

Daniel Santana de Freitas

**Metodologia Numérica de Resolução de  
Problemas de Valor Inicial para Sistemas  
Magneto-elásticos 2D**

Florianópolis

Junho de 2019



Daniel Santana de Freitas

# **Metodologia Numérica de Resolução de Problemas de Valor Inicial para Sistemas Magneto-elásticos 2D**

Tese submetida como requisito para promoção  
à Classe E (Titular de Carreira) do Magistério  
Superior.

Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

Centro Tecnológico – CTC

Departamento de Informática e Estatística – INE

Florianópolis

Junho de 2019

Santana de Freitas, Daniel

Metodologia Numérica de Resolução de Problemas de Valor Inicial para Sistemas Magneto-elásticos 2D/ Daniel Santana de Freitas. – Florianópolis, Junho de 2019-86p. : il.; 30 cm.

Tese inédita – Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

Centro Tecnológico – CTC

Departamento de Informática e Estatística – INE, Junho de 2019.

1. Magneto-elasticidade. 2. Sistemas de EDPs hiperbólico-parabólicos. 3. Métodos pseudo-espectrais. I. Universidade Federal de Santa Catarina. II. Centro Tecnológico. III. Departamento de Informática e Estatística. IV. Solução Numérica de um Problema de Valor Inicial para um Sistema Magneto-elástico 2D.

Daniel Santana de Freitas

## **Metodologia Numérica de Resolução de Problemas de Valor Inicial para Sistemas Magneto-elásticos 2D**

Tese submetida como requisito para promoção à Classe E (Titular de Carreira) do Magistério Superior.

Trabalho aprovado. Florianópolis, 14 de junho de 2019:

---

**Prof. Eduardo Alberto Fancello, Dr.**  
Avaliador interno (UFSC)

---

**Prof<sup>a</sup>. Lígia Damasceno Ferreira Marczak, Dr<sup>a</sup>.**  
Avaliador externo (UFRGS)

---

**Prof. Nelson Luís da Costa Dias, Ph.D.**  
Avaliador externo (UFPR)

---

**Prof. Waldir Leite Roque, Ph.D.**  
Avaliador externo (UFPB)

Florianópolis  
Junho de 2019



*“Magnetism, as you recall from physics class,  
is a powerful force that causes certain items  
to be attracted to refrigerators.” (Dave Barry)*





# Resumo

Este trabalho propõe uma nova metodologia numérica para computar a interação entre os campos magneto e elástico em materiais não ferromagnéticos expostos a campos magnéticos externos constantes. O sistema de equações governantes em estudo consiste de duas Equações Diferenciais Parciais (EDPs): uma equação hiperbólica (associada à deformação elástica  $\mathbf{u}$ ), e uma equação parabólica (descrevendo o campo magnético  $\mathbf{h}$ ), fortemente acopladas por termos não-lineares. O modelo matemático inclui ainda a condição de que o campo magnético  $\mathbf{h}$  seja solenoidal ( $\nabla \cdot \mathbf{h} = 0$ ), o que adiciona características de um problema de *otimização* à determinação do campo de  $\mathbf{h}$ . Na metodologia proposta, a discretização temporal da equação da deformação é feita por um método explícito simples (Runge-Kutta de 4a ordem), mas, a fim de garantir a condição  $\nabla \cdot \mathbf{h} = 0$  em cada avanço, a evolução no tempo do campo magnético é feita com uma adaptação de um método de passo fracionado (*splitting*) normalmente empregado na resolução de escoamentos incompressíveis em fluidos. A discretização da parte espacial é tratada com métodos pseudo-espectrais. O esquema numérico assim obtido é usado para obter resultados empíricos para a evolução da energia total de um dado sistema magneto-elástico com o tempo.

**Palavras-chave:** magneto-elasticidade. sistemas de EDPs hiperbólico-parabólicos. métodos pseudo-espectrais. métodos de splitting.



# Abstract

A new numerical methodology is proposed that computes the interaction between the magnetic and elastic fields in nonferromagnetic materials exposed to constant external magnetic fields. This kind of system is described by two nonlinearly coupled Partial Differential Equations (PDEs): a hyperbolic equation, modeling the elastic deformation  $\mathbf{u}$ , and a parabolic equation, describing the magnetic field  $\mathbf{h}$ . The mathematical model also stipulates that  $\mathbf{h}$  must be solenoidal ( $\nabla \cdot \mathbf{h} = 0$ ), a fact that turns the determination of this field, at each time step, into an optimization problem. In the proposed method, this optimization is accomplished by resorting to an adaptation of a fractional-step method borrowed from incompressible flows in fluids. Spatial discretization is carried out with pseudo-spectral methods. The resulting numerical scheme is used to produce empirical curves describing the time evolution of the total energy in a given magneto-elastic system.

**Keywords:** magnetoelasticity. hyperbolic-parabolic system of PDEs. pseudospectral methods. splitting methods.



# Sumário

1	INTRODUÇÃO	13
I	FUNDAMENTAÇÃO	17
2	INTERAÇÕES MAGNETO-ELÁSTICAS	19
2.1	Equações de Maxwell	19
2.2	Campo elástico de deslocamentos	24
2.3	Sistema magneto-elástico	27
3	REFERENCIAIS TEÓRICOS	29
3.1	Métodos espectrais e CFD	29
3.2	Decaimento de energia em sistemas magneto-elásticos	30
II	METODOLOGIA	33
4	MÉTODOS PSEUDO-ESPECTRAIS	35
4.1	Interpolação polinomial eficiente	35
4.2	Matrizes de diferenciação de Chebyshev	37
4.3	Resolução de PVCs com métodos pseudo-espectrais	38
5	TRATAMENTO DE $\nabla \cdot \mathbf{h} = 0$	41
5.1	Método das penalidades	42
5.2	Análise de Mohebbi	43
5.3	Avanço com passo fracionado (splitting)	44
III	FORMULAÇÃO E RESULTADOS	47
6	FORMULAÇÃO DO PROBLEMA	49
6.1	Equações governantes	50
6.2	Adimensionalização	51
6.3	Equações em coordenadas cartesianas	53
6.4	Método de resolução	60
6.5	Validação numérica	63
7	RESULTADOS NUMÉRICOS	71
7.1	Campos de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{h}$	72

7.2	<b>Evolução temporal da energia total . . . . .</b>	<b>73</b>
8	<b>CONCLUSÃO . . . . .</b>	<b>77</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>79</b>
	<b>APÊNDICES</b>	<b>83</b>
	<b>APÊNDICE A – PRINCÍPIOS FÍSICOS ELEMENTARES . . . . .</b>	<b>85</b>

# 1 Introdução

A interação entre magnetismo e eletricidade é um fenômeno físico conhecido, envolvendo atração e repulsão entre partículas carregadas. Como resultado deste fenômeno, o movimento de um magneto pode gerar energia elétrica e o fluxo de eletricidade pode produzir campos magnéticos em objetos metálicos (1).

Mas ocorre que as forças resultantes da ação de um *campo magnético* também podem induzir *deformações* em materiais ferromagnéticos <sup>1</sup>, o que constitui um fenômeno chamado de *magnetostricção*. A magnetostricção tem grande interesse industrial, pois pode ser utilizada em atuadores eletromecânicos, os quais traduzem como deformação mecânica a intensidade de uma corrente (2). De acordo com Pasquale (3), a descoberta do Terfenol-D, um material com efeito magnetostritivo considerado “gigantesco” (da ordem de  $mm/m$ ), possibilitou o desenvolvimento de aplicações de atuadores magnetostritivos em áreas tão diversas como sonares, amortecedores de vibrações, injetores de combustível e alto-falantes. A figura 1 mostra esquematicamente uma barra de material ferromagnético sendo deformada pela ação de um campo magnético gerado pela passagem de uma corrente de alta potência.

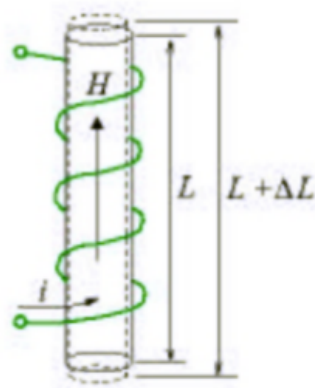


Figura 1 – Representação esquemática do fenômeno de magnetostricção: atuador sendo deformado sob efeito de um campo magnético. (2)

Por outro lado, o efeito inverso é válido: a aplicação de uma tensão mecânica produz deformações que podem gerar mudanças na susceptibilidade magnética dos corpos deformados, alterando a distribuição interna de um campo magnético pré-aplicado (o chamado “efeito Villari” (4)). Neste caso, o efeito magneto-elástico tem interesse devido à sua aplicabilidade no desenvolvimento de sensores (3). Um exemplo típico de sensor baseado neste efeito é descrito por Collins em (5): um sensor de torque sem contato

<sup>1</sup> Ver apêndice A.

cuja componente principal é um campo magnético circunferencial produzido por uma magnetização permanente no próprio eixo (caso ele seja ferromagnético). Quando um torque é aplicado, os momentos magnéticos elementares dentro do eixo são reorientados, causando uma mudança no campo magnético externo que é linearmente proporcional à tensão aplicada.

O efeito de magnetostricção associado a materiais ferromagnéticos aparece ainda em muitas outras áreas. Os mesmos princípios permitem também utilizar a magnetoelasticidade como um mecanismo de controle para a magnetização (alternativo ao uso direto de correntes elétricas). Recentemente, uma edição especial do “Journal of Physics: Condensed Matter” foi dedicada ao estudo de diversas formas de geração de deformações para o controle fino de campos magnéticos em situações especiais (6). Este efeito também é estudado em problemas ligados a vibrações. Por exemplo, Hirsinger (7) estudou os diferentes mecanismos responsáveis pelas deformações de origem magneto-elástica nos transformadores de tensão e nas máquinas rotativas. As vibrações induzidas por estas deformações constituem-se na principal fonte do zumbido elétrico característico emitido pelos transformadores (8).

Efeitos magneto-elásticos também podem ser observados em materiais elásticos sólidos condutores *não ferromagnéticos*. Materiais não ferromagnéticos também se deformam e se magnetizam sob o efeito de um campo externo, mas a resposta é muito mais fraca do que a dos ferromagnéticos e, normalmente, só pode ser detectada em laboratório (9). Neste caso, as deformações também exercem um efeito reverso e atuam sobre o campo magnético induzido, interferindo fortemente na (re)distribuição interna deste campo magnético. A modelagem é semelhante à dos ferromagnéticos, mas os efeitos de carga elétrica podem ser desprezados e não é preciso considerar a polarização magnética no cálculo da intensidade do campo magnético induzido. A teoria de magneto-elasticidade dedicada aos materiais não ferromagnéticos assim delineada pode ser aplicada, por exemplo, no projeto de eletromagnetos extremamente poderosos (10) e na levitação magnética (11)(12). Ela também pode ser encontrada na análise estrutural de dispositivos de fusão termonuclear: a fusão gera campos magnéticos muito intensos, os quais induzem deformações nos metais (super)condutores que envolvem o núcleo de um reator típico (11)(13).

A dedução das equações governantes associadas ao fenômeno de magnetoelasticidade em materiais não ferromagnéticos é descrita em detalhes por Eringen e Maugin (14). Deduções simplificadas são apresentadas por Paria (10) e Mohebbi (15). Essencialmente, o modelo matemático que descreve fenômenos magneto-elásticos consiste em um sistema de Equações Diferenciais Parciais (EDPs) hiperbólico-parabólico, fortemente acoplado por termos não lineares. O modelo matemático inclui ainda a condição de que o campo magnético  $\mathbf{h}$  seja solenoidal (ou seja,  $\nabla \cdot \mathbf{h} = 0$ ), a qual funciona como uma restrição, adicionando características de um problema de *otimização* à determinação do campo de  $\mathbf{h}$ .



---

A complexidade deste sistema indica que, mesmo em domínios quadrados simples, ele só pode ser resolvido por métodos numéricos com alta acurácia. Todas estas características sugerem que este sistema apresenta uma dificuldade de resolução numérica comparável à das equações de Navier-Stokes.

## Este trabalho

O presente trabalho se insere no contexto da interação entre magnetismo e deformações em materiais *não ferromagnéticos*. Uma nova metodologia numérica é proposta e é utilizada para obter resultados numéricos para um problema de valor inicial envolvendo uma barra infinitamente longa de seção quadrada de material não-ferromagnético, exposta a um campo magnético constante dado. A partir destes resultados, é computada a evolução da energia total do sistema ao longo do tempo.

O sistema de EDPs que determina as interações magneto-elásticas em materiais não ferromagnéticos já vem sendo analisado há algum tempo de um ponto de vista teórico, mas não há na literatura muitos resultados *numéricos* para casos concretos de aplicação desta teoria. Uma destas linhas teóricas vem estudando o comportamento assintótico da taxa de decaimento com o tempo da *energia total* deste sistema. Os resultados desta pesquisa mostram que a energia total do sistema decai para zero para tempos arbitrariamente altos, mas a complexidade deste tipo de análise teórica exige algumas simplificações do modelo para se tornar viável, tais como a inclusão de mecanismos artificiais de dissipação não linear, a linearização do acoplamento, ou até mesmo um desacoplamento total entre as duas EDPs.

No presente trabalho, são buscados resultados numéricos para uma configuração tão próxima quanto possível daquela que é usualmente adotada nesta linha teórica de análise do decaimento da energia do sistema. Por se tratar de um trabalho numérico, é possível levar em consideração o sistema sem simplificações, mas isto exige o desenvolvimento de um procedimento numérico que consiga resultados de maneira estável e com recursos computacionais razoáveis. O sistema de EDPs é resolvido com o auxílio de métodos pseudo-espectrais e também com uma adaptação de uma técnica empregada na computação do transiente em problemas de escoamento de fluidos incompressíveis. A adaptação foi necessária para garantir que o campo magnético mantivesse a condição solenoidal durante todo o transiente computado. Especificamente, a discretização temporal da equação da deformação é feita por um método explícito simples (Runge-Kutta de 4a ordem), mas, a fim de garantir a manutenção da condição solenoidal a cada avanço no tempo, a evolução temporal do campo magnético  $\mathbf{h}$  é feita com uma adaptação de um método de passo fracionado (*splitting*). O *splitting* é uma técnica normalmente empregada na resolução de escoamentos incompressíveis, de modo a garantir que a equação da continuidade seja

obedece a cada avanço no tempo (16). Para a discretização espacial, são empregados métodos pseudo-espectrais. As poucas soluções encontradas na literatura para problemas deste tipo usaram, até agora, o método dos Elementos Finitos. Em domínios regulares simples (como é o caso do problema estudado neste trabalho), e caso exista uma solução suficientemente suave para este problema, é esperado que os métodos espectrais permitam obter esta solução com um esforço computacional muito menor do que o exigido por Elementos Finitos.

Este tema foi escolhido por diversas razões:

1. Trata-se de um problema com grande interesse tecnológico;
2. É um caso em que o emprego de métodos espectrais se justifica e é bastante adequado;
3. Trata-se de um problema que já vem sendo estudado com muita profundidade de um ponto de vista teórico;
4. Quaisquer resultados (numéricos) concretos que sejam obtidos neste contexto podem servir tanto para ilustrar a utilidade da metodologia na resolução numérica deste tipo de sistema de EDPs como para ajudar na elaboração de conjecturas sobre resultados teóricos ainda não provados matematicamente;
5. Tanto a estratégia de resolução numérica propriamente dita, levando em conta a não linearidade do acoplamento entre as duas EDPs do sistema *em sua totalidade* e impondo corretamente a condição  $\nabla \cdot \mathbf{h} = 0$  a cada avanço de tempo, como a produção de resultados numéricos para a taxa de decaimento de energia de um sistema magneto-elástico concreto, são resultados ainda inéditos na literatura.

Diante disto, este trabalho tem por objetivos específicos:

- Elaborar uma metodologia numérica que produza resultados numéricos fisicamente consistentes para um sistema magneto-elástico usando métodos espectrais, levando em consideração as não-linearidades dos acoplamentos e a condição  $\nabla \cdot \mathbf{h} = 0$  de forma adequada;
- Obter curvas de evolução da energia total do sistema com o tempo para este sistema.

De um ponto de vista matemático-computacional, este tipo de problema está inserido no contexto da Análise Numérica, mais especificamente, na simulação numérica de sistemas de Equações Diferenciais Parciais. De um ponto de vista físico, as equações a serem resolvidas descrevem um problema na interface entre o magnetismo e a elasticidade.

Parte I

Fundamentação



## 2 Interações magneto-elásticas

A magneto-elasticidade lida com objetos sólidos elásticos condutores expostos a campos magnéticos. Ela é definida por Eringen e Maugin (14) como um subcampo da “Eletrodinâmica do contínuo”, um ramo da Física que se preocupa com a interação entre campos eletromagnéticos e corpos deformáveis. Nos sistemas magneto-elásticos, ainda é possível determinar o campo de deformações elásticas com o auxílio da lei de Hooke e o campo eletro-magnético pelas leis de Maxwell, mas, conforme ressaltado por Paria (10), a superposição destes dois campos gera *novos fenômenos* não previstos pelas leis individuais. O campo magnético entra nas equações do movimento associadas à tensão elástica como uma força de corpo enquanto que as velocidades de deslocamento dos pontos materiais do corpo elástico influenciam o campo magnético previsto pelas equações de Maxwell ao modificar a lei de Ampère.

Nas seções a seguir, é descrita brevemente a origem das equações que compõem o modelo magneto-elástico que é objeto do presente trabalho. Uma dedução completa, e para um modelo muito mais amplo, pode ser encontrada no livro de Eringen e Maugin (14). A descrição aqui apresentada segue uma versão linearizada da teoria da magnetoelasticidade proposta por Pao e Yeh (17), com base na teoria fenomenológica de Brown (18). É importante ressaltar que esta linearização se refere, principalmente, ao fato de serem utilizadas versões linearizadas *das relações constitutivas*; nenhuma simplificação é aplicada à não linearidade presente nos termos de acoplamento entre as duas equações.

### 2.1 Equações de Maxwell

A apresentação a seguir segue o que é discutido na tese de Mohebbi (15) e no trabalho de Paria (10).

As equações de Maxwell (apresentadas, por exemplo, em Landau e Lifshitz (1)) valem para fenômenos eletromagnéticos no vácuo. Para serem aplicadas no interior de matéria sólida, estas equações precisam ser adaptadas. A formulação mais comum para este ajuste é a de Minkowski, a qual define duas novas variáveis ( $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$  e  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ ), produzindo a seguinte formulação alternativa (ainda válida para o vácuo):

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e & \text{(Lei de Gauss/Coulomb)} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 & \text{(Inexistência de pólos magnéticos livres)} \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \text{(Lei de Faraday)} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} & \text{(Lei de Ampère)} \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Nestas equações,  $\mathbf{E}$  é o campo elétrico (dado em  $[N/C]$ ),  $\mathbf{H}$  é o campo magnético  $[Tm/A]$ ,  $\mathbf{J}$  é a densidade de corrente elétrica induzida  $[A/m^2]$ . A variável  $\rho_e$  é a densidade de carga elétrica  $[C/m^3]$ ,  $\mathbf{D}$  é definido como o campo de deslocamento elétrico  $[C/m^2]$  e  $\mathbf{B}$  é o fluxo magnético  $[T]$ . Ainda, nas definições de  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{B}$ :  $\epsilon_0$  é a permissividade elétrica do vácuo  $[C/(Vm)]$  e  $\mu_0$  é a permeabilidade magnética do vácuo  $[Tm/A]$ .

De acordo com o modelo de Minkowski, em geral,  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{B}$  podem ser funções quaisquer (não lineares) de  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$ , respectivamente. Mas aqui é assumido que o material é homogêneo e isotrópico, com propriedades eletromagnéticas *lineares*, de modo que, para um corpo em repouso (indicado por um superscrito “0”), adota-se as seguintes relações constitutivas:

$$\mathbf{D}^0 = \epsilon_B \mathbf{E}^0 \quad , \quad \mathbf{B}^0 = \mu_B \mathbf{H}^0 \quad , \quad \mathbf{J}^0 = \sigma_B \mathbf{E}^0 \quad (2.2)$$

onde  $\epsilon_B$  é a permissividade elétrica do material que compõe o corpo  $[C/(Vm)]$ ,  $\mu_B$  é a permeabilidade magnética deste material  $[Tm/A]$  e  $\sigma_B$  é a sua condutividade elétrica dada em  $[(\Omega m)^{-1}]$ <sup>1</sup>.

Em seguida, considera-se que estas mesmas relações devem valer em um referencial que esteja se movendo junto com cada ponto material do corpo sólido, ou seja, em um referencial em repouso *em relação ao ponto*. Desta forma, essencialmente as mesmas expressões mostradas nas equações 2.1 podem ser utilizadas para descrever fenômenos eletromagnéticos no interior de um sólido (acrescentando um superscrito “0” a todas as variáveis, de modo a indicar valores associados a um estado de “repouso”).

Mas falta expressar estas relações em termos de campos que possam ser medidos em um referencial que esteja em repouso em relação “ao laboratório”, ou seja, em relação ao referencial de onde se está observando todo o movimento. De acordo com Mohebbi (15), para pequenas velocidades, a mudança de coordenadas para o referencial de laboratório ( $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + \mathbf{v}t$ ) corresponde a transformações dadas por:

$$\begin{cases} \mathbf{E}^0 = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \\ \mathbf{D}^0 = \mathbf{D} + \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{H} \\ \mathbf{H}^0 = \mathbf{H} - \mathbf{v} \times \mathbf{D} \\ \mathbf{B}^0 = \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E} \\ \mathbf{J}^0 = \mathbf{J} - \rho_e \mathbf{v} \end{cases} \quad (2.3)$$

onde  $\mathbf{v}$  é o vetor velocidade associado ao movimento de cada ponto material, e  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$  é a velocidade da luz no vácuo.

Em seguida, algumas simplificações podem ser aplicadas:

<sup>1</sup>  $\mathbf{J} = \sigma_B \mathbf{E}$  é a lei de Ohm generalizada (14).

- O corpo é condutor, de modo que os efeitos das cargas elétricas (representados por  $\rho_e$ ) podem ser ignorados;
- Em condutores não ferromagnéticos, a variação no tempo do campo de deslocamento elétrico ( $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ ) usualmente ocorre muito lentamente em relação à escala de tempo das mudanças no corpo e pode-se adotar uma formulação quase estática para o campo elétrico;
- Os termos com  $c^2$  no denominador ficam muito pequenos e podem ser desprezados.

Estas observações permitem reduzir as equações de Maxwell (eqs. 2.1) para o seguinte conjunto simplificado de equações, válido para pontos materiais no interior de um sólido, em relação a um referencial que se move junto com o ponto:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{B}^0 = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E}^0 = -\frac{\partial \mathbf{B}^0}{\partial t^0} \\ \nabla \times \mathbf{H}^0 = \mathbf{J}^0 \end{cases} \quad (2.4)$$

As mesmas observações permitem modificar as leis de transformação (eqs. 2.3) para:

$$\begin{cases} \mathbf{E}^0 = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \\ \mathbf{H}^0 = \mathbf{H} \\ \mathbf{B}^0 = \mathbf{B} \\ \mathbf{J}^0 = \mathbf{J} \end{cases} \quad (2.5)$$

Notamos que a equação  $\mathbf{B}^0 = \mathbf{B}$ , obtida pela eliminação do termo  $\frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E}$ , implica que se faça  $\mathbf{H}^0 = \mathbf{H}$ . Desta forma, torna-se desnecessário considerar o campo de deslocamento elétrico  $\mathbf{D}$  no que segue.

Então, com o auxílio das leis modificadas (eqs. 2.5) e das relações constitutivas (eqs. 2.2), podemos reescrever as equações 2.1, obtendo equações governantes adequadas para um ponto material e para um referencial de laboratório:<sup>2</sup>:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\mu_B \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} = \sigma_B (\mathbf{E} + \mu_B \mathbf{v} \times \mathbf{H}) \end{cases} \quad (2.6)$$

Finalmente, tomando o rotacional da última equação, obtemos as equações governantes para o campo magnético:

$$\mu_B \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \frac{1}{\sigma_B} \nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = \mu_B \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{H}) \quad (2.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (2.8)$$

<sup>2</sup> Este passo envolve uma transformação de coordenadas e o uso de uma identidade conhecida para o rotacional - ver detalhes em (15).

aonde a equação  $\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_B \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$  não foi incluída porque serve apenas para computar o campo elétrico  $\mathbf{E}$  a partir de  $\mathbf{H}$  e não tem, portanto, interesse no presente estudo.

Notamos que a velocidade  $\mathbf{v}$  que aparece na equação 2.7 se refere à velocidade de deslocamento de cada ponto material do corpo elástico em resposta à deformação imposta pelos carregamentos mecânicos e eletromagnéticos descritos na seção a seguir. A presença desta variável  $\mathbf{v}$  nas equações 2.6 e 2.7, modificando as leis de Ohm e de Ampère ao mesmo tempo, é justamente o que caracteriza a *influência do campo elástico sobre o campo magnético*.

## Condições de contorno

As condições que valem nos contornos do domínio de solução vêm de versões equivalentes das equações de Maxwell na forma integral, obtidas com o auxílio do Teorema da Divergência e do Teorema de Stokes. A descrição a seguir resume a dedução detalhada por Jackson (19).

Sejam  $V$  um volume finito no espaço,  $S$  a superfície fechada que o delimita,  $dS$  um elemento de área sobre esta superfície e  $\hat{\mathbf{n}}$  um vetor unitário normal a  $dS$  apontando para fora do volume delimitado por  $S$ . Então, o Teorema da Divergência aplicado às duas primeiras equações de 2.1 fornece:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_V \rho_e dV \quad (2.9)$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0 \quad (2.10)$$

A primeira relação indica simplesmente que o fluxo total de  $\mathbf{D}$  para fora através de  $S$  deve ser igual à carga contida no seu interior. Notamos que, no presente trabalho, não há cargas elétricas no domínio e que  $\rho_e = 0$ . A segunda relação estabelece que não pode haver fluxo líquido de  $\mathbf{B}$  através da superfície fechada  $S$ , uma vez que as “cargas elementares” magnéticas são dipolos, não sendo possível isolar um “monopolo” e não sendo possível, portanto, ocorrer desequilíbrio de “cargas magnéticas”.

De maneira semelhante, a aplicação do Teorema de Stokes às duas últimas equações de 2.1 leva a:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot \mathbf{l} = - \int_{S'} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}}' dS \quad (2.11)$$

e também:

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot \mathbf{l} = \int_{S'} \left[ \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right] \cdot \hat{\mathbf{n}}' dS \quad (2.12)$$



Jackson utiliza estas versões das equações de Maxwell para estabelecer a relação entre as várias componentes normais e tangenciais dos campos em ambos os lados de uma superfície que se separe meios contínuos diferentes. Ele integra as equações de Maxwell sobre um arranjo geométrico conveniente, consistindo de um volume infinitesimal em forma de pílula, aparecendo como uma “protuberância” para ambos os lados de um ponto em  $S$  e também um circuito fechado infinitesimal  $C$  em torno de um ponto situado muito próximo à superfície e passando por ambos os lados de  $S$  (ou seja,  $C$  consiste em um pequeno loop adequado para a integral de Stokes).

Isto lhe permite concluir, com base em uma integração sobre a “pílula”, que as componentes normais de  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{B}$  de cada da superfície de contorno estão relacionadas por (ver detalhes em (19)):

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \rho_e \quad (2.13)$$

e também:

$$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad (2.14)$$

Desconsiderando a condição para  $\mathbf{D}$  (pois este campo não influencia no presente trabalho), a conclusão é que a componente normal de  $\mathbf{B}$  deve ser considerada contínua através do contorno, o que, considerando a relação constitutiva respectiva, se traduz por:

$$\mu_B \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{H} = \mu_0 \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{H}_0 \quad (2.15)$$

onde  $\mu_0$  é a permissividade do espaço livre, externo ao corpo  $B$ .

De maneira análoga, o loop infinitesimal e as integrais de Stokes permitem concluir, para um caso em que não haja corrente fluindo superficialmente em  $S$ , que:

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \quad (2.16)$$

e também:

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = 0 \quad (2.17)$$

Em palavras, isto garante que as componentes *tangenciais* de  $\mathbf{E}$  e de  $\mathbf{H}$  se mantêm contínuas através de uma superfície que esteja demarcando uma mudança de meios.

Notamos que a condição de contorno 2.14 corresponde exatamente à que foi utilizada para produzir os resultados apresentados no capítulo 7. Mas, para acompanhar as análises

teóricas que servem de base para o presente trabalho, na condição de contorno para  $\mathbf{H}$  é a continuidade da componente tangencial de  $\nabla \times \mathbf{H}$  que é imposta, ou seja:

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\nabla \times \mathbf{H}_2 - \nabla \times \mathbf{H}_1) = 0 \quad (2.18)$$

Notamos que esta é uma condição *mais difícil* de implementar do que a condição 2.17, pois estabelece a fixação dos valores nos contornos em termos de derivadas.

## 2.2 Campo elástico de deslocamentos

Os sistemas magneto-elásticos do tipo tratado no presente trabalho envolvem deslocamentos de partículas materiais que são muito menores do que qualquer dimensão relevante do objeto em análise. Isto significa que é razoável assumir que a sua geometria e as suas propriedades (tais como densidade e rigidez) não são alteradas com o processo de deformação. Em vista disto, as transformações mecânicas envolvidas costumam ser tratadas com as fórmulas clássicas da Elasticidade Linear.

As equações governantes para o Problema a Valores no Contorno elástico e linear que caracteriza a parte elástica do sistema resolvido são as seguintes (20):

- Equação do movimento (aplicação da segunda lei de Newton):

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_B = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (2.19)$$

- Lei de Hooke (relação constitutiva entre tensões e deformações):

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.20)$$

- Relações entre as deformações e os deslocamentos:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] \quad (2.21)$$

onde:

- $\boldsymbol{\sigma}$  é o tensor tensão de Cauchy;
- $\boldsymbol{\varepsilon}$  é o tensor de deformações;
- $\mathbf{u}$  é o vetor de deslocamentos;
- $\mathbf{C}$  é o tensor de rigidez (4ª ordem);
- $\mathbf{f}_B$  representa o efeito das *forças de corpo* por unidade de volume sobre o corpo;
- $\mathbf{A} : \mathbf{B} = A_{ij} B_{ij}$  é o produto interno entre tensores de 2ª ordem (soma sobre índices repetidos).

Uma simplificação que é adequada a problemas magneto-elásticos é assumir que o corpo é composto de um material *isotrópico*. Materiais isotrópicos são caracterizados por suas propriedades serem independentes de direção espacial. Levando em conta a propriedade de isotropia, a lei de Hooke pode ser bastante simplificada e o seu formato mais comum é dado por (21):

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} = \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.22)$$

onde  $\mu$  e  $\lambda$  são as constantes de Lamé,  $\mathbf{I}$  é o tensor identidade e  $\text{tr}(A)$  simboliza o traço do tensor  $A$ . Em notação indicial, a eq. 2.22 é escrita como:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (2.23)$$

## Formulação em deslocamentos

Uma abordagem mais adequada à análise magneto-elástica é escrever tudo em termos *dos deslocamentos* e não das deformações. Neste caso, tensões e deformações são eliminadas da formulação, deixando os deslocamentos como as incógnitas a serem determinadas pelas equações governantes.

Então, conforme descrito em (21), a obtenção desta formulação começa com a substituição das relações entre as deformações e os deslocamentos (eqs. 2.21) na lei de Hooke (eq. 2.23), levando a:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} = \lambda \delta_{ij} u_{k,k} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.24)$$

Isto elimina as deformações como incógnitas e permite computar o divergente do tensor tensão ( $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$ ) como:

$$\sigma_{ij,j} = \lambda u_{k,ki} + \mu (u_{i,jj} + u_{j,ij}) \quad (2.25)$$

o que, substituindo na equação do balanço de momento linear (eq. 2.19), fornece <sup>3</sup>:

$$\rho \partial_{tt}^2 u_i = \mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + f_{B,i} \quad (2.26)$$

ou ainda, retornando à notação tensorial:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{f}_B \quad (2.27)$$

<sup>3</sup> Aqui estamos assumindo que este é um caso em que a ordem das derivadas parciais pode ser trocada.

## Influência do campo eletromagnético

O termo “ $\mathbf{f}_B$ ” que aparece na eq. 2.27 representa as *forças de corpo* (por unidade de volume) que agem sobre o corpo cuja deformação elástica está sendo modelada por esta equação. Incluída no conjunto destas forças de corpo está a influência que o campo magnético exerce sobre o campo elástico. Logo, é razoável separar as forças de origem eletromagnética das forças com outras origens, definindo:

$$\mathbf{f}_B = \mathbf{f} + \mathbf{f}_{EM} \quad (2.28)$$

onde o subscrito “ $EM$ ” se refere especificamente ao carregamento de origem eletromagnética. Resta estabelecer como calcular  $\mathbf{f}_{EM}$  em função do campo de deslocamentos.

Ocorre que a corrente induzida pelo campo magnético  $\mathbf{B}$  (lei de Ampère - ver eqs. 2.1 e 2.6) sobre um condutor tende a *retardar o movimento* deste condutor (10). Além disto, se houver cargas distribuídas (ou seja,  $\rho_e \neq 0$ ) no corpo, o campo elétrico que aparece em consequência das influências magnéticas tende a agir sobre estas cargas, criando forças adicionais que irão interferir com o processo de deformação. A união destes efeitos produz o que é conhecido como “força ponderomotiva de Lorentz”. Quando os efeitos de polarização e magnetização podem ser ignorados (como é o caso), pode-se considerar que a influência que o campo eletromagnético exerce sobre o movimento das partículas é completamente dominada pela força de Lorentz, de modo que se pode escrever (15):

$$\mathbf{f}_{EM} = \rho_e \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (2.29)$$

Então, usando a lei de Ampère (eq. 2.6), e notando que estamos assumindo que  $\rho_e = 0$ , podemos reescrever a eq. 2.29 como:

$$\mathbf{f}_{EM} = \mu_B (\nabla \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H} \quad (2.30)$$

o que, substituído na eq. 2.27, fornece a equação governante para o campo de deslocamentos elásticos no contexto de um problema magneto-elástico:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \mu \nabla^2 \mathbf{u} - (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) = \mu_B (\nabla \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H} + \mathbf{f} \quad (2.31)$$

## Condições de contorno

Por simplicidade, vamos adotar a condição:

$$\mathbf{u} = 0 \quad (2.32)$$

a qual corresponde a fixar todas as extremidades do corpo. Ela serve perfeitamente para o objetivo de desenvolver uma estratégia capaz de resolver numericamente este problema. Uma vez que a estratégia esteja elaborada e testada, ela pode facilmente ser adaptada a qualquer outra condição fisicamente realista.

## 2.3 Sistema magneto-elástico

Neste ponto, já é possível escrever uma primeira versão para o sistema completo de EDPs que descreve fenômenos magneto-elásticos em corpos não ferromagnéticos. Considerando o exposto nas seções anteriores, ela é dada pelas equações 2.31, 2.7 e 2.8, resumidas a seguir:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \mu \nabla^2 \mathbf{u} - (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) = \mu_B (\nabla \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H} + \mathbf{f}$$

$$\mu_B \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \frac{1}{\sigma_B} \nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = \mu_B \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{H})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$$

com as seguintes condições de contorno (eqs. 2.32, 2.15 e 2.18):

$$\mathbf{u} = 0, \quad \mu_B \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{H} = \mu_0 \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{H}_0, \quad \hat{\mathbf{n}} \times (\nabla \times \mathbf{H}_2 - \nabla \times \mathbf{H}_1) = 0$$

Um último ajuste ainda pode ser feito, de modo a levar em conta o fato de que, em um domínio que envolva materiais não ferromagnéticos, a diferença entre os valores assumidos por  $\mathbf{H}$  e o valor (constante) do campo que estiver sendo imposto externamente (usualmente chamado de  $\mathbf{H}_E$ ) é normalmente muito pequena. Neste caso, de acordo com Mohebbi (15), é melhor adotar a seguinte mudança de variável:

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}, t) + \tilde{\mathbf{H}}_E \quad (2.33)$$

onde:

$$\tilde{\mathbf{H}}_E = \frac{\mu_0}{\mu_B} \mathbf{H}_E = \frac{\mathbf{H}_E}{\mu_r} \quad (2.34)$$

Nestas equações, temos que:

- $\tilde{\mathbf{H}}_E$  é o “campo magnético externo corrigido pelas permeabilidades” [ $A/m$ ]
- $\mu_0$  é a permeabilidade magnética do espaço livre [ $Tm/A$ ]
- $\mu_B$  é a permeabilidade magnética do material do corpo [ $Tm/A$ ]
- $\mu_r$  é a permeabilidade relativa do material do corpo

Esta mudança é conveniente porque, com ela, a equação governante para  $\mathbf{h}$  passa a focar exclusivamente na parte essencial do que ocorre com  $\mathbf{H}$ . Isto também ressalta a parte que deve ser considerada em uma eventual linearização do acoplamento entre as EDPs para  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{h}$ . Finalmente, esta modificação permite que as condições de contorno para  $\mathbf{H}$  passem a ser homogêneas, facilitando o processamento numérico (e a análise teórica).

Com esta modificação, chegamos ao sistema que efetivamente é considerado no presente trabalho:

$$\rho_M \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \mu \nabla^2 \mathbf{u} - (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = \mu_B (\nabla \times \mathbf{h}) \times (\mathbf{h} + \tilde{\mathbf{H}}_E) + \mathbf{f} \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} + \frac{1}{\sigma_B \mu_B} \nabla \times \nabla \times \mathbf{h} = \nabla \times \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \times (\mathbf{h} + \tilde{\mathbf{H}}_E) \right) \quad (2.36)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{h} = 0 \quad (2.37)$$

Com as condições de contorno dadas por:

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \mathbf{h} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad (\nabla \times \mathbf{h}) \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{0} \quad (2.38)$$

onde  $\hat{\mathbf{n}}$  denota a normal unitária dirigida para fora em cada ponto da fronteira.

Este sistema corresponde exatamente às eqs. (1.1), (1.2), (1.3) e (1.6) do trabalho de Mohebbi e Oliveira (22), o qual consiste na principal referência para o presente trabalho.

## 3 Referenciais teóricos

A principal referência teórica para este trabalho é o artigo de Mohebbi e Oliveira (22). O objetivo é obter resultados numéricos *com métodos espectrais* para o problema padrão de magneto-elasticidade que foi analisado naquele artigo sob um ponto de vista estritamente teórico. Este problema padrão consiste em um sistema de EDPs cuja resolução numérica guarda muita semelhança com a resolução numérica de escoamentos incompressíveis, de modo que a literatura disponível sobre métodos espectrais específica para CFD foi fundamental para a sua solução. Finalmente, um objetivo adicional é usar os resultados numéricos obtidos para contribuir com a discussão de estabilidade assintótica e decaimento de energia total para este tipo de problema, de modo que os artigos específicos deste tema devem ser considerados.

Em vista disto, o conjunto de materiais teóricos que serve como referência para este trabalho pode ser dividido em 2 grupos distintos:

- Referências sobre métodos espectrais em geral e aplicados a CFD;
- Referências sobre o estudo do decaimento de energia deste sistema.

### 3.1 Métodos espectrais e CFD

Ignorando, momentaneamente, as diferenças de origem e característica entre os termos não lineares, o problema da obtenção do campo magnético (eqs. 2.36) é de natureza bastante semelhante ao clássico sistema parabólico/solenoidal que descreve escoamentos viscosos incompressíveis, representado pelas clássicas equações de Navier-Stokes (NS). Langtangen et al. (23), criadores do pacote FEniCS <sup>1</sup>, apresentam um resumo geral das principais estratégias para a obtenção de soluções numéricas para escoamentos incompressíveis viscosos, com um foco em elementos finitos, que serve como uma rápida referência para comparação entre os diversos métodos disponíveis

Entre as simulações numéricas encontradas na literatura, o trabalho de Lee et al. (11), realizado com Elementos Finitos, é que mais se aproxima do presente trabalho. Lee et al. trataram do mesmo conjunto de equações, mas não desprezam o termo  $\frac{\partial D}{\partial t}$  na lei de Ampère. Com isto, eles aproveitaram o mesmo solver hiperbólico para tratar dos aspectos eletromagnético e mecânico no procedimento numérico. A preocupação de Lee et al. era com aspectos de engenharia, de modo que eles não produziram uma solução numérica, mas

<sup>1</sup> FEniCS (24) é uma plataforma em software livre que permite uma rápida tradução de modelos científicos para uma codificação direta em Elementos Finitos.

apenas configuraram um pacote comercial para um caso especial relativo a uma análise de vibrações em uma placa presa em uma extremidade e sujeita a um campo magnético intenso. Eles mencionam que utilizaram um método de penalidades para deixar o campo solenoidal, mas não comentam sobre o desempenho deste método. Em compensação, eles conseguiram obter resultados bastante próximos às medidas experimentais disponíveis para o deslocamento da ponta da placa no caso por eles analisado.

Como o foco do presente estudo é na viabilidade da utilização de métodos espectrais para a solução de um problema muito semelhante a um problema de escoamento de fluidos, a principal referência para o desenvolvimento de um método adequado foram dois livros de Canuto et al. (16)(25) com uma compilação das principais estratégias de aplicação de métodos espectrais em problemas de Dinâmica de Fluidos. O livro de Boyd (26) também foi essencial como uma referência mais geral e mais completa sobre a aplicação de métodos espectrais a problemas dependentes do tempo.

A utilização de métodos pseudo-espectrais para converter o sistema de EDPs em um problema matricial foi totalmente baseada no livro de Trefethen (27), A implementação propriamente dita for efetivada em Octave (28).

## 3.2 Decaimento de energia em sistemas magneto-elásticos

O sistema estudado por Mohebbi e Oliveira (22) também tem sido analisado sob o ponto de vista da sua estabilidade. Analisar o decaimento de energia em um sistema para tempos assintoticamente grandes é um elemento fundamental para saber se a solução obtida é estável. Menzala e Zuazua (29) estudaram o comportamento das ondas magneto-elásticas em um meio condutor 3D limitado. A fim de proceder a análise, eles *linearizam* as equações da magneto-elasticidade não linear em torno de uma solução em que o campo magnético é constante. A análise assintótica revela que a taxa de dissipação de energia não está relacionada com a amplitude de vibração do corpo elástico, mas apenas com o campo magnético. Usando decomposição de Fourier das soluções, eles reduzem o problema a uma busca por autofunções que não estejam amortecidas. Eles provam que, se o domínio for simplesmente conexo, estas autofunções não existem.

Charão et al. (30) analisaram o mesmo problema de comportamento assintótico da energia do sistema estudado por Menzala e Zuazua. Incluindo um *mecanismo de dissipação não linear* na equação governante das ondas elásticas, eles conseguiram provar que a energia total do sistema. Decai a zero à medida que  $t \rightarrow \infty$ . Ou seja, com a inclusão deste mecanismo, o sistema magneto-elástico descrito é estável. Charão et al. definem a energia total do sistema como:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [|\mathbf{u}_t|^2 + \mu |\nabla \mathbf{u}|^2 + (\lambda + \mu)(\nabla \cdot \mathbf{u})^2 + \alpha |h|^2] dx \quad (3.1)$$



onde:

- $|u_t|^2 = \sum_{j=1}^3 \left| \frac{\partial u_j}{\partial t} \right|^2$
- $|\nabla \mathbf{u}|^2 = \sum_{j=1}^3 |\nabla u_j|^2$
- $|\mathbf{h}|^2 = \sum_{j=1}^3 |h_j|^2$

Mesmo assumindo linearidade das relações constitutivas, o acoplamento entre as equações do sistema é não-linear. Por esta razão, alguns autores “linearizam” o acoplamento, visando possibilitar uma análise teórica (como em (31)) ou visando simplificar uma análise numérica do problema.

Este mesmo problema foi analisado por Rivera e Racke (31), mas para o caso em que o acoplamento entre as equações do sistema hiperbólico-parabólico é *linearizado*. Eles provaram que, neste caso, para tempos assintoticamente grandes, a taxa de decaimento da energia com o tempo é *polinomial*.

O presente trabalho lida com a mesma configuração espacial de (31), mas inclui todas as não-linearidades das equações governantes. Especificamente, são obtidos resultados numéricos para um problema 2D correspondente a uma barra infinita de seção quadrada de material não ferromagnético, em um modelo de magneto-elasticidade linear, mas considerando o acoplamento entre as EDPs como não-linear. Em seguida, são apresentadas curvas descrevendo o comportamento da taxa de decaimento de energia deste sistema para alguns valores de dois parâmetros chave para descrever o sistema.

É importante notar que, devido ao acoplamento fortemente não-linear e às características de um sistema hiperbólico-parabólico, o problema 2D já apresenta algumas das principais dificuldades numéricas do problema 3D. Ou seja, o problema 2D deve ser analisado antes de qualquer tentativa de se resolver o problema 3D completo.



Parte II

Metodologia



## 4 Métodos Pseudo-espectrais

O sistema magneto-elástico em estudo foi discretizado por métodos pseudo-espectrais. Este capítulo mostra uma breve descrição destes métodos, de acordo com Trefethen (27).

O esquema pseudo-espectral transforma todas as discretizações das derivadas espaciais em operações matriciais. Uma vez definida a discretização espacial, os avanços no tempo são computados com a resolução de um sistema de equações diferenciais ordinárias.

Na discretização pseudo-espectral, em um domínio quadrado 2D, é criada uma malha com pontos não uniformemente espaçados em ambas as direções  $x$  e  $y$ . Em cada ponto desta malha, o valor da derivada em um ponto em uma certa linha (ou coluna) se torna uma simples multiplicação de uma matriz especial (a “matriz de diferenciação”) por um vetor contendo todos os valores daquela linha (ou coluna). Com isto, é possível fazer rapidamente qualquer equação diferencial virar um sistema linear de forma clara, direta e objetiva. Uma convergência “espectral” (erro caindo exponencialmente a zero com o refinamento da malha) é conseguida com o posicionamento dos nós da malha em pontos especiais, os “pontos de colocação de Chebyshev”. Os objetivos deste capítulo são:

- Definir quais são os pontos de colocação de Chebyshev e discutir o porquê deles levarem a um resultado tão melhor do que pontos igualmente espaçados;
- Definir como computar as matrizes de diferenciação de Chebyshev;
- Mostrar como estas matrizes podem utilizadas para discretizar e resolver equações diferenciais parciais (EDPs).

### 4.1 Interpolação polinomial eficiente

Na verdade, a ideia básica consiste em considerar que a solução de uma EDP pode ser dada por uma *interpolação polinomial* que se aproxima tanto quanto possível da solução real. O uso de interpolações polinomiais de grau  $N$  na solução de EDPs consiste em determinar os  $N + 1$  coeficientes em polinômios algébricos:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_Nx^N \quad (4.1)$$

com base na informação fornecida pela EDP. Mas a determinação destes coeficientes está diretamente ligada à especificação dos pontos (ou nós) por onde o polinômio deve passar. Pode-se pensar em utilizar *pontos igualmente espaçados* para servir de base para a interpolação, mas esta ideia não funciona em geral. Um problema conhecido como

“fenômeno de Runge” impede que as aproximações computadas sobre  $N + 1$  pontos igualmente espaçados convirjam à medida que  $N \rightarrow \infty$ . É melhor usar interpolações definidas sobre *pontos distribuídos de maneira não uniforme* e há diversas distribuições de pontos que são comprovadamente efetivas. O conjunto mais simples de nós de interpolação que produzem aproximações polinomiais que convergem assintoticamente à medida que  $n \rightarrow \infty$  são os chamados *pontos de Chebyshev*, dados por:

$$x_j = \cos\left(\frac{j\pi}{N}\right), \quad j = 0, 1, \dots, N \quad (4.2)$$

Geometricamente, como mostra a figura 2, estes pontos podem ser visualizados como as projeções em  $[-1, 1]$  de pontos igualmente espaçados sobre a metade superior de um círculo unitário.

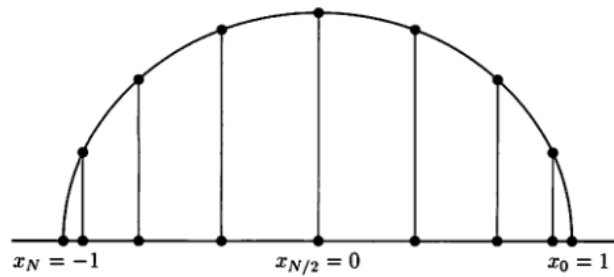


Figura 2 – Espaçamento desigual entre os pontos de Chebyshev (27).

A figura 3 ilustra o efeito da utilização deste conjunto de nós: para um  $N$  grande ( $N = 16$ , neste caso), o fenômeno de Runge aparece e o erro máximo da interpolação com pontos igualmente espaçados aumenta exponencialmente com o aumento de  $N$ . No caso da interpolação com nós de Chebyshev, este mesmo erro decresce exponencialmente.

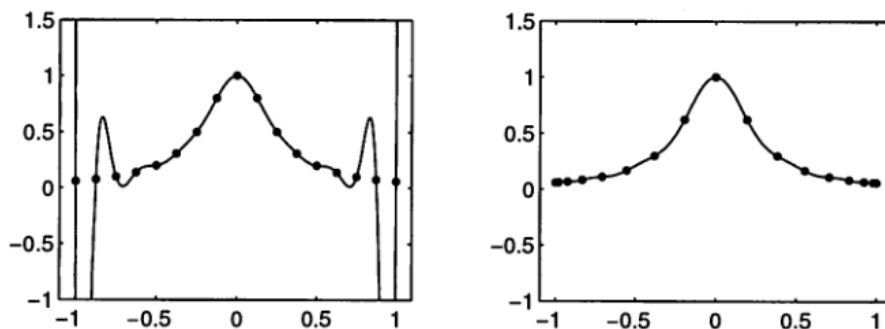


Figura 3 – Interpolação de grau 16 para  $f(x) = 1/(1 + 16x^2)$ . Fenômeno de Runge aparece para nós de interpolação igualmente espaçados (27).

## 4.2 Matrizes de diferenciação de Chebyshev

A interpolação espectral se caracteriza por utilizar os pontos de Chebyshev como base. Então, dado um vetor  $v$  contendo valores (discretos) de uma função  $f(x)$  qualquer nos pontos de Chebyshev  $x_j = \cos(j\pi/N)$ ,  $j = 0, 1, \dots, N$ , o esquema permite obter uma derivada discreta  $w$  da seguinte forma:

- Seja  $p(x)$  o polinômio de grau  $\leq N$  tal que  $p(x_j) = v_j$ ,  $0 \leq j \leq N$ ;
- Faça  $w_j = p'(x_j)$

Como esta operação é linear, ela pode ser representada pela multiplicação por uma matriz  $(N+1) \times (N+1)$ . Esta matriz, denotada por  $D_N$ , é dada por:

$$w = D_N v \quad (4.3)$$

O teorema a seguir define a composição desta matriz para um  $N$  dado.

**Teorema** (Matriz de diferenciação de Chebyshev)

Seja  $N \geq 1$  e sejam as linhas e colunas da matriz de diferenciação espectral de Chebyshev  $D_N$  indexadas de 0 até  $N$ . Os elementos desta matriz são dados por:

$$\begin{aligned} (D_N)_{00} &= \frac{2N^2 + 1}{6}, & (D_N)_{NN} &= -\frac{2N^2 + 1}{6}, \\ (D_N)_{jj} &= \frac{-x_j}{2(1 - x_j^2)}, & j &= 1, \dots, N-1, \\ (D_N)_{ij} &= \frac{c_i (-1)^{i+j}}{c_j x_i - x_j}, & i &\neq j, \quad i, j = 0, \dots, N, \end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned} c_i &= 2, & \text{para } i = 0 \text{ ou } N, \\ c_i &= 1, & \text{caso contrário} \end{aligned}$$

A demonstração deste teorema é fornecida como um exercício em (27).

A figura 4 mostra um exemplo de diferenciação obtido com a aplicação deste esquema à obtenção de derivadas da função  $u(x) = e^x \text{sen}(5x)$ : para um  $N = 20$ , nota-se que os erros nos pontos de Chebyshev ficam na ordem de  $10^{-10}$ .

Quando a função é suave, a acurácia espectral aparece como um decaimento exponencial, à medida que o valor de  $N$  é aumentado. A figura 5 ilustra este efeito, mostrando os erros máximos, para  $N$  variando de 1 até 50, de uma interpolação de Chebyshev sobre a função  $f(x) = 10x^9$ . O que está mostrado na figura é o comportamento

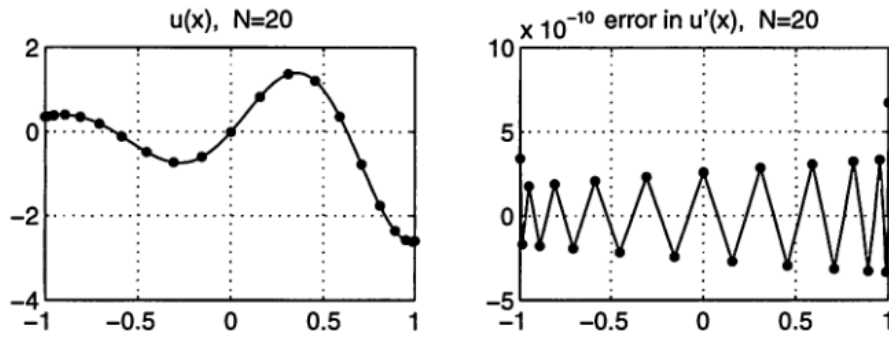


Figura 4 – Diferenciação de Chebyshev para  $u(x) = e^x \text{sen}(5x)$  com  $N = 20$ . (27)

típico das curvas de erro das interpolações espectrais sobre funções totalmente suaves. Notamos que este comportamento não aparece quando a função apresenta qualquer irregularidade, tais como ser descontínua ou não ser analítica.

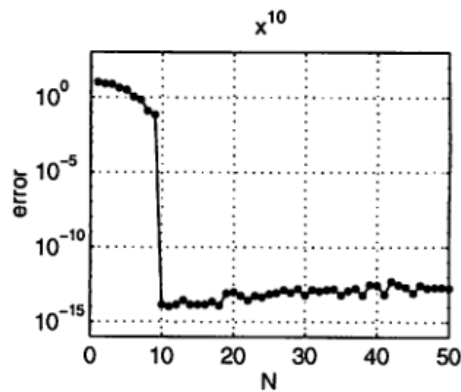


Figura 5 – Acurácia da diferenciação de Chebyshev para a função  $f(x) = 10x^9$  com  $N = 20$  (27).

### 4.3 Resolução de PVCs com métodos pseudo-espectrais

O raciocínio de produzir uma diferenciação discreta como uma multiplicação pela matriz  $D_N$  pode ser estendido para 2D e pode ser utilizado na resolução de Problemas a Valores no Contorno. Neste caso, os pontos de Chebyshev formam um produto tensorial dos pontos para 1D e a diferenciação é efetuada nas linhas verticais e horizontais formadas por este produto. Os nós agora são numerados segundo uma ordem natural, da esquerda para a direita e de baixo para cima. A figura 6 ilustra este procedimento para o caso  $N = 4$ . Note-se que os nós da fronteira não são incluídos na numeração porque representam valores especificados pelas condições de contorno. A matriz 1D  $D_N$  é estendida para derivadas parciais 2D seguindo as linhas e colunas e utilizando produtos de Kronecker de matrizes (ver detalhes em (27)).



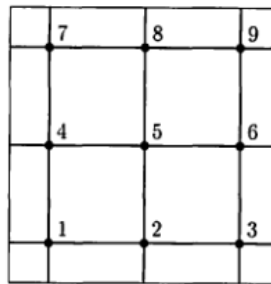


Figura 6 – Numeração típica de uma malha de Chebyshev em um domínio quadrado (27).

É importante notar que toda esta implementação é bastante simplificada quando a programação é feita em linguagem Octave. Esta é uma linguagem dedicada à Álgebra Linear Computacional, de modo que operações como multiplicações matriciais e produtos de Kronecker são implementados com comandos simples e eficientes.



## 5 Tratamento de $\nabla \cdot \mathbf{h} = 0$

Este capítulo trata especificamente da obtenção da solução numérica para o campo magnético ( $\mathbf{h}$ ) a partir das equações 2.36 e 2.37, as quais são dadas por:

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} + \nu_1 \nabla \times \nabla \times \mathbf{h} = \nabla \times \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \times (\mathbf{h} + \tilde{\mathbf{H}}_E) \right) \quad (5.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{h} = 0 \quad (5.2)$$

Considerando-se apenas um ponto de vista teórico, pode-se dizer que a equação  $\nabla \cdot \mathbf{h} = 0$  é automaticamente satisfeita em qualquer instante de tempo se o transiente de um sistema magneto-elástico partir de um campo inicial que já respeita esta condição. Isto é fácil de observar a partir da equação 5.1, pois basta aplicar o operador divergente a ambos os lados desta equação e o que obtemos é:

$$\frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{h})}{\partial t} = 0 \quad (5.3)$$

Esta equação deixa claro que, em se tratando de soluções *exatas*, se o processamento numérico for iniciado com um campo solenoidal, o sistema magneto-elástico não vai alterar esta condição ao longo do transiente.

No entanto, na prática, o respeito à condição  $\nabla \cdot \mathbf{h} = 0$  não é automático e *precisa ser reforçado a cada passo do transiente* para que a solução obtida seja realista fisicamente. Jiang et al. (32) mostram que a não inclusão desta condição no modelo está na origem do aparecimento de soluções “espúreas” no eletromagnetismo computacional que costumavam ser atribuídas a deficiências dos métodos numéricos.

Existem várias maneiras de se levar em consideração a condição  $\nabla \cdot \mathbf{h} = 0$  durante o processo numérico. A maneira mais comum consiste em encarar esta condição como uma restrição na busca de uma solução “ótima” para a equação 5.1. Segundo esta abordagem, são empregados métodos numéricos acoplados a técnicas clássicas de otimização, tais como o método das penalidades (ver o resumo de Langtangen et al. (23)).

O método das penalidades foi testado no presente trabalho para tentar obter os campos de  $\mathbf{h}$ , mas os resultados não foram satisfatórios. O método depende de um  $\lambda$  que precisa ser ajustado empiricamente em cada caso e, em vários casos, não foi possível obter convergência. Optou-se, então, por explorar a analogia entre o problema magneto-elástico e a solução numérica de escoamentos incompressíveis, com o intuito de aproveitar a extensa

e consistente literatura já disponível na área de Dinâmica dos Fluidos Computacional, na busca de uma solução que se ajustasse bem à solução das equações 5.1 e 5.2.

Depois de alguns testes, notamos que o avanço no tempo das equações governantes para o campo magnético ( $\mathbf{h}$ ) poderia ser realizado com uma adaptação do método de *splitting* de Chorin-Temam, descrito na seção 5.3. A adaptação consistiu na adição de uma variável artificial semelhante à pressão na equação de  $\mathbf{h}$ , a fim de permitir a aplicação do método de Chorin-Temam. Uma parte de um resultado teórico produzido por Mohebbi em sua tese (15) com outros objetivos foi usada como base para justificar esta adição. O cap. 7 mostra que o método assim formado mostrou-se eficaz na resolução de um PVI magneto-elástico dado.

## 5.1 Método das penalidades

Supondo que a solução da equação 5.1 corresponda à minimização de um funcional, o método funciona acrescentando um termo proporcional a  $\nabla \cdot \mathbf{h} = 0$  ao funcional a ser minimizado. Com isto, as soluções que produzem um  $\nabla \cdot \mathbf{h} \neq 0$  maior são “penalizadas” na competição pela posição de “ótimo” pois levam a valores artificialmente altos quando avaliadas pelo funcional. Campos de  $\mathbf{h}$  com um  $\nabla \cdot \mathbf{h}$  menor aparecem como mais “atraentes” ao processo de minimização e tendem a ser encontrados primeiro.

Segundo Langtangen et al. (23), o método das penalidades está muito bem fundamentado para o caso do problema de Stokes e costuma ser estendido de forma heurística para as equações de Navier-Stokes completas pela simples eliminação da pressão  $p$  com o uso da seguinte definição:

$$p = -\lambda \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (5.4)$$

a qual, quando substituída na equação de Navier-Stokes:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{g} \quad (5.5)$$

resulta na seguinte equação governante para o escoamento:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla p = \frac{\lambda}{\rho} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \nu \nabla^2 p + \mathbf{g} \quad (5.6)$$

Valores de  $\lambda$  muito elevados favorecem mais o termo contendo  $\nabla \cdot \mathbf{v}$  e tendem a anular os demais termos, produzindo soluções que podem não respeitar a equação governante principal. Por outro lado, valores de  $\lambda$  muito pequenos tendem a diminuir a importância de  $\nabla \cdot \mathbf{v}$  e a produzir soluções em que a conservação da massa não é adequadamente respeitada. O valor correto de  $\lambda$  precisa ser determinado empiricamente em cada caso e, em alguns casos, exige alterações na malha para que a convergência seja possível (23).

No caso da equação 5.1, o método pode ser aplicado considerando-se a identidade:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{h} = -\nabla^2 \mathbf{h} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{h}) ,$$

Com esta identidade, a eq. 5.1 pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} - \nabla \times \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \times \left( \mathbf{h} + \frac{\tilde{\mathbf{H}}_E}{\tilde{H}_E} \right) \right) = -\nu_1 \nabla(\nabla \cdot \mathbf{h}) + \nu_1 \nabla^2 \mathbf{h} \quad (5.7)$$

o que, por analogia com Navier-Stokes, produz o seguinte problema de otimização:

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} - \nabla \times \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \times \left( \mathbf{h} + \frac{\tilde{\mathbf{H}}_E}{\tilde{H}_E} \right) \right) = \nu_1 \lambda \nabla(\nabla \cdot \mathbf{h}) + \nu_1 \nabla^2 \mathbf{h} \quad (5.8)$$

NOTA: os valores de  $\lambda$  costumam ser muito altos, na ordem de  $10^8$ .

## 5.2 Análise de Mohebbi

Como já foi mencionado, as equações governantes para o campo magnético são muito semelhante às equações de Navier-Stokes (NS). No entanto, NS contém um termo com um gradiente de pressão que não aparece na equação do campo magnético. De um ponto de vista numérico, pode-se interpretar a pressão  $p$  como uma variável que só entra na formulação de NS para regular o valor de  $\nabla \cdot \mathbf{v}$ , fazendo com que ele se mantenha em valores pequenos, de modo a garantir que os campos de  $\mathbf{v}$  obtidos em uma simulação numérica sejam fisicamente realistas. De um ponto de vista teórico, é conhecido que  $\nabla p$  pertence a um espaço de funções que são ortogonais ao espaço aonde está a solução  $\mathbf{v}$ . Em sua tese de doutorado (15), Mohebbi analisa o que aconteceria se a equação para o campo magnético do sistema magneto-estático também incluísse um termo do tipo  $\nabla p$ , o qual pertenceria ao espaço de funções que são ortogonais ao espaço aonde está a solução  $\mathbf{h}$ . Ele observa que, apesar da semelhança entre os dois problemas, os espaços de soluções são diferentes e prova que, no caso do campo magnético, se existisse um termo em gradiente de “pressão” na equação de  $\mathbf{h}$ , este termo pertenceria ao mesmo tempo ao espaço de soluções e ao espaço ortogonal a ele, sendo, portanto, necessariamente nulo.

Ocorre que esta observação específica é equivalente a dizer que um gradiente de uma função escalar *poderia ser acrescentado à equação governante do campo magnético* sem que isto viesse a prejudicar a solução. Pela prova de Mohebbi, esta função teria que acabar sendo identicamente nula e a solução obtida com a presença desta função teria que ser *a mesma que aquela que seria obtida sem a presença do gradiente*.

Então, com base nesta observação de Mohebbi, no presente trabalho um certo  $-\nabla p$  é acrescentado ao lado direito das equações que governam o campo magnético. Este termo é, então, tratado com um método de passo fracionário, exatamente como o seria se fizesse

parte de NS. Isto deu origem ao método proposto no presente trabalho, o qual, com base nos resultados apresentados no cap. 7 mostrou-se eficaz, permitindo que o problema de garantir que a restrição  $\nabla \cdot \mathbf{h}$  seja respeitada a cada avanço no tempo fosse resolvido com os recursos já estudados e testados da área de CFD com métodos espectrais.

### Justificativa alternativa para a inclusão de $p$

Um argumento empírico ajuda a justificar a inclusão de uma variável “artificial”  $p$  (análoga à pressão) na equação do campo magnético. Notamos que, se retomarmos a eq. 5.7, e se definirmos  $p = \nabla \cdot \mathbf{h}$ , obtemos uma equação com o seguinte formato:

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} - \nabla \times \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \times \left( \mathbf{h} + \frac{\tilde{\mathbf{H}}_E}{\tilde{H}_E} \right) \right) = -\nu_1 \nabla p + \nu_1 \nabla^2 \mathbf{h} \quad (5.9)$$

Evidentemente, levando em conta a eq. 5.2,  $p$  teria que ser nulo em todo o domínio. Porém, no formato original, o conjunto das equações 5.1 e 5.2 forma um sistema sobredeterminado para  $\mathbf{h}$ . Com a inclusão desta nova incógnita “artificial”, passamos a ter um sistema com exatamente o mesmo número de incógnitas e de equações. No entanto, agora teríamos um problema bastante semelhante ao de NS e isto justificaria a busca de métodos de CFD para auxiliar na determinação do campo magnético.

## 5.3 Avanço com passo fracionado (splitting)

O sistema hiperbólico-parabólico que é o foco do presente trabalho tem uma semelhança muito grande com o sistema de EDPs que define as equações de Navier-Stokes (NS). Além de ser consistir em um sistema de EDPs que pode ser classificado como elíptico-parabólico, NS também exige que uma condição do tipo solenoidal (“ $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ ”) seja satisfeita (para garantir conservação de massa). Ambos os sistemas apresentam um termo não linear, embora, no caso de Navier-Stokes, esta não linearidade apareça na forma de um termo convectivo e no caso do campo magnético ela represente uma perturbação não linear fortemente ligada à solução de uma outra EDP (ligada ao campo de deslocamentos elásticos).

Porém, NS inclui naturalmente em sua formulação uma variável adicional, a pressão ( $p$ ), a qual estabelece um papel bem definido para a equação  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  (continuidade): *servir de equação para  $p$* . No entanto, a variável  $p$  aparece explicitamente somente nas equações do movimento, já reservadas para as componentes da velocidade  $\mathbf{u}$ , e não aparece na equação da continuidade (única equação que sobraria para caracterizá-la). O tratamento da pressão é justamente um dos obstáculos mais importantes a serem vencidos para a obtenção de uma solução numérica para NS, justificando a necessidade de cuidadosas adaptações dos métodos numéricos gerais de tratamento do transiente em EDPs.

As técnicas de discretização no tempo mais comumente usadas com métodos espectrais em escoamentos incompressíveis são os chamados “métodos de passo fracionário” (16). Estes métodos produzem uma *cascata de passos* nos quais é preciso resolver problemas elípticos envolvendo separadamente a velocidade (equações de Helmholtz ou equações de advecção-difusão) ou a pressão (equação de Poisson).

### Método de splitting de Chorin-Temam

Este é o mais simples entre os métodos de passo fracionário e é o que foi implementado no presente trabalho. Pensando em passar do instante  $t^n$  para o instante  $t^{n+1}$ , a discretização temporal para a equação de NS (eq. 5.5) poderia ser a seguinte:

$$\frac{1}{\Delta t}(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n) - \nu \nabla^2 \mathbf{u}^{n+1} = -\frac{1}{\rho} \nabla p^{n+1} + \mathbf{f}^{n+1} - C(\mathbf{u}^n) \quad (5.10)$$

onde  $C(\cdot)$  designa, genericamente, os termos convectivos. Esta é uma estratégia de discretização bem comum, em que os termos lineares são tratados de forma implícita (sendo avaliados no instante  $t^{n+1}$ ), enquanto que os termos não lineares são avaliados explicitamente (em  $t^n$ ).

Uma estratégia de “passo fracionário” consiste em não executar este avanço todo de uma vez, mas fragmentá-lo em dois passos, gerando um instante no tempo intermediário artificial “ $\hat{t}^{n+1}$ ”, em que a continuidade ainda não é satisfeita. A maneira escolhida por Chorin e Temam para reescrever a forma discretizada de NS, eq. 5.10, levando em conta este momento intermediário, é a seguinte:

$$\frac{1}{\Delta t} \left( \mathbf{u}^{n+1} (-\hat{\mathbf{u}}^{n+1} + \hat{\mathbf{u}}^{n+1}) - \mathbf{u}^n \right) - \nu \nabla^2 \hat{\mathbf{u}}^{n+1} = -\frac{1}{\rho} \nabla p^{n+1} + \mathbf{f}^{n+1} - C(\mathbf{u}^n) \quad (5.11)$$

A ação de “splitting” se refere justamente a separar esta equação em duas partes, sendo cada parte executada em um passo, de acordo com o seguinte esquema:

- Passo #1:  $\frac{1}{\Delta t}(\hat{\mathbf{u}}^{n+1} - \mathbf{u}^n) - \nu \nabla^2 \hat{\mathbf{u}}^{n+1} = \mathbf{f}^{n+1} - C(\mathbf{u}^n)$
- Passo #2:  $\frac{1}{\Delta t}(\mathbf{u}^{n+1} - \hat{\mathbf{u}}^{n+1}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p^{n+1}$

No primeiro passo, o campo de velocidades é passado de  $\mathbf{u}^n$  para um estado intermediário, chamado de  $\hat{\mathbf{u}}^{n+1}$ , o qual satisfaz apenas parcialmente a equação governante, pois o termo de  $\nabla p$  não é incluído na solução (esta é uma etapa de “predição”). Em um segundo passo, o termo da pressão é utilizado para atualizar o campo parcialmente processado  $\hat{\mathbf{u}}^{n+1}$ , levando-o para um estado solenoidal.

Existem alguns detalhes adicionais que devem ser levados em consideração. Uma descrição detalhada extraída de Canuto et al. (16) é apresentada a seguir.

## Algoritmo de splitting de Chorin-Temam

Considerando o transiente de um problema magneto-elástico em um domínio  $\Omega$ , com fronteira  $\partial\Omega$ , para passar de  $t^n$  para  $t^{n+1}$ , os seguintes passos devem ser executados:

- Primeiro passo:

Obter um campo de preliminar de velocidades  $\hat{\mathbf{u}}^{n+1}$ , resolvendo o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t}(\hat{\mathbf{u}}^{n+1} - \mathbf{u}^n) - \nu \nabla^2 \hat{\mathbf{u}}^{n+1} &= \mathbf{f}^{n+1} - C(\mathbf{u}^n) && \text{em } \Omega \\ \hat{\mathbf{u}}^{n+1} &= 0 && \text{em } \partial\Omega \end{aligned}$$

onde  $C(\mathbf{u}^n)$  inclui o termo convectivo, o qual costuma ser tratado explicitamente;

- Segundo passo:

Projetar esta solução preliminar no espaço de soluções solenoidais, resolvendo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t}(\mathbf{u}^{n+1} - \hat{\mathbf{u}}^{n+1}) + \frac{1}{\rho} \nabla p^{n+1} &= 0 && \text{em } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} &= 0 && \text{em } \Omega \\ \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{n} &= 0 && \text{em } \partial\Omega \end{aligned}$$

- Na verdade, este passo é usualmente reduzido à resolução de um problema de Poisson para a pressão, dado por:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \nabla^2 p^{n+1} &= \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \hat{\mathbf{u}}^{n+1} && \text{em } \Omega \\ \frac{\partial p^{n+1}}{\partial n} &= 0 && \text{em } \partial\Omega \end{aligned}$$

- Seguida de uma atualização final do campo de velocidades para a condição correta:

$$\mathbf{u}^{n+1} = \hat{\mathbf{u}}^{n+1} - \frac{1}{\rho} \nabla p^{n+1}$$

O método de Chorin-Temam é um esquema de baixa ordem (apenas  $O(\Delta t)$  na velocidade), apresentando um erro de splitting acentuado que pode ser remediado pelo uso de técnicas de splitting mais sofisticadas. Porém, é um método razoavelmente simples de implementar e serve perfeitamente para mostrar que a inserção de uma variável artificial (análoga à pressão) na equação governante para o campo magnético em sistemas magneto-elásticos constitui-se em uma estratégia eficaz para a obtenção de soluções numéricas que respeitem a restrição  $\nabla \cdot \mathbf{h} = 0$ . Uma vez que esta eficácia esteja comprovada, é uma tarefa simples substituir o método de Chorin-Temam por um esquema que apresente segunda ordem no erro, tal como o esquema de Van Kan (descrito em detalhes em (16)) ou o método de alta ordem proposto por Karniadakis (33).



## Parte III

### Formulação e resultados



## 6 Formulação do problema

O sistema de EDPs descrito nos capítulos anteriores modela um problema magneto-elástico 2D associado a uma barra de material paramagnético, infinita no sentido longitudinal, submetida a um campo magnético transversal. A análise teórica descrita em (22) mostra que este tipo de problema tem solução numérica.

Considere um corpo elástico definido por um paralelepípedo infinito de seção quadrada, feito de um material homogêneo, isotrópico, condutor e não-ferromagnético. Este corpo está sujeito a um campo magnético externo constante  $\mathbf{H}_E$ , conforme esquema mostrado na fig. 7, o qual causa uma força de corpo magneticamente induzida sobre o material. Esta força de corpo produz deformações internas no corpo, as quais são representadas por um campo de deslocamento  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ . A variação no tempo e espaço de  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  influencia o campo magnético no interior do corpo, causando uma variação neste campo representada por  $\mathbf{h}(\mathbf{x}, t)$ . Este  $\mathbf{h}(\mathbf{x}, t)$  se sobrepõe a  $\mathbf{H}_E$  e causa mais deslocamento  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ . Eventualmente, quando  $t \rightarrow \infty$ ,  $\mathbf{h}(\mathbf{x}, t)$  deve tender a um equilíbrio (a um valor constante) e o deslocamento  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  deve tender a zero.

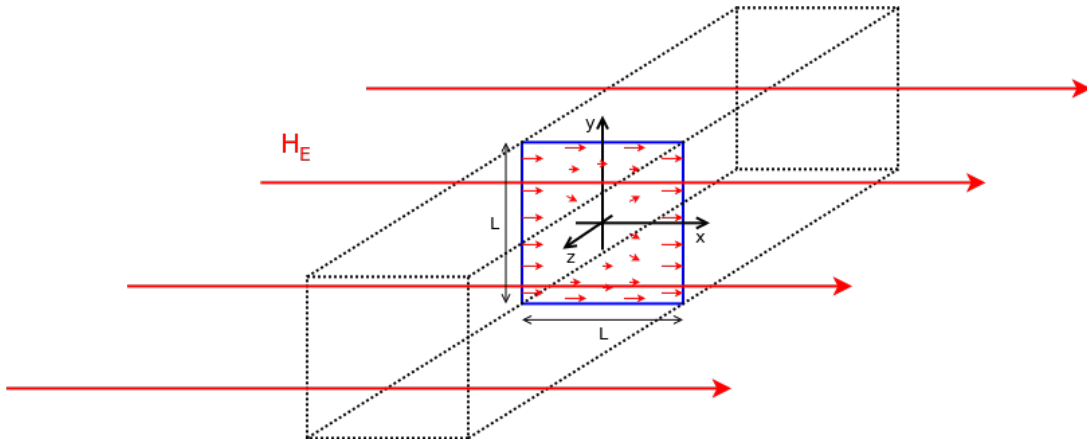


Figura 7 – Representação esquemática do problema a ser resolvido.

Neste esquema 2D, em coordenadas cartesianas, temos:

- $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = [u_1, u_2, 0]$ , onde  $u_1 = u_1(x, y, t)$  e  $u_2 = u_2(x, y, t)$
- $\mathbf{h}(\mathbf{x}, t) = [h_1, h_2, 0]$ , onde  $h_1 = h_1(x, y, t)$  e  $h_2 = h_2(x, y, t)$
- $\mathbf{H}_E = [H_E, 0, 0]$ , onde  $H_E \neq 0$  é um valor constante.

Neste capítulo, são detalhadas as equações governantes do problema magneto-elástico que foi resolvido numericamente.

## 6.1 Equações governantes

As equações governantes do problema em estudo são as mesmas analisadas por Mohebbi e Oliveira (22) e discutidas no cap. 2. Elas consistem em um sistema de equações diferenciais parciais que modelam a interação entre um corpo elástico e um campo magnético constante atuando sobre ele. Assume-se que este corpo elástico é condutor, não-ferromagnético (fracamente magnetizável, de forma a podermos assumir que as deformações serão pequenas e não mudarão a forma do objeto), homogêneo e isotrópico. Então, sejam:

- $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  o campo de deslocamentos;
- $\mathbf{H}_E$  um campo magnético constante (externo) atuando sobre o corpo;

Um campo de deslocamentos não em equilíbrio com  $\mathbf{H}_E$ , junto com uma força de corpo  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ , modifica o campo magnético no corpo para  $\mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}, t) + \tilde{\mathbf{H}}_E$ <sup>1</sup>, o qual, por sua vez, exerce uma força (de Lorentz) sobre o corpo elástico, modificando o campo de deslocamentos. Esta interação ocorre de acordo com o sistema de EDPs apresentado na seção 2.3, aqui reproduzido por conveniência:

$$\rho_M \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \mu \nabla^2 \mathbf{u} - (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = \mu_B (\nabla \times \mathbf{h}) \times (\mathbf{h} + \tilde{\mathbf{H}}_E) + \mathbf{f} \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} + \nu_1 \nabla \times \nabla \times \mathbf{h} = \nabla \times \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \times (\mathbf{h} + \tilde{\mathbf{H}}_E) \right) \quad (6.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{h} = 0 \quad (6.3)$$

As constantes e propriedades físicas envolvidas estão listadas no quadro 1.

Quadro 1 – Constantes e propriedades físicas

símbolo	descrição	unidades (SI)
$\mathbf{u}$	vetor deslocamento elástico	$[m]$
$\mathbf{h}$	vetor campo magnético	$[A/m]$
$\rho_M$	densidade do material do corpo	$[kg/m^3]$
$\mu_B$	permeabilidade magnética do material do corpo	$[Tm/A]$
$\lambda, \mu$	constantes de Lamé ( $\mu \geq 0, 3\lambda + 2\mu \geq 0$ )	$[Pa]$
$\sigma_B$	condutividade elétrica do material do corpo	$[\frac{1}{\Omega m}]$
$\nu_1 = \frac{1}{\sigma_B \times \mu_B}$	“difusividade” magnética do corpo	$[m^2/s]$
$t$	tempo	$[s]$
$\mathbf{f}$	forças de corpo de natureza não magnética	$[N/m^3]$

As condições iniciais são:

$$\bullet \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0} \quad e \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}$$

<sup>1</sup> Cf. seção 2.3:  $\tilde{\mathbf{H}}_E = \frac{\mu_0}{\mu_B} \mathbf{H}_E = \frac{\mathbf{H}_E}{\mu_r}$ .

- $\mathbf{h}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}$  (ou seja:  $\mathbf{H}(\mathbf{x}, 0) = \tilde{\mathbf{H}}_E$ )

e as condições de contorno são dadas por:

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \mathbf{h} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad (\nabla \times \mathbf{h}) \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{0} \quad (6.4)$$

onde  $\hat{\mathbf{n}}$  denota a normal unitária dirigida para fora em cada ponto da fronteira.

## 6.2 Adimensionalização

A fim de identificar os parâmetros mais influentes, a seguir é efetuada uma adimensionalização das equações governantes.

### Adimensionalização da equação do deslocamento elástico

Para simplificar a notação final, vamos representar as variáveis *dimensionais* com um índice “ $\star$ ”, de modo que a equação da deformação (eq. 6.1) é reescrita como:

$$\rho_M \frac{\partial^2 \mathbf{u}_\star}{\partial t_\star^2} - \mu \nabla_\star^2 \mathbf{u}_\star - (\lambda + \mu) \nabla_\star (\nabla_\star \cdot \mathbf{u}_\star) = \mu_B (\nabla_\star \times \mathbf{h}_\star) \times (\mathbf{h}_\star + \tilde{\mathbf{H}}_E) + \mathbf{f}_\star \quad (6.5)$$

Em seguida, definimos as seguintes variáveis adimensionais:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}_\star}{L} \quad t = \frac{t_\star}{\tau} \quad \nabla = L \nabla_\star \quad \mathbf{h} = \frac{\mathbf{h}_\star}{\tilde{H}_E}$$

as quais dependem de alguns parâmetros (escalares) característicos:

- $L$  é uma dimensão característica (ver fig. 7) [ $m$ ]
- $\tau = \frac{L}{c}$  (tempo característico) [ $s$ ]
- $c = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_M}}$  é a “velocidade da onda elástica longitudinal”) [ $m/s$ ]
- $\tilde{H}_E = \frac{\|\mathbf{H}_E\|}{(\mu_B/\mu_0)} = \frac{\|\mathbf{H}_E\|}{\mu_r}$

é o módulo do campo magnético externo “corrigido pelas permeabilidades” [ $A/m$ ]

onde:  $\mu_0$  é a permeabilidade magnética do espaço livre [ $Tm/A$ ]

Com estas definições, levando em conta os parâmetros característicos definidos anteriormente, e multiplicando tudo por  $\frac{\tau^2}{\rho_M L}$ , a equação que governa os deslocamentos elásticos se torna, em formato adimensional:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - k_1 \nabla^2 \mathbf{u} - k_2 \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = k_3 (\nabla \times \mathbf{h}) \times \left( \mathbf{h} + \frac{\tilde{\mathbf{H}}_E}{\tilde{H}_E} \right) + \mathbf{f} \quad (6.6)$$

onde aparecem os seguintes parâmetros (escalares) característicos:

- $k_1 = \frac{\mu}{\rho_M c^2} \quad k_2 = \frac{\lambda + \mu}{\rho_M c^2} \quad (\text{Nota: } k_1 + k_2 = 1)$
- $k_3 = \frac{\mu_B (\tilde{H}_E)^2}{\rho_M c^2}$
- $\mathbf{f} = \frac{\mathbf{f}_\star}{(\rho_M c / \tau)}$

As condições iniciais associadas a esta equação, em formato adimensional, são dadas por:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0} \quad e \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0} \quad (6.7)$$

e as condições de contorno são dadas, simplesmente, por:

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (6.8)$$

## Adimensionalização das equações do campo magnético

Representando, novamente, as variáveis *dimensionais* com um índice “ $\star$ ”, as equações que descrevem o campo magnético (eqs. 6.2 e 6.3) podem ser reescritas como:

$$\frac{\partial \mathbf{h}_\star}{\partial t_\star} + \nu_1 \nabla_\star \times \nabla_\star \times \mathbf{h}_\star = \nabla_\star \times \left( \frac{\partial \mathbf{u}_\star}{\partial t_\star} \times (\mathbf{h}_\star + \tilde{\mathbf{H}}_E) \right) \quad (6.9)$$

$$\nabla_\star \cdot \mathbf{h}_\star = 0 \quad (6.10)$$

Então, utilizando as variáveis adimensionais já definidas, estas equações, em formato adimensional, podem ser escritas como:

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} + \frac{1}{\text{Re}_M} \nabla \times \nabla \times \mathbf{h} = \nabla \times \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \times \left( \mathbf{h} + \frac{\tilde{\mathbf{H}}_E}{\tilde{H}_E} \right) \right) \quad (6.11)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{h} = 0 \quad (6.12)$$

onde  $\text{Re}_M = \frac{c \times L}{\nu_1}$  é o “Número de Reynolds magnético”.

As condições *iniciais* associadas a estas equações são dadas por:

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad (6.13)$$

e as condições de *contorno* adimensionais são dadas por:

$$\mathbf{h} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad (\nabla \times \mathbf{h}) \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{0} \quad (6.14)$$

onde  $\hat{\mathbf{n}}$  denota a normal unitária adimensional dirigida para fora em cada ponto da fronteira.

### 6.3 Equações em coordenadas cartesianas

O sistema a ser resolvido consiste no seguinte conjunto de EDPs:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - k_1 \nabla^2 \mathbf{u} - k_2 \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = k_3 (\nabla \times \mathbf{h}) \times \left( \mathbf{h} + \frac{\tilde{H}_E}{H_E} \right) + \mathbf{f} \\ \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} - \frac{1}{\text{Re}_M} \nabla^2 \mathbf{h} = \nabla \times \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \times \left( \mathbf{h} + \frac{\tilde{H}_E}{H_E} \right) \right) \\ \nabla \cdot \mathbf{h} = p \end{cases} \quad (6.15)$$

onde:

$$\begin{aligned} \bullet \quad k_1 &= \frac{\mu}{\rho_M \times c^2} & k_2 &= \frac{\lambda + \mu}{\rho_M \times c^2} & (k_1 + k_2 &= 1) \\ \bullet \quad k_3 &= \frac{\mu_B \times (\tilde{H}_E)^2}{\rho_M \times c^2} & \text{Re}_M &= \frac{c \times L}{\nu_1} \end{aligned}$$

com as condições iniciais e de contorno dadas pelas eqs. 6.7, 6.8, 6.13 e 6.14.

Em um domínio como o descrito na fig. 7, este sistema deve ser escrito em coordenadas cartesianas e deve ser resolvido para:

- as 2 componentes cartesianas de  $\mathbf{u} = [u_1, u_2, 0]$ , onde:

$$u_1 = u_1(x, y, t) \quad \text{e} \quad u_2 = u_2(x, y, t);$$

- as 2 componentes cartesianas de  $\mathbf{h} = [h_1, h_2, 0]$ , onde:

$$h_1 = h_1(x, y, t) \quad \text{e} \quad h_2 = h_2(x, y, t)$$

Observamos que nada varia com  $z$ , pois o domínio é ilimitado na direção  $z$ .

## Deslocamento elástico em coordenadas cartesianas

Como visto acima, em notação tensorial, a equação governante para o campo dos deslocamentos elásticos, eq. 6.6, é dada por:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - k_1 \nabla^2 \mathbf{u} - k_2 \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = k_3 (\nabla \times \mathbf{h}) \times \left( \mathbf{h} + \frac{\tilde{\mathbf{H}}_E}{\tilde{H}_E} \right) + \mathbf{f}$$

- com condições iniciais dadas pela eq. 6.7:  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}$  e  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}$ ,
- e condições de contorno dadas pela eq. 6.8:  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ .

Para desenvolver esta equação em coordenadas cartesianas, vamos obter alguns resultados intermediários neste sistema de coordenadas.

Inicialmente, observamos que  $\mathbf{u}$  não varia com  $z$  e que, portanto, temos:

$$\nabla^2 \mathbf{u} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial y^2}$$

e também:

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = \nabla \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) = \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} \right) \hat{i} + \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \right) \hat{j}$$

Além disto, lembrando que  $\mathbf{h}$  também não varia com  $z$ , temos:

$$\nabla \times \mathbf{h} = \left( \frac{\partial h_2}{\partial x} - \frac{\partial h_1}{\partial y} \right) \hat{k}$$

Ainda, em coordenadas cartesianas, para o domínio descrito na fig. 7 e para um campo magnético constante alinhado com a direção  $x$ , temos:

$$\mathbf{h} + \frac{\tilde{\mathbf{H}}_E}{\tilde{H}_E} = \mathbf{h} + \hat{i} = (h_1 + 1)\hat{i} + h_2\hat{j}$$

o que permite escrever:

$$(\nabla \times \mathbf{h}) \times \left( \mathbf{h} + \frac{\tilde{\mathbf{H}}_E}{\tilde{H}_E} \right) = -h_2 \left( \frac{\partial h_2}{\partial x} - \frac{\partial h_1}{\partial y} \right) \hat{i} - (h_1 + 1) \left( \frac{\partial h_2}{\partial x} - \frac{\partial h_1}{\partial y} \right) \hat{j}$$

Levando em conta estes resultados, podemos particularizar a eq. 6.6 para coordenadas cartesianas, obtendo as seguintes equações governantes (adimensionalizadas) para as componentes  $(u_1, u_2, 0)$  do campo de deslocamentos elásticos:



$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - k_1 \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \right) - k_2 \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} \right) = -k_3 h_2 \left( \frac{\partial h_2}{\partial x} - \frac{\partial h_1}{\partial y} \right) + f_x \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - k_1 \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \right) - k_2 \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y \partial x} \right) = k_3 (h_1 + 1) \left( \frac{\partial h_2}{\partial x} - \frac{\partial h_1}{\partial y} \right) + f_y \end{cases} \quad (6.16)$$

onde:

$$k_1 = \frac{\mu}{\rho_M \times c^2} \quad k_2 = \frac{\lambda + \mu}{\rho_M \times c^2} \quad k_3 = \frac{\mu_B \times (\tilde{H}_E)^2}{\rho_M \times c^2}$$

Ainda, considerando que  $k_1 + k_2 = 1$ , estas equações podem ser reescritas no seguinte formato, mais conveniente para a implementação computacional:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - k_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} - k_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} = -k_3 h_2 \left( \frac{\partial h_2}{\partial x} - \frac{\partial h_1}{\partial y} \right) + f_x \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - k_1 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} - k_2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial y \partial x} = k_3 (h_1 + 1) \left( \frac{\partial h_2}{\partial x} - \frac{\partial h_1}{\partial y} \right) + f_y \end{cases} \quad (6.17)$$

Condições iniciais para os deslocamentos elásticos

$$\text{Dadas pela eq. 6.7:} \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}$$

Em coordenadas cartesianas, isto se traduz por uma condição em que, no início do processo iterativo, as 2 componentes de  $\mathbf{u}$  são identicamente nulas em todo o domínio:

$$u_1 \equiv 0 \quad u_2 \equiv 0 \quad (6.18)$$

assim como as 2 componentes iniciais de  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ :

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} \equiv 0 \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} \equiv 0 \quad (6.19)$$

Condições de contorno para os deslocamentos elásticos

Conforme a eq. 6.8, temos que  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ , o que implica que as 2 componentes cartesianas de  $\mathbf{u}$  devem ser nulas nas fronteiras do domínio de solução:

$$u_1 = 0 \quad u_2 = 0 \quad (6.20)$$

Isto corresponde a uma condição de fronteiras fixas ao longo de todo o processo iterativo, conforme ilustra a fig. 8.

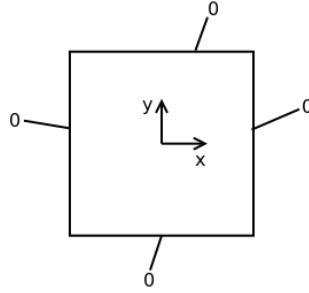


Figura 8 – Representação esquemática das condições de contorno para os deslocamentos.

### Campo magnético em coordenadas cartesianas

Como vimos, em notação tensorial, a equação governante do campo magnético (eq. ??) é dada por:

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} - \frac{1}{\text{Re}_M} \nabla^2 \mathbf{h} = \nabla \times \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \times \left( \mathbf{h} + \frac{\tilde{\mathbf{H}}_E}{\tilde{H}_E} \right) \right)$$

- com condições iniciais dadas pela eq. 6.13:  $\mathbf{h}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}$  ;
- e condições de contorno dadas pela eq. 6.14:  $\mathbf{h} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$  ,  $(\nabla \times \mathbf{h}) \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{0}$  .

Para desenvolver esta equação em coordenadas cartesianas, vamos obter alguns resultados intermediários neste sistema de coordenadas.

Inicialmente, observamos que  $\mathbf{h}$  não varia com  $z$  e que, portanto,

$$\nabla^2 \mathbf{h} = \frac{\partial^2 \mathbf{h}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{h}}{\partial y^2}$$

Ainda, em coordenadas cartesianas e para o domínio descrito na fig. 7, temos:

$$\mathbf{h} + \frac{\tilde{\mathbf{H}}_E}{\tilde{H}_E} = \mathbf{h} + \hat{i} = (h_1 + 1)\hat{i} + h_2\hat{j}$$

Além disto, definindo  $\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$  e lembrando que  $\mathbf{h}$  e  $\mathbf{v}$  também não variam com  $z$ , temos:

$$\nabla \times \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \times \left( \mathbf{h} + \frac{\tilde{\mathbf{H}}_E}{\tilde{H}_E} \right) \right) = \left[ \frac{\partial}{\partial y} (v_1 h_2 - v_2 (h_1 + 1)) \right] \hat{i} - \left[ \frac{\partial}{\partial x} (v_1 h_2 - v_2 (h_1 + 1)) \right] \hat{j}$$

Levando em conta estes resultados, podemos particularizar a eq. ?? para coordenadas cartesianas, obtendo as seguintes equações governantes para as componentes  $(h_1, h_2, 0)$  do campo magnético:

$$\begin{cases} \frac{\partial h_1}{\partial t} - \frac{1}{\text{Re}_M} \left( \frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_1}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( v_1 h_2 - v_2 (h_1 + 1) \right) \\ \frac{\partial h_2}{\partial t} - \frac{1}{\text{Re}_M} \left( \frac{\partial^2 h_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_2}{\partial y^2} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left( v_1 h_2 - v_2 (h_1 + 1) \right) \end{cases} \quad (6.21)$$

onde:  $\text{Re}_M = \frac{c \times L}{\nu_1}$

Condições iniciais para o campo magnético

Dadas pela eq. 6.13:  $\mathbf{h}(\mathbf{x}, 0) \equiv 0$  (ou seja,  $\mathbf{H}(\mathbf{x}, 0) \equiv \frac{\tilde{\mathbf{H}}_E}{H_E}$ )

Para o caso particular da fig. 7, isto se traduz pelas seguintes condições iniciais sobre as componentes de  $\mathbf{h}$ , em coordenadas cartesianas:

$$h_1 \equiv 0 \quad h_2 \equiv 0 \quad (6.22)$$

Condições de contorno para o campo magnético

No caso geral, são dadas pela eq. 6.14:

$$\mathbf{h} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad (\nabla \times \mathbf{h}) \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{0}$$

Para escrever as condições de contorno em coordenadas cartesianas, inicialmente, vamos enumerar as fronteiras, conforme mostrado na fig. 9.

A seguir, são especificadas as duas condições de contorno, em cada uma das quatro fronteiras.

#### i) Condição de contorno do tipo $\mathbf{h} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$

Uma vez que  $\mathbf{h} = h_1 \hat{i} + h_2 \hat{j}$ , observamos que esta condição de contorno se traduz simplesmente por:

- Fronteira #1:  $h_1 = 0$
- Fronteira #2:  $h_2 = 0$
- Fronteira #3:  $h_1 = 0$
- Fronteira #4:  $h_2 = 0$

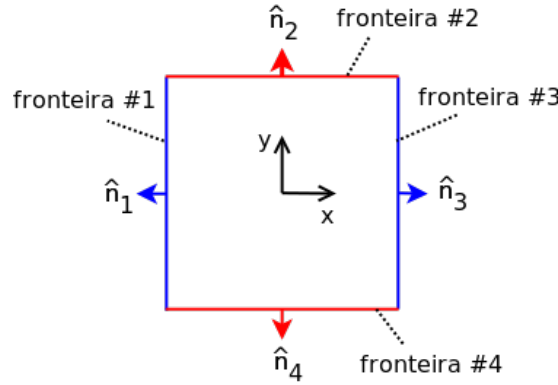


Figura 9 – Enumeração das fronteiras do domínio quadrado e das respectivas normais unitárias.

As condições de contorno para  $h_1$  nas fronteiras #2 e #4, e também para  $h_2$  nas fronteiras #1 e #3, não podem ser obtidas de  $\mathbf{h} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$  e serão obtidas da expressão  $(\nabla \times \mathbf{h}) \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{0}$ , discutida a seguir.

**Observação:** Notamos que as condições obtidas em cada fronteira fazem sentido, pois, levando-se em conta a definição de  $\mathbf{h}$ , dada por:

$$\mathbf{h}_* = \mathbf{H}_* - \tilde{\mathbf{H}}_E \quad (\text{dimensional}) \quad \text{e} \quad \mathbf{h} = \mathbf{H} - \frac{\tilde{\mathbf{H}}_E}{\tilde{H}_E} \quad (\text{adimensional}),$$

temos que, para o caso particular descrito na fig. 7,  $\mathbf{h}$  pode ser escrito como:

$$\mathbf{h} = \mathbf{H} - \hat{i} = (H_1 - 1)\hat{i} + H_2\hat{j}$$

Então, temos que, para o caso da fronteira #1, a expressão  $\mathbf{h} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$  se traduz por:

$$H_1 = 1 \quad (\text{adimensional}) \quad \Rightarrow \quad H_{*1} = \tilde{H}_E \quad (\text{dimensional})$$

ou seja, na fronteira #1, a componente  $x$  (dimensional) do campo magnético está alinhada com  $\tilde{\mathbf{H}}_E$  e, portanto, assume exatamente o valor do campo imposto externamente (dado por  $\|\tilde{\mathbf{H}}_E\|$ ). Da mesma forma, na fronteira #3, temos que  $H_1 = 1$ , ou seja,  $H_{*1} = \tilde{H}_E$  (também alinhada com  $\tilde{\mathbf{H}}_E$ ).

ii) **Condição de contorno do tipo**  $(\nabla \times \mathbf{h}) \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{0}$

Resultado preliminar: 
$$\nabla \times \mathbf{h} = \left( \frac{\partial h_2}{\partial x} - \frac{\partial h_1}{\partial y} \right) \hat{k}$$

**Fronteiras #1 e #3**

No caso da fronteira #1, temos que a expressão  $(\nabla \times \mathbf{h}) \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{0}$  assume o seguinte formato particular, em coordenadas cartesianas:

$$(\nabla \times \mathbf{h}) \times \hat{\mathbf{n}}_1 = - \left( \frac{\partial h_2}{\partial x} - \frac{\partial h_1}{\partial y} \right) \hat{j}$$

Fazendo  $(\nabla \times \mathbf{h}) \times \hat{\mathbf{n}}_1 = \mathbf{0}$ , temos a condição para  $h_2$  na fronteira #1 (a qual havia ficado indefinida com a condição  $\mathbf{h} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$ ):

$$\left. \frac{\partial h_2}{\partial x} \right|_{\text{fronteira}\#1} = \left. \frac{\partial h_1}{\partial y} \right|_{\text{fronteira}\#1} \equiv 0 \quad (6.23)$$

Observando a fig. 9, notamos que as expressões desta condição de contorno para a fronteira #3 seguiriam o mesmo caminho, de modo que podemos escrever:

$$\left. \frac{\partial h_2}{\partial x} \right|_{\text{fronteira}\#3} = \left. \frac{\partial h_1}{\partial y} \right|_{\text{fronteira}\#3} \equiv 0 \quad (6.24)$$

**Fronteiras #2 e #4**

No caso da fronteira #2, temos que a expressão  $(\nabla \times \mathbf{h}) \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{0}$ , assume o seguinte formato particular, em coordenadas cartesianas:

$$(\nabla \times \mathbf{h}) \times \hat{\mathbf{n}}_2 = - \left( \frac{\partial h_2}{\partial x} - \frac{\partial h_1}{\partial y} \right) \hat{i}$$

Fazendo  $(\nabla \times \mathbf{h}) \times \hat{\mathbf{n}}_2 = \mathbf{0}$ , temos a condição para  $h_1$  na fronteira #2 (a qual havia ficado indefinida com a condição  $\mathbf{h} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$ ):

$$\left. \frac{\partial h_1}{\partial y} \right|_{\text{fronteira}\#2} = \left. \frac{\partial h_2}{\partial x} \right|_{\text{fronteira}\#2} \equiv 0$$

Observando a fig. 9, notamos que as expressões desta condição de contorno para a fronteira #4 seguiriam o mesmo caminho, de modo que podemos escrever:

$$\left. \frac{\partial h_1}{\partial y} \right|_{\text{fronteira}\#4} = \left. \frac{\partial h_2}{\partial x} \right|_{\text{fronteira}\#4} \equiv 0$$

### Fronteiras #1, #2, #3 e #4

As condições de contorno para cada uma das componentes em coordenadas cartesianas estão representadas esquematicamente na fig. 10. As linhas hachuradas correspondem a fronteiras em que a derivada normal da componente indicada é nula.

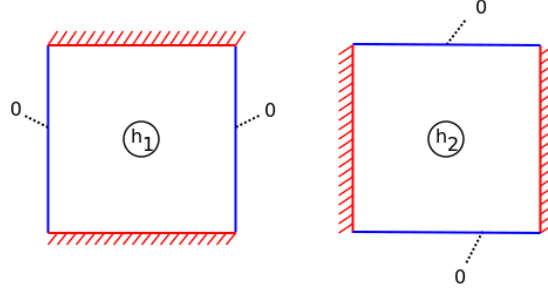


Figura 10 – Representação esquemática das condições de contorno para as 2 componentes do campo magnético.

### A restrição $\nabla \cdot \mathbf{h} = 0$ em coordenadas cartesianas

Em coordenadas cartesianas, a equação 6.12 é escrita como:

$$\frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{\partial h_2}{\partial y} = 0 \quad (6.25)$$

## 6.4 Método de resolução

Desta forma, após a adimensionalização e a particularização para coordenadas cartesianas, levando em consideração o cap. 5, restou o seguinte sistema de 5 EDPs a ser resolvido para as 5 variáveis  $u_1(x, y, t)$ ,  $u_2(x, y, t)$ ,  $h_1(x, y, t)$ ,  $h_2(x, y, t)$  e  $p(x, y)$ :

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - k_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} - k_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} = -k_3 h_2 \left( \frac{\partial h_2}{\partial x} - \frac{\partial h_1}{\partial y} \right) + f_x \quad (6.26)$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - k_1 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} - k_2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial y \partial x} = k_3 (h_1 + 1) \left( \frac{\partial h_2}{\partial x} - \frac{\partial h_1}{\partial y} \right) + f_y \quad (6.27)$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} - \frac{1}{\text{Re}_M} \left( \frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_1}{\partial y^2} \right) = -\frac{1}{\text{Re}_M} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u_1}{\partial t} (h_2) - \frac{\partial u_2}{\partial t} (h_1 + 1) \right) \quad (6.28)$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial t} - \frac{1}{\text{Re}_M} \left( \frac{\partial^2 h_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_2}{\partial y^2} \right) = -\frac{1}{\text{Re}_M} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u_1}{\partial t} (h_2) - \frac{\partial u_2}{\partial t} (h_1 + 1) \right) \quad (6.29)$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{\partial h_2}{\partial y} = 0 \quad (6.30)$$

sujeito às seguintes condições iniciais e de contorno:

- $u_1(x, y, 0) = 0$ ,  $u_2(x, y, 0) = 0$ ,  $\frac{\partial u_1}{\partial t}(x, y, 0) = 0$ ,  $\frac{\partial u_2}{\partial t}(x, y, 0) = 0$
- $u_1(-1, y, t) = u_1(1, y, t) = 0$  e  $u_1(x, -1, t) = u_1(x, 1, t) = 0$

- $u_2(-1, y, t) = u_2(1, y, t) = 0$  e  $u_2(x, -1, t) = u_2(x, 1, t) = 0$
- $h_1(x, y, 0) = 0$  ,  $h_2(x, y, 0) = 0$
- $h_1(-1, y, t) = h_1(1, y, t) = 0$  e  $\frac{\partial h_1}{\partial t}(x, -1, t) = \frac{\partial h_1}{\partial t}(x, 1, t) = 0$
- $h_2(x, -1, t) = h_2(x, 1, t) = 0$  e  $\frac{\partial h_2}{\partial t}(-1, y, t) = \frac{\partial h_2}{\partial t}(1, y, t) = 0$

Este sistema foi discretizado com métodos pseudo-espectrais (ver cap. 4). O avanço no tempo das equações que governam a evolução temporal da deformação  $\mathbf{u}$  (eqs. 6.26 e 6.27) foi feito com Runge-Kutta de 4ª ordem. O avanço no tempo de  $\mathbf{h}$  e a variável artificial  $p$  foram resolvidos com o método de passo fracionado (splitting) de Chorin, conforme discussão no cap. 5. O resultado desta discretização foi implementado em um programa desenvolvido em linguagem Octave (28). Este programa obtém todas as matrizes de Chebyshev necessárias à discretização pseudo-espectral e as utiliza para montar um equivalente matricial discreto das equações acima. A sua sequência lógica de implementação está descrita pelo algoritmo 1 e a sua validação é discutida na seção 6.5.

O parâmetro espectral  $N$  foi variado entre os valores  $\{8, 12, 16\}$ . A independência de malha espacial consistiu em exigir que nenhuma mudança significativa fosse percebida nas curvas de energia total: especificamente, uma malha foi aceita como “boa” assim que as diferenças entre os valores de energia para dois valores do parâmetro pseudo-espectral  $N$  ficaram menores do que  $10^{-3}$ . Refinamentos maiores exigiriam uma capacidade de processamento muito maior do que a que estava disponível para o presente trabalho <sup>2</sup>. Por outro lado, como a energia é um parâmetro global, este critério foi suficiente para mostrar que o método proposto funciona. No presente trabalho, o valor de  $N = 16$  foi suficiente para obter uma independência de malha de acordo com este critério.

A independência da malha temporal veio de uma adaptação empírica da condição de Courant–Friedrichs–Lewy (34). A condição de CFL é aplicada, tipicamente, a problemas numéricos hiperbólicos que envolvem ondas viajando no domínio. Basicamente, este critério consiste em considerar que o intervalo de avanço de tempo discreto ( $\Delta t$ ) de uma malha temporal precisa ser menor do que o (menor) tempo que a onda leva para viajar entre pontos de malha adjacentes (afastados, digamos, por  $\Delta x$ ). Então, dada a velocidade  $c$  da onda, este critério, em termos dimensionais, estabelece que:  $c \frac{\Delta t}{\Delta x} < C_{max}$ . Na prática, para a malha adimensional, quando um solver explícito é usado, costuma-se adotar  $C_{max} = 1$  e usar simplesmente a condição  $\Delta t < \Delta x$ . No entanto, o problema resolvido no presente trabalho envolve um acoplamento não linear da equação hiperbólica com uma equação parabólica e não corresponde totalmente à situação analisada por C-F-L. Por esta razão, o  $\Delta t$  efetivamente utilizado foi  $\Delta t = \Delta t_{CFL}/f dt$ , aonde  $f dt$  é um fator empírico. Para os casos apresentados no cap. 7, foi constatado que  $f dt = 1000$  é um valor adequado.

<sup>2</sup> Note-se que implementações em Octave ficam bastante pesadas computacionalmente, pois a linguagem do Octave é interpretada.

---

**Algoritmo 1:** Fluxo de processamento do programa implementado para a resolução numérica do sistema magneto-elástico que foi objeto do presente trabalho.

---

**Data:** N

**Result:** Evolução temporal da energia total de um sistema magneto-elástico

Especifica propriedades do alumínio

Especifica parâmetros externos:

$L \leftarrow$  metade da largura da seção quadrada [ $m$ ]

$H_E \leftarrow$  valor do campo magnético externo (constante) [ $A/m$ ]

$f \leftarrow$  componentes x-y força de corpo não-magnética (constante) [ $N/m^3$ ]

Computa parâmetros adimensionais:

$$k_1 \leftarrow \frac{\mu}{\rho_M c^2} \quad k_2 \leftarrow \frac{\lambda + \mu}{\rho_M c^2} \quad k_3 \leftarrow \frac{\mu_B (\tilde{H}_E)^2}{\rho_M c^2} \quad \text{Re}_M \leftarrow \frac{c \times L}{\nu_1}$$

Computa dados relativos à malha e ao avanço no tempo:

Computa matrizes de diferenciação de Chebyshev

Computa malha pseudo-espectral e identifica pontos sobre as fronteiras

$$\Delta t \leftarrow \frac{\Delta t_{CFL}}{fator}$$

$ncoupl \leftarrow$  nro. de iterações para o acoplamento

Inicializa campos de  $u$  e  $h$

Computa matrizes estáticas (lados esquerdos) das EDPs de  $u$  e de  $h$

$t \leftarrow 0$

**while**  $t < t_{max}$  **do**

Guarda campos anteriores de  $u$  e de  $h$

**for**  $j \leftarrow 1$  **to**  $ncoupl$  **do**

Computa lado direito para  $u$

Avança campo de  $u$  com Runge-Kutta de 4ª ordem

Aplica condições de contorno a  $u$

Computa lado direito para  $h$

Avança campo de  $h$  com método de splitting de Chorin:

1ro passo: computa  $\hat{h}$  por método implícito

Aplica condições de contorno a  $\hat{h}$

2do passo: resolve eq. de Poisson para a “pressão”  $p$  por método implícito

Aplica condições de contorno a  $p$

3ro passo: atualiza  $\hat{h}$  para um  $h$  solenoidal

**end**

Computa a energia total do sistema para o  $t$  atual

Computa  $\max(\text{div}(h))$  para verificação

$t \leftarrow t + \Delta t$

**end**

---



## 6.5 Validação numérica

O solver implementado em Octave para a resolução das equações governantes em coordenadas cartesianas foi validado de duas formas distintas:

- Por comparação do lado esquerdo (termos lineares) com uma *solução analítica*, de modo a validar o núcleo principal;
- Adaptando a equação original, de modo a que ela seja satisfeita por uma solução *pré-definida* (adicionando termos ao lado direito das equações originais). O resultado numérico obtido para a equação modificada é, então, testado contra a própria solução conhecida. Este é um teste bem mais forte do que o anterior e considera todos os termos, incluindo o acoplamento não linear, e ainda adiciona os termos fonte (lineares) pré-especificados.

Lembramos que as equações a serem validadas são dadas por:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - k_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} - k_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} = -k_3 h_2 \left( \frac{\partial h_2}{\partial x} - \frac{\partial h_1}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - k_1 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} - k_2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial y \partial x} = k_3 (h_1 + 1) \left( \frac{\partial h_2}{\partial x} - \frac{\partial h_1}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial h_1}{\partial t} - \frac{1}{\text{Re}_M} \left( \frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_1}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( v_1 h_2 - v_2 (h_1 + 1) \right) \\ \frac{\partial h_2}{\partial t} - \frac{1}{\text{Re}_M} \left( \frac{\partial^2 h_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_2}{\partial y^2} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left( v_1 h_2 - v_2 (h_1 + 1) \right) \end{cases} \quad (6.31)$$

### Equação para u: comparação com a equação da onda

Queremos validar o lado esquerdo das eqs. hiperbólicas no sistema 6.31. Para isto, vamos fazer  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 0$  e  $k_3 = 0$ , de modo a comparar o resultado numérico obtido para ambas as equações parabólicas (**h**) em 6.31 com a solução analítica para uma instância de um problema clássico da onda, dado por:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (6.32)$$

em um domínio retangular 2D definido por  $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq L_x, 0 \leq y \leq L_y\}$ . Notamos que, para permitir uma analogia com o domínio espectral, definido no quadrado  $\{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$ , fazemos  $L_x = L_y = 2$ .

As condições iniciais e de contorno foram definidas como:

$$\begin{cases} u(x, y, t) = 0 & \text{nos contornos} \\ u(x, y, 0) = e^{-40((x-0.4)^2 + y^2)} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = 0 \end{cases}$$

Para este problema, uma conhecida solução por separação de variáveis (ver, por exemplo, (35)) leva a uma EDO de 2ª ordem e a um problema de Sturm-Liouville. A solução destes dois problemas leva à seguinte solução geral para a eq. 6.32:

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \cos(\sqrt{\lambda_{mn}} t) v_{mn}(x, y) \quad (6.33)$$

onde os autovalores são dados por  $\lambda_{mn} = \pi \sqrt{\frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2}}$  e onde os  $A_{mn}$  são dados por:

$$A_{mn} = \frac{4}{L_x L_y} \int \int_{\Omega} e^{-40((x-0.4)^2 + y^2)} v_{mn}(x, y) dx dy \quad (6.34)$$

Nestas expressões,  $v_{mn}(x, y)$  são as autofunções do problema de Sturm-Liouville 2D:

$$v_{mn}(x, y) = \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \quad (6.35)$$

Para este mesmo problema, foram obtidos resultados numéricos para diversas malhas, correspondentes a  $N = \{16, 20, 24, 32, 40\}$ , sempre para o instante  $t = 0.1$  (adimensional). Este instante corresponde, aproximadamente, a 200 avanços no tempo com um  $\Delta t = 0.00048153$ . O  $\Delta t$  foi mantido fixo neste valor em todos os casos e corresponde aproximadamente a 10% do valor que seria recomendado por um número de Courant (ver, por exemplo, (36)) igual a 1 para a malha com  $N = 32$ . A figura 11 mostra que os erros máximos estão decrescendo conforme o esperado.

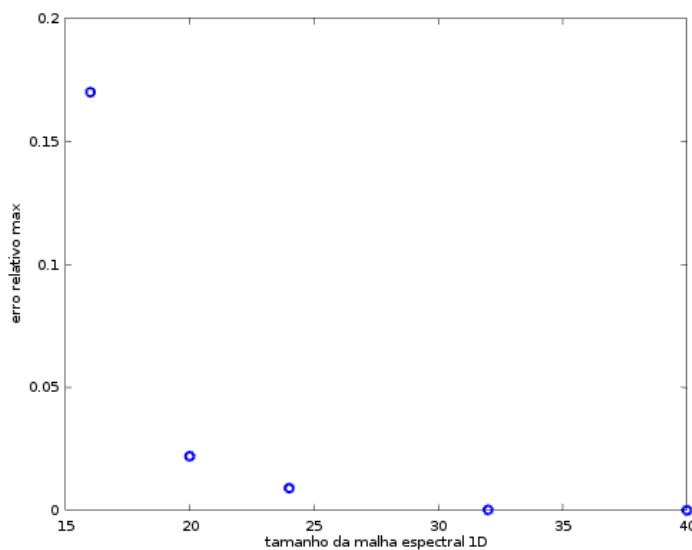


Figura 11 – Erros relativos máximos para diversas malhas na validação por comparação com solução analítica.

## Equação para h: comparação com a equação do calor

Agora o objetivo é validar o lado esquerdo das eqs. parabólicas no sistema 6.31. Para isto, fazemos  $Re_M=1$  e anulamos a contribuição do lado direito para o resultado. Desta forma, podemos comparar o resultado numérico obtido para ambas as equações com a solução analítica para uma instância de um problema clássico do calor, dada por:

$$\frac{\partial h}{\partial t} - \left( \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (6.36)$$

em um domínio retangular 2D definido por:

$$\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq L_x, 0 \leq y \leq L_y\}$$

e fazendo, novamente,  $L_x = L_y = 2$ .

As condições iniciais e de contorno foram definidas como:

$$\begin{cases} h(x, y, t) = 0 & \text{nos contornos} \\ h(x, y, 0) = e^{-40((x-0.4)^2+y^2)} \end{cases}$$

Para este problema, uma solução por separação de variáveis leva a uma EDO de 1ª ordem e ao mesmo problema de Sturm-Liouville da seção anterior (para a equação da onda). A solução destes dois problemas leva à seguinte solução geral para a eq. 6.36:

$$h(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} v_{mn}(x, y) e^{-\lambda_{mn} t} \quad (6.37)$$

onde os autovalores são os mesmos da equação da onda  $\left( \lambda_{mn} = \pi \sqrt{\frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2}} \right)$  e onde os  $A_{mn}$  são dados por:

$$A_{mn} = \frac{4}{L_x L_y} \int \int_{\Omega} e^{-40((x-0.4)^2+y^2)} v_{mn}(x, y) dx dy \quad (6.38)$$

Nesta expressão,  $v_{mn}(x, y)$  são as mesmas autofunções do problema de Sturm-Liouville 2D anterior:  $v_{mn}(x, y) = \text{sen} \left( \frac{m\pi x}{L_x} \right) \text{sen} \left( \frac{n\pi y}{L_y} \right)$ .

Novamente, a figura 12 mostra que a curva de erros apresenta o comportamento esperado para uma solução por métodos espectrais.

## Equações para u e h: comparação com soluções pré-definidas

A substituição de uma solução pré-definida diretamente no sistema de EDPs a ser resolvido gera um termo fonte adicional ( $g(x, y)$ ) para cada equação. Uma solução numérica obtida levando-se em conta este termo fonte pode, então, ser comparada com a solução pré-definida que serviu de base para a montagem das equações. O sistema assume, portanto, a seguinte configuração (não considerando as forças de corpo constantes):

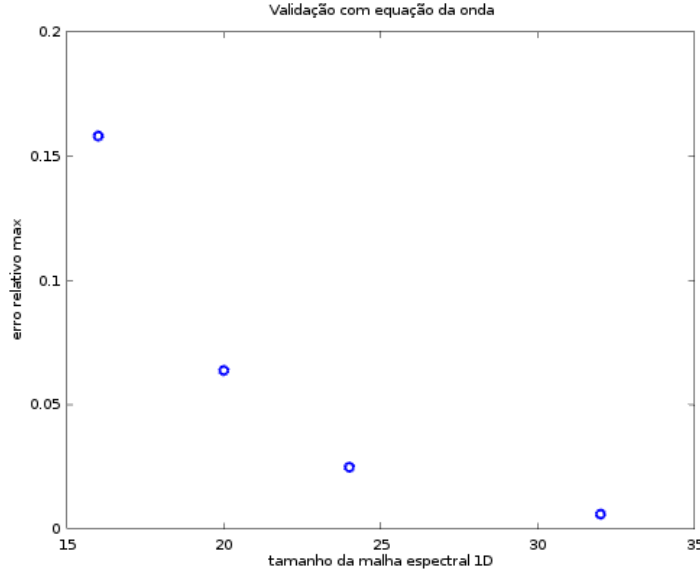


Figura 12 – Erros relativos máximos para diversas malhas na validação por comparação com solução analítica.

$$\begin{cases}
 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - k_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} - k_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} = -k_3 h_2 \left( \frac{\partial h_2}{\partial x} - \frac{\partial h_1}{\partial y} \right) + g_{u_1}(x, y) \\
 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - k_1 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} - k_2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial y \partial x} = k_3 (h_1 + 1) \left( \frac{\partial h_2}{\partial x} - \frac{\partial h_1}{\partial y} \right) + g_{u_2}(x, y) \\
 \frac{\partial h_1}{\partial t} - \frac{1}{\text{Re}_M} \left( \frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_1}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( v_1 h_2 - v_2 (h_1 + 1) \right) + g_{h_1}(x, y) \\
 \frac{\partial h_2}{\partial t} - \frac{1}{\text{Re}_M} \left( \frac{\partial^2 h_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_2}{\partial y^2} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left( v_1 h_2 - v_2 (h_1 + 1) \right) + g_{h_2}(x, y)
 \end{cases} \quad (6.39)$$

O código desenvolvido no presente trabalho foi utilizado para recuperar as soluções pré-definidas em dois problemas distintos. Ambas as soluções respeitam as condições iniciais e de contorno do problema em estudo e ambos os campos de  $h$  satisfazem automaticamente a condição de campos solenoidais  $\left( \frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{\partial h_2}{\partial y} = 0 \right)$ .

- Problema com solução pré-definida #1:

– Funções pré-estabelecidas:

$$\begin{cases}
 u_1 = (1 - x^2)(1 - y^2)t^2 \\
 u_2 = (1 - x^2)(1 - y^2)t^2 \\
 h_1 = \left( x^2 - \frac{x^4 + 5}{6} \right) \left( y - \frac{y^3}{3} \right) \frac{t}{2} \\
 h_2 = \left( x - \frac{x^3}{3} \right) \left( y^2 - \frac{y^4 + 5}{6} \right) \frac{t}{2}
 \end{cases} \quad (6.40)$$

– Termos fonte a acrescentar (obtidos com os recursos simbólicos do Python(37)):

$$\left\{ \begin{array}{l}
g_{u_1} = -2k_1t^2(x^2 - 1) - 4k_2t^2xy \\
\quad + k_3t^2x(x^2 - 3)((x^2 - 1)(y^4 - 6y^2 + 5) \\
\quad + (y^2 - 1)(x^4 - 6x^2 + 5)) \frac{(y^4 - 6y^2 + 5)}{432} + 2t^2(-y^2 + 1) + 2(x^2 - 1)(y^2 - 1) \\
g_{u_2} = -2k_1t^2(y^2 - 1) - 4k_2t^2xy + k_3t((x^2 - 1)(y^4 - 6y^2 + 5) \\
\quad + (y^2 - 1)(x^4 - 6x^2 + 5)) \frac{(ty(y^2 - 3)(x^4 - 6x^2 + 5) + 36)}{432} \\
\quad + 2t^2(-x^2 + 1) + 2(x^2 - 1)(y^2 - 1) \\
g_{h_1} = (\text{Re}_M(8t^2xy(x^2 - 3)(x^2 - 1)(y^2 - 3)(y^2 - 1) \\
\quad + 4t^2xy(x^2 - 3)(x^2 - 1)(y^4 - 6y^2 + 5) \\
\quad + 6t^2(x^2 - 1)(y^2 - 1)^2(x^4 - 6x^2 + 5) \\
\quad + 4ty(x^2 - 1)(ty(y^2 - 3)(x^4 - 6x^2 + 5) + 36) \\
\quad + y(y^2 - 3)(x^4 - 6x^2 + 5)) - 12ty(x^2 - 1)(y^2 - 3) \\
\quad - 6ty(x^4 - 6x^2 + 5)) / (36\text{Re}_M) \\
g_{h_2} = (-\text{Re}_M(4t^2x^2(x^2 - 3)(y^2 - 1)(y^4 - 6y^2 + 5) \\
\quad + 8t^2xy(x^2 - 3)(x^2 - 1)(y^2 - 3)(y^2 - 1) \\
\quad + 6t^2(x^2 - 1)^2(y^2 - 1)(y^4 - 6y^2 + 5) \\
\quad + 4tx(y^2 - 1)(ty(y^2 - 3)(x^4 - 6x^2 + 5) + 36) \\
\quad + x(x^2 - 3)(y^4 - 6y^2 + 5)) + 12tx(x^2 - 3)(y^2 - 1) \\
\quad + 6tx(y^4 - 6y^2 + 5)) / (36\text{Re}_M)
\end{array} \right. \tag{6.41}$$

- Problema com solução pré-definida #2:

– Funções pré-estabelecidas:

$$\left\{ \begin{array}{l}
u_1 = \text{sen}(\pi x)\text{sen}(\pi y)t^2 \\
u_2 = \text{sen}(\pi x)\text{sen}(\pi y)t^2 \\
h_1 = \text{sen}(\pi x)\text{cos}(\pi y)t \\
h_2 = -\text{cos}(\pi x)\text{sen}(\pi y)t
\end{array} \right. \tag{6.42}$$

– Termos fonte a acrescentar (obtidos com Python):

$$\left\{ \begin{array}{l}
g_{u_1} = \pi^2k_1t^2\text{sen}(\pi x)\text{sen}(\pi y) - \pi^2k_2t^2\text{cos}(\pi x)\text{cos}(\pi y) \\
\quad - 2\pi k_3t^2\text{sen}(\pi x)\text{sen}(\pi y)^2\text{cos}(\pi x) \\
\quad + \pi^2t^2\text{sen}(\pi x)\text{sen}(\pi y) + 2\text{sen}(\pi x)\text{sen}(\pi y) \\
g_{u_2} = \pi^2k_1t^2\text{sen}(\pi x)\text{sen}(\pi y) - \pi^2k_2t^2\text{cos}(\pi x)\text{cos}(\pi y) \\
\quad - 2\pi k_3t(t\text{sen}(\pi x)\text{cos}(\pi y) + 1)\text{sen}(\pi x)\text{sen}(\pi y) \\
\quad + \pi^2t^2\text{sen}(\pi x)\text{sen}(\pi y) + 2\text{sen}(\pi x)\text{sen}(\pi y) \\
g_{h_1} = (\text{Re}_M(2\pi t^2\text{sen}(\pi x) + 4\pi t^2\text{sen}(\pi y)\text{cos}(\pi(x + y)) \\
\quad + 2\pi t\text{cos}(\pi y) + \text{cos}(\pi y)) + 2\pi^2t\text{cos}(\pi y))\text{sen}(\pi x) / \text{Re}_M \\
g_{h_2} = -(4\pi\text{Re}_M t^2\text{sen}(\pi x)\text{cos}(\pi(x + y)) + 2\pi\text{Re}_M t^2\text{sen}(\pi y) \\
\quad + 2\pi\text{Re}_M t\text{cos}(\pi x) + \text{Re}_M\text{cos}(\pi x) + 2\pi^2t\text{cos}(\pi x))\text{sen}(\pi y) / \text{Re}_M
\end{array} \right. \tag{6.43}$$

A figura 13 mostra o comportamento da curva de erros relativos máximos para o caso da solução pré-definida #1, para a variável  $u_1$ . Os resultados para  $u_2$  são muito semelhantes e não foram mostrados. Nota-se que os erros decaem conforme o esperado.

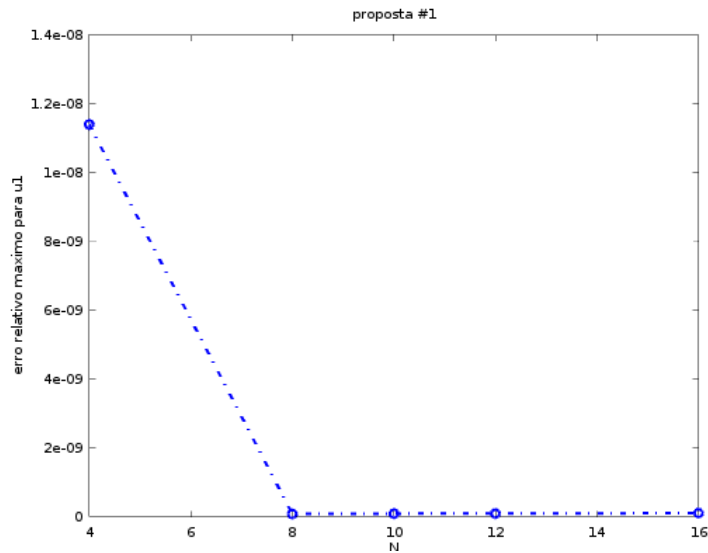


Figura 13 – Erros relativos máximos para diversas malhas espectrais na validação de  $u_1$  por comparação com a solução pré-definida #1.

A figura 14 mostra o comportamento da curva de erros relativos máximos para o caso da solução pré-definida #1, para a variável  $h_1$ . Os resultados para  $h_2$  são muito semelhantes e não foram mostrados. Novamente, os erros decaem conforme o esperado.

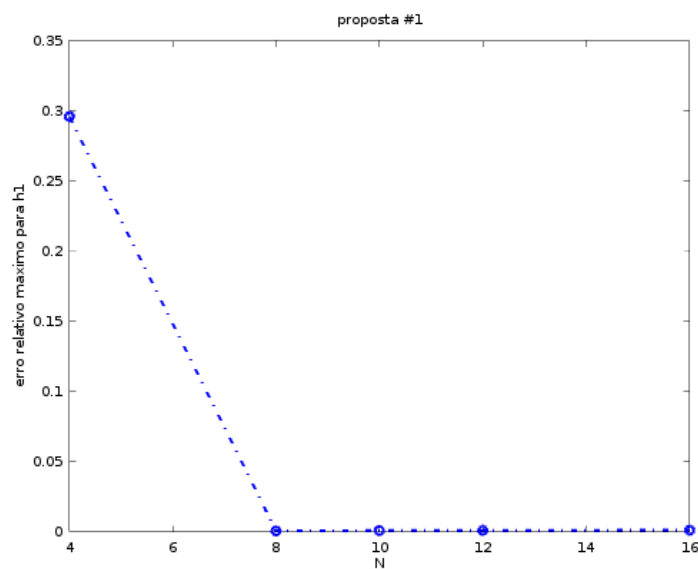


Figura 14 – Erros relativos máximos para diversas malhas espectrais na validação de  $h_1$  por comparação com a solução pré-definida #1.

Os resultados para a solução pré-definida #2 estão mostrados nas figuras 15 e 16. Em ambos os casos, os erros decaem conforme o esperado, muito embora seja perceptível que os erros relativos aos campos de  $\mathbf{h}$  decaem mais lentamente.

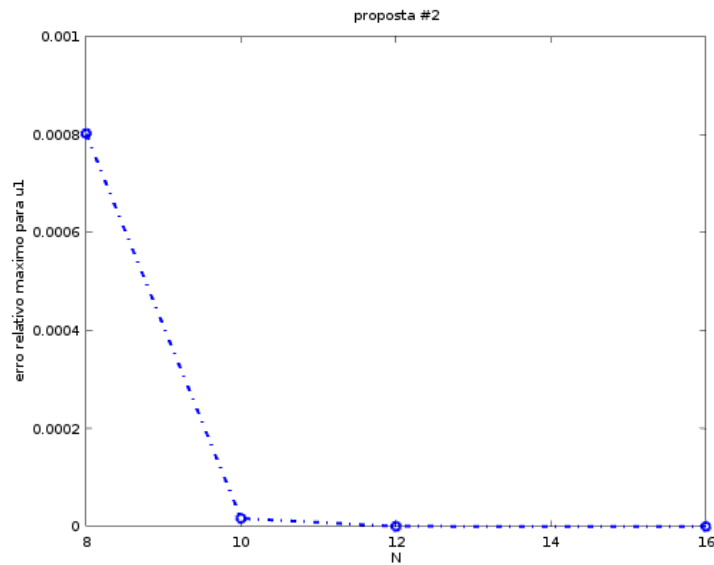


Figura 15 – Erros relativos máximos para diversas malhas espectrais na validação de  $u_1$  por comparação com a solução pré-definida #1.

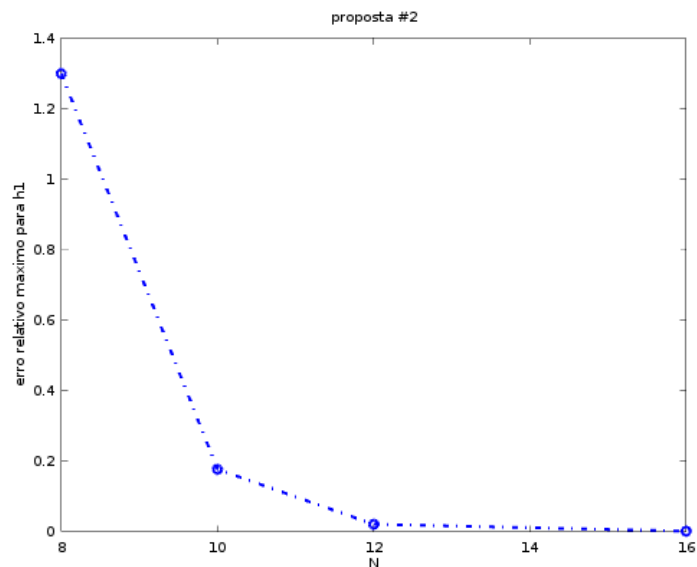


Figura 16 – Erros relativos máximos para diversas malhas espectrais na validação de  $h_1$  por comparação com a solução pré-definida #1.

Em resumo, o código implementado em Octave para a solução do sistema de EDPs magneto-elástico consegue recuperar as respostas corretas em dois casos diferentes de soluções pré-definidas impostas, em problemas que envolvem todos os termos do sistema de

EDPs magneto-elástico original (e mais alguns). Isto sugere que o código está confiável e que, portanto, pode-se passar a analisar situações não conhecidas, o que é feito no capítulo a seguir.



## 7 Resultados numéricos

Neste capítulo, são mostrados os resultados numéricos obtidos para um problema padrão, aonde os parâmetros são particularizados para uma situação tão realista fisicamente quanto possível. O material da barra infinita foi definido como sendo alumínio, um material condutor e conhecidamente paramagnético. O quadro 2 lista as propriedades do alumínio que são relevantes para estas simulações.

Quadro 2 – Propriedades do alumínio (de acordo com (38)) e outras constantes.

propriedade	descrição	valor	unidades (SI)
$\rho_M$	densidade	2700	$[kg/m^3]$
$\mu$	módulo de cisalhamento	$26 \times 10^9$	$[Pa]$
$\lambda$	1º parâmetro de Lamé	$60.5 \times 10^9$	$[Pa]$
$\mu_B$	permeabilidade magnética	$1.256665 \times 10^{-6}$	$[H/m]$
$\mu_0$	permeabilidade magnética no vácuo	$4 \times \pi \times 10^{-7}$	$[H/m]$
$\mu_r$	permeabilidade relativa	1.000022	-
$\sigma_B$	condutividade elétrica	$1/26.5 \times 10^{-9}$	$[1/(\Omega m)]$
$\nu_1 = \frac{1}{(\sigma_B \mu_B)}$	“difusividade” magnética	0.0211	$[m^2/s]$
$c = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_M}}$	velocidade de onda de referência	6455	$[m/s]$
$\tau = L/c$	intervalo de tempo de referência	$1.55 \times 10^{-5}$	$[s]$

De acordo com os objetivos do trabalho, foram obtidos dois tipos de resultados:

- Resultados descritivos dos campos  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{h}$  para 4 instantes adimensionais, visando mostrar que a simulação implementada produz resultados coerentes para as variáveis fundamentais do problema;
- Curvas para a evolução da energia total do sistema com o tempo: aqui, o objetivo é mostrar que a implementação pode fornecer indicativos numéricos de como se comporta assintoticamente a energia total deste sistema quando a não-linearidade do acoplamento é levada em conta sem simplificações.

Em ambos os casos, a estratégia adotada foi a usual modificação da configuração do problema através de uma variação dos parâmetros adimensionais que o descrevem:

$$k_1 = \frac{\mu}{\rho_M \times c^2} \quad k_2 = \frac{\lambda + \mu}{\rho_M \times c^2} \quad k_3 = \frac{\mu_B \times (\tilde{H}_E)^2}{\rho_M \times c^2} \quad \text{Re}_M = \frac{c \times L}{\nu_1}$$

Como os parâmetros  $k_1$  e  $k_2$  dependem exclusivamente do material, eles foram mantidos constantes. Os parâmetros de interesse são, portanto,  $k_3$  e  $\text{Re}_M$ .

Um *caso padrão* foi definido como:

- Uma força de corpo de origem não magnética dada por:

$$\mathbf{f}_\star = [f_x \ f_y] = [3000 \ 4000] [N/m^3] \quad (\text{constante})$$

- $k_3 = 10$  (correspondendo a  $\mathbf{H}_E \simeq 10^9 [A/m]$ ) e
- $\text{Re}_M = 30000$  (correspondendo a uma largura da barra de alumínio  $L = 0.1[m]$ ).

Em seguida, foram rodados casos adicionais, fazendo-se variar um ou outro parâmetro, a fim de identificar a influência de  $k_3$  e  $\text{Re}_M$  nos resultados.

## 7.1 Campos de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{h}$

A figura 17 mostra os campos de deslocamento elástico para 4 instantes da simulação do transiente do PVI associado ao caso padrão ( $k_3 = 10$  e  $\text{Re}_M = 30000$ ), correspondentes a valores *dimensionais* de  $t$  (ajustados pelo tempo de referência  $\tau$ ). Os instantes de tempo mostrados (da esquerda para a direita e de cima para baixo) são:  $t \simeq 1.5 \times 10^{-6}s$ ,  $3 \times 10^{-6}s$ ,  $6 \times 10^{-6}s$  e  $30 \times 10^{-6}s$ . Observa-se que, nos instantes iniciais, a deformação é resultado principalmente da força de corpo de origem não magnética que está sendo aplicada, mas esta influência é rapidamente dominada pelo efeito elástico imposto pelo intenso campo magnético externo.

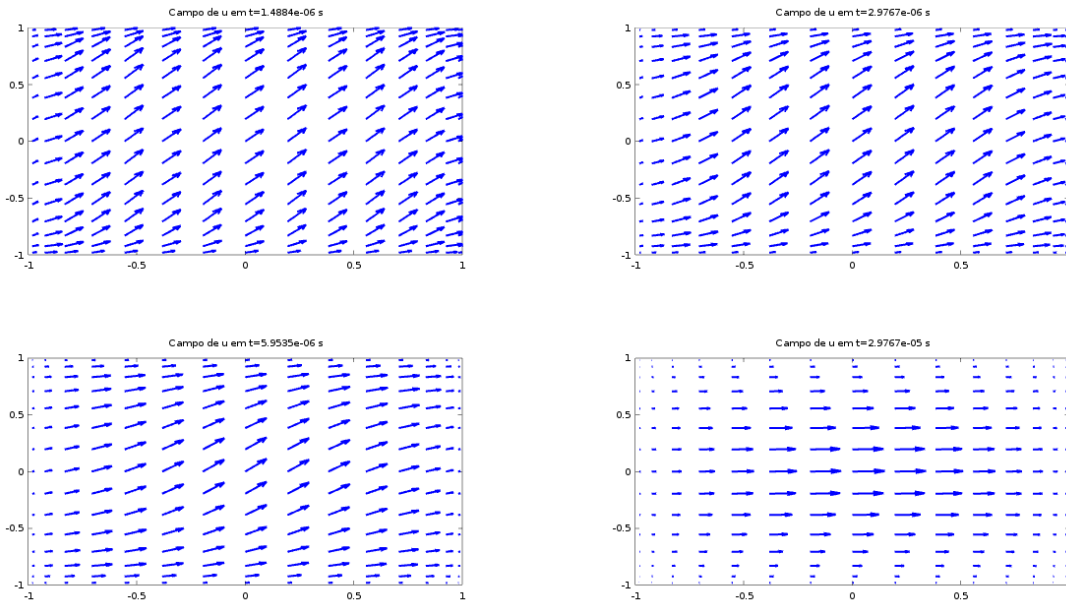


Figura 17 – Campos de deslocamento elástico ( $\mathbf{u}$ ) em  $t \simeq \{1.5, 3, 6, 30\} \times 10^{-6}s$ , para  $\text{Re}_M = 30000$  e  $k_3 = 10$ .

A figura 18, elaborada para um valor de  $k_3 = 100$  (campo magnético externo  $\sqrt{10}$  vezes maior do que no caso anterior), mostra que, neste caso, como era de se esperar, o efeito elástico de um campo magnético externo mais forte domina ainda mais rapidamente o efeito da força de corpo não magnética.

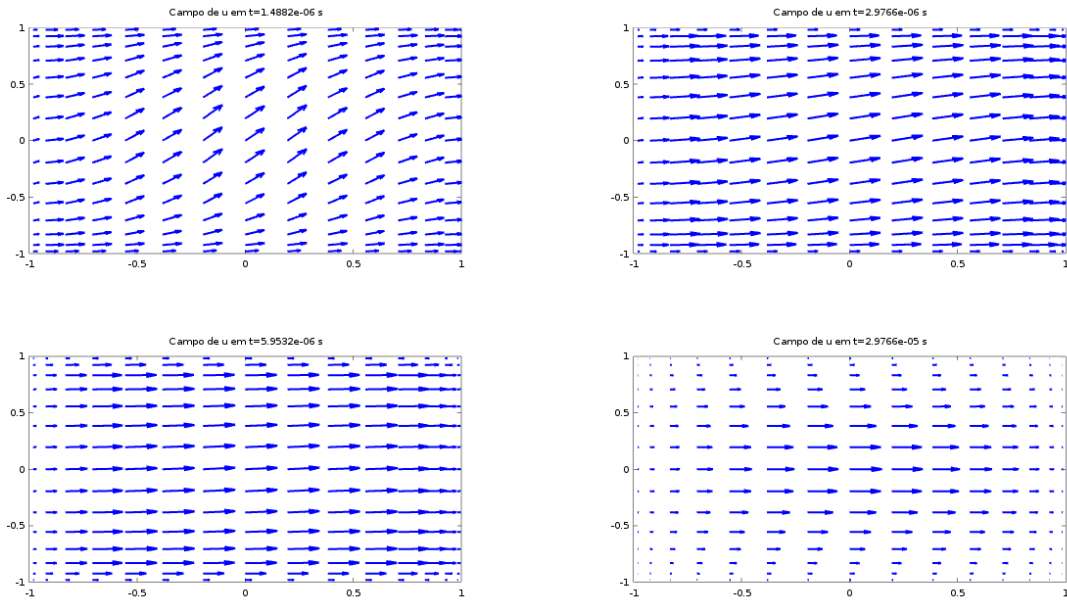


Figura 18 – Campos de deslocamento elástico ( $\mathbf{u}$ ) em  $t \simeq \{1.5, 3, 6, 30\} \times 10^{-6} s$ , para  $\mathbf{Re}_M = 30000$  e  $k_3 = 100$ .

As figuras 19 e 20 mostram os campos magnéticos nos mesmos instantes que as figuras anteriores, e para os mesmos casos. É possível notar o aparecimento de um efeito “rotacional” típico da aplicação de campos magnéticos em meios condutores. Este efeito se intensifica nos instantes iniciais, mas depois se atenua, possivelmente como consequência do alinhamento dos vetores deslocamento observado nas figuras anteriores.

Em ambos os casos, é possível notar que a metodologia numérica proposta no presente trabalho consegue reproduzir fenômenos que são fisicamente consistentes.

## 7.2 Evolução temporal da energia total

A figura 21 mostra o comportamento da evolução temporal da energia total do caso padrão quando  $k_3$  é variado ( $k_3 = 10$  corresponde ao caso padrão). Observa-se que, quando  $k_3$  aumenta, as curvas tendem a se acumular em apenas um local, em consequência de que apenas um termo (o não linear) passa a dominar as equações da deformação. Por outro lado, se  $k_3 \rightarrow 0$ , ocorre um desacoplamento entre os campos elástico e magnético e a curva mostrada para  $k_3 = 5$  deve estar próxima à que seria obtida para um problema puramente elástico.

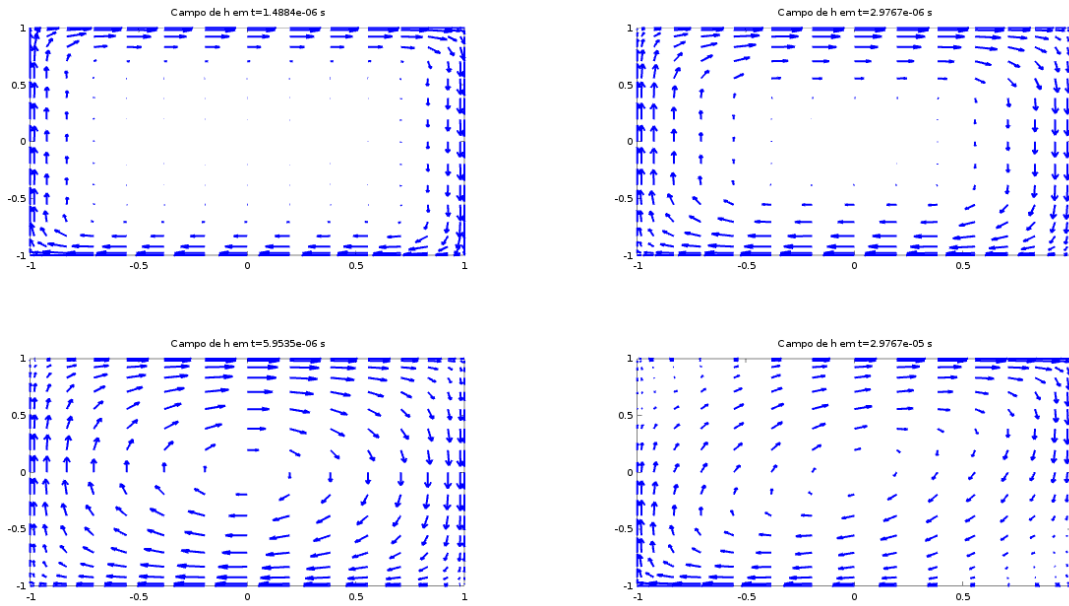


Figura 19 – Campos magnéticos ( $\mathbf{h}$ ) em  $t \simeq \{1.5, 3, 6, 30\} \times 10^{-6} s$ , para  $\text{Re}_M = 30000$  e  $k_3 = 10$ .

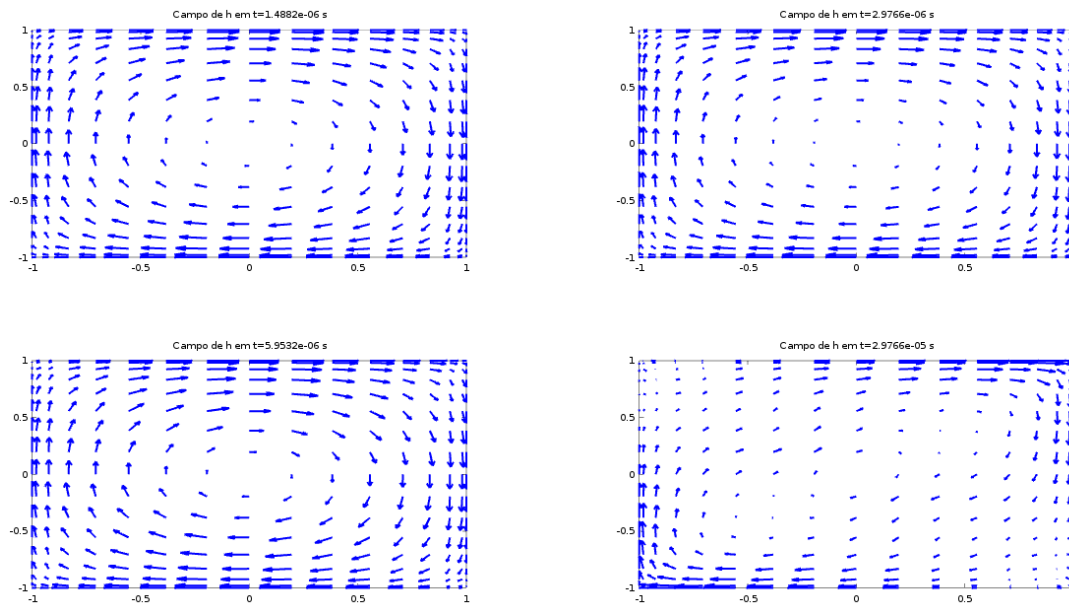


Figura 20 – Campos magnéticos  $\mathbf{h}$  em  $t \simeq \{1.5, 3, 6, 30\} \times 10^{-6} s$ , para  $\text{Re}_M = 30000$  e  $k_3 = 100$ .

Já o parâmetro  $\text{Re}_M$  apresenta uma influência bem mais marcante sobre a evolução temporal da energia total do sistema. A figura 22 mostra que, quando ele é muito baixo, a equação do campo magnético tende a uma situação próxima de  $\nabla^2 \mathbf{u} = 0$ , com condições de contorno quase homogêneas, e o resultado é uma energia total quase nula. Quando ele é alto, as curvas de energia parecem tender a uma situação de “saturação” semelhante à

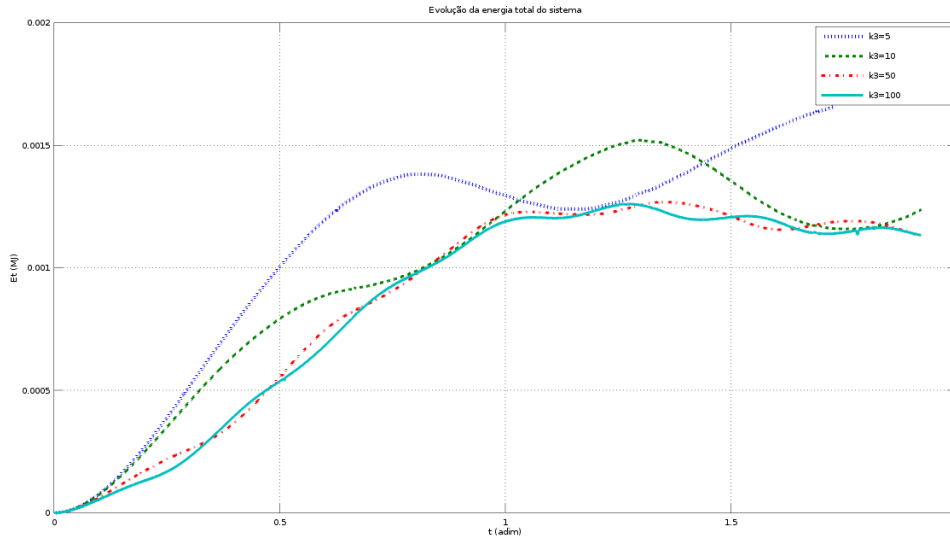


Figura 21 – Evolução da energia total do sistema  $[MJ]$  em função do tempo (adim.), para  $k_3 \simeq \{5, 10, 50, 100\}$  (demais parâmetros são os do caso padrão).

que ocorreu para valores altos de  $k_3$ .

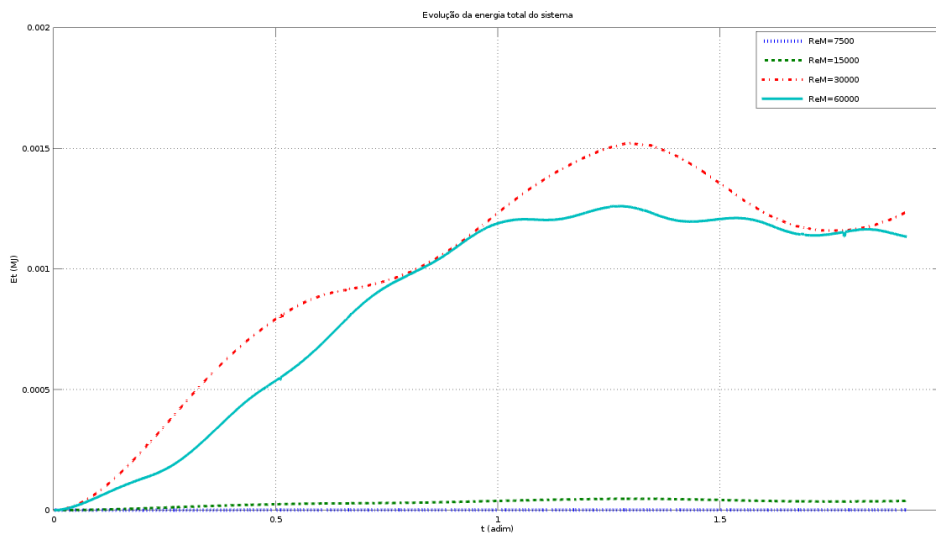


Figura 22 – Evolução da energia total do sistema  $[MJ]$  em função do tempo (adim.), para  $Re_M \simeq \{7500, 15000, 30000, 60000\}$  (demais parâmetros são os do caso padrão).

De ambos os casos vistos, o importante a ressaltar é que, com a metodologia proposta, é possível analisar o sistema magneto-elástico completo, levando em conta todas as não linearidades inerentes ao modelo. Resultados mais amplos podem agora ser explorados e espera-se que indiquem tendências que possam dar suporte ao estudo da estabilidade assintótica deste tipo de sistema.

As curvas de energia apresentadas ainda estão limitadas a um tempo de processa-

mento relativamente curto, pois o código numérico correspondente foi projetado apenas para comprovar a eficácia do método e não está otimizado para longas simulações. No entanto, apenas como indicativo das possibilidades futuras, a figura 23 apresenta uma estimativa grosseira da curva de energia total para tempos altos. Assumindo-se que o resultado mostrado, obtido com  $N = 8$  (sem comprovação de independência de malha), pode ser utilizado como um indicativo do que vai ser encontrado com malhas mais finas, observa-se que a energia deste sistema parece ter uma tendência a oscilar em ciclos razoavelmente bem definidos. Mas a estabilidade destes ciclos ainda é uma questão que precisa ser investigada com muito mais cuidado, com base em malhas mais refinadas.

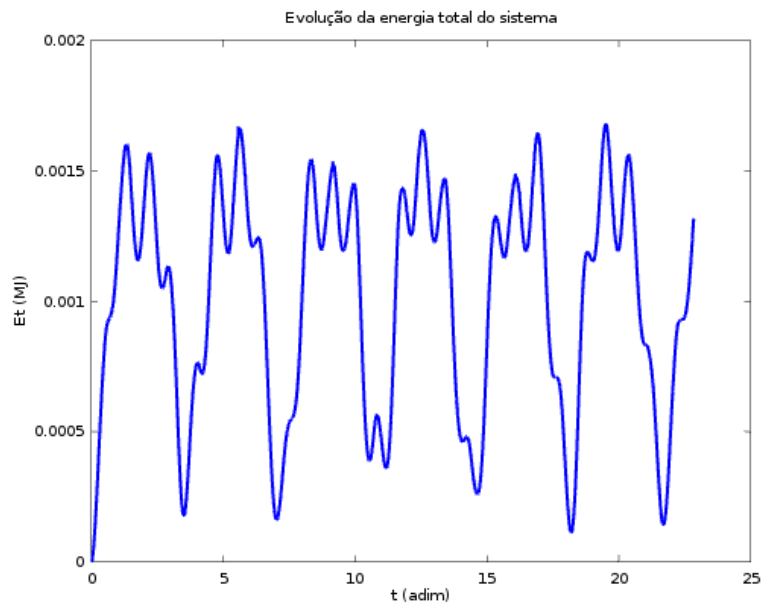


Figura 23 – Estimativa grosseira (obtida com  $N = 8$ ) da evolução da energia total do sistema [ $MJ$ ] com o tempo (adim.), para tempos longos (caso padrão).

## 8 Conclusão

Este trabalho apresentou uma proposta inédita de metodologia para resolver Problemas de Valores Iniciais (PVI) de sistemas magneto-elásticos em corpos não magnéticos. A discretização espacial das equações governantes é efetuada com métodos pseudo-espectrais e a discretização temporal inclui uma adaptação do método de splitting de Chorin (16), um método fracionário de avanço no tempo utilizado para resolver o transiente de problemas de escoamento de fluidos incompressíveis. A fim de viabilizar a efetiva aplicação do método de Chorin, uma variável artificial análoga à pressão é acrescentada ao conjunto de variáveis que descrevem o sistema. Esta nova “pressão” passa a aparecer nas equações governantes dentro de um termo que inclui um gradiente. De acordo com Mohebbi (15), esta inclusão não modifica o problema pois a única possibilidade teórica para um termo assim é ser nulo. Na prática, no entanto, ele serve como regulador do campo magnético, fazendo com que ele não deixe de ser solenoidal à medida que a simulação do PVI avança no tempo. O método assim delineado foi aplicado à obtenção de valores de energia total do sistema em uma instância 2D do problema magneto-elástico envolvendo uma barra de material não ferromagnético exposta a um campo magnético externo constante. Os resultados mostram que o método consegue resolver corretamente equações completas originadas de soluções pré-definidas e também consegue produzir resultados com consistência física em casos fisicamente realistas.





# Referências

- 1 LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. *Electrodynamics of Continuous Media*. Amsterdam: Elsevier, 1984. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 19.
- 2 LUPU, N. *Magnetostriction vs Magnetoelastic Effects*. 2007. Disponível em: <<http://magnetism.eu/esm/2007-cluj/questions/magnetostriction.pdf>>. Acesso em: 5-May-2019. Citado na página 13.
- 3 PASQUALE, M. Mechanical sensors and actuators. *Sensors and Actuators*, v. 106, p. 142–148, 2003. Citado na página 13.
- 4 Wikipedia contributors. *Inverse magnetostrictive (Villari) effect* — *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. 2019. [Online; accessed 5-May-2019]. Disponível em: <[https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Inverse\\_magnetostrictive\\_effect&oldid=893402036](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Inverse_magnetostrictive_effect&oldid=893402036)>. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 86.
- 5 COLLINS, D. What are magnetoelastic sensors for torque measurement? *Motion Control Tips*. Citado na página 13.
- 6 FOERSTER, M.; MACIÀ, F. Preface to special issue on magneto-elastic effects. *Journal of Physics: Condensed Matter*, IOP Publishing, v. 31, n. 19, p. 190–301, mar 2019. Citado na página 14.
- 7 HIRSINGER, L. *Etude des déformations magnéto-élastiques dans les matériaux ferromagnétiques doux. Application à l'étude des déformations d'une structure de machine électrique*. Tese (Doctorat en Mécanique) — Université Paris 6, Paris, France, 1994. Citado na página 14.
- 8 WIKIPEDIA. *Zumbido elétrico* — *Wikipédia, a enciclopédia livre*. 2018. [Online; accessed 7-May-2019]. Disponível em: <[https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Zumbido\\_elétrico&oldid=52273268](https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Zumbido_elétrico&oldid=52273268)>. Citado na página 14.
- 9 SUN, Z. H. I. et al. Processing of non-ferromagnetic materials in strong static magnetic field. *Current Opinion in Solid State and Materials Science*, v. 17, n. 4, p. 193–201, august 2013. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 85.
- 10 PARIA, G. Magneto-elasticity and magneto-thermo-elasticity. In: \_\_\_\_\_. *Advances in Applied Mathematics*. [S.l.]: Elsevier, 1966. p. 73–112. Citado 3 vezes nas páginas 14, 19 e 26.
- 11 LEE, J. S.; PREVOST, J. H.; LEE, P. C. Y. Finite element analysis of magnetically induced vibrations of conductive plates. *Fusion Engineering and Design*, Elsevier, v. 13, n. 2, p. 125–141, 1990. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 29.
- 12 UOL. *Trem-bala magnético japonês bate novo recorde de velocidade a 603 km/h*. 2015. Disponível em: <<https://noticias.uol.com.br/internacional/ultimas-noticias/2015/04/21/trem-bala-magnetico-japones-bate-outro-recorde-de-velocidade-a-603-kmh.htm>>. Citado na página 14.

- 13 ZHANG, J. et al. Analysis of magnetoelastic interaction of cantilever conductive thin plate with nonlinear dynamic response. *European Journal of Mechanics A/Solids*, v. 37, p. 132–138, 2013. Citado na página 14.
- 14 ERINGEN, A. C.; MAUGIN, G. A. *Electrodynamics of Continua*. New York: Springer, 1990. I. Citado 3 vezes nas páginas 14, 19 e 20.
- 15 MOHEBBI, M. *Time-periodic solutions of magnetoelastic systems and embedding of the attractor of 2D Navier-Stokes equations into Euclidean spaces*. Tese (Doctor of Philosophy) — University of Pittsburgh, Pittsburgh, EUA, 2013. Citado 9 vezes nas páginas 14, 19, 20, 21, 26, 27, 42, 43 e 77.
- 16 CANUTO, C. et al. *Spectral Methods: Evolution to Complex Geometries and Applications to Fluid Dynamics*. [S.l.]: Springer, 2007. Citado 5 vezes nas páginas 16, 30, 45, 46 e 77.
- 17 PAO, Y.; YEH, C. A linear theory for soft ferromagnetic elastic solids. *International Journal of Engineering Science*, v. 11, p. 415–436, 04 1973. Citado na página 19.
- 18 BROWN, W. F. *Magnetoelastic Interactions*. New York: Springer, 1966. v. 9. (Springer Tracts in Natural Philosophy, v. 9). Citado na página 19.
- 19 JACKSON, J. D. *Classical electrodynamics*. [S.l.]: John Wiley and Sons, Inc., 1999. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 23.
- 20 Wikipedia contributors. *Linear elasticity* — *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. 2019. [Online; accessed 9-May-2019]. Disponível em: <[https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Linear\\_elasticity&oldid=885540406](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Linear_elasticity&oldid=885540406)>. Citado na página 24.
- 21 Wikipedia contributors. *Hooke's law* — *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. 2019. [Online; accessed 9-May-2019]. Disponível em: <[https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Hooke%27s\\_law&oldid=895969258](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Hooke%27s_law&oldid=895969258)>. Citado na página 25.
- 22 MOHEBBI, M.; OLIVEIRA, J. C. Existence of time-periodic solutions for a magnetoelastic system in bounded domains. *Journal of Elasticity*, v. 113, p. 113–133, 2013. Citado 5 vezes nas páginas 28, 29, 30, 49 e 50.
- 23 LANGTANGEN, H. P.; MARDAL, K.; WINTHER, R. Numerical methods for incompressible viscous flows. *Advances in Water Resources*, v. 25, p. 1125–1146, 2002. Citado 3 vezes nas páginas 29, 41 e 42.
- 24 FENICS. *Computing platform*. 2019. Disponível em: <<https://fenicsproject.org/>>. Citado na página 29.
- 25 CANUTO, C. et al. *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. [S.l.]: Springer, 1988. Citado na página 30.
- 26 BOYD, J. P. *Chebyshev and Fourier spectral methods*. [S.l.]: Dover, 2001. Citado na página 30.
- 27 TREFETHEN, L. N. *Spectral methods in Matlab*. Philadelphia: SIAM, 2000. Citado 6 vezes nas páginas 30, 35, 36, 37, 38 e 39.

- 28 OCTAVE. *Software para computação científica*. 2019. Software livre. Disponível em: <<http://www.octave.org/>>. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 61.
- 29 MENZALA, G. P.; ZUAZUA, E. Energy decay of magnetoelastic waves in a bounded conductive medium. *Asymptotic Analysis*, IOS Press, n. 18, p. 349–362, 1998. Citado na página 30.
- 30 CHARAO, R.; OLIVEIRA, J.; MENZALA, G. P. Energy decay of magnetoelastic waves in a bounded conductive medium. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, v. 25, n. 3, p. 797–821, 2009. Citado na página 30.
- 31 RIVERA, J. E. M.; RACKE, R. Polynomial stability in two-dimensional magneto-elasticity. *IMA Journal of Applied Mathematics*, v. 66, p. 269–283, 2001. Citado na página 31.
- 32 JIANG, B.; WU, J.; POVINELLI, L. A. The origin of spurious solutions in computational eletromagnetics. *Journal of Computational Physics*, v. 125, p. 104–123, 1996. Citado na página 41.
- 33 KARNIADAKIS, G. E. High-order splitting methods for the incompressible navier-stokes equations. *Journal of Computational Physics*, v. 97, p. 414–443, 1991. Citado na página 46.
- 34 Wikipedia contributors. *Courant–Friedrichs–Lewy condition* — *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. 2019. [Online; accessed 5-May-2019]. Disponível em: <[https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Courant%E2%80%93Friedrichs%E2%80%93Lewy\\_condition&oldid=886436192](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Courant%E2%80%93Friedrichs%E2%80%93Lewy_condition&oldid=886436192)>. Citado na página 61.
- 35 KREIDER, D. R. et al. *An Introduction to Linear Analysis*. [S.l.]: Addison-Wesley, 1966. Citado na página 64.
- 36 ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; NITHIARASU, P. *The Finite Element Method for Fluid Dynamics*. [S.l.]: Elsevier, 2014. Citado na página 64.
- 37 PYTHON. *Symbolic python*. 2019. Software livre. Disponível em: <<https://www.sympy.org/>>. Citado na página 66.
- 38 Wikipedia contributors. *Aluminium* — *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. 2019. [Online; accessed 11-May-2019]. Disponível em: <<https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Aluminium&oldid=896463159>>. Citado na página 71.
- 39 Wikipedia contributors. *Ferromagnetism* — *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. 2019. [Online; accessed 5-May-2019]. Disponível em: <<https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Ferromagnetism&oldid=895057178>>. Citado na página 85.
- 40 Wikipedia contributors. *Magnetic susceptibility* — *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. 2019. [Online; accessed 5-May-2019]. Disponível em: <[https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Magnetic\\_susceptibility&oldid=895456670](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Magnetic_susceptibility&oldid=895456670)>. Citado na página 86.
- 41 Wikipedia contributors. *Magnetostriction* — *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. 2019. [Online; accessed 5-May-2019]. Disponível em: <<https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Magnetostriction&oldid=895184470>>. Citado na página 86.



# Apêndices



# APÊNDICE A – Princípios físicos elementares

Neste apêndice, são descritos alguns princípios e conceitos elementares sobre as propriedades magnéticas típicas dos materiais em geral.

## Propriedades magnéticas

As propriedades magnéticas de um material correspondem diretamente à estrutura cristalina e à configuração dos elétrons no nível atômico. Segundo (9), de acordo com as características dos átomos individuais, há 5 propriedades magnéticas básicas possíveis: ferromagnetismo, paramagnetismo, diamagnetismo, anti-ferromagnetismo e ferrimagnetismo. As primeiras 3 ocorrem em materiais naturais e as duas últimas são o produto de ligas especiais. Essencialmente, há materiais fortemente magnetizáveis (os ferromagnéticos) e fracamente magnetizáveis (para e diamagnéticos). Este trabalho envolve materiais fracamente magnetizáveis, os chamados “não-ferromagnéticos”, por tratar de deformações pequenas o suficiente para não modificar a forma do objeto sendo modelado (no caso, uma barra sólida de seção quadrada).

## Ferromagnetismo

O ferromagnetismo é o mecanismo pelo qual certos materiais (como o ferro) formam ímãs permanentes ou são atraídos para ímãs (39). O ferromagnetismo é o tipo mais forte de magnetismo e somente ele (ou o ferrimagnetismo) cria forças intensas o suficientes para serem sentidas (ímãs de geladeira). Apenas algumas substâncias são ferromagnéticas. As mais comuns são: ferro, níquel e cobalto. O ferromagnetismo é muito importante para a tecnologia moderna, pois é a base de muitos dispositivos eletromagnéticos, tais como motores elétricos, geradores e transformadores, além de dispositivos para armazenamento magnético de informação, tais como um disco rígido comum.

## Materiais não ferromagnéticos

Os materiais não-ferromagnéticos (paramagnéticos ou diamagnéticos) respondem de maneira muito mais fraca do que os ferromagnéticos a um campo magnético externo (9). De fato, as forças são tão pequenas que, usualmente, elas só podem ser detectadas em um laboratório. Neste caso, *a magnetização depende linearmente da densidade do campo* e sempre desaparece quando o campo externo é removido. Muitos metais, incluindo

os metais ferromagnéticos acima das suas temperaturas de Curie são paramagnéticos. Na maioria dos casos, a susceptibilidade magnética varia linearmente com o recíproco da temperatura, seguindo a lei de Curie-Weiss. Para estes materiais, os efeitos da carga elétrica e da polarização podem ser desprezados.

## Susceptibilidade magnética

A susceptibilidade magnética é uma medida das propriedades magnéticas de um material (40). Ela indica se o material é atraído para ou repellido por um campo magnético. Se a susceptibilidade magnética é maior do que zero, diz-se que a substância é “paramagnética”, ou seja, a magnetização desta substância é maior do que a do espaço vazio. Se ela for menor do que zero, a substância é “diamagnética” e tende a excluir o campo magnético do seu interior. Neste trabalho, assume-se que a barra de seção quadrada que constitui o domínio de solução é feita de alumínio, um material *paramagnético*.

## Magnetostricção

A magnetostricção é definida como uma propriedade dos materiais ferromagnéticos que os leva a mudar de forma ou dimensões durante o processo de magnetização (41). A variação do nível de magnetização devido a um campo magnético externo aplicado produz uma deformação magnetostritiva até atingir o seu valor de saturação. Este efeito causa perda de energia devido a um aquecimento por atrito em núcleos ferromagnéticos. Ele também é responsável pelo zumbido característico que pode ser ouvido perto de transformadores, quando correntes alternadas produzem um campo magnético em constante mudança. A compreensão deste tipo de ruído, com o intuito de diminuí-lo ou eliminá-lo, é mais uma razão para o interesse da engenharia nas interações magneto-elásticas.

## Efeito Villari

O efeito inverso, ou seja, a mudança de susceptibilidade magnética (resposta a um campo magnético aplicado) de um material sujeito a uma tensão mecânica é chamada de efeito Villari (4). De acordo com (4), este efeito é tão significativo que tem sido usado no desenvolvimento de sensores de força, tais como os utilizados na engenharia civil ou no monitoramento dos enormes motores a diesel das locomotivas. No presente trabalho, assume-se que as deformações são pequenas, de modo que as interferências geradas por este efeito nos campos magnéticos estabelecidos por um campo externo deverão ter valores pequenos em módulo.