MARIA SILVIA BRAGA RIOS

A PROPOSTA DE ENSINO DA GEOMETRIA NOS LIVROS DO GRUEMA

SÃO PAULO
2010

MARIA SILVIA BRAGA RIOS
MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

A PROPOSTA DE ENSINO DA GEOMETRIA NOS LIVROS DO GRUEMA

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática, da Universidade Bandeirante de São Paulo, sob orientação do Prof. Dr. Vincenzo Bongiovanni.

São Paulo
2010

Braga Rios, Maria Silvia
A proposta de ensino de geometria nos livros do GRUEMA / Maria Silvia Braga Rios. – São Paulo: [s.n.], 2010
160 f.; 30 cm.

Dissertação de Mestrado – Programa de Pós-graduação em Educação Matemática, Universidade Bandeirante de São Paulo, Curso de Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Vincenzo Bongiovanni

1. Geometria 2. GRUEMA 3. Movimento da Matemática Moderna I. Título

CDD:510

Dedico este trabalho aos meus pais, Ikako (Lu) e Francisco (*in memoriam*), que por seus exemplos sempre me mostraram o caminho a seguir. Em especial, ao meu marido, Gildo, que me apoiou e incentivou nos momentos difíceis para a concretização deste trabalho.

AGRADECIMENTOS

A Deus, a quem devo tudo que sou, o dom da vida e a possibilidade de realização.

À professora Drª. Maria Célia Leme da Silva, minha orientadora em grande parte deste trabalho, o apoio, a confiança e a amizade com que prodigou críticas e sugestões preciosas.

Ao professor Dr. Vincenzo Bongiovanni, meu orientador no final desta pesquisa, o apoio e a confiança.

Às autoras do GRUEMA, Lucília Bechara, Franca C. Gotlieb, em especial a Manhúcia P. Liberman, a paciência com que conversou sobre os livros e os pôs à disposição para a pesquisa.

À Lucia Maria Aversa Villela, a valiosa colaboração ao ceder a digitalização dos livros do GRUEMA.

Ao professor Dr. Wagner Valente, à professora Drª. Maria Cristina Oliveira e a todos os membros do GHEMAT, que colaboraram para a melhoria da qualidade deste trabalho.

Aos professores da UNIBAN, em especial ao professor Dr. Ruy Pietropaulo, à professora Drª. Vera Giusti e à professora Drª. Tânia Campos, a carinhosa acolhida no programa de pós-graduação.

Aos professores da PUC/SP, e em especial ao professor Dr. Saddo Ag Almouloud, o incentivo e apoio sem os quais não teria iniciado o meu mestrado.

À Capes, a concessão da bolsa de estudo quando comecei o mestrado na PUC/SP.

Aos educadores da EMEF Amorim Lima, em especial à diretora Ana Elisa Siqueira, a compreensão, e aos educadores Marymar, Donizette, a solidariedade, e Eliete Maria e Ana Cecília, as valiosas sugestões.

Aos colegas de mestrado, os momentos compartilhados ao longo desta caminhada.

RESUMO

BRAGA RIOS, M. S. **A Proposta de ensino de Geometria nos livros do GRUEMA**. 2010. 168 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós graduação em Educação Matemática, Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo.

Esta pesquisa, de caráter histórico, pretende contribuir para o projeto: A Trajetória da Geometria Escolar no Brasil e em Portugal e o Movimento da Matemática Moderna, a fim de ajudar a preencher uma lacuna existente na história da matemática escolar do Brasil.

Nosso objetivo é discutir e analisar a proposta para o ensino da geometria nos livros do Grupo de Ensino de matemática Atualizada (GRUEMA), no âmbito da história cultural da educação matemática com referencial teórico-metodológico dos historiadores, destacamos: Chartier (1990), Chopin (2004), Certeau (1990). Para tanto temos como fonte principal os livros: *Curso Moderno de Matemática para o Ensino de 1.°grau*.

Nossa análise mostrou que os livros do GRUEMA contêm a geometria experimental direcionada ao desenvolvimento do raciocínio lógico e a geometria dedutiva de maneira inovadora, se comparada com os manuais da época. Têm como eixo a geometria de Euclides, acrescida das medidas de segmentos e de ângulos, e as transformações geométricas são apresentadas a fim de dar um tratamento mais geral aos conceitos de congruência e de semelhança.

Pudemos comprovar, ainda, que o manual didático do GRUEMA tem características inovadoras ao expor os conteúdos geométricos imbricados com outros ramos da matemática, de forma contínua, desde as séries iniciais até as séries finais e que as autoras se apropriaram das propostas internacionais para o ensino da geometria de Lucienne Felix, George Papy e Jean Piaget.

Palavras chave: Geometria, GRUEMA, Movimento da Matemática Moderna

ABSTRACT

BRAGA RIOS, M. S. **The proposal for Geometry education in GRUEMA textbooks.** 2010. 168 f. Dissertation (Masters Degree) - Graduate Program in Mathematical Education, Bandeirante University of São Paulo, São Paulo.

This historical research aims at contributing to the project "The Trajectory of Geometry Education in Brazil and in Portugal and the Modern Mathematics Movement", so as to assist in filling an existing gap in the history of mathematics education in Brazil.

Our objective is to discuss and analyze the proposal for teaching geometry in the Updated Mathematics Teaching Group (GRUEMA) textbooks, in the scope of the cultural history of mathematics education with theoretic-methodological reference to historians, especially: Chartier (1990), Chopin (2004), and Certeau (1990). As such we cite the following books as the major sources: *Modern Mathematics Course for Grade School.*

Our analysis showed that the GRUEMA textbooks contain experimental geometry directed to the development of logical thinking and present deductive geometry in an innovative manner, when compared to the manuals of the time. Its axis is Euclidian geometry with additional segments and angles measurement, and geometric transformations are shown in order to provide a broader treatment of the concepts of congruence and similarity.

We also found that the GRUEMA didactic manual presents innovative characteristics in showing geometric contents overlapping with other branches of mathematics, in a continuous manner and in all grades, and that the authors make use of international proposals for teaching the geometry of Lucienne Felix, George Papy and Jean Piaget.

Keywords: Geometry, GRUEMA, Modern Mathematics Movement

LISTA DE ABREVIATURAS

APER – Arquivo Pessoal Euclides Roxo
APLB – Arquivo Pessoal Lucília Bechara
APML – Arquivo Pessoal Manhúcia Liberman
APOS – Arquivo Pessoal Osvaldo Sangiorgi
APUA – Arquivo Pessoal Ubiratan D'Ambrosio
CEG – Certificat d'études générales
CES – Certificat d'études superieures
CADES – Campanha de Aperfeiçoamento e Difusão do Ensino Secundário
CAPES/GRICES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Br) / Gabinete de relações Internacionais da Ciência e do Ensino Superior (Pt)
CBEM – Congresso Brasileiro de Ensino da Matemática
CEN – Companhia Editora Nacional
CIAEM – Conferência Inter-Americana sobre Educação Matemática
CIEAEM – Comission Internacionale pour l'étude et l'amelioration de l'enseignement des mathématiques
CIEM – Conferências Interamericanas sobre Educação Matemática
CNEM – Congresso Nacional de Ensino de Matemática
COLTED – Comissão do Livro Técnico e do Livro Didático
ED – Estudo Dirigido
FATEC/UNESP – Faculdade de Tecnologia – Universidade Estadual Paulista
FFCL – Faculdade de Filosofia Ciências e Letras
GEEM – Grupo de Estudo de Ensino de Matemática
GEPEM – Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática
GHEMAT – Grupo de Pesquisa da Historia da Educação Matemática
GRUEMA – Grupo de Ensino de Matemática Atualizada.
IME-USP – Instituto de Matemática e Estatística – Universidade de São Paulo
IREM – Institut de recherché sur l'enseignement des mathématiques
ISGML – Grupo Internacional de Estudos sobre a Aprendizagem da Matemática
LDB – Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional
MEC/USAID – Ministério da Educação e Cultura-United States Agency for International Development

MM – Matemática Moderna

MMM – Movimento da Matemática Moderna

NEDEM – Núcleo de Estudo e Difusão do Ensino da Matemática

OECE – Organização Europeia de Cooperação Econômica

OEA – Organização dos Estados Americanos

PCNs – Parâmetro Curricular Nacional

PUC/SP – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

SBEM – Sociedade Brasileira de Educação Matemática

SEESP – Secretaria da Educação do Estado de São Paulo.

SEFORT – Serviço de Ensino e Formação pelo Rádio e Televisão

SENAI – Serviço Nacional da Indústria

SMSG – School Mathematics Study Group

UFRJ – Universidade Federal do Rio de Janeiro

UISCM – University of Illinois Committee on School Mathematics

UNESCO – United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization

UNIBAN/SP – Universidade Bandeirante – São Paulo

UNICAMP – Universidade de Campinas

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

No ano de 1967, para poder ingressar no curso ginasial em uma escola pública fazia-se necessário o exame de admissão. Tal exame era seletivo, e por isso foi preciso fazer cursos preparatórios, e neles tive meu primeiro contato com a Matemática Moderna. Fiz o curso técnico em Desenho de Construção Civil no Serviço Nacional da Indústria (SENAI) e depois graduação em Tecnologia em Construção Civil na Faculdade de Tecnologia da Universidade Estadual de São (FATEC/UNESP).

Trabalhei por alguns anos com projetos e orçamentos de estruturas metálicas fazendo uso do Cálculo e da Geometria.

Por vários motivos, mudei minha opção profissional. Fiz, então, licenciatura em Matemática na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP), concluída em 2003. Durante o curso, pude observar que muitos colegas não tinham estudado Geometria, nem no ensino fundamental nem no ensino médio, o que os levava a encontrar muitas dificuldades nesta matéria. Notei também que, apesar de conhecer os conceitos geométricos e saber utilizá-los em virtude da minha experiência profissional anterior, não conseguia explicar por que ao usá-los daquela maneira alcançava-se o resultado, muito menos demonstrar os teoremas que comprovavam a sua veracidade.

Ao começar a lecionar, pude verificar que não bastava saber um pouco de Matemática para ser um bom professor, era preciso uma metodologia, a fim de que os alunos se interessassem e se sentissem motivados, principalmente diante das novas mídias.

No começo do mestrado na PUC/SP, em 2007, para escolher a linha de pesquisa, comecei a participar dos diversos grupos até me identificar com os objetivos do grupo de pesquisa História, Epistemologia e Didática da Matemática.

Participei também das reuniões do Grupo de Pesquisa da História da Educação Matemática (GHEMAT), coordenado pelo Professor Dr. Wagner Rodrigues Valente. Nessas reuniões, conheci Manhúcia Liberman, que fazia parte do grupo de pesquisa, cujas intervenções despertaram meu interesse pelos livros produzidos pelo Grupo de Ensino de Matemática Atualizada (GRUEMA).

O GHEMAT tem por objetivo produzir a história da Educação Matemática, utilizando os referenciais teórico-metodológicos dos historiadores e contando com pesquisadores em vários Estados do Brasil, como Minas Gerais, Rio Grande do Sul, Sergipe, Paraná, Santa Catarina, Bahia, Mato Grosso, entre outros. Também possui o Centro de Documentação,[1] cujo objetivo é organizar os arquivos pessoais doados ao GHEMAT, como o Arquivo Pessoal Ubiratan D'Ambrosio[2] (APUA), Arquivo Pessoal Euclides Roxo[3] (APER), Arquivo Pessoal Osvaldo Sangiorgi[4] (APOS), entre outros.

Lucília Bechara Sanchez[5] e Manhúcia Perelberg Liberman,[6] coautoras dos livros do GRUEMA, doaram ao Centro de Documentação do GHEMAT parte de seus acervos, os quais ajudei a organizar e inventariar. Estes arquivos contêm vários documentos referentes ao período do Movimento Matemática Moderna (MMM), como recortes de jornais, livros, cartas, apostilas de cursos que as autoras ministraram ou aos quais assistiram que contribuíram para a elaboração desta pesquisa.

No âmbito do projeto de Cooperação Internacional Brasil-Portugal, em cooperação CAPES/GRICES,[7] chamado *A matemática moderna nas escolas do Brasil e de Portugal:* estudos históricos comparativos, desenvolveram-se várias pesquisas sobre o ensino da Matemática Moderna, que contribuíram para o preenchimento de uma lacuna existente na história da Educação Matemática do Brasil.

Minha pesquisa *A proposta de ensino da geometria nos livros do GRUEMA* [8] está inserida em um dos subprojetos originários desse projeto maior, denominado *A*

[1] Centro de Documentação do GHEMAT – disponibiliza seu acervo para consulta – www.unifesp.br/centros/ghemat
[2] Ubiratan D'Ambrosio, matemático brasileiro, idealizador da Etno-Matemática, ganhou a distinção máxima para um matemático – Prêmio Felix Klein.
[3] Euclides Roxo, professor de matemática e diretor do Colégio Pedro II (RJ), principal modernizador do ensino da matemática, assessor dos ministros Francisco Campos e Gustavo Capanema.
[4] Osvaldo Sangiorgi, matemático, escritor de livros didáticos, divulgador do Movimento da Matemática Moderna.
[5] Lucília Bechara Sanches, mestre em Metodologia de Ensino, doutora em Administração Escolar, sócia fundadora do GEEM e da SBEM – Sociedade Brasileira de Educação Matemática.
[6] Manhúcia Perelberg Liberman, licenciada e bacharel em Matemática pela URFJ, sócia fundadora do GEEM.
[7] Capes – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Br); GRICES – Gabinete de Relações Internacionais da Ciência e do Ensino Superior (Pt).
[8] GRUEMA – Grupo de Ensino de Matemática Atualizada.

trajetória da geometria escolar no Brasil e em Portugal e o Movimento da Matemática Moderna, coordenado pela professora Drª. Maria Célia Leme da Silva.

Comecei o mestrado na PUC/SP sob orientação da professora Drª. Maria Célia Leme da Silva. Com as alterações ocorridas na linha de pesquisa que havia escolhido na PUC/SP e a mudança de vários professores doutores para a Universidade Bandeirante de São Paulo (UNIBAN/SP), também me transferi para esta universidade a fim de continuar na linha de pesquisa *História da Matemática Escolar no Brasil*, com a mesma orientadora. Por motivos diversos, finalizei minha pesquisa sob orientação do professor Dr. Vincenzo Bongiovanni.

O objetivo da presente pesquisa, *A proposta de ensino da geometria nos livros do GRUEMA*, é discutir e analisar a proposta apresentada para o ensino da geometria nos livros *Curso Moderno de Matemática para o Ensino de 1.°grau*, de 5.ª a 8.ª séries, cujas autoras são Manhúcia Perelberg Liberman, Lucília Bechara Sanches, Anna Averbuch,[9] Franca Cohen Gotlieb[10] e supervisão e revisão de Jacy Monteiro.[11]

A fonte principal utilizada são os livros didáticos da coleção GRUEMA, de 5.ª a 8.ª séries, guia do professor, além do Arquivo Pessoal de Lucília Bechara (APLB), o Arquivo Pessoal Manhúcia Liberman (APML), jornais da época, a bibliografia utilizada, as experiências vividas pelas autoras, bem como o Ideário do Movimento da Matemática Moderna e a legislação vigente.

Tencionamos, assim, contribuir para o projeto *A trajetória da geometria escolar no Brasil e em Portugal e o Movimento da Matemática Moderna,* que intenta construir uma nova representação para o ensino da geometria no período do MMM. Para tanto, pretendemos responder à seguinte questão: Qual é a proposta de ensino de geometria nos livros do GRUEMA no período do MMM?

Leme da Silva (2007), no levantamento sobre as dissertações e teses que tratam das propostas de ensino da geometria durante o período do MMM, conclui que não foram encontrados muitos trabalhos desta época, o que torna relevantes as pesquisas sobre este assunto.

---

[9] Anna Averbuch (1928-2004), licenciada e bacharel em Matemática pela UFRJ, professora da Universidade Santa Úrsula (RJ), sócia fundadora do GEPEM – Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática.

[10] Franca Cohen Gotlieb, licenciada e bacharel em Matemática pela UFRJ, professora da Universidade Santa Úrsula (RJ), sócia fundadora do GEPEM.

[11] Luiz Henrique Jacy Monteiro fundador do GEEM, professor do IME-USP, autor de livro didático para o ensino do 2.º grau e universitário.

Uma das primeiras pesquisas a tratar do ensino da geometria durante o século XX e incluir o período do MMM foi a de Regina Pavanello, em sua dissertação de mestrado *O abandono do ensino de geometria*: uma visão histórica, na Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), em 1989.

Pavanello, em sua dissertação, procura responder duas questões: Por que, quando e como o ensino de geometria foi relegado a um segundo plano? Que prejuízos isto pode acarretar à formação do aluno? Para tanto, a autora faz uma análise histórica dos acontecimentos no século XX, internacionalmente e no Brasil. Sua investigação se baseia nos acontecimentos sociais, econômicos e políticos e nas mudanças que ocorreram na legislação brasileira no que concerne à educação, mais especificamente quanto ao estudo da geometria.

A autora conclui que vários fatores colaboraram para que o ensino de geometria ficasse relegado a um segundo plano, entre os quais destaca: na década de 1930, a legislação determinou a união das disciplinas Álgebra, Geometria, Aritmética como uma disciplina única, Matemática, ministrada por um único professor; na década de 1960, com a expansão do ensino público, houve necessidade de mais professores, que não estavam bem preparados tanto na formação matemática como para lidar com as diferentes classes sociais dos alunos, o que fez com que a Geometria, como conteúdo da disciplina matemática, não fosse ensinada nas escolas públicas; o currículo proposto era muito extenso e o professor poderia escolher o currículo a ser ensinado, de acordo com as necessidades da sua clientela; na década de 1970, a legislação preconizava o ensino da geometria pelas transformações geométricas,[12] todavia os professores não a compreendiam, e a maioria dos livros apresentava a Geometria no final do livro, por dar maior ênfase à Álgebra; e na década de 1980, a disciplina Desenho Geométrico torna-se Educação Artística (PAVANELLO, 1989).

A autora aponta que a ausência do ensino da geometria causa danos aos alunos, pois eles perdem uma oportunidade de desenvolver a capacidade de percepção espacial; de representar geometricamente e visualizar conceitos

[12] A legislação a que Pavanello se refere são os Guias Curriculares do Estado de São Paulo publicados em 1975, que propõem as transformações geométricas: a) conceito – invariantes, a ser estudado nas 6.ª, 7.ª, 8.ª séries; e b) transformações de coordenadas, na 8.ª série. Nas observações os Guias Curriculares dizem: “Destacar, sempre que possível, o conceito de transformação e procurar as propriedades invariantes por uma transformação” (SEE.SP, 1975).

matemáticos; de compreender processos de demonstração; de cultivar e desenvolver o pensamento visual, a capacidade de abstração, a generalização, a arte da especulação, o pensamento geométrico, logo, as atividades racionais do homem (PAVANELLO, 1989).

Maria Regina de O. Pereira, em 2001, defendeu a dissertação de mestrado, *A geometria escolar*: uma análise dos estudos sobre o abandono de seu ensino, na PUC/SP, em que faz um levantamento das teses e dissertações, no banco de dados da UNICAMP, da UNESP – Rio Claro e da PUC-SP, no período de 1981 a 2000, que tratam especificamente das causas do abandono do ensino da geometria escolar.

Nas oito dissertações que analisou, Pereira chegou aos seguintes resultados: a) cinco dissertações apresentam como causa do abandono do ensino da geometria a falta de formação do professor; b) seis dissertações colocam como motivo a omissão da Geometria nos livros didáticos; c) cinco consideram que as lacunas deixadas pelo MMM foram a causa. A autora reputa as lacunas deixadas pelo MMM como: (i) o ensino por meio do processo dedutivo só ocorria quando os professores eram adeptos das ideias preconizadas pelo MMM; (ii) imposição, por meio do Guia Curricular de 1975, do ensino da geometria das transformações, que os professores não dominavam; (iii) professores deixam de trabalhar a Geometria a fim de enfatizar a Álgebra (PEREIRA, 2001).

Notamos que Pavanello (1989) e Pereira (2001) apresentam conclusões semelhantes, ou seja, em linhas gerais o não ensino da geometria se deve: a) à omissão dos conteúdos geométricos ou por serem colocados no final do livro; b) à imposição dos Guias Curriculares do ensino da geometria das transformações; c) à falta de formação dos professores.

Entretanto, algumas pesquisas posteriores, com foco específico no período do MMM, apresentam outras conclusões:

Ana Célia da Costa Ferreira, em 2006, defendeu a dissertação de mestrado *Propostas pedagógicas de geometria no Movimento Paranaense de Matemática Moderna,* na Pontifícia Universidade Católica do Paraná. A autora analisa a proposta pedagógica para o ensino da geometria, no Paraná, elaborada pelo Núcleo de Estudo e Difusão do Ensino da Matemática (NEDEM), que organizou a coleção de livros didáticos *Ensino Moderno de Matemática* e os diferentes caminhos que o

NEDEM percorreu para o ensino da geometria, isto é, as transformações geométricas, o conceito vetorial e a proposta de Birkhoff.[13]

A autora conclui que a coleção elaborada pelo NEDEM apresentava os conteúdos de maneira direta, ou seja, enfatizava os aspectos teóricos dos vários conteúdos, propunha poucos exercícios e raramente situações-problema, o que dificultava a interação com o aluno. A autora diz ainda:

> Percebemos que o NEDEM utilizou um pouco de cada sugestão dada pelos modernistas internacionais e elaborou seu próprio programa para o ensino e a aprendizagem da Geometria, porém sem propor exercícios aplicados ao cotidiano do aluno (FERREIRA, 2006, p. 103).

Leme da Silva (2008b) faz uma análise comparativa entre a metodologia apresentada no livro didático de autoria de Osvaldo Sangiorgi, *Matemática* (1964), e no livro *Matemática Curso Moderno* (1969), e conclui:

> O ensino da geometria não perde seu lugar, ele permanece em foco, no entanto, a ênfase, que se encontra na dedução, na obra anterior, agora, aproxima-se da geometria intuitiva [...] Osvaldo Sangiorgi não reproduziu modelos para o ensino da matemática. O que ele fez foi considerar o local para o qual sua obra se dirigia, a cultura escolar brasileira, seus trabalhos já realizados, leituras e contatos com pessoas que lideraram o movimento e, assim, de forma particular, única e criativa, produziu sua interpretação, sua resposta aos prescritos impostos pelo MMM (LEME DA SILVA, 2008b, p.75).

Kátia Cristina Camargo, em sua dissertação de mestrado, *O ensino da geometria nas coleções didáticas em tempos do Movimento da Matemática Moderna na capital da Bahia,* defendida em 2009, na UNIBAN/SP, analisa quatro coleções de livros didáticos elaborados pela professora Drª. Martha Dantas[14] e equipe, com a participação de Omar Catunda,[15] no período de 1966 a 1988. A autora também compara a proposta de ensino da geometria do grupo da Bahia com a proposta de ensino apresentada no livro de Osvaldo Sangiorgi e do grupo NEDEM do Paraná.

A autora afirma que as coleções elaboradas pela equipe da professora Drª. Martha Dantas trataram tanto da geometria afim como da geometria euclidiana via transformações geométricas, enfatizando também a participação de Omar Catunda. Desse modo, a autora refere que a proposta do grupo de Salvador percorreu:

---

[13] George David Birkhoff (1884-1944). Matemático que introduziu o conceito de medida tanto para segmentos como para ângulos como postulados da geometria.
[14] Martha Dantas, professora de Didática da Matemática na Faculdade de Filosofia da Universidade da Bahia.
[15] Omar Catunda, professor catedrático da Faculdade de Filosofia da Universidade de São Paulo e, depois, diretor do Instituto de Matemática e Física da Universidade da Bahia.

> [...] caminhos próprios, inovadores, criativos e estabeleceu uma sintonia próxima das discussões internacionais [...] o reconhecimento de Catunda como matemático foi determinante na constituição dessa obra, ao empregar os espaços vetoriais e as transformações nos conteúdos clássicos da Geometria Euclidiana, rompendo com a forma tradicional de se ensinar esse conteúdos (CAMARGO, 2009, p.124).

Após a análise dos conteúdos apresentados e da metodologia empregada nas quatro coleções, Camargo (2009) conclui que:

> As quatro coleções didáticas produzidas na capital da Bahia tiveram vida longa, com mais de trinta anos de pesquisa. O ensino da geometria, na abordagem moderna, não foi abandonado e muito menos colocado no final do livro de matemática. As transformações geométricas presentes na Geometria Euclidiana evidenciaram uma característica marcante e inovadora para o ensino desse conteúdo no Brasil.
> Constatou-se também pelas análises dessas coleções que a proposta de geometria, desde a coleção de 1971 até a de 1988, sofreu reformulações. Acredita-se que essas adaptações aconteceram devido às críticas e rejeições de professores e alunos. A coleção permaneceu porque os autores fizeram outras apropriações e consideraram a cultura escolar à qual essas obras serviam (CAMARGO, 2009, p.126).

Além dessas pesquisas mais direcionadas às propostas de ensino da geometria durante o período do MMM, também houve aquelas sobre a coleção de livros do GRUEMA, entre as quais destacamos algumas a seguir:

Maria Ângela Miorim (2007) escreveu um artigo sobre vários livros didáticos, entre eles, os livros do GRUEMA de 5.ª a 8.ª séries, sob o ponto de vista da sua materialidade, seus conteúdos e sua metodologia. De maneira geral e especificamente sobre o livro da 5.ª série, Miorim afirma:

> [...] Os livros dessa coleção contemplam as modernizações editoriais daquele período. Eles apresentam dimensões mais próximas dos nossos livros didáticos atuais: 19 cm por 25,5 cm, com capas plastificadas e em uma espessura menor que os livros de períodos anteriores [...] No primeiro capítulo são apresentados os seguintes temas: curvas e regiões, segmentos de reta, polígonos, circunferências [...] Trata-se de uma abordagem que buscou, através do desenvolvimento de atividades, apresentar elementos da geometria euclidiana por meio de transformações geométricas (MIORIM, 2007, p.9-16).

Lúcia Maria Aversa Villela, em sua tese de doutorado intitulada *"GRUEMA":* uma contribuição para a história da Educação Matemática no Brasil, defendida em 2009, naUNIBAN/SP, faz um estudo da coleção dos livros do GRUEMA, com o intuito de "demarcar historicamente o papel exercido pelo 'GRUEMA' no processo de escolarização da Matemática Moderna no ensino que hoje, no Brasil, é denominado fundamental" (VILLELA, 2009, p.14).

Vale ressaltar que a autora analisa tanto a coleção de didáticos – *Curso Moderno de Matemática para as Escolas Elementares*[16], livros didáticos destinados aos alunos de 1.ª a 4.ª séries do antigo primário – como a coleção *Curso Moderno de Matemática para o ensino de 1.º Grau,* livros didáticos destinados aos alunos de 1.ª a 8.ª séries do atual ensino fundamental.

Sobre a formação, a autora conclui que as autoras do GRUEMA "aprenderam a valorizar o estudo como forma de alavancar a vida. Vi que estas formações, quer presencialmente em cursos e congressos ou por meio de leituras, transcenderam a cultura escolar brasileira" (VILLELA, 2009, p.186). E continua dizendo que a

> [...] Matemática utilizada nas Coleções "GRUEMA" estava totalmente vinculada ao ideário da MM: vê-se desde os volumes destinados às séries iniciais publicados ainda nos anos sessenta, na primeira coleção, uma preocupação com o tratamento estrutural da Matemática, preconizado pelo movimento. [...] estas profissionais não inovaram somente no conteúdo. Inovaram na forma e na maneira de trabalhar os conceitos matemáticos ao longo das duas coleções. [...] Esta aceitação pelo professorado deu-se em parte pelas inovações que estes livros trouxeram na materialidade, parte pela proposta metodológica que soube adequar e relacionar conceitos matemáticos ao nível de escolaridade de 1.º grau (VILLELA, 2009, p.186-187).

Vânia de Andrade Luz, em 2007, defendeu dissertação de mestrado *Um estudo sobre o ensino de transformações geométricas*: da reforma da Matemática Moderna aos dias atuais, pela PUC/SP. Luz analisa vários livros didáticos, incluindo os livros do GRUEMA, sob o olhar da Teoria Antropológica do Didático,[17] especificamente quanto ao conteúdo transformações geométricas, e conclui que:

> [...] o estudo é todo ele elaborado de maneira que, a partir de construções geométricas desenvolvidas pelo próprio estudante, este consiga obter uma determinada definição ou propriedade que será imediatamente institucionalizada após cada grupo de exercícios. Nesse sentido, todas as tarefas estão relacionadas de acordo com algum elemento tecnológico bem definido anteriormente ou em vias de elaboração, o que faz com que não haja tarefas isoladas [...] Nesse sentido, não se notou a existência de tipos de tarefas abertas, o que pode comprometer a completude da organização matemática proposta (LUZ, 2007, p.133).

Pelo exposto acima, podemos observar que há algumas pesquisas que têm como foco os livros da coleção GRUEMA. Esta pesquisa, diferentemente das pesquisas citadas, intenta analisar e discutir especificamente a proposta de ensino

---

[16]Autoria de Manhucia P. Liberman, Lucília Bechara Sanchez e Anna Franchi.

[17]Teoria Antropológica do Didático. Segundo Chevallard, toda atividade humana emprega uma organização representada por [$\mathrm{T}, \tau, \theta, \Theta$], essa organização consiste em realizar a tarefa T de um tipo, por meio de uma técnica τ , justificada por uma tecnologia θ, que é, por sua vez, justificada por uma teoria Θ.

da geometria a ser desenvolvida no âmbito da história cultural da educação matemática com referencial teórico-metodológico dos historiadores, a fim de colaborar na superação das lacunas existentes na história do ensino da geometria no Brasil, como também o fizeram Ferreira (2006), Leme da Silva (2008) e Camargo (2009).

A presente pesquisa está estruturada em seis capítulos: capítulo 1 – Introdução; capítulo 2 – Referencial teórico-metodológico; capítulo 3 – Movimento da Matemática Moderna; capítulo 4 – Movimento da Matemática Moderna no Brasil; capítulo 5 – A proposta para o ensino da geometria; capítulo 6 – Considerações finais.

No capítulo 2 – Referencial teórico-metodológico –, apresentaremos os teóricos que nos guiarão em nossa análise. Andre Chervel nos dará suporte para a compreensão da geometria como parte da disciplina matemática no contexto da história das disciplinas; Roger Chartier nos guiará na análise dos livros, que terá como eixo os conceitos por ele formulados sobre a produção cultural, as representações e as apropriações, e Allan Choppin será nossa referência para exame dos livros didáticos quanto às suas funções.

No capítulo 3 – Movimento da Matemática Moderna (MMM) –, trataremos da gênese do MMM internacionalmente, destacando as propostas discutidas referentes ao ensino da geometria no Seminário de Royaumont e Dubrovnik, na Comission Internacionale pour l'étude et l'amelioration de l'enseignement des mathématiques (CIEAEM), e nas Conferências Interamericanas sobre Educação Matemática (CIEM). Apresentaremos as propostas para o ensino da geometria: do SMSG e UISCM; de George Papy; de Lucienne Felix; e de Zoltan P. Dienes. Finalmente, abordaremos o declínio do MMM.

No capítulo 4 – Movimento da Matemática Moderna no Brasil –, trataremos, dentro do contexto social, econômico e político das décadas de 1960 e 1970, das primeiras iniciativas para a divulgação e implantação da MM; dos congressos brasileiros que discutiram a proposta de modernização do ensino; da legislação que propôs a MM, e do declínio do movimento no Brasil, sempre com foco nas propostas para o ensino da geometria e a participação das autoras Lucília Bechara e Manhúcia Liberman no MMM.

No capítulo 5 – A proposta para o ensino da geometria –, apresentaremos as metodologias e as estratégias para o ensino da geometria, como o uso da cor, do desenho geométrico e dos quadrinhos. Faremos uma comparação entre os livros experimentais editados pela gráfica LPM e os livros editados pelo CEN. Discutiremos e analisaremos a proposta de ensino da geometria nos livros de 5.ª a 8.ª séries, tendo como referência as apropriações das autoras diante do ideário do MMM, as ideias de Piaget, a legislação e as produções internacionais. Entretanto, faremos algumas incursões nos livros de 1.ª a 4.ª séries do GRUEMA e no livro *Matemática – Curso Moderno* de Osvaldo Sangiorgi, a fim de esclarecermos alguns pontos que consideramos necessários.

No capítulo 6 – Considerações finais –, apresentaremos as conclusões sobre a proposta de ensino da geometria nos livros do GRUEMA.

2. REFERENCIAL TEÓRICO-METODOLÓGICO

A presente pesquisa, *A proposta de ensino de geometria nos livros do GRUEMA*, será desenvolvida no âmbito da "história cultural da educação matemática", ou seja, como "uma especificidade da história da educação" (LEME DA SILVA; VALENTE, 2009, p.11). Portanto, o referencial teórico-metodológico será o elaborado pelos historiadores para a escrita da história.

Segundo Bloch (2001),[18] a história é uma das formas de conhecimento, é o historiador que faz a história ao elaborar questões sobre um acontecimento, logo, história não é o passado, mas uma das maneiras como o homem se relaciona com o passado. O passado deixa vestígios no presente, e o historiador, como um investigador, segue estes vestígios a fim de encontrar documentos que bem articulados lhe permitam construir uma história. E cada novo vestígio possibilitará uma nova história, assim a história está sempre em movimento. Bloch (2001) nos diz: "O passado é, por definição, um dado que nada mais modificará. Mas o conhecimento do passado é uma coisa em progresso, que incessantemente se transforma e aperfeiçoa" (BLOCH, 2001, p.75).

Os historiadores, neste contexto, não se baseiam somente em registros oficiais, porque "em geral expressam o ponto de vista oficial... tais registros necessitam ser suplementados por outros tipos de fonte", como registros visuais, orais, estatísticos (BURKE, 1992, p.13).

O ofício do historiador não é apresentar os fatos que já ocorreram, mas olhar o passado sob outros pontos de vista, isto é, levar em consideração as opiniões de pessoas comuns, pois "nossas mentes não refletem diretamente a realidade. Só percebemos o mundo através de uma estrutura de convenções, esquemas e estereótipos, um entrelaçamento que varia de uma cultura para outra" (BURKE, 1992, p.15).

Mais especificamente, o ofício do historiador cultural da educação matemática, segundo Leme da Silva e Valente (2009),

---

[18] Marc Bloch escreveu o livro *Apologia da história ou O ofício de historiador*, entre 1943 e 1944, enquanto estava preso pelo regime nazista por participar da resistência francesa. Foi fuzilado em 1944, e este livro inacabado foi publicado pela 1.ª vez em 1949. O volume utilizado nesta pesquisa é uma edição de 2001.

> [...] será o de saber como historicamente foram construídas representações sobre os processos de ensino e aprendizagem [que] passaram a ter um significado nas práticas pedagógicas dos professores em seus mais diversos contextos e épocas (LEME DA SILVA; VALENTE, 2009, p. 24).

Assim, nosso objeto de pesquisa é a proposta de ensino da geometria nos livros do GRUEMA, os quais serão nossa principal fonte de pesquisa. No entanto, outras fontes serão utilizadas, como os arquivos APLB, APML, entrevistas com as autoras, a legislação vigente, as propostas internacionais de ensino da geometria, o contexto social da época, com o propósito de contribuir para a história cultural da educação matemática.

Mas para que serve a história? Talvez não seja possível responder, porém, segundo Chartier (1990), uma história ajuda a compreender as heranças acumuladas que nos transformaram no que somos, por isso é fundamental conhecermos a história.

De acordo com Leme da Silva e Valente (2009), a produção da história cultural da educação matemática servirá ao professor de matemática, se considerarmos que:

> O trabalho do historiador cultural da educação matemática refere-se àquele de construção de ultrapassagens de relações ingênuas, míticas, românticas e memorialísticas sobre as práticas do ensino de matemática realizadas noutros tempos. A utilidade de sua produção – cujo resultado é uma história cultural da educação matemática – é a de considerar que um professor de matemática que mantenha uma relação a-histórica com os seus antepassados profissionais possa, com a apropriação desta história cultural, se relacionar de modo menos fantasioso e mais científico com esse passado, isso tende a alterar as suas práticas cotidianas, que passam a ser realizadas de modo mais consistente. [...] a alteração da relação que o professor de matemática tem com o passado profissional de seu ofício leva, assim, a uma mudança de qualidade de suas práticas na realidade presente (LEME DA SILVA; VALENTE, 2009, p.30-31).

Mas como escrever esta história? Segundo Certeau (1990), uma produção histórica, sob o ponto de vista do historiador, é uma produção científica constituída de três etapas: *a produção histórica,* que consiste na construção do fato histórico a partir de questões levantadas pelo historiador sobre um acontecimento; a *metodologia,* que se traduz na identificação, interpretação e construção das fontes que darão consistência ao fato histórico e, finalmente, o *processo de validação,* o trabalho escrito por meio do qual a comunidade é convencida ou não do resultado obtido.

Roger Chartier (1990), em sua obra *A história cultural*: entre práticas e representações, propõe uma nova forma de interrogar a realidade, ou seja, deve-se levar em consideração, dentro de um contexto social, o conjunto de fatores que participam da produção dos objetos culturais, mas também os fatores que interferem na maneira como estes objetos culturais são recebidos. Assim, para Chartier (1990), a história cultural "tem por principal objetivo identificar o modo como em diferentes lugares e momentos uma determinada realidade cultural é construída, pensada, dada a ler" (CHARTIER, 1990, p.17).

Chartier (1990) considera como *objeto cultural* desde as imagens que o homem produz de si mesmo, da sociedade em que vive, do mundo que o cerca, até a produção e a circulação dos objetos de arte e de literatura e os materiais oriundos da cultura popular produzidos na vida cotidiana. Há ainda que se tomar em conta o *sujeito* que produz os objetos culturais e os recebe; bem como a *prática e o processo,* ou seja, os meios pelos quais se produzem, se difundem e se transmitem os objetos culturais. Importam principalmente os *padrões* que estão por trás dessa produção, como as visões de mundo, os sistemas de valores, os modos de vida, as ideias disseminadas por meio de correntes e movimentos de diversos tipos.

Com base nas ideias de Chartier (1990), podemos considerar que os livros da coleção GRUEMA são um objeto cultural. O aluno, ao manusear e ler um desses livros, também está produzindo cultura, ou seja, a leitura é uma prática criadora, pois o leitor recria o texto original de uma nova maneira, de acordo com as suas competências textuais e especificidades, pela sua capacidade de comparar o texto com outros que leu. Portanto, uma prática cultural não é constituída apenas no momento da produção de um livro, mas também no momento da recepção.

A história cultural defendida por Chartier (1990) se apoia nas noções de práticas, representações e apropriações. Na visão do autor, as práticas são as maneiras como são produzidos os objetos culturais; as representações são os modos como estes objetos culturais são vistos e sentidos; e as apropriações são as maneiras como são usados ou interpretados estes objetos culturais. O autor nos diz:

> A apropriação, a nosso ver, visa a uma história social dos usos e das interpretações, referidas a suas determinações fundamentais e inscritas nas práticas específicas que as produzem. Assim, voltar a atenção para as condições e os processos que muito concretamente sustentam as operações de produção do sentido (na relação de leitura, mas em tantos outros também) é reconhecer, contra a antiga história intelectual, que nem as inteligências nem as ideias são desencarnadas, e, contra os pensamentos do universal, que as categorias dadas como invariantes, sejam elas filosóficas ou fenomenológicas, devem ser construídas na descontinuidade das trajetórias históricas (CHARTIER, 1990, p.26).

As autoras, ao produzirem os livros, movimentam determinadas práticas culturais e representações, e o livro depois de produzido poderá difundir novas representações e contribuir para a produção de novas práticas. Segundo Chartier (1990):

> O essencial é, portanto, compreender como os mesmos textos – sob formas impressas possivelmente diferentes – podem ser diversamente aprendidos, manipulados, compreendidos [...] A leitura não é somente uma operação abstrata de intelecção: é pôr em jogo o corpo, é inscrição num espaço, relação consigo ou com o outro. Por isso devem ser reconstruídas as maneiras de ler próprias a cada comunidade de leitores (CHARTIER, 1990, p.27).

Na construção de um livro podem ocorrer várias práticas culturais, por exemplo: de ordem autoral, ou seja, o modo de escrever, de pensar e expor o conteúdo que fará parte do livro; ou de ordem editorial, ou melhor, a sua materialidade, o tipo de papel, o tipo de impressão. Entretanto, as autoras também se depararam com as representações: o que se considera um livro didático; quais conteúdos matemáticos o livro deve conter; qual metodologia a ser utilizada; os ideais preconizados pelo MMM, os livros já produzidos com base nessas representações. O uso e as interpretações que as autoras fazem dessas representações e transmitem em seus livros são as apropriações que as autoras fizeram das leituras dessas representações, e, dependendo de como são utilizadas, essas representações podem criar novas representações, que poderão ter uma ressonância maior ou menor no circuito do leitor ou na sociedade mais ampla.

Mas o que são os livros didáticos e como diferenciá-los dos outros livros? Bittencourt (2004) menciona que:

> A familiaridade com o uso do livro didático faz com que seja fácil identificá-lo e estabelecer distinções entre ele e os demais livros. Entretanto, trata-se de um objeto cultural de difícil definição, por ser obra bastante complexa, que se caracteriza pela interferência de vários sujeitos em sua produção, circulação e consumo. Possui ou pode possuir funções diferentes, dependendo das condições, do lugar e do momento em que é produzido e utilizado nas diferentes situações escolares. É um objeto de "múltiplas facetas", e para sua elaboração e uso existem muitas interferências (BITTENCOURT, 2004, p.301).

Valente (2007, p. 20) nos fala especificamente sobre os livros didáticos de matemática: "Talvez seja a matemática escolar a disciplina que tenha sua história mais intimamente ligada e estampada nos livros didáticos".

Choppin (2004) sustenta que não há uma definição exata para *livro didático,* mas o considera como a intersecção da literatura religiosa com a literatura técnica ou profissional e a literatura de lazer. Diz o autor:

> A imagem da sociedade apresentada pelos livros didáticos corresponde a uma reconstrução que obedece a motivações diversas, segundo a época e local, e possui como característica comum apresentar a sociedade mais do modo como aqueles que, em seu sentido amplo, conceberam o livro didático gostariam que ela fosse, do que como ela realmente é. Os autores de livros didáticos não são simples espectadores de seu tempo: eles reivindicam um outro *status*, o de agente (CHOPIN, 2004, p.557).

O livro didático como objeto cultural se insere em um sistema educativo que determina uma prática cultural que, ao mesmo tempo, inculca naqueles que a ele se submetem determinadas representações destinadas a moldar certos padrões de caráter e a viabilizar um determinado repertório que será importante para a vida social. Mas também é um produto cultural, que em sua dimensão material pode ser considerado uma mercadoria ligada ao mundo editorial.

Choppin (2004), da mesma forma que Bittencourt, ressalta que o livro didático pode possuir múltiplas funções. O autor destaca quatro funções essenciais, que dependem do ambiente sociocultural, da época, das disciplinas, dos níveis de ensino, dos métodos e formas de utilização: referencial; instrumental; ideológica; documental.

O autor considera que o livro didático tem função referencial quando o livro "constitui o suporte privilegiado dos conteúdos educativos, o depositário dos conhecimentos, técnicas ou habilidades que um grupo social acredita que seja necessário transmitir às novas gerações". Normalmente seguem de perto os programas de ensino (CHOPPIN, 2004, p.553).

O livro didático tem função instrumental quando "põe em prática métodos de aprendizagem, propõe exercícios ou atividades", a fim de "facilitar a memorização dos conhecimentos, favorecer a aquisição de competências disciplinares ou transversais, a apropriação de habilidades" (CHOPPIN, 2004, p.553).

A função ideológica do livro didático se dá quando este se torna "um instrumento privilegiado de construção de identidade" como a "moeda e a bandeira como símbolo da soberania nacional". Assume, assim, um "papel político" (CHOPPIN, 2004, p.553).

A função documental ocorre quando o livro didático se constitui em "um conjunto de documentos, textuais ou icônicos, cuja observação ou confrontação podem vir a desenvolver o espírito crítico do aluno" (CHOPPIN, 2004, p.553).

Ao se levarem em consideração as diversas funções do livro didático, consideramos que os livros da coleção GRUEMA exercem a função referencial, uma vez que no Brasil há uma legislação, a LDB n. 5.692/1971, que especifica as diretrizes gerais que os programas de ensino devem ter. E cada Estado da Federação apresenta detalhadamente o programa de ensino. No nosso caso, o Estado de São Paulo apresentou os Guias Curriculares. Assim, o Estado está presente no livro didático e interfere indiretamente na elaboração dos conteúdos escolares a serem ensinados, e, posteriormente, cria instrumentos para avaliá-lo.

Também reputamos que a coleção tem a função instrumental, pois os livros do GRUEMA, além de explicitar os conteúdos escolares ao apresentarem exercícios, atividades, sugestões de trabalhos individuais ou em grupo, e formas de avaliação, associam o conteúdo ao método de ensino com uma metodologia que favorece a apropriação de habilidades, como o desenho geométrico, além de propiciar a aquisição de conhecimentos matemáticos de forma não compartimentada.

Esta associação entre conteúdo e método deve ser entendida sob a óptica de Chervel (1990), que considera que os conteúdos e os métodos não podem ser entendidos separadamente, pois os conteúdos escolares não são adaptações do conhecimento científico para apresentar ao aluno, mas a escola se constitui o lugar onde se criam as disciplinas escolares.

Chervel (1990) considera que as disciplinas escolares são “criações espontâneas e originais do sistema escolar”, ou seja, as disciplinas escolares são, ao mesmo tempo, o produto histórico do trabalho escolar que seleciona os conteúdos escolares dependendo das finalidades específicas e decorrentes de um complexo sistema de valores e de interesses próprios da escola e do papel por ela desempenhado na sociedade. Nesse sentido, Chervel (1990) nos diz:

> Uma disciplina escolar comporta não somente as práticas docentes da aula, mas também as grandes finalidades que presidiram sua constituição e o fenômeno de aculturação de massa que ela determina, então, a história das disciplinas escolares pode desempenhar um papel importante não somente na história da educação, mas na história cultural (CHERVEL, 1990, p.184).

Para Chervel (1990), a disciplina escolar relaciona-se com o papel do conhecimento na medida em que funciona como instrumento de poder de determinados setores da sociedade que a utiliza como mantenedora das desigualdades sociais. Assim, o estudo histórico das disciplinas escolares passa pelo papel exercido pela escola em determinada época.

Chervel (1990) considera a escola como uma instituição onde se produz o conhecimento, um saber próprio, com a participação de agentes internos e externos, e este conhecimento está inserido na cultura escolar, portanto as disciplinas escolares devem ser analisadas como parte desta cultura, a fim de que se entendam as relações estabelecidas com o exterior e com a cultura geral da sociedade. As transformações que ocorrem nas disciplinas escolares têm como objetivo tornar possível o ensino, isto é, “construir o ensinável” (CHERVEL 1990, p. 200).

Cabe ressaltar que entendemos a cultura escolar como o fez Julia (2001):

> Um conjunto de normas que definem conhecimentos a ensinar e condutas a inculcar, e um conjunto de práticas que permitem a transmissão desses conhecimentos e a incorporação desses conhecimentos; normas e práticas coordenadas a finalidades que podem variar segundo as épocas (JULIA, 2001, p.10).

Chervel (1990) considera, ainda, que “construir o ensinável” em uma disciplina escolar significa transitar entre dois polos:

> Sua transformação como sua constituição estão inteiramente inscritas entre dois polos: o objetivo a alcançar e a população de crianças e adolescentes a instruir. É aí que se devem encontrar as fontes da mudança pedagógica. Pois é ao mesmo tempo, através de suas finalidades e através de seus alunos que elas participam da cultura e da vida social de seu tempo (CHERVEL, 1990, p. 198).

A partir destas constatações, Chervel (1990) sustenta que a disciplina escolar é constituída por:

> Uma combinação, em proporções variáveis, conforme o caso, de vários constituintes: um ensino de exposição, os exercícios, as práticas de incitação e de motivação e um aparelho docimológico, os quais, em cada estado da disciplina, funcionam evidentemente em estreita colaboração, do mesmo modo que cada um deles está, à sua maneira, em ligação direta com as finalidades (CHERVEL, 1990, p.207).

A exposição, pelo professor ou pelo manual escolar, de um conteúdo de conhecimento é o que distingue a aprendizagem de uma disciplina escolar do aprendizado familiar ou da sociedade.

Os conteúdos constituem o eixo central de uma disciplina. A escolha dos conteúdos escolares depende das finalidades específicas e não decorre apenas dos objetivos das ciências de referência, mas de um complexo sistema de valores, de interesses próprios da escola e do papel por ela desempenhado na sociedade.

Os exercícios e o seu controle são indispensáveis para a fixação da disciplina. Eles constituem o núcleo da disciplina e sua boa qualidade é fundamental, pois devem colocar em jogo a inventividade, a criatividade, a espontaneidade, ou o espírito de rigor nas deduções ou na aplicação das regras, ao contrário da lição que era aprendida de cor e recitada na classe.

As práticas de motivação e de incitação ao estudo devem ser consideradas ao se escolherem os conteúdos e os métodos que privilegiem o engajamento espontâneo nos exercícios.

As provas, internas ou externas, verificam o desempenho dos alunos e devem conter zonas qualitativas ou quantitativas e fornecer uma escala de medida.

O estudo dos conteúdos explícitos do ensino de uma disciplina pode nos levar ao fenômeno da *vulgata,* isto é:

> Em cada época, o ensino dispensado pelos professores é, *grosso modo*, idêntico, para a mesma disciplina e para o mesmo nível. Todos os manuais ou quase todos dizem então a mesma coisa, ou quase isso. Os conceitos ensinados, a terminologia adotada, a coleção de rubricas e capítulos, a organização do *corpus* de conhecimentos, mesmo os exemplos utilizados ou os tipos de exercícios praticados são idênticos, com variações aproximadas (CHERVEL, 1990, p.203).

Os períodos em que ocorre o fenômeno da *vulgata* são períodos estáveis. Mas “as vulgatas evoluem e se transformam”, e dessa transformação surge um manual inovador, que passa a conviver com o antigo sistema. Esse manual inovador gera uma instabilidade até que comece a ser imitado, tornando-se uma nova *vulgata.*

O MMM propunha novos conteúdos a serem ensinados por meio de uma nova metodologia; a escola começa a atender uma grande massa de alunos que nesse período passaram a ter acesso ao ensino secundário. Há, então, a necessidade de novos manuais didáticos.

Nesse contexto, é possível o surgimento de manuais inovadores que podem dar origem a uma nova organização da disciplina. Esses manuais inovadores podem, segundo Chervel (1990),

> Revelar importantes elementos constituintes da trajetória histórica de uma dada disciplina escolar. Caberá ao historiador indagar em que medida o aparecimento de uma nova proposta – apresentada num manual audacioso e inédito – foi capaz de fertilizar produções didáticas posteriores e de ser apropriada por elas, a ponto de converter-se numa nova vulgata que, em certa medida, poderá atestar o sucesso da nova proposta contida no manual transformador (CHERVEL, 1990, p.142).

A aceitação ou não de um manual didático que poderá torná-lo ou não uma vulgata depende das normas e das práticas da cultura escolar, isto é, há a necessidade de considerar os professores, pois são eles os responsáveis pela observação das ordens e das práticas, mas também encarregados de utilizar dispositivos pedagógicos para facilitar a sua aplicação.

Levaremos em conta estes aspectos teórico-metodológicos a fim de discutir e analisar os livros do GRUEMA, no que se refere à proposta de ensino da geometria. Para tanto, no próximo capítulo faremos a contextualização do movimento internacional para a renovação do ensino da matemática, mais especificamente da Geometria.

3. MOVIMENTO DA MATEMÁTICA MODERNA

As duas Guerras Mundiais provocaram uma diminuição das discussões internacionais acerca da modernização do ensino da matemática iniciadas com entusiasmo no começo do século XX.

O desenvolvimento científico e tecnológico ocorrido durante esse período colocou em xeque o ensino secundário, principalmente no tocante às ciências, aí incluída a Matemática, que passou a ser uma ferramenta importante para o desenvolvimento das outras ciências, como a Física e a Biologia. Mais ainda, houve a constatação de que as ciências ensinadas e desenvolvidas nas universidades estavam dissociadas das ciências ensinadas no curso secundário.

Neste capítulo, destacaremos três grupos que se propuseram a realizar pesquisas para melhorar o ensino da matemática: a *Comission Internacionale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques* (CIEAEM), que publicou o livro *L'enseignement des mathématiques; a* Organização Europeia de Cooperação Econômica (OECE), que elaborou *Um Programme Moderne de Mathématiques pour L'enseignement Secondaire,* e a Organização dos Estados Americanos (OEA), que promoveu as Conferências Inter-Americanas sobre a Educação Matemática (CIAEM).

A CIEAEM foi criada oficialmente em 1950 por Caleb Gattegno,[19] Willy Servais, Lucienne Felix[20] e Jean Piaget.[21] Os trabalhos de pesquisa individuais de seus membros remontam à década de 1940, principalmente aqueles voltados à compreensão do desenvolvimento do pensamento da criança, ou seja, para a metodologia de ensino. Os trabalhos da comissão foram divulgados no *Le bulletin de l'association des professeurs de mathématiques de France*. O CIEAEM promoveu seminários e coordenou trabalhos em vários países, a fim de colocar o ensino da matemática sobre uma base científica a partir dos conhecimentos que pudessem contribuir para o seu entendimento: a psicologia, a antropologia, a sociologia, a epistemologia e a lógica; recomendava que, ao propor novos currículos para a

---

[19] Calleb Gattegno (1911-1988), doutor em Matemática e Psicologia, atuou como diretor do Instituto de Altos Estudos Científicos, no Cairo, Egito. Entre 1945 e 1957 foi professor de Matemática, primeiro na Universidade de Liverpool e, mais tarde, no Instituto de Educação, Universidade de Londres, Reino Unido.

[20] Lucienne Felix (1901-1994), pedagoga e matemática, autora de livro didático de geometria.

[21] Jean William Fritz Piaget (1896-1980), epistemólogo suíço, considerado o maior expoente no estudo do desenvolvimento cognitivo.

atualização dos temas matemáticos ensinados, a introdução de novas reorganizações curriculares ou de novos métodos de ensino estes aspectos deveriam ser levados em consideração. Nos encontros promovidos pelo CIEAEM também dava-se destaque ao relato de experiências realizadas em vários países.

Em 1955, o CIEAEM publicou, com repercussão mundial, o livro *L´enseignement des mathématiques*, com artigos dos fundadores da comissão: Jean Piaget – As estruturas matemáticas e as estruturas operatórias da inteligência; Ewart Beth – Reflexos sobre a organização e o método de ensino da matemática; Jean Dieudonné – A abstração em matemática e a evolução da álgebra; André Lichnerowics – A introdução do espírito da álgebra moderna na álgebra e geometria elementares; Gustave Choquet – Sobre o ensino da geometria elementar; e Caleb Gattegno – A pedagogia da matemática.

Jean Piaget (1955), em seu artigo, considerava que a ordem da construção das noções e das operações geométricas no desenvolvimento espontâneo da criança não é conforme a ordem do desenvolvimento histórico da Geometria, mas se aproxima mais à dos grupos fundamentais sobre os quais se assentam os diversos tipos de espaço; assim, as estruturas topológicas seriam as primeiras a serem observadas pelas crianças.

Após as duas grandes Guerras Mundiais, em 1948, foi criada a Organização Europeia de Cooperação Econômica (OECE). Em 1958, a OECE criou a Secção de Pessoal Científico e Técnico da Organização, com o propósito de empreender uma ação internacional para aumentar, nos países-membros, o número e a quantidade de pessoal científico e técnico.

Neste mesmo ano, a OECE realizou pesquisas nos países associados,[22] com o intuito de verificar a situação do ensino nas escolas secundárias, para alunos na faixa etária dos onze aos dezoito anos. Em 1959, os resultados desta pesquisa foram discutidos no *Cercle Culturel de Royaumont*, em Asnières-sur-Oise, França.

Fehr (1971), ao realizar um balanço do MMM, relembra que as propostas apresentadas que visavam à modernização do ensino da matemática, no Seminário

[22] Países participantes da OECE: Áustria, Bélgica, Canadá, Dinamarca, França, Alemanha, Grécia, Irlanda, Itália, Luxemburgo, Países Baixos, Noruega, Suécia, Suíça, Turquia, Reino Unido, Estados Unidos, Iugoslávia.

de *Royaumont*, recomendavam que o ensino da geometria deveria levar em consideração os seguintes aspectos:

> - desenvolver o conceito de espaço como um conjunto com subconjuntos especiais, que possuem estruturas vinculadas com outras, levar em conta os espaços afins, euclidianos e vetoriais;
> - desenvolver relações precisas entre a reta e o conjunto dos números reais;
> - desenvolver a compreensão das principais transformações aplicadas a diferentes geometrias e grupos de transformações, em especial os espaços afins e euclidiano;
> - desenvolver a compreensão da estrutura axiomática nesta ordem: a reta afim, o plano afim, o espaço euclidiano e o espaço vetorial;
> - desenvolver a destreza na aplicação de diversos métodos geométricos para solução de problemas originais, tanto de índole Matemática como de aplicação em outros campos (FEHR, 1971, p. 58, tradução nossa).

A proposta da Matemática Moderna elaborada em *Royaumont* supervalorizou a Álgebra ao considerá-la como o elemento unificador da Matemática. Também tiveram destaque a orientação axiomática, a linguagem e a simbologia matemática, a geometria vetorial e a crítica ao ensino da geometria de Euclides. Tornou-se célebre o discurso de Jean Dieudonné: “Se eu quisesse resumir numa frase todo o programa que tenho em mente, fá-lo-ia com o *slogan*: Abaixo Euclides!” (DIEUDONNÉ apud GUIMARÃES, 2007, p.35). Esta afirmação critica o ensino da geometria que se praticava.

Entretanto, Dieudonné não pretendia desvalorizar o ensino da geometria no secundário, pois considerava o seu ensino importante para a formação e o desenvolvimento, nos alunos, da noção de espaço. O que ele queria era chamar a atenção para os métodos utilizados para ensinar a geometria de Euclides, pois as noções fundamentais como ponto, reta, ângulo e outras eram apresentadas intuitivamente e era utilizada a noção de triângulo, enquanto Dieudonné reputava a noção de vetor mais útil e fecunda.

> As minhas críticas visam, portanto, não a finalidade, mas os métodos do ensino da Geometria; afirmo, sobretudo que seria muito melhor basear este ensino, não em noções e resultados artificiais que, na maior parte das aplicações não têm nenhuma utilidade, mas em noções fundamentais que dominam e esclarecem todas as questões onde a Geometria intervém. No momento em que, por exemplo, a noção de vector tem uma importância capital em toda a ciência moderna, a noção de triângulo é artificial e não tem praticamente nenhuma aplicação [...] Se se introduz os métodos dedutivos no ensino da Álgebra, torna-se possível que este conhecimento sirva ao ensino da Geometria. A igualdade de triângulos perde, por conseguinte, a sua importância e as noções das isometrias [...] tornam-se primordiais (OECE apud GUIMARÃES, 2007, p. 35-36).

As orientações metodológicas para o ato de ensinar, isto é, para o papel do professor, do aluno e as atividades de aprendizagem, também foram objeto de discussões em Royaumont. Visou-se à valorização da compreensão em oposição à mecanização e à repetição de exercícios. Buscou-se a valorização da aprendizagem pela descoberta, pela intuição, mas com o rigor matemático. Nesse sentido, recomendou-se que o estudo da geometria deveria ser iniciado com o estudo de objetos concretos e com trabalhos manipulativos como dobragem, corte e colagem.

Segundo essas orientações, o processo de aprendizagem a partir da observação e da experiência permitiria a compreensão e a valorização do papel do aluno, e os professores deveriam deixar seus alunos descobrirem por si sós, por meio da manipulação de objetos concretos, as noções da geometria. Para isso as tarefas propostas não deveriam resumir-se a exercícios ou problemas de aplicação direta dos conhecimentos adquiridos, mas em tarefas que:

> [...] façam apelo ao interesse do aluno, ao seu gosto, ao seu desejo de investigação e que desenvolvam as [suas] faculdades de análise e de invenção [...] "O ensino da Geometria dedutiva nas escolas secundárias deve ser baseado numa experiência prévia satisfatória da Geometria intuitiva ou física" (OECE, 1961, apud GUIMARÃES, 2007, p.41).

Cabe ressaltar que as ideias de Jean Piaget contidas no livro *La Genése Du Nombre chez l'Enfant* foram citadas no relatório do seminário. Neste trabalho, Piaget considerava haver uma correspondência entre as estruturas matemáticas, propostas pelo grupo Bourbaki[23] e as estruturas operatórias da inteligência, isto é, os bourbakistas apresentam a Matemática a partir de três estruturas fundamentais: as estruturas topológicas; as estruturas algébricas; e as estruturas de ordem (PIAGET apud GUIMARÃES, 2007, p.23).

Sob este ponto de vista, Piaget recomendava que a psicologia deveria ser a base da didática da matemática:

> Se o edifício da Matemática se assenta sobre estruturas que, por sua vez, correspondem às estruturas da inteligência, é sobre a organização progressiva destas estruturas operatórias que é necessário basear a didática da Matemática (PIAGET apud GUIMARÃES 2007, p.23).

[23] Nicolas Bourbaki é o pseudônimo coletivo sob o qual um grupo de matemáticos escreveu uma série de livros que expunham a matemática avançada moderna, que começaram a ser editados em 1935. Com o objetivo de fundamentar toda a matemática na teoria dos conjuntos, o grupo lutou por mais rigor e simplicidade, inovando a terminologia e os conceitos. Enquanto Nicolas Bourbaki é uma personagem inventada, o grupo Bourbaki é oficialmente conhecido como a Associação dos Colaboradores de Nicolas Bourbaki, que tem um gabinete na École Normale Supérieure, em Paris. Os cinco membros fundadores do grupo foram Henri Cartan, Claude Chevalley, Jean Delsarte, Jean Dieudonné e André Weil.

Uma das conclusões do Seminário de Royaumont está expressa na resolução:

> Todos os participantes da sessão de estudos declaram-se de acordo quanto à necessidade de modernizar o ensino da matemática. Para realizar esta modernização é indispensável que cada país redija novos livros didáticos e novos manuais. Este trabalho ficará muito facilitado se um plano sinótico indicando as diferentes possibilidades de reforma for posto à disposição dos países, para ajudá-los a redigir seus próprios manuais escolares e a submetê-los a experiências sistemáticas (OECE, 1959, apud GEEM, 1965, p. 1).

A proposta de reforma delineada em Royaumont teve seu detalhamento em 1960, em Dubrovnik, onde foi elaborado *Um Programme Moderne de Mathématiques pour L'enseignement Secondaire*.[24] Nesta proposta recomendou-se que um programa para o ensino da geometria para alunos de 11 a 15 anos deveria observar três princípios:

- não empregar uma terminologia difícil e prematura. A linguagem matemática correta será empregada no seu devido tempo. Definir as palavras novas no contexto em que são empregadas;
- um modelo material é a base a partir da qual pode-se desenvolver a abstração matemática;
- é essencial que o aluno aprenda a pensar de uma maneira criadora e intuitiva (OECE, 1961, apud GEEM, 1965, p. 68-69).

Recomendou-se, ainda, que o programa para o ensino de geometria tenha por objetivo:

- estabelecer, intuitivamente, alguns resultados geométricos sobre as bases da experiência física e da observação;
- empregar de maneira dedutiva os resultados assim obtidos na justificação de outros resultados, procurar propriedades invariantes sob as transformações físicas e algébricas;
- integrar métodos variados (algébricos e de síntese) na resolução de um problema de geometria;
- desenvolver, na medida em que o curso avança, encadeamentos dedutivos curtos que levam às propriedades fundamentais que, no início do curso, o aluno admitiu como verdadeiras porque ele não poderia se servir dos métodos da demonstração no momento em que as propriedades foram introduzidas (OECE, 1961, apud GEEM, 1965, p.69).

Apresentou, também, uma lista com os assuntos que deveriam ser abordados:

- introdução à noção de vetores como segmentos orientados. Adição, subtração, multiplicação por um escalar;
- o ângulo: propriedades dos ângulos estudados em ligação com as retas paralelas, os polígonos, circunferências. Estudo das propriedades dos ângulos nos paralelogramos e nos triângulos;

[24] *Um programa moderno de matemática para o ensino secundário*. Traduzido por Jacy Monteiro e editado pelo GEEM em 1965.

- simetria: o triângulo isósceles;
- transformações estudadas de um ponto de vista físico e intuitivo para a pesquisa das propriedades das figuras. As transformações serão efetuadas por meio de: i) papel dobrado; ii) reflexão; iii) rotação; iv) translação; v) recorte; vi) pontos espaçados regularmente sobre circunferências e os polígonos regulares;
- transformações algébricas simples: $x' = a_1x + b_1$; $y' = a_2x + b_2$, com valores de a_1, a_2, b_1, b_2 que ilustram apenas as transformações afins;
- representações gráficas simples em álgebra; estudo de $y = mx + b$ e $y = ax^2 + bx + c$ e desenvolvimento das ideias básicas para o estudo do cálculo. A relação entre reta e parábola e os coeficientes nas equações;
- ideias fundamentais incluídas no conceito de área, de volume, teorema de Pitágoras e suas extensões;
- propriedades não métricas da reta e do plano e introdução à notação dos conjuntos. A figura geométrica considerada como um conjunto de pontos;
- semelhança e leis associadas nas áreas e volumes;
- trigonometria: seno, cosseno, tangente e suas aplicações;
- emprego de curtas "demonstrações lógicas" para justificar algumas das propriedades geométricas vistas anteriormente numa base intuitiva (OECE, 1961, apud GEEM, 1965, p.70-71).

Com base nessas recomendações, cada país participante da Comissão se comprometeu a elaborar novos programas experimentais para a modernização do ensino da matemática.

Nas Américas, também foi discutida a necessidade de uma reforma para o ensino da matemática com a realização da 1.ª Conferência Inter-Americana sobre a Educação Matemática (CIAEM), realizada em Bogotá, em dezembro de 1961, com representantes dos Estados Unidos, Chile, Argentina, Uruguai, França, México, Suíça e Brasil. Nesta conferência, foram abordados os seguintes temas: formação de professores, tendências para o ensino da matemática, sugestões de programas. Desta conferência destacamos duas palestras: de Howard Fehr, dos Estados Unidos, de Gustave Choquet, da França, e Omar Catunda, do Brasil.

Howard Fehr, ao tratar da *Reforma de La enseñanza de La Geometría,* discorreu sobre o desenvolvimento e o ensino da geometria, apontou seus problemas e propôs reformas no ensino, que considerava coerentes com as recomendações de Dubrovnik. Fehr apresentou um programa para o ensino da geometria na escola secundária, com intuito de preparar o aluno para a utilização da geometria na física, seguindo as ideias apresentadas em Royaumont por Dieudonné, Choquet e por Catan,[25] em Bolonha. O programa proposto levou em consideração que:

---

[25] Henri Paul Cartan (1904-2008), matemático francês.

> Antes de ingressar na escola secundária, com a idade de 11 anos ou um pouco mais, a criança já adquiriu grande quantidade de ideias geométricas, todas elas de natureza física. Aproveitando estes conhecimentos e utilizando métodos de laboratório tais como os de medir, dobrar, desenhar e construir modelos, o aluno pode adquirir e empregar entre os 12 e os 15 anos toda a informação contida nos elementos de Euclides sobre geometria plana e do espaço. Durante este período e pouco a pouco, pode abstrair os elementos conceituais essenciais, tais como “ponto”, “figura”, “reta”, “plano”, “espaço”, como construções puramente mentais e generalizar as relações entre estes elementos até o ponto de estabelecer pequenas cadeias dedutivas de teoremas sobre algo, um pouco menos que uma base axiomática (FEHR, 1962, p.46, tradução nossa).

Fehr (1961) ainda ressaltou que os alunos de 14 ou 15 anos desenvolvem o raciocínio dedutivo na álgebra ao estudarem os sistemas de números e a estrutura algébrica. Aos 15 ou 16 anos, os alunos deverão, ao estudarem a geometria afim, ser capazes de combinar a álgebra com a geometria.

Gustave Choquet discorreu sobre *Las Nuevas Matematicas y La Enseñanza,* com a tônica na urgência da elaboração de livros pelos matemáticos para orientar o ensino secundário. Esses livros deveriam considerar que os alunos necessitariam “pensar em termos de conjuntos, de operações, em linguagem simples, universal e precisa da álgebra dos conjuntos”, adquirir os rudimentos da lógica, isto é, “estabelecer a forma negativa de uma proposição, compreender o sentido das palavras “e”, “ou”, “para todo”, “existe”, relacionando estes termos com o estudo da gramática do idioma do aluno; “conceber claramente a noção de função” e as “relações de equivalência”. Quanto à geometria, eles deveriam estudar as noções de topologia e “renunciar definitivamente aos procedimentos caducos baseados nos casos de igualdade de triângulos”, dando ênfase à “estrutura vetorial do plano e do espaço” como produto escalar, e esquecer “os teoremas da geometria métrica que se acumularam durante séculos” (CHOQUET, 1962, p. 87-88, tradução nossa).

O representante brasileiro, Omar Catunda, apresentou a tese *A preparação dos professores de matemática*, na qual relatou uma série de problemas concernentes ao ensino de matemática no nível secundário brasileiro:

> Os professores do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de São Paulo, sentimos que o ensino ministrado nesta faculdade, apesar de geralmente ser reconhecido como o melhor do país para a formação científica, está longe de ser satisfatório para preparar futuros professores [...] A estrutura de ensino em meu país dificilmente poderá resistir a uma reforma radical, por mais racional que seja [...] A introdução prematura do ensino da álgebra com seu formalismo, ao meu ver, é uma das maiores falhas do ensino secundário no Brasil, já que os professores dão grande importância às definições, regras e fórmulas que o aluno deve aprender de memória com enorme prejuízo ao desenvolvimento do raciocínio [...] O professor Dieudonné alega que o ensino secundário

> perde muito tempo com a geometria clássica, segundo o modelo de Euclides. No Brasil, o problema é outro. Com a liberdade que têm os professores de dar apenas 75% do programa [...] encontram-se com frequência estudantes que praticamente não aprendem nada de geometria[...] A grande maioria dos professores de matemática das faculdades de ciências se limitam a dar aulas expositivas, muitas vezes repetindo o livro texto ou apostilas, e suas atividades, extraclasse, consistem em uma ou outra conferência, cursos especiais [...] Um dos fatores preponderantes do estado lamentável do ensino no Brasil é o nível, por assim dizer, da valorização do professor. Fica evidente quando se examina o elemento humano médio que se dirige às faculdades de filosofia e ciências [...] (CATUNDA, 1962, p.64-67, tradução nossa).

Os problemas levantados por Catunda são semelhantes aos dos outros países da América Latina, como verificaremos a seguir no relato de Santaló,[26] na 2.ª Conferência Interamericana sobre Educação Matemática.

Na 2.ª Conferência Interamericana sobre Educação Matemática realizada no Peru, em dezembro de 1966, foram abordados os temas: Educação Matemática na América Latina, relatos sobre o desenvolvimento, o progresso e os problemas enfrentados pelos países na elaboração dos programas e na formação de professores para a reforma do ensino da Matemática Moderna. O brasileiro Osvaldo Sangiorgi apresentou o relato *Progresso do ensino da matemática no Brasil,* que será abordado no próximo capítulo.

Destacamos a conferência *Os problemas da reforma da matemática na América Latina com referência a professores e programas,* proferida por Luis Santaló, da Argentina, que ressaltou quatro problemas concernentes à reforma do ensino da matemática:

a) “convencer os professores ativos da necessidade de reforma e da possibilidade de executá-la”. A dificuldade consiste em convencê-los de que “grande parte da Matemática que eles têm ensinado durante anos não é mais útil e deve ser eliminada dos programas;
b) “necessidade de convencer o meio ou a opinião pública”. Dado que pais dos estudantes exercem influência na escola e nos órgãos administrativos, assim, devem-se convencer os pais em primeiro lugar para que se possa convencer a sociedade de que “a Matemática muda com os tempos”, além de que é “uma ciência instrumental para quase todas as outras; portanto suas aplicações não deveriam ser ignoradas”;

---

[26] Luís Antoni Santaló Sors (1911-2001), matemático espanhol, graduou-se na Universidade Politécnica de Madrid e estudou na Universidade de Hamburgo, onde recebeu seu Ph.D., em 1936. Em virtude da Guerra Civil espanhola, ele se mudou para a Argentina.

c) “a preparação de professores e livros-texto para os estudantes”. A preparação de futuros professores não é um problema difícil de resolver, visto que é possível “introduzir a Matemática Moderna nos institutos de treinamento para professores e nas escolas onde os professores de nível médio são preparados”, mas o treinamento dos professores em exercício é “um problema mais sério”, pois os professores das pequenas cidades distantes das universidades não sabem para onde se dirigir para obter orientação; o aumento do número de estudantes do ensino secundário levou à contratação de professores sem treinamento, além da sobrecarga de trabalho. Quanto aos livros-texto, o autor considerou que estes deveriam ser elaborados “para os estudantes, que ao mesmo tempo mostrarão ao professor, em detalhe, o tipo de instrução que se deseja”. Ele também considerou que os livros-texto deveriam ser “suplementados por manuais para o professor com informações adicionais e conselhos para focalizar as exposições de diversos tópicos”;

d) a “inflexibilidade dos regulamentos”, ele considera ser de “difícil” solução, uma vez que as escolas normalmente são subordinadas ao Ministério da Educação ou a organismos semelhantes “que insistem que todas as escolas sigam as mesmas normas e usem o mesmo programa” (SANTALÓ, 1966, p.37-40, tradução nossa).

Todas essas ideias, sugestões, recomendações, programas de ensino, estavam pairando em todos os países que julgavam essencial a reforma do ensino da matemática. Como já mencionamos, quanto às recomendações de Royaumont, os países deveriam formular um programa de ensino de matemática, colocá-lo em experiência e elaborar livros didáticos e de textos.

Cada país fez a sua representação e a sua apropriação, no sentido dado por Chartier (1990), do que chamaremos do ideário do Movimento da Matemática Moderna. Portanto, faremos a seguir um breve comentário a respeito de algumas propostas de ensino da matemática, cuja escolha teve como base a bibliografia utilizada pelas autoras para a elaboração dos livros didáticos do GRUEMA, no tocante à Geometria (Anexo 1).

Durante os primeiros anos da década de 1950, vários projetos começaram a ser desenvolvidos, tendo em vista a melhoria do ensino secundário, especialmente por meio da adequação à realidade da universidade e dos avanços tecnológicos ocorridos durante e após a 2.ª Guerra Mundial. Destacaremos o *School Mathematics*

Study Group (SMSG) e o *University of Illinois Committee on School Mathematics* (UISCM).

O UISCM foi um esforço conjunto da Escola de Educação, da Escola de Engenharia e Escola de Artes Liberais e Ciências da Universidade de Illinois. O projeto foi financiado pela C*arnegie Corporation* de Nova York e pela Universidade de Illinois. Em 1962, o UICSM já havia elaborado compêndios para os 9.º, 10.º, 11.º, 12.º graus.[27] Estes compêndios propunham: a consistência, a precisão de linguagem, as estruturas matemáticas e a compreensão dos princípios básicos de generalização, com a participação ativa do aluno, como uma técnica básica que permeia todo o curso. Os trabalhos do UICSM começaram em 1952 e, no fim do ano escolar de 1959-1960, o material já havia sido experimentado em vinte e cinco Estados por duzentos professores e dez mil alunos. Os professores participantes dessa experiência receberam instruções detalhadas, no Centro de Illinois, para a utilização desse material experimental (BROWN, 1965, p.40).

O professor e diretor do SMSG, E. G. Begle,[28] nos diz, em seu relato *Reforma en La Educación matemática en los E.E.U.U,* na 1.ª CIAEM, como começou a reforma do ensino da matemática e do trabalho elaborado pelo UISCM:

> É impossível precisar a data do começo da reforma da educação matemática que está acontecendo nos Estados Unidos nos últimos dez anos. Sem dúvida, um passo inicial muito importante foi dado na Universidade de Chicago em 1940, que preparou materiais e textos novos para a idade de 11 a 12 anos. Esses materiais traziam os conceitos básicos e a estrutura, e representaram um grande avanço na preparação de materiais similares para os colégios e as universidades. Nos primeiros anos da década de 1950, um comitê da Universidade de Illinois iniciou a preparação de um programa completo de Matemática para alunos do 9.º ao 12.º graus, com ênfase nos conceitos e na compreensão como base para a habilidade Matemática. Esse comitê experimentou esses novos métodos de ensino e assinalou a importância de os próprios estudantes desenvolverem os novos conceitos, em contraste com os antigos métodos nos quais os alunos eram receptores passivos e o professor era o único a atuar (BEGLE, 1962, p.151, tradução nossa).

Em 1958, foi criado o *School Mathematics Study Group* (SMSG), formado por eminentes investigadores matemáticos que acreditavam ser o momento decisivo

[27] Corresponde hoje ao Ensino Médio.
[28]Edward Griffith Begle (1914-1979). Professor da Universidade de Princeton, durante o ano acadêmico 1940-1941 foi para Universidade de Yale em 1942 e lá permaneceu até 1961. Em 1951, Begle foi eleito secretário da American Mathematical Society. Foi diretor do projeto SMSG de 1958 a 1972.

para melhorar o ensino da matemática escolar nos EUA.[29] Eles contaram com a colaboração da *American Mathematical Society,* que representava a investigação matemática, da *Mathematical Association of America,* que representava o ensino da matemática nas universidades, e do *National Council of Teachers of Mathematics,* que representava o ensino secundário. O SMSG dispunha de financiamento da *National Science Foundation.* Tinha por objetivo fundamental melhorar o ensino da matemática nos colégios dos Estados Unidos, baseado em três princípios:

> Elaborar um programa para os colégios que, por um lado, conservasse as técnicas e habilidades matemáticas importantes, cuja utilidade revelava a experiência e, por outro, dar aos estudantes uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos que justificassem essas técnicas e habilidades, posto que deveria ser esta compreensão da matemática que daria a base para as habilidades e as novas técnicas das quais, no futuro, com certeza o aluno necessitaria [...] Elaborar materiais e promover a preparação de professores para capacitá-los a ensinar esses novos programas [...] Tornar mais interessante a Matemática com o objetivo de atrair mais estudantes e fazer com que os alunos estudassem por mais tempo. A necessidade, nos EUA, de pessoas bem preparadas em Matemática e de um conhecimento geral da Matemática por parte de todos os cidadãos era tão grande que se deveria fazer todos os esforços para satisfazê-la (BEGLE, 1962, p.154, tradução nossa).

A proposta para o ensino da geometria para a *Junior High School*[30] apresentava as relações métricas e não métricas associadas a suas aplicações. Foram constatadas algumas mudanças na exposição dos conteúdos:

> A Geometria Sólida não é apresentada pelo SMSG como um curso separado; ela é introduzida já na Geometria do 10.º grau (4.ª série) para ajudar o desenvolvimento da percepção do espaço no estudante. Em alguns casos, provas formais em Geometria Sólida são integradas com a Geometria Plana e, em outros casos, elas são apresentadas em capítulos à parte. Álgebra e Geometria são frequentemente integrados. Enquanto a visão intuitiva é encorajada, ênfase é dada à formulação exata das definições e teoremas (BROWN, 1965, p. 43).

Após experimentação, os livros foram reformulados e, por meio de convênios, utilizados em vários países, inclusive no Brasil, com o convênio MEC/USAID.[31]

A seguir, apresentamos a proposta para a reforma do ensino da matemática na Bélgica, a proposta de George Papy, que começou suas experiências em 1958

---

[29] Para saber mais sobre o SMSG, consultar a dissertação *O School Mathematics Study Group e o Movimento da Matemática Moderna no Brasil,* de Francisco de Oliveira Filho, defendida em 2009, na Uniban/SP.

[30] Equivalente hoje ao 2.º ciclo do Ensino Fundamental I.

[31] O Convênio entre o Ministério da Educação – MEC e *United States Agency for International Development* – USAID (MEC-USAID) tinha por objetivo promover a educação para que ocorresse o desenvolvimento econômico, ou seja, a educação tinha por objetivo suprir as necessidades do desenvolvimento capitalista internacional, para tanto a escola deveria ser para todos, a fim de formar mão de obra, com algum treinamento, muito produtiva e barata.

para a renovação do ensino da matemática, com o *Programa de Lenger-Servais,* que durou três anos em algumas classes da Escola Normal na qual se formariam os futuros professores de crianças de três a seis anos de idade. Este programa continha as ideias de conjuntos, relações e topologia, porém os autores da proposta ressaltam que:

> Não pretenderam recomendar, mesmo de maneira indireta, como as ideias de conjuntos, relações e topologia deveriam ser ensinadas às crianças de três a seis anos. Entretanto pareceu-lhes oportuno que os futuros professores fossem informados da natureza dos conceitos matemáticos básicos em nossos dias (PAPY, 1966, p.131).

Entre 1961 a 1964, houve a transferência dessa experiência para o primeiro ciclo do ensino secundário, com alunos de 12 a 15 anos. O programa proposto era inicialmente optativo nas escolas, mas a partir de 1965 tornou-se o único programa a ser permitido para experimentação, e em 1968 "o programa moderno seria obrigatório em todas as classes, para estudantes de doze anos de idade, do ensino federal" (PAPY, 1966, p.1).

A partir dessas experiências, Papy elaborou a coleção de livros didáticos *Mathemátique Moderne*, em seis volumes. O autor propõe para crianças de 12 anos: conjuntos, relações, o anel dos racionais inteiros e introdução à geometria afim, que tem seu início no volume 1 e é complementado no volume 6.

O volume 2 foi idealizado para alunos de 13 anos, e nele são introduzidas simultânea e progressivamente as duas estruturas fundamentais: o corpo ordenado dos números reais e o plano vetorial real.

> Os números reais são introduzidos por meio da numeração posicional. O sistema binário permite apresentar o processo iterativo de subgraduação da reta. O teorema de Tales é uma aplicação espetacular deste método. Este também permite a introdução de homotetia. Translações e homotetias introduzem a adição e multiplicação de números reais, fazendo-se uso do importante procedimento de transferir uma estrutura por bijeção (isomorfismo) [...] A apresentação do plano vetorial é o ponto culminante [...] O curso termina colocando-se em funcionamento a máquina útil, que demonstra os teoremas de geometria (PAPY, 1966, p. 137-138).

Os volumes 2 e 3, idealizados para alunos de 14 anos, propõem o estudo das equações da reta estabelecidas na estrutura do plano-vetor, do anel de funções R→R, do subanel de funções polinomiais e solução de equações pelo método de Gauss, além do estudo do

> [...] plano geométrico-métrico introduzido pelas simetrias ortogonais [...], simetria centrais [...]; as retas com escala introduzem o grupo de isometrias e os subgrupos de deslocamentos, rotações e translações [...]; introdução do produto escalar e do plano vetorial euclidiano [...]; o teorema de

> Pitágoras, a desigualdade de Cauchy-Schwarz e suas consequências (PAPY, 1966, p.138-139).

Papy ressalta o "papel fundamental do plano euclidiano", reconstruído com base nas estruturas fundamentais da Matemática, que, por isso, conserva o "caráter intuitivo, familiar e motivacional do estudo" (PAPY, 1966, p.135).

Papy destaca que o método axiomático útil é o da ciência física, isto é, deve-se "afirmar claramente aquilo que é aceito; não dizer tudo de uma só vez; expor determinadas coisas aceitas, pouco a pouco". Ele nos diz também que para "resolver um problema é necessário raciocinar". Para tanto, ele maximiza "o efeito da intuição pela intervenção dos diagramas de Venn, apoiados intuitivamente pela estrutura lógica da situação", o que permite "uma rápida aproximação do raciocínio sintético" (PAPY, 1966, p.135-136).

Ressalta, ainda, a importância da demonstração, cujo procedimento pedagógico é feito por meio de filmes desenhados que "fornecem um apoio intuitivo à própria demonstração", pois o autor considera que "algumas crianças, incapazes de entender uma demonstração oral, parecem acompanhar uma demonstração através de filmes com desenhos". O segundo passo é "um filme sonoro", ou seja, a justificativa oral para a passagem de um desenho ao outro; o terceiro passo é a apresentação da prova na linguagem matemática.

Fehr, em seu livro *La Revolución en las matemáticas escolares,* considera a proposta apresentada por Papy muito difícil para o ensino secundário, pois é "abstrata, formalista, e tem um número excessivo de conteúdos" (FEHR, 1971, p.94, tradução nossa).

Apresentamos, a seguir, a proposta francesa elaborada por Lucienne Felix. Na França, em 1967, é criada a *Commission Lichnerowicz* para elaborar um programa para a reforma do ensino. Os acontecimentos de maio de 1968 evidenciam a necessidade da reforma, o que acelera a oficialização do programa elaborado pela comissão, em 1969. Para apoiar essa reforma é criado o *Institut de recherche sur l'enseignement dês mathématiques* (IREM), com o objetivo de formar professores, em Paris, Lyon e Strabourg, bem como realizar pesquisas, experimentações pedagógicas, elaborar e divulgar documentos.

Lucienne Felix (1901-1994), *agrégée*,[32] e professora do Lycée La Fontaine, foi fundadora e participante ativa da CIEAEM e do IREM. Escreveu vários livros, entre eles: *L'aspect moderne des mathématiques*, *Exposé moderne des mathématiques élémentaires, Initiation à La géométrie* e *Géométrie.*

No livro *Initiation à la géométrie,* destinado aos alunos de 11 a 12 anos, a autora aborda os seguintes conteúdos: a) distâncias; b) alinhamento e medida de distâncias; c) uma reta no plano, simetria axial; d) losango e perpendicularidade; e) mediatriz e bissetriz; f) congruência de figuras; g) condições de congruência; h) retângulo; i) quadriculado.

No livro *Géométrie*, destinado aos alunos de 12 a 14 anos, a autora aborda os conteúdos iniciais da geometria euclidiana: a) os axiomas de base: reta, plano espaço e isometria das figuras; b) os elementos da geometria plana: simetria axial, distância de um ponto a um conjunto, ângulos e distância, paralelas; c) a geometria no espaço: isometrias no espaço, conjuntos de retas e planos, ângulos de direção de retas e planos; d) cálculo geométrico: teorema de Tales, homotetia, semelhança entre figuras e elementos da trigonometria; e) estudo da circunferência, esfera e poliedros regulares convexos; f) áreas planas e volumes; g) teoria dos vetores.

Segundo a autora, estes livros foram elaborados com as noções da teoria dos conjuntos e foram

> [...] organizados segundo uma axiomatização que o professor deve conhecer, mas da qual a criança não pode naturalmente ter uma consciência clara. O aluno deve somente sentir que os conteúdos tratados são submetidos a uma organização coerente, a uma ordem não arbitrária, um caminho que conduz a uma direção. O professor poderá, seguindo o texto, justificar a cada instante o que está sendo proposto. Quanto às demonstrações, elas serão exigidas quando a criança compreender sua necessidade. Não a faremos recitar, mas reconstruir. Deste modo há uma iniciação à argumentação e não à utilização de uma lógica já construída. As manipulações e construções são a base da formação da ideia. A imaginação do professor e a curiosidade dos alunos se multiplicarão facilmente (FELIX, 1964, p. ix, tradução nossa).

A metodologia elaborada por Lucienne Felix será detalhada no próximo capítulo, ao examinarmos a comunicação *Didática especial da geometria,* proferida por Ribeiro (1962) no 4.º Congresso Brasileiro de Ensino da Matemática (CBEM).

Por último, apresentamos a proposta canadense para a renovação do ensino da matemática, de Zoltan P. Dienes. Dienes formou o *Grupo Internacional de Estudos sobre a Aprendizagem da Matemática* (ISGML). O programa elaborado por

[32] Título conferido às pessoas aprovadas no concurso nacional francês que dá acesso à carreira de professor.

Dienes foi experimentado durante dez anos em escolas de Sherbrooke, bem como em escolas de Budapeste, por Vargas, e na Alemanha.

O programa enfatiza as estruturas matemáticas, além das noções unificadoras de relações, funções e morfismos. Segundo o *Bulletin de l'APQ*,[33] este programa "ultrapassa amplamente os quadros dos programas tradicionais", pois sua "estrutura e metodologia" permite "assegurar uma compreensão mais profunda e uma maior aplicabilidade" dos algoritmos (DIENES; GAULIN; LUNKENBEIN,1969, p.3).

Segundo Dienes, o "caminho geométrico" abarca os seguintes temas:

> Figuras geométricas planas e no espaço. Relações entre as figuras geométricas; noções topológicas (fronteiras, regiões, conexidade, etc.), projetivas (retas, intersecção, convexidade, etc.), afins (paralelismo, similitude, etc.), euclidianas (distância, ângulos, etc.). Medidas arbitrárias e convencionais. Operadores sobre figuras geométricas (transformações): simetrias, translações, rotações, homotetias e seus invariantes. Relações entre operadores e entre cadeias de operadores geométricos. Simetrias e rotações de poliedros e de polígonos regulares. Concretizações de natureza geométrica de grupos matemáticos e de isomorfismos de grupo e introdução axiomática. Transformações geométricas no plano com ajuda de coordenadas. Concretizações de módulos (sobre o anel dos inteiros) e de espaços vetoriais (DIENES; GAULIN; LUNKENBEIN,1969, p.7).

A metodologia utilizada no programa está assentada na psicologia de Piaget. Dienes, a partir de seu trabalho de pesquisa, verificou que o aprendizado de um conceito matemático passa por seis etapas de aprendizagem: jogo livre, jogo, abstração, representação, simbolização, axiomatização.

Jogo livre – por meio de atividade lúdica a criança interage com o ambiente e o explora "aparentemente em desordem e sem objetivo preciso", desta maneira prepara-se inconscientemente para as próximas etapas. Jogo – a criança toma "consciência das limitações impostas pelo ambiente; nesta etapa a criança é "orientada para uma certa organização final", mas ainda não consegue defini-la. Abstração – a criança toma consciência das propriedades que lhes são comuns, obedecendo a uma hierarquização, isto é, a abstração de cada conceito serve de ponto de partida para um novo processo. Representação – a criança deve ser capaz de exteriorizar seu pensamento, ou seja, ela deve exprimir-se oralmente ou por escrito com ajuda de desenhos, esquemas e pinturas. Simbolização – a criança deverá poder descrever as propriedades da representação, para tanto ela "deverá

[33] "Um programa de matemática para o nível elementar", 1.ª parte por Z. P. Dienes, Claude Gaulin e Dieter Lunkenbein do centro de pesquisas psicomatemáticas da Universidade de Sherbrooke, extraído do *Bulletin de l'APQ,* outono-inverno de 1969, traduzido por Anita Rondon Berardinelli, documento do APLB.

criar uma linguagem com frases, equações ou enunciados lógicos (se...então)". Axiomatização – a criança é levada a descobrir as regras que permitem deduzir propriedades a partir de outras já verificadas (DIENES, 1969, p.10-13).

Como podemos constatar nas propostas acima descritas para a modernização do ensino da matemática, cada país se apropriou das ideias do movimento de acordo com a sua cultura, o que nos leva a crer que não houve uma proposta que abarcasse a totalidade das expectativas quanto ao ensino da geometria sob o ponto de vista do MMM.

Para finalizar este capítulo, a seguir abordaremos as críticas ao MMM e o período de seu esgotamento.

Matos (2004) relata que os matemáticos Bell, Kline e Weil, a partir de 1962, em artigos publicados no *The Mathematics Teacher* e no *American Mathematical Monthly,* já manifestavam preocupação com a maneira como o ensino da matemática se dava, ou seja, o ensino proposto não construía uma Matemática que se entrelaçasse com outras ciências.

Em 1971, Howard Fehr propôs a revisão dos currículos promovidos pelo SSMCIS, "sob um ponto-de-vista global, porém prático". Tratava-se da manutenção da linguagem moderna, com as mesmas noções fundamentais anteriores, porém com poucos símbolos e ênfase nas quatro operações para resolver problemas encontrados no cotidiano. Segundo Fehr, este programa teve êxito comprovado (SANGIORGI, 1976, p.3).

Jean Leray, em 1972, faz um *Relatório sobre a Reforma do Ensino Secundário de Matemática,* redigido a pedido da academia de ciências, em que levanta alguns problemas que o levam a concluir:

> *O perigo da reforma em curso* – No ensino secundário, a opção conjuntista da definição de Geometria é, assim, uma perigosa utopia. Os programas atualmente promulgados não a impõem. Mas o comentário oficial dos programas de "quatriène et troisième" a recomendam, reforma continua sendo orientada para esta opção. Os termos científicos que fomos obrigados a usar para analisá-la mostram o quanto esta reforma desconhece as aptidões e necessidades intelectuais dos adolescentes que são alunos dos C.E.G.; C.E.S.[34] e dos liceus. A reforma em curso põe em grave perigo o futuro econômico, técnico e científico da nação (LEARLY, 1972, p.4, grifo do autor).

René Thom, em seu artigo *Matemática Moderna*: um erro educacional e filosófico, de 1972, faz críticas à modernização dos currículos escolares, ao método

[34] C.E.G. – Certificat d'études générales; C.E.S. – Certificat d'études superieures.

de ensino, ao uso da linguagem dos conjuntos. Ressaltamos a crítica em relação à eliminação da tradicional geometria euclidiana e à supervalorização da álgebra:

> Para julgar completamente as capacidades de um estudante, é necessário colocá-lo em atividade e apelar continuamente para sua iniciativa individual e seu espírito de criação. Nada disso pode ser concebido no âmbito de estudos "úteis", onde todos os elementos, incluídos por causa de sua utilidade técnica, são ensinados dogmaticamente e onde a excelência do ensino é definida como a rápida e exata memorização dos assuntos dados. Apenas aqueles tópicos com uma qualidade de "brinquedo", de "jogo", têm valor educativo, e dentre todos esses jogos, a geometria euclidiana é a menos gratuita e a mais rica em significado, em vista de suas constantes referências aos fundamentos subjacentes entendidos intuitivamente. Nesta linha de pensamento, a tendência atual de substituir a Geometria pela Álgebra é educativamente má e deve ser evitada (THOM, 1972, p.7).

Em 1973, G. Choquet, um dos idealizadores da Matemática Moderna, escreveu na *l'Ecole liberatrice* n. 17:

> Eu estou assustado pelo que constato no ensino da escola primária e no primeiro ciclo do secundário. Sem dúvida fui um dos promotores da reforma do ensino da matemática, mas o que eu preconizava era simplesmente a poda de alguns ramos mortos e inúteis, e um pouco da introdução da álgebra [...] Certamente, em si os programas e as instruções correspondentes são – salvo alguns erros de bom tamanho – mais satisfatórios do que os antigos; mas houve toda uma atmosfera nociva que acompanhou sua implantação em particular: um ataque contra a Geometria e contra os recursos da intuição, se disse aos professores que eles seriam pobres se eles estudassem os triângulos, que a Álgebra Linear substituiria toda a antiga Geometria [...] O resultado é tal que, sem uma forte reação da base, eu penso que a geração atual de nossas escolas receberá uma formação Matemática que não a preparará, nem para a pesquisa matemática, nem para a utilização das técnicas matemáticas ou as ciências experimentais (CHOQUET, 1973 apud CHARLOT, 1984, p.5, tradução nossa).

Dienes declarou, na sua vinda ao Brasil em 1973, que:

> [...] os conceitos de Matemática Moderna que vêm sendo utilizados em muitos países não trouxeram nenhum grande avanço para a compreensão e aplicação da matéria; na França, onde trabalhei, a situação estava simplesmente catastrófica, pois as crianças continuavam a ser orientadas para decorar, só que agora ao invés de decorar, por exemplo, tabuada, decoram as noções de conjunto e, sinceramente, os alunos lucravam muito mais em decorar a tabuada (DIENES,1973, apud SANGIORGI, 1976, p.11).

As críticas ao ensino da Matemática Moderna geraram um novo movimento chamado *back to basics:* uma volta ao que existia antes da reforma, ou seja, a ênfase à destreza e aos procedimentos. Segundo Moon (1986), na Alemanha, "a palavra aritmética é restabelecida como um símbolo dos novos tempos" (MOON (1986, apud RUIZ, 2009).

Talvez a crítica mais contundente tenha sido o livro escrito pelo matemático Morris Kline – *Why Johnny Can't Add*: The Failure of The New Math, publicado em

1973 nos Estados Unidos e traduzido no Brasil, em 1976, com o título *O fracasso da Matemática Moderna*. Ressaltamos algumas críticas expressas neste livro:

a) quanto à terminologia:

> Alguns livros vão muito longe na definição de uma curva fechada, curva aberta, regiões fechadas e regiões abertas, etc. [...] e, no entanto, não ensinam mais Geometria que o fato de que uma linha reta traçada no plano divide este em dois pedaços. No fim de alguns desses livros de Geometria, olhem e descubram no final de uma longa dissertação, ou de um longo esforço na aprendizagem, justamente que conhecimento se adquiriu sobre a Geometria. Creio que muitas vezes o número total de fatos aprendidos é muito pequeno, enquanto o número total de palavras é muito grande (KLINE, 1973, p.92).

b) quanto ao simbolismo:

> Muito simbolismo quase não serve a propósito algum: a linguagem inglesa é melhor. A ligeira economia em espaço fica prejudicada pela dificuldade psicológica que o simbolismo impõe ao estudante. Espojar-se em símbolos é tornar a leitura e a compreensão mais difíceis. Quando se torna pesada a carga de lembrar-se o que os símbolos representam, mais mal se faz do que empregar sentenças verbais. Além disso, os símbolos assustam os estudantes e devem, portanto, ser empregados moderadamente. A dificuldade em lembrar os significados e a desagradabilidade das expressões simbólicas afugentam e perturbam os estudantes (KLINE, 1973, p.94).

c) quanto às aplicações da Matemática em outras ciências:

> Naturalmente a Matemática não é um corpo de conhecimento auto-suficiente isolado. Ela existe primariamente para ajudar o homem a compreender e dominar o mundo físico e, até certo ponto, os mundos econômico e social. A Matemática serve a fins e propósitos. Se ela não tivesse esses valores, não receberia nenhum lugar no programa escolar. Por ser ela extraordinariamente útil é que está em grande demanda e recebe tanta ênfase hoje em dia. Esses valores devem estar refletidos no currículo. Durante os últimos anos muitos dos líderes de currículos reconhecem ter negligenciado de assinalar as aplicações da Matemática. Mas sua abordagem para remediar essa deficiência é ridícula. Eles solicitam a matemáticos aplicados, de alguns importantes laboratórios de pesquisa ou organizações industriais, que forneçam aplicações. Estes homens resumem de aplicações genuínas pequenas porções de Matemática que estão realmente envolvidas nas aplicações. Estas porções, entretanto, nada revelam do que se realiza. São como o sal num bolo. Pedem aos estudantes que comam o sal na expectativa de que, com isso, apreciem o bolo (KLINE, 1973, p.102).

d) quanto à importância dada à Teoria dos Conjuntos:

> Um exame crítico dos usos da teoria de conjuntos nos textos das escolas elementares e “high school” rejeita a afirmação dos modernistas de que a teoria de conjuntos unifica a Matemática. Além de usá-la artificialmente para definir conceitos, nenhum uso significativo é feito do assunto. [...] Podemos comparar a teoria de conjuntos com a Geometria Elementar. Quando vistos pela primeira vez, os axiomas de geometria devem parecer óbvios ao estudante, e até este ponto a Geometria e a Teoria de Conjuntos começam em igualdade de condições. Mas quase antes de perceber que qualquer coisa de importância se está desenvolvendo na Geometria, o estudante depara com consequências que o surpreendem e o podem excitar. Partindo

> de axiomas aparentemente simples e do modo dedutivo de raciocinar, emergem resultados tão inesperados e capitosos como o de que as linhas medianas de um triângulo se encontram num ponto, como o fazem as alturas, os bissetores do ângulo [...] e não apenas para um tipo de triângulo mas para todo triângulo. A um estudante sensível à Matemática, tais resultados vêm como uma revelação jamais inesquecível do poder do raciocínio matemático abstrato. Nada existe comparável no tratamento rudimentar da Teoria de Conjuntos no novo currículo de Matemática. A Teoria de Conjuntos é para a Matemática Elementar um formalismo oco que dificulta ideias que são muito mais facilmente compreendidas intuitivamente. A tentativa de envolvê-la é quase ridícula e uma grosseira imitação de pedagogia. A Teoria de Conjuntos não provou ser o elixir da pedagogia matemática (KLINE, 1973, p.120).

Além dessas críticas ocorridas na década de 1970, algumas pesquisas posteriores apresentam outros motivos para o declínio do MMM. Segundo Gellert (1997), a reforma do ensino da matemática está diretamente ligada ao professor que vai ensinar essa nova matemática, porém essa reforma “foi demasiada abrupta, em geral, incompreensível particularmente para a formação dos professores”, assim “a possibilidade de fazer a reforma matemática fracassou” (GELLERT,1997 apud RUIZ, 2009).

Segundo Ruiz (2009), o declínio do MMM se deve a vários fatores, entre eles: a diminuição dos financiamentos para os projetos criados pelos diversos grupos; o descontentamento de vários setores da sociedade, ou seja, dos professores que se queixavam de não receber treinamento, materiais para colocar em prática a reforma do ensino; dos pais e das famílias que não compreendiam a MM e não podiam ajudar seus filhos; dos alunos que não compreendiam a nova matemática, que se mostrava com a reforma mais abstrata. Assim, “todos sentiam que a nova matemática mais confundia, impossibilitando a formação básica que o ensino tradicional propiciava” (RUIZ, 2009).

Como podemos observar, houve grande expectativa no sentido de que as propostas de ensino baseadas no ideário do MMM melhorassem o ensino da matemática no secundário, a fim de aproximá-lo do ensino universitário que desenvolvia uma Matemática muito mais elevada e abstrata, mas ao que tudo indica esse objetivo não foi alcançado.

Quanto ao ensino da geometria, para o ensino secundário, parece-nos que o ponto de convergência era quanto à metodologia a ser utilizada, no sentido de se partir do concreto, do manipulativo, para a formação do conceito, e apenas promover um primeiro contato com a axiomatização.

No próximo capítulo, veremos como o MMM chegou ao Brasil, sua implantação e também o seu declínio.

4. MOVIMENTO DA MATEMÁTICA MODERNA NO BRASIL

A partir da década de 1950, ocorreram profundas mudanças na área econômica pela política de abertura à entrada de capitais estrangeiros, justificada pela promessa de desenvolvimento, visível no crescimento industrial do setor de produção de bens de consumo durável e da indústria de base, o que levou o Brasil a um acelerado processo de urbanização. Com a industrialização, o governo propôs a reformulação do ensino secundário, a fim de adequá-lo às necessidades do mercado de trabalho; o ensino secundário precisaria ter um caráter mais prático, terminal e/ou formador de quadros técnicos.

Em 1951, sob a presidência de Getúlio Vargas, o Ministro da Educação, Simões Filho,[35] solicita à Congregação do Colégio Pedro II que elabore novos programas, visando ao "descongestionamento dos programas oficiais do ensino secundário", de modo que tenha "certa plasticidade a ajustar-se às diferenciações regionais" (NÓBREGA, 1952, apud PAVANELLO, 1989, p.159).

A proposta elaborada pela Congregação do Colégio Pedro II ficou conhecida como Programa Mínimo, estabelecido pela Portaria Ministerial n. 1.045, de 14 de dezembro de 1951, e não apresentava modificações significativas quanto ao conteúdo, e, sim, nas instruções metodológicas, que recomendavam que o ensino da geometria nos primeiros anos do curso ginasial deveria ter caráter essencialmente prático e intuitivo, pois "a matemática não é lógica pura, como se admitiu por muito tempo" (Portaria n.1.045, de 14.12.1951 apud PAVANELLO, 1989, p.159-160).

O método dedutivo deveria ser introduzido, "com o cuidado que exige", no curso ginasial, à medida que o aluno fosse percebendo a "necessidade da justificativa, da prova e da demonstração". Recomendava também "especial atenção [...] ao exato significado dos termos empregados" (Portaria n. 1.045, de 14.12.1951 apud PAVANELLO, 1989, p.159-160).

Considerava, ainda, que o aluno deveria desempenhar um papel ativo no processo de aprendizagem e que era necessário despertar sua atenção e seu interesse, "fugindo-se sempre da prática de simples memorização, que cansa e

[35] Ernesto Simões da Silva Freitas Filho (1886-1957), político, jornalista e empresário brasileiro, fundador do jornal *A Tarde*.

enfastia". Recomendava, ainda, ter "sempre presente que o ensino não depende da disciplina em si, mas, principalmente, do aluno ao qual se ensina", e que "o que importa não é ensinar muito, mas ensinar bem" (Portaria n. 1.045, de 14.12.1951 apud PAVANELLO, 1989, p.159-160).

Marques (2005), em sua pesquisa *Tempos pré-modernos*: a matemática escolar dos anos 1950, salienta:

> A ideia de se estabelecer programas mínimos para o ensino das disciplinas, não está simplesmente relacionada com a diminuição de conteúdos, mas preponderantemente, com a possibilidade de serem elaborados planos de desenvolvimento desse programa mínimo de acordo com as especificidades de cada região. [...] O programa mínimo é uma referência e cada estado terá a autonomia de elaborar seus próprios planos, porém, sem a obrigação de fazê-lo (MARQUES, 2005, p.55).

O 1.º Congresso Nacional de Ensino da Matemática (CNEM) foi realizado entre 4 e 7 de setembro de 1955, em Salvador, por iniciativa da professora Martha Maria de Souza Dantas, da Faculdade de Filosofia da Universidade da Bahia. Neste congresso não houve participação de órgãos governamentais.

Os temas de discussão foram horários e programas; métodos de ensino, tendências modernas no ensino e livro de classe. Foi aprovado, neste congresso, um currículo mínimo, praticamente igual ao da Portaria de 1951, mas para ser ministrado em quatro aulas semanais. O aumento de carga horária foi uma proposta veemente de Osvaldo Sangiorgi. No tocante ao ensino da geometria, segundo Leme da Silva (2008a),

> [...] não se revelou problemático, questionador, ou ainda, necessário de alterações. Tudo indica que o ensino de geometria, na visão dos participantes do congresso, encontrava-se estabilizado; em outras palavras, reconhecem-se certos problemas com seu ensino, sem no entanto, necessidade de uma reestruturação significativa (LEME da SILVA, 2008a, p.71).

No que concerne à metodologia de ensino, deu-se destaque ao papel do aluno e ao estudo dirigido. A professora Anna Averbuch apresentou um relato de uma experiência realizada na escola de aplicação do Rio de Janeiro com a metodologia do Estudo Dirigido (ED). Anna ressalta:

> O que eu fiz, foi procurar ensinar esses alunos a abrir o livro, procurar a matéria, fazer uma síntese do assunto, da parte importante, e tentar, então, depois, resolver o problema. [...] Quero frisar, talvez tenha esquecido, que justamente o estudo dirigido, onde obtivemos um pouco mais de independência, foi aplicado na segunda série ginasial [...] de modo que, das 134 alunas da segunda série ginasial, com o estudo dirigido, antes de entrar no exame oral, já estavam aprovadas 100 alunas (AVERBUCH, 1955, p.183-184).

Até esse momento não há evidências de que as discussões internacionais sobre a reformulação do ensino da matemática no ensino secundário, que ocorreram na Europa e nos EUA desde o fim da 2.ª Guerra Mundial, tenham tido alguma repercussão no Brasil.

Juscelino Kubitschek foi eleito Presidente da República em 3 de outubro de 1955. Durante todo o seu governo, o Brasil viveu um período de desenvolvimento econômico e estabilidade política. Com um estilo de governo inovador na política brasileira, Juscelino construiu em torno de si uma aura de simpatia e confiança entre os brasileiros. Empolgou o país com seu reclame: "Cinquenta anos em cinco", e conseguiu encetar um processo de rápida industrialização, principalmente com a implantação da indústria automobilística, o que gerou um forte crescimento econômico, embora, em contrapartida, tenha causado também um significativo aumento da dívida pública, da dívida externa e da inflação.

O 2.º Congresso Nacional de Ensino de Matemática foi realizado entre 29 de junho e 4 de julho de 1957, em Porto Alegre, Rio Grande do Sul, e promovido pela Faculdade de Filosofia da Universidade do Rio Grande do Sul, com o patrocínio da Secretaria de Educação e Cultura do Rio Grande do Sul. Neste congresso foi divulgado, no Brasil, o livro do CIEAEM – *L'enseignement des mathématiques,* e foram apresentados três trabalhos que se referiam à Matemática Moderna: do professor Ubiratan D'Ambrosio,[36] do professor Osvaldo Sangiorgi e do Major professor Jorge Emanuel Barbosa.

Ubiratan D'Ambrosio apresentou a tese, *Considerações sobre o ensino atual de matemática*. D'Ambrosio propôs um programa focado nos métodos de ensino como o uso de jogos, passatempos e experimentações, com ênfase na intuição matemática, e considerou que o desconhecimento das "aquisições mais recentes da MM e da psicologia" tornava o programa da época "ultrapassado e inútil", e, por conseguinte, defendia uma mudança profunda no programa (D'AMBROSIO, 1957, p.373-374).

Outra referência à Matemática Moderna foi o relato do Major professor Jorge Emanuel Barbosa, *Reflexos do desenvolvimento atual da matemática no ensino secundário*. Nesse trabalho, o autor considera a necessidade de atualização do ensino para a formação de cientistas e de matemáticos e ressalta que o ensino da

[36] Ubiratan D'Ambrosio não compareceu ao Congresso e sua tese foi apresentada pelo professor Benedito Castrucci.

MM, pelas generalizações e as conexões entre os diversos ramos da Matemática, favorecia a aprendizagem (BARBOSA, 1957, p.282).

Na tese apresentada por Osvaldo Sangiorgi, *Matemática clássica ou matemática moderna na elaboração dos programas do ensino secundário?,* o autor discutia a diferença entre a matemática clássica e a matemática moderna:

> [...] a primeira tem por base os elementos simples tais como os números inteiros, o ponto, a reta, etc. e a segunda um sistema operatório, isto é, uma série de estruturas (Bourbaki), sobre as quais se assenta o edifício matemático, destacando-se entre elas as estruturas algébricas, as estruturas de ordem e as estruturas topológicas. Cremos que as teorias cada vez mais complexas a que é conduzida a investigação moderna revelam-se pouco susceptíveis de virem a ser já incorporadas no ensino secundário. [...] Essa modelação aos tempos novos deve ser gradativa, a fim de serem evitados os malefícios decorrentes de transformações radicais [...] (SANGIORGI,1957, p. 398-399).

Sangiorgi critica o ensino médio que “tem sido pletórico, ineficaz e bastante divorciado da realidade” e apresenta “currículos sobrecarregados” e “programas extensos e inexequíveis dentro do horário correspondente”; ele adverte que para a melhoria do índice de aproveitamento em Matemática “não se cinge exclusivamente no retocar pura e simplesmente os programas existentes”, mas há que “reestruturar os métodos de ensinar em função de programas que cultivem espontaneamente o raciocínio do aluno, fazendo-o participar ativamente do trabalho” (SANGIORGI, 1957, p.399-400).

Sangiorgi propõe, a “título de sugestão para estudos”, um programa que, segundo ele, “obedece, na medida do possível, aos princípios expostos neste trabalho”, ou seja, da MM (SANGIORGI, 1957, p.403). Ele ressalta que o programa elaborado foi

> [...] aprovado pela Comissão de Matemática, no Encontro de Mestres, realizado em São Paulo, em 15 de junho de 1957, sob os auspícios da Inspetoria Seccional de São Paulo, subordinada ao Ministério de Educação e Cultura (SANGIORGI, 1957, p.403).

A proposta elaborada por Sangiorgi defende o ensino de geometria para o ensino ginasial desde a primeira série, com a “parte da geometria intuitiva necessária para o estudo dos sistemas de unidades [que] será desenvolvida pela cadeira de Desenho”. Na 2.ª série não está especificado nenhum conteúdo geométrico (SANGIORGI, 1957, p.403).

Na 3.ª série, Sangiorgi propõe a geometria dedutiva para o “estudo das figuras geométricas planas: triângulo, quadrilátero, polígono e circunferência (sem a parte da Medida)”. Sugere ainda as construções geométricas com régua e compasso, mas adverte que “merecem nessa série um trato harmonioso com a cadeira de Desenho” (SANGIORGI, 1957, p.404).

O autor propõe, para a 4.ª série, a continuidade da geometria dedutiva para “linhas proporcionais, semelhança e equivalência de polígonos”, pois ele considera que este tópico “está intimamente ligado com a álgebra e permitirá desenvolver problemas comuns em ambas”; cálculo de áreas, relações métricas nos triângulos retângulos, obliquângulos e no círculo, polígonos regulares, medida da circunferência e do círculo. Também propõe, como complemento, as noções de coordenadas cartesianas no plano, representação de um ponto; noção de função e sua representação cartesiana e a resolução gráfica e discussão de sistemas do 1.º grau a duas incógnitas. Sangiorgi considera esses assuntos relevantes, pois “visam dar aos alunos os primeiros conceitos de geometria analítica, de reais benefícios (a maioria dos livros de textos de qualquer disciplina são ilustrados com gráficos)” (SANGIORGI, 1957, p.404).

Sangiorgi também expõe os problemas relativos ao ensino de matemática, que levantou por ocasião de sua participação nos encontros de professores, promovidos pela Inspetoria Seccional do Ministério da Educação e Cultura (MEC) de São Paulo, para discussão do currículo e das propostas de renovação do ensino da matemática. Essa inspetoria também proporcionava cursos de férias para preparar professores para o exame de suficiência para efetivação no cargo de professor da escola pública. Sangiorgi também ministrava cursos de atualização para professores em parceria com a Cia. Editora Nacional, que publicava seus livros didáticos (BURIGO, 1989, p.102).

No tocante ao ensino da geometria, foram apresentados no 2º CNEM dois trabalhos, *O ensino da geometria dedutiva,* dos professores Antonio Rodrigues[37] e Martha Blauth Menezes,[38] e *O ensino de geometria no ensino secundário*, pelo professor Benedito Castrucci.[39]

A primeira parte do trabalho apresentado pelo professor Antonio Rodrigues sugere que alguns teoremas sejam aceitos sem demonstração, pois, a seu ver, na

---

[37] Professor Antonio Rodrigues, catedrático de Geometria da Faculdade de Filosofia da Universidade do Rio Grande do Sul – URGS.

[38] Martha Blauth Menezes, instrutora de ensino da cadeira de Geometria e professora de Didática Especial da Matemática da Faculdade de Filosofia da URGS.

[39] Benedito Castrucci, professor da Faculdade de Filosofia da Universidade de São Paulo.

geometria há vários teoremas de caráter intuitivo, que não necessitariam de demonstração para serem aceitos. Rodrigues acredita que um dos problemas do ensino de geometria dedutiva é a quantidade excessiva de demonstrações.

Na segunda parte do trabalho, a professora Menezes relata uma experiência realizada no Colégio de Aplicação da Faculdade de Filosofia da URGS, na 3.ª série ginasial, ocorrida em 1956, baseada na proposta do professor Rodrigues, que divide o aprendizado da geometria em três etapas: geometria intuitiva; introdução à geometria dedutiva, em que são apresentados os axiomas e postulados de demonstração intuitiva, e geometria dedutiva.

O professor Castrucci, em seu trabalho, *O ensino de geometria no ensino secundário,* salienta que a geometria deveria considerar dois tipos de demonstração: a experimental e a lógica, e que não há necessidade de demonstrar muitas propriedades com rigor, mas somente as que forem compatíveis com a compreensão para a idade dos alunos.

Leme da Silva (2007), em artigo que analisa as propostas apresentadas nos congressos brasileiros, no que diz respeito aos trabalhos sobre a geometria, conclui que:

> As duas teses apresentadas se complementam, pois os diagnósticos em relação às dificuldades da prática do ensino de geometria coincidem e as soluções sugeridas seguem a mesma linha, ou seja, simplificar o estudo da geometria dedutiva, reduzindo o número de teoremas a serem demonstrados e a inclusão da geometria experimental ou da demonstração intuitiva. Claro está que as discussões se dão nos aspectos didáticos do ensino, com a preocupação de que os alunos abandonem a memorização de teoremas que não fazem sentido algum a eles. Outro dado a observar é que não se questiona a perda do rigor da geometria euclidiana, ou a substituição desta geometria por outra, o foco é a metodologia empregada no ensino e não o conhecimento em si (LEME DA SILVA, 2008a, p.74-75).

O 3.º Congresso Nacional de Ensino de Matemática, realizado entre 20 a 25 de julho de 1959, na cidade do Rio de Janeiro, foi patrocinado pelo Ministério da Educação, por meio da Campanha de Aperfeiçoamento e Difusão do Ensino Secundário (CADES).[40] Nas discussões durante o Congresso observa-se a influência dos EUA e da Europa para a renovação do ensino da matemática, decorrente da necessidade de "aceleração da aprendizagem científica", o que justificaria a introdução do ensino da MM, para o que foram recomendados cursos

[40] CADES, criado em 1955, tinha como objetivo a formação de professores, elaboração e incentivo à produção de material didático, assistência pedagógica e administrativa às escolas, e contava com um fundo especial.

para professores de “preparação à Matemática Moderna”, bem como a introdução do “espírito” da MM na Faculdade de Filosofia e a realização de experiências no secundário com a introdução de “noções” de Matemática Moderna.

Neste congresso não houve trabalhos específicos sobre geometria, salvo o trabalho apresentado pela professora Martha Menezes, que sugeriu a inclusão da geometria intuitiva na 1.ª série do Curso Ginasial.

Nas conclusões deste congresso, constou a sugestão do professor Irmão Leôncio José, com os dizeres:

> [...] solicitar aos Srs. Professores [que] realizem experiências no Curso Secundário sobre a introdução de noções de Matemática Moderna e levem ao IV Congresso Brasileiro do Ensino da Matemática o resultado das mesmas (3.º CBEM,1959, p. 214).

Novamente a ênfase estava na metodologia, e o destaque foi o método do estudo dirigido aplicado de forma experimental em sala de aula, bem como o relato de experiências de ensino, cujo foco foram os processos intuitivos e práticos relativos ao universo do aluno.

Na década de 1960, vários acontecimentos na área econômica e política também repercutiram na área educacional. Em 1961 foi sancionada a Lei Federal n. 4.024 – Lei de Diretrizes e Base da Educação Nacional (LDB), que estabelecia normas gerais para a educação que não eram aplicáveis diretamente. Salientamos alguns aspectos relevantes para a nossa pesquisa: o art. 110 fixa o prazo de cinco anos para a implantação de sistemas estaduais de ensino, ou seja, pela diversidade do País, cada Estado poderia elaborar um programa, por meio dos Conselhos Estaduais de Ensino, numa perspectiva de descentralização e diversificação do ensino.

Jânio Quadros renunciou à presidência em um clima de instabilidade gerado pelo endividamento, pelo aumento das disparidades regionais, pela perda do poder aquisitivo e pelo aumento da inflação. O vice-presidente João Goulart assumiu a presidência em meio à grave crise política, mediante a emenda que instituiu o parlamentarismo.

Nas cidades, um grande número de greves sinalizava um aumento da influência do movimento sindical. Neste contexto, multiplicavam-se as propostas de renovação pedagógica, como a do Movimento de Cultura Popular de Recife, ligado à Igreja Católica, que propunha a pedagogia libertadora de Paulo Freire. São também criados os Ginásios Vocacionais e a Escola de Aplicação da USP.

Sangiorgi vai aos Estados Unidos, em 1960, onde participa de um “Curso de Verão” na Universidade de Kansas e toma maior contato com as ideias modernizadoras da Matemática Moderna.

Ao voltar para o Brasil, Sangiorgi organizou, em São Paulo, o curso *Especialização em Matemática para Professores Secundários*, na Universidade Mackenzie. Este curso contou com o apoio da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, do Departamento de Matemática da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo e da National Science Foundation. Um diferencial deste curso foi a dispensa de ponto para os professores participantes (SANGIORGI, 1965, p.10).

Neste curso, segundo Burigo (1989), foi apresentada a proposta de reformulação do ensino da matemática, com aulas de Lógica Matemática ministradas pelo professor George Springer, do SMSG; Álgebra Abstrata, por Jacy Monteiro e Ruy Madsen Barbosa; Teoria dos Conjuntos, por Alésio de Caroli, todos da Universidade de São Paulo (USP) e Prática de Ensino da Matemática Moderna, por Osvaldo Sangiorgi. Cabe ressaltar que foi neste curso que Lucília Bechara, Manhúcia Liberman, Elza Babá, Renate Watanabe[41] e Anna Franchi[42] se conheceram.

A seguir, Sangiorgi funda o Grupo de Estudos do Ensino da Matemática (GEEM),[43] com sede na Universidade Mackenzie, e conta com a colaboração de George Springer. O GEEM tem por objetivo escrever livros-texto, realizar congressos, encontros, simpósios e cursos relativos à Matemática Moderna para professores, ou seja, semelhante ao SMSG (LIMA, 2006, p.42).

Nestes primeiros anos do GEEM, foram promovidos cursos nos quais antigos participantes do *Curso de especialização* tornaram-se professores e militantes. Lucília Bechara, Elza Babá e Manhúcia Liberman passam a ministrar cursos para professores no GEEM e fazem experiências de ensino com conteúdos da Matemática Moderna: Lucília e Elza, no Ginásio Vocacional do Brooklin, e Manhúcia, no Instituto Estadual de Educação Professor Alberto Levy e Ginásio I. L. Peretz.

[41] Renate G. Watanabe, bacharel, licenciada e mestre em Matemática, professora de Matemática da Universidade de São Paulo e da Universidade Mackenzie e membro do GEEM.

[42] Anna Franchi, bacharel e licenciada em Matemática pela Universidade de São Paulo, mestre em Educação (Psicologia da Educação) e doutora em Educação (Currículo) pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (1995).

[43] Lucília Bechara, Luiz Henrique Jacy Monteiro, Manhúcia Liberman, Martha Dantas, Omar Catunda, Renate Watanabe, Benedito Castrucci, Alésio de Caroli, Anna Franchi, Elza Gomide, Irineu Bicudo, Ruy Madsen Barbosa e Joel Martins fazem parte do GEEM (LIMA, 2006, p.42).

O 4.º Congresso Brasileiro de Ensino da Matemática foi realizado entre 22 a 28 de julho de 1962, na cidade de Belém, no Pará. Segundo Sangiorgi, este congresso "tratou pela primeira vez, com objetividade e discussões de alto gabarito, o problema da introdução da Matemática Moderna no Ensino Secundário" (SANGIORGI, 1965, p.9).

Como havia sido proposta, no 3.º CBEM, a realização de experiências com conteúdos da MM, o ponto alto do 4.º CBEM foram os relatos destas experiências executadas em cursos regulares ou experimentais, bem como as aulas demonstração com foco na MM, cuja apresentação ficou a cargo do GEEM.

Como este Congresso não editou os anais, dispomos apenas de algumas informações propiciadas pelos arquivos APOS, APLB e o CD, organizado pelo Centro de Documentação do GHEMAT. Deste congresso destacamos os trabalhos: *Didática especial da geometria,* apresentado pela professora Eleonora Lobo Ribeiro;[44] *Introdução à geometria dedutiva usando a linguagem dos conjuntos,* pela professora Manhúcia Liberman; e *Alguns dados sobre o desenvolvimento de um moderno planejamento da matemática, iniciado em 1962, na primeira série do Ginásio Vocacional do Brooklin-São Paulo,* pela professora Lucília Bechara, ambas do GEEM.

Destacaremos o trabalho *Didática especial da geometria,* realizado pela professora Eleonora Lobo Ribeiro, pois ele apresenta a proposta metodológica para o ensino da geometria de Lucienne Felix. Ribeiro discute as funções, objetivos, normas, procedimentos metodológicos e sugestões para o ensino da geometria, tanto de forma experimental como de forma lógica.

Ribeiro fez estágio no Lycée de Sévres, onde foi apresentada à Lucienne Félix, então professora do Lycée La Fontaine de Paris, que havia exposto "um inquérito sobre o ensino da Geometria" (RIBEIRO, 1962, apud GHEMAT 2009). Neste trabalho, segundo Ribeiro, Felix propõe o ensino da geometria em três fases:

a) a primeira fase é "experimental, onde se faz o ensino pré-lógico", os alunos "utilizam instrumentos, realizam observações, fazem as primeiras classificações de formas" ao mesmo tempo em que aprendem o vocabulário básico;

[44] Eleonora Lôbo Ribeiro, professora da Escola de Aplicação da Faculdade de Filosofia do UFRG.

b) a segunda fase é a "iniciação lógica", uma fase intermediária entre a geometria experimental e a geometria lógica, ou seja, o aluno sente necessidade, segundo Felix, de "regras infalíveis que evitam as cansativas tentativas e constituam em economia de esforço e de tempo". Por outro lado, há que propiciar ao aluno a "generalização pela desconfiança da permanência de certas leis em todos os casos". Assim, a "dúvida leva ao raciocínio e, portanto, à dedução". Nesta fase também se adquire o vocabulário lógico, e o "trabalho prático do desenho" é substituído pelo "desenho mental";
c) a terceira fase é a "dedutiva", na qual o "professor sistematiza a matéria dando unidade ao trabalho" e o aluno emprega o "método lógico através das demonstrações" (RIBEIRO, 1962, apud GHEMAT, 2009).

Ribeiro considera que o ensino da geometria deveria ter uma quarta fase, que complementaria as três fases explicitadas por Felix. Para tanto, Ribeiro se baseia no artigo de Renée Marchal,[45] que considera que se deveriam aplicar os resultados obtidos a fim de que se "realizasse a volta ao REAL" (RIBEIRO, 1962, apud GHEMAT, 2009).

Vale ressaltar que a autora entende por método experimental aquele que "apela para a intuição" da criança ao criar "condições materiais circunstanciais para que o fato a ser estudado se realize e conclusões sejam tiradas", e por método lógico aquele que parte de axiomas ou postulados admitidos como verdades abstratas e apela para o "raciocínio do educando", a fim de "estabelecer novas proposições demonstradas verdadeiras: os teoremas" (RIBEIRO, 1962, apud GHEMAT, 2009). A autora, então, pondera sobre as vantagens e desvantagens de cada método e conclui que:

> [...] todo programa de Geometria para a escola secundária deve ser baseado na **EXPERIÊNCIA**, que, por sua vez, só deve ser realizada visando à introdução em dado momento do **MÉTODO LÓGICO** [...] A formação do pensamento lógico do educando e a **COORDENAÇÃO** da **GEOMETRIA** com o **VERNÁCULO**, com o **DESENHO** e com os **TRABALHOS MANUAIS** é indispensável neste tipo de ensino (RIBEIRO, 1962, apud GHEMAT, 2009, grifos da autora).

[45] Renée Marchal, licenciada em Ciências Pedagógicas e em Orientação Escolar e Profissional na Bélgica, autora do artigo Les Mensurations Psychopédagogique III – La Geométrie.

Ribeiro faz o relato de nove sugestões para o ensino de geometria para o antigo curso ginasial, clássico e científico, que foram experimentadas no Colégio de Aplicação da Faculdade de Filosofia.[46]

A professora Lucília Bechara, no seu relato *Alguns dados sobre o desenvolvimento de um moderno planejamento da matemática, iniciado em 1962, na primeira série do Ginásio Vocacional do Brooklin-São Paulo,* ressalta que as experiências foram realizadas de acordo com os objetivos do Ginásio Vocacional, que propõe o ensino "através de unidades didáticas planejadas pela equipe técnica e docente, e que "o conteúdo e as técnicas atendem não só objetivos específicos da área (matéria)", mas também "seguiram a orientação dos trabalhos planejados pelo GEEM" (BECHARA, 1965, p.53-55).

A metodologia utilizada é a do estudo dirigido, feita por meio de situações ou de "problemas naturais ou artificialmente criados, ou que decorrem do desenvolvimento do conteúdo de outras áreas". Desta maneira, o aluno, a partir do problema apresentado, buscará uma solução, mediante discussões em equipes, "é este o momento em que o professor irá orientá-lo no conhecimento de certos conteúdos e determinadas técnicas". Em seguida, por meio de "exercícios de fixação, o conteúdo é explorado e sistematizado". A terminologia e a simbologia corretas são introduzidas apenas quando o aluno sente que necessita deles para expressar aquele novo pensamento, isto significa o "amadurecimento do conceito" (BECHARA, 1965, p.53-55).

As professoras Manhúcia Liberman e Renate Watanabe apresentam uma aula demonstração, *Introdução à geometria plana (usando linguagem de conjuntos)*, e informam, no seu início, que: "Esse trabalho, em particular, segue de perto as publicações do UICSM (University of Illinois Committee on School Mathematics) e do SMSG (School Mathematics Study Group)" (LIBERMAN; WATANABE, 1965, p.187).

As autoras justificam a utilização dessas publicações, porque nelas a Geometria é apresentada "não como um conjunto de teoremas a serem memorizados", mas como o "estudo de situações" em que os alunos devem "tirar as conclusões possíveis e justificá-las logicamente", como se estivessem "tratando de um problema da vida real", com o uso constante e coerente da linguagem de conjuntos (LIBERMAN; WATANABE, 1962, p.187).

---

[46] Algumas experiências realizadas apresentam datas entre 1952 e 1959, mas em algumas experiências não há informação sobre a data.

Após essa justificativa, as autoras apresentam os conceitos primitivos e as relações entre conjuntos. Em seguida, expõem sequências de exercícios exploratórios e de aplicações em que os alunos devem ser "capazes de reunir sob forma de postulados" as situações exploradas e, a partir destes, efetuar algumas demonstrações de teoremas, com os quais será possível, então, uma construção lógica da geometria (LIBERMAN; WATANABE, 1962, p.188-200).

Apesar de todas essas experiências de ensino e o sucesso do 4.º Congresso, amplamente divulgado pela imprensa, o MMM era, em São Paulo, uma iniciativa dos membros do GEEM. Oficialmente o programa para a cadeira de Matemática era o da Portaria de 1951.

A LDB de 1961, como já mencionamos, permitia que cada Estado elaborasse uma proposta de ensino e, para a introdução da MM nos programas de ensino, uma nova proposta deveria ser realizada. Em junho de 1962, pouco antes do 4.º CBEM, o GEEM promoveu o 5.º Encontro de Mestres em São Paulo, a fim de elaborar os *Programas Mínimos de Matemática para a Escola Secundária*. O programa elaborado e sancionado no 5.º Encontro de Mestres foi apresentado no 4.º CBEM e aprovado por unanimidade.

O documento *Programas Mínimos de Matemática para a Escola Secundária* foi elaborado pela Comissão de Estudo composta pelos professores: Luiz Mauro Rocha, Osvaldo Sangiorgi, Omar Catunda, Benedito Castrucci, Maria Antonieta Belfort de Mattos Rizzi, Carlos Galante, Alcides Boscolo, Manhúcia Liberman, Rubener da Silva Freitas e Ruy Madison Barbosa. O programa mínimo para o ensino secundário consistia de 24 itens, sendo metade deles referente ao ensino de geometria.

O Programa informa que os conteúdos matemáticos são os mesmos estudados até então, considerados "essenciais na formação do jovem ginasiano", mas seria utilizada uma "linguagem moderna", considerada "mais atraente às novas gerações". Essa linguagem "envolve substancialmente o conceito de conjunto", a fim de que se possa ter a "formação das estruturas matemáticas", que se consegue "com menos esforço e melhor aproveitamento das estruturas mentais". Este programa foi concebido para ser cumprido nos quatro anos do ginásio (CBEM, 2009, CD-ROM).

Observamos que na proposta não há outra referência à modernização, a não ser a utilização da "linguagem de conjunto". Vale ressaltar que Omar Catunda e

Benedito Castrucci, catedráticos da FFCL da USP, e Sangiorgi estavam a par das propostas curriculares modernizadoras que aconteciam tanto na Europa como nos Estados Unidos. Pelo visto, a comissão que elaborou a proposta de modernização do ensino da geometria, tanto no que se refere aos conteúdos como à metodologia, apropriou-se de uma forma particular, no sentido dado por Chartier (1990), das discussões ocorridas no CIEAEM (1955), em *Royaumont* (1959), no CIAEM (1961), e nos leva a considerar que houve um hiato entre as propostas internacionais e a proposta coordenada pelo GEEM.

O sucesso da apresentação, no 4.º CBEM, das experiências realizadas com as ideias da MM e a aprovação de um programa mínimo conferiram uma nova dimensão ao MMM, não mais de experimentação, mas de implantação efetiva da MM no ensino ginasial. Há que considerar, também, que a sociedade passa por profundas mudanças políticas e econômicas.

O Brasil se encontra em um clima de instabilidade política, que culminou com o golpe militar em março de 1964, quando é instaurada a ditadura militar, que restabeleceu as condições de expansão da economia que diziam estar ameaçada pelos movimentos populares. O Brasil conseguia taxas de crescimento surpreendentes à custa do endividamento acelerado, do arrocho salarial e da concentração de renda, da ordem com repressão aos movimentos populares e de intensa propaganda. O crescimento da economia gerou a expansão do ensino público tanto porque havia uma perspectiva de ascensão social como as indústrias necessitavam de operários qualificados. No campo da educação o governo fez acordos de cooperação técnica com os Estados Unidos para o treinamento de professores por técnicos americanos.

O Convênio entre o Ministério da Educação – MEC e *United States Agency for International Development* – USAID (MEC-USAID)[47] tinha por objetivo promover a educação para que ocorresse o desenvolvimento econômico, ou seja, a educação tinha o propósito de suprir as necessidades do desenvolvimento capitalista internacional. Para tanto, a escola deveria ser para todos, a fim de formar mão de obra, com algum treinamento, muito produtiva e barata.

[47] Série de acordos produzidos, nos anos 1960, entre o Ministério da Educação brasileiro (MEC) e a *United States Agency for International Development* (USAID). Visava estabelecer convênios de assistência técnica e cooperação financeira à educação brasileira.

Com os acordos, houve grande desenvolvimento do parque gráfico brasileiro. As editoras que participaram deste convênio redefiniram sua linha de produção para atender as exigências do programa, visto que "a disponibilidade financeira com que contava esse programa era farta", em virtude da "generosidade do acordo MEC/USAID, assim todos os livros aprovados pelo MEC seriam adquiridos e "distribuídos às bibliotecas, no mínimo, um exemplar para cada unidade" (OLIVEIRA; GUIMARÃES, 1984, p.54).

Assim, em 1967, foi editada e distribuída a coleção *Matemática – Curso Ginasial,* produzida pelo SMSG, traduzida por Lafayette de Moraes, Lydia Condé Lamparelli e colaboradores.

O GEEM, em parceria com a Secretaria da Educação de São Paulo, intensifica suas atividades, promovendo cursos no período de férias dos professores, participa do projeto Serviço de Ensino e Formação pelo Rádio e Televisão (SEFORT), com elaboração de aulas de Matemática Moderna direcionadas tanto para professores do ensino primário como para alunos, apresentadas pela professora Manhúcia Liberman. O sucesso desses programas fez com que, a partir 1964, fosse transmitido também o *Curso de Matemática Moderna pela Televisão,* destinado aos professores secundários.

O GEEM também publica livros para orientar os professores e promove a vinda de matemáticos para realizar palestras, como: Lucienne Felix, da França; Ernest Ranucci, do Departamento de Matemática de Newark State College, dos EUA*;* Maximo A. Dickman, da Universidade de Buenos Aires, e Marcel Guillaume, da Universidade de Clemont Ferrant; Marshall Stone, Tomas Varga, Gunther Pickart, Zoltan P. Dienes, Lech Dubikajtis, entre outros.[48]

Outro fato diretamente ligado à implantação do MMM foi a divulgação no *Diário Oficial de São Paulo*, em 13 de janeiro de 1965, do documento *Sugestão para um Roteiro de Orientação da Cadeira de Matemática Para Todas as Séries do 1.º e 2.º Ciclo do Ensino Secundário*,[49] elaborado por Benedito Castrucci, Osvaldo Sangiorgi, Luis Mauro Rocha, Renate Watanabe e Alcides Boscolo, todos membros

[48] Para saber mais sobre as atividades do GEEM, ler *GEEM*: Grupo de estudos do Ensino da Matemática e a formação de professores durante o MMM no Brasil, de Flainer Rosa de Lima, dissertação de mestrado defendida em 2006, PUC/SP.

[49] Roteiro de Orientação da Cadeira de Matemática Para Todas as Séries do 1.º e 2.º Ciclo do Ensino Secundário.

do GEEM. Vale lembrar que não são os mesmos autores do Programa Mínimo apresentado no 4.º CBEM.

Este roteiro conferiu um caráter oficial ao Programa Mínimo apresentado no 4.º CBEM, ao atender à sugestão da LDB para que cada Estado da Federação apresentasse um programa de ensino de matemática, mas também por ser a primeira publicação oficial que faz menção à Matemática Moderna.

O roteiro é basicamente igual ao Programa Mínimo, com acréscimo, na 1.ª série ginasial, do item *Estudo intuitivo das principais figuras geométricas.* Na 3.ª série ginasial, dos itens C*onstruções geométricas e transformações*; *construções com régua e compasso; transformações geométricas elementares: translação, rotação e simetria.* A nosso ver, a introdução do estudo intuitivo e das transformações geométricas sinaliza uma tentativa de iniciar as discussões e as recomendações internacionais no currículo de São Paulo.

Podemos intuir que a ocasião era propícia para que Osvaldo Sangiorgi lançasse a coleção *Matemática - Curso Moderno*.[50] Segundo Valente (2008), este livro foi um *best-seller*, e, consoante Villela (2008), esta coleção, entre 1964 e 1973, vendeu 4.336.087 exemplares (VALENTE, 2008, p.30-31).

Ainda de acordo com Valente (2008), este livro "pode ser considerado inovador", pois, além de apresentar os conteúdos da Matemática Moderna, era "novo em sua materialidade". A diagramação dos conteúdos com tipos de letras, de números, fotografias, desenhos, com diversos formatos, tamanhos e coloridos diferia do até então existente. Continha, ainda, o Guia para professores, com o intuito de "*guiar* os professores no trabalho pedagógico com os novos conteúdos" (VALENTE, 2008, p.30-31).

Sangiorgi apresenta, no prefácio, o estudo da geometria com entusiasmo:

> Finalmente, vem o "bom-bocado" do livro: o estudo da geometria. Agora, não será mais preciso que você "decore" enfadonhos teoremas e mais teoremas, contra o que, erradamente, alguns colegas mais adiantados costumavam "preveni-lo" [...] Seja, pois muito feliz nesta viagem ao maravilhoso país da Geometria (SANGIORGI, 1969).

---

[50] Essa coleção foi editada pela Companhia Editora Nacional, em substituição à coleção *Matemática,* que era publicada desde 1954. A coleção *Matemática Curso Moderno* foi lançada com um livro de cada série por ano, com início em 1964 e completada em 1968.

Leme da Silva (2008b) expõe uma análise comparativa entre a metodologia apresentada no livro didático de autoria de Osvaldo Sangiorgi, *Matemática* (1964), e no livro *Matemática Curso Moderno* (1969), e assevera que:

> O ensino da geometria não perde seu lugar, ele permanece em foco, no entanto, a ênfase, que se encontra na dedução, na obra anterior, agora, aproxima-se da geometria intuitiva [...] Osvaldo Sangiorgi não reproduziu modelos para o ensino da matemática. O que ele fez foi considerar o local para o qual sua obra se dirigia, a cultura escolar brasileira, seus trabalhos já realizados, leituras e contatos com pessoas que lideraram o movimento e, assim, de forma particular, única e criativa, produziu sua interpretação, sua resposta aos prescritos impostos pelo MMM (LEME DA SILVA, 2008b, p.75).

O ano de 1966 foi marcado pela realização do 5.º Congresso Brasileiro de Ensino da Matemática, realizado entre 10 e 15 de janeiro de 1966, no Centro Técnico da Aeronáutica, na cidade de São José dos Campos, em São Paulo. Sua organização esteve a cargo do GEEM.

Este Congresso contou com a participação de vários professores, como: Marshall Stone,[51] George Papy,[52] Hector Merklen,[53] Helmuth Völker.[54]

Papy apresentou um programa baseado em experiências realizadas durante cinco anos, nos primeiros anos do ciclo secundário belga, sob o título *La Géométrie Dans L'Enseignement Moderne De La Mathématique*. Este programa elaborado por Papy era destinado a alunos de 12-17 anos, com quatro aulas semanais de quarenta e cinco minutos, e abordava "conjuntos, relações, gráficos, grupos, espaços vetoriais, e princípio de análise matemática e do cálculo diferencial e integral" (PAPY, 1966, p.100, tradução nossa).

Helmuth Völker realizou conferência sobre *La Matemática Moderna en La Escuela Secundaria Argentina,* na qual expõe um programa experimental para o curso secundário da Argentina:

> O programa experimental se caracteriza por uma poda considerável da Geometria de Euclides e na Trigonometria, enquanto nos programas internacionais estas disciplinas ocupam praticamente a metade de seu

---

[51] Chefe do Departamento de Matemática da Universidade de Chicago (USA) e presidente da Comissão Interamericana de Educação Matemática, que realizou uma sessão de estudo sobre *Tratamento Moderno da Geometria* (não temos registro dessa sessão de estudo nos Anais).

[52] Catedrático de Álgebra da Universidade de Bruxelas, Bélgica e presidente do Centro Belga de Pedagogia da Matemática; membro da Comissão Internacional do Ensino da Matemática. Além de realizar sessão de estudo sobre vários tópicos, proferiu conferência sobre *A Topologia no Ensino Secundário.*

[53] Da Universidade de Montevidéu, Uruguai, participante do Programa Interamericano para o Desenvolvimento do Ensino da Matemática, realizou sessão de estudo sobre o *Tratamento moderno da Geometria* (não temos registro dessa sessão de estudo nos Anais).

[54] Da Universidade de Buenos Aires, Argentina, do setor da Matemática do Ministério de Educação Pública da Argentina.

> conteúdo total. Em substituição aos temas suprimidos, introduziram-se: a geometria analítica plana e do espaço com sua roupagem moderna (vetores, transformações lineares, matrizes, inequações e programação linear) e noções de álgebra moderna (conjuntos, relações, funções, estruturas algébricas) (VÖLKER, 1966, p.128, tradução nossa).

No âmbito nacional, Omar Catunda realizou uma sessão de estudo sobre *Geometria – Tratamento Moderno,* no qual abordou: a) Representação dos números na reta – ordenação, soma de números reais; b) Vetores – translação, soma de vetores; c) Simetria – composição de simetrias, composição de simetria com translação, grupo das isometrias; d) Homotetias – composição de homotetias com translação.

Scipione Di Pierro Neto expõe uma aula demonstração, *Geometria,* na qual utiliza a metodologia do trabalho dirigido, apresenta a definição de ângulo formado por duas retas coplanares e retas coplanares e uma transversal, ou seja, os elementos da geometria de Euclides com a linguagem de conjunto.

Antonio Rodrigues apresenta a comunicação, *Planejamento de um curso de Geometria com Base em Noções Vetoriais,* na qual fundamenta a geometria em três noções: de ponto, de vetor e de número real.

Lucília Bechara e Elza Babá Akama apresentam o trabalho *Geometria no Ginásio – Relato de uma Experiência Realizada nos Ginásios Vocacionais de São Paulo*. Esta comunicação contém alguns conceitos geométricos, como: distância de ponto, abertura de ângulos, transformações geométricas – simetria axial e central, congruência, homotetia, semelhança, relações trigonométricas e, também, "um resumo das ideias mais importantes para um professor, que pretende reformular seu esquema de geometria no Curso Ginasial" (BECHARA; AKAMA, 1966, p. 179).

Vale lembrar que, em 1966 aconteceu a 2.ª Conferência Interamericana sobre Educação Matemática e Sangiorgi apresentou o relato, *Progresso do Ensino da Matemática no Brasil*, que consistia, em sua essência, das realizações do GEEM.

O GEEM continua com os cursos de atualização de professores, com a publicação de livros e organiza a 1.ª Olimpíada Brasileira de Matemática. As experiências didáticas ocorrem no Ginásio Vocacional do Brooklin, até o seu fechamento em 1969 e também no Colégio Santa Cruz e no Colégio Vera Cruz, do qual Lucília Bechara foi uma das fundadoras, e em várias escolas da rede pública.

Outra realização do GEEM foi a tentativa de enfrentar os problemas para a reforma do ensino da matemática, observados por Sangiorgi, os quais são muito próximos daqueles problemas que também ocorriam na América Latina, como evidenciado por Santaló no II CIAEM. Convencer os pais e a sociedade era fundamental para a implantação do MMM. Assim, o GEEM promoveu o *1.º Curso de Atualização em Matemática para Pais,* que aconteceu no Ginásio Vocacional do Brooklin, em setembro de 1966, com a colaboração do Serviço do Ensino Vocacional da Secretaria da Educação.

Pelas apostilas[55] observa-se que o curso não apresentava apenas aulas expositivas para informação dos pais, mas trazia explicações e exercícios sobre os conteúdos da Matemática Moderna para o nível ginasial. Carlos B. Lyra expôs uma aula sobre A *Evolução da Matemática Através da História e a Matemática Atual*; Manhúcia Liberman, *Noções sobre Conjuntos*; Elza Babá, *Ampliação dos Conjuntos Numéricos*; Renate Watanabe, *Relações e Funções*; Lais Lacorte Figueira, *Propriedades dos Sistemas Numéricos*; Thelma S. Christianini, *Geometria*; Lucília Bechara, *Noções de Lógica*; Leonidas Hegenberg, *Renovação do Estudo de Matemática.*

Destacamos que a aula de Thelma S. Christianini versou sobre as transformações geométricas, simetria e translação, para depois trabalhar a congruência como uma relação entre duas figuras, ou seja, "dadas duas figuras **F** e **F'**, se existe uma transformação que leva uma na outra mantendo todas as distâncias", as figuras **F** e **F'** são congruentes, e a semelhança de figuras foi apresentada a partir da homotetia definida como a transformação geométrica, em que "a figura **f'** é a sombra da figura **f** no plano **α**, pelo foco luminoso **A**". Assim, na homotetia "os segmentos da figura transformada são proporcionais aos segmentos da figura dada e os ângulos da figura transformada são congruentes aos ângulos da figura dada" (CHRISTIANINI, 1966, p.4).

Ressaltamos também a conclusão da aula, *Renovação do Estudo de Matemática,* do professor Leonidas Hegenberg, acerca das mudanças empreendidas pelos protagonistas do MMM:

> Uma palavra ainda. Espanta-nos a novidade. Mas lembremos que a Geometria – que era, ao tempo de Euclides, matéria de pós-graduação nas academias filosóficas, passou a ser lecionada no grupo escolar. Isto que agora parece tão difícil também virá a ser coisa de rotina no futuro. E essas transformações são inevitáveis. Por isso mesmo é bom que nos compenetremos de que o ensino precisa ser modificado. Do contrário, só estaremos contribuindo para agravar isso que tão apropriadamente se tem

[55] As apostilas utilizadas no *1.º Curso de Atualização em Matemática para Pais* foram encadernadas sob a forma de livro, que se encontra no GHEMAT – APML.

> chamado de "conflito das gerações". Nosso papel não é o de bloquear as inovações. É o de contribuir para que elas se façam. Criticando, sem dúvida, o que for feito, para obter resultados cada vez melhores. Mas não criticando o que for feito com o intuito de manter aceso um "saudosismo" superado [...] (HEGENBERG, 1966, p.9).

A imprensa foi de grande valia para convencer a sociedade de que a reforma do ensino da matemática proporcionaria aos alunos uma Matemática menos "assustadora", como nos mostra o artigo publicado no jornal *O Diário Popular*, de 3 de fevereiro de 1965.

MATEMÁTICA DE HOJE É DE ENSINAR SEM ASSUSTAR

Matemática deixa de ser o bicho papão que apavorava os alunos dos cursos secundários e primários. Isto graças ao seu ensino por meio da Matemática Moderna, que criou um nôvo método pedagógico.

Segundo o prof. Osvaldo Sangiorgi, um dos técnicos em Matemática Moderna, visa esta o aproveitamento total das estruturas mentais inatas em cada criança.

"A chamada matemática tradicional era considerada como instrumento de terror dos alunos, pois dava ênfase a técnicas operatórias e a problemas que conduziam a cálculos astronômicos, acrescentou".

Daí surgiu a necessidade do estabelecimento de um método de ensino mais acessível à mente infantil.

Figura 1 – Osvaldo Sangiorgi; **Diário Popular** 03.02.1965.

Afirmava-se ainda que a reforma do ensino da matemática proporcionaria ao estudante conhecimento mais atual, como a reportagem publicada no jornal *Folha de S. Paulo*, sob o título Geometria Moderna Revoluciona o Ensino, na qual Lucília Bechara explica, em entrevista, as novas geometrias que poderiam ser ensinadas aos alunos:

> [...] há dois mil anos é ensinada a geometria euclidiana. Nossa atitude em relação a essa geometria não é de um radicalismo extremo. Não chegamos a dizer "abaixo Euclides". Ao contrário, mesmo em nosso trabalho renovador na escola secundária, tomamos o modelo euclidiano como ponto de partida ou de referência quase constante [...] não podemos esquecer as novas descobertas, as novas criações, os avanços dados no estudo da Geometria. Nosso esforço, portanto, é para chegarmos a uma prática de ensino que tenha suficiente mobilidade, para que a ela sejam acrescentadas as mais válidas descobertas [...] (*Folha de S. Paulo*, 11de janeiro de 1967).

Nakashima (2007), em sua dissertação de mestrado intitulada *O papel da imprensa no Movimento da Matemática Moderna,* fez um levantamento das publicações encontradas em vários jornais e digitalizou centenas de anúncios de cursos para atualização de professores, artigos sobre as novidades do ensino da matemática, além de convites para conferências com professores nacionais e internacionais. Nesse trabalho, Nakashima conclui que, além do relacionamento e da amizade entre os membros do GEEM com os jornalistas e com as autoridades do governo, o apoio dos jornais na divulgação do MMM se deve: “à valorização do ensino da Matemática como justificativa para minimizar o autoritarismo da ditadura, a censura prévia aos textos políticos e sociais, aliada à neutralidade política da Matemática” (NAKASHIMA, 2007, p.8).

Na esfera governamental a Secretaria de Educação organizou um grupo de trabalho encarregado de elaborar um projeto para reorganizar o currículo e o programa do curso primário em São Paulo. Manhúcia Liberman participou desse trabalho como representante do GEEM, que definiu as *Novas diretrizes para o ensino primário* na rede pública, mas foi oficializado somente nos guias curriculares de 1975.

Em 1966/1967, Manhúcia, Lucília e Anna Franchi lançam o livro para o ensino primário *Curso Moderno de Matemática para a Escola Elementar,* publicado pela CEN. As autoras desta coleção exerciam posições de liderança e prestígio, respeitadas pelo professorado e consideradas como referência em relação à modernização do ensino nas séries iniciais, o que legitimava uma publicação. Medina (2008) ressalta:

> O livro é uma publicação com 114 páginas, trazendo inovações tanto na diagramação como no estilo, carregando uma nova concepção de editoração, diferenciando a publicação de todos os livros da época: folhas soltas, desenhos coloridos e nova distribuição de conteúdos que, mais tarde, seria oficializada pelo Programa da Escola Primária, de 1969, e pelos Guias Curriculares, de 1975. [...] A Companhia Editora Nacional apostou na renovação das formas, com cores chamativas e desenhos modernos. A capa com um formato maior e muitos desenhos, rompia com o clássico, [além de ter] ilustrador Aluízio Neves fato inusitado na época (MEDINA, 2008, p.99-100).

Essa coleção foi um sucesso, segundo Villela (2008), que nos apresenta, em seu artigo *Os livros didáticos de matemática de maior vendagem, na Companhia Editora Nacional, no período de 1964 a 1980*, um levantamento feito no Acervo Histórico da Companhia Editora Nacional. A autora contabilizou, no período de 1967 a 1974, a vendagem de 2.588.611 exemplares, e algumas edições dessa coleção tiveram coedição com a COLTED (VILLELA, 2008, p.128).

Até o início da década de 1970, a MM ainda não consta oficialmente nos programas de ensino, mas apenas como sugestões para o programa de Matemática, como o Programa Mínimo (1962) e o Roteiro de Orientação da Cadeira de Matemática para Todas as séries de 1.º e 2.º ciclo do Ensino Secundário (1965), embora seja ensinado no curso primário e no secundário. Com as mudanças políticas, sociais e econômicas ocorridas no início da década de 1970, temos novamente uma mudança na política educacional.

Costa e Silva foi eleito Presidente da República pelo Congresso Nacional em 3 de outubro de 1966, e tomou posse em 15 de março de 1967, em meio à grande expectativa quanto ao progresso econômico e à redemocratização do País, pois naquele mesmo dia deixavam de vigorar os quatro Atos Institucionais estabelecidos por Castelo Branco.

Apesar das tentativas de combater a inflação, revisar a política salarial, ampliar o comércio exterior, expandir as comunicações e o transporte, Costa e Silva não conseguiu acalmar o clima tenso da sociedade e estabeleceu o Ato Institucional Número Cinco – AI-5, que lhe deu poderes para fechar o Parlamento, cassar direitos políticos e institucionalizar a repressão.

Após sofrer uma trombose cerebral, Costa e Silva foi afastado da presidência e substituído por uma Junta Militar, que estabeleceu outros atos institucionais e atos complementares e a Emenda Constitucional n. 1, que impediu a posse do Vice-Presidente da República, Pedro Aleixo, e deu posse como Presidente da República ao General Emílio Garrastazu Médici, em 30 de outubro de 1969, que prometia restabelecer a democracia até o fim de sua gestão.

Entretanto, o governo Médici foi marcado por denúncias de tortura contra presos políticos, eliminação das guerrilhas de esquerda rurais e urbanas, aumento da miséria e da desigualdade social. Segundo o Banco Mundial, 64,5% da população, em 1976, era desnutrida ou subnutrida. O período foi marcado também pelo *milagre brasileiro* – crescimento econômico, baixa inflação, projetos desenvolvimentistas como a Transamazônica, a Ponte Rio-Niterói, a Usina Hidrelétrica de Itaipu – e pelo ufanismo nacionalista, movido por forte campanha publicitária refletida no slogan: “Brasil, ame-o ou deixe-o”.

O Presidente Médici, em sua Mensagem ao Congresso em 1970,[56] faz referência às “sérias deficiências de organização e funcionamento” do sistema educacional, ao apontar como sua principal causa “a falta de entrosamento entre os

---

[56] Disponível em: <http://brazil.crl.edu/bsd/bsd/u1352/000044.html>. Mensagem Presidencial ao Congresso Nacional em 1970, p. 53-59.

currículos dos diversos graus, a que se soma o seu caráter tipicamente propedêutico”, e acrescenta que os “currículos irrealísticos exigem forte carga horária de informações puramente acadêmicas, sem qualquer preocupação de qualificação gradativa da mão de obra”, embora não deixe de considerar a “seletividade antidemocrática, sobretudo, do ensino médio” e o “despreparo de grande parcela do magistério e sua baixa remuneração” (BRASIL, 2009, p.53).

Vale lembrar que os problemas relacionados à educação apresentados pelo Presidente Médici, no tocante ao ensino da matemática, já haviam sido constatados nos CBEM, no fim da década de 1950 e início da década de 1960.

O Presidente Médici propõe algumas medidas para solucionar os problemas levantados, entre eles:

> [...] [a] integração do curso primário com o primeiro ciclo do atual curso médio, de modo a criar-se o conceito da educação fundamental, que virá corrigir os defeitos de desconexão hoje existentes entre os currículos [...] os ginásios, orientados para o trabalho (ou, por assim dizer, pluricurriculares) desempenharão papel de relevo no despertar das vocações [...] ao lado da instrução convencional, permitirão o contato dos alunos com as oficinas de artes e ofícios. Não terão caráter profissionalizante, mas pré-vocacional [...] o governo atribui grande importância ao programa, por se tratar de esclarecida tentativa no sentido de preparar, mediante currículos realísticos, o estudante de nível médio, para ser útil a sua comunidade, caso venha a abandonar a escola, que deixa de ser meramente discursiva e verbalística [...] espera-se que a reformulação dos currículos, no ensino fundamental, corrija, em parte, o binômio evasão/repetência (BRASIL, 2009, p.54-56).

A mensagem presidencial concretizou-se na Lei n. 5.692, de 11 de agosto de 1971, que fixou as Diretrizes e Bases da Escola de 1.º e 2.º graus. O Sistema Escolar em sua dimensão vertical se configurou em: ensino para crianças em idade inferior a sete anos; ensino de 1.º grau obrigatório para crianças de 7 a 14 anos, com carga horária mínima de 720 horas anuais; ensino de 2.º grau; e ensino de 3.º grau.

O ensino de 1.º grau se constituiu a partir da unificação do ensino primário e do ensino secundário.[57] Como consequência imediata, temos: o fim do exame de admissão;[58] o fim da dualidade do ensino secundário, isto é, não haveria mais distinção entre curso profissionalizante, que tinha caráter terminal; e o curso ginasial, que possibilitava o acesso ao ensino superior.

Em sua dimensão horizontal, o art. 4.º estabelece:

> Os currículos do ensino de 1.º e 2.º graus terão um núcleo-comum, obrigatório em âmbito nacional, e uma parte diversificada para atender, conforme as necessidades e possibilidades concretas, às peculiaridades

---

[57] Consideramos o ensino secundário tanto o ensino ginasial como o ensino profissionalizante.

[58] No Estado de São Paulo o exame de admissão foi extinto com a Lei n. 10.125, de 4 de junho de 1969, que instituiu o Código de Educação do Estado de São Paulo.

> locais, aos planos dos estabelecimentos e às diferenças individuais dos alunos. [...] O Conselho Federal de Educação fixará para cada grau as matérias relativas ao núcleo-comum, definindo-lhes os objetivos e a amplitude. [...] (BRASIL, 1971, p.1).

A Resolução n. 8/1971 fixa o núcleo comum para os currículos do ensino de 1.º e 2.º graus, definindo-lhes os objetivos e a amplitude. No art. 1.º são definidos os três componentes do núcleo-comum: Comunicação em Língua Portuguesa; Estudos Sociais (engloba as disciplinas História, Geografia e Organização Social e Política do Brasil); Ciências (compreende as disciplinas Matemática e Ciências Físicas e Biológicas).

O art. 3.º especifica os objetivos do ensino do núcleo-comum, Ciências, ou seja: “o desenvolvimento do pensamento lógico e a vivência do método cientifico e de suas aplicações”, além de desenvolver no aluno as “capacidades de observação, reflexão, criação, decisão e ação, encaradas como objetivo geral do processo educativo” (BRASIL, 1971, p.3).

O detalhamento dos conteúdos programáticos de cada núcleo-comum caberia à Secretaria de Educação de cada Estado. A Secretaria de Educação do Estado de São Paulo elaborou, então, os Guias Curriculares.[59] Esses guias não tinham o objetivo de ser modelos a seguir, mas uma referência para os professores, a fim de ajudá-los no planejamento das atividades. A equipe técnica para a parte referente à Matemática esteve a cargo de Almerindo Marques Bastos, Anna Franchi e Lydia Conde Lamparelli. Na introdução dos Guias Curriculares, enfatiza-se:

> Achamos que um tratamento axiomático não seria aconselhável, pelo menos no ensino de 1.º grau. Isto não significa, entretanto, um abandono do rigor que caracteriza o raciocínio matemático. Esse rigor deve estar presente em todo o desenvolvimento do programa. Parece-nos, apenas, que devemos procurar obter os conceitos com base nas atividades do aluno, na manipulação de instrumentos e materiais didáticos adequados, em situações tão próximas do concreto e da experiência do aluno quanto seja possível. A passagem ao abstrato deve ser feita gradativa e cuidadosamente, etapa por etapa, atendendo ao nível de amadurecimento do aluno. O importante é destacar, em uma situação examinada, tudo que há de matemático na mesma, chamar a atenção para o que é aceito como válido e para os resultados que podem ser obtidos a partir do que foi admitido. Desse modo, estaremos atendendo às recomendações de matemáticos de todo mundo que, nos últimos anos, vêm se preocupando com a Pedagogia da Matemática, tais como: Caleb Gategno, Emma Castelnuovo, G. Papy, Z. P. Dienes, Lucienne Felix, bem como o psicólogo Jean Piaget (SEE.SP, 1975, p.209).

---

[59] Os Guias Curriculares foram publicados oficialmente em 1975. Em 1972 Lucília Bechara participara da Análise Crítica do Guia Curricular, conforme documento no APLB.

Também ressalta-se que a polêmica entre a Matemática Moderna e a Matemática Clássica não tem razão de ser, uma vez que a Matemática não é moderna nem clássica, é simplesmente a Matemática. Essa polêmica teve origem na evolução da Matemática, o que levou a uma grande defasagem entre a pesquisa e o ensino dessa matéria no secundário, daí a necessidade da reformulação dos programas de ensino do nível secundário, agora 1.º grau, que tem por objetivo final um maior dinamismo na aprendizagem em contraste com a maneira estática como o ensino era apresentado (SEE.SP,1975, p.209).

Alguns aspectos são realçados nos guias no tocante ao ensino da matemática, como unidade da Matemática, mostrando-a como uma construção única, sem compartimentos estanques; considera também o papel central desempenhado pelas estruturas matemáticas no estudo dos Campos Numéricos, bem como na Geometria, em que os conceitos de relação e função podem ser abordados não só na análise das funções numéricas, como também no exame das transformações geométricas (SEE.SP,1975, p.209).

Os objetivos específicos para o ensino da geometria, segundo os guias, são: adquirir conhecimentos que possibilitem uma compreensão do mundo físico aparente; adquirir habilidades em construções geométricas e processos de medida; desenvolver a intuição geométrica. Os conteúdos propostos para cada série são apresentados nos guias conforme a tabela a seguir.

Conteúdo	5.º	6.º	7.º	8.º
1- Figuras geométricas				
Noções topológicas: interior, exterior e fronteira; regiões, conexidade.	X	X		
Noções projetivas: retas, intersecções, convexidade.	X	X		
Noções afins: paralelismo; semelhança.	X	X	X	X
Noções euclidianas: distâncias, ângulos.	X	X	X	X
2- Transformações geométricas				
Conceito. Invariantes		X	X	X
Transformações através de coordenadas				X

Tabela 1 – Guias Curriculares – SEE.SP, 1975, p.215.

Podemos observar que a proposta segue a recomendação de Piaget, ou seja, começar o estudo da geometria pelas noções topológicas, depois as noções projetivas, as noções afins e as noções euclidianas. Entretanto, vale lembrar que a semelhança não é uma noção afim, mas uma noção euclidiana.

Recomenda-se que a abordagem dos conteúdos deve ser intuitiva, baseada na experiência e observação; a utilização das noções da Teoria dos Conjuntos como um meio auxiliar; o uso de métodos além dos geométricos na resolução de situações específicas; o emprego dos resultados obtidos intuitivamente para chegar, por meio de deduções não muito longas nem complicadas, a outras propriedades; destacar o conceito de transformação e procurar as propriedades invariantes por uma transformação; a introdução do conceito de segmento orientado, visando à noção posterior de vetor, a ser introduzida por meio do papel quadriculado.

Observamos que foram incorporadas nos Guias Curriculares as discussões sobre a metodologia para o ensino da geometria ocorridas no CIEAEM (1955), em *Royaumont* (1959), no CIAEM (1961) e nos cinco CBEM.

Entretanto, a Secretaria da Educação do Estado de São Paulo divulga, em 1978, o *Subsídios para a Implementação do Guia Curricular de Matemática – Geometria para o 1.º grau – 5.ª a 8.ª série*, com informações para o professor, também sob a coordenação de Almerindo Marques Bastos e Lydia Conde Lamparelli, que tem por objetivo “dar ao professor uma rápida visão sobre o problema dos fundamentos da Geometria”. No entanto, adverte que:

> [...] não procuramos tomar partido na discussão sobre qual a melhor abordagem para o ensino da Geometria. É nossa convicção que só o professor, diante do conhecimento de sua clientela e de suas condições de trabalho, pode decidir qual a metodologia e qual a abordagem que melhor se adaptam a essas condições e que, consequentemente, serão mais eficazes para atingir os objetivos do ensino dessa parte da Matemática (SEE.SP, 1978, p.9).

Os subsídios estão divididos em duas partes: a primeira parte apresenta a geometria com enfoque nos *Fundamentos da Geometria* de Hilbert e os cinco grupos de axiomas: de incidência, de ordem, de congruência, de paralelismo, de continuidade, com suas propriedades e definições. Na segunda parte, a Geometria é apresentada com enfoque nos conceitos da Álgebra Linear, a partir da definição e das propriedades dos espaços vetoriais, dos espaços afins, dos espaços vetoriais euclidianos, dos espaços euclidianos, das transformações lineares, das transformações afins.

Pelo exposto acima, a Secretaria da Educação do Estado de São Paulo não se posiciona relativamente ao ensino da geometria, pois os guias Curriculares sugerem as transformações geométricas, e os subsídios, a geometria euclidiana e a geometria com enfoque nos conceitos da Álgebra Linear, ou seja, as três vertentes já mencionadas nas discussões do CIEAEM (1955), em Royaumont (1959), no CIAEM (1961).

Com as mudanças preconizadas pela Lei n. 5.692/1971 e a publicação dos Guias Curriculares, houve a necessidade de novos livros didáticos para esta nova concepção de ensino. Vale ressaltar que Lucília Bechara participou da Análise Crítica do Guia Curricular. Assim, tudo nos leva a crer que as autoras tinham conhecimento das reformulações e complementações que deveriam efetuar na coleção *Curso Moderno de Matemática para a Escola Elementar* de 1.ª a 4.ª série, a fim de terem uma coleção de livros didáticos para o 1.º grau. Para tanto, as autoras convidaram Anna Averbuch e Franca Cohen Gottlieb para colaborarem na ampliação da coleção, que passou a se chamar *Curso Moderno de Matemática para o Ensino de 1.º grau.*

Mas há que considerar que o MMM não era uma unanimidade no Brasil. Surgiram desde o começo do movimento alguns sinais de alerta. Omar Catunda no I CIAEM, em 1961, afirma:

> A estrutura de ensino em meu país dificilmente poderá resistir a uma reforma radical, por mais racional que seja [...]; a introdução prematura do ensino da álgebra com seu formalismo, a meu ver é uma das maiores falhas do ensino secundário no Brasil, já que os professores dão grande importância às definições, regras e fórmulas que o aluno deve aprender de memória com enorme prejuízo ao desenvolvimento do raciocínio (CATUNDA, 1961, p.64).

Carlos Lyra, em sua palestra no 1.º Curso de Atualização em Matemática para Pais, em 1966, intitulada *A evolução da Matemática através da História e a Matemática Atual*, faz este alerta:

> Se há uma linguagem mais moderna que deve ser incorporada aos programas (como uma teoria intuitiva dos conjuntos, as noções de relação, de função, de lei de composição, etc.), há também partes importantes da Matemática que devem ser ensinadas, como números racionais e números reais, elementos de geometria, etc., que são de origem muito antiga. [...] as preocupações dos últimos cem anos com fundamentos, por mais importantes que sejam, não devem dominar o espírito induzindo uma miopia no que concerne aos aspectos criadores na matemática. [...] O papel da intuição no ensino deve ser valorizado desde o ensino primário. [...] além de ideias claras sobre os assuntos básicos, é preciso valorizar o papel da intuição na resolução de problemas [...] A ênfase em problemas e situações a serem exploradas pelo estudante incentivam o gosto pela descoberta e dá corpo à ideia da matemática como “coisa por fazer” (LYRA, 1966, p. 4).

Burigo (1989), em sua dissertação de mestrado, *Movimento da Matemática Moderna no Brasil:* estudo da ação e do pensamento de educadores matemáticos nos anos 80, considera o ano de 1976 como marco do declínio do MMM. Um dos pontos foi a comunicação, *Matemática Moderna*: 15 anos de acertos e erros, de Osvaldo Sangiorgi, apresentada no Rio de Janeiro, em abril de 1976, no Seminário Nacional de Preparação para o 3.º Congresso Internacional sobre Educação Matemática, que aconteceria em agosto de 1976 na Alemanha.

Nesta comunicação, Sangiorgi faz um balanço da implantação do MMM e aponta vários fatores que contribuíram para que o MMM não atingisse seus objetivos. Segundo o autor, os problemas ocorridos no Brasil, *grosso modo*, são os mesmos que aconteceram nos EUA e em alguns países da Europa, "principalmente pelos exageros cometidos, apesar da justa luta realizada num país sem tradição de pesquisa em ensino". Ressalva que nos novos currículos de matemática "muita ênfase foi dada à teoria dos conjuntos, às relações e às estruturas", mas o ensino brasileiro relativamente ao ensino da matemática foi modificado "no bom sentido", uma vez que era "até então considerada '*truculenta*' e inacessível à maioria dos alunos". Agora, com a MM, era "cheia de atrativos, de livros didáticos coloridos e de uma avaliação mais flexível, graças aos planejamentos que começavam a ser exigidos" em virtude da Lei n. 5.692/1971 em que a Matemática era o "eixo metodológico de outras disciplinas, num caráter integrativo" (SANGIORGI, 1976, p.13-14, grifo do autor).

Entretanto, o benefício mencionado pela promulgação da Lei n. 5.692/1971 permitiu a liberdade para cada Estado, cada cidade, cada escola elaborar seus próprios programas e currículos, o que, segundo Sangiorgi:

> Ensejou a maior produção de livros didáticos de Matemática para o ensino de 1.º grau que se poderia imaginar. Infelizmente, um fato que poderia ser considerado auspicioso para um país bem organizado em sistemas de ensino passou a ser um pesadelo pela "desorientação" dada aos professores (SANGIORGI, 1976, p.16).

Sangiorgi apresentou o paradoxo existente no ensino brasileiro: diante de tão "alta matemática, um baixo nível de formação começou a ser constatado", ao ser observado "o abandono paulatino do salutar hábito de calcular", além do uso "prematuro das maquininhas de calcular", não se aprendem mais as "frações ordinárias e sistema métrico decimal – de grande importância para toda a vida", os alunos não sabem mais "calcular áreas das figuras geométricas planas e muito menos volumes dos corpos sólidos que nos cercam", bem como "não resolvem mais problemas elementares – da vida quotidiana". Todos esses conhecimentos deixam de ser ensinados em favor das "operações sobre conjuntos" que "prevalecem sobre tudo", sem levar em consideração que a teoria dos conjuntos "é extremamente abstrata para a idade em que se encontra o aluno", além da "invasão de novos símbolos e de abstrações completamente fora da realidade" (SANGIORGI, 1976, p.17).

O autor também mencionou a formação dos professores que, a partir da Lei n. 5.692/1971, poderiam lecionar matemática no ensino de 1.º grau:

> - professores normalistas (o maior contingente), que podem lecionar Matemática até a 6.ª série;
> - bacharéis e licenciados em Matemática;
> - licenciados em cursos que, possuindo um Certificado da cadeira "Complementos de Matemática" (Pedagogia, Psicologia, Ciências sociais) tem o direito de lecionar a disciplina em várias séries do 1.º grau;
> - portadores de diploma de Licenciatura curta em Ciências;
> - portadores de Certificados (F e D) expedidos pelo Ministério de Educação e Cultura;
> - outros (alunos, por exemplo) (SANGIORGI, 1976, p.21).

Nota-se, na relação apresentada por Sangiorgi, a heterogeneidade relativa à qualificação profissional do corpo docente do sistema de educação de São Paulo.

Sangiorgi enfatiza a iniciativa da Secretaria de Educação do Estado em elaborar os Guias Curriculares[60] "num magnífico esforço destinado a renovar o nível do ensino de 1.º grau", mas aponta uma contradição "entre a orientação nitidamente elitista que se preconiza para o ensino da Matemática" e os "princípios democratizadores da Lei n. 5.692/1971", que estabelece a obrigatoriedade e a gratuidade a todas as crianças e adolescentes na faixa etária dos 7 aos 14 anos. Ressalta, ainda, que os guias curriculares se destinam a orientar os professores, mas

> [...] **o guia está redigido numa linguagem de nível alto** [...] não atingindo portanto, a **maioria** dos professores aos quais é destinado, maioria que não está a par (nem poderia estar) ou não tem a devida segurança no lidar com a linguagem específica da matéria (nem poderia tê-la), segurança que também não será encontrada entre a maioria dos professores, formada há mais de dez ou quinze anos (SANGIORGI, 1976, p.22, grifos do autor).

O autor salienta que o Guia Curricular de Matemática, "apesar de ter caráter de sugestão, se apresenta com timbre oficial", portanto destinado à **totalidade** dos estudantes, quando em outros países os guias curriculares "só existem em situação

---

[60] Sangiorgi se refere aos Guias Curriculares, mas acreditamos que ele esteja, na verdade, se referindo aos *Subsídios para a Implementação do Guia Curricular de Matemática – Geometria para o 1.º grau – 5.ª a 8.ª séries.*

rigorosamente experimental, abrangendo apenas classes-pilotos (SANGIORGI, 1976, p.23, grifos do autor).

Sangiorgi conclui sua comunicação respondendo à pergunta implícita no título *Matemática Moderna*: 15 anos de acertos e erros:

> O nosso saldo, nesses 15 anos de renovação do ensino da Matemática, que é um movimento irreversível, é **bem maior** do que os erros cometidos. O essencial, mesmo, foi a mudança nas atitudes. Em todo esse tempo, novos caminhos se abriram, novos comportamentos se efetuaram e todos – ligados ao importantíssimo problema da educação – estamos conscientizados da responsabilidade que nos cabe no preparo da geração que já está sendo solicitada para dirigir este País (SANGIORGI, 1976, p.24, grifos do autor).

Outros fatores, segundo Burigo (1989), indicam o ano de 1976 como marco do declínio do MMM entre eles: o último curso ministrado pelo GEEM para professores, a fim de prepará-los para o concurso para o magistério, "acabou se constituindo num momento de desnudamento da situação do ensino", pois poucos professores foram aprovados no concurso (BURIGO, 1989, p.225); o lançamento, no Brasil, do livro de Morris Kline, intitulado *O fracasso da Matemática Moderna* e o *Seminário Nacional de Preparação para o 3.º Congresso Internacional sobre Educação Matemática*,

> O silêncio sobre o MMM nas resoluções de um encontro que se propunha à "obtenção de um panorama da situação da educação no Brasil" sugere que as dificuldades de avaliação do movimento não eram exclusivas do GEEM. Ao mesmo tempo, esse silêncio revela o esgotamento do movimento, o fato de que já tinha deixado de ser referência para os debates na área da educação matemática no país (BURIGO, 1989, p.226).

Ainda segundo Burigo (1989), o MMM trouxe outras consequências, como: a valorização da prática pedagógica com espaço nos encontros e nos congressos de educação matemática para a troca de experiências dos professores, com incentivo, discussão e avaliação das experiências inovadoras e criativas. Ocorreram também pesquisas sobre os aspectos psicopedagógicos envolvidos no ensino da matemática, e como desdobramento surgiu um novo profissional, *o educador matemático,* que se dedica ao ensino da matemática como objeto de estudo e reflexão.

Não cabe a esta pesquisa analisar o MMM, nem seus erros ou acertos, mas apenas contextualizar o panorama social, político, econômico e educacional no qual se deu a elaboração dos livros do GRUEMA, pois, segundo Valente (2007),

> Os livros para o ensino da matemática não se explicam por si próprios – o que vale, creio eu, para qualquer livro; que há necessidade de pesquisar suas origens, o meio em que foram produzidos, o destino a que estavam

> reservados inicialmente e o que ocorreu ao longo de sua utilização dentre outras tarefas (VALENTE, 2007, p.20).

Assim, no próximo capítulo, iniciaremos a análise dos livros do GRUEMA no tocante à proposta para o ensino da geometria, que é o foco desta pesquisa.

5. A PROPOSTA PARA O ENSINO DA GEOMETRIA

O objetivo da pesquisa *A proposta de ensino da geometria nos livros do GRUEMA* é discutir e analisar a proposta apresentada para o ensino da geometria nos livros didáticos *Curso Moderno de Matemática para o Ensino de Primeiro Grau*. Essa discussão e essa análise visam contribuir para o projeto *A trajetória da geometria escolar no Brasil e em Portugal e o Movimento da Matemática Moderna,* que intenta construir uma nova representação para o ensino da geometria no período do Movimento da Matemática Moderna. Para tanto, pretendemos responder a seguinte questão: Qual é a proposta para o ensino de geometria nos livros do GRUEMA?

Teremos como fonte principal de pesquisa a coleção de livros didáticos de 5.ª a 8.ª séries – *Curso Moderno de Matemática para o ensino de primeiro grau,* escritos pelo GRUEMA, edição do professor, editados pela Companhia Editora Nacional no ano de 1977. Entretanto, utilizaremos outras fontes, como: os livros experimentais de 6.ª a 8.ª séries, com o mesmo título e autores, editados pela gráfica LPM, sem data, e o livro da 5.ª série – edição do professor, com o mesmo título e autores, publicado em 1972 pela CEN, que consideraremos como a edição experimental; os livros do GRUEMA de 1.ª a 4.ª séries; o livro *Matemática – Curso Moderno*, 3ª série, de Osvaldo Sangiorgi editado em 1969 pela CEN; a bibliografia adotada pelas autoras, as experiências vividas, a legislação vigente e os documentos dos arquivos APLB e APML. A seguir, apresentamos as capas dos livros de 5.ª a 8.ª séries de 1977.

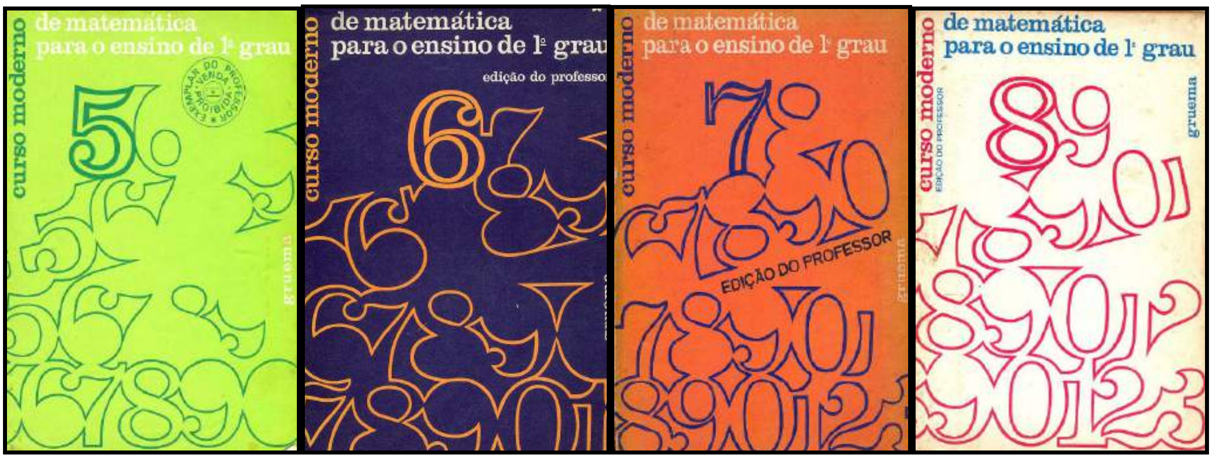


Figura 2 – Capas dos livros do GRUEMA, 1977.

Para responder a nossa questão, nos guiaremos pelas reflexões de Chopin (2004). O autor considera que o livro didático pode ser a tradução dos programas de ensino, ao se constituir no suporte dos conteúdos educativos, bem como “o depositário dos conhecimentos, técnicas e habilidades que um grupo social acredita que seja necessário transmitir às novas gerações” (CHOPIN, 2004, p.553).

Nesse sentido, os livros da 5.ª a 8.ª séries são marcados pela sua origem, ou seja, os livros foram elaborados em virtude da Lei de Diretrizes e Bases da Educação, Lei n. 5.692/1971, que propôs o ensino de 1.º grau em oito anos ao extinguir o ensino elementar e o ensino ginasial. Este fato levou as autoras a complementar a coleção *Curso Moderno de Matemática para a Escola Elementar,* de autoria de Lucília Bechara, Manhúcia Liberman e Anna Franchi,[61] que passou a se chamar *Curso Moderno de Matemática para o ensino de primeiro grau*, cujas autoras se mantêm, para os livros de 1.ª a 4.ª séries, e para os livros de 5.ª a 8.ª séries são coautoras Lucília Bechara Sanches, Manhúcia P. Liberman, Anna Averbuch, Franca Cohen Gottlieb e supervisão de L. H. Jacy Monteiro.

Com tantas coautoras, havia necessidade de uma identidade para a coleção, assim constituiu-se o Grupo de Ensino da Matemática Atualizada (GRUEMA), pois, segundo Bechara (2008),

> [...] em São Paulo a coleção de livros didáticos do primário era conhecido como o livro da professora Manhúcia, ou livro da professora Lucília, e nós, as autoras acreditávamos que a coleção de livros didáticos deveria ter uma identidade, assim nasceu o Grupo de Ensino de Matemática Atualizada – GRUEMA, porque nós acreditávamos que a coleção era a produção de um grupo (BECHARA, 2008, entrevista).

No que concerne ao uso da expressão Matemática Atualizada e não Matemática Moderna, Lucília explicou a utilização da expressão em reportagem ao jornal *Correio do Povo* de Porto Alegre, em 1970:

> O termo moderno ficou como um “slogan” [...] Na realidade Matemática Moderna dá impressão de um tipo de Matemática acabada. Enquanto que o que se pretende mesmo é atualizar. Uma atualização que seja contínua e que a cada ano se pense na reformulação daquilo que foi feito, baseando-se nas transformações sociais, culturais e mesmo dentro da Matemática (A QUESTÃO É MATEMÁTICA MODERNA, 1970).

Iniciamos nossa análise pela primeira página das obras em que as autoras apresentam aos professores os livros da coleção GRUEMA em continuidade à coleção *Curso Moderno de Matemática para a Escola Elementar,* a fim de estarem

[61] Anna Franchi, coautora apenas no livro da 1ª série.

em consonância com a LDB n. 5.692/1971, bem como as novas coautoras e Jacy Monteiro como supervisor e revisor.

As autoras mencionam que os livros foram experimentados antes de sua publicação durante três anos em escolas públicas e particulares,[62] tanto em São Paulo como no Rio de Janeiro.

A seguir, as autoras tecem algumas considerações sob os títulos Considerando que...; Objetivos Educacionais Específicos e Objetivos de Ordem Didática.

Sob o título *Considerando que...*, as autoras explicitam os aspectos considerados para elaborar as atividades visando a formação básica dos jovens. Entre eles citamos: que os alunos aprendam a selecionar informações, uma vez que não é possível obter todos os conhecimentos e todas as informações; que adquiram método de estudo e trabalho; que desenvolvam o raciocínio lógico e criador por meio da resolução de situações-problema; que incentivem novas descobertas, possibilitando discussões com o intuito de manter o interesse dos alunos em aprender, tanto individualmente como em grupo; e que estudar seja uma atividade interessante e agradável.

Sob o título *Objetivos Educacionais Específicos,* as autoras explicitam quais os objetivos pretendidos com o estudo da Matemática, dos quais destacamos: desenvolver o raciocínio lógico indutivo e dedutivo e a capacidade de analisar situações reais; resolver problemas por meio do pensamento abstrato; adquirir habilidades numéricas, algébricas e geométricas; utilizar a criatividade, o espírito crítico, hábitos de atenção; organização e perseverança para a resolução de problemas; e incentivar o aluno a se interessar pela pesquisa.

[62] A Coleção Experimental é composta de dois volumes para cada série; não foi encontrado o livro experimental para a 5.ª série. Somente os livros para a 6.ª série trazem data, 1973. Todos os volumes medem 16 cm por 28 cm e têm capa branca (somente o livro da 8.ª série – 1.ª parte tem capa rosa). Todos têm a capa no mesmo padrão, escrito em letras pretas (somente os livros da 6.ª série, 1.ª parte é escrito em preto e vermelho, e a 2.ª parte, em preto e azul). Os livros no seu interior são impressos em uma única cor – preta, há espaço para que o aluno resolva as atividades no próprio livro, não necessitando de caderno. Apresentamos todas as escolas mencionadas: Instituto de Educação da Guanabara – RJ; Escola Eliezer Steimbarg – RJ; Instituto Estadual de Educação Professor Alberto Levy – SP; Instituto de Educação Professor Ennio Voss – SP; Ginásio I. L. Peretz – SP; Instituto de Educação Estadual Padre Manoel de Paiva – SP; Instituto de Educação Estadual Dr. Octavio Mendes – SP; Colégio Assunção – SP. Essas escolas são mencionadas em todos os livros. Em alguns livros são acrescentadas estas escolas: Centro Educacional de Niterói – RJ, Colégio Santa Úrsula da AUSU – RJ; Colégio Notre Dame de Sion – RJ.

Sob o título *Objetivos de Ordem Didática,* as autoras apresentam algumas sugestões que podem auxiliar o professor na elaboração de atividades complementares, por exemplo:

> O estudo da simetria deve ser iniciado com observações do espaço e atividades concretas, como: a) Com um espelho ou com 2 espelhos em ângulo ou paralelo, observar como as imagens das letras do alfabeto, ou outras figuras se refletem; b) tentar desenhar a imagem de uma letra no espelho sem o espelho e, em seguida, colocar o espelho para verificar se o desenho está correto; c) descobrir simetria nos objetos da sala de aula, por exemplo, ou em desenhos, cartazes, etc. (GRUEMA, 7.ª, 1977, p.3).
>
> Damos neste capítulo uma ênfase bastante considerável ao conhecimento das homotetias, pois são elas de grande importância na vida prática (redução e ampliação de figuras), bem como constituem imprescindível ponto de partida para o estudo de semelhança de polígonos. Dentro do espírito da atual reforma do ensino, o aluno de 8.ª série está no limiar da escolha de uma profissionalização. O professor pode, se a turma estiver motivada para tal, entrar em contato com o clube de fotografia da escola, fazendo o aluno concretizar os conhecimentos adquiridos neste capítulo, e ajudar aqueles que mais se sentirem atraídos por uma profissão de desenho técnico (GRUEMA, 8.ª, 1977).

Enfatizam, ainda, a metodologia adotada:

> De acordo com as mais modernas tendências da pedagogia, o ensino não deve ser linear, uma vez que o conhecimento não o é. Tentamos, dentro do possível, eliminar a linearidade do conteúdo, dividindo-o em núcleos (GRUEMA, 5.ª, 1977, p.3).
>
> Usamos o método heurístico (processo da redescoberta) nas demonstrações simples para evitar que estas sejam impostas aos alunos ou apresentadas para memorização (GRUEMA, 7.ª, 1977, p.2).
>
> Algumas relações geométricas foram descobertas intuitivamente nesta série com o objetivo de: explorar a intuição geométrica do aluno, colocá-lo em contato com noções de ordem geométrica e principalmente aproveitar a oportunidade para equacionar problemas de geometria em lugar de equacionar problemas irreais (GRUEMA, 6.ª, 1977, p.IX).

Estas observações, de modo geral, expressam o ideário do MMM, ou seja, a compreensão e a descoberta em oposição à mecanização e à memorização dos conteúdos matemáticos, além de lançar um olhar para o estudo da Matemática como algo prazeroso, como fotografar, ou utilitário, como a descoberta de uma profissão, como sugere o art. 1.º da LDB n. 5.692/1971:

> O ensino de 1.º e 2.º graus tem por objetivo geral proporcionar ao educando a formação necessária ao desenvolvimento de suas potencialidades como elemento de auto-realização, qualificação para o trabalho e preparo para o exercício da cidadania (BRASIL, 1971, p.1).

Os livros apresentam *Sugestões de questões para provas,* organizadas por capítulo, com as soluções. As autoras salientam que essas sugestões de provas foram elaboradas a partir das experiências realizadas, e constam de três questões que tiveram mais de oitenta por cento de acertos; cinco questões, entre trinta e setenta e cinco por cento de acertos; e duas questões, que tiveram menos de trinta por cento de acertos.

Somente no livro da 5.ª série (1972) enfatiza-se que a proposta metodológica visa permitir que "o aluno, partindo de situações mais conhecidas, chegue por si a algumas conclusões que possibilitem o desenvolvimento do seu raciocínio", mas também que o "aluno aprofunde estas conclusões por meio de situações mais complexas (integração vertical)", a fim de "aplicá-las em situações fora da matemática (integração horizontal). Entretanto, advertem: **"Não se espera, portanto, que todos os alunos possam reproduzi-las (conclusões) com precisão e muito menos que as memorizem"** (GRUEMA, 5.ª, 1972, p. VIII, grifo do autor).

A metodologia apresentada nos livros consiste na realização de atividades, sem texto introdutório ou explicativo, com a seguinte estruturação:

a) *Exercícios Preliminares* – atividades que partem de situações conhecidas ou concretas, espera-se que os alunos consigam chegar às conclusões e generalizações.

Para exemplificar a metodologia utilizada, apresentamos o capítulo retirado do livro da 8.ª série que trata da *Semelhança de Polígonos.* Temos o título e, em seguida, os exercícios, em geral divididos em *grupos*. O exemplo a seguir faz parte do *Grupo 1 – Exercícios Preliminares*, que constam de dois exercícios, que reproduzimos em parte. Observe-se que não há nenhuma informação ou explicação sobre o assunto a ser tratado. Pede-se que o aluno construa uma figura homotética à figura dada e em seguida construa uma figura congruente à figura homotética. Esses dois assuntos já foram estudados na 7.ª e 8.ª séries respectivamente.

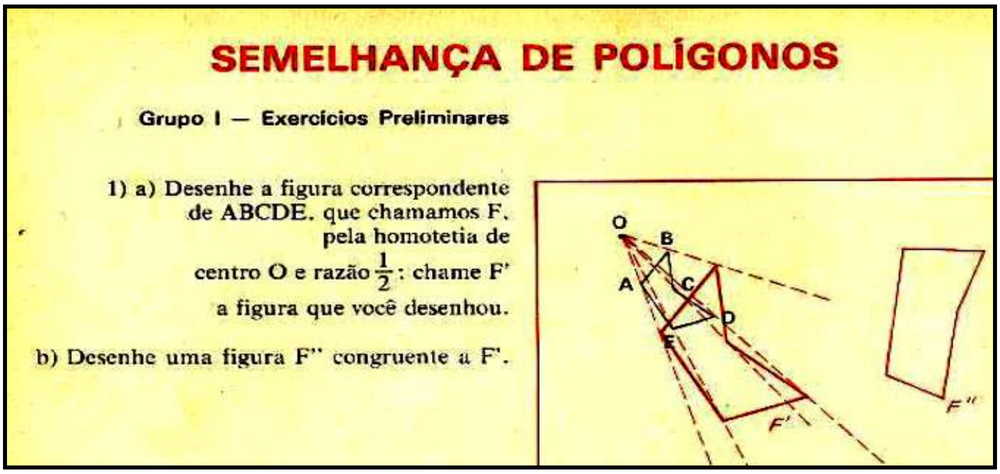


Figura 3 – GRUEMA, 8.ª, 1977, p.110.

b) *Observe que:* (ou *anote*; *atenção; você lembra que:)* – quadros em destaque para chamar a atenção do aluno para determinado fato.

Após a realização dos dois exercícios apresentados no *Grupo 1,* espera-se que os alunos constatem o que é apresentado no quadro *Você observou que*, ou seja, no exercício 1, dada uma figura **F**, ao sofrer uma transformação por homotetia, obtém-se a figura **F'**, e a figura **F''** é uma figura congruente à figura **F'**. No exercício 2, dada uma figura **F**; a figura **F'** é uma figura congruente a **F**, e a figura **F''** é uma figura homotética à figura **F'**. O aluno deve concluir que: nas figuras homotéticas ou congruentes os ângulos correspondentes permanecem congruentes, e os lados correspondentes mantêm uma proporcionalidade; então, as figuras **F**, **F'** e **F''** são figuras semelhantes.

Você observou que:

Passamos de F para F'':

no ex. 1: $F \xrightarrow{\text{homotetia}} F' \xrightarrow{\text{congruência}} F''$

no ex. 2: $F \xrightarrow{\text{congruência}} F' \xrightarrow{\text{homotetia}} F''$

Em ambos os casos, manteve-se a congruência dos ângulos correspondentes, a proporcionalidade dos lados correspondentes.
As figuras F, F' e F'' são chamadas figuras semelhantes.

Figura 4 – GRUEMA, 8.ª, 1977, p.111.

c) *De um modo geral* – quadros coloridos para destacar seus diversos conteúdos, as generalizações ou conclusões.

Nestes quadros são apresentadas as definições, a simbologia a ser utilizada e a síntese do que foi proposto nos exercícios preliminares.

DE UM MODO GERAL:

Dados os polígonos F e G, se é possível passar de F para G por meio de uma homotetia e uma congruência, em qualquer ordem, então F e G são chamados POLÍGONOS SEMELHANTES.

Indicamos: $F \sim G$

A razão de homotetia é também chamada *razão de semelhança*.

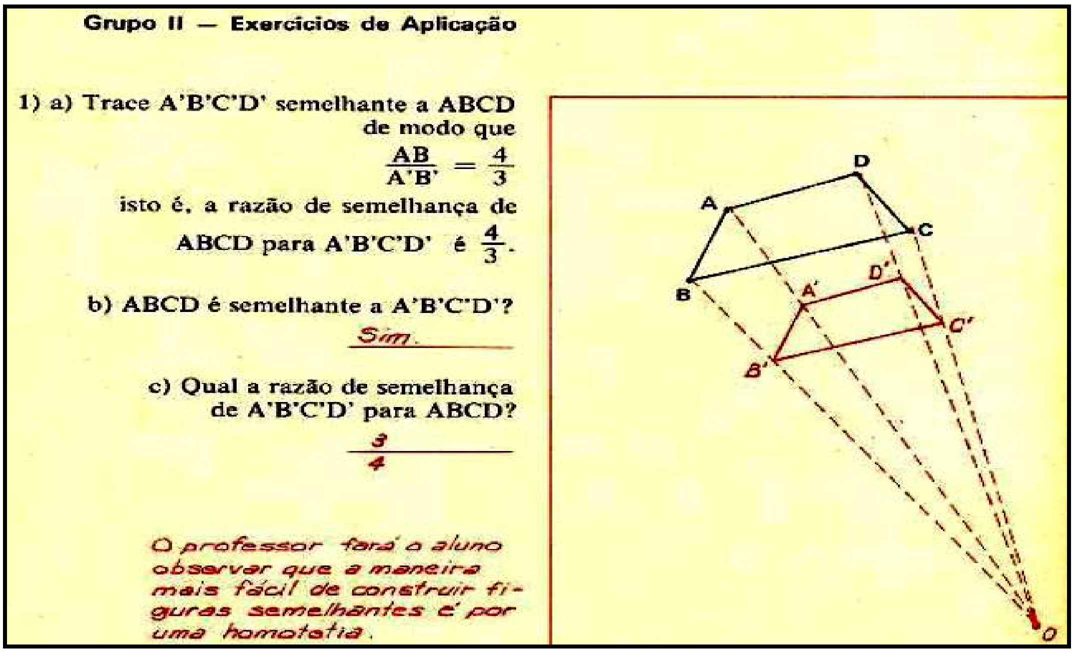
Você concluiu que:

Dois polígonos são semelhantes se, e somente se, existe uma correspondência que mantém as medidas dos ângulos e a proporcionalidade das medidas dos lados correspondentes.

Figura 5 – GRUEMA, 8.ª, 1977, p.112.

d) *Exercícios de aplicação* – atividades que visam ao aprofundamento das conclusões ou à fixação de técnicas, ou ainda, à aplicação em outras áreas.

Nesse grupo de exercícios, as autoras orientam os professores, como no exemplo abaixo, para a necessidade de ressaltar algum aspecto importante na atividade a ser realizada.



Grupo II — Exercícios de Aplicação

1) a) Trace A'B'C'D' semelhante a ABCD de modo que

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{4}{3}$$

isto é, a razão de semelhança de ABCD para A'B'C'D' é $\frac{4}{3}$.

b) ABCD é semelhante a A'B'C'D'?

Sim.

c) Qual a razão de semelhança de A'B'C'D' para ABCD?

$\frac{3}{4}$

O professor fará o aluno observar que a maneira mais fácil de construir figuras semelhantes é por uma homotetia.

Figura 6 – GRUEMA, 8.ª, 1977, p.112.

Essa estrutura metodológica, exercícios preliminares, conclusões e exercícios de aplicação se repetem ao longo do capítulo, ou seja, o *Grupo 3* será novamente de exercícios preliminares para obter outra generalização ou conclusão, e assim por diante.

Franca C. Gottlieb, uma das coautoras do GRUEMA, comenta acerca da estrutura metodológica utilizada nos livros:

> A coleção dos oito livros GRUEMA foi muito comentada e adotada, mesmo se nem sempre compreendida pela sua metodologia inovadora. Não eram livros "de exercícios", mas compêndios a serem manuseados pelos alunos, permitindo a eles construírem os significados dos conceitos matemáticos por meio de suas observações e experiências. Era a filosofia do novo ensino de Matemática preconizado pelo Movimento da Matemática Moderna (GOTTLIEB; FAINGUELERNT, 2004).

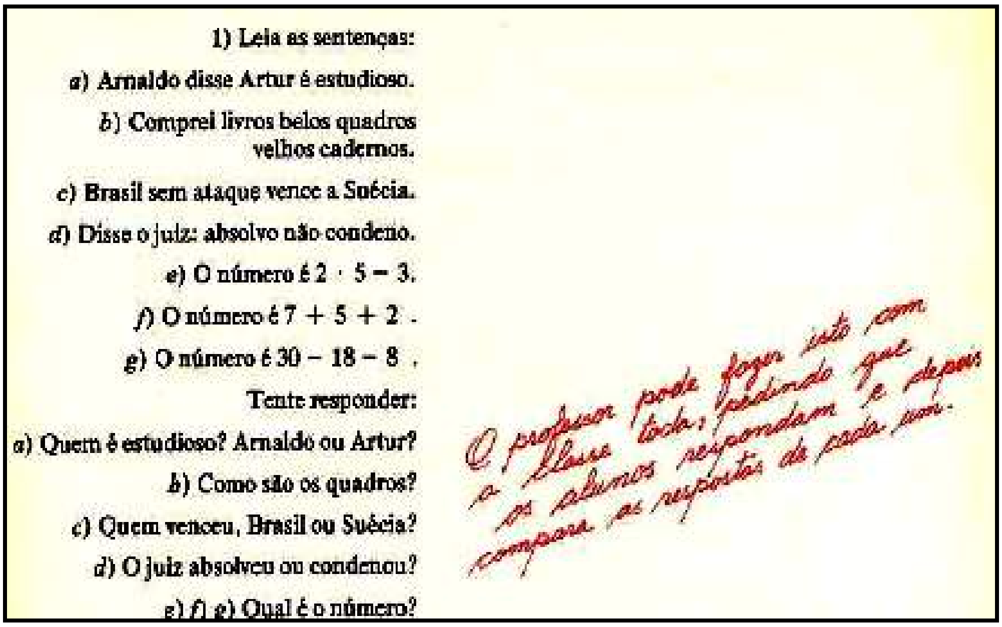
Concordamos com a professora Gottlieb ao dizer que os livros não são "livros de exercícios". Embora a estrutura metodológica utilizada possibilitasse aos alunos realizar as atividades no próprio livro e fosse constituída basicamente por exercícios, estes não eram aplicações de conhecimento adquiridos em "livros-texto" ou em uma aula expositiva do professor, mas, sim, sequências de exercícios para a construção de um determinado conceito.

Nos capítulos anteriores apresentamos a proposta metodológica para o ensino da matemática de Zoltan Dienes[63] e de Lucienne Felix.[64] Dienes propunha a aprendizagem de um conceito matemático baseado nas seis etapas: jogo livre, jogo, abstração, representação, simbolização, axiomatização. E Felix propunha o ensino da geometria em três fases: ensino pré-lógico, iniciação lógica e dedutiva.

Podemos fazer uma analogia entre os *exercícios preliminares* com as etapas: jogo livre e jogo de Dienes e a fase pré-lógico de Felix; dos quadros *observe qu*e e *de um modo geral,* com as etapas abstração, representação e simbolização de Dienes e as fases iniciação lógica de Felix e dos exercícios de aplicação às etapas axiomatização de Dienes e dedutiva de Felix.

Essa analogia entre a estrutura metodológica do GRUEMA e as seis etapas Dienes e as três etapas de Felix nos mostram que as autoras se apropriaram, no sentido dado por Chartier (1990) dessas propostas metodológicas.

Os livros apresentam outras estratégias, como no exemplo abaixo no qual o professor é orientado a estimular discussões entre os alunos da classe a respeito dos resultados obtidos.


1) Leia as sentenças:

a) Arnaldo disse Artur é estudioso.

b) Comprei livros belos quadros velhos cadernos.

c) Brasil sem ataque vence a Suécia.

d) Disse o juiz: absolvo não condeno.

e) O número é $2 \cdot 5 - 3$.

f) O número é $7 + 5 + 2$.

g) O número é $30 - 18 - 8$.

Tente responder:

a) Quem é estudioso? Arnaldo ou Artur?

b) Como são os quadros?

c) Quem venceu, Brasil ou Suécia?

d) O juiz absolveu ou condenou?

e) *f*) *g*) Qual é o número?

O professor pode fazer isto com a classe toda, pedindo que os alunos respondam e depois compara as respostas de cada um.

Figura 7 – GRUEMA, 5.ª, 1977, p.135.

[63] Ver, no capítulo 4, Movimento da Matemática Moderna.
[64] Ver, no capítulo 5, MMM no Brasil. A professora Eleonora L. Ribeiro apresentou no 4.º CBEM o trabalho *Didática especial da geometria*, em que trata da proposta metodológica de Lucienne Felix.

Ou, ainda, atividades desafiadoras ou criativas, como no exemplo a seguir. Essas atividades devem ser propostas aos alunos, se o professor verificar que a classe está estimulada ou que eles são capazes de realizá-las, pois estas podem ter várias soluções.

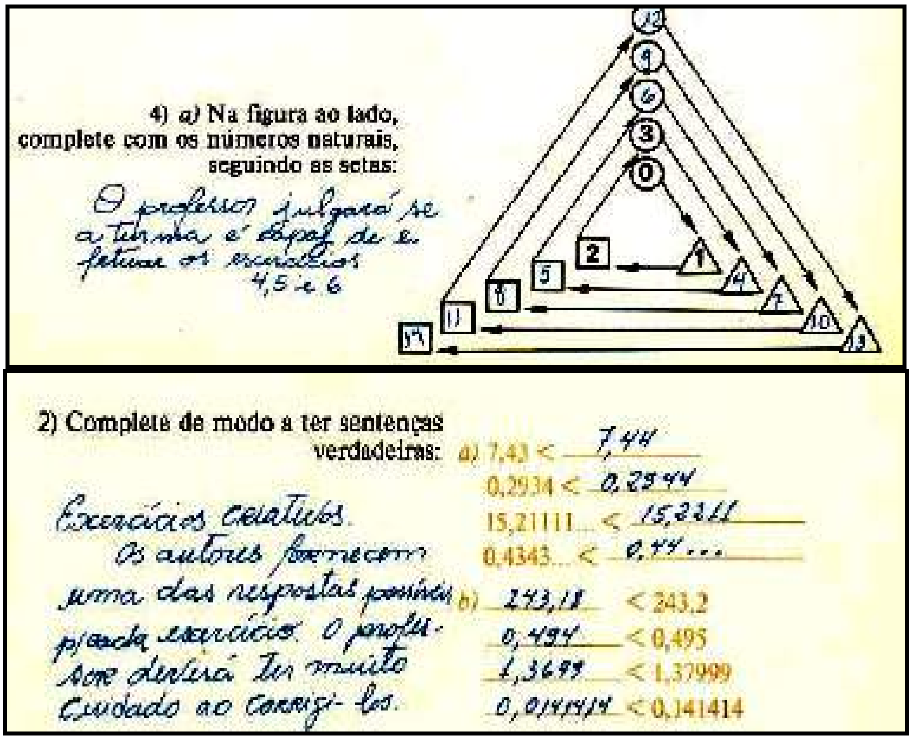
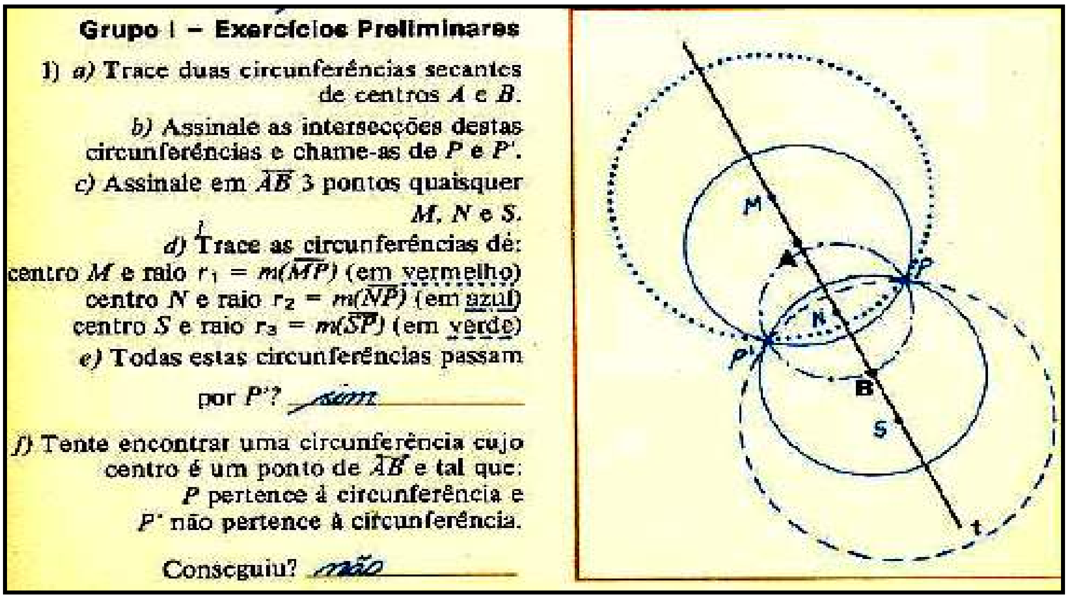


Figura 8 – GRUEMA, 7.ª, 1977, p.13 e 55.

Nota-se a preocupação das autoras em elaborar atividades que enfatizam a participação dos alunos, mas também preservar a liberdade do professor em escolhê-las de acordo com o nível de aprendizado, ou a motivação e interesse dos alunos, uma vez que com a expansão do ensino do 1.º grau a escola passou a atender uma população mais heterogênea.

Outra estratégia recorrente nos livros do GRUEMA é a solicitação do uso da cor na realização das atividades. Normalmente as cores usadas são o vermelho, o verde e o azul.

A nosso ver, usam-se as cores com determinadas funções, como organizar, ou facilitar a visualização. Podemos notar isso no exemplo a seguir: quando se quer observar se as várias circunferências passam por um ponto **P**.



Grupo I – Exercícios Preliminares

1) *a)* Trace duas circunferências secantes de centros *A* e *B*.

b) Assinale as intersecções destas circunferências e chame-as de *P* e *P'*.

c) Assinale em $\overline{AB}$ 3 pontos quaisquer *M*, *N* e *S*.

d) Trace as circunferências de:
centro *M* e raio $r_1 = m(\overline{MP})$ (em vermelho)
centro *N* e raio $r_2 = m(\overline{NP})$ (em azul)
centro *S* e raio $r_3 = m(\overline{SP})$ (em verde)

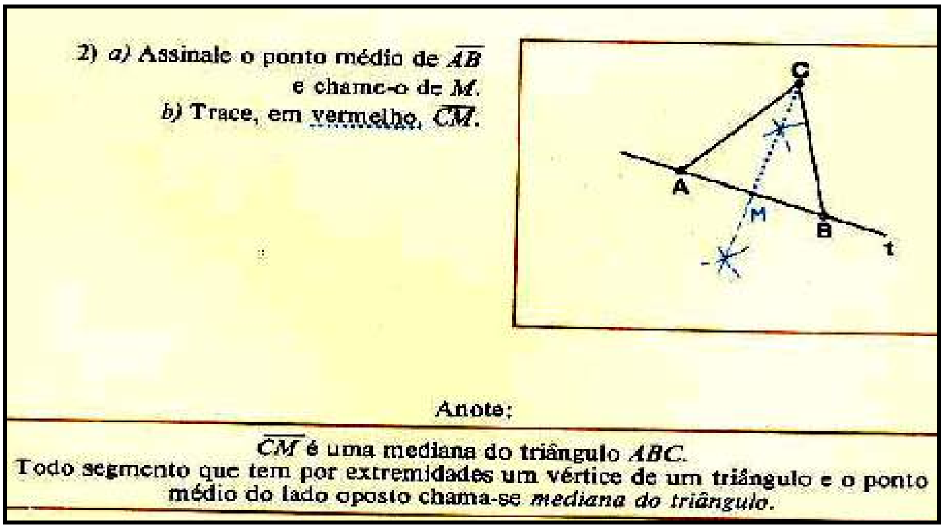
e) Todas estas circunferências passam por *P'*? sim

f) Tente encontrar uma circunferência cujo centro é um ponto de $\overline{AB}$ e tal que:
P pertence à circunferência e
P' não pertence à circunferência.

Conseguiu? não

Figura 9 – GRUEMA, 7.ª, 1977, p.143.

A cor também é utilizada quando se pretende destacar um determinado elemento do exercício que normalmente encaminha o aluno às conclusões pretendidas, como mostra a figura abaixo:



2) *a)* Assinale o ponto médio de $\overline{AB}$ e chame-o de *M*.

b) Trace, em vermelho, $\overline{CM}$.

Anote:

$\overline{CM}$ é uma mediana do triângulo *ABC*.
Todo segmento que tem por extremidades um vértice de um triângulo e o ponto médio do lado oposto chama-se *mediana do triângulo*.

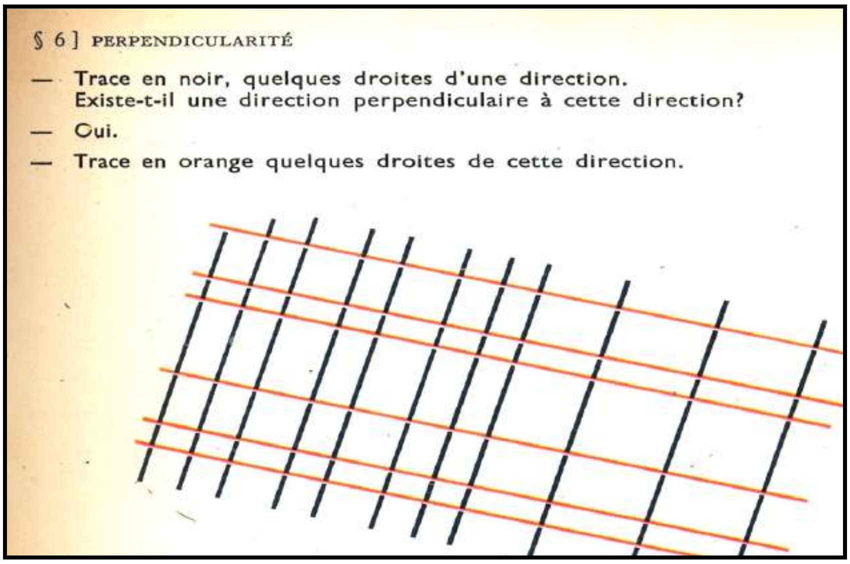
Figura 10 – GRUEMA, 7.ª,1977, p.160.

O uso da cor é recorrente em autores da época do MMM. No exemplo a seguir, retirado do livro *Initiation a la Géométrie* (1964) de Lucienne Felix, a autora utiliza a cor para organizar e facilitar a visualização das regiões onde se encontram os pontos dados.

Deux droites $x'x$ et $y'y$ se coupent en S. Elles partagent le plan en 4 régions désignées par xSy, ySx', $x'Sy'$, $y'Ox$.
On donne un point $A \in xSy$.
1) On sait qu'un point M est tel que segm $(AM) \cap x'x = \varnothing$.
Où est M ? Teinter en rouge la région permise.
2) On sait qu'un point P est tel que le segment AP coupe $x'x$ et aussi $y'y$. Où est P ?
Teinter en bleu la région permise.
3) Savez-vous si le segment MP coupe $x'x$ et s'il coupe $y'y$?

Figura 11 – FELIX,[65] 1964, p.41.

Outro autor da época do MMM a utilizar a cor é Geoge Papy. Cujo exemplo a seguir foi retirado de seu livro *Mathématique Moderne*, v. 1 (1964). O autor usa a cor para destacar o elemento a ser considerado, no caso, as retas perpendiculares.


§ 6] PERPENDICULARITÉ

— Trace en noir, quelques droites d'une direction.
Existe-t-il une direction perpendiculaire à cette direction?
— Oui.
— Trace en orange quelques droites de cette direction.

Figura 12 – PAPY,[66] 1964, v. 1, p.79.

Consideramos que o uso da cor na realização das atividades facilita a visualização, a organização e encaminha os alunos aos objetivos propostos nos exercícios.

As apropriações feitas pelas autoras, no que concerne à metodologia, estão em consonância com a legislação do Estado de São Paulo. Os Guias Curriculares do Estado de São Paulo, elaborados sob a vigência da LDB n. 5.692/1971, recomendam que: deve-se procurar desenvolver os conceitos com base na ação do

[65] Duas retas x'x e y'y se cortam em S. Elas dividem o plano em 4 regiões chamadas por xSy, ySx', x'Sy', y'Ox. Dado um ponto $A \in xSy$. 1) Seja um ponto M tal que $segm(AM) \cap x'x = \phi$. Onde está M? Pinte em vermelho a região considerada. 2) Seja um ponto P tal que o segmento AP corte x'x e também y'y. Onde está P? Pinte em azul a região considerada. 3) Você sabe se o segmento MP corta x'x e se corta y'y? (tradução nossa).

[66] Perpendicularidade – Trace em preto algumas retas em uma direção. Existe uma direção perpendicular a esta direção? – Sim. – Trace em laranja algumas retas nesta direção (tradução nossa).

aluno e levar em consideração as recomendações de matemáticos preocupados com a Pedagogia da Matemática, tais como: Zoltan Dienes e Lucienne Felix e o psicólogo Jean Piaget (SEE.SP, 1975). As orientações desses autores concernentes à metodologia para o ensino da matemática estão em sintonia com as discussões ocorridas em Royaumont, que propunham o ensino da matemática pela descoberta, pela intuição, pela utilização da criatividade, e não pela repetição de exercícios ou pela mecanização de procedimentos.

Estas orientações podem ser percebidas na metodologia apresentada pelas autoras, ou seja, permite que o aluno construa os conceitos matemáticos em etapas sucessivas utilizando a cor como elemento organizador de informações e, também, propõe atividades em diferentes graus de dificuldade que, a critério do professor, poderiam ou não ser apresentadas aos alunos.

No capítulo anterior mostramos que Lucília Bechara e Manhúcia Liberman tiveram participação expressiva na divulgação e implantação do MMM. Essa experiência as mantinha em contato permanente com os órgãos governamentais que elaboravam as diretrizes educacionais, bem como com professores, alunos e pais, o que nos leva a crer que as autoras conheciam a heterogeneidade dos alunos que então passaram a frequentar a escola e, as diversas formações dos professores que lecionavam no ensino fundamental. A nosso ver, as autoras, ao constatarem as mudanças que ocorriam na escola e os novos conteúdos e uma nova metodologia de ensino propostos pelo MMM, julgaram necessário elaborar e experimentar os livros da 5.ª a 8.ª séries antes de sua publicação em escala nacional, pois dessa forma poderiam dimensionar e analisar os aspectos positivos e negativos da coleção, tanto a partir das observações dos professores como dos alunos, perante a metodologia e os conteúdos apresentados.

Esse momento de mudanças vivido na educação nos remete às palavras de Chervel (1990): “cada docente é forçado a se lançar por sua própria conta em caminhos ainda não trilhados, ou a experimentar as soluções que lhe são aconselhadas”. Nesse sentido, com a nova legislação que unificou o primário e o ginásio, constituindo-se no ensino de 1.º grau de oito anos, os livros experimentais, se apresentaram como um colaborador no processo de transição entre o professor que ensinava na escola primária e o professor que ensinava no ginásio,[67] e, ainda, o que ensinava *antiga Matemática* e o professor que ensinaria a Matemática Moderna.

Portanto, consideramos importante analisar os livros experimentais. Na figura abaixo, apresentamos as capas desses livros que foram produzidos em dois volumes para cada série, editados pela Editora LPM, sem data, exceto o livro da 5.ª série que foi editado pela CEN, em um só volume, em 1972, que consideramos experiemntal.

Figura 13 – Capas GRUEMA, edição experimental.

Consideramos a experimentação dos livros um diferencial em relação aos livros publicados na época, uma vez que, no âmbito do projeto *A Trajetória da Geometria escolar no Brasil e em Portugal e o Movimento da Matemática Moderna,* não encontramos nenhuma pesquisa que revelasse tal fato. Entretanto, elaborar livros experimentais era uma prática corrente durante o período do MMM, que pode ser observada na produção do SMSG, nos Estados Unidos da América, e na de George Papy, na Bélgica, como mencionado no capítulo 3.

Nosso olhar para as duas coleções revelou que os livros da 6.ª, 7.ª e 8.ª séries, tanto o experimental como o editado pela CEN, não apresentam mudanças na estrutura metodológica nem nos conteúdos, apenas quanto à diagramação, quadrinhos, tipo de letra e algumas "simplificações" para melhor entendimento do conteúdo ou a delimitação do espaço para a resolução da atividade.

Reputamos que os livros da 7.ª e da 8.ª série experimental estão mais próximos da versão final em termos gráficos, ou seja, mantendo um espaço determinado para a realização da atividade do lado direito e as questões do lado esquerdo. No exemplo a seguir, podemos observar uma pequena alteração: foi

[67] Nessa época a legislação permitiu que o professor do ensino primário (1.º ao 4.º ano) ministrasse aula de matemática também para a 5.ª e 6.ª séries, antigas 1.ª e 2.ª séries do ginásio.

corrigida a nomenclatura do losango e criada uma tabela para facilitar a realização da atividade.

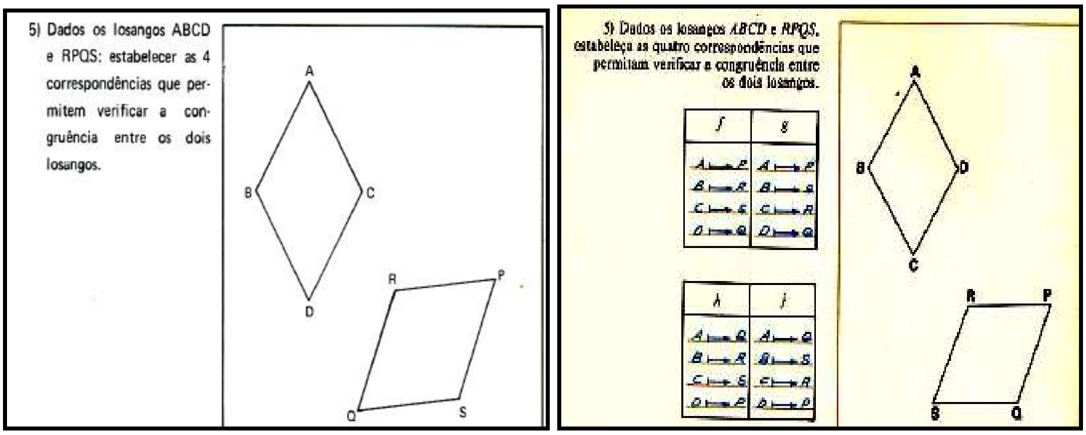


Figura 14 – GRUEMA, 7.ª, edição experimental, p.43; GRUEMA 7.ª, p.17.

Entretanto, podemos verificar profundas mudanças entre o livro da 5.ª série experimental (1972) e o livro da 5.ª série (1977), tanto na estrutura metodológica como nos conteúdos apresentados, como detalharemos a seguir.

Ao compararmos o livro de 5.ª série de 1972 com o livro da 5.ª série de 1977, observamos algumas alterações quanto à diagramação, à escolha das cores e a inserção de mais desenhos na forma de quadrinhos. No exemplo a seguir, apresentamos a introdução do capítulo *Relações* nos dois livros. No livro de 1972, os exercícios têm uma linguagem mais formal, fazendo uso da simbologia, e conta com a inserção de conhecimento de outras áreas. Contudo, no livro de 1977, a diagramação e a introdução de um quadrinho dão um aspecto menos formal e os exercícios propostos pertencem ao universo da criança, abordando as relações a partir da localização dos pares ordenados em um plano cartesiano.

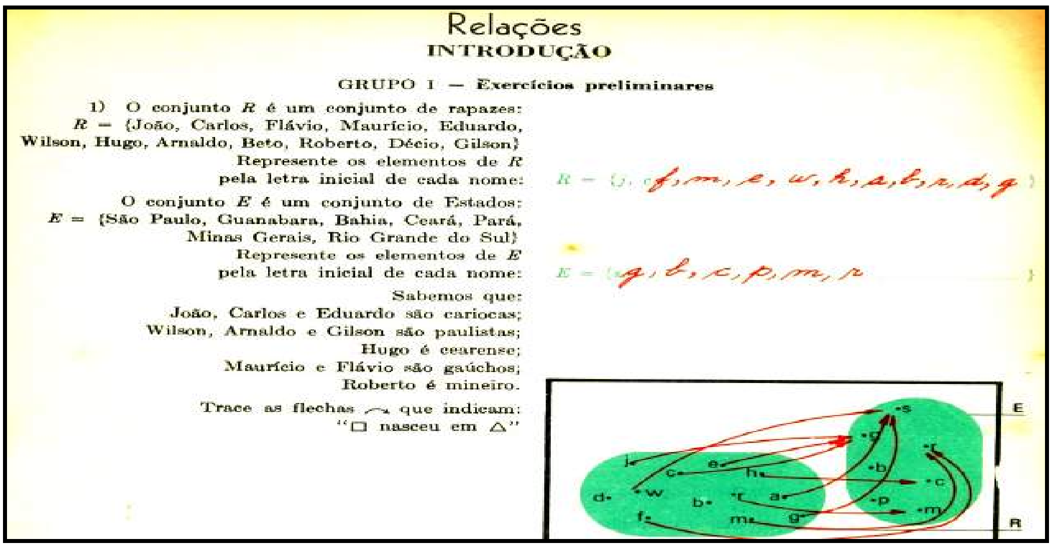
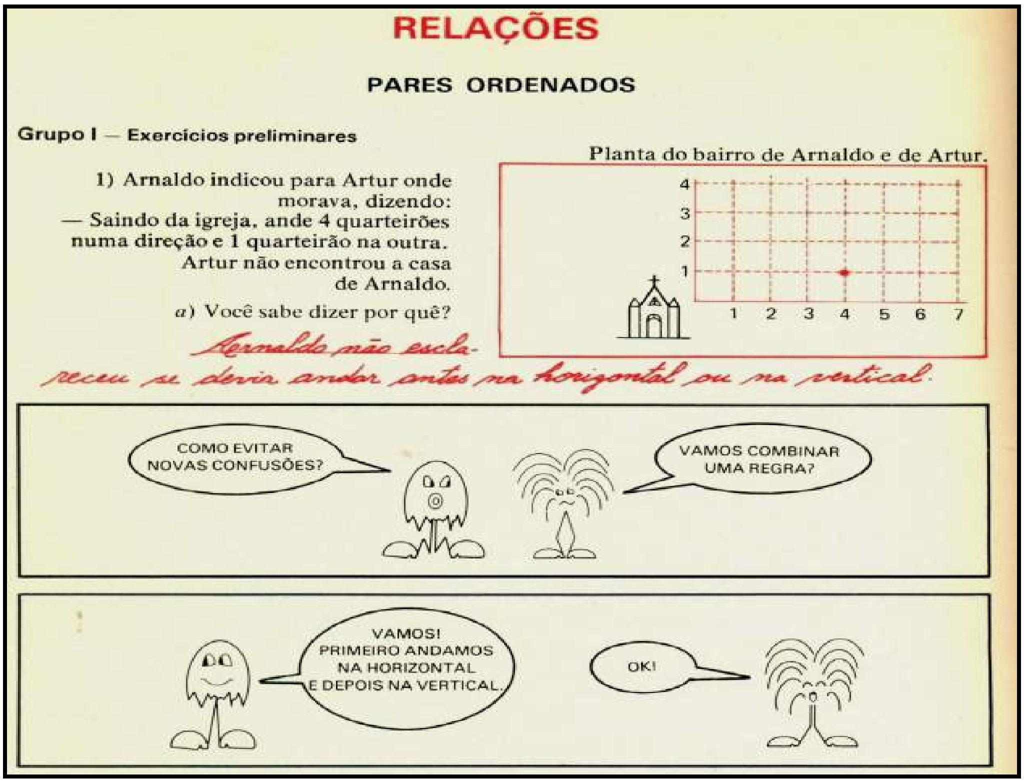


Figura 15 – GRUEMA, 5.ª, 1972, p.56.



RELAÇÕES

PARES ORDENADOS

Grupo I — **Exercícios preliminares**

1) Arnaldo indicou para Artur onde morava, dizendo:
— Saindo da igreja, ande 4 quarteirões numa direção e 1 quarteirão na outra.
Artur não encontrou a casa de Arnaldo.

a) Você sabe dizer por quê?

Arnaldo não esclareceu se devia andar antes na horizontal ou na vertical.

Figura 16 – GRUEMA, 5.ª, 1977, p.38.

A principal mudança no livro da 5.ª série (1977), no entanto, foi a retirada do capítulo *Temas de Recordação,* que é apresentado no livro da 5.ª série experimental (1972). Esse capítulo trata basicamente dos conceitos elementares da Geometria, o que permitia ao aluno recordar os conceitos estudados nas séries iniciais, ou um primeiro contato com os conceitos geométricos, caso o aluno não os tivesse estudado anteriormente.

Esse capítulo, ao indicar alguns conceitos geométricos, permitia que ao longo do livro da 5.ª série experimental (1972) estes fossem utilizados nos exercícios de aplicação das noções de conjunto e das noções de relações, propiciando, assim, a integração de dois ramos da Matemática: a Geometria e a Teoria dos Conjuntos. Como exemplo, apresentamos o capítulo *Operações entre Conjuntos,* que trabalha o conceito de intersecção entre conjuntos. Na atividade abaixo, esse conceito é utilizado para entes geométricos. Observa-se, também, que os professores são orientados a adotar outros conceitos geométricos como exemplos das operações entre conjuntos.

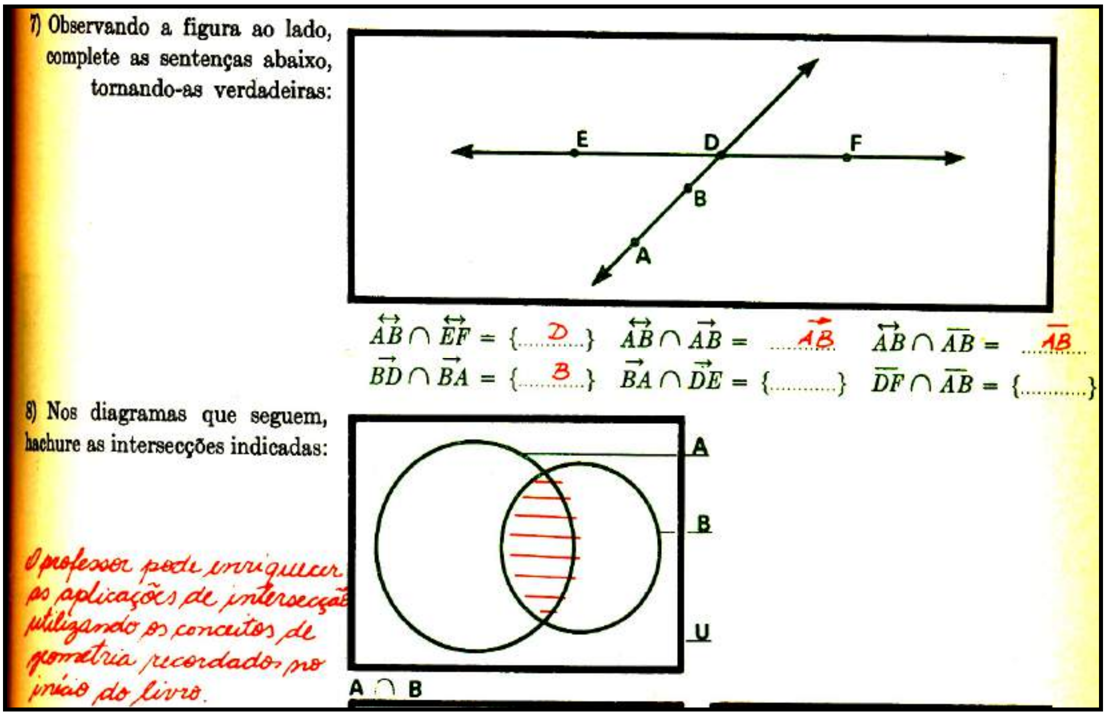
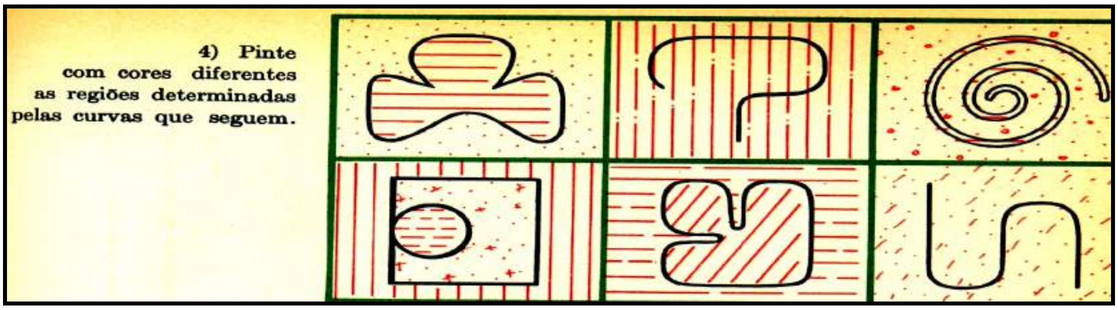
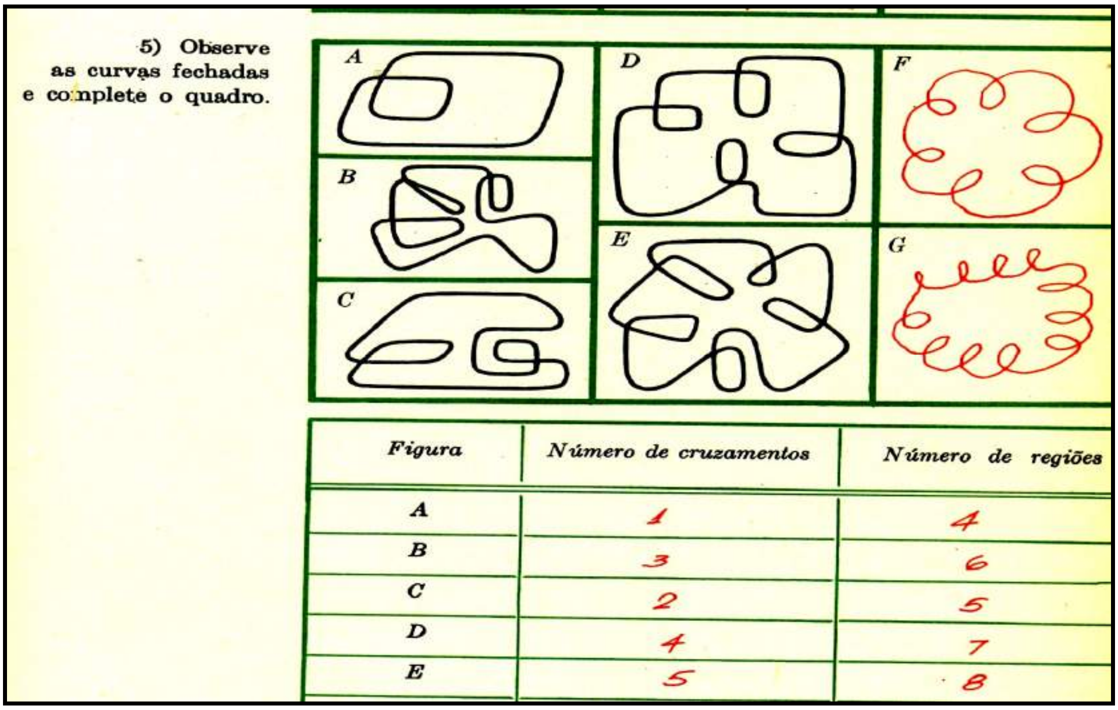


Figura 17 – GRUEMA, 5.ª,1972, p.47.

O capítulo *Temas de Recordação* também abordava as noções de Topologia. A Topologia se caracteriza pelo estudo das figuras que não são descritíveis pelas suas “medidas” métricas, como ângulos e comprimentos. Entretanto, essas figuras, ao sofrerem deformações sem cortes ou colagens, mantêm suas características, ou seja, a Topologia estuda as propriedades das figuras em que quase tudo é permitido: dobrar, amassar, esticar. Os invariantes topológicos são: o estar dentro e o estar fora.

A atividade a seguir, retirada do livro da 5.ª série experimental (1972), apresenta os invariantes topológicos, ou seja, o aluno deve delimitar as regiões determinadas pelas figuras.




5) Observe as curvas fechadas e complete o quadro.

A B C D E F G

Figura	Número de cruzamentos	Número de regiões
A	1	4
B	3	6
C	2	5
D	4	7
E	5	8

Figura 18 – GRUEMA, 5.ª experimental, 1972, p.9.

Segundo Piaget,[68] a ordem do desenvolvimento genético do pensamento geométrico na criança é inversa à ordem do desenvolvimento histórico da geometria;[69] assim, o ensino da geometria deveria ocorrer primeiro com as noções topológicas. Dienes (1975), partidário das ideias de Piaget, realizou várias experiências para o ensino da geometria a partir do desenvolvimento da percepção do espaço pela criança e concluiu que as primeiras noções geométricas observadas por ela, ainda bebê, são as fronteiras de seu quarto, ou seja, as paredes e o teto ou as grades de seu berço. Quando já consegue sentar e seu campo de visão aumenta, o bebê passa a ter a noção do estar dentro ou fora, ao observar que, quando chora, alguém entra em seu quarto para atender ao seu chamado. Ao engatinhar, o bebê descobre as possibilidades de deslocamento entre as fronteiras, ou seja, ao passar por uma porta aberta e não passar por uma porta fechada. Assim, as primeiras percepções geométricas que a criança realiza são as noções topológicas.

[68] Em 1974, Jean Piaget e Rolando Garcia iniciaram a obra *Psicogênese e história das ciências,* cuja versão final ocorreu em 1980. Nessa obra os autores concluem que o desenvolvimento do pensamento geométrico na criança ocorre conforme o desenvolvimento histórico da geometria.

[69] Historicamente, *grosso modo*, Euclides foi o primeiro a sistematizar o conhecimento geométrico no seu livro *Elementos;* temos assim a geometria de Euclides; Descartes introduziu o plano cartesiano; temos a geometria analítica; Desargues considerou o ponto de fuga, ou seja, a perspectiva; temos geometria projetiva; Hilbert introduziu novos axiomas e Birkoff considerou as medidas; temos a geometria euclidiana. Somente em 1736 com Leonard Euler, ao resolver o problema das sete pontes de Königsberg, iniciou-se a topologia.

Consideramos que as autoras se apropriaram das ideias de Piaget e Dienes, pois o início do estudo da Geometria se deu com as noções topológicas na 2.ª série, de forma intuitiva, como podemos observar na figura abaixo.

Figura 19 – GRUEMA, 2.ª, 1974, p.75.

Podemos afirmar que o estudo das noções topológicas ocorreu ao longo da 2.ª a 5.ª série, e que o capítulo *Temas de Recordação* é o elo de ligação entre as séries iniciais e as séries finais[70] do 1.º grau, estando, assim, em consonância com os Guias Curriculares (1975) que, ao extinguirem o exame de admissão, preveem a continuidade e a articulação do currículo entre as séries iniciais e finais, ou seja:

> Caracterizado o ensino de 1.º grau pela extensão da escolaridade básica para oito anos – extensão que não se resolve no acoplamento primário-ginásio, porque reconhecida a falta de articulação do ponto de vista do currículo, entre os dois graus de ensino – garantir a continuidade do processo, ao longo das oito séries, converteu-se na meta prioritária do planejamento curricular (SEE.SP, 1975, p.211).

Com a retirada do capítulo *Temas de Recordação* do livro da 5.ª série (1977), perdeu-se o elo de ligação entre as séries iniciais e as séries finais. Houve, portanto, uma descontinuidade no ensino dos conceitos geométricos, e nas séries finais não é apresentado o ensino das noções topológicas. Também perdeu-se a integração das noções de conjunto e de relações com os conceitos geométricos, uma vez que os exercícios que propiciavam essa integração foram retirados do livro de 1977.

Por outro lado, o livro da 5.ª série de 1977 apresenta as primeiras transformações geométricas: ampliação, rotação e simetria, de forma intuitiva, no

[70] Consideramos as séries iniciais de 1.ª a 4.ª séries e as séries finais de 5.ª a 8.ª séries do ensino do 1.º grau.

capítulo *Relações*. Na atividade a seguir, tem-se uma figura cujos vértices são expressos por pares ordenados em um plano cartesiano. Pede-se ao aluno que inverta a ordem do par ordenado, ou seja, que o par ordenado **(x,y)** passe a ser **(y,x).** A nova figura será simétrica à figura dada em relação à reta **y = x**. O objetivo da atividade é mostrar a importância da ordem dos elementos em um par ordenado, porém temos a primeira noção intuitiva da transformação geometria simetria, além das primeiras noções da geometria analítica.

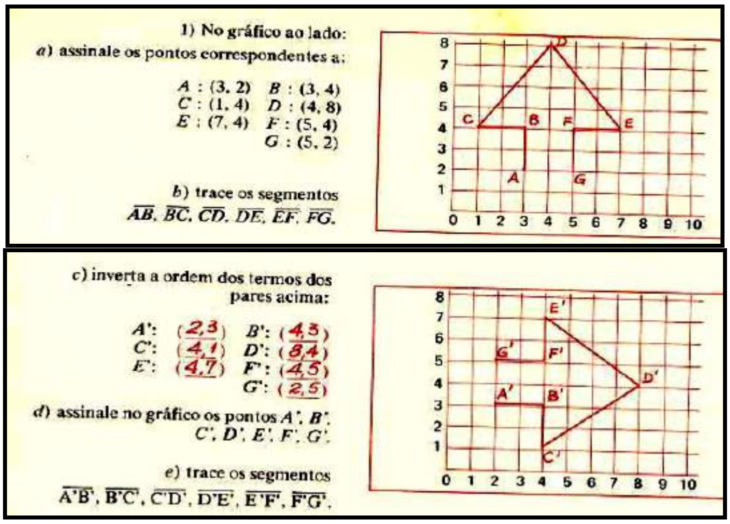


Figura 20 – GRUEMA, 5.ª, 1977, p.39.

A ampliação e a rotação também foram trabalhadas com o mesmo enfoque, ou seja, as mudanças que ocorrem em uma figura ao mudar os elementos dos pares ordenados. É necessário ressaltar que o estudo intuitivo das transformações geométricas, com o mesmo enfoque, ocorreu na 3.ª série, como podemos observar no exemplo a seguir.

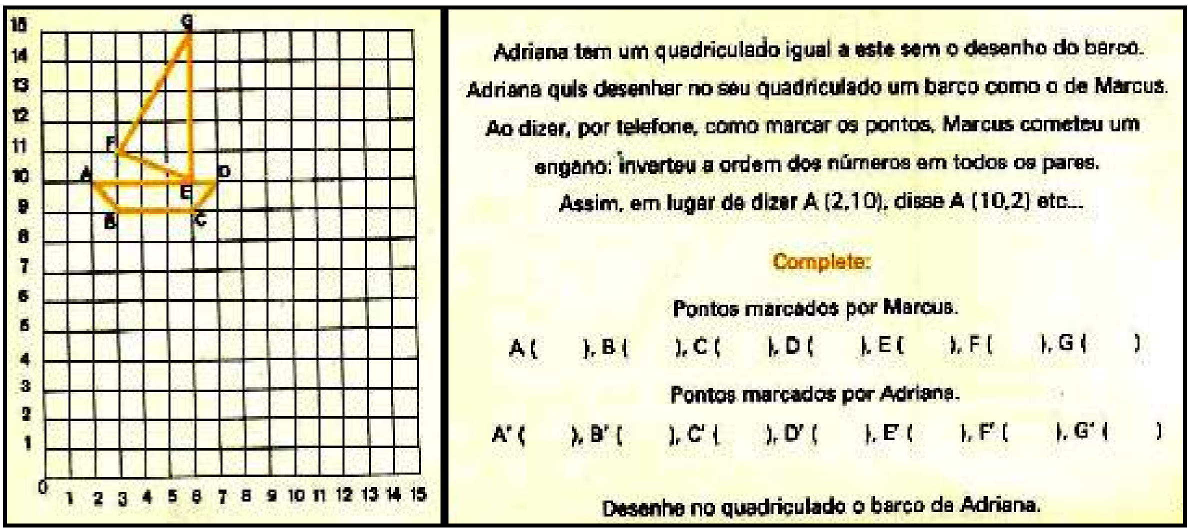


Figura 21 – GRUEMA, 3.ª, 1975, p.98.

Pelo exposto acima, notamos mudanças significativas entre os dois livros da 5.ª série da coleção GRUEMA. Para analisá-las, consideramos as palavras de Valente (2007):

> Os livros para o ensino da matemática não se explicam por si próprios – o que vale, creio eu, para qualquer livro; que há necessidade de pesquisar suas origens, o meio em que foram produzidos, o destino a que estavam reservados inicialmente e o que ocorreu ao longo de sua utilização dentre outras tarefas (VALENTE, 2007, p.20).

Ao entrevistarmos Lucília Bechara e Manhúcia Liberman sobre a retirada do capítulo *Temas de Recordação* do livro da 5.ª série (1977) e dos exercícios que envolviam os conceitos geométricos ao longo do livro, as coautoras nos dizem:

> Provavelmente, foi negociação com a editora [...] por que você sabe [...] na editora antes de editar um livro, ele passa por meia dúzia de leitores que são, em geral, professores, ou formadores de opinião, são coordenadores etc. e aí eles fazem as suas observações e as observações deles são ligadas ao que eles conhecem dos professores e aí a editora tirou, eu não me lembro bem [...] (BECHARA, depoimento 31.10.2008).
> Os professores achavam esta parte muito difícil... (LIBERMAN, depoimento 15.05.2008).

A hipótese levantada por Lucília Bechara nos parece factível, se considerarmos as observações de Gatti (2000) quando nos fala sobre o peso da produção de livros didáticos na economia editorial:

> É impossível para o historiador do livro tratar da atividade editorial da maior parte dos países sem levar em conta: em um país como o Brasil, por exemplo, os livros didáticos correspondiam, no início do século XX, a dois terços dos livros publicados e representam, ainda em 1996, aproximadamente 61% da produção nacional (GATTI, 2000 apud CHOPIN, 2004, p. 551).

A declaração de Manhúcia Liberman também nos parece relevante, visto que ela ministrou vários cursos para formação de professores na Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, nos quais pôde verificar que os professores que adotavam os livros do GRUEMA tinham dificuldades em utilizá-los em sala de aula, o que a levou, com outros profissionais,[71] a fundar a empresa *Solução – Assessoria e Planejamento Educacional.* Essas dificuldades no uso dos livros podem ser constatadas em cartas que as autoras receberam, e que se encontram no arquivo APLB:

> [...] na qualidade de autora, [convidamos a] participar de um CICLO DE PALESTRAS, cujo objetivo é atualizar os professores, [...] Entendemos tratar de rara e excelente oportunidade para V.Sas. a par desse curso de

[71] Manhúcia Liberman, Regina Wey, Maria Aparecida S. Guimarães, Ligia S. Monteiro, professoras, e Marta Hubner, psicóloga, cofundadoras da Solução – Assessoria e Planejamento Educacional.

> atualização, desenvolver treinamento teórico-prático aos professores participantes de como melhor utilizar a sua obra[72] (Anexo 3).
> Tendo em vista que a Diretoria de educação efetuou a compra de 6.000 volumes, em 1973 da obra *Curso Moderno de Matemática* e por ter renovado o pedido para 10.000 volumes para 1974, solicitamos de Vossa Senhoria a fineza de realizar um curso de treinamento para utilização da referida obra. Verificamos que os resultados obtidos durante este ano não foram os esperados. Cremos que a ineficiência decorreu pela falta de uma orientação metodológica, a qual poderá ser suprida através do referido curso[73] (Anexo 4).
> D. Dulce [...] quis saber do curso, da sua vinda [...] e da publicação do livro [...] As Irmãs do Colégio Auxiliadora vieram aqui em casa reiterar o convite [...] para eu dar umas aulas no período de planejamento [...] divulgando e explicando o conteúdo dos 5 volumes já publicados[74] (Anexo 5).

Segundo Bittencourt (2005), a elaboração e o uso do livro didático sofrem muitas interferências. Entre elas, a lógica da indústria cultural do sistema capitalista, que considera o livro didático uma mercadoria ligada ao mundo editorial, e a interferência das propostas curriculares impostas pelo Estado, que devem ser expressas nos textos didáticos. Como para a 5.ª série não há menção na legislação ao estudo da Geometria e das noções topológicas até a edição dos Guias Curriculares em 1975, parece-nos não existir interesse, tanto dos professores como da indústria, em apresentá-los aos alunos nesta série.

Outra interpretação possível para a retirada do capítulo *Temas de Recordação* do livro da 5.ª série (1977) pode ser a cultura escolar. Segundo Julia (1995), a cultura escolar determina o que deve ou não ser ensinado. Consideramos que a cultura escolar não aceitou a introdução do ensino dos conceitos geométricos, das noções de topologia. Entretanto, para as séries iniciais, o estudo desses conteúdos estava consolidado, uma vez que, segundo Medina (2008), os livros de 1.ª a 4.ª séries foram bem aceitos pelos professores e, segundo Villela (2009), foram um sucesso de vendas. Parece-nos, então, que naquele momento havia duas culturas escolares diferentes: a das séries iniciais e a das séries finais, e que, embora a legislação preconizasse a continuidade dos estudos ao longo das oito séries, a cultura escolar ainda não a incorporara.

Reputamos, ainda, ser indício do caráter inovador da proposta para o ensino da geometria dos livros do GRUEMA a inclusão do estudo das transformações

---

[72] Carta da CEN endereçada a Lucília Bechara comunicando convite para palestra por meio de Ofício da Fundação Educacional do Distrito Federal, órgão da Secretaria de Educação e Cultura, em 12.10.1976.
[73] Carta da Prefeitura Municipal de Curitiba endereçada a Lucília Bechara, em 08.10.1973.
[74] Carta de (ilegível) da cidade de Campos, endereçada a Lucília, em 18.01.1972.

geométricas no livro da 5.ª série de 1977 e dos conceitos da geometria plana e das noções de topologia no livro da 5.ª série de 1972.

Para finalizar nossa análise entre os livros experimentais e os editados pela CEN, apresentamos outra característica dos livros do GRUEMA: os quadrinhos.

Os livros foram concebidos sem textos explicativos, mas para destacar algumas informações foram utilizados os quadrinhos. Nos livros experimentais não temos informação do autor do desenho dos personagens. Nos livros editados pela CEN, em 1977, os personagens foram criados e desenhados por Maria Teresa Ayoub Jorge e Regina B. Tracanella. Os diálogos foram elaborados pelas autoras do GRUEMA e são os mesmos nas duas edições.

Nos livros experimentais, os personagens são crianças ou jovens, entretanto não há um mesmo padrão nos volumes de uma mesma série. No livro da 5.ª e 8.ª séries, a quantidade de quadrinhos é pequena, se comparada com os existentes nos livros da 6.ª e 7.ª séries. Nas partes dedicadas à Geometria, não existe um só quadrinho no livro da 5.ª série e apenas um no livro da 8.ª série. Todos os desenhos são em branco e preto. Apresentamos, a seguir, alguns exemplos

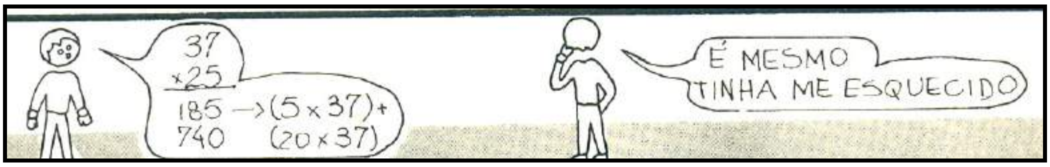


Figura 22 – Livro 5.ª experimental, p.163.

Figura 23 – GRUEMA, 6.ª experimental, p.88, 1.ª parte – p.36, 2.ª parte.

Figura 24 – GRUEMA, 7.ª experimental, p.67, 1.ª parte – p.88, 2.ª parte.[75]

Figura 25 – GRUEMA, 8.ª experimental, p.27.

Ao entrevistarmos a professora Manhúcia acerca da concepção dos quadrinhos, ela nos diz:

> Foi a forma que nós encontramos para expressar as informações importantes em uma linguagem mais leve por serem ditas por duas crianças. Como a gente ia escrever? Alguma coisa a gente tinha que escrever, teórica; a gente não sabia como escrever, o professor Jacy, que era nosso guru, não deixava escrever errado, obviamente, como escrever para os alunos entenderem? Sem ferir a coisa em si do aluno e a seriedade matemática, então o jeito foi o quê? Fazer a história em quadrinho, então a gente falava pela linguagem da criança (LIBERMAM, 2008, depoimento).

No entanto, a explicação dada pela professora Manhúcia só se aplica à edição experimental, na qual todos os personagens são crianças, porém nos livros editados pela CEN há outros tipos de personagens, como os do livro da 5.ª série (1977), que remetem ao imaginário infantil.

[75] Neste livro experimental há um erro em “É claro! 2 é um número irracional”, que foi corrigido no livro de 1977 “É claro! √2 é um número irracional”.

Figura 26 – GRUEMA, 5.ª, 1977, p.42.

Ou como no livro da 8.ª série (1977), no qual os personagens são figuras abstratas coloridas, talvez numa alusão ao caráter mais abstrato da Matemática, ou ainda porque os alunos desta série estão na faixa etária de 14 a 15 anos e, segundo Piaget, estão no estágio lógico formal e não são mais atraídos por personagens de crianças conversando.

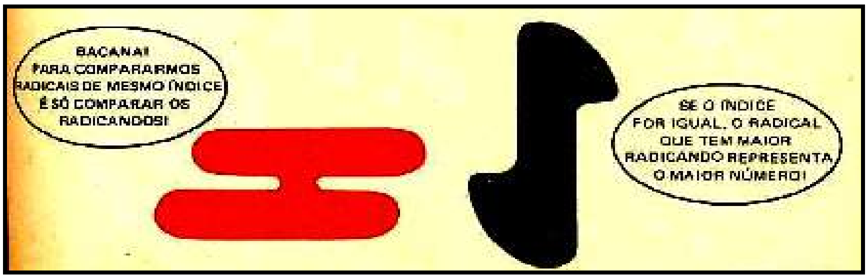


Figura 27 – GRUEMA, 8.ª, 1977, p.14.

Nos livros da 6.ª e da 7.ª série (1977), os personagens são crianças, e podemos observar a utilização da cor, mas não há um padrão para a elaboração dos personagens.

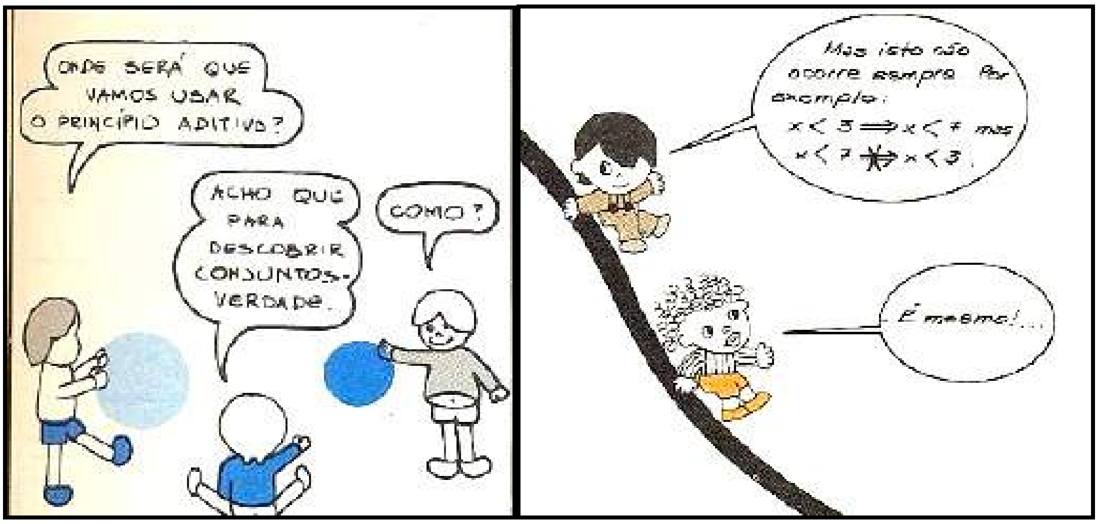


Figura 28 – GRUEMA, 6.ª, 1977 p.67 – GRUEMA, 7.ª, 1977, p.22.

Notamos que entre a coleção experimental e a coleção editada em 1977 existe uma grande diferença na concepção dos personagens, e na edição de 1977 há a utilização da cor. Consideramos que os diálogos promovidos pelos personagens não se caracterizam pela “linguagem das crianças”, como afirmou Manhúcia, e, sim, pela objetividade e pela modernidade das expressões tidas, na época, como “gírias”, como no quadrinho abaixo:

Figura 29 – GRUEMA, 7.ª, 1977, p.124.

A nosso ver, os quadrinhos são utilizados pelas autoras como uma estratégia metodológica, que visa tanto à transmissão de uma informação como de uma ideologia. No exemplo a seguir, a informação que se quer transmitir ao aluno é a notação simplificada para operações com números inteiros em uma linguagem mais acessível para a criança/adolescente sem sacrificar o rigor matemático.

Figura 30 – GRUEMA, 6.ª, 1977, p.58.

Ou, como no exemplo a seguir, informar que existe um aparelho mecânico – pantógrafo, que realiza as ampliações e as reduções fazendo uso do mesmo princípio utilizado no desenho geométrico que o aluno está realizando na atividade.

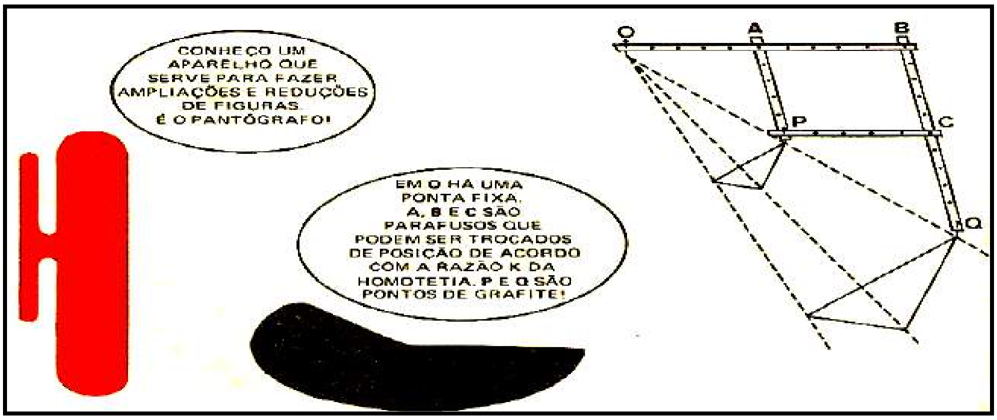


Figura 31 – GRUEMA, 8.ª, 1977, p.104.

Os quadrinhos transmitem uma ideologia quando pretendem modificar emoções ou pensamentos preestabelecidos. Podemos observar, no quadrinho a seguir, que o diálogo entre os personagens transmite mensagens de otimismo, alegria, satisfação ao terminarem a demonstração de um teorema, uma das angústias dos estudantes secundários; expressa, assim, a mesma ideia divulgada pela imprensa de que a Matemática não é mais “um instrumento de terror dos alunos”,[76] além de refletir o clima de otimismo econômico pelo qual o Brasil passava, apesar dos problemas políticos.

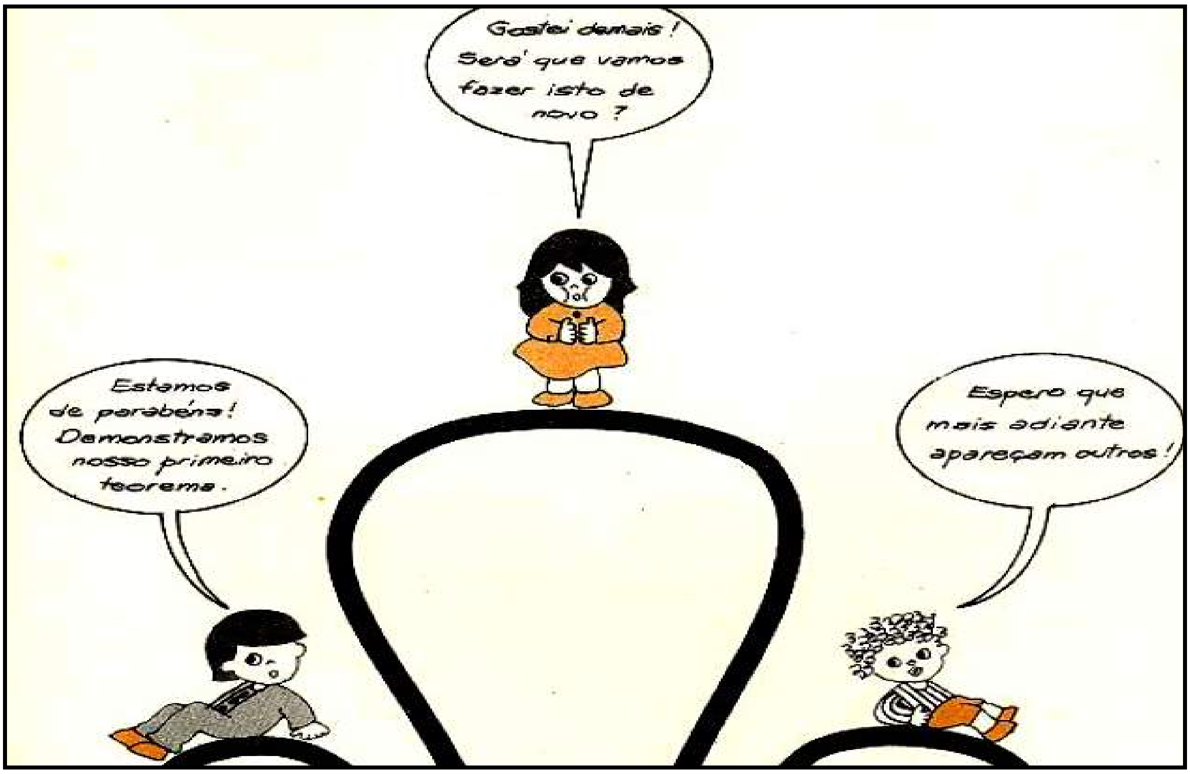


Figura 32 – GRUEMA, 7.ª, 1977, p.29.

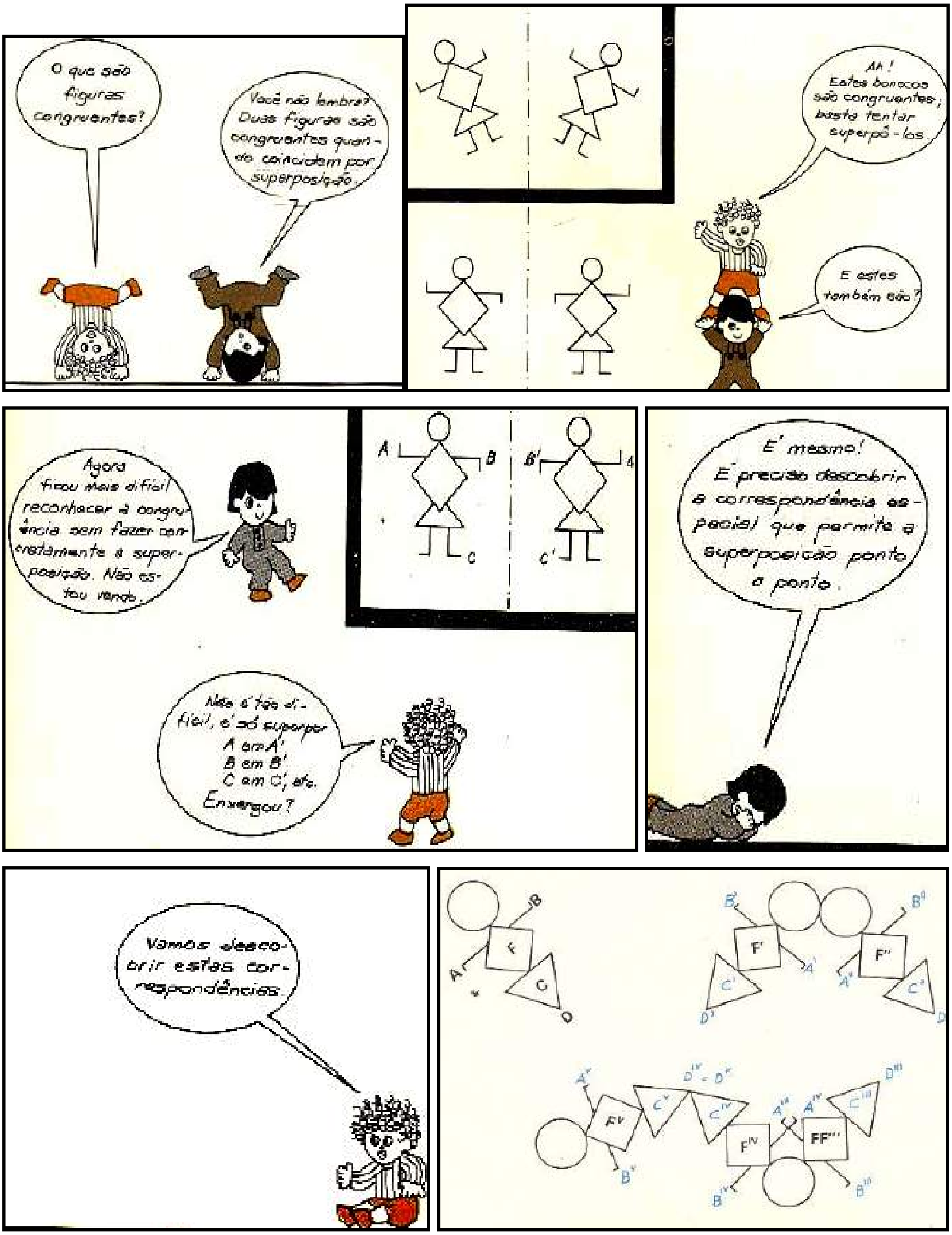
[76] Ver figura 1, p. 69

Os quadrinhos, embora adotem uma linguagem mais próxima do aluno, também eram utilizados para manter o rigor matemático, um dos ideais do MMM. O exemplo a seguir retirado do livro da 7.ª série, cujos alunos têm entre 12 e 13 anos, nos mostra como as autoras, ao perceberem que seria difícil os alunos compreenderem a prova, *o eixo de simetria dado pela reta **AB**, e a reta que passa pelo ponto **P** e o seu simétrico **P',** em relação à reta **AB** são perpendiculares,* recorrem aos quadrinhos para explicar que esta afirmação necessita de uma prova, sim, porém esta prova eles aprenderão algum dia.

Figura 33 – GRUEMA, 7.ª, 1977, p.148.

Podemos perceber, nos exemplos apresentados, que a maior parte dos diálogos entre os personagens dos quadrinhos é elaborada especificamente para cada tópico do livro, mas em alguns casos, como ocorre no livro da 7.ª série, ao estudar a congruência é possível "juntar" os quadrinhos que se encontram ao longo do capítulo e formar, *grosso modo*, uma revista em quadrinhos, conforme a sequência de figuras a seguir.

CONGRUÊNCIA



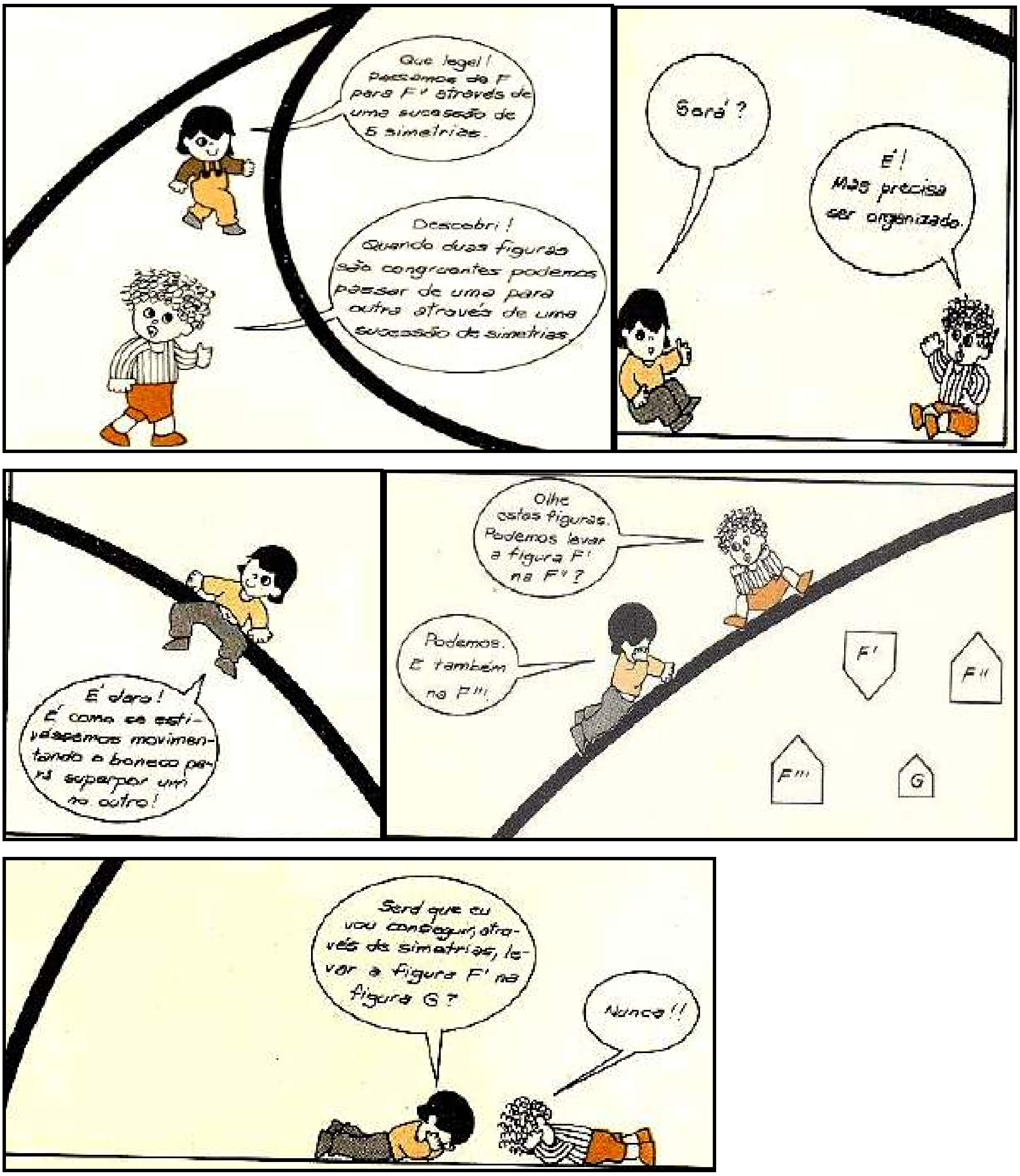


Figura 34 – GRUEMA, 7.ª, 1977, p. 166-174.

Ao entrevistamos Lucília Bechara (2008) acerca da utilização dos quadrinhos como estratégia metodológica, a autora nos diz que a "proposta dos quadrinhos foi bastante arrojada para a época", o que é confirmado por Alves (2001).

> As histórias em quadrinhos normalmente só eram lidas às escondidas do professor, entre uma aula e outra [...] lê-las dentro das escolas foi, por muito tempo considerada uma atividade clandestina e sujeita a punições (ALVES, 2001, p. 6).

Entretanto, em 1965, os quadrinhos já eram utilizados com fim didático, como podemos constatar na Revista do Ensino[77] da Secretaria de Educação e Cultura do Rio Grande do Sul. O artigo da professora Valmíria Paccinini,[78] publicado na seção *Educação para o Lar,* teve como base um folheto da University Of Wisconsin – Extension Service – College of Agriculture – Madison – 1954.

O artigo propõe que o aluno reflita sobre a necessidade de respeitar certas regras determinadas pela sociedade, como nos mostra a figura abaixo. Paccinini orienta os professores a utilizarem a sequência de quadrinhos em sala de aula como cartazes ilustrativos ou dramatizações.

"A melhor maneira de destruir inimigos é torná-los amigos." Lincoln

Indiscutìvelmente Lar e Escola estão ìntimamente ligados. Geralmente, as pessoas, na Escola, têm as mesmas reações e atitudes que no Lar, e é nestas atitudes que se reconhecem os diversos tipos de personalidade, as pessoas que são simpáticas e as que, infelizmente, não conseguem atrair sôbre si a simpatia dos outros. As pessoas sentem quando são apreciadas ou não e, em qualquer das circunstâncias, o melhor a fazer é um honesto exame de consciência. Se neste exame correspondermos ao que se espera de uma pessoa simpática, tanto melhor, caso contrário, é tratar de aperfeiçoarmo-nos, o que sem dúvida trará resultados compensadores. Observando neste teste o que apreciamos nas pessoas, poderemos saber se possuímos tais qualidades. Não só para os adultos servirá de "tomada de consciência" como a professôra poderá aplicá-lo às crianças, através de cartazes ilustrativos e dramatizações, o que levará o aluno a compreender a necessidade de respeitar certas regras e cultivar certos hábitos para bem viver em sociedade.

Figura 35 - Revista do Ensino, 1965, p.68.

---

[77] Pereira (2009), em seu artigo A Revista do Ensino do Rio Grande do Sul e os discursos sobre o MMM, relata que essa revista circulou de 1939 a 1942 e, depois, de 1951 a 1978, tinha grande tiragem e era distribuída em todo o território nacional, bem como no exterior. Disponível em: <http://www.smmmfloripa.ufsc.br/Pereira_art.pdf>. Acesso em: 29 dez. 2009.

[78] Valéria Paccinini apresenta vários artigos na Revista do Ensino, nos quais os quadrinhos são utilizados como material didático, todos eles inspirados em folhetos produzidos nos EUA.

No livro da 6.ª série do GRUEMA, conforme figura a seguir, observa-se a mesma sugestão de utilização, pelos professores, dos quadrinhos em sala de aula.

Figura 36 – GRUEMA, 6.ª, 1977, p.61.

Consideramos que as autoras utilizaram os quadrinhos como estratégia metodológica a partir do curso que Manhúcia fez no final de 1969 nos EUA.[79] O objetivo desse curso era observar as atividades de preparação de livros-texto, elaboração de guias e manuais para professores em várias editoras, bem como conhecer as diretrizes para o ensino elementar em vários centros educacionais americanos.

Ao que tudo indica, não havia uma intenção ou um eixo norteador quanto à elaboração dos quadrinhos. A imagem em cada uma das séries era concebida de uma forma diferente. Os diálogos transmitem informações sobre os conteúdos matemáticos, mas também mensagens de otimismo, de motivação, de satisfação ao alcançar um objetivo. Reputamos que os quadrinhos foram utilizados como uma estratégia metodológica inovadora para a época, tanto que hoje sua utilização é recomendada pelos PCNs.

A seguir, analisaremos como essa estrutura metodológica foi utilizada para o estudo dos conteúdos geométricos.

[79] Manhúcia participou deste curso por meio de bolsa de estudo sob auspício da Unesco. Esse curso teve duração de cinco semanas.

No período do MMM, uma discussão muito presente era se a Geometria deveria ser apresentada de forma intuitiva ou dedutiva, em oposição ao ensino da geometria baseado na memorização das demonstrações.

Ribeiro (1962) expôs no 4.º CBEM a proposta de ensino idealizada por Lucienne Felix em seu artigo, *Didática especial da geometria.* Ribeiro conclui que uma proposta de ensino da geometria deve conter tanto o ensino na forma intuitiva como na dedutiva.

O estudo da geometria intuitiva ou experimental faz uso da manipulação de objetos, elabora esquemas ou gráficos a fim de criar condições materiais circunstanciais para que o fato a ser estudado se realize e permita tirar conclusões.

Nesse sentido, a geometria intuitiva é apresentada na coleção GRUEMA desde o livro da 2.ª série, com as noções topológicas e os conceitos elementares da Geometria. As autoras, no guia do professor dos livros das séries iniciais, os orientam no sentido de que todas as situações apresentadas devem ser precedidas por atividades relacionadas com o mundo físico, para o que devem utilizar curvas feitas com arame, fios ou barbantes coloridos para o estudo das noções topológicas e decalques em papéis transparentes e construções com réguas para as primeiras noções da Geometria Plana.

Essas observações feitas aos professores quanto às experimentações geométricas estão em consonância com a teoria de Piaget (1967). Segundo esse estudioso, as crianças na faixa etária dos sete anos estão no período das *operações concretas*, em que o seu pensamento torna-se reversível, ou seja, ela é capaz de efetuar a operação contrária ou voltar ao início da operação; assim, têm-se as primeiras estruturas operatórias com aspecto implicativo ou lógico, mas desde que estas operações estejam presentes no seu campo perceptivo.

Nos livros de 5.ª a 8.ª séries, a geometria intuitiva se desenvolve por meio de construções geométricas que permitem ao aluno chegar às conclusões previstas para as atividades. O exemplo a seguir retirado do livro da 7.ª série, ao estudar as circunferências e os pontos de intersecção possíveis entre duas circunferências, propõe ao aluno que construa várias circunferências; então, ele concluirá que a intersecção entre duas circunferências pode ser: um ponto, dois pontos, ou nenhum ponto, e que não há possibilidade de duas circunferências se intersectarem em três pontos, pois, por meio do desenho geométrico, ele não consegue desenhá-lo.

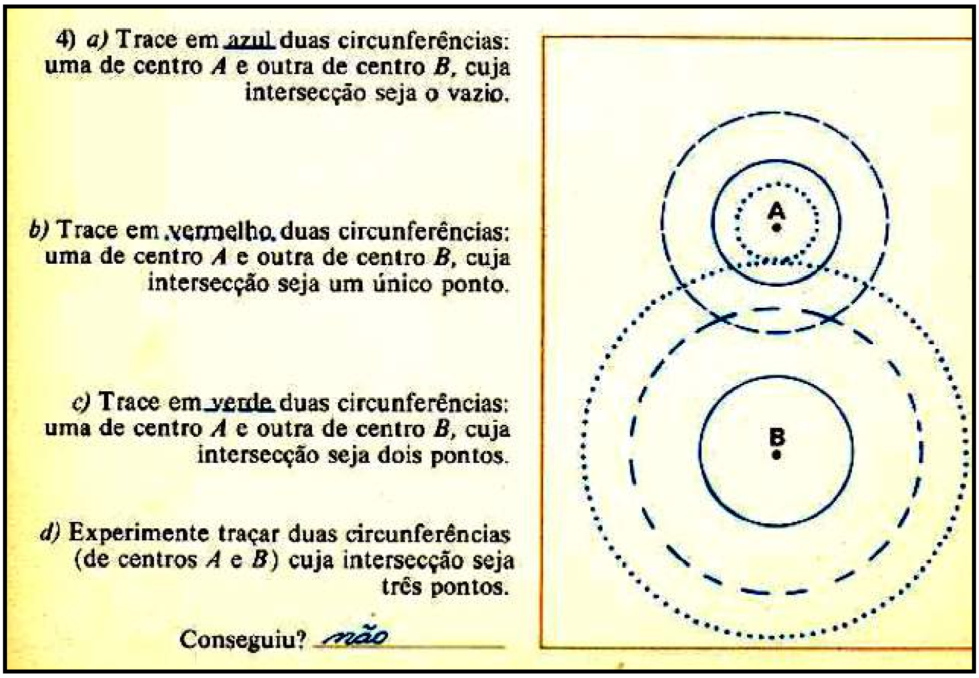


Figura 37 – GRUEMA, 7.ª, 1977, p.139.

Segundo Papy (1964, v.6, p.21), ao se elaborar um desenho que utiliza a atividade muscular e visual, reforça-se a compreensão e chama-se a atenção dos alunos para as diferentes etapas da atividade. Segundo Gattegno (1967, p.5), não existe ação sem percepção, nem percepção sem ação; assim, o pensamento corresponde a uma automatização da ação e da percepção, ou seja, cada pensamento matemático utiliza as imagens de modo explícito – as percepções e as ações –, e cada operação matemática conserva os vestígios da sua atividade original.

As atividades com manipulação de material concreto também são apresentadas; neste exemplo retirado do livro da 7.ª série os professores são orientados a incentivar os alunos que utilizem uma folha de papel transparente para decalcar os triângulos a fim de verificar a correspondência entre seus vértices.

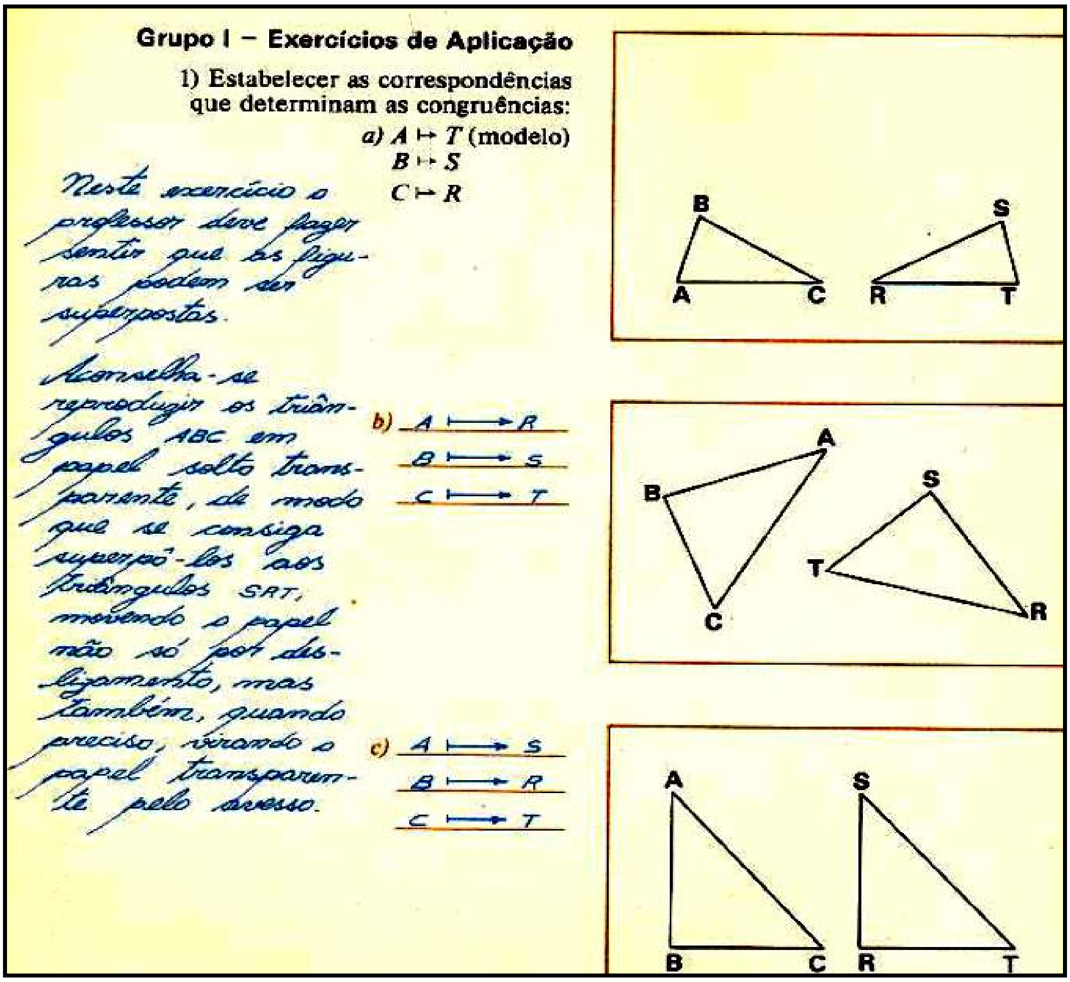


Figura 38 – GRUEMA, 7.ª, 1977, p.170.

Uma atividade semelhante foi proposta no livro da 4.ª série. No exemplo abaixo, os alunos verificam a congruência ao fazer o decalque de figuras em papel transparente, ou por meio da medição dos lados das figuras com régua, para observar quais figuras coincidem com o decalque ou têm os lados com a mesma medida.

Figura 39 – GRUEMA, 4.ª, 1979, p.46-47.

As duas atividades apresentadas acima são semelhantes, entretanto os objetivos são diferentes, ou seja, no exemplo retirado do livro da 4.ª série, a atividade está voltada para o manuseio do papel transparente ou da utilização da régua para realizar a medição, a fim de encontrar as figuras congruentes. Na atividade extraída do livro da 7.ª série, o decalque é uma ferramenta para constatar que há uma correspondência entre os vértices dos dois triângulos, ou seja, se os triângulos podem coincidir quando os vértices se correspondem, os triângulos são congruentes.

No outro exemplo, retirado do livro da 8.ª série, temos uma atividade na qual os alunos devem recortar as figuras pontilhadas e recobrir o quadrado de lado **a,** e concluir o Teorema de Pitágoras.

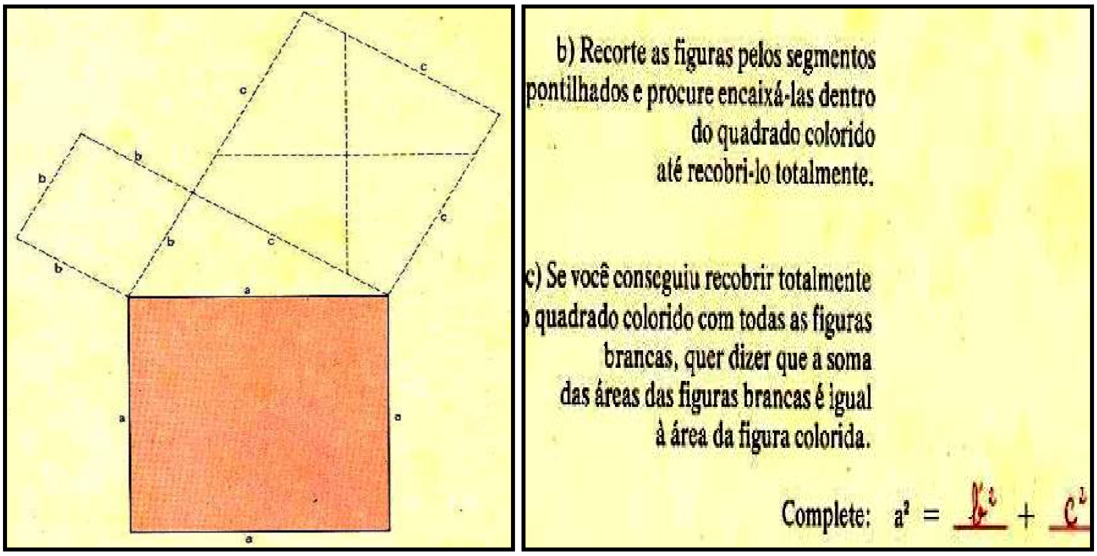


Figura 40 – GRUEMA, 8.ª, 1977, p.2.

Consideramos que os livros do GRUEMA apresentam a geometria intuitiva e experimental ao utilizarem exemplos do mundo físico, ou ao empregarem o desenho geométrico como ferramenta para construção dos conceitos geométricos, ou ainda ao proporem atividades de recorte e decalque ao longo de todas as séries do 1.º grau. Nesse sentido, a proposta para o ensino de geometria do GRUEMA está em consonância com Guias Curriculares, que propõem que os resultados geométricos devem ser obtidos intuitivamente com base na experiência e na observação, e que o aluno deve adquirir habilidade no uso do compasso e da régua (SEE.SP, 1975, p.271).

Segundo as recomendações do Seminário de Royaumont, o estudo da geometria deveria ser iniciado com a geometria intuitiva e experimental, o que de fato ocorre na coleção GRUEMA, todavia também se propõe, no ensino secundário, o início do estudo da geometria dedutiva. A seguir, analisaremos como foi apresentada essa Geometria nesses livros.

A geometria dedutiva se apoia em axiomas, postulados e definições, a partir dos quais, com um encadeamento lógico, se demonstram teoremas, que passam a ser considerados verdadeiros e com estes podem ser demonstrados outros teoremas.

O estudo da geometria dedutiva, no Brasil, constituía-se em um problema de aprendizagem no secundário. Leme da Silva (2007), no artigo em que analisa os congressos, ressalta que:

> Claro está que as discussões se dão nos aspectos didáticos do ensino, com a preocupação de que os alunos abandonem a memorização de teoremas que não fazem sentido algum a eles. Outro dado a observar é que não se questiona a perda do rigor da geometria euclidiana, ou a substituição desta geometria por outra, o foco é a metodologia empregada no ensino e não o conhecimento em si (LEME da SILVA, 2008a, p.74).

Osvaldo Sangiorgi, na introdução de seu livro *Matemática – Curso Moderno*, afirma que seu livro traz mudanças significativas quanto ao estudo da geometria dedutiva:

> Finalmente, vem o "bom-bocado" do livro: o estudo da geometria. Agora, não será mais preciso que você "decore" enfadonhos teoremas e mais teoremas, contra o que, erradamente, alguns colegas mais adiantados costumavam "preveni-lo". [...] Seja, pois muito feliz nesta viagem ao maravilhoso país da Geometria (SANGIORGI, 1969, p.74).

Pierro Netto (1972), em sua tese de doutorado *Contribuição ao Ensino da Geometria Elementar*, faz uma pesquisa diagnóstica, a fim de verificar o que os alunos sabem sobre Geometria e conclui que: "Pouco ou quase nada se sabe de Geometria ao sair da escola de primeiro grau" (PIERRO NETTO, 1972, p.54).

Pelo visto, o ponto crucial era o ensino da geometria dedutiva. As discussões quanto ao seu ensino também ocorriam internacionalmente Choquet (1961) recomenda que os alunos devem conhecer, antes do início da geometria dedutiva, as noções da lógica, a começar por conectivos, por exemplo*:* **e, ou.**

Nos livros de 5.ª e 6.ª séries são apresentados o uso dos conectivos, a simbologia e as noções de lógica. Consideramos que as autoras se apropriaram das recomendações de Choquet. No exemplo a seguir, retirado do livro da 6.ª série, há várias sequências de exercícios direcionadas ao uso dos conectivos **ou** e **e** entre sentenças verdadeiras, além da orientação aos professores para tentarem uma integração com os professores de Comunicação e Expressão, com intuito de caracterizar eficientemente o uso destes conectivos.

O conceito de relação de equivalência pode ser enriquecido com exemplos em outras áreas.

CONECTIVOS

O professor deve rever, neste ponto, as definições da interseção e reunião de conjuntos sublinhando os conectivos empregados: e para interseção, ou para reunião.

CONECTIVO "e"

O assunto presta-se a entrosamento com o professor de comunicação e expressão.

Grupo I - Exercícios Preliminares

DE UM MODO GERAL

Em Matemática, duas sentenças ligadas pelo conectivo *e* só formam uma sentença composta verdadeira quando as duas sentenças são verdadeiras.

Em Matemática, duas sentenças ligadas pelo conectivo *ou* só formam uma sentença composta verdadeira quando pelo menos uma das duas sentenças é verdadeira.

Figura 41 – GRUEMA, 6.ª, 1977, p.36, 37 e 40.

O próximo exemplo, extraído do capítulo *Implicação e Equivalência* do livro da 7.ª série, apresenta atividades com o objetivo de possibilitar ao aluno a compreensão, a utilização e o significado da simbologia → (implica) e ↔ (equivalente), empregados nas demonstrações de teoremas.

DE UM MODO GERAL

Se p e q são duas sentenças abertas com a mesma variável e se a variável pode tomar valores dentro de um conjunto X, dizer que
p implica q ou $p \Rightarrow q$
significa que:
todos os elementos de X que tornam p verdadeira tornam também q verdadeira, isto é, o conjunto-verdade de p está contido no conjunto-verdade de q.

DE UM MODO GERAL

Se a sentença p implica a sentença q e a sentença q implica p, então p é equivalente a q.

Se $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow p$ então $p \Longleftrightarrow q$

Figura 42 – GRUEMA, 7.ª, 1977, p.19 e 22.

As noções de lógica necessárias à demonstração de um teorema estão contidas no livro da 7.ª série no capítulo *Axiomas e Teoremas*. As atividades apresentadas, como nos exemplos a seguir, estão relacionadas ao universo do aluno, como parentesco, a fim de que compreendam que axioma são afirmações reputadas verdadeiras; teorema são sentenças formadas por afirmações e conclusões, e que as afirmações indicadas nessas sentenças são chamadas de hipóteses e as conclusões de tese.

Considere a sentença:

"Flávio é irmão de Gilda" "implica" "Gilda é irmã de Flávio"

Em linguagem Matemática:

Flávio é irmão de Gilda ⇒ Gilda é irmã de Flávio

↓ ↓

(afirmação) (conclusão da afirmação anterior)

Anote:

A sentença formada por afirmações seguidas de uma conclusão chama-se *teorema*.
As afirmações (que são ponto de partida) de um teorema chamam-se *hipóteses* do teorema.
A conclusão chama-se *tese* do teorema.

Você observou que:

No teorema:

Flávio é irmão de Gilda ⇒ Gilda é irmã de Flávio

é a hipótese é a tese

Figura 43 – GRUEMA, 7.ª, 1977, p.26.

Outros matemáticos também apresentaram propostas para o ensino da geometria dedutiva: Dieudonné (1961) propõe que a geometria dedutiva se desenvolva somente depois que o aluno tenha trabalhado os conceitos geométricos sobre uma base experimental; Fehr (1966) sugere que os alunos entre 12 e 15 anos utilizem os conhecimentos geométricos já adquiridos em atividades que possibilitem abstração, generalizações, relações entre os elementos e deduzam pequenos teoremas. Piaget (1967) afirma que o pré-adolescente estará no período das operações formais ou abstratas, apto a começar seu aprendizado da geometria dedutiva. Para o autor, o pré-adolescente

> Começa a se desligar do concreto e a situar o real num conjunto de transformações possíveis, a criança pode realizar as relações possíveis, de modo a prever as situações necessárias para provar uma hipótese (PIAGET, 1967, p.17).

Constatamos que as autoras se apropriaram das propostas internacionais mencionadas para a elaboração da proposta de ensino da geometria dedutiva nos livros do GRUEMA: primeiro, porque a geometria dedutiva é apresentada inicialmente no livro da 7.ª série quando os alunos estão com 12 ou 13 anos; segundo, nas séries iniciais alguns conceitos geométricos foram apresentados intuitiva ou experimentalmente, portanto aptos a iniciarem atividades que propiciem o desenvolvimento do raciocínio lógico dedutivo. Entretanto, a geometria intuitiva e a experimental não são abandonadas a partir da 7.ª série, tanto estas como a geometria dedutiva caminham juntas, como podemos observar na atividade a seguir.

Esta atividade visa o desenvolvimento do raciocínio lógico dedutivo e se apoia no questionamento ao aluno e nas construções geométricas, com o fim de propiciar as condições necessárias para que o aluno chegue às conclusões esperadas.

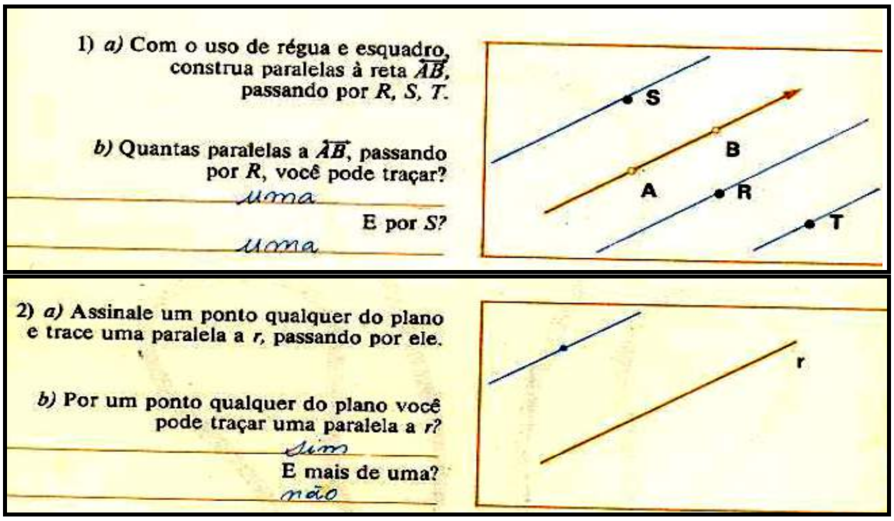


Figura 44 – GRUEMA, 7.ª, 1977, p.30.

Vários autores do período do MMM utilizam-se do questionamento ao aluno e das construções geométricas. Apresentamos abaixo um exemplo retirado do livro *Mathématique Moderne*, v. 1 (1964), de George Papy. A atividade a seguir trata da mesma questão acima, ou seja, por um ponto dado, não pertencente a uma reta dada, só é possível traçar uma reta paralela à reta dada passando pelo ponto dado. O desenvolvimento do questionamento e a solicitação para a construção geométrica ocorrem de maneira semelhante nos dois livros.

— Dessine une droite D du plan Π.
Trace une parallèle A à D.
Peux-tu tracer une nouvelle parallèle à D ? Appelons-la B.
Peux-tu en tracer beaucoup d'autres?
Les peux-tu tracer toutes?

— Je ne puis les tracer toutes parce qu'il y a une infinité de parallèles à D.

— Marque un point *p* sur le tableau.
Existe-t-il une parallèle à D comprenant *p* ?

— Oui!

— Combien existe-t-il de parallèles à D comprenant *p* ?

— Une seule.

Figura 45 – PAPY,[80] 1964, p.73.

[80] – Desenhe uma reta D do plano π. Trace uma paralela A à D. Podemos traçar uma nova paralela à D? Chamemos de B.
– Podemos traçar muitas outras? Podemos traças todas?
– Não podemos traçar todas porque há infinitas retas paralelas à D.
– Marque um ponto p sobre o quadro. Existe uma paralela à D que passa por p?
– Sim!
– Quantas paralelas a D passam por p?
– Uma só.

Outro exemplo que podemos citar foi extraído do livro *Initiation a la Géométrie*, de Lucienne Felix (1964), que também propõe atividades que aliam o questionamento e a construção geométrica.

Une droite $x'x$ détermine les demi-plans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$. Dessinez un cercle $\mathcal{C}(A, r) \subset \mathcal{R}$. Combien de régions sont déterminées ainsi ? On place un point dans chaque région et on les joint 2 à 2. Ces segments coupent-ils les lignes tracées ? et les droites supports des segments ?

Figura 46 – FELIX,[81] 1964, p.41.

Notamos nos exemplos acima que não são apresentados resultados prontos, mas estes são construídos de forma lógica em um diálogo com o aluno, induzindo-o a observar a construção geométrica para responder aos questionamentos e chegar às conclusões esperadas para as atividades.

A primeira demonstração nos livros do GRUEMA encontra-se na 7.ª série, um teorema algébrico que apresentamos na sequência. Quer-se provar o teorema: *Se* ***a*** *e* ***b*** *são naturais ímpares, então* ***a + b*** *é um natural par*. Pede-se que o aluno destaque a hipótese e a tese e depois complete o quadro com as afirmações e as justificativas.

a) Qual a hipótese do teorema? a e b são naturais ímpares

b) Qual a tese do teorema? a + b é um natural par

c) Vamos usar um *raciocínio* para, da hipótese, chegar à tese.

Afirmações	*Justificativas*
$a = 2m + 1$	por hipótese
$b = 2p + 1$	por hipótese
$a + b = 2m + 1 + b$	aplicação do princípio aditivo
$a + b = 2m + 1 + 2p + 1$	substituição de b por seu valor
$a + b = 2m + 2p + 1 + 1$	prop. comut. da adição em N
$a + b = 2m + 2p + 2$	efetuamos a soma
$a + b = 2(m + p + 1)$	prop. distributiva da multiplicação em relação a adição em N
$m + p + 1 \in \mathbb{N}$	a adição é operação em N
$m + p + 1 = c$	nova denominação
$2c$ é par	definição de número par
$a + b = 2c$	tese

Anote:

O *raciocínio* que nos permite chegar da hipótese à tese de um teorema chama-se *demonstração do teorema*.

Figura 47 – GRUEMA, 7.ª, 1977, p.28.

---

[81] Uma reta x'x determina os semi-planos $\Re$ e $\Re'$. Desenhe uma circunferência $C(A,r) \subset \Re$. Quantas regiões são assim determinadas? Marque um ponto em cada uma das regiões e os ajunte de 2 em 2. Estes segmentos cortam as linhas traçadas? E as retas suporte dos segmentos?

Destacamos outro exemplo retirado do livro da 8.ª série, no qual é demonstrada a fórmula geral para a resolução da equação de 2.º grau.

4) Complete:

Afirmações	Justificativas
1) $ax^2 + bx + c = 0$	equação do 2º grau ($a \neq 0$)
2) $ax^2 + bx = -c$	aplicou-se o princípio aditivo
3) $4a(ax^2 + bx) = 4a(-c)$	multiplicaram-se ambos os membros por 4a
4) $4a^2x^2 + 4abx = -4ac$	aplicou-se a propr. distributiva
5) $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = -4ac + b^2$	somou-se b^2 a ambos os membros
6) $(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$	fatorou-se o 1º membro

Observe que:

Se $b^2 - 4ac < 0$ a equação do item 6 não tem solução porque $(2ax + b)^2$ é sempre positivo ou nulo.
Portanto a equação $ax^2 + bx + c = 0$ não tem solução real.
Se $b^2 - 4ac \geqslant 0$ podemos continuar:

7) $2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$	usou-se a definição de raiz quadrada
8) $2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$	aplicou-se o princípio aditivo
9) $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	aplicou-se o princípio multiplicativo
10) $V = \left\{ \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right\}$	achou-se o conjunto verdade

Anote:

Na equação $ax^2 + bx + c = 0$
a expressão $b^2 - 4ac$
se chama *discriminante*
e se representa por Δ
(letra grega, que se lê: delta)
$\Delta = b^2 - 4ac$

Você demonstrou que:

Dada a equação do 2º grau:
$ax^2 + bx + c = 0 \qquad a \neq 0$
se $\Delta < 0$, a equação não tem solução real.
se $\Delta \geqslant 0$, a equação tem raízes reais que são determinadas pela fórmula
$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

Figura 48 – GRUEMA, 8.ª, 1977, p. 62-63.

Nos livros da 7.ª e 8.ª séries temos diversas demonstrações algébricas, as quais foram recomendadas no Seminário de Royaumont, com o intuito de facilitar o ensino da geometria, ou seja: "Se se introduzem os métodos dedutivos no ensino da Álgebra, torna-se possível que este conhecimento sirva para o ensino da Geometria" (OECE, 1961a, p.120, apud GUIMARÃES, 2007, p.36).

Os postulados e as definições a partir dos quais se demonstrarão os teoremas geométricos foram apresentados aos alunos de forma intuitiva ou experimental nos livros das séries iniciais. Nos exemplos a seguir, apresentamos uma atividade relacionada com o axioma “Por um ponto passam infinitas retas”, que foi retirada do livro da 3.ª série, e outra relacionada com conceito de ângulo, extraída do livro da 4.ª série.

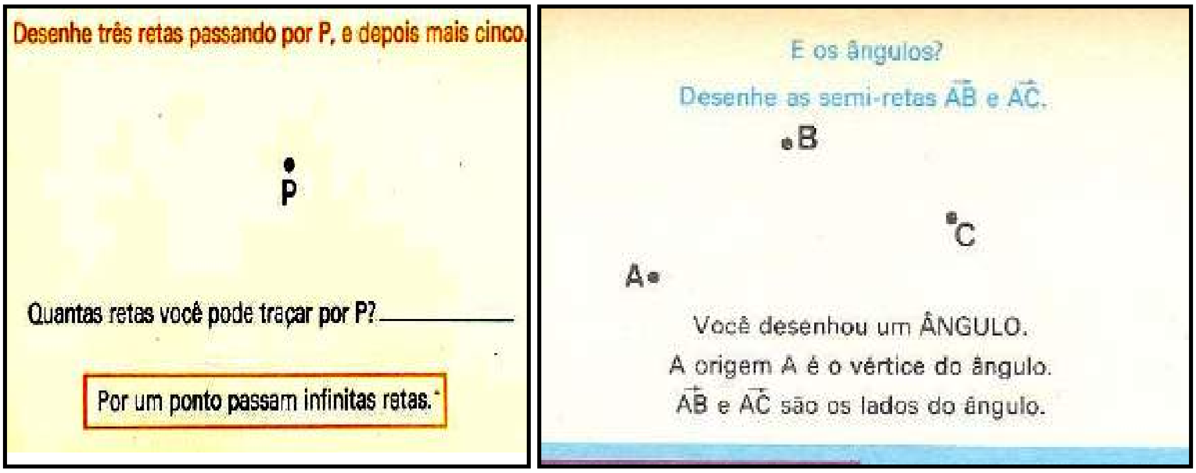


Figura 49 – GRUEMA, 3.ª, 1975, p.69 – GRUEMA, 4.ª, 1975, p.49.

Entretanto, no guia do professor da 3.ª e da 4.ª séries são apresentados formalmente os postulados e as definições que darão suporte ao desenvolvimento posterior da geometria dedutiva.

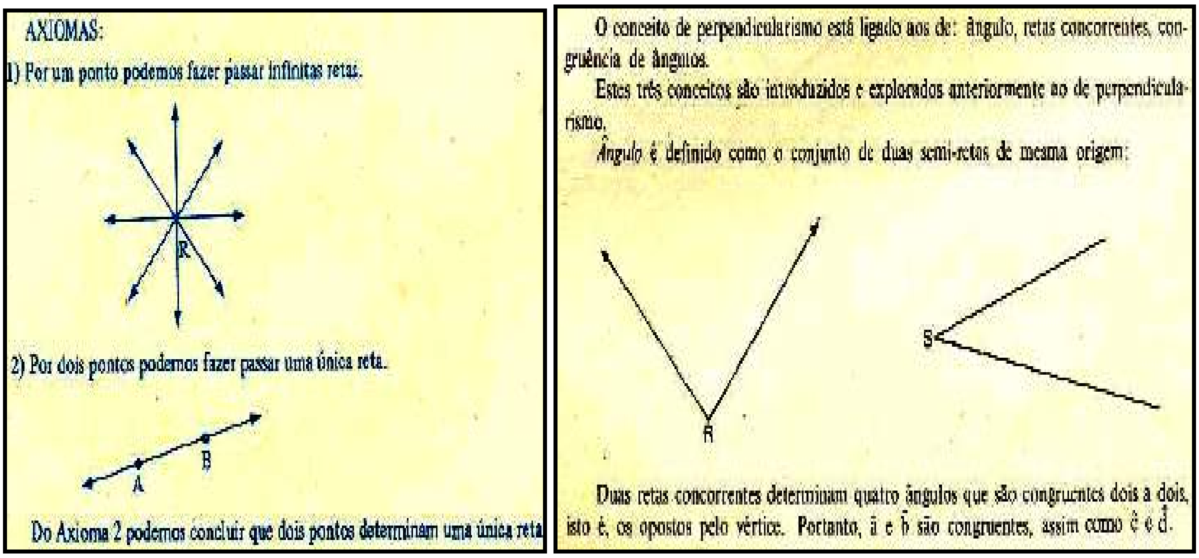


Figura 50 – GRUEMA, 3.ª e 4.ª – Guia do professor, 1975, p.14 e p.9.

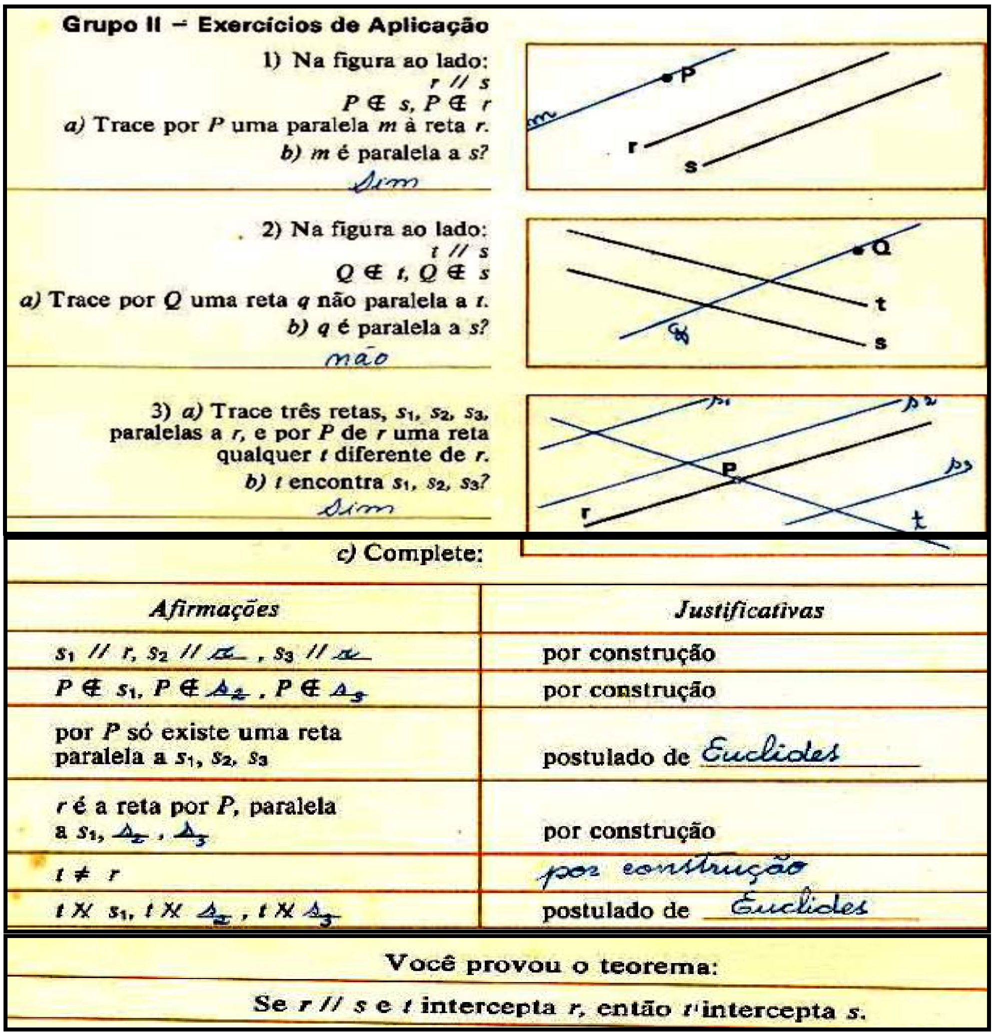
O único postulado explicitado nos livros da 5.ª a 8.ª séries foi o *Postulado de Euclides,* apresentado no livro da 7.ª série.

Anote o Postulado de Euclides:

“Por um ponto fora de uma reta podemos traçar uma e somente uma paralela à reta dada”.

Figura 51 – GRUEMA 7.ª, 1977, p.30.

Na sequência, apresentamos a primeira prova de um teorema geométrico: *Se a reta **r** é paralela a reta **s** e a reta **t** intercepta a reta **r**, então a reta **t** intercepta a reta **s***. A atividade é proposta sem que o aluno saiba que vai provar esse teorema. Solicita-se que o aluno responda as questões formuladas, realize as construções geométricas e complete as afirmações e as justificativas. Ao terminar essa atividade, o aluno concluiu a demonstração do teorema, e só então este lhe é explicitado.



Grupo II – Exercícios de Aplicação

1) Na figura ao lado:
$r \parallel s$
$P \notin s$, $P \notin r$
a) Trace por P uma paralela m à reta r.
b) m é paralela a s?
Sim

2) Na figura ao lado:
$t \parallel s$
$Q \notin t$, $Q \notin s$
a) Trace por Q uma reta q não paralela a t.
b) q é paralela a s?
não

3) *a)* Trace três retas, s_1, s_2, s_3, paralelas a r, e por P de r uma reta qualquer t diferente de r.
b) t encontra s_1, s_2, s_3?
Sim

c) Complete:

Afirmações	*Justificativas*
$s_1 \parallel r$, $s_2 \parallel r$, $s_3 \parallel r$	por construção
$P \notin s_1$, $P \notin s_2$, $P \notin s_3$	por construção
por P só existe uma reta paralela a s_1, s_2, s_3	postulado de Euclides
r é a reta por P, paralela a s_1, s_2, s_3	por construção
$t \neq r$	por construção
$t \times s_1$, $t \times s_2$, $t \times s_3$	postulado de Euclides

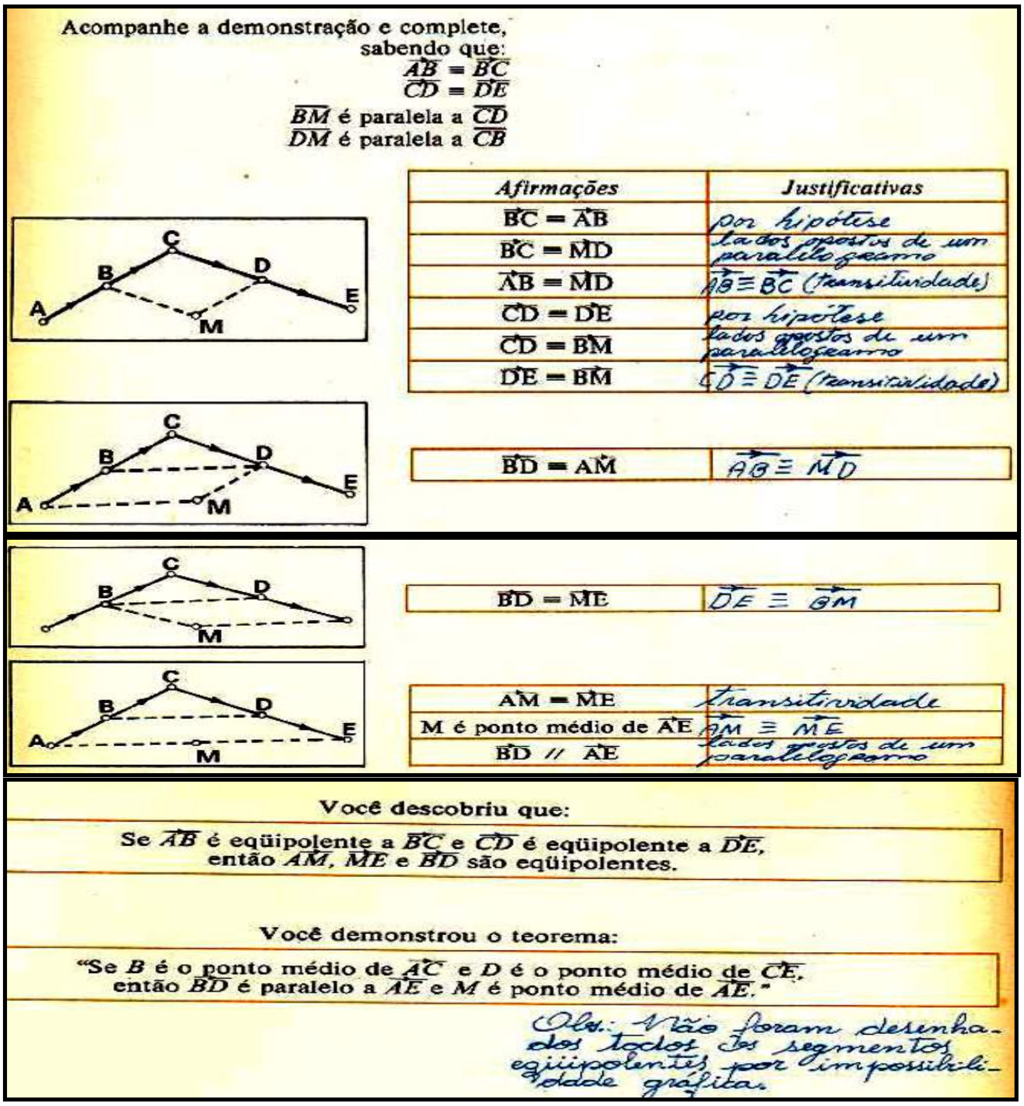
Você provou o teorema:

Se $r \parallel s$ e t intercepta r, então t intercepta s.

Figura 52 – GRUEMA, 7.ª, 1977, p.31.

Essa estratégia também é utilizada por George Papy na coleção *Mathématique Moderne*. Segundo Papy (1964, v.6, p.19), ao decompor uma demonstração em etapas de forma não verbal, propicia-se ao professor a oportunidade de fazer uma intervenção eficaz no desenvolvimento do aprendizado do aluno, ou seja, permite que o professor verifique onde se encontra o erro em uma demonstração, o que não ocorre quando o aluno reproduz mecanicamente uma demonstração que ele encontrou em um livro, uma vez que é difícil para o professor descobrir se o aluno entendeu ou não, pois ele tanto pode ter compreendido, mas ter expressado mal seu pensamento, como pode não ter entendido as noções de base ou, ainda, não ter compreendido o mecanismo lógico.

Na demonstração a seguir, as construções geométricas e as hipóteses são apresentadas. Solicita-se que o aluno complete o quadro com as justificativas das afirmações indicadas. Consideramos que esta maneira de expor a demonstração é uma transição para a abstração, uma vez que o aluno não realiza as construções geométricas, mas tem que compreendê-las para elaborar as justificativas.



Acompanhe a demonstração e complete, sabendo que:

$\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{CD} \equiv \overrightarrow{DE}$

$\overline{BM}$ é paralela a $\overline{CD}$

$\overline{DM}$ é paralela a $\overline{CB}$

Afirmações	Justificativas
$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}$	por hipótese
$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{MD}$	lados opostos de um paralelogramo
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MD}$	$\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{BC}$ (transitividade)
$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DE}$	por hipótese
$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BM}$	lados opostos de um paralelogramo
$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BM}$	$\overrightarrow{CD} \equiv \overrightarrow{DE}$ (transitividade)

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AM}$	$\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{MD}$

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{ME}$	$\overrightarrow{DE} \equiv \overrightarrow{BM}$

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{ME}$	transitividade
M é ponto médio de $\overline{AE}$	$\overrightarrow{AM} \equiv \overrightarrow{ME}$
$\overline{BD}$ // $\overline{AE}$	lados opostos de um paralelogramo

Você descobriu que:

Se $\overrightarrow{AB}$ é eqüipolente a $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{CD}$ é eqüipolente a $\overrightarrow{DE}$, então $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{ME}$ e $\overrightarrow{BD}$ são eqüipolentes.

Você demonstrou o teorema:

"Se B é o ponto médio de $\overline{AC}$ e D é o ponto médio de $\overline{CE}$, então $\overline{BD}$ é paralelo a $\overline{AE}$ e M é ponto médio de $\overline{AE}$."

Obs: Não foram desenhados todos os segmentos eqüipolentes por impossibilidade gráfica.

Figura 53 – GRUEMA, 7.ª, 1977, p.43.

A atividade a seguir, retirada da coleção *Mathématique Moderne* de Papy (v.6, 1964, p.354), e a atividade acima, extraída do livro GRUEMA, tratam de maneira semelhante a demonstração do mesmo teorema. Papy propõe um "filme", a fim de guiar a demonstração, e pede ao aluno que elabore a justificativa na forma algébrica.

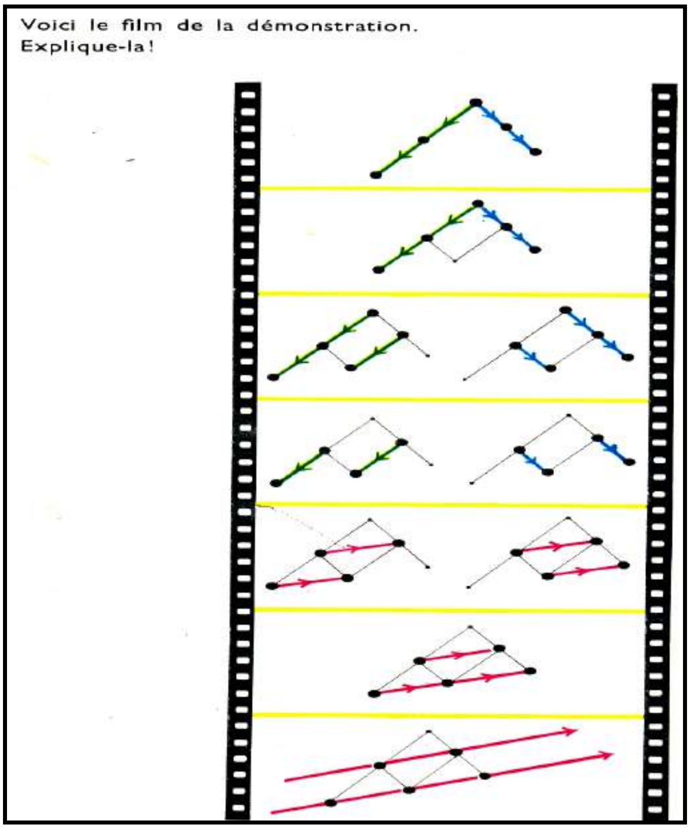


Figura 54 – PAPY,[82] v. 6, 1964, p.354.

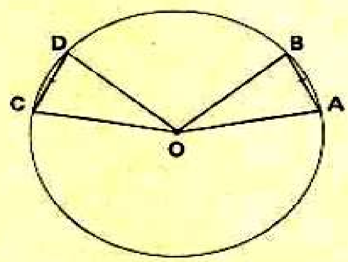
Papy (1964, v.6, p.11-29) nos diz que, para demonstrar um teorema, ele utiliza um "filme", com a decomposição das etapas que devem guiá-la. A primeira cena exprime de forma conveniente e natural a hipótese do teorema a ser demonstrado. Papy emprega as cores, ou seja, a situação fundamental é desenhada em preto e as outras cores exprimem os aspectos ou relações desta situação. A última cena do "filme" deve ser análoga à tese. Papy considera que o uso do "filme" permite mostrar ao aluno que uma demonstração se desenvolve por visões sucessivas, diferentes e eventualmente parciais de uma mesma situação. Depois que o aluno compreende a sequência de cenas que levam da hipótese à tese, ele deve justificar as passagens de uma cena para outra do "filme", verbalmente, o que permite que ele se expresse em uma linguagem espontânea.

No livro do GRUEMA, as construções geométricas apresentadas são análogas à ideia do "filme" proposto por Papy, mas as justificativas não têm a liberdade de expressão proposta por ele, uma vez que as passagens a serem justificadas estão determinadas no quadro.

[82] Eis o filme de uma demonstração. Explique-a!

No livro da 8.ª série aparece pela primeira vez a expressão “Demonstre que”. Na atividade exposta abaixo, são dados o enunciado, com a hipótese, a tese e um desenho esquemático, entretanto o enunciado da atividade não se apresenta da forma clássica de um teorema. Consideramos que nessa atividade se exige um grau maior de abstração e de encadeamento lógico dos conceitos geométricos.

2) Na circunferência ao lado:
$m(\widehat{COD}) = m(\widehat{AOB})$
Demonstre que $\overline{CD} \cong \overline{AB}$



afirmações	justificativas
1) $\widehat{COD} \cong \widehat{AOB}$	por hipótese
2) $\overline{OC} \cong \overline{OA}$	raios de uma mesma circunferência
3) $\overline{OD} \cong \overline{OB}$	raios de uma mesma circunferência
4) $\triangle COD \cong \triangle ADB$	caso LAL
5) $\overline{CD} \cong \overline{AB}$	lados que se opõem a ângulos respectivamente congruentes

Figura 55 – GRUEMA, 8.ª, 1977, p.152.

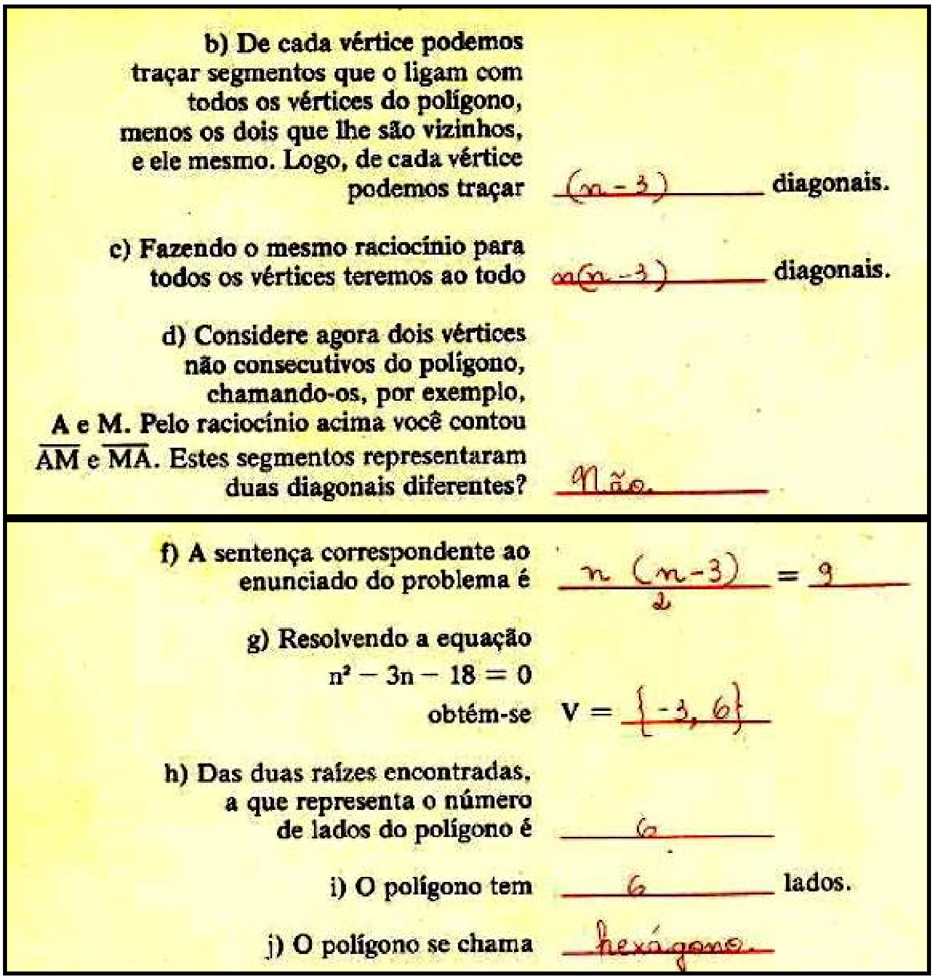
A primeira demonstração sem o suporte do desenho ocorre na 8.ª série, no capítulo *Sistema de Equações e Problemas.* A atividade propõe a generalização da fórmula para encontrar o número de diagonais de um polígono. Essa atividade requer que o aluno já tenha abstraído tanto os conceitos básicos da Álgebra como da Geometria, bem como desenvolvido os mecanismos lógicos para realizar uma demonstração.

9) Um polígono tem 9 diagonais.
Quantos lados tem este polígono?
Qual é seu nome?

Representamos por n o número de lados do polígono.

Complete ou responda:

a) O número de vértices é n



b) De cada vértice podemos traçar segmentos que o ligam com todos os vértices do polígono, menos os dois que lhe são vizinhos, e ele mesmo. Logo, de cada vértice podemos traçar $(n-3)$ diagonais.

c) Fazendo o mesmo raciocínio para todos os vértices teremos ao todo $n(n-3)$ diagonais.

d) Considere agora dois vértices não consecutivos do polígono, chamando-os, por exemplo, A e M. Pelo raciocínio acima você contou $\overline{AM}$ e $\overline{MA}$. Estes segmentos representaram duas diagonais diferentes? Não.

f) A sentença correspondente ao enunciado do problema é $\frac{n(n-3)}{2} = 9$

g) Resolvendo a equação
$n^2 - 3n - 18 = 0$
obtém-se $V = \{-3, 6\}$

h) Das duas raízes encontradas, a que representa o número de lados do polígono é 6

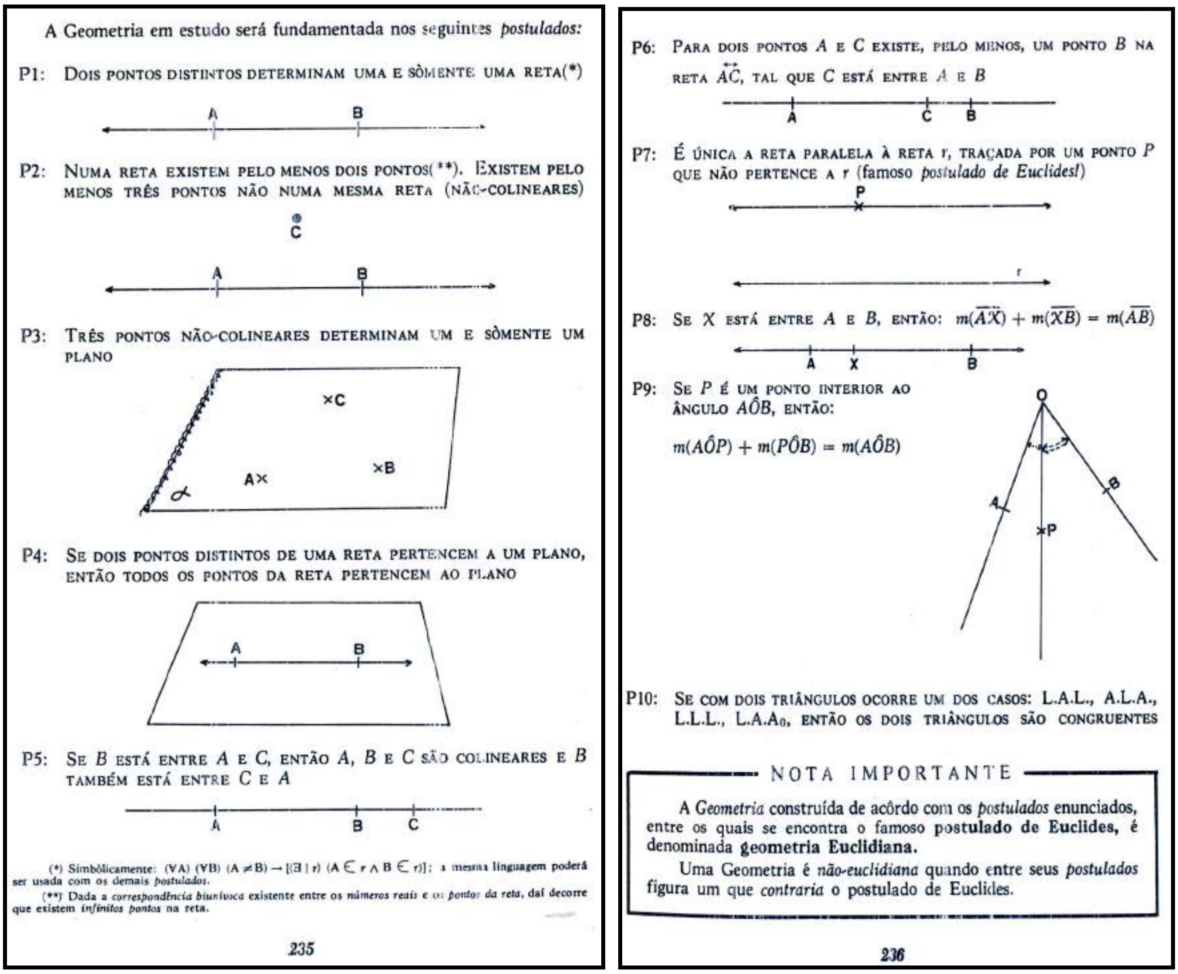
i) O polígono tem 6 lados.

j) O polígono se chama hexágono.

Figura 56 – GRUEMA, 8.ª, 1977, p.78.

A proposta para o ensino da geometria dedutiva do GRUEMA não foi elaborada como a maioria dos livros da época, ou seja, os livros da época apresentam capítulos específicos para o estudo da geometria, seu início se dá ao elencar os axiomas, as definições para, então, demonstrar os teoremas. Como exemplo de um livro didático da época, apresentamos a coleção de Osvaldo Sangiorgi, *Matemática – Curso Moderno*, considerada por Valente (2008) um *best-seller* e que, segundo Villela (2009), foi o campeão de vendas da CEN, com a expressiva vendagem de 4.336.087 exemplares no período de 1964 a 1973.

No livro *Matemática – Curso Moderno* (1969), elaborado para a 7.ª série, Osvaldo Sangiorgi apresenta, conforme a figura a seguir, os dez postulados numerados que darão suporte ao desenvolvimento da geometria dedutiva.



A Geometria em estudo será fundamentada nos seguintes *postulados:*

P1: DOIS PONTOS DISTINTOS DETERMINAM UMA E SÒMENTE UMA RETA(*)

P2: NUMA RETA EXISTEM PELO MENOS DOIS PONTOS(**). EXISTEM PELO MENOS TRÊS PONTOS NÃO NUMA MESMA RETA (NÃO-COLINEARES)

P3: TRÊS PONTOS NÃO-COLINEARES DETERMINAM UM E SÒMENTE UM PLANO

P4: SE DOIS PONTOS DISTINTOS DE UMA RETA PERTENCEM A UM PLANO, ENTÃO TODOS OS PONTOS DA RETA PERTENCEM AO PLANO

P5: SE B ESTÁ ENTRE A E C, ENTÃO A, B E C SÃO COLINEARES E B TAMBÉM ESTÁ ENTRE C E A

(*) Simbòlicamente: $(\forall A)\ (\forall B)\ (A \neq B) \rightarrow [(\exists\,|\, r)\ (A \in r \wedge B \in r)]$; a mesma linguagem poderá ser usada com os demais *postulados*.

(**) Dada a *correspondência biunívoca* existente entre os *números reais* e os *pontos da reta*, daí decorre que existem *infinitos pontos* na reta.

235

P6: PARA DOIS PONTOS A E C EXISTE, PELO MENOS, UM PONTO B NA RETA $\overleftrightarrow{AC}$, TAL QUE C ESTÁ ENTRE A E B

P7: É ÚNICA A RETA PARALELA À RETA r, TRAÇADA POR UM PONTO P QUE NÃO PERTENCE A r (famoso *postulado de Euclides!*)

P8: SE X ESTÁ ENTRE A E B, ENTÃO: $m(\overline{AX}) + m(\overline{XB}) = m(\overline{AB})$

P9: SE P É UM PONTO INTERIOR AO ÂNGULO $A\hat{O}B$, ENTÃO:

$m(A\hat{O}P) + m(P\hat{O}B) = m(A\hat{O}B)$

P10: SE COM DOIS TRIÂNGULOS OCORRE UM DOS CASOS: L.A.L., A.L.A., L.L.L., L.A.A$_0$, ENTÃO OS DOIS TRIÂNGULOS SÃO CONGRUENTES

NOTA IMPORTANTE

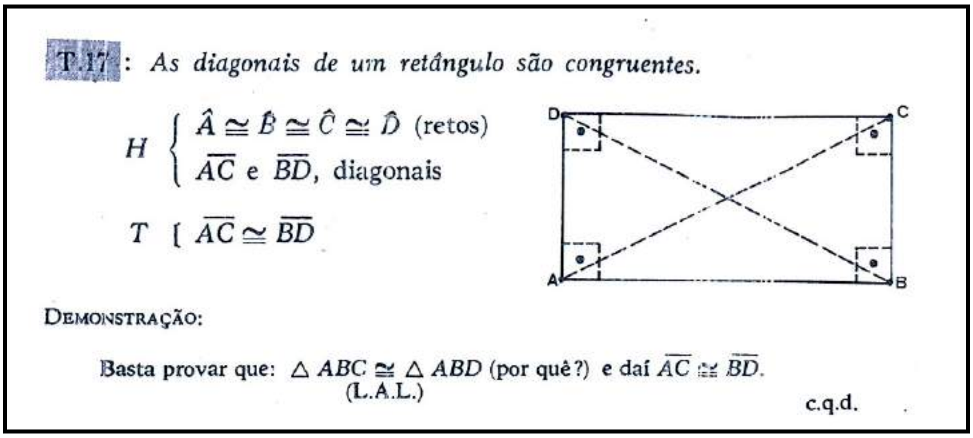
A *Geometria* construída de acôrdo com os *postulados* enunciados, entre os quais se encontra o famoso **postulado de Euclides**, é denominada **geometria Euclidiana.**

Uma Geometria é *não-euclidiana* quando entre seus *postulados* figura um que *contraria* o postulado de Euclides.

236

Figura 57 – Matemática – Curso Moderno, 7.ª, 1971, p.235-236.

Nesse livro os teoremas a serem demonstrados seguem uma numeração. A demonstração, por exemplo, do Teorema 17 – *As diagonais de um retângulo são congruentes*. Destacam-se a hipótese e a tese, e em seguida é apresentada a demonstração.



T 17 : *As diagonais de um retângulo são congruentes.*

$H \begin{cases} \hat{A} \cong \hat{B} \cong \hat{C} \cong \hat{D} \text{ (retos)} \\ \overline{AC} \text{ e } \overline{BD}\text{, diagonais} \end{cases}$

$T\ [\ \overline{AC} \cong \overline{BD}$

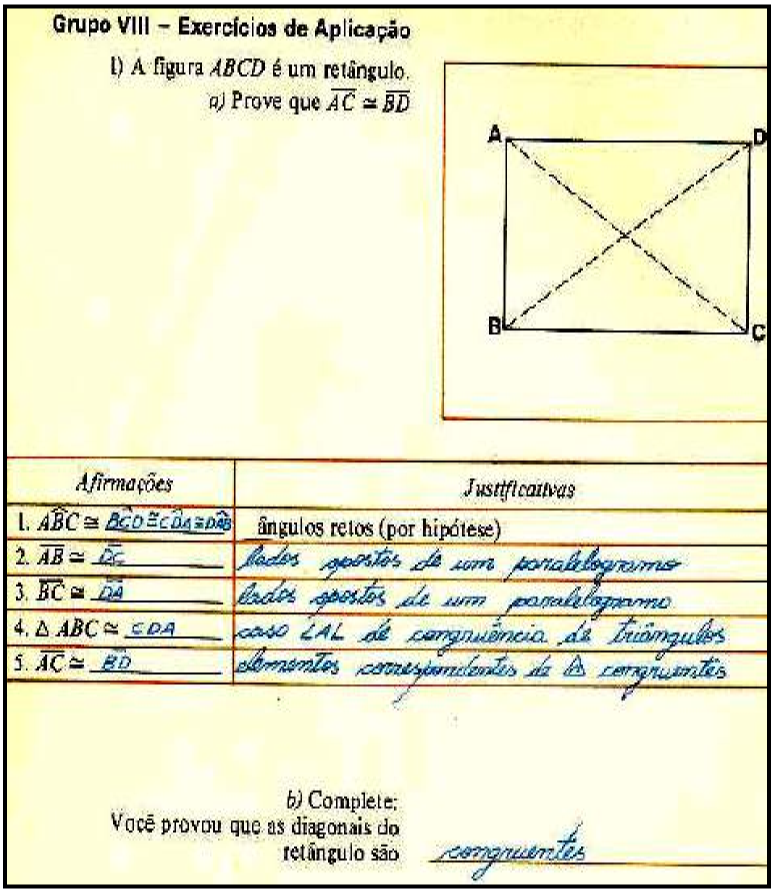
DEMONSTRAÇÃO:

Basta provar que: $\triangle ABC \cong \triangle ABD$ (por quê?) e daí $\overline{AC} \cong \overline{BD}$.
(L.A.L.)

c.q.d.

Figura 58 – Matemática – Curso Moderno, 7.ª, 1971, p.263.

Entretanto, no livro do GRUEMA os axiomas não foram explicitados, e a demonstração do mesmo teorema acima ocorre de maneira diversa, ou seja, não são destacadas nem a hipótese nem a tese, e a demonstração é realizada pelo aluno ao completar o quadro utilizando o encadeamento lógico das afirmações e das justificativas, para enfim concluir o enunciado do teorema.


Grupo VIII – Exercícios de Aplicação

1) A figura *ABCD* é um retângulo.

a) Prove que $\overline{AC} \cong \overline{BD}$

Afirmações	*Justificativas*
1. $\hat{ABC} \cong \hat{BCD} \cong \hat{CDA} \cong \hat{DAB}$	ângulos retos (por hipótese)
2. $\overline{AB} \cong \overline{DC}$	lados opostos de um paralelogramo
3. $\overline{BC} \cong \overline{DA}$	lados opostos de um paralelogramo
4. $\triangle ABC \cong \triangle CDA$	caso LAL de congruência de triângulos
5. $\overline{AC} \cong \overline{BD}$	elementos correspondentes de △ congruentes

b) Complete:
Você provou que as diagonais do retângulo são congruentes

Figura 59 – GRUEMA, 7.ª, 1977, p.206.

Consideramos que, ao utilizar as construções geométricas e o questionamento ao aluno, a fim de que ele estabeleça um encadeamento lógico de afirmações, as autoras se apropriaram, no sentido dado por Chartier (1990), das ideias defendidas por Choquet (1961), Dieudonné (1961), Fehr (1966) e Piaget (1961), para elaborarem a proposta para o ensino da geometria apresentada nos livros do GRUEMA. Os livros abordam a geometria intuitiva e experimental ao longo das séries finais do 1.º grau, e a geometria dedutiva não foi exposta da forma clássica – axiomas, definições, teorema e demonstração –, mas de maneira inovadora, ou seja, demonstra-se ou prova-se primeiro para concluir o teorema, rompendo assim com a vulgata existente na época.

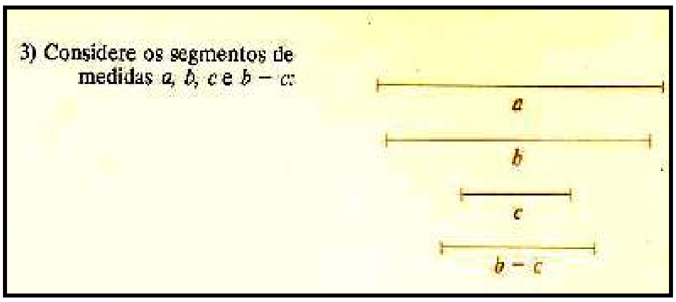
As demonstrações visam o desenvolvimento do raciocínio lógico dedutivo e propiciam ao aluno abstrair os conceitos geométricos de maneira gradual ao associar a geometria dedutiva à geometria experimental condizentes com o desenvolvimento do pensamento do pré-adolescente, preconizado por Piaget. Portanto, essa proposta está em consonância com os Guias Curriculares de São Paulo, que destacam:

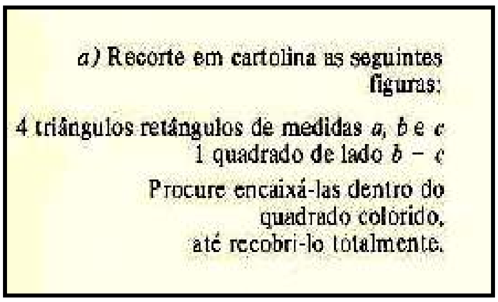
> Achamos que um tratamento axiomático não seria aconselhável, pelo menos no ensino de 1.º grau. Isto não significa, entretanto, um abandono do rigor que caracteriza o raciocínio matemático. Esse rigor deve estar presente em todo o desenvolvimento do programa. Parece-nos, apenas, que devemos procurar obter os conceitos com base na ação do aluno, na manipulação de instrumentos e materiais didáticos adequados, em situações tão próximas do concreto e da experiência do aluno, quanto seja possível. A passagem ao abstrato deve ser feita gradativa e cuidadosamente, etapa por etapa, atendendo ao nível de amadurecimento do aluno, o importante é destacar em uma situação examinada, tudo que há de matemático na mesma, chamar a atenção para o que é aceito como válido e para os resultados que podem ser obtidos a partir do que foi admitido (SEE.SP, 1975, Introdução).

Constatamos, também, que as autoras se apropriaram das propostas metodológicas apresentadas nos livros de Felix (1964), Papy (1964), ao proporem o ensino da geometria baseado na participação do aluno na construção e abstração dos conceitos geométricos de forma gradual ao longo das séries.

Na sequência, mostraremos quais conteúdos geométricos foram contemplados nos livros do GRUEMA. Geralmente, quando queremos saber se um determinado assunto é abordado em um livro, recorremos ao sumário. Assim, começamos nossa análise dos conteúdos pelo sumário dos livros da 5.ª a 8.ª séries (Anexo 2).

Observamos que os sumários dos livros da coleção GRUEMA são sucintos, explicitando somente o conteúdo principal, porém outros conteúdos são trabalhos. O exemplo que destacamos a seguir apresenta o estudo do Teorema de Pitágoras, no livro da 7.ª série, de forma experimental no capítulo *Cálculo Literal*. A atividade propõe que o aluno recorte quatro triângulos com as medidas ***a, b*** e ***c*** dadas e um quadrado de lado ***b - c***. Deve-se, então, recobrir o quadrado de lado ***a*** dado e em seguida calcular as áreas dos triângulos e dos quadrados, e concluir o Teorema de Pitágoras.




a) Recorte em cartolina as seguintes figuras:

4 triângulos retângulos de medidas a, b e c
1 quadrado de lado $b-c$
Procure encaixá-las dentro do quadrado colorido, até recobri-lo totalmente.

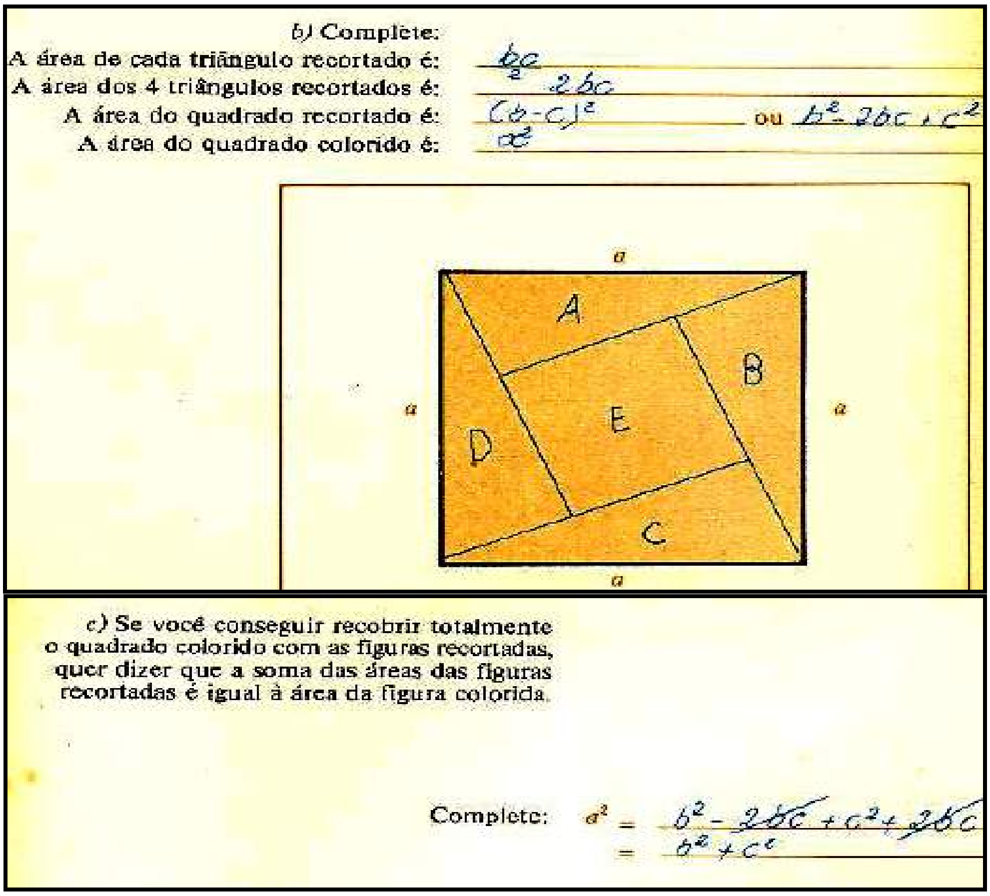


Figura 60 – GRUEMA, 7.ª, 1977, p.96-97.

No livro da 8.ª série, o Teorema de Pitágoras também é trabalhado no capítulo *Técnicas Operatórias em* $\mathfrak{R}$. Nessa atividade, o aluno deve medir os lados do triângulo retângulo e verificar a veracidade das sentenças apresentadas.

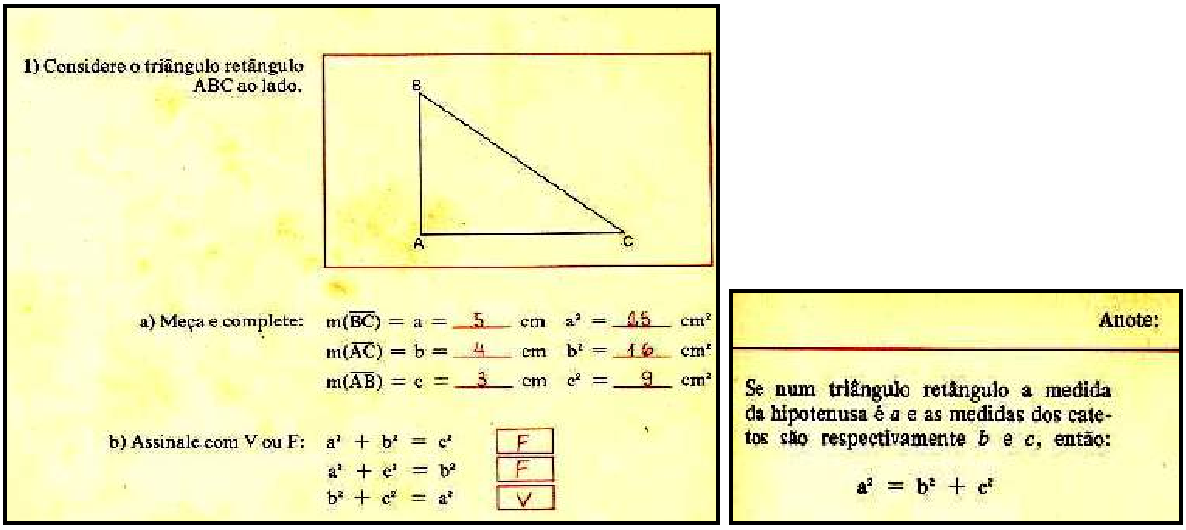


Figura 61 – GRUEMA, 8.ª, 1977, p.1-2.

Os exercícios para o cálculo da medida de um dos lados do triângulo retângulo, aplicação do Teorema de Pitágoras, são expostos no capítulo *Sistema de*

Equações e Problemas, como no exemplo a seguir, em que para determinar tal medida recorre-se a uma equação de 2.º grau incompleta.

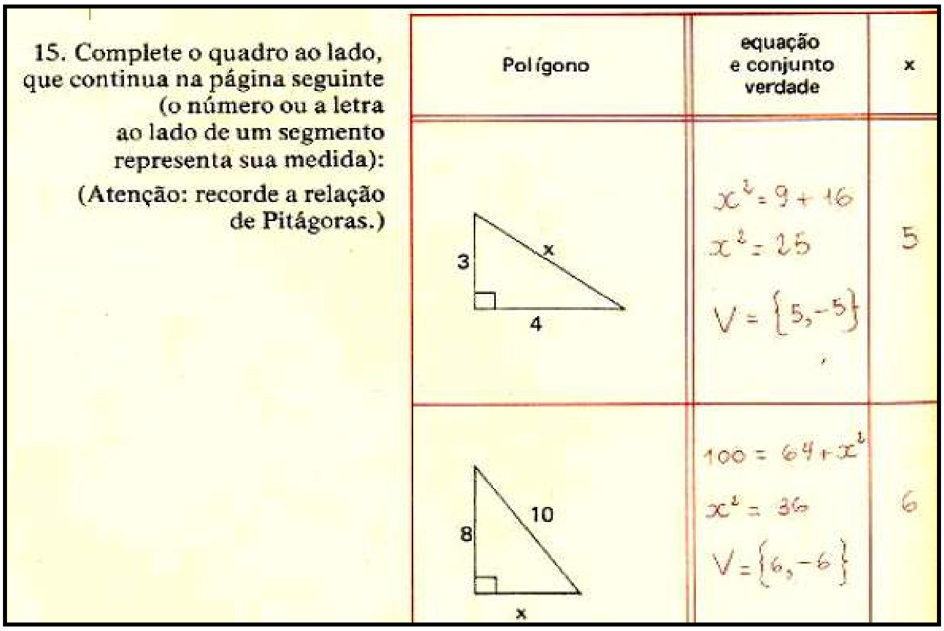


Figura 62 – GRUEMA, 8.ª, 1977, p.80.

Entretanto, o estudo do Teorema de Pitágoras não consta nos sumários, mas seu estudo se deu ao longo da 7.ª e da 8.ª série, interligado aos conceitos algébricos e à ampliação do campo numérico.

Outro exemplo que podemos destacar é o estudo das transformações geométricas. Pelo sumário dos livros da 5.ª a 8.ª séries observamos que a Simetria é apresentada na 7.ª série e a Homotetia, na 8.ª série. No entanto, como já dissemos, no livro da 5.ª série (1977) as primeiras noções das transformações geométricas, simetria, rotação e ampliação, estão contidas no capítulo *Relações*, e a translação é estudada na 7.ª série no capítulo *Paralelismo e Direção*, mas não há menção nos sumários dos livros.

Ainda poderíamos citar vários outros exemplos para reiterar que o sumário não contempla todas as informações sobre os conteúdos abordados na coleção GRUEMA. A proposta para o ensino da geometria não foi elaborada de forma compartimentalizada, ou seja, em capítulos específicos, mas a partir dos diversos entrelaçamentos possíveis entre a Aritmética, Álgebra e a Geometria, contemplando, assim, uma das propostas para a reforma do ensino da matemática feita por Felix Klein[83] no início do século XX.

[83] Felix Klein (1849-1925), matemático alemão, eminente geômetra, desenvolveu um programa matemático na Alemanha a fim de valorizar a geometria e suas aplicações, em sua aula inaugural em

Se considerarmos, novamente, o livro *Matemática – Curso Moderno* (1971), de Osvaldo Sangiorgi, da 7.ª série, poderemos verificar pelo sumário (Anexo 6), que os conteúdos geométricos estão concentrados nos capítulos 3 e 4, e cada tópico abordado no decorrer dos capítulos é elencado no sumário. Portanto, podemos afirmar que o desenvolvimento dos conteúdos geométricos nos livros do GRUEMA tem características inovadoras, uma vez que não segue a maneira usual dos livros didáticos da época.

Diante do exposto, tomaremos como eixo norteador para analisarmos os conteúdos geométricos apresentados nos livros do GRUEMA a proposta de Jean Piaget. O autor, como já mencionamos, considerava que a ordem genética do desenvolvimento do pensamento geométrico na criança é inversa à do desenvolvimento histórico da Geometria, assim o ensino da geometria deveria ocorrer primeiro com as noções topológicas, depois com as noções da Geometria Afim e, finalmente, com a Geometria Euclidiana.[84]

1872, quando se tornou professor na Universidade de Erlangen. Para saber mais, consulte *Introdução à história da matemática,* de H. Eves.

[84] Euclides desenvolveu uma axiomática com base nas noções comuns:
A-1: Coisas iguais à mesma coisa são iguais entre si;
A-2: Adicionando-se iguais a iguais, as somas são iguais;
A-3: Subtraindo-se iguais de iguais, as diferenças são iguais;
A-4: Coisas que coincidem uma com a outra são iguais entre si;
A-5: O todo é maior do que a parte.
Com base nestas noções familiares a todos, Euclides formulou estes cinco postulados:
P-1: É possível traçar uma linha reta de um ponto qualquer a outro ponto qualquer;
P-2: É possível prolongar uma reta finita indefinidamente em linha reta;
P-3: É possível descrever um círculo com qualquer centro e qualquer raio;
P-4: Todos os ângulos retos são iguais entre si:
P-5: Se uma reta intercepta duas retas formando ângulos interiores de um mesmo lado menores do que dois retos, prolongando-se essas duas retas indefinidamente elas se encontrarão no lado em que os dois ângulos são menores do que dois ângulos retos.
A geometria para a qual são satisfeitos os cinco postulados é conhecida como geometria euclidiana, e a geometria afim somente o 1.º, 2.º e o 5.º postulados são relevantes.
Pode-se dizer, por um lado, que a geometria afim está contida na geometria euclidiana, uma vez que as proposições afins constituem um subconjunto das proposições da geometria euclidiana. Por outro lado, podemos dizer que a geometria afim é mais abrangente e menos restritiva do que a geometria euclidiana, pois ela se ocupa só com as relações de paralelismo das figuras geométricas, não se preocupando com os ângulos, distâncias e circunferências. Podemos ainda dizer que a geometria euclidiana se ocupa das medidas das figuras geométricas, enquanto a geometria afim se ocupa das relações entre segmentos paralelos.
As translações e as homotetias preservam o paralelismo. Nas translações os vértices dos segmentos paralelos estão sobre retas paralelas e nas homotetias elas estão sobre retas concorrentes. Portanto, elas são também transformações afins. Na geometria afim só faz sentido computar as relações de distâncias numa mesma direção, numa linha ou num feixe de retas paralelas. Ela não prova mecanismos diretos para comparar as distâncias nas direções distintas, uma vez que não há nenhuma imposição sobre a relação entre elas (WU, 2005).

Quando, anteriormente, examinamos os livros experimentais, já discutimos o ensino das noções topológicas no livro da 5.ª série experimental (1972). Passaremos, então, a analisar os livros do GRUEMA quanto ao ensino da Geometria Afim.

Segundo Dienes (1975), as primeiras noções geométricas observadas pelas crianças, ainda bebês, são as noções topológicas, como já referimos. Um pouco maiores, as crianças passam a observar a sua sombra e a dos objetos e verificam que a sua sombra muda conforme as horas do dia. As relações que podem ser estabelecidas entre os objetos e a sua sombra projetada pelos raios solares são as noções da Geometria Afim. Somente mais tarde a criança se preocupará com as medidas, as distâncias e os ângulos; estes, sim, noções da geometria euclidiana.

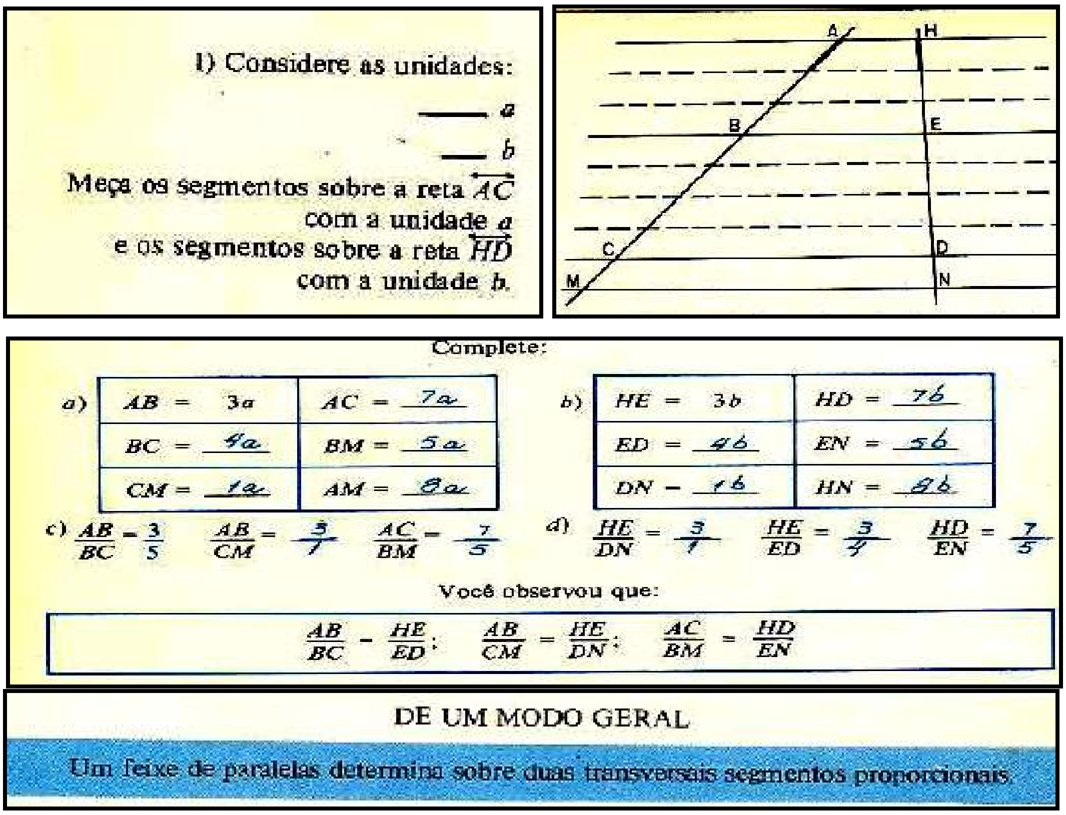
Assim, a criança progressivamente constrói os conceitos geométricos com base em elementos acrescentados em sua observação, ou seja, sua sombra em relação às horas do dia, a distância entre objetos, ou suas medidas. Dienes (1975) assevera:

> Quanto maior número de coisas nos permitirmos na transformação de nossa figura, menos relações verdadeiras teremos, enquanto que, se nos permitimos poucas coisas, mais relações verdadeira teremos. É por isso que a Geometria Euclidiana é a mais rica de todas as geometrias, enquanto as relações topológicas são as mais gerais. Tudo o que é verdadeiro em Topologia, é verdadeiro também em Geometria Projetiva, Afim e Euclidiana e tudo o que é verdadeiro em geometria Afim, é verdadeiro em Geometria Euclidiana. Entretanto, o que é verdadeiro na Geometria Euclidiana não é necessariamente verdadeiro nas outras geometrias. Pode sê-lo ou não (DIENES, 1975, p.5-9).

A Geometria Projetiva estuda os invariantes entre a figura e a sua sombra projetada em um plano, ao se considerar que a sombra é o resultado da projeção de uma figura quando sobre esta incide uma fonte luminosa puntiforme. Os invariantes entre a figura e a sua sombra são, além dos invariantes topológicos, as retas, as intersecções e a ordem.

A Geometria Afim é um caso particular da Geometria Projetiva, em que a fonte puntiforme está tão longe que seus raios, ao incidirem sobre uma figura, são paralelos; assim, as sombras de uma figura projetada em um plano mantêm todas as invariantes acima e, ainda, as retas paralelas se mantêm paralelas na sombra projetada, e os segmentos de uma figura e a sombra desses segmentos projetados respeitam uma razão. Portanto, os conceitos essenciais da Geometria Afim são o paralelismo e a proporcionalidade entre os segmentos e têm como teorema fundamental o Teorema de Tales.

No livro da 6.ª série, no capítulo *Aplicando Razões e Proporções à Geometria,* é apresentado o Teorema de Tales de forma intuitiva. Na atividade a seguir, pede-se que, a partir de dois segmentos dados considerados como unidades, o aluno realize a medição dos segmentos solicitados e verifique que os segmentos são proporcionais.



1) Considere as unidades:

—— a

—— b

Meça os segmentos sobre a reta $\overleftrightarrow{AC}$ com a unidade a e os segmentos sobre a reta $\overleftrightarrow{HD}$ com a unidade b.

Complete:

a)

$AB = 3a$	$AC = 7a$
$BC = 4a$	$BM = 5a$
$CM = 1a$	$AM = 8a$

b)

$HE = 3b$	$HD = 7b$
$ED = 4b$	$EN = 5b$
$DN = 1b$	$HN = 8b$

c) $\frac{AB}{BC} = \frac{3}{5}$ $\frac{AB}{CM} = \frac{3}{1}$ $\frac{AC}{BM} = \frac{7}{5}$

d) $\frac{HE}{DN} = \frac{3}{1}$ $\frac{HE}{ED} = \frac{3}{4}$ $\frac{HD}{EN} = \frac{7}{5}$

Você observou que:

$\frac{AB}{BC} = \frac{HE}{ED}$; $\frac{AB}{CM} = \frac{HE}{DN}$; $\frac{AC}{BM} = \frac{HD}{EN}$

DE UM MODO GERAL

Um feixe de paralelas determina sobre duas transversais segmentos proporcionais.

Figura 63 – GRUEMA, 6.ª, 1977, p.222.

No livro da 7.ª série, no capítulo *Paralelismo e Direção,* são apresentadas as relações existentes entre os segmentos paralelos e os paralelogramos, como na atividade a seguir, em que: dado o segmento orientado $\vec{AB}\,e\,\vec{CD}$, se for possível fazer com que o segmento $\vec{AB}$ coincida com o segmento $\vec{CD}$, o caminho percorrido por **A** e **B** para "chegar" em **C** e **D**, respectivamente, determina os segmentos $\vec{AC}\,e\,\vec{BD}$. Se os segmentos $\vec{AB};\vec{CD};\vec{AC};\vec{BD}$ formarem um paralelogramo, então $\vec{AB}$ é equipolente[85] a $\vec{CD}$.

[85] Um segmento orientado é equipolente em relação a outro quando podemos fazê-los coincidir por movimento de translação.

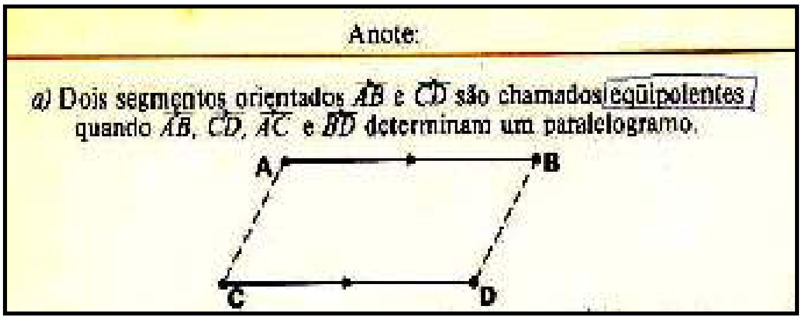


Figura 64 – GRUEMA, 7.ª, 1977, p.39.

Segundo Papy, em seu livro *Mathématique Moderne* (1966, p.23), o autor considera que com as noções de paralelismo é fácil compreender que um paralelogramo é formado pela ligação de dois pares de pontos por meio de retas paralelas.

Em seguida, as autoras apresentam como é possível fazer uma sequência de cinco segmentos, em que a origem de cada segmento é a extremidade do segmento anterior, utilizando as projeções para construir paralelogramos.

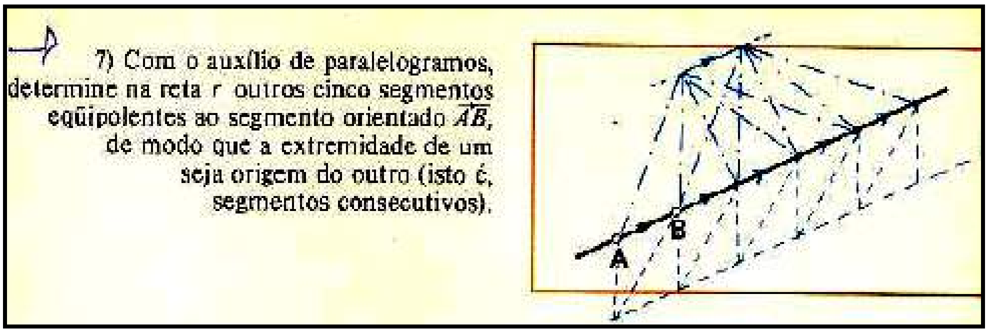


Figura 65 – GRUEMA, 7.ª, 1977, p.42.

Na atividade a seguir, ressalta-se que as projeções paralelas a uma reta de segmentos equipolentes são equipolentes, ou seja, dada uma reta com segmentos consecutivos "iguais" entre si, ao serem projetados em uma outra reta, os segmentos projetados permanecerão consecutivos e "iguais" entre si.

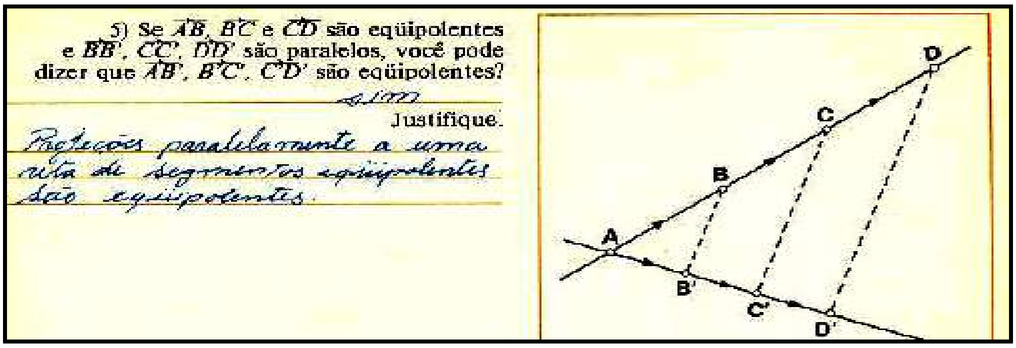


Figura 66 – GRUEMA, 7.ª, 1977, p.51.

No capítulo *Números Reais* o processo de divisão de um segmento em partes iguais é utilizado para a construção dos Números Reais. Na atividade abaixo é apresentada uma reta dividida em dois segmentos iguais e numerados, e a partir das projeções mostra-se como é possível subdividir cada segmento em dez partes iguais.

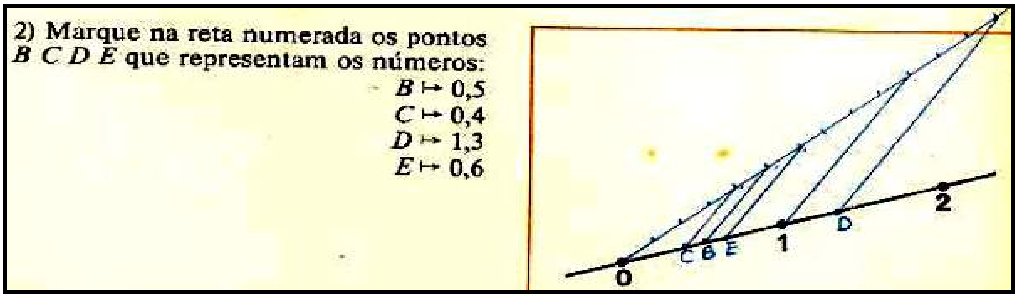


Figura 67 – GRUEMA, 7.ª, 1977, p.64.

Podemos, então, achar a correspondência numérica entre a reta numerada e a sua projeção. Na atividade a seguir é apresentada uma reta graduada **s** e pede-se que sejam projetados paralelamente os pontos da reta **s** na reta **t**, que tem uma outra graduação. Verifica-se a relação entre os pontos da reta **s** e os pontos projetados na reta **t,** ou seja, a partir das abscissas dos pontos na reta graduada **s**, podem-se projetar paralelamente estes pontos para a reta **t** com uma outra graduação, assim encontramos a abscissa destes pontos nessa reta graduada. Verifica-se que as distâncias da origem ao ponto na reta **s** mantêm uma proporcionalidade com a origem e o ponto projetados na reta **t**.

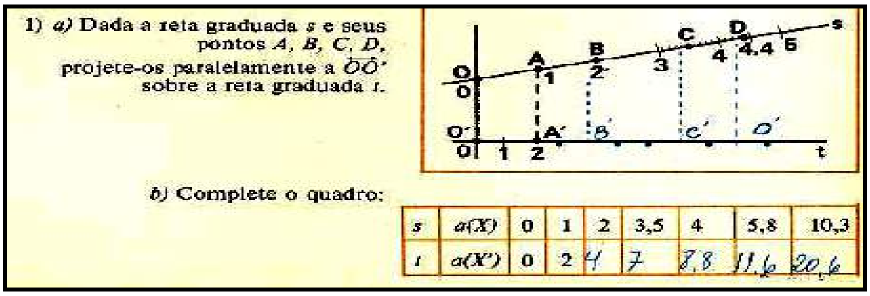


Figura 68 – GRUEMA, 7.ª 1977, p.76.

Na atividade a seguir, é apresentada uma reta graduada **s**, e devem-se projetar os pontos na reta dada **t**, verificando-se que as projeções encontradas são o conjunto imagem da função f(x) = 3x.

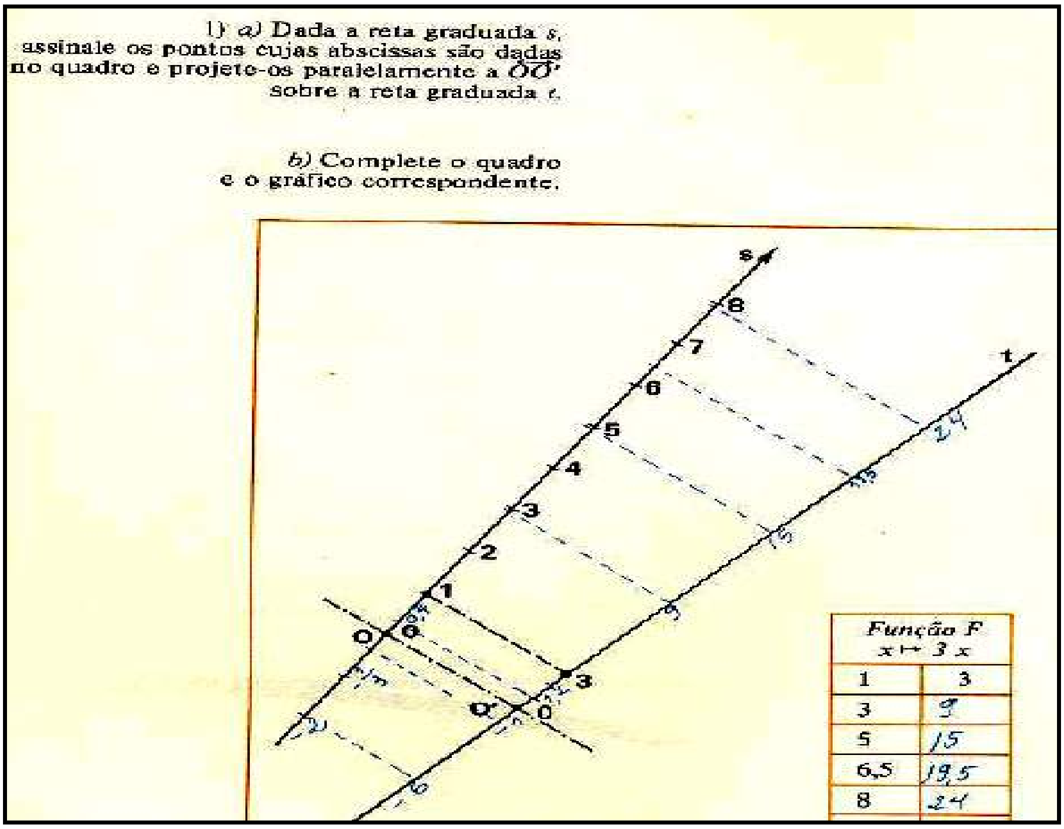


Figura 69 – GRUEMA, 7.ª, 1977, p.80.

O estudo da Geometria Afim tem continuidade no livro da 8.ª série em que é retomada a noção de segmentos equipolentes e se conclui com a relação de Tales, teorema fundamental da Geometria Afim.

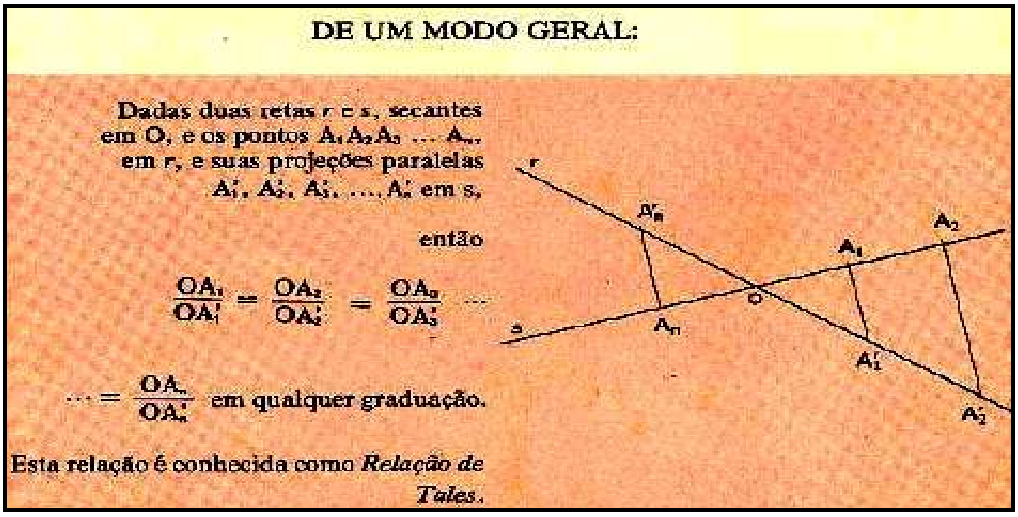


Figura 70 – GRUEMA, 8.ª, 1977, p.91.

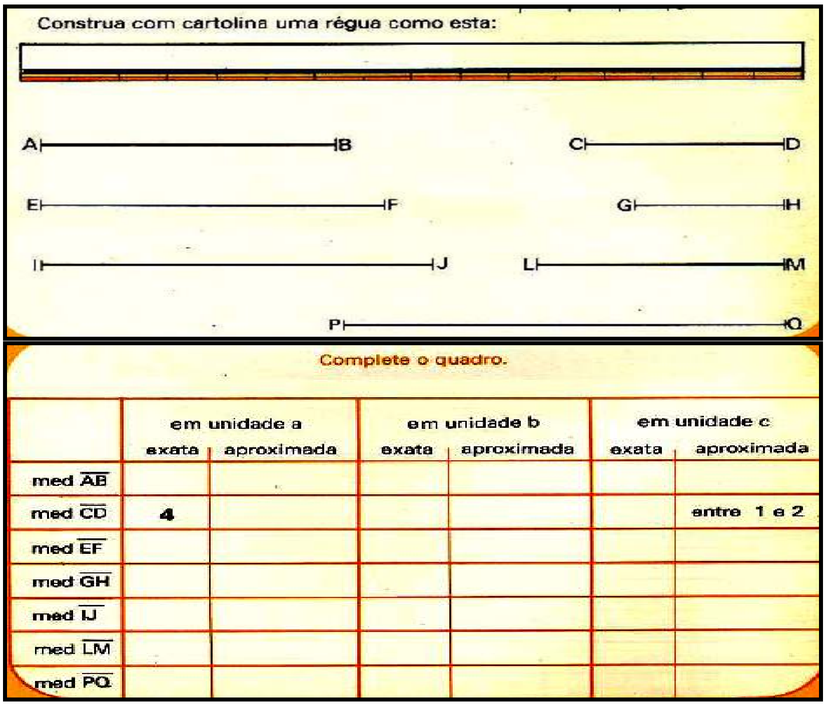
Consideramos que o estudo das noções da Geometria Afim foram apresentadas para justificar que os segmentos de uma reta graduada e os segmentos projetados paralelamente em uma outra reta com uma outra graduação mantêm a ordem e a proporcionalidade.

Podemos apontar, ainda, que no desenvolvimento das noções da Geometria Afim vários conteúdos matemáticos são estudados sem que sejam mencionadas no sumário dos livros a representação gráfica da imagem de uma função a partir das projeções paralelas, a representação gráfica da soma de números irracionais, entre outros.

A proposta para o ensino da geometria dos livros do GRUEMA, ao apresentarem as noções da Geometria Afim, demonstra seu caráter inovador se a compararmos com a proposta contida no livro *Matemática – Curso Moderno* (1969), da 7.ª série, de Osvaldo Sangiorgi, o qual não aborda as noções da Geometria Afim, como podemos observar no sumário.

Finalmente, Dienes e Piaget recomendam o estudo das noções da Geometria Euclidiana. Esta mantém todas as invariantes já citadas e, ainda, acrescenta os invariantes entre as medidas de segmentos e entre as medidas dos ângulos, ou seja, a Geometria Euclidiana estuda as propriedades das figuras que se mantêm invariantes em um deslocamento no espaço ao conservarem as medidas dos segmentos e as medidas dos ângulos das figuras.

As primeiras atividades que envolvem o conceito de medida de segmento foram apresentadas na 3.ª série. O exemplo abaixo propõe a construção de uma régua para medir segmentos e, em seguida, completar o quadro com as medidas encontradas.


Construa com cartolina uma régua como esta:

Complete o quadro.

	em unidade a		em unidade b		em unidade c	
	exata	aproximada	exata	aproximada	exata	aproximada
med $\overline{AB}$						
med $\overline{CD}$	4					entre 1 e 2
med $\overline{EF}$						
med $\overline{GH}$						
med $\overline{IJ}$						
med $\overline{LM}$						
med $\overline{PQ}$						

Figura 71 – GRUEMA, 3.ª, 1975, p.148.

No livro da 5.ª série experimental (1972), no capítulo *Temas de Recordação,* tem continuidade o estudo do conceito de medidas tanto de segmentos como de ângulos. Na atividade a seguir pede-se que o aluno utilize uma régua para encontrar a medida da distância entre dois pontos e o transferidor para achar a medida dos ângulos.

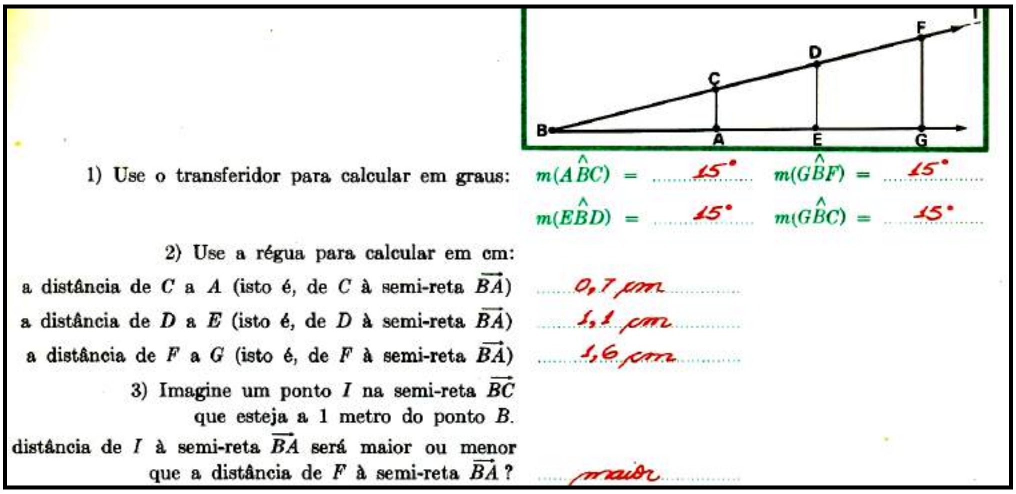


Figura 72 – GRUEMA, 5.ª experimental, 1972, p.27.

Apesar de o capítulo *Temas de Recordação* ter sido retirado do livro da 5.ª série (1977), a noção de medida de segmento é trabalhada no capítulo *Sistema de Medida*. Na atividade a seguir, observamos que a noção de medida foi apresentada da mesma forma que no livro da 3.ª série em que se propõe a construção de uma régua graduada para medir segmentos.

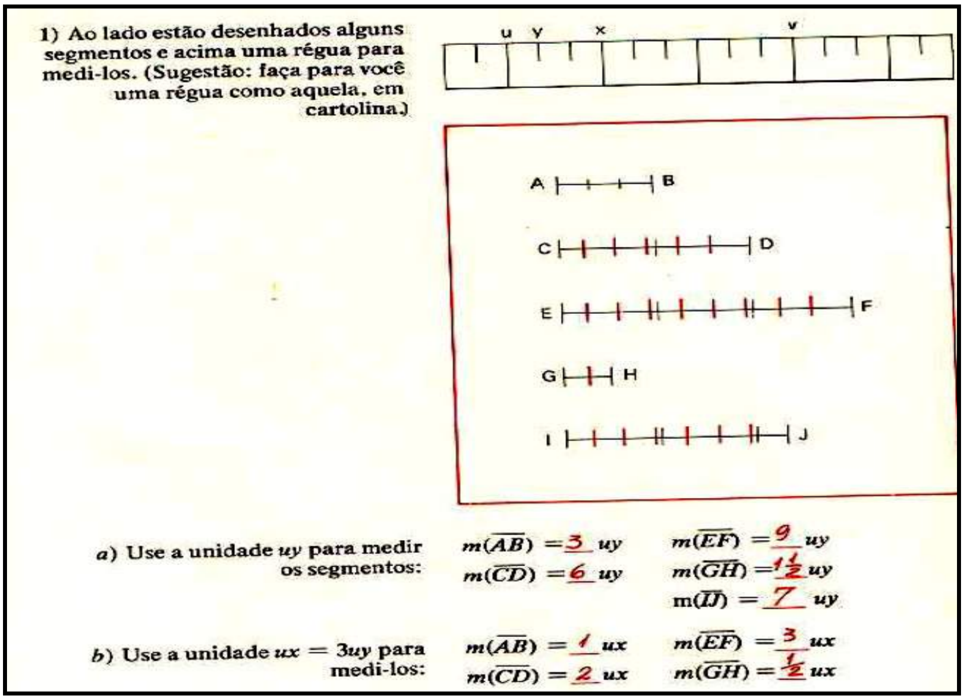


Figura 73 – GRUEMA, 5.ª, 1977, p.142.

A noção de medida de ângulo foi abordada tanto no livro da 5.ª série experimental (1972), no capítulo *Temas de Recordação*, como no livro da 5.ª série (1977), no capítulo *Outros Sistemas de Numeração,* quando as autoras trabalham a base 60; as atividades apresentadas são as mesmas nos dois livros, como podemos observar na figura abaixo.

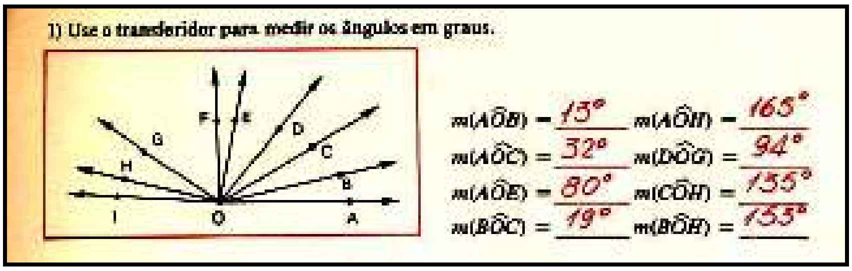


Figura 74 – GRUEMA, 5.ª, 1972, p.26 – GRUEMA, 5.ª, 1977, p.93.

Na 7.ª série as autoras retomam o estudo da medida, quando associam a cada número real um ponto na reta e a cada ponto da reta um número real. No exemplo a seguir, são expostas duas graduações de régua, uma vez que se pode escolher a régua conforme se queira, desde que se mantenha a escolha até o término da atividade.

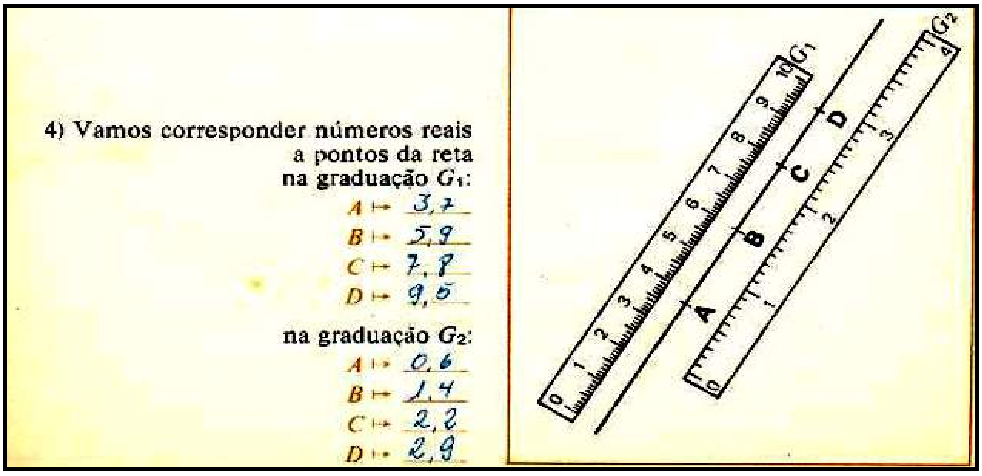
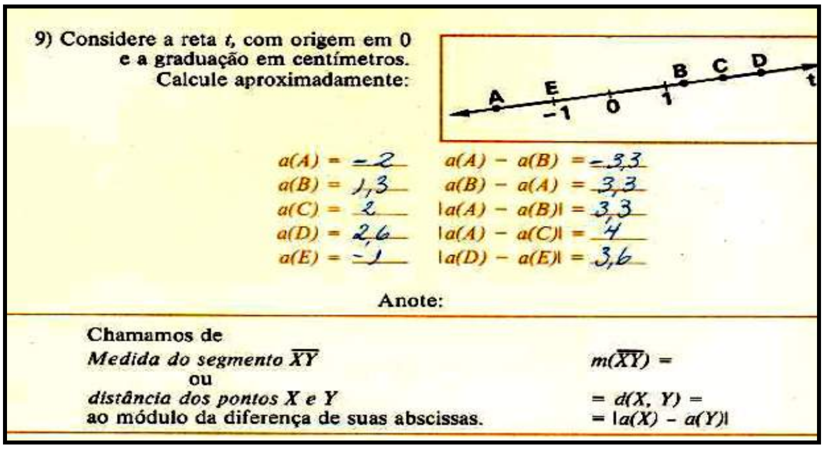


Figura 75 – GRUEMA, 7.ª, 1977, p.65.

O número correspondente a um ponto dado é a coordenada deste ponto, neste caso, a abscissa do ponto; temos, assim, um sistema de coordenadas. A partir da determinação da abscissa de um ponto dado, pode-se calcular a distância entre este ponto e a origem da reta graduada considerada e esta distância também será um número real. Na atividade abaixo, pede-se que se calcule a distância entre um ponto e a origem, em seguida que se calcule a distância entre dois pontos que é dada como o módulo da diferença entre as abscissas dos pontos considerados.



9) Considere a reta t, com origem em 0 e a graduação em centímetros. Calcule aproximadamente:

$a(A) = -2$	$a(A) - a(B) = -3{,}3$
$a(B) = 1{,}3$	$a(B) - a(A) = 3{,}3$
$a(C) = 2$	$\lvert a(A) - a(B)\rvert = 3{,}3$
$a(D) = 2{,}6$	$\lvert a(A) - a(C)\rvert = 4$
$a(E) = -1$	$\lvert a(D) - a(E)\rvert = 3{,}6$

Anote:

Chamamos de *Medida do segmento* $\overline{XY}$ ou *distância dos pontos X e Y* ao módulo da diferença de suas abscissas.

$m(\overline{XY}) = \; = d(X, Y) = \; = \lvert a(X) - a(Y)\rvert$

Figura 76 – GRUEMA, 7.ª, 1977, p.76.

Pelo que demonstramos, a retirada do capítulo *Temas de Recordação* do livro da 5.ª série (1977) resultou na ausência do estudo das noções topológicas, nas séries finais. Entretanto, tal retirada não comprometeu a continuidade do estudo das noções de medida de segmento e ângulos iniciado na 3.ª série, o que consideramos um indício de que a proposta para o ensino da geometria nos livros do GRUEMA tem como eixo central a noção de medida, ou seja, a Geometria Euclidiana.

Consideramos, também, que o estudo da noção de medida promoveu a integração de vários conteúdos matemáticos. Destacamos: o sistema de numeração nas bases 10 e 60, os números reais, os sistemas de coordenadas.

Além da noção de medida, outra noção importante para a Geometria Euclidiana é a noção de congruência,[86] cujo estudo foi iniciado na 4.ª série. Nesta

---

[86] Para descrever as manipulações sobre as figuras geométricas é conveniente introduzir o conceito de transformação $T:\mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ para designar a correspondência biunívoca entre os pares de pontos no plano (n=2) ou no espaço (n=3). Quando os membros de um par forem o mesmo ponto P, dizemos que P' é um ponto invariante. O resultado de aplicações sucessivas, isto é, concatenação, de um conjunto de transformações é chamado o produto das transformações. Pode-se considerar que o critério que distingue uma geometria da outra é o grupo de transformações para as quais todos os postulados ou proposições se mantêm verdadeiros. Há duas classes de transformações na geometria euclidiana: isometrias e semelhanças.

A isometria ou congruência é uma transformação que preserva as medidas e a forma; isto é, dados 2 pares de pontos (P,P') e (Q,Q'), então $\overline{PQ} = \overline{P'}\overline{Q}'$ dizemos que $\overline{PQ}$ e $\overline{P'}\overline{Q}'$ são dois segmentos congruentes. Existem quatro tipos de isometrias, sob as quais a relação de congruência entre as figuras é invariante: a) reflexão para a qual os pontos invariantes são todos os pontos do "espelho"; b) rotação em torno de um ponto P, tendo P como ponto invariante – é equivalente ao produto de reflexões em torno de "espelhos" que se intersectam no mesmo lugar geométrico; c) translação ou deslocamento, sem pontos invariantes – é equivalente ao produto de reflexões em torno de espelhos paralelos; d) Glide que consiste no produto de uma reflexão em torno de uma linha e uma translação ao longo desta mesma linha. A aplicação de isometria de uma figura sobre ela mesma é uma simetria.

Na semelhança as proposições da geometria euclidiana não são violadas, se a escala das figuras geométricas for alterada. Duas figuras são ditas semelhantes, se todos os ângulos correspondentes são, direta ou opostamente, iguais e todas as distâncias são multiplicadas por um mesmo fator de escala λ. A transformação que leva uma figura a uma figura semelhante é uma semelhança e o fator série, os alunos observam a congruência ao fazer o decalque de figuras em papel transparente e verificar quais figuras coincidem com o decalque, ou por meio da medição com régua para analisar quais figuras têm os lados correspondentes com a mesma medida, como nos mostra a figura a seguir.

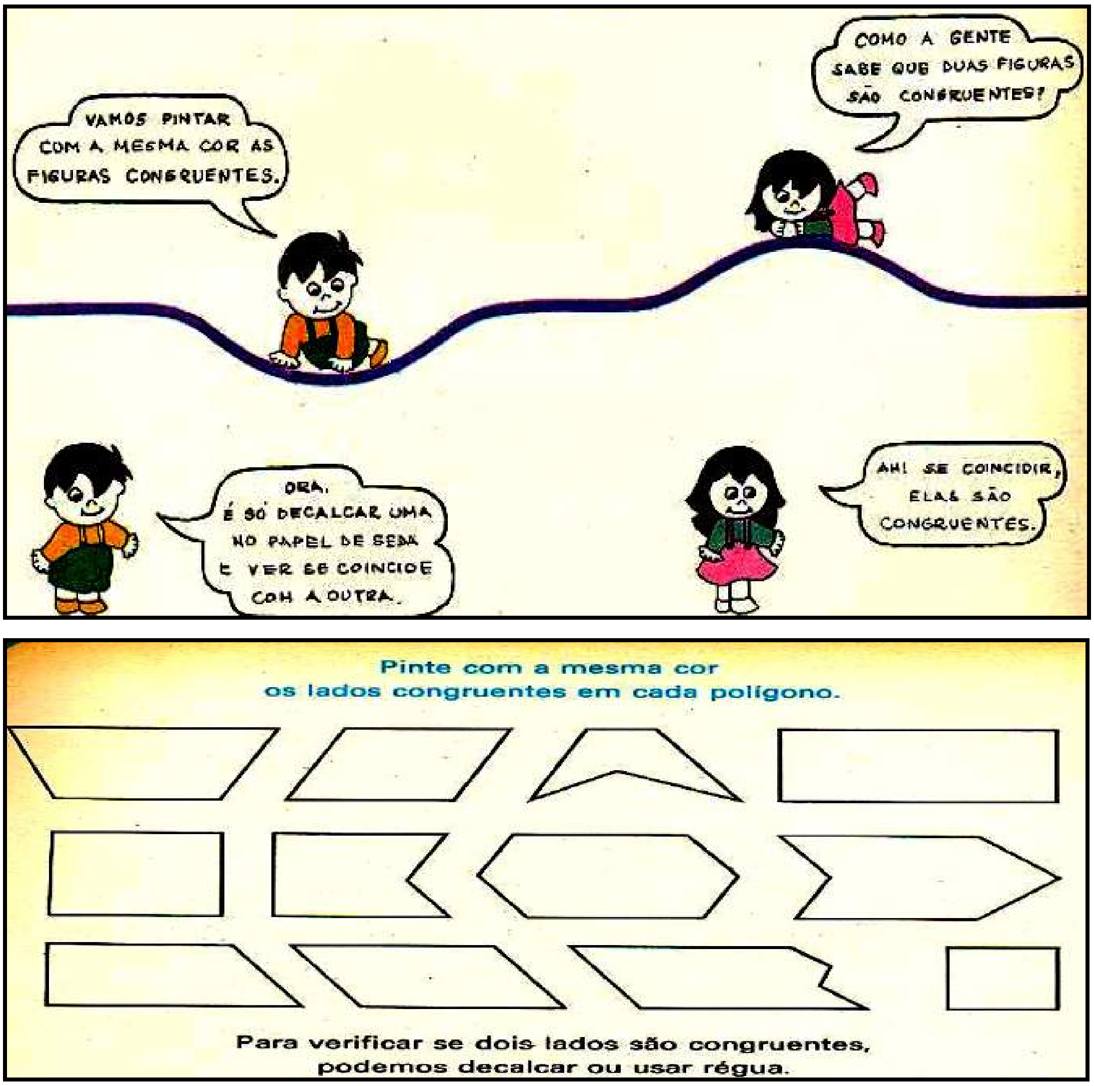


Figura 77 – GRUEMA, 4.ª, 1979, p.46-47.

No livro da 5.ª série experimental (1972), estudam-se os ângulos congruentes, como podemos ver na figura abaixo. Notamos a afirmação: “Lembre-se que dois ângulos são congruentes quando podem coincidir por superposição” (GRUEMA, 1972, p.19).[87]

λ é a razão de semelhança. Entre as transformações semelhantes temos: a) homotetia que preserva os ângulos e a forma nas transformações; b) rotação homotética que é o produto de uma homotetia e uma rotação; c) reflexão homotética que é o produto de uma homotetia e uma reflexão (WU, 2005).

[87] A congruência por superposição é uma das críticas à geometria de Euclides; a superposição não é um axioma e não há um teorema que demonstre que a superposição garante a congruência. Hilbert completou a axiomática de Euclides ao apresentar o caso LAL de congruência de triângulos que eliminou o movimento na geometria.

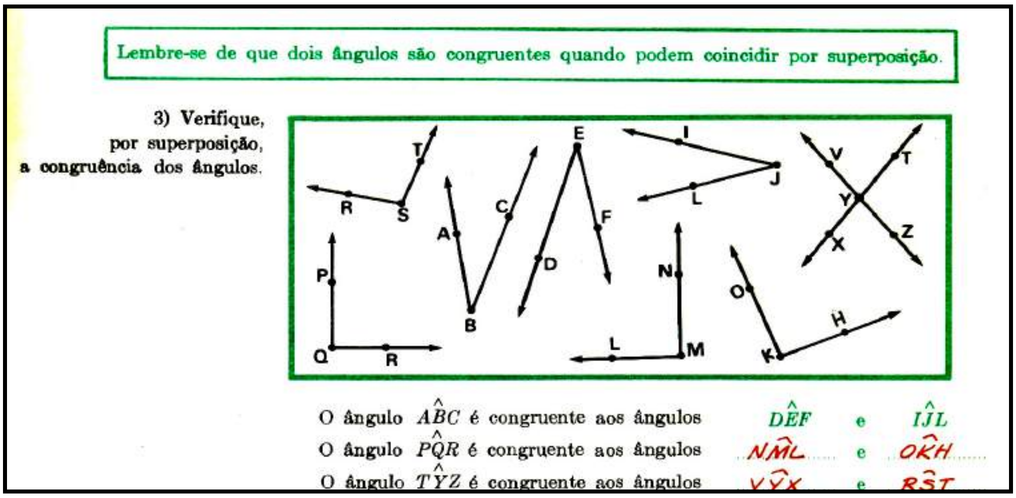


Figura 78 – GRUEMA, 5.ª experimental, 1972, p.19.

O livro da 6.ª série apresenta a congruência de segmentos de reta no capítulo *Relações,* quando do estudo das relações de ordem e de equivalência como exercício de aplicação das propriedades das relações. Na atividade abaixo, o estudo da congruência deixa de ser uma atividade experimental para ser o conjunto das figuras que satisfazem as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva, um passo para a abstração e formalização do conceito de congruência.

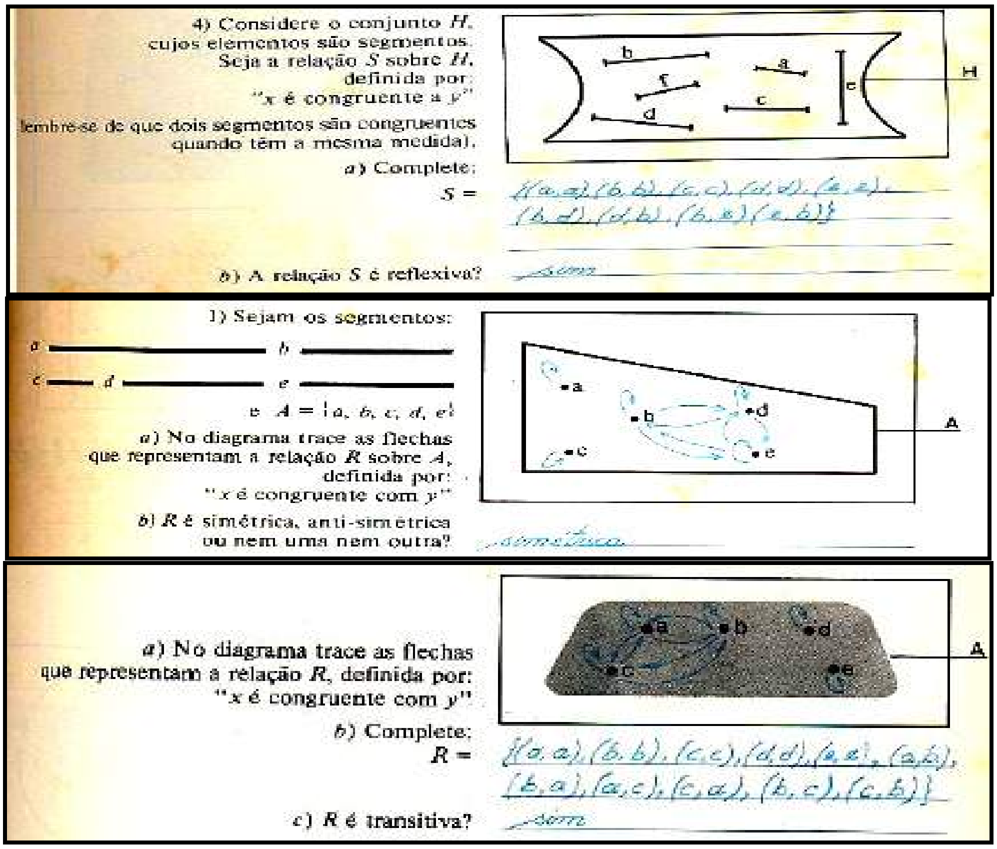


Figura 79 – GRUEMA, 6.ª, 1977, p.21 e 25.

Contudo, o aluno pôde verificar tanto nas atividades propostas no livro da 4.ª série como no livro da 5.ª série experimental (1972) que a sobreposição permitia descobrir figuras congruentes. Consideramos que, para justificar o que se observava experimentalmente e manter o rigor matemático, as autoras apresentam o estudo das transformações geométricas que teve o seu início na 3.ª série, como já mencionamos, com as primeiras noções de translação, ampliação e simetria.

No livro da 7.ª série, no capítulo *Paralelismo e Direção,* é exposto o estudo da translação sem ser especificado. Na atividade a seguir, dado um segmento orientado $\vec{AB}$, pede-se que se construam vários outros segmentos com origem nos pontos dados.

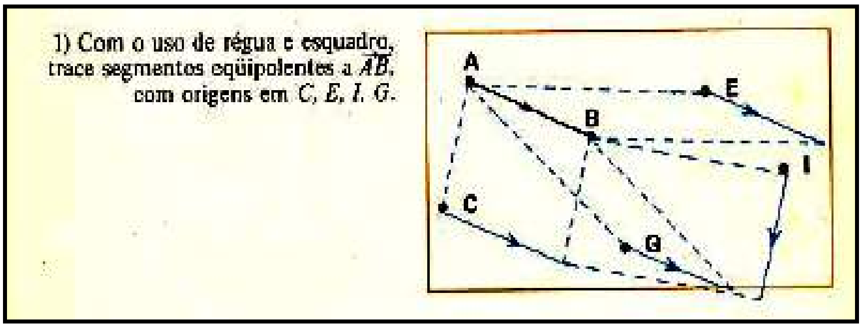


Figura 80 – GRUEMA, 7.ª, 1977, p.39.

O estudo da simetria, assim especificado, tem seu início no livro da 7.ª série (1977) com o tema *Circunferência*, ou seja, mostra-se que duas circunferências secantes de centros em **A** e **B** têm intersecção em **P** e **P'** e que toda circunferência que tem centro na reta **AB** que passa por **P** também passará por **P'**, conforme a atividade abaixo.

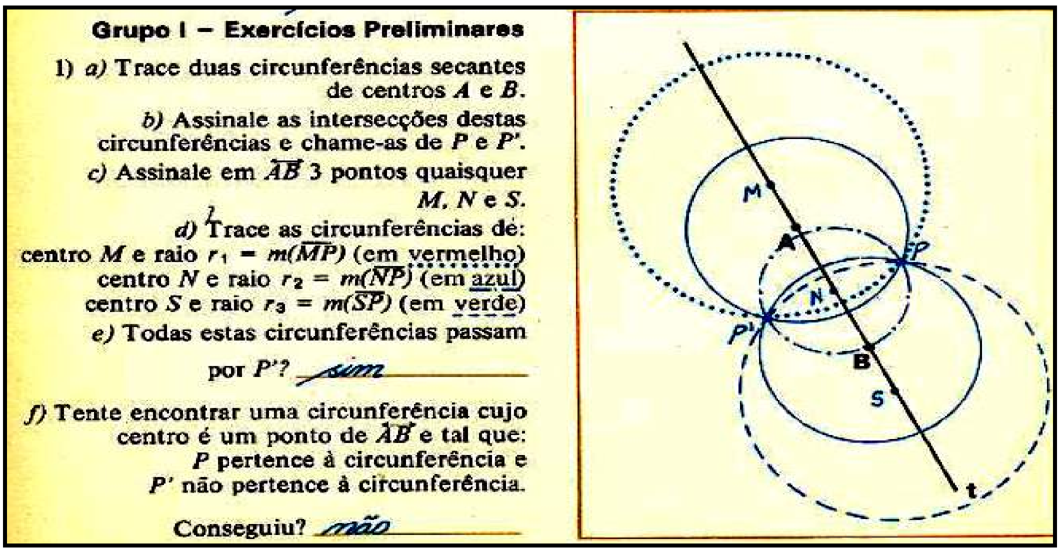


Figura 81 - GRUEMA 7.ª, 1977, p.144.

A partir destes exercícios de observação a simetria é definida como:

Simetria axial de eixo $\overleftrightarrow{AB}$ é a função que transforma pontos do plano em seus simétricos em relação a $\overleftrightarrow{AB}$.
Representamos $S_{\overleftrightarrow{AB}}: P \to P'$

Figura 82 – GRUEMA, 7.ª, 1977, p.144.

Na sequência, são estudadas as propriedades da simetria axial, ou seja, demonstra-se que esta mantém o alinhamento e a distância. Apresentamos abaixo uma atividade em que se verifica que os pontos **A** e **B** são simétricos em relação à reta **t**, para qualquer outro ponto **X** pertencente à reta **t,** a distância do ponto **X** ao ponto **A** é igual à distância do ponto **X** ao ponto **B**.

1) *a)* Dado o segmento $\overline{AB}$, determine o eixo t em relação ao qual A e B são simétricos.
b) Assinale os pontos P, Q, R e S sobre a reta t.
c) Coloque = ou ≠
$m(\overline{PA})$ = $m(\overline{PB})$
$m(\overline{QA})$ = $m(\overline{QB})$
$m(\overline{SA})$ = $m(\overline{SB})$
$m(\overline{RA})$ = $m(\overline{RB})$
d) Assinale um ponto T não pertencente à reta t e responda:
$m(\overline{TA}) = m(\overline{TB})$? não

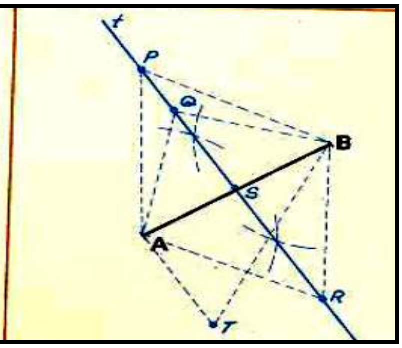


Figura 83 – GRUEMA, 7.ª, 1977, p.158.

No decorrer do estudo das propriedades da simetria são verificadas, também, algumas propriedades dos segmentos como: o ponto médio e a mediatriz; as propriedades dos triângulos, como as mediatrizes, as bissetrizes dos ângulos internos, as medianas e as propriedades dos paralelogramos. Como podemos observar no exemplo acima, a atividade também apresenta as propriedades dos pontos pertencentes à mediatriz de um segmento.

A congruência, então, é definida como “Quando é possível transformar uma figura **F** em uma figura **G**, por uma sucessão de simetria, as figuras são congruentes” (GRUEMA 7.ª, 1977, p.175); assim, a congruência de figuras por superposição, observada pelo aluno, se justifica, como nos mostra a atividade a seguir, pois, ao fazer com que o decalque de uma figura coincida com uma outra figura, o aluno realiza uma série de simetrias.

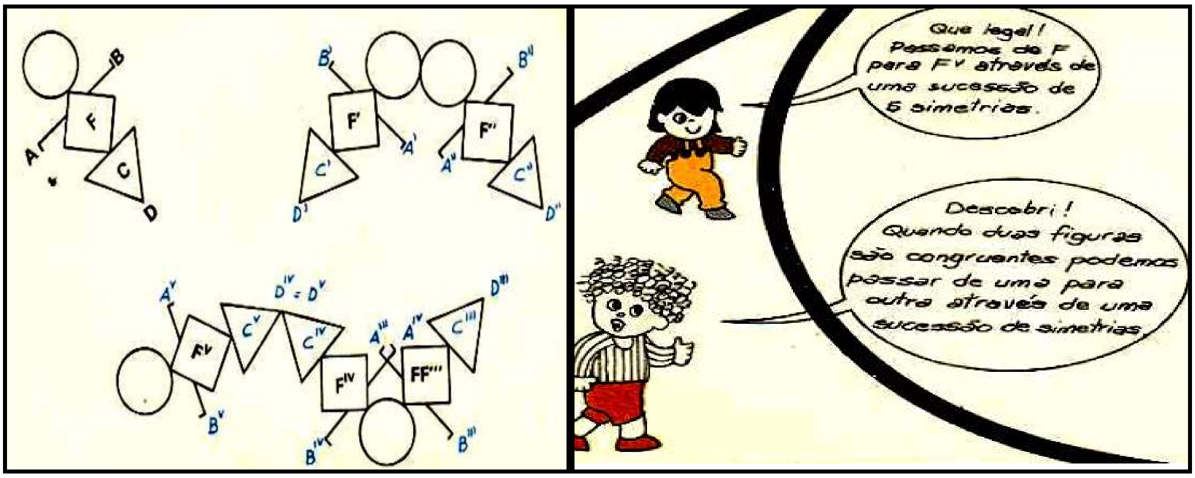


Figura 84 – GRUEMA, 7.ª, 1977, p.173.

Em seguida, é apresentada outra definição para congruência, ou seja,

> Dois segmentos ou ângulos são congruentes se e somente se na mesma unidade possuem a mesma medida. Assim: $m(\overline{AB}) = m(\overline{EF}) = m(\overline{IJ})$ então $\overline{AB}; \overline{EF}; \overline{IJ}$ são congruentes e indicamos $\overline{AB} \cong \overline{EF} \cong \overline{IJ}$; $m(A\hat{B}C) = m(D\hat{E}F)$ então $A\hat{B}C; D\hat{E}F$ são congruentes e indicamos $A\hat{B}C \cong D\hat{E}F$ (GRUEMA, 7.ª, 1977, p.176).

Consideramos que o estudo da simetria deu maior amplitude ao estudo da congruência, pois permitiu que não somente os casos de congruência de triângulos fossem estudados, mas a congruência entre outras figuras. Na atividade a seguir, são dadas duas figuras para que se verifique se elas são congruentes e qual a correspondência que justifica essa congruência; nesse caso, a correspondência entre os vértices das figuras dadas pode ser verificada pela simetria.

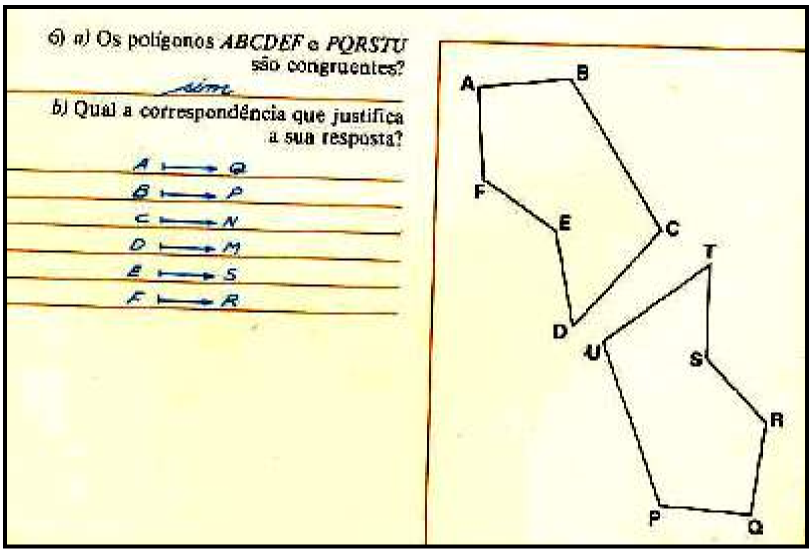
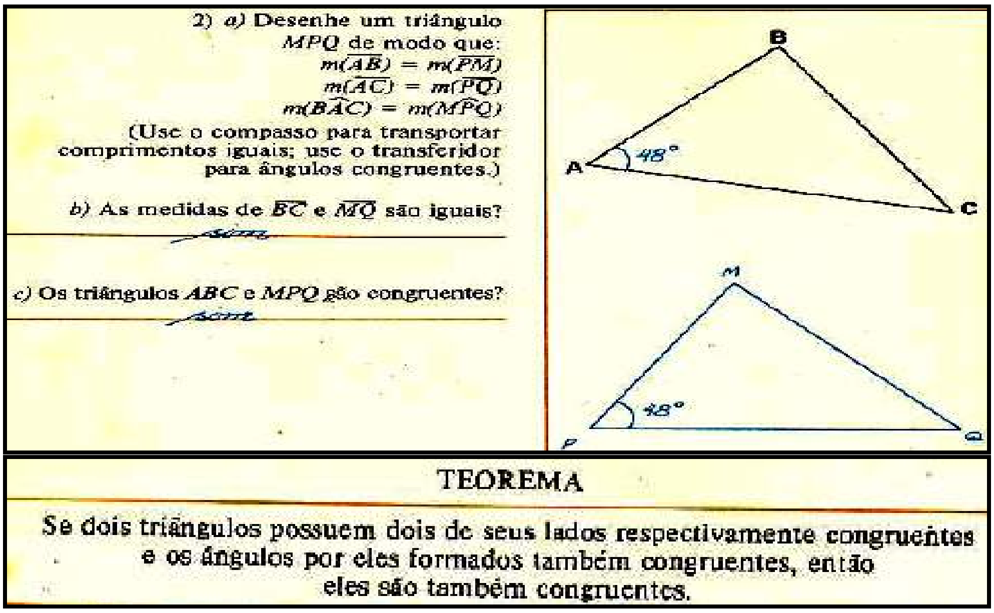


Figura 85 – GRUEMA, 7.ª, 1977, p.180.

Após a definição de congruência como uma sucessão de simetrias, não há mais referência à simetria. A congruência de triângulos é abordada pelos casos clássicos da Geometria Euclidiana, como podemos observar na atividade abaixo.


2) *a)* Desenhe um triângulo *MPQ* de modo que:
$m(\overline{AB}) = m(\overline{PM})$
$m(\overline{AC}) = m(\overline{PQ})$
$m(B\hat{A}C) = m(M\hat{P}Q)$
(Use o compasso para transportar comprimentos iguais; use o transferidor para ângulos congruentes.)

b) As medidas de $\overline{BC}$ e $\overline{MQ}$ são iguais?
sim

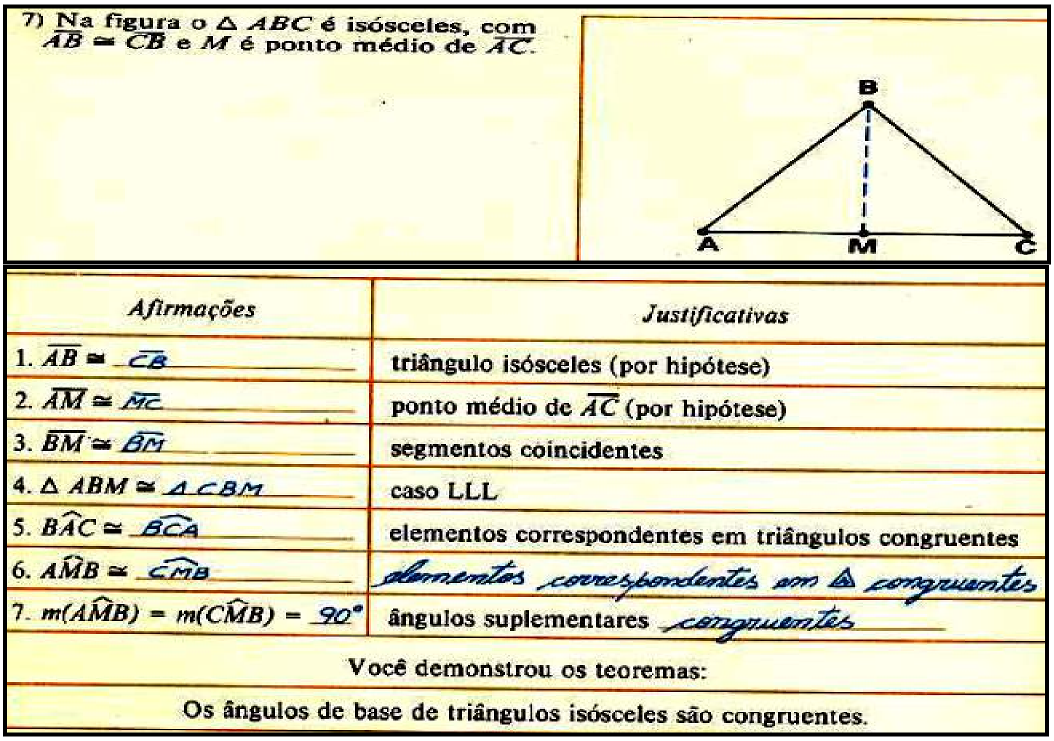
c) Os triângulos *ABC* e *MPQ* são congruentes?
sim

TEOREMA

Se dois triângulos possuem dois de seus lados respectivamente congruentes e os ângulos por eles formados também congruentes, então eles são também congruentes.

Figura 86 – GRUEMA, 7.ª, 1977, p.190.

Observamos vários casos em que as justificativas poderiam ser feitas utilizando as propriedades da simetria, mas isto não ocorre, como na atividade a seguir em que as justificativas são apresentadas a partir dos casos clássicos de congruência de triângulos.


7) Na figura o $\triangle ABC$ é isósceles, com $\overline{AB} \cong \overline{CB}$ e *M* é ponto médio de $\overline{AC}$.

Afirmações	*Justificativas*
1. $\overline{AB} \cong \overline{CB}$	triângulo isósceles (por hipótese)
2. $\overline{AM} \cong \overline{MC}$	ponto médio de $\overline{AC}$ (por hipótese)
3. $\overline{BM} \cong \overline{BM}$	segmentos coincidentes
4. $\triangle ABM \cong \triangle CBM$	caso LLL
5. $B\hat{A}C \cong B\hat{C}A$	elementos correspondentes em triângulos congruentes
6. $A\hat{M}B \cong C\hat{M}B$	elementos correspondentes em $\triangle$ congruentes
7. $m(A\hat{M}B) = m(C\hat{M}B) = 90°$	ângulos suplementares congruentes

Você demonstrou os teoremas:

Os ângulos de base de triângulos isósceles são congruentes.

Figura 87 – GRUEMA, 7.ª, 1977, p.186.

Outro conceito importante da Geometria Euclidiana é o de semelhança, que foi abordado no livro da 8.ª série. O seu estudo foi iniciado no capítulo *Axioma de Tales*, no qual é recordado às projeções e é apresentado o axioma de Tales, como já mencionamos. Entretanto, com o estudo das projeções, só se garante a proporcionalidade dos segmentos por projeções paralelas; e, não é possível justificar que os ângulos de uma figura permaneçam iguais em um deslocamento. Então, é apresentado o estudo da homotetia em que são propostas atividades de ampliação e redução de figuras, como na atividade a seguir, em que é dada uma figura e pede-se para se construir uma figura homotética de centro em **O** e razão **1/3**. Verifica-se que a figura homotética mantém a medida dos ângulos e o paralelismo entre os segmentos correspondentes.

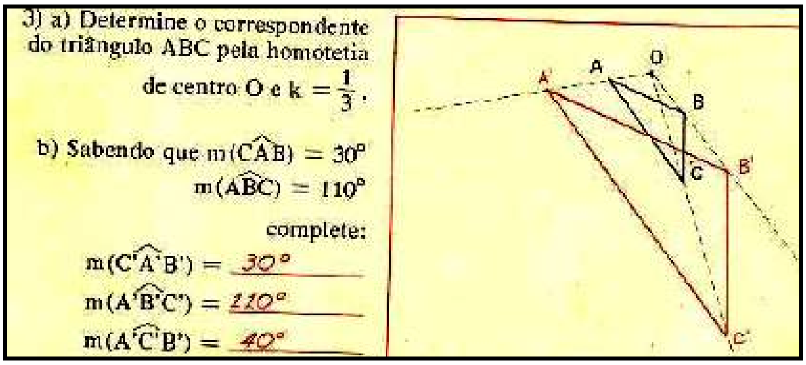
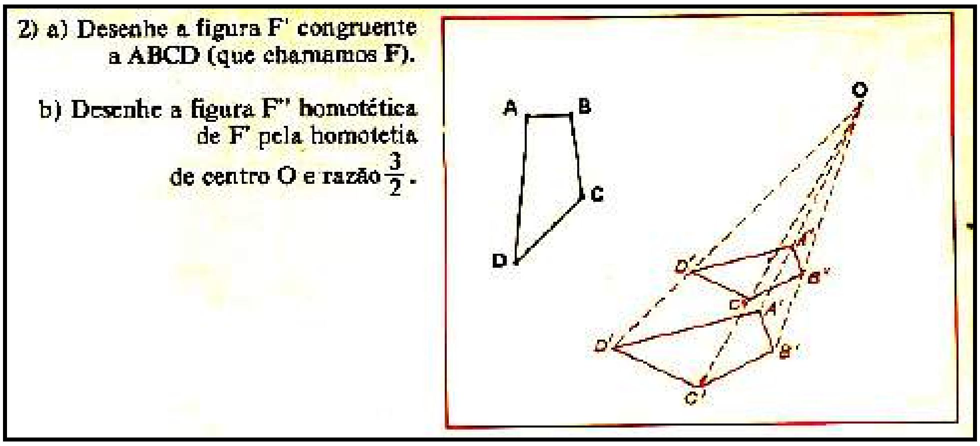


Figura 88 – GRUEMA, 8.ª, 1977, p.102.

O capítulo *Semelhança de Polígonos* apresenta a atividade abaixo, na qual dada uma figura **F** deve-se construir uma figura **F'** congruente à figura **F**; e em seguida construir uma figura **F"** homotética à figura **F'.** Pode-se concluir que nas três figuras **F**, **F'**, **F"** os ângulos permanecem invariantes, e que os lados das figuras **F** e **F"** apresentam uma razão de semelhança, ou seja, as figuras obtidas por homotetia ou congruência são figuras semelhantes.



c) Meça os ângulos das figuras F, F' e F'' e complete o quadro:

F	F'	F''
$m(\hat{A})$ = 95°	$m(\hat{A}')$ = 95°	$m(\hat{A}'')$ = 95°
$m(\hat{B})$ = 95°	$m(\hat{B}')$ = 95°	$m(\hat{B}'')$ = 95°
$m(\hat{C})$ = 130°	$m(\hat{C}')$ = 130°	$m(\hat{C}'')$ = 130°
$m(\hat{D})$ = 40°	$m(\hat{D}')$ = 40°	$m(\hat{D}'')$ = 40°

d) Meça os lados destas figuras e complete o quadro:

$\frac{AB}{A''B''} = \frac{7,2}{4,8}$	$\frac{BC}{B''C''} = \frac{12}{8}$	$\frac{CD}{C''D''} = \frac{1,5}{1}$	$\frac{DA}{D''A''} = \frac{2,4}{1,6}$

Figura 89 – GRUEMA, 8.ª, 1977, p.111.

No entanto, a seguir é apresentada uma outra definição para figuras semelhantes, como podemos observar abaixo.

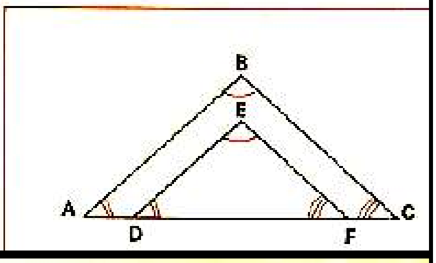
Dois polígonos são semelhantes se, e somente se, existe uma correspondência que mantém as medidas dos ângulos e a proporcionalidade das medidas dos lados correspondentes.

Figura 90 – GRUEMA, 8.ª, 1977, p.112.

Os casos de semelhança de triângulos são apresentados da forma clássica da Geometria Euclidiana. A homotetia não é mais mencionada a partir de então. Em algumas atividades, como podemos observar na atividade a seguir, em que se poderiam provar os procedimentos utilizando a homotetia, as justificativas são dadas pela forma clássica da Geometria Euclidiana.

3) Sabendo que:
$\overline{AB} \parallel \overline{DE}$ e $\overline{BC} \parallel \overline{FE}$

a) assinale com a mesma cor os ângulos congruentes.



b) demonstre que:
$\triangle ABC \sim \triangle DEF$

afirmações	justificativas
1) $\hat{A} \cong \hat{D}$	ângulos alternos internos
2) $\hat{B} \cong \hat{E}$	ângulos de lados respectivamente paralelos
3) $\hat{C} \cong \hat{F}$	ângulos alternos internos
4) $\triangle ABC \sim \triangle DEF$	Caso AAA

d) Se AB = 12, BC = 15 e DE = 8
então EF = 10

e) Se AC = 18, AB = 9 e DF = 9
então DE = 4,5

Figura 91 – GRUEMA, 8.ª, 1977, p.120-121.

Ao considerarmos novamente o livro *Matemática – Curso Moderno* (1969), de Osvaldo Sangiorgi, verificamos que os casos de semelhança de triângulos são apresentados da forma clássica da Geometria Euclidiana, e não apresenta o estudo de semelhança para outras figuras, além dos triângulos. As transformações geométricas são indicadas no apêndice ao final do livro.

Reputamos que a proposta para o ensino da geometria nos livros do GRUEMA tem como eixo a Geometria Euclidiana e que as transformações geométricas são apresentadas com intuito de dar maior amplitude ao estudo da congruência e da semelhança, que se estende para diferentes tipos de figuras planas, não se limitando ao estudo da congruência e semelhança dos triângulos.

Ao longo de toda a coleção do GRUEMA, há uma grande integração entre os diversos tópicos presentes na Matemática, como: a Geometria Afim, a Geometria Analítica, a Geometria Euclidiana, a Álgebra, a Teoria dos Conjuntos, a Aritmética, as noções das transformações geométricas e dos vetores.

Se considerarmos o livro da 5.ª série experimental (1972) e os livros de 6.ª a 8.ª séries (1977), podemos dizer que as autoras se apropriaram, segundo a concepção de Chartier, das ideias de Piaget e Dienes, no tocante ao desenvolvimento a ser dado ao ensino da geometria, ou seja, começar o estudo pela Topologia, depois pela Geometria Afim e concluir com Geometria Euclidiana. Entretanto, ao tomarmos em conta o livro da 5.ª série (1977), podemos verificar que a proposta de ensino da geometria não mais apresenta as noções topológicas; aborda as noções de transformações geométricas de forma continuada a partir da 3.ª série, indo além do que propõem os Guias Curriculares com o estudo das transformações geométricas a partir da 7.ª série.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa procura contribuir para a construção da história do ensino da geometria no Brasil, sob o ponto de vista do historiador. Para tanto, foi analisada a proposta de ensino da geometria na coleção *Curso Moderno de Matemática para o ensino de Primeiro grau,* cujas autoras são Lucília Bechara Sanchez, Manhúcia P. Liberman, Anna Averbuch e Franca Cohen Gottlieb, que se constituíram no grupo GRUEMA, que contou, também, com a participação de Jacy Monteiro como supervisor e revisor dos conteúdos matemáticos. Nossa pesquisa pretende responder à seguinte questão: Qual é a proposta de ensino de geometria nos livros do GRUEMA?

Tivemos como fonte principal os livros da coleção GRUEMA da 5.ª a 8.ª séries de 1977, os livros da 1.ª a 4.ª séries, o livro da 5.ª série de 1972, todos editados pela CEN, e os livros experimentais da 6.ª a 8.ª séries, publicados pela gráfica LPM; O livro *Matemática – Curso Moderno*, 3ª série, de Osvaldo Sangiorgi editado em 1969 pela CEN; o Arquivo Pessoal de Lucília Bechara (APLB) e o Arquivo Pessoal de Manhúcia Liberman (APML); jornais da época, a bibliografia de referência, as experiências vividas pelas autoras, bem como o Ideário do Movimento da Matemática Moderna e a legislação vigente à época.

Para responder nossa questão de pesquisa do ponto de vista do historiador, baseamo-nos em Andre Chervel (1990), que nos deu suporte para a compreensão da Geometria como parte da disciplina Matemática no contexto da história das disciplinas; em Roger Chartier (1990), que nos guiou na análise dos livros, que teve como eixo os conceitos por ele formulados sobre a produção cultural, as representações e as apropriações, e em Allan Choppin (2004), que foi nossa referência para o exame dos livros didáticos quanto às suas funções.

Procuramos verificar não apenas os conteúdos e a metodologia apresentados na coleção, mas também o processo de produção dos livros na perspectiva da história cultural defendida por Chartier, para o que foi necessário abordar a gênese internacional do MMM. Destacamos, então, as propostas discutidas concernentes ao ensino da geometria no Seminário de Royaumont e Dubrovnik, na Comission Internacionale pour l'étude et l'amelioration de l'enseignement des mathématiques (CIEAEM), e nas Conferências Interamericanas sobre Educação Matemática (CIEM).

Essas discussões visavam diminuir a distância entre a Matemática que era ensinada no secundário e a que era ensinada na universidade.

Quanto ao ensino da geometria no secundário, as discussões versavam tanto sobre os novos conteúdos geométricos, que deveriam ser ensinados, como sobre a metodologia a ser adotada para o seu ensino. Constatamos que não havia um consenso acerca dos conteúdos a serem ministrados, posto que identificamos três propostas para o ensino da geometria, ou seja, com enfoque na Álgebra Linear, nas Transformações Geométricas e a Geometria Euclidiana.

Entretanto, acerca da metodologia a ser adotada para o ensino da geometria havia um consenso de que o ensino deveria ocorrer primeiro mediante experimentações e observações realizadas pelo aluno e só depois ser introduzida a geometria dedutiva. Apresentamos, então, as propostas para o ensino da geometria dos grupos SMSG e UISCM, dos Estados Unidos; de George Papy, da Bélgica; de Lucienne Felix, da França, e de Zoltan P. Dienes, do Canadá.

Os livros didáticos são produtos culturais, segundo Chartier (1990), portanto refletem os anseios e as expectativas vividas em um determinado momento pela sociedade, e por isso fizemos um estudo do contexto social, econômico e político brasileiro nas décadas de 1960 e 1970. Constatamos que, apesar do clima político (ditadura militar), havia um crescimento econômico provocado pela industrialização, que gerou uma expectativa de modernidade na sociedade e favoreceu a divulgação e implantação da MM promovidas pelo GEEM e a realização de congressos que discutiram várias propostas de modernização do ensino. A divulgação, pelos meios de comunicação das realizações do GEEM, criou na sociedade uma sensação de que a Matemática Moderna seria aprendida e compreendida pelos alunos, e não mais apenas memorizada e operada mecanicamente. No entanto, somente em 1975 os guias curriculares, propõem oficialmente o ensino da MM.

As autoras Lucília Bechara e Manhúcia Liberman abraçaram os ideais do MMM tendo participação expressiva no GEEM, e mantinham estreito contato com os órgãos governamentais que elaboraram as diretrizes para o ensino da matemática. Elas promoveram cursos para formação de professores e para pais, elaboraram aulas experimentais com alunos da rede pública e privada e foram as primeiras autoras de livros didáticos para as séries iniciais com a MM, livros estes de grande aceitação entre os professores naquela época.

Nossa análise dos livros constatou que a metodologia adotada para o ensino da geometria consiste na realização de atividades, sem texto introdutório ou explicativo, estruturada em atividades que partem de situações conhecidas ou concretas. Considerando essas atividades, espera-se que os alunos cheguem às conclusões e generalizações, que são apresentadas em quadros em destaque. Em seguida, há atividades que visam ao aprofundamento das conclusões ou à fixação de técnicas.

A metodologia foca o aluno, ou seja, o aluno é chamado a participar da construção dos conceitos; por não haver texto explicativo, ele não sabe o que está sendo proposto, mas é motivado e instigado a realizar as construções geométricas, a utilizar a cor como elemento organizador de informações e a responder aos questionamentos elaborados e concluir as propriedades, ou as definições. Essas conclusões servirão de ferramenta para a construção de um novo conceito.

Outra estratégia metodológica são os quadrinhos que, ao mostrarem diversos personagens conversando com uma linguagem mais acessível aos alunos, e em alguns casos "gírias", transmitem mensagens de otimismo, alegria, satisfação, mas também tais mensagens podem modificar emoções ou pensamentos preestabelecidos, ou seja, transmitem tanto o clima de otimismo pelo qual a sociedade passava como a ideia divulgada pela imprensa de que a Matemática não é mais "um instrumento de terror dos alunos"[88]. Assim, consideramos que os quadrinhos são um instrumento para mudar a representação do ensino da matemática e da geometria, especificamente, e foi uma estratégia metodológica inovadora à época, e hoje sua utilização é recomendada pelos PCNs.

Em síntese, a metodologia contida na proposta de ensino da geometria nos livros do GRUEMA permite que o aluno construa os conceitos matemáticos em etapas sucessivas motivados pelas construções geométricas e pelos quadrinhos e, ainda, pela utilização da cor como elemento organizador de informações, mas por outro lado propõe atividades em diferentes graus de dificuldade que, a critério do professor, podem ou não ser apresentadas aos alunos. Consideramos que esta proposta metodológica tem as apropriações feitas pelas autoras dos estudos do psicólogo Jean Piaget, bem como das propostas de ensino elaboradas por Zoltan Dienes, Lucienne Felix e George Papy, portanto em consonância tanto com as

[88] Ver figura 1 página 69 – artigo "Matemática de hoje é de ensinar sem assustar"

discussões ocorridas em Royaumont como com a legislação do Estado de São Paulo, que propunham o ensino da matemática pela descoberta, pela intuição, pela utilização da criatividade, e não pela repetição de exercícios ou pela mecanização de procedimentos.

Os livros da 5.ª a 8.ª série, antes de serem lançados em escala nacional, foram experimentados em diversas escolas publicas e privadas. Reputamos esta experimentação um diferencial em relação aos livros publicados na época, uma vez que no âmbito do projeto *A Trajetória da Geometria escolar no Brasil e em Portugal e o Movimento da Matemática Moderna* não encontramos nenhuma pesquisa que revelasse tal fato. Entretanto, elaborar livros experimentais era uma prática corrente durante o período do MMM, que pode ser observada na produção do SMSG, nos Estados Unidos da América, e na de George Papy, na Bélgica.

Nosso olhar para as duas coleções revelou que os livros da 6.ª, 7.ª e 8.ª séries, tanto o experimental como o editado pela CEN, não apresentam mudanças na estrutura metodológica nem nos conteúdos, apenas mudanças quanto à diagramação, quadrinhos, tipo de letra e algumas "simplificações" para melhor entendimento do conteúdo ou a delimitação do espaço para a resolução da atividade.

Contudo, houve mudanças significativas entre o livro da 5.ª série experimental (1972) e o livro da 5.ª série (1977) no que se refere à proposta para o ensino da geometria.

O livro da **5.ª série experimental (1972)** apresenta o capítulo *Temas de Recordação,* no qual abordam as noções topológicas, um conteúdo até então inexistente na grade curricular. Ao apresentar as noções topológicas nesta série, consideramos que as autoras se apropriaram das ideias de Jean Piaget e de Zoltan Dienes no que concerne ao desenvolvimento do ensino da geometria, ou seja, o ensino deveria começar pelas noções topológicas. Este capítulo aborda também os conceitos básicos da Geometria. O estudo desses conceitos propiciou que ao longo do livro houvesse o entrelaçamento entre a Geometria e a Teoria dos Conjuntos e a Aritmética, um dos ideais do MMM.

Há que ressaltar que os livros das séries iniciais apresentam os conceitos geométricos e as noções topológicas experimentalmente. Podemos, então, asseverar que o capítulo *Temas de Recordação* do livro experimental constitui-se no elo entre as quatro primeiras séries e as quatro últimas séries do 1.º grau para o estudo da geometria e, assim, contempla a proposta de continuidade expressa na LDB n. 5.692/1971.

No livro da **5.ª série de 1977**, editado pelo CEN, verificamos que o capítulo *Temas de Recordação* e os exercícios que ocorriam ao longo do livro e proporcionavam a integração entre a Geometria, e os outros ramos da Matemática foram retirados. Como consequência, o desenvolvimento do ensino da geometria proposto por Piaget não se concretiza, uma vez que não há o estudo das noções topológicas, e o entrelaçamento da Geometria com os outros ramos da Matemática só se concretiza a partir do livro da 7.ª série. Entretanto, neste livro são abordadas as noções de transformações geométricas que se iniciaram na 3.ª série, indo além do que propõem os Guias Curriculares, que sugerem o estudo das transformações geométricas a partir da 6.ª série.

A retirada do capítulo *Temas de Recordação* do livro da 5.ª série (1977) acarretou, por um lado, a descontinuidade no ensino das noções elementares da Geometria Plana e o não ensino das noções topológicas nas séries finais; perdeu-se, assim, a integração das noções de conjunto e das noções de relações com os conceitos geométricos, mas, por outro lado, resultou na continuidade do estudo das transformações geométricas.

Parece-nos que a retirada deste capítulo no livro da 5.ª série (1977) se deu tanto pela lógica da indústria cultural do sistema capitalista, que considera o livro didático uma mercadoria ligada ao mundo editorial, como pela proposta curricular imposta pelo Estado e expressa nos textos didáticos, ou seja, como não há menção na legislação ao estudo da geometria, das noções topológicas e das transformações geométricas na 5.ª série até a edição dos Guias Curriculares em 1975, logo não havia interesse, tanto dos professores como da indústria, em apresentá-los aos alunos nesta série.

Há que considerar, no entanto, a possibilidade de a cultura escolar ter rejeitado o ensino da geometria na 5.ª série, visto que seu estudo tradicionalmente ocorria a partir da 7.ª série. Segundo Julia (1995), a cultura escolar determina o que deve ou não ser ensinado. Para as séries iniciais, o estudo desses conteúdos estava consolidado, uma vez que, segundo Medina (2008), os livros de 1.ª a 4.ª séries foram bem aceitos pelos professores e, conforme Villela (2009), foram um sucesso de vendas. Parece-nos, então, que naquele momento havia duas culturas escolares diferentes: a das séries iniciais e a das séries finais, e que, embora a legislação preconizasse a continuidade dos estudos ao longo das oito séries, a cultura escolar ainda não a incorporara.

Uma das discussões sobre o ensino da geometria no secundário era quanto ou seu enfoque, ou seja, dever-se-ia ensinar a geometria experimental e intuitiva ou a geometria dedutiva. Nossa pesquisa constatou que uma das propostas discutidas durante o período do MMM era que deveria ser iniciado o estudo da geometria de forma experimental e intuitiva e que somente depois deveria ser apresentada a geometria dedutiva com pequenos encadeamentos lógicos, tendo como fundamento o desenvolvimento psicogenético proposto por Piaget. E a proposta de ensino da geometria do Estado de São Paulo, expressa nos Guias Curriculares, sinaliza que os resultados geométricos devem ser obtidos intuitivamente com base na experiência e na observação e que o aluno deve adquirir habilidade no uso do compasso e da régua. Assim, podemos afirmar que os livros do GRUEMA estão em consonância com a legislação e com os ideais do MMM ao apresentarem a geometria intuitiva e experimental empregando exemplos do mundo físico, o desenho geométrico como ferramenta para construção dos conceitos geométricos, ou ainda ao propor atividades de recorte e decalque ao longo de todas as séries do 1.º grau.

Entretanto, a proposta para o ensino da geometria nos livros do GRUEMA também apresenta a geometria dedutiva no livro da 7.ª e da 8.ª série, quando os alunos que os utilizam estão com 12 ou 13 anos. Uma vez que nas séries iniciais alguns conceitos geométricos foram apresentados intuitiva ou experimentalmente, agora estão aptos a iniciarem atividades que propiciem o desenvolvimento do raciocínio lógico dedutivo. Mas a geometria intuitiva e a experimental não são abandonadas a partir da 7.ª série. Tanto estas como a geometria dedutiva caminham juntas, ou seja, não são apresentados resultados prontos, mas estes são construídos de forma lógica em um diálogo com o aluno, induzindo-o a observar a construção geométrica para responder aos questionamentos e chegar às conclusões esperadas para as atividades, demonstrando-se ou provando-se primeiro para um concluir o teorema.

Em síntese, o estudo da geometria dedutiva visa o desenvolvimento do raciocínio lógico dedutivo e propicia ao aluno abstrair os conceitos geométricos de maneira gradual, ao associar a geometria dedutiva à geometria experimental condizentes com o desenvolvimento do pensamento do pré-adolescente, preconizado por Piaget.

Quanto aos conteúdos abordados na proposta para o ensino da geometria, nossa análise teve como guia a proposta elaborada por Piaget que afirmava que o desenvolvimento do pensamento geométrico na criança ocorre de forma inversa ao desenvolvimento histórico da Geometria, portanto o seu estudo deveria ser iniciado pela Topologia, depois pela Geometria Afim e finalmente pela Geometria Euclidiana.

Como já mencionamos, as noções topológicas foram apresentadas nas séries iniciais e no livro da 5.ª série experimental (1972). A Geometria Afim foi apresentada na 7.ª e na 8.ª série, e seu estudo teve como objetivo mostrar que os segmentos de uma reta graduada e os segmentos projetados paralelamente em uma outra reta com uma outra graduação mantêm a ordem e a proporcionalidade, ou seja, o Teorema de Tales. Vários conteúdos matemáticos se entrelaçam com o estudo da Geometria Afim, como a representação gráfica da imagem de uma função a partir das projeções paralelas, a representação gráfica da soma de números irracionais, entre outros.

A geometria euclidiana se baseia na noção de medida de segmento e medida de ângulo e da relação de congruência e semelhança entre figuras. O estudo da noção de medida de segmento e de ângulo e da congruência teve início no livro da 3.ª e da 4.ª série. Tanto no livro da 5.ª série experimental (1972) como no livro da 5.ª série (1977) estas noções foram tratadas e tiveram continuidade no livro da 7.ª e da 8.ª série. Podemos então asseverar que o estudo destas noções tem continuidade ao longo das séries iniciais e das séries finais. Os casos de congruência e de semelhanças de triângulos foram abordados da forma clássica da Geometria Euclidiana, o que nos leva a crer que a proposta para o ensino da geometria nos livros do GRUEMA é a Geometria Euclidiana.

Entretanto, as transformações geométricas foram apresentadas nas séries iniciais e nas séries finais. A nosso ver, seu estudo teve como objetivo dar maior amplitude ao tema da congruência e da semelhança, pois permitiu que não somente os casos de congruência e semelhança de triângulos fossem analisados, mas a congruência e semelhança entre outras figuras.

Em síntese, concluímos que a proposta para o ensino de geometria nos livros do GRUEMA apresenta a Geometria Euclidiana desenvolvida tanto na forma experimental e intuitiva como na forma dedutiva, mas também tratam da Geometria Afim e das transformações geométricas com intuito de dar maior amplitude aos temas: congruência e semelhança entre figuras.

Chervel (1990) sustenta que o sucesso comercial não é uma das características de um manual inovador. Villela (2008), em sua pesquisa nos arquivos da CEN, fez um levantamento quantitativo dos exemplares comercializados da coleção GRUEMA no período de 1967 a 1977, e constatou que foram comercializados[89] 513.536 exemplares dos livros de 5.ª a 8.ª séries, no período de 1972 a 1977. No entanto, nesse mesmo período, foram comercializados 2.166.926 exemplares dos livros de 1.ª a 4.ª séries. Se considerarmos que os livros de 1.ª a 4.ª séries do GRUEMA são sucessores da coleção *Curso Moderno para a Escola Elementar* e, ainda segundo Villela (2008), entre 1967 a 1974, foram comercializados 2.558.661 exemplares destes, podemos constatar que os livros de 5.ª a 8.ª séries não apresentam os mesmos resultados comerciais obtidos pelos livros da 1.ª a 4.ª séries.

Uma das hipóteses para o não sucesso de vendas dos livros da 5.ª a 8.ª séries foi a preexistência da coleção *Matemática – Curso Moderno,* de autoria de Osvaldo Sangiorgi, como nos diz Valente (2009), um *best-seller*, e que se constituiu numa nova vulgata, e, segundo Villela (2009), foi o campeão de vendas da CEN, com a expressiva vendagem de 4.336.087 exemplares no período de 1964 a 1973.

Chervel (1990) reputa que a escola não exerce somente o papel de reprodutora de ensinamentos programados, mas também é a imagem das finalidades. Na época considerada, 1972 a 1977, as finalidades do ensino já não eram as mesmas da década de 1960; internacionalmente, temos a crise do petróleo; no Brasil, o endurecimento do regime militar, o começo do declínio da Matemática Moderna e a venda da Companhia Editora Nacional. Os livros de 1.ª a 4.ª séries já estavam consolidados tanto no mercado editorial como na cultura escolar, e o lançamento dos livros de 5.ª a 8.ª séries, em relação ao MMM, foi tardia, e neste nicho do mercado editorial, bem como na cultura escolar, já estavam consolidadas as coleções de outros autores, como Osvaldo Sangiorgi.

Chervel (1990) também ressalta que um manual didático inovador causa uma instabilidade no meio escolar. Realizamos então um estudo comparativo da proposta para o ensino da geometria apresentada nos livros do GRUEMA e a proposta da coleção *Matemática – Curso Moderno* (1969), de autoria de Osvaldo Sangiorgi. Constatamos as seguintes diferenças: a) o sumário não contempla todas as

[89] Comercialização por série: 232.680 exemplares do livro da 5.ª série, 158.561 da 6.ª série, 66.745 da 7.ª série e 55.550 da 8.ª série.

informações sobre os conteúdos abordados na coleção GRUEMA, pois esta não foi elaborada em capítulos específicos, mas a partir dos diversos entrelaçamentos possíveis entre a Aritmética, Álgebra e a Geometria; em Sangiorgi, o estudo dos conteúdos geométricos está presente nos capítulos 3 e 4, e cada tópico abordado no decorrer dos capítulos é elencado no sumário; b) o desenvolvimento da geometria dedutiva, do GRUEMA, não expressa formalmente os postulados que lhe darão suporte, apresentado-os de forma intuitiva; em Sangiorgi, inicialmente, são elencados e numerados os axiomas; c) os teoremas, no livro do GRUEMA, são demonstrados primeiramente com o auxílio do desenho geométrico e do questionamento ao aluno, para enfim concluir o enunciado do teorema; em Sangiorgi acontece de forma contrária, ou seja, enunciado dos teoremas numerados apresentado na forma clássica: hipótese, tese e demonstração sem a participação do aluno; d) apresenta a Geometria Afim, porém em Sangiorgi não é contemplada; e) as transformações geométricas são apresentadas para dar maior amplitude ao conceito de congruência e semelhanças; em Sangiorgi as transformações geométricas estão contidas no apêndice do livro.

Reputamos que estas diferenças entre os livros do GRUEMA e os livros de Osvaldo Sangiorgi causaram uma instabilidade no ensino da geometria, uma vez que os professores que adotaram os livros do GRUEMA requisitavam às autoras cursos de formação, o que culminou na fundação da Solução Assessoria e Planejamento Educacional. Todos estes aspectos levantados nos permitem afirmar que, sob a óptica de Chervel (1990) os livros do GRUEMA são manuais didáticos inovadores.

Acreditamos que esta pesquisa tenha colaborado para a história do ensino da geometria escolar no Brasil, e que com as pesquisas de Ferreira (2006), Leme da Silva (2008) e Camargo (2009) possa contribuir para a criação de uma nova representação para o ensino da geometria no período do MMM. Tal representação considerará que houve, sim, propostas de ensino da geometria euclidiana, não somente da geometria das transformações. E este não aparece apenas no final do livro, mas em simbiose com os diversos ramos da Matemática. Houve também uma proposta de ensino da geometria experimental, como, aliás, propunha o MMM; mais ainda, que o desenho geométrico não foi excluído do currículo, quando esta matéria foi transformada em Educação Artística, mas que foi amplamente utilizado como ferramenta para o estudo da geometria.

REFERÊNCIAS

ALVES, J. M. História em quadrinhos e educação infantil. *Psicologia: ciência e profissão,* Brasília, v. 21, n.3, p.1-9, set. 2001. Disponível em: <http://pepsic.bvs-psi.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1414-9893200100030>. Acesso em: 30 dez. 2009.

A QUESTÃO É MATEMÁTICA MODERNA. *Correio do Povo,* Porto Alegre, p. 12, 9 maio 1970.

AVERBUCH, A. Escola Secundária e a Matemática. In: CONGRESSO NACIONAL DE ENSINO DA MATEMÁTICA NO CURSO SECUNDÁRIO, I, 1955, Salvador. *Anais...* Salvador: Universidade da Bahia, 1957.

BARBOSA, J. E. F. Reflexos do desenvolvimento atual da matemática no Ensino Secundário. In: CONGRESSO NACIONAL DE ENSINO DA MATEMÁTICA, II, 1957, Porto Alegre. *Anais...* Porto Alegre: Universidade do Rio Grande do Sul, 1959.

BECHARA, L. Alguns dados sobre o desenvolvimento de um moderno planejamento da matemática, iniciado em 1962, na primeira série do Ginásio Vocacional do Brooklin – São Paulo. In: GEEM. *Matemática Moderna para o Ensino Secundário.* São Paulo: LPM, 1965. p.53-66.

———; AKAMA, E. B. Geometria no ginásio – relato de uma experiência realizada nos ginásios vocacionais de São Paulo. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DA MATEMÁTICA, 5, 1966, São José dos Campos. *Anais...* São José dos Campos.

———; LIBERMAN, M. P. *Uma iniciação à matemática.* São Paulo: GEEM-LPM, 1973.

———. Entrevista concedida à Maria Silvia Braga Rios em 31 de outubro de 2008.

BEGLE, E. G. Reforma en la educación matemática en los E.E.U.U. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, I, 1961, Bogotá. Primeira Conferência Interamericana sobre la Educación de las matemáticas, *Anais...* FEHR, H. F. (Org.). *Bureau of publications*: Teachers College. Columbia University, 1962.

BITTENCOURT, C. M. F. *Ensino de história:* fundamentos e métodos. São Paulo: Cortez, 2004. 408 p.

BLOCH, M. L. B. *Apologia da história ou o ofício do historiador*. Tradução de André Telles. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2001.

BRASIL. Mensagem presidencial ao Congresso Nacional em 1970. Disponível em: <http://brazil.crl.edu/bsd/bsd/u1352/000044.html>. Acesso em: 30 set. 2009.

———. Ministério da Educação e Cultura. *Lei n.º 5.692, de 11 de agosto de 1971*. Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, 1971.

BROWN, K. E. O movimento para melhorar a matemática escolar. In: GEEM. *Matemática Moderna para o ensino secundário*. São Paulo: LPM, 1965. p.39-49.

BURIGO, E.Z. *Movimento da matemática moderna no Brasil: estudo da ação e do pensamento de educadores matemáticos nos anos 80*. 1989. 286f. Dissertação (Mestrado) – UFRGS, Porto Alegre.

BURKE, Peter (Org.). *A escrita da história*: novas perspectivas. São Paulo: Unesp, 1992. 354 p.

CAMARGO, K. C. *O ensino da geometria nas coleções didáticas em tempos do Movimento da matemática Moderna na capital da Bahia*. 2009. 153 f. Dissertação (Mestrado) – Uniban/SP, São Paulo, 2009.

CATUNDA, O. La preparación de profesores de matemaáicas. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, I, 1961, Bogotá. Primeira Conferência Interamericana sobre la Educación de las Matemáticas, *Anais*... FEHR, H. F. (Org.). *Bureau of Publications*: Teachers College. Columbia University, 1962.

CHARLOT, B. Le virage des mathématiques modernes: histoire d'une reforme: idées directrices et contexte. Disponível em: <http://membres.multimania.fr/sauvezlesmaths/Textes/IVoltaire/charlot84.htm>. Acesso em: 22 nov. 2008.

CHARTIER, R. *A história cultural*: entre práticas e representações. Lisboa: Difel, 1990.

———. O mundo como representação. Tradução: Andréa Daher e Zenir Campos Reis. Estudos Avançados, 11 (5), p. 173-191, 1991.

CHERVEL, A. História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. *Teoria & Educação*, Porto Alegre, n. 2, p. 177-229, 1990.

CHOPPIN, A. História dos livros e das edições didáticas: sobre o estado da arte. *Educação e Pesquisa*, São Paulo, v. 30, n. 3, p. 549-566, set.-dez. 2004.

CHOQUET, G. Las nuevas matematics y La enseñanza. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, I, 1961, Bogotá. Primeira Conferência Interamericana sobre la Educación de las Matemáticas, *Anais*... FEHR, H. F. (Org.). *Bureau of Publications*: Teachers College. Columbia University, 1962.

CHRISTIANNI, T. S. Geometria. In: CURSO DE ATUALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA PARA PAIS, 1., 1966, São Paulo. Doc. APML. Mimeografado.

CONGRESSO BRASILEIRO DO ENSINO DA MATEMÁTICA, 3., 1959, Porto Alegre. *Anais...* Porto Alegre, 1959.

CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DA MATEMÁTICA, 4., 1962, Belém. *Documentos.* São Paulo: Centro de Documentação – Ghemat, 2009. CD-ROM.

D'AMBROSIO, U. Considerações sobre o ensino atual da Matemática. In: CONGRESSO NACIONAL DE ENSINO DA MATEMÁTICA, II, 1957, Porto Alegre. *Anais...* Porto Alegre. Universidade do Rio Grande do Sul, 1959.

DE CERTEAU, M. *A operação historiográfica*. A escrita da história. Rio de Janeiro: Forense, 2002.

DIENES, Z. P.; GAULIN, C.; LUNKENBEIN, D. Um programa de matemática para o nível elementar. *Bulletin de L'AMQ*, São Paulo, 1969. Artigo traduzido por A. R. Berardinelli – Doc. APLB. Mimeografado.

———; GOLDING, E. W. *A geometria pelas transformações:* topologia, geometria projetiva e afim. São Paulo: EPU, 1975. v. 1.

DI PIERRO NETTO, S. *Contribuição ao ensino da geometria elementar.* 1972. 95 f. Dissertação (Doutorado) – USP, São Paulo.

FEHR, H. F. Reforma de la enseñanza de la geometria. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, I, 1961, Bogotá. Primeira Conferência Interamericana sobre la Educación de las Matemáticas, *Anais*... FEHR, H. F. (Org.). *Bureau of Publications*: Teachers College. Columbia University, 1962.

———; CAMP, J.; KELLOGG, H. *La Revolución en las matemáticas escolares:* segunda fase. Nova York: Teachers College Columbia University, 1971.

FELIX, L. *Initiation a la Géométrie.* 5. ed. Paris: Dunod, 1964.

FERREIRA, A.C.C. *Propostas pedagógicas de geometria no Movimento Paranaense de Matemática Moderna.* 2006. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba.

GATTEGNO, C. La percepción y la acción como base del pensamiento matemático. In: EL MATERIAL PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS, 1967, Bogotá: CIEAEM, 1967.

GEOMETRIA MODERNA REVOLUCIONA O ENSINO. *Folha de S. Paulo,* São Paulo, 11 jan. 1967.

GOTTLIEB, F. C.; FAINGUELERNT, E. K. Quem foi a profª Anna Averbuch?: Educadora, profissional competente, amiga e irmã. *Educação Matemática em Revista*, Recife, p. 14-15, 10 dez. 2004.

GRUEMA. *Curso moderno de matemática para o ensino de 1.º grau.* 5.ª série. São Paulo: CEN, 1972.

———. *Curso moderno de matemática para o ensino de 1.º grau.* 3.ª série. São Paulo: CEN, 1974.

———. *Curso moderno de matemática para o ensino de 1.º grau.* 3.ª série. São Paulo: CEN, 1974. Guia do professor.

———. *Curso moderno de matemática para o ensino de 1.º grau.* 2.ª série. São Paulo: CEN, 1975.

———. *Curso moderno de matemática para o ensino de 1.º grau.* 2.ª série. São Paulo: CEN, 1975. Guia do professor.

———. *Curso moderno de matemática para o ensino de 1.º grau.* 4.ª série. São Paulo: CEN, 1975.

———. *Curso moderno de matemática para o ensino de 1.º grau.* 5.ª a 8.ª séries. São Paulo: CEN, 1977. Guia do professor.

———. *Curso moderno de matemática para o ensino de 1.º grau.* 5.ª a 8.ª séries. São Paulo: LPM, [s.d.]. Edição experimental.

GUIMARÃES, H. M. Por uma matemática nova nas escolas secundárias: perspectivas e orientações curriculares da matemática moderna. In: MATOS, J. M., VALENTE, W. R. (Org.). *A matemática moderna nas escolas do Brasil e de Portugal*: primeiros estudos. São Paulo: GHEMAT, 2007. p. 21-45.

HEGEMBERG, L. Renovação do estudo de matemática. In: CURSO DE ATUALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA PARA PAIS, 1., 1966, São Paulo. Doc APML. Mimeografado.

JULIA, D. A cultura escolar como objeto histórico. *Revista Brasileira de História da Educação*, Campinas: SBHE/Editora Autores Associados, n. 1, jan.-jun. 2001.

KLINE, M. *O fracasso da Matemática Moderna.* São Paulo: Ibrasa, 1976. 211 p.

LEME DA SILVA, M. C. A geometria escolar em Portugal e no Brasil: História e Epistemologia. In: MATOS, J. M., VALENTE, W. R. (Org.). *A matemática moderna nas escolas do Brasil e de Portugal*: primeiros estudos. São Paulo: GHEMAT, 2007. p. 81-103.

———. A geometria nos congressos nacionais de ensino de matemática. In: BÚRIGO, E. Z.; FISCHER, M. C. B.; SANTOS, M. B. (Org.). *A Matemática Moderna nas escolas do Brasil e de Portugal*: novos estudos. Porto Alegre: Redes, 2008a. p. 69-80.

———. A geometria escolar moderna de Osvaldo Sangiorgi. In: VALENTE, W. R. (Org.). *Osvaldo Sangiorgi*: um professor moderno. São Paulo: Annablume; Brasília: CNPq; Osasco: GHEMAT, 2008b. p. 69-93.

———; VALENTE, W. R. Na oficina do historiador da educação matemática: cadernos de alunos como fontes de pesquisa. In: SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, 8., 2009, Belém. *Coleção Histórica da Matemática para Professores.* 2009: SBHMt., 2009. p. 1-74.

LERAY, J. Relatório sobre a reforma do ensino secundário de matemática: redigida a pedido da academia de ciências. *Bulletin de L'a.p.m.e.p*, Lyon, 1972. Doc. APML. Mimeografado.

LIBERMAN, M. P. Entrevista concedida a Maria Silvia Braga Rios em 21 de março de 2008.

———; WATANABE, R. Introdução à geometria plana (usando linguagem de conjuntos). In: GEEM. *Matemática Moderna para o Ensino Secundário.* São Paulo: LPM, 1965. p. 187-205.

LIMA, F. R. *GEEM*: Grupo de Estudos do Ensino da Matemática e a formação de professores durante o Movimento da Matemática Moderna. 2006. 129 f. Dissertação (Mestrado) – PUC, São Paulo.

LUZ, V. A. *Um estudo sobre o ensino de transformações geométricas:* da reforma da Matemática Moderna aos dias atuais. 2007. Dissertação (Mestrado) – PUC, São Paulo.

LYRA, C. A evolução da matemática através da história e a matemática atual. *Curso de atualização em matemática para pais*, 1., 1966, São Paulo. Doc. APML. Mimeografado.

MARQUES, A. S. *Tempos pré-modernos:* a matemática escolar dos anos 1950. 2005. 150 f. Dissertação (Mestrado) – PUC, São Paulo.

MEDINA, D. O Movimento da Matemática Moderna nas séries iniciais e o primeiro livro didático. *Unión Revits Iberoamericana de Educacion Matematica*, São Paulo, p. 91-106, 1.º jun. 2008. Trimestral. Disponível em: <http://www.fisem.org/descargas/14/Union_014_012.pdf>. Acesso em: 15 out. 2009.

MIORIM, M. A. Livros didáticos de Matemática do período de implantação do Movimento da Matemática Moderna no Brasil. In: CONGRESSO IBERO AMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5., 2005, Porto. *Anais...*, APM, 2005.

NAKASHIMA, M. N. *O papel da imprensa no Movimento da Matemática Moderna.* 2007. 144 f. Dissertação (Mestrado) – PUC, São Paulo.

OECE – Um programa moderno de matemática para o ensino secundário. Tradução de Luiz Henrique Jacy Monteiro. *Série Professor*, São Paulo: GEEM, n. 2, 1965.

OLIVEIRA, J. B. A.; GUIMARÃES, S. D. P. *A política do livro didático.* Campinas: Summus – Unicamp, 1984. 137 p.

PACCININI, V. Educação para o Lar. *Revista do Ensino*, Secretaria da Educação e Cultura do Rio Grande do Sul, n. 101, p. 68-69, 1965.

PAPY, G. La Géométrie dans l'enseignement moderne de La mathématique. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DA MATEMÁTICA, 5, 1966, São José dos Campos. *Anais...* São José dos Campos.

———. *Mathématique Moderne.* Paris: Marcel Didier, 1964. v. 1, 2, 3 e 6.

PAVANELLO, R. M. *O abandono da geometria:* uma visão histórica. 1989. Dissertação (Mestrado em Educação) – FE-Unicamp.

PEREIRA, M. R. O. *A geometria escolar*: uma análise dos estudos sobre o abandono de seu ensino. 2001. Dissertação (Mestrado) – PUC, São Paulo.

PIAGET, J. *Seis estudos de psicologia*. São Paulo: Forense, 1964. 150 p.

———. *Psicogénese e história das ciências.* Lisboa: Dom Quixote, 1987. 251 p.

RIBEIRO, E. L. Didática especial da geometria. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DA MATEMÁTICA, 4., 1962, Belém. *Anais...* São Paulo: Centro de Documentação – Ghemat, 2009. CD-ROM.

RUIZ, Angel. La reforma de las matemáticas modernas y la educación matemática como una nueva disciplina científica. Disponível em: <www.cimm.ucr.ac.cr/aruiz>. Acesso em: 27 maio 2009.

SANGIORGI, O. Matemática clássica ou matemática moderna na elaboração dos programas do ensino secundário? In: CONGRESSO NACIONAL DE ENSINO DA MATEMÁTICA, II, 1957, Porto Alegre. *Anais...* Porto Alegre. Universidade do Rio Grande do Sul, 1959.

———. Introdução da Matemática Moderna no Ensino Secundário. In: GEEM. *Matemática Moderna para o Ensino Secundário.* São Paulo: LPM, 1965. p. 1-13.

———. *Matemática:* curso moderno. 3.ª série. São Paulo: CEN, 1969. 314 p.

———. Matemática Moderna: 15 anos de acertos e erros. In: SEMINÁRIO NACIONAL DE PREPARAÇÃO PARA O III CONGRESSO INTERNACIONAL SOBRE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. 1976, Rio de Janeiro: Doc. APLB. Mimeografado.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. Departamento de Educação. *Guias Curriculares para o ensino de 1.º grau*. São Paulo: CERHUPE, 1975.

———. Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. *Subsídios para a implementação do guia curricular de matemática:* geometria para o 1.º grau – 5.ª a 8.ª séries – informações para o professor. 2. ed. São Paulo: SE/CENP/DRHU, 1979.

THOM, R. Matemática “Moderna”: um erro educacional e filosófico? Doc. APML. Mimeografado.

VALENTE, W. R. *Uma história da matemática escolar no Brasil (1730-1930).* 2. ed. São Paulo: Annablume, 2007.

———. Osvaldo Sangiorgi, um *best-seller*. In: ——— (Org.). *Osvaldo Sangiorgi:* um professor moderno. São Paulo: Annablume; Brasília: CNPq; Osasco: GHEMAT, 2008. p. 13-41.

VILLELA, L. M. A. Os livros didáticos de matemática de maior vendagem, na Companhia Editora Nacional, no período de 1964 a 1960. In: BÚRIGO, E. Z.; FISCHER, M. C. B.; SANTOS, M. B. (Org.). *A Matemática Moderna nas escolas do Brasil e de Portugal*: novos estudos. Porto Alegre: Redes, 2008. p. 69-80.

———. "GRUEMA": uma contribuição para a história da Educação Matemática no Brasil. 2009. 167 f. Tese (Doutorado) – Uniban, São Paulo.

VÖLKER, H. R. La Matemática Moderna en la escuela secundaria argentina. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DA MATEMÁTICA, 5, 1966, São José dos Campos. *Anais...* São José dos Campos.

WU, S.-T. Notas de aula do segundo semestre de 2005. Disponível em: <http://www.dca.fee.unicamp.br/courses/IA841/2s2005/notas/cap1.pdf>. Acesso em: 15 mar. 2010.

ANEXO – 1

BIBLIOGRAFIA da série dos livros Gruema

Adam, P., *El material didático actual*, Madri, Publicaciones de la "Enseñanza Media".

Adler, I., *Matemática moderna*, Lisboa, Publicações Europa-América.

Aebli, H., *Didática psicológica*, São Paulo, Editora Nacional, 1971.

Bréard, C., *Mathématiques* (6ᵉ, 5ᵉ, 4ᵉ, 3ᵉ), Paris, Éditions de l'École.

Brunfield e outros, *Geometry*, Addison-Wesley Publishing Co. Inc.

Brunfield e outros, *Introduction to Mathematics*, Addison-Wesley Publishing Co. Inc.

Calame, A., *Mathématiques modernes I, II, III*, Neuchâtel, Suíça, Éditions du Griffon, 1967.

Calame, A., *Matemática moderna I*, tradução de Jacy Monteiro, São Paulo, Editora Polígono, 1970.

Caraça, B. J., *Conceitos fundamentais da Matemática*, Lisboa, Fotogravura Nacional Ltda., 1970.

Castrucci, B., *Elementos da teoria dos conjuntos*, São Paulo, GEEM.

Dienes, Z. P., *Os primeiros passos em Matemática – Lógica e jogos lógicos*, São Paulo, Herder.

Dienes, Z. P., *Os primeiros passos em Matemática – Conjuntos, números, potências*, São Paulo, Herder.

Dienes, Z. P., *Os primeiros passos em Matemática – Exploração do espaço e prática da medida*, São Paulo, Herder.

Dienes, Z. P., *Aprendizado moderno da Matemática*, Rio de Janeiro, Zahar Editores, 1970.

Dienes, Z. P., *As seis etapas do processo de aprendizagem em Matemática*, São Paulo, Herder, 1972.

Dumont, M., *Étude intuitive des ensembles*, Paris, Dunod.

Eichols, Martin, Brunfield, Shanke, *Elementary School Mathematics Series*, Addison-Wesley Publishing Co. Inc.

Felix, L., *Initiation à la géométrie*, Paris, Dunod, 1964.

Felix, L., *Géométrie*, Paris, Dunod, 1964.

Frédérique e Papy, *L'enfant et les graphes*, Bruxelas, Didier.

Galion, E., *Mathématique* (6ᵉ, 5ᵉ, 4ᵉ, 3ᵉ), Paris, O.C.D.L., Hatier.

Kothe, S., *Pensar é divertido*, São Paulo, Herder, 1970.

Manesse, J., Lecouvez, G., *L'éveil mathématique*, Math 001, Math 002, Math 003, Paris, Hachette.

Monteiro, J., *Elementos de álgebra*, Guanabara, Ao Livro Técnico S.A., 1969.

Monteiro, J., *Polinômios e divisibilidade*, São Paulo, Nobel S.A., 1970.

Monteiro, J., *Iniciação às estruturas algébricas*, São Paulo, Nobel S.A., 1972.

Moise, E., Donns, F., *Geometry*, Addison-Wesley Publishing Co. Inc.

Nachbin, L., *Introdução à álgebra*, Rio de Janeiro, Editora McGraw-Hill do Brasil, 1971.

Nuffield, *Projet mathématique*, Paris, O.C.D.L.

Papy, *Mathématique moderne*, 1, 2, 3, 5, 6, Bruxelas, Didier.

Piaget, J., *Para onde vai a educação?*, Rio de Janeiro, José Olympio, 1973.

Picard, N., *A conquista do número* (Cadernos), Portugal, Livros Horizonte, 1968.

Picard, N., *Journal de Mathématique II*, Paris, O.C.D.L., 1970.

Queysabbe, M. e Revuz, A., *Mathématique* (6ᵉ, 5ᵉ, 4ᵉ, 3ᵉ), Paris, Fernand Nathan.

Revuz, A., *Matemática moderna*, Matemática viva, São Paulo – Rio de Janeiro, Editora Fundo de Cultura, 1967.

Sanchez, L., e Liberman, M. P., *Uma iniciação à Matemática*, São Paulo, GEEM.

Fiches d'Études du I.R.E.M. de Strasbourg, *Mathématique* (6ᵉ, 5ᵉ, 4ᵉ, 3ᵉ), Paris, Iatra.

Matemática moderna para o ensino secundário, São Paulo, GEEM.

Measure and Find Out – A Quantitative Approach to Science, Scott, Foresman & Co.

School Mathematics Study Group (SMSG), *Mathematics for Elementary School*, Yale University Press.

Seeing through Mathematics, Scott, Foresman & Co.

The Arithmetic Teachers Review, Washington, The National Council of Teachers of Mathematics.

The Foundations Booklet, Background for Students, Math 001, 002, 003, 004, Scott, Foresman & Co.

ANEXO – 2

Sumário – Livro 5.ª série (1977) do GRUEMA

Você vai aprender neste livro:

Sumário – Livro 6.ª série (1977) do GRUEMA

VOCÊ VAI APRENDER NESTE LIVRO:

Sumário – Livro 7.ª série (1977) do GRUEMA

ÍNDICE

Sumário – Livro 8.ª série (1977) do GRUEMA

SUMÁRIO

ANEXO – 3

companhia
editora
nacional

São Paulo, 12 de outubro de 1976

Ilma.Sra.
Profª Lucilia Bechara Sanchez
Rua dos Tocantins, 324
04072-Capital, SP.

Prezada Senhora:

Informamos a V.Sa. que através do ofício nº 212/76-CE-"C", recebemos da Fundação Educacional do Distrito Federal, órgão da Secretaria de Educação e Cultura, convite para V.Sa., na qualidade de autora, participar de um CICLO DE PALESTRAS, cujo objetivo é atualizar os professores do COMPLEXO ESCOLAR "C" - BRASÍLIA, que abrange 23 Unidades de Ensino de 1º e 2º graus e 6 Unidades de Ensino Supletivo.

Esse conclave está, oficialmente, programado para o período de 8 a 12 de novembro p.vindouro.

Entendemos tratar de rara e excelente oportunidade para V.Sa. a par desse curso de atualização, desenvolver treinamento teórico-prático aos professores participantes de como melhor utilizar a sua obra.

Isto posto, esperamos que V.Sa. aceite o convite da Fundação Educacional do Distrito Federal, a fim de se adotar providências necessárias, junto a esse órgão, em Brasília, e outras relativas à sua viagem.

Todavia, se for de todo impossível V.Sa. aceitar o convite, por especial fineza, queira se pronunciar de preferência por escrito, com a maior brevidade possível.

Sem outro particular, somos de V.Sas cordial e

atenciosamente,

COMPANHIA EDITORA NACIONAL

Departamento de Propaganda

rua dos gusmões, 639 • 01212 são paulo, sp • caixa postal 7032 • endereço telegráfico: editora

ANEXO – 4

Prefeitura Municipal de Curitiba
DEPARTAMENTO DO BEM ESTAR SOCIAL
DIRETORIA DE EDUCAÇÃO

OFICIO Nº 492/73 Curitiba, 08 de outubro de 1.973

Senhora diretora:

Tendo em vista que a Diretoria de Educação efetuou a compra de 6 000 volumes em 1973 da obra "Curso Moderno de Matemática" e por ter renovado o pedido para 10 000 volumes para 1974, solicitamos de Vossa Senhoria a fineza de realizarum curso de treinamento para utilização da referida obra.

Verificamos que os resultados obtidos durante este ano não foram os esperados. Cremos que a ineficiência decorreu pela falta de uma orientação metodologica, a qual poderá ser suprida através do referido curso.

Certos da atenção que Vossa Senhoria, dispensará ao presente pedido, aguardamos breves informações e apresentamos-lhe nossos protestos de elevada estima e distinta consideração.

CORDIALMENTE

Ana Maria L. S. Miranda

ANA MARIA LOPES DE S. MIRANDA
Diretora de Educação

ILMA.SRA.
LUCILIA BECHARA SANCHEZ
COMPANHIA EDITORA NACIONAL
Rua dos Gusmões, nº 639
SÃO PAULO - SÃO PAULO
DC

ANEXO – 5

respondida em 27/2

Campos, 18/1/72
D. Lucília,

Graças a Deus fiz boa viagem até chegar aqui e encontrei todos bem. Espero que a senhora tenha aproveitado bastante em Santos. E as meninas estão moreninhas? Que vontade de vê-las! E o carro do seu Nelson já está consertado?

Imagine que na hora de separar o que levaria para D. Dulce (fui lá hoje), verifiquei que não trouxe a apostilha "Seis etapas do processo de aprendizagem em Matemática". Não sei se deixei na casa da senhora ou se, por esquecimento, alguém ficou com ela.

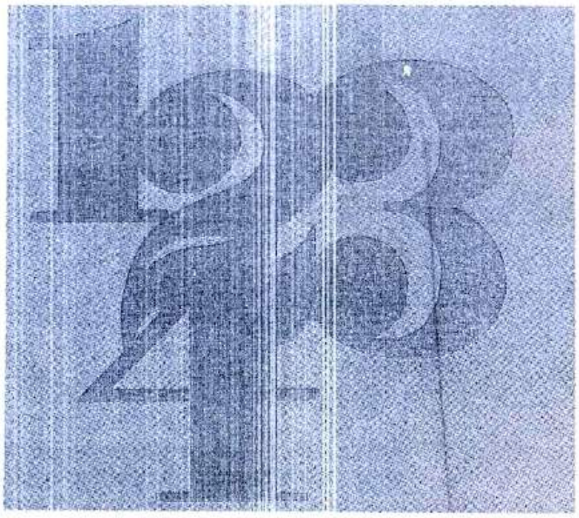
D. Dulce quis saber tudo a respeito das crianças (Alessandra e Luciana) – como ria com as gracinhas que eu contava das meninas! Quis saber do curso, da sua vinda (ela prefere que seja em março, porque talvez vá até S. Paulo em fevereiro) e da publicação do livro. Contei tudo e disse que a senhora vai telefonar pra ela.

As Irmãs do Colégio Auxiliadora vieram aqui em casa reiterar o convite para que eu coordene o ensino de Matemática no primário e pediram também pra eu dar umas aulas no período de planejamento (21/2 a 29/2), divulgando e explicando o conteúdo dos 5 volumes já publicados. Consultei D. Dulce e ela (como a senhora) é de opinião que eu aceite. Que Deus me ajude a dar o recado. Tenho medo de não ser útil, de prejudicar, de confundir, em vez de ajudar, de esclarecer.

D. Dulce foi convidada também a colaborar nessa "revolução" do ensino da Matemática dentro do Auxiliadora.

ANEXO – 6
Sumário Livro *Matemática – Curso Moderno* de Osvaldo Sangiorgi

índice



CAPÍTULO 1
Números reais; estrutura de corpo

CAPÍTULO 2
Cálculo algébrico; estudo dos polinômios

CAPÍTULO 3

Estudo das figuras geométricas

CAPÍTULO 4

Estudo dos polígonos e da circunferência

APÊNDICE

Transformações geométricas planas