



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CFM – DEPARTAMENTO DE FÍSICA

JOÃO SALDANHA STREIBEL

OSCILLONS EM TEORIAS DE CAMPO COM POTENCIAIS
NÃO-ANALÍTICOS

FLORIANÓPOLIS (SC)

2019

João Saldanha Streibel

**OSCILLONS EM TEORIAS DE CAMPO COM POTENCIAIS
NÃO-ANALÍTICOS**

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de Mestre em Física.
Orientador: Prof. Dr. Pawel Klimas

Florianópolis (SC)

2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Streibel, João Saldanha
Oscillons em teorias de campos com potenciais não
analíticos / João Saldanha Streibel ; orientador, Pawel
Klimas, 2019.
109 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas,
Programa de Pós-Graduação em Física, Florianópolis, 2019.

Inclui referências.

1. Física. 2. teoria de campos, potenciais não
analíticos, oscilons, modelos não-integráveis. I. Klimas,
Pawel. II. Universidade Federal de Santa Catarina.
Programa de Pós-Graduação em Física. III. Título.

João Saldanha Streibel

Oscillons em teorias de campo com potenciais não-analíticos

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Paulo Eduardo Gonçalves de Assis, Dr.
Universidade Federal de Goiás

Prof. Paulo Juliano Liebgott, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Tiago José Nunes da Silva, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Certificamos que esta é a versão original e final do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestre em Física.

Prof. Dr. Ivan Helmuth Bechtold
Orientador

Prof. Dr. Pawel Klimas
Orientador

Florianópolis (SC), 26 de julho de 2019

Este trabalho dedico à minha família.

RESUMO

Neste trabalho estudamos algumas propriedades de modelos com potenciais não-analíticos com ênfase no modelo de *signum*-Gordon. O trabalho apresenta o contexto físico no qual tais modelos são estudados, começando por uma motivação mecânica e terminando em um sub-modelo de Skyrme. A principal parte do trabalho versa sobre a análise numérica da dinâmica de *oscillons* – soluções não-topológicas com energia finita. Mostramos que *oscillons* desempenham papel principal na formação de radiação e emissão do excesso de energia de sistemas perturbados. Os nossos resultados numéricos suportam a ideia de que a radiação do modelo de *signum*-Gordon tem natureza fractal.

Palavras-chave: Potenciais não analíticos, soluções não-topológicas, *signum*-Gordon.

ABSTRACT

In this work we study some properties of models with non analytic potential, where we put emphasis in the *signum*-Gordon model. We present the physical context in which these models are studied, beginning with a mechanical motivation e ending up in a submodel from the Skyrme model. The main part of this work covers the numerical analysis of oscillon dynamics – non topological solutions with finite energy. We show that oscillons develop a major role in the formation of radiation an energy excess emission in perturbed systems. Our numerical results give support to the idea that radiation in the *signum*-Gordon model has a fractal nature.

Key-words: Non analytic potentials, non-topological solutions, *signum*-Gordon.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Exemplo de potencial não analítico em seus mínimos.	16
Figura 2 – (a) Esquema de modelo mecânico para <i>signum-Gordon</i> modificado; (b) vista de cima; (c) vista de frente.	23
Figura 3 – Comparação entre formato de $V(\varphi)$ e potencial com φ não-limitado (linha pontilhada). Para esta figura usamos $\varphi_0 = 2,3$	27
Figura 4 – Projeção esterográfica que relaciona o 3-vetor $\mathbf{n}(u, \bar{u})$ com os valores do campo complexo $u(\theta, \phi)$	30
Figura 5 – Potencial efetivo $V(\bar{\eta})$. As linhas tracejadas representam o que seria a continuidade de $V(\bar{\eta})$, enquanto a linha contínua é o potencial efetivo.	37
Figura 6 – Transformação <i>folding</i> $\mathbb{R} \ni \eta \mapsto \bar{\eta} \in [0, 2]$	38
Figura 7 – Extensão periódica do potencial (2.36). Para $ \eta \ll 1$ o potencial comporta-se como $V(\eta) \simeq \eta $	39
Figura 8 – Regiões de integração no etapa $0 < t \leq \frac{1}{4}$	45
Figura 9 – Regiões de integração para a solução φ_1 no intervalo $\frac{1}{4} < t \leq \frac{1}{2}$	46
Figura 10 – Regiões de integração para a solução φ_2 no intervalo $\frac{1}{4} < t \leq \frac{1}{2}$	47
Figura 11 – Regiões de integração para a solução φ_3 no intervalo $\frac{1}{4} < t \leq \frac{1}{2}$	47
Figura 12 – Oscillon exato.	49
Figura 13 – Funções $\sigma(z)$ (linha solida) e $\tau(z)$ (linha tracejada).	50
Figura 14 – Soluções parciais do oscillon exato.	51
Figura 15 – Superfície mundo do <i>oscillon</i> generalizado.	53
Figura 16 – Evolução de oscillon perturbado no caso $\varepsilon > 1$	56
Figura 17 – Instantes iniciais da solução para oscillons perturbados. A área dentro das linhas pontilhadas corresponde às soluções analíticas auto-similares ϕ_L e ϕ_R	56
Figura 18 – Oscillon perturbado com $\varepsilon = 0,5$ no tempo $t = 0,15$. Soluções analíticas ϕ_L e ϕ_R correspondem com as linhas pontilhadas.	57
Figura 19 – Soluções $S_k(y)$, $k = 2, 3, \dots$ para $\epsilon = 0,1$	58
Figura 20 – Soluções numéricas $\phi(t, x)$ (cinza) e solução exata auto-similar (linha pontilhada) para $\varepsilon = 0,1$ em $t = 0,17$. A figura (a) mostra a solução em todo o suporte original $x \in [0, 1]$. A figura (b) mostra um detalhe da região auto-similar.	58

Figura 21 – Soluções auto-similares nos instantes iniciais do caso perturbado com $\varepsilon = 0.08$. A figura (a) mostra a solução nos instantes iniciais. A figura (b) mostra a solução para tempos avançados. A figura (c) corresponde à região pontilhada da figura (a). E a figura (d) corresponde à região pontilhada na figura (c).	59
Figura 22 – Oscillon exato $\phi(t, x)$ no modelo de signum-Gordon (cinza) e a solução analítica aproximada $\eta(t, x)$ (linha pontilhada) para solução. Aqui utilizamos $l = 1$ para tornar mais visíveis as diferenças.	61
Figura 23 – Solução numérica $\eta(t, x)$ (cinza) e solução analítica aproximada (linha pontilhada) para $\epsilon = 1$ e $l = 1$	61
Figura 24 – Solução numérica $\eta(t, \frac{1}{2})$ (linha sólida) para configuração com $l = 1$ e $\epsilon = 1$. O oscillon exato $\phi(t, \frac{1}{2})$ (linha pontilhada) As figuras mostram (a) $t \in [0, 10]$ e (b) $t \in [50, 58]$	62
Figura 25 – Quatro pares <i>kink-antikink</i> e um <i>oscillon</i> no centro. Aqui $l = 9,2346$. Figuras (c,d) representam modelo original com campo $\bar{\eta}(t, x)$	62
Figura 26 – Diagrama de Minkowski para densidade de energia da perturbação com $l = 9.2346$	62
Figura 27 – Configuração inicial para dois oscillons de mesma escala com boosts em direções opostas e fases diferentes.	67
Figura 28 – Configuração inicial para dois oscillons simétricos com relação ao ponto $x = 0$ no instante inicial. Os parâmetros dos oscillons são dados por $u = 0,8$, $v = 0,3$ e $\alpha = 0$	69
Figura 29 – Configuração inicial para dois oscillons anti-simétricos com relação ao ponto $x = 0$ no instante inicial. Os parâmetros dos oscillons são dados por $u = 0,8$, $v = 0,3$ e $\alpha = 0$	69
Figura 30 – Diagrama espaço-tempo do <i>oscillon</i> e a superfície de simultaneidade em $t = 0,4\gamma$ no referencial de laboratório (referencial S).	70
Figura 31 – Superfícies mundo dos <i>oscillons</i> antes de espalhamento, $t < 0$, para $u = 0,5$, $\alpha = 0$ e (a) $v = 0$, (b) $v = 0,4$	71
Figura 32 – Superfícies mundo dos <i>oscillons</i> antes de espalhamento, $t < 0$, para $u = 0,5$ e $v = 0,8$	71
Figura 33 – Funções $\tau(t')$ e $y(t', \alpha)$ para $u = 0,5$ e $v = 0,3$. Aqui, $V > V_c = \frac{10}{23}$. O ponto representa a solução da equação (4.11).	72
Figura 34 – Espalhamento de <i>oscillons</i> com configuração inicial simétrica para diversos valores de u . Aqui são usados para a fase o valor $\alpha = 0$ e para a velocidade de movimento da borda $v = 0$	75
Figura 35 – Espalhamento de <i>oscillons</i> com configuração inicial simétrica para diversos valores de α , com $u = 0,93$ e $v = 0$	76

Figura 36 – Larguras mínimas para diferentes velocidades u . Os pontos representam os dados numéricos enquanto as curvas sólidas representam as expressões $t_s = \sqrt{\frac{1-u}{1+u}}$ e $x_{min} = 2t_s$	77
Figura 37 – Espalhamento de dois <i>oscillons</i> para configuração simétrica do campo. Os <i>oscillons</i> se movem com velocidade $u = 0,95$ no referencial do laboratório. A estrutura em forma de losângo no centro assemelha-se à solução de ondas de choque. Os primeiros dez zeros desta solução foram obtidos através de <i>fitting</i> resultando em $a_0 = 0,00541$ e $t_0 = 0,282$ e são mostrados nas linhas pontilhadas.	79
Figura 38 – Espalhamento de <i>oscillons</i> simétricos (esquerda) e a evolução de dados iniciais com $\delta_\epsilon(x)$ (direita).	80
Figura 39 – Resultado do espalhamento de configuração inicial simétrica com $u = 0,93$ e $v = 0$. Os <i>oscillons</i> espalhados tem fases (a) $\alpha = 0,414$ e $\alpha = 0,914$	81
Figura 40 – Perfil inicial do campo de <i>signum</i> -Gordon e <i>worldsheets</i> dos <i>oscillons</i> incidentes para $u = 0,93$, $v = 0$ e (a) $\alpha = 0,414$, (b) $\alpha = 0,914$. Os zeros são marcados como linhas pontilhadas. Suas posições em $t = 0$ são dadas por (a) $B^{(-1)}(\alpha) = -0,006$, $B^{(0)}(\alpha) = -0,204$ e (b) $B^{(0)}(\alpha) = -0,006$, $B^{(1)}(\alpha) = -0,204$	82
Figura 41 – Mapa de percentual de energia radiada após interação de <i>oscillons</i> com velocidade da borda $v = 0$. Cada ponto corresponde a uma interação dada por um par (α, u) . Para valores de u menores que $u = 5,5$ a radiação passa a se misturar com os <i>oscillons</i> resultantes e os cálculos numéricos perdem a confiabilidade.	83
Figura 42 – Superfícies mundo de dois <i>oscillons</i> com $v \neq 0$ em direção à um encontro. Os <i>oscillons</i> não são não-perturbados dentro das duas regiões triangulares acima da linha $t = 0$. Os zeros do <i>oscillon</i> correspondem com intersecções de sua superfície mundo com uma família de linhas pontilhadas.	84
Figura 43 – Processo de espalhamento para configuração inicial simétrica contendo <i>oscillons</i> com velocidade $u = 0,93$, velocidade da borda $v = 0,02$ e diferentes fases α	85
Figura 44 – Processo de espalhamento para configuração inicial simétrica contendo <i>oscillons</i> com velocidade $u = 0,93$, velocidade da borda $v = 0,2$ e diferentes fases α	86
Figura 45 – Processo de espalhamento para configuração inicial simétrica contendo <i>oscillons</i> com velocidade $u = 0,93$, velocidade da borda $v = 0,7$ e diferentes fases α	86
Figura 46 – Configurações iniciais que minimizam a radiação para $u = 0.93$	87

Figura 47 – Fração da energia total da configuração inicial levada pela radiação para $v = 0.45$	87
Figura 48 – O espalhamento de <i>oscillons</i> (configuração anti-simétrica) em dependência de sua velocidade inicial u . A configuração inicial contém <i>oscillons</i> com fase $\alpha = 0$ e nenhum movimento de <i>zig-zag</i> da borda.	88
Figura 49 – Espalhamento de <i>oscillons</i> (configuração anti-simétrica) com dependência na fase <i>alpha</i> . A configuração inicial contém <i>oscillons</i> com velocidade $u = 0,8$ e nenhum movimento de <i>zig-zag</i> da borda.	89
Figura 50 – Espalhamento de <i>oscillons</i> (configuração anti-simétrica) com dependência no parâmetro v . A configuração inicial contém <i>oscillons</i> com velocidade $u = 0,8$ e $\alpha = 0,82$	89
Figura 51 – Processo de espalhamento de dois <i>oscillons</i> . (b) <i>zoom</i> da região retangular marcada em (a); (c) <i>zoom</i> da região retangular marcada em (b).	93

SUMÁRIO

	Lista de ilustrações	9
1	INTRODUÇÃO	15
2	SURGIMENTO DE POTENCIAIS NÃO-ANALITICOS	21
2.1	Realizações mecânicas	21
2.1.1	Sine-Gordon modificado como limite de acomplamento de pêndulos	21
2.1.1.1	Sistema discreto	21
2.1.1.2	Limite de teoria de campos	25
2.2	Submodelo do modelo de Skyrme	27
2.2.1	Modelo de Skyrme	28
2.2.2	Submodelos BPS e a parametrização	30
2.2.2.1	O primeiro submodelo BPS	31
2.2.2.2	O segundo submodelo BPS	33
2.2.2.3	O modelo reduzido	34
2.3	Transformação “folding”	38
3	OSCILLONS	41
3.1	Oscillon no modelo signum-Gordon	42
3.2	Oscillon generalizado	51
3.3	Perturbação do oscillon analítico	53
3.4	Oscillons em modelos com potencial periódico	59
3.4.1	Oscillons levemente perturbados	60
3.4.2	Oscillons fortemente perturbados	60
4	ESPALHAMENTO DE OSCILLONS	65
4.1	Oscillon em movimento uniforme	66
4.2	Configuração inicial para processo de espalhamento	67
4.2.1	Fase do oscillon	69
4.3	Espalhamento de configurações simétricas	74
4.3.0.1	Altas velocidades e formação de ondas de choque	77
4.3.0.2	Comparação com quase-ondas de choque	78
4.3.0.3	Ausência de radiação	81
4.3.1	<i>Oscillons</i> com $v \neq 0$	83
4.4	Espalhamento de configurações anti-simétricas	87

5	ESPECTRO DE RADIAÇÃO DO MODELO SIGNUM-GORDON	91
6	CONCLUSÕES	95
	REFERÊNCIAS	99
	APÊNDICES	103
	APÊNDICE A – CONSIDERAÇÕES SOBRE CALCULO NUMÉRICO E ESTABILIDADE DAS SIMULAÇÕES	105
	APÊNDICE B – DECOMPOSIÇÃO EM SUBMODELOS BPS	107

1 INTRODUÇÃO

Os modelos com campo escalar ou multipletos de tais campos são estudados em varios contextos físicos. Como exemplo, temos o mecanismo de Higgs [1–3], a teoria de Ginzburg-Landau [4–6] e modelos cosmológicos voltados à inflação de Universo [7–13]. Além disso, os modelos clássicos em teoria de campos voltados à modelos efetivos para teorias com interação forte possuem diversas parametrizações nas quais aparecem campos escalares reais ou complexos. Os modelos deste tipo despertam grande interesse na comunidade científica. Outra razão pela qual os modelos de campo escalar são investigados são suas propriedades matemáticas. Em particular, a questão da integrabilidade [14] e, associados à ela, soluções muito especiais chamadas sólitons. A lista de motivações, tanto físicas quanto matemáticas, pode ser estendida muito além dos pontos mencionados acima. Ao invés de estender essa lista, vamos apresentar a nossa motivação para a pesquisa, cujos resultados relatamos nesta dissertação.

Este trabalho versa sobre o estudo de soluções em modelos com potencial não-diferenciável. Modelos deste tipo existem na literatura científica há quase duas décadas. O primeiro modelo deste grupo foi introduzido por H. Arodz em 2002 [15]. Na sequência, varias outras generalizações e modificações foram apresentadas [16–21]. A expressão “potencial não-diferenciável” constitui uma abreviação para “potencial não-diferenciável em seus mínimos”. Trata-se, assim, de uma família de potenciais não-analíticos nos mínimos. Ou seja: potenciais em cujos mínimos a primeira derivada não existe. Note que as derivadas laterais em torno desses pontos existem mas são diferentes dependendo do lado pelo qual se aproxima do ponto de mínimo.

Exemplos de potenciais não-analíticos foram apresentados na Fig. (1). Devido ao aspecto gráfico dos potenciais, eles são também chamados potenciais tipo V (*V-shaped potentials*). A excepcionalidade deste grupo de modelos está associada com o fato de que eles permitem a existência de soluções compactas. Ou seja: soluções que não são constantes (em particular igual a zero) apenas numa região compacta e, portanto, possuem tamanho finito no espaço. Soluções deste tipo foram chamadas *compactons*.

Para sermos mais precisos, vamos ressaltar que os potenciais não-analíticos nos permitem obter soluções compactas ao mesmo tempo em que preservam a forma usual dos termos cinéticos na densidade Lagrangiana. Em modelos com termos cinéticos contendo derivadas dos campos mais altas que segunda ordem (termos quárticos, etc), os compactons podem existir para potenciais com comportamento padrão, e.g. $\sim (\phi - \phi_0)^2$, em torno dos mínimos. Tais teorias aparecem em cosmologia e são chamados “ K - campos” [22]. Infelizmente, as equações diferenciais que regem a evolução temporal em K -teorias podem

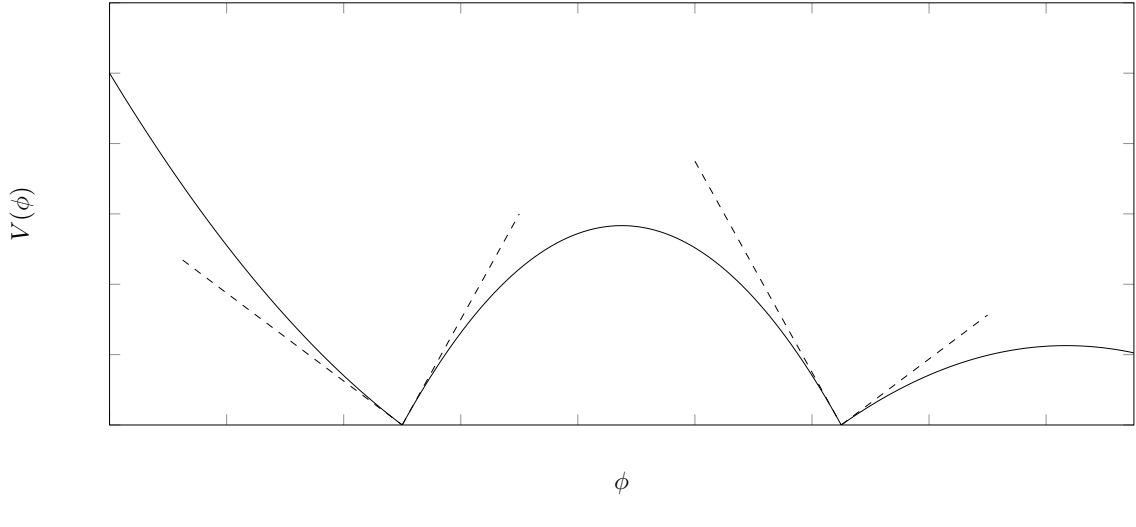


Figura 1 – Exemplo de potencial não analítico em seus mínimos.

ter problemas com a evolução de condições iniciais devido à multiplicação do operador de d'Alembert por outros termos que podem se anular durante a evolução. Por esta razão, é altamente desejável do ponto de vista físico ter os modelos com termos cinéticos *quadráticos* na densidade de Lagrangiana. Os modelos com potencial não-diferenciável constituem uma solução para este problema. Note-se que a não-diferenciabilidade do potencial não é um problema físico associado ao o modelo e possui caráter puramente técnico. Esta questão será discutida amplamente nesta dissertação e veremos que os modelos com potencial não-diferenciável comportam-se muito bem de ponto de vista físico.

Existe uma serie de diferenças entre modelos “padrão” com potencial tipo $\sim \phi^2$, $\sim \phi^4$ etc. e os modelos com potenciais tipo V . Aqui vamos listar as principais diferenças.

1. *Existência de soluções com suporte compacto.* Este fato está relacionado com o comportamento do potencial em torno de seu mínimo. Em uma teoria de campo escalar real em 1+1 dimensões descrita pela densidade de Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_t \phi)^2 - \frac{1}{2}(\partial_x \phi)^2 - V(\phi), \quad (1.1)$$

temos a equação de Euler-Lagrange na forma

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2)\phi + dV/d\phi = 0. \quad (1.2)$$

No setor estático esta equação pode ser integrada, resultando em $\frac{1}{2}(\partial_x \phi)^2 - V(\phi) = \text{const}$. Considerando que o potencial tem mínimos em $\phi = \pm\phi_0$, tal que $V(\pm\phi_0) = 0$ podemos escolher a constante da integração $\text{const} = V(\phi_0) = 0$. A solução (*kink*) que interpola entre $-\phi_0$ e ϕ_0 satisfaz $\partial_x \phi \geq 0$ e, portanto, a equação da primeira ordem toma a forma $\partial_x \phi = \sqrt{V(\phi)}$. Para encontrar o comportamento do campo em

torno de ϕ_0 (a conta para $-\phi_0$ é análoga) substituímos $\phi = \phi_0 - \epsilon(x)$. Expandindo $V(\phi)$ em série de Taylor chegamos na equação

$$\partial_x \epsilon = -\sqrt{2|V'(\phi_0)|}\sqrt{\epsilon}. \quad (1.3)$$

Aqui, chamamos à atenção o fato de que em teorias com potencial analítico, a primeira derivada quando avaliada em ϕ_0 anula-se e, portanto, o comportamento do campo seria determinado por $\sqrt{V''(\phi_0)}$. Note-se, também, que a derivada $V'(\phi_0)$ é uma derivada lateral para $\phi < \phi_0$.

A solução da equação (1.3) tem a forma $\epsilon(x) = \frac{1}{2}|V'(\phi_0)|(x_0^{(1)} - x)^2$. Dai, $\phi(x)$ comporta-se como $\phi(x) \approx \phi_0 - \frac{1}{2}|V'(\phi_0)|(x_0^{(1)} - x)^2$ em torno de vacuo. Veja que o comportamento quadratico implica que o campo escalar toma valor de vacuo para valores finitos da variavel espacial x , isto é, para $x = x_0^{(1)}$ no caso de ϕ_0 e $x = x_0^{(2)}$ para $-\phi_0$. O tamanho do kink compacto associado com este modelo é igual a $|x_0^{(1)} - x_0^{(2)}|$. A existência de compactons é uma decorrência do fato de que na equação(1.3) temos $\sqrt{\epsilon}$. Para um potencial analítico com $V'(\phi_0) = 0$, a equação (1.3) deve ser substituída por $\partial_x \epsilon = -\sqrt{|V''(\phi_0)|}\epsilon$. Esta equação leva ao famoso comportamento exponencial do campo quando ele se aproxima do seu valor de vácuo.

2. *O caráter fundamentalmente não-linear das pequenas oscilações.* Para ilustrar este fato, vamos considerar a dinâmica do campo escalar do modelo (1.2) em torno de $\phi = \phi_0$. Sejam dadas as derivadas laterais do potencial $V'_+ := \frac{dV}{d\phi}|_{\phi_0+}$ e $V'_- := \frac{dV}{d\phi}|_{\phi_0-}$. A dinâmica do campo escalar $\phi(t, x)$ em torno de vácuo ϕ_0 é dada pelas equações de Euler-Lagrange $(\partial_t^2 - \partial_x^2)\epsilon + V'_\pm = 0$, em que $\phi(t, x) = \phi_0 + \epsilon(t, x)$ e a equação com V'_+ é válida para $\epsilon > 0$ enquanto aquela com V'_- é válida para $\epsilon < 0$. No caso particular $V'_\pm = \pm 1$ temos o modelo de *signum-Gordon*. Apesar de as equações de Euler-Lagrange parecerem lineares (assim como a equação de onda com termo não-homogêneo) elas na verdade não são, já que cada uma das equações rege a dinâmica do campo em dependência do sinal da função $\epsilon(t, x)$. As equações tomam a forma

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2)\epsilon + V'_- \theta(-\epsilon) + V'_+ \theta(\epsilon) = 0 \quad (1.4)$$

em que $\theta(\epsilon)$ é uma função degrau de Heaviside. A não-linearidade das equações de Euler-Lagrange persiste no limite $|\epsilon| \rightarrow 0$ já que, mesmo neste limite, a forma das equações não muda. Isto significa que não existe regime linear e as oscilações pequenas sempre são governadas por uma equação não-linear. O modelo (1.2) com potencial não-diferenciável constitui um exemplo de violação do paradigma de oscilador harmônico.

3. *Simetria de escala (exata ou aproximada).* A equação (1.4) pode, dependendo do modelo, ser uma equação exata ou aproximada que determina a dinâmica do campo escalar em torno do mínimo do potencial não-diferenciável. Esta equação possui a

simetria de escala $t \rightarrow t/\lambda$, $x \rightarrow x/\lambda$, $\epsilon \rightarrow \lambda^2\epsilon$ em que $\lambda > 0$. Esta simetria implica que existe uma família infinita de soluções $\epsilon_\lambda(t, x)$ associadas à uma dada solução $\epsilon(t, x)$:

$$\epsilon(t, x) \rightarrow \epsilon_\lambda(t, x) = \lambda^2\epsilon\left(\frac{t}{\lambda}, \frac{x}{\lambda}\right). \quad (1.5)$$

Em particular, isto significa que o espectro de oscilações pequenas em torno do valor de vacuo (identificado com a radiação) tem caráter auto-dual e, portanto, algumas estruturas podem repetir-se infinitamente em todas as escalas de tamanho e energia. Neste trabalho daremos, também, argumentos de que a radiação no modelo de *signum-Gordon* tem natureza fractal.

Uma questão importante ao tratar de modelos com potenciais não-diferenciáveis é a motivação que torna eles interessantes de ponto de vista físico. Foi mostrado [23] que os modelos com campo escalar em que o campo não pode tomar valores arbitrariamente grandes (pequenos) são equivalentes a modelos com potencial não-analítico. A transformação que relaciona os dois tipos de modelos é uma “*folding transformation*”, e será apresentada em detalhes quando discutirmos exemplos.

Modelos com valores do campo limitados podem aparecer em dois contextos diferentes. O primeiro grupo é constituído por modelos de campo escalar derivados de modelos mecânicos tomando o limite contínuo (limite de teoria de campos). As limitações em modelos mecânicos tem origem em obstáculos físicos que resultam da restrição física de movimento do modelo a um subconjunto no espaço de configurações. Esta propriedade do modelo persiste no modelo contínuo. Os modelos de campos derivados de modelos mecânicos tem caráter altamente didático e até certo ponto parecem indispensáveis na fase inicial de pesquisa (permitindo ganhar intuição baseada na experiência). Note-se que exatamente este tipo de modelo – o modelo modificado de *sine-Gordon* introduzido por Arodz – deu início à esta linha de pesquisa. O potencial neste modelo tem domínio $[-\phi_0, \phi_0]$.

Outra possibilidade de obter modelos com potencial não-diferenciável foi apresentada recentemente [24] no contexto da parametrização do modelo de Skyrme. Um dos submodelos BPS desse modelo possui restrição para os valores que o campo escalar pode tomar. A parametrização delimita os valores do campo $\bar{\eta}$ ao intervalo $[0, 2]$ e gera um potencial efetivo $V = \frac{1}{2}\bar{\eta}(2 - \bar{\eta})$.

Em ambos casos a restrição para o valor do campo pode ser vista como a existência de barreiras infinitas para o campo em pontos na borda: $\{-\phi_0, \phi_0\}$ no caso do modelo modificado de sine-Gordon e $\{0, 2\}$ no caso do sub-modelo de Skyrme. A presença de barreiras infinitas implica condições de reflexão nestes pontos. Estas condições, junto com as equações de Euler-Lagrange, descrevem a dinâmica do sistema físico. Isto é uma fonte de complicações técnicas significativas. Essas limitações, no entanto, podem ser contornadas ao

passarmos à um campo auxiliar que não possui valores limitados. A dinâmica deste campo é mapeada na dinâmica de um sistema físico, e este mapeamento é dado pelo “*folding transformation*”. Assim, justifica-se a presença de potenciais não analíticos em modelos de teoria de campos. Maiores detalhes dos modelos acima mencionados e a construção da “*folding transformation*” serão apresentados no primeiro capítulo desta dissertação.

Nosso objetivo principal é estudar uma classe especial de soluções periódicas com energia finita chamadas *oscillons*. O primeiro *oscillon* exato no modelo de *signum-Gordon* foi apresentado em [19]. Recentemente, esta classe de soluções foi encontrada também em um submodelo de Skyrme. Levando em conta a universalidade do modelo de *signum-Gordon*, nos vemos motivados a realizar uma pesquisa mais detalhada de *oscillons* avaliando a sua estabilidade mediante perturbações e seu comportamento em processos de espalhamento. Além disso, estamos testando a hipótese de que o espectro de radiação do modelo *signum-Gordon* é dominado por *oscillons* e perturbações deles.

No Capítulo (2), apresentaremos o surgimento de modelos com potencial não-analítico tomando como referência dois modelos distintos: um modelo mecânico e o modelo de Skyrme. Esta parte da dissertação constituirá na sua maioria em uma revisão de resultados presentes na literatura.

Em sequência, no Capítulo (3) discutiremos o *oscillon* básico e sua generalização. Neste mesmo capítulo apresentaremos resultados da nossa pesquisa sobre perturbações de *oscillons* no modelo de *signum-Gordon* e a presença de *oscillons* em um modelo derivado do modelo de Skyrme.

No Capítulo (4) discutiremos o espalhamento de *oscillons* no modelo de *signum-Gordon*.

O Capítulo (5) contém resultados de nossa pesquisa sobre o espectro de radiação do modelo de *signum-Gordon*.

O último capítulo contém um resumo dos resultados mais importantes, além de uma discussão dos problemas em aberto.

2 SURGIMENTO DE POTENCIAIS NÃO-ANALITICOS

Neste capítulo apresentamos exemplos de diferentes formas pelas quais surgem modelos com potencial não-diferenciável.

Na seção (2.1) discutiremos o modelo de sine-Gordon modificado partindo de uma realização mecânica dele. Assim como no modelo de sine-Gordon usual, existe uma realização mecânica do modelo modificado que é representada por um conjunto infinito de pêndulos em um campo gravitacional, acoplados entre si por uma barra (ou fita) elástica. Esta realização representa uma versão discretizada do modelo de campo de sine-Gordon e permite a recuperação dele no limite contínuo (limite de teoria de campo).

O estudo dessas realizações mecânicas tem papel muito importante no nosso trabalho. Ele permite compreender melhor o significado físico da solução de vácuo, além de outras particularidades do modelo modificado. Munidos de uma intuição adquirida analisando modelos discretos, podemos com maior facilidade contornar novos obstáculos associados com o modelo contínuo. Esta situação lembra um pouco aquela que é presente em teorias efetivas de campo baseadas no parâmetro de ordem em que a estrutura microscópica do modelo não aparece. Neste contexto, a realização mecânica em forma de cadeia de pêndulos poderia ser vista como uma espécie de modelo microscópico. O modelo de sine-Gordon modificado possui campo com valores restritos ao intervalo $[-\phi_0, \phi_0]$.

Na seção (2.2) veremos outro exemplo de surgimento de modelos com potencial não analítico. Desta vez, o ponto de partida é uma teoria de campo em 3+1 dimensões que, efetivamente, nos proporciona um modelo em 1+1 dimensões em que os valores do campo são restritos ao intervalo $[0, 2]$.

Finalmente, na seção (2.3), apresentaremos uma abordagem a modelos com valor de campo restrito à este intervalo. Mostraremos como barreiras infinitas de potencial nas extremidades deste intervalo podem ser removidas via transformação *unfolding*.

2.1 REALIZAÇÕES MECÂNICAS

2.1.1 Sine-Gordon modificado como limite de acoplamento de pêndulos

2.1.1.1 Sistema discreto

Na Fig. (2) mostramos um desenho da realização mecânica do modelo modificado de sine-Gordon. O modelo possui N pêndulos acoplados através de uma fita elástica que é

torcida conforme as posições relativas entre os pêndulos vizinhos. A fita é alinhada com um eixo, o que significa que ela não pode ser dobrada, apenas torcida. Cada pêndulo possui seu movimento restrito a um plano perpendicular à este eixo. A distância entre os pontos de acoplamento de dois pêndulos vizinhos tem valor “ a ”, e é a mesma para todos os pares adjacentes. Na ponta de cada pêndulo, cujo comprimento tem valor “ R ”, encontra-se uma massa “ m ”. Todo o sistema encontra-se em um campo gravitacional uniforme representado por um coeficiente de aceleração gravitacional “ g ”. Até este ponto, não há diferenças entre o modelo apresentado e o modelo usual. A modificação do modelo deve-se às seguintes diferenças:

1. A fita, nas suas extremidades, está fixada no sentido vertical.¹ Nessas circunstâncias, para uma fita suficientemente rígida, a posição vertical invertida dos pêndulos corresponde ao mínimo estável². O ângulo da inclinação do pêndulo toma valor nulo quando ele se encontra na posição vertical invertida.
2. Existe uma restrição rígida que delimita o ângulo máximo de inclinação dos pêndulos. Esta restrição pode ser realizada incluindo-se duas barras *paralelas* à fita e posicionadas simetricamente, de forma que os pêndulos, quando apoiados nestas barras, possuem inclinação $\pm\phi_0$. Assumindo que as barras são infinitamente rígidas introduzimos no sistema a condição de colisão elástica entre os pêndulos e a barra. Deste modo, o pêndulo que bate na barra com certa velocidade angular volta com velocidade igual e oposta.

As equações de movimento dos pêndulos são as próprias equações de Newton para movimento angular

$$\frac{d\mathbf{L}^{(i)}}{d\tilde{t}} = \boldsymbol{\tau}_{tot}^{(i)}, \quad (2.1)$$

em que $\mathbf{L}^{(i)}$ e $\boldsymbol{\tau}_{tot}^{(i)}$ representam, respectivamente, o momento angular e o torque total exercido sobre o pêndulo “ i ”. Este torque tem origem nos torques gravitacional $\boldsymbol{\tau}_{grav}^{(i)}$ e da interação com os pêndulos vizinhos “ $i - 1$ ” e “ $i + 1$ ” via fita elástica $\boldsymbol{\tau}_{el}^{(i)}$. O símbolo \tilde{t} representa a variável temporal³ e \tilde{x} o eixo longitudinal da fita. As variáveis $\tilde{x}_i = ia$ representam as posições dos pontos de acoplamento dos pêndulos com a fita. A inclinação de cada pêndulo é dada por $\phi(\tilde{t}, \tilde{x}_i)$. Da definição de momento angular temos

$$\mathbf{L}_{(i)} \equiv \mathbf{r}_{(i)} \times \mathbf{p}_{(i)} = (R \hat{\mathbf{r}}_{(i)}) \times (m v_{(i)} \hat{\boldsymbol{\phi}}_{(i)}) = R m v_{(i)} \hat{\mathbf{x}} = m R^2 \frac{d\phi(\tilde{t}, \tilde{x}_i)}{d\tilde{t}} \hat{\mathbf{x}}, \quad (2.2)$$

¹Esta condição de contorno será em seguida desprezada, estendendo o sistema para uma cadeia infinitamente longa de pêndulos, ou no limite contínuo para um campo escalar em $x \in \mathbb{R}$.

²A variação do parâmetro de elasticidade da fita nos permite estudar o fenômeno de quebra espontânea da simetria e a consequente produção de defeitos topológicos (kinks). Nesta dissertação não vamos explorar este assunto, assumindo desde o início que a rigidez da fita não é grande e a posição vertical dos pêndulos corresponde à um mínimo instável.

³Usaremos a notação “ \tilde{t} ” e, mais adiante, “ \tilde{x} ” para designar tempo e posição (variáveis dimensionais) porque queremos preservar os rótulos “ t ” e “ x ” para uso futuro com coordenadas adimensionais

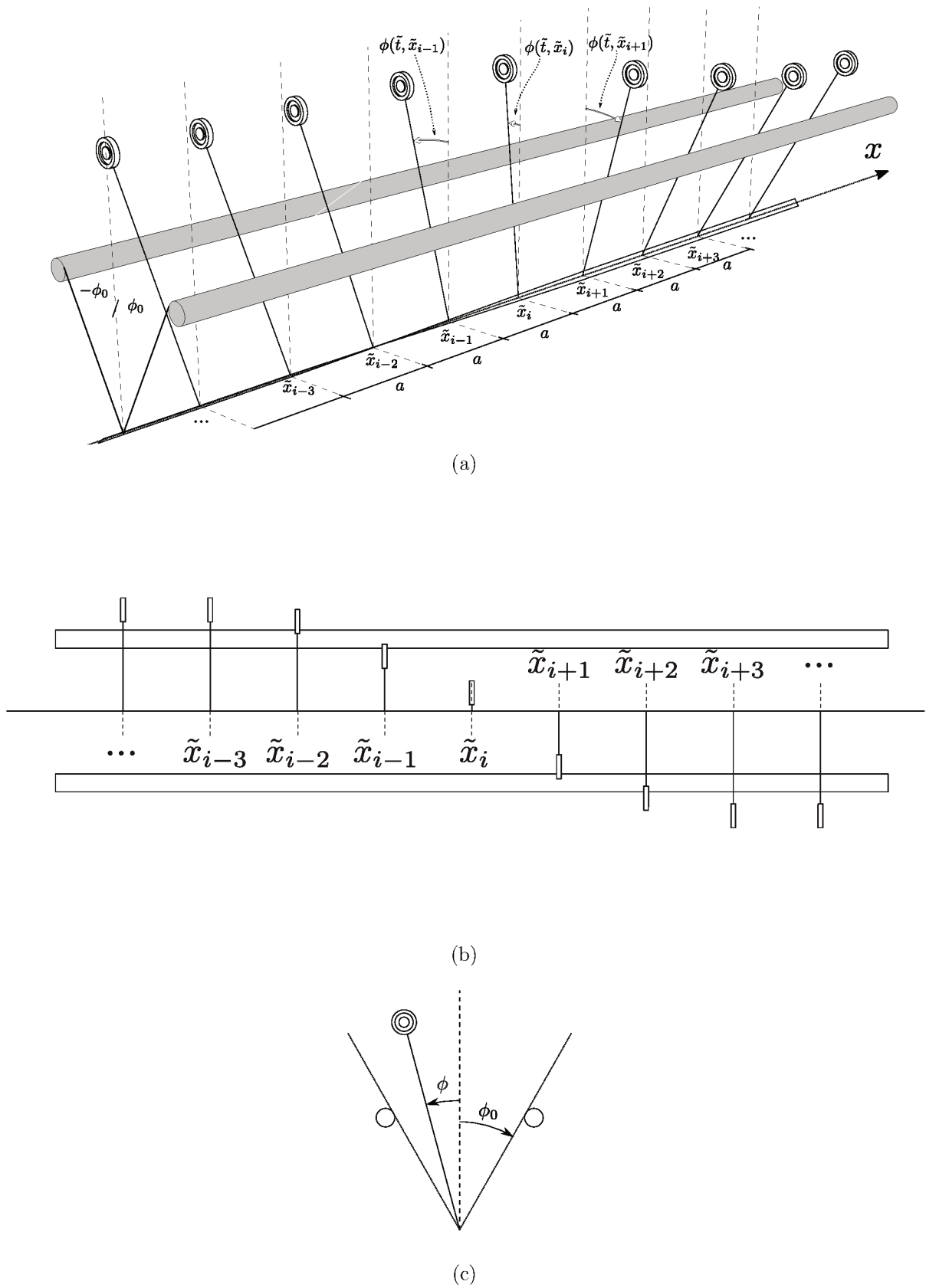


Figura 2 – (a) Esquema de modelo mecânico para *signum-Gordon* modificado; (b) vista de cima; (c) vista de frente.

em que $\hat{\mathbf{r}}_{(i)}$ e $\hat{\boldsymbol{\phi}}_{(i)}$ são dois versores polares no plano do pêndulo tais que $\hat{\mathbf{r}}_{(i)} \times \hat{\boldsymbol{\phi}}_{(i)} = \hat{\mathbf{x}}$. Derivando o resultado (2.2) com relação ao tempo, temos

$$\frac{d\mathbf{L}_{(i)}}{d\tilde{t}} = mR^2 \frac{d^2\phi(\tilde{t}, \tilde{x}_i)}{d\tilde{t}^2} \hat{\mathbf{x}}. \quad (2.3)$$

O torque gerado sobre cada pêndulo pela força da gravidade, lembrando que $\phi = 0$ implica em pêndulo orientado para cima (e daí o sinal positivo na frente de $\sin \phi$), é dado por

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_{grav} &\equiv \mathbf{r}_{(i)} \times \mathbf{F}_{(i)} \\ &= (R \hat{\mathbf{r}}_{(i)}) \times (mg \sin \phi(\tilde{t}, \tilde{x}_i) \hat{\boldsymbol{\phi}}_{(i)}) \\ &= mgR \sin \phi \hat{\mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

No limite de acoplamento extremamente fraco (quando a fita pode ser ignorada), cada pêndulo gira de maneira independente dos outros. Neste caso, as equações de Newton (2.1) resultam em

$$R \frac{d^2\phi(\tilde{t}, \tilde{x}_i)}{d\tilde{t}^2} = g \sin \phi(\tilde{t}, \tilde{x}_i). \quad (2.5)$$

No caso de acoplamento entre os pêndulos, além do torque gravitacional devemos incluir torque associado com torção da fita. Cada pêndulo interage com seus vizinhos mais próximos e esta interação depende linearmente dos ângulos relativos $\phi(\tilde{t}, \tilde{x}_{i+1}) - \phi(\tilde{t}, \tilde{x}_i)$ e $\phi(\tilde{t}, \tilde{x}_i) - \phi(\tilde{t}, \tilde{x}_{i-1})$. O torque sobre o pêndulo “ i ” depende, além disso, da constante de elasticidade “ κ ” e do comprimento do segmento torcido da fita “ a ” (distância entre a base dos pêndulos na variável \tilde{x}). Assim, o torque devido à elasticidade de torção do fio será dado por

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_{el}^{(i)} &= \kappa \frac{\phi(\tilde{t}, \tilde{x}_{i+1}) - \phi(\tilde{t}, \tilde{x}_i)}{a} \hat{\mathbf{x}} + \kappa \frac{\phi(\tilde{t}, \tilde{x}_{i-1}) - \phi(\tilde{t}, \tilde{x}_i)}{a} \hat{\mathbf{x}} \\ &= \frac{\kappa}{a} [\phi(\tilde{t}, \tilde{x}_{i+1}) - 2\phi(\tilde{t}, \tilde{x}_i) + \phi(\tilde{t}, \tilde{x}_{i-1})] \hat{\mathbf{x}}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

em que κ é a constante elástica da fita. O torque total no i -ésimo pêndulo será dado por $\boldsymbol{\tau}_{grav}^{(i)} + \boldsymbol{\tau}_{el}^{(i)}$. As equações de movimento tomam a seguinte forma

$$\frac{d\mathbf{L}_{(i)}}{d\tilde{t}} = \boldsymbol{\tau}_{grav}^{(i)} + \boldsymbol{\tau}_{el}^{(i)}. \quad (2.7)$$

Da equação (2.7) temos

$$\begin{aligned} mR^2 \frac{d^2\phi(\tilde{t}, \tilde{x}_i)}{d\tilde{t}^2} &= mgR \sin \phi(\tilde{t}, \tilde{x}_i) \\ &+ \frac{\kappa}{a} [\phi(\tilde{t}, \tilde{x}_{i+1}) - 2\phi(\tilde{t}, \tilde{x}_i) + \phi(\tilde{t}, \tilde{x}_{i-1})]. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Dividindo os dois lados dessa equação por mgR , reorganizando o último termo e usando $\phi(\tilde{t}, \tilde{x}_{i\pm 1}) = \phi(\tilde{t}, \tilde{x}_i \pm a)$ chegamos à expressão

$$\begin{aligned} \frac{R}{g} \frac{d^2\phi(\tilde{t}, \tilde{x}_i)}{d\tilde{t}^2} &= \sin \phi(\tilde{t}, \tilde{x}_i) \\ &+ \frac{\kappa}{Rg} \frac{a}{m} \left[\frac{\phi(\tilde{t}, \tilde{x}_i + a) - 2\phi(\tilde{t}, \tilde{x}_i) + \phi(\tilde{t}, \tilde{x}_i - a)}{a^2} \right]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Este conjunto de equações, junto com a condição de reflexão rígida em $\pm\phi_0$, descreve a dinâmica da cadeia de pêndulos acoplados.

2.1.1.2 Limite de teoria de campos

Tendo interesse na teoria de campo efetiva associada à este modelo, introduzimos uma função auxiliar⁴ $\tilde{\phi}(\tilde{t}, \tilde{x})$ definida para todo \tilde{t} , com \tilde{x} real e contínuo no intervalo $[0, L]$ ⁵. Assumimos que esta função é diferenciável pelo menos duas vezes com respeito à \tilde{x} e que nos pontos \tilde{x}_i seus valores são iguais aos ângulos $\phi(\tilde{t}, \tilde{x}_i)$ tratados anteriormente.

Naturalmente, para um conjunto $\phi(\tilde{t}, \tilde{x}_i)$ de ângulos existe um número infinito e incontável de tais funções $\tilde{\phi}(\tilde{t}, \tilde{x})$. Ainda assim, para qualquer uma delas a seguinte identidade é verdadeira

$$\begin{aligned} & \tilde{\phi}(\tilde{t}, \tilde{x}_i - a) + \tilde{\phi}(\tilde{t}, \tilde{x}_i + a) - 2\tilde{\phi}(\tilde{t}, \tilde{x}_i) \\ &= \int_0^a ds_1 \int_{-a}^0 ds_2 \frac{\partial^2 \tilde{\phi}(\tilde{t}, s_1 + s_2 + \tilde{x})}{\partial \tilde{x}^2} \Big|_{\tilde{x}=\tilde{x}_i}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Esta identidade pode ser verificada observando que as derivadas parciais de uma função que depende da soma de variáveis são iguais, já que por regra da cadeia

$$\frac{\partial \tilde{\phi}(\tilde{t}, s_1 + s_2 + \tilde{x})}{\partial \tilde{x}} = \frac{\partial \tilde{\phi}(\tilde{t}, s_1 + s_2 + \tilde{x})}{\partial s_1} = \frac{\partial \tilde{\phi}(\tilde{t}, s_1 + s_2 + \tilde{x})}{\partial s_2}.$$

Isso implica na relação para segundas derivadas

$$\frac{\partial^2 \tilde{\phi}(\tilde{t}, s_1 + s_2 + \tilde{x})}{\partial \tilde{x}^2} = \frac{\partial^2 \tilde{\phi}(\tilde{t}, s_1 + s_2 + \tilde{x})}{\partial s_2 \partial s_1}.$$

A integral da identidade (2.10) toma a seguinte forma

$$\begin{aligned} I &= \int_0^a ds_1 \int_{-a}^0 ds_2 \frac{\partial^2 \tilde{\phi}(\tilde{t}, s_1 + s_2 + \tilde{x})}{\partial \tilde{x}^2} = \int_0^a ds_1 \frac{\partial \tilde{\phi}(\tilde{t}, s_1 + s_2 + \tilde{x})}{\partial s_1} \Big|_{s_2=-a}^0 \\ &= \int_0^a ds_1 \left[\frac{\partial \tilde{\phi}(\tilde{t}, s_1 + \tilde{x})}{\partial s_1} - \frac{\partial \tilde{\phi}(\tilde{t}, s_1 - a + \tilde{x})}{\partial s_1} \right] \\ &= \left[\tilde{\phi}(\tilde{t}, s_1 + \tilde{x}) - \tilde{\phi}(\tilde{t}, s_1 - a + \tilde{x}) \right] \Big|_0^a = \tilde{\phi}(\tilde{t}, \tilde{x} + a) + \tilde{\phi}(\tilde{t}, \tilde{x} - a) - 2\tilde{\phi}(\tilde{t}, \tilde{x}). \end{aligned}$$

Fica verificada a identidade (2.10).

O campo efetivo pode ser introduzido restringindo as nossas considerações para tais movimentos dos pêndulos em que exista a função de interpolação $\tilde{\phi}(\tilde{t}, \tilde{x})$ tal que

$$\int_0^a ds_1 \int_{-a}^0 ds_2 \frac{\partial^2 \tilde{\phi}(\tilde{t}, s_1 + s_2 + \tilde{x})}{\partial \tilde{x}^2} \Big|_{\tilde{x}=\tilde{x}_i} \simeq a^2 \frac{\partial^2 \tilde{\phi}(\tilde{t}, \tilde{x})}{\partial \tilde{x}^2} \Big|_{\tilde{x}=\tilde{x}_i}.$$

⁴Existem várias maneiras de se obter um sistema com número infinito de graus de liberdade relatados na literatura. Uma delas é realizada através do aumento de densidade de pêndulos. A abordagem escolhida neste trabalho baseia-se no conceito de campo efetivo, visto como uma função que *interpola* entre os graus de liberdade mecânicos, veja [25].

⁵Na nossa notação o símbolo “ $\tilde{\phi}$ ” representa campo enquanto ϕ (sem tilde) representa angulo de inclinação de pêndulo.

Veja que, por exemplo, este é o caso quando $\frac{\partial^2 \tilde{\phi}(\tilde{t}, \tilde{x})}{\partial \tilde{x}^2} \simeq \text{const}$ no intervalo $[\tilde{x}_i - a, \tilde{x}_i + a]$, já que

$$\begin{aligned} & \int_0^a ds_1 \int_{-a}^0 ds_2 \frac{\partial^2 \tilde{\phi}(\tilde{t}, s_1 + s_2 + \tilde{x})}{\partial \tilde{x}^2} \Big|_{\tilde{x}=\tilde{x}_i} \\ & \simeq \frac{\partial^2 \tilde{\phi}(\tilde{t}, \tilde{x})}{\partial \tilde{x}^2} \Big|_{\tilde{x}=\tilde{x}_i} \int_0^a ds_1 \int_{-a}^0 ds_2 \\ & = a^2 \frac{\partial^2 \tilde{\phi}(\tilde{t}, \tilde{x})}{\partial \tilde{x}^2} \Big|_{\tilde{x}=\tilde{x}_i}. \end{aligned}$$

A restrição da classe de movimentos dos pêndulos garante que, por construção, o campo escalar nos pontos \tilde{x}_i toma valores que correspondem com os ângulos de inclinação dos pêndulos

$$\tilde{\phi}(\tilde{t}, \tilde{x}) \Big|_{\tilde{x}=\tilde{x}_i} = \phi(\tilde{t}, \tilde{x}_i). \quad (2.11)$$

Assim, a equação (2.9) pode ser substituída por uma equação diferencial que determina a evolução do campo escalar,

$$\frac{R}{g} \frac{\partial^2 \tilde{\phi}(\tilde{t}, \tilde{x})}{\partial \tilde{t}^2} = \sin \tilde{\phi}(\tilde{t}, \tilde{x}) + \frac{\kappa a}{mRg} \frac{\partial^2 \tilde{\phi}(\tilde{t}, \tilde{x})}{\partial \tilde{x}^2}. \quad (2.12)$$

Nesta abordagem os movimentos (ângulos) dos pêndulos são dados por soluções da equação (2.12) tomados em $\tilde{x} = \tilde{x}_i$.

Seguindo uma boa prática de representação das equações da física em forma adimensional, definimos novas variáveis (t, x) e um novo campo $\varphi(t, x)$

$$\begin{cases} t := \sqrt{\frac{g}{R}} \tilde{t} \\ x := \sqrt{\frac{mgR}{\kappa a}} \tilde{x} \\ \varphi(t, x) := \phi(\tilde{t}, \tilde{x}), \end{cases}$$

e a equação (2.12) pode ser escrita como

$$\frac{\partial^2 \varphi(t, x)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi(t, x)}{\partial x^2} = \sin \varphi(t, x). \quad (2.13)$$

Veja, no entanto, que para o modelo proposto essa equação de movimento não descreve completamente a dinâmica do sistema. Isso por dois motivos:

1. Quando $\varphi = \pm \varphi_0$ os pêndulos deveriam sofrer colisão elástica com alguma das barras ou permanecer em repouso (solução do vácuo);
2. Ângulos $|\varphi| > \varphi_0$ são proibidos para os pêndulos.

A dinâmica completa é dada pela equação de movimento junto com a condição de que

$$\partial_t \varphi \rightarrow -\partial_t \varphi \quad \text{quando} \quad \varphi = \pm \varphi_0. \quad (2.14)$$

Claramente, isso gera uma inconveniência matemática no desenvolvimento desse modelo. Além disso, a solução do vácuo não é uma solução da equação de movimento.

O modelo de campo cuja dinâmica é dada pela equação (2.13) junto com a condição (2.14) possui a densidade Lagrangiana

$$\mathcal{L}_{SGM} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - V(\varphi) \quad (2.15)$$

em que $\mu = 0, 1$ e cujo potencial tem a forma

$$V(\varphi) = \begin{cases} \cos \varphi - \cos \varphi_0 & \text{para } |\varphi| \leq \varphi_0 \\ \infty & \text{para } |\varphi| > \varphi_0 \end{cases}. \quad (2.16)$$

O potencial $V(\varphi)$ pode ser visualizado na Fig. (3). A forma do potencial (2.16) restringe os graus de liberdade do campo a tomar valores restritos ao intervalo $|\varphi| \leq \varphi_0$, reproduzindo o comportamento esperado do sistema de pêndulos limitados pelas barras.

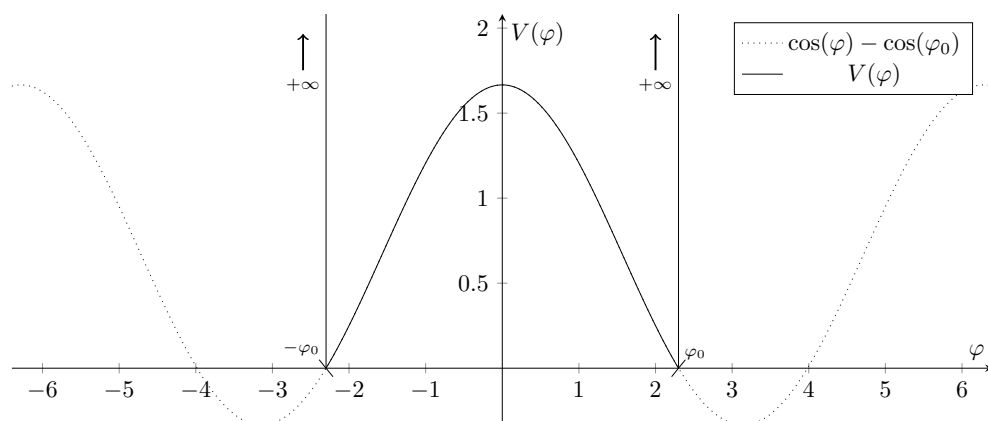


Figura 3 – Comparação entre formato de $V(\varphi)$ e potencial com φ não-limitado (linha pontilhada). Para esta figura usamos $\varphi_0 = 2,3$.

Com isso, temos um modelo descrito por uma densidade Lagrangiana com potencial tipo poço. Nosso próximo passo será uma modificação da equação de movimento que permite a inclusão de condição de reflexão rígida dentro da própria equação. Antes de prosseguir com este passo, vamos apresentar outro exemplo de modelo com potencial não diferenciável.

2.2 SUBMODELO DO MODELO DE SKYRME

Nesta seção vamos apresentar o surgimento de potenciais não analíticos tomando como ponto de partida o modelo de Skyrme definido em 3+1 dimensões. O nosso interesse

principal não é no modelo completo mas em um dos submodelos dele. De acordo com resultados apresentados em Ref. [26], o modelo de Skyrme pode ser decomposto em dois submodelos que possuem a propriedade de BPS⁶. Como foi discutido no Ref. [27] um destes submodelos pode ser efetivamente reduzido a um modelo em 1+1 dimensões. Esta redução deve-se a uma parametrização que leva à limitação dos valores possíveis tomados por um dos campos. Em decorrência deste fato, de maneira análoga com a situação apresentada na seção anterior, vamos precisar lidar com um potencial não diferenciável.

2.2.1 Modelo de Skyrme

Nesta seção apresentaremos alguns fatos sobre o modelo de Skyrme e a sua decomposição em submodelos de acordo com referências bibliográficas.

O modelo de Skyrme é um modelo não-linear definido pela densidade de Lagrangiana

$$\mathcal{L}_S = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_4 \quad (2.17)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 &= -\frac{1}{2}\text{Tr}(L_\mu L^\mu) \\ \mathcal{L}_4 &= \frac{1}{16}\text{Tr}[L_\mu, L_\nu]^2. \end{aligned} \quad (2.18)$$

O termo $L_\mu = U^\dagger \partial_\mu U$ contém primeiras derivadas parciais do campo $U \in SU(2)$. Assim, a densidade Lagrangiana contém termos quadráticos e quárticos em potências das derivadas.

O primeiro termo, \mathcal{L}_2 , é equivalente à parte cinética do modelo de sigma não-linear. Ele tem sua origem na densidade Lagrangiana para mésons

$$\mathcal{L}'_2 = \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma) + \frac{1}{2}(\partial_\mu \boldsymbol{\pi} \cdot \partial^\mu \boldsymbol{\pi})$$

em que $\sigma(x)$ é um campo escalar que representa um méson escalar e $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1(x), \pi_2(x), \pi_3(x))$ são três campos escalares associados com píons. Os campos escalares de mésons satisfazem a relação⁷ (vínculo) $\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2 = f_\pi^2$ sendo $f_\pi = 93$ MeV a constante de decaimento de píons. A matriz unitária U está parametrizada pelos campos de mésons

$$U(x) = \frac{1}{f_\pi}(\mathbb{1}\sigma(x) + i\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi}(x)), \quad (2.19)$$

em que $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ são as matrizes de Pauli. Utilizando propriedades dessas matrizes

$$\sigma_a \sigma_b = \mathbb{1}\delta_{ab} + i\epsilon_{abc}\sigma_c, \quad \text{Tr}(\sigma_a \sigma_b) = 2\delta_{ab} \quad (2.20)$$

⁶Isto significa que as configurações estáticas obedecem à equações de primeira ordem. Estas equações implicam em equações de Euler-Lagrange estáticas (da segunda ordem).

⁷Esta condição aparece no modelo efetivo de interação entre píons e nucleons em decorrência do requerimento de simetria quiral do modelo.

e a relação de unitariedade $U^\dagger U = \mathbb{1}$ mostra-se que $\mathcal{L}_2 = \frac{1}{2} \text{Tr}(\partial_\mu U^\dagger \partial^\mu U) = \frac{2}{f_\pi^2} \mathcal{L}'_2$.

O termo quártico \mathcal{L}_4 foi introduzido por Skyrme para evitar as consequências de teorema de Derrick [28], isto é, o colapso das soluções. Ocorre que a energia da configuração estática descrita pelo campo $U(\mathbf{x})$ em D dimensões espaciais depende de um parametro de escala λ . Ou seja, rescalando $\mathbf{x} \rightarrow \lambda \mathbf{x}$ temos que a energia E_λ da nova configuração $U(\lambda \mathbf{x})$ tem valor $E_\lambda = \lambda^{2-D} E$, em que

$$E = \frac{1}{2} \int d^D x \text{Tr}(\partial_\mu U^\dagger \partial^\mu U).$$

Isto significa que em $D = 3$ dimensões a configuração energeticamente favorável tem energia nula. Incluindo o termo quártico, a energia da solução rescalada é dada por

$$E_\lambda = \lambda^{2-D} E_{(2)} + \lambda^{4-D} E_{(4)}.$$

Em $D \geq 3$ existe um mínimo, isto é, a condição que torna a solução estável (na escala original $\lambda = 1$) $\left. \frac{dE_\lambda}{d\lambda} \right|_{\lambda=1} = 0$ resulta em $E_{(2)}/E_{(4)} = -\frac{D-4}{D-2}$ e $\left. \frac{d^2 E_\lambda}{d\lambda^2} \right|_{\lambda=1} > 0$ leva à condição $D > 2$.

A razão pela qual o termo com comutadores foi usado ao invés do simples quadrado de \mathcal{L}_2 foi o requerimento de preservação de termos padrão nas derivadas temporais (segundas derivadas temporais nas equações de movimento).

Uma das grandes vantagens do modelo de Skyrme é a existência de sólitons topológicos interpretados como estados de matéria bariônica. Em cada instante de tempo o campo $U(\mathbf{x})$ constitui um mapeamento do espaço \mathbb{R}^3 na variedade do grupo S^3 . As configurações do campo com energia finita devem satisfazer a condição $\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow 0} U(\mathbf{x}) = \mathbb{1}$. Esta condição mapeia todos os pontos no infinito de \mathbb{R}^3 para um único ponto, portanto ela compactifica o espaço \mathbb{R}^3 na esfera S^3 . Assim, o campo U fornece mapeamento $S^3 \rightarrow S^3$ que não é trivial. Isto significa que um mapeamento pode ser decomposto em classes de mapeamentos homotopicamente distintos (eles não podem ser deformados continuamente um no outro). Este fato expressamos dizendo que o grupo de homotopia $\pi_3(S^3) \sim \mathbb{Z}$ não é trivial. Os números inteiros \mathbb{Z} representam *winding numbers* de mapeamento U e eles constituem cargas topológicas dos sólitons, chamados *Skyrmions*.

Embora a motivação original de Skyrme fosse um modelo nuclear, ele possui também aplicações como modelo efetivo que descreve alguns aspectos da QCD no regime de energias baixas. Estas aplicações baseiam-se na expansão⁸ $1/N_c$ (em que N_c representa número de cores) proposta por t'Hooft [29, 30] e Witten [31]. Mais sobre este assunto pode ser encontrado no artigo de revisão na Ref. [32]. Neste trabalho não vamos aprofundar na motivação física por trás do modelo de Skyrme. Ao invés disso, vamos nos concentrar nas propriedades matemáticas dele.

⁸Esta expansão é realizada tomando-se uma generalização da QCD de $SU(3)$ para $SU(N_c)$.

2.2.2 Submodelos BPS e a parametrização

O modelo dado pela densidade Lagrangiana (2.17) não é tipo BPS. Entretanto, de acordo com Ref. [26] a densidade Lagrangiana \mathcal{L}_S pode ser escrita como a soma das densidades $\mathcal{L}^{(1)}$ e $\mathcal{L}^{(2)}$ que representam dois submodelos BPS *acoplados*, isto é, nenhum deles aparece individualmente. Ambos submodelos BPS contém tanto termos com segundas quanto termos com quartas potências das derivadas provenientes de \mathcal{L}_2 e \mathcal{L}_4 .

O campo U é parametrizado por quatro campos reais que satisfazem o vínculo $\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2 = f_\pi^2$. Seguindo a Ref. [26], ao invés da parametrização (2.19), nós vamos utilizar uma parametrização equivalente dada em termos de um campo real $\xi(x)$ e um campo complexo $u(x)$

$$U = \exp\left(i\xi(x)\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}(x)\right) \quad \text{com} \quad \mathbf{n}(x) = \frac{1}{1+|u|^2} \begin{pmatrix} u + \bar{u} \\ -i(u - \bar{u}) \\ 1 - |u|^2 \end{pmatrix},$$

onde as componentes do vetor $\boldsymbol{\sigma}$ são as matrizes de Pauli e \mathbf{n} é um 3-vetor real que descreve uma esfera de raio unitário no espaço dos três campos escalares $\boldsymbol{\pi}$.⁹ Assim, apenas duas de suas componentes são independentes e $\mathbf{n}^2 = 1$. A relação de \mathbf{n} com u se dá através de uma projeção estereográfica da esfera que ele descreve com o plano complexo de u , em que um hemisfério da esfera está acima do plano e o outro abaixo, conforme Fig. (4).

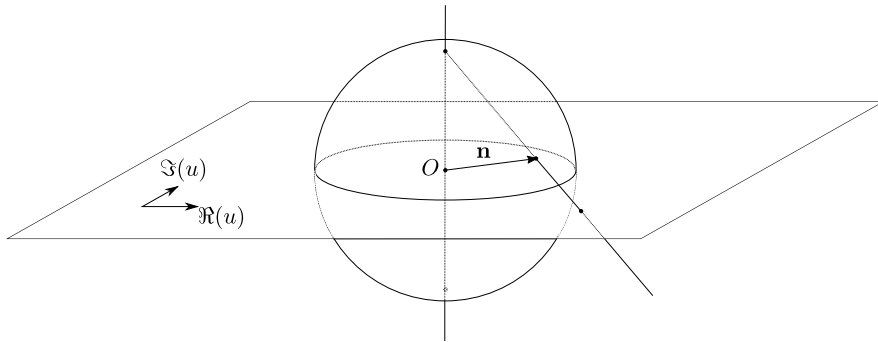


Figura 4 – Projeção estereográfica que relaciona o 3-vetor $\mathbf{n}(u, \bar{u})$ com os valores do campo complexo $u(\theta, \phi)$.

Para configurações de U com carga topológica não-nula, todo o espaço interno S^3 deve ser coberto, o que significa que ξ deve ter valores ocupando todo o intervalo $[0, \pi]$ e u deve preencher todo o plano complexo (\mathbf{n} deve passar por todos os pontos da esfera unitária que descreve).

No apêndice (B) mostramos que as densidades de Lagrangiana (2.18) podem ser representadas como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 &= \mathcal{L}_2^{(1)} + \mathcal{L}_2^{(2)} \\ \mathcal{L}_4 &= \mathcal{L}_4^{(1)} + \mathcal{L}_4^{(2)}, \end{aligned}$$

⁹A relação entre as duas parametrizações tem a forma $\sigma = f_\pi \cos(\xi)$, $\boldsymbol{\pi} = f_\pi \sin(\xi)\mathbf{n}$.

de forma que, reorganizando termos, podemos separar o modelo completo em dois submodelos

$$\mathcal{L}_S = \underbrace{\mathcal{L}_2^{(1)} + \mathcal{L}_4^{(1)}}_{\mathcal{L}^{(1)}} + \underbrace{\mathcal{L}_2^{(2)} + \mathcal{L}_4^{(2)}}_{\mathcal{L}^{(2)}}.$$

As densidades referentes aos submodelos são dadas por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(1)} &= \mathcal{L}_2^{(1)} + \mathcal{L}_4^{(1)} = 4 \sin^2 \xi \frac{u_\mu \bar{u}^\mu}{(1 + |u|^2)^2} \\ &\quad - 4 \sin^2 \xi \left(\xi_\mu \xi^\mu \frac{u_\nu \bar{u}^\nu}{(1 + |u|^2)^2} - \frac{\xi_\mu \bar{u}^\mu \xi_\nu u^\nu}{(1 + |u|^2)^2} \right) \end{aligned} \quad (2.21)$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(2)} &= \mathcal{L}_2^{(2)} + \mathcal{L}_4^{(2)} \\ &= \xi_\mu \xi^\mu - 4 \sin^4 \xi \frac{(u_\mu \bar{u}^\mu)^2 - u_\mu^2 \bar{u}_\nu^2}{(1 + |u|^2)^4}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

em que $u_\mu \equiv \partial_\mu u$ e $\xi_\mu \equiv \partial_\mu \xi$.

No setor estático de \mathcal{L}_S , a densidade Hamiltoniana de cada submodelo é dada pela própria Lagrangiana do submodelo, com sinal invertido. Como veremos, completando quadrados na densidade Hamiltoniana, encontramos um termo quadrado que nos leva à equação BPS associada e um outro termo constante relacionado à carga topológica do sistema, por sua vez associado com o número bariônico B .

2.2.2.1 O primeiro submodelo BPS

A densidade de Hamiltoniana $\mathcal{H}^{(1)} = -\mathcal{L}^{(1)}$ para o primeiro submodelo no setor estático toma a forma

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{(1)}(\mathbf{x}) &= -\frac{4 \sin^2 \xi}{(1 + |u|^2)^2} \left[u_i \bar{u}^i - \xi_i \xi^i u_j \bar{u}^j + \xi_i \bar{u}^i \xi_j u^j \right] \\ &= \frac{4 \sin^2 \xi}{(1 + |u|^2)^2} \left[u_i \bar{u}_i + \xi_i \xi_i u_j \bar{u}_j - \xi_i u_i \xi_j \bar{u}_j \right] \\ &= \frac{4 \sin^2 \xi}{(1 + |u|^2)^2} \left[(u_i \pm i \varepsilon_{ijk} \xi_j u_k)(\bar{u}_i \mp i \varepsilon_{imn} \xi_m \bar{u}_n) \mp 2i \varepsilon_{ijk} \xi_i u_j \bar{u}_k \right] \end{aligned}$$

onde a parte espacial da métrica é dada por $\eta_{ij} = -\delta_{ij}$. A energia das soluções estáticas é dada pela integral

$$\begin{aligned} E^{(1)} &= 4 \int d^3 x \frac{\sin^2 \xi}{(1 + |u|^2)^2} (u_i \pm i \varepsilon_{ijk} \xi_j u_k)(\bar{u}_i \mp i \varepsilon_{imn} \xi_m \bar{u}_n) \\ &\quad \mp 8 \int d^3 x \frac{i \sin^2 \xi}{(1 + |u|^2)^2} \varepsilon_{ijk} \xi_i u_j \bar{u}_k. \end{aligned}$$

Levando em conta que o número bariônico (invariante topológico) associado ao modelo de Skyrme (ver Refs. [33, 34]) é dado por

$$B = -\frac{1}{\pi^2} \int d^3 x \frac{i \sin^2 \xi}{(1 + |u|^2)^2} \varepsilon_{ijk} \xi_i u_j \bar{u}_k,$$

temos que

$$E^{(1)} = 8\pi^2|B| + 4 \int d^3x \frac{\sin^2 \xi}{(1 + |u|^2)^2} (u_i \pm i\varepsilon_{ijk}\xi_j u_k)(\bar{u}_i \mp i\varepsilon_{imn}\xi_m u_n). \quad (2.23)$$

O resultado acima nos indica que $E^{(1)} \geq 8\pi^2|B|$. O limite inferior da energia é saturado quando o restante da integral em (2.23) é nulo, o que implica na seguinte equação de Bogomolnyi

$$u_i \pm i\varepsilon_{ijk}\xi_j u_k = 0 \quad (2.24)$$

e o seu complexo conjugado.

Contraindo (2.24) com ξ_i e u_i (\bar{u}_i no caso da equação complexo conjugada) concluimos que essa equação implica em vínculos para os campos

$$u_i \xi_i = \bar{u}_i \xi_i = 0, \quad u_i^2 = \bar{u}_i^2 = 0. \quad (2.25)$$

O primeiro vínculo é satisfeito quando os campos dependem de diferentes conjuntos de coordenadas $\xi = \xi(r)$ e $u = u(\theta, \phi)$ enquanto o segundo é satisfeito quando u depende de apenas uma das duas variáveis complexas $z \equiv x + iy = \tan(\theta/2)e^{i\phi}$ ou $\bar{z} \equiv x - iy$, isto é, quando u for uma função holomorfa $u(z)$ ou anti-holomorfa $u(\bar{z})$. Nessa transformação as coordenadas (θ, ϕ) descrevem uma esfera unitária cuja relação com o plano de (x, y) se dá através de uma projeção estereográfica. Cabe lembrar que, aqui, x e y não se referem à coordenadas espaciais mas ao espaço em que projetamos a esfera. Como a métrica da esfera unitária é conformalmente plana nas coordenadas (x, y) ,

$$u_i^2 = (\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2 = (\partial_z u + \partial_{\bar{z}} u)^2 - (\partial_z u - \partial_{\bar{z}} u)^2 = 4\partial_z u \partial_{\bar{z}} u \equiv 0$$

satisfazendo o segundo vínculo.

Veremos agora que, integrando $\mathcal{H}^{(1)}(\mathbf{x})$ em coordenadas esféricas, podemos fatorar a energia desse submodelo em dois termos correspondendo, respectivamente, à energia E_u do modelo estático CP^1 e à energia E_ξ associada com termo radial. Integrando $-\mathcal{L}^{(1)}$, dado pela formula (2.21), temos

$$E^{(1)} = - \int d^3x \frac{4 \sin^2 \xi}{(1 + |u|^2)^2} [(1 - \xi_\mu \xi^\mu) u_\mu \bar{u}^\mu + \xi_\mu \bar{u}^\mu \xi_\nu u^\nu].$$

O termo contendo contrações entre campos diferentes $\xi_\mu u^\mu$ é nulo pelas próprias equações de BPS. O termo $u_\mu \bar{u}^\mu$ com $u = u(z, \bar{z})$ e $\bar{u} = \bar{u}(z, \bar{z})$, toma a forma

$$u_\mu \bar{u}^\mu = -\frac{1}{2r^2} (1 + z\bar{z})^2 (u_z \bar{u}_{\bar{z}} + u_{\bar{z}} \bar{u}_z). \quad (2.26)$$

Isto nos leva à seguinte forma para a energia da configuração estática dos campos

$$\begin{aligned} E^{(1)} &= \int dr \cancel{\mathcal{V}} d\Omega \frac{4 \sin^2 \xi}{(1 + |u|^2)^2} (1 - \xi_r \xi^r) \frac{1}{2\cancel{\mathcal{V}}} (1 + z\bar{z})^2 (u_z \bar{u}_{\bar{z}} + u_{\bar{z}} \bar{u}_z) \\ &= \underbrace{2 \int dr \sin^2 \xi (1 + \xi_r^2)}_{E_\xi^{(1)}} \underbrace{\int d\Omega \frac{(1 + z\bar{z})^2}{(1 + |u|^2)^2} (u_z \bar{u}_{\bar{z}} + u_{\bar{z}} \bar{u}_z)}_{E_u^{(1)}}. \end{aligned}$$

O funcional de energia $E_\xi^{(1)}$ possui um limite Bogomolnyi

$$\begin{aligned} E_\xi^{(1)} &= \int dr \sin^2 \xi \left((1 \mp \xi_r)^2 \mp 2\xi_r \right) \geq 2 \left| \int dr \sin^2 \xi \xi_r \right| \\ &= 2 \int_0^\pi \sin^2 \xi d\xi = \pi, \end{aligned}$$

onde a equação de Bogomolnyi correspondente é

$$\sin \xi(\xi_r \pm 1) = 0,$$

cuja solução (caso “+”) com as devidas condições de contorno, é

$$\xi(r) = \begin{cases} \pi - r & \text{para } 0 \leq r \leq \pi \\ 0 & \text{para } r > \pi \end{cases}.$$

Já o termo $E_u^{(1)}$ corresponde com o modelo CP^1 em S^2 . Suas soluções com energia finita são dadas por qualquer função racional holomorfa – *winding number* positivo, correspondendo à escolha do sinal de cima na energia em (2.23) – ou anti-holomorfa – *winding number* negativo, correspondendo à escolha do sinal inferior na energia. Essas soluções racionais saturam o limite de Bogomolnyi $E_u^{(1)} \geq 4\pi|N|$, em que o *winding number* N é dado pelo grau do mapa racional.

Levando em conta esses resultados, sabemos que $E^{(1)} \geq 4\pi^2|N|$ e, contanto que o perfil ξ do Skyrmion BPS obedeça às condições de contorno $\xi(0) = \pi$ e $\xi(R) = 0$, condição necessária para configurações topologicamente não-triviais de U , a carga bariônica B será do mesmo valor de N , e $E_u^{(1)} \geq 4\pi|B|$.

2.2.2.2 O segundo submodelo BPS

Dado que o foco do presente trabalho é no primeiro submodelo BPS, esta seção irá se limitar apenas a apresentar as *equações* do segundo submodelo.

Os termos $\mathcal{L}_2^{(2)}$ e $\mathcal{L}_4^{(2)}$ podem ser combinados para formar a expressão

$$\mathcal{L}^{(2)} = \xi_\mu \xi^\mu + 4 \sin^4 \xi \frac{(u_\mu \bar{u}^\mu)^2 - u_\mu^2 \bar{u}_\nu^2}{(1 + |u|^2)^4}.$$

Da mesma forma que na seção anterior, no setor estático vale a relação $\mathcal{H}^{(2)} = -\mathcal{L}^{(2)}$ e portanto

$$\begin{aligned} E^{(2)} &= \int d^3x \left(\xi_i^2 + 4 \sin^4 \xi \frac{(i\varepsilon_{ijk} u_j \bar{u}_k)^2}{(1 + |u|^2)^4} \right) \\ &= \int d^3x \left(\xi_i \mp \frac{2i \sin^2 \xi}{(1 + |u|^2)^2} \varepsilon_{ijk} u_j \bar{u}_k \right)^2 \underbrace{\pm 4 \int d^3x \frac{i \sin^2 \xi}{(1 + |u|^2)^2} \varepsilon_{ijk} \xi_i u_j \bar{u}_k}_{= 4\pi^2|B|}. \end{aligned}$$

Da última expressão concluímos que $E^{(2)} \geq 4\pi^2|B|$. O limite Bogomolnyi é saturado pela configuração que satisfaz as equações da primeira ordem

$$\xi_i \mp \frac{2i \sin^2 \xi}{(1 + |u|^2)^2} \varepsilon_{ijk} u_j \bar{u}_k = 0.$$

2.2.2.3 O modelo reduzido

Na seqüência vamos mostrar que, se incluirmos a dependência temporal no *ansatz* do primeiro submodelo BPS, isto é,

$$\begin{aligned}\xi &= \xi(r, t) \\ u &= u(\theta, \phi),\end{aligned}\tag{2.27}$$

ocorre que, como veremos, ele segue compatível com as equações de campo do primeiro submodelo, e os mapas racionais seguem sendo solução de u . Obviamente, as equações do setor estático (2.24) não serão mais válidas uma vez que campo ξ passa a depender do tempo.

O *ansatz* (2.27) mantém satisfeitos os vínculos $\xi_\mu u^\mu \equiv 0$ e $\xi_\mu \bar{u}^\mu \equiv 0$ e, em consequência, os termos que misturam as derivadas dos campos ξ e u são nulos em $\mathcal{L}^{(1)}$. Isto leva à fatoração da Lagrangiana (2.21) no modelo CP^1 , que depende somente de $u(\theta, \phi)$, e em outra parte que depende somente de $\xi(t, r)$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{(1)} &= 4 \sin^2 \xi \frac{u_\mu \bar{u}^\mu}{(1 + |u|^2)^2} - 4 \sin^2 \xi \left(\xi_\mu \xi^\mu \frac{u_\nu \bar{u}^\nu}{(1 + |u|^2)^2} - \frac{\xi_\mu \bar{u}^\mu \xi_\nu u^\nu}{(1 + |u|^2)^2} \right) \\ &= \underbrace{\frac{4u_\mu \bar{u}^\mu}{(1 + |u|^2)^2}}_{\mathcal{L}_{CP^1}} \underbrace{\sin^2 \xi (1 - \xi_\nu \xi^\nu)}_{\mathcal{L}_\xi}.\end{aligned}$$

Note que o uso de coordenadas esféricas permite escrever \mathcal{L}_{CP^1} como um produto de r^{-2} e $\tilde{\mathcal{L}}_{CP^1}$ (ver resultado (2.26)) em que $\tilde{\mathcal{L}}_{CP^1}$ depende apenas dos ângulos θ e ϕ .

O *ansatz* (2.27) é compatível com as *equações de movimento completas* e isto pode ser visto da seguinte maneira. As equações completas são derivadas com o requerimento de que a ação seja estacionária nas trajetórias físicas. A variação da ação $S^{(1)}[\xi, u, \bar{u}] = \int_\Sigma d^4x \mathcal{L}^{(1)}$ com relação ao campo ξ resulta em

$$\begin{aligned}\delta_\xi S^{(1)} &= \int_\Sigma d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}^{(1)}}{\partial \xi} \delta \xi + \frac{\partial \mathcal{L}^{(1)}}{\partial \xi_\mu} \partial_\mu \delta \xi \right] \\ &= \int_\Sigma d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}^{(1)}}{\partial \xi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}^{(1)}}{\partial \xi_\mu} \right) \right] \delta \xi + \oint_{\partial \Sigma} d^3 S_\mu \frac{\partial \mathcal{L}^{(1)}}{\partial \xi_\mu} \delta \xi,\end{aligned}$$

onde utilizamos o fato de que a variação do campo ξ é nula (por definição) na borda da região Σ . Requerindo que $\delta_\xi S^{(1)} = 0$, temos a equação ¹⁰

$$\frac{\partial \mathcal{L}^{(1)}}{\partial \xi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}^{(1)}}{\partial \xi_\mu} \right) = 0.\tag{2.28}$$

¹⁰Em coordenadas Cartesianas.

De forma similar, variando a ação com relação ao campo u (cuja variação também é, por definição, nula na borda da região Σ) temos

$$\begin{aligned}\delta_u S^{(1)} &= \int_{\Sigma} d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}^{(1)}}{\partial u} - \partial_{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}^{(1)}}{\partial u_{\mu}} \right) \right] \delta u + \oint_{\partial \Sigma} d^3 S_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}^{(1)}}{\partial u_{\mu}} \delta u \\ &= \int_{\Sigma} d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}^{(1)}}{\partial \bar{u}} - \partial_{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}^{(1)}}{\partial \bar{u}_{\mu}} \right) \right] \delta \bar{u} + \oint_{\partial \Sigma} d^3 S_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}^{(1)}}{\partial \bar{u}_{\mu}} \delta \bar{u}.\end{aligned}$$

As equações de movimento para u tem a forma

$$\frac{\partial \mathcal{L}^{(1)}}{\partial u} - \partial_{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}^{(1)}}{\partial u_{\mu}} \right) = 0, \quad (2.29)$$

e similarmente para \bar{u} . Agora vamos inserir

$$\mathcal{L}^{(1)} = \mathcal{L}_{\xi} \frac{\tilde{\mathcal{L}}_{CP^1}}{r^2}$$

nas equações (2.28) e (2.29). A segunda destas equações (2.29) toma a forma

$$\mathcal{L}_{\xi} \left[\frac{\partial \mathcal{L}_{CP^1}}{\partial u} - \partial_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}_{CP^1}}{\partial u_{\mu}} \right] - (\partial_{\mu} \mathcal{L}_{\xi}) \frac{\partial \mathcal{L}_{CP^1}}{\partial u_{\mu}} = 0.$$

Escrevendo o último termo em coordenadas esféricas e considerando que $\partial \mathcal{L}_{CP^1}$ depende apenas de u_{θ} e u_{ϕ} e \mathcal{L}_{ξ} é função de t e r temos

$$(\partial_{\mu} \mathcal{L}_{\xi}) \frac{\partial \mathcal{L}_{CP^1}}{\partial u_{\mu}} = (\partial_{\theta} \mathcal{L}_{\xi}) \frac{\partial \mathcal{L}_{CP^1}}{\partial u_{\theta}} + (\partial_{\phi} \mathcal{L}_{\xi}) \frac{\partial \mathcal{L}_{CP^1}}{\partial u_{\phi}} = 0.$$

Isto mostra que a equação de segunda ordem (2.29) reduz-se à equação do modelo CP^1

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{CP^1}}{\partial u} - \partial_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}_{CP^1}}{\partial u_{\mu}} = 0 \quad (2.30)$$

e portanto o ansatz é compatível com a equação completa para o campo u . De maneira similar podemos ver que a equação (2.28) toma a forma

$$r^{-2} \tilde{\mathcal{L}}_{CP^1} \left[\frac{\partial \mathcal{L}_{\xi}}{\partial \xi} - r^2 \partial_{\mu} \left(r^{-2} \frac{\partial \mathcal{L}_{\xi}}{\partial \xi_{\mu}} \right) \right] + r^{-2} \partial_{\mu} \tilde{\mathcal{L}}_{CP^1} \frac{\partial \mathcal{L}_{\xi}}{\partial \xi_{\mu}} = 0.$$

Escrevendo o último termo em coordenadas esféricas temos

$$\partial_{\mu} \tilde{\mathcal{L}}_{CP^1} \frac{\partial \mathcal{L}_{\xi}}{\partial \xi_{\mu}} = \partial_t \tilde{\mathcal{L}}_{CP^1} \frac{\partial \mathcal{L}_{\xi}}{\partial \xi_t} + \partial_r \tilde{\mathcal{L}}_{CP^1} \frac{\partial \mathcal{L}_{\xi}}{\partial \xi_r} = 0$$

pelo fato que $\tilde{\mathcal{L}}_{CP^1}$ depende apenas de θ e ϕ . Daí a equação (2.28) toma a forma

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\xi}}{\partial \xi} - \partial_{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{\xi}}{\partial \xi_{\mu}} \right) + \frac{2}{r} \frac{\partial \mathcal{L}_{\xi}}{\partial \xi_r} = 0, \quad (2.31)$$

onde o termo $\partial_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}_{\xi}}{\partial \xi_{\mu}}$ (em coordenadas Cartesianas) reescrito em coordenadas esféricas tem a forma

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\mu} \left(\sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}_{\xi}}{\partial \xi_{\mu}} \right) = \partial_t \frac{\partial \mathcal{L}_{\xi}}{\partial \xi_t} + \partial_r \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{\xi}}{\partial \xi_r} \right) + \frac{2}{r} \frac{\partial \mathcal{L}_{\xi}}{\partial \xi_r}.$$

A equação (2.31) simplifica-se na equação

$$\frac{\partial \mathcal{L}_\xi}{\partial \xi} - \partial_r \left(\frac{\partial \mathcal{L}_\xi}{\partial \xi_r} \right) - \partial_t \frac{\partial \mathcal{L}_\xi}{\partial \xi_t} = 0. \quad (2.32)$$

O termo com derivada temporal aparece em (2.32) como consequência de generalização $\xi(r)$ para $\xi(t, r)$. Os termos restantes correspondem com a equação radial da segunda ordem idêntica com a equação implicada por equações de BPS no setor estático. Daí concluímos que a generalização de ansatz é compatível com a equação de movimento para ξ . Notamos também que o cancelamento de termos $\frac{2}{r} \frac{\partial \mathcal{L}_\xi}{\partial \xi_r}$ reduz o Laplaciano radial tridimensional $\partial_r^2 + \frac{2}{r} \partial_r$ ao Laplaciano unidimensional ∂_r^2 .

Visto que o *ansatz* satisfaz as equações de campo, podemos inseri-lo diretamente na densidade Lagrangiana e encontrar a teoria reduzida que nos interessa ao presente trabalho. Assim, com a parte CP^1 saturando o limite de Bogomolnyi

$$\begin{aligned} L &= \int d^3x \mathcal{L}_S = \int d^3x \mathcal{L}^{(1)} \\ &= \underbrace{\int_{\mathbb{S}_2} d\Omega \mathcal{L}_{CP^1}}_{=-2E_u} \int_0^\infty dr \mathcal{L}_\xi \\ &= -8\pi|B| \int_0^\infty dr \sin^2 \xi (1 - \xi_\mu \xi^\mu), \end{aligned} \quad (2.33)$$

com $\mu = 0, 1$ e $x^0 = t$, $x^1 = r$.

Temos então uma Lagrangiana reduzida que, efetivamente, descreve um modelo 1 + 1-dimensional não-linear. Introduzindo uma nova variável de campo

$$\bar{\eta} = 1 - \cos \xi \quad (2.34)$$

chegamos no modelo de campo escalar em (1 + 1)-dimensões, com um certo potencial e que possui um comportamento análogo ao do modelo apresentado na seção (2.1.1). Assim, a Lagrangiana do sistema na variável $\bar{\eta}$ toma a forma

$$L = 16\pi B \int_0^\infty dr \left[\frac{1}{2} \bar{\eta}_\mu^2 - \underbrace{\bar{\eta} + \frac{1}{2} \bar{\eta}^2}_{-V(\bar{\eta})} \right]. \quad (2.35)$$

Aqui atentamos ao fato de que a coordenada $\bar{\eta}$ é limitada ao intervalo $0 \leq \bar{\eta} \leq 2$, embora ξ não seja limitado. Ocorre que a relação em (2.34) não é uma bijeção, o que faz com que a Lagrangiana (2.35) não seja uma descrição completa da dinâmica de $\bar{\eta}$. Como podemos ver na Fig. (5), o potencial $V(\bar{\eta})$ possui um ponto de equilíbrio instável em $\bar{\eta} = 1$ e, portanto, o campo irá minimizar sua energia afastando-se dele. Ocorre, ao mesmo tempo, que $\bar{\eta} = 0, 2$ são os limites do campo e, para uma solução estática em algum destes valores, o campo deve estar em um mínimo. Temos que, efetivamente, o potencial é limitado em $\bar{\eta} = 0, 2$,

reproduzindo o efeito de barreiras de infinitas, como em um poço potencial. Efetivamente,

$$V(\bar{\eta}) = \begin{cases} \infty & \text{para } \bar{\eta} < 0, \\ \bar{\eta} - \frac{1}{2}\bar{\eta}^2 & \text{para } 0 \leq \bar{\eta} \leq 2, \\ \infty & \text{para } \bar{\eta} > 2. \end{cases} \quad (2.36)$$

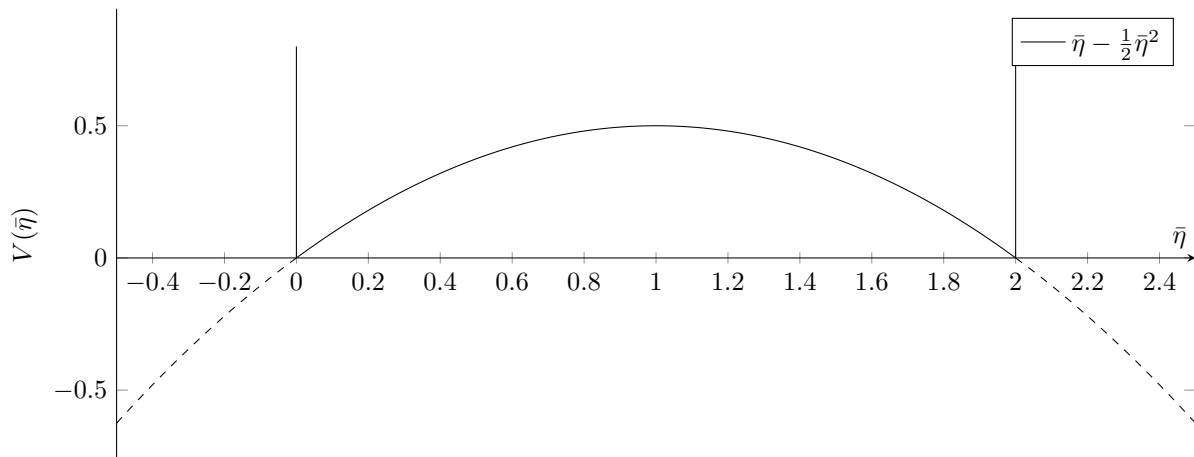


Figura 5 – Potencial efetivo $V(\bar{\eta})$. As linhas tracejadas representam o que seria a continuidade de $V(\bar{\eta})$, enquanto a linha contínua é o potencial efetivo.

Cabe lembrar que as soluções desse modelo descrevem objetos que existem em $(3 + 1)$ -dimensões, com sua parte angular definida pelo devido mapa racional. Ainda, o modelo reduzido (2.33) é uma teoria em uma linha semi-infinita, já que $r \in \mathbb{R}_+$. No nosso trabalho estendemos a coordenada radial para $x \in \mathbb{R}$ sem perda de generalidade, exceto por algumas propriedades que só existem em \mathbb{R}_+ .

A dependência temporal permite construir soluções do primeiro modelo que não são topológicas. O campo ξ que representa soluções deste tipo cobre apenas parcialmente o intervalo $[0, \pi]$. De acordo com [27], no limite de pequenas amplitudes o modelo radial torna-se equivalente ao modelo de *signum*-Gordon em 1+1 dimensões e, portanto, soluções exatas chamadas *oscillons* aparecem como soluções não-topológicas dele.

Todas as soluções do modelo reduzido que serão apresentadas, tanto *oscillons* quanto as topológicas, são soluções do primeiro submodelo BPS mas *não* do modelo de Skyrme completo, que contém também o segundo submodelo BPS. No entanto, como o mapa racional – que desempenha papel central nas soluções que desenvolvemos aqui – é uma boa descrição das soluções de solitons do modelo completo de Skyrme [26, 27], entende-se que soluções com dependência temporal tenham um papel importante no entendimento do modelo completo. No caso, soluções compactas com mapa racional em sua dependência angular.

Finalmente, o modelo apresentado nesta seção é formalmente idêntico ao modelo apresentado na seção (2.1.1). Em particular, naquele modelo quando $\varphi_0 \ll 1$, podemos usar na região entre os mínimos a aproximação $V(\varphi) \simeq 1 - \varphi^2$. De toda forma, o campo $\bar{\eta}$ tem condição de reflexão semelhante à condição (2.14).

2.3 TRANSFORMAÇÃO “FOLDING”

Os modelos descritos nas seções (2.1) e (2.2) possuem uma característica em comum: a presença de um potencial contendo barreiras infinitas. Estas barreiras são representadas pela condição de reflexão rígida, o que gera uma certa inconveniência matemática. Nesta seção veremos que, através de uma transformação *unfolding*, essa condição de reflexão rígida pode ser removida mapeando-se a evolução do campo original, cujos valores são restritos à um intervalo, à evolução do campo auxiliar que não possui tal restrição, [17, 24]. Aqui em particular vamos tratar do caso $V(\bar{\eta})$.

Definimos um novo campo escalar η definido em todo \mathbb{R} e extendemos periodicamente o potencial (2.36), que passa a ser função $V = V(\eta)$.¹¹ A transformação¹² que relaciona campo original e auxiliar é dada por

$$\bar{\eta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\eta - 4n| H_n(\eta), \quad (2.37)$$

em que H_n é uma função degrau duplo definida como a combinação de duas funções degrau de Heaviside

$$H_n(\eta) := \theta(\eta - 4n + 2) - \theta(\eta - 4n - 2).$$

A definição desta função é tal que $H_n(\eta) = 1$ para $\eta \in (2n - 2, 2n + 2)$ e $H_n(\eta) = 0$ fora deste intervalo. A transformação (2.37) tem a forma da Fig. (6).

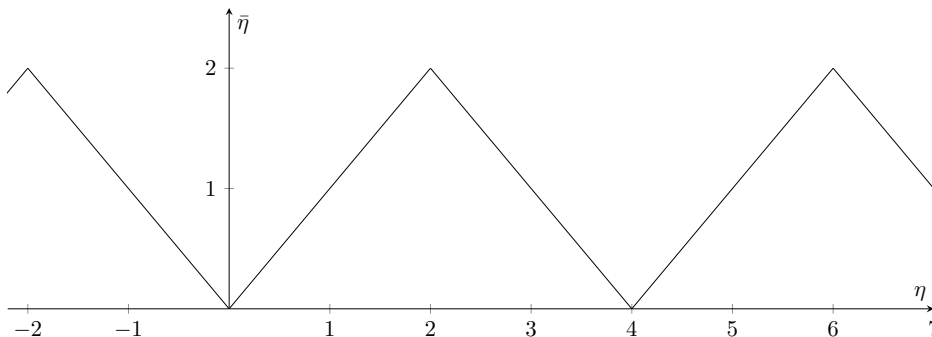


Figura 6 – Transformação *folding* $\mathbb{R} \ni \eta \mapsto \bar{\eta} \in [0, 2]$.

¹¹As barreiras infinitas desaparecem nesta construção.

¹²A transformação (2.37) representa transformação *folding*.

O potencial periódico pode ser definido como uma função de η , isto é, por

$$V(\eta) := \bar{\eta} - \frac{1}{2}\bar{\eta}^2$$

em que $\bar{\eta}$ é dado pela transformação (2.37). Equivalentemente, o potencial periódico pode ser introduzido pela formula

$$V(\eta) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(|\eta - 4n| - \frac{1}{2}(\eta - 4n)^2 \right) H_n(\eta). \quad (2.38)$$

O potencial $V(\eta)$ está mostrado na Fig. ((7)).

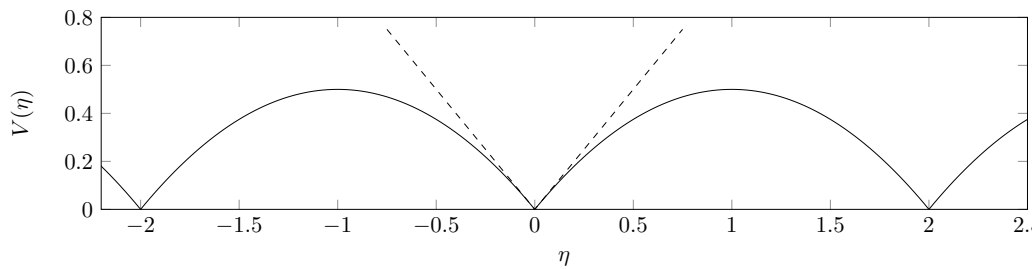


Figura 7 – Extensão periódica do potencial (2.36). Para $|\eta| \ll 1$ o potencial comporta-se como $V(\eta) \simeq |\eta|$.

A transformação unfolding remove barreiras infinitas e gera o potencial em forma de V , isto é, com mínimo não-diferenciável em suas vizinhanças.

3 OSCILLONS

Nesta seção apresentaremos soluções analíticas para campos escalares (1+1)-dimensionais com potencial tipo V. Esse é o caso dos potenciais apresentados nas seções (2.1) e (2.2), quando estudados próximos dos seus mínimos. A principal característica que torna este modelo interessante do ponto de vista matemático é o fato de sua derivada não ser bem definida¹ em torno do seu mínimo e, em especial, não se anular nessa região. Como veremos a seguir, esse fato motiva a busca de soluções com suporte compacto do tipo *oscillons* (soluções oscilatórias periódicas no tempo).

A densidade Lagrangiana que descreve o modelo tem forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_t\varphi)^2 - \frac{1}{2}(\partial_x\varphi)^2 - |\varphi|, \quad (3.1)$$

levando a equação de movimento

$$\partial_t^2\varphi = \partial_x^2\varphi - \text{sign}(\varphi), \quad (3.2)$$

onde a função *sign* tem os valores ± 1 quando $\varphi \neq 0$ e 0 quando $\varphi = 0$.

A principal característica deste modelo é que o termo não-linear $\text{sign}(\varphi)$ possui valor finito para valores arbitrariamente pequenos de $|\varphi|$ (contanto que $\varphi \neq 0$). Este fato influencia fortemente a dinâmica de campos fracos do modelo. Se considerarmos outros modelos não-lineares mas diferenciáveis nos mínimos, termos do potencial desaparecem para valores pequenos do campo. Por exemplo, o termo $-\varphi^3$ na equação de Klein-Gordon não-linear como veremos abaixo.

Comparemos a diferença no comportamento de *signum*- vs Klein-Gordon para a condição inicial dada pelo pacote de ondas Gaussiano $\varphi(t=0, x) = \exp(-x^2)$. Assumimos, por simplicidade, que $\partial_t\varphi(t=0, x) = 0$. A aceleração do campo $\partial_t^2\varphi(t=0, x)$ é dada diretamente pela equação de movimento. No caso da não-linearidade de Klein-Gordon $-\varphi^3$, para valores grandes de $|x|$ a principal contribuição para a aceleração vem do termo $\partial_x^2\varphi$ e é positiva. Portanto, o valor do campo deve crescer em regiões afastadas da origem (ao contrário de próximo dela) e o pacote de onda irá se espalhar. No caso da equação de s-G, o termo $-\text{sign}\varphi$ é dominante e negativo, fazendo com que, pelo menos por algum tempo, o pacote de ondas encolha.

Heuristicamente, ambas as “forças” $-\varphi^3$ e $-\text{sign}(\varphi)$ puxam o campo para o seu valor de equilíbrio $\varphi = 0$, mas a função *sign* é muito mais eficaz nesse sentido. Esta consideração heurística motiva a construção de soluções analíticas para a equação de s-G que não se espalham e nem colapsam, pelo menos durante algum intervalo de tempo.

¹Derivadas laterais no mínimo tem valores diferentes.

Na seção (3.1) derivamos essas soluções e, então, apresentamos uma generalização delas. Na seção (3.3) mostramos resultados numéricos sobre a estabilidade dessas soluções, nos quais elas são perturbadas e seu comportamento no tempo é analisado. Na seção (3.4) mostramos como, no submodelo reduzido de Skyrme, perturbações suficientemente fortes dos *oscillons* levam à criação de pares *kink-antikink* e estados metaestáveis.

Os resultados apresentados neste capítulo foram publicados em [24].

3.1 OSCILLON NO MODELO SIGNUM-GORDON

A construção do *oscillon* exato apresentada nesta seção baseia-se na Ref. [19]. Começamos especificando condições iniciais simples em $t = 0$. Temos interesse em uma solução com suporte compacto, de forma que ela se mantenha por algum tempo confinada à uma região finita. Assim, consideramos a seguinte configuração inicial

$$\begin{aligned} \varphi(0, x) &= 0, \\ \partial_t \varphi(t, x)|_{t=0} &= \begin{cases} 0 & \text{para } x \leq 0 \text{ ou } x \geq 1 \\ v(x) & \text{para } 0 < x < 1 \end{cases}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

nos quais assumimos que $v(x)$ possui toda o mesmo sinal, que escolhemos como negativo. A forma do perfil inicial da derivada temporal do campo $v(x)$ será determinada posteriormente.

Requerendo que a solução permaneça confinada ao suporte compacto $x \in [0, 1]$, impomos as condições de contorno

$$\varphi(x = 0, t) = 0, \quad (3.4)$$

$$\varphi(x = 1, t) = 0. \quad (3.5)$$

Essas condições devem ser vistas como uma espécie de *ansatz*, isto é, a escolha da classe da soluções e não como as condições de contorno usuais² que determinam a dinâmica de todas as soluções independente das condições iniciais.

A equação de signum-Gordon é uma equação hiperbólica em 1+1 dimensões e, portanto, as relações causais entre eventos são as mesmas que em qualquer problema de d'Alembert em uma dimensão espacial. O fato de que o perfil inicial da derivada temporal é restrito à um suporte compacto entre $x = 0$ e $x = 1$ implica que a solução dentro do cone de luz do passado do evento $(t, x) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ não possui nenhuma relação causal com os dados iniciais fora deste suporte compacto. Isto sugere dividir a solução em três soluções parciais φ_1 , φ_2 e φ_3 . Estas soluções são válidas no intervalo de tempo $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$. As soluções parciais satisfazem a equação com $\text{sgn}(\varphi_i) = -1$, já que escolhemos $\partial_t \varphi|_{t=0} < 0$.

²Condições de Dirichlet, de Neumann etc.

Assim,

$$\partial_t^2 \varphi_i - \partial_x^2 \varphi_i = 1,$$

em que $i = 1, 2, 3$, nas três regiões e de forma que a solução seja contínua pelo menos com classe \mathcal{C}^2 . A solução compacta neste intervalo de tempo é dada por

$$\varphi^{(-)}(t, x) = \begin{cases} \varphi_1(t, x) & \text{se } 0 \leq x \leq t \\ \varphi_2(t, x) & \text{se } t < x \leq 1 - t \\ \varphi_3(t, x) & \text{se } 1 - t < x \leq 1 \end{cases}$$

onde “(-)” refere-se ao sinal da solução $\varphi^{(-)}(t, x) < 0$.

Soluções parciais da equação (3.2) com sinal negativo possuem a seguinte forma geral

$$\varphi_i(t, x) = h_i(x - t) + g_i(x + t) + \frac{t^2}{2}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.6)$$

Impondo as condições iniciais (3.3), condições de contorno (3.4), (3.5) e continuidade da solução chegamos nas fórmulas

$$\varphi_1(t, x) = -\frac{1}{2}x^2 + xt + \frac{1}{2} \int_{t-x}^{t+x} v(s) ds, \quad (3.7)$$

$$\varphi_2(t, x) = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} v(s) ds, \quad (3.8)$$

$$\varphi_3(t, x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} - xt + x + t + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{2-x-t} v(s) ds. \quad (3.9)$$

Abaixo vamos justificar cada uma destas fórmulas.

Começamos com a região central descrita por φ_2 . Impondo a condição inicial (3.4) na solução (3.6) com $i = 2$ chegamos em $h_2(z) = -g_2(z)$. A solução $\varphi_2(t, x)$ toma a seguinte forma

$$\varphi_2(t, x) = h_2(x - t) - h_2(x + t) + \frac{1}{2}t^2.$$

Substituindo essa fórmula na condição inicial (3.3) e integrando o resultado chegamos na expressão para $h_2(z)$

$$h_2(z) = -\frac{1}{2} \int_0^z v(s) ds.$$

Substituindo $h_2(z)$ na fórmula acima chegamos na expressão (3.8).

Com o objetivo de determinar as soluções parciais φ_1 e φ_3 , empregamos as condições de contorno (3.4), (3.5) e a condição de continuidade nas linhas dos cones de luz. A condição (3.4) implica em uma relação entre $h_1(z)$ e $g_1(z)$

$$g_1(z) = h_1(-z) - \frac{1}{2}z^2.$$

Daí, a solução parcial φ_1 toma a seguinte forma

$$\varphi_1(t, x) = h_1(x - t) - h_1(-x - t) - \frac{1}{2}x^2 - xt.$$

Da continuidade da solução temos que $\varphi_1(t, t) = \varphi_2(t, t)$. Isto permite obter $h_1(z)$, a menos de uma constante $h_1(0)$

$$h_1(z) = h_1(0) - \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{2} \int_0^{-z} v(s)ds.$$

Inserindo este resultado na fórmula para $\varphi_1(t, x)$ chegamos na expressão (3.7).

De maneira similar, podemos ver que a condição (3.5) implica na seguinte relação entre $h_3(z)$ e $g_3(z)$

$$g_3(z) = -h_3(2 - z) - \frac{1}{2}z^2 + z - \frac{1}{2}$$

e, portanto,

$$\varphi_3(t, x) = h_3(x - t) - h_3(2 - x - t) - \frac{1}{2}x^2 - xt + x + t - \frac{1}{2}.$$

A função $h_3(z)$ pode ser determinada da condição $\varphi_3(t, x = 1 - t) = \varphi_2(t, x = 1 - t)$, resultando em

$$h_3(z) = h_3(1) + \frac{1}{2} \int_z^1 v(s)ds.$$

Substituindo este resultado na fórmula acima chegamos na expressão (3.9).

Na sequência, vamos estender a solução $\varphi^{(-)}(t, x)$ à região $x \in \mathbb{R}$, determinando a forma de $v(x)$ que garante o confinamento da solução para tempos arbitrários $t > 0$ a uma região compacta. Inicialmente, requeremos que, pelo menos por algum tempo, a solução φ seja nula fora da região $0 \leq x \leq 1$. Este requerimento pode ser satisfeito se não houver descontinuidades da derivada parcial na solução $\partial_x \varphi$. No caso de presença de tais descontinuidades, ocorre que elas se propagariam em todas as direções com “velocidade da luz”, de acordo com o comportamento de soluções das equações parciais hiperbólicas. Para evitar a propagação de descontinuidades, exigimos que

$$\begin{aligned} \partial_x \varphi_1(t, x = 0) &= 0, \\ \partial_x \varphi_3(t, x = 1) &= 0. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Igualando a zero a derivada

$$\begin{aligned} \partial_x \varphi_1 &= -x + t + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \int_{t-x}^{t+x} v(s)ds \\ &= -x + t + \frac{1}{2} [v(t+x) + v(t-x)] \end{aligned}$$

em $x = 0$ chegamos na solução $v(z) = -z$, válida em $0 \leq z < \frac{1}{2}$. Similarmente, igualando a zero a expressão

$$\partial_x \varphi_3 = -x - t - \frac{1}{2} [v(2 - x - t) - v(x - t)],$$

em $x = 1$ encontramos $v(z) = z - 1$, válida em $\frac{1}{2} < z \leq 1$.

Concluimos que a função que descreve derivada temporal do campo no tempo inicial $t = 0$ é dada pela expressão

$$v(z) = \begin{cases} -z & \text{para } z \in [0, \frac{1}{2}) \\ z - 1 & \text{para } z \in [\frac{1}{2}, 1] \\ 0 & \text{para } z \notin [0, 1] \end{cases} . \quad (3.11)$$

Com o integrando $v(z)$ determinado, podemos agora calcular as integrais em (3.7), (3.8) e (3.9). Esta etapa requer um certo cuidado com os limites da integração. Na Fig.(8) mostramos a estrutura dos cones de luz do futuro dos eventos $(t, x) = (0, 0)$, $(t, x) = (0, \frac{1}{2})$ e $(t, x) = (0, 1)$ (linhas tracejadas). Em particular, a intersecção das linhas dos cones de luz em $(t, x) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ e $(t, x) = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ sugere dividir a construção das soluções em duas etapas: $0 < t \leq \frac{1}{4}$ e $\frac{1}{4} < t \leq \frac{1}{2}$. As regiões triangulares no diagrama contém diferentes³ soluções parciais. Estas regiões foram denotadas por A – J .

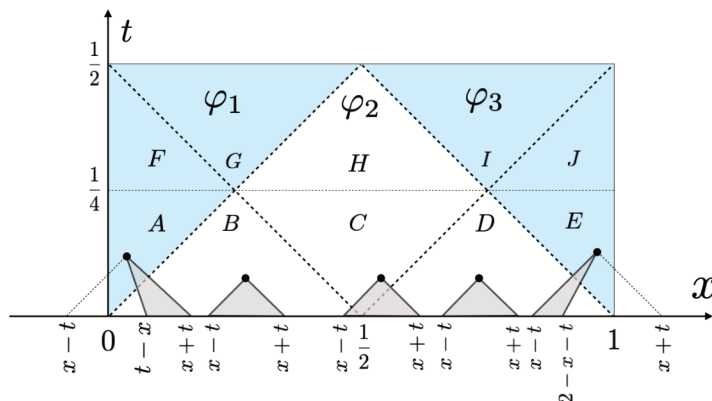


Figura 8 – Regiões de integração no etapa $0 < t \leq \frac{1}{4}$.

No intervalo de tempo $0 < t \leq \frac{1}{4}$ temos soluções nas regiões A – E . A solução φ_1 em A é dada pela fórmula (3.7) com $v(z) = -z$. Note que, ao contrario do limite superior da integração $s_{sup} = x + t$, o limite inferior não é simplesmente $x - t$ mas o negativo deste valor⁴, isto é, $s_{inf} = t - x$. Isto significa que a integral de $v(z)$ é calculada numa região que se encontra integralmente dentro do intervalo $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, e não na região abrangida pelo seu cone de luz como seria de se esperar. Este efeito é uma decorrência do fato de que a região A encontra-se no interior da região de influência de parte do segmento $x < 0$. A integral de $v(z) = -z$ nesta região é dada pela expressão

$$\int_{t-x}^{t+x} v(s) ds = \int_{t-x}^{t+x} (-s) ds = -2tx. \quad (3.12)$$

De maneira análoga, encontramos a solução parcial em E . Desta vez precisamos integrar a expressão $v(z) = z - 1$ entre o limite inferior $s_{inf} = x - t$ e o limite superior $s_{sup} = 2 - x - t$.⁵

³Embora em alguns casos as duas soluções sejam dadas pela mesma expressão.

⁴Ponto simétrico de $x - t$ com relação a $x = 0$.

⁵O limite superior pode ser representado por um ponto no eixo x simétrico com relação a $x = 1$ ao ponto $x + t$ (coordenada de intersecção do eixo x com uma das linhas de cone de luz do evento (t, x)).

O resultado desta integração é dado pela expressão

$$\int_{x-t}^{2-x-t} v(s)ds = \int_{x-t}^{2-x-t} (s-1)ds = 2t(x-1). \quad (3.13)$$

Soluções parciais nas regiões B , C , D são dadas pela expressão (3.8), o que requer o conhecimento da integral de $\int_{x-t}^{x+t} v(s)ds$. Nas regiões B e D a integral envolve apenas uma das funções $v(z) = -z$ e $v(z) = z-1$, enquanto na região C ambas funções contribuem com o resultado. As respectivas integrais são dadas pelas expressões

- região B : $x \in [t, \frac{1}{2} - t]$

$$\int_{x-t}^{x+t} v(s)ds = \int_{x-t}^{x+t} (-s)ds = -2tx, \quad (3.14)$$

- região C : $x \in (\frac{1}{2} - t, \frac{1}{2} + t)$

$$\int_{x-t}^{x+t} v(s)ds = \int_{x-t}^{1/2} (-s)ds + \int_{1/2}^{x+t} (s-1)ds = x^2 + t^2 - x - t + \frac{1}{4}, \quad (3.15)$$

- região D : $x \in [\frac{1}{2} + t, 1 - t]$

$$\int_{x-t}^{x+t} v(s)ds = \int_{x-t}^{x+t} (s-1)ds = 2t(x-1). \quad (3.16)$$

A construção das soluções nas regiões F – J , isto é, para intervalo de tempo $\frac{1}{4} < t \leq \frac{1}{2}$, é qualitativamente idêntica. Na Fig.(9) apresentamos os intervalos de integração referentes

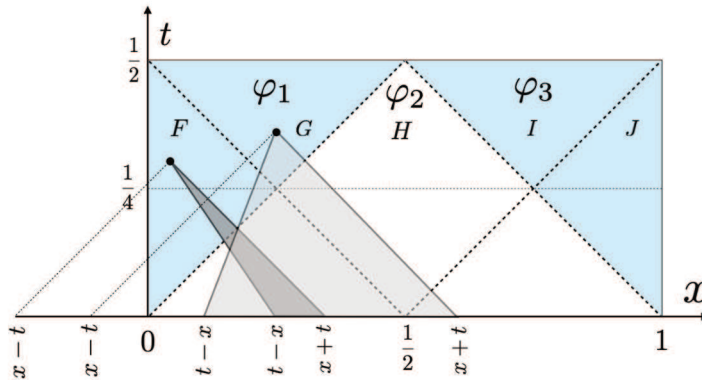


Figura 9 – Regiões de integração para a solução φ_1 no intervalo $\frac{1}{4} < t \leq \frac{1}{2}$.

a φ_1 nas regiões F e G . A integral para a solução parcial em F é exatamente a mesma que (3.12). Daí podemos concluir que a solução parcial em A e F é dada por uma única fórmula. No caso da solução φ_1 em G a integral envolve ambas expressões $v(z) = -z$ e $v(z) = z-1$ e resulta em

$$\int_{t-x}^{t+x} v(s)ds = \int_{t-x}^{1/2} (-s)ds + \int_{1/2}^{t+x} (s-1)ds = x^2 + t^2 - x - t + \frac{1}{4}. \quad (3.17)$$

Note que essa integral tem o mesmo valor que (3.15).

No caso da solução φ_2 em H , veja Fig. (10), temos qualitativamente o mesmo tipo de região de dependência que para a solução em C . Por esta razão, a integral corresponde com (3.15) e as soluções parciais em C e H serão dadas por uma única fórmula. Finalizamos

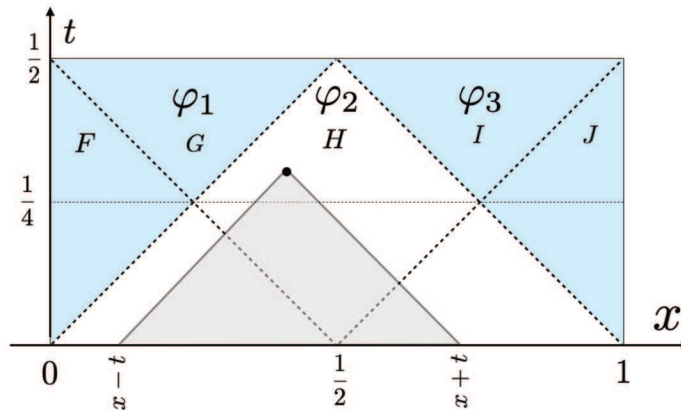


Figura 10 – Regiões de integração para a solução φ_2 no intervalo $\frac{1}{4} < t \leq \frac{1}{2}$.

com a construção da solução φ_3 nas regiões I e J . A Fig. (11) mostra os segmentos no eixo x que contribuem para as suas soluções parciais. A integral referente à solução em I

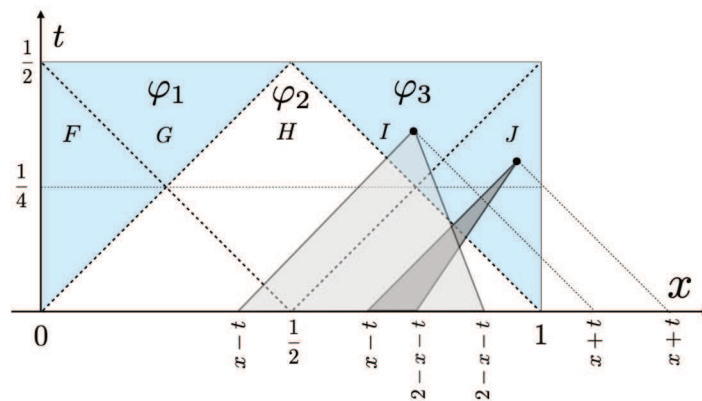


Figura 11 – Regiões de integração para a solução φ_3 no intervalo $\frac{1}{4} < t \leq \frac{1}{2}$.

tem a forma

$$\int_{x-t}^{2-x-t} v(s) ds = \int_{x-t}^{1/2} (-s) ds + \int_{1/2}^{2-x-t} (s-1) ds = x^2 + t^2 - x - t + \frac{1}{4}. \quad (3.18)$$

Isso permite concluir que as integrais dentro do cone de luz do futuro do evento $(t, x) = (0, \frac{1}{2})$ (regiões C, G, H, I) tomam todas o mesmo valor. A última das integrais, associada com a solução na região J é idêntica à integral (3.13). Consequentemente, as soluções parciais em E e J são dadas por uma única expressão.

Inserindo estes resultados nas fórmulas (3.7), (3.8) e (3.9) temos as seguintes soluções parciais para o intervalo de tempo $t \in [0, \frac{1}{4}]$

$$\begin{aligned}\varphi_1(t, x) &= -\frac{x^2}{2}, \\ \varphi_2(t, x) &= \begin{cases} \frac{t^2}{2} - tx & \text{se } x \in [t, \frac{1}{2} - t] \\ t^2 + \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - \frac{t}{2} + \frac{1}{8} & \text{se } x \in [\frac{1}{2} - t, \frac{1}{2} + t] \\ \frac{t^2}{2} + t(x - 1) & \text{se } x \in [\frac{1}{2} + t, 1 - t] \end{cases}, \\ \varphi_3(t, x) &= -\frac{(1-x)^2}{2}.\end{aligned}$$

Similarmente, para o intervalo $t \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ as soluções parciais tomam a forma

$$\begin{aligned}\varphi_1(t, x) &= \begin{cases} -\frac{x^2}{2} & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2} - t] \\ \frac{t^2}{2} + tx - \frac{x}{2} - \frac{t}{2} + \frac{1}{8} & \text{se } x \in [\frac{1}{2} - t, t] \end{cases}, \\ \varphi_2(t, x) &= t^2 + \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - \frac{t}{2} + \frac{1}{8}, \\ \varphi_3(t, x) &= \begin{cases} \frac{t^2}{2} - tx + \frac{x}{2} + \frac{t}{2} - \frac{3}{8} & \text{se } x \in [1 - t, \frac{1}{2} + t] \\ -\frac{(1-x)^2}{2} & \text{se } x \in [\frac{1}{2} + t, 1]. \end{cases}\end{aligned}$$

Resumindo, encontramos uma solução da equação s-G tal que $\varphi = 0$ fora do intervalo $[0, 1]$ no eixo x e, dentro do intervalo, é dada por $\varphi^{(-)}$ desde que $t \in [0, 1/2]$. Para encontrarmos φ para instantes de tempo maiores que $1/2$, tomamos $\varphi^{(-)}|_{t=1/2}$ como condição inicial da equação de s-G. O perfil de velocidade desta função em $t = \frac{1}{2}$ é dado por

$$\partial_t \varphi^{(-)}(t, x)|_{t=1/2} = \begin{cases} x & \text{para } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1 - x & \text{para } x \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases},$$

isto é, pela função $-v(x)$ em que $v(x)$ expressa-se pela fórmula (3.11). Pode-se ver também que o campo se anula em $t = \frac{1}{2}$

$$\varphi^{(-)}(t, x)|_{t=\frac{1}{2}} = 0.$$

Essa configuração é formalmente idêntica com a condição inicial em $t = 0$. A única diferença é o sinal da derivada temporal. Isto significa que os valores de $\varphi(t, x)$ para $t > 1/2$ podem ser obtidos à partir de simetrias da eq. s-G: a translação temporal $t \mapsto t - 1/2$ junto com uma mudança de sinal do campo $\varphi \mapsto -\varphi$. Chamamos esta solução de $\varphi^{(+)}$ e ela é dada por

$$\varphi^{(+)}(t, x) = -\varphi^{(-)}(t - 1/2, x), \quad (3.19)$$

sendo válida, claro, no intervalo $t \in [1/2, 1)$. No tempo $t = 1$ o campo e suas derivadas voltam para os valores iniciais (3.3). A solução completa está visualizada na Fig. (12).

Ainda, observarmos que a equação s-G é invariante por dilatações: se $\varphi(t, x)$ é solução da equação, então, com $l \in \mathbb{R}^+$, $l = \text{const}$, $\varphi_l(t, x) = l^2 \varphi(\frac{t}{l}, \frac{x}{l})$ também é solução.

Isto significa que temos uma família de oscillons com suporte compacto de tamanho arbitrário.

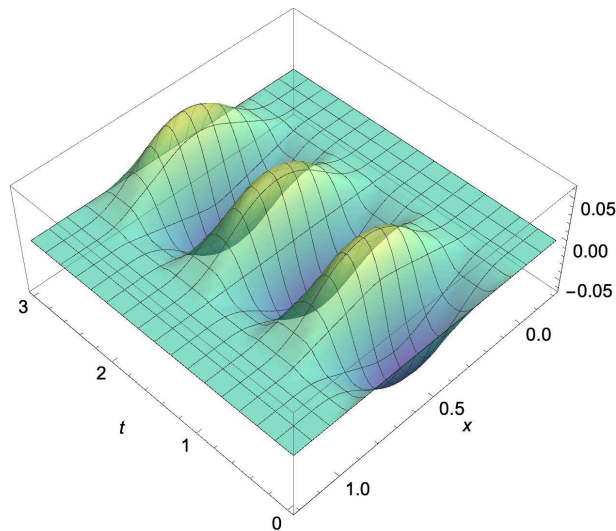


Figura 12 – Oscillon exato.

Explorando mais as simetrias da solução podemos ver que o oscillon exato é simétrico sob a reflexão espacial $x \rightarrow 1 - x$

$$\varphi(t, x) = \varphi(t, 1 - x). \quad (3.20)$$

Isto significa que as soluções nas regiões I , J , D e E podem ser calculadas à partir das soluções nas regiões A , B , F e G . Além disso a solução na região C é simétrica sob a transformação $x \rightarrow 1 - x$. Assim, temos apenas quatro fórmulas distintas para soluções parciais; todas as outras soluções parciais podem ser derivadas à partir destas quatro fórmulas usando transformações de translação e reflexão. Baseando-se nessa observação, vamos introduzir uma nova notação para as soluções parciais. As três regiões triangulares do lado *esquerdo* (left) do diagrama contém soluções denotadas por

$$\varphi_{L_1}(t, x) := \varphi_2(t, x)|_{(t,x) \in B} = \frac{t^2}{2} - tx, \quad (3.21)$$

$$\varphi_{L_2}(t, x) := \varphi_1(t, x)|_{(t,x) \in A+F} = -\frac{x^2}{2}, \quad (3.22)$$

$$\varphi_{L_3}(t, x) := \varphi_1(t, x)|_{(t,x) \in G} = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{2} \right) \left(t - \frac{1}{2} + 2x \right), \quad (3.23)$$

e a solução no *centro* é denotada por

$$\varphi_C(t, x) := \varphi_2(t, x)|_{C+H} = t^2 + \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - \frac{t}{2} + \frac{1}{8}.$$

As soluções no lado *direito* (right) do diagrama são dadas pela transformação

$$\varphi_{R_j}(t, x) := \varphi_{L_j}(t, 1 - x), \quad j = 1, 2, 3. \quad (3.24)$$

A construção da solução periódica pode ser realizada de maneira alternativa tomando-se por base estas sete soluções parciais e substituindo t nos argumentos delas por uma função periódica de tempo

$$\tau(t) := \frac{1}{\pi} \arcsin |\sin(\pi t)|. \quad (3.25)$$

Vamos precisar também trocar periodicamente o sinal das soluções parciais, o que requer outra função periódica

$$\sigma(t) := \text{sign}(\sin(2\pi t)). \quad (3.26)$$

As funções $\tau(t)$ e $\sigma(t)$ foram desenhadas na Fig. (13). Os domínios das soluções parciais

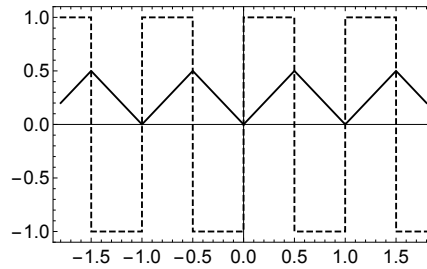


Figura 13 – Funções $\sigma(z)$ (linha sólida) e $\tau(z)$ (linha tracejada).

correspondem às regiões do diagrama espaço-temporal em que as seguintes funções são iguais a um

$$\begin{aligned} \Pi_C(t, x) &= \theta(x - t)\theta(-x - t + 1)\theta(x + t - \frac{1}{2})\theta(-x + t + \frac{1}{2}), \\ \Pi_{L_1}(t, x) &= \theta(x - t)\theta(-x - t + \frac{1}{2}), \\ \Pi_{L_2}(t, x) &= \theta(-x + t)\theta(-x - t + \frac{1}{2})\theta(x), \\ \Pi_{L_3}(t, x) &= \theta(x + t - \frac{1}{2})\theta(-x + t), \\ \Pi_{R_j}(t, x) &= \Pi_{L_j}(t, 1 - x), \quad j = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

em que $\theta(z)$ é a função degrau unitário

$$\theta(z) = \begin{cases} 0 & \text{para } z < 0 \\ 1 & \text{para } z \geq 0 \end{cases}.$$

Desse modo, garantimos que as soluções parciais

$$\phi_k(t, x) := \sigma(t)\varphi_k(\tau(t), x)\Pi_k(\tau(t), x), \quad k = C, L_1, L_2, \dots \quad (3.27)$$

sejam não-nulas apenas em seus respectivos domínios, independente do valor de tempo. As soluções parciais definidas desta maneira não se sobrepõem, mas se tocam e, portanto, a solução que representa o *oscillon* exato é dada pela soma simples delas

$$\phi(t, x) = \sum_k \phi_k(t, x). \quad (3.28)$$

No Fig. (14) apresentamos um diagrama de Minkowski que contém a superfície mundo do *oscillon* exato composto de regiões que são os domínios das soluções parciais.

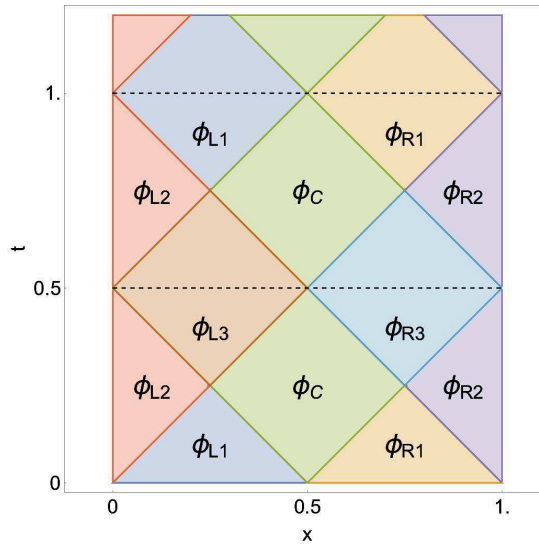


Figura 14 – Soluções parciais do oscillon exato.

3.2 OSCILLON GENERALIZADO

O *oscillon* apresentado na seção anterior é a solução periódica mais simples com energia finita da equação de s-G. Introduzimos agora uma generalização desse *oscillon* [20], que segue sendo uma solução periódica mas possui uma nova parametrização dada pelo parâmetro real e contínuo $v \in (-1, 1)$. Suas bordas se movem periodicamente da esquerda para a direita e vice-versa. O *oscillon* apresentado na seção anterior é um caso particular deste caso, com $v = 0$. Recentemente, ainda, foi apresentada uma solução [21] que engloba a anterior mas, de forma geral, possui bordas com movimento não-uniforme. Neste trabalho iremos focar no espalhamento do *oscillon* generalizado com $v = \text{cte}$ e, portanto, apresentaremos aqui apenas uma versão simples desta generalização. Vamos, agora, formalizar matematicamente uma descrição completa de um *oscillon* em seu referencial de movimento, válida para todo t, x , com $v = \text{cte}$.

Começamos a descrição deste *oscillon* apresentando um conjunto de soluções parciais que são válidas *apenas* para $t \in [0, 1/2]$. Existem sete de tais soluções neste intervalo, mas apenas quatro delas são essencialmente diferentes (as demais, dadas pelos $\varphi_{R_j}, j = 1, 2, 3$, são reflexões dessas em torno do ponto $x = 0,5$). Em analogia à seção

anterior, consideramos as soluções parciais

$$\begin{aligned}
\varphi_C(t, x; v) &= \frac{(1 + v - 2x)^2 - 4t(1 + v - 2vx) + 4(2 - v^2)t^2}{8(1 - v^2)}, \\
\varphi_{L_1}(t, x; v) &= \frac{t^2}{2} - \frac{tx}{1 + v}, \\
\varphi_{L_2}(t, x; v) &= -\frac{(x - vt)^2}{2(1 - v^2)}, \\
\varphi_{L_3}(t, x; v) &= \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{2} \right) \left(t + \frac{1}{2} + \frac{2x - 1}{1 - v} \right) \\
\varphi_{R_j}(t, x; v) &= \varphi_{L_j}(t, 1 - x; -v), \quad j = 1, 2, 3
\end{aligned} \tag{3.29}$$

onde, devido ao movimento da borda, a transformação da parte “left” para “right” requer duas transformações $x \rightarrow 1 - x$ e $v \rightarrow -v$. Na sequência, definimos as funções de domínio das soluções parciais

$$\begin{aligned}
\Pi_C(t, x; v) &= \theta(x - t)\theta(-x - t + 1)\theta(x + t - \frac{1+v}{2})\theta(-x + t + \frac{1+v}{2}), \\
\Pi_{L_1}(t, x; v) &= \theta(x - t)\theta(-x - t + \frac{1+v}{2}), \\
\Pi_{L_2}(t, x; v) &= \theta(-x + t)\theta(-x - t + \frac{1+v}{2})\theta(x - vt), \\
\Pi_{L_3}(t, x; v) &= \theta(x + t - \frac{1+v}{2})\theta(-x + t), \\
\Pi_{R_j}(t, x; v) &= \Pi_{L_j}(t, 1 - x; -v), \quad j = 1, 2, 3.
\end{aligned}$$

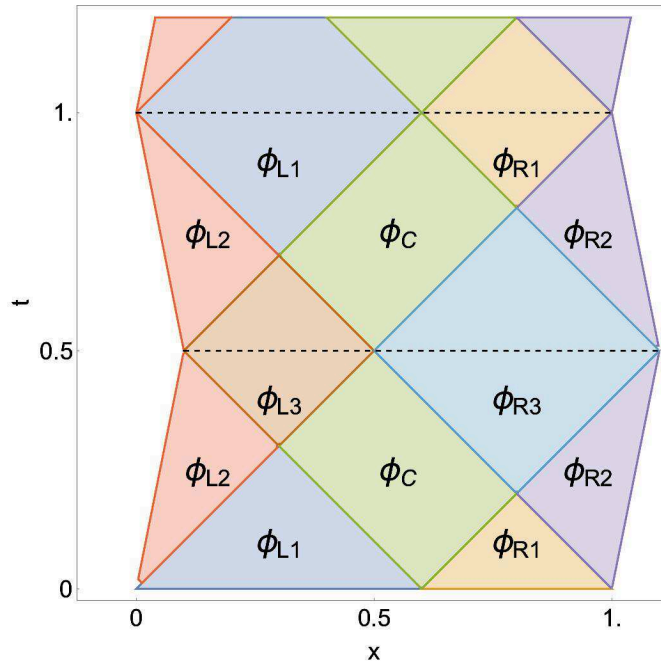
Munidos destas funções e das funções periódicas no tempo $\tau(t)$ e $\sigma(t)$ introduzidas em (3.25) e (3.26), podemos estender as soluções parciais para tempos arbitrários

$$\phi_k(t, x; v) = \sigma(t)\varphi_k(\tau(t), x; v)\Pi_k(\tau(t), x; v), \quad k = C, L_1, L_2, \dots$$

Os domínios destas soluções parciais foram apresentadas na Fig. (15). O parâmetro v influencia tanto na forma das soluções parciais como também nos domínios delas. Com o aumento de v , alguns destes domínios crescem enquanto outros diminuem.

Finalmente, a solução que corresponde ao *oscillon* generalizado é dada pela soma simples das soluções parciais

$$\phi(t, x; v) = \sum_k \phi_k(t, x; v). \tag{3.30}$$

Figura 15 – Superfície mundo do *oscillon* generalizado.

3.3 PERTURBAÇÃO DO *OSCILLON* ANALÍTICO

Um problema de grande importância no nosso estudo é a questão da estabilidade dos *oscillons*. Este problema pode ser abordado considerando-se a evolução de uma configuração de campo dada por um *oscillon* analítico perturbado. No cálculo de *estabilidade linear*, a configuração investigada contém a solução exata somada à uma função (em princípio arbitrária) $\phi(t, x) \rightarrow \phi(t, x) + \eta(t, x)$. Substituindo este resultado na equação de movimento e expandindo até o termo linear, encontra-se a equação linear para $\eta(t, x)$. A solução da equação para $\eta(t, x)$ fornece uma informação sobre a existência de modos crescentes e, portanto, sobre uma eventual instabilidade da solução. Este procedimento funciona muito bem para não-linearidades padrão (potências de ϕ , etc.). Infelizmente, no caso da não-linearidade tipo *signum*, encontramos dificuldades na expansão em torno do ponto onde a função *signum* muda de sinal. O problema encontrado é uma manifestação da ausência do regime linear do modelo de s-G. Uma solução alternativa para a análise de estabilidade linear seria a evolução numérica da configuração inicial com perturbação. Antes de entrar nos aspectos do cálculo numérico, gostaríamos de notar que no caso do modelo de s-G não se espera modos crescentes, já que a soma da solução e a perturbação com sinal fixo obedecem (num segmento) a equação de onda não-homogênea, e tal equação não possui modos crescentes.

O objetivo principal desta seção é apresentar os resultados numéricos da evolução de *oscillons* perturbados. Este estudo contém as seguintes simplificações:

- Perturbação do *oscillon simples*, isto é, *oscillon* sem a velocidade da borda.

- Consideração da forma *particular* da perturbação, dada pela modificação do perfil da derivada temporal do campo no tempo inicial

$$\phi(0, x) = 0, \quad \partial_t \phi(t, x)|_{t=0} = \varepsilon v(x) \quad (3.31)$$

em que $v(x)$ é dado por (3.11) e $\varepsilon > 0$ é um parâmetro livre.

A forma da perturbação escolhida aqui está relacionada com dados iniciais de soluções auto similares, [16]. Soluções deste tipo formam uma classe de soluções da equação de s-G dada pelo *ansatz*

$$\phi(t, x) = x^2 S(y), \quad \text{onde} \quad y := \frac{t}{x}.$$

A função $S(y)$ obedece à uma equação diferencial ordinária. As soluções auto-similares nos semieixos $y \geq 0$ e $y \leq 0$ não são relacionadas e podem ser escolhidas como independentes. Considerando as condições iniciais para $\phi(t, x)$, temos

$$\phi(0, x) = S(0)x^2, \quad \partial_t \phi(t, x)|_{t=0} = S'(0)x.$$

Deste modo, as constantes $S(0)$ e $S'(0)$ especificam condições iniciais dessas soluções. Como as soluções para $y \geq 0$ ($x \geq 0$) e $y \leq 0$ ($x \leq 0$) não são relacionadas podemos escolher condições iniciais para a solução auto-similar

$$\phi(0, x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 0 \\ S(0)x^2 & \text{para } x \geq 0 \end{cases}, \quad \partial_t \phi(t, x)|_{t=0} = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 0 \\ S'(0)x & \text{para } x \geq 0 \end{cases}.$$

Considerando $S(0) = 0$ temos uma sub-classe das soluções auto similares dada pelo perfil inicial da derivada temporal do campo. No nosso caso, o perfil inicial da derivada temporal consiste de dois fragmentos de retas com inclinação $S'(0) = \pm\varepsilon$. Note que a segunda reta passa pelo ponto $x = 1$. Cada uma destas condições é considerada apenas numa semi-reta em x , isto é, $x \leq \frac{1}{2}$ e $x \geq \frac{1}{2}$. Isso significa que as soluções auto-similares podem aparecer apenas em regiões limitadas em x e t . Os dados iniciais (3.31) não são auto-similares em todo eixo x e, portanto, eles não podem gerar uma solução auto-similar. Tal solução deveria ser independente da escala e, em consequência, deveria ter energia infinita. Os nossos dados iniciais, por sua vez, definem uma configuração inicial com energia finita.

Ao variar o parâmetro ε , variamos a inclinação da reta. De acordo com [16], existem vários tipos de soluções auto-similares, dependendo de valor da expressão $S'(0)$. Isto significa que, para um dado ε , deve aparecer uma par de soluções auto-duais. Estas soluções existem fora de cone de luz do futuro do evento $(t, x) = (0, \frac{1}{2})$. No interior deste cone, naturalmente, aparecerá uma nova solução. A forma dela pode ser calculada analiticamente apenas em casos muito especiais. Para situações genericas, a integração numérica da equação de s-G é indispensável.

Por causa da simetria espacial $x \rightarrow 1 - x$ dos dados iniciais, será suficiente considerar a solução no intervalo $-\infty < x \leq \frac{1}{2} - t$, à que chamamos “*left*” e denotamos por $\phi_L(t, x)$. Seja $x_L(t)$ o ponto de contato dos suportes da solução trivial $\phi = 0$ e da solução que representa o *oscillon* perturbado. No caso da perturbação definida acima, temos $x_L(t) = v_0 t$, em que v_0 é constante. O valor desta constante e a forma das soluções parciais não-triviais que compõem ϕ_L depende do valor de ε . Assim, como mencionado em [24], existem duas classes principais das soluções:

1. Caso $\varepsilon \geq \frac{1}{2}$.

A solução é dada por

$$\phi_L(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq v_0 t, \\ x^2 \left[-\frac{1}{2(1-v_0^2)} \left(1 - v_0 \frac{t}{x}\right)^2 \right] & \text{se } v_0 t \leq x \leq t, \\ x \left[\frac{t}{2} \left(\frac{t}{x} - 2\varepsilon\right) \right] & \text{se } t \leq x \leq \frac{1}{2} - t, \end{cases}$$

em que $v_0 = \frac{1}{\varepsilon} - 1$. Esta solução possui quatro subclasses.

- a) Para $\varepsilon > 1$, a velocidade da borda v_0 é negativa e tem limite em $v_0 = -1$ quando $\varepsilon \rightarrow \infty$. Ocorre então que, nos instantes iniciais, a borda esquerda $x_L(t) = v_0 t$ se move para a esquerda e a borda direita $x_R(t) = 1 - x_L(t)$ se move para a direita, ambas com a mesma velocidade $|v_0|$. Isso significa que inicialmente o suporte da solução expande. Na Fig.(16) apresentamos soluções numéricas da evolução do *oscillon* perturbado para este caso. A expansão é esperada já que no intervalo $x \in [0, 1]$ existe excesso da energia cinética com relação à energia do *oscillon* exato. Embora a solução não seja exata, ela parece relativamente estável por um tempo. Como pode ser visto nas figuras Fig.(16c) e Fig.(16d), a solução numérica fica confinada à uma região espacial, embora exista um pouco de radiação. Os intervalos de tempo mostrados nessas figuras foram escolhidos por corresponderem à intervalos em que nossas simulações se mostram estáveis. A estabilidade foi avaliada conforme explicado no Apêndice (A).
- b) Para $\varepsilon = 1$, a velocidade v_0 é nula. Este é o caso do *oscillon* exato, que existe indefinidamente e não emite radiação. Esta solução foi utilizada para avaliar a estabilidade das simulações com o esperado analítico. De forma geral, para tempos longos ($t \sim 50$ oscilações), a forma dos *oscillons* permanece essencialmente a mesma, mantendo sua estrutura compacta e, eventualmente, gerando radiação.
- c) Para $\frac{1}{2} < \varepsilon < 1$ a velocidade v_0 é positiva e menor que 1. Os pontos $x_L(t)$ e $x_R(t)$ se movem em direção ao centro da solução, o que leva ao encolhimento do suporte na fase inicial da evolução. Exemplos dessa solução são mostrados na Fig.(17) e o *oscillon* remanescente parece bastante estável.

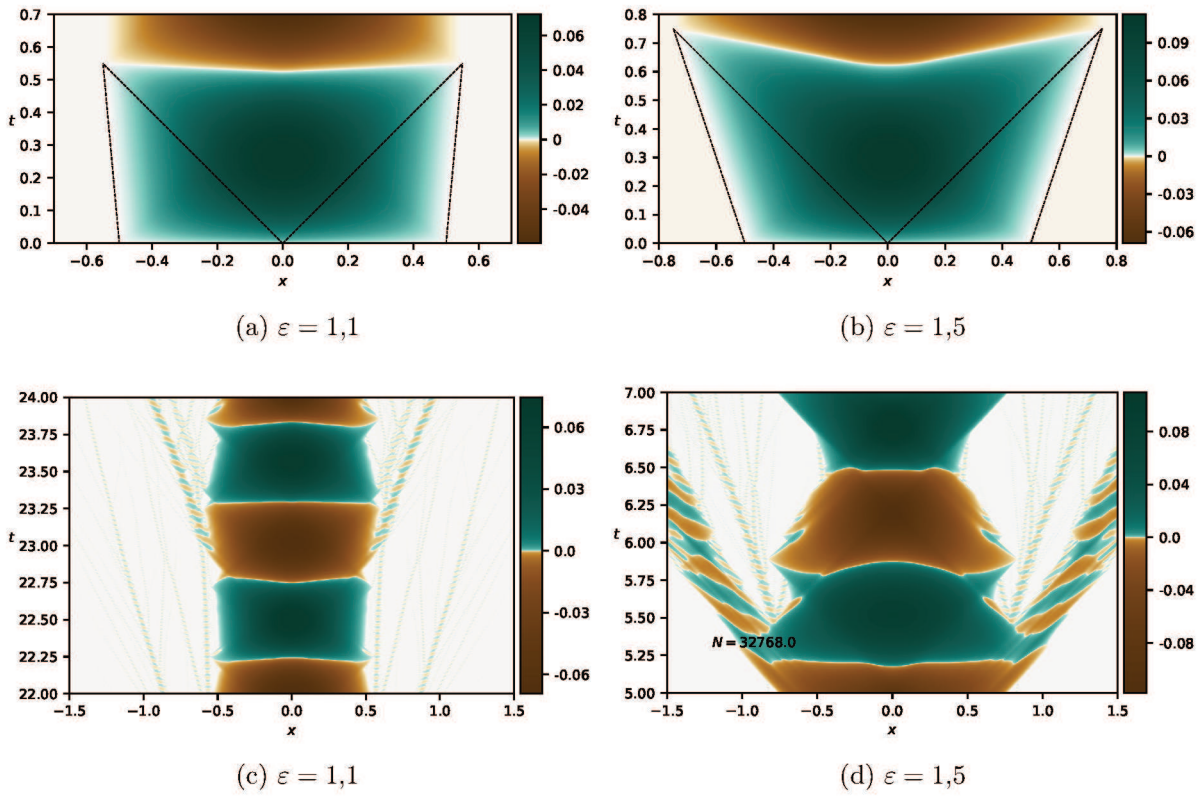


Figura 16 – Evolução de oscillon perturbado no caso $\varepsilon > 1$.

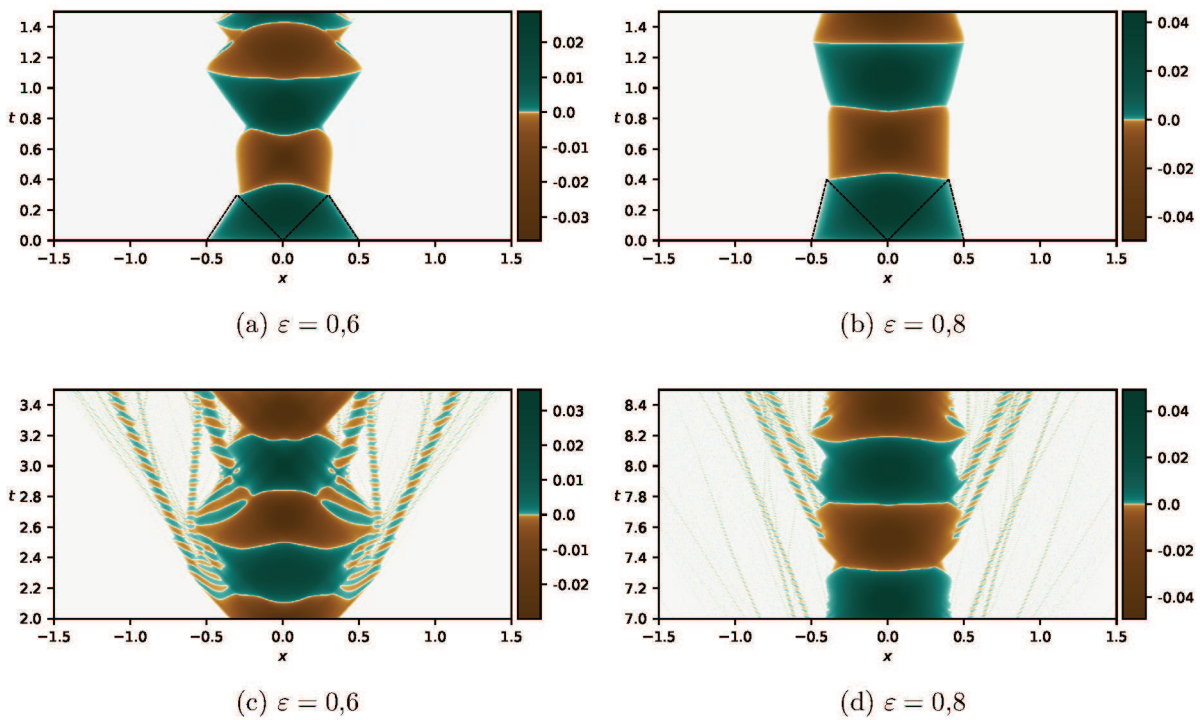


Figura 17 – Instantes iniciais da solução para oscillons perturbados. A área dentro das linhas pontilhadas corresponde às soluções analíticas auto-similares ϕ_L e ϕ_R .

- d) Para $\varepsilon = \frac{1}{2}$ a velocidade é $v_0 = 1$. A parte quadrática de ϕ_L desaparece e a solução parcial auto-similar consiste apenas da componente linear em x . Neste caso a derivada espacial $\partial_x \phi$ não é contínua nos pontos x_L e x_R , veja Fig.(18).

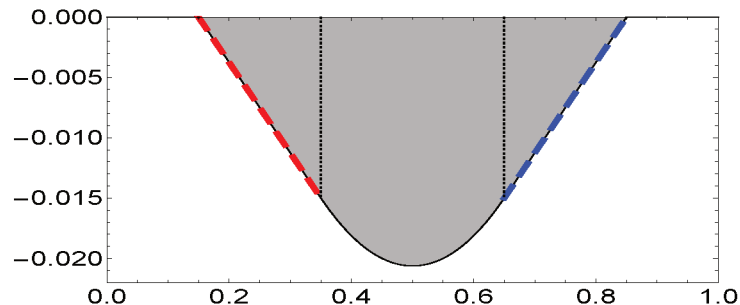


Figura 18 – Oscillon perturbado com $\varepsilon = 0,5$ no tempo $t = 0,15$. Soluções analíticas ϕ_L e ϕ_R correspondem com as linhas pontilhadas.

2. Caso $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$.

Neste caso, a solução auto-similar consiste, a cada instante de tempo, de um conjunto infinito de parábolas unidas de forma suave. Estas parábolas tem a forma geral $\phi_k(t, x) = x^2 S_k(\frac{t}{x})$, nas quais os $S_k(y)$ representam as soluções parciais da equação ordinária

$$(1 - y^2)S_k'' + 2yS_k' - 2S_k + \text{sgn}(S_k) = 0. \quad (3.32)$$

A equação (3.32) possui soluções ⁶ $S_k(y) = 0$ e, no caso $S_k \neq 0$,

$$S_k(y) = \frac{(-1)^k}{2} [\beta_k(y^2 + 1) - \alpha_k y - 1], \quad (3.33)$$

onde coeficientes α_k e β_k são constantes determinadas pela condições iniciais, isto é, pelas constantes $S(0)$, $S'(0)$. Os suportes das soluções parciais conectam-se nos pontos $y = a_k$. As soluções parciais devem ser tais que

$$S_k(a_k) = 0 = S_{k+1}(a_k), \quad \text{e} \quad S_k'(a_k) = S_{k+1}'(a_k).$$

No caso da solução ϕ_L , temos $S(0) = 0$ e $S'(0) = -\varepsilon$. Isto permite determinar a forma da primeira parábola

$$S_1(y) = -\frac{y}{2}(y + 2\varepsilon) \geq 0. \quad (3.34)$$

Como o suporte dela é localizado em $y \in [-2\varepsilon, 0]$ (x negativo), ele não contribui para a solução auto-similar. A primeira solução parcial relevante é dada por $S_2(y)$.

⁶Aqui $\text{sign}(0) := 0$.

Seguindo [16], temos as seguintes fórmulas para os zeros a_k e parâmetros α_k e β_k

$$\begin{aligned}\alpha_k &= \frac{1}{1+r} \left[\frac{1}{pr^{k-1}} - pr^k + (-1)^k \left(\frac{1}{p} - q \right) \right] - (-1)^k \alpha_1, \\ \beta_k &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2(1+r)} \left[\frac{1}{pr^{k-1}} + pr^k + (-1)^k \left(\frac{1}{p} + 1 \right) (1+q) \right] - (-1)^k \beta_1, \\ a_k &= \frac{p^{k-1} - q^k}{p^{k-1} + q^k}\end{aligned}$$

onde

$$p := \frac{1 - a_0}{1 + a_0}, \quad q := \frac{1 - a_1}{1 + a_1}, \quad r := \frac{q}{p}.$$

Os zeros de (3.34) são dados por $a_0 = -2\varepsilon$ e $a_1 = 0$, e eles determinam os parâmetros p e q . Na Fig.(19) mostramos a solução $S(y)$. O número de zeros desta solução

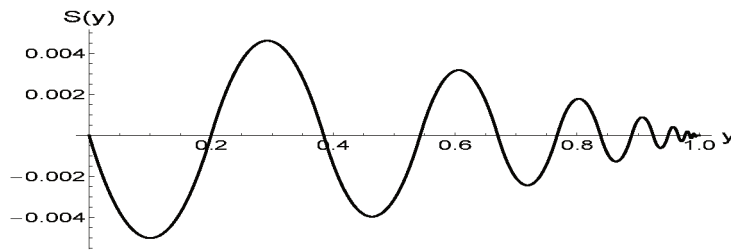


Figura 19 – Soluções $S_k(y)$, $k = 2, 3, \dots$ para $\varepsilon = 0,1$.

é infinito e eles tendem ao ponto $y = 1$. Devido ao nível de detalhamento muito grande nas vizinhanças de $y = 0$ (ou $x = 0$), esta solução constitui um desafio para simulação numérica. Independente da precisão numérica, não seria possível reproduzir a solução deste tipo para tempos grandes. Neste caso, inevitavelmente vão aparecer instabilidades numéricas que inviabilizam os resultados. Na Fig.(20) apresentamos soluções numéricas e exatas sobrepostas no tempo $t = 0,17$. A Fig.(21) mostra as soluções numéricas no diagrama espaço-temporal.

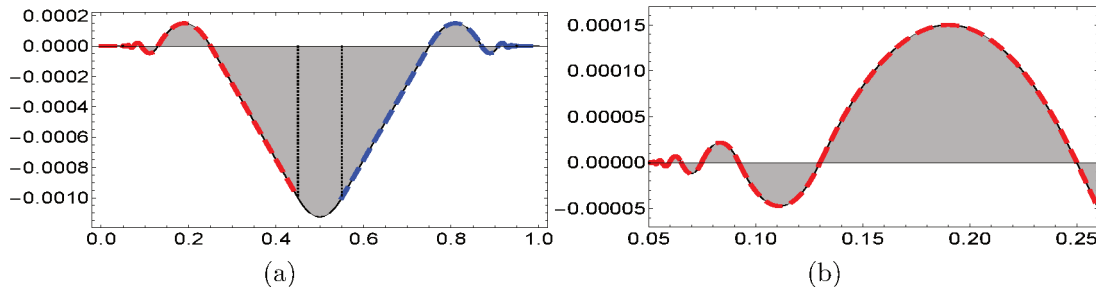


Figura 20 – Soluções numéricas $\phi(t, x)$ (cinza) e solução exata auto-similar (linha pontilhada) para $\varepsilon = 0,1$ em $t = 0,17$. A figura (a) mostra a solução em todo o suporte original $x \in [0, 1]$. A figura (b) mostra um detalhe da região auto-similar.

Analisando os resultados numéricos, podemos concluir que o *oscillon* perturbado não apresenta instabilidade no sentido de presença de modos crescentes. O cálculo numérico

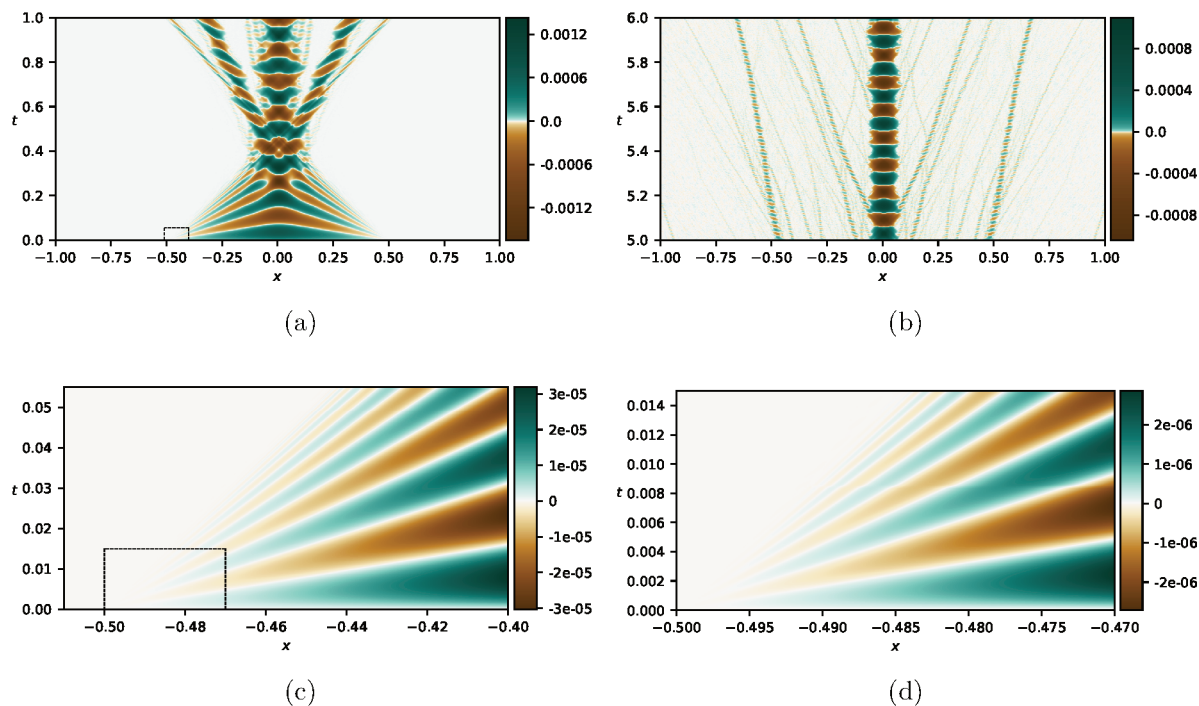


Figura 21 – Soluções auto-similares nos instantes iniciais do caso perturbado com $\varepsilon = 0.08$. A figura (a) mostra a solução nos instantes iniciais. A figura (b) mostra a solução para tempos avançados. A figura (c) corresponde à região pontilhada da figura (a). E a figura (d) corresponde à região pontilhada na figura (c).

mostra que o sistema pode irradiar. No entanto, a perturbação pequena permanece confinada à região próxima ao suporte de oscillon exato. Soluções auto-duais com numero infinito de segmentos constituem um grande desafio para calculo numérico, em especial quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Como elas podem aparecer em qualquer instante da evolução de sistema, podemos concluir que a integração numerica da equação de signum-Gordon é muito mais complexa de que a integração de equação de onda, possuindo estruturas que funcionam como fontes de erros.

3.4 OSCILLONS EM MODELOS COM POTENCIAL PERIÓDICO

Modelos que possuem potencial não-diferenciável com múltiplos mínimos compartilham diversas propriedades com o modelo de *signum*-Gordon. Isto significa que nos modelos modificados de sine-Gordon e no sub-modelo de Skyrme espera-se encontrar *oscillons* no regime de valores muito próximos aos valores de vácuo. Estes *oscillons* devem ser mais parecidos com *oscillons* exatos com escala $l \ll 1$

$$\phi_l(t, x) := l^2 \phi_1\left(\frac{t}{l}, \frac{x}{l}\right),$$

em que $\phi_1(t, x)$ é um oscillon básico com suporte unitario.

Nesta seção vamos usar a notação $\eta(t, x)$ para o campo com potencial periódico. Vamos considerar aqui o potencial (2.38) introduzido para submodelo de Skyrme e mostrado na Fig.(7). Note que esse potencial pode ser representado de forma equivalente utilizando a definição da função $\tau(z)$ conforme a expressão (3.25). Assim, temos

$$\bar{\eta}(\eta) = 4\tau\left(\frac{\eta}{4}\right), \quad \text{e} \quad V(\eta) = 4\tau\left(\frac{\eta}{4}\right) \left[1 - 2\tau\left(\frac{\eta}{4}\right)\right]. \quad (3.35)$$

Apesar da simplicidade das fórmulas (3.35), no cálculo numérico é mais vantajoso utilizar a forma antiga delas (2.37) e (2.38).

A configuração inicial pertinente possui a seguinte forma

$$\eta(0, x) = 0, \quad \partial_t \eta(t, x)|_{t=0} = \varepsilon v_l(x), \quad \text{onde} \quad v_l(x) := lv\left(\frac{x}{l}\right). \quad (3.36)$$

3.4.1 Oscillons levemente perturbados

Tomando $\varepsilon = 1$ e $l \rightarrow 0$, temos oscillons cada vez mais parecidos com oscillons exatos. O estudo destes oscillons foi relatado em [24]. Neste trabalho foi apresentada também a solução analítica aproximada para oscillons. Aqui não vamos entrar nos detalhes da solução analítica. Os resultados numéricos mostraram que os *oscillons* com condições iniciais (3.36) são bastante estáveis (não notamos uma quantidade significativa de radiação), e possuem período menor do que o de *oscillons* exatos do modelo s-G. Na Fig. (22) comparamos ambos tipos de oscillons no tempo até $t = 1/2$. Na Fig. (23) comparamos a solução numérica (cinza) com a solução analítica aproximada. Notamos que a função que representa um *oscillon* no modelo com potencial periódico não se zera simultaneamente em todo suporte de *oscillon*.

As oscilações de um *oscillon* no modelo com potencial periódico são muito regulares. A trajetória do ponto no meio do *oscillon* foi ilustrada no Fig.(24). Comparando esta trajetória com a trajetória do mesmo ponto no caso do *oscillon* exato vemos muita similaridade entre as duas trajetórias.

3.4.2 Oscillons fortemente perturbados

Para analisar como o potencial periódico afeta *oscillons*, basta tomar configurações iniciais com l crescente. Aumentando o suporte e a amplitude da configuração inicial, aumentamos também a energia dela. Como o modelo com potencial periódico não possui a simetria de escala, a configuração inicial não seria mais adequada para gerar *oscillon*. Deste modo, o potencial do modelo vai “perturbar” o *oscillon*. Aqui vamos comentar apenas sobre o caso de grandes l .

Quando a configuração inicial possui energia suficientemente alta, então ela é dispersada através de canais formados por pares *kink-antikink*. Uma configuração com quatro pares deste tipo é mostrada nas Fig. (25). Na mesma figura é apresentado o

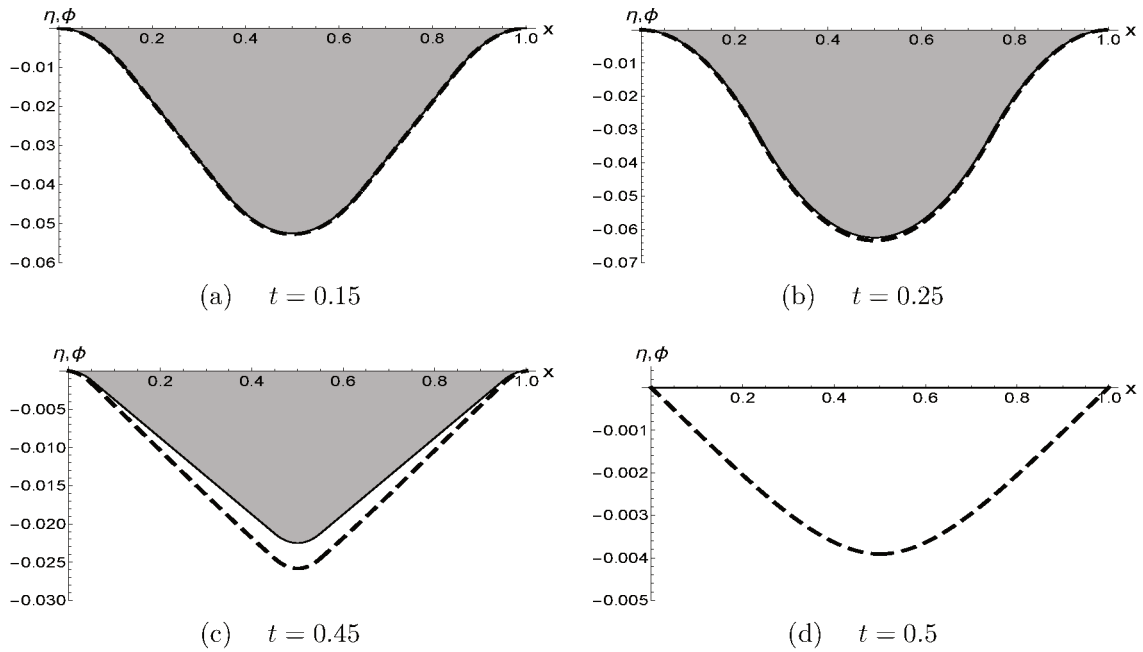


Figura 22 – Oscillon exato $\phi(t, x)$ no modelo de signum-Gordon (cinza) e a solução analítica aproximada $\eta(t, x)$ (linha pontilhada) para solução. Aqui utilizamos $l = 1$ para tornar mais visíveis as diferenças.

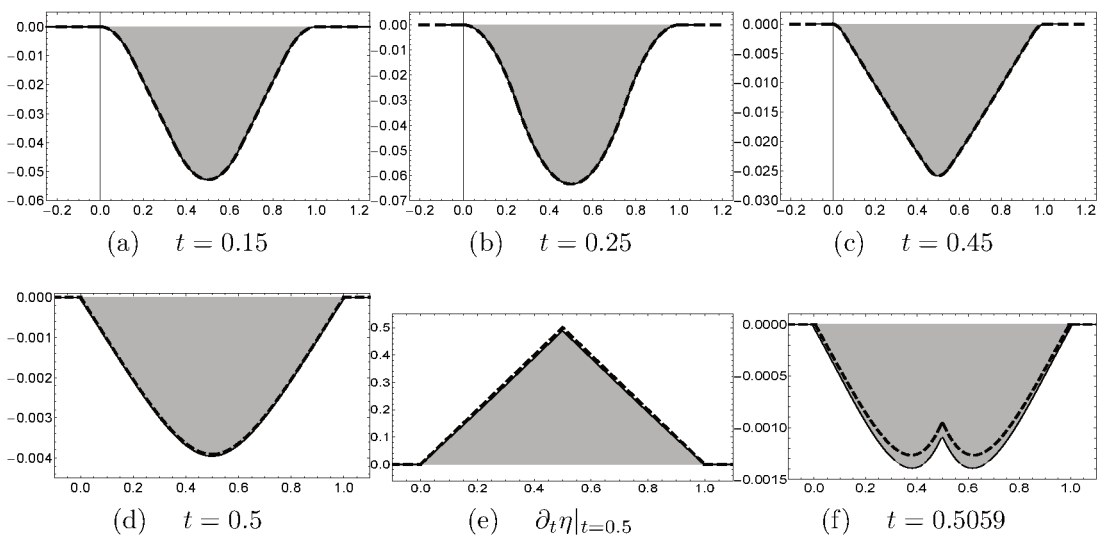


Figura 23 – Solução numérica $\eta(t, x)$ (cinza) e solução analítica aproximada (linha pontilhada) para $\epsilon = 1$ e $l = 1$.

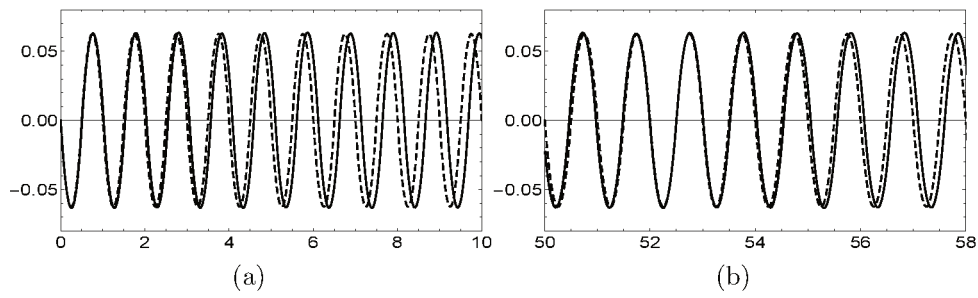


Figura 24 – Solução numérica $\eta(t, \frac{1}{2})$ (linha sólida) para configuração com $l = 1$ e $\epsilon = 1$. O oscillon exato $\phi(t, \frac{1}{2})$ (linha pontilhada) As figuras mostram (a) $t \in [0, 10]$ e (b) $t \in [50, 58]$.

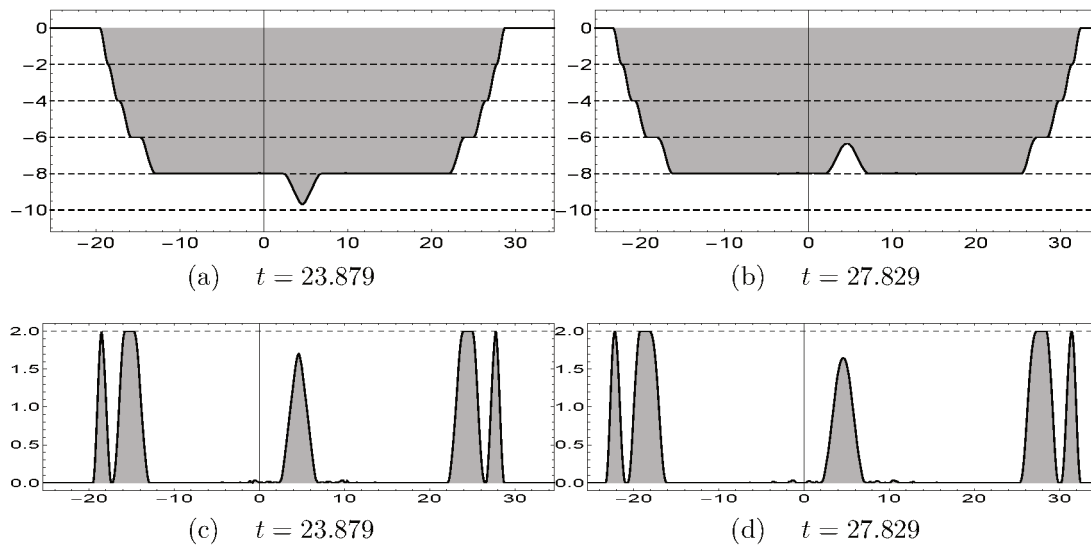


Figura 25 – Quatro pares *kink-antikink* e um *oscillon* no centro. Aqui $l = 9,2346$. Figuras (c,d) representam modelo original com campo $\bar{\eta}(t, x)$.

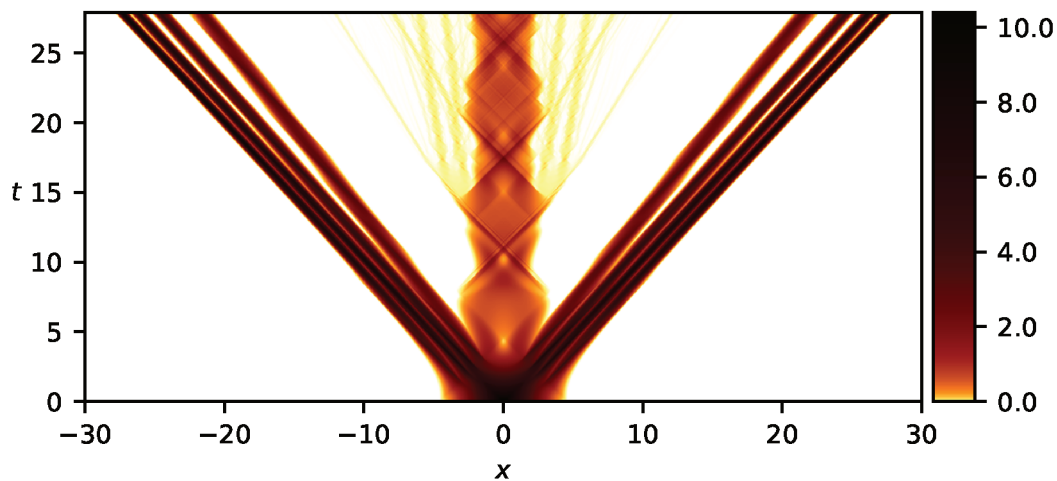


Figura 26 – Diagrama de Minkowski para densidade de energia da perturbação com $l = 9.2346$.

resultado para campo original (*folded*) $\bar{\eta}$. Um diagrama de Minkowski do mesmo caso é mostrado na Fig. 26. O processo de criação de pares possui algumas etapas. Na primeira etapa é criado o primeiro par e os *kinks* gerados nela possuem velocidade mais alta que outros *kinks* criados posteriormente. Isto pode ser visto claramente do fator de contração Lorentz dos *kinks* em movimento. O resto da energia que sobra após a criação dos pares é utilizado para criação de um *oscillon* localizado no centro (em $x = \frac{l}{2}$). Uma pequena quantidade de radiação pode ser vista nas vizinhanças do *oscillon* (ver figuras (c) e (d)).

4 ESPALHAMENTO DE *OSCILLONS*

Nesta seção construímos as condições iniciais para o espalhamento de *oscillons* e apresentamos alguns dos principais resultados da análise numérica da evolução do campo. O fato de que um *oscillon* exato possui suporte compacto nos permite construir soluções exatas com vários *oscillons* desde que os suportes deles não se sobreponham. Em particular, uma configuração de dois *oscillons* devidamente separados em processo de aproximação pode ser adotada como condição inicial para um espalhamento.

A solução de *oscillon* generalizado dada pelo resultado (3.30) depende apenas do parâmetro v , que corresponde à velocidade da sua borda (no referencial do repouso do *oscillon*). A construção de uma configuração inicial pode ser realizada utilizando-se das simetrias da equação de signum-Gordon (invariância sob grupo de Poincaré em $1 + 1$ dimensões)

- translações espaciais e temporais;
- boosts;
- reflexões espaciais e temporais.

Alem disso, temos também

- simetria de escala $\phi(t, x) \rightarrow \lambda^2 \phi(\frac{t}{\lambda}, \frac{x}{\lambda})$;
- simetria de reflexão $\phi(t, x) \rightarrow -\phi(t, x)$.

Os parâmetros que caracterizam uma configuração de dois *oscillons* são: parâmetros da solução generalizada v_1 e v_2 , parâmetros associados com simetria de Poincaré e simetrias de escala e de reflexão dos valores do campo. Nem todos esses parâmetros são fisicamente relevantes. Algumas configurações iniciais são equivalentes no sentido de que elas podem ser relacionadas por uma única transformação de simetria. Por exemplo, as configurações nas quais *oscillons* individuais possuem velocidades u_1 e u_2 são equivalentes à uma configuração em que as velocidades deles são iguais e opostas (sempre existe tal referencial inercial). Isto sugere que podemos escolher um referencial de laboratório desde o início. As configurações iniciais distintas diferem pelo valor da velocidade relativa dos *oscillons* incidentes. Do mesmo modo, importará apenas a posição, escala, etc. relativos entre *oscillons*. As translações temporais também são importantes e, como veremos mais adiante, o resultado do espalhamento depende delas. Neste trabalho vamos representar a translação temporal por um parâmetro chamado *fase do oscillon*. Explicamos abaixo.

4.1 OSCILLON EM MOVIMENTO UNIFORME

Como a equação de *signum*-Gordon é invariante por transformações de Lorentz, a solução analítica (3.30) pode ser generalizada através de um *boost*. Isso equivale à observarmos o *oscillon* em um referencial diferente do seu referencial de repouso¹. Para um referencial de laboratório S movendo-se com velocidade constante $-u$ no referencial S' do *oscillon*, o *oscillon* terá velocidade u e a transformação será dada pelo mapeamento

$$\begin{cases} t \mapsto \xi = \frac{t - ux}{\sqrt{1 - u^2}} \\ x \mapsto \zeta = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2}} \end{cases},$$

que pode ser inserido diretamente na solução (3.30). Com isso, cada parte dessa solução será dada por

$$\phi_k(\xi, \zeta; v) = \sigma(\xi)\varphi_k(\tau(\xi), \zeta; v)\Pi_k(\tau(\xi), \zeta; v).$$

Para calcular a derivada temporal da solução completa de *oscillons* precisamos derivar as soluções parciais. O fato de que cada solução parcial considerada individualmente não é contínua na borda do seu domínio não leva ao aparecimento de deltas de Dirac porque a solução completa é \mathcal{C}^2 . Isto equivale a dizer que as descontinuidades das soluções parciais se cancelam e, efetivamente, a derivada temporal da solução de *oscillon* se reduz à derivada clássica (não distribucional). Por esta razão vamos considerar apenas as derivadas clássicas das funções $\tau(z)$ e $\sigma(z)$ e $\Pi_k(z)$

$$\frac{d\tau(z)}{dz} = \sigma(z), \quad \frac{d\sigma(z)}{dz} = 0, \quad \partial_t \Pi_k = 0.$$

As derivadas temporais $\partial_t \phi(\xi, \zeta; v)$ são, então, dadas por

$$\partial_t \phi_k(\xi, \zeta; v) = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \left(\partial_{\bar{\tau}} \varphi_k(\bar{\tau}, \zeta; v) - u \sigma(\xi) \partial_{\bar{\zeta}} \varphi_k(\tau(\xi), \bar{\zeta}; v) \right) \Big|_{\bar{\tau}=\tau(\xi), \bar{\zeta}=\zeta} \Pi_k(\tau(\xi), \zeta; v). \quad (4.1)$$

Definindo a superposição de soluções parciais

$$\psi(t, x; v, u) := \sum_k \phi_k(\xi(t, x; u), \zeta(t, x; u); v) \quad (4.2)$$

temos uma forma analítica para um *oscillon* em movimento uniforme no referencial de laboratório S . A derivada temporal desta solução é dada por

$$\partial_t \psi(t, x; v, u) = \sum_k \partial_t \phi_k(\xi(t, x; u), \zeta(t, x; u); v).$$

¹O referencial de repouso é definido como um referencial em que o momento linear do *oscillon* se anula, $P = \int dx \partial_t \phi \partial_x \phi = 0$.

4.2 CONFIGURAÇÃO INICIAL PARA PROCESSO DE ESPALHAMENTO

Conforme mencionado anteriormente, temos interesse em reduzir o tamanho do espaço de parâmetros. As reduções são de duas naturezas: as que *não* implicam em perda de generalidade das soluções, e as que implicam (restrições). Assim, iniciamos por construir uma condição inicial contendo n *oscillons* através da soma de diversas soluções do tipo (4.2),

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \lambda_i^2 \psi \left(\frac{t_i}{\lambda_i}, \frac{x - x_i}{\lambda_i}; v_i, u_i \right), \quad \varepsilon_i = \pm 1 \quad (4.3)$$

com a derivada temporal inicial do campo dada por

$$\begin{aligned} \Phi_t(x) &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \lambda_i^2 \partial_t \psi \left(\frac{t}{\lambda_i}, \frac{x - x_i}{\lambda_i}; v_i, u_i \right) \Big|_{t=t_i} \\ &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \lambda_i \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \psi \left(\bar{t}, \frac{x - x_i}{\lambda_i}; v_i, u_i \right) \Big|_{\bar{t}=t_i/\lambda_i} \end{aligned} \quad (4.4)$$

onde, para o i -ésimo *oscillon*: λ_i refere-se à sua escala; x_i refere-se à posição inicial da sua borda esquerda e t_i à fase de oscilação na qual o *oscillon* se encontra. Note que os *oscillons* devem ser posicionados de forma a garantir que nenhum suporte se sobreponha a outro no instante inicial; v_i refere-se à velocidade da sua borda; u_i parametriza o *boost* (velocidade do *oscillon* no referencial de laboratório).

Neste trabalho vamos nos limitar ao espalhamento de *pares* de *oscillons* ($n = 2$). Um exemplo de configuração deste tipo é mostrado na Fig. (27). No caso de dois *oscillons*,

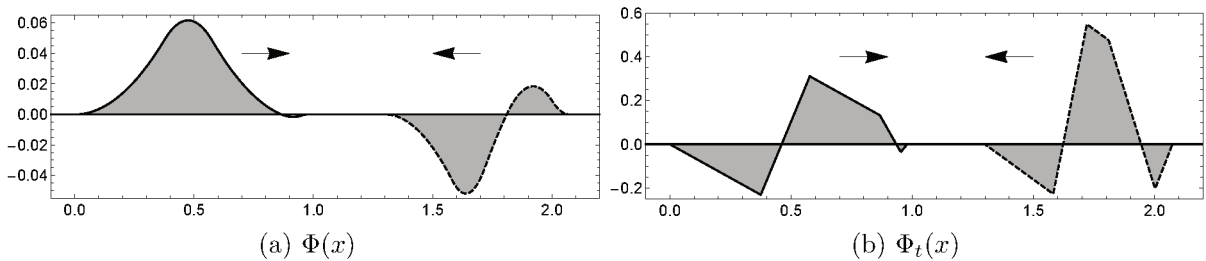


Figura 27 – Configuração inicial para dois *oscillons* de mesma escala com boosts em direções opostas e fases diferentes.

as seguintes reduções não levam à perda de generalidade:

Escala: Como as transformações de escala mantêm invariante a Lagrangiana de s-G, o fator de escala que efetivamente determina tais espalhamentos é a escala *relativa* entre os *oscillons* incidentes. Os resultados da interação, de maneira geral, valem para todas as demais escalas desde que a solução completa seja reescalada pelo fator apropriado.

Assim, podemos fixar a escala do primeiro *oscillon* tomando $\lambda_1 = 1$ e definimos a escala relativa como escala do segundo *oscillon* $\lambda_2 = \lambda$.

Boost: Considerando um referencial de laboratório no qual os *oscillons* tem velocidades iguais e opostas, basta um único valor de velocidade u que parametriza *boost*. A velocidade u define a velocidade relativa dos *oscillons*.

Translação: A distância relativa entre os *oscillons* é um parametro relevante para o espalhamento. Isto se deve ao fato de que os *oscillons* vão mudando de forma durante o tempo que precede o seu encontro. Por outro lado, o *formato* dos *oscillons* no momento inicial também importa. Este formato pode ser ajustado realizando translações temporais dos *oscillons* individuais. Como no tempo que precede o encontro não existe nenhuma interação entre *oscillons*, é bastante conveniente fixar a zero a distância relativa entre as bordas deles no tempo inicial, mantendo liberdade de escolha do formato de cada um através de algum outro parâmetro. Para obter tal configuração, a translação espacial que deixa suportes dos *oscillons* em contato no tempo inicial deve ser ajustada para cada escolha dos parâmetros livres, quais sejam: velocidade, translação temporal, etc. O formato do i -ésimo *oscillon* incidente passa a ser parametrizado por $\alpha_i \in [0, 1)$, chamado a *fase do oscillon*. Um *oscillon* com formato arbitrário com *borda direita* no ponto $x = 0$ é dado por

$$\psi(t, x; v; u) \mapsto \psi(t + t_0(\alpha), x + x_0(\alpha); v, u)$$

em que $x_0(\alpha)$ e $t_0(\alpha)$ são duas funções que sejam determinadas na seção (4.2.1). Note que a forma da função de deslocamento espacial $x_0(\alpha)$ pode depender de u e v . Isto significa que para obter uma configuração de dois *oscillons* vamos precisar em geral de duas funções $x_0(\alpha)$ e $\bar{x}_0(\alpha)$.

Vamos considerar os seguintes parâmetros da configuração inicial: a escala λ do segundo *oscillon*, uma velocidade de *boost* u , duas velocidades da borda v_1 e v_2 e duas fases α_1 e α_2 . Além disso, fixamos o sinal de primeiro *oscillon* $\varepsilon_1 = 1$ e consideramos apenas $\varepsilon_2 \equiv \varepsilon = \pm 1$. A condição inicial (4.3), com $x_1 \rightarrow -x_0(\alpha_1)$ e $x_2 \rightarrow -\bar{x}_0(\alpha_2)$ toma a seguinte forma

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \psi\left(t_0(\alpha_1), x + x_0(\alpha_1); v_1, u\right) \pm \lambda^2 \psi\left(\frac{t_0(\alpha_2)}{\lambda}, \frac{x + \bar{x}_0(\alpha_2)}{\lambda}; v_2, -u\right), \\ \Phi_t(x) &= \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \psi(\bar{t}, x + x_0(\alpha_1); v_1, u) \Big|_{\bar{t}=t_0(\alpha_1)} \pm \lambda \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \psi(\bar{t}, \frac{x + \bar{x}_0(\alpha_2)}{\lambda}; v_2, -u) \Big|_{\bar{t}=t_0(\alpha_1)/\lambda}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Apesar de reduzirmos bastante o número de parâmetros livres, a configuração inicial ainda é bastante geral. Para simplificar as considerações vamos estudar apenas um subconjunto de configurações iniciais (perda de generalidade) que envolve *oscillons*

idênticos. Isto significa que fixamos $\lambda = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2$, $v_1 = v_2$. O segundo *oscillon* é calculado aplicando-se uma reflexão espacial $x \rightarrow -x$ ao primeiro *oscillon*. Deste modo temos apenas uma função $x_0(\alpha)$. Vamos considerar dois casos $\epsilon = \pm 1$.

Para $\epsilon = +1$ a configuração inicial $\Phi^{(s)}(x)$ é *simétrica* e para $\epsilon = -1$ a configuração $\Phi^{(a)}(x)$ é *antisimétrica*

$$\begin{aligned} \Phi^{(s/a)}(x) &= \psi(t_0(\alpha), x + x_0(\alpha); v, u) \pm \psi(t_0(\alpha), -x + x_0(\alpha); v, u) \\ \Phi_t^{(s/a)}(x) &= \left. \frac{\partial}{\partial t} \psi(\bar{t}, x + x_0(\alpha); v, u) \right|_{\bar{t}=t_0(\alpha)} \pm \left. \frac{\partial}{\partial t} \psi(\bar{t}, -x + x_0(\alpha); v, u) \right|_{\bar{t}=t_0(\alpha)}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

A Fig. (28) mostra um exemplo de configuração inicial simétrica. O *oscillon* localizado em $x < 0$ (primeiro *oscillon*) move-se para a direita enquanto o *oscillon* localizado em $x > 0$ (segundo *oscillon*) move-se para a esquerda. Na Fig. (29) apresentamos a configuração anti-simétrica envolvendo os mesmos dois *oscillons*.

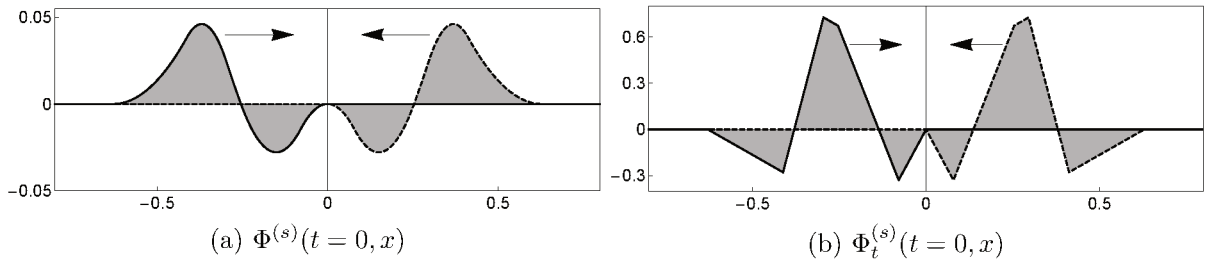


Figura 28 – Configuração inicial para dois *oscillons* simétricos com relação ao ponto $x = 0$ no instante inicial. Os parâmetros dos *oscillons* são dados por $u = 0,8$, $v = 0,3$ e $\alpha = 0$.

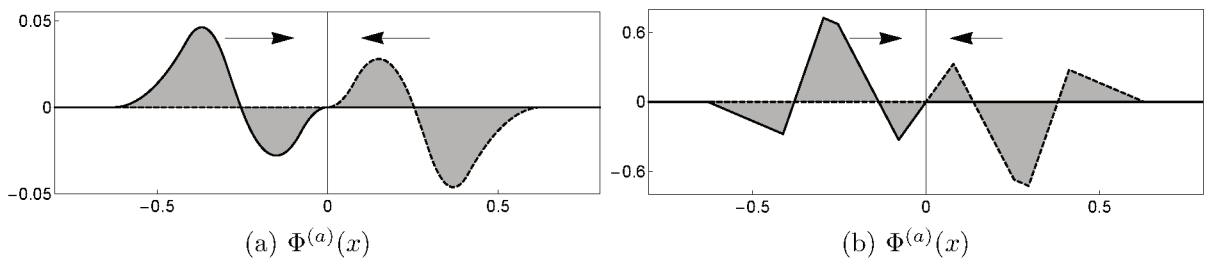


Figura 29 – Configuração inicial para dois *oscillons* anti-simétricos com relação ao ponto $x = 0$ no instante inicial. Os parâmetros dos *oscillons* são dados por $u = 0,8$, $v = 0,3$ e $\alpha = 0$.

4.2.1 Fase do *oscillon*

Como mencionado, o *oscillon* analítico construído na seção (3.1) não é uma estrutura estática, variando sua forma ao longo do tempo. Ele é determinado pela configuração inicial $\phi(t, x)|_{t=0} = 0$ e $\partial_t \phi(t, x)|_{t=0} = v(x)$ que, em sua evolução muda de sinal em $t = \frac{1}{2}$ e volta à sua forma inicial em $t = 1$. O período do *oscillon* básico $\lambda = 1$ é portanto $T_0 = 1$.

Em um referencial em movimento uniforme com velocidade $-u$ esse período é dado pelo tempo dilatado $T_{lab} = \gamma(u)$, em que $\gamma(u) = (1 - u^2)^{-1/2}$ é o fator de Lorentz.

Com o intuito de construirmos formas analíticas de *oscillons* cuja configuração inicial é qualquer das possíveis dentro de um período, introduzimos uma *fase* $\alpha \in [0, 1)$. Essa fase é definida de forma que $\alpha = 0$ corresponde com o *oscillon* com lado esquerdo na origem do referencial de laboratório S , no qual ele tem a velocidade u e, variando seu valor, passamos pelas demais configurações, até que para $\alpha \rightarrow 1$ voltamos à configuração idêntica à original mas deslocada no espaço. Na Fig.(30) mostramos superfície mundo de um *oscillon* em movimento e seções dele usando linhas de simultaneidade no referencial de laboratório S . As configurações distintas são dadas pelas linhas de simultaneidade entre $t = 0$ e $t = \gamma$.

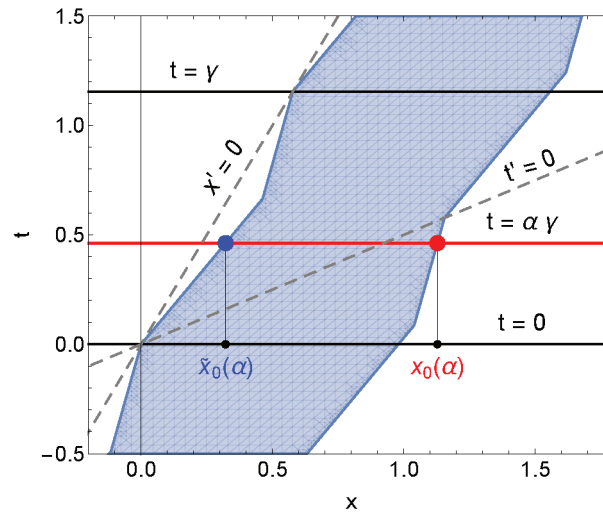


Figura 30 – Diagrama espaço-tempo do *oscillon* e a superfície de simultaneidade em $t = 0,4\gamma$ no referencial de laboratório (referencial S).

Substituindo $t \rightarrow t + t_0(\alpha)$ em $\psi(t, x; v, u)$ introduzida em (4.2), na qual

$$t_0(\alpha) = \gamma(u) \alpha \quad (4.7)$$

teremos em $t = 0$ a configuração com formato desejado. Como o *oscillon* deslocou-se para a direita durante o tempo $t_0(\alpha)$ e a nova posição de borda direita dele é dada por $x_0(\alpha)$, devemos deslocar ele para a esquerda, isto é, substituir $x \rightarrow x + x_0(\alpha)$ em $\psi(t, x; v, u)$. A forma da função $x_0(\alpha)$ claramente depende do valor da velocidade da borda v . Ela é particularmente simples no caso $v = 0$

$$x_0(\alpha) = u \gamma(u) \alpha. \quad (4.8)$$

O caso dos *oscillons* com borda em movimento exige algumas considerações além destas, já que estamos construindo uma configuração de espalhamento de estruturas compactas na qual queremos uma condição inicial em que ocorra sempre que o suporte

dos *oscillons* esteja em contato. Como o tamanho do suporte das soluções com $v \neq 0$ não é fixo (ver Fig. (15)), ocorre que para certas fases α no caso $|v| > |u|$ as superfícies mundo dos *oscillons* incidentes podem se sobrepor antes do instante $t = 0$. Para ilustrar este fato vamos comparar casos $|v| < |u|$ e $|v| > |u|$. Na Fig. (31) mostramos o primeiro caso. Neste caso, não existe nenhuma possibilidade de sobreposição. No caso mostrado na Fig. (32), os *oscillons* não tem sobreposição em $t < 0$ para $\alpha = 0$ mas, para $\alpha = 0,5$, um encontro deles ocorre em tempo anterior a $t = 0$. A configuração inicial mostrada na Fig. (32)(b) é uma

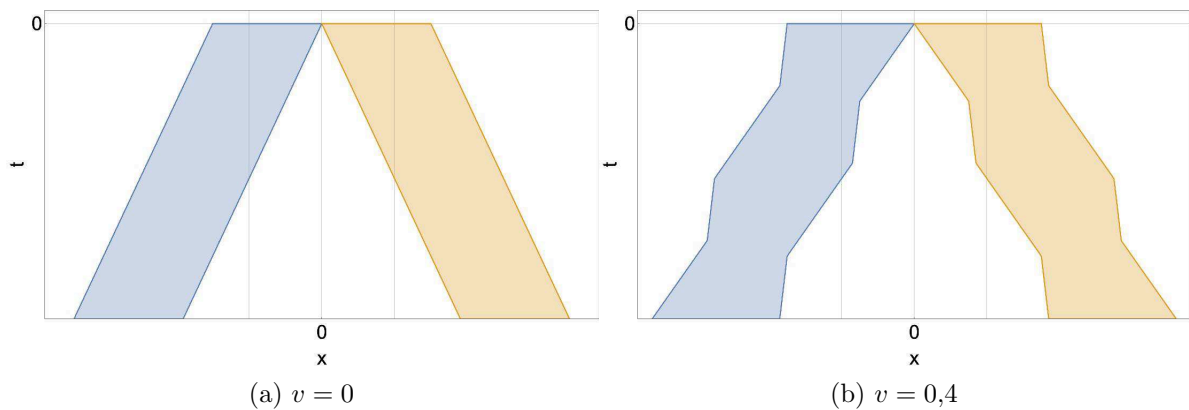


Figura 31 – Superfícies mundo dos *oscillons* antes de espalhamento, $t < 0$, para $u = 0,5$, $\alpha = 0$ e (a) $v = 0$, (b) $v = 0,4$.

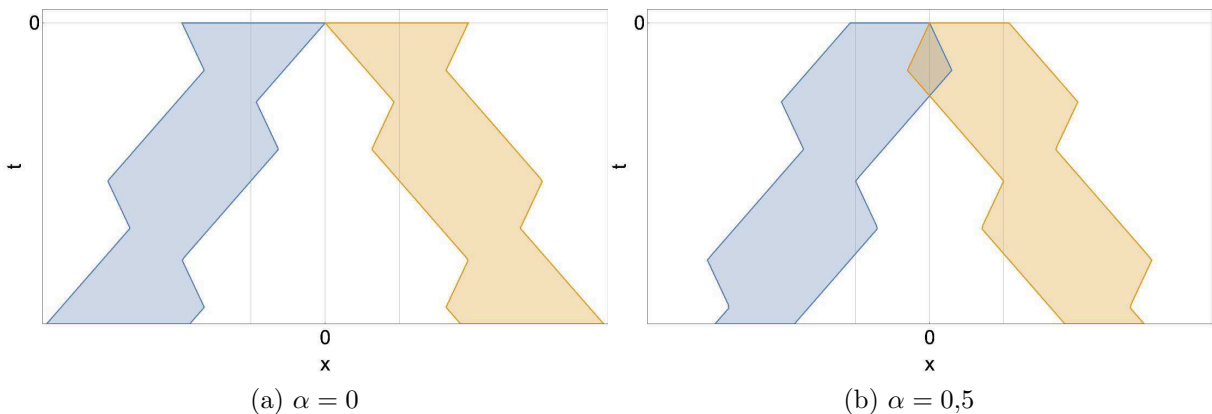


Figura 32 – Superfícies mundo dos *oscillons* antes de espalhamento, $t < 0$, para $u = 0,5$ e $v = 0,8$.

configuração admissível matematicamente. No entanto, ela não pode ser um resultado do encontro de dois *oscillons* em movimento uniforme, já que o encontro em si se daria em tempo anterior e, efetivamente, esse caso seria o mesmo que para $\alpha = 0$ (o que pode ser visto comparando-se o ponto de encontro real da Fig. (32)(b) com aquele da Fig. (32)(a)).

Na sequência, vamos determinar a função $x_0(\alpha) \equiv x_D(\alpha)$ que representa a posição da borda direita do *oscillon* no sistema de coordenadas do observador em S . Geometricamente, a coordenada x_D é a coordenada espacial em S do evento da intersecção entre a linha de simultaneidade $t = \gamma\alpha$ e a borda direita do *oscillon*, vide Fig. (30). No referencial de

repouso do *oscillon*, S' , essa linha de simultaneidade é dada por

$$t' = \alpha - u x' \quad (4.9)$$

enquanto a borda direita do *oscillon* é a linha-mundo descrita por

$$x' = 1 + v\tau(t'), \quad (4.10)$$

com $\tau(t')$ definida em (3.25). Substituindo x' dado por (4.10) em (4.9) temos $t'(\alpha)$ como uma solução da equação

$$\tau(t') = y(t', \alpha), \quad (4.11)$$

onde

$$y(t', \alpha) = \frac{1}{uv}(\alpha - t' - u)$$

é uma linha reta, enquanto $\tau(t')$ é uma função em forma de serra, vide Fig.(33).

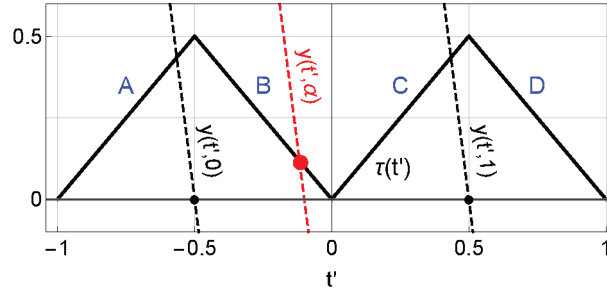


Figura 33 – Funções $\tau(t')$ e $y(t', \alpha)$ para $u = 0,5$ e $v = 0,3$. Aqui, $V > V_c = \frac{10}{23}$. O ponto representa a solução da equação (4.11).

As linhas de simultaneidade $t = 0$ e $t = \gamma$ cruzam as bordas do *oscillon* nos pontos cujas coordenadas em S' são dadas por $(t', x') = (0, 0)$ e $(t', x') = (1, 0)$. Nestes dois instantes o *oscillon* terá a mesma forma em S . Observando a Fig. (33), concluímos que, para os valores extremos da fase $\alpha = 0$ e $\alpha = 1$, as retas $y(t', 0)$ e $y(t', 1)$ cruzam o eixo horizontal t' em $t' = -u$ e $t' = 1 - u$. Veja que todas as demais retas $y(t', \alpha)$ estão entre as retas $y(t', 0)$ e $y(t', 1)$. Como nos restringimos a intervalo $u \in [0, 1)$ (já que valores negativos de u geram o *afastamento* dos *oscillons* ao invés de seu espalhamento), consideramos a equação (4.11) no intervalo $t' \in (-1, 1)$. Nesse intervalo, a função $\tau(t')$ é dada por pedaços de linhas-reta, e escrevemos ela na forma

$$\tau(t') = a t' + b, \quad (4.12)$$

onde os coeficientes (a, b) dependem de intervalo ao qual a coordenada t' pertence. Eles são dados por

$$(a, b) = \begin{cases} (1, 1) & \text{para } t' \in (-1, -\frac{1}{2}) & (A) \\ (-1, 0) & \text{para } t' \in (-\frac{1}{2}, 0) & (B) \\ (1, 0) & \text{para } t' \in (0, \frac{1}{2}) & (C) \\ (-1, 1) & \text{para } t' \in (\frac{1}{2}, 1) & (D) \end{cases}.$$

Dependendo do valor de u , existem dois casos diferentes que são separados pelo caso limite, dado pela velocidade de *boost* crítica $u_c \equiv \frac{1}{2+v}$. Esses valores críticos ocorrem quando $y(t', \alpha)$ cruza $\tau(t')$ precisamente nos seus máximos $\tau(t')|_{t'=\pm\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$ e ou mínimo $\tau(t')|_{t'=0} = 0$. Denotamos os valores correspondentes do parâmetro α por $\alpha^{(\pm)}$ para os máximos e $\alpha^{(0)}$ para o mínimo. São eles

$$\begin{aligned}\alpha^{(\pm)} &= \frac{1}{2}(\pm 1 + (2+v)u), \\ \alpha^{(0)} &= u.\end{aligned}$$

Os intervalos (A) , (B) , (C) e (D) na Fig. (33) são cobertos da seguinte maneira, de acordo com os valores de u e α :

$u < u_c$: abaixo do valor crítico, a reta $y(t', 0)$ cruza $\tau(t')$ em algum ponto *acima* de $t' = -\frac{1}{2}$, enquanto $y(t', 1)$ cruza $\tau(t')$ em algum ponto, também, *acima* de $t' = \frac{1}{2}$. Dessa forma, apenas os intervalos (B) , (C) e (D) são relevantes, dos quais (B) e (D) são cobertos apenas parcialmente. O intervalo (B) corresponde à $\alpha \in [0, \alpha^{(0)}]$, (C) corresponde a $\alpha \in [\alpha^{(0)}, \alpha^{(+)}]$ e o intervalo (D) corresponde a $\alpha \in [\alpha^{(+)}, 1]$;

$u = u_c$: no valor crítico de u , o valor mínimo de α corresponde à $\alpha^{(-)} = 0$ e o valor mais alto corresponde à $\alpha^{(+)} = 1$ e $y(t', \alpha)$ cruza $\tau(t')$ apenas nos intervalos (B) e (C) . O intervalo (B) corresponde a $\alpha \in [0, \alpha^{(0)}]$ e (C) por $\alpha \in [\alpha^{(0)}, 1]$;

$u > u_c$: a reta $y(t', 0)$ cruza $\tau(t')$ em algum ponto *abaixo* de $t' = -\frac{1}{2}$ e a reta $y(t', 1)$ cruza $\tau(t')$ em algum ponto *abaixo* de $t' = \frac{1}{2}$. Este é o caso que aparece na Fig. (33). São cobertos os intervalos (A) , (B) e (C) , dos quais (A) e (C) são cobertos apenas parcialmente por α . O intervalo (A) é coberto quando $\alpha \in [0, \alpha^{(-)}]$, o intervalo (B) quando $\alpha \in [\alpha^{(-)}, \alpha^{(+)}]$ e (C) quando $\alpha \in [\alpha^{(+)}, 1]$.

A solução para t' da equação (4.11) é dada, com $\tau(t')$ na forma (4.12), por

$$t'(\alpha) = \frac{\alpha - u(1 + bv)}{1 + avu},$$

em que os valores de (a, b) passam a ser determinados pela velocidade u e a fase α

$$(a, b) = \begin{cases} (1, 1) & \text{para } \alpha \in (0, \alpha^{(-)}) \\ (-1, 0) & \text{para } \alpha \in (\alpha^{(-)}, \alpha^{(0)}) \\ (1, 0) & \text{para } \alpha \in (\alpha^{(0)}, \alpha^{(+)}) \\ (-1, 1) & \text{para } \alpha \in (\alpha^{(+)}, 1) \end{cases}.$$

Da invariância dos intervalos de espaço-tempo encontramos que a posição da borda direita do *oscillon* é dada por

$$x_D(\alpha) = \sqrt{\gamma^2 \alpha^2 - t'(\alpha)^2 + x'(\alpha)^2},$$

em que x' , introduzido em (4.10), é dado por

$$x'(\alpha) = 1 + v(at'(\alpha) + b).$$

Com algumas manipulações algébricas, chegamos na posição da borda direita do *oscillon* no referencial de laboratório

$$x_D(\alpha) = \frac{\gamma}{1 + avu} \left[(1 - u^2)(1 + vb) + \alpha(u + va) \right]. \quad (4.13)$$

A borda esquerda do *oscillon*, no seu referencial de repouso, corresponde com a linha-mundo $x' = v\tau(t')$. A coordenada $t'(\alpha)$ é determinada pela equação $\tau(t') = z(t', \alpha)$, em que $z(t', \alpha) := \frac{\alpha - t'}{vu}$. A solução tem a forma

$$t'(\alpha) = \frac{\alpha - b'vu}{1 + a'vu}$$

com os coeficientes (a', b') dados por

$$(a', b') = \begin{cases} (1, 0) & \text{se } 0 \leq \alpha \leq \alpha_0 \\ (-1, 1) & \text{se } \alpha_0 \leq \alpha \leq 1 \end{cases}, \quad \alpha_0 := \frac{1}{2}(1 + vu).$$

De maneira análoga ao caso anterior, encontramos uma expressão para posição da borda esquerda do *oscillon* no referencial de laboratório em dependência da fase α

$$x_E(\alpha) = \frac{\gamma}{1 + a'vu} \left[(1 - u^2)(vb') + \alpha(u + va') \right]. \quad (4.14)$$

O conhecimento da expressão para a posição da borda esquerda nos permite determinar o tamanho do *oscillon* $L(\alpha) = x_D(\alpha) - x_E(\alpha)$ no instante inicial $t = 0$. Além disso, uma nova configuração inicial pode ser construída tomando o primeiro *oscillon* com velocidade negativa $u < 0$ e deslocando-o para $x > 0$ pelo valor $x_E(\alpha)$. O segundo *oscillon*, é dado pela reflexão espacial do primeiro.

4.3 ESPALHAMENTO DE CONFIGURAÇÕES SIMÉTRICAS

Começamos, por simplicidade, apresentando casos com $v = 0$ e $\alpha = 0$, variando somente a velocidade u . As Figs.(34a)-(34f) mostram seis desses casos. Os casos apresentados foram escolhidas para dar uma noção básica dos resultados típicos de espalhamento. Como podemos ver, esses resultados dependem fortemente da velocidade u dos *oscillons* colidindo, e eles saem da região de interação com velocidade aproximadamente igual àquela com que entraram. As estruturas formadas pelo campo que emergem da região da interação são significativamente menos regulares quando as velocidades iniciais dos *oscillons* são pequenas. Uma diferença fundamental entre os diagramas é visível na sua região central, onde podemos ver radiação que aparece em forma de jatos. Com algum cuidado, podemos

perceber que a radiação contém certas estruturas similares à *oscillons*. Note também que para velocidades u pequenas ($u \lesssim 0,8$) os *oscillons* que emergem tem aspecto de *oscillons* perturbados e suas bordas irregulares emitem estruturas semelhantes à *oscillons* (em geral também perturbados). A presença de radiação no processo de espalhamento reflete o caráter não-integrável do modelo de *signum*-Gordon.

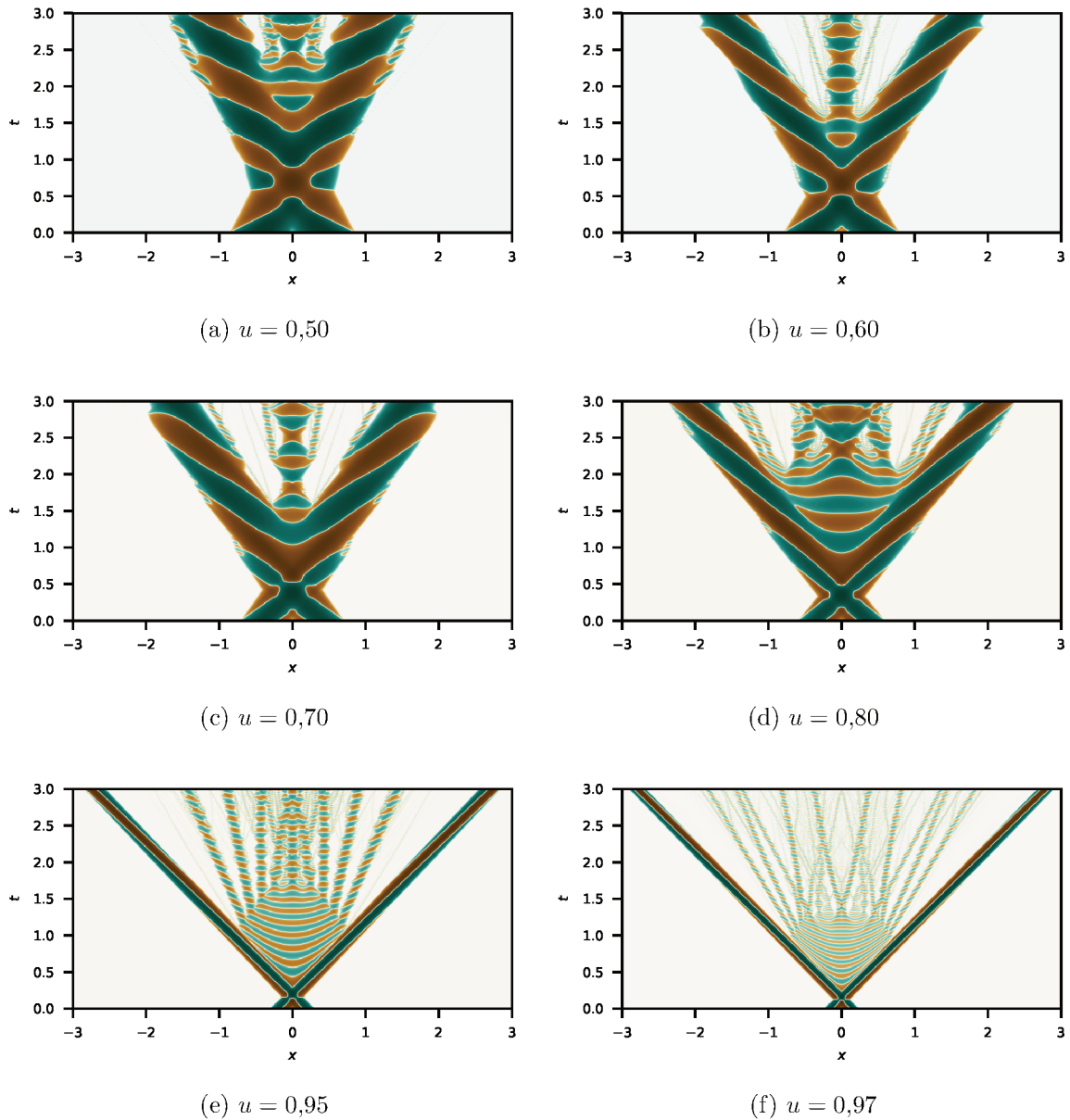


Figura 34 – Espalhamento de *oscillons* com configuração inicial simétrica para diversos valores de u . Aqui são usados para a fase o valor $\alpha = 0$ e para a velocidade de movimento da borda $v = 0$.

Na Fig. (35) apresentamos resultados para $u = 0,93$ e $v = 0$ fixos, e quatro valores do parâmetro α : $\alpha = 0$, $\alpha = 0,25$, $\alpha = 0,84$ e $\alpha = 0,93$. Essas figuras indicam que, de fato, a fase inicial é um parâmetro relevante no processo de espalhamento, já que a forma dos jatos em cada uma é consideravelmente diferente da outra. Isso mostra que o resultado do

processo de espalhamento é muito sensível ao valor da fase α .

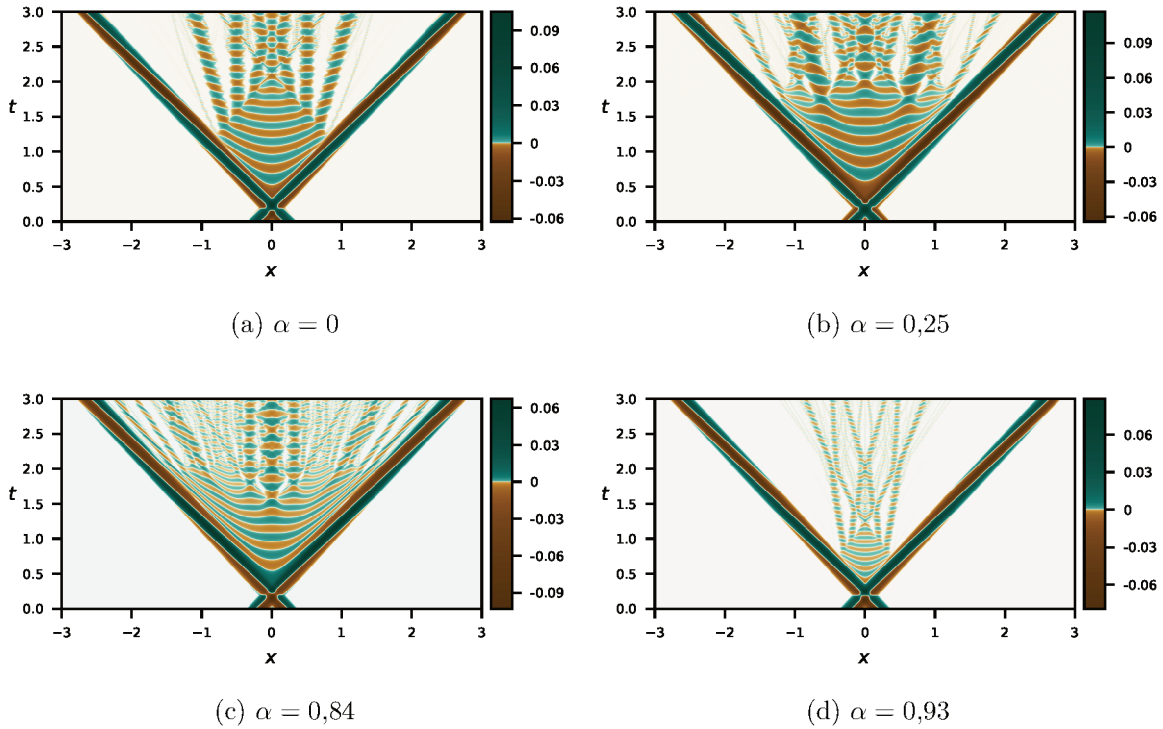


Figura 35 – Espalhamento de *oscillons* com configuração inicial simétrica para diversos valores de α , com $u = 0,93$ e $v = 0$.

Olhando para as figuras Fig. (34) e Fig. (35) notamos que no primeiro estágio do espalhamento os *oscillons* interagentes existem em um suporte que encolhe do seu tamanho inicial $2L$ até um certo tamanho mínimo $2L_{min}$, em que $L = x_D(\alpha) - x_L(\alpha)$ é o tamanho do *oscillon* no referencial de laboratório. Nesse caso, $L = \sqrt{1 - u^2}$. Esse processo ocorre durante um certo tempo t_s . Na parte superior da Fig.(31)(a) marcamos o tempo t_s e suporte inicial do oscillon com $v = 0$. Para $t > t_s$ nós observamos dois *oscillons* principais emergindo e o aparecimento de ondas de energia, às quais chamamos radiação. Para avaliar o tempo t_s nós assumimos² que a borda esquerda (direita) do *oscillon*, que se move com velocidade u ($-u$), se move livremente até que entre em contato com o cone de luz do evento $(0, 0)$. O evento P_s onde o cone de luz do futuro do evento $(0, 0)$ encontra a borda esquerda do oscillon localizado em $x < 0$ possui coordenadas (t_s, x_s) no referencial do laboratório. A borda esquerda do *oscillon* esquerdo é dada por $x = -\sqrt{1 - u^2} + ut$ e ela intersecta a linha do cone em $x = -t$ em

$$t_s = \sqrt{\frac{1 - u}{1 + u}} = -x_s.$$

Note que essas formulas são válidas exclusivamente para o caso com $v = 0$. Devido à simetria da configuração inicial nós vemos que o suporte mínimo dos *oscillons* espalhados

²Consequência da causalidade de operador de d'Alembert em 1+1 dimensões.

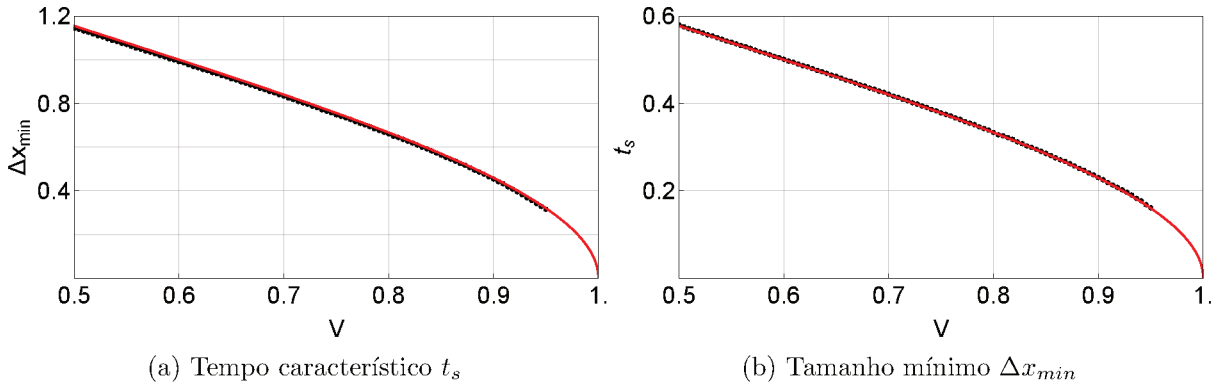


Figura 36 – Larguras mínimas para diferentes velocidades u . Os pontos representam os dados numéricos enquanto as curvas sólidas representam as expressões $t_s = \sqrt{\frac{1-u}{1+u}}$ e $x_{min} = 2t_s$.

pode ser estimado pela expressão $\Delta x_{min} = 2\sqrt{\frac{1-v}{1+v}}$. Na Fig.(36) nós mostramos dados numéricos (pontos) e curvas analíticas (linhas sólidas) representando o tempo característico de espalhamento t_s e o tamanho mínimo Δx_s da configuração em t_s .

4.3.0.1 Altas velocidades e formação de ondas de choque

Vamos olhar agora em mais detalhe para alguns dos nossos resultados numéricos. Para velocidades pequenas, a solução numérica é muito irregular. Olhando para as Figs. (34a)-(34c) podemos claramente ver a formação de um *oscillon* fortemente perturbado com centro em torno da origem. Esse *oscillon* é instável e irradia *oscillons* menores. Essa situação muda para altas velocidades, para as quais a solução numérica consiste de padrões regulares. Um exemplo de solução do tipo é aquela apresentada na Fig. (34e), cuja solução foi obtida para o espalhamento de dois *oscillons* com fase inicial $\alpha = 0$ e velocidades $u = 0,93$ e $v = 0$. Um elemento muito característico da solução é a presença de ondas regulares que podem ser vistas na região em forma de losângo no diagrama de Minkowski das Figs. (35a) e (35d). Essas ondas emergem logo após a colisão e, logo, decaem em uma sequência de estruturas semelhantes à *oscillons*. Ocorre que essas ondas podem ser entendidas em termos de soluções conhecidas chamadas *ondas-de-choque*, que são soluções exatas do modelo de *signum*-Gordon, publicados em [18].

A onda de choque em 1+1 dimensões é uma classe particular de soluções do modelo de *signum*-Gordon, com duas discontinuidades no valor do campo que viajam com velocidade da luz. Aqui, no entanto, nós não observamos tais frentes de onda devido ao fato de que elas são produzidas entre dois *oscillons* que se movem com velocidade sub-luminal. O colapso da onda sugere, em parte, que nossas soluções numéricas são apenas boas aproximações da onda de choque exata, que se propaga sem colapsar para tempos arbitrários $t > 0$.

Nós checamos a hipótese acerca da natureza da solução de onda de choque através de uma comparação dos zeros da solução analítica com os zeros da simulação. De acordo com [18], as soluções de onda de choque são uma classe das soluções de *signum*-Gordon dadas por $\phi(t, x) = \theta(-z)W(z)$, em que $z = \frac{1}{4}(x^2 - t^2)$. A função $W(z)$ obedece a equação ordinária $xW''(z) + W'(z) = \text{sign}(W(z))$ e sua solução consiste de infinitas soluções parciais $W_k(z)$, $k \in \mathbb{Z}$ que se encontram nos pontos $-a_k$. Cada solução parcial satisfaz a equação $xW_k''(z) + W_k'(z) = (-1)^k$ e as condições $W_k(-a_k) = 0 = W_{k+1}(-a_k)$ e $W_k'(-a_k) = W_{k+1}'(-a_k)$. A solução parcial pode ser escrita na forma

$$W_k(z) = (-1)^k \left(z + a_k + b_k \ln \frac{|z|}{a_k} \right),$$

onde

$$\frac{b_{k+1}}{a_k} = 2 - \frac{b_k}{a_k} \quad \text{e} \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = 1 + \frac{b_{k+1}}{a_k} \ln \frac{a_{k+1}}{a_k}. \quad (4.15)$$

Note que, para evitar a singularidade da função logaritmo em $z = 0$, temos $b_0 = 0$. O primeiro zero a_0 é um parâmetro livre que determina os valores de todas outras constantes através das relações de recorrência (4.15). Em particular, $b_1 = 2a_0$. Definindo $\alpha_{k+1} := \frac{1}{2} \frac{b_{k+1}}{a_k}$ e $y_{k+1} := \frac{a_{k+1}}{a_k}$ temos essas relações na forma

$$\alpha_{k+1} = 1 - \frac{\alpha_k}{y_k} \quad \text{e} \quad y_{k+1} = 1 + 2\alpha_{k+1} \ln y_{k+1}. \quad (4.16)$$

Repare que $\alpha = 1$. Segue dessa relação que α_{k+1} é determinada por a_k e b_k . Resolvendo numericamente a segunda equação em (4.16) pode-se encontrar os y_k e, então, os b_{k+1} podem ser determinados. Os zeros do campo $\phi(t, x)$ são localizados nas hiperboles

$$x_k(t) = \pm \sqrt{t^2 - 4a_k}.$$

Com a forma analítica dos zeros, pudemos fazer o *fitting* dos dados numéricos apresentados na Fig. (37). É suficiente fitar a função $\sqrt{(t - t_0)^2 - 4a_0}$, na qual o tempo inicial t_0 é uma translação temporal para adequar os zeros ao espalhamento, já que no espalhamento a onda de choque tem início algum tempo depois de $t = 0$. Para melhorar a qualidade do *fitting* nós utilizamos dez curvas analíticas.

Neste trabalho revisamos apenas os resultados principais dessa parte da pesquisa. A revisão completa de todos os resultados obtidos durante o período do mestrado aumentaria significativamente o volume da dissertação sobrecarregando-a e prejudicando a leitura. Os demais resultados podem ser encontrados em dois artigos a ser publicados. Em particular, um deles tratará sobre a análise detalhada do problema de formação e decaimento de ondas de choque.

4.3.0.2 Comparação com quase-ondas de choque

A conjectura sobre o caráter da solução ondulatória nos levou a estudar os tipos de condições iniciais que reproduzem ondas de choque. Este assunto pôde ser abordado

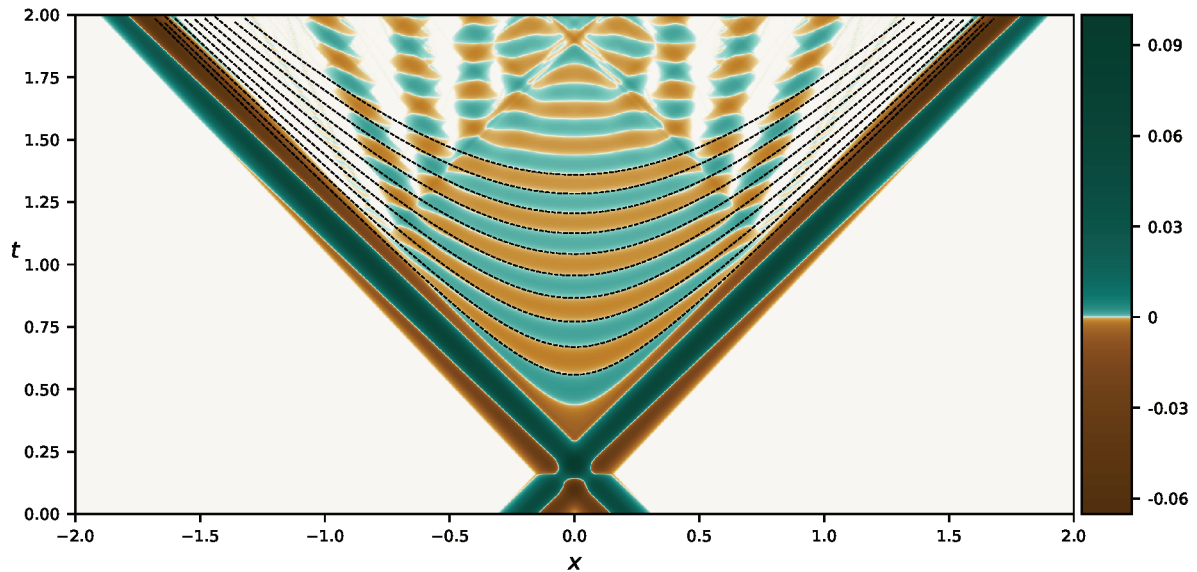


Figura 37 – Espalhamento de dois *oscillons* para configuração simétrica do campo. Os *oscillons* se movem com velocidade $u = 0,95$ no referencial do laboratório. A estrutura em forma de losângo no centro assemelha-se à solução de ondas de choque. Os primeiros dez zeros desta solução foram obtidos através de *fitting* resultando em $a_0 = 0,00541$ e $t_0 = 0,282$ e são mostrados nas linhas pontilhadas.

parcialmente de forma analítica e levou a resultados que deram origem à um artigo que encontra-se em fase de preparação. Aqui vamos apenas comentar sobre os pontos principais.

Ao analisar as condições iniciais que levam à onda de choque exata, chegamos à conclusão de que os valores do campo no instante inicial devem ser nulos em todo o espaço, e a derivada temporal do campo deve ser proporcional à delta de Dirac. Tal configuração não pode ser abordada numericamente sem uma regularização do perfil das derivadas temporais. Além disso, existe outra razão para se considerar tal regularização. A onda de choque exata possui descontinuidade do campo na superfície da frente de onda (cone de luz). Isto leva à um valor infinito de energia do gradiente. Ou seja, tal configuração não pode ser física.

Uma das maneiras de “suavizar” a configuração inicial é substituir a $\delta(x)$ por alguma função não-singular. Existem varias funções $\delta_\epsilon(x)$ que tendem à delta de Dirac quando $\epsilon \rightarrow 0$. Este limite entende-se como um limite fraco, isto é,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta_\epsilon(x) \varphi(x) = \varphi(0) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x) \varphi(x),$$

em que $\varphi(x)$ é uma função de prova. Por exemplo, podemos adotar a função Gaussiana

$$\delta_\epsilon(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\epsilon}} e^{-\frac{x^2}{4\epsilon}} \quad (4.17)$$

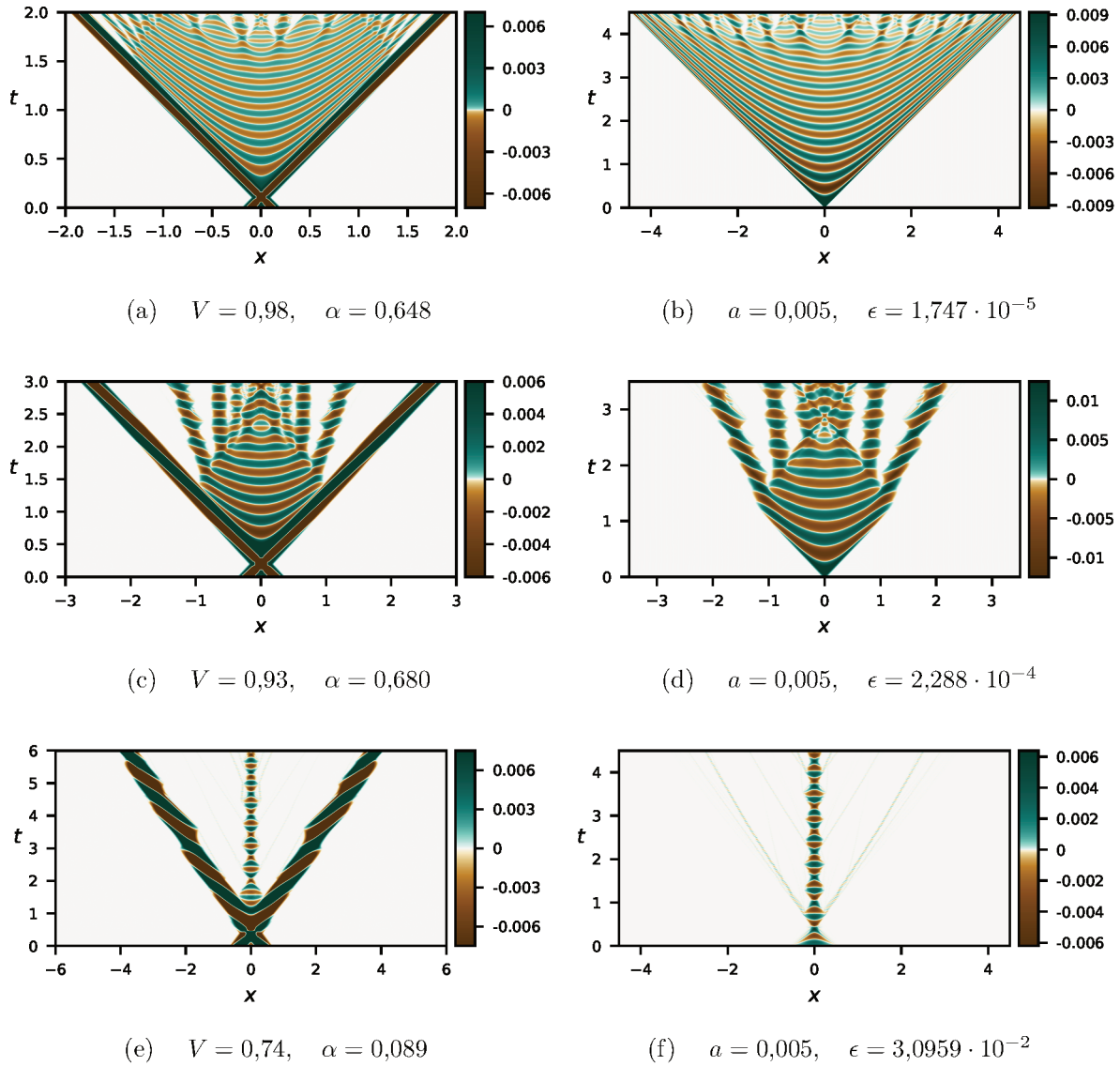


Figura 38 – Espalhamento de *oscillons* simétricos (esquerda) e a evolução de dados iniciais com $\delta_\epsilon(x)$ (direita).

ou uma função triangular com suporte compacto³

$$\delta_\epsilon(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[(2\sqrt{\pi\epsilon} + x)\theta(2\sqrt{\pi\epsilon} + x)\theta(-x) + (2\sqrt{\pi\epsilon} - x)\theta(2\sqrt{\pi\epsilon} - x)\theta(x) \right]. \quad (4.18)$$

As funções (4.17) e (4.18) satisfazem

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta_\epsilon(x) = 1, \quad \delta_\epsilon(0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\epsilon}}.$$

A configuração inicial para quase-ondas de choque toma forma

$$\phi(0, x) = 0, \quad \partial_t \phi(t, x)|_{t=0} = a \delta_\epsilon(x), \quad a = \text{const.} \quad (4.19)$$

³Esta função é bastante útil porque, para o valor adequado de ϵ , ela permite recuperar o *oscillon* exato.

Na Fig. (38), comparamos a evolução dos dados iniciais (4.19) contra o espalhamento de dois *oscillons*. Apesar de as duas configurações não possuírem nenhuma relação direta, as ondas de radiação que aparecem em ambas tem marcante semelhança. Isto significa que deve existir uma universalidade nas ondas de choque que não está relacionada particularmente ao processo que gerou estas ondas (neste caso, o espalhamento de *oscillons*). Basta apenas que num instante apareça uma configuração de campo adequada para que elas se desenvolvam. Notamos, também, que quase-ondas de choque sempre colapsam (decaem) em uma série de *oscillons*. A razão para isto é que essas ondas não são exatas, já que possuem energia finita. Uma onda de choque exata requer energia infinita e, claramente, as configurações iniciais físicas, por mais aproximadas, não podem reproduzir tal solução por tempo indeterminado.

4.3.0.3 Ausência de radiação

Os resultados numéricos contém um caso muito interessante. Ocorre que algumas configurações iniciais simétricas evoluem de forma que o campo resultante contém apenas os *oscillons* principais, *i.e.* a quantidade de radiação gerada no processo é praticamente nula. Esse fenômeno foi observado no regime de altas velocidades ($u \gtrsim 0,8$), isto é, quando os dois *oscillons* que saem da região de interação tem forma regular. Dois exemplos dessa situação são mostrados nas Figs. (39a) e (39b). Eles representam o caso $u = 0,93$ e $v = 0$. A diferença básica entre as duas figuras é o valor da fase α , cuja diferença na configuração inicial é de $\Delta\alpha = 0,5$.

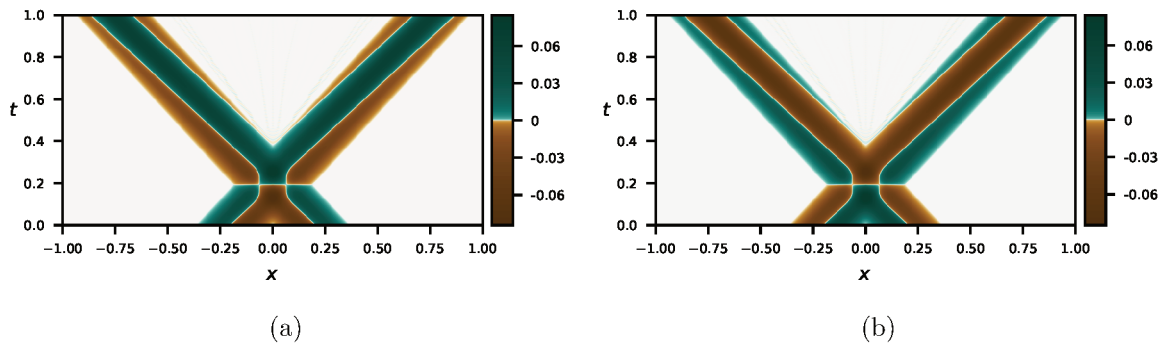


Figura 39 – Resultado do espalhamento de configuração inicial simétrica com $u = 0,93$ e $v = 0$. Os *oscillons* espalhados tem fases (a) $\alpha = 0,414$ e $\alpha = 0,914$.

O valor observado da diferença de fase pode ser justificado analiticamente comparando os zeros dos *oscillons* incidentes nessas figuras. A condição inicial e as superfícies mundo dos *oscillons* para $t < 0$ são mostrados na Fig. (40), na qual aparecem marcados os zeros dos *oscillons*. Esses zeros correspondem com segmentos de linhas-reta

$$x^{(n)} = \frac{t}{u} + B^{(n)}\alpha, \quad B^{(n)}(\alpha) \equiv \frac{\gamma}{2u} \left(2\alpha - \frac{n}{\gamma^2} \right) - x_D(\alpha) \quad (4.20)$$

em que $x_D(\alpha)$ é dado pelo resultado (4.13) e $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ enumera uma sequência infinita de zeros. Como $x_D(\alpha)$ no caso considerado $v = 0$ é uma função linear da fase α ,

então os coeficientes $B^{(n)}(\alpha)$ também são funções lineares de α . Todos os zeros viajam com a mesma velocidade igual a $1/V$. A única diferença é a localização das linhas retas dadas pelos coeficientes $B^{(n)}(\alpha)$. O conjunto de zeros descritos pelas linhas $x^{(n)}$ e $x^{(n+1)}$ podem coincidir para dois *oscillons* diferentes com o mesmo valor da velocidades u se as fases desses *oscillons* diferirem por um certo valor $\Delta\alpha$. A condição para isto acontecer tem forma $B^{(n+1)}(\alpha + \Delta\alpha) - B^{(n)}(\alpha) = 0$. Dai, concluímos que

$$\Delta\alpha = \frac{1}{2}.$$

Os zeros do campo localizados em $x^{(0)}$ na Fig. (39a) e $x^{(1)}$ na Fig. (39b) coincidem para $\Delta\alpha = \frac{1}{2}$. Além disso, configurações iniciais correspondendo com as fases α e $\alpha + \frac{1}{2}$ diferem apenas pelo sinal do campo, *i.e.* $\psi \rightarrow -\psi$ quando $\alpha \rightarrow \alpha + \frac{1}{2}$. O exemplo da Fig. (40) mostra a solução analítica correspondendo à $t < 0$ do caso mostrado na Fig. (39a). As linhas pontilhadas representam as trajetórias dos zeros.

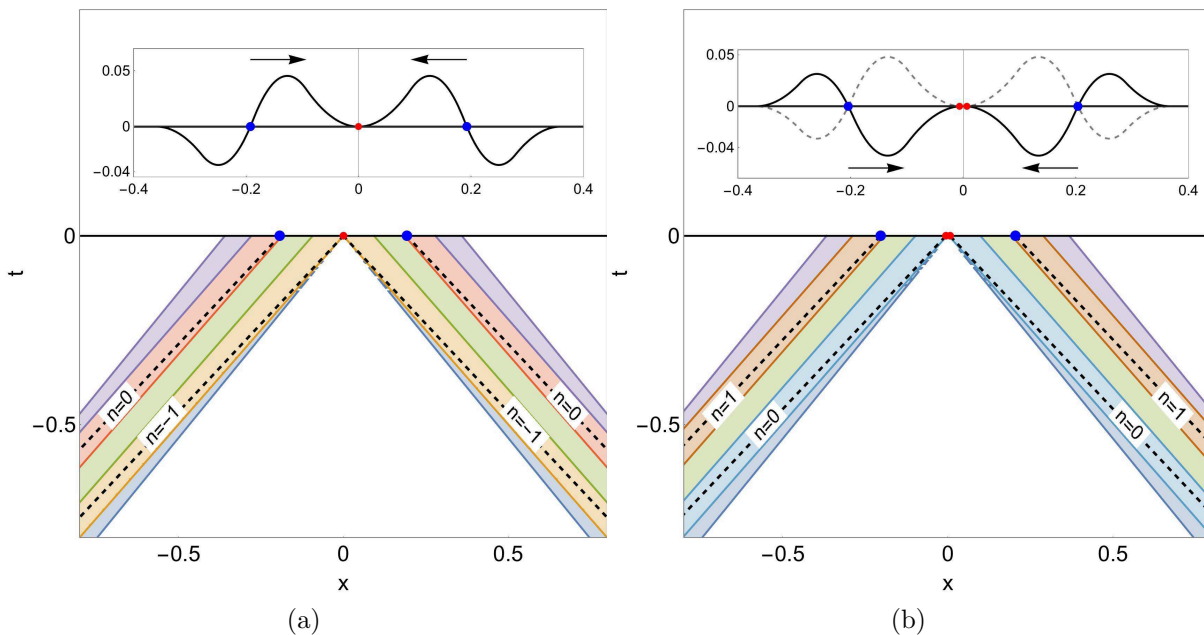


Figura 40 – Perfil inicial do campo de *signum*-Gordon e *worldsheets* dos *oscillons* incidentes para $u = 0,93$, $v = 0$ e (a) $\alpha = 0,414$, (b) $\alpha = 0,914$. Os zeros são marcados como linhas pontilhadas. Suas posições em $t = 0$ são dadas por (a) $B^{(-1)}(\alpha) = -0,006$, $B^{(0)}(\alpha) = -0,204$ e (b) $B^{(0)}(\alpha) = -0,006$, $B^{(1)}(\alpha) = -0,204$.

O caso apresentado na Fig. (39) não é único. Cálculos numéricos sugerem que no regime de altas velocidades u é possível fazer um ajuste fino dos parâmetros α e u (e também v) de forma que para $t > 0$ aparecem apenas dois *oscillons* dominantes. A ausência de radiação significa que o *oscillon* que sai tem essencialmente a mesma energia daquele que entrou. Nas situações mais comuns existe uma certa diferença de energia e essa diferença se manifesta na forma de inúmeras estruturas semelhantes à *oscillons*. Na Fig. (41) nós mostramos a energia radiada como uma fração da energia inicial do *oscillon*.

As regiões escuras na parte superior do diagrama representam parâmetros iniciais (α, u) tais que essa fração se aproxima de zero ($\sim 0,00001\%$).

Para $u \lesssim 0,8$ os *oscillons* que saem da região de interação são bastante irregulares; veja, por exemplo, a Fig. (34a). Nesses casos, as vizinhanças dos *oscillons* tem alguma forma de radiação e, portanto, determinar a energia (ou até mesmo o tamanho) de um *oscillon* se torna um problema técnico. As foliações que aparecem bem definidas na Fig. (41) para, por exemplo, $u < 0,7$ e $0,2 \lesssim \alpha \lesssim 0,6$, ocorrem em decorrência disso: as regiões do campo que são identificadas com radiação por vezes se confundem com os *oscillons* principais saindo da interação.

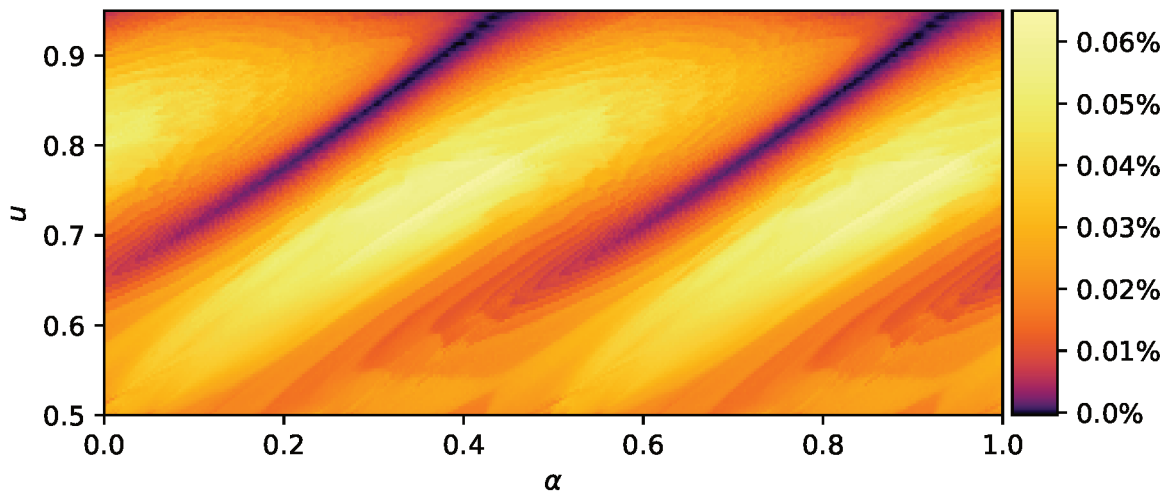


Figura 41 – Mapa de percentual de energia radiada após interação de *oscillons* com velocidade da borda $v = 0$. Cada ponto corresponde a uma interação dada por um par (α, u) . Para valores de u menores que $u = 5,5$ a radiação passa a se misturar com os *oscillons* resultantes e os cálculos numéricos perdem a confiabilidade.

4.3.1 *Oscillons* com $v \neq 0$

Nessa seção apresentamos alguns resultados do espalhamento de *oscillons* generalizados, *i.e.* *oscillons* que dependem de v – o parâmetro responsável pelo “balanço” do *oscillon*. Na Fig. (42) nós mostramos as superfícies-mundo de dois desses *oscillons*. A configuração em $t = 0$ é tomada como dados iniciais para a simulação numérica. Assim como no caso $v = 0$ nós podemos obter expressões para o tempo característico de espalhamento t_s e tamanho mínimo do suporte $\Delta x_{min} = 2|x_s|$ resolvendo as equações $x = -L(\alpha) + wt$ e $x = -t$, o que nos dá

$$t_s = \frac{L(\alpha)}{1+w} = -x_s \quad \text{onde} \quad w = \frac{u+v}{1+uv} \quad (4.21)$$

em que $L(\alpha) \equiv x_D(\alpha) - x_L(\alpha)$ é o tamanho do *oscillon* em $t = 0$. $x_D(\alpha)$ e $x_L(\alpha)$ são dados por (4.13) e (4.14) respectivamente.

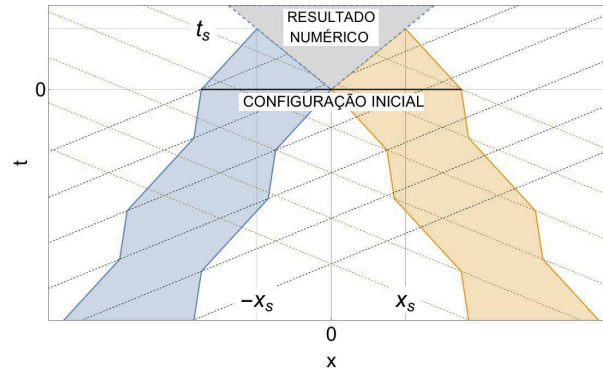


Figura 42 – Superfícies mundo de dois *oscillons* com $v \neq 0$ em direção à um encontro. Os *oscillons* não são não-perturbados dentro das duas regiões triangulares acima da linha $t = 0$. Os zeros do *oscillon* correspondem com intersecções de sua superfície mundo com uma família de linhas pontilhadas.

Uma questão interessante é como a substituição de $v = 0$ por $v \neq 0$ modifica os resultados do processo de espalhamento. Para ver o papel de parâmetro v no processo de espalhamento vamos tomar uma generalização $v \neq 0$ de configurações iniciais simétricas com $u = 0,93$ e $\alpha = 0,414$. Na Fig. (43a) foi apresentado o resultado de espalhamento para $v = 0,02$, que pode ser visto com uma pequena perturbação da configuração anterior. Podemos ver que mesmo um pequeno valor do parâmetro v é suficiente para que apereçam ondas de choque que então se transformam e decaem em *oscillons*. Isso mostra que o processo de espalhamento é um tanto sensível ao valor do parâmetro v . Para minimizar essa radiação podemos ajustar devidamente o parâmetro α . Encontramos que, nesse caso específico, a radiação desaparece para $\alpha = 0,420$ e $\alpha = 0,918$, respectivamente mostrados nas figuras (43b) e (43d).

Para valores maiores de v há muito mais radiação para os valores originais de α . Nas Figs. (44) e (45) mostramos os casos $v = 0,2$ e $v = 0,7$. Em ambos casos foram encontrados valores da fase α que minimizam a radiação.

Olhando com cuidado às configurações iniciais podemos ver que existe diferença significativa entre o caso $v = 0$ e o caso $v \neq 0$. Na Fig. (46) apresentamos as configurações iniciais que minimizam a radiação. Comparando a configuração $\psi(x; \alpha + \Delta\alpha)$, em que $\Delta\alpha$ é conhecido dos dados numéricos, com $\psi(x; \alpha)$ podemos ver que a configuração com $\alpha + \Delta\alpha$ não é igual ao negativo da configuração com α . A diferença entre $\psi(x; \alpha + \Delta\alpha)$ e $-\psi(x; \alpha)$ aumenta quando aumentamos o valor de v . Por outro lado, $\psi \rightarrow -\psi$ é uma simetria da equação de *signum*-Gordon, portanto se $\psi(x; \alpha)$ minimiza a radiação então $-\psi(x; \alpha)$ também minimiza. Então, nesse caso, para cada conjunto de parâmetros (u, v) existem quatro configurações iniciais $\pm\psi(x; \alpha)$ e $\pm\psi(x; \alpha + \Delta\alpha)$ que minimizam a radiação. Eles são claramente degenerados para $v = 0$, em qual caso somente existem duas configurações que minimizam a energia.

Na Fig. (47) mostramos um mapa da fração da energia inicial carregada pela

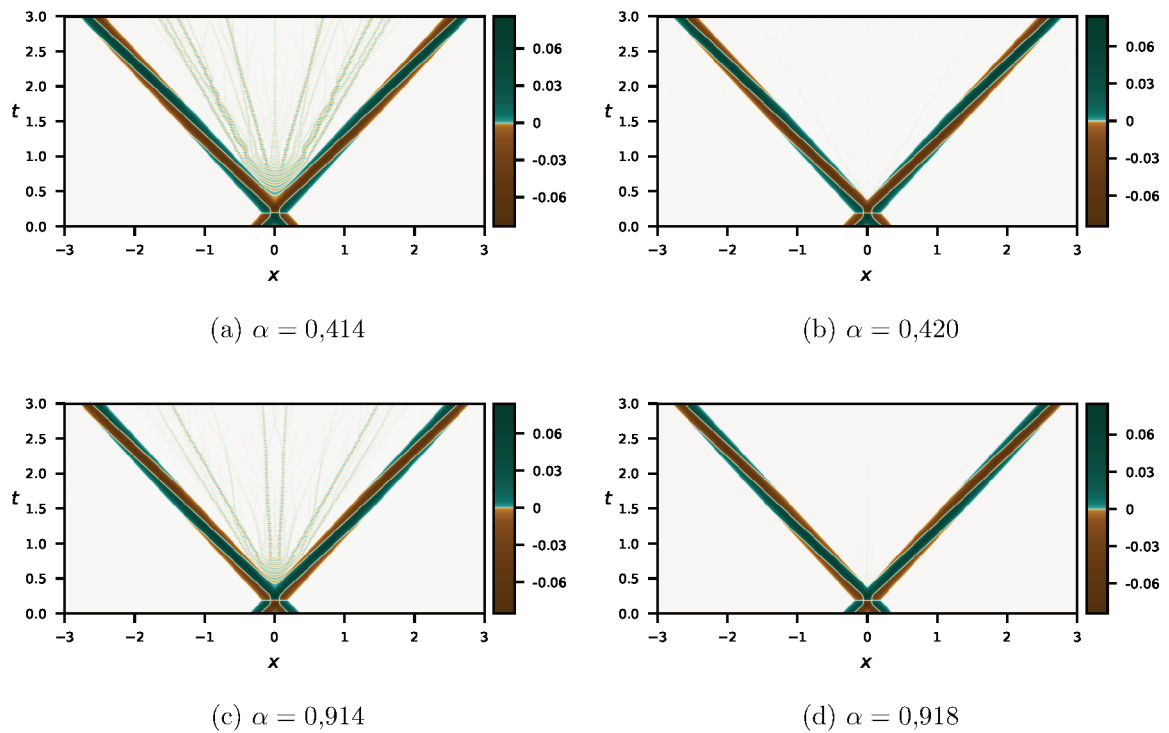


Figura 43 – Processo de espalhamento para configuração inicial simétrica contendo *oscillons* com velocidade $u = 0,93$, velocidade da borda $v = 0,02$ e diferentes fases α .

radiação do sistema. A figura foi obtida para $v = 0.45$. As regiões escuras, correspondendo a valores baixos de energia radiada, são menos regulares quando comparados com a Fig. (41).

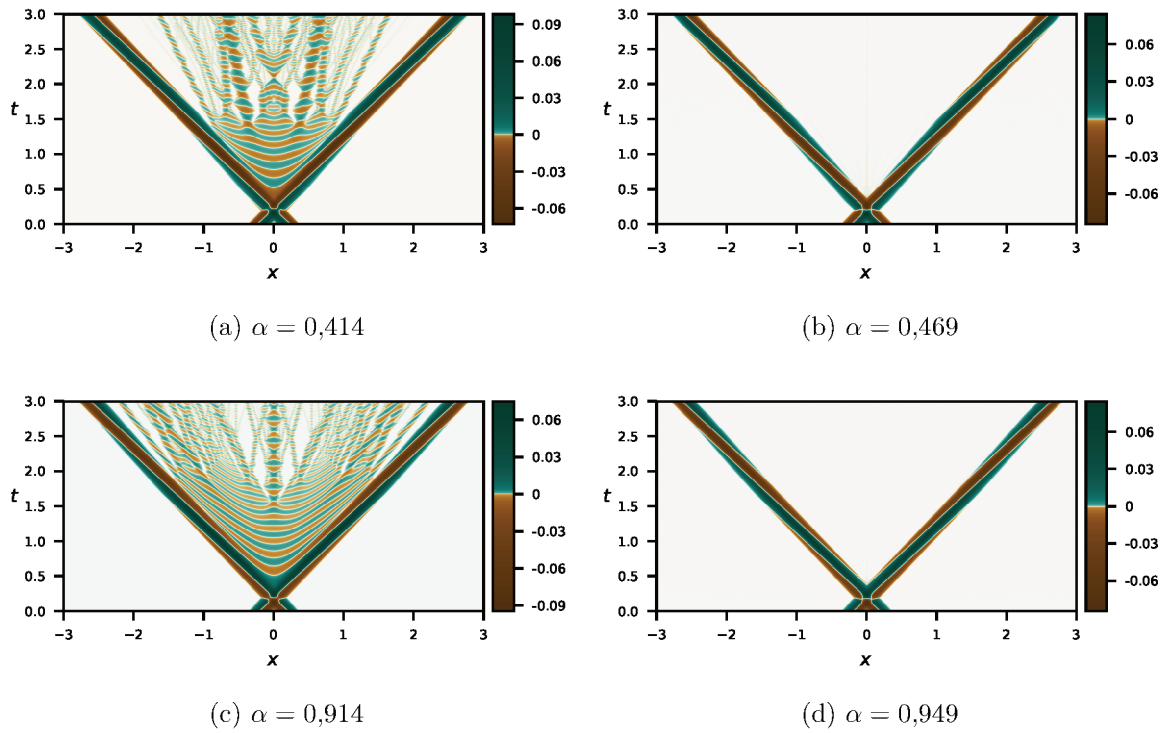


Figura 44 – Processo de espalhamento para configuração inicial simétrica contendo *oscillons* com velocidade $u = 0,93$, velocidade da borda $v = 0,2$ e diferentes fases α .

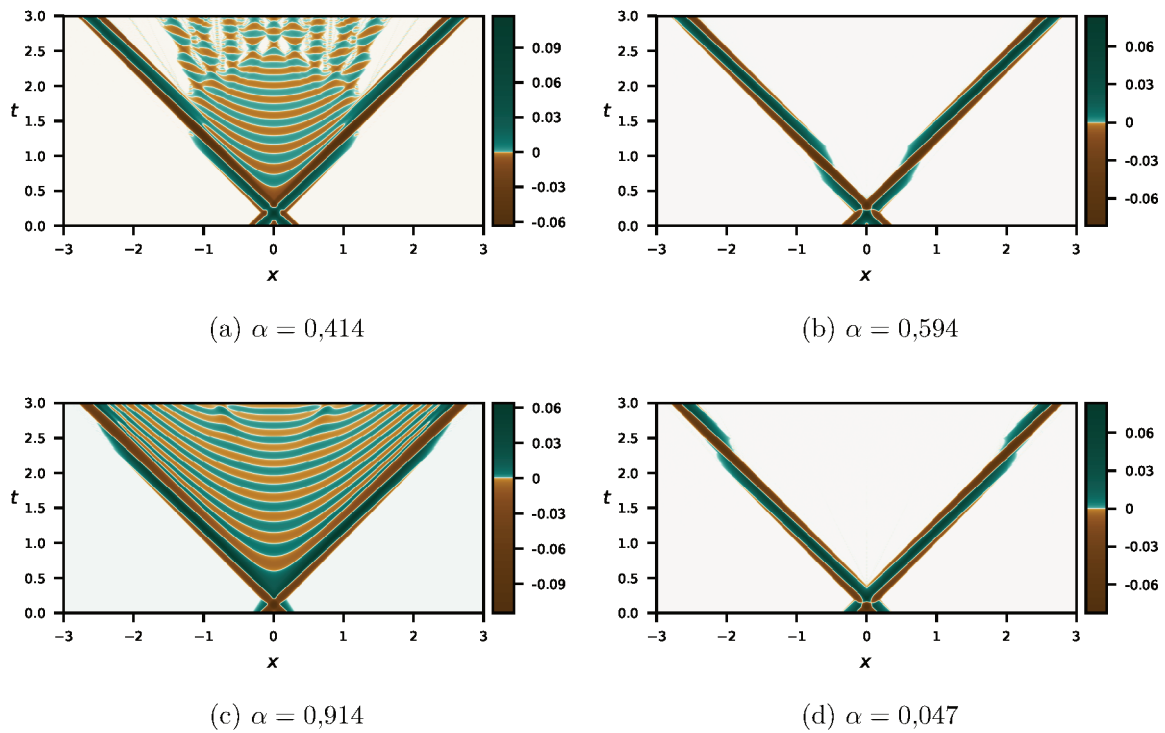


Figura 45 – Processo de espalhamento para configuração inicial simétrica contendo *oscillons* com velocidade $u = 0,93$, velocidade da borda $v = 0,7$ e diferentes fases α .

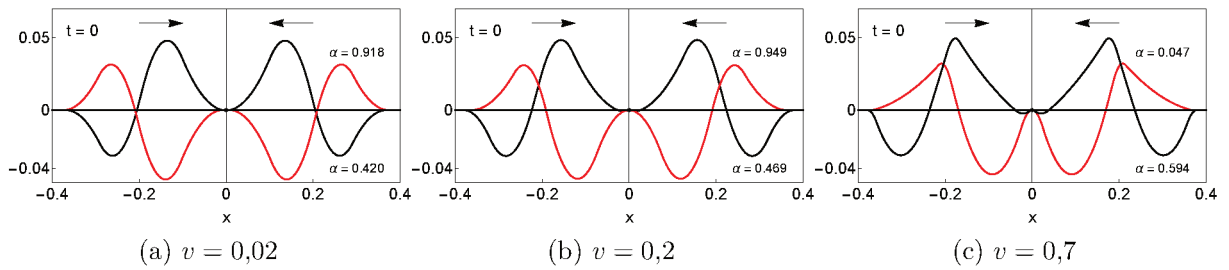


Figura 46 – Configurações iniciais que minimizam a radiação para $u = 0.93$.

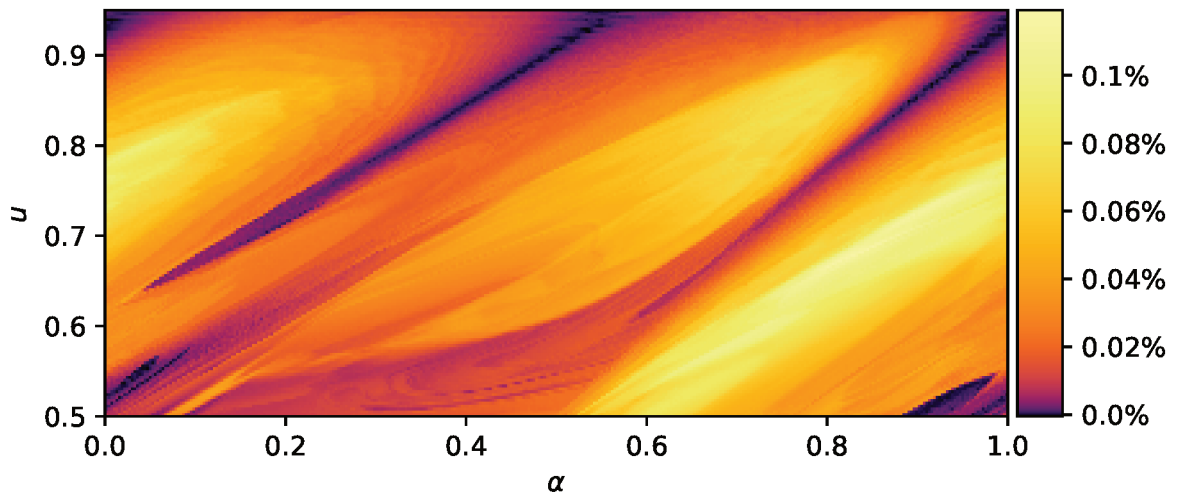


Figura 47 – Fração da energia total da configuração inicial levada pela radiação para $v = 0.45$.

4.4 ESPALHAMENTO DE CONFIGURAÇÕES ANTI-SIMÉTRICAS

Nesta seção iremos apresentar alguns resultados numéricos do espalhamento de dois *oscillons* que formam uma configuração inicial anti-simétrica no campo de *signum*-Gordon. Escolhemos dados iniciais anti-simétricos para tratarmos primeiro porque o resultado de espalhar *oscillons* em tais casos é relativamente simples quando comparado com resultados obtidos para configurações simétricas. O fato de que a configuração inicial é anti-simétrica implica que

$$\psi(t, x; v, u)|_{x=0} = 0 \quad (4.22)$$

deve ser válido para qualquer instante de tempo t . Essa condição expressa o desaparecimento da força total exercida em um grau de liberdade em $x = 0$ (por exemplo um pêndulo na realização mecânica do modelo). Em outras palavras, o único efeito da interação entre o *oscillon* da direita e o da esquerda é fixar o valor do campo escalar $\psi = 0$ em $x = 0$. Assim, a evolução do sistema nas regiões $x < 0$ e $x > 0$ efetivamente se separa em dois problemas independentes contendo um *oscillon* inicial e (4.22) pode ser interpretada como uma condição de contorno.

No nosso estudo numérico nós evoluímos uma configuração anti-simétrica sem

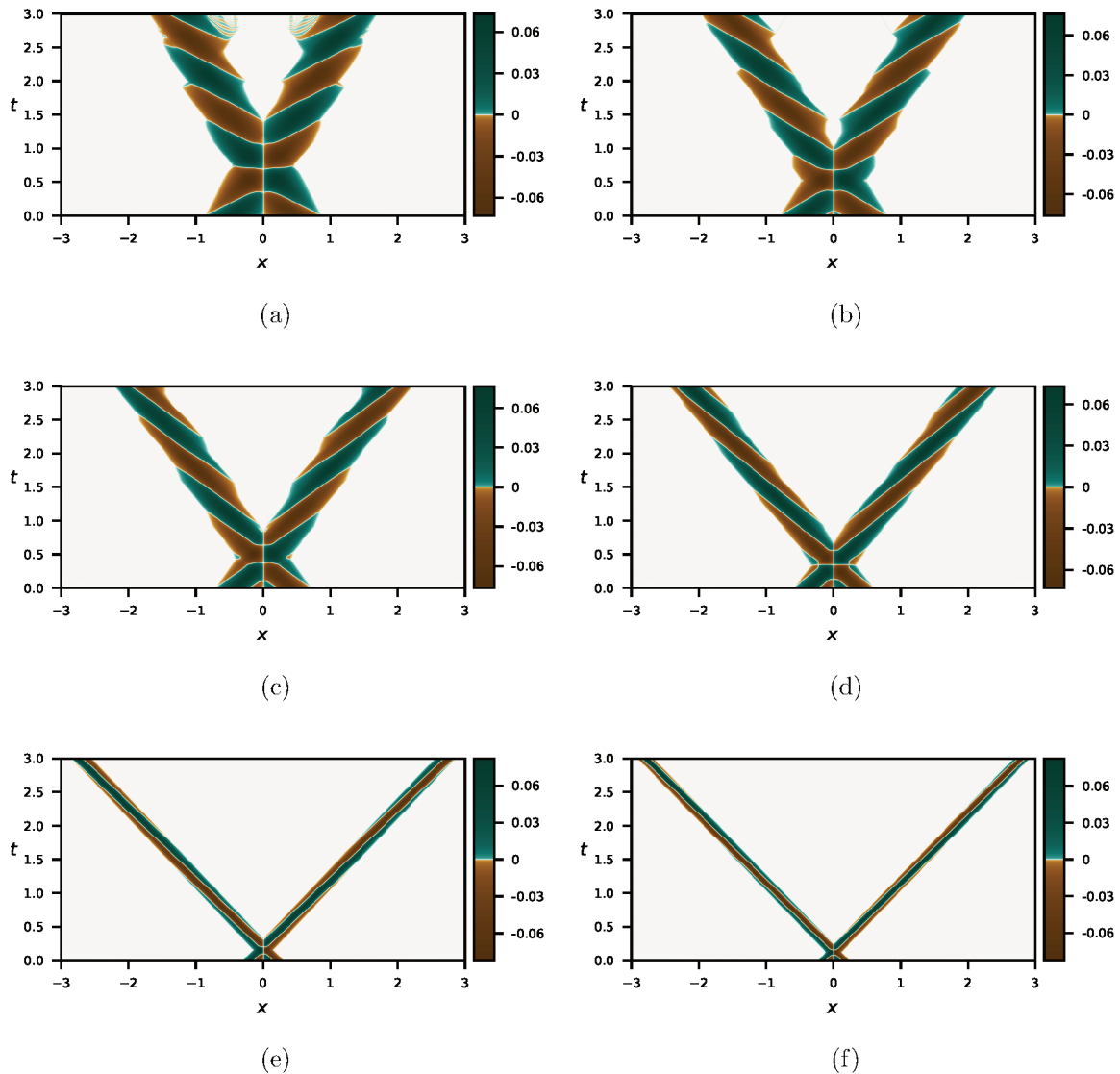


Figura 48 – O espalhamento de *oscillons* (configuração anti-simétrica) em dependência de sua velocidade inicial u . A configuração inicial contém *oscillons* com fase $\alpha = 0$ e nenhum movimento de *zig-zag* da borda.

impor a condição (4.22). Olhando para os resultados apresentados na Fig. (48) podemos ver claramente que essa condição é satisfeita. Ela se manifesta na presença de um segmento branco vertical em $x = 0$. Outra observação importante é a ausência de radiação na região central do diagrama, independente do valor de velocidade inicial dos *oscillons*. As fontes de radiação geradas nesse processo são bordas irregulares dos dois *oscillons* que saem da região de interação, ver Fig. (48a). Pode-se notar que irregularidades da borda aparecem com maior intensidade para velocidades u baixas dos *oscillons* incidentes do que para velocidades altas. Além disso, apesar de os *oscillons* que saem da região de interação serem irregulares, eles geram bem menos radiação do que seria esperado para *oscillons* fortemente perturbados. De fato, esses *oscillons* com bordas irregulares pertencem à uma classe ainda mais geral de *oscillons*, caracterizada pelo movimento não uniforme (acelerado) da borda.

Este assunto não será desenvolvido nesta dissertação. Maiores detalhes encontram-se em artigo a ser publicado [35].

Outra questão interessante é relacionada com a dependência que o processo de espalhamento tem da fase α da configuração inicial. Na Fig. (49) mostramos o resultado do espalhamento para $u = 0,8$ e quatro valores da fase. As figuras mostram evoluções qualitativamente similares para diversos valores de α .

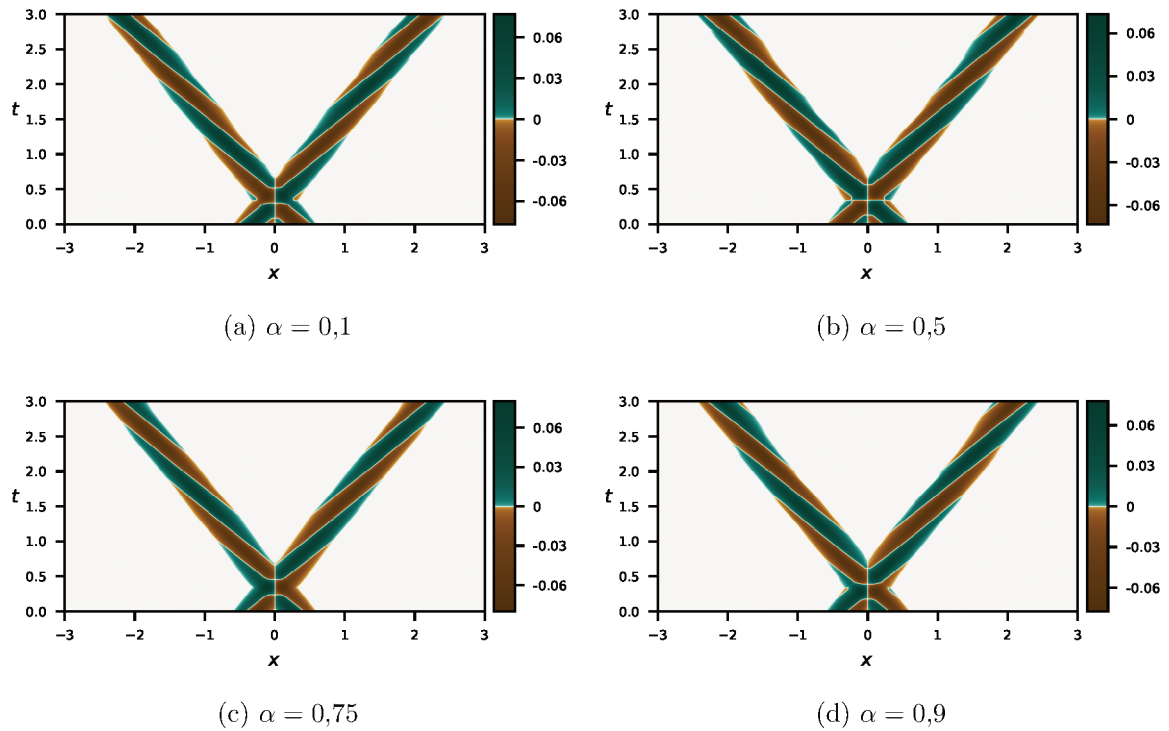


Figura 49 – Espalhamento de *oscillons* (configuração anti-simétrica) com dependência na fase *alpha*. A configuração inicial contém *oscillons* com velocidade $u = 0,8$ e nenhum movimento de *zig-zag* da borda.

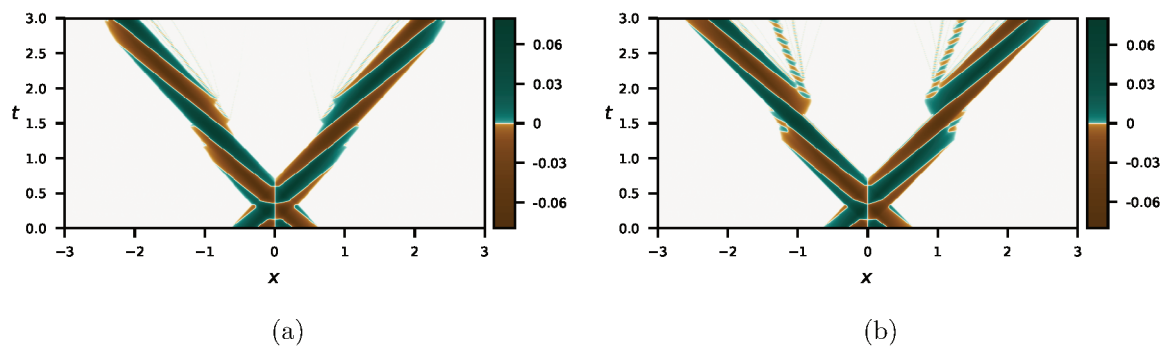


Figura 50 – Espalhamento de *oscillons* (configuração anti-simétrica) com dependência no parâmetro v . A configuração inicial contém *oscillons* com velocidade $u = 0,8$ e $\alpha = 0,82$.

Outro parâmetro do qual os *oscillons* incidentes dependem é a velocidade v da suas bordas no referencial de repouso. Cálculos numéricos mostram que irregularidades nas bordas dos dois *oscillons* que saem da região da interação crescem quando aumentamos o valor do parâmetro v . Na Fig. (50) nós mostramos os resultados do espalhamento de configurações anti-simétricas dos *oscillons* com velocidade $u = 0,8$, fase $\alpha = 0$ e velocidade da borda $v = 0,47$ e $v = 0,82$. As figuras mostram que quando as bordas dos *oscillons* que saem da região de interação se tornam mais irregulares, a quantidade de radiação emitida dessas bordas aumenta.

É notável que a radiação gerada no processo de espalhamento dos *oscillons* com configuração anti-simétrica é emitida apenas das irregularidades das bordas. Esses *oscillons* podem ser interpretados como *oscillons* exatos fortemente perturbados. O seu excedente de energia é convertido em pequenos *oscillons* que são ejetados das irregularidades.

5 ESPECTRO DE RADIAÇÃO DO MODELO *SIGNUM*-GORDON

Olhando para os resultados de nossas simulações numéricas nós vemos que a radiação do modelo de *signum*-Gordon é dominada por estruturas que oscilam parecidas com *oscillons* em movimento. De fato, a produção de *oscillons* pequenos durante a evolução dos *oscillons* perturbados foi conjecturada nas seção de considerações de [19]. Essa conjectura foi motivada pela simetria por dilatação da equação de *signum*-Gordon. Seja $\lambda > 0$ um numero real e $\phi_{(1)}(t, x)$ uma solução da equação de *signum*-Gordon. A simetria por escala significa que

$$\phi_{(\lambda)}(t, x) := \lambda^2 \phi_{(1)}\left(\frac{t}{\lambda}, \frac{x}{\lambda}\right) \quad (5.1)$$

também é solução dessa equação. Olhando para a energia das soluções nós vemos que ela escala de acordo com

$$E[\phi_{(\lambda)}] = \lambda^3 E[\phi_{(1)}]$$

onde

$$E[\phi_{(1)}] := \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{1}{2} (\partial_t \phi_{(1)})^2 + \frac{1}{2} (\partial_x \phi_{(1)})^2 + |\phi_{(1)}| \right].$$

Em particular, o *oscillon* exato em um segmento $x \in [0, 1]$ tem energia $E[\phi_{(1)}] = \frac{1}{24}$. Note que *oscillons* generalizados com bordas com ou sem movimento (ou seja, para qualquer valor de velocidade da borda v) uniforme possuem exatamente a mesma energia.¹ A simetria por dilatação permite a existência *oscillons* compactos exatos com suporte arbitrariamente pequeno. Um conjunto de tais *oscillons* com suportes que não se sobrepõem constituem soluções multi-*oscillon*. Além disso, é possível aplicar um *boost* de Lorentz em cada um desses *oscillons* de maneira independente gerando outros *oscillons* e eles continuarão sendo soluções exatas até que colidam com outros *oscillons*.

Embora nós não esperemos que as oscilações que aparecem nas nossas simulações sejam *oscillons* exatos, podemos chamar eles de *quasi-oscillons*, já que a sua estabilidade e regularidade chamam à atenção. Estruturas menos regulares “decaem”, emitindo objetos que oscilam menores e mais regulares. Portanto, a emissão de *quasi-oscillons* parece ser um mecanismo físico que permite que *oscillons* fortemente perturbados se desfaçam do seu excedente de energia. Tais *quasi-oscillons* menores podem, ainda, emitir outros *oscillons* menores. Como eles tem algum momento linear, a colisão com outros *quasi-oscillons* é inevitável. Essas colisões são responsáveis pela produção de outros *quasi-oscillons*.

Note que a relação (5.1) pode ser aplicada em uma solução representando todo um processo de espalhamento. Certamente, não existe diferença qualitativa entre o espalha-

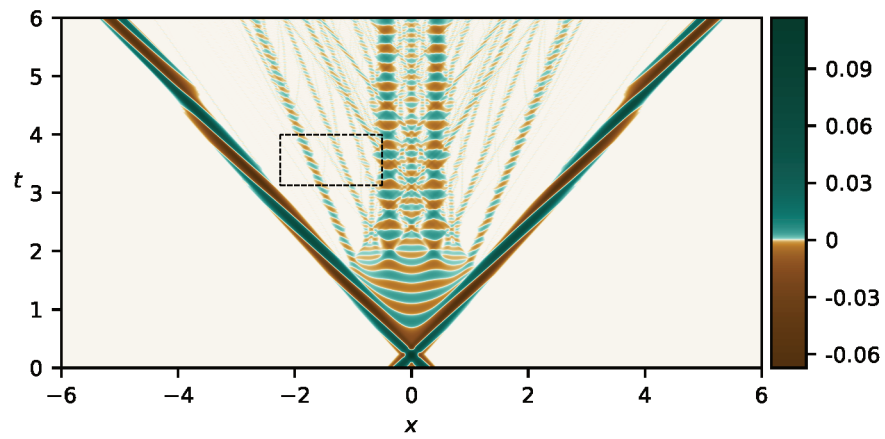
¹A origem desta degenerescência não foi ainda explicado e encontra-se como um problema em aberto.

mento envolvendo dois *oscillons* com $\lambda = 1$ e o espalhamento de *oscillons* menores com $\lambda \ll 1$. A repetição de algumas estruturas envolvendo *oscillons* em todas as escalas de tamanho no diagrama de espaço-tempo sugere uma natureza fractal da radiação.

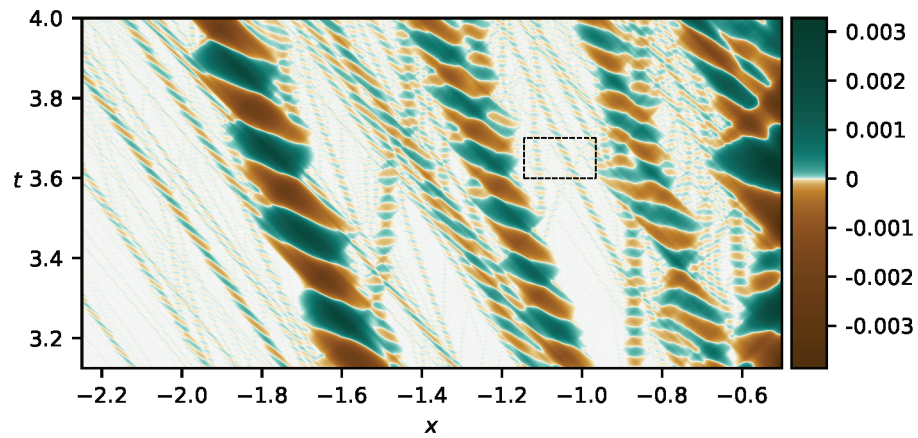
Para checar essa hipótese nós fazemos simulações de alta resolução do processo de espalhamento e então analisamos o diagrama de espaço-tempo representando o resultado. Na Fig. (51) nós mostramos o espalhamento de dois *oscillons* simétricos e a radiação na região central entre esses *oscillons*. Olhando em maior detalhe para a região dentro do retângulo da figura (51a) nós podemos ver na Fig. (51b) que existe uma quantidade grande de *oscillons* menores, invisíveis na imagem anterior. Escolhendo outra região regular dentro dessa figura, nós vemos, na Fig. (51c), uma série de outras estruturas menores oscilando. Esse resultado dá apoio à nossa idéia sobre a natureza fractal da radiação do modelo de *signum-Gordon*.

Finalmente, gostaríamos de comentar sobre dificuldades associadas com a integração numérica da equação de *signum-Gordon*. A principal dificuldade tem origem no fato de que a radiação contém *oscillons* perturbados de tamanho arbitrariamente pequeno. Certamente, *oscillons* menores que o tamanho dos domínios numéricos não podem aparecer na simulação. Isto sugere que para obter numericamente as estruturas menores deveríamos aumentar o número de pontos na grade. Realizamos muitas simulações deste tipo, mudando o número de pontos e comparando resultados. Os testes mostraram que *oscillons* muito pequenos são mais sensíveis ao número de pontos. Em alguns casos, mudar o número de pontos por um fator 2 resultou em mudanças grandes de trajetória e no aparecimento/desaparecimento de algumas estruturas, enquanto estruturas maiores se mantiveram estáveis nesse procedimento.

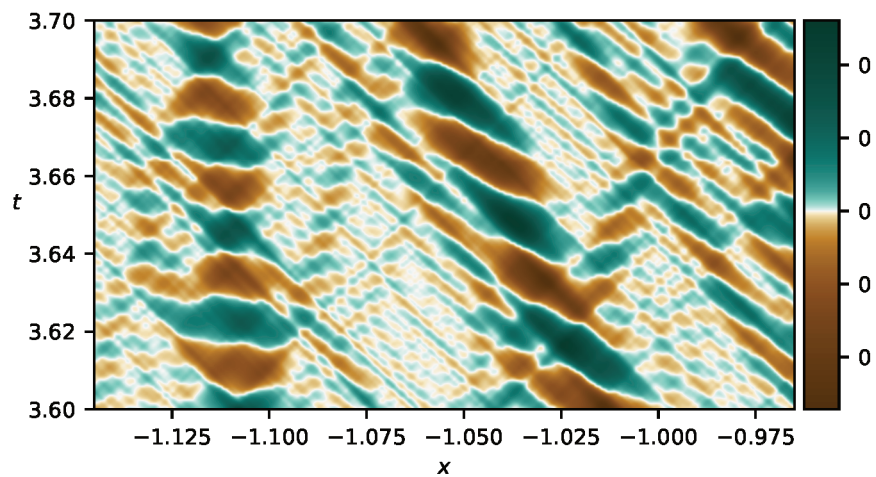
Acreditamos, também, que os *oscillons* menores podem ser mais sensíveis por serem mais perturbados e, além disso, o grau de perturbação é tal que poderíamos dizer que existe muito ruído no campo nessas escalas. Portanto, é possível que a sensibilidade dos *oscillons* de menor escala não tenha origem exclusiva na resolução da simulação. Determinar quanto desse ruído é de origem numérica e quanto dele é de origem perturbativa é um assunto que ainda exige investigações. De toda forma, isso é sugerido porque mesmo em simulações com muita resolução ($h \sim 6 \times 10^{-6}$), *oscillons* relativamente pequenos (de largura $\sim 1 \times 10^{-2}$, comparada com a largura dos *oscillons* incidentes $\sim \gamma(u) \sim 0,5$) que seriam bastante estáveis em simulações “limpas” (simulações em que eles não são perturbados e aparecem com a mesma resolução relativa que possuem na radiação) se tornam imprevisíveis. Portanto é possível que essa sensibilidade tenha origem não apenas na escala relativa desses *oscillons* com relação à resolução da simulação mas também do grau de perturbação à que os pequenos *oscillons* estão sujeitos em decorrência de um ruído de fundo que é, pelo menos em parte, natural da radiação. De toda forma, como cada pequena interação gera mais pequenos *oscillons*, pode-se fazer o caso de que



(a)



(b)



(c)

Figura 51 – Processo de espalhamento de dois *oscillons*. (b) *zoom* da região retangular marcada em (a); (c) *zoom* da região retangular marcada em (b).

o ruído em si é mais de natureza intrínseca do modelo do que numérica. Temos daí a hipótese de que, com tempo suficiente, o campo deve decair em ruído de forma que, em

última instância, *oscillons* são instáveis e sempre devem se desmanchar em radiação. Isso seria uma decorrência natural daquela conjectura de que *oscillons* perturbados produzem *oscillons* pequenos durante sua evolução apresentada na seção de considerações de [19].

Os *oscillons* pequenos emitidos como integrantes da radiação podem ser tratados como indicadores da sensibilidade da equação de *signum-Gordon* a condições iniciais. Dependendo de detalhes da perturbação um tal *oscillon* pode ou não ser emitido de um outro *oscillon* maior perturbado. Percebemos que a mudança no número de pontos da grade em vários casos é perturbação suficiente para mudar a forma (padrão) de estruturas pequenas da radiação. Um problema similar foi encontrado em simulações de um tipo especial de soluções auto-similares com um número infinito de zeros em um segmento finito. Nesse caso a solução numérica e a analítica divergem após pouco tempo de simulação. Nas regiões dominadas por radiação, o campo oscilla muito rapidamente no tempo e no espaço, o que gera um grande acúmulo (local) de erro numérico. Uma forma análoga de se colocar isso é pensarmos que a escala de tempo muda entre *oscillons* que vivem em escalas de tamanho diferentes, e *oscillons* pequenos, portanto, acumulam (e geram) erro numérico tanto mais rapidamente quanto menor for sua escala.

Por outro lado, nossas simulações de *oscillons* exatos não levaram à instabilidade visível dentro de intervalos de tempo correspondendo com muitos períodos de oscilação. As simulações de ondas de choque exatas foram bastante consistentes com soluções analíticas.

Concluimos que nas regiões dominadas por radiação as soluções do modelo são muito sensíveis às condições iniciais. Em uma mesma simulação podem aparecer regiões nas quais o erro numérico cresce devagar e outras regiões nas quais ele cresce muito rápido. Em geral, a oscilação relativamente lenta das estruturas grandes e regulares faz com que elas acumulem pouco erro, enquanto as regiões com radiação, por motivo análogo, são maior fonte de erro numérico. Além disso, a sensibilidade do modelo de *signum-Gordon* à condições iniciais sugere que ele pode compartilhar algumas propriedades com sistemas caóticos. Esta propriedade pode ser a principal dificuldade em gerar fractais de alta resolução.

6 CONCLUSÕES

Neste trabalho apresentamos o modelo de *signum*-Gordon como um caso limite de modelos com potencial não-diferenciável. O objetivo principal era um estudo sobre a dinâmica dos *oscillons*, suas interações e o papel desempenhado por eles no espectro de radiação do modelo. Além do modelo de *signum*-Gordon, estudamos também modelos mais gerais com potencial periódico. Os primeiros dois capítulos contêm a revisão de resultados publicados por outros autores, enquanto os capítulos 3-5 contêm em grande parte resultados originais.

Na primeira parte da nossa contribuição (capítulo 3), realizamos um estudo cuidadoso sobre a estabilidade de *oscillons* perturbados e descobrimos que essas estruturas, embora não sejam topológicas, mostram-se numericamente estáveis sob pequenas perturbações. Nossos estudos mostraram que um *oscillon* levemente perturbado se mantém por bastante tempo – em torno de 25 oscilações – sem emissão de nenhum tipo visível de radiação. Depois desse tempo, eles começam a emitir pequenos pacotes de energia (pequenos *oscillons*). A principal razão para o estudo numérico do *oscillon* exato foi testar os nossos procedimentos numéricos; para verificar e inferir se e até que ponto os erros numéricos inerentes poderiam destruir o *oscillon* pela indução de radiação. Descobrimos que a solução numérica começa a diferir significativamente da exata apenas para tempos maiores que $t = 50$. Quanto às demais perturbações, concluímos que, apesar dos pequenos erros numéricos (menores do que esperado), os *oscillons* levemente perturbados tem a tendência de emitirem o excesso de energia e através desse mecanismo e se aproximarem da solução exata. Nossas simulações foram feitas com o uso do método de Runge-Kutta de 4ª ordem, simulando o avanço temporal dos campos trabalhando com precisão dupla.

Na sequência realizamos o estudo de espalhamento dessas estruturas. Baseados em simetrias do modelo de *signum*-Gordon (invariância sob grupo de Poincaré em 1 + 1 dimensões, invariância por transformações de escala e invariância por troca de sinal global do campo), construímos condições iniciais de espalhamento $\Phi(x)$ e $\Phi_t(x)$ (referentes, respectivamente, ao valor inicial do campo de espalhamento e à sua derivada temporal) à partir da soma de diversos *oscillons* não sobrepostos. Cada *oscillon* foi parametrizado pelos diversos graus de liberdade provenientes das simetrias do modelo, além do valor da velocidade da sua borda v (ver seção (3.2)).

Neste trabalho nos restringimos ao espalhamento de $n = 2$ *oscillons*. Por razões da simplicidade, foram estudadas apenas configurações simétricas e antisimétricas com quatro parâmetros relevantes: velocidade da borda (a mesma para os dois *oscillons*), velocidade de movimento uniforme em referencial de laboratório, fase (a mesma para os

dois *oscillons*) e parâmetro discreto de reflexão de sinal de um *oscillon*. Em dependência deste último parâmetro, estudamos configurações simétricas e anti-simétricas. A análise numérica mostrou comportamento qualitativamente diferente entre as duas.

No caso de configurações simétricas, os processos são muito mais complexos e mais sensíveis aos parâmetros livres, em especial da velocidade e da fase. Observamos que as estruturas ondulatórias parecidos com ondas de choque desempenham papel importante na produção de uma grande quantidade de *oscillons*. Tais *oscillons* aparecem no processo de colapso de onda. As ondas de choque aproximadas geradas no processo de espalhamento de *oscillons* são muito parecidas com ondas geradas à partir de uma configuração inicial em que o campo se anula e existe apenas uma distribuição da derivada temporal do campo em forma de $\delta_\varepsilon(x)$. Isto sugere que logo após a interação, no centro entre os *oscillons* emergentes, aparece uma estrutura parecida com $\delta_\varepsilon(x)$ que dá origem à quase-onda de choque.

Observamos também que, para algumas configurações dos parâmetros livres, as configurações finais quase não contém radiação. O modelo é sabidamente não-integrável. No entanto o resultado do espalhamento, quando fazemos o ajuste específico dos parâmetros livres, lembra resultados de espalhamento em modelos integráveis. Este fenômeno requer futuras investigações que permitam entender a razão para tal comportamento destacado do campo de *signum*-Gordon. O estudo de várias configurações foi resumido na forma de um mapa de porcentual de energia radiada.

As configurações anti-simétricas, por outro lado, quase não geram radiação para um amplo espectro dos parâmetros livres. Ocasionalmente, os *oscillons* emergentes aparecem com bastante irregularidade e em especial as irregularidades das bordas deles funcionam como fontes da radiação. De toda forma, para este caso, não há quase-ondas de choque.

Finalmente, analisando o campo de radiação, percebemos que as estruturas emergentes possuem um padrão de auto-similaridade. Isso nos levou suspeitar que existe uma natureza fractal no espectro de radiação do modelo. A determinação razoavelmente precisa desta estrutura constitui um desafio enorme em cálculo numérico e é objeto de investigações futuras. Notamos que a radiação é muito sensível às condições iniciais e, além disso, é uma fonte relevante de erro numérico.

A análise numérica do espalhamento de *oscillons* nos permite concluir que *oscillons* (ou quase-*oscillons*) desempenham um papel fundamental na formação de radiação do modelo. Como eles existem em todas as escalas de energia e de comprimento, o estudo da radiação torna-se um grande desafio numérico.

Os resultados apresentados neste trabalho cobrem, em parte, todos os resultados obtidos durante o período de mestrado. Neste trabalho não desenvolvemos em detalhes o assunto de ondas de choque, que constitui conteúdo de um dos dois artigos em preparação.

Existe uma variedade de assuntos que podem ser estudados dando continuação ao estudo do modelo de *signum*-Gordon. Um deles seria a análise do modelo no caso de número maior de dimensões espaciais. Em particular, seria interessante estabelecer quais seriam (e se existem) generalizações no comportamento de *oscillons*, ondas de choque, etc. em (2+1) e (3+1) dimensões. Outra perspectiva interessante envolve a possibilidade de construção de um vortex compacto para um campo complexo com potencial apropriado não-diferenciável.

REFERÊNCIAS

- 1 RUBAKOV, V.; WILSON, S. S. Higgs mechanism. In: _____. Classical Theory of Gauge Fields. Princeton University Press, 2002. p. 105–126. ISBN 9780691059273. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/j.ctt7snx1.9>.
- 2 HIGGS, P. W. Broken symmetries and the masses of gauge bosons. Phys. Rev. Lett., American Physical Society, v. 13, p. 508–509, Oct 1964. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.13.508>.
- 3 HIGGS, P. W. Spontaneous symmetry breakdown without massless bosons. Phys. Rev., American Physical Society, v. 145, p. 1156–1163, May 1966. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.145.1156>.
- 4 LANDAU, L.; LIFSHITZ, E. Chapter vi - superconductivity. In: LANDAU, L.; LIFSHITZ, E. (Ed.). Electrodynamics of Continuous Media (Second Edition). Second edition. Amsterdam: Pergamon, 1984, (Course of Theoretical Physics, v. 8). p. 180 – 198. ISBN 978-0-08-030275-1. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780080302751500126>.
- 5 ABRIKOSOV, A. A. On the Magnetic properties of superconductors of the second group. Sov. Phys. JETP, v. 5, p. 1174–1182, 1957. [Zh. Eksp. Teor. Fiz.32,1442(1957)].
- 6 HOHENBERG, P. C.; KREKHOV, A. P. An introduction to the ginzburg-landau theory of phase transitions and nonequilibrium patterns. 2014.
- 7 GUTH, A. H. Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems. Phys. Rev. D, American Physical Society, v. 23, p. 347–356, Jan 1981. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.23.347>.
- 8 STAROBINSKY, A. A. A New Type of Isotropic Cosmological Models Without Singularity. Phys. Lett., B91, p. 99–102, 1980. [771(1980)].
- 9 LINDE, A. A new inflationary universe scenario: A possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems. Physics Letters B, v. 108, n. 6, p. 389 – 393, 1982. ISSN 0370-2693. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269382912199>.
- 10 SATO, K. Cosmological baryon-number domain structure and the first order phase transition of a vacuum. Physics Letters B, v. 99, n. 1, p. 66 – 70, 1981. ISSN 0370-2693. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269381908054>.
- 11 ALBRECHT, A.; STEINHARDT, P. J. Cosmology for grand unified theories with radiatively induced symmetry breaking. Phys. Rev. Lett., American Physical Society, v. 48, p. 1220–1223, Apr 1982. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.48.1220>.
- 12 LINDE, A. Chaotic inflation. Physics Letters B, v. 129, n. 3, p. 177 – 181, 1983. ISSN 0370-2693. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269383908377>.

- 13 TSUJIKAWA, S. Introductory review of cosmic inflation. In: 2nd Tah Poe School on Cosmology: Modern Cosmology Phitsanulok, Thailand, April 17-25, 2003. [S.l.: s.n.], 2003.
- 14 SHNIR, Y. M. Topological and Non-Topological Solitons in Scalar Field Theories. [S.l.]: Cambridge University Press, 2018. 105 – 126 p. (Cambridge Monographs on Mathematical Physics).
- 15 ARODZ, H. Topological compactons. Acta Phys. Polon., B33, p. 1241–1252, 2002.
- 16 ARODZ, H.; KLIMAS, P.; TYRANOWSKI, T. Signum-Gordon wave equation and its self-similar solutions. Acta Phys. Polon., B38, p. 3099–3118, 2007.
- 17 ARODZ, H.; KLIMAS, P. Chain of impacting pendulums as non-analytically perturbed sine-gordon system. Acta Physica Polonica B, v. 36, 02 2005.
- 18 ARODŹ, H.; KLIMAS, P.; TYRANOWSKI, T. Scaling, self-similar solutions and shock waves for v-shaped field potentials. Phys. Rev. E, American Physical Society, v. 73, p. 046609, Apr 2006. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.73.046609>.
- 19 ARODŹ, H.; KLIMAS, P.; TYRANOWSKI, T. Compact oscillons in the signum-gordon model. Phys. Rev. D, American Physical Society, v. 77, p. 047701, Feb 2008. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.77.047701>.
- 20 ARODŹ, H.; ŚWIERCZYŃSKI, Z. Swaying oscillons in the signum-gordon model. Phys. Rev. D, American Physical Society, v. 84, p. 067701, Sep 2011. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.84.067701>.
- 21 ŚWIERCZYŃSKI, Z. On the oscillons in the signum-gordon model. Journal of Nonlinear Mathematical Physics, Taylor & Francis, v. 24, n. 1, p. 20–28, 2017. Disponível em: <https://doi.org/10.1080/14029251.2016.1274112>.
- 22 ATIYAH, M. F. K-Theory. [S.l.]: Addison-Wesley, 1989. (Advanced book classics). ISBN 978-0-201-09394-0.
- 23 ARODZ, H.; KLIMAS, P. Chain of impacting pendulums as non-analytically perturbed sine-gordon system. Acta Physica Polonica B, v. 36, 02 2005.
- 24 KLIMAS, P. et al. Oscillons in a perturbed signum-gordon model. Journal of High Energy Physics, v. 2018, n. 4, p. 102, Apr 2018. ISSN 1029-8479. Disponível em: [https://doi.org/10.1007/JHEP04\(2018\)102](https://doi.org/10.1007/JHEP04(2018)102).
- 25 ARODŹ, H.; HADASZ, L. Lectures on Classical and Quantum Theory of Fields. [S.l.]: Springer, 2017. (Graduate Texts in Physics). ISBN 9783319556178, 9783319556192.
- 26 ADAM, C.; SANCHEZ-GUILLEN, J.; WERESZCZYNSKI, A. BPS submodels of the Skyrme model. Phys. Lett., B769, p. 362–367, 2017.
- 27 ADAM, C. et al. BPS sectors of the Skyrme model and their non-BPS extensions. Phys. Rev., D97, n. 3, p. 036002, 2018.
- 28 DERRICK, G. H. Comments on nonlinear wave equations as models for elementary particles. Journal of Mathematical Physics, v. 5, n. 9, p. 1252–1254, 1964. Disponível em: <https://doi.org/10.1063/1.1704233>.

- 29 HOOFT, G. A planar diagram theory for strong interactions. Nuclear Physics B, v. 72, n. 3, p. 461 – 473, 1974. ISSN 0550-3213. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321374901540>.
- 30 HOOFT, G. 't. A two-dimensional model for mesons. Nuclear Physics B, v. 75, n. 3, p. 461 – 470, 1974. ISSN 0550-3213. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321374900881>.
- 31 WITTEN, E. Baryons in the 1n expansion. Nuclear Physics B, v. 160, n. 1, p. 57 – 115, 1979. ISSN 0550-3213. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321379902323>.
- 32 ZAHED, I.; BROWN, G. The skyrme model. Physics Reports, v. 142, n. 1, p. 1 – 102, 1986. ISSN 0370-1573. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370157386901420>.
- 33 ADAM, C.; SANCHEZ-GUILLEN, J.; WERESZCZYNSKI, A. A Skyrme-type proposal for baryonic matter. Phys. Lett., B691, p. 105–110, 2010.
- 34 MAKHANKOV YURII P. RYBAKOV, V. I. S. V. G. The Skyrme Model: Fundamentals Methods Applications. In: . [S.l.]: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1993, (Springer Series in Nuclear and Particle Physics). cap. 1.4, p. 256. ISBN 978-3-642-84672-4.
- 35 HAHNE, F. M. et al. Scattering of compact oscillons. Unpublished. 2019.

Apêndices

APÊNDICE A – CONSIDERAÇÕES SOBRE CALCULO NUMÉRICO E ESTABILIDADE DAS SIMULAÇÕES

As nossas simulações foram feitas no espaço de posição do campo. A dimensão espacial é finita com largura L , e discretizada em N sítios de largura $h = L/N$. A integração é feita utilizando-se o método *Runge-Kutta* de 4ª ordem com passo de tempo tal que $h/\Delta t = 1/a$. Utilizamos $a = 0.1$.

A evolução temporal da equação de s-G, conforme discutido nas seções 3.3, 4.3 e 5, é sensível à perturbações nas condições iniciais. A sensibilidade é inversamente proporcional à escala das estruturas que desejamos observamos dentro do espaço de simulação. De forma geral, avaliamos a estabilidade e geração de erros numéricos de uma simulação comparando seu resultado com o resultado de simulações com resolução diferente.

Para as escalas que temos usado nas nossas simulações (em que a largura dos *oscillons* principais, no repouso, são de tamanho 1), pudemos ver que, a partir de certo valor de h os resultados passam a convergir suficientemente até um instante de tempo que depende das condições iniciais utilizadas. De maneira geral as simulações úteis ocorrem para $h \sim 10^{-4}$ embora, para alguns casos (em especial na seção 5 em que avaliamos algumas qualidades do espectro de radiação em pequenas escalas) tenhamos usado valores até $h \sim 10^{-6}$.

APÊNDICE B – DECOMPOSIÇÃO EM SUBMODELOS BPS

Estamos interessados em calcular $\mathcal{L}_2 = -\frac{1}{2}\text{Tr}(L_\mu L^\mu)$ e $\mathcal{L}_4 = \frac{1}{16}\text{Tr}([L_\mu, L_\nu]^2)$, onde $L_\mu = U^\dagger \partial_\mu U$ e

$$U \equiv e^{i\xi \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}} = \mathbb{1} \cos \xi + i \sin \xi \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}.$$

Considerando que

$$U^\dagger = \cos \xi - i \sin \xi \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \partial_\mu U = -\xi_\mu \sin \xi + i \xi_\mu \cos \xi \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n},$$

onde $\xi_\mu \equiv \partial_\mu \xi$, escrevemos

$$\begin{aligned} L_\mu &= U^\dagger \partial_\mu U \\ &= (\cos \xi - i \sin \xi \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n})(-\xi_\mu \sin \xi + i \xi_\mu \cos \xi \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} + i \sin \xi \boldsymbol{\tau} \cdot \partial_\mu \mathbf{n}) \end{aligned}$$

Após algumas manipulações, temos uma forma simplificada

$$L_\mu = \underbrace{i \xi_\mu (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})}_{a_\mu} + \underbrace{i \sin \xi \cos \xi (\boldsymbol{\sigma} \cdot \partial_\mu \mathbf{n})}_{b_\mu} + \underbrace{i \sin^2 \xi \boldsymbol{\sigma} \cdot (\partial_\mu \mathbf{n} \times \mathbf{n})}_{c_\mu}.$$

Tomando o traço de $L_\mu L^\mu$ temos o traço de combinações de a_μ , b_μ e c_μ

$$\begin{aligned} \text{Tr}(L_\mu L^\mu) &= \text{Tr}[(a_\mu + b_\mu + c_\mu)(a^\mu + b^\mu + c^\mu)] \\ &= \text{Tr}(a_\mu^2 + b_\mu^2 + c_\mu^2 + 2a_\mu b^\mu + 2a_\mu c^\mu + 2b_\mu c^\mu). \end{aligned}$$

Para calcular o valor desses termos, as seguintes identidades são uteis (estamos usando identidade das matrizes de Pauli $\sigma_i \sigma_j = \mathbb{1} \delta_{ij} + i \varepsilon_{ijk} \sigma_k$)

$$\begin{aligned} \text{Tr}[(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})^2] &= \text{Tr}[\sigma_i \sigma_j n^i n^j] = \text{Tr}[(\mathbb{1} \delta_{ij} + i \varepsilon_{ijk} \sigma_k) n^i n^j] \\ &= \text{Tr}(\mathbb{1}) \mathbf{n}^2 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Tr}[(\boldsymbol{\sigma} \cdot \partial_\mu \mathbf{n})^2] &= \text{Tr}[\sigma_i \sigma_j \partial_\mu n^i \partial^\mu n^j] \\ &= \text{Tr}[(\mathbb{1} \delta_{ij} + i \varepsilon_{ijk} \sigma_k) \partial_\mu n^i \partial^\mu n^j] \\ &= \text{Tr}[\mathbb{1}] (\partial_\mu \mathbf{n})^2 = 2(\partial_\mu \mathbf{n})^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Tr}[(\boldsymbol{\sigma} \cdot (\partial_\mu \mathbf{n} \times \mathbf{n}))^2] &= \text{Tr}[\varepsilon_{ijk} \sigma_i \partial_\mu n^j n^k \varepsilon_{lmn} \sigma_l \partial^\mu n^m n^n] \\ &= \text{Tr}[(\mathbb{1} \delta^{il} + i \varepsilon_{ilo} \sigma_o) \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmn} \partial_\mu n^j \partial^\mu n^m n^k n^n] \\ &= \underbrace{\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imn}}_{\delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}} \partial_\mu n^j \partial^\mu n^m n^k n^n \text{Tr} \mathbb{1} + (\dots) \text{Tr} \boldsymbol{\sigma}_o \\ &= 2 \partial_\mu n^j \partial^\mu n^j n^k n^k - 2 \partial_\mu n^j \partial^\mu n^k n^k n^j \\ &= 2 [(\partial_\mu \mathbf{n})^2 \underbrace{\mathbf{n}^2}_{\equiv 1} - (\underbrace{\partial_\mu \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}}_{=\frac{1}{2} \partial_\mu \mathbf{n}^2 = 0})^2] \\ &= 2(\partial_\mu \mathbf{n})^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \partial^\mu \mathbf{n})] &= \text{Tr}(\sigma_i n^i \sigma_j \partial^\mu n^j) = \text{Tr}[(\mathbb{1}\delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k)n^i \partial^\mu n^j] \\
&= \underbrace{(\mathbf{n} \cdot \partial^\mu \mathbf{n})}_{=0} \text{Tr} \mathbb{1} + i\varepsilon_{ijk} n^i \partial^\mu n^j \text{Tr} \sigma_k \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})\boldsymbol{\sigma} \cdot (\partial_\mu \mathbf{n} \times \mathbf{n})] &= \text{Tr}(\sigma_i n^i \varepsilon_{abc} \sigma_a \partial_\mu n^b n^c) \\
&= \text{Tr}[(\mathbb{1}\delta_{ia} + i\varepsilon_{iad}\sigma_d)\varepsilon_{abc} n^i \partial_\mu n^b n^c] \\
&= \underbrace{\varepsilon_{abc} n^a \partial_\mu n^b n^c}_{\varepsilon_{abc} n^a n^c = 0} \text{Tr} \mathbb{1} - i\varepsilon_{aid} \varepsilon_{abc} n^i \partial_\mu n^b n^c \text{Tr} \sigma_d \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[(\boldsymbol{\sigma} \cdot \partial_\mu \mathbf{n})(\boldsymbol{\sigma} \cdot (\partial_\mu \mathbf{n} \times \mathbf{n}))] &= \text{Tr}(\sigma_i \partial_\mu n^i \varepsilon_{abc} \sigma_a \partial_\mu n^b n^c) \\
&= \text{Tr}[(\mathbb{1}\delta_{ia} + i\varepsilon_{iaj}\sigma_j)\varepsilon_{abc} \partial_\mu n^i \partial_\mu n^b n^c] \\
&= \underbrace{\varepsilon_{abc} \partial_\mu n^a \partial^\mu n^b n^c}_{\varepsilon_{abc} \partial_\mu n^a \partial^\mu n^b = 0} \text{Tr} \mathbb{1} + i\varepsilon_{iaj} \varepsilon_{abc} \partial_\mu n^i \partial^\mu n^b n^c \text{Tr} \sigma_j \\
&= 0
\end{aligned}$$

O valor dos termos do $\text{Tr}(L_\mu L^\mu)$ é

$$\begin{aligned}
\text{Tr}(a_\mu a^\mu) &= i^2 \xi_\mu \xi^\mu \underbrace{\text{Tr}[(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})^2]}_{=\text{Tr} \mathbb{1}_2 = 2} = -2\xi_\mu \xi^\mu \\
\text{Tr}(b_\mu b^\mu) &= i^2 \sin^2 \xi \cos^2 \xi \text{Tr}[(\boldsymbol{\sigma} \cdot \partial_\mu \mathbf{n})^2] = -2 \sin^2 \xi \cos^2 \xi (\partial_\mu \mathbf{n})^2 \\
\text{Tr}(c_\mu c^\mu) &= i^2 \sin^4 \xi \text{Tr}[(\boldsymbol{\sigma} \cdot (\partial_\mu \mathbf{n} \times \mathbf{n}))^2] = -2 \sin^4 \xi (\partial_\mu \mathbf{n})^2 \\
\text{Tr}(2a_\mu b^\mu) &= 2i^2 \xi_\mu \sin \xi \cos \xi \underbrace{\text{Tr}[(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \partial^\mu \mathbf{n})]}_{=0} = 0 \\
\text{Tr}(2a_\mu c^\mu) &= i^2 \xi_\mu \sin^2 \xi \underbrace{\text{Tr}[(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})\boldsymbol{\sigma} \cdot (\partial_\mu \mathbf{n} \times \mathbf{n})]}_{=0} = 0 \\
\text{Tr}(2b_\mu c^\mu) &= 2i^2 \sin^3 \xi \cos \xi \underbrace{\text{Tr}[(\boldsymbol{\sigma} \cdot \partial_\mu \mathbf{n})(\boldsymbol{\sigma} \cdot (\partial_\mu \mathbf{n} \times \mathbf{n}))]}_{=0} = 0.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_2 &= -\frac{1}{2} \text{Tr}(L_\mu L^\mu) \\
&= \xi_\mu \xi^\mu + \sin^2 \xi \cos^2 \xi (\partial_\mu \mathbf{n})^2 + \sin^4 \xi (\partial_\mu \mathbf{n})^2 \\
&= \xi_\mu \xi^\mu + \sin^2 \xi (\partial_\mu \mathbf{n})^2.
\end{aligned}$$

O termo $(\partial_\mu \mathbf{n})^2$, em termos do campo u , é o produto escalar do termo abaixo com ele mesmo, contraído no índice μ

$$\begin{aligned}\partial_\mu \mathbf{n} &= \partial_\mu \left[\frac{1}{1 + |u|^2} \begin{pmatrix} u + \bar{u} \\ -i(u - \bar{u}) \\ 1 - |u|^2 \end{pmatrix} \right] \\ &= -\frac{u_\mu \bar{u} + u \bar{u}_\mu}{1 + |u|^2} \mathbf{n} + \frac{1}{1 + |u|^2} \begin{pmatrix} u_\mu + \bar{u}_\mu \\ -i(u_\mu - \bar{u}_\mu) \\ -(u_\mu \bar{u} + u \bar{u}_\mu) \end{pmatrix},\end{aligned}$$

onde usamos $u_\mu \equiv \partial_\mu u$ e o mesmo para \bar{u} . Então,

$$\begin{aligned}\partial_\mu \mathbf{n} \cdot \partial^\mu \mathbf{n} &= -\frac{u_\mu \bar{u} + u \bar{u}_\mu}{1 + |u|^2} \mathbf{n} \cdot \partial^\mu \mathbf{n} + \frac{1}{1 + |u|^2} \begin{pmatrix} u_\mu + \bar{u}_\mu \\ -i(u_\mu - \bar{u}_\mu) \\ -(u_\mu \bar{u} + u \bar{u}_\mu) \end{pmatrix} \cdot \partial^\mu \mathbf{n} \\ &= \frac{1}{(1 + |u|^2)^2} \begin{pmatrix} u_\mu + \bar{u}_\mu \\ -i(u_\mu - \bar{u}_\mu) \\ -(u_\mu \bar{u} + u \bar{u}_\mu) \end{pmatrix} \\ &\quad \cdot \left[-(u^\mu \bar{u} + u \bar{u}^\mu) \mathbf{n} + \begin{pmatrix} u^\mu + \bar{u}^\mu \\ -i(u^\mu - \bar{u}^\mu) \\ -(u^\mu \bar{u} + u \bar{u}^\mu) \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{4u_\mu \bar{u}^\mu}{(1 + |u|^2)^2}\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\mathcal{L}_2 = \underbrace{\xi_\mu \xi^\mu}_{\mathcal{L}_2^{(2)}} + 4 \sin^2 \xi \underbrace{\frac{u_\mu \bar{u}^\mu}{(1 + |u|^2)^2}}_{\mathcal{L}_2^{(1)}}.$$

Para $\mathcal{L}_4 = \frac{1}{16} \text{Tr}([L_\mu, L_\nu]^2)$ temos termos do tipo

$$\begin{aligned}[L_\mu, L_\nu]^2 &= [L_\mu, L_\nu][L^\mu, L^\nu] = (L_\mu L_\nu - L_\nu L_\mu)(L^\mu L^\nu - L^\nu L^\mu) \\ &= L_\mu L_\nu L^\mu L^\nu - L_\mu L_\nu L^\nu L^\mu - L_\nu L_\mu L^\mu L^\nu + L_\nu L_\mu L^\nu L^\mu.\end{aligned}$$

Sendo todos os índices contraídos (índices mudos), podemos agrupar os termos

$$[L_\mu, L_\nu]^2 = 2L_\mu L_\nu L^\mu L^\nu - 2L_\mu L_\nu L^\nu L^\mu$$

e

$$\mathcal{L}_4 = \frac{1}{8} [\text{Tr}(L_\mu L_\nu L^\mu L^\nu) - \text{Tr}(L_\mu L_\nu L^\nu L^\mu)].$$

Usamos

$$\begin{aligned}L_\mu &= i\xi_\mu \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} + i \sin \xi \cos \xi \partial_\mu \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} + i \sin^2 \xi (\partial_\mu \mathbf{n} \times \mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{\sigma} \\ &= \boldsymbol{\alpha}_\mu \cdot \boldsymbol{\sigma}^i,\end{aligned}$$

onde o vetor α_μ é definido como

$$\alpha_\mu := i\xi_\mu \mathbf{n} + i \sin \xi \cos \xi \partial_\mu \mathbf{n} + i \sin^2 \xi (\partial_\mu \mathbf{n} \times \mathbf{n}).$$

O primeiro termo de \mathcal{L}_4 é

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} \text{Tr}(L_\mu L_\nu L^\mu L^\nu) &= \frac{1}{8} \text{Tr}(\alpha_\mu^i \sigma^i \alpha_\nu^j \sigma^j \alpha^{\mu k} \sigma^k \alpha^{\nu l} \sigma^l) \\ &= \frac{1}{8} \alpha_\mu^i \alpha^{\mu k} \alpha_\nu^j \alpha^{\nu l} \text{Tr}(\sigma^i \sigma^j \sigma^k \sigma^l) \\ &= \frac{1}{8} \alpha_\mu^i \alpha^{\mu k} \alpha_\nu^j \alpha^{\nu l} 2(\delta_{ij} \delta_{kl} - \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \\ &= \frac{1}{4} (\alpha_\mu^i \alpha^{\mu k} \alpha_\nu^j \alpha^{\nu k} - \alpha_\mu^i \alpha^{\mu i} \alpha_\nu^j \alpha^{\nu j} + \alpha_\mu^i \alpha^{\mu j} \alpha_\nu^j \alpha^{\nu i}) \\ &= \frac{1}{4} [(\alpha_\mu \cdot \alpha_\nu)^2 - \alpha_\mu^2 \cdot \alpha_\nu^2 + \underbrace{(\alpha_\mu \cdot \alpha^\nu)(\alpha^\mu \cdot \alpha_\nu)}_{=(\alpha_\mu \cdot \alpha_\nu)^2}] \\ &= \frac{1}{2} (\alpha_\mu \cdot \alpha_\nu)^2 - \frac{1}{4} \alpha_\mu^2 \cdot \alpha_\nu^2. \end{aligned}$$

O segundo termo de \mathcal{L}_4 ,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{8} \text{Tr}(L_\mu L^\mu L_\nu L^\nu) &= -\frac{1}{8} \text{Tr}(\alpha_\mu^i \sigma^i \alpha^{\mu j} \sigma^j \alpha_\nu^k \sigma^k \alpha^{\nu l} \sigma^l) \\ &= -\frac{1}{8} \alpha_\mu^i \alpha^{\mu j} \alpha_\nu^k \alpha^{\nu l} \text{Tr}(\sigma^i \sigma^j \sigma^k \sigma^l) \\ &= -\frac{1}{8} \alpha_\mu^i \alpha^{\mu j} \alpha_\nu^k \alpha^{\nu l} 2(\delta_{ij} \delta_{kl} - \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \\ &= -\frac{1}{4} (\alpha_\mu^i \alpha^{\mu i} \alpha_\nu^k \alpha^{\nu k} - \alpha_\mu^i \alpha^{\mu j} \alpha_\nu^j \alpha^{\nu j} + \alpha_\mu^i \alpha^{\mu j} \alpha_\nu^j \alpha^{\nu i}) \\ &= -\frac{1}{4} [\alpha_\mu^2 \cdot \alpha_\nu^2 - \cancel{(\alpha_\mu \cdot \alpha_\nu)^2} + \cancel{(\alpha_\mu \cdot \alpha^\nu)(\alpha^\mu \cdot \alpha_\nu)}] \\ &= -\frac{1}{4} \alpha_\mu^2 \cdot \alpha_\nu^2. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4 &= \frac{1}{2} (\alpha_\mu \cdot \alpha_\nu)^2 - \frac{1}{4} \alpha_\mu^2 \alpha_\nu^2 - \frac{1}{4} \alpha_\mu^2 \cdot \alpha_\nu^2 \\ \mathcal{L}_4 &= \frac{1}{2} [(\alpha_\mu \cdot \alpha_\nu)^2 - \alpha_\mu^2 \alpha_\nu^2]. \end{aligned}$$

Os produtos escalares são dados por

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}_\mu \cdot \boldsymbol{\alpha}_\nu &= (i\xi_\mu \mathbf{n} + i \sin \xi \cos \xi \partial_\mu \mathbf{n} + i \sin^2 \xi (\partial_\mu \mathbf{n} \times \mathbf{n})) \\ &\quad \cdot (i\xi_\nu \mathbf{n} + i \sin \xi \cos \xi \partial_\nu \mathbf{n} + i \sin^2 \xi (\partial_\nu \mathbf{n} \times \mathbf{n})) \\ &= -\xi_\mu \xi_\nu - \sin^2 \xi \partial_\mu \mathbf{n} \cdot \partial_\nu \mathbf{n}\end{aligned}$$

$$(\boldsymbol{\alpha}_\mu \cdot \boldsymbol{\alpha}_\nu)^2 = (\xi_\mu \xi_\nu)^2 + \sin^4 \xi (\partial_\mu \mathbf{n} \cdot \partial_\nu \mathbf{n})^2 + 2 \sin^2 \xi (\xi_\mu \partial^\mu \mathbf{n})^2$$

$$\boldsymbol{\alpha}_\mu^2 = -\xi_\mu \xi^\mu - \sin^2 \xi (\partial_\mu \mathbf{n})^2$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}_\mu^2 \cdot \boldsymbol{\alpha}_\nu^2 &= \xi_\mu^2 \xi_\nu^2 + \sin^4 \xi (\partial_\mu \mathbf{n})^2 (\partial_\nu \mathbf{n})^2 + \xi_\mu^2 \sin^2 \xi (\partial_\nu \mathbf{n})^2 + \xi_\nu^2 \sin^2 \xi (\partial_\mu \mathbf{n})^2 \\ &= (\xi_\mu \xi_\nu)^2 + \sin^4 \xi (\partial_\mu \mathbf{n})^4 + 2 \xi_\mu^2 \sin^2 \xi (\partial_\nu \mathbf{n})^2.\end{aligned}$$

O termo de quarta ordem da lagrangiana fica escrito, em termos dos campos ξ e \mathbf{n} , como

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_4 &= \frac{1}{2} [(\xi_\mu \xi_\nu)^2 + \sin^4 \xi (\partial_\mu \mathbf{n} \cdot \partial_\nu \mathbf{n})^2 + 2 \sin^2 \xi (\xi_\mu \partial^\mu \mathbf{n})^2 \\ &\quad - (\xi_\mu \xi_\nu)^2 - \sin^4 \xi (\partial_\mu \mathbf{n})^4 - 2 \xi_\mu^2 \sin^2 \xi (\partial_\nu \mathbf{n})^2] \\ &= \sin^2 \xi [(\xi_\mu \partial^\mu \mathbf{n})^2 - \xi_\mu^2 (\partial_\nu \mathbf{n})^2] + \frac{1}{2} \sin^4 \xi [(\partial_\mu \mathbf{n} \cdot \partial_\nu \mathbf{n})^2 - (\partial_\mu \mathbf{n})^4].\end{aligned}$$

Estamos interessados nessa lagrangiana escrita em termos de ξ , u e \bar{u} . Os termos do tipo $\partial_\mu \mathbf{n}$ e $\partial_\mu \mathbf{n} \cdot \partial^\mu \mathbf{n}$ já foram calculados anteriormente nesses termos. Os demais que precisamos são

$$\begin{aligned}\partial_\mu \mathbf{n} \cdot \partial_\nu \mathbf{n} &= -\frac{u_\mu \bar{u} + u \bar{u}_\mu}{1 + |u|^2} \mathbf{n} \cdot \partial_\nu \mathbf{n} + \frac{1}{1 + |u|^2} \begin{pmatrix} u_\mu + \bar{u}_\mu \\ -i(u_\mu - \bar{u}_\mu) \\ -(u_\mu \bar{u} + u \bar{u}_\mu) \end{pmatrix} \cdot \partial_\nu \mathbf{n} \\ &= \frac{1}{(1 + |u|^2)^2} \begin{pmatrix} u_\mu + \bar{u}_\mu \\ -i(u_\mu - \bar{u}_\mu) \\ -(u_\mu \bar{u} + u \bar{u}_\mu) \end{pmatrix} \\ &\quad \cdot \left[-(u_\nu \bar{u} + u \bar{u}_\nu) \mathbf{n} + \begin{pmatrix} u_\nu + \bar{u}_\nu \\ -i(u_\nu - \bar{u}_\nu) \\ -(u_\nu \bar{u} + u \bar{u}_\nu) \end{pmatrix} \right] \\ &= 2 \frac{u_\mu \bar{u}_\nu + \bar{u}_\mu u_\nu}{(1 + |u|^2)^2}, \\ (\partial_\mu \mathbf{n} \cdot \partial_\nu \mathbf{n})^2 &= \frac{8}{(1 + |u|^2)^4} [u_\mu^2 \bar{u}_\nu^2 + (u_\mu \bar{u}^\mu)^2], \\ (\partial_\mu \mathbf{n})^4 &= (\partial_\mu \mathbf{n})^2 \cdot (\partial_\nu \mathbf{n})^2 = \frac{16 u_\mu \bar{u}^\mu u_\nu \bar{u}^\nu}{(1 + |u|^2)^4} \\ &= \frac{16 (u_\mu \bar{u}^\mu)^2}{(1 + |u|^2)^4},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\xi_\mu \partial^\mu \mathbf{n})^2 &= \xi_\mu \partial^\mu \mathbf{n} \cdot \xi_\nu \partial^\nu \mathbf{n} = \xi_\mu \xi_\nu (\partial^\mu \mathbf{n} \cdot \partial^\nu \mathbf{n}) = 2\xi_\mu \xi_\nu \frac{u^\mu \bar{u}^\nu + \bar{u}^\mu u^\nu}{(1 + |u|^2)^2} \\
&= \frac{2}{(1 + |u|^2)^2} (\xi_\mu u^\mu \xi_\nu \bar{u}^\nu + \xi_\mu \bar{u}^\mu \xi_\nu u^\nu) \\
&= \frac{4}{(1 + |u|^2)^2} \xi_\mu u^\mu \xi_\nu \bar{u}^\nu.
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_4 &= \sin^2 \xi \left[\frac{4}{(1 + |u|^2)^2} \xi_\mu u^\mu \xi_\nu \bar{u}^\nu - \xi_\mu^2 \frac{4u_\mu \bar{u}^\mu}{(1 + |u|^2)^2} \right] \\
&+ \frac{1}{2} \sin^4 \xi \left[\frac{8}{(1 + |u|^2)^4} [u_\mu^2 \bar{u}_\nu^2 + (u_\mu \bar{u}^\mu)^2] - \frac{16(u_\mu \bar{u}^\mu)^2}{(1 + |u|^2)^4} \right]
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{L}_4 = -4 \sin^2 \xi \underbrace{\left(\xi_\mu \xi^\mu \frac{u_\nu \bar{u}^\nu}{(1 + |u|^2)^2} - \frac{\xi_\mu \bar{u}^\mu \xi_\nu u^\nu}{(1 + |u|^2)^2} \right)}_{\mathcal{L}_4^{(1)}} - 4 \sin^4 \xi \underbrace{\frac{(u_\mu \bar{u}^\mu)^2 - u_\mu^2 \bar{u}_\nu^2}{(1 + |u|^2)^4}}_{\mathcal{L}_4^{(2)}}.}$$

