Karine Luiz Calegari Mrotskoski

UM BREVE ESTUDO SOBRE MATRIZES: HISTÓRIA E APLICAÇÕES GEOMÉTRICAS NO CONTEXTO DA ÁLGEBRA DO ENSINO MÉDIO.

Dissertação submetida ao Programa de Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática. Com área de concentração no Ensino de Matemática.
Orientadora: Prof^{a}. Dr^{a}. Maria Inez Cardoso Gonçalves

Florianópolis

2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Mrotskoski, Karine Luiz Calegari
Um breve estudo sobre Matrizes: história e aplicações geométricas no contexto da álgebra do ensino médio. / Karine Luiz Calegari Mrotskoski ; orientador, Profa. Dra. Maria Inez Cardoso Gonçalves, 2019.
75 p.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós Graduação em Matemática, Florianópolis, 2019.

Inclui referências.

1. Matemática. 2. Matrizes e representações geométricas.. 3. Construção histórica da teoria de matrizes.. I. Gonçalves, Profa. Dra. Maria Inez Cardoso . II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

Karine Luiz Calegari Mrotskoski

UM BREVE ESTUDO SOBRE MATRIZES: HISTÓRIA E APLICAÇÕES GEOMÉTRICAS NO CONTEXTO DA ÁLGEBRA DO ENSINO MÉDIO.

Esta Dissertação foi julgada aprovada para a obtenção do Título de "Mestre em Matemática. Com área de concentração no Ensino de Matemática", e aprovada em sua forma final pelo Programa de Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito parcial.

Florianópolis, 22 de fevereiro 2019.

Prof. Dr. Celso Melchiades Doria
Coordenador
Universidade Federal de Santa Catarina

Banca Examinadora:

Prof^{a}. Dr^{a}. Maria Inez Cardoso Gonçalves
Orientadora

Prof^{a}. Dr^{a}. Melissa Weber Mendonça
UFSC
Presidente

Prof. Dr. Celso Melchiades Doria
UFSC

Prof. Dr. Douglas Soares Gonçalves
UFSC

Dedico este trabalho a Jesus, meu Mestre.

AGRADECIMENTOS

Meus sinceros agradecimentos aos que comigo vivenciaram essa caminhada para titulação de mestre, dando-me apoio, incentivo e condições para que eu pudesse concluir, com êxito, este trabalho.

Agradeço, acima de tudo, a Deus, que nunca me deixa só.

Aos meus pais, que sempre incentivaram meus estudos, aos colegas do PROFMAT com os quais compartilhei muitos momentos ao longo destes anos.

Em especial, agradeço ao meu marido, com amor, pelo permanente incentivo, preocupação e por sua paciência.

À orientadora desta dissertação, pela disponibilidade e apoio que sempre demonstrou, aqui lhe exprimo minha gratidão.

RESUMO

Neste trabalho o estudo da teoria de matrizes usada no ensino médio será apresentada de forma cronológica, conforme os conceitos foram surgindo historicamente. Por este motivo e para melhor compreensão da álgebra de matrizes, percebemos a necessidade de tratar também de vetores, sistemas de equações lineares e determinantes, temas estes que estão interligados. Os exemplos e aplicações foram dados a partir de representações geométricas estruturadas em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, verificando seu comportamento.

Palavras-chave: Matrizes. Construção Histórica. Representações Geométricas.

ABSTRACT

In this work the theory of matrices studied in high school will be presented chronologically that is, as concepts using the historical order. For this reason and for a better understanding of matrix algebra, we also address the following subjects; vectors, systems of linear equations and determinants, which are interconnected. The examples and applications were given from geometric representations structured in $\mathbb{R}^2$ and $\mathbb{R}^3$, verifying their behavior.
Keywords: Matrices. Historical Construction. Geometric Representations.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A partir da análise de alguns livros didáticos percebemos que o estudo da Álgebra no ensino médio trata os conceitos de matrizes e suas operações, determinantes, sistemas de equações lineares e modos de resolução desses sistemas, geralmente nesta ordem de apresentação e com pouca ênfase para as respectivas representações geométricas.

De modo geral, diz-se que o estudo de matrizes serve para *auxiliar na representação de informações ou facilitar cálculos complexos* (SOUZA; GARCIA, 2016), p. 46, *organizando informações numéricas que encontramos em jornais e revistas em forma de tabelas, com linhas e colunas* (IEZZI et al., 2016), p. 65. Algumas aplicações como cálculos financeiros, registros de comunicação entre aeroportos (SMOLE; DINIZ, 2016), p. 230, e informações de imagens em pixel (SOUZA; GARCIA, 2016), p. 44, são utilizadas para exemplificar Matrizes e justificar o modo como operamos a adição, a multiplicação de um número real por uma matriz e a multiplicação entre matrizes. As considerações geométricas são observadas em apêndices dentro de cada capítulo, além de propostas de atividades com uso de planilha eletrônica a fim de resolver os mesmos cálculos por um método computacional.

O determinante, por sua vez, é apresentado como *um número real associado à uma matriz quadrada* (BALESTRI, 2016), p.106, possível de ser calculado seguindo um algoritmo. Sua utilidade e significado está vinculado à resolução de *sistemas de equações lineares permitindo classificá-lo como possível (determinado ou indeterminado) ou impossível* (IEZZI et al., 2016), p.115, pela **regra de Cramer**.

Estas singularidades destacam a contextualização da Álgebra no cotidiano e em aspectos utilitários, em detrimento da observação e análise das respectivas transformações geométricas. Na maioria das vezes, as operações com matrizes são introduzidas de forma mecânica, sem apresentar algum convencimento sobre, por exemplo, o modo como multipicamos matrizes "linhas por colunas". Além disso, um breve estudo sobre a história das Matrizes, descrita no *Capítulo 2*, nos mostra que os conteúdos nos livros didáticos não estão organizados numa sequência cronológica, onde os conceitos de matrizes e determinantes surgem naturalmente com o estudo de sistemas lineares.

Em consequência disso, temos como objetivo principal deste trabalho tratar o estudo de matrizes a partir de um olhar sobre a história desses conceitos, dando ao leitor um breve conhecimento de como surgiram. Buscaremos mostrar geometricamente definições e propriedades, a fim de visualizar essas transformações, e não para criar uma metodologia de ensino da álgebra linear para o ensino médio.

O *Capítulo 3* é introdutório e cita definições de *equações*, *sistemas de equações lineares e soluções*. A Seção 4.1 trata da relação entre pontos e coordenadas e nos permitirá mostrar algumas representações geométricas das operações com matrizes fazendo o uso de vetores e suas operações no plano e no espaço, também descritas nas Seções 4.2 e 4.3. Este estudo é indispensável para entender as representações geométricas que são estruturadas em um espaço vetorial e verificar seu comportamento.

No *Capítulo 5*, ao tratar as *operações com matrizes e algumas de suas propriedades*, utilizaremos conhecimentos oriundos da teoria de matrizes para analisar as transformações geométricas de translação, escala, reflexão e rotação.

O estudo dos *determinantes* está no último capítulo deste trabalho. Apesar dos primeiros textos sobre o assunto terem surgido concomitante ao estudo de equações de um sistema linear, foi somente no século XIX que a teoria dos determinantes ganhou notoriedade (BOYER; GOMIDE, 2010).

Apresentamos o determinante como um valor numérico associado à uma matriz quadrada que, além do que foi mencionado, nos dá informações sobre medidas de área ou de volume de figuras.

2 BREVE HISTÓRIA DAS MATRIZES

Em princípio a ciência matemática estava a serviço das necessidades do cotidiano, e não foi diferente no campo da álgebra linear. Datados de 1850 a.C. e 1650 a.C. os papiros de Moscou e Rhind contém problemas diversos de uma matemática aplicada à realidade local, cujas soluções, originalmente encontradas de modo aritmético, seriam mais tarde, na Europa, apresentadas na forma de simples equações lineares. Segundo (EVES; H. DOMINGUES, 2001), p. 74, é possível observar nesses registros que os egípcios já faziam uso de símbolos para representar as operações de adição e subtração e igualdade.

Neste mesmo período da história, o povo da Babilônia já sabia como resolver um sistema simples 2×2 de equações lineares com duas incógnitas (CHRISTENSEN, 2012) e por volta de $200a.C.$, os chineses publicaram "*Nine Chapters of the Mathematical Art*", mostrando a capacidade de resolver um sistema de equações 3×3.

Com o passar dos anos, os problemas matemáticos se tornavam cada vez mais abstratos, e as informações retóricas foram substituídas pela linguagem simbólica. Segundo G. H. F. Nesselmann, os mais de 4000 anos de história da notação algébrica podem ser compreendidos em três estágios:

> Primeiro se tem a álgebra retórica em que os argumentos da resolução de um problema são escritos em prosa pura, sem abreviações ou símbolos específicos. A seguir vem a álgebra sincopada em que se adotam abreviações para algumas das quantidades e operações que se repetem mais frequentemente. Finalmente chega-se ao último estágio, o da álgebra simbólica, em que as resoluções se expressam numa espécie de taquigrafia matemática formada de símbolos que aparentemente nada têm a ver com os entes que representam. (EVES; H. DOMINGUES, 2001), p. 206.

É nesse último estágio da história da notação algébrica, com início há menos de 400 anos, que encontramos textos com uso de simbolismos similares aos contemporâneos. Foram muitos os fatores que favoreceram o desenvolvimento no campo algébrico dentre eles o uso do sistema indo-arábico de numeração, a padronização do simbolismo e a facilidade do intercâmbio de ideias, estreitada pelo comércio crescente na Europa, no início do século XIX.

Em 1830, Georg Peacock (1791-1858) publicou "*Treatise on Al-*

gebra", um estudo sobre os princípios fundamentais da álgebra que definiu *álgebra aritmética* como operações nas quais os símbolos representam números e a *álgebra simbólica* como um campo independente das restrições das propriedades aritméticas (BAUMGART, 1992), p. 206. Um bom exemplo dessa caracterização simbólica é a não validade da propriedade comutativa da multiplicação que vemos na álgebra matricial, ou seja, $a * c \neq c * a$. Apesar do cálculo de determinante para encontrar soluções de sistemas de equações lineares já ser utilizado, um estudo mais detalhado sobre o tema só foi possível após assumir a condição da não comutatividade, que mais tarde, utilizada no produto entre matrizes, viria contribuir para o desenvolvimento inicial da aritmética dos números complexos.

O uso de vetores na álgebra linear surgiu da necessidade de representar geometricamente os números complexos. Inicialmente desenhados como uma seta ou flecha, cada número complexo passou a ser associado a um ponto no plano bidimensional, identificando-o com uso de coordenadas cartesianas. Caspar Wessel (1745–1818), Jean Robert Argand (1768–1822), Carl Friedrich Gauss (1777–1855) foram alguns ilustres matemáticos que conceberam números complexos como vetores bidimensionais.

A ideia de relacionar simples pares ordenados de números reais (a, b) a conceitos mais abstratos foi conveniente para o estudo das equações e transformações lineares, e permitiu o desenvolvimento da teoria de Matrizes.

Muitos ilustres matemáticos contribuíram, ao longo da história, para a construir do conceito de matrizes. De modo mais objetivo, iremos nos limitar aos acontecimentos das últimas décadas, mesmo porque o estudo de Matrizes como conhecemos atualmente é bastante recente do ponto de vista histórico, tendo surgido no início do século XIX. O nome Matriz foi dado primeira vez em 1850 por James Joseph Sylvester, um matemático britânico contemporâneo de Arthur Cayley, considerado o criador da álgebra das Matrizes.

Sylvester (1814-1897) nasceu em Londres. Durante sua vida acadêmica foi bastante perseguido por ser judeu, mas isto não o impediu de ser um matemático atuante. Ligado a várias academias de ciências, teve dezenas de publicações e ganhou prêmios como *Royal Medal (1860), Copley Medal (1880) e De Morgan Gold Medal (1887)*, em reconhecimento à contribuição de suas pesquisas. Para Sylvester a noção de Matriz está associada ao problema de encontrar raízes múltiplas de um polinômio, não sendo utilizada a representação em forma de tabela (BAUMGART, 1992), p. 561.

Cayley (1821-1895) também foi um matemático inglês. Atuou como advogado durante 14 anos mantendo, paralelamente, suas pesquisas no campo da geometria analítica (BAUMGART, 1992) (pág. 559). Aos 42 anos foi eleito para a posição de Sadleirian Professor de Matemática Pura da Universidade de Cambridge, mas foi nos Estados Unidos, enquanto ministrou um curso na universidade em Baltimore, que sua amizade com Sylvester teve início.

Foi Cayley que pela primeira vez, num artigo pubicado em 1855, usou matriz na forma tabular para representar sistemas lineares e formas quadráticas. No ano de 1858, Cayley descreve e define o que é Matriz, enunciando e demonstrando as operações e suas propriedades no artigo *A Memoir on the Theory of Matrices* (CAYLEY, 1858). Em sua notação, a matriz:

$$\left| \begin{array}{cccc} \alpha & \beta & \gamma & \cdots \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \cdots \\ \alpha" & \beta" & \gamma" & \cdots \\ \vdots & & & \end{array} \right|.$$

Seguida das operações:

$$(\xi, \eta, \zeta, \cdots) = \left(\left| \begin{array}{cccc} \alpha & \beta & \gamma & \cdots \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \cdots \\ \alpha" & \beta" & \gamma" & \cdots \\ \vdots & & & \end{array} \right| \right) (x, y, z, \cdots).$$

Representa o sistema de equações:

$$\begin{cases} \xi = & \alpha x + \beta y + \gamma z + \cdots \\ \eta = & \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \cdots \\ \zeta = & \alpha" x + \beta" y + \gamma" z + \cdots \\ \quad\vdots & \end{cases}$$

Nos textos de Cayley, a matriz nula e a matriz unidade (identidade) são definidas antes das operações de adição e multiplicação, mencionando a não validade da comutatividade para a multiplicação ou composição de matrizes.

> Apesar dos trabalhos de Sylvester e de Cayley sobre matrizes, bem como de outros que se seguiram, os tratados de álgebra só passaram a adotar a representação matricial em

> seus textos a partir do final do século e a linguagem matricial só se popularizou a partir de 1920. (BERNARDES, 2016), p. 69.

Apesar do estudo dos determinantes ter surgido concomitante ao estudo de Sistemas de Equações Lineares, foi graças aos estudos de Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851) e Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) que a teoria de desenvolveu. *Este último atribui-se o título de criador do termo 'determinante' além de ser o responsável por reunir, em 1812, tudo o que era conhecido até então sobre o assunto* (DOMINGUES; IEZZI, 2003), p. 199.

Note que o estudo de Matrizes é posterior ao das ideias de determinantes e sistemas lineares, conceitos que hoje apresentamos em sala de aula na ordem inversa estudando primeiro Matriz suas representações e operações. O objetivo deste trabalho, entretanto, não é o de apenas mencionar fatos passados, mas de promover uma consciência histórica a fim de entender como o conceito foi construído.

Iremos, portanto, iniciar com o estudo de sistemas lineares e introduzir o conceito de Matriz somente quando houver necessidade deste tipo de representação. Do mesmo modo iremos utilizar o produto entre matrizes para operar transformações lineares e representá-las no plano bidimensional. Quanto ao estudo de determinantes, apesar de nem sempre este resultado ter sido obtido por meio do cálculo como fazemos hoje, iremos associar geometricamente seu valor, em módulo, à área do paralelogramo formado por dois vetores para uma matriz de ordem 2, e o volume do paralelepípedo em matrizes de ordem 3.

Destacamos a importância de conhecer os fatos históricos que motivaram o surgimento do conceito de matrizes e percebê-lo de forma problematizada, associando a ideia conceitual a diferentes formas de representação.

3 EQUAÇÕES E SISTEMAS LINEARES: UMA RELAÇÃO ALGÉBRICA.

Como vimos, o uso de equações e sistemas de equações lineares para modelar problemas está presente na história da matemática desde a antiguidade, e de forma mais algébrica durante o Renascimento, com a criação da Álgebra Simbólica. É por esse viés que os livros didáticos apresentam o estudo de sistemas lineares, relatando algum problema do cotidiano como a distribuição das cédulas ao ser realizado um saque no caixa eletrônico (IEZZI et al., 2016), p. 97, e a quantidade de combustível gasta em uma viagem (BALESTRI, 2016), p. 68.

Embora essa contextualização no ensino da matemática seja importante, nosso objetivo neste capítulo é introduzir conceitos que serão essenciais para o entendimento do processo de resolução de sistemas de equações lineares. A princípio, vamos apresentar a definição de equação linear:

Definição 1 *Uma equação linear é uma expressão da forma* $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b$*, em que:*

- $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ *são números reais denominados coeficientes das incógnitas;*
- $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ *são as incógnitas;*
- b *é uma constante real denominada termo independente.*

(BALESTRI, 2016), p.69.

A equação $x+2y = 9$ é linear e as incógnitas x e y devem assumir valores reais a fim de preservar a igualdade. Note que, escolhendo arbitrariamente um valor para x determinamos o valor da incógnita y. Assim, para $x = 1$ temos que $y = 4$ pois, substituindo esses valores na equação $1+2\times4 = 1+8 = 9$, preservamos a igualdade. Como podemos escolher qualquer valor real para x e obter, a partir daí, o valor de y concluímos que essa equação possui infinitas soluções.

Definição 2 *Uma solução de uma equação linear* $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\ldots+a_nx_n = b$ *é a ênupla de números reais* $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ *que, ao substituirmos em* $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$*, respectivamente, torna a igualdade verdadeira:*

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + \ldots + a_n\alpha_n = b$$

(SOUZA; GARCIA, 2016), p.77.

Um conjunto de duas ou mais equações lineares é chamado de sistema de equações lineares. Definiremos sistemas de equações lineares de modo geral, entretanto nosso estudo sobre este conceito será restrito àqueles com duas equações e duas incógnitas ou com três equações e três incógnitas.

Definição 3 *Denomina-se sistema linear $m \times n$ o conjunto S formado por m equações e n incógnitas, que pode ser indicado da seguinte maneira:*

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

(SOUZA; GARCIA, 2016), p.78.

No exemplo a seguir, vamos considerar somente as soluções no conjunto dos números naturais e compará-las. Seja o sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 30 \\ 2x + y = 17 \end{cases}$$

- O conjunto solução da equação $3x + 2y = 30$ são os pares ordenados $(0, 15)$, $(2, 12)$, $(4, 9), (6, 6)$, $(8, 3)$ e $(10, 0)$, por exemplo.
- O conjunto solução da equação $2x+y = 17$ são os pares ordenados $(0, 17)$, $(1, 15)$, $(2, 13), (3, 11)$, $(4, 9)$, $(5, 7)$, $(6, 5)$, $(7, 3)$ e $(8, 1)$, por exemplo.

Note que o par ordenado $(4, 9)$ é solução das duas equações lineares simultâneamente, logo é solução do sistema. Há de se convir que este não é o melhor modo de encontrar soluções, um método mais efetivo será explicado posteriormente, no Capítulo 4, Seção 4.4.

Definição 4 *Uma solução de um sistema linear $m \times n$ é toda ênupla $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ que é solução de cada uma das m equações desse sistema. (SOUZA; GARCIA, 2016), p.78.*

Na Definição 3, se $b_i = 0$ para todo $i = 1, 2, ..., m$, então o sistema é chamado *homogêneo*. Neste caso, haverá, pelo menos, uma solução: a ênupla $(0, 0, 0, \ldots, 0)$ denominada solução trivial.

Quanto à resolução de sistemas lineares, vamos considerar que o leitor já conheça os métodos da *adição* e *substituição*, comumente estudados no oitavo ano do ensino fundamental, veja em (NETO, 2013), p. 70. Na Seção 4.4 trataremos da resolução pelo método do escalonamento.

Voltemos ao sistema geral exposto na Definição 3 com m equações e n incógnitas.

Definição 5 *Seja L a equação linear obtida multiplicando as* m *equações por constantes* $c_1, c_2, ..., c_m$*, respectivamente, depois somando as equações resultantes. Mais precisamente, seja L a equação linear:*

$$(c_1a_{11} + c_2a_{21} + ... + c_ma_{m1})x_1 + ... + (c_1a_{1n} + c_2a_{2n} + ... + c_ma_{mn})x_n \\ = c_1b_1 + c_2b_2 + ... + c_mb_m$$

Dizemos que L é uma combinação linear das equações do sistema.

Veremos na Seção 4.4 que podemos analisar sistemas de equações lineares relacionando-os a vetores e, ainda, encontrar soluções pelo método do escalonamento. A definição acima será útil, principalmente, quando estivermos a usar essas soluções, pois é possível expressar um dado vetor como combinação linear de um conjunto de outros vetores. Deste modo, dizemos que um conjunto de vetores é linearmente dependente se um dos vetores do conjunto pode ser escrito combinação linear dos demais, caso contrário, é chamado linearmente independente. A partir daí, podemos verificar se a solução do sistema é única, se não há solução ou se são infinitas.

4 VETORES, SISTEMAS LINEARES E REPRESENTAÇÕES GEOMÉTRICAS NO PLANO.

Admitindo que já são conhecidas as noções primitivas de ponto, reta e plano da geometria euclidiana, buscaremos entender os princípios básicos que nos permitem associar pontos e números a coordenadas no plano e no espaço, enfatizando a interpretação geométrica no estudo de sistemas de equações lineares, vetores, matrizes e suas operações.

O entendimento do plano e suas coordenadas, somados ao estudo de vetores, nos permitirá interpretar geometricamente sistemas de equações lineares, visualizando, por exemplo, retas no plano, suas equações e as possíveis intersecções dessas retas, traduzidas como solução de um sistema com duas equações lineares e duas incógnitas. Da mesma forma, o estudo das coordenadas nos servirá para interpretar geometricamente uma matriz e suas operações, assuntos proeminentes na matemática do ensino médio.

Para ilustrar alguns casos, utilizaremos imagens criadas com o uso do Software educativo Geogebra que combina geometria e álgebra numa mesma aplicação.

4.1 ESCOLHENDO UM SISTEMA DE COORDENADAS

Podemos desenhar uma reta x no Plano e escolher o sentido negativo e o sentido positivo de percurso. Ao marcarmos um ponto, que chamaremos de Origem O, e fazermos este ponto corresponder ao número zero, fixada uma unidade de comprimento, a reta orientada x passa a ser denominada eixo x, ou OX, e cada ponto desta reta pode ser posto em correspondência biunívoca com o conjunto dos números reais. Situamos à direita de O os números positivos e à esquerda de O os números negativos.

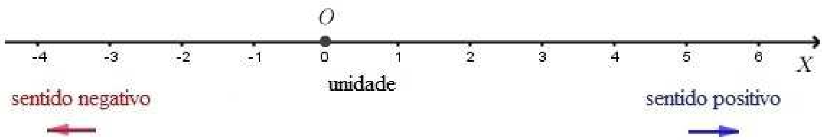

Figura 1: Definindo o eixo OX.

Esses números indicam a posição de cada ponto X pertencente à OX, sendo $(x, 0)$ sua representação em forma de coordenadas. Dessa forma, sejam A e B pontos distintos quaisquer que pertencem à OX e, respectivamente, $(a, 0)$ e $(b, 0)$ suas coordenadas, logo $a < b$, se e somente se, A está à esquerda de B.

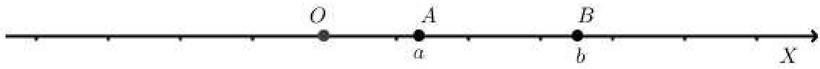

Figura 2: O ponto A está à esquerda de B, logo $a < b$.

E ainda, seja a distância de A à origem $d(O, A) = a$ e $d(O, B) = b$ a distância de B à origem, A é simétrico de B se, e somente se $|a| = |-b|$.

No mesmo plano, traçamos por O uma reta y perpendicular a OX que chamaremos eixo y ou OY.

A partir da origem O situamos no eixo OY para cima os números positivos e para baixo os números negativos, de modo que cada ponto da reta orientada y é posto em correspondência biunívoca com o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. Um ponto Y que pertence a este eixo tem coordenadas $(0, y)$ e, para definir as relações de ordem, escolhendo dois pontos $C(c, 0)$ e $D(d, 0)$, $c < d$ se e somente se, a está C abaixo de D.

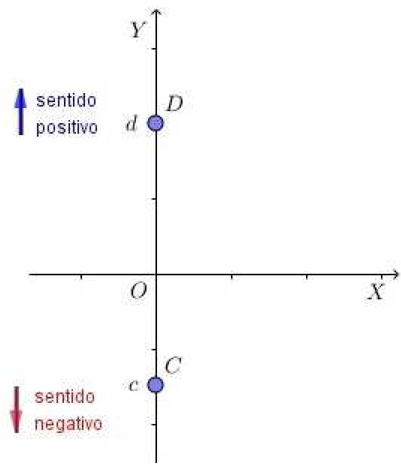

Figura 3: O ponto C está abaixo do ponto D, logo $c < d$

O que obtemos é um sistema de coordenadas com notação OXY em que cada ponto do plano corresponde a um par ordenado de números reais. Os eixos OX e OY dividem o plano em quatro regiões que chamamos de Quadrantes, ordenados conforme a Figura 4.

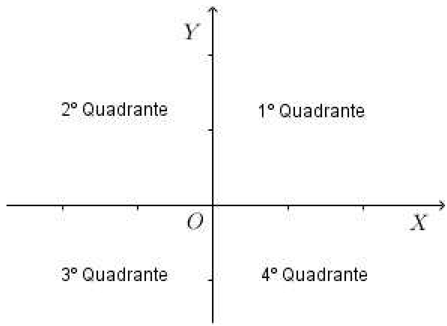

Figura 4: Regiões do Plano.

Se um ponto que pertence ao plano não estiver sobre nenhum dos eixos, ainda é possível definir sua posição utilizando coordenadas.

Para um ponto qualquer (x, y) que chamaremos de P, o primeiro valor x nos indica a distância que se deve percorrer, partindo da origem, para direita ou para esquerda e, a partir daí, o segundo valor y nos indica a distância a se percorrer para cima ou para baixo.

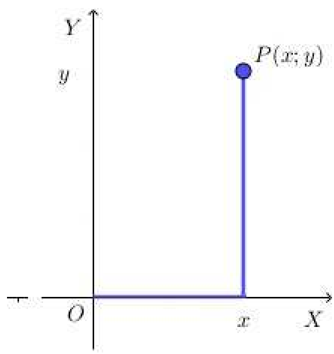

Figura 5: Ponto P.

Considere, por exemplo, o ponto P com coordenadas $x = 2$ e $y = -3$. Para marcar este ponto no plano, partindo da origem, percorremos duas unidades para a direita (sentido positivo) e, em seguida, três unidades para baixo (sentido negativo). Veja na Figura 6.

Deste modo, podemos indicar a posição de qualquer ponto do

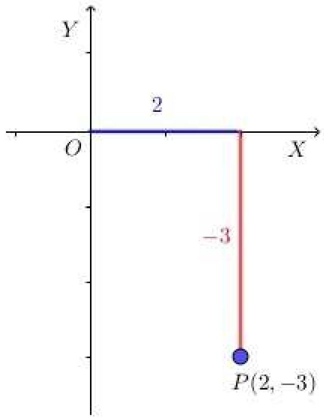

Figura 6: Ponto $P(2, -3)$.

plano com uso de coordenadas (x, y) de uma forma única. Traçar a trajetória de cada ponto a partir da origem, avançando primeiro no sentido horizontal e depois no vertical, conforme as coordenadas, é um bom exercício para se fazer em sala de aula no Ensino Médio.

Se traçamos uma reta z que passe pela origem O, perpendicular aos eixos OX e OY simultaneamente, obtemos o espaço tridimensional. A escolha do sistema $OXYZ$ nos permite associar cada ponto P do espaço a um único terno ordenado (x, y, z) de números reais.

No espaço, a origem tem coordenadas $(0, 0, 0)$. Se um ponto pertence a um dos eixos OX, OY ou OZ, respectivamente, então suas coordenadas são $(x, 0, 0), (0, y, 0)$ ou $(0, 0, z)$. Observe que a origem O é também a intersecção de três planos, que dividem o espaço em oito regiões e são determinados pelos eixos OX, OY e OZ dois a dois. Um ponto que pertence ao plano Π_{XY} obtido de OX e OY tem coordenadas $(x, y, 0)$. Se nos referirmos a um ponto que pertence a Π_{XZ}, obtido pela intersecção de OX e OZ, suas coordenadas serão do tipo $(x, 0, z)$, e para um ponto de Π_{YZ}, obtido de OY e OZ, as coordenadas serão $(0, y, z)$. Nas demais situações, encontramos a posição de $P(x, y, z)$ no espaço partindo da origem e avançando quantas unidades indicarem as coordenadas x, y e z. A direção que tomaremos também depende dessas informações, e pode ser resumida na Tabela 1:

Na Figura 7, tome, por, exemplo, o ponto $P(2, -1, 3)$. Partindo da origem O percorremos duas unidades no sentido positivo de OX, para frente. A partir deste ponto avançamos uma unidade para

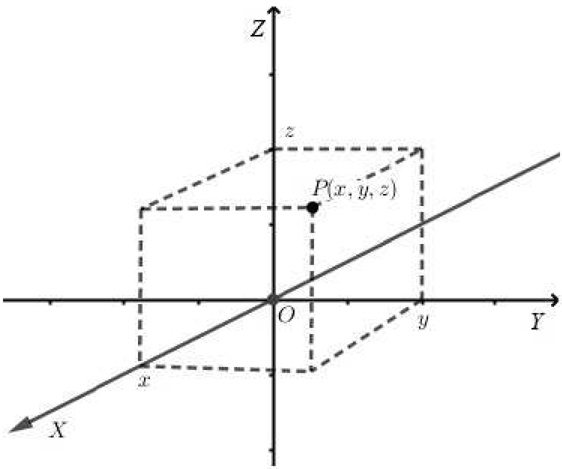

Figura 7: Ponto P no espaço tridimensional.

Tabela 1: Localizando pontos no espaço.

Eixo	Direção	Sentido
OX (profundidade)	frente	positivo
OX (profundidade)	trás	negativo
OY (horizontal)	direita	positivo
OY (horizontal)	esquerda	negativo
OZ (vertical)	cima	positivo
OZ (vertical)	baixo	negativo

esquerda, sentido negativo de OY e, então, três unidades para cima, sentido positivo de OZ.

4.2 VETORES E COORDENADAS

Nosso objetivo aqui é introduzir uma noção de vetores examinando algumas de suas propriedades geométricas e algébricas. Este breve estudo é necessário para desenvolver muitos dos conceitos que veremos mais adiante, e nos ajudará a entender a relação que existe entre as "transformações matriciais"e suas representações geométricas.

Um **vetor** é um *segmento de linha orientado* que cor-

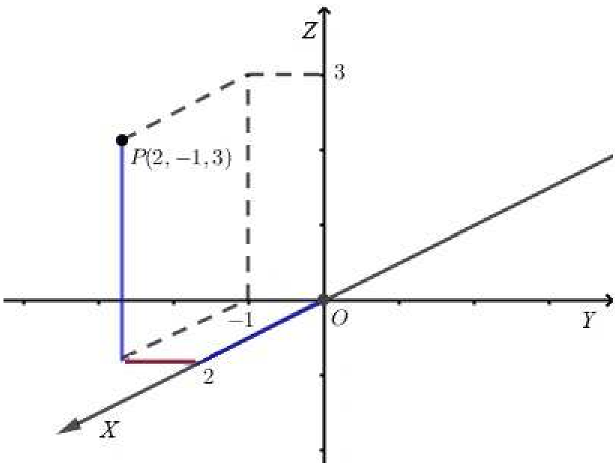

Figura 8: Ponto P no espaço tridimensional, sentidos positivo e negativo dos eixos ordenados.

> responde ao *deslocamento* de um ponto A até outro ponto B. (HEFEZ; FERNANDEZ, 2017), p. 3.

Sendo o ponto A a origem e o ponto B a extremidade, o segmento orientado denotado por $\overrightarrow{AB}$, possui uma medida de comprimento, uma direção e um sentido. Se um outro vetor $\overrightarrow{CD}$, com origem em C e extremidade em D tem essas mesmas características e medidas, então $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são iguais geometricamente. Para vetores no sistema de eixos ortogonal OXY, por exemplo, percebemos a igualdade fazendo coincidir a origem de cada vetor com a origem O, através de movimentos de translação. Assim, o novo vetor $\overrightarrow{OP}$, que está na posição padrão, representará os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$, e também o conjunto de todos os segmentos orientados iguais a estes.

Manipulando os vetores algebricamente em relação ao sistema de coordenadas OXY, temos que:

Definição 6 *Dados $A(a_1, a_2)$ e $B(b_1, b_2)$, os números $b_1 - a_1$ e $b_2 - a_2$ são as coordenadas do vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ e escrevemos $\vec{v} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$ (DELGADO; FRENSEL; CRISSAF, 2017), p. 17.*

Sempre que desenharmos vetores no plano OXY faremos sua origem corresponder ao ponto $O(0, 0)$, pensando nessa relação de igualdade geométrica. A extremidade destes vetores é algum ponto $P(x, y)$,

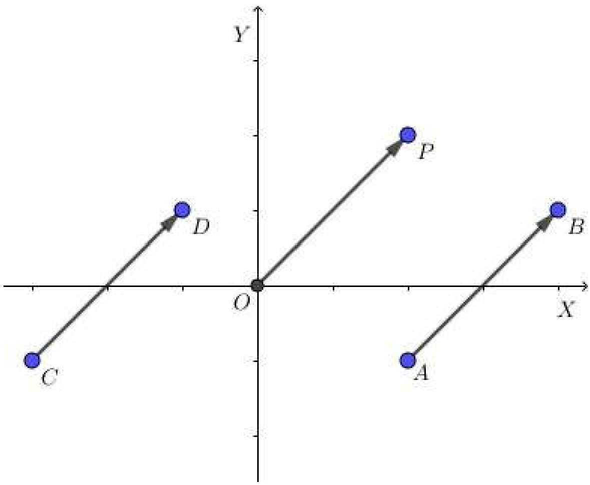

Figura 9: Representação Geométrica de Vetores.

escrito como um par ordenado de números reais. A proposição a seguir, citada no livro (HEFEZ; FERNANDEZ, 2017), p. 23, nos garante que todo vetor é escrito de forma única usando coordenadas.

Proposição 4.2.1 *Seja OXY um sistema de eixos ortogonais no plano. Para todo vetor $\vec{v}$ existe um único ponto P tal que $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$. Além disso, as cordenadas do ponto P coincidem com as coordenadas do vetor $\vec{v}$.*

As coordenadas de P nos dão instruções de como chegar da base do vetor, na origem, até sua extremidade. Para distinguir vetores de pontos, convém escrever as coordenadas verticalmente, como na Figura 10.

Para os vetores de três dimensões, a origem continua a ser o ponto O e a extremidade é expressa pela tripla ordenada de números reais $P(x, y, z)$. Os valores x, y e z nos indicam a quatidade de unidades que devemos percorrer no espaço.

Deste modo, para localizar a extremidade $P(2, -1, 3)$ do vetor $\overrightarrow{OP}$ de origem O, percorremos duas unidades no sentido positivo de x, então nos movemos, paralelamente ao eixo y, uma unidade no sentido negativo e três unidades paralelamente ao eixo z.

Outra maneira de visualizar o vetor $\overrightarrow{OP}$ é imaginá-lo como a diagonal de um paralelepípedo retângulo cujos lados são determinados pelos três planos paralelos aos planos Π_{xy}, Π_{xz} e Π_{yz} que passam pelo ponto $P(2, -1, 3)$ como mostra a Figura 11.

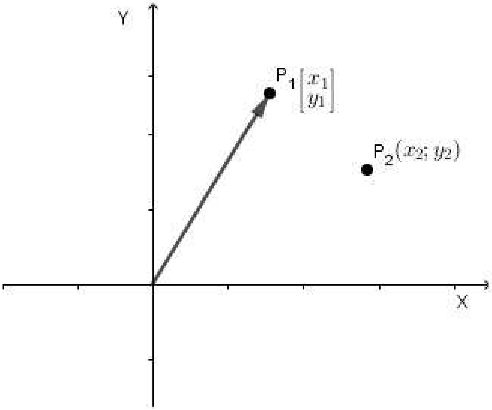

Figura 10: Coordenadas do Vetor P_1 e do Ponto P_2

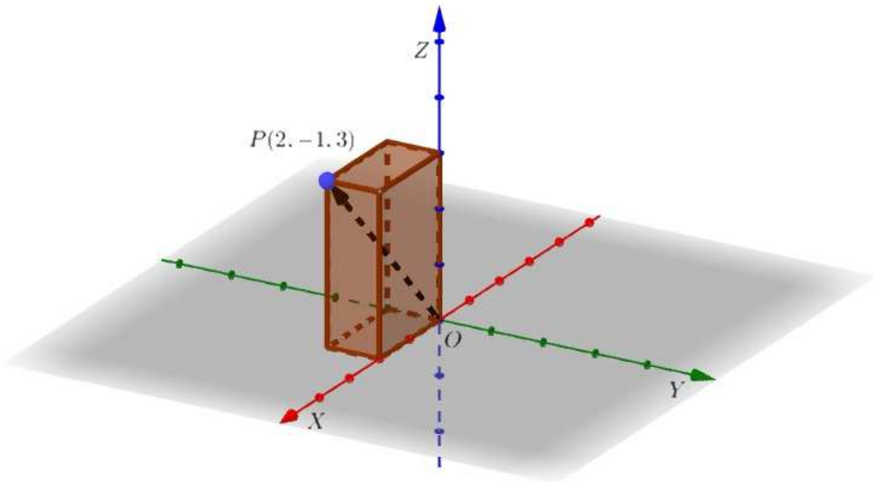

Figura 11: Vetor no espaço.

4.3 OPERAÇÕES COM VETORES E REPRESENTAÇÕES GEOMÉTRICAS NO PLANO

São definidas duas operações para o conjunto de vetores no plano, a **adição de vetores**, que geometricamente opera a translação, e a

multiplicação de um número real por um vetor, que altera seu comprimento e/ou sentido através de uma escala. Vamos utilizar o livro (HEFEZ; FERNANDEZ, 2017) como referência para essas definições.

Na **adição de vetores**, para cada par de vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ efetuamos a soma $\vec{u}+\vec{v}$.

Definição 7 *Sejam $\vec{u}=(u_1,u_2)$ e $\vec{v}=(v_1,v_2)$ vetores no plano expressos em termos de suas coordenadas em relação a um sistema de eixos ortogonais OXY. Então, $\vec{u}+\vec{v}=(u_1+v_1,u_2+v_2)$.*

Retomando o exemplo da Figura 6, quando mostramos o caminho percorrido no plano OXY para chegar ao ponto $P(2,-3)$, usando agora linguagem vetorial, obtemos $\overrightarrow{OP}$ adicionando o vetor horizontal $\overrightarrow{u}$ de coordenadas $(2,0)$ ao vetor vertical $\overrightarrow{v}$ de coordenadas $(0,-3)$. Note que, geometricamente, a operação de adição de vetores é efetuada desenhando o segundo vetor com origem na extremidade do primeiro, fazendo este caminho por meio das coordenadas em relação a um sistema de eixos ortogonais. Essa ideia de desenhar um vetor a partir da extremidade de outro vetor a fim de calcular a soma é um dos poucos casos em que consideramos uma origem diferente de $O(0,0)$. Na prática, o que fazemos é adicionar $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2+0 \\ 0+(-3) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$.

Vamos visualizar esta soma em outro exemplo, para os vetores $\vec{u}=\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ e $\vec{v}=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$. Para encontrar a extremidade de $\vec{u}$ partimos da origem $O(0,0)$ avançamos 3 unidades no sentido positivo de OX e, a partir deste ponto, 2 unidades no sentido negativo de OY. Quando adicionamos $\vec{v}$, partimos da extremidade de $\vec{u}$ e avançamos 1 unidade no sentido positivo de OX e outras 3 no sentido positivo de OY.

A Figura 13 nos mostra outra forma de visualizar geometricamente essa soma. Mantendo os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ com origem em $O(0,0)$, o vetor soma $\vec{u}+\vec{v}$ será a diagonal de um paralelogramo cujos lados são u e v. Diferente da primeira definição, esta última só faz sentido se os vetores não são colineares.

Note na Figura 14 que a soma $\vec{u}+\vec{v}$ resulta no mesmo vetor soma $\vec{v}+\vec{u}$. Esta é uma das propriedades algébricas da adição de vetores, a comutatividade.

Adicionando um terceiro vetor $\vec{w}=\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$ definimos a *propriedade associativa* da adição de vetores $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$. No primeiro membro da equação, adicionamos o vetor $\vec{w}$ ao vetor $(\vec{u}+\vec{v})$ e no segundo membro o vetor $(\vec{v}+\vec{w})$ é adicionado ao vetor $\vec{u}$. Na

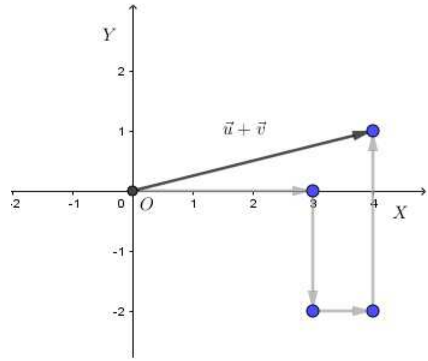

Figura 12: Adição dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

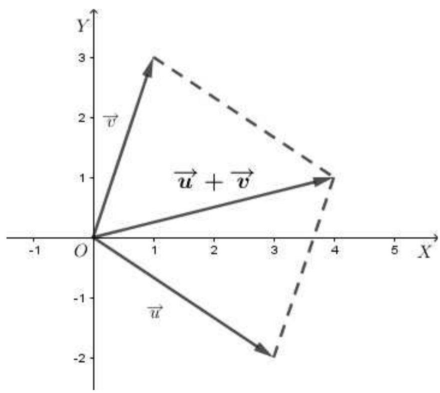

Figura 13: O vetor soma é a diagonal de um paralelogramo.

Figura 15 você pode observar geometricamente essa propriedade para os vetores já conhecidos $\vec{u}, \vec{v}$ e sendo $\vec{w} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Outras duas propriedades da adição de vetores só podem ser definidas admitindo a existência de um vetor que, apesar de ser representado geometricamente por um único ponto, tem a mesma importância que qualquer outro, o vetor nulo. Para este vetor no qual origem e extremidade coincidem, $(0,0)$ são as suas coordenadas e o chamaremos de *vetor nulo* 0.

Adicionando 0 ao vetor $\vec{v}$, por exemplo, obtemos o próprio vetor $\vec{v}$, uma vez que não moveremos sua extremidade. Temos, então, a

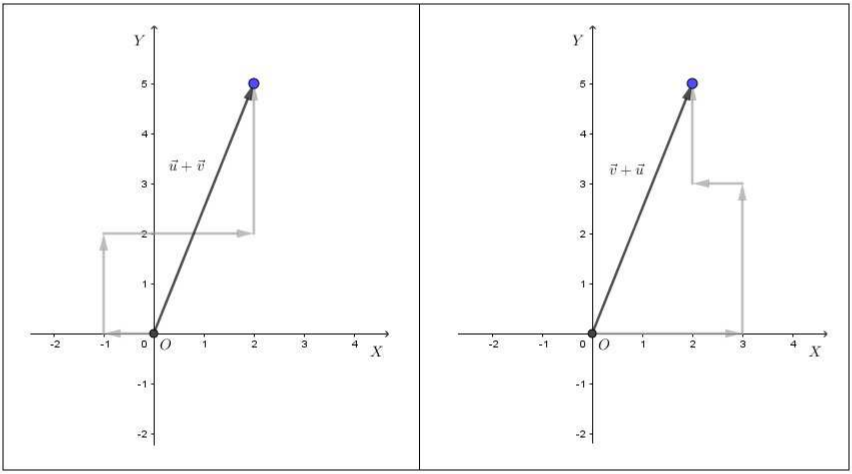

Figura 14: Propriedade Comutativa da Adição de Vetores.

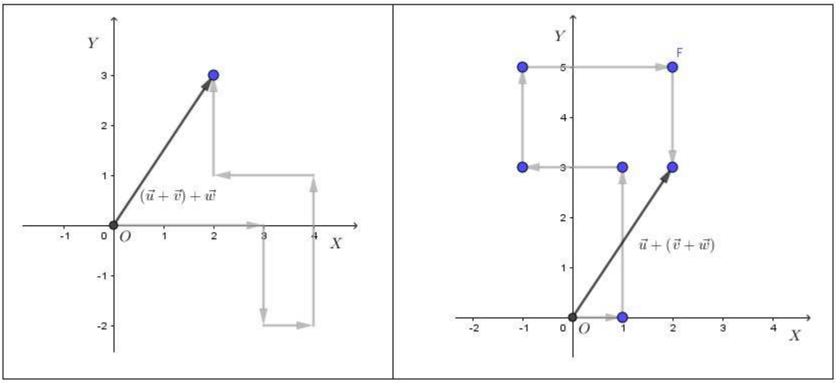

Figura 15: Propriedade Associativa da Adição de Vetores.

propriedade do elemento neutro $\vec{v}+0=0+\vec{v}=0$.

Um vetor com mesmo comprimento e direção, mas sentido diferente de $\vec{v}$ é chamado de simétrico ou oposto e escrevemos $-\vec{v}$ para indicar essa característica. Se, num determinado sistema de coordenadas, tem-se $\vec{v}=(v_1,v_2)$ então $-\vec{v}=(-v_1,-v_2)$, esta é a propriedade do *inverso aditivo do vetor* $\vec{v}$.

Na **multiplicação de um número real por um vetor**, para cada vetor $\vec{v}$ e número real λ, também chamado escalar, definimos o produto do escalar λ pelo vetor $\vec{v}$:

Definição 8 *O produto de $\lambda \in \mathbb{R}$ por $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ é o vetor $\lambda\vec{v} = \lambda\overrightarrow{AB}$, representado pelo segmento orientado AC, tal que:*
(a) A, B e C são colineares;
(b) $d(A, C) = |\lambda| d(A, B)$;
(c) $C = A$ se $\lambda = 0$;
(d) os segmentos AC e AB têm igual sentido se $\lambda > 0$, e sentidos opostos se $\lambda < 0$.

A fim de representar geometricamente a multiplicação de um número real por um vetor, bem como as propriedades relacionadas a esta operação, vamos utilizar coordenadas, considerando os vetores $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ e $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ e os escalares $\lambda = 3$ e $\mu = -1$.

Multiplicar o número real λ por $\vec{v}$, conforme definido, corresponde a fazer a operação $\lambda\vec{v} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$. De modo análogo, $\mu\vec{v} = -1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \cdot 2 \\ -1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$. Note na Figura 16 que, como $\mu < 0$, o vetor $-\vec{v}$ tem sentido diferente dos vetores $\vec{v}$ e $3\vec{v}$ em que $\lambda > 0$. Além disso, os pontos de origem O e a extremidade dos vetores são colineares.

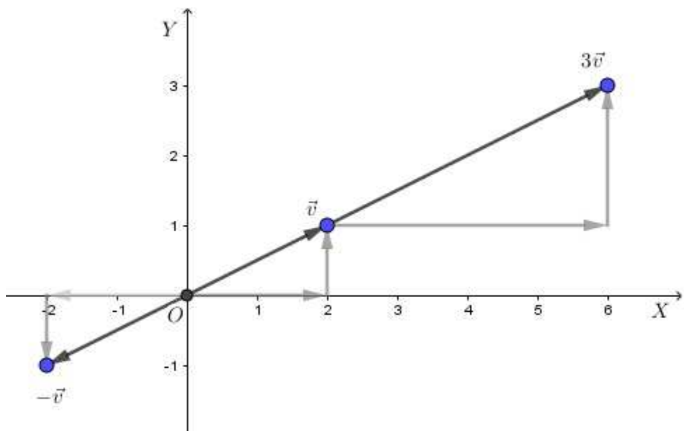

Figura 16: Multiplicação de um número real por um vetor.

Assim como nas operações com números reais, o número 1 é o elemento neutro da multiplicação de escalares por vetores, dessa forma

$1\vec{v} = \vec{v}$. As propridades associativa e distributiva também serão representadas geometricamente com o uso dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, e dos escalares λ e μ.

Na propriedade associativa da multiplicação de um número real por um vetor é válida a igualdade $\lambda(\mu\vec{v}) = (\lambda\mu)\vec{v}$. Multiplicamos, no primeiro membro, o escalar λ pelo vetor escalado $\mu\vec{v}$ fazendo:

$$3\cdot\left(-1\cdot\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\right) = 3\cdot\begin{bmatrix}-1\cdot 2\\-1\cdot 1\end{bmatrix} = 3\cdot\begin{bmatrix}-2\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\cdot(-2)\\3\cdot(-1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-6\\-3\end{bmatrix}.$$

Em $(\lambda\mu)\vec{v}$, basta multiplicar o vetor $\vec{v}$ pelo escalar $\lambda\mu$.

$$[3\cdot(-1)]\cdot\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} = -3\cdot\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3\cdot(2)\\-3\cdot(1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-6\\-3\end{bmatrix}.$$

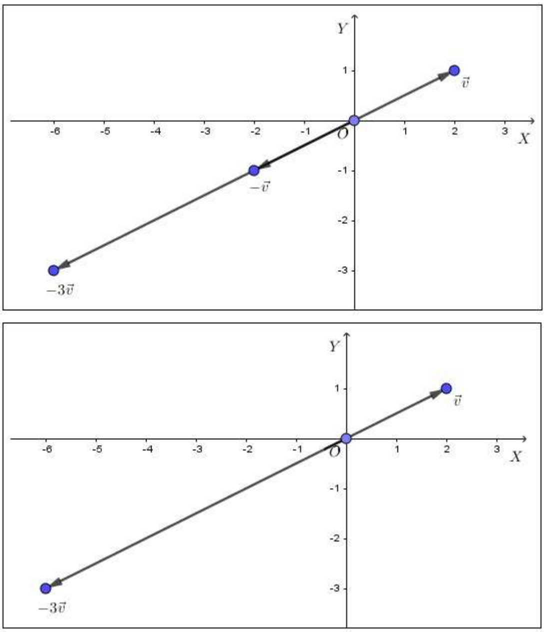

Figura 17: Representação geométrica de $\lambda(\mu\vec{v}) = (\lambda\mu)\vec{v}$

Observe na Figura 17 que os vetores resultantes são iguais geometricamente.

Na propriedade distributiva $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$, para resolver o primeiro membro da igualdade é preciso encontrar o vetor soma $\vec{u}+\vec{v}$ e depois multiplicá-lo por λ. A Figura 18 representa geometricamente esse resultado.

$$\lambda(\vec{u}+\vec{v}) = 3\cdot\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 3\cdot\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot 3 \\ 3\cdot(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

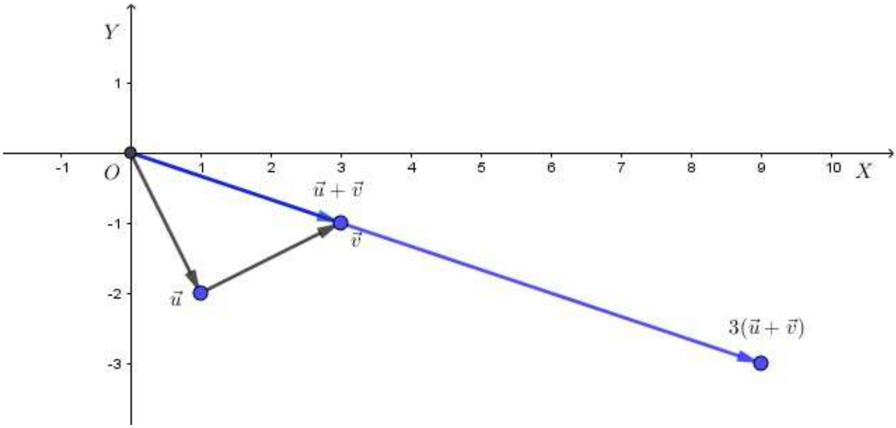

Figura 18: Representação geométrica de $\lambda(\vec{u}+\vec{v})$.

Observe na Figura 19 que a operação $\lambda\vec{u}+\lambda\vec{v}$ a ser realizada no segundo membro da igualdade mostra a soma dos dois vetores escalados, $3\vec{u}$ e $3\vec{v}$, resultando no mesmo vetor da Figura 18.

$$3\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}+3\cdot\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot 1 \\ 3\cdot(-2) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 3\cdot 2 \\ 3\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

4.4 SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES E RESOLUÇÃO POR ESCALONAMENTO (ELIMINAÇÃO GAUSSIANA).

Nesta seção começamos a analisar sistemas de equações lineares de modo informal, partindo da resolução pelo método do escalonamento e, na seção seguinte, verificando esse resultado geometricamente. Para tanto, vamos admitir que o leitor tenha a clareza de que:

1. "De acordo com o número de soluções que um sistema linear

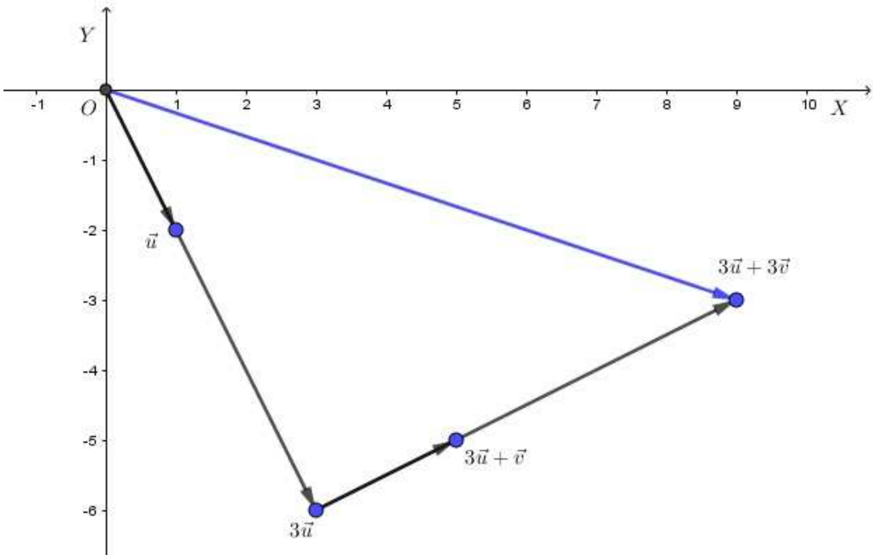

Figura 19: Representação geométrica de $\lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$.

possui, ele pode ser classificado em: **possível e determinado**, quando possui uma única solução; **possível e indeterminado**, quando possui infinitas soluções; ou **impossível** quando não possui solução. (SOUZA; GARCIA, 2016), p. 81.

2. "Sistemas de equações lineares equivalentes possuem mesmo conjunto solução."(HEFEZ; FERNANDEZ, 2017), p. 11.

3. Um sistema dado e sua forma escalonada são equivalentes, logo, a solução do sistema escalonado é também uma solução do sistema dado."(POOLE, 2017), p. 62.

O matemático e físico alemão Carl Friedrich Gauss (1777- 1855) escrevia os coeficientes numéricos das equações dos sistemas lineares na forma tabular, antes mesmo de se ter o entendendimento do conceito de matrizes e da publicação oficial de Cayley em 1858. Do mesmo modo, vamos utilizar a representação com matrizes a fim de buscar a solução do sistema pelo método de eliminação de Gauss. Um estudo mais específico sobre matrizes e suas operações será feito adiante.

A resolução por escalonamento se trata de um algoritmo que, além de nos indicar a existência de soluções de um sistema, também nos permitirá conhecer tais resultados, baseando-se no fato de que sistemas equivalentes têm mesma solução.

O fato de utilizar matrizes para operar as equações de um sistema é um boa justificativa para introduzir este conceito, pois é possível relacionar sistemas de equações lineares a vetores, e escrever as coordenadas desses vetores pela representação matricial.

Vamos começar pelo sistema de equações lineares com duas equações e duas incógnitas:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = & c_1 \\ a_2x + b_2y = & c_2 \end{cases}.$$

Podemos representá-lo em forma de matriz, escrevendo somente os coeficientes numéricos e os termos independentes, assim:

$$\left[\begin{array}{cc|c} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{array}\right].$$

Chamaremos de $l_1 = (a_1, b_1, c_1)$ os elementos da primeira linha e de $l_2 = (a_2, b_2, c_2)$ os da segunda linha. Neste caso, dizemos que a matriz está escalonada quando $a_1 = 1$ e $a_2 = 0$, o que facilitará a resolução do sistema, obtendo-se primeiro o valor da última incógnita e substituindo esse valor na equação anterior. No caso em que $a_1 \neq 1$ e $a_2 = 1$ podemos reordenar as equações, mas se $a_2 \neq 1$ o que fazemos é operar $\frac{l_1}{a_1}$. Para anular a_2 podemos realizar operações vetoriais com as linhas l_1 e l_2 a fim de encontrar equações equivalentes que nos permitam chegar a este resultado.

Vamos escrever o sistema $\begin{cases} x + y = & 5 \\ x - y = & 1 \end{cases}$ na forma matricial:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

Perceba que $a_1 = 1$ e, para anular o primeiro elemento da segunda linha, vamos substituí-la por $l_1 - l_2$ realizando as operações vetoriais que já conhecemos, assim $(1, 1, 5) - (1, -1, 1) = (1, 1, 5) + (-1, 1, -1) = (0, 2, 4)$. Na forma escalonada, a matriz passa a ser:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \end{array}\right].$$

Este último resultado nos permite obter facilmente o valor da incógnita $y = 2$ e, substituindo na equação $x - y = 1$, encontramos $x = 3$. Portanto, o sistema tem solução única $(3, 2)$ e é classificado como *sistema possível e determinado.*

Considere, agora, o sistema $\begin{cases} 2x-4y= & 7 \\ x-2y= & 5 \end{cases}$.

Vamos reorganizar as equações a fim de que $a_1 = 1$, trocando as duas linhas, e escrevê-lo na forma matricial:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 5 \\ 2 & -4 & 7 \end{array}\right].$$

Para obter $a_2 = 0$, faremos uma combinação lienar com as linhas l_1 e l_2 substituindo a segunda linha por $2l_1 - l_2$, temos:

$$2(1,-2,5)-(2,-4,7)=(2,-4,10)+(-2,4,-7)=(0,0,3).$$

Com a substituição de l_2 a matriz passa a ser $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$ levando a equação impossível $0y = 3$, o que não nos permite descobrir o valor numérico das incógnitas. Logo, o sistema é *impossível.*

Há casos em que as duas equações do sistema são equivalentes:

$$\begin{cases} x-y= & 2 \\ 3x-3y= & 6 \end{cases}.$$

Ao escrevê-lo na forma matricial:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \end{array}\right].$$

Note que $l_2 = 3l_1$ e, a substituição da segunda linha por $3l_1 - l_2$, com o intuito de escalonar o sistema, faz zerar todos os elementos de l_2. A solução é, então, obtida a partir da primeira equação $x - y = 2$, em função de uma variável dependente $(x, x-2)$ mas, como x pode assumir qualquer valor real, a quantidade de pares ordenados que satisfazem a igualdade, é infinita. Portanto, este é o exemplo de um sistema *possível e indeterminado.*

Trataremos, de modo similar, os Sistemas de Equações Lineares com três equações e três incógnitas $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z= & d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z= & d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z= & d_3 \end{cases}$, representando-os na forma matricial como:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{array}\right].$$

Considerando $l_1 = (a_1, b_1, c_1, d_1)$, $l_2 = (a_2, b_2, c_2, d_2)$ e $l_3 = (a_3, b_3, c_3, d_3)$ os vetores-linha, esta matriz estará escalonada quando $a_1 = 1$ e os elementos a_2, a_3, b_3 forem todos nulos, o que nos permitirá reescrever o sistema num formato triangular, facilitando sua resolução. O sistema escalonado ficará na forma:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = & d_1 \\ \qquad\quad b_2y + c_2z = & d_2 \\ \qquad\qquad\quad c_3z = & d_3 \end{cases}.$$

Tome, por exemplo, o sistema $\begin{cases} 2x - 2y - 3z = & 1 \\ x - 2y + 3z = & 0 \\ x - y + z = & 2 \end{cases}$.

Representando-o na forma matricial, obtemos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Para que $a_1 = 1$ vamos reescrevê-lo mudando a posição das linhas l_1 e l_3.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right].$$

Nesta última matriz, para que os elementos a_2 e a_3 sejam nulos, substiruiremos, respectivamente, a segunda linha por $l_1 - l_2$ e a terceira linha por $2l_1 - l_3$. Realizando as operações necessárias, obtemos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{array}\right].$$

Assim encontramos facilmente o valor da incógnita $z = \frac{3}{5}$ e, substituindo esse valor em $y - 2z = 2$, descobrimos $y = \frac{16}{5}$. Por fim, fazendo novamente a susbtituição dos resultados conhecidos na primeira equação, calculamos $x = \frac{23}{5}$. O sistema é, portanto, *possível e determinado* e sua solução é $(\frac{23}{5}, \frac{16}{5}, \frac{3}{5})$.

Considere, agora, o sistema $\begin{cases} x + 2y - z = & 3 \\ 2x + 4y - 2z = & 6 \\ 3x + 6y + z = & 9 \end{cases}$ e sua representação matricial:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -2 & 6 \\ 3 & 6 & 1 & 9 \end{array}\right].$$

Para que os elementos a_2 e a_3 sejam nulos, vamos substituir a segunda e terceira linhas, respectivamente, por $2l_1 - l_2$ e $3l_1 - l_3$. Realizando essas operações vetoriais obtemos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right].$$

Observe que a última linha nos dá $z = 0$. Substituindo o valor numérico de z na primeira equação, encontramos a igualdade $x = 3 - 2y$. Logo, o sistema é *possível e indeterminado* e a solução geral deste sistema pode ser expressa pela terna ordenada $(3-2y, y, 0)$, com $y \in \mathbb{R}$. De modo que, ao atribuírmos valores para y e efetuarmos os cálculos, vamos obter as soluções particulares do sistema escalonado. Para $y = -1$, por exemplo, temos o ponto $(5, -1, 0)$ que satisfaz simultaneamente as três equações do sistema linear.

Por fim, vamos resolver o sistema $\left\{\begin{array}{rr} x + 2y - z = & 3 \\ 2x + 4y - 2z = & 6 \\ 3x + 6y - 3z = & 16 \end{array}\right.$ pelo método do escalonamento, escrevendo-o na forma matricial:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -2 & 6 \\ 3 & 6 & -3 & 16 \end{array}\right].$$

Note que $a_1 = 1$ e, para anular a_2 e a_3, vamos substituir as linhas l_2 e l_3, respectivamente, por $2l_1 - l_2$ e $3l_1 - l_3$. Após essas operações, observe a matriz escalonada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{array}\right].$$

Pela última linha, temos que $0z = -7$, o que não nos permite descobrir o valor numérico das demais incógnitas. Logo, o sistema é *impossível*.

4.5 SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES E REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS

Além do processo algébrico, cada equação de um Sistema de Equações Lineares pode ser representada graficamente. Nos sistemas com duas equações e duas incógnitas percebemos que estamos tratando de equações de retas em sua forma cartesiana. De modo geral, a equação cartesiana da reta $r : ax + by = c$ é equivalente à Função Afim $y = -\frac{ax}{b} + \frac{c}{b}$, com $b \neq 0$. Esta relação é importante pois, no segundo ano do ensino médio, os estudantes já conhecem o conceito de função e sabem representá-las graficamente.

Sabemos que, em um sistema de equações lineares com duas equações e duas incógnitas, o par ordenado de números reais (x, y) é solução do sistema $\begin{cases} a_1x + b_1y = & c_1 \\ a_2x + b_2y = & c_2 \end{cases}$ se as coordenadas x, y satisfazem, simultaneamente, as duas equações.

Se as retas $a_1x + b_1y = c_1$ e $a_2x + b_2y = c_2$ possuem mais de um ponto em comum, então elas devem coincidir. Algebricamente, deve existir $r \in \mathbb{R}^*$ tal que $l_2 = rl_1$. Verifique em $\begin{cases} x - y = & 2 \\ 3x - 3y = & 6 \end{cases}$ por exemplo, que uma equação é o triplo da outra, ou seja, as duas equações são equivalentes e, portanto, definem a mesma reta. Representado geometricamente na Figura 20, o sistema proposto se reduz à equação $x - y = 2$, que possui infinitas soluções. Neste caso, dizemos que o sistema é *possível e indeterminado*, pois há infinitos pares ordenados que são solução do sistema.

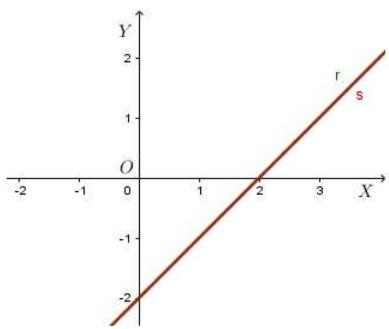

Figura 20: Sistema Possível e Indeterminado.

O sistema é *impossível* quando as retas $a_1+b_1 = c_1$ e $a_2+b_2 = c_2$

são paralelas. Para que isso aconteça, é necessário e suficiente que exista um número real $k \neq 0$ tal que $a_2 = ka_1$, $b_2 = kb_1$ e $c_2 \neq kc_1$. Tome como exemplo o sistema $\begin{cases} x - 2y = & 5 \\ 2x - 4y = & 7 \end{cases}$ e observe em sua representação geométrica na Figura 21 que as retas r e s são paralelas e não possuem pontos em comum. Ou seja, para quaisquer valores de x e y a equação não é satisfeita, logo este sistema não admite solução.

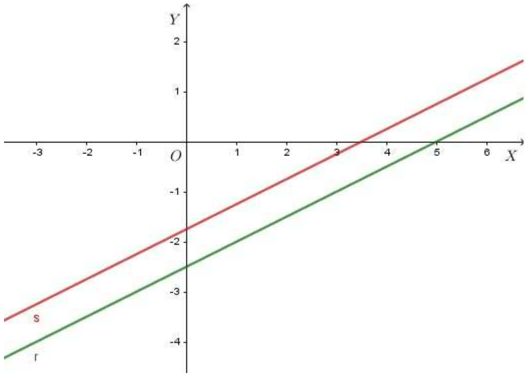

Figura 21: Sistema Impossível.

Finalmente, o sistema de equações lineares 2×2 é *possível e determinado* quando as retas $a_1x + b_1y = c_1$ e $a_2x + b_2y = c_2$ são concorrentes e intersectam-se no ponto $P(x, y)$ que é sua única solução. No sistema $\begin{cases} x + y = & 5 \\ x - y = & 1 \end{cases}$, representado graficamente na Figura 22, o par ordenado $P(3, 2)$ é o ponto de intersecção das retas, e também a única solução do sistema.

Num Sistema de Equações Lineares com três equações e três incógnitas, cada equação representa um plano no espaço.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = & d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = & d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = & d_3 \end{cases}.$$

As equações definem, nessa ordem, os planos Π_1, Π_2 e Π_3. Um terno ordenado de números reais (x, y, z) é solução do sistema se as coordenadas x, y e z satisfazem, simultaneamente, as três equações. Temos, então, três planos no espaço e queremos analisar suas posições relativas, para verificar as soluções possíveis do sistema. Examinaremos

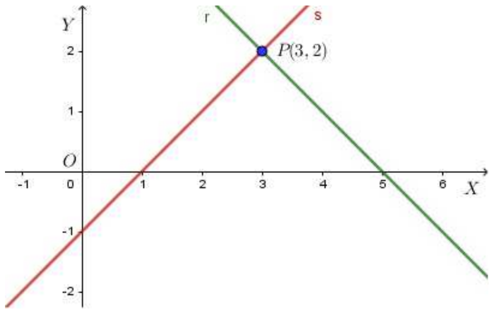

Figura 22: Sistema Possível e Determinado.

a existência dessas soluções a partir dos planos Π_1, Π_2 e Π_3 e dos respectivos vetores-linha $l_1 = (a_1, b_1, c_1)$, $l_2 = (a_2, b_2, c_2)$, $l_3 = (a_3, b_3, c_3)$ da matriz do sistema de equações lineares.

Se os três planos tem somente um ponto em comum, ou seja $\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3 = \{P\}$, então o sistema tem solução única. Neste caso, dizemos que o sistema é possível e determinado e sua solução consiste num único ponto $P(x, y, z)$. Do ponto de vista algébrico, os vetores-linha l_1, l_2 e l_3 são linearmente independentes. Tome, por exemplo, o sistema cujos vetores-linha são $l_1 = (2, -2, -3), l_2 = (1, -2, 3)$ e $l_3 = (1, -1, 1)$.

$$\left\{ \begin{array}{rl} 2x - 2y - 3z = & 1 \\ x - 2y + 3z = & 0 \\ x - y + z = & 2 \end{array} \right. .$$

Olhando para as duas primeiras coordenadas vemos que, embora $(2, -2) = \alpha(1, -2) + \beta(1 - 1)$, para $\alpha = 0$ e $\beta = 2$, a mesma igualdade não é válida para as terceiras coordenadas $-3 \neq 3 \times 0 + 1 \times 2$. Logo l_1 não é combinação linear de l_2 e l_3, concluindo que os vetores-linha são linearmente independentes e que a única solução desse sistema é o ponto de intersecção dos três planos $P(\frac{23}{5}, \frac{16}{5}, \frac{3}{5})$. Esse fato pode ser verificado geometricamente na Figura 23.

As três situações em que o Sistema de Equações Lineares 3×3 é *possível e indeterminado* estão geometricamente representadas na Figura 24.

Se dois dos planos são coincidentes, então a intersecção destes com o terceiro plano é uma reta ($\Pi_1 = \Pi_2$ e $\Pi_1 \cap \Pi_3 = r$ ou $\Pi_1 \cap \Pi_3 =$

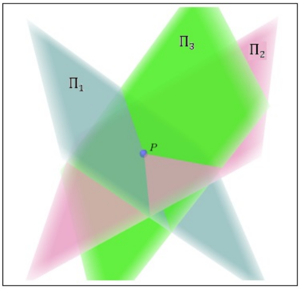

Figura 23: Sistema Possível e Determinado.

$\{\}$). Note que, para o sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} x+2y-z= & 3 \\ 2x+4y-2z= & 6 \\ 3x+6y+z= & 9 \end{cases}.$$

Os planos Π_1 e Π_2 são múltiplos. Considerando os vetores-linha $l_1 = (1,2,-1), l_2 = (2,4,-2)$ e $l_3 = (3,6,1)$, a igualdade $l_2 = \alpha l_1$ é verificada para $\alpha = 2$, mas o mesmo não ocorre em $l_3 \neq 2l_1$. Logo a interseção entre Π_1 e Π_2 é a reta $r : 2y + x = 3$ que satisfaz o sistema:

$$\begin{cases} x+2y-z= & 3 \\ 3x+6y-z= & 9 \end{cases}.$$

Portanto, as soluções do sistema dado são todos os pontos de coordenadas $(3-2y, y, 0)$ para qualquer valor real y.

Se os três planos coincidem ($\Pi_1 = \Pi_2 = \Pi_3$), então a solução são todos os pontos $(x, y, z) \in \Pi_1$. Podemos exemplificar através do sistema $\begin{cases} x+y-z= & 4 \\ 3x+3y-3z= & 12 \\ 5x+5y-5z= & 20 \end{cases}$ no qual os vetores-linha são múltiplos uns dos outros. Observe graficamente esse fato na imagem central na representação Figura 24.

A outra situação em que o sistema é possível, mas indeterminado, é o caso em que os três planos são distintos e têm uma reta em comum ($r = \Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3$), nessa situação não há paralelismo nem coincidência entre os planos. Além disso, a equação de um dos planos pode ser escrita como combinação linear das outras duas equações e nenhum dos vetores-linha l_1, l_2 e l_3 são múltiplos. Esse fato figura, por exemplo, em:

$$\begin{cases} x+y+z = & 1 \\ 2x-y+z = & 3 \\ 5x+2y+4z = & 6 \end{cases}.$$

Note que as equações são distintas e, olhando as duas primeiras coordenadas dos vetores-linha $l_1 = (1,1,1)$, $l_2 = (2,-1,1)$ e $l_3 = (5,2,4)$ percebemos que $(1,1) = \alpha(2,-1) + \beta(5,2)$ para $\alpha = -\frac{1}{3}$ e $\beta = \frac{1}{3}$ e, ainda, $1 = -\frac{1}{3} + \frac{4}{3}$. Para este sistema, as soluções são todos os pontos P da forma $(x, \frac{x-2}{2}, \frac{4-3x}{2})$.

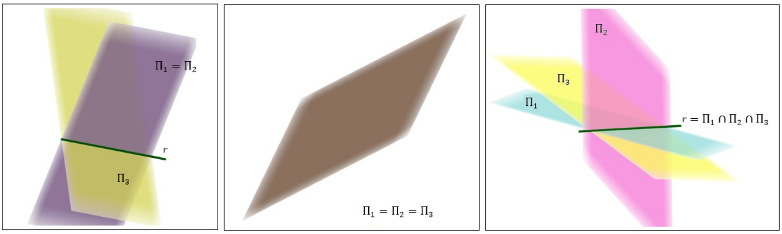

Figura 24: Casos em que o Sistema Possível e Indeterminado.

Em outras quatro situações o sistema de equações lineares 3×3 é *impossível*. Observando a representação gráfica desses sistemas na Figura 25 vamos perceber que os três planos não se intersectam simultaneamente.

No caso em que dois planos coincidem ($\Pi_1 = \Pi_2$) e o terceiro é paralelo a eles, ($\Pi_3 \parallel \Pi_1$), não há pontos que sejam comuns aos três planos e, portanto, esse sistema não tem solução. Isso ocorre quando $l_1 = \alpha l_2$, mas l_3 não é múltiplo de l_1. O sistema a seguir ilustra essa situação.

$$\begin{cases} x+2y-z = & 3 \\ 2x+4y-2z = & 6 \\ 3x+6y-3z = & 16 \end{cases}.$$

Nele, podemos perceber as relações de igualdade entre os vetores-linha $l_1 = (1,2,-1) = \frac{1}{2}(2,4,-2) = \alpha l_2$ e $l_1 = (1,2,-1) = \frac{1}{3}(3,6,-3) = \beta l_2$. Apesar disso, l_2 não é múltiplo de l_3.

Se os três planos forem paralelos dois a dois ($\Pi_1 \parallel \Pi_2 \parallel \Pi_3$), também não haverá intersecção entre eles. Neste caso, os vetores-linha

l_1, l_2 e l_3 são múltiplos e não colineares. Tome, por exemplo, o sistema:

$$\begin{cases} x+2y-z= & 3 \\ 2x+4y-2z= & 1 \\ 3x+6y-3z= & 5 \end{cases}.$$

Note que os vetores linha $l_1 = (1, 2, -1)$, $l_2 = (2, 4, -2)$ e $l_3 = (3, 6, -3)$ com $l_2 = 2l_1$ e $l_3 = 3l_1$ são múltiplos dois a dois, porém não há colinearidade entre as linhas da matriz aumentada $(1, 2, -1, 3)$, $(2, 4, -2, 6)$ e $(3, 6, -3, 16)$.

Um sistema é também impossível se dois planos são paralelos ($\Pi_1 \parallel \Pi_2$) e o terceiro os intersecta segundo retas paralelas r e s. Como não há pontos que pertençam as duas retas simultaneamente, o sistema não terá solução. Algebricamente, isso acontece pois $l_3 = \alpha l_1$, mas l_3 não é múltiplo de l_1. Para o sistema a seguir:

$$\begin{cases} x+2y-z= & 3 \\ x+2y+z= & 9 \\ 2x+4y-2z= & 1 \end{cases}.$$

Temos que $l_3 = (2, 4, -2) = 2(1, 2, -1) = \alpha l_1$. Porém, observando as linhas da matriz aumentada $(1, 2, -1, 3)$ e $(2, 4, -2, 1)$, não vamos encontrar essa relação de multiplicidade, o que indica o paralelismo entre Π_1 e Π_3.

Por fim, o próximo sistema de equações mostra três planos que se intersectam dois a dois, segundo retas paralelas r, s e t.

$$\begin{cases} x+2y-3z= & 1 \\ 3x+y+z= & 2 \\ 8x+y+6z= & 6 \end{cases}.$$

Neste caso os planos não são paralelos e nenhum dos vetores-linha $l_1 = (1, 2, -3)$, $l_2 = (3, 1, 1)$ e $l_3 = (8, 1, 6)$ é múltiplo do outro.

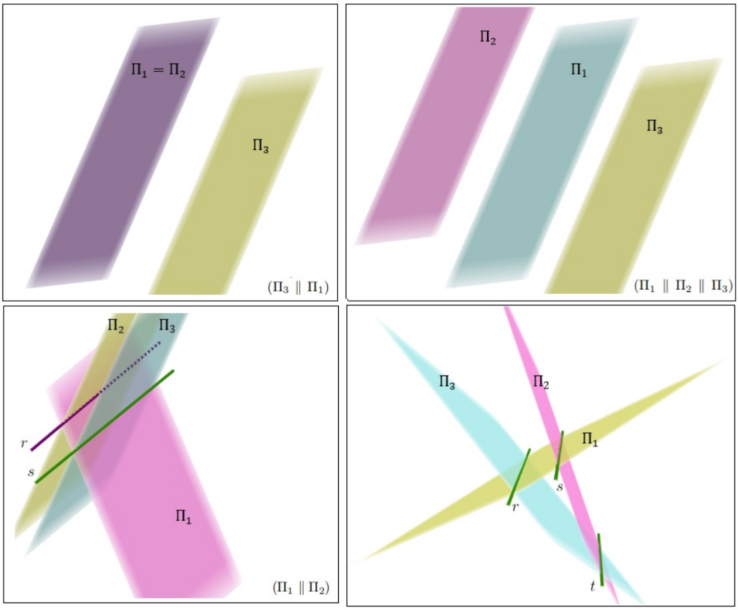

Figura 25: Casos em que o Sistema é Impossível.

5 MATRIZES: OPERAÇÕES E PROPRIEDADES.

Neste capítulo, vamos estudar o conceito de matrizes, não somente com o objetivo de organizar dados na forma tabular ou como método de resolução de sistemas de equações lineares, mas a fim de perceber as matrizes como funções que agem em vetores, transformando-os. Apresentaremos alguns exemplos simples para mostrar esta relação entre vetores e matrizes, dando uma pequena noção das transformações geométricas que ocorrem no plano: translação, escala, reflexão e rotação.

5.1 MATRIZES.

A ideia geral de matriz é uma tabela retângular de números dispostos em m linhas e n colunas na qual cada número a_{ij}, também chamado de *elemento* ou *termo* da matriz, ocupa uma posição única nas linha i e coluna j.

Definição 9 *Uma Matriz $m \times n$ é uma lista de números a_{ij}, com índices duplos, onde $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$. A matriz M é representada por um quadro numérico com m linhas e n colunas, no qual o elemento a_{ij} situa-se no cruzamento de i-ésima linha com a j-ésima coluna:*

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

(LIMA et al., 1998), p. 130.

As *linhas* da matriz M são as m listas horizontais:

$$(a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}), (a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n}), \cdots, (a_{m1}, a_{m2}, \cdots, a_{mn}).$$

As *colunas* da matriz M são as n listas verticas:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Uma matriz que tem o mesmo número de linhas e colunas é chamada de *matriz quadrada* e os elementos a_{ij} de sua diagonal $a_{11}, a_{22}, \cdots$ têm todos $i = j$.

Podemos imaginar as linhas ou colunas de uma matriz como informações numéricas que nos dão as coordenadas de algum vetor, o que nos permite tratar muitas das convenções e operações entre vetores na forma matricial.

Sobre a igualdade de matrizes podemos afirmar que;

Definição 10 *Duas matrizes são* ***iguais*** *quando têm a mesma ordem e os elementos correspondentes são iguais. Assim, se* $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ *e* $B = [b_{ij}]_{r\times s}$, *então* $A = B$ *se e somente se* $m = r, n = s$ *e* $a_{ij} = b_{ij}$ *para todo* $i = 1, ..., m$ *e* $j = 1, ..., n$ *(POOLE, 2017), p. 139.*

5.2 OPERAÇÕES COM MATRIZES.

5.2.1 Adição de Matrizes

Ao efetuar a adição de duas matrizes de mesmo tipo $m \times n$ percebemos que estamos somando os elementos correspondentes (que ocupam a mesma posição da linha e da coluna), imitando as operações análogas que fazemos com vetores.

Definição 11 *Se* $A = [a_{ij}]$ *e* $B = [b_{ij}]$ *são duas matrizes de mesma ordem* $m \times n$, *a soma de* A *e* B, *denotada* $A + B$, *é a matriz* $C = [c_{ij}]$ *de ordem* $m \times n$ *tal que* $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ *para todo* $1 \leq i \leq m$ *e para todo* $1 \leq j \leq n$ *(HEFEZ; FERNANDEZ, 2017), p. 17.*

Para valer-se das propriedades da adição de matrizes é importante estabelecer que a *matriz nula* 0 é aquela cujos termos são todos iguais a zero. Deste modo, para matrizes A, B e C de mesmo tipo $m\times n$, são válidas as propriedades associativa $A+(B+C) = (A+B)+C$, comutativa $A+B = B+A$ e do elemento neutro $A+0 = A$. A existência do oposto ou simétrico de $A = [a_{ij}]$ tal que $-A = [-a_{ij}]$ também é válida e será retomada adiante.

Podemos relacionar matrizes e vetores, lembrando que as coordenadas de vetores no plano são escritas na forma vertical. Deste modo, na matriz $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ relacionada ao vetor $\overrightarrow{OA}$ com extremidade no ponto $A(2, 3)$ é tal que $a_{11} = 2$ e $a_{12} = 3$. Por outro lado, este fato nos permite representar geometricamente matrizes e suas operações.

A fim de facilitar a visualização, ao traçarmos um número cosiderável de vetores, para evitar o acúmulo de setas no plano, vamos marcar apenas a extremidade do vetor com uso do ponto. Pode-se usar este tipo de representação sempre que necessário.

Tome como exemplo os vetores $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OG}$ com extremidades nos pontos $A(2,-1), B(4,0), C(3,1), D(\frac{3}{2},1), E(1,1)$, $F(1,2), G(0,3)$ respectivamente. Perceba na Figura 26 à esquerda os vetores traçados em forma de setas e à direita os pontos de cada uma das suas extremidades. Numa linguagem ainda mais simplificada, escrevemos verticalmente as coordenadas de cada ponto deste conjunto de vetores em uma única forma tabular:

$$ABCDEFG = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & \frac{3}{2} & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

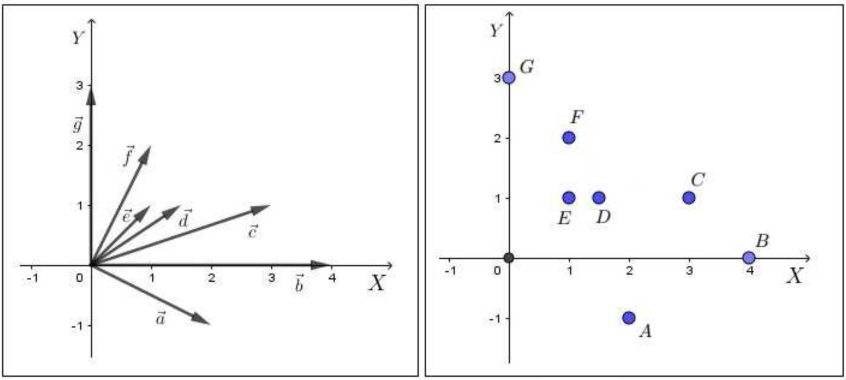

Figura 26: Vetores no Plano.

Considere, agora, o quadrilátero com vértices $ABCD$ cujas coordenadas $A(0,0), B(1,0), C(2,1)$ e $D(1,1)$ são as extremidades dos vetores $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ e $\overrightarrow{OD}$. Perceba na Figura 27 que, somando cada um desses vetores por $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$, os vértices do quadrilátero serão transportados três unidades na direção positiva horizontal, preservando a distância entre os pontos, amplitude e ângulos.

Vamos representar esta operação na forma matricial, escrevendo verticalmente as coordenadas de cada vértice de $ABCD$ e sua soma com $\vec{v}$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

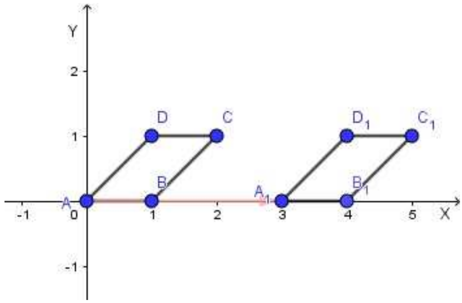

Figura 27: Translação horizontal.

$$\begin{bmatrix} 0+3 & 1+3 & 2+3 & 1+3 \\ 0+0 & 0+0 & 1+0 & 1+0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

O resultado nos dá as coordenadas dos vértices do quadrilátero $A_1B_1C_1D_1$, que foi transladado no plano. Analogamente, para deslocar $ABCD$ duas unidades no sentido negativo de OX basta somar cada um de seus vetores por $\vec{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$. De forma genérica, a translação horizontal em $\mathbb{R}_2$ ocorre quando adicionamos um mesmo vetor de coordenadas $\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$, com $x \in \mathbb{R}$, à um conjunto de outros vetores.

Se desejamos deslocar o quadrilátero $ABCD$ duas unidades para baixo, no sentido negativo de OY, é necessário adicionar o vetor de coordenadas $\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ a cada um dos vetores $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ e $\overrightarrow{OD}$. Escrevendo na forma matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0+0 & 1+0 & 2+0 & 1+0 \\ 0-2 & 0-2 & 1-2 & 1-2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Veja que na Figura 5.2.1, as coordenadas no quadrilátero transladado e o resultado da operação matricial coincidem.

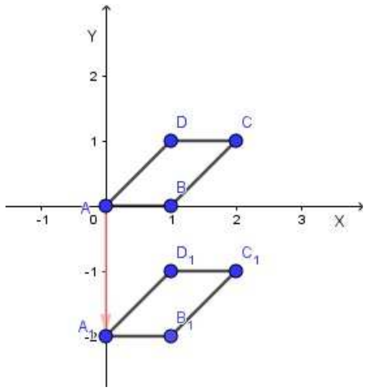

Figura 28: Translação vertical.

A translação vertical no plano sempre ocorrerá quando adicionarmos um vetor de coordenadas $\begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}$, com $y \in \mathbb{R}$, à um conjunto de vetores dado.

Após essas considerações é fácil identificar a adição de cada um dos vetores que definem o quadrilátero $ABCD$ pelo vetor $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$. Deslocamos os vértices um a um nos sentidos horizontal e vertical como mostra a Figura 29.

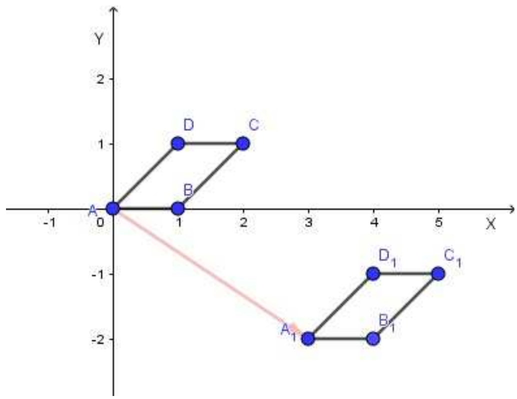

Figura 29: Translação horizontal e vertical.

É importante observar que a translação preservando distâncias, também preserva áreas de uma região plana e que a adição de vetores só faz sentido se eles têm mesma dimensão. Esta última condição explica porque só podemos adicionar matrizes de mesmo tipo.

5.2.2 Multiplicação por escalar

Outra operação que pode ser feita com matrizes e vetores de modo similar é a **multiplicação de um escalar $\boldsymbol{\lambda}$ por um vetor $\vec{\boldsymbol{u}}$**. Ao realizar esta operação, multiplicamos cada componente do vetor por λ. Sendo $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$, o produto $\lambda\vec{u} = \lambda \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \end{bmatrix}$. Essa operação transforma o plano em uma dada escala, ampliando ou reduzindo nosso quadrilátero $ABCD$.

Multiplicando cada coordenada dos vértices de $ABCD$ pelo escalar 2, estamos considerando que no plano transformado a unidade tem o dobro do comprimento daquela definida no plano original, veja na Figura 37 o quadrilátero no plano original e, representado pelas linhas em rosa, o plano transformado contendo $A_1B_1C_1D_1$.

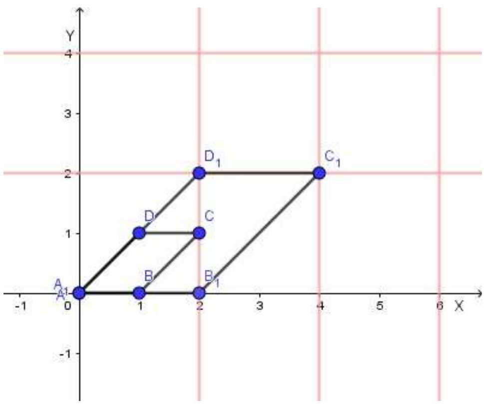

Figura 30: Escala.

Escrevemos na forma matricial:

$$2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 0 & 2\cdot 1 & 2\cdot 2 & 2\cdot 1 \\ 2\cdot 0 & 2\cdot 0 & 2\cdot 1 & 2\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Para obter um paralelogramo cujo lado mede $\frac{3}{2}$ de $ABCD$ basta multiplicar:

$$\frac{3}{2}.\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}\cdot 0 & \frac{3}{2}\cdot 1 & \frac{3}{2}\cdot 2 & \frac{3}{2}\cdot 1 \\ \frac{3}{2}\cdot 0 & \frac{3}{2}\cdot 0 & \frac{3}{2}\cdot 1 & \frac{3}{2}\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{2} & 3 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

Na Figura 31, ao fazermos o produto $-\frac{3}{2} \times ABCD$ refletimos cada vértice do paralelogramo duas vezes; primeiro relação ao eixo OY e depois em relação à OX e depois o ampliamos pelo fator $\frac{3}{2}$. A isometria de reflexão em $\mathbb{R}_2$ sempre ocorrerá quando o escalar multiplicado for negativo.

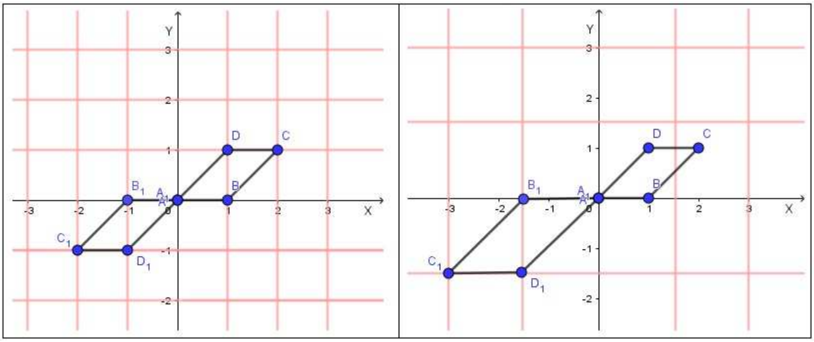

Figura 31: Multiplicação por um escalar negativo.

Observe em todos os casos que os paralelogramos $ABCD$ e $A_1B_1C_1D_1$ são semelhantes. Ao fazer esses movimentos com os vetores de ampliar, reduzir e refletir, estamos trabalhando com escalas, por este motivo, cada número real λ que multiplicamos por um vetor é chamado de escalar.

5.3 MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES

No Ensino Médio o algoritmo do produto entre matrizes é, em geral, justificado com a introdução de uma situação problema cujas informações podemos representar na forma tabular. Podemos citar alguns exemplos desta metodologia, percebida também ao analisarmos os livros didáticos: em (DANTE, 2016), p.75, utiliza-se a multiplicação entre matrizes para calcular a pontuação que cada país obteve durante a Copa do Mundo de Futebol Feminino, em (IEZZI et al., 2016), p. 80, o mesmo cálculo é utilizado para encontrar a média ponderada final do ano letivo.

A seguinte definição extraída do livro (LIMA et al., 1998), nos mostra a ideia conceitual do produto entre matrizes.

Definição 12 *Sejam* $M = a_{ij}$ *e* $N = b_{ij}$ *matrizes do tipo* $m \times n$ *e* $n \times p$ *respectivamente. O produto dessas matrizes é a matriz* $MN = c_{ij}$ *de tipo* $m \times p$*, cujo ij-ésimo elemento é dado por* $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$*.*

O produto entre matrizes é associativo $(MN)P = M(NP)$ e distributivo $(M + N)P = MP + NP$, mas não é comutativo $MN \neq NM$. Isso nos mostra que há diferenças entre o modo como se multiplica as matrizes e os números reais.

Na Seção *4.4* organizamos números na forma tabular para resolver sistemas de equações lineares e agora, conhecendo a operação de multiplicação entre matrizes, podemos escrever os mesmos sistemas como uma equação matricial.

O sistema linear $\left\{\begin{array}{rr} 2x - 2y - 3z = & 1 \\ x - 2y + 3z = & 0 \\ x - y + z = & 2 \end{array}\right.$ pode ser escrito na forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Perceba que essa equação descreve a transformação do vetor $\vec{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ em função do vetor $\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ e, considerando A a matriz dos coeficientes numéricos do sistema, façamos um paralelo com a notação de função, onde x é a variável independente e y a variável dependente, reescrevendo $Ax = y$, assim:

> A correspondência de x para Ax é uma função de um conjunto de vetores para o outro. Esse conceito generaliza a noção usual de função que é uma regra que transforma um número real em outro. (LAY, 2012), p. 63.

Não há dificuldades em perceber como efetuar a multiplicação entre as matrizes para obtermos, fazendo a igualdade entre as matrizes, novamente o sistema dado. Verificar a solução deste sistema é também um bom exercício para dar sentido ao cálculo.

Embora este seja um modo interessante de apresentar o algoritmo da multiplicação entre matrizes, iremos utilizar as transformações geométricas no plano para dar sentido a este produto.

5.3.1 Multiplicação de Matrizes e as Transformações Lineares no Plano

Para entender como a multiplicação entre matrizes transforma o plano, vamos cosiderar os dois vetores unitários que são a base do nosso sistema de coordenadas OXY: um na direção do eixo OX que chamaremos de $\vec{e_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e outro na direção de OY que chamaremos de $\vec{e_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Sempre que marcamos um ponto (x, y) neste sistema de coordenadas, o número real x nos indica quantas vezes estaremos escalando o vetor $\vec{e_1}$ e o mesmo acontece com o número real y, escalando o vetor e_2. Dessa forma, as coordenadas são escalares que ampliam, reduzem ou refletem os vetores unitários.

Tome como exemplo o vetor de extremidade $(2, -3)$, pensamos que o escalar 2 estica o vetor $\vec{e_1}$ fazendo-o medir dobro de seu comprimento e o escalar -3 inverte a direção do vetor $\vec{e_2}$ e o estica por um fator 3. Neste sentido, os vetores descritos por essas coordenadas são a soma de dois vetores escalados, a saber $2\vec{e_1} + (-3)\vec{e_2}$. Veja a representação na Figura 32.

$$2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (-3) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \cdot 0 \\ -3 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + 0 \\ 0 - 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

É fácil perceber que qualquer ponto do plano pode ser escrito como a soma dos dois vetores escalados. Além disso, podemos concluir que o vetor soma é uma combinação linear desses dois vetores unitários da base canônica em $\mathbb{R}_2$.

Definição 13 *O vetor $\vec{v}$ é **combinação linear** dos vetores $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}$ quando existem números reais $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tais que:*

$$\vec{v} = \lambda_1\vec{v_1}, \lambda_2\vec{v_2}, \ldots, \lambda_n\vec{v_n}$$

(DELGADO; FRENSEL; CRISSAF, 2017), p. 33.

Sempre que deescrevemos numericamente vetores dependemos implicitamente da base que iremos utilizar, isso nos sugere que podemos

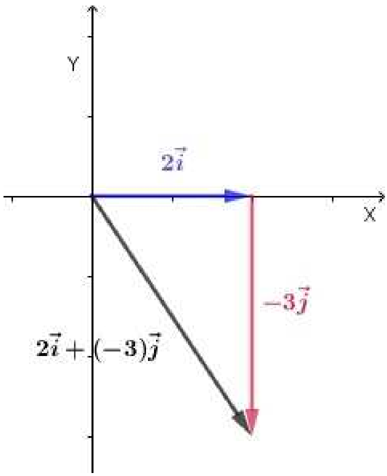

Figura 32: Coordenadas como escalares.

escolher uma outra base para o nosso sistema de coordenadas. Tome, por exemplo, os vetores $\vec{i'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\vec{j'} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e vamos escrever o vetor de extremidade $(2, -3)$ nesta nova base.

Efetuando o produto entre vetores e escalares $2\vec{i'} + (-3)\vec{j'} = 2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + (-3)\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ e somando $\begin{bmatrix} 0+3 \\ 2+0 \end{bmatrix}$ obtemos o vetor de coordenadas $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$. Observe na Figura 33, ao lado esquerdo temos o vetor original e à direita o vetor transformado.

Uma Transformação Linear fica completamente determinada pela escolha de dois vetores da base (não múltiplos e distintos) com os quais fazemos a combinação linear de quaisquer vetores do sistema de coordenadas OXY. De modo geral, conhecendo dois vetores da base $\vec{i} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ e $\vec{j} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$, escrevemos a combinação linear $x\vec{i} + y\vec{j}$ do vetor $\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e encontramos sua extremidade.

Podemos registrar as coordenadas dos vetores $\vec{i}$ e $\vec{j}$ em uma única matriz $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ e, como sabemos, $x\vec{i} + y\vec{j} = x\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ é o cálculo para encontrar a versão transformada do vetor $\vec{v}$. Organizando essas informações, obtemos uma justificativa para o modo como mul-

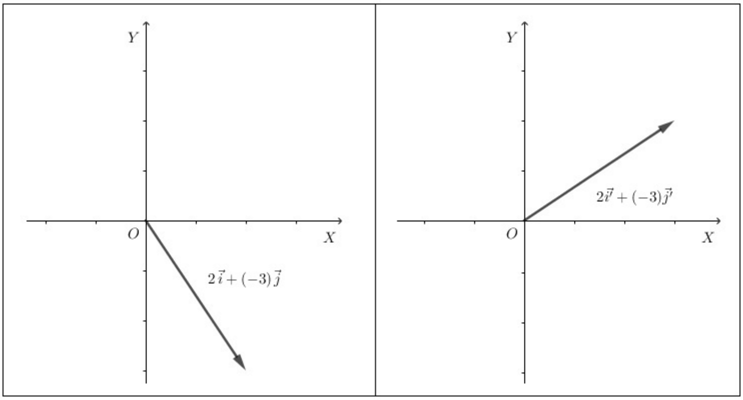

Figura 33: Vetor Transformado.

tiplicamos matrizes, sendo o produto, a representação de uma transformação linear específica.

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + cy \\ bx + dy \end{bmatrix}.$$

Note que o vetor transformado da Figura 33 conservou seu comprimento, mas sofreu um giro no sentido positivo. De modo análogo, se associarmos cada ponto do plano à extremidade de um vetor, ao escrevê-los nesta mesma base, serão igualmente transformados. Perceba na Figura 34 como o quadrilátero $ABCD$ com extremidades $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(2,1)$ e $D(1,1)$ é rotacionado no plano.

Relacionando a teoria de Matrizes com a Trigonometria, quando rotacionamos os eixos coordenados girando o plano num ângulo θ no sentido positivo em torno da origem O, os vetores unitários da base passam a ser $\vec{i} = \begin{bmatrix} cos\theta \\ sen\theta \end{bmatrix}$ e $\vec{j} = \begin{bmatrix} -sen\theta \\ cos\theta \end{bmatrix}$. As coordenadas $O\overline{XY}$ das extremidades desses vetores da base são obtidas fazendo uso das relações trigonométricas no triângulo retângulo. Observe na Figura 35 o ângulo θ rotacionando o plano e os vetores unitários $\vec{i}$ e $\vec{j}$.

Logo, para descobrirmos as coordenadas da extremidade de um vetor $\vec{v} = (x, y)$ nesta nova base devemos fazer:

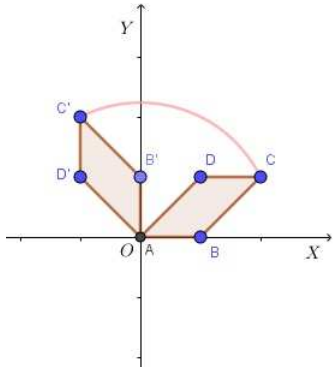

Figura 34: Vetor Transformado.

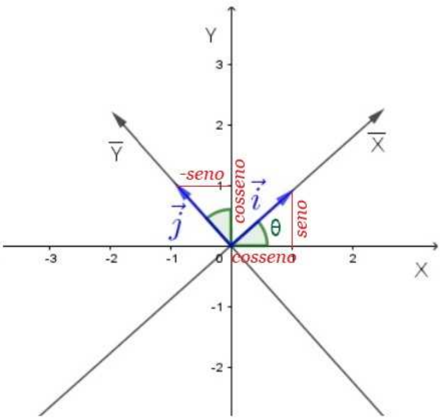

Figura 35: Rotação dos eixos coordenados.

$$\begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} cos\theta \\ sen\theta \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -sen\theta \\ cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xcos\theta - ysen\theta \\ xsen\theta + ycos\theta \end{bmatrix}.$$

Se desejamos girar o vetor de extremidade $(2, -3)$ num ângulo de 45^o em torno da origem, sendo $sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, calculamos:

$$\begin{bmatrix} cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & -sen\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ sen\left(\frac{\pi}{4}\right) & cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} =$$

$$2\begin{bmatrix} cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ sen\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix} + (-3)\begin{bmatrix} -sen\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} & +(-3) & \cdot & \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} & +(-3) & \cdot & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5\sqrt{2}}{2} \\ \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

Observe na Figura 36 que a imagem de $(2, -3)$ é o ponto de coordenadas $(\frac{5\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) \cong (3,535, -0,707)$. De modo geral, um ângulo positivo corresponde a uma rotação no sentido anti-horário e um ângulo negativo no sentido horário. Note, ainda, que a rotação dos eixos ordenados mantém as linhas de grade paralelas e igualmente espaçadas, conservando fixa a origem O.

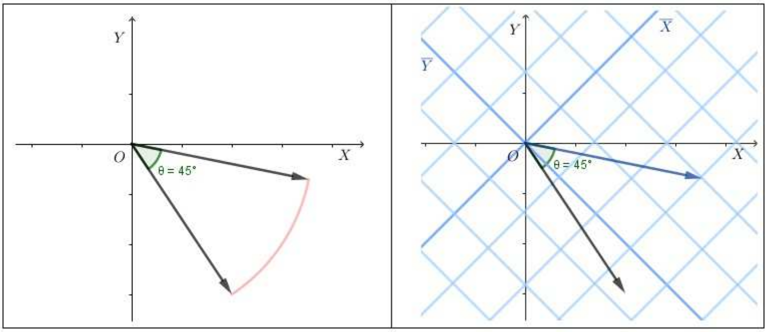

Figura 36: Giro de 45°.

Por outro lado, se conhecemos as coordenadas $O\overline{XY}$ de um vetor e queremos escrevê-las no sistema OXY de coordenadas fazemos:

$$\begin{bmatrix} cos\theta & sen\theta \\ -sen\theta & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} cos\theta \\ -sen\theta \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} sen\theta \\ cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xcos\theta + ysen\theta \\ xsen\theta - ycos\theta \end{bmatrix}.$$

Perceba que se considerarmos cada ponto como extremidade de um vetor e o escrevermos numa nova base estaremos transformando o plano. Esse tipo de função que, dados os vetores de uma base e o seu domínio, modifica todos os vetores do plano é chamada de Transformação Linear. Apesar das mudanças, neste novo sistema de coordenadas são preservadas as operações de adição de vetores e de multiplicação de um vetor por um escalar.

6 DETERMINANTES

Como vimos, ao multiplicar um número real por um vetor, aumentamos ou diminuimos seu comprimento. Na Seção 5.2.2, que trata sobre a *multiplicação de uma matriz por um escalar*, observamos na Figura 37 que ao multiplicar cada uma das coordenadas de $ABCD$ pelo escalar 2, os lados do quadrilátero aumentaram o dobro de seu comprimento, mas o que se pode dizer a respeito da área dessas figuras?

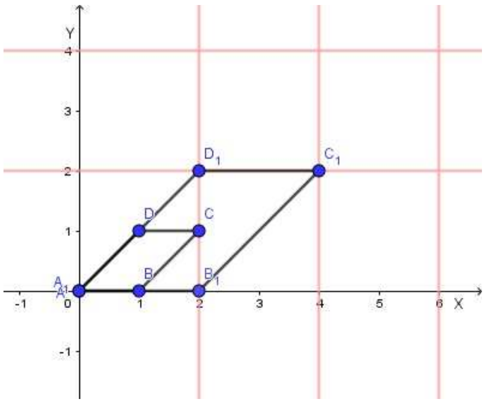

Figura 37: Escala.

Neste estudo veremos que o *determinante* é um número associado a uma matriz quadrada e que suas aplicações geométricas estão intimamente relacionadas com os cálculos de área (para matrizes de ordem 2) e também de volume (para matrizes de ordem 3). Assim, o determinante da matriz de ordem 2 é definido por:

Definição 14 *Seja* $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, *onde* $\vec{i} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$ *e* $\vec{j} = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ *são dois vetores de* $\mathbb{R}_2$ *que correspondem às colunas da matriz. O determinante de* A *é o escalar* $det(A) = ad - bc$.

Com isso, vamos verificar que a área do paralelogramo definido pelos vetores $\vec{i}$ e $\vec{j}$ do plano é igual ao módulo do determinante.

Quando os vetores $\vec{i}$ e $\vec{j}$ pertencem aos eixos ordenados OX e OY, respectivamente, suas coordenadas são $\vec{i} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\vec{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ d \end{bmatrix}$. O paralelogramo que observamos na representação geométrica é o retângulo R e sua área é dada pelo produto $a \times d$.

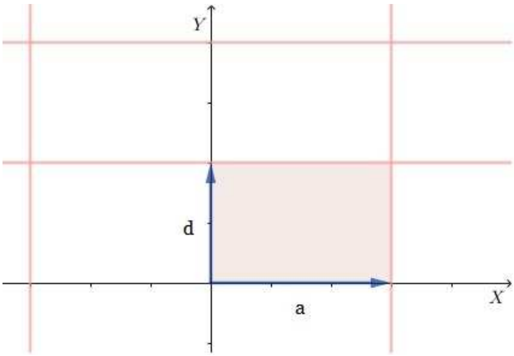

Figura 38: Retângulo R

De fato, o módulo do determinante da matriz associada às coordenadas destes vetores é igual a área do retângulo traçado.

$$det(R) = ad - 0 = ad$$

Suponha, agora, que os vetores $\vec{i}$ e $\vec{j}$ têm coordenadas não-nulas. Esta situação, representada na Figura 39, nos revela a área do paralelogramo traçado no plano.

$$det\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = (a+b)\cdot(c+d) - ac - bd - 2bc = ad - bc.$$

Com base nesses resultados, note que no quadrilátero $ABCD$ da Figura 37, a medida da área dada por $\det\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 1 - 1\cdot 0 = 1$ é quadruplicada quando cada uma de suas coordenadas é multiplicada pelo fator 2 em $\det\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 2 - 2\cdot 0 = 4.$

Há casos em que o determinante de uma matriz é igual a zero, $\det\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4\cdot 1 - 2\cdot 2 = 4 - 4 = 0$ (veja Figura 40). Nestes, os vetores escolhidos são colineares e, portanto, não há alguma região entre eles.

No estudo da geometria analítica do ensino médio é também calculada a área de um triângulo dadas as coordenadas de seus vértices. Como exemplo, considere o triângulo ABC cujos vértices têm coor-

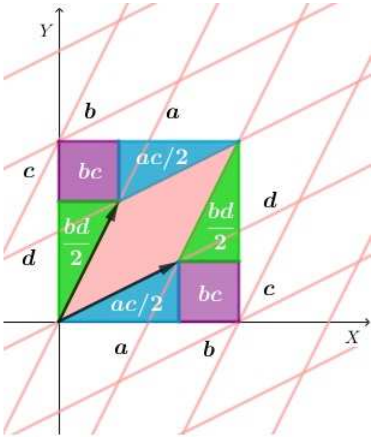

Figura 39: Representação geométrica do cálculo do Determinante de ordem 2.

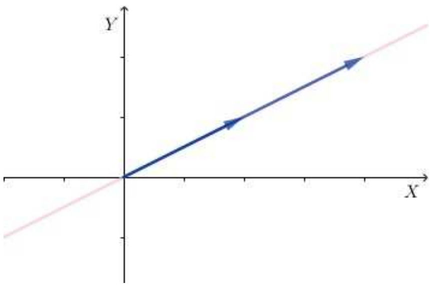

Figura 40: Determinante Nulo.

denadas $A(2,3)$, $B(1,8)$ e $C(-5,2)$. Utilizando a Definição 1 faremos o ponto C corresponder à origem $O(0,0)$, manipulando algebricamente vetores através cálculos $\overrightarrow{CA} = (2-(-5), 3-2) = (7,1)$ e $\overrightarrow{CB} = (1-(-5), 8-2) = (6,6)$. A representação geométrica pode ser observada na Figura 41.

Escrevendo as coordenadas destes vetores na forma matricial, temos:

$$T = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Sabemos que o módulo do determinante associado a esta matriz nos dá a área do paralelogramo cujos lados definimos pelos vetores-

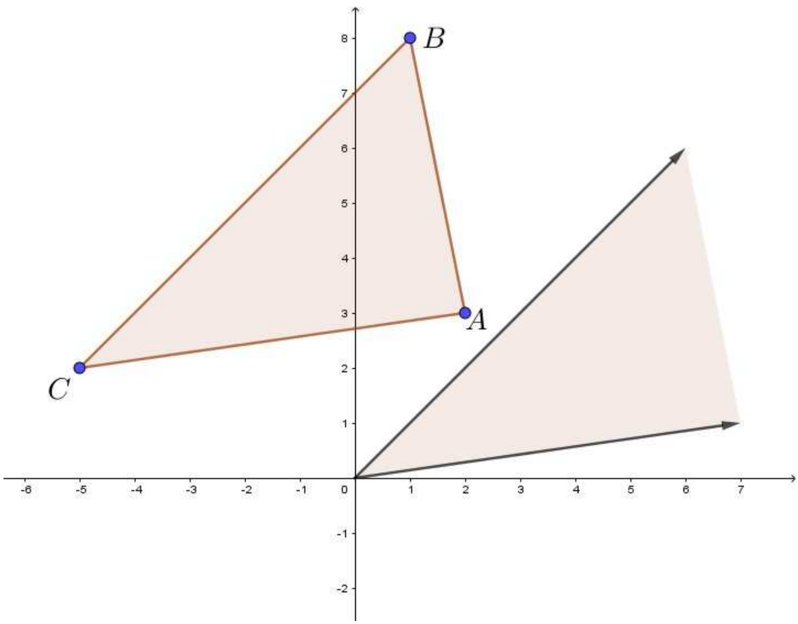

Figura 41: Triângulo ABC.

coluna mas, como a figura se trata de um triângulo, basta considerarmos a metade deste resultado:

$$\frac{1}{2} \times |det(T)| = \frac{1}{2} \times |(7 \times 6) - (6 \times 1)| = \frac{36}{2} = 18.$$

No espaço tridimensional, o determinante é um número que, em módulo, nos permite descobrir o volume do paralelepípedo definido por três vetores do espaço.

Definição 15 *Seja* $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$*, onde* $\vec{u} = \begin{bmatrix} a \\ d \\ g \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} b \\ e \\ h \end{bmatrix}$ *e* $\vec{r} = \begin{bmatrix} c \\ f \\ i \end{bmatrix}$ *são três vetores no espaço tridimensional que correspondem às colunas da matriz* A*. Então, o determinante de* A *é o escalar* $det(A) = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$.

Observe que os sinais dos termos ora são postivos ora negativos e cada determinante de ordem 2×2, multiplicado por um elemento da matriz A, é obtido retirando a linha e a coluna que o contém.

No sistema de coordenadas $OXYZ$, os vetores $\vec{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\vec{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ definem as arestas de um cubo de volume igual a 1. Esse resultado é também obtido pelo cálculo:

$$\begin{aligned} det \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} &= 1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}. \\ &= 1(1-0) - 0 + 0 = 1 \end{aligned}$$

Veja na Figura 43 que ao escalarmos os vetores $\vec{i}, \vec{j}$ e $\vec{k}$ pelos fatores $2, 3$ e 4, respectivamente, o volume do paralelepípedo que têm como arestas esses vetores é igual a 24, obtido também pelo cálculo do determinante:

$$\begin{aligned} det \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} &= 2\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}. \\ &= 2(12-0) - 0 + 0 = 24 \end{aligned}$$

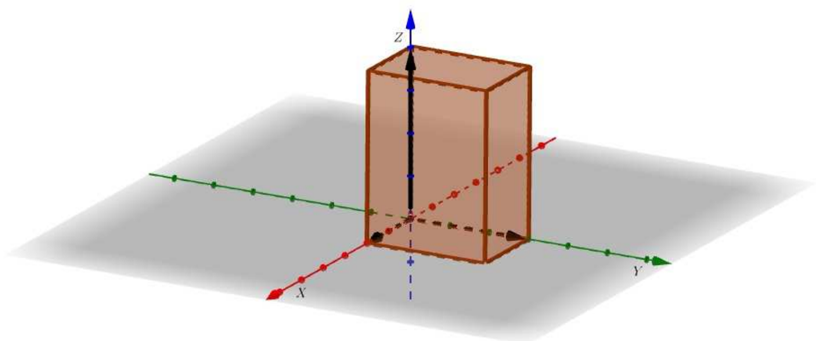

Figura 42: O determinante 3×3 é o volume do Paralelepípedo.

De modo similar, vamos calcular o volume de um outro para-

lelepípedo P cujas arestas são definidas pelos vetores $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$,
$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\vec{r} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$.

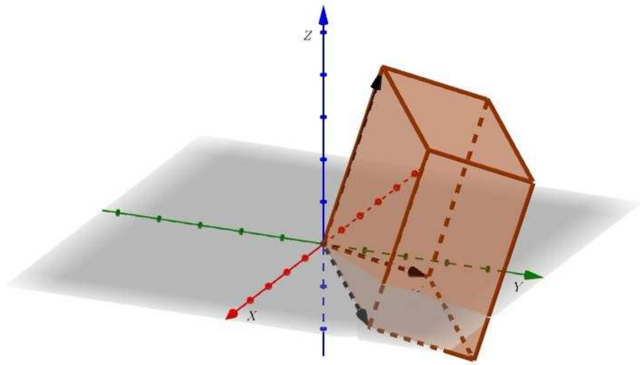

Figura 43: Paralelepípedo P.

Pelo cálculo do determinante, temos:

$$\begin{array}{rcl} det\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} & = & 2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ & = & 2(12) - 1(7) + (-1)(-3) \\ & = & 24 - 7 + 3 \\ & = & 20 \end{array}.$$

Podemos verificar a veracidade deste resultado também encontrando-o de forma geométrica. Sabemos que, conhecendo *Área da Base* A_b e a *altura* h de P, a medida de seu volume V é dada por $V = A_b \times h$.

Se um determinantede ordem 3 for igual a zero, então o espaço fora reduzido em algo com volume igual a zero como um plano, uma reta ou ainda um único ponto.

7 CONCLUSÃO

O desenvolvimento deste trabalho foi motivado pela necessidade de estudar Matrizes de uma forma significativa, correlacionando conceitos de Álgebra que são estudados no segundo ano do Ensino Médio regular e os apresentando consoante ao processo histórico de desenvolvimento dessas teorias.

Com a análise de alguns livros didáticos, percebemos que o estudo de Matrizes é visto de forma superficial, mais como uma tabela que contém informações numéricas o que, consequentemente, traz pouco sentido às definições, propriedades e operações entre matrizes. Além disso, nestes livros o conceito de determinante tem o propósito unicamente de verificar as soluções de um sistema de equações lineares, tema também abordado nesta dissertação.

Assim como na história da matemática cada conceito não tem ao certo a data de seu nascimento e nem é de todo finalizado, buscamos mostrar que a existência de uma ordem cronológica de construção desses conceitos não justifica a possibilidade de entendê-los isoladamente. Relacionar a teoria das Matrizes aos Sistemas de Equações Lineares permite que se compreenda muitas de suas propriedades e operações, representá-las geometricamente no espaço vetorial e observar essas transformações nos possibilita a percepção visual do cálculo algébrico.

Contudo, apesar da busca de um texto completo, muito ainda pode ser acrescentado de modo que este trabalho tem se tornado, para mim, um motivador para a continuidade de estudos nesta área.

REFERÊNCIAS

BALESTRI, R. *Matemática: interação e tecnologia*. 2. ed. São Paulo: Leya, 2016.

BAUMGART, J. K. *História da Álgebra: tópicos de história da matemática para uso em sala de aula*. São Paulo: Atual, 1992.

BERNARDES, A. C. d. S. *História e ensino de Matrizes: promovendo reflexões sobre o discurso matemático*. Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, 2016. Acesso em 20 fev. 2019. <https://www.cos.ufrj.br/uploadfile/publicacao/2606.pdf>.

BOYER, C. B.; GOMIDE, E. *História da Matemática*. 3. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2010.

CHRISTENSEN, J. *historia1*. 2012. Acesso em 17 jan. 2019. <https://www.math.utah.edu/ gustafso/s2016/2270/web-projects/christensen-HistoryLinearAlgebra.pdf>.

DANTE, L. R. *Matemática: contexto e aplicações*. 3. ed. São Paulo: Ática, 2016.

DELGADO, J.; FRENSEL, K.; CRISSAF, L. *Geometria Analítica*. Rio de Janeiro: SBM, 2017.

DOMINGUES, H. H.; IEZZI, G. *Álgebra Moderna: volume único*. 4. ed. São Paulo: Atual, 2003.

EVES, H.; H. DOMINGUES, H. *Introdução à história da matemática*. 5. ed. Campinas - SP: Editora da Unicamp, 2001.

HEFEZ, A.; FERNANDEZ, C. d. S. *Introdução à Álgebra Linear*. Rio de Janeiro: SBM, 2017.

IEZZI, G. et al. *Matemática:ciência e aplicações*. São Paulo: Saraiva, 2016.

LAY, D. C. *Álgebra Linear e suas aplicações*. 2. ed. São Paulo: Ltc, 2012.

LIMA, E. L. et al. *A Matemática do Ensino Médio*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1998.

NETO, A. C. M. *Tópicos de Matemática Elementar*. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

POOLE, D. *Álgebra Linear: uma introdução moderna*. 2. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2017.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. *Matemática para compreender o mundo*. 1. ed. São Paulo: Saraiva, 2016.

SOUZA, J. R. d.; GARCIA, J. d. S. R. *Contato Matemática*. 1. ed. São Paulo: FTD, 2016.