



Dicionários Escolares

INDISPENSÁVEIS AOS ESTUDANTES

Pequeno Dicionário Brasileiro da Língua Portuguesa

De acôrdo com a reforma ortográfica definitiva

É o primeiro dicionário destinado ao Brasil, e elaborado com espírito prático e moderno, uma vez que se levou em conta a língua viva, aquela que brota da pena dos nossos escritores, se lê nos jornais e se ouve no lar nas ruas, no campo e por toda a parte.

Pequeno Dicionário Inglês-Português

por Nuno Smith de Vasconcelos

Com cerca de 40.000 palavras modernas, expressões idiomáticas e termos técnicos que não se encontram em nenhum outro dicionário de sua classe.

Pequeno Dicionário Latino-Português

Organizado por um grupo de professores. Revisto por Fernando de Azevedo

Feito especialmente para os estudantes de ginásios e colegios, apresenta o essencial para a compreensão dos textos latinos. Definições rigorosas em todos os sentidos correntes por autores clássicos, devidamente registados.

Pequeno Dicionário Espanhol-Português

por Idel Becker

Com cerca de 50.000 vocabulos, hispano-americanismos, vocabulário castiço, de gíria e neológico. O mais completo até hoje publicado no Brasil.

COMPANHIA EDITORA NACIONAL

Rua dos Gusmões, 639 - São Paulo

São Paulo Editora S. A. imprimiu.

Preço deste vol. Cr\$ 25,00

Série 2^a LIVROS DIDÁTICOS Vol. 121
BIBLIOTECA PEDAGÓGICA BRASILEIRA

PROF. JACOMO STÁVALE

Elementos de Matemática

Segundo Volume

para a

Segunda Série do Curso
Ginásial



COMPANHIA EDITORA NACIONAL
SÃO PAULO

Lourenço J. Compagni

Elementos de Matemática

SEGUNDO VOLUME

Livro de uso autorizado pelo
MINISTÉRIO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE
Registro N.º 858

Exemplar 73483 *

Jacomo Stávale

DIREITOS AUTORAIS RESERVADOS
REGISTROS N.ºS 5 874 E 6 654 — BIBLIOTECA NACIONAL

Marcia Bernal

OBRAS PUBLICADAS PELO AUTOR

Portaria Ministerial de 18 de abril de 1931

Primeiro Ano de Matemática. <i>Dezenove edições</i> , 95 milheiros	Esgotado
Segundo Ano de Matemática. <i>Treze edições</i> , 65 milheiros ...	Esgotado
Terceiro Ano de Matemática. <i>Nove edições</i> , 45 milheiros ...	Esgotado
Quarto Ano de Matemática. <i>Sete edições</i> , 35 milheiros	Esgotado
Quinto Ano de Matemática. <i>Quatro edições</i> , 20 milheiros..	Esgotado
Exercícios de Matemática — Terceiro Ano.	
1 400 exercícios numéricos e problemas, com os resultados.	
<i>Brochura</i>	Cr\$ 6,00
Exercícios de Matemática — Quarto Ano.	
900 exercícios numéricos e problemas, com os resultados.	
<i>Brochura</i>	Cr\$ 5,00

Portaria Ministerial de 11 de julho de 1942

Elementos de Matemática, Primeiro Volume.	
<i>Vinte edições</i> , 100 milheiros.	
Elementos de Matemática, Segundo Volume.	
<i>Dezesseis edições</i> , 80 milheiros.	
Elementos de Matemática, Terceiro Volume.	
<i>Doze edições</i> , 60 milheiros.	
Elementos de Matemática, Quarto Volume.	
<i>Oito edições</i> . 40 milheiros.	
Problemas de Matemática, Primeira Série Ginásial.	
780 exercícios com os resultados.	
<i>Brochura</i>	Cr\$ 6,00
Problemas de Matemática, Segunda Série Ginásial.	
750 exercícios com os resultados.	
<i>Brochura</i>	Cr\$ 7,00

COMPANHIA EDITORA NACIONAL
RUA DOS GUSMÕES, 639 — SÃO PAULO

SÉRIE 2.^a LIVROS DIDÁTICOS Vol. 121
BIBLIOTECA PEDAGÓGICA BRASILEIRA

Prof. Jacomo Stávale

Elementos de Matemática

SEGUNDO VOLUME

para a
Segunda Série do Curso Ginásial

650 exercícios orais e de classe
720 exercícios escritos e problemas

Omnis scientia requirit mathematicam
BACON

15.^a edição — 75 milheiros



COMPANHIA EDITORA NACIONAL
SÃO PAULO

Jacomo Stávale
2.ª série 17

1948

Obra executada nas oficinas da
São Paulo Editora S/A — São Paulo, Brasil.

Rio, 20 de outubro de 1938

Ilustre prof. Jacomo Stávale

Saudações

Passando para a Reserva do Exército, em fins de 1935, para logo destinei o restante de minhas energias ao magistério particular, uma vez que sempre nutri grande entusiasmo pelo ensino secundário.

Matemática, foi a matéria escolhida para lecionar, o que, aliás, já o fizera inúmeras vezes, particularmente.

Encontrei para o exercício desta nobre militância, o programa do Colégio Pedro II, baixado com o decreto n.º 19 890 de 18 de abril de 1931.

Lidas as instruções pedagógicas, ou sejam as novas diretrizes do ensino secundário, comecei a meditar nas dificuldades para o aluno, privado do manuseio de livros adequados à nova pedagogia.

Aparecem, porém, os primeiros compêndios articulados àquelas instruções. Adquiro alguns, leio outros, escritos em geral com extrema concisão, menos, portanto, para o aluno que para o próprio mestre.

Eis que, em 1937, resolvo apelar para a sua coleção. E, à proporção que penetro no assunto, vou sentindo, com justeza, o segredo do livro para o aluno, do livro que somente os verdadeiros pedagogos sabem fazer, porque sentem, de perto, as dificuldades do estudante moderno, obrigado a uma extensão de conhecimentos muito maior que os de outrora.

Leio um por um dos componentes do seu quinteto matemático, e acabo por adotá-los entre meus alunos, com absoluta confiança e serenidade, certo de que, em clareza, orientação e segurança, nenhum outro conjunto pode superá-los.

Os seus livros, escritos como foram, com sobriedade, riqueza de exercícios, fecundidade de conceitos adequados à compreensão dos moços, afirmo com lealdade e entusiasmo, vão além das exigências modernas do ensino; e se enquadram tão bem aos intuídos do decreto acima citado, que é fácil prever o êxito, já assinalado, do brilhante serviço que o Amigo presta ao magistério secundário e à mocidade estudiosa do Brasil.

(a) Cel. Walfredo Reis.

PREFÁCIO

ÊSTE livro contém o desenvolvimento do programa de Matemática para a segunda série ginásial, de acôrdo com a portaria ministerial de 11 de julho de 1942.

Antes de iniciá-lo, tive de resolver um problema didático. As três primeiras unidades do programa em aprêço são as seguintes:

- Unidade I* — **Áreas**
- Unidade II* — **Volumes**
- Unidade III* — **Sistema métrico**

Por onde começar? Para seguir rigorosamente o programa, deveria começar pelas áreas. Mas, neste caso, não poderia lógicamente fazer aplicações das fórmulas a elas relativas, visto não ter ainda desenvolvido o capítulo do sistema métrico.

Começar pelo sistema métrico? Ver-me-ia também em situação embaraçosa, por não poder explicar o que são unidades de área e o que significam, sem que os estudantes saibam calcular a área de um retângulo ou a de um quadrado.

Resolvi a dificuldade fazendo o que a experiência me ensinou durante 44 anos de magistério. Comecei pelo sistema métrico; explicando as unidades de área e de volume, mostrei ao mesmo tempo como se calcula a área do retângulo ou a do quadrado, assim como o volume do bloco retangular ou o do cubo.

Enfim, desenvolvendo o capítulo **Sistema métrico**, nele introduzi os pontos principais dos capítulos **Áreas** e **Volumes**, capítulos êstes que terminei no fim do compêndio.

* * *

Os srs. professores encontrarão no fim dêste volume, **os quadrados e os cubos dos números naturais**, de 1 a 1 000, e as **raízes quadradas e cúbicas** dêsses mesmos números, calculadas com êrro inferior a meio décimo milésimo, por falta ou por excesso. Estas tabelas, colhidas em ótima fonte, foram transcritas com excepcional cuidado, sendo pouco provável que nelas existam erros. Todavia, se algum êrro for encontrado, muito grato ficarei pela comunicação.

* * *

Espero, com invulgar interêsse, que os srs. professores se dignem escrever-me a respeito dêste compêndio.

Julgo indispensável uma crítica sincera, porém construtiva, em benefício dos nossos jovens alunos que serão amanhã uma radiosa mocidade firmemente entrincheirada para defender a honra e a integridade do nosso amado Brasil.

S. Paulo, fevereiro de 1943

O AUTOR

Rua Safira, 9

PREFÁCIO DA PRIMEIRA EDIÇÃO
DO
SEGUNDO ANO DE MATEMÁTICA

*É indigno de se chamar homem,
quem ignora que o lado e a diagonal
de um quadrado são grandezas inco-
mensuráveis.*

PLATÃO.

SEM dúvida alguma, é bela e útil a nova orientação dada ao ensino da Matemática pela douta Congregação do Colégio Pedro II. Os quatro ramos da Matemática Elementar, convém que sejam ensinados paralelamente, desde o primeiro ano do curso ginásial. Mas o ensino simultâneo destes quatro ramos não pode ser feito atabalhoadamente, como o pretendem alguns autores. É necessário que os jovens estudantes tenham os seus conhecimentos perfeitamente classificados, assim como se classificam os livros de uma biblioteca. *É ainda necessário que tenham livros onde encontrem a reprodução fiel das lições de seus professores.* Acabemos com o caderno de apontamentos que é a causa principal da falência do ensino secundário, no Brasil.

Adquirirão assim uma sabedoria de gaveta, objetou-me, um dia, uma das figuras de maior relêvo no magistério paulista. Talvez; mas esta gaveta não será a de um sapateiro. E, depois das longas férias de verão, quando, continuando o curso secundário, tiverem esquecido algumas das noções adquiridas no ano anterior,

saberão onde encontrá-las. É tirar da gaveta o livro onde estudaram, e a recordação será rápida e suave.

Enquanto durar esta confusão no ensino da Matemática; enquanto os professores, por falta de livros adequados, ditarem as suas lições, assistiremos sempre, no fim do ano letivo, ao mesmo fenômeno doloroso e deprimente; os estudantes, com poucas e confusas noções relativas ao assunto sobre o qual vão ser examinados, *fazem o que podem para passar*; aquelas poucas noções desaparecem como o orvalho ao calor das férias estivais e, no ano seguinte, os estudantes nada sabem do que aprenderam no ano anterior, e *nada têm na gaveta*. E terminam o curso secundário, em regra geral, não sabendo calcular o custo de 26 centímetros de sêda a 25\$000 o metro, o desconto de 5% em uma fatura, a área de um terreno qualquer, etc..

É o que estamos observando há vinte anos.

Correções, sugestões, críticas, verbalmente ou por carta, serão por mim recebidas com vivo prazer, em minha residência, rua Safira, 9.

São Paulo, março de 1932

O AUTOR

ÍNDICE-SUMÁRIO

ARITMÉTICA PRÁTICA

CAP. I — Sistema legal de unidades de medir

§ §	Págs.
1. Diferentes espécies de grandezas.....	1
2. Medição direta ou indireta de uma grandeza.....	2
3. Grandezas elementares.....	7
4. Unidades de comprimento.....	7
5. Os submúltiplos do metro e as frações decimais.....	11
6. Mudança de unidade nas medidas de comprimento.....	11
7. Unidades de área.....	16
8. Os submúltiplos do metro quadrado e as frações decimais.....	19
9. Mudança de unidade nas medidas de área.....	21
10. Os múltiplos do metro quadrado.....	22
11. Unidades agrárias.....	25
12. O volume de um corpo.....	29
13. O bloco retangular.....	29
14. O cubo; o decímetro cúbico e o centímetro cúbico.....	30
15. O metro cúbico.....	32
16. Volume do bloco retangular.....	33
17. Volume do cubo.....	35
18. O volume é uma grandeza composta.....	36
19. As unidades de volume.....	36
20. Mudança de unidade nas medidas de volume.....	38
21. Os múltiplos do metro cúbico.....	39
22. O litro.....	42
23. Equivalência entre volumes e capacidades.....	43
24. Unidades de massa.....	45
25. Os corpos e sua densidade.....	48
26. O movimento uniforme.....	51
27. Unidades para medir ângulos.....	54
28. Unidades de tempo.....	58

CAP. II — Potências e raízes

29. Definições.....	60
30. Quadrado da soma de dois números.....	61
31. Quadrado da diferença de dois números.....	62

32. Cálculo mental.....	63
33. Diferença entre os quadrados de dois números inteiros consecutivos.....	65
34. Raiz quadrada.....	67
35. Quadrados perfeitos e imperfeitos.....	68
36. Extração da raiz quadrada.....	69
37. Processo espontâneo para extrair uma raiz quadrada.....	70
38. Processo usual para extrair uma raiz quadrada.....	71
39. Prova da raiz quadrada.....	73
40. O resto na extração da raiz quadrada.....	74
41. Operações de terceira espécie.....	75
42. A radiciação.....	76
43. Teoremas relativos às potências e raízes.....	77
44. Adição e subtração de potências.....	80
45. Potência de um produto.....	81
46. A característica de um quadrado perfeito.....	81
47. Quadrado das frações decimais.....	83
48. Raiz quadrada das frações decimais.....	83
49. Raiz quadrada com aproximação preestabelecida.....	86
50. Quadrado das frações ordinárias.....	88
51. Raiz quadrada das frações ordinárias.....	89
52. Uso das tabelas.....	92

CAP. III — Razões e proporções

53. Razão.....	94
54. Razão aritmética.....	95
55. Razão geométrica.....	95
56. Transformação de uma razão geométrica.....	96
57. Equidiferenças.....	98
58. Proporções.....	99
59. Proposições; teoremas e postulados.....	100
60. Teorema fundamental das equidiferenças.....	102
61. Teorema fundamental das proporções.....	107
62. Propriedades das proporções.....	114

CAP. IV — Grandezas proporcionais

63. Grandezas diretamente proporcionais.....	127
64. Grandezas inversamente proporcionais.....	128
65. Regra de três.....	130
66. O método de redução à unidade.....	133
67. Regra de três composta.....	138
68. Definição da regra de três composta.....	143
69. Porcentagem.....	145
70. Definições.....	147
71. Cálculo da porcentagem.....	148

72. Preço líquido.....	149
73. Cálculo da taxa.....	150
74. Cálculo do principal.....	151
75. Fórmulas.....	152
76. Fórmula para calcular a porcentagem.....	153
77. Fórmula para calcular um preço líquido.....	154
78. Fórmula para calcular um preço de venda.....	154
79. Divisão em partes diretamente proporcionais.....	155
80. Divisão em partes proporcionais a três números dados.....	157
81. Divisão em partes inversamente proporcionais.....	161
82. A área do retângulo.....	163
83. Regra de sociedade.....	167
84. Juros; definições.....	168
85. Problemas sobre juros.....	170
86. Dados c, i, t , calcular j	171
87. Dados i, t, j , calcular c	174
88. Dados c, t, j , calcular i	175
89. Dados c, i, j , calcular t	177
90. Dados s, i, t , calcular c	179
91. Dados s, i, t , calcular j	180
92. Juros pelo método dos divisores fixos.....	182
93. Taxa média de juros.....	183

GEOMETRIA INTUITIVA

CAP. V — Áreas

94. Área de uma figura plana.....	185
95. Área do retângulo e do quadrado.....	186
96. Área do paralelogramo.....	189
97. Área do triângulo.....	191
98. Área do losango.....	193
99. Área do trapézio.....	195
100. Área de um polígono qualquer.....	197
101. Área do círculo.....	198
102. Unidades inglesas de área.....	199

CAP. VI — Volumes

103. Volume do bloco retangular e do cubo.....	200
104. O volume de um prisma.....	201
105. O volume de uma pirâmide.....	203
106. Volume do cilindro de revolução.....	204
107. Volume do cone de revolução.....	204
108. Unidades inglesas de volume.....	205
Tabelas de quadrados e cubos, raízes quadradas e cúbicas..	206

ARITMÉTICA PRÁTICA

CAPÍTULO I

Sistema Legal de Unidades de Medir

1. **Diferentes espécies de grandezas.** Já aprendemos em que consiste uma grandeza. (E.M.P.V. §41) (*) Vimos que as grandezas podem ser *contínuas* ou *descontínuas*. Um segmento de reta é uma grandeza contínua, porque é um todo cujas partes não são distintas umas das outras. Com efeito, podemos considerar um segmento de reta como sendo constituído por numerosos segmentos retilíneos consecutivos e colineares. (E.M.P.V. §17) e estes segmentos, não distintos uns dos outros, podem ser tantos quantos quisermos.

Uma pilha de livros é uma grandeza descontínua ou discreta porque é um todo cujas partes são distintas umas das outras; com efeito, em uma pilha de livros, cada parte é um livro.

Medir uma grandeza é compará-la com outra da mesma espécie, porém conhecida e perfeitamente definida. Esta segunda grandeza, perfeitamente definida, é chamada **unidade**.

Portanto, para medir um segmento de reta, a unidade é outro segmento de reta; para medir um ângulo, a unidade deve ser outro ângulo; para medir uma superfície limitada, a unidade será outra superfície limitada (§7); e assim por diante.

A medida de uma grandeza é um número concreto; 3 metros, 36 graus, 42 metros quadrados, 15 quilogramas, etc...

As grandezas medidas são chamadas *quantidades*.

(*) E. M. P. V. significa *Elementos de Matemática, Primeiro Volume*, do mesmo autor deste compêndio.

A unidade para medir uma grandeza pode ser **arbitrária** ou **determinada**. É *arbitrária*, quando a grandeza que se quer medir é contínua; é *determinada*, quando a grandeza que se quer medir é descontínua. (E.M.P.V. § 41)

A avaliação de uma grandeza descontínua não oferece dificuldade. **Medir**, por exemplo, uma pilha de livros, significa **contar** os livros que formam esta pilha. **Contar** é uma operação que aprendemos nos primeiros anos da escola primária, e é justamente da operação de contar que resulta a primeira noção do **número**. A grande dificuldade está na avaliação das grandezas contínuas.

A **Matemática** é a ciência que tem por fim estabelecer as relações que existem entre as diferentes grandezas, de modo que se possam avaliar umas por intermédio das outras.

Veremos, pouco a pouco, com numerosos exemplos, o significado desta definição. (§ 2)

2. Medição direta ou indireta de um grandeza. Para medir uma grandeza temos de compará-la com outra da mesma espécie, tomada como unidade. *Esta comparação, porém, pode ser feita de um modo direto ou indireto.*

Queremos medir o comprimento de uma sala de aula. Tomamos o metro e verificamos quantas vezes êle está contido no segmento que representa o comprimento da sala. E ficamos sabendo que a sala de aula tem, por exemplo, 12 metros de comprimento. O comprimento da sala foi obtido de um modo direto, isto é, aplicando-se a grandeza unidade sobre o segmento que representa o comprimento da sala, tantas vezes quantas foi possível.

Um segmento retilíneo é medido diretamente.

E o número resultante é chamado comprimento do segmento retilíneo. ()*

A grandeza de um ângulo também pode ser medida diretamente. Fazemos coincidir o ângulo dado com um ângulo igual do transferidor e verificamos que o ângulo dado mede, por exemplo, 48 graus.

Um ângulo é, em geral, medido diretamente.

(*) Convém observar que a medição de um segmento retilíneo muito extenso, por exemplo, um segmento com alguns quilômetros de comprimento, pode ser feita indiretamente, como aprenderemos mais tarde.

E o número resultante é chamado amplitude do ângulo.
(E.M.P.V. § 22) (*)

A **massa de um corpo, impròpriamente chamada peso**, (§ 24) é uma grandeza que também se mede, em geral, de um modo direto.

O mesmo acontece com o **tempo**. E' também uma grandeza que se avalia diretamente, com o auxílio de um cronômetro.

Vejam agora em que consiste a medição indireta de uma grandeza. O exemplo mais simples, e que vamos apresentar neste parágrafo, é o da medição de uma certa porção de superfície plana e limitada, com a forma de um retângulo ou de um quadrado.

Suponhamos que dois meninos, Carlos e Raul, estão discutindo a respeito da superfície de dois terrenos retangulares, dos quais são os respectivos possuidores. Não chegando a um acôrdo, procuram seu professor para que êste decida a questão. O professor lhes diz que é necessário **que meçam a superfície de seus terrenos**, para que se possa dizer qual é o maior. Mas os meninos respondem que não sabem medir uma superfície. Então o professor explica-lhes que **medir uma superfície limitada consiste em verificar quantas vezes esta superfície contém outra superfície também limitada, conhecida, e tomada como unidade.**

Alguns dias depois voltam os dois meninos com o resultado de seus trabalhos. Diz Carlos que a superfície de seu terreno contém 240 vezes a superfície de uma tábua e diz Raul que a superfície de seu terreno contém 75 vezes a superfície de uma fôlha de zinco. E o professor responde-lhes que ainda não pode dizer qual dos dois terrenos é o maior, porque êle não conhece a superfície da tábua, nem a da fôlha de zinco. Para que êle possa dizer qual dos dois terrenos é o maior, é necessário que os dois meninos meçam a superfície de seus terrenos, **tomando como termo de comparação uma superfície conhecida, por exemplo, a superfície de um quadrado cujo lado mede um metro.**

(*) Aprenderemos mais tarde, quando estudarmos Trigonometria, que a amplitude de um ângulo pode ser obtida indiretamente.

Os dois meninos objetam que não podem medir a superfície de seus terrenos com o auxílio do metro quadrado, porque eles não têm esta medida à sua disposição. Então, responde o professor, vão ao carpinteiro e mandem fazer uma tábua com a forma de um quadrado cujo lado meça um metro.

Armados com estas explicações, os dois meninos retiram-se para proceder novamente à avaliação de seus terrenos. Carlos verificou que o seu terreno tinha 96 metros quadrados e Raul verificou que o seu terreno tinha 84 metros quadrados.

O processo que o professor ensinou aos meninos para medir a superfície de um terreno, é o **processo direto**. Mas este processo, além de ser demorado é, às vezes, impossível de ser adotado. **Diretamente** só se medem os segmentos de reta, os ângulos, o tempo, etc..

Como proceder se quisermos medir diretamente a superfície da nossa sala de aula? Em primeiro lugar é necessário mandar fazer uma tábua quadrada cujo lado meça um metro. Depois é necessário retirar da sala todos os móveis. Finalmente procuramos verificar quantas vezes a superfície do metro quadrado está contida na superfície da sala. E ficamos sabendo que a nossa sala tem, por exemplo, 56 metros quadrados de superfície. (*)

Não é difícil perceber a grande dificuldade deste processo para medir superfícies.

Neste parágrafo quisemos apenas explicar em que consiste a medição direta de uma superfície. A superfície escolhida para medir uma superfície qualquer, isto é, a **unidade de superfície**, é, em geral, o metro quadrado. Também pode ser o decímetro quadrado, o centímetro quadrado, etc..

O metro quadrado é um quadrado cujo lado mede um metro.

O decímetro quadrado é um quadrado cujo lado mede um decímetro.

O centímetro quadrado é um quadrado cujo lado mede um centímetro.

O milímetro quadrado é um quadrado cujo lado mede um milímetro.

(*) Os estudantes podem medir diretamente a superfície de um livro, de um caderno, de um estojo, etc., colocando estes objetos sobre uma folha de papel milimetrado.

Vejamos agora em que consiste a medição indireta de uma superfície retangular ou quadrada. Tracemos em papel milimetrado, um retângulo ABCD, com 8cm de comprimento (AB) e 6cm de largura (AD). Se contarmos os centímetros quadrados existentes no interior do retângulo ABCD, verificaremos que eles são 48, e diremos que a **área** do retângulo ABCD é de 48 centímetros quadrados. Ora, 48 é o produto de 8 (comprimento do retângulo) por 6 (largura do retângulo) Portanto,

$$8 \text{ centímetros} \times 6 \text{ centímetros} = 48 \text{ centímetros quadrados} \quad (1)$$

Tracemos em papel milimetrado, um retângulo ABCD com 35mm de comprimento (AB) e 15mm de largura (AD). Se contarmos os milímetros quadrados existentes no interior do retângulo ABCD, verificaremos que eles são 525, e diremos que a **área** do retângulo ABCD, é de 525 milímetros quadrados. Ora, 525 é o produto de 35 (comprimento do retângulo) por 15 (largura do retângulo). Portanto,

$$35 \text{ milímetros} \times 15 \text{ milímetros} = 525 \text{ milímetros quadrados} \quad (2)$$

Tracemos no quadro negro um retângulo ABCD, com 7dm de comprimento (AB) e 5dm de largura (AD). Em seguida, tracemos dentro deste retângulo, uma porção de paralelas, no sentido do comprimento e no sentido da largura. A distância entre duas paralelas consecutivas deve ser de 1dm, a contar de qualquer um dos vértices. Se contarmos os decímetros quadrados existentes no interior do retângulo ABCD, verificaremos que eles são 35, e diremos que a **área** do retângulo ABCD é de 35 decímetros quadrados. Ora, 35 é o produto de 7 (comprimento do retângulo) por 5 (largura do retângulo). Portanto,

$$7 \text{ decímetros} \times 5 \text{ decímetros} = 35 \text{ decímetros quadrados} \quad (3)$$

Vamos ao recreio e tracemos no terreno um retângulo ABCD, com 12m de comprimento (AB) e 7m de largura (AD). Em seguida, tracemos dentro deste retângulo, uma porção de paralelas, no sentido do comprimento e no sentido da largura. A distância entre duas paralelas consecutivas deve ser de 1 metro, a contar de qualquer um dos vértices. Se contarmos os metros quadrados existentes no interior do retângulo ABCD, verificaremos que eles são 84 e diremos que a **área** do retângulo ABCD é

de 84 metros quadrados. Ora, 84 é o produto de 12 (comprimento do retângulo) por 7 (largura do retângulo). Portanto,

$$12 \text{ metros} \times 7 \text{ metros} = 84 \text{ metros quadrados} \quad (4)$$

Observando os quatro resultados a que chegámos (igualdades 1, 2, 3 e 4) podemos estabelecer a seguinte

Regra. Para calcular a área de um retângulo, medem-se o comprimento e a largura com a mesma unidade de comprimento. Em seguida, multiplicam-se os dois números obtidos. O resultado representa a área do retângulo, em quadrados, cujo lado é igual à unidade de comprimento escolhida para medir o comprimento e a largura do mesmo retângulo.

Metros multiplicados por metros dão metros quadrados. O que se quer dizer com esta frase é o seguinte: exprimindo-se o comprimento e a largura de um retângulo em metros, e multiplicando-se os dois valores, o produto representa a área do retângulo em metros quadrados. Análogamente, decímetros multiplicados por decímetros dão decímetros quadrados, etc..

Para calcular a área de um quadrado é bastante medir o comprimento de um de seus lados e multiplicar este número por si mesmo.

Se traçarmos em papel milimetrado um quadrado cujo lado meça 7 centímetros, verificaremos imediatamente que este quadrado contém 49 centímetros quadrados. Se o lado do quadrado medir 30 milímetros, o quadrado conterà 900 milímetros quadrados. Se o lado de um terreno quadrado mede 12 metros, este terreno contém 144 metros quadrados.

Chama-se área de um retângulo ou de um quadrado, o número que exprime quantas vezes este retângulo ou quadrado contém a unidade de área.

Observação. Acabámos de aprender, de um modo prático, como se mede a área de um retângulo. E, ao mesmo tempo, apresentámos uma primeira justificação da nossa definição da Matemática. (§1) Com efeito, foi necessário estabelecer a relação existente entre o comprimento, a largura e a área de um retângulo para que, por meio das duas primeiras grandezas, comprimento e largura, se pudesse calcular a terceira, isto é, a área do retângulo.

3. Grandezas elementares. As grandezas elementares são três: o comprimento, a massa e o tempo. Estas três grandezas são chamadas elementares, porque delas se derivam as outras. (*)

Observação. Com a palavra comprimento, a grande maioria dos autores designa, indiferentemente, um segmento de reta, AB, e o número que exprime quantas vezes este segmento contém outro tomado como unidade isto é, a medida do segmento AB.

Grandezas compostas são as que se definem por meio de produtos ou quocientes de outras grandezas elementares ou compostas. (*) Como exemplo de uma grandeza composta podemos citar a área de um retângulo a qual, como já vimos anteriormente (§2) resulta do produto de duas grandezas elementares, isto é, os comprimentos de dois lados consecutivos do retângulo, chamados, em particular, comprimento e largura ou base e altura do mesmo retângulo.

Veremos adiante que o volume de um corpo é também uma grandeza composta, resultante do produto de três comprimentos, isto é, de três grandezas elementares, ou do produto de uma área por um comprimento, isto é, de uma grandeza composta por uma grandeza elementar. (§14)

A velocidade de um corpo em movimento é também uma grandeza composta. Suponhamos que um automóvel percorre 160 quilômetros em 5 horas. A velocidade (média) deste automóvel é de $\frac{160}{5}$ quilômetros por hora, isto é, $32 \frac{\text{quilômetros}}{\text{hora}}$.

Vemos assim que a velocidade é uma grandeza composta, resultante do quociente de duas grandezas elementares: o comprimento e o tempo.

Para medir uma grandeza contínua é necessário adotar uma unidade. As unidades escolhidas para medir as grandezas elementares são chamadas **unidades fundamentais absolutas**. No Brasil, as unidades fundamentais absolutas são o metro, o quilograma e o segundo, de acôrdo com o Decreto n.º 4 257 de 16 de junho de 1939.

4. Unidades de comprimento. A unidade legal de comprimento é o metro. O problema de medir, hoje relativamente

(*) Euclides Roxo, *Unidades e Medidas*, págs. 14 e 15.

tão simples, era, há pouco mais de um século, uma fonte contínua de aborrecimentos porque cada país, cada estado, cada cidade, tinha as suas unidades próprias para medir, e estas *unidades* eram *diferentes* entre dois países, entre duas regiões de um mesmo país, e até mesmo entre duas cidades às vezes muito próximas uma da outra.

Dessa diversidade de unidades resultavam sérias dificuldades para os comerciantes que necessitavam comprar mercadorias fora das cidades onde exerciam sua profissão. Não havendo uniformidade nas unidades de medir, o negociante de um país qualquer, por exemplo, do Brasil, não podia comprar mercadorias na França, sem conhecer as unidades de medir usadas pelos franceses. E eram freqüentes as questões entre compradores e vendedores, questões essas que, quasi sempre, eram levadas aos tribunais, e resolvidas com prejuízos para ambas as partes.

Coube à França, a iniciativa de estabelecer um sistema de unidades de medir, simples e racionais, fáceis de memorizar, e que substituíssem as unidades anteriores numerosíssimas e arbitrárias.

Em 9 de maio de 1790, o govêrno francês encarregou a Academia de Ciências de Paris, de organizar um novo sistema de unidades de medir. Para desobrigar-se dessa incumbência, a Academia nomeou uma comissão de matemáticos notáveis, na qual figuravam Delambre, Méchain, Borda, Lagrange, Laplace, Prony e Bertholet.

Iniciando os trabalhos, esta comissão resolveu, em primeiro lugar, determinar a *unidade de comprimento*. E para que esta unidade fôsse invariável e independente do tempo e do espaço, resolveram tirá-la do globo terrestre.

Delambre e Méchain foram encarregados de medir a distância do polo Norte ao Equador, isto é, da quarta parte do meridiano terrestre e, tomando como unidade de comprimento uma das unidades usadas naquela época, a toeza de Paris, verificaram, após longos anos de trabalho, que essa distância é de 5 130 740 toezas de Paris. Esta distância foi dividida em 10 000 000 de partes iguais, e a cada uma destas partes deu-se o nome de *metro*, do grego *metron*, que significa *medida*.

Em 22 de junho de 1799, foi depositado nos Arquivos Nacionais de Paris um metro de platina que *por convenção*, ficou representando a décima milionésima parte da distância do polo Norte ao Equador. E compreende-se bem esta *convenção*; é humanamente impossível medir com toda a precisão a quarta parte do meridiano terrestre. E ficou resolvido que o comprimento desse metro de platina, na temperatura de *zero graus*, seria o **metro legal**.

Trabalhos posteriores, porém, mostraram que a décima milionésima parte da distância do polo Norte ao Equador é um pouco maior que o metro legal; cêrca de 0,0002 do metro.

Hoje o *metro legal* não é mais o metro de platina depositado nos Arquivos Nacionais de Paris; é um outro metro que se procurou fazer tanto quanto possível, igual ao antigo metro legal, e que está descrito na seguinte

Definição. O metro é a distância, à temperatura de 0°C, dos eixos dos dois traços médios gravados sobre a barra de platina iridiada depositada na Repartição Internacional de Pesos e Medidas e considerada como protótipo do metro pela Conferência Geral de Pesos e Medidas (realizada em Paris, em 1889) estando submetida à pressão atmosférica normal e suportada por dois rolos com um diâmetro mínimo de um centímetro, situados simetricamente num mesmo plano horizontal e à distância de 571 milímetros um do outro. (EUCLIDES ROXO, *Unidades e Medidas*, pág. 25)

Às vezes, o metro é uma unidade pequena para medir o comprimento de uma linha; outras vezes é grande. Eis por que os organizadores do sistema métrico estabeleceram outras unidades de comprimento. São os *múltiplos* e os *submúltiplos* do metro. Aliás, só se consideram os múltiplos e submúltiplos decimais.

O metro é a unidade principal de comprimento; seus múltiplos e submúltiplos são unidades secundárias.

Os múltiplos usuais do metro são três: o decâmetro, o hectômetro e o quilômetro. Estes nomes são constituídos pelas palavras gregas *deca*, *hecto* e *kilo*, ligadas à palavra *metro*. Ora, *deca* significa *dez*; *hecto* significa *cem*; *kilo* significa *mil*. Donde se conclue que:

Um decâmetro vale	10 metros.
Um hectômetro vale	100 metros.
Um quilômetro vale	1000 metros.

Os principais submúltiplos usuais do metro são três: o decímetro, o centímetro e o milímetro. Estes nomes são constituídos pelas palavras latinas *deci*, *centi* e *milli* ligadas à palavra *metro*. Ora, *deci* significa *um décimo*; *centi* significa *um centésimo*; *milli* significa *um milésimo*. Donde se conclue que:

Um decímetro é a décima parte do metro.
Um centímetro é a centésima parte do metro.
Um milímetro é a milésima parte do metro.

MÚLTIPLOS...	{	quilômetro (km) = 1 000 metros	
		hectômetro (hm) = 100 metros	
		decâmetro (dam) = 10 metros	
UNIDADE.....	{	metro (m) = 1 metro	(A)
Submúltiplos.	{	decímetro (dm) = 0,1 do metro	
		centímetro (cm) = 0,01 do metro	
		milímetro (mm) = 0,001 do metro	

O quadro A contém os nomes das unidades de comprimento, suas abreviaturas e seus valores em relação ao metro.

Entre outros múltiplos e submúltiplos do metro, podemos mencionar o *megâmetro* (1 000 000 de metros) e o *micron* (0,000 001 do metro ou 0,001 do milímetro), cujos símbolos respectivos são *Mm* e μ (letra grega que se lê *mu*).

Consideremos o número 37 548. É um número abstrato porque não se menciona o nome da unidade. Entretanto, se dissermos 37 548 metros, o número tornar-se-á concreto, visto que se menciona o nome da unidade.

Já sabemos que $1\text{dam} = 10\text{m}$, $1\text{hm} = 100\text{m}$ e $1\text{km} = 1\,000\text{m}$. Logo,

O decâmetro é uma dezena de metros.
O hectômetro é uma centena de metros.
O quilômetro é um milhar de metros.

Então, voltando ao número 37 548m, conclue-se que:

O algarismo 8 representa metros.
O algarismo 4 representa decâmetros.
O algarismo 5 representa hectômetros.
O algarismo 7 representa quilômetros.

E, lembrando os princípios da numeração, teremos:

$$37\,548\text{m} = 3\,754,8\text{dam} = 375,48\text{hm}$$

$$37\,548\text{m} = 37,548\text{km}$$

5. Os submúltiplos do metro e os números decimais fracionários. Consideremos o número decimal fracionário 3,578. É um número abstrato porque não se menciona o nome da unidade. Entretanto, se dissermos 3,785 do metro ou simplesmente 3,758m, o número tornar-se-á concreto, visto que se menciona o nome da unidade. Já vimos que:

O decímetro é a décima parte do metro.
O centímetro é a centésima parte do metro.
O milímetro é a milésima parte do metro.

Então, voltando ao número 3,758m, resulta que:

O algarismo 3 representa metros.
O algarismo 7 representa decímetros.
O algarismo 5 representa centímetros.
O algarismo 8 representa milímetros.

Portanto, $3,758\text{m} = 37,58\text{dm} = 375,8\text{cm} = 3\,758\text{mm}$.

6. Mudança de unidade nas medidas de comprimento.

Dizemos habitualmente que a unidade das medidas de comprimento é o metro. Não é bem verdade; o metro é a unidade principal das medidas de comprimento, mas não é a única unidade. A unidade das medidas de comprimento pode ser qualquer: o hectômetro, o centímetro, o quilômetro, o milímetro, etc.. Escolhe-se a unidade de acôrdo com a linha cujo comprimento se quer medir.

As conclusões a que chegámos nos dois parágrafos anteriores podem ser resumidas no quadro seguinte:

u. de milhar	centenas	dezenas	unidades	décimos	centésimos	milésimos
9	6	9	5,	3	4	7
km	hm	dam	m	dm	cm	mm

(B)

Nos números que representam comprimentos, a unidade escolhida é indicada pela abreviatura correspondente, como se

vê no quadro abaixo. Os números escritos neste quadro *devem ser lidos* assim:

3,58m	3 metros	e	58 centímetros
24,276dam	24 decâmetros	e	276 centímetros
38,95dm	38 decímetros	e	95 milímetros
93,456 78hm	93 hectômetros	e	45 678 milímetros
469,7cm	469 centímetros	e	7 milímetros
35,293 856km	35 quilômetros	e	293 856 milímetros

Consideremos o número 3,58m. De acôrdo com o quadro B. êste número contém 3m, 5dm e 8cm, e é igual a 35,8dm ou 358cm,

Consideremos o número 24,276dam. De acôrdo com o quadro B, êste número contém 2hm, 4dam, 2m, 7dm e 6cm. E é igual a 2,427 6hm ou 242,76m ou 2 427,6dm ou 24 276cm.

E assim por diante.

Portanto, a mudança de unidade nas medidas de comprimento é um problema que se resolve com um deslocamento simples e conveniente da vírgula.

Exercícios orais

Reduzir os comprimentos que se seguem, à unidade indicada entre parênteses.

- | | | |
|---------------|------------------|---------------------|
| 1. 1km (hm) | 17. 1m (cm) | 34. 4,38m (cm) |
| 2. 1km (dam) | 18. 1m (mm) | 35. 56,27dm (cm) |
| 3. 1km (m) | 19. 1dm (cm) | 36. 8,6dam (cm) |
| 4. 1km (dm) | 20. 1dm (mm) | 37. 3,7hm (cm) |
| 5. 1km (cm) | 21. 1cm (mm) | 38. 4,2km (cm) |
| 6. 1km (mm) | 22. 350mm (m) | 39. 34,567mm (cm) |
| 7. 1hm (dam) | 23. 2 348mm (m) | 40. 8,7dm (mm) |
| 8. 1hm (m) | 24. 478cm (m) | 41. 4,9m (mm) |
| 9. 1hm (dm) | 25. 324dm (m) | 42. 5,6dam (mm) |
| 10. 1hm (cm) | 26. 7,8dam (m) | 43. 3,81hm (mm) |
| 11. 1hm (mm) | 27. 5,6hm (m) | 44. 6,27km (mm) |
| 12. 1hm (dm) | 28. 7,28km (m) | 45. 3 468m (dam) |
| 13. 1dam (dm) | 29. 9,7m (dm) | 46. 5 643dm (dam) |
| 14. 1dam (cm) | 30. 2 389mm (dm) | 47. 47 528cm (dam) |
| 15. 1dam (mm) | 31. 6 724cm (dm) | 48. 109 720mm (dam) |
| 16. 1m (dm) | 32. 8,26dam (dm) | 49. 4,367hm (dam) |
| | 33. 7,45hm (dm) | |

50. 5,893km (dam)	55. 273 548mm (hm)	60. 0,4 do km (m)
51. 3,748m (hm)	56. 2 376dam (km)	61. 0,37 do dam (mm)
52. 6 239dam (hm)	57. 37 563m (km)	62. 0,428 do hm (dm)
53. 45 786dm (hm)	58. 293 587dm (km)	63. 0,93 do m (mm)
54. 5,496km (hm)	59. 93,47dam (km)	64. 0,56 do hm (dm)

Exercícios. Série I

Problemas sôbre medidas de comprimento

- Calcular $3,27hm + 5 896dm + 23,8dam + 34 796cm + 47m + 658dm + 5,683km + 9dam$.
- Calcular em decímetros $8 396mm + 7 857cm + 9 394dm + 37m + 8,529hm + 37,538dam + 67,3cm$.
- Calcular em decâmetros $3 799cm + 8km + 6 931m + 9dam + 3 854m + 857 298dm + 37hm + 3 145 67mm$.
- Calcular em milímetros $614cm + 4,277dam + 856m + 344dm + 2,57hm + 8km + 6,37hm + 52m$.
- Calcular o preço de 76,24m de sêda a Cr\$ 36,70 o metro.
- Calcular o preço de 0,498m de sêda a Cr\$ 52,00 o metro.
- Uma peça de sêda com 14,36m custa Cr\$ 530,00. Qual é o preço de um metro?
- Um fio de platina com 2,537m custa Cr\$ 3 640,00. Qual é o preço de um decímetro?
- Comprei sêda a Cr\$ 27,40 o metro e paguei Cr\$ 518,40. Quantos metros comprei?

N. B. Todas as vêzes que um quociente representa metros, deve ser calculado com três algarismos decimais.

- Comprei sêda a Cr\$ 36,00 o metro e paguei Cr\$ 12,40. Quantos metros comprei? (Resolva-se êste problema com uma única operação.)
- Comprei fio de platina a Cr\$ 400,00 o metro e gastei Cr\$ 42,80. Quantos metros comprei?

12. Um fio de aço com 346 metros é transformado em agulhas, cujo comprimento é de 0,042m. Vendendo estas agulhas a Cr\$ 0,06 a dúzia, qual será a importância recebida?

N. B. Se o dividendo e o divisor são comprimentos, é necessário reduzi-los à mesma unidade. Para dividir 27dam por 25dm, isto é, para verificar quantas vêzes uma linha com 25dm está contida em outra linha com 27dam, é necessário reduzir os dois comprimentos à mesma unidade.

13. Quantos degraus tem uma escada com 122,88m de altura, sendo a altura de cada degrau igual a 24cm?

14. Uma escada com 90,22m de altura, tem 347 degraus. Qual é altura de cada degrau?

15. Dez postes estão colocados em linha reta. A distância entre dois postes consecutivos é de 9,37m. Qual é a distância do primeiro ao último poste?

16. Ao lado de uma estrada de ferro foi construída uma linha telegráfica. Empregaram-se 13 675 postes, sendo a distância entre dois postes consecutivos de 32,8. Calcular o comprimento da linha telegráfica, em km.

17. Uma linha telegráfica tem 762,405km de comprimento. A distância que separa dois postes consecutivos quaisquer desta linha é de 53 metros. Qual é o número de postes?

18. Uma linha telegráfica tem 182km de comprimento. Os postes são 4 376 e são equidistantes. Qual é a distância entre dois postes consecutivos?

19. Plantam-se árvores em ambos os lados de uma avenida, a 18 metros umas das outras. A distância entre cada uma das extremidades da avenida e a primeira árvore é também de 18 metros. O comprimento da avenida é de 42,84hm. Calcular a quantia necessária para plantar estas árvores, se cada uma delas custa Cr\$ 3,70 e o trabalho custa Cr\$ 1,50 por árvore.

20. Um lavrador tem um terreno retangular de 264m por 154m. Quer plantar café nesse terreno. As mudas devem ser plantadas no sentido do comprimento e no sentido da largura, e de modo tal que, quer num sentido quer no outro, a distância entre duas mudas consecutivas seja de uma braça ou 10 palmos. (2,2m) Se cada muda custa Cr\$ 0,50 e o trabalho de plantá-la custa Cr\$ 0,34, em quanto ficarão as despesas desta plantação?

21. Cerca-se um terreno retangular de 570m por 360m, com um duplo fio de arame. Este fio é pregado em estacas equidistantes umas das outras, havendo uma estaca em cada vértice do terreno. O intervalo entre duas estacas consecutivas é de 0,40m. Um rôlo de arame tem 360 metros e custa Cr\$ 56,70. As estacas são pagas a Cr\$ 83,50 cada cento. Calcular o custo da cerca.

22. A toeza de Paris mede aproximadamente 1,98m. Calcular em toezas a distância do polo Norte ao Equador, do polo Norte ao polo Sul, e o comprimento do meridiano terrestre.

23. O meridiano terrestre mede aproximadamente 40 000 000 de metros. Calcular o comprimento do grau do meridiano, do minuto e do segundo.

24. A circunferência da roda de um automóvel mede 1,86m. Quantas voltas darão as quatro rodas deste automóvel, numa distância de 37hm?

25. Com 107,48m de um fio de metal, fiz pregos de 43,8mm cada um. Vendendo estes pregos a Cr\$ 0,72 a dúzia, quanto recebi?

26. Uma sala mede 8,4m de comprimento por 6,5m de largura. Faz-se o assoalho desta sala com tábuas de 21dm de comprimento e 52mm de largura. A tábua é comprada à razão de Cr\$ 2,70 por metro linear. Calcular o custo do assoalho.

N. B. Para resolver este problema, não é permitido calcular a área da sala e da tábua.

27. Em uma sala quadrada cujo perímetro mede 31 metros, estende-se um tapete quadrado cujos bordos ficam a 0,87m das paredes. Calcular o perímetro do tapete.

28. Para proteger um reservatório de água, de base quadrada, e com um perímetro de 791 metros, construiu-se uma cerca a 1,75m de distância dos bordos do reservatório. Pagou-se Cr\$ 3,80 por metro de cerca. Calcular o custo de toda a cerca.

29. Em um salão retangular de 18,7m por 12,9m estende-se um tapete cujos bordos ficam a 0,53 das paredes. Calcular o perímetro do tapete.

30. Para proteger um campo de futebol com 138,7m de comprimento por 94,33m de largura, construiu-se uma cerca a 3,49m de distância das linhas marginais do campo. Calcular o custo da cerca à razão de Cr\$ 8,79 o metro.

31. Um terreno retangular mede 2,357 8km por 75,64dam. Abrem-se duas ruas neste terreno, perpendiculares entre si, uma no sentido do comprimento e outra no sentido da largura, e de modo que o terreno fica dividido em 4 retângulos iguais. A largura das duas ruas é de 11,7m. Em seguida, cercam-se os quatro retângulos, pagando-se Cr\$ 3,80 por metro de cerca. Calcular o custo das 4 cercas.

32. Calcular o comprimento e a largura de um retângulo cujo perímetro é de 117,4m, sendo o comprimento igual ao triplo da largura.

33. Calcular o comprimento e a largura de um retângulo, cujo perímetro é de 297,4m, sendo o comprimento igual ao quádruplo da largura.

34. Calcular o comprimento e a largura de um retângulo, cujo perímetro é de 438,6m, sendo o comprimento igual ao quántuplo da largura.

35. Calcular o comprimento e a largura de um retângulo, cujo perímetro mede 52m, sendo a largura igual a três quintos do comprimento.

36. Calcular o comprimento e a largura de um retângulo, cujo perímetro mede 374m, sendo a largura igual a três sétimos do comprimento.

37. Calcular o comprimento e a largura de um retângulo, cujo perímetro mede 26,1m, sendo o comprimento igual a onze quartos da largura.

38. Calcular o comprimento e a largura de um retângulo, cujo perímetro mede 42,3m, sendo o comprimento igual a treze quintos da largura.

39. Um agrimensor mediu o comprimento de uma avenida, servindo-se de uma corrente metálica de dez metros (corrente do agrimensor) e achou 2 358,7m. Mas, em seguida, verificou que a corrente estava defeituosa, faltando 56mm para completar os dez metros que a corrente deve ter. Qual é o comprimento exato da avenida?

40. Um negociante vendeu 37,8m de sêda a Cr\$ 53,80. Mas, o metro com o qual êle mediu a sêda está errado, por ter 31mm mais do que o metro legal. Qual foi o seu prejuízo?

41. Um engenheiro mediu o comprimento de uma estrada de rodagem e achou 314,8km. Mais tarde verificou que tinha cometido um erro para mais de 0,45m em cada hectômetro. Qual é o comprimento exato de estrada?

42. Comprei arame para cercar um terreno cujo perímetro é de 137,947dam. A cerca deve ser feita com 3 fios. Mas, devido a uma grande baixa da temperatura, o arame diminuiu 4mm em cada metro. Quantos metros de arame devo comprar para concluir a cerca?

43. Um fio de cobre, a zero graus, tem um comprimento de 4,37m. Qual será o comprimento deste mesmo fio, a 60 graus se, para cada grau o fio aumenta de 0,000 018 por metro?

44. Um fio de prata, a 60 graus, tem um comprimento de 9,25m. Qual será o comprimento deste mesmo fio, a 25 graus se, para cada grau, o fio aumenta de 0,000 019 por metro?

45. Uma fita de zinco, a zero graus, tem um comprimento de 14,8m. Qual será seu comprimento a 100 graus se, para cada grau, a fita aumenta de 0,000 03 por metro?

46. O comprimento de duas peças de sêda é de 35,85m. Tiram-se 12,3m de cada uma das peças e o que resta da primeira é igual ao dobro do que resta da segunda. Qual é o comprimento de cada peça?

47. O comprimento de três peças de brim é de 42,3m. Tiram-se 5,7m de cada uma das peças e então o resto da primeira é igual a 3 vezes o resto da terceira, e o resto da segunda é igual a 2 vezes o resto da terceira. Qual é o comprimento de cada peça?

48. Um trilho tem 15,8m de comprimento. Entre dois trilhos deixa-se um intervalo de 6,4mm. (por quê?) Quantos metros de trilhos serão necessários para construir uma estrada de ferro com 53,510 132km e de linha dupla?

49. Pedro e Paulo vão a pé da praça da República até a Avenida Atlântica. Pedro percorre 123,8 por minuto e Paulo percorre 1,93m por segundo. Ao cabo de uma hora e três quartos, qual é distância que separa os dois?

50. Dois automobilistas, A e B, partem de S. Paulo com destino ao Rio de Janeiro. O automobilista A parte às 6 horas da manhã com a velocidade média de 37,6km por hora. O automobilista B parte às 7 horas e 12 minutos com a velocidade média de 51,8km por hora. A que horas B alcançará A?

7. Unidades de área. Já vimos em que consiste a área de uma porção de superfície plana limitada. (§2) Na prática empregamos indiferentemente as palavras *área* e *superfície*, embora não signifiquem precisamente a mesma coisa. Não há grande mal nisto, contanto que não se perca de vista o seguinte:

Quando dizemos que a superfície de um terreno mede 320 metros quadrados, queremos dizer que a área desta superfície limitada é de 320 metros quadrados.

Uma área é uma grandeza composta. (§3) A unidade de área (ou de superfície) não é, pois, uma *unidade fundamental*; é uma *unidade derivada*.

A unidade de área é um quadrado cujo lado é tomado como unidade de comprimento.

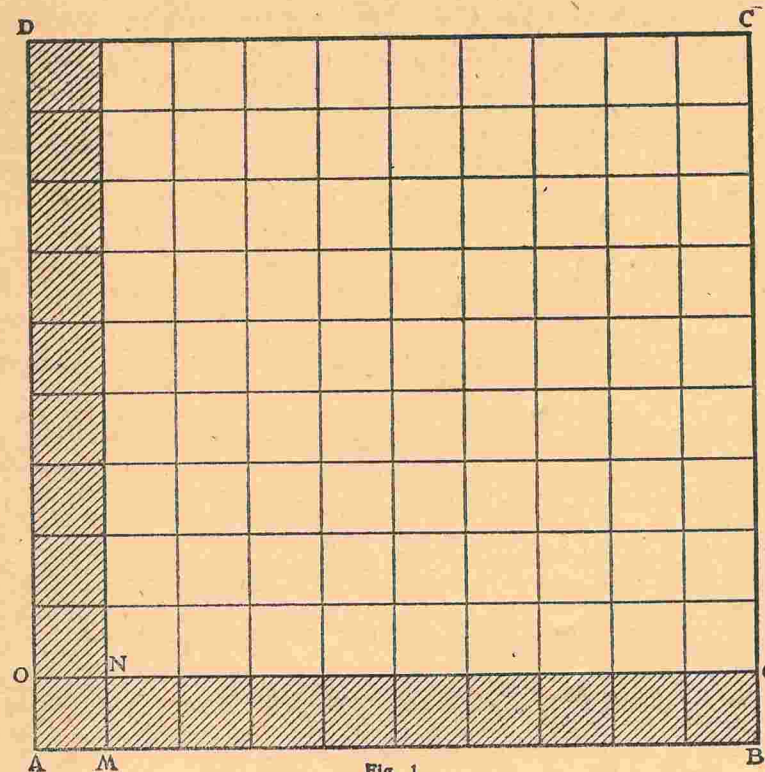


Fig. 1

Consideremos a figura 1. Se o lado AB é tomado como unidade de comprimento, o quadrado ABCD será a unidade de área. Se AB mede um metro, ABCD é um metro quadrado; se AB mede uma braça, ABCD é uma braça quadrada; se AB mede um decâmetro, ABCD é um decâmetro quadrado; e assim por diante.

A unidade legal de área é o metro quadrado, isto é, a área de um quadrado cujo lado mede um metro de comprimento.

Assim como acontece com o metro linear, o metro quadrado pode ser muito grande ou muito pequeno para calcular uma

área. Eis por que existem outras unidades de área, maiores e menores que o metro quadrado.

O metro quadrado é a unidade principal de área; seus múltiplos e submúltiplos são as unidades secundárias.

Voltemos à fig. 1. Se o lado AB mede um metro linear, e estando este segmento dividido em dez partes iguais, resulta que o segmento AM mede um decímetro linear. Ora, o quadrado ABCD medindo um metro quadrado, resulta que o quadrado AMNO mede um decímetro quadrado. E a figura nos mostra que:

$$1 \text{ metro quadrado} = 100 \text{ decímetros quadrados.}$$

Logo, um decímetro quadrado é a centésima parte de um metro quadrado.

E a faixa ABGO sendo a décima parte do metro quadrado ABCD, resulta de pronto que:

$$0,1 \text{ do metro quadrado} = 10 \text{ decímetros quadrados.}$$

Supondo que o lado AB meça um decímetro, ABCD será um decímetro quadrado, AMNO será um centímetro quadrado, e concluiremos que:

$$\begin{aligned} 1 \text{ decímetro quadrado} &= 100 \text{ centímetros quadrados} \\ 1 \text{ centímetro quadrado} &= 0,01 \text{ do decímetro quadrado} \\ 0,1 \text{ do decímetro quadrado} &= 10 \text{ centímetros quadrados.} \end{aligned}$$

Enfim, supondo AB igual, sucessivamente a um decâmetro, um hectômetro, um quilômetro, um centímetro, etc., estabeleceremos com facilidade as conclusões resumidas no quadro que se segue.

MÚLTIPLOS	{	quilômetro quadrado (km ²) = 1 000 000m ²	
	{	hectômetro quadrado (hm ²) = 10 000m ²	
	{	decâmetro quadrado (dam ²) = 100m ²	
UNIDADE	{	metro quadrado (m ²) = 1m ²	(C)
SUBMÚLTIPLOS	{	decímetro quadrado (dm ²) = 0,01 do m ²	
	{	centímetro quadrado (cm ²) = 0,000 1 do m ²	
	{	milímetro quadrado (mm ²) = 0,000 001 do m ²	

Nos parágrafos anteriores ficou explicado em que consiste a medição de uma porção limitada de superfície, como se calcula a área de um retângulo e a de um quadrado, etc.. Foi também explicado o que significam as seguintes frases:

metros	×	metros	dão	metros quadrados.
decímetros	×	decímetros	dão	decímetros quadrados.
centímetros	×	centímetros	dão	centímetros quadrados.
milímetros	×	milímetros	dão	milímetros quadrados.

8. Os submúltiplos do metro quadrado e os números decimais fracionários. De acôrdo com o quadro (C) podemos estabelecer que:

$$\begin{array}{l|l|l} 1\text{m}^2 = 100\text{dm}^2 & 1\text{m}^2 = 10\,000\text{cm}^2 & 1\text{m}^2 = 1\,000\,000\text{mm}^2 \\ 1\text{dm}^2 = 100\text{cm}^2 & 1\text{dm}^2 = 10\,000\text{mm}^2 & \\ 1\text{cm}^2 = 100\text{mm}^2 & & \end{array}$$

Se um m² tem 100dm², 1dm² é a centésima parte do m². Consideremos o número decimal fracionário 3,48 (3 unidades e 48 centésimos). Escrevendo m² à direita deste número, teremos 3,48m², isto é, 3m² e 48 centésimos do m². Mas, centésimos do m² são decímetros quadrados. Logo, 3,48m² significa 3m² e 48dm². Consideremos o número 7,8m². São 7m² e 0,8 do m². Ora, 0,1 do m² tem 10dm²; então 0,8 do m² são 80dm². Portanto, 7,8m² são 7m² e 80dm² ou 7,80m². Donde se conclue que, para ler números como 3,6m²... 7,5m²... 0,4m²... convém juntar um zero à direita da parte fracionária, para dar a estes números a forma 3,60m², 7,50m², 0,40m². Em seguida, ler-se-á 3m² e 60dm², 7m² e 50dm², 40dm².

Exercícios em classe

Tomando como unidade o m², escrever as áreas seguintes:

- | | | |
|---------------------------------------|---|--|
| 1. 3m ² e 7dm ² | 5. 2m ² e 30dm ² | 9. 1m ² e 346dm ² |
| 2. 28dm ² | 6. 238dm ² | 10. 2m ² e 600dm ² |
| 3. 5m ² e 1dm ² | 7. 3m ² e 525dm ² | 11. 7 438dm ² |
| 4. 46dm ² | 8. 376dm ² | 12. 4m ² e 56dm ² |

Ler de todos os modos possíveis, as áreas seguintes:

- | | | | |
|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| 13. 3,45m ² | 15. 0,59m ² | 17. 5,1m ² | 19. 647dm ² |
| 14. 5,58m ² | 16. 2,8m ² | 18. 13,8m ² | 20. 533dm ² |

Se um m^2 tem $10\,000\text{cm}^2$, 1cm^2 é a décima milésima parte do m^2 . Consideremos o número $7,005\,8$ (7 unidades e 58 décimos milésimos). Escrevendo m^2 à direita deste número, teremos $7,005\,8\text{m}^2$, isto é, 7m^2 e 58 décimos milésimos do m^2 . Mas, décimos milésimos do m^2 são centímetros quadrados. Logo, $7,005\,8\text{m}^2$ significa 7m^2 e 58cm^2 .

Exercícios em classe

Tomando como unidade o m^2 , escrever as áreas seguintes:

- | | | |
|-------------------------------------|--|--|
| 1. 3m^2 e 44cm^2 | 4. 5m^2 e $2\,358\text{cm}^2$ | 7. 56dm^2 e 348cm^2 |
| 2. 1m^2 e 47cm^2 | 5. 593cm^2 | 8. 259dm^2 e 37cm^2 |
| 3. 2m^2 e 346cm^2 | 6. 47dm^2 e 93cm^2 | 9. 3m^2 , 5dm^2 e 7cm^2 |

Ler de todos os modos possíveis, as áreas seguintes:

- | | | |
|------------------------|-----------------------|------------------------|
| 10. $4,3628\text{m}^2$ | 12. $0,478\text{m}^2$ | 14. $0,1234\text{m}^2$ |
| 11. $0,5739\text{m}^2$ | 13. $0,001\text{m}^2$ | 15. $0,447\text{m}^2$ |

Se 1m^2 tem $1\,000\,000\text{mm}^2$, 1mm^2 é a milionésima parte do m^2 . Consideremos o número $4,000057$ (4 unidades e 57 milionésimos). Escrevendo m^2 à direita deste número, teremos $4,000\,057\text{m}^2$, isto é, 4m^2 e 57 milionésimos do m^2 . Mas, milionésimos do m^2 são mm^2 . Logo, $4,000\,057\text{m}^2$ significa 4m^2 e 57mm^2 .

Exercícios em classe

Tomando como unidade o m^2 , escrever as áreas seguintes:

- | | | |
|-------------------------------------|---|---|
| 1. 4m^2 e 38mm^2 | 4. 11m^2 e $2\,578\text{mm}^2$ | 7. 15cm^2 e 34mm^2 |
| 2. 7m^2 e 96mm^2 | 5. $25\,748\text{mm}^2$ | 8. 3m^2 , 7cm^2 e 9mm^2 |
| 3. 5m^2 e 387mm^2 | 6. 7dm^2 e 86mm^2 | 9. 5dm^2 , 8cm^2 e 6mm^2 |

Ler de todos os modos possíveis, as áreas seguintes:

- | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| 10. $3,574\,916\text{m}^2$ | 12. $2,405\,060\text{m}^2$ | 14. $0,572\,284\text{m}^2$ |
| 11. $0,842\,76\text{m}^2$ | 13. $0,223\,34\text{m}^2$ | 15. $7,635\,27\text{m}^2$ |

Consideremos o número $3,574\,829$. Escrevendo m^2 à direita deste número, teremos $3,574\,829\text{m}^2$. E de tudo o que dissemos neste parágrafo resulta que:

$$\begin{aligned} 3,574\,829\text{m}^2 &= 3\text{m}^2 + 57\text{dm}^2 + 48\text{cm}^2 + 29\text{mm}^2 \\ 4,368\,27\text{m}^2 &= 4\text{m}^2 + 36\text{dm}^2 + 82\text{cm}^2 + 70\text{mm}^2 \\ 5,412\,3\text{m}^2 &= 5\text{m}^2 + 41\text{dm}^2 + 23\text{cm}^2 \\ 6,293\text{m}^2 &= 6\text{m}^2 + 29\text{dm}^2 + 30\text{cm}^2 \\ 7,56\text{m}^2 &= 7\text{m}^2 + 56\text{dm}^2 \\ 8,9\text{m}^2 &= 8\text{m}^2 + 90\text{dm}^2 \end{aligned}$$

9. Mudança de unidade nas medidas de área. O metro quadrado é a *unidade principal* de área. Mas a unidade de área pode ser qualquer: o dam^2 , o dm^2 , o hm^2 , o cm^2 , etc.. Escolhe-se a unidade de área, de acôrdo com a porção de superfície limitada que se quer medir.

As conclusões a que chegámos no parágrafo anterior podem ser resumidas no quadro ao lado.

Nos números que representam áreas a unidade escolhida é representada pela abreviatura correspondente.

Consideremos o número $3,475\,2\text{m}^2$. De acôrdo com o quadro D, este número contém 3m^2 , 47dm^2 e 52cm^2 . E $3,475\,2\text{m}^2 = 347,52\text{dm}^2 = 34\,752\text{cm}^2 = 3\,475\,200\text{mm}^2$.

Anàlogamente, $8,563\,7\text{dm}^2 = 0,085\,637\text{m}^2 = 856,37\text{cm}^2 = 85\,637\text{mm}^2$.

Portanto, a mudança de unidade nas medidas de área é um problema que se resolve com um deslocamento simples e conveniente da vírgula.

unidades	centésimos	déc. milés.	milionés.
3,	57	48	29
m^2	dm^2	cm^2	mm^2

(D)

Exercícios em classe

Reduzir as áreas que se seguem à unidade indicada entre parênteses.

- | | | |
|---------------------------------------|---|--|
| 1. 8m^2 (mm^2) | 6. $0,85\text{m}^2$ (mm^2) | 11. $0,472\text{m}^2$ (mm^2) |
| 2. 9dm^2 (cm^2) | 7. $0,036\text{m}^2$ (mm^2) | 12. $0,5793\text{m}^2$ (mm^2) |
| 3. 7dm^2 (mm^2) | 8. $0,4527\text{m}^2$ (mm^2) | 13. $3,8\text{cm}^2$ (mm^2) |
| 4. 6cm^2 (mm^2) | 9. $3,37\text{dm}^2$ (mm^2) | 14. $3,76\text{cm}^2$ (mm^2) |
| 5. $3,27\text{m}^2$ (mm^2) | 10. $0,56\text{m}^2$ (cm^2) | 15. $0,4\text{cm}^2$ (mm^2) |

16. 1,57cm ² (mm ²)	20. 0,437m ² (cm ²)	24. 0,698m ² (dm ²)
17. 8,9m ² (cm ²)	21. 0,5863m ² (cm ²)	25. 23m ² (dm ²)
18. 7,36m ² (cm ²)	22. 0,3987m ² (dm ²)	26. 9m ² (cm ²)
19. 0,8m ² (cm ²)	23. 3,25m ² (dm ²)	27. 15m ² (mm ²)
		28. 36m ² (cm ²)

10. Os múltiplos do metro quadrado. Os múltiplos usuais do metro quadrado são o dam², o hm² e o km² (quadro C). São quadrados cujos lados medem respectivamente 1dam, 1hm e 1km.

Voltemos à fig. 1.

Se AB = 1dam, então AM = 1m, ABCD será 1dam², AMNO será 1m² e teremos 1dam² = 100m².

Se AB = 1hm, então AM = 1dam, ABCD será 1hm², AMNO será 1dam² e teremos 1hm² = 100dam².

Se AB = 1km, então AM = 1hm, ABCD será 1km², AMNO será 1hm² e teremos 1km² = 100hm².

1km ² = 100hm ²	1km ² = 10 000dam ²	1km ² = 1 000 000m ²
1hm ² = 100dam ²	1hm ² = 10 000m ²	1hm ² = 1 000 000dm ²
1dam ² = 100m ²	1dam ² = 10 000dm ²	1dam ² = 1 000 000cm ²

Seja o número 45 678 924. É um número abstrato, porque não se menciona o nome da unidade. Entretanto, se dissermos 45 678 924m², o número tornar-se-á concreto, porque se menciona o nome da unidade.

Já sabemos que 1dam² = 100m², 1hm² = 10 000m², 1km² = 1 000 000m². Portanto,

Um dam² é uma centena de m².

Um hm² é uma dezena de milhar de m².

Um km² é uma unidade de milhão de m².

Voltando ao número 45 678 924m² e dividindo-o em classes de dois algarismos, da direita para a esquerda, teremos:

$$45\ 678\ 924m^2 = 45km^2 + 67hm^2 + 89dam^2 + 24m^2$$

E, de acôrdo com os princípios da numeração,

$$45\ 678\ 924m^2 = 456\ 789,24dam^2 = 4\ 567,892\ 4hm^2 = 45,678\ 924km^2$$

Tudo o que dissermos nos parágrafos 7 a 10 pode ser resumido no quadro seguinte:

unid. de milhão	dez. de milhar	centenas	unidades	centésimos	décimos milés.	milionésimos
3 7	5 8	1 9	6 7	4 2	3 8	2 9
km ²	hm ²	dam ²	m ²	dm ²	cm ²	mm ²

(E)

A mudança de unidade nas medidas de área é, pois, um problema facilimo. Observando o quadro E resulta que:

$$37,859\ 7km^2 = 3\ 785,97hm^2 = 378\ 597dam^2$$

$$18,37hm^2 = 0,183\ 7km^2 = 1\ 837dam^2$$

$$23,59m^2 = 0,235\ 9dam^2 = 0,002\ 359hm^2$$

Exercícios orais

Reduzir as áreas que se seguem à unidade indicada entre parênteses.

- | | | |
|---|---|--|
| 1. 7,8dam ² (dm ²) | 10. 23,8915hm ² (dam ²) | 19. 375,6m ² (cm ²) |
| 2. 8,396hm ² (dm ²) | 11. 8,39km ² (dam ²) | 20. 1 385 927dm ² (dam ²) |
| 3. 73 248cm ² (dm ²) | 12. 147 528m ² (hm ²) | 21. 0,3km ² (hm ²) |
| 4. 4,7km ² (dm ²) | 13. 376,57dam ² (hm ²) | 22. 0,396hm ² (m ²) |
| 5. 37,6km ² (m ²) | 14. 8,936km ² (hm ²) | 23. 0,008km ² (dm ²) |
| 6. 54,9hm ² (m ²) | 15. 57 593m ² (hm ²) | 24. 0,39dam ² (dm ²) |
| 7. 87,345dam ² (m ²) | 16. 8 379m ² (km ²) | 25. 0,0047dam ² (cm ²) |
| 8. 37 496,7m ² (dam ²) | 17. 37 586,9dam ² (km ²) | 26. 0,3468dam ² (m ²) |
| 9. 587 693cm ² (dam ²) | 18. 623,7hm ² (km ²) | 27. 0,645hm ² (dm ²) |

28. Tomando como unidade o metro quadrado, escrever no quadro negro os números seguintes: 3km² e 26dam²; 8km², 37dam² e 9dm²; 6hm², 47m² e 53cm², etc., etc..

29. E' dado o número 539 651,735 849m². Ler este número de todos os modos possíveis.

Exercícios. Série II

Problemas sôbre medidas de área

1. Calcular em metros quadrados a área de um terreno retangular que mede 34,7dam de comprimento por 258,9m de largura.

2. Calcular em dam² a área de um terreno retangular que mede 7,45hm de comprimento por 386m de largura.

3. Calcular em dm² a área de um terreno retangular que mede 27,34m de comprimento por 235dm de largura.

4. Calcular em dam² a área de um terreno quadrado cujo lado mede 307,4m.

5. Calcular em dm² a área de um terreno quadrado cujo lado mede 8,41m.

6. A área de um retângulo é de 47,56dam² e o comprimento é de 845dm. Calcular em metros a largura deste retângulo com erro inferior a 0,001m.

7. A área de um retângulo é de 37,56m² e o comprimento é de 84,5dm. Calcular em metros, a largura deste retângulo, com erro inferior a 0,001m.

8. O perímetro de um retângulo é de 37,4m e o comprimento é o triplo da largura. Pede-se a área do retângulo.

9. O perímetro de um retângulo é de 37,2m e o comprimento é igual a cinco vezes a largura. Pede-se a área do retângulo.

10. O perímetro de um retângulo é de 58,87m e a largura é igual a dois quintos do comprimento. Pede-se a área do retângulo.

11. O perímetro de um retângulo é de 5,58m e a largura é igual a três sétimos do comprimento. Pede-se a área do retângulo.

12. Um terreno de forma retangular mede 647,5m por 328,7m. Abrem-se duas ruas neste terreno, perpendiculares entre si, e à igual distância dos limites do terreno. Fica assim o terreno dividido em 4 quarteirões iguais. A largura das ruas é de 11,8m. Calcular a área das duas ruas e a área dos quatro quarteirões.

13. Quantas tábuas de 2,24m de comprimento por 0,18m de largura são necessárias para assoalhar uma sala de 17,8m de comprimento por 7,4m de largura?

14. Quantas pedras quadradas cujo lado mede 23cm são necessárias para calçar uma rua com 18m de largura e 23,38hm de comprimento?

15. Comprei um terreno com 78,5m de comprimento por 43,7 de largura, pagando Cr\$ 3,70 por metro quadrado. Mais tarde verifiquei que o terreno tinha 2,7m de mais no comprimento e 4,3m de menos na largura. Quanto paguei pelo terreno? Quanto devia ter pago?

16. Calcular $7,36\text{dam}^2 + 15,98\text{hm}^2 + 3\,270\text{m}^2 + 64\,790\text{dm}^2$.

<i>Solução.</i>	$7,36\text{dam}^2 =$	$736,00\text{m}^2$
	$15,98\text{hm}^2 =$	$159\,800,00\text{m}^2$
	$3\,270\text{m}^2 =$	$3\,270,00\text{m}^2$
	$64\,790\text{dm}^2 =$	$647,90\text{m}^2$
		$164\,453,90\text{m}^2$

Resposta. A soma pedida é 164 453,90m².

17. Calcular $3,8\text{m}^2 + 5,9\text{dm}^2 + 7,6\text{cm}^2 + 345\,000\text{mm}^2$.

18. Calcular $4,3\text{dam}^2 + 987\text{dm}^2 + 5\text{hm}^2 + 328\,600\text{cm}^2 + 93,574\text{m}^2 + 648,93\text{dm}^2 + 234\,568\text{cm}^2$.

19. Mediu-se a superfície de um quadrado e achou-se 10,6929 dam². Mais tarde verificou-se que o metro que servira para medir o lado do quadrado, estava errado, tendo 5mm mais do que o metro legal. Qual é, em metros quadrados, a área exata do quadrado?

20. Mediu-se a superfície de um retângulo e achou-se 0,103 587hm². Mais tarde verificou-se que o metro que servira para medir as duas dimensões do retângulo estava errado, tendo 4mm menos que o metro legal. Sendo o comprimento medido primitivamente igual a 47,3m, pergunta-se qual é, em metros quadrados, a área exata do retângulo.

21. Em um terreno de forma retangular o comprimento é o triplo da largura. Mediu-se o perímetro deste terreno e achou-se 746,4m. Em seguida, verificou-se que a corrente estava defeituosa, faltando-lhe 6cm para os 10 metros legais que ela deveria ter. Pede-se a área exata do terreno.

22. Para ladrilhar um aposento com 7,48m de comprimento por 4,53m de largura, empregam-se ladrilhos quadrados cujo lado mede 0,32m e que custam Cr\$ 635,00 por milheiro. O operário encarregado deste serviço ganha Cr\$ 13,70 por metro quadrado. Calcular a despesa total.

23. Cerca-se um jardim com 86,9m de comprimento por 45,7m de largura, com uma parede de 2,36m de altura, cuja construção custa Cr\$ 8,60 por metro quadrado. Calcular o custo da parede.

24. Construiu-se uma parede com 9,6m de comprimento por 3,14m de altura. A despesa com os tijolos foi de Cr\$ 3,70 por metro quadrado, pagando-se os tijolos a Cr\$ 92,00 cada milheiro. Quantos tijolos foram empregados na construção desta parede?

25. Um rôlo de papel tem 7m de comprimento e 0,36m de largura. Uma sala tem 8,5m de comprimento, 6,4m de largura e 4,2m de altura. Tem três janelas que medem 1,98m por 0,85m cada uma e duas portas que medem 2,8m por 1,2m cada uma. O rodapé da sala tem 0,22m de altura. Quantos rolos de papel serão necessários para forrar as 4 paredes desta sala?

26. A superfície de um livro é de 0,28m por 0,18m. Quantos metros quadrados de papelão serão necessários para cartonar 3 640 livros?

27. Um telhado retangular tem 24,7m por 13,5m. Uma telha mede 0,45m por 0,22m. Fazendo o telhado verifica-se que, ao colocar uma telha sobre a outra, cada uma delas perde 0,04m na largura. As telhas custam Cr\$ 65,00 cada cento. Calcular o custo do telhado e o número de telhas nele existente.

28. Um pátio de forma retangular tem 96 metros por 43,5m. Faz-se neste pátio, ao longo das paredes, um passeio com 2,20m de largura. Calcular a área do passeio e a do retângulo por ele limitado.

11. Unidades agrárias. São as unidades que se empregam para avaliar a superfície de terras cultivadas, fazendas, pastagens, campos, matas, etc..

São três: o hectare, o are e o centiare. A unidade é o are que é igual a um decâmetro quadrado. O are tem um múltiplo que é o hectare e um submúltiplo que é o centiare. O are é a unidade legal.

MÚLTIPLO.....	{	hectare (ha) = 1hm ² = 100 ares	
UNIDADE.....	{	are (a) = 1dam ² = 1 are	(F)
SUBMÚLTIPLO..	{	centiare (ca) = 1m ² = 0,01 do are	

Os lavradores medem suas terras em alqueires. São usados no interior do Brasil duas espécies de alqueires: o alqueire paulista, com 5 000 braças quadradas e o alqueire mineiro, com 10 000 braças quadradas.

A braça quadrada é um quadrado cujo lado mede 2,2m. Portanto,

$$\begin{aligned} 1 \text{ braça quadrada} &= 4,84\text{m}^2 \\ 1 \text{ alqueire paulista} &= 5\,000 \text{ braças quadradas} = 24\,200\text{m}^2 \\ 1 \text{ alqueire mineiro} &= 10\,000 \text{ braças quadradas} = 48\,400\text{m}^2 \end{aligned}$$

Exercícios orais

Reduzir as áreas que se seguem à unidade indicada entre parênteses.

- | | | |
|--------------------------------|-----------------------------------|------------------------------------|
| 1. 3,75a (ca) | 18. 32,478cm ² (ca) | 35. 3,97hm ² (ares) |
| 2. 4,78ha (ca) | 19. 9,7km ² (ha) | 36. 6km ² (ares) |
| 3. 3,96ha (ca) | 20. 12,86hm ² (ha) | 37. 374 568m ² (ares) |
| 4. 476 528ca (ha) | 21. 36,79dam ² (ha) | 38. 7,38ha (dm ²) |
| 5. 374 289ca (ha) | 22. 3 478,6m ² (ha) | 39. 0,84ha (dm ²) |
| 6. 493,38a (ha) | 23. 678 596dm ² (ha) | 40. 30,72ha (dam ²) |
| 7. 3,6718ha (ares) | 24. 3,47a (dm ²) | 41. 97,48a (dam ²) |
| 8. 316 729ca (ares) | 25. 8,96ca (dm ²) | 42. 3 758,96ca (dam ²) |
| 9. 47,8m ² (ca) | 26. 49,85ca (m ²) | 43. 0,235ha (dam ²) |
| 10. 3 726ca (m ²) | 27. 2,479 6a (m ²) | 44. 3,427a (cm ²) |
| 11. 2,29ha (m ²) | 28. 3,182 79ha (m ²) | 45. 15,89ca (cm ²) |
| 12. 3,476a (m ²) | 29. 6 473,8m ² (ca) | 46. 0,0478ha (cm ²) |
| 13. 5,36hm ² (ca) | 30. 12 356,7m ² (ares) | 47. 376,84ha (hm ²) |
| 14. 3,48hm ² (ca) | 31. 4,46dam ² (ares) | 48. 936 527a (hm ²) |
| 15. 17,96dam ² (ca) | 32. 293 756,8m ² (ha) | 49. 3 268dm ² (ares) |
| 16. 8,59m ² (ca) | 33. 9 237,56m ² (ares) | 50. 648,93a (dm ²) |
| 17. 17,6dm ² (ca) | 34. 123,38dam ² (ares) | |

Exercícios. Série III

Problemas sôbre medidas agrárias

1. Reduzir a ares 3,27ha + 528,69a + 37 586ca + 6,28dam² + 9,37hm² + 6 328m².

<i>Solução.</i>	3,27ha	=	327,00a
	528,69a	=	528,69a
	37 586ca	=	375,86a
	6,28dam ²	=	6,28a
	9,37hm ²	=	937,00a
	6 328m ²	=	63,28a
			2 238,11a

Resposta.

2. Reduzir a hectares 8,47km² + 23,9hm² + 567,48dam² + 23 758m² + 32,85ha + 6 279,47a + 345 600ca.

<i>Solução.</i>	8,47km ²	=	8 470 000m ²
	23,9hm ²	=	239 000m ²
	567,48dam ²	=	56 748m ²
	23 758m ²	=	23 758m ²
	32,85ha	=	328 500m ²
	6 279,47a	=	627 947m ²
	345 600ca	=	345 600m ²
			10 091 553m ² = 1 009,155 3ha

Resposta.

3. Calcular em ares a área de um terreno quadrado cujo lado mede 47,8m.
 4. Calcular em hectares a área de um terreno retangular com 8,45km de comprimento por 34,6hm de largura.

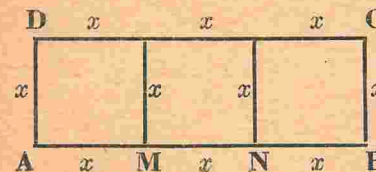
5. Um terreno quadrado tem uma área de 37,9a. Calcular o lado deste terreno, em metros, com erro inferior a 0,001m.

6. Um terreno retangular mede 3,4728ha. O comprimento é de 29,5dam. Calcular a largura deste terreno, em metros, com erro inferior a 0,01m.

7. Um terreno retangular mede 8,52a e o comprimento é o triplo da largura. Calcular as duas dimensões em metros, com erro inferior a 0,001m.

Vamos desenhar um retângulo cujo comprimento seja o triplo da largura. Seja x a largura; o comprimento será $3 \times x$, isto é, $x + x + x$.

Na figura, a largura está representada pelo segmento AD e o comprimento pelo segmento AB ou pela soma dos segmentos AM, MN e NB, cada um dos quais é igual a x . Pelos pontos M e N tracemos perpendiculares a AB. O retângulo ABCD ficará dividido em 3 quadrados iguais. A área do retângulo ABCD é de 8,52a ou 852m². Então a área de um dos quadrados é 852m² ÷ 3, isto é, 284m². Conhecida a área do quadrado, facilmente se obtém o comprimento de um de seus lados, isto é, de x .



8. Calcular as dimensões de um retângulo cuja área é de 14,8a, sendo a largura igual a um sétimo do comprimento.

9. Calcular as dimensões de um retângulo cuja área é de 322 ares, sendo a largura igual a dois quintos do comprimento.

10. Calcular o valor de um terreno com 34,9dam de comprimento por 78,5m de largura a Cr\$ 3,70 cada centiare.

11. Comprei um terreno com 8,4a por Cr\$ 3 990,00. Quanto pagarei por um terreno do mesmo valor que o primeiro e com uma área de 37,53ha?

12. Comprei um terreno com 37,4a por Cr\$ 1 892,00. Quantos metros quadrados do mesmo terreno eu poderia comprar com Cr\$ 50 000,00?

13. Um terreno com 48 metros de largura foi vendido ao preço de Cr\$ 4,50 por are e custou Cr\$ 7 380,00. Qual é o seu comprimento?

14. Um campo retangular mede 120 metros de comprimento por 84m de largura. Cada are deste campo produz 3 hectolitros de trigo. Vendendo-se cada hectolitro a Cr\$ 64,00, qual é o valor de toda a colheita?

15. Comprei três terrenos. O primeiro é quadrado, seu lado mede 85 metros e paguei Cr\$ 8,00 por centiare; o segundo é retangular, com 15,7dam de comprimento por 128m de largura e paguei Cr\$ 0,04 por decímetro quadrado; o terceiro tem uma área de 3,46hm² e paguei Cr\$ 325,00 por are. Quanto paguei pelos três terrenos? Qual é a sua área total em ares?

16. Calcular o valor de dois terrenos, o primeiro com 4ha 7a 8ca e o segundo com 5ha 12ca, a Cr\$ 3,00 por metro quadrado.

17. Reduzir a metros quadrados 3,47ha + 58,28a + 837,9ca.

18. Reduzir a hectares 846km² + 35,87hm² + 96,25hm² + 1 234,62dam² + 647 548m².

19. Calcular em hectares a área de um terreno quadrado cujo lado mede 3,25km.

20. Calcular em hectares a superfície de um terreno retangular com 48km de comprimento e 376hm de largura.

21. Uma fazenda tem uma área de 435,8 alqueires paulistas. Qual é a sua área em ares?

22. Uma fazenda tem uma área de 45,8km². Qual é a sua área em alqueires paulistas?

23. Uma fazenda de forma retangular tem 246 alqueires paulistas. Sendo o seu comprimento igual a 4,36km, qual é a sua largura em decímetros?

24. Um milharal tem 47 alqueires paulistas. Cada braça quadrada deste milharal produz 75 litros de milho que se vende a Cr\$ 1,30 o litro. Calcular o valor da colheita.

25. Calcular em alqueires paulistas a área de uma chácara retangular que tem 2 450 braças de comprimento por 860 braças de largura.

12. O volume de um corpo. (*) Medir um segmento de reta é verificar quantas vezes este segmento contém outro tomado como unidade. O segmento tomado como unidade é, em geral, o metro, e desta comparação resulta um número que é o **comprimento do segmento**.

Medir uma porção limitada de superfície, uma superfície fechada, é verificar quantas vezes esta superfície limitada contém outra superfície também limitada e tomada como unidade. A superfície limitada tomada como unidade é, em geral, o metro quadrado, e desta comparação resulta um número que é a *área* da superfície limitada.

Medir o volume de um corpo é verificar quantas vezes o volume deste corpo contém outro volume tomado como unidade. Mas, qual é o volume que deve ser tomado como unidade? Para avaliar o volume de uma viga ou de uma pilha de tijolos, qual é o volume que devemos tomar como unidade? Se nos disserem que o volume de um obelisco contém 240 vezes o volume de um cubo, é claro que não podemos fazer idéia do volume do obelisco, porque há cubos de todos os tamanhos, e nós não conhecemos o tamanho do tal cubo que cabe 240 vezes no obelisco. Precisamos, pois, escolher uma unidade de volume que todos conheçam.

13. O bloco retangular. O bloco retangular já foi definido. (E.M.P.V. § 40) Consideremos o bloco retangular AG. (fig. 2, pág. 30).

A superfície deste bloco se divide em seis porções chamadas **faces**. As faces de um bloco retangular são retângulos, e estes retângulos são iguais, dois a dois; algumas vezes, duas faces opostas de um bloco retangular, sempre iguais, podem ser quadradas. Assim, considerando o bloco AG (fig. 2)

$$\text{face ABCD} = \text{face EFGH}$$

$$\text{face BFGC} = \text{face AEHD}$$

$$\text{face ABFE} = \text{face DCGH}$$

(*) De acôrdo com o decreto n.º 4.257, de 16/6/1939, que estabeleceu o "Sistema Legal de Unidades de Medir" a ser adotado no Brasil, existem duas unidades legais de volume: o metro cúbico e o litro. Neste parágrafo e seguintes, até o § 22, trataremos do metro cúbico.

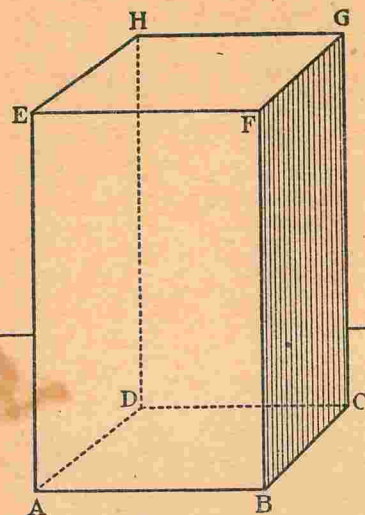


Fig. 2

C, D, etc., são os vértices do bloco.

Consideremos o vértice A, e as arestas AB, AD e AE, que têm um ponto comum A. Estas três arestas são chamadas **dimensões do bloco retangular**. Uma das dimensões é o **comprimento** do bloco; outra é a **largura**; outra é a **altura**. Estas denominações são relativas; por exemplo, a aresta AB tanto pode representar o comprimento, como a largura ou a altura do bloco.

Exercícios orais

1. Quantas faces tem um bloco retangular?
2. Ler a face anterior do bloco retangular (fig. 2); a face posterior; a lateral direita; a lateral esquerda; a base inferior; a base superior.
3. Ler as arestas verticais; ler as arestas horizontais.
4. Ler as dimensões do bloco.

Observação. Desenhar o mesmo bloco no quadro-negro, de modo que a base inferior fique sendo o retângulo ABFE, e repetir os quatro exercícios anteriores.

14. O cubo; o decímetro cúbico e o centímetro cúbico. Suponhamos que as seis faces de um bloco retangular se tornam iguais. Este sólido deixa de ser um bloco retangular e toma o

nome de **cubo**. (fig. 3) Cada uma das faces de um cubo é um quadrado. As doze arestas são iguais.

Observação. Convém explicar aos estudantes porque, no desenho, duas das faces laterais, assim como as duas bases não são quadrados.

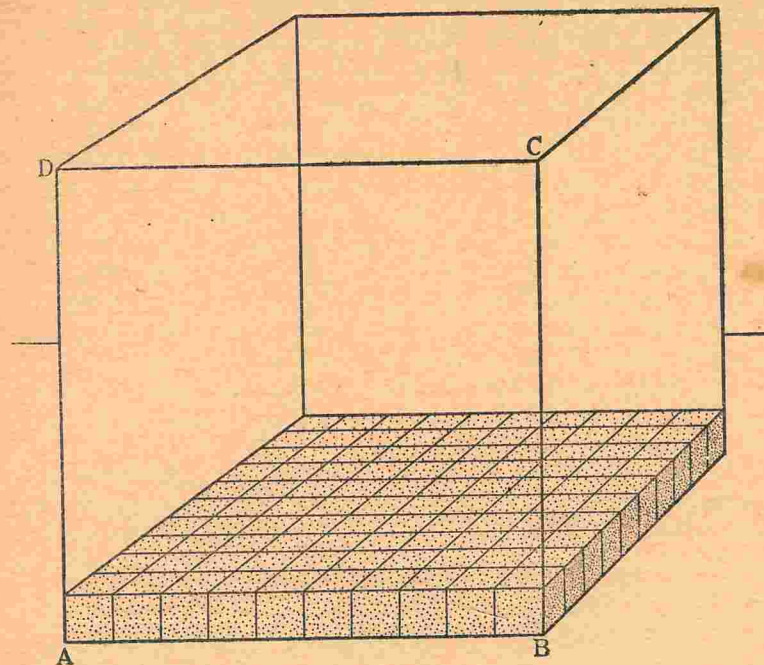


Fig. 3

Suponhamos que a aresta AB do cubo mede **um decímetro**. Neste caso, qualquer uma das faces do cubo, por exemplo, a face ABCD, é **um decímetro quadrado**. E diremos, então, que o cubo representado pela fig. 3 é **um decímetro cúbico**.

O decímetro cúbico é um cubo cujas arestas têm um decímetro de comprimento. Cada face do decímetro cúbico é um decímetro quadrado.

E, como nós temos uma noção exata do decímetro e do decímetro quadrado, estamos em condições de ter também uma

noção exata do decímetro cúbico. E se nos disserem que uma pedra tem um volume de 5 decímetros cúbicos, podemos ter uma idéia exata da **extensão** desta pedra. Portanto, o decímetro cúbico é uma unidade de volume. Mas não é a única, como veremos adiante.

Continuemos a examinar o cubo representado pela figura 3. E' um decímetro cúbico. Cada uma de suas faces é um decímetro quadrado. Cada uma de suas arestas é um decímetro linear ou simplesmente um decímetro. A aresta AB está dividida em 10 partes iguais; logo, cada uma destas partes é um centímetro. E, supondo que a figura 3 represente uma caixa, cujo volume é de um decímetro cúbico, o que nós estamos vendo no fundo desta caixa são 100 pequenos cubos, dispostos em 10 linhas, cada uma das quais tem 10 cubos. A face de cada um destes cubos é um centímetro quadrado, porque estas faces são quadrados cujos lados medem um centímetro. Cada um destes pequenos cubos é **um centímetro cúbico**.

O centímetro cúbico é um cubo cujas arestas têm um centímetro de comprimento. Cada face do centímetro cúbico é um centímetro quadrado.

E como nós temos uma noção exata do centímetro e do centímetro quadrado, estamos também em condições de ter uma noção exata do centímetro cúbico. E se nos disserem que um cristal tem um volume de 4 centímetros cúbicos, podemos ter uma idéia exata da extensão deste cristal. Portanto, o centímetro cúbico é também uma unidade de volume. Mas ainda há outras.

Voltemos à figura 3. Continuemos a imaginar que esta figura representa uma caixa, cujo volume é de um decímetro cúbico. No fundo desta caixa estamos vendo uma camada constituída por 100 centímetros cúbicos. Ora, é evidente que, se quisermos encher a caixa com 100 centímetros cúbicos, precisamos de mais nove camadas de centímetros cúbicos iguais à que está no fundo da caixa. Portanto, esta caixa contém 10×100 centímetros cúbicos ou 1 000 centímetros cúbicos, isto é:

$$1 \text{ decímetro cúbico} = 1\,000 \text{ centímetros cúbicos}$$

15. O metro cúbico. Se cada aresta do cubo representado pela figura 3 (§ 14) tivesse um metro de comprimento, cada uma

de suas faces seria um metro quadrado e a figura 3 representaria um metro cúbico. Portanto, **o metro cúbico é um cubo cujas arestas têm um metro de comprimento.** Mas, se a figura 3 representar um metro cúbico, os 100 cubos que estão situados no fundo deste metro cúbico serão decímetros cúbicos. E chegaremos facilmente à conclusão que 1 metro cúbico tem 1 000 decímetros cúbicos. **O metro cúbico é a primeira unidade legal de volume.**

16. Volume do bloco retangular. A nossa figura representa um bloco retangular cujas três dimensões, BA, BC e BD, medem respectivamente 4cm, 3cm e 6cm. Suponhamos que este bloco representa uma caixa vazia que nós queremos encher com dados, cada um dos quais seja exatamente *um centímetro cúbico*. É fácil compreender que a primeira camada de dados será constituída por 4×3 ou 3×4 dados, isto é, 12 dados. E obser-

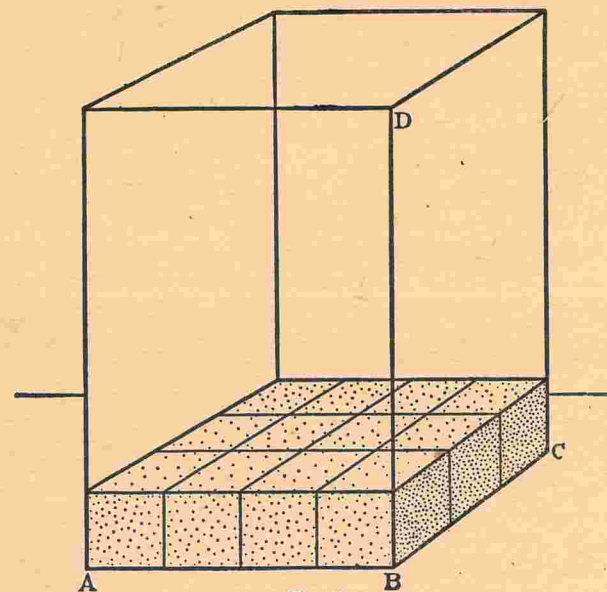


Fig. 4

vando que, para encher esta caixa são necessárias 6 camadas, cada uma com 12 dados, conclue-se que o número total de dados que esta caixa contém é $4 \times 3 \times 6$ ou $3 \times 4 \times 6$ dados. Cada um dos dados sendo um centímetro cúbico, diremos que o **volume deste bloco é 72 centímetros cúbicos.**

Para maior clareza, apresentamos, subdividido em quatro porções (fig. 5) o mesmo bloco retangular ABCD (fig. 4) para que se veja que ele contém realmente 72 centímetros cúbicos.

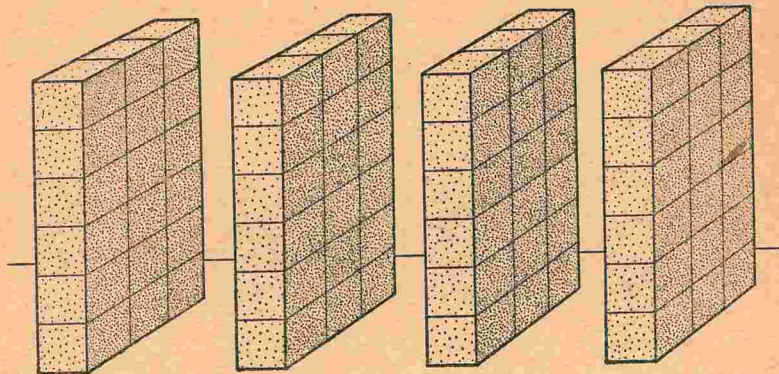


Fig. 5

Se as dimensões de um bloco retangular são 5cm, 6cm e 8cm, um raciocínio análogo nos mostrará que o volume do bloco é $5 \times 6 \times 8 = 240$ centímetros cúbicos. Sendo 4dm, 5dm e 10dm, o volume será 200 decímetros cúbicos. Sendo 7m, 4m e 11m, o volume será 308 metros cúbicos. Podemos pois estabelecer a seguinte

Regra. Para calcular o volume de um bloco retangular, é bastante calcular o produto das suas três dimensões, medidas com a mesma unidade de comprimento.

E, se observarmos que o produto das dimensões BA e BC do bloco representa a área da base do mesmo bloco, concluiremos que:

O volume de um bloco retangular é igual ao produto da área da base do bloco pela altura do mesmo bloco.

Convém não esquecer que:

$m \times m \times m$	= metros cúbicos
$dm \times dm \times dm$	= decímetros cúbicos
$cm \times cm \times cm$	= centímetros cúbicos

Exercícios em classe

Área lateral de um bloco retangular é a soma das áreas das quatro faces laterais.

Reunindo a área lateral com a área das duas bases, teremos a *área total* do bloco retangular.

1. Desenhar um bloco retangular (fig. 4) no qual a aresta BA meça 6cm, a aresta BC, 5cm, e a aresta BD, 8cm. Quantos centímetros cúbicos contém este bloco? Qual é o seu volume? Qual é a área da base? E da face oposta à base? E da face lateral direita? E da face lateral esquerda? E da face anterior? E da face posterior? Qual é a área lateral do bloco? E a área total?

2. Um reservatório de água mede 12 metros de comprimento, 7 metros de largura e 5 metros de profundidade. É alimentado por um adutor que, ao cabo de uma hora, faz o nível da água subir de um metro. Às 6 horas da manhã, estando o tanque vazio, abre-se o adutor. Qual será o volume de água existente no reservatório, às 7 horas da manhã? E às 8 horas? E às 9 horas? E às 10 horas? E às 11 horas?

17. **Volume do cubo.** Considerando a fig. 3 (§14) e supondo que a aresta deste cubo meça 10 centímetros, já vimos que este cubo pode conter 1 000 centímetros cúbicos. E diremos que o volume deste cubo é 1 000 centímetros cúbicos.

Supondo que a aresta de um cubo meça 6 centímetros, e raciocinando como no parágrafo anterior, facilmente concluiremos que o volume do cubo é $6 \times 6 \times 6 = 216$ centímetros cúbicos.

Se a aresta medir 5 decímetros, o volume do cubo será $5 \times 5 \times 5 = 125$ decímetros cúbicos. E assim por diante. Portanto,

Regra. Para calcular o volume de um cubo, mede-se o comprimento de uma das arestas, e eleva-se este comprimento à terceira potência. O resultado representa o volume do cubo em cubos cuja aresta é igual à unidade de comprimento que foi escolhida para medir a aresta.

Exercícios em classe

1. Desenhar um cubo cuja aresta tenha 6cm. Quantos cm quadrados contém cada uma das faces? Quantos cm cúbicos contém este cubo?

2. Desenhar um cubo cuja aresta tenha 7cm. Quantos cm quadrados contém cada uma das faces? Quantos cm cúbicos contém este cubo?

3. Vejo uma pedra de forma cúbica, cuja aresta mede 8dm. Quantos dm quadrados contém cada uma de suas faces? Quantos dm cúbicos de pedra podem ser feitos com esta pedra?

4. A nossa sala de aula tem a forma de um cubo. O comprimento da sala é de 9 metros. Qual é a largura? Qual é a altura? Quantos metros quadrados contém o assoalho? E o fôrro? E cada uma das paredes? Qual é a superfície da sala? Qual é o volume da sala?

18. O volume é uma grandeza composta. O volume é uma grandeza composta. (§3) Com efeito, êle é o produto de três comprimentos, isto é, as três dimensões de um bloco retangular ou de um cubo; é também o produto de uma área por um comprimento, isto é, a área da base de um bloco retangular ou de um cubo, pela altura do mesmo bloco ou cubo.

A medição direta de um volume é uma operação difícil, senão impossível. A nossa sala de aula tem a forma de um bloco retangular. Se quiséssemos medir diretamente o volume da nossa sala, deveríamos enchê-la com metros cúbicos feitos de madeira ou de qualquer outra substância e, depois, contar êstes cubos. É fácil de perceber a dificuldade dêste processo de medir.

19. As unidades de volume. As unidades legais das medidas de volume são o metro cúbico e o litro. O metro cúbico é a primeira unidade legal de volume; seus múltiplos e submúltiplos usuais são as unidades secundárias.

MÚLTIPLOS	{	quilômetro cúbico (km ³) = 1 000 000 000m ³	
	{	hectômetro cúbico (hm ³) = 1 000 000m ³	
	{	decâmetro cúbico (dam ³) = 1 000m ³	
UNIDADE	{	metro cúbico (m ³) = 1m ³	(G)
SubMÚLTIPLOS	{	decímetro cúbico (dm ³) = 0,001 do m ³	
	{	centímetro cúbico (cm ³) = 0,000 001 do m ³	
	{	milímetro cúbico (mm ³) = 0,000 000 001 do m ³	

O quadro G contém a primeira unidade legal de volume do sistema legal das unidades de medir, com seus múltiplos e submúltiplos usuais, as suas abreviaturas e os seus valores em relação ao metro cúbico.

Se um m³ tem 1 000dm³, então 1dm³ é a milésima parte do m³. Consideremos o número 3,478 (3 unidades e 478 milésimos). Escrevendo o símbolo m³ à direita dêste número, teremos 3,478m³, isto é, 3m³ e 478 milésimos do m³. Mas, os milésimos do m³ são dm³. Então 3,478m³ significa 3m³ e 478dm³. Consideremos o

número 7,8m³. Escrevendo dois zeros à direita da parte fracionária, êste número não se altera. Portanto, 7,8m³ = 7,800m³ = 7m³ e 800dm³. Do mesmo modo, 4,57m³ = 4,570m³ = 4m³ e 570dm³.

Exercícios em classe

Tomando como unidade o m³, escrever os volumes seguintes:

- | | | | | |
|---------------------------------------|--|--|--|---|
| 1. 3m ³ e 7dm ³ | | 5. 647dm ³ | | 9. 7m ³ e 6dm ³ |
| 2. 2dm ³ | | 6. 9m ³ e 40dm ³ | | 10. 45dm ³ |
| 3. 48dm ³ | | 7. 2m ³ e 34dm ³ | | 11. 7m ³ e 8dm ³ |
| 4. 359dm ³ | | 8. 4 578dm ³ | | 12. 5m ³ e 37dm ³ |

Ler de todos os modos possíveis, os volumes seguintes:

- | | | | | | | |
|-------------------------|--|-------------------------|--|-------------------------|--|--------------------------|
| 13. 4,537m ³ | | 15. 0,089m ³ | | 17. 0,293m ³ | | 19. 8,7m ³ |
| 14. 6,259m ³ | | 16. 0,546m ³ | | 18. 7,48m ³ | | 20. 3 456dm ³ |

Um m³ = 1 000dm³; um dm³ = 1 000cm³; logo 1m³ = 1 000 000 cm³. Então, 1 cm³ é a milionésima parte do m³. Consideremos o número 3,578 946 (3 unidades, 578 milésimos e 946 milionésimos). Escrevendo o símbolo m³ à direita dêste número, teremos 3 578 946m³, isto é, 3m³, 578 milésimos do m³ e 946 milionésimos do m³. Mas, milésimos do m³ são dm³ e milionésimos do m³ são cm³. Então, 3,578 946m³ significa 3m³, 578dm³ e 946cm³.

Exercícios em classe

Tomando como unidade o m³, escrever os volumes seguintes:

- | | | | | |
|-------------------------|--|---|--|--|
| 1. 25cm ³ | | 4. 5m ³ e 647cm ³ | | 7. 47 895cm ³ |
| 2. 248cm ³ | | 5. 31dm ³ e 58cm ³ | | 8. 7m ³ e 42cm ³ |
| 3. 3 796cm ³ | | 6. 4m ³ , 10dm ³ e 8cm ³ | | 9. 1m ³ , 2dm ³ e 4cm ³ |

Ler de todos os modos possíveis, os volumes seguintes:

- | | | | | |
|-----------------------------|--|----------------------------|--|---------------------------|
| 10. 3,476 870m ³ | | 12. 0,073 56m ³ | | 14. 0,000 2m ³ |
| 11. 5,607 080m ³ | | 13. 0,124 85m ³ | | 15. 0,007 8m ³ |

Um m³ = 1 000 000 000 de mm³. Logo, 1 mm³ é a bilionésima parte do m³. Consideremos o número 7,345 678 219. (7 unidades, 345 milésimos, 678 milionésimos e 219 bilionésimos). Escrevendo o símbolo m³ à direita dêste número, teremos 7,345 678 219m³, isto é, 7m³, 345 milésimos do m³, 678 milionésimos do m³ e 219 bilionésimos do m³. Mas, milésimos do m³ são dm³, milionésimos do m³ são cm³ e bilionésimos do m³ são mm³. Então, 7,345 678 219m³ significa 7m³, 345dm³, 678cm³ e 219mm³.

Exercícios em classe

Tomando como unidade o m³, escrever os volumes seguintes:

- | | | |
|-----------------------|--|---|
| 1. 1mm ³ | 4. 5 789mm ³ | 7. 8m ³ e 542mm ³ |
| 2. 14mm ³ | 5. 43 518mm ³ | 8. 43dm ³ e 37mm ³ |
| 3. 387mm ³ | 6. 74cm ³ e 36mm ³ | 9. 1dm ³ , 2cm ³ e 5mm ³ |

10. Ler de todos os modos possíveis o número.....
7,528 437 619m³.

Consideremos o número 4,123 456 789. Escrevendo o símbolo m³ à direita dêste número, teremos 4,123 456 789m³. E de tudo o que dissemos neste parágrafo resulta que:

$$\begin{aligned}
 4,123\ 456\ 789m^3 &= 4m^3 + 123dm^3 + 456cm^3 + 789mm^3 \\
 3,246\ 813\ 57m^3 &= 3m^3 + 246dm^3 + 813cm^3 + 570mm^3 \\
 2,410\ 529\ 6m^3 &= 2m^3 + 410dm^3 + 529cm^3 + 600mm^3 \\
 5,643\ 728m^3 &= 5m^3 + 643dm^3 + 728cm^3 \\
 6,238\ 57m^3 &= 6m^3 + 238dm^3 + 570cm^3 \\
 7,963\ 2m^3 &= 7m^3 + 963dm^3 + 200cm^3 \\
 2,528m^3 &= 2m^3 + 528dm^3 \\
 3,47m^3 &= 3m^3 + 470dm^3 \\
 6,8m^3 &= 6m^3 + 800dm^3
 \end{aligned}$$

20. Mudança de unidade nas medidas de volume. A unidade de volume pode ser qualquer; o m³, o dam³, o dm³, etc.. Escolhe-se a unidade de acôrdo com o corpo cujo volume se quer medir.

As conclusões a que chegámos no parágrafo anterior podem ser resumidas no quadro H.

Nos números que representam volumes, a unidade escolhida é representada pela abreviatura correspondente.

Consideremos 3,457 8m³. Escrevendo dois zeros à direita, e de acôrdo com o quadro H, êste número contém 3m³, 457dm³ e 800cm³. E, de acôrdo com os princípios da numeração, 3,457 8m³ = 3 457,800dm³ = 3 457 800cm³ = 3 457 800 000mm³.

unidades	milésimos	milionésimos	bilionésimos
3,	527	489	632
m ³	dm ³	cm ³	mm ³

(H)

Exercícios orais

Reduzir os volumes que se seguem à unidade indicada entre parênteses.

- | | | |
|---|---|---|
| 1. 4m ³ (dm ³) | 12. 0,376m ³ (cm ³) | 24. 0,56dm ³ (mm ³) |
| 2. 7m ³ (cm ³) | 13. 0,4dm ³ (cm ³) | 25. 0,87cm ³ (mm ³) |
| 3. 9m ³ (mm ³) | 14. 7,6dm ³ (cm ³) | 26. 3m ³ (mm ³) |
| 4. 4dm ³ (mm ³) | 15. 12,3dm ³ (cm ³) | 27. 0,8dm ³ (mm ³) |
| 5. 6dm ³ (cm ³) | 16. 0,48dm ³ (cm ³) | 28. 9cm ³ (mm ³) |
| 6. 9cm ³ (mm ³) | 17. 0,259dm ³ (cm ³) | 29. 7,6m ³ (dm ³) |
| 7. 0,8m ³ (dm ³) | 18. 0,63dm ³ (cm ³) | 30. 6,9dm ³ (cm ³) |
| 8. 0,47m ³ (dm ³) | 19. 2,8m ³ (cm ³) | 31. 0,498 357m ³ (dm ³) |
| 9. 0,428m ³ (dm ³) | 20. 4,26m ³ (cm ³) | 32. 427 859 628mm ³ (dm ³) |
| 10. 0,6m ³ (cm ³) | 21. 0,4m ³ (mm ³) | 33. 345 678 916cm ³ (m ³) |
| 11. 0,45m ³ (cm ³) | 22. 0,52m ³ (mm ³) | 34. 12 830 720cm ³ (dm ³) |
| | 23. 0,8dm ³ (cm ³) | |

21. Os múltiplos do metro cúbico. Muito raramente são empregados na vida prática, porque o metro cúbico é uma unidade suficiente para medir os grandes volumes.

O dam³ é um cubo cujas faces são decâmetros quadrados; logo, as arestas têm um decâmetro de comprimento. A figura 3 do parágrafo 14 mostra com facilidade que 1dam³ = 1 000m³. É bastante supor que a aresta AB tenha um decâmetro de comprimento. Portanto, 1dam³ contém um milhar de metros cúbicos. Então, considerando o número 4 358m³, o algarismo 4 representa dam³, e 4 358m³ = 4dam³ e 358m³.

O hm³ é um cubo cujas faces são hectômetros quadrados; logo, as arestas têm um hectômetro de comprimento. A mesma figura mostra com facilidade que 1hm³ = 1 000dam³. É bastante supor que a aresta AB tenha um hectômetro de comprimento. Portanto, 1hm³ contém 1 000dam³. E sendo 1dam³ = 1 000m³, segue-se que 1hm³ = 1 000 000m³. Então, 7 548 329m³ = 7hm³, 548dam³ e 329m³. E assim por diante.

Exercícios orais

Reduzir os volumes que se seguem à unidade indicada entre parênteses.

- | | | |
|--|--|---|
| 1. 3dam ³ (m ³) | 8. 3 468m ³ (dam ³) | 15. 7,46m ³ (dam ³) |
| 2. 4,7dam ³ (m ³) | 9. 478 546m ³ (dam ³) | 16. 2,48m ³ (dm ³) |
| 3. 5,84dam ³ (m ³) | 10. 3,48m ³ (dm ³) | 17. 7,59dam ³ (m ³) |
| 4. 8,567dam ³ (m ³) | 11. 7hm ³ (m ³) | 18. 12,568hm ³ (dam ³) |
| 5. 3dam ³ (dm ³) | 12. 8,47dam ³ (m ³) | 19. 1 234 567m ³ (dam ³) |
| 6. 7dam ³ (dm ³) | 13. 9,56hm ³ (dam ³) | 20. 45 897dam ³ (hm ³) |
| 7. 3,6dam ³ (dm ³) | 14. 6,83hm ³ (m ³) | |

Exercícios. Série IV

Problemas sobre medidas de volume

Não esquecer que:

$$\begin{array}{l|l|l}
 m \times m = m^2 & m \times m \times m = m^3 & dm \times dm \times dm = dm^3 \\
 m^2 \div m = m & m^3 \div m^2 = m & dm^3 \div dm^2 = dm \\
 dm \times dm = dm^2 & m^3 \div m = m^2 & dm^3 \div dm = dm^2 \\
 dm^2 \div dm = dm & &
 \end{array}$$

O produto de dois comprimentos é uma área. O produto de três comprimentos é um volume. O produto de uma área por um comprimento é um volume. O quociente da divisão de uma área por um comprimento é um comprimento. O quociente da divisão de um volume por uma área é um comprimento.

1. Reduzir $7,4m^3 + 34,58dm^3 + 7,826dam^3 + 345\,678dm^3 + 0,819m^3 + 407\,586\,000mm^3$ a dm^3 .

Solução.

$$\begin{array}{rcl}
 7,4m^3 & = & 7\,400,000dm^3 \\
 34,58dm^3 & = & 34,580dm^3 \\
 7,826dam^3 & = & 7\,826\,000,000dm^3 \\
 345\,678dm^3 & = & 345\,678,000dm^3 \\
 0,819m^3 & = & 819,000dm^3 \\
 407\,586\,000mm^3 & = & 407,586dm^3
 \end{array}$$

Resposta. $8\,180\,339,166dm^3$

2. Calcular o volume de uma sala que tem 9,5m de comprimento, 7,4m de largura e 4,36m de altura.

3. Calcular o volume de um cubo cuja aresta mede 4,13m.

4. Calcular o volume de um cubo cuja aresta mede 8,25m.

5. Quanto vale um bloco de granito de forma cúbica, cuja aresta mede 1,26m, supondo que o decímetro cúbico do granito se possa vender a Cr\$ 0,45?

6. Calcular em dm^3 o volume de um bloco retangular cujas dimensões são 4,5m, 2,4m e 1,3m.

7. Calcular em cm^3 o volume de um tijolo cujas dimensões são 0,32m, 0,15m e 0,08m.

8. Uma torre com 36,4m de altura tem a forma de um bloco retangular. A base da torre mede 11,6m de comprimento por 8,4m de largura. Calcular a área da base da torre; a área lateral; a área total; o volume.

9. Calcular o volume de uma parede com 14m de comprimento, 34dm de altura e 33cm de espessura.

10. Quantos tijolos serão necessários para construir uma parede com $15,8m \times 4,3m \times 0,35m$, se as dimensões do tijolo são 0,30m, 0,15m e 0,08m? Se os tijolos custam Cr\$ 84,00 por milheiro, e se o operário ganha Cr\$ 8,60 por metro quadrado da parede construída, qual será o custo desta parede?

11. Uma sala de aula mede $18,5m \times 13,4m \times 5,2m$. Supondo que cada aluno necessite de um espaço igual a $4,8m^3$ para respirar à vontade, quantos alunos pode conter esta sala?

12. Calcular a área lateral, a área total e o volume de uma viga que mede $4,5m \times 0,33m \times 0,06m$. As bases da viga são as extremidades.

13. Quantos m^3 de pedra são necessários para fechar com uma parede de 2,4m de altura e 0,3m de espessura, um terreno retangular que mede 87m de comprimento por 57m de largura?

14. Calcular o volume e a área total de um cubo cuja aresta tem 2,7m.

15. Calcular o volume e a área total de um cubo cuja aresta tem 5,2m.

16. A soma dos comprimentos das arestas de um cubo é igual a 40,8m. Calcular a área de cada uma das bases e o volume do cubo.

17. A área total de um cubo é igual a $162,24m^2$. Calcular o comprimento da aresta e o volume do cubo.

18. Um reservatório de forma cúbica tem uma profundidade de 2,4m. Quanto custará a pintura interior e exterior deste reservatório, a Cr\$ 3,40 por metro quadrado? Supõe-se que o reservatório é aberto na parte superior.

19. Um reservatório mede 7,8m de comprimento, 6,4m de largura e 3,5m de profundidade. Não está cheio, faltando ainda 48cm para que a água chegue a transbordar. Quantos dm^3 de água contém este reservatório?

20. Um bloco de granito mede $8,4m \times 6,7m \times 3,5m$. Quebra-se este bloco para empregá-lo na construção de uma estrada. O granito, depois de partido, aumenta de 0,24 do seu volume. As dimensões do caminhão empregado no transporte são 2m, 1,3m e 0,45m. Cada viagem do caminhão custa Cr\$ 8,00. Quanto custará o transporte de todo o granito?

21. Cavou-se um fosso com 48m de comprimento, 7,4m de largura e 3,25 de profundidade. A terra foi conduzida a um lugar distante, em um caminhão cujas dimensões são 1,9m, 1,2m e 0,44m. Sabendo-se que a terra, depois de revolvida, aumenta de 0,15 do seu volume, calcular o custo do transporte de toda a terra, custando Cr\$ 6,20 cada viagem do caminhão.

22. Suponha-se que a terra solta, depois de comprimida, perde 0,12 do seu volume. Quantos metros cúbicos de terra serão necessários para encher um fosso com 27 metros de comprimento, 8,4m de largura e 3,6m de profundidade?

23. O volume de um bloco retangular é de $74,850m^3$. As dimensões da base são 4,8m e 5,2m. Calcular a altura do bloco com erro inferior a 0,001m.

24. Uma viga tem 0,24m de largura e 0,06 de espessura. Sendo o volume da viga igual a $347dm^3$, pede-se o comprimento da mesma com erro inferior a 0,01m.

25. Uma torre cuja forma é a de um bloco retangular tem 42 metros de altura e 1350 metros cúbicos de volume. A base da torre é um retângulo cujo comprimento é de 7,5m. Pede-se a largura deste retângulo com erro inferior a 0,01m.

26. A área lateral de um bloco retangular é de $46,50m^2$. As bases do bloco são quadrados, cujos lados medem 3,1m cada um. Pede-se a altura do bloco e o seu volume.

27. Um pilar em forma de bloco retangular, com $7,4m \times 0,45m \times 0,45m$, é construído com tijolos de $24cm \times 13cm \times 5cm$. A argamassa necessária para ligar os tijolos ocupa um volume igual a 0,23 do volume do pilar. Calcular o custo dos tijolos empregados na construção do pilar, a Cr\$ 75,00 por milheiro.

28. Um terreno retangular mede $436\text{m} \times 235\text{m}$. Abrem-se neste terreno duas ruas perpendiculares entre si, uma no sentido do comprimento e outra no sentido da largura. A rua mais comprida tem 15 metros de largura e a mais curta tem 12 metros. Cobrem-se as duas ruas com uma camada de areia de 12cm de espessura. Calcular o custo da areia à razão de Cr\$ 3,70 por metro cúbico.

29. Um terreno retangular tem 3 840 metros de perímetro e seu comprimento é o triplo da largura. Cava-se um fosso ao longo do perímetro deste terreno, com 2,4m de largura e 0,8m de profundidade, pagando-se Cr\$ 4,20 por metro cúbico da terra retirada. Calcular o custo deste trabalho.

30. Um terreno retangular mede $53\text{m} \times 31\text{m}$. No centro deste terreno abre-se um tanque com $7,5\text{m} \times 6,4\text{m} \times 3,8\text{m}$. A terra retirada deste tanque é espalhada sobre o mesmo terreno, de um modo uniforme. Qual será a altura desta camada?

22. **O litro.** A segunda unidade legal de volume é o *litro*, cujo símbolo é *l*. (Decreto n.º 4 257 de 16/6/939). O litro com seus múltiplos e submúltiplos usuais é usado no comércio, para a compra e venda dos chamados *secos e molhados*, isto é, arroz, farinha, feijão, batatas, leite, vinho, azeite, gasolina, etc.. É a unidade empregada para medir a *capacidade*, isto é, o volume útil ou utilizável de recipientes quaisquer como sejam reservatórios, tanques, garrafas, etc.. Eis porque esta segunda unidade legal é conhecida como **unidade de capacidade**.

MÚLTIPLOS	{	hectolitro (hl) = 100 litros	
	{	decalitro (dal) = 10 litros	
UNIDADE	{	litro (l) = 1 litro	(J)
SUBMÚLTIPLOS .	{	decilitro (dl) = 0,1 do litro	
		centilitro (cl) = 0,01 do litro	
		mililitro (ml) = 0,001 do litro	

centenas	dezenas	unidades	décimos	centésimos	milésimos
2	3	5	3	6	9
hl	dal	l	dl	cl	ml

(K)

Imaginemos uma caixa de latão, com a forma de um cubo, e cujo volume interior seja de um decímetro cúbico. Se encheremos esta caixa com gasolina, a quantidade deste líquido é aproximadamente um litro.

Definição. O litro é o volume de um quilograma de água destilada e isenta de ar, à temperatura de 4 graus centígrados, e sob a pressão atmosférica normal.

Para fins legais admite-se que:

Um litro é equivalente a um decímetro cúbico.

Tudo o que dissemos em relação ao metro, se aplica sem restrições às medidas de capacidade. É bastante substituir o quadro A pelo quadro J, o quadro B pelo quadro K, e a palavra *comprimento* pela palavra *capacidade*.

Devemos também observar que as unidades de volume crescem ou decrescem de 1 000 em 1 000, ao passo que as unidades de capacidade crescem ou decrescem de 10 em 10. Assim é que:

$$1\text{m}^3 = 1\,000\text{dm}^3 = 1\,000\,000\text{cm}^3 = 1\,000\,000\,000\text{mm}^3$$

$$1\text{ litro} = 10\text{ decilitros} = 100\text{ centilitros} = 1\,000\text{ mililitros}$$

Exercícios orais

Reduzir as capacidades que se seguem à unidade indicada entre parênteses.

1. 1dal (l)	9. 5,428l (ml)	17. 6,547hl (dal)	24. 47 586dl (hl)
2. 3,7l (dl)	10. 2,47hl (dl)	18. 23,57l (dal)	25. 9,52hl (dl)
3. 3,7dal (l)	11. 7,28l (dl)	19. 839cl (l)	26. 34 567cl (dal)
4. 4,8dal (l)	12. 347dl (l)	20. 2,8hl (l)	27. 64 738l (hl)
5. 5,7l (cl)	13. 6 423cl (l)	21. 315dl (l)	28. 7,59dal (cl)
6. 9,3hl (l)	14. 4,73dl (cl)	22. 32,8l (ml)	29. 44,571l (ml)
7. 7,28hl (l)	15. 3,49hl (dal)	23. 3 756dl (dal)	30. 34 803dl (hl)
8. 0,9dal (cl)	16. 35,58dal (hl)		

23. **Equivalência entre volumes e capacidades.** Para substituir unidades de volume por unidades de capacidade, reduz-se o volume dado a dm^3 , substitue-se a abreviatura do decímetro cúbico pela abreviatura do litro, e reduz-se o resultado à unidade de capacidade pedida no problema. Por exemplo, se quisermos reduzir $7,8\text{m}^3$ a hectolitros; teremos:

$$7,8\text{m}^3 = 7\,800\text{dm}^3 = 7\,800\text{l} = 78\text{hl}$$

Exercícios orais

Substituir os volumes que se seguem pela unidade indicada entre parênteses.

- | | | | |
|---------------------------|-----------------------------|-------------------------------|-----------------------------|
| 1. 1m^3 (l) | 6. $0,597\text{dm}^3$ (ml) | 11. $84,9\text{dm}^3$ (dl) | 16. $6,41\text{m}^3$ (hl) |
| 2. $3,4\text{m}^3$ (dal) | 7. $9,778\text{dm}^3$ (dal) | 12. 437dm^3 (l) | 17. $7,042\text{m}^3$ (hl) |
| 3. $4,8\text{m}^3$ (hl) | 8. $2,936\text{m}^3$ (hl) | 13. $14,85\text{dm}^3$ (cl) | 18. $0,093\text{m}^3$ (dal) |
| 4. $0,348\text{m}^3$ (dl) | 9. $6,87\text{dm}^3$ (cl) | 14. $23,74\text{dm}^3$ (dal) | 19. $0,078\text{m}^3$ (l) |
| 5. $0,0796\text{m}^3$ (l) | 10. $2,47\text{m}^3$ (dal) | 15. $438,972\text{dm}^3$ (hl) | 20. $0,2538\text{m}^3$ (dl) |

Para substituir unidades de capacidade por unidades de volume, reduz-se a capacidade dada a litros, substitue-se a abreviatura do litro pela abreviatura do decímetro cúbico, e reduz-se o resultado à unidade de volume pedida pelo problema. Por exemplo, reduzindo $357,428\text{hl}$ a metros cúbicos, teremos:

$$357,428\text{hl} = 35\,742,8\text{l} = 35\,742,8\text{dm}^3 = 35,742\,800\text{m}^3$$

Exercícios orais

Substituir as capacidades que se seguem pela unidade indicada entre parênteses.

- | | | | |
|--------------------------------------|--|---|---|
| 1. $47,8\text{l}$ (dm^3) | 6. $4,29\text{dl}$ (mm^3) | 11. $7,8\text{dal}$ (dm^3) | 16. $81,7\text{hl}$ (m^3) |
| 2. $8,39\text{l}$ (cm^3) | 7. $6,43\text{dl}$ (cm^3) | 12. $34,9\text{dal}$ (cm^3) | 17. $7,28\text{hl}$ (m^3) |
| 3. $472,7\text{l}$ (dm^3) | 8. $9,48\text{cl}$ (cm^3) | 13. $328,6\text{dal}$ (dm^3) | 18. $23,9\text{hl}$ (m^3) |
| 4. $93,48\text{l}$ (cm^3) | 9. $12,78\text{cl}$ (mm^3) | 14. $8,47\text{hl}$ (dm^3) | 19. $16,74\text{dal}$ (cm^3) |
| 5. $7,8\text{dl}$ (cm^3) | 10. $34\,786\text{cl}$ (dm^3) | 15. 93hl (m^3) | 20. $93,48\text{hl}$ (cm^3) |

Exercícios. Série V

Problemas sobre medidas de capacidade

1. Reduzir a litros $7,8\text{dal} + 457\text{dl} + 9,386\text{hl} + 234,47\text{l} + 52\,384\text{cl} + 478\,520\text{ml}$.

<i>Solução.</i>	$7,8\text{dal} = 78,00\text{l}$
	$457\text{dl} = 45,70\text{l}$
	$9,386\text{hl} = 938,60\text{l}$
	$234,47\text{l} = 234,47\text{l}$
	$52\,384\text{cl} = 523,84\text{l}$
	$478\,520\text{ml} = 478,52\text{l}$

Resposta. $2\,299,13\text{l}$

2. Quantos litros de água contém um reservatório com $4,8\text{m} \times 2,7\text{m} \times 0,65\text{m}$?
3. Quantos dl de água contém uma caixa com $1,7\text{m} \times 0,84\text{m} \times 0,23\text{m}$?
4. Um reservatório mede $3,7\text{m} \times 2,4\text{m} \times 3,6\text{dm}$. Está cheio de gasolina cujo preço é de Cr\$ 0,95 o litro. Calcular o valor de toda a gasolina.
5. Um reservatório mede $1,6\text{m} \times 1,2\text{m} \times 67\text{cm}$. Para enchê-lo de água há uma torneira que despeja 34 litros por minuto. Em quanto tempo esta torneira enche o tanque?

6. Um reservatório tem a capacidade de 8 400 litros. Seu comprimento é de $4,7\text{m}$ e sua largura é de $2,3\text{m}$. Calcular a sua profundidade com erro inferior a $0,001\text{m}$.

7. Um tanque tem $12,8\text{m}$ de comprimento e $8,4\text{m}$ de largura. Qual deve ser a sua profundidade para que possa conter $1\,200\text{hl}$ de água?

8. Para encher um tanque de $5,6\text{m} \times 4,3\text{m} \times 1,7\text{m}$ são necessárias 22 horas. Quantos litros de água este tanque recebe por minuto?

9. Um tanque mede $7,4\text{m} \times 5,3\text{m} \times 1,7\text{m}$. Este tanque pode conter $1\,000\text{hl}$ de água? E' necessário aumentar a profundidade? De quanto?

10. Em uma vasilha cuja capacidade é de 1dal , despejaram-se $3,586\text{dm}^3$ de água. Quantos cl de água é preciso despejar ainda na mesma vasilha, para enchê-la completamente?

11. Comprei um barril de vinho de 480 litros por Cr\$ 2 340,00. Engarrafeci metade deste vinho em garrafas de $1,5\text{l}$ e a outra metade em garrafas de $0,75\text{l}$. Por quanto devo vender cada uma destas garrafas, para ganhar Cr\$ 720,00?

12. Um litro de trigo em grão pesa 750 gramas. O trigo, depois de moído, dá 88 % de seu peso em farinha e o resto em farelo. Quantos quilogramas de farinha se obtêm com a moagem de $4,8\text{m}^3$ de trigo?

13. Quantos dal de água pode conter um tanque que mede $7,8\text{dam} \times 24,7\text{m} \times 64\text{cm}$?

14. Se um litro de arroz custa Cr\$ 1,30, quanto vale o arroz contido em uma caixa de $2,7\text{m} \times 15\text{dm} \times 82\text{cm}$?

15. Um reservatório tem $2,8\text{m}$ de largura e $1,4\text{m}$ de profundidade. Sua capacidade é de 250hl . Calcular o seu comprimento, com erro inferior a $0,01\text{m}$.

16. Um negociante comprou 39 litros de licor a Cr\$ 25,00 o litro. Vendeu-o em cálices cuja capacidade é de $5,1\text{cl}$, e à razão de Cr\$ 1,80 cada um. Qual foi o seu lucro?

17. Um negociante comprou arroz a Cr\$ 0,85 cada litro. Com este arroz encheu um depósito de $3,6\text{m} \times 2,4\text{m} \times 1,6\text{m}$. Qual foi o seu lucro, vendendo o arroz a Cr\$ 1,20 cada litro, e supondo que 23 % de todo o arroz, o que estava no fundo do depósito, perdeu-se devido à humidade?

18. A Cr\$ 0,90 o litro, quanto vale a gasolina contida em um reservatório de $2,6\text{m} \times 1,7\text{m} \times 93\text{cm}$?

19. A Cr\$ 3,70 o litro, quanto vale o vinho contido em um depósito de $2,1\text{m} \times 16\text{dm} \times 88\text{cm}$?

20. Qual é a profundidade de um tanque com $3,7\text{dam}$ de comprimento por $23,6\text{m}$ de largura, se a sua capacidade é de $2\,000\,000$ de litros?

24. **Unidades de massa.** O peso de um corpo é a força que atrai este corpo para o centro da Terra; depende do corpo e de sua situação na superfície da Terra; aumenta quando caminhamos com este corpo, do equador para os polos; diminui quando caminhamos em sentido inverso; aumenta quando o corpo se aproxima do centro da Terra; diminui quando ele se eleva na

atmosfera. Estas variações de peso, aliás muito fracas, podem ser verificadas com uma mola bastante sensível.

A massa de um corpo é a quantidade de matéria de que é feito. A massa de um corpo é absolutamente invariável, seja qual for a situação deste corpo na superfície da Terra. Na verdade, são as massas que se comparam ou se medem com as balanças.

Na linguagem usual, com a qual nos conformaremos aqui, dizemos **peso** em lugar de **massa**, e esta confusão não acarreta dificuldades de espécie alguma, na vida prática. (*)

A unidade legal de massa é o **quilograma**. Entretanto, para estabelecer a escala dos múltiplos e submúltiplos usuais das unidades de massa, toma-se como unidade principal o **grama**.

MÚLTIPLOS	{	quilograma (kg) = 1 000 gramas	(L)
	{	hectograma (hg) = 100 gramas	
	{	decagrama (dag) = 10 gramas	
UNIDADE	{	grama (g) = 1 grama	
SUBMÚLTIPLOS .	{	decigramma (dg) = 0,1 do grama	
		centigramma (cg) = 0,01 do grama	
		miligramma (mg) = 0,001 do grama	

u. de milhar	centenas	dezenas	unidades	décimos	centésimos	milésimos
3	7	5	8,	9	4	6
kg	hg	dag	g	dg	cg	mg

(M)

A unidade principal das medidas de massa é o **grama**. Imaginemos uma caixinha cúbica e cujo volume interior seja **um centímetro cúbico**. Se enchermos esta caixinha com **água destilada**, à temperatura de **quatro graus centígrados**, e sob pressão atmosférica normal, teremos dentro da caixinha uma quantidade de água, cuja **massa é sensivelmente igual a um grama**.

(*) *Lições de Aritmética*, de Julio Tannery, 9.ª edição revista, página 365.

Portanto, supondo a água nas condições acima indicadas, podemos admitir, na vida prática, as relações seguintes, bastante aproximadas:

1cm³ de água pesa 1 grama.

1dm³ de água pesa 1 000 gramas. (1kg)

1m³ de água pesa 1 000 000 gramas. (1 000kg)

Definições. O quilograma é a massa do protótipo internacional do quilograma de platina iridiada que foi sancionado pela 1.ª Conferência Geral de Pesos e Medidas, e que se acha depositado na Repartição Internacional de Pesos e Medidas. O grama é a milésima parte do protótipo internacional do quilograma. (Euclides Roxo, *Unidades e Medidas*)

Tudo o que dissemos em relação ao metro se aplica, sem restrições, às medidas de massa. É bastante substituir o quadro A pelo quadro L, o quadro B pelo quadro M, e a palavra *comprimento* pela palavra *massa*.

No comércio, o grama é unidade de massa pouco prática, por ser muito pequena. Toma-se como unidade o quilograma. O *quilograma* tem dois múltiplos: o quintal métrico e a tonelada métrica.

Um quintal métrico tem 100 quilogramas.

Uma tonelada métrica tem 1 000 quilogramas.

Entre os submúltiplos do grama temos também o *quilate* que pesa 0,2 do grama.

Exercícios orais

Reduzir as massas que se seguem à unidade indicada entre parênteses.

- | | | | |
|----------------------------------|------------------|------------------------------------|---------------------|
| 1. 8g (dg) | 8. 9,2g (cg) | 15. 2 345cg (g) | 22. 8,6kg (g) |
| 2. 8,4g (dg) | 9. 6,24g (mg) | 16. 4,7dag (dg) | 23. 3,76kg (dag) |
| 3. 0,36g (cg) | 10. 3,8g (cg) | 17. 378,9g (dag) | 24. 3,48kg (hg) |
| 4. 4,29g (mg) | 11. 348cg (g) | 18. 23,57hg (g) | 25. 2 796,5dag (kg) |
| 5. 0,57g (cg) | 12. 4 937mg (g) | 19. 3 785,6g (hg) | 26. 84 597g (hg) |
| 6. 7,3g (mg) | 13. 4283,9dg (g) | 20. 76,8g (cg) | 27. 12,9dag (cg) |
| 7. 0,2g (mg) | 14. 72,6cg (g) | 21. 3kg (g) | 28. 632hg (g) |
| 29. 8 quintais métricos (kg) | | 37. 4 268kg (quintais métricos) | |
| 30. 7 quintais métricos (kg) | | 38. 3 910 kg (quintais métricos) | |
| 31. 9 toneladas métricas (kg) | | 39. 37 580hg (quintais métricos) | |
| 32. 6 toneladas métricas (kg) | | 40. 345,7kg (quintais métricos) | |
| 33. 5 quintais métricos (dag) | | 41. 389 370kg (toneladas métricas) | |
| 34. 3,7 quintais métricos (kg) | | 42. 647 000kg (toneladas métricas) | |
| 35. 3,42 toneladas métricas (kg) | | 43. 317 000kg (quintais métricos) | |
| 36. 3 740kg (quintais métricos) | | 44. 7 261,84kg (quintais métricos) | |
| | | 45. 389 370kg a quintais métricos) | |

Dizer qual é a massa dos seguintes volumes de água:

46. 17cm ³	49. 18,46dm ³	52. 0,259m ³
47. 3,8dm ³	50. 3,7m ³	53. 3,47cm ³
48. 0,4dm ³	51. 0,046m ³	54. 4,083cm ³

Calcular o volume das seguintes massas de água:

55. 7,8g	58. 7,26hg	62. 0,38dg
56. 37g	59. 5,37hg	63. 4,9cg
57. 8,9dag	60. 0,29dag	64. 6,47dg
	61. 7,236kg	

25. Os corpos e sua densidade. Um dm³ de água ou um litro de água pura, na temperatura de quatro graus centígrados, pesa 1kg. Entretanto, um litro de leite pesa 1,030kg; um litro de azeite pesa 0,910kg; um litro de ácido sulfúrico pesa 1,840kg; um litro de mercúrio pesa 13,600kg; um dm³ de platina pesa 22,060kg; um dm³ de ouro pesa 19,260kg; etc.. (*) Portanto, volumes iguais de dois corpos diferentes não têm a mesma massa; 4 litros de leite pesam mais do que 4 litros de azeite; 7dm³ de ouro pesam menos do que 7dm³ de platina; etc.. Diz-se, então, em Física, que os corpos não têm a mesma densidade. *Densidade (relativa) de um corpo é o número que exprime quantas vezes a massa deste corpo contém a massa de um igual volume de água destilada, à temperatura de 4 graus centígrados, isenta de ar e sob pressão normal.*

CORPO	DENSIDADE	MASSA
Platina	22,06	1 dm ³ pesa 22,060kg
Ouro	19,26	1 dm ³ pesa 19,260kg
Prata	10,47	1 dm ³ pesa 10,470kg
Cobre	8,85	1 dm ³ pesa 8,850kg
Ferro	7,78	1 dm ³ pesa 7,780kg
Sal	2,21	1 dm ³ pesa 2,210kg
Cortiça	0,24	1 dm ³ pesa 0,240kg
Mercúrio	13,60	1 dm ³ ou 1 litro pesa 13,600kg
Leite	1,03	1 dm ³ ou 1 litro pesa 1,030kg
Vinho	0,993	1 dm ³ ou 1 litro pesa 0,993kg
Azeite	0,91	1 dm ³ ou 1 litro pesa 0,910kg
Benzina	0,90	1 dm ³ ou 1 litro pesa 0,900kg
Éter	0,73	1 dm ³ ou 1 litro pesa 0,730kg

(*) Esses números são aproximados.

Conhecendo-se o volume de um corpo e a sua densidade, é muito simples calcular a massa deste corpo. Por exemplo, qual é a massa de 7dm³ de platina? A densidade da platina é 22,06. Portanto, se 1dm³ de água pesa 1kg, 1dm³ de platina pesará 22,06kg; logo, 7dm³ pesarão 22,06kg × 7; isto é, 154,42kg.

Podemos, pois, estabelecer que:

$$\text{volume (em dm}^3\text{)} \times \text{densidade} = \text{massa (em kg)}$$

$$\text{volume (em cm}^3\text{)} \times \text{densidade} = \text{massa (em gramas)}$$

Conhecendo-se a massa de um corpo e a sua densidade, é muito simples calcular o volume deste corpo. Por exemplo, qual é o volume de 3,600kg de cortiça? A densidade da cortiça é 0,24. Portanto, 1dm³ de cortiça pesa 0,240kg. Se 1dm³ de cortiça pesa 0,240kg, qual é o volume de 3,600kg de cortiça? É bastante dividir 3,600kg por 0,240kg. Resulta 15dm³ que é o volume pedido.

Podemos, pois, estabelecer que:

$$\frac{\text{massa (em kg)}}{\text{densidade}} = \text{volume (em dm}^3\text{)}$$

$$\frac{\text{massa (em gramas)}}{\text{densidade}} = \text{volume (em cm}^3\text{)}$$

Exercícios. Série VI

1. Calcular a massa de 37dm³ de platina.
2. Calcular a massa de 47,8dal de vinho.
3. Calcular a massa de 7,29hl de azeite.
4. Calcular a massa de 15,48dm³ de ouro.
5. Calcular a massa de 8,24l de éter.
6. Calcular o volume de 300kg de prata.
7. Calcular o volume de 250kg de cortiça.
8. Calcular a massa de 3,28hl de leite.
9. Calcular a massa de 8m³ de benzina.
10. Calcular a massa de 24,87m³ de sal.
11. Um bloco de pedra com 36dm³ pesa 120kg. Qual é a densidade desta pedra?
12. Uma viga de madeira com 18,47dm³ pesa 11,45kg. Qual é a densidade desta madeira?

Exercícios. Série VII

Problemas sobre medidas de massa

1. Um tanque mede 4,8m × 2,7m × 1,5m. Calcular em quintais métricos o peso da água que ele pode conter.

2. Calcular em kg o peso de um cubo de pedra cuja aresta mede 0,84m, sendo a densidade da pedra igual a 7,5.
3. Qual é o peso de uma viga de peroba de $2,3\text{m} \times 18\text{cm} \times 0,07\text{m}$, sendo a densidade da peroba igual a 1,4?
4. Um cubo de cortiça tem uma aresta de 1,4m. Sendo a densidade da cortiça igual a 0,24 calcular o valor deste cubo a Cr\$ 0,30 o quilograma.
5. Custando o azeite Cr\$ 4,50 o quilograma, quanto vale o azeite contido em uma lata de $66\text{cm} \times 34\text{cm} \times 34\text{cm}$? A densidade do azeite é de 0,91.
6. Quanto vale um bloco retangular de ouro, de $14\text{cm} \times 8\text{cm} \times 5\text{cm}$ a Cr\$ 3,50 o grama? A densidade do ouro é 19,26.
7. Um hl de carvão pesa 83,500kg. Custando cada hl, Cr\$ 7,20, quanto custarão 23 toneladas métricas?
8. Calcular em quintais métricos o peso da água contida em um reservatório de $8,3\text{m} \times 64\text{dm} \times 32\text{dm}$, faltando ainda 0,74m para que o reservatório fique completamente cheio.
9. Calcular o valor de 45 latas de benzina, cada uma das quais mede $0,48\text{m} \times 0,35\text{m} \times 0,35\text{m}$, custando a benzina Cr\$ 1,10 o kg. A densidade da benzina é 0,90.
10. Um litro de ar pesa 1,293g. Calcular o peso do ar contido em um salão de $24\text{m} \times 18\text{m} \times 7,4\text{m}$.
11. Um milharal mede $485\text{m} \times 348\text{m}$. Calcular o valor de um colheita, sabendo que cada hectare produz 45hl de milho, o qual é vendido em sacas de 60kg a Cr\$ 42,00 cada uma. Cada saca contém 90 litros.
12. Um reservatório de gasolina mede $8,5\text{m} \times 6,4\text{m} \times 2,9\text{m}$. Vende-se esta gasolina em latas de $0,52\text{m} \times 0,27\text{m} \times 0,27\text{m}$, a Cr\$ 48,00 a lata. Qual é o valor de toda a gasolina?
13. Um quintal métrico de trigo produz 83kg de farinha. Um kg de farinha produz 1,350kg de pão. Calcular a quantidade de pão que se pode fazer com 250hl de trigo, supondo que um hl pese 72kg.
14. Tenho duas pipas com o mesmo peso e a mesma capacidade. Encho uma delas com azeite e a outra com água. E verifico que a pipa cheia de água pesa 27kg mais do que a pipa cheia de azeite. Qual é a capacidade de cada uma das pipas? A densidade do azeite é 0,91.
15. A densidade do leite é 1,03. Um sitiante tem 25 vacas, cada uma das quais dá, em média, por dia, 9 litros de leite. O leite produz $\frac{1}{10}$ de seu peso em creme, e o creme produz $\frac{4}{7}$ do seu peso em manteiga. Qual é em kg a quantidade de manteiga que o sitiante pode fabricar em um mês de 30 dias?
16. O café fino perde na torração 17% de seu peso. Comprei 450kg de café a Cr\$ 2,40; torrei-o, e depois vendi o quilo de pó a Cr\$ 3,70. Quanto ganhei?
17. O fundo de um tanque mede $3,8\text{m} \times 2,7\text{m}$. Despejam-se neste tanque 5 400l de água. Qual será a altura da água dentro do tanque?
18. O fundo de um tanque mede $4\text{m} \times 3\text{m}$. Despejam-se neste tanque 11 toneladas métricas de azeite. Qual será a altura do azeite dentro do tanque? A densidade do azeite é 0,91.
19. Põe-se um pedaço de ferro dentro de uma lata com água. A lata tem uma base de 0,36m por 0,36m e observa-se que o pedaço de ferro pôsto

dentro da lata, faz com que o nível da água suba cerca de 0,05m. Qual é o peso do pedaço de ferro? A densidade do ferro é 7,78.

20. Um litro de água do mar pesa 1,025kg. Uma tonelada de água do mar contém 35kg de sal grosso. O sal grosso, depois de purificado, pede 20% de seu peso. Quantos metros cúbicos de água do mar são necessários para obter 400kg de sal fino?

21. Uma pipa de vinho pesa 355kg. A mesma pipa cheia de água pesa 372kg. Calcular a capacidade da pipa, sendo a densidade do vinho igual a 0,95.

22. Um reservatório com a forma de um bloco retangular tem uma superfície (face superior) de 65m^2 . Está cheio de azeite avaliado em Cr\$ 408 135,00. Um hectolitro de azeite pesa 91kg e custa Cr\$ 300,00. Pedese a profundidade do reservatório.

26. O movimento uniforme. Suponhamos que um trem caminha percorrendo invariavelmente 1km por minuto ou 60km por hora. Diremos que *este trem está animado de um movimento uniforme*. Se um automóvel se deslocar percorrendo invariavelmente 30km por hora ou 500m por minuto, diremos ainda que *este automóvel está animado de um movimento uniforme*.

Em Matemática, dá-se o nome de **móvel** a qualquer corpo em movimento; um trem que se desloca de um ponto para outro é um *móvel*; um automóvel, um carro, um ciclista, uma senhorinha que passeia na Avenida, um professor que caminha por entre as carteiras escolares, tudo é *móvel*.

Um móvel está animado de um movimento uniforme, quando ele percorre espaços iguais em tempos iguais.

Ou, ainda,

O movimento de um móvel é uniforme quando este móvel percorre espaços iguais em tempos iguais.

Espaço é o caminho percorrido por um móvel qualquer. Seria preferível dizer *trajetória* em lugar de *espaço*, porque o espaço é o meio onde estão situados todos os corpos. Mas o uso consagrou a palavra *espaço* para designar o caminho percorrido por um móvel. A unidade de espaço é uma unidade qualquer de comprimento.

Se um ciclista percorre 40km em 80 minutos, com movimento uniforme, diremos que a sua *velocidade* é de *500 metros por minuto*, porque $40\text{km} \div 80\text{min} = 40\,000\text{m} \div 80\text{min} = 500\text{m}$. Se um automóvel percorre 220km em 5 horas e meia, com movimento uniforme, diremos que a sua *velocidade* é de 40km por hora, porque $220\text{km} \div 5,5\text{horas} = 40\text{km}$. De um modo geral podemos dizer que:

A **velocidade** de um móvel que se desloca com movimento uniforme é o espaço por êle percorrido durante a unidade de tempo.

Exercícios em classe

Resolver, no quadro-negro, os seguintes problemas: (*)

1. Um menino caminha com a velocidade de 54,6m por minuto. Qual é o espaço por êle percorrido em 1 hora e 24 minutos?
2. Um automóvel percorreu 236km em 6 horas e $\frac{3}{4}$. Qual é a velocidade d'êste automóvel?
3. Qual é o tempo necessário a um ciclista para percorrer 48km, com a velocidade de 30km por hora?
4. Um trem caminha com a velocidade de 42,5km por hora. Qual é o espaço por êle percorrido em 7 horas e 40 minutos?
5. Um navio percorreu 342km em 9 horas e 25 minutos. Qual foi a velocidade por êle desenvolvida?
6. Em quanto tempo um automóvel, correndo com a velocidade de 40km por hora, percorre uma estrada de 615km?

Dos problemas que acabámos de resolver, podemos concluir que:

$$\text{espaço} = \text{velocidade} \times \text{tempo}$$

$$\text{velocidade} = \frac{\text{espaço}}{\text{tempo}} \quad \text{tempo} = \frac{\text{espaço}}{\text{velocidade}}$$

São estas as três fórmulas que ligam o espaço, a velocidade e o tempo, quando o movimento é uniforme.

A velocidade é o *quociente completo* de dois números: espaço e tempo.

O tempo é o *quociente completo* de dois números: espaço e velocidade.

A unidade legal de velocidade é o **metro por segundo**. É a velocidade de um móvel que, animado de um movimento retilíneo e uniforme, percorre uma distância de um metro durante um segundo. (Decreto-Lei n.º 4 257 de 6-6-1939) Seu símbolo é $\frac{m}{s}$.

Outras unidades de velocidade podem ser adotadas como, por exemplo, o metro por minuto $\left(\frac{m}{min}\right)$, o centímetro por segundo $\left(\frac{cm}{s}\right)$, o quilômetro por hora $\left(\frac{km}{h}\right)$, etc..

(*) Nos exercícios que se seguem suporemos sempre que o movimento é uniforme.

No mar, a unidade adotada é o nó, equivalente a uma milha náutica por hora,

$$\text{Uma milha náutica} = 1853,25m$$

$$\text{Um nó} = 0,514 \left(\frac{m}{s}\right)$$

Quando dizemos que um navio desenvolve 24 nós, queremos dizer que êste navio percorre 24 milhas náuticas por hora.

Para termos a velocidade d'êste navio em metros por segundo, é bastante dividir 1852m por 3 600; acharemos 0,514m por segundo.

A conversão das unidades de velocidade é um problema muito simples.

Exercícios. Série VIII

O movimento uniforme

1. Dois automóveis partem às 6 horas da manhã, de duas cidades cuja distância é de 320km, e caminham um para o outro. A velocidade do primeiro é de 35km por hora e a do segundo é de 25km por hora. A que horas se encontrarão e a que distância dos pontos de partida?

Sugestão. Ao cabo de uma hora, a distância que separa os dois automóveis diminui de 35km + 25km.

2. Das extremidades de uma avenida que mede 1 496m partem, ao mesmo tempo, dois meninos que desejam encontrar-se. O primeiro caminha 48m por minuto, e o segundo apenas 20. A que distância das extremidades da avenida se encontrarão? Se êles partirem às 7 horas e 12 minutos, a que horas se encontrarão?

3. À margem de um rio estão situadas duas cidades, A e B, cuja distância ao longo d'êste mesmo rio é de 136km. Às 8 horas da manhã partem dessas cidades dois barcos, um tripulado por 6 moços, e o outro por 5. O barco que parte da cidade A, tem uma velocidade de 15km por hora, e o que parte da cidade B tem uma velocidade de 18km por hora. A que horas se encontrarão e a que distância dos pontos de partida?

4. A distância entre duas cidades é de 600km. Às 6 horas da manhã parte da cidade A um automóvel com a velocidade de 48km por hora e às 7 horas e meia da manhã parte da cidade B um automóvel com a velocidade de 40km por hora. Um se dirige ao encontro do outro. A que horas se encontrarão, e a que distância dos pontos de partida?

Sugestão. Às 7 horas e meia da manhã, o automóvel A já percorreu 72km. Portanto, a essa hora, a distância que separa os dois automóveis é 600km - 72km, isto é, 528km.

5. Resolver o segundo problema, supondo que o primeiro menino partiu às 7 horas e 20 minutos, e o segundo às 7 horas e 30 minutos.

6. Resolver o terceiro problema, supondo que o barco A partiu às 8 horas da manhã, e o barco B às 9 horas.

7. Às 6 horas da manhã partiu de São Paulo, com destino ao Rio de Janeiro, um automóvel A, com a velocidade de 40km por hora. Às 9 horas da manhã partiu de São Paulo, também com destino ao Rio de Janeiro, um segundo automóvel B, cuja velocidade é de 65km por hora. Pergunta-se a que horas o segundo automóvel alcançará o primeiro, e a que distância de São Paulo.

Sugestão. Quando o automóvel B partiu, o automóvel A estava a 3×40 km de distância da cidade de S. Paulo. Portanto, às 9 horas da manhã, a distância que separava os dois carros era de 120km. E, a partir dessa hora, a mesma distância começou a diminuir de 65km - 40km por hora.

8. Um ciclista, cuja velocidade é de 13,5km por hora, partiu do Rio de Janeiro, às 9 horas e meia da manhã. Ao meio dia, um segundo ciclista saiu em perseguição do primeiro, com a velocidade de 18km por hora. A que horas, o segundo ciclista alcançou o primeiro?

9. Um ciclista partiu de São Paulo, às 8 horas da manhã, com uma velocidade de 20km por hora. Ao meio-dia, um automóvel partiu da mesma cidade, em perseguição do ciclista, com a velocidade de 45km por hora. A que horas o ciclista foi alcançado e a que distância de São Paulo?

10. Um ciclista fez um certo trajeto com a velocidade de 900 metros cada três minutos; entretanto, se ele pudesse correr com a velocidade de 12km, em cada meia hora, teria chegado ao fim da viagem 35 minutos mais cedo. Qual foi o caminho percorrido pelo ciclista?

Sugestão. $\frac{1}{300}$ do caminho - $\frac{1}{400}$ do caminho = 35.

27. Unidades para medir ângulos. As unidades legais para medir os ângulos planos são três: o *ângulo reto*, o *grau* e o *radiano*.

O ângulo reto, cujo símbolo é r , já foi definido. (E.M.P.V. §§20 e 21)

O ângulo reto não tem múltiplos. Seus submúltiplos decimais se obtêm dividindo a unidade em dez, cem, mil, etc., partes iguais; portanto, estes submúltiplos são os décimos, os centésimos, os milésimos, etc., da unidade.

Existe apenas um submúltiplo decimal do ângulo reto que tem nome especial; é o **grado**. O grado é a *centésima parte do ângulo reto*. É representado pelos símbolos *gr* ou *g*. Este último símbolo será usado quando não possa haver dúvida sobre a sua significação. Assim, 36gr significa 36 grados.

Os submúltiplos do grado são o *decigrado* (dgr), o *centigrado* (cgr) e o *miligrado* (mgr). (Decreto n.º 4 257 de 6-6-1 939. Portanto, desaparecem os nomes minutos centesimais e segundos centesimais.)

Do exposto resulta que, se um ângulo mede 3,765 43 retos, este mesmo ângulo mede

3 retos, 76 grados, 5 decigrados, 4 centigrados e 3 miligrados.

Portanto, converter grados em retos, e viceversa, é um problema que não oferece dificuldade. Exemplos:

3 retos = 300 grados	0,533 retos = 53,3 grados
47,8 grados = 0,478 retos	2,1496 retos = 214,96 grados
0,562 grados = 0,00562 retos	7,33dgr = 733 mgr

Já conhecemos também o grau. (E.M.P.V. §22) É um nonagésimo do ângulo reto. Seus submúltiplos são o minuto e o segundo. Um ângulo medido em graus, minutos e segundos constitui um número complexo. (E.M.P.V. cap. VII)

Um ângulo também pode ser medido em graus e frações decimais do grau. Mas, para estes submúltiplos decimais, não há nomes particulares.

Exercício. Um ângulo mede $37^{\circ} 25' 48''$. Converter esta medida em graus e fração decimal do grau.

É bastante converter $25'$ e $48''$ em fração decimal do grau. Em primeiro lugar convertemos $25'$ e $48''$ em fração ordinária do grau.

$$25'48'' = \frac{25}{60} + \frac{48}{3\ 600} = \frac{5}{12} + \frac{1}{75} = \frac{129}{300} \text{ do grau}$$

Depois convertemos $\frac{129}{300}$ em fração decimal.

$$\frac{129}{300} \text{ do grau} = \frac{43}{100} \text{ do grau} = 0,43 \text{ do grau}$$

Logo, $37^{\circ} 25' 48'' = 37,43$ graus.

Observação. Sobre o radiano, nada podemos dizer por enquanto.

Exercícios. Série IX

Problemas sobre graus e grados

Um ângulo reto tem 90 graus ou 100 grados; podemos, pois, estabelecer as igualdades seguintes:

90 graus = 100 grados	100 grados = 90 graus
1 grau = $\frac{100}{90}$ do grado	1 grado = $\frac{90}{100}$ do grau
1 grau = $\frac{10}{9}$ do grado	1 grado = $\frac{9}{10}$ do grau

Destas igualdades se deduz a seguinte

Regra. Para converter graus em grados, multiplica-se o número de graus por $\frac{10}{9}$; para converter grados em graus, multiplica-se o número de grados por $\frac{9}{10}$.

Observação. Se o ângulo é dado em graus, minutos e segundos, convém convertê-lo em fração decimal do grau.

1. Converter 37° em grados.

$$\text{Solução. } 37 \times \frac{10}{9} = \frac{370}{9} = 41,1111$$

$$\text{Resposta. } 37^\circ = 41,1111 \text{ grados.}$$

2. Converter 54° 24' em grados.

$$\begin{array}{l} \text{Solução: } 54^\circ + 24' = \\ 54^\circ + \frac{24}{60} = \\ 54^\circ + \frac{4}{10} = 54^\circ,4 \end{array} \quad \left| \quad 54,4 \times \frac{10}{9} = \frac{544}{9} = 60,4444 \right.$$

$$\text{Resposta. } 60,4444 \text{ grados.}$$

3. Converter 72° 24' 36'' em grados.

$$\begin{array}{l} \text{Solução. } 72^\circ 24' 36'' = \\ 72^\circ + \frac{24}{60} + \frac{36}{3600} = 72,41 \times \frac{10}{9} = \frac{724,1}{9} \\ 72^\circ + \frac{2}{5} + \frac{1}{100} = \quad \quad \quad = 80,45555 \\ 72^\circ + \frac{41}{100} = 72^\circ,41 \end{array} \quad \left| \quad \text{Resposta. } 80,4555 \text{ grados} \right.$$

4. Converter 52,374 grados em graus.

$$\text{Solução. } 52,374 \times \frac{9}{10} = 47^\circ,1366$$

$$\frac{1366}{10000} \text{ de um grau} = \frac{1366}{10000} \text{ de 60 minutos} = 8' \frac{196}{1000}$$

$$\frac{196}{1000} \text{ de um minuto} = \frac{196}{1000} \text{ de 60 segundos} = 11'' \frac{176}{1000}$$

$$\text{Resposta. } 52,374 \text{ grados} = 47^\circ 8' 11'',176.$$

5. Converter 44°,36 em grados.

6. Converter 62° 25',8 em grados.

7. Converter 75° 22' 45'' em grados.

8. Converter 48,75 grados em graus.

9. Converter 85,364 grados em graus.

10. Converter 33,4455 grados em graus.

Observação. O comprimento de uma circunferência é dado pela fórmula $l = 2\pi r$, na qual l representa o comprimento da circunferência, r o raio e π o número 3,14. (E.M.P.V. §28)

11. O raio de uma circunferência mede 12,5m. Quanto mede o arco de um grau, desta circunferência?

12. Calcular o comprimento do arco de um grado, em uma circunferência cujo raio mede 36,5m.

13. O raio de uma circunferência mede 3,6m. Calcular o comprimento de um arco da mesma, com 54° 24'.

14. Qual é o comprimento de um arco com 48,36 graus, em uma circunferência cujo raio mede 4,5m?

15. O raio de uma circunferência mede 5,2m. Calcular o comprimento de um arco da mesma, com 42,35 graus.

16. Qual é o comprimento de um arco com 33,6425 graus, em uma circunferência cujo raio mede 7,5m?

17. Dois ângulos de um triângulo medem respectivamente $47^{\circ} 23' 28''$ e $84^{\circ} 45' 57''$. Quanto mede o terceiro?

18. Dois ângulos de um triângulo medem respectivamente 56,85 graus e 74,5543 graus. Quanto mede o terceiro?

19. Em um triângulo retângulo, um dos ângulos agudos mede $42^{\circ},6$. Calcular o outro, em graus.

20. Calcular os dois ângulos agudos de um triângulo retângulo, sabendo que sua diferença é $17^{\circ} 22' 44''$.

23. Unidades de tempo. A unidade legal de tempo é o *segundo*, isto é, um intervalo de tempo igual a $\frac{1}{86\,400}$ do dia solar médio. (*)

Os múltiplos do segundo são o minuto, a hora e o dia.

um dia = 24 *horas* = 1 440 *minutos* = 86 400 *segundos*

uma hora = 60 *minutos* = 3 600 *segundos*

um minuto = 60 *segundos*.

Os símbolos das unidades legais de tempo são: *d* (dia); *h* (hora); *m* ou *min* (minuto); *s* ou *seg* (segundo).

As medidas de tempo são números complexos.

Exercícios. Série X

Problemas sobre unidades de tempo

1. Calcular, em fração decimal do dia, a duração de um eclipse que começou às 10h 15m 38s e terminou às 11h 42m 54s.

2. Converter 3h 15m 20s em fração decimal do dia, com erro inferior a 0,001.

3. Converter 4h 22m 36s em fração decimal da hora, com erro inferior a 0,001.

4. Converter 3,24 dias em número complexo.

5. Converter 0,414 dias em número complexo.

6. Uma torneira despeja 11 litros de água por segundo. Quantos litros despejará em 12h 25m 46s?

7. Um ciclista percorre 15km em 24m 36s. Calcular a sua velocidade em quilômetros por hora.

(*) O dia solar médio será definido na aula de Geografia.

8. Um automóvel percorre 42km em 54m 20s. Calcular a sua velocidade em metros por segundo.

9. Um homem dá 110 passos por minuto; cada passo mede 0,72m. Em quanto tempo percorrerá êle uma distância de 23,420km?

10. Se um ciclista percorre 5,640km em 2min e 25seg, em quanto tempo percorrerá 48,360km?

11. A Terra faz uma volta completa sobre si mesma, em 24 horas. Calcular, em metros por segundo, a velocidade de um ponto situado no equador terrestre.

12. Um avião voa a favor do vento com uma velocidade de 346km a hora e contra o vento com uma velocidade de 248km a hora. Calcular a velocidade do avião em km por hora, e a do vento em metros por segundo.

Potências e Raízes

29. Definições. Potência de um número é um produto de fatores iguais a este número. (*)

Segunda potência de um número é um produto de dois fatores iguais a este número. A segunda potência de 12 é 12×12 , isto é, 144. A segunda potência de um número é também chamada **quadrado** deste número. E a razão é simples; se o lado de um quadrado mede, por exemplo, 15 metros, a área deste mesmo quadrado é 15×15 , isto é, a **segunda potência** de 15.

Terceira potência de um número é um produto de três fatores iguais a este número. A terceira potência de 8 é $8 \times 8 \times 8$, isto é, 512. Já sabemos que, se a **aresta** de um cubo mede, por exemplo, 5, o **volume** deste cubo é $5 \times 5 \times 5$. Eis por que a **terceira potência** de um número é chamada também **cubo** deste número.

Observação. A primeira potência de um número já foi definida. (E. M.P.V. §86)

Exercícios em classe

1. Calcular o quadrado de 315.
2. Representar graficamente o quadrado de 8.
3. Representar graficamente o quadrado de 9.
4. Desenhar um quadrado cujo lado meça 12cm. Em relação a este quadrado, o que representa o produto 12×4 ? E o produto 12×12 ?
5. Desenhar um retângulo com 8cm de comprimento e 5cm de largura. Em relação a esta figura, o que representa a expressão $8 \times 2 + 5 \times 2$? E a expressão 8×5 ? E a expressão $(8 + 5) \times 2$?
6. Calcular o cubo de 22.
7. Representar graficamente o cubo de 4.
8. Desenhar um cubo cuja aresta meça 5cm. Em relação a este cubo, o que representa o produto $5 \times 5 \times 5$? E o produto 5×5 ? E o produto $5 \times 5 \times 6$?

(*) E' indispensável recordar as noções dadas anteriormente, relativas a este assunto (E.M.P.V. §§86 e 87) e repetir os exercícios que acompanham estas mesmas noções.

30. Quadrado da soma de dois números. Teorema. O quadrado da soma de dois números é igual ao quadrado do primeiro, mais duas vezes o produto do primeiro pelo segundo, mais o quadrado do segundo. Por exemplo:

$$(5 + 3)^2 = 5^2 + 2 \times 5 \times 3 + 3^2 = 25 + 30 + 9 = 64$$

$$(6 + 4)^2 = 6^2 + 2 \times 6 \times 4 + 4^2 = 36 + 48 + 16 = 100$$

$$(7 + 5)^2 = 7^2 + 2 \times 7 \times 5 + 5^2 = 49 + 70 + 25 = 144$$

Vamos demonstrar este teorema, graficamente. Traçemos um quadrado ABCD, cujo lado meça 8cm. Marquemos nos lados AB e AD e a partir do vértice A, dois segmentos AE e AM com 5cm de comprimento. Em seguida, pelos pontos E e M, tracemos os segmentos EF e MN, paralelos aos lados do quadrado. Examinemos agora a nossa figura. Temos um quadrado ABCD, cujo lado mede 5cm + 3cm. Então a área deste quadrado é $(5 + 3) \times (5 + 3)$, isto é, $(5 + 3)^2$.

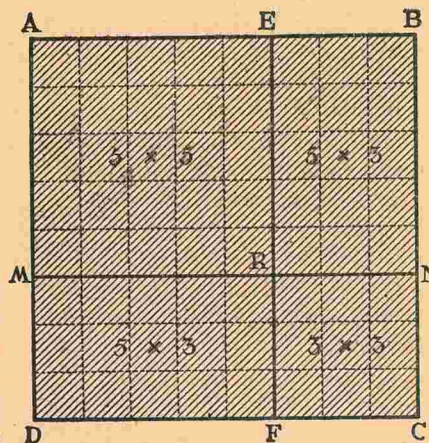


Fig. 6

E, de acôrdo com a figura, teremos:

$$(5 + 3)^2 = 5 \times 5 + 2 \times 5 \times 3 + 3 \times 3 \therefore$$

$$(5 + 3)^2 = 5^2 + 2 \times 5 \times 3 + 3^2$$

Variando as dimensões do quadrado, assim como as dos segmentos AE e AM, chegaremos sempre ao mesmo resultado. Podemos estabelecer, pois, de um modo geral, que:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (*)$$

(*) A expressão $2ab$ significa $2 \times a \times b$. Operando com letras, em lugar de $a \times b$ podemos escrever ab ; em lugar de $a \times b \times c$, abc ; em lugar de $a \times 3 \times y$, $3xy$.

Exercícios em classe

1. Mostrar gráficamente que $(6 + 4)^2 = 6^2 + 2 \times 6 \times 4 + 4^2$.
2. Mostrar gráficamente que $(7 + 5)^2 = 7^2 + 2 \times 7 \times 5 + 5^2$.
3. Mostrar gráficamente que $(8 + 3)^2 = 8^2 + 2 \times 8 \times 3 + 3^2$.
4. Calcular com o auxílio do teorema acima o quadrado de 23. Os estudantes devem decompor o número dado em dezenas e unidades e escrever: $23^2 = (20 + 3)^2$.
5. Idem, em relação ao número 35.
6. Idem, em relação ao número 43.
7. Idem, em relação ao número 57.
8. Idem, em relação ao número 64.

31. Quadrado da diferença de dois números. Teorema.
O quadrado da diferença de dois números é igual ao quadrado do primeiro, menos duas vezes o produto do primeiro pelo segundo, mais o quadrado do segundo. Por exemplo:

$$\begin{aligned}(8 - 5)^2 &= 8^2 - 2 \times 8 \times 5 + 5^2 = 64 - 80 + 25 = 9 \\ (10 - 7)^2 &= 10^2 - 2 \times 10 \times 7 + 7^2 = 100 - 140 + 49 = 9 \\ (9 - 5)^2 &= 9^2 - 2 \times 9 \times 5 + 5^2 = 81 - 90 + 25 = 16\end{aligned}$$

Vamos demonstrar este teorema, gráficamente:

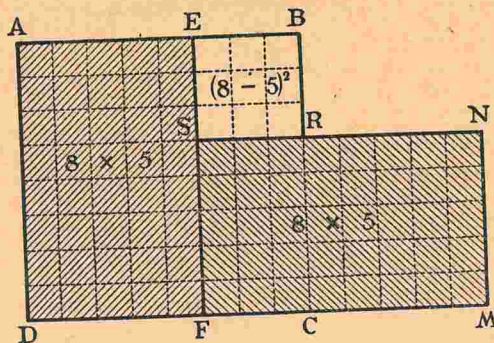


Fig. 7

Tracemos dois quadrados ABCD e CMNR, de acordo com a figura. Suponhamos que AB mede 8 cm e CM, 5 cm. Em seguida, tracemos o segmento EF paralelo à AD, e prolonguemos

NR até o ponto S. A área da figura total é $8^2 + 5^2$. A área do quadrado EBRS é $(8 - 5)^2$. E a figura nos diz que a área do quadrado EBRS é igual à área da figura total, menos a área dos retângulos ADFE e FMNS, cada um dos quais mede 8 centímetros de comprimento por 5 centímetros de largura. Portanto,

$$\begin{aligned}(8 - 5)^2 &= 8^2 + 5^2 - 2 \times 8 \times 5 \\ (8 - 5)^2 &= 8^2 - 2 \times 8 \times 5 + 5^2\end{aligned}$$

Variando as dimensões da figura chegaremos sempre ao mesmo resultado. Podemos estabelecer, pois, de um modo geral, que:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Exercícios em classe

1. Mostrar gráficamente que $(10 - 7)^2 = 10^2 - 2 \times 10 \times 7 + 7^2$.
2. Mostrar gráficamente que $(9 - 5)^2 = 9^2 - 2 \times 9 \times 5 + 5^2$.
3. Mostrar gráficamente que $(12 - 7)^2 = 12^2 - 2 \times 12 \times 7 + 7^2$.
4. Com o auxílio do teorema deste parágrafo, calcular 37^2 . (Escrever 40 - 3 em lugar de 37.)
5. Idem, em relação ao número 28.
6. Idem, em relação ao número 46.
7. Idem, em relação ao número 57.
8. Idem, em relação ao número 78.

32. Cálculo mental. I. Com o teorema do §30 podemos verificar que o quadrado de um número no qual o algarismo das unidades é 5, é igual ao quadrado das dezenas, mais 10 vezes as dezenas, mais 25. Por exemplo:

$$\begin{aligned}45^2 &= (40 + 5)^2 = 40^2 + 2 \times 40 \times 5 + 5^2 \\ &= 40^2 + 10 \times 40 + 5^2 \\ &= 1\,600 + 400 + 25 = 2\,025.\end{aligned}$$

Observemos que $1\,600 + 400 = 16 \times 100 + 4 \times 100$

Portanto, na prática, para elevar ao quadrado um número de dois algarismos, no qual o algarismo das unidades é 5, proce-

demos do seguinte modo: ao quadrado do algarismo das dezenas tomado em valor absoluto, somamos este mesmo algarismo, e à direita do produto escrevemos 25. Para calcular o quadrado de 65, diremos (ou pensaremos): $6 \times 6 + 6 = 42$; $65^2 = 4\ 225$.

Chegaremos ao mesmo resultado, multiplicando o algarismo das dezenas pelo algarismo imediatamente superior, e escrevendo 25 à direita do produto.

Com efeito,

$$45^2 = (40 + 5)^2 = 1\ 600 + 400 + 25$$

Observemos que

$$\begin{aligned} 1\ 600 + 400 &= 16 \times 100 + 4 \times 100 \\ &= 20 \times 100 = (4 \times 5) \times 100 \end{aligned}$$

$$\text{Exemplos} \left\{ \begin{array}{l} 15^2 \dots 1 \times 2 = 2 \dots 15^2 = 225 \\ 35^2 \dots 3 \times 4 = 12 \dots 35^2 = 1\ 225 \\ 55^2 \dots 5 \times 6 = 30 \dots 55^2 = 3\ 025 \\ 85^2 \dots 8 \times 9 = 72 \dots 85^2 = 7\ 225 \\ 105^2 \dots 10 \times 11 = 110 \dots 105^2 = 11\ 025 \end{array} \right.$$

II. O quadrado de um número de dois algarismos, no qual o algarismo das unidades é 9, também pode ser calculado mentalmente. Por exemplo,

$$\begin{aligned} 29^2 &= (30 - 1)^2 = 30^2 - 2 \times 30 \times 1 + 1^2 \quad (\S 31) \\ &= 900 - 60 + 1 \\ &= 840 + 1 = 841 \end{aligned}$$

Dêste exemplo se conclue que, para calcular o quadrado de 29, é bastante calcular o quadrado de 30, dêle diminuir o dôbro de 30 e somar uma unidade ao resultado.

$$\text{Exemplos} \left\{ \begin{array}{l} 19^2 = (20 - 1)^2 = 400 - 40 + 1 = 360 + 1 = 361 \\ 29^2 = (30 - 1)^2 = 900 - 60 + 1 = 840 + 1 = 841 \\ 39^2 = (40 - 1)^2 = 1\ 600 - 80 + 1 = 1\ 520 + 1 = 1\ 521 \\ 49^2 = (50 - 1)^2 = 2\ 500 - 100 + 1 = 2\ 400 + 1 = 2\ 401 \end{array} \right.$$

III. O quadrado de um número cujo algarismo das unidades é 1, é igual ao quadrado das dezenas, mais o dôbro das dezenas, mais um. Com efeito,

$$\begin{aligned} 41^2 &= (40 + 1)^2 = 40^2 + 2 \times 40 \times 1 + 1^2 \\ &= 1\ 600 + 80 + 1 = 1\ 681 \end{aligned}$$

$$\text{Exemplos} \left\{ \begin{array}{l} 11^2 = 100 + 20 + 1 = 121 \\ 21^2 = 400 + 40 + 1 = 441 \\ 31^2 = 900 + 60 + 1 = 961 \\ 51^2 = 2\ 500 + 100 + 1 = 2\ 601 \end{array} \right.$$

IV. Todas as potências de 1 são iguais a 1.

$$1^2 = 1 \times 1; \quad 1^3 = 1 \times 1 \times 1; \quad 1^4 = 1 \times 1 \times 1 \times 1; \text{ etc.}$$

V. Qualquer potência de 10 é igual à unidade, seguida de tantos zeros quantas são as unidades do expoente.

$$\begin{array}{l} 10^2 = 10 \times 10 = 100 \qquad 10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10\ 000 \\ 10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1\ 000 \qquad 10^5 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 100\ 000 \end{array}$$

33. **Diferença entre os quadrados de dois números inteiros consecutivos.** Dois números inteiros são consecutivos, quando sua diferença é a unidade. Assim, os números 5 e 6, 7 e 8, 11 e 12, etc., são consecutivos.

Teorema. A diferença entre os quadrados de dois números inteiros e consecutivos é igual ao dôbro do menor e mais um.

Sejam $n + 1$ e n dois números inteiros e consecutivos. Elevando-os ao quadrado, teremos:

$$\begin{aligned} (n+1)^2 &= n^2 + 2 \times n \times 1 + 1^2 = n^2 + 2n + 1 \\ n^2 &= \qquad \qquad \qquad = n^2 \end{aligned}$$

E os resultados nos mostram que a diferença entre os dois quadrados é realmente o dôbro do número menor, e mais um.

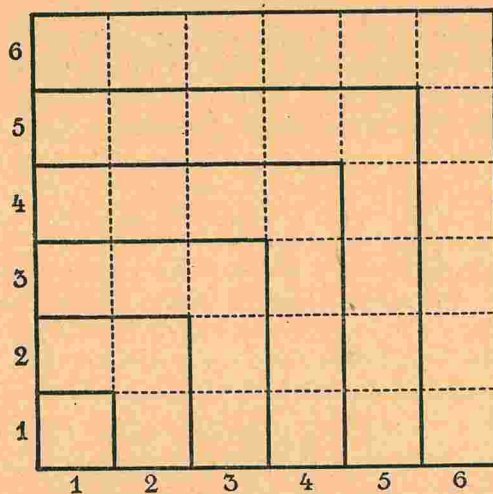


Fig. 8

O gráfico acima ilustra o teorema que acabámos de demonstrar. Com êste teorema podemos construir uma tabela de quadrados.

$10^2 = 100$	$20^2 =$
$11^2 = 100 + 20 + 1 = 121$	$21^2 =$
$12^2 = 121 + 22 + 1 = 144$	$22^2 =$
$13^2 = 144 + 24 + 1 = 169$	$23^2 =$
$14^2 = 169 + 26 + 1 = 196$	$24^2 =$
$15^2 = 196 + 28 + 1 = 225$	$25^2 =$
$16^2 = 225 + 30 + 1 = 256$	$26^2 =$
$17^2 = 256 + 32 + 1 = 289$	$27^2 =$
$18^2 = 289 + 34 + 1 = 324$	$28^2 =$
$19^2 = 324 + 36 + 1 = 361$	$29^2 =$
$20^2 = 361 + 38 + 1 = 400$	$30^2 =$

Observação. Os alunos deverão preencher o quadro acima.

Da figura 8 resulta mais uma conclusão interessante.

Se somarmos números ímpares consecutivos, a partir da unidade, a soma será sempre um quadrado.

Suponhamos que cada quadradinho da figura 8 representa uma unidade; teremos imediatamente:

$$\begin{array}{l} 1 + 3 = 4 = 2^2 \\ 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2 \\ 1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2 \\ 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36 = 6^2 \end{array} \right.$$

34. Raiz quadrada. Raiz quadrada de um número é um outro número que, elevado ao quadrado, reproduz o primeiro.

A raiz quadrada de 36 é 6, porque $6 \times 6 = 36$; a raiz quadrada de 81 é 9, porque $9 \times 9 = 81$; a raiz quadrada de 900 é 30, porque $30 \times 30 = 900$; a raiz quadrada de 1 681 é 41, porque $41 \times 41 = 1 681$.

Para indicar que a raiz quadrada de 1 681 é 41, escreveremos:

$$\sqrt{1\,681} = 41$$

Aparece, assim, em Aritmética, um sinal que ainda não conhecíamos, o sinal $\sqrt{\quad}$ e que se chama radical. O número que se escreve debaixo do radical é chamado radicando. E é necessário não confundir a expressão $\sqrt{1\,681}$ com o radicando 1 681. Pedro percorreu $\sqrt{1\,681}$ quilômetros; isto significa que Pedro percorreu 41 quilômetros e não 1 681 quilômetros. Analogamente, $\sqrt{100}$ não é 100; é 10. O valor da expressão aritmética $\sqrt{441}$ não é 441; é 21.

Exercícios orais

- | | | | |
|---------------------|---------------------|-----------------------|----------------------|
| 1. $\sqrt{1} = ?$ | 5. $\sqrt{9} = ?$ | 9. $\sqrt{25} = ?$ | 13. $\sqrt{81} = ?$ |
| 2. $\sqrt{100} = ?$ | 6. $\sqrt{4} = ?$ | 10. $\sqrt{64} = ?$ | 14. $\sqrt{900} = ?$ |
| 3. $\sqrt{16} = ?$ | 7. $\sqrt{121} = ?$ | 11. $\sqrt{36} = ?$ | 15. $\sqrt{400} = ?$ |
| 4. $\sqrt{49} = ?$ | 8. $\sqrt{144} = ?$ | 12. $\sqrt{2500} = ?$ | 16. $\sqrt{225} = ?$ |

17. Um quadrado tem 81 metros quadrados de área. Quanto mede o lado?

18. Quanto mede o lado de um quadrado cuja área é de 144 centímetros quadrados?

19. Quanto mede o lado de um quadrado cuja área é de 900 milímetros quadrados?

35. Quadrados perfeitos e imperfeitos; raiz quadrada aproximada. Qual é a raiz quadrada de 30? Não é 5, porque $5 \times 5 = 25$; não é 6, porque $6 \times 6 = 36$. Então a raiz quadrada de 30 está compreendida entre 5 e 6; é 5 **mais alguma coisa** ou 6 **menos alguma coisa**. Quer num caso, quer no outro, **esta alguma coisa não chega a uma unidade**; com efeito, se 5 é pouco para $\sqrt{30}$, $5+1$ é muito; se é 6 muito para $\sqrt{30}$, $6-1$ é pouco. No primeiro caso, 5 é pouco para $\sqrt{30}$, mas o que falta para $\sqrt{30}$ é inferior a uma unidade; no segundo, 6 é muito para $\sqrt{30}$, mas o excesso de 6 sobre $\sqrt{30}$ é inferior a uma unidade. Dizemos em Aritmética, que 5 e 6 são as raízes quadradas aproximadas do número 30, e escreveremos:

$$\sqrt{30} = 5 \text{ (com êrro inferior a 1 unidade, por falta)}$$

$$\sqrt{30} = 6 \text{ (com êrro inferior a 1 unidade, por excesso)}$$

Quando um número inteiro tem raiz quadrada exata, toma o nome de **quadrado perfeito**. Entre os 100 primeiros números inteiros há apenas 10 números que são quadrados perfeitos, a saber: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 e 100. Quando um número não tem raiz quadrada exata, chama-se **quadrado imperfeito**. E até nova ordem, devemo-nos contentar com a sua raiz quadrada aproximada.

Chama-se raiz quadrada aproximada de um número dado, e que não é quadrado perfeito, o maior número cujo quadrado é menor que o número dado, ou o menor número cujo quadrado é maior que o número dado.

Nestas condições, a raiz quadrada aproximada de 60 é 7 ou 8, porque 7 é o maior número cujo quadrado é menor que 60, e 8 é o menor número cujo quadrado é maior que 60.

Comparando os 10 primeiros números, com os seus quadrados, teremos:

Números	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Quadrados	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

O quadro acima nos mostra que o quadrado de um número inteiro qualquer termina em 1, 4, 5, 6, 9 ou 0. Com efeito, considerando um número inteiro qualquer, e elevando-o ao quadrado, teremos:

$$374^2 = 370^2 + 2 \times 370 \times 4 + 4^2$$

No segundo membro desta igualdade temos três parcelas. As duas primeiras terminam sempre por zeros; logo, a terceira parcela, 16, contém o algarismo 6, resultante do quadrado de 4; e este algarismo, 6, é o algarismo das unidades do quadrado de 374.

Portanto, para que um número seja quadrado perfeito, é necessário que o algarismo das unidades seja 1, 4, 5, 6, 9 ou 0. *Mas, esta condição, sendo necessária, não é suficiente.* Por exemplo, os números 11, 14, 15, 26, 29, 30 não são quadrados perfeitos.

Observação. Em particular, se um número termina em 5, seu quadrado termina em 25. E' o que podemos verificar com os exemplos do §32, 1. Portanto, para que um número terminado em 5 seja quadrado perfeito, é necessário que o algarismo das dezenas seja 2. Esta condição, porém, sendo necessária, não é suficiente. Por exemplo, 325 não é quadrado perfeito.

Exercícios em classe

- Entre 100 e 200 quantos quadrados perfeitos existem e quais são?
- Entre 200 e 300 quantos quadrados perfeitos existem e quais são?
- Entre 300 e 400 quantos quadrados perfeitos existem e quais são?
- Qual é o maior quadrado perfeito contido em 80?
- Qual é o maior quadrado perfeito contido em 120?
- Separar 90 em duas parcelas, a primeira das quais seja o maior quadrado perfeito possível.
- Separar 150 em duas parcelas, a primeira das quais seja o maior quadrado perfeito possível.

36. Extração da raiz quadrada. *Extrair a raiz quadrada de um número dado* significa calcular o número que, elevado ao quadrado, reproduz o número dado. Por exemplo, qual é a raiz quadrada do número 4 489? Para responder a esta pergunta, é necessário **extrair a raiz quadrada do número**

4 489. E o problema será proposto aos estudantes da maneira seguinte: $\sqrt{4\,489} = ?$

Para extrair a raiz quadrada de um número, há dois processos distintos, aos quais chamaremos de **processo espontâneo** e **processo usual**.

37. Processo espontâneo para extrair uma raiz quadrada. Extrair a raiz quadrada de um número dado é descobrir um segundo número que, elevado ao quadrado, reproduz o primeiro. Nestas condições, para extrair a raiz quadrada de um número qualquer, por exemplo, do número 4 489, é bastante elevar ao quadrado todos os números inteiros, a partir de 1, até que se descubra qual o número que, elevado ao quadrado, reproduz o número 4 489. Este processo que à primeira vista, parece ser muito moroso, é mais ou menos rápido, se houver por parte dos estudantes certa habilidade na escolha dos números que devem elevar ao quadrado.

Vejamos então qual é o valor de $\sqrt{4\,489}$. Observemos que $10^2 = 100$, $100^2 = 10\,000$, etc.. Portanto, $\sqrt{4\,489}$ está entre 10 e 100. Tomemos um número qualquer entre 10 e 100 e cujo quadrado seja fácil de obter, por exemplo, 50. Ora, $50^2 = 2\,500$. Então, $\sqrt{4\,489}$ está entre 50 e 100.. Experimentemos 70; $70^2 = 4\,900$. Logo, $\sqrt{4\,489}$ está entre 50 e 70. Experimentemos 60; $60^2 = 3\,600$; logo, $\sqrt{4\,489}$ está entre 60 e 70. Experimentemos 65; $65^2 = 3\,600 + 600 + 25 = 4\,225$. (§32) Logo, $\sqrt{4\,489}$ está entre 65 e 70. Experimentemos 67; $67^2 = 4\,489$. Então $\sqrt{4\,489} = 67$.

Este processo, ao qual demos o nome de **processo espontâneo**, porque resulta **espontaneamente** da definição da raiz quadrada, não é aconselhável na prática, por ser muito mais demorado do que o **processo prático ou usual**. Explicando este processo aos estudantes, quisemos apenas mostrar-lhes que *a definição clara e precisa de uma operação é meio caminho andado para compreender e efetuar esta mesma operação*.

A disposição prática do trabalho pode ser a seguinte:

$$\sqrt{4\,489} = ? \quad \left\{ \begin{array}{l} 10^2 = 100 \\ 100^2 = 10\,000 \quad \therefore 10 < \sqrt{4\,489} < 100 \\ 50^2 = 2\,500 \quad \therefore 50 < \sqrt{4\,489} < 100 \\ 70^2 = 4\,900 \quad \therefore 50 < \sqrt{4\,489} < 70 \\ 60^2 = 3\,600 \quad \therefore 60 < \sqrt{4\,489} < 70 \\ 65^2 = 4\,225 \quad \therefore 65 < \sqrt{4\,489} < 70 \\ 67^2 = 4\,489 \end{array} \right.$$

Resposta. $\sqrt{4\,489} = 67$

Exercícios em classe

Calcular pelo processo espontâneo:

$$\begin{array}{lll} 1. \sqrt{225} & | & 3. \sqrt{961} \\ 2. \sqrt{625} & | & 4. \sqrt{1\,764} \\ 5. \sqrt{5\,776} & | & 7. \sqrt{1\,296} \\ 6. \sqrt{8\,649} & | & 8. \sqrt{2\,916} \end{array}$$

N. B. No exercício modelo deste parágrafo, para indicar que 10 é menor que $\sqrt{4\,489}$, escrevemos $10 < \sqrt{4\,489}$; para indicar que 100 é maior que $\sqrt{4\,489}$, escrevemos $\sqrt{4\,489} < 100$. Para indicar que um número é maior que outro, é bastante colocar entre ambos um ângulo cuja abertura fique voltada para o número maior. Portanto, $9 > \sqrt{25}$ quer dizer que 9 é maior do que $\sqrt{25}$; $7 < \sqrt{64}$ quer dizer que 7 é menor que $\sqrt{64}$; $4 < \sqrt{25} < 6$ quer dizer que $\sqrt{25}$ é maior que 4, mas é menor que 6.

38. Processo usual para extrair uma raiz quadrada. Qual é a raiz quadrada de 837 581 481? Para calculá-la, vamos recorrer ao processo prático ou usual.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{8.3\,7.5\,8.1\,4.8\,1} & 28\,941 \\ \hline 4 & \\ \hline 4\,3.7 & 48 \times 8 \\ \hline 3\,8\,4 & \\ \hline 5\,3\,5.8 & 569 \times 9 \\ \hline 5\,1\,2\,1 & \\ \hline 2\,3\,7\,1.4 & 5\,784 \times 4 \\ \hline 2\,3\,1\,3\,6 & \\ \hline 0\,5\,7\,8\,8.1 & 57\,881 \times 1 \\ \hline 5\,7\,8\,8\,1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Regra. Divide-se o número dado em classes de dois algarismos, da direita para a esquerda; a primeira classe à esquerda pode ser constituída por um algarismo. Debaixo da primeira classe à esquerda (8), escreve-se o maior quadrado que ela contém, isto é, 4, cuja raiz (2) é escrita no lugar adequado, isto é, por cima do traço horizontal. Da pri-

meira classe à esquerda (8), subtrai-se o maior quadrado que ela contém (4), e ao lado do resto (4), escreve-se a classe seguinte do radicando (37). **Separa-se um algarismo à direita** do número assim formado (437), e divide-se a parte que fica à esquerda (43), pelo dôbro da raiz obtida (por 4, que se escreve por baixo do traço horizontal.) O quociente (8) é escrito ao lado da raiz, (ao lado de 2) e ao lado do dôbro da mesma raiz (ao lado de 4, por baixo do traço horizontal). Multiplica-se o número assim formado, (48) pelo mesmo quociente (8), e subtrai-se o produto (384) de 437. Ao lado do resto (53), escreve-se a classe seguinte do radicando (58). **Separa-se um algarismo à direita** do número assim formado (5358), e divide-se a parte que fica à esquerda (535), pelo dôbro da raiz obtida. (A raiz obtida é 28; o dôbro é 56, que se escreve por baixo do traço horizontal e por baixo de 48). O quociente (9) é escrito ao lado da raiz (ao lado de 28) e ao lado do dôbro da raiz (ao lado de 56). Multiplica-se o número assim formado (569) pelo mesmo quociente (9), e subtrai-se o produto (5121) de 5358. Ao lado do resto (237) escreve-se a classe seguinte do radicando (14), etc..

Primeiro exemplo. $\sqrt{61\ 009} = ?$

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{6.1\ 0.0\ 9} & 247 \\ 4 & \\ \hline 2\ 1.0 & 44 \times 4 \\ 1\ 7\ 6 & \\ \hline 3\ 4\ 0.9 & 487 \times 7 \\ 3\ 4\ 0.9 & \\ \hline 0\ 0\ 0\ 0 & \end{array}$$

Resposta. $\sqrt{61\ 009} = 247$

Segundo exemplo. $\sqrt{368\ 449} = ?$

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{3\ 6.8\ 4.4\ 9} & 607 \\ 3\ 6 & \\ \hline 0\ 8.4\ 4.9 & 1\ 207 \times 7 \\ 8.4\ 4.9 & \\ \hline 0\ 0\ 0\ 0 & \end{array}$$

Resposta. $\sqrt{368\ 449} = 607$

Terceiro exemplo. $\sqrt{31\ 528} = ?$

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{3.1\ 5.2\ 8} & 177 \\ 1 & \\ \hline 2\ 1.5 & 27 \times 7 \\ 1\ 8\ 9 & \\ \hline 2\ 6\ 2.8 & 347 \times 7 \\ 2\ 4\ 6.9 & \\ \hline 1\ 9\ 9 & \end{array}$$

Resposta.

$$\sqrt{31\ 528} = 177 \text{ (com erro inferior a 1 unidade, por falta)}$$

$$\sqrt{31\ 528} = 178 \text{ (com erro inferior a 1 unidade, por excesso)}$$

39. Prova da raiz quadrada. Extraída uma raiz quadrada, e para verificar se a operação está certa, é bastante elevar a raiz ao quadrado, e somar o resultado com o resto da operação, quando este resto existe. A soma deverá ser igual ao radicando.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{5.5\ 8.5\ 4} & 236 \\ 1\ 5\ 8 & 43 \times 3 \\ 2\ 9\ 5.4 & 466 \times 6 \\ 4 \rightsquigarrow 1\ 5\ 8 & \end{array}$$

A prova mais prática é a *prova dos nove*, por ser mais rápida, embora nos dê uma certeza relativa. Consideremos o exemplo ao lado. Tiraram-se os nove da raiz; o resto é 2, que se escreve nos

dois ângulos retos situados à esquerda da cruz. Multiplica-se 2 por 2 e escreve-se o produto à esquerda do resto da operação. Em seguida, tiram-se os nove de $4 \rightsquigarrow 158$, como se se tratasse do número 4158; o resto é zero. Finalmente, tiram-se os nove do radicando; o resto é zero. Os dois últimos restos, zero e zero, sendo iguais, é provável que a operação esteja certa.

Esta regra é fácil de justificar, considerando que

$$55\ 854 = 236 \times 236 + 158 \text{ (E.M.P.V. § 98)}$$

Observação. A regra pode ser simplificada com a prática.

Convém também observar que o resto não pode ser maior que o dôbro da raiz. (§40) O valor máximo do resto é o dôbro da raiz. É preciso prestar muita atenção a este fato porque, quando o resto é maior que o dôbro da raiz, a *prova dos nove* não acusa este erro.

Exercícios. Série XI

1. $\sqrt{376\ 996} =$
2. $\sqrt{25\ 270\ 729} =$
3. $\sqrt{1\ 380} =$
4. $\sqrt{52\ 847} =$
5. $\sqrt{12\ 345\ 678} =$
6. $\sqrt{12\ 625} =$
7. $\sqrt{6\ 155} =$
8. $\sqrt{16\ 064\ 064} =$
9. $\sqrt{844\ 250} =$
10. A área de um quadrado é de 73 441 metros quadrados. Quanto mede o lado?
11. Quanto mede o lado de um quadrado cuja área é de 3 844 decímetros quadrados?
12. Uma folha de papel milimetrado, de forma quadrada, contém 2 025 centímetros quadrados. Qual é o comprimento da folha? E a largura?
13. Qual é o maior quadrado perfeito contido em 8 974?
14. Qual é o maior quadrado perfeito contido em 12 688?
15. Qual é o número cuja raiz quadrada, com erro inferior a uma unidade, por falta, é 75, havendo um resto igual a 73?
16. Qual é o número cuja raiz quadrada, com erro inferior a uma unidade, por falta, é 83, havendo um resto igual a 137?

40. O resto na extração da raiz quadrada. Nem todos os números são quadrados perfeitos. O número 40 não é um quadrado perfeito. A raiz quadrada de 40, com êrro inferior a uma unidade, por falta, é 6, porque 6 é o maior número cujo quadrado é inferior a 40. Ora, $6^2 = 36$ e $40 - 36 = 4$. Ao número 4 dá-se o nome de **resto**.

Na divisão, o resto é sempre menor do que o divisor; na extração da raiz quadrada o resto pode ser igual à raiz; pode ser maior do que a raiz; pode ser igual ao dôbro da raiz; **mas não pode ser maior do que o dôbro da raiz**.

Já vimos que a diferença entre os quadrados de dois números inteiros e consecutivos é igual ao dôbro do menor e mais 1. (§33)

Nestas condições, sendo $\sqrt{49} = 7$, para que a raiz seja igual a 8 é necessário que o radicando 49 aumente de $2 \times 7 + 1$ unidades. Se o acréscimo do radicando fôr, no máximo, igual a 14 unidades, a raiz será 7 e o resto será 14, isto é, o dôbro da raiz.

Na extração da raiz quadrada, o resto pode ser igual à raiz, maior do que a raiz, igual ao dôbro da raiz; **mas não pode ser maior do que o dôbro da raiz**.

Exercícios. Série XII

1. Um terreno retangular mede 432m por 75m. Quanto medirá o lado de um terreno quadrado equivalente ao primeiro?

Observação. Duas figuras são iguais quando, superpostas, coincidem em toda a sua extensão; são equivalentes quando têm a mesma área. Cortemos em papel milimetrado, um retângulo com 9cm por 4cm, e um quadrado com 6cm de lado. Estas duas figuras não são iguais porque não podem, absolutamente, coincidir; entretanto, são equivalentes, porque têm a mesma área, a saber: 36 centímetros quadrados.

2. Quanto mede o lado de um terreno quadrado equivalente a um terreno retangular de 847m por 252m?

3. Um terreno quadrado tem 435 metros de lado. Qual será o comprimento de um terreno retangular equivalente ao primeiro, e com 225 metros de largura?

4. Um terreno quadrado tem 297 metros de lado. Qual será o comprimento de um terreno retangular equivalente ao primeiro e com 99 metros de largura?

5. A raiz quadrada de um número é 87 e o resto é o maior possível. Qual é o número?

6. A raiz quadrada de um número é 76 e o resto é o maior possível. Qual é o número?

7. Sendo $x \times x = 1\ 849$, quanto vale x ?

8. Sendo $x^2 = 42\ 025$, quanto vale x ?

9. Sendo $2\ 740 = x^2 + 36$, quanto vale x ?

10. Sendo $172\ 500 = x^2 + 275$, quanto vale x ?

11. A soma das áreas de dois quadrados é 2 385 metros quadrados; a diferença é 207 metros quadrados. Quanto mede o lado de cada um desses quadrados?

12. A soma das áreas de dois quadrados é 3 874 metros quadrados; a diferença é 176 metros quadrados. Quanto mede o lado de cada um desses quadrados?

13. Comprei um terreno de forma quadrada, calculei a área e achei 172 225 metros quadrados. Mais tarde, procedendo novamente à avaliação da área do terreno, verifiquei que a primeira avaliação estava errada. Ao medir, pela primeira vez, o comprimento do lado do terreno, enganei-me e achei 8m mais do que realmente tem. Qual é a área exata do terreno?

41. Operações de terceira espécie. A adição e a subtração são *operações de primeira espécie*; a multiplicação e a divisão são *operações de segunda espécie*.

A quinta e a sexta operações fundamentais são a **potenciação** e a **radiciação**.

Teoricamente, a potenciação é uma operação muito simples. Com efeito, calcular 2^{10} é calcular o produto de dez fatores iguais a 2. Na prática é operação, por vêzes, penosa e demorada como, por exemplo, calcular 328^{25} . Mais tarde, no curso de Álgebra, travaremos conhecimento com os *logarítmos*, os quais nos permitirão calcular rapidamente 328^{25} .

A radiciação é o inverso da potenciação. Elevando um certo número ao quadrado ou à segunda potência achámos 61 009.

Se quisermos *desfazer* o que fizemos na potenciação, *temos de extrair a raiz quadrada ou a raiz segunda* do número 61 009. E acharemos 247. Portanto, o que *compomos* na *potenciação*, *decompomos* na *radiciação*. Eis por que a potenciação é chamada *operação de composição* e a radiciação é chamada *operação de decomposição*. E ambas são chamadas **operações de terceira espécie**.

Em resumo as operações fundamentais da Aritmética são seis:

operações de primeira espécie: *adição e subtração*

operações de segunda espécie: *multiplicação e divisão*

operações de terceira espécie: *potenciação e radiciação*

Podemos distribuir as seis operações em dois grupos:

operações diretas (ou de composição) $\left\{ \begin{array}{l} \text{adição} \\ \text{multiplicação} \\ \text{potenciação} \end{array} \right.$

operações inversas (ou de decomposição) $\left\{ \begin{array}{l} \text{subtração} \\ \text{divisão} \\ \text{radiciação} \end{array} \right.$

No campo dos números inteiros ou naturais, as três primeiras são sempre possíveis; as três últimas, nem sempre.

42. A radiciação. Já aprendemos a extrair a raiz quadrada ou segunda. Mas, além desta, temos também a raiz terceira ou raiz cúbica, a quarta, a quinta, a sexta, etc..

Raiz cúbica de um número dado é outro número que, elevado ao cubo, reproduz o número dado. A raiz cúbica de 64 é 4, porque $4^3 = 64$. E escreveremos $\sqrt[3]{64} = 4$.

Raiz quarta de um número dado é outro número que, elevado à quarta potência, reproduz o número dado. A raiz quarta de 81 é 3, porque $3^4 = 81$. E escreveremos: $\sqrt[4]{81} = 3$.

Raiz quinta de um número dado é outro número que, elevado à quinta potência, reproduz o número dado. A raiz quinta de 100 000 é 10, porque $10^5 = 100\,000$. E escreveremos $\sqrt[5]{100\,000} = 10$.

E assim por diante.

Há, portanto, várias espécies de raízes, isto é, *raízes de graus diferentes*. E para indicar o *grau* de uma raiz, escreveremos um número no ângulo do radical, ao qual chamaremos **índice**. Portanto,

$\sqrt[3]{64}$ significa raiz cúbica de 64.

$\sqrt[4]{81}$ significa raiz quarta de 81.

$\sqrt[5]{32}$ significa raiz quinta de 32.

Os números 64, 81 e 32 são os **radicandos**, e os números 3, 4 e 5 são os **índices**. Em relação à raiz quadrada ou segunda não é costume escrever-se o índice 2; para indicar a raiz quadrada de 36 escreve-se $\sqrt{36}$ e não $\sqrt[2]{36}$.

A dificuldade da extração de uma raiz aumenta com o índice da mesma; quanto mais elevado é o índice, mais penosa é a extração da raiz correspondente. Contentemo-nos, por enquanto, com a extração da raiz quadrada; mais tarde, os *logaritmos* nos permitirão extrair qualquer raiz, sem dificuldade e rapidamente.

Exercícios orais

- | | | | |
|-------------------------|---------------------------|-------------------------|-----------------------|
| 1. $\sqrt[3]{1\,000} =$ | 4. $\sqrt[4]{81} =$ | 7. $\sqrt[5]{3\,125} =$ | 10. $\sqrt[6]{64} =$ |
| 2. $\sqrt[3]{8\,000} =$ | 5. $\sqrt[4]{10\,000} =$ | 8. $\sqrt[5]{243} =$ | 11. $\sqrt[8]{256} =$ |
| 3. $\sqrt[3]{729} =$ | 6. $\sqrt[4]{160\,000} =$ | 9. $\sqrt[5]{32} =$ | 12. $\sqrt[3]{216} =$ |

Exercícios. Série XIII

Calcular pelo método espontâneo (por tentativas)

- | | | | |
|------------------------|------------------------|-------------------------|-------------------------|
| 1. $\sqrt[3]{3\,375}$ | 3. $\sqrt[4]{14\,641}$ | 5. $\sqrt[4]{20\,736}$ | 7. $\sqrt[25]{1}$ |
| 2. $\sqrt[5]{59\,049}$ | 4. $\sqrt[6]{15\,625}$ | 6. $\sqrt[4]{234\,256}$ | 8. $\sqrt[10]{59\,049}$ |

Calcular as expressões aritméticas seguintes:

$$9. 10 + 3^4 - 5 \times 2^5 \times \sqrt{484} + 3^3 \times 4^3 \times \sqrt[3]{8} - 80 \div \sqrt[3]{125}$$

$$10. \sqrt[4]{10\,000} + 7 \times \sqrt[3]{216} - 2 \times 3^5 \times 7^{10} \times 0 + \sqrt[40]{1} + 5^2 \times \sqrt{625}$$

Observação. Efetuar em primeiro lugar as operações de terceira espécie, depois as de segunda e, por último, as de primeira.

43. Teoremas relativos às potências e raízes. I. Para multiplicar duas potências de uma mesma base, é bastante somar os expoentes. A significação deste teorema é fácil de compreender; se tivéssemos de enunciá-lo completamente, deveríamos dizer:

« Para multiplicar duas potências de uma mesma base, basta formar outra potência cuja base seja a comum aos fatores, e cujo expoente seja a soma dos expoentes dos fatores. »

Com efeito, pela definição de potência, temos:

$$a^3 \times a^4 = (a \times a \times a) \times (a \times a \times a \times a)$$

Pela lei associativa da multiplicação, resulta:

$$a^3 \times a^4 = a \times a \times a \times a \times a \times a \times a$$

Finalmente, da definição de potência, resulta:

$$a^3 \times a^4 = a^7$$

E, de um modo geral,

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

Facilmente se provará que... $a^2 \times a^3 \times a^5 = a^{10}$, etc..

Dêste teorema resulta que:

$$a^7 = a^2 \times a^5 = a \times a^6 \quad x^{10} = x^4 \times x^6 = x^3 \times x^2 \times x^5, \text{ etc..}$$

II. Para multiplicar duas potências com expoentes iguais porém com bases diferentes, multiplicam-se as bases e dá-se ao produto o expoente comum aos fatores.

Com efeito, pela definição de potência, temos:

$$2^3 \times 5^3 = (2 \times 2 \times 2) \times (5 \times 5 \times 5)$$

Em virtude das propriedades associativa e comutativa da multiplicação, podemos escrever sucessivamente:

$$\begin{aligned} 2^3 \times 5^3 &= 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5 \\ &= 2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5 \\ &= 10 \times 10 \times 10 = 10^3 \end{aligned}$$

E, de um modo geral,

$$a^m \times b^m = (a \times b)^m$$

Dêste teorema resulta que:

$$6^3 = 2^3 \times 3^3 \quad 15^4 = 3^4 \times 5^4 \quad 21^2 = 3^2 \times 7^2, \text{ etc..}$$

III. Para dividir duas potências diferentes, de uma mesma base, é bastante subtrair o expoente do divisor do expoente do dividendo.

Vamos provar que..... $a^7 \div a^4 = a^3$.

Com efeito, assim é porque..... $a^3 \times a^4 = a^7$.

E, de um modo geral,

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

Observação. De acôrdo com esta fórmula, resulta que $a^m \div a^m = a^{m-m} = a^0$. Este resultado não tem sentido. Entretanto, quando o divisor é igual ao dividendo, o quociente é a unidade. Estabelecemos então a seguinte

Convenção. Toda a potência com expoente zero é igual à unidade. Assim, $3^0 = 1$, $5^0 = 1$, etc..

Trataremos mais tarde do caso em que $m < n$.

Do teorema que acabámos de demonstrar resulta que:

$$a^2 = \frac{a^5}{a^3} = \frac{a^6}{a^4} = \frac{a^8}{a^6}, \text{ etc..}$$

IV. Para elevar uma potência dada, a uma potência qualquer, é bastante multiplicar os expoentes.

Com efeito, pela definição de potência, temos:

$$(a^4)^3 = a^4 \times a^4 \times a^4$$

E, de acôrdo com o primeiro teorema, resulta:

$$(a^4)^3 = a^{12}$$

Podemos, pois, escrever de um modo geral:

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

Portanto, $a^{12} = (a^4)^3 = (a^3)^4 = (a^2)^6 = (a^6)^2$

V. Para extrair uma raiz dada, de um potência dada, é bastante dividir o expoente da potência pelo índice da raiz.

Por exemplo, $\sqrt[3]{a^{12}} = a^4$

Com efeito, assim é porque, elevando a^4 à terceira potência, teremos, de acôrdo com o terceiro teorema:

$$(a^4)^3 = a^{12}$$

E, de um modo geral,

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Observação. Por ora devemos admitir que m é divisível por n .

44. Adição e subtração de potências. O que dissemos no parágrafo anterior se resume nas fórmulas seguintes:

I. $a^m \times a^n = a^{m+n}$		III. $(a^m)^n = a^{mn}$
II. $a^m \div a^n = a^{m-n}$		IV. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

É interessante observar que:

a) A **multiplicação** de potências se reduz a uma **adição** de expoentes.

b) A **divisão** de potências se reduz a uma **subtração** de expoentes.

c) A **potenciação** de potências se reduz a uma **multiplicação** de expoentes.

d) A **radiciação** de potências se reduz a uma **divisão** do expoente da potência pelo índice da raiz.

Isto é,

As operações de segunda espécie se reduzem a operações de primeira.

As operações de terceira espécie se reduzem a operações de segunda.

Entretanto, em relação à adição e à subtração de potências, não há outra coisa a fazer, senão calcular as potências e depois, somar ou subtrair, porque não há operações mais simples que a adição e a subtração.

$$2^3 + 2^4 = 8 + 16 = 24; \quad 3^5 - 3^3 = 243 - 27 = 216$$

$$5^3 - 5^2 + 5^4 - 5 = 125 - 25 + 625 - 5 = 720$$

45. Potência de um produto. Para elevar um produto de dois ou mais fatores a uma potência dada, é bastante elevar cada um dos fatores à potência dada, e multiplicar os resultados.

Vamos mostrar que:

$$(5^2 \times 7^3 \times 11)^3 = 5^6 \times 7^9 \times 11^3$$

Com efeito, pela definição de potência, teremos:

$$(5^2 \times 7^3 \times 11)^3 = (5^2 \times 7^3 \times 11) \times (5^2 \times 7^3 \times 11) \times (5^2 \times 7^3 \times 11)$$

Lembrando as propriedades associativa e comutativa da multiplicação, podemos escrever:

$$(5^2 \times 7^3 \times 11)^3 = 5^2 \times 5^2 \times 5^2 \times 7^3 \times 7^3 \times 7^3 \times 11 \times 11 \times 11$$

Finalmente, associando as potências com bases iguais, concluiremos que:

$$(5^2 \times 7^3 \times 11)^3 = 5^6 \times 7^9 \times 11^3$$

E, de um modo geral, podemos escrever:

$$(a^m \times b^n \times c^r)^u = a^{mu} \times b^{nu} \times c^{ru}$$

46. A característica de um quadrado perfeito. Um número inteiro é quadrado perfeito quando é o quadrado de um outro número inteiro. Por exemplo, os números 961 (=31²), 2 704 (=52²), 4 096 (=64²), etc., são quadrados perfeitos.

Consideremos o número 360. Decompondo-o em fatores primos, teremos:

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$$

De acôrdo com o teorema conhecido (§45), teremos:

$$(2^3 \times 3^2 \times 5)^2 = 2^6 \times 3^4 \times 5^2$$

Portanto,

Para elevar ao quadrado um número inteiro decomposto em seus fatores primos, é bastante duplicar o expoente de cada um dos fatores.

Ora, a decomposição de um número inteiro em fatores primos pode ser efetuada de um único modo. Portanto, se decomposermos um quadrado perfeito em seus fatores primos, os expoentes

dêstes fatores primos serão números pares. É esta uma condição necessária para que um número inteiro seja quadrado perfeito.

Reciprocamente, se, decompondo um número inteiro em fatores primos, verificamos que os expoentes dêstes fatores primos são números pares, podemos afirmar que êste número inteiro é um quadrado perfeito. Por exemplo, os números 324, 400, 196 são quadrados perfeitos porque

$$324 = 2^2 \times 3^4 \quad 400 = 2^4 \times 5^2 \quad 196 = 2^2 \times 7^2$$

Podemos agora concluir com a característica de um quadrado perfeito:

Para que um número inteiro seja um quadrado perfeito, é necessário e suficiente que contenha somente fatores primos com expoentes pares.

Exercícios. Série XIV

Calcular as expressões que se seguem.

1. $3^2 \times 3 - 2^3 \times 2 + 5^3 \times 5 \times 5^2 - 7^2 \times 7$

2. $5^2 \times 5^3 + 7^2 \times 7 - 4^3 \times 4 - 3^2 \times 3 \times 3^3$

3. $7^3 \div 7 + 11^4 \div 11^2 - 5^3 \times 5 \div 5^2 + 2^7 \div 2^4$

4. $(2^3)^5 \times (2^4)^2 \div (2^2)^3 \times (2^4)^5$

5. $(7^2)^5 \times (7^3)^4 \div (7^5)^3 \div 7^2$

6. $\sqrt[3]{5^{12}} + \sqrt[4]{5^8} - \sqrt{5^2}$

7. $3 \times 2^3 \times 2^5 + 5(2^2)^4 - 7 \times 2^7 \times 2 + 2^3$ R. 264

8. $2^{10} \div 2^7 - 3 \times 2^8 \div 2^5 + 4 \times 2 \times 2^2 - 2^4$ R. 0

Simplificar as expressões que se seguem:

9. $\frac{x^3 \times a^4 \times x^5 \times a^3}{a^2 \times x^4 \times a^6 \times x^3}$ 10. $\frac{a^2 \times b^5 \times a^6 \times b^6}{a^3 \times a^4 \times b^6 \times b^7}$

Nos exercícios que se seguem, os números múltiplos deverão ser previamente decompostos em fatores primos. Calcular as expressões seguintes:

11. $\left\{ \frac{2^3 \times 3^2 \times 5^2}{30^2} + \frac{2^2 \times 3^3 \times 5^2}{30^2} \right\}^2$ R. 25

12. $\left\{ \frac{3 \times 5 \times 7}{3 \times 7} + \frac{3^2 \times 5 \times 7^2}{441} \right\}^2$ R. 100

Calcular o menor número pelo qual devemos multiplicar cada um dos números que se seguem, para que o resultado seja um quadrado perfeito.

13. 180 14. 250 15. 22 050 16. 48 050

47. **Quadrado das frações decimais.** O quadrado de 0,7 é $0,7 \times 0,7$ ou 0,49. O quadrado de 0,16 é $0,16 \times 0,16$ ou 0,0256. O quadrado de 0,031 é $0,031 \times 0,031$ ou 0,000961. Donde se conclue que, elevar uma fração decimal ao quadrado ou à segunda potência, é uma operação que não oferece a menor dificuldade e que obedece à seguinte

Regra. Para calcular o quadrado de uma fração decimal, é bastante multiplicá-la por si mesma.

Exemplos		
$0,047^2 = ?$ $\begin{array}{r} 0,047 \\ 0,047 \\ \hline 329 \\ 188 \\ \hline 0,002209 \end{array}$	$3,15^2 = ?$ $\begin{array}{r} 3,15 \\ 3,15 \\ \hline 1575 \\ 315 \\ \hline 945 \\ 9,9225 \end{array}$	$0,612^2 = ?$ $\begin{array}{r} 0,612 \\ 0,612 \\ \hline 1224 \\ 612 \\ \hline 3672 \\ 0,374544 \end{array}$
$0,047^2 = 0,002209$	$3,15^2 = 9,9225$	$0,612^2 = 0,374544$

Exercícios orais

1. $0,2^2 =$	6. $0,01^2 =$	11. $1,2^2 =$	16. $0,001^2 =$
2. $0,5^2 =$	7. $0,003^2 =$	12. $2,5^2 =$	17. $0,0002^2 =$
3. $0,7^2 =$	8. $0,005^2 =$	13. $1,6^2 =$	18. $0,004^2 =$
4. $0,8^2 =$	9. $0,006^2 =$	14. $0,02^2 =$	19. $0,0001^2 =$
5. $0,9^2 =$	10. $0,007^2 =$	15. $0,0003^2 =$	20. $0,0005^2 =$

48. **Raiz quadrada das frações decimais.** Para calcular o quadrado de 0,34 é necessário multiplicar 0,34 por 0,34. Para

multiplicar 0,34 por 0,34 suprimem-se mentalmente as vírgulas, multiplica-se 34 por 34 e no produto que é 1156 separam-se com a vírgula, a partir da direita, quatro algarismos decimais.

$$0,34^2 = 0,34 \times 0,34 = 0,1156$$

E observe-se bem que a base 0,34 tendo dois algarismos decimais, o quadrado 0,1156 tem quatro algarismos decimais. Calculando $0,234^2$ acharemos 0,054756 e verificaremos que a base 0,234 tendo três algarismos decimais, o quadrado 0,054756 tem seis algarismos decimais. Estes dois exemplos são suficientes para compreender que, se uma fração decimal tem um, dois, três, quatro, cinco, etc., algarismos decimais, seu quadrado tem dois, quatro, seis, oito, dez, etc., algarismos decimais.

Do exposto se conclue que uma fração decimal, para ser quadrado perfeito, deve ter um número par de algarismos decimais. Entretanto, uma fração decimal que tem um número par de algarismos decimais, nem sempre é quadrado perfeito. Por exemplo, qual será a fração decimal que, elevada ao quadrado, dá 0,45? Não é 0,6 porque $0,6^2 = 0,36$. Não é 0,7 porque $0,7^2 = 0,49$. Então, tal como acontece com os números inteiros, temos de aceitar uma raiz aproximada e, raciocinando como no parágrafo 35, diremos:

$$\sqrt{0,45} = 0,6 \text{ (com erro inferior a } 0,1 \text{ por falta)}$$

$$\sqrt{0,45} = 0,7 \text{ (com erro inferior a } 0,1 \text{ por excesso)}$$

Exercícios orais

- | | | |
|----------------------|-------------------------|------------------------|
| 1. $\sqrt{0,04} =$ | 6. $\sqrt{0,8} =$ | 11. $\sqrt{0,0144} =$ |
| 2. $\sqrt{0,0025} =$ | 7. $\sqrt{0,007} =$ | 12. $\sqrt{0,0500} =$ |
| 3. $\sqrt{0,0121} =$ | 8. $\sqrt{0,30} =$ | 13. $\sqrt{0,0900} =$ |
| 4. $\sqrt{0,0625} =$ | 9. $\sqrt{0,0036} =$ | 14. $\sqrt{0,0008} =$ |
| 5. $\sqrt{0,81} =$ | 10. $\sqrt{0,000250} =$ | 15. $\sqrt{0,00025} =$ |

Vejamos agora como se extrai a raiz quadrada de uma fração decimal. Qual é a raiz quadrada de 0,1444? Já sabemos que é uma fração decimal com dois algarismos decimais. (§48) Mas, como calcular esta fração decimal? De um modo muito simples:

procurando um número x que, elevado ao quadrado, reproduza o número 1444 e, uma vez obtido o valor de x , separar nele, da direita para a esquerda, e com o auxílio da vírgula, dois algarismos decimais. Ora, extraindo a raiz quadrada de 1444, acharemos 38; portanto, $\sqrt{0,1444} = 0,38$. Podemos então estabelecer a seguinte

Regra. Para extrair a raiz quadrada de uma fração decimal, suprime-se mentalmente a vírgula, extrai-se a raiz quadrada do número inteiro resultante e separa-se no resultado, com a vírgula, e da direita para a esquerda, um número de algarismos decimais igual à metade do número de algarismos decimais do radicando.

Exemplos

$\sqrt{0,054756} = ?$	$\sqrt{0,005329} = ?$	$\sqrt{5,173425} = ?$
$\begin{array}{r l} \sqrt{0,054756} & 0,234 \\ 4 & \\ \hline 14.7 & 43 \times 3 \\ 129 & \\ \hline 185.6 & 464 \times 4 \\ 1856 & \\ \hline 0 & \end{array}$	$\begin{array}{r l} \sqrt{0,005329} & 0,073 \\ 49 & \\ \hline 42.9 & 143 \times 3 \\ 429 & \\ \hline 0 & \end{array}$	$\begin{array}{r l} \sqrt{5,173425} & 2,274 \\ 4 & \\ \hline 11.7 & 42 \times 2 \\ 84 & \\ \hline 333.4 & 447 \times 7 \\ 3129 & \\ \hline 2052.5 & 4544 \times 4 \\ 18176 & \\ \hline 2349 & \end{array}$

Em relação aos dois primeiros exemplos, os radicandos são quadrados perfeitos. Em relação ao terceiro, não acontece o mesmo; o radicando não é quadrado perfeito e sua raiz aproximada é 2,274. E, raciocinando como no parágrafo 35,

$$\sqrt{5,173425} = 2,274 \text{ (com erro inferior a } 0,001 \text{ por falta)}$$

$$\sqrt{5,173425} = 2,275 \text{ (com erro inferior a } 0,001 \text{ por excesso)}$$

Pode acontecer que o radicando seja uma fração decimal com um número ímpar de algarismos decimais. Seja a fração decimal 0,73485 da qual se pede a raiz quadrada. Aplicando-se a regra, surge uma série de dificuldades para os estudantes. Ora, dirão eles, se o radicando tem cinco algarismos decimais, como separar na raiz, dois algarismos decimais e meio?

Uma fração decimal não muda de valor se escrevermos à direita da parte fracionária tantos zeros quantos quisermos. Por-

tanto, $0,73\ 485 = 0,734\ 850$. Então os estudantes, em lugar de extraírem a raiz quadrada de $0,734\ 85$, extraem a raiz quadrada de $0,734\ 850$ e a dificuldade estará removida.

Exercícios. Série XV

- | | | |
|------------------------------|----------------------------|---------------------------|
| 1. $\sqrt{0,182\ 329} =$ | 6. $\sqrt{0,423\ 75} =$ | 11. $\sqrt{3,785} =$ |
| 2. $\sqrt{43,522\ 7} =$ | 7. $\sqrt{614\ 329} =$ | 12. $\sqrt{0,123\ 456} =$ |
| 3. $\sqrt{26,419\ 6} =$ | 8. $\sqrt{36,748\ 2} =$ | 13. $\sqrt{4\ 537,8} =$ |
| 4. $\sqrt{0,074\ 685\ 24} =$ | 9. $\sqrt{9,009\ 37} =$ | 14. $\sqrt{0,649\ 31} =$ |
| 5. $\sqrt{0,094\ 249} =$ | 10. $\sqrt{16,040\ 025} =$ | 15. $\sqrt{0,000\ 385} =$ |

16. Qual é o maior quadrado perfeito contido em $0,736$?
 17. Qual é o maior quadrado perfeito contido em $3,272\ 1$?
 18. Qual é a diferença entre o número $0,481\ 5$ e o maior quadrado perfeito nele contido?
 19. Qual é a diferença entre o número $0,535$ e o maior quadrado perfeito nele contido?
 20. Decompor o número $0,157\ 34$ em duas parcelas, de modo que uma delas seja o maior quadrado perfeito contido nesse número.

49. Raiz quadrada com aproximação preestabelecida. Vimos no parágrafo anterior que, ao extrair a raiz quadrada de um número decimal fracionário, devemos separar, na raiz, um número de algarismos decimais igual à metade do número de algarismos decimais do radicando. Assim:

$$\sqrt{5,173\ 425} = 2,274 \text{ (com erro inferior a } 0,001, \text{ por falta)}$$

$$\sqrt{5,173\ 425} = 2,275 \text{ (com erro inferior a } 0,001, \text{ por excesso)}$$

Inversamente, se quisermos obter a raiz quadrada de um número, com a aproximação de $0,001$, deveremos considerar o número com 6 algarismos decimais, isto é, com o dobro dos algarismos decimais da aproximação pedida.

Exemplo. Extrair a raiz de $2,871\ 6$ com erro inferior a $0,001$. Ora, $2,871\ 6 = 2,871\ 600$. E extraíndo a raiz de $2,871\ 600$ teremos:

$$\sqrt{2,8716} = 1,694 \text{ (com erro inferior a } 0,001, \text{ por falta)}$$

$$\sqrt{2,8716} = 1,695 \text{ (com erro inferior a } 0,001, \text{ por excesso)}$$

O mesmo critério será seguido para extrair a raiz aproximada dos números inteiros.

Seja extrair a raiz de 13 , com erro inferior a $0,001$. Extraíremos a raiz de $13,000\ 000$. Extraíndo a raiz quadrada de $13,000\ 000$, teremos: $\sqrt{13,000\ 000} = 3,605$. Logo,

$$\sqrt{13} = 3,605 \text{ (com erro inferior a } 0,001 \text{ por falta)}$$

$$\sqrt{13} = 3,606 \text{ (com erro inferior a } 0,001 \text{ por excesso)}$$

Raiz quadrada aproximada a menos de $0,1$ ou $0,01$ ou $0,001$ é a mesma coisa que raiz quadrada com erro inferior a $0,1$ ou $0,01$ ou $0,001$ ou raiz quadrada com um, dois ou três algarismos decimais. O que aprendemos nestes últimos exemplos é suficiente para estabelecer a seguinte

Regra. Para extrair a raiz quadrada de um número inteiro ou fração decimal, com erro inferior a $0,1$ ou $0,01$ ou $0,001$ juntam-se ao número dado tantos zeros quantos sejam necessários para que ele fique com dois ou quatro ou seis algarismos decimais. Em seguida, depois de extraída a raiz, separa-se no resultado, com a vírgula, e da direita para a esquerda, um número de algarismos decimais igual à metade do número de algarismos decimais do radicando.

Primeiro exemplo. Calcular $\sqrt{2}$ com erro inferior a $0,001$. É bastante calcular $\sqrt{2,000000}$. $\sqrt{2} = 1,414$.

Segundo exemplo. Calcular $\sqrt{3,4}$ com erro inferior a $0,01$. É bastante calcular $\sqrt{3,4000}$. $\sqrt{3,4} = 1,84$.

Terceiro exemplo. Calcular $\sqrt{0,07}$ com erro inferior a $0,001$. É bastante calcular $\sqrt{0,070000}$. $\sqrt{0,07} = 0,264$.

Quarto exemplo.

Calcular $\sqrt{0,0015}$ com erro inferior a $0,0001$.

$$\sqrt{0,0015} = \sqrt{0,00150000}$$

$\sqrt{0,00150000}$	$0,0387$
9	
60 0	68×8
54 4	
5 60 0	767×7
5 36 9	
23 1	

Resposta. $\sqrt{0,0015} = 0,0387$
 Resto = $0,000\ 002\ 31$

Quinto exemplo.

Calcular $\sqrt{0,4726}$ com erro inferior a $0,001$.

$$\sqrt{0,4726} = \sqrt{0,472600}$$

$\sqrt{0,472600}$	$0,687$
36	
112 6	128×8
102 4	
10 20 0	1367×7
9 56 9	
63 1	

Resposta. $\sqrt{0,4726} = 0,687$
 Resto = $0,000\ 631$

Exercícios. Série XVI

Calcular as raízes que se seguem, com erro inferior ao que está indicado entre parênteses.

- | | |
|-----------------------------|--------------------------------------|
| 1. $\sqrt{2}$ (0,000 000 1) | 6. $\sqrt{1,142 2}$ (0,001) |
| 2. $\sqrt{3}$ (0,000 000 1) | 7. $\sqrt{0,007 4}$ (0,0001) |
| 3. $\sqrt{5}$ (0,000 000 1) | 8. $\sqrt{0,003}$ (0,000 01) |
| 4. $\sqrt{5,7}$ (0,001) | 9. $\sqrt{0,000 7}$ (0,000 01) |
| 5. $\sqrt{0,325}$ (0,001) | 10. $\sqrt{0,000 001 5}$ (0,000 001) |

11. Uma sala de forma quadrada tem uma área de 67 metros quadrados. Qual é o comprimento do lado desta sala?

N. B. O comprimento do lado da sala deverá ser calculado com erro inferior a 0,001 por falta.

12. Um retângulo tem 37 metros de comprimento e 25 metros de largura. Calcular com erro inferior a 0,001, o lado de um quadrado equivalente a este retângulo.

13. Qual é o número cuja raiz quadrada com erro inferior a 0,01 por falta é 7,42 havendo um resto igual a 0,0568?

14. Qual é o número cuja raiz quadrada, com erro inferior a 0,001 por excesso é 0,078 sendo o resto da operação igual a 0,000 094?

50. Quadrado das frações ordinárias. O quadrado de $\frac{3}{4}$ é, por definição, $\frac{3}{4} \times \frac{3}{4}$, isto é, $\frac{9}{16}$. O quadrado de $\frac{2}{5}$ é, por definição, $\frac{2}{5} \times \frac{2}{5}$, isto é, $\frac{4}{25}$. Portanto, para calcular o quadrado ou a segunda potência de uma fração ordinária, é bastante multiplicá-la por si mesma. Para indicar o quadrado de uma fração ordinária, é necessário colocar a fração entre parênteses e colocar o expoente 2 à direita e um pouco acima dos parênteses; ou então dar o expoente a cada um dos termos da fração

$$\left(\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{3}{7} \times \frac{3}{7} = \frac{9}{49}, \quad \frac{3^2}{7^2} = \frac{3 \times 3}{7 \times 7} = \frac{9}{49}$$

Exercícios orais

- | | | |
|-----------------------------------|------------------------|------------------------------------|
| 1. $\left(\frac{4}{5}\right)^3 =$ | 3. $\frac{7}{10^2} =$ | 5. $\left(\frac{6}{11}\right)^2 =$ |
| 2. $\left(\frac{3}{8}\right)^2 =$ | 4. $\frac{3^2}{4^2} =$ | 6. $\frac{2^2}{5} =$ |

- | | | |
|-----------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 7. $\frac{3}{5^2} =$ | 10. $\left(\frac{1}{5}\right)^2 =$ | 13. $\left(2\frac{1}{3}\right)^2 =$ |
| 8. $\frac{8^2}{9^2} =$ | 11. $\left(2\frac{1}{2}\right)^2 =$ | 14. $\left(3\frac{1}{3}\right)^2 =$ |
| 9. $\left(\frac{1}{4}\right)^2 =$ | 12. $\left(1\frac{3}{4}\right)^2 =$ | 15. $\left(1\frac{1}{5}\right)^2 =$ |

16. A fração $\frac{16}{25}$ é o quadrado de $\frac{4}{5}$? Por que?

17. A fração $\frac{4}{25}$ é o quadrado de $\frac{4}{5}$? Por que?

18. O quadrado de uma fração ordinária é igual à fração? O quadrado de $\frac{3}{5}$ é igual a $\frac{3}{5}$? Por que? E' maior ou menor? Por que? E o quadrado de $\frac{5}{3}$ é igual a $\frac{5}{3}$? Por que? E' maior ou menor? Por que? Conclusão?

Exercícios. Série XVII

1. Calcular a diferença entre $\frac{13}{25}$ e o quadrado de $\frac{13}{25}$.

2. Calcular a diferença entre $\frac{16}{11}$ e o quadrado de $\frac{16}{11}$.

3. Calcular $\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{7}{10}\right)^2$.

4. Calcular $\left(2\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \frac{7^2}{5}$.

5. Calcular $\left[\left(\frac{3}{5}\right)^2\right]^2 + \frac{2}{5}$ de $\left(3\frac{1}{4}\right)^2$.

6. Calcular $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^2 \div \frac{3}{5^2} + \frac{3}{8}$.

51. Raiz quadrada das frações ordinárias. Desde que $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$, segue-se que $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$; sendo $\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}$, resulta $\sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{5}{6}$.

Regra. Para extrair a raiz quadrada de uma fração ordinária, extrai-se a raiz quadrada de cada um de seus termos.

Entretanto, esta regra pouca aplicação tem na prática porque, em geral, as frações ordinárias das quais se pede a raiz qua-

drada não são quadrados perfeitos. Para que a fração ordinária seja quadrado perfeito, é necessário que cada um de seus termos seja quadrado perfeito, e isto raramente se dá na prática. É conveniente, então, obedecer à seguinte

Regra. Para extrair a raiz quadrada de uma fração ordinária que não é quadrado perfeito, e com erro inferior a 0,1 ou 0,01 ou 0,001, multiplicam-se os dois termos da fração por um número tal que o denominador se torne quadrado perfeito; extrai-se a raiz quadrada do numerador, com erro inferior a 0,1 ou 0,01 ou 0,001 (§49), e divide-se o resultado pela raiz quadrada do denominador.

Primeiro exemplo. Calcular $\sqrt{\frac{3}{7}}$ com erro inferior a 0,01.

$$\sqrt{\frac{3}{7}} = \sqrt{\frac{3 \times 7}{7 \times 7}} = \sqrt{\frac{21}{49}} = \frac{\sqrt{21}}{7} = \frac{4,58}{7} = 0,65$$

$$\sqrt{\frac{3}{7}} = 0,65 \text{ (com erro inferior a 0,01 por falta)}$$

$$\sqrt{\frac{3}{7}} = 0,66 \text{ (com erro inferior a 0,01 por excesso)}$$

Segundo exemplo. Calcular $\sqrt{2\frac{1}{8}}$ com erro inferior a 0,001.

$$\sqrt{2\frac{1}{8}} = \sqrt{\frac{17}{8}} = \sqrt{\frac{17 \times 2}{8 \times 2}} = \sqrt{\frac{34}{16}} = \frac{\sqrt{34}}{4} = \frac{5,830}{4} = 1,457$$

$$\sqrt{2\frac{1}{8}} = 1,457 \text{ (com erro inferior a 0,001 por falta)}$$

$$\sqrt{2\frac{1}{8}} = 1,458 \text{ (com erro inferior a 0,001 por excesso)}$$

Vejam agora como se calcula a raiz quadrada de um número dado, com erro inferior a uma unidade fracionária qualquer também dada, por falta e por excesso.

Exercício. Calcular $\sqrt{7}$, com erro inferior a $\frac{1}{5}$, por falta e por excesso.

Preliminarmente, multiplicamos e dividimos o radicando pelo quadrado do denominador da unidade fracionária dada.

$$\sqrt{7} = \sqrt{\frac{7 \times 25}{25}} = \sqrt{\frac{175}{25}} = \frac{\sqrt{175}}{5}$$

Ora, $\sqrt{175} = 13$ (com erro inferior a uma unidade, por falta)

$\sqrt{175} = 14$ (com erro inferior a uma unidade, por excesso)

Donde resulta que: $\frac{13}{5} < \sqrt{7} < \frac{14}{5}$

Mas, a diferença entre $\frac{13}{5}$ e $\frac{14}{5}$ é $\frac{1}{5}$. Logo,

$$\sqrt{7} - \frac{13}{5} < \frac{1}{5} \quad \frac{14}{5} - \sqrt{7} < \frac{1}{5}$$

Portanto, $\sqrt{7} = \frac{13}{5}$ (com erro inferior a $\frac{1}{5}$, por falta)

$\sqrt{7} = \frac{14}{5}$ (com erro inferior a $\frac{1}{5}$, por excesso)

Exercícios. Série XVIII

Calcular as raízes que se seguem, com erro inferior ao que está indicado entre parênteses.

1. $\sqrt{\frac{3}{5}}$ (0,001)

2. $\sqrt{4\frac{3}{4}}$ (0,001)

3. $\sqrt{5\frac{1}{3}}$ (0,000 1)

4. $\sqrt{\frac{13}{64}}$ (0,001)

5. $\sqrt{\frac{119}{625}}$ (0,001)

6. $\sqrt{\frac{7}{15}}$ (0,01)

7. $\sqrt{\frac{11}{43}}$ (0,001)

8. $\sqrt{1\frac{7}{12}}$ (0,001)

9. $\sqrt{\frac{19}{36}}$ (0,001)

10. $\sqrt{\frac{11}{40}}$ (0,000 1)

11. Calcular $\sqrt{11}$ com erro inferior a $\frac{1}{7}$.

12. Calcular $\sqrt{12}$ com erro inferior a $\frac{1}{8}$.

13. Calcular $\sqrt{13}$ com erro inferior a $\frac{1}{10}$.
 14. Calcular $\sqrt{14}$ com erro inferior a $\frac{1}{12}$.
 15. Calcular $\sqrt{15}$ com erro inferior a $\frac{1}{20}$.

52. Uso das tabelas. As tabelas apresentadas nas páginas 206 a 215 nos dão o quadrado e o cubo dos números inteiros, de 1 a 1 000, assim como a raiz quadrada e a raiz cúbica destes mesmos números, com erro inferior a meio décimo milésimo, por falta ou por excesso.

As mesmas tabelas nos permitem também, em alguns casos, calcular a raiz quadrada (ou cúbica) de um número que não seja quadrado ou (cubo) perfeito, com uma certa aproximação. É o que vamos mostrar com alguns exemplos.

1.º exemplo. Calcular $\sqrt{1\,410}$.

$$\sqrt{1\,410} = \sqrt{1\,410,00}$$

Na coluna dos quadrados, o número 141 000 está compreendido entre os números 140 625 (quadrado de 375) e 141 376 (quadrado de 376). Logo, (§49)

$$\sqrt{1\,410} = 37,5 \text{ (com erro inferior a } 0,1 \text{ por falta)}$$

2.º exemplo. Calcular $\sqrt{23\,560}$.

Na coluna dos quadrados, o número 23 560 está compreendido entre os números 23 409 (quadrado de 153) e 23 716 (quadrado de 154). Logo,

$$\sqrt{23\,560} = 153 \text{ (com erro inferior a } 1 \text{ unidade, por falta)}$$

3.º exemplo. Calcular $\sqrt[3]{2\,156}$.

$$\sqrt[3]{2\,156} = \sqrt[3]{2\,156,000}$$

Na coluna dos cubos, o número 2 156 000 está compreendido entre os números 2 146 689 (cubo de 129) e 2 197 000 (cubo de 130). Logo,

$$\sqrt[3]{2\,156} = 12,9 \text{ (com erro inferior a } 0,1 \text{ por falta)}$$

4.º exemplo. Calcular $\sqrt[3]{70\,428}$.

Procedendo como no exemplo anterior, acharemos:

$$\sqrt[3]{70\,428} = 41,2 \text{ (com erro inferior a } 0,1 \text{ por falta)}$$

Assim, as nossas tabelas nos dão também as raízes quadradas aproximadas dos números que não são quadrados perfeitos, incluídos entre 1 e 1 000 000, assim como as raízes cúbicas aproximadas dos números que não são cubos perfeitos, incluídos entre 1 e 1 000 000 000.

No caso de uma fração decimal, já sabemos como proceder. (§48) Por exemplo:

$$\sqrt{0,726} = \frac{\sqrt{7\,260}}{100} \quad \sqrt{0,438\,256} = \frac{\sqrt{438\,256}}{1\,000} \quad \sqrt[3]{0,495} = \frac{\sqrt[3]{495}}{10}$$

Razões e Proporções

53. Razão. Dois números quaisquer, por exemplo, 15 e 5, podem ser comparados de dois modos diferentes: ou calculando-se o excesso do primeiro sobre o segundo, ou calculando-se quantas vezes o primeiro contém o segundo. No primeiro caso, teremos de efetuar uma subtração e o resultado será o número 10; no segundo caso, teremos de efetuar uma divisão e o resultado será o número 3.

Entretanto, em lugar de efetuar estas duas operações, vamos apenas indicá-las; teremos assim as expressões aritméticas $15 - 5$ e $15 \div 5$. A estas expressões damos em Matemática, o nome de *razão*. Portanto,

Razão de dois números é o resultado da comparação destes dois números.

Observação. *Em todas as questões teóricas e mesmo práticas, a razão de dois números aparece geralmente indicada, isto é, não calculada.*

Desde que há dois modos diferentes de comparar dois números, conclue-se que há duas espécies de razões:

- a) *razão aritmética ou razão por diferença.*
- b) *razão geométrica ou razão por quociente.*

Razão aritmética ou razão por diferença de dois números dados é a diferença destes dois números dados.

A razão aritmética ou razão por diferença dos números 18 e 12 é $18 - 12$; dos números a e b é $a - b$; dos números $2x$ e $3y$ é $2x - 3y$.

Razão geométrica ou razão por quociente de dois números dados é o quociente destes dois números dados.

A razão geométrica ou razão por quociente dos números 30 e 6 é $30 \div 6$; dos números a e b é $a \div b$; dos números $2x$ e $3y$ é $2x \div 3y$.

Em lugar de *razão aritmética* ou *razão por diferença* se diz apenas **diferença**; em lugar de *razão geométrica* ou *razão por quociente* se diz apenas **razão**. Portanto, na continuação do nosso curso, a palavra **razão** significará sempre o quociente de dois números quaisquer.

Os dois números que constituem uma razão aritmética ou geométrica são chamados *têrmos da razão*. O primeiro termo é chamado **antecedente** e o segundo, **conseqüente**.

Quando a razão é aritmética, coloca-se entre seus termos o sinal *menos* ou um ponto. Por exemplo, para indicar a razão aritmética dos números a e b , escreveremos:

$$\begin{aligned} a - b & \text{ (a menos b)} \\ a \cdot b & \text{ (a está para b)} \end{aligned}$$

Quando a razão é geométrica, coloca-se o antecedente sobre o conseqüente, separando os dois termos por um traço de fração ou então colocam-se dois pontos entre os dois termos. Por exemplo, para indicar a razão geométrica dos números a e b , escreveremos:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} & \text{ (a sobre b, ou } a \div b) \\ a : b & \text{ (a está para b)} \end{aligned}$$

54. Razão aritmética. Desde que a razão aritmética é a diferença de dois números, conclue-se que o *antecedente* é um *minuendo* e o *conseqüente* é um *subtraendo*. Por exemplo, considerando-se a razão aritmética $11 - 8$, o antecedente 11 é um minuendo, o conseqüente 8 é um subtraendo, e o valor da razão aritmética $11 - 8$, é o resto. Portanto, todas as propriedades da subtração se aplicam, sem restrições, às razões aritméticas. Por exemplo:

- a) *Somando-se ou subtraindo-se n unidades ao antecedente, a razão aritmética aumenta ou diminui de n unidades.*
- b) *Somando-se ou subtraindo-se n unidades ao conseqüente, a razão aritmética diminui ou aumenta de n unidades.*
- c) *Somando-se ou subtraindo-se n unidades a ambos os termos de uma razão aritmética, o valor desta não se altera.*

55. Razão geométrica. Desde que a razão geométrica é o quociente de dois números, conclue-se que o *antece-*

dente é um dividendo e o conseqüente é um divisor. Por exemplo, considerando-se a razão geométrica $12 : 5$, o antecedente 12 é um dividendo, o conseqüente 5 é um divisor, e o valor da razão geométrica $12 : 5$ é o quociente completo da divisão de 12 por 5. E lembrando que o quociente completo da divisão de 12 por 5 é a fração $\frac{12}{5}$, podemos concluir que todas as propriedades das frações

se aplicam, sem restrições, às razões geométricas. Por exemplo:

- a) Multiplicando-se ou dividindo-se o antecedente por um número qualquer n , a razão geométrica fica multiplicada ou dividida por n .
 b) Multiplicando-se ou dividindo-se o conseqüente por um número qualquer n , a razão geométrica fica dividida ou multiplicada por n .
 c) Multiplicando-se ou dividindo-se por um mesmo número, diferente de zero, ambos os termos de uma razão geométrica, o valor desta não se altera.

Observação. Convém lembrar que a divisão por zero não tem sentido.

56. Transformação de uma razão geométrica. A terceira propriedade das razões geométricas (§55) é importante porque ela nos permite transformar uma razão dada em outra do mesmo valor, e cujos termos são números inteiros.

Primeiro exemplo. Simplificar a razão $4\frac{1}{3} : 3\frac{2}{5}$.

Transformando-se os dois termos da razão, em frações impróprias, resulta $\frac{13}{3} : \frac{17}{5}$.

Multiplicando-se os dois termos da razão por 15, m.m.c. dos denominadores, resulta: $\frac{13 \times 15}{3} : \frac{17 \times 15}{5}$.

E simplificando os dois termos desta razão, teremos:

$$13 \times 5 : 17 \times 3 \therefore 65 : 51$$

Portanto, a razão $4\frac{1}{3} : 3\frac{2}{5}$ é igual à razão $65 : 51$.

Segundo exemplo. Simplificar a razão $0,5 : 0,25$.

Multiplicando-se ambos os termos desta razão por 100, resulta $50 : 25$. E dividindo-se ambos os termos desta última razão por 25, resulta $2 : 1$.

Portanto, a razão $0,5 : 0,25$ é igual à razão $2 : 1$.

Terceiro exemplo. Simplificar a razão $7\frac{1}{2} : 0,36$.

Transformando o antecedente em fração imprópria e o conseqüente em fração ordinária, teremos:

$$7\frac{1}{2} : 0,36 = \frac{15}{2} : \frac{36}{100} = \frac{15}{2} : \frac{9}{25}$$

Multiplicando os dois termos desta razão por 50, m.m.c. dos denominadores, teremos:

$$\frac{15 \times 50}{2} : \frac{9 \times 50}{25} = 15 \times 25 : 9 \times 2 = 375 : 18 = 125 : 6$$

Portanto, a razão $7\frac{1}{2} : 0,36$ é igual à razão $125 : 6$.

A disposição prática destes exercícios pode ser a seguinte:

$4\frac{1}{3} : 3\frac{2}{5} =$	$0,5 : 0,25 =$	$7\frac{1}{2} : 0,36 =$
$\frac{13}{3} : \frac{17}{5} =$	$50 : 25 =$	$\frac{15}{2} : \frac{36}{100} =$
$65 : 51$	$2 : 1$	$\frac{15}{2} : \frac{9}{25} =$
		$375 : 18 =$
		$125 : 6$

Exercícios orais

Observação. Damos nesta série de exercícios orais, numerosos exemplos em que os números são substituídos por letras, para que os estudantes se habituem paulatinamente ao cálculo literal.

Simplificar as seguintes razões:

- | | | | |
|--------------------------------|--------------------------------|------------------------|------------------------|
| 1. $5 : \frac{1}{2}$ | 5. $a : \frac{b}{c}$ | 9. $2a : \frac{1}{3}$ | 13. $\frac{2a}{b} : c$ |
| 2. $\frac{2}{3} : 4$ | 6. $\frac{m}{n} : a$ | 10. $\frac{a}{b} : 2m$ | 14. $m : \frac{3}{5a}$ |
| 3. $\frac{1}{2} : \frac{5}{2}$ | 7. $\frac{a}{b} : \frac{c}{b}$ | 11. $x : \frac{3y}{1}$ | 15. $0,3 : 1,2$ |
| 4. $5 : \frac{2}{3}$ | 8. $\frac{a}{b} : \frac{n}{m}$ | 12. $1\frac{1}{2} : 5$ | 16. $4 : 0,8$ |

Exercícios. Série XIX

Reduzir a números inteiros os termos das razões seguintes:

- | | | |
|---|--|--------------------------|
| 1. $5\frac{1}{4} : 25$ | 4. $\frac{9}{10} : \frac{18}{50}$ | 7. $3,6 : \frac{24}{25}$ |
| 2. $0,4 : 0,025$ | 5. $5\frac{1}{2} : \frac{33}{40}$ | 8. $3,6 : 0,45$ |
| 3. $8\frac{1}{2} : \frac{35}{36}$ | 6. $\frac{11}{45} : \frac{22}{27}$ | 9. $2,6 : 0,39$ |
| 10. $0,333\dots : 0,444\dots$ | 12. $3,222\dots : 1,333\dots$ | |
| 11. $\left(\frac{3}{5} \text{ de } 4\right) : \left(\frac{1}{2} + 3\right)$ | 13. $\left(\frac{2}{3} \times \frac{5}{8}\right) : \left(3 - \frac{1}{2}\right)$ | |

57. **Eqüidiferenças.** Consideremos as duas razões aritméticas $15 - 11$ e $13 - 9$. Sendo iguais, podemos escrever:

$$15 - 11 = 13 - 9$$

Esta igualdade recebe, em Matemática, o nome de *eqüidiferença*.

Eqüidiferença é a igualdade entre duas razões aritméticas.

Uma eqüidiferença pode ser escrita de dois modos diferentes:

$$15 - 11 = 13 - 9 \qquad 15 : 11 : 13 : 9$$

No primeiro caso leremos: *15 menos 11 é igual a 13 menos 9*.

No segundo caso leremos: *15 está para 11 assim como 13 está para 9*.

Os quatro números que constituem uma eqüidiferença são chamados *têrmos* da eqüidiferença. O primeiro e o terceiro são os *antecedentes*, o segundo e o quarto são os *conseqüentes*; o primeiro e o quarto são chamados *extremos*, o segundo e o terceiro são chamados *meios*; o primeiro e o segundo constituem a *primeira razão*, o terceiro e o quarto constituem a *segunda razão*.

Eqüidiferença contínua é aquela cujos meios são iguais. Por exemplo, as eqüidiferenças $15 : 11 : 11 : 7$ e $a : m : m : b$ são eqüidiferenças contínuas porque os meios são iguais. A cada um dos meios de uma eqüidiferença contínua dá-se o nome de *meio aritmético* ou *meio diferencial* ou vulgarmente **média aritmética**.

Exercícios em classe

- Escrever duas eqüidiferenças cuja primeira razão seja $12 : 5$.
- Escrever duas eqüidiferenças cuja segunda razão seja $\frac{1}{2} : \frac{2}{5}$.
- Escrever uma eqüidiferença cujos antecedentes sejam $0,2$ e $0,24$.
- Escrever uma eqüidiferença cujos conseqüentes sejam $\frac{3}{5}$ e $\frac{4}{9}$.
- Escrever uma eqüidiferença contínua cujo meio seja $\frac{3}{4}$.
- Verificar se $0,48 : 0,36 : 0,75 : 0,63$ é realmente uma eqüidiferença.
- Verificar se $\frac{3}{4} : \frac{5}{8} : \frac{2}{3} : \frac{13}{24}$ é realmente uma eqüidiferença.
- Qual é a condição necessária e suficiente para que quatro números a, b, c, d , formem uma eqüidiferença?

58. **Proporções.** Consideremos as duas razões geométricas $24 \div 8$ e $15 \div 5$. Sendo iguais, podemos escrever:

$$24 \div 8 = 15 \div 5$$

Esta igualdade recebe, em Matemática, o nome de *proporção*.

Proporção é a igualdade entre duas razões geométricas.

Uma proporção pode ser escrita de dois modos diferentes:

$$\frac{24}{8} = \frac{15}{5} \qquad 24 : 8 :: 15 : 5$$

No primeiro caso leremos: *24 dividido por 8 é igual a 15 dividido por 5* ou *24 sobre 8 é igual a 15 sobre 5*.

No segundo caso leremos: *24 está para 8 assim como 15 está para 5*.

Os quatro números que constituem uma proporção são chamados *têrmos* da proporção. O primeiro e o terceiro são os *antecedentes*, o segundo e o quarto são os *conseqüentes*; o primeiro e o quarto são chamados *extremos*, o segundo e o terceiro são chamados *meios*; o primeiro e o segundo constituem a *primeira razão*; o terceiro e o quarto constituem a *segunda razão*.

Proporção contínua é aquela cujos meios são iguais. Por exemplo, as proporções $36 : 12 :: 12 : 4$ e $a : m :: m : b$, são proporções contínuas porque os meios são iguais. A cada um dos meios de uma proporção contínua dá-se o nome de *meio geométrico* ou *meio proporcional* ou vulgarmente **média geométrica**.

Chama-se **quarta proporcional** de três números dados em uma certa ordem, um quarto número que forma com os três números dados, uma proporção.

Assim, dados os três números a , b , e c , e chamando x à quarta proporcional, devemos ter:

$$a : b :: c : x$$

Chama-se **terceira proporcional** de dois números dados em uma certa ordem, um terceiro número que forma com os dois números dados uma proporção contínua, na qual o primeiro dos números dados é o primeiro extremo, e os dois meios são iguais ao segundo número dado.

Assim, dados os dois números a e b , e chamando x à terceira proporcional, devemos ter:

$$a : b :: b : x$$

Exercícios em classe

1. Escrever duas proporções cuja primeira razão seja $8 : 2$.
2. Escrever duas proporções cuja segunda razão seja $\frac{1}{2} : \frac{2}{5}$.
3. Escrever uma proporção cujos antecedentes sejam $0,04$ e $0,9$.
4. Escrever uma proporção cujos consequentes sejam $\frac{3}{5}$ e $\frac{2}{3}$.
5. Escrever uma proporção contínua cujo meio seja $\frac{2}{3}$.
6. Verificar se $0,33 : 0,03 :: 297 : 27$ é realmente uma proporção.
7. Verificar se $\frac{3}{4} : \frac{5}{8} :: \frac{3}{5} : \frac{5}{9}$ é realmente uma proporção.
8. Qual é a condição necessária e suficiente para que quatro números a , b , c , d , formem uma proporção?

59. Proposições; teoremas e postulados. (*) *Juízo é o ato intelectual com que afirmamos ou negamos uma coisa de outra. No primeiro caso o juízo chama-se afirmativo; no segundo, negativo. O sol brilha, é juízo afirmativo; a lua não tem luz própria, é juízo negativo. Proposição é a expressão de um juízo por meio de palavras.* (**) Por exemplo:

(*) Neste parágrafo e nos seguintes (60, 61 e 62) tomámos a liberdade de entrar com alguns ensaios sobre o método dedutivo, que será largamente empregado na terceira série ginásial. Repetimos mais uma vez que é preciso semear para colher.

(**) *Lógica*, de J. Balmes.

I. O homem é um ser mortal.

II. Duas quantidades iguais a uma terceira são iguais entre si.

III. Sendo $x = y$, então $x + a = y + a$, $x - a = y - a$,

$$xa = ya, \frac{x}{a} = \frac{y}{a}$$

IV. Se quatro números formam uma equidiferença, a soma dos extremos é igual à soma dos meios.

V. Se quatro números formam uma proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios.

Em Matemática há duas espécies principais de proposições: **postulados e teoremas.**

Postulado é a proposição aceita sem prova; as proposições II e III são postulados.

Teorema é a proposição aceita mediante uma demonstração ou prova; as proposições IV e V são teoremas.

Um teorema se divide sempre em duas partes: *hipótese* e *tese*. A hipótese é a suposição, é o ponto de partida; a tese é a conclusão a que se quer chegar; é aquilo que se pretende provar. Consideremos a proposição IV; é um teorema porque nós não aceitamos esta verdade da Matemática, sem a prova necessária. Neste teorema, a hipótese, isto é, a suposição, o ponto de partida, é que quatro números quaisquer a , b , c , d , formam uma equidiferença, isto é, $a - b : b - c : c - d$; a tese, isto é, aquilo que nós exigimos que seja provado é que $a + d = b + c$.

Teorema recíproco de um teorema dado ou, simplesmente, **recíproca de um teorema dado**, é o teorema que se obtém quando se toma a tese do teorema dado, como hipótese, e a hipótese como tese. Assim, em relação à proposição IV, a recíproca é a seguinte:

Se a soma de dois números é igual à soma de outros dois, estes quatro números formam uma equidiferença, colocando-se as parcelas de uma das somas nos extremos e as parcelas da outra nos meios.

A demonstração de um teorema é o trabalho intelectual necessário para provar o que nele se afirma. Há em Matemática milhares de teoremas. Entretanto, poucos são os métodos necessários para demonstrá-los. Entre os mais empregados citaremos, por enquanto, os seguintes:

I. *Demonstração direta.*

II. *Demonstração por absurdo.*

O primeiro método consiste em tomar a hipótese e, com o auxílio de definições, axiomas e teoremas já demonstrados, deduzir dela a tese ou conclusão a que queremos chegar.

O segundo método consiste em negar a tese e verificar que a cada negação da tese corresponde um absurdo, isto é, uma negação da hipótese. Ora, se a negação da tese nos conduz a um absurdo, forçoso é aceitá-la.

No decorrer dêste curso elementar de Matemática, encontraremos numerosos exemplos dêstes dois métodos de demonstração.

60. Teorema fundamental das equidiferenças. *Se quatro números formam uma equidiferença, a soma dos extremos é igual à soma dos meios. (*)*

$$H. \{ a . b : c . d$$

$$T. \{ a + d = b + c$$

A nossa hipótese ou suposição é que os números a, b, c e d formam uma equidiferença, isto é,

$$a . b : c . d$$

De acôrdo com a definição de uma equidiferença (§ 57), podemos escrever:

$$a - b = c - d$$

Somando-se $b + d$ a ambos os membros desta igualdade, as duas somas ainda serão iguais; portanto,

$$a - b + b + d = c - d + b + d \quad \therefore$$

$$a + d + b - b = c + b + d - d$$

E observando que $b - b = 0$ e $d - d = 0$, teremos:

$$a + d = b + c$$

C. Q. D.

Observação. Reparem bem os estudantes que, para demonstrar êste teorema, tomámos a hipótese, lembrámos a definição de uma equidiferença, aplicámos à igualdade resultante o axioma da adição, suprimimos as dife-

(*) Esta demonstração e as seguintes podem ser feitas com números, se assim fôr mais conveniente. Aliás, parece-nos útil dar primeiramente uma demonstração numérica, antes da literal.

renças $b - b$ e $d - d$, e chegámos assim à tese. O método empregado na demonstração dêste teorema foi o direto.

Queremos verificar se $a . b : c . d$ é realmente uma equidiferença. Podemos fazê-lo de duas maneiras distintas:

a) *verificando se* $a - b = c - d$.

b) *verificando se* $a + d = b + c$.

Por exemplo, $17 . 12 : 13 . 8$ é realmente uma equidiferença porque $17 - 12 = 13 - 8$ ou porque $17 + 8 = 12 + 13$; $10 . 7 : 11 . 5$ não é uma equidiferença porque $10 - 7 \neq 11 - 5$, ou porque $10 + 5 \neq 7 + 11$.

Logo, não podemos escrever $10 . 7 : 11 . 5$.

Observação. O sinal \neq significa *diferente de*.

Teorema recíproco. *Sendo a soma de dois números igual à soma de outros dois, êstes quatro números formam uma equidiferença, colocando-se as parcelas de uma soma nos extremos (ou nos meios) e as parcelas da outra nos meios (ou nos extremos).*

$$H. \{ m + n = r + s$$

$$T. \{ m . r : s . n$$

Tomando-se a hipótese e subtraindo-se $n + r$ de ambos os membros desta igualdade, os dois restos serão iguais; portanto,

$$m + n - n - r = r + s - n - r \quad \therefore$$

$$m - r = s - n$$

Esta igualdade é uma equidiferença (§ 57); logo,

$$m . r : s . n \quad \text{C.Q.D.}$$

Corolário I. *Alternando-se, invertendo-se ou transpondo-se os termos de uma equidiferença, êles constituem sempre uma equidiferença.*

Alternar é mudar a posição dos meios ou dos extremos; *invert* é colocar os meios no lugar dos extremos; *transpor* é mudar a posição das razões.

Axioma. Somando-se a mesma quantidade a ambos os membros de uma igualdade, as duas somas formarão ainda uma igualdade.

Por exemplo, se tivermos

$$A = B$$

teremos também

$$A + M = B + M$$

Axioma. Subtraindo-se a mesma quantidade de ambos os membros de uma igualdade, os dois restos formarão ainda uma igualdade.

Por exemplo, se tivermos

$$A = B$$

teremos também

$$A - M = B - M$$

Assim, dada a equidiferença $a . b : c . d$

alternar é escrever $a . c : b . d$

inverter é escrever $b . a : d . c$

transpor é escrever $c . d : a . b$

Vamos provar que estas transformações podem ser feitas, continuando os quatro números a formar uma equidiferença.

Consideremos a equidiferença

$$m . n : r . s \quad (A)$$

De acôrdo com o teorema fundamental, temos: $m+s=n+r$.

Alternando, isto é, mudando a posição dos meios ou a dos extremos da equidiferença, A, teremos:

$$m . r : n . s \quad (B) \quad s . n : r . m \quad (C)$$

Quer na expressão B, quer na expressão C, a soma dos extremos é $m+s$, e a soma dos meios é $n+r$. E estas duas somas sendo iguais, por hipótese, as expressões B e C são realmente equidiferenças.

Voltando à equidiferença A, e invertendo isto é, colocando os meios no lugar dos extremos, teremos:

$$n . m : s . r \quad (D)$$

E sendo a soma dos meios, $m+s$, igual à soma dos extremos, $r+n$, por hipótese, a expressão D é realmente uma equidiferença.

Voltando à equidiferença A e transpondo, isto é, mudando a posição das razões, teremos:

$$r . s : m . n \quad (E)$$

Ora, a expressão E é evidentemente uma equidiferença, porque, sendo $m-n=r-s$, por hipótese, é claro que $r-s=m-n$.

Êste corolário nos permite escrever uma equidiferença de oito modos diferentes.

Seja a equidiferença $a . b : m . n$.

Em primeiro lugar temos $a . b : m . n$ (1)

Alternando $a . m : b . n$ (2)

Invertendo os termos da primeira . $b . a : n . m$ (3)

Alternando $b . n : a . m$ (4)

Transpondo os termos da primeira . $m . n : a . b$ (5)

Alternando $m . a : n . b$ (6)

Alternando os termos da primeira . $n . b : m . a$ (7)

Alternando $n . m : b . a$ (8)

Corolário II. *Um extremo qualquer de uma equidiferença é igual à soma dos meios menos o outro extremo.*

$$H. \{ a . b : c . d \quad T. \{ a = b + c - d$$

Tomando a hipótese e aplicando-lhe o teorema fundamental das equidiferenças, teremos:

$$a + d = b + c$$

Subtraindo-se d de ambos os membros desta igualdade, resulta:

$$a + d - d = b + c - d \therefore$$

$$a = b + c - d \quad C. Q. D.$$

Corolário III. *Um meio qualquer de uma equidiferença é igual à soma dos extremos menos o outro meio.*

$$H. \{ m . n : r . s \quad T. \{ n = m + s - r$$

Tomando a hipótese e aplicando-lhe o teorema fundamental das equidiferenças, teremos:

$$n + r = m + s$$

Subtraindo-se r de ambos os membros desta igualdade, resulta:

$$n + r - r = m + s - r \therefore$$

$$n = m + s - r \quad C. Q. D.$$

Corolário IV. *A média aritmética de dois números é igual à semissoma destes mesmos números.*

$$H. \begin{cases} m \text{ é a média aritmética} \\ \text{dos números } a \text{ e } b. \end{cases} \quad T. \begin{cases} m = \frac{a+b}{2} \end{cases}$$

Sendo m a média aritmética dos números a e b , segue-se que estes três números formam uma equidiferença contínua na qual m é o meio. Portanto,

$$a \cdot m : m \cdot b$$

Aplicando a esta equidiferença a propriedade fundamental das equidiferenças, teremos:

$$2m = a + b$$

Dividindo-se ambos os membros desta igualdade por 2, resulta:

$$m = \frac{a+b}{2} \quad \text{C. Q. D.}$$

Por analogia, a média aritmética de n números é a soma destes números, dividida por n . A média aritmética dos números 7, 8 e 9 é $(7 + 8 + 9) \div 3$; dos números 5, 6, 11 e 14 é $(5 + 6 + 11 + 14) \div 4$; etc..

Corolário V. Somando-se ou subtraindo-se o mesmo número a um extremo e a um meio de uma equidiferença, esta continua a existir.

$$H. \{ a \cdot b : c \cdot d \quad T. \{ (a+m) \cdot b : (c+m) \cdot d$$

De acôrdo com a hipótese temos:

$$a - b = c - d$$

Somando m a ambos os membros desta igualdade, teremos:

$$a - b + m = c - d + m$$

Mudando a ordem dos termos de ambos os membros desta igualdade, o que é permitido, contanto que cada termo conserve o seu sinal, teremos:

$$a + m - b = c + m - d$$

Pondo-se entre parênteses os dois primeiros termos de cada um dos membros desta igualdade, resulta:

$$(a+m) - b = (c+m) - d$$

Esta igualdade, sendo constituída por duas diferenças, é uma equidiferença (§57); logo,

$$(a+m) \cdot b : (c+m) \cdot d \quad \text{C. Q. D.}$$

De modo análogo provaríamos que:

$$(a-m) \cdot b : (c-m) \cdot d$$

Este corolário pode ser enunciado do seguinte modo:

Se quatro números formam uma equidiferença, somando-se ou subtraindo-se o mesmo número aos antecedentes ou aos conseqüentes ou a ambos os termos de uma mesma razão, a equidiferença continua a existir.

Exercícios. Série XX

Calcular o valor de x nas equidiferenças seguintes:

1. $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{9} : \frac{7}{8} \cdot x$
2. $5 \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{10} : x \cdot 7 \frac{2}{3}$
3. $4,2 \cdot 3,7 : 15 \cdot x$
4. $8,4 \cdot x : 9,3 \cdot 7,28$
5. $0,333 \dots \cdot 0,0222 \dots : 2 \frac{3}{4} \cdot x$
6. $\frac{2}{3}$ de $5 \frac{1}{8} \cdot x : 0,936 \cdot 0,2111 \dots$
7. Calcular a média aritmética de $7 \frac{1}{2}$ e $11 \frac{3}{4}$.
8. Calcular a média aritmética de 0,25 e 3,789.
9. Qual a média aritmética de $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$ e $\frac{1}{7}$?
10. Calcular a média aritmética de $\frac{9}{10}$, $\frac{4}{25}$ e 0,13.
11. Calcular a média aritmética de 0,444... e 3,0222...
12. Calcular a média aritmética de $2 \frac{1}{3}$, $3 \frac{1}{4}$, $5 \frac{1}{5}$ e 2,25.

61. Teorema fundamental das proporções. Se quatro números formam uma proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios.

$$H. \{ a : b :: c : d \quad T. \{ ad = bc$$

A nossa hipótese é que os números a , b , c e d formam uma proporção, isto é,

$$a : b :: c : d$$

De acôrdo com a definição de uma proporção (§ 58) podemos escrever:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Multiplicando-se ambos os membros desta igualdade por bd , os dois produtos ainda serão iguais; portanto,

$$\frac{abd}{b} = \frac{bcd}{d}$$

E, simplificando-se as duas frações,

$$ad = bc$$

Observação. Reparem bem os estudantes que, para demonstrar êste teorema, tomámos a hipótese, lembrámos a definição de uma proporção, aplicámos à igualdade resultante o axioma da multiplicação, simplificámos as frações resultantes e chegámos assim à tese. Portanto, êste teorema foi demonstrado de um modo direto.

Queremos verificar se $a : b :: c : d$ é realmente uma proporção. Podemos fazê-lo de duas maneiras distintas:

- a) verificando se $a \div b = c \div d$
 b) verificando se $a \times d = b \times c$

Por exemplo, $15 : 5 :: 12 : 4$ é realmente uma proporção porque $15 \div 5 = 12 \div 4$ ou porque $15 \times 4 = 5 \times 12$; $15 : 5 :: 10 : 2$ não é uma proporção porque $15 \div 5 \neq 10 \div 2$ ou porque $15 \times 2 \neq 5 \times 10$ e, portanto, não podemos escrever $15 : 5 :: 10 : 2$.

Teorema recíproco. Sendo o produto de dois números igual ao produto de outros dois, êstes quatro números formam uma proporção, colocando-se os fatores de um produto nos extremos (ou nos meios) e os fatores do outro nos meios (ou nos extremos).

$$H. \{ mn = rs$$

$$T. \{ m : r :: s : n$$

Axioma. Multiplicando-se ambos os membros de uma igualdade por uma mesma quantidade os dois produtos formarão ainda uma igualdade.

Por exemplo, se tivermos

$$A = B$$

teremos também

$$AM = BM$$

Tomando-se a hipótese e dividindo-se ambos os membros desta igualdade por nr , os dois quocientes serão iguais; portanto,

$$\frac{mn}{nr} = \frac{rs}{nr}$$

Simplificando-se as duas frações, resulta:

$$\frac{m}{r} = \frac{s}{n}$$

Esta igualdade é uma proporção (§ 58); logo,

$$m : r :: s : n \quad \text{C. Q. D.}$$

Axioma. Dividindo-se ambos os membros de uma igualdade por uma mesma quantidade, diferente de zero, os dois quocientes formarão ainda uma igualdade.

Por exemplo, se tivermos

$$A = B$$

teremos também

$$\frac{A}{M} = \frac{B}{M}$$

Corolário I. Alternando-se, invertendo-se ou transpondo-se os termos de uma proporção, êles constituem sempre uma proporção.

Observação. Alternar, inverter ou transpor os termos de uma proporção é o mesmo que alternar, inverter ou transpor os termos de uma equidiferença.

Consideremos a proporção:

$$a : b :: m : n \quad (A)$$

De acôrdo com o teorema fundamental, temos: $an = bm$. Alternando, isto é, mudando a posição dos meios ou dos extremos da proporção A, teremos:

$$a : m :: b : n \quad (B) \quad n : b :: m : a \quad (C)$$

Quer na expressão B, quer na expressão C, o produto dos extremos é an , e o produto dos meios é bm . E êstes dois produtos sendo iguais, por hipótese, as expressões B e C são realmente proporções.

Voltando à proporção A e invertendo, isto é, colocando os meios no lugar dos extremos, teremos:

$$b : a :: n : m \quad (D)$$

E sendo o produto dos extremos, bm , igual ao produto dos meios, an , a expressão D é realmente uma proporção.

Voltando à proporção A, e transpondo, isto é, mudando a posição das razões, teremos:

$$m : n :: a : b \quad (E)$$

Ora, a expressão E é realmente uma proporção, porque sendo $a \div b = m \div n$, por hipótese, é claro que $m \div n = a \div b$.

Este corolário nos permite escrever uma proporção de oito modos diferentes.

Seja a proporção $a : b :: c : d$.

Em primeiro lugar $a : b :: c : d$ (1)

Alternando $a : c :: b : d$ (2)

Invertendo os termos da primeira. $b : a :: d : c$ (3)

Alternando $b : d :: a : c$ (4)

Transpondo os termos da primeira. $c : d :: a : b$ (5)

Alternando $c : a :: d : b$ (6)

Alternando os termos da primeira. $d : b :: c : a$ (7)

Alternando $d : c :: b : a$ (8)

Corolário II. Um extremo qualquer de uma proporção é igual ao produto dos meios dividido pelo outro extremo.

$$H. \{ a : b :: c : d \quad T. \left\{ a = \frac{bc}{d} \right.$$

Tomando a hipótese e aplicando-lhe o teorema fundamental das proporções, teremos:

$$ad = bc$$

Dividindo-se ambos os membros desta igualdade por d , resulta:

$$a = \frac{bc}{d} \quad C. Q. D.$$

Corolário III. Um meio qualquer de uma proporção é igual ao produto dos extremos dividido pelo outro meio.

$$H. \{ m : n :: r : s \quad T. \left\{ n = \frac{ms}{r} \right.$$

Tomando a hipótese e aplicando-lhe o teorema fundamental das proporções, teremos:

$$nr = ms$$

Dividindo-se ambos os membros desta igualdade por r , resulta:

$$n = \frac{ms}{r} \quad C. Q. D.$$

Corolário IV. A média geométrica de dois números é igual à raiz quadrada do produto destes mesmos números.

$$H. \left\{ \begin{array}{l} m \text{ é a média geométrica} \\ \text{dos números } a \text{ e } b. \end{array} \right. \quad T. \left\{ m = \sqrt{ab} \right.$$

Sendo m a média geométrica dos números a e b , segue-se que estes três números formam uma proporção contínua na qual m é o meio. Portanto,

$$a : m :: m : b$$

Aplicando a esta proporção o teorema fundamental das proporções, teremos:

$$m^2 = ab$$

Extraindo-se a raiz quadrada de ambos os membros desta igualdade, resulta:

$$m = \sqrt{ab} \quad C. Q. D.$$

Corolário V. Multiplicando-se ou dividindo-se um extremo e um meio de uma proporção por um mesmo número, a proporção continua a existir.

$$H. \{ a : b :: c : d \quad T. \left\{ \begin{array}{l} am : b :: cm : d \\ \frac{a}{m} : b :: \frac{c}{m} : d \end{array} \right.$$

De acôrdo com a hipótese, temos:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Multiplicando-se e dividindo-se ambos os membros desta igualdade por m , resulta:

$$\frac{a}{b} \times m = \frac{c}{d} \times m \therefore$$

$$\frac{am}{b} = \frac{cm}{d} \therefore$$

$$am : b :: cm : d$$

C. Q. D.

$$\frac{a}{b} \div m = \frac{c}{d} \div m \therefore$$

$$\frac{a \div m}{b} = \frac{c \div m}{d} \therefore$$

$$\frac{a}{m} : b :: \frac{c}{m} : d$$

C. Q. D.

Este corolário pode ser enunciado do seguinte modo:

Se quatro números formam uma proporção, multiplicando-se ou dividindo-se os antecedentes ou os conseqüentes ou ambos os termos de uma das razões, por um mesmo número, a proporção continua a existir.

Exercícios, Série XXI

- Um retângulo tem 25m de comprimento e 15m de largura. Qual é a razão de suas dimensões?
- Sabendo-se que $\frac{5}{3} : \frac{4}{9} :: \frac{2}{3} : x$, calcular x .
- Calcular x na proporção $3,2 : 3,5 :: 9,6 : x$.
- Escrever uma proporção cujos termos sejam 5,2 - 3,2 - 12,8 - 1,3.
- Idem, com os números 407, 53, 583 e 37.
- E' dada a igualdade $34 \times 175 = 238 \times 25$. Deduzir desta igualdade uma proporção e escrever esta de todos os modos possíveis.
- Qual é a razão entre 12 dias e 4 meses?
- Misturam-se 0,6 litros de água com 3 litros de vinho. Qual a razão entre a água e o vinho? Entre a água e a mistura? Entre o vinho e a mistura?
- Calcular x na proporção $3 \frac{1}{2} : \frac{9}{10} :: x : 7 \frac{1}{4}$.
- Idem, na proporção $\sqrt{0,25} : \sqrt{0,36} :: 1,2 : x$.
- Idem, na proporção $9,1 : 8,3 :: x : 33,2$.
- Simplificar os termos da proporção $10 : 21 :: 20 : 42$.
- E' dada a proporção $9,1 : 2,6 :: 0,56 : 0,16$. Transformar seus termos em números inteiros e, em seguida, simplificar.
- Inteirar os termos da proporção $\frac{3}{5} : \frac{2}{3} :: x : \frac{9}{10}$, sem tocar em x .

- Idem, em relação à proporção $\frac{5}{6} : x :: \frac{7}{12} : \frac{4}{5}$.
- Calcular x na proporção $105 : x :: x : 420$.
- Idem, na proporção $1925 : x :: x : 77$.
- Idem, na proporção $13 : x :: x : 6$.
- Idem, na proporção $20 : x :: x : 30$.
- A razão de dois números é 1,2. Sendo 5,28 o antecedente, qual é o conseqüente.
- A razão de dois números é 2,5. Sendo 1,75 o conseqüente, qual é o antecedente?
- A razão entre a capacidade de um copo e a de uma garrafa é $\frac{1}{4}$. Se a capacidade do copo é de 0,24 litros, qual é a da garrafa?
- Calcular x na proporção $0,444... : 0,0222... :: 4 \frac{1}{5} : x$.
- Idem, na proporção $\frac{2}{3}$ de $5 \frac{1}{2} : x :: 0,2111... : \frac{1}{5}$.
- Idem, na proporção $\frac{5}{3} : x :: \frac{2}{5} : \frac{5}{6}$.
- Calcular a média geométrica de 0,423 e 3,6 a menos de 0,001.
- Calcular a média geométrica de $7 \frac{1}{2}$ e $3 \frac{2}{5}$ a menos de 0,001.
- Calcular a média geométrica de $\frac{9}{10}$ e 0,444... a menos de 0,001.
- O produto dos quatro termos de uma proporção contínua é 1296 e o último termo é a terça parte da soma dos meios. Calcular os quatro termos.

Solução. Seja $a : m :: m : b$ a proporção pedida. De acôrdo com o problema proposto, temos:

$$a \times m \times m \times b = 1296 \quad \Bigg| \quad b = \frac{2m}{3}$$

Sendo $a \times m \times m \times b = 1296$, teremos:

$$m^2 \times ab = 1296$$

Mas $ab = m^2$ (teorema fundamental das proporções); logo,

$$m^2 \times m^2 = 1296 \therefore m^2 = \sqrt{1296} \therefore m^2 = 36 \therefore m = 6$$

E sendo $m = 6$, resulta que $b = \frac{2m}{3} \therefore b = 4$

E teremos:

$$a : 6 :: 6 : 4 \quad \therefore a = \frac{6 \times 6}{4} = 9$$

Resposta. A proporção pedida é $9 : 6 :: 6 : 4$.

30. Calcular os quatro termos de uma proporção contínua, sabendo-se que o produto dos quatro termos é 20 736 e que o primeiro termo é o quádruplo de um dos meios.

31. Calcular os quatro termos de uma proporção contínua, sabendo-se que o produto dos quatro termos é 810 000 e que o primeiro contém 36 vezes o quarto.

32. Dada a proporção $35 : 2x :: 76 : 4$, calcular x .

Observação. Calcular primeiramente $2x$.

33. Qual é o valor de x na proporção $3x : \frac{1}{2} :: \frac{2}{3} : \frac{2}{5}$?

34. Calcular x na proporção $0,4 : \frac{3}{8} :: 5\frac{1}{2} : 4x$.

35. Idem, na proporção $\frac{6}{11} : \frac{7}{22} :: 5x : 0,3333\dots$

36. Sabendo-se que $a : b :: c : d$, provar que $ma : nb :: mc : nd$.

62. **Propriedades das proporções.** As proporções têm numerosas propriedades cujo conhecimento é indispensável pela sua larga aplicação num curso de Matemática.

Primeira propriedade. Em uma proporção, a soma ou diferença dos dois primeiros termos está para o segundo, assim como a soma ou diferença dos dois últimos está para o quarto.

Dividiremos a demonstração desta propriedade em três partes. (*)

Primeira parte. Em uma proporção, a soma dos dois primeiros termos está para o segundo, assim como a soma dos dois últimos está para o quarto.

$$H. \left\{ \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \right. \quad (**) \quad T. \left\{ \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \right.$$

(*) Assim tenho feito há muitos anos com os meus alunos, com excelentes resultados. E, esta propriedade estando bem sabida e compreendida, o conhecimento das seguintes torna-se extremamente fácil para os estudantes.

(**) Nestas demonstrações escreveremos uma proporção sob esta forma.

Tomando a hipótese e somando a unidade a ambos os membros, teremos:

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$$

Substituindo-se a unidade do 1.º membro por $\frac{b}{b}$ e a do 2.º por $\frac{d}{d}$, resulta:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{b} = \frac{c}{d} + \frac{d}{d}$$

Em lugar de 1, podemos escrever $\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}$,

$\frac{7}{7}, \frac{10}{10}, \frac{b}{b}, \frac{d}{d}, \frac{x}{x}$, etc..

Qualquer uma destas frações aparentes é igual à unidade.

E, efetuando as adições indicadas, teremos:

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \dots\dots\dots$$

C. Q. D.

Segunda parte. Em uma proporção, a diferença dos dois primeiros termos está para o segundo, assim como a diferença dos dois últimos está para o quarto.

$$H. \left\{ \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \right. \quad T. \left\{ \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \right.$$

Demonstração. É bastante repetir a demonstração da 1.ª parte, substituindo-se o sinal + pelo sinal -, e a operação de somar pela operação de subtrair.

Terceira parte. Em uma proporção, a soma ou diferença dos dois primeiros termos está para o segundo, assim como a soma ou diferença dos dois últimos está para o quarto.

$$H. \left\{ \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \right. \quad T. \left\{ \frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d} \right.$$

Demonstração. É bastante repetir a demonstração da 1.ª parte, substituindo-se a palavra somando pela frase somando e subtraindo; o sinal + pelo sinal \pm (mais ou menos); a palavra adições pela frase adições e subtrações.

Corolário I. Em uma proporção, a soma ou diferença dos dois primeiros termos está para o primeiro, assim como a soma ou diferença dos dois últimos está para o terceiro.

$$H. \left\{ \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \right. \quad T. \left\{ \frac{a \pm b}{a} = \frac{c \pm d}{c} \right.$$

Em primeiro lugar, tomando a hipótese e alternando seus termos, teremos: (§61)

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \quad (A)$$

Isto feito, voltando à hipótese e aplicando-lhe a primeira propriedade que acabámos de demonstrar, teremos:

$$\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$$

Alternando:..... $\frac{a \pm b}{c \pm d} = \frac{b}{d}$ (B)

Porém, de acôrdo com a proporção (A) a razão $\frac{b}{d}$ é igual à razão $\frac{a}{c}$. Substituindo-se na proporção (B) resulta:

$$\frac{a \pm b}{c \pm d} = \frac{a}{c}$$

E alternando..... $\frac{a \pm b}{a} = \frac{c \pm d}{c}$ C. Q. D.

Observação. Seja a proporção $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$. Aplicando a esta proporção a propriedade demonstrada (segunda parte) teremos: $\frac{3-5}{5} = \frac{6-10}{10}$. E as operações 3-5 e 6-10 são impossíveis (por ora).

Corolário II. Em uma proporção, a soma dos dois primeiros termos está para a sua diferença, assim como a soma dos dois últimos está para a sua diferença.

$$H. \left\{ \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \right. \quad T. \left\{ \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d} \right.$$

Tomando a hipótese e aplicando a propriedade demonstrada, teremos:

$$\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$$

Alternando..... $\frac{a \pm b}{c \pm d} = \frac{b}{d}$

Separando as duas porções..... $\left\{ \begin{array}{l} \frac{a+b}{c+d} = \frac{b}{d} \\ \frac{a-b}{c-d} = \frac{b}{d} \end{array} \right.$

Axioma. Duas quantidades iguais a uma terceira são iguais entre si.
Por exemplo, se tivermos
A = M
B = M
podemos afirmar que
A = B

Aplicando o axioma indicado ao lado,

$$\frac{a+b}{c+d} = \frac{a-b}{c-d}$$

E alternando..... $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$

C. Q. D.

Aplicação I. Dada a proporção $\frac{x}{y} = \frac{3}{5}$, calcular x e y , sabendo-se que $x + y = 200$.

Aplicando à proporção dada a propriedade demonstrada, teremos:

$x + y : y :: 3 + 5 : 5 \therefore$	$x + y = 200$	<i>Resposta.</i>
$200 : y :: 8 : 5 \therefore$	$x + 125 = 200$	$x = 75$
$y = \frac{200 \times 5}{8} = 125$	$x = 200 - 125 = 75$	$y = 125$

Aplicação II. Dada a proporção $\frac{x}{y} = \frac{3}{7}$, calcular x e y , sabendo-se que $y - x = 80$.

Invertendo os termos da proporção dada, e recorrendo à propriedade já demonstrada, teremos:

$y : x :: 7 : 3 \therefore$	$y - x = 80$	<i>Resposta.</i>
$y - x : x :: 7 - 3 : 3 \therefore$	$y - 60 = 80$	$x = 60$
$80 : x :: 4 : 3 \therefore$	$y = 80 + 60 = 140$	$y = 140$
$x = \frac{80 \times 3}{4} = 60$		

Aplicação III. Dada a proporção $\frac{x}{y} = \frac{2}{5}$, calcular x e y , sabendo-se que $4x + 5y = 99$.

Multiplicando-se os antecedentes da proporção dada por 4, e os consequentes por 5, os quatro produtos continuam a formar proporção. (§61, 5.º corolário) E teremos sucessivamente:

$4x : 5y :: 8 : 25$	\therefore	$4x + 5y = 99$	<i>Resposta.</i>
$4x + 5y : 5y :: 8 + 25 : 25$	\therefore	$4x + 75 = 99$	
$99 : 5y :: 33 : 25$	\therefore	$4x = 99 - 75$	
$5y = \frac{99 \times 25}{33} = 75$	\therefore	$4x = 24$	
$y = 15$	\therefore	$x = 6$	

Exercícios. Série XXII

1. Dada a proporção $24 : 8 :: 15 : 5$ verificar a verdade enunciada na primeira propriedade e seu corolário.

Calcular x e y nas proporções seguintes:

- | | |
|-------------------------|-----------------|
| 2. $x : y :: 3,5 : 2,1$ | $x + y = 28$ |
| 3. $1,7 : 1,1 :: x : y$ | $x + y = 0,56$ |
| 4. $x : y :: 35 : 0,65$ | $x + y = 35,65$ |
| 5. $x : y :: 91 : 299$ | $2x + 3y = 166$ |
| 6. $23 : 31 :: x : y$ | $y - x = 40$ |
| 7. $x : y :: 123 : 180$ | $3y - 2x = 98$ |

8. A idade de um pai está para a de seu filho, assim como 11 está para 3. Calcular as duas idades sabendo-se que sua diferença é de 40 anos.

9. Duas quantias estão entre si, como 7 está para 15; calculá-las sabendo-se que a diferença entre a segunda e a primeira é de 64 cruzeiros.

10. Os comprimentos de duas peças de fazenda estão entre si como 11 está para 15. A diferença entre o quádruplo do comprimento da primeira e o triplo do comprimento da segunda é de 40m. Calcular os dois comprimentos.

11. Um terreno cuja área mede $672m^2$, foi dividido em dois quinhões cuja razão é $\frac{7}{15}$. Calcular os dois quinhões.

12. Depositaram-se 11 000 litros de gasolina em dois tanques, os quais ficaram completamente cheios. Calcular a capacidade de cada um dos tanques, sabendo-se que a razão entre as duas capacidades é $\frac{3}{11}$.

13. Calcular uma fração equivalente a $\frac{4}{11}$ e cuja soma dos termos seja 120.

14. Calcular uma fração equivalente a $\frac{11}{12}$ e cuja diferença dos termos seja 25.

15. Calcular dois números sabendo-se que eles estão entre si como 11 está para 5, e que a diferença de seus quadrados é 3 456.

16. Calcular dois números sabendo-se que eles estão entre si como 2 está para 5, e que a soma de seus quadrados é 5 684.

Segunda propriedade. Em uma proporção, a soma ou diferença dos antecedentes está para a soma ou diferença dos consequentes assim como qualquer antecedente está para o seu consequente.

$$H. \left\{ \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \right. \quad T. \left\{ \frac{a \pm c}{b \pm d} = \frac{c}{d} \right.$$

Tomando a hipótese e alternando seus termos, teremos:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \tag{A}$$

Aplicando-se a primeira propriedade à proporção (A) resulta:

$$\frac{a \pm c}{c} = \frac{b \pm d}{d}$$

Alternando..... $\frac{a \pm c}{b \pm d} = \frac{c}{d}$ C. Q. D.

Observação. Sendo $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$, por hipótese, também podemos escrever

$$\frac{a \pm c}{b \pm d} = \frac{a}{b}$$

Corolário. Em uma proporção, a soma dos antecedentes está para a sua diferença, assim como a soma dos consequentes está para a sua diferença.

$$H. \left\{ \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \right. \quad T. \left\{ \frac{a + c}{a - c} = \frac{b + d}{b - d} \right.$$

Tomando a hipótese e aplicando a propriedade que acabamos de demonstrar, teremos:

$$\frac{a \pm c}{b \pm d} = \frac{a}{b}$$

$$\text{Separando as duas proporções} \dots \dots \dots \begin{cases} \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} \\ \frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b} \end{cases}$$

$$\text{Aplicando o axioma conhecido (pág. 115)} \quad \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}$$

$$\text{Alternando} \dots \dots \dots \frac{a+c}{a-c} = \frac{b+d}{b-d} \quad \text{C. Q. D.}$$

Aplicação I. Dada a proporção $\frac{x}{8} = \frac{y}{24}$, calcular x e y , sabendo-se que $x + y = 28$.

Aplicando a esta proporção a segunda propriedade, teremos:

$$x + y : 8 + 24 :: \begin{cases} x : 8 \\ y : 24 \end{cases} \therefore 28 : 32 :: \begin{cases} x : 8 \\ y : 24 \end{cases} \therefore \begin{cases} 28 : 32 :: x : 8 \\ 28 : 32 :: y : 24 \end{cases}$$

Destas duas proporções deduzimos facilmente o valor de x e o de y .

Aplicação II. Dada a proporção $30 : x :: 24 : y$, calcular x e y , sabendo-se que $x - y = 11$.

Aplicando a esta proporção a segunda propriedade, teremos:

$$30 - 24 : x - y :: \begin{cases} 30 : x \\ 24 : y \end{cases} \therefore 6 : 11 :: \begin{cases} 30 : x \\ 24 : y \end{cases} \therefore \begin{cases} 6 : 11 :: 30 : x \\ 6 : 11 :: 24 : y \end{cases}$$

Destas duas proporções deduzimos facilmente os valores de x e y .

Aplicação III. Dada a proporção $x : 7 :: y : 20$, calcular x e y , sabendo-se que $y - x = 10$.

Transpondo os termos da proporção dada teremos $y : 20 :: x : 7$. Aplicando a esta proporção a segunda propriedade, teremos:

$$y - x : 20 - 7 :: \begin{cases} y : 20 \\ x : 7 \end{cases} \therefore 10 : 13 :: \begin{cases} y : 20 \\ x : 7 \end{cases} \therefore \begin{cases} 10 : 13 :: y : 20 \\ 10 : 13 :: x : 7 \end{cases}$$

Estas duas proporções nos dão os valores de x e y .

Aplicação IV. Dada a proporção $x : 15 :: y : 12$, calcular x e y , sabendo-se que $3x + 5y = 20$.

A proporção dada é $x : 15 :: y : 12$ ou $\frac{x}{15} = \frac{y}{12}$. Estas duas razões não se alteram, se multiplicarmos ambos os termos da primeira, por 3, e os da segunda, por 5. Portanto,

$$\frac{3x}{45} = \frac{5y}{60} \therefore \frac{3x + 5y}{45 + 60} = \frac{3x}{45} \text{ e } \frac{3x + 5y}{45 + 60} = \frac{5y}{60} \therefore \frac{20}{105} = \frac{3x}{45} \text{ e } \frac{20}{105} = \frac{5y}{60} \therefore \frac{4}{21} = \frac{x}{15} \text{ e } \frac{4}{21} = \frac{y}{12}$$

Das duas últimas proporções deduzimos os valores de x e y .

Observação. Em relação a estas quatro aplicações, podemos também alternar os termos das proporções dadas, e trabalhar com a primeira propriedade.

Exercícios. Série XXIII

Calcular x e y nas proporções seguintes:

$$\begin{array}{ll} 1. x : 3,5 :: y : 2,1 & x + y = 28 \\ 2. x : 1,7 :: y : 1,1 & x - y = 3,6 \\ 3. 6 : x :: 2,52 : y & x - y = 2,9 \\ 4. x : 5 :: y : 7 & y - x = 6 \\ 5. x : 15 :: y : 45 & 3x + 5y = 234 \\ 6. x : 3 :: y : 9 & 2y - 4x = 14 \end{array}$$

7. Dois números são proporcionais a 13 e 7, e sua diferença é 60. Quais são estes números?

Observação. Se os dois números pedidos são proporcionais a 13 e 7, escreveremos $x : 13 :: y : 7$.

8. Calcular os antecedentes de uma proporção, sabendo-se que sua diferença é 77 e que os consequentes são 15 e 8.

9. Calcular os antecedentes de uma proporção cujos consequentes são 7 e 10, sabendo-se que a diferença entre 8 vezes o primeiro antecedente e 5 vezes o segundo antecedente é 12.

10. Dois números são proporcionais a 7 e 8. Calcular estes números, sabendo-se que a diferença entre 7 vezes o segundo e 5 vezes o primeiro é 32.

11. Dividir 100 metros de sêda em duas porções proporcionais aos números 3 e 4.

Sugestão. Representando as duas porções por x e y , teremos $x : 3 :: y : 4$, etc.. Os valores de x e de y serão calculados com erro inferior a 0,001m.

12. Dois irmãos, cujas idades respectivas são 12 e 10 anos, recebem de seu pai a quantia de 500 cruzeiros, para que a repartam em partes proporcionais às suas idades. Qual será a parte de cada um?

Terceira propriedade. *Se três razões geométricas são iguais, a soma dos antecedentes está para a soma dos consequentes, assim como qualquer antecedente está para o seu consequente.*

$$\text{H. } \left\{ \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{m}{n} \right. \quad \text{T. } \left\{ \frac{a+c+m}{a+d+n} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{m}{n} \right.$$

Tomando as duas primeiras razões da hipótese e aplicando-lhes a segunda propriedade, teremos:

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} \quad (\text{A})$$

Na proporção (A) substituindo a razão $\frac{a}{b}$ pela razão igual $\frac{m}{n}$, teremos:

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{m}{n} \quad (\text{B})$$

Aplicando-se à proporção (B) a segunda propriedade, resulta:

$$\frac{a+c+m}{b+d+n} = \frac{m}{n} \quad \text{C. Q. D.}$$

Observação. Esta propriedade é verdadeira para três ou mais razões geométricas, como é fácil de demonstrar.

Aplicação. Sendo $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5}$, calcular x , y e z , sabendo-se que $x+y+z=60$.

De acôrdo com a terceira propriedade, teremos:

$$x+y+z:3+4+5 :: \left\{ \begin{array}{l} x:3 \\ y:4 \\ z:5 \end{array} \right\} \therefore 60:12 :: \left\{ \begin{array}{l} x:3 \\ y:4 \\ z:5 \end{array} \right\} \therefore$$

$$60:12 :: x:3$$

$$60:12 :: y:4$$

$$60:12 :: z:5$$

Destas três proporções tiramos os valores de x , y e z .

Exercícios. Série XXIV

1. Sendo $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$, demonstrar que $\frac{a+e-c}{b+f-d} = \frac{c}{d}$.
2. Sendo $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5}$ e $x+y+z=108$, calcular x , y e z .
3. Sendo $\frac{3}{a} = \frac{4}{b} = \frac{7}{c} = \frac{8}{d}$, calcular os consequentes, sabendo-se que sua soma é igual a 26,4.
4. Sendo $\frac{x}{5} = \frac{y}{6} = \frac{z}{3,5}$, calcular os antecedentes, sabendo-se que $x+y=18,7$.
5. Sendo $\frac{a}{0,3} = \frac{b}{0,7} = \frac{c}{1,2} = \frac{d}{1,3}$, calcular os antecedentes, sabendo-se que $a+b+c=1,54$.
6. Dividir 120 metros de pano em três partes proporcionais aos números 3, 4 e 7. (Resultados com erro inferior a 0,001m.)
7. Uma fazenda de 648 hectares foi dividida em quatro quinhões proporcionais aos números 2, 3, 4 e 5. Calcular em metros quadrados cada um dos quinhões.
8. Sabendo-se que $a : \frac{2}{3} :: b : \frac{3}{4} :: c : \frac{2}{5} :: d : \frac{5}{6}$, calcular os antecedentes, cuja soma é $15 \frac{1}{2}$.
9. Sabendo-se que $a : \frac{1}{2} :: b : \frac{3}{4} :: c : 0,666\dots :: d : 0,444\dots$, calcular os antecedentes, cuja soma é $\frac{17}{12}$.
10. Sendo $\frac{a}{11} = \frac{b}{12} = \frac{c}{13}$, calcular os antecedentes, sabendo-se que $a+b-c=50$.
11. Sendo $\frac{7}{a} = \frac{10}{b} = \frac{12}{c}$, calcular os consequentes, sabendo-se que $4a+3b+2c=43$.
12. Sendo $\frac{21}{a} = \frac{35}{b} = \frac{56}{c}$, calcular os consequentes, sabendo-se que $4a+3b+2c=43$.
13. Dada a proporção $a:b :: c:d$, provar que $5a+b:b :: 5c+d:d$.
14. Dada a proporção $a:b :: c:d$, provar que $a:a-b :: c:c-d$.
15. Dada a proporção $a:b :: c:d$, provar que $ax+by : ax-by :: cx+dy : cx-dy$.

Quarta propriedade. *Multiplicando-se ordenadamente duas ou mais proporções, os quatro produtos ainda formam uma proporção,*

Multiplicar ordenadamente duas ou mais proporções significa multiplicar os primeiros termos, depois os segundos, em seguida os terceiros e por último os quartos.

$$H. \begin{cases} a : b :: c : d \\ e : f :: g : h \\ m : n :: r : s \end{cases} \quad T. \{ aem : bfn :: cgr : dhs \}$$

Por hipótese, temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \\ \frac{e}{f} = \frac{g}{h} \\ \frac{m}{n} = \frac{r}{s} \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{Multiplicando-se estas três igualda-} \\ \text{des, resulta:} \\ \frac{aem}{bfn} = \frac{cgr}{dhs} \therefore \\ aem : bfn :: cgr : dhs \\ \text{C. Q. D.} \end{array}$$

Quinta propriedade. Elevando-se os quatro termos de uma proporção a uma mesma potência, os quatro resultados ainda formam uma proporção.

$$H. \{ a : b :: c : d \} \quad T. \{ a^m : b^m :: c^m : d^m \}$$

Por hipótese $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \therefore$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{c}{d}\right)^m \therefore \frac{a^m}{b^m} = \frac{c^m}{d^m} \therefore a^m : b^m :: c^m : d^m \quad \text{C. Q. D.}$$

Sexta propriedade. Extraindo-se a mesma raiz dos quatro termos de uma proporção, os quatro resultados ainda formam uma proporção.

$$H. \{ a : b :: c : d \} \quad T. \left\{ \sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} :: \sqrt[m]{c} : \sqrt[m]{d} \right\}$$

Por hipótese $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \therefore$

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \sqrt[m]{\frac{c}{d}} \therefore \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \frac{\sqrt[m]{c}}{\sqrt[m]{d}} \therefore$$

$$\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} :: \sqrt[m]{c} : \sqrt[m]{d} \quad \text{C. Q. D.}$$

Sétima propriedade. Quando duas proporções têm os mesmos antecedentes, os consequentes formam uma proporção.

$$H. \left\{ \begin{array}{l} a : m :: b : n \\ a : r :: b : s \end{array} \right\} \quad T. \{ m : n :: r : s \}$$

Por hipótese... $\left\{ \begin{array}{l} a : m :: b : n \\ a : r :: b : s \end{array} \right\}$

Alternando... $\left\{ \begin{array}{l} a : b :: m : n \\ a : b :: r : s \end{array} \right\} \therefore$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{b} = \frac{m}{n} \\ \frac{a}{b} = \frac{r}{s} \end{array} \right\}$$

As razões $\frac{m}{n}$ e $\frac{r}{s}$ sendo iguais à razão $\frac{a}{b}$, são iguais entre si; logo,

$$\frac{m}{n} = \frac{r}{s} \therefore m : n :: r : s \quad \text{C. Q. D.}$$

Oitava propriedade. Quando duas proporções têm os mesmos consequentes, os antecedentes formam uma proporção.

$$H. \left\{ \begin{array}{l} a : b :: c : d \\ m : b :: n : d \end{array} \right\} \quad T. \{ a : c :: m : n \}$$

Por hipótese, $\left\{ \begin{array}{l} a : b :: c : d \\ m : b :: n : d \end{array} \right\}$

Alternando, $\left\{ \begin{array}{l} a : c :: b : d \\ m : n :: b : d \end{array} \right\} \therefore$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \\ \frac{m}{n} = \frac{b}{d} \end{array} \right\} \therefore$$

$$\frac{a}{c} = \frac{m}{n} \therefore a : c :: m : n \quad \text{C. Q. D.}$$

Observação. Quando duas razões são iguais, o produto delas é igual ao quadrado de uma delas.

Consideremos as razões iguais $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$. Sendo iguais, teremos:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \therefore \frac{ac}{bd} = \frac{a^2}{b^2}$$

De modo análogo provaríamos que, quando três razões são iguais, o produto delas é igual ao cubo de uma delas. Por exemplo, sendo

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{m}{n}$$

teremos $\frac{acm}{bdn} = \frac{a^3}{b^3} = \frac{c^3}{d^3} = \frac{m^3}{n^3}$. E assim por diante.

Exercícios. Série XXV

1. Dada a proporção $\frac{x}{11} = \frac{y}{12}$, calcular x e y , sabendo-se que $xy = 1\ 617$.
2. A área de um terreno retangular é de $8\ 875,20\text{m}^2$. Calcular as duas dimensões, sabendo-se que elas são proporcionais aos números 5 e 6.
3. Uma sala retangular tem uma área de 60 metros quadrados. Calcular com erro inferior a 0,001m as duas dimensões, sabendo-se que elas são proporcionais aos números 3 e 4.
4. E' dada a proporção $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}$. Calcular x e y , sabendo-se que $x^2y^2 = 90\ 000$.
5. O volume de um bloco retangular é de $3\ 232\text{dm}^3$. Calcular as três dimensões, sendo elas proporcionais aos números 2, 3 e 4.
N. B. A resolução d'este problema exige uma raiz cúbica, que será encontrada nas tabelas. (pág. 206)
6. Sabendo-se que $\frac{14}{x} = \frac{14,7}{y} = \frac{16,1}{z}$, calcular os consequentes cujo produto é 9,66.

Grandezas Propocionais

63. Grandezas diretamente proporcionais. Considere-mos duas grandezas quaisquer, heterogêneas e variáveis, mas que dependem uma da outra, como acontece, por exemplo, com as duas grandezas seguintes: o **comprimento** de uma peça de fazenda e o **preço** desta mesma peça.

É sabido que o preço desta peça depende do seu comprimento. Portanto, o comprimento e o preço desta peça são duas grandezas heterogêneas e variáveis, mas que dependem uma da outra. Se o comprimento aumenta, o preço também aumenta; se o comprimento diminue, o preço também diminue. Supondo-se que 1 metro desta fazenda custe 3 cruzeiros, 5 metros custarão 15 cruzeiros; se 5 metros custam 15 cruzeiros, 4×5 metros custarão 4×15 cruzeiros, isto é, 60 cruzeiros; se 24 metros custam 72 cruzeiros, $24 \div 3$ metros custarão $72 \div 3$, isto é, 8 metros custarão 24 cruzeiros. Enfim, se o comprimento da peça é multiplicado ou dividido por n , o preço da mesma peça fica multiplicado ou dividido por n . Dizemos em Matemática que estas duas grandezas são **diretamente proporcionais** ou, simplesmente, **proporcionais**.

Dois grandezas variáveis e que dependem uma da outra, são **diretamente proporcionais**, quando a razão entre dois valores quaisquer da primeira é igual à razão entre os dois valores correspondentes da segunda.

Por exemplo,

$$\begin{array}{l} 5 \text{ metros custam } 15 \text{ cruzeiros} \\ 20 \text{ metros custam } 60 \text{ cruzeiros} \\ 24 \text{ metros custam } 72 \text{ cruzeiros} \\ 8 \text{ metros custam } 24 \text{ cruzeiros} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \frac{5 \text{ metros}}{20 \text{ metros}} = \frac{15 \text{ cruzeiros}}{60 \text{ cruzeiros}} \\ \frac{24 \text{ metros}}{8 \text{ metros}} = \frac{72 \text{ cruzeiros}}{24 \text{ cruzeiros}} \end{array} \right.$$

64. Grandezas inversamente proporcionais. Consideremos agora outras duas grandezas quaisquer, também heterogêneas e variáveis, e que também dependem uma da outra, como acontece, por exemplo, com as duas grandezas seguintes: a **velocidade** de um ciclista que percorre uma certa estrada, e o **tempo** necessário para percorrê-la.

Suponhamos que a estrada tem 300km. É evidente que, *quanto maior* é a velocidade do ciclista, *tanto menor* é o tempo necessário para percorrer esta estrada.

Se o ciclista percorre apenas 10km por hora, isto é, se a *velocidade* do ciclista é de 10km por hora, o *tempo* necessário para percorrer toda a estrada é igual a $300\text{km} \div 10\text{km}$, isto é, 30 horas. Entretanto, se o ciclista duplica a sua velocidade e consegue percorrer 20km por hora, o tempo necessário para percorrer toda a estrada será igual a $300\text{km} \div 20\text{km}$, isto é, 15 horas. Portanto, o tempo necessário para percorrer toda a estrada fica reduzido à metade do tempo primitivo.

Um automóvel que possa percorrer 60km por hora, percorrerá esta estrada em $300\text{km} \div 60\text{km}$, isto é, em 5 horas. Entretanto, se a velocidade do automóvel ficar reduzida à sua terça parte, isto é, a 20km, o tempo necessário para percorrer a estrada toda será três vezes maior; com efeito $300\text{km} \div 20\text{km} = 15$ horas.

Em resumo: supondo que a estrada tem 300km, teremos entre a velocidade e o tempo a seguinte correspondência de valores:

velocidade = 10km	tempo = 30 horas	
velocidade = 20km	tempo = 15 horas	(A)
velocidade = 60km	tempo = 5 horas	

E concluímos que, se a velocidade é **multiplicada** ou **dividida** por **n**, o tempo fica **dividido** ou **multiplicado** por **n**. Dizemos em Matemática que estas duas grandezas são *inversamente proporcionais*.

Voltando ao quadro A, tomemos duas velocidades quaisquer e os tempos correspondentes, por exemplo,

velocidade = 10km	tempo = 30 horas
velocidade = 60km	tempo = 5 horas

Agora, não é possível escrever

$$\frac{10\text{km}}{60\text{km}} = \frac{30 \text{ horas}}{5 \text{ horas}}$$

porque a primeira razão é igual a $\frac{1}{6}$ (a velocidade foi multiplicada por 6) ao passo que a segunda razão é igual a $\frac{6}{1}$ (o tempo ficou dividido por 6). Mas então podemos escrever:

$$\frac{10\text{km}}{60\text{km}} = \frac{5 \text{ horas}}{30 \text{ horas}}$$

E observando que a razão $\frac{5}{30}$ é o inverso ou a recíproca de $\frac{30}{5}$ diremos que:

Dois grandezas variáveis e que dependem uma da outra, são inversamente proporcionais, quando a razão entre dois valores quaisquer da primeira é igual ao inverso ou à recíproca da razão entre os dois valores correspondentes da segunda.

Observação. *Dois números são chamados inversos ou recíprocos quando seu produto é a unidade.*

Assim, o inverso de 3 é $\frac{1}{3}$, porque $3 \times \frac{1}{3} = 1$; o inverso de $\frac{2}{5}$ é $\frac{5}{2}$ porque $\frac{2}{5} \times \frac{5}{2} = 1$; o inverso de x é $\frac{1}{x}$; o de $\frac{a}{b}$ é $\frac{b}{a}$, etc..

Dois razões inversas são duas razões cujo produto é a unidade. As razões $\frac{2}{5}$ e $\frac{5}{2}$, $\frac{x}{y}$ e $\frac{y}{x}$ são razões inversas.

Exercícios orais

1. De que depende o perímetro de um quadrado? Será ele proporcional ao lado? Exemplifique. E a área de um quadrado será proporcional ao lado? Exemplifique.

2. Suponhamos que a é divisível por b , sendo o quociente igual a q . O quociente é diretamente proporcional ao dividendo? Ao divisor?

3. Para construir uma casa em 60 dias, são necessários 80 operários. O que aconteceria se o número de operários ficasse reduzido à metade? Que relação há entre o número de operários necessários para construir uma casa, e o tempo necessário à construção desta mesma casa?

4. Tenho 450 litros de vinho que vou distribuir em garrafas cuja capacidade é de 1,8 litros. O que aconteceria se a capacidade de cada garrafa fosse apenas de 0,9 litros? Que relação há entre a capacidade de cada garrafa e o número de garrafas?

5. No movimento de um veículo qualquer temos de considerar três grandezas distintas: o espaço percorrido, o tempo necessário para percorrê-lo, e a velocidade do veículo. Se o espaço não varia, que relação há entre o tempo e a velocidade? Se o tempo não varia, que relação há entre o espaço e a velocidade? Se a velocidade não varia, que relação há entre o espaço e o tempo?

6. Uma rua tem 850m de comprimento e 12m de largura. Se o comprimento da rua aumenta de 150m, o que acontece com a largura? Que relação há entre o comprimento e a largura da rua?

7. O valor de uma fração é proporcional ao numerador? Ao denominador?

8. Um decímetro cúbico de ouro pesa 19,200kg. Quanto pesarão 6 decímetros cúbicos? Qual a relação existente entre o volume de um corpo e o peso deste mesmo corpo? Que relação existe entre o peso de um professor de Matemática e a altura do colégio onde êle leciona?

65. Regra de três. I. Se 3 metros de sêda custam 42 cruzeiros, quanto custarão 7 metros? Representando por x o preço dos 7 metros, podemos escrever (§ 63):

$$\frac{3}{7} = \frac{42}{x} \therefore x = \frac{7 \times 42}{3} \therefore x = 98$$

Resposta. Os 7 metros custam 98 cruzeiros.

II. Foram necessários 45 operários para fazer uma casa em 84 dias; em quantos dias 15 operários fariam a mesma casa? Representando por x o número de dias necessários aos 15 operários para fazerem a casa, podemos escrever (§ 64):

$$\frac{45}{15} = \frac{x}{84} \therefore x = \frac{84 \times 45}{15} \therefore x = 252$$

Resposta. 15 operários fariam a casa em 252 dias.

Os dois problemas que acabámos de resolver são chamados regra de três.

Regra de três é o problema no qual são dadas duas grandezas direta ou inversamente proporcionais, faz-se variar uma delas e pergunta-se qual o valor correspondente para a outra.

A regra de três pode ser direta ou inversa. É direta, quando as grandezas que nela entram são diretamente proporcionais; é inversa, quando estas mesmas grandezas são inversamente proporcionais.

A disposição prática para a resolução dos problemas de regra de três está indicada nos problemas que vamos resolver.

Problema I. Para fabricar 7,5kg de manteiga, são necessários 160 litros de leite. Quantos litros de leite serão necessários para fabricar 12,25kg?

$$D \left\{ \begin{array}{l} 7,5\text{kg} \downarrow 160 \downarrow \\ 12,25\text{kg} \downarrow x \downarrow \end{array} \right\} \therefore 750 : 1225 :: 160 : x$$

$$x = \frac{1225 \times 160}{750} = 261,333 \text{ litros}$$

Resposta. Para fabricar 12,25kg de manteiga são necessários 261,333 litros de leite.

Observação. A letra D significa que esta regra de três é direta; as duas setas significam em que ordem devem ser escritos os quatro números, para constituírem a proporção. Quando os dois termos de uma mesma razão são fracionários, podemos transformá-los em números inteiros. (§ 56) Em lugar de 7,5 : 12,25 podemos escrever: 750 : 1225.

Problema II. Um trem percorreu 125km em 3 horas e 12 minutos. Em quanto tempo percorrerá 840hm? Admite-se que o movimento do trem é uniforme, isto é, a sua velocidade é constante.

$$D \left\{ \begin{array}{l} 125\text{km} \downarrow 3\text{h e } 12\text{m} \downarrow \\ 840\text{hm} \downarrow x\text{m} \downarrow \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3\text{h e } 12\text{m} = 3 \times 60 + 12 = 192 \text{ minutos} \\ 840\text{hm} = 84\text{km} \end{array}$$

$$125 : 84 :: 192 : x \therefore x = \frac{84 \times 192}{125}$$

$$x = 129 \frac{3}{125} \text{ (minutos)}$$

Resposta. O trem percorrerá 840hm em 2 horas, 9 minutos, 1 segundo e $\frac{11}{25}$ do segundo.

Observação. Os dois termos de uma mesma razão devem ser reduzidos à mesma unidade; os números complexos devem ser transformados em in-complexos.

Problema III. 15 operários fizeram um serviço em 23 dias, trabalhando 10 horas por dia. Quantas horas por dia deveriam trabalhar 21 operários para fazerem o mesmo serviço também em 23 dias?

$$I \left\{ \begin{array}{l} 15 \text{ op.} \uparrow 10 \text{ h} \\ 21 \text{ op.} \downarrow x \text{ h} \end{array} \right\} \therefore 21 : 15 :: 10 : x$$

$$x = \frac{15 \times 10}{21} \therefore x = 7\text{h. } 8\text{min. } 34\text{seg. e } \frac{2}{7} \text{ do segundo.}$$

Resposta. Os operários deveriam trabalhar diariamente 7 horas, 8 minutos, 34 segundos e $\frac{2}{7}$ do segundo.

Observação. A letra I indica que esta regra de três é inversa. As setas indicam em que ordem devem ser escritos os quatro números, para constituírem a proporção.

Problema IV. Um ciclista precisa ir da cidade A à cidade B. Se a sua velocidade é de 18km por hora, êle emprega 3 horas e 20 minutos para realizar a viagem. Em quanto tempo fará êle o mesmo percurso, se conseguir correr com uma velocidade igual a $\frac{5}{3}$ da velocidade primitiva?

$$I \left\{ \begin{array}{l} 18\text{km} \uparrow 3\text{h e } 20 \text{ min.} \\ \frac{5}{3} \text{ de } 18\text{km} \downarrow x \text{ min.} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \frac{5}{3} \text{ de } 18\text{km} = 30\text{km} \\ 3\text{h e } 20 \text{ min.} = 200\text{min.} \end{array} \right\}$$

$$30 : 18 :: 200 : x \therefore x = \frac{200 \times 18}{30} = 120 \text{ min.}$$

Resposta. O ciclista fará a sua viagem em 2 horas.

Problema V. Se $\frac{3}{4}$ de uma peça de sêda custam £ 5 $\frac{1}{4}$, quanto custarão $\frac{5}{6}$ da mesma peça?

$$D \left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{4} \text{ da peça} \downarrow \text{£ } 5 \frac{1}{2} \\ \frac{5}{6} \text{ da peça} \downarrow \text{£ } x \end{array} \right\} \therefore \frac{3}{4} : \frac{5}{6} :: 5 \frac{1}{2} : x \therefore$$

$$x = 5 \frac{1}{2} \times \frac{5}{6} \div \frac{3}{4} \therefore x = \frac{11}{2} \times \frac{5}{6} \times \frac{4}{3} \therefore$$

$$x = \frac{55}{9} \text{ da £} \therefore x = \text{£ } 6 - 2 - 2,5$$

Resposta. $\frac{5}{6}$ da mesma peça custarão £ 6 - 2 - 2 $\frac{2}{3}$.

Problema VI. Um navio está em alto mar. Faltam-lhe 12 dias para completar a sua viagem, e os víveres existentes a bordo permitem que os tripulantes tenham a sua alimentação habitual durante êstes mesmos 12 dias. Sobrevindo forte tempestade, o navio ficou parado durante 5 dias, a fim de reparar as avarias sofridas pelo mesmo. Podem os tripulantes contar com a sua ração habitual? Qual será a nova ração de cada tripulante?

$$I \left\{ \begin{array}{l} 12 \text{ dias} \uparrow \text{ração} = 1 \\ 17 \text{ dias} \downarrow \text{ração} = x \end{array} \right\} \therefore 17 : 12 :: 1 : x \therefore x = \frac{12}{17}$$

Resposta. Cada tripulante deverá contentar-se com $\frac{12}{17}$ da ração habitual.

66. O método de redução à unidade. No parágrafo anterior resolvemos seis problemas de regra de três, pelo método chamado *das proporções*. O método de redução à unidade, que vamos aplicar na resolução dos mesmos seis problemas, consiste em achar o valor que, para uma das grandezas, corresponde ao valor 1 da outra.

Problema I. Para fabricar 7,5kg de manteiga são necessários 160 litros de leite; para fabricar 1kg serão necessários $\frac{160}{7,5}$; para fabricar 12,25kg serão necessários

$$\frac{160}{7,5} \times 12,25 = 261,333 \text{ litros}$$

Problema II. Se o trem percorre 125km em 3 horas e 12 minutos, ou 192 minutos, o tempo necessário para percorrer 1km será $\frac{192}{125}$; e o tempo necessário para percorrer 84km será

$$\frac{192}{125} \times 84 = 129 \frac{3}{125} \text{ (minutos)}$$

Problema III. Se os 15 operários devem trabalhar 10 horas por dia, para fazer um determinado trabalho, durante um certo tempo, um operário deverá trabalhar 15 vezes mais, isto é, 15×10 horas por dia. E, se um operário deve trabalhar 15×10 horas por dia, 21 operários deverão trabalhar 21 vezes menos, isto é,

$$\frac{15 \times 10}{21} = 7 \text{ horas, } 8 \text{ min., } 34 \text{ seg. e } \frac{2}{7} \text{ do segundo.}$$

Problema IV. O ciclista necessita de 200 minutos para fazer a sua viagem, correndo com a velocidade de 18km por hora. Se correr com a velocidade de 1km por hora, é claro que o tempo necessário para a sua viagem será 18 vezes maior, isto é, 200×18 . E se o tempo necessário para realizar a viagem, com a velocidade de um quilômetro por hora, é de 200×18 minutos, é claro que com a velocidade de 30km por hora, este tempo ficará 30 vezes menor, isto é,

$$\frac{200 \times 18}{30} = 120 \text{ minutos.}$$

Problema V. Se $\frac{3}{4}$ da peça custam £ $5 \frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ custará

$$£ 5 \frac{1}{2} \div 3 = \frac{11}{2} \div 3 = \frac{11}{2 \times 3}$$

$$\text{A peça toda custará } \frac{11}{2 \times 3} \times 4 = \frac{11 \times 4}{2 \times 3}$$

$$\frac{5}{6} \text{ da peça custarão } \frac{11 \times 4}{2 \times 3} \times \frac{5}{6}, \text{ isto é,}$$

$$\frac{11}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{6} = \frac{55}{9} \text{ da } £$$

Problema VI. Para 12 dias de viagem, a ração é 1; para 1 dia é 12 vezes maior, isto é, 12. Se a ração para 1 dia é 12, para 17 dias será 17 vezes menor, isto é, $\frac{12}{17}$.

Exercícios. Série XXVI

1. Com 10kg de trapos posso fazer 7,5kg de papel. Quantos kg de trapos serão necessários para fazer 48 resmas de papel, cada resma pesando 80hg?

2. Uma fábrica de tecidos necessita de 48kg de lã para fazer 40 metros de fazenda. Quantos kg de lã serão necessários para fazer 135 metros da mesma fazenda?

3. Um automóvel percorreu em 5 horas e 20 minutos, uma distância de 180km. Quantos km percorrerá em 7 horas e 30 minutos, conservando a mesma velocidade?

4. Uma torneira despeja 2 500 litros de água em 7 horas e 15 minutos. Quantos litros despejará em 3 horas e 40 minutos?

5. Duas tábuas de peroba medem respectivamente $4m \times 0,3m \times 0,12m$ e $4,5m \times 0,4m \times 0,12m$. A primeira custa 35 cruzeiros. Quanto custa a segunda?

N. B. Calcular primeiramente os dois volumes.

6. Para percorrer uma certa distância com a velocidade de 32km por hora, um trem gasta 5 horas e 20 minutos. Em quanto tempo este trem faria o mesmo percurso com a velocidade de 4 500dam por hora?

7. Comprei 5 camisas por 80 cruzeiros. Quantas poderia comprar com 112 cruzeiros?

8. Um retalho de fazenda de 12,8m custa 250 cruzeiros. Quanto pagarei por um retalho da mesma fazenda, com a mesma largura, e cujo comprimento é de 2,64m?

9. Tenho 1,80m de altura. Qual é a altura de um poste cuja sombra mede 7,30m, no mesmo instante em que a minha mede 1,20m?

10. Uma turma de 20 operários faz um serviço em 25 dias. Em quantos dias a mesma turma fará um outro serviço, cuja dificuldade é igual a $\frac{3}{7}$ da dificuldade do serviço precedente? O dia de trabalho é de 10 horas.

11. Um automóvel cuja velocidade é de 45km por hora, deve fazer uma viagem em 4 horas e 15 minutos. Qual deverá ser a velocidade deste mesmo automóvel se quiser fazer a mesma viagem em 3 horas e um quarto?

12. Um automóvel, cuja velocidade é de 45km por hora, parte de São Paulo às 6 horas da manhã, com destino ao Rio de Janeiro, onde deverá chegar às 5 horas da tarde, em ponto. Mas, por motivos imprevistos, o carro fica parado na estrada durante 1 hora e 15 minutos, depois de ter percorrido 157,5km. Qual a velocidade que o carro deve desenvolver para chegar ao Rio às 5 horas da tarde?

13. Um automóvel, com a velocidade de 40km por hora, foi da cidade A à cidade B, em 36 minutos. Em quanto tempo regressará, desenvolvendo uma velocidade de 60km por hora?

14. Em 20 dias, 15 operários tinham feito a metade de um serviço. Neste momento, 3 operários foram despedidos. Em quanto tempo os operários que ficaram podem fazer a outra metade do trabalho?

15. Um empregado ganha 3 600 cruzeiros por ano. Em 3 de setembro à noite, deixa o emprego. Quanto tem a receber? Os meses são contados com 30 dias cada um.

16. Um terreno retangular cuja área é de 5,36a foi vendido por 2 500 cruzeiros. Por quanto seria vendido, se medisse 120m x 76m?

17. Para fazer 30 metros de fazenda com 0,80m de largura, são necessários 42kg de lã. Empregando esta mesma quantidade de lã, e reduzindo a largura a 0,65m, qual seria o comprimento da fazenda fabricada?

18. A tripulação de um navio era de 42 homens. Faltavam ainda 30 dias para chegar ao fim da viagem, quando 8 naufragos foram recolhidos a bordo. Os víveres existentes a bordo eram suficientes para que cada tripulante tivesse a sua ração habitual até o fim da viagem. Não querendo o capitão que a ração dos tripulantes fôsse diminuída, de quantos dias foi necessário antecipar o fim da viagem? Se a velocidade do navio era de 20 milhas por hora, de quanto foi necessário aumentá-la?

19. Em meu colégio tenho mantimentos para 50 alunos, durante 36 dias; 8 dias depois de iniciadas as aulas, recebo mais 15 alunos. Quantos dias durarão os mantimentos?

20. Um operário encarrega-se de capinar uma avenida e cobri-la de areia, por 810 cruzeiros. Tendo adoecido, é substituído por um outro operário que conclue o serviço, recebendo 324 cruzeiros por 180m. Qual é o comprimento da avenida?

21. Um tanque tem duas torneiras. A primeira enche o tanque em 7 horas, e a segunda em 8 horas. Abrindo-se as duas torneiras ao mesmo tempo, e estando o tanque vazio, em quantas horas ficará ele cheio?

Solução. Seja 1 a capacidade do tanque. Se a primeira torneira enche o tanque em 7 horas, em uma hora encherá $\frac{1}{7}$ do tanque. Se a segunda enche o tanque em 8 horas, em uma hora encherá $\frac{1}{8}$ do tanque. Logo, as duas, abertas simultaneamente, em uma hora encherão $\frac{1}{7} + \frac{1}{8}$ do tanque, isto é, $\frac{15}{56}$ do tanque.

Ora, se para encher $\frac{15}{56}$ do tanque, é necessário que as duas torneiras fiquem abertas durante uma hora, para encher o tanque todo cuja capacidade é 1, durante quantas horas deverão ficar abertas?

E' um problema de regra de três simples e direta.

$$D \left\{ \begin{array}{l} \frac{15}{56} \downarrow 1 \text{ hora} \downarrow \\ 1 \downarrow x \text{ horas} \downarrow \end{array} \right\} \therefore \frac{15}{56} : 1 :: 1 : x$$

$$x = 1 \div \frac{15}{56} = \frac{56}{15} = 3 \text{ horas e } 44 \text{ minutos.}$$

22. Um tanque tem duas torneiras. A primeira enche o tanque em 5 horas e a segunda o esvazia em 8. Abrindo-se as duas torneiras ao mesmo tempo, e estando o tanque vazio, em quantas horas ficará cheio?

23. Um tanque tem três torneiras. A primeira enche o tanque em 18 horas, a segunda em 24 horas e a terceira em 30. Abrindo-se as três torneiras, e estando o tanque vazio, em quantas horas ficará cheio?

24. Um tanque tem três torneiras. A primeira enche o tanque em 25 horas e a segunda, em 40. Mas a terceira o esvazia em 60. Abrindo-se as três torneiras, e estando o tanque vazio, em quantas horas ficará cheio?

25. Duas torneiras enchem um tanque em 12 horas. Se uma delas enche o tanque em 30 horas, em quanto tempo a outra torneira poderá encher o mesmo tanque?

Solução. Seja 1 a capacidade do tanque. Se as duas torneiras enchem o tanque em 12 horas, em uma hora encherão $\frac{1}{12}$ do tanque. Se a primeira enche o tanque em 30 horas, em uma hora encherá $\frac{1}{30}$ do tanque. Logo, a segunda encherá em uma hora, $\frac{1}{12} - \frac{1}{30}$ do tanque, isto é, $\frac{1}{20}$ do tanque.

Ora, se para encher $\frac{1}{20}$ do tanque, é necessário que a segunda torneira fique aberta durante 1 hora, para encher o tanque todo, cuja capacidade é 1, durante quantas horas deverá ficar aberta?

E' um problema de regra de três simples e direta.

$$D \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{20} \downarrow 1 \text{ hora} \downarrow \\ 1 \downarrow x \text{ horas} \downarrow \end{array} \right\} \therefore \frac{1}{20} : 1 :: 1 : x$$

$$x = 1 \div \frac{1}{20} = 20 \text{ horas}$$

26. Um operário faz uma certa tarefa em 15 dias, e outro faz a mesma tarefa em 21 dias. Se os dois trabalharem juntos, em quantos dias a farão? Supõe-se que o dia de trabalho tem 8 horas.

27. Três operários, trabalhando separadamente, constroem uma parede em 15, 21 e 40 dias. Em quantos dias poderiam eles construir a mesma parede, se trabalhassem juntos? Supõe-se que eles trabalham 9 horas por dia.

28. Dois operários constroem uma parede em 25 dias. Um deles, trabalhando só, constrói a mesma parede em 36 dias. Pergunta-se em quantos dias o outro operário seria capaz de executar sozinho a mesma tarefa. Admitese que os operários trabalham 11 horas por dia.

29. Três operários constroem uma parede em 60 dias. Dois deles, trabalhando separadamente, constroem a mesma parede em 120 e 150 dias. Em quantos dias o terceiro construiria a mesma parede, trabalhando só? Admitese que estes operários trabalham 10 horas por dia.

30. As passagens de 42 estudantes, da cidade A à cidade B, isto é, numa distância de 195km, importam em 598 cruzeiros. Em quanto importa-

riam as passagens de 105 estudantes que quisessem fazer uma excursão à cidade C, supondo que a distância entre as cidades A e C é de 510km?

31. A dificuldade na tradução do francês está para a dificuldade na tradução do latim, assim como 0,15 está para 0,72. Se um estudante traduz 3 páginas e $\frac{2}{5}$ de um texto francês em 4 horas e 10 minutos, em quantas horas traduzirá 2 páginas e $\frac{1}{4}$ de um texto latino? Supõe-se que a paginação é a mesma no dois livros.

67. Regra de três composta. Problema I. Um negociante pagou Cr\$ 14,25 para iluminar a sua loja 3 horas por dia, durante 48 dias. Quanto pagaria ele para iluminá-la 8 horas por dia, durante 72 dias?

A resolução deste problema pode ser dividida em duas partes.

Primeira parte. Um negociante pagou Cr\$ 14,25 para iluminar a sua loja 3 horas por dia, durante um certo número de dias. Quanto pagaria ele para iluminá-la 8 horas por dia, durante o mesmo número de dias?

É um problema de regra de três, simples e direta.

$$D \left\{ \begin{array}{l} 3 \text{ h} \downarrow \\ 8 \text{ h} \downarrow \end{array} \middle| \begin{array}{l} 14,25 \downarrow \\ y\$ \downarrow \end{array} \right\} \therefore 3 : 8 :: 14,25 : y \quad (A)$$

Observação. E' inútil calcular y , como veremos adiante.

Segunda parte. Se o negociante gastou y cruzeiros para iluminar sua loja durante 48 dias, quanto gastaria para iluminá-la durante 72 dias?

É um problema de regra de três, simples e direta.

$$D \left\{ \begin{array}{l} 48 \text{ d} \downarrow \\ 72 \text{ d} \downarrow \end{array} \middle| \begin{array}{l} y \downarrow \\ x \downarrow \end{array} \right\} \therefore 48 : 72 :: y : x \quad (B)$$

Multiplicando as proporções A e B (§62, 4.ª propriedade), teremos:

$$3 \times 48 : 8 \times 72 :: 14,25 \times y : y \times x$$

Dividindo ambos os termos da segunda razão por y (§61, 5.º corolário), teremos:

$$3 \times 48 : 8 \times 72 :: 14,25 : x \quad (C)$$

Observação. Está explicado por que não foi necessário calcular y .

Da proporção C deduzimos facilmente o valor de x .

$$x = \frac{14,25 \times 8 \times 72}{3 \times 48} = 57 \text{ cruzeiros}$$

A disposição prática para a resolução deste problema pode ser a seguinte:

Cr\$ 14,25	3 horas	48 dias
x	8 horas	72 dias

$$D \left\{ \begin{array}{l} 3 \text{ h} \downarrow \\ 8 \text{ h} \downarrow \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 3 : 8 \\ 48 : 72 \end{array} \right\} \therefore 14,25 : x$$

$$3 \times 48 : 8 \times 72 :: 14,25 : x$$

$$D \left\{ \begin{array}{l} 48 \text{ d} \downarrow \\ 72 \text{ d} \downarrow \end{array} \right\} \quad x = \frac{14,25 \times 8 \times 72}{3 \times 48} = 57 \text{ cruzeiros}$$

Resposta. O negociante pagaria 57 cruzeiros.

Explicação. Escrevem-se os dados do problema em duas linhas horizontais, e de modo que as grandezas homogêneas se correspondam em linhas verticais. Em seguida, escrevem-se à esquerda, e uns por baixo dos outros, os pares de grandezas homogêneas, exceto o par em que entra x . E depois raciocina-se: a despesa é diretamente proporcional ao número de horas, assim como ao número de dias, isto é, $3 : 8 :: 14,25 : x$ e $48 : 72 :: 14,25 : x$. A razão em que entra y é inútil.

Problema II. 30 operários, trabalhando 10 horas por dia, durante 24 dias, fizeram 180m de fazenda. Quantos metros fariam 40 operários, trabalhando 9 horas por dia, durante 18 dias?

A resolução deste problema pode ser dividida em três partes.

Primeira parte. Se 30 operários fazem 180m de fazenda, quantos metros farão 40 operários?

É um problema de regra de três simples e direta.

$$D \left\{ \begin{array}{l} 30 \text{ op.} \downarrow \\ 40 \text{ op.} \downarrow \end{array} \middle| \begin{array}{l} 180\text{m} \downarrow \\ y \downarrow \end{array} \right\} \therefore 30 : 40 :: 180 : y \quad (A)$$

Segunda parte. Trabalhando 10 horas por dia, fizeram-se y metros; quantos metros se fariam, trabalhando 9 horas por dia?

É um problema de regra de três simples e direta.

$$D \left\{ \begin{array}{l} 10 \text{ h} \downarrow \\ 9 \text{ h} \downarrow \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} y \text{ m} \downarrow \\ z \text{ m} \downarrow \end{array} \right\} \therefore 10 : 9 :: y : z \quad (B)$$

Terceira parte. Em 24 dias fizeram-se z metros; quantos metros se fariam em 18 dias?

É um problema de regra de três simples e direta.

$$D \left\{ \begin{array}{l} 24 \text{ d.} \downarrow \\ 18 \text{ d.} \downarrow \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} z \text{ m} \downarrow \\ x \text{ m} \downarrow \end{array} \right\} \therefore 24 : 18 :: z : x \quad (C)$$

Multiplicando as proporções A, B e C, teremos:

$$30 \times 10 \times 24 : 40 \times 9 \times 18 :: 180yz : xyz$$

Dividindo ambos os termos da segunda razão por yz , teremos:

$$30 \times 10 \times 24 : 40 \times 9 \times 18 :: 180 : x \therefore$$

$$x = \frac{40 \times 9 \times 18 \times 180}{30 \times 10 \times 24} = 162\text{m}$$

A disposição prática para a resolução deste problema, pode ser a seguinte:

30 op.	10 horas	24 dias	180 metros
40 op.	9 horas	18 dias	x

$$D \left\{ \begin{array}{l} 30 \text{ op.} \downarrow \\ 40 \text{ op.} \downarrow \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 30 : 40 \\ 10 : 9 \\ 24 : 18 \end{array} \right\} :: 180 : x$$

$$D \left\{ \begin{array}{l} 10 \text{ h} \downarrow \\ 9 \text{ h} \downarrow \end{array} \right\} 30 \times 10 \times 24 : 40 \times 9 \times 18 :: 180 : x$$

$$D \left\{ \begin{array}{l} 24 \text{ d} \downarrow \\ 18 \text{ d} \downarrow \end{array} \right\} x = \frac{40 \times 9 \times 18 \times 180}{30 \times 10 \times 24} = 162\text{m}$$

Resposta. Os 40 operários, trabalhando 9 horas por dia, durante 18 dias, fariam 162 metros.

Problema III. 600 operários, trabalhando 10 horas por dia, empregaram 50 dias para cavar um canal com 1 500m de comprimento, 8m de largura e 4m de profundidade. Em quantos dias 720 operários, trabalhando 8 horas por dia, cavarão um canal de 2 000m de comprimento, 7m de largura e 3m de profundidade, em um terreno duas vezes mais difícil que o primeiro?

A resolução deste problema pode ser dividida em seis partes.

Primeira parte. Se 600 operários fazem o serviço em 50 dias, 720 operários em quantos dias o farão?

É um problema de regra de três, simples e *inversa* porque, para fazer um determinado serviço, é evidente que, quanto **maior** é o número de operários, nele empregado, tanto **menor** é o número de dias, necessário para concluí-lo; quanto *menor* é o número de operários nele empregado, tanto *maior* é o número de dias, necessário para concluí-lo.

$$I \left\{ \begin{array}{l} 600 \text{ op.} \uparrow \\ 720 \text{ op.} \uparrow \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 50 \text{ d.} \downarrow \\ y \downarrow \end{array} \right\} \therefore 720 : 600 :: 50 : y \quad (A)$$

Segunda parte. Se foram necessários y dias, trabalhando os operários durante 10 horas por dia, quantos dias seriam necessários, trabalhando os operários durante 8 horas por dia?

É um problema de regra de três simples e *inversa*.

Com efeito, quanto **maior** é o número de horas diárias para fazer um determinado serviço, tanto **menor** é o número de dias, necessário para concluí-lo; quanto **menor** é o número de horas diárias para fazer um determinado serviço, tanto **maior** é o número de dias, necessário para concluí-lo.

$$I \left\{ \begin{array}{l} 10 \text{ h} \downarrow \\ 8 \text{ h} \downarrow \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} y \text{ dias} \downarrow \\ z \text{ dias} \downarrow \end{array} \right\} \therefore 8 : 10 : y : z \quad (B)$$

Terceira parte. Se foram necessários z dias, tendo o canal 1 500m de comprimento, quantos dias seriam necessários para um canal de 2 000 m de comprimento?

É um problema de regra de três simples e direta.

$$D \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ 500 m} \downarrow \\ 2 \text{ 000 m} \downarrow \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} z \text{ dias} \downarrow \\ t \text{ dias} \downarrow \end{array} \right\} \therefore 1 \text{ 500} : 2 \text{ 000} :: z : t \quad (C)$$

Quarta parte. Se foram necessários t dias, tendo o canal 8m de largura, quantos dias seriam necessários para um canal de 7m de largura?

É um problema de regra de três simples e direta.

$$D \left\{ \begin{array}{l} 8 \text{ m} \downarrow \\ 7 \text{ m} \downarrow \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} t \text{ dias} \downarrow \\ u \text{ dias} \downarrow \end{array} \right\} \therefore 8 : 7 :: t : u \quad (D)$$

Quinta parte. Se foram necessários u dias, tendo o canal 4m de profundidade, quantos dias seriam necessários para um canal de 3m de profundidade?

É um problema de regra de três simples e direta.

$$D \left\{ \begin{array}{l} 4 \text{ m} \downarrow \\ 3 \text{ m} \downarrow \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} u \text{ dias} \downarrow \\ v \text{ dias} \downarrow \end{array} \right\} \therefore 4 : 3 :: u : v \quad (E)$$

Sexta parte. Se foram necessários v dias para cavar o canal num certo terreno, quantos dias seriam necessários para cavar o mesmo canal num terreno duas vezes mais difícil?

Representando-se a *dificuldade* do primeiro terreno por 1, a dificuldade do outro será 2. Este último problema é ainda um problema de regra de três simples e direta.

$$D \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ (dif.)} \downarrow \\ 2 \text{ (dif.)} \downarrow \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} v \text{ dias} \downarrow \\ x \text{ dias} \downarrow \end{array} \right\} \therefore 1 : 2 :: v : x \quad (F)$$

Multiplicando as proporções A, B, C, D, E e F, teremos:

$$720 \times 8 \times 1500 \times 8 \times 4 \times 1 : 600 \times 10 \times 2000 \times 7 \times 3 \times 2 :: 50yztuv : xyztuv$$

Dividindo ambos os membros da segunda razão por $yztuv$, teremos:

$$720 \times 8 \times 1500 \times 8 \times 4 \times 1 : 600 \times 10 \times 2000 \times 7 \times 3 \times 2 :: 50 : x \therefore$$

$$x = \frac{600 \times 10 \times 2000 \times 7 \times 3 \times 2 \times 50}{720 \times 8 \times 1500 \times 8 \times 4 \times 1} = 91 \text{ dias}$$

A disposição prática para a resolução deste problema pode ser a seguinte:

600 op.	10 h.	50 d.	1 500m.c.	8m.l.	4m.p.	1 (dif.)
720 op.	8 h.	x	2 000m.c.	7m.l.	3m.p.	2 (dif.)

$$\begin{array}{l} I \left\{ \begin{array}{l} 600 \text{ op.} \uparrow \\ 720 \text{ op.} \uparrow \end{array} \right. \\ \hline I \left\{ \begin{array}{l} 10 \text{ h.} \uparrow \\ 8 \text{ h.} \uparrow \end{array} \right. \\ \hline D \left\{ \begin{array}{l} 1500 \text{ m. c.} \downarrow \\ 2000 \text{ m. c.} \downarrow \end{array} \right. \\ \hline D \left\{ \begin{array}{l} 8 \text{ m. l.} \downarrow \\ 7 \text{ m. l.} \downarrow \end{array} \right. \\ \hline D \left\{ \begin{array}{l} 4 \text{ m. p.} \downarrow \\ 3 \text{ m. p.} \downarrow \end{array} \right. \\ \hline D \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ (dif.)} \downarrow \\ 2 \text{ (dif.)} \downarrow \end{array} \right. \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} 6 : 5 \\ 8 : 10 \\ 3 : 4 \\ 8 : 7 \\ 4 : 3 \\ 1 : 2 \end{array} \right\} :: 50 : x$$

$$6 \times 8 \times 3 \times 8 \times 4 : 5 \times 10 \times 4 \times 7 \times 3 \times 2 :: 50 : x$$

$$x = \frac{5 \times 10 \times 4 \times 7 \times 3 \times 2 \times 50}{6 \times 8 \times 3 \times 8 \times 4} = 91 \text{ dias.}$$

Resposta. Os 720 operários, trabalhando 8 horas por dia, cavarão o fosso de 2 000m \times 7m \times 3m, em 91 dias.

Observação. Em lugar de escrevermos 720 : 600, escreveremos 6 : 5. Com efeito, os dois termos da razão 720 : 600 são divisíveis por 120, e é permitido dividir ambos os termos desta razão por 120, porque o valor da razão não se altera. Considerando a razão 1 500 : 2 000, seus termos são divisíveis por 500; portanto, em lugar de 1 500 : 2 000, é bastante escrever 3 : 4.

68. Definição da regra de três composta. Consideremos o primeiro problema do parágrafo anterior. Seus dados são os seguintes:

Cr\$ 14,25	3 horas	48 dias
x	8 horas	72 dias

O negociante pagou Cr\$ 14,25 para iluminar a sua loja 3 horas por dia, durante 48 dias. Esta despesa é proporcional ao número de horas, 3 horas, e ao número de dias, 48 dias. Variando o número de horas e o número de dias, a despesa também varia. Pois bem:

Chama-se **regra de três composta**, o problema no qual se dá uma certa quantidade (Cr\$ 14,25) e duas ou mais que lhe são proporcionais (3 horas e 48 dias); fazem-se variar estas duas ou mais, e pergunta-se qual o valor que resulta para a primeira.

O primeiro problema (§67) se decompõe em **duas regras de três simples**, porque a despesa é proporcional a **duas quantidades**: o número de horas e o número de dias.

O segundo problema (§67) se decompõe em **três regras de três simples**, porque o número de metros é proporcional a **três quantidades**: o número de operários, o número de horas diárias de trabalho e o número de dias.

O terceiro problema (§67) se decompõe em **seis regras de três simples**, porque o número de dias é proporcional a **seis quantidades**: o número de operários, o número de horas diárias de serviço, o comprimento, a largura e a profundidade do canal, e a dificuldade do terreno.

Exercícios. Série XXVII

1. Um operário recebeu 84 cruzeiros por 12 dias de trabalho, trabalhando 10 horas por dia. Quanto deverá receber por 15 dias de trabalho, trabalhando 11 horas por dia?

2. Se 9 operários, ao cabo de 6 dias de trabalho, recebem 432 cruzeiros, quanto receberão 14 operários por 12 dias de trabalho?

3. 15 operários, trabalhando durante 16 dias, fizeram 320m de fazenda. Quantos metros farão 24 operários, trabalhando durante 21 dias?

4. Paguei 12 cruzeiros por 3,75m de fôrro com 0,80 de largura. Quanto pagarei por 6,25m de sêda, com 0,75m de largura, supondo que o valor do fôrro seja igual a 0,24 do valor da sêda?

Observação. Suponha-se que a sêda vale 100; o fôrro valerá 24.

5. 21 pedreiros, trabalhando 10 horas por dia, durante 32 dias, construíram 42m de parede. Quantos metros de parede poderiam construir 28 pedreiros, trabalhando 9 horas por dia, durante 56 dias, supondo-se que a atividade da segunda turma é igual a $\frac{3}{4}$ da atividade da primeira?

Observação. A atividade da primeira turma pode ser representada pelo menor número divisível por 4, isto é, pelo próprio número 4. Então a atividade da segunda turma será representada pelo número 3.

6. Para ajardinar um terreno retangular com 4,5dam \times 12,5m, 8 operários trabalharam durante 10 dias de 6 horas. Quantas horas por dia deveriam trabalhar 12 operários para ajardinar um terreno retangular com 54m \times 160dm, em 11 dias também com 6 horas?

7. 15 operários, trabalhando 12 horas por dia, durante 25 dias, fizeram um certo trabalho. Quantas horas por dia deverão trabalhar 16 operários, para fazerem 0,9 do mesmo trabalho, supondo que a atividade da primeira turma está para a da segunda, assim como 3 está para 5?

Observação. Representando-se o primeiro trabalho por 10, o segundo será representado por 9.

8. 40 operários, trabalhando durante 25 dias de 8 horas, fizeram um canal de 12m \times 2,5m \times 0,8m. Qual será o comprimento de um canal com

3,4m de largura e 0,12m de profundidade, feito por 50 operários, trabalhando durante 30 dias de 9 horas, supondo-se que a dificuldade do primeiro trabalho está para a do segundo, assim como 3 está para 4?

9. A guarnição de um forte é constituída de 300 homens e tem mantimentos suficientes para que cada soldado receba sua ração habitual durante 3 meses e 20 dias, quando chega ao forte um reforço de 80 homens. Sendo necessário que os mantimentos durem 4 meses, qual deve ser a ração diária de cada homem?

Observação. Suponha-se que a ração primitiva é 1.

10. Um navio com 20 tripulantes e 36 passageiros inicia uma viagem cuja duração está fixada em 48 dias. Ao cabo, porém, de 12 dias, um desarranjo nas máquinas faz com que a viagem deva durar 15 dias mais do que o determinado. E no mesmo dia em que as máquinas ficam avariadas, é necessário recolher a bordo 8 homens de um navio naufragado alguns dias antes. A quanto ficará reduzida a ração de cada pessoa, tripulante, passageiro ou naufrago, para que os víveres existentes a bordo durem até o fim da viagem?

11. Um automóvel, viajando 10 horas por dia, durante 7 dias, percorreu 3 400km. Um outro automóvel, viajando 8 horas e meia por dia, durante 6 dias, percorreu 2 880km. Qual é o mais veloz?

Observação. Suponha-se a velocidade do primeiro igual a 1.

12. 40 operários trabalharam durante 25 dias de 8 horas e receberam 6 120 cruzeiros. Qual será a quantia necessária para pagar 54 operários que trabalharam durante 18 dias de 6 horas?

13. Para consertar uma estrada de rodagem com 24km de comprimento, foi necessário que 32 homens trabalhassem 8 horas por dia, durante 45 dias. Quantas horas por dia deveriam trabalhar 48 homens, para consertar 21km da mesma estrada, em 50 dias?

14. Para derrubar 12,8ha de mata, 60 camaradas trabalharam durante 48 dias. Quantos dias trabalhariam 48 camaradas para derrubar 5 alqueires de mata, supondo-se que esta turma seja duas vezes mais ativa que a primeira? O dia de trabalho é de 10 horas, e o alqueire mede 5 000 braças quadradas.

15. Dois reservatórios de água medem respectivamente 8,4m \times 2,4m \times 0,72m e 7,2m \times 3,6m \times 0,80m. Uma torneira enche o primeiro reservatório em 2 dias e 12 horas, e outra enche o segundo em 3 dias e 18 horas cada um. Qual é a torneira que despeja mais água por hora?

69. **Porcentagem.** Comprei uma casa por 72 500 cruzeiros, Algum tempo depois vendi-a com um lucro de 14%. Quanto ganhei? Quanto recebi?

Em primeiro lugar vejamos o que significa a expressão 14%. Esta expressão, que se lê *14 por cento*, significa que em cada 100 ganhei 14. Por exemplo, se eu comprei um relógio por 100 cruzeiros e depois o vendi com 14% de lucro, quer isto dizer que, pelo meu relógio, recebi 100 cruzeiros + 14 cruzeiros.

Portanto, para resolver o problema acima, é bastante modificar o seu enunciado, dando-lhe a forma de um problema de regra de três.

Sobre 100 ganhei 14; sobre 72 500 cruzeiros quanto ganhei?

$$D \left\{ \begin{array}{cc} 100 & 14 \\ 72\,500 & x \end{array} \right\} \therefore 100 : 72\,500 :: 14 : x$$

$$x = \frac{72\,500 \times 14}{100} \therefore x = 10\,150$$

Resposta. Ganhei 10 150 cruzeiros e recebi pela casa 72 500 cruzeiros + 10 150 cruzeiros, isto é, 82 650 cruzeiros.

O problema proposto tem duas perguntas: *quanto ganhei e quanto recebi*. Para resolvê-lo, calculámos primeiramente quanto ganhei e, em seguida, somámos o lucro com a quantia que eu tinha pago pela casa.

Entretanto, poderíamos calcular, em primeiro lugar, *quanto recebi pela casa, sem calcular o lucro que tive neste negócio*.

Se eu vendi a casa, com 14% de lucro, quer isto dizer que, em cada 100, ganhei 14. Portanto, recebi 114 pelo que me custou 100. Ora,

Se recebi 114 pelo que me custou 100, quanto recebi pelo que me custou 72 500 cruzeiros?

$$D \left\{ \begin{array}{cc} 100 & 114 \\ 72\,500 & x \end{array} \right\} \therefore 100 : 72\,500 :: 114 : x$$

$$x = \frac{72\,500 \times 114}{100} \therefore x = 82\,650$$

Resposta. Recebi pela casa 82 650 cruzeiros.

Exercícios orais

Calcular:

- | | | |
|------------------------|----------------------|------------------------|
| 1. 1% de 100 cruzeiros | 4. 1% de 200 francos | 7. 3% de 50 cruzeiros |
| 2. 3% de 200 cruzeiros | 5. 5% de 300 dólares | 8. 2% de 80 cruzeiros |
| 3. 5% de 400 cruzeiros | 6. 4% de 600 libras | 9. 5% de 160 cruzeiros |

10. Comprei um relógio por 500 cruzeiros e vendi-o com um lucro de 6%. Quanto ganhei? Quanto recebi?

11. Um colégio tem 100 alunos; foram reprovados 8; quantos % foram reprovados?

12. Uma companhia de 300 homens perdeu 60 em combate. Quantos % morreram? Quantos % se salvaram?

13. De uma classe com 50 alunos foram aprovados 42; quantos % foram reprovados?

14. Um negociante quer ganhar 12% sobre um artigo que lhe custou 200 cruzeiros. Por quanto deve vendê-lo?

15. O café em grão, depois de torrado, perde 18% de seu peso. A quanto se reduzem 400kg de café em grão, depois de torrado?

16. As beterrabas dão 15% de seu peso, em açúcar. Quantos kg de açúcar podemos extrair de 600kg de beterrabas?

17. Um chapéu de 50 cruzeiros é vendido com um abatimento de 10%, por ter um pequeno defeito. Quanto se pagará por este chapéu?

70. **Definições.** Um segundo ano ginásial tem 50 alunos. No fim do ano são aprovados 42 e reprovados 8. A razão (§ 53) entre o número de aprovados e o número de matriculados é $42 \div 50$ ou $\frac{42}{50}$; entre o número de reprovados e o de matriculados é $8 \div 50$ ou $\frac{8}{50}$.

$$\text{Portanto, } \left\{ \begin{array}{l} \frac{\text{alunos aprovados}}{\text{alunos matriculados}} = \frac{42}{50} \\ \frac{\text{alunos reprovados}}{\text{alunos matriculados}} = \frac{8}{50} \end{array} \right.$$

Multiplicando os dois termos de cada uma das frações acima, por 2, teremos:

$$\frac{\text{alunos aprovados}}{\text{alunos matriculados}} = \frac{42}{50} = \frac{84}{100} = 0,84 = 84\%$$

$$\frac{\text{alunos reprovados}}{\text{alunos matriculados}} = \frac{8}{50} = \frac{16}{100} = 0,16 = 16\%$$

E diremos que, em relação a este segundo ano ginásial, a taxa de percentagem de aprovação é 84 e a de reprovação é 16.

O número de matriculados, isto é, 50, é chamado **principal**; as expressões 84% e 16% são chamadas **taxas de percentagem** ou, simplesmente, **taxas**.

As expressões 84% e 16% são lidas 84 por cento e 16 por cento e significam:

$$\left\{ \begin{array}{l} 84 \text{ em cada } 100 \\ 16 \text{ em cada } 100 \end{array} \right\} \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} 0,84 \text{ de } \dots \\ 0,16 \text{ de } \dots \end{array} \right\}$$

Porcentagem é o resultado que se obtém, quando se calculam uns tantos por cento ou uns tantos centésimos de uma quantidade qualquer. De acôrdo com o problema proposto, a porcentagem é também chamada *desconto, abatimento, lucro, prejuízo, comissão, rendimento, renda, etc.*

Principal é a quantidade da qual se pede a porcentagem. Quando o principal é dinheiro, dá-se-lhe o nome de **capital**.

Taxa de porcentagem, ou simplesmente **taxa**, é a porcentagem de um principal ou capital fixo. Este principal fixo é 100.

71. Cálculo da porcentagem. Um colégio tinha, em 1931, cerca de 720 alunos matriculados no curso ginásial. No fim do ano letivo, a aprovação foi de 95%. Quantos alunos foram aprovados?

$$D \left\{ \begin{array}{l} 100 \quad 95 \\ 720 \quad x \end{array} \right\} \therefore 100 : 720 :: 95 : x$$

$$x = \frac{95 \times 720}{100} = 684$$

Resposta. Foram aprovados 684 alunos.

Exercícios. Série XXVIII

1. Comprei um automóvel por 8 650 cruzeiros e, algum tempo depois, vendi-o com um lucro de 14%. Quanto recebi?
2. O capital inicial de uma empresa é de 8 milhões de cruzeiros. Ao cabo de um ano verifica-se que os lucros obtidos representam 24% deste capital. A diretoria da empresa resolve, então, distribuir em esmolas 30% de seus lucros. Em quanto importam estas esmolas?
3. Um negociante comprou à vista mercadorias no valor de 15 400 cruzeiros. Tendo conseguido um desconto de 4%, quanto pagou pelas mercadorias?
4. A passagem do Rio a São Paulo, em primeira classe, custa Cr\$ 64,40. Os menores de 12 anos pagam meia passagem. Um casal com 5 filhos, dos quais 2 são menores de 12 anos, necessitando fazer esta viagem, ida e volta, consegue uma redução, nas passagens, de 35%. Em quanto importam as bilhetes necessários?

5. O superfosfato de cal contém 14% de seu peso em ácido fosfórico. Um kg de ácido fosfórico custa 3 cruzeiros. Quanto custarão 4 200kg de superfosfato de cal?

6. Um negociante comprou 135 bois a 96 cruzeiros cada um. Tendo pago à vista, fizeram-lhe um abatimento de 8% sobre a importância total a pagar. Morreram 22 bois e os restantes foram vendidos a 115 cruzeiros cada um. O negociante ganhou ou perdeu? Quanto?

7. Comprei três peças de sêda, medindo respectivamente 32,5m, 40,8m e 45,2m, a 15 cruzeiros o metro. Pagando à vista, tive um desconto de 6%. Por quanto hei de vender cada metro para realizar um lucro de 25% sobre o custo líquido desta sêda?

8. Comprei um terreno com 456m de comprimento por 248m de largura, à razão de 12 cruzeiros o metro quadrado. Por quanto hei de vender cada are deste terreno, para realizar um lucro de 18% sobre o preço de compra?

9. Um cobrador de aluguéis tem uma comissão de 8 ½ % sobre os aluguéis recebidos. Tendo recebido 54 000 cruzeiros de aluguéis, durante o ano de 1931, qual foi a sua comissão?

10. Um grupo escolar tem 1 260 alunos. A taxa de porcentagem de freqüência, durante o mês de abril, foi de 92,35 por cento. Se o mês de abril teve 25 dias letivos, quantos alunos compareceram em média, e por dia, ao estabelecimento?

11. Supondo-se que o café em grão, depois de torrado, perde 18 ¾ % de seu peso, quantos quilos de café torrado darão 54kg de café em grão?

12. Um negociante comprou 200 sacas de café, pesando cada uma 60kg, a 250 cruzeiros o quintal métrico. Vendeu ⅓ deste café, com um prejuízo de 5%. Por quanto deve vender cada saca do café restante para ganhar 12% sobre todo o café?

13. Quanto é ¼ % de 720 cruzeiros?

14. Qual é a diferença entre 5 ½ % de 640 cruzeiros e 7 ¼ % de 750 cruzeiros?

15. Comprei 5,24m de sêda a Cr\$ 34,60 o metro. Fizeram-me um desconto de 5,25%. Quanto paguei?

72. Preço líquido. Entro numa chapelaria; vejo um chapéu que me agrada e cujo preço, marcado no próprio chapéu, é 80 cruzeiros. Converso com o negociante e consigo um abatimento de 10%, comprando, portanto, o chapéu por 72 cruzeiros. A esta quantia, 72 cruzeiros, damos o nome de *preço líquido* do chapéu, ou *líquido a pagar* pelo chapéu.

Para calcular o preço líquido de uma mercadoria, pode-se calcular, em primeiro lugar, o desconto ou abatimento feito sobre o preço marcado, e subtrair este desconto ou abatimento, do mesmo preço. Entretanto, o preço líquido pode ser obtido diretamente, isto é, sem calcular o desconto.

Exercício. *Sobre uma fatura (uma conta) de 3 640 cruzeiros, um negociante faz um desconto de 15%. Qual é o líquido a pagar?*

O comprador conseguiu um desconto de 15%, isto é, de 0,15 da importância da conta; neste caso, ele deve pagar 0,85 ou 85% da importância da mesma conta. É necessário então resolver o seguinte problema de regra de três:

Se, por 100 pago 85, por 3 640 cruzeiros quanto pagarei?

$$D \left\{ \begin{array}{cc} 100 & 85 \\ 3\,640 & x \end{array} \right\} \therefore 100 : 3\,640 :: 85 : x$$

$$x = \frac{3\,640 \times 85}{100} = 3\,094$$

Resposta. O líquido a pagar pela fatura apresentada é de 3 094 cruzeiros.

Exercícios. Série XXIX

1. Em um combate, um batalhão de 640 homens perdeu 35% do seu efetivo. Quantos soldados sobreviveram?
2. Um criador tinha 7 400 cabeças de gado. Uma moléstia qualquer dizimou 48% dos seus rebanhos. Quantos animais sobreviveram?
3. Comprei mercadorias no valor de 7 548 cruzeiros. Pagando à vista, consegui um desconto de 7½%. Quanto paguei pelas mercadorias compradas?

73. Cálculo da taxa. *Em uma fatura de 420 cruzeiros, fizeram-me um desconto de 63 cruzeiros. Qual foi a taxa combinada para o desconto?*

Este problema pode ser resolvido com uma regra de três.

Em uma fatura de 420 cruzeiros fizeram-me um desconto de 63 cruzeiros; em uma fatura de 100, qual seria o desconto?

$$D \left\{ \begin{array}{cc} 420 & 63 \\ 100 & x \end{array} \right\} \therefore 420 : 100 :: 63 : x$$

$$x = \frac{100 \times 63}{420} = 15$$

Resposta. Se o desconto em 100 é 15, a taxa de desconto é 15%.

Exercícios. Série XXX

1. Comprei por 12 cruzeiros um objeto de 15 cruzeiros. Qual foi a taxa de desconto?
2. Vendí por Cr\$ 1 581,20, o que me custou Cr\$ 1 340,00. Qual foi a taxa de porcentagem do lucro?
3. Comprei um cavalo por 2 350 cruzeiros e vendí-o com um prejuízo de 564 cruzeiros. Qual foi a taxa de porcentagem do prejuízo?
4. Uma resma de papel tem 20 mãos, cada mão 5 cadernos e cada caderno 5 folhas. Um negociante compra uma resma deste papel por Cr\$ 37,50 e vende cada folha a 10 centavos. Qual é a taxa de porcentagem do lucro?
5. Um negociante comprou 120 pacotes de velas por 480 cruzeiros. Estando 10 pacotes estragados, cada um destes foi vendido por ¼ do preço de compra. Tendo vendido os outros a Cr\$ 5,25, qual foi a taxa de porcentagem do lucro?
6. Comprei 60 metros de seda por 1 260 cruzeiros. Vendí 18 metros com um lucro de 22%. Os metros restantes foram vendidos de uma só vez por Cr\$ 1 031,94. Qual foi a taxa de porcentagem do lucro nesta venda? E na venda de toda a peça?
7. Um terreno com 156 metros de comprimento por 95 metros de largura foi comprado a 3 600 cruzeiros o hectare e vendido a 42 cruzeiros o are. Qual foi a taxa de porcentagem do lucro?

74. Cálculo do principal. *Um joalheiro vende um anel por 406 cruzeiros, com um lucro de 16%. Qual o custo deste anel? Este problema pode ser resolvido com o auxílio da regra de três. Suponhamos que o joalheiro compra o anel por 100 cruzeiros. Se quiser vendê-lo com um lucro de 16%, deverá vendê-lo por 116 cruzeiros. E diremos:*

Se a um preço de venda igual a 116, corresponde um preço de custo igual a 100, a um preço de venda igual a 406 cruzeiros, que preço de custo corresponderá?

$$D \left\{ \begin{array}{cc} 116 & 100 \\ 406 & x \end{array} \right\} \therefore 116 : 406 :: 100 : x$$

$$x = \frac{406 \times 100}{116} \therefore x = 350$$

Resposta. O custo do anel é 350 cruzeiros.

Exercícios. Série XXXI

1. Vendendo o meu automóvel por 10 200 cruzeiros, perdi 25% do custo do mesmo. Por quanto tinha eu comprado este automóvel?

2. Um empregado de uma casa comercial, tendo direito a 8% das vendas por ele realizadas durante o ano, recebe, no fim do ano, a sua comissão de 7 200 cruzeiros. Quanto vendeu ele durante o ano?

3. Vendi um relógio por 320 cruzeiros, com um lucro de 24%. Por quanto tinha eu comprado este relógio?

4. Paguei Cr\$ 566,80 por uma fatura sobre a qual me fizeram um desconto de 8%. Qual era a importância desta fatura?

5. Um exército entrou em combate. Perdeu 36% do seu efetivo e sobreviveram 11 520 soldados. De quantos homens se compunha este exército?

6. Supondo-se que 30% da população de uma cidade seja constituída de estrangeiros, e que os nacionais são 560 000, qual é a população desta cidade?

7. A população de uma cidade é de 445 300 habitantes. Qual era a sua população há 10 anos, sabendo-se que, durante estes 10 anos, ela aumentou de 22%?

8. Um negociante mistura 80 litros de vinho com 12 litros de água. Qual é a porcentagem de água que esta mistura contém?

Solução. A mistura tem 92 litros. Se 92 litros da mistura contém 12 litros de água, 100 litros da mistura quantos litros de água conterão?

$$92 : 12 :: 100 : x \therefore x = \frac{100 \times 12}{92} \therefore x = 13 \frac{1}{23}$$

Resposta. A porcentagem de água é de $13 \frac{1}{23}\%$.

9. Misturam-se 84 litros de álcool com 24 de água. Qual é a porcentagem de álcool que esta mistura contém?

10. Em um colégio há 360 brasileiros e 42 estrangeiros. Qual é a porcentagem dos estrangeiros?

11. Ligam-se 120g de ouro com 25g de cobre. Qual é a porcentagem de ouro que esta liga contém?

12. Dissolvem-se 3 litros de sal em 52 litros de água. Qual é a porcentagem de sal que esta mistura contém?

13. Tenho duas águas salgadas. A primeira contém 24 litros de água e 3 litros de sal; a segunda contém 50 litros de água e 7 litros de sal. Qual é a água mais salgada? Qual é a porcentagem de sal em cada água?

75. Fórmulas. Todos os problemas resolvidos nos parágrafos anteriores podem ser resolvidos com o auxílio de fórmulas. Estas são muito úteis na vida prática. O empregado de uma casa comercial, sendo encarregado de calcular descontos em faturas pagas à vista, não pode perder tempo em raciocinar sobre o problema que lhe é apresentado, armar a regra de três, etc., etc.; ele tem necessidade de uma fórmula, a qual lhe permita resolver rapidamente o problema que lhe é proposto muitas vezes no decorrer de um mesmo dia.

O estudante, porém, deve raciocinar, resolvendo todos os problemas de um modo direto, isto é, raciocinando sobre cada um deles. O fim principal da Matemática é o desenvolvimento do raciocínio; para conseguir este fim, professores e alunos deverão evitar, tanto quanto possível, até certo ponto, o emprego de fórmulas. Entretanto, o estabelecimento de fórmulas é um ótimo exercício teórico, que não podemos dispensar num curso secundário.

Para estabelecer as fórmulas de porcentagem, vamos recorrer ao *cálculo literal*, isto é, substituir os números por letras. O *principal* ou *capital* será representado pela letra *c*, a *taxa de porcentagem* pela letra *i*, a *porcentagem* pela letra *p* e o preço líquido de uma mercadoria qualquer pela letra *l*.

76. Fórmula para calcular a porcentagem. Para estabelecer esta fórmula, resolveremos o seguinte problema:

Comprei mercadorias cujo valor é *c*. Tendo pago à vista fizeram-se um desconto de *i*%. Calcular o desconto.

$$D \left\{ \begin{array}{cc} 100 & i \\ c & p \end{array} \right\} \therefore 100 : c :: i : p$$

$$p = \frac{ci}{100} \quad (A)$$

A fórmula A nos permite calcular uma porcentagem, quando são dados o principal e a taxa; ela significa que:

Para calcular uma porcentagem, um desconto, um abatimento, uma comissão, um lucro, um prejuízo, uma renda, etc., multiplica-se o principal pela taxa, e divide-se o produto por 100.

Na prática, é conveniente, às vezes, dar à fórmula A a seguinte forma:

$$p = \frac{c}{100} \times i \quad (B)$$

A fórmula B é preferível, quando a taxa é fracionária. Por exemplo, qual será o abatimento que se deve fazer em uma fatura de 345 cruzeiros, sendo a taxa de $7 \frac{1}{2}\%$?

$$p = \frac{345}{100} \times \frac{15}{2} = \text{Cr\$ } 25,87$$

77. **Fórmula para calcular um preço líquido.** Entrei numa joalheria, vi um relógio que me agradou e cujo preço era c . O negociante vendeu-me o relógio com um abatimento de $i\%$. Quanto paguei pelo relógio?

Para estabelecer uma fórmula que nos permita resolver de pronto este problema, é necessário fazer o raciocínio seguinte:

Sendo o desconto igual a i , eu pagarei $100 - i$ pelo que me custar 100. Ora, se pelo que me custa 100, eu devo pagar $100 - i$, quanto devo pagar pelo que custa c ?

$$D \left\{ \begin{array}{cc} 100 & 100 - i \\ c & l \end{array} \right\} \therefore 100 : c :: 100 - i : l$$

$$l = \frac{c(100 - i)}{100} \quad (C)$$

A fórmula C significa que:

Para calcular o preço líquido de um objeto qualquer, vendido ou comprado com desconto, ou para calcular o líquido de uma fatura sobre a qual se faz um desconto qualquer, multiplica-se o principal pela diferença entre 100 e a taxa, e divide-se o produto por 100.

Na prática convém, às vezes, dar à fórmula C a seguinte forma:

$$l = \frac{c}{100} \times (100 - i) \quad (D)$$

Esta fórmula é preferível quando a taxa é fracionária. Por exemplo, quanto se pagará por uma fatura de 345 cruzeiros, sobre a qual se faz um desconto de $7\frac{1}{2}\%$?

$$l = \frac{345}{100} \times \left(100 - \frac{15}{2}\right) = \text{Cr\$ } 319,12$$

78. **Fórmula para calcular um preço de venda.** Um negociante tem uma mercadoria que lhe custou c . Por quanto deve vendê-la, para ganhar $i\%$ sobre o preço de custo?

Seja v o preço de venda e façamos o seguinte raciocínio:

Se uma mercadoria que custa 100, deve ser vendida por $100 + i$, uma outra que custa c , por quanto deve ser vendida?

$$D \left\{ \begin{array}{cc} 100 & 100 + i \\ c & v \end{array} \right\} \therefore 100 : c :: 100 + i : v$$

$$v = \frac{c(100 + i)}{100} \quad (E)$$

A fórmula E significa que:

Para calcular o preço de venda de um objeto qualquer, sobre o qual se quer ganhar $i\%$, multiplica-se o preço de custo por $100 + i$, e divide-se o produto por 100.

Quando a taxa é fracionária, convém dar à fórmula E a seguinte forma:

$$v = \frac{c}{100} \times (100 + i) \quad (F)$$

Exemplo. Qual será o preço de venda de um artigo que custa 324 cruzeiros, se o negociante quiser ganhar sobre ele $7\frac{1}{2}\%$?

$$v = \frac{324}{100} \times \left(100 + \frac{15}{2}\right) = \text{Cr\$ } 348,30$$

Exercícios. Série XXXII

1. Vendí um automóvel por 8 568 cruzeiros. Neste negócio perdi 32% do custo do automóvel. Quanto tinha eu pago pelo mesmo?
2. Comprei fazendas no valor de 25 000 cruzeiros. Vendí 84% desta fazenda com $15\frac{3}{4}\%$ de lucro, e o restante pelo custo. Quanto ganhei?
3. Um colégio tem 312 alunos internos, e os externos representam 48% do número total de alunos. Quantos alunos tem este colégio?
4. Um caixeiro viajante tem uma diária de 25 cruzeiros e uma comissão de 8% sobre as vendas realizadas. Sua despesa diária é de 32 cruzeiros. Tendo economizado 1 260 cruzeiros em um mês, quanto vendeu durante este mês?
5. O café fino perde na torração 15% de seu peso. A manipulação de uma arroba (15kg) de café em pó, custa 12 cruzeiros. Se o torrador compra café fino a 3 cruzeiros o kg, qual será para ele o custo de 1kg de pó de café? E por quanto deverá vendê-lo para ganhar 20% do custo?

79. **Divisão em partes diretamente proporcionais.** Dois meninos, cujas idades respectivas são 5 e 7 anos, recebem de seu pai um presente de 120 cruzeiros. Entretanto, esta quantia não é para ser repartida em partes iguais pelos dois meninos; deve ser

repartida em partes proporcionais às idades dos mesmos, isto é, aos números 5 e 7. Como resolver este problema?

Repartir 120 cruzeiros em partes diretamente proporcionais, ou, simplesmente, proporcionais aos números 5 e 7, é repartir esta quantia em duas porções tais que, dividindo-se a primeira por 5 e a segunda por 7, os dois quocientes sejam iguais. Representando então estas duas porções por x e y , teremos:

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{7}$$

Aplicando a esta proporção a segunda propriedade das proporções (§62), teremos:

$$x + y : 5 + 7 :: \left\{ \begin{array}{l} x : 5 \\ y : 7 \end{array} \right\}$$

E, lembrando que $x + y = 120$ cruzeiros, resulta:

$$120 : 12 :: \left\{ \begin{array}{l} x : y \\ y : 7 \end{array} \right\} \therefore \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{5 \times 120}{12} = 50 \\ y = \frac{7 \times 120}{12} = 70 \end{array} \right\}$$

O menino mais moço recebe 50 cruzeiros e o mais velho, 70.

Dividir um número em partes diretamente proporcionais a dois números dados, é dividi-lo em duas partes tais que, divididas respectivamente por estes mesmos números, os quocientes sejam iguais.

Vamos agora estabelecer fórmulas para resolver este problema.

Seja N um número que se quer dividir em duas partes proporcionais aos números a e b . Representando as duas partes por x e y , teremos:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} \therefore x + y : a + b :: \left\{ \begin{array}{l} x : a \\ y : b \end{array} \right\} \therefore$$

$$N : a + b :: \left\{ \begin{array}{l} x : a \\ y : b \end{array} \right\} \therefore \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{Na}{a + b} \quad (A) \\ y = \frac{Nb}{a + b} \quad (B) \end{array} \right.$$

Aplicação. Dividir 910 cruzeiros em partes proporcionais aos números 7 e 13.

Chamando x e y às duas partes pedidas e aplicando as fórmulas A e B, teremos:

$$x = \frac{910 \times 7}{7 + 13} \qquad y = \frac{910 \times 13}{7 + 13}$$

$$x = \frac{910 \times 7}{20} \therefore x = 45,5 \times 7 \therefore x = \text{Cr\$ } 318,50$$

$$y = \frac{910 \times 13}{20} \therefore y = 45,5 \times 13 \therefore y = \text{Cr\$ } 591,50$$

Exercícios. Série XXXIII

1. Dividir o número 500 em partes proporcionais aos números 21 e 29.
2. Dividir o número 1 260 em partes proporcionais aos números 12 e 23.
3. Dividir 50 em partes proporcionais às frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{5}$.

Sugestão. $x : \frac{2}{3} :: y : \frac{1}{5}$

Multiplicando os conseqüentes por 15, m.m.c. dos denominadores, teremos:

$$x : \frac{2 \times 15}{3} :: y : \frac{4 \times 15}{5} \therefore x : 10 :: y : 12 \therefore x : 5 :: y : 6, \text{ etc.}$$

4. Dividir 60 em partes proporcionais aos números 0,3 e 1,2.

Sugestão. $x : 0,3 :: y : 1,2$

Multiplicando os conseqüentes por 10, para suprimir as vírgulas, teremos:

$$x : 3 :: y : 12 \therefore x : 1 :: y : 4, \text{ etc.}$$

5. Dividir 120 em partes proporcionais aos números $3 \frac{1}{2}$ e $4 \frac{1}{5}$.
6. Dividir 200 em partes proporcionais aos números $\frac{7}{8}$ e 1,5.
7. Dividir o número A em partes proporcionais aos números m e n .

80. Divisão em partes proporcionais a três números dados. Uma escola rural tem três classes; o primeiro ano com 25 alunos, o segundo com 20 e o terceiro com 15. A professora desta escola recebe 300 laranjas para reparti-las pelas classes, porém em partes proporcionais ao número de alunos de cada classe. Como efetuar esta distribuição?

As três porções devem ser tais que, divididas respectivamente pelos números 25, 20 e 15, os quocientes sejam iguais. Representando as três porções por x , y e z , teremos:

$$\frac{x}{25} = \frac{y}{20} = \frac{z}{15}$$

Temos três razões geométricas iguais. Aplicando a este grupo de razões iguais a terceira propriedade das proporções (§ 62) teremos:

$$x + y + z : 25 + 20 + 15 :: \begin{cases} x : 25 \\ y : 20 \\ z : 15 \end{cases}$$

E, lembrando que $x + y + z = 300$, resulta:

$$300 : 60 :: \begin{cases} x : 25 \\ y : 20 \\ z : 15 \end{cases} \therefore \begin{cases} x = 125 \\ y = 100 \\ z = 75 \end{cases}$$

O primeiro ano recebe 125 laranjas; o segundo 100; o terceiro, 75.

Dividir um número em partes diretamente proporcionais a três números dados, é dividi-lo em três partes tais que, divididas respectivamente por estes três números, os quocientes sejam iguais.

Este problema também pode ser resolvido por fórmulas.

Seja N um número que se quer dividir em três partes proporcionais aos números a , b e c . Representando estas três partes por x , y e z , teremos:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \therefore x + y + z : a + b + c :: \begin{cases} x : a \\ y : b \\ z : c \end{cases} \therefore$$

$$N : a + b + c :: \begin{cases} x : a \\ y : b \\ z : c \end{cases} \therefore \begin{cases} x = \frac{Na}{a + b + c} & \text{(C)} \\ y = \frac{Nb}{a + b + c} & \text{(D)} \\ z = \frac{Nc}{a + b + c} & \text{(E)} \end{cases}$$

Aplicação. Repartir 7 200 cruzeiros em partes proporcionais aos números 12, 13 e 15.

Chamando x , y e z às três partes pedidas, e aplicando as fórmulas C, D e F, teremos:

$$\begin{aligned} x &= \frac{7\,200 \times 12}{12 + 13 + 15} & y &= \frac{7\,200 \times 13}{12 + 13 + 15} & z &= \frac{7\,200 \times 15}{12 + 13 + 15} \\ x &= \frac{7\,200 \times 12}{40} & y &= \frac{7\,200 \times 13}{40} & z &= \frac{7\,200 \times 15}{40} \\ x &= 2\,160 \text{ cruzeiros} & y &= 2\,340 \text{ cruzeiros} & z &= 2\,700 \text{ cruzeiros} \end{aligned}$$

Exercícios. Série XXXIV

1. Dividir 9 460 cruzeiros em partes proporcionais aos números 11, 13 e 19.
2. Dividir o número 11 550 em partes proporcionais às frações $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{5}$.

Sugestão. Representando as quatro partes por x , y , z e t , teremos:

$$x : \frac{1}{2} :: y : \frac{1}{3} :: z : \frac{1}{4} :: t : \frac{1}{5}$$

Multiplicando os consequentes por 60, m.m.c. dos denominadores, teremos:
 $x : 30 :: y : 20 :: z : 15 :: t : 12$, etc..

3. Dividir o número 5 000 em partes proporcionais aos números $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ e $\frac{4}{5}$.
4. Dividir 200 metros de fazenda em três partes cujos comprimentos sejam proporcionais aos números 1,5m, 2,4m e 3,6m.
5. Dividir 80 laranjas em duas porções tais que uma seja igual a $\frac{3}{5}$ da outra.

Sugestão. Representa-se a primeira porção pelo número 1 e a segunda pelo número $\frac{3}{5}$, e divide-se 80 em duas partes proporcionais aos números 1 e $\frac{3}{5}$.

Pode-se também representar a primeira porção por um número divisível por 5, por exemplo, pelo número 20; neste caso, a segunda porção será representada por um número igual a $\frac{3}{5}$ de 20; isto é, pelo número 12. E divide-se 80 em duas partes proporcionais aos números 20 e 12.

Dividindo-se os dois termos da segunda razão pelo produto 3×5 , e simplificando, resulta:

$$x : y :: \frac{5}{3 \times 5} : \frac{3}{3 \times 5} \quad \therefore x : y :: \frac{1}{3} : \frac{1}{5}$$

Donde se conclue que x e y , sendo inversamente proporcionais aos números 3 e 5, são diretamente proporcionais aos números $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{5}$, que são os recíprocos dos números 3 e 5.

De um modo geral, seja n um número que queremos dividir em duas partes x e y , inversamente proporcionais aos números a e b . Teremos:

$$I \left\{ \begin{array}{l} x \downarrow \\ y \downarrow \end{array} \quad \begin{array}{l} a \uparrow \\ b \uparrow \end{array} \right\} \quad \therefore x : y :: b : a$$

$$x : y :: \frac{b}{a \times b} : \frac{a}{a \times b} \quad \therefore x : y :: \frac{1}{a} : \frac{1}{b}$$

Portanto, a regra de três simples e inversa $\left\{ \begin{array}{l} x \downarrow \\ y \downarrow \end{array} \quad \begin{array}{l} a \uparrow \\ b \uparrow \end{array} \right\}$ pode ser substituída pela regra de três simples e direta

$$\left\{ \begin{array}{l} x \downarrow \\ y \downarrow \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{1}{a} \downarrow \\ \frac{1}{b} \downarrow \end{array} \right\}$$

Exercícios. Série XXXV

- Dividir 234 em partes inversamente proporcionais aos números 4 e 5.
Sugestão. $x : \frac{1}{4} :: y : \frac{1}{5}$, etc..
- Dividir 627 em partes inversamente proporcionais aos números 3 e 8.
- Dividir 1 014 cruzeiros em três partes inversamente proporcionais aos números 2, 3 e 4.
Sugestão. $x : \frac{1}{2} :: y : \frac{1}{3} :: z : \frac{1}{4}$, etc..
- Dividir 4 075 em quatro partes inversamente proporcionais aos números 3, 5, 7 e 10.

5. Dividir 30 000 cruzeiros em quatro partes inversamente proporcionais aos números $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ e $\frac{1}{8}$.

6. Dividir 82 000 cruzeiros em três partes inversamente proporcionais aos números $2\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$ e 1,5.

7. Três irmãos receberam uma herança de 200 000 cruzeiros para ser repartida em partes inversamente proporcionais às suas idades, isto é, 20, 15 e 10 anos. Quanto recebeu cada um?

8. Distribuí laranjas em quatro cestas cujos volumes são inversamente proporcionais aos números 7, 5, 4 e 2. A segunda cesta contém 48 laranjas mais do que a primeira. Quantas laranjas contém cada cesta? E as quatro?

82. A área do retângulo. Consideremos dois retângulos cujas bases são iguais (5cm) e cujas alturas são diferentes. (3cm e 12cm) Desenhando-os em papel milimetrado, veremos que o maior contém 4 vezes o menor, isto é, a razão das áreas de dois retângulos, quando eles têm bases iguais, é igual à razão das alturas.

Suponhamos agora que dois retângulos têm a mesma altura (5cm) e que as bases são diferentes. (3cm e 12cm) Desenhando-os em papel milimetrado, veremos que o maior contém 4 vezes o menor, isto é, a razão das áreas de dois retângulos, quando eles têm alturas iguais, é igual à razão das bases. Em outras palavras:

As áreas de retângulos com bases iguais são proporcionais às alturas; as áreas de retângulos com alturas iguais, são proporcionais às bases.

Observação. Os estudantes devem desenhar todas as figuras indicadas neste parágrafo, para que vejam as conclusões a que estamos chegando.

Vamos agora desenhar dois retângulos R e R', o primeiro com 4cm de base e 3cm de altura, e o segundo com 8cm de base e 15cm de altura. Comparando os dois retângulos, observaremos que:

$$\text{área retângulo } R = 4\text{cm} \times 3\text{cm} = 12\text{cm quadrados}$$

$$\text{área retângulo } R' = 8\text{cm} \times 15\text{cm} = 120\text{cm quadrados}$$

$$\frac{R}{R'} = \frac{12}{120} \quad \therefore \frac{R}{R'} = \frac{4 \times 3}{8 \times 15}$$

Variando as dimensões dos dois retângulos, chegaremos sempre à mesma conclusão, isto é:

A razão das áreas de dois retângulos, com bases e alturas diferentes, é igual à razão dos produtos das bases pelas alturas.

Exercícios em classe

1. Dois terrenos retangulares medem respectivamente $12\text{m} \times 5\text{m}$ e $36\text{m} \times 25\text{m}$. Qual é a razão de seus comprimentos? E de suas larguras? E de suas áreas?

2. Mesmas perguntas em relação a dois retângulos que medem $4\text{m} \times 3\text{m}$ e $32\text{m} \times 15\text{m}$.

3. Idem, em relação a um quadrado cujo lado mede 5m e a um retângulo que mede $20\text{m} \times 30\text{m}$.

4. Um terreno retangular mede $10\text{m} \times 8\text{m}$ e custa 300 cruzeiros. Quanto custará outro terreno também retangular e que mede $30\text{m} \times 16\text{m}$?

5. Temos dois retângulos R e R'. O comprimento do segundo é o triplo do comprimento do primeiro, mas a largura do segundo é a quarta parte da largura do primeiro. Qual é a razão das áreas deste dois retângulos? Se o primeiro vale 400 cruzeiros, quanto vale o segundo?

Podemos agora estabelecer e demonstrar, de um modo completamente geral, o seguinte

Teorema. *As áreas de dois retângulos são proporcionais aos produtos das bases pelas respectivas alturas.*

Sejam s e s' as áreas de dois retângulos R e R' cujas bases e alturas são respectivamente b e h , b' e h' . Consideremos um terceiro retângulo R'' cuja área é s'' , cuja base é b e cuja altura é h' . Teremos:

retângulo R { área s , base b , altura h .

retângulo R' { área s' , base b' , altura h' .

retângulo R'' { área s'' , base b , altura h' .

Os retângulos R e R'' têm a mesma base; portanto, suas áreas são proporcionais às alturas, e teremos:

$$\frac{s}{s''} = \frac{h}{h'} \quad (1)$$

Os retângulos R' e R'' têm a mesma altura; portanto, suas áreas são proporcionais às bases, e teremos:

$$\frac{s'}{s''} = \frac{b'}{b} \quad (2)$$

Dividindo-se, membro a membro, a igualdade (1) pela igualdade (2) resulta:

$$\frac{s}{s''} \times \frac{s''}{s'} = \frac{h}{h'} \times \frac{b}{b'} \therefore \frac{s}{s'} = \frac{b \times h}{b' \times h'}$$

Observação. Se dois números a e a' são proporcionais aos números b e b' , assim como aos números c e c' , então eles são proporcionais aos produtos bc e $b'c'$, isto é, $\frac{a}{a'} = \frac{bc}{b'c'}$.

Exercícios. Série XXXVI

1. Dividir o número 546 em duas partes que sejam proporcionais aos números 3 e 5 e aos números 4 e 6.

Sugestão. Sejam x e y as duas partes. Se x e y devem ser proporcionais aos números 3 e 5, e aos números 4 e 6, então são proporcionais aos produtos 3×4 e 5×6 , e podemos escrever:

$$x : 3 \times 4 :: y : 5 \times 6, \text{ etc.}$$

2. Dividir 4 180 em duas partes diretamente proporcionais aos números 3 e 4 e inversamente proporcionais aos números 5 e 6.

$$\textit{Sugestão. } x : 3 \times \frac{1}{5} :: y : 4 \times \frac{1}{6}, \text{ etc.}$$

3. Dividir 11 950 em três partes diretamente proporcionais aos números $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{3}$, $\frac{5}{6}$ e inversamente proporcionais aos números $\frac{2}{5}$, $1\frac{1}{3}$ e $2\frac{3}{4}$.

Sugestão. Reduzindo os números dados a frações impróprias, teremos:

$$\frac{5}{2}, \frac{10}{3} \text{ e } \frac{5}{6}; \quad \frac{2}{5}, \frac{4}{3} \text{ e } \frac{11}{4}$$

Representando por x , y e z as três partes pedidas, teremos:

$$x : \frac{5}{2} \times \frac{5}{2} :: y : \frac{10}{3} \times \frac{3}{4} :: z : \frac{5}{6} \times \frac{4}{11}, \text{ etc.}$$

4. Para construir uma parede com 15m de comprimento e 4m de altura, foi necessário que 7 operários trabalhassem durante um mês. Quantos operários seriam necessários para construir uma parede com 45m de comprimento e 12m de altura, também em um mês?

Solução.

7 operários	15m comprimento	4m altura
x operários	45m comprimento	12m altura

As duas turmas de operários, devendo ser proporcionais aos comprimentos e às alturas das duas paredes, isto é, aos números 15 e 45, assim como aos números 4 e 12, podemos escrever:

$$7 : 15 \times 4 :: x : 45 \times 12$$

$$x = \frac{7 \times 45 \times 12}{15 \times 4} = 63$$

Resposta. Seriam necessários 63 operários.

5. Para fazer 120m de sêda, 3 operários trabalharam 12 dias, durante 9 horas por dia. Quantos metros de sêda fariam 5 operários, em 10 dias, trabalhando 8 horas por dia?

<i>Sugestão.</i>	120m	3 op.	12 dias	9 horas
	x m	5 op.	10 dias	8 horas

Os dois comprimentos 120 e x , sendo diretamente proporcionais ao número de operários, ao número de dias e ao número de horas, segue-se que 120 e x são proporcionais aos números 3, 12 e 9, assim como aos números 5, 10 e 8. E podemos escrever:

$$120 : 3 \times 12 \times 9 :: x : 5 \times 10 \times 8, \text{ etc.}$$

Observação. Os exercícios 4 e 5 nos mostram que os problemas de regra de três composta podem ser resolvidos com uma única proporção, fácil de escrever. Suponhamos um problema cujos dados são os seguintes:

N	a	b	c	d
x	a'	b'	c'	d'

Se N e x são diretamente proporcionais a todos os números que entram no problema, escreveremos:

$$N : a \times b \times c \times d :: x : a' \times b' \times c' \times d'$$

Suponhamos agora um problema cujos dados são os seguintes:

N	a	b	c	d	e
x	a'	b'	c'	d'	e'

Se N e x são inversamente proporcionais aos números b e b' assim como aos números d e d' , e diretamente proporcionais aos outros, podemos escrever:

$$N : a \times \frac{1}{b} \times c \times \frac{1}{d} \times e :: x : a' \times \frac{1}{b'} \times c' \times \frac{1}{d'} \times e' \quad (A)$$

$$N : \frac{ace}{bd} :: x : \frac{a'c'e'}{b'd'}$$

Multiplicando-se os consequentes desta proporção por $bdb'd'$, e simplificando, resulta:

$$N : aceb'd' :: x : a'c'e'bd$$

Esta última proporção nos mostra que, em lugar da proporção A, se pode escrever imediatamente:

$$N : a \times b' \times c \times d' \times e :: x : a' \times b \times c' \times d \times e'$$

Os estudantes devem resolver por este processo os problemas 1 a 15 do §68, série XXVII.

83. Regra de sociedade. Dois ou mais indivíduos se associam para negociar em café, algodão, fazendas, etc.. Ao cabo de um ano ganham 120 000 cruzeiros. Se os diferentes sócios entraram a negociar com capitais iguais, isto é, se cada um deles entrou, digamos, com 50 000 cruzeiros para o negócio, e se eles trabalharam durante o mesmo tempo, o lucro é dividido em partes iguais pelos associados. Entretanto, se entraram a negociar com capitais diferentes, não é justo que os lucros sejam repartidos em partes iguais; com efeito, quem pôs mais dinheiro na empresa, tem direito a maior lucro. Como dividir então os lucros? E' este o problema chamado **regra de sociedade**.

Há quatro casos a considerar:

I. *Os sócios entram com capitais iguais e trabalham durante tempos iguais. Os lucros ou prejuízos são distribuídos em partes iguais pelos sócios.*

II. *Os sócios entram com capitais diferentes e trabalham durante tempos iguais. Os lucros ou prejuízos são distribuídos em partes proporcionais aos capitais.*

III. *Os sócios entram com capitais iguais e trabalham durante tempos diferentes. Os lucros ou prejuízos são distribuídos em partes proporcionais aos tempos.*

IV. *Os sócios entram com capitais diferentes e trabalham durante tempos diferentes. Os lucros ou prejuízos, devendo ser proporcionais aos capitais e aos tempos, são proporcionais aos produtos dos capitais pelos tempos.*

Exercícios. Série XXXVII

1. Três indivíduos, A, B e C, associaram-se respectivamente com 12 000, 15 000 e 23 000 cruzeiros. Ao cabo de um ano ganharam 60 000 cruzeiros. Distribuíram 10% dos lucros aos empregados, como gratificação. Quanto ganhou cada sócio?

2. Quatro pessoas organizaram uma empresa comercial, entrando respectivamente com 100 000, 120 000, 150 000 e 230 000 cruzeiros. Ao cabo de

um ano ganharam 600 000 cruzeiros. Desta quantia deduziram 12% para o pagamento de impostos e 13% para gratificações aos empregados. Quanto ganhou cada sócio?

3. Antônio começou a negociar em 1.º de janeiro de 1931, com um capital de 12 000 cruzeiros. Em 1.º de maio do mesmo ano associou-se com Carlos, o qual entrou com um capital de 15 000 cruzeiros. No fim do mesmo ano tinham ganho 24 000 cruzeiros. Quanto ganhou cada um? Contar o ano com 12 meses, de 30 dias cada um.

4. Três indivíduos, A, B e C, formaram uma sociedade, entrando os três com o mesmo capital. O primeiro trabalhou durante 12 meses; o segundo retirou-se da firma após 9 meses de trabalho; o terceiro retirou-se da firma após 7 meses de trabalho. Ao cabo de 12 meses, o primeiro verificou que os lucros da firma se elevavam a 45 000 cruzeiros. Qual foi o lucro de cada sócio?

5. Em 1.º de janeiro de 1928, Carlos começou a negociar com um capital de 30 000 cruzeiros. No dia 20 de abril do mesmo ano, associou-se com Raul, que entrou com um capital de 40 000 cruzeiros. Ganharam 106 100 cruzeiros durante o ano. Qual foi o lucro de cada um?

Nota. É necessário considerar o ano com 365 dias e lembrar que o ano de 1928 é bissexto.

6. Seis operários cavaram um fosso com 48,4m de comprimento, 5,2m de largura e 3m de profundidade, ganhando 5 cruzeiros por metro cúbico. O primeiro trabalhou 30 dias, o segundo 25 dias, o terceiro 22 dias, o quarto 20 dias, o quinto 18 dias e o sexto 15 dias. Quanto ganhou cada um dos operários?

7. Quatro indivíduos resolveram fundar uma fábrica. O primeiro entrou com 40 000 cruzeiros, o segundo com 50 000 cruzeiros, o terceiro entrou com tanto quanto os dois primeiros, e o quarto entrou com o edifício da fábrica, avaliado em 70 000 cruzeiros. Ao cabo de um ano ganharam 65 cruzeiros. Tendo pago 5,5% desta quantia, em impostos, quanto ganhou cada um?

8. Três irmãos compraram uma fazenda por 730 000 cruzeiros. Ao cabo de um ano ganharam respectivamente 36 000, 50 000 e 60 000 cruzeiros. Com quanto entrou cada um dos três irmãos para comprar a fazenda?

9. Três pessoas empregaram 19 200 cruzeiros em um certo negócio. Ganharam os três 800 cruzeiros. O primeiro recebeu 200 cruzeiros, o segundo 225 cruzeiros, e o terceiro, o resto. Qual foi o capital de cada um?

10. Três pessoas associaram-se para negociar. O primeiro entrou com 3 000 cruzeiros durante 8 meses; o segundo entrou com 4 500 cruzeiros durante 6 meses, e o terceiro com 7 500 cruzeiros durante 4 meses. Se os três sócios ganharam 5 400 cruzeiros, qual foi o lucro de cada um?

11. Dois irmãos compraram uma casa por 50 000 cruzeiros, sendo que o primeiro entrou com $\frac{2}{3}$ deste capital e o segundo com o resto. Algum tempo depois venderam esta casa com lucro, sendo que o segundo irmão ganhou 2 000 cruzeiros mais do que o primeiro. Qual foi o lucro de cada irmão?

84. **Juros; definições.** Eu não tenho casa própria. A casa em que eu moro não é minha; é *alugada*. A casa em que eu moro

pertence ao Sr. Borges. Eu pago ao Sr. Borges um *aluguel mensal* de 400 cruzeiros. Este pagamento mensal de 400 cruzeiros que eu faço ao Sr. Borges é muito justo. Suponhamos que esta casa vale 40 000 cruzeiros. Se o Sr. Borges não a alugasse a mim ou a outra pessoa qualquer, poderia vendê-la pelos 40 000 cruzeiros que ela vale. Em seguida, abriria uma casa comercial com estes 40 000 cruzeiros e ganharia talvez muito mais do que os 400 cruzeiros mensais que eu lhe pago pelo *aluguel* de sua casa.

A casa do Sr. Borges, avaliada em 40 000 cruzeiros, constitui um **capital** que pertence ao Sr. Borges. O Sr. Borges é um *capitalista*. O seu *capital*, que no caso presente é a casa em que eu moro, lhe *rende o aluguel* que eu lhe pago, isto é, 400 cruzeiros por mês. Esta quantia que eu pago mensalmente ao Sr. Borges, representa o rendimento, isto é, **os juros** do capital do Sr. Borges. Qual é a razão entre o aluguel de 400 cruzeiros e o capital de 40 000? É a fração $\frac{400}{40\,000}$ ou $\frac{1}{100}$. Se o aluguel que eu pago

ao Sr. Borges é igual a 0,01 do capital deste mesmo senhor, dizemos em linguagem comercial, que o capital do Sr. Borges lhe rende, de juros, 1% ao mês, ou 3% por trimestre, ou 6% por semestre, ou 12% ao ano. As expressões 1%, 3%, 6%, 12% são chamadas **taxas de juros** ou simplesmente **taxas**.

O Sr. Arruda também é capitalista; não tem casas para alugar, mas tem dinheiro guardado no Banco Cruzeiro do Sul. Eu quero comprar uma casa de 50 000 cruzeiros. Não tendo dinheiro, procuro o Sr. Arruda e peço-lhe que me empreste estes 50 000 cruzeiros. O Sr. Arruda consente em emprestar-me esta quantia, mediante certas condições:

- I. Eu lhe devolverei os 50 000 cruzeiros, *ao cabo de 5 anos*.
- II. Eu lhe pagarei os juros de 12% ao ano, *durante estes cinco anos*.

Nesta transação temos quatro elementos a considerar: o **capital**, o **tempo**, a **taxa** e os **juros**.

Capital é a quantia que se empresta.

Juros é o rendimento do capital emprestado, durante o tempo combinado.

Taxa é o rendimento ou juros de um capital fixo, durante a unidade de tempo. O capital fixo é 100 e a unidade de tempo é geralmente o ano. No nosso exemplo, a taxa é 12% ao ano. Quer isto dizer que, por 100 cruzeiros, eu pagarei de juros, anualmente, ao Sr. Arruda, a quantia de 12 cruzeiros, além dos 100 cruzeiros, isto é, por 100 cruzeiros lhe pagarei 112 cruzeiros ao cabo de um ano, ou 124 cruzeiros, ao cabo de dois anos, ou 136 cruzeiros ao cabo de três anos, ou 148 cruzeiros ao cabo de quatro anos, ou 160 cruzeiros ao cabo de cinco anos.

Ora, se por 100 cruzeiros que o Sr. Arruda me empresta, eu sou obrigado a pagar-lhe, depois de 5 anos, a quantia de 100 cruzeiros, segue-se que:

por 1 000 cruzeiros lhe pagarei.....1 600 cruzeiros
 por 10 000 cruzeiros lhe pagarei.....16 000 cruzeiros
 por 50 000 cruzeiros lhe pagarei.....80 000 cruzeiros

Em resumo, o Sr. Arruda empresta-me um **capital** de 50 000 cruzeiros, durante um **tempo** de 5 anos e combinamos que a **taxa** de juros será de 12% ao ano. E, decorridos os 5 anos, eu deverei entregar ao Sr. Arruda os 50 000 cruzeiros que êle me emprestou e mais **30 000 cruzeiros de juros!**

85. Problemas sôbre juros. Os problemas sôbre juros, sendo muito freqüentes na vida prática, são geralmente resolvidos por meio de fórmulas. O *capital* é representado pela letra *c*; a *taxa* pela letra *i*, o *tempo* pela letra *t*, os *juros* pela letra *j*, e a *soma de capital e juros* pela letra *s*. A unidade de tempo é o ano comercial, isto é, o ano de 12 meses, cada mês com 30 dias; portanto o ano comercial tem 360 dias.

Temos seis problemas a resolver:

- I. Dados *c*, *i*, *t*, calcular *j*.
- II. Dados *i*, *t*, *j*, calcular *c*.
- III. Dados *c*, *t*, *j*, calcular *i*.
- IV. Dados *c*, *i*, *j*, calcular *t*.
- V. Dados *s*, *i*, *t*, calcular *c*.
- VI. Dados *s*, *i*, *t*, calcular *j*.

86. Dados *c*, *i*, *t*, calcular *j*. Quais serão os juros de um capital *c*, durante *t* anos, sendo a taxa de juros igual a *i*? (*)

Para resolver êste problema, vamos enunciá-lo da seguinte maneira:

Se o capital 100, em 1 ano, rende *i*, o capital *c*, em *t* anos, quanto renderá?

É um problema de regra de três composta.

$$\begin{array}{ccc} \text{capital } 100 & 1 \text{ ano} & \text{juros } i \\ \text{capital } c & t \text{ anos} & \text{juros } x \end{array}$$

$$D \left\{ \begin{array}{l} 100 \\ c \end{array} \right\} \downarrow \quad \left. \begin{array}{l} 100 : c \\ 1 : t \end{array} \right\} :: i : x \quad \therefore$$

$$100 : c \times t :: i : x \quad \therefore$$

$$D \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ t \end{array} \right\} \downarrow \quad x = \frac{cit}{100}$$

Sendo *x* os juros do capital *c*, durante o tempo *t*, sendo a taxa *i*, podemos escrever:

$$j = \frac{cit}{100}$$

A igualdade acima é uma **fórmula**, a qual nos diz que:

Para calcular os juros de *c*, em *t* anos, sendo a taxa *i*, multiplica-se o capital pela taxa e pelo tempo, e divide-se o produto por 100.

Exemplos:

1.º) Quais são os juros de 7 650 cruzeiros, a 7 $\frac{3}{4}$ % ao ano, em 5 anos?

Calculando, em primeiro lugar, o produto *cit*, teremos:

$$c \times i \times t = 7650 \times \frac{31}{4} \times 5 = 296\,437$$

(*) Salvo aviso em contrário, *i* % significa *i* % ao ano.

Dividindo por 100, obteremos, finalmente:

$$j = \frac{296\,437}{100} = \text{Cr\$ } 2\,964,37$$

2.º) Calcular os juros de 12 600 cruzeiros, a $7\frac{1}{2}\%$ ao ano, em 4 anos e 9 meses.

$$4 \text{ an.} + 9 \text{ meses} = 4 \text{ an.} + \frac{9}{12} \text{ do an.} = \frac{57}{12} \text{ do an.} = \frac{19}{4} \text{ do an.}$$

Aplicando a fórmula, teremos:

$$j = 12\,600 \times \frac{15}{2} \times \frac{19}{4} \times \frac{1}{100} = \text{Cr\$ } 4\,488,75$$

3.º) Calcular os juros de 5 400 cruzeiros, a $8\frac{1}{2}\%$ ao ano, em 3 anos, 10 meses e 20 dias.

Reduzindo o tempo à fração do ano, teremos:

$$3 \text{ an. } 10 \text{ m. } 20 \text{ d.} = \frac{3}{1} + \frac{10}{12} + \frac{20}{360} = \frac{3}{1} + \frac{5}{6} + \frac{1}{18} = \frac{35}{9} \text{ do ano.}$$

Aplicando a fórmula, teremos:

$$j = 5\,400 \times \frac{17}{2} \times \frac{35}{9} \times \frac{1}{100} = \text{Cr\$ } 1\,785,00$$

4.º) Quais são os juros de 600 cruzeiros, a 12% ao ano, em 3 anos e 4 meses?

Reduzindo o tempo a anos, teremos:

$$3 \text{ anos} + 4 \text{ meses} = 36 \text{ meses} + 4 \text{ meses} = 40 \text{ meses}$$

donde:

$$3 \text{ a } 4 \text{ m} = \frac{40}{12} \text{ a} = \frac{10}{3} \text{ a.}$$

Aplicando a fórmula, teremos:

$$j = 600 \times 12 \times \frac{10}{3} \times \frac{1}{100} = \text{Cr\$ } 240,00$$

5.º) Quais são os juros de 600 cruzeiros, a 12% ao ano, em 4 meses e 20 dias?

Reduzindo o tempo a dias, teremos:

$$4 \text{ meses} + 20 \text{ dias} = 120 \text{ dias} + 20 \text{ dias} = 140 \text{ dias} \quad \therefore$$

$$4 \text{ m } 20 \text{ d} = \frac{140}{360} \text{ a} = \frac{7}{18} \text{ a}$$

Aplicando a fórmula, resulta:

$$j = 600 \times 12 \times \frac{7}{18} \times \frac{1}{100} = \text{Cr\$ } 28,00$$

Exercícios orais

1. Quais são os juros de 400 cruzeiros, a 12% ao ano, em um ano?
2. Quanto rendem 500 cruzeiros, a 10% ao ano, em 3 anos?
3. Quais são os juros de 800 cruzeiros, a 12% ao ano, em 6 meses?
4. Quanto rendem 600 cruzeiros, a 1% ao mês, em 8 meses?
5. Quais são os juros de 800 cruzeiros, a 6% por semestre, em três meses?
6. Quanto rende o capital c a $i\%$ ao ano, em um ano? Em 2 anos? Em 3 anos?

Exercícios. Série XXXVIII

1. Calcular os juros de 8 730 cruzeiros, a $6\frac{1}{2}\%$ ao ano, em 8 meses e 15 dias.
2. Coloquei 24 300 cruzeiros em um banco, rendendo juros de $7\frac{1}{2}\%$ ao ano. Ao cabo de 4 anos, 7 meses e 20 dias, retirei do banco todo o meu dinheiro. Quanto recebi?
3. Quais são os juros de 36 450 cruzeiros a $8\frac{1}{4}\%$ ao ano, em 5 anos, 10 meses e 20 dias?
4. Um capitalista vive dos seus rendimentos, isto é, dos juros de 720 000 cruzeiros que este capitalista depositou no banco. O banco paga-lhe os juros de $7\frac{3}{4}\%$ ao ano. Qual é a quantia que este capitalista pode gastar mensalmente, sem diminuir o seu capital?
5. Um avarento guardou em sua casa, durante 20 anos, a quantia de 20 000 cruzeiros. Quais seriam os juros deste capital, se estivesse guardado em um banco, supondo-se que este banco pague aos seus clientes 12% de juros ao ano?

6. Antônio emprestou a Carlos a quantia de 720 cruzeiros, a 15% ao ano. Carlos pagou o seu débito depois de 4 meses e 12 dias. Qual foi a quantia que Carlos entregou a Antônio?

7. Comprei uma casa por 48 000 cruzeiros. Por quanto devo alugá-la mensalmente, para que eu ganhe 18% anuais do meu capital?

8. Comprei uma casa por 60 000 cruzeiros. Gastei em consertos da mesma casa, 20% do que ela me custou. Quero alugá-la de modo que eu ganhe, por semestre, 7 ½% do meu dinheiro. Qual deve ser o aluguel mensal desta casa?

9. Emprestei 50 000 cruzeiros aos meus amigos A e B, durante o mesmo tempo. A pagou-me os juros de 12% ao ano, e B pagou-me os juros de 8% ao ano. No prazo marcado, os meus amigos A e B liquidaram seus débitos, e eu recebi de ambos os mesmos juros. Quanto emprestei a cada um deles?

Solução. Seja x a quantia que emprestei ao meu amigo A; neste caso, ao meu amigo B emprestei 50 000 cruzeiros - x . Representando por j e j' os juros que A e B me pagaram, teremos:

$$j = \frac{x \times 12 \times t}{100} \quad j' = \frac{(50\,000 - x) \times 8 \times t}{100}$$

Sendo $j = j'$, teremos:

$$\frac{x \times 12 \times t}{100} = \frac{(50\,000 - x) \times 8 \times t}{100}$$

Esta igualdade é constituída por duas frações equivalentes; se ambas têm o mesmo denominador, os numeradores são iguais; logo, podemos escrever:

$$x \times 12 \times t = (50\,000 - x) \times 8 \times t$$

El dividindo-se ambos os membros desta igualdade, por t , resulta:

$$12x = (50\,000 - x)8 \quad \therefore$$

$$12x = 400\,000 - 8x \quad \therefore$$

$$x = 20\,000$$

Resposta. Emprestei 20 000 cruzeiros ao meu amigo A e 30 000 cruzeiros ao meu amigo B.

87. Dados i , t , j , calcular c . Já vimos que:

$$j = \frac{cit}{100}$$

Desta igualdade deduzimos facilmente que:

$$100j = cit \quad \therefore$$

$$c = \frac{100j}{it} = 100 \times j \times \frac{1}{i} \times \frac{1}{t}$$

Exercícios. Série XXXIX

1. Qual é o capital que rende 8 400 cruzeiros, a 7 ½% ao ano, em 4 anos e 8 meses?

Solução. Reduzindo o tempo a meses, teremos:

$$4 \text{ anos} + 8 \text{ meses} = 48 \text{ meses} + 8 \text{ meses} = 56 \text{ meses} \quad \therefore$$

$$4a \ 8m = \frac{56}{12}a = \frac{14}{3}a$$

Aplicando a fórmula e lembrando que $1 + i$ ou $1 + \frac{15}{2}$ é igual a $\frac{2}{15}$, teremos:

$$c = 100 \times 8\,400 \times \frac{2}{15} \times \frac{3}{14} = 24\,000$$

Resposta. O capital é 24 000 cruzeiros.

2. Qual é o capital que rende 1 190 cruzeiros em 4 meses e 24 dias, a 8 ½% ao ano?

3. Qual é o capital que rende 12 350 cruzeiros, em 7 anos, 8 meses e 20 dias, a 15% ao ano?

4. Gasto 1 300 cruzeiros por mês; esta quantia é o aluguel mensal de uma casa que me pertence e que rende 13% anuais do seu valor. Quanto vale esta casa?

5. Qual é a quantia que devo colocar a juros de 8 ½% anuais, para ter um rendimento mensal de Cr\$ 656 625?

88. Dados c , t , j , calcular i . Tomando a fórmula (§ 86), dela deduzimos que:

$$cit = 100j \quad \therefore$$

$$i = \frac{100j}{ct} = 100 \times j \times \frac{1}{c} \times \frac{1}{t}$$

Exercícios. Série XL

1. A que taxa um capital de 7 200 cruzeiros rende 1 200 cruzeiros em 5 anos e 6 meses?

Solução. Reduzindo o tempo a anos, teremos:

$$5 \text{ anos} + 6 \text{ meses} = 60 \text{ meses} + 6 \text{ meses} = 66 \text{ meses} \quad \therefore$$

$$5a \ 6m = \frac{66}{12}a = \frac{11}{2}a$$

Aplicando a fórmula teremos:

$$i = 100 \times 1200 \times \frac{1}{7200} \times \frac{2}{11}$$

$$i = \frac{100}{33} = 3 \frac{1}{33}$$

Resposta. A taxa é de $3 \frac{1}{33} \%$.

Nota. Quando a taxa é fracionária, convém dar-lhe a forma de um número mixto.

2. Qual é a taxa anual de juros adotada por um banco onde tenho 84 600 cruzeiros, se o rendimento mensal desta quantia é de 1 200 cruzeiros?

3. Emprestei 12 500 cruzeiros durante 3 anos, 5 meses e 10 dias e recebi 1 720 cruzeiros de juros. A que taxa emprestei o meu dinheiro?

4. Um banco emprestou-me 12 000 cruzeiros. Ao cabo de 4 anos, 5 meses e 20 dias, paguei ao banco 14 400 cruzeiros, isto é, o capital e os juros. Qual foi a taxa estabelecida pelo banco neste negócio?

5. Emprestei 5 800 cruzeiros ao meu amigo A, por 6 meses, ficando ele obrigado, no fim deste prazo, a pagar-me 5 916 cruzeiros. A que taxa emprestei o meu dinheiro?

6. Comprei uma chácara de 2,5ha a 6 000 cruzeiros o hectare. Paguei $10 \frac{1}{2} \%$ desta quantia em impostos. Hoje esta chácara está alugada por Cr\$ 497,25 anuais. A que taxa o meu dinheiro está colocado?

7. A que taxa devo emprestar 200 cruzeiros para que o meu dinheiro duplique em 12 anos?

Solução. Se os 200 cruzeiros devem duplicar em 12 anos, conclue-se que os juros devem ser de 200 cruzeiros. Aplicando a fórmula, teremos:

$$i = 100 \times 200 \times \frac{1}{200} \times \frac{1}{12}$$

$$i = \frac{100}{12} = 8 \frac{4}{12} \% = 8 \frac{1}{3} \%$$

Resposta. Para que 200 cruzeiros dupliquem em 12 anos devem ser empregados a $8 \frac{1}{3} \%$ ao ano.

8. A que taxa devo emprestar 500 cruzeiros para receber o triplo desta quantia, capital e juros, em 8 anos e 4 meses?

9. Emprestei 1 200 cruzeiros. Ao cabo de 22 anos, o meu devedor liquidou suas contas comigo, entregando-me o quádruplo do dinheiro que eu lhe tinha emprestado. Qual foi a taxa de juros?

10. A que taxa devo empregar um certo capital para que ele duplique em 9 anos?

11. A que taxa devo empregar um certo capital, para que ele triplique em 12 anos?

12. A que taxa devo empregar um certo capital, para que ele quadruplique em 18 anos?

13. A que taxa devo empregar o meu dinheiro para que, em 3 anos e 6 meses, eu ganhe 0,3 do meu dinheiro?

14. A que taxa devo colocar os meus haveres para que os meus rendimentos anuais sejam $\frac{1}{15}$ dos meus haveres?

15. A que taxa devo colocar uma certa quantia para que, em 7 anos e 8 meses, os juros representem $\frac{4}{9}$ desta quantia?

89. Dados c, i, j , calcular t . Tomando a fórmula (§86), teremos, sucessivamente:

$$j = \frac{cit}{100} \therefore$$

$$100j = cit \therefore$$

$$t = \frac{100j}{ci} = 100 \times j \times \frac{1}{c} \times \frac{1}{i}$$

Exemplo.

Em quanto tempo 3 600 cruzeiros, a $4 \frac{1}{2} \%$ ao ano, rendem 1 200 cruzeiros?

Aplicando a fórmula indicada e lembrando que o fator $1 \div i$ é igual a $1 \div \frac{9}{2}$ ou $\frac{2}{9}$, teremos:

$$t = 100 \times 1200 \times \frac{1}{3600} \times \frac{2}{9} \therefore$$

$$t = \frac{200}{27} a.$$

Transformando $\frac{200}{27} a$ em número complexo, acharemos:

200	27
11	7 anos
×12	
132	27
24	4 meses
×30	
720	27
180	26 dias
18	

isto é, 7a 4m 26d, desprezada a fração $\frac{18}{27}$ ou $\frac{2}{3}$ do dia.

Exercícios. Série XLI

1. Em quanto tempo um capital qualquer, rendendo juros de 5% ao ano, duplica de valor?

Solução. Seja c este capital; se ele deve duplicar, os juros serão iguais ao capital, isto é, iguais a c . Aplicando a fórmula, teremos:

$$t = 100 \times c \times \frac{1}{c} \times \frac{1}{5}$$

$$t = \frac{100}{5} = 20 \text{ anos}$$

2. Em quanto tempo um capital qualquer, rendendo juros de 9% ao ano, triplica de valor?

3. Em quanto tempo um capital qualquer, colocado a 7½% ao ano, rende 0,7 de seu valor?

4. Em quantos anos 12 600 cruzeiros, a 9½% ao ano, rendem 5 400?

5. Depositei 7 500 cruzeiros em um banco, rendendo juros de 4½% ao ano. Ao cabo de algum tempo retirei do banco 10 000 cruzeiros, isto é, o meu capital e os juros. Durante quanto tempo o meu dinheiro esteve no banco?

6. Emprestei 9 300 cruzeiros a um amigo, a 3½% ao ano. Ao cabo de algum tempo recebi o meu dinheiro e os juros, num total de Cr\$ 10 056,50. Qual foi o prazo que o meu amigo me pediu, para saldar sua dívida?

7. Um menino recebeu uma herança, a qual foi colocada em um banco, rendendo juros de 4% ao ano. Completando 21 anos, este menino recebeu sua herança acrescida dos juros, num total de 112 700 cruzeiros. Os juros representam 0,15 do capital. Que idade tinha este menino, quando recebeu a herança?

90. Dados s , i , t , calcular c . Neste problema, a letra s representa uma soma de capital e juros. (§ 85)

Problema. Um capital, rendendo juros de 8% ao ano, elevou-se à quantia de 12 600 cruzeiros em 3 anos, 4 meses e 20 dias. Calcular este capital.

Solução. Reduzindo o tempo à fração do ano, teremos:

$$3 \text{ an. } 4 \text{ m. } 20 \text{ d.} = \frac{3}{1} + \frac{4}{12} + \frac{20}{360} = \frac{3}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{18} = \frac{61}{18} \text{ do ano.}$$

Consideremos um capital qualquer, por exemplo, o capital 100 cruzeiros; calculando os juros de 100 cruzeiros, em 3 anos, 4 meses e 20 dias, a 8% ao ano, teremos:

$$j = 100 \times 8 \times \frac{61}{18} \times \frac{1}{100} = \frac{244}{9} = 27,111$$

Portanto, 100 cruzeiros, em 3 anos, 4 meses e 20 dias rendem Cr\$ 27,111, e a soma do capital e dos juros será

$$\text{Cr\$ } 100,00 + \text{Cr\$ } 27,111 = \text{Cr\$ } 127,111$$

Isto pôsto, vamos resolver o seguinte problema de regra de três.

Se a soma 127,111 corresponde ao capital inicial 100, a soma 12 600, a que capital inicial corresponderá?

$$D \left\{ \begin{array}{l} 127,111 \quad 100 \\ 12\ 600 \quad x \end{array} \right\} 127,111 : 12\ 600 :: 100 : x$$

$$x = \frac{12\ 600 \times 100}{127,111} = 9\ 912,59$$

Resposta. O capital que se elevou a 12 600 cruzeiros, em 3 anos, 4 meses e 20 dias, rendendo juros de 8% ao ano, é Cr\$ 9 912,59.

Fórmula. O problema anterior pode ser resolvido com o auxílio de uma fórmula. Para estabelecê-la, é necessário resolver o seguinte problema:

Qual é o capital que, pôsto a render juros durante t anos, sendo a taxa $i\%$ ao ano, se eleva a uma certa quantia s ?

Consideremos um capital qualquer, por exemplo, o capital 100; calculando os juros de 100, durante t anos, a $i\%$ ao ano, teremos:

$$j = 100 \times i \times t \times \frac{1}{100} \therefore j = it$$

Portanto, 100, em t anos, a $i\%$ ao ano, rende it , e a soma de capital e juros será $100 + it$.

Agora, resolvamos o seguinte problema de regra de três.

Se a soma $100 + it$ corresponde ao capital inicial 100, a soma s a que capital corresponderá?

$$D \left\{ \begin{array}{cc} 100 + it & 100 \\ s & x \end{array} \right\} \therefore 100 + it : s :: 100 : x$$

$$x = \frac{100s}{100 + it} \therefore c = \frac{100s}{100 + it} \quad (M)$$

91. Dados s , i , t , calcular j . Suponhamos que um indivíduo depositou num banco uma certa quantia, rendendo juros de 8% ao ano e, ao cabo de 5 anos e 6 meses, retirou do mesmo banco o seu capital e juros, num total de 9 000 cruzeiros. Quanto ganhou de juros?

É evidente que poderíamos resolver este problema, calculando o capital inicial pela fórmula M, e subtraindo este capital da soma 9 000 cruzeiros. Mas o nosso fim, neste parágrafo, é calcular diretamente os juros, isto é, calcular os juros sem calcular o capital.

Reduzindo o tempo à fração do ano, teremos:

$$5 \text{ a. } 6 \text{ m.} = \frac{5}{1} + \frac{6}{12} = \frac{5}{1} + \frac{1}{2} + \frac{11}{2} \text{ do ano}$$

Consideremos um capital qualquer, por exemplo, 100 cruzeiros; calculando os juros de 100 cruzeiros, em 5 anos e 6 meses, a 8% ao ano, teremos:

$$j = 100 \times 8 \times \frac{11}{2} \times \frac{1}{100} = 44 \text{ cruzeiros}$$

Portanto, 100 cruzeiros, em 5 anos e 6 meses, a 8% ao ano, rendem 44 cruzeiros, e a soma de capital e juros será:

$$100 \text{ cruzeiros} + 44 \text{ cruzeiros} = 144 \text{ cruzeiros}$$

Temos agora de resolver o seguinte problema de regra de três.

Se a soma 144 cruzeiros contém 44 cruzeiros de juros, a soma 9 000 cruzeiros quanto contém de juros?

$$D \left\{ \begin{array}{cc} 144 & 44 \\ 9\,000 & x \end{array} \right\} \therefore 144 : 9\,000 :: 44 : x$$

$$x = \frac{9\,000 \times 44}{144} = 2\,750 \text{ cruzeiros}$$

Resposta. A soma 9 000 cruzeiros contém 2 750 cruzeiros de juros.

Fórmula. Para estabelecer a fórmula relativa ao problema acima, é necessário resolver o seguinte problema:

Um certo capital pôsto a render juros de $i\%$ ao ano, durante t anos, elevou-se a uma certa quantia s . Calcular os juros.

Já vimos (§90) que o capital 100, em t anos, a $i\%$ ao ano, rende it , e a soma de capital e juros é $100 + it$.

Resolvamos agora o seguinte problema de regra de três.

Se a soma $100 + it$ contém it de juros, a soma s quanto contém de juros?

$$D \left\{ \begin{array}{cc} 100 + it & it \\ s & x \end{array} \right\} \therefore 100 + it : s :: it : x$$

$$x = \frac{sit}{100 + it} \therefore j = \frac{sit}{100 + it} \quad (N)$$

As fórmulas M e N são empregadas quando a unidade de tempo é o ano. Tomando-se como unidade de tempo o mês ou o dia, é necessário substituir o número 100 pelo número 1 200 ou 36 000.

Observação. Os dois problemas que acabámos de resolver (§§90 e 91) devem ser bem compreendidos, porque é neles que se resume o *desconto racional*. Quanto às fórmulas M e N, não é conveniente decorá-las; é preferível decorar as perguntas que lhes dão origem.

Para obter de pronto a fórmula M, decora-se a seguinte pergunta: se $100+it$ começou com 100, s com quanto começou? $100+it : 100 :: s : c$.

Em relação à fórmula N, decora-se a seguinte pergunta: se $100+it$ contém os juros it , s que juros contém? $100+it : it :: s : j$.

Exercícios. Série XLII

1. Depositei um certo capital em um banco, que paga juros de 9% ao ano. Ao cabo de 3 anos, 6 meses e 20 dias, retirei do banco o meu capital e os juros num total de 12 600 cruzeiros. Qual foi o capital por mim depositado no banco?

2. Um banco emprestou-me uma certa quantia, concedendo-me 90 dias de prazo, e cobrando-me 12% de juros anuais. Ao cabo de 90 dias, entreguei ao banco 3 250 cruzeiros. Qual foi a quantia que o banco me emprestou?

3. Emprésteei dinheiro a um amigo, cobrando-lhe os juros de 1 2/3% por trimestre. Decorridos 2 anos, 2 meses e 10 dias, recebi o meu dinheiro e os juros, num total de 20 000 cruzeiros. Quanto ganhei de juros?

92. Juros pelo método dos divisores fixos. Nas Caixas Econômicas e, em geral, nos estabelecimentos bancários ou comerciais, cujos funcionários têm numerosos cálculos de juros a fazer, os métodos indicados nos parágrafos anteriores para efetuar estes cálculos são mais ou menos morosos. Eis por que, para calcular juros nesses estabelecimentos, adota-se um método especial denominado *método dos divisores fixos*. Vejamos como calcular juros durante d dias; ora, d dias são $\frac{d}{360}$ do ano. Substituindo na fórmula conhecida (§86), teremos:

$$j = \frac{cid}{36\,000}$$

que é a fórmula usada, quando a unidade de tempo é o dia.

Supondo que uma Caixa Econômica pague *invariavelmente* 5% de juros ao ano, teremos:

$$j = \frac{c \times 5 \times d}{36\,000} \therefore j = \frac{cd}{7\,200}$$

Com esta fórmula, os funcionários da Caixa Econômica simplificam extraordinariamente o cálculo dos juros. Por exemplo, quais são os juros de 350 cruzeiros, a 5% ao ano, em 48 dias?

$$j = \frac{ed}{7\,200} \therefore j = \frac{350 \times 48}{7\,200} = \text{Cr\$ } 2,33$$

Representando o divisor fixo por D, teremos:

$$j = \frac{cd}{D}$$

A letra D representa o *divisor fixo*. Este varia, naturalmente, de acôrdo com a taxa. Para a taxa 5, seu valor é $36\,000 \div 5$, isto é, 7 200. Se a taxa fosse 6, o valor de D seria $36\,000 \div 6$, isto é, 6 000.

De um modo geral, o *divisor fixo* é o *quociente da divisão de 36 000 pela taxa*.

Exercícios. Série XLIII

1. Calcular, pelo método dos divisores fixos, os juros de 324 cruzeiros, a 6% em 72 dias.

2. Idem, para 612 cruzeiros, a 4,5%, em 80 dias.

3. Idem, para 728 cruzeiros, a 7,5%, em 105 dias.

4. Idem, para 1 528 cruzeiros, a 9%, em 126 dias.

93. Taxa média de juros. Tenho 7 200 cruzeiros rendendo juros de 8% ao ano, e 9 600 cruzeiros rendendo juros de 12% ao ano. Portanto, tenho 16 800 cruzeiros rendendo juros. A que *taxa única* deveria colocar estes 16 800 cruzeiros para ganhar os mesmos juros que ganho nas condições indicadas?

É este o problema chamado *taxa média de juros*.

Calculemos os juros de 7 200 cruzeiros, a 8% ao ano, e 9 600 cruzeiros a 12% ao ano.

$$j = \frac{7\,200 \times 8}{100} = 576 \quad j = \frac{9\,600 \times 12}{100} = 1\,152$$

Portanto, os capitais 7 200 cruzeiros e 9 600 cruzeiros dão um rendimento anual de 1 728 cruzeiros. É bastante, agora, resolver o seguinte problema:

A que taxa, 16 800 cruzeiros rendem 1 728 cruzeiros, em um ano?

$$i = \frac{100 \times 1\,728}{16\,800} = \frac{72}{7} = 10 \frac{2}{7}\%$$

Observação. Quando os capitais são iguais, a taxa média é a média aritmética das taxas.

Exercícios. Série XLIV

1. Um proprietário tem duas casas avaliadas respectivamente em 42 000 e 60 000 cruzeiros. A primeira lhe rende anualmente 11% do seu valor, e a segunda, 16%. Qual é o rendimento médio e anual destas duas casas?
2. Um capitalista emprestou 25 000, 42 000 e 60 000 cruzeiros a 5%, 8% e 10%. Qual é a taxa média destes três empréstimos?
3. Um negociante tem três contas a pagar, de 8 500, 12 000 e 18 000 cruzeiros. Pela primeira paga 7% de juros anuais, pela segunda 9% e pela terceira 10%. Qual é a taxa média dos juros pagos por este negociante?
4. Empreguei $\frac{7}{12}$ do meu dinheiro a 6% ao ano e o restante a 10% ao ano. Qual é o rendimento anual do meu dinheiro?

Observação. Para resolver este problema, considera-se um capital arbitrário, por exemplo, 100. No nosso caso é preferível considerar o capital 120, por ser múltiplo de 12.

GEOMETRIA INTUITIVA

CAPÍTULO V

Áreas

94. Área de uma figura plana. *Uma figura plana é uma figura geométrica cujos elementos, pontos e linhas, estão situados em um mesmo plano. Já conhecemos algumas destas figuras. (E.M.P.V. capítulos I e II)*

Vimos também em que consiste a área de uma figura plana (§§ 2, 7, 8 e 9) e quais os processos gerais para calculá-la, isto é, o processo direto e o indireto.

O processo direto é, em geral, impraticável para calcular a área de uma figura plana. Temos de recorrer ao processo indireto. *Este consiste em medir certas linhas notáveis da figura dada, chamadas dimensões, e efetuar com os números obtidos, certos cálculos que variam de acôrdo com a figura cuja área se quer calcular.*

É o que vamos aprender neste capítulo.

A forma de uma figura plana pode variar ao infinito; entretanto, num curso elementar de Matemática, aprendemos a calcular apenas a área de algumas figuras planas mais simples como sejam o retângulo, o quadrado, o paralelogramo, o triângulo, o losango, o trapézio, o polígono e o círculo.

Para calcular a área de uma figura plana é indispensável estabelecer uma unidade de área.

A unidade de área é um quadrado cujo lado é tomado como unidade de comprimento.

Assim, se tomarmos o *decímetro* como unidade de comprimento, a unidade de área será o quadrado cujo lado medir um decímetro.

As unidades legais brasileiras para calcular a área de uma superfície plana limitada já são conhecidas. (§7)

95. Área do retângulo e do quadrado. Seja o retângulo ABCD cuja base AB mede 6cm e cuja altura AD mede 4cm. A partir do vértice A determinemos em AB assim como em AD,

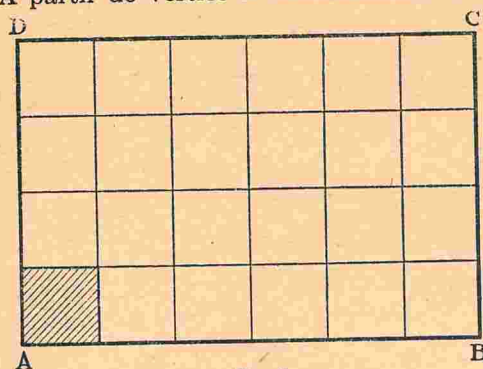


Fig. 9

segmentos de um centímetro cada um. Pelos pontos de divisão tracemos paralelas à base e à altura. O retângulo ficará dividido em 24 quadrados iguais, cada um dos quais é um centímetro quadrado. Ediremos que a área do retângulo ABCD é 24cm^2 .

Para calcular a área de um retângulo, medem-se a base e a altura com a mesma unidade de comprimento e multiplicam-se as duas medidas; o resultado é a área do retângulo, em unidades de área cujo lado é igual à unidade de comprimento escolhida.

Na linguagem corrente dizemos:

A área de um retângulo é igual ao produto da base pela altura (ou do comprimento pela largura).

A base (ou o comprimento) de um retângulo é geralmente o lado maior; a altura (ou a largura) é, de um modo geral, o lado menor. Estas denominações são relativas; por exemplo, no retângulo MNPR (fig. 10), a base, MN, é o lado menor; a altura, MR, é o lado maior.

Representando a área de um retângulo por s , a base por b e a altura por h , podemos estabelecer a seguinte fórmula:

$$s = b \times h$$

Desta fórmula deduzimos:

$$b = \frac{s}{h} \quad h = \frac{s}{b}$$

Estas duas fórmulas nos dizem que:

Conhecendo-se a área e a base (ou a altura) de um retângulo, é bastante dividir a área pela base (ou pela altura) para calcular a outra dimensão.

Dois retângulos são iguais quando, sendo superpostos, coincidem em toda a sua extensão.

Dois retângulos são equivalentes quando têm a mesma área. Assim os retângulos ABCD (fig. 9) e MNPR (fig. 10) são equivalentes porque têm a mesma área: 24cm^2 .

Dois retângulos equivalentes nem sempre são iguais; mas, dois retângulos iguais são sempre equivalentes.

A **igualdade** de dois retângulos e, em geral, de duas figuras planas quaisquer, depende da **forma** destas figuras; a **equivalência** depende da **área**.

Para calcular a área de um quadrado ABCD (fig. 11) é bastante medir o comprimento de um de seus lados, por exemplo, de AB, e multiplicar este comprimento por si mesmo. Em outras palavras:

A área de um quadrado é igual à segunda potência do número que representa a medida do lado do mesmo quadrado.

Eis por que a *segunda potência* de um número é também chamada *quadrado* deste número.

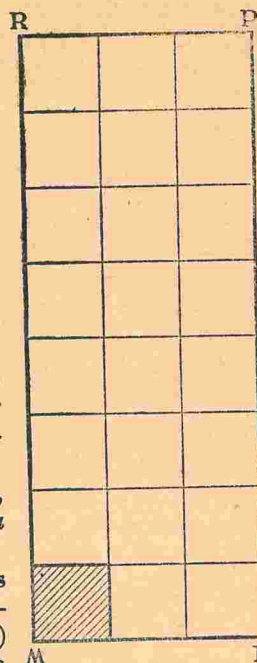


Fig. 10

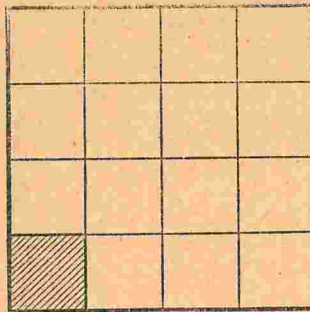


Fig. 11

Representando a área de um quadrado por s e o lado por l , podemos estabelecer a seguinte fórmula:

$$s = l^2$$

Desta fórmula deduzimos a seguinte:

$$l = \sqrt{s}$$

O comprimento do lado de um quadrado é igual à raiz quadrada da área deste mesmo quadrado.

Exercícios. Série XLV

Observação. Pedindo-se o comprimento de um segmento retilíneo, se este não puder ser calculado exatamente, será sempre calculado com erro inferior a um milímetro, salvo aviso em contrário.

1. O perímetro de um retângulo mede 436m. Calcular a área, sabendo-se que a diferença entre as duas dimensões é de 24m.
2. Calcular a área de um retângulo cujo perímetro mede 516m, sabendo-se que a diferença entre as duas dimensões é de 36m.
3. Calcular a área de um retângulo cujo perímetro mede 37,46m, sabendo-se que entre as duas dimensões do retângulo há uma diferença de 3,514m.
4. Um retângulo tem uma área de 47,5625m². O comprimento mede 9,32m. Calcular a largura.
5. Um retângulo e um quadrado são equivalentes. O retângulo mede 13,6m por 7,4m. Calcular o lado do quadrado.
6. A área de um retângulo é 56,3740m². Medindo a largura 8,4m, calcular o comprimento.
7. Um quadrado e um retângulo são equivalentes. A área do quadrado é 74,36m². A base do retângulo mede 12,6m. Calcular a altura.
8. A soma das áreas de dois quadrados é 516,48m² e a diferença é 37,44m². Calcular o lado de cada um dos quadrados.
9. Calcular o valor de um terreno retangular que mede 248m por 73m, admitindo-se que um hectare deste terreno valha 4 360 cruzeiros.
10. Comprei um terreno retangular medindo 216,8m por 72,5m, pagando 6 300 cruzeiros por hectare. Por quanto devo vendê-lo para realizar um lucro de Cr\$ 40 por centiare?
11. Um terreno retangular tem um perímetro de 745m. A diferença entre as duas dimensões do terreno é de 42m. Calcular o valor deste terreno, admitindo-se que cada m² do mesmo valha Cr\$ 48,50.

12. Uma mesa retangular mede 2,40m por 1,15m. Quero cobri-la com um oleado o qual deve medir 0,45m mais que a mesa nos dois sentidos. Qual será a minha despesa, se cada metro quadrado de oleado custa Cr\$ 6,40?

13. O lado de um terreno quadrado mede 615m. Constroem-se casas ao longo do perímetro deste terreno, ficando no interior do mesmo um grande quadrado reservado para uma praça de esportes, e cujos lados, paralelos aos lados do quadrado primitivo, dele distam 42m. Qual é a área desta praça?

14. Um jardim quadrado mede 124,56m de lado. E' dividido em 4 quadrados iguais por duas avenidas perpendiculares entre si, e cuja largura mede 3,6m. Calcular a área de cada um dos quadrados.

15. Uma chácara retangular mede 148m por 84m. Em redor da chácara há um caminho interior com 2,4m de largura; (fig. 12) duas ruas perpendiculares entre si, também com 2,4m de largura, dividem a chácara em 4 partes iguais. Calcular a área da parte desta chácara destinada às plantações.

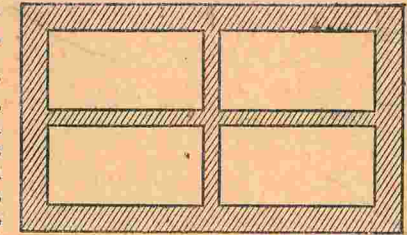


Fig. 12

96. **Área do paralelogramo.** Consideremos o paralelogramo ABCD. (E.M.P.V. §36) Base de um paralelogramo é qualquer um de seus lados. Altura de um paralelogramo é um segmento de reta, perpendicular à base e limitado por esta base e pela base oposta.

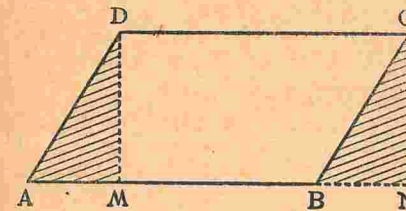


Fig. 13

No paralelogramo ABCD, tomando-se como base o lado AB, a altura pode ser o segmento DM ou o segmento CN, ou qualquer outro segmento perpendicular à base AB, traçado por qualquer ponto do lado CD ou dos prolongamentos deste lado.

Dado o paralelogramo ABCD, tomemos como base o lado AB, e tracemos duas alturas, a saber: DM e GN. Formaremos assim o retângulo MNCD e dois triângulos: AMD e BNC. Se recortarmos o triângulo AMD e o colocarmos sobre o triângulo BNC, veremos que estes dois triângulos coincidem e são, portanto, iguais. Logo, podemos concluir que o paralelogramo ABCD e o retângulo MNCD são duas figuras equivalentes. Portanto,

área paralelogramo ABCD = área retângulo MNCD

Mas,

$$\text{área retângulo MNCD} = MN \times DM$$

Logo,

$$\text{área paralelogramo ABCD} = MN \times DM$$

Vamos agora mostrar que $MN = AB$.

$$\begin{aligned} \text{Com efeito,} \quad MN &= MB + BN \\ AB &= MB + AM \end{aligned}$$

Mas, sendo $BN = AM$, resulta que $MN = AB$.

E concluímos enfim que:

$$\text{área paralelogramo ABCD} = AB \times DM$$

A área de um paralelogramo é igual ao produto da base pela altura.

Representando a área de um paralelogramo por s , a base por b e a altura por h , podemos estabelecer a seguinte fórmula:

$$s = b \times h$$

Observação. As dimensões de um paralelogramo são a base e a altura.

Exercícios. Série XLVI

1. Calcular em m^2 , a área de um paralelogramo que mede 27,85dam de base e 8 156cm de altura.
2. A área de um paralelogramo é $36,54m^2$. A base mede 11,6m. Calcular a altura.
3. Um paralelogramo cuja base mede 7,56m e cuja altura mede 3,16m é equivalente a um quadrado. Calcular o lado do quadrado.
4. Um paralelogramo cujas base e altura medem respectivamente 13,6m e 7,25m é equivalente a um retângulo cuja altura mede 6,22m. Calcular a base do retângulo.
5. Calcular em ares a área de um terreno com a forma de um paralelogramo, e que mede 647,8m de base por 235,6m de altura.
6. A área de um paralelogramo é $576,60m^2$. Calcular as duas dimensões sabendo que elas são proporcionais aos números 3 e 5.

Solução. Sejam x e y as duas dimensões do paralelogramo. Sendo elas proporcionais aos números 3 e 5, podemos escrever:

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{5}$$

Recorrendo às propriedades das proporções (§62, 8.ª, observação) teremos:

$$\frac{xy}{15} = \frac{x^2}{9}$$

Porém, xy é a área do paralelogramo, isto é, $576,60m^2$.

Portanto,

$$\frac{576,60}{15} = \frac{x^2}{9}$$

$$x^2 = \frac{9 \times 576,60}{15} \therefore$$

$$x^2 = 345,96 \therefore$$

$$x = \sqrt{345,96} \therefore$$

$$x = 18,6$$

Está calculada uma das dimensões do paralelogramo; é 18,6m. Para calcular y , teremos sucessivamente:

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{5} \therefore \frac{18,6}{3} = \frac{y}{5} \therefore$$

$$y = \frac{5 \times 18,6}{3} = 31$$

A base e a altura do paralelogramo dado medem respectivamente 18,6m e 31m.

7. A área de um paralelogramo é $48,56m^2$. Calcular as duas dimensões, sendo elas proporcionais aos números 3 e 5.

97. Área do triângulo. Já definimos o triângulo, assim como a base a altura desta figura. (E.M.P.V. §§31 a 33)

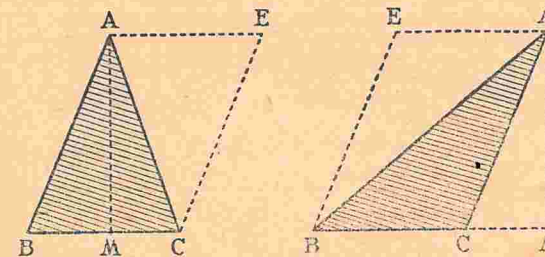


Fig. 14

Consideremos o triângulo ABC. Tomando-se como base o lado BC, a altura será o segmento AM. (fig. 14) Pelo vértice A tracemos uma paralela ao lado BC; pelo vértice C tracemos uma paralela ao lado AB (no triângulo da esquerda) e pelo vértice B tra-

ceamos uma paralela ao lado AC (no triângulo da direita). Estas paralelas se encontram num ponto E e, em qualquer dos dois casos formaremos um paralelogramo ABCE (ou AEBC) cuja base é BC e cuja altura é AM.

Isto pôsto, recortando o paralelogramo e, em seguida dividindo-o em duas partes, ao longo da diagonal AC (ou AB) verificaremos pela superposição que os triângulos ABC e ACE (ou ABC e AEB) são iguais. Ora, se a área do paralelogramo ABCE (ou AEBC) é igual ao produto da base BC pela altura AM, conclue-se que a área do triângulo ABC é igual à metade deste produto. Portanto,

A área de um triângulo é igual à metade do produto da base pela altura do mesmo triângulo.

Representando a área de um triângulo por s , a base por b e a altura por h , podemos escrever:

$$s = \frac{bh}{2} \quad s = \frac{b}{2} \times h \quad s = b \times \frac{h}{2}$$

Sendo dadas a área e a base (ou a altura) de um triângulo, podemos calcular a altura (ou a base) de acôrdo com as seguintes fórmulas:

$$\begin{array}{l|l} h = 2s \div b & h = s \div \frac{b}{2} \\ b = 2s \div h & b = s \div \frac{h}{2} \end{array}$$

Exercícios orais

Calcular a área dos triângulos cujas bases e alturas medem respectivamente:

- | | | |
|--------------|---------------|--------------|
| 1. 7m e 4,6m | 3. 12m e 3,6m | 5. 6,5m e 8m |
| 2. 4,2m e 5m | 4. 10m e 5,4m | 6. 9,4m e 6m |

Nos exercícios que se seguem são dadas a área e uma das dimensões de um triângulo; calcular a outra.

- | | | |
|--------------------------|---------------------------|----------------------------|
| 7. 21m ² e 7m | 9. 20m ² e 8m | 11. 36m ² e 9m |
| 8. 28m ² e 4m | 10. 15m ² e 6m | 12. 40m ² e 10m |

Exercícios. Série XLVII

- Calcular a área de um triângulo com 36,7dam de base e 576dm de altura.
- Calcular, em hectares, a área de um terreno triangular com 428,7m de base e 136,8m de altura.
- Um triângulo, com uma área de 726,50m² tem uma base que mede 31,6m. Calcular a altura.
- A base de um triângulo mede 53,6m. Calcular a altura, sabendo-se que a área do triângulo é 3 148,36m².
- Pedro tem um terreno triangular com 47,6m de base e 54,8m de altura, avaliado em Cr\$ 4,40 por metro quadrado. Carlos tem um terreno retangular medindo 51,6m por 28,5m, avaliado em Cr\$ 4,30 por metro quadrado. Os dois proprietários resolvem trocar seus terrenos. Calcular qual dos dois é o devedor, e de quanto.
- Vendi um terreno triangular com 48,5m de base e 64,7m de altura, à razão de Cr\$ 7,20 por metro quadrado. Com a importância recebida comprei um terreno retangular avaliado em Cr\$ 8,50 por metro quadrado e com 33,6m de comprimento. Calcular a largura deste terreno.
- Um triângulo tem 17,26m de base e 23,56m de altura. Calcular o lado de um quadrado equivalente.
- A área de um triângulo é 35,48m². Calcular as duas dimensões do triângulo, sabendo-se que elas são proporcionais aos números 4 e 7.

98. Área do losango. Já definimos o losango assim como as propriedades das suas diagonais. (E.M.P.V. §37) O losango é um paralelogramo e, portanto, podemos calcular a sua área, medindo a base e a altura e multiplicando os dois números obtidos. Entretanto, as diagonais do losango sendo perpendiculares entre si, e dividindo-se mutuamente em partes iguais, vamos deduzir destas duas propriedades uma regra interessante para calcular a área deste quadrilátero.

O losango ABCD (fig. 15) é constituído por dois triângulos, isto é, ABD e CBD. Podemos tomar como base de ambos, a diagonal BD. Sendo AC perpendicular a BD, a altura do triângulo ABD será AM, e a do triângulo CBD será CM.

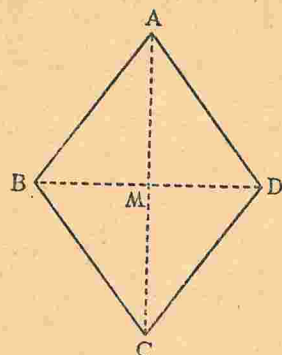


Fig. 15

Isto pôsto, teremos:

$$\begin{aligned} \text{área losango } ABCD &= \text{área triângulo } ABD + \text{área triângulo } CBD \\ &= \frac{BD}{2} \times AM + \frac{BD}{2} \times CM \\ &= \frac{BD}{2} \times (AM + CM) \\ &= \frac{BD}{2} \times AC \\ &= \frac{AC \times BD}{2} \end{aligned}$$

Portanto, a área de um losango é igual à metade do produto das suas diagonais.

Representando a área do losango por s , a diagonal maior por D e a menor por d , podemos estabelecer a seguinte fórmula:

$$s = \frac{D \times d}{2}$$

Quando nos convier podemos escrever:

$$s = \frac{D}{2} \times d \quad \text{ou} \quad s = D \times \frac{d}{2}$$

Conhecendo a área do losango e uma das diagonais, podemos calcular a outra, de acordo com as fórmulas seguintes:

$$D = 2s \div d \quad \text{ou} \quad d = 2s \div D$$

Exercícios. Série XLVIII

1. Calcular a área de um losango cujas diagonais medem 23,6m e 15,8m.
2. A soma das diagonais de um losango é 76,48m. Sua diferença é 15,24m. Calcular a área do losango.
3. A soma das diagonais de um losango é 123,4m. A diagonal maior contém 4 vezes a menor. Calcular a área do losango.

4. A diagonal menor de um losango é a quinta parte da maior. A soma das duas é 73,44m. Calcular a área do losango.

5. A área de um losango é 7,4261m². Uma das diagonais mede 4,73m. Calcular a outra.

6. A área de um losango é 181,72m². Uma das diagonais mede 23,6m. Calcular a outra.

7. A área de um losango é 47,56m². Uma das diagonais mede 14,3m. Calcular a outra.

8. A área de um losango é 3,5624m². Uma das diagonais mede 3,12m. Calcular a outra.

9. Os vitrais de um edifício são formados por 3 472 losangos, cujas diagonais medem 0,18m e 0,12m. Calcular a área total dos vitrais.

10. Para pavimentar um vestibulo com 5,40m de comprimento, foram necessários 1 350 losangos cujas diagonais medem 0,24m e 0,15m. Calcular a largura do vestibulo.

11. Na pavimentação de um corredor foram empregados 725 losangos cujas diagonais medem 0,26m e 0,15m. Um cento de ladrilhos custa 72 cruzeiros, e o operário ganha 15 cruzeiros por m² de pavimentação. Qual foi a despesa total?

12. A área de um losango é 36,70m². Calcular as duas diagonais, sabendo-se que são proporcionais aos números 7 e 13.

99. **Área do trapézio.** Já definimos o trapézio. (E.M.P.V. §38) Neste quadrilátero, somente dois lados opostos são paralelos; os lados AB e CD. (fig. 16)

Base de um trapézio é um dos lados paralelos; AB ou CD. Estes dois lados sendo sempre diferentes, diremos que AB é a base maior e CD, a base menor.

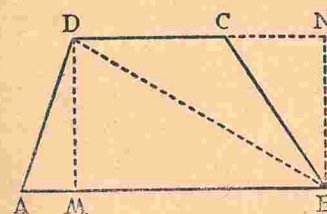


Fig. 16

Altura de um trapézio é o segmento perpendicular às bases e limitado por elas. No trapézio ABCD a altura é o segmento DM ou o segmento BN. Com efeito, a figura BNDM é um retângulo; portanto, MD = BN.

Vejamos agora como se calcula a área de um trapézio. Traçando-se a diagonal BD, o trapézio ABCD fica dividido em dois triângulos: os triângulos ABD e BCD. Ora:

$$\begin{aligned} \text{área trapézio } ABCD &= \text{área triângulo } ABD + \text{área triângulo } BCD \\ &= \frac{AB}{2} \times DM + \frac{CD}{2} \times BN \end{aligned}$$

Porém, sendo $DM = BN$, podemos escrever:

$$\begin{aligned} \text{área trapézio } ABCD &= \frac{AB}{2} \times DM + \frac{CD}{2} \times DM \\ &= \left(\frac{AB}{2} + \frac{CD}{2} \right) \times DM \\ &= \frac{AB + CD}{2} \times DM \end{aligned}$$

Portanto, a área de um trapézio é igual à semissoma das bases, multiplicada pela altura.

Observemos que *semissoma das bases* é o mesmo que *média aritmética das bases*. (§ 60, corolário IV)

Representando a área de um trapézio por s , a base maior por B , a menor por b e a altura por h , podemos estabelecer a seguinte fórmula:

$$s = \frac{B + b}{2} \times h$$

Exercícios. Série XLIX

1. Calcular a área de um trapézio com 0,74m de altura, e cujas bases medem 3,7m e 2,54m.
2. Um terreno tem a forma de um trapézio, cujas bases medem 342m e 258m. A altura mede 135m. Calcular o valor deste terreno, supondo-se que um m^2 valha 12 cruzeiros.
3. Um terreno tem a forma de um trapézio. Suas bases medem 148m e 96m; a altura mede 64m. Este terreno foi avaliado em 80 000 cruzeiros. Calcular o preço de um metro quadrado.
4. Um campo em forma de trapézio tem 54m de altura. Suas bases medem 136m e 72m. Supondo-se que este terreno possa produzir 625 litros de trigo, por are, calcular o valor da colheita, admitindo-se que um litro de trigo custe Cr\$ 1,20.
5. A área de um trapézio é de 529,48 m^2 . A altura mede 12,4m. Calcular as duas bases, sabendo-se que sua diferença é 5,8m.

Sugestão. $\frac{B + b}{2} = s + h \therefore B + b = 2(s + h)$

6. Um trapézio, com uma área de 643,56 m^2 , tem 15m de altura. Calcular as duas bases, sabendo-se que sua diferença é de 6,4m.

100. Área de um polígono qualquer. O polígono já foi definido. (E.M.P.V. § 30) Um polígono pode ser regular ou irregular.

Um polígono é regular quando todos os seus lados são iguais e todos os seus ângulos são iguais. O triângulo equilátero e o quadrado são polígonos regulares. O retângulo e o losango não são polígonos regulares, porque no primeiro os ângulos são iguais, mas os lados não são iguais, e no segundo os lados são iguais, mas os ângulos não são iguais.

Um polígono cujos lados ou cujos ângulos não são todos iguais é um polígono irregular.

Para calcular a área de um polígono qualquer é necessário decompor-lo em triângulos. Consideremos o quadrilátero ABCD. Traçando a diagonal AC, o quadrilátero ficará decomposto em dois triângulos, cujas alturas respectivas são DM e BN. Calculando a área de cada um destes triângulos, e somando as duas áreas, teremos a área do quadrilátero. (*)

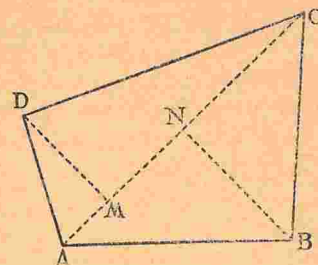


Fig. 17

Exercícios. Série L

1. Supondo-se que a fig. 17 representa um campo, no qual $AC = 236,4m$ e as alturas DM e BN medem respectivamente 75,2m e 114,6m, calcular a área do campo.
2. A figura ABCD (fig. 18) é um quadrado cujo lado mede 8,25. O segmento EF, perpendicular ao lado AD, mede 12,4m. Calcular a área do polígono ABCE.
3. Na figura 19, temos EC paralela a AB; $AB = BD$, assim como $MB = MD$.

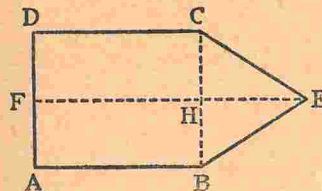


Fig. 18

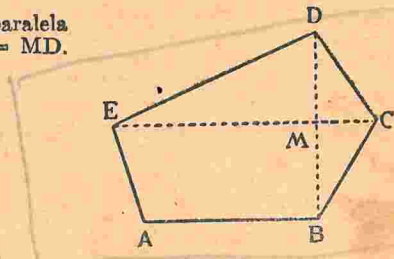


Fig. 19

(*) Não nos parece possível, por ora, ensinar a regra conhecida para calcular a área de um polígono regular.

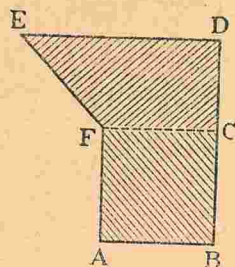


Fig. 20

Temos mais $AB = 15,2m$ e $EC = 21,4m$. Calcular a área do polígono ABCDE.

4. A figura 20 representa um campo no qual $AB = 42,5$, $BD = 80m$ e $ED = 61,4m$. O segmento AB é igual ao segmento AF . Os ângulos A , B e D são retos. FC é perpendicular a BD . Supondo-se que o metro quadrado deste terreno custe Cr\$ 3,20 pede-se o valor de todo o terreno.

101. Área do círculo. Para calcular a área de um círculo, multiplica-se o quadrado do raio pelo número π .

Observação. π , letra grega que se lê *pi*, representa o número 3,14 que é uma razão aproximada entre a circunferência e o seu diâmetro (E.M.P.V. § 28)

Consideremos a circunferência do centro O e raio OA . (fig. 21) O raio desta circunferência mede $0,2m$. Para calcular a área do círculo, é bastante elevar $0,2$ ao quadrado, e multiplicar o resultado por $3,14$. Teremos:

$$0,2^2 \times 3,14 = 0,04 \times 3,14 = 0,1256$$

Portanto, a área da figura 21 é $12dm^2$ e $56cm^2$.

Representando a área de um círculo por s e o raio por r , podemos estabelecer a seguinte fórmula:

$$s = \pi r^2$$

Exercícios. Série LI

1. Calcular a área de um círculo cujo raio mede $3,16m$.
2. Calcular a área de um círculo cujo diâmetro mede $7,28m$.
3. A área de um círculo é $38,4650m^2$. Calcular o raio.

Sugestão. $r^2 = \frac{s}{\pi} \therefore r = \sqrt{\frac{s}{\pi}}$

4. A área de um círculo é $43,5725m^2$. Calcular o raio.
5. A área de um círculo é $58,0586m^2$. Calcular o comprimento da circunferência.

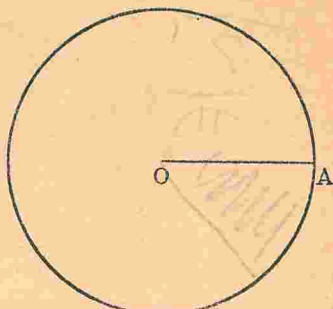


Fig. 21

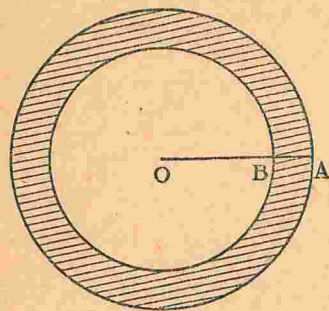


Fig. 22

6. A área de um círculo é $52,7328m^2$. Calcular o comprimento da circunferência.

7. Calcular a área de uma coroa, sabendo-se que o raio da circunferência maior mede $4,15m$ e o da menor, $3,75m$.

Observação. Duas circunferências são concêntricas quando têm o mesmo centro.

Coroa é a porção de superfície plana limitada por duas circunferências concêntricas. (fig. 22)

8. Um tanque circular cujo raio mede $7,2m$ é cercado por um passeio cuja largura mede $1,2m$. Qual é a área deste passeio?

9. O lado de um terreno quadrado mede $31,2m$. No interior deste terreno há

um lago cujo diâmetro mede $16,2m$. Calcular a área livre deste terreno.

10. Um retângulo mede $31,6m$ por $23,2m$. Tira-se de cada canto do retângulo um quadrante (a quarta parte de um círculo) cujo raio mede $2,5m$. Qual é a área que resta para o retângulo? (fig. 23)

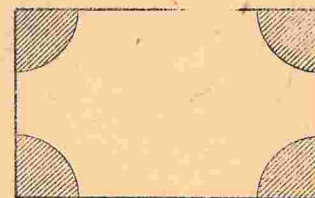


Fig. 23

102. Unidades inglesas de área. As principais, com os seus valores correspondentes em metros quadrados são os seguintes:

<i>the square inch</i> (a polegada quadrada)	0,000 645 16m ²
<i>the square foot</i> (o pé quadrado)	0,092 896 94m ²
<i>the square yard</i> (a jarda quadrada)	0,836 097m ²
<i>the square perch or rod</i> (a vara quadrada)	25,291 939m ²
<i>the rood</i> (1 210 square yards)	1 011,677 5m ²
<i>the acre</i> (4 840 square yards)	4 046 710 0m ²
milha inglesa quadrada	2 589 894,447 362m ²

Exercícios. Repetir os exercícios das séries 45 a 51, substituindo as unidades nacionais pelas inglesas, de acordo com as indicações dos srs. professores.

103. Volume do bloco retangular e do cubo. Já vimos em que consiste o volume de um sólido geométrico e como se calcula o volume de um bloco retangular e o de um cubo. (§§ 12 a 21)

O processo para calcular o volume de um sólido geométrico é o indireto. (§2) Por exemplo, no caso do bloco retangular, medimos três arestas chamadas respectivamente **comprimento**, **largura** e **altura** do bloco, tendo o cuidado de adotar a mesma unidade de comprimento para efetuar estas medições. Depois, multiplicando os três números resultantes, teremos o volume do bloco retangular em cubos cuja aresta é igual à unidade adotada para medir as três dimensões do bloco.

Para calcular o volume de um sólido geométrico é indispensável estabelecer **uma unidade de volume**.

A unidade de volume é um cubo cuja aresta é tomada como unidade de comprimento.

Tomando como unidade o **decímetro linear**, a unidade de volume será o **decímetro cúbico**, e o volume do sólido geométrico dado será o número de **decímetros cúbicos** (e de partes alíquotas do decímetro cúbico) que ele contém.

Já vimos quais são as medidas legais brasileiras para calcular o volume de um sólido geométrico. (§§ 12 a 21)

Representando por v o volume de um bloco retangular ou de um cubo; por c , l e h as três dimensões do bloco; por B a

base do mesmo bloco e por a a aresta de um cubo, podemos estabelecer as seguintes fórmulas:

$$v = c \times l \times h \quad | \quad v = B \times h \quad | \quad v = a^3$$

O volume de um cubo é a terceira potência do comprimento da aresta. Eis por que a **terceira potência** de um número é também chamada **cubo** deste número.

Exercícios. Série LII

1. Calcular o volume de um bloco retangular cujas dimensões são 4,4m, 27dm e 5,25m.

2. Em um bloco retangular, a largura é a metade do comprimento, e a altura é o quádruplo do comprimento. A soma das três dimensões é 43,511m. Pedese o volume do bloco.

3. O volume de um bloco retangular é 186,825m³. A altura mede 7,5m. Pedese a área da base.

Sugestão. $v = B \times h \therefore B = v \div h$.

4. O volume de um bloco retangular com 7,2m de altura, é 123,456m³. Pedese a área da base.

Observação. Se o resultado de um problema é uma área, e esta não pode ser obtida exatamente, deverá ser calculada, salvo aviso em contrário, com erro inferior a 0,0001m².

5. O volume de um bloco retangular com 5,6m de altura, é 13,552m³. Calcular as dimensões da base, sabendo-se que uma é o dobro da outra.

6. As três dimensões de um bloco são proporcionais aos números 2, 5 e 8, e sua soma é 26,85m. Calcular o volume do bloco.

7. A aresta de um cubo de granito mede 1,36m. Um dm³ deste granito pesa 5,370kg. Calcular o peso do cubo.

8. A aresta de um cubo de pedra mede 0,75m. Calcular o valor deste cubo, se 1m³ custa 55 cruzeiros.

9. A aresta de um reservatório de forma cúbica mede 2,5m. Contém azeite (cuja densidade é 0,915) faltando, porém, 22cm para que o reservatório fique completamente cheio. Calcular o peso do azeite.

10. A aresta de um cubo de chumbo mede 0,42m. Transforma-se este cubo em uma fôlha com uma espessura de 2,5mm. Calcular a superfície da fôlha.

104. O volume de um prisma. O prisma já foi definido. (E.M.P.V. §40) Para calcular o volume de um prisma reto ou oblíquo, é bastante multiplicar a área da base pela altura.

Suponhamos que a nossa figura representa um prisma reto tendo por base um losango. A altura do prisma mede 7,2m. As diagonais da base medem respectivamente 1,6m e 1,2m. Para calcular o volume deste prisma devemos calcular em primeiro lugar, a área da base. Ora:

$$\begin{aligned} \text{área losango } ABCD &= \frac{1,6 \times 1,2}{2} \\ &= 0,96\text{m}^2 \text{ (§98)} \end{aligned}$$

Conhecida a área da base, teremos:

$$\begin{aligned} \text{volume prisma } AG &= \\ &= 0,96 \times 7,2 = 6,912\text{m}^3 \end{aligned}$$

Representando o volume de um prisma por v , a base por b e a altura por h , podemos estabelecer a seguinte fórmula:

$$v = b \times h$$

Exercícios. Série LIII

- Um prisma reto com 6,5m de altura, tem por base um paralelogramo cuja base mede 2,4m e cuja altura mede 1,4m. Calcular o volume do prisma.
- A base de um prisma reto é um paralelogramo cuja base mede 4,5m e cuja altura mede 3,2m. O volume do prisma é 120,960m³. Calcular a altura do prisma.
- Um prisma reto tem por base um losango cujas diagonais medem 0,42m e 0,35m. Calcular o volume deste prisma, cuja altura mede 2,5m.
- Um terreno tem a forma de um trapézio cujas bases medem respectivamente 42,7m e 28,5m, e cuja altura mede 16,4m. Sobre este terreno espalha-se uniformemente uma camada de areia, com 2,5cm de espessura. Calcular o volume de toda a areia.
- Um prisma reto com 12,4m de altura, tem por base um triângulo retângulo cujos catetos medem 4,3m e 2,5m. Calcular o volume do prisma.

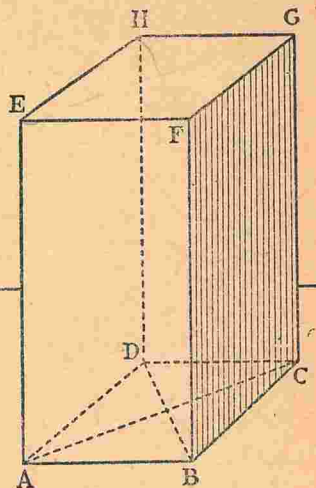


Fig. 24

105. O volume de uma pirâmide. A pirâmide já foi definida. (E.M.P.V. §40) Para calcular o volume de uma pirâmide, multiplica-se a área da base pela altura, e divide-se o produto por três.

A nossa figura representa uma pirâmide tendo por base um quadrado. Suponhamos que o lado deste quadrado mede 1,5m e que a altura, VO, da pirâmide, mede 6,4m. A área da base é $1,5 \times 1,5$, isto é, 2,25m². O volume da pirâmide será:

$$\text{volume} = \frac{2,25 \times 6,4}{3} = 4,800\text{m}^3$$

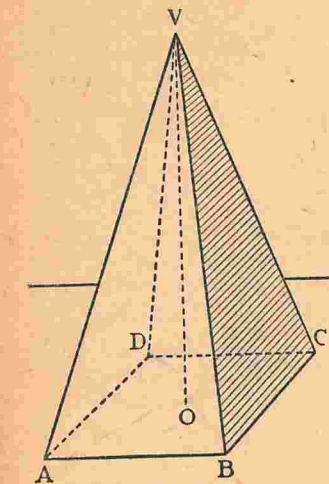


Fig. 25

Representando por v o volume de uma pirâmide, por b a base e por h a altura, podemos estabelecer que:

$$v = \frac{b \times h}{3} \quad \Bigg| \quad v = \frac{b}{3} \times h \quad \Bigg| \quad v = b \times \frac{h}{3}$$

Exercícios. Série LIV

- Uma pirâmide tem por base um retângulo cujas dimensões são 3,2m e 2,5m. Calcular o volume da pirâmide cuja altura mede 10,4m.
- Uma pirâmide de pedra com 2,4m de altura, tem por base um quadrado cujo lado mede 0,80m. Calcular o peso da pirâmide, supondo-se que a densidade da pedra seja 2,5.
- A Grande Pirâmide ou Pirâmide de Ghizeh, com 146,5m de altura, tem por base um quadrado cujo lado mede 233m. Calcular o volume da pirâmide e o seu peso, admitindo-se que o material empregado na sua construção pese 3 000kg por metro cúbico.
- Uma pirâmide com 1,6m de altura tem por base um triângulo retângulo cujos catetos medem 0,42m e 0,36m. Calcular o volume da pirâmide.
- Uma pirâmide com 4,5m de altura e 1,470m³ de volume, tem por base um retângulo no qual uma das dimensões é o dobro da outra. Calcular as duas dimensões da base.

$$\text{Sugestão. } v = b \times \frac{h}{3} \quad \therefore b = v \div \frac{h}{3}$$

106. Volume do cilindro de revolução. Este sólido já foi definido. (E.M.P.V. §40) O volume de um cilindro de revolução é calculado como o de um prisma, isto é, multiplica-se a área da base, pela altura. Mas, a base de um cilindro de revolução é um círculo, cuja área é πr^2 . (§101) Portanto, representando por v o volume de um cilindro, por r o raio OA da base, e por h a altura OC do mesmo cilindro, podemos estabelecer a seguinte fórmula:

$$v = \pi r^2 h$$

Observação. $\pi = 3,14$.

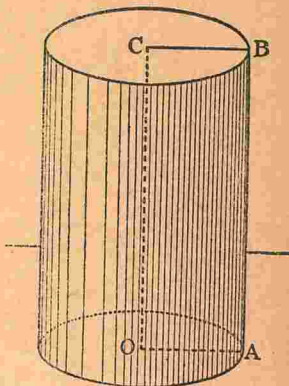


Fig. 26

Exercícios. Série LV

1. O raio da base de um cilindro de revolução, com 4,7m de altura, mede 1,2m. Calcular o volume do cilindro.
 2. Um reservatório cilíndrico mede 6,5m de raio e 2,25m de profundidade. Contém $\frac{1}{5}$ de sua profundidade em água. Calcular em hectolitros o volume da água.
 3. Uma coluna cilíndrica com 8,4m de altura, tem um diâmetro de 0,30m. Qual é o seu volume?
 4. Em um vaso cilíndrico cujo diâmetro interior mede 0,2m despejam-se 75,36 litros de água. Calcular a altura do vaso.
- Sugestão.** $v = \pi r^2 h \therefore h = v \div \pi r^2$. Fazer $\pi = 3,14$.
5. Suponhamos que um cilindro de revolução seja ôco. O diâmetro exterior deste sólido mede 0,48m e o interior, 0,36m. A altura deste sólido é de 2,20m. Qual é o seu volume?
 6. Um cilindro de revolução tem 15m de altura. A circunferência da base mede 7,536m. Calcular o volume do cilindro.

107. Volume do cone de revolução. Já vimos o que é um cone de revolução. (E.M.P.V. §40) Para calcular o volume de um cone de revolução, procede-se como em relação à pirâmide, isto é, multiplica-se a área da base pela altura do cone, e divide-se

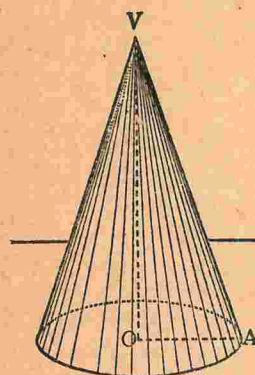


Fig. 27

o produto por 3. Mas, o cone de revolução tem por base um círculo cuja área é πr^2 . (§101) Portanto, representando por v o volume de um cone, por r o raio OA da base e por h a altura OV do mesmo cone, podemos escrever:

$$v = \frac{\pi r^2 h}{3} \quad v = \pi r^2 \times \frac{h}{3} \quad v = \frac{\pi r^2}{3} \times h$$

Exercícios. Série LVI

1. O raio da base de um cone de revolução com 5,4m de altura, mede 1,2m. Calcular o volume do cone.
2. O volume de um cone é 45,216m³. O raio da base mede 1,5m. Calcular a altura.
3. O volume de um cone de revolução é 3,255 552m³. Calcular o raio da base, sabendo-se que a altura do cone mede 7,2m.
4. Um bloco de pedra, com a forma de um cone de revolução, tem uma altura de 7,5m. O raio da base mede 1,3m. Calcular o peso deste bloco, supondo-se que a densidade da pedra seja 7,1.
5. Um bloco de pedra tem a forma de um cone de revolução no qual o raio da base mede 2,2m e a altura 8,4m. Calcular o valor deste bloco, admitindo-se que cada decímetro cúbico valha Cr\$ 1,40.

108. Unidades inglesas de volume. As principais unidades inglesas de volume são:

- the cubic inch* (a polegada cúbica) . . . (0,025)³m³
- the cubic foot* (o pé cúbico) (0,304 79)³m³
- the cubic yard* (a jarda cúbica) (0,914 30)³m³

Exercícios. Calcular o valor da polegada cúbica, do pé cúbico e da jarda cúbica; repetir os exercícios das séries 52 a 56, substituindo-se as unidades nacionais pelas inglesas, de acôrdo com as indicações dos srs. professores.

n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$	n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$
1	1	1	1,0000	1,0000	51	26 01	132 651	7,1414	3,7084
2	4	8	1,4142	1,2599	52	27 04	140 608	7,2111	3,7325
3	9	27	1,7321	1,4422	53	28 09	148 877	7,2801	3,7563
4	16	64	2,0000	1,5874	54	29 16	157 464	7,3485	3,7798
5	25	125	2,2361	1,7100	55	30 25	166 375	7,4162	3,8030
6	36	216	2,4495	1,8171	56	31 36	175 616	7,4833	3,8259
7	49	343	2,6458	1,9129	57	32 49	185 193	7,5498	3,8485
8	64	512	2,8284	2,0000	58	33 64	195 112	7,6158	3,8709
9	81	729	3,0000	2,0801	59	34 81	205 379	7,6811	3,8930
10	1 00	1 000	3,1623	2,1544	60	36 00	216 000	7,7460	3,9149
11	1 21	1 331	3,3166	2,2240	61	37 21	226 981	7,8102	3,9365
12	1 44	1 728	3,4641	2,2894	62	38 44	238 328	7,8740	3,9579
13	1 69	2 197	3,6056	2,3513	63	39 69	250 047	7,9373	3,9791
14	1 96	2 744	3,7417	2,4101	64	40 96	262 144	8,0000	4,0000
15	2 25	3 375	3,8730	2,4662	65	42 25	274 625	8,0623	4,0207
16	2 56	4 096	4,0000	2,5198	66	43 56	287 496	8,1240	4,0412
17	2 89	4 913	4,1231	2,5713	67	44 89	300 763	8,1854	4,0615
18	3 24	5 832	4,2426	2,6207	68	46 24	314 432	8,2462	4,0817
19	3 61	6 859	4,3589	2,6684	69	47 61	328 509	8,3066	4,1016
20	4 00	8 000	4,4721	2,7144	70	49 00	343 000	8,3666	4,1213
21	4 41	9 261	4,5826	2,7589	71	50 41	357 911	8,4261	4,1408
22	4 84	10 648	4,6904	2,8020	72	51 84	373 228	8,4853	4,1602
23	5 29	12 167	4,7958	2,8439	73	53 29	389 017	8,5440	4,1793
24	5 76	13 824	4,8990	2,8845	74	54 76	405 224	8,6023	4,1983
25	6 25	15 625	5,0000	2,9240	75	56 25	421 875	8,6603	4,2172
26	6 76	17 576	5,0990	2,9625	76	57 76	438 976	8,7178	4,2358
27	7 29	19 683	5,1962	3,0000	77	59 29	456 533	8,7750	4,2543
28	7 84	21 952	5,2915	3,0366	78	60 84	474 552	8,8318	4,2727
29	8 41	24 389	5,3852	3,0723	79	62 41	493 039	8,8882	4,2908
30	9 00	27 000	5,4772	3,1072	80	64 00	512 000	8,9443	4,3089
31	9 61	29 791	5,5678	3,1414	81	65 61	531 441	9,0000	4,3267
32	10 24	32 768	5,6569	3,1748	82	67 24	551 368	9,0554	4,3445
33	10 89	35 937	5,7446	3,2075	83	68 89	571 787	9,1104	4,3621
34	11 56	39 304	5,8310	3,2396	84	70 56	592 704	9,1652	4,3795
35	12 25	42 875	5,9161	3,2711	85	72 25	614 125	9,2195	4,3968
36	12 96	46 656	6,0000	3,3019	86	73 96	636 056	9,2736	4,4140
37	13 69	50 653	6,0828	3,3322	87	75 69	658 503	9,3274	4,4310
38	14 44	54 872	6,1644	3,3620	88	77 44	681 472	9,3808	4,4480
39	15 21	59 319	6,2450	3,3912	89	79 21	704 969	9,4340	4,4647
40	16 00	64 000	6,3246	3,4200	90	81 00	729 000	9,4868	4,4814
41	16 81	68 921	6,4031	3,4482	91	82 81	753 571	9,5394	4,4979
42	17 64	74 088	6,4807	3,4760	92	84 64	778 688	9,5917	4,5144
43	18 49	79 507	6,5574	3,5034	93	86 49	804 357	9,6437	4,5307
44	19 36	85 184	6,6332	3,5303	94	88 36	830 584	9,6954	4,5468
45	20 25	91 125	6,7082	3,5569	95	90 25	857 375	9,7468	4,5629
46	21 16	97 336	6,7823	3,5830	96	92 16	884 736	9,7980	4,5789
47	22 09	103 823	6,8557	3,6088	97	94 09	912 673	9,8489	4,5947
48	23 04	110 592	6,9282	3,6342	98	96 04	941 192	9,8995	4,6104
49	24 01	117 649	7,0000	3,6593	99	98 01	970 299	9,9499	4,6261
50	25 00	125 000	7,0711	3,6840	100	1 00 00	1 000 000	10,0000	4,6416

n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$	n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$
101	1 02 01	1 030 301	10,0499	4,6570	151	2 28 01	3 442 951	12,2882	5,3251
102	1 04 04	1 061 208	10,0995	4,6723	152	2 31 04	3 511 808	12,3288	5,3368
103	1 06 09	1 092 727	10,1489	4,6875	153	2 34 09	3 581 577	12,3693	5,3485
104	1 08 16	1 124 864	10,1980	4,7027	154	2 37 16	3 652 264	12,4097	5,3601
105	1 10 25	1 157 625	10,2470	4,7177	155	2 40 25	3 723 875	12,4499	5,3717
106	1 12 36	1 191 016	10,2956	4,7326	156	2 43 36	3 796 416	12,4900	5,3832
107	1 14 49	1 225 043	10,3441	4,7475	157	2 46 49	3 869 893	12,5300	5,3947
108	1 16 64	1 259 712	10,3923	4,7622	158	2 49 64	3 944 312	12,5698	5,4061
109	1 18 81	1 295 029	10,4403	4,7769	159	2 52 81	4 019 679	12,6095	5,4175
110	1 21 00	1 331 000	10,4881	4,7914	160	2 56 00	4 096 000	12,6491	5,4288
111	1 23 21	1 367 631	10,5357	4,8059	161	2 59 21	4 173 281	12,6886	5,4401
112	1 25 44	1 404 928	10,5830	4,8203	162	2 62 44	4 251 528	12,7279	5,4514
113	1 27 69	1 442 897	10,6301	4,8346	163	2 65 69	4 330 747	12,7671	5,4626
114	1 29 96	1 481 544	10,6771	4,8488	164	2 68 96	4 410 944	12,8062	5,4737
115	1 32 25	1 520 875	10,7238	4,8629	165	2 72 25	4 492 125	12,8452	5,4848
116	1 34 56	1 560 896	10,7703	4,8770	166	2 75 56	4 574 296	12,8841	5,4959
117	1 36 89	1 601 613	10,8167	4,8910	167	2 78 89	4 657 469	12,9228	5,5069
118	1 39 24	1 643 032	10,8628	4,9049	168	2 82 24	4 741 632	12,9615	5,5178
119	1 41 61	1 685 159	10,9087	4,9187	169	2 85 61	4 826 893	13,0000	5,5288
120	1 44 00	1 728 000	10,9545	4,9324	170	2 89 00	4 913 000	13,0384	5,5397
121	1 46 41	1 771 561	11,0000	4,9461	171	2 92 41	5 000 211	13,0767	5,5505
122	1 48 84	1 815 848	11,0454	4,9597	172	2 95 84	5 088 448	13,1149	5,5613
123	1 51 29	1 860 867	11,0905	4,9732	173	2 99 29	5 177 717	13,1529	5,5721
124	1 53 76	1 906 624	11,1355	4,9866	174	3 02 76	5 268 024	13,1909	5,5828
125	1 56 25	1 953 125	11,1803	5,0000	175	3 06 25	5 359 375	13,2288	5,5934
126	1 58 76	2 000 376	11,2250	5,0133	176	3 09 76	5 451 776	13,2665	5,6041
127	1 61 29	2 048 383	11,2694	5,0265	177	3 13 29	5 545 233	13,3041	5,6147
128	1 63 84	2 097 152	11,3137	5,0397	178	3 16 84	5 639 752	13,3417	5,6252
129	1 66 41	2 146 689	11,3578	5,0528	179	3 20 41	5 735 339	13,3791	5,6357
130	1 69 00	2 197 000	11,4018	5,0658	180	3 24 00	5 832 000	13,4164	5,6462
131	1 71 61	2 248 091	11,4455	5,0788	181	3 27 61	5 929 741	13,4536	5,6567
132	1 74 24	2 299 968	11,4891	5,0916	182	3 31 24	6 028 568	13,4907	5,6671
133	1 76 89	2 352 637	11,5326	5,1045	183	3 34 89	6 128 487	13,5277	5,6774
134	1 79 56	2 406 104	11,5758	5,1172	184	3 38 56	6 229 504	13,5647	5,6877
135	1 82 25	2 460 375	11,6190	5,1299	185	3 42 25	6 331 625	13,6015	5,6980
136	1 84 96	2 515 456	11,6619	5,1426	186	3 45 96	6 434 856	13,6382	5,7083
137	1 87 69	2 571 353	11,7047	5,1551	187	3 49 69	6 539 203	13,6748	5,7185
138	1 90 44	2 628 072	11,7473	5,1676	188	3 53 44	6 644 672	13,7113	5,7287
139	1 93 21	2 685 619	11,7898	5,1801	189	3 57 21	6 751 269	13,7477	5,7388
140	1 96 00	2 744 000	11,8322	5,1925	190	3 61 00	6 859 000	13,7840	5,7489
141	1 98 81	2 803 221	11,8743	5,2048	191	3 64 81	6 967 871	13,8203	5,7590
142	2 01 64	2 863 288	11,9164	5,2171	192	3 68 64	7 077 888	13,8564	5,7690
143	2 04 49	2 924 207	11,9583	5,2293	193	3 72 49	7 189 057	13,8924	5,7790
144	2 07 36	2 985 984	12,0000	5,2415	194	3 76 36	7 301 384	13,9284	5,7890
145	2 10 25	3 048 625	12,0416	5,2536	195	3 80 25	7 414 875	13,9642	5,7989
146	2 13 16	3 112 136	12,0830	5,2656	196	3 84 16	7 529 536	14,0000	5,8088
147	2 16 09	3 176 523	12,1244	5,2776	197	3 88 09	7 645 373	14,0357	5,8186
148	2 19 04	3 241 792	12,1655	5,2896	198	3 92 04	7 762 392	14,0712	5,8285
149	2 22 01	3 307 949	12,2066	5,3015	199	3 96 01	7 880 599	14,1067	5,8383
150	2 25 00	3 375 000	12,2474	5,3133	200	4 00 00	8 000 000	14,1421	5,8480

n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$	n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$
201	4 04 01	8 120 601	14,1774	5,8578	251	6 30 01	15 813 251	15,8430	6,3080
202	4 08 04	8 242 408	14,2127	5,8675	252	6 35 04	16 003 008	15,8745	6,3164
203	4 12 09	8 365 427	14,2478	5,8771	253	6 40 09	16 194 277	15,9060	6,3247
204	4 16 16	8 489 664	14,2829	5,8868	254	6 45 16	16 387 064	15,9374	6,3330
205	4 20 25	8 615 125	14,3178	5,8964	255	6 50 25	16 581 375	15,9687	6,3413
206	4 24 36	8 741 816	14,3527	5,9059	256	6 55 36	16 777 216	16,0000	6,3496
207	4 28 49	8 869 743	14,3875	5,9155	257	6 60 49	16 974 593	16,0312	6,3579
208	4 32 64	8 998 912	14,4222	5,9250	258	6 65 64	17 173 512	16,0624	6,3661
209	4 36 81	9 129 329	14,4568	5,9345	259	6 70 81	17 373 979	16,0935	6,3743
210	4 41 00	9 261 000	14,4914	5,9439	260	6 76 00	17 576 000	16,1245	6,3825
211	4 45 21	9 393 931	14,5258	5,9533	261	6 81 21	17 779 581	16,1555	6,3907
212	4 49 44	9 528 128	14,5602	5,9627	262	6 86 44	17 984 728	16,1864	6,3988
213	4 53 69	9 663 597	14,5945	5,9721	263	6 91 69	18 191 447	16,2173	6,4070
214	4 57 96	9 800 344	14,6287	5,9814	264	6 96 96	18 399 744	16,2481	6,4151
215	4 62 25	9 938 375	14,6629	5,9907	265	7 02 25	18 609 625	16,2788	6,4232
216	4 66 56	10 077 696	14,6969	6,0000	266	7 07 56	18 821 096	16,3095	6,4312
217	4 70 89	10 218 313	14,7309	6,0092	267	7 12 89	19 034 163	16,3401	6,4393
218	4 75 24	10 360 232	14,7648	6,0185	268	7 18 24	19 248 832	16,3707	6,4473
219	4 79 61	10 503 459	14,7986	6,0277	269	7 23 61	19 465 109	16,4012	6,4553
220	4 84 00	10 648 000	14,8324	6,0368	270	7 29 00	19 683 000	16,4317	6,4633
221	4 88 41	10 793 861	14,8661	6,0459	271	7 34 41	19 902 511	16,4621	6,4713
222	4 92 84	10 941 048	14,8997	6,0550	272	7 39 84	20 123 648	16,4924	6,4792
223	4 97 29	11 089 567	14,9332	6,0641	273	7 45 29	20 346 417	16,5227	6,4872
224	5 01 76	11 239 424	14,9666	6,0732	274	7 50 76	20 570 824	16,5529	6,4951
225	5 06 25	11 390 625	15,0000	6,0822	275	7 56 25	20 796 875	16,5831	6,5030
226	5 10 76	11 543 176	15,0333	6,0912	276	7 61 76	21 024 576	16,6132	6,5108
227	5 15 29	11 697 083	15,0665	6,1002	277	7 67 29	21 253 933	16,6433	6,5187
228	5 19 84	11 852 352	15,0997	6,1091	278	7 72 84	21 484 952	16,6733	6,5265
229	5 24 41	12 008 989	15,1327	6,1180	279	7 78 41	21 717 639	16,7033	6,5343
230	5 29 00	12 167 000	15,1658	6,1269	280	7 84 00	21 952 000	16,7332	6,5421
231	5 33 61	12 326 391	15,1987	6,1358	281	7 89 61	22 188 041	16,7631	6,5499
232	5 38 24	12 487 168	15,2315	6,1446	282	7 95 24	22 425 768	16,7929	6,5577
233	5 42 89	12 649 337	15,2643	6,1534	283	8 00 89	22 665 187	16,8226	6,5654
234	5 47 56	12 812 904	15,2971	6,1622	284	8 06 56	22 906 304	16,8523	6,5731
235	5 52 25	12 977 875	15,3297	6,1710	285	8 12 25	23 149 125	16,8819	6,5808
236	5 56 96	13 144 256	15,3623	6,1797	286	8 17 96	23 393 656	16,9115	6,5885
237	5 61 69	13 312 053	15,3948	6,1885	287	8 23 69	23 639 903	16,9411	6,5962
238	5 66 44	13 481 272	15,4272	6,1972	288	8 29 44	23 887 872	16,9706	6,6039
239	5 71 21	13 651 919	15,4596	6,2058	289	8 35 21	24 137 569	17,0000	6,6115
240	5 76 00	13 824 000	15,4919	6,2145	290	8 41 00	24 389 000	17,0294	6,6191
241	5 80 81	13 997 521	15,5242	6,2231	291	8 46 81	24 642 171	17,0587	6,6267
242	5 85 64	14 172 488	15,5563	6,2317	292	8 52 64	24 897 088	17,0880	6,6343
243	5 90 49	14 348 907	15,5885	6,2403	293	8 58 49	25 153 757	17,1172	6,6419
244	5 95 36	14 526 784	15,6205	6,2488	294	8 64 36	25 412 184	17,1464	6,6494
245	6 00 25	14 706 125	15,6525	6,2573	295	8 70 25	25 672 375	17,1756	6,6569
246	6 05 16	14 886 936	15,6844	6,2658	296	8 76 16	25 934 336	17,2047	6,6644
247	6 10 09	15 069 223	15,7162	6,2743	297	8 82 09	26 198 073	17,2337	6,6719
248	6 15 04	15 252 992	15,7480	6,2828	298	8 88 04	26 463 592	17,2627	6,6794
249	6 20 01	15 438 249	15,7797	6,2912	299	8 94 01	26 730 899	17,2916	6,6869
250	6 25 00	15 625 000	15,8114	6,2996	300	9 00 00	27 000 000	17,3205	6,6943

n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$	n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$
301	9 06 01	27 270 901	17,3494	6,7018	351	12 32 01	43 243 551	18,7350	7,0540
302	9 12 04	27 543 608	17,3781	6,7092	352	12 39 04	43 614 208	18,7617	7,0607
303	9 18 09	27 818 127	17,4069	6,7166	353	12 46 09	43 986 977	18,7883	7,0674
304	9 24 16	28 094 464	17,4356	6,7240	354	12 53 16	44 361 864	18,8149	7,0740
305	9 30 25	28 372 625	17,4642	6,7313	355	12 60 25	44 738 875	18,8414	7,0807
306	9 36 36	28 652 616	17,4929	6,7387	356	12 67 36	45 118 016	18,8680	7,0873
307	9 42 49	28 934 443	17,5214	6,7460	357	12 74 49	45 499 293	18,8944	7,0940
308	9 48 64	29 218 112	17,5499	6,7533	358	12 81 64	45 882 712	18,9209	7,1006
309	9 54 81	29 503 629	17,5784	6,7606	359	12 88 81	46 268 279	18,9473	7,1072
310	9 61 00	29 791 000	17,6068	6,7679	360	12 96 00	46 656 000	18,9737	7,1138
311	9 67 21	30 080 231	17,6352	6,7752	361	13 03 21	47 045 881	19,0000	7,1204
312	9 73 44	30 371 328	17,6635	6,7824	362	13 10 44	47 437 928	19,0263	7,1269
313	9 79 69	30 664 297	17,6918	6,7897	363	13 17 69	47 832 147	19,0526	7,1335
314	9 85 96	30 959 144	17,7200	6,7969	364	13 24 96	48 228 544	19,0788	7,1400
315	9 92 25	31 255 875	17,7482	6,8041	365	13 32 25	48 627 125	19,1050	7,1466
316	9 98 56	31 554 496	17,7764	6,8113	366	13 39 56	49 027 896	19,1311	7,1531
317	10 04 89	31 855 013	17,8045	6,8185	367	13 46 89	49 430 863	19,1572	7,1596
318	10 11 24	32 157 432	17,8326	6,8256	368	13 54 24	49 836 032	19,1833	7,1661
319	10 17 61	32 461 759	17,8606	6,8328	369	13 61 61	50 243 409	19,2094	7,1726
320	10 24 00	32 768 000	17,8885	6,8399	370	13 69 00	50 653 000	19,2354	7,1791
321	10 30 41	33 076 161	17,9165	6,8470	371	13 76 41	51 064 811	19,2614	7,1855
322	10 36 84	33 386 248	17,9444	6,8541	372	13 83 84	51 478 848	19,2873	7,1920
323	10 43 29	33 698 267	17,9722	6,8612	373	13 91 29	51 895 117	19,3132	7,1984
324	10 49 76	34 012 224	18,0000	6,8683	374	13 98 76	52 313 624	19,3391	7,2048
325	10 56 25	34 328 125	18,0278	6,8753	375	14 06 25	52 734 375	19,3649	7,2112
326	10 62 76	34 645 976	18,0555	6,8824	376	14 13 76	53 157 376	19,3907	7,2177
327	10 69 29	34 965 783	18,0831	6,8894	377	14 21 29	53 582 633	19,4165	7,2240
328	10 75 84	35 287 552	18,1108	6,8964	378	14 28 84	54 010 152	19,4422	7,2304
329	10 82 41	35 611 289	18,1384	6,9034	379	14 36 41	54 439 939	19,4679	7,2368
330	10 89 00	35 937 000	18,1659	6,9104	380	14 44 00	54 872 000	19,4936	7,2432
331	10 95 61	36 264 691	18,1934	6,9174	381	14 51 61	55 306 841	19,5192	7,2495
332	11 02 24	36 594 368	18,2209	6,9244	382	14 59 24	55 742 968	19,5448	7,2558
333	11 08 89	36 926 037	18,2483	6,9313	383	14 66 89	56 181 887	19,5704	7,2622
334	11 15 56	37 259 704	18,2757	6,9382	384	14 74 56	56 623 104	19,5959	7,2685
335	11 22 25	37 595 375	18,3030	6,9451	385	14 82 25	57 066 625	19,6214	7,2748
336	11 28 96	37 933 056	18,3303	6,9521	386	14 89 96	57 512 456	19,6469	7,2811
337	11 35 69	38 272 753	18,3576	6,9589	387	14 97 69	57 960 603	19,6723	7,2874
338	11 42 44	38 614 472	18,3848	6,9658	388	15 05 44	58 411 072	19,6977	7,2936
339	11 49 21	38 959 219	18,4120	6,9727	389	15 13 21	58 863 869	19,7231	7,2999
340	11 56 00	39 304 000	18,4391	6,9795	390	15 21 00	59 319 000	19,7484	7,3061
341	11 62 81	39 651 821	18,4662	6,9864	391	15 28 81	59 776 471	19,7737	7,3124
342	11 69 64	40 001 688	18,4932	6,9932	392	15 36 64	60 236 288	19,7990	7,3186
343	11 76 49	40 353 607	18,5203	7,0000	393	15 44 49	60 698 457	19,8242	7,3248
344	11 83 36	40 707 584	18,5472	7,0068	394	15 52 36	61 162 984	19,8494	7,3310
345	11 90 25	41 063 625	18,5742	7,0136	395	15 60 25	61 629 875	19,8746	7,3372
346	11 97 16	41 421 736	18,6011	7,0203	396	15 68 16	62 099 136	19,8997	7,3434
347	12 04 09	41 781 923	18,6279	7,0271	397	15 76 09	62 570 773	19,9249	7,3496
348	12 11 04	42 144 192	18,6548	7,0338					

n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$	n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$
401	16 08 01	64 481 201	20,0250	7,3742	451	20 34 01	91 733 851	21,2368	7,6688
402	16 16 04	64 964 808	20,0499	7,3803	452	20 43 04	92 345 408	21,2603	7,6744
403	16 24 09	65 450 827	20,0749	7,3864	453	20 52 09	92 959 677	21,2838	7,6801
404	16 32 16	65 939 264	20,0998	7,3925	454	20 61 16	93 576 664	21,3073	7,6857
405	16 40 25	66 430 125	20,1246	7,3986	455	20 70 25	94 196 375	21,3307	7,6914
406	16 48 36	66 923 416	20,1494	7,4047	456	20 79 36	94 818 816	21,3542	7,6970
407	16 56 49	67 419 143	20,1742	7,4108	457	20 88 49	95 443 993	21,3776	7,7026
408	16 64 64	67 917 312	20,1990	7,4169	458	20 97 64	96 071 912	21,4009	7,7082
409	16 72 81	68 417 929	20,2237	7,4229	459	21 06 81	96 702 579	21,4243	7,7138
410	16 81 00	68 921 000	20,2485	7,4290	460	21 16 00	97 336 000	21,4476	7,7194
411	16 89 21	69 426 531	20,2731	7,4350	461	21 25 21	97 972 181	21,4709	7,7250
412	16 97 44	69 934 528	20,2978	7,4410	462	21 34 44	98 611 128	21,4942	7,7306
413	17 05 69	70 444 997	20,3224	7,4470	463	21 43 69	99 252 847	21,5174	7,7362
414	17 13 96	70 957 944	20,3470	7,4530	464	21 52 96	99 897 344	21,5407	7,7418
415	17 22 25	71 473 375	20,3715	7,4590	465	21 62 25	100 544 625	21,5639	7,7473
416	17 30 56	71 991 296	20,3961	7,4650	466	21 71 56	101 194 696	21,5870	7,7529
417	17 38 89	72 511 713	20,4206	7,4710	467	21 80 89	101 847 563	21,6102	7,7584
418	17 47 24	73 034 632	20,4450	7,4770	468	21 90 24	102 503 232	21,6333	7,7639
419	17 55 61	73 560 059	20,4695	7,4829	469	21 99 61	103 161 709	21,6564	7,7695
420	17 64 00	74 088 000	20,4939	7,4889	470	22 09 00	103 823 000	21,6795	7,7750
421	17 72 41	74 618 461	20,5183	7,4948	471	22 18 41	104 487 111	21,7025	7,7805
422	17 80 84	75 151 448	20,5426	7,5007	472	22 27 84	105 154 048	21,7256	7,7860
423	17 89 29	75 686 967	20,5670	7,5067	473	22 37 29	105 823 817	21,7486	7,7915
424	17 97 76	76 225 024	20,5913	7,5126	474	22 46 76	106 496 424	21,7715	7,7970
425	18 06 25	76 765 625	20,6155	7,5185	475	22 56 25	107 171 875	21,7945	7,8025
426	18 14 76	77 308 776	20,6398	7,5244	476	22 65 76	107 850 176	21,8174	7,8079
427	18 23 29	77 854 483	20,6640	7,5302	477	22 75 29	108 531 333	21,8403	7,8134
428	18 31 84	78 402 752	20,6882	7,5361	478	22 84 84	109 215 352	21,8632	7,8188
429	18 40 41	78 953 589	20,7123	7,5420	479	22 94 41	109 902 239	21,8861	7,8243
430	18 49 00	79 507 000	20,7364	7,5478	480	23 04 00	110 592 000	21,9089	7,8297
431	18 57 61	80 062 991	20,7605	7,5537	481	23 13 61	111 284 641	21,9317	7,8352
432	18 66 24	80 621 568	20,7846	7,5595	482	23 23 24	111 980 168	21,9545	7,8406
433	18 74 89	81 182 737	20,8087	7,5654	483	23 32 89	112 678 587	21,9773	7,8460
434	18 83 56	81 746 504	20,8327	7,5712	484	23 42 56	113 379 904	22,0000	7,8514
435	18 92 25	82 312 875	20,8567	7,5770	485	23 52 25	114 084 125	22,0227	7,8568
436	19 00 96	82 881 856	20,8806	7,5828	486	23 61 96	114 791 256	22,0454	7,8622
437	19 09 69	83 453 453	20,9045	7,5886	487	23 71 69	115 501 303	22,0681	7,8676
438	19 18 44	84 027 672	20,9284	7,5944	488	23 81 44	116 214 272	22,0907	7,8730
439	19 27 21	84 604 519	20,9523	7,6001	489	23 91 21	116 930 169	22,1133	7,8784
440	19 36 00	85 184 000	20,9762	7,6059	490	24 01 00	117 649 000	22,1359	7,8837
441	19 44 81	85 766 121	21,0000	7,6117	491	24 10 81	118 370 771	22,1585	7,8891
442	19 53 64	86 350 888	21,0238	7,6174	492	24 20 64	119 095 488	22,1811	7,8944
443	19 62 49	86 938 307	21,0476	7,6232	493	24 30 49	119 823 157	22,2036	7,8998
444	19 71 36	87 528 384	21,0713	7,6289	494	24 40 36	120 553 784	22,2261	7,9051
445	19 80 25	88 121 125	21,0950	7,6346	495	24 50 25	121 287 375	22,2486	7,9105
446	19 89 16	88 716 536	21,1187	7,6403	496	24 60 16	122 023 936	22,2711	7,9158
447	19 98 09	89 314 623	21,1424	7,6460	497	24 70 09	122 763 473	22,2935	7,9211
448	20 07 04	89 915 392	21,1660	7,6517	498	24 80 04	123 505 992	22,3159	7,9264
449	20 16 01	90 518 849	21,1896	7,6574	499	24 90 01	124 251 499	22,3383	7,9317
450	20 25 00	91 125 000	21,2132	7,6631	500	25 00 00	125 000 000	22,3607	7,9370

n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$	n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$
501	25 10 01	125 751 501	22,3830	7,9423	551	30 36 01	167 284 151	23,4734	8,1982
502	25 20 04	126 506 008	22,4054	7,9476	552	30 47 04	168 196 608	23,4947	8,2031
503	25 30 09	127 263 527	22,4277	7,9528	553	30 58 09	169 112 377	23,5160	8,2081
504	25 40 16	128 024 064	22,4499	7,9581	554	30 69 16	170 031 464	23,5372	8,2130
505	25 50 25	128 787 625	22,4722	7,9634	555	30 80 25	170 953 875	23,5584	8,2180
506	25 60 36	129 554 216	22,4944	7,9686	556	30 91 36	171 879 616	23,5797	8,2229
507	25 70 49	130 323 843	22,5167	7,9739	557	31 02 49	172 808 693	23,6008	8,2278
508	25 80 64	131 096 512	22,5389	7,9791	558	31 13 64	173 741 112	23,6220	8,2327
509	25 90 81	131 872 229	22,5610	7,9843	559	31 24 81	174 676 879	23,6432	8,2377
510	26 01 00	132 651 000	22,5832	7,9896	560	31 36 00	175 616 000	23,6643	8,2426
511	26 11 21	133 432 831	22,6053	7,9948	561	31 47 21	176 558 481	23,6854	8,2475
512	26 21 44	134 217 728	22,6274	8,0000	562	31 58 44	177 504 328	23,7065	8,2524
513	26 31 69	135 005 697	22,6495	8,0052	563	31 69 69	178 453 547	23,7276	8,2573
514	26 41 96	135 796 744	22,6716	8,0104	564	31 80 96	179 406 144	23,7487	8,2621
515	26 52 25	136 590 875	22,6936	8,0156	565	31 92 25	180 362 125	23,7697	8,2670
516	26 62 56	137 388 096	22,7156	8,0208	566	32 03 56	181 321 496	23,7908	8,2719
517	26 72 89	138 188 413	22,7376	8,0260	567	32 14 89	182 284 263	23,8118	8,2768
518	26 83 24	138 991 832	22,7596	8,0311	568	32 26 24	183 250 432	23,8328	8,2816
519	26 93 61	139 798 859	22,7816	8,0363	569	32 37 61	184 220 009	23,8537	8,2865
520	27 04 00	140 608 000	22,8035	8,0415	570	32 49 00	185 193 000	23,8747	8,2913
521	27 14 41	141 420 761	22,8254	8,0466	571	32 60 41	186 169 411	23,8956	8,2962
522	27 24 84	142 236 648	22,8473	8,0517	572	32 71 84	187 149 248	23,9165	8,3010
523	27 35 29	143 055 667	22,8692	8,0569	573	32 83 29	188 132 517	23,9374	8,3059
524	27 45 76	143 877 824	22,8910	8,0620	574	32 94 76	189 119 224	23,9583	8,3107
525	27 56 25	144 703 125	22,9129	8,0671	575	33 06 25	190 109 375	23,9792	8,3155
526	27 66 76	145 531 576	22,9347	8,0723	576	33 17 76	191 102 976	24,0000	8,3203
527	27 77 29	146 363 183	22,9565	8,0774	577	33 29 29	192 100 033	24,0208	8,3251
528	27 87 84	147 197 952	22,9783	8,0825	578	33 40 84	193 100 552	24,0416	8,3300
529	27 98 41	148 035 889	23,0000	8,0876	579	33 52 41	194 104 539	24,0624	8,3348
530	28 09 00	148 877 000	23,0217	8,0927	580	33 64 00	195 112 000	24,0832	8,3396
531	28 19 61	149 721 291	23,0434	8,0978	581	33 75 61	196 122 941	24,1039	8,3443
532	28 30 24	150 568 768	23,0651	8,1028	582	33 87 24	197 137 368	24,1247	8,3491
533	28 40 89	151 419 437	23,0868	8,1079	583	33 98 89	198 155 287	24,1454	8,3539
534	28 51 56	152 273 304	23,1084	8,1130	584	34 10 56	199 176 704	24,1661	8,3587
535	28 62 25	153 130 375	23,1301	8,1180	585	34 22 25	200 201 625	24,1868	8,3634
536	28 72 96	153 990 656	23,1517	8,1231	586	34 33 96	201 230 056	24,2074	8,3682
537	28 83 69	154 854 153	23,1733	8,1281	587	34 45 69	202 262 003	24,2281	8,3730
538	28 94 44	155 720 872	23,1948	8,1332	588	34 57 44	203 297 472	24,2487	8,3777
539	29 05 21	156 590 819	23,2164	8,1382	589	34 69 21	204 336 469	24,2693	8,3825
540	29 16 00	157 464 000	23,2379	8,1433	590	34 81 00	205 379 000	24,2899	8,3872
541	29 26 81	158 340 421	23,2594	8,1483	591	34 92 81	206 425 071	24,3105	8,3919
542	29 37 64	159 220 088	23,2809	8,1533	592	35 04 64	207 474 688	24,3311	8,3967
543	29 48 49	160 103 007	23,3024	8,1583	593	35 16 49	208 527 857	24,3516	8,4014
544	29 59 36	160 989 184	23,3238	8,1633	594	35 28 36	209 584 584	24,3721	8,4061
545	29 70 25	161 878 625	23,3452	8,1683	595	35 40 25	210 644 875	24,3926	8,4108
546	29 81 16	162 771 336	23,3666	8,1733	596	35 52 16	211 708 736</		

n	n ²	n ³	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$	n	n ²	n ³	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$
601	36 12 01	217 081 801	24,5153	8,4390	651	42 38 01	275 894 451	25,5147	8,6668
602	36 24 04	218 167 208	24,5357	8,4437	652	42 51 04	277 167 808	25,5343	8,6713
603	36 36 09	219 256 227	24,5561	8,4484	653	42 64 09	278 445 077	25,5539	8,6757
604	36 48 16	220 348 864	24,5764	8,4530	654	42 77 16	279 726 264	25,5734	8,6801
605	36 60 25	221 445 125	24,5967	8,4577	655	42 90 25	281 011 375	25,5930	8,6845
606	36 72 36	222 545 016	24,6171	8,4623	656	43 03 36	282 300 416	25,6125	8,6890
607	36 84 49	223 648 543	24,6374	8,4670	657	43 16 49	283 593 393	25,6320	8,6934
608	36 96 64	224 755 712	24,6577	8,4716	658	43 29 64	284 890 312	25,6515	8,6978
609	37 08 81	225 866 529	24,6779	8,4763	659	43 42 81	286 191 179	25,6710	8,7022
610	37 21 00	226 981 000	24,6982	8,4809	660	43 56 00	287 496 000	25,6905	8,7066
611	37 33 21	228 099 131	24,7184	8,4856	661	43 69 21	288 804 781	25,7099	8,7110
612	37 45 44	229 220 928	24,7386	8,4902	662	43 82 44	290 117 528	25,7294	8,7154
613	37 57 69	230 346 397	24,7588	8,4948	663	43 95 69	291 434 247	25,7488	8,7198
614	37 69 96	231 475 544	24,7790	8,4994	664	44 08 96	292 754 944	25,7682	8,7241
615	37 82 25	232 608 375	24,7992	8,5040	665	44 22 25	294 079 625	25,7876	8,7285
616	37 94 56	233 744 896	24,8193	8,5086	666	44 35 56	295 408 296	25,8070	8,7329
617	38 06 89	234 885 113	24,8395	8,5132	667	44 48 89	296 740 963	25,8263	8,7373
618	38 19 24	236 029 032	24,8596	8,5178	668	44 62 24	298 077 632	25,8457	8,7416
619	38 31 61	237 176 659	24,8797	8,5224	669	44 75 61	299 418 309	25,8650	8,7460
620	38 44 00	238 328 800	24,8998	8,5270	670	44 89 00	300 763 000	25,8844	8,7503
621	38 56 41	239 483 061	24,9199	8,5316	671	45 02 41	302 111 711	25,9037	8,7547
622	38 68 84	240 641 848	24,9399	8,5362	672	45 15 84	303 464 448	25,9230	8,7590
623	38 81 29	241 804 367	24,9600	8,5408	673	45 29 29	304 821 217	25,9422	8,7634
624	38 93 76	242 970 624	24,9800	8,5453	674	45 42 76	306 182 024	25,9615	8,7677
625	39 06 25	244 140 625	25,0000	8,5499	675	45 56 25	307 546 875	25,9808	8,7721
626	39 18 76	245 314 376	25,0200	8,5544	676	45 69 76	308 915 776	26,0000	8,7764
627	39 31 29	246 491 883	25,0400	8,5590	677	45 83 29	310 288 733	26,0192	8,7808
628	39 43 84	247 673 152	25,0599	8,5635	678	45 96 84	311 665 752	26,0384	8,7850
629	39 56 41	248 858 189	25,0799	8,5681	679	46 10 41	313 046 839	26,0576	8,7893
630	39 69 00	250 047 000	25,0998	8,5726	680	46 24 00	314 433 000	26,0768	8,7937
631	39 81 61	251 239 591	25,1197	8,5772	681	46 37 61	315 821 241	26,0960	8,7980
632	39 94 24	252 435 968	25,1396	8,5817	682	46 51 24	317 214 568	26,1151	8,8023
633	40 06 89	253 636 137	25,1595	8,5862	683	46 64 89	318 611 987	26,1343	8,8066
634	40 19 56	254 840 104	25,1794	8,5907	684	46 78 56	320 013 504	26,1534	8,8109
635	40 32 25	256 047 875	25,1992	8,5952	685	46 92 25	321 419 125	26,1725	8,8152
636	40 44 96	257 259 456	25,2190	8,5997	686	47 05 96	322 828 856	26,1916	8,8194
637	40 57 69	258 474 853	25,2389	8,6043	687	47 19 69	324 242 703	26,2107	8,8237
638	40 70 44	259 694 072	25,2587	8,6088	688	47 33 44	325 660 872	26,2298	8,8280
639	40 83 21	260 917 119	25,2784	8,6132	689	47 47 21	327 082 769	26,2488	8,8323
640	40 96 00	262 144 000	25,2982	8,6177	690	47 61 00	328 509 000	26,2679	8,8366
641	41 08 81	263 374 721	25,3180	8,6222	691	47 74 81	329 939 371	26,2869	8,8408
642	41 21 64	264 609 288	25,3377	8,6267	692	47 88 64	331 373 888	26,3059	8,8451
643	41 34 49	265 847 707	25,3574	8,6312	693	48 02 49	332 812 557	26,3249	8,8493
644	41 47 36	267 089 984	25,3772	8,6357	694	48 16 36	334 255 384	26,3439	8,8536
645	41 60 25	268 336 125	25,3969	8,6401	695	48 30 25	335 702 375	26,3629	8,8578
646	41 73 16	269 586 136	25,4165	8,6446	696	48 44 16	337 153 536	26,3818	8,8621
647	41 86 09	270 840 023	25,4362	8,6490	697	48 58 09	338 608 873	26,4008	8,8663
648	41 99 04	272 097 792	25,4558	8,6535	698	48 72 04	340 068 392	26,4197	8,8706
649	42 12 01	273 359 449	25,4755	8,6579	699	48 86 01	341 532 099	26,4386	8,8748
650	42 25 00	274 625 000	25,4951	8,6624	700	49 00 00	343 000 000	26,4575	8,8790

n	n ²	n ³	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$	n	n ²	n ³	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$
701	49 14 01	344 472 101	26,4764	8,8833	751	56 40 01	423 564 751	27,4044	9,0896
702	49 28 04	345 948 408	26,4953	8,8875	752	56 55 04	425 259 008	27,4226	9,0937
703	49 42 09	347 428 927	26,5141	8,8917	753	56 70 09	426 957 777	27,4408	9,0977
704	49 56 16	348 913 664	26,5330	8,8959	754	56 85 16	428 681 064	27,4591	9,1017
705	49 70 25	350 402 625	26,5518	8,9001	755	57 00 25	430 368 875	27,4773	9,1057
706	49 84 36	351 895 816	26,5707	8,9043	756	57 15 36	432 081 216	27,4955	9,1098
707	49 98 49	353 393 243	26,5895	8,9085	757	57 30 49	433 798 093	27,5136	9,1138
708	50 12 64	354 894 912	26,6083	8,9127	758	57 45 64	435 519 512	27,5318	9,1178
709	50 26 81	356 400 829	26,6271	8,9169	759	57 60 81	437 245 479	27,5500	9,1218
710	50 41 00	357 911 000	26,6458	8,9211	760	57 76 00	438 976 000	27,5681	9,1258
711	50 55 21	359 425 431	26,6646	8,9253	761	57 91 21	440 711 081	27,5862	9,1298
712	50 69 44	360 944 128	26,6833	8,9295	762	58 06 44	442 450 728	27,6043	9,1338
713	50 83 69	362 467 097	26,7021	8,9337	763	58 21 69	444 194 947	27,6225	9,1378
714	50 97 96	363 994 344	26,7208	8,9378	764	58 36 96	445 943 744	27,6405	9,1418
715	51 12 25	365 525 875	26,7395	8,9420	765	58 52 25	447 697 125	27,6586	9,1458
716	51 26 56	367 061 696	26,7582	8,9462	766	58 67 56	449 455 096	27,6767	9,1498
717	51 40 89	368 601 833	26,7769	8,9503	767	58 82 89	451 217 663	27,6948	9,1537
718	51 55 24	370 146 232	26,7955	8,9545	768	58 98 24	452 984 832	27,7128	9,1577
719	51 69 61	371 694 959	26,8142	8,9587	769	59 13 61	454 756 609	27,7308	9,1617
720	51 84 00	373 248 000	26,8328	8,9628	770	59 29 00	456 533 000	27,7489	9,1657
721	51 98 41	374 805 361	26,8514	8,9670	771	59 44 41	458 314 011	27,7669	9,1696
722	52 12 84	376 367 048	26,8701	8,9711	772	59 59 84	460 099 648	27,7849	9,1736
723	52 27 29	377 933 067	26,8887	8,9752	773	59 75 29	461 889 917	27,8029	9,1775
724	52 41 76	379 503 424	26,9072	8,9794	774	59 90 76	463 684 824	27,8209	9,1815
725	52 56 25	381 078 125	26,9258	8,9835	775	60 06 25	465 484 375	27,8388	9,1855
726	52 70 76	382 657 176	26,9444	8,9876	776	60 21 76	467 288 576	27,8568	9,1894
727	52 85 29	384 240 583	26,9629	8,9918	777	60 37 29	469 097 433	27,8747	9,1933
728	52 99 84	385 828 352	26,9815	8,9959	778	60 52 84	470 910 952	27,8927	9,1973
729	53 14 41	387 420 489	27,0000	9,0000	779	60 68 41	472 729 139	27,9106	9,2012
730	53 29 00	389 017 000	27,0185	9,0041	780	60 84 00	474 552 000	27,9285	9,2052
731	53 43 61	390 617 891	27,0370	9,0082	781	60 99 61	476 379 541	27,9464	9,2091
732	53 58 24	392 223 168	27,0555	9,0123	782	61 15 24	478 211 768	27,9643	9,2130
733	53 72 89	393 832 837	27,0740	9,0164	783	61 30 89	480 048 687	27,9821	9,2170
734	53 87 56	395 446 904	27,0924	9,0205	784	61 46 56	481 890 304	28,0000	9,2209
735	54 02 25	397 065 375	27,1109	9,0246	785	61 62 25	483 736 625	28,0179	9,2248
736	54 16 96	398 688 256	27,1293	9,0287	786	61 77 96	485 587 656	28,0357	9,2287
737	54 31 69	400 315 523	27,1477	9,0328	787	61 93 69	487 443 403	28,0535	9,2326
738	54 46 44	401 947 272	27,1662	9,0369	788	62 09 44	489 303 872	28,0713	9,2365
739	54 61 21	403 583 419	27,1846	9,0410	789	62 25 21	491 169 069	28,0891	9,2404
740	54 76 00	405 224 000	27,2029	9,0450	790	62 41 00	493 039 000	28,1069	9,2443
741	54 90 81	406 869 021	27,2213	9,0491	791	62 56 81	494 913 671	28,1247	9,2482
742	55 05 64	408 518 488	27,2397	9,0532	792	62 72 64	496 793 088	28,1425	9,2521
743	55 20 49	410 172 407	27,2580	9,0572	793	62 88 49	498 677 257	28,1603	9,2560
744	55 35 36	411 830 784	27,2764	9,0613	794	63 04 36	500 566 184	28,1780	9,2599
745	55 50 25	413 493 625	27,2947	9,0654	795	63 20 25	502 459 875	28,1957	9,2638
746	55 65 16	415 160 936	27,3130	9,0694	796				

n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$	n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$
801	64 16 01	513 922 401	28,3019	9,2870	851	72 42 01	616 295 051	29,1719	9,4764
802	64 32 04	515 849 608	28,3196	9,2909	852	72 59 04	618 470 208	29,1890	9,4801
803	64 48 09	517 781 627	28,3373	9,2948	853	72 76 09	620 650 477	29,2062	9,4838
804	64 64 16	519 718 464	28,3549	9,2986	854	72 93 16	622 835 864	29,2233	9,4875
805	64 80 25	521 660 125	28,3725	9,3025	855	73 10 25	625 026 375	29,2404	9,4912
806	64 96 36	523 606 616	28,3901	9,3063	856	73 27 36	627 222 016	29,2575	9,4949
807	65 12 49	525 557 943	28,4077	9,3102	857	73 44 49	629 422 793	29,2746	9,4986
808	65 28 64	527 514 112	28,4253	9,3140	858	73 61 64	631 628 712	29,2916	9,5023
809	65 44 81	529 475 129	28,4429	9,3179	859	73 78 81	633 839 779	29,3087	9,5060
810	65 61 00	531 441 000	28,4605	9,3217	860	73 96 00	636 056 000	29,3258	9,5097
811	65 77 21	533 411 731	28,4781	9,3255	861	74 13 21	638 277 381	29,3428	9,5134
812	65 93 44	535 387 328	28,4956	9,3294	862	74 30 44	640 503 928	29,3598	9,5171
813	66 09 69	537 367 797	28,5132	9,3332	863	74 47 69	642 735 647	29,3769	9,5207
814	66 25 96	539 353 144	28,5307	9,3370	864	74 64 96	644 972 544	29,3939	9,5244
815	66 42 25	541 343 375	28,5482	9,3408	865	74 82 25	647 214 625	29,4109	9,5281
816	66 58 56	543 338 496	28,5657	9,3447	866	74 99 56	649 461 826	29,4279	9,5317
817	66 74 89	545 338 513	28,5832	9,3485	867	75 16 89	651 714 363	29,4449	9,5354
818	66 91 24	547 343 432	28,6007	9,3523	868	75 34 24	653 972 032	29,4618	9,5391
819	67 07 61	549 353 259	28,6182	9,3561	869	75 51 61	656 234 909	29,4788	9,5427
820	67 24 00	551 368 000	28,6356	9,3599	870	75 69 00	658 503 000	29,4958	9,5464
821	67 40 41	553 387 661	28,6531	9,3637	871	75 86 41	660 776 311	29,5127	9,5501
822	67 56 84	555 412 248	28,6705	9,3675	872	76 03 84	663 054 848	29,5296	9,5537
823	67 73 29	557 441 767	28,6880	9,3713	873	76 21 29	665 338 617	29,5466	9,5574
824	67 89 76	559 476 224	28,7054	9,3751	874	76 38 76	667 627 624	29,5635	9,5610
825	68 06 25	561 515 625	28,7228	9,3789	875	76 56 25	669 921 875	29,5804	9,5647
826	68 22 76	563 559 976	28,7402	9,3827	876	76 73 76	672 221 376	29,5973	9,5683
827	68 39 29	565 609 283	28,7576	9,3865	877	76 91 29	674 526 133	29,6142	9,5719
828	68 55 84	567 663 552	28,7750	9,3902	878	77 08 84	676 836 152	29,6311	9,5756
829	68 72 41	569 722 789	28,7924	9,3940	879	77 26 41	679 151 439	29,6479	9,5792
830	68 89 00	571 787 000	28,8097	9,3978	880	77 44 00	681 472 000	29,6648	9,5828
831	69 05 61	573 856 191	28,8271	9,4016	881	77 61 61	683 797 841	29,6816	9,5865
832	69 22 24	575 930 368	28,8444	9,4053	882	77 79 24	686 128 968	29,6985	9,5901
833	69 38 89	578 009 537	28,8617	9,4091	883	77 96 89	688 465 387	29,7153	9,5937
834	69 55 56	580 093 704	28,8791	9,4129	884	78 14 56	690 807 104	29,7321	9,5973
835	69 72 25	582 182 875	28,8964	9,4166	885	78 32 25	693 154 125	29,7489	9,6010
836	69 88 96	584 277 056	28,9137	9,4204	886	78 49 96	695 506 456	29,7658	9,6046
837	70 05 69	586 376 253	28,9310	9,4241	887	78 67 69	697 864 103	29,7825	9,6082
838	70 22 44	588 480 472	28,9482	9,4279	888	78 85 44	700 227 072	29,7993	9,6118
839	70 39 21	590 589 719	28,9655	9,4316	889	79 03 21	702 595 369	29,8161	9,6154
840	70 56 00	592 704 000	28,9828	9,4354	890	79 21 00	704 969 000	29,8329	9,6190
841	70 72 81	594 823 321	29,0000	9,4391	891	79 38 81	707 347 971	29,8496	9,6226
842	70 89 64	596 947 688	29,0172	9,4429	892	79 56 64	709 732 288	29,8664	9,6262
843	71 06 49	599 077 107	29,0345	9,4466	893	79 74 49	712 121 957	29,8831	9,6298
844	71 23 36	601 211 584	29,0517	9,4503	894	79 92 36	714 516 984	29,8998	9,6334
845	71 40 25	603 351 125	29,0689	9,4541	895	80 10 25	716 917 375	29,9166	9,6370
846	71 57 16	605 495 736	29,0861	9,4578	896	80 28 16	719 323 136	29,9333	9,6406
847	71 74 09	607 645 423	29,1033	9,4615	897	80 46 09	721 734 273	29,9500	9,6442
848	71 91 04	609 800 192	29,1204	9,4652	898	80 64 04	724 150 792	29,9666	9,6477
849	72 08 01	611 960 049	29,1376	9,4690	899	80 82 01	726 572 699	29,9833	9,6513
850	72 25 00	614 125 000	29,1548	9,4727	900	81 00 00	729 000 000	30,0000	9,6549

n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$	n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$
901	81 18 01	731 432 701	30,0167	9,6585	951	90 44 01	860 085 351	30,8383	9,8339
902	81 36 04	733 870 808	30,0333	9,6620	952	90 63 04	862 801 408	30,8545	9,8374
903	81 54 09	736 314 327	30,0500	9,6656	953	90 82 09	865 523 177	30,8707	9,8408
904	81 72 16	738 763 264	30,0666	9,6692	954	91 01 16	868 250 664	30,8869	9,8443
905	81 90 25	741 217 625	30,0832	9,6727	955	91 20 25	870 983 875	30,9031	9,8477
906	82 08 36	743 677 416	30,0998	9,6763	956	91 39 36	873 722 816	30,9192	9,8511
907	82 26 49	746 142 643	30,1164	9,6799	957	91 58 49	876 467 493	30,9354	9,8546
908	82 44 64	748 613 312	30,1330	9,6834	958	91 77 64	879 217 912	30,9516	9,8580
909	82 62 81	751 089 429	30,1496	9,6870	959	91 96 81	881 974 079	30,9677	9,8614
910	82 81 00	753 571 000	30,1662	9,6905	960	92 16 00	884 736 000	30,9839	9,8648
911	82 99 21	756 058 031	30,1828	9,6941	961	92 35 21	887 503 681	31,0000	9,8683
912	83 17 44	758 550 528	30,1993	9,6976	962	92 54 44	890 277 128	31,0161	9,8717
913	83 35 69	761 048 497	30,2159	9,7012	963	92 73 69	893 056 347	31,0322	9,8751
914	83 53 96	763 551 944	30,2324	9,7047	964	92 92 96	895 841 344	31,0483	9,8785
915	83 72 25	766 060 875	30,2490	9,7082	965	93 12 25	898 632 125	31,0644	9,8819
916	83 90 56	768 575 296	30,2655	9,7118	966	93 31 56	901 428 696	31,0805	9,8854
917	84 08 89	771 095 213	30,2820	9,7153	967	93 50 89	904 231 063	31,0966	9,8888
918	84 27 24	773 620 632	30,2985	9,7188	968	93 70 24	907 039 232	31,1127	9,8922
919	84 45 61	776 151 559	30,3150	9,7224	969	93 89 61	909 853 209	31,1288	9,8956
920	84 64 00	778 688 000	30,3315	9,7259	970	94 09 00	912 673 000	31,1448	9,8990
921	84 82 41	781 229 961	30,3480	9,7294	971	94 28 41	915 498 611	31,1609	9,9024
922	85 00 84	783 777 448	30,3645	9,7329	972	94 47 84	918 330 048	31,1769	9,9058
923	85 19 29	786 330 467	30,3809	9,7364	973	94 67 29	921 167 317	31,1929	9,9092
924	85 37 76	788 889 024	30,3974	9,7400	974	94 86 76	924 010 424	31,2090	9,9126
925	85 56 25	791 453 125	30,4138	9,7435	975	95 06 25	926 859 375	31,2250	9,9160
926	85 74 76	794 022 776	30,4302	9,7470	976	95 25 76	929 714 176	31,2410	9,9194
927	85 93 29	796 597 983	30,4467	9,7505	977	95 45 29	932 574 833	31,2570	9,9227
928	86 11 84	799 178 752	30,4631	9,7540	978	95 64 84	935 441 352	31,2730	9,9261
929	86 30 41	801 765 089	30,4795	9,7575	979	95 84 41	938 313 739	31,2890	9,9295
930	86 49 00	804 357 000	30,4959	9,7610	980	96 04 00	941 192 000	31,3050	9,9329
931	86 67 61	806 954 491	30,5123	9,7645	981	96 23 61	944 076 141	31,3209	9,9363
932	86 86 24	809 561 568	30,5287	9,7680	982	96 43 24	946 966 163	31,3369	9,9396
933	87 04 89	812 166 237	30,5450	9,7715	983	96 62 89	949 862 087	31,3528	9,9430
934	87 23 56	814 780 504	30,5614	9,7750	984	96 82 56	952 763 904	31,3688	9,9464
935	87 42 25	817 400 375	30,5778	9,7785	985	97 02 25	955 671 625	31,3847	9,9497
936	87 60 96	820 025 856	30,5941	9,7819	986	97 21 96	958 585 256	31,4006	9,9531
937	87 79 69	822 656 953	30,6105	9,7854	987	97 41 69	961 504 803	31,4166	9,9565
938	87 98 44	825 293 672	30,6268	9,7889	988	97 61 44	964 430 272	31,4325	9,9598
939	88 17 21	827 936 019	30,6431	9,7924	989	97 81 21	967 361 669	31,4484	9,9632
940	88 36 00	830 584 000	30,6594	9,7959	990	98 01 00	970 299 000	31,4643	9,9666
941	88 54 81	833 237 621	30,6757	9,7993	991	98 20 81	973 242 271	31,4802	9,9699
942	88 73 64	835 896 888	30,6920	9,8028	992	98 40 64	976 191 488	31,4960	9,9733
943	88 92 49	838 561 807	30,7083	9,8063	993	98 60 49	979 146 657	31,5119	9,9766
944	89 11 36	841 232 384	30,7246	9,8097	994	98 80 36	982 107 784	31,5278	9,9800
945	89 30 25	843 908 625	30,7409	9,8132	995	99 00 25	985 074 875	31,5436	9,9833
946	89 49 16	846 596 3							