

Rodrigo Samuel Roemig

Aplicações de Cohomologia

Florianópolis

2019

Rodrigo Samuel Roemig

Aplicações de Cohomologia

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática do Departamento de Matemática do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina para obtenção de grau de Licenciado em Matemática

Universidade Federal de Santa Catarina

Orientador: Dr. Eduardo Tengan

Florianópolis

2019

Àquele que sonda o meu interior

Agradecimentos

Agradeço primeiramente aos meus pais, Reinaldo Roemig e Ires Schütz Roemig. Agradeço que eles apoiaram aquele piá com muita sede de aprender matemática a deixar a pequena Aurora e ir para a grande Floripa. Mesmo não tendo certeza de que conseguiria manter mais do que um semestre em Floripa eu nunca ouvi uma única palavra de desencorajamento. Obrigado principalmente por todos os princípios que vocês me ensinaram e que me ajudaram nesta jornada em Floripa.

Também agradeço aos meus irmãos, ao Leandro por sempre me receber com aquele abraço de quem ainda não se acostumou com isso e ao Timóteo por me permitir voltar a ser criança sempre que eu volto pra Aurora.

Agradeço ao carinho e preocupação que a Oma Roemig (*in memoriam*), a Oma Schütz, os padrinhos e as madrinhas, os tios e as tias, os primos e as primas e todos os conhecidos mais próximos demonstraram sempre que voltei para perto deles em Aurora e redondezas. Não irei citar todos (pois a lista seria beemmm grande), mas sou grato a cada um deles (mesmo os que me acham maluco por passar 4 anos fazendo “conta com letras”).

Obrigado ao professor Eduardo Tengan por ter topado me orientar um aluno que chegou com uma ideia maluca de estudar teoria de topos. Bem, infelizmente não chegamos nesse ponto, mas hoje percebo que o trabalho foi muito bem direcionado. Eu não tinha ideia de como essas ideias poderiam se encaixar, mas parece que ao final temos algo que se parece com um TCC. Obrigado por me obrigar a pensar durante as nossas reuniões, gostei da metodologia e pretendo copiá-la algum dia, se houver oportunidade. Também agradeço por todas as longas reuniões de 2 a 4 horas, toda semana, sem esse acompanhamento o trabalho não teria saído do zero. Também agradeço por me ensinar de uma forma mais clara o que é matemática, posso afirmar sem dúvida que depois deste TCC tenho alguma noção do que se parece ser um matemático.

Agradeço a todos os professores que me deram aula durante a graduação na UFSC, mesmo aqueles que foram maus professores e principalmente a paciência daqueles para os quais eu não fui um bom aluno. Em especial agradeço aqueles professores que mais me marcaram com suas aulas: Raphael da Hora, Douglas Gonçalves, Gilles Castro, Jónathan Herrera, Leandro Morgado, Leonardo Koller, Ivan Pontual, Sérgio Tadao, Décio Krause, Rosilene Machado e Eduardo Tengan. Também agradeço ao professor Eliezer Batista por me acompanhar durante dois anos em um projeto de IC voluntário, aquelas “viagens” por assuntos avançados me inspiraram a aprender mais matemática. Esses professores me ajudaram a me formar como matemático e professor (e até aspirante a filósofo). Em especial agradeço aos professores Sérgio Tadao e Eliezer Batista por aceitarem compor

parte da minha banca.

Agradeço também a todos os servidores que trabalham na UFSC e que são essenciais para que essa Universidade continue funcionando muitas vezes eu nem reconheça isso. Em especial agradeço à Gianna Schauffler, Silvia de Holanda e Sonia Palomino por todo o carinho com que me antenderam na Coordenadoria da Matemática. Também agradeço aos servidores do RU por todas as refeições servidas e à equipe de limpeza do CFM.

Agradeço imensamente ao Instituto TIM e à OBMEP por financiarem meus estudos através da Bolsa Instituto TIM-OBMEP. Sem este apoio financeiro teria sido praticamente impossível a minha permanência na Universidade, mas com ela pude me dedicar aos estudos sem ter que me preocupar se conseguiria pagar as contas dos meses seguintes.

Seria impossível não agradecer a todos os amigos que andaram comigo durante algum período destes 4 anos. Em especial agradeço aos fiéis companheiros do primeiro semestre (Luiz Marcelo, Guilherme “Ruivo”, Gabriel Teixeira e Michele), aos amigos da república da Rosani (Suppes, Klai, João, Zanella, J e Cléber) e aos guerreiros que fizeram o PAM comigo. Em especial gostaria de agradecer àqueles que foram os meus melhores amigos, àqueles com quem tive as mais longas conversas e que me ajudaram a me formar como ser humano: Samuel Krehnke, Matheus Marx, Carlos Fraga e Raphael Oliveira (em ordem cronológica, pois não conseguiria ordená-los por importância).

Tão importante quanto os amigos foi a família que encontrei aqui em Floripa. Obrigado Munil (Missão Universitária Luterana) por ser este porto seguro que você sempre foi. Palavras não bastariam para expressar a importância que a Munil teve nestes 4 anos. Em especial queria agradecer à Coordenação da Munil por me ensinar o que é liderar, à Gangue da Munil por me ensinar a dar papo e ao pequeno grupo Vida em Comunhão por me ensinar o que é a verdadeira comunhão cristã. Em especial também agradeço aos pastores Josiel e Deise Amaral por todo o cuidado e carinho.

Se eu fosse citar cada pessoa que foi importante pra mim e que eu tenho algo a agradecer este agradecimento teria o dobro da extensão. Por isso irei me encaminhar para o final e agradecer Aquele sem o qual nada teria sido possível...

Àquele que criou os céus, a terra e tudo o que neles há. Àquele que se fez presente durante toda a História e que enviou o seu Filho para que todo aquele que nele crê não pereça, mas tenha a vida eterna. Àquele que não nos deixou órfãos ao enviar o seu Consolador. Àquele que está assentado no trono e ao Cordeiro sejam o louvor, a honra, a glória e o poder, para todo o sempre!

Soli Deo Gloria

“Na teoria não existe diferença entre teoria e prática; mas na prática existe.”

Yogi Berra

*“Good general theories does not search for the maximum generality, but for the right
generality”*

Saunders Mac Lane

Resumo

O presente trabalho se propõe a apresentar algumas cohomologias de grau 1 e suas respectivas aplicações na Álgebra e na Topologia. Primeiramente, são definidos os elementos básicos da cohomologia de grupos não-abeliana para então demonstrar o teorema de Hilbert 90 e aplicar a cohomologia na classificação de extensões de Galois cíclicas e na classificação de formas torcidas de um espaço vetorial. Posteriormente, são definidos os rudimentos da teoria de feixes de grupos abelianos sobre um espaço topológico e da cohomologia de Čech para então aplicar essa cohomologia na classificação de fibrados vetoriais de posto n e, concretamente, na classificação de fibrados linha sobre o círculo. Por fim, são definidas o básico sobre topologias de Grothendieck e a consequente generalização da cohomologia de Čech, para então aplicar a teoria no estudo da cohomologia étale, mais especificamente, conclui-se através de um isomorfismo entre cohomologias de grau 1 que as duas primeiras cohomologias podem ser vistas como as mesmas.

Palavras-chave: Geometria Algébrica. Álgebra Homológica. Cohomologia de grupos não-abeliana. Feixes. Cohomologia de Čech. Topologia de Grothendieck. Cohomologia Étale.

Abstract

The present work some first cohomologies and their respective applications in Algebra and Topology. First, the basic elements of non-abelian group cohomology are defined to then prove the Hilbert 90 theorem and apply cohomology in the classification of cyclic Galois extensions and in the classification of twisted forms of a vector space. Subsequently, the rudiments sheaf theory of abelian groups over a topological space and Čech cohomology are defined to then apply this cohomology in the classification of vector bundles of rank n and, concretely, in the classification of line bundles over the circle. Finally, are defined the rudiments of Grothendieck topologies and the consequent generalization of Čech cohomology, to apply the theory in the study of étale cohomology, more specifically, it is concluded by an isomorphism between cohomologies of degree 1 that the first two cohomologies can be seen as the same.

Keywords: Algebraic Geometry. Homological Algebra. Non-abelian Group Cohomology. Sheaves. Čech Cohomology. Grothendieck Topology. Étale Cohomology.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	15
2	COHOMOLOGIA DE GRUPOS	19
2.1	Cohomologia de Grupos Não-Abeliana	20
2.2	Hilbert 90	25
2.3	Teoria de Kummer	29
2.4	Descenso de Galois	34
3	COHOMOLOGIA DE FEIXES	43
3.1	Feixes	43
3.2	Cohomologia de Čech para Feixes	49
3.3	Fibrados Vetoriais	52
4	COHOMOLOGIA ÉTALE	65
4.1	Topologias de Grothendieck	65
4.2	Cohomologia Étale	69
5	CONCLUSÃO	81
	REFERÊNCIAS	83

1 Introdução

A matemática dos séculos XIX e XX viu o surgimento e o desenvolvimento de vários tipos de estruturas abstratas: grupos, espaços vetoriais, espaços de medida, espaços topológicos, variedades diferenciáveis, etc. Juntamente com as estruturas abstratas surgiram os morfismos entre estruturas, que são funções que “preservam a estrutura”: homomorfismos de grupos, transformações lineares, funções mensuráveis, funções contínuas, funções diferenciáveis, etc. Com a definição desses morfismos surge o conceito de *isomorfismo de estruturas*, de modo que dois objetos¹ isomorfos são consideradas o mesmo, pois do ponto de vista daquela estrutura específica eles têm as mesmas propriedades. Um dos exemplos clássicos de estruturas isomorfas vem da topologia, pois um topólogo não vê a diferença entre uma rosquinha e uma xícara com alça.

Dada uma certa estrutura surgem então os seguintes problemas: Como saber se dois objetos são isomorfos? Como provar que dois objetos não são isomorfos²? Quais objetos com certa estrutura existem a menos de isomorfismo?

Na matemática sempre tenta-se reduzir um problema complexo e desconhecido a um problema mais simples e conhecido. Particularmente para responder as perguntas acima uma das estratégias mais comuns na matemática é associar a cada objeto um *invariante*, de modo que objetos isomorfos tenham o mesmo invariante, em outras palavras, “o invariante é invariante por isomorfismos”. Alguns exemplos de invariantes que podem ser utilizados nas estruturas citadas acima são a propriedade de um grupo ser abeliano, a dimensão de um espaço vetorial ou de uma variedade, o número de componentes conexas de um espaço topológico, etc. Em particular a dimensão de um espaço vetorial é um exemplo de invariante que responde a primeira e a terceira pergunta, pois dois espaços vetoriais são isomorfos se, e somente se, têm a mesma dimensão, ou seja, conseguimos classificar todos os espaços vetoriais a menos de isomorfismo.

Para dar uma ideia dessa noção de invariante e como ela pode ajudar a resolver problemas considere o caso de um matemático chamado Jules, ele vive em um mundo 2D e quer saber se um cilindro equilátero e uma esfera, ambos com o mesmo raio, são iguais do ponto de vista da geometria euclidiana. Como este é um problema muito complexo para uma criatura 2D ele decide observar a “sombra” desses sólidos. Ele percebe que de um certo ângulo as sombras do cilindro e da esfera são círculos de mesmo raio. Por outro lado, visto de outro ângulo a sombra do cilindro é um quadrado e a sombra da esfera é um círculo, então ele conclui que os dois sólidos são diferentes. Ele também conclui que ao associar o invariante da sombra ele “perdeu informação” sobre o objeto, pois apesar de

¹ Onde objeto quer dizer um conjunto com uma estrutura fixada.

² O que é um problema complicado já que *a priori* pode haver infinitas funções entre esses “objetos”.

serem objetos diferentes, a sombra de certo ângulo é a mesma.

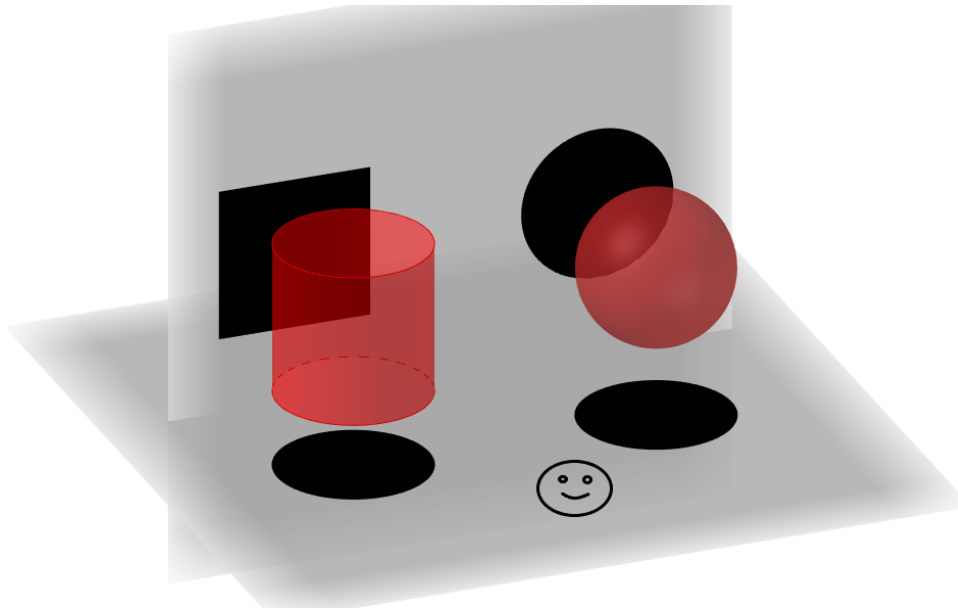


Figura 1 – Jules analisando o problema do cilindro e da esfera.

Foi buscando associar invariantes algébricos a espaços topológicos que surgiu a topologia algébrica, cuja ideia básica é associar a cada espaço topológico um grupo ou anel de modo que este seja “invariante por homeomorfismo”. Pode-se dizer que a topologia algébrica teve seu início com a publicação do trabalho de Poincaré chamado *Analysis Situs*, de 1895 (para mais informações históricas ver [Dieudonné, 1989]). As técnicas básicas da topologia algébrica são a homotopia, a homologia e a cohomologia, mas neste trabalho estamos interessados apenas em algumas aplicações da cohomologia, mais especificamente iremos trabalhar com o chamado *primeiro grupo de cohomologia*.

Começaremos no capítulo 2 com uma “versão algébrica” da cohomologia ao estudar a cohomologia de grupos não-abeliana de um G -grupo não-abeliano A , definindo o $H^1(G, A)$, que é uma generalização da cohomologia de grupos usual. Veremos que no caso não-abeliano $H^1(G, A)$ não é um grupo, mas apenas um conjunto pontuado. Depois de provarmos o teorema de Hilbert 90 aplicaremos a teoria desenvolvida na classificação de extensões de Galois cíclicas finitas de um corpo K com a teoria de Kummer (com o cálculo de $H^1(\text{Gal}(\overline{K}/K), \mu_n(\overline{K}))$, onde μ_n denota o grupo das raízes da unidade) e a classificação de L/K -formas torcidas com o descenso de Galois (com o cálculo de $H^1(\text{Gal}(L/K), \text{Aut}_L(\Phi))$, onde L/K é uma extensão de corpos Galois e Φ é um tensor fixado).

No capítulo 3 será estudada uma “versão topológica” da cohomologia com o estudo da cohomologia de feixes através da cohomologia de Čech, definindo-se $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ (dados \mathcal{U} uma cobertura aberta do espaço topológico X e \mathcal{F} um feixe de grupos abelianos sobre X). Depois de desenvolvida a teoria básica sobre feixes e a cohomologia de Čech aplicaremos

a teoria na classificação de fibrados vetoriais reais sobre X de posto n , e mais especificamente classificaremos os fibrados reais de posto 1 sobre o círculo S^1 (com o cálculo de $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{S^1}^\times)$).

Por fim, no capítulo 4 será estudada uma versão da cohomologia de Čech no contexto das topologias de Grothendieck. Aplicaremos a teoria no cálculo de alguns grupos de cohomologia de feixes sobre a categoria das K -álgebras étale e veremos que existe um isomorfismo entre o primeiro grupo de cohomologia de grupos e o primeiro grupo de cohomologia de Čech, ou seja, as versões da cohomologia algébrica e topológica vistas nos capítulos anteriores são apenas casos particulares de uma teoria mais geral.

2 Cohomologia de Grupos

Dado G um grupo, um G -módulo é um grupo abeliano A com uma ação à esquerda por G que é compatível com a soma. Dadas estas condições definem-se os grupos de cohomologia $H^n(G, A)$, $n \in \mathbb{N}$, a partir do *complexo de cocadeias*:

$$A \xrightarrow{d^0} \text{Maps}(G, A) \xrightarrow{d^1} \text{Maps}(G^2, A) \xrightarrow{d^2} \text{Maps}(G^3, A) \longrightarrow \dots \quad (2.1)$$

onde $\text{Maps}(G, A)$ denota o conjunto de todas as funções de G para A e os morfismos d^n são definidos de modo que $d^{n+1} \circ d^n = 0$, para todo n natural. Definimos então o *n-ésimo grupo de cohomologia de A* como o quociente (ver mais detalhes em [Neukirch et al., 2008, Gille and Szamuely, 2006]):

$$H^n(G, A) := \frac{\ker(d^n)}{\text{im}(d^{n-1})}$$

Porém no caso em que A é não-abeliano não é possível definir grupos de cohomologia para todos os valores de $n \geq 0$. As limitações do caso não-abeliano são tão grandes que até hoje se conhecem definições razoáveis apenas para $H^1(G, A)$ e $H^2(G, A)$ (conforme [Serre, 1979, p.123-126]), também há uma definição de H^3 , mas ela envolve técnicas avançadas e tem outras limitações (ver [Giraud, 1971]). Este capítulo se divide da seguinte maneira:

Na seção (2.1) definiremos o que é o conjunto de cohomologia de primeira ordem $H^1(G, A)$, provaremos que existe certo funtor exato à esquerda e que os conjuntos de cohomologia servem para “medir” a quebra na exatidão. As principais referências são [Serre, 1979, p. 123-126] e [Neukirch et al., 2008, cap. I].

Na seção (2.2) utilizaremos a teoria desenvolvida na seção anterior para provar o teorema de Hilbert 90, cujo enunciado afirma que alguns conjuntos de cohomologia relacionados a uma extensão de corpos Galois L/K são triviais. As principais referências são [Neukirch et al., 2008, cap. VI] e [Serre, 1979, cap. X].

Na seção (2.3) aplicaremos o teorema de Hilbert 90 para o estudo de extensões de Galois cíclicas finitas de um corpo K , mais especificamente provaremos que a classificação dessas extensões envolve o cálculo de um certo grupo de cohomologia. A principal referência é [Neukirch et al., 2008, cap. VI, §2].

Na seção (2.4) também aplicaremos o teorema de Hilbert 90, mas estudaremos o que acontece ao estendermos o corpo de escalares de um certo K -espaço vetorial com uma “estrutura adicional” dada por um (p, q) -tensor Φ . Veremos que a classificação das formas torcidas envolve o cálculo de um certo conjunto de cohomologia. As principais referências são [Gille and Szamuely, 2006, cap. 2, §2.3], [Serre, 1979, cap. 10, §2] e [Brussel, 2000].

2.1 Cohomologia de Grupos Não-Abeliana

Antes de definir o que seria $H^1(G, A)$ quando A não é necessariamente abeliano faremos algumas convenções de notação: escreveremos a operação em A de forma multiplicativa e o elemento neutro de A será denotado por $1_A \in A$ ou apenas 1 quando não houver risco de confusão.

Definição 2.1. Seja G um grupo.

1. Um **G -grupo** é um grupo A equipado com uma G -ação à esquerda compatível com a multiplicação:

$$\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b) \quad \forall \sigma \in G, a, b \in A$$

2. Um função $i : A \rightarrow B$ entre dois G -grupos A e B é dita **G -equivariante** se:

$$i(\sigma(a)) = \sigma(i(a)) \quad \forall \sigma \in G, \forall a \in A$$

3. Um **1-cociclo** (ou simplesmente, **cociclo**) é uma função $\varphi : G \rightarrow A$ tal que:

$$\varphi(\sigma\tau) = \varphi(\sigma)\sigma(\varphi(\tau)) \quad \forall \sigma, \tau \in G \quad (2.2)$$

O conjunto de todos os cociclos é denotado $Z^1(G, A)$.

4. Dois cociclos φ e φ' são ditos **cohomólogos** se existe $b \in A$ tal que:

$$\varphi(\sigma) = b^{-1}\varphi'(\sigma)\sigma(b) \quad \forall \sigma \in G \quad (2.3)$$

Denotamos $\varphi \sim \varphi'$ quando dois cociclos são cohomólogos.

Teorema 2.1. A relação \sim é uma relação de equivalência.

Demonstração. A reflexividade e a simetria são triviais. Para ver a transitividade considere $\varphi \sim \varphi'$ e $\varphi' \sim \varphi''$ com

$$\begin{aligned} \varphi(\sigma) &= b^{-1}\varphi'(\sigma)\sigma(b) & \forall \sigma \in G \\ \varphi'(\sigma) &= c^{-1}\varphi''(\sigma)\sigma(c) & \forall \sigma \in G \end{aligned}$$

respectivamente. Portanto

$$\begin{aligned} \varphi(\sigma) &= b^{-1}c^{-1}\varphi''(\sigma)\sigma(c)\sigma(b) & \forall \sigma \in G \\ &= (cb)^{-1}\varphi''(\sigma)\sigma(cb) & \forall \sigma \in G \end{aligned}$$

ou seja, $\varphi \sim \varphi''$. □

Definição 2.2. Definimos o **conjunto de cohomologia de primeira ordem** $H^1(G, A)$ como o quociente do conjunto de cociclos pela relação de equivalência \sim , ou seja:

$$H^1(G, A) := \frac{Z^1(G, A)}{\sim}$$

Observação 2.1. Note que quando G age trivialmente sobre A , ou seja, se $\sigma(a) = a$ para todo $a \in A$, a equação de cociclo (2.2) fica:

$$\varphi(\sigma\tau) = \varphi(\sigma)\varphi(\tau) \quad \forall \sigma, \tau \in G \quad (2.4)$$

portanto um cociclo é na verdade um homomorfismo de grupos e temos que $Z^1(G, A) = \text{Hom}(G, A)$, ou seja, $H^1(G, A) = \text{Hom}(G, A)/\sim$. Em particular, se A é abeliano a relação \sim é trivial e teremos $H^1(G, A) = \text{Hom}(G, A)$. Note também que a função definida por $\varphi(\sigma) = 1_A$ para todo $\sigma \in G$ é um cociclo, chamado de **cociclo trivial**.

Observação 2.2. Note que $H^1(G, A)$ não é um grupo, no caso geral, mas temos um conjunto pontuado. Um **conjunto pontuado** é um par (X, x) onde X é um conjunto e $x \in X$ é um elemento fixado chamado de **ponto de base**, em outras palavras, é um conjunto no qual escolhemos um elemento. Um **morfismo de conjuntos pontuados** é uma função $f : X \rightarrow Y$ tal que $f(x) = y$.

Em muitos conjuntos há um “elemento especial” que é uma escolha “natural” como ponto de base. Por exemplo, no caso de um grupo abeliano A escolhemos $1_A \in A$, já no caso de $H^1(G, A)$, a classe do cociclo trivial é um elemento especial e por isso consideraremos a partir de agora o conjunto pontuado $H^1(G, A)$ com a classe do cociclo trivial fixada.

Uma sequência de morfismos de conjuntos pontuados:

$$\cdots \xrightarrow{f_{i-2}} (X_{i-1}, x_{i-1}) \xrightarrow{f_{i-1}} (X_i, x_i) \xrightarrow{f_i} (X_{i+1}, x_{i+1}) \xrightarrow{f_{i+1}} \cdots$$

é dita **exata** se $\text{im}(f_{i-1}) = f_i^{-1}(x_{i+1})$, para todo $i \in \mathbb{Z}$. Se tomarmos o caso particular no qual os X_i 's são grupos, $x_i = 1_{X_i}$ e f_i é morfismo de grupos então $f_i^{-1}(1_{X_i}) = \ker(f_i)$ e teremos a definição de sequência exata usual. Por isso usaremos um abuso de notação e escreveremos $\ker(f_i) = f_i^{-1}(x_{i+1})$.

Observação 2.3. No caso de A ser abeliano, temos que $H^1(G, A)$ é um grupo, pois a relação de equivalência \sim definida por (2.3) pode ser reescrita (usando a notação aditiva):

$$\varphi_\sigma - \varphi'_\sigma = \sigma(b) - b \quad \forall \sigma \in G$$

Isso nos motiva a definir o seguinte: dado $a \in A$ defina o **cociclo principal** φ_a por

$$\varphi_a(\sigma) := \sigma(a) - a \quad \forall \sigma \in G$$

e defina $B^1(G, A) := \{\varphi_a \mid a \in A\}$ o conjunto dos cociclos principais. Note que $B^1(G, A) \trianglelefteq Z^1(G, A)$ e que φ e φ' são cohomólogos se, e somente se, $\varphi - \varphi' \in B^1(G, A)$. Em particular, a definição (2.2) se escreverá como:

$$H^1(G, A) := \frac{Z^1(G, A)}{B^1(G, A)}$$

e teremos que $H^1(G, A)$ é um grupo.

Dado um G -grupo A , seja A^G o conjunto dos pontos de A que são fixos pela ação de G , ou seja,

$$A^G = \{a \in A \mid \sigma(a) = a, \forall \sigma \in G\}.$$

Sendo $i : A \rightarrow B$ uma função G -equivariante é fácil ver que $i(A^G) \subseteq B^G$.

Denote por **G-Grp** a categoria cujos objetos são os G -grupos e os morfismos são as funções G -equivariantes, e por **Set*** a categoria cujos objetos são os conjuntos pontuados e os morfismos são as funções entre conjuntos pontuados.

Note que temos um funtor (covariante)

$$_G : \mathbf{G-Grp} \longrightarrow \mathbf{Set}_*$$

que em objetos é definido por $_G(A) := A^G$, onde o ponto base é 1_A , e é definido em morfismos por:

$$\begin{aligned} i := _G(i) : A^G &\rightarrow B^G \\ a &\mapsto i(a) \end{aligned}$$

para toda função G -equivariante $i : A \rightarrow B$ e para todo $a \in A$. Aqui usamos um abuso de linguagem para denotar a restrição de i . Esse é o **funtor de ponto fixo**.

Dada uma sequência exata de G -grupos

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \longrightarrow 1 \tag{2.5}$$

podemos ver que o funtor de ponto fixo é exato à esquerda, pois a sequência de conjuntos pontuados abaixo é exata:

$$1 \longrightarrow A^G \xrightarrow{i} B^G \xrightarrow{j} C^G$$

Nesse contexto, $H^1(G, A)$ mede o quanto a sequência deixou de ser exata em C^G . Isto é, existe uma função $\delta : C^G \rightarrow H^1(G, A)$, o **morfismo de conexão**, tal que a seguinte sequência de conjuntos pontuados é exata:

$$1 \longrightarrow A^G \xrightarrow{i} B^G \xrightarrow{j} C^G \xrightarrow{\delta} H^1(G, A) \tag{2.6}$$

Construção 2.1 (Morfismo de conexão). Considere a sequência exata curta (2.5). Dado $c \in C^G$ existe $b \in B$ tal que $j(b) = c$. Observe que $b^{-1}\sigma(b) \in \text{im}(i)$ já que

$$j(b^{-1}\sigma(b)) = j(b^{-1})j(\sigma(b)) = c^{-1}\sigma(c) = 1$$

e $\ker(j) = \text{im}(i)$. Defina então $\delta(c)$ como a classe do cociclo dado por:

$$\delta(c)(\sigma) = \delta_c(\sigma) := i^{-1}(b^{-1}\sigma(b)) \quad \forall \sigma \in G \quad (2.7)$$

temos que provar que:

1. δ é um cociclo:

Considere $\sigma, \tau \in G$ então teremos por (2.7):

$$\begin{aligned} \delta_c(\sigma\tau) &= i^{-1}(b^{-1}\sigma(\tau(b))) \\ &= i^{-1}(b^{-1}\sigma(b)\sigma(b^{-1})\sigma(\tau(b))) \\ &= i^{-1}(b^{-1}\sigma(b))i^{-1}(\sigma(b^{-1})\sigma(\tau(b))) \\ &= i^{-1}(b^{-1}\sigma(b))\sigma(i^{-1}(b^{-1}\tau(b))) \\ &= \delta_c(\sigma)\sigma(\delta_c(\tau)) \end{aligned} \quad (2.8)$$

que é justamente a equação de cociclo (2.2).

2. δ está bem definido:

Seja $b_1, b_2 \in B^G$ tais que $j(b_1) = j(b_2) = c$. Temos então dois cociclos δ_c^1 e δ_c^2 , dados usando b_1 e b_2 em (2.7), respectivamente. Para que δ esteja bem definido é necessário que esses cociclos sejam cohomólogos, isto é, deve existir $a \in A$ tal que a equação (2.3) seja satisfeita, isto é, dado $\sigma \in G$:

$$\begin{aligned} i^{-1}(b_1^{-1}\sigma(b_1)) &= a^{-1}i^{-1}(b_2^{-1}\sigma(b_2))\sigma(a) \iff \\ b_1^{-1}\sigma(b_1) &= i(a^{-1})b_2^{-1}\sigma(b_2)i(\sigma(a)) \iff \\ b_2i(a)b_1^{-1} &= \sigma(b_2i(a)b_1^{-1}) \end{aligned}$$

ou seja, temos que encontrar a tal que $b_2i(a)b_1^{-1} \in B^G$. Note porém que $j(b_2^{-1}b_1) = 1_C$, e como $\text{im}(i) = \ker(j)$ concluímos que existe $a \in A$ tal que:

$$i(a) = b_2^{-1}b_1 \implies b_2i(a)b_1^{-1} = 1_B$$

e como $1_B \in B^G$ concluímos que $\delta_c^1 \sim \delta_c^2$.

Teorema 2.2. *A sequência de conjuntos pontuados de (2.6) é exata.*

Demonstração. Falta mostrar que a sequência é exata em C^G , isto é, que $\text{im}(j) = \ker(\delta)$.

Para provar que $\text{im}(j) \subseteq \ker(\delta)$ basta provar que $\delta \circ j = 1$. Tome $b \in B^G$ e seja $\sigma \in G$, então:

$$(\delta \circ j)(b)(\sigma) = \delta_{j(b)}(\sigma) = i^{-1}(b^{-1}\sigma(b)) = i^{-1}(1) = 1$$

o que é o resultado desejado.

Para provar que $\text{im}(j) \supseteq \ker(\delta)$ tome $c \in C^G$ tal que δ_c é cohomólogo ao cociclo trivial, isto é, existe $a \in A$ tal que:

$$\delta_c(\sigma) := a^{-1}\sigma(a) \quad \forall \sigma \in G$$

Por (2.7) nós temos que:

$$\begin{aligned} i^{-1}(b^{-1}\sigma(b)) &= a^{-1}\sigma(a) \iff \\ b^{-1}\sigma(b) &= i(a^{-1}\sigma(a)) \iff \\ b^{-1}\sigma(b) &= i(a^{-1})\sigma(i(a)) \iff \\ \sigma(bi(a^{-1})) &= bi(a^{-1}) \end{aligned}$$

Portanto $bi(a^{-1}) \in B^G$ e então:

$$j(bi(a^{-1})) = j(b)j(i(a^{-1})) = j(b) = c$$

□

Observação 2.4. Note que temos outro funtor (covariante):

$$H^1(G, _) : \mathbf{G}\text{-Grp} \rightarrow \mathbf{Set}_*$$

que em objetos é definido por $H^1(G, _)(A) := H^1(G, A)$ e é definido em morfismos por:

$$\begin{aligned} i_* := H^1(G, _)(i) : H^1(G, A) &\rightarrow H^1(G, B) \\ [\varphi] &\mapsto [i \circ \varphi] \end{aligned}$$

para toda função G -equivariante $i : A \rightarrow B$ e para todo cociclo $\varphi \in Z^1(G, A)$.

Teorema 2.3. *A seqüência de conjuntos pontuados abaixo é exata:*

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & A^G & \xrightarrow{i} & B^G & \xrightarrow{j} & C^G \\ & & & & & & \searrow \delta \\ & & & & & & H^1(G, A) \xrightarrow{i_*} H^1(G, B) \xrightarrow{j_*} H^1(G, C) \end{array}$$

Demonstração. Falta mostrar que a seqüência é exata em $H^1(G, A)$ e em $H^1(G, B)$.

Para ver que $\text{im}(\delta) \subseteq \ker(i_*)$, note que dado δ_c como em (2.7) temos que $i_*([\delta_c]) = [i \circ \delta_c]$. Mas por (2.7) temos que $i \circ \delta_c(\sigma) = b^{-1}\sigma(b)$, para todo $\sigma \in G$, logo $i \circ \delta_c$ é cohomólogo ao cociclo trivial.

Para ver que $\ker(i_*) \subseteq \text{im}(\delta)$ seja φ um cociclo tal que $i \circ \varphi$ é cohomólogo a 1_B , isto é, existe $b \in B$ tal que:

$$i \circ \varphi(\sigma) = b^{-1}\sigma(b) \quad \forall \sigma \in G \implies \varphi(\sigma) = i^{-1}(b^{-1}\sigma(b))$$

falta chegar apenas que $j(b) \in C^G$, para isso veja que:

$$1_C = j \circ i \circ \varphi(\sigma) = j(b^{-1}\sigma(b)) \implies j(b) = \sigma(j(b))$$

portanto $\varphi = \delta_{j(b)}$.

Para ver a exatidão em $H^1(G, B)$ note que $j_* \circ i_* = (j \circ i)_* = 1$, logo $\text{im}(i_*) \subseteq \ker(j_*)$. Considere agora $[\varphi] \in \ker(j_*)$, isto é, $j_*[\varphi] = [j \circ \varphi] = [1_C]$. Portanto existe $c \in C$ tal que:

$$j \circ \varphi(\sigma) = c^{-1}\sigma(c) \quad \forall \sigma \in G \tag{2.9}$$

tome $b \in B$ tal que $j(b) = c$ e então (2.9) se transforma em:

$$j \circ \varphi(\sigma) = j(b)^{-1}\sigma(j(b)) \implies j(b\varphi(\sigma)\sigma(b^{-1})) = 1_C$$

e como (2.5) é exata temos que para todo $\sigma \in G$ existe $a \in A$ tal que $b\varphi(\sigma)\sigma(b^{-1}) = i(a)$.

Defina $\psi : G \rightarrow A$ por $\psi(\sigma) := i^{-1}(b\varphi(\sigma)\sigma(b^{-1}))$. Uma conta análoga a (2.8) mostra que ψ é um cociclo e claramente temos $i \circ \psi \sim \varphi$, isto é, $i_*[\psi] = [\varphi]$ e temos $\ker(j_*) \subseteq \text{im}(i_*)$. \square

2.2 Hilbert 90

Agora iremos aplicar a teoria desenvolvida na seção anterior no caso em que temos um grupo A relacionado a uma extensão de corpos Galois finita L/K . Antes de provar os teoremas faremos algumas convenções de notação: L e K sempre denotarão corpos durante o restante do trabalho e G denotará o grupo $\text{Gal}(L/K)$, a menos de menção do contrário.

Como primeiro e mais importante resultado temos o Teorema que Hilbert 90¹, onde consideramos $A = L^\times$, o grupo multiplicativo, e a ação é dada aplicando os automorfismos de $\text{Gal}(L/K)$.

Teorema 2.4 (Hilbert 90). *Dada L/K uma extensão Galois finita temos que:*

$$H^1(\text{Gal}(L/K), L^\times) = 1$$

¹ O teorema tem esse nome porque é o número 90 dentre os 169 teoremas do livro de Hilbert "Zahlbericht"[Neukirch et al., 2008, p.281].

Demonstração. Dado um cociclo $\varphi : G \rightarrow L^\times$ queremos encontrar $a \in L^\times$ tal que:

$$\varphi(\sigma) = a^{-1}\sigma(a) \quad \forall \sigma \in G$$

e então φ será cohomólogo ao cociclo trivial.

Fixe $x \in L$ e tome $b = \sum_{\sigma \in G} \varphi(\sigma)\sigma(x) \in L$, que está bem-definido pois G é um grupo finito. Note que dado $\tau \in G$ temos $\tau(\varphi(\sigma)) = \varphi(\tau)^{-1}\varphi(\tau\sigma)$, para todo $\sigma \in G$ logo:

$$\tau(b) = \sum_{\sigma \in G} \tau(\varphi(\sigma))\tau\sigma(x) = \sum_{\sigma \in G} \varphi(\tau)^{-1}\varphi(\tau\sigma)\tau\sigma(x) = \quad (2.10)$$

$$= \varphi(\tau)^{-1} \sum_{\sigma \in G} \varphi(\tau\sigma)\tau\sigma(x) = \varphi(\tau)^{-1}b \quad (2.11)$$

já que $\tau\sigma$ irá percorrer todos os elementos de G .

Se existe $x \in L$ tal que $b \in L^\times$, basta tomar $a = b^{-1}$ e teremos o resultado desejado. A pergunta então é:

Será que existe algum x tal que $\sum_{\sigma \in G} \varphi(\sigma)\sigma(x) \neq 0$?

Suponha por absurdo que $\sum_{\sigma \in G} \varphi(\sigma)\sigma(x) = 0$ para todo $x \in L$. Seja $[L : K] = n$ e tome $\theta \in L$ tal que $\{1, \theta, \theta^2, \dots, \theta^{n-1}\}$ é uma base de L sobre K (basta tomar um elemento cuja existência é garantida pelo teorema do elemento primitivo (ver [Lang, 2002, cap. V, §4, Teorema 4.6])). Note então que $\sigma(\theta^k) = \sigma(\theta)^k$, para todo $\sigma \in G$ e para todos $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Denote por $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ os elementos de G e defina $\alpha_j := \varphi(\sigma_j)$. Agora observe que:

$$0 = \sum_{j=1}^n \varphi(\sigma_j)\sigma_j(\theta^k) = \alpha_1\sigma_1(\theta)^k + \alpha_2\sigma_2(\theta)^k + \dots + \alpha_n\sigma_n(\theta)^k$$

Ou seja, temos um sistema homogêneo de n equações e n incógnitas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \sigma_1(\theta) & \sigma_2(\theta) & \dots & \sigma_n(\theta) \\ \sigma_1(\theta)^2 & \sigma_2(\theta)^2 & \dots & \sigma_n(\theta)^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_1(\theta)^{n-1} & \sigma_2(\theta)^{n-1} & \dots & \sigma_n(\theta)^{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sabemos que o determinante da matriz de Vandermonde será:

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (\sigma_j(\theta) - \sigma_i(\theta)) \neq 0$$

pois caso contrário, isto é, se $\sigma_j(\theta) = \sigma_i(\theta)$, para algum i, j , então $\sigma_j = \sigma_i$ pois θ gera L sobre K . Mas como os σ_i 's são distintos concluímos que a única solução é $\alpha_j = \varphi(\sigma_j) = 0$, o que é uma contradição com o fato que φ é um cociclo com valores em L^\times . \square

Observação 2.5. A segunda parte da demonstração nada mais é do que uma demonstração de que os elementos de $\text{Gal}(L/K)$ são linearmente independentes quando vistos como elementos de $\text{Hom}_L(L, L)$. A demonstração clássica desse resultado, que é chamado de lema de Dedekind, pode ser encontrada de forma ainda mais geral em [Lang, 2002, cap. VI, §4].

Dado K um corpo um **fecho algébrico de K** é um corpo \bar{K} que é algebricamente fechado e tal que a extensão de corpos \bar{K}/K é algébrica (ver [Lang, 2002, cap. V, §2]). Como todos fechos algébricos de K são isomorfos chamamos \bar{K} de o fecho algébrico. Nem sempre a extensão \bar{K}/K é finita, mesmo assim queremos generalizar o Teorema de Hilbert 90 e por isso iremos fazer um esboço do que é necessário para provar esse teorema.

Denotamos $G_L := \text{Gal}(\bar{K}/L)$, dados $K \subseteq L \subseteq \bar{K}$. Seja A um G_K -grupo queremos definir $H^1(\text{Gal}(\bar{K}/K), A)$. Como a extensão \bar{K}/K nem sempre é finita, ao considerarmos todas as funções $f : \text{Gal}(\bar{K}/K) \rightarrow A$ estaremos considerando funções “demais” e por isso usualmente se trabalha com $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ como um grupo profinito e consideram-se apenas os cociclos contínuos (essa abordagem pode ser vista em [Neukirch et al., 2008]). Para evitar essas technicalidades definiremos tudo em termos de *limites injetivos* (ver [Borges and Tengan, 2015, apêndice]).

A partir da Teoria de Galois podemos ver que dadas duas extensões Galois finitas L_1/K e L_2/K existe outra extensão Galois finita L_3/K tal que $L_1, L_2 \subseteq L_3$, ou seja, temos um sistema dirigido que denotaremos \mathcal{I} .

Neste contexto temos que \bar{K} é o limite direto das extensões Galois finitas L/K contidas neste fecho algébrico:

$$\bar{K} = \varinjlim_{\substack{[L:K] < \infty \\ L/K \text{ Galois}}} L$$

Dados A um G_K -grupo e L/K extensão de corpos Galois finita, note que A^{G_L} é um $\text{Gal}(L/K)$ -grupo². Considere então o funtor $\mathcal{F} : \mathcal{I} \rightarrow \mathbf{Grp}$ dado em objetos por:

$$\mathcal{F}(L) := H^1(\text{Gal}(L/K), A^{G_L}) \quad (2.12)$$

e em morfismos $L_2 \xrightarrow{i} L_1$ é definido de modo que o diagrama comute:

$$\begin{array}{ccc} \text{Gal}(L_1/K) & \xrightarrow{\mathcal{F}(i)(f)} & A^{G_{L_1}} \\ \downarrow |_{L_2} & & \uparrow \\ \text{Gal}(L_2/K) & \xrightarrow{f} & A^{G_{L_2}} \end{array}$$

para todo cociclo $f : \text{Gal}(L_2/K) \rightarrow A^{G_{L_2}}$.

² Basta usar o isomorfismo $\frac{G_K}{G_L} \cong \text{Gal}(L/K)$.

Definimos então

$$H^1(\text{Gal}(\overline{K}/K), A) := \varinjlim_{\substack{[L:K] < \infty \\ L/K \text{ Galois}}} H^1(\text{Gal}(L/K), A^{G_L})$$

Teorema 2.5. *Seja K um corpo de característica zero e seja \overline{K} o fecho algébrico de K . Então:*

$$H^1(G_K, \overline{K}^\times) = 1$$

Demonstração. Sabemos que

$$(\overline{K}^\times)^{\text{Gal}(\overline{K}/L)} = L^\times$$

e ainda que

$$H^1(\text{Gal}(\overline{K}/K), \overline{K}^\times) = \varinjlim_{\substack{[L:K] < \infty \\ L/K \text{ Galois}}} H^1(\text{Gal}(L/K), (\overline{K}^\times)^{\text{Gal}(\overline{K}/L)})$$

Mas pelo teorema 2.4 na página 25 teremos que $H^1(\text{Gal}(L/K), (\overline{K}^\times)^{\text{Gal}(\overline{K}/L)}) = 1$, portanto:

$$H^1(\text{Gal}(\overline{K}/K), \overline{K}^\times) = \varinjlim_{\substack{[L:K] < \infty \\ L/K \text{ Galois}}} 1 = 1.$$

□

Agora vamos expandir o Teorema de Hilbert 90 para um caso mais geral: fixe n um número natural não nulo e observe que $\text{Gal}(L/K)$ age em L^n e em $\text{GL}_n(L)$ entrada a entrada, por exemplo em L^2 teremos a ação:

$$\sigma \cdot (a, b) := (\sigma(a), \sigma(b)) \quad \sigma \in G, a, b \in L$$

Teorema 2.6 (Hilbert 90). *Dada L/K uma extensão Galois finita temos que:*

$$H^1(\text{Gal}(L/K), \text{GL}_n(L)) = 1$$

Demonstração. Novamente, dado um cociclo $\varphi : G \rightarrow \text{GL}_n(L)$ queremos mostrar que ele é cohomólogo ao cociclo trivial, ou seja, queremos encontrar $A \in \text{GL}_n(L)$ tal que:

$$\varphi(\sigma) = A^{-1}\sigma(A) \quad \forall \sigma \in G$$

Dado $x \in L^n$ defina:

$$B(x) = \sum_{\sigma \in G} \varphi(\sigma)\sigma(x) \in L^n \tag{2.13}$$

então o conjunto $\{B(x) \mid x \in L^n\}$ gera o espaço vetorial L^n . Suponha que isso seja falso e tome $f : L^n \rightarrow L$ um funcional linear que se anula nos elementos da forma $B(x)$. Tome $\lambda \in L$ e note que:

$$0 = f(B(x\lambda)) = \sum_{\sigma \in G} f(\varphi(\sigma)\sigma(x\lambda)) = \sum_{\sigma \in G} f(\varphi(\sigma)\sigma(x))\sigma(\lambda)$$

fazendo λ percorrer L vemos que a equação acima implica que os automorfismos $\sigma \in \text{Hom}_L(L, L)$ são linearmente dependentes, o que já foi provado falso na demonstração do teorema (2.4).

Portanto $\{B(x) \mid x \in L^n\}$ gera o espaço vetorial L^n e podemos escolher $x_1, \dots, x_n \in L^n$ tais que $B(x_1), \dots, B(x_n) \in L^n$ são linearmente independentes. Defina as matrizes inversíveis $C := [x_1, \dots, x_n]$ e $B := [B(x_1), \dots, B(x_n)]$ e veja que

$$B = \sum_{\sigma \in G} \varphi(\sigma) \sigma(C)$$

e com uma conta análoga a (2.10) mostramos que $\tau(B) = \varphi(\tau)^{-1}B$, logo basta tomar $A = B^{-1}$. \square

Corolário 2.7. *Dada L/K uma extensão Galois finita temos que:*

$$H^1(\text{Gal}(L/K), \text{SL}_n(L)) = 1$$

Demonstração. Tome a sequência exata:

$$1 \longrightarrow \text{SL}_n(L) \hookrightarrow \text{GL}_n(L) \xrightarrow{\det} L^\times \longrightarrow 1$$

onde \det denota o determinante, e use a sequência exata longa do teorema 2.3 na página 24 e o teorema (2.6):

$$1 \longrightarrow \text{SL}_n(K) \hookrightarrow \text{GL}_n(K) \xrightarrow{\det} K^\times \xrightarrow{\delta} H^1(G, \text{SL}_n(L)) \longrightarrow H^1(G, \text{GL}_n(L)) = 1$$

note que δ e \det são sobrejetivos, mas $\ker(\delta) = \text{im}(\det)$, ou seja, δ é nulo e o resultado segue. \square

2.3 Teoria de Kummer

Sabemos da Teoria de Galois que, dados um corpo K , $a \in K$ e n natural não-nulo, toda extensão de Galois da forma $K(\sqrt[n]{a})$ é cíclica e de ordem m , tal que $m \mid n$ (ver [Dummit and Foote, 2004, cap. 14, §14.7, Proposição 36]). Podemos então nos perguntar se a recíproca é verdadeira e usando a Teoria de Kummer vemos que sim. Na verdade a Teoria de Kummer é um pouco mais geral do que a apresentada abaixo, ela classifica extensões Galois abelianas, mas aqui estudaremos apenas as extensões Galois cíclicas.

Antes de construirmos a teoria considere o seguinte exemplo:

Exemplo 2.1. Seja $G = \{\text{id}, \sigma\} = \text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ o grupo de Galois da extensão \mathbb{C}/\mathbb{R} , onde $\sigma(z) = \bar{z}$ é a conjugação complexa.

Considere a sequência exata de G -grupos:

$$1 \longrightarrow \{\pm 1\} \hookrightarrow \mathbb{C}^\times \xrightarrow{2} \mathbb{C}^\times \longrightarrow 1$$

onde 2 denota elevar ao quadrado. Note que id fixa todo o conjunto \mathbb{C}^\times e que:

$$\sigma(z) = \bar{z} = z \iff z \in \mathbb{R}^\times$$

e portanto $(\mathbb{C}^\times)^G = \mathbb{R}^\times$.

Como $H^1(G, \mathbb{C}^\times) = 1$ pelo teorema 2.4 na página 25, temos da proposição 2.3 na página 24 a sequência exata longa:

$$1 \longrightarrow \{\pm 1\} \hookrightarrow \mathbb{R}^\times \xrightarrow{2} \mathbb{R}^\times \xrightarrow{\delta} H^1(G, \{\pm 1\}) \longrightarrow 1$$

logo

$$H^1(G, \{\pm 1\}) \cong \frac{\mathbb{R}^\times}{\ker(\delta)} = \frac{\mathbb{R}^\times}{\text{im}(2)} = \frac{\mathbb{R}^\times}{(\mathbb{R}^\times)^2} \cong \frac{\mathbb{R}^\times}{\mathbb{R}_+^\times} \cong \{\pm 1\} \quad (2.14)$$

O que é o morfismo de conexão $\mathbb{R}^\times \xrightarrow{\delta} H^1(G, \{\pm 1\})$ nesse caso?

Seja $-k$ um real não-nulo negativo. Como $\mathbb{C}^\times \xrightarrow{2} \mathbb{C}^\times$ é sobrejetor existe $b \in \mathbb{C}^\times$ tal que $b^2 = -k$, no caso podemos escolher $b = \sqrt{-k}$. Então seguindo a definição em (2.7) temos que:

$$\begin{aligned} \delta_{-k}(\text{id}) &= b^{-1} \text{id}(b) = \frac{\sqrt{-k}}{\sqrt{-k}} = 1 \\ \delta_{-k}(\sigma) &= b^{-1} \sigma(b) = \frac{\overline{\sqrt{-k}}}{\sqrt{-k}} = \frac{-\sqrt{-k}}{\sqrt{-k}} = -1 \end{aligned}$$

Note que se tivéssemos escolhido $b = -\sqrt{-k}$ a resposta teria sido a mesma, como o esperado. E se k é um número positivo temos que δ_k é o cociclo trivial. Utilizando o fato de que o morfismo de conexão δ é sobrejetor vemos que existem dois cociclos em $H^1(G, \{\pm 1\})$, o que corrobora com (2.14).

Agora vamos construir a Teoria de Kummer no caso geral, mas trabalharemos com corpos de característica zero para evitar certas technicalidades, pois para construir a teoria bastaria considerar o fecho separável do corpo, que coincide com o fecho algébrico quando o corpo tem característica zero.

Definição 2.3. Dado K um corpo o **grupo das n -ésimas raízes da unidade** é definido como $\mu_n(K) := \{a \in \bar{K} \mid a^n = 1\}$. Quando não houver risco de confusão denotaremos simplesmente μ_n .

Teorema 2.8. *Seja K um corpo de característica zero, \bar{K} o fecho algébrico de K e $G = \text{Gal}(\bar{K}/K)$. Então:*

1.

$$H^1(G, \mu_n(K)) \cong \frac{K^\times}{(K^\times)^n}$$

2. Se $\mu_n(K) \subseteq K$ então

$$H^1(G, \mu_n(K)) \cong \text{Hom}_{\mathbf{Grp}}(G, \mu_n(K))$$

Demonstração. (1) Considere a sequência exata curta:

$$1 \longrightarrow \mu_n(K) \hookrightarrow \overline{K}^\times \xrightarrow{n} \overline{K}^\times \longrightarrow 1$$

onde n denota elevar à n -ésima potência.

Como $H^1(G, \overline{K}^\times) = 1$ pelo teorema 2.4 na página 25, temos da proposição 2.3 na página 24 a sequência exata longa:

$$1 \longrightarrow \mu_n(K) \hookrightarrow K^\times \xrightarrow{n} K^\times \xrightarrow{\delta} H^1(G, \mu_n) \longrightarrow H^1(G, \overline{K}^\times) = 1$$

portanto δ é sobrejetivo e temos pelo primeiro teorema do isomorfismo e do fato de que a sequência é exata:

$$H^1(G, \mu_n) \cong \frac{K^\times}{\ker(\delta)} = \frac{K^\times}{\text{im}(n)} = \frac{K^\times}{(K^\times)^n}$$

(2) Como $\mu_n(K) \subseteq K$ a ação de G em $\mu_n(K)$ é trivial e temos pela observação 2.1 na página 21 que $H^1(G, \mu_n) \cong \text{Hom}_{\mathbf{Grp}}(G, \mu_n)$. \square

Teorema 2.9. *Seja n um natural positivo e L/K uma extensão Galois cíclica cujo grau m divide n e suponha que $\mu_n(K) \subseteq K$. Então existe $a \in K$ tal que $L = K(\sqrt[n]{a})$, e mais ainda, se $K(\sqrt[n]{a}) = K(\sqrt[n]{b})$ então existe $c \in K^*$ e $r \in \{1, \dots, m\}$, com $\text{mdc}(r, m) = 1$, tal que $a = b^r c^n$.*

Demonstração. Dado L vamos construir um cociclo $\varphi \in H^1(G_K, \mu_n) = \text{Hom}(G_K, \mu_n)$. Considere inicialmente o morfismo sobrejetor:

$$\begin{aligned} \text{res}_L: G_K &\longrightarrow \text{Gal}(L/K) \\ \sigma &\longmapsto \sigma|_L \end{aligned}$$

que é bem-definido pelo teorema de conservação das raízes (ver [Borges and Tengan, 2015, Apêndice C]). Como $\text{Gal}(L/K)$ é cíclico de ordem m assim como μ_m , podemos fixar um isomorfismo $\Phi: \text{Gal}(L/K) \rightarrow \mu_m$. Considere então a composição:

$$\begin{array}{ccc} G_K & & \\ \text{res}_L \downarrow & \searrow \varphi & \\ \text{Gal}(L/K) & \xrightarrow[\Phi]{\cong} \mu_m & \hookrightarrow \mu_n \end{array}$$

Portanto temos um cociclo $\varphi: G_K \rightarrow \mu_n$. Note porém que na demonstração do teorema (2.8) o morfismo de conexão δ é sobrejetor, ou seja, existe $a \in K^\times$ tal que $\varphi = \delta_a$. Usando a definição do morfismo de conexão (2.7) temos que:

$$\delta_a(\sigma) = (\sqrt[n]{a})^{-1} \sigma(\sqrt[n]{a}) = \frac{\sigma(\sqrt[n]{a})}{\sqrt[n]{a}} \quad \forall \sigma \in G_K \quad (2.15)$$

pois $\sqrt[n]{a} \in \overline{K}^\times$ é tal que $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

Observe que $L = \overline{K}^{\ker(\text{res}_L)}$ e que $\ker(\text{res}_L) = \ker(\varphi)$. Mas note também que temos

$$\ker(\varphi) = \{\sigma \in G_K \mid \sigma(\sqrt[n]{a}) = \sqrt[n]{a}\} = \text{Gal}(\overline{K}/K(\sqrt[n]{a}))$$

e portanto:

$$L = \overline{K}^{\ker(\varphi)} = \overline{K}^{\text{Gal}(\overline{K}/K(\sqrt[n]{a}))} = K(\sqrt[n]{a})$$

Suponha agora que $K(\sqrt[n]{a}) = K(\sqrt[n]{b})$, então sabemos que:

$$\overline{K}^{\ker(\delta_a)} = K(\sqrt[n]{a}) \text{ e } \overline{K}^{\ker(\delta_b)} = K(\sqrt[n]{b}) \quad (2.16)$$

portanto $\ker(\delta_a) = \ker(\delta_b)$. Daí, temos isomorfismos ($m = [K(\sqrt[n]{a}) : K] = [K(\sqrt[n]{b}) : K]$)

$$\bar{\delta}_a : \frac{G_K}{\ker \delta_a} \xrightarrow{\cong} \mu_m \subseteq \mu_n$$

$$\bar{\delta}_b : \frac{G_K}{\ker \delta_b} \xrightarrow{\cong} \mu_m \subseteq \mu_n$$

Logo temos um automorfismo $\bar{\delta}_a \circ \bar{\delta}_b^{-1}$ de μ_m , que por ser um grupo cíclico de ordem m , é da forma $x \mapsto x^r$ com r primo com m . Em outras palavras, $\delta_a = (\delta_b)^r$, então

$$\begin{aligned} \frac{\sigma(\sqrt[n]{a})}{\sqrt[n]{a}} &= \frac{\sigma(\sqrt[n]{b})^r}{(\sqrt[n]{b})^r} \\ \frac{\sigma(\sqrt[n]{a}(\sqrt[n]{b})^{-r})}{\sqrt[n]{a}(\sqrt[n]{b})^{-r}} &= 1 \\ \sigma(\sqrt[n]{ab^{-r}}) &= \sqrt[n]{ab^{-r}} \end{aligned}$$

para todo $\sigma \in G_K$. Portanto $\sqrt[n]{ab^{-r}} = c$, para algum $c \in K$, ou seja, $a = b^r c^n$. \square

Exemplo 2.2. A existência desse r pode parecer estranha, mas podemos ver que faz sentido a partir de exemplos. Considere $K = \mathbb{Q}(i)$, logo $\mu_4(K) \subseteq K$, e considere as extensões Galois $K(\sqrt[4]{2})$ e $K(\sqrt[4]{8})$. Note que:

$$\begin{aligned} K(\sqrt[4]{2}) &= \langle \sqrt[4]{2} \rangle = K + K(\sqrt[4]{2}) + K(\sqrt[4]{4}) + K(\sqrt[4]{8}) \\ K(\sqrt[4]{8}) &= \langle \sqrt[4]{8} \rangle = K + K(\sqrt[4]{8}) + K(2\sqrt[4]{4}) + K(4\sqrt[4]{2}) \end{aligned}$$

portanto $K(\sqrt[4]{2}) = K(\sqrt[4]{8})$. O que não é surpresa a partir do teorema, pois $8 = 2^3$ e $\text{mdc}(3, 4) = 1$.

Vemos a partir do teorema (2.9) que o grupo $H^1(G, \mu_n(K))$ classifica as extensões Galois cíclicas de K de grau dividindo n , e mais ainda, pelo teorema (2.8) sabemos calcular esse grupo. Os exemplos abaixo mostram alguma aplicações destes teoremas.

Exemplo 2.3. Estendendo o exemplo (2.1) tome $n \in \mathbb{N}$ e considere a sequência:

$$1 \longrightarrow \mu_n(\mathbb{C}) \hookrightarrow \mathbb{C}^\times \xrightarrow{n} \mathbb{C}^\times \longrightarrow 1$$

onde n denota elevar à n -ésima potência. Note que $(\mathbb{R}^\times)^n = \mathbb{R}^\times$ se n é ímpar e $(\mathbb{R}^\times)^n = \mathbb{R}_+^\times$ se n é par. Com o teorema (2.8) concluímos que:

$$H^1(G, \mu_n(\mathbb{C})) \cong \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \mathbb{Z}/2 & \text{se } n \text{ é par} \end{cases} \quad (2.17)$$

Como $H^1(G, \mu_2(\mathbb{C})) \cong \mathbb{Z}/2$ e $\mu_2(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$ concluímos do teorema (2.9) que existem exatamente duas extensões cíclicas de \mathbb{R} cujo grau divide 2, que no caso são \mathbb{R} e \mathbb{C} (o que já era de se esperar).

Exemplo 2.4. Considere agora o corpo \mathbb{Q} e note que $\mu_2(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$ e $\mu_2 \cong \mathbb{Z}/2$, daí

$$H^1(G_{\mathbb{Q}}, \mu_2) \cong \text{Hom}(G_{\mathbb{Q}}, \mathbb{Z}/2) \cong \frac{\mathbb{Q}^\times}{(\mathbb{Q}^\times)^2}$$

Mas o que é esse grupo $\frac{\mathbb{Q}^\times}{(\mathbb{Q}^\times)^2}$?

Seja $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^\times$, então:

$$\frac{p}{q}(\mathbb{Q}^\times)^2 = \frac{p}{q}q^2(\mathbb{Q}^\times)^2 = pq(\mathbb{Q}^\times)^2$$

Então podemos considerar os elementos de $\frac{\mathbb{Q}^\times}{(\mathbb{Q}^\times)^2}$ simplesmente como classes de equivalência de inteiros. Dado $m \in \mathbb{Q}^\times$ considere a decomposição em primos (positivos):

$$m = \pm p_1^{a_1} \dots p_n^{a_n}$$

Note que o que importa na classe de $m(\mathbb{Q}^\times)^2$ é apenas a paridade dos a_i 's e o sinal. Logo temos o isomorfismo:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}/2 \oplus \bigoplus_{p \text{ primo}} \mathbb{Z}/2 &\cong \frac{\mathbb{Q}^\times}{(\mathbb{Q}^\times)^2} \\ (a_1, (a_p)_{p \text{ primo}}) &\mapsto (-1)^{a_1} 2^{a_2} 3^{a_3} 5^{a_5} \dots (\mathbb{Q}^\times)^2 \end{aligned}$$

onde a multiplicação “infinita” é apenas um abuso de notação já que teremos apenas finitos primos para os quais $a_p = 1$.

Na prática isso quer dizer que escolher uma extensão cíclica de \mathbb{Q} com grau dois é o mesmo que escolher um elemento de $\mathbb{Z}/2 \oplus \bigoplus_{p \text{ primo}} \mathbb{Z}/2$, ou seja, um número inteiro no qual “esquecemos” o que está “elevado ao quadrado” na sua decomposição em primos. Por exemplo, $\mathbb{Q}(\sqrt{72}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ pois $72(\mathbb{Q}^\times)^2 = 2 \cdot 2^2 \cdot 3^2(\mathbb{Q}^\times)^2 = 2(\mathbb{Q}^\times)^2$.

2.4 Descenso de Galois

No estudo da Álgebra Linear acontecem alguns “fenômenos estranhos” que analisaremos a partir de agora.

Exemplo 2.5. Sejam $M_2(\mathbb{R})$ e \mathbb{H} as \mathbb{R} -álgebras de dimensão 4 das matrizes 2×2 reais e dos quatérnions, respectivamente. Aqui pensaremos nos quatérnions como o conjunto:

$$\mathbb{H} := \left\{ \left[\begin{array}{cc} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{array} \right] \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\}$$

Como essas \mathbb{R} -álgebras têm a mesma dimensão sabemos que esses espaços são isomorfos como \mathbb{R} -espaços vetoriais e, por isso, é natural perguntarmos se eles são isomorfos como \mathbb{R} -álgebras. Note porém que enquanto \mathbb{H} é uma álgebra de divisão, a álgebra $M_2(\mathbb{R})$ não é, pois tem vários divisores de zero. Em outras “palavras”:

$$\mathbb{H} \not\cong M_2(\mathbb{R})$$

O “fenômeno estranho” acontece quando tensorizamos as duas álgebras por \mathbb{C} pois obtemos duas \mathbb{C} -álgebras isomorfas. Em outras “palavras”:

$$\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong M_2(\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

como \mathbb{C} é uma \mathbb{R} -álgebra está claro que ao tensorizarmos pela \mathbb{R} -álgebra \mathbb{C} teremos duas \mathbb{R} -álgebras, mas podemos ir além definindo uma estrutura de \mathbb{C} -espaço vetorial para esses anéis, obtendo então duas \mathbb{C} -álgebras. Note ainda que existe um isomorfismo de \mathbb{C} -álgebras $M_2(\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong M_2(\mathbb{C})$.

O isomorfismo de \mathbb{C} -álgebras entre $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ e $M_2(\mathbb{C})$ ($= M_2(\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$) é induzido no produto tensorial pelas inclusões:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H} & \hookrightarrow & M_2(\mathbb{C}) \\ \left[\begin{array}{cc} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{array} \right] & \mapsto & \left[\begin{array}{cc} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{array} \right] \end{array}$$

e

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \hookrightarrow & M_2(\mathbb{C}) \\ z & \mapsto & \left[\begin{array}{cc} z & 0 \\ 0 & z \end{array} \right] \end{array}$$

Como $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) = \dim_{\mathbb{C}}(M_2(\mathbb{C})) = 4$ basta provar que a transformação linear:

$$\begin{array}{ccc} \Xi: \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} & \longrightarrow & M_2(\mathbb{C}) \\ \left[\begin{array}{cc} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{array} \right] \otimes z & \mapsto & \left[\begin{array}{cc} \alpha z & \beta z \\ -\bar{\beta} z & \bar{\alpha} z \end{array} \right] \end{array}$$

é sobrejetora.

Considere a matriz

$$\begin{bmatrix} a + bi & c + di \\ c' + d'i & a' + b'i \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$$

é “fácil ver que” ao definir

$$\alpha := \frac{a + a'}{2} + \frac{b - b'}{2}i \text{ e } \beta := \frac{b + b'}{2} + \frac{a' - a}{2}i$$

teremos

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \bar{\alpha} \end{bmatrix} \otimes 1 + \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \bar{\beta} \end{bmatrix} \otimes i \xrightarrow{\Xi} \begin{bmatrix} a + bi & 0 \\ 0 & a' + b'i \end{bmatrix}$$

analogamente, ao definir

$$\gamma := \frac{c - c'}{2} + \frac{d + d'}{2}i \text{ e } \delta := \frac{d - d'}{2} - \frac{c' + c}{2}i$$

teremos

$$\begin{bmatrix} 0 & \gamma \\ -\bar{\gamma} & 0 \end{bmatrix} \otimes 1 + \begin{bmatrix} 0 & \delta \\ -\bar{\delta} & 0 \end{bmatrix} \otimes i \xrightarrow{\Xi} \begin{bmatrix} 0 & c + di \\ c' + d'i & 0 \end{bmatrix}$$

Como Ξ é linear concluímos que é de fato um isomorfismo.

Exemplo 2.6. Considere agora o produto interno usual sobre $V = \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \Phi : \quad \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ ((x, y), (w, z)) &\longmapsto xw + yz \end{aligned}$$

e considere a forma bilinear sobre $W = \mathbb{R}^2$ conhecida como produto interno de Lorentz:

$$\begin{aligned} \Psi : \quad \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ ((x, y), (w, z)) &\longmapsto xw - yz \end{aligned}$$

Novamente temos dois \mathbb{R} -espaços vetoriais V e W isomorfos, porém não existe nenhuma transformação linear real $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que seja uma isometria, isto é, $\Phi(Tu, Tv) = \Psi(u, v)$, para todo $u, v \in \mathbb{R}^2$. Se tal transformação existisse, então dado $e_2 = (0, 1) \in \mathbb{R}^2$ teríamos que:

$$\Phi(Te_2, Te_2) \geq 0 \quad \text{e} \quad \Psi(e_2, e_2) = -1$$

o que é uma contradição.

O “fenômeno estranho” acontece novamente quando tensorizamos os dois \mathbb{R} -espaços vetoriais por \mathbb{C} e induzimos Ψ e Φ nos novos \mathbb{C} -espaços vetoriais, pois existem isometrias entre $(\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{C}, \Phi)$ e $(\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{C}, \Psi)$. Mais especificamente, temos $\mathbb{R}^2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C}^2$ e as formas bilineares Φ e Ψ estão definidos agora sobre \mathbb{C}^2 com a mesma “fórmula”. Tomando $T(\alpha, \beta) = (\alpha, i\beta)$, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, “é fácil ver que” T é uma isometria.

Os dois exemplos acima podem parecer bem distintos à primeira vista mas eles apresentam o mesmo fenômeno. Nos dois exemplos começamos com \mathbb{R} -espaços vetoriais de mesma dimensão e que possuem uma “estrutura adicional” que os torna não isomorfos, depois tensorizamos pelo corpo dos números complexos e ganhamos uma estrutura de \mathbb{C} -espaço vetorial, a “estrutura adicional” também é modificada e então vemos que sobre \mathbb{C} os espaços se tornam isomorfos. Talvez fosse natural imaginar que ao estendemos o corpo de escalares de \mathbb{R} para \mathbb{C} os espaços continuariam não isomorfos, mas como podemos ver os novos espaços têm a mesma dimensão que os originais e têm um corpo de escalares maior, ou seja, temos mais coeficientes para um possível isomorfismo.

Os dois exemplos acima não são casos isolados, eles são casos particulares de uma teoria mais geral chamada **descenso de Galois**. O objetivo dessa teoria é, a grosso modo, classificar os espaços vetoriais com certa “estrutura adicional” que se tornam isomorfos quando estendemos o seu corpo de escalares.

Definição 2.4. Seja V um K -espaço vetorial e $p, q \geq 0$ inteiros. Um (p, q) -**tensor** Φ é um elemento do produto tensorial $V^{\otimes p} \otimes (V^*)^{\otimes q}$.

Exemplo 2.7. A partir do isomorfismo (ver [Brussel, 2000] para mais detalhes)

$$V^{\otimes p} \otimes_K (V^*)^{\otimes q} \cong \text{Hom}_K(V^{\otimes q}, V^{\otimes p}) \quad (2.18)$$

vemos que existem alguns exemplos importantes de (p, q) -tensores comuns na matemática:

1. O produto de uma K -álgebra A é uma função bilinear $A \times A \rightarrow A$, que pode ser visto como uma transformação linear $A \otimes A \rightarrow A$ e mais ainda como um elemento de $A \otimes A^* \otimes A^*$, ou seja, o produto de uma álgebra é um $(1, 2)$ -tensor;
2. Analogamente uma forma quadrática pode ser vista como um $(0, 2)$ -tensor;
3. Uma transformação linear é um $(1, 1)$ -tensor.

A partir de agora nessa secção K e L sempre denotarão corpos e consideraremos K -espaços vetoriais equipados com um (p, q) -tensor Φ fixo.

Definição 2.5. Sejam (V, Φ) e (W, Ψ) dois K -espaços vetoriais com (p, q) -tensores fixos e seja L/K uma extensão Galois finita.

1. Um **K -isomorfismo** é um isomorfismo $f : V \rightarrow W$ tal que o induzido de f em $V^{\otimes p} \otimes (V^*)^{\otimes q}$ mapeia Φ em Ψ .

Aqui, o morfismo induzido por f é $f^{\otimes p} \otimes (f^{*-1})^{\otimes q} : V^{\otimes p} \otimes (V^*)^{\otimes q} \rightarrow W^{\otimes p} \otimes (W^*)^{\otimes q}$, onde f^* é o dual de f . Denotaremos simplesmente $f(\Phi) = \Psi$ quando não houver risco de confusão.

2. Denote por V_L o L -espaço vetorial $V \otimes_K L$ e por Φ_L o tensor induzido em V_L por Φ . Dizemos que (V, Φ) e (W, Ψ) são **L -isomorfos** se existe um L -isomorfismo entre (V_L, Φ_L) e (W_L, Ψ_L) . Nesta situação (W, Ψ) é também chamado de **(L/K) -forma torcida** de (V, Φ) , ou simplesmente de **forma torcida**.
3. Denotamos por $\text{Aut}_L(\Phi)$ o **grupo dos L -automorfismos de (V_L, Φ_L)** e por $\text{TF}_L(V, \Phi)$ o **conjunto das (L/K) -formas torcidas de (V, Φ)** , onde (V_L, Φ_L) é um “elemento especial” que torna este um conjunto pontuado.

Exemplo 2.8. Qual seria a cara do morfismo induzido por f no caso de um $(1, 1)$ -tensor?

Seja $v \otimes \lambda \in V \otimes V^*$, então:

$$f \otimes f^{*-1}(v \otimes \lambda) = f(v) \otimes f^{*-1}(\lambda) = f(v) \otimes (\lambda \circ f^{-1})$$

O que seria Φ_L no caso de um $(1, 1)$ -tensor?

Sendo $\Phi = v \otimes \lambda \in V \otimes_K V^*$, então $\Phi_L = (v \otimes 1) \otimes (\lambda \otimes 1) \in V_L \otimes_L V_L^*$

Exemplo 2.9. Usando o isomorfismo de (2.18) se tomarmos uma base de uma K -álgebra V obtemos uma tabela de multiplicação e conseguimos determinar quem é o $(1, 2)$ -tensor associado à multiplicação $\Phi : V \otimes_K V \rightarrow V$. Mais especificamente, se $\{e_i\}$ é uma base de V e $\{e_i^*\}$ a sua base dual, então

$$\Phi = \sum_{i,j,k} a_{ijk} e_k \otimes e_i^* \otimes e_j^*$$

onde temos

$$\Phi(e_i, e_j) = \sum_{i,j,k} a_{ijk} e_k$$

a expansão do produto $e_i e_j = \Phi(e_i, e_j)$ em termos da base na tabela de multiplicação da álgebra.

Retomando o exemplo (2.5) tome a base de \mathbb{H} formada por $\{1, i, j, k\}$ onde alguns produtos da tabela de multiplicação são:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \quad ij = k = -ji$$

Como a dimensão dos quatérnions sobre \mathbb{R} é 4 e o produto de elementos da base é um elemento da base (a menos de um sinal) temos que o $(1, 2)$ -tensor é a soma de 16 tensores elementares, mais especificamente podemos escrever:

$$\Phi = -1 \otimes i^* \otimes i^* + k \otimes i^* \otimes j^* - k \otimes j^* \otimes i^* + \dots$$

onde i^* e j^* denotam o dual de i e j , respectivamente.

Tome a base de $M_2(\mathbb{R})$ formada por:

$$e_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad e_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde alguns dos produtos da ‘tabela de multiplicação são:

$$e_{11}e_{11} = e_{11} \quad e_{11}e_{12} = e_{12} \quad e_{11}e_{21} = 0 \quad e_{21}e_{12} = e_{22} \quad \dots$$

Note que em geral temos $e_{ik}e_{lj} = e_{ij}$, se $k = l$, e $e_{ik}e_{lj} = 0$, se $k \neq l$, ou seja, o $(1, 2)$ -tensor da multiplicação Ψ é a soma de 8 tensores elementares não-nulos:

$$\Psi = \sum_{i,j,k} e_{ij} \otimes e_{ik}^* \otimes e_{kj}^* = e_{11} \otimes e_{11}^* \otimes e_{11}^* + e_{12} \otimes e_{11}^* \otimes e_{12}^* + e_{22} \otimes e_{21}^* \otimes e_{12}^* + \dots$$

onde e_{ij}^* denota o dual de e_{ij} .

Exemplo 2.10. Retomando o exemplo (2.6) seja $\{e_1, e_2\}$ a base canônica de \mathbb{R}^2 e $\{e_1^*, e_2^*\}$ a sua base dual. No caso do produto interno usual vemos que o $(0, 2)$ -tensor associado é:

$$\Phi = e_1^* \otimes e_1^* + e_2^* \otimes e_2^*$$

enquanto que o $(0, 2)$ -tensor associado ao produto interno de Lorentz é:

$$\Psi = e_1^* \otimes e_1^* - e_2^* \otimes e_2^*$$

Observação 2.6. Podemos ver toda a situação acima num contexto categórico. Dados p e q fixos, definimos a categoria $\mathcal{C}_K^{p,q}$ como a categoria que tem como objetos os pares (V, Φ) , com V um K -espaço vetorial e Φ um (p, q) -tensor, e como flechas os K -isomorfismos. Os objetos de $\mathcal{C}_K^{p,q}$ serão chamados de K -objetos.

Dada L/K uma extensão Galois finita temos um funtor:

$$F : \mathcal{C}_K^{p,q} \longrightarrow \mathcal{C}_L^{p,q}$$

que em objetos é definido por $F(V, \Phi) := (V_L, \Phi_L)$ e é definido em morfismos por:

$$\begin{aligned} F(f) : V_L &\longrightarrow W_L \\ v \otimes l &\longmapsto f(v) \otimes l \end{aligned}$$

para todo K -isomorfismo f e para todo tensor elementar $v \otimes l$ no conjunto de geradores de V_L .

Se dois K -objetos são isomorfos então a imagem deles também serão isomorfas em $\mathcal{C}_L^{p,q}$ e sabemos que dois K -objetos não isomorfos podem ter imagens isomorfas em $\mathcal{C}_L^{p,q}$. A pergunta que se faz é: dado um L -objeto na ‘imagem’ de F , quais os K -objetos (a menos de K -isomorfismo) que estão na imagem ‘inversa’?

Essa abordagem é encontrada em [Brussel, 2000], que mostra que essa ‘inversão’ é na verdade uma certa equivalência de categorias, mas não iremos trabalhar com esta abordagem.

Queremos aplicar a cohomologia de grupos na classificação de formas torcidas, para isso podemos ver que $G = \text{Gal}(L/K)$ age em $\text{Aut}_L(\Phi)$ da seguinte forma: dado $\sigma \in \text{Gal}(L/K)$ considere o K -automorfismo induzido $\text{id}_V \otimes \sigma : V_L \rightarrow V_L$, que denotaremos simplesmente por σ . Cada L -isomorfismo $f : V_L \rightarrow W_L$ induz uma aplicação $\sigma(f) : V_L \rightarrow W_L$ definida por:

$$\sigma(f) := \sigma \circ f \circ \sigma^{-1}$$

Sendo $f \in \text{Aut}_L(\Phi)$, queremos verificar que $\sigma(f) \in \text{Aut}_L(\Phi)$: como temos que f e $\text{id}_V \otimes \sigma$ são K -morfismos é imediato que $\sigma(f)$ é K -linear; porém, como $\text{id}_V \otimes \sigma$ não é L -linear não é imediato que $\sigma(f) \in \text{Aut}_L(\Phi)$.

Como temos $f(\Phi_L) = \Phi_L$ e $\sigma(\Phi_L) = \Phi_L$ então teremos $\sigma(f)(\Phi_L) = \Phi_L$. Quanto à L -linearidade, se $\{e_i\}_{i=1}^n$ é K -base de V sabemos que $\{e_i \otimes 1\}_{i=1}^n$ é L -base de V_L , considere então $[a_{ij}]$ a matriz de f relativa a essa base. Logo, dado $l \in L$ temos:

$$\begin{aligned} \sigma(f)(l \cdot (e_i \otimes 1)) &= \sigma(f)(e_i \otimes l) \\ &= \sigma \circ f \circ \sigma^{-1}(e_i \otimes l) \\ &= \sigma(f(e_i \otimes \sigma^{-1}(l))) \\ &= \sigma(\sigma^{-1}(l)f(e_i \otimes 1)) \text{ (pois } f \text{ é } L\text{-linear)} \\ &= \sigma(\sigma^{-1}(l)) \sigma(f(e_i \otimes 1)) \\ &= l \sigma\left(\sum_j a_{ij}(e_j \otimes 1)\right) \\ &= l \sum_j \sigma(a_{ij})(e_j \otimes 1) \end{aligned}$$

Vemos então que $\sigma(f)$ é L -linear, e em particular, se tomarmos $l = 1$ vemos que a matriz de $\sigma(f)$ em relação à base $\{e_i \otimes 1\}_{i=1}^n$ é $[\sigma(a_{ij})]$. Vemos então que $\sigma(f) \in \text{Aut}_L(\Phi)$ e como essa “ação” preserva a composição temos de fato uma ação à esquerda de G em $\text{Aut}_L(\Phi)$ e como consequência agora podemos calcular $H^1(G, \text{Aut}_L(\Phi))$.

Dado um L -isomorfismo $g : (V_L, \Phi_L) \rightarrow (W_L, \Psi_L)$, obtemos uma aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : G &\rightarrow \text{Aut}_L(\Phi) \\ \sigma &\mapsto g^{-1} \circ \sigma(g) \end{aligned} \tag{2.19}$$

que satisfaz a relação de cociclo:

$$\varphi_{\sigma\tau} = \varphi_\sigma \sigma(\varphi_\tau), \quad \forall \sigma, \tau \in G$$

E mais ainda, se $h : (V_L, \Phi_L) \rightarrow (W_L, \Psi_L)$ é outro L -isomorfismo e ψ_σ é o cociclo associado a h , definimos o L -automorfismo $\xi := h^{-1} \circ g$ e temos que:

$$\varphi_\sigma = \xi^{-1} \psi_\sigma \sigma(\xi) \quad \forall \sigma \in G$$

Vemos então que a definição de $[\varphi] \in H^1(G, \text{Aut}_L(\Phi))$ só depende de (W, Ψ) e não do L -isomorfismo escolhido. Temos então o seguinte teorema:

Teorema 2.10. *Dado (V, Φ) , com V um K -espaço vetorial e Φ um (p, q) -tensor fixado, considere o conjunto pontuado $\text{TF}_L(V, \Phi)$ das (L/K) -formas torcidas de (V, Φ) , com ponto base dado por (V, Φ) . Então o mapa*

$$\begin{aligned} \theta : \text{TF}_L(V, \Phi) &\longrightarrow H^1(G, \text{Aut}_L(\Phi)) \\ (W, \Psi) &\longmapsto [\varphi_\sigma] \end{aligned}$$

é uma bijeção de conjuntos pontuados.

Demonstração. É fácil ver que θ mapeia (V, Φ) na classe do cociclo trivial. Portanto resta provar que θ é injetiva e sobrejetiva.

Para ver que θ é injetiva tome (W_1, Ψ_1) e (W_2, Ψ_2) duas L/K -formas torcidas de (V, Φ) tais que $\theta(W_1, \Psi_1) = \theta(W_2, \Psi_2)$. Sejam $f_1 : (V_L, \Phi_L) \rightarrow ((W_1)_L, (\Psi_1)_L)$ e $f_2 : (V_L, \Phi_L) \rightarrow ((W_2)_L, (\Psi_2)_L)$ dois L -isomorfismos fixados. Como os dois cociclos são cohomólogos existe $\xi \in \text{Aut}_L(\Phi)$ tal que

$$f_1^{-1}\sigma(f_1) = \xi^{-1}f_2^{-1}\sigma(f_2)\sigma(\xi) \quad \forall \sigma \in G$$

ou seja

$$\sigma(f_1\xi^{-1}f_2^{-1}) = f_1\xi^{-1}f_2^{-1} \quad \forall \sigma \in G$$

Se a matriz de $f_1\xi^{-1}f_2^{-1}$ relativa à uma certa base é $[a_{ij}]$ concluímos que ela é invariante pela ação de G , isto é

$$[\sigma(a_{ij})] = [a_{ij}] \quad \forall \sigma \in G$$

Portanto $f_1\xi^{-1}f_2^{-1}$ é na verdade um K -isomorfismo de (W_2, Ψ_2) para (W_1, Ψ_1) e θ é injetiva.

Já para ver que θ é sobrejetiva considere um 1-cociclo $\varphi : G \rightarrow \text{Aut}_L(\Phi)$. Como $\text{Aut}_L(\Phi) \subseteq \text{GL}(V_L)$ temos pelo teorema 2.6 na página 28 que a classe de φ é trivial, isto é, existe um L -isomorfismo $f : V_L \rightarrow V_L$ tal que:

$$\varphi(\sigma) = f^{-1} \circ \sigma(f) \quad \forall \sigma \in G \tag{2.20}$$

Defina agora $\Psi := f(\Phi_L)$ e note que ele é invariante pela ação de G :

$$\sigma(\Psi) = \sigma \circ f(\Phi_L) = \sigma(f) \circ \sigma(\Phi_L) = \sigma(f)(\Phi_L) \stackrel{(2.20)}{=} f \circ \varphi_\sigma(\Phi_L) = f(\Phi_L) = \Psi \quad \forall \sigma \in G$$

Portanto os coeficientes de Ψ estão sobre K e ele pode ser visto como um (p, q) -tensor sobre V . Note então que (V, Ψ) é um L/K -forma torcida de (V, Φ) cuja imagem por θ é $[\varphi_\sigma]$. \square

Observação 2.7. Outro caminho para demonstração acima seria construir uma inversa para a função θ , cuja ideia será esboçada abaixo (essa é a abordagem utilizada em [Gille and Szamuely, 2006, cap. 2, §3]). Dado $\varphi : G \rightarrow \text{Aut}_L(\Phi)$ um cociclo, podemos definir uma G -ação “torcida” em V_L por:

$$\sigma \cdot v := \varphi(\sigma) \circ \sigma(v) \quad \forall \sigma \in G, \forall v \in V$$

Indicaremos esse novo espaço com essa ação torcida por ${}_{\varphi}V_L$. Teremos então que os pontos fixos pela ação torcida são justamente os K -espaços vetoriais que quando “sobem” se tornam isomorfos.

$$({}_{\varphi}V_L, \Phi_L)^G = (W, \Psi)$$

Veremos abaixo como podemos aplicar o teorema (2.10) em situações já citadas anteriormente

Exemplo 2.11. Considere V um K -espaço vetorial de dimensão n e $(p, q) = (0, 0)$, portanto Φ é o tensor trivial. Note que $\text{Aut}_L(\Phi) = \text{GL}_n(L)$ portanto teremos pelo teorema 2.6 na página 28:

$$\text{TF}_L(V, \Phi) \cong H^1(G, \text{GL}_n(L)) = 1$$

Portanto concluímos que só existe uma única L/K -forma torcida de V , no caso o próprio V_L . Em outras palavras: dois K -espaço vetoriais que são L -isomorfos são K -isomorfos, o que era de se esperar já que a existência isomorfismos de espaços vetoriais de dimensão finita dependem unicamente da dimensão.

Exemplo 2.12. Retomando e estendendo o exemplo (2.6) considere a extensão Galois \mathbb{C}/\mathbb{R} , $V = \mathbb{R}^n$ e $(p, q) = (0, 2)$, com $\Phi = \langle \cdot, \cdot \rangle$ o tensor do produto interno usual. Note que $\text{Aut}_{\mathbb{C}}(\Phi) = \text{O}_n(\mathbb{C})$ pois:

$$\begin{aligned} \text{Aut}_L(\Phi) &= \{T : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n \mid \langle Tu, Tv \rangle = \langle u, v \rangle, \forall u, v \in \mathbb{C}^n\} \\ &= \{T : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n \mid T^t T = I\} = \text{O}_n(\mathbb{C}) \end{aligned}$$

onde T^t denota a transposta, portanto

$$\text{TF}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle) \cong H^1(G, \text{O}_n(\mathbb{C}))$$

O cálculo de $H^1(G, \text{O}_n(\mathbb{C}))$ não é simples no caso geral, mas conseguimos fazer as contas no caso em que $n = 2$. Considere a sequência exata curta

$$1 \rightarrow \text{SO}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \text{O}_2(\mathbb{C}) \xrightarrow{\det} \{\pm 1\} \rightarrow 1$$

onde $\text{SO}_2(\mathbb{C})$ é o grupos das matrizes ortogonais com determinante igual a 1, ou seja:

$$\text{SO}_2(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \alpha^2 + \beta^2 = 1 \right\}$$

Usando o teorema 2.3 na página 24 obtemos o seguinte trecho da sequência exata longa

$$H^1(G, \text{SO}_2(\mathbb{C})) \rightarrow H^1(G, \text{O}_2(\mathbb{C})) \rightarrow H^1(G, \{\pm 1\})$$

ou seja, $H^1(G, \text{O}_2(\mathbb{C}))$ fica “ensanduichado” entre $H^1(G, \{\pm 1\}) \cong \mathbb{Z}/2$ e $H^1(G, \text{SO}_2(\mathbb{C}))$. Note porém que este último grupo tem ordem 2 pois dar um cociclo $\varphi: G \rightarrow \text{SO}_2(\mathbb{C})$ é o mesmo que escolher uma matriz $A \in \text{SO}_2(\mathbb{C})$ tal que $\varphi(\sigma) = A$, onde $\sigma \in G$ denota a conjugação complexa. Note porém que das relações de cociclo temos

$$I = \varphi(\text{id}) = \varphi(\sigma\sigma) = \varphi(\sigma)\sigma(\varphi(\sigma)) = A\bar{A}$$

Fazendo as contas temos que A é da forma:

$$A = \begin{pmatrix} a & bi \\ -bi & a \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}, a^2 - b^2 = 1$$

Podemos ver que essa matriz representa um cociclo trivial se e só se $a > 0$; neste caso $A = B^{-1}\bar{B}$ com

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha = \frac{t + t^{-1}}{2}, \beta = \frac{t - t^{-1}}{2i}, t = \sqrt{a + b}$$

logo $H^1(G, \text{SO}_2(\mathbb{C}))$ consiste nas classes de $\pm I$ e tem ordem dois. Concluímos então que $H^1(G, \text{O}_2(\mathbb{C}))$ tem ordem no máximo 4, e de fato é igual a 4, pois as 4 formas quadráticas $\pm e_1^* \otimes e_1^* \pm e_2^* \otimes e_2^*$ não são equivalentes em \mathbb{R}^2 . Esses cálculos concordam com o teorema de inércia de Sylvester (assinatura da forma) nos diz que há 2^n formas quadráticas em \mathbb{R}^n .

3 Cohomologia de Feixes

Um dos problemas clássicos da matemática é relacionar propriedades locais com propriedades globais. Esse é um problema complexo, mas teoria de feixes e a cohomologia de feixes que serão estudadas neste capítulo são ferramentas que nos ajudam a entender essas relações entre o local e o global.

Na seção (3.1) definiremos o que são feixes de grupos abelianos e trabalharemos a teoria básica. Mais especificamente, definiremos o que seria uma sequência exata de feixes e provaremos que existe certo funtor exato à esquerda. As principais referências são [Borges and Tengan, 2015, cap. 15] e [Rotman, 2009].

Na seção (3.2) definiremos o primeiro grupo de cohomologia de Čech com coeficientes em um feixe e veremos que ele pode ser usado para “medir” a quebra da exatidão da sequência da seção anterior. Também definiremos a cohomologia de Čech quando o feixe é de grupos não-abelianos. As principais referências são [Rotman, 2009, cap. 5], [Serre, 1955], [Godement, 1973, cap.2, §5], [Milne, 1980, cap. 3] e [Tengan, 2009].

Na seção (3.3) aplicaremos a cohomologia de Čech na classificação de fibrados vetoriais sobre um espaço topológico X , em particular calcularemos de modo explícito a cohomologia de Čech sobre o círculo classificando assim todos os fibrados linha sobre S^1 . As principais referências são [Lee, 2001, cap. 10] e [Tengan, 2009].

3.1 Feixes

Antes de definir o que é um feixe veremos um exemplo muito importante:

Exemplo 3.1. Dado um espaço topológico X considere a categoria $\mathbf{O}(X)$ que tem como objetos os abertos de X e os morfismos são as inclusões. Dados dois abertos $U, V \subseteq X$:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{O}(X)}(U, V) := \begin{cases} \{U \rightarrow V\} & \text{se } U \subseteq V \\ \emptyset & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Para cada aberto $U \subseteq X$, defina o **anel das funções contínuas reais** em U :

$$\mathcal{F}(U) = \{f: U \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ é contínua}\}$$

Se $U \supseteq V$ temos um **morfismo de restrição**

$$\begin{aligned} \mathrm{res}_{UV}: \mathcal{F}(U) &\longrightarrow \mathcal{F}(V) \\ f &\longmapsto f|_V \end{aligned}$$

Estes morfismos de restrição satisfazem a seguinte propriedade de “cola”: dado um aberto U , uma cobertura aberta $\{U_i\}_{i \in I}$ de U e funções $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$, $i \in I$, concordando nas intersecções, i.e.,

$$f_i|_{U_i \cap U_j} = \text{res}_{U_i, U_i \cap U_j}(f_i) = \text{res}_{U_j, U_i \cap U_j}(f_j) = f_j|_{U_i \cap U_j} \quad \forall i, j \in I$$

existe uma *única* função $f \in \mathcal{F}(U)$ tal que $f|_{U_i} = \text{res}_{U, U_i}(f) = f_i$ para cada $i \in I$. De fato, se $x \in U$ pertence a U_i , basta definir $f(x) = f_i(x)$, o que independe da escolha do aberto U_i que contém x pelo fato de os f_i 's concordarem nas intersecções.

Definição 3.1. Seja X um espaço topológico.

1. Um **pré-feixe de grupos abelianos sobre X** é um funtor contravariante $\mathcal{F}: \mathbf{O}(X)^{\text{op}} \rightarrow$

Ab. Explicitamente, temos

- a) para cada aberto U de X , um grupo abeliano $\mathcal{F}(U)$;
- b) para cada inclusão de abertos $V \subseteq U$, um morfismo de grupos abelianos $\text{res}_{UV}: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$, chamado de **restrição**. Tais que $\text{res}_{UU} = \text{id}_{\mathcal{F}(U)}$ para todo aberto U e $\text{res}_{VW} \circ \text{res}_{UV} = \text{res}_{UW}$ para todas as inclusões de abertos $W \subseteq V \subseteq U$. Se não houver confusão, denotaremos $\text{res}_{UV}(f) \in \mathcal{F}(V)$ simplesmente por $f|_V$. Os elementos de $\mathcal{F}(V)$ são chamados de **seções** de \mathcal{F} sobre V .

2. Um pré-feixe $\mathcal{F}: \mathbf{O}(X)^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ab}$ é um **feixe** se satisfaz o “axioma de cola”: para cada aberto $U \subseteq X$ e qualquer cobertura aberta $\{U_i\}_{i \in I}$ de U , dadas seções $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ “concordando nas intersecções”, i.e.,

$$\text{res}_{U_i, U_i \cap U_j}(f_i) = \text{res}_{U_j, U_i \cap U_j}(f_j) \quad \forall i, j \in I$$

existe uma *única* seção $f \in \mathcal{F}(U)$ tal que $\text{res}_{U, U_i}(f) = f_i$ para cada $i \in I$.

3. Se $\mathcal{F}, \mathcal{G}: \mathbf{O}(X)^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ab}$ são dois pré-feixes, um **morfismo de pré-feixes** $\phi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ é uma transformação natural entre \mathcal{F} e \mathcal{G} . Explicitamente, para cada aberto $U \subseteq X$ temos um morfismo de grupos $\phi_U: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ de modo que se $V \subseteq U$ é uma inclusão de abertos, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\phi_U} & \mathcal{G}(U) \\ \text{res}_{UV}^{\mathcal{F}} \downarrow & & \downarrow \text{res}_{UV}^{\mathcal{G}} \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\phi_V} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

comuta. Um **morfismo de feixes** é simplesmente um morfismo entre os pré-feixes subjacentes, ou seja, apenas uma transformação natural.

4. Denotamos por $\mathbf{PSh}(X)$ (respectivamente $\mathbf{Sh}(X)$) a categoria de pré-feixes (respectivamente feixes) de grupos abelianos sobre X .

Observação 3.1. Seja $\mathcal{F}: \mathbf{O}(X)^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ab}$ um pré-feixe de grupos abelianos. Para cada aberto $U \subseteq X$ e cada cobertura aberta $\{U_i\}_{i \in I}$ de U , considere a sequência

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\epsilon} \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i) \xrightarrow{d^0} \prod_{(i,j) \in I^2} \mathcal{F}(U_i \cap U_j) \quad (3.1)$$

em que ϵ e d^0 são definidos pelos produtos dos mapas de restrição:

$$\epsilon(f) = (f|_{U_i})_{i \in I} \quad \text{e} \quad d^0(f)_{(i,j) \in I^2} = (f_j|_{U_i \cap U_j} - f_i|_{U_i \cap U_j})_{(i,j) \in I^2} \quad (3.2)$$

Então dizer que \mathcal{F} é um feixe é o mesmo que dizer que as sequências acima são exatas para todo aberto $U \subseteq X$ e toda cobertura aberta $\{U_i\}_{i \in I}$ de U : a injetividade de ϵ expressa a unicidade da cola, enquanto $\ker d^0 = \text{im } \epsilon$ expressa a existência da mesma.

Em particular, se $U = \emptyset$, temos que U admite uma cobertura vazia (i.e., com $I = \emptyset$) e portanto temos que $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$ já que o produto vazio é o grupo trivial. Aqueles que acharem este tipo de raciocínio deveras bizarro estão convidados a simplesmente incluir a condição $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$ na definição acima.

Agora veremos alguns exemplos de feixes e também um exemplo de um pré-feixe que não é feixe para vermos que os feixes são objetos “comuns” na matemática.

Exemplo 3.2. Considere $X = \mathbb{R}^2$ e defina $\mathcal{F}(U) := \mathbb{Z}$, para todo $U \neq \emptyset$. Com restrições dadas por $\text{res}_{UV} := \text{id}_{\mathbb{Z}}$, se $\emptyset \neq U \subseteq V$ e $\text{res}_{UV} := 0$, a função nula, se $U = \emptyset$.

É fácil ver que \mathcal{F} é um pré-feixe, mas não é um feixe. Para ver isso considere dois abertos disjuntos $U, V \subseteq X$, se \mathcal{F} fosse um feixe teríamos a partir de (3.1) a seguinte sequência exata:

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U \cup V) \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{F}(U) \times \mathcal{F}(V) \xrightarrow{d_0} \mathcal{F}(U \cap V)$$

porém $\mathcal{F}(U \cap V) = \mathcal{F}(\emptyset) = 0$, logo $\mathcal{F}(U \cup V) \cong \mathcal{F}(U) \times \mathcal{F}(V)$, ou seja, $\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, o que é uma contradição. Portanto \mathcal{F} não é um feixe.

Exemplo 3.3. Considere novamente $X = \mathbb{R}^2$ porém defina

$$\mathcal{F}(U) := \{f : U \rightarrow \mathbb{Z} \mid f \text{ é contínua}\}$$

onde \mathbb{Z} tem a topologia discreta e com os mapas de restrição usuais. Note que $\mathcal{F}(U) = \mathbb{Z}^{\pi_0(U)}$, onde $\pi_0(U)$ é conjunto das componentes conexas de U .

Tomando uma sequência análoga à sequência do exemplo (3.2) vemos que o mesmo problema não ocorre pois teremos $\mathcal{F}(U \cup V) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Mais geralmente, dada $\{U_i\}_{i \in I}$

cobertura aberta de $U \subseteq X$ e dadas seções $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ basta definir $f(x) = f_i(x)$, se $x \in U_i$, de modo análogo ao exemplo (3.1). Portanto, \mathcal{F} é um feixe.

Mais geralmente, seja A um grupo abeliano qualquer, munido da topologia discreta. Para cada aberto $U \neq \emptyset$, defina

$$\underline{A}(U) = \{f: U \rightarrow A \mid f \text{ é contínua}\} = A^{\pi_0(U)}$$

com os mapas de restrição usuais. Temos que \underline{A} é um feixe, chamado **feixe constante** com valores em A .

Exemplo 3.4. O exemplo do feixe de funções contínuas reais pode ser facilmente generalizado. Por exemplo, seja $X = \mathbb{C}$ e considere, para cada aberto não vazio $U \subseteq \mathbb{C}$,

$$\mathcal{H}(U) := \{f: U \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ é holomorfo}\}$$

com os mapas de restrição usuais. Temos que \mathcal{H} define um feixe de anéis sobre $X = \mathbb{C}$, o **feixe de funções holomorfas**. Tomando o grupo de unidades, temos que $U \mapsto \mathcal{H}(U)^\times$ (funções holomorfas que não se anulam em nenhum ponto de U) define um feixe de grupos abelianos (com os mapas de restrição usuais) que denotamos por \mathcal{H}^\times . Note ainda que a função exponencial define um morfismo de feixes de grupos abelianos sobre $X = \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \exp_U: \mathcal{H}(U) &\rightarrow \mathcal{H}^\times(U) \\ f &\mapsto e^f \end{aligned}$$

Definição 3.2. Seja $\mathcal{F}: \mathbf{O}(X)^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ab}$ um pré-feixe de grupos abelianos sobre um espaço topológico X . Seja $x \in X$. Considere o conjunto direcionado formado por todas as vizinhanças abertas de x , ordenado pela relação $U \preceq V \iff V \subseteq U$. O **talo** \mathcal{F}_x de \mathcal{F} em x é o grupo abeliano

$$\mathcal{F}_x := \varinjlim_{U \ni x} \mathcal{F}(U)$$

Definição 3.3. Os elementos de \mathcal{F}_x são os **germes**, que nada mais são do que classes de equivalência $[(U, f)]$ de pares (U, f) , com U uma vizinhança aberta de x e $f \in \mathcal{F}(U)$, sendo que a relação de equivalência identifica seções que concordam em alguma vizinhança de x :

$$[(U, f)] = [(V, g)] \iff \text{existe um aberto } W \ni x \text{ tal que } W \subseteq U \cap V \text{ e } f|_W = g|_W$$

A soma de duas classes $[(U, f)]$ e $[(V, g)]$ é definida restringindo-se f e g a uma vizinhança comum de x , por exemplo $W = U \cap V$:

$$[(U, f)] + [(V, g)] := [(W, f|_W + g|_W)]$$

Intuitivamente, \mathcal{F}_x é o grupo de “todas as seções definidas em alguma vizinhança aberta de x ”.

Observação 3.2. Seja $\mathcal{F}: \mathbf{O}(X)^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ab}$ um feixe de grupos abelianos sobre um espaço X . Dado um aberto $U \subseteq X$ e uma seção $f \in \mathcal{F}(U)$, denotamos por $f_x = [(U, f)] \in \mathcal{F}_x$ a imagem de f no talo em $x \in U$. Então o mapa

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(U) &\hookrightarrow \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x \\ f &\longmapsto (f_x)_{x \in U} \end{aligned} \quad (3.3)$$

é injetor. De fato, se $f_x = 0$ então existe uma vizinhança aberta $U_x \subseteq U$ de x para a qual $f|_{U_x} = 0$. Assim, se f pertence ao kernel do mapa acima, existe uma cobertura aberta de U na qual f se restringe a 0 em cada aberto desta cobertura. Pela unicidade no axioma de cola, temos $f = 0$, como desejado.

Considere agora $\phi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ um morfismo de pré-feixes de grupos abelianos em X . Denotamos por ϕ_x o morfismo de grupos abelianos entre talos induzido por ϕ :

$$\begin{aligned} \phi_x: \mathcal{F}_x &\longrightarrow \mathcal{G}_x \\ [(U, f)] &\longmapsto [(U, \phi_U(f))] \end{aligned}$$

Suponha que \mathcal{G} seja um feixe e que $\phi, \psi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ são morfismos tais que $\phi_x = \psi_x$ para todo $x \in X$. Então $\phi = \psi$ por (3.3). Assim, um morfismo de um pré-feixe para um feixe é completamente determinado por seus valores nos talos.

Agora que definimos alguns termos básicos da teoria de feixes vamos começar a trabalhar com sequências exatas de feixes, o que nos abrirá a possibilidade de calcular cohomologia posteriormente.

Definição 3.4. Seja $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ um conjunto de feixes de grupos abelianos sobre X . Uma sequência de morfismos de feixes de grupos abelianos

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{F}_i \xrightarrow{\phi_i} \mathcal{F}_{i-1} \xrightarrow{\phi_{i-1}} \mathcal{F}_{i-2} \longrightarrow \cdots$$

é **exata** se para todo $x \in X$ a sequência abaixo é exata (em \mathbf{Ab})

$$\cdots \longrightarrow (\mathcal{F}_i)_x \xrightarrow{(\phi_i)_x} (\mathcal{F}_{i-1})_x \xrightarrow{(\phi_{i-1})_x} (\mathcal{F}_{i-2})_x \longrightarrow \cdots$$

Exemplo 3.5. Considere a sequência de morfismo de feixes sobre $X = \mathbb{C}$:

$$0 \longrightarrow \underline{\mathbb{Z}} \xrightarrow{2\pi i} \mathcal{H} \xrightarrow{\text{exp}} \mathcal{H}^\times \longrightarrow 0 \quad (3.4)$$

onde definimos para $U \subseteq \mathbb{C}$ aberto:

$$\begin{aligned} (2\pi i)_U: \underline{\mathbb{Z}}(U) &\longrightarrow \mathcal{H}(U) \\ f &\longmapsto 2\pi i f \end{aligned}$$

Essa sequência no talo de um $x \in X$ qualquer fica

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{(2\pi i)_x} \mathcal{H}_x \xrightarrow{\exp_x} \mathcal{H}_x^\times \longrightarrow 1 \quad (3.5)$$

já que $\underline{\mathbb{Z}}_x \cong \mathbb{Z}$. Claramente vemos que $(2\pi i)_x$ é injetora e que $\text{im}(2\pi i)_x \subseteq \ker \exp_x$ já que temos nos germes:

$$\exp_x \circ (2\pi i)_x(n) = \exp_x([(U, 2\pi in)]) = [(U, e^{2\pi in})] = [(U, 1)] \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Suponha agora que temos $U \ni x$ conexo e que $\exp_x([(U, s)]) = [(U, e^s)] = [(U, 1)]$. Portanto, sem perda de generalidade, existe $W \subseteq U$ aberto (conexo) que contém x tal que:

$$e^s|_W = 1|_W \implies s|_W = 2\pi in$$

para algum n apropriado, isto é, $\text{im}(2\pi i)_x \supseteq \ker \exp_x$.

Para ver que \exp_x é sobrejetor considere $[(U, t)] \in \mathcal{H}_x^\times$, tome um aberto “pequeno o suficiente” $W \subseteq U$ ao redor de $t(x)$, de modo que podemos tomar um ramo conveniente de log e defina $s := \log(t|_W)$. Então teremos que

$$\exp_x([(W, s)]) = [(W, e^s)] = [(U, t)]$$

e a sequência (3.4) é exata.

No exemplo acima só conseguimos a exatidão da sequência porque tomamos um aberto suficientemente pequeno para definir o logaritmo. Se a condição para uma sequência de feixes ser exata fosse exatidão em todos os abertos $U \subseteq X$ não teríamos os mesmos resultados, como mostra o exemplo abaixo:

Exemplo 3.6. Considere a sequência (3.4) aplicada em $U := \mathbb{C} \setminus \{0\}$, temos então a sequência:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{(2\pi i)_U} \mathcal{H}(U) \xrightarrow{\exp_U} \mathcal{H}(U)^\times \quad (3.6)$$

já que $\underline{\mathbb{Z}}(U) \cong \mathbb{Z}$.

Mostraremos que $\frac{1}{z} \in \mathcal{H}(U)^\times$, mas $\frac{1}{z} \notin \text{im}(\exp_U)$.

Suponha por absurdo que $\frac{1}{z} \in \text{im}(\exp_U)$ e seja $f \in \mathcal{H}(U)$ tal que

$$e^{f(z)} = \frac{1}{z} \quad \forall z \in U \quad (3.7)$$

como são funções holomorfas podemos derivar e então:

$$f'(z)e^{f(z)} = \frac{-1}{z^2} \implies f'(z)\frac{1}{z} = \frac{-1}{z^2} \implies f'(z) = \frac{-1}{z} \quad \forall z \in U$$

Pelo teorema de Cauchy temos que:

$$0 = \oint_{|z|=1} f'(z) dz = - \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} = -2\pi i$$

o que é uma contradição. Portanto \exp_U não é sobrejetora.

Portanto dada uma sequência exata curta de feixes a sequência de grupos abelianos associada nem sempre é exata. Podemos escrever essa situação em linguagem categórica da seguinte maneira: sejam \mathcal{F} feixe de grupos abelianos sobre X e $U \subseteq X$ aberto. Defina um funtor (covariante)

$$\Gamma = \Gamma(U, _): \mathbf{Sh}(X) \rightarrow \mathbf{Ab}$$

que em objetos é definido por $\Gamma(U, \mathcal{F}) := \mathcal{F}(U)$ e em morfismos por:

$$\begin{aligned} \Gamma(U, \phi): \mathcal{F}(U) &\longrightarrow \mathcal{G}(U) \\ f &\longmapsto \phi_U(f) \end{aligned}$$

para todo morfismo de feixes $\phi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ e para toda seção $f \in \mathcal{F}(U)$. Temos então o seguinte teorema:

Teorema 3.1. *Sejam \mathcal{A} , \mathcal{B} e \mathcal{C} feixes de grupos abelianos sobre X , seja*

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{\phi} \mathcal{B} \xrightarrow{\psi} \mathcal{C} \longrightarrow 0 \quad (3.8)$$

uma sequência exata curta de feixes e seja $U \subseteq X$ aberto. Então a seguinte sequência de grupos abelianos é exata:

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}(U) \xrightarrow{\phi_U} \mathcal{B}(U) \xrightarrow{\psi_U} \mathcal{C}(U) \quad (3.9)$$

Em outras palavras, o funtor Γ é exato à esquerda.

Demonstração. Ver demonstração em [Taylor, 2002, cap. 7, §7.2, Proposição 7.2.2]. \square

3.2 Cohomologia de Čech para Feixes

O teorema 3.1 nos coloca em uma situação parecida com a seção (2.1), quando o funtor de ponto fixo $_{}^G$ era exato à esquerda e para “medir” a quebra na exatidão construímos a cohomologia de grupo não-abeliana. Agora temos que o funtor Γ não é exato e para “medir” a quebra na exatidão definiremos os grupos de cohomologia de Čech $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ e $\check{H}^1(X, \mathcal{F})$.

Observação 3.3. Antes de construirmos a teoria iremos fazer uma convenção de notação: sejam $U_i, U_j, U_k \subseteq X$ abertos, então em alguns momentos escreveremos $U_{ij} := U_i \cap U_j$ e $U_{ijk} := U_i \cap U_j \cap U_k$. Além disso, quando possível, omitiremos o conjunto de índices I , que ficará subentendido através dos subscritos.

Definição 3.5. Seja $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ uma cobertura aberta de X e $\mathcal{F}: \mathbf{O}(X)^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ab}$ um feixe de grupos abelianos, considere a sequência

$$\prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i) \xrightarrow{d^0} \prod_{(i,j) \in I^2} \mathcal{F}(U_i \cap U_j) \xrightarrow{d^1} \prod_{(i,j,k) \in I^3} \mathcal{F}(U_i \cap U_j \cap U_k) \quad (3.10)$$

em que d^0 é definido como em 3.2 na página 45 e d^1 é definido por:

$$d^1(f_{ij})_{(i,j) \in I^2} = (f_{jk}|_{U_{ijk}} - f_{ik}|_{U_{ijk}} + f_{ij}|_{U_{ijk}})_{(i,j,k) \in I^3} \quad (3.11)$$

1. Um **1-cociclo de Čech** (ou simplesmente, **cociclo**) é um elemento $(f_{ij}) \in \ker(d^1)$, ou seja, satisfaz (nas restrições para U_{ijk}):

$$f_{ik} = f_{ij} + f_{jk} \quad \forall i, j, k \in I \quad (3.12)$$

2. Dois cociclos (f_{ij}) e (g_{ij}) são ditos **cohomólogos** se $(f_{ij}) - (g_{ij}) \in \text{im}(d^0)$, ou seja, se existe $(h_i) \in \prod_i \mathcal{F}(U_i)$ tal que:

$$f_{ij} = h_j|_{U_{ij}} + g_{ij} - h_i|_{U_{ij}} \quad \forall i, j \in I \quad (3.13)$$

3. Como $d^1 \circ d^0 = 0$ (como pode ser checado facilmente) definimos o **primeiro grupo de cohomologia de Čech da cobertura \mathcal{U} com coeficientes no feixe \mathcal{F}** como:

$$\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \frac{\ker(d^1)}{\text{im}(d^0)} \quad (3.14)$$

Observação 3.4. Quando estamos fazendo as contas com a cohomologia de Čech não precisamos considerar todos os índices pelo seguinte motivo: dado um cociclo $(f_{ij})_{i,j}$ temos que segue de (3.12):

$$f_{ii} = f_{ii} + f_{ii} \implies f_{ii} = 0 \quad \forall i \in I$$

e ainda

$$f_{ii} = f_{ij} + f_{ji} \implies f_{ij} = -f_{ji} \quad \forall i, j \in I$$

Podemos então, sem perda de generalidade, ordenar I^1 e considerar apenas $(f_{ij})_{i < j}$, pois conseguimos recobrar o cociclo $(f_{ij})_{i,j}$ a partir dessa informação.

Observação 3.5. Uma vez definido a cohomologia de Čech de uma cobertura definimos o **primeiro grupo de cohomologia de Čech de X com coeficientes no feixe \mathcal{F}** como:

$$\check{H}^1(X, \mathcal{F}) := \varinjlim_{\mathcal{U}} \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \quad (3.15)$$

onde o limite injetivo é tomado utilizando-se o conjunto dirigido das coberturas abertas de X . Dizemos que a cobertura aberta \mathcal{V} de X é um **refinamento** da cobertura aberta \mathcal{U} , denotado por $\mathcal{V} \preceq \mathcal{U}$, se existe uma função $r : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$ tal que $V \subseteq r(V)$, para todo $V \in \mathcal{V}$. Em particular, toda subcobertura é um refinamento. Apesar de \preceq não gerar uma ordem parcial, fazendo algumas consideração a mais podemos tomar o limite injetivo (3.15) (para mais detalhes ver [Rotman, 2009, cap. 6, §3.1] e [Serre, 1955]).

¹ O que sempre é possível pelo axioma da escolha.

Não iremos trabalhar muito com esse grupo de cohomologia pois a definição formal dele envolve outras técnicas além da apresentada na observação acima. Mas ainda podemos traçar um paralelo entre a cohomologia de Čech e a cohomologia de grupos não-abeliana: assim como a seção (2.1) tinha o teorema 2.3 na página 24, que dava uma sequência exata para a cohomologia de grupos não-abeliana, com a cohomologia de Čech temos o seguinte teorema:

Teorema 3.2. *Sejam \mathcal{A} , \mathcal{B} e \mathcal{C} feixes de grupos abelianos sobre X . Dada a sequência exata curta de feixes 3.8 na página 49 temos a sequência exata de grupos abelianos:*

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathcal{A}(X) & \xrightarrow{\phi_X} & \mathcal{B}(X) & \xrightarrow{\psi_X} & \mathcal{C}(X) \\
 & & & & & & \searrow \\
 & & & & & & \delta \\
 & & & & & & \swarrow \\
 & & & & & & \mathring{H}^1(X, \mathcal{C}) \\
 & & & & & & \swarrow \\
 & & & & & & \mathring{H}^1(X, \mathcal{B}) \\
 & & & & & & \swarrow \\
 & & & & & & \mathring{H}^1(X, \mathcal{A})
 \end{array}$$

Demonstração. A demonstração será omitida pois envolve técnicas que estão além do objetivo deste trabalho. Para mais detalhes ver [Serre, 1955, p. 217]. \square

Observação 3.6. No teorema (3.2) é importante considerarmos $\mathring{H}^1(X, _)$ e não $\mathring{H}^1(\mathcal{U}, _)$, pois no segundo caso a sequência de grupos abelianos nem sempre é exata. Por exemplo, considere a sequência

$$0 \longrightarrow \underline{\mathbb{Z}} \xrightarrow{2\pi i} \mathcal{H} \xrightarrow{\exp} \mathcal{H}^\times \longrightarrow 0$$

do exemplo (3.5) que agora será considerada sobre $X = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ com cobertura $\mathcal{U} = \{X\}$. Note que $\mathring{H}^1(\mathcal{U}, \mathbb{Z}) = 0$ pois na sequência 3.10 na página 49 teríamos $\ker(d^1) = 0$. Portanto teríamos a sequência

$$0 \longrightarrow \underline{\mathbb{Z}}(\mathcal{U}) \xrightarrow{2\pi i} \mathcal{H}(\mathcal{U}) \xrightarrow{\exp} \mathcal{H}^\times(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathring{H}^1(\mathcal{U}, \mathbb{Z}) = 0$$

ou seja, \exp seria sobrejetora, o que sabemos ser falso.

Construção 3.1 (Cohomologia de Čech para feixes de grupos não-abelianos).

Como é usual na literatura matemática acabamos de construir a cohomologia de Čech para feixes de grupos abelianos sobre X , mas também podemos considerar feixes de grupos não-abeliano (ver [Milne, 1980, cap. 3, §4]). A definição seria inteiramente análoga, mas agora teríamos um funtor $\mathcal{F}: \mathbf{O}(X)^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Grp}$ e dado $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ uma cobertura aberta de X um **cociclo** é um elemento $(f_{ij}) \in \ker(d^1)$, ou seja, satisfaz (nas restrições para U_{ijk})

$$f_{ik} = f_{ij}f_{jk} \quad \forall i, j, k \in I \quad (3.16)$$

de modo análogo a (3.12) e dois cociclos (f_{ij}) e (g_{ij}) são ditos **cohomólogos**, $(f_{ij}) \sim (g_{ij})$, se existe $(h_i) \in \prod_i \mathcal{F}(U_i)$ tal que (nas restrições para U_{ij})

$$f_{ij} = h_i g_{ij} h_j^{-1} \quad \forall i, j \in I \quad (3.17)$$

de modo análogo a (3.13). É fácil ver que \sim é uma relação de equivalência e então definimos:

$$\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \frac{\ker(d^1)}{\sim}$$

Assim como no caso da cohomologia de grupos não-abeliana nem sempre $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ será um grupo, mas será um conjunto pontuado, com cociclo trivial dado por $(1_{\mathcal{F}(U_{ij})})$, e, assim como no caso abeliano, podemos definir $\check{H}^1(X, \mathcal{F})$ como um limite injetivo.

Exemplo 3.7. Denotando o feixe das funções contínuas sobre um espaço X tratadas no exemplo (3.1) como \mathcal{O}_X . Um dos exemplos mais básicos de feixe de grupos não-abelianos obtem-se tomando o grupo linear geral de grau n , temos que $U \mapsto \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_X)(U)$ (funções contínuas $\alpha: U \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$) define um feixe de grupos abelianos (com os mapas de restrição usuais) que denotamos por $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_X)$. Em particular, se $n = 1$ denotamos o feixe por \mathcal{O}_X^\times .

3.3 Fibrados Vetoriais

Uma das aplicações da cohomologia de Čech é a classificação de fibrados sobre um espaço topológico X , mas antes vamos definir o que é um fibrado:

Definição 3.6. Sejam X e F dois espaços topológicos. Um **fibrado de fibra F sobre X** é um espaço topológico E juntamente com uma projeção sobrejetora e contínua $\pi: E \rightarrow X$ satisfazendo as seguintes condições:

1. Para cada $x \in X$, a **fibra sobre x** , $E_x := \pi^{-1}(x)$, é homeomorfa a F ;
2. Para cada $x \in X$ existe um aberto $U \ni x$ em X e um homeomorfismo $\Phi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ (chamado de **trivialização local de E sobre U**), satisfazendo $\pi_U \circ \Phi = \pi|_{\pi^{-1}(U)}$ (onde $\pi_U: U \times F \rightarrow U$ é a projeção na primeira coordenada), ou seja, o diagrama abaixo comuta;

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\Phi} & U \times F \\ & \searrow \pi|_{\pi^{-1}(U)} & \swarrow \pi_U \\ & U & \end{array}$$

Pictorialmente podemos pensar numa trivialização local como a figura (2) na próxima página:

3. Em particular, E é um **fibrado vetorial real de posto n sobre X** se $F = \mathbb{R}^n$ e para cada trivialização local sobre U e para cada $x \in U$, a restrição de $\Phi|_{E_x}$ é um isomorfismo linear entre E_x e $\{x\} \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$.

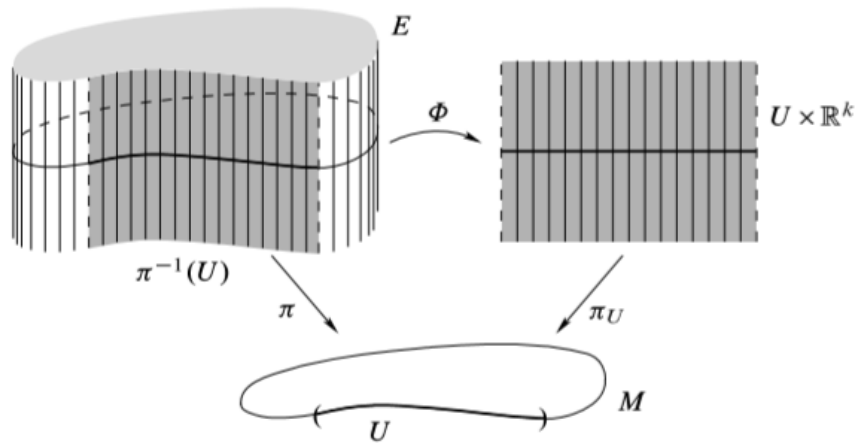


Figura 2 – Trivialização local de E sobre U .

Dizemos que E é o **espaço total**, X é a **base** e π é a **projeção**.

Em particular um **fibrado linha** é um fibrado vetorial no qual a fibra tem dimensão um, ou seja, $E_x \cong \mathbb{R}$.

Exemplo 3.8. Trabalharemos agora com um exemplo de fibrado com fibra esférica, a **fibração de Hopf**. Considere a **reta projetiva complexa**, que é o conjunto:

$$\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 := \frac{\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}}{\sim} \quad (3.18)$$

onde \sim é a relação de equivalência:

$$(z, w) \sim (z', w') \iff \text{existe } \lambda \in \mathbb{C} \text{ tal que } (z, w) = \lambda(z', w')$$

Denotamos a classe de equivalência de (z, w) por $(z : w)$. Note que os elementos da reta projetiva são as “retas” em \mathbb{C}^2 que passam pela origem.

Note que $(z : w) = \left(\frac{z}{w} : 1\right)$ se $w \neq 0$ e que $(z : w) = (1 : 0)$ se $w = 0$, ou seja, intuitivamente podemos dizer que os elementos de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ são as inclinações das retas que passam pela origem.

Considere também S^3 , que pode ser vista como o conjunto dos quatérnions com determinante 1:

$$S^3 = \left\{ \left[\begin{array}{cc} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{array} \right] \mid |z|^2 + |w|^2 = 1 \right\}$$

Mostraremos que S^3 é um **fibrado sobre $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ com fibra S^1** com projeção dada por:

$$\begin{aligned} \pi : S^3 &\longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \\ \left[\begin{array}{cc} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{array} \right] &\longmapsto (z : w) \end{aligned}$$

Considere os abertos $U := \{(z : 1) \mid z \in \mathbb{C}\}$ e $V := \{(1 : w) \mid w \in \mathbb{C}\}$ e as trivializações locais $\varphi : U \times S^1 \rightarrow \pi^{-1}(U)$ e $\psi : V \times S^1 \rightarrow \pi^{-1}(V)$ dadas respectivamente por

$$((z : 1), e^{i\theta}) \xrightarrow{\varphi} \begin{bmatrix} \frac{e^{i\theta} z}{\sqrt{1+|z|^2}} & \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{1+|z|^2}} \\ -e^{-i\theta} & \frac{e^{-i\theta} \bar{z}}{\sqrt{1+|z|^2}} \\ \sqrt{1+|z|^2} & \sqrt{1+|z|^2} \end{bmatrix}$$

e

$$((1 : w), e^{i\theta}) \xrightarrow{\psi} \begin{bmatrix} \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{1+|w|^2}} & \frac{e^{i\theta} w}{\sqrt{1+|w|^2}} \\ -e^{-i\theta} \bar{w} & \frac{e^{-i\theta}}{\sqrt{1+|w|^2}} \\ \sqrt{1+|w|^2} & \sqrt{1+|w|^2} \end{bmatrix}$$

Consideraremos agora dois exemplos de fibrados vetoriais.

Exemplo 3.9. Dado X um espaço topológico defina $E := X \times \mathbb{R}^n$ e seja π a projeção na primeira coordenada. Note que cada fibra é isomorfa a \mathbb{R}^n e que id_E é uma trivialização local para todo $x \in X$ (dizemos então que é uma trivialização global). O fibrado vetorial E é chamado de **fibrado trivial**.

Considere em particular $X = S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z|^2 = 1\}$ e defina $E := S^1 \times \mathbb{R}$. Este é o **fibrado linha trivial sobre S^1** , que também é conhecido pelo nome de **cilindro**.

Exemplo 3.10. Outro exemplo conhecido de fibrado linha sobre S^1 é a **faixa de Möbius**, que pode ser construída da seguinte maneira:

Defina $M := ([0, 1] \times \mathbb{R}) / \sim$, onde \sim é a relação de equivalência que associa $(0, y) \sim (1, -y)$, para todo $y \in \mathbb{R}$. A topologia de M é a topologia quociente que vem da projeção $q : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow M$.

Intuitivamente a faixa de Möbius é o espaço obtido de $[0, 1] \times \mathbb{R}$ torcendo o lado $\{1\} \times \mathbb{R}$ 180° e colando com o lado $\{0\} \times \mathbb{R}$. Como mostra a figura (3) abaixo:

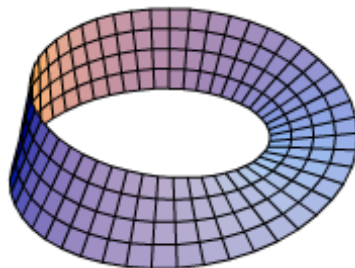


Figura 3 – Faixa de Möbius.

Para ver que M é um fibrado linha sobre S^1 considere o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} [0, 1] \times \mathbb{R} & \xrightarrow{q} & M \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi \\ [0, 1] & \xrightarrow{\varepsilon} & S^1 \end{array}$$

Onde π_1 é a projeção na primeira coordenada e $\varepsilon(x) := e^{2\pi ix}$, para todo $x \in [0, 1]$. Como $\varepsilon \circ \pi_1$ é constante nas fibras $q^{-1}([(x, y)])$, para todo $[(x, y)] \in M$, a propriedade universal da topologia quociente garante que existe um único $\pi : M \rightarrow S^1$ que faz o diagrama comutar. Mais especificamente, π é dada por:

$$\pi([(x, y)]) = \varepsilon \circ \pi_1 \circ q^{-1}([(x, y)]) = \varepsilon \circ \pi_1(x, y) = e^{2\pi ix} \quad (3.19)$$

Construiremos para a faixa de Möbius as seguintes trivializações locais que serão úteis nos cálculos futuros. Primeiramente considere os abertos em $[0, 1]$:

$$V_1 := \left[0, \frac{1}{12}\right) \cup \left(\frac{5}{12}, 1\right] \text{ e } V_2 := \left[0, \frac{7}{12}\right) \cup \left(\frac{11}{12}, 1\right]$$

que podem ser vistos na figura (4) abaixo:

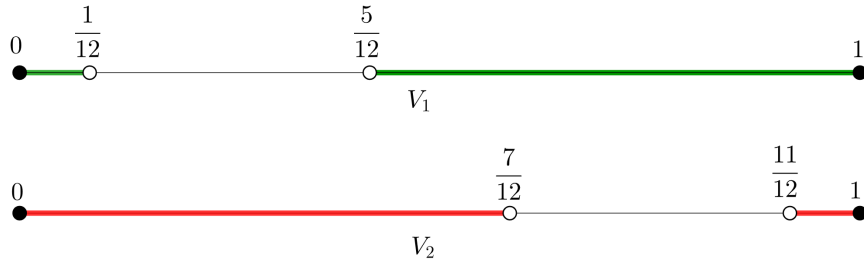


Figura 4 – Abertos V_1 e V_2 na reta.

E defina os abertos:

$$U_1 := \varepsilon(V_1) \text{ e } U_2 := \varepsilon(V_2) \quad (3.20)$$

que podem ser vistos na figura (5) na próxima página:

Defina as trivializações locais por:

$$\begin{aligned} \Phi_1 : \pi^{-1}(U_1) &\longrightarrow U_1 \times \mathbb{R} \\ [(x, y)] &\longmapsto \begin{cases} (e^{2\pi ix}, y) & \text{se } x \in [0, 1/12) \\ (e^{2\pi ix}, -y) & \text{se } x \in (5/12, 1] \end{cases} \end{aligned} \quad (3.21)$$

e

$$\begin{aligned} \Phi_2 : \pi^{-1}(U_2) &\longrightarrow U_2 \times \mathbb{R} \\ [(x, y)] &\longmapsto \begin{cases} (e^{2\pi ix}, y) & \text{se } x \in [0, 7/12) \\ (e^{2\pi ix}, -y) & \text{se } x \in (11/12, 1] \end{cases} \end{aligned} \quad (3.22)$$

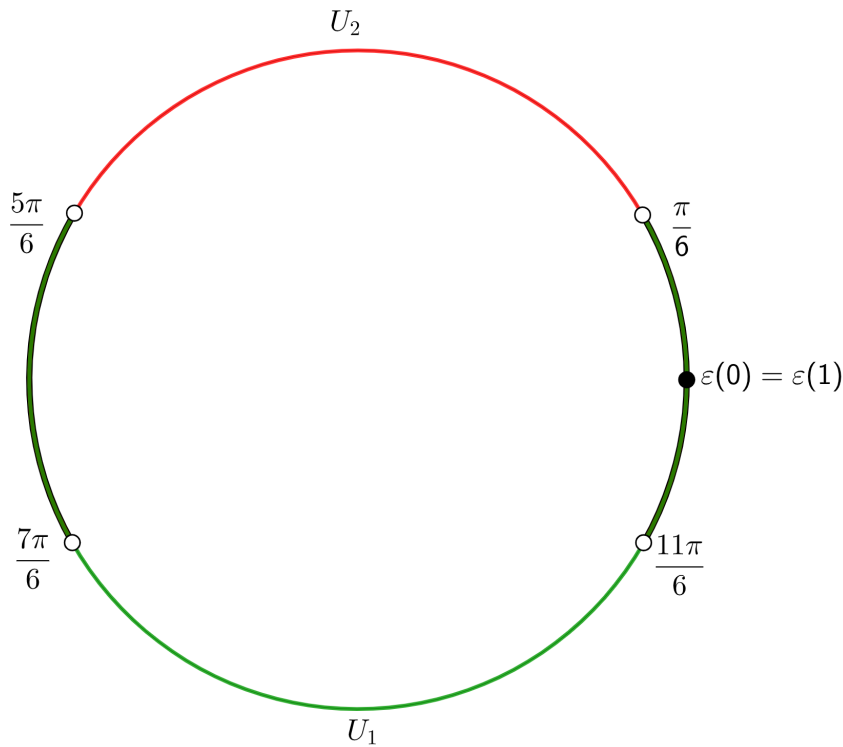


Figura 5 – Abertos U_1 e U_2 no círculo.

Note que ambas estão bem definidas, pois $\Phi_i([(0, y)]) = \Phi_i([(1, -y)])$, para todo $y \in \mathbb{R}$ e para $i = 1, 2$. É fácil checar que são de fato trivializações locais.

Como tudo na matemática, a definição de um novo objeto traz consigo a definição de morfismo entre objetos, no caso dos fibrados vetoriais temos a seguinte definição:

Definição 3.7. Seja $\pi_E : E \rightarrow X$ e $\pi_B : B \rightarrow X$ dois fibrados vetoriais sobre X . Um **homomorfismo de fibrados sobre X** é uma função contínua $\Lambda : E \rightarrow B$ tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{\Lambda} & B \\
 \searrow \pi_E & & \swarrow \pi_B \\
 & X &
 \end{array}$$

e $\Lambda|_{E_x} : E_x \rightarrow B_{\Lambda(x)}$ é uma transformação linear, para todo $x \in X$.

Em particular, dizemos que Λ é um **isomorfismo de fibrados vetoriais** se Λ é um homeomorfismo e $\Lambda|_{E_x}$ é um isomorfismo linear, para todo $x \in X$.

Observe que a faixa de Möbius e o cilindro são dois fibrados linha sobre o círculo, mas não são homeomorfos como espaços topológicos pois o cilindro é orientável e a faixa de Möbius não é. Portanto conseguimos construir dois fibrados linhas não homeomorfos sobre S^1 , a pergunta é:

Existem outros fibrados linhas sobre S^1 que não sejam homeomorfos ao cilindro ou à faixa de Möbius?

Intuitivamente podemos obter outros fibrados linha a partir de $[0, 1] \times \mathbb{R}$ girando um do lados 360° , ou 540° e depois colando no outro lado, num processo análogo à construção da faixa de Möbius. Para resolver este problema iremos utilizar a cohomologia de Čech, mas antes de fazer esse cálculo para fibrados linha sobre S^1 iremos relacionar cociclos de Čech com fibrados vetoriais.

Construção 3.2 (Cociclo a partir de um fibrado). Seja $\pi : E \rightarrow X$ um fibrado vetorial e $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ uma cobertura aberta de X juntamente com uma família de trivializações locais $\Phi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{R}^n$, $i \in I$.

Dados $i, j \in I$ considere o automorfismo:

$$\phi_{ij} : (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\Phi_j^{-1}} \pi^{-1}(U_i \cap U_j) \xrightarrow{\Phi_i} (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n \quad (3.23)$$

onde Φ_j^{-1} e Φ_i denotam as respectivas restrições para $(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n$ e $\pi^{-1}(U_i \cap U_j)$.

Mais especificamente temos que ϕ_{ij} tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \phi_{ij} : U_{ij} \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow U_{ij} \times \mathbb{R}^n \\ (x, v) &\longmapsto (x, \alpha_{ij}(x) \cdot v) \end{aligned}$$

onde $\alpha_{ij}(x) \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, para todo $x \in U_{ij}$. Como ϕ_{ij} é contínua teremos que $\alpha_{ij} : U_{ij} \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R})$ também é contínua e ainda satisfaz as seguintes relações:

1. $\alpha_{ii} = \text{id}$, para todo $i \in I$;
2. $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}^{-1}$, para todo $i, j \in I$;
3. $\alpha_{ik} = \alpha_{ij} \circ \alpha_{jk}$, para todo $i, j, k \in I$ (considerando a restrição para U_{ijk}).

Note que as condições (1) e (2) seguem de (3), que é justamente a relação de cociclo encontrada em 3.16 na página 51, isto é, (α_{ij}) é um cociclo considerando o feixe $\text{GL}_n(\mathcal{O}_X)$ e a cobertura \mathcal{U} .

Sejam $\pi_E : E \rightarrow X$ e $\pi_B : B \rightarrow X$ dois fibrados isomorfos trivializados pela mesma cobertura \mathcal{U} e seja (β_{ij}) o cociclo associado ao fibrado B , provaremos que os cociclos (α_{ij}) e (β_{ij}) são cohomólogos. Seja $\Lambda : E \rightarrow B$ um isomorfismo, fixe $i \in I$ e considere o automorfismo

$$\mu_i : U_i \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\Phi_i^{-1}} \pi_E^{-1}U_i \xrightarrow{\Lambda} \pi_B^{-1}U_i \xrightarrow{\Psi_i} U_i \times \mathbb{R}^n$$

mais especificamente, μ_i tem a seguinte forma $\mu_i(x, v) := (x, \xi_i(x) \cdot v)$, para todo $x \in U_i$ e para todo $v \in \mathbb{R}^n$, com $\xi_i : U_i \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R})$ contínua, ou seja, $\xi_i \in \text{GL}_n(\mathcal{O}_X)(U_i)$.

Note que os automorfismos satisfazem a seguinte relação (nas restrições para U_{ij}):

$$\psi_{ij} = \mu_i \circ \phi_{ij} \circ \mu_j^{-1} \quad \forall i, j \in I$$

e portanto os cociclos satisfarão a relação (nas restrições para U_{ij}):

$$\beta_{ij} = \xi_i \alpha_{ij} \xi_j^{-1} \quad \forall i, j \in I$$

Portanto para cada classe de isomorfismo de fibrados vetoriais que são trivializadas por \mathcal{U} existe uma única classe de cociclos de Čech, ou seja, essa classe independe das trivializações locais.

Exemplo 3.11. Considere a cobertura de S^1 dada pelos dois abertos de (3.20), $\mathcal{U} = \{U_1, U_2\}$. Já temos as trivializações locais da faixa de Möbius com respeito a essa cobertura. Note que U_{12} e a união disjunta de dois abertos $I := \varepsilon([0, 1/12) \cup (11/12, 1])$ e $J := \varepsilon((5/12, 7/12))$ (ver Figura 5). Teremos que:

$$\begin{aligned} \Phi_1 \circ \Phi_2^{-1} : U_{12} \times \mathbb{R} &\longrightarrow U_{12} \times \mathbb{R} \\ (e^{2\pi i x}, y) &\longmapsto \begin{cases} (e^{2\pi i x}, y) & \text{se } x \in [0, 1/12) \cup (11/12, 1] \\ (e^{2\pi i x}, -y) & \text{se } x \in (5/12, 7/12) \end{cases} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Pela observação 3.4 na página 50 o cociclo (α_{ij}) é determinado pela função $\alpha_{12} : I \sqcup J \rightarrow \mathbb{R}^\times$, onde:

$$\alpha_{12}(p) = \begin{cases} 1 & \text{se } p \in I \\ -1 & \text{se } p \in J \end{cases} \quad (3.25)$$

Considere agora o cilindro com as trivializações locais sobre \mathcal{U} dadas por $\Psi_i := \text{id}|_{U_i \times \mathbb{R}}$, $i = 1, 2$. Analogamente, sendo (β_{ij}) o cociclo obtido, teremos que esse cociclo é determinado por:

$$\beta_{12}(p) = \begin{cases} 1 & \text{se } p \in I \\ 1 & \text{se } p \in J \end{cases} \quad (3.26)$$

Note, em particular, que os cociclos não são cohomólogos, se fossem existiriam $\xi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^\times$, $i = 1, 2$, tal que $\alpha_{12}(p) = \xi_1^{-1}(p)\beta_{12}(p)\xi_2(p) = \xi_1^{-1}(p)\xi_2(p)$, para todo $p \in I \sqcup J$. Como ξ_1 e ξ_2 não trocam de sinais (pois os domínios são conexos) concluímos que α_{12} também não troca de sinal, o que é uma contradição com (3.25). Dessa forma acabamos de provar que o cilindro e a faixa de Möbius não são fibrados isomorfos.

Construção 3.3 (Fibrado a partir de um cociclo). Seja \mathcal{U} uma cobertura aberta de X e seja $(\alpha_{ij}) \in \prod_{i,j} \text{GL}_n(\mathcal{O}_X)(U_{ij})$ um cociclo. Então podemos construir um fibrado vetorial “colando” os fibrados triviais $U_i \times \mathbb{R}^n$, $i \in I$. Para tal defina

$$E = \frac{\bigsqcup_i (U_i \times \mathbb{R}^n)}{\sim} \quad (3.27)$$

onde \sim é a relação de equivalência dada por:

$$U_i \times \mathbb{R}^n \ni (x, v) \sim (y, w) \in U_j \times \mathbb{R}^n \iff x = y \text{ e } \alpha_{ij}(x) \cdot w = v \quad (3.28)$$

A projeção $\pi : E \rightarrow X$ será dada de modo natural e as trivializações locais são obtidas escolhendo os representantes de classe:

$$\begin{aligned} \Phi_i : \pi^{-1}(U_i) &\longrightarrow U_i \times \mathbb{R} \\ [(x, v)] &\longmapsto (x, v) \end{aligned} \quad (3.29)$$

Considere dois cociclos cohomólogos (α_{ij}) e (β_{ij}) e sejam E e B os respectivos fibrados obtidos com a “colagem”, com projeções $\pi_E : E \rightarrow X$ e $\pi_B : B \rightarrow X$. Como (α_{ij}) é cohomólogo a (β_{ij}) existem $\xi_i : U_i \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R})$, $i \in I$, tal que

$$\beta_{ij} = \xi_i \alpha_{ij} \xi_j^{-1} \quad (3.30)$$

Defina então:

$$\begin{aligned} \Lambda : E &\longrightarrow B \\ [(x, v)] &\longmapsto [(x, \xi_i(x) \cdot v)] \end{aligned} \quad (3.31)$$

se tomarmos como representante de classe $(x, v) \in U_i \times \mathbb{R}^n$.

Para ver que Λ é bem definido tome $(x, v) \in U_i \times \mathbb{R}^n$ e $(x, w) \in U_j \times \mathbb{R}^n$ tal que $(x, v) \sim (x, w)$, isto é, $\alpha_{ij}(x) \cdot w = v$. Se escolhermos (x, w) como representante de classe de $[(x, v)]$ teremos $\Lambda([(x, v)]) = [(x, \xi_j(x) \cdot w)]$. Note porém que a partir de (3.30) temos

$$\xi_i(x) \cdot v = \xi_i(x) \cdot \alpha_{ij}(x) \cdot w = \beta_{ij}(x) \cdot \xi_j(x) \cdot w$$

e portanto $(x, \xi_i(x) \cdot v) \sim (x, \xi_j(x) \cdot w)$.

Portanto para cada classe de cociclos de Čech existe uma única classe de isomorfismo de fibrados vetoriais que são trivializadas por \mathcal{U} .

Exemplo 3.12. Considere a cobertura \mathcal{U} de S^1 considerada anteriormente e seja o cociclo (α_{ij}) definido como em (3.25). Então obteremos um fibrado:

$$B = \frac{(U_1 \times \mathbb{R}) \sqcup (U_2 \times \mathbb{R})}{\sim}$$

Conforme o esperado teremos que B é isomorfo à faixa de Möbius.

Com as construções (3.2) e (3.3) acabamos de provar que:

Teorema 3.3. *Seja \mathcal{U} cobertura aberta do espaço topológico X . Então $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_X))$ classifica os fibrados de posto n sobre X que são trivializados com a cobertura \mathcal{U} , ou seja, há uma bijeção:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{classes de isomorfismo de fibrados vetoriais} \\ \text{de posto } n \text{ trivializados por } \mathcal{U} \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{classes de cohomologia de 1-cociclos} \\ \text{de Čech sobre a cobertura } \mathcal{U} \end{array} \right\}$$

Exemplo 3.13. Podemos generalizar o teorema acima para outros tipos de fibrados substituindo o feixe $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_X)$ pelo feixe de automorfismos da fibra. Para a fibração de Hopf do exemplo 3.8 na página 53, considerando a cobertura aberta $\mathcal{U} = \{U, V\}$ de $X = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ temos um elemento de $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathrm{SO}_2(\mathcal{O}_X))$.

Tome $((z : 1), e^{i\theta}) \in (U \cap V) \times S^1$ e considere $\psi^{-1} \circ \varphi$, então:

$$\psi^{-1} \circ \varphi(((z : 1), e^{i\theta})) = \psi^{-1} \left(\begin{bmatrix} \frac{e^{i\theta} z}{\sqrt{1+|z|^2}} & \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{1+|z|^2}} \\ -e^{-i\theta} & e^{-i\theta} \bar{z} \\ \frac{e^{i\theta} z}{\sqrt{1+|z|^2}} & \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{1+|z|^2}} \end{bmatrix} \right)$$

Defina $w := \frac{1}{z}$ e seja $z = \rho e^{i\epsilon}$ na forma polar, então:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{e^{i\theta} z}{\sqrt{1+|z|^2}} & \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{1+|z|^2}} \\ -e^{-i\theta} & e^{-i\theta} \bar{z} \\ \frac{e^{i\theta} z}{\sqrt{1+|z|^2}} & \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{1+|z|^2}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{e^{i\theta} \frac{1}{w}}{\sqrt{1+\frac{1}{|w|^2}}} & \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{1+\frac{1}{|w|^2}}} \\ -e^{-i\theta} & e^{-i\theta} \frac{1}{\bar{w}} \\ \frac{e^{i\theta} \frac{1}{w}}{\sqrt{1+\frac{1}{|w|^2}}} & \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{1+\frac{1}{|w|^2}}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{e^{i\theta} |w|}{\sqrt{1+|w|^2}} & \frac{e^{i\theta} |w|}{\sqrt{1+|w|^2}} \\ -e^{-i\theta} |w| & e^{-i\theta} \frac{|w|}{\bar{w}} \\ \frac{e^{i\theta} |w|}{\sqrt{1+|w|^2}} & \frac{e^{i\theta} |w|}{\sqrt{1+|w|^2}} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.32}$$

como $w = \rho^{-1}e^{-i\varepsilon}$ temos que $\frac{|w|}{w} = e^{i\varepsilon}$. Substituindo em (3.32) temos que:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{e^{i\theta}z}{\sqrt{1+|z|^2}} & \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{1+|z|^2}} \\ -e^{-i\theta} & e^{-i\theta}\bar{z} \\ \frac{e^{i\theta}z}{\sqrt{1+|z|^2}} & \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{1+|z|^2}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{e^{i\theta}e^{i\varepsilon}}{\sqrt{1+|w|^2}} & \frac{e^{i\theta}\rho^{-1}}{\sqrt{1+|w|^2}} \\ -e^{-i\theta}\rho^{-1} & e^{-i\theta}e^{-i\varepsilon} \\ \frac{e^{i\theta}e^{i\varepsilon}}{\sqrt{1+|w|^2}} & \frac{e^{i\theta}\rho^{-1}}{\sqrt{1+|w|^2}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{e^{i(\theta+\varepsilon)}}{\sqrt{1+|w|^2}} & \frac{e^{i\theta}e^{i\varepsilon}\rho^{-1}e^{-i\varepsilon}}{\sqrt{1+|w|^2}} \\ -e^{-i\theta}e^{i\varepsilon}\rho^{-1}e^{-i\varepsilon} & \frac{e^{-i(\theta+\varepsilon)}}{\sqrt{1+|w|^2}} \\ \frac{e^{i(\theta+\varepsilon)}}{\sqrt{1+|w|^2}} & \frac{e^{-i(\theta+\varepsilon)}}{\sqrt{1+|w|^2}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{e^{i(\theta+\varepsilon)}}{\sqrt{1+|w|^2}} & \frac{e^{i(\theta+\varepsilon)}w}{\sqrt{1+|w|^2}} \\ -e^{-i(\theta+\varepsilon)}\bar{w} & \frac{e^{-i(\theta+\varepsilon)}}{\sqrt{1+|w|^2}} \\ \frac{e^{i(\theta+\varepsilon)}}{\sqrt{1+|w|^2}} & \frac{e^{-i(\theta+\varepsilon)}}{\sqrt{1+|w|^2}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Portando concluímos que $\psi^{-1} \circ \varphi \left((z : 1), e^{i\theta} \right) = \left(\left(1 : \frac{1}{z} \right), e^{i(\theta+\varepsilon)} \right) = ((z : 1), e^{i(\theta+\varepsilon)})$.

Podemos ver $z \mapsto z/|z| = e^{i\varepsilon}$ como o elemento de $\text{SO}_2(\mathcal{O}_X(U \cap V))$, o grupo de rotações, que associa $z \in U \cap V$ à rotação da fibra S^1 por um ângulo ε .

Podemos agora aplicar o teorema (3.3) na página anterior na classificação de fibrados linha sobre S^1 .

Teorema 3.4. *Seja $\mathcal{U} = \{U_1, U_2\}$ a cobertura aberta de S^1 dada em 3.20 na página 55. Então:*

$$\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{S^1}^\times) \cong \mathbb{Z}/2$$

Demonstração. Dado um cociclo $(\gamma_{ij}) \in \prod_{i,j} \mathcal{O}_{S^1}^\times(U_{ij})$ provaremos que ele é cohomólogo ao cociclo (β_{ij}) do cilindro (3.26) ou ao cociclo (α_{ij}) da faixa de Möbius (3.25).

Sabemos pela observação 3.4 na página 50 que o cociclo (γ_{ij}) é determinado por $\gamma_{12} : I \sqcup J \rightarrow \mathbb{R}^\times$, por isso basta determinar que a relação de cociclos cohomólogos vale para γ_{12} . Como I e J são conexos sabemos que $\gamma_{12}|_I$ e de $\gamma_{12}|_J$ não mudam de sinal, por isso consideraremos 4 casos.

Primeiramente suponha que $\gamma_{12} > 0$. Defina $\xi_2(p) := 1$, para todo $p \in U_2$, e ξ_1 de modo que $\xi_1|_{I \sqcup J} = \gamma_{12}$, para definir ξ_1 no restante de U_2 basta fazer um interpolação linear (a ideia da interpolação linear pode ser vista na figura (6), onde por uma questão gráfica “trouxemos” ξ_1 para V_1 usando ε).

Note por fim que nas restrições para $I \sqcup J$ temos

$$\xi_1 = \xi_1 \beta_{12} = \gamma_{12} \xi_2$$

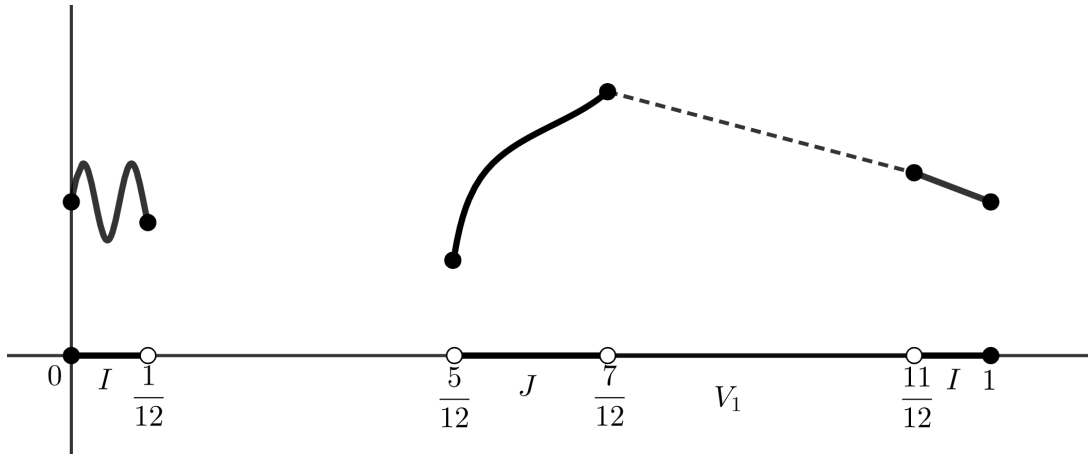


Figura 6 – Interpolação linear de ξ_1 .

ou seja, (γ_{ij}) é cohomólogo a (β_{ij}) . Analogamente, se $\gamma_{12} < 0$ obteremos o mesmo resultado.

Suponha agora que $\gamma_{12}|_I > 0$ e que $\gamma_{12}|_J < 0$. Como U_1 e U_2 são conexos temos que definir ξ_1 e ξ_2 de modo que eles não mudem de sinal. Novamente defina $\xi_2(p) := 1$, para todo $p \in U_2$, e ξ_1 de modo que $\xi_1|_I = \gamma_{12}|_I > 0$ e $\xi_1|_J = -\gamma_{12}|_J > 0$, com o restante de ξ_1 determinado por interpolação linear. Note então que nas restrições para $I \sqcup J$ temos

$$\xi_1 \alpha_{12} = \gamma_{12} \xi_2$$

ou seja, (γ_{ij}) é cohomólogo a (α_{ij}) . Analogamente, se $\gamma_{12}|_I < 0$ e $\gamma_{12}|_J > 0$ obteremos o mesmo resultado.

Como \mathcal{O}_X^\times é um feixe de grupos abelianos sobre S^1 temos que $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X^\times)$ é um grupo de dois elementos, portanto o resultado segue. \square

Acabamos de provar que os únicos fibrado linha sobre o círculo trivializados sobre a cobertura $\mathcal{U} = \{U_1, U_2\}$ são o cilindro e a faixa de Möbius. Mas então faz-se a pergunta: o que aconteceria se tomarmos outras coberturas? Será que outros fibrados linha seriam admitidos?

A resposta é negativa e para responder isso temos que usar a compacidade de S^1 . Dada uma cobertura aberta \mathcal{V} de S^1 qualquer temos pela compacidade que existe uma subcobertura finita \mathcal{U} , por isso basta calcular $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X^\times)$ quando \mathcal{U} é uma cobertura finita. Concluimos a partir do teorema abaixo que os únicos fibrados linha que existem sobre o círculo são a faixa de Möbius e o cilindro.

Teorema 3.5. *Seja \mathcal{U} a cobertura aberta finita de S^1 . Então:*

$$\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{S^1}^\times) \cong \mathbb{Z}/2$$

Demonstração. Dada uma cobertura finita $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$ de S^1 e suponha sem perda de generalidade que ela satisfaz (definindo $U_0 := U_n$ e $U_{n+1} := U_1$)

$$U_i \cap U_j \neq \emptyset \iff j = i - 1 \text{ ou } j = i + 1 \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$$

uma cobertura desse tipo sempre pode ser obtida refinando uma cobertura finita. Para facilitar as contas iremos trabalhar com $n = 3$ pois a demonstração capta a essência da demonstração do caso geral.

Considere $\alpha = (\alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{23}) \in \mathcal{O}_{S^1}^\times(U_{12}) \oplus \mathcal{O}_{S^1}^\times(U_{13}) \oplus \mathcal{O}_{S^1}^\times(U_{23})$. Como $U_{123} = \emptyset$ teremos que $\mathcal{O}_{S^1}^\times(U_{123}) = 0$ e portanto $d^1(\alpha) = 0$, ou seja, todo α é cociclo.

Queremos provar que $\alpha \sim (1, 1, \pm 1)$, para alguma combinação de sinais, por isso considere agora $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathcal{O}_{S^1}^\times(U_1) \oplus \mathcal{O}_{S^1}^\times(U_2) \oplus \mathcal{O}_{S^1}^\times(U_3)$, então teremos:

$$d^0(\xi) = \left(\frac{\xi_2}{\xi_1}, \frac{\xi_3}{\xi_1}, \frac{\xi_3}{\xi_2} \right)$$

Queremos que $d^0(\xi) = \alpha \cdot (1, 1, \pm 1)^{-1}$ por isso suponha que sem perda de generalidade que $\xi_1 = 1$. Então definimos

$$\begin{cases} \xi_2 = \alpha_{12} \text{ em } U_{12} \text{ e } \xi_2 = \pm 1 \text{ em } U_{23} \\ \xi_3 = \alpha_{13} \text{ em } U_{13} \text{ e } \xi_3 = \pm \alpha_{23} \text{ em } U_{23} \end{cases}$$

onde determinamos o restante de ξ_2 e ξ_3 por interpolação linear e determinamos os sinais de modo que

$$\begin{cases} \xi_2 = -1 \text{ em } U_{23} \iff \alpha_{12} < 0 \\ \xi_3 = -\alpha_{23} \text{ em } U_{23} \iff \alpha_{13} < 0 \end{cases}$$

Concluimos então que existem dois cociclos que não são cohomólogos, ou seja, existem duas classes de cociclos, que serão exatamente as classes de cociclos do cilindro e da faixa de Möbius. \square

4 Cohomologia Étale

O trabalho de Grothendieck com a Geometria Algébrica levou ele a perceber que era necessário considerar mais abertos sobre um certo tipo de espaço, isto levou à criação da topologia de Grothendieck sobre uma categoria, onde os abertos não são subconjuntos de objetos mas sim morfismos sobre objetos da categoria.

Na seção (4.1) definiremos topologia de Grothendieck, feixe de grupos abelianos sobre um sítio e cohomologia de Čech sempre comparando com a versão topológica do capítulo (3). As principais referências são [Artin, 1962] e [Milne, 1980].

Na seção (4.2) definiremos a categoria das K -álgebras étale e calcularemos a cohomologia de Čech para um certa cobertura específica. Ao final provaremos um teorema que dá um isomorfismo de grupos entre a versão algébrica e a versão topológica da cohomologia. A principal referência é [Milne, 1980].

4.1 Topologias de Grothendieck

Antes de definirmos o que é uma topologia de Grothendieck vamos lembrar o que é o produto fibrado em uma categoria:

Definição 4.1. Sejam \mathcal{C} uma categoria e $f: B \rightarrow A$ e $g: C \rightarrow A$ dois morfismos em \mathcal{C} . Um **produto fibrado** (também conhecido como **pullback**) é um objeto $P \in \mathcal{C}$ juntamente com morfismos $p_1: P \rightarrow B$ e $p_2: P \rightarrow C$ tais que $f \circ p_1 = g \circ p_2$, de modo que para todos morfismos $h: T \rightarrow C$ e $k: T \rightarrow B$ tais que $f \circ k = g \circ h$, existe um único morfismo $k \times h$ tal que o diagrama abaixo comuta:

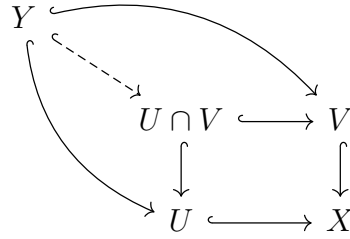
$$\begin{array}{ccccc}
 T & & & & \\
 & \searrow^{k \times h} & & \searrow^h & \\
 & & P & \xrightarrow{p_2} & C \\
 & & \downarrow p_1 & & \downarrow g \\
 & & B & \xrightarrow{f} & A \\
 & \searrow^k & & & \\
 & & & &
 \end{array}$$

Como o produto fibrado é único a menos de isomorfismo denotaremos ele por $B \times_A C$.

Uma **categoria com produto fibrado** é uma categoria \mathcal{C} no qual todo par de morfismos $f: B \rightarrow A$ e $g: C \rightarrow A$ tem um produto fibrado.

Exemplo 4.1. Seja X um espaço topológico e considere $\mathcal{C} = \mathbf{O}(X)$ a categoria dos abertos de X . Dados dois morfismos $U \hookrightarrow X$ e $V \hookrightarrow X$ o que é $U \times_X V$?

Não é difícil ver que teremos $U \times_X V = U \cap V$



pois o que o diagrama acima quer dizer é que: se $Y \subseteq U, V$, então $Y \subseteq U \cap V$.

Definição 4.2. Dada uma categoria \mathcal{C} com produto fibrado. Uma **topologia de Grothendieck** $\text{Cov}(\mathcal{C})$ em \mathcal{C} associa para cada objeto $X \in \mathcal{C}$ um conjunto de morfismos $\text{Cov}(X)$, as chamadas **coberturas de X**, tal que:

1. Se ϕ é um isomorfismo, então $\{U \xrightarrow{\phi} X\} \in \text{Cov}(X)$;
2. Se $\{U_i \xrightarrow{\phi_i} X\}_{i \in I} \in \text{Cov}(X)$ e $\{W_{ij} \xrightarrow{\phi_{ij}} U_i\}_{j \in J_i} \in \text{Cov}(U_i)$, para todo $i \in I$, então $\{W_{ij} \xrightarrow{\phi_{ij} \circ \phi_i} X\}_{i \in I, j \in J_i} \in \text{Cov}(X)$;
3. Se $\{U_i \xrightarrow{\phi_i} X\}_{i \in I} \in \text{Cov}(X)$ e $\varphi : Y \rightarrow X$ é um morfismo em \mathcal{C} , então $\{U_i \times_X Y \xrightarrow{\phi_i \times 1} Y\}_{i \in I} \in \text{Cov}(Y)$.

Um **sítio de Grothendieck** é uma categoria com uma topologia de Grothendieck fixada, ou seja, é um par $(\mathcal{C}, \text{Cov}(\mathcal{C}))$.

Observação 4.1. Dado X espaço topológico considere $\mathcal{C} = \mathbf{O}(X)$ a categoria dos abertos de X . Dado $U \subseteq X$ aberto considere:

$$\text{Cov}(U) := \{\text{coberturas abertas de } U\} = \{\{U_i \hookrightarrow U\}_{i \in I} \mid \{U_i\}_{i \in I} \text{ é cobertura aberta de } U\}$$

Note que os axiomas de uma topologia de Grothendieck são satisfeitos:

1. Se $V \xrightarrow{f} U$ é um isomorfismo temos $V = U$, então $\{V\}$ é uma cobertura aberta de U ;
2. Se $\{U_i\}_{i \in I}$ é uma cobertura aberta de U e $\{W_{ij}\}_{j \in J_i}$ é uma cobertura aberta de U_i , para cada $i \in I$, então $\{W_{ij}\}_{i \in I}$ é uma cobertura aberta de U ;
3. Se $\{U_i\}_{i \in I}$ é uma cobertura aberta de U e $Y \hookrightarrow U$ aberto temos que $U_i \times_X Y = U_i \cap Y$ em $\mathbf{O}(X)$, então $\{U_i \cap Y\}_{i \in I}$ é cobertura aberta de Y .

A partir do último item e do exemplo (4.1) percebemos que a intuição por trás do produto fibrado é a intersecção, isto é, como se o produto fibrado fosse a intersecção de dois abertos numa topologia de Grothendieck. Vemos então que a topologia de Grothendieck

não generaliza a noção de aberto, mas sim a noção de cobertura aberta. Também é necessário pontuar

Observação 4.2. Novamente faremos uma convenção de notação: sejam $U_i \rightarrow X$, $U_j \rightarrow X$ e $U_k \rightarrow X$ abertos de uma cobertura de $\text{Cov}(X)$, então em alguns momentos escreveremos $U_{ij} := U_i \times_X U_j$ e $U_{ijk} := U_i \times_X U_j \times_X U_k$. Além disso omitiremos o conjunto de índices I , que ficará subentendido através dos subscritos.

Definição 4.3. Seja $(\mathcal{C}, \text{Cov}(\mathcal{C}))$ um sítio de Grothendieck.

1. Um **pré-feixe de grupos abelianos sobre \mathcal{C}** é um funtor (contravariante) $\mathcal{F} : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ab}$;
2. Um **feixe** é um pré-feixe $\mathcal{F} : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ab}$ que satisfaz o “axioma de cola”, ou seja, a sequência de grupos abelianos

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\epsilon} \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i) \xrightarrow{d^0} \prod_{(i,j) \in I^2} \mathcal{F}(U_i \times_X U_j) \quad (4.1)$$

é exata para todo $X \in \mathcal{C}$ e para toda cobertura $\{U_i \xrightarrow{\phi_i} X\}_{i \in I} \in \text{Cov}(X)$. Com ϵ e d^0 definido de modo análogo a 3.2 na página 45:

$$\epsilon(f) = (f|_{U_i})_{i \in I} \quad \text{e} \quad d^0(f)_{(i,j) \in I^2} = (f_j|_{U_i \times_X U_j} - f_i|_{U_i \times_X U_j})_{(i,j) \in I^2} \quad (4.2)$$

onde definimos

$$f|_{U_i} = \text{res}_{X U_i}^{\phi_i}(f) := \mathcal{F}(\phi_i)(f) \quad \forall i \in I \quad (4.3)$$

e ainda

$$f_i|_{U_{ij}} = \text{res}_{U_i U_{ij}}^{p_i^{ij}}(f_i) := \mathcal{F}(p_i^{ij})(f_i) \quad \forall i, j \in I \quad (4.4)$$

onde p_i^{ij} vem do diagrama do produto fibrado:

$$\begin{array}{ccc} U_i \times_X U_j & \xrightarrow{p_j^{ij}} & U_j \\ p_i^{ij} \downarrow & & \downarrow \phi_j \\ U_i & \xrightarrow{\phi_i} & X \end{array}$$

3. Se $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ab}$ são dois pré-feixes, um **morfismo de pré-feixes** $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ é uma transformação natural entre \mathcal{F} e \mathcal{G} .
4. Denotamos por **PSh**(\mathcal{C}) (respectivamente **Sh**(\mathcal{C})) a categoria de pré-feixes (respectivamente feixes) de grupos abelianos sobre \mathcal{C} .

Observe que a definição de um feixe no contexto das topologias de Grothendieck é praticamente o mesmo da seção (3.2), tudo que tivemos que fazer foi “traduzir” a definição.

Dado $U \in \mathcal{C}$ podemos definir um funtor de seções $\Gamma(U, _): \mathbf{Sh}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{Ab}$ que é exato à esquerda e para “medir” a quebra na exatidão definiremos os grupos de cohomologia de Čech $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ e $\check{H}^1(X, \mathcal{F})$.

Definição 4.4. Sejam $(\mathcal{C}, \text{Cov}(\mathcal{C}))$ um sítio de Grothendieck, $\mathcal{U} = \{U_i \xrightarrow{\phi_i} X\}_{i \in I} \in \text{Cov}(X)$ uma cobertura aberta do objeto $X \in \mathcal{C}$ e $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ab}$ um feixe de grupos abelianos, considere a sequência

$$\prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i) \xrightarrow{d^0} \prod_{(i,j) \in I^2} \mathcal{F}(U_i \times_X U_j) \xrightarrow{d^1} \prod_{(i,j,k) \in I^3} \mathcal{F}(U_i \times_X U_j \times_X U_k) \quad (4.5)$$

onde d^0 foi definido em (4.2) e d^1 é definido por:

$$d^1(f_{ij})_{i,j} = (f_{jk}|_{U_{ijk}} - f_{ik}|_{U_{ijk}} + f_{ij}|_{U_{ijk}})_{i,j,k} \quad (4.6)$$

onde definimos

$$f_{ij}|_{U_{ijk}} = \text{res}_{U_{ij}U_{ijk}}(f_{ij}) := \mathcal{F}(p_{ij}^{ijk})(f_{ij}) \quad \forall i, j, k \in I \quad (4.7)$$

onde p_{ij}^{ijk} vem do diagrama do produto fibrado (onde $\phi_i \circ p_i^{ij} = \phi_j \circ p_j^{ij}$ pelo diagrama do produto fibrado):

$$\begin{array}{ccc} U_{ijk} & \xrightarrow{p_k^{ijk}} & U_k \\ p_{ij}^{ijk} \downarrow & & \downarrow \phi_k \\ U_{ij} & \xrightarrow{\phi_i \circ p_i^{ij}} & X \end{array}$$

Então definimos:

1. Um **1-cociclo de Čech** (ou simplesmente, **cociclo**) é um elemento $(f_{ij}) \in \ker(d^1)$, ou seja, satisfaz (nas restrições para U_{ijk}):

$$f_{ik} = f_{ij} + f_{jk} \quad \forall i, j, k \in I \quad (4.8)$$

2. Dois cociclos (f_{ij}) e (g_{ij}) são ditos **cohomólogos** se $(f_{ij}) - (g_{ij}) \in \text{im}(d^0)$, ou seja, se existe $(h_i) \in \prod_i \mathcal{F}(U_i)$ tal que:

$$f_{ij} = h_i|_{U_{ij}} + g_{ij} - h_j|_{U_{ij}} \quad \forall i, j \in I \quad (4.9)$$

3. Como $d^1 \circ d^0 = 0$ (como pode ser checado facilmente) definimos o **primeiro grupo de cohomologia de Čech da cobertura \mathcal{U} com coeficientes no feixe \mathcal{F}** como:

$$\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \frac{\ker(d^1)}{\text{im}(d^0)} \quad (4.10)$$

Observação 4.3. Assim como no caso dos feixes de grupos abelianos sobre um espaço topológico X podemos definir o **primeiro grupo de cohomologia de Čech de $X \in \mathcal{C}$ com coeficientes no feixe \mathcal{F}** como o limite direto:

$$\check{H}^1(X, \mathcal{F}) := \varinjlim_{\mathcal{U}} \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \quad (4.11)$$

Também teremos um resultado análogo ao teorema 3.2 na página 51, ou seja, o primeiro grupo de cohomologia de Čech também “mede” a quebra na exatidão.

Mais uma vez devido às technicalidades envolvidas não trabalharemos com esse grupo de cohomologia (para mais detalhes ver [Milne, 1980, cap. III, §2]).

4.2 Cohomologia Étale

Definido o que é uma topologia de Grothendieck e a cohomologia de feixes abelianos para um sítio trabalharemos com a categoria das K -álgebra étale $K\text{-Et}$ com uma certa topologia de Grothendieck, a topologia étale, e calcularemos a cohomologia de Čech para uma cobertura específica.

Definição 4.5. Seja K um corpo. Uma K -álgebra é definida em termos categóricos como um par (A, φ) , onde A é um anel comutativo e $\varphi : K \rightarrow A$ é um morfismo de anéis.

O modo de ver esse anel como um K -espaço vetorial é definir:

$$\lambda \cdot a := \varphi(\lambda) \cdot a \quad \forall \lambda \in K, \forall a \in A$$

o que irá recobrar a definição usual.

Dadas duas K -álgebras (A, φ) e (B, ψ) , um **morfismo de K -álgebras** $f : A \rightarrow B$ é um morfismo de anéis tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} & K & \\ \varphi \swarrow & & \searrow \psi \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Podemos então definir a categoria das K -álgebras que será denotada por $K\text{-Alg}$, que nada mais é do que categoria co-fatia K/\mathbf{CRng} dos objetos sob K .

Definição 4.6. Sejam A e B duas K -álgebras. Um $\varphi : A \rightarrow B$ morfismo de anéis é **étale** se satisfaz as seguintes condições:

1. B é um A -módulo plano, ou seja, o funtor $_ \otimes_A B$ é exato;

2. B é **não ramificado**, ou seja, $B \otimes_A k(P)$ é produto de extensões de corpos separáveis finitas de $k(P)$, para todo ideal primo $P \in \text{Spec}(A)$ e com $k(P) := \text{Frac}(A/P)$, ou seja:

$$B \otimes_A k(P) \cong \prod_i L_i \text{ com } L_i/k(P) \text{ extensão de corpos separável finita para todo } i.$$

Exemplo 4.2. O morfismo $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}[i]$ não é étale. Para ver isto basta tomar $(2) \in \text{Spec}(\mathbb{Z})$ e ver que:

$$\mathbb{Z}[i] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_2 \cong \frac{\mathbb{Z}[x]}{(x^2 + 1)} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_2 \cong \frac{\mathbb{F}_2[x]}{(x^2 + 1)}$$

e como $x^2 + 1 = (x - 1)^2$ em $\mathbb{F}_2[x]$ concluímos que esta não é uma extensão separável, ou seja, $\mathbb{Z}[i]$ é ramificado.

Exemplo 4.3. Sejam K e L corpos. Um morfismo de corpos¹ $K \hookrightarrow L$ é étale se, e somente se, L/K é um extensão de corpos separável. Como L é livre sobre K é imediato que $_ \otimes_K L$ é exato e como $\text{Spec}(K) = \{(0)\}$ e $k((0)) = K$ temos que $L \otimes_K K \cong L$ é um produto de extensões separáveis se, e somente se, L é separável.

É preciso notar que nem toda extensão de corpos é étale, por exemplo, $\mathbb{F}_p(t) \hookrightarrow \mathbb{F}_p(t^{1/p})$ não é étale pois a extensão $\mathbb{F}_p(t^{1/p})/\mathbb{F}_p(t)$ não é separável (pois o polinômio minimal de $t^{1/p}$ é $f(x) = x^p - t$ e escrevendo $f(x) = (x - t^{1/p})^p$ vemos que o polinômio tem raízes múltiplas em $\mathbb{F}_p(t^{1/p})$).

Exemplo 4.4. Uma K -álgebra finita $\varphi : K \rightarrow A$ é étale se, e somente se, A é produto de extensões de K separáveis e finitas. De fato, se A é étale temos que $A \otimes_K K \cong A$ é um produto de extensões separáveis finitas de $k((0)) = K$ pela condição 2 da definição (4.6). Por outro lado, como A é livre sobre K temos que A é plano sobre K , logo A é étale.

Temos duas opções, ou trabalharemos com a subcategoria $K\text{-Et}$ de $K\text{-Alg}$ cujos objetos são as K -álgebras étale finitas e os morfismos são os morfismos de K -álgebras.

Usualmente na matemática trabalharíamos com a categoria oposta dos K -esquemas $K\text{-Sch} := K\text{-Et}^{\text{op}}$. A categoria tem esse nome pois a categoria de anéis comutativos $\mathbf{CRng}^{\text{op}}$ é equivalente à categoria dos esquemas afins \mathbf{ASch}^2 e então $K\text{-Sch} := \mathbf{ASch}/K$ é a categoria fatia dos objetos sobre K . Na literatura matemática quando se trabalha com a cohomologia étale usualmente se trabalha com a categoria \mathbf{ASch} pois seus objetos são os espaços topológicos $\text{Spec}(A)$, com A anel comutativo, logo temos uma extensão da teoria de feixes de grupos abelianos sobre um espaço topológico X . Como o objetivo do trabalho não é trabalhar com a teoria de esquemas faremos uma “curva” na teoria, mas no fundo estaremos provando alguns resultados sobre esquemas.

¹ Podemos ver L é uma K -álgebra.

² Notação *não-standard*.

Como trabalharemos com a categoria $K\text{-Et}$ e não com a categoria oposta $K\text{-Sch}$ teremos que fazer certo “malabarismo” com as definições da seção (4.1). Basicamente basta dualizar todas as definições:

1. No lugar do produto fibrado teremos a *soma amalgamada*;
2. No lugar de uma família de morfismos $\{U_i \xrightarrow{\phi_i} X\}_{i \in I} \in \text{Cov}(X)$ “chegando em X ” teremos uma família de morfismos $\{X \xrightarrow{\phi_i} U_i\}_{i \in I} \in \text{Cov}(X)$ “saindo de X ”;
3. No lugar de um funtor contravariante $\mathcal{F} : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ab}$ teremos que um pré-feixe será um *funtor covariante* $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ab}$.

Queremos agora definir uma topologia de Grothendieck para a categoria $K\text{-Et}$ para então calcular a cohomologia de Čech de um certa cobertura $\mathcal{U} \in \text{Cov}(K)$ para então calcular $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ para certos feixes $\mathcal{F} : K\text{-Et} \rightarrow \mathbf{Ab}$.

Antes de definirmos a topologia de Grothendieck note que $K\text{-Et}$ tem soma amalgamada dada pelo produto tensorial. De fato, dados morfismos $\phi : A \rightarrow B$ e $\psi : A \rightarrow C$ teremos o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\psi} & C \\
 \phi \downarrow & & \downarrow 1 \otimes \text{id}_C \\
 B & \xrightarrow{\text{id}_B \otimes 1} & B \otimes_A C \\
 & \searrow & \downarrow \text{dashed} \\
 & & T
 \end{array}$$

(Note: A solid arrow also goes from A to T via ϕ and ψ .)

onde $\text{id}_B \otimes 1$ é definido por $\text{id}_B \otimes 1(b) := b \otimes 1$, para todo $b \in B$, e $1 \otimes \text{id}_C$ é definido de modo análogo.

Definição 4.7. Seja K um corpo. Para cada objeto $A \in K\text{-Et}$ defina a cobertura:

$$\text{Cov}(A) := \{ \{A \xrightarrow{\phi} B\} \mid \phi \text{ é injetor em } K\text{-Et} \}$$

Teorema 4.1. *Seja $A \in K\text{-Et}$. Então os conjuntos definidos acima formam uma topologia de Grothendieck em $K\text{-Et}$, que é chamada de **topologia étale**.*

Demonstração. Provaremos que todos axiomas (dualizados) de uma topologia de Grothendieck são satisfeitos:

1. Todo isomorfismo $A \xrightarrow{\phi} B$ é injetor, portanto $\{A \xrightarrow{\phi} B\} \in \text{Cov}(A)$;
2. Sejam $\{A \xrightarrow{\phi} B\} \in \text{Cov}(A)$ e $\{B \xrightarrow{\psi} C\} \in \text{Cov}(B)$, como a composição de morfismos injetores é um morfismo injetor temos que $\psi \circ \phi$ é injetor e portanto $\{A \xrightarrow{\psi \circ \phi} C\} \in \text{Cov}(A)$;

3. Sejam $\{A \xrightarrow{\phi} B\} \in \text{Cov}(A)$ e $\psi: A \rightarrow C$ um morfismo de anéis, temos que provar que $1 \otimes \text{id}_C: C \rightarrow B \otimes_A C$ é injetor.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\psi} & C \\ \phi \text{ inj} \downarrow & & \downarrow 1 \otimes \text{id}_C \text{ inj?} \\ B & \xrightarrow{\text{id}_B \otimes 1} & B \otimes_A C \end{array}$$

Como C é uma K -álgebra étale temos que $C \cong \prod_i L_i$, com L_i/K extensão de corpos separável finita para todo i . Mas então:

$$\prod_i L_i \xrightarrow{1 \otimes \text{id}_C} \prod_i L_i \otimes_A B \text{ é injetor} \iff L_i \xrightarrow{1 \otimes \text{id}_{L_i}} L_i \otimes_A B \text{ é injetor para todo } i.$$

Portanto podemos considerar sem perda de generalidade que C é um corpo. Como todo morfismo de anéis $\varphi: C \rightarrow R$ é injetor, se $R \neq 0$ basta provar que temos $C \otimes_A B \neq 0$.

Para provar esse fato utilizaremos localização. Considere $P = \ker(\psi)$, então teremos um morfismo injetor

$$\frac{A}{P} \hookrightarrow C$$

como C é um corpo, em particular um domínio, concluímos que A/P é um domínio e portanto P é um ideal primo de A .

Como A é étale é da forma $\prod_{i=1}^n F_i$, para algum n natural e F_i/K é uma extensão separável e finita para todo i . Logo todo ideal primo de A tem a forma $\prod_{i \neq j} F_i$ para algum j fixado. Suponha sem perda de generalidade que $j = 1$, ou seja, $A/P \cong F_1$.

Considere então que

$$C \otimes_A B \cong C \otimes_{F_1} \frac{A}{P} \otimes_A B$$

e que

$$\frac{A}{P} \otimes_A B \cong \frac{B}{PB}$$

então:

$$C \otimes_A B \cong C \otimes_{F_1} \frac{B}{PB}$$

Temos então um produto tensorial sobre um corpo, por isso basta provar que $B/PB \neq 0$. Por fim, observe o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} F_1 & \overset{i}{\dashrightarrow} & \frac{B}{PB} \\ \downarrow & & \uparrow \\ A & \xrightarrow{\phi} & B \end{array}$$

podemos verificar que i é injetora, pois F_1 “não morre” em B/PB . Como B é étale seja $B = \prod_{i=1}^m M_l$, com M_l/K é extensão separável finita para todo l . Como ϕ é injetora teremos que ela injeta cada parcela F_i de A de alguma parcela M_{l_i} distinta em B , para todo i .

Então $PB = \prod_{i=2}^n M_{l_i}$ e temos que a parcela M_{l_1} se mantém “intacta” em B/PB . Portanto $C \otimes_A B \cong C \otimes_{F_1} B/PB \neq 0$.

□

Agora que temos um sítio $(K\text{-Et}, \text{Cov}(K\text{-Et}))$ iremos considerar a partir de agora apenas a cobertura $\mathcal{U} = \{K \hookrightarrow L\} \in \text{Cov}(K)$, onde L/K é uma extensão Galois finita. Como a cohomologia de Čech envolve cálculos com $L \otimes_K L$ e $L \otimes_K L \otimes_K L$ iremos provar alguns isomorfismos de K -álgebras que facilitarão os cálculos nos exemplos e também na demonstração do teorema principal.

Observação 4.4. Dado L/K uma extensão de corpos e $G = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ um grupo finito, definimos:

$$\text{Maps}(G, L) := \{f: G \rightarrow L \mid f \text{ é função}\}$$

que pode ser visto como uma L -álgebra considerando a estrutura induzida por L , em particular será uma K -álgebra.

Note ainda que existe um isomorfismo de L -álgebras não canônico (pois depende da ordenação de G) entre $\text{Maps}(G, L)$ e $L^{|G|}$ dado por:

$$\begin{aligned} \text{Maps}(G, L) &\longrightarrow L^{|G|} \\ f &\longmapsto (f(\sigma_1), \dots, f(\sigma_n)) \end{aligned} \quad (4.12)$$

Lema 4.2 (Lema \otimes_K Lema). Dada L/K uma extensão Galois de grau n e $G = \text{Gal}(L/K)$. Então:

$$\begin{aligned} \zeta_1: L \otimes_K L &\longrightarrow \text{Maps}(G, L) \\ a \otimes b &\longmapsto f \end{aligned} \quad (4.13)$$

onde $f(\sigma) := \sigma(a)b$, para todo $\sigma \in G$.

Demonstração. Seja $G = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$. Usando o teorema do elemento primitivo (ver [Lang, 2002, cap. V, §4, Teorema 4.6]), escreva $L = K(\theta)$, para algum $\theta \in L$. Seja

$$p(x) = \prod_{1 \leq i \leq n} (x - \sigma_i(\theta)) \in K[x]$$

o polinômio minimal de θ . Então temos o isomorfismo ζ_1 de L -álgebras (onde $L \otimes_K L$ é visto como L -álgebra na segunda entrada)

$$L \otimes_K L \cong \frac{K[x]}{(p(x))} \otimes_K L \cong \frac{L[x]}{(p(x))} \stackrel{\text{TCR}}{\cong} \prod_{1 \leq i \leq n} \frac{L[x]}{(x - \sigma_i(\theta))} \cong L^{|G|}$$

onde TCR denota o Teorema Chinês do Restos. Seguindo os isomorfismos acima, se $a = h(\theta) \in L$ com $h(x) \in K[x]$ e $b \in L$, nós temos que

$$a \otimes b = h(\theta) \otimes b \xrightarrow{\xi_1} (h(\sigma_1(\theta)), h(\sigma_2(\theta)), \dots, h(\sigma_n(\theta))) \cdot b = (\sigma_1(a), \sigma_2(a), \dots, \sigma_n(a)) \cdot b$$

juntando com o isomorfismo de (4.12) temos o resultado desejado. \square

Exemplo 4.5. Se aplicamos o isomorfismo:

$$\begin{aligned} \xi_1: L \otimes_K L &\xrightarrow{\cong} L^{|G|} \\ a \otimes b &\longmapsto (\sigma_1(a)b, \dots, \sigma_n(a)b) \end{aligned}$$

no caso de $K = \mathbb{R}$, $L = \mathbb{C}$ e $\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}) = \{\sigma, \text{id}\}$, onde σ denota a conjugação, teremos o isomorfismo:

$$\begin{aligned} \xi_1: \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} &\xrightarrow{\cong} \mathbb{C} \times \mathbb{C} \\ a \otimes b &\longmapsto (\sigma(a)b, \text{id}(a)b) = (\bar{a}b, ab) \end{aligned} \tag{4.14}$$

Corolário 4.3 (Lema \otimes_K Lema \otimes_K Lema). *Dadas as condições do lema (4.2) na página anterior temos o isomorfismo*

$$\begin{aligned} \zeta_2: L \otimes_K L \otimes_K L &\longrightarrow \text{Maps}(G \times G, L) \\ a \otimes b \otimes c &\longmapsto f \end{aligned} \tag{4.15}$$

onde $f(\sigma, \tau) := \tau(\sigma(a)b)c$, para todo $\sigma, \tau \in G$.

Demonstração. Utilizando o (4.2) duas vezes temos os isomorfismos:

$$\begin{aligned} (L \otimes_K L) \otimes_K L &\cong \text{Maps}(G, L) \otimes_K L \\ &\cong \text{Maps}(G, L \otimes_K L) \\ &\cong \text{Maps}(G, \text{Maps}(G, L)) \\ &\cong \text{Maps}(G \times G, L) \end{aligned}$$

que são dados explicitamente por:

$$\begin{aligned} \xi_2: L \otimes_K L \otimes_K L &\longrightarrow L^{|G|^2} \\ a \otimes b \otimes c &\longmapsto (\sigma_1(\sigma_1(a)b)c, \dots, \sigma_n(\sigma_n(a)b)c) \end{aligned} \tag{4.16}$$

\square

Exemplo 4.6. No caso de $K = \mathbb{R}$, $L = \mathbb{C}$ e $\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}) = \{\sigma, \text{id}\}$, onde σ denota a conjugação, teremos o isomorfismo

$$\begin{aligned} \xi_2: \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} &\xrightarrow{\cong} \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \\ a \otimes b \otimes c &\longmapsto (\sigma(\sigma(a)b)c, \text{id}(\sigma(a)b)c, \sigma(\text{id}(a)b)c, \text{id}(\text{id}(a)b)c) \\ &= (\bar{a}\bar{b}c, \bar{a}bc, \bar{a}\bar{b}c, abc) \end{aligned}$$

Considere a partir de agora um feixe de grupos abelianos $\mathcal{F}: K\text{-Et} \rightarrow \mathbf{Ab}$. Queremos calcular $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, onde $\mathcal{U} := \{K \hookrightarrow L\} \in \text{Cov}(K)$ é uma cobertura de apenas um elemento, logo a sequência (4.5) fica:

$$\mathcal{F}(L) \xrightarrow{d^0} \mathcal{F}(L \otimes_K L) \xrightarrow{d^1} \mathcal{F}(L \otimes_K L \otimes_K L) \quad (4.17)$$

Para entender o que são d^0 e d^1 neste caso precisamos primeiramente definir alguns morfismos em $K\text{-Et}$. Defina $p_1, p_2: L \rightarrow L \otimes_K L$ por:

$$p_1(a) := a \otimes 1 \quad (4.18)$$

$$p_2(a) := 1 \otimes a \quad (4.19)$$

para todo $a \in A$. Esses morfismos fazem o papel dos morfismos p_i^{ij} 's na equação 4.4 na página 67. Defina ainda $p_{12}, p_{13}, p_{23}: L \otimes_K L \rightarrow L \otimes_K L \otimes_K L$ por:

$$p_{12}(a \otimes b) := a \otimes b \otimes 1 \quad (4.20)$$

$$p_{13}(a \otimes b) := a \otimes 1 \otimes b \quad (4.21)$$

$$p_{23}(a \otimes b) := 1 \otimes a \otimes b \quad (4.22)$$

para todo $a, b \in A$. Esses morfismos fazem o papel dos morfismos p_{ij}^{ijk} 's na equação 4.7 na página 68.

Teremos então que:

$$d^0 = \mathcal{F}(p_2) - \mathcal{F}(p_1) \quad (4.23)$$

$$d^1 = \mathcal{F}(p_{23}) - \mathcal{F}(p_{13}) + \mathcal{F}(p_{12}) \quad (4.24)$$

e agora podemos calcular alguns exemplo concretos.

Exemplo 4.7. Considere o feixe de grupos abelianos $\mathbb{G}_a: K\text{-Et} \rightarrow \mathbf{Ab}$ dado em objetos por $\mathbb{G}_a(A) := A^+$, o grupo aditivo de A , e dado em morfismos pela identidade (este funtor é basicamente um funtor esquecimento). Então a sequência (4.17) fica:

$$L^+ \xrightarrow{d^0} (L \otimes_K L)^+ \xrightarrow{d^1} (L \otimes_K L \otimes_K L)^+ \quad (4.25)$$

Note ainda que (4.23) fica

$$d^0(a) = [\mathbb{G}_a(p_2) - \mathbb{G}_a(p_1)](a) = 1 \otimes a - a \otimes 1 \quad \forall a \in A^+$$

e (4.24) fica

$$\begin{aligned} d^1(a \otimes b) &= [\mathbb{G}_a(p_{23}) - \mathbb{G}_a(p_{13}) + \mathbb{G}_a(p_{12})](a \otimes b) \\ &= 1 \otimes a \otimes b - a \otimes 1 \otimes b + a \otimes b \otimes 1 \end{aligned}$$

para todo $a, b \in L^+$.

Como as contas no produto tensorial são um tanto complexas neste caso usamos os isomorfismos ξ_1 e ξ_2 , definidos em (4.14) e (4.16), respectivamente, para transportar as contas do produto tensorial para o produto cartesiano. Como o isomorfismo depende da ordem de G consideraremos o caso $K = \mathbb{R}$ e $L = \mathbb{C}$ com $G = \text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}) = \{\sigma, \text{id}\}$ (já que G tem apenas 2 elementos). Teremos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} (\mathbb{C})^+ & \xrightarrow{d^0} & (\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})^+ & \xrightarrow{d^1} & (\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})^+ \\ \parallel & & \simeq \downarrow \xi_1 & & \simeq \downarrow \xi_2 \\ (\mathbb{C})^+ & \xrightarrow{\delta^0} & (\mathbb{C} \times \mathbb{C})^+ & \xrightarrow{\delta^1} & (\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C})^+ \end{array}$$

onde δ^0 e δ^1 são definidos de modo que o diagrama comute. Note então que teremos isomorfismos $\ker(d^1) \cong \ker(\delta^1)$ e $\text{im}(d^1) \cong \text{im}(\delta^1)$, portanto para calcular $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathbb{G}_a)$ basta calcular $\ker(\delta^1)$ e $\text{im}(\delta^0)$.

Temos que

$$\begin{aligned} \delta^0(a) &= \xi_1 \circ d^0(a) = \xi_1(1 \otimes a - a \otimes 1) \\ &= (a, a) - (\bar{a}, a) = (a - \bar{a}, 0) \end{aligned}$$

para todo $a \in A^+$. E como $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ para cada $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ tome $a \otimes b \in \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ tal que $\xi_1(a \otimes b) = (\bar{a}b, ab) = (\alpha, \beta)$, então teremos

$$\begin{aligned} \delta^1(\alpha, \beta) &= \delta^1 \circ \xi_1(a \otimes b) \\ &= \xi_2 \circ d^1(a \otimes b) \\ &= \xi_2(1 \otimes a \otimes b - a \otimes 1 \otimes b + a \otimes b \otimes 1) \\ &= (\bar{a}b, ab, \bar{a}b, ab) - (ab, \bar{a}b, \bar{a}b, ab) + (a\bar{b}, \bar{a}b, \bar{a}b, ab) \\ &= (\bar{a}b - ab + a\bar{b}, ab, \bar{a}b, ab) \\ &= (\alpha - \beta + \bar{\alpha}, \beta, \bar{\beta}, \beta) \end{aligned}$$

para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Portanto $\ker(\delta^1) = \{(\alpha, 0) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \mid \alpha = -\bar{\alpha}\} = \mathbb{R}i \times \{0\}$, por outro lado, se $a = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, então $a - \bar{a} = 2iy$ e portanto $\text{im}(\delta^0) = 2\mathbb{R}i \times \{0\}$. Temos então que o grupo de cohomologia é:

$$\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathbb{G}_a) = 0$$

Exemplo 4.8. Considere o feixe de grupos abelianos $\mathbb{G}_m : K\text{-Et} \rightarrow \mathbf{Ab}$ dado em objetos por $\mathbb{G}_m(A) := A^*$, o grupo multiplicativo, e dado em morfismos pela restrição. Então a sequência (4.17) fica:

$$L^\times \xrightarrow{d^0} (L \otimes_K L)^\times \xrightarrow{d^1} (L \otimes_K L \otimes_K L)^\times \quad (4.26)$$

Utilizando a notação multiplicativa teremos que (4.23) fica

$$d^0(a) = [\mathbb{G}_m(p_2)\mathbb{G}_m(p_1)^{-1}](a) = (1 \otimes a)(a \otimes 1)^{-1} = a^{-1} \otimes a \quad \forall a \in L^\times$$

e (4.24) fica

$$\begin{aligned} d^1(a \otimes b) &= [\mathbb{G}_m(p_{23})\mathbb{G}_m(p_{13})^{-1}\mathbb{G}_m(p_{12})](a \otimes b) \\ &= (1 \otimes a \otimes b)(a \otimes 1 \otimes b)^{-1}(a \otimes b \otimes 1) \\ &= 1 \otimes ab \otimes 1 \end{aligned}$$

para todo $a, b \in L^\times$, ou seja, se $a \otimes b \in \ker(d^1)$ temos que $b = a^{-1}$.

Novamente fizemos as contas apenas com os tensores elementares, para tensores não elementares teremos que utilizar os isomorfismos ξ_1 e ξ_2 para transportar as contas do produto tensorial para o produto cartesiano, mas dessa vez não faremos as contas com detalhes. A conclusão é que $\ker(d^1) = \text{im}(d^0)$, conforme o esperado pela conta com os tensores elementares, ou seja, o grupo de cohomologia é:

$$\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathbb{G}_m) = 0$$

Exemplo 4.9. Considere o feixe de grupos abelianos $\mu_n : K\text{-Et} \rightarrow \mathbf{Ab}$ dado em objetos por $\mu_n(A) := \{a \in A \mid a^n = 1\}$, o grupos das n -ésimas raízes da unidade, e dado nos morfismo pela restrição. Como $\mu_n(A) \subseteq A^\times$ os cálculos serão os mesmos do exemplo (4.8), ou seja:

$$d^0(a) = a^{-1} \otimes a \quad \forall a \in \mu_n(A)$$

e para tensores elementares

$$d^1(a \otimes b) = 1 \otimes ab \otimes 1 \quad \forall a, b \in \mu_n(A)$$

Considere os corpos $K = \mathbb{R}$ e $L = \mathbb{C}$. Como $a \otimes b \in \ker(d_1)$ se, e somente se, $a = b^{-1}$, concluimos que $\ker(d^1) \cong \mu_n(\mathbb{C})$. Para calcular $\text{im}(d^0)$ temos que considerar quando n é par ou ímpar.

Se n é ímpar teremos que $\text{im}(d^0) \cong \mu_n(\mathbb{C})$. Já se $n = 2k$, como $\{\pm 1\} \subseteq \mu_n(\mathbb{C}) \cap \mathbb{R}$ teremos que $\text{im}(d^0) \cong \mu_k(\mathbb{C})$, pois não há diferença entre $a^{-1} \otimes a$ e $(-a)^{-1} \otimes (-a)$ em $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Portanto o grupo de cohomologia é:

$$\check{H}^1(\mathcal{U}, \mu_n) \cong \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \mathbb{Z}/2 & \text{se } n \text{ é par} \end{cases} \quad (4.27)$$

Agora que calculamos a cohomologia étale de alguns feixes de grupos abelianos iremos perceber que existe uma relação entre $H^1(G, \mathcal{F}(L))$ e $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

Podemos representar a ação de $\sigma \in G$ em L em $K\text{-Et}$ pelo diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 L & \xrightarrow{\sigma} & L \\
 & \swarrow & \searrow \\
 & & K
 \end{array}$$

Ao aplicar \mathcal{F} temos o seguinte diagrama em \mathbf{Ab} :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{F}(L) & \xrightarrow{\mathcal{F}(\sigma)} & \mathcal{F}(L) \\
 & \swarrow & \searrow \\
 & & \mathcal{F}(K)
 \end{array}$$

Definimos uma ação de G em $\mathcal{F}(L)$ através de:

$$\sigma \cdot g := \mathcal{F}(\sigma)(g) \quad \forall g \in \mathcal{F}(L), \sigma \in G$$

mais especificamente, podemos ver que $\mathcal{F}(L)$ é um G -grupo (pois $\mathcal{F}(\sigma)$ é um homomorfismo de grupos).

Podemos então calcular $H^1(G, \mathcal{F}(L))$ usando a sequência

$$\mathcal{F}(L) \xrightarrow{\delta^0} \text{Maps}(G, \mathcal{F}(L)) \xrightarrow{\delta^1} \text{Maps}(G^2, \mathcal{F}(L)) \quad (4.28)$$

Como \mathcal{F} é feixe temos que $\mathcal{F}(A \times B) \cong \mathcal{F}(A) \times \mathcal{F}(B)$, para todo $A, B \in K\text{-Et}$ ³. Mas então temos que:

$$\mathcal{F}(\text{Maps}(G, L)) \cong \mathcal{F}(L^{|G|}) \cong \mathcal{F}(L)^{|G|} \cong \text{Maps}(G, \mathcal{F}(L)) \quad (4.29)$$

Concluimos que a sequência (4.28) é induzida por \mathcal{F} da sequência em $K\text{-Et}$:

$$L \xrightarrow{\delta^0} \text{Maps}(G, L) \xrightarrow{\delta^1} \text{Maps}(G^2, L)$$

conforme a sequência 2.1 na página 19.

Considere então o seguinte diagrama em $K\text{-Et}$ (ver o diagrama completo em [Milne, 1980, p. 100]):

$$\begin{array}{ccccc}
 L & \xrightarrow{p_1} & L \otimes_K L & \xrightarrow{p_{12}} & L \otimes_K L \otimes_K L \\
 & \xrightarrow{p_2} & & \xrightarrow{p_{23}} & \\
 \parallel & & \simeq \downarrow \zeta_1 & & \simeq \downarrow \zeta_2 \\
 L & \xrightarrow{q_1} & \text{Maps}(G, L) & \xrightarrow{q_{12}} & \text{Maps}(G^2, L) \\
 & \xrightarrow{q_2} & & \xrightarrow{q_{23}} & \\
 & & & \xrightarrow{q_{13}} &
 \end{array}$$

onde definimos:

$$q_1(a)(\sigma) := \sigma(a)$$

$$q_2(a)(\sigma) := a$$

³ Segue do axioma de feixe na definição usual, pois $\text{Spec}(A \times B) = \text{Spec}A \sqcup \text{Spec}B$, e também podemos ver isso a partir do fato de que feixes preservam limites.

para todo $a \in L$ e para todo $\sigma \in G$, e ainda:

$$\begin{aligned} q_{12}(f)(\sigma, \tau) &:= \sigma(f(\tau)) \\ q_{23}(f)(\sigma, \tau) &:= f(\sigma) \\ q_{13}(f)(\sigma, \tau) &:= f(\sigma\tau) \end{aligned}$$

para todo $f \in \text{Maps}(G, L)$ e para todo $\sigma \in G$.

Podemos checar que os respectivos quadrados comutam, por exemplo:

$$[\zeta_2 \circ p_{12}(a \otimes b)](\sigma, \tau) = \zeta_2(a \otimes b \otimes 1)(\sigma, \tau) = \sigma(\tau(a)b)$$

e

$$[q_{12} \circ \zeta_1(a \otimes b)](\sigma, \tau) = \sigma(\zeta_1(a \otimes b)(\tau)) = \sigma(\tau(a)b)$$

Note ainda que em (4.28) temos:

$$\delta^0 = \mathcal{F}(q_2) - \mathcal{F}(q_1) \text{ e } \delta^1 = \mathcal{F}(q_{23}) - \mathcal{F}(q_{13}) + \mathcal{F}(q_{12})$$

Aplicando \mathcal{F} no diagrama temos um isomorfismo entre as sequências (4.17) e (4.28) e portanto temos um isomorfismo entre os grupos de cohomologia. Acabamos de provar o seguinte teorema:

Teorema 4.4. *Seja L/K extensão de Galois finita, $\mathcal{U} = \{K \hookrightarrow L\}$ cobertura e $\mathcal{F} : K\text{-Et} \rightarrow \mathbf{Ab}$ um feixe de grupos abelianos. Então:*

$$\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \cong H^1(\text{Gal}(L/K), \mathcal{F}(L)) \quad (4.30)$$

Podemos ver que o teorema concorda com os cálculos realizados anteriormente:

Exemplo 4.10. Considere o feixe de grupos abelianos \mathbb{G}_m . Então o teorema (4.4) garante que:

$$\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathbb{G}_m) \cong H^1(\text{Gal}(L/K), L^\times)$$

O que concorda com os cálculos realizados no teorema 2.4 na página 25 e no exemplo (4.8).

Exemplo 4.11. Considere o feixe de grupos abelianos μ_n . Então o teorema (4.4) garante que para $K = \mathbb{R}$ e $L = \mathbb{C}$:

$$\check{H}^1(\mathcal{U}, \mu_n) \cong H^1(\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}), \mu_n(\mathbb{C}))$$

O que concorda com os cálculos realizados no exemplo 2.3 na página 33 e no exemplo (4.9).

5 Conclusão

Neste trabalho estudamos algumas cohomologias de grau 1 e vimos as relações que existem entre elas. Também aplicamos as cohomologias na classificação de diferentes tipos de objetos algébricos e topológicos.

Percebe-se então que a cohomologia é uma ferramenta muito poderosa em toda a Matemática (e não apenas na Topologia). E partir do capítulo 4 também percebe-se que a topologia de Grothendieck é um conceito potente, pois é capaz de fazer ligação entre conceitos que, apesar de parecidos, não tinham nenhuma relação óbvia.

Os assuntos que poderiam ser estudados a partir desse trabalho são vários: o segundo conjunto de cohomologia de grupos não-abeliana, o grupo de Brauer, a cohomologia de grupos através de funtores derivados, a cohomologia de feixes e suas relações com a cohomologia de Čech, além de estudar mais sobre topologias de Grothendieck, que era um dos objetivos iniciais do trabalho.

Referências

- [Artin, 1962] Artin, M. (1962). Grothendieck topologies. *Harvard Math. Dept. Lecture Notes*.
- [Borges and Tengan, 2015] Borges, H. and Tengan, E. (2015). Algebra comutativa em quatro movimentos/projeto euclides. *Rio de Janeiro: IMPA*.
- [Brussel, 2000] Brussel, E. (2000). Galois descent and Severi–Brauer varieties. *Unpublished notes*, <http://www.mathcs.emory.edu/~brussel/Papers/galoisdescent.pdf>.
- [Dieudonné, 1989] Dieudonné, J. (1989). *A history of algebraic and differential topology. 1900–1960*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA.
- [Dummit and Foote, 2004] Dummit, D. S. and Foote, R. M. (2004). *Abstract algebra*, volume 3. Wiley Hoboken.
- [Gille and Szamuely, 2006] Gille, P. and Szamuely, T. (2006). *Central simple algebras and Galois cohomology*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [Giraud, 1971] Giraud, J. (1971). *Cohomologie non abélienne*. Springer-Verlag, Berlin–New York.
- [Godement, 1973] Godement, R. (1973). *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*. Hermann, Paris.
- [Lang, 2002] Lang, S. (2002). *Algebra*, volume 211 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 3 edition.
- [Lee, 2001] Lee, J. M. (2001). *Introduction to smooth manifolds*. Springer, 2 edition.
- [Milne, 1980] Milne, J. S. (1980). *Étale cohomology*. Princeton University Press, Princeton.
- [Neukirch et al., 2008] Neukirch, J., Schmidt, A., and Wingberg, K. (2008). *Cohomology of number fields*. Springer-Verlag, Berlin, 2^a edition.
- [Rotman, 2009] Rotman, J. J. (2009). *An introduction to homological algebra*. Springer, New York, 2^a edition.
- [Serre, 1955] Serre, J.-P. (1955). Faisceaux algébriques cohérents. *Ann. of Math. (2)*, 61:197–278.
- [Serre, 1979] Serre, J.-P. (1979). *Local fields*. Springer-Verlag, New York–Berlin.

- [Taylor, 2002] Taylor, J. L. (2002). *Several complex variables with connections to algebraic geometry and Lie groups*. American Mathematical Society, Providence.
- [Tengan, 2009] Tengan, E. (2009). Central simple algebras and the brauer group. In *XVII Latin American Algebra Colloquium*.