

BIBLIOTECA POSITIVISTA  
Grupo de Pesquisa História e Educação Matemática

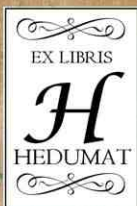
CONDORCET



Biblioteca  
G. SILVA ANDRADE

[www.hedumat.uff.br](http://www.hedumat.uff.br)

ARIMETICA



## CONFERÊNCIAS PÚBLICAS

NO

### TEMPLO DA HUMANIDADE

Rio de Janeiro. Rua Benjamin Constant, 74

Todos os domingos: Explicação do *Catecismo Positivista* de Augusto Comte e suas concepções posteriores.

1 de Janeiro.	Festa da Humanidade.
19 de Janeiro.	Festa de Rozália Boyer; Nascimento de Augusto Comte.
5 de Abril.	Morte de Clotilde de Vaux.
21 de Abril.	Comemoração de Tiradentes.
3 de Maio.	Descoberta do Brazil; comemoração dos antecedentes portugueses e indígenas.
4 de Maio.	Comemoração de Jorge Lagarrigue, T. Carson, R. Congreve, A. Crompton e outros apóstolos positivistas falecidos.
13 de Maio.	Abolição da escravidão no Brazil, comemoração do concurso da raça negra, e glorificação de Toussaint Louverture.
14 de Julho.	Revolução Franceza.
15 de Agosto.	Festa da Mulher.
5 de Setembro.	Comemoração de Sofia Bliaux; Morte de Augusto Comte.
7 de Setembro.	Independência do Brazil; glorificação de José Bonifácio.
8 de Outubro.	Festa de Clotilde e Augusto Comte.
12 de Outubro.	Descoberta da América; festa de Colombo.
15 de Novembro.	Fundação da República no Brazil, e glorificação de Benjamin Constant.
31 de Dezembro.	Festa universal dos Mortos.*

\* Nos anos bissestos, a comemoração é feita no dia anterior, sendo o dia 31 de Dezembro consagrado à Festa geral das Santas Mulheres.

Grupo de Pesquisa História e Educação Matemática

**BIBLIOTECA POSITIVISTA**

---

# MEIOS DE APRENDER A CONTAR

SEGURAMENTE E COM FACILIDADE

OBRA POSTUMA  
DE

CONDORCET

Publicada

Por MADAME DE CONDORCET, sua viuva

**NOVA EDIÇÃO**

TRADUZIDA

FOR

**Yan Demaria Boiteux**



“Jornal do Commercio”  
RODRIGUES & CIA.  
Avenida Rio Branco n. 117  
RIO DE JANEIRO  
— 1 9 4 0 —

Biblioteca

[www.hedumat.uff.br](http://www.hedumat.uff.br)

G. SILVA ANDRADE

3180

Esta nova edição é a reprodução textual da publicada em Paris, em 1854, por Mallet-Bechelier, livraria-impresora.

MIGUEL LEMOS.

Rio, 28 de Dante de 115.

## Advertencia da primeira edição

Este pequeno Tratado de Aritmetica, que não parece sinão destinado á instrução da infancia, é de um dos maiores geometras e dos primeiros filosofos deste seculo; é de Condorcet. Basta percorre-lo para se ficar convencido de que é obra de um homem superior; e aqueles que tiverem ou mostrarem duvidas sobre seu verdadeiro autor, pódem ver em casa da sua viuva o manuscrito original, escrito todo pela propria mão de Condorcet.

A primeira coisa que distingue estes Elementos de Aritmetica, é de serem ao mesmo tempo Elementos de Logica.

Uma logica muito engenhosa e muito exata preside a todas as operações do calculo; mas esta logica está como que escondida nas formulas do calculo que ela inventou e dirige.

Tornando esta logica visivel, ensinam-se duas artes ao mesmo tempo, a do calculo e a do raciocinio.

As formulas são um auxilio admiravel para o espirito; com este auxilio o espirito póde de alguma sorte dispensar-se de toda a atenção pênosa; ele não tem sinão que seguir as formulas, elas não o dirigem somente, elas o favorecem. Não ha necessidade para chegar seguramente a seu fim, sinão do grão de atenção necessario para se certificar de que ele não falta á formula e ás suas regras; e esta atenção é quase material; ela é mais dos olhos que do espirito.

As formulas, em uma palavra, são especies de maquinas com as quais se opera quase maquinalmente.

E' uma grande vantagem, mas é tambem um grande perigo. Com o habito de se apoiar nesta especie de força

artificial, deixam-se suas forças naturais sem exercício; perde-se a principio, o habito dela; perdem-se depois suas forças mesmo.

A perda seria maior que a aquisição, e seria preciso regeitar este funesto auxilio si não se pudesse separar os inconvenientes que o acompanham.

Ha um meio de os separar; ha um unico, e é aquele que Condorcet procurou, achou e ensinou neste pequeno tratado de calculo.

Consiste em tornar de tal modo sensiveis todos os motivos e todos os passos que conduziram á pesquisa e á invenção das formulas, que seja impossivel se servir de formulas sem que o espirito repasse sobre todos os motivos e sobre todos os segredos de seu artificio. Então o espirito e a mão operam juntos; ora a mão precede o espirito, ora o espirito precede a mão, mas nunca eles estão afastados; sempre caminham juntos; e o genio que creou as formulas, envolve sempre com sua luz as operações espostas para as tornar mais mecanicas do que intellectuais.

Para atender a este fim, muito negligenciado em todos os Elementos de Aritmetica, Condorcet empregou varios meios.

1.º Condorcet não se contentou em desenvolver a formação dos numeros em progressões décuplas; ele desenvolveu a formação dos numeros nos limites mesmo de um a dez. Estes primeiros numeros, elementos de todos os outros, que não se aprendiam a formar e a reter, sinão pela memoria, ele ensinou a forma-los e a rete-los pela intelligencia e pelo raciocinio; nada é abandonado á rotina; o espirito começa a se exercitar a principio para sempre se exercitar mais.

2.º Em todos os Elementos de Aritmetica fala-se de progressão décupla; mas esta formula, da qual nasceram todas as formulas da aritmetica, não a encontravamos em parte alguma analisada em todos os seus detalhes; ela está tão bem neste pequeno tratado, que as idéas de uma dezena, duma centena, dum milhar, etc., etc., são tornadas tão claras como a idéa de unidade mesmo. Os elementos dos nu-

meros os mais compostos apresentar-se-ão áquelles que tiverem lido e aprendido nesta obra, no momento mesmo em que a palavra destinada a recordar a idéa destes numeros ferir os ouvidos; e os elementos de todos os numeros serão sempre tão distintos, que nada seria tão facil e tão seguro como as operações pelas quais se compõe e decompõe todos os numeros possiveis.

3.º Numa lingua e numa ciencia bem acabadas, a analogia das idéas deve sempre ser marcada pela analogia das palavras. Mas numa parte da lingua do calculo, esta analogia foi inteiramente destruida; nas palavras trinta, quarenta, cinquenta, sessenta, a analogia das palavras é tão bem conservada para fazer sentir que se fala de tres, de quatro, de cinco, de seis; mas nas palavras *vingt-quatre* (vinte quatro), *quatre-vingts* (oitenta), *quatre-vingt-dix* (noventa), o numero de dezenas de que se falam não é absolutamente marcado pela analogia das palavras; julgamos que são duas linguas diferentes; que numa procede-se por dezenas e noutra por vintenas. Condorcet estabeleceu ou restabeleceu a progressão décupla: a vinte ele substitue "duenta", e faz reviver as palavra *septante* (setenta), *octante* (oitenta), *nonante* (noventa). Estas atenções poderão parecer minuciosas; mas isso se dará com aqueles que ignoram que a analogia das palavras e das idéas é o fio ora visivel, ora invisivel, que tem guiado os homens de genio e os povos na criação e no progresso de todas as artes, de todas as ciencias, e que no lugar em que a analogia desaparece inteiramente, aí param todos os espiritos e todos os progressos.

4.º Não ha uma das quatro regras de aritmetica sobre a qual não se encontre aí vistas novas para fazer apanhar melhor o sentido, e processos novos para tornar a pratica mais segura e mais facil.

Apenas citarei um exemplo delas. Sabemos quanto, na divisão, a necessidade de experiencias para achar os quocientes parciais torna a operação longa, incomoda, pouco segura. Condorcet foi o primeiro que deu um metodo para

incluir estas experiencias nos limites em que o quociente parcial se encontre com muito mais segurança e facilidade. Este metodo engenhoso encerra o espaço em que a procura deve ser feita, e abrevia por consequencia a operação mesmo.

5.º Os outros Elementos de Aritmetica não foram escritos sinão para aqueles que estudam: estes foram para aqueles que ensinam. Eles estão divididos em duas partes, das quais uma é destinada aos professores: é nesta parte que Condorcet faz nascer uma logica geral de observação das regras do calculo, e da analise dos motivos sobre os quais estas regras estão fundadas. Esta parte da obra é dum metafisico que tem muita profundesa, e ela aumenta a sua utilidade. A Revolução exige uma renovação de todos os estudos da infancia e da mocidade, e esta renovação exige novos professores. Compete aos homens superiores forma-los; esta tarefa convinha perfeitamente a Condorcet.

Tantos generos de novidade e utilidade tornam esta pequena obra extremamente preciosa; os momentos em que ela foi escrita, a tornam de alguma sorte sagrada; foi no asilo em que ele se escondia de seus algozes que Condorcet a escreveu; foi deste asilo que ele a enviava folha por folha á sua mulher; e mal terminou a ultima folha, foi obrigado a ir procurar um outro asilo, este asilo onde não chegam as perversidades e as paixões; o tumulto.



AVISO

RELATIVO ÀS NOTAS E ÀS OBSERVAÇÕES, POSTAS, SEJA NO CURSO, SEJA  
NO PROSSEGUIMENTO DESTA OBRA

Encontram-se varias especies de notas e de observações nos manuscritos de Condorcet. As notas, indicadas pelos numeros encerram alguns esclarecimentos sobre o metodo seguido nestes elementos, e estão collocadas em baixo das paginas ás quais elas se relacionam.

As observações pódem se dividir em duas classes.

As primeiras, indicadas pelas letras capitais, têm por objeto o ensinamento da Aritmetica ou da Geometria; as outras, designadas pelas letras ordinarias (não capitais), encerram as noções elementares de logica que devem acompanhar estes ensinamentos.

### Decreto

#### DO MINISTRO DO INTERIOR COLOCADO NO FRONTIS- PÍCIO DA PRIMEIRA EDIÇÃO DESSA OBRA

O Ministro do Interior, depois de ter ouvido seu Conselho de instrução publica,

Considerando que a obra intitulada: — *Meios de aprender a contar seguramente e com facilidade*, por Condorcet, póde ser util no ensino das escolas primarias.

Decreta que esta obra será incluída na lista geral dos livros elementares entre os quais devem escolher os mestres, tanto das escolas nacionais como os das escolas particulares, e que em virtude disto cada exemplar será marcado com a rubrica destinada a provar a identidade da obra.

Os commissarios do poder executivo estão encarregados de velar por isto afim de que, em todas as escolas, não se sirvam sinão de livros indicados na lista geral, e de denunciar as contravenções ás suas administrações respectivas para que ela tome as providencias.

Assinado Francisco (de Neuf-Chateau).

**Meios de aprender a contar seguramente e com facilidade (1)**

PRIMEIRA LIÇÃO (A)

Ao vermos duas Coisas que nos parecem semelhantes, prestando atenção primeiro a cada uma delas em particular, depois ás duas juntas, temos a idéa de uma cousa e de duas cousas, de um e de dois.

Si depois de termos visto uma e duas, vemos tres, quatro, temos primeiramente a idéa de um, depois a de dois, de tres de quatro, que não são um, e que diferem entre si; temos portanto a idéa de unidade, e a do que é um repetido mais ou menos vezes; é a idéa de numero (a).

Deram-se nomes aos numeros; assim um somado a um denomina-se dois, é a mesma coisa que dois, é igual a dois; um e um são ..... dois  
Um somado a dois, ou, o que é a mesma coisa, a um e a um, denomina-se tres, é igual a tres; um e dois são ..... tres

1 Não ponho o nome da ciencia no titulo, por que é preciso conhecermos os primeiros elementos antes de compreender bem a definição dela.

Conservi a palavra lição malgrado a idéa um pouco pedantesca que possa revelar; porque, empregando uma outra palavra, ela teria em pouco tempo a mesma sorte.

Aliás, a pretensão de esconder o mestre e a instrução direta num ensino publico é uma quimera; é querer representar uma comedia da qual todos os meninos conhecem o segredo.

Um somado a tres denomina-se quatro, é igual a quatro; um e tres são .....	quatro
Um somado a quatro denomina-se cinco, é igual a cinco; um e quatro são .....	cinco
Um somado a cinco denomina-se seis; um e cinco são .....	seis
Um somado a seis denomina-se sete; um e seis são .....	sete
Um somado a sete denomina-se oito; um e sete são .....	oito
Um somado a oito denomina-se nove; um e oito são .....	nove
Um somado a nove denomina-se dez; um e nove são .....	dez (b)

Um somado a dois é a mesma coisa que dois somado a um, visto que são sempre duas coisas e uma coisa que se consideram como reunidas.

Um e dois são três; um e tres são quatro; quatro é então a mesma coisa que dois ao qual se ajuntára um e depois um, que dois ao qual se ajuntára dois; dois e dois são quatro.

Assim, quatro, ou um ao qual se juntou um, depois um, depois ainda um; dois e dois, tres e um são a mesma coisa, são numeros iguais.

Cinco e um são seis; seis e um são sete; sete e um são oito; oito é então a mesma coisa que cinco ao qual se juntasse um, depois um, depois ainda um; porem ajuntar um, depois um, e em seguida ainda um, é a mesma coisa que ajuntar tres; oito é então a mesma coisa que cinco ao qual se ajuntasse tres: cinco e tres são oito.

Oito e um são nove, e um são dez; portanto oito e dois são dez. Nós já vimos que cinco e tres eram oito; portanto cinco, tres e dois são dez (c).

Ainda se diz: a soma de cinco e tres é oito; a soma de seis e um é sete; a soma de cinco, tres e dois é dez.

A soma de dois números é o número que se encontra juntando um deles ao outro; a soma de vários números é o número que se acha juntando-os sucessivamente uns com os outros.

Assim já sabeis exprimir os números até dez e ainda mais formar e exprimir sua soma quando ela não é maior do que dez.

Poderíamos da mesma maneira somar sucessivamente unidades a dez, e de cada vez que somássemos uma nova, dar um nome ao número que resultasse dela. Mas vemos facilmente quanto fatigaria a memória a necessidade de reter estes nomes; além disso, a algum número que se chegasse poderíamos ainda juntar outras; seria preciso quando tivéssemos necessidade disso, inventar nomes novos, e, para se fazer compreender, seríamos obrigados de os explicar aos outros, que, por sua vez, seriam obrigados a rete-los. Assim se procuraram meios de exprimir todos os números com um pequeno número de palavras, de maneira a ser compreendido por todos aqueles a quem este meio seria conhecido, quaisquer números que se desejassem exprimir.

Em seguida percebeu-se que as contas tornar-se-iam muito longas si fôssemos obrigados a escrever o nome de cada número, e procurou-se exprimi-los escrevendo-se por meio de sinais que pudessemos formar mais prontamente:

Um se escreve .....	1
Um e um, ou dois, se escreve .....	2
Um e dois, ou tres, se escreve .....	3
Um e tres, ou quatro, se escreve .....	4
Um e quatro, ou cinco, se escreve .....	5
Um e cinco, ou seis, se escreve .....	6
Um e seis, ou sete, se escreve .....	7
Um e sete, ou oito, se escreve .....	8
Um e oito, ou nove, se escreve .....	9
Um e um, um mais um, se escreve .....	1 + 1
Um mais dois, se escreve .....	1 + 2

O sinal + entre dois números significa que os consideramos como somados um ao outro; um mais um é igual a dois, se escreve:  $1 + 1 = 2$ .

Um mais dois é igual a três, se escreve:  $1 + 2 = 3$ .

O sinal = exprime que dois números são iguais entre si (d) (B).

Sentimos igualmente a necessidade de os poder exprimir todos por um pequeno número de sinais para não sermos obrigados a rete-los muitos, de memória, e de introduzir um sinal novo, quando tivermos necessidade de escrever um número maior do que aqueles para os quais tivéssemos sinais: esses sinais chamamos algarismos.

Este modo de exprimir todos os números por um pequeno número de palavras, ou de algarismos chamamos numeração; e, como é possível encontrar vários, cada um deles se chama um sistema de numeração.

## SEGUNDA LIÇÃO

Eis aqui qual é o sistema de numeração atualmente usado em França:

Um somado a dez, dez e um chama-se .....	onze
Um somado a onze, ou dois somado a dez, dez e dois, chama-se .....	doze
Um somado a doze, ou tres somado a dez, dez e tres chama-se .....	treze
Um somado a treze, ou quatro somado a dez, dez e quatro chama-se .....	quatorze
Um somado a quatorze, ou cinco somado a dez, dez e cinco chama-se .....	quinze
Um somado a quinze, ou seis somado a dez, dez e seis chama-se .....	dezeséis
Um somado a dezeséis, ou sete somado a dez, dez e sete chama-se .....	dezesete
Um somado a dezesete, ou oito somado a dez, dez e oito chama-se .....	dezoito
Um somado a dezoito, ou nove somado a dez, dez e nove chama-se .....	dezenove

Chegados a este termo, não dizemos dez dez, para exprimir um somado a dezenove ou dez e dez; é facil de ver que este meio si o continuarmos por muito tempo, conduziria-nos a formar palavras muito longas, muito difíceis de reconhecer e de pronunciar (a). Denominamos então de *duenta*.

Assim:

Um e dezenove, dez e dez chama-se.....	duenta (vinte)
Um e duenta chama-se .....	duenta e um
Um e duenta e um, duenta e dois chama-se	duenta e dois
Um e duenta e dois, duenta e tres chama-se.	duenta e tres
etc. . . . .	.....
.....	.....
Um e duenta e oito, duenta e nove chama-se	duenta e nove
Um e duenta e nove, duenta e dez, chama-se	trinta

Desde de logo, vemos que um e trinta se chama trinta e um, e assim por diante até nove e trinta, que se chama trinta e nove.

Por consequencia, pronunciamos:

Um e trinta e nove, trinta e dez pela palavra	quarenta
Um e quarenta e nove, quarenta e dez, por..	cincoenta
Um e cincoenta e nove, cincoenta e dez, por	sessenta
Um e sessenta e nove, sessenta e dez, por....	setenta
Um e setenta e nove, setenta e dez, por.....	oitenta
Um e oitenta e nove, oitenta e dez, por.....	noventa (1)

---

1) Pareceu-me necessario fazer a numeração falada enquadrar-se na numeração escrita.

Troquei então o nome dos numeros que rompem a analogia.

A troca será mesmo muito comoda para os meninos muito jovens que não sabem ainda contar; ela não pôde ter algum inconveniente para os outros, porque se limita, para aqueles, na simples substituição de duante ou duenta em lugar de vinte, e de dilhão ou dulhão em lugar de bilhão.

Com efeito, dizer dez e um, dez e dois, em lugar de onze, doze, não é empregar uma nova palavra, é somente exprimir o que se compreende por aquelas mesmas que se usa atualmente: para conservar oitenta (octante, no francês), poderia se dizer oitenta (huitante); mas temos as palavras octogenario na lingua ordinaria, e oitava na musica. *(a parte final desta nota, só tem razão de ser na lingua francesa, onde se usa para exprimir a palavra oitenta "quatro-vingts" em vez de "huitante")*.



Teremos um meio de exprimir sucessivamente todos os numeros, desde um até noventa e nove. Exprimindo em seguida:

Um e noventa e nove, noventa e dez, por....	cem
Cem e cem, ou duas vezes cem, por.....	duzentos
Cem e duzentos, ou tres vezes cem, por....	trezentos

Cem e oitocentos, ou nove vezes cem, por novecentos, e colocando depois da palavra cento os nomes dos numeros inferiores a cem, desde um até noventa e nove, para exprimir que somados a cem, a duzentos, a novecentos, eles formam o numero que se quer indicar, poderemos exprimir todos os numeros de unidades em unidades, até novecentos e noventa e nove.

Um e novecentos e noventa e nove, nove centos e cem, se exprime pela palavra .....	mil
--	-----

Em seguida, colocando antes da palavra mil o numero de vezes que ela é repetida num numero, e em continuação, depois desta palavra, aquelas que exprimem o numero de unidades inferiores a mil, que pôdem a elas serem somados teremos o meio de exprimir todos os numeros, de unidades em unidades, até novecentos e noventa e nove mil novecentos e noventa e nove unidades.

Um somado a este numero seria a mesma coisa que mil somado a novecentos e noventa e nove mil, que cem mil somado a novecentos mil, dez vezes cem mil, ou que .....	mil mil
--	---------

Emprega-se a palavra milhão para exprimir mil mil; assim, pronunciando antes da palavra milhão o numero de vezes que ela é repetida, desde uma vez até novecentos e noventa vezes, e, depois da mesma palavra, o numero inferior a

Tomou-se para este fim o sinal "0" que se pronuncia zero; assim dez se escreve 10; o algarismo que se acha em segundo lugar indica dezenas, 10 exprime uma dezena ou dez.

Duenta (vinte) se escreve 20; o algarismo que se acha em segundo lugar indicando dezenas, 20 exprime duas dezenas, ou dez e dez, ou (vinte) duenta.

Como entre uma dezena e uma outra não ha sinão nove unidades, os nove sinais adotados são suficientes para exprimir todos os numeros intermediarios entre as dezenas; assim podereis com dois numeros, exprimir todos os numeros até noventa e nove, ou nove dezenas, mais nove unidades:  $90 + 9 = 99$ .

Seguimos agora a mesma marcha, e convencionamos que um algarismo colocado á esquerda do que indica dezenas exprime tantas dezenas de dezenas, tantas centenas quanto exprimissem de dezenas, si ele estivesse menos avançado duma ordem para a direita.

Tomemos a expressão 234; o algarismo 4 indica *quatro unidades*, o algarismo tres indica *tres dezenas*, o algarismo 2 indica duas *centenas*, tantas dezenas quantas ele tivesse exprimido de unidades, si ele estivesse no lugar do 3; tantas *centenas* quanto ele tivesse exprimido de unidades, si ele estivesse no lugar do 4, si ele estivesse menos avançado de duas ordens para a esquerda.

Assim com este *terceiro* algarismo exprimiremos *centenas*, desde *cem* até *novecentos*; e com os dois algarismos seguintes, todos os numeros intermediarios entre *duas centenas*, desde 1 até 99; podeis então exprimir todos os numeros, desde 1 até 999 (1).

---

Esponho aqui a maneira pela qual poderiamos ser conduzidos atravez do sistema de numeração, sem entretanto insistir muito sobre ele. Numa instrução comum, não podemos seguir uma marcha tão rigorosa a este respeito como numa instrução, particular; o que nesta é uma conversação, uma especie de divertimento entre o professor e o aluno, tornar-se-ia aqui uma farça premeditada da qual os alunos sentiriam o ridiculo. Encontram-se aqui detalhes que parecem tal-

Si seguirmos a mesma marcha, e colocarmos um quarto algarismo á esquerda dos que indicam *centenas*, ele indicará tantas dezenas de *centenas*, ou tantos milhares quanto ele designaria de centenas, si estivesse menos avançado de uma ordem tantas *centenas* de *dezenas*, si ele estivesse menos avançado de duas; enfim, tantos milhares quanto teria designado de unidades, si ele estivesse menos avançado de tres ordens; assim 6452 indica *seis milhares, quatro centenas, cinco dezenas e duas unidades*, exprime o numero *seis mil quatrocentos e cincoenta e dois*.

O quinto algarismo exprimirá tantas dezenas de milhar; o sexto, tantas centenas de milhar; o setimo, tantos milhões; o oitavo tantas dezenas de milhões; e assim por diante, quanto teria exprimido de unidade, si estivesse no primeiro lugar.

Um algarismo exprimirá sempre tantas dezenas quanto teria de exprimir de unidades, si estivesse menos avançado uma ordem; tantas centenas quanto teria de exprimir de unidades, si estivesse menos avançado de duas ordens; tanto milhar, dezenas de milhar, centenas de milhar, milhões e assim por diante, quanto teria exprimido de unidades, si estivesse menos avançado de tres, de quatro, de cinco, de seis ordens, e assim por diante.

O numero maior que se póde exprimir com um algarismo é 9 com dois algarismos, 99; com tres, 999; com quatro, 9999, e em geral o maior numero que se póde exprimir com um certo numero de algarismos, é composto de uma serie de 9; com efeito, ele encerra então o maximo de dezenas, de centenas, etc., que é possivel indicar nas ordens de algarismos que a eles correspondem.

O menor numero que se póde exprimir com dois algarismos é 10; 100, o menor que se póde exprimir com tres algarismos; 1000, o menor que se póde exprimir com quatro algarismos;

---

vez superfluos; mais eu os creio necessarios para impedir que os alunos aprendam a numeração escrita ou falada somente de memoria: estes raciocinios exercitarão seus espiritos e auxilia-los-ão ao mesmo tempo a melhor reter o que se lhes ensina.

em geral, o menor numero que se pôde exprimir com um certo numero de algarismos é a unidade seguida de zeros. Com efeito a unidade é o menor numero que se pôde colocar em ordem avançada para a esquerda; e algum numero que se puzesse em lugar dum dos zeros, o numero total seria maior.

O maior numero que se pôde exprimir com um algarismo, e o menor que exige dois delles, a saber, 9 e 10, não diferem sinão de uma unidade. O maior numero que se pôde exprimir com dois algarismos, e o menor que exige tres deles, a saber, 99 e 100, não diferem sinão de uma unidade. Em geral o maior numero que se pôde exprimir com um certo numero de algarismos, e o menor que exige um algarismo a mais, não diferem entre eles sinão de uma unidade; com efeito, o menor numero exprime-se por uma serie de 9; ora, somando uma unidade a 9 unidades, tem-se uma dezena; somando esta dezena a 9 dezenas que se tem neste numero, tem-se uma centena; somando esta centena ás outras nove, tem-se um milhar, e assim por diante; tem-se então sempre um numero expresso pela unidade seguida de tantos zeros quanto se tem de 9.

Podemos exprimir todos os numeros por este metodo. Com efeito, pois que aumentando duma unidade o numero de zeros que seguem o algarismo 1, fazemo-lo exprimir um numero dez vezes maior, é claro que se pôde faze-lo exprimir um numero maior do que aquele que se deseja escrever; ele será então expresso por um menor numero de algarismos.

Tomando o maior numero que estes algarismos podem exprimir, é claro que pondo nas colunas das unidades 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0 no lugar de 9, o diminuiremos sucessivamente de nove unidades; que pondo na coluna das dezenas 8, 7, . . . . . 1, 0, em lugar de 9, diminuiremos sucessivamente de 9 o numero das dezenas, e assim por diante; diminuiremos então sucessivamente, unidade por unidade, de 9 unidades; depois, duma dezena e de 9 unidades; depois de duas dezenas e de 9 unidades, e assim por diante; chegaremos então até a combinação de algarismos que exprimem o numero procurado.

Si propomos escrever com algarismos um numero expresso por palavras, supomos a principio que ele não compreenda numero maior que centenas, como, por exemplo, trezentos e cincoenta e dois; observaremos que ele é composto de 3 centenas, de 5 dezenas, de 2 unidades.

Escrevendo então á principio o algarismo que indica as centenas, colocando á direita o que indica as dezenas, e á direita deste o algarismo que indica as unidades, teremos escrito em algarismos o numero expresso, 352.

Com efeito, já sabeis que escrevendo um algarismo á esquerda de um outro, ele indica dezenas si o outro indica unidades, é claro que o algarismo posto á direita dum outro indica unidades si o outro indicasse dezenas.

Mas si o numero encerra quantidades maiores que centenas, como se sabe que as denominações mudam todas as vezes que se chega a um numero mil vezes maior, que dez centenas, ou mil unidades se denominam mil, que mil mil se denominam um milhão, mil milhões, um bilhão, etc., não se terá que escrever sinão sucessivamente, indo da esquerda para a direita, o numero das centenas, das dezenas, das unidades, de milhão, de milhares, de unidades, sucessivamente e seguindo a ordem que as pronunciamos.

Assim para escrever trezentos e vinte oito milhões quinhentos e setenta e quatro mil novecentos e sessenta e um, escreveremos, sucessivamente os algarismos 3, 2, 8, 5, 7, 4, 9, 6, 1, 328 574 961.

Quando as unidades, as dezenas, ou as centenas faltam por uma denominação, não as pronunciamos o nome; assim, por exemplo, si se diz, trezentas e nove mil e trinta e um, não se pronuncia o nome das dezenas de mil, nem o das centenas de unidades, mas, como escrevendo com algarismo, é só o lugar que indica seu valor, que ele o tem realmente, é preciso escrever um zero em lugar do algarismo correspondente a cada denominação que não se pronuncie; escreveremos então 309031; com efeito si escrevesseis 9, 3, 1, sem colocar o 0 no lugar que ocupariam as centenas, teriamos 931, novecentos e trinta e um e não nove mil e trinta e um.

Si tiverdes de escrever nove mil, escrevereis 9000, pondo zero no lugar que ocupariam as centenas, as dezenas, as unidades que não se encontram neste numero.

Para exprimir por meio de palavras um numero escrito em algarismos, procura-se, primeiro por que denominação se deve começar; assim, por exemplo, tendo 4325, e sabendo que o primeiro algarismo da direita indica unidades, reconheceremos que o segundo indica dezenas; o terceiro centenas; o quarto e ultimo, milhares; é então por milhar que se deve principiar, e dizendo antes da cada denominação o numero expresso por cada algarismo, pronunciaremos quatro mil trezentos e vinte cinco; si se tiver um numero, como 327 256 498, já que o primeiro algarismo á direita, designa unidades, diremos, indo da direita para a esquerda, unidades, dezenas, centenas, milhares, dezenas de milhares, centenas de milhares, milhões, dezenas de milhões, centenas de milhões; e então tendo chegado ao ultimo algarismo 3, pronunciaremos trezentos e vinte sete milhões, duzentos e cincoenta e seis mil, quatrocentos e noventa e oito, 327256498.

Si se encontram zeros, não se pronuncia a denominação que corresponde ao lugar que eles ocupam; com efeito, eles foram aí escritos para conservar aos outros algarismos a ordem que eles devem ter, ordem que lhes determina o valor; no lugar em que, na numeração expressa por palavras, estão as denominações que indicam o valor dos numeros; e é preciso suprimir estes aos quais nenhum numero corresponde.

Si por exemplo, se tem 203005304, diz-se duzentos e tres milhões, cinco mil e trezentos e quatro, pois que não entram dezenas de milhões, nem centenas ou dezenas de milhares, nem dezenas de unidade neste numero.

(A) (a).

Sabeis agora exprimir por meio de palavras e por meio de algarismos todos os numeros que, puderdes formar, escrever com algarismos os que escutardes pronunciar, e exprimir por meio de palavras aqueles que virdes escritos e grafados.

#### QUARTA LIÇÃO

Vistes os numeros se formarem, adicionando unidades a unidades, dezenas a dezenas, centenas a centenas.

Agora supomos que se conhecesse dois numeros, e que se desejasse ou que se tivesse necessidade de ter a soma deles, de conhecer o numero que se póde formar reunindo-os um ao outro, o numero total de coisas que sabeis existir ao mesmo tempo, a principio em tal numero, depois em tal outro (A).

Supomos, por exemplo, que se tem 13 coisas num lugar, e 26 num outro, e que se quer saber quantas se tem nos dois; para isto, é preciso tomar a soma destes dois numeros, isto é ajuntar 26 a 13.

Vedes, ao primeiro golpe de vista, que 13 é uma dezena e 3 unidades; que 26 são 2 dezenas e 6 unidades; sabeis que 3 unidades e 6 unidades são 9 unidades; que 1 dezena e 2 dezenas são 3 dezenas; os dois numeros encerram então 9 unidades e 3 dezenas; sua soma é então 39.

Quaisquer que sejam dois numeros, póde-se empregar o mesmo meio; e, conhecendo a soma das unidades, das dezenas, das centenas que contem os dois numeros, conheceremos sua soma.

Suponde, por exemplo, que se queira ajuntar 135 a 643, ou 2345 a 3621, veremos que os dois primeiros numeros reunidos encerram 8 unidades, 7 dezenas, e 7 centenas; sua soma será 778. Veremos que os dois segundos reunidos encerram 6 unidades, 6 dezenas, 9 centenas e 5 milhares; sua soma será então 5966 (a).

Si ajuntasséis assim um ao outro numeros compostos duma maior quantidade de algarismos, perceberíeis logo que a necessidade de conservar, de memoria, a soma das unidades, das dezenas, das centenas, quando vós tivésseis chegado aos milhares, por exemplo, exige uma atenção fatigante; e que si vós esquecerdes delas, sereis obrigado a recommençar a operação: mas, para a fazer mais facilmente, não teríeis sinão de escrever um sob o outro os numeros que desejardes reunir, colocando as unidades debaixo das unidades, as dezenas debaixo das dezenas, as centenas debaixo das centenas, e vós direis em seguida: 5 e 3 são oito, escrevo 8; 3 e 4 são 7, escrevo 7; 1 e 6 são 7, escrevo 7: a soma é então 778; e 135 mais 643 é igual a 778.

Da mesma forma direis: 5 e 1 são 6, escrevo 6; 4 e 2 são 6, escrevo 6; 3 e 6 são 9, escrevo 9; 2 e 3 são 5, escrevo 5; a soma é então 5966; 2345, mais 36421 é igual a 5966.

$$\text{Formula da } \left\{ \begin{array}{r} 135 \\ + 643 \\ \hline = 778 \end{array} \right. \quad \text{operação} \quad \left\{ \begin{array}{r} 2345 \\ + 3621 \\ \hline = 5966 \end{array} \right.$$

Tomamos agora os dois numeros 18 e 25; direis, 8 e 5 são 13; e escrevereis 13; escrevereis em seguida: 1 e 2 dezenas são 3 dezenas, ou 30, e escrevereis 30; tereis então: 18 mais 25, igual a 13 mais 30.

$$\left\{ \begin{array}{r} 18 \\ + 25 \\ \hline = 13 \\ + 30 \end{array} \right.$$

Direis em seguida: 3 unidades e nenhuma no segundo numero, são 3 unidades; ou mais simplesmente, 3 e 0 são 3; escrevereis 3; depois, 1 dezena e 3 dezenas são 4 dezenas, e



escrevereis 4 dezenas; terei então 13 mais 30, que é a mesma coisa que 18 mais 25, igual a 43.

$$\left\{ \begin{array}{r} 13 \\ + 30 \\ \hline = 43 \end{array} \right.$$

Mas fosteis obrigado a fazer duas operações, e vos seria comodo fazer apenas uma delas; para isto, notastes que antes de terdes dito 8 e 5 são 13, não tendes mais unidades a considerar; escrevereis então 3 unidades; mais tendes ainda dezenas: não escrevereis esta dezena antes de terdes ajuntado 8 e 5, mas (lembrai-vos dela) rete-la-eis; direis então 8 e 5 são 13, escrevo 3 e retenho 1 dezena; 1 dezena que eu retive, e 1 dezena são 2 e 2 outras são 4, e escrevereis 4 dezenas.

$$(B) \quad \left\{ \begin{array}{r} 18 \\ + 25 \\ \hline = 43 \end{array} \right.$$

Tomemos ainda os dois numeros 4758, 8967; direis: 8 e 7 são 15, escrevo 5 e retenho 1 dezena, ou mais simplesmente retenho 1; 1 dezena e 5 dezenas são 6 dezenas, e 6 dezenas são 12 dezenas, escrevo 2 dezenas e retenho 1 dezena de dezenas, isto é, 1 centena, ou mais simplesmente 1 (que eu retive) e 5 são 6, e 6 são 12, escrevo 2 e retenho 1; depois 1 (que eu retive) e 7 são 8, e 9 são 17, escrevo 7 (centenas) e retenho 1 (1 dezena de centenas, ou 1 milhar; enfim 1 (que retive) e 4 são 5, 5 e 8 são 13, escrevo 13 (13 milhares); encontrareis então 4758 mais 8967, é igual a 13725.

$$(C) \quad \left\{ \begin{array}{r} 4758 \\ + 8967 \\ \hline = 13725 \end{array} \right.$$

Si tiverdes tres numeros para somar ao mesmo tempo: seguiréis o mesmo metodo; vós os collocareis todos os tres um sob o outro, de maneira que as unidades estejam sob as unidades, as dezenas sob as dezenas, as centenas sob as centenas, assim por diante; depois ajuntareis, 1º as unidades do primeiro numero ás do segundo, e á sua soma ás do terceiro; 2º — as dezenas do primeiro numero ás do segundo, e á sua soma ás do terceiro; 3º — as centenas do primeiro numero ás do segundo, e á sua soma as do terceiro, e assim por diante; escrevereis depois de cada uma destas adições parciais de unidades, de dezenas, de centenas, as unidades simples, as unidades de dezenas, centenas que delas resultam, e retereis as dezenas de unidades, de dezenas, de centenas, etc., que eles vos darão.

Por exemplo, si desejares ajuntar ao mesmo tempo os tres numeros 1759, 7837, 8453, direis, depois de terdes escrito um sob o outro: 9 e 7 são 16 e 3 são 19, escrevo 9 e retenho 1; 1 (que retive), e 5 são 6, e 3 são 9, e 5 são 14, escrevo 4 e retenho 1; 1 e 7 são 8, 8 e 8 são 16, e 4 são 20 (ou 2 dezenas) escrevo 0 e retenho 2; 2 e 1 são 3, 3 e 7 são 10, 10 e 8 são 18; escrevo 18, e tenho 1759, mais 7837, mais 8453, é igual a 18049.

$$\left\{ \begin{array}{r} 1759 \\ + 7837 \\ + 8453 \\ \hline 18049 \end{array} \right.$$

(b) Vedes como, seguindo a mesma marcha, podeis executar a mesma operação sobre uma quantidade de numeros quaisquer, por mais numero de algarismos que eles contemham; esta operação, pela qual reunis varios numeros, se chama adição.

## QUINTA LIÇÃO

Vistes todos os numeros se formarem successivamente pela adição mais ou menos repetida de unidades ou de numeros menores; o numero dez, por exemplo, póde ser formado ajuntando tres a sete:  $7 + 3 = 10$ ; é facil concluir daí que, si tirardes successivamente tres unidades de dez, resta-vos o numero sete, e que 10 menos 3 é igual a 7;  $10 - 3 = 7$  (A).

Podeis ter, para tirar, subtrair, diminuir, um numero menor de um numero maior, os mesmos motivos que tivestes para somar varios numeros ao mesmo tempo; vos será possível, sem duvida, subtrair successivamente tantas unidades do maior numero quantas são as do menor, e, por este meio, executar a operação da qual tivestes necessidade: mas é facil de ver que esta operação seria excessivamente longa, por menor que fosse o numero para subtrair.

Deveis então procurar um meio mais simples de executar esta operação: experimentemos aplicar aqui o meio pelo qual fomos bem sucedidos na adição, e de subtrair as unidades das unidades, as dezenas das dezenas, as centenas das centenas, etc., como nós temos (para facilitar a operação precedente) somado as unidades ás unidades, as dezenas ás dezenas, as centenas ás centenas, etc.

(a) Coloquemos igualmente um numero sob o outro, de maneira que os algarismos que indicam denominações semelhantes se correspondam; e convencionemos por o numero que deve ser subtraído, sob aquele que se deseja subtrair.

Suponhamos, por exemplo, que tenhais 124 para subtrair de 367; direis: tiro 4 unidades de 7 unidades, restam 3 unidades; restam 3; tiro 2 dezenas de 6 dezenas, restam 4 dezenas, restam 4; tiro 1 centena de 3 centenas, restam 2 centenas, restam 2; e acho que si eu tirar 124 de 367, restam 243; que 367 menos 124 é igual a 243.

$$\text{Formula da operação} \left\{ \begin{array}{l} 367 \\ - 124 \\ \hline = 243 \end{array} \right. (1)$$

Suponhamos depois que tendes 54 para subtrair de 71; vereis de inicio que não podereis subtrair as unidades das unidades, pois 4 é maior que 1; mas podereis pedir uma dezena ao maior numero que ficará ainda igual ou maior do que aquele que tendes de subtrair.

Restam aqui 6 dezenas, e tendes para deles subtrair somente 5; a mesma coisa terá lugar sempre.

Com efeito, supomos este resto de dezenas menor; ele o seria ao menos de 1, isto é de uma dezena; ele então teria sido igual antes que tivessem tomado esta dezena; os dois numeros teriam então contido o mesmo numero de dezenas, de centenas... e não teriam deferido sinão pelas unidades simples. Mas o numero a subtrair a contem em quantidade maior; ele seria então maior do que o numero do qual se quer subtrai-lo, e a operação seria absurda (b).

Direis então: tirar 4 de 1 é impossivel; tomo uma dezena ás 7, peço emprestado uma dezena; 10 e 1 são 11; tiro 4 de 11, restam 7; tiro 5 dezenas de 6 dezenas que me restam, pois eu tinha 7, tomei já uma delas; tiro 5 de 6 resta 1.

1º) Tenho seguido o modo ordinario de fazer as subtrações; mas proponho dois outros nas observações, e o ultimo sobretudo me parece preferivel áquele que está em uso.

Acho então que depois de ter tirado 54 de 71, restam 17, que 71 menos 54 é igual a 17.

$$\left\{ \begin{array}{r} 71 \\ - 54 \\ \hline = 17 \end{array} \right.$$

Si tivésseis agora de subtrair 4535 de 6223, diríeis: tirar 5 de 3 é impossível; peço emprestado uma dezena; 10 e 3 (unidades que entram no primeiro numero) são 13; tiro 5 de 13, restam 8. Tirar 3 (dezenas) de 1 dezena que resta somente, pois já tomei uma das duas que tinha, é impossível; peço emprestado uma centena; uma dezena de dezena e uma dezena que eu tinha, são 11 dezenas; tiro 3 (dezenas) de 11 (dezenas), restam 8 (dezenas). Tirar 5 (centenas) de 1 (centena que me resta), é impossível: eu peço emprestado uma dezena de centena, ou milhar; uma dezena de centena e uma centena que me resta, 10 e 1 são 11; tiro 5 (centenas) de 11 (centenas), restam 6 (centenas). Tiro em fim 4 milhares de 5 milhares que me restam pois dos 6 que eu tinha já tomei um milhar, tiro 4 de 5, resta 1; e eu acho que, si eu subtrair 4535 de 6223, restam 1686; que 6223 menos 4535 é igual a 1688.

$$\left\{ \begin{array}{r} 6223 \\ - 4535 \\ \hline = 1688 \end{array} \right.$$

Tomemos enfim um ultimo exemplo e diminuamos 2453 de 3201; diríeis: tirar 3 de 1, é impossível; observareis depois que o numero do qual deveis subtrair, não vos apresenta dezena, mas somente centenas; podereis então tomar uma centena ou dez dezenas, as quais tomasteis emprestado uma, conservando as outras nove. Assim diríeis: peço emprestado uma dezena; 10 e 1 são 11; tiro 3 de 11, restam 8. Agora tereis de

tirar 5 (dezenas); mas restam 9 das 100 que tomastes; direis então: tirar 5 de 0 é impossível; peço emprestado uma dezena (de dezenas), á qual já pedi emprestado uma (dezena), restam 9; tiro 5 de 9, restam 4; tirar 4 (centenas) de 1 (centena) que me resta, é impossível; peço emprestado uma dezena (de centenas); 10 e 1 que me resta, são 11; tiro 4 de 11, restam 7; tiro 2 (milhares) de 2 (milhares que me restam), resta 0; acho então que tirando 2453 de 3201, restam 748; que 3201 menos 2453 é igual a 748.

$$(B) \quad \left\{ \begin{array}{r} 3201 \\ - 2453 \\ \hline = 748 \end{array} \right.$$

Podeis observar que nos é suficiente sempre tomar, pedir emprestado uma unidade ao algarismo que exprime dezenas, em relação áqueles que tendes para subtrair.

Com efeito, suponde que a esta unidade de dezenas já tivesseis necessidade de pedir emprestado uma unidade, restaria 9; ora o numero que tendes para retirar será sempre, ou igual a 9, ou menor que 9; e tereis visto já que todas as vezes que tiverdes de pedir emprestado uma dezena, o que restava da totalidade dos numeros era necessariamente igual ou superior ao que vós tinheis ainda de subtrair.

O que resta de um numero depois de se ter tirado dele um menor, o numero do qual o maior excede o menor, chama-se a diferença destes numeros.

A operação pela qual tirastes, subtraistes um numero de um outro, chama-se subtração.

Dá-se o nome de aritmetica a arte de fazer operações quaesquer sobre os numeros.

SEXTA LIÇÃO

É possível de se enganar, seja fazendo uma adição, seja fazendo uma subtração (a).

Seria então útil ter um meio de se precaver deles.

Este meio é uma outra operação que deve nos dar um resultado certo, conhecido de ante mão, si a primeira operação estiver certa.

Por exemplo: tirastes um numero de um outro: 17 de 54 por exemplo: achastes uma diferença que é aqui de 37. Mas si esta diferença é o que ela deve ser, é preciso que, ajuntando-a ao menor numero, que somando 37 com 17, acheis o maior numero, 54.

Com efeito, si 17 e 37 são 54, tirando 17 de 54, deve restar-vos 37.

Si um numero somado a um outro forma um certo numero dado, é claro que, tirando deste ultimo numero um dos dois primeiros, deve-se encontrar o outro para diferença. (b).

Assim, depois de ter, por exemplo, achado que 1728 menos 859 é 869.

$$\left\{ \begin{array}{r} 1728 \\ - 858 \\ \hline = 869 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{r} 859 \\ + 869 \\ \hline = 1728 \end{array} \right.$$

Somareis o menor numero (859) e a diferença (869), e a soma sendo igual a 1728, concluireis daí que não vos enganastes na operação.

Si a soma do menor numero e da diferença não desse o mesmo numero que o maior éra preciso necessariamente que vos tivasseis enganado, seja formando esta soma, seja tomando a diferença, seja numa e noutra ao mesmo tempo; deveis então recommençar uma e outra operação, até que elas deem o resultado a que deve ter lugar, quando elas estão certas (A).

Si achardes a soma da diferença e do menor numero igual ao maior, é possível que tenhais errado nas duas operações, mas de maneira que os erros se compensem, como si, tendo encontrado a diferença maior do que ela não tem, de duas unidades por exemplo, achardes uma soma maior de duas unidades do que ela não deve ter realmente; ou si, tendo achado a diferença muito grande de duas unidades, encontrardes uma soma menor de duas unidades que ela não deveria ter.

Mas deve ser muito raro de se enganar assim nas duas operações em sentido contrario, e dum numero igual em cada uma.

E' muito provavel que a primeira operação esteja certa, assim como a segunda, quando esta apresenta o resultado que ela tem necessariamente quando todas as duas estão certas.

E' mais provavel que todas as duas estejam certas, do que todas as duas contenham precisamente um erro igual e de sentido contrario (C).

Si quizerdes verificar uma adição, por exemplo, esta:

$$\left\{ \begin{array}{r} 357 \\ 229 \\ 342 \\ \hline = 928 \end{array} \right.$$



Observareis si tirardes 229 da soma dos tres numeros, que o resto deve ser igual á soma dos dois numeros restantes. Assim fareis as duas operações seguintes:

$$\left\{ \begin{array}{r} 928 \\ - 229 \\ \hline = 699 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{r} 357 \\ 342 \\ - \\ \hline 699 \end{array} \right. \quad 1$$

E porque esta diferença da soma de tres numeros com um daqueles se acha igual á soma dos dois restantes, concluireis daí que a operação foi bem feita: de outro modo, seria necessario que vos tivésseis enganado nestas duas operações e que os erros se compensassem; o que não é provavel. A operação ou as operações pelas quais se verifica o que se fez, formam o que se chama *a prova*.

A soma de dois numeros é o maior mais o menor. Seja 5 e 9; sua somma é 14;  $5 + 9 = 14$ . A diferença entre dois numeros é o menor subtraido do maior, o maior menos o menor: a diferença de 9 e 5 é 4;  $9 - 5 = 4$ . Si ajuntardes a diferença á soma, tereis o maior numero mais o menor, mais ainda uma vez o maior numero menos o menor; mas ajuntar um numero menos um outro, é ajuntar o primeiro e subtrair o segundo, pois somando o primeiro somou-se um numero maior do que devia ser duma quantidade igual ao segundo. As duas operações de ajuntar e subtrair o numero menor se destroem; então a soma da soma de dois numeros e de sua diferença será igual a duas vezes o numero maior;  $9 + 5 + 9 - 5 = 9 + 9 = 18$ , 14 mais 4 igual a 18, igual a duas vezes 9.

Da mesma forma, si tirardes a diferença de dois numeros de sua soma, tereis o maior numero, mais o menor, do

1) A prova comum da adição é complicada e desgosta quase todos os principiantes; aquella pela qual eu a substitui é mais simples; allás não se póde esquece-la tão facilmente quanto a outra.

qual é preciso subtrair o maior numero menos o menor. Mas subtrair o maior numero menos o menor é a mesma coisa que tirar o maior e somar o menor; por que si tirardes só o maior, tirastes um numero que ultrapassa o que deveis tirar de um numero igual ao menor; tirastes pois esta quantidade de mais; deveis por conseguinte ajunta-la para restabelecer a identidade; tereis então a diferença entre a soma de dois numeros, e sua diferença é igual a duas vezes o menor numero, porque é preciso somar o maior numero e o retirar depois; operações que se destroem reciprocamente; esta diferença será então igual a duas vezes o numero menor; 14 menos 4 é 10, que é o dobro de 5.

$$\left\{ \begin{array}{l} (9 + 5) - (9 - 5) \\ 9 - 9 + 5 + 5 \\ = 5 + 5 = 10 \\ 14 - 4 = 10 \end{array} \right.$$

SETIMA LIÇÃO

Si tendes necessidade de reunir um ao outro dois numeros iguais entre si, podeis empregar a operação que aprendestes a fazer; mas si quiserdes ajuntar uns aos outros; vinte, trinta, cem numeros iguais, esta adição tornar-se-ia uma operação muito longa; seria então util ter-se um meio de abrevia-la.

Procuremos este meio, e tomemos o numero 254, que supomos dever ser repêtido cinco vezes, ou, o que é a mesma coisa, somado quatro vezes a ele mesmo. Para fazer a adição, escreverieis cinco vezes este numero, depois ajuntarieis a principio quatro vezes o numero quatro a ele mesmo, acharieis a soma 20; escreverieis 0 e reterieis 2; ajuntarieis em seguida quatro vezes o numero 5 dezenas a ele mesmo; encontrarieis 25 e 2 que terieis retido, fazendo 27; escreverieis 7 e reterieis 2; ajuntarieis enfim 2 centenas quatro vezes a elas mesmas; acharieis 10, e 2 que haviéis retido, fazendo 12; escreverieis 12, e terieis 254 tomado 5 vezes, ajuntado quatro vezes a ele mesmo, igual a 1270.

$$\begin{array}{r}
 254 \\
 + 254 \\
 + 254 \\
 + 254 \\
 + 254 \\
 \hline
 = 1270
 \end{array}$$

Mas, em lugar de dizer 4 e 4 são 8, e 4 são 12, e 4 são 16, e 4 são 20, podereis dizer, 4 repetido 5 vezes, cinco vezes 4, são 20, escrevo 0 e retenho 2; em lugar de 5 e 5 são 10, e 5 são 15, e 5 são 20 e 5 são 25, podereis dizer, 5 repetido 5 vezes, ou 5 vezes 5, são 25, e 2 são 27, escrevo 7 e retenho 2; em seguida podereis dizer da mesma maneira: 5 vezes 2 são 10, e 2 são 12, escrevo 12. Este meio é muito mais breve e exige somente que vós vos lembreis que 5 vezes 4 são 20, que 5 vezes 5 são 25, que 5 vezes 2 são 10.

Tomai agora o numero 3546, ( e procurai a soma deste numero repetido sete vezes, somado 6 vezes a ele mesmo; direis sete vezes 6 são 42, escrevo 2 e retenho 4; sete vezes 4 são 28, e 4 (que eu retive) são 32, escrevo 2 e retenho 3; sete vezes 5 são 35, e 3 (que retive) são 38, escrevo 8 e retenho 3; sete vezes 3 são 21, e 3 (que eu retive) são 24, escrevo 24: 3546 somado sete vezes é então igual a 24822.

$$\text{Formula} \quad \left\{ \begin{array}{l} 3546 \\ \times 7 \\ \hline = 24822 \end{array} \right.$$

Tomar a soma de 7 numeros iguaes entre si, do mesmo numero repetido sete vezes, tomar um numero sete vezes, chama-se tambem multiplica-lo por 7.

O numero que deveis ajuntar a ele mesmo, repetir ou tomar varias vezes, chama-se multiplicando; o que designa quantas vezes o primeiro deve ser tomado, chama-se multiplicador.

O numero que se encontra, tomando um numero um certo numero de vezes, chama-se produto. A operação pela qual se obtem o produto, chama-se multiplicação; e vereis que ella não é sinão uma adição abreviada.

Assim, no exemplo precedente, 3546 é o multiplicando; 7, o multiplicador; 24822, o produto; e o sinal  $\times$  indica que o numero que o precede deve ser multiplicado por aquele que o

segue. A forma acima exprime que 3546 multiplicado por 7 é igual a 24822.

Tres vezes 1 é a mesma coisa que uma vez tres; com efeito, tres vezes 1 é uma unidade repetida tres vezes; e uma vez 3, não deixa de ser 3, ou uma unidade repetida tres vezes. Cinco vezes 9 é a mesma coisa que nove vezes 5: (com efeito) 9 é a unidade repetida nove vezes; mas cinco vezes uma unidade é 5: cinco vezes 9 é então a mesma coisa que 5 repetido nove vezes, a mesma coisa que nove vezes 5.

$$9 \times 5 = 5 \times 9$$

Si tiverdes a principio de multiplicar 2 por 3, e depois multiplicar o produto por 4, tereis.

$$2 \times 3 = 6 \quad 6 \times 4 = 24$$

mas em lugar de 6, poderieis escrever  $2 \times 3$ , pois estas duas expressões designam o mesmo numero: tereis então:

$$2 \times 3 \times 4 = 24$$

Acabastes de ver que

$$6 \times 4 = 4 \times 6, \quad 4 \times 6 = 4 \times 2 \times 3;$$

e por conseguinte

$$2 \times 3 \times 4 = 4 \times 2 \times 3.$$

Donde concluireis que tendo de multiplicar successivamente varios numeros uns pelos outros, em qualquer ordem que fizerdes a multiplicação, tereis o mesmo produto; da mesma maneira que vistes que tendes a mesma soma, em qualquer ordem que somasseis os mesmos numeros uns aos outros.

Sabereis agora multiplicar um numero de um só algarismo por um outro, sem alguma operação nova, desde que se tenha formado e retido os valores dos produtos de

2-3-4-5-6-7-8-9, por 2;  
de..... 3-4-5-6-7-8-9, por 3;  
de..... 4-5-6-7-8-9, por 4;  
de..... 5-6-7-8-9, por 5,  
de..... 6-7-8-9, por 6;  
de..... 7-8-9, por 7;  
de..... 8-9, por 8;  
de..... 9, por 9;

Com efeito, não tereis necessidade de reter separadamente o produto de 2 por 3, si conheceis o de 3 por 2, que é a mesma coisa e assim por diante; não tereis então sinão 36 produtos para formar de antemão e para reter.

### OITAVA LIÇÃO

Sabeis por qual metodo podemos achar o produto de um numero, qualquer que ele seja, por um outro numero formado de um só algarismo: e deveis procurar agora estender este metodo aos casos em que o multiplicador tem varios algarismos. Seja por exemplo, 467 para multiplicar por 238; seguireis a mesma marcha na qual fostes bem sucedido até aqui; e considerareis o numero 238 como formado de 8 unidades, 3 dezenas e de 2 centenas: não tereis então sinão de multiplicar 467 por 8 unidades, por 3 dezenas ou 30, por 2 centenas ou 200, e reunir estes tres produtos para ter o de 467 por 238.

Ora sabeis já multiplica-lo por 8 unidades; observareis em seguida que multiplicar por 3 dezenas é a mesma coisa que multiplicar por 3, e multiplicar depois o produto por 10; mais multiplicar por 10, é tornar um numero dez vezes maior, de maneira que ele encerre tantas dezenas quantas ele contiver de unidades simples, tantas centenas quantas ele contiver de dezenas, etc. . . . , e, em geral, tantas dezenas quantas ele contiver de unidades.

Tereis então o produto de 467 por 3 dezenas, multiplicando este numero por 3, e tornando em seguida o produto dez vezes maior; o que se consegue colocando 0 á direita dos numeros que o exprimem. Enfim, observareis igualmente que multiplicar por 2 centenas é a mesma coisa que multiplicar primeiro por 2, e multiplicar em seguida o produto por 100, tornando-o cem vezes maior, fazendo que ele contenha tantas centenas quanto ele continha de unidade: o que se consegue colo-

cando duas vezes 0 á direita dos algarismos que exprimem este produto.

Direis então: 8 vezes 7 são 56; escrevo 6 e retenho 5; 8 vezes 6 são 48, e 5 (que eu retive), são 53, escrevo 3 e retenho 5; 8 vezes 4 são 32, e 5 (que retive) são 37; escrevo 37; o produto de 437 por 8 é portanto 3736.

$$(1) \quad \begin{array}{r} 467 \\ \times 8 \\ \hline \end{array} = 3736$$

Direis depois: 3 vezes 7 são 21, escrevo 1 e retenho 2; 3 vezes 6 são 18, e 2 (que eu retive) são 20, escrevo 0 e retenho 2; 3 vezes 4 são 12, e 2 (que retive) são 14; tereis por conseguinte o produto de 467 por 3 igual a 1401; mas este produto deve ser dez vezes maior ou igual a 14010.

$$(2) \quad \begin{array}{r} 467 \\ \times 3 \\ \hline \end{array} = 1401 \qquad (3) \quad \begin{array}{r} 467 \\ \times 2 \\ \hline \end{array} = 934$$

Enfim direis: 2 vezes 7 são 14, escrevo 4 e retenho 1; 2 vezes 6 são 12, e 1 (que eu retive) são 13, escrevo 3 e retenho 1; 2 vezes 4 são 8, e 1 (que eu retive) são 9, escrevo 9; o produto de 467 por 2 é 934; mais o produto de 467 por 200 deve ser cem vezes maior: será então 93400.

Agora para ter o produto de 467 por 238, é preciso somar os tres produtos parciais deste numero, por 8, por 30, por 200; fareis então a adição destes tres produtos, e encontrareis sua soma igual a 111146: o produto de 467 por 238 será por conseguinte igual a 111146.

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{r} 3736 \\ + 14010 \\ + 93400 \\ \hline \end{array} \right. = 111146$$



Mas podereis tornar ainda mais simples a execução desta operação, multiplicando primeiro 467 por 8, escrevendo o produto, depois multiplicando o mesmo numero por 3, escrevendo imediatamente o produto em baixo do primeiro, de maneira que as unidades do segundo correspondam ás dezenas do primeiro; enfim, multiplicando-se ainda o mesmo numero por 2, e escrevendo imediatamente o produto de maneira que as unidades deste terceiro produto correspondam ás dezenas do segundo, e ás centenas do primeiro.

$$\begin{array}{r}
 \phantom{0}467 \\
 \times \phantom{0}238 \\
 \hline
 \phantom{0}3736 \\
 \phantom{0}14010 \\
 \phantom{0}93400 \\
 \hline
 = 111146
 \end{array}$$

Encontrareis portanto o produto dum numero por um outro, qualquer que seja, multiplicando successivamente pelos numeros simples que entram no multiplicador, começando pelas unidades, e recuando successivamente cada produto da fileira, de maneira que as unidades deste produto exprimam unidades, dezenas, centenas, milhares, etc., desde que o algarismo do multiplicador empregado para o formar, exprima unidades, dezenas, centenas, milhares, etc. (a) A.

NONA LIÇÃO

Da mesma maneira que tivestes necessidade de conhecer o resultado da adição repetida de números iguais, podeis, conhecendo um número, ter necessidade de saber quantas vezes seria preciso repetir o outro número menor para formar o primeiro; ou melhor, qual seria o número que repetido um número dado de vezes, produziria o primeiro número.

Por exemplo, tendo o número 2124, podeis querer conhecer quantas vezes é preciso repetir o número 6 para formar 2124; quantas vezes o número 6 está contido em 2124; ou melhor, conhecer qual é o número que, repetido seis vezes, é igual a 2124, que está contido seis vezes em 2124.

Terieis necessidade de conhecer o número de vezes que 6 está contido em 2124; si, por exemplo, tendo 2124 coisas para distribuir, e devendo da-las 6 a cada pessoa, quereis saber a que número de pessoas se estenderia esta distribuição, terieis necessidade de saber que número está contido 6 vezes em 2124, que número repetido 6 vezes é igual a 2124, si, tendo 2124 coisas a repartir igualmente entre 6 pessoas, desejasseis saber o número que se deve dar a cada uma delas.

Si quizerdes saber a quantas pessoas podeis distribuir 6 coisas, quando tiverdes 2124 delas, vereis á principio que tirando 6, depois retirando ainda 6 do resto, e assim um depois de outro, podereis dar 6 a tantas pessoas quantas forem as vezes que se puder fazer esta subtração.

Si procurardes repartir igualmente este mesmo número de coisas entre 6 pessoas, achareis que seria preciso empregar 6 destas coisas para dar uma a cada uma pessoa, que podereis de uma só vez distribuir 6; e, por consequencia, tantas vezes quanta podereis retirar 6 de 2124 (A).

Podereis fazer imediatamente esta operação: mais é facil de ver como, por mais simples que seja aqui cada sub-

tração em particular, o grande numero de vezes que seria preciso repeti-la tornaria longa e penosa a operação inteira. (B).

Procuremos agora abrevia-la: para isso, observareis que si, por exemplo, retirardes 60 em lugar de 6, tirastes dez vezes 6, e que assim podereis retirar 6 tantas dezenas de vezes quantos puderdes retirar 60.

Da mesma maneira, si retirardes 600 em lugar de 60, ou em lugar de 6, tereis retirado dez vezes 60, ou, o que é a mesma coisa, cem vezes 6: podereis então retirar 60 tantas dezenas de vezes, e 6 tantas centenas de vezes, quantas vezes puderdes retirar o numero 600.

Como não podeis retirar 6000 de 2124 que é menor, começareis por tirar dele 600, tantas vezes quantas esta operação for possível e tereis o numero de centenas de vezes que podeis retirar 6.

Com efeito, não pôde restar depois nenhum numero acima de 600, do qual 6 possa ser retirado cem vezes.

O numero de vezes que se pôde retirar 600 é menor do que 10; porque dez vezes 600 são 6000, e o numero dado é menor do que 6000.

Tomando este resto menor que 600, tirareis dele 60 tantas vezes quantas esta operação for possível, e tereis o numero de dezenas de vezes que se pôde retirar, e um resto menor que 60; o numero de dezenas será menor que 10, pois o numero do qual foi necessario tirar 60 é, como vós o tendes já observado, menor que 600.

Enfim, tomando este ultimo resto, retirareis dele o numero 6, e tereis o numero de vezes que 6 pôde dele ser retirado, numero menor que 10, pois este resto é menor que 60.

Tereis, portanto a principio as centenas de vezes, depois as dezenas de vezes, enfim as unidades simples de vezes, que 6 pôde ser retirado; por consequencia o numero de vezes que pôde ser retirado de 2124.

Mas si tiverdes de retirar 600 de 2124, acharieis, fazendo a operação, que restam tantas unidades e dezenas quantas o

primeiro contiver delas, pois que não podeis retirar nem unidades, nem dezenas; achareis então que tendes 6 centenas para retirar de 21 centenas: 6 de 21, e vereis que pôde ser retirado 3 vezes; que, por consequencia, 6 pôde se-lo 3 centenas de vezes, e que restam 3 centenas, mas como já restavam 24; tereis então um resto igual a 324. Procurareis depois quantas vezes podeis retirar 60 de 324; e vereis logo que restam as 4 unidades( pois não podeis tirar delas, e tereis só 6 dezenas para retirar de 32 dezenas, 6 de 32.

Esta operação pôde se repetir cinco vezes; 6 pôde então ser retirado cinco dezenas de vezes; e restará 2 dezenas, as quaes ajuntareis 4, que sabeis ter restado já.

Tereis então 24, do qual é preciso retirar 6; achareis que pôde ser retirado 4 vezes. Tereis então achado que 6 pôde ser retirado de 2124, 3 centenas de vezes, 5 dezenas de vezes e 4 vezes ou 354 vezes (c). 1

Quando podeis retirar um numero dum outro um certo numero de vezes, até que não reste mais do que um numero, menor, concluireis daí que este primeiro numero está contido no segundo o mesmo numero de vezes, com um resto: assim, por exemplo, 6 está contido tres vezes em 21, e resta 3; 6 está contido 5 vezes em 32, e resta 2; 6 está contido quatro vezes em 24, e não resta nada.

Achar quantas vezes um numero pôde estar contido em um outro, denomina-se dividir o segundo pelo primeiro, porque é dividir em tantas partes o segundo quantas são as unidades do primeiro (quanto ha de unidades no primeiro).

Achar quantas vezes 6 está contido em 2124, é dividir 2124 por 6; é dividir 2124 em seis partes iguais, pois que o numero repetido seis vezes fará 2124. O numero que se divide chama-se dividendo; aquele pelo qual se divide chama-se divisor; o numero de vezes que o divisor está contido no dividendo chama-se quociente. Assim neste exemplo, 2124 é o dividendo, 6 o divisor, 354 o quociente.

Como as subtrações sucessivas para saber quantas vezes um numero está contido noutro ocasionam ainda demoras, é bom procurar um meio mais simples de achar quantas vezes um número está contido noutro. Então observareis a principio que ele está contido ao menos uma vez, pois o segundo numero é necessariamente maior do que o primeiro; que ele está contido nove vezes no maximo, pois si ele estivesse contido dez vezes ou mais de dez vezes, tereis podido retirar ao menos uma vez de mais este mesmo numero suposto dez vezes maior; seguindo a marcha da operação procedente já esgotastes esta subtração.

Direis então: em 21 quantas vezes 6? suponho que ha quatro vezes; quatro vezes são 24; ora 24 é maior do que 21,  $24 > 21$ , está então contido nele menos de quatro vezes; suponho então que é tres vezes; tres vezes 6 são 18, 18 é menor do que 21.  $18 < 21$ ; está então contido menos de quatro vezes e mais de tres; está contido tres vezes com um resto.

Em geral fareis estes ensaios até que tenhais chegado a achar dois numeros consecutivos tais, que o produto do menor pelo divisor seja menor que o dividendo, e que o produto do maior pelo divisor seja maior que o dividendo; Si o produto do divisor por 9 é menor que o dividendo, está claro que o divisor será contido nele nove vezes, pois sabe-se de antemão que o produto do mesmo divisor por 10 é maior que o dividendo. Com efeito, então o menor numero será o quociente, pois o divisor será contido este numero de vezes no dividendo com um resto menor que o divisor.

Supomos agora que vós tendes 25348 para dividir por 7; observareis logo que o quociente não pôde conter dezenas de milhar, pois 7 vezes 10000 são  $70000 > 25348$ , mas que ele pôde conter milhares pois 7 vezes 1000 são  $7000 < 25348$ . Direis então: em 25 (milhares) quantas vezes 7? ha tres vezes; tres vezes 7 são 21, tirai 21 de 25 restam 4 (milhares), então escrevereis 3 (milhares) no quociente. Para ter depois o numero de centenas de vezes que 7 pôde estar contido no numero que resta, observareis que alem do resto 4 (milhares) tendes tres

centenas que continha o dividendo; direis então: em 43 (centenas) quantas vezes 7? ha seis vezes (seis centenas de vezes); seis vezes 7 são 42, resta uma (centena). Para achar o numero de dezenas de vezes que 7 pôde estar contido no que resta, observareis que resta a principio uma (centena) e quatro dezenas que continha o dividendo; tereis então quatorze dezenas, e direis: em 14 (dezenas) quantas vezes 7? duas vezes (duas dezenas de vezes); duas vezes 7 são 14; tirai 14 de 14 resta 0. Para achar o numero de unidade de vezes que 7 pôde estar contido no numero que resta, observareis enfim, que não restam sinão as 8 unidades do dividendo, e direis: em 8 quantos 7? uma vez, resta 1. Sabereis então que em 25248, 7 está contido tres mil vezes, seis centenas de vezes, duas dezenas de vezes, e uma vez e que resta 1; ou 3681 vezes, resta 1; o quociente de 25348 por 7 será então 3621 com o resto 1.

$$(B) \left\{ \begin{array}{r|l} 25348 & \\ \underline{7} & 3621, \text{ resta } 1. \\ \hline & \\ & 43 \\ & \underline{14} \\ & 8 \end{array} \right.$$

Seja ainda 1634 para dividir por 8; observareis que o quociente não pôde conter sinão centenas; e direis: em 16 (centenas quantas vezes 8? duas (centenas de vezes); duas vezes 8 são 16; tiro 16 da 16 resta 0. Tereis depois 3 (dezenas) somente, e direis: em 3 (dezenas), quantas (dezenas) de vezes 8? não ha nenhuma (dezena de vezes). Vereis então que o quociente não pôde conter dezenas; e direis em seguida: 34 quantas vezes 8? quatro vezes; quatro vezes 8 são 32; tiro 32 de 34, restam 2: 8 será portanto contido em 1634, duas centenas de vezes, nenhuma dezena de vezes, quatro vezes, ou

204, restará 2; o quociente da divisão de 1634 por 8 será portanto 204, resta 2.

$$\begin{array}{r|l} 1634 & \\ 8 & 204, \text{ resta } 2 \\ \hline 34 & \end{array}$$

Esta prova da divisão me pareceu dever ser substituída pela prova ordinária; disse a razão dela no texto, porque nesta época de instrução os alunos devem estar assás exercitados para senti-la, e que é importante de não deixar ver no ensinamento, sinão o menos possível demonstrações e metodos arbitrarios. Ouvi um grande filosofo exprobar a algebra de querer conduzi-lo á verdade duma maneira despotica, sem lhe dizer porque lhe fazia seguir tal ou tal caminho, e como se chegaria a sabôr que ela conduziria ao resultado desejado; ele confessava que esta falta, não do metodo em si mesmo, mas dos livros, lhe inspirava uma especie de desgosto involuntario para este estudo.

### DECIMA LIÇÃO

Suponhamos agora que o divisor tenha varios algarismos; podereis ainda empregar o mesmo metodo.

Por exemplo, si tendes 27237 para dividir por 123, procurareis a principio qual a denominação numerica mais elevada que o quociente possa conter, e achareis que ele não pôde conter milhar, pois que 1000 vezes 123 são  $123000 > 27237$ ; mas que ele pôde conter centenas, pois 100 vezes 123 são  $12300 < 27237$ . Observareis depois que as dezenas e as unidades do dividendo não influem sobre o numero de centenas de vezes que o divisor pôde estar contido nele, e que em geral todo numero de uma denominação inferior á do numero que deve entrar no quociente, não pôde influir sobre este numero pois que o aumento de uma unidade neste numero exigiria ao menos, no dividendo, a dá unidade dum numero da mesma denominação.

Da mesma maneira que na nona lição, para saber quantas vezes o numero 123 está contido nos dividendos parciais que formareis, observareis que ele não pôde estar acima de nove; então encontrareis desde 1 até 9, dois numeros consecutivos tais cujo produto do divisor pelo menor seja menor, e cujo produto do divisor pelo maior, maior que o dividendo. Si o produto do divisor, por 9 é menor que o dividendo, teréis da mesma forma 9 no quociente.

Então direis: em 272 (centenas) quantas vezes 123? duas (centenas) de vezes; 2 vezes 123 são 246; tiro 246 de 272, restam 26 (dezenas), e 3 (dezenas) que estão no dividendo, são 263; em 263 (dezenas) quantas vezes 123? duas (dezenas) de vezes;



2 vezes 123 são 246; tiro 246 de 263, restam 17 (dezenas), que, com as 7 unidades do dividendo são 177. Em 177 quantas vezes 123? uma vez; tiro 123 de 177, restam 54. O quociente será então composto de duas centenas, duas dezenas e uma unidade; será 221, com o resto 54.

$$\begin{array}{r|l}
 27237 & 221 \\
 123 & \\
 \hline
 263 & \\
 177 & \\
 \hline
 \text{Resto} & 54
 \end{array}
 \quad (A)$$

Sente-se que, quando o divisor é numero grande, a necessidade de experimentar os numero 2 até 9, para saber quantas vezes ele está contido num dos dividendos parciais, ocasiona ainda muito tempo, que seria útil abreviar.

Lá chegareis pelo modo seguinte: supomos que tenhais 727 para dividir por 122; observareis que  $700 < 727$  e  $200 > 122$ , e que assim 200 estando contido tres vezes em 700, 122 está ao menos contido tres vezes em 727; observareis depois que  $800 > 727$  e  $100 < 122$ , e que assim 100 não estando contido sinão 8 vezes exatamente em 800, 122 não póde estar contido mais de 7 vezes em 727; não tereis então de experimentar sinão os numeros desde 3 até 7.

Do mesmo modo, si tiverdes 2134 para dividir por 326, observareis que  $2200 > 2134$ ,  $300 < 326$ , e concluireis daí que 300 não podendo estar contido mais de sete vezes em 2200, 326 não poderá estar contido sinão sete vezes no maximo, em 2134. Depois observareis que  $2100 < 2134$ ,  $400 > 326$ ; portanto 400 está contido cinco vezes em 2100 326 estará contido ao menos cinco vezes em 2134.

Si tivessesis 2034, em lugar de 2134, para dividir por 326, tereis observado que  $2100 > 2034$  não contendo sinão sete vezes exatamente  $300 < 326$ , 326 não póde estar contido sinão seis vezes no maximo em 2034. Achando depois que  $400 > 326$

está contido cinco vezes em  $2000 < 2034$ , concluireis daí que 326 está contido ao menos cinco vezes em 2034; não tereis então de experimentar aqui sinão um unico numero, o numero 6 (a).

Porque, si o produto for maior do que 2034, 326 estará contido cinco vezes nele, e seis vezes si se encontrar o produto menor.

UNDECIMA LIÇÃO

Quando procurastes num dos exemplos da nona lição, repartir igualmente 1634 coisas entre 8 pessoas, achastes que cada uma delas podia obter 204, que ainda restavam 2 delas.

Supondo que estas coisas sejam do numero daquelas que se pódem dividir em várias partes, e que vós dividistes uma delas em 8, podereis dar uma destas partes a cada uma destas pessoas, e dividindo a outra coisa da mesma maneira, podereis ainda dar a cada pessoa uma outra destas partes, da qual 8 formam uma coisa inteira, ou dois oitavos da coisa. Deveis então dar a cada uma 204, e dois oitavos, que se escrevem assim:  $2/8$ ; deveis dar  $204 + 2/8$ .

Si se supõe uma coisa dividida em um certo numero de partes iguais, de maneira que a soma de todas estas partes seja a coisa mesma, exprime-se uma destas partes ajuntando avos ao nome do numero de partes nas quais a coisa se supõe estar dividida.

Si ela é suposta dividida em 100 partes, cada parte chama-se um centesimo; si ela está dividida em 238 partes, cada parte chama-se um duzentos e trinta e oito avos.

Assim estas expressões, dois oitavos,  $2/8$ , indicam que uma coisa foi dividida em oito partes e que se tomam duas destas partes.

Pela mesma razão, dez oitavos,  $10/8$  indica que a unidade foi dividida em oito partes e que se tomam dez dessas partes; mas oito formam uma coisa inteira; tomar 10 partes delas, é portanto tomar uma coisa e dois oitavos,  $1 + 2/8$ .

Quando tiverdes de repartir 1634 coisas entre oito pessoas, podereis dividir cada coisa entre oito pessoas, e dar a cada uma 1634 destas partes; mas 1634 destas partes (é a mesma coisa que  $204 \frac{2}{8}$ , que 204 coisas inteiras e dois de seus oitavos. Assim,  $1634/8 = 204 + 2/8$ .

Assim, vedes que supondo que nesta divisão real das coisas que tendes para repartir não haja algum inconveniente, tendes ainda uma grande vantagem em poder dar 204 delas, e não dividir sinão 2, e por consequencia achar o resultado da divisão indicada por  $1634/8$ .

Podeis observar enfim que  $2/8$ , duas partes de uma coisa dividida em oito, é a mesma coisa que a quarta parte, que  $1/4$  desta coisa.

Si, em lugar de querer dividir 1634 coisas entre oito pessoas, desejasseis saber a quantas pessoas podieis dar oito destas coisas, acharieis ainda 204, e o resto 2; podereis portando dar 8 a 204 pessoas; tereis 204 partes, cada uma de oito coisas, e vos sobrará uma parte de duas coisas; mas esta parte de duas coisas é igual a  $2/8$  duma parte de oito coisas; tereis então 204 partes e 2 oitavos de parte,  $204 + 2/8$ ; o quociente será  $204 + 2/8$ .

Si tivesseis 164 para dividir por 9, terieis achado 18, e um resto igual a 2: si então tivesseis 164 coisas para repartir entre 9 pessoas, cada uma teria 18 delas; e, dividindo as duas restantes em 9 partes, cada pessoa teria ainda duas destas partes: o quociênte será  $18 + 2/9$ . Si desejasseis distribuir estas 164 coisas em partes de 9 cada uma, terieis 18 partes, e vos sobraria uma parte de duas coisas somente, uma parte que seria os  $2/9$  das outras; o quociente seria então  $18 + 2/9$ .

Vedes por isso que não basta, depois de ter feito uma divisão, indicar simplesmente o resto, dizendo, por exemplo, si divido 1634 por 8, tenho 204, resta 2; si divido 164 por 9, tenho 18, resta 2; mas que é preciso dizer resta  $2/8$ , resta  $2/9$  porque, embora restem igualmente duas coisas nos dois casos, isto é, num exemplo, duas coisas para dividir entre

oito; e noutra, duas coisas para dividir entre nove: num, uma parte que é os dois oitavos das outras partes; noutro, uma parte que é os dois nonos dela.

As expressões  $\frac{2}{8}$ ,  $\frac{2}{9}$ , se chamam *frações*; chamam-se os numeros que tendes considerado até aqui *numeros inteiros*, quando é necessario de os distinguir das expressões numericas,  $\frac{2}{8}$ ,  $204 + \frac{2}{8}$  por exemplo, que são ou encerram frações.

O numero de partes que designa uma fração se chama o *numerador da fração*; o numero de partes nas quais a coisa está dividida chama-se o *denominador*. (A).

### DUODECIMA LIÇÃO

Vistes, na sexta lição, que é útil ter um meio de verificar uma operação aritmetica, depois de a ter feito; sabeis como se pôde verificar uma subtração ou adição procuremos agora como se pôde verificar uma divisão e uma multiplicação.

Supomos que tendo dividido 1272 por 24, achastes para quociente 53; é claro que, si 24 está contido exatamente 53 vezes em 1272; 53 vezes 24 é a mesma coisa que 1272 e que, por consequencia, o produto de 24 por 53 será 1272.

Assim, nas divisões onde não ha resto, o produto do quociente pelo divisor, será igual ao dividendo, si as duas operações forem exatas.

Si agora tiverdes um resto, como se tivesses dividido 1253, por 25, e encontrado para quociente 50 com o resto 3, é claro igualmente que 50 vezes 25 deve ser igual a 1253 menos 3, que o produto de 25 por 50 deve ser igual a 1253 menos 3 e que em geral o produto do quociente em numeros inteiros pelo divisor mais o resto, tambem em numeros inteiros, a soma deste produto e do resto é igual ao dividendo, se acha igual, si as operações estiverem certas.

Em geral o dividendo é igual ao produto do divisor pelo quociente, tanto inteiro quanto fracionario: 1253 é igual ao produto de 25 por  $50 + \frac{3}{25}$ , pois 25 vezes 3 partes de uma coisa que se supõe dividida em 25, é a mesma coisa que 3 vezes 25 destas partes, e por consequencia tres vezes a coisa inteira; da mesma maneira que os  $\frac{3}{25}$  de 25 coisas são tres vezes o vigesimo quinto de 25 coisas, ou tres vezes uma coisa inteira.

Si tivésseis multiplicado 54 por 25, e achado o produto 1350, é claro que 54 deve estar contido 25 vezes em 1350, si o produto estiver certo. Podereis então verificar a exatidão da operação, dividindo 1350 por 25: em geral, si as operações estiverem certas, achareis que o quociente do produto dividido pelo multiplicador é igual ao multiplicando.

Mas quando o multiplicador é um grande numero, esta operação é muito complicada: seria então bom substitui-la por mais simples: ora para multiplicar 54 por 25, por exemplo, multiplicastes primeiro por 5 unidades, e obtivestes o produto 270; depois por 2 (dezenas), e obtivestes o produto 108, (dezenas); assim 5 deve estar contido 54 vezes em 270, e 2 estar 54 vezes em 108, si a operação estiver certa. Podereis então verificar a multiplicação, dividindo sucessivamente pelos algarismos correspondentes do multiplicador os produtos parciais que formam o produto total; e os quocientes devem ser todos iguais ao multiplicando.

Restaria somente então virificar si a adição feita com estes diversos produtos está certa.

Esta prova da multiplicação encerra um maior numero de operações, mas elas são mais simples; e de cada vez, ela tem uma vantagem, a de mostrar imediatamente em que parte da multiplicação se acha o erro (b) (A).

**Elementos de Aritmetica e de Geometria**

**OBSERVAÇÕES<sup>1</sup>**

**RELATIVAS AO ENSINO DE ARITMETICA E DA GEOMETRIA**

Recorda-se aqui o que se inseriu no aviso colocado no frontispicio da obra, que estas Observações pódem se dividir em duas classes: as primeiras, indicadas por letras capitais, tem por objeto o ensino de Aritmetica ou de Geometria; as outras designadas por letras não capitais, encerram as noções elémentares da logica que devem acompanhar estes ensinos.



## PRIMEIRA LIÇÃO

(A) Uma lição contem o que pareceu possível expor numa única aula, e vantajoso não separar. Mas, depois desta primeira exposição os desenvolvimentos desta mesma lição e as operações sobre as quais é bom exercitar os alunos afim de os tornar mais familiares a elas, podem ocupar varias aulas.

(a) O mestre terá necessidade de explicar aqui aos alunos como a idéa de numero, nacida da percepção simultanea de varias coisas semelhantes, se estende á coisas não semelhantes.

Ele lhes dirá que então se supõe nestas coisas diferentes uma qualidade semelhante. Considerando-se somente em relação a esta qualidade.

Assim se disse: uma maçã e uma maçã são duas maçãs; em seguida uma maçã e uma pera são dois frutos; depois, ainda, uma maçã e uma pera são um corpo e um corpo, são dois corpos.

Enfim, terminou-se por nem mesmo considerar estas qualidades semelhantes; disse-se, uma coisa e uma coisa são duas coisas; um e um são dois, considerando estas duas coisas como tendo uma qualidade semelhante qualquer, em relação á qual se podia considera-las como as mesmas.

Quando considerardes uma qualidade comum a varios objetos, sem dar atenção ás que os distinguem, e, separando a idéa desta qualidade comum, das das outras qualidades, diz-se que a idéa desta qualidade é uma idéa abstrata porque a

separamos ou a abstraímos das outras qualidades com as quais ela se acha nos diversos objetos. Nós a chamamos também idéa geral, porque ela é a duma qualidade ou de varias qualidades que são comuns á dos objetos aliás diferentes.

Varios objetos que tem uma ou varias qualidades comuns, formam uma espécie de objetos.

Não julgo necessario analisar, com detalhe, para os alunos, as idéas expressas pelas palavras percepção, atenção, idéa, objeto, qualidade; é suficiente fazer-lhes compreender o sentido délas por exemplos.

(b) E' bom fazer observar aqui aos alunos os diversos usos das palavras: primeiramente nos servimos delas para determinar a atenção duma outra sobre a idéa que esta palavra exprime: o que exige que a mesma palavra corresponda á mesma idéa para todos os individuos, e em todas as ocasiões onde ela é empregada; daí resulta que o sentido das palavras deve ser fixo, e determinado de maneira a poder ser uniformemente apanhado pelos diversos individuos.

Nós as empregamos também para chamar sua propria atenção para idéas que sejam constantemente as mesmas.

Enfim as empregamos para sermos levados a nos recordar a vontade certas idéas que são uteis de ter e recordar.

Assim, por exemplo, nos servimos da palavra nove, para fazer comprênder a um outro, que num tal lugar existe este numero de tal ou tais objetos. Servimo-nos dela para lembrarmos a nós mesmos o numero destes objetos, sem ter necessidade de recordarmo-nos as operações que fizemos para os calcular.

Estabeleceram-se estas palavras, porque se sentiu que se tinha necessidade de se poder lembrar a vontade as idéas dos diversos numeros, e que elas eram da classe daquelas sobre as quais é util que o espirito se possa exercitar.

(c) O mestre fará observar que quando se diz um e um são dois; um e um e depois ainda um, são tres; um e dois são tres; isto significa que a expressão um e um, e a expressão dois; a expressão um e um, e depois ainda um, e a ex-

pressão tres; a expressão um e dois, e a expressão tres, designam uma mesma idéa, si se olhar para o numero somente; mas não é menos verdade que um e um exprimem uma coisa e uma outra coisa, e que dois exprimem estas duas mesmas coisas consideradas juntas, e como reunidas.

Da mesma forma as expressões um e um, e depois um, um e dois, tres, designam um mesmo numero; mas a primeira expressão apresenta as tres unidades como distintas; a segunda as apresenta uma separada das duas outras, e esta como reunidas; a terceira as apresenta como reunidas.

As palavras um e um, e um, representam-vos imediatamente tres unidades distintas; as palavras um e dois, uma unidade e uma coleção de duas unidades; a palavra tres, uma coleção de tres unidades.

Assim a proposição um e dois são tres, não exprime somente o que eu chamo tres, um somado a dois; mas ela significa tambem que somando um e dois, tenho o mesmo numero que juntando primeiramente um a um, e em seguida ainda um.

Esta observação escapou a celebres metafisicos.

Far-se-ão notar em varias proposições desta especie (porque é preciso multiplicar os exemplos), as duas idéas que as formam, e as palavras, que exprimem que existe uma identidade parcial entre as duas idéas.

Esta p'la qual se reconhece esta identidade, se chama o sujeito; aquela na qual se acha esta identidade parcial com a primeira, se chama atributo.

Na proposição dois é um numero, reconheceste uma identidade parcial entre a idéa de dois, coleção de duas unidades, e a idéa de numero, coleção de unidades em geral.

Quando os meninos estiverem um pouco exercitados em dizer, quatro e tres fazem sete, cinco e quatro fazem nove, etc., lhes faremos observar que eles aderem a esta proposição, ainda que no momento em que eles as pronunciam, não se recordem distintamente como aprenderam a formar

o numero sete, ajuntando successivamente a quatro, um depois um, em seguida uma unidade.

Far-lhes-emos observar ao mesmo tempo que eles se lembram distintamente que, quando fizeram estas operações, viram claramente que quatro e tres são sete. Eles então acreditam nela com confiança, porque se recordam de ter chegado a perceber a identidade parcial destas duas idéas, a igualdade entre estes dois numeros.

Daí, eles aprenderão que a lembrança distinta de ter tido a percepção da identidade das duas idéas que formam uma proposição, isto é, da evidencia desta proposição, é o unico motivo que eles têm de crêr nela, quando eles não percebem logo esta evidencia; e que a única lembrança de ter sempre repetido ou escrito esta proposição, sem ter sentido a evidencia dela, não seria um motivo para crer.

Sente-se que estas analyses pôdem se aplicar ás proposições que se encontram. Seria então inutil insistir nisso, até que os alunos as tenham perfeitamente compreendido e retido; mas é preciso reservar para as reproduzir de novo, applicando-as a outros exemplos.

E' preciso não se assustar com a dificuldade de reter sobre estas analyses a atenção dos meninos ainda muito jovens; eles não as repelirão, ainda que, seguindo a marcha natural do espirito humano, não lhes mostremos as proposições, as observações gerais, sinão depois de lhes ter apresentado varios exemplos, sobre os quais eles tenham repetido as mesmas operações; então verão por eles mesmos o que havia de comum entre estes exemplos, e por consequencia teriam as idéas gerais que lhes queremos dar.

Far-se-ão seguir e observar aos alunos as diversas operações pelas quais eles chegaram a um resultado.

Far-lhes-emos notar como, sabendo que oito é a mesma coisa que cinco, ao qual se ajunta um, um e um; e sabendo tambem que ajuntar um, um e um, é a mesma coisa que ajuntar tres, eles perceberão que oito é a mesma coisa que cinco, ao qual se ajuntaria tres.

Far-lhes-emos observar que eles não podem perceber a identidade expressa nas duas primeiras, sem ter a convicção da identidade expressa pela terceira, o que se exprime dizendo que a terceira proposição resulta das duas outras. Da mesma forma, quando eles dizem, oito e um e um são dez, então oito e dois são dez, eles não poderão perceber a identidade expressa pela primeira proposição, sem perceber o que exprime a segunda.

Mas é preciso por isso que eles se recordem que um e um são dois.

No primeiro exemplo, é impossível não perceber a identidade expressa pela terceira proposição, si se percebe a identidade expressa pelas duas outras; no segundo exemplo, seria possível perceber a identidade expressa pela primeira, e não perceber a da segunda, isto teria lugar, si não se recordasse que um e um é a mesma coisa que dois; que ajuntar um e um e ajuntar dois é a mesma coisa; si não se enuncia esta proposição, é que se supõe que ela se apresenta por si mesma.

Perceber esta dependencia duma proposição de duas outras, ou duma unica, chama-se concluir. A palavra "portanto" exprime que se conclue uma proposição duma ou de duas enunciadas precedentemente.

Chama-se raciocinio a operação pela qual se adere a uma proposição, percebendo que ela resulta de outras já adotadas. Um raciocinio é o conjunto destas proposições e de seu resultado; este resultado se chama a conclusão, porque ele é concluido de outras proposições.

As duas proposições das quais o concluimos se chamam premissas, porque elas são consideradas adotadas anteriormente.

E' preciso em seguida, sobre estas primeiras noções, torna-las familiares, com exemplos, antes de estender mais longe.

E' preciso tambem, quando se apresentam conclusões deduzidas de uma unica proposição, exercitar os alunos a suprir a proposição que está então subtendida.

Nós já expuzemos analiticamente:

1.º A formação das idéas abstratas;

2.º A natureza das proposições certas, que consistem na percepção duma identidade parcial entre duas idéas;

3.º A natureza da adesão ás proposições quando se recorda somente de ter tido esta percepção da identidade;

4.º A natureza das proposições em que esta identidade resulta da que fôra percebida nas outras proposições.

Tem-se então já noções sobre as tres operações intellectuais da qual o nosso espirito é capaz; a formação das idéas, o julgamento, o raciocinio.

Conhecem-se mais de duas especies de adesões a um juizo; a primeira fundada sobre a percepção immediata ou mediata da identidade parcial entre as idéas; a outra sobre a lembrança de ter tido esta percepção.

E' possivel que, mesmo num raciocinio simples, esta ultima adesão tenha lugar para as premissas; mas esta ultima analyse é muito sutil para que seja bom se ocupar dela numa instrução comum.

(B) O mestre exercitará os alunos a formar e reconhecer os algarismos e os sinais + e =; da mesma maneira que formar os numeros até dez por adições. Dois e tres são... cinco; quatro e tres são... sete; si, exercitando-se, eles se propõem ajuntar numeros cuja soma seja mais de dez, é preciso então provar-lhes que ela passa de dez, e ajuntar que, na lição seguinte, eles aprenderão a chamar e a escrever em algarismos os numeros acima de dez.

Si eles perguntarem ,por exemplo, a soma de oito e sete diremos-lhes: oito e um são nove, e um são dez; e eles verão immediatamente que a soma é maior do que dez.

Poderemos tambem lhes fazer observar, então que eles já ajuntaram um e um ou dois; que sete é a mesma coisa que dois e cinco; que lhes restam então ainda cinco para ajun-

tar; que a soma é por consequência a mesma coisa que dez, ao qual se ajuntará cinco. E' provavel que se dará a um dentre eles o nome de dez e cinco, ou ainda se poderia sugerir-lo, e isto seria uma preparação para a segunda lição.

(d) Far-se-á notar aos alunos a comodidade dos algarismos, 1, 2 .....9, que ocupam menos lugar, e se escrevem mais depressa que as palavras um, dois...., nove.

Far-se-á a mesma observação sobre os sinais +, =: ajuntar-se-á que, por exemplo,  $3 + 6 = 9$ , é não somente escrito mais depressa que tres, mais seis é igual a nove, mas se percebe muito mais depressa dum só golpe de vista.

Enfim, far-se-á observar que estes algarismos, estes sinais, como as palavras um, dois,..... nove, são arbitrarías; que se poderia escolher outros tipos de algarismos, outros sinais, outras palavras; que estas palavras tendo sido uma vez convencionadas entre um certo numero de homens, aqueles que vieram a elês se ajuntar, adotaram esta mesma convenção com a qual os instruíram, como se acabam de instruir os alunos, para que lhes fosse comodo compreender e ser entendidos; que estas palavras variam menos, foi a razão porque se sentiu a vantagem de torna-los comuns, apesar da diferença das linguas, vantagem que se estabeleceu e conservou facilmente, visto o pequeno numero de sinais.

SEGUNDA LIÇÃO

(a) Far-se-á notar que as palavras duenta, trinta, quarenta, etc., se derivam dos nomes dois, tres, quatro, etc., nomes que exprimem o numero de dezenas expressas por estes novos nomes. Esta observação tornará a significação destes nomes mais facil de reter.

Da mesma forma, milhão exprimindo mil mil; dilhão, mil milhões, trilhão, mil dulhões, etc., vê-se que estes nomes derivam-se ainda dos nomes dois, tres, quatro, que exprimem então o numero de vezes que se recorreu a estas denominações, para exprimir numeros de mil em mil vezes maior.

Daí, seremos conduzidos a ver que, si a terminação em lhão ou enta foi escolhida arbitrariamente, ha motivos de utilidade para estabelecer esta relação entre esta serie de nomes e a das unidades.

Veremos como nas linguas é comodo empregar palavras determinadas em parte por certas relações, em lugar de palavras puramente arbitrarías que se retem muito menos e das quais nada nos ajuda a lembrar a significação.

Explicaremos tambem o uso dos pontos intermediarios dos quais esta lição apresenta dois exemplos; e, para o fazer melhor sentir, completaremos estes espaços escrevendo imediatamente o que está subtendido; exercitaremos os alunos a completa-los eles proprios; far-lhes-emos vêr que seria mais longo e muitas vezes menos claro exprimir tudo, pois que, si se exprimisse tudo, seríamos ainda obrigados a advertir que não falta nenhum intermediario.



Com efeito, aquele que lê teria podido ou descurar de observar, ou não se lembrar no fim da serie inteira destes nomês.

Enfim, fazendo pronunciar os nomes dos numeros bastante grandes, não se descuidará de prestar atenção sobre o arranjo simetrico que apresenta este sistema de numeração; de maneira que pronunciando sempre um certo numero de centenas, de dezenas, e de unidades, os nomes de mil, milhão, duilhão, . . . , pronunciados antes deste numero, indicam imediatamente si aqueles que os precedem designam centenas, dezenas e unidades, de milhar, de milhão, ou de duilhão (bilhão), etc.

### TERCEIRA LIÇÃO

Far-se-á notar a correspondência da numeração falada e da numeração escrita, mostrando que tres algarismos correspondem a cada denominação, unidade, milhar, milhão, os quais correspondem sempre a uma denominação de centenas ao primeiro destes tres algarismos, a uma de dezena ao segundo, a uma de unidade ao terceiro. Exercitar-se-ão os alunos sobre as duas especies de numeração; multiplicar-se-ão as observações como a que eu acabo de fazer. Enfim lhes tornaremos estas duas numerações as mais familiares que seja possível, sem entretanto parar muito tempo nelas, porque as lições seguintes fornecerão ocasiões de acabar a instrução daqueles que teriam ficado atrás sem arriscar nem de fatigar muito estes, nem de desgostar os outros.

Eis aqui o momento de explicar aos alunos as palavras primeiro, segundo decimo, decimo primeiro, decimo segundo, vigesimo, etc., assim como as expressões, primo, segundo terceiro e em primeiro lugar, em segundo lugar com a maneira de escrever estas palavras com algarismos e de designar sua terminação e seu sentido por uma letra colocada antes e em cima.

Podêremos fazer-lhes escrever e formar taboada por eles mesmos. Mas é bom evitar tanto quanto for possível as taboadas impressas nos primeiros elementos: quanto mais são comodas, mais tornam o espirito preguiçoso; e numa instrução onde somos obrigados a parar no primeiro passo, é bom exercitarmos-nos nelas o mais que for possível.

(a) E' inútil notar aqui, que as denominações dos números, como as dos algarismos, seguem uma marcha comum de um numero a um numero dez vezes maior, uma progressão décupla; explicar-se-á a palavra progressão, que vem de marcha; a palavra décupla, que significa dez vezes maior.

Esta progressão décupla se acha nos sistemas de numeração de todos os paizes; uniformidade que parece vir do fato de termos dez dedos, com os quais era facil mostrar todos os numeros até dez; mas para diante se tornava necessario recorrer a outros meios.

Mas é preciso ajuntar, que se teria podido escolher uma outra progressão: o professor poderá mesmo dar exemplos, si se achar em estado de faze-lo; e mostrar, por exemplo, como, chamando dez e um, onze, dez e dois, doze, dir-se-ia doze e um, em lugar de dez e tres; doze e dois, em lugar de dez e quatro; e de doze e onze, em lugar de vinte tres, etc.

#### QUARTA LIÇÃO

(A) É preciso aqui fazer sentir aos alunos, por exemplo, que eles podem ter de ou desejar ou necessitar ajuntar um número a um outro; que lhes pode ser útil ou agradável saber fazer esta operação.

Compete ao professor escolher estes exemplos, porque é preciso escolher de maneira que os alunos sintam realmente esta utilidade, ou este prazer, e não os olhem como uma simples hipótese.

É então segundo as circunstâncias particulares onde se encontram os alunos que estes exemplos devem ser determinados.

Aqueles que se repetem há muito tempo nos livros elementares tem quase sempre o inconveniente ou de desgostar os meninos, ou de lhes parecer ridículos.

(B) O professor terá cuidado, 1.<sup>o</sup> de fazer observar como é comodo o metodo de colocar, uns sob os outros numa mesma coluna, os algarismos que correspondem ás mesmas denominações do sistema de numeração.

2.<sup>o</sup> De fazer executar sobre varios exemplos a operação que foi feita aqui sobre os numeros 18 e 25.

3.<sup>o</sup> De exercitar sobre varias adições de dois numeros, tendo o cuidado de escolher exemplos onde se tenha ora de reter, ora de não reter; onde se tenha 0 para escrever ou 0 para ajuntar, em lugar de um numero, afim de acostumar os alunos a não ficarem embaraçados com estas dificuldades (muito pequenas sem duvida), mas muito reais para aqueles principiantes que, não tendo ainda nenhum uso do calculo,

tem aliás pouca sagacidade natural. Mas é essencial então po-los ao alcance de resolve-las por si mesmos, afim de que não adquiram o habito de repetir as palavras, escrevo, retenho, sem reflexão, e por uma lembrança de alguma sorte maquinal.

(a) Apresentam-se duas observações essenciais.

1.º A do raciocínio pela qual, vendo que dois números encerram a unidade, que eles encerram 6 unidades, que eles encerram 6 dezenas, que eles encerram nove centenas, que eles encerram 5 milhares conclue-se que sua soma é 5966. Vê-se aqui que a conclusão é deduzida destas quatro proposições, e que não se pôde perceber a verdade destas proposições sem admitir a conclusão. A conclusão resulta então aqui de mais de duas proposições: uma conclusão em geral pôde resultar de varias proposições.

2.º A da operação pela qual sabendo que, si se ajuntarem com outra separadamente as unidades, as dezenas que dois números encerram, obtem-se a soma dos dois números, chega-se a proposição geral; que a mesma coisa tem lugar para as centenas, os milhares, as dezenas de milhares, etc., para todas as denominações de números, ainda que não se tenha percebido imediatamente a identidade de todas as proposições que encerram a proposição geral. Far-se-á vêr que então se percebe claramente que esta proposição não pôde ser verdadeira para duas denominações sem a ser para todas: mostrar-se-á que tal é a maneira pela qual percebemos a identidade nas proposições gerais, quando para ela somos conduzidos pela consideração de proposições gerais.

Far-se-á notar a diferença desta marcha e daquela na qual o espirito começa por formar idéas gerais que entram na proposição e em seguida percebe-se imediatamente nela a identidade.

Assim a verdade desta proposição geral, a soma de dois números é igual á de duas somas particulares formadas pela adição dos números de denominações semelhantes que com-

põem cada uma deles, pôde ser percebida, seja considerando imediatamente esta proposição geral, seja considerando as proposições particulares que a elas correspondem, para os números que não encerram sinão duas, tres denominações, e observando que aquelas não pôdem ser verdadeiras, sem que a mesma coisa tenha logar para um numero qualquer de denominações.

Eu me permitir-í aqui uma observação só para o mestre. Si, tomando o raciocinio n. 1, se juntar a ele a proposição geral que acaba de ser enunciada, e que a empregamos como uma menor teremos um verdadeiro silogismo; mas é claro que, neste caso, esta menor não é outra coisa que a expressão da ligação necessaria que eu percebo entre as duas proposições. Ela não serve pois sinão para dar uma forma regular e tecnica ao raciocinio.

Da mesma forma, si se reduzisse as proposições que estão separadas no mesmo numero, para não faze-las sinão uma unica, afim de dar a forma silogistica a este raciocinio; ou ainda, si, conservando-as separadas, as combinassemos com proposições intermediarias para fazer delas uma serie de silogismos, resultaria ainda disso que se pôde reduzir todos os raciocinios a silogismos, mas não que seguimos naturalmente esta forma em todos os raciocinios.

Ora eu creio que esta conversão de todos os raciocinios em silogismos ainda que muito util para aqueles que querem aprofundar a arte do raciocinio, fatigaria em pura perda os alunos numa educação comum.

3.º Quando se consideram separadamente nos numeros 2345 e 3621, as unidades as dezenas, as centenas, os milhares, que se acham em cada um deles, para formar somas parciais das unidades, dezenas, centenas, milhares que dão depois a soma total, esta operação, que consiste em decompor estes numeros, em considerar separadamente suas partes correspondentes, chama-se analise.

Quando não se percebe imediatamente a identidade entre duas idéas, decompo-mo-las em partes analogas entre elas;

comparam-se estas partes para apanhar a identidade delas e chegar, por este meio, a apanhar a das próprias idéas. O meio pelo qual se é conduzido a verdade dumá proposição que não se percebe imediatamente se chama metodo analítico.

E' bom fazer sentir aos alunos em que consiste este metodo que eles devem reconhecer em todas as partes da instrução, e que eles terão necessidade de empregar mesmo na sua conduta habitual.

(C) Tive logo necessidade de detalhar toda a serie de operações; e não suprimi nenhuma idéa intermediaria, ao menos aquelas que o intindimento o mais limitado não supriria.

Depois, suprimindo successivamente algumas destas idéas, reduzi a operação á que ela deve ser no uso ordinaria. Por este meio, os alunos, tomando o habito de fazer a operação com a prontidão necessaria, não farão entretanto nunca pela rotina, porque eles começarão por faze-la raciocinando sobre todos os detalhes que ela encerra.

O professor poderá tornar esta marcha mais lenta o que não succedeu aqui, e suprir ás supressões muito rapidas de alguns intermediarios.

(b) Far-se-á notar aqui, que, si se tiver necessidade, por exemplo, de juntar os numeros 5, 7, 8, 6, 4 e achar um numero igual a  $5 + 7 + 8 + 6 + 4$  e que se diga

$$5 + 7 = 12$$

$$12 + 8 = 20$$

$$20 + 6 = 26$$

$$26 + 4 = 30$$

Portanto,  $5 + 7 + 8 + 6 + 4$ ; a conclusão resulta das quatro proposições que a precedem.

Segundo estas operações, o espirito percebe que ele junta successivamente todos os numeros que devem entrar na soma, e ele percebe successivamente a identidade de cada proposição. Por conseguinte ele percebe que esta identidade não

póde ter lugar em todas, sem que ela tenha lugar também para a conclusão.

Póde-se notar aqui, como na observação precedente (a), que a proposição geral na qual não se enunciaria sinão a ultima dessas somas de numeros, tomados dois a dois, é igual a soma dos cinco numeros; ora as proposições intermediarias que se empregariam para dar a forma silogistica, operação pela qual chega-se á conclusão, não devem ser olhadas como fazendo parte essencial da operação, e não se tirará dela a mesma conclusão.

Não se ocultará portanto aos alunos a marcha da natureza, nem se deixará de lhes mostrar como estes raciocínios se podem reduzir a silogismos.



### QUINTA LIÇÃO

(A) Daremos alguns exemplos desta operação que consiste em tirar um número de um outro. Faremos vêr, por exemplo, que 7 mais 3 é igual a 10, 10 menos 3 deve ser igual a 7; e que 10 menos 4 é igual a 6, 6 mais 4 deve ser igual a 10. Exercitaremos os alunos nessas operações, como nas adições dos números simples.

(a) Faremos observar aos alunos, que tendo chegado a se facilitar a adição por esta decomposição, por esta análise dos números, eles são levados a crêr que esta mesma marcha teria bom êxito mais ou menos para as outras operações que tiverem lugar sobre os números, por exemplo, para aquela cujo objeto é subtrair um número de um outro.

Esta crença é fundada a princípio na analogia, sobre o que as duas operações tem aí de semelhante, por que elas se executem sobre números, e por que se tenha igualmente por objeto simplifica-las, abrevia-las, facilitar a execução delas, ainda que não sejam semelhantes, mas opostas no seu fim imediato: *a primeira* tendo-o de ajuntar um número a um outro; *a segunda* o de retirar um número de um outro. Elas são então *analogas*, sem serem absolutamente *semelhantes*; a palavra *semelhante* não indica si a semelhança é absoluta ou quase absoluta, ou si ela não tem lugar sinão em determinadas ocasiões; a palavra *analogas* exclue a semelhança *absoluta* ou quase absoluta.

Esta confiança, fundada sobre a analogia, o é além disso sobre a experiencia constante como das coisas, semelhantes em alguns pontos, o são muitíssimas vezes em alguns outros;

e assim se teria bom exito muitissimas vezes experimentando aplicar a uma  $\phi$  que se prova ter sucedido bem para outra.

Far-lhes-emos observar que quanto maior é a analogia, tanto mais ha relação entre a semelhança que é preciso verificar e aquelas que são já conhecidas, mas tambem a experiencia provou que esta nova analogia se achava verificada pelo exame.

Deve-se ter uma esperança mais forte que se sairá bem si se agir como si esta analogia existisse, e, por consequencia, um motivo de agir mais poderoso.

Distinguir-se-á aqui este motivo de agir do motivo de crer que a analogia suposta verificará.

Nós lhes mostraremos que, como neste exemplo eles desejam achar o meio de abreviar uma operação, e que é preciso procura-lo, uma crença mesmo fraca do sucesso dum meio que se apresenta, deve ser suficiente para determina-los a tenta-lo.

(b) Os alunos já reconheceram que o raciocinio consiste em ver que a identidade que eles não percebiam imediatamente entre as duas idéas que formam uma proposição, resulta daquela que eles perceberam em varias outras. Nós lhes mostraremos, por este exemplo, que consiste tambem em vêr que a negação desta identidade que eles não percebiam entre duas idéas, resulta da negação desta identidade, que eles percebem entre outras idéas, identicas elas mesmas com as primeiras.

Nós lhes faremos observar que uma proposição negativa consiste em exprimir que se percebe a não identidade entre duas idéas. Tal numero não é igual a tal outro, significa que se percebe que a identidade de numero não existe entre eles.

Seja um tal numero, 12 por exemplo, e a identidade de grandeza deste numero com tal outro,  $8 + 4$  por exemplo, eis aqui os dois termos da proposição; ou percebo nela a identidade, formo uma proposição positiva; si eu não a visse, teria a idéa de uma proposição positiva, e me resta procurar si perceberei a identidade que ela enuncia, ou si não perceberei.

Da mesma maneira, seja um tal numero, 12 por exemplo, e a identidade da grandeza deste numero com outro semelhante,  $8 + 4$  por exemplo: eis aqui dois termos duma proposição. Si eu percebo que esta identidade não existe, formo uma proposição negativa; mas si eu não o creio, então eu somente tenho a idéa desta proposição negativa, e me resta procurar si eu perceberei ou não que esta identidade não existe.

Observo que se póde dizer que uma proposição negativa torna-se positiva, si, por exemplo, diz-se: *tal numero não igual a tal outro*, em lugar de: *tal numero não é igual a tal outro*; e que mesmo se percebe uma verdadeira identidade parcial entre a idéa do primeiro numero e a da não igualdade com o segundo.

Mas eu aplico aqui o que disse acima sobre a redução dos raciocinios á forma silogistica; não resulta desta possibilidade de tornar todas as proposições positivas, que a proposição tres não é quatro, não consiste em vêr que não ha nela identidade de grandeza entre 3 e 4.

Será então util ocupar os alunos com esta discussão.

Da observação que se acaba de fazer sobre um raciocinio cuja conclusão é negativa, resulta que independentemente desta conclusão, o raciocinio encerra ao menos uma proposição positiva e uma negativa; porque não se póde perceber esta não identidade entre as duas idéas que entram na conclusão, sinão porque se percebeu a não identidade entre duas outras, e a identidade destas com as primeiras.

Far-lhes-emos observar também esta forma de raciocinio: o numero será igual ou maior que tal outro; porque, si ele fosse menor, resultaria disso semelhante absurdo. Aqui não se percebe nem a identidade enunciada para a primeira proposição nem que esta identidade não existe; mas ve-se que ela está necessariamente ligada a outras identidades; e então conclue-se que esta primeira não póde existir por si mesma.

O que distingue este raciocínio, é que se faz a princípio abstração da verdade das proposições, da identidade entre as idéas que as formam, para não dar atenção sinão a sua dependencia até o momento em que, percebendo a identidade, ou a não identidade duma nova proposição, e se recordando esta ligação já percebida, conclue-se a identidade ou a não identidade da primeira proposição.

Nós temos aqui um exemplo do que acontece nos raciocínios desta especie quando se percebe a não identidade.

Póde-se tomar, por exemplo do cazo em que se conclue a identidade, a operação seguinte: Suponho que 12 menos 5 seja 7; portanto 5 e 7 serão 12; mas 5 e 7 são 12; portanto vejo á principio a identidade de 12 menos 5, e de 7, ligada á de 5 mais 7 e de 12. Percebo depois esta ultima identidade, e dela eu concluo a primeira que eu consideraria a principio com o unico intento de ver que outras identidades seriam a consequência dela.

Far-se-á notar aos alunos esta proposição: tal numero é maior ou igual a tal outro; aqui a identidade parcial está entre tal numero, e a qualidade de ser muito menor ou igual a tal outro.

(B) Poder-se-á fazer a subtração assim:

6223

4535

---

1688

Tirar 5 de 3 é impossivel; peço emprestado uma dezena: 10 e 3 são 13; tiro 5 de 12, restam 8; 3 e 1 que já pedi emprestado são 4; tirar 4 de 2 é impossivel; peço emprestado uma dezena: 10 e 2 são 12; tiro 4 de 12, restam 8; 5 e 1 que pedi emprestado são 6; tirar 6 de dois é impossivel; peço emprestado uma dezena: 10 e 2 são 12; tiro 6 de 12, restam 6; 4 e 1 que já pedi emprestado são 5, tiro 5 de 6 resta 1.

Este método é mais simples, no caso em que o número do qual se tira contém um zero, e que se é obrigado a pedir emprestado uma centena, das quais se toma uma dezena para se reservar delas 9.

Pode-se ainda tomar este outro método: 6223 é a mesma coisa que 6000 mais 223; 6000 é a mesma coisa que 5999 e 1; tiro 4535 de 5999; tenho para resto 1464; ajunto 1 e 223 ou 224 que o primeiro número continha demais, e tenho a diferença igual a 1688.

Si eu tivesse de tirar 6534 de 7612, o algarismo 1 sendo o primeiro no número maior que se acha acima daquele que corresponde a ele no menor, eu diria 7612 é a mesma coisa que 7600 mais 12; 7600 é a mesma coisa que 7599 e 1; tomo a diferença entre 7599 e 6534, ela é 1065; a esta eu ajunto 13, e tenho 1078, que é a diferença procurada.

Este último método é mais simples ainda; cabe ao professor ver si deve ensinar estes últimos, conjuntamente com o método ordinário, exposto no texto (4).

(c) Explicar-se-á esta palavra, *necessariamente*, dizendo que uma coisa é *necessariamente* tal, quando se concebe que ela não pode ser de outra forma; quando se concebe que si ela fosse de outra forma, resultaria um absurdo, uma identidade entre duas idéas que se percebe não existir.

## SEXTA LIÇÃO

(a) E' impossível que nenhum aluno não se tenha enganado nas regras que lhes demos para exemplos. O professor tem a obrigação de fazê-lo notar, e mostrar em que consistia o erro, e qual era a causa dele.

Deve-se aqui recordar este fato para fazer sentir aos alunos a utilidade que existe para eles de saberem reconhecer os seus próprios erros.

Mas pôde-se tirar destes erros em que caem os principiantes lições muito importantes, fazendo-lhes analisar os processos que os conduzem a eles.

1.º Acontece se dizer, por exemplo, numa operação, 6 e 8 são 16, ou ainda, tiro 7 de 16, resta 8.

E' preciso mostrar aos alunos que, quando eles enunciam assim somas ou diferenças, eles não tem a consciência das operações pelas quais ajuntando 6 unidades a 8 unidades, se achou a soma; ou ainda destas por aquelas, retirando 7 unidades de 16, se achou a diferença delas. Mas, sabendo por experiência que, quando fizeram estas operações e acharam o resultado, eles se recordaram de as terem feito e terem encontrado este mesmo resultado nelas, eles chegaram de novo a ele todas as vezes que procuraram formá-lo, repetindo as mesmas operações; e eles julgaram que a memória lhes apresentava constantemente então um verdadeiro resultado.

Depois eles observaram que, sem mesmo ter a consciência distinta de ter feito esta operação e achado este resultado, sua

memória lhes apresentava, imediatamente depois dois números, este que seria verdadeiramente a soma ou a diferença deles; e, segundo esta experiência, se obtém, sem outro exame, a este que ela apresenta.

Seu erro vem em consequência desta memória do hábito os haver enganado, porque ela lhes fazia instituir as verdadeira somas ou as verdadeiras diferenças.

Esta memória, aliás, engana ainda, quando recordamos, com uma sorte de dúvida que tal era o resultado que se encontrou.

E' preciso portanto não se fiar nesta memória do hábito, sinão depois de ter muitas vezes verificado os resultados delas: e não é preciso jamais se fiar nelas, quando ela é acompanhado de um sentimento de incertesa.

2.º Eles se enganam ainda esquecendo de prestar atenção aos números retidos na adição, ás dezenas tomadas emprestadas na subtração.

Mas então sua confiança no resultado é fundada no que eles creem ter seguido certas operações e que eles têm a recordação de terem tido a convicção de que estas operações conduzem a um resultado justo. Seu erro vem então do fato de que sua memória lhes apresenta mal esta serie de operações, ou do fato de que eles creem na identidade das que eles executam com aquelas das quais eles se lembram, sem ter um sentimento distinto desta identidade: aqui uma atenção mais forte e menor precipitação os impedirá de formar um resultado, tendo de saber si eles tem distintamente a lembrança desta serie de operações que é preciso executar e de as ter executado.

(b) Far-se-á observar aqui aos alunos a proposição condicional, si 37 e 17 são 54, 54 menos 17 é 37. Nós lhes faremos vêr que esta proposição é igual áquela: a identidade expressa pela segunda proposição resulta da identidade expressa pela primeira; mas que esta mesma proposição não enuncia nada á respeito da identidade expressa por uma ou pela outra.

Seria bom que o professor escolhesse de tempo em tempo alguns exemplos de proposições compostas, para as recordar nas proposições simples, e exercitar os alunos a reconhecer as identidades que elas exprimem. Os exemplos devem ser escolhidos na parte puramente aritmética do texto.

(A) O professor procurará dar por exemplo casos em que a prova faz descobrir um erro, alguns dos erros reais em que os alunos caíam. E' preciso em geral, tanto quanto for possível, evitar que a utilidade do que se ensina se apresente a principio como puramente hipotético.

(c) O primeiro exemplo de uma crença fundada sobre a probabilidade e ao mesmo tempo duma conduta dirigida por esta probabilidade julga-se ser muito complicado, para que seja possível emprega-lo aqui para desenvolver a natureza desta especie de crença e dos motivos que podem determinar a tomar por base de nossas ações.

Limitar-se-á portanto a observar que, si em coisas ou acontecimentos que parecem igualmente possíveis, ha um grande numero deles que dão um certo resultado, e um pequeno numero que dá um resultado contrario, diz-se que é mais provavel que um dos acontecimentos da primeira especie chegará, porque se observou que isto será assim em geral. Portanto se é levado a crer que este acontecimento mais provavel terá lugar: e se conclue como se ele devesse ter lugar, porque é tambem mais provavel que esta conduta produza a vantagem que dela se espera.

Far-se-á observar depois aos alunos que nos enganamos raramente quando se faz as operações com atenção: que acontecerá então muitissimo raramente se enganar em duas operações seguidamente, e ainda mais raramente de nos enganarmos de maneira que um erro compense o outro.

Tornar-se-ão mais sensiveis, por meio de exemplos, ora estas primeiras idéas sobre a probabilidade, ora sua applicação ao caso atual.



Tomar-se-ão, para exemplos, acontecimentos físicos que são constantes, ainda que sujeitos a exceções, e nos quais nos conduzimos como si estas exceções não devessem ter lugar. Teremos cuidado de as escolher tais, que esta falta de previsão seja claramente racional.

Tudo leva a crêr que o que resta aqui de muito pouco profundo, de muito pouco rigoroso, não impressionará os alunos; que eles não procurarão penetrar além do que lhes apresentamos; mas, si eles o fizessem, nós lhes diríamos que estas obscuridades serão dissipadas com a continuação: nós lhes faríamos sentir, pelo exemplo mesmo das lições já recebidas, que não podemos aprender nada, senão sucessivamente e seguindo uma certa ordem; e isto seria então uma lição de mais.

(B) O professor terá cuidado de dar varios exemplos desta proposição geral afim de faze-la compreender; e, nestes exemplos, ele insistirá sobre a identidade da operação, que consiste em ajuntar á soma já formada á diferença já formada, ou a retira-la uma da outra, e da que consiste a fazer esta adição e esta subtração, conservando os elementos que tem servido para formar a soma e a diferença.

Ele observará cuidadosamente áqueles dos alunos que tiverem a facilidade de apanhar esta proposição geral, para compreender que, ajuntar um numero menos um outro, é ajuntar o primeiro e retirar o segundo; que retirar um numero menos um outro é retirar o primeiro e ajuntar o segundo; aqueles que sentirem prazer, uma especie de satisfação em conhecer esta proposição geral darão um sinal de sua capacidade natural para as concepções e as verdades abstratas.

SETIMA E OITAVA LIÇÕES

(a) Estas duas lições não oferecem nenhuma observação particular.

Mas é preciso que o professor continue a fazer observar aí pelos alunos as diversas espécies de raciocínios que elas apresentam, as formas que servem para reconhecer cada demonstração, a seguir-lhes o fio, e a apanhar o seu conjunto.

Ele lhes fará vêr como a decomposição do multiplicando na setima lição e a dupla decomposição do multiplicando e do multiplicador na segunda, conduzem a achar o metodo para executar a operação proposta. Ele insistirá sobre o que foi dito a este respeito nas observações precedentes.

Ele terá o cuidado tambem de lhes fazer observar como eles se servem aqui da adição que sabem já fazer, e dos principios sobre os quais o sistema da numeração escrita é fundado, para achar facilmente os produtos de um numero por um numero dado, de dezenas, de centenas, de milhares, etc., ou para deduzir o produto total destes produtos parciais achados separadamente.

Ele lhes fará observar que tendo uma lembrança bem distinta de ter reconhecido a verdade destes principios e a certeza destas operações, eles pódem executar estas operações sem ter medo de se enganar, e aderir ás conclusões que eles vêm claramente resultar destes principios, quando mesmo eles não tivessem a consciencia imediata da verdade destes principios, da identidade das idéas que formam a proposição pela qual estes principios são expressos.

Ele lhes fará sentir de novo como uma experiência constante lhes tendo provado que eles tornarão a achar sempre esta identidade, si eles a tiverem uma vez achado, eles são levados involuntariamente a crer que ela existe, por consequência mesmo que eles não a percebessem, contando que eles se lembrassem bem de a ter percebido. Ele insistirá sobre este objeto, porque é precisamente sobre este fundamento que eles se apoiam na continuação, para se servir, em novos raciocínios, das proposições das quais eles perceberam sucessivamente a verdade.

Quando ele os julgar suficientemente exercitados, lhes fará distinguir as tres espécies de adesões que eles podem dar a uma proposição.

1.º A principio a que nace da percepção da identidade ou da negação da identidade entre os dois termos; quer ela seja imediata, quer ela resulte dum raciocínio do qual se apanhasse ao mesmo tempo o conjunto.

Diz-se então que estas proposições são evidentes.

2.º Depois a adesão que se dá a uma proposição que resulta de varias outras, porque nos recordamos distintamente de ter reconhecido que a identidade que ela exprime resulta da que se percebeu imediatamente nas outras proposições.

3.º Enfim, ele lhes fará notar as proposições ás quais se adere, somente porque a experiência provou que se chega muitíssimas vezes a um resultado verdadeiro seguindo a mesma marcha; como quando se julga certa uma operação da qual se verifica o resultado (Vede a ultima observação sobre a sexta lição).

(A) Exercitar-se-ão os alunos sobre a multiplicação tanto tempo quanto for necessario, para os familiarizar com os trinta e seis produtos dos numeros simples, dos quais eles devem se lembrar, para executarem prontamente esta operação.

Não lhes faremos aprender de cór a taboa destes produtos; não lhes daremos esta taboa toda formada, porque é muito mais importante fortificar pelo exercicio sua intelligen-

cia e sua memória, do que lhes indicar os meios de se poupar a pena de se servir dela.

Assim lhes faremos formar por si estes produtos, quando eles não os conhecerem, ou quando os esquecerem. Si o numero de alunos for um pouco grande sucederá que alguns deles não terão ocasião de formar por si alguns destes produtos, mas, como serão obrigado a rete-los escutando-os enunciar por um outro, eles serão levados naturalmente a examinar por si mesmo, si eles estão certos: o que não lhes sucederia, si eles os achassem expressos num livro ou si o professor os ensinasse a eles.

Quanto ao mais, é ao professor que cabe achar os meios de exercitar os alunos com igualdade; mas esta igualdade não deve ser absoluta: é preciso proporcionala ás disposições naturais dos alunos, exercitar de preferencia sobre as coisas facteis aqueles que têm o menos de disposições, e sobre as coisas mais dificeis, aqueles que mostram vantagens nelas: sobre estas, não se deve começar a exercitar os mais fracos sinão quando estiverem já instruidos pelo exemplo dos outros.

## NONA LIÇÃO

(A) Póde-se propor dois objetos diferentes numa divisão, ainda que se tenha por fim geral dividir um certo numero de coisas em partes iguais, porque póde-se supor conhecido o numero dessas partes, e então se tem por fim conhecer o que é cada uma delas; ou ainda se póde supor conhecido o que é cada parte, tem-se por fim conhecer quantas se póde formar delas.

Viu-se no texto porque a operação sobre os numeros era a mesma coisa nos dois casos.

O professor deve ter cuidado de escolher exemplos em que se propõe ora o primeiro fim, ora o segundo, e demonstrar como, tomando o inverso do mesmo exemplo, ter-se-ia ainda atingido o outro fim por meio da mesma operação.

(B) Seria bom tornar esta dificuldade sensível por algumas tentativas.

(C) E' preciso que o professor faça executar numericamente estas operações sobre alguns numeros, e que ele os faça executar tambem da mesma maneira para a divisão composta; a principio afim de que os alunos, tendo seguido em todos estes detalhes a marcha da operação, o entendimento mais facilmente, tenha uma idéa mais distinta dela, quando eles a executarem sob uma forma abreviada. Serviremo-nos dela mesma para lhes fazer entender esta ultima, si nisso experimentarem alguma dificuldade.

Aliás, este metodo é muito simples e assás comodo, ainda que longo; e haverá alunos que, seja por falta de aplicação,

seja por fraquesa ou debilidade natural, não poderão, no espaço de tempo e com os cuidados que é possível consagrar-se a eles entender bem a regra ordinaria, e conserva-la bastante de memoria para emprega-la.

Esta regra, assás complicada, é um dos primeiros pontos em que a experiencia provou que se fazia uma sorte de separação entre os espiritos.

Muitos homens, mesmo nas profissões em que o calculo é necessario se acham parados neste termo.

Eles não puzeram o tempo, a aplicação que lhes teriam sido necessario para o passar; então este metodo pela subtração imediata, seria para eles um suplemento util.

(D) O professor, ensinando a dispor a formula, explicará em que ela é comoda, como ocupa menos lugar, e apresenta as operações parciais duma maneira mais clara que uma outra disposição.

Em geral, não é preciso fazer ler descrições escritas duma operação sensível, sinão no caso em que não se tem nenhum meio de supri-la; e se deve antes ter acostumado os meninos a compreender a descrição verbal dos objetos por si proprios, ou duma operação que se executa, duma figura que se traça, antes de lhes fazer lêr a descrição escrita dum objeto que lhes mostramos a imagem, ou da operação que lhes apresentamos toda executada.

Eu voltarei a êste assunto, nas observações sobre os elementos de Geometria.

## DECIMA LIÇÃO

(A) Embora não se ache aqui sinão um unico exemplo, sente-se que será necessario exercitar muito os alunos sobre esta operação.

(a) Na exposição deste meio muito simples de abreviar os ensaios para os calculos um pouco complicados, e em varias outras operações, eu me contentei de aplicar o principio geral a um ou varios exemplos, sem desenvolver o principio.

Seria preciso exercitar os alunos sobre um certo numero de exemplos, e lhes fazer depois observar por eles mesmos este principio geral que é comum a cada exemplo particular, afim de que eles o descubram, de algum modo, por sua propria reflexão; depois os conduziremos a enuncia-lo eles proprios.

Depois lhes faremos observar a marcha que eles seguem nesta generalisação, e como, a medida que eles aplicam um raciocinio a um numero, ou que eles executam uma operação sobre este numero, eles têm um sentimento distinto da possibilidade de aplicar este raciocinio a um outro numero, de fazer uma operação semelhante.

Nós lhes exporemos que, como eles são formados de idéas gerais fixando sua atenção sobre as porções comuns a varias idéas particulares, da mesma forma eles farão para si uma idéa duma operação geral, fixando sua atenção sobre o que ha de comum a varias operações; e como, executando uma operação particular, eles têm depois o sentimento distinto, que eles seguem a operação geral.

Sabendo portanto que a seguindo eles devem ter um resultado certo, eles seguem a operação particular com confiança, sem ter necessidade do sentimento da justeza da operação particular que eles executam.

Assim, depois de ter deduzido a justeza do metodo geral do das operações particulares, eles acabam por apoiar sua confiança na justeza das operações que eles executam sobre a do metodo geral.

Faremos tambem observações, 1.<sup>o</sup> sobre a natureza destas proposições: tal quociente é menor que 10, é maior que 3, é menor que 8, é 4, 5, 6 ou 7; ou a identidade parcial está entre a qualidade de *ser quociente* em tal hipoteses, e a de *estar abaixo de dez*, de ser maior que 3 e menor que 8; de ser um dos quatro numeros, 3, 4, 5, 6.

A identidade está então entre a qualidade absoluta e determinada de *ser um tal quociente*, e qualidade determinada de *estar sujeita a uma tal condição*; mas esta qualidade é indeterminada, quanto á grandeza do quociente.

Então se notará que toda proposição é determinada por si propria; mas que ela póde ser indeterminada sob um ponto de vista particular.

Notar-se-á ainda, que a proposição não é susceptivel de ser verdadeira sinão no sentido em que ela é determinada: que é o unico sentido em que se póde perceber ou concluir uma identidade parcial.

As proposições precedentes não exprimem nada, quanto a qualidade absoluta deste quociente, mais somente quanto aos limites desta quantidade.

2.<sup>o</sup> Sobre este raciocinio, pelo qual se prova que 122 esta contido ao menos tres vezes em 727, porque  $200 > 122$  está tres vezes em  $700 < 727$ .

As dezenas e as unidades tornam aqui os numeros mais complicados, e por consequencia, tem-se mais trabalho para ver quantas vezes um póde conter o outro; nós os reduzimos então a numeros mais simples, mas tais, que o numero de



vezes que um estará contido no outro, seja igual ou maior do que não o seria para os numero dados.

Não conhecendo o limite abaixo do qual este quociente não pôde estar, procura-se dois numeros mais simples, cujo quociente tenha um limite inferior, igual ou menor.

A mesma coisa tem lugar para outro limite: isto não é então por hasar que se é conduzido a este metodo; mas ele nace desta reflexão, que não se vê facilmente um limite proximo para o quociente quando os numeros são grandes, como o vemos muito facilmente quando eles são muitissimos pequenos.

UNDECIMA LIÇÃO

(A) Ter-se-á o cuidado de exercitar os alunos de maneira a lhes tornar familiares as primeiras idéas sobre os numeros fracionarios, porque adiante elas lhes serão uteis para adquirir a duma relação em geral. E' preciso tambem lhes tornar muito familiar o pequeno numero de sinais que introduzi nestas lições.

(a) Advertir-se-á os alunos de que a palavra *fração* tira sua origem de uma palavra latina que significa *uma porção destacada duma coisa quando a quebramos*; que o denominador da fração traz este nome, tira sua denominação deste numero; as frações  $1/8$ ,  $2/8$ ,  $3/8$  se denominam, um, dois, tres oitavos; o denominador traz este nome, porque ele indica o numero de partes da coisa que se supõe dividida em tantas porções quantas o denominador contem de unidades.

Nós lhes faremos ver como estas denominações são introduzidas na linguagem das ciencias, não duma maneira arbitrária, mas por analogia.

Nós lhes explicaremos que então a palavra que teria tido por si propria um sentido geral e vago, adquire um determinado e preciso, quando se está convencido de a empregar numa ciencia ou numa arte.

As palavras *divisão*, *multiplicação*, etc., que ficam ainda na lingua sob diversas acepções relativas a seu sentido geral e primitivo, e que tomam um proprio para designar uma operação aritmetica, darão exemplos disso.

DUODECIMA LIÇÃO

(A) Pudemos observar que, nas tres ultimas lições, os desenvolvimentos escritos são muito menos extensos. Compete ao professor supri-lo.

Haveria inconveniente em seguir por muito tempo a mesma marcha que nas primeiras lições; ela se tornaria fastidiosa a força de ser facil, e favoreceria a preguiça do espirito. Mas a passagem desta primeira marcha a uma marcha mais cerrada deve ser facilitada por explicações verbais: a intelligencia do texto, quando o relemos, é então auxiliada pela lembrança destas explicações. Nós a devemos ainda unicamente á atenção.

Rio de Janeiro, 2 de Julho de 1935.

YAN DEMARIA BOITEUX.  
(Nascido em Florianópolis  
a 19-5-1911)

- Système de Philosophie Positive** — 6 Vols. in 8° Paris — 1830-1842.  
Tradução inglesa resumida, por Miss Martineau. — 2 vol. in 8° — 1853 — Versão francesa deste resumo, por Avezac-Lavigne.
- Géométrie Analytique** — Paris. 1843 — 1 vol. in 8°.  
Tradução portuguesa por diversos alunos da Escola Militar do Rio.
- Traité Philosophique d'Astronomie Populaire** — Paris. 1844 — 1 vol. in 8°.
- Système de Politique Positive ou Traité de Sociologie instituant la Religion de l'Humanité** — 4 vols. in 8° — Paris — 1851-1854.  
Tradução inglesa por Richard Congreve e outros.
- Catéchisme Positiviste** — 1 vol. in 12 — Paris. 1852.  
Traduções italiana, espanhola, portuguesa, inglesa e aleman.
- Appel aux Conservateurs** — 1 vol. in 8° — Paris. 1855.  
Traduções portuguesa, inglesa e aleman.
- Synthèse Subjective** — Tome 1<sup>er</sup> — Système de Logique Positive ou Traité de philosophie mathématique — 1 vol. in 8° — Paris. 1856.  
Tradução inglesa da Introdução desta obra por R. Congreve.
- Testament, avec les documents qui s'y rapportent. Prières quotidiennes. Confessions annuelles. Correspondance avec Mme. Clotilde de Vaux** — 1 vol. in 8°.  
Tradução inglesa por R. Congreve.
- Circulaires Annuelles (1850-57)** — 1 vol. in 8° — Paris, 1886.  
Tradução inglesa por R. Congreve e outros.
- Essai sur la philosophie des Mathématiques** — Brochura — (1819-1820).
- Lettres à Valat** — (1815-1844) — 1 vol. in 8° — Paris, 1875.
- Lettres à J. Stuart Mill** — 1841-1844 — 1 vol. in 8°.
- Lettres à divers** — 2 vols. in 8°.
- Correspondance inédite** — 4 vols. in 8°.
- Lettres au Dr. Robinet et à sa famille** — brochura.
- Lettres inédites à Blignières** — 1 vol.

## Sistema de leituras aconselhadas por AUGUSTO COMTE

## 1.º — POEZIA (trinta vols.)

Homero A Ilíada e a Odisseia. — Esquillo Tragedias. — Sófocles, Edipo-Rei. — Aristófanes. Comédias. — Píndaro. Odes. — Teócrito Idílios. — Longo. Dânis e Cloc. — Plauto Comédias. — Terêncio. Comédias. — Virgílio. Obras completas. — Horácio. Obras escolhidas. — Lucano A Farsalia. — Ovídio. Obras escolhidas Tibulo. Obras. — Juvenal Sátiras. — Faúbulo. Obras. — Le Grand d'Aussy. — Dante. A Divina Comédia. — Ariosto Orlando Furioso e Tasso. Jerusalém Libertada. — Petrarca Poesias escolhidas. — Castasio. Teatro escolhido. — Alfieri. Teatro escolhido. — Muzoni. Os Noveis. — Cervantes. D. Quixote. Novelas e romances. — Teatro Espanhol escolhido. coleção editada por D. José Segundo Flores (em espanhol). — Romancero Espanhol escolhido. compreendendo o Poema do Cid. — Ariosto. Teatro escolhido. — Moliere. Obras completas. — Racine. Teatro escolhido. — Voltaire. Teatro escolhido. — La Fontaine. Fábulas. — Lamotte. — Fábulas escolhidas. — Florian. Idem. — Lesage. Gil-Bras. — Mme. de Lafayette. A Princesa de Cleves. — Bernardin de St. Pierre. Paulo e Virginia. — Chateaubriand. Último Abencerrage. Os Martyres. — Shakespeare. Teatro escolhido. — Milton. O Paraizo Perdido e as Poesias Liricas. — De Foe. Robinson Crusoe. — Goldsmith. O Vigário de Wakefield. — Fielding. Tom Jones. — Walter Scott. As suas sete obras-primas. Ivanhoe. Waverley. A Formosa Donzella de Perth. O Oficial de Fortuna (Legenda de Montrose). Os Puritanos. A Prizão de Edinburgo. O Antiquário. — Byron. Obras escolhidas (suprimindo nomeadamente o D Juan). — Goethe. Obras escolhidas. — As Mil e Uma Noites.

## 2.º — SIENCIA (trinta vols.)

Condorcet. Arithmetica. — Clairaut. Algebra e Geometria. — Lacroix ou Legendre. Triangometria. — Descartes. Geometria. — A Comte. Geometria Analitica. — Poincaré. A Estatica, seguida de todas as memorias do mesmo autor sobre mecanica. — Carnot. Reflexões sobre o calculo infinitesimal. — Navier. Curso de Análize. Curso de Mecanica. — Carnot. Ensaio sobre o equilibrio e o movimento. — Lagrange A Teoria das Funções. — A. Comte. A Astronomia Popular. — Fontenelle. Pluralidade dos Mundos. — Fischer. Fizica Mecanica, traduzida e anotada por Biot. — John-Carr. Manual Alfabético de Filozofia Prática. — Lavoisier. Quimica. — Berthollet. Estatica Quimica. — Graham. Elementos de Quimica. — Meckel. Manual de Anatomia. — Bichat. Tratado sobre a vida e a morte. Anatomia Geral. — Blainville. Organizacao dos animais. 1.º volume (unico pub.º). — Richemand. Fiziologia, anotada por Bérard. — Segond. Ensaio sistematico sobre a Biologia. Anatomia Geral. — Barthéz. Nôvos Elementos da Sciencia do Homem (2.ª ed. 1806). — Lamarck. Filozofia Zoologica. — Duméril. História Natural. — Guglielmini. Tratado sobre a natureza dos rios. — Buffon. Discursos sobre a natureza dos animais. — Hipócrates. Tratado sobre os ares, as aguas e o calor.

idades. — Hufeland. Arte de prolongar a vida humana. — Cornaro. Discurso sobre a Sobriedade. — Hippocrates. Aforismos. — Broussais. Propozicoes de Medicina. Historia das Flegmasias Crônicas. — Fontenelle. Elogios dos Sencillos. — Condorcet. Idem.

## 3.º — HISTORIA (sessenta vols.)

Maite-Dun. Resumo de Geografia Universal. — Rienzi. Dicionario Geografico. — Cook. Viagens. — Chardin. Viagem no Egito. — Mignet. Historia da Revolucao Francesa. — Heeren. Manual da Historia Moderna. — Voltaire. Seculo de Luis XIV. — Mme. de Motteville. Memorias. — Richelieu. Testamento Politico. — Vida de Cromwell. — Bayle. Historia das Guerras Civis da Franca. — A. Comte. Memorias. — Comines. Memorias. — Bossuet. Resumo de Historia de Franca. — DeMa. Revolucoes da Italia. — Ascurgota. Historia de Espanha. — Robertson. Historia de Carlos V. — Hume. Historia de Inglaterra. — Millam. Europa durante a Idade-Media. — Fleury. Historia Ecclesiastica. — Gibbon. Historia da Decadencia Romana. — Green. Manual da Historia Antiga. — Tacito. completo. — Herodoto. Historia. — Tucidoes. Historia da guerra do Peloponezo. — Plutarco. Vidas dos homens illustres. — César. Comentarios. — Arriano. Expedicoes de Alexandre. — Bartolomeu. Viagem de Anacaros. — Winckelmann. Historia da Arte entre os Antigos. — Leonardo de Vinci. Tratado da Pintura. — Gietry. Memorias sobre a Musica.

## 4.º — SINTEZE (trinta vols.)

Aristoteles. Politica e Moral. — Biblar. completa. — Alcoran. completo. — Santo Agostinho. A Cidade de Deus. Confissoes. — S. Bernardo. Tratado sobre o amor de Deus. — Thomas de Kempis. Imitacao de J. C. (o original latino com a traduçao em verso de Cornellet). — Bossuet. Exposicao da doutrina catolica. — Catecismo de Montpellier. — Santo Agostinho. Commentário sobre o Sermão da Montanha. — Bossuet. Historia das Variações Protestantas. — Bacon. Novum Organum. — Descartes. Discurso sobre o Metodo. — Diderot. Interpretaçao da Natureza. — Cicero. Pensamentos escolhidos. — Epicteto. Idem. — Marco Aurelio. Idem. — Pascal. Idem. — Vauvenargues. Idem. — Mme. de Lambert. Conselhos de uma Mãe. — Duclos. Considerações sobre os Costumes. — Bossuet. Discurso sobre a Historia Universal. — Condorcet. Bosquejo Historico. — Bossuet. Politica estradã das Escrituras Sagradas. — De Maistre. Tratado do Papa. — Diderot. Dissertação sobre os Surdos e os Cegos. — Hume. Ensaioes Fiziologicos. — Adão Smith. Ensaio sobre a Historia da Antropologia. — Diderot. Ensaio sobre o Belo. — Barthéz. Teoria do Belo. — Cabanis. As Relações entre o Fzico e o Moral do Homem. — Leroy. Cartas sobre os Animais. — Gall. Tratado sobre as Funções do Cerebro. — Broussais. Tratado sobre a Irritacao e a Laccura (1.ª edicão). — Augusto Comte. Filozofia Pozitiva (condensada por Miss Martineau). Politica Pozitiva. Catecismo. — Bossuet. Sinteze Subjetiva.