelo fator de fluxo $2\hat{s}$:

$$\frac{1}{2\hat{s}} \int \frac{d\text{PS}^{(3)}}{dM^2 d\hat{t}} = \frac{1}{2\hat{s}} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2^3\pi} \frac{1}{2^3\pi\hat{s}} = \frac{1}{2^5(2\pi)^3\hat{s}^2}. \quad (3.17)$$

Assim, terminamos o cálculo no espaço de fase total da maneira tradicional [29]. Como integramos em todo o espaço de fase leptônico a Eq. 3.17 não possibilita impor um corte em ângulo azimutal. Por isso, na próxima seção calcularemos de uma maneira alternativa a mesma integração.

3.2 Espaço de fase com integração explícita em ângulo azimutal

Agora calcularemos o espaço de fase do processo Drell–Yan de maneira que o ângulo azimutal seja uma das últimas variáveis a serem integradas e assim, poderemos restringir o espaço através dele. Uma alternativa a esse cálculo, utilizando as variáveis de Sudakov no espaço de fase é apresentada no Apêndice B. Como feito anteriormente, devemos normalizar a quantidade de partículas iniciais, com a divisão pelo fator de fluxo $2\hat{s}$:

$$\frac{1}{2\hat{s}} \int d\text{PS}^{(3)} = \frac{1}{2^4(2\pi)^5\hat{s}} \int \frac{d^3p_C}{E_C} \frac{d^3p_D}{E_D} \frac{d^3p_E}{E_E} \delta^{(4)}(p_A + p_B - p_C - p_D - p_E). \quad (3.18)$$

O quark C não é encontrado livremente, ele formará um hádron o qual não estamos interessados. Portanto, iremos começar a integração da Eq. 3.18 pelo quark C e consideraremos todas as suas possibilidades, ou seja, iremos integrar em todo subespaço de C .

3.2.1 Integral nas variáveis do quark C

A integral no quark C é feita de maneira parecida com o cálculo do espaço de fase hadrônico, escrevemos o elemento de integração novamente na forma da Eq. 3.9 e a delta com a Eq. 3.11. Sendo assim, a delta com a variável "+" de Sudakov para o quark C define:

$$p_C^+ = \sqrt{\hat{s}} - p_D^+ - p_E^+. \quad (3.19)$$

Já a delta em momentum transversal estabelece:

$$\vec{p}_{Ct} = -\vec{p}_{Dt} - \vec{p}_{Et}. \quad (3.20)$$

Assim, integrando todo o espaço do momentum do quark C, a Eq. 3.18 ficará com apenas a delta na variável "-" de Sudakov que utilizaremos mais adiante no cálculo:

$$\frac{1}{2\hat{s}} \int d\text{PS}^{(3)} = \frac{1}{2^3(2\pi)^5\hat{s}} \int \frac{d^3p_D}{E_D} \frac{d^3p_E}{E_E} \frac{\delta(p_C^- + p_D^- + p_E^- - \sqrt{\hat{s}})}{\sqrt{\hat{s}} - p_D^+ - p_E^+}. \quad (3.21)$$

Para integrar o espaço de fase dos léptons, mantendo os ângulos azimutais inalterados, não podemos utilizar a identidade que relaciona o momentum transversal do fóton e os léptons, Eq. 3.2. Calcularemos a seguir uma maneira de preservar os ângulos com a identidade adequada. Podemos começar os cálculos tanto pelo lépton D como pelo antilépton E , simplesmente escolhemos começar a integrar nas variáveis do lépton D .

3.2.2 Integral nas variáveis do lépton D

Para termos acesso às variáveis relevantes do dilépton (q_0 e q_z ou, equivalentemente, M^2 e \hat{t}), temos de inserir a identidade através de deltas de Dirac que garantem a conservação de energia. Há varias formas de fazer isso, com as variáveis de Sudakov (dada no Apêndice B), ou então através da energia do fóton e do seu momentum longitudinal:

$$\int dq_0 dq_z \delta(q_0 - E_D - E_E) \delta(q_z - p_{Dz} - p_{Ez}) = 1. \quad (3.22)$$

Integraremos nas variáveis de Sudakov, então é necessário modificar a Eq. 3.22. Dado um quadrimomentum qualquer $p = [p_0, p_x, p_y, p_z]$, podemos inverter as Eqs. 2.11, de modo a definirmos a energia e o momentum transversal em termos das variáveis de Sudakov:

$$p_0 = \frac{p^+ + p^-}{2} \quad \text{e} \quad p_z = \frac{p^+ - p^-}{2} \quad (3.23)$$

Essas relações inversas serão substituídas na identidade, que por sua vez será usada no cálculo

do espaço de fase.

Espaço de fase com a identidade

Inserimos a identidade, Eq. 3.22, com as relações inversas, Eq. 3.23, no espaço de fase, Eq. 3.21. Desta maneira, o espaço de fase terá uma delta em p_C^- , uma delta na energia e uma delta no momentum longitudinal:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\hat{s}} \int d\text{PS}^{(3)} &= \frac{1}{2^3(2\pi)^5\hat{s}} \int dq_0 dq_z \frac{d^3p_D}{E_D} \frac{d^3p_E}{E_E} \frac{\delta(p_C^- + p_D^- + p_E^- - \sqrt{\hat{s}})}{(\sqrt{\hat{s}} - p_D^+ - p_E^+)} \\ &\times \delta\left(q_0 - \frac{p_D^+ + p_D^-}{2} - \frac{p_E^+ + p_E^-}{2}\right) \delta\left(q_z - \frac{p_D^+ - p_D^-}{2} - \frac{p_E^+ - p_E^-}{2}\right). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Como fizemos com a Eq. 3.17, obteremos um espaço de fase diferencial na massa de dilépton ao quadrado e na variável \hat{t} :

$$\hat{t} = M^2 - \sqrt{\hat{s}}q^- \quad \rightarrow \quad dM^2 d\hat{t} = \hat{s} dq^+ dq^-, \quad (3.25)$$

o jacobiano de transformação para as variáveis de Sudakov para o fóton é dado por:

$$dq_0 dq_z = \frac{1}{2} dq^+ dq^-. \quad (3.26)$$

Então, a transformação da energia e momentum longitudinal do fóton para a massa de dilépton e transferência de momentum é dada por:

$$dq_0 dq_z = \frac{M}{\hat{s}} dM d\hat{t}. \quad (3.27)$$

Com essa troca, as variáveis de Sudakov para o fóton devem estar em função da massa de dilépton, M e da variável \hat{t} , que podem ser obtidas a partir das Eqs. 2.12 e 2.13, tendo as formas:

$$q^+ = \frac{M^2 - \hat{t}}{\sqrt{\hat{s}}} \quad \text{e} \quad q^- = \frac{\hat{s} + \hat{t}}{\sqrt{\hat{s}}}, \quad (3.28)$$

O espaço de fase com a troca da energia e momentum longitudinal por M e \hat{t} colocado na forma diferencial nas novas variáveis se torna:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\hat{s}} \int \frac{d\text{PS}^{(3)}}{dM d\hat{t}} &= \frac{M}{2^3(2\pi)^5\hat{s}^2} \int \frac{d^3p_D}{E_D} \frac{d^3p_E}{E_E} \frac{\delta(p_C^- + p_D^- + p_E^- - \sqrt{\hat{s}})}{(\sqrt{\hat{s}} - p_D^+ - p_E^+)} \\ &\times \delta\left(q_0 - \frac{p_D^+ + p_D^-}{2} - \frac{p_E^+ + p_E^-}{2}\right) \delta\left(q_z - \frac{p_D^+ - p_D^-}{2} - \frac{p_E^+ - p_E^-}{2}\right). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Podemos integrar arbitrariamente o lépton D tanto com as delta da energia, como a do momentum longitudinal do fóton, optamos por utilizar a delta da energia do fóton:

$$\delta\left(q_0 - \frac{p_D^+ + p_D^-}{2} - \frac{p_E^+ + p_E^-}{2}\right) \quad (3.30)$$

Integral em p_D^+

Uma maneira de manter o ângulo azimutal é reescrever o elemento de integração com o momentum transversal e a variável de Sudakov: $\frac{d^3 p_D}{E_D} = \frac{d p_{Dt}^2}{2} \frac{d p_D^+}{p_D^+} d\phi_D$. As variáveis de Sudakov estão relacionadas através de $p_D^- = \frac{p_{Dt}^2}{p_D^+}$ (para uma massa desprezível). Assim, podemos substituir p_D^- na Eq. 3.30 e definir p_D^+ :

$$p_D^+ = \frac{2q_0 - p_E^+ - p_E^- \pm \sqrt{(2q_0 - p_E^+ - p_E^-)^2 - 4p_{Dt}^2}}{2}. \quad (3.31)$$

O argumento da delta na energia é uma função de p_D^+ . Sendo assim, temos de usar a propriedade dada pela Eq. 3.6 para fazer a integração. A derivada em relação a p_D^+ do argumento pode ser fatorizada de maneira conveniente para a integral a ser feita:

$$\frac{d}{d p_D^+} \left(q_0 - \frac{p_D^+}{2} - \frac{p_{Dt}^2}{2p_D^+} - \frac{p_E^+ + p_E^-}{2} \right) = \frac{1}{p_D^+} \left(-\frac{p_D^+}{2} + \frac{p_{Dt}^2}{2p_D^+} \right). \quad (3.32)$$

A partir da Eq. 3.30 podemos obter a expressão:

$$\frac{p_{Dt}^2}{2p_D^+} = q_0 - \frac{p_E^+ + p_E^-}{2} - \frac{p_D^+}{2}. \quad (3.33)$$

que ao ser substituída na Eq. 3.32, resultará numa expressão para a derivada em relação a p_D^+ na forma:

$$\frac{d}{d p_D^+} \left(q_0 - \frac{p_D^+ + p_D^-}{2} - \frac{p_E^+ + p_E^-}{2} \right) = \frac{1}{p_D^+} \left(q_0 - \frac{p_E^+ + p_E^-}{2} - p_D^+ \right). \quad (3.34)$$

Substituindo a Eq. 3.31 na Eq. 3.34, a expressão para a derivada em relação a p_D^+ se simplifica e integral em p_D^+ se torna:

$$\int \frac{d p_D^+}{p_D^+} \delta \left(q_0 - \frac{p_D^+ + p_D^-}{2} - \frac{p_E^+ + p_E^-}{2} \right) = \frac{2}{\sqrt{(2q_0 - p_E^+ - p_E^-)^2 - 4p_{Dt}^2}} = \frac{1}{|p_{Dz}|} \quad (3.35)$$

Ao final, foi identificado o momentum longitudinal do lépton D , Eq. 3.37, que ao ser substituído simplificou a expressão. Podemos fazer essa identificação da seguinte maneira: a outra

variável do lépton D é obtida através da expressão: $p_D^+ p_D^- = p_{Dt}^2$:

$$p_D^- = \frac{2q_0 - p_E^+ - p_E^- \mp \sqrt{(2q_0 - p_E^+ - p_E^-)^2 - 4p_{Dt}^2}}{2}, \quad (3.36)$$

que é uma equação semelhante a de p_D^+ , a menos de um sinal. Com as duas variáveis de Sudakov para o lépton D definidas, obtemos o momentum longitudinal:

$$p_{Dz} = \frac{p_D^+ - p_D^-}{2} = \pm \frac{\sqrt{(2q_0 - p_E^+ - p_E^-)^2 - 4p_{Dt}^2}}{2}. \quad (3.37)$$

Espaço de fase com p_D^+ integrado

Com esse resultado, a Eq. 3.24 com a integral em p_D^+ , terá ainda integrais do momentum transversal e ângulo azimutal referentes ao lépton D:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\hat{s}} \int \frac{dPS^{(3)}}{dM d\hat{t}} &= \frac{M}{2^4 (2\pi)^5 \hat{s}^2} \int \frac{d^2 p_{Dt} d\phi_D d^3 p_E}{|p_{Dz}| E_E} \\ &\times \delta\left(q_z - \frac{p_D^+ - p_D^-}{2} - \frac{p_E^+ - p_E^-}{2}\right) \frac{\delta(p_C^- + p_D^- + p_E^- - \sqrt{\hat{s}})}{(\sqrt{\hat{s}} - p_D^+ - p_E^+)}, \end{aligned} \quad (3.38)$$

Com a integração em p_D^+ feita, devemos integrar as demais variáveis (referentes ao antilépton E) respeitando as definições provenientes da integração relacionadas às partículas C e D. Para relembrar, foi integrado o trimomentum de C, deixando uma delta na variável '-' e em p_D^+ utilizando a delta com a energia do fóton. A seguir, integraremos p_E^+ utilizando a delta no momentum longitudinal.

3.2.3 Integral nas variáveis do antilépton E

Para continuar a integração da Eq. 3.38, temos de utilizar os valores definidos de p_D^+ e p_D^- no argumento da delta do momentum longitudinal. Ao fazê-lo, temos um equação quadrática em p_E^+ cujas raízes devem assumir valores tais que o par de léptons D e E sejam partículas reais, ou seja, suas variáveis de Sudakov, p_D^+ e p_E^+ , devem ser números positivos. Então substituindo p_D^+ e p_D^- no argumento da delta,

$$\delta\left(q_z - \frac{p_D^+ - p_D^-}{2} - \frac{p_E^+ - p_E^-}{2}\right), \quad (3.39)$$

do momentum longitudinal definimos p_E^+ :

$$p_E^+ = \frac{1}{2q^-} \left[q^+ q^- + p_{Et}^2 - p_{Dt}^2 \pm \sqrt{(q^+ q^- + p_{Et}^2 - p_{Dt}^2)^2 - 4p_{Et}^2 q^+ q^-} \right]. \quad (3.40)$$

Assim como obtivemos p_D^- , podemos obter a variável "-" de Sudakov para o antilépton E através da relação $p_E^+ p_E^- = p_{Et}^2$:

$$p_E^- = \frac{1}{2q^+} \left[q^+ q^- + p_{Et}^2 - p_{Dt}^2 \mp \sqrt{(q^+ q^- + p_{Et}^2 - p_{Dt}^2)^2 - 4p_{Et}^2 q^+ q^-} \right]. \quad (3.41)$$

Integração em p_E^+

A delta no momentum longitudinal é dada por uma função de p_E^+ em seu argumento, portando a derivamos em relação a p_E^+ , com os valores definidos para p_D^+ e p_D^- , obtendo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp_E^+} \left(q_z - \frac{p_D^+ - p_D^-}{2} - \frac{p_E^+ - p_E^-}{2} \right) &= -\frac{1}{2p_E^+} \left[\frac{(2q_0 - p_E^+ - p_E^-)(p_E^- - p_E^+)}{\pm \sqrt{(2q_0 - p_E^+ - p_E^-)^2 - 4p_{Dt}^2}} + p_E^+ + p_E^- \right] \\ &= -\frac{1}{p_E^+} \left(\frac{-E_D p_{Ez}}{p_{Dz}} + E_E \right), \end{aligned} \quad (3.42)$$

onde identificamos a energia e o momentum longitudinal do antilépton E, bem como o módulo do momentum longitudinal do lépton D, dado pela Eq. 3.37. Assim a integral em p_E^+ se torna:

$$\int \frac{dp_E^+}{p_E^+} \delta \left(q_z - \frac{p_D^+ - p_D^-}{2} - \frac{p_E^+ - p_E^-}{2} \right) = \frac{1}{\left| \frac{-E_D p_{Ez}}{p_{Dz}} + E_E \right|}. \quad (3.43)$$

Espaço de fase com p_E^+ integrado

Após os cálculos que envolvem as deltas de energia e momentum longitudinal do fóton, que permitiram integrar respectivamente em p_D^+ e p_E^+ , integramos em um dos ângulos, digamos o antilépton E, $\int d\phi_E = 2\pi$, utilizando o ângulo azimutal formado entre os momenta transversais dos léptons D e E, $\phi = \phi_D - \phi_E$. Considerando agora o angulo azimutal entre os momenta transversais do dilépton, o espaço de fase resulta em:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\hat{s}} \int \frac{dPS^{(3)}}{dM d\hat{t}} &= \frac{M}{2^4 (2\pi)^4 \hat{s}^2} \int dp_{Dt}^2 dp_{Et} d\phi \\ &\times \delta(p_C^- + p_D^- + p_E^- - \sqrt{\hat{s}}) \frac{1}{\sqrt{\hat{s}} - q^+} \frac{2p_{Et}}{\sqrt{(q^+ q^- + p_{Et}^2 - p_{Dt}^2)^2 - 4p_{Et}^2 q^+ q^-}}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Poderíamos integrar o momentum transversal de qualquer um dos léptons, escolhemos o do antilépton E, utilizaremos a delta restante do início dos cálculos.

Variáveis do lépton D

Aqui redefiniremos as variáveis do lépton D , Eqs. 3.31 e 3.36 que são funções de p_E^+ e p_E^- . Substituindo a Eq. 3.40 na Eq. 3.31, obtendo uma expressão bastante similar para p_D^+ :

$$p_D^+ = \frac{1}{2q^-} \left[q^+ q^- + p_{Dt}^2 - p_{Et}^2 \mp \sqrt{(q^+ q^- + p_{Et}^2 - p_{Dt}^2)^2 - 4p_{Et}^2 q^+ q^-} \right]. \quad (3.45)$$

Note que o sinal da raiz quadrada de p_D^+ será redefinido e oposto ao da raiz quadrada de p_E^+ , Eq. 3.40. Isso se deve ao fato de que ao somarmos p_D^+ e p_E^+ , Eqs. 3.45 e 3.40, devemos obter q^+ , o que ocorre apenas se as raízes tiverem sinais opostos. Podemos ainda obter, com a relação $p_D^+ p_D^- = p_{Dt}^2$, a outra variável para o lépton D :

$$p_D^- = \frac{1}{2q^+} \left[q^+ q^- + p_{Dt}^2 - p_{Et}^2 \pm \sqrt{(q^+ q^- + p_{Et}^2 - p_{Dt}^2)^2 - 4p_{Et}^2 q^+ q^-} \right]. \quad (3.46)$$

Integração no momentum transversal do antilépton E

Usaremos a delta da Eq. 3.21 para integrar em p_{Et} , para isso identificamos $p_D^- + p_E^- = q^-$, que é obtida ao somarmos as Eqs. 3.36 e 3.41. Ao fazermos essa soma, teremos q^- como uma variável que não depende de p_{Et} . Como iniciamos o cálculo com o espaço do quark C , devemos substituir as relações obtidas para a variável de Sudakov para o quark C , Eqs. 3.19 e seu momentum transversal, Eq. 3.20:

$$p_C^- = \frac{\vec{p}_{Ct}^2}{p_C^+} = \frac{(\vec{p}_{Dt} + \vec{p}_{Et})^2}{\sqrt{\hat{s}} - p_D^+ - p_E^+} = \frac{q_t^2}{\sqrt{\hat{s}} - q^+}, \quad (3.47)$$

substituindo as variáveis do dilépton pelas do fóton na delta restante:

$$\delta(p_C^- + p_D^- + p_E^- - \sqrt{\hat{s}}) = \delta \left(\frac{q_t^2}{\sqrt{\hat{s}} - q^+} + q^- - \sqrt{\hat{s}} \right). \quad (3.48)$$

Como o momentum transversal do fóton depende de p_{Et} , devemos fazer a derivada de q_t^2 em relação a p_{Et} :

$$\frac{d}{dp_{Et}} \left(\frac{q_t^2}{\sqrt{\hat{s}} - q^+} + q^- - \sqrt{\hat{s}} \right) = (p_{Et} + p_{Dt} \cos \phi) \left[\frac{2}{\sqrt{\hat{s}} - q^+} \right]. \quad (3.49)$$

O argumento da delta define também o momentum transversal do antilépton E como:

$$p_{Et} = -p_{Dt} \cos \phi \pm \sqrt{M_t^2 - M^2 - p_{Dt}^2 \sin^2 \phi}. \quad (3.50)$$

Substituindo a Eq.3.50 na Eq.3.49, a delta em p_C^- possibilita integrar em p_{Et} :

$$\int d p_{Et} \delta(p_C^- + p_D^- + p_E^- - \sqrt{s}) = \frac{1}{2} \frac{|\sqrt{\hat{s}} - q^+|}{\sqrt{M_t^2 - M^2 - p_{Dt}^2 \sin^2 \phi}}. \quad (3.51)$$

Espaço de fase com p_{Et} integrado

Com esse resultado, o espaço de fase, Eq. 3.44, utilizando a simetria azimutal para alterar o intervalo de integração do ângulo azimutal, $\int_0^{2\pi} d\phi \rightarrow 2 \int_0^\pi d\phi$, temos:

$$\frac{1}{2\hat{s}} \int \frac{dPS^{(3)}}{dM d\hat{t}} = \frac{M}{2^3 (2\pi)^4 \hat{s}^2} \int_0^\pi d\phi d p_{Dt}^2 \frac{p_{Et}}{\sqrt{(q^+ q^- + p_{Et}^2 - p_{Dt}^2)^2 - 4 p_{Et}^2 q^+ q^-}} \frac{1}{\sqrt{M_t^2 - M^2 - p_{Dt}^2 \sin^2 \phi}}. \quad (3.52)$$

Agora é necessário discutir os limites de p_{Dt}^2 no qual o espaço de fase será integrado. Para isso, verificamos para quais valores de p_{Dt}^2 o momentum transversal p_{Et} será um número real positivo. Note que se tivéssemos começado os cálculos pelas variáveis do antilépton E , terminaríamos com uma integração em p_{Et}^2 , fazendo com que tivéssemos de definir limites para p_{Et}^2 .

3.3 Limites de integração

Para determinar os limites de p_{Dt}^2 é necessário fazê-lo considerando o valor de $\cos \phi$ para os quais p_{Et} , Eq.3.50, seja um número positivo:

Caso 1: Se $\cos \phi > 0$, ou seja, $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$, o sinal da raiz na Eq. 3.50 deve ser positivo. Consequentemente teremos um limite superior para p_{Dt}^2 que também deve ser um número positivo:

$$p_{Dt}^2 < M_t^2 - M^2. \quad (3.53)$$

Caso 2: Se $\cos \phi < 0$, ou seja, $\frac{\pi}{2} < \phi < \pi$, para que p_{Et} seja positivo, existe a condição:

$$-p_{Dt} \cos \phi > \mp \sqrt{-p_{Dt}^2 \sin^2 \phi - M^2 + M_t^2}. \quad (3.54)$$

Se o sinal da raiz da Ineq. 3.54 for **positivo**, teremos um limite inferior para p_{Dt} :

$$p_{Dt}^2 > M_t^2 - M^2. \quad (3.55)$$

Já o sinal **negativo**, não estabelece nenhum limite para p_{Dt} .

Além disso, p_{Et} deve ser real, o que nos leva a:

$$p_{Dt}^2 < \frac{1}{\sin^2 \phi} (M_t^2 - M^2). \quad (3.56)$$

que deve ser respeitada para todos o casos acima. Como $\frac{1}{\sin^2 \phi} \geq 1$, a Ineq. 3.56 é satisfeita quando a Ineq. 3.53 é satisfeita.

3.4 Expressão final para a integral no espaço de fase

Com os limites definidos, a integral no espaço de fase, Eq. 3.52, é integrada para os diferentes valores p_{Dt} nos intervalos de ϕ apropriados:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\hat{s}} \int \frac{d\text{PS}^{(3)}}{dM d\hat{t}} = & \left(\int_0^{\pi/2} d\phi \int_0^{M_t^2 - M^2} dp_{Dt}^2 + \int_{\pi/2}^{\pi} d\phi \int_0^{\frac{M_t^2 - M^2}{\sin^2 \phi}} dp_{Dt}^2 + \int_{\pi/2}^{\pi} d\phi \int_{M_t^2 - M^2}^{\frac{M_t^2 - M^2}{\sin^2 \phi}} dp_{Dt}^2 \right) \\ & \times \frac{2M}{(4\pi)^4 \hat{s}^2} \frac{p_{Et}}{\sqrt{(q^+ q^- + p_{Et}^2 - p_{Dt}^2)^2 - 4p_{Et}^2 q^+ q^-}} \frac{1}{\sqrt{M_t^2 - M^2 - p_{Dt}^2 \sin^2 \phi}}. \end{aligned} \quad (3.57)$$

A Eq. 3.57 se tornou muito complicada para resolver analiticamente, então a faremos numericamente. Para tanto, é recomendado usar a Eq. 3.50, para evitar erros relacionados à aproximações ao obter números muito pequenos para a raiz quadrada, na forma :

$$p_{Et} = \frac{M_t^2 - M^2 - p_{Dt}^2}{p_{Dt} \cos \phi \pm \sqrt{M_t^2 - M^2 - p_{Dt}^2 \sin^2 \phi}}. \quad (3.58)$$

Note que deixamos a integral no ângulo azimutal, dessa maneira podemos escolher valores para os limites inferior e superior, ou seja, podemos impor cortes em ϕ . Na Fig. 3.1, representamos pela o espaço de fase leptônico através do momentum transversal dos léptons D e E formando um ângulo ϕ . A região verde representa os valores de ϕ que serão os limites de integração da Eq. 3.57, caso impusermos um corte. Já a região vermelha não entrará nos cálculos.

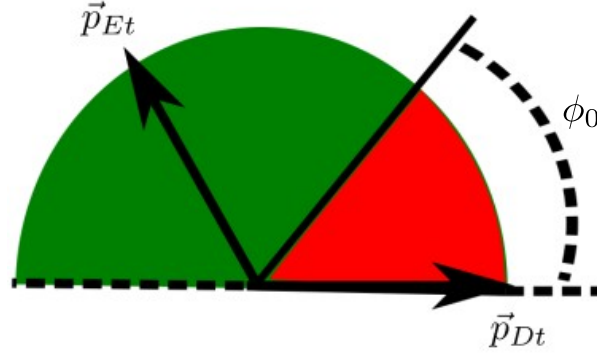


Figura 3.1: Momentum transversal dos léptons D e E separados por um ϕ . Para um dado corte ϕ_0 , a região verde corresponde aos valores dos ângulos $\phi > \phi_0$, isto é, a parte do espaço de fase que é considerada no cálculo. A região vermelha é cortada, portanto, eventos que estão próximo a configuração 'de costas' são as relevantes (medidas).

3.5 Validação da seção de choque partônica

A seção de choque partônica é obtida ao integrarmos o elemento de matriz, para o espalhamento Compton, Eq. 2.15. Por exemplo, para o espalhamento Compton temos:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\sigma}_{\text{Comp}}}{dM d\hat{t}} = & \left(\int_0^{\pi/2} d\phi \int_0^{M_i^2 - M^2} dp_{Dt}^2 + \int_{\pi/2}^{\pi} d\phi \int_0^{\frac{M_i^2 - M^2}{\sin^2 \phi}} dp_{Dt}^2 + \int_{\pi/2}^{\pi} d\phi \int_{M_i^2 - M^2}^{\frac{M_i^2 - M^2}{\sin^2 \phi}} dp_{Dt}^2 \right) \frac{2M}{(4\pi)^4 \hat{s}^2} \\ & \times \frac{p_{Et}}{\sqrt{(q^+ q^- + p_{Et}^2 - p_{Dt}^2)^2 - 4p_{Et}^2 q^+ q^-}} \frac{1}{\sqrt{M_i^2 - M^2 - p_{Dt}^2 \sin^2 \phi}} |\mathcal{M}_{\text{Comp}}|^2 \end{aligned} \quad (3.59)$$

e analogamente para o caso da aniquilação, integrando o elemento de matriz Eq. 2.14. Para tanto, é necessário escrever os produtos dos momenta que aparecem em \mathcal{M} em função das variáveis de Sudakov para o lépton D:

$$p_A \cdot p_D = \frac{\sqrt{\hat{s}} p_D^-}{2} \quad \text{e} \quad p_B \cdot p_D = \frac{\sqrt{\hat{s}} p_D^+}{2}, \quad (3.60)$$

sendo que p_D^+ é dado pela Eq. 3.45, p_D^- pela relação semelhante, Eq. 3.46.

A Eq. 3.59 nos permite escolher um limite superior para a integral no ângulo azimutal entre os momenta transversais dos léptons (ϕ), ou seja, permite impor um corte em ϕ . Enquanto que as Eqs. 2.17, 2.18 e 2.19 foram integradas analiticamente em todo o espaço de fase do dilépton, não permitindo um corte. Para fins de validação, iremos integrar numericamente a Eq. 3.59 em todo o ângulo azimutal ($0 < \phi < \pi$), ou seja, sem um corte, e validar com o resultado integrado analiticamente em todo o espaço de fase do dilépton.

3.5 Validação da seção de choque partônica

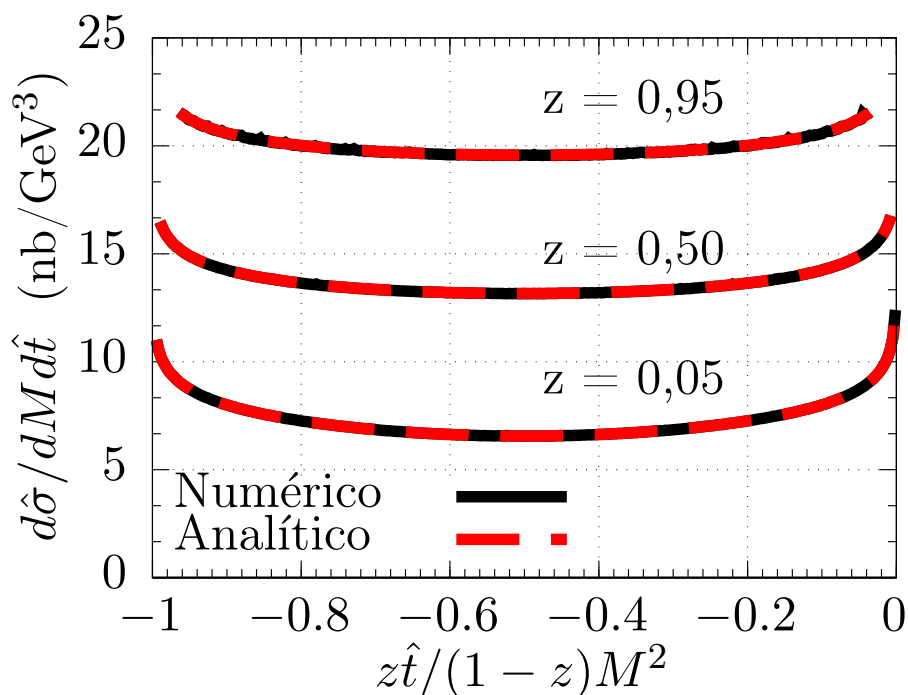


Figura 3.2: Em vermelho temos o cálculo para a seção de choque partônica diferencial em relação a M^2 e a \hat{t} , calculando a Eq. 3.59 numericamente. Em preto, o resultado integrado analiticamente. Ambos para o caso da aniquilação para diferentes valores de z . Os resultados analítico e numérico coincidem validando o cálculo numérico.

Para validar o cálculo numérico, podemos utilizar diferentes valores de z , que por sua vez, permite mensurar quanta energia do centro de momentum \hat{s} é usada na criação do dilepton de massa M através da razão $z = \frac{M^2}{\hat{s}}$. Nas Figs. 3.2 e 3.3 comparamos respectivamente, para os subprocessos de aniquilação e espalhamento Compton, as seções de choque para diferentes valores de z , obtidos com as expressão analítica (vermelho tracejado) e a expressão numérica que permite o corte (preto contínuo). Para o caso de pouca energia ser destinada ao dilépton ($z = 0,05$), metade da energia ($z = 0,5$) e no caso extremo de quase toda energia de centro de momentum é destinada à formação do par de léptons ($z = 0,95$).

Para que os três casos citados de z sejam visualizados no mesmo gráfico, é necessário dividir \hat{t} pelo maior valor de $|\hat{t}_{\max}|$. Como as variáveis de Mandelstam estão relacionada por: $\hat{s} + \hat{t} + \hat{u} = M^2$, no caso em que $\hat{u} = 0$, o valor do módulo de \hat{t} será máximo: $|\hat{t}_{\max}| = \hat{s} - M^2 = \hat{s}(1 - z)$. Sendo assim, para diferentes valores de $\hat{s} = \frac{M^2}{z}$, teremos diferentes valores de $|\hat{t}_{\max}|$.

Através da comparação dos gráficos calculados com a resultado aqui obtido, Eq. 3.59, para os correspondentes valores de \hat{t} , podemos concluir que nosso cálculo numérico feito em todo o ângulo retorna os valores da expressão analítica. O próximo passo é integrar em \hat{t} , e em seguida, fazer a convolução com as distribuições de pártons. Ao fazer esses dois passos teremos a seção

3.5 Validação da seção de choque partônica

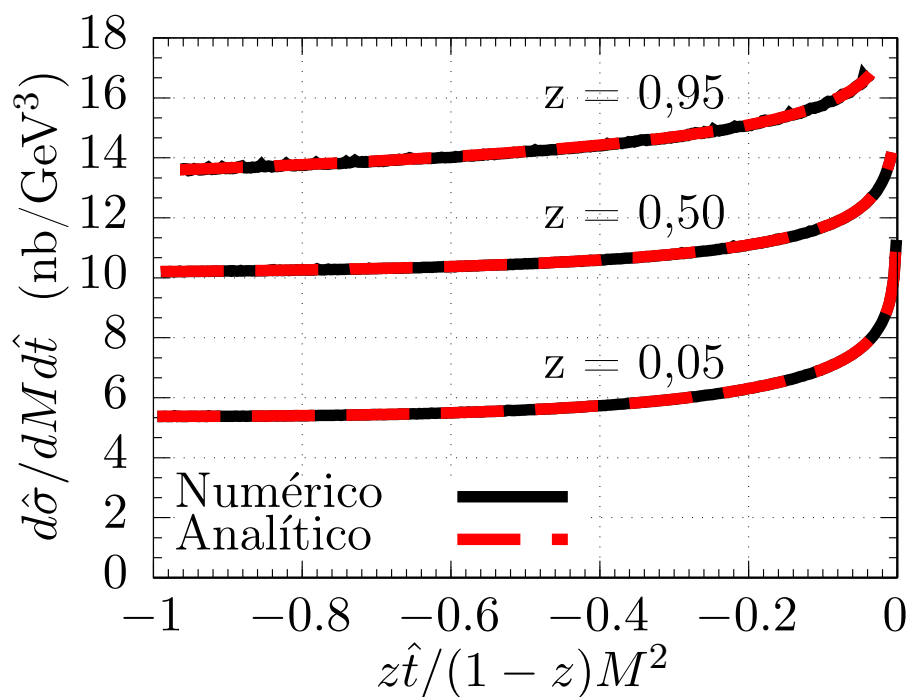


Figura 3.3: Em vermelho temos o cálculo para a seção de choque partônica diferencial em relação a M^2 e a \hat{t} , calculando a Eq. 3.59 numericamente. Em preto, o resultado integrado analiticamente. Ambos para o caso do espalhamento Compton para diferentes valores de z . Os resultados analítico e numérico coincidem validando o cálculo numérico.

de choque partônica que entrará na discussão do Cap. 4.

4 Escala de fatorização ótima e cortes cinemáticos

As contribuições das distribuições de pártons e da seção de choque partônica são distribuídas através de uma escala de fatorização. Porém, a teoria não diz qual escala usar nas distribuições, de fato, ela pode ser qualquer. Revisaremos neste capítulo a justificativa de e a obtenção de uma escala de fatorização ótima em ordem dominante, μ_0 , a pequeno x , que apresenta menor incerteza nessa escolha. A escala de renormalização, que dá a ordem de grandeza do processo é mantida fixa com o valor característico do processo Drell–Yan, ou seja, igual a massa de dílépton. Podemos ainda diminuir a escala de fatorização ótima através da restrição do espaço de fase dos momenta, possibilitando a sondagem das distribuições em escalas de fatorização menores.

4.1 Fatorização e escolha da escala

A seção de choque hadrônica é obtida através da convolução do elemento de matriz com as distribuições de pártons, como esquematizado na Eq. 4.1. Essa maneira é chamada de fatorização, que atribui diferentes pesos para o elemento de matriz invariante $|\mathcal{M}(\mu_F)|^2$ e à distribuição, $\text{PDF}(\mu_F)$, através de uma escala de fatorização μ_F :

$$\sigma = \int dx_A dx_B \text{PDF}(x_A, \mu_F) \otimes |\mathcal{M}(\mu_F)|^2 \otimes \text{PDF}(x_B, \mu_F) \quad (4.1)$$

sendo que cada PDF representa um dos prótons considerados na colisão. O elemento de matriz invariante é calculado a partir da aplicação das regras de Feynman para o diagrama e também em ordem de perturbação desejada.

As distribuições dependem fortemente da escala de fatorização devido a termos $\alpha_s \ln \mu^2 \ln(1/x)$ (e potências) que se tornam grandes para pequenos valores de x . Pode-se calcular uma escala com menor incerteza, como foi feito, por exemplo para a produção de $c\bar{c}$ e $b\bar{b}$ [30] e também para J/ψ [31]. Nessas referências, foram calculadas escalas que atribuem contribuições do

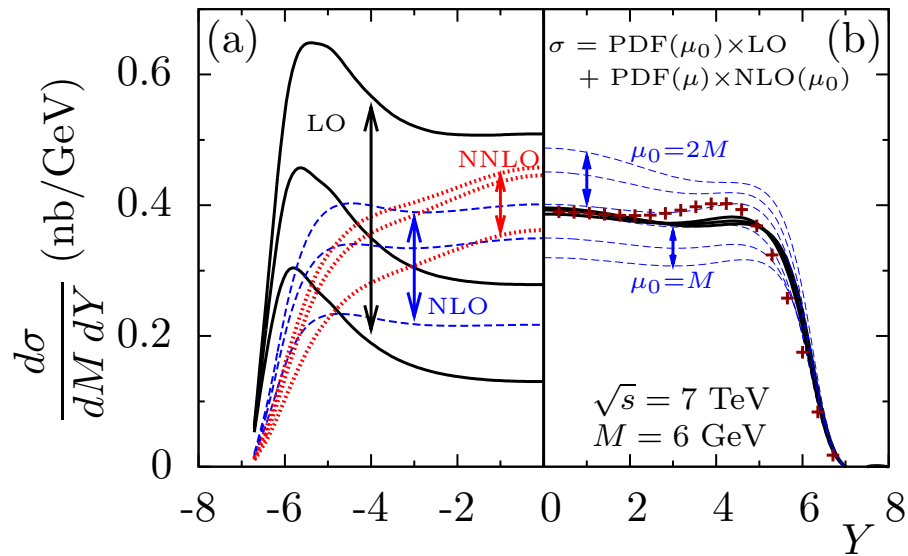


Figura 4.1: (a) Sensitividade da produção Drell–Yan de $\mu^+\mu^-$ no LHC a energia de 7 TeV, em função da rapidez Y , na escolha da escala de fatorização $\mu_F = M/2, M, 2M$, em LO, NLO, NNLO (b) As linhas contínuas são os resultados para $\mu_0 = M/2, M, 2M$. As linhas tracejadas mostram que a sobreposição das curvas desaparece para outras escolhas de $\mu_0 \neq 1,45M$. As cruzes pequenas são para NNLO. Figura retirada de [32].

elemento de matriz em ordens mais altas às distribuições de pártons em ordem dominante.

Como mostrada na Ref. [32], o cálculo da seção de choque pode ser feito como uma série, sendo que cada termo é dado em certa escala de fatorização μ_F . Mostrou-se que a incerteza na escolha da escala é gigante em LO, grande em NLO e ainda apreciável em NNLO, como mostra a Fig. 4.1(a), no lado esquerdo. Para que as previsões sejam estáveis frente a variação da escala, teríamos de calcular muitas ordens de perturbação. Uma alternativa ao cálculo de muitas ordens é mostrada na Fig. 4.1(b) no lado direito, através de uma escala ótima, μ_0 , podemos obter escolher uma escala na PDF com menor incerteza, comprovada pela sobreposição das curvas ao variar μ_F .

Como visto na Fig. 4.1, a dependência com a escala de fatorização diminui conforme avançamos na série perturbativa. Se esta série somasse todos os termos, o resultado passaria a ser independente da escala de fatorização. Porém, a dificuldade da análise aumenta conforme somamos mais termos, por isso, usualmente truncamos a série em determinado termo. A seguir, revisaremos a origem da dependência na escala e veremos como fazer uma análise em ordem dominante com características de ordem seguinte à dominante através do cálculo de uma escala de fatorização ótima.

4.2 Origem da dependência na escala

Essencialmente, a ideia consiste em escrever a seção de choque hadrônica em ordem dominante (σ^{LO}), a partir da seção de choque partônica, dada pelo coeficiente, C^{LO} , em convolução com as distribuições (uma para cada hádron) em uma dada escala de fatorização μ_F :

$$\sigma^{\text{LO}}(\mu_F) = \text{PDF}(\mu_F) \otimes C^{\text{LO}} \otimes \text{PDF}(\mu_F), \quad (4.2)$$

onde o coeficiente pode ser chamado de elemento de matriz partônico. Para o caso de analisarmos uma escala de fatorização diferente, utilizamos as equações DGLAP, para evoluir as distribuições de pártons de uma escala m até uma escala μ_F . A Eq. 4.2, desprezando-se os termos de ordem α_S^2 e superiores, pode ser reescrita como:

$$\sigma^{\text{LO}}(\mu_F) = \text{PDF}(m) \otimes \left(C^{\text{LO}} + \frac{\alpha_S}{2\pi} \ln\left(\frac{\mu_F^2}{m^2}\right) (P_{\text{left}} C^{\text{LO}} + C^{\text{LO}} P_{\text{right}}) \right) \otimes \text{PDF}(m), \quad (4.3)$$

onde as funções de desdobramento¹, $P_{\text{left}} = P_{\bar{q}q} + P_{\bar{q}g}$ e $P_{\text{right}} = P_{qq} + P_{qg}$, atuam nas PDFs da esquerda e direita, respectivamente. Notamos um termo logarítmico na razão entre as escalas em ordem α_S quando as PDFs são evoluídas. Este termo será ainda mais significativo pois será multiplicado por um fator $\ln(1/x)$ vindo da convolução, que se torna grande para pequeno x .

Agora, vamos mostrar a seção de choque hadrônica em ordem seguinte à dominante. Esta seção de choque é divergente e esta divergência (infravermelha) é regularizada por um parâmetro m . As distribuições são definidas em uma escala de fatorização $\mu_F = m$ justamente pela introdução desse regularizador. Assim, até a ordem seguinte à dominante, a seção de choque será dada como a soma do coeficiente, em ordem dominante, C^{LO} com o coeficiente em ordem seguinte à dominante, C^{NLO} , ambos em convolução com as distribuições na escala de fatorização m :

$$\sigma^{\text{NLO}}(m) = \text{PDF}(m) \otimes (C^{\text{LO}} + \alpha_S C^{\text{NLO}}(m)) \otimes \text{PDF}(m). \quad (4.4)$$

Esta é essencialmente a origem da dependência da escala.

Para calcularmos uma seção de choque em ordem seguinte à dominante numa escala μ_F , temos que atribuir corretamente a contribuição em α_S advinda do termo $\text{PDF}(\mu_F) \otimes C^{\text{LO}} \otimes \text{PDF}(\mu_F)$, que obtemos da Eq. 4.3. Fazendo essa substituição na Eq. 4.4, teremos um coeficiente remanescente $C_{\text{rem}}^{\text{NLO}}$ que passa a depender da escala μ_F :

$$\sigma^{\text{NLO}}(\mu_F) = \text{PDF}(\mu_F) \otimes (C^{\text{LO}} + \alpha_S C_{\text{rem}}^{\text{NLO}}(\mu_F)) \otimes \text{PDF}(\mu_F) \quad (4.5)$$

¹As funções de desdobramento são dadas pelas Eqs. 1.3, 1.4, 1.5 e 1.6.

com

$$C_{\text{rem}}^{\text{NLO}}(\mu_F) = C^{\text{NLO}}(m) - \frac{\alpha_s}{2\pi} \ln\left(\frac{\mu_F^2}{m^2}\right) (P_{\text{left}} C^{\text{LO}} + C^{\text{LO}} P_{\text{right}}). \quad (4.6)$$

O coeficiente remanescente $C_{\text{rem}}^{\text{NLO}}(\mu_F)$ não depende do regularizador m mas apenas da escala de fatorização μ_F . Nas distribuições que multiplicam $C_{\text{rem}}^{\text{NLO}}(\mu_F)$, trocamos a dependência em m por em μ_F já que esta troca é um efeito de ordem α_s^2 .

Com esta fatorização, parte das contribuições proporcionais à α_s estão nas distribuições e outra parte no coeficiente remanescente. A fatorização pode ser aplicada em α_s^2 com um coeficiente remanescente $C_{\text{rem}}^{\text{NNLO}}$, que terá apenas dependência em μ_F e também em mais altas ordens sem nunca depender do regularizador m .

4.3 Cálculo da escala ótima

Agora que escrevemos a dependência na escala de fatorização, nesta seção iremos calcular a escala ótima. Para isso, iniciaremos definindo a variável $z = M^2/\hat{s}$ que relaciona diretamente estado final, através da massa de dilépton ao quadrado, M^2 , e estado inicial, através da energia de centro de momentum partônica, \hat{s} , que nada mais é que razão entre essas duas grandezas.

Para o processo Drell–Yan, o resultado exato em ordem seguinte à dominante, ou seja, o cálculo da seção de choque partônica através do elemento de matriz invariante do subprocesso $gq \rightarrow q\gamma^*$, é dado por:

$$\frac{d\hat{\sigma}(gq \rightarrow q\gamma^*)}{dM^2 d\hat{t}} = \frac{1}{9} \frac{\alpha^2 \alpha_s}{M^2 \hat{s}^2} \left[-\frac{\hat{s}}{\hat{t}} - \frac{\hat{t}}{\hat{s}} - \frac{2M^2 u}{\hat{s}\hat{t}} \right] \quad (4.7)$$

$$= \frac{\alpha^2 \alpha_s z}{9M^4} \frac{1}{\hat{t}} \left[((1-z)^2 + z^2) + z^2 \frac{\hat{t}^2}{M^4} - 2z^2 \frac{\hat{t}}{M^2} \right] \quad (4.8)$$

sendo que as variáveis de Mandelstam foram definidas no Cap. 2. Em particular, utilizamos o subprocesso com o glúon no estado inicial dado que este domina em pequeno x .

Ao evoluirmos as distribuições da seção de choque hadrônica do DY em ordem dominante com as equações DGLAP (também em ordem dominante), podemos utilizar somente a função de desdobramento que se assemelha à Eq. 4.8, ou seja, aquela referente ao subprocesso: $gq \rightarrow q\gamma^*$. Assim fazendo, temos uma expressão aproximada em ordem seguinte à dominante do DY:

$$\frac{d\sigma(gq \rightarrow q\gamma^*)}{dM^2 d\hat{t}} = \frac{\alpha^2 \alpha_s z}{9M^4} \frac{1}{\hat{t}} [z^2 + (1-z)^2]. \quad (4.9)$$

Precisamos integrar na variável \hat{t} pois usualmente os resultados experimentais medem momentum transversal e assim, \hat{t} não é determinado. Como \hat{t} é um número negativo, ele possui um

limite superior t_0 igual a zero (caso em que o momentum transversal é zero). Para definirmos o limite inferior, \hat{t}_1 , utilizamos a Eq. 2.10, para um dado valor constante de \hat{s} :

$$\hat{t} = M^2 - \hat{s} - \hat{u}, \quad (4.10)$$

sabemos que \hat{u} é negativo então o lado direito da Eq. 4.10 resultará num número maior *em módulo* se \hat{u} for zero, definindo o limite inferior para \hat{t} como sendo:

$$\hat{t}_1 = M^2 - \hat{s} \quad (4.11)$$

Igualando as Eqs. 4.8 e 4.9 e integrando a Eq. 4.8 de $|\hat{t}_0|$ muito pequeno até $|\hat{t}_1|$, e a expressão aproximada, Eq.4.9, de $|\hat{t}_0|$ a μ_0^2 ,

$$z [z^2 + (1-z)^2] \ln \frac{\mu_0^2}{|\hat{t}_0|} = z \left[((1-z)^2 + z^2) \left(\ln \frac{M^2}{|\hat{t}_0|} + \ln \frac{1-z}{z} \right) + \frac{1+3z}{2}(1-z) \right], \quad (4.12)$$

sendo que a divergência infravermelha ($\hat{t}_0 \rightarrow 0$) se cancela. Após integrarmos sobre o fluxo de partículas, dz/z , temos a escala de fatorização ótima:

$$\ln \frac{\mu_0}{M} = \frac{3}{8}, \quad \text{que é } \mu_0 = 1.45M. \quad (4.13)$$

Este procedimento dá então a definição da escala ótima μ_0 . A escala μ_0 é ótima pois atribui a contribuição mais importante para pequeno x em ordem seguinte à dominante já em ordem dominante.

Agora, utilizaremos a escala ótima na seção de choque hadrônica dada pelas soma das seções de choque hadrônicas em LO e em NLO. A escala ótima, μ_0 , é utilizada nas PDFs da LO e na seção de choque partônica da NLO. Retornando à Eq. 4.5, com uma PDF omitida, para mostrar o uso da escala ótima:

$$\sigma^{\text{NLO}} = \text{PDF}(\mu_0) \otimes C^{\text{LO}} \otimes \text{PDF}(\mu_0) + \text{PDF}(\mu_F) \otimes C_{\text{rem}}^{\text{NLO}}(\mu_0) \otimes \text{PDF}(\mu_F) \quad (4.14)$$

Este método poderia ser feito em NNLO, redistribuindo as contribuições em NLO e LO através de uma outra escala de fatorização digamos, μ_1 , fazendo com que a seção de choque partônica fosse uma função das duas escalas ótimas, $C^{\text{NNLO}}(\mu_0, \mu_1)$, e assim por diante para outras ordens da série. Ao truncarmos a série, a incerteza na escolha da escala de fatorização estará no termo posterior ao qual a série foi truncada.

Não faremos esse cálculo, mas argumentamos, como já discutido na Ref. [32], que escolher $\mu_1 = \mu_0$ é uma boa escolha, já que o diagrama dominante a pequeno x em NNLO é dado com dois glúons no estado inicial e deve ter sua contribuição considerada pelas correções de ambas

as pernas de quark e antiquark do diagrama em LO com as DGLAP em LO (não em NLO).

Note que a escala ótima obtida é maior que a massa de dilépton M . Desejamos sondar as PDFs em escalas de energias menores, mais próximas ou inferiores a M , pois essas medidas não são feitas diretamente nos experimentos. Portanto, queremos reduzir a escala ótima, o que pode ser feito através de cortes cinemáticos no espaço de fase.

4.4 Fator de Sudakov

Foi mostrado na Ref. [33] que pode-se reduzir a escala ótima, como mostra a Fig. 4.2, impondo um corte k_0 no momentum transversal do dilépton do processo Drell–Yan e, assim, podemos sondar as distribuições em escalas de energia menores. Ao impormos um corte, devemos incluir o fator de forma de Sudakov, que representa a probabilidade de um párton *não* emitir glúons adicionais durante a evolução das PDFs com as equações DGLAP.

Em outras palavras, devemos considerar possíveis emissões de pártons da escala ótima (μ_0) até a escala M , pois é a escala do processo inclusivo quando não se sabe o momentum transversal. Por exemplo, a configuração na qual os léptons estão exatamente "de costas" ($\phi = \pi$), quando os léptons não possuem momentum transversal, pode ser mudada para outra configuração como $\phi = \pi/2$ se é dado ao dilépton momentum transversal apropriado. O fator de Sudakov para o quark emitindo um glúon na evolução das distribuições com as equações DGLAP será [33]:

$$T_q = \exp(-\alpha_s S_q(\mu_0, \sqrt{\hat{s}})) \quad (4.15)$$

com

$$S_q = \frac{C_F}{\pi} \Re \left(\ln(\sqrt{\hat{s}}/\mu_0) + i\pi/2 \right)^2 \quad (4.16)$$

sendo que $C_F = 4/3$ e à ordem dominante, $\sqrt{\hat{s}} = M$.

Pode-se argumentar que não é claro como os fatores de Sudakov poderiam ser usados com um corte no ângulo, visto que eles são tradicionalmente usados para considerar a não emissão num intervalo de momentum transversal. Primeiramente, os fatores de Sudakov dependem da virtualidade de uma única partícula (como pode no artigo original [34]), não no momentum transversal. Isso significa que podemos usá-los aqui, fornecido que usamos como seus argumentos a escala inclusiva M ou \hat{s} , onde todos os possíveis diléptons são levados em conta, e a escala ótima μ_0 com nosso corte. Isso é bom em precisão logarítmica dupla e correções a isto aparecerão apenas em NNLO. Como mostrado na Ref. [32], a NNLO é bastante pequena após a escolha da escala ótima e isso justifica nossa aproximação. Se fossemos ter completa certeza

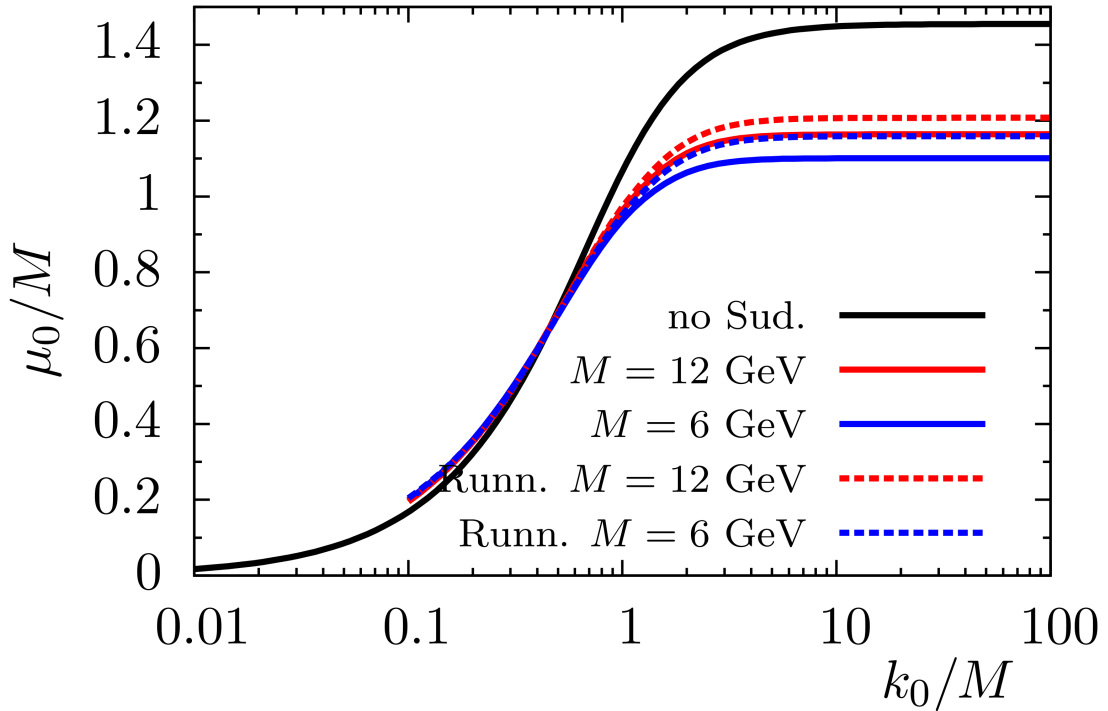


Figura 4.2: Dependência da escala ótima μ_0 com a escolha do corte no momentum transversal k_t do processo Drell–Yan produzindo o par de múons com massa invariante M . As curvas com $k_0/M > 0.1$ mostram como incluir o fator de Sudakov, com parâmetro de acoplamento variando ou não com a escala, muda a dependência da escala ótima μ_0 com o corte k_0 [33].

de que o corte não é prejudicado pela evolução da PDF, teríamos de calcular esse processo em todas as ordens ou fazer uma evolução de Monte Carlo rastreando todas as variáveis dos pártos intermediários, mas não é aproximação.

A Fig. 4.2 apresenta o comportamento da escala ótima frente ao corte no momentum transversal, k_0 . Foram utilizados os valores de massa de dilépton de $M = 6$ e $M = 12$ GeV, incluindo o fator de Sudakov com o parâmetro de acoplamento variando ou não com a escala. A redução da escala ótima, $\mu_0 = 1,45M$, fica evidenciado se tomarmos alguns exemplos: no caso de $k_0 = M$ a escala ótima será em torno de $\mu_0 \approx M$, já para $k_0 = M/4$ teremos um valor bem abaixo, em torno de $\mu_0 \approx 0,42M$. Notamos ainda que as curvas ficam muito semelhantes no intervalo de $0,2 < k_0/M < 1$, ao passo que fica evidente a diferença de resultado da não inclusão do fator de Sudakov para $k_0/M > 1$.

4.5 Corte no ângulo azimutal

De maneira similar, queremos restringir o espaço de fase, através de um corte no ângulo azimutal do dilépton, que é possível através da Eq. 3.57. Assim, buscamos reduzir a escala

de fatorização ótima. Conseqüentemente, sondar as distribuições numa região de escala mais próxima dos valores da massa de dilépton.

Na Sec. 3.2, calculamos analiticamente o espaço de fase em relação a massa de dilépton ao quadrado, M^2 , e a transferência de momentum, \hat{t} , ou seja, obtivemos a Eq. 3.57, restando as integrais do momentum transversal ao quadrado e o ângulo azimutal a serem feitas numericamente, assim, poderemos impor facilmente um corte no ângulo. Antes de fazê-lo, devemos integrar em \hat{t} :

$$\int_{M^2}^{\infty} d\hat{s} \left(\frac{1}{2\hat{s}} \int_{\hat{t}_1}^{\hat{t}_0} d\hat{t} \frac{d\text{PS}^{(3)}}{dM^2 d\hat{t}} \right) \quad (4.17)$$

A princípio, não há um limite superior para \hat{s} . Para elucidar isso vamos lembrar que o momentum do párton A é uma fração do momentum do próton A: $p_A = x_A P_A$, da mesma forma o párton B: $p_B = x_B P_B$, carrega certa fração do próton B. Com os momenta dos prótons podemos calcular a energia de centro de momentum da colisão:

$$s = (P_A + P_B)^2 = 2P_A \cdot P_B \quad (4.18)$$

aqui desprezaram-se as massas dos prótons A e B. De maneira semelhante para os pártons, temos:

$$\hat{s} = (p_A + p_B)^2 = 2p_A \cdot p_B = 2x_A x_B P_A P_B = x_A x_B s \quad (4.19)$$

Assim, notamos que a energia de centro de momentum partônica, \hat{s} , é dado pela energia de centro de momentum dos prótons a menos de um fator, $x_A x_B$, que é no máximo 1. Portanto, \hat{s} poderá ir a infinito ($z = 0$) no limite de altas energias $s \rightarrow \infty$.

Estabelecidos os limites para a energia de centro de momentum, \hat{s} , e a transferência de momentum \hat{t} , podemos fazer a integral, numericamente, do espaço de fase, Eq. 3.57 de maneira que o resultado será em função da massa de dilépton ao quadrado, que é um observável:

$$\begin{aligned} & \int_{M^2}^{\infty} d\hat{s} \left(\frac{1}{2\hat{s}} \int_{\hat{t}_1}^{\hat{t}_0} d\hat{t} \frac{d\text{PS}^{(3)}}{dM^2 d\hat{t}} \right) = \\ &= \frac{1}{2^6 (2\pi)^4 \cosh^2 y} \int_{M^2}^{\infty} d\hat{s} \int_{M^2 - \hat{s}}^{\hat{t}_0} d\hat{t} \int_0^\pi d\varphi_{DE} \int dP_{Dt}^2 \frac{M^2 + \hat{s}}{\hat{s}^3 |E_E p_{Dz} - E_D p_{Ez}|} \frac{p_{Et}}{|p_{Et} + p_{Dt} \cos \varphi_{DE}|} \end{aligned} \quad (4.20)$$

sendo que as variáveis dos léptons D e E dependem das variáveis de Sudakov, como mostrado na Sec. 3.2.

Calculamos numericamente a Eq. 4.20 até o limite superior t_0 . A integração nesses limites dará o espaço de fase total. Ao integrarmos o elemento de matriz neste espaço, teremos o

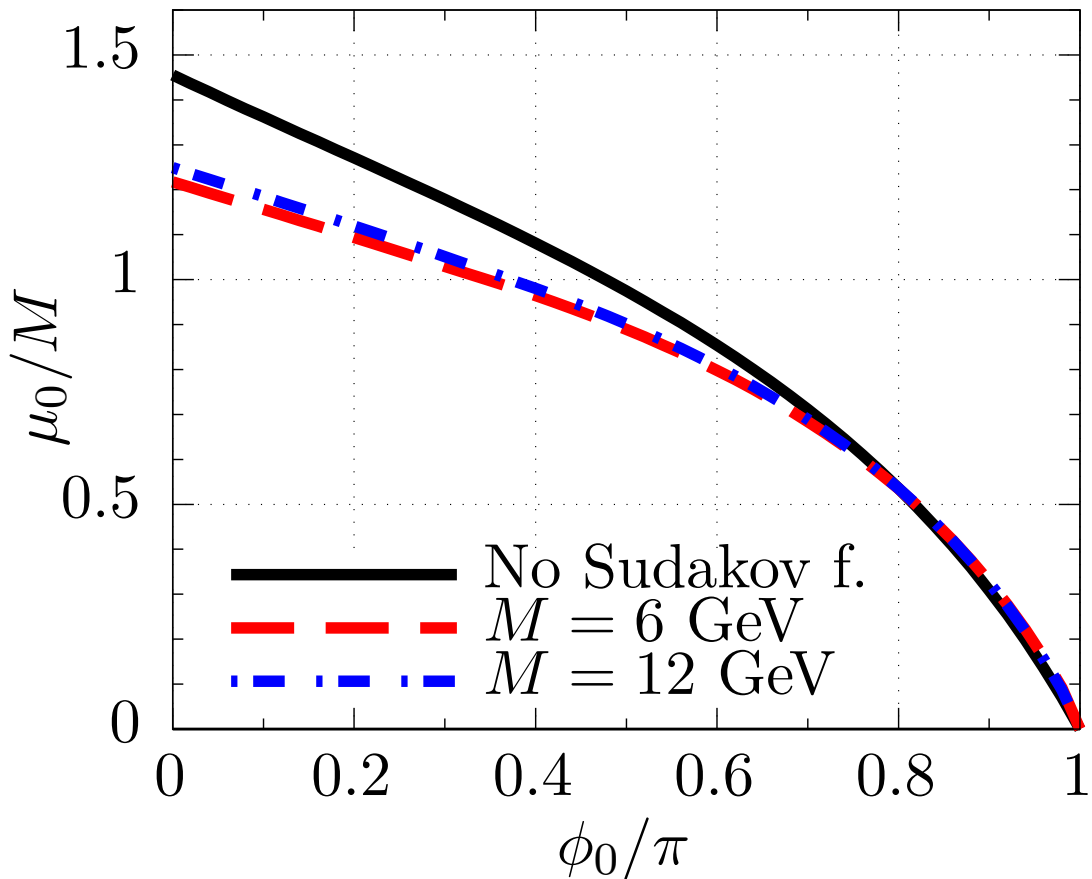


Figura 4.3: Redução da escala ótima μ_0 com a escolha do corte no ângulo azimutal do dilépton no processo Drell–Yan, considerando a simetria azimutal do ângulo. Linha cheia referente à não inclusão dos fatores de forma de Sudakov e, linhas tracejadas com a inclusão dos fatores, usando diferentes valores de massa de dilépton.

resultado exato da seção de choque em NLO para o DY. Um resultado aproximado é obtido ao integrarmos analiticamente a Eq. 4.9 até uma escala μ_0^2 que é dada pela seção de choque hadrônica cujas PDFs foram evoluídas com a DGLAP. Igualando esses resultados, obtemos a escala ótima, que será reduzida através de um corte no ângulo azimutal.

O ângulo azimutal utilizado, φ_{DE} , é formado entre os momenta transversais dos léptons D e E. O corte será tal que os eventos com $0 \leq \varphi_{DE} < \varphi_0$ serão excluídos, enquanto que os eventos com $\varphi_0 \leq \varphi_{DE} \leq \pi$ serão os que contribuirão para a seção de choque com o corte. Por exemplo, ao impormos um corte de $\varphi_0 = \pi/2$, os possíveis valores considerados para a direção do momentum de E serão reduzidos pois excluiremos todos casos em que $\varphi_{DE} < \pi/2$, ou seja, valores nos quais os léptons estão, grosso modo, alinhados. Sobrarão os valores que tornam o lépton mais “de costas”(back-to-back.) com relação ao antilépton.

Na Fig. 4.3, mostramos um resultado original desta tese: a variação da escala ótima $\mu_0 =$

4.5 Corte no ângulo azimutal

1,45M para nenhum corte aplicado, ou seja, $\phi_0 = 0$, até o corte mais drástico, $\phi_0 = \pi$, quando todo o espaço de fase é excluído e conseqüentemente $\mu_0 = 0$. A partir da Fig. 4.3, vemos que na região iniciando aproximadamente em $\phi_0 = 0,7\pi$, os efeitos de Sudakov não são tão importantes. Essa é a região mais importante para estudar escalas menores, já que $\mu_0/M = 0,7$ neste caso. Então, investigaremos predições para a seção de choque do processo Drell–Yan desconsiderando novas incertezas teóricas devido aos fatores de forma de Sudakov. Sendo assim, trataremos no próximo capítulo os resultados obtidos ao impormos um corte de $\phi_0 = 0,85\pi$ que corresponde à escala ótima de $\mu_0/M = 0,44$ que equivale à aproximadamente um terço do valor da escala ótima $\mu_0/M = 1,45$ sem nenhum corte.

Corte no ângulo azimutal e em momentum transversal

Além do corte em momentum transversal utilizado na Ref. [33], e do corte em ângulo azimutal realizado nesta tese, podemos investigar o caso de aplicarmos simultaneamente os dois cortes, reduzindo mais rapidamente o espaço de fase. Na Fig. 4.4, apresentamos o comportamento da escala ótima para os dois cortes aplicados juntamente. Como esperado, conforme impomos um corte no momentum transversal mais restritivo, menor será a escala de fatorização ótima, ou seja, as curvas são deslocadas verticalmente quanto menor o valor do corte.

Na Fig. 4.4, notamos ainda que se o corte em momentum transversal for muito restritivo ($k_0 = M/4, M/8$), o corte no ângulo azimutal deixa de ser efetivo, ou seja, não há mais diminuição na escala ótima. Analogamente, se o corte no ângulo azimutal for muito restritivo ($\phi_0 > 0,9\pi$), o corte em momentum transversal não reduz grandemente a escala de fatorização ótima. Essas situações ocorrem porque há um região do espaço de fase que é comum aos dois cortes. Por exemplo, ao analisarmos a curva de $k_0 = M/4$, conforme aplicamos um corte no ângulo azimutal, a curva deixa de decrescer (reduzir a escala ótima) até aproximadamente $\phi_0 < 0,7\pi$, pois a região excluída pelo corte em ângulo já foi excluída pelo corte em momentum transversal.

Poderíamos escolher dois cortes não muito restritivos, por exemplo, manter o valor do corte no ângulo escolhido anteriormente ($\phi_0 = 0,85\pi$) e um corte em momentum transversal não tão restritivo como $k_0 = M/2$, mas nesta configuração a escala ótima é cerca de $\mu_0 = 0,42M$, enquanto que para $\phi_0 = 0,85\pi$ e sem corte no momentum transversal $\mu_0 = 0,44M$. Concluindo, visto que dois cortes cinemáticos podem causar dificuldades experimentais, pode ser mais vantajoso impor apenas um corte mais restritivo para reduzir o espaço de fase.

4.5 Corte no ângulo azimutal

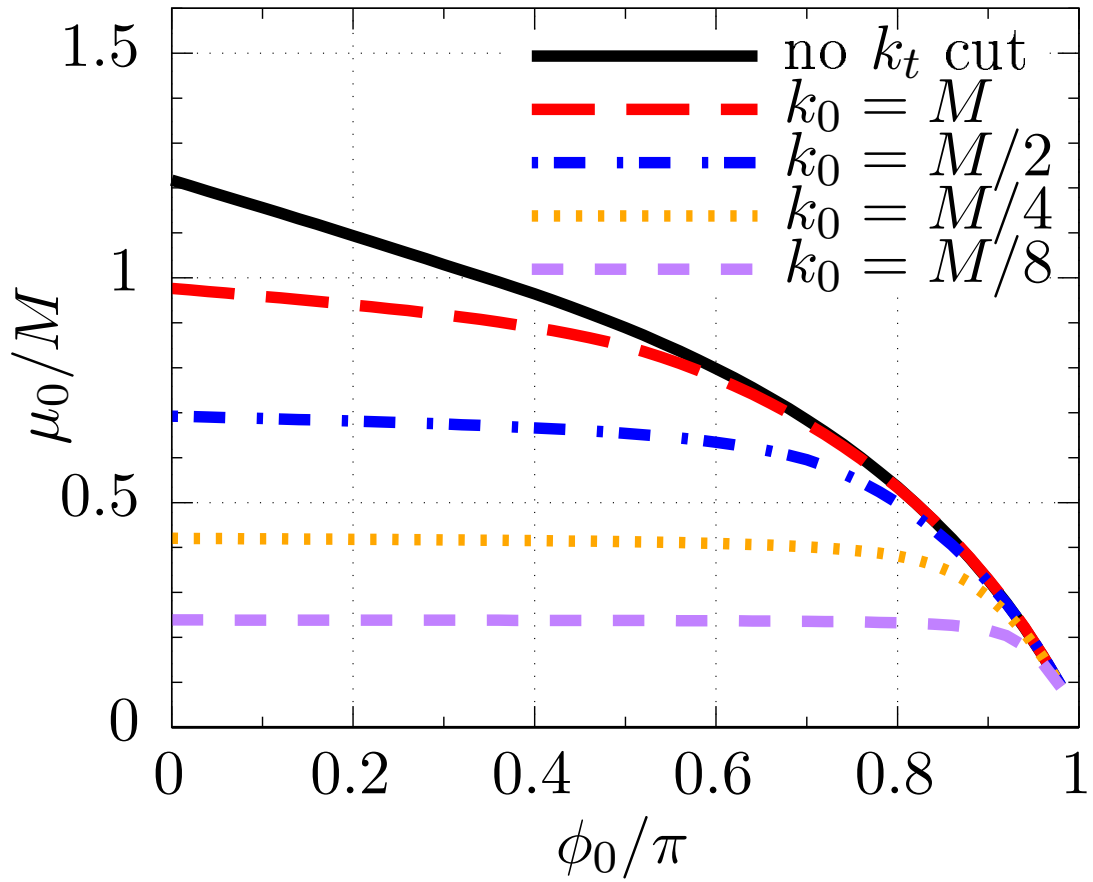


Figura 4.4: Redução da escala ótima μ_0 com a escolha somente do corte no ângulo azimutal do dilépton no processo Drell–Yan (linha contínua) e aplicando simultaneamente quatro diferentes casos de corte em momentum transversal: $k_0 = M, M/2, M/4, M/8$ (linhas descontínuas). Todos os casos utilizando $M = 6$ GeV e aplicando os fatores de Sudakov.

5 *Predições teóricas com a escala ótima e o corte no ângulo azimutal*

Neste capítulo faremos predições teóricas para a seção de choque hadrônica diferencial em massa de dilépton e rapidez longitudinal, variáveis medidas usualmente nos experimentos. Mostraremos como o corte em ângulo azimutal entre os momenta transversais do dilépton afeta a seção de choque, bem como a redução da incerteza na escolha da escala de fatorização. Para tanto, utilizaremos os elementos de matriz obtidos no Cap. 2 e o espaço de fase calculado no Cap. 3 que possibilita impor um corte no ângulo azimutal e assim reduzir a escala ótima apresentada no Cap. 4.

5.1 Seção de choque hadrônica

Aqui, mostraremos como os assuntos discutidos nos capítulos anteriores são utilizados na predições teóricas utilizando a ordem dominante e a ordem seguinte à dominante do processo Drell–Yan. Em ordem dominante, os léptons são produzidos em ângulo azimutal relativo de π , pois numa aproximação colinear os pártons não possuem momentum transversal e não há geração de partícula além do dilépton, então os cortes não afetam a ordem dominante. Em ordem seguinte à dominante, há a geração de uma partícula além do dilépton, fazendo com que o último tenha algum momentum transversal, e assim, uma deflexão. Esta fará com que os léptons não sejam produzidos com ângulo azimutal entre eles de π . Por isso, os cálculos a seguir são referentes a um corte no ângulo azimutal entre os momenta transversais do dilépton no espaço de fase da ordem seguinte à dominante.

A seção de choque hadrônica é assim denominada devido aos hádrons no estado inicial que possuem diferentes pártons distribuídos com uma fração de momentum sua. Sendo assim, a seção de choque hadrônica é obtida ao integrarmos nas frações de momentum, a seção de choque partônica em convolução com a distribuição de pártons. Por exemplo, para o subprocesso de espalhamento Compton, integraremos a seção de choque partônica nas frações de momentum

dos pártons em convolução com as distribuições do glúon e do quark. Analogamente, obtemos seção de choque hadrônica para o subprocesso de aniquilação, utilizando as distribuições de pártons do quark e do antiquark.

Nas medições experimentais, é muito utilizada a rapidez longitudinal definida através das variáveis de Sudakov do fóton: $Y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{q^+}{q^-} \right)$. Calculando-a em função das frações de momentum e das variáveis de Mandelstam, temos:

$$Y'(x_A, x_B, \hat{t}) = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{x_A(\hat{s} + \hat{t})}{x_B(M^2 - \hat{t})} \right]. \quad (5.1)$$

Utilizamos esta definição para obter a seção de choque hadrônica diferencial em rapidez, para isso, utilizamos a identidade: $\int dY \delta(Y - Y') = 1$.

Para o caso do subprocesso de espalhamento Compton, teremos uma seção de choque hadrônica diferencial em massa de dilépton e em rapidez longitudinal dada por:

$$\frac{d\sigma_{\text{Comp}}}{dM dY} = \int dx_A dx_B d\hat{t} \delta(Y - Y') \frac{d\hat{\sigma}_{\text{Comp}}}{dM d\hat{t}} \otimes [g(x_A)q(x_B)], \quad (5.2)$$

sendo que a seção de choque partônica é dada pela Eq. 3.59 e a distribuição de pártons deve corresponder aos pártons do estado inicial do subprocesso, neste caso, a do glúon representado por $g(x_A)$ e a do quark por $q(x_B)$. Analogamente, teremos a seção de choque hadrônica para a aniquilação ao utilizar os correspondentes elemento de matriz (Eq. 2.14) na Eq. 3.59 e as distribuições cujos pártons iniciais sejam o quark e o antiquark.

Integramos na variável \hat{t} com a delta, para isso utilizaremos novamente a propriedade da delta, Eq. 3.6, ou seja, derivando a Eq. 5.1 em relação a \hat{t} , teremos:

$$\frac{dY'}{d\hat{t}} = \frac{M^2 + \hat{s}}{2(\hat{s} + \hat{t})(M^2 - \hat{t})} \quad (5.3)$$

A variável \hat{t} fica definida pelos valores de rapidez Y e frações de momentum x_A e x_B :

$$Y' = Y \quad \rightarrow \quad \hat{t} = \frac{M^2 x_B e^Y - \hat{s} x_A e^{-Y}}{x_B e^Y + x_A e^{-Y}}. \quad (5.4)$$

Como as distribuições de pártons são bibliotecas computacionais, as integrações nas frações de

momentum serão numéricas:

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma_{\text{Comp}}}{dM dY} &= \int_{\frac{Me^Y}{\sqrt{s}}}^1 dx_A \int_{\frac{Me^{-Y}}{\sqrt{s}}}^1 dx_B \frac{2(M^2 + \hat{s})x_A x_B}{(x_A e^{-Y} + x_B e^Y)^2} \\
&\times \left(\int_0^{\pi/2} d\phi \int_0^{M_t^2 - M^2} dp_{Dt}^2 + \int_{\pi/2}^{\pi} d\phi \int_0^{\frac{M_t^2 - M^2}{\sin^2 \phi}} dp_{Dt}^2 + \int_{\pi/2}^{\pi} d\phi \int_{M_t^2 - M^2}^{\frac{M_t^2 - M^2}{\sin^2 \phi}} dp_{Dt}^2 \right) \frac{2M}{(4\pi)^4 \hat{s}^2} \\
&\times \frac{PE_t}{\sqrt{(q^+ q^- + p_{Et}^2 - p_{Dt}^2)^2 - 4p_{Et}^2 q^+ q^-}} \frac{1}{\sqrt{M_t^2 - M^2 - p_{Dt}^2 \sin^2 \phi}} |\mathcal{M}_{\text{Comp}}(\hat{t})|^2 \otimes [g(x_A)q(x_B)],
\end{aligned} \tag{5.5}$$

A seção de choque processo Drell–Yan será dada pela soma da seção de choque hadrônica para o subprocesso de espalhamento Compton (Eq. 5.5) com a análoga do subprocesso de aniquilação.

Para encontrar limites inferiores para as frações de momentum, utilizamos a Eq. 5.4 investigando os possíveis valores de \hat{t} , usando a energia de centro de momentum, \hat{s} , obtida na Eq. 4.19. O limite inferior de x_A é obtido ao impor que $\hat{t} < 0$, na Eq. 5.4:

$$x_A > \frac{Me^Y}{\sqrt{s}} \tag{5.6}$$

Como \hat{t} é um número negativo, temos, para $\hat{u} = 0$, que $\hat{t} > -(\hat{s} - M^2)$, o que nos dá um limite inferior para x_B :

$$x_B > \frac{Me^{-Y}}{\sqrt{s}} \tag{5.7}$$

Com os limites das frações de momentum definidas, poderemos obter uma predição teórica para a seção de choque hadrônica diferencial em massa de dilépton e rapidez.

Um dos fatores da Eq. 5.5 é o elemento de matriz para o subprocesso de aniquilação, dado pela Eq. 2.14 (ou Eq. 2.15, para o espalhamento Compton), que terá uma divergência infravermelha, no limite de $\hat{t} \rightarrow 0$ (assim como o espalhamento Compton). Após a regularização dessa divergência, como discutida na Seç. 4.2, a seção de choque, Eq. 5.5, passará a depender somente da escala de fatorização e não do regularizador. Desta forma, temos uma seção de choque diferencial em massa de dilépton e em rapidez longitudinal regularizada que será utilizada para as predições teóricas a seguir.

Como discutido na Seç. 4.4, ao impormos o corte no ângulo azimutal (ϕ_0) para reduzir a escala ótima, teremos de incluir os fatores de Sudakov na Eq. 5.5 para evitar um momentum transversal adicional e, conseqüentemente alteração no ângulo. Os resultados que serão apresentados correspondem à região selecionada do espaço de fase após desconsiderarmos a região que não satisfaz o corte, ou seja, calculamos a seção de choque para $0 < \phi < \pi$ e excluímos os

resultados para $\phi < \phi_0$. Esta maneira se apresenta numericamente mais fácil e evita a divergência que ocorre no limite superior de p_{Df}^2 quando $\sin^2 \phi \rightarrow 0$.

5.2 Predições teóricas

A Eq. 5.5 é a correção em ordem seguinte à dominante do processo Drell–Yan que utilizamos para os cálculos das predições teóricas para a seção de choque diferencial em massa e rapidez longitudinal que terão simetria com relação a $Y \rightarrow -Y$. Podemos ver explicitamente que a escala de fatorização é argumento das PDFs e também há a dependência do elemento de matriz nesta escala. À energia do LHC de $\sqrt{s} = 14$ TeV, usamos as distribuições de pártons MMHT14 NLO PDFs [35] e escolhemos a massa de dilépton igual a 6 e a 12 GeV.

Como descrito nos Caps. 3 e 4, agora podemos reduzir a escala de fatorização com um corte no ângulo azimutal e investigar os efeitos na seção de choque. Estamos interessados em aplicar um corte de maneira que os fatores de Sudakov não alterem muito os nossos resultados pois assim teríamos novas incertezas. Na Fig. 4.3, vemos que isso se dá para $\phi_0 > 0.7\pi$, uma região em que as três curvas passam a ter pouca diferenças entre si. Em seguida, temos de investigar qual corte, dentro dessa região, ainda mantém uma seção de choque apreciável, ou seja, que ainda permita medições com número de eventos razoável.

Predições com o corte no ângulo azimutal

Na Fig. 5.1, as curvas superiores correspondem ao cálculo sem qualquer corte; portanto, $\mu_F = \mu_0 = 1.45M$. Neste caso, a escala na qual as distribuições são sondadas ainda é maior que a usual $\mu_F = M$. Queremos obter uma predição teórica para uma distribuição de pártons com baixa escala de fatorização ($\mu_0 \leq 10$ GeV). Sendo assim, calculamos as curvas inferiores que correspondem ao corte $\phi_0 = 0.85\pi$, para o qual temos uma escala bem menor, $\mu_0 = 0.44M$, ou seja, se $M = 6$ GeV, $\mu_0 = 2,64$ GeV, e se $M = 12$ GeV, $\mu_0 = 5,28$ GeV. Em ambos, a escala de fatorização foi reduzida de cerca de um terço do valor sem o corte, mas ainda com uma seção de choque considerável, como pode ser visto que aproximadamente 50% dos diléptons produzidos são mantidos.

Obtivemos também uma faixa de erro, 1σ , vinda da incerteza da distribuição, que dependendo de Y , é bastante grande, como podemos ver para $|Y| > 3$. A precisão atual das medidas no LHC é melhor do que essa incerteza das distribuições, o que nos leva a acreditar que medidas apropriadas desse observável adicionariam novo conhecimento a respeito das distribuições. A seguir veremos que a escolha da escala de fatorização terá uma incerteza muito menor que essas

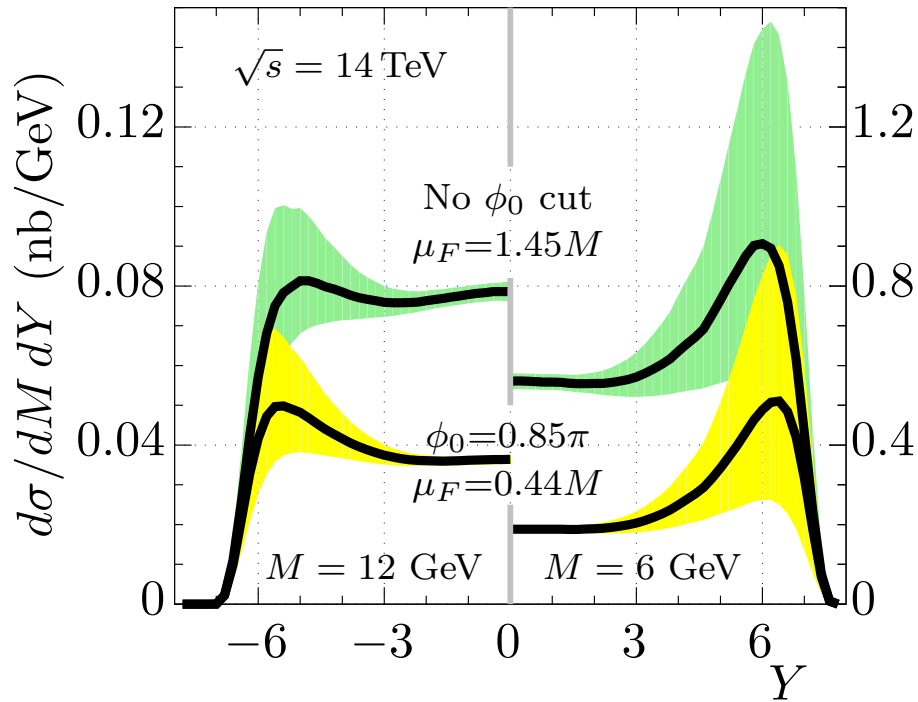


Figura 5.1: Seção de choque diferencial para o processo Drell–Yan para $M = 12$ GeV (esquerda) e 6 GeV (direita). As curvas superiores correspondem ao resultado sem nenhum corte imposto ($\mu_0 = 1,45M$), enquanto que as inferiores, ao resultado com um corte no ângulo azimutal com $\phi_0 = 0,85\pi$. As faixas mostram a incerteza 1σ das distribuições e mostram que podem ser reduzidas por medidas apropriadas (com a precisão atual do LHC) do observável.

bandas.

Agora que determinamos o valor do corte ($\phi_0 = 0,85\pi$), queremos verificar o comportamento da seção de choque, Eq. 5.5, com respeito a dependência com escala de fatorização nas PDFs remanescentes. Portanto, escolhemos a escala na distribuição da ordem dominante ($\mu_F = \mu_0$) e no coeficiente em ordem seguinte a dominante $C^{\text{NLO}}(\mu_0)$, enquanto variamos a escala de fatorização, μ_F , na distribuição em ordem seguinte a dominante. Desta maneira, estamos truncando a série em ordem seguinte à dominante e atribuindo a incerteza na escolha da escala à ordem seguinte à seguinte à dominante (NNLO), como discutido ao final da Seç. 4.3

Sensibilidade com a escolha da escala

Investigaremos a predição central $\mu_F = \mu_0$ e também uma escala de fatorização menor $\mu_F = \mu_0/2$. Não podemos usar o valor maior $\mu_F = 2\mu_0$, pois isso permite a evolução DGLAP violar o corte, ou seja, $\mu_F = 2\mu_0$ corresponde a um ângulo menor que o corte ($\phi = 0,85\pi$). Isso ocorreria pela emissão de pártons com suficiente momentum transversal para produzir um fóton com algum momentum transversal. Portanto, o dilépton deste fóton terá de carregar esse

5.2 Predições teóricas

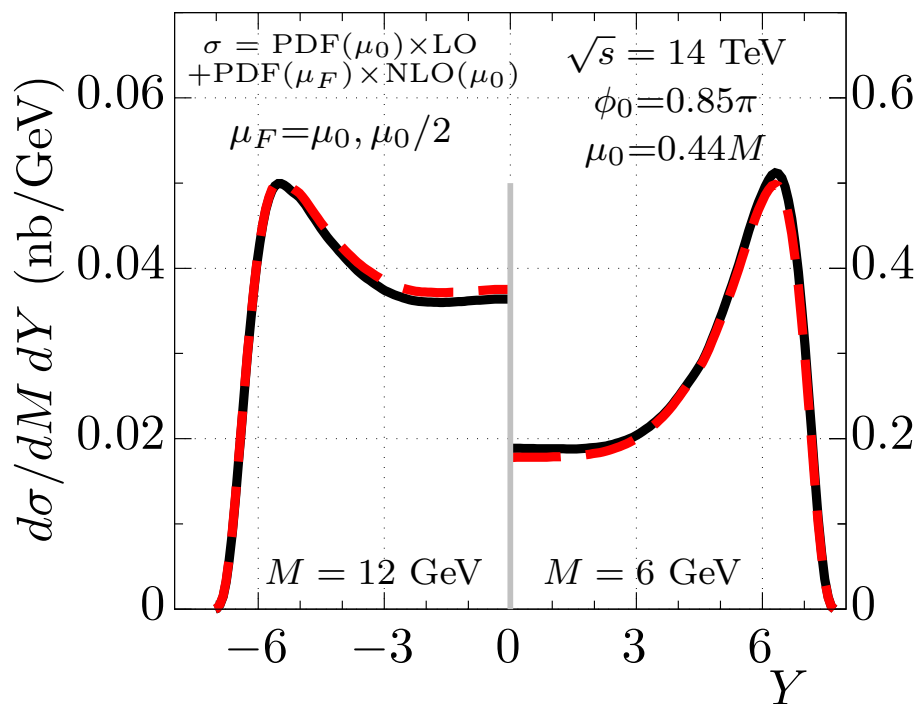


Figura 5.2: Seção de choque diferencial para o processo Drell–Yan em duas escalas de fatorização diferentes $\mu_F = \mu_0$ (preto) e $\mu_0/2$ (vermelho). O corte no ângulo azimutal $\phi_0 = 0.85\pi$ é imposto, com uma escala ótima em LO dada por $\mu_0 = 0.44M$. Isso mostra que a incerteza remanescente na escala de fatorização é muito pequena.

momentum e o efeito resultante será a redução no ângulo ϕ , colocando na região proibida alguns eventos que anteriormente foram presumidos na região permitida de ϕ .

Na Fig. 5.2, obtemos a variação da escala descrita acima para a seção de choque diferencial em rapidez aplicando um corte no ângulo azimutal $\phi_0 = 0.85\pi$ com $\mu_0 = 0.44M$. A escala de renormalização é mantida fixa em $\mu_R = M$. Podemos ver que a mudança na escala de fatorização das distribuições não altera muito os valores da seção de choque, ou seja, as curvas pretas e vermelhas são muito próximas. Portanto, a vantagem da escala ótima continua mantida e a incerteza na escolha da escala é reduzida, o que podemos ver através da estabilidade das curvas da Fig. 5.2, ou seja, a seção de choque não terá valores muito distintos para diferentes valores de escala de fatorização, como as curvas do lado esquerdo da Fig. 4.1 quando não se usou a escala ótima. Sendo assim, temos um resultado com menor incerteza na escolha da escala e também com valores de μ_0 menores.

6 *Conclusão*

No Cap. 1 fizemos uma breve introdução dos colisores de partículas e a constante busca por experimentos que envolvam mais energia a fim de aprimorar o que se entende como modelo padrão de partículas. Além disso, revisamos os conceitos da QCD perturbativa, chegamos ao modelo de pártons, bem como as funções de distribuição de pártons e as equações de evolução DGLAP.

No Cap. 2, nos aprofundamos no modelo de pártons, destacamos o processo Drell–Yan a a obtenção de sua seção de choque hadrônica a partir da partônica. Revisamos a obtenção desta em ordem dominante. Quando introduzimos correções da QCD na ordem seguinte a dominante, analisamos os diagramas possíveis, em especial, os que têm três partículas no estado final. Para estes, obtivemos os elementos de matriz como uma função explícita dos momenta envolvidos, sem nenhuma integração no espaço de fase. Não é a primeira vez que estes resultados são encontrados, no entanto, as expressões explícitas contidas nesta tese não estão disponíveis na literatura.

Teve destaque no Cap. 3, o cálculo do espaço de fase dos momenta para o processo Drell–Yan em ordem seguinte a dominante. Neste capítulo apresentamos o cálculo tradicional do espaço de fase que não permite acesso ao ângulo azimutal. Para contornar isso, reorganizamos as variáveis de integração (e a ordem com que são integradas) e então calculamos uma maneira de permitir que o espaço de fase resultante fosse restringido através do ângulo azimutal do dilépton.

Em seguida, no Cap. 4, utilizando a prescrição estabelecida em trabalhos anteriores, calculamos a escala de fatorização ótima em ordem dominante usando o diagrama mais relevante em ordem seguinte à dominante, isto é, o glúon–quark do espalhamento Compton. Fornecemos a escala ótima em função do tamanho do corte ϕ_0 na Fig. 4.3. Ao introduzir o corte foi possível diminuir a escala na qual as distribuições de pártons são sondadas, por exemplo, $\mu_0 = 0.44M$ a $\phi_0 = 0.85\pi$.

Para evitar que a evolução DGLAP das PDFs prejudicasse (pela emissão de um párton na

6 Conclusão

região cortada) o observável proposto, foram incluídos fatores de Sudakov apropriados. Eles alteram a dependência da escala ótima com ϕ_0 , mas para $\phi_0 > 0.7\pi$, a mudança do valor da escala é bastante pequena em relação a essa correção. O corte em ângulo azimutal tem certas vantagens sobre o corte em momento transversal, já que, dependendo do detector utilizado é mais simples medir um ângulo de uma partícula carregada do que seu momento e sua energia.

No Cap. 5, investigamos a produção de diléptons a pequeno x com um corte que exclui pequenos valores de ângulo azimutal $\phi < \phi_0$. Com auxílio da técnica da escala ótima, a incerteza teórica principal (escala de fatorização) foi reduzida, $\mu_0 = 0.44M$, como podemos ver para $\phi_0 = 0.85\pi$ na Fig. 5.2. Nela, vemos claramente pequenas alterações da seção de choque diferencial para diferentes valores de escala de fatorização ($\mu_F = \mu_0, \mu_0/2$) nas distribuições em NLO.

Finalmente, calculamos a seção de choque para o observável discutido com $\phi_0 = 0.85\pi$ na Fig. 5.1, mostrando que, de fato, teremos uma seção de choque menor por um fator de aproximadamente 2 quando comparada ao caso sem o corte, o que não é uma redução que impossibilitaria a medida do observável. As faixas de incerteza mostradas nos faz pensar que a determinação da distribuição de pártons pode ser melhorada, já que a incerteza devido à escala de fatorização foi grandemente reduzida.

Como perspectiva, há a possibilidade de calcular escalas ótimas em outros contextos. Por exemplo, pode ser feito um corte simultâneo em momento transversal e ângulo, que teria a vantagem de reduzir ainda mais a escala ótima. Além disso, o cálculo em NNLO com apenas um dos cortes não foi ainda feito, com a definição de duas escalas μ_0 e μ_1 .

Mais uma perspectiva desta tese é a aplicação em colisões entre prótons polarizados, onde investiga-se a transversalidade das distribuições de glúons. Na Ref. [36] utilizou-se como escala de fatorização diferentes valores de massa do dimuon, obtendo resultados muito distintos para a seção de choque. Portanto, ao utilizarmos as técnicas desta tese, poderíamos diminuir a incerteza quanto a escolha do valor da escala de fatorização a ser usada. A Ref. [36] é uma alternativa ao projeto experimental para estudar a transversalidade do glúon através do espalhamento de elétrons, que será investigada no JLab e possivelmente no EIC.

Os métodos desta tese não se restringem à produção de léptons. Por exemplo, podemos aplicá-los à fótons produzidos em espalhamentos duros de pártons como o espalhamento Compton e a aniquilação subprocessos análogos ao do DY, resultantes de colisões pp [37,38], colisões $p+Pb$ [39] e também de pp e $Pb+Pb$ [40]. Nos cálculos das referências citados, diferentes métodos teóricos foram utilizados e todos apresentam grande incerteza na escolha da escala entre os valores centrais de momentum transversal ($0,5p_t < \mu < 2p_t$), a incerteza pode ser reduzida ao aplicarmos as técnicas dessa tese.

6 Conclusão

Relacionado a esse trabalho o artigo com o título *Improving the Drell-Yan probe of small x partons at the LHC via an azimuthal angle cut* encontra-se publicado na revista *European Physical Journal C* [41].

Referências Bibliográficas

- [1] S. D. Drell and T.-M. Yan, “Massive lepton-pair production in hadron-hadron collisions at high energies,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 25, pp. 316–320, Aug 1970.
- [2] R. P. Feynman, “The behavior of hadron collisions at extreme energies,” *Conf. Proc.*, vol. C690905, pp. 237–258, 1969.
- [3] C. Patrignani *et al.*, “Review of Particle Physics,” *Chin. Phys.*, vol. C40, no. 10, p. 100001, 2016.
- [4] G. Aad *et al.*, “Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC,” *Phys. Lett.*, vol. B716, pp. 1–29, 2012.
- [5] S. Chatrchyan *et al.*, “Observation of a New Boson at a Mass of 125 GeV with the CMS Experiment at the LHC,” *Phys. Lett.*, vol. B716, pp. 30–61, 2012.
- [6] R. Aaij *et al.*, “Observation of the resonant character of the $Z(4430)^-$ state,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 112, no. 22, p. 222002, 2014.
- [7] R. Aaij *et al.*, “Observation of $J/\psi p$ Resonances Consistent with Pentaquark States in $\Lambda_b^0 \rightarrow J/\psi K^- p$ Decays,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 115, p. 072001, 2015.
- [8] N. Armesto, A. Dainese, D. d’Enterria, S. Masciocchi, C. Roland, C. A. Salgado, M. van Leeuwen, and U. A. Wiedemann, “Nuclear collisions at the Future Circular Collider,” in *25th International Conference on Ultra-Relativistic Nucleus-Nucleus Collisions (Quark Matter 2015) Kobe, Japan, September 27-October 3, 2015*, 2016.
- [9] Institute of High Energy Physics, “China plans world’s largest supercollider,” 2015. Access date: 25 jul. 2016.
- [10] A. Accardi *et al.*, “Electron Ion Collider: The Next QCD Frontier,” *Eur. Phys. J.*, vol. A52, no. 9, p. 268, 2016.
- [11] S. D. V. Peskin, M. E., *An Introduction to Quantum Field Theory*. Westview Press, 1995.
- [12] D. J. Gross and F. Wilczek, “Ultraviolet Behavior of Nonabelian Gauge Theories,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 30, pp. 1343–1346, 1973.
- [13] H. D. Politzer, “Reliable perturbative results for strong interactions?,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 30, pp. 1346–1349, Jun 1973.
- [14] J. D. Bjorken and E. A. Paschos, “Inelastic electron-proton and γ -proton scattering and the structure of the nucleon,” *Phys. Rev.*, vol. 185, pp. 1975–1982, Sep 1969.
- [15] E. Basso, C. Bourrely, R. Pasechnik, and J. Soffer, “The Drell–Yan process as a testing ground for parton distributions up to LHC,” *Nucl. Phys.*, vol. A948, pp. 63–77, 2016.

Referências Bibliográficas

- [16] J. Rojo, “Machine Learning tools for global PDF fits,” in *13th Conference on Quark Confinement and the Hadron Spectrum*, 9 2018.
- [17] G. Altarelli and G. Parisi, “Asymptotic Freedom in Parton Language,” *Nucl. Phys.*, vol. B126, pp. 298–318, 1977.
- [18] Y. L. Dokshitzer, “Calculation of the Structure Functions for Deep Inelastic Scattering and e^+e^- Annihilation by Perturbation Theory in Quantum Chromodynamics.,” *Sov. Phys. JETP*, vol. 46, pp. 641–653, 1977. [Zh. Eksp. Teor. Fiz.73,1216(1977)].
- [19] V. N. Gribov and L. N. Lipatov, “Deep inelastic $e p$ scattering in perturbation theory,” *Sov. J. Nucl. Phys.*, vol. 15, pp. 438–450, 1972. [Yad. Fiz.15,781(1972)].
- [20] M. Tanabashi *et al.*, “Review of Particle Physics,” *Phys. Rev. D*, vol. 98, no. 3, p. 030001, 2018.
- [21] J. H. Christenson, G. S. Hicks, L. M. Lederman, P. J. Limon, B. G. Pope, and E. Zavattini, “Observation of massive muon pairs in hadron collisions,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 25, pp. 1523–1526, Nov 1970.
- [22] A. M. Sirunyan *et al.*, “Measurement of the differential Drell-Yan cross section in proton-proton collisions at $\sqrt{s} = 13$ TeV,” *JHEP*, vol. 12, p. 059, 2019.
- [23] G. Aad *et al.*, “Measurement of the transverse momentum distribution of Drell-Yan lepton pairs in proton-proton collisions at $\sqrt{s} = 13$ TeV with the ATLAS detector,” 12 2019 Disponível em <<https://arxiv.org/abs/1912.02844>>.
- [24] C. Willis, R. Brock, D. Hayden, T.-J. Hou, J. Isaacson, C. Schmidt, and C.-P. Yuan, “New method for reducing parton distribution function uncertainties in the high-mass Drell-Yan spectrum,” *Phys. Rev.*, vol. D99, no. 5, p. 054004, 2019.
- [25] X. Wang and Z. Lu, “ $\pi - N$ Drell-Yan process in TMD factorization,” *Adv. High Energy Phys.*, vol. 2019, p. 6734293, 2019.
- [26] M. Beneke, A. Broggio, S. Jaskiewicz, and L. Vernazza, “Threshold factorization of the Drell-Yan process at next-to-leading power,” 2019 Disponível em <<https://arxiv.org/abs/1912.01585>>.
- [27] G. Altarelli, G. Parisi, and R. Petronzio, “Transverse Momentum in Drell-Yan Processes,” *Phys. Lett.*, vol. 76B, pp. 351–355, 1978.
- [28] E. G. de Oliveira, *Efeitos nucleares no processo Drell-Yan : formalismos de dipolos de cor e de momentum transversal intrínseco*. PhD thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre - RS, (2010).
- [29] B. Potter, “Calculational Techniques in Perturbative QCD: The Drell-Yan Process,” 1997 Disponível em <<https://inspirehep.net/literature/1185169>>.
- [30] E. G. de Oliveira, A. D. Martin, and M. G. Ryskin, “Scale dependence of open $c\bar{c}$ and $b\bar{b}$ production in the low x region,” *Eur. Phys. J.*, vol. C77, no. 3, p. 182, 2017.
- [31] C. Flett, S. Jones, A. Martin, M. Ryskin, and T. Teubner, “How to include exclusive J/ψ production data in global PDF analyses,” *Phys. Rev. D*, vol. 101, no. 9, p. 094011, 2020.

Referências Bibliográficas

- [32] E. G. de Oliveira, A. D. Martin, and M. G. Ryskin, “Drell-Yan as a probe of small x partons at the LHC,” *Eur. Phys. J.*, vol. C72, p. 2069, 2012.
- [33] E. G. de Oliveira, A. D. Martin, and M. G. Ryskin, “Improving the Drell-Yan probe of small x partons at the LHC via a k_t cut,” *Eur. Phys. J.*, vol. C73, no. 3, p. 2361, 2013.
- [34] V. V. Sudakov, “Vertex parts at very high-energies in quantum electrodynamics,” *Sov. Phys. JETP*, vol. 3, pp. 65–71, 1956. [*Zh. Eksp. Teor. Fiz.*30,87(1956)].
- [35] L. A. Harland-Lang, A. D. Martin, P. Motylinski, and R. S. Thorne, “Parton distributions in the LHC era: MMHT 2014 PDFs,” *Eur. Phys. J.*, vol. C75, no. 5, p. 204, 2015.
- [36] S. Kumano and Q.-T. Song, “Gluon transversity in polarized proton-deuteron Drell-Yan process,” *Phys. Rev.*, vol. D101, no. 5, p. 054011, 2020.
- [37] S. Acharya *et al.*, “Direct photon production at low transverse momentum in proton-proton collisions at $\sqrt{s} = 2.76$ and 8 TeV,” *Phys. Rev.*, vol. C99, no. 2, p. 024912, 2019.
- [38] S. Acharya *et al.*, “Measurement of the inclusive isolated photon production cross section in pp collisions at $\sqrt{s} = 7$ TeV,” *Eur. Phys. J.*, vol. C79, no. 11, p. 896, 2019.
- [39] M. Aaboud *et al.*, “Measurement of prompt photon production in $\sqrt{s_{NN}} = 8.16$ TeV p +Pb collisions with ATLAS,” *Phys. Lett.*, vol. B796, pp. 230–252, 2019.
- [40] A. M. Sirunyan *et al.*, “The production of isolated photons in PbPb and pp collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 5.02$ TeV,” 3 2020 Disponível em <<https://arxiv.org/abs/2003.12797v1>>.
- [41] M. K. Yamasaki and E. G. de Oliveira, “Improving the Drell–Yan probe of small x partons at the LHC via an azimuthal angle cut,” *Eur. Phys. J. C*, vol. 80, no. 4, p. 327, 2020.

APÊNDICE A – Regras de Feynman

Neste apêndice apresentaremos um breve sumário apenas da aplicação, não da obtenção, das regras de Feynman para seus correspondentes diagramas relacionadas ao processo Drell–Yan em ordem dominante e em ordem seguinte à dominante. O agrupamento completo de regras é encontrado em livros de teoria quântica de campos, dentre os quais utilizamos as regras da Ref. [11] a seguir.

O diagrama de Feynman para um férmion no estado inicial é representado por uma linha reta com uma seta apontando para o vértice, que é definido como o ponto 3 linhas se encontram.

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \end{array} \leftarrow \text{---} \quad = u^s(p)$$

p

Um férmion com momentum p e spin s tem como regra correspondente a esse diagrama o spinor $u^s(p)$, que tem representação matricial dada por uma matriz coluna. Já o antiférmion de estado inicial também representado por uma linha reta, porém com uma seta apontado em sentido contrário ao vértice:

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \end{array} \rightarrow \text{---} \quad = \bar{v}^s(p)$$

$\leftarrow p$

O anti-férmion de estado inicial com momentum p e spin s tem como regra o spinor $\bar{v}^s(p)$, cuja representação matricial é uma matriz linha. Agora se os férmions são de estado final, a aplicação das regras ficam trocadas.

Um férmion de estado final com momentum p e spin s segue a mesma regra de um antiférmion de estado inicial: $\bar{u}^s(p)$



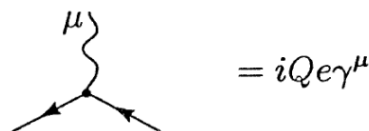
$$\text{---} \leftarrow \text{---} \quad = \bar{u}^s(p)$$

Enquanto que um antiférmion de estado final com momentum p e spin s contribui com $v^s(p)$:



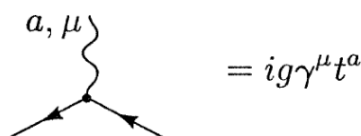
$$\text{---} \rightarrow \text{---} \quad = v^s(p)$$

Agora mostraremos as regras para os vértices que envolvem bósons, representados por linhas onduladas. O vértice de aniquilação do par férmion-antiférmion criando um fóton, contribui com: $iQe\gamma^\mu$, sendo Q a carga elétrica do férmion, e a carga elétrica elementar e γ^μ as matrizes de Dirac:



$$\text{---} \rightarrow \text{---} \quad = iQe\gamma^\mu$$

Já o vértice do glúon: $ig\gamma^\mu t^a$, sendo g a constante de acoplamento forte e t^a as matrizes que representam as cargas de cor do glúon com $a = 1 \dots 8$.



$$\text{---} \rightarrow \text{---} \quad = ig\gamma^\mu t^a$$

Em seguida temos o caso do fóton unir dois vértices do diagrama:



$$\text{---} \quad = \frac{-ig_{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon}$$

Aqui encerramos as regras de Feynman necessárias para calcular o elemento de matriz invariante para o processo Drell–Yan em ordem dominante e em ordem seguinte a dominante. Que por sua vez necessita de calcular o fator de cor.

Fator de cor

Ao aplicarmos as regras de Feynman para calcular o elemento de matriz invariante, \mathcal{M} , que dá apenas a amplitude de probabilidade. Para obtermos a densidade de probabilidade devemos multiplicar \mathcal{M} pelo seu complexo conjugado. Analisaremos agora apenas a parte referente às cores do quark e do glúon do espalhamento Compton DY.

O fator t_{ij}^a referente ao glúon, sendo que a para uma de suas 8 possíveis configurações de cor, ao passo que o índice i a cor do quark antes de emitir o glúon e j a cor do quark depois de emitir o glúon. Ao fazer o produto $\mathcal{M}\mathcal{M}^\dagger$, teremos o fator $(t_{ij}^a)^\dagger$. Devemos então somar todas as possibilidades do glúon inicial e final, mas tomamos a média apenas sobre os glúons iniciais. Desta maneira consideramos que o glúon inicial assumirá apenas uma configuração e, o glúon final pode assumir qualquer uma das 8:

$$\frac{1}{8} \sum_{a=1}^8 t_{ij}^a (t_{ij}^a)^\dagger \quad (\text{A.1})$$

Seguindo o mesmo raciocínio para o quark inicial que terá apenas uma entre as 3 cores possíveis e o quark final podendo assumir qualquer uma delas:

$$\frac{1}{3} \sum_{i,j=1}^3 \quad (\text{A.2})$$

Assim, para o processo com um quark e um glúon no estado inicial, teremos o fator de cor sendo:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} \sum_{a=1}^8 \sum_{i,j=1}^3 t_{ij}^a (t_{ij}^a)^\dagger = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} \sum_{a=1}^8 \text{Tr}[t^a (t^a)^*] \quad (\text{A.3})$$

O produto das matrizes $t_{ij}^a (t_{ij}^a)^\dagger$, pode ser reescrito como: $t_{ij}^a (t_{ji}^a)^*$, que nada mais é que o traço.

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} \sum_{a=1}^8 \sum_{i,j=1}^3 t_{ij}^a (t_{ij}^a)^\dagger = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} C_2(N) \cdot \text{Tr}1_N \quad (\text{A.4})$$

A soma do traço das matrizes t^a pode ser calculada através do operador de Cassimir quadrático, $C_2(N)$, onde N é a dimensão das matrizes quadráticas dos geradores da álgebra.

$$C_2(n) = \frac{N^2 - 1}{2N} \quad (\text{A.5})$$

A QCD tendo simetria SU(3):

$$\sum_{a=1}^8 \text{Tr}[t^a (t^a)^\dagger] = C_2(3) \cdot \text{Tr}1_3 \quad (\text{A.6})$$

A.0 Fator de cor

Assim, somando todas as possibilidades de cor do quark e do glúon inicial e final, e tirando a média apenas do quark e glúon iniciais:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} \sum_{a=1}^8 \sum_{i,j=1}^3 t_{ij}^a (t_{ij}^a)^\dagger = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3} \cdot 3 = \frac{1}{6} \quad (\text{A.7})$$

Com as regras apresentadas neste apêndice, podemos calcular o elemento de matriz invariante no Cap. 2 para o processo Drell–Yan em ordem dominante e em ordem seguinte a dominante.

APÊNDICE B – Espaço de fase com as variáveis de Sudakov

Neste apêndice apresentamos uma alternativa a unidade dada pela Eq. 3.22. Poderíamos escrever a unidade com deltas nas variáveis de Sudakov:

$$\int dq^+ dq^- \delta(q^+ - p_D^+ - p_E^+) \delta(q^- - p_D^- - p_E^-) = 1 \quad (\text{B.1})$$

Inserindo a unidade dada pela Eq. B.1 na Eq. 3.21 com o elemento de integração dado como $\frac{d^3 p_D}{2E_D} = \frac{dp_{Dt}^2}{2} \frac{dp_D^+}{p_D^+} d\varphi_D$, teremos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\hat{s}} \int d\text{PS}^{(3)} &= \frac{1}{(2\pi)^5 \hat{s}} \int dq^+ dq^- \frac{dp_{Dt}^2}{2} \frac{dp_D^+}{p_D^+} d\varphi_D \frac{d^3 p_E}{E_E} \frac{\delta(p_C^- + p_D^- + p_E^- - \sqrt{s})}{\sqrt{s} - (p_D^+ + p_E^+)} \\ &\times \delta(q^+ - p_D^+ - p_E^+) \delta(q^- - p_D^- - p_E^-) \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Utilizando a delta com a variável "+", definimos $p_D^+ = q^+ - p_E^+$:

$$\frac{1}{2\hat{s}} \int d\text{PS}^{(3)} = \frac{1}{2(2\pi)^5 \hat{s}} \int dq^+ dq^- dp_{Dt}^2 dp_{Et} dp_{E^+} \frac{dp_E^-}{p_E^-} d\varphi_{DE} \frac{\delta(p_C^- + p_D^- + p_E^- - \sqrt{s})}{\sqrt{s} - q^+} \delta(q^- - p_D^- - p_E^-) \quad (\text{B.3})$$

Vamos utilizar a delta com a variável "-" para integrar p_E^- . Para fazê-lo é necessário utilizar $p_D^- = \frac{p_{Dt}^2}{p_D^+}$ com o valor de p_D^+ definido anteriormente, tornando o argumento da delta uma função de p_E^- . Derivando o argumento da segunda delta em relação a p_E^- , podemos fatorizá-la de forma conveniente para a integral:

$$\frac{d}{dp_E^-} \left(q^- - \frac{p_{Dt}^2}{q^+ - \frac{p_{Et}^2}{p_E^-}} - p_E^- \right) = \frac{1}{p_E^-} \left(\frac{p_D^- p_E^+ - p_D^+ p_E^-}{p_D^+ p_E^-} \right) \quad (\text{B.4})$$

Apêndice B – Espaço de fase com as variáveis de Sudakov

Integrando em p_E^- e seguindo o procedimento da Sec. 3.2.3 para a integral em p_{Et} chegamos ao mesmo resultado:

$$\frac{1}{2\hat{s}} \int \frac{d\text{PS}^{(3)}}{dM^2 d\hat{t}} = \frac{M_t}{2^5 (2\pi)^4 \hat{s}^{\frac{3}{2}} \cosh y} \int_0^\pi \int d p_{Dt}^2 d\varphi_{DE} \frac{1}{|p_D^- p_E^+ - p_D^+ p_E^-|} \frac{p_{Et}}{|p_{Et} + p_{Dt} \cos \varphi_{DE}|} \quad (\text{B.5})$$

onde podemos substituir o denominador:

$$p_D^- p_E^+ - p_D^+ p_E^- = 2(E_D p_{Ez} - p_{Dz} E_E) \quad (\text{B.6})$$

Sendo que o argumento da delta define p_E^- como:

$$p_E^- = \frac{1}{2q^-} \left[(q^+ q^- + p_{Et}^2 - p_{Dt}^2) \pm \sqrt{(q^+ q^- + p_{Et}^2 - p_{Dt}^2)^2 - 4q^+ q^- p_{Et}^2} \right] \quad (\text{B.7})$$