GRUEMA

(Grupo de Ensino de Matemática Atualizada)

ANNA AVERBUCH
FRANCA COHEN GOTTLIEB
LUCÍLIA BECHARA SANCHEZ
MANHÚCIA PERELBERG LIBERMAN

(licenciadas em Matemática)

Supervisão de
L. H. JACY MONTEIRO
(da Universidade de S. Paulo)

CURSO MODERNO DE MATEMÁTICA

Para o ensino de primeiro grau

7.a Série
(1.a parte)

Edição Experimental

SÃO PAULO

GRUEMA

(Grupo de Ensino de Matemática Atualizada)

ANNA AVERBUCH
FRANCA COHEN GOTTLIEB
LUCÍLIA BECHARA SANCHEZ
MANHÚCIA PERELBERG LIBERMAN

(licenciadas em Matemática)

Supervisão de
L. H. JACY MONTEIRO
(da Universidade de S. Paulo)

CURSO MODERNO DE MATEMÁTICA

Para o ensino de primeiro grau

7.a Série
(1.a parte)

Edição Experimental

SÃO PAULO

INDICE

RELAÇÕES

RELAÇÃO INVERSA

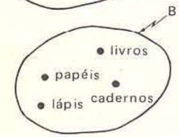
Grupo I — Exercícios preliminares

1) Considere os conjuntos

A = {escola, livro, caderno, papel}
B = {papéis, livros, lápis, cadernos}

a) No diagrama trace em vermelho as flechas que representam a relação P de A em B definida por:

"a cada palavra associo seu plural".



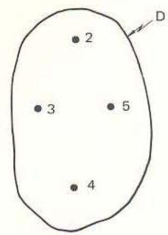
b) No diagrama trace em preto as flechas que representam a relação P^{-1} de B em A definida por:

"a cada palavra associo seu singular".

c) Complete: P = {(livro, livros), ... }
P^{-1} = {(cadernos, caderno), ... }

2) Considere o conjunto

D = {2, 3, 4, 5}



a) No diagrama, trace em azul as flechas que representam a relação S sobre D definida por:

"x é múltiplo de y"

b) No diagrama trace em laranja as flechas que representam a relação S^{-1} sobre D definida por:

"x é divisor de y".

c) Complete pela enumeração: $S = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$S^{-1} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Você observou que:

> No exercício 1, para cada flecha vermelha de P existe uma preta de P^{-1} em sentido inverso. No exercício 2, para cada flecha azul de S existe uma flecha laranja de S^{-1} em sentido inverso.

De um modo geral:

> Dizemos que a relação R^{-1} é *inversa* da relação **R** quando:
> para todo $(x,y) \in R$ existe $(y,x) \in R^{-1}$

Anote:

> Indicamos a relação inversa da relação **R** por R^{-1}

Grupo II – Exercícios de Aplicação

1) Seja P um conjunto de pessoas e R a relação sobre P definida por:
"x é pai de y".

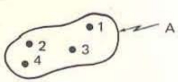
Complete:

A R^{-1} definida por: "x é ...."

2) Qual é a inversa da relação definida por:
"x é o quíntuplo de y"? ....

3) Qual é a inversa da relação definida por:
"x é o cubo de y"? ....

4) No diagrama represente por flechas vermelhas a relação M sobre A definida por
"$x < y$"



b) No mesmo diagrama represente por flechas verdes a relação M^{-1} sobre A.

c) Qual a sentença que define M^{-1}? ....

5) Coloque V ou F:
a) Se $(a,b) \in R$ então $(b,a) \in R^{-1}$ ☐
b) Se $(a,a) \in R$ então $(a,a) \notin R^{-1}$ ☐
c) Se $R \subset A \times A$ então $R^{-1} = R$ ☐

6) Complete:
a) Se $S \subset A \times B$ então $S^{-1} \subset \ldots\ldots$
b) Se $P \subset A \times A$ então $P^{-1} \subset \ldots\ldots$

COMPOSIÇÃO DE RELAÇÕES

Grupo III – Exercícios Preliminares

1) Sejam os conjuntos de pessoas:

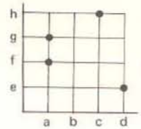
$A = \{a, b, c, d\}$
$B = \{e, f, g, h\}$
$C = \{i, j, k, m\}$

e as relações:

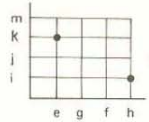
I de A em B definido por:
"x é irmão de y".

P de B em C definido por:
"x é pai de y".

de acordo com os quadros ao lado.



relação I

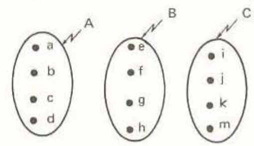


relação P

a) Trace, no diagrama, em vermelho as flechas que representam I e em verde as flechas que representam P.

b) Trace em preto no diagrama as flechas que representam a relação T de A em C:

$T = \{(c, i), (d, k)\}$



c) Qual a sentença que define a relação T? ....

2) Sejam os conjuntos:

$A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \leqslant 5\}$
$B = \{x \in \mathbb{N} \mid 11 < x \leqslant 15\}$
$C = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é par e } 20 \leqslant x \leqslant 30\}$

e as relações:

T de A em B definida por:

$x \longrightarrow 3x$

D de B em C definida por:

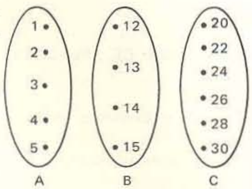
$x \longrightarrow 2x$

a) Complete T = ____________
D = ____________

b) Trace no diagrama, as flechas que representam T e D.

c) Trace no diagrama, as flechas que representam a relação S de A em C definida por:

$x \longrightarrow 6x$



Você observou que:

> No exercício 1, f é imagem de a pela I,
> j é imagem de f pelo P
> logo j é imagem de a pelo T
> caso análogo se passo com d, e, c.
>
> No exercício 2, 12 é imagem de 4 pelo T
> 24 é imagem de 12 pelo D
> logo 24 é imagem de 4 pelo S
> caso análogo se passo com 5, 15 e 30.

Anote:

> Dizemos que:
>
> No exercício 1, T é a relação composta de P com I e escrevemos:
> $T = P \circ I$
> No exercício 2, S é a relação composta de D com T e escrevemos:
> $S = D \circ T$

De um modo geral:

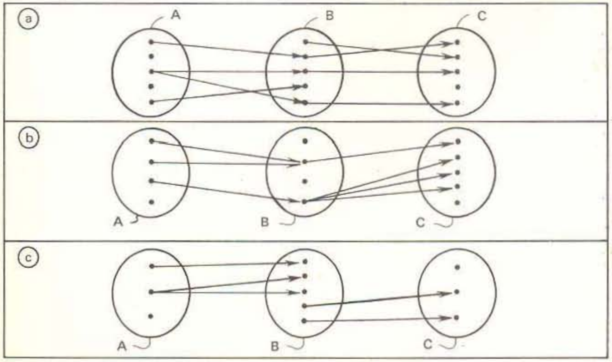
> Dados os conjuntos A, B e C e as relações R de A em B, S de B em C e T de A em C, dizemos que T é a relação composta de R e S (e indicamos $T = S \circ R$) se:
>
> para todo elemento $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$,
> havendo $(a,b) \in R$ e $(b,c) \in S$ existe $(a,c) \in T$

Atenção:

> 1) Os conjuntos A, B e C não são necessariamente diferentes nem disjuntos.
>
> 2) Na maneira de anotar $T = S \circ R$ a relação aplicada em primeiro lugar está à direita daquela que se aplica em segundo lugar.

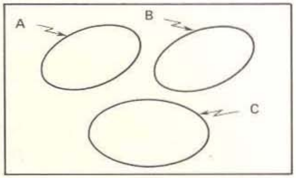
Grupo IV – Exercícios de Aplicação.

1) Considere os conjuntos dos diagramas ⓐ, ⓑ e ⓒ e as relações neles representadas.
Trace, quando possível, as flechas que representam as relações compostas.



2) Dados:

$A = \{1, 2, 3\}$
$B = \{a, b, c, d\}$
$C = \{x, y, z\}$
$M = \{(1,a), (2,b), (2, c)\ (3, c)\}$
$N = \{(a,x), (b, y), (d, z)\}$



a) Trace no diagrama os elementos de A, B e C e as flechas de M e N.

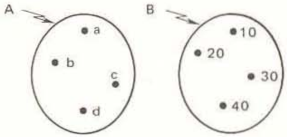
b) Complete: $N \circ M =$ ____________________

3) Dados:

$A = \{a, b, c, d\}$
$B = \{10, 20, 30, 40\}$
$R = \{(a,10), (b,20), (b,30)\}$

a) Complete: $R^{-1} =$ . . . .

b) Trace, no diagrama, em vermelho, as flechas que representam R e em verde as que representam R^{-1}.



c) complete:

$R \circ R^{-1} =$ . . . .

$R^{-1} \circ R =$ . . . .

d) Trace, no diagrama acima, em azul, as flechas que representam $R \circ R^{-1}$, e em preto as flechas que representam $R^{-1} \circ R$

Observe que:

$$R \circ R^{-1} \neq R^{-1} \circ R$$

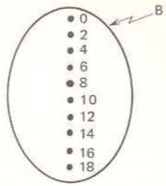
4) Seja $B = \{x \in N \mid x \text{ é par e } n \leqslant 18\}$ e as relações sobre B:

M definida por $x \longrightarrow 3x$

N definida por $x \longrightarrow \frac{x}{2}$

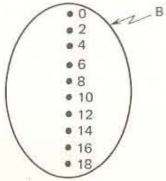
a) Trace em vermelho, no diagrama, as flechas que representam M.

b) Trace em verde, no diagrama, as flechas que representam N.



c) Trace, no segundo diagrama, em azul as flechas que representam $N \circ M$. (preste atenção: uma flecha vermelha seguida de uma verde)

d) Trace, no segundo diagrama, em laranja as flechas que representam $M \circ N$. (preste atenção: uma flecha verde seguida de uma vermelha)



e) Complete com = ou $\neq$:

$N \circ M$ . . . . . . $M \circ N$

De um modo geral:

Dadas duas relações R e S sobre um mesmo conjunto A quase sempre

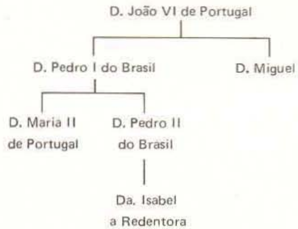
$$R \circ S \neq S \circ R$$

5) Você sabe o que é uma árvore genealógica?

É um diagrama que indica as relações de parentesco.

Quando um nome está abaixo de outro ligados por uma linha não interrompida, a pessoa correspondente ao nome mais embaixo é filho da que corresponde ao de cima.

Observe a árvore genealógica de uma parte da família de Orleans e Bragança.



No quadro ao lado você encontra as abreviações dos nomes.

nome	símbolo
D. João VI	j
D. Pedro I	p_1
D. Miguel	m_1
D. Maria II	m_2
D. Pedro II	p_2
Da. Isabel	i

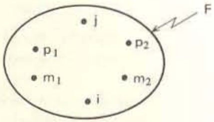
Considere o conjunto:

$F = \{j, p_1, p_2, m_1, m_2, i\}$

a) No diagrama represente em preto por flechas a relação P sobre F definida por:

"x é pai de y"

b) No diagrama represente em azul a relação, sobre F, $P_\circ P$



c) complete pela enumeração:

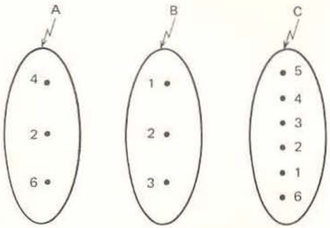
$P_\circ P$ = { . . . . }

d) $P_\circ P$ é definida por: " . . . . "

6) Você lembra que uma relação R de A em B é uma *função* quando: *cada elemento de A tem uma e uma só imagem em B pela R.*

Dados:

$A = \{4, 2, 6\}$
$B = \{1, 2, 3\}$
$C = \{5, 4, 3, 2, 1\}$

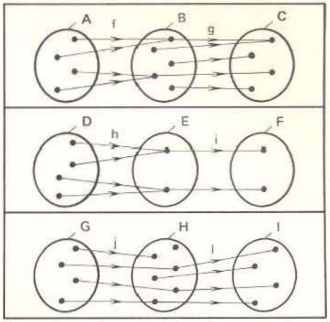


a) No diagrama trace as flechas que representam as relações:
(em vermelho) M de A em B, definida por $x \longrightarrow \frac{x}{2}$
(em azul) N de B em C, definida por $x \longrightarrow x + 3$
(em verde) $T_\circ M$ de A em C

b) Assinale V ou F:

M é uma função ☐
T é uma função ☐
$T_\circ M$ é uma função ☐

7) Considere as relações representadas através das flechas.



a) Construa por meio de flechas coloridas as relações compostas

b) A relação f de A em B é função? . . . .
A relação g de B em C é função? . . . .
A composta $g_\circ f$ é função? . . . .

c) A relação h de D em E é função? . . .
A relação i de E em F é função? . . . .
A composta $i_\circ h$ é função? . . .

d) A relação j de G em H é função? . . . .
A relação l de H em I é função? . . . .
A composta $l_\circ j$ é função? . . . .

e) Pense se conseguiria construir uma composta de duas funções que não seja função.

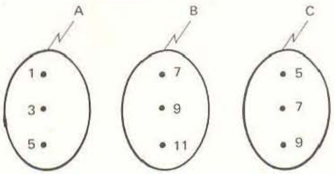
De um modo geral:

A composta de duas funções é uma função.

8) Você lembra que uma função F de A em B é uma *bijeção* quando: *cada elemento de B é imagem de um e um só elemento de A pela F.*

Dados:

$A = \{1, 3, 5\}$
$B = \{7, 11, 9\}$
$C = \{9, 5, 7\}$



Represente no diagrama as funções:

(em verde) de A em B definida por "$x \longrightarrow x + 6$"

(em azul) de B em C definida por
''x → x - 2''

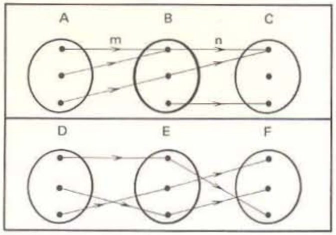
a) Assinale com V ou F:

R é uma bijeção ☐
T é uma bijeção ☐

b) Represente em vermelho no diagrama a composta T∘R

c) T∘ R é uma bijeção? . . . .

9) Considere as funções representadas através de flechas no diagrama ao lado



a) Construa as compostas por flechas coloridas.

b) A função *m* de A em B é bijeção? . . . .
A função *n* de B em C é bijeção? . . . .
A composta n∘m é bijeção?. . .

c) A função *p* de D em E é bijeção? . . . .
A função *q* de E em F é bijeção? . . . .
A composta p∘q é bijeção? . . . .

d) Veja se consegue construir uma composta de duas bijeções que não seja bijeção.

De um modo geral:

> A composta de duas bijeções é uma bijeção.

GRUPOS

Grupo I — Exercícios preliminares

1) Considere o conjunto
A = {△, □, ▲, ■}

*	△	□	▲	■
△	△	□	▲	■
□	□	△	■	▲
▲	▲	■	△	□
■	■	▲	□	△

a) Complete
△*▲ = ...   ▲*△ = ...
△*□ = ...   □*△ = ...
△*■ = ...   ■*△ = ...
△*△ = ...

b) A operação * tem o elemento neutro? . . . .

c) Qual? . . . .

d) Observando a Tábua você sabe responder a * é comutativa? . . . .

e) Sabendo que * é associativa, complete com = ou ≠:
(▲ *□) *■. . . ▲* (□*■)
(□ * □) *■. . . □ * (□ *■)
(△*▲) *△. . . □ * (■ * □)

f) Complete:
△*△ = ... então o inverso de △ é . . . . . .
□ * □ = ... então o inverso de □ é . . . . . .
■* ■ = ... então o inverso de ■ é . . . . . .
▲ * ▲ = ... então o inverso de ▲ é . . . . . .

Você observou que:

> A operação * definida em A é: comutativa
> associativa
>
> ela tem elemento neutro e
> todo elemento tem inverso.

De um modo geral:

> Dado um conjunto X e uma operação & em X, dizemos que
> (X, &) é *um grupo*
>
> Se: & é associativa
> X tem elemento neutro
> todo elemento de X tem inverso.
>
> Se ainda: & é comutativa dizemos que:
> (X, &) é um *grupo comutativo.*

Grupo II – Exercícios de Aplicação.

1) Seja o conjunto
$G = \{g, r, u, e, m, a\}$
e a operação ⊕ definida pela Tábua, que é associativa

⊕	g	r	u	e	m	a
g	r	u	e	m	a	g
r	u	e	m	a	g	r
u	e	m	a	g	r	u
e	m	a	g	r	u	e
m	a	g	r	u	e	m
a	g	r	u	e	m	a

a) Complete:

a ⊕ m = ...
a ⊕ e = ...
m ⊕ a = ...
e ⊕ a = ...

b) Observe a Tábua e responda:
G tem elemento neutro em relação a ⊕? . . . .
em relação a ⊕ qual o inverso de g? . . . .
de r? . . . .
de u? . . . .
de e? . . . .
de m? . . . .
de a? . . . .

c) (G, ⊕) é um grupo? . . . .

2) No mesmo conjunto G.
Considere a operação associativa ⊕ definida pela Tábua:

Observe a tábua e responda:

⊕	g	r	u	e	m	a
g	g	g	g	g	g	g
r	g	r	u	e	m	a
u	g	u	m	g	u	m
e	g	e	g	e	g	e
m	g	m	u	g	m	u
a	g	a	m	e	u	r

a) G tem elemento neutro em relação a ⊕? . . . .

b) Qual? . . . .

c) Em relação a ⊕ qual o inverso
de r? . . . .
de a? . . . .
de g? . . . .
de u? . . . .

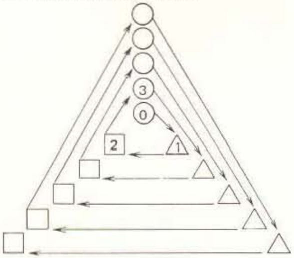
d) (G, ⊕) é um grupo? . . . .

3) Lembre as propriedades dos conjuntos numéricos que você conhece e seja:

$P = \{x \in \mathbf{Z} \mid x \text{ é par}\}$

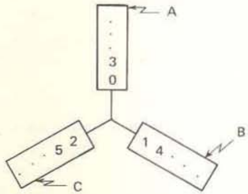
Responda:
a) $(\mathbf{N}, +)$ é grupo? . . . .
b) $(\mathbf{N}, \times)$ é grupo? . . . .
c) $(\mathbf{Z}, +)$ é grupo? . . . .
d) $(\mathbf{Z}, \times)$ é grupo? . . . .
e) $(\mathbf{Q}, +)$ é grupo? . . . .
f) $(\mathbf{Q}, \times)$ é grupo? . . . .
g) $(\mathbf{Q}^*, \times)$ é grupo? . . . .
h) $(\mathbf{P}, +)$ é grupo? . . . .

4) a) Na figura ao lado, complete com os números naturais, seguindo as setas:



b) As setas pararam, mas você pode imaginar que continuemos no mesmo esquema.

Na figura ao lado você vê a partição de N que foi construida.



P = {A, B, C}

Complete com A, B ou C

9∈	300∈ ....
16∈	1500∈ ....
18∈	3845∈ ....
26∈	4003∈ ....

c) Complete:
Cada elemento de A dividido por 3 deixa resto ....
Cada elemento de B dividido por 3 deixa resto ....
Cada elemento de C dividido por 3 deixa resto ....

d) Seja a operação ⊕ em P definida da seguinte maneira:

para calcular, por exemplo, A⊕B considere um elemento de A, por exemplo 15, e um elemento de B, por exemplo 22.

⊕	A	B	C
A		B	
B			
C			

Efetue 15 + 22 = 37
verifique que 37∈B
então A⊕B = B

Deste modo, complete a Tábua.

e) A operação ⊕ é associativa.
Responda: ⊕ é comutativa? ....
P tem elemento neutro em relação a ⊕? ....
Todo elemento de P tem inverso em relação a ⊕? ...

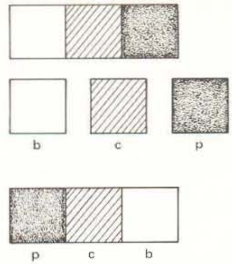
f) (P, ⊕) é um grupo? ....

5) Considere 3 cubos coloridos numa caixa, esquematizados como na figura ao lado.

Damos nomes aos cubos.

Considere as diferentes maneiras de você modificar a posição dos cubos na caixa.

Por exemplo, se a nova posição na caixa é como na figura passamos da posição b, c, p para a posição p, c, b.

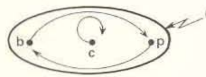


Indicamos:

$$\begin{pmatrix} b & c & p \\ p & c & b \end{pmatrix}$$

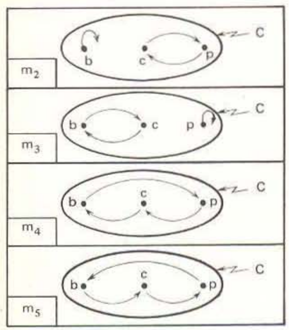
Chamamos esta modificação m_1

No conjunto c = {b, c, p} a m_1 é a bijeção representada pelo diagrama ao lado.



a) Complete: $m_1 = \begin{pmatrix} b & c & p \\ \_ & \_ & \_ \end{pmatrix}$

b) Observe os diagramas abaixo e complete:



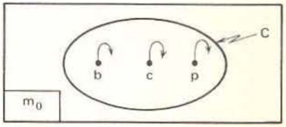
$m_2 = \begin{pmatrix} b & c & p \\ \_ & \_ & \_ \end{pmatrix}$

$m_3 = \begin{pmatrix} b & c & p \\ \_ & \_ & \_ \end{pmatrix}$

$m_4 = \begin{pmatrix} b & c & p \\ \_ & \_ & \_ \end{pmatrix}$

$m_5 = \begin{pmatrix} b & c & p \\ \_ & \_ & \_ \end{pmatrix}$

c) Represente ao lado:



$$m_0 = \begin{pmatrix} b & c & p \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{pmatrix}$$

6) Considere o conjunto das bijeções do exercício 5.

$B = \{m_0, m_1, m_2, m_3, m_4, m_5\}$

Se você fez a m_1 e o seu colega efetuou *a seguir* a m_4 vocês efetuaram a composição das bijeções m_4 e m_1. Você foi de b para p e seu colega em seguida foi de p para c.

Então de b foi-se para c.

a) Complete: pela m_1 seguida da m_4, de c vai-se para . . . , de . . . para . . . então de c foi-se para . . . .

pela m_1 seguida da m_4, de p vai-se para . . . , de . . . para . . . então de p foi-se para . . . .

$$m_4 \circ m_1 = \begin{pmatrix} b & c & p \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{pmatrix} = \dots\dots\dots$$

b) Efetue: $m_5 \circ m_0$

Complete: de b vai-se para . . . , de . . . para . . . então de b foi-se para . . . . .

de c vai-se para . . . de . . . para . . . então de c foi-se para . . . .

de p vai-se para . . . , de . . . para . . . então de p foi-se para . . . . . .

$$m_5 \circ m_0 = \begin{pmatrix} b & c & p \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{pmatrix} = \dots\dots\dots$$

c) Complete a tábua da operação $\circ$ em B.

(lembre que na coluna a esquerda está a bijeção que é aplicada em 1.º lugar).

$\circ$	m_0	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5
m_0						
m_1					m_3	
m_2						
m_3						
m_4						
m_5						

d) Observe a Tábua que você completou e responda:

$\circ$ é comutativa em B? . . . .

R tem elemento neutro para $\circ$? . . . .

e) Complete: pelo $\circ$, o inverso de m_0 é . . . .

de m_1 é . . . .

de m_2 é . . . .

de m_3 e . . . .

de m_4 é . . . .

de m_5 é . . . .

f) A operação $\circ$ em B é associativa.

Então responda:

(B, $\circ$) é um grupo? . . . .

(B, $\circ$) é um grupo comutativo? . . .

IMPLICAÇÃO E EQUIVALÊNCIA

Grupo I – Exercícios Preliminares

1) Considere o conjunto:

$A = \{1, 3, 5, 7\}$

e as sentenças abertas:

$p: x < 4$
$q: x < 6$

a) Substitua nas sentenças abertas a letra x pelos elementos de A, e escreva V ou F ao lado das sentenças obtidas.

$x \in A$	sentença p / sentença q	V ou F
1	$1 < 4$	V
	$1 < 6$	V
3		
5		
7		

b) Quais os elementos de A que tornam verdadeiras p e q? ____________

c) Qual elemento de A que torna p falsa e q verdadeira? ____________

d) Qual o elemento de A que torna p e q falsas? ____________

e) Há em **A** elementos que tornam p verdadeira e q falsa? ____________

f) Se o conjunto considerado fôr N, você conseguiria encontrar números naturais que substituídos em p e q tornam p verdadeira e q falsa? ____________

VOCÊ OBSERVOU QUE

> NÃO há em A elemento que torne p verdadeira e q falsa. Em N, você também não conseguiu achar elementos nestas condições.

Dizemos que:

linguagem corrente	linguagem matemática
$x < 4$, implica, $x < 6$	$x < 4 \Rightarrow x < 6$

De um modo geral:

> Se p e q são duas sentenças abertas com a mesma variável e se a variável pode tomar valores dentro de um conjunto X, dizer que:
>
> p implica q ou $p \Rightarrow q$
>
> significa que:
>
> Todos os elementos de X que tornam verdadeira p tornam também verdadeira q, isto é, o conjunto verdade de p está contido no conjunto verdade de q.

Grupo II – Exercícios de Aplicação

1) Coloque V ou F:

Universo: Z

$x = 7 \Rightarrow x + 3 = 10$ ☐
$x < 5 \Rightarrow x - 1 < 4$ ☐
$x + 2 = 3 \Rightarrow x = 5$ ☐
$x < 5 \Rightarrow x < 10$ ☐
$x < 10 \Rightarrow x < 5$ ☐
$x + 3 = 10 \Rightarrow x = 7$ ☐

2) Coloque V ou F (Universo: N)

x é múltiplo de 10	⇒	x é múltiplo de 5	☐
x é múltiplo de 5	⇒	x é múltiplo de 10	☐
x é múltiplo de 5	⇒	x é múltiplo de 2	☐
x é múltiplo de 2	⇒	x é múltiplo de 5	☐
x é múltiplo de 20	⇒	x é múltiplo de 5	☐
x é divisor de 20	⇒	x é divisor de 10	☐
x é divisor de 10	⇒	x é divisor de 20	☐
x é divisor de 20	⇒	x é divisor de 40	☐

3) Dadas as sentenças: $x = 3$, $x > 3$
$x = 5$, $x > 5$
$x = 7$, $x > 7$
$x = 10$, $x > 10$

Complete com elas de modo a ter sentenças verdadeiras.

Universo Z:

$x > 10 \Rightarrow$ ________________
$x > 10 \Rightarrow$ ________________
$x = 10 \Rightarrow$ ________________
$x = 7 \Rightarrow$ ________________
$x > 7 \Rightarrow$ ________________
$x > 7 \Rightarrow$ ________________
$x = 5 \Rightarrow$ ________________
$x > 5 \Rightarrow$ ________________

4) Dadas as sentenças:

x é múltiplo de 2
x é múltiplo de 3
x é múltiplo de 6
x é múltiplo de 12

Complete com elas de modo a ter sentenças verdadeiras.

Universo N:

x é múltiplo de 6 ⇒ ________________
x é múltiplo de 6 ⇒ ________________
x é múltiplo de 12 ⇒ ________________
x é múltiplo de 12 ⇒ ________________

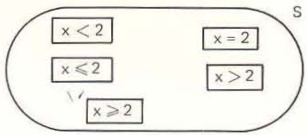
5) Sendo a, b, c, d elementos de Q, assinale com V ou F

$a = b \Rightarrow a + c = b + c$	☐
$a < b \Rightarrow a + c = b + c$	☐
$a < b \Rightarrow ac < bc$	☐
$a + b = c \Rightarrow a = b - c$	☐
$a + b = c \Rightarrow a = c - b$	☐
$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc$	☐

6) Considere x variando em Q.

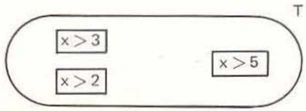
a) No diagrama ao lado, trace as flechas que indicam a relação:

"p ⇒ q"



b) No diagrama ao lado trace as flechas que indicam as relações:

"p ⇒ q"



7) Assinale V ou F

Universo Q:

x é divisor de 15 ⇒ x é divisor de 5	☐
x é divisor de 5 ⇒ x é divisor de 15	☐
x é múltiplo de 9 ⇒ x é múltiplo de 3	☐
x é múltiplo de 3 ⇒ x é múltiplo de 9	☐
$x = 7 \Rightarrow x + 3 = 10$	
$x + 3 = 10 \Rightarrow x = 7$	
$\frac{x}{3} = -4 \Rightarrow x = -12$	
$x = -12 \Rightarrow \frac{x}{3} = -4$	

Você observou que:

$x = 7 \Rightarrow x + 3 = 10$	e	$x + 3 = 10 \Rightarrow x = 7$
$\frac{x}{3} = -4 \Rightarrow x = -12$	e	$x = -12 \Rightarrow \frac{x}{3} = -4$

Dizemos que:

Linguagem corrente	*Linguagem Matemática*
x = 7 é equivalente a x+3 = 10	$x = 7 \iff x - 3 = +10$
$\frac{x}{3} = -4$ é equivalente a: $x = -12$	$\frac{x}{3} = -4 \iff x = -12$

DE UM MODO GERAL:

Se a sentença p implica a sentença q, e a sentença q implica p então p é equivalente a q	Se $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow p$ então $p \iff q$

8) Assinale com V ou F: (universo Z)

$x = 3 \iff 3 = x$	☐
$x = 3 \iff -x = -3$	☐
$x < 5 \iff 5 < x$	☐
$x < 5 \iff 5 > x$	☐
$x < 5 \iff -x < -5$	☐
$x < 5 \iff -5 < -x$	☐

9) Assinale com V ou F (universo Q)

a) $\frac{x}{2} + 3 = 7 \iff x + 6 = 14$ ☐

$x + 6 = 14 \iff x = 8$ ☐

b) $2x + 3 = 5x - 1 \iff 2x - 5x = -1 - 3$ ☐

$2x - 5x = -1 - 3 \iff -3x = -4$ ☐

$-3x = -4 \iff x = \frac{4}{3}$ ☐

10) Resolva, em Q, as equações e as inequações por meio de sentenças equivalentes:

a) $3x + 1 = 5x + 2$

b) $5x + 10 = 5(x + 2)$

c) $\frac{3x - 5}{2} - \frac{x - 1}{5} = 1$

d) $2x - 1 < 5x + 3$

e) $\frac{3x + 1}{4} - \frac{2x + 5}{6} < 3$

f) $4(x - 2) + 5 > 2(3x - 1)$

g) $3x + 4 \leqslant 5(x + 1) - 1$

AXIOMAS E TEOREMAS

Grupo III – Exercícios preliminares

1) Considere 4 crianças: Marisa, Gilda, Flávio, Décio.

a) Sabemos que:
i_1) Flávio é irmão de Décio.
i_2) Gilda é irmã de Flávio.
i_3) Marisa não é irmã de Gilda.

Das 3 informações acima deduza as 8 sentenças possíveis:

i_4) Flávio é irmão de Gilda (modelo)
i_5) Marisa não é irmã de Flávio (modelo)
i_6) ____________
i_7) ____________
i_8) ____________
i_9) ____________
i_{10}) ____________
i_{11}) ____________
i_{12}) ____________

VOCÊ OBSERVOU QUE:

As 3 informações i_1, i_2, i_3 são suficientes para concluir i_4 até i_{12}, portanto descrevem a situação.

DIZEMOS QUE:

i_1, i_2, i_3 são *axiomas*. As oito restantes são consequências.

b) Supo. ha que as informações tivessem sido:
j_1) Décio e irmão de Gilda
j_2) Décio é irmão de Flávio.
j_3) Marisa não é irmã de Flávio.

Você encontra estas sentenças entre as 8 que você escreveu?
Com as informações j_1, j_2, j_3 você pode obter 8 conclusões. Quais são?

____
____
____
____
____
____
____
____

VOCÊ OBSERVOU QUE:

As informações j_1, j_2, j_3 descrevem a mesma situação que a outra.

ANOTE:

j_1, j_2, j_3 são *axiomas*. As 8 restantes são consequências.

VOCÊ CONCLUI QUE:

Os axiomas de uma teoria não são invariáveis. Podem ser escolhidos adequadamente desde que descrevam a mesma situação.

2) Considere as sentenças:
– Décio não é irmão de Marisa.
– Gilda é irmã de Décio.
– Flávio é irmão de Décio.

a) Com estas três informações você consegue tirar as mesmas conclusões do exercício 1? ____________

b) As 3 sentenças são axiomas da situação do exercício 1? ____________

3) Veja agora as sentenças:
- Marisa não é irmã de Décio.
- Marisa não é irmã de Flávio.
- Gilda é irmã de Flávio.

a) Com as três sentenças acima ficou descrita a situação do exercício 1? ____________

b) As três sentenças dadas são axiomas da situação do ex. 1? ____________

Considere a sentença:

"Flávio é irmão de Gilda"

"implica que:"

"Gilda é irmã de Flávio"

Em linguagem Matemática:

Flávio é irmão de Gilda $\Rightarrow$ Gilda é irmã de Flávio

↓ (afirmação) ↓ (conclusão da afirmação anterior)

ANOTE:

A sentença formada por afirmações seguidas de uma conclusão se chama: *teorema.*

As afirmações (que são ponto de partida) de um teorema se chamam: *hipóteses* do teorema.

A conclusão se chama: *tese* do teorema.

VOCÊ OBSERVOU QUE:

No teorema

Flávio é irmão de Gilda $\Rightarrow$ Gilda é irmã de Flávio

é a hipótese — é a tese

No teorema

Flávio é irmão de Décio
e
Marisa não é irmã de Décio
$\Rightarrow$ Marisa não é irmã de Flávio

↓ é a hipótese (afirmações) — ↓ é a tese (conclusão)

Grupo IV — Exercícios de aplicação

1) Complete o quadro:

Teorema	hipótese	tese
$X \subset Y \Rightarrow X \cup Y = Y$		
$X \subset Y \Rightarrow X \cap Y = X$		
$X \subset Y \Rightarrow n(X) \leqslant n(Y)$		
$a + b = c \Rightarrow a = c - b$		
$a \,.\, b = c \Rightarrow a = c \div b$		
a é par $\Rightarrow$ a é múltiplo de 2		
a é múltiplo de 2 a é múltiplo de 3 } $\Rightarrow$ a é múltiplo de 6		
As lojas fecham aos feriados — 15 de novembro é feriado } $\Rightarrow$ Em 15 de novembro as lojas estão fechadas		
Todo peixe vive na água. Tainha é um peixe } $\Rightarrow$ Tainha vive na água.		

2) Considere o teorema:

Se *a* e *b* são naturais ímpares então *a b* é um natural par.

a) Qual a hipótese do teorema? ________________

b) Qual a tese do teorema? ________________

c) Vamos usar um *raciocínio* para da hipótese chegar à tese. ________________

Complete o quadro

afirmações	justificativas
$a = 2m + 1$	por hipótese
$b = 2p + 1$	por hipótese
$a + b = 2m + 1 + b$	princípio aditivo aplicado a (1)
$a + b = 2m + 1 + 2p + 1$	substituição de b por seu valor
$a + b = 2m + 2p + 1 + 1$	. . . .
$a + b = 2m + 2p + 2$	efetuamos a soma
$a + b = 2(m + p + 1)$	. . . .
$m + p + 1 \in N$	. . . .
$m + p + 1 = c$	nova denominação
2c é par	definição de número par
$a + b = 2c$	tese

ANOTE:

> O *raciocínio* que permite da hipótese chegarmos à tese de um teorema se chama *demonstração do teorema.*

PARALELISMO E DIREÇÃO

Grupo I – Exercícios Preliminares

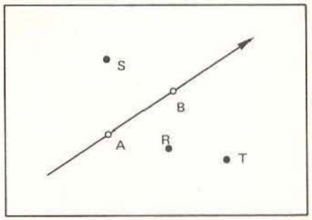
1\. a) Com o uso da régua e esquadro construa paralelas a reta $\overleftrightarrow{AB}$ passando por R, S, T.

b) Quantas paralelas a $\overleftrightarrow{AB}$, passando por R, você pode traçar?

. . . .

E por S?

. . . .



c) Assinale um ponto qualquer do plano e trace uma paralela a r, passando por ele.

d) Por um ponto qualquer do plano você pode traçar uma paralela a r ?

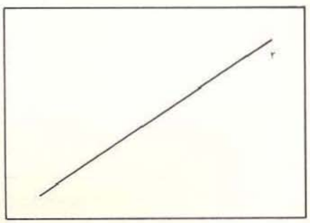
. . . .

E mais de uma?

. . . .

e) As retas que você traçou paralelas a **r**, são paralelas entre si?

____



ANOTE O POSTULADO DE EUCLIDES:

"Por um ponto fora de uma reta podemos traçar uma e somente uma paralela à reta dada".

VOCÊ LEMBRA QUE:

A relação de paralelismo é uma relação de equivalência e portanto determina classes de equivalência no conjunto de retas de um plano.

Cada classe de equivalência determina uma DIREÇÃO, que é, por definição, direção das retas que pertencem a classe.

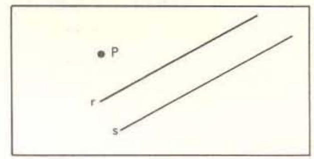
ANOTE:

Todas as retas paralelas tem uma mesma direção.

Grupo II – Exercícios de aplicação

1) Na figura ao lado, **r** é paralela a s e $P \notin s$, e $P \notin r$. Trace por P uma paralela **m** à reta **r**.
m é paralela a s ?

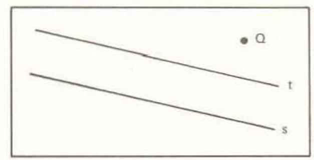
____



2) Na figura ao lado $t /\!/ s$, $Q \notin t$ e $Q \notin s$. Trace por Q uma reta **q** não paralela a **t**.

Esta reta **q** é paralela a **s** ?

____

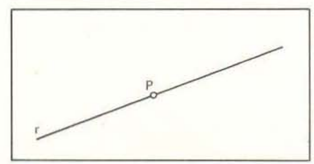


3) Trace três retas S_1, S_2, S_3, paralelas a r e por $P \in r$ uma reta qualquer **t** diferente de r.
Esta reta encontra as retas S_1, S_2, S_3 ?

____

Você sabe justificar sua resposta aplicando o postulado de Euclides?

____



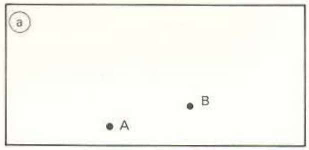
VOCÊ PROVOU O TEOREMA:

Se $r /\!/ s$ e **t** intercepta **r** então **t** intercepta **s**

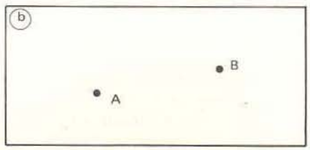
Grupo III – Exercícios preliminares

1. Desenhe quadriláteros

   a) que tenham como vértices os pontos A e B e $\overline{AB}$ como lado.



   b) que tenham como vértices os pontos A e B e em que $\overline{AB}$ não seja lado.



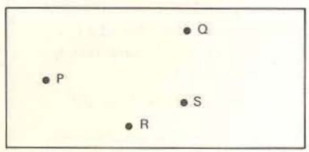
   c) Quantos quadriláteros você pode traçar em cada caso?

   (a) ______________

   (b) ______________

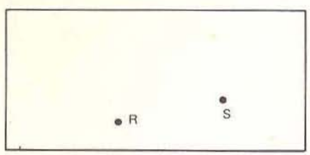
2. Dados 4 pontos não alinhados, três a três, quantos quadriláteros você pode traçar que tenham estes pontos como vértices?

____

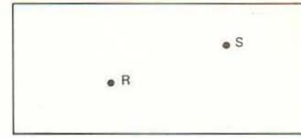


3. Desenhe quadriláteros tais que:

   a) R e S sejam seus vértices, $\overline{RS}$ seja um de seus lados e seus lados opostos sejam paralelos.



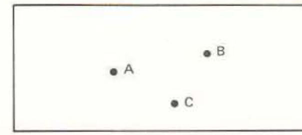
   b) R e S sejam seus vértices, $\overline{RS}$ não seja um de seus lados, e seus lados opostos sejam paralelos.



4. Desenhe quadriláteros que tenham como vértices A, B e C e de lados opostos paralelos.

   Quantos quadriláteros você pode traçar?

____



ANOTE:

Dizemos que quatro pontos não alinhados A, B, C, D, determinam um paralelogramo quando: os pares de lados são respectivamente paralelos.
$\overline{AB} /\!/ \overline{CD}$ e $\overline{AC} /\!/ \overline{BD}$

Grupo IV – Exercícios de aplicação

1. Desenhe $r /\!/ s$, $a /\!/ b$ tais que:

   $r \cap a = \{P\}$

   $s \cap a = \{T\}$

   $r \cap b = \{Q\}$

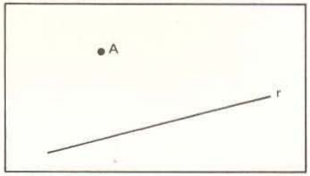
   $s \cap b = \{U\}$

   P, T, Q, U são vértices de um paralelogramo?

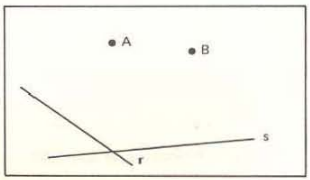
____

2. Desenhe 2 retas **m** e **n** tais que: $m \cap n = \phi$ e trace:
$\overline{MR} \subset m$ e $\overline{NS} \subset n$ tais que: $\overline{MR}$ seja congruente a $\overline{NS}$.
É possível ligar estes pontos de modo a formar um paralelogramo?

3. Na figura ao lado desenhe paralelogramos em que A é um dos vértices, e um dos lados é paralelo a r.

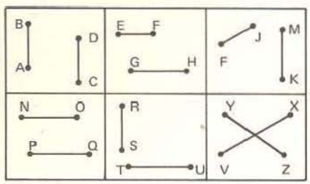


4. Na figura ao lado desenhe paralelogramos em que A e B são dois de seus vértices, e os seus lados são paralelos a **r** e **s**. Quantos paralelogramos você pode traçar nestas condições?



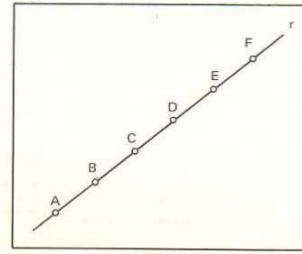
5. No quadro ao lado são dados pares de segmentos. Desenhe, quando possível, paralelogramos que tenham estes segmentos por lados.

Nomeie-os . . . .



Grupo V – Exercícios preliminares

1. Dados os pontos alinhados A, B, C, D, E, F da reta **r**:
   a) Trace flechas vermelhas do primeiro para o segundo elemento dos pares ordenados: (A,B), (C,D), (C,F), (B,F)
   b) Trace flechas azuis do primeiro para o segundo elemento dos pares ordenados: (B,A), (D,C), (F,C), (F,B)



VOCÊ OBSERVOU QUE:

Todas as flechas vermelhas têm o mesmo sentido e todas as flechas azuis têm o mesmo sentido, porém as flechas vermelhas e azuis têm sentidos contrários.

DE UM MODO GERAL:

Dados dois pontos distintos A e B de uma reta, podemos ordená-los de duas maneiras: (A,B) ou (B,A).

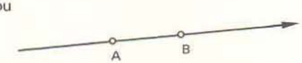
A cada uma destas ordens chamamos de sentido da reta. A um dos sentidos damos o nome de sentido positivo e ao outro de sentido negativo.

ANOTE:

Se orientamos a reta $\overleftrightarrow{AB}$ no sentido de A para B, dizemos que:

"A precede B"
ou
"B segue A"

e representamos: $\overrightarrow{AB}$



ANOTE:

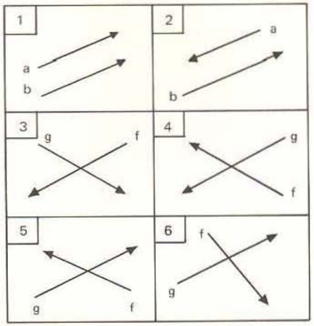
No quadro 1
As retas a e b tem a mesma direção e o mesmo sentido.

No quadro 2.

As retas a e b tem a mesma direção e sentidos opostos.

Nos quadros 3, 4, 5 e 6.

As retas f e g não tem a mesma direção e por isso não podemos comparar os sentidos.



DE UM MODO GERAL:

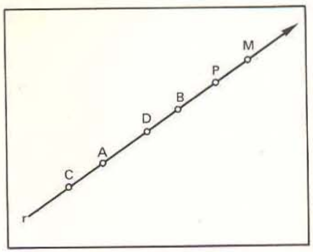
Dadas duas retas orientadas só podemos comparar os seus sentidos se elas tiverem a mesma direção.

Grupo VI — Exercícios de aplicação

1. a) A reta r está orientada no sentido indicado pela flecha.

Complete com "precede" ou "segue" de acordo com a figura.

A ______________ B,
B ______________ A,
C ______________ D,
D ______________ P,
C ______________ P,
D ______________ A,



ANOTE:

Qualquer que seja o ponto A, dizemos que "A precede A" ou "A segue A".

2. Complete:

Numa reta orientada:

Se "A precede B" e "B precede C", então "A ______________ C"

Se "R segue S" e "S segue T", então "R ______________ T"

Se "M precede P", então "P ______________ M"

3. A relação "precede" (ou "segue")

é reflexiva? ______________
é simétrica? ______________
é anti-simétrica? ______________
é transitiva? ______________

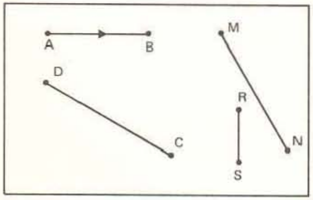
4. Desenhe uma reta r e os pontos A, B, C de modo que "A precede B" e "B segue C". Quais as possíveis posições de C em relação a A?

____

Grupo VII – Exercícios preliminares

1. No quadro ao lado a flecha do segmento $\overline{AB}$ indica que o segmento está orientado no sentido de A para B, ou seja, que A é a origem e B é a extremidade.

   Coloque flechas para orientar os segmentos $\overline{MN}$, $\overline{CD}$, $\overline{RS}$ de modo que a primeira letra indique a origem.



2.

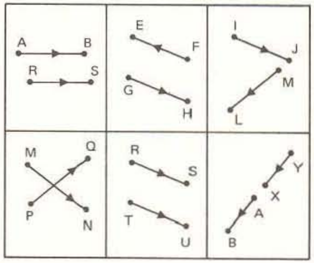
   a) Em cada quadro, trace, quando possível os paralelogramos que se obtem ligando as origens e as extremidades dos pares de segmentos.

   b) Assinale os pares que permitiram construir paralelogramos

   $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{RS}$ ( ) $\overrightarrow{MN}$ e $\overrightarrow{PQ}$

   $\overrightarrow{EF}$ e $\overrightarrow{GH}$ ( ) $\overrightarrow{RS}$ e $\overrightarrow{TU}$

   $\overrightarrow{IJ}$ e $\overrightarrow{LM}$ ( ) $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{YX}$

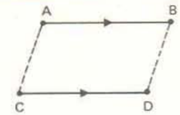


VOCÊ OBSERVOU QUE:

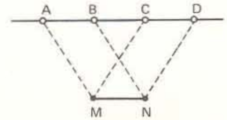
> Dados dois segmentos orientados, às vezes, é possível construir um paralelogramo unindo as origens e as extremidades dos segmentos.

ANOTE:

a) Dois segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são chamados EQUIPOLENTES quando $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{AC}$, e $\overline{BD}$ determinam um paralelogramo.



b) No caso dos segmentos serem colineares, diremos que $\overrightarrow{AB}$ é equipolente a $\overrightarrow{CD}$ se pudermos traçar um segmento orientado $\overrightarrow{MN}$ tal que $\overrightarrow{AB}$ é equipolente a $\overrightarrow{MN}$ e $\overrightarrow{MN}$ é equipolente a $\overrightarrow{CD}$.

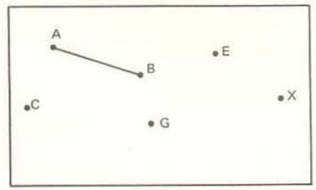


c) Se A coincide com B, o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ é chamado segmento nulo.

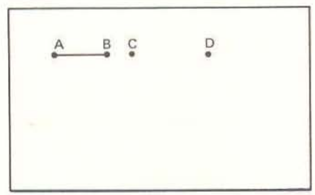
Todos os segmentos nulos são equipolentes.

Grupo VIII – Exercícios de aplicação

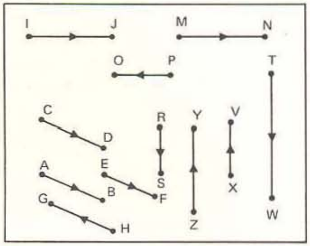
1. Com o uso de régua e esquadro trace segmentos equipolentes a $\overline{AB}$ com origens em C, E, I, G.



2. Trace segmentos equipolentes a $\overline{AB}$ com origem em C ou D.



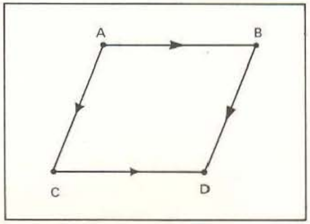
3. Pinte com a mesma cor os pares de segmentos equipolentes da figura ao lado.



4. Verifique (usando régua e esquadro) quais dos pares de segmentos orientados são equipolentes:

Assinale SIM em caso afirmativo.

$\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ ( )
$\overline{AB}$ e $\overline{DC}$ ( )
$\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ ( )
$\overline{BA}$ e $\overline{CD}$ ( )
$\overline{BA}$ e $\overline{DC}$ ( )
$\overline{AC}$ e $\overline{DB}$ ( )
$\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ ( )



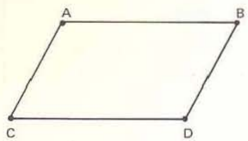
ANOTE:

Se o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ é equipolente A $\overrightarrow{CD}$ então:

$\overrightarrow{BA}$ é equipolente a $\overrightarrow{DC}$

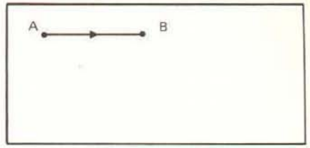
e

$\overrightarrow{AC}$ é equipolente a $\overrightarrow{BD}$

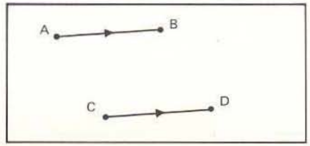


5. Verifique, construindo paralelogramos se:

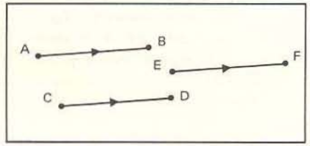
a) O segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ é equipolente a $\overrightarrow{AB}$?



b) Dado $\overrightarrow{AB}$ equipolente a $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CD}$ é equipolente a $\overrightarrow{AB}$?



c) Dados $\overrightarrow{AB}$ equipolente a $\overrightarrow{CD}$ e $\overrightarrow{CD}$ equipolente a $\overrightarrow{EF}$, podemos dizer que o segmento $\overrightarrow{AB}$ é equipolente a $\overrightarrow{EF}$?



OBSERVE QUE:

$\overline{AB}$ é equipolente a $\overline{AB}$
$\overline{AB}$ é equipolente a $\overline{CD}$ e $\overline{CD}$ é equipolente a $\overline{AB}$
$\overline{AB}$ é equipolente a $\overline{CD}$, $\overline{CD}$ é equipolente a $\overline{EF}$ e $\overline{AB}$ é equipolente a $\overline{EF}$.

TEOREMA:

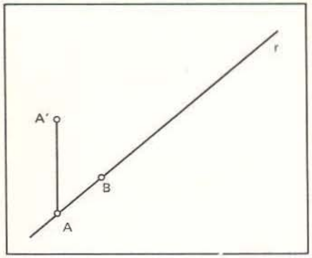
A relação de equipolência é reflexiva, simétrica e transitiva, isto é, uma relação de equivalência.

6. Na figura ao lado trace:
por A' uma reta s, paralela a r
por B uma reta t paralela a $\overline{AA'}$
Chame $\{B'\} = t \cap s$
trace por B' uma paralela a $\overline{A'B}$
chame $\{C\} = p \cap r$
Continue esta construção
Você pode afirmar que $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, etc., são equipolentes?

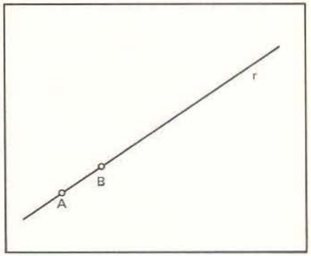
. . . .

Justifique

. . . .



7. Com auxílio de paralelogramos determine na reta r, outros cinco segmentos equipolentes ao segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ de modo que a extremidade de um seja origem do outro. (isto é, segmentos consecutivos).



8. Dado o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$, você pode traçar mais de um segmento equipolente a $\overrightarrow{AB}$ nas seguintes condições:

a) com origem em A?

---

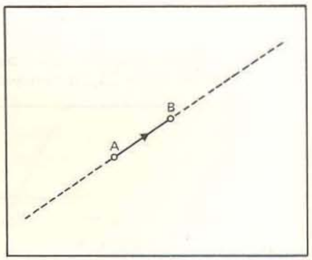
b) com extremidade em A?

---

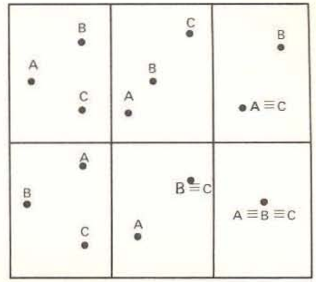
c) com origem em B?

---

d) com extremidade em B?



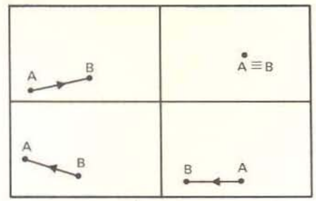
9. Em cada quadro determine os pontos X, Y de modo que os segmentos orientados $\overrightarrow{CX}$, $\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{YC}$ sejam equipolentes, construindo paralelogramos.



ANOTE:

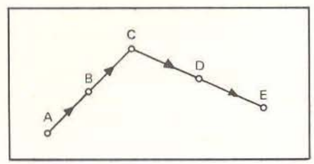
Se $\overrightarrow{AB}$ é equipolente a $\overrightarrow{BC}$ então $B \in \overline{AC}$ B é chamado o PONTO MÉDIO do segmento $\overline{AC}$.

10. Em cada quadro, com auxílio de paralelogramos, determine segmentos orientados, onde B seja o ponto médio.



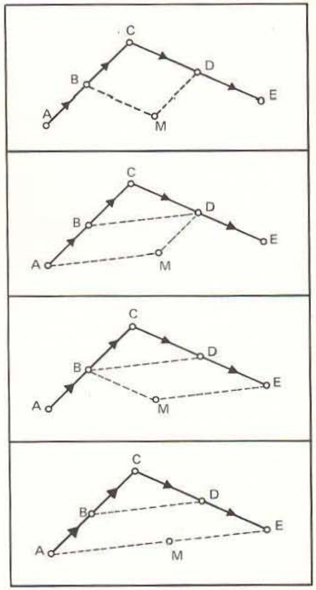
Grupo IX — Exercícios preliminares

1. Em cada quadro cubra com a mesma cor, os segmentos equipolentes:



$\overline{BM}$ é paralela a $\overline{CD}$

$\overline{DM}$ é paralela a $\overline{CB}$



VOCÊ DESCOBRIU QUE:

Se $\overline{AB}$ é equipolente a $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ é equipolente a $\overline{DE}$, então $\overline{AM}$ é equipolente a $\overline{ME}$ e a $\overline{BD}$

VOCÊ DEMONSTROU O TEOREMA

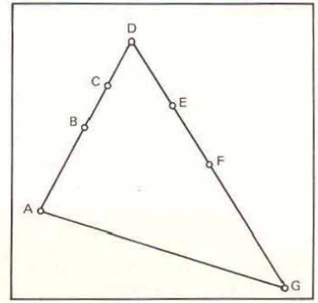
"Se B é o ponto médio de $\overline{AC}$ e D o ponto médio de $\overline{CE}$, então $\overline{BD}$ é paralelo a $\overline{AE}$."

Grupo X – Exercícios de aplicação

1. Na figura ao lado

   B é o ponto médio de $\overline{AD}$
   C é o ponto médio de $\overline{BD}$
   F é o ponto médio de $\overline{DG}$
   E é o ponto médio de $\overline{DF}$

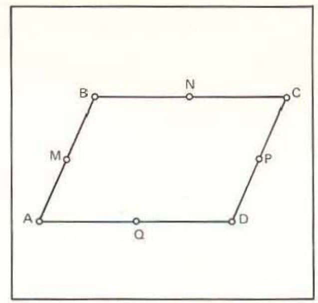
   Cubra com a mesma cor segmentos equipolentes, e procure outros segmentos equipolentes.



2. Na figura ao lado

   M, N, P e Q são pontos médios dos lados do paralelogramo ABCD.

   Cubra com a mesma cor os segmentos equipolentes, na figura.



3. Dado o triângulo ABC onde D é o ponto médio de $\overline{AB}$.

   E é o ponto médio de $\overline{BC}$

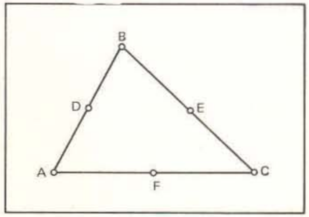
   F é o ponto médio de $\overline{CA}$

O que se pode dizer sobre

$\overline{DE}$ e $\overline{AC}$?

$\overline{DF}$ e $\overline{BC}$?

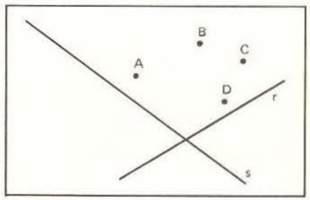
$\overline{FE}$ e $\overline{AB}$?



Grupo XI – Exercícios preliminares

1. Trace pelos pontos A, B, C, D paralelas a reta r e chame:

   A', B', C', D' as intersecções destas paralelas com a reta s.

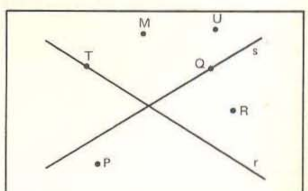


ANOTE:

A', B', C', D' são chamadas projeções de A, B, C e D sobre a reta s paralelamente a r.

2. Determine as projeções de:

   U, P, Q, R e T paralelamente a s sobre r.

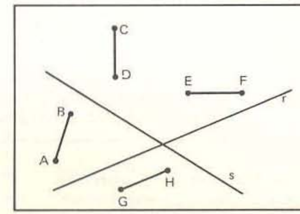


ANOTE:

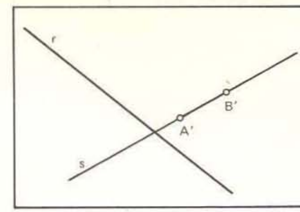
A projeção do segmento $\overline{MU}$ é o segmento $\overline{M'U'}$.

Grupo XII – Exercícios de aplicação

1. Determine as projeções dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ e $\overline{GH}$ paralelamente a reta r sobre a reta s.



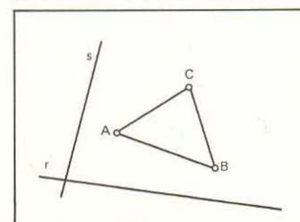
2. Desenhe alguns segmentos que tenham o segmento $\overline{A'B'}$ por projeção paralela a r sobre s.



3. Projete os pontos do triângulo ABC

   a) Sobre r, paralelamente a s

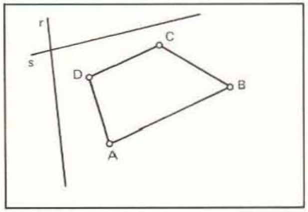
   b) Sobre s, paralelamente a r



4. Projete os pontos do quadriláte-ro ABCD

   a) Sobre **r**, paralelamente a **s**

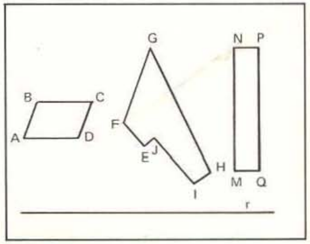
   b) Sobre **s**, paralelamente a **r**



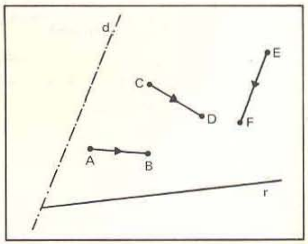
ANOTE:

> Se as retas **r** e **s** são perpendiculares (ou ortogonais) a projeção é denominada PROJEÇÃO ORTOGONAL.

5. Na figura ao lado, determine as projeções ortogonais dos polígonos sobre a reta **r**.



6. Projete os pontos A, B, C, D, E, F sobre **r** paralelamente a **d**.



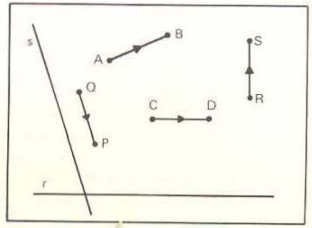
ANOTE

> A projeção, paralelamente a uma reta de segmentos orientados são segmentos orientados cuja origem é a projeção da origem e cuja extremidade é a projeção da extremidade.

7. a) Projete os segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{RS}$, $\overrightarrow{QP}$ sobre **r** paralelamente a **s**.

   b) Pode ocorrer que a projeção de um segmento orientado seja um segmento orientado nulo?

   Em que condições?



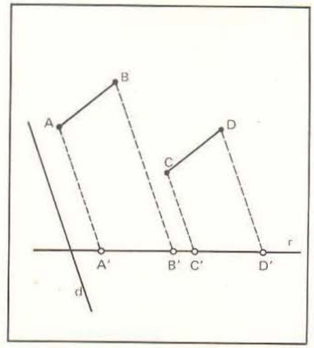
Grupo XIII – Exercícios preliminares

1. Dados $\overrightarrow{AB}$ equipolente a $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{A'B'}$ e $\overrightarrow{C'D'}$ projeções de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ sobre a reta **r** paralelamente a d.

   Trace:

   a. os segmentos $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BD}$

   b. $\overrightarrow{A'M}$ equipolente a $\overrightarrow{AC}$
   $\overrightarrow{B'N}$ equipolente a $\overrightarrow{BD}$



$\overrightarrow{AC}$ é equipolente a $\overrightarrow{BD}$? Por que? ________________

$\overrightarrow{A'M}$ é equipolente a $\overrightarrow{B'N}$? Por que? ________________

$\overrightarrow{A'B'}$ é equipolente a $\overrightarrow{MN}$? Por que ? ________________

$\overrightarrow{C'D'}$ é equipolente a $\overrightarrow{MN}$? Por que? ________________

$\overrightarrow{A'B'}$ é equipolente a $\overrightarrow{C'D'}$? Por que? ________________

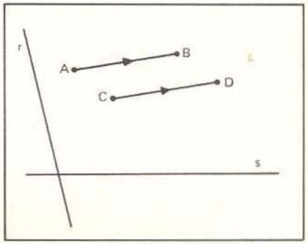
VOCÊ PROVOU O TEOREMA:

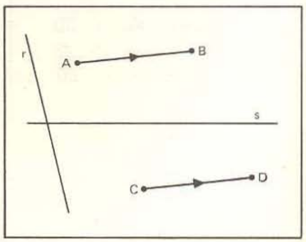
Projeções paralelamente, a uma reta, de segmentos equipolentes sobre uma mesma reta são equipolentes.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. Prove, seguindo a sequência anterior, que:

   a) Se $\overrightarrow{AB}$ é equipolente a $\overrightarrow{CD}$ então a projeção de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ paralelamente a r sobre s, também são equipolentes.

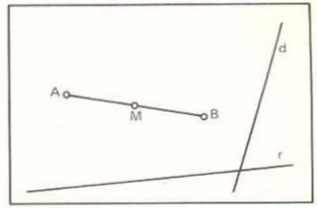




2. Projete $\overline{AB}$ paralelamente a **d** sobre **r**.

   M é o ponto médio de $\overline{AB}$.

   Mostre que M' é o ponto médio de $\overline{A'B'}$.

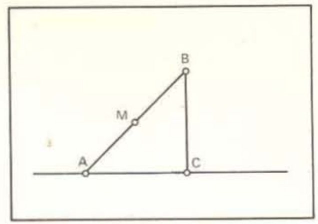


ANOTE:

Teorema:

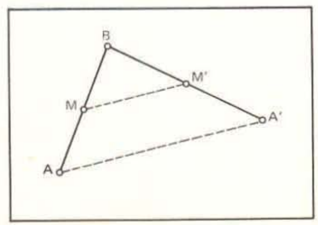
A projeção, paralelamente a uma reta, do ponto médio de um segmento é o ponto médio do segmento projetado.

3. Se M é o ponto médio de $\overline{AB}$ determine o ponto médio de $\overline{AC}$



4. M é ponto médio de $\overline{AB}$ e $\overline{MM'}$ é paralelo a $\overline{AA'}$

   Mostre que M' é o ponto médio de $\overline{A'B}$.

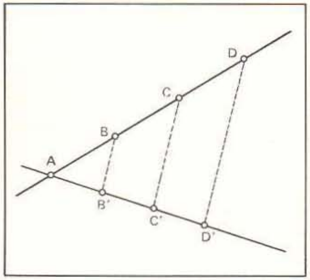


5. Se $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{CD}$ são equipolentes e $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$, $\overrightarrow{DD'}$ são paralelos, você pode dizer que $\overrightarrow{AB'}$, $\overrightarrow{B'C'}$, $\overrightarrow{C'D'}$ são equipolentes ?

. . . .

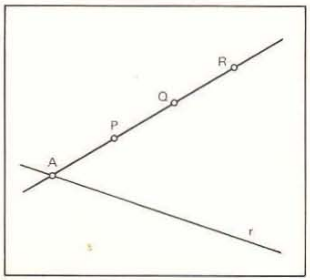
Justifique

. . . .



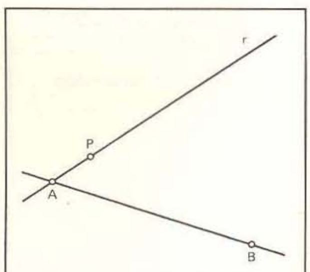
6. $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{QR}$ são equipolentes.

Com o auxílio de projeções marque sobre a reta r três pontos P',Q' e R' tais que $\overrightarrow{AP'}$, $\overrightarrow{P'Q'}$, $\overrightarrow{Q'R'}$ sejam equipolentes.



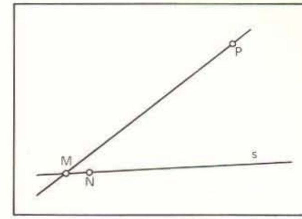
7. Determine sobre r, cinco segmentos consecutivos equipolentes a $\overrightarrow{AP}$.

Divida $\overline{AB}$ em cinco segmentos equipolentes.



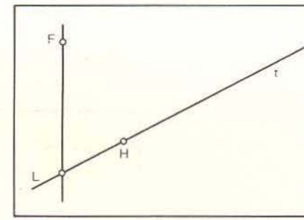
8. Marque, sobre s, sete segmentos consecutivos equipolentes a $\overline{MN}$.

Divida $\overline{MP}$ em sete segmentos equipolentes.



9. Marque sobre t três segmentos consecutivos equipolentes a $\overline{LH}$.

Divida $\overline{LF}$ em três segmentos equipolentes.



VOCÊ OBSERVOU QUE:

Você dividiu facilmente:

$\overline{AB}$ em cinco segmentos equipolentes (ex. 7)
$\overline{MP}$ em sete segmentos equipolentes (ex. 8)
$\overline{LF}$ em três segmentos equipolentes (ex. 9).

DE UM MODO GERAL:

Baseando-se nos Teoremas estudados, é possível dividir qualquer segmento em um número qualquer de segmentos equipolentes.

COMPARAÇÃO DE RACIONAIS SOB A FORMA DECIMAL

Grupo I – Exercícios preliminares

1. Observe o modelo e complete:

$0{,}2 < 0{,}3$ ou $\frac{2}{10} < \frac{3}{10}$ porque $2 < 3$
$0{,}21 \square 0{,}22$ ou $\frac{21}{100}$ $\frac{22}{100}$ porque $21 \square 22$
$0{,}217 \square 0{,}22$ ou . . . . porque . . . .
$0{,}2131 \square 0{,}214$ ou . . . . . . porque . . . .
$0{,}21314 \square 0{,}21315$ ou . . . . . . porque . . . .

2. Complete com $<$, $>$ ou $=$

a) $2{,}473 \square 2{,}465$

b) $0{,}3315 \square 0{,}333\ldots$

c) $4 \square 40$

d) $2{,}36 \square 2{,}36000$

e) $0{,}34 \square 0{,}33473$

f) $15{,}71342 \square 15{,}7136$

VOCÊ OBSERVOU QUE:

$2{,}4\boxed{7}3 > 2{,}3\boxed{6}5$ ou

2,	4	7	3
2,	4	6	5

$\boxed{7} > \boxed{6}$

$0{,}33\boxed{1}5 < 0{,}33\boxed{3}3\ldots$ ou

0,	3	3	1	5	0	0	....
0,	3	3	3	3	3	3	....

$\boxed{1} < \boxed{3}$

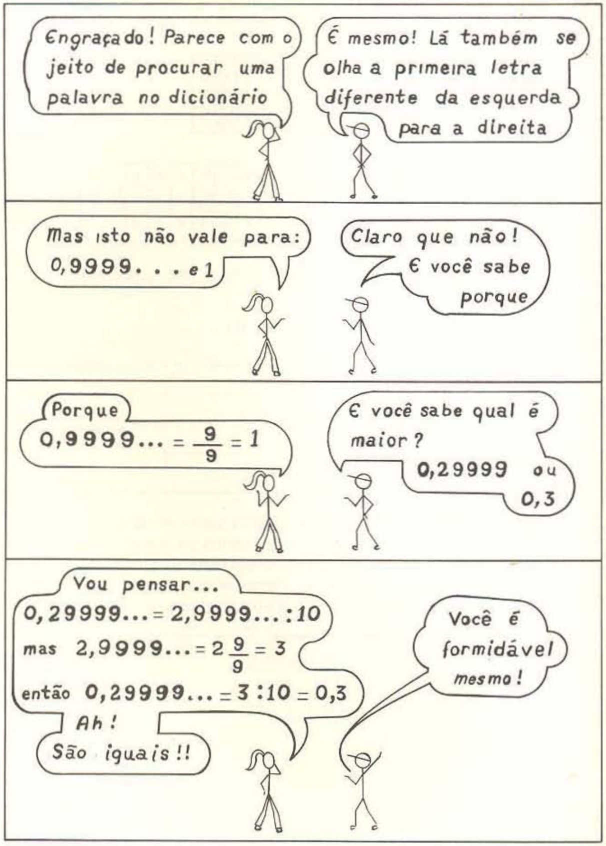
$\boxed{0}4 < \boxed{4}0$

0	4
4	0

$\boxed{0} < \boxed{4}$

DE UM MODO GERAL:

Para compararmos dois números racionais positivos sob a forma decimal observa-se as ordens correspondentes da esquerda para a direita até encontrar 2 algarismos que representam números diferentes, supondo que esses algarismos sejam: **a** no 1.º número e **b** no 2.º número com a b então o 1.º número 2.º número.



Grupo II – Exercícios de aplicação

1. Complete com >, < ou =

$3{,}4759 \,\square\, 3{,}4761$
$15{,}31 \,\square\, 15{,}310$
$7{,}3215 \,\square\, 7{,}3235$
$321 \,\square\, 3{,}210$

2. Complete de modo a ter sentenças verdadeiras:

a) 7,43 < . . . .
0,2934 < . . . .
15,21111 . . . < . . . .
0,4343 . . . < . . . .

b) . . . . < 243,2
. . . . < 0,495
. . . . < 1,37999
. . . . < 0,141414

c) 3,471 < . . . . < 3,495
0,15 < . . . . < 0,19
0,3472 < . . . . . < 0,349
0,3482 < . . . . . < 0,34851
0,156 < . . . . . . < 0,162

d) 0,5 < . . . . < 0,6
1,41 < . . . . < 1,42
5,136 < . . . . < 5,137
8,1371 < . . . . . . < 8,1372

Grupo III – Exercícios preliminares

1. Complete:

a	b	c	c – a
0,4	0,4135	0,5	
0,41	0,4135	0,42	
0,413	0,4135	0,414	

VOCÊ OBSERVOU QUE:

diferenças menores que 0,1

$0,4 < 0,4135 < 0,5$

diferença igual a 0,1

diferenças menores que 0,01

$0,41 < 0,4135 < 0,42$

diferença igual a 0,01

diferenças menores que 0,001

$0,413 < 0,4135 < 0,413$

diferença igual a 0,001

ANOTE:

Dizemos que:

0,4 é o valor aproximado *por falta* a menos de 0,1 de 0,4135

0,5 é o valor aproximado *por excesso* a menos de 0,1 de 0,4135

0,41 é o valor aproximado *por falta* a menos de 0,01 de 0,4135

0,42 é o valor aproximado *por excesso* a menos de 0,01 de 0,4135

Grupo IV – Exercícios de aplicação

1. Complete com aproximações a menos de um décimo (0,1)

número	por falta	por excesso
0,4719		
3,512		
0,8331		

2. Complete com aproximações a menos de um centésimo (0,01)

número	por falta	por excesso
0,4719		
3,519		
0,8331		

Grupo V – Exercícios de recordação

1. Complete com <, > ou = de modo a ter sentenças verdadeiras

- 32 . . . . + 325
- 43 . . . . - 45
+ 3 . . . . - 5
- 8 . . . . - 3

VOCÊ LEMBRA QUE:

Todo número racional positivo diferente de zero é maior que qualquer negativo.

Se os números são positivos o maior é o que tem maior módulo, se os números são negativos, o maior é o que tem menor módulo.

2. Coloque >, < ou =

- 0,3 . . . . - 0,35
+ 0,312 . . . . + 0,3124
- 0,824 . . . . - 0,825
- 0,9354 . . . . - 0,9353

NÚMEROS REAIS

Grupo I — Exercícios preliminares

1. Entre os números ao lado, assinale: com (P) as dízimas periódicas; e com (E) os decimais exatos.

- 0,435	( )
0,434343. . .	( )
- 5,1707707707 . . .	( )
10,12532	( )
0,123456	( )
0,01001000100001 . . .	( )
- 120,121122111222 . . .	( )

VOCÊ OBSERVOU QUE:

> Foi fácil decidir se (P) ou (E) para os primeiros números, porém é impossível fazê-lo para os dois últimos, porque não se sabe se irá aparecer um período.
>
> Se dissermos que o número 0,01001000100001 . . . . é formado de uma parte inteira que é **0** e uma parte não inteira formada de um **0** um **1**, dois **0** um **1**, três **0** um **1**, quatro **0** um **1**, etc. sabemos que não aparecerá um período, daí o número não ser uem dízima nem exato.
>
> Se dissermos que o número - 120,121122111222 . . . . é formado de uma parte inteira que é **-120** e uma parte não inteira formada de um **1** um **2**, dois **1** dois **2**, três **1** três **2**, etc. . . . sabemos que não aparecerá um período, daí o número não ser nem dízima nem decimal exato.

ANOTE:

> Os decimais não exatos são decimais ilimitados.
>
> Os decimais ilimitados podem ser dízimas periódicas ou não.
>
> Os decimais ilimitados que não são dízimas periódicas representam os números chamados irracionais.
>
> A reunião do conjunto dos números racionais com o dos números irracionais é o conjunto dos *números reais,* que representamos por **R.**

ANOTE:

Linguagem corrente	*Linguagem Matemática*
conjunto dos números reais	**R**
conuunto dos reais diferentes de zero	$\mathbf{R}^* = \mathbf{R} - \{0\}$
conjunto dos reais positivos	$\mathbf{R}_+ = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geqslant 0\}$
conjunto dos reais positivos diferentes de zero	$\mathbf{R}^*_+ = \{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\}$
conjunto dos reais negativos	$\mathbf{R} = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leqslant 0\}$
conjunto dos reais negativos diferentes de zero	$\mathbf{R} = \{x \in \mathbf{R} \mid x < 0\}$

Grupo II — Exercícios de aplicação

1. Assinale com (I) os números irracionais e com (R) os números racionais.

- 0,3453450345003. . .	( )
1,235798398754	( )
0,351515151. . .	( )

2. a) Assinale com V ou F:

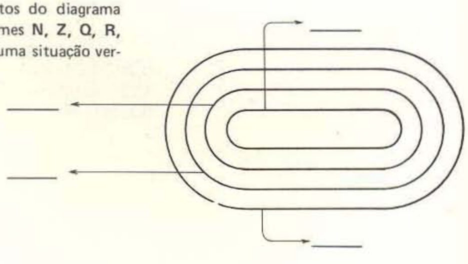
$0 \in \mathbf{R}$	( )
$3 \in \mathbf{N}$	( )
$3 \in \mathbf{Q}$	( )

$\frac{4}{5} \in R$	( )	$3 \in R$	( )
$\frac{4}{5} \in Z$	( )	$\frac{4}{5} \in Q$	( )
$-3 \in N$	( )	$\frac{4}{5} \in N$	( )
$-0{,}33 \in Q$	( )	$-0{,}33\ldots \in Z$	( )
$0{,}321 \in Q$	( )		
$3 \in Z$	( )	$0{,}33\ldots \in R$	( )

b) Os números assim formados: **0** na parte inteira e na parte não inteira formado de um **1** um **2**, dois **1** dois **2**, três **1** três **2**, etc., é racional? Este número pertence a R?

c) $N \subset Z$	( )	$Z \subset Q$	( )
$Z_+ \subset Q$	( )	$Z \subset Q_+$	( )
$Z \subset R$	( )	$Z_+ \subset R^*$	( )
$Q \subset R$	( )	$Q_- \subset R_+$	( )
d) $R_+ \cap R_- = \emptyset$	( )	$R^*_+ \cap R_- = \emptyset$	( )
$R_+ \cap R_- = R$	( )	$R^*_+ \cup R^*_- = R$	( )
$R^*_+ \cup R^*_- = R^*$	( )	$R_+ \cap R_- = \{0\}$	( )

3. Dê aos conjuntos do diagrama ao lado, os nomes **N, Z, Q, R**, de modo a ter uma situação verdadeira.



Grupo III – Exercícios preliminares

1. Trabalhemos em **Q**. Dê o conjunto verdade das equações:

a) $x^2 = 4$ $V = \{\sqrt{4}, -\sqrt{4}\}$ ou $V = \{2, -2\}$

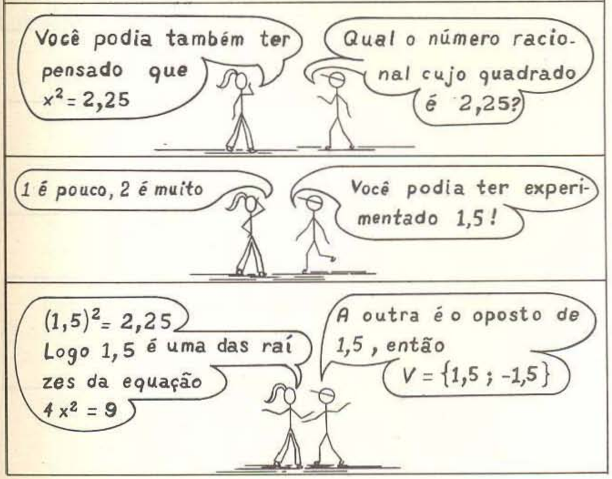
b) $x^2 = 36$ $V = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\}$

c) $x^2 = 16$ $V = \{\ldots\ldots,\ldots\ldots\}$

d) $4x^2 = 9$ $V = \{\ldots\ldots,\ldots\ldots\}$

VOCÊ OBSERVOU QUE:

$4x^2 = 9 \iff x^2 = \frac{9}{4}$ $V = \{\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\}$



2. Trabalhemos em R. Dê o conjunto verdade das equações:

a) $x^2 = 1{,}21$ V = __________

b) $x^2 = 1{,}44$ V = __________

c) $x^2 = 1{,}96$ V = __________

d) $x^2 = 2{,}25$ V = __________

3. Considere a equação:

$x^2 = 2$

e assinale em cada coluna o valor de x que é próximo da solução. Assinale com f o mais próximo por falta. Assinale com e o mais próximo por excesso.

aproximação décimos	aproximação centésimos	aproximação milésimos
1,2 ( )	1,41 ( )	1,412 ( )
1,3 ( )	1,42 ( )	1,413 ( )
1,4 ( )	1,43 ( )	1,414 ( )
1,5 ( )	1,44 ( )	1,415 ( )

VOCÊ OBSERVOU QUE:

$1{,}4^2 < 2 < 1{,}5^2$ isto é $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$

$1{,}41^2 < 2 < 1{,}41^2$ isto é $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$

$1{,}414^2 < 2 < 1{,}414^2$ isto é $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$

ANOTE:

$\sqrt{2}$ é um decimal não periódico ilimitado, e portanto é um número irracional.

$\sqrt{2} = 1{,}4142135624$ ....

Grupo IV – Exercícios de aplicação

1. Procure por tentativas a solução positiva da equação

$x^2 = 3$

a) com aproximação de décimos: por falta __________

por excesso. __________

b) com aproximação de centésimos: por falta __________

por excesso. __________

2. Procure por tentativas a solução positiva da equação do quadro. Com aproximação de décimos:

	$x^2 = 5$	$x^2 = 7$
por falta		
por excesso		

ANOTE:

Para não usarmos só valores aproximados (não exatos) indicamos as soluções exatas:

de	$x^2 = 2$	por $\sqrt{2}$	e	$-\sqrt{2}$
de	$x^2 = 3$	por $\sqrt{3}$	e	$-\sqrt{3}$
de	$x^2 = 5$	por $\sqrt{5}$	e	$-\sqrt{5}$

COMPARAÇÃO DE REAIS

ANOTE:

Comparam-se números reais do mesmo modo que os racionais sob a forma decimal.

GRADUAÇÃO DA RETA REAL

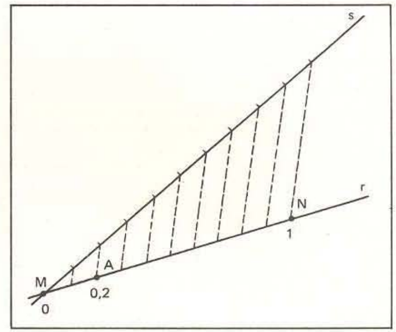
Grupo V — Exercícios preliminares

1. Você lembra que na pg. aprendeu a dividir um segmento em 2, 3, 4 . . . partes equipolentes.

   Na reta r vamos usar o processo da pg. para marcar o ponto

   A ⌣ 0,2

   dividindo o segmento $\overline{MN}$ em dez partes.



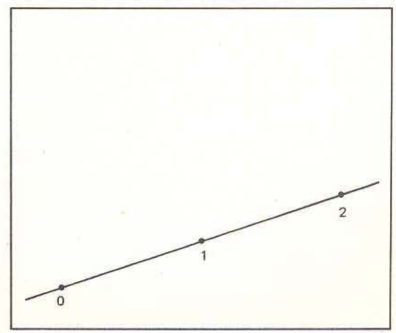
2. Marque na reta numerada os pontos B C D E que representam os números

   B ⌣ 0,5

   C ⌣ 0,4

   D ⌣ 1,3

   E ⌣ 0,6



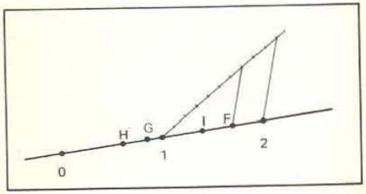
3. Qual o número que corresponde aos pontos:

F → 1,7

G → ____

H → ____

I → ____



VOCÊ OBSERVOU QUE:

Para associar números reais a pontos da reta, precisamos escolher uma origem (ponto de partida), um sentido e uma unidade.

ANOTE:

Com uma origem, um sentido e uma unidade, temos uma graduação da reta.

4. Vamos corresponder números reais a pontos da reta na graduação G_1:

A → ____

B → ____

C → ____

D → ____

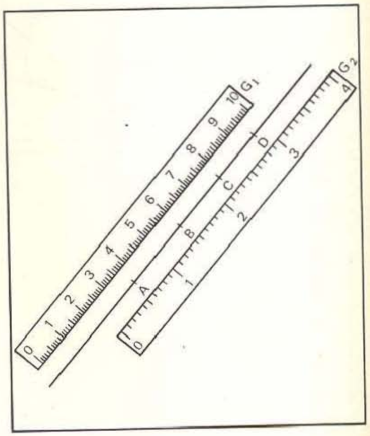
na graduação G_2

A → ____

B → ____

C → ____

D → ____



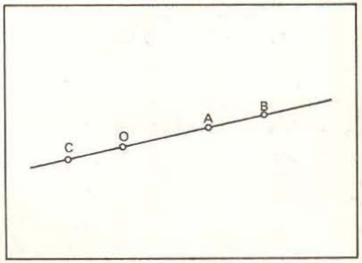
ANOTE:

> Dada uma graduação da reta:
>
> A todo número real corresponde um e um só ponto na reta.
>
> Todo ponto da reta é imagem de um e um só número real.
>
> Temos então uma bijeção entre os pontos da reta e o conjunto dos números reais.
>
> Dado um ponto A de uma reta e uma graduação g, o número associado a A se chama abcissa de A pela g e se representa a (A)

Grupo VI – Exercícios de aplicação

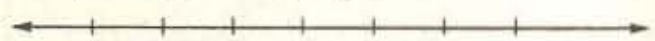
1. Determine com aproximação a abcissa dos pontos A, B e C usando a origem 0, a unidade de sua régua e o sentido positivo $\overrightarrow{OA}$

pontos	Abcissas
A	a (A) =
B	a (B) =
C	a (C) =



2. Assinale em vermelho, os conjuntos, nas retas graduadas:

a) $A = \{x \in \mathbf{N} \mid 2 \leqslant x \leqslant 3\}$



b) $B = \{x \in \mathbf{Z} \mid -2 \leqslant x \leqslant 3\}$

c) $C = \{x \in \mathbf{R} \mid -2 \leqslant x \leqslant 3\}$

d) $D = \{x \in \mathbf{N} \mid x \geqslant 1\}$

e) $E = \{x \in \mathbf{Z} \mid x \leqslant 1\}$

f) $F = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leqslant 2\}$

VOCÊ OBSERVOU QUE:

> Para representar geometricamente os conjuntos, assinalamos pontos quando o conjunto universo é N ou Z e desenhamos um segmento ou semi-reta quando o conjunto universo é **R**.

GRUPO (R, +)

Grupo I – Exercícios preliminares

1. Dada a reta graduada r $\overrightarrow{OB}$ é equipolente à $\overrightarrow{AC}$;

Determine:

a (A) =

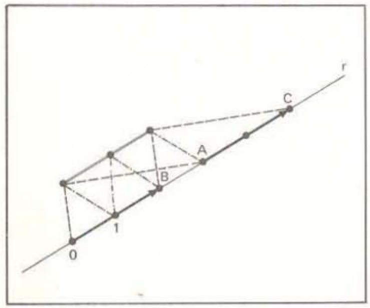
a (B) =

Assinale o ponto **M** tal que

a (M) = a (A) + a (B)

O ponto M coincide com C?

____



2. a) Trace na reta r graduada

$\overrightarrow{AC}$ equipolente a $\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{AR}$ equipolente a $\overrightarrow{ON}$

$\overrightarrow{BS}$ equipolente a $\overrightarrow{NO}$

b) Determine

a (A) = ... a (N) = ...

a (B) = ... a (R) = ...

a (C) = ... a (S) = ...

a (A) + a (B) = ...

a (A) + a (N) = ...

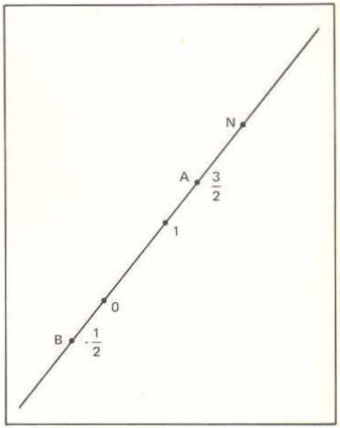
a (B) + a (N) = ...

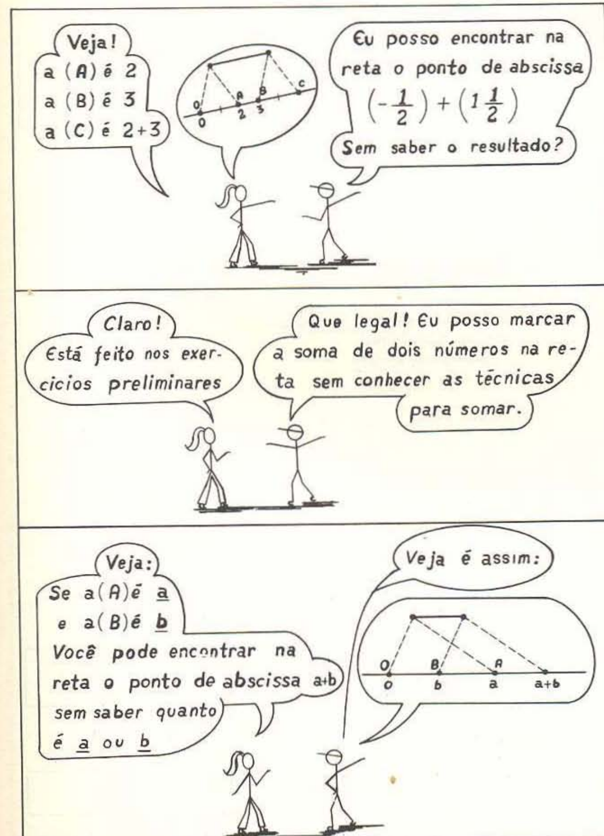
c) Coloque = ou ≠

a (A) + a (B) . . . a (C)

a (C) + a (N) . . . a (R)

a (B) + a (N) . . . a (S)





DE UM MODO GERAL:

> Dados os pontos A e B de uma reta graduada r podemos determinar um ponto C tal que:
>
> $$a(C) = a(A) + a(B)$$

3. Responda:

a) A todo par de pontos A e B, corresponde um só ponto C na reta graduada r tal que:

$$a(C) = a(A) + a(B)?$$

. . . .

b) A todo par de números reais corresponde um número real que é a sua soma?

. . . .

c) A soma de dois números reais é única?

. . . .

d) A relação **R** x **R** em **R**, pela adição é uma função?

. . . .

VOCÊ OBSERVOU QUE:

> A cada elemento **R** x **R** corresponde pela adição um e somente um elemento de **R**.

VOCÊ CONCLUI QUE:

> A adição em **R** é uma operação.

Grupo II – Exercícios de aplicação

1. Assinale na reta graduada r os pontos A e B tais que:

   a (A) = $\frac{3}{7}$

   a (B) = $\frac{1}{3}$

   a) Determine o ponto C de abcissa

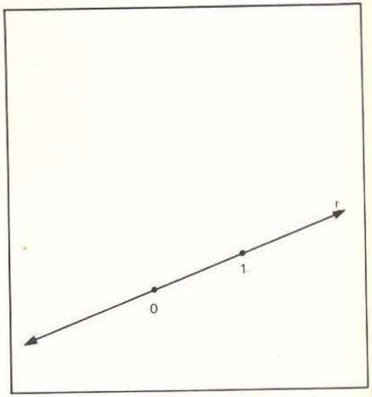
   a (C) = a (A) + a (B)

   b) Você sabe qual é a abcissa de C na forma de fração?

   . . . .

   na forma decimal?

   . . . .



2. Na reta graduada r estão assinalados os pontos A e B tais que:

   a (A) = $\sqrt{2}$
   a (B) = $\sqrt{3}$

   a) Determine o ponto C de abcissa

   a (C) = a (A) + a (B)

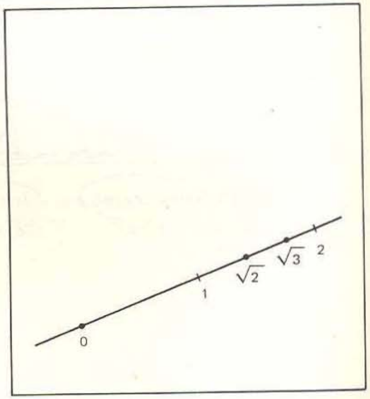
   b) Você sabe qual é a abcissa de C

   na representação decimal?

   . . . .

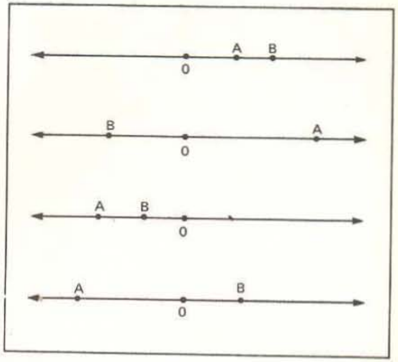
   em outra representação?

   . . . .



3. Seja a reta r com uma graduação qualquer

Seja $a\ (A) = x$
$a\ (B) = y$



a) marque em r, nos quatro casos ao lado, um ponto C tal que:

$a\ (C) = x + y$

b) Quaisquer que sejam os pontos A e B existe um ponto C tal que:

$a\ (C) = a\ (A) + a\ (B)$?

. . . .

c) Assinale V ou F

A abcissa de um ponto é sempre um número real ( )
A abcissa de um ponto pode ser um número natural ( )
A abcissa de um ponto é um número racional ( )
Dados os pontos **A** e **B**, a abcissa do ponto C tal que $a\ (C) = a\ (A) + a\ (B)$ é um número real ( )

4. Assinale V ou F para qualquer valor de x, y ou z em cada sentença

Sentença	Valor Verdade	Por que?
$x + y = y + x$		. . . .
$(x + y) + z = x + (y + z)$		. . . .
$x + z = x$		. . . .
$x - y = x + y$		. . . .
$x + (-y) = x - y$		. . . .
$x + y = x - (-y)$		. . . .
$x - (y - z) = x + (-y + z)$		. . . .

5. Observe as expressões e suas transformações

Complete:

expressão	propriedade aplicada
$(\sqrt{3} + \sqrt{5}) + (-\sqrt{3}) =$	. . . .
$= \sqrt{3} + (\sqrt{5} - \sqrt{3}) =$	. . . .
$= \sqrt{3} + (-\sqrt{3} + \sqrt{5}) =$	. . . .
$= (\sqrt{3} - \sqrt{3}) + \sqrt{5} =$	. . . .
$= \sqrt{5}$	
$2 + (\sqrt{2} - \frac{3}{2}) =$	. . . .
$= 2 + (-\frac{3}{2}) + \sqrt{2} =$	. . . .
$= (2 - \frac{3}{2}) + \sqrt{2} =$	. . . .
$= \frac{1}{2} + \sqrt{2}$	. . . .

6. Complete, a fim de ter sentenças verdadeiras:

$\sqrt{5} + \ldots\ldots\ldots = 0$

$\sqrt{5} + \ldots\ldots\ldots = \sqrt{5}$

$\sqrt{5} + 7 \ldots\ldots\ldots = 7$

$\sqrt{5} - 7 \ldots\ldots\ldots = 0$

7. Calcule o conjunto verdade em **R**

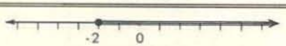
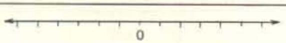
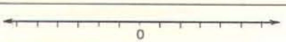
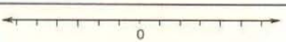
equações	V
$2 + x = \sqrt{3}$	
$y + \sqrt{2} = \sqrt{2}$	
$p + \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}$	
$0{,}3 + x = 0{,}05$	
$0{,}3 + x = \frac{1}{3}$	

8. Considere x, y e z elementos quaisquer de **R**.

Observe a coluna da esquerda e dê o nome das propriedades para passar de uma sentença a outra.

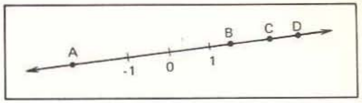
sentença	propriedade
$x + z = y + z$ $(x+z) + (-z) = (y+z) + (-z)$ $x + (z-z) = y + (z-z)$ $x + 0 = y + 0$ $x = y$	....
$x + z > y + z$ $(x+z)+(-z) > (y+z)+(-z)$ $x+(z-z) > y+(z-z)$ $x + 0 > y + 0$ $x > y$	....
$x + z < y + z$ $(x+z)+(-z) < (y+z)+(-z)$ $x+(z-z) < y+(z-z)$ $x + 0 < y + 0$ $x < y$	....

9. Observe o modelo, escreva o conjunto verdade e represente-o sobre a reta real

inequação	representação gráfica do conjunto V	V por uma propriedade
a) $x - 1 \geqslant -3$		$V = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geqslant -2\}$
b) $x + 3 \leqslant \frac{2}{3}$		V =
c) $2{,}3 + y \geqslant 5$		V =
d) $1 + x \leqslant 2$		V =

10. Considere a reta t, com origem em 0 e a graduação em centímetros.

Calcule aproximadamente



a (A) = ______; a (A) - a (B) = ______
a (B) = ______; a (B) - a (A) = ______
a (C) = ______; |a (A) - a (B)| = ______
a (D) = ______; |a (A) - a (C)| = ______
a (E) = ______; |a (D) - a (E)| = ______

ANOTE:

Chamamos de

Medida do segmento $\overline{XY}$
ou
distância dos pontos X e Y
ao módulo da diferença de suas abcissas.

$m(\overline{XY}) =$

$= d(X, Y) =$

$= |a(X) - a(Y)|$

11. Considerando a reta t e os pontos assinalados no ex. 10, complete:

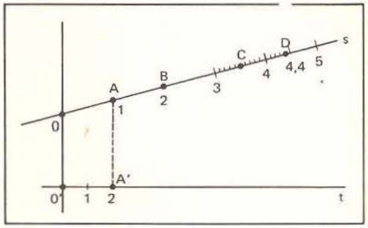
$m(\overline{AB}) =$ ______________________
$m(\overline{AC}) =$ ______________________
$m(\overline{AD}) =$ ______________________
$m(\overline{EC}) =$ ______________________

O GRUPO (R*, x)

Grupo I — Exercícios preliminares

1. a) Dada a reta graduada s e seus pontos A, B, C, D,

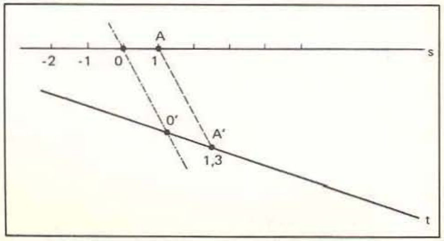
projete-os paralelamente a $\overleftrightarrow{OO'}$ sobre a reta graduada **t**



b) Complete o quadro:

s	a(X)	0	1	2	3,5	4,4	5,8	10,3
t	a(X')	0	2					

2. Proceda da mesma maneira que no exercício 1 para as retas **s** e **t**, e complete o quadro:



s	a(x)	0	1	2	3	4,5	5	-2
t	a(x')	0	1,3					

OBSERVE QUE:

Tanto no exercício 1 como no exercício 2 escolhemos arbitrariamente a abcissa da projeção (em t) do ponto correspondente à abcissa 1 (em s).

VOCÊ OBSERVOU QUE:

No exercício 1	1 No exercício 2
$0 \to 0$	$0 \to 0$
$1 \to 2$	$1 \to 1{,}3$
$2 \to 4$	$2 \to 2{,}6$
$3{,}5 \to 7$	$3 \to 3{,}9$
$4{,}4 \to 8{,}8$	$4{,}5 \to 5{,}85$

ANOTE:

Dizemos que as retas do plano foram graduadas conforme o "Axioma de Thales".

3. Através de projeções paralelas $\overleftrightarrow{OO'}$

a) Associe ao ponto A o ponto A' tal que:
a (A') = x

b) Associe ao ponto B de abcissa y o ponto B' e ao ponto C de abcissa n o ponto C'

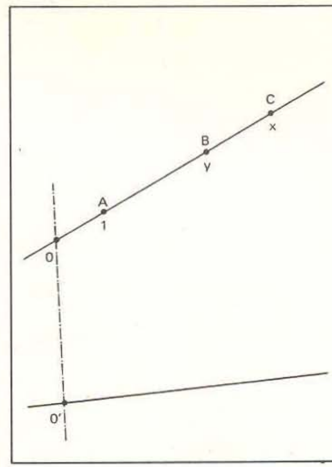
c) Complete:
a abcissa do ponto B' é:
. . . .
a abcissa do ponto C' é:
. . . .

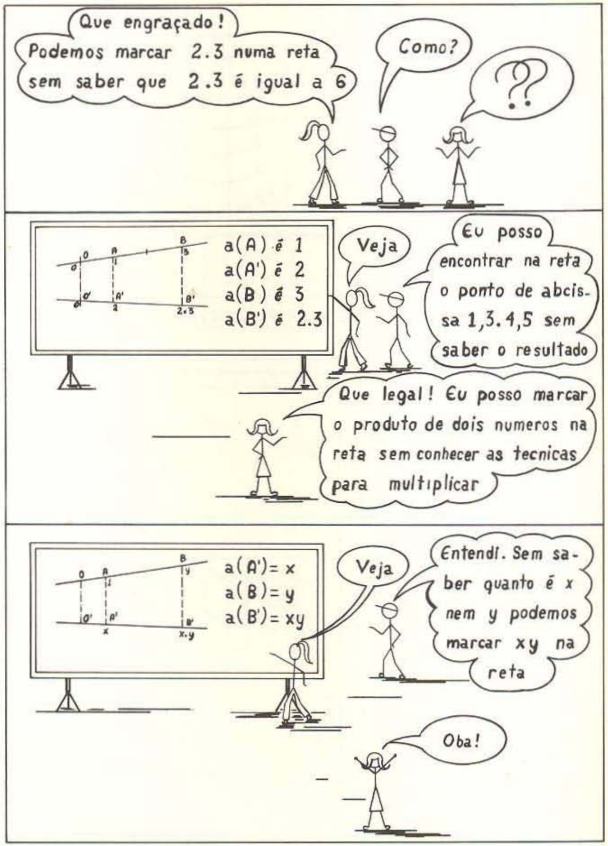
d) Associe agora ao ponto A o ponto A' tal que: a (A') = h

e) Neste caso temos:

abcissa de B' = ________

abcissa de C' = ________





DE MODO GERAL:

> Dados dois números reais **a** e **b** podemos sempre encontrar um número real **a . b**.
>
> Para isto consideramos duas retas convenientemente graduadas e uma bijeção entre elas.

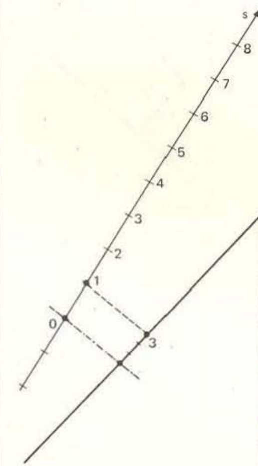
VOCÊ CONCLUI QUE:

> A multiplicação em R é uma operação.

Grupo II – Exercícios de aplicação

1. a) Dada a reta graduada s e seus pontos A, B, C, D, projete-os paralelamente a $\overleftrightarrow{OO'}$ sobre a reta graduada t.

   b) Complete o quadro.

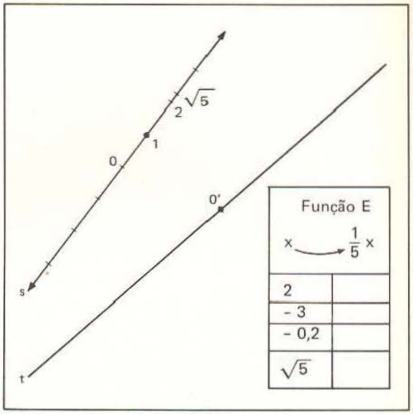


Função F $x \rightarrow 3x$	
1	3
3	
5	
6,5	
8	
-2	
$-\frac{1}{3}$	
0,4	

2. Trabalhemos em **R**

a) Complete os quadros e gráficos correspondentes.

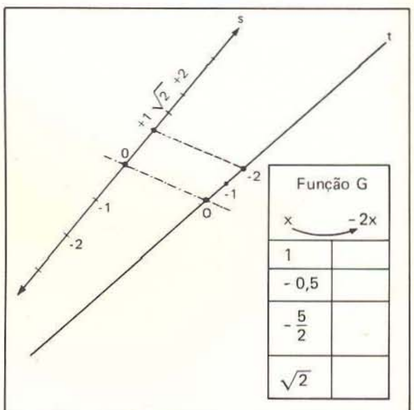
b) Determine em cada gráfico os pontos 1 e -1 da reta t.



Função E

$x \longmapsto \frac{1}{5}x$

2	
- 3	
- 0,2	
$\sqrt{5}$	



Função G

$x \longmapsto -2x$

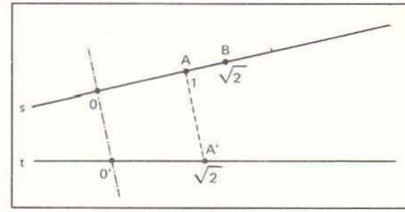
1	
- 0,5	
$-\frac{5}{2}$	
$\sqrt{2}$	

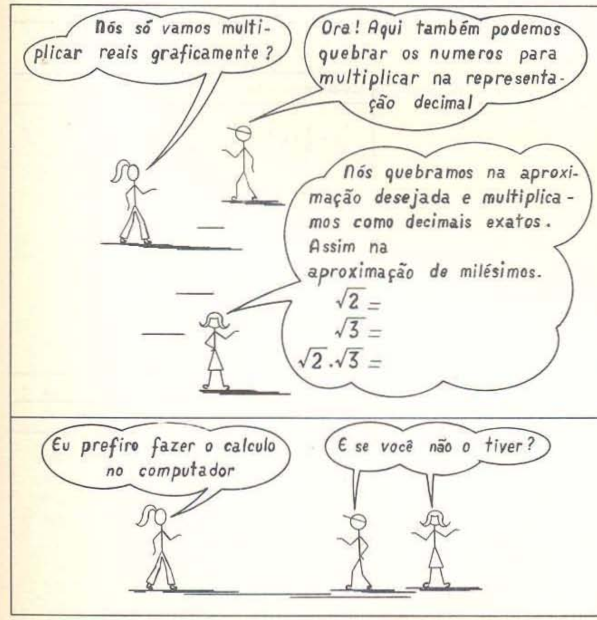
3. a) Determine a projeção B' do ponto B.

Qual a abcissa de B'?

. . . .

b) Assinale na reta **t** os pontos de abcissa 2 e 1.





4. Observe as expressões e suas transformações e complete com os nomes das propriedades aplicadas

a)

Cálculos	propr. aplicadas
$\frac{1}{3} \times (-\sqrt{2}) \times 3 =$	....
$= \frac{1}{3} \times 3 \times (-\sqrt{2}) =$	....
$= \left(\frac{1}{3} \times 3\right) \times (-\sqrt{2}) =$	....
$= 1 \times (-\sqrt{2}) =$	....
$= -\sqrt{2}$	

b)

Cálculos	propr. aplicadas
$\frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{5} \times \sqrt{5} =$	....
$= \frac{1}{5} \times \frac{1}{\sqrt{5}} \times \sqrt{5} =$	....
$= \frac{1}{5} \times (\frac{1}{\sqrt{5}} \times \sqrt{5}) =$	....
$= \frac{1}{5} \times 1 =$	....
$= \frac{1}{5}$	

5. Efetue os cálculos, indicando as propriedades que você tiver aplicado.

a)

Cálculos	propr. aplicadas
$(-\frac{2}{3}) \times \sqrt{7} \times (-\frac{3}{2}) =$	....
= .... =	....
= .... =	....
= .... =	....
= .... =	

b)

Cálculos	propriedades aplicadas
$2{,}3 \times (-\frac{1}{\sqrt{2}}) \times \frac{1}{2{,}3} \times (-\sqrt{2}) =$	....
= .... =	....
= .... =	....
= .... =	....
= .... =	....
= .... =	....

6. Observe o modelo e, aplicando a distributiva, complete:

a) $\sqrt{2}(a + b + c) = a\sqrt{2} + b\sqrt{2} + c\sqrt{2}$

b) $\sqrt{3}\ (x + 1) =$ ....

c) $a(\sqrt{5} - 1) =$ ....

d) $2(\sqrt{2} + \sqrt{3}) =$ ....

e) $m(a + b - c) =$ ....

7. Aplique a propriedade distributiva para colocar o fator comum em evidência e reduza os termos semelhantes, quando possível:

a) $2a + 2b + 2c =$ ....

b) $3x + 3y - 3z =$ ....

c) $\frac{3x}{2} - \frac{5x}{2} - \frac{x}{2} =$ ....

d) $\frac{3x}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x}{6} =$ ....

e) $\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 5\sqrt{2} =$ ....

f) $\sqrt{7} - 5\sqrt{7} - 8\sqrt{7} =$ ....

g) $a\sqrt{5} + \sqrt{5} =$ ....

8. Trabalhando em **R**, resolva as equações:

a) $3x - 8(x-1) - 5x = -7 - 5(x-3)$

V = ...

b) $x(x+1) - 16 = x$

V = ...

c) $5 - x(x-2) = 2x + 5$

V = ...

d) $10 + 7x = x(x+7)$

V = ...

e) $2x^2 = -50$

V = ...

f) $\dfrac{x^2 - 4}{3} = 7$

V = ...

g) $\dfrac{x^2 - 2}{2} - \dfrac{3x^2 - 1}{4} = \dfrac{1}{2}$

V = ...

9. Represente, sobre as retas reais abaixo de cada inequação em **R**, seu conjunto verdade:

a) $2x \leqslant 15$

0 1

b) $-2x - \dfrac{x}{2} \leqslant 1$

0 1

c) $-\dfrac{1}{2} + \dfrac{2x}{3} \geqslant \dfrac{1}{2}$

0 1

d) $\dfrac{2x - 1}{3} \leqslant \dfrac{3x + 5}{2}$

0 1

10. a) Resolva em **R** $x^2 = 5$

V = ...

b) Complete; $(\sqrt{5})^2 =$ . . . .

$(-\sqrt{5})^2 =$ . . . .

11. a) Resolva em **R**: $x^4 = 16$

V = ...

b) Complete: $(\sqrt{2})^4 =$ . . . .

$(-\sqrt{2})^2 =$ . . . .

VOCÊ OBSERVOU QUE:

$(\sqrt{5})^2 = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5}$	$(\sqrt{2})^4 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$
$(-\sqrt{5})^2 = (-\sqrt{5}) \cdot (-\sqrt{5})$	$(-\sqrt{2})^4 = (-\sqrt{2}) \cdot (-\sqrt{2}) \cdot (-\sqrt{2}) \cdot (-\sqrt{2})$

VOCÊ CONCLUI QUE:

Ao calcular potências de expoente inteiro e de base qualquer, você está efetuando multiplicações.

Então: para todos $a \in \mathbf{R}$ $n \in \mathbf{Z}$

$a^n \in \mathbf{R}$

CÁLCULO LITERAL

Grupo I — Exercícios preliminares

1) Trabalhando em **R**.

Observe as transformações e diga quais as propriedades aplicadas:

transformação	propriedades
$(a+b)+(-a)+(-b) =$	
$= a+[b+(-a)+(-b)] =$	
$= a+[b+(-b)+(-a)] =$	
$= a+[b+(-b)]+(-a) =$	
$= a+0+(-a) =$	
$= a+(-a) =$	
$= 0$	

VOCÊ DEMONSTROU QUE:

> O oposto de $(a+b)$ é $(-a)+(-b)$
>
> ou
>
> $-(a+b) = (-a)+(-b)$

2) Trabalhemos em R^*

Complete a demonstração de que:

$(a \cdot b) \div b = a$

transformação	propriedades
$(a \cdot b) \div b =$	
$= (a \cdot b) \cdot \frac{1}{b} =$	....
$= a \cdot (b \cdot \frac{1}{b}) =$	....
$= a \cdot 1 =$	....
$= a$	....

3) De maneira análoga ao que você fez no exercício 2, demonstre que:

$(a \cdot b) \div a = b$

transformação	propriedades
$(a \cdot b) \div a =$	....
....	....
....	....
....	....
$= b$	

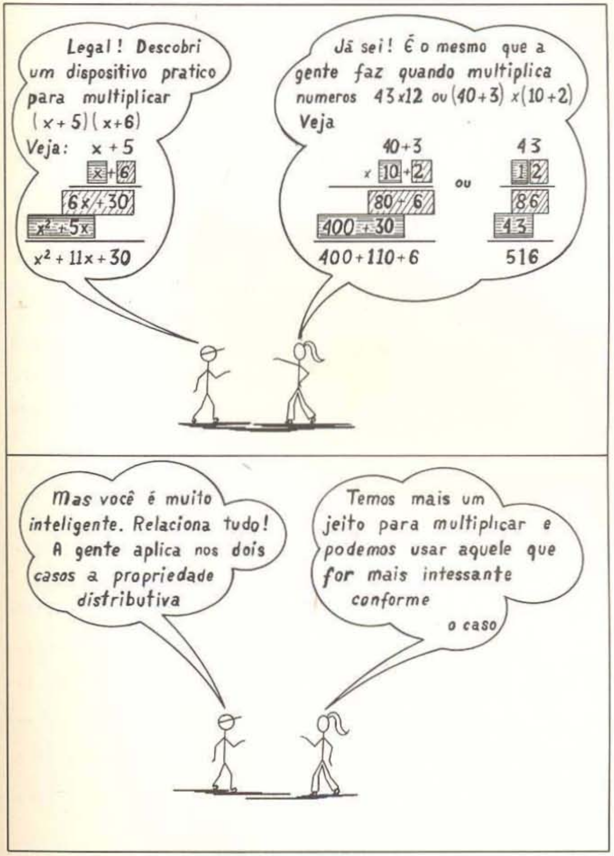
VOCÊ LEMBRA QUE:

> para todo $a \in Q^*$ $m \in Z$ e $n \in Z$ temos
>
> $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
>
> $a^m \div a^n = a^{m-n}$
>
> $(a^m)^n = a^{m.n}$
>
> e que as propriedades das operações válidas para **Q** também são válidas para **R**; portanto as três afirmações acima são válidas também para todo $a \in R^*$.

4) Trabalhando em $R\_$.

Observe as transformações e diga quais as propriedades aplicadas

Transformações	Propriedades
$5x^2y(xy+4y^2)$	....
$(5x^2y)(xy)+(5x^2yI(4y^2)$	....
$5x^2xyy+20x^2.yy^2$	....
$5x^3y^2+20x^2y^3$	....
$4a^2(3a^2-5ab)$	....
$(4a^2).3a^2-(4a^2).5ab$	....
$12a^2.a^2-20a^2.ab$	....
$12a^4-20a^3b$	....
$(x+5)(x+6)$	
$(x+5).x+(x+5).6$	....
$(x.x+5x)+(x.6+30)$	....
$x\,x+(5x+6x)+30$	....
$x^2+(5x+6x)+30$	....
$x^2+11x+30$	....
$(x+8)(x-3)$	....
$(x+8)\,x-(x+8).3$	....
$(x.x+8x)-(x.3+24)$	....
$(x.x+8x)-(3x+24)$	....
$(x^2+8x)-(3x+24)$	....
$x^2+8x-3x-24$	....
$x^2+5x-24$	....



Grupo III — Exercícios de aplicação

1) Elimine os sinais de pontuação e reduza os termos semelhantes quando possível:

a) $a + (b + 3a) - (5b - 6a) =$
= . . . .

b) $7c + 3(a+c) - (2c+4a) =$
= . . . .

c) $3m - 5(p-n) + 2(4p + n) =$
= . . . .

d) $2 + 4a(a+1) - (a^2 - 4) =$
= . . . .

e) $3a^2 + a - 5a(a + 1) =$
= . . . .

2) Coloque em evidência o fator comum:

a) $3a^2b - 6ab + 12a =$
= . . . .

b) $15ab^2 - 10a^2b + 5ab =$
= . . . .

c) $abc + a^2bc - ab^2c^2 =$
= . . . .

d) $p^3q + p^2q^2 - q^3p =$
= . . . .

3) Efetue:

a) $(a^2)^2 =$ . . . .

b) $(a^3)^2 =$ . . . .

c) $(b^2)^5 =$ . . . .

d) $(-b^3)^2 =$ . . . .

e) $(5m)^2 =$ . . . .

f) $(-3m^3)^2 =$ . . . .

4. Efetue como achar melhor:

$(x + 2)(x + 5)$ . . . .

$(x + 7)(x - 2) =$ . . . .

$(3x + 5)(2x + 1) =$ . . . .

$(4x + 3)(5x - 2) =$ . . . .

$(3x^2 + 8)(4x^2 + 3) =$ . . . .

$(5y - 3x)(6y + 4x) =$ . . . .

$(7x^2 - 8y)\ (5x^2 + 3y) =$ . . . .

PRODUTOS NOTÁVEIS

Grupo III — Exercícios preliminares

1) Trabalhemos em **R**.

Observe as transformações e diga quais as propriedades aplicadas:

Transformações	Propriedades
$(a + b)^2 =$	
$\boxed{(a + b)}.(a + b) =$	. . . .
$= \boxed{(a + b)}a + \boxed{(a + b)}b =$	. . . .
$= a.a + b.a + a.b + b.b =$	. . . .
$= a^2 + a.b + ab + b^2 =$	. . . .
$= a^2 + 2ab + b^2$	. . . .

Transformações	Propriedades
$(a-b)^2 =$	
$\boxed{(a-b)}.(a-b) =$	. . . .
$= \boxed{(a-b)}.a - \boxed{(a-b)}.b =$	. . . .
$a^2 - ba - ab + b.b$	. . . .
$a^2 - ab - ab + b^2$	. . . .
$a^2 - 2ab + b^2$	. . . .

3) Complete o quadro:

a	b	$(a+b)^2$	a^2+b^2	$(a-b)^2$	a^2-b^2
2	3				
-1	2				
3	-2				
0	5				
3	0				

VOCÊ OBSERVOU QUE:

Quase sempre:

$$(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$$

$$(a-b)^2 \neq a^2 - b^2$$

em R

4) Seguindo o esquema do exercício 1, efetue e reduza os termos semelhantes para a, b, c quaisquer de **R**:

a) $(a+b)(a-b) =$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

b) $(a+b)(a+c) =$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

c) $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) =$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

d) $(a-b)^2 =$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

DE UM MODO GERAL:

Para todos **a**, **b** e **c** reais

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

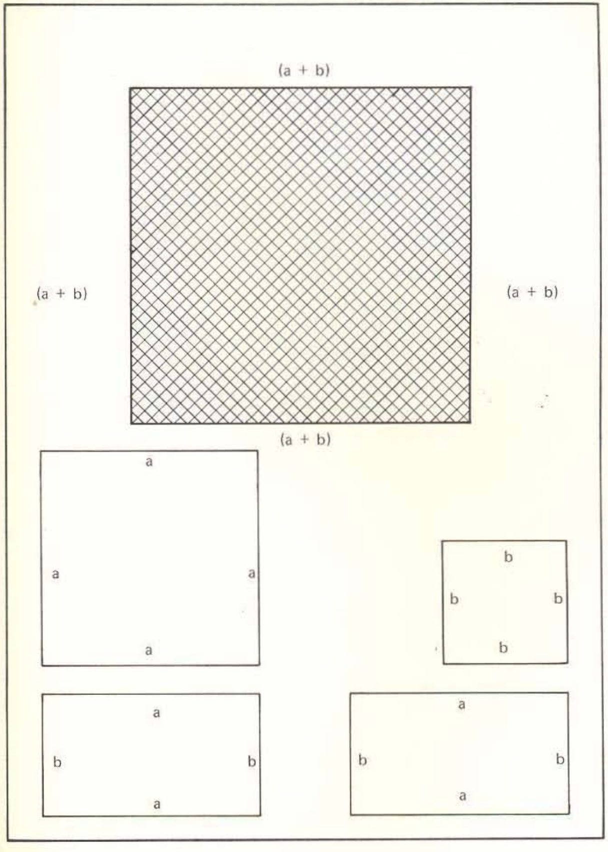
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$(a+b)(a+c) = a \quad + (b+c)a + bc$$

Grupo IV — Exercícios de aplicação

1) a) Na folha recortável você encontra figuras brancas e um quadrado colorido. Recorte as figuras brancas e procure encaixá-las dentro do quadrado colorido, até recobri-lo totalmente.



b) Chame de a a medida do lado do maior quadrado branco e de b a medida do lado do menor quadrado branco.

Complete: A área do maior quadrado branco é:

. . . .

A área do menor quadrado branco é:

. . . .

A área de cada um dos retângulos é

. . . .

c) O quadrado colorido tem seu lado medindo

$(a + b)$

Complete: A área do quadrado colorido é:

. . . .

d) Se você conseguiu recobrir totalmente o quadrado colorido com as figuras brancas, quer dizer que a soma das áreas das figuras brancas é igual à área da figura colorida.

Complete: $(a + b)^2 =$ . . . .

2) Efetue, aplicando as regras dos produtos estudados:

a) $(m + 4)(m + 3) =$

. . . .

b) $(m + 4)(m - 4) =$

. . . .

c) $(m + 4)^2 =$

. . . .

d) $(m - 5)^2 =$

. . . .

e) $(2m - 1)^2 =$

. . . .

f) $(2m + a)(2m - a) =$

. . . .

g) $(ab - m)^2 =$ . . . .

. . . .

h) $(a^2 + b)^2 =$ . . . .

. . . .

i) $(2ab - \frac{1}{2})^2 =$ . . . .

. . . .

j) $(3ab - 4m^3)^2 =$ . . . .

. . . .

l) $(3a^3b - 3)(3a^3b + 3) =$ . . . .

. . . .

m) $(3ab - 2a)(3ab - 2a) =$ . . . .

. . . .

n) $(2p + 5)(2p - 5) =$ . . . .

. . . .

o) $(q - 2)(q + 1) =$ . . . .

. . . .

p) $(d - 6)(d - 3) =$ . . . .

. . . .

3) a) Na fôlha recortável você encontra figuras brancas e um quadrado colorido. Recorte as figuras brancas e procure encaixá-las dentro do quadrado colorido, até recobrí-lo totalmente.

b) Você observou que os triângulos brancos são triângulos retângulos. Complete:

A área de cada triângulo é:

. . . .

A área dos 4 triângulos é:

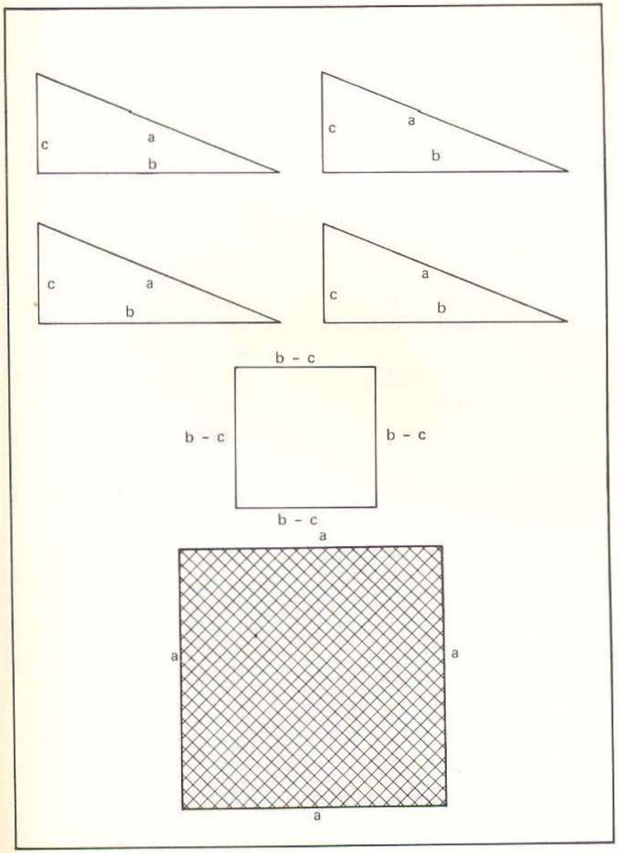
. . . .

A área do quadrado branco é:

. . . . ou . . . .

A área do quadrado colorido é:

. . . .



c) Se você conseguir recobrir totalmente o quadrado colorido com as figuras brancas, quer dizer que a soma das áreas das figuras brancas é igual à área da figura colorida.

Complete: $a^2 =$ . . . . $=$

$=$ . . . .

APLICAÇÃO DOS PRODUTOS NOTÁVEIS – FATORAÇÃO

Grupo V – Exercícios preliminares

1) Complete:

$(x+5)(x+3) = x^2 + \ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots + 15$
$\qquad x^2 + 8x + 15$

$(x+5)(x-3) = x^2 + \ldots - \ldots\ldots - 15$
$\qquad = x^2 + 2x - 15$

$(x-5)(x+3) = x^2 + \ldots + \ldots\ldots - 15$
$\qquad = x^2 - \ldots\ldots - \ldots$

$(x-5)(x-3) = x^2 - \ldots\ldots - \ldots\ldots + \ldots\ldots$
$\qquad = x^2 - \ldots\ldots + \ldots\ldots$

$(x+a)(x+b) = x^2 + \ldots\ldots + \ldots\ldots + a.b$
$\qquad = x^2 + (a+b) + a.b$

VOCÊ LEMBRA QUE:

> Para todos **a, b,** e **x** reais
>
> $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + a.b$

2) De acordo com a conclusão anterior, complete:

$x^2 + (4+3)x + 4.3 = (x + \ldots)(x + \ldots)$

$x^2 + (5-3)x + 5.(-3) = (x + \ldots)(x - \ldots)$

$x^2 + (-7-9)x + (-7)(-9) = (x - \ldots)(x - \ldots)$

3) Considere $x^2 + 7x + 10$

a) Escreva todos os pares de números inteiros cujo produto é 10.

1 e 10 $\ldots\ldots$ e $\ldots\ldots$
-1 e -10 $\ldots\ldots$ e $\ldots\ldots$

b) Entre os pares acima escolha aquele cuja soma é 7

{ , }

c) Complete: $x^2 + 7x + 10 = x^2 + (\quad + \quad)x + (\quad \cdot \quad)$
$\qquad = (x + \ldots)(x + \ldots)$

4) Considere $m^2 - 8m + 12$.

a) Escreva todos os pares de números inteiros cujo produto é 12.

..... e ..... ; ..... e .....
..... e ..... ; ..... e .....
..... e ..... ; ..... e .....

b) Entre os pares acima escolha aquele cuja soma é -8.

.... e ....

c) Complete: $m^2 - 8m + 12 = m^2 + (-\ldots - \ldots)m + (\ldots \cdot \ldots)$
$\qquad = (m - \ldots)(m - \ldots)$

5) Considere $y^2 - 3y - 10$

a) Procure dois números inteiros **a** e **b** tais que o produto seja -10 e a soma seja -3.

a = ... b = ...

b) Complete: $y^2 - 3y - 10 = (\qquad)(\qquad)$

DE UM MODO GERAL:

Para todos **a**, **b** e **x** reais
$x^2 + (a + b)x + a.b = (x + a)\ (x + b)$

ANOTE:

A expressão $(x + a)(x + b)$ é a forma *fatorada* de $x^2 + (a + b)x + a \,.\, b$

Grupo VI – Exercícios de aplicação

1) Complete de modo a ter sentenças verdadeiras:

$m^2 + 15m + 50 = (m + \ldots)(m + \ldots)$

$m^2 - 15m + 50 = (m - \ldots)(m - \ldots)$

$m^2 - 5m - 50 = (m - \ldots)(m + \ldots)$

$m^2 + 5m - 50 = (m - \ldots)(m + \ldots)$

$x^2 + \ldots + \ldots = (x + 4)(x + 8)$

$x^2 - 11x + \ldots = (x - 4)(x - \ldots)$

$x^2 - \ldots - 28 = (x + 4)(x - \ldots)$

$x^2 + \ldots - 28 = (x + 7)(x - \ldots)$

2) Fatore as seguintes expressões:

$b^2 + 14b + 40 = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$b^2 + 14b + 49 = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$a^2 + 6b - 40 = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$a^2 - 10a + 24 = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$x^2 + 10a + 25 = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$x^2 - 10a + 25 = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Grupo VII – Exercícios preliminares

1) Complete:

$(x + y)^2 = x^2 + \ldots\ldots + y^2$

$(x - y)^2 = x^2 - \ldots\ldots + y^2$

$(2x + 5)^2 = (2x)^2 + \ldots\ldots + 5^2$

$(3x - \ldots)^2 = (3x)^2 - \ldots\ldots + 1$

$(x + \ldots)^2 = \ldots + \ldots + (2a)^2$

$(3a - \ldots)^2 = (3a)^2 - \ldots + 2^2$

$(3a - \ldots)^2 = (3a)^2 - 6ay + \ldots$

$(\ldots + \ldots)^2 = (2x)^2 + 12xy + \ldots$

2) Vamos descobrir quando uma expressão é do tipo $(a + b)^2$ ou $(a - b)^2$.

a) Seja $9 + 6a + a^2$

Note que $9 = 3^2$

$6a = 2 \cdot 3 \cdot a$ logo $9 + 6a + a^2 = (\ldots + \ldots)^2$

3) Seja $25x^2 - 10x + 1$

Note que $25x^2 = (5x)^2$

$10x = 2 \cdot 5x \cdot 1$ logo $25x^2 + 10x + 1 = (\ldots + \ldots)^2$

DE UM MODO GERAL:

> Para todos a e b reais
>
> $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
>
> $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

4) Complete a fim de tornar verdadeiras as sentenças:

$(x - 2)(x + 2) = x^2 - \ldots\ldots$

$a^2 - 4^2 = (a + \ldots)(a - \ldots)$

$(4x + 3)(4x - \ldots) = 16x^2 - \ldots\ldots$

$(3a)^2 - (2b)^2 = (3a + 2b)(\ldots - \ldots)$

$(14x)^2 - 5^2 = (\ldots + \ldots)(\ldots - \ldots)$

5) Vamos descobrir quando uma expressão é do tipo $(a + b)(a - b)$.

a) Seja $a^2 - 100$

Note $100 = 10^2$ logo $a^2 - 100 = (\ldots + \ldots)(\ldots - \ldots)$

6) Seja $25x^6 - y^4$

Note que $(5x^3)^2 = 25x^6$

$(y^2)^2 = y^4$ logo $25x^6 - y^4 = (\ldots + \ldots)(\ldots - \ldots)$

DE UM MODO GERAL:

> Para todo a e b reais
>
> $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

Grupo VIII — Exercícios de aplicação

1) Coloque $=$ ou $\neq$

$a^2 + b^2 \ldots (a + b)(a - b)$

$4x^2 - a^2 \ldots (2x - a)(2x + a)$

$2a^2 - 9 \ldots (2a + 3)(2a - 3)$

$(2x + 5)^2 \ldots 2x^2 + 10x + 25$

$25x^2 + 9 - 30x \ldots (5x - 3)^2$

$9a^2 - 4 + 12a \ldots (3a - 2)^2$

$5x^2 + 42 + 10xy \ldots (5x + y)^2$

$4x^4 + 12x^2y + 9y^2 \ldots (2x^2 + 3y)^2$

2) Complete de modo a ter sentenças verdadeiras:

a) $x^2 + 12x + \dots = (x+6)^2$

b) $9a^2 - 30a + \dots = (3a-5)^2$

c) $\dots - 20x + 4 = (\dots - 2)^2$

d) $x^2 - 9 = (x + \dots)(x - \dots)$

e) $x^2 - x + \frac{1}{4} = (x - \dots)^2$

f) $9a^2 - \frac{25}{4} = (\dots + \frac{5}{2})(\dots - \frac{5}{2})$

g) $x^2 - 3x + \dots = (x - \frac{3}{2})^2$

3) Fatore:

a) $x^2 - \frac{1}{4} =$ ....

b) $a^2 + 10a + 25 =$ ....

c) $a^2 + 8a + 16 =$ ....

d) $4a^2 + 20a + 25 =$ ....

e) $b^2 - 14b + 49 =$ ....

f) $b^2 + 14b + 49 =$ ....

g) $\frac{m^2}{9} - \frac{n^2}{100} =$ ....

h) $\frac{x^2}{y^2} - \frac{a^2}{b^2} =$ ....

4) Observe o modelo e coloque em evidência:

a) $3(x+1) + a(x+1) = (x+1)(3+a)$ (modelo)

b) $5(2+b) + b(2+b) =$ ....

c) $4(x-1) + x(x-1) =$ ....

d) $a(x-2) - 4(x-2) =$ ....

2) Coloque antes em evidência o fator comum e em seguida fatore, se for possível fatorar:

a) $2x^2 - 2y^2 = 2(x^2 - y^2) = 2(x+y)(x-y)$ (modelo)

b) $3x^2 + 12x + 27 =$ ....

c) $2a^4 - 50 =$ ....

d) $5y^2 - 25y + 30 =$ ....

e) $4a^2 - 32a + 64 =$ ....

3) Fatore ao máximo e reduza os termos semelhantes quando possível:

a) $x^4 - y^4 =$ ....

b) $a^4 - 1 =$ ....

c) $(x-2)^2 - (x+1)^2 =$ ....

d) $(y+3)^2 - (y-5)^2 =$ ....

e) $(a+1)^2 - (a-1)^2 =$ ....

4) Observe os modelos e simplifique as frações onde admitiremos os denominadores diferentes de zero.

a) $\frac{x^2 - y^2}{3x + 3y} = \frac{\cancel{(x+y)}(x-y)}{3\cancel{(x+y)}} = \frac{x-y}{3}$ (modelo)

b) $\frac{4x^3}{6x^5} = \frac{2.2.\cancel{x}.\cancel{x}.\cancel{x}}{2.3.x.x.\cancel{x}.\cancel{x}.\cancel{x}} = \frac{2}{3x^2}$ (modelo)

c) $\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4} =$ ....

d) $\frac{2a - 2b}{5a - 5b} =$ ....

e) $\frac{15y^4}{3y} =$ ....

f) $\frac{15a - 3b}{3a - 3b} =$ ....

g) $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 6x + 9} =$ ....

h) $\dfrac{30x^6}{12x^2y^3} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$

i) $\dfrac{8x^2}{2xy - 6xy^2} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$

j) $\dfrac{3a - 3b}{3a} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$

l) $\dfrac{a - b}{b - a} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$

5) Observe os modelos e efetue as multiplicações (ou as divisões) simplificando quando possível, os denominadores são por hipótese diferentes de zero

a) $\dfrac{2x + 2y}{3x} \cdot \dfrac{3x^2}{6x + 6y} = \dfrac{\cancel{2}\cancel{(x+y)}}{\cancel{3x}} \cdot \dfrac{\cancel{3}.\cancel{x}.x}{\cancel{2}.3\cancel{(x+y)}} = \dfrac{x}{3}$

(modelo)

b) $\dfrac{21x^4}{15x - 10y} \div \dfrac{7x}{3x - 2y} = \dfrac{3.\cancel{7}.\cancel{x}.x.x.x}{5\cancel{(3x - 2y)}} \cdot \dfrac{\cancel{3x - 2y}}{\cancel{7x}} =$

$= \dfrac{3x^3}{5}$ (modelo)

c) $\dfrac{2x + 2}{3x - 3} \cdot \dfrac{6x - 6}{10x + 10} = \dots\dots\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

d) $\dfrac{x^2 - y^2}{x - y} \cdot \dfrac{x^2 + 2xy + y^2}{x + y} = \dots\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

e) $\dfrac{2x^2 - 2y^2}{x + y} \div \dfrac{12}{4x - 4y} = \dots\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

f) $\dfrac{15x^3}{15x^2 - 15y^2} \div \dfrac{10y}{5x + 5y} = \dots\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

g) $\dfrac{x + 2}{3x - 2} \cdot \dfrac{9x^2 - 12x + 4}{4x + 8} = \dots\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

h) $\dfrac{2x - 1}{2x} \div \dfrac{4x - 2}{4x} = \dots\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

i) $\dfrac{15x^2y^4}{3x^5} \div \dfrac{5x^2y^4}{y^5} = \dots\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

j) $\dfrac{m^2 - 2mn + n^2}{4mn} \div \dfrac{1}{4m - 4n} = \dots\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

l) $\dfrac{x^2 - 7x + 10}{x - 2} \cdot \dfrac{2x^3}{2x - 10} = \dots\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

m) $\dfrac{x - y}{a - b} \cdot \dfrac{b - a}{y - x} = \dots\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

o) $\dfrac{m + n}{m - n} \div \dfrac{1}{n - m} = \dots\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

FUNÇÃO POLINOMIAL EM R

Grupo I – Exercícios preliminares

1) Sejam dois subconjuntos dos reais: A = {1,-3,-2}

B = {-2,0,2,4}

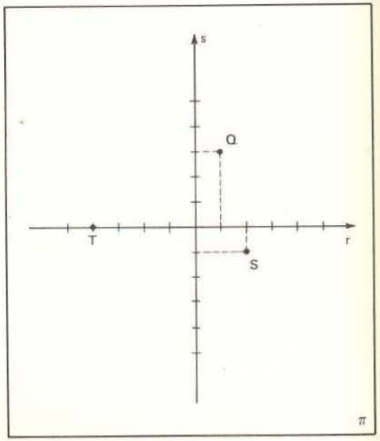
a) assinale (com vermelho) os elementos de A, ,na reta graduada r do plano π

b) assinale (com azul) os elementos de B, na reta graduada s, do plano π

c) Escreva por enumeração o produto cartesiano A x B

A x B = { . . . .

d) represente (com verde) os elementos de A x B, no plano π



e) O par (2,3) pertence a A x B?

. . . .

represente-o no plano π

f) no plano π estão representados os pontos Q, S, T, a que par de números reais estão associados

Q (,)
S (,)
T (,)

g) assinale um ponto M qualquer no plano π

Você, pode dizer a que par de números reais corresponde o ponto M no plano π?

. . . .

ANOTE:

Dadas duas retas graduadas r e s de um plano, a cada par de números reais podemos fazer corresponder um ponto do plano e reciprocamente a cada ponto do plano podemos corresponder um par de números reais.

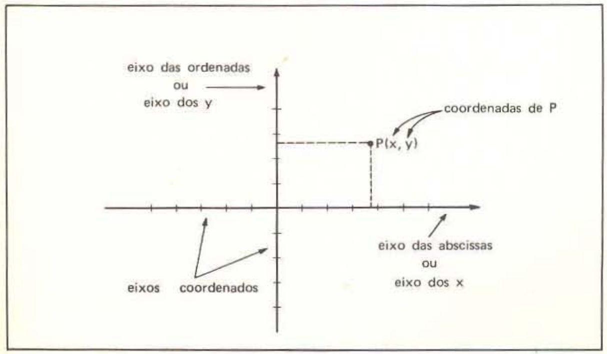
As retas graduadas r e s utilizadas para a representação do produto cartesiano **R** x **R** chamam-se EIXOS COORDENADOS.

A representação de **R** x **R** chama-se PLANO CARTESIANO. Se o ponto P corresponde ao par (x, y)

x chama-se ABCISSA do ponto P.

y chama-se ORDENADA do ponto P.

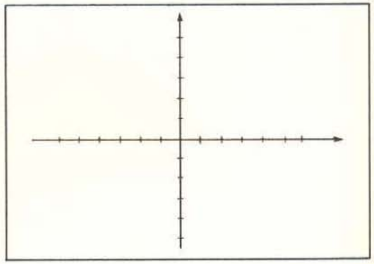
Dizemos que x e y são as COORDENADAS de P.



2) Sejam os eixos COORDENADOS x e y e dois subconjuntos dos reais A e B

A = {-5,-3,2}

B = {-2,0,4,5}



a) Represente com azul os elementos de A x B no gráfico ao lado

b) Represente com vermelho o subconjunto R de A x B

R = {(-5,0)(-5,4)(-3,-2),(2,5)}

c) R é uma relação de A em B? . . . .

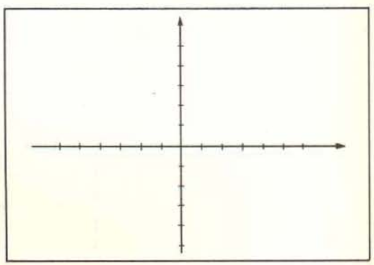
A imagem é sempre uma só? . . . .

d) Represente no gráfico a relação de A em B

S = {(-5,0),(-3,4),(2,0)}

S é uma função?

. . . .



ANOTE:

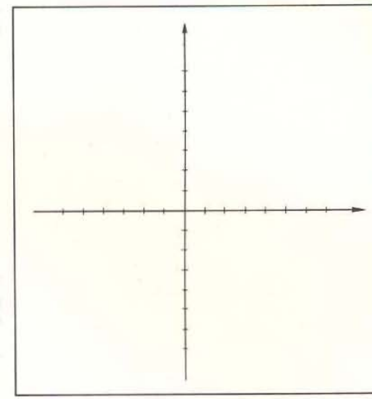
A representação de uma função no plano cartesiano chama-se *Gráfico Cartesiano* da função.

3) Considere a função f em R definida por $x \longmapsto 2x$

a) Complete o quadro:

x	0	1	-3	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{3}$
2x					

b) Marque no gráfico cartesiano os pares obtidos em a)



c) Os pontos que você assinalou estão sobre a mesma reta?

. . . .

Trace a reta.

d) Existe algum par de pontos de f que não pertence à reta traçada?

. . . .

. . . .

ANOTE:

> Para dizer que 2x é imagem de x pela f podemos escrever $x \longmapsto 2x$
> ou $f(x) = 2x$ (lê-se: f de x é 2x)
>
> Assim se $x = 3$ escrevemos $f(3) = 6$ (lê-se: f de 3 é 6)

e) Complete: $f(1) =$ . . . . $f(0) =$ . . . .

$f(-3) =$ . . . . $f(\frac{7}{3}) =$. . . . .

$f(\frac{1}{2}) =$. . . . . $f(-5) =$ . . . .

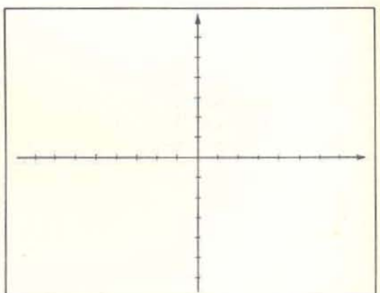
4) Considere a função g em **R**

definida $x \longmapsto -\frac{1}{2}x$

a) Complete o quadro:

x	0	1	-2	5	-6
g(x)	g(0) = . . .	g(1) = . . .	g(-2) = . . .	g(5) = . . .	g(-6) = . . .

b) Marque no plano cartesiano os pares obtidos em a)



c) Os pontos que você assinalou pertencem à uma mesma reta s?

. . . .

ANOTE:

> Todo ponto de coordenadas $(x, -\frac{1}{2}x)$ pertence à reta s.

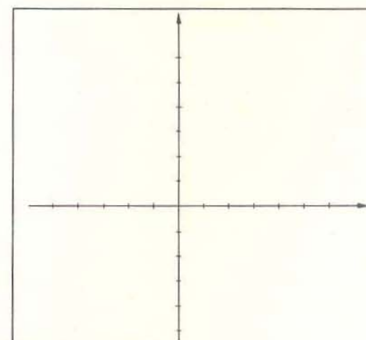
5) Considere a função h em **R** definida por $x \longmapsto x^2$

isto é $h(x) = x^2$

a) Complete o quadro:

x	0	1	-1	2	-2
h(x)	h(0) = . . .	h(1) = . . .	h(-1) = . . .	h(2) = . . .	h(-2) =. . .

b) Marque no plano cartesiano os pares obtidos em a)



c) Os pontos que você assinalou pertencem a uma mesma reta t?

. . . .

ANOTE:

$f(x) = 2x$, define uma Função Monomial do 1.º grau.

$g(x) = -\frac{1}{2}x$ também é uma função monomial do 1.º grau.

$2x$ e $-\frac{1}{2}x$ são monômios do 1.º grau em x.

$h(x) = x^2$ define uma Função Monomial do 2.º grau.

x^2 é um monômio do 2.º grau em x.

VOCÊ OBSERVOU QUE:

O gráfico de uma função monomial de 1.º grau é uma reta.

DE UM MODO GERAL:

Toda função em **R** do tipo:

$$x \longmapsto ax^n \quad \text{com } a \in \mathbf{R},\ n \in \mathbf{N}$$

chama-se *função monomial* em **R**.

$\boxed{a\,x^n}$ chama-se *monômio em x.*

a chama-se *coeficiente do monômio em x*

se $a \neq 0$, n chama-se *grau da função monomial* ou *grau do monômio em x.*

ANOTE:

A função monomial definida por $f(x) = a$ com a real chama-se *função constante.*

A função monomial definida por $f(x) = 0$ chama-se *função nula.*

A função monomial

definida por $f(x) = ax$ com $a \in \mathbf{R}$ chama-se *função linear.*

Grupo II – Exercícios de aplicação

1) Dada a

f em **R** definida por

$f(x) = -3x$

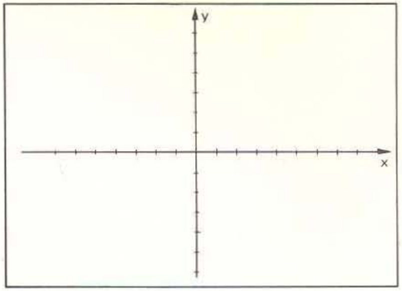
a) de que grau é f? ....

b) qual é o coeficiente do monômio que define f? ....

c) Complete o quadro:

x	0	1	2	-1	-2
f(x)	f(0) = . . .				

d) Esboce o gráfico cartesiano de f, usando os pontos do item c.



2) Dada a função g em **R** definida por:

$g(x) = \frac{2}{3}x$

a) de que grau é g?

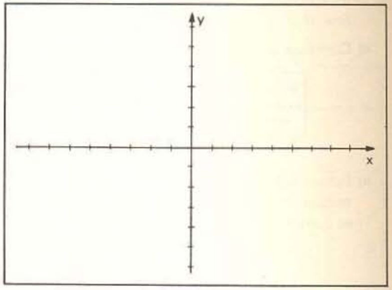
....

b) qual é o coeficiente do monômio que define g? ....

c) complete o quadro:

x	0	3	-3	6	-6
g(x)					

d) esboce o gráfico cartesiano de g



3) Complete o quadro:

função monomial	grau	coeficiente do monômio
$2x^2$		
$\frac{2}{5}x^3$		
$-4x^7$		
$-x^{15}$		
x^{40}		
$-\frac{x^4}{3}$		

Grupo III — Exercícios preliminares

1) Dadas as funções em **R** definidas respectivamente por:

$f(x) = 4x$

$g(x) = 3x^2$

a) complete o quadro; observando o modelo.

x	1	2	0	-1	-2	$\frac{1}{2}$
$f(x) = 4x$	4					
$g(x) = 3x^2$	3					
$f(x) + g(x)$	7					
$f(x) . g(x)$	12					

b) Para cada valor dado a x, existe um valor para: $f(x) + g(x)$? ....

c) ele é único? ....

d) Para cada valor dado a x, existe um valor para: $f(x) . g(x)$? ....

e) este valor é único? ....

f) Complete com V ou F (lembre que x é um elemento qualquer de **R**)

$f(x) \in$ **R** ( )

$g(x) \in$ **R** ( )

$f(x) + g(x) \in$ **R** ( )

$f(x) . g(x) \in$ **R** ( )

para cada x; $f(x) + g(x)$ é único. ( )

para cada x, $f(x) . g(x)$ é único. ( )

g) As relações em **R** definidas por:

$x \longmapsto f(x) + g(x)$
$x \longmapsto f(x) \,.\, g(x)$

são funções ? . . . .

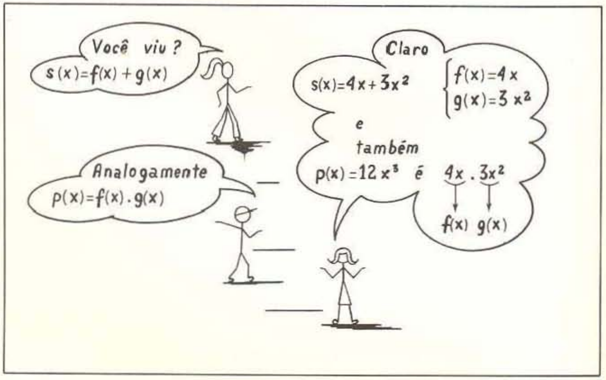
2) Sejam as funções s e p em **R** definidas por:

$s(x) = 4x + 3x^2$

$p(x) = 12x^3$

complete o quadro:

x	1	2	0	-1	-2	$\frac{1}{2}$
s(x)						
p(x)						



3) Sejam as funções em **R** definidas respectivamente por:

$f(x) = 4x^2$

$g(x) = -3x^2$

a) Complete o quadro:

x	1	-1	2	-2	5
f(x)					
g(x)					
f(x) + g(x)					
f(x) . g(x)					

b) Efetue:

$4x^2 - 3x^2 =$ . . . .

$4x^2 \,.\, (-3x^2) =$ . . . .

c) Considere

$s(x) = x^2$

$p(x) = -12x^2$

complete o quadro:

x	1	-1	2	-2	5
s(x)					
p(x)					

VOCÊ OBSERVOU QUE:

Para todos os valores de x escolhidos

$$s(x) = f(x) + g(x)$$
$$p(x) = f(x) \,.\, g(x)$$

DE UM MODO GERAL:

> Dadas duas funções f e g em **R**
> chamamos de *função soma*
> à função s definida por $s(x) = f(x) + g(x)$
> chamamos de *função produto*
> à função p definida por $p(x) = f(x) \cdot g(x)$

ANOTE:

> A função soma de várias funções monomiais em **R** chama-se *função polinomial em* **R**.

7) Dadas as funções monomiais em x definidas respectivamente por:

$f(x) = 4x^3$
$g(x) = -3x$
$h(x) = 5x^5$
$i(x) = 9$

a) escreva a sentença que define:
$s(x) = f(x) + g(x) + h(x) + i(x) =$ ....

b) qual das quatro funções tem o maior grau? ....

c) qual é este grau? ....

ANOTE:

> s(x) é uma função polinomial do 5º grau em x.

E MAIS:

> Escrever:
>
> $$s(x) = 5x^5 + 4x^3 - 3x + 9$$
>
> significa *ordenar s(x) pelos expoentes decrescentes de x.*

8) Seja
$p(x) = 4x - 3x^2 - 5x + 4 - 3x^2$
uma função polinomial em x:

a) Reduza os termos semelhantes quando possível.
$p(x) =$ ....

b) Escreva o polinômio na ordem decrescente dos expoentes de x
$p(x) =$ ....

ANOTE:

$p(x) = -6x^2 - x + 4$
é a *Forma Reduzida* da função polinomial
$p(x) = 4x - 3x^2 - 5x + 4 - 3x^2$

$-6x^2 - x + 4$ chama-se *Polinômio em x*.

E MAIS:

A função polinomial definida por

$f(x) = ax + b$ *a* e *b* reais

chama-se *Função Afim*.

Grupo IV — Exercícios de aplicação

1) Dadas as funções em R definida por:

$f(x) = 3x^2$

$g(x) = -\dfrac{x}{3}$

$h(x) = -\dfrac{2}{3}x^2$

a) Complete o quadro com polinômios na forma reduzida:

função	sentença que define a função
$p_1(x) = f(x) + h(x)$	$p_1(x) =$
$p_2(x) = f(x) + g(x)$	$p_2(x) =$
$p_3(x) = f(x) + g(x) + h(x)$	$p_3(x) =$
$p_4(x) = f(x) \cdot g(x)$	$p_4(x) =$
$p_5(x) = f(x) \cdot h(x)$	$p_5(x) =$
$p_6(x) = f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)$	$p_6(x) =$

b) Complete o quadro, assinalando na 2ª coluna com P as funções polinomiais e com M as funções monomiais

função	tipo de função	grau
$P_1(x)$	M	
$P_2(x)$		
$P_3(x)$		
$P_4(x)$		
$P_5(x)$		
$P_6(x)$		

2) Complete dando os polinômios sob a forma reduzida e ordenados pelos expoentes decrescentes de x:

a) $3x^2 - 4x - 2x^4 - 5 =$ . . . .

b) $x^4 - x^2 + x - x^4 + 1 =$ . . . .

c) $x^2 - x + 3 - x^2 + 5x =$ . . . .

d) $3 + 4x - 5 + x^3 - 3x - x^3 =$ . . . .

e) $4x - 2x^2 - x + 5 =$ . . . .

f) $3 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{4}x^2 - x^2 + 1 =$ . . . .

3) Dados:

$f(x) = 3x^2 - x + 4$

$g(x) = 5x - 3$

$P_1(x) = f(x) + g(x)$

$P_2(x) = f(x) \cdot g(x)$

a) Exercer na forma reduzida e ordenados pelos expoentes decrescentes de x:

$p_1(x) =$ . . . .

$p_2(x) =$ . . . .

b) Complete:

f(0) = ... $p_1(0)$ = ...

f(−1) = ... $p_2(-1)$ = ...

f(2) = ... $p_1(2)$ = ...

g(0) = ... $p_2(0)$ = ...

g(−1) = ... $p_2(-1)$ = ...

g(2) = ... $p_2(2)$ = ...

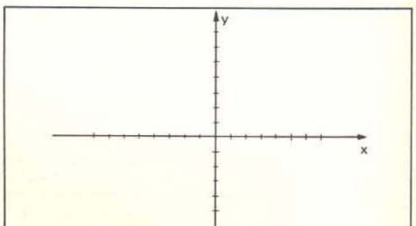
Grupo V — Exercícios preliminares

1) Dada a função afim
$f(x) = 3x + 1$

a) Complete o quadro

x	0	1	-1	2	-2
f(x)					

b) Esboce o gráfico cartesiano da função f usando os pontos calculados no item *a*



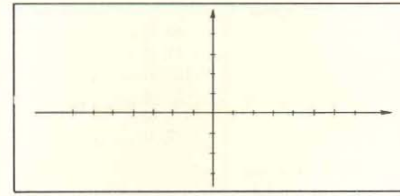
2) Dada a função linear definida por:

$$f(x) = -\frac{x}{3}$$

a) Complete o quadro

x	0	3	-3	6	-6
f(x)					

b) Esboce o gráfico cartesiano de f



VOCÊ OBSERVOU QUE:

> Os gráficos cartesianos das funções que você desenhou são retas.

DE UM MODO GERAL:

> O gráfico cartesiano de uma função afim é uma reta.

3) Dadas as duas funções do 1º grau em **R**

$f(x) = x - 3$

$g(x) = -2x + 3$

a) Complete os quadros

x	f(x)
0	
2	
-3	

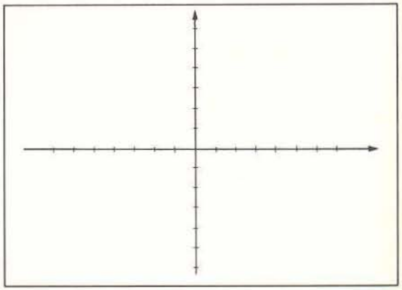
x	g(x)
1	
2	
-1	

b) Complete com $\in$ ou $\in$:

(0, 3)	.... f	(0, 3)	.... g
(1, 1)	.... f	(1, 1)	.... g
(2, -1)	.... f	(2, -1)	.... g
(-3, -6)	.... f	(-3, -6)	.... g
(-1, 5)	.... f	(-1, 5)	.... g
(2, 4)	.... f	(2, 4)	.... g

c) Qual é o par que pertence às duas funções? ....

d) Represente no mesmo sistema de eixos a f (em azul) e a g (em vermelho)



e) Quais são as coordenadas do ponto que pertence a intersecção das retas? ....

4) Dadas as funções de 1º grau em R

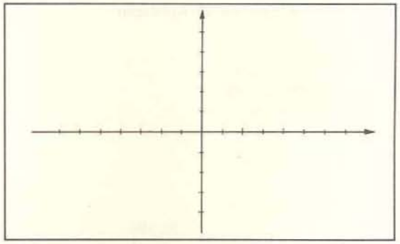
$f(x) = x - 4$

$g(x) = x - 2$

a) Complete com $\in$ ou $\notin$:

(0, -4)	.... f	(0, -4)	.... g
(0, -2)	.... f	(0, -2)	.... g
(1, -3)	.... f	(1, -3)	.... g
(1, -1)	.... f	(1, -1)	.... g
(4, 0)	.... f	(4, 0)	.... g
(2, 0)	.... f	(2, 0)	.... g

b) Represente no mesmo sistema f (em azul) g (em vermelho)



c) Existe algum ponto que pertence as duas retas? ....

d) Existe algum par que pertence à f e à g? ....

ANOTE:

As funções f e g podem ser indicadas da seguinte maneira:

$f = \{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid y = x - 3\}$ ou $f : y = x - 3$

$g = \{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid y = -2x + 3\}$ ou $g : y = -2x + 3$

VOCÊ OBSERVOU QUE:

No exercício 3 existe um par (x, y) que satisfaz $y = x - 3$ e $y = -2x + 3$ ao mesmo tempo que corresponde ao ponto de intersecção das duas retas.

No exercício 4 não existe um par (x, y) que satisfaz $y = x - 4$ e $y = x - 2$ ao mesmo tempo e no gráfico cartesiano as duas retas são paralelas.

Grupo VI – Exercícios de Aplicação

1) Considere as funções em **R** definidas respectivamente por:

$$m: \ y = 2x - 9$$

$$m: \ y = \frac{2 - x}{2}$$

Complete com $\in$ ou $\notin$:

(0, -9) .... m (0, -9) .... n
(0, 1) .... m (0, 1) .... n
(4, -1) .... m (4, -1) .... n
(3, 2) .... m (3, 2) .... n

2) Sejam as funções em **R** definidas respectivamente por:

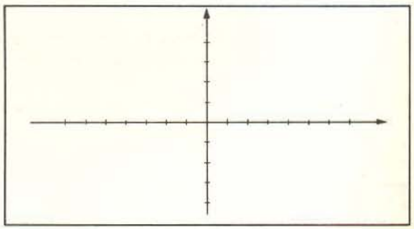
$$h : y = 4 - x$$
$$i : y = x + 2$$

a) Complete os quadros:

x	h(x)
0	
1	
-1	

x	i(x)
0	
1	
-1	

b) Esboce os gráficos cartesianos de h e de i num mesmo sistema de eixos coordenados:



b) Observe o gráfico e descubra quais as coordenadas do ponto de intersecção das duas retas.

3) Considere as funções em **R** definidas respectivamente por:

$$p : y = \frac{5 + x}{2}$$

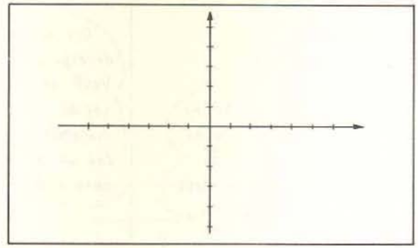
$$q : y = x + 1$$

a) Complete os quadros

x	p(x)
0	
1	
-1	

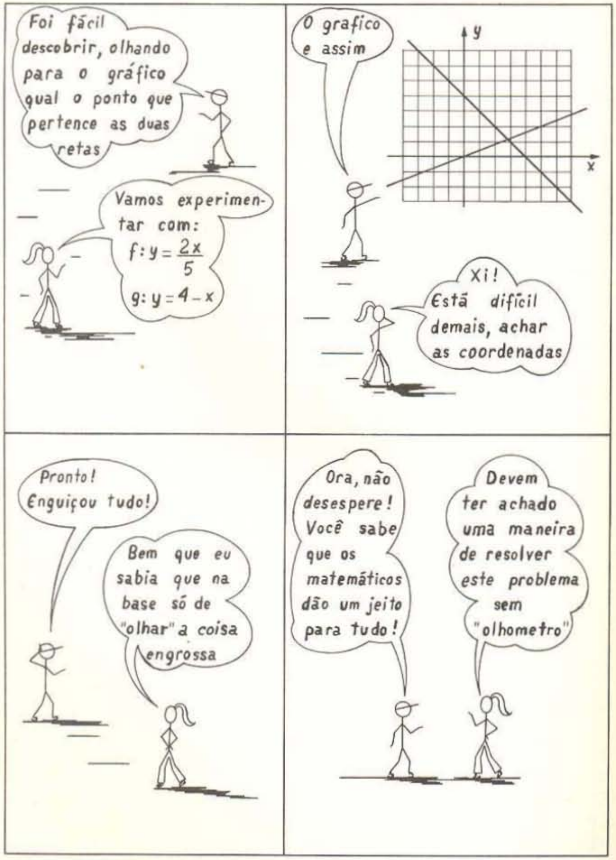
x	q(x)
2	
1	
-2	

b) Esboce os gráficos cartesianos de p e de q num mesmo sistema de eixos:



c) Observe o gráfico e descubra quais as coordenadas do ponto de intersecção das duas retas.

....



SISTEMAS DE EQUAÇÕES

Grupo I – Exercícios Preliminares

1) Considere a seguinte situação: "João tem 7 bolas de gude, algumas verdes, outras azuis".
Procuremos ver quais as possibilidades de que isto aconteça. Chamemos de x o número de bolas verdes e de y o número de bolas azuis.
A sentença que traduz a situação é: $x + y = 7$ (x e y, por serem números de objetos pertencem a N^*).

a) Complete o quadro (observar o modelo):

x	y
1	6
2	

DIZEMOS QUE:

O par ordenado (1, 6) é *uma das soluções* da equação
$x + y = 7$ em $N^* \times N^*$

b) Complete:
O conjunto verdade da equação $y + x = 7$ em $N^* \times N^*$ é: $V = \{(1, 6), (\ ,\ ) (\ ,\ ) (\ ,\ ) (\ ,\ ) (\ ,\ )\}$

Acrescentamos à informação dada o seguinte: João tem a mais uma bola azul do que verde.
A equação que traduz esta informação em $N^* \times N^*$ é: $y = x + 1$

a) Complete
O conjunto verdade desta equação é: $V = \{(1, 2), \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$
(atenção: V tem infinitos pares).
A sentença que traduz a situação completa é: $x + y = 7$ *e* $y = x + 1$
O par que satisfaz às duas equações ao mesmo tempo é: $(\ldots\ldots, \ldots\ldots)$

DIZEMOS QUE:

$x + y = 7$ e $y = x + 1$ é um *sistema* em $N^* \times N^*$ e indicamos $\begin{cases} x + y = 7 \\ y = x + 1 \end{cases}$

O conjunto verdade deste sistema é $V = \{(3, 4)\}$.

O par (3, 4) se chama *solução do sistema*.

2) Considerando o sistema em $R \times R$:

$x - y = 3$
$2x + y = 3$

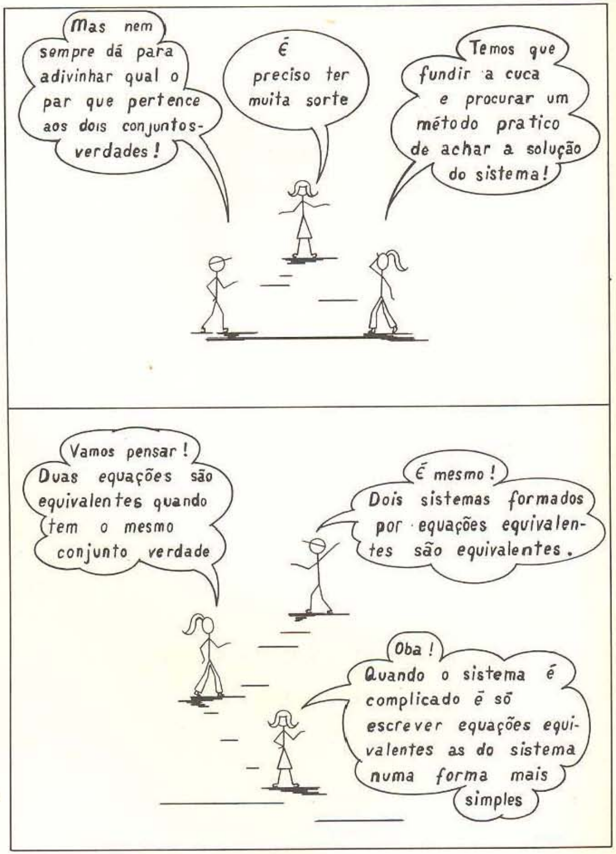
Existem infinitos pares ordenados de $R \times R$ que satisfazem a 1ª equação e mais infinitos pares que satisfazem a 2ª. Sejam V_1 e V_2 respectivamente os conjuntos - verdade das 2 equações.

Complete:

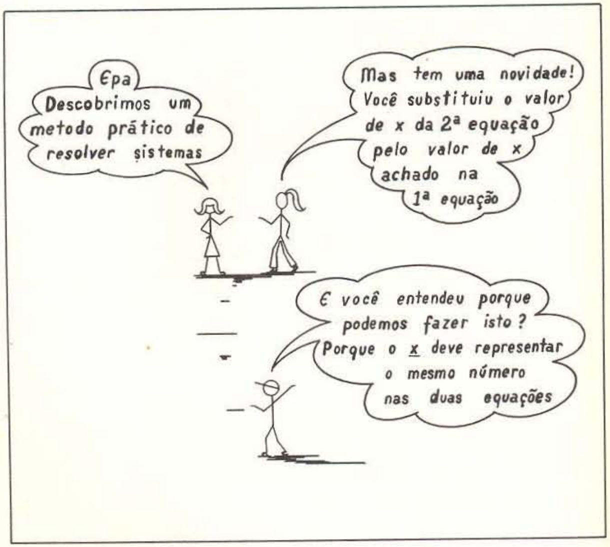
a) $V_1 = \{(1, \ldots), (2, \ldots), (-1, \ldots), (0, \ldots), \ldots\ldots\}$

b) $V_2 = \{(1, \ldots), (2, \ldots), (-1, \ldots), (5, \ldots), \ldots\ldots\}$

c) $V = V_1 \cap V_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$



$\begin{cases} x = 3 + y \\ 2x + y = 3 \end{cases}$	Você substituiu a 1ª equação por outra que lhe é equivalente.
$2(3 + y) + y = 3$	Você substituiu o número *x* da 2ª equação pelo valor de *x* achado na 1ª equação. Eles representam o mesmo número.
$6 + 2y + y = 3$	Você aplicou a propriedade distributiva.
$6 + 3y = 3$	Reduziu termos semelhantes.
$3y = -3$	Aplicou o princípio aditivo.
$\boxed{y = -1}$	Aplicou o princípio multiplicativo.
$x = 3 - 1$	Substituiu o valor de y na 1ª equação.
$\boxed{x = 2}$	Efetuou a soma indicada.
$V = \{(2, -1)\}$	Escrever o par ordenado que é a solução do sistema.



Grupo II – Exercícios de aplicação

1) Complete a resolução do sistema em R × R:

$$\begin{cases} 2x - 5y = 0 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

passagens	justificativas
$\begin{cases} 2x - 5y = 0 \\ y = 4 - x \end{cases}$	
$2a - 5(4 - x) = 0$	
	distributiva
	resolução dos termos semelhantes
	valor de x
$y = 4 - \frac{20}{7}$	
	valor de y
V =	achou-se o conjunto-verdade do sistema.

OBSERVE QUE:

$$\begin{cases} 2x - 5y = 0 \\ x + y = 4 \end{cases} \quad \text{é equivalente a} \quad \begin{cases} y = \frac{2x}{5} \\ y = 4 - x \end{cases}$$

Logo você resolveu o sistema da pg. 144

2) Resolva os sistemas em $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$:

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ x + y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 4y = -9 \\ x - 2y = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 7x + 4y = -3 \\ 3x + 6y = 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ y - 3x = 4 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 9 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 2x + 9 = 0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x - y = 0 \\ 7x + 3y = 5 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 2x - 7y - 13 = 0 \\ x = 2y \end{cases}$

Grupo III – Exercícios preliminares

1) Sejam as funções afins h e j em $\mathbf{R}$

$h: y - 2x = 5$

$j: 2y - x = 1$

a) Complete

$y - 2x = 5 \iff y =$

$2y - x = 1 \iff y =$

b) Complete os quadros

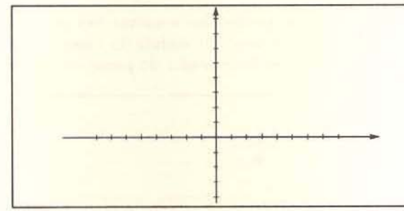
h(x)

x	y
0	
1	
-3	

j(x)

x	y
1	
-1	
-3	

c) Esboce os gráficos cartesianos de h (em azul) e j (em vermelho) no mesmo sistema de eixos coordenados



d) Complete para resolver o sistema em $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$

$\begin{cases} y - 2x = 5 \\ 2y - x = \end{cases}$

passagens	justificativas
$y = 2x + 5$ $2y - x = 1$	
$2(2x + 5) - x = 1$	
	prop. distributiva
$3x + 10 = 1$	
$3x = -9$	
$x = \ldots\ldots\ldots$	
$y = 2(-3) + 5$	
$y = \ldots\ldots\ldots$	
$V = \{(\ , \ )\}$	

f) O par (-3, -1) corresponde as coordenadas do ponto de intersecção das retas do item c) ? ....

VOCÊ OBSERVOU QUE:

As equações que formam o sistema têm por gráficos duas retas concorrentes, e o conjunto verdade do sistema é um par ordenado, que corresponde às coordenadas do ponto de intersecção das duas retas.

2) Sejam as funções afins f e g em **R**:

$f: 2x - 3y = 4$

$g: 2x - 3y = -1$

a) Complete:

$2x - 3y = 4 \iff y =$ ....

$2x - 3y = -1 \iff y =$ ....

b) Complete os quadros:

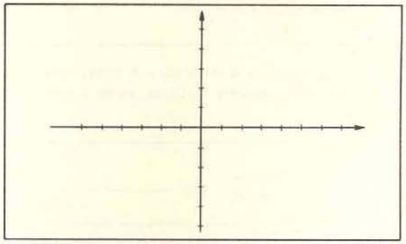
f(x)

x	y
-1	
5	
2	

g(x)

x	y
1	
4	
-2	

c) Esboce os gráficos cartesianos de f e g no mesmo sistema de eixos coordenados



d) Existe um ponto de intersecção das retas que representam f e g? ....

c) Complete, para resolver o sistema em **R** × **R**:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$$

passagens	justificativas
$\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ y = \dfrac{2x+1}{3} \end{cases}$	
$2x - 3 \cdot \dfrac{2x+1}{3} = 4$	
$2x - (2x + 1) = 4$	
	oposto de uma soma
$0x + 1 = 4$	
$0x = 3$	
Não há em **R** *x* que satisfaça à equação.	
$V = \phi$	

VOCÊ OBSERVOU QUE:

> Se as equações que formam o sistema têm por gráficos cartesianos duas retas paralelas distintas, então o conjunto-verdade do sistema é vazio.

3) Sejam as funções afins m e n em **R** definidas por:

$m : x - 4y = 3$

$n : 2x - 8y = 6$

a) Complete:

$x - 4y = 3 \Longleftrightarrow y =$ ....

$2x - 8y = 6 \Longleftrightarrow y =$ ....

b) Complete os quadros

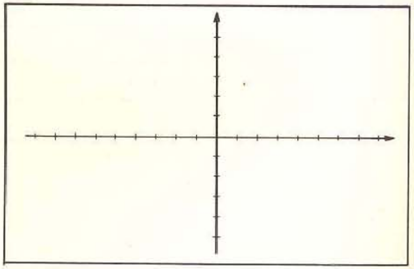
m(x)

x	y
-1	
3	
7	

n(x)

x	y
-1	
-5	
-9	

c) Esboce os gráficos cartesianos de m e n num mesmo sistema de eixos coordenados.



d) O que você observou nos gráficos das duas funções? ....

e) Complete, resolvendo o sistema em **R** × **R**

$$\begin{cases} x - 4y = 3 \\ 2x - 8y = 6 \end{cases}$$

passagens	justificativas
$\begin{cases} x = 3 + 4y \\ 2x - 8y = 6 \end{cases}$	
$2(3 + 4y) - 8y = 6$	
	distributiva
$6 + 8y - 8y = 6$	
$0y = 0$	
qualquer elemento de **R** satisfaz.	
$V = \{(x,y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid x - 4y = 3\}$	

VOCÊ OBSERVOU QUE:

> $2x - 8y = 6 \Longleftrightarrow x - 4y = 3$
>
> Logo as duas equações representam a mesma reta.

DE UM MODO GERAL:

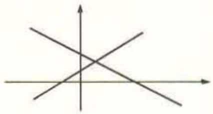
Sejam duas equações: $f : ax + by = c$

$g : a_1 x + b_1 y = c_1$

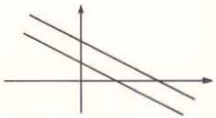
O sistema formado por ela pode ter 3 tipos de soluções:

gráfico cartesiano

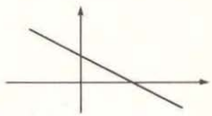
1 única solução (retas concorrentes)



nenhuma solução (retas paralelas distintas)



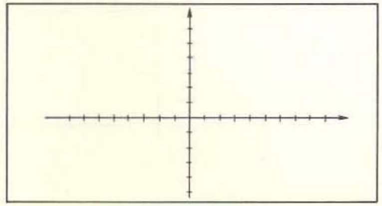
infinitas soluções (retas coincidentes)



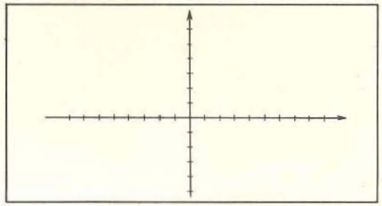
Grupo IV – Exercícios de aplicação

1) Resolva os seguintes sistemas em **R** × **R**, e represente num sistema de coordenadas os gráficos das duas funções em cada sistema:

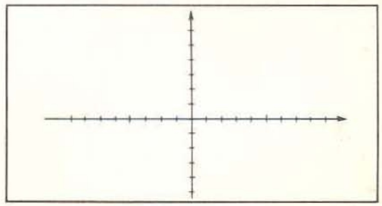
a) $\begin{cases} 2x + 3y - 8 = 0 \\ 4x + 6y = 16 \end{cases}$



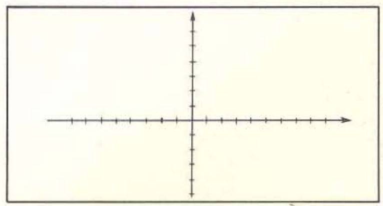
b) $\begin{cases} 3x - 4y + 4 = 0 \\ 6x - 8y = 5 \end{cases}$



c) $\begin{cases} 10x + 7 = 2y \\ 20x + 5 = 4y \end{cases}$



d) $\begin{cases} y + 3x = 5 \\ 2y + 6x = 5 \end{cases}$



e) $\begin{cases} 2x + 3y - 1 = 0 \\ 4x + 6y = 2 \end{cases}$