

Mateus Spezia

# **O Problema de Calderón**

Florianópolis

2019



Mateus Spezia

## **O Problema de Calderón**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática do Departamento de Matemática do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina para obtenção de grau de Bacharel em Matemática

Universidade Federal de Santa Catarina

Orientador: Prof. Dr. Raphael Falcão da Hora

Florianópolis

2019

*Dedicado à P.B*

# Agradecimentos

Agradeço em primeiro a minha mãe Ivoni e meu pai Edson que sempre estiveram a meu lado me apoiaram em minhas decisões e forneceram as condições para que eu pudesse estudar. A meu pequeno irmão Davi pela companhia e afeto, espero que você também tenha a oportunidade de fazer o que gostar quando crescer.

A minha companheira Maíra, pelo amor, carinho, companheirismos e por fornecer um aconchego nos momentos difíceis. Sou muito feliz por ter sua companhia nesses últimos dois anos e meios.

A todos meus professores do ensino fundamental na escola Pedro Aleixo em Massaranduba. Em especial ao meu querido professor, padrinho e amigo Cristiano Tironi, a quem devo meu interesse inicial em matemática e por ser um exímio professor. Também agradeço ao pessoal do LEMIN, em especial a meu amigo Michel por ter acreditado no meu potencial e pelas excelentes aulas no projeto de olimpíadas de matemática. Também agradeço aos meus professores do ensino médio na ETEVI em Blumenau, que contribuíram de forma valorosa para meu desenvolvimento intelectual e pessoal.

Aos meus amigos de 16.1 Luiz e João, por esse quatro anos de amizade e companheirismo, pelas inúmeras horas que passamos juntos seja estudando, resolvendo listas ou tentando entender algum resultado complicado, jogando conversa fora na cantina do EFI, ou nos almoços no Ru, meus caros pindaqueiros. Também pelos momentos de descontração e diversão pelos ótimos churrascos que fizemos juntos, enfim posso garantir que umas das melhores coisas que levo desses anos é nossa amizade, sem dúvida o curso foi muito mais agradável em vossas companhias. Estendo meus agradecimentos aos demais amigos e colegas que fiz nesses anos, em especial a meus amigos Henrique e Gabriel pelas horas de descontrações falando bobagens pelos corredores do labirinto.

A todos professores e professoras que fizeram parte da minha caminhada durante a graduação. Em especial ao professor Ivan Pontual que ao longo de 4 disciplinas cursadas contribuiu muito com meu desenvolvimento matemático e fomentou meu interesse em geometria.

A meu orientador Raphael que esteve ao meu lado desde o primeiro semestre como meu professor de cálculo 1, posteriormente como orientador de iniciação científica e aceitou orientar esse trabalho propondo um problema interessante para trabalharmos. Agradeço pela paciência e por ser sempre solícito para esclarecer minhas dúvidas.

Agradeço também aos membros da banca professores Fábio e Paulo por terem aceitado o convite e pelos comentários, observações e correções que contribuíram para o enriqueci-

mento do trabalho final.

Ao todos meu colegas do movimento estudantil, em especial aos membros do C.A.L.Ma, pelas experiências acadêmicas e políticas proporcionadas.

Agradeço a todos os servidores e funcionários terceirizados da UFSC por fazerem essa universidade funcionar. Agradeço por fim a UFSC, que como universidade pública, gratuita e de qualidade cumpre a importante função de produzir e ensinar ciência de ponta. Nesses tempos de obscurantismo e retrocesso devemos defender o caráter público da universidade e lutar para que ela possa avançar na direção de produzir conhecimento a serviço do povo e do desenvolvimento nacional.

*...Busquem conhecimento.*

*ET Bilú*





# Resumo

O Problema de Calderón, também chamado de problema inverso da condutividade, é um importante problema inverso com potenciais aplicações em imagens médicas e geociências. Esse problema consiste em saber se é possível determinar a condutividade elétrica de um meio medindo apenas potencial e a corrente que flui na borda. Nosso objetivo é provar um resultado de unicidade para esse problema. Definiremos o mapa de Dirichlet para Neumann, que associa cada potencial induzido com a corrente que flui pela borda, e provaremos que a condutividade elétrica no interior é unicamente determinada por esse mapa.

**Palavras-chave:** Problema de Calderón, problema inverso da condutividade, equação de condutividade.



# Abstract

The Calderón problem, also called inverse conductivity problem, is an important inverse problem with potential applications in medical imaging and geoscience. This problem consist in knowing if it is possible to determine the eletrical conductivity of a medium measuring only the potential and the current that flows on the boundary. Our objective is to prove an uniqueness result for this problem. We will define the Dirichlet to Neumann map, that associates each induced potential with the current that flows on the boundary, and prove that the eletrical conductivity in the interior is uniquely determined by this map.

**Keywords:** Calderón problem, inverse conductivity problem, conductivity equation.



# Sumário

	<b>Introdução</b> . . . . .	<b>13</b>
<b>1</b>	<b>CAIXA DE FERRAMENTAS</b> . . . . .	<b>17</b>
1.1	Espaços de Banach e de Hilbert . . . . .	17
1.2	Alguns fatos do Cálculo . . . . .	25
1.3	Séries de Fourier . . . . .	29
<b>2</b>	<b>ESPAÇOS DE SOBOLEV</b> . . . . .	<b>35</b>
2.1	Soluções Fracas . . . . .	42
<b>3</b>	<b>UNICIDADE</b> . . . . .	<b>47</b>
3.1	Redução para o problema inverso para a equação de Schrödinger . .	51
3.2	Complex Geometrical Optics Solution . . . . .	53
3.3	Prova da Unicidade . . . . .	58
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>61</b>



# INTRODUÇÃO

A área de problemas inversos é um ramo da matemática com potenciais aplicações a engenharia, geociências e imagens médicas. Em geral os problemas consistem em determinar certa propriedade de algum meio fazendo apenas observações indiretas. Nesse trabalho estamos interessados em estudar o seguinte problema inverso, que foi apresentado em 1980 por Alberto Calderón em [2].

**Problema de Calderón:** É possível determinar a condutividade elétrica de um meio medindo apenas a voltagem e a corrente na borda?

Esse problema também chamado de problema inverso da condutividade, é a base da *electrical impedance tomography* (EIT), que é um método de obtenção de imagem não destrutivo com aplicações a meios de diagnóstico médico por imagem e geociências.

Vamos apresentar o modelo matemático por trás da EIT. Considere  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  uma região (nos problemas da vida real  $n = 3$  e  $\Omega$  é algum condutor), vamos pedir também que  $\Omega$  seja aberto, limitado e que  $\partial\Omega$  seja uma superfície suave. Estamos interessados em conhecer uma função  $\gamma : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\gamma(x) \geq c > 0$  para cada  $x \in \Omega$ , essa função representa a condutividade elétrica no ponto  $x \in \Omega$ .

Da Lei de Ohm sabemos que a corrente em cada  $x$  é um um vetor dado por

$$i(x) = -\gamma(x)\nabla u(x), \text{ onde } u(x) \text{ é o potencial}$$

Assumindo que não tenha carga acumuladas em  $\Omega$  e que também não haja sumidouros de carga, toda a carga flui por  $\partial\Omega$ . Logo o fluxo total de  $i(x)$  por  $\partial\Omega$  é nulo<sup>1</sup>. Assim temos

$$\int_{\partial\Omega} i(x) \cdot \nu(x) dS = 0$$

Aplicando o Teorema da divergência de Gauss vamos ter a equação de condutividade

$$\nabla \cdot (i(x)) = 0 \Rightarrow \nabla \cdot (\gamma(x)\nabla u(x)) = 0$$

Suponha que induzimos um potencial  $f$  em  $\partial\Omega$  e medimos a corrente que flui através dessa superfície. Nessa situação o potencial  $u$  será dado pela solução do seguinte problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\gamma(x)\nabla u(x)) = 0 \text{ em } \Omega \\ u = f \text{ em } \partial\Omega \end{cases}$$

<sup>1</sup> A mesma quantidade de corrente que entra em  $\Omega$  sai.

A corrente que flui pelo ponto  $x \in \partial\Omega$  é dada por  $\gamma(x)\nabla u(x) \cdot \nu(x) = \gamma(x)\partial_\nu u(x)$ .

Definimos o mapa  $\Lambda_\gamma$ , chamado de mapa de Dirichlet para Neumann (DN), como  $\Lambda_\gamma : f \mapsto \Lambda_\gamma(f) = \gamma(x)\partial_\nu u(x)$ . Essencialmente esse mapa pega uma condição de contorno de Dirichlet (por exemplo o potencial prescrito na borda) e retorna uma condição de contorno de Neumann (a corrente que flui em cada ponto da borda). Suponha que para cada potencial que induzimos em  $\partial\Omega$  podemos medir a corrente que flui por cada ponto da fronteira, em outras palavras conhecemos o mapa  $\Lambda_\gamma$ . Isso resulta no seguinte problema inverso:

Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um região aberta, limitada e com fronteira suave e  $\gamma \in L^\infty(\overline{\Omega})$  tal que  $\gamma(x) \geq c > 0$ . Conhecendo o mapa  $\Lambda_\gamma$  é possível determinar  $\gamma$ ?

Esse é justamente o problema de Calderón. Futuramente vamos definir precisamente o que é o mapa DN mesmo quando  $\gamma$  e  $u$  não são funções suaves, ou seja vamos dar uma definição fraca para tais objetos.

Esse problema tem vários aspectos matemáticos e práticos. Desde o trabalho de Calderón em 1980, vários resultados envolvendo os diversos aspectos desse problema vêm sendo feitos nos últimos anos, vale destacar<sup>2</sup>:

- **Unicidade na borda** (Kohn-Vogelius 1984,[6]) Suponha  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  sejam funções em  $C(\overline{\Omega})$  tais que  $\gamma_i \geq c > 0$  ( $i = 1, 2$ ). Se  $\Lambda_{\gamma_1} = \Lambda_{\gamma_2}$ , então  $\gamma_1 = \gamma_2$  em  $\partial\Omega$ .
- **Unicidade no interior** (Sylvester-Uhlmann 1987, [12]) Suponha  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  sejam funções em  $C^2(\overline{\Omega})$  tais que  $\gamma_i \geq c > 0$  ( $i = 1, 2$ ) e  $n \geq 3$ . Se  $\Lambda_{\gamma_1} = \Lambda_{\gamma_2}$ , então  $\gamma_1 = \gamma_2$  em  $\Omega$ .
- **Reconstrução** (Nachman 1988, [8]) Suponha  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  sejam funções em  $C^2(\overline{\Omega})$  tais que  $\gamma_i \geq c > 0$  ( $i = 1, 2$ ) e  $n \geq 3$ . Nessas condições existe um algoritmo convergente para determinar  $\gamma$  conhecendo  $\Lambda_\gamma$ .
- **Estabilidade** (Alessandrini 1988, [1]) Suponha que  $n \geq 3$  e  $\gamma_j \in H^{s+2}(\Omega)$  e  $s > n/2$ , assumamos também que  $\|\gamma_j\|_{H^{s+2}(\Omega)} \leq M$  e  $1/M \leq \gamma_j \leq M$  ( $j = 1, 2$ ). Então existem constantes positivas  $C$  e  $\sigma$  tais que

$$\|\gamma_1 - \gamma_2\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C |\log t|^{-\sigma} \|\Lambda_{\gamma_1} - \Lambda_{\gamma_2}\|_{H^{-1/2}(\Omega)}$$

- **Dados parciais** (Kenig-Sjöstrand-Uhlmann 2007, [5]) Seja  $\Gamma \subset \partial\Omega$  aberto e  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  seja, funções em  $C^2(\overline{\Omega})$  tais que  $\gamma_i \geq c > 0$  ( $i = 1, 2$ ) e  $n \geq 3$ . Suponha que  $\Lambda_{\gamma_1}|_\Gamma = \Lambda_{\gamma_2}|_\Gamma$ , então  $\gamma_1 = \gamma_2$  em  $\Omega$ .

<sup>2</sup> Para todos considere  $\Omega \in \mathbb{R}^n$  aberto, limitado e com fronteira suave.



Nesse trabalho nos concentraremos em estudar o problema de unicidade no interior. As principais referências usadas para isso são [11] e [4]. O trabalho está organizado da seguinte forma.

No capítulo 1 abordaremos algumas generalidades sobre análise funcional e cálculo, afim de dar base para o desenvolvimento posteriores do trabalho. Introduziremos de forma breve os espaços de Hilbert e Banach, que são a linguagem básica para entender os problemas que vamos tratar. Após apresentaremos alguns fatos de cálculo avançado, e por fim falaremos um pouco sobre séries de Fourier em  $L^2$ . No capítulo 2 apresentaremos os espaços de Sobolev, que são usados para descrever o problema de Calderón. Também falaremos brevemente de soluções fracas de uma EDP e apresentaremos um teorema de existência e unicidade para o problema de Dirichlet associado a uma equação elíptica de segunda ordem. Por fim no capítulo 3 apresentaremos formalmente o problema de Calderón, mostraremos como reduzir esse problema para um outro problema de unicidade associado a uma equação de Schrödinger. Contrairemos as *Complex Geometrical Optics Solution* para essa equação e usaremos elas para provar a unicidade.



# 1 Caixa de Ferramentas

Nesses excertos nós vamos apresentar alguns resultados e definições da análise e do cálculo que serão utilizados ao longo dessa monografia. Não provaremos todos resultados e nem exploraremos de modo extensivo seus significados. Apresentaremos os resultados na medida de fornecer um encadeamento lógico para a compreensão do Problema de Calderón e de sua solução.

Começaremos abordando espaços de Banach e Hilbert, pois esses são as ferramentas básicas para falar de quase tudo que apresentaremos posteriormente. Em seguida vamos fazer uma brevíssima apresentação de alguns resultados do cálculo que vamos empregar futuramente. Fecharemos esse capítulo com uma apresentação das séries de Fourier que serão utilizadas quando construirmos as soluções para a equação de Schrödinger (GCO).

Para escrever esse capítulo nos baseamos principalmente em [4] e [11]. Para um complemento pode-se consultar [9] e [10].

## 1.1 Espaços de Banach e de Hilbert

Fixe  $V$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{C}$ , definimos

**Definição 1.1** (Norma). *Uma norma em  $V$  é uma função  $x \in V \mapsto \|x\| \in [0, \infty)$  que satisfaz:*

$$(1) \|x\| = 0 \text{ se e somente se } x = \mathbf{0}$$

$$(2) \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$$

$$(3) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

para todo  $x, y \in V$

Uma norma em um espaço vetorial induz nele uma topologia natural, então conceitos topológicos como continuidade e limites podem ser definidos. Um conceito que usaremos é a convergência de seqüências de elementos de  $V$ .

**Definição 1.2.** *Dizemos que :*

(a) *Uma seqüência  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de elementos de  $V$  é dita **convergente** para  $x$  na norma  $\|\cdot\|$  se, para todo  $\epsilon > 0$  existe  $M \in \mathbb{N}$  tal que se  $n > M \Rightarrow \|x_n - x\| < \epsilon$ .*

(b) Uma sequência  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de elementos de  $V$  é dita de **Cauchy** na norma  $\|\cdot\|$  se, para todo  $\epsilon > 0$  existe  $M \in \mathbb{N}$  tal que se  $n, m > M \Rightarrow \|x_n - x_m\| < \epsilon$ .

Nem toda sequência de Cauchy é necessariamente convergente, e quando ocorre de toda sequência de Cauchy ser convergente dizemos que o espaço é **completo**. Dizemos também que um subespaço  $D \subseteq V$  é denso em  $V$  se  $\overline{D} = V$ , onde  $\overline{D}$  é o fecho de  $D$ . Sabemos que isso é equivalente a todo elemento de  $V$  ser limite de alguma sequência de elementos de  $D$ .

Outro objeto muito útil em um espaço vetorial é aquilo que chamamos de um produto interno.

**Definição 1.3** (Produto interno). *Um produto interno em um espaço vetorial  $V$  é uma função  $\langle x, y \rangle \in V \times V \mapsto \langle x, y \rangle \in \mathbb{C}$ , que satisfaz:*

$$(1) \langle \alpha x + y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$

$$(2) \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$$

$$(3) \langle x, x \rangle > 0 \text{ se } x \neq \mathbf{0}$$

Para todos  $x, y, z \in V$  e  $\alpha \in \mathbb{C}$

Um espaço vetorial com um produto interno é dito um espaço pré-Hilbert, e dois vetores  $x, y$  são chamados de ortogonais com respeito a  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  se  $\langle x, y \rangle = 0$ . Com essas definições estamos em condições de poder enunciar o primeiro resultado.

**Proposição 1.1.** *Seja  $V$  um espaço vetorial e  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  um produto interno em  $V$ . então temos*

(a) *O produto interno é sesquilinear, isso é.*

$$\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$$

$$\langle z, \alpha x + \beta y \rangle = \overline{\alpha} \langle z, x \rangle + \overline{\beta} \langle z, y \rangle$$

(b) *desigualdade de Cauchy-Schwarz  $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$*

(c)  *$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$  é uma norma.*

**Demonstração:**

(a) É imediata da definição de produto interno.

- (b) Assuma que  $y$  seja não nulo, no caso de  $y = \mathbf{0}$  a desigualdade é trivial, seja  $\lambda$  complexo qualquer, segue das propriedades do produto interno

$$0 \leq \langle x - \lambda y, x - \lambda y \rangle = \langle x, x \rangle - \lambda \langle y, x \rangle - \bar{\lambda} \langle x, y \rangle + |\lambda|^2 \langle y, y \rangle \quad (1.1)$$

como isso vale para  $\lambda$  qualquer tome  $\lambda = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle}$ , a desigualdade (1.1) continua valendo e assim temos:

$$0 \leq \langle x, x \rangle - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle} \Rightarrow |\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle = \|x\|^2 \|y\|^2 \Rightarrow |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

- (c) As propriedades (1) e (2) da definição de normas são imediatas da propriedades do produto interno, para verificar (3) observe que:

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x, y \rangle + \overline{\langle x, y \rangle} \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, y \rangle \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \|y\| \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

Temos que  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ , ou seja  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$  é de fato uma norma. ■

Com isso ganhamos que todo espaço com produto interno é também um espaço normado ou seja um espaço métrico com a métrica  $d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$ .

**Definição 1.4.** *Um espaço vetorial é dito ser de:*

- (a) **Banach** se é um espaço vetorial normado completo.
- (b) **Hilbert** se é um espaço vetorial com produto interno e completo com respeito a norma associada ao produto interno.

Nem todo espaço com produto interno é necessariamente completo. Entre tanto todo espaço métrico possui um completamento, de forma mais precisa, seja  $M$  um espaço métrico então existe  $\widehat{M}$  espaço métrico completo e  $i : M \hookrightarrow \widehat{M}$  isometria injetora, tal que,  $i(M)$  é denso em  $\widehat{M}$ , para ver uma prova desse fato veja [7], cap 7 prop 13. Dado um espaço com produto interno é sempre possível completar ele de forma que seu completamento seja um espaço de Hilbert, isso é o conteúdo da próxima proposição:

**Proposição 1.2.** *Seja  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_V)$  um espaço com produto interno. Então existe um espaço de Hilbert  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$  e um mapa  $i : V \hookrightarrow H$ , injetor, linear, que preserva o produto interno, ou seja  $\langle i(x), i(y) \rangle_H = \langle x, y \rangle_V, \forall x, y \in V$  com  $i(V)$  denso em  $H$ .*

**Demonstração:** Seja  $H$  o completamento de  $V$  como espaço métrico, de fato podemos enxergar  $V$  como um subespaço de  $H$  e  $i : V \hookrightarrow H$  como a inclusão, então basta definir o produto interno em  $H$ .

Dados  $x, y \in H$ , tome duas sequências de elementos de  $V$ ,  $\{x_n\}$  e  $\{y_n\}$  que convirjam para  $x$  e  $y$  respectivamente, podemos fazer isso pois  $V$  é denso em  $H$ , defina  $\langle x, y \rangle_H := \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, y_n \rangle_V$ . Verifica-se que isso independe da escolha de sequência e que de fato é um produto interno. Então  $H$  é um espaço de Hilbert. ■

Outro conceito muito importante no contexto de espaços vetoriais é o conceito de base, dizemos que:

**Definição 1.5 (Base).** *Seja  $V$  um espaço vetorial e  $H$  um espaço de Hilbert*

- (a) Uma **base algébrica** de  $V$  é um subconjunto  $B$  linearmente independente, tal que cada  $x \in V$  pode ser representado de única forma como combinação linear finita de elementos de  $B$
- (b) Uma **base de Schauder** é uma sequência  $\{x_n\}$  de elementos de  $V$  tal que todo  $x \in V$  existe uma única sequência  $\{\alpha_n\}$  de números complexos tal que  $x = \sum \alpha_n x_n$
- (c) Uma **Base ortonormal** (ou sistema completo ortonormal) de  $H$  é um subconjunto ortonormal<sup>1</sup> de  $H$  maximal, isto é, ele não está contido propriamente em nenhum outro subconjunto ortonormal

Todo espaço vetorial tem uma base algébrica. É também verdade que todo espaço de Hilbert tem uma base ortonormal e esse resultado também é uma consequência do lema de Zorn.

**Teorema 1.1.** *Todo espaço de Hilbert,  $H$  tem uma base ortonormal*

**Demonstração** Seja  $\mathcal{C}$  a coleção de todos os conjuntos ortonormais de  $H$ .  $\mathcal{C}$  tem uma ordem parcial que vem da inclusão, isto é, dizemos que  $S_1 \preceq S_2$  se  $S_1 \subseteq S_2$ , de fato  $\preceq$  é uma ordem parcial.  $\mathcal{C}$  não é vazio pois o conjunto  $\{\frac{v}{\|v\|}\}$  pertence a  $\mathcal{C}$  onde  $v \in H$  qualquer. Seja  $\{S_\alpha\}_{\alpha \in A}$  uma cadeia totalmente ordenada então  $\bigcup_{\alpha \in A} S_\alpha$  é um conjunto ortonormal e um limite superior de  $\{S_\alpha\}_{\alpha \in A}$ , ou seja toda cadeia totalmente ordenada

<sup>1</sup> Um conjunto  $A$  é dito ser ortonormal se dados  $x, y$  em  $A$  temos  $\langle x, x \rangle = 1$  e  $\langle x, y \rangle = 0$  se  $x \neq y$

tem um limite superior. Entra em cena o lema de Zorn<sup>2</sup> e concluímos que  $\mathcal{C}$  tem um elemento maximal que é uma base ortonormal.

■

O próximo teorema justifica por que podemos chamar uma base ortonormal de base.

**Teorema 1.2.** *Seja  $\{e_i\}_{i \in I}$  uma base ortonormal de um espaço de Hilbert  $H$ . Então para todo  $x \in H$  temos que  $\{i \in I, \text{ tal que, } \langle e_i, x \rangle \neq 0\}$  é no máximo enumerável, além disso:*

$$x = \sum_{i \in I} \langle e_i, x \rangle e_i; \quad \|x\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle e_i, x \rangle|^2$$

*E reciprocamente seja  $\{c_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  uma seqüência de números complexos tal que  $\sum_{i \in I} |c_i|^2$  converge então a série  $\sum_{i \in I} c_i e_i$  converge para um elemento de  $H$ .*

**Demonstração:** Primeiro vamos provar uma desigualdade, conhecida como desigualdade de Bessel.

Seja  $\{e_i\}_{i \in I'}$  um sub conjunto finito qualquer de  $\{e_i\}_{i \in I}$ , podemos escrever.

$$x = \sum_{i \in I'} \langle e_i, x \rangle e_i + \left( x - \sum_{i \in I'} \langle e_i, x \rangle e_i \right)$$

logo

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \sum_{i \in I'} |\langle e_i, x \rangle|^2 + \left\| x - \sum_{i \in I'} \langle e_i, x \rangle e_i \right\|^2 \geq \sum_{i \in I'} |\langle e_i, x \rangle|^2$$

Uma consequência dessa desigualdade é que o conjunto  $\{\langle e_i, x \rangle \neq 0\}_{i \in I}$  é no máximo enumerável, pois para todo  $n$  natural o conjunto  $\{i \in I; |\langle e_i, x \rangle| \geq \frac{1}{n}\}$  é finito, então seja  $e_1, e_2, e_3, \dots$  uma enumeração desse conjunto. como consequência da Desigualdade de Bessel a série  $\sum_{j=1}^{\infty} |\langle e_j, x \rangle|^2$  é convergente.

Defina a seqüência  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  como  $x_n = \sum_{j=1}^n \langle e_j, x \rangle e_j$ . Então

$$\|x_m - x_n\|^2 = \sum_{j=n}^m |\langle e_j, x \rangle|^2$$

Logo a seqüência  $x_n$  é Cauchy, logo converge e para algum  $\hat{x} \in H$ . De fato vamos mostra que  $x = \hat{x}$ .

<sup>2</sup> Lema de Zorn: Se, em um conjunto não-vazio e parcialmente ordenado, todo subconjunto totalmente ordenado tem uma quota superior, então o conjunto tem um elemento maximal.

Se  $\langle e_k, x \rangle \neq 0$ , temos

$$\langle e_k, x - \hat{x} \rangle = \langle e_k, x - \sum_{j=1}^{\infty} \langle e_j, x \rangle e_j \rangle = \langle e_k, x \rangle - \langle e_k, x \rangle = 0$$

Agora se  $\langle e_k, x \rangle = 0$ , temos que  $\langle e_k, x - \hat{x} \rangle = 0$ , Logo  $x - \hat{x}$  é ortogonal a todos  $e_j$ , e como  $\{e_i\}_{i \in I}$  é um sistema ortonormal completo segue que  $x - \hat{x} = 0 \Rightarrow x = \sum_{j=1}^{\infty} \langle e_j, x \rangle e_j$ .

Por fim temos que

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle e_i, x \rangle|^2$$

A recíproca é imediata. ■

**Corolário 1.1.** *Um conjunto  $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  é uma base ortonormal de  $H$  se dado  $f \in H$  temos  $\langle f, e_k \rangle = 0$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ , então  $f = \mathbf{0}$ .*

Dado um subconjunto  $S$  de um espaço de Hilbert  $H$  podemos definir:

**Definição 1.6.** *O complemento ortogonal de  $S$  é o conjunto  $S^\perp := \{y \in H \mid \langle x, y \rangle = 0 \forall x \in S\}$*

**Teorema 1.3** (Projeção). *Seja  $M$  um subespaço fechado do espaço de Hilbert  $H$ . Então para cada  $x \in H$  existem únicos  $x^\parallel \in M$  e  $x^\perp \in M^\perp$  tal que  $x = x^\parallel + x^\perp$*

**Demonstração:** Vamos começar mostrando que dado um  $x \in H$  existe um elemento  $y \in M$ , “mais perto” de  $x$ , no sentido que  $d = \inf_{y \in M} \|y - x\|$  é atingido para algum  $y \in M$ . Tome um sequência em  $M$  de  $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $\|y_n - x\| \rightarrow d$ . Temos que

$$\|y_n - y_m\|^2 = \|(y_n - x) - (y_m - x)\|^2$$

Pela regra do paralelogramo temos

$$\begin{aligned} \|(y_n - x) - (y_m - x)\|^2 &= 2(\|y_m - x\|^2 + \|y_n - x\|^2) - \|y_m + y_n - 2x\|^2 \\ &= 2(\|y_m - x\|^2 + \|y_n - x\|^2) - 4 \left\| \frac{y_m + y_n}{2} - x \right\|^2 \\ &\leq 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4d^2 \end{aligned}$$

que converge para  $2d^2 + 2d^2 - 4d^2 = 0$  se tomamos  $m, n \rightarrow \infty$ . Logo  $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sequência de Cauchy e como  $M$  é fechado converge para algum  $y \in M$ .



Defina  $w = x - y$ , seja  $z \in M$  qualquer, logo  $y - tz \in M$  para  $t \in \mathbb{R}$ , logo

$$d^2 \leq \|w - tz\|^2 = \|x - y - tz\|^2 = d^2 - 2t \operatorname{Re}\langle w, z \rangle + t^2 \|z\|^2 \quad (1.2)$$

Logo  $-2t \operatorname{Re}\langle w, z \rangle + t^2 \|z\|^2 \geq 0$  para todo  $t$  real assim  $\operatorname{Re}\langle w, z \rangle = 0$ . Por outro lado  $y - (it)z \in M$ , e seguindo de forma análoga a (1.2) temos  $\operatorname{Im}\langle w, z \rangle = 0$ , portanto  $\langle w, z \rangle = 0 \Rightarrow w = x - y \in M^\perp$ .

A unicidade sai usando o teorema de Pitágoras. Seja  $\hat{y}$  outro ponto em  $M$  que minimiza a distancia para  $x$ . Então temos

$$\|x - \hat{y}\|^2 = \|x - y\|^2 + \|y - \hat{y}\|^2 \Rightarrow d^2 = d^2 + \|y - \hat{y}\|^2 \Rightarrow \|y - \hat{y}\|^2 = 0$$

Por fim ponha  $x^\parallel = y$  e  $x^\perp = x - y = w$

■

Seja  $T : B \rightarrow \hat{B}$  um operador linear entre dois espaços de Banach. Dizemos que um operador é limitado se a norma dele é finita e definimos tal norma (norma de operador) como:

**Definição 1.7** (Norma de operador).  $\|T\| = \sup_{0 \neq x \in B} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$

Uma importante caracterização de continuidade de um operador é

**Proposição 1.3.** *Seja  $B$  e  $\hat{B}$  espaços de Banach e  $T : B \rightarrow \hat{B}$  operador linear, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(1)  $T$  é contínuo para todo  $x \in B$

(2)  $T$  é contínuo em algum  $x_0 \in B$

(3)  $T$  é limitado

**Demonstração:** (1)  $\Rightarrow$  (2) é óbvio.

(2)  $\Rightarrow$  (3) Por continuidade existe  $\delta > 0$  tal que  $\|T(x)\| = \|T(x_0 + x) - T(x_0)\| \leq 1$  para todo  $\|x\| \leq \delta$ . Tome  $x = \delta \frac{y}{\|y\|}$ , onde  $y \in H$  não nulo, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\|T(y)\|}{\|y\|} &= \left\| T\left(\frac{y}{\|y\|}\right) \right\| \\
&= \left\| T\left(\frac{x}{\delta}\right) \right\| \\
&= \frac{1}{\delta} \|T(x)\| \\
&\leq \frac{1}{\delta}
\end{aligned}$$

Como isso vale para todo  $y$  temos que  $T$  é limitado.

(3)  $\Rightarrow$  (1) Dado  $x \neq 0$  temos que  $\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq C$ . Então dado  $\epsilon > 0$ , tome  $\delta = \frac{\epsilon}{C}$ , logo se  $\|x\| \leq \delta$  temos que  $\|T(y+x) - T(y)\| = \|T(x)\| \leq C \frac{\epsilon}{C} = \epsilon$

■

**Definição 1.8** (Espaço dual). *Seja  $B$  um espaço de Banach definimos seu espaço dual (topológico)  $H^*$  como o espaço de todos os funcionais lineares limitados de  $B$  em  $\mathbb{C}$ .*

O Dual de um espaço de Banach também é sempre um espaço de Banach (para um prova veja [9] theorem III.2). Uma caracterização muito importante do espaço dual de um espaço de Hilbert é dada pelo próximo teorema:

**Teorema 1.4** (Representação de Riesz). *Seja  $H$  um espaço de Hilbert e seja  $\lambda \in H^*$  um funcional linear limitado. Então existe único  $y_\lambda \in H$  tal que*

$$\lambda(x) = \langle x, y_\lambda \rangle, \quad \text{para todo } x \in H$$

além disso  $\|\lambda\|_{H^*} = \|y_\lambda\|_H$

**Demonstração:** Seja  $N = \{x \in H; \lambda(x) = 0\}$  o núcleo de  $\lambda$ . Se  $N = H$  é trivial, basta tomar  $y_\lambda = 0$ . Suponha que  $N$  não é todo  $H$ .

Como  $\lambda$  é continua então  $N$  é fechado, pelo **teorema 1.3** temos  $H = N \oplus N^\perp$ . Tome  $y_0 \in N^\perp$  não nulo (exite por hipótese pois  $N \neq H$ ), defina  $y_\lambda = \frac{\overline{\lambda(y_0)}}{\langle y_0, y_0 \rangle} y_0$ . Dado  $x \in H$  temos

$$x = x - \frac{\lambda(x)}{\lambda(y_0)} y_0 + \frac{\lambda(x)}{\lambda(y_0)} y_0$$

Observe que  $\left(x - \frac{\lambda(x)}{\lambda(y_0)} y_0\right) \in N$ , de fato  $\lambda\left(x - \frac{\lambda(x)}{\lambda(y_0)} y_0\right) = \lambda(x) - \lambda(x) = 0$ . E também que  $\frac{\lambda(x)}{\lambda(y_0)} y_0 \in N^\perp$ . Pelo **teorema 1.3** essa é a única maneira de escrever  $x$  como soma de elementos de  $N$  e  $N^\perp$  e observe que

$$\langle x, y_\lambda \rangle = \left\langle \left(x - \frac{\lambda(x)}{\lambda(y_0)} y_0\right) + \frac{\lambda(x)}{\lambda(y_0)} y_0, \frac{\overline{\lambda(y_0)}}{\langle y_0, y_0 \rangle} y_0 \right\rangle = \left\langle \frac{\lambda(x)}{\lambda(y_0)} y_0, \frac{\overline{\lambda(y_0)}}{\langle y_0, y_0 \rangle} y_0 \right\rangle = \lambda(x)$$

para provar que  $\|y_\lambda\|_H = \|\lambda\|_{H^*}$  observe

$$\|\lambda\|_{H^*} = \sup_{\|x\| \leq 1} |\lambda(x)| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle x, y_\lambda \rangle| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|y_\lambda\| \|x\| \leq \|y_\lambda\|$$

$$\|\lambda\|_{H^*} = \sup_{\|x\| \leq 1} |\lambda(x)| \geq \left| T\left(\frac{y_\lambda}{\|y_\lambda\|}\right) \right| = \left\langle \frac{y_\lambda}{\|y_\lambda\|}, y_\lambda \right\rangle = \|y_\lambda\|$$

■

## 1.2 Alguns fatos do Cálculo

Nessa seção vamos enunciar alguns resultados do cálculo que serão utilizados no decorrer dessa monografia. Não apresentaremos uma demonstração do Teorema da Divergência pois isso demandaria um estudo das superfícies em  $\mathbb{R}^n$ , o que seria demasiado alongado e fora do escopo desse trabalho, uma demonstração pode ser encontrada no capítulo 2 de [4].

As funções tratadas terão valores complexos a menos de menção em contrário.  $\Omega$  vai denotar um conjunto aberto em  $\mathbb{R}^n$ . Dado  $k \in \mathbb{N}$ ,  $C^k(\Omega)$  denota as funções  $k$  vezes continuamente diferenciáveis em  $\Omega$ .  $C^\infty(\Omega)$  são as funções infinitamente diferenciáveis. Também dizemos que  $f \in L^p(\Omega)$  se  $f$  é mensurável e  $|f|^p$  é integrável em  $\Omega$ , lembrando que a integral para nós é a integral de Lebesgue. Definimos também  $\text{supp}(f) = \overline{\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}}$ . E por fim dizemos que  $f \in L^1_{loc}(\Omega)$  se  $f|_K$  é integrável para todo  $K \subseteq \Omega$  compacto.

**Definição 1.9** (Mollifiers). *Dado  $x \in \mathbb{R}^n$ , defina a função*

$$\eta(x) = \begin{cases} C \exp\left(\frac{1}{|x|^2 - 1}\right), & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$$

Onde  $C$  é escolhido de modo que  $\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x) dx = 1$ . Dado  $\epsilon > 0$  defina também o mollifer como

$$\eta_\epsilon(x) = \epsilon^{-n} \eta(x/\epsilon) \tag{1.3}$$

Pode-se verificar que  $\eta_\epsilon(x) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  e que  $\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\epsilon(x) dx = 1$ .

**Teorema 1.5** (Desigualdade de Minkowski na forma integral). *Sejam  $(X, \mu)$  e  $(Y, \nu)$  espaços de medida  $\sigma$ -finitos,  $F : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$  mensurável, e  $1 \leq p < \infty$ , temos*

$$\left( \int_X \left( \int_Y |F(x, y)| d\nu(y) \right)^p d\mu(x) \right)^{1/p} \leq \int_Y \left( \int_X |F(x, y)|^p d\mu(x) \right)^{1/p} d\nu(y)$$

**Demonstração:** No caso  $p = 1$  temos a igualdade, isto é, o conteúdo do teorema de Fubini. Para o caso geral usaremos o teorema de Fubini e a desigualdade de Hölder<sup>3</sup>. Tome  $q$  conjugado de  $p$ , isto é  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Seja  $g(x) \in L^q(X, \mu)$ . Temos

$$\begin{aligned} \int_X \left( \int_Y |F(x, y)| d\nu(y) \right) |g(x)| d\mu(x) &= \int_Y \int_X |F(x, y)| |g(x)| d\mu(x) \nu(y) \\ &\leq \int_Y \left( \int_X |g(x)|^q d\mu \right)^{1/q} \left( \int_X |F(x, y)|^p d\mu \right)^{1/p} d\nu \\ &= \|g\|_q \int_Y \left( \int_X |F(x, y)|^p d\mu(x) \right)^{1/p} d\nu(y) \end{aligned} \tag{1.4}$$

Tome  $g(x) = \left( \int_Y |F(x, y)| d\nu(y) \right)^{p-1}$ , observe que  $g \in L^q(X, \mu)$ .

De fato  $p = (p-1)q$  e

$$\int_X |g(x)|^q d\mu(x) = \int_X \left| \left( \int_Y |F(x, y)| d\nu(y) \right)^{p-1} \right|^q d\mu(x) = \int_X \left( \int_Y |F(x, y)| d\nu(y) \right)^p d\mu(x) \tag{1.5}$$

Logo  $|g|^q$  é integrável e assim  $g \in L^q$ . Observe também que se  $\|g\|_q = 0$  então  $F(x, y) = 0$  e nesse caso a desigualdade é trivial. Considere o caso em que  $\|g\|_q \neq 0$ . De (1.5) temos

$$\|g\|_q = \left( \int_X \left( \int_Y |F(x, y)| d\nu(y) \right)^p d\mu(x) \right)^{1/q}$$

Substituindo em (1.4), usando que  $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$  obtemos a desigualdade requerida

$$\left( \int_X \left( \int_Y |F(x, y)| d\nu(y) \right)^p d\mu(x) \right)^{1/p} \leq \int_Y \left( \int_X |F(x, y)|^p d\mu(x) \right)^{1/p} d\nu(y)$$

■

**Teorema 1.6.** *Seja  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$  defina para todo  $\epsilon > 0$  a **mollifications** de  $f$  como*

$$f_\epsilon = f * \eta_\epsilon \tag{1.6}$$

*Então temos:*

<sup>3</sup> O Teorema de Fubini diz que se  $F$  é mensurável e os espaços são  $\sigma$ -finitos podemos trocar a ordem de integração. Já a desigualdade de Hölder afirma que se  $p$  e  $q$  são conjugados e  $f \in L^p$  e  $g \in L^q$  então  $\int_X |fg| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q$ . Demonstrações para esses teoremas e definição precisa de espaço de medida  $\sigma$ -finitos podem ser encontradas em [10].

- (a)  $f_\epsilon \in C^\infty$  para todo  $\epsilon > 0$ , e  $\alpha$  multi-índice temos  $\partial^\alpha f_\epsilon = f * \partial^\alpha \eta_\epsilon$ .
- (b)  $\text{supp}(f_\epsilon) \subset \{x \in \mathbb{R}^n ; \text{dist}(x, \text{supp}(f)) \leq \epsilon\}$ .
- (c) Se  $f \in C^0(\mathbb{R}^n)$ , então  $f_\epsilon \rightarrow f$  uniformemente em todo  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  compacto quando  $\epsilon \rightarrow 0$ .
- (d) Se  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ , então  $f_\epsilon \rightarrow f$  em  $L^p(\mathbb{R}^n)$  quando  $\epsilon \rightarrow 0$

**Demonstração:** (a) Dado  $h \neq 0$  considere

$$\frac{f_\epsilon(x + he_i) - f_\epsilon(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) [\eta_\epsilon(x - y + he_i) - \eta_\epsilon(x - y)] dy$$

Tomando  $h \rightarrow 0$  e usando o teorema da convergência dominada<sup>4</sup> temos

$$\frac{\partial f_\epsilon}{\partial x_i} = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \frac{\partial \eta_\epsilon(x - y)}{\partial x_i} dy = f * \frac{\partial \eta_\epsilon}{\partial x_i}$$

Para as integrais de ordem superior é análogo.

(b) Sai diretamente de  $\text{supp}(\eta_\epsilon) = \overline{B(0, \epsilon)}$ .

(c) Dado  $K \subset \mathbb{R}^n$  compacto. Sabemos em um compacto, se  $f$  é contínua então ela é uniformemente contínua, então fixe  $0 < \epsilon_0 \leq 1$  de modo que  $|f(x - y) - f(x)| < \epsilon_0$  para todos  $x, y \in K$  suficientemente próximos. Usando também que  $\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\epsilon = 1$  temos

$$\begin{aligned} |f_\epsilon(x) - f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} [f(x - y) - f(x)] \eta_\epsilon(y) dy \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x - y) - f(x)| \eta_\epsilon(y) dy \end{aligned}$$

Como  $\text{supp}(\eta_\epsilon) = \overline{B(0, \epsilon)}$  a integral se torna a integral sobre a bola. Assim  $|f_\epsilon(x) - f(x)| \leq \epsilon_0$ , logo  $f_\epsilon \rightarrow f$  em todo  $K$  compacto.

(d) Para provar isso temos que usar que  $C_c^0(\mathbb{R}^n)$  é um conjunto denso em  $L^p(\mathbb{R}^n)$  se  $1 \leq p < \infty$ . Dado  $\epsilon_0$  tome  $g \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$  de modo que

$$\|f - g\|_p \leq \frac{\epsilon_0}{3} \tag{1.7}$$

Pela desigualdade triangular temos

$$\|f_\epsilon - f\|_p \leq \|f_\epsilon - g_\epsilon\|_p + \|g_\epsilon - g\|_p + \|g - f\|_p$$

<sup>4</sup> Teorema da convergência dominada: Seja  $(f_n)$  sequência de funções tal que  $f_n \rightarrow f$  pontualmente, e suponha que  $|f_n(x)| \leq |g(x)|$  quase sempre, onde  $g$  é integrável. Então temos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n = \int f$ . Para uma demonstração consulte [10]

Como  $g$  e  $g_\epsilon$  tem suportes compacto pelo item (c) podemos tomar  $\epsilon$  pequeno de modo que

$$\|g_\epsilon - g\|_p \leq \frac{\epsilon_0}{3} \quad (1.8)$$

Por fim para  $\|f_\epsilon - g_\epsilon\|_p$  temos que usar a desigualdade de Minkowski para integrais

$$\begin{aligned} \|f_\epsilon - g_\epsilon\|_p &= \left( \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} [(f - g)(x - y)\eta_\epsilon(y)] dy \right|^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |(f - g)(x - y)|^p \eta_\epsilon^p(y) dx \right)^{1/p} dy \\ &= \|f - g\|_p \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\epsilon^p(y) dy \\ &\leq \|f - g\|_p \end{aligned} \quad (1.9)$$

Juntando (1.7), (1.8) e (1.9) temos que  $\|f_\epsilon - f\|_p \leq \frac{\epsilon_0}{3} + \frac{\epsilon_0}{3} + \frac{\epsilon_0}{3} = \epsilon_0$ .

■

**Teorema 1.7** (Teorema da Divergência de Gauss). *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado com fronteira suave e com orientação induzida.  $X : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo vetorial de classe  $C^1$ . Seja ainda  $\nu : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  o campo vetorial normal unitário a  $\partial\Omega$ . Então*

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(X) dx = \int_{\partial\Omega} X \cdot \nu dS$$

Temos como corolário do teorema da divergência as seguintes fórmulas de integração. Essa vão ser usadas de modo extensivo nos próximos capítulos.

**Teorema 1.8** (Fórmulas de integração). *Seja  $u, v : \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classes  $C^1$  no aberto, onde  $\Omega$  está nas condições do teorema anterior. Temos*

(1) (fórmula de Gauss-Green)

$$\int_{\Omega} \partial_j u dx = \int_{\partial\Omega} u \nu_j dS$$

Onde  $\nu_j$  é a  $j$ -ésima componente de  $\nu$ .

(2) (Integração por partes)

$$\int_{\Omega} u \partial_j v dx = \int_{\partial\Omega} u v \nu_j dS - \int_{\Omega} v \partial_j u dx$$

(3) (fórmula de Green), suponha ainda que  $v \in C^2(\overline{\Omega})$ . Então

$$\int_{\partial\Omega} u \partial_\nu v dS = \int_{\Omega} [u \Delta v + \nabla u \cdot \nabla v] dx$$

**Demonstração:** (1) Basta tomar  $X(x) = u(x)e_j$ .

*Observação:* Na verdade a fórmula de Gauss-Green e o teorema da divergência são equivalentes. O trabalho para mostrar essa fórmula é essencialmente o mesmo de mostrar o teorema da divergência.

(2) Basta usar a regra de Leibniz, isto é,  $\partial_j(uv) = \partial_j(u)v + u\partial_j(v)$  e aplicar a fórmula de Gauss-Green.

(3) Aplique o teorema de divergência para o campo  $X(x) = u(x)\nabla v(x)$ . Note que  $\operatorname{div}(u\nabla v) = \nabla u \cdot \nabla v + u\operatorname{div}(\nabla v) = \nabla u \cdot \nabla v + u\Delta v$ . Por outro lado  $X \cdot \nu = u(\nabla v \cdot \nu) = u\partial_\nu v$ .

■

## 1.3 Séries de Fourier

A série de Fourier é uma importante ferramenta da análise que tem aplicação em vários ramos da matemática. É uma peça muito utilizada em equações diferenciais. Em análise de Fourier, estamos interessados em funções periódicas. Vamos estudar aqui algumas condições para podermos expandir uma função em termos de uma base de  $L^2$ .

Para uma função admitir uma representação em termo da série de Fourier é necessário pedir certa regularidade dela. Uma propriedade importante é a função ser quadrado integrável. Esse espaço vem equipado com um produto interno natural,  $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}dx$ , e conseqüentemente uma norma. Esse produto interno é o que torna  $L^2$  um espaço tão especial, pois assim ele é um espaço de Hilbert ao contrário dos  $L^p$  que em geral são apenas espaços de Banach. As ferramentas de espaços de Hilbert serão fundamentais para estabelecer a convergência da séries de Fourier.

Consideremos  $L^2(Q)$ , onde  $Q = [-\pi, \pi]^n$ , que é um espaço de Hilbert com o produto interno  $\langle f, g \rangle = (2\pi)^{-n} \int_Q f(x)\overline{g(x)}dx$ . Considere também o conjuntos  $\{e^{ik \cdot x}\}_{k \in \mathbb{Z}^n}$  de funções, onde  $k$  é um multi-índice. Vamos provar que esse conjunto forma uma base ortonormal para  $L^2(Q)$ . Primeiro devemos observar que de fato esse conjunto é um

conjunto ortonormal. Mas cálculos diretos nos dão:

$$\begin{aligned}
 \langle e^{ik \cdot x}, e^{il \cdot x} \rangle &= (2\pi)^{-n} \int_Q e^{i \langle (k-l), x \rangle} \\
 &= (2\pi)^{-n} \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k_1-l_1)x_1} \dots e^{i(k_n-l_n)x_n} dx_n \dots dx_1 \\
 &= \begin{cases} 1 & \text{se } k = l \\ 0 & \text{se } k \neq l \end{cases}
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

Afim de provar que  $\{e^{ik \cdot x}\}_{k \in \mathbb{Z}^n}$  é de fato uma base ortonormal vamos provar o seguinte lema.

**Lema 1.1.** *Se  $f \in L^2(Q)$  satisfaz  $\langle f, e^{i \langle k, x \rangle} \rangle = 0$  para todo  $k \in \mathbb{Z}^n$ , Então  $f = \mathbf{0}$ . Ou seja  $\{e^{i \langle k, x \rangle}\}_{k \in \mathbb{Z}^n}$  é base ortonormal de  $L^2(Q)$ .*

A prova desse lema não é direta e exige certo trabalho. Antes de demonstra-lo vamos provar o seguinte resultado

**Teorema 1.9.** *Se  $f \in L^2(Q)$ , Então  $f$  pode ser expandida em série de Fourier como*

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(k) e^{i \langle k, x \rangle},$$

cujos os coeficientes de Fourier são dados por

$$\hat{f}(k) = \langle f, e^{i \langle k, x \rangle} \rangle = (2\pi)^{-n} \int_Q f(x) e^{i \langle k, x \rangle} dx$$

Reciprocamente, se  $(c_k) \in l^2(\mathbb{Z}^n)$ , então a série  $\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k e^{i \langle k, x \rangle}$  converge para alguma  $f \in L^2(Q)$  e  $\hat{f}(k) = c_k$

**Demonstração** A ida segue do **lema 1.1** e do **teorema 1.2**.

Reciprocamente se  $c_k \in l^2(\mathbb{Z}^n)$  então a série  $\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |c_k|^2$  converge, logo as somas parciais formam uma sequência de Cauchy. Defina a sequência de funções  $f_N := \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^n \\ |k| \leq N}} c_k e^{i \langle k, x \rangle}$ .

Observe que:

$$\|f_N - f_M\|^2 = \left\| \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^n \\ M \leq |k| \leq N}} c_k e^{i \langle k, x \rangle} \right\|^2 = \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^n \\ M \leq |k| \leq N}} |c_k|^2$$

Logo  $(f_N)$  também é uma sequência de Cauchy em  $L^2(Q)$  que é um espaço completo, portanto converge para alguma  $f \in L^2(Q)$ , e por ortogonalidade obtemos  $\hat{f}(k) = c_k$ .

■



Para provar o **lema 1.1**, vamos começar tratando do caso mais familiar onde  $n = 1$ , ou seja  $f \in L^2([-\pi, \pi])$ .

Seja  $S_m f(x)$  a soma parcial da série de Fourier de  $f$ , isto é

$$S_m f(x) = \sum_{k=-m}^m \hat{f}(k) e^{ikx} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-m}^m e^{i(x-y)k} f(y) dy \quad (1.11)$$

Definimos os núcleos de Dirichlet como  $D_m(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-m}^m e^{ikx}$ . Logo temos que  $S_m f(x) = (D_m * f)(x)$ .

Defina agora as somas de Cesàro de  $f$  como:  $\sigma_n f(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{m=0}^N S_m f(x)$ , então temos

$$\begin{aligned} \sigma_n f(x) &= \frac{1}{N+1} \sum_{m=0}^N S_m f(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{m=0}^N (D_m * f)(x) \\ &= \left( \left( \frac{1}{N+1} \sum_{m=0}^N D_m \right) * f \right)(x) \\ &= \left( \left( \frac{1}{2\pi(N+1)} \sum_{m=0}^N \sum_{k=-m}^m e^{iky} \right) * f \right)(x) \\ &= \left( \left( \frac{1}{2\pi(N+1)} \sum_{m=0}^N \frac{e^{i(m+\frac{1}{2})y} - e^{-i(m+\frac{1}{2})y}}{e^{i\frac{1}{2}y} - e^{-i\frac{1}{2}y}} \right) * f \right)(x) \\ &= * \left( \frac{1}{2\pi(N+1)} \frac{e^{i(N+1)y} - 2 + e^{-i(N+1)y}}{(e^{i\frac{1}{2}y} - e^{-i\frac{1}{2}y})^2} \right) * f(x) \\ &= \left( \frac{1}{2\pi(N+1)} \frac{\text{sen}^2\left(\frac{N+1}{2}y\right)}{\text{sen}^2\left(\frac{1}{2}y\right)} * f \right)(x) \end{aligned} \quad (1.12)$$

Onde chamaremos  $F_n(x) = \frac{1}{2\pi(N+1)} \frac{\text{sen}^2\left(\frac{N+1}{2}x\right)}{\text{sen}^2\left(\frac{1}{2}x\right)}$  de núcleo de Fejér. Logo de (1.12) temos que  $\sigma_n f(x) = (F_n * f)(x)$ . A sequência  $(F_N(x))_{N \in \mathbb{N}}$  tem algumas propriedades especiais, ela é o que chamamos de uma *identidade aproximada*, isto é, ela satisfaz

$$(1) F_N \geq 0 \quad \forall N$$

$$(2) \int_{-\pi}^{\pi} F_N(x) dx = 1 \quad \forall N$$

$$(3) \forall \delta \geq 0 \text{ temos que } \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{\delta \leq |x| \leq \pi} F_N \rightarrow 0$$

(1) e (3) são verificados facilmente da expressão que obtemos para  $F_N$ , já para verificar (2) é mais fácil usar  $F_N$  em termo das somas parciais.

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} F_N(x) dx &= \frac{1}{2\pi(N+1)} \sum_{m=0}^N \sum_{\substack{k=-m \\ k \neq 0}}^m \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} dx \\
&= \frac{1}{2\pi(N+1)} \left( \sum_{m=0}^N \sum_{\substack{k=-m \\ k \neq 0}}^m \left( \frac{e^{ik\pi} - e^{-ik\pi}}{ik} \right) + 2\pi \right) \\
&= \frac{1}{2\pi(N+1)} \left( \sum_{m=0}^N (0 + 2\pi) \right) \\
&= 1
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Então, de fato,  $F_N$  é uma identidade aproximada, e para identidades aproximadas vale o seguinte lema

**Lema 1.2.** *Seja  $(F_N)$  uma identidade aproximada. Se  $f \in L^p([-\pi, \pi])$  onde  $1 \leq p < \infty$ , Então*

$$\|F_N * f - f\|_{L^p} \rightarrow 0 \quad \text{se } N \rightarrow \infty \tag{1.14}$$

**Demonstração** Como  $F_N$  tem integral 1 temos que.

$$(F_N * f)(x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} F_N(y)(f(x-y) - f(x)) dy$$

Então temos

$$\|(F_N * f) - f\|_{L^p} = \left( \int_{-\pi}^{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} F_N(y)(f(x-y) - f(x)) dy \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Usando a desigualdade da Minkowski na forma integral, **Teorema 1.5** obtemos.

$$\begin{aligned}
\|(F_N * f)(x) - f(x)\|_{L^p} &= \left( \int_{-\pi}^{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} F_N(y)(f(x-y) - f(x)) dy \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \int_{-\pi}^{\pi} \left( \int_{-\pi}^{\pi} |F_N(y)|^p |f(x-y) - f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} dy \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} F_N(y) \|f(x-y) - f(x)\|_{L^p} dy \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} |F_N| \|f(x-y) - f(x)\|_{L^p} dy \\
&= \int_{\delta \leq |y| \leq \pi} |F_N| \|f(x-y) - f(x)\|_{L^p} dy \\
&\quad + \int_{|y| \leq \delta} |F_N| \|f(x-y) - f(x)\|_{L^p} dy \\
&\leq 4\pi \|f\|_{L^p} \sup_{\delta \leq |x| \leq \pi} F_N(x) + \sup_{|y| \leq \delta} \|f(x-y) - f(x)\|_{L^p}
\end{aligned}$$

dado  $\epsilon > 0$ , podemos tomar  $\delta > 0$  tal que  $\|f(x-y) - f(x)\|_{L^p} \leq \frac{\epsilon}{2}$  se  $|y| \leq \delta$  mesmo que  $f$  não seja contínua <sup>5</sup>.

Usando as propriedades de  $F_N$  podemos tomar  $\delta$  menor ainda se necessário e  $N$  suficientemente grande de modo que  $\sup_{\delta \leq |x| \leq \pi} F_N(x) < \frac{\epsilon}{2 \cdot 4\pi \|f\|_{L^p}}$ . De onde segue o resultado. ■

Como  $(F_N * f)(x) = \sigma_N f(x)$ , obtemos que  $\|\sigma_N f - f\|_{L^p} \rightarrow 0$  se  $N \rightarrow \infty$ . Feita essa observação podemos agora provar o Lema 1.1.

**Demonstração do Lema 1.1** Vamos fazer por indução na dimensão.

Caso  $n = 1$ : Se  $f \in L^2([-\pi, \pi])$  e  $\langle f, e^{ik} \rangle = 0$  para todo  $k \in \mathbb{Z}$  então  $S_m f = 0$ , logo  $\sigma_N f = 0$  para todo  $N$ . Logo pela observação anterior  $f = 0$ .

Agora seja  $f \in L^2([-\pi, \pi]^n)$  com  $\langle f, e^{ik \cdot x} \rangle = 0$  para todo  $k \in \mathbb{Z}^n$ , então temos

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} f(x_1, x_2, \dots, x_n) e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2 + \cdots + k_n x_n)} dx_1 dx_2 \cdots dx_n \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} h(x_1, k_2, \dots, k_n) e^{-ik_1 x_1} dx_1
\end{aligned}$$

Onde

$$h(x_1, k_2, \dots, k_n) := \int_{[-\pi, \pi]^{n-1}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) e^{i(k_2 x_2 + \cdots + k_n x_n)} dx_2 \cdots dx_n$$

<sup>5</sup> Para mostrar isso temos que usar que  $C_c^0(\mathbb{R}^n)$  é denso em  $L^p$ . Tome  $\varphi \in C_c^0$  tal que  $\|f - \varphi\|_p \leq \epsilon$  então temos que  $\|f(x-y) - f(x)\|_p \leq \|f(x-y) - \varphi(x-y) + \varphi(x-y) - \varphi(x) + \varphi(x) - f(x)\|_p \leq 2\|f - \varphi\|_p + \|\varphi(x-y) - \varphi(x)\|_p$ , basta tomar  $y$  pequeno o suficiente.

Para  $k_2, \dots, k_n$  fixo porem arbitrários temos que  $h(x_1, k_2, \dots, k_n) \in L^2([-\pi, \pi])$  como função de  $x_1$ , de fato usando o desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |h(x_1, k_2, \dots, k_n)|^2 dx_1 &= \int_{-\pi}^{\pi} \left| \int_{[-\pi, \pi]^{n-1}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) e^{i(k_2 x_2 + \dots + k_n x_n)} dx_2 \dots dx_n \right|^2 dx_1 \\ &\leq \int_{[-\pi, \pi]} \int_{[-\pi, \pi]^{n-1}} |f(x_1, x_2, \dots, x_n)|^2 dx_2 \dots dx_n dx_1 \end{aligned}$$

Pelo caso  $n = 1$  temos que

$$h(x_1, k_2, \dots, k_n) = \int_{[-\pi, \pi]^{n-1}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) e^{i(k_2 x_2 + \dots + k_n x_n)} dx_2 \dots dx_n = 0 \quad (1.15)$$

Fixando  $x_1$  defina  $g_{x_1}(x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , de (1.15) temos

$$\int_{[n, n]^{n-1}} g_{x_1}(x_2, \dots, x_n) e^{i(k_2 x_2 + \dots + k_n x_n)} dx_2 \dots dx_n = 0$$

Por hipótese de indução vamos ter  $g_{x_1}(x_2, \dots, x_n) = 0$ , como isso vale para todo  $x_1 \in [-\pi, \pi]$  temos que  $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ .

■

## 2 Espaços de Sobolev

Nesse capítulo vamos introduzir os espaços de Sobolev e a noção de solução fraca de uma Equação Diferencial Parcial, pois tais conceitos são importantes para o entendimento do problema de Calderón. Ao longo desse trabalho usaremos recorrentemente conceitos e propriedades de tais espaços e das soluções fracas, por isso vamos fazer uma breve apresentação de tal assunto. De fato não faremos nada muito abrangente e nem demonstraremos todos os resultados, mas deixaremos referências onde pode-se encontrar uma demonstração completa. Sendo assim, seguiremos em uma diagonal, abordando definições e resultados que se são de fundamental importância para entender as páginas que se seguem. Para isso seguiremos [4] e [3].

Os *Espaços de Sobolev* são a linguagem básica para lidar com equações diferenciais parciais a nível não elementar. Tais espaços são importante pois quando se trata de EDP's muitas vezes não sabemos encontrar ou simplesmente não existem soluções clássicas, onde entendemos por solução clássica uma função com um grau de diferenciabilidade adequado e que satisfaz a equação. Então é necessário generalizar o conceito de solução, para isso temos que definir o que é a *derivada fraca* para poder falar das *soluções fracas*.

Nesse trabalho estamos interessados em equações elípticas de segunda ordem, em especial, na equação de condutividade  $\nabla \cdot (\gamma \nabla u) = 0$ . Vamos mostrar que sobre determinadas hipóteses o problema de Dirichlet para operadores elípticos é bem posto, e como caso particular vamos ter existência e unicidade de solução fraca para a equação de condutividade. Para isso vamos usar os Espaços de Sobolev que são espaços de funções que admitem derivada fraca e tem uma boa estrutura permitindo usar técnicas de análise funcional, em especial de Espaços de Hilbert, para procurar soluções.

Antes de definir formalmente a derivada fraca consideremos o caso em que  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  aberto limitado e com fronteira suave e  $u \in C^k(\bar{\Omega})$ . Seja também  $\partial^\alpha u$  a derivada usual de  $u$ , onde  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$  é um multi-índice<sup>1</sup> com  $|\alpha| \leq k$ . Se  $\varphi$  é um função suave como suporte em  $\Omega$ , integrando por partes temos.

$$\int_{\Omega} u(\partial^\alpha \varphi) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} (\partial^\alpha u) \varphi dx \quad (2.1)$$

O lado esquerdo faz sentido para toda função  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$  (isso significa que  $u|_K \in L^1(K)$ , para todo  $K \subseteq \Omega$  compacto). Então dizemos que uma função  $v$  integrável é a derivada fraca de  $u$  de ordem  $\alpha$  se para todo  $\varphi$  de suporte compacto vale (2.1) trocando  $\partial^\alpha u$  por  $v$ . Mais precisamente temos

<sup>1</sup> Seja  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  onde  $\alpha_j \in \mathbb{N}_0$  para  $j = 1, \dots, n$ . Definimos  $|\alpha| = |\alpha_1| + \dots + |\alpha_n|$  e a derivada por  $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n}$ , onde  $\partial_j^{\alpha_j} = \frac{\partial^{\alpha_j}}{\partial x_j^{\alpha_j}}$ .

**Definição 2.1** (Função teste). *Uma função  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  infinitamente diferenciável e com suporte compacto é dita ser uma função teste. O conjunto das funções teste é denotado por  $C_c^\infty(\Omega)$ .*

**Definição 2.2** (Derivada fraca). *Seja  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto, sejam  $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ , e  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$  um multi-índice. Dizemos que  $v$  é a  $\alpha$ -ésima derivada fraca de  $u$  se para toda  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$  temos*

$$\int_{\Omega} u(\partial^\alpha \varphi) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \varphi dx \quad (2.2)$$

escrevemos  $v = \partial^\alpha u$

Agora podemos definir o que são os espaços de Sobolev. Vamos nos restringir a definir os espaços de Sobolev baseados em  $L^2(\Omega)$ , pois são os espaços uteis para estudar operadores elípticos. Uma definição bem parecida pode ser dada para espaços de Sobolev baseados em qualquer  $L^p$ , mas para  $p \neq 2$  não teríamos um produto interno.

**Definição 2.3** (Espaço de Sobolev). *Seja  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto e  $k \in \mathbb{N}$ . O Espaço de Sobolev  $H^k(\Omega)$  consiste de todas as funções  $u \in L^2(\Omega)$  para quais a derivada fraca  $\partial^\alpha u \in L^2(\Omega)$  para todo  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$  com  $|\alpha| \leq k$ , equipado com o produto interno*

$$\langle u, v \rangle_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \langle \partial^\alpha u, \partial^\alpha v \rangle_{L^2(\Omega)} \quad (2.3)$$

e com a norma

$$\|u\|_{H^k(\Omega)} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{H^k(\Omega)}} \quad (2.4)$$

É interessante fazer algumas observações sobre derivada fraca. Para garantir a unicidade da derivada fraca temos que usar o Lema de Du Bois-Reymond.

**Lema 2.1** (Du Bois-Reymond). *Seja  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  aberto e  $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ . Se para toda  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$*

$$\int_{\Omega} f \varphi dx = 0 \quad (2.5)$$

Então  $f = 0$  quase sempre (q.s) em  $\Omega$ .

**Demonstração:** Seja  $x \in \Omega$  tome  $x \in K \subset \Omega$  compacto. Defina  $\tilde{f} = f \chi_K \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , onde  $\chi_K$  é a função característica de  $K$ . Dado  $y \in K$ , então  $\tilde{f} * \eta_\epsilon(y) = 0$  tomando  $\epsilon$  pequeno o suficiente de modo que  $\text{supp}(\eta_\epsilon) \subset \Omega$ . Mas pelo **teorema 1.6**  $0 = \tilde{f} * \eta_\epsilon \rightarrow \tilde{f}$  em  $L^1$  se  $\epsilon \rightarrow 0$ , logo  $f = 0$  q.s próximo de  $x$ . Então  $f = 0$  q.s.

■

Com esse lema a unicidade da derivada fraca é imediata. Outra observação é que se a uma função for derivável no sentido clássico ela vai possuir derivada fraca, ou seja os conjuntos  $C^k(\bar{\Omega})$  e  $C_c^\infty(\Omega)$  estão contidos em  $H^k(\Omega)$ . Um exemplo de função que não é de classe  $C^k$  mas pertence a  $H^1(\Omega)$  é  $u(x) = |x|^{-\beta}$  desde que  $\beta < \frac{n}{2} - 1$ . A derivada fraca possui as seguinte propriedades.

**Proposição 2.1.** *Assuma que  $u, v \in H^k(\Omega)$  e  $|\alpha| \leq k$ . Então*

(a)  $\partial^\alpha u \in H^{k-|\alpha|}(\Omega)$  e ainda  $\partial^\beta \partial^\alpha u = \partial^\alpha \partial^\beta u = \partial^{\alpha+\beta} u$  para todos  $\alpha$  e  $\beta$  tais que  $|\alpha| + |\beta| \leq k$

(b) Para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$  temos que  $u + \lambda v \in H^k(\Omega)$  e  $\partial^\alpha(u + \lambda v) = \partial^\alpha u + \lambda \partial^\alpha v$

(c) (Regra de Leibniz) Se  $\xi \in C_c^\infty(\Omega)$  então  $\xi u \in H^k(\Omega)$  e  $\partial_j(\xi u) = \xi \partial_j(u) + \partial_j(\xi)u$

**Demonstração:** Para demonstrar essa proposição usaremos que tais propriedades valem para funções suaves.

(a) Dado  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$  então  $\partial^\beta \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ . Observe que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\partial^\alpha u)(\partial^\beta \varphi) dx &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u(\partial^{\alpha+\beta} \varphi) dx \\ &= (-1)^{|\alpha|} (-1)^{|\alpha|+|\beta|} \int_{\Omega} (\partial^{\alpha+\beta} u) \varphi dx \\ &= (-1)^{|\beta|} \int_{\Omega} (\partial^{\alpha+\beta} u) \varphi dx \end{aligned}$$

Desde que  $|\alpha + \beta| \leq k$  ou seja  $|\beta| \leq k - |\alpha|$ , temos que  $\partial^{\alpha+\beta} u \in L^2(\Omega)$ , como isso  $\partial^\alpha u \in H^{k-|\alpha|}(\Omega)$  e ainda mais  $\partial^\beta \partial^\alpha u = \partial^{\alpha+\beta} u$ , analogamente para  $\partial^\alpha \partial^\beta u$ .

(b) Novamente tome  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ , temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (u + \lambda v) \partial^\alpha \varphi dx &= \int_{\Omega} u \partial^\alpha \varphi dx + \lambda \int_{\Omega} v \partial^\alpha \varphi dx \\ &= (-1)^{|\alpha|} \left( \int_{\Omega} \partial^\alpha u \varphi dx + \lambda \int_{\Omega} \partial^\alpha v \varphi dx \right) \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} (\partial^\alpha u + \lambda \partial^\alpha v) \varphi dx \end{aligned}$$

Logo  $\partial^\alpha(u + \lambda v) = \partial^\alpha u + \lambda \partial^\alpha v$

(c) Por fim

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} (\xi u) \partial_j \varphi dx &= \int_{\Omega} u (\xi \partial_j \varphi) dx \\
 &= \int_{\Omega} u (\partial_j (\xi \varphi) - \varphi \partial_j \xi) dx \\
 &= \int_{\Omega} (-\partial_j u (\xi \varphi) - u \partial_j \xi \varphi) dx \\
 &= -1 \int_{\Omega} (\xi \partial_j u + u \partial_j \xi) \varphi dx
 \end{aligned}$$

Assim  $\partial_j(\xi u) = \xi \partial_j(u) + \partial_j(\xi)u$ . ■

**Teorema 2.1.**  $H^k(\Omega)$  é um espaço de Hilbert para todo  $k \in \mathbb{N}$

**Demonstração** Que  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^k(\Omega)}$  é um produto interno vem do fato de  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\Omega)}$  ser. O que nos resta é provar que esse espaço é completo com relação a norma que vem do produto interno.

Seja  $(u_n)$  uma sequência de Cauchy em  $H^k(\Omega)$ . Em primeiro lugar temos que se  $|\alpha| \leq k$  então  $\partial^\alpha u_n \in L^2(\Omega)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , ainda mais note que  $(\partial^\alpha u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é sequência de Cauchy em  $L^2(\Omega)$ .

Dado  $0 < \epsilon$  tome  $n_0$  tal que se  $m, n \geq n_0$ .

$$\left( \sum_{|\beta| \leq k} \langle \partial^\beta (u_n - u_m), \partial^\beta (u_n - u_m) \rangle_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2} = \|u_n - u_m\|_{H^k(\Omega)} < \epsilon$$

Logo para todo  $\alpha$  multi-índice tal que  $|\alpha| \leq k$  temos que

$$\|\partial^\alpha u_n - \partial^\alpha u_m\|_{L^2(\Omega)} = \langle \partial^\alpha (u_n - u_m), \partial^\alpha (u_n - u_m) \rangle_{L^2(\Omega)}^{1/2} < \epsilon$$

De fato cada sequência  $(\partial^\alpha u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é de Cauchy. Se valendo da completude de  $L^2(\Omega)$  existe  $u_\alpha$  tal que  $\partial^\alpha u_n \rightarrow u_\alpha \forall \alpha$ . Em particular existem  $u \in L^2(\Omega)$  tal que  $u_n \rightarrow u$ , basta tomar  $|\alpha| = 0$ .

Agora provaremos que  $u \in H^k(\Omega)$  e ainda mais vale que  $\partial^\alpha u = u_\alpha$ .

Com efeito tome  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ , então

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} u \partial^\alpha \varphi dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_n \partial^\alpha \varphi dx \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \partial^\alpha u_n \varphi dx \\
 &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u_\alpha \varphi dx
 \end{aligned}$$



Logo  $u \in H^k(\Omega)$  e ainda  $u_n \rightarrow u$  em  $H^k(\Omega)$ . ■

Outro fato útil sobre a derivada fraca é

**Proposição 2.2.** *Seja  $u \in H^1(\Omega)$  tal que  $\nabla u = 0$  em  $\Omega$ . Então  $u$  é constante em cada componente conexa de  $\Omega$ .*

**Demonstração:** Dado  $x \in \Omega$ , seja  $\Omega_x$  a componente conexa contendo  $x$  tome ainda  $x \in K \subseteq \Omega_x$  compacto. Defina  $u_\epsilon = u * \eta_\epsilon$

Sabemos pelo **Teorema 1.6** que  $\nabla u_\epsilon = u * \nabla \eta_\epsilon$ . Tomando  $\epsilon$  pequeno o suficiente de modo que  $\text{supp}\{\eta_\epsilon(y - x)\} \subset \Omega$  e integrando por partes temos  $\nabla u_\epsilon = \nabla u * \eta_\epsilon = 0$ . Como  $u_\epsilon$  é suave então  $u_\epsilon$  é constante em cada compacto contido em  $\Omega_x$ , logo constante em  $\Omega_x$ . Por fim usando novamente o **Teorema 1.6**, se  $\epsilon \rightarrow 0$  então  $u_\epsilon \rightarrow u$  temos que  $u$  é constante em cada componente conexa. ■

Vamos precisar definir mais alguns espaços importantes para lidar com problemas de valor de contorno. O próximo passo será definir o espaço das funções em  $H^k(\Omega)$  que se anulam em  $\partial\Omega$ , para isso definimos.

**Definição 2.4.** *Denotamos por  $H_0^1(\Omega)$  o fecho de  $C_c^\infty(\Omega)$  em  $H^1(\Omega)$ . E seu dual, ou seja o espaço dos  $F : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$  funcionais lineares limitados, é denotado por*

$$H^{-1}(\Omega) = (H_0^1(\Omega))^* \tag{2.6}$$

Para obter os resultados de existência e unicidade vamos necessitar de apenas um resultado não trivial sobre os Espaços de Sobolev. Mais precisamente vamos usar que o mapa  $i : H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  é compacto, em outras palavras, toda sequência  $(u_n)$  de elementos de  $H_0^1(\Omega)$  tem um subsequência que converge para algum elemento de  $L^2(\Omega)$ . A prova desse resultado é trabalhosa e será omitida, no entanto pode ser encontrada em [4]. Usaremos tal teorema para provar a desigualdade de Poincaré, a qual é uma ferramenta crucial na provar da existência de solução fraca.

**Teorema 2.2** (Imersão compacta de Sobolev). *Se  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  aberto limitado, então o mapa de inclusão  $i : H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  é compacto.*

**Teorema 2.3** (Desigualdade de Poincaré). *Se  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  aberto limitado, então existe uma contante  $C > 0$  tal que para toda  $u \in H_0^1(\Omega)$  vale*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \tag{2.7}$$

**Demonstração:** Vamos seguir por contradição.

Para cada  $k \in \mathbb{N}$  tome  $u_k \in H_0^1(\Omega)$  tal que

$$\|u_k\|_{L^2(\Omega)} \geq k \|\nabla u_k\|_{L^2(\Omega)}$$

Podemos assumir sem perda de generalidade que  $\|u_k\|_{L^2(\Omega)} = 1$ , basta dividir a desigualdade acima por  $\|u_k\|_{L^2(\Omega)}$ . Assim temos.

$$\frac{1}{k} \geq \|\nabla u_k\|_{L^2(\Omega)} \quad (2.8)$$

Como  $(u_k)$  é uma sequência limitada, pelo teorema da imersão compacta de Sobolev, tem uma subsequência convergente para algum  $u \in L^2(\Omega)$ . Para não carregar a notação renomeamos essa subsequência para  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ . E mais ainda temos que  $\nabla u_k \rightarrow 0$  em  $L^2(\Omega)$ .

Agora vamos provar que  $u \in H_0^1(\Omega)$  e que  $\nabla u = 0$ . De fato dado  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$  temos

$$\int_{\Omega} u \nabla \varphi dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_k \nabla \varphi dx = - \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \nabla u_k \varphi = 0$$

Então  $u_k \rightarrow u$  em  $H^1(\Omega)$  e ainda mais  $\nabla u = 0$ . Usando que  $H_0^1(\Omega)$  é fechado e como cada  $u_k \in H_0^1(\Omega)$  temos que  $u \in H_0^1(\Omega)$ . Pela **Proposição 2.2**, e usado que  $\text{supp}(u)$  é compacto, temos que  $u$  é identicamente nulo, mas

$$0 = \|u\|_{L^2(\Omega)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k\|_{L^2(\Omega)} = 1$$

que dá uma contradição. ■

**Corolário 2.1.** *A desigualdade de Poicaré implica que  $\|\nabla \cdot\|_{L^2(\Omega)}$  é uma norma equivalente em  $H_0^1(\Omega)$ .*

**Demonstração:** É imediato que  $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)}$ . Por outro usando a desigualdade de Poicaré temos

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 &= \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \frac{1}{C+1} \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 &\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned}$$
■

Definiremos também o que são os espaços de Sobolev na borda de  $\Omega$ . Eles são importantes pois são os espaços de funções apropriados para descrever os valores de contorno de um problema de Dirichlet. Vamos definir ele como um quociente, isto é, dizemos que duas funções  $u$  e  $v$  em  $H^1(\Omega)$  tem o mesmo valor na fronteira, também chamado de *traço*, se  $u - v \in H_0^1(\Omega)$ . Sendo assim definimos.

**Definição 2.5.** Definimos o espaço de Sobolev em  $\partial\Omega$  como  $H^{1/2}(\partial\Omega) = H^1(\Omega)/H_0^1(\Omega)$ . Também definimos o operador traço

$$\begin{aligned} R : H^1(\Omega) &\rightarrow H^{1/2}(\partial\Omega) \\ u &\mapsto [u] \end{aligned}$$

Escrevemos  $Ru = u|_{\partial\Omega}$

A definição dada acima para tal espaço é um tanto quanto abstrata. De fato se exigirmos certa regularidade sobre a fronteira de  $\Omega$  podemos identificar  $H^{1/2}(\partial\Omega)$  com um sub-espaço de  $L^2(\partial\Omega)$  que possuem "meia derivada", mas para fazer essa identificação é mais conveniente trabalhar com a definição dos espaços de Sobolev via transformada de Fourier. Entretanto para o que vamos precisar nesse trabalho não é necessário tal identificação, e a definição abstrata é mais conveniente para alcançar nossos objetivos. Como ela conseguimos dar uma estrutura de Espaço de Hilbert para  $H^{1/2}(\partial\Omega)$ .

Observe que como  $H_0^1(\Omega)$  é um subespaço fechado temos que.

$$H^1(\Omega) = H_0^1(\Omega) \oplus H_0^1(\Omega)^\perp \quad (2.9)$$

**Teorema 2.4.** Seja  $P : H^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)^\perp$  a projeção ortogonal. Definimos o mapa

$$\begin{aligned} T : H^{1/2}(\partial\Omega) &\rightarrow H_0^1(\Omega)^\perp \\ [u] &\mapsto P(u) \end{aligned}$$

que é bijetivo. Ainda mais, defina o seguinte produto interno em  $H^{1/2}(\partial\Omega)$ .

$$\langle [u], [v] \rangle_{H^{1/2}(\partial\Omega)} = \langle T([u]), T([v]) \rangle_{H^1(\Omega)}$$

Então  $H^{1/2}(\partial\Omega)$  é completo com respeito a essa produto interno.

**Demonstração:** Primeiro vejamos que o mapa  $T$  está bem definido.

De fato suponha que  $[u] = [v]$ , logo  $u - v \in H_0^1(\Omega)$ . Mas

$$T([u]) - T([v]) = P(u) - P(v) = P(u - v) = 0.$$

logo  $T$  está bem definido e é injetor. Para verificar a sobrejetividade tome  $w \in H_0^1(\Omega)^\perp$ , note que  $T([w]) = P(w) = w$ . A linearidade sai usando que a projeção  $P$  é linear.

Como  $T$  é bijeção linear temos que  $\langle [u], [v] \rangle_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$  é produto interno. Por fim seja  $([u_k])_{k \in \mathbb{N}}$  sequencia de Cauchy, então temos que  $(T([u_k]))_{k \in \mathbb{N}}$  também é. Como  $H_0^1(\Omega)^\perp$  é fechado então existe  $u \in H_0^1(\Omega)^\perp$  limite, ainda mais  $[u_k] \rightarrow [u]$  em  $H^{1/2}(\partial\Omega)$ .

■

**Corolário 2.2.** Dado  $f \in H^{1/2}(\partial\Omega)$  existe  $v_f \in H^1(\Omega)$  tal que  $v_f|_{\partial\Omega} = f$  e  $\|v_f\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$  para algum  $C > 0$

**Demonstração:** Tome  $v_f = T(f)$ . Assim  $\|f\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} = \|T(f)\|_{H^1(\Omega)} = \|v_f\|_{H^1(\Omega)}$ , sendo assim a desigualdade segue. ■

E por fim definimos

**Definição 2.6.** Defina  $H^{-1/2}(\partial\Omega)$  como o espaço dual de  $H^{1/2}(\partial\Omega)$

$$H^{-1/2}(\partial\Omega) = (H^{1/2}(\partial\Omega))^*$$

## 2.1 Soluções Fracas

Agora vamos definir o que é a solução fraca para um problema de Dirichlet. Considere o seguinte operador de segunda ordem agindo em  $u$ .

$$Lu = - \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left( a^{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) + qu \quad (2.10)$$

Se  $L$  satisfaz as seguintes condições:

- i)  $a^{jk}, q \in L^\infty(\Omega)$  são funções reais.
- ii)  $a^{jk} = a^{kj}$  para todos  $j, k = 1, 2, \dots, n$
- iii)  $\sum_{j,k=1}^n a^{jk}(x) \xi_j \bar{\xi}_k \geq c|\xi|^2$  quase sempre para  $x \in \Omega$  e para todo  $\xi \in \mathbb{C}^n$ , onde  $c > 0$

Então  $L$  é dito ser um **Operador Elíptico**. Esse operador tem propriedades muito parecidas com o Laplaciano. Alguns exemplos de operadores elípticos são:

- (1) (Laplaciano)  $Lu = -\Delta u$
- (2) (Condutividade)  $Lu = -\nabla \cdot (\gamma \nabla u)$
- (3) (Schrödinger)  $Lu = (-\Delta + q)u$

**Definição 2.7.** Seja  $L$  definido como em (2.10). A **forma sesquilinear** associada a  $L$  é dada por

$$B[u, v] = \int_{\Omega} \left( \sum_{j,k=1}^n a^{jk} \partial_j u \overline{\partial_k v} + qu \bar{v} \right) dx, \quad u, v \in H^1(\Omega) \quad (2.11)$$

Para motivar a definição de solução fraca suponha que  $u$  satisfaça  $Lu = F$  em  $\Omega$  e  $u|_{\partial\Omega} = f$ . Multiplicamos ambos lados de  $Lu = F$  por  $\bar{v} \in H_0^1(\Omega)$  e de forma despreocupada integramos por partes então obtemos

$$\int_{\Omega} \left( \sum_{j,k=1}^n a^{jk} \partial_j u \overline{\partial_k v} + qu\bar{v} \right) dx = \int_{\Omega} F\bar{v} dx$$

O lado esquerdo da equação acima faz sentido para todos  $u, v \in H^1(\Omega)$  e é justamente a forma sesquilinear associado a  $L$ . Com isso damos a seguinte definição para a solução fraca do problema de Dirichlet.

**Definição 2.8** (Solução Fraca). *Seja  $L$  definido como em (2.10). Se  $F \in H^{-1}(\Omega)$  e  $f \in H^{1/2}(\partial\Omega)$  dizemos que  $u \in H^1(\Omega)$  é uma solução fraca do problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} Lu = F \text{ em } \Omega \\ u = f \text{ em } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.12)$$

Se  $B[u, v] = F(\bar{v})$  para toda  $v \in H_0^1(\Omega)$  e  $Ru = f$ , onde  $R$  é o operador traço.

Finalmente temos condição de provar o principal teorema desse capítulo.

**Teorema 2.5.** *Seja  $\Omega \in \mathbb{R}^n$  aberto e limitado e  $L$  operador elíptico definido por*

$$Lu = - \sum_{j,k=1}^n \partial_j (a^{jk} \partial_k u), \quad a^{jk} \in L^\infty(\Omega) \quad (2.13)$$

dados  $F \in H^{-1}(\Omega)$  e  $f \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ . *Existe uma única solução  $u \in H^1(\Omega)$  para o problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} Lu = F \text{ em } \Omega \\ u = f \text{ em } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.14)$$

*E ainda existe uma constante  $C$  independente de  $F$  e  $f$  tal que*

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C (\|F\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|f\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}) \quad (2.15)$$

**Demonstração:** Primeiro vamos provar que  $B[u, v]$  associado a  $L$  definido em (2.13) é um produto interno em  $H_0^1(\Omega)$  e define uma norma equivalente.

- A linearidade é clara da definição de  $B$ . Para ver que  $B[u, v] = \overline{B[v, u]}$ , basta notar que  $a^{jk} = a^{kj}$  e eles são reais.
- Para a positividade usaremos o fato de  $L$  ser elíptico

$$B[u, u] = \int_{\Omega} \sum_{j,k=1}^n a^{jk} \partial_j u \partial_k \bar{u} dx \geq \int_{\Omega} c |\nabla u|^2 dx = c \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (2.16)$$

Então  $B[u, u] \geq 0$  e  $B[u, u] = 0 \iff \nabla u = 0$  ou seja  $u = 0$ . Logo  $B$  é um produto interno.

- Para provar que  $B$  induz uma norma equivalente em  $H_0^1(\Omega)$ , usaremos que  $a^{jk} \in L^\infty$ , ou seja existe  $C > 0$  tal que  $|a^{jk}(x)| < C$  para todo  $x \in \Omega$

$$B[u, u] = \int_{\Omega} \sum_{j,k=1}^n a^{jk} \partial_j u \partial_k \bar{u} dx \leq C \int_{\Omega} \sum_{j,k=1}^n \partial_j u \partial_k \bar{u} dx \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)}^2. \quad (2.17)$$

Usando (2.16), (2.17) e o **Corolário 2.1** temos.

$$c' \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq c \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq B[u, u] \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad (2.18)$$

Logo  $(H_0^1, B[\cdot, \cdot])$  é um espaço de Hilbert equivalente a  $H_0^1(\Omega)$ . Consideremos primeiro o problema em que  $f = 0$ , isto é,

$$\begin{cases} Lu = F \text{ em } \Omega \\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.19)$$

Observe que  $F$  também é um funcional linear limitado como respeito a norma induzida por  $B[\cdot, \cdot]$ . De fato

$$|F(v)| \leq \|F\|_{H^{-1}(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|F\|_{H^{-1}(\Omega)} B[v, v]^{1/2}, \quad v \in H_0^1(\Omega)$$

Pelo **Teorema da representação de Riesz** existe único  $u \in H_0^1(\Omega)$ , tal que  $B[u, v] = F(\bar{v})$  para todo  $v \in H_0^1(\Omega)$  então encontramos a única solução de (2.19), pois  $Ru = 0$ . Ainda mais o teorema também garante que  $\|F\|_{H^{-1}(\Omega)} = B[u, u]^{1/2}$ , logo essa solução satisfaz

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|F\|_{H^{-1}(\Omega)}$$

Para o caso  $f$  não nulo queremos encontra  $u \in H^1(\Omega)$  tal que  $B[u, v] = F(\bar{v})$  para todo  $v \in H_0^1(\Omega)$  e  $Ru = f$ .

Tome  $e_f \in H^1(\Omega)$  tal que  $\|e_f\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$ , isso é possível pelo **Corolário 2.2**. Considere  $u = e_f + \tilde{u}$  e  $\tilde{F}(w) = F(w) - B[e_f, w]$ . Observar que  $\tilde{F}$  é também um funcional linear limitado.

Como efeito

$$\begin{aligned} |\tilde{F}(w)| &\leq \|F\|_{H^{-1}(\Omega)} \|w\|_{H^1(\Omega)} + |B[e_f, w]| \\ &\leq \|F\|_{H^{-1}(\Omega)} \|w\|_{H^1(\Omega)} + C \int_{\Omega} (|\nabla e_f| |\nabla w| + |e_f| |w|) dx \\ &\leq \|F\|_{H^{-1}(\Omega)} \|w\|_{H^1(\Omega)} + C \|e_f\|_{H^1(\Omega)} \|w\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq C (\|F\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|f\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}) \|w\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

Observe ainda que  $u$  sera solução de (2.14) é equivalente a

$$B[\tilde{u}, v] = \tilde{F}(\bar{v}), \quad v \in H_0^1(\Omega), \quad R\tilde{u} = 0 \quad (2.20)$$

Mas o resultado para (2.19) prova que existe única  $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$  solução e que satisfaz

$$\|\tilde{u}\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left\| \tilde{F} \right\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C(\|F\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|f\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)})$$

Então o problema original tem única solução e vale a desigualdade

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \|\tilde{u}\|_{H^1(\Omega)} + \|e_f\|_{H^1(\Omega)} \leq C(\|F\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|f\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)})$$

■

No caso em que  $L$  é um operador elíptico qualquer o resultado nem sempre é válido. Para obtermos um resultado análogo é necessário fazer mais algumas hipóteses sobre  $L$ , entre tanto não vamos se preocupar como isso, pois o que é de nosso interesse é que o problema de Dirichlet para a equação de condutividade satisfaz as hipóteses do teorema.





### 3 Unicidade

Nesse capítulo vamos provar o seguinte Teorema de unicidade de Sylvester e Uhlmann.

**Teorema 3.1** (Problema inverso da condutividade). *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , onde  $n \geq 3$ , um conjunto aberto e limitado com fronteira suave, e sejam  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  funções positivas em  $C^2(\overline{\Omega})$ . Se  $\Lambda_{\gamma_1} = \Lambda_{\gamma_2}$ , então  $\gamma_1 = \gamma_2$  em  $\Omega$*

Não atacaremos diretamente esse teorema, o que vamos fazer é reduzi-lo para o seguinte problema inverso para a equação de Schrödinger

**Teorema 3.2** (Problema inverso para a equação de Schrödinger). *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , onde  $n \geq 3$ , um conjunto aberto e limitado com fronteira suave, e sejam  $q_1$  e  $q_2$  em  $L^\infty(\Omega)$ , tais que os problemas de Dirichlet para  $-\Delta + q_1$  e  $-\Delta + q_2$  em  $\Omega$  são bem postos. Se  $\Lambda_{q_1} = \Lambda_{q_2}$ , então  $q_1 = q_2$  em  $\Omega$ .*

Primeiro daremos uma definição precisa para o mapa  $\Lambda$ , chamado de mapa de Dirichlet para Neumann (mapa DN), para um problema de Dirichlet bem posto. Logo após vamos estudar a redução do problema de unicidade da equação de condutividade para o problema correlato com a equação de Schrödinger e como os mapas DN desses dois problemas estão relacionados. Após, vamos construir as *complex geometrical optics solution* (CGO) para a equação de Schrödinger e por fim vamos usa-las para provar a unicidade.

Nosso objetivo agora é dar uma definição precisa do mapa DN para um problema de Dirichlet bem posto. Considere o seguinte operador elíptico:

$$Lu = - \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (a^{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k}) + qu$$

onde  $a^{jk}$ ,  $q \in L^\infty(\Omega)$ , agora considere o seguinte problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} Lu = 0 \text{ em } \Omega \\ u = f \text{ em } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.1)$$

Dizemos que o problema (3.1) é bem posto se valem as seguintes condições:

- (Existência) existe  $u \in H^1(\Omega)$  que é solução (3.1).
- (Unicidade) A solução é única.
- (Dependência Contínua) O operador solução é contínua com respeito a condição de contorno, isto é, o mapa  $f \in H^{1/2}(\partial\Omega) \mapsto u \in H^1(\Omega)$  onde  $u$  é solução de (3.1), satisfaz  $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$

A ideia do mapa DN é associar condições de contorno de Dirichlet, isto é, um problema em que as condições de contorno são dadas por uma função prescrita na borda, por exemplo para a equação de condutividade a condição de fronteira é um potencial dado em  $\partial\Omega$ . Em condições de Neumann, onde as condições são dadas pelo valor que a derivada da solução toma na direção normal a  $\partial\Omega$ , novamente para a equação de condutividade podemos interpretar essa condição como a corrente elétrica que flui na borda. .

Suponha que  $u_f$  seja uma solução de (3.1) que seja suave em  $\overline{\Omega}$  e que  $a^{jk}$ ,  $q$  também sejam funções suaves. Seja  $\nu$  o vetor normal a  $\partial\Omega$  em cada ponto, nesse caso definimos o mapa DN para o operador  $L$  como:

$$\Lambda_L : f \mapsto \sum_{j,k=1}^n a^{jk}(\partial_j u) \nu_k|_{\partial\Omega} \quad (3.2)$$

Mas essa definição dada acima depende do fato de  $u_f$  ser uma função suave, mas sabemos que em geral só conseguimos garantir que a solução do problema (3.1) pertence a  $H^1(\Omega)$ . Isso nos motiva a dar uma definição fraca para o mapa DN. Seja  $g$  uma função definida em  $\partial\Omega$  e seja  $e_g$  uma extensão dessa função. Observe que usando a fórmula de Gauss-Green do **teorema 1.8**, temos

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} (\Lambda_L f) g dS &= \sum_{j,k=1}^n \int_{\partial\Omega} a^{jk}(\partial_j u_f) e_g \nu_k dS \\ &= \sum_{j,k=1}^n \int_{\Omega} \partial_k (a^{jk}(\partial_j u_f) e_g) dx \\ &= \int_{\Omega} \left( \sum_{j,k=1}^n (a^{jk} \partial_j u_f) \partial_k e_g + \partial_k (a^{jk} \partial_j u_f) e_g \right) dx \\ &= \int_{\Omega} \left( \sum_{j,k=1}^n a^{jk} \partial_j u_f \partial_k e_g + q u_f e_g \right) dx \end{aligned}$$

Note que o lado direito da expressão acima é justamente  $B[u_f, e_g]$ , onde  $B$  é o forma sesquilinear correspondente ao operador  $L$ , definido em **definição 2.7**, e essa expressão está bem definida independente de assumir suavidade da solução. Isso é o conteúdo do nosso primeiro teorema

**Teorema 3.3.** *Seja  $\Omega$  um conjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$ . Assuma que o problema de Dirichlet (3.1) seja bem posto. Então existe único mapa  $\Lambda_L : H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ , que satisfaz.*

$$\langle \Lambda_L f, g \rangle_{\partial\Omega} = B[u_f, \overline{e_g}] = \int_{\Omega} \left( \sum_{j,k=1}^n a^{jk} \partial_j u_f \overline{\partial_k e_g} + q u_f \overline{e_g} \right) dx \quad (3.3)$$

Onde  $u_f$  é a única solução de (3.1),  $g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$  é uma função qualquer e  $e_g \in H^1(\Omega)$  é tal que  $e_g|_{\partial\Omega} = g$ . E ainda mais temos que:

$$\langle \Lambda_L f, g \rangle_{\partial\Omega} = \langle f, \Lambda_L g \rangle_{\partial\Omega} \quad (3.4)$$

**Demonstração:** Vamos começar mostrando que o lado direito de (3.3) não depende de escolha particular de extensão de  $g$ , sejam  $e_g$  e  $\hat{e}_g$  funções em  $H^1\Omega$  tais que  $e_g|_{\partial\Omega} = \hat{e}_g|_{\partial\Omega}$ , então  $e_g - \hat{e}_g = \varphi$  onde  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ . Lembre que da definição de solução fraca temos que  $B[u_f, \overline{\varphi}] = 0$  então temos

$$B[u_f, \overline{e_g}] - B[u_f, \overline{\hat{e}_g}] = B[u_f, \overline{\varphi}] = 0$$

o o que prova que o lado direito independe de escolha particular da extensão. Agora considere a seguinte aplicação linear:

$$\begin{aligned} T_f : H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) &\rightarrow \mathbb{C} \\ g &\mapsto B[u_f, \overline{e_g}] \end{aligned}$$

Onde  $e_g$  é uma extensão de  $g$ , a qual pelo **Corolário 2.2** podemos tomar satisfazendo  $\|e_g\|_{H^1\Omega} \leq C \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}$ . Lembremos também que o problema é bem posto e pela condição de dependência continua temos  $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C' \|f\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}$ . Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\begin{aligned} |T_f(g)| &\leq \int_{\Omega} \left( \sum_{j,k=1}^n |a^{jk}| |\partial_j u_f| |\partial_k e_g| + |q| |u_f| |e_g| \right) dx \leq K \|u\|_{H^1(\Omega)} \|e_g\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq K' \|f\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \end{aligned}$$

O que prova que o operador  $T_f$  é contínuo, ou seja é limitado, em outras palavras  $T_f \in H^{-1\setminus 2}(\partial\Omega)$ . Então defina o mapa  $\Lambda_L : H^{1\setminus 2}(\partial\Omega) \rightarrow H^{-1\setminus 2}(\partial\Omega)$ ,  $\Lambda_L(f) = T_f$ , e é único mapa que satisfaz (3.3). Finalmente temos

$$\langle \Lambda_L f, g \rangle_{\partial\Omega} = B[u_f, \overline{e_g}] = \overline{B[\overline{e_g}, u_f]} = B[e_g, \overline{u_f}] = \langle \Lambda_L g, f \rangle_{\partial\Omega} = \langle f, \Lambda_L g \rangle_{\partial\Omega}$$

■

Como o teorema **Teorema 2.5** garante que o problema de Dirichelet para a equação de condutividade é bem posto ou seja o mapa  $\Lambda_\gamma$  está bem definido. Entretanto o problema

de Dirichlet para equação de Schrödinger nem sempre é um problema bem posto<sup>1</sup>, mas vamos provar que para o potencial vindo da equação de condutividade o problema de Dirichlet sempre é bem posto e existe uma relação entre os mapas DN  $\Lambda_\lambda$  e  $\Lambda_q$ . Isso é o conteúdo da próximo teorema.

**Teorema 3.4.** *Se  $\gamma \in C^2(\overline{\Omega})$  e  $q = \frac{\Delta\gamma^{\frac{1}{2}}}{\gamma^{\frac{1}{2}}}$ , então o problema de Dirichlet:*

$$\begin{cases} (-\Delta + q)u = 0 \text{ em } \Omega \\ u = f \text{ em } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.5)$$

é bem posto, onde  $\Omega \in \mathbb{R}^n$  é um conjunto aberto, limitado e com fronteira suave e  $f \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ . E temos ainda que :

$$\Lambda_q f = \gamma^{-1\setminus 2} \Lambda_\gamma(\gamma^{-1\setminus 2} f) + \frac{1}{2} \gamma^{-1} \frac{\partial\gamma}{\partial\nu} f|_{\partial\Omega} \quad (3.6)$$

**Demonstração:** Considere o seguinte problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \nabla \cdot \gamma \nabla v = 0 \text{ em } \Omega \\ v = \gamma^{-1\setminus 2} f \text{ em } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.7)$$

que é um problema bem posto. Seja  $v \in H^1(\Omega)$  solução de (3.7) tome  $u = \gamma^{1\setminus 2} v$  e  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$  então temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\nabla u \nabla \varphi + q u \varphi) dx &= \int_{\Omega} \left[ \nabla(\gamma^{1\setminus 2} v) \nabla \varphi + \frac{\Delta\gamma^{1\setminus 2}}{\gamma^{1\setminus 2}} (\gamma^{1\setminus 2} v) \varphi \right] dx \\ &= \int_{\Omega} [\nabla(\gamma^{1\setminus 2}) v \nabla \varphi + \gamma^{1\setminus 2} \nabla v \nabla \varphi + \Delta(\gamma^{1\setminus 2}) v \varphi] dx \\ &= \int_{\Omega} [\nabla(\gamma^{1\setminus 2}) [\nabla(v\varphi) - \nabla(v)\varphi] + \gamma^{1\setminus 2} \nabla v \nabla \varphi + \Delta(\gamma^{1\setminus 2}) v \varphi] dx \\ &= \int_{\Omega} [\nabla(\gamma^{1\setminus 2}) \nabla(v\varphi) + \Delta(\gamma^{1\setminus 2}) v \varphi] dx + \int_{\Omega} \nabla(v) [-\nabla(\gamma^{1\setminus 2}) \varphi + \gamma^{1\setminus 2} \nabla \varphi] dx \end{aligned}$$

Pela formula de Green temos que  $\int_{\Omega} [\nabla \gamma^{1\setminus 2} \nabla(v\varphi) + \Delta \gamma^{1\setminus 2} (v\varphi)] dx = \int_{\partial\Omega} u \varphi \frac{\partial \gamma^{1\setminus 2}}{\partial \nu} = 0$ , pois  $\varphi$  temos suporte compacto, continuando a conta temos

<sup>1</sup> De fato considere  $\Omega = (0, 1) \in \mathbb{R}$  e  $q = -\lambda$  onde  $\lambda > 0$ . Considere o problema de Dirichlet para a equação de Schrödinger onde  $u$  se anula na borda, ou seja temos

$$u''(x) + \lambda u(x) = 0 \text{ para } 0 < x < \pi, \quad u(0) = u(\pi) = 0$$

A solução geral para essa equação tem a forma

$$u(x) = A \sin(\sqrt{\lambda}x) + B \cos(\sqrt{\lambda}x)$$

Usando as condições iniciais  $u(0)$  ganhamos que  $B = 0$ , já a condição  $u(\pi) = 0$  é satisfeita se  $A = 0$  ou  $\sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0$ , essa ultima condição é satisfeita se  $\lambda \in \mathbb{Z}$  ou seja  $\lambda = k^2$  para alguma  $k$  inteiro positivo.

Logo para o caso em que  $\lambda = k^2$  encontramos uma solução não trivial para o problema de Dirichlet, o que contraria a unicidade.

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} (\nabla u \nabla \varphi + qu\varphi) dx &= \int_{\Omega} \nabla(v) [-\nabla(\gamma^{1\setminus 2})\varphi + \gamma^{1\setminus 2}\nabla\varphi] dx \\
&= \int_{\Omega} \gamma \nabla(v) \left[ -\frac{\nabla(\gamma^{1\setminus 2})}{\gamma} \varphi + \gamma^{-1\setminus 2} \nabla(\varphi) \right] dx \\
&= \int_{\Omega} \gamma \nabla(v) [\nabla(\gamma^{-1\setminus 2})\varphi + \gamma^{-1\setminus 2} \nabla(\varphi)] dx \\
&= \int_{\Omega} \gamma \nabla(v) \nabla(\gamma^{-1\setminus 2}\varphi) dx
\end{aligned}$$

Observe que  $\gamma^{-1\setminus 2}\varphi \in H_0^1(\Omega)$ , então temos que  $v$  é solução de (3.7) se, e some, se  $u = \gamma^{1\setminus 2}v$  é solução de (3.5). Como o problema (3.7) tem única solução concluímos que o problema (3.5) também tem única solução. Ainda mais, usando que  $\gamma \in C^2(\overline{\Omega})$ , temos

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C' \|\gamma^{-1\setminus 2}f\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \leq C''' \|f\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$$

Com isso concluímos que o problema de Dirichlet para a equações de Schrödinger com o potencial vindo da equações de condutividade é bem posto. E por fim observe que se  $v = \gamma^{-1\setminus 2}u$ , então temos:

$$\begin{aligned}
\langle \Lambda_{\gamma}(\gamma^{-1\setminus 2}f), g \rangle_{\partial\Omega} &= \int_{\partial\Omega} (\gamma \nabla v \cdot \nu) g dS \\
&= \int_{\partial\Omega} (\gamma^{1\setminus 2} \nabla(u) \cdot \nu + \gamma \nabla(\gamma^{-1\setminus 2}) \cdot \nu f) g dS \\
&= \int_{\partial\Omega} (\gamma^{1\setminus 2} \overbrace{\nabla(u) \cdot \nu}^{\frac{\partial u}{\partial \nu}}) dS + \int_{\partial\Omega} (-\frac{1}{2} \gamma^{-1\setminus 2} \overbrace{\nabla(\gamma) \cdot \nu}^{\frac{\partial \gamma}{\partial \nu}}) f g dS \\
&= \langle \gamma^{1\setminus 2} \Lambda_q(f), g \rangle_{\partial\Omega} - \langle \frac{1}{2} \gamma^{-1\setminus 2} \frac{\partial \gamma}{\partial \nu} f, g \rangle_{\partial\Omega}
\end{aligned}$$

$$\text{Ou seja, } \Lambda_q(f) = \gamma^{-1\setminus 2} \Lambda_{\gamma}(\gamma^{-1\setminus 2}f) + \frac{1}{2} \gamma^{-1} \frac{\partial \gamma}{\partial \nu} f.$$

■

### 3.1 Redução para o problema inverso para a equação de Schrödinger

Afim de reduzir o problema inverso da condutividade **Teorema 3.1** para o problema inverso para a equação de Schrödinger **teorema 3.2**, vamos usar o teorema de reconstrução na fronteira. Esse resultado foi provado por Konh e Vogelius em 1983 [6]. Não faremos essa demonstração pois ela é trabalhosa e exige o emprego de ferramentas que não desenvolvemos. Precisamente o que eles provaram foi

**Teorema 3.5.** *seja  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  in  $C^\infty(\overline{\Omega})$  e  $p \in \partial\Omega$ . Suponha que  $\Lambda_{\gamma_1}(f) = \Lambda_{\gamma_2}(f)$  para toda  $f \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ . Então*

$$\frac{\partial^\alpha \gamma_1(p)}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^\alpha \gamma_2(p)}{\partial x^\alpha} \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{N}^n$$

*Observação:* Se pedirmos grau de regularidade menor, isto é,  $\gamma \in C^k(\overline{\Omega})$  o teorema continua valendo desde que  $|\alpha| \leq k$ .

Com isso assumindo como hipótese o **teorema 3.2** conseguimos provar o **teorema 3.1**.

De fato, sejam  $\gamma_1, \gamma_2 \in C^2(\overline{\Omega})$ , assumamos que  $\Lambda_{\gamma_1} = \Lambda_{\gamma_2}$ , defina  $q_j = \frac{\Delta \gamma_j^{1/2}}{\gamma_j^{1/2}}$ ,  $j = 1, 2$ . Para essas funções  $q_i$  o problema de Dirichlet para  $(\Delta + q_i)$  é bem posto. Logo pelo teorema **teorema 3.2** temos

$$\frac{\Delta \gamma_1^{1/2}}{\gamma_1^{1/2}} = q_1 = q_2 = \frac{\Delta \gamma_2^{1/2}}{\gamma_2^{1/2}} \text{ em } \Omega \quad (3.8)$$

Considere a equação  $-\Delta u + qu$ , onde  $q$  é definido como em (3.8), observe que tanto  $\gamma_1^{1/2}$  e  $\gamma_2^{1/2}$  satisfazem a equações. Ainda mais pelo **teorema 3.5** temos que  $\gamma_1^{1/2}|_{\partial\Omega} = \gamma_2^{1/2}|_{\partial\Omega}$ . Como o problema de Dirichlet para as equações de Schrödinger com o potencial dado acima é bem posto concluímos que  $\gamma_1^{1/2} = \gamma_2^{1/2} \Rightarrow \gamma_1 = \gamma_2$  em  $\Omega$ .

Agora nos concentraremos em provar o **teorema 3.2**. Para isso vamos estabelecer uma identidade integral para a diferença de dois mapas DN.

**Teorema 3.6.** *Nas hipóteses do **teorema 3.2** temos*

a) *Temos que*

$$\langle (\Lambda_{q_1} - \Lambda_{q_2})f_1, f_2 \rangle_{\partial\Omega} = \int_{\Omega} (q_1 - q_2)u_1 u_2 dx.$$

Onde  $u_i$  é a única solução de  $(-\Delta + q_i)u_i = 0$  em  $\Omega$  e  $u_i|_{\partial\Omega} = f_i$ ,  $i = 1, 2$

b) *Se  $\Lambda_{q_1} = \Lambda_{q_2}$ , Então*

$$\int_{\Omega} (q_1 - q_2)w_1 w_2 dx = 0$$

para todas  $w_j \in H^1(\Omega)$  com  $(-\Delta + q_j)w_j = 0$  em  $\Omega$ ,  $j = 1, 2$

**Demonstração** a) De fato por definição temos que.

$$\langle \Lambda_{q_1} f_1, f_2 \rangle_{\partial\Omega} = \int_{\Omega} (\nabla u_1 \nabla u_2 + q_1 u_1 u_2) dx$$

$$\langle \Lambda_{q_2} f_1, f_2 \rangle_{\partial\Omega} = \langle \Lambda_{q_2} f_2, f_1 \rangle_{\partial\Omega} = \int_{\Omega} (\nabla u_2 \nabla u_1 + q_2 u_2 u_1) dx$$

Logo temos que

$$\langle (\Lambda_{q_1} - \Lambda_{q_2})f_1, f_2 \rangle_{\partial\Omega} = \int_{\Omega} (q_1 - q_2)u_1u_2dx$$

Onde  $u_i$  é a única solução de  $(-\Delta + q_i)u_i = 0$  em  $\Omega$  e  $u_i|_{\partial\Omega} = f_i, i = 1, 2$ .

b) Suponha que  $(-\nabla + q_j)w_j = 0$  em  $\Omega$ , então  $w_j$  é solução do problema de Dirichlet para  $f_j \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ , onde  $f_j$  é definida por  $Rw_j = f_j$ . Então pelo item (a) temos

$$\langle (\Lambda_{q_1} - \Lambda_{q_2})f_1, f_2 \rangle_{\partial\Omega} = \int_{\Omega} (q_1 - q_2)w_1w_2dx$$

Mas por hipótese temos também que  $\Lambda_{q_1} = \Lambda_{q_2}$ , logo

$$\int_{\Omega} (q_1 - q_2)w_1w_2dx = 0$$

■

Vamos construir uma família de soluções para a equação  $(-\Delta + q)u = 0$ , chamada de *Complex geometrical optics solution (CGO)*. Provaremos o produto dessas soluções é denso em  $L^1(\Omega)$ , e usando a identidade integral do **teorema 3.6** conseguiremos finalmente provar a unicidade.

## 3.2 Complex Geometrical Optics Solution

Considere a equação de Schrödinger  $(-\Delta + q)u = 0$  em  $\Omega$  onde  $q \in L^\infty(\Omega)$ . No caso em que  $q = 0$  é fácil ver que  $u(x) = e^{i\xi \cdot x}$ , onde  $\xi \in \mathbb{C}^n$  e  $\xi \cdot \xi = 0$  é solução da equação  $\Delta u = 0$ , ou seja temos uma família de soluções para tal equação. No caso em que  $q \neq 0$  vamos procurar soluções do tipo  $u(x) = e^{i\xi \cdot x}(1 + r(x))$ , onde  $r(x)$  é um termo de correção, essas são chamadas de *Complex geometrical optics solution (CGO)*.

Observe que dada  $v$  uma função qualquer e  $\xi \in \mathbb{C}^n$  tal que  $\xi \cdot \xi = 0$ . Seja  $D_i = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_i}$  e  $-\Delta = D^2$ . Temos que

$$\begin{aligned} e^{-i\xi \cdot x} D^2(e^{i\xi \cdot x} v) &= e^{-i\xi \cdot x} D(D(e^{i\xi \cdot x})v + e^{i\xi \cdot x} Dv) \\ &= -\xi \cdot \xi v + 2\xi \cdot Dv + D^2v \\ &= (D^2 + 2\xi \cdot D)v \end{aligned}$$

Tomando  $v(x) = 1 + r(x)$  temos que.

$$\begin{aligned} e^{-i\xi \cdot x} (D^2 + q)e^{i\xi \cdot x} (1 + r(x)) &= e^{-i\xi \cdot x} D^2 e^{i\xi \cdot x} (1 + r(x)) + q(1 + r(x)) \\ &= (D^2 + 2\xi \cdot D)(1 + r(x)) + q(1 + r(x)) \\ &= (D^2 + 2\xi \cdot D + q)r + q \end{aligned}$$

Se  $r(x)$  é solução de  $(D^2 + 2\xi \cdot D + q)r + q = 0$  temos que  $u(x) = e^{i\xi \cdot z}(1 + r(x))$  é solução de  $(-\Delta + q)u = 0$ . Nossa tarefa então é encontrar soluções para a equação

$$(D^2 + 2\xi \cdot D + q)r = f \quad \text{em } \Omega \quad (3.9)$$

Consideremos primeiro o caso que  $q = 0$  em (3.9), temos

**Teorema 3.7.** *Seja  $\xi \in \mathbb{C}^n$  tal que  $\xi \cdot \xi = 0$  e  $|\xi| \geq 1$ , e  $f \in L^2(\Omega)$ . Então a equação*

$$(D^2 + 2\xi \cdot D)r = f \quad \text{em } \Omega$$

tem uma solução  $r \in H^1(\Omega)$  e ainda existe uma constante  $C_0$  dependendo apenas de  $\Omega$  tal que  $r$  satisfaz:

$$\begin{aligned} \|r\|_{L^2(\Omega)} &\leq \frac{C_0}{|\xi|} \|f\|_{L^2(\Omega)} \\ \|\nabla r\|_{L^2(\Omega)} &\leq C_0 \|f\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

### Demonstração:

Escreva  $\xi = s(\omega_1 + i\omega_2)$  onde  $s = \frac{|\xi|}{\sqrt{2}}$ , como  $\xi \cdot \xi = 0$  então temos que  $\omega_1$  e  $\omega_2$  são vetores ortonormais, ou seja a menos de uma rotação podemos assumir  $\omega_1 = e_1$  e  $\omega_2 = e_2$ . Note que com isso temos que:  $2\xi \cdot D = 2s(e_1 + ie_2) \cdot D = 2s(D_1 + iD_2)$ . Então nosso objetivo é encontrar uma solução para a seguinte equação:

$$[D^2 + 2s(D_1 + iD_2)]r = f \quad \text{em } \Omega \quad (3.10)$$

Por simplicidade vamos assumir que  $\Omega \subseteq [-\pi, \pi]^n = Q^n$ . Também vamos estender a função  $f$  por 0 fora de  $\Omega \subseteq Q^n$ , e para não carregar a notação chamaremos essa nova função de  $f$ , deste modo temos que  $f \in L^2(Q^n)$ .

Considere o conjunto de funções  $w_k(x) = e^{i(k + \frac{1}{2}e_1) \cdot x}$ , onde  $k \in \mathbb{Z}^n$  é um multi-índice. É uma verificação rotineira que  $\{w_k\}_{k \in \mathbb{Z}^n}$  é um conjunto ortonormal completo em  $L^2(Q^n)$ , ou seja forma uma base para tal espaço.

Então podemos expandir  $f$  nessa base como:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f_k w_k \quad \text{onde } f_k = \langle f, w_k \rangle \quad (3.11)$$

E ainda mais

$$\|f\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |f_k|^2 \quad (3.12)$$



Nossa tarefa é encontrar uma função  $r$  que satisfaz a equação (3.10), procuraremos então por uma função na forma  $\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} r_k w_k$ , substituindo na equação (3.10) temos a seguinte relação.

$$r_k \left( k + \frac{1}{2} e_1 \right)^2 w_k + r_k 2s \left[ k_1 + i \left( k_2 + \frac{1}{2} \right) \right] = f_k$$

como  $\left( k + \frac{1}{2} e_1 \right)^2 w_k + 2s \left[ k_1 + i \left( k_2 + \frac{1}{2} \right) \right] \neq 0$ , Então definimos

$$r_k = \frac{f_k}{\left( k + \frac{1}{2} e_1 \right)^2 w_k + 2s \left[ k_1 + i \left( k_2 + \frac{1}{2} \right) \right]} \quad (3.13)$$

Para  $r_k$  assim definido para todo  $k \in \mathbb{Z}^n$  é um fato que a serie  $\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} r_k w_k$  satisfaz a equação (3.10) termo a termo, mas para  $r$  ser de fato uma solução temos que verificar que,  $r$  está bem definida, i.e., a série converge em  $L^2(Q^n)$  e a série das derivadas bem como a das derivadas segundas converge. Temos a seguinte estimativa para os coeficientes de Fourier.

$$|r_k| \leq \frac{|f_k|}{\left| \left( k + \frac{1}{2} e_1 \right)^2 w_k + 2s \left[ k_1 + i \left( k_2 + \frac{1}{2} \right) \right] \right|} \leq \frac{|f_k|}{|2s(k_2 + \frac{1}{2})|} \leq \frac{1}{s} |f_k|$$

Logo  $|r_k|$  é limitado por um termo de uma serie convergente, e como o espaço  $L^2(Q^n)$  é completo a convergência da série em norma,  $\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |r_k w_k| = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |r_k|$  implica na convergência da série  $\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} r_k w_k$ . E ainda mais temos que:

$$\|r\|_{L^2} \leq \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |r_k|^2 \right)^{1/2} \leq \frac{1}{s} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |f_k|^2 \right)^{1/2} = \frac{1}{s} \|f\|_{L^2}$$

O que da a estimativa desejada para  $\|r\|_{L^2}$ . Agora observe que para  $a, b = 1, \dots, n$  temos.

$$D_a r_k = \left( k + \frac{1}{2} e_2 \right)_a r_k w_k, \quad D_a D_b r_k = \left( k + \frac{1}{2} e_2 \right)_a \left( k + \frac{1}{2} e_2 \right)_b r_k w_k$$

Vamos ter as seguintes estimativas para as derivadas e derivadas segundas. E isso vai garantir que são séries convergentes,  $r$  está bem definida, é solução da equação (3.10), também conseguimos dessas estimativas a desigualdade para  $\|\nabla r\|_{L^2(\Omega)}$ . De fato

$$|D_a r_k| \leq 4|f_k|, \quad |D_a D_b r_k| \leq 16s|f_k|$$

Para verificar dividiremos em dois caso. Se  $|k + \frac{1}{2} e_2| \leq 4s$ , temos

$$\begin{aligned} |D_a r_k| &= \left| \left( k + \frac{1}{2} e_2 \right)_a r_k \right| \leq \frac{4s}{2s|k_2 + \frac{1}{2}|} |f_k| \leq 4|f_k| \\ |D_a D_b r_k| &= \left| \left( k + \frac{1}{2} e_2 \right)_a \left( k + \frac{1}{2} e_2 \right)_b r_k \right| \leq \frac{(4s)^2}{2s|k_2 + \frac{1}{2}|} |f_k| \leq 16s|f_k| \end{aligned}$$

Já para  $|k + \frac{1}{2}e_2| \geq 4s$  observe que aplicando a desigualdade triangular temos que:

$$\left| |k + \frac{1}{2}e_2|^2 + 2sk_1 \right| \geq |k + \frac{1}{2}e_2|^2 - 2s|k + \frac{1}{2}e_2| \geq \frac{1}{2}|k + \frac{1}{2}e_2|^2$$

Assim temos as seguintes estimativas

$$\begin{aligned} |D_a r_k| &= |(k + \frac{1}{2}e_2)_a r_k| \leq \frac{|k + \frac{1}{2}e_2|}{\frac{1}{2}|k + \frac{1}{2}e_2|^2} |f_k| \leq \frac{1}{2s} |f_k| \\ |D_a D_b r_k| &= |(k + \frac{1}{2}e_2)_a (k + \frac{1}{2}e_2)_b r_k| \leq \frac{|k + \frac{1}{2}e_2|^2}{\frac{1}{2}|k + \frac{1}{2}e_2|^2} |f_k| \leq 2|f_k| \end{aligned}$$

■

Para  $\xi \in \mathbb{C}^n$  tal que  $\xi \cdot \xi = 0$  e  $|\xi| \geq 1$ , definimos o operador  $G_\xi : L^2(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$ ,  $f \mapsto r$  onde  $r$  é solução de  $(D^2 + 2\xi \cdot D)r = f$ , que está bem definido pelo resultado anterior. Consideramos agora o caso em que  $q \neq 0$ .

**Teorema 3.8.** *Seja  $q \in L^\infty(\Omega)$ , então existe uma contante  $C_0$  dependendo apenas de  $\Omega$ , tal que para todo  $\xi \in \mathbb{C}^n$  com  $\xi \cdot \xi = 0$  e  $|\xi| \geq \max(2C_0 \|q\|_{L^\infty}, 1)$ , e  $f \in L^2(\Omega)$ . Então a equação*

$$(D^2 + 2\xi \cdot D + q)r = f \quad \text{em } \Omega$$

tem uma solução  $r \in H^1(\Omega)$ , que satisfaz:

$$\begin{aligned} \|r\|_{L^2(\Omega)} &\leq \frac{C_0}{|\xi|} \|f\|_{L^2(\Omega)} \\ \|\nabla r\|_{L^2(\Omega)} &\leq C_0 \|f\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

**Demonstração** Observe que  $(D^2 + 2\xi \cdot D)G_\xi = I_{L^2(\Omega)}$ , pela própria definição de  $G_\xi$ . E ainda mais, observe que se  $|\xi| \geq \max(2C_0 \|q\|_{L^\infty}, 1)$ , então temos:

$$\|qG_\xi\|_{L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)} \leq \frac{C_0}{|\xi|} \|q\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{2} \quad (3.14)$$

Logo o operador  $I + qG_\xi$  é inversível e seu inverso é dado por:

$$(I + qG_\xi)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (-qG_\xi)^j$$

e satisfaz

$$\|(I + qG_\xi)^{-1}\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq 2$$

Mais ainda  $I + qG_\xi = (D^2 + 2\xi \cdot D + q)G_\xi$ , logo a equação:

$$(D^2 + 2\xi \cdot D + q)G_\xi \tilde{f} = f$$

tem uma solução  $\tilde{f} = (I + qG_\xi)^{-1}f$ , e ainda mais satisfaz que  $\|\tilde{f}\|_{L^2(\Omega)} \leq 2\|f\|_{L^2(\Omega)}$

Ponha  $r = G_\xi \tilde{f}$ , então observe que :

$$(D^2 + 2\xi \cdot D + q)r = (D^2 + 2\xi \cdot D + q)G_\xi \tilde{f} = f.$$

Ou seja  $r$  é a solução procurada. Observe ainda que  $(D^2 + 2\xi \cdot D)r = (D^2 + 2\xi \cdot D)G_\xi \tilde{f} = \tilde{f}$  e pela estimativa do teorema anterior temos que

$$\begin{aligned} \|r\|_{L^2(\Omega)} &= \|G_\xi \tilde{f}\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C_0}{|\xi|} \|\tilde{f}\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{2C_0}{|\xi|} \|f\|_{L^2(\Omega)} \\ \|\nabla r\|_{L^2(\Omega)} &= \|\nabla G_\xi \tilde{f}\|_{L^2(\Omega)} \leq C_0 \|\tilde{f}\|_{L^2(\Omega)} \leq 2C_0 \|f\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

e temos a estimativa desejada trocando  $2C_0$  por  $C_0$ . ■

E finalmente conseguimos o resultado desejado da existência das soluções CGO.

**Teorema 3.9.** *Seja  $q \in L^\infty(\Omega)$ , então existe uma contante  $C_0$  dependendo apenas de  $\Omega$ , tal que para todo  $\xi \in \mathbb{C}^n$  com  $\xi \cdot \xi = 0$  e  $|\xi| \geq \max(2C_0 \|q\|_{L^\infty}, 1)$ , e para toda função  $a \in H^2(\Omega)$  tal que  $\xi \cdot \nabla a = 0$  em  $\Omega$ . A equação  $(-\Delta + q)u = 0$  em  $\Omega$  tem uma solução.*

$$u(x) = e^{i\xi \cdot x}(a + r)$$

Onde  $r \in H^1(\Omega)$  satisfaz

$$\begin{aligned} \|r\|_{L^2(\Omega)} &\leq \frac{C_0}{|\xi|} \|(-\Delta + q)a\|_{L^2(\Omega)} \\ \|\nabla r\|_{L^2(\Omega)} &\leq C_0 \|(-\Delta + q)a\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

**Demonstração** Seja  $a \in H^2(\Omega)$  tal que  $\xi \cdot \nabla a = 0$ , então observe que  $(D^2 + 2\xi \cdot D + q)(a + r) = (D^2 + 2\xi \cdot D + q)r + (D^2 + q)a$ , mas pelo teorema anterior a equação:

$$(D^2 + 2\xi \cdot D + q)r = -(D^2 + q)a \tag{3.15}$$

tem solução  $r \in H^1(\Omega)$  que satisfaz:

$$\begin{aligned} \|r\|_{L^2(\Omega)} &\leq \frac{C_0}{|\xi|} \|(-\Delta + q)a\|_{L^2(\Omega)} \\ \|\nabla r\|_{L^2(\Omega)} &\leq C_0 \|(-\Delta + q)a\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

E também é simples verificar que  $u(x) = e^{i\xi \cdot x}(a(x) + r(x))$  é solução de  $(-\Delta + q)u = 0$ , para isso basta usar (3.15).

Com efeito

$$e^{-i\xi \cdot x}(D^2 + q)e^{i\xi \cdot x}(a + r) = (D^2 + 2\xi \cdot D + q)(a + r) = 0$$

Logo  $(D^2 + q)u(x) = (-\Delta + q)u = 0$  em  $\Omega$ , ou seja  $u$  é a solução requerida. ■

### 3.3 Prova da Unicidade

Agora temos todas as ferramentas para provar o **teorema 3.2**, e já mostramos que o resultado de unicidade de Sylvester-Uhlmann, **teorema 3.1**, segue do teorema de unicidade **teorema 3.2**. Vamos relembra o enunciado.

**Teorema 3.2.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , onde  $n \geq 3$ , uma conjunto aberto e limitado com fronteira suave, e sejam  $q_1$  e  $q_2$  em  $L^\infty(\Omega)$ , tais que os problemas de Dirichlet para  $-\Delta + q_1$  e  $-\Delta + q_2$  em  $\Omega$  são bem postos. Se  $\Lambda_{q_1} = \Lambda_{q_2}$ , então  $q_1 = q_2$  em  $\Omega$ .*

**Demonstração.** Se  $\Lambda_{q_1} = \Lambda_{q_2}$  sabemos do **teorema 3.6** que

$$\int_{\Omega} (q_1 - q_2)u_1 u_2 dx = 0 \tag{3.16}$$

Para qualquer  $u_j$  tal que  $(-\Delta + q_j)u_j = 0$ ,  $j = 1, 2$ . Como tínhamos comentado previamente vamos provar que o produto  $u_1 u_2$  das soluções é denso em  $L^1(\Omega)$ .

Fixando  $\zeta \in \mathbb{R}^n$  gostaríamos de tomar soluções da equação tal que  $u_1 u_2$  seja próximo de  $e^{i\zeta \cdot x}$ . Para isso escolhemos  $\omega_1$  e  $\omega_2$  vetores unitários de  $\mathbb{R}^n$  tal que o conjunto  $\{\omega_1, \omega_2, \zeta\}$  seja ortogonal, **aqui que entra a hipotes de  $n \geq 3$** . Defina.

$$\xi = s(\omega_1 + i\omega_2)$$

temos que  $\xi \cdot \xi = 0$ , e pelo **teorema 3.9** para  $s$  suficientemente grande existem soluções da equação de Schrödinger na forma<sup>2</sup>.

$$\begin{aligned} u_1 &= e^{i\xi \cdot x}(e^{i\zeta \cdot x} + r_1) \\ u_2 &= e^{-i\xi \cdot x}(1 + r_2) \end{aligned} \tag{3.17}$$

<sup>2</sup> Pois tanto  $a = 1$  e  $a = e^{i\zeta \cdot x}$  satisfazem  $\xi \cdot \nabla a = 0$ .  
De fato  $\nabla 1 = 0$  e  $\xi \cdot \nabla(e^{i\zeta \cdot x}) = s(\omega_1 + i\omega_2) \cdot i\zeta e^{i\zeta \cdot x} = 0$

onde  $\|r_j\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C}{s}$   $j = 1, 2$ . Substituindo em (3.16) e usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz temos

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\Omega} (q_1 - q_2) e^{i\xi \cdot x} (e^{i\zeta \cdot x} + r_1) e^{-i\xi \cdot x} (1 + r_2) dx \\
&= \int_{\Omega} (q_1 - q_2) (e^{i\zeta \cdot x} + r_1) (1 + r_2) dx \\
&= \int_{\Omega} (q_1 - q_2) e^{i\zeta \cdot x} dx + \int_{\Omega} (q_1 - q_2) e^{i\zeta \cdot x} r_2 dx + \int_{\Omega} (q_1 - q_2) r_1 (1 + r_2) dx \\
&\leq \int_{\Omega} (q_1 - q_2) e^{i\zeta \cdot x} dx + C(\|r_2\|_{L^2(\Omega)} + \|r_1\|_{L^2(\Omega)})
\end{aligned} \tag{3.18}$$

tomando  $s \rightarrow \infty$ , vamos ter que  $\|r_j\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0$   $j = 1, 2$ . Tomando o limite na equação (3.18) vamos

$$\int_{\Omega} (q_1 - q_2) e^{i\zeta \cdot x} dx = 0 \tag{3.19}$$

Como isso vale para todo  $\zeta \in \mathbb{R}^n$ , segue do **lema 1.1** que  $q_1 - q_2 = 0 \Rightarrow q_1 = q_2$  em  $\Omega$ .

■



# Referências

- [1] G. Alessandrini. Stable determination of conductivity by boundary measurements. *App. Anal.*, 27:153–172, 1988.
- [2] A. Calderón. An inverse boundary value problem. *Seminar on Numerical analysis an its Applications to Continuum Physics IMPA*, pages 65–73, 1980.
- [3] L. Evans. *Partial Differential Equations*. Graduate studies in mathematics 19. American Mathematical Society, 2010.
- [4] J. Feldman, M. Salo, and G. Uhlmann. *The Calderón Problem - An Introduction to Inverse Problems*. preview version in web page: <http://www.math.ubc.ca/feldman/ibook/>, 2019.
- [5] S. J. Kenig, C. and G. Uhlmann. The calderón problem with partial data. *Ann. of Math*, 165:567–591, 2007.
- [6] R. Kohn and M. . Vogelius. Determining conductivity by boundary measurements. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 37:289–298, 1984.
- [7] E. Lima. *Espaços métricos*. Projeto Euclides. IMPA, 4° edition, 2009.
- [8] A. Nachman. Reconstructions from boundary measurements. *Ann. of Math*, 128:531–576, 1988.
- [9] M. Reed and B. Simon. *I: Functional Analysis*. Methods of Modern Mathematical Physics. Elsevier Science, 1981.
- [10] W. Rudin. *Real and complex analysis*. Mathematics series. McGraw-Hill, 1987.
- [11] M. Salo. *Lectures in Calderón problem*. Lecture notes, disponível em: [http://users.jyu.fi/salomi/lecturenotes/calderon\\_lectures.pdf](http://users.jyu.fi/salomi/lecturenotes/calderon_lectures.pdf), 2008.
- [12] J. Sylvester and G. Uhlmann. A global uniqueness theorem for an inverse boundary value problem. *Ann. of Math*, 125:153–169, 1987.