

Julio Cezar Vendrichoski

**MODELAGEM E CONTROLE DE VEÍCULOS AÉREOS HÍBRIDOS
COM ROTORES INCLINÁVEIS E CÂMERA ORIENTÁVEL**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas para a obtenção do Grau de Mestre em Engenharia de Automação e Sistemas.

Orientador

UFSC: Prof. Dr. Edson Roberto de Pieri

Coorientador

UFSC: Prof. Dr. Ebrahim Samer El'youssef

Florianópolis

2017

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Vendrichoski, Julio Cezar

Modelagem e controle de veículos aéreos híbridos com rotores inclináveis e câmera orientável / Julio Cezar Vendrichoski ; orientador, Edson Roberto de Pieri, coorientador, Ebrahim Samer El'youssef, 2017. 157 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico, Programa de Pós Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas, Florianópolis, 2017.

Inclui referências.

1. Engenharia de Automação e Sistemas. 2. VANT. 3. Gimbal. 4. Euler-Lagrange. 5. Realimentação linearizante. I. Pieri, Edson Roberto de. II. El'youssef, Ebrahim Samer. III. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas. IV. Título.

Julio Cezar Vendrichoski

**MODELAGEM E CONTROLE DE VEÍCULOS AÉREOS HÍBRIDOS
COM ROTORES INCLINÁVEIS E CÂMERA ORIENTÁVEL**

Esta Dissertação foi julgada aprovada para a obtenção do Título de “Mestre em Engenharia de Automação e Sistemas”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas.

Florianópolis, 15 de agosto 2017.

Prof. Dr. Daniel Ferreira Coutinho
Coordenador
UFSC

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Edson Roberto de Pieri
Orientador
UFSC

Prof. Dr. Ebrahim Samer El'youssef
Coorientador
UFSC

Prof. Dr. Eugênio de Bona Castelan Neto
UFSC

Prof. Dr. Ubirajara Franco Moreno
UFSC

Prof. Dr. Guilherme Vianna Raffo
UFMG

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, por não medirem esforços para me ajudar em todos os momentos. À minha companheira Silvane, que sempre esteve ao meu lado. Aos professores Edson e Ebrahim, pela orientação na concepção deste trabalho. Aos membros da banca examinadora desta dissertação. A todos os amigos que contribuíram direta ou indiretamente para realização deste trabalho.

RESUMO

Este trabalho apresenta um estudo sobre a utilização de veículos aéreos não tripulados (VANTs) em sistemas de vigilância. O uso de VANTs tem se mostrado eficiente em substituir métodos tradicionais de trabalho, muitas vezes reduzindo custos de operação, riscos à vida, ou mesmo possibilitando atividades antes inviáveis. É realizada a modelagem do quadricóptero convencional e de dois veículos aéreos híbridos (com dois e quatro rotores inclináveis), os quais possuem características construtivas e operacionais desejáveis do ponto de vista da aplicação. Os veículos carregam câmeras acopladas às suas estruturas através de um mecanismo (*gimbal*) que lhes proporciona mobilidade adicional para o apontamento e captura de imagens de alvos que se movem em solo. Os modelos são obtidos utilizando a formulação de Euler-Lagrange, considerando tanto a dinâmica do veículo e seus rotores inclináveis quanto a de um *gimbal* duplo na configuração Az-El, através do qual a câmera é integrada. Para um dos veículos, o VANT híbrido com dois rotores inclináveis, uma lei de controle não linear é empregada, visando o rastreamento de trajetórias relativas à posição e direcionamento do VANT, além de capacitar o sistema a manter um alvo na linha de visão da câmera. A lei de controle consiste em uma estratégia em cascata, onde na malha mais interna é tratada a dinâmica de inclinação dos rotores, seguida de uma malha de controle das variáveis relativas à rotação do VANT e apontamento da câmera, sendo que em ambas é executada uma linearização por realimentação estática de estados, finalizando com o controle do subsistema de translação na malha externa. Verifica-se, perante simulação, o rastreamento das trajetórias desejadas mesmo na presença de distúrbios externos.

Palavras-chave: VANT. Gimbal. Euler-Lagrange. Realimentação Linearizante. Sistema de vigilância.

ABSTRACT

This work presents a study about the use of unmanned aerial vehicles (UAVs) in surveillance systems. The use of UAVs has been shown to be efficient in replacing traditional work methods, often reducing operating costs, risks to life or even making possible formerly impracticable activities. It is performed the modeling of the conventional quadrotor and two hybrid aerial vehicles (with two and four tiltable rotors), which have desirable constructive and operational characteristics from the point of view of the application. The vehicles carry cameras coupled to their structures through a mechanism (gimbal) that provides them additional mobility for pointing and capture images of targets that move on the ground. The models are obtained using the Euler-Lagrange formulation, considering both the vehicle dynamics and its tiltable rotors as well as the double gimbal in the Az-El configuration, through which the camera is integrated. For one of the vehicles, the hybrid UAV with two tiltable rotors, a nonlinear control law is employed, aiming the trajectories tracking related to the UAV position and heading, besides to empower the system to maintain a target in the camera's line of sight. The control law consists of a cascade strategy, where in the innermost loop the rotors tilt dynamics is treated, followed by a control loop of the variables related to the UAV rotation and camera pointing, in which both execute a static feedback linearization, finalizing with the control of the translation subsystem in the external loop. It is verified, through simulation, the tracking of the desired trajectories even in the presence of external disturbances.

Keywords: UAV. Gimbal. Euler-Lagrange. Feedback Linearization. Surveillance system

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Queen Bee sendo controlado remotamente.	34
Figura 2	Gyrodyne DASH transportando torpedos anti-submarino.	35
Figura 3	Exemplos de VANTs com asas fixas.	37
Figura 4	Veículo com quatro asas rotativas, quadrirotor.	37
Figura 5	Agusta Westland AW609 com rotores (a) na vertical e (b) inclinados na horizontal.	38
Figura 6	Bell V-280 Valor.	39
Figura 7	<i>Gimbal</i> triplo.	40
Figura 8	Movimento de translação pura.	50
Figura 9	Rotação da base móvel \mathcal{X} em torno de seu eixo $^{\mathcal{X}}z$	52
Figura 10	Rotações locais.	53
Figura 11	Rotações <i>roll</i> , <i>pitch</i> e <i>yaw</i>	55
Figura 12	Translação e rotação.	56
Figura 13	(a) <i>Gimbal</i> Az-El e (b) Diagrama de corpo livre.	75
Figura 14	Situação de ocorrência do acoplamento cinemático.	77
Figura 15	(a) <i>Gimbal</i> Ro-El e (b) Diagrama de corpo livre.	78
Figura 16	Propulsor.	79
Figura 17	(a) Vista superior da pá de hélice e (b) forças resultantes, vista da secção transversal.	80
Figura 18	Representação do VANT híbrido de dois rotores inclináveis com <i>gimbal</i> Az-El.	83
Figura 19	Diagrama de corpo livre do VANT híbrido de dois rotores inclináveis com <i>gimbal</i> Az-El.	84
Figura 20	Representação do VANT híbrido de quatro rotores inclináveis com <i>gimbal</i> Az-El.	92
Figura 21	Diagrama de corpo livre do VANT híbrido de quatro rotores inclináveis com <i>gimbal</i> Az-El.	93
Figura 22	Quadrirotor convencional com <i>gimbal</i> Az-El.	99
Figura 23	Estrutura de controle.	120
Figura 24	Controle da inclinação dos rotores.	120
Figura 25	Controle da rotação do VANT e apontamento da câmera.	124
Figura 26	Controle da translação do VANT.	128
Figura 27	Função de mapeamento.	129

Figura 28	Trajatória do VANT no espaço.	134
Figura 29	Trajatória da coordenada generalizada x e erro de seguimento δ_x	135
Figura 30	Trajatória da coordenada generalizada y e erro de seguimento δ_y	136
Figura 31	Trajatória da coordenada generalizada z e erro de seguimento δ_z	136
Figura 32	Trajatória da coordenada generalizada ψ e erro de seguimento δ_ψ	137
Figura 33	Trajatória da coordenada generalizada γ_1 e erro de seguimento δ_{γ_1}	138
Figura 34	Trajatória da coordenada generalizada γ_2 e erro de seguimento δ_{γ_2}	138
Figura 35	Trajatória das coordenadas generalizadas (a) ϕ e (b) θ	139
Figura 36	Trajatória das coordenadas generalizadas (a) α_1 e (b) α_2	139
Figura 37	Forças de propulsão (a) f_1 e (b) f_2	140
Figura 38	Torques (a) τ_{α_1} e (b) τ_{α_2}	140
Figura 39	Torques (a) τ_{γ_1} e (b) τ_{γ_2}	141

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Parâmetros do sistema.	118
Tabela 2	Parâmetros de perturbação.	134

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

FOV	campo de visão - do inglês <i>Field Of View</i>
GPS	sistema de posicionamento global - do inglês <i>Global Positioning System</i>
LOS	linha de visão - do inglês <i>Line Of Sight</i>
MIMO	múltiplas entradas múltiplas saídas - do inglês <i>multiple-input multiple-output</i>
VANT	Veículo Aéreo Não Tripulado
VTOL	<i>Vertical Take-Off and Landing</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

Notação

a	letras minúsculas em itálico denotam escalares
\mathbf{a}	letras minúsculas em itálico e negrito denotam vetores
\mathbf{A}	letras maiúsculas em itálico e negrito denotam matrizes

Símbolos

$\mathbb{O}_{n \times m}$	matriz nula com dimensão genérica $n \times m$
$\mathbb{I}_{n \times n}$	matriz identidade com dimensão genérica $n \times n$
$[\dots]^T$	representa a matriz transposta de $[\dots]$
$[\dots]^{-1}$	representa a matriz inversa de $[\dots]$
\mathbb{R}^n	conjunto dos números reais de ordem n
\mathbb{Z}	conjunto dos números inteiros
\mathbb{Q}	espaço de configuração n -dimensional
$SO(3)$	grupo especial ortogonal de dimensão 3
$so(3)$	grupo especial ortogonal de dimensão 3 formado somente por matrizes anti-simétricas
t	representa o tempo
$c.$	representação de $\cos(\cdot)$
$s.$	representação de $\sin(\cdot)$
$\dot{\mathbf{a}}$	primeira derivada temporal de \mathbf{a}
$\ddot{\mathbf{a}}$	segunda derivada temporal de \mathbf{a}
$\hat{\mathbf{a}}$	representação de vetor unitário

\bar{a} valor desejado para a variável genérica a

Notação de modelo

- ${}^{\mathcal{J}}\mathbf{g}$ vetor gravidade expresso na base \mathcal{J} , ${}^{\mathcal{J}}\mathbf{g} = [0 \quad 0 \quad -g]^T$
- g aceleração da gravidade
- ϕ ângulo de rotação *roll*
- θ ângulo de rotação *pitch*
- ψ ângulo de rotação *yaw*
- P representa as coordenadas de um ponto
- \mathfrak{B} base de coordenadas móvel atrelada ao sistema de corpos rígidos, $\mathfrak{B}\{\mathfrak{B}\mathbf{x}, \mathfrak{B}\mathbf{y}, \mathfrak{B}\mathbf{z}\}$
- \mathcal{J} base de coordenadas inercial, $\mathcal{J}\{\mathcal{J}\mathbf{x}, \mathcal{J}\mathbf{y}, \mathcal{J}\mathbf{z}\}$
- \mathfrak{X} base de coordenadas genérica, $\mathfrak{X}\{\mathfrak{X}\mathbf{x}, \mathfrak{X}\mathbf{y}, \mathfrak{X}\mathbf{z}\}$
- \mathfrak{X}' base de coordenadas genérica, $\mathfrak{X}'\{\mathfrak{X}'\mathbf{x}, \mathfrak{X}'\mathbf{y}, \mathfrak{X}'\mathbf{z}\}$
- \mathfrak{X}'' base de coordenadas genérica, $\mathfrak{X}''\{\mathfrak{X}''\mathbf{x}, \mathfrak{X}''\mathbf{y}, \mathfrak{X}''\mathbf{z}\}$
- \mathfrak{C} base de coordenadas formada pelos três vetores em torno dos quais as rotações *yaw*, *pitch* e *roll* ocorrem, $\mathfrak{C}\{\mathfrak{C}\mathbf{x}, \mathfrak{C}\mathbf{y}, \mathfrak{C}\mathbf{z}\}$
- \mathfrak{C}_i base de coordenadas com origem no centro de massa do i -ésimo corpo que compõem o sistema, $\mathfrak{C}_i\{\mathfrak{C}_i\mathbf{x}, \mathfrak{C}_i\mathbf{y}, \mathfrak{C}_i\mathbf{z}\}$
- ${}^{\mathfrak{B}}\mathbf{p}$ vetor posição de um ponto P em relação à origem da base \mathfrak{B} , ${}^{\mathfrak{B}}\mathbf{p} = [{}^{\mathfrak{B}}p_x \quad {}^{\mathfrak{B}}p_y \quad {}^{\mathfrak{B}}p_z]^T$
- ${}^{\mathcal{J}}\mathbf{p}$ vetor posição de um ponto P em relação à origem da base \mathcal{J} , ${}^{\mathcal{J}}\mathbf{p} = [{}^{\mathcal{J}}p_x \quad {}^{\mathcal{J}}p_y \quad {}^{\mathcal{J}}p_z]^T$
- ${}^{\mathfrak{X}}\mathbf{p}$ vetor posição de um ponto P em relação à origem da base \mathfrak{X} , ${}^{\mathfrak{X}}\mathbf{p} = [{}^{\mathfrak{X}}p_x \quad {}^{\mathfrak{X}}p_y \quad {}^{\mathfrak{X}}p_z]^T$

$\mathcal{C}_i \mathbf{p}$	vetor posição de um ponto P em relação à origem da base \mathcal{C}_i , $\mathcal{C}_i \mathbf{p} = [\mathcal{C}_i p_x \quad \mathcal{C}_i p_y \quad \mathcal{C}_i p_z]^T$
$\mathcal{J} \mathbf{v}$	velocidade de translação do ponto P expressa na base \mathcal{J}
$\mathfrak{B} \mathbf{v}_{lin}$	velocidade linear do ponto P induzida pela rotação do corpo e expressa na base \mathfrak{B}
$\mathcal{J} \mathbf{v}_{lin}$	velocidade linear do ponto P induzida pela rotação do corpo e expressa na base \mathcal{J}
$\mathbf{R}_{a,b}$	matriz de rotação em torno de um eixo genérico \mathbf{a} de um ângulo genérico b
$\mathfrak{B} \mathbf{R}_{\mathcal{J}}$	matriz de rotação que descreve a orientação da base \mathcal{J} em relação à base \mathfrak{B}
$\mathcal{J} \mathbf{R}_{\mathfrak{B}}$	matriz de rotação que descreve a orientação da base \mathfrak{B} em relação à base \mathcal{J}
$\mathfrak{B} \mathbf{R}_{\mathfrak{X}}$	matriz de rotação que descreve a orientação da base \mathfrak{X} em relação à base \mathfrak{B}
$\mathfrak{B} \mathbf{R}_{\mathcal{C}_i}$	matriz de rotação que descreve a orientação da base \mathcal{C}_i em relação à base \mathfrak{B}
$\mathcal{J} \boldsymbol{\xi}$	translação da origem da base \mathfrak{B} em relação à base \mathcal{J} , expresso em \mathcal{J} , $\mathcal{J} \boldsymbol{\xi} = [x \quad y \quad z]^T$
$\boldsymbol{\eta}$	vetor com os ângulos que representam a orientação da base \mathfrak{B} em relação à base \mathcal{J} , $\boldsymbol{\eta} = [\phi \quad \theta \quad \psi]^T$
$\mathcal{S}(\cdot)$	matriz anti-simétrica
$\mathfrak{B}_{\mathcal{J}} \boldsymbol{\omega}_{\mathfrak{B}}$	velocidade angular da base \mathfrak{B} em relação à base \mathcal{J} , expressa em \mathfrak{B} , $\mathfrak{B}_{\mathcal{J}} \boldsymbol{\omega}_{\mathfrak{B}} = [\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^T$
$\mathcal{C}_i \boldsymbol{\omega}_{\mathfrak{B}}$	velocidade angular da base \mathfrak{B} em relação à base \mathcal{J} , expressa em \mathcal{C}_i
$\mathcal{C}_i \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{C}_i}$	velocidade angular da base \mathcal{C}_i em relação à base \mathfrak{B} , expressa em \mathcal{C}_i
$\mathbf{W}_{\boldsymbol{\eta}}$	matriz que relaciona a velocidade angular $\dot{\boldsymbol{\eta}}$ com a velocidade angular $\mathfrak{B}_{\mathcal{J}} \boldsymbol{\omega}_{\mathfrak{B}}$

$\hat{\mathbf{c}}_i$	contém os ângulos relativos às rotações em torno dos eixos intermediários
$\mathbf{W}_{\mathcal{C}_i}$	matriz que relaciona a velocidade angular $\hat{\mathbf{c}}_i$ com a velocidade angular ${}^{\mathcal{C}_i}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{C}_i}$
${}^{\mathfrak{B}}\mathbf{d}_{\mathcal{C}_i}$	deslocamento da origem da base \mathcal{C}_i em relação à origem de \mathfrak{B} , ${}^{\mathfrak{B}}\mathbf{d}_{\mathcal{C}_i} = [{}^{\mathfrak{B}}d_{ix} \quad {}^{\mathfrak{B}}d_{iy} \quad {}^{\mathfrak{B}}d_{iz}]^T$
n_c	número de corpos rígidos interligados que compõem um sistema multi-corpo
n_s	número de coordenadas generalizadas ou de configuração
n_r	número de restrições holonômicas impostas ao sistema
n	número de coordenadas generalizadas
\mathbf{q}	vetor de coordenadas generalizadas, $\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_n]^T$
$\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$	energia cinética do sistema
$\mathcal{K}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$	energia cinética do corpo da base \mathcal{C}_i
$\mathcal{U}(\mathbf{q})$	energia potencial do sistema
$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$	função Lagrangiana do sistema mecânico
dm_i	partícula de massa elementar de um corpo i
ρ_i	densidade de massa em um ponto P_i de um corpo i
dV_i	volume elementar da partícula de um corpo i
m_i	massa de um corpo i
m_t	massa total do sistema
${}^{\mathcal{C}_i}\mathbf{I}$	tensor de inércia em relação à base \mathcal{C}_i
$I_{xx_i}, I_{yy_i}, I_{zz_i}$	momentos polares de inércia
$I_{xy_i}, I_{xz_i}, I_{yz_i}$	produtos de inércia
${}^{\mathfrak{B}}\mathbf{J}_i$	tensor de inércia do i -ésimo corpo expresso na base \mathfrak{B}
\mathbf{J}_η	tensor de inércia do sistema de corpos

$\mathbf{M}(\mathbf{q})$	matriz de inércia de um sistema
$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$	matriz de forças centrífugas e de Coriolis de um sistema
$\mathbf{G}(\mathbf{q})$	vetor de força gravitacional de um sistema
$\mathbf{F}(\mathbf{q})$	forças e torques que conduzem as coordenadas generalizadas de um sistema
\mathbf{u}	vetor que contém as entradas de atuação do sistema
$\mathbf{M}_{\textcircled{2}}(\mathbf{q})$	matriz de inércia do VANT de dois rotores inclináveis e com um <i>gimbal</i> Az-El integrado
$\mathbf{M}_{\textcircled{4}}(\mathbf{q})$	matriz de inércia do VANT de quatro rotores inclináveis e com um <i>gimbal</i> Az-El integrado
$\mathbf{M}_{\textcircled{6}}(\mathbf{q})$	matriz de inércia do quadrirotor convencional com <i>gimbal</i> Az-El integrado
$\mathbf{C}_{\textcircled{2}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$	matriz de forças centrífugas e de Coriolis do VANT de dois rotores inclináveis e com um <i>gimbal</i> Az-El integrado
$\mathbf{C}_{\textcircled{4}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$	matriz de forças centrífugas e de Coriolis do VANT de quatro rotores inclináveis e com um <i>gimbal</i> Az-El integrado
$\mathbf{C}_{\textcircled{6}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$	matriz de forças centrífugas e de Coriolis do quadrirotor convencional com <i>gimbal</i> Az-El integrado
$\mathbf{G}_{\textcircled{2}}(\mathbf{q})$	vetor de força gravitacional do VANT de dois rotores inclináveis e com um <i>gimbal</i> Az-El integrado
$\mathbf{G}_{\textcircled{4}}(\mathbf{q})$	vetor de força gravitacional do VANT de quatro rotores inclináveis e com um <i>gimbal</i> Az-El integrado
$\mathbf{G}_{\textcircled{6}}(\mathbf{q})$	vetor de força gravitacional do quadrirotor convencional com <i>gimbal</i> Az-El integrado
$\mathbf{B}_{\textcircled{2}}(\mathbf{q})$	matriz de forças externas do VANT de dois rotores inclináveis e com um <i>gimbal</i> Az-El integrado
$\mathbf{B}_{\textcircled{4}}(\mathbf{q})$	matriz de forças externas do VANT de quatro rotores inclináveis e com um <i>gimbal</i> Az-El integrado
$\mathbf{B}_{\textcircled{6}}(\mathbf{q})$	matriz de forças externas do quadrirotor convencional com <i>gimbal</i> Az-El integrado

$\mathbf{F}_{\textcircled{2}}(\mathbf{q})$	forças e torques que conduzem as coordenadas generalizadas em \mathbf{q} do VANT de dois rotores inclináveis e com um <i>gimbal</i> Az-El integrado
$\mathbf{F}_{\textcircled{4}}(\mathbf{q})$	forças e torques que conduzem as coordenadas generalizadas em \mathbf{q} do VANT de quatro rotores inclináveis e com um <i>gimbal</i> Az-El integrado
$\mathbf{F}_{\textcircled{9}}(\mathbf{q})$	forças e torques que conduzem as coordenadas generalizadas em \mathbf{q} do quadrirotor convencional com <i>gimbal</i> Az-El integrado
$\mathbf{F}_e = \mathbf{d}_{\textcircled{2}}$	força originada de distúrbios externos desconhecidos do VANT de dois rotores inclináveis e com um <i>gimbal</i> Az-El integrado
$\mathbf{F}_e = \mathbf{d}_{\textcircled{4}}$	força originada de distúrbios externos desconhecidos do VANT de quatro rotores inclináveis e com um <i>gimbal</i> Az-El integrado
$\mathbf{F}_e = \mathbf{d}_{\textcircled{9}}$	força originada de distúrbios externos desconhecidos do quadrirotor convencional com <i>gimbal</i> Az-El integrado
α_i	ângulo de inclinação do i -ésimo rotor
γ_1	ângulo azimute em torno do eixo vertical ${}^{\mathfrak{B}}\mathbf{z}$ do VANT com <i>gimbal</i> Az-El ou ângulo de rolagem em torno do eixo ${}^{\mathfrak{B}}\mathbf{x}$ para o VANT com <i>gimbal</i> Ro-El
γ_2	ângulo de elevação em torno do eixo horizontal ${}^{\mathcal{C}_{Az}}\mathbf{y}$ da base \mathcal{C}_{Az} do corpo orientável para o VANT com <i>gimbal</i> Az-El ou ângulo de elevação em torno do eixo horizontal ${}^{\mathcal{C}_{Ro}}\mathbf{y}$ da base \mathcal{C}_{Ro} do corpo orientável para o VANT com <i>gimbal</i> Ro-El
$\dot{\gamma}_1$	velocidade angular em torno do eixo de rotação do <i>gimbal</i> externo
$\dot{\gamma}_2$	velocidade angular em torno do eixo de rotação do <i>gimbal</i> interno
\mathcal{C}_{Az}	base do corpo orientável para o <i>gimbal</i> Az-El
\mathcal{C}_{Ro}	base do corpo orientável para o <i>gimbal</i> Ro-El
${}^{\mathcal{C}_{Az}}\mathbf{R}_{\mathfrak{B}}$	matriz de rotação que descreve a orientação da base \mathfrak{B} em relação à base \mathcal{C}_{Az}
${}^{\mathfrak{B}}\mathbf{R}_{\mathcal{C}_{Az}}$	matriz de rotação que descreve a orientação da base \mathcal{C}_{Az} em relação à base \mathfrak{B}

${}^{\mathfrak{B}}\mathbf{R}_{\mathfrak{C}_{Ro}}$	matriz de rotação que descreve a orientação da base \mathfrak{C}_{Ro} em relação à base \mathfrak{B}
${}^{\mathfrak{C}_{Az}}_{\mathfrak{B}}\boldsymbol{\omega}_{\mathfrak{C}_{Az}}$	velocidade angular da base \mathfrak{C}_{Az} em relação à base \mathfrak{B} , expressa em \mathfrak{C}_{Az}
${}^{\mathfrak{C}_{Ro}}_{\mathfrak{B}}\boldsymbol{\omega}_{\mathfrak{C}_{Ro}}$	velocidade angular da base \mathfrak{C}_{Ro} em relação à base \mathfrak{B} , expressa em \mathfrak{C}_{Ro}
${}^{\mathfrak{C}_{Az}}_{\mathfrak{J}}\boldsymbol{\omega}_{\mathfrak{C}_{Az}}$	velocidade angular da base \mathfrak{C}_{Az} em relação à base \mathfrak{J} , expressa em \mathfrak{C}_{Az}
\mathbf{W}_{γ}	matriz que relaciona a velocidade angular $\boldsymbol{\gamma}$ com a velocidade angular ${}^{\mathfrak{C}_{Az}}_{\mathfrak{B}}\boldsymbol{\omega}_{\mathfrak{C}_{Az}}$ para o <i>gimbal</i> Az-El ou com a velocidade angular ${}^{\mathfrak{C}_{Ro}}_{\mathfrak{B}}\boldsymbol{\omega}_{\mathfrak{C}_{Ro}}$ para o <i>gimbal</i> Ro-El
\mathbf{W}_{α_i}	matriz que relaciona a velocidade angular $\dot{\alpha}_i$ com a velocidade angular ${}^{\mathfrak{C}_i}_{\mathfrak{B}}\boldsymbol{\omega}_{\mathfrak{C}_i}$
n_{prop}	número de propulsores do VANT
M_i	motor do i -ésimo propulsor
$\boldsymbol{\Omega}_i$	velocidade angular do motor M_i em torno do seu eixo de rotação
f_i	força de propulsão (ou empuxo) relativa ao i -ésimo propulsor
$d\mathbf{f}_s$	força de sustentação elementar atuante em um segmento da pá de hélice
$d\mathbf{f}$	força de propulsão elementar atuante em um segmento da pá de hélice
$d\boldsymbol{\tau}$	torque elementar atuante em um segmento da pá de hélice
$d\mathbf{f}_a$	força de arrasto elementar atuante em um segmento da pá de hélice
$\boldsymbol{\tau}_{M_i}$	torque existente devido ao arrasto na hélice do i -ésimo propulsor
$\boldsymbol{\tau}_{f_i}$	torque existente devido a distância em que as forças de propulsão são aplicadas em relação ao centro de rotação do sistema
$\boldsymbol{\tau}_{\alpha}$	torque aplicado pelo motor acoplado diretamente ao eixo de rotação em $\boldsymbol{\alpha}$ de inclinação dos rotores

τ_{γ}	torque aplicado pelo motor acoplado diretamente ao eixo de rotação em γ referentes ao <i>gimbal</i>
θ_p	ângulo de atitude da pá de hélice
ϕ_p	ângulo de <i>inflow</i> da pá de hélice
n_p	número de pás de hélice em uma determinada hélice
α_p	ângulo de ataque da pá de hélice
ρ	densidade do meio
C_s	coeficiente de sustentação
C_a	coeficiente de arrasto
k_e	coeficiente que relaciona velocidade-empuxo
k_{τ}	coeficiente que relaciona velocidade-torque
I_{r_i}	momento de inércia do motor M_i em torno de seu eixo
$\dot{\Omega}_i$	aceleração angular do motor M_i
λ_i	termo dependente do sentido de giro do motor M_i , $\lambda_i = -1$ para giro no sentido horário e $\lambda_i = 1$ para sentido anti-horário
${}^{\mathfrak{B}}f_i$	força de propulsão devido ao i -ésimo propulsor, expressa na base \mathfrak{B}
${}^{\mathfrak{B}}\tau$	torque total em torno dos eixos da base \mathfrak{B} , ${}^{\mathfrak{B}}\tau = [\tau_x \quad \tau_y \quad \tau_z]^T$
${}^{\mathfrak{J}}T_{\xi}$	força de propulsão resultante expressa na base \mathfrak{J} , ${}^{\mathfrak{J}}T_{\xi} = [T_x \quad T_y \quad T_z]^T$
τ_{η}	torque resultante, $\tau_{\eta} = [\tau_{\phi} \quad \tau_{\theta} \quad \tau_{\psi}]^T$

Notação de controle

V	subconjunto aberto do \mathbb{R}^n ($V \subset \mathbb{R}^n$)
U	subconjunto aberto ($U \subset V \subset \mathbb{R}^n$)

\mathbf{x}_0	ponto de trabalho do sistema
U_0	vizinhança aberta de \mathbf{x}_0
\mathbf{x}	vetor de estados do sistema
\mathbf{u}	vetor das entradas de controle
p	número de saídas do sistema
m	número de entradas do sistema
\mathbf{y}	vetor de saídas do sistema
$\mathbf{f}(\mathbf{x})$	campo vetorial não linear, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}) \ \cdots \ f_n(\mathbf{x})]^T$
$\mathbf{G}(\mathbf{x})$	matriz formada por $\mathbf{g}_j(\mathbf{x}) = [g_{1j}(\mathbf{x}) \ \cdots \ g_{nj}(\mathbf{x})]^T$, onde o campo vetorial não linear $\mathbf{g}_j(\mathbf{x})$ é a j -ésima coluna de $\mathbf{G}(\mathbf{x})$
$\mathbf{h}(\mathbf{x})$	campo vetorial da saída \mathbf{y} , $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = [h_1(\mathbf{x}) \ \cdots \ h_m(\mathbf{x})]^T$
C^∞	descreve uma classe mapeamentos suaves que possuem derivadas de qualquer ordem, todas definidas e contínuas
\mathbf{v}	nova entrada de controle
\mathbf{A}	matriz linear de estado
\mathbf{B}	matriz linear de entrada
$\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})$	vetor relativo à lei de controle $\mathbf{u} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x})\mathbf{v}$
$\boldsymbol{\beta}(\mathbf{x})$	matriz relativa à lei de controle $\mathbf{u} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x})\mathbf{v}$
$\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x})$	matriz inversa de $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{x})$, $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\beta}^{-1}(\mathbf{x})$
$\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$	campo vetorial do sistema em malha fechada
$\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{x})$	campo vetorial do sistema em malha fechada
\mathbf{z}	novo vetor de estados do sistema após uma transformação não linear de coordenadas, $\mathbf{z} = [\mathbf{z}_o^T \ \mathbf{z}_u^T]^T$
$\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})$	mapeamento suave referente à transformação de coordenadas
$\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{z})$	campo vetorial do sistema expresso em função das coordenadas em \mathbf{z}

$\bar{\mathbf{G}}(\mathbf{z})$	campo vetorial do sistema expresso em função das coordenadas em \mathbf{z}
$\bar{\mathbf{h}}(\mathbf{z})$	campo vetorial da saída \mathbf{y} , expresso em função das coordenadas em \mathbf{z}
$L_f h_i(\mathbf{x})$	derivada de Lie de h_i em relação a $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ao longo de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$
$L_{g_j} h_i(\mathbf{x})$	derivada de Lie de h_i em relação a $\mathbf{g}_j(\mathbf{x})$ ao longo de $\mathbf{g}_j(\mathbf{x})$
y_i	componente da saída \mathbf{y}
$y_i^{(k)}$	k -ésima derivada temporal de y_i
r_i	grau relativo de y_i
\mathbf{r}	vetor de grau relativo, $\mathbf{r} = [r_1 \quad r_2 \quad \cdots \quad r_m]^T$
r	soma dos graus relativos das saídas y_i
$\Delta_i^{r_i}(\mathbf{x})$	vetor linha, $\Delta_i^{r_i}(\mathbf{x}) = [L_{g_1} L_f^{r_i-1} h_i(\mathbf{x}) \cdots L_{g_m} L_f^{r_i-1} h_i(\mathbf{x})]$
$\mathbf{b}(\mathbf{x})$	vetor coluna, $\mathbf{b}(\mathbf{x}) = [L_f^{r_1} h(\mathbf{x}) \quad L_f^{r_2} h(\mathbf{x}) \quad \cdots \quad L_f^{r_m} h(\mathbf{x})]^T$
$\Delta(\mathbf{x})$	matriz de desacoplamento, $\Delta(\mathbf{x}) = [\Delta_1^{r_1}(\mathbf{x}) \quad \Delta_2^{r_2}(\mathbf{x}) \quad \cdots \quad \Delta_m^{r_m}(\mathbf{x})]^T$
$\theta(\mathbf{x})$	vetor com r funções estabelecidas para a transformação de coordenadas
$\psi(\mathbf{x})$	vetor com $n - r$ funções que necessitam ser encontradas para completar a transformação de coordenadas
\mathbf{z}_o	subsistema observável nas novas coordenadas \mathbf{z} , onde $\mathbf{z}_o = [\mathbf{z}_o^1 \quad \cdots \quad \mathbf{z}_o^m]^T \in \mathbb{R}^r$ e $\mathbf{z}_o^i = [z_{o,1}^i \quad \cdots \quad z_{o,r_i}^i]^T \in \mathbb{R}^{r_i}$, com $i = 1, \dots, m$
$\mathbf{z}_{\bar{o}}$	subsistema não observável nas novas coordenadas \mathbf{z} , caracterizando a dinâmica interna do sistema, $\mathbf{z}_{\bar{o}} = [z_{\bar{o},1} \quad \cdots \quad z_{\bar{o},(n-r)}]^T$
$\mathbf{b}_{\bar{o}}(\mathbf{z}_o, \mathbf{z}_{\bar{o}})$	vetor coluna de dimensão $(n - r)$ referente à dinâmica interna do sistema em malha aberta
$\Delta_{\bar{o}}(\mathbf{z}_o, \mathbf{z}_{\bar{o}})$	matriz de dimensão $(n - r) \times m$ referente à dinâmica interna do sistema em malha aberta

$\mathbf{f}_{\bar{o}}(\mathbf{z}_o, \mathbf{z}_{\bar{o}})$	campo vetorial referente à dinâmica interna do sistema em malha fechada
$\mathbf{G}_{\bar{o}}(\mathbf{z}_o, \mathbf{z}_{\bar{o}})$	campo vetorial referente à dinâmica interna do sistema em malha fechada
$\mathbf{A}_{o,i}$	matriz linear de estado para o subsistema observável, referente à saída y_i
$\mathbf{b}_{o,i}$	vetor linear de entrada para o subsistema observável, referente à saída y_i
$\mathbf{c}_{o,i}$	vetor linear de saída para o subsistema observável, referente à saída y_i
\mathbf{e}	erro, $\mathbf{e} = \mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}$
\mathbf{w}	dinâmica desejada para o erro
\mathbb{T}	trajetória de referência
K_P	ganho proporcional ao erro
K_D	ganho proporcional à derivada do erro
K_I	ganho proporcional à integral do erro
ζ	coeficiente de amortecimento de um sistema de segunda ordem
ω_n	frequência natural não amortecida de um sistema de segunda ordem
s_d	polo desejado

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	31
1.1	MOTIVAÇÃO	31
1.1.1	Descrição do Problema	32
1.2	REVISÃO DA LITERATURA	34
1.2.1	Contexto histórico	34
1.2.2	Sistema de direcionamento da câmera e controle servo-visual	39
1.2.3	VANTs, aplicação e problema de controle	42
1.3	OBJETIVOS DO TRABALHO	45
1.3.1	Objetivo geral	45
1.3.2	Objetivos específicos	45
1.4	DELIMITAÇÃO DO TRABALHO	46
1.5	CONTRIBUIÇÃO CIENTÍFICA	46
1.6	ESTRUTURA DO TEXTO	47
2	FUNDAMENTAÇÃO DA MODELAGEM	49
2.1	REPRESENTAÇÃO DE UM CORPO RÍGIDO NO ESPAÇO .	49
2.1.1	Representação da posição	49
2.1.2	Representação da orientação	50
2.2	CINEMÁTICA DO CORPO RÍGIDO	55
2.2.1	Representação de sistemas com múltiplos corpos	60
2.3	DINÂMICA DO CORPO RÍGIDO	62
2.3.1	Método de Euler-Lagrange para obtenção da equação do movimento	64
2.3.1.1	Energia Cinética do sistema	64
2.3.1.2	Energia Potencial do sistema	70
2.3.1.3	Equações do movimento	71
2.4	COMENTÁRIOS	72
3	MODELAGEM	73
3.1	MODELO DO GIMBAL	73
3.1.1	Análise cinemática do <i>gimbal</i>	74
3.2	MODELO DOS ROTORES	79
3.3	MODELO DE UM VANT HÍBRIDO DE DOIS ROTORES INCLINÁVEIS E COM <i>GIMBAL</i> INTEGRADO	82
3.3.1	Cinemática e coordenadas generalizadas do sistema	83
3.3.2	Equações da dinâmica do sistema	87
3.4	MODELO DE UM VANT HÍBRIDO DE QUATRO ROTORES INCLINÁVEIS E COM <i>GIMBAL</i> INTEGRADO	91
3.4.1	Cinemática e coordenadas generalizadas do sistema	91

3.4.2	Equações da dinâmica do sistema	95
3.4.3	Quadrirotor convencional com <i>gimbal</i> Az-El	99
3.5	COMENTÁRIOS	102
4	CONTROLE	105
4.1	CONTROLE POR REALIMENTAÇÃO LINEARIZANTE ...	106
4.2	REPRESENTAÇÃO NO ESPAÇO DE ESTADOS DO SISTEMA FORMADO PELO VANT HÍBRIDO DE DOIS ROTORES INCLINÁVEIS COM O GIMBAL AZ-EL INTEGRADO	116
4.3	CONTROLE APLICADO	119
4.3.1	Controlador de inclinação dos rotores	120
4.3.2	Controlador rotacional e de apontamento da câmera	124
4.3.3	Controlador translacional	127
4.3.4	Mapeamento	129
4.3.5	Projeto da realimentação estabilizante	131
4.4	RESULTADOS DE SIMULAÇÃO	133
5	CONCLUSÃO	143
5.1	PROPOSTAS PARA TRABALHOS FUTUROS	143
	APÊNDICE A – Conceitos adicionais sobre cinemática	147
	REFERÊNCIAS	151

1 INTRODUÇÃO

Os sistemas de vigilância e monitoramento têm sido amplamente utilizados nas grandes cidades como forma de aumentar a segurança da população e também para permitir o levantamento de dados que possam contribuir para melhoria nos sistemas de tráfego urbano, na intervenção em caso de acidentes, na inspeção de ambientes hostis ou de difícil acesso, entre outras aplicações.

A vigilância e monitoramento a partir de equipamentos fixos têm a desvantagem de não cobrir todas as áreas de interesse e, principalmente, não fornecer a possibilidade de aproximação do alvo para obter detalhes mais fidedignos daquilo que está realmente acontecendo.

O tema de segurança pública urbana faz parte de discussões atuais no cenário nacional e internacional, devido, em grande parte, a altos índices de violência e crimes, conforme atestam os dados estatísticos divulgados pelos organismos que tratam do assunto (SINESP - Sistema Nacional de Informações de Segurança Pública, 2016). No Brasil, dentro desse contexto pode-se visualizar grande preocupação com a segurança das pessoas e patrimônios em instituições públicas e privadas. Normalmente, nestes casos, busca-se oferecer segurança por meio de sistemas de segurança com câmeras, sensores e alarmes e contratação de empresas de segurança e monitoramento.

Um exemplo é a própria Universidade Federal de Santa Catarina, que possui sistemas de câmeras e mantém contratos com empresas de segurança para atender seus Campi. A situação de insegurança é mais crítica na sede em Florianópolis, em parte pelo contexto social dos arredores da instituição e em parte pelas suas dimensões. A situação não é diferente para instituições privadas, que também são alvos de furtos e depredações.

As empresas de segurança contratadas se servem de sistemas de câmeras e de profissionais treinados e, em muitos casos, armados, para fazer a vigilância dos ambientes. Os sistemas de câmeras auxiliam na vigilância, entretanto nem sempre cobrem todo o perímetro, assim os vigilantes fazem algumas rondas para tentar garantir segurança. Apesar disso, o fato é que o aumento da violência e impunidade influenciam na redução da eficiência desse tipo de serviço. Não bastasse isto, é comum que os próprios vigilantes sejam alvos de violência e necessitem de um sistema de apoio às suas tarefas.

1.1 MOTIVAÇÃO

Uma forma idealizada para melhorar a eficiência dos sistemas convencionais de segurança e ainda proporcionar um nível menor de exposição aos

profissionais da área é a adição de robôs móveis dotados de câmeras ao sistema de vigilância.

Os veículos aéreos não tripulados (VANTs) são robôs móveis que têm despertado muito interesse da comunidade científica devido à sua flexibilidade de uso em diversas aplicações. Muitos avanços na área foram realizados durante as últimas décadas, principalmente devido à disponibilidade no mercado civil, miniaturização e redução de preço dos sensores, atuadores e sistemas de processamento essenciais para sua construção e funcionamento. Seu uso tem se mostrado eficiente em substituir métodos tradicionais, muitas vezes reduzindo custos de operação, riscos à vida, ou mesmo possibilitando atividades antes inviáveis.

Um dos cenários explorados para o problema de segurança e monitoramento é a adição de câmera ao VANT para captura de imagens, proporcionando a extensão de suas funcionalidades. Com isso em mente, um novo conceito pode ser concebido, o de um sistema de segurança composto por câmeras fixas, vigilantes e robôs aéreos, conectados, formando uma rede de sensores. Para uma proposta desse tipo é possível identificar as seguintes situações e motivações:

- os robôs aéreos assumem a tarefa de ronda e assim os vigilantes podem ficar em lugar seguro exercendo a função de supervisor do sistema de vigilância;
- o número de rondas pode ser aumentado sem envolver grandes riscos para os vigilantes e sem acréscimo substancial de custos;
- os robôs possibilitam cobrir uma área maior do que aquela coberta apenas por câmeras fixas;
- as imagens geradas pelas câmeras dos robôs podem também contribuir para a identificação de suspeitos e, com isso, diminuir a impunidade;
- o fato de haver conexão via rede permite que se tenha uma maior velocidade para acionar órgãos públicos competentes e realimentá-los com informações importantes.

1.1.1 Descrição do Problema

Do ponto de vista técnico e científico, existem vários desafios relacionados à proposta apresentada. Dentre os quais são destacados:

- o projeto e a construção de um robô móvel, considerando aspectos eletromecânicos, como potência dos motores, carga máxima transportada e

autonomia de voo, resultando em um veículo aéreo não tripulado com câmera embarcada, cujas características de voo e disposição da câmera sejam vantajosas do ponto de vista da aplicação;

- a construção de uma estação de teleoperação, ou estação base, que possibilite ao teleoperador alterar variáveis de configuração do robô, bem como receber os dados capturados por ele;
- o desenvolvimento de um sistema de comunicação entre o robô e a base, formando uma rede de sensores sem fio;
- o desenvolvimento de um sistema de localização e mapeamento do ambiente;
- o desenvolvimento de um sistema de planejamento e geração de trajetória;
- a obtenção de um modelo matemático que descreve o comportamento do robô e a concepção de um sistema de controle que proporcione seguimento de referências e rejeição de perturbações;
- o desenvolvimento de um sistema de tratamento de imagem em tempo real para detecção e distinção de alvos.

Em especial, dentro do contexto de modelagem e desenvolvimento do sistema de controle para um VANT com câmera orientável, ao qual são fornecidas referências relacionadas a tarefas de ronda ou missões relativas ao deslocamento de um suspeito, os principais problemas são:

- definição das características construtivas desejadas e utilização de princípios físicos fundamentais para a obtenção do modelo;
- controle das variáveis de configuração do robô de forma que ele rastreie trajetórias de translação e direcionamento, além do apontamento da câmera, a partir de referências fornecidas por um teleoperador ou sistema de navegação;

Entretanto, as características de projeto e construção estão diretamente ligadas ao problema de controle. Assim, determinar qual configuração de VANT usar e como é estabelecido o apontamento da câmera são os problemas iniciais que necessitam ser tratados. Além disso, é desejável dispor de um modelo que descreva o comportamento do robô da forma mais fiel possível, com isso consegue-se projetar sistemas de controle e realizar simulações que levam a resultados próximos aos que seriam obtidos em uma situação real.

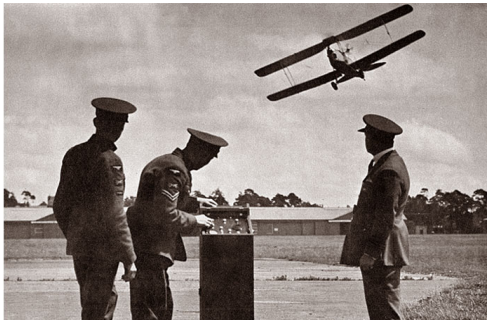
1.2 REVISÃO DA LITERATURA

Genericamente, VANT trata-se de um veículo com capacidade de voar sem tripulação, podendo ser conduzido por um piloto em uma estação de teleoperação ou voar de forma autônoma baseado em rotas pré-programadas (García Carrillo et al., 2013).

1.2.1 Contexto histórico

Os primeiros VANTs foram concebidos para aplicações militares, sendo considerados os precursores dos mísseis de cruzeiro atuais. Em 1917, a marinha dos Estados Unidos da América apresentou o “torpedo aéreo”, um biplano, não tripulado, feito de madeira e pesando 270kg. Carregava um estabilizador giroscópico para manter o nível da aeronave, um giroscópio para orientá-lo automaticamente de acordo com direcionamentos predefinidos, um barômetro para regular a altitude de cruzeiro e um contador de rotações do motor para estimar quando o veículo deveria cortar a alimentação e mergulhar em direção ao seu alvo (García Carrillo et al., 2013). Nos anos subsequentes, o avanço se deu devido à introdução do rádiocontrole, que possibilitou a correção da trajetória durante o voo e o retorno da aeronave. Criado em 1934, o Queen Bee, Figura 1, foi o primeiro VANT desenvolvido para ser reutilizável. Além de ser teleguiado, contava com um sistema automático de aterrissagem para o caso de perda da comunicação com a base (Vintage Wings of Canada, 2017).

Figura 1 – Queen Bee sendo controlado remotamente.



Fonte: Imagem obtida em <http://www.vintagewings.ca/VintageNews/Stories/tabid/116/articleType/ArticleView/articleId/484/The-Mother-of-All-Drones.aspx>

A partir dos anos 60, os VANTs começam a ser efetivamente utilizados para propósitos de reconhecimento do território inimigo. Nesse período surgem as primeiras adaptações com objetivo de capacitar os VANTs a portarem câmeras fotográficas (AUSTIN, 2010, pg. 307). As fotografias tiradas durante o voo eram reveladas na base após a aterrissagem. Contudo, VANTs projetados especificamente para missões de reconhecimento e vigilância apareceram apenas nos anos 70 (García Carrillo et al., 2013).

Embora já existissem veículos aéreos tripulados com diferentes características de voo, até os anos 60, veículos com asas fixas predominaram entre os não tripulados. Um helicóptero anti-submarino, chamado Gyrodyne DASH, Figura 2, foi o primeiro VANT a utilizar asas rotativas (ou asas móveis) (AUSTIN, 2010, pg. 307). Era construído com dois rotores (hélices) co-axiais girando em sentidos opostos para compensar o torque gerado em torno do eixo de rotação¹.

Figura 2 – Gyrodyne DASH transportando torpedos anti-submarino.



Fonte: Imagem obtida em

<http://www.designation-systems.net/dusrm/app4/qh-50.html>

Em meados dos anos 70, o Westland Wisp, um VANT de asas rotativas, carregava uma câmera e enviava as imagens capturadas em tempo real para a

¹Em alguns helicópteros atuais o segundo rotor é na cauda e perpendicular ao principal. Contudo, o objetivo é o mesmo, gerar uma força que compensa o torque do rotor principal.

base de teleoperação em curtas distâncias. Essa máquina também evidenciou as vantagens de um veículo com capacidade de pairar, quando em missões de vigilância (AUSTIN, 2010, pg. 309).

Utilizado durante os anos 80, o VANT IAI Scout era capaz de realizar transmissões em tempo real de imagens em 360 graus, geradas por uma câmera omnidirecional acoplada à sua estrutura. Nos anos 90, o aumento na disponibilidade dos dispositivos do sistema de posicionamento global (GPS, do inglês *global positioning system*) libertou os VANTs da dependência dos imprecisos sistemas de navegação até então utilizados. Outro feito importante nessa década foi a introdução do primeiro VANT de asas rotativas produzido em larga escala, o Yamaha R50, e sua versão aprimorada, o R.Max (García Carrillo et al., 2013).

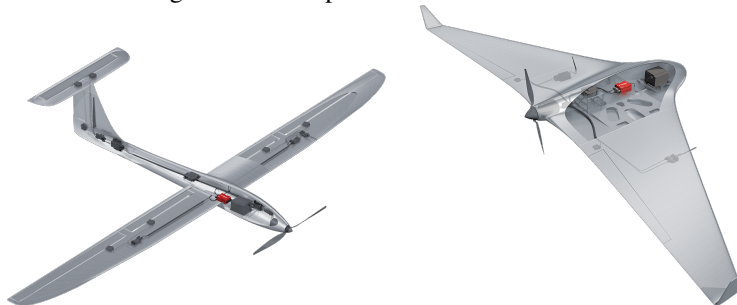
Durante os anos 2000, avanços ocorreram principalmente na área militar. Apenas no início dos anos 2010 é que começam efetivamente a surgir aplicações onde VANTs são utilizados em tarefas de caráter civil. Já nos dias atuais, é considerável o número de empresas e organizações investindo no emprego de VANTs como solução para problemas nas mais diversas áreas. Suas características são atrativas tanto em aplicações militares quanto civis, pois reduzem a exposição de vidas humanas a situações de risco. Além disso, a eliminação do espaço necessário para comportar a tripulação, favoreceu a miniaturização e o transporte de cargas úteis.

Junto à expansão na gama de aplicações que os VANTs passaram a ser empregados, cresce o número de variações nos projetos de construção, visando ajustes úteis nas características estruturais, de voo, otimização do consumo de energia, entre outros. Em García Carrillo et al. (2013) é apresentada uma classificação, em função dessas características, para os principais VANTs existentes atualmente. Segundo o autor, eles podem ser separados em quatro categorias: *fixed-wing*, *flapping-wing*, *blimps* e *rotary-wings*. As duas categorias principais, por comportarem os veículos mais populares, são: VANTs do tipo *fixed-wing*, Figura 3, denominados, na língua portuguesa, como veículos de asas fixas, e os *rotary-wings*, Figura 4, em português, chamados de VANTs com asas rotativas ou móveis.

Os VANTs de asas fixas têm como características principais percorrer longas distâncias e atingir altas velocidades de cruzeiro. Devido a relativa simplicidade de construção, na maioria dos casos, apresentam também uma maior robustez mecânica. Contudo, têm manobrabilidade limitada, que impede seu uso em espaços confinados, necessitam manter uma velocidade de deslocamento mínima para gerar a força de sustentação que os assegura o voo além de um espaço livre para decolagem e pouso. Já os VANTs de asas rotativas, exibem grande manobrabilidade, a capacidade de pairar, além de decolar e aterrissar verticalmente (por essa característica são chamados de VTOL, do

inglês *vertical take-off and landing*). Entretanto, têm maiores limitações na máxima velocidade atingida, são afetados por distúrbios como o efeito solo, além da dinâmica ser naturalmente instável, o que torna a tarefa de controle mais desafiadora.

Figura 3 – Exemplos de VANTs com asas fixas



Fonte: Imagem obtida em
<https://www.airware.com/products/flight-core>

Figura 4 – Veículo com quatro asas rotativas, quadrirotor



Fonte: Imagem obtida em
<https://www.airware.com/products/flight-core>

Um conceito há tempos explorado em se tratando dos veículos aéreos tripulados é a construção de aeronaves híbridas na tentativa de combinar as vantagens das asas fixas e rotativas em um só veículo, sendo vários os modelos concebidos ao longo da história (MAISEL; GIULIANETTI; DUGAN, 2000). Um exemplo é o Agusta Westland AW609, Figura 5, com dois rotores inclináveis, que é capaz de decolar e aterrissar verticalmente e ainda atingir uma velocidade

de cruzeiro de 482 km/h. Em uma comparação apresentada por Almeida Neto (2014), é possível identificar que essa velocidade é superior à de helicópteros convencionais e, apesar de não atingir a mesma velocidade de cruzeiro dos aviões de asas fixas com propulsão à jato, cumpre seu propósito. A empresa Bell Helicopter, outra fabricante de aeronaves deste tipo, tem previsão de lançar no ano de 2017 o Bell V-280 Valor, Figura 6, um veículo que também conta com dois rotores inclináveis, sendo destinado ao uso militar.

Figura 5 – Agusta Westland AW609 com rotores (a) na vertical e (b) inclinados na horizontal.



Fonte: (a)⁶ e (b)⁷

Aeronaves com rotores inclináveis, como as mencionadas, têm se mostrado eficazes na categoria de veículos aéreos híbridos e tripulados. No caso dos não tripulados, a aeronave Bell Eagle Eye, tem amplo sucesso nas áreas militar e civil.

As características diferenciadas que os veículos híbridos possuem, bem como os desafios relacionados à construção e controle atraíram vários pesquisadores ao longo da última década. Por exemplo, no caso de VANTs com dois rotores inclináveis encontra-se na literatura projetos como o BIROTAN (KENDOUL; FANTONI; LOZANO, 2005), o HARVee (DICKESON et al., 2007), o T-Phoenix (SANCHEZ et al., 2008), os veículos do Instituto de Pesquisas Aeroespaciais da Korea (LEE; MIN; KIM, 2007) e da Universidade Nanjing de Aeronáutica e Astronáutica na China (YANGUO; HUANJIN, 2009), o eVader (AMIRI; RAMIREZ-SERRANO; DAVIES, 2011), o UPAT (PAPACHRISTOS; ALEXIS; TZES, 2011), o PROVANT (GONÇALVES et al., 2013), entre outros, que em

⁶ Imagem obtida em <http://www.irelandaviation.com/n609ag-bell-agusta-ba-609-bellagusta-aerospace-2>.

⁷ Imagem obtida em http://www.flugzeuginfo.net/acdata_php/acdata_bellagusta_ba609_en.php.

Figura 6 – Bell V-280 Valor.



Fonte: Imagem obtida em
<http://www.bellhelicopter.com/military/bell-v-280>

sua essência baseiam-se na estrutura dos veículos tripulados de dois rotores inclináveis.

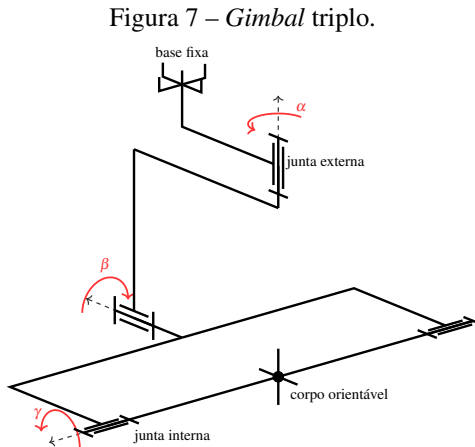
Nos últimos anos têm-se presenciado também movimentos de pesquisa envolvendo a concepção e desenvolvimento de VANTs híbridos resultantes da fusão entre o conceito de rotores inclináveis e os quadrirotores (em inglês *quadrotor*), que são veículos aéreos de asas rotativas com quatro rotores, almejando maior capacidade de carga e estabilidade. Nesse contexto, encontram-se projetos como o SUAVi (ÖNER et al., 2008), o Quad-plane (FLORES et al., 2012), o ALIV3 (MOUTINHO; MATEOS; CUNHA, 2015), além dos modelos apresentados em Ryll et al. (2013), Papachristos, Alexis e Tzes (2013), Lin et al. (2014), Oosedo et al. (2015) e Wang e Cai (2015), entre outros.

1.2.2 Sistema de direcionamento da câmera e controle servo-visual

Para atender às demandas do estudo, considera-se que o VANT é dotado de uma câmera ligada a ele por meio de um mecanismo que permite o controle de seu direcionamento sem necessariamente alterar a orientação do veículo. Este mecanismo é denominado genericamente, na língua inglesa, como *gimbal* (OSBORNE; HICKS; FUENTES, 2008), tratando-se de um manipulador com um ou mais graus de liberdade. Desse modo, elimina-se a necessidade do VANT manter uma orientação constante em relação ao alvo, que ocorreria no caso de um acoplamento rígido.

O dispositivo de orientação como um todo pode consistir em uma ou mais juntas revolutas dispostas em eixos ortogonais e de forma sequencial, sendo que cada seguimento rotacionável constitui um *gimbal*. Seu propósito é

proporcionar ao corpo que está acoplado ao mais interno dos seguimentos certa liberdade de orientação em relação a uma base. O esquema de um *gimbal* triplo, ou *gimbal* de três graus de liberdade, é apresentado na Figura 7. Dispositivos deste tipo formam as chamadas plataformas inercialmente estabilizadas, sendo que a estabilização consiste em manter a direção de apontamento do *gimbal* interno invariante em relação a um referencial inercial, mesmo na presença de movimentos na base.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A forma com que é construído e analisado pode variar, assim como a sua aplicação. Osborne, Hicks e Fuentes (2008) apresentam um estudo aprofundado da cinemática e dinâmica de uma estrutura com dois graus de liberdade, onde cada seguimento da estrutura, bem como a base fixa, são tratados como corpos que constituem o sistema. O mecanismo de um modo geral é um componente fundamental em aplicações de apontamento e rastreamento de alvos, sendo utilizado no direcionamento de telescópios terrestres, antenas, câmeras, sistemas de comunicação a *laser*, entre outros (HILKERT, 2008).

Seja o *gimbal* utilizado para direcionamento ou apenas para estabilização, as juntas são normalmente providas de atuação efetuada por motores⁸. Sensores inerciais como o giroscópio são geralmente colocados junto ao corpo, no *gimbal* interno, fornecendo ao sistema de controle sinais referentes à veloci-

⁸Em um cenário ideal, onde o atrito nos eixos do *gimbal* pode ser negligenciado e assumindo um número suficiente de eixos, a orientação do corpo tende a permanecer estacionária mesmo sem o uso de atuadores.

dade angular em torno dos eixos de interesse (EKSTRAND, 2001). Informações sobre a posição angular podem ser estimadas ou obtidas diretamente a partir de *encoder* rotacional acoplado aos eixos.

O vetor que representa a direção de apontamento do *gimbal* interno é denominado linha de visada (LOS, do inglês *Line of Sight*) (HILKERT, 2008). Para a aplicação proposta, o corpo fixo ao *gimbal* interno é uma câmera, a qual deseja-se direcionar para a captura de imagens. Sendo assim, a LOS pode ser interpretada como a linha que parte do centro do sensor da câmera, sendo perpendicular ao seu plano e que se estende no espaço até um ponto que representa o centro da imagem capturada. Para o monitoramento de um alvo que se move em solo, é esperado que o sistema de controle comande o apontamento da câmera, forçando a LOS rastrear o deslocamento do alvo, mantendo-o no centro da imagem. A região formada pelas LOSs factíveis para determinada configuração de montagem do *gimbal* define seu campo de visão (FOV, do inglês *Field of View*).

Quando informações são obtidas do ambiente através de câmeras, tratadas utilizando sistemas de visão computacional e utilizadas em uma malha de controle para atuar nas variáveis que descrevem o movimento de um robô, este é denominado controle servo-visual. Adicionalmente, a configuração mencionada, com a câmera montada junto ao veículo, onde o movimento do mesmo implica também em um movimento da câmera, é chamada *eye-in-hand* (CHAUMETTE; HUTCHINSON, 2006).

A adição de câmera aos VANTs tem proporcionado um maior conhecimento do ambiente devido às informações extraídas das imagens capturadas, expandindo sua gama de aplicações. Por exemplo, a busca e detecção de rachaduras em pás de turbinas eólicas (WANG; ZHANG, 2017), o monitoramento da floresta independente de imagens providas por satélites (CRUZ et al., 2017), a inspeção de áreas com risco de inundação (SUMALAN; POPESCU; ICHIM, 2016) e a própria vigilância e monitoramento de áreas urbanas (KINGSTON; BEARD; HOLT, 2008; SEMSCH et al., 2009). Porém, nota-se que grande parte dessas aplicações utilizam os VANTs de forma teleoperada e com a câmera empregada apenas na captura da imagem para análise futura em solo. Já o controle servo visual, bastante explorado em outras áreas da robótica (ESPIAU; CHAUMETTE; RIVES, 1992; TSAKIRIS; RIVES; SAMSON, 1997; CHAUMETTE; HUTCHINSON, 2006, 2007; LOMBARDI, 2008), tem destinação ainda modesta relacionada ao problema de controle de VANTs. Todavia, principalmente a partir de 2010, é possível encontrar trabalhos que exemplificam como o uso de um controle servo-visual agrega funcionalidades e vantagens aos VANTs, entre eles o rastreamento de marcações em plataformas móveis para realizar pouso autônomo (LEE; RYAN; KIM, 2012; FU et al., 2016), rastreamento e identificação de alvos (XIANG et al., 2016), detecção e rastreamento de objetos na superfície

do oceano usando câmera térmica (LEIRA; JOHANSEN; FOSSEN, 2015), entre outros (RAMIREZ-PAREDES et al., 2015; MANECY et al., 2016).

1.2.3 VANTs, aplicação e problema de controle

Entre outros fatores que podem afetar o desempenho de sistemas de vigilância e monitoramento utilizando VANTs com câmera estão a iluminação do ambiente, os limites do *gimbal* (graus de liberdade e intervalos de excursão dos ângulos), os limites da câmera (resolução e *zoom*), além do tempo necessário para processar a imagem e extrair as referências do alvo (SROLLE; RYSDYK, 2003; SUN; ZHU; YANG, 2008). Outro aspecto a ser considerado é que, para VANTs de pequeno porte, a força de arrasto que surge devido à presença da câmera e sua estrutura de fixação influencia significativamente na dinâmica do voo à medida que a velocidade aumenta (QUIGLEY et al., 2005). No que diz respeito às características construtivas do VANT para tal aplicação, é desejável que o veículo utilizado seja capaz de aproximar e manter-se dentro de uma região em que a distância entre ele e o alvo monitorado seja suficientemente pequena de modo a capturar as imagens pretendidas com maior exatidão.

Os VANTs de asas fixas, apesar de possuírem características que os tornam mais eficazes em realizar tarefas como rondas e perseguições, onde é possível e por vezes necessário atingir maiores velocidades, apresentam um maior desafio quando se deseja monitorar um alvo que permanece imóvel ou se desloca em baixa velocidade. A necessidade de se manter uma velocidade mínima para sustentar o voo torna-se um grande empecilho nesse caso. Para lidar com essa restrição, uma abordagem tipicamente utilizada é voar em trajetórias que descrevam padrões circulares ao redor do alvo, mantendo-o no centro (QUIGLEY et al., 2005; RAFI et al., 2006; SUN; ZHU; YANG, 2008; LIN; YANG, 2014; PRABOWO; TRILAKSONO; TRIPUTRA, 2015), contudo a manobrabilidade limitada dos VANTs de asas fixas dificulta a manutenção da linha de visão da câmera direcionada ao alvo. Nesse quesito, a habilidade de pairar dos VANTs com asas rotativas é de grande valia, pois elimina as restrições de aproximação do alvo mesmo este estando imóvel.

Uma forma de combinar as características operacionais requeridas de ambas as categorias de VANTs é o emprego veículos com rotores inclináveis. Os VANTs com rotores inclináveis, porém, exibem comportamentos complexos, representando um grande desafio à área de controle, principalmente devido às não linearidades, ao grande acoplamento entre as dinâmicas dos graus de liberdade e a subatuação.

O acoplamento entre as dinâmicas de rotação e translação aparece nos VANTs de asas rotativas de um modo geral e existe quando o centro

de massa do veículo não coincide com o seu centro de rotação. Entretanto, para fins de controle, em grande parte dos trabalhos existentes na área, principalmente os relacionados a quadrirotores de pequeno porte, um modelo simplificado é utilizado, obtido ao se considerar o VANT como um corpo rígido, simétrico e homogêneo, com centro de massa e de rotação coincidentes (MISTLER; BENALLEGUE; M'SIRDI, 2001; CASTILLO; DZUL; LOZANO, 2004; BOUABDALLAH; SIEGWART, 2005; MOKHTARI et al., 2006). Esta simplificação possibilita tratar os subsistemas de translação e rotação de forma independente e a dinâmica negligenciada passa a ser vista como uma perturbação. Adicionalmente, nos veículos de rotores inclináveis, aparece também o acoplamento entre as dinâmicas do subsistema de inclinação dos rotores e da estrutura principal (DONADEL; RAFFO; BECKER, 2014). Além disso, para o caso abordado neste trabalho, onde considera-se a inclusão do *gimbal* com a câmera, surge também um acoplamento entre a dinâmica desse subsistema e da estrutura principal, já que mudanças na orientação do VANT afetam diretamente no direcionamento da câmera e vice-versa. A abordagem mais comum, entretanto, é a obtenção dos modelos do VANT e do *gimbal* de forma independente, desenvolvendo um projeto de controle exclusivo para cada subsistema e tratando como perturbação a dinâmica da inter-relação existente (RAJESH; ANANDA, 2015; SELVARAJAN; ANANDA, 2016; TIIMUS; TAMRE, 2010; LI; DING, 2007; SKJONG et al., 2015).

A subatuação, ou seja, dispor de menos entradas de atuação do que graus de liberdade, também significa um desafio da etapa de controle, pois implica na limitação do sistema em gerar certas forças e torques desejáveis. Essa característica é bem evidente nos quadrirotores, onde, por consequência de seus aspectos construtivos, existem apenas quatro entradas de atuação (os quatro rotores) e seis graus de liberdade (três de rotação e três de translação). Nesse caso, como apresentado em Mistler, Benallegue e M'Sirdi (2001), é possível demonstrar que trajetórias desejadas podem ser impostas a apenas quatro das seis saídas de forma independente, tendo os autores empregado uma linearização por realimentação dinâmica de estados para atingir esse objetivo e ao mesmo tempo manter estável os estados restantes.

Outra abordagem comum é o uso de estratégias de controle em cascata, separando os subsistemas de rotação, tratado na malha interna, e de translação, na malha externa. Seguindo essa linha, os trabalhos de Altug, Ostrowski e Mahony (2002), Bouabdallah, Murrieri e Siegwart (2004), Madani e Benallegue (2006) empregam uma estrutura de controle *backstepping*. Segundo Altug, Ostrowski e Mahony (2002), controladores *backstepping* são especialmente úteis quando deseja-se controlar um estado atuando na referência de outro. Em seu estudo, o deslocamento frontal e lateral do quadrirotor é controlado atuando-se na referência dos ângulos de arfagem e de rolagem. Todavia, apesar

de não representar grande impacto em missões ordinárias, a manobrabilidade, a agilidade e os limites no seguimento de trajetórias são comprometidos.

Na literatura, encontra-se trabalhos que propõem alterações construtivas do modelo convencional de quadrirotor, como a adição de rotores inclináveis, especificamente como estratégia para tratar da subatuação. O fato de ser possível inclinar os rotores e decompor as forças de propulsão em componentes que atuam não apenas na direção vertical do veículo, pode resultar, dependendo do projeto, na atuação em todos os graus de liberdade (RYLL; BULTHOFF; GIORDANO, 2012; RYLL et al., 2013; ELFEKY et al., 2013; HUA; HAMEL; SAMSON, 2015; MOUTINHO; MATEOS; CUNHA, 2015; OOSEDO et al., 2015).

Em Hua et al. (2013) é apresentada uma revisão sobre as abordagens de controle para VANTs de um modo geral, onde são discutidas as principais características tanto de controladores lineares quanto não lineares. Os autores, entretanto, pontuam algumas vantagens das técnicas de controle não linear, como o fato de estarem fundamentadas na física de voo, respeitarem a geometria de movimento no espaço e permitirem um domínio maior da operação. Os métodos lineares, apesar de serem poderosos e com uma longa história de sucesso nas mais diversas áreas, quando aplicados no controle de sistemas não lineares implicam em considerar que o sistema é linear dentro de uma região limitada. Controladores não lineares, por outro lado, conseguem lidar com as não linearidades diretamente e para uma larga região de operação. Segundo Slotine e Li (1991), quando controladores lineares são utilizados no controle de robôs, forças não lineares associadas ao movimento são negligenciadas. Tais forças, como a centrífuga e de Coriolis, presentes na dinâmica dos VANTs variam com o quadrado da velocidade e ignorá-las faz com que a precisão do controlador rapidamente se degrade com o aumento da velocidade.

O projeto de controladores para VANTs é normalmente baseado em um modelo que descreve seu comportamento. Um fato a ser considerado é a existência de diferenças entre a cinemática e dinâmica reais do veículo e o modelo matemático utilizado para o projeto do controlador, que podem ser provenientes de perturbações externas, incertezas de parâmetros ou então dinâmicas não modeladas (SHTESSEL et al., 2014). O controle por modos deslizantes é reconhecido como uma ferramenta eficiente em projetos de controladores robustos para sistemas não lineares sujeitos a condições de incerteza. Este método possui como sua maior vantagem a baixa sensibilidade às variações de parâmetros da planta e de perturbações, eliminando a necessidade de uma modelagem exata (UTKIN; GULDNER; SHI, 2009). Em Mokhtari et al. (2006) um controlador baseado em realimentação linearizante é utilizado junto a um observador de estados por modos deslizantes, possibilitando a convergência dos erros de seguimento de trajetória mesmo com variações de até 20% na massa e momentos de inércia do quadrirotor. O controle por modos deslizantes

se mostra útil também no projeto de VANTs com múltiplos rotores sujeitos a falhas (MERHEB; BATEMAN; NOURA, 2015)

A viabilidade de construção de soluções de baixo custo proporcionou grande evolução dos pequenos veículos aéreos não tripulados durante últimos anos, todavia há ainda alguns entraves relacionados ao acesso do espaço aéreo e a normatização de uso dos VANTs como descrevem Vattapparamban et al. (2016). Esta demanda de certa forma está atrelada ao desenvolvimento de tecnologias chave que possam garantir conformidade com padrões restritivos de segurança, sendo assim, o estudo da integração de tecnologias como câmeras e outros sensores têm grande importância, além daquelas relacionadas à vigilância.

1.3 OBJETIVOS DO TRABALHO

1.3.1 Objetivo geral

O objetivo deste trabalho é estudar o uso de veículos aéreos não tripulados híbridos destinados à tarefa de vigilância através da obtenção de modelos que descrevam a dinâmica do veículo junto a um sistema de direcionamento da câmera. Adicionalmente, empregar uma estrutura de controle que promova o seguimento de referências relativas à posição e orientação do VANT no espaço, bem como de apontamento da câmera.

1.3.2 Objetivos específicos

Os objetivos específicos desta pesquisa são:

- buscar na literatura trabalhos relacionados a VANTs híbridos, de modo a analisar os modelos que proporcionam maiores vantagens relativas à tarefa de vigilância;
- obter um modelo matemático que descreva de maneira unificada a dinâmica do VANT a ser utilizado com o mecanismo de orientação da câmera;
- estudo e síntese de um controlador, que possibilite atingir o objetivo geral do trabalho levando em conta as não linearidades e demais características sistema;
- simulação do modelo obtido com o controlador projetado e análise de resultados;

1.4 DELIMITAÇÃO DO TRABALHO

De modo a concentrar o foco do estudo, certas condições são estabelecidas como não pertencentes ao escopo deste trabalho. Assim, assume-se que:

- existe uma estação base com um teleoperador. Utilizando *software* e *hardware* específicos, o mesmo é responsável pela visualização e análise das imagens obtidas pela câmera;
- a estação base está conectada ao VANT através de um *link* sem fio;
- antes de ser estabelecido um alvo, na etapa de ronda, o VANT segue padrões e rotas de modo autônomo;
- o teleoperador designa um alvo a ser seguido;
- um módulo de visão computacional extrai informações relativas ao movimento do alvo a partir das imagens capturadas pela câmera;
- um sistema de navegação planeja as trajetórias e fornece as referências para o sistema de controle VANT com câmera. São consideradas trajetórias que levem à aproximação do alvo e sua manutenção na linha de visão da câmera, no caso de uma perseguição, ou definem uma rota pré estabelecida para caso das rondas.

1.5 CONTRIBUIÇÃO CIENTÍFICA

- obtenção do modelo dos VANTs híbridos com dois e quatro rotores inclináveis, unificando a dinâmica do sistema de direcionamento da câmera (*gimbal* com dois graus de liberdade), utilizando a abordagem de multi-corpo e a formulação de Euler-Lagrange. O modelo que unifica o *gimbal* e o VANT difere daqueles onde os mesmos são considerados de forma independente;
- desenvolvimento de uma malha de controle em cascata que possibilite o rastreamento de trajetória e direcionamento da câmera para o VANT híbrido de dois rotores inclináveis.

1.6 ESTRUTURA DO TEXTO

O Capítulo 2 apresenta as abordagens utilizadas para representação de corpos rígidos móveis, estabelecendo meios para a obtenção de equações que descrevam suas cinemáticas. Adicionalmente, estruturas formadas por uma composição de corpos rígidos são consideradas, levando ao estabelecimento de relações úteis no que diz respeito à obtenção das equações da dinâmica pelo formalismo de Euler-Lagrange para sistemas multi-corpo. Neste capítulo as equações são obtidas de forma genérica, visando evitar a repetição no desenvolvimento da análise para cada um dos modelos de VANT que são estudados no trabalho.

O Capítulo 3 expõe inicialmente uma análise das características construtivas e cinemáticas de dois modelos de *gimbal* duplo, denominados *gimbal* Az-El e *gimbal* Ro-El, que são comumente utilizados no direcionamento de câmera em aplicações com VANTs. Também é discutida a ocorrência de um fenômeno chamado acoplamento cinemático que caracteriza uma singularidade no modelo de ambos.

Ainda no Capítulo 3 são descritos alguns princípios de funcionamento dos atuadores utilizados para prover movimento aos VANTs de assas rotativas. Na sequência, a Seção 3.3 é focada na modelagem de um VANT híbrido de dois rotores inclináveis e com *gimbal* Az-El integrado. Na Seção 3.4 o estudo é estendido para obter-se o modelo de um VANT híbrido de quatro rotores inclináveis com *gimbal* Az-El integrado, sendo posteriormente apresentada a sua relação com um modelo de quadrirotor convencional.

No Capítulo 4 são abordadas algumas noções da teoria de controle não linear, com enfoque na técnica de linearização entrada-saída por realimentação estática de estados. Na Seção 4.3 é mostrada uma lei de controle aplicada ao sistema não linear formado pelo VANT híbrido de dois rotores inclináveis e com o *gimbal* Az-El integrado. A estratégia utilizada apresenta uma estrutura em cascata com blocos de linearização entrada-saída baseada nos trabalhos de Chowdhury, Kulhare e Raina (2012), Donadel (2015) e Almeida e Raffo (2015), sendo capaz de garantir o seguimento de trajetórias impostas às coordenadas generalizadas referentes à posição do VANT no espaço, ao seu direcionamento e ao apontamento da câmera, mantendo estáveis as coordenadas generalizadas restantes. Na Seção 4.4 são apresentados os parâmetros utilizados para a simulação do VANT híbrido de dois rotores inclináveis e com o *gimbal* Az-El integrado, bem como uma análise dos resultados de simulação obtidos ao empregar a técnica de controle não linear projetada.

No Capítulo 5 são comentadas as contribuições e algumas conclusões sobre os resultados do trabalho. Também são apresentadas sugestões para trabalhos futuros.

2 FUNDAMENTAÇÃO DA MODELAGEM

Este capítulo apresenta a descrição dos métodos empregados na modelagem dos sistemas tratados no trabalho. Consiste em expor as abordagens utilizadas para representação de corpos rígidos móveis, estabelecendo os meios que resultam na obtenção de equações que descrevam suas cinemáticas. Adicionalmente, estruturas formadas por uma composição de corpos rígidos são consideradas, levando ao estabelecimento de relações úteis no que diz respeito à obtenção das equações da dinâmica pelo formalismo de Euler-Lagrange para sistemas multi-corpo. As equações são obtidas de forma genérica, visando evitar a repetição do desenvolvimento para cada um dos modelos de VANT que serão estudados no trabalho.

2.1 REPRESENTAÇÃO DE UM CORPO RÍGIDO NO ESPAÇO

Um corpo rígido é definido como um conjunto de partículas, entre as quais não há velocidade relativa, ou seja, as distâncias entre cada uma das partículas que compõem o corpo permanecem invariantes, mesmo sob ação de uma força (GOLDSTEIN; POOLE; SAFKO, 2001). Dessa forma, conhecer o movimento realizado por uma de suas partículas implica no conhecimento do movimento do corpo como um todo.

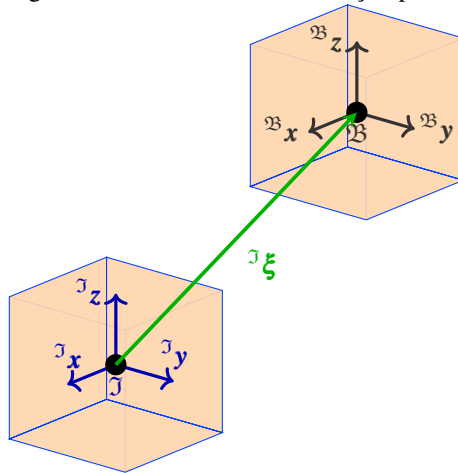
Para descrever os movimentos possíveis de serem realizados por um corpo rígido no espaço euclidiano tridimensional, são necessárias seis variáveis independentes, referentes aos seis graus de liberdade do corpo (LEMONS, 2007). Três delas correspondem a translação, ou seja, o deslocamento resultante devido ao movimento realizado. As outras três estão relacionadas a rotação e equivalem a mudança na orientação do corpo. Um movimento em que as componentes rotacionais permanecem constantes é chamado de translação pura, por outro lado, em um movimento onde nenhuma translação ocorre é denominado rotação pura (JAZAR, 2011).

2.1.1 Representação da posição

Na Figura 8, está representada a translação efetuada por um corpo rígido, ao qual estão fixos três eixos do sistema cartesiano de coordenadas que acompanham seu movimento, formando a base $\mathcal{B}\{\overset{\mathcal{B}}{\mathbf{x}}, \overset{\mathcal{B}}{\mathbf{y}}, \overset{\mathcal{B}}{\mathbf{z}}\}$ ¹. De um modo geral, o movimento realizado é descrito em relação a outra base

¹ A letra sobrescrita a esquerda define em relação à qual base o vetor é expresso.

Figura 8 – Movimento de translação pura.



Fonte: Elaborado pelo autor.

do sistema de coordenadas $\mathcal{I}\{^{\mathcal{I}}x, ^{\mathcal{I}}y, ^{\mathcal{I}}z\}$, denominada base inercial, e que permaneceu fixa no espaço.

A translação efetuada pelo corpo rígido representa a distância entre as origens das bases $\mathcal{B}\{^{\mathcal{B}}x, ^{\mathcal{B}}y, ^{\mathcal{B}}z\}$ e $\mathcal{I}\{^{\mathcal{I}}x, ^{\mathcal{I}}y, ^{\mathcal{I}}z\}$, sendo expressa na base inercial através do vetor com as componentes do deslocamento ao longo dos três eixos da mesma. Ou seja,

$${}^{\mathcal{I}}\xi = [x \quad y \quad z]^T, \quad (2.1)$$

onde ${}^{\mathcal{I}}\xi \in \mathbb{R}^3$.

2.1.2 Representação da orientação

Existem vários métodos que podem ser empregados para descrever a rotação de um corpo rígido, como a representação por meio dos ângulos de Euler, quatérnions, parâmetros de Rodrigues, eixo-ângulo, entre outros (SHUSTER, 1993). Contudo, três coordenadas (variáveis) não são realmente suficientes para associar, de forma suave, o espaço de rotações com o espaço euclidiano tridimensional. Assim, deve-se esperar singularidades ao empregar métodos que usam apenas três variáveis, como os ângulos de Euler, ou então

redundâncias ao utilizar quatro variáveis, como ocorre no uso de quatérnions (JAZAR, 2011).

A representação através dos ângulos de Euler envolve uma sequência de três rotações sucessivas em torno de três eixos, de modo a relacionar duas orientações distintas. Essa sequência de rotações elementares não é única, sendo que a rotação inicial pode ser feita em torno de qualquer um dos três eixos cartesianos, entretanto, as rotações subsequentes devem ser escolhidas de modo a não ocorrerem duas rotações sucessivas em torno do mesmo eixo (GOLDSTEIN; POOLE; SAFKO, 2001). Com isso, é estabelecido que, partindo de uma orientação inicial, doze² combinações de rotações intermediárias em torno dos eixos de uma determinada base resultam na mesma orientação final.

Anteriormente, definiu-se $\mathfrak{B}\{\mathfrak{B}^{\mathfrak{B}}\mathbf{x}, \mathfrak{B}^{\mathfrak{B}}\mathbf{y}, \mathfrak{B}^{\mathfrak{B}}\mathbf{z}\}$ como uma base móvel, que acompanha o movimento do corpo ao qual está atrelada, enquanto que a base $\mathfrak{J}\{\mathfrak{J}^{\mathfrak{J}}\mathbf{x}, \mathfrak{J}^{\mathfrak{J}}\mathbf{y}, \mathfrak{J}^{\mathfrak{J}}\mathbf{z}\}$ permanece imóvel e fixa em um ponto no espaço. Para auxiliar na demonstração das relações apresentadas na sequência, é estabelecida uma nova base móvel genérica $\mathfrak{X}\{\mathfrak{X}^{\mathfrak{X}}\mathbf{x}, \mathfrak{X}^{\mathfrak{X}}\mathbf{y}, \mathfrak{X}^{\mathfrak{X}}\mathbf{z}\}$. Jazar (2011) define como rotações locais aquelas efetuadas em torno de eixos da base móvel e rotações globais quando realizadas em torno dos eixos da base inercial. Na sequência, rotações locais são utilizadas para estabelecer a relação entre um vetor expresso na base móvel com seu equivalente expresso na base inercial. Por simplicidade, a partir deste ponto, as bases são tratadas apenas como \mathfrak{X} , \mathfrak{B} e \mathfrak{J} .

Considerando as bases \mathfrak{X} e \mathfrak{J} inicialmente coincidentes, segue que:

- se a base móvel \mathfrak{X} rotaciona (Figura 9) de um ângulo ψ em torno de seu eixo $\mathfrak{X}^{\mathfrak{X}}\mathbf{z}$, um ponto P do corpo, que por consequência também é rotacionado, pode ser representado em ambas as bases pela relação

$$\mathfrak{X}^{\mathfrak{X}}\mathbf{p} = (\mathbf{R}_{\mathfrak{X}^{\mathfrak{X}}\mathbf{z}, \psi}) \mathfrak{J}^{\mathfrak{J}}\mathbf{p},$$

onde o vetor $\mathfrak{X}^{\mathfrak{X}}\mathbf{p} = [\mathfrak{X}^{\mathfrak{X}}p_x \quad \mathfrak{X}^{\mathfrak{X}}p_y \quad \mathfrak{X}^{\mathfrak{X}}p_z]^T$ é expresso na base \mathfrak{X} , $\mathfrak{J}^{\mathfrak{J}}\mathbf{p} = [\mathfrak{J}^{\mathfrak{J}}p_x \quad \mathfrak{J}^{\mathfrak{J}}p_y \quad \mathfrak{J}^{\mathfrak{J}}p_z]^T$ na base \mathfrak{J} , e

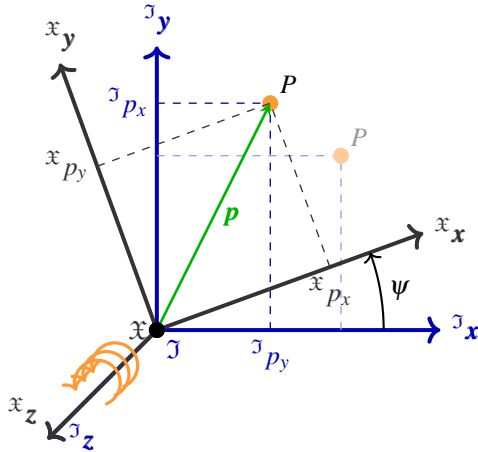
$$\mathbf{R}_{\mathfrak{X}^{\mathfrak{X}}\mathbf{z}, \psi} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \text{sen} \psi & 0 \\ -\text{sen} \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in SO(3)^3, \quad (2.2)$$

é a matriz que representa tal rotação. Essa matriz, assim como as duas seguintes, são encontradas decompondo os vetores unitários dos eixos de uma base na outra;

² Obedecendo a regra da mão direita. Ver Apêndice A.1.

³ Ver Apêndice A.1.

Figura 9 – Rotação da base móvel \mathfrak{X} em torno de seu eixo \mathfrak{x}_z .



Fonte: Elaborado pelo autor.

- de forma similar, se \mathfrak{X} é rotacionada de um ângulo θ em torno de seu eixo \mathfrak{x}_y , a matriz de rotação é

$$\mathbf{R}_{\mathfrak{x}_y, \theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\text{sen} \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen} \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \in SO(3); \quad (2.3)$$

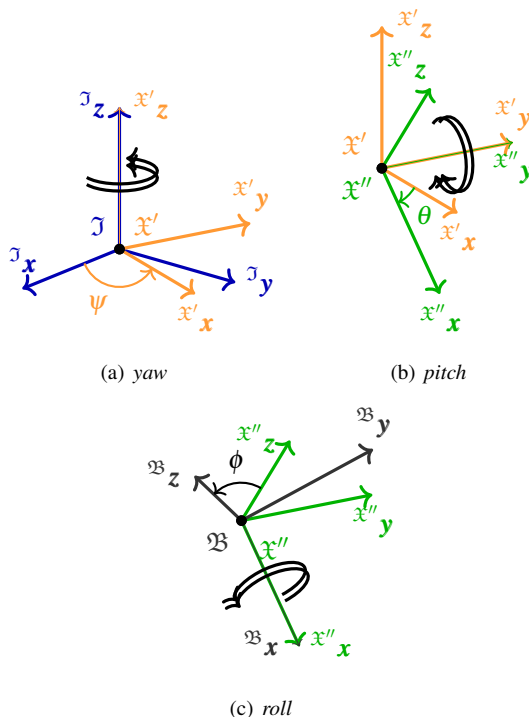
- por fim, se \mathfrak{X} é rotacionado de um ângulo ϕ em torno de seu eixo \mathfrak{x}_x , a matriz de rotação é

$$\mathbf{R}_{\mathfrak{x}_x, \phi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \text{sen} \phi \\ 0 & -\text{sen} \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \in SO(3). \quad (2.4)$$

Definidas essas três matrizes de rotações locais elementares, representadas pelas equações (2.2)-(2.4), é possível então determinar uma relação entre as orientações das bases \mathfrak{J} e \mathfrak{B} , tendo a última efetuado uma sequência de rotações locais elementares. Neste trabalho, essa relação é representada pelo método dos ângulos de Euler, mais especificamente utilizando uma combinação de rotações cujos elementos são também conhecidos como ângulos de Tait, Bryant, ou de Cardano (SHUSTER, 1993). Essa combinação é

normalmente empregada em aplicações relacionadas a corpos rígidos móveis, como satélites, aviões e submarinos (GOLDSTEIN; POOLE; SAFKO, 2001; JAZAR, 2011), sendo caracterizada pela seguinte sequência de rotações:

Figura 10 – Rotações locais.



Fonte: Elaborado pelo autor.

- primeira rotação (Figura 10(a)): realizada por uma base móvel intermediária, neste caso definida como $\mathcal{X}'\{\mathcal{x}'x, \mathcal{x}'y, \mathcal{x}'z\}$, inicialmente tendo seus eixos coincidentes aos da base \mathcal{I} e rotacionada em torno do eixo $\mathcal{x}'z$ de um ângulo ψ . Essa rotação é chamada de *yaw*;
- segunda rotação (Figura 10(b)): realizada por outra base móvel intermediária, aqui definida como $\mathcal{X}''\{\mathcal{x}''x, \mathcal{x}''y, \mathcal{x}''z\}$, inicialmente coincidente à $\mathcal{X}'\{\mathcal{x}'x, \mathcal{x}'y, \mathcal{x}'z\}$, neste momento estabelecida pela orientação final após a rotação anterior, sendo então rotacionada de um ângulo θ , em torno do eixo $\mathcal{x}''y$. Essa rotação é denominada *pitch*;

- terceira rotação (Figura 10(c)): realizada pela base móvel \mathfrak{B} , inicialmente coincidente à $\mathfrak{X}'' \{ \mathfrak{x}'' \mathbf{x}, \mathfrak{x}'' \mathbf{y}, \mathfrak{x}'' \mathbf{z} \}$, acontecendo em torno do eixo ${}^{\mathfrak{B}}\mathbf{x}$ de um ângulo ϕ . Essa rotação é chamada de *roll*.

A matriz de transformação resultante é obtida pela combinação das três rotações locais elementares,

$$\begin{aligned} {}^{\mathfrak{B}}\mathbf{R}_{\mathfrak{J}} &= (\mathbf{R}_{\mathfrak{B}_{x,\phi}})(\mathbf{R}_{\mathfrak{x}''_{y,\theta}})(\mathbf{R}_{\mathfrak{x}'_{z,\psi}}), \\ &= \begin{bmatrix} c_{\psi}c_{\theta} & s_{\psi}c_{\theta} & -s_{\theta} \\ c_{\psi}s_{\theta}s_{\phi} - s_{\psi}c_{\phi} & s_{\psi}s_{\theta}s_{\phi} + c_{\psi}c_{\phi} & c_{\theta}s_{\phi} \\ c_{\psi}s_{\theta}c_{\phi} + s_{\psi}s_{\phi} & s_{\psi}s_{\theta}c_{\phi} - c_{\psi}s_{\phi} & c_{\theta}c_{\phi} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde $c. = \cos(\cdot)$ e $s. = \text{sen}(\cdot)$.

O produto das matrizes não é comutativo e a ordem em que elas são arranjadas está relacionada à sequência em que as rotações são efetuadas. Assim, um vetor ${}^{\mathfrak{J}}\mathbf{p}$ expresso em \mathfrak{J} , têm sua representação em \mathfrak{B} através da relação

$$\begin{aligned} {}^{\mathfrak{B}}\mathbf{p} &= {}^{\mathfrak{B}}\mathbf{R}_{\mathfrak{J}} {}^{\mathfrak{J}}\mathbf{p} = (\mathbf{R}_{\mathfrak{B}_{x,\phi}})(\mathbf{R}_{\mathfrak{x}''_{y,\theta}})(\mathbf{R}_{\mathfrak{x}'_{z,\psi}}) {}^{\mathfrak{J}}\mathbf{p}. \\ &\quad \underbrace{\underbrace{\underbrace{\phantom{(\mathbf{R}_{\mathfrak{B}_{x,\phi}})(\mathbf{R}_{\mathfrak{x}''_{y,\theta}})(\mathbf{R}_{\mathfrak{x}'_{z,\psi}}) {}^{\mathfrak{J}}\mathbf{p}}}_{\mathfrak{x}'\mathbf{p}}}_{\mathfrak{x}''\mathbf{p}}}_{\mathfrak{B}\mathbf{p}} \end{aligned}$$

Utilizando as propriedades das matrizes de rotação⁴, é possível obter também a matriz

$$\begin{aligned} {}^{\mathfrak{J}}\mathbf{R}_{\mathfrak{B}} &= {}^{\mathfrak{B}}\mathbf{R}_{\mathfrak{J}}^{-1} = {}^{\mathfrak{B}}\mathbf{R}_{\mathfrak{J}}^T, \\ &= \begin{bmatrix} c_{\psi}c_{\theta} & c_{\psi}s_{\theta}s_{\phi} - s_{\psi}c_{\phi} & c_{\psi}s_{\theta}c_{\phi} + s_{\psi}s_{\phi} \\ s_{\psi}c_{\theta} & s_{\psi}s_{\theta}s_{\phi} + c_{\psi}c_{\phi} & s_{\psi}s_{\theta}c_{\phi} - c_{\psi}s_{\phi} \\ -s_{\theta} & c_{\theta}s_{\phi} & c_{\theta}c_{\phi} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

e com isso

$${}^{\mathfrak{J}}\mathbf{p} = {}^{\mathfrak{J}}\mathbf{R}_{\mathfrak{B}} {}^{\mathfrak{B}}\mathbf{p}. \quad (2.7)$$

Para uso posterior no trabalho, considera-se um vetor,

$$\boldsymbol{\eta}(t) = [\phi \quad \theta \quad \psi]^T,$$

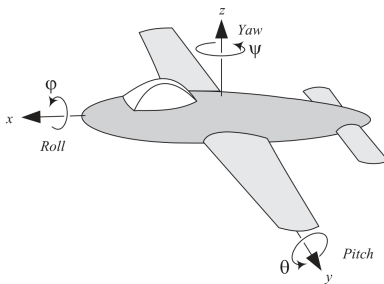
contendo os ângulos relativos a essas rotações.

Como mencionado anteriormente, por utilizar apenas três variáveis,

⁴ Ver Apêndice A.1.

todas as doze combinações de rotação da representação por ângulos de Euler apresentam singularidades em determinados pontos. Combinações em que a primeira e a terceira rotação são efetuadas em torno do mesmo⁵ eixo da base móvel deixam de ter uma única representação quando $\theta = n\pi$ (com $n \in \mathbb{Z}$), devido ao fato de as rotações em ψ e ϕ se tornarem coplanares nesses pontos e, com isso, indistinguíveis. Para combinações onde as rotações acontecem em torno de três eixos diferentes⁶, que é o caso da sequência *yaw-pitch-roll* (3-2-1)⁷ utilizada, o mesmo fenômeno ocorre em $\theta = \frac{\pi}{2} + n\pi$ (com $n \in \mathbb{Z}$), ou seja, se o avião da Figura 11 efetuar uma rotação *pitch* de $\theta = 90$, tendo, após isso, o bico apontando para baixo, por consequência a última rotação (*roll*), ocorrerá em torno do mesmo eixo em que a primeira rotação (*yaw*) foi realizada. Esse fato torna impossível distinguir os ângulos de *roll* e *yaw*. Essa perda de representação em determinados locais é conhecida como *gimbal lock* (DIEBEL, 2006). Contudo, se o veículo não realizar manobras verticais ou invertidas, ou seja, em situações onde a restrição de intervalo aberto $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ não é violada, as singularidades são evitadas. Os outros dois ângulos são livres para assumir qualquer valor de 0 a 2π , incluindo os extremos.

Figura 11 – Rotações *roll*, *pitch* e *yaw*.



Fonte: Jazar (2011).

2.2 CINEMÁTICA DO CORPO RÍGIDO

De modo geral, pode-se considerar o movimento de um corpo rígido como uma combinação de translação e rotação (Figura 12), representados

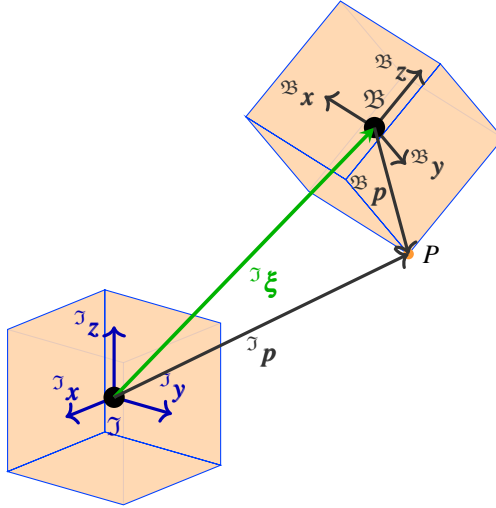
⁵ Combinações 7 a 12, do Apêndice A.3.

⁶ Combinações 1 a 6, do Apêndice A.3.

⁷ Ver Apêndice A.3.

por um par ordenado $(\boldsymbol{\xi}(t), \mathbf{R}(\phi(t), \theta(t), \psi(t)))$. As funções $\boldsymbol{\xi}(t) \in \mathbb{R}^3$ e $\mathbf{R}(\phi(t), \theta(t), \psi(t)) \in SO(3)$ informam a evolução temporal das variáveis de posição e orientação no decorrer do movimento, entretanto, para simplificar a representação, os argumentos serão omitidos nos cálculos que seguem.

Figura 12 – Translação e rotação.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para expressar na base \mathcal{J} as coordenadas de um ponto P do corpo, distante ${}^{\mathcal{B}}\mathbf{p}$ da origem de \mathcal{B} , é necessário combinar a representação da translação (2.1) e rotação (2.7) desse corpo. Assim, o vetor posição de P expresso na base inercial é obtido por

$${}^{\mathcal{J}}\mathbf{p} = {}^{\mathcal{J}}\mathbf{R}_{\mathcal{B}} {}^{\mathcal{B}}\mathbf{p} + {}^{\mathcal{J}}\boldsymbol{\xi}. \quad (2.8)$$

Derivando (2.8) em relação ao tempo, utilizando a regra do produto, obtém-se

$${}^{\mathcal{J}}\mathbf{v} = {}^{\mathcal{J}}\dot{\mathbf{p}} = {}^{\mathcal{J}}\dot{\mathbf{R}}_{\mathcal{B}} {}^{\mathcal{B}}\mathbf{p} + {}^{\mathcal{J}}\mathbf{R}_{\mathcal{B}} {}^{\mathcal{B}}\dot{\mathbf{p}} + {}^{\mathcal{J}}\dot{\boldsymbol{\xi}}, \quad (2.9)$$

onde ${}^{\mathcal{J}}\mathbf{v}$ é a velocidade linear do ponto P .

Como P trata-se de uma partícula de um corpo rígido, não deve haver mudança nas suas coordenadas em relação ao restante das partículas ou à

origem de \mathfrak{B} ao longo do tempo. Isso implica em ${}^{\mathfrak{B}}\dot{\mathbf{p}} = 0$ e (2.9) torna-se

$${}^{\mathcal{J}}\mathbf{v} = {}^{\mathcal{J}}\dot{\mathbf{R}}_{\mathfrak{B}} {}^{\mathfrak{B}}\mathbf{p} + {}^{\mathcal{J}}\dot{\boldsymbol{\xi}}. \quad (2.10)$$

A equação (2.10) expressa a velocidade linear de P devido aos movimentos de translação e rotação e é equivalente a

$${}^{\mathcal{J}}\mathbf{v} = {}^{\mathcal{J}}\mathbf{R}_{\mathfrak{B}} \mathcal{S}({}^{\mathfrak{B}}_{\mathcal{J}}\boldsymbol{\omega}_{\mathfrak{B}}) {}^{\mathfrak{B}}\mathbf{p} + {}^{\mathcal{J}}\dot{\boldsymbol{\xi}}, \quad (2.11)$$

onde

$${}^{\mathfrak{B}}_{\mathcal{J}}\boldsymbol{\omega}_{\mathfrak{B}} = {}^{\mathfrak{B}}_{\mathcal{J}}\boldsymbol{\omega}_{\mathfrak{B}}(t) = [\omega_x(t) \quad \omega_y(t) \quad \omega_z(t)]^T$$

é a velocidade angular da base \mathfrak{B} em relação a base \mathcal{J} , expressa em \mathfrak{B} , $\mathcal{S}({}^{\mathfrak{B}}_{\mathcal{J}}\boldsymbol{\omega}_{\mathfrak{B}})$ é uma matriz anti-simétrica associada ao vetor ${}^{\mathfrak{B}}_{\mathcal{J}}\boldsymbol{\omega}_{\mathfrak{B}}$ e equivale a

$$\mathcal{S}({}^{\mathfrak{B}}_{\mathcal{J}}\boldsymbol{\omega}_{\mathfrak{B}}) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Para provar que a igualdade

$${}^{\mathcal{J}}\dot{\mathbf{R}}_{\mathfrak{B}} = {}^{\mathcal{J}}\mathbf{R}_{\mathfrak{B}} \mathcal{S}({}^{\mathfrak{B}}_{\mathcal{J}}\boldsymbol{\omega}_{\mathfrak{B}}),$$

assumida em (2.11) é válida, baseando-se em Spong, Hutchinson e M. (2006), para uma matriz de rotação \mathbf{R} qualquer, segue que:

- das propriedades⁸ de matrizes de rotação,

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbb{I}_{3 \times 3}; \quad (2.13)$$

- derivando (2.13) em relação ao tempo,

$$\dot{\mathbf{R}}^T \mathbf{R} + \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}} = \mathbb{O}_{3 \times 3}; \quad (2.14)$$

- definindo uma matriz \mathbf{S} equivalente ao segundo termo da soma em (2.14), ou seja,

$$\mathbf{S} = \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}}; \quad (2.15)$$

- e então, obtendo a matriz transposta de \mathbf{S} ,

$$\mathbf{S}^T = (\mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}})^T = \dot{\mathbf{R}}^T \mathbf{R}; \quad (2.16)$$

⁸ Apresentadas no Apêndice A.1

- com isso, observa-se que (2.14) é equivalente a

$$\mathbf{S}^T + \mathbf{S} = \mathbb{O}_{3 \times 3} . \quad (2.17)$$

A equação (2.17) apresenta propriedades⁹ que comprovam que a matriz \mathbf{S} , definida em (2.15), é anti-simétrica. Com isso, multiplicando por \mathbf{R} à esquerda em ambos os lados de (2.15) e lembrando que $\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbb{I}_{3 \times 3}$, tem-se

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \mathbf{S} . \quad (2.18)$$

A equação (2.18) confirma a possibilidade de se usar (2.11), simplificando os cálculos relacionados à derivada da matriz de rotação. Além disso, das propriedades de matrizes anti-simétricas¹⁰, tem-se

$$\mathbf{S}(\mathfrak{B}_J \boldsymbol{\omega}_{\mathfrak{B}}) \mathfrak{B} \mathbf{p} = \mathfrak{B}_J \boldsymbol{\omega}_{\mathfrak{B}} \times \mathfrak{B} \mathbf{p} = \mathfrak{B} \mathbf{v}_{lin} ,$$

em que $\mathfrak{B} \mathbf{v}_{lin}$ é a velocidade linear em P induzida pela rotação. Com isso, (2.11) também pode ser escrita na forma

$$J \mathbf{v} = J \mathbf{R}_{\mathfrak{B}} (\mathfrak{B}_J \boldsymbol{\omega}_{\mathfrak{B}} \times \mathfrak{B} \mathbf{p}) + J \dot{\boldsymbol{\xi}} = J \mathbf{v}_{lin} + J \dot{\boldsymbol{\xi}} , \quad (2.19)$$

que evidencia os termos como representantes da velocidade devido à rotação e translação.

A velocidade angular da base \mathfrak{B} em relação a base J é expressa em \mathfrak{B} por

$$\mathfrak{B}_J \boldsymbol{\omega}_{\mathfrak{B}} = \omega_x \mathfrak{B} \hat{\mathbf{i}} + \omega_y \mathfrak{B} \hat{\mathbf{j}} + \omega_z \mathfrak{B} \hat{\mathbf{k}} , \quad (2.20)$$

onde $\mathfrak{B} \hat{\mathbf{i}}$, $\mathfrak{B} \hat{\mathbf{j}}$ e $\mathfrak{B} \hat{\mathbf{k}}$ são os vetores unitários da base \mathfrak{B} . Porém, a parametrização da orientação é realizada assumindo rotações que ocorrem em torno de eixos intermediários e que não necessariamente correspondem a $\mathfrak{B} \hat{\mathbf{i}}$, $\mathfrak{B} \hat{\mathbf{j}}$ e $\mathfrak{B} \hat{\mathbf{k}}$. Para estabelecer uma relação entre a velocidade angular em (2.20) e a velocidade angular que está expressa na base \mathcal{E} , formada pelos três vetores em torno dos quais as rotações *yaw*, *pitch* e *roll* ocorrem, faz-se:

$$\mathfrak{B}_J \boldsymbol{\omega}_{\mathfrak{B}} = \dot{\phi} \mathcal{E} \hat{\mathbf{u}}_{\phi} + \dot{\theta} \mathcal{E} \hat{\mathbf{u}}_{\theta} + \dot{\psi} \mathcal{E} \hat{\mathbf{u}}_{\psi} , \quad (2.21)$$

onde $\mathcal{E} \hat{\mathbf{u}}_{\phi}$, $\mathcal{E} \hat{\mathbf{u}}_{\theta}$ e $\mathcal{E} \hat{\mathbf{u}}_{\psi}$ são os vetores unitários da base \mathcal{E} .

A relação entre as componentes de $\mathfrak{B}_J \boldsymbol{\omega}_{\mathfrak{B}}$ e $\mathcal{E}_J \boldsymbol{\omega}_{\mathfrak{B}}$ são encontradas transformando os vetores unitários da base \mathcal{E} para a base \mathfrak{B} . Da Figura 10,

⁹ Apresentada no Apêndice A.2

¹⁰ Apresentada no Apêndice A.2

tem-se que:

- a rotação ψ ocorre em torno do eixo ${}^{\mathcal{T}}\mathbf{z} = {}^{\mathcal{X}'}\mathbf{z}$, com vetor unitário ${}^{\mathcal{T}}\hat{\mathbf{k}} = {}^{\mathcal{X}'}\hat{\mathbf{k}} = [0 \ 0 \ 1]^T$, ou seja,

$${}^{\mathcal{E}}\hat{\mathbf{u}}_{\psi} = {}^{\mathcal{T}}\hat{\mathbf{k}}$$

e

$${}^{\mathcal{B}}\hat{\mathbf{u}}_{\psi} = {}^{\mathcal{B}}\mathbf{R}_{{}^{\mathcal{T}}\mathcal{J}} {}^{\mathcal{T}}\hat{\mathbf{k}}, \quad (2.22)$$

$${}^{\mathcal{B}}\hat{\mathbf{u}}_{\psi} = \begin{bmatrix} -\text{sen}\theta \\ \cos\theta \text{sen}\phi \\ \cos\theta \cos\phi \end{bmatrix}; \quad (2.23)$$

- a rotação θ ocorre em torno do eixo ${}^{\mathcal{X}'}\mathbf{y} = {}^{\mathcal{X}''}\mathbf{y}$, com vetor unitário ${}^{\mathcal{X}'}\hat{\mathbf{j}} = {}^{\mathcal{X}''}\hat{\mathbf{j}} = [0 \ 1 \ 0]^T$. Assim,

$${}^{\mathcal{E}}\hat{\mathbf{u}}_{\theta} = {}^{\mathcal{X}''}\hat{\mathbf{j}}$$

e

$${}^{\mathcal{B}}\hat{\mathbf{u}}_{\theta} = ({}^{\mathcal{B}}\mathbf{R}_{{}^{\mathcal{X}''}}) {}^{\mathcal{X}''}\hat{\mathbf{j}} = ({}^{\mathcal{B}}\mathbf{R}_{x,\phi}) {}^{\mathcal{X}''}\hat{\mathbf{j}}, \quad (2.24)$$

$${}^{\mathcal{B}}\hat{\mathbf{u}}_{\theta} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos\phi \\ -\text{sen}\phi \end{bmatrix}; \quad (2.25)$$

- a rotação ϕ ocorre em torno do eixo ${}^{\mathcal{X}''}\mathbf{x} = {}^{\mathcal{B}}\mathbf{x}$, com vetor unitário ${}^{\mathcal{X}''}\hat{\mathbf{i}} = {}^{\mathcal{B}}\hat{\mathbf{i}} = [1 \ 0 \ 0]^T$. O eixo de rotação

$${}^{\mathcal{E}}\hat{\mathbf{u}}_{\phi} = {}^{\mathcal{B}}\hat{\mathbf{i}}$$

já está na base \mathcal{B} , com isso

$${}^{\mathcal{B}}\hat{\mathbf{u}}_{\phi} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

Assim,

$$\begin{aligned} {}^{\mathfrak{B}}_3 \boldsymbol{\omega}_{\mathfrak{B}} &= \dot{\phi} {}^{\mathfrak{B}} \hat{\mathbf{u}}_{\phi} + \dot{\theta} {}^{\mathfrak{B}} \hat{\mathbf{u}}_{\theta} + \dot{\psi} {}^{\mathfrak{B}} \hat{\mathbf{u}}_{\psi}, \\ {}^{\mathfrak{B}}_3 \boldsymbol{\omega}_{\mathfrak{B}} &= \dot{\phi} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \dot{\theta} \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \phi \\ -\text{sen} \phi \end{bmatrix} + \dot{\psi} \begin{bmatrix} -\text{sen} \theta \\ \cos \theta \text{ sen} \phi \\ \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix}, \\ {}^{\mathfrak{B}}_3 \boldsymbol{\omega}_{\mathfrak{B}} &= \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\text{sen} \theta \\ 0 & \cos \phi & \cos \theta \text{ sen} \phi \\ 0 & -\text{sen} \phi & \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$${}^{\mathfrak{B}}_3 \boldsymbol{\omega}_{\mathfrak{B}} = \mathbf{W}_{\eta} \dot{\boldsymbol{\eta}}, \quad (2.27)$$

com

$$\mathbf{W}_{\eta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\text{sen} \theta \\ 0 & \cos \phi & \cos \theta \text{ sen} \phi \\ 0 & -\text{sen} \phi & \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

e $\dot{\boldsymbol{\eta}} = [\dot{\phi} \quad \dot{\theta} \quad \dot{\psi}]^T$, cujos elementos, para a sequência de rotações utilizada, são chamados frequências de Cardan (JAZAR, 2011). A base de coordenadas \mathfrak{E} não é uma base ortogonal, razão pela qual a matriz \mathbf{W}_{η} que relaciona as frequências de Cardan com o vetor de velocidade angular ${}^{\mathfrak{B}}_3 \boldsymbol{\omega}_{\mathfrak{B}}$ também é não ortogonal. Com isso,

$$(\mathbf{W}_{\eta})^{-1} \neq (\mathbf{W}_{\eta})^T,$$

ou seja, a relação inversa só pode ser representada por

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\eta}} &= (\mathbf{W}_{\eta})^{-1} ({}^{\mathfrak{B}}_3 \boldsymbol{\omega}_{\mathfrak{B}}), \\ \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \text{sen} \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\text{sen} \phi \\ 0 & \text{sen} \phi \sec \theta & \cos \phi \sec \theta \end{bmatrix}}_{(\mathbf{W}_{\eta})^{-1}} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

2.2.1 Representação de sistemas com múltiplos corpos

Na sequência do trabalho, serão estudados objetos no espaço compostos por mais de um corpo interligados entre si, resultando em sistemas multi-corpos. Para representar um sistema dessa forma, considera-se uma

base de coordenadas \mathcal{C}_i , cuja origem é fixa ao centro de massa do i -ésimo corpo que compõe o objeto, com $i = 1, 2, \dots, n_c$, além da base \mathfrak{B} , fixa ao centro de rotação do sistema como um todo. Utilizando uma análise similar à realizada anteriormente, um ponto P_i do corpo \mathcal{C}_i , com coordenadas ${}^{\mathcal{C}_i}\mathbf{p}_i = [{}^{\mathcal{C}_i}p_{ix} \quad {}^{\mathcal{C}_i}p_{iy} \quad {}^{\mathcal{C}_i}p_{iz}]^T$ em relação à origem de \mathcal{C}_i , tem sua representação na base \mathfrak{B} , expressa por

$${}^{\mathfrak{B}}\mathbf{p}_i = {}^{\mathfrak{B}}\mathbf{R}_{\mathcal{C}_i} {}^{\mathcal{C}_i}\mathbf{p}_i + {}^{\mathfrak{B}}\mathbf{d}_{\mathcal{C}_i}, \quad (2.30)$$

onde ${}^{\mathfrak{B}}\mathbf{d}_{\mathcal{C}_i} = [{}^{\mathfrak{B}}d_{ix} \quad {}^{\mathfrak{B}}d_{iy} \quad {}^{\mathfrak{B}}d_{iz}]^T$ é o deslocamento da origem da base \mathcal{C}_i em relação à origem de \mathfrak{B} e ${}^{\mathfrak{B}}\mathbf{R}_{\mathcal{C}_i}$ é a matriz de rotação que descreve a orientação entre essas bases.

Combinando as equações (2.8) e (2.30), tem-se o vetor posição de P_i expresso na base \mathfrak{J}

$$\begin{aligned} {}^{\mathfrak{J}}\mathbf{p}_i &= {}^{\mathfrak{J}}\mathbf{R}_{\mathfrak{B}} {}^{\mathfrak{B}}\mathbf{p}_i + {}^{\mathfrak{J}}\boldsymbol{\xi}, \\ &= {}^{\mathfrak{J}}\mathbf{R}_{\mathfrak{B}} ({}^{\mathfrak{B}}\mathbf{R}_{\mathcal{C}_i} {}^{\mathcal{C}_i}\mathbf{p}_i + {}^{\mathfrak{B}}\mathbf{d}_{\mathcal{C}_i}) + {}^{\mathfrak{J}}\boldsymbol{\xi}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Derivando (2.31), a velocidade de P_i é

$$\begin{aligned} {}^{\mathfrak{J}}\mathbf{v}_i &= {}^{\mathfrak{J}}\dot{\mathbf{R}}_{\mathfrak{B}} ({}^{\mathfrak{B}}\mathbf{R}_{\mathcal{C}_i} {}^{\mathcal{C}_i}\mathbf{p}_i + {}^{\mathfrak{B}}\mathbf{d}_{\mathcal{C}_i}) + \\ &{}^{\mathfrak{J}}\mathbf{R}_{\mathfrak{B}} ({}^{\mathfrak{B}}\dot{\mathbf{R}}_{\mathcal{C}_i} {}^{\mathcal{C}_i}\mathbf{p}_i + {}^{\mathfrak{B}}\mathbf{R}_{\mathcal{C}_i} {}^{\mathcal{C}_i}\dot{\mathbf{p}}_i + {}^{\mathfrak{B}}\dot{\mathbf{d}}_{\mathcal{C}_i}) + {}^{\mathfrak{J}}\dot{\boldsymbol{\xi}}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Com o conhecimento prévio de que todos os sistemas que serão analisados na sequência do trabalho apresentam distâncias constantes entre os corpos, o termo ${}^{\mathfrak{B}}\dot{\mathbf{d}}_{\mathcal{C}_i}$ pode ser eliminado. Novamente, utilizando as propriedades de matrizes anti-simétricas e o fato de ${}^{\mathcal{C}_i}\mathbf{p}_i$ permanecer constante para corpos rígidos, ou seja, ${}^{\mathcal{C}_i}\dot{\mathbf{p}}_i = 0$, a equação (2.32) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} {}^{\mathfrak{J}}\mathbf{v}_i &= {}^{\mathfrak{J}}\mathbf{R}_{\mathfrak{B}} \mathbf{S}({}^{\mathfrak{B}}\boldsymbol{\omega}_{\mathfrak{B}}) ({}^{\mathfrak{B}}\mathbf{R}_{\mathcal{C}_i} {}^{\mathcal{C}_i}\mathbf{p}_i + {}^{\mathfrak{B}}\mathbf{d}_{\mathcal{C}_i}) + \\ &{}^{\mathfrak{J}}\mathbf{R}_{\mathfrak{B}} {}^{\mathfrak{B}}\mathbf{R}_{\mathcal{C}_i} \mathbf{S}({}^{\mathcal{C}_i}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{C}_i}) {}^{\mathcal{C}_i}\mathbf{p}_i + {}^{\mathfrak{J}}\dot{\boldsymbol{\xi}}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

onde ${}^{\mathcal{C}_i}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{C}_i}$ é a velocidade angular de \mathcal{C}_i em relação a \mathfrak{B} , expressa na base \mathcal{C}_i . A orientação da base \mathcal{C}_i em relação a base \mathfrak{B} , descrita por ${}^{\mathfrak{B}}\mathbf{R}_{\mathcal{C}_i}$, também é parametrizada utilizando a representação por ângulos de Euler. Assim, pode-se definir a relação

$${}^{\mathcal{C}_i}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{C}_i} = \mathbf{W}_{\mathcal{C}_i} \dot{\mathbf{c}}_i, \quad \implies \quad \dot{\mathbf{c}}_i = (\mathbf{W}_{\mathcal{C}_i})^{-1} {}^{\mathcal{C}_i}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{C}_i}, \quad (2.34)$$

similar à obtida em (2.29), onde $\hat{\mathbf{c}}_i$ contém os ângulos relativos às rotações em torno dos eixos intermediários e $\mathbf{W}_{\mathcal{C}_i}$ é a matriz que mapeia a transformação.

Aplicando consecutivamente as propriedades (A.9), (A.3) e (A.10) em (2.33), é possível rearranjá-la para que fique da seguinte forma:

$$\begin{aligned} {}^{\mathcal{J}}\mathbf{v}_i = & -{}^{\mathcal{J}}\mathbf{R}_{\mathcal{B}} {}^{\mathcal{B}}\mathbf{R}_{\mathcal{C}_i} \mathcal{S}({}^{\mathcal{C}_i}\mathbf{p}_i) ({}^{\mathcal{B}}\mathbf{R}_{\mathcal{C}_i})^T ({}^{\mathcal{B}}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}) - \\ & {}^{\mathcal{J}}\mathbf{R}_{\mathcal{B}} \mathcal{S}({}^{\mathcal{B}}\mathbf{d}_{\mathcal{C}_i}) ({}^{\mathcal{B}}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}) - {}^{\mathcal{J}}\mathbf{R}_{\mathcal{B}} {}^{\mathcal{B}}\mathbf{R}_{\mathcal{C}_i} \mathcal{S}({}^{\mathcal{C}_i}\mathbf{p}_i) ({}^{\mathcal{C}_i}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{C}_i}) + {}^{\mathcal{J}}\dot{\boldsymbol{\xi}}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

A equação da velocidade, apresentada nessa forma, facilitará o cálculo da energia cinética do corpo ao qual a base \mathcal{C}_i está atrelada.

2.3 DINÂMICA DO CORPO RÍGIDO

De acordo com Spong, Hutchinson e M. (2006), enquanto as equações da cinemática descrevem o movimento de um sistema sem considerar as forças e torques aplicados, as equações da dinâmica descrevem explicitamente a relação entre forças e torques e os movimentos resultantes, sendo importante para o entendimento do comportamento do sistema e desejável para simulação e projeto de um algoritmo de controle.

De um modo geral, existem dois métodos comumente utilizados para a obtenção das equações que descrevem a dinâmica de um sistema mecânico. A abordagem de Newton-Euler enfatiza os agentes externos, ou seja, forças e torques que agem em um corpo. Já o método de Euler-Lagrange utiliza quantidades associadas ao corpo, como as energias cinética e potencial. Entretanto, não deve haver distinção entre os resultados obtidos utilizando um ou outro método (THORNTON; MARION, 2004).

O método de Newton-Euler não apresenta grandes complicações quando aplicado em sistemas com um único corpo rígido. Contudo, quando utilizado para encontrar as equações do movimento de um sistema contendo múltiplos corpos interligados, faz-se necessário conhecer não apenas as forças externas, mas também as forças internas que surgem de modo a manter as restrições de movimento, impostas pelas interconexões dos corpos. A ocorrência de tais forças aumenta consideravelmente a complexidade em se obter as equações de movimento através do método de Newton-Euler para sistemas multi-corpos. por outro lado, utilizando o método de Euler-Lagrange, a existência dessas forças internas de restrição podem ser ignoradas, sendo naturalmente eliminadas da formulação.

O sistema de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, obtido através do método de Euler-Lagrange, proporciona o meio mais econômico de se escrever as equações de movimento, pois envolve um número mínimo de

coordenadas (variáveis) necessárias para descrever a dinâmica de um sistema. Além disso, essas equações são válidas para um conjunto arbitrário de coordenadas e podem ser escolhidas por razões de conveniência e simplicidade (LEMONS, 2007). O fato de a energia ser uma quantidade escalar torna a função de Lagrange, ou Lagrangiano, de um sistema invariável a transformações de coordenadas. Com isso é possível passar de um conjunto de coordenadas, nas quais as equações de movimento estejam descritas de uma forma bastante complexa, para um outro conjunto de coordenadas, que pode ser escolhido de modo a simplificar as equações resultantes (THORNTON; MARION, 2004).

Um sistema multi-corpo, composto por n_c corpos rígidos interligados, requer $n_s = 6n_c$ coordenadas para descrever a configuração do sistema no espaço, chamadas de coordenadas generalizadas ou de configuração. Contudo, devido às restrições holonômicas impostas pelas interconexões dos corpos, essas coordenadas não são totalmente independentes. Provando-se que as equações das n_r restrições holonômicas impostas ao sistema são linearmente independentes, é possível usá-las para eliminar n_r das n_s coordenadas generalizadas (SHABANA, 2013). Com isso, o total de coordenadas independentes é composto por um conjunto reduzido contendo n coordenadas generalizadas, encontradas por

$$n = n_s - n_r = 6n_c - n_r ,$$

indicando os graus de liberdade do sistema (FLORES, 2015).

O vetor $\mathbf{q} \in \mathbb{Q}$ de configuração do sistema contém as variáveis relacionadas às coordenadas generalizadas, pertencendo ao espaço de configuração n -dimensional \mathbb{Q} e $\dot{\mathbf{q}}$ é composto das derivadas das coordenadas generalizadas, também chamadas velocidades generalizadas. Assim $\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ \cdots \ q_n]^T$ e $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1 \ \dot{q}_2 \ \cdots \ \dot{q}_n]^T$. O vetor de coordenadas generalizadas do sistema multi-corpo no espaço tridimensional pode ser representado por

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n , \quad (2.36)$$

com

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{J} \boldsymbol{\xi} \\ \boldsymbol{\eta} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6 \quad \text{e} \quad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} q_7 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{c}_{n_c} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-6)} . \quad (2.37)$$

O vetor \mathbf{q}_1 contém $\mathcal{J} \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3$, que representa a posição do centro de rotação do sistema de corpos em relação a base \mathcal{J} , bem como $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^3$, que é a parametrização da orientação do sistema descrito pelos ângulos encontrados na Seção 2.2. O vetor \mathbf{q}_2 contém as variáveis relacionadas aos graus

de liberdade resultantes da interconexão entre os n_c corpos, sujeitos às n_r restrições holonômicas. Como definido na Seção 2.2, para os sistemas analisados neste trabalho não há translação entre a origem da base \mathcal{C}_i em relação a origem da base \mathcal{B} de rotação do sistema. Assim, o vetor \mathbf{c}_i será composto pelas variáveis que representam os três graus de liberdade relativos à orientação de \mathcal{C}_i . Todavia, se o corpo possuir também restrições de orientação em relação a base \mathcal{B} , \mathbf{c}_i será reduzido.

2.3.1 Método de Euler-Lagrange para obtenção da equação do movimento

Apesar de derivar das equações de Newton¹¹, a equação de movimento de Euler-Lagrange proporciona uma abordagem alternativa de se obter as equações da dinâmica, baseada na diferença entre as energias cinética e potencial do sistema, expressas em termos das coordenadas generalizadas,

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathcal{U}(\mathbf{q}), \quad (2.38)$$

onde $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ é a energia cinética, $\mathcal{U}(\mathbf{q})$ é a energia potencial e $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ é a chamada função Lagrangiana do sistema.

O método de Euler-Lagrange pode ser usado para se obter as equações da dinâmica de um sistema multi-corpo de um modo simplificado, mas para isso é necessário provar inicialmente a possibilidade de expressar a energia cinética e potencial do sistema em termos das coordenadas generalizadas (SPONG; HUTCHINSON; M., 2006).

2.3.1.1 Energia Cinética do sistema

Considerando novamente o ponto P_i (com $i = 1, \dots, n_c$) de um corpo ao qual está associada a base \mathcal{C}_i , com coordenadas expressas na base inercial por (2.31), bem como a velocidade linear obtida em (2.35). Esse ponto representa uma partícula de massa elementar $dm_i = \rho_i dV_i$, com ρ_i e dV_i sendo respectivamente a densidade de massa e volume elementar da partícula. Com isso, a energia cinética total \mathcal{K}_i do corpo da base \mathcal{C}_i pode ser obtida através da integral de volume sobre as partículas que compõem o corpo (JAZAR, 2011, pg. 1037):

$$\mathcal{K}_i = \frac{1}{2} \int_{V_i} ((\mathcal{J} \mathbf{v}_i)^T (\mathcal{J} \mathbf{v}_i)) \rho_i dV_i = \frac{1}{2} \int ((\mathcal{J} \mathbf{v}_i)^T (\mathcal{J} \mathbf{v}_i)) dm_i. \quad (2.39)$$

¹¹ A demonstração dessa derivação pode ser encontrada em Spong, Hutchinson e M. (2006).

Para facilitar o desenvolvimento do termo quadrático de (2.39), relacionado à velocidade ${}^{\mathcal{J}}\mathbf{v}_i$ encontrada em (2.35), a mesma será reescrita como segue:

$$\begin{aligned} {}^{\mathcal{J}}\mathbf{v}_i = & \underbrace{-{}^{\mathcal{J}}\mathbf{R}_{\mathfrak{B}}{}^{\mathfrak{B}}\mathbf{R}_{\mathcal{C}_i}\mathcal{S}(\mathcal{C}_i\mathbf{p}_i)({}^{\mathfrak{B}}\mathbf{R}_{\mathcal{C}_i})^T({}^{\mathfrak{B}}_{\mathcal{J}}\boldsymbol{\omega}_{\mathfrak{B}})}_{\mathcal{J}\mathbf{v}_{i1}} \underbrace{-{}^{\mathcal{J}}\mathbf{R}_{\mathfrak{B}}\mathcal{S}({}^{\mathfrak{B}}\mathbf{d}_{\mathcal{C}_i})({}^{\mathfrak{B}}_{\mathcal{J}}\boldsymbol{\omega}_{\mathfrak{B}})}_{\mathcal{J}\mathbf{v}_{i2}} \\ & \underbrace{-{}^{\mathcal{J}}\mathbf{R}_{\mathfrak{B}}{}^{\mathfrak{B}}\mathbf{R}_{\mathcal{C}_i}\mathcal{S}(\mathcal{C}_i\mathbf{p}_i)({}^{\mathcal{C}_i}_{\mathfrak{B}}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{C}_i})}_{\mathcal{J}\mathbf{v}_{i3}} \underbrace{+{}^{\mathcal{J}}\boldsymbol{\xi}}_{\mathcal{J}\mathbf{v}_{i4}} = \mathcal{J}\mathbf{v}_{i1} + \mathcal{J}\mathbf{v}_{i2} + \mathcal{J}\mathbf{v}_{i3} + \mathcal{J}\mathbf{v}_{i4}. \end{aligned}$$

Define-se

$$({}^{\mathcal{J}}\mathbf{v}_i)^T({}^{\mathcal{J}}\mathbf{v}_i) = A_i + B_i \quad (2.40)$$

com o objetivo de separar os termos resultantes que não dependem de ${}^{\mathcal{J}}\mathbf{v}_{i3}$ (mais especificamente de ${}^{\mathcal{C}_i}_{\mathfrak{B}}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{C}_i}$ em ${}^{\mathcal{J}}\mathbf{v}_{i3}$) dos que dependem. Assim, utilizando a propriedade $(\mathbf{a})^T\mathbf{p} = (\mathbf{p})^T\mathbf{a}$, relacionada ao produto interno entre dois vetores \mathbf{a} e \mathbf{p} quaisquer, encontra-se:

$$\begin{aligned} A_i = & ({}^{\mathcal{J}}\mathbf{v}_{i1})^T({}^{\mathcal{J}}\mathbf{v}_{i1}) + 2({}^{\mathcal{J}}\mathbf{v}_{i1})^T({}^{\mathcal{J}}\mathbf{v}_{i2}) + ({}^{\mathcal{J}}\mathbf{v}_{i2})^T({}^{\mathcal{J}}\mathbf{v}_{i2}) + 2({}^{\mathcal{J}}\mathbf{v}_{i4})^T({}^{\mathcal{J}}\mathbf{v}_{i1}) \\ & + 2({}^{\mathcal{J}}\mathbf{v}_{i4})^T({}^{\mathcal{J}}\mathbf{v}_{i2}) + ({}^{\mathcal{J}}\mathbf{v}_{i4})^T({}^{\mathcal{J}}\mathbf{v}_{i4}); \\ B_i = & + 2({}^{\mathcal{J}}\mathbf{v}_{i1})^T({}^{\mathcal{J}}\mathbf{v}_{i3}) + 2({}^{\mathcal{J}}\mathbf{v}_{i2})^T({}^{\mathcal{J}}\mathbf{v}_{i3}) + ({}^{\mathcal{J}}\mathbf{v}_{i3})^T({}^{\mathcal{J}}\mathbf{v}_{i3}) + 2({}^{\mathcal{J}}\mathbf{v}_{i4})^T({}^{\mathcal{J}}\mathbf{v}_{i3}). \end{aligned}$$

Substituindo (2.40) em (2.39), tem-se

$$\mathcal{K}_i = \frac{1}{2} \int (A_i + B_i) dm_i = \frac{1}{2} \int A_i dm_i + \frac{1}{2} \int B_i dm_i = \int A_i + \int B_i. \quad (2.41)$$

A integral de volume independe da posição ou velocidades do corpo. Ela está relacionada à geometria e a distribuição da massa entre as partículas que o compõem. Usando essa informação e resgatando o significado de

¹² $\int A_i$ e $\int B_i$ são símbolos definidos para facilitar a representação dos termos da igualdade.

${}^{\mathcal{J}}\mathbf{v}_{i_1}$, ${}^{\mathcal{J}}\mathbf{v}_{i_2}$, ${}^{\mathcal{J}}\mathbf{v}_{i_3}$ e ${}^{\mathcal{J}}\mathbf{v}_{i_4}$, encontra-se

$$\begin{aligned}
 {}^{\mathcal{J}}A_i = & \frac{1}{2} ({}^{\mathfrak{B}}_{\mathcal{J}}\boldsymbol{\omega}_{\mathfrak{B}})^T \left[{}^{\mathfrak{B}}\mathbf{R}_{\mathcal{C}_i} \left(\int \mathbf{S}(\mathcal{C}_i \mathbf{p}_i)^T \mathbf{S}(\mathcal{C}_i \mathbf{p}_i) dm_i \right) ({}^{\mathfrak{B}}\mathbf{R}_{\mathcal{C}_i})^T \right] {}^{\mathfrak{B}}_{\mathcal{J}}\boldsymbol{\omega}_{\mathfrak{B}} \\
 & + ({}^{\mathfrak{B}}_{\mathcal{J}}\boldsymbol{\omega}_{\mathfrak{B}})^T \left[{}^{\mathfrak{B}}\mathbf{R}_{\mathcal{C}_i} \left(\int \mathbf{S}(\mathcal{C}_i \mathbf{p}_i)^T dm_i \right) ({}^{\mathfrak{B}}\mathbf{R}_{\mathcal{C}_i})^T \mathbf{S}({}^{\mathfrak{B}}\mathbf{d}_{\mathcal{C}_i}) \right] {}^{\mathfrak{B}}_{\mathcal{J}}\boldsymbol{\omega}_{\mathfrak{B}} \\
 & - {}^{\mathcal{J}}\dot{\boldsymbol{\xi}}^T \left[{}^{\mathcal{J}}\mathbf{R}_{\mathfrak{B}} {}^{\mathfrak{B}}\mathbf{R}_{\mathcal{C}_i} \left(\int \mathbf{S}(\mathcal{C}_i \mathbf{p}_i) dm_i \right) ({}^{\mathfrak{B}}\mathbf{R}_{\mathcal{C}_i})^T \right] {}^{\mathfrak{B}}_{\mathcal{J}}\boldsymbol{\omega}_{\mathfrak{B}} \\
 & + \frac{1}{2} \left(\int dm_i \right) ({}^{\mathfrak{B}}_{\mathcal{J}}\boldsymbol{\omega}_{\mathfrak{B}})^T \left[\mathbf{S}({}^{\mathfrak{B}}\mathbf{d}_{\mathcal{C}_i})^T \mathbf{S}({}^{\mathfrak{B}}\mathbf{d}_{\mathcal{C}_i}) \right] {}^{\mathfrak{B}}_{\mathcal{J}}\boldsymbol{\omega}_{\mathfrak{B}} \\
 & - \left(\int dm_i \right) {}^{\mathcal{J}}\dot{\boldsymbol{\xi}}^T \left[{}^{\mathcal{J}}\mathbf{R}_{\mathfrak{B}} \mathbf{S}({}^{\mathfrak{B}}\mathbf{d}_{\mathcal{C}_i}) \right] {}^{\mathfrak{B}}_{\mathcal{J}}\boldsymbol{\omega}_{\mathfrak{B}} + \frac{1}{2} \left(\int dm_i \right) {}^{\mathcal{J}}\dot{\boldsymbol{\xi}}^T {}^{\mathcal{J}}\dot{\boldsymbol{\xi}}
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

e

$$\begin{aligned}
 {}^{\mathcal{J}}B_i = & ({}^{\mathfrak{B}}_{\mathcal{J}}\boldsymbol{\omega}_{\mathfrak{B}})^T \left[{}^{\mathfrak{B}}\mathbf{R}_{\mathcal{C}_i} \left(\int \mathbf{S}(\mathcal{C}_i \mathbf{p}_i)^T \mathbf{S}(\mathcal{C}_i \mathbf{p}_i) dm_i \right) \right] \mathcal{C}_i \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{C}_i} \\
 & + ({}^{\mathfrak{B}}_{\mathcal{J}}\boldsymbol{\omega}_{\mathfrak{B}})^T \left[({}^{\mathfrak{B}}\mathbf{d}_{\mathcal{C}_i})^T {}^{\mathfrak{B}}\mathbf{R}_{\mathcal{C}_i} \left(\int \mathbf{S}(\mathcal{C}_i \mathbf{p}_i) dm_i \right) \right] \mathcal{C}_i \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{C}_i} \\
 & + \frac{1}{2} (\mathcal{C}_i \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{C}_i})^T \left[\left(\int \mathbf{S}(\mathcal{C}_i \mathbf{p}_i)^T \mathbf{S}(\mathcal{C}_i \mathbf{p}_i) dm_i \right) \right] \mathcal{C}_i \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{C}_i} \\
 & - {}^{\mathcal{J}}\dot{\boldsymbol{\xi}}^T \left[{}^{\mathcal{J}}\mathbf{R}_{\mathfrak{B}} {}^{\mathfrak{B}}\mathbf{R}_{\mathcal{C}_i} \left(\int \mathbf{S}(\mathcal{C}_i \mathbf{p}_i) dm_i \right) \right] \mathcal{C}_i \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{C}_i} .
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

Os corpos aqui analisados, considerados simétricos e homogêneos, podem ser representados por sua massa total m_i concentrada em um único ponto P_{i_c} . A massa total m_i é obtida por:

$$m_i = \int dm_i = \int_V \rho_i dV_i = \int_V \rho_i dx_{i_c} dy_{i_c} dz_{i_c} . \tag{2.44}$$

Em um corpo, cujo centro de massa coincide com a origem da base \mathcal{C}_i , tem, nesse ponto,

$$\int \mathcal{C}_i \mathbf{p}_i dm_i = 0 \quad \implies \quad \int \mathbf{S}(\mathcal{C}_i \mathbf{p}_i) dm_i = \mathbb{O}_{3 \times 3} \tag{2.45}$$

(JAZAR, 2011, p. 1039).

Na dinâmica de rotação de corpos rígidos, define-se como tensor de

inércia em relação a base \mathcal{C}_i a matriz 3×3 resultante de:

$${}^{\mathcal{C}_i}\mathbf{I} = \int \mathbf{S}({}^{\mathcal{C}_i}\mathbf{p}_i)^T \mathbf{S}({}^{\mathcal{C}_i}\mathbf{p}_i) dm_i = \begin{bmatrix} I_{xx_i} & I_{xy_i} & I_{xz_i} \\ I_{yx_i} & I_{yy_i} & I_{yz_i} \\ I_{zx_i} & I_{zy_i} & I_{zz_i} \end{bmatrix}. \quad (2.46)$$

Os elementos que compõem a diagonal principal da matriz ${}^{\mathcal{C}_i}\mathbf{I}$ são chamados momentos polares de inércia, obtidos por:

$$\begin{aligned} I_{xx_i} &= \int_{V_i} (z_{i_c}^2 + z_{i_c}^2) \rho_i dx_{i_c} dy_{i_c} dz_{i_c} ; \\ I_{yy_i} &= \int_{V_i} (x_{i_c}^2 + z_{i_c}^2) \rho_i dx_{i_c} dy_{i_c} dz_{i_c} ; \\ I_{zz_i} &= \int_{V_i} (x_{i_c}^2 + y_{i_c}^2) \rho_i dx_{i_c} dy_{i_c} dz_{i_c} . \end{aligned} \quad (2.47)$$

Os elementos fora da diagonal principal são chamados de produtos de inércia e encontrados por:

$$\begin{aligned} I_{xy_i} &= I_{yx_i} = - \int_{V_i} (x_{i_c} y_{i_c}) \rho_i dx_{i_c} dy_{i_c} dz_{i_c} ; \\ I_{xz_i} &= I_{zx_i} = - \int_{V_i} (x_{i_c} z_{i_c}) \rho_i dx_{i_c} dy_{i_c} dz_{i_c} ; \\ I_{yz_i} &= I_{zy_i} = - \int_{V_i} (y_{i_c} z_{i_c}) \rho_i dx_{i_c} dy_{i_c} dz_{i_c} . \end{aligned} \quad (2.48)$$

O tensor de inércia ${}^{\mathcal{C}_i}\mathbf{I}$ contém elementos que representam os momentos de inércia em relação a base \mathcal{C}_i , dependendo então da base em que é expresso. Entretanto, é possível relacionar a matriz associada ao tensor de inércia entre duas bases paralelas e deslocadas uma da outra utilizando o teorema dos eixos paralelos¹³. Para tornar as bases paralelas, utiliza-se uma transformação de similaridade aplicada ao tensor de inércia e executada pela matriz de rotação que relaciona as duas bases¹⁴.

Utilizando os teoremas citados, segue que a transformação de ${}^{\mathcal{C}_i}\mathbf{I}$ para

¹³ Também conhecido por teorema de Huygens-Steiner (JAZAR, 2011, pg. 1044)

¹⁴ Teorema dos eixos rotacionados (JAZAR, 2011, pg. 1044)

a base \mathfrak{B} , da qual \mathfrak{C}_i está distante ${}^{\mathfrak{B}}\mathbf{d}_{\mathfrak{C}_i}$, é realizada por:

$$\begin{aligned} {}^{\mathfrak{B}}\mathbf{J}_i &= {}^{\mathfrak{B}}\mathbf{R}_{\mathfrak{C}_i} \left(\int \mathbf{S}({}^{\mathfrak{C}_i}\mathbf{p}_i)^T \mathbf{S}({}^{\mathfrak{C}_i}\mathbf{p}_i) dm_i \right) ({}^{\mathfrak{B}}\mathbf{R}_{\mathfrak{C}_i})^T \\ &+ \left(\int dm_i \right) \mathbf{S}({}^{\mathfrak{B}}\mathbf{d}_{\mathfrak{C}_i})^T \mathbf{S}({}^{\mathfrak{B}}\mathbf{d}_{\mathfrak{C}_i}), \\ &= {}^{\mathfrak{B}}\mathbf{R}_{\mathfrak{C}_i} {}^{\mathfrak{C}_i}\mathbf{I} {}^{\mathfrak{B}}\mathbf{R}_{\mathfrak{C}_i}^T + m_i \mathbf{S}({}^{\mathfrak{B}}\mathbf{d}_{\mathfrak{C}_i})^T \mathbf{S}({}^{\mathfrak{B}}\mathbf{d}_{\mathfrak{C}_i}), \end{aligned} \quad (2.49)$$

com

$$\mathbf{S}({}^{\mathfrak{B}}\mathbf{d}_{\mathfrak{C}_i})^T \mathbf{S}({}^{\mathfrak{B}}\mathbf{d}_{\mathfrak{C}_i}) = \begin{bmatrix} {}^{\mathfrak{B}}d_z^2 \mathfrak{C}_i + {}^{\mathfrak{B}}d_y^2 \mathfrak{C}_i & -{}^{\mathfrak{B}}d_x \mathfrak{C}_i {}^{\mathfrak{B}}d_y \mathfrak{C}_i & -{}^{\mathfrak{B}}d_x \mathfrak{C}_i {}^{\mathfrak{B}}d_z \mathfrak{C}_i \\ -{}^{\mathfrak{B}}d_x \mathfrak{C}_i {}^{\mathfrak{B}}d_y \mathfrak{C}_i & {}^{\mathfrak{B}}d_x^2 \mathfrak{C}_i + {}^{\mathfrak{B}}d_z^2 \mathfrak{C}_i & -{}^{\mathfrak{B}}d_z \mathfrak{C}_i {}^{\mathfrak{B}}d_y \mathfrak{C}_i \\ -{}^{\mathfrak{B}}d_x \mathfrak{C}_i {}^{\mathfrak{B}}d_z \mathfrak{C}_i & -{}^{\mathfrak{B}}d_z \mathfrak{C}_i {}^{\mathfrak{B}}d_y \mathfrak{C}_i & {}^{\mathfrak{B}}d_x^2 \mathfrak{C}_i + {}^{\mathfrak{B}}d_y^2 \mathfrak{C}_i \end{bmatrix}.$$

Aplicando as relações (2.44), (2.45), (2.46) e (2.49) em (2.42) e (2.43), obtém-se:

$$\begin{aligned} \int A_i &= \frac{1}{2} ({}^{\mathfrak{B}}\boldsymbol{\omega}_{\mathfrak{B}})^T \left[{}^{\mathfrak{B}}\mathbf{J}_i \right] {}^{\mathfrak{B}}\boldsymbol{\omega}_{\mathfrak{B}} - m_i {}^{\mathfrak{J}}\dot{\boldsymbol{\xi}}^T \left[{}^{\mathfrak{J}}\mathbf{R}_{\mathfrak{B}} \mathbf{S}({}^{\mathfrak{B}}\mathbf{d}_{\mathfrak{C}_i}) \right] {}^{\mathfrak{B}}\boldsymbol{\omega}_{\mathfrak{B}} \\ &+ \frac{1}{2} m_i {}^{\mathfrak{J}}\dot{\boldsymbol{\xi}}^T {}^{\mathfrak{J}}\dot{\boldsymbol{\xi}}; \end{aligned} \quad (2.50)$$

$$\int B_i = ({}^{\mathfrak{B}}\boldsymbol{\omega}_{\mathfrak{B}})^T \left[{}^{\mathfrak{B}}\mathbf{R}_{\mathfrak{C}_i} {}^{\mathfrak{C}_i}\mathbf{I} \right] {}^{\mathfrak{C}_i}\boldsymbol{\omega}_{\mathfrak{C}_i} + \frac{1}{2} ({}^{\mathfrak{C}_i}\boldsymbol{\omega}_{\mathfrak{C}_i})^T \left[{}^{\mathfrak{C}_i}\mathbf{I} \right] {}^{\mathfrak{C}_i}\boldsymbol{\omega}_{\mathfrak{C}_i}.$$

Para expressar a energia cinética em termos das coordenadas generalizadas apresentadas no início dessa seção, as relações obtidas em (2.27) e (2.34) são substituídas em (2.50), levando a

$$\begin{aligned} \int A_i &= \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\eta}}^T \left[\mathbf{W}_{\eta}^T {}^{\mathfrak{B}}\mathbf{J}_i \mathbf{W}_{\eta} \right] \dot{\boldsymbol{\eta}} - m_i {}^{\mathfrak{J}}\dot{\boldsymbol{\xi}}^T \left[{}^{\mathfrak{J}}\mathbf{R}_{\mathfrak{B}} \mathbf{S}({}^{\mathfrak{B}}\mathbf{d}_{\mathfrak{C}_i}) \mathbf{W}_{\eta} \right] \dot{\boldsymbol{\eta}} + \frac{1}{2} m_i {}^{\mathfrak{J}}\dot{\boldsymbol{\xi}}^T {}^{\mathfrak{J}}\dot{\boldsymbol{\xi}}; \\ \int B_i &= \dot{\boldsymbol{\eta}}^T \left[\mathbf{W}_{\eta}^T {}^{\mathfrak{B}}\mathbf{R}_{\mathfrak{C}_i} {}^{\mathfrak{C}_i}\mathbf{I} \mathbf{W}_{\mathfrak{C}_i} \right] \dot{\mathfrak{c}}_i + \frac{1}{2} \dot{\mathfrak{c}}_i^T \left[\mathbf{W}_{\mathfrak{C}_i}^T {}^{\mathfrak{C}_i}\mathbf{I} \mathbf{W}_{\mathfrak{C}_i} \right] \dot{\mathfrak{c}}_i. \end{aligned} \quad (2.51)$$

A energia cinética total \mathcal{K} do sistema de corpos é dada pela soma das contribuições relativas ao movimento de cada corpo (JAZAR, 2011, pg. 1253),

ou seja,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{K} &= \sum_{i=1}^{n_c} \mathcal{K}_i = \sum_{i=1}^{n_c} ({}^J A_i + {}^J B_i), \\
 &= \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\eta}}^T \left[\mathbf{J}_\eta \right] \dot{\boldsymbol{\eta}} - {}^J \boldsymbol{\xi}^T \left[{}^J \mathbf{R}_{\mathfrak{B}} \mathbf{H} \mathbf{W}_\eta \right] \dot{\boldsymbol{\eta}} + \frac{1}{2} {}^J \boldsymbol{\xi}^T \left[m_i \mathbb{I}_{3 \times 3} \right] {}^J \boldsymbol{\xi} \quad (2.52) \\
 &\quad + \sum_{i=1}^{n_c} \left(\dot{\boldsymbol{\eta}}^T \left[\mathbf{W}_\eta^T {}^{\mathfrak{B}} \mathbf{R}_{\mathfrak{C}_i} \mathbf{e}_i \mathbf{I} \mathbf{W}_{c_i} \right] \dot{\mathbf{c}}_i + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{c}}_i^T \left[\mathbf{W}_{c_i}^T \mathbf{e}_i \mathbf{I} \mathbf{W}_{c_i} \right] \dot{\mathbf{c}}_i \right),
 \end{aligned}$$

com

$$\mathbf{J}_\eta = \mathbf{W}_\eta^T \left(\sum_{i=1}^{n_c} {}^{\mathfrak{B}} \mathbf{J}_i \right) \mathbf{W}_\eta, \quad (2.53)$$

$$\mathbf{H} = \sum_{i=1}^{n_c} m_i \mathcal{S}({}^{\mathfrak{B}} \mathbf{d}_{\mathfrak{C}_i}), \quad (2.54)$$

$$m_t = \sum_{i=1}^{n_c} m_i. \quad (2.55)$$

Em (2.53), \mathbf{J}_η é o tensor de inércia do sistema, expresso na base \mathfrak{E} pela transformação de similaridade executada por \mathbf{W}_η . Com isso, os elementos da matriz \mathbf{J}_η representam os momentos de inércia do sistema em torno dos eixos de rotação em ϕ , θ e ψ . Em (2.55), m_t simboliza a massa total do sistema.

É possível reescrever a equação (2.52) na forma matricial, resultando em uma representação mais conveniente. Para isso, tem-se que:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{K} &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \\
 &= \frac{1}{2} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\xi}} \\ \dot{\boldsymbol{\eta}} \\ \dot{\mathbf{c}}_1 \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{c}}_{n_c} \end{bmatrix}^T}_{\dot{\mathbf{q}}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} M_{\xi, \xi} & M_{\xi, \eta} & M_{\xi, c_1} & \cdots & M_{\xi, c_{n_c}} \\ * & M_{\eta, \eta} & M_{\eta, c_1} & \cdots & M_{\eta, c_{n_c}} \\ * & * & M_{c_1, c_1} & \cdots & M_{c_1, c_{n_c}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & M_{c_{n_c}, c_{n_c}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}(\mathbf{q})} \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \boldsymbol{\eta} \\ \mathbf{c}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{c}_{n_c} \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{q}}}, \quad (2.56)
 \end{aligned}$$

onde $\mathbf{M}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é denominada matriz de inércia do sistema. O símbolo * denota a simetria de $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ em relação a diagonal principal.

Inspeccionando (2.52) pode-se identificar os elementos de $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ como

sendo:

$$\begin{aligned} M_{\xi, \xi} &= m_i \mathbb{I}_{3 \times 3}; & M_{\xi, \eta} &= -{}^{\mathcal{J}}\mathbf{R}_{\mathfrak{B}} \mathbf{H} \mathbf{W}_{\eta}; & M_{\eta, \eta} &= \mathbf{J}_{\eta}; \\ M_{\eta, c_i} &= \mathbf{W}_{\eta}^T {}^{\mathfrak{B}}\mathbf{R}_{c_i} {}^{c_i}\mathbf{I} \mathbf{W}_{c_i}; & M_{c_i, c_i} &= \mathbf{W}_{c_i}^T {}^{c_i}\mathbf{I} \mathbf{W}_{c_i}. \end{aligned}$$

Como mencionado anteriormente, as distâncias entre os corpos e o centro de rotação do sistema são consideradas constantes. Isso implica na ausência de interação em (2.52) entre as velocidades generalizadas dos corpos (\dot{c}_i) e a de translação do sistema ($\dot{\xi}$), resultando em $M_{\xi, c_i} = 0$, para $i = 1, 2, \dots, n_c$. Também não há interação entre as coordenadas generalizadas de corpos distintos, a não ser em relação a aquele ao qual o centro de rotação está atrelado, levando a $M_{c_i, c_j} = 0$ quando $i \neq j$, para $i, j = 1, 2, \dots, n_c$.

O elemento $M_{\xi, \eta}$ em $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ define o acoplamento entre as dinâmicas de translação e rotação do sistema. No caso em que todos os corpos têm o centro de massa coincidente ao centro de rotação do sistema, ou seja, ${}^{\mathfrak{B}}\mathbf{d}_{c_i} = [0 \ 0 \ 0]^T$, os subsistemas de translação e rotação são desacoplados.

2.3.1.2 Energia Potencial do sistema

Considerando apenas a energia potencial devido à força gravitacional. Para corpos simétricos e homogêneos, com massa elementar dm_i no ponto P_{i_c} , a energia potencial associada ao corpo da base c_i pode ser obtida como em (JAZAR, 2011, pg. 1253):

$$\mathcal{U}_i = - \int_{V_i} ({}^{\mathcal{J}}\mathbf{g})^T {}^{\mathcal{J}}\mathbf{p}_i \rho_i dV_i = - \int ({}^{\mathcal{J}}\mathbf{g})^T {}^{\mathcal{J}}\mathbf{p}_i dm_i, \quad (2.57)$$

onde ${}^{\mathcal{J}}\mathbf{g} = [0 \ 0 \ -g]^T$ é o vetor de direção da aceleração gravitacional expresso na base inercial e ${}^{\mathcal{J}}\mathbf{p}_i$ define as coordenadas de P_{i_c} .

Substituindo ${}^{\mathcal{J}}\mathbf{p}_i$ pela equação obtida em (2.31), tem-se:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_i &= - ({}^{\mathcal{J}}\mathbf{g})^T \int \left({}^{\mathcal{J}}\mathbf{R}_{\mathfrak{B}} ({}^{\mathfrak{B}}\mathbf{R}_{c_i} {}^{c_i}\mathbf{p}_i + {}^{\mathfrak{B}}\mathbf{d}_{c_i}) + {}^{\mathcal{J}}\xi \right) dm_i, \\ &= - ({}^{\mathcal{J}}\mathbf{g})^T {}^{\mathcal{J}}\mathbf{R}_{\mathfrak{B}} {}^{\mathfrak{B}}\mathbf{R}_{c_i} \int {}^{c_i}\mathbf{p}_i dm_i - ({}^{\mathcal{J}}\mathbf{g})^T {}^{\mathcal{J}}\mathbf{R}_{\mathfrak{B}} {}^{\mathfrak{B}}\mathbf{d}_{c_i} \int dm_i \\ &\quad - ({}^{\mathcal{J}}\mathbf{g})^T {}^{\mathcal{J}}\xi \int dm_i. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Aplicando as relações (2.44) e (2.45) em (2.58), resulta em:

$$\mathcal{U}_i = - ({}^{\mathcal{J}}\mathbf{g})^T {}^{\mathcal{J}}\mathbf{R}_{\mathfrak{B}} {}^{\mathfrak{B}}\mathbf{d}_{c_i} m_i - ({}^{\mathcal{J}}\mathbf{g})^T {}^{\mathcal{J}}\xi m_i. \quad (2.59)$$

A energia potencial total do sistema multi-corpo é encontrada somando-se a contribuição de cada um dos corpos (JAZAR, 2011, pg. 1253), sendo assim,

$$\mathcal{U} = \sum_{i=1}^{n_c} \mathcal{U}_i = -(\vec{\mathcal{J}} \mathbf{g})^T \vec{\mathcal{J}} \mathbf{R}_{\mathfrak{B}} \left(\sum_{i=1}^{n_c} {}^{\mathfrak{B}} \mathbf{d}_{\mathfrak{C}_i} m_i \right) - (\vec{\mathcal{J}} \mathbf{g})^T \vec{\mathcal{J}} \boldsymbol{\xi} m_t. \quad (2.60)$$

2.3.1.3 Equações do movimento

Uma vez encontradas as energias cinética (2.56) e potencial (2.60), a função Lagrangiana (2.38) torna-se

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \mathcal{U}(\mathbf{q}) \quad (2.61)$$

e, finalmente, o conjunto das equações que descrevem o movimento do sistema multi-corpo é encontrado resolvendo

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{F}(\mathbf{q}), \quad (2.62)$$

onde $\mathbf{F}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$ representa as forças e torques que conduzem as coordenadas generalizadas em \mathbf{q} .

Substituindo (2.61) em (2.62), a equação de Lagrange pode ser desenvolvida como em Kelly, Davila e Perez (2005, pg. 72). Assim,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right) + \frac{\partial \mathcal{U}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{F}(\mathbf{q}). \quad (2.63)$$

Contudo,

$$\frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right) = \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$$

e

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right) \right) = \mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}.$$

Considerando essas igualdades, (2.63) resulta em

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left(\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right) + \frac{\partial \mathcal{U}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{F}(\mathbf{q}),$$

ou, de uma forma compacta,

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \mathbf{F}(\mathbf{q}) , \quad (2.64)$$

com

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left(\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right)$$

e

$$\mathbf{G}(\mathbf{q}) = \left(\frac{\partial \mathcal{U}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right)^T . \quad (2.65)$$

A matriz $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é chamada matriz de forças centrífugas e de Coriolis. Segundo Kelly, Davila e Perez (2005), uma maneira de se obter os elementos da matriz $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ é através dos símbolos de Christoffel de primeira espécie. Usando esse método, o (k, j) -ésimo elemento de $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ é encontrado por

$$c_{kj}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial m_{kj}(\mathbf{q})}{\partial q_i} + \frac{\partial m_{ki}(\mathbf{q})}{\partial q_j} - \frac{\partial m_{ij}(\mathbf{q})}{\partial q_k} \right) \dot{q}_i , \quad (2.66)$$

sendo $m_{kj}(\mathbf{q})$ é o (k, j) -ésimo elemento de $\mathbf{M}(\mathbf{q})$. Os termos que surgem em $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ podem ser classificados em dois grupos. Aqueles que envolvem produtos do tipo \dot{q}_i^2 são chamados centrífugos, enquanto termos com produtos do tipo $\dot{q}_i \dot{q}_j$, para $i \neq j$, são chamados termos de Coriolis.

2.4 COMENTÁRIOS

Este capítulo apresentou o desenvolvimento de métodos utilizados na obtenção das equações que descrevem o comportamento de sistemas multi-corpo utilizando o formalismo de Euler-Lagrange. Em alguns momentos, simplificações são realizadas com base no conhecimento prévio de características construtivas dos veículos aéreos que serão estudados, contudo a abordagem mais genérica utilizada neste capítulo evita a necessidade de repetir definições para cada um dos modelos obtidos no próximo capítulo.

3 MODELAGEM

Este capítulo aborda, inicialmente na Seção 3.1, uma análise das características construtivas e cinemáticas de dois modelos de *gimbal* duplo, que podem ser utilizados no direcionamento da câmera em aplicações de vigilância e monitoramento com o auxílio de VANTs.

Na Seção 3.2 são descritos alguns princípios de funcionamento dos atuadores utilizados para prover movimento aos VANTs de asas rotativas.

A Seção 3.3 é focada na modelagem de um VANT híbrido de dois rotores inclináveis e com *gimbal* integrado. O desenvolvimento é realizado utilizando os métodos apresentados no Capítulo 2 para a obtenção dos modelos cinemático e dinâmico de um sistema multi-corpo. O modelo do veículo é baseado nos trabalhos de Donadel, Raffo e Becker (2014) e Almeida e Raffo (2015), sendo que no primeiro é apresentada a modelagem de um VANT híbrido de dois rotores inclináveis e no segundo o modelo é concebido considerando uma aplicação no transporte de carga.

Na Seção 3.4 o estudo é estendido para obter-se o modelo de um VANT híbrido de quatro rotores inclináveis e com *gimbal* integrado, sendo posteriormente apresentada a sua relação com um modelo de quadricóptero convencional.

3.1 MODELO DO GIMBAL

Entre as considerações iniciais no projeto do sistema de orientação da câmera está a escolha da configuração de eixos *gimbal* mais adequada para atender às demandas da aplicação. Apesar de um *gimbal* triplo parecer a solução mais óbvia por proporcionar os três graus de liberdade de orientação, cada eixo adicional inevitavelmente implica em estruturas maiores e mais pesadas.

Para uma situação de apontamento, o mecanismo com dois graus de liberdade, ou *gimbal* duplo, já é capaz de apontar a LOS em qualquer direção. Se considerado o grau de liberdade faltante como a rotação em torno do eixo que coincide com a LOS, o resultado será a ausência de controle sobre a rotação da imagem capturada. Esse fato pode gerar uma dificuldade na visualização das imagens durante manobras bruscas, contudo como em grande parte do tempo o VANT voa paralelo ao solo, isso não representa um grande empecilho.

São dois os modelos de *gimbal* duplo tipicamente utilizados em aplicações com veículos aéreos. O primeiro tem ângulos de rotação denominados

azimute e elevação, sendo chamado *gimbal* Az-El, *gimbal yaw-pitch* ou *gimbal pan-tilt*. O segundo possui ângulos de rolagem e elevação e é chamado *gimbal* Ro-El, *gimbal roll-pitch* ou ainda *gimbal tip-tilt* (MILLER et al., 2013). O *gimbal* Az-El é usualmente acoplado embaixo da estrutura principal do VANT, já o *gimbal* Ro-El é fixado na frente (bico) da aeronave.

3.1.1 Análise cinemática do *gimbal*

Para proceder a análise cinemática dos dois modelos de *gimbal* mencionados são consideradas quatro bases de coordenadas. Uma base \mathfrak{B} , fixa ao centro de rotação do sistema que inclui o VANT e o próprio *gimbal*, uma base fixa ao centro de massa da câmera, denominada \mathfrak{C}_i onde $i \in \{Az, Ro\}$ é utilizado para diferenciar os modelos de *gimbal* Az-El e Ro-El), uma base intermediária chamada de \mathfrak{X} , além da base inercial \mathfrak{J} .

Admite-se que a câmera rotaciona em torno de seus eixos principais de inércia, ou seja, o centro de massa, tanto do *gimbal* interno quanto do externo, está contido nos respectivos eixos de rotação. A possibilidade de se construir mecanismos suficientemente alinhados e balanceados valida essa consideração. Assim, na ausência de termos cruzados devido a um acoplamento, a matriz de inércia é formada apenas por termos da diagonal principal, simplificando o modelo.

Uma representação do *gimbal* Az-El é mostrada na Figura 13(a). A junta revolvente externa possibilita a rotação de um ângulo γ_1 , denominado azimute, em torno do eixo vertical ${}^{\mathfrak{B}}\mathbf{z}$ do VANT. A junta interna, ortogonal à externa, proporciona uma rotação em torno do eixo horizontal ${}^{\mathfrak{C}_{Az}}\mathbf{y}$ da base \mathfrak{C}_{Az} do corpo orientável (câmera), sendo γ_2 chamado ângulo de elevação. A LOS é coincidente ao eixo ${}^{\mathfrak{C}_{Az}}\mathbf{x}$ da base \mathfrak{C}_{Az} atrelada à câmera.

A parametrização é realizada utilizando o método dos ângulos de Euler, descrito na Subseção 2.1.2. Para alterar a orientação da câmera em relação à base \mathfrak{B} , primeiramente é realizada uma rotação local em torno do eixo ${}^{\mathfrak{X}}\mathbf{z} = {}^{\mathfrak{B}}\mathbf{z}$ da base intermediária \mathfrak{X} , como representado na Figura 13(b), seguida de uma rotação local em torno do eixo ${}^{\mathfrak{C}_{Az}}\mathbf{y}$. Assim, a matriz de rotação que relaciona a orientação das bases \mathfrak{C}_{Az} e \mathfrak{B} , para o *gimbal* Az-El, é definida

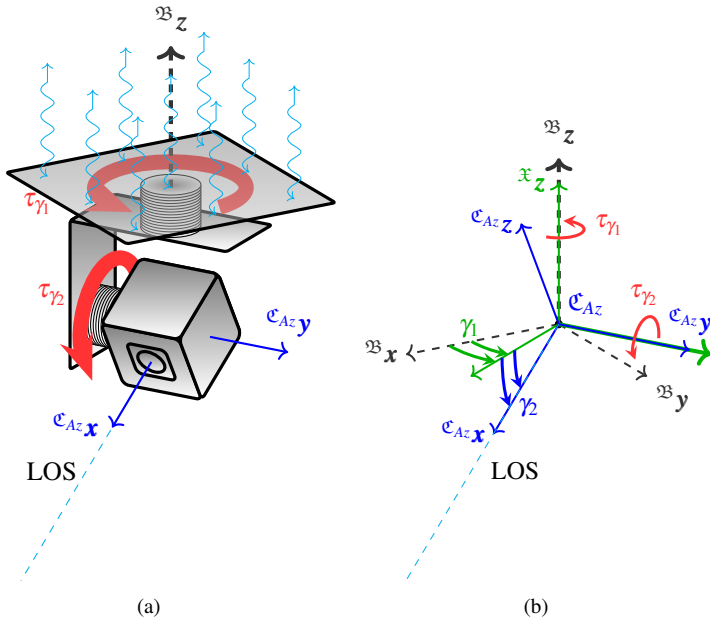
como:

$$\begin{aligned} {}^{\mathcal{C}_{Az}}\mathbf{R}_{\mathcal{B}} &= (\mathbf{R}_{\mathcal{C}_{Az}y,\gamma_2})(\mathbf{R}_{\mathcal{B}z,\gamma_1}) = \begin{bmatrix} c_{\gamma_2} & 0 & -s_{\gamma_2} \\ 0 & 1 & 0 \\ s_{\gamma_2} & 0 & c_{\gamma_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{\gamma_1} & s_{\gamma_1} & 0 \\ -s_{\gamma_1} & c_{\gamma_1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c_{\gamma_1}c_{\gamma_2} & c_{\gamma_2}s_{\gamma_1} & -s_{\gamma_2} \\ -s_{\gamma_1} & c_{\gamma_1} & 0 \\ c_{\gamma_1}s_{\gamma_2} & s_{\gamma_1}s_{\gamma_2} & c_{\gamma_2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.1)$$

e

$${}^{\mathcal{B}}\mathbf{R}_{\mathcal{C}_{Az}} = ({}^{\mathcal{C}_{Az}}\mathbf{R}_{\mathcal{B}})^T = \begin{bmatrix} c_{\gamma_1}c_{\gamma_2} & -s_{\gamma_1} & c_{\gamma_1}s_{\gamma_2} \\ c_{\gamma_2}s_{\gamma_1} & c_{\gamma_1} & s_{\gamma_1}s_{\gamma_2} \\ -s_{\gamma_2} & 0 & c_{\gamma_2} \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

Figura 13 – (a) *Gimbal* Az-El e (b) Diagrama de corpo livre.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A velocidade angular da base \mathcal{C}_{Az} em relação a \mathcal{B} é expressa em \mathcal{C}_{Az}

fazendo:

$$\begin{aligned}
 {}^{\mathcal{C}_{Az}}_{\mathfrak{B}} \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{C}_{Az}} &= \dot{\gamma}_1 {}^{\mathcal{C}_{Az}}_{\mathfrak{B}} \mathbf{R}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}} \hat{\mathbf{k}} + \dot{\gamma}_2 {}^{\mathcal{C}_{Az}}_{\mathfrak{B}} \hat{\mathbf{j}}; \\
 &= \dot{\gamma}_1 \begin{bmatrix} c_{\gamma_1} c_{\gamma_2} & c_{\gamma_2} s_{\gamma_1} & -s_{\gamma_2} \\ -s_{\gamma_1} & c_{\gamma_1} & 0 \\ c_{\gamma_1} s_{\gamma_2} & s_{\gamma_1} s_{\gamma_2} & c_{\gamma_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \dot{\gamma}_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \\
 &= \dot{\gamma}_1 \begin{bmatrix} -s_{\gamma_2} \\ 0 \\ c_{\gamma_2} \end{bmatrix} + \dot{\gamma}_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_{\gamma_2} & 0 \\ 0 & 1 \\ c_{\gamma_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\gamma}_1 \\ \dot{\gamma}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{W}_{\gamma} \dot{\boldsymbol{\gamma}},
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

onde $\dot{\gamma}_1$ e $\dot{\gamma}_2$ são as velocidades angular em torno dos eixos de rotação do *gimbal* externo e interno, respectivamente.

Para realizar uma análise mais aprofundada, o intuito é determinar a velocidade angular em torno dos dois eixos do *gimbal* de modo a estabilizar inercialmente a LOS, mesmo sob variações na orientação da base \mathfrak{B} (VANT). A LOS é estabilizada inercialmente quando não há mudança na orientação da câmera em relação ao referencial inercial. Tem-se que a velocidade angular da base \mathcal{C}_{Az} em relação à base \mathfrak{J} é expressa na base \mathcal{C}_{Az} por:

$$\begin{aligned}
 {}^{\mathcal{C}_{Az}}_{\mathfrak{J}} \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{C}_{Az}} &= {}^{\mathcal{C}_{Az}}_{\mathfrak{B}} \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{C}_{Az}} + {}^{\mathcal{C}_{Az}}_{\mathfrak{B}} \mathbf{R}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}} {}^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{J}} \boldsymbol{\omega}_{\mathfrak{B}}; \\
 \begin{bmatrix} {}^{\mathcal{C}_{Az}}_{\mathfrak{J}} \omega_x \\ {}^{\mathcal{C}_{Az}}_{\mathfrak{J}} \omega_y \\ {}^{\mathcal{C}_{Az}}_{\mathfrak{J}} \omega_z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} c_{\gamma_2} (\omega_x c_{\gamma_1} + \omega_y s_{\gamma_1}) - s_{\gamma_2} (\omega_z + \dot{\gamma}_1) \\ -\omega_x s_{\gamma_1} + \omega_y c_{\gamma_1} + \dot{\gamma}_2 \\ s_{\gamma_2} (\omega_x c_{\gamma_1} + \omega_y s_{\gamma_1}) + c_{\gamma_2} (\omega_z + \dot{\gamma}_1) \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Para que ocorra a estabilização, é necessário que a velocidade de rotação da câmera em relação ao referencial inercial, encontrada em (3.4), seja nula. Porém, como mencionado na Seção 3.1, o movimento em torno do próprio eixo da LOS (${}^{\mathcal{C}_{Az}}_{\mathfrak{J}} \omega_x$) não pode ser controlado em um *gimbal* duplo, apenas ${}^{\mathcal{C}_{Az}}_{\mathfrak{J}} \omega_y$ e ${}^{\mathcal{C}_{Az}}_{\mathfrak{J}} \omega_z$. Com isso, de (3.4), é requerido que:

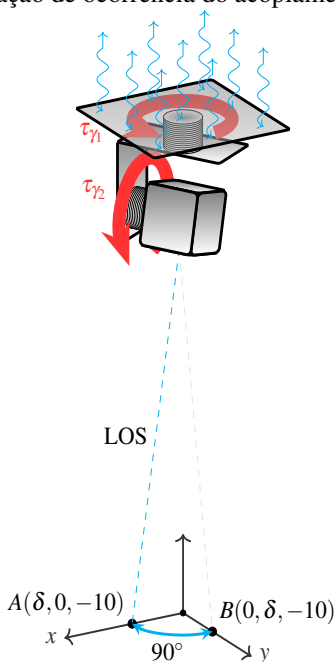
$$\dot{\gamma}_1 = -\frac{s_{\gamma_2} (\omega_x c_{\gamma_1} + \omega_y s_{\gamma_1}) + c_{\gamma_2} \omega_z}{c_{\gamma_2}}; \tag{3.5}$$

$$\dot{\gamma}_2 = \omega_x s_{\gamma_1} + \omega_y c_{\gamma_1}. \tag{3.6}$$

Todos os modelos de *gimbal* duplo são afetados por um fenômeno chamado acoplamento cinemático, no qual o eixo da junta externa necessita acelerar a fim de manter a LOS estável na presença de um movimento da base (HILKERT, 2008). Para o *gimbal* Az-El, o termo c_{γ_2} no denominador da equação (3.5) implica que, quando o ângulo de elevação (γ_2) se aproxima de $\pm 90^\circ$, a velocidade angular na junta externa tende ao infinito, resultando na condição

de *gimbal lock*. Em outras palavras, isso significa que, para realizar pequenas mudanças na direção de apontamento da LOS na vizinhança do eixo ${}^{\mathfrak{B}}z$, é necessário uma grande variação no ângulo γ_2 . Por exemplo, quando o *gimbal* Az-El, apresentado na Figura 14, está direcionado para o ponto $A(\delta, 0, -10)$ e é requerido que ele aponte para $B(0, \delta, -10)$, se δ é muito pequeno, uma pequena mudança em um plano da base inercial acarretará em uma grande mudança (90°) no ângulo de azimute. Através do planejamento cuidadoso das trajetórias de voo e orientação da câmera, esta condição pode ser evitada sem a necessidade de eixos adicionais.

Figura 14 – Situação de ocorrência do acoplamento cinemático.

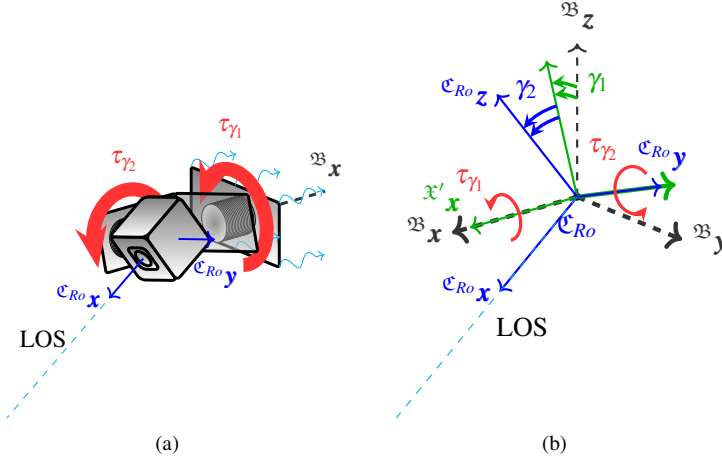


Fonte: Elaborado pelo autor.

Outra alternativa é utilizar uma configuração diferente de montagem, como o *gimbal* Ro-El. O *gimbal* Ro-El, Figura 15(a), é comumente utilizado na parte frontal do VANT. A junta externa permite uma rotação em torno do eixo ${}^{\mathfrak{B}}x$ de um ângulo γ_1 , chamado ângulo de rolagem. Na junta interna, a rotação é em torno do eixo ${}^{\mathcal{C}_{Ro}}y$ da base \mathcal{C}_{Ro} , com ângulo de elevação γ_2 e, ao final, a LOS coincide com o eixo ${}^{\mathcal{C}_{Ro}}x$. Assim, para alterar a orientação da

câmera em relação à base \mathfrak{B} , inicialmente é realizada uma rotação local em torno do eixo $\hat{x} = \mathfrak{B}x$ da base \mathfrak{X} , como representado na Figura 15(b), e na seqüência é executada uma rotação local em torno do eixo $\mathcal{E}_{Ro}y$, de modo que a matriz de rotação é obtida fazendo

Figura 15 – (a) *Gimbal* Ro-El e (b) Diagrama de corpo livre.



Fonte: Elaborado pelo autor.

$${}^{\mathfrak{B}}\mathbf{R}_{\mathcal{E}_{Ro}} = [(\mathbf{R}_{\mathcal{E}_{Ro}y, \gamma_2})(\mathbf{R}_{\hat{x}, \gamma_1})]^T = \begin{bmatrix} c_{\gamma_2} & 0 & s_{\gamma_2} \\ s_{\gamma_1}s_{\gamma_2} & c_{\gamma_1} & -c_{\gamma_2}s_{\gamma_1} \\ -c_{\gamma_1}s_{\gamma_2} & s_{\gamma_1} & c_{\gamma_1}c_{\gamma_2} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

e a velocidade angular da base \mathcal{E}_{Ro} em relação a \mathfrak{B} é expressa em \mathcal{E}_{Ro} por:

$$\begin{aligned} {}^{\mathfrak{B}}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{E}_{Ro}} &= \dot{\gamma}_1 ({}^{\mathfrak{B}}\mathbf{R}_{\mathcal{E}_{Ro}})^T \hat{\mathbf{k}} + \dot{\gamma}_2 \mathcal{E}_{Ro} \hat{\mathbf{j}}; \\ &= \dot{\gamma}_1 \begin{bmatrix} c_{\gamma_2} & 0 & s_{\gamma_2} \\ s_{\gamma_1}s_{\gamma_2} & c_{\gamma_1} & -c_{\gamma_2}s_{\gamma_1} \\ -c_{\gamma_1}s_{\gamma_2} & s_{\gamma_1} & c_{\gamma_1}c_{\gamma_2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \dot{\gamma}_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \\ &= \dot{\gamma}_1 \begin{bmatrix} c_{\gamma_2} \\ 0 \\ s_{\gamma_2} \end{bmatrix} + \dot{\gamma}_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{\gamma_2} & 0 \\ 0 & 1 \\ s_{\gamma_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\gamma}_1 \\ \dot{\gamma}_2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Realizando uma análise similar à aquela efetuada para o *gimbal* Az-El é possível constatar que a condição de acoplamento cinemático para o *gimbal*

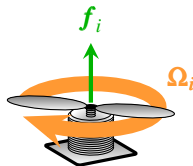
Ro-El ocorre na vizinhança de ${}^B\mathbf{x}$, quando o ângulo de elevação se aproxima de 0° ou 180° .

Para os VANTs que serão apresentados na sequência do trabalho apenas o *gimbal* Az-El é utilizado. O motivo está relacionado ao lugar onde ele é acoplado, que é a parte inferior do VANT. Dessa forma o centro de massa do sistema como um todo é deslocado para baixo, o que facilita sua utilização. Já o *gimbal* Ro-El, devido à região onde é acoplado, não exerce essa influência positiva à estabilidade, principalmente se a massa da câmera compor uma grande parcela da massa total do sistema.

3.2 MODELO DOS ROTORES

Os VANTs com asas rotativas dispõem de propulsores, também chamados de rotores¹, a partir dos quais é possível controlar seus movimentos. Tratam-se de motores elétricos com hélice, Figura 16, sendo que quando uma tensão é aplicada ao i -ésimo motor, M_i (onde $i = 1, 2, \dots, n_{prop}$ e n_{prop} é o número de propulsores do VANT), induz seu eixo a girar numa velocidade angular Ω_i . O movimento das pás que compõem a hélice provoca o deslocamento de uma coluna de ar na direção perpendicular ao seu plano de rotação, levando ao aparecimento do empuxo, ou força de propulsão, \mathbf{f}_i , na direção oposta, além de um torque τ_{M_i} paralelo ao plano.

Figura 16 – Propulsor.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A Figura 17(a), mostra a vista superior do disco com raio r_d , formado pela rotação de uma pá de hélice que gira a uma velocidade angular Ω , levando a velocidade linear Ωr_d na extremidade externa. Subdivide-se a pá de hélice em elementos infinitesimais, tomando para análise um elemento situado à uma distância r , com largura dr e comprimento de corda c . O fluxo de ar nesse

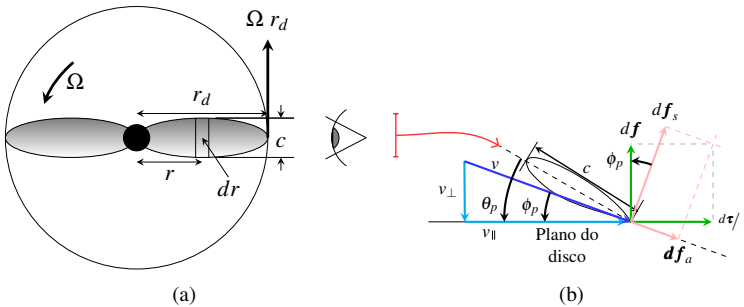
¹O termo rotor em aviação não tem o mesmo significado que em máquinas elétricas, onde consiste no componente girante de um motor ou gerador. Em aviação trata-se do componente destinado a prover a propulsão necessária para o voo.

elemento tem componentes de velocidade $v_{\parallel} = \Omega r$, paralela ao plano do disco e $v_{\perp} = v_{en} + v_+$, perpendicular a ele, sendo v_{en} a velocidade do ar ao entrar na seção e v_+ a velocidade induzida pela rotação da pá. A velocidade resultante v é obtida fazendo:

$$v = \sqrt{(v_{\perp})^2 + (v_{\parallel})^2}.$$

As forças que se manifestam devido à velocidade no elemento de pá de hélice são mostradas na Figura 17(b). Os arcos θ_p e ϕ_p determinam o ângulo de atitude da pá (ângulo entre a linha da corda e o plano de rotação) e o ângulo de *inflow* (fluxo de entrada do ar), respectivamente. A diferença entre eles, $\alpha_p = \theta_p - \phi_p$, caracteriza o ângulo de ataque da pá de hélice. Os elementos de força de propulsão $d\mathbf{f}$ e torque $d\boldsymbol{\tau}$, resultantes no seguimento, são encontrados pela decomposição das forças de sustentação $d\mathbf{f}_s$ e de arrasto $d\mathbf{f}_a$, em componentes paralelas e perpendiculares ao plano do disco. Assim:

Figura 17 – (a) Vista superior da pá de hélice e (b) forças resultantes, vista da seção transversal.



Fonte: Elaborado pelo autor.

$$d\mathbf{f} = d\mathbf{f}_s \cos \phi_p - d\mathbf{f}_a \sin \phi_p ;$$

$$d\boldsymbol{\tau} = (d\mathbf{f}_s \sin \phi_p + d\mathbf{f}_a \cos \phi_p) r ,$$

sendo que as forças de sustentação e arrasto são funções da geometria da pá de hélice e do meio em que ela está girando

$$d\mathbf{f}_s = \frac{1}{2} C_s \rho v^2 c dr ,$$

$$d\mathbf{f}_a = \frac{1}{2} C_a \rho v^2 c dr ,$$

onde ρ , C_s e C_a são a densidade do meio (no caso o ar) e os coeficientes de sustentação e de arrasto, respectivamente. Assim, para um número n_p de pás em uma determinada hélice:

$$d\mathbf{f} = \frac{1}{2} n_p (C_s \cos \phi_p - C_a \sin \phi_p) \rho v^2 c dr ;$$

$$d\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{2} n_p (C_s \sin \phi_p + C_a \cos \phi_p) \rho v^2 c r dr ,$$

Baseando-se nas considerações realizadas em Seddon e Newman (2011), assume-se que $v_{\parallel} \gg v_{\perp}$, o que implica em $v \approx v_{\parallel}$ e um ângulo de *inflow* muito pequeno, $\phi_p \approx 0$. Com isso, $d\mathbf{f}$ é aproximadamente igual à força de sustentação e o torque $d\boldsymbol{\tau}$ é exercido pela força de arrasto:

$$d\mathbf{f} = \frac{1}{2} n_p C_s \rho v^2 c dr ;$$

$$d\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{2} n_p C_a \rho v^2 c r dr ,$$

A integração ao longo de toda a área resulta na força de propulsão e torque total exercidos na hélice. Assumindo que todos os M_i motores de um VANT possuem hélices com a mesma geometria:

$$\mathbf{f}_i = C_e \rho A_d r_d^2 \boldsymbol{\Omega}_i^2 ; \quad (3.9)$$

$$\boldsymbol{\tau}_i = C_{\tau} \rho A_d r_d^3 \boldsymbol{\Omega}_i^2 , \quad (3.10)$$

onde A_d é a área do disco e C_e e C_{τ} coeficientes aerodinâmicos da pá de hélice, os quais são dependentes dos fatores geométricos de construção da hélice e dos coeficientes de sustentação e arrasto, entre outros (SEDDON; NEWMAN, 2011). Segundo Valavanis e Vachtsevanos (2014, pg. 196), assumindo que a distorção das pás pode ser ignorada quando em alta frequência de rotação, (3.9) e (3.10) são simplificadas para:

$$\mathbf{f}_i = k_e \boldsymbol{\Omega}_i^2 ; \quad (3.11)$$

$$\boldsymbol{\tau}_i = k_{\tau} \boldsymbol{\Omega}_i^2 , \quad (3.12)$$

onde os coeficientes que relacionam velocidade-empuxo ($k_e > 0$) e velocidade-torque ($k_{\tau} > 0$) podem ser estimados experimentalmente.

O torque total devido à atuação do motor M_i é composto do torque gerado pela aceleração angular no seu eixo e do torque resistivo devido ao arrasto das hélices. Sendo assim, $\boldsymbol{\tau}_{M_i} = \mathbf{I}_{r_i} \dot{\boldsymbol{\Omega}}_i + \boldsymbol{\tau}_i$, onde \mathbf{I}_{r_i} é o momento de inércia do motor em torno de seu eixo e $\boldsymbol{\Omega}_i$ a aceleração angular do rotor.

Considerando apenas a situação em que a velocidade angular Ω_i é constante,

$$\tau_{M_i} = \tau_i = k_\tau \Omega_i^2 = \lambda_i \frac{k_\tau}{k_e} f_i, \quad (3.13)$$

onde λ_i depende do sentido de giro do rotor, $\lambda_i = -1$, para o motor M_i girando no sentido horário e $\lambda_i = 1$, no caso anti-horário.

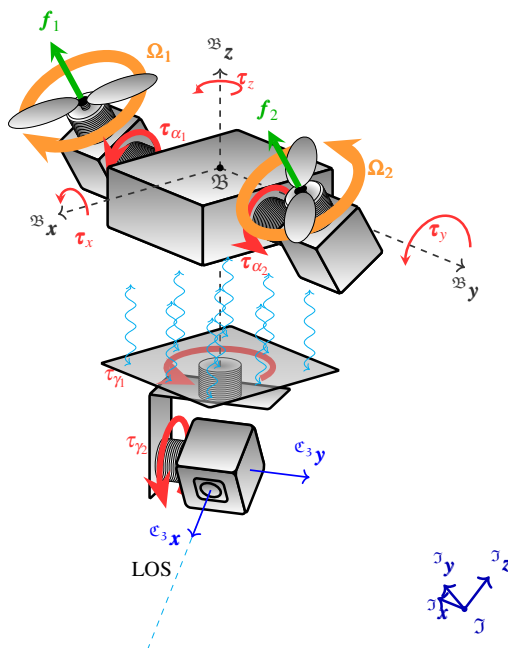
Em (3.13), o torque τ_{M_i} é estabelecido em função da força de propulsão gerada pelo motor M_i . Porém, as forças de propulsão não são realmente as entradas de atuação do sistema, pois sua existência depende de uma rotação nas hélices com velocidade angular Ω_i , como mostrado em (3.11), que por sua vez depende da tensão aplicada ao motor M_i . Entretanto, apesar da existência dessa dinâmica, grande parte dos trabalhos sobre quadrirotores tomam a velocidade de rotação das hélices ou mesmo as forças geradas como entradas de controle, negligenciando o período transitório necessário para o motor atingir tal velocidade. Isso é possível pois geralmente a dinâmica do motor é bem mais rápida que a do sistema restante.

3.3 MODELO DE UM VANT HÍBRIDO DE DOIS ROTORES INCLINÁVEIS E COM *GIMBAL* INTEGRADO

A Figura 18 expõe uma representação do VANT híbrido de dois rotores inclináveis e com um *gimbal* Az-El integrado, constituindo um sistema multi-corpo composto de quatro corpos rígidos, conectados de modo que certo grau de liberdade em seus movimentos relativos é permitido. Identifica-se:

- o corpo central - composto pela estrutura principal à qual a câmera e os rotores são acoplados, também integrando os motores que atuam na inclinação dos rotores, a parte fixa da estrutura do *gimbal* Az-El, a bateria e os demais dispositivos eletrônicos necessários;
- os dois rotores - um de cada lado da estrutura principal, à qual estão ligados através de juntas revolutas providas de atuação;
- o corpo orientável - conectado à estrutura principal através de um *gimbal* Az-El, integra a câmera, além da parte móvel da própria estrutura do *gimbal*.

Figura 18 – Representação do VANT híbrido de dois rotores inclináveis com *gimbal* Az-El.



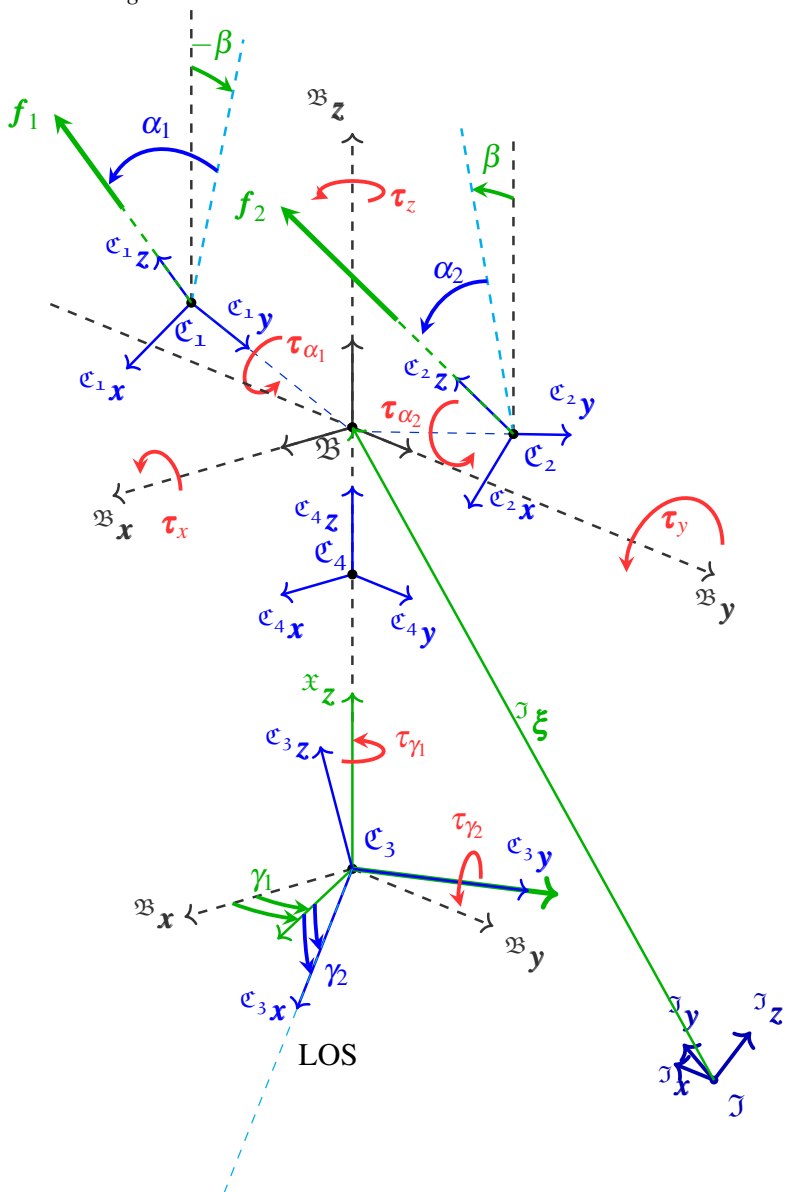
Fonte: Elaborado pelo autor.

3.3.1 Cinemática e coordenadas generalizadas do sistema

Na Figura 19 é apresentado um diagrama com as bases de coordenadas atribuídas a cada um dos corpos, além da base inercial \mathcal{I} e da base móvel \mathcal{B} , a qual é atrelada ao centro de rotação do sistema. As bases \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 são rigidamente fixadas ao centro de massa do corpo dos rotores, sendo os eixos $e_{i y}$ e $e_{i z}$ coincidentes com o eixo de rotação dos motores responsáveis pela inclinação de α_i e com a direção de atuação das forças de propulsão f_i , respectivamente, para $i = 1, 2$. A base \mathcal{C}_3 é rigidamente fixada ao centro de massa do corpo orientável e \mathcal{C}_4 ao centro de massa do corpo central.

A alteração na magnitude das forças de propulsão f_1 e f_2 , juntamente com os ângulos α_1 e α_2 , contribuem para o movimento do veículo. O deslocamento nas direções vertical e longitudinal é obtido atuando-se igualmente em f_1 e f_2 e alterando, através de α_1 e α_2 , suas componentes nessas direções.

Figura 19 – Diagrama de corpo livre do VANT híbrido de dois rotores inclináveis com *gimbal* Az-El.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Entretanto, tal ação acarreta também em uma rotação em torno do eixo transversal (arfagem) do veículo, mais precisamente, ao inclinar os rotores para frente, como reação, o bico da aeronave tende a levantar. Nesse caso, como mencionado em Gonçalves et al. (2013), deslocar o centro de massa do sistema para um ponto abaixo do centro de rotação traz benefícios. No veículo proposto, tal deslocamento do centro de massa na direção negativa de ${}^{\mathfrak{B}}\mathbf{z}$ ocorre devido à adição da câmera na parte inferior do VANT.

Com a inclinação dos rotores em direções opostas ocorre a rotação em torno do eixo vertical (guinada). Já rotação em torno do eixo longitudinal (rolagem), bem como o deslocamento lateral, são obtidos a partir da diferença entre as componentes verticais das duas forças.

Considera-se, adicionalmente, uma inclinação lateral fixa de valor β em ambos os rotores, com objetivo de favorecer a controlabilidade do sistema (RAFFO; ORTEGA; RUBIO, 2011). Sua inclusão possibilita a existência de componentes das forças de propulsão na direção lateral.

Seguindo a análise cinemática apresentada na Seção 2.2, estabelece-se o vetor ${}^{\mathcal{J}}\tilde{\boldsymbol{\xi}} = [x \ y \ z]^T$, contendo as variáveis de translação da origem de \mathfrak{B} em relação à de \mathcal{J} , e também o vetor $\boldsymbol{\eta} = [\phi \ \theta \ \psi]^T$, que descreve a orientação de \mathfrak{B} utilizando a representação por ângulos de Euler dada pela matriz de rotação ${}^{\mathcal{J}}\mathbf{R}_{\mathfrak{B}}$ obtida em (2.6). O conjunto de vetores ${}^{\mathfrak{B}}\mathbf{d}_{\mathcal{C}_i} = [{}^{\mathfrak{B}}d_{ix} \ {}^{\mathfrak{B}}d_{iy} \ {}^{\mathfrak{B}}d_{iz}]^T$ define o deslocamento entre as origens de \mathcal{C}_i e \mathfrak{B} , as quais são constantes para $i = 1, 2, 3, 4$. Adicionalmente, ${}^{\mathfrak{B}}\mathbf{R}_{\mathcal{C}_i}$ é a matriz de rotação que descreve a orientação entre as bases fixas aos corpos e a base \mathfrak{B} .

Para a base \mathcal{C}_4 , fixa ao mesmo corpo e paralela a \mathfrak{B} , ${}^{\mathfrak{B}}\mathbf{R}_{\mathcal{C}_4} = \mathbb{I}_{3 \times 3}$. Já a orientação dos corpos das bases \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 é obtida fazendo

$${}^{\mathfrak{B}}\mathbf{R}_{\mathcal{C}_1} = [(\mathbf{R}_{\mathcal{C}_1, y, \alpha_1})(\mathbf{R}_{\mathfrak{B}, x, -\beta})]^T = \begin{bmatrix} c_{\alpha_1} & 0 & s_{\alpha_1} \\ -s_{\beta}s_{\alpha_1} & c_{\beta} & c_{\alpha_1}s_{\beta} \\ -c_{\beta}s_{\alpha_1} & -s_{\beta} & c_{\beta}c_{\alpha_1} \end{bmatrix}$$

e

$${}^{\mathfrak{B}}\mathbf{R}_{\mathcal{C}_2} = [(\mathbf{R}_{\mathcal{C}_2, y, \alpha_2})(\mathbf{R}_{\mathfrak{B}, x, \beta})]^T = \begin{bmatrix} c_{\alpha_2} & 0 & s_{\alpha_2} \\ s_{\beta}s_{\alpha_2} & c_{\beta} & -c_{\alpha_2}s_{\beta} \\ -c_{\beta}s_{\alpha_2} & s_{\beta} & c_{\beta}c_{\alpha_2} \end{bmatrix},$$

respectivamente. Para a base \mathcal{C}_3 , a matriz de rotação é aquela encontrada para o *gimbal* Az-El em (3.2),

$${}^{\mathfrak{B}}\mathbf{R}_{\mathcal{C}_3} = {}^{\mathfrak{B}}\mathbf{R}_{\mathcal{C}_{Az}} = \begin{bmatrix} c_{\gamma_1}c_{\gamma_2} & -s_{\gamma_1} & c_{\gamma_1}s_{\gamma_2} \\ c_{\gamma_2}s_{\gamma_1} & c_{\gamma_1} & s_{\gamma_1}s_{\gamma_2} \\ -s_{\gamma_2} & 0 & c_{\gamma_2} \end{bmatrix}.$$

O total de variáveis independentes que compõem o conjunto das n coordenadas generalizadas do sistema formado por $n_c = 4$ corpos e com n_r restrições é encontrado a partir do conhecimento das restrições impostas a cada um dos corpos, que são descontadas do número total de $6n_c$ coordenadas requeridas para descrever a configuração do sistema. Tem-se que os corpos das bases \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 dispõem de apenas um grau de liberdade, ou seja, cinco restrições cada. O corpo da base \mathcal{C}_3 tem dois graus de liberdade com quatro restrições e o corpo da base \mathcal{C}_4 é composto pela estrutura principal do VANT, tendo assim seis graus de liberdade e nenhuma restrição. Com isso

$$n = 6n_c - n_r = 24 - 5 - 5 - 4 - 0 = 10.$$

Os ângulos α_1 , α_2 , γ_1 e γ_2 podem ser alterados através de atuadores durante o voo e, junto com as variáveis de posição e orientação do VANT, formam o vetor $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{10}$ de coordenadas generalizadas do sistema. Sendo assim:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathfrak{J} \boldsymbol{\xi}^T & \boldsymbol{\eta}^T & \boldsymbol{\alpha}^T & \boldsymbol{\gamma}^T \end{bmatrix}^T,$$

onde $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1 \quad \alpha_2]^T$ e $\boldsymbol{\gamma} = [\gamma_1 \quad \gamma_2]^T$.

Analisando a Figura 19, são estabelecidas as seguintes relações que mapeiam a velocidade angular em torno dos eixos das bases expressando-as em função das velocidades generalizadas:

$$\begin{aligned} {}^{\mathcal{C}_1} \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{C}_1} &= {}^{\mathcal{C}_1} \hat{\mathbf{j}} \dot{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\alpha}_1 = \mathbf{W}_{\alpha_1} \dot{\alpha}_1; \\ {}^{\mathcal{C}_2} \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{C}_2} &= {}^{\mathcal{C}_2} \hat{\mathbf{j}} \dot{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\alpha}_2 = \mathbf{W}_{\alpha_2} \dot{\alpha}_2. \end{aligned}$$

Para o *gimbal* Az-El, de (3.3), tem-se que:

$${}^{\mathfrak{B}} \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{C}_3} = {}^{\mathcal{C}_{Az}} \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{C}_{Az}} = \begin{bmatrix} -s_{\gamma_2} & 0 \\ 0 & 1 \\ c_{\gamma_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\gamma}_1 \\ \dot{\gamma}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{W}_{\gamma} \dot{\boldsymbol{\gamma}}.$$

A velocidade angular do sistema como um todo em função das frequências de Cardan é descrita pela relação obtida em (2.28), onde é estabelecido que

$${}^{\mathfrak{B}} \boldsymbol{\omega}_{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s_{\theta} \\ 0 & c_{\phi} & c_{\theta} s_{\phi} \\ 0 & -s_{\phi} & c_{\theta} c_{\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \mathbf{W}_{\eta} \dot{\boldsymbol{\eta}}.$$

3.3.2 Equações da dinâmica do sistema

O sistema de equações que descreve a dinâmica do robô móvel proposto são obtidas utilizando o método de Euler-Lagrange apresentado na Subseção 2.3.1. Tal formulação resulta na equação de movimento descrita em uma forma compacta por (2.64). Deste modo, tem-se que a matriz de inércia $\mathbf{M}_{\otimes}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{10 \times 10}$ do sistema composto pelo VANT de dois rotores inclináveis e com um *gimbal* Az-El integrado é obtida a partir da energia cinética como apresentado em (2.56), sendo estruturada da seguinte forma:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m_{\xi,\xi} & m_{\xi,\eta} & m_{\xi,c_1} & m_{\xi,c_2} & m_{\xi,c_3} \\ * & m_{\eta,\eta} & m_{\eta,c_1} & m_{\eta,c_2} & m_{\eta,c_3} \\ * & * & m_{c_1,c_1} & m_{c_1,c_2} & m_{c_1,c_3} \\ * & * & * & m_{c_2,c_2} & m_{c_2,c_3} \\ * & * & * & * & m_{c_3,c_3} \end{bmatrix}, \quad (3.14)$$

onde seus elementos são

$$\begin{aligned} m_{\xi,\xi} &= m_t \mathbb{I}_{3 \times 3}, & m_{\xi,\eta} &= {}^{\mathfrak{J}}\mathbf{R}_{\mathfrak{B}} \mathbf{H} \mathbf{W}_{\eta}, \\ m_{\xi,c_1} &= \mathbb{O}_{3 \times 1}, & m_{\eta,\eta} &= \mathbf{W}_{\eta}^T {}^{\mathfrak{B}}\mathbf{J} \mathbf{W}_{\eta}, \\ m_{\xi,c_2} &= \mathbb{O}_{3 \times 1}, & m_{c_1,c_1} &= \mathbf{W}_{\alpha_1}^T \mathbf{e}_1 \mathbf{I} \mathbf{W}_{\alpha_1}, \\ m_{\xi,c_3} &= \mathbb{O}_{3 \times 2}, & m_{c_2,c_2} &= \mathbf{W}_{\alpha_2}^T \mathbf{e}_2 \mathbf{I} \mathbf{W}_{\alpha_2}, \\ m_{c_1,c_2} &= \mathbf{0}, & m_{c_3,c_3} &= \mathbf{W}_{\gamma}^T \mathbf{e}_3 \mathbf{I} \mathbf{W}_{\gamma}, \\ m_{c_1,c_3} &= \mathbb{O}_{1 \times 2}, & m_{\eta,c_1} &= \mathbf{W}_{\eta}^T {}^{\mathfrak{B}}\mathbf{R}_{\mathfrak{C}_1} \mathbf{e}_1 \mathbf{I} \mathbf{W}_{\alpha_1}, \\ m_{c_2,c_3} &= \mathbb{O}_{1 \times 2}, & m_{\eta,c_2} &= \mathbf{W}_{\eta}^T {}^{\mathfrak{B}}\mathbf{R}_{\mathfrak{C}_2} \mathbf{e}_2 \mathbf{I} \mathbf{W}_{\alpha_2}, \\ & & m_{\eta,c_3} &= \mathbf{W}_{\eta}^T {}^{\mathfrak{B}}\mathbf{R}_{\mathfrak{C}_3} \mathbf{e}_3 \mathbf{I} \mathbf{W}_{\gamma}, \end{aligned}$$

sendo $\mathbb{I}_{3 \times 3}$ uma matriz identidade de dimensão três, $m_t = \sum_{i=1}^4 m_i$ é a massa total do sistema, ${}^{\mathfrak{B}}\mathbf{J} = \sum_{i=1}^4 {}^{\mathfrak{B}}\mathbf{J}_i$ é o tensor de inércia do sistema expresso na base \mathfrak{B} , com ${}^{\mathfrak{B}}\mathbf{J}_i$ obtido através da equação (2.49) e $\mathbf{H} = -\sum_{i=1}^4 m_i \mathbf{S}({}^{\mathfrak{B}}\mathbf{d}_{\mathfrak{C}_i})$.

A matriz $\mathbf{C}_{\otimes}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{10 \times 10}$ tem seus elementos computados a partir da matriz $\mathbf{M}_{\otimes}(\mathbf{q})$ pelo método dos símbolos de Christoffel de primeira espécie. De (2.66), tem-se que:

$$c_{kj}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{10} \left(\frac{\partial m_{kj}(\mathbf{q})}{\partial q_i} + \frac{\partial m_{ki}(\mathbf{q})}{\partial q_j} - \frac{\partial m_{ij}(\mathbf{q})}{\partial q_k} \right) \dot{q}_i.$$

O vetor de força gravitacional $\mathbf{G}_{\otimes}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{10}$ é derivado da energia potencial gravitacional $\mathcal{U}(\mathbf{q})$ como mostra a equação (2.65). De (2.60) encontra-se, para o sistema proposto²,

$$\mathcal{U}(\mathbf{q}) = -(\mathcal{J}\mathbf{g})^T \mathcal{J} \mathbf{R}_{\mathfrak{B}} \left(\sum_{i=1}^4 \mathfrak{B} d_{\mathbf{e}_i} m_i \right) - (\mathcal{J}\mathbf{g})^T \mathcal{J} \boldsymbol{\xi} m_t$$

e, com isso,

$$\mathbf{G}_{\otimes}(\mathbf{q}) = \left(\frac{\partial \mathcal{U}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right)^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_t g \\ g(c_\phi c_\theta m_y - c_\theta s_\phi m_z) \\ -g(c_\theta m_x + c_\phi s_\theta m_z + s_\phi s_\theta m_y) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

onde $m_x = \sum_{i=1}^4 \mathfrak{B} d_{ix} m_i$, $m_y = \sum_{i=1}^4 \mathfrak{B} d_{iy} m_i$ e $m_z = \sum_{i=1}^4 \mathfrak{B} d_{iz} m_i$.

O vetor $\mathbf{F}_{\otimes}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{10}$ é composto por forças e torques gerados pelas entradas de atuação e que conduzem as coordenadas generalizadas. Tem-se que

$$\mathbf{F}_{\otimes}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathcal{J}\mathbf{f} \\ \boldsymbol{\tau}_\eta \\ \boldsymbol{\tau}_\alpha \\ \boldsymbol{\tau}_\gamma \end{bmatrix} = [f_x \quad f_y \quad f_z \quad \tau_\phi \quad \tau_\theta \quad \tau_\psi \quad \tau_{\alpha_1} \quad \tau_{\alpha_2} \quad \tau_{\gamma_1} \quad \tau_{\gamma_2}]^T,$$

onde $\boldsymbol{\tau}_\alpha = [\tau_{\alpha_1} \quad \tau_{\alpha_2}]^T$ e $\boldsymbol{\tau}_\gamma = [\tau_{\gamma_1} \quad \tau_{\gamma_2}]^T$ são torques aplicados por motores acoplados diretamente aos eixos de rotação em $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\gamma}$. Entretanto, $\mathcal{J}\mathbf{f} = [f_x \quad f_y \quad f_z]^T$ e $\boldsymbol{\tau}_\eta = [\tau_\phi \quad \tau_\theta \quad \tau_\psi]^T$ resultam das forças de propulsão f_1 e f_2 geradas pelos rotores nas direções dos eixos $\mathbf{e}_1 \mathbf{z}$ e $\mathbf{e}_2 \mathbf{z}$, que são apontadas pelos vetores unitários $\mathbf{e}_1 \hat{\mathbf{k}} = \mathbf{e}_2 \hat{\mathbf{k}} = [0 \quad 0 \quad 1]^T$, respectivamente.

²Lembrando que os corpos dos rotores inclináveis e o corpo orientável têm seus respectivos centros de massa e de rotação coincidentes.

Expressando as forças de propulsão na base \mathfrak{B} , tem-se:

$$\begin{aligned} {}^{\mathfrak{B}}\mathbf{f}_1 &= {}^{\mathfrak{B}}\mathbf{R}_{\mathbf{e}_1} {}^{\mathbf{e}_1}\hat{\mathbf{k}} f_1 = \begin{bmatrix} s_{\alpha_1} \\ c_{\alpha_1} s_{\beta} \\ c_{\beta} c_{\alpha_1} \end{bmatrix} f_1 = {}^{\mathfrak{B}}\hat{\mathbf{u}}_{f_1} f_1 ; \\ {}^{\mathfrak{B}}\mathbf{f}_2 &= {}^{\mathfrak{B}}\mathbf{R}_{\mathbf{e}_2} {}^{\mathbf{e}_2}\hat{\mathbf{k}} f_2 = \begin{bmatrix} s_{\alpha_2} \\ -c_{\alpha_2} s_{\beta} \\ c_{\beta} c_{\alpha_2} \end{bmatrix} f_2 = {}^{\mathfrak{B}}\hat{\mathbf{u}}_{f_2} f_2 . \end{aligned} \quad (3.15)$$

Assim, a contribuição total das forças em \mathfrak{B} é ${}^{\mathfrak{B}}\mathbf{f} = [{}^{\mathfrak{B}}f_x \quad {}^{\mathfrak{B}}f_y \quad {}^{\mathfrak{B}}f_z]^T = {}^{\mathfrak{B}}\mathbf{f}_1 + {}^{\mathfrak{B}}\mathbf{f}_2$. Quando expressa na base inercial resulta na atuação aplicada às coordenadas generalizadas de translação:

$$\begin{aligned} {}^{\mathfrak{J}}\mathbf{f} &= {}^{\mathfrak{J}}\mathbf{R}_{\mathfrak{B}} {}^{\mathfrak{B}}\mathbf{f} = {}^{\mathfrak{J}}\mathbf{R}_{\mathfrak{B}} ({}^{\mathfrak{B}}\mathbf{f}_1 + {}^{\mathfrak{B}}\mathbf{f}_2) = {}^{\mathfrak{J}}\mathbf{R}_{\mathfrak{B}} [{}^{\mathfrak{B}}\hat{\mathbf{u}}_{f_1} \quad {}^{\mathfrak{B}}\hat{\mathbf{u}}_{f_2}] \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{{}^{\mathfrak{J}}\mathbf{R}_{\mathfrak{B}} \begin{bmatrix} s_{\alpha_1} & s_{\alpha_2} \\ c_{\alpha_1} s_{\beta} & -c_{\alpha_2} s_{\beta} \\ c_{\beta} c_{\alpha_1} & c_{\beta} c_{\alpha_2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_{\xi}} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \mathbf{B}_{\xi} \mathbf{f} . \end{aligned}$$

Os torques rotacionais considerados são decorrentes de $\boldsymbol{\tau}_{f_i}$, existente devido à distância em que as forças de propulsão são aplicadas em relação ao centro de rotação do sistema, além de $\boldsymbol{\tau}_{M_i}$ que, pelas considerações realizadas em (3.13), deve-se ao arrasto das hélices. Com isso, tem-se que o torque total em torno dos eixos da base \mathfrak{B} é

$$\begin{aligned} {}^{\mathfrak{B}}\boldsymbol{\tau} &= [\tau_x \quad \tau_y \quad \tau_z]^T = {}^{\mathfrak{B}}\boldsymbol{\tau}_{f_1} + {}^{\mathfrak{B}}\boldsymbol{\tau}_{f_2} + {}^{\mathfrak{B}}\boldsymbol{\tau}_{M_1} + {}^{\mathfrak{B}}\boldsymbol{\tau}_{M_2} \\ &= ({}^{\mathfrak{B}}\mathbf{d}_{\mathbf{e}_1} \times {}^{\mathfrak{B}}\hat{\mathbf{u}}_{f_1} f_1) + ({}^{\mathfrak{B}}\mathbf{d}_{\mathbf{e}_2} \times {}^{\mathfrak{B}}\hat{\mathbf{u}}_{f_2} f_2) + \frac{k_{\tau}}{k_e} (\lambda_1 {}^{\mathfrak{B}}\hat{\mathbf{u}}_{f_1} f_1 + \lambda_2 {}^{\mathfrak{B}}\hat{\mathbf{u}}_{f_2} f_2) . \end{aligned}$$

Para reduzir a influência do torque devido ao arrasto das hélices no movimento do VANT, são estabelecidos sentidos de giro opostos nos motores. Com M_1 girando no sentido horário, $\lambda_1 = -1$, e para M_2 no sentido anti-horário $\lambda_2 = 1$. Adicionalmente, assume-se que os rotores estão posicionados equidistantes da origem de \mathfrak{B} , ou seja, ${}^{\mathfrak{B}}d_x = {}^{\mathfrak{B}}d_{1x} = {}^{\mathfrak{B}}d_{2x}$, ${}^{\mathfrak{B}}d_y = |{}^{\mathfrak{B}}d_{1y}| = {}^{\mathfrak{B}}d_{2y}$ e ${}^{\mathfrak{B}}d_z = {}^{\mathfrak{B}}d_{1z} = {}^{\mathfrak{B}}d_{2z}$, sendo ${}^{\mathfrak{B}}d_x = 0$, uma vez estabelecido que não

há deslocamento do centro de massa dos corpos com rotores em ${}^{\mathfrak{B}}\mathbf{x}$.

$$\begin{aligned}
 {}^{\mathfrak{B}}\boldsymbol{\tau} &= ({}^{\mathfrak{B}}\mathbf{d}_{\mathbf{e}_1} \times {}^{\mathfrak{B}}\hat{\mathbf{u}}_{f_1} f_1) + ({}^{\mathfrak{B}}\mathbf{d}_{\mathbf{e}_2} \times {}^{\mathfrak{B}}\hat{\mathbf{u}}_{f_2} f_2) + \frac{k_{\tau}}{k_e} ({}^{\mathfrak{B}}\hat{\mathbf{u}}_{f_2} f_2 - {}^{\mathfrak{B}}\hat{\mathbf{u}}_{f_1} f_1) \\
 &= \underbrace{\begin{bmatrix} -{}^{\mathfrak{B}}d_y c_{\alpha_1} c_{\beta} - {}^{\mathfrak{B}}d_z c_{\alpha_1} s_{\beta} & {}^{\mathfrak{B}}d_y c_{\alpha_2} c_{\beta} + {}^{\mathfrak{B}}d_z c_{\alpha_2} s_{\beta} \\ {}^{\mathfrak{B}}d_z s_{\alpha_1} & {}^{\mathfrak{B}}d_z s_{\alpha_2} \\ {}^{\mathfrak{B}}d_y s_{\alpha_1} & -{}^{\mathfrak{B}}d_y s_{\alpha_2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_{\tau_f}} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \\
 &\quad + \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{k_{\tau}}{k_e} s_{\alpha_1} & \frac{k_{\tau}}{k_e} s_{\alpha_2} \\ -\frac{k_{\tau}}{k_e} c_{\alpha_1} s_{\beta} & -\frac{k_{\tau}}{k_e} c_{\alpha_1} s_{\beta} \\ -\frac{k_{\tau}}{k_e} c_{\alpha_1} c_{\beta} & \frac{k_{\tau}}{k_e} c_{\alpha_1} c_{\beta} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_{\tau_M}} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = (\mathbf{B}_{\tau_f} + \mathbf{B}_{\tau_M}) \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Expressando (3.16) nas devidas coordenadas generalizadas de rotação, encontra-se:

$$\boldsymbol{\tau}_{\eta} = [\tau_{\phi} \quad \tau_{\theta} \quad \tau_{\psi}]^T = \mathbf{W}_{\eta}^T {}^{\mathfrak{B}}\boldsymbol{\tau} = \underbrace{\mathbf{W}_{\eta}^T (\mathbf{B}_{\tau_f} + \mathbf{B}_{\tau_M})}_{\mathbf{B}_{\eta}} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \mathbf{B}_{\eta} \mathbf{f}.$$

Assim, tem-se que

$$\mathbf{F}_{\otimes}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} {}^{\mathfrak{J}}\mathbf{f} \\ \boldsymbol{\tau}_{\eta} \\ \boldsymbol{\tau}_{\alpha} \\ \boldsymbol{\tau}_{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{\mathfrak{J}}\mathbf{R}_{\mathfrak{B}} & \mathbb{O}_{3 \times 3} & \mathbb{O}_{3 \times 2} & \mathbb{O}_{3 \times 2} \\ \mathbb{O}_{3 \times 3} & \mathbf{W}_{\eta}^T & \mathbb{O}_{3 \times 2} & \mathbb{O}_{3 \times 2} \\ \mathbb{O}_{2 \times 3} & \mathbb{O}_{2 \times 3} & \mathbb{I}_{2 \times 2} & \mathbb{O}_{2 \times 2} \\ \mathbb{O}_{2 \times 3} & \mathbb{O}_{2 \times 3} & \mathbb{O}_{2 \times 2} & \mathbb{I}_{2 \times 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{\mathfrak{B}}\mathbf{f} \\ {}^{\mathfrak{B}}\boldsymbol{\tau} \\ \boldsymbol{\tau}_{\alpha} \\ \boldsymbol{\tau}_{\gamma} \end{bmatrix} = \mathbf{B}_{\otimes}^*(\mathbf{q}) \begin{bmatrix} {}^{\mathfrak{B}}\mathbf{f} \\ {}^{\mathfrak{B}}\boldsymbol{\tau} \\ \boldsymbol{\tau}_{\alpha} \\ \boldsymbol{\tau}_{\gamma} \end{bmatrix}. \tag{3.17}$$

Definindo o vetor

$$\mathbf{u}_{\otimes} = [f_1 \quad f_2 \quad \tau_{\alpha_1} \quad \tau_{\alpha_2} \quad \tau_{\gamma_1} \quad \tau_{\gamma_2}]^T = [\mathbf{f}^T \quad \boldsymbol{\tau}_{\alpha}^T \quad \boldsymbol{\tau}_{\gamma}^T]^T \in \mathbb{R}^6$$

contendo entradas de atuação do sistema, fica então estabelecido que

$$\mathbf{F}_{\otimes}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} {}^{\mathfrak{J}}\mathbf{f} \\ \boldsymbol{\tau}_{\eta} \\ \boldsymbol{\tau}_{\alpha} \\ \boldsymbol{\tau}_{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\xi} & \mathbb{O}_{3 \times 2} & \mathbb{O}_{3 \times 2} \\ \mathbf{B}_{\eta} & \mathbb{O}_{3 \times 2} & \mathbb{O}_{3 \times 2} \\ \mathbb{O}_{2 \times 2} & \mathbb{I}_{2 \times 2} & \mathbb{O}_{2 \times 2} \\ \mathbb{O}_{2 \times 2} & \mathbb{O}_{2 \times 2} & \mathbb{I}_{2 \times 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \boldsymbol{\tau}_{\alpha} \\ \boldsymbol{\tau}_{\gamma} \end{bmatrix} = \mathbf{B}_{\otimes}(\mathbf{q})\mathbf{u}_{\otimes} \tag{3.18}$$

onde $\mathbf{B}_2(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{10 \times 6}$ é a matriz de forças externas. Devido à estrutura de $\mathbf{B}_2(\mathbf{q})$ fica evidente a subatuação do sistema e o acoplamento de entrada.

Como em Almeida e Raffo (2015), considera-se uma variação na equação em (2.64), de modo a integrar ao modelo a influência da força $\mathbf{F}_e = \mathbf{d}_2 \in \mathbb{R}^{10}$, originada de distúrbios externos desconhecidos.

Feito isso, a equação da dinâmica do VANT híbrido de dois rotores inclináveis e com *gimbal* Az-El integrado é descrita por:

$$\mathbf{M}_2(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}_2(\mathbf{q}) = \mathbf{B}_2(\mathbf{q})\mathbf{u}_2 + \mathbf{d}_2. \quad (3.19)$$

3.4 MODELO DE UM VANT HÍBRIDO DE QUATRO ROTORES INCLINÁVEIS E COM *GIMBAL* INTEGRADO

A Figura 20 mostra a representação de um VANT híbrido de quatro rotores inclináveis e com um *gimbal* Az-El integrado. Seguindo a mesma análise realizada para o modelo da Seção 3.3, esse sistema multi-corpo é composto de seis corpos rígidos, entre eles, o corpo central, o corpo orientável com a câmera, além de quatro corpos com rotores.

3.4.1 Cinemática e coordenadas generalizadas do sistema

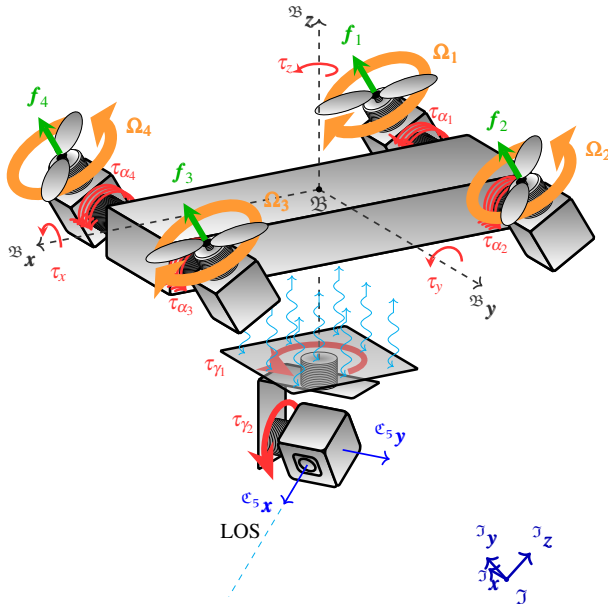
Na Figura 21 é apresentado um diagrama com as bases de coordenadas \mathcal{C}_i atribuídas a cada um dos corpos, além da base inercial \mathcal{J} e da base móvel \mathcal{B} . As bases \mathcal{C}_i , para $i = 1, 2, 3, 4$, são rigidamente fixadas ao centro de massa dos corpos com rotores, sendo ${}^{\mathcal{C}_i}\mathbf{y}$ coincidente com o eixo de rotação dos motores responsáveis pela inclinação de α_i e ${}^{\mathcal{C}_i}\mathbf{z}$ com a direção de atuação das forças de propulsão f_i . A base \mathcal{C}_5 é rigidamente fixada ao centro de massa do corpo orientável e \mathcal{C}_6 do corpo central.

Tanto a atuação na magnitude das forças de propulsão f_i quanto na inclinação dos ângulos α_i contribuem para o movimento do veículo, sendo que o deslocamento vertical e longitudinal é obtido atuando-se igualmente nas forças de propulsão e alterando, através de α_i , suas componentes nessas direções.

Uma das vantagens deste modelo em relação aos quadrirotores convencionais³ é que o movimento longitudinal pode ser realizado sem a necessidade de rotação em torno do eixo transversal (arfagem). Se comparado ao VANT da Seção 3.3, devido à disposição dos rotores, o torque refletido na estrutura do veículo como consequência da inclinação dos rotores têm pouca influência

³Quadrirotores com rotores fixados rigidamente à estrutura principal.

Figura 20 – Representação do VANT híbrido de quatro rotores inclináveis com *gimbal* Az-El.



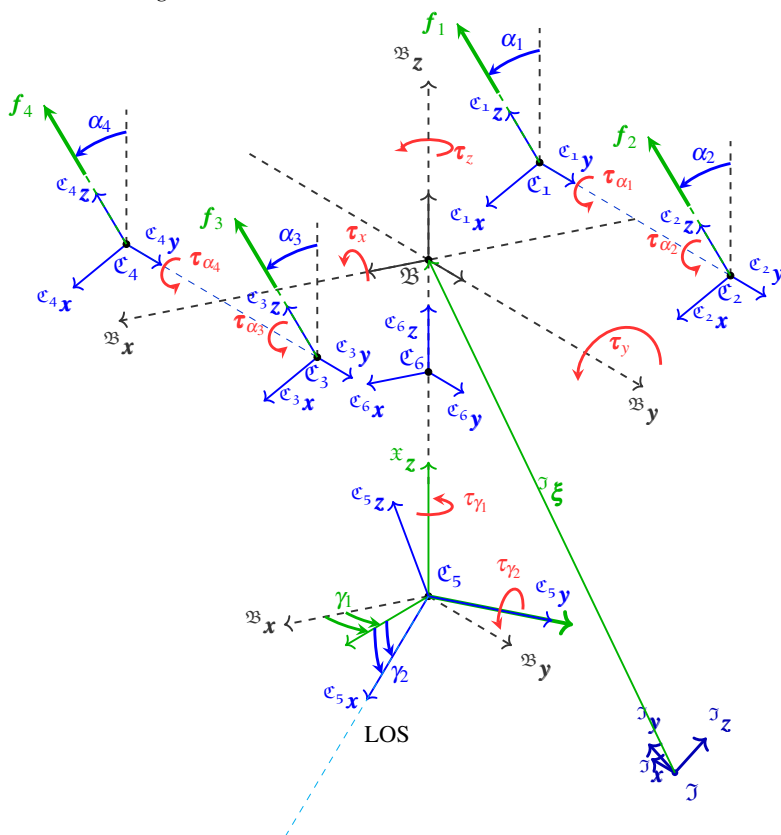
Fonte: Elaborado pelo autor.

no movimento de arfagem.

Contudo, mesmo com as entradas adicionais de atuação, o deslocamento lateral ainda é acoplado à rotação em torno do eixo longitudinal (rolagem), ocorrendo a partir da diferença entre as componentes verticais das forças de uma lateral em relação as da outra.

Mantendo constantes as forças de propulsão e inclinando os rotores de uma das laterais em direção oposta aos da outra lateral, é efetuada uma rotação em torno do eixo vertical (guinada). Ao levar em consideração o torque resistivo que surge devido ao arrasto das hélices (3.13), a rotação em torno do eixo vertical pode ser realizada mesmo com todos os rotores exercendo suas forças na direção vertical. Como são definidos pares de motores que giram em sentidos opostos (da Figura 20, M_1 e M_3 giram no sentido horário e M_2 e M_4 no sentido anti-horário), ao variar a velocidade angular dos pares, varia-se também o torque líquido em torno do eixo vertical. É utilizando este princípio que os quadrirotores convencionais conseguem realizar o movimento

Figura 21 – Diagrama de corpo livre do VANT híbrido de quatro rotores inclináveis com *gimbal* Az-El.



Fonte: Elaborado pelo autor.

de guinada.

Para a análise cinemática deste modelo, são estabelecidos novamente os vetores ${}^J\xi$ e η , contendo as variáveis de translação e orientação de \mathcal{B} , além do conjunto de vetores ${}^{\mathcal{B}}d_{e_i} = [{}^{\mathcal{B}}d_{ix} \quad {}^{\mathcal{B}}d_{iy} \quad {}^{\mathcal{B}}d_{iz}]^T$, que estabelecem os deslocamentos entre as origens das bases \mathcal{E}_i em relação à origem de \mathcal{B} . Essas distâncias são definidas constantes para todas as bases, ou seja, para $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Diferente do modelo com dois rotores apresentado na Seção 3.3, neste

modelo não é considerada a existência da inclinação lateral. Sendo assim, a orientação dos corpos contendo os rotores em relação à orientação de \mathfrak{B} é obtida fazendo:

$${}^{\mathfrak{B}}\mathbf{R}_{\mathcal{C}_i} = (\mathbf{R}_{e_i, \alpha_i})^T = \begin{bmatrix} c\alpha_i & 0 & s\alpha_i \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\alpha_i & 0 & c\alpha_i \end{bmatrix},$$

para $i = 1, 2, 3, 4$. A base \mathcal{C}_6 é fixa ao mesmo corpo e paralela à \mathfrak{B} , assim ${}^{\mathfrak{B}}\mathbf{R}_{\mathcal{C}_6} = \mathbb{I}_{3 \times 3}$, e para a base do *gimbal* Az-El, de (3.2), tem-se que:

$${}^{\mathfrak{B}}\mathbf{R}_{\mathcal{C}_5} = {}^{\mathfrak{B}}\mathbf{R}_{\mathcal{C}_{Az}} = \begin{bmatrix} c\gamma_1 c\gamma_2 & -s\gamma_1 & c\gamma_1 s\gamma_2 \\ c\gamma_2 s\gamma_1 & c\gamma_1 & s\gamma_1 s\gamma_2 \\ -s\gamma_2 & 0 & c\gamma_2 \end{bmatrix}.$$

Para encontrar o conjunto das n coordenadas generalizadas do sistema formado por $n_c = 6$ corpos com n_r restrições, as restrições impostas a cada um dos corpos são descontadas do número total de $6n_c$ coordenadas requeridas para descrever a configuração do sistema. Tem-se que os corpos das bases \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 , \mathcal{C}_3 e \mathcal{C}_4 têm apenas um grau de liberdade, ou seja, cinco restrições cada. O corpo da base \mathcal{C}_5 tem dois graus de liberdade com quatro restrições e o corpo da base \mathcal{C}_6 é composto pela estrutura principal do VANT, dispondo assim de seis graus de liberdade e nenhuma restrição. Com isso

$$n = 6n_c - n_r = 36 - 5 - 5 - 5 - 5 - 4 - 0 = 12,$$

e o vetor $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{12}$ de coordenadas generalizadas é estruturado na forma

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathfrak{J} \boldsymbol{\xi}^T & \boldsymbol{\eta}^T & \boldsymbol{\alpha}^T & \boldsymbol{\gamma}^T \end{bmatrix}^T, \quad (3.20)$$

mas para este modelo $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4]^T$.

As relações que mapeiam a velocidade angular em torno dos eixos das bases dos rotores, expressando-as em função das velocidades generalizadas, são:

$${}^{\mathcal{C}_i} \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{C}_i} = {}^{\mathcal{C}_i} \hat{\mathbf{j}} \dot{\alpha}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\alpha}_i = \mathbf{W}_{\alpha_i} \dot{\alpha}_i,$$

para $i = 1, 2, 3, 4$. Do *gimbal* Az-El, tem-se que:

$${}^{\mathcal{C}_5} \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{C}_5} = {}^{\mathcal{C}_{Az}} \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{C}_{Az}} = \mathbf{W}_{\gamma} \dot{\boldsymbol{\gamma}},$$

onde \mathbf{W}_γ é a mesma matriz obtida em (3.3).

A velocidade angular do sistema em função das frequências de Cardan é descrita pela relação obtida em (2.28).

3.4.2 Equações da dinâmica do sistema

A matriz de inércia $\mathbf{M}_{\textcircled{4}}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{12 \times 12}$ do sistema composto pelo VANT de quatro rotores inclináveis e com um *gimbal* Az-El integrado é obtida a partir da energia cinética encontrada através de (2.52) para os seis corpos que o compõe e estruturada da seguinte forma:

$$\mathbf{M}_{\textcircled{4}}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m_{\xi,\xi} & m_{\xi,\eta} & m_{\xi,c_1} & m_{\xi,c_2} & m_{\xi,c_3} & m_{\xi,c_4} & m_{\xi,c_5} \\ * & m_{\eta,\eta} & m_{\eta,c_1} & m_{\eta,c_2} & m_{\eta,c_3} & m_{\eta,c_4} & m_{\eta,c_5} \\ * & * & m_{c_1,c_1} & m_{c_1,c_2} & m_{c_1,c_3} & m_{c_1,c_4} & m_{c_1,c_5} \\ * & * & * & m_{c_2,c_2} & m_{c_2,c_3} & m_{c_2,c_4} & m_{c_2,c_5} \\ * & * & * & * & m_{c_3,c_3} & m_{c_3,c_4} & m_{c_3,c_5} \\ * & * & * & * & * & m_{c_4,c_4} & m_{c_4,c_5} \\ * & * & * & * & * & * & m_{c_5,c_5} \end{bmatrix}, \quad (3.21)$$

onde seus elementos são

$$m_{\xi,\xi} = m_t \mathbb{I}_{3 \times 3},$$

$$m_{\xi,c_1} = m_{\xi,c_2} = m_{\xi,c_3} = m_{\xi,c_4} = \mathbb{O}_{3 \times 1},$$

$$m_{\xi,c_5} = \mathbb{O}_{3 \times 2},$$

$$m_{c_1,c_2} = m_{c_1,c_3} = m_{c_1,c_4} = 0,$$

$$m_{c_2,c_3} = m_{c_2,c_4} = 0,$$

$$m_{c_3,c_4} = 0$$

$$m_{c_1,c_5} = m_{c_2,c_5} = m_{c_3,c_5} = m_{c_4,c_5} = \mathbb{O}_{1 \times 2},$$

$$m_{\eta,c_1} = \mathbf{W}_\eta^T \mathfrak{B} \mathbf{R}_{\mathcal{E}_1} \mathcal{E}_1 \mathbf{I} \mathbf{W}_{\alpha_1},$$

$$m_{\eta,c_2} = \mathbf{W}_\eta^T \mathfrak{B} \mathbf{R}_{\mathcal{E}_2} \mathcal{E}_2 \mathbf{I} \mathbf{W}_{\alpha_2},$$

$$m_{\eta,c_3} = \mathbf{W}_\eta^T \mathfrak{B} \mathbf{R}_{\mathcal{E}_3} \mathcal{E}_3 \mathbf{I} \mathbf{W}_{\alpha_3},$$

$$m_{\xi,\eta} = {}^{\mathcal{J}} \mathbf{R}_{\mathfrak{B}} \mathbf{H} \mathbf{W}_\eta,$$

$$m_{\eta,\eta} = \mathbf{W}_\eta^T \mathfrak{B} \mathbf{J} \mathbf{W}_\eta,$$

$$m_{c_1,c_1} = \mathbf{W}_{\alpha_1}^T \mathcal{E}_1 \mathbf{I} \mathbf{W}_{\alpha_1},$$

$$m_{c_2,c_2} = \mathbf{W}_{\alpha_2}^T \mathcal{E}_2 \mathbf{I} \mathbf{W}_{\alpha_2},$$

$$m_{c_3,c_3} = \mathbf{W}_{\alpha_3}^T \mathcal{E}_3 \mathbf{I} \mathbf{W}_{\alpha_3},$$

$$m_{c_4,c_4} = \mathbf{W}_{\alpha_4}^T \mathcal{E}_4 \mathbf{I} \mathbf{W}_{\alpha_4},$$

$$m_{c_5,c_5} = \mathbf{W}_\gamma^T \mathcal{E}_5 \mathbf{I} \mathbf{W}_\gamma,$$

$$m_{\eta,c_4} = \mathbf{W}_\eta^T \mathfrak{B} \mathbf{R}_{\mathcal{E}_4} \mathcal{E}_4 \mathbf{I} \mathbf{W}_{\alpha_4},$$

$$m_{\eta,c_5} = \mathbf{W}_\eta^T \mathfrak{B} \mathbf{R}_{\mathcal{E}_5} \mathcal{E}_5 \mathbf{I} \mathbf{W}_\gamma,$$

sendo $m_t = \sum_{i=1}^6 m_i$, $\mathbf{H} = -\sum_{i=1}^6 m_i \mathcal{S}({}^{\mathfrak{B}} \mathbf{d}_{\mathcal{E}_i})$ e $\mathbf{J} = \sum_{i=1}^6 {}^{\mathfrak{B}} \mathbf{J}_i$, com ${}^{\mathfrak{B}} \mathbf{J}_i$ obtido através da equação (2.49).

Novamente, a matriz $\mathbf{C}_{\textcircled{4}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{12 \times 12}$ é derivada da matriz $\mathbf{M}_{\textcircled{4}}(\mathbf{q})$ pelo método dos símbolos de Christoffel de primeira espécie apresentado em

(2.66).

Encontra-se energia potencial gravitacional $\mathcal{U}(\mathbf{q})$ do sistema⁴ resolvendo (2.60), de onde

$$\mathcal{U}(\mathbf{q}) = -(\mathcal{J}\mathbf{g})^T \mathcal{R}_{\mathfrak{B}} \left(\sum_{i=1}^6 \mathfrak{B} \mathbf{d}_{\mathfrak{e}_i} m_i \right) - (\mathcal{J}\mathbf{g})^T \mathcal{J} \boldsymbol{\xi} m_t. \quad (3.22)$$

Assim, de (2.65), o vetor de força gravitacional $\mathbf{G}_{\textcircled{4}}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{12}$

$$\mathbf{G}_{\textcircled{4}}(\mathbf{q}) = \left(\frac{\partial \mathcal{U}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right)^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_t g \\ g(c_\phi c_\theta m_y - c_\theta s_\phi m_z) \\ -g(c_\theta m_x + c_\phi s_\theta m_z + s_\phi s_\theta m_y) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.23)$$

com $m_x = \sum_{i=1}^6 \mathfrak{B} d_{ix} m_i$, $m_y = \sum_{i=1}^6 \mathfrak{B} d_{iy} m_i$ e $m_z = \sum_{i=1}^6 \mathfrak{B} d_{iz} m_i$.

Considerando a atuação na inclinação dos rotores de forma individual através de motores em cada uma das juntas revolutas e definidas pelos torques $\boldsymbol{\tau}_\alpha = [\tau_{\alpha_1} \ \tau_{\alpha_2} \ \tau_{\alpha_3} \ \tau_{\alpha_4}]^T$, é estabelecido o vetor de forças e torques $\mathbf{F}_{\textcircled{4}}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{12}$ expressos nas coordenadas generalizadas, de modo que

$$\mathbf{F}_{\textcircled{4}}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathcal{J}\mathbf{f} \\ \boldsymbol{\tau}_\eta \\ \boldsymbol{\tau}_\alpha \\ \boldsymbol{\tau}_\gamma \end{bmatrix},$$

com $\boldsymbol{\tau}_\gamma = [\tau_{\gamma_1} \ \tau_{\gamma_2}]^T$, $\mathcal{J}\mathbf{f} = [f_x \ f_y \ f_z]^T$ e $\boldsymbol{\tau}_\eta = [\tau_\phi \ \tau_\theta \ \tau_\psi]^T$.

As forças de propulsão f_i são geradas pelos rotores nas direções dos eixos $\mathfrak{e}_i \mathbf{z}$, apontadas pelos vetores unitários $\mathfrak{e}_i \hat{\mathbf{k}} = [0 \ 0 \ 1]^T$, para $i =$

⁴Lembrando que os corpos dos rotores inclináveis e o corpo orientável têm seus respectivos centros de massa e de rotação coincidentes.

1, 2, 3, 4. Expressando as forças de propulsão na base \mathfrak{B} , tem-se:

$${}^{\mathfrak{B}}\mathbf{f}_i = {}^{\mathfrak{B}}\mathbf{R}_{\mathfrak{C}_i} \mathbf{e}_i \hat{\mathbf{k}}_i f_i = \begin{bmatrix} s\alpha_i \\ 0 \\ c\alpha_i \end{bmatrix} f_i = {}^{\mathfrak{B}}\hat{\mathbf{u}}_{f_i} f_i,$$

A contribuição dessas forças, expressas na base inercial, resultam em:

$$\begin{aligned} {}^{\mathfrak{J}}\mathbf{f} &= {}^{\mathfrak{J}}\mathbf{R}_{\mathfrak{B}} \left(\sum_{i=1}^4 {}^{\mathfrak{B}}\mathbf{f}_i \right) = {}^{\mathfrak{J}}\mathbf{R}_{\mathfrak{B}} \left[{}^{\mathfrak{B}}\hat{\mathbf{u}}_{f_1} \quad {}^{\mathfrak{B}}\hat{\mathbf{u}}_{f_2} \quad {}^{\mathfrak{B}}\hat{\mathbf{u}}_{f_3} \quad {}^{\mathfrak{B}}\hat{\mathbf{u}}_{f_4} \right] \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} \\ &= {}^{\mathfrak{J}}\mathbf{R}_{\mathfrak{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} s\alpha_1 & s\alpha_2 & s\alpha_3 & s\alpha_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c\alpha_1 & c\alpha_2 & c\alpha_3 & c\alpha_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_{\xi}} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = \mathbf{B}_{\xi} \mathbf{f}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Os torques rotacionais decorrentes de ${}^{\mathfrak{B}}\boldsymbol{\tau}_{f_i} = {}^{\mathfrak{B}}\mathbf{d}_{\mathfrak{C}_i} \times {}^{\mathfrak{B}}\hat{\mathbf{u}}_{f_i} f_i$, existem devido à distância em que as forças de propulsão são aplicadas em relação ao centro de rotação do sistema. Já os torques ${}^{\mathfrak{B}}\boldsymbol{\tau}_{M_i} = \frac{k_{\tau}}{k_e} (\lambda_i {}^{\mathfrak{B}}\hat{\mathbf{u}}_{f_i} f_i)$, pelas considerações realizadas em (3.13), deve-se ao arrasto das hélices. Com isso, tem-se que o torque total nos eixos da base \mathfrak{B} é

$$\begin{aligned} {}^{\mathfrak{B}}\boldsymbol{\tau} &= [\tau_x \quad \tau_y \quad \tau_z]^T = \sum_{i=1}^4 ({}^{\mathfrak{B}}\boldsymbol{\tau}_{f_i} + {}^{\mathfrak{B}}\boldsymbol{\tau}_{M_i}) \\ &= \sum_{i=1}^4 ({}^{\mathfrak{B}}\mathbf{d}_{\mathfrak{C}_i} \times {}^{\mathfrak{B}}\hat{\mathbf{u}}_{f_i} f_i + \frac{k_{\tau}}{k_e} (\lambda_i {}^{\mathfrak{B}}\hat{\mathbf{u}}_{f_i} f_i)). \end{aligned}$$

Assume-se que os rotores estão posicionados equidistantes da origem de \mathfrak{B} , ou seja, para $i = 1, 2, 3, 4$, $d_{ix} = |d_x|$, $d_{iy} = |d_y|$ e $d_{iz} = |d_z|$, sendo que $d_z = 0$, uma vez estabelecido que para este modelo não há deslocamento do centro de massa dos corpos dos rotores em ${}^{\mathfrak{B}}\mathbf{z}$. Assim, com M_1 e M_3 girando no sentido horário, $\lambda_1 = \lambda_3 = -1$, e para M_2 e M_4 no sentido anti-horário

$\lambda_2 = \lambda_4 = 1$, o que resulta em

$$\begin{aligned} \mathfrak{B} \boldsymbol{\tau} &= \underbrace{\begin{bmatrix} -d_y c\alpha_1 & d_y c\alpha_2 & d_y c\alpha_3 & -d_y c\alpha_4 \\ d_x c\alpha_1 & d_x c\alpha_2 & -d_x c\alpha_3 & -d_x c\alpha_4 \\ d_y s\alpha_1 & -d_y s\alpha_1 & -d_y s\alpha_3 & d_y s\alpha_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_{\tau_f}} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} \\ &+ \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{k_\tau}{k_e} s\alpha_1 & \frac{k_\tau}{k_e} s\alpha_2 & -\frac{k_\tau}{k_e} s\alpha_3 & \frac{k_\tau}{k_e} s\alpha_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k_\tau}{k_e} c\alpha_1 & \frac{k_\tau}{k_e} c\alpha_2 & -\frac{k_\tau}{k_e} c\alpha_3 & \frac{k_\tau}{k_e} c\alpha_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_{\tau_M}} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = (\mathbf{B}_{\tau_f} + \mathbf{B}_{\tau_M}) \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Expressando (3.25) nas devidas coordenadas generalizadas de rotação, encontra-se:

$$\boldsymbol{\tau}_\eta = \begin{bmatrix} \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix} = \mathbf{W}_\eta^T \mathfrak{B} \boldsymbol{\tau} = \underbrace{\mathbf{W}_\eta^T (\mathbf{B}_{\tau_f} + \mathbf{B}_{\tau_M})}_{\mathbf{B}_\eta} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = \mathbf{B}_\eta \mathbf{f}.$$

O vetor $\mathbf{u}_\textcircled{4} \in \mathbb{R}^{10}$ contendo as entradas de atuação do sistema, é formado por:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_\textcircled{4} &= [\mathbf{f}^T \quad \boldsymbol{\tau}_\alpha^T \quad \boldsymbol{\tau}_\gamma^T]^T \\ &= [f_1 \quad f_2 \quad f_3 \quad f_4 \quad \tau_{\alpha_1} \quad \tau_{\alpha_2} \quad \tau_{\alpha_3} \quad \tau_{\alpha_4} \quad \tau_{\gamma_1} \quad \tau_{\gamma_2}]^T, \end{aligned}$$

e com isso

$$\mathbf{F}_\textcircled{4}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathfrak{J} \mathbf{f} \\ \boldsymbol{\tau}_\eta \\ \boldsymbol{\tau}_\alpha \\ \boldsymbol{\tau}_\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_\xi & \mathbb{O}_{3 \times 4} & \mathbb{O}_{3 \times 2} \\ \mathbf{B}_\eta & \mathbb{O}_{3 \times 4} & \mathbb{O}_{3 \times 2} \\ \mathbb{O}_{4 \times 4} & \mathbb{I}_{4 \times 4} & \mathbb{O}_{4 \times 2} \\ \mathbb{O}_{2 \times 4} & \mathbb{O}_{2 \times 4} & \mathbb{I}_{2 \times 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \boldsymbol{\tau}_\alpha \\ \boldsymbol{\tau}_\gamma \end{bmatrix} = \mathbf{B}_\textcircled{4}(\mathbf{q}) \mathbf{u}_\textcircled{4}.$$

onde $\mathbf{B}_\textcircled{4}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{12 \times 10}$ é a matriz de forças externas. Devido à estrutura de $\mathbf{B}_\textcircled{4}(\mathbf{q})$ fica evidente a subatuação do sistema e o acoplamento de entrada.

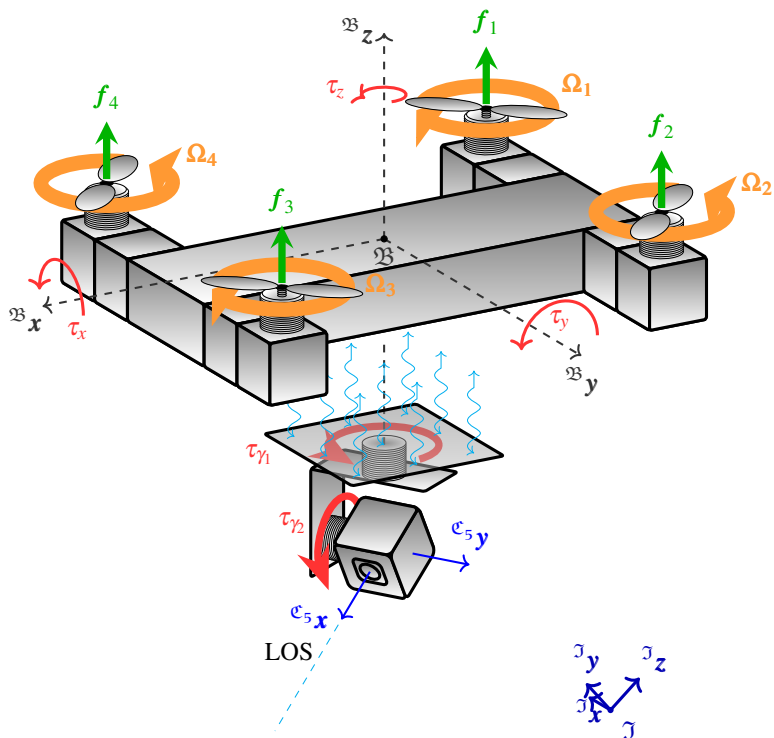
Considerando a influência da força $\mathbf{F}_e = \mathbf{d}_\textcircled{4} \in \mathbb{R}^{12}$, originada de distúrbios externos desconhecidos, tem-se que a equação da dinâmica do VANT híbrido de quatro rotores inclináveis e com *gimbal* Az-El integrado é

descrita por:

$$\mathbf{M}_{\text{④}}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_{\text{④}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}_{\text{④}}(\mathbf{q}) = \mathbf{B}_{\text{④}}(\mathbf{q})\mathbf{u}_{\text{④}} + \mathbf{d}_{\text{④}} .$$

3.4.3 Quadrirotor convencional com *gimbal* Az-El.

Figura 22 – Quadrirotor convencional com *gimbal* Az-El.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Analisando o caso em que os rotores do veículo são rigidamente fixados ao corpo central do VANT com os eixos de rotação na posição vertical, isto é, eliminando a junta revolvente de inclinação e fixando α_i em zero para $i = 1, 2, 3, 4$, o modelo do sistema resultante é o mesmo de um quadrirotor convencional, Figura 22, exceto pela adição do *gimbal* com a câmera e da disposição dos

eixos de rotação do sistema⁵.

Eliminando de (3.20) as coordenadas generalizadas relativas à dinâmica de inclinação dos rotores tem-se que

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} {}^{\mathcal{J}}\boldsymbol{\xi}^T & \boldsymbol{\eta}^T & \boldsymbol{\gamma}^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^8,$$

e a matriz de inércia é reduzida para $\mathbf{M}_{\Theta}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{8 \times 8}$, sendo

$$\mathbf{M}_{\Theta}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m_t \mathbb{I}_{3 \times 3} & {}^{\mathcal{J}}\mathbf{R}_{\mathfrak{B}} \mathbf{H} \mathbf{W}_{\eta} & \mathbb{O}_{3 \times 2} \\ ({}^{\mathcal{J}}\mathbf{R}_{\mathfrak{B}} \mathbf{H} \mathbf{W}_{\eta})^T & \mathbf{W}_{\eta}^T {}^{\mathfrak{B}}\mathbf{J} \mathbf{W}_{\eta} & \mathbf{W}_{\eta}^T {}^{\mathfrak{B}}\mathbf{R}_{\mathfrak{C}_5} \mathfrak{e}_5 \mathbf{I} \mathbf{W}_{\gamma} \\ \mathbb{O}_{2 \times 3} & (\mathbf{W}_{\eta}^T {}^{\mathfrak{B}}\mathbf{R}_{\mathfrak{C}_5} \mathfrak{e}_5 \mathbf{I} \mathbf{W}_{\gamma})^T & \mathbf{W}_{\gamma}^T \mathfrak{e}_5 \mathbf{I} \mathbf{W}_{\gamma} \end{bmatrix},$$

com a massa dos rotores agora integrada à massa do corpo central m_6 , porém é eliminada a parcela de massa relativa aos motores antes responsáveis pela inclinação dos rotores. Assim, $m_t = m_5 + m_6$, $\mathbf{H} = -\sum_{i=5}^6 m_i \mathcal{S}({}^{\mathfrak{B}}\mathbf{d}_{\mathfrak{C}_i})$ e o tensor de inércia ${}^{\mathfrak{B}}\mathbf{J} = \sum_{i=5}^6 {}^{\mathfrak{B}}\mathbf{J}_i$, com ${}^{\mathfrak{B}}\mathbf{J}_i$ obtido através da equação (2.49).

A matriz $\mathbf{C}_{\Theta}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{8 \times 8}$ é derivada da matriz $\mathbf{M}_{\Theta}(\mathbf{q})$ pelo método dos símbolos de Christoffel de primeira espécie apresentado em (2.66). O vetor de força gravitacional $\mathbf{G}_{\Theta}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^8$ é extraído de (3.23), de onde

$$\mathbf{G}_{\Theta}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_t g \\ g(c_{\phi}c_{\theta}m_y - c_{\theta}s_{\phi}m_z) \\ -g(c_{\theta}m_x + c_{\phi}s_{\theta}m_z + s_{\phi}s_{\theta}m_y) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

com $m_x = {}^{\mathfrak{B}}d_{5x} m_5 + {}^{\mathfrak{B}}d_{6x} m_6$, $m_y = {}^{\mathfrak{B}}d_{5y} m_5 + {}^{\mathfrak{B}}d_{6y} m_6$ e $m_z = {}^{\mathfrak{B}}d_{5z} m_5 + {}^{\mathfrak{B}}d_{6z} m_6$.

O vetor de forças e torques $\mathbf{F}_{\Theta}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^8$ expressos nas coordenadas generalizadas passa a ser composto por

$$\mathbf{F}_{\Theta}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} {}^{\mathcal{J}}\mathbf{f} \\ \boldsymbol{\tau}_{\eta} \\ \boldsymbol{\tau}_{\gamma} \end{bmatrix}.$$

⁵O modelo comumente encontrado na literatura considera um par de rotores alinhados ao longo do eixo ${}^{\mathfrak{B}}\mathbf{x}$ e o outro ao longo de ${}^{\mathfrak{B}}\mathbf{y}$.

Substituindo $s_{\alpha_i} = 0$ e $c_{\alpha_i} = 1$ em (3.24) e (3.25), tem-se:

$$\mathfrak{J} \mathbf{f} = \underbrace{\mathfrak{J} \mathbf{R}_{\mathfrak{B}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_{\xi}} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = \mathbf{B}_{\xi} \mathbf{f};$$

$$\mathfrak{B} \boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} -d_y & d_y & d_y & -d_y \\ d_x & d_x & -d_x & -d_x \\ -\frac{k_{\tau}}{k_e} & \frac{k_{\tau}}{k_e} & -\frac{k_{\tau}}{k_e} & \frac{k_{\tau}}{k_e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix},$$

de modo que

$$\boldsymbol{\tau}_{\eta} = \begin{bmatrix} \tau_{\phi} \\ \tau_{\theta} \\ \tau_{\psi} \end{bmatrix} = \mathbf{W}_{\eta}^T \mathfrak{B} \boldsymbol{\tau} = \underbrace{\mathbf{W}_{\eta}^T \begin{bmatrix} -d_y & d_y & d_y & -d_y \\ d_x & d_x & -d_x & -d_x \\ -\frac{k_{\tau}}{k_e} & \frac{k_{\tau}}{k_e} & -\frac{k_{\tau}}{k_e} & \frac{k_{\tau}}{k_e} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_{\eta}} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = \mathbf{B}_{\eta} \mathbf{f}.$$

Com $\mathbf{u}_{\Theta} \in \mathbb{R}^6$ formado por:

$$\mathbf{u}_{\Theta} = [\mathbf{f}^T \quad \boldsymbol{\tau}_{\gamma}^T]^T = [f_1 \quad f_2 \quad f_3 \quad f_4 \quad \tau_{\gamma_1} \quad \tau_{\gamma_2}]^T$$

e assim

$$\mathbf{F}_{\Theta}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathfrak{J} \mathbf{f} \\ \boldsymbol{\tau}_{\eta} \\ \boldsymbol{\tau}_{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\xi} & \mathbb{O}_{3 \times 2} \\ \mathbf{B}_{\eta} & \mathbb{O}_{3 \times 2} \\ \mathbb{O}_{2 \times 4} & \mathbb{I}_{2 \times 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \boldsymbol{\tau}_{\gamma} \end{bmatrix} = \mathbf{B}_{\Theta}(\mathbf{q}) \mathbf{u}_{\Theta},$$

onde $\mathbf{B}_{\Theta}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{8 \times 6}$ é a matriz de forças externas. Novamente, da estrutura de $\mathbf{B}_{\Theta}(\mathbf{q})$ fica evidente que trata-se de um sistema subatuado.

Considerando a influência da força $\mathbf{F}_e = \mathbf{d}_{\Theta} \in \mathbb{R}^8$, originada de distúrbios externos desconhecidos, tem-se que a equação da dinâmica do quadrirotor com *gimbal* Az-El integrado é descrita por:

$$\mathbf{M}_{\Theta}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_{\Theta}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}_{\Theta}(\mathbf{q}) = \mathbf{B}_{\Theta}(\mathbf{q})\mathbf{u}_{\Theta} + \mathbf{d}_{\Theta}.$$

3.5 COMENTÁRIOS

Os trabalhos relacionados aos quadrirotores comumente encontrados na literatura são desenvolvidos utilizando como base um modelo que considera um par de rotores alinhados ao longo do eixo ${}^{\mathfrak{B}}\mathbf{x}$ e o outro ao longo de ${}^{\mathfrak{B}}\mathbf{y}$, conhecida como configuração "++". Nesse tipo de configuração, a força de propulsão de apenas um dos rotores contribui de fato para a inclinação e deslocamento do veículo no plano horizontal, por exemplo o rotor traseiro, quando o veículo move-se para frente ou da lateral esquerda no movimento para a direita (García Carrillo et al., 2013). Já os modelos de VANT com quatro rotores, obtidos a partir das considerações apresentadas na Seção 3.4 (tanto com rotores inclináveis quanto fixos), têm dois rotores frontais e dois traseiros (ou dois rotores em cada uma das laterais), conhecida como configuração "xx". Em García Carrillo et al. (2013) é verificado experimentalmente que ao utilizar um quadrirotor com essa configuração obtém-se melhor desempenho no deslocamento horizontal, bem como respostas mais rápidas na rejeição de perturbações externas induzidas ao veículo. Além disso, o fato de se ter um espaço livre na parte frontal do VANT é desejável no caso de se utilizar um *gimbal* Ro-El.

Os modelos apresentados neste capítulo são úteis para propósitos de simulação, pois exceto por algumas forças e torques aerodinâmicos não modelados (por exemplo, devido a sustentação e arrasto da estrutura e efeitos de solo), capturam os principais fatores que influenciam no movimento dos veículos. Contudo, simplificações são geralmente necessárias de modo a obter modelos mais convenientes do ponto de vista do projeto de controle. Por exemplo, Ryll, Bulthoff e Giordano (2012) apresentam uma estrutura de controle para um VANT com quatro rotores inclináveis, assumindo que os motores atuantes na inclinação dos rotores são implementados junto à controladores locais capazes de impor as velocidades desejadas com transientes negligenciáveis. Isso possibilita omitir a dinâmica do motor e considerar a velocidade angular de inclinação dos rotores como entradas virtuais em lugar dos torques nos motores. Tal simplificação é similar à aquela onde assume-se que as velocidades de rotação das hélices são entradas de atuação devido a rápida dinâmica de seus motores propulsores.

Outra simplificação comumente realizada é considerar o centro de rotação (origem da base móvel \mathfrak{B}) coincidente com o centro de massa do sistema, levando ao desaparecimento dos termos que combinam $\dot{\xi}$ e $\dot{\eta}$ na equação da energia cinética e consequentemente das matrizes $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ e $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$. Feito isso, a equação de Euler-Lagrange pode ser separada em dois subsistemas, um de translação e outro de rotação (García Carrillo et al., 2013).

O diferencial dos modelos obtidos em relação à outros sistemas onde

VANTs com câmera são abordados, é a integração em um único modelo o comportamento do VANT e do mecanismo de direcionamento da câmera. Normalmente são considerados como sistemas distintos, controlados de forma separada, com ambos tratando a influência do acoplamento como perturbação (RAJESH; ANANDA, 2015; SELVARAJAN; ANANDA, 2016; TIMUS; TAMRE, 2010; LI; DING, 2007; SKJONG et al., 2015). Em aplicações fotográficas, por exemplo, onde o *gimbal* é direcionado por um operador remoto, não há problema em perder o alvo por alguns segundos devido a perturbação na câmera ocasionada por uma manobra rápida do VANT. Porém, em aplicações como a tratada neste trabalho, em que o VANT utiliza a posição do alvo com referência para o seu deslocamento, mesmo uma perda momentânea do alvo é prejudicial. Embora a integração do modelo por si só não garante que o alvo não será perdido, espera-se que haja ganhos nesse sentido ao controlar a orientação do VANT e direcionamento da câmera de modo unificado.

Em todos os modelos de VANT com *gimbal* apresentados nesta seção levou-se em consideração a distância existente entre centro de rotação do *gimbal* e a origem da base móvel \mathfrak{B} , ou seja, o centro de rotação do sistema. Há trabalhos onde é assumido que ambos são coincidentes (HURÁK; REZÁČ, 2012), tornando o modelo do sistema resultante mais simples e facilitando o projeto do controlador. Tal simplificação pode não implicar em grandes perdas quando esta diferença é realmente pequena e o alvo a ser monitorado está distante, contudo, sua existência faz com que os movimentos de rolagem e arfagem do veículo induzam uma translação na câmera e ignorá-la compromete o monitoramento de alvos próximos e durante manobras que requerem maior inclinação do veículo.

4 CONTROLE

Métodos baseados em realimentação linearizante têm sido extensivamente explorados no que diz respeito ao controle de VANTs, com destaque para trabalhos que empregam uma realimentação dinâmica de estados para contornar o problema de subatuação (MISTLER; BENALLEGUE; M'SIRDI, 2001). Na área de veículos híbridos, um exemplo é o trabalho de Almeida e Raffo (2015), onde é apresentado o projeto de uma lei de controle formada por blocos de linearização entrada-saída para um VANT de dois rotores inclináveis, transportando uma carga suspensa. O projeto consiste de uma estrutura em cascata com três níveis, onde nos dois níveis internos é tratado o controle da altitude e orientação do VANT, e no nível externo o controle do deslocamento horizontal e estabilização da carga. Chowdhury, Kulhare e Raina (2012) implementam uma estrutura de controle *backstepping*, onde uma inversão da dinâmica lineariza o subsistema rotacional de um VANT híbrido com dois rotores inclináveis e as referências dos ângulos de rolagem e arfagem são utilizadas como entradas intermediárias de atuação para contornar o problema de subatuação do veículo. Donadel (2015) apresenta modificações na solução proposta por Chowdhury, Kulhare e Raina (2012) que trazem melhorias relacionadas à estabilidade, além do projeto de uma nova lei de controle linear que possibilita o seguimento de trajetórias de referências para a posição e ângulo de azimute do VANT.

Este capítulo trata do projeto de uma lei de controle que solucione o problema de rastreamento de trajetórias impostas às coordenadas generalizadas de posição e direcionamento do VANT híbrido de dois rotores inclináveis com o *gimbal* Az-El, além das coordenadas de apontamento da câmera. Para tanto, na Seção 4.1 são apresentadas algumas noções da teoria de controle de sistemas não lineares por meio de realimentação linearizante, com enfoque na técnica de linearização entrada-saída por realimentação estática de estados.

Na Seção 4.2 é realizada a representação no espaço de estados e o cálculo do ponto de equilíbrio do sistema. Uma lei de controle é então projetada na Seção 4.3, consistindo de uma estrutura em cascata com blocos de linearização entrada-saída. Na Seção 4.4, mostra-se, perante simulação, que a lei de controle projetada é capaz de garantir o seguimento das trajetórias desejadas, enquanto mantém estáveis as coordenadas generalizadas restantes.

4.1 CONTROLE POR REALIMENTAÇÃO LINEARIZANTE

Ao trabalhar com sistemas dinâmicos caracterizados por comportamentos não lineares, uma abordagem comum é a linearização do sistema de modo que técnicas de controle linear possam ser utilizadas. Uma das formas de linearização consiste na expansão do sistema em uma série de Taylor em torno de um ponto de equilíbrio, desprezando os termos de ordem superior (ASTRÖM; MURRAY, 2010). Outro método utilizado, quando possível, é a obtenção de uma lei de controle que, através de uma realimentação, seja capaz de cancelar as não linearidades do sistema sem desprezá-las. A vantagem desta segunda abordagem é que, a princípio, obtém-se uma descrição linear exata para o sistema e não apenas uma simples aproximação. Esse tipo de realimentação linearizante tem como conceito central a execução de uma transformação algébrica (total ou parcial) da equação de estados do sistema, resultando em uma representação onde a nova dinâmica passa a ser linear. Tal transformação é obtida com o emprego de uma realimentação de estados não linear, possivelmente acompanhada de uma mudança de variáveis. Após linearizado, uma lei de controle secundária é aplicada ao sistema dinâmico resultante, utilizando técnicas lineares, de modo a estabelecer o comportamento final desejado.

Neste sentido, quando é possível encontrar uma realimentação que lineariza totalmente o mapeamento entre as entradas e os estados do sistema, diz-se que uma linearização entrada-estado é efetuada. Contudo, nem todos os sistemas podem ser linearizados dessa forma, além disso, sua atratividade é limitada a sistemas de pequena dimensão devido a problemas computacionais que envolvem a resolução de um sistema de equações diferenciais parciais. Outra abordagem consiste em estabelecer uma relação linear entre as entradas e saídas do sistema por meio da realimentação. Denominada linearização entrada-saída, tem como desvantagem o fato de que o número de entradas e saídas do sistema devem ser iguais e, em contrapartida a necessidade de encontrar uma solução para o sistema de equações é evitada (LANTOS; MÁRTON, 2011, pg. 54).

Considera-se sistemas não lineares com múltiplas entradas e múltiplas saídas, do inglês *multiple-input multiple-output* (MIMO), na forma

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \sum_{j=1}^m \mathbf{g}_j(\mathbf{x}(t)) u_j(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{G}(\mathbf{x}(t)) \mathbf{u}(t), \quad (4.1a)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t)), \quad (4.1b)$$

onde $\mathbf{x}(t) \in V$ é o vetor de estados, com V definindo um subconjunto aberto do \mathbb{R}^n ($V \subset \mathbb{R}^n$), e $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ é o vetor das entradas de controle. Assumindo

que o número de saídas (p) é igual ao de entradas (m), $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^{p=m}$ define o vetor de saídas.

Omitindo o argumento (t) para simplificar a representação na sequência do texto, tem-se que os campos vetoriais $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}) \ \cdots \ f_n(\mathbf{x})]^T : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{g}_j(\mathbf{x}) = [g_{1,j}(\mathbf{x}) \ \cdots \ g_{n,j}(\mathbf{x})]^T : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ são de classe C^∞ , ou seja, mapeamentos suaves que possuem derivadas de qualquer ordem, todas definidas e contínuas. Sendo $\mathbf{g}_j(\mathbf{x})$ a j -ésima coluna de $\mathbf{G}(\mathbf{x})$, então

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = (g_{i,j}(\mathbf{x})) = \begin{bmatrix} g_{1,1}(\mathbf{x}) & \cdots & g_{1,m}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n,1}(\mathbf{x}) & \cdots & g_{n,m}(\mathbf{x}) \end{bmatrix},$$

onde $g_{i,j}(\mathbf{x}) : V \rightarrow \mathbb{R}$. Do mesmo modo, as funções das saídas em $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = [h_1(\mathbf{x}) \ \cdots \ h_m(\mathbf{x})]^T : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ devem ser de classe C^∞ .

Ao empregar uma linearização entrada-saída, o que se pretende é estabelecer uma relação linear entre a saída \mathbf{y} e uma nova entrada de controle \mathbf{v} , através do cancelamento das não linearidades de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ pela atuação em \mathbf{u} . Contudo, conforme Khalil (2002), é de se esperar que tal cancelamento não possa ser alcançado em todos os casos, ou seja, devem haver certas propriedades estruturais do sistema que tornam o cancelamento possível. Tem-se que, se a equação de estados (4.1a) puder ser reescrita na forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x})(\mathbf{u} - \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})), \quad (4.2)$$

então ao utilizar uma lei de controle do tipo

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x})\mathbf{v}, \quad (4.3)$$

com $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\gamma}^{-1}(\mathbf{x})$, o sistema resultante é descrito por uma equação de estados linear

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{v}, \quad (4.4)$$

onde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

A lei de controle em (4.3) é denominada realimentação de estado estática localmente regular¹, definida em um subconjunto aberto $U \subset V$ do \mathbb{R}^n , onde $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ é de classe C^∞ , de modo que

$$\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) = [\alpha_1(\mathbf{x}) \ \cdots \ \alpha_m(\mathbf{x})]^T$$

¹O termo localmente regular significa que a matriz $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{x})$ é invertível em U , ou seja, $\det(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{x})) \neq 0$, para todo $\mathbf{x} \in U$.

e

$$\boldsymbol{\beta}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \beta_{1,1}(\mathbf{x}) & \beta_{1,2}(\mathbf{x}) & \cdots & \beta_{1,m}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{m,1}(\mathbf{x}) & \beta_{m,2}(\mathbf{x}) & \cdots & \beta_{m,m}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

é uma matriz $m \times m$ formada por funções $\beta_{i,j} : U \rightarrow \mathbb{R}$, $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$ de classe C^∞ e $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ é a nova entrada de controle. Assim, o sistema em malha fechada, definido em $U \subset V$, é dado por

$$\dot{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) + \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{x})\mathbf{v}, \quad (4.5a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}), \quad (4.5b)$$

onde $\mathbf{x} \in U \subset V \subset \mathbb{R}^n$ e

$$\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}), \quad \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{x}) = \mathbf{G}(\mathbf{x})\boldsymbol{\beta}(\mathbf{x}).$$

Mesmo que a equação (4.1a) não se apresente inicialmente com a estrutura (4.2), pode existir uma mudança de variáveis (coordenadas nas quais a equação de estados está descrita) que transforma a equação do sistema para essa forma na qual o projeto da realimentação (4.3) é facilitado. Como o modelo de um sistema não é único, mas sim dependente da escolha das variáveis de estado, é possível que, para determinado conjunto dessas coordenadas, sua representação tenha a forma (4.2). Assim, provada a existência de tal transformação, o sistema pode ser linearizado.

Considera-se o emprego de uma transformação não linear do tipo

$$\mathbf{z} = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) = [\phi_1(\mathbf{x}) \quad \phi_2(\mathbf{x}) \quad \cdots \quad \phi_n(\mathbf{x})]^T, \quad (4.6)$$

na qual, para um conjunto de coordenadas representadas pelo vetor de estados \mathbf{z} , o sistema (4.1a) se apresenta com uma estrutura do tipo (4.2). Para que o mapeamento $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})$ qualifique uma mudança de coordenadas, ele deve ser invertível, ou seja, um mapeamento inverso $\mathbf{x} = \boldsymbol{\phi}^{-1}(\mathbf{z})$ deve existir. Além disso, tanto $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})$ quanto $\boldsymbol{\phi}^{-1}(\mathbf{z})$ devem ser mapeamentos suaves. A primeira condição assegura a possibilidade de reverter a transformação, enquanto a segunda garante que a descrição do sistema nas novas coordenadas também é suave. Um mapeamento que atende tais condições é denominado difeomorfismo, podendo ser global, quando a matriz Jacobiana $[\partial\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})/\partial\mathbf{x}]$ é não singular para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, ou local, definido em uma região na vizinhança $U_0 \subset U$ de um ponto $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 \in U$, quando a matriz Jacobiana é não singular no ponto \mathbf{x}_0 . O efeito da mudança de coordenadas na descrição do sistema não linear (4.1)

pode ser analisado derivando (4.6) em relação ao tempo, obtendo

$$\dot{\mathbf{z}} = \frac{d\mathbf{z}}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} [\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u}]. \quad (4.7)$$

Substituindo $\mathbf{x} = \phi^{-1}(\mathbf{z})$ em (4.7), estabelece-se então o sistema em função das novas coordenadas

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{z}) + \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{z})\mathbf{u}, \\ \mathbf{y} &= \bar{\mathbf{h}}(\mathbf{z}), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{z}) &= \left[\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \right]_{\mathbf{x}=\phi^{-1}(\mathbf{z})}, \\ \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{z}) &= \left[\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{G}(\mathbf{x}) \right]_{\mathbf{x}=\phi^{-1}(\mathbf{z})}, \\ \bar{\mathbf{h}}(\mathbf{z}) &= [\mathbf{h}(\mathbf{x})]_{\mathbf{x}=\phi^{-1}(\mathbf{z})}. \end{aligned}$$

Outro desafio ao projetar a realimentação \mathbf{u} é obter um sistema resultante desacoplado. Um sistema é dito desacoplado quando cada componente da entrada de controle atua em uma componente $y_j = h_j(\mathbf{x})$ da saída \mathbf{y} , mas não influencia a componente $y_i = h_i(\mathbf{x})$ quando $i \neq j$. Tem-se que o desafio de tornar o sistema (4.1) desacoplado é localmente solúvel na região U_0 se existir uma realimentação do tipo (4.3) localmente regular em U_0 , de modo que o sistema resultante em malha fechada (4.5) seja desacoplado. Uma solução para este problema é obtida através da derivação temporal sucessiva das componentes y_i da saída \mathbf{y} . Denotando $y_i^{(k)}$ a k -ésima derivada temporal de y_i , da equação (4.1b), pela regra da cadeia, tem-se que

$$y_i^{(1)} = \left. \frac{\partial h_i}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} \quad i = 1, \dots, m.$$

Substituindo $\dot{\mathbf{x}}$ da equação anterior por (4.1a), obtém-se

$$y_i^{(1)} = \left. \frac{\partial h_i}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}} (\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u}) = \frac{\partial h_i}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \frac{\partial h_i}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u}. \quad (4.8)$$

O lado direito da igualdade em (4.8) pode ser escrito utilizando a

representação

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_i}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) \mathbf{f}(\mathbf{x}) &= h_i^1(\mathbf{x}) = L_f h_i(\mathbf{x}), \\ \frac{\partial h_i}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) \mathbf{G}(\mathbf{x}) &= \left[\frac{\partial h_i}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) \cdots \frac{\partial h_i}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) \mathbf{g}_m(\mathbf{x}) \right] \\ &= \Delta_i^1(\mathbf{x}) = [\Delta_{i1}^1(\mathbf{x}) \cdots \Delta_{im}^1(\mathbf{x})] = [L_{g_1} h_i(\mathbf{x}) \cdots L_{g_m} h_i(\mathbf{x})], \end{aligned}$$

onde $L_f h_i(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ é chamada derivada de Lie de h_i em relação a $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ao longo de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$. De modo similar, as funções em $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ formam $\Delta_i^1(\mathbf{x}) = [L_{g_1} h_i(\mathbf{x}) \cdots L_{g_m} h_i(\mathbf{x})] \in \mathbb{R}^m$. Com isso, (4.8) é reescrita como

$$y_i^{(1)} = L_f h_i(\mathbf{x}) + [L_{g_1} h_i(\mathbf{x}) \cdots L_{g_m} h_i(\mathbf{x})] \mathbf{u} = h_i^1(\mathbf{x}) + \Delta_i^1(\mathbf{x}) \mathbf{u}. \quad (4.9)$$

De (4.9) é possível notar que se $\Delta_i^1(\mathbf{x}) = 0$ para todo $\mathbf{x} \in U_0$, então $y_i^{(1)}$ não será afetado por \mathbf{u} enquanto \mathbf{x} permanecer na vizinhança U_0 . Assumindo esta condição e derivando (4.9), tem-se que

$$y_i^{(2)} = L_f^2 h_i(\mathbf{x}) + [L_{g_1} L_f h_i(\mathbf{x}) \cdots L_{g_m} L_f h_i(\mathbf{x})] \mathbf{u} = h_i^2(\mathbf{x}) + \Delta_i^2(\mathbf{x}) \mathbf{u},$$

com $h_i^2(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ e $\Delta_i^2(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m$. Aqui também pode-se notar que \mathbf{u} não afeta $y_i^{(2)}$ caso $\Delta_i^2(\mathbf{x})$ seja nulo para todo \mathbf{x} em U_0 e enquanto \mathbf{x} permanecer nessa região. Estendendo essa análise para as demais derivadas de y_i , denomina-se grau relativo o inteiro r_i que indica o número de derivações no tempo necessárias para que

$$y_i^{(r_i)} = L_f^{r_i} h_i(\mathbf{x}) + [L_{g_1} L_f^{r_i-1} h_i(\mathbf{x}) \cdots L_{g_m} L_f^{r_i-1} h_i(\mathbf{x})] \mathbf{u} = h_i^{r_i}(\mathbf{x}) + \Delta_i^{r_i}(\mathbf{x}) \mathbf{u}$$

dependa explicitamente de alguma componente da entrada \mathbf{u} , ou seja, para que $\Delta_i^{r_i}(\mathbf{x}) \neq 0$ para determinado $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$. Assumindo que todas as componentes y_i de \mathbf{y} possuem um grau relativo r_i que permanece constante para todo $\mathbf{x} \in U_0$, então \mathbf{y} possui um vetor de grau relativo $\mathbf{r} = [r_1 \quad r_2 \quad \cdots \quad r_m]^T$ nessa região e, lembrando que $i = 1, \dots, m$, então

$$\mathbf{y}^{(\mathbf{r})} = \mathbf{b}(\mathbf{x}) + \Delta(\mathbf{x}) \mathbf{u}, \quad (4.10)$$

onde

$$\mathbf{y}^{(r)} = \begin{bmatrix} y_1^{(r_1)} \\ y_2^{(r_2)} \\ \vdots \\ y_m^{(r_m)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} b_1(\mathbf{x}) \\ b_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ b_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1^{r_1}(\mathbf{x}) \\ h_2^{r_2}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ h_m^{r_m}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_f^{r_1} h(\mathbf{x}) \\ L_f^{r_2} h(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ L_f^{r_m} h(\mathbf{x}) \end{bmatrix},$$

$$\Delta(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1(\mathbf{x}) & L_{g_2} L_f^{r_1-1} h_1(\mathbf{x}) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_1-1} h_1(\mathbf{x}) \\ L_{g_1} L_f^{r_2-1} h_2(\mathbf{x}) & L_{g_2} L_f^{r_2-1} h_2(\mathbf{x}) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_2-1} h_2(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{r_m-1} h_m(\mathbf{x}) & L_{g_2} L_f^{r_m-1} h_m(\mathbf{x}) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_m-1} h_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix},$$

sendo que $\mathbf{b}(\mathbf{x}) : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ é um vetor coluna com m funções de classe C^∞ , $\Delta(\mathbf{x}) : V \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}$ é uma matriz $m \times m$ com funções de classe C^∞ , denominada matriz de desacoplamento, sendo $\Delta(\mathbf{x}) = [\Delta_1^{r_1}(\mathbf{x}) \quad \Delta_2^{r_2}(\mathbf{x}) \quad \cdots \quad \Delta_m^{r_m}(\mathbf{x})]^T$, onde $\Delta_1^{r_1}(\mathbf{x}), \dots, \Delta_m^{r_m}(\mathbf{x})$ são vetores linha. O inteiro $r = \sum_{i=1}^m r_i$ é a soma dos graus relativos das y_i saídas.

Sendo $h_i(\mathbf{x})$, $L_f h_i(\mathbf{x})$, $L_f^2 h_i(\mathbf{x})$, \dots , $L_f^{r_i-1} h_i(\mathbf{x})$ funções relacionadas às componentes y_i da saída \mathbf{y} e suas $r-1$ derivadas temporais que não são afetadas por \mathbf{u} , tem-se que tais funções podem ser usadas para definir, ao menos parcialmente, uma mudança de coordenadas local em U_0 , uma vez que a matriz Jacobiana $[\partial \boldsymbol{\theta}(\mathbf{x}) / \partial \mathbf{x}]$ de dimensão $r \times n$ para

$$\boldsymbol{\theta}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \theta_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \theta_r(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1(\mathbf{x}) \\ L_f h_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ L_f^{r_1-1} h_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ h_m(\mathbf{x}) \\ L_f h_m(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ L_f^{r_m-1} h_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^r \quad (4.11)$$

tem r linhas linearmente independentes em $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ ². Tem-se também que necessariamente $r \leq n$ (ISIDORI, 1995).

Em casos onde $r = n$, as funções em (4.11) qualificam uma mudança

² A prova de tal afirmação pode ser encontrada em Isidori (1995, pg. 140)

total de coordenadas. Por outro lado, se $r < n$, então outras $n - r$ funções devem ser encontradas de modo que a transformação seja formada por n linhas linearmente independentes, como requerido em (4.6). Assim, supondo que a saída \mathbf{y} do sistema tem grau relativo r em U_0 e que r é estritamente menor que n , então é necessário adicionar $n - r$ funções de classe C^∞ do tipo $\psi_1(\mathbf{x}), \dots, \psi_{n-r}(\mathbf{x})$ de modo que o mapeamento

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_o \\ \mathbf{z}_{\tilde{o}} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}(\mathbf{x}) \\ \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad (4.12)$$

com $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}) = [\psi_1(\mathbf{x}) \ \dots \ \psi_{n-r}(\mathbf{x})]^T$, tenha uma matriz Jacobiana não singular em \mathbf{x}_0 , qualificando uma transformação de coordenadas local na vizinhança U_0 .

Utilizando a transformação (4.12) o sistema (4.1) é expresso então nas novas coordenadas locais $\mathbf{z} = [\mathbf{z}_o^T \ \mathbf{z}_{\tilde{o}}^T]^T$, onde

$$\mathbf{z}_o = \begin{bmatrix} z_o^i \\ \vdots \\ z_o^m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^r, \quad \mathbf{z}_{\tilde{o}}^i = \begin{bmatrix} z_{o,1}^i \\ \vdots \\ z_{o,r_i}^i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r_i}, \quad i = 1, \dots, m,$$

e $\mathbf{z}_{\bar{o}} = [z_{\bar{o},1} \ \dots \ z_{\bar{o},(n-r)}]^T \in \mathbb{R}^{n-r}$, de modo que

$$\begin{aligned}
 y_i &= z_{o,1}^i, \\
 \dot{z}_{o,1}^i &= z_{o,2}^i, \\
 \dot{z}_{o,2}^i &= z_{o,3}^i, \\
 &\vdots \\
 \dot{z}_{o,(r_i-1)}^i &= z_{o,r_i}^i, \\
 \dot{z}_{o,r_i}^i &= b_i(\boldsymbol{\phi}^{-1}(\mathbf{z}_o, \mathbf{z}_{\bar{o}})) + \boldsymbol{\Delta}_i^{r_i}(\boldsymbol{\phi}^{-1}(\mathbf{z}_o, \mathbf{z}_{\bar{o}}))\mathbf{u}, \\
 &\vdots \\
 y_m &= z_{o,1}^m, \\
 \dot{z}_{o,1}^m &= z_{o,2}^m, \\
 \dot{z}_{o,2}^m &= z_{o,3}^m, \\
 &\vdots \\
 \dot{z}_{o,(r_m-1)}^m &= z_{o,r_m}^m, \\
 \dot{z}_{o,r_m}^m &= b_m(\boldsymbol{\phi}^{-1}(\mathbf{z}_o, \mathbf{z}_{\bar{o}})) + \boldsymbol{\Delta}_m^{r_m}(\boldsymbol{\phi}^{-1}(\mathbf{z}_o, \mathbf{z}_{\bar{o}}))\mathbf{u}, \\
 \dot{\mathbf{z}}_{\bar{o}} &= \mathbf{b}_{\bar{o}}(\mathbf{z}_o, \mathbf{z}_{\bar{o}}) + \boldsymbol{\Delta}_{\bar{o}}(\mathbf{z}_o, \mathbf{z}_{\bar{o}})\mathbf{u}.
 \end{aligned}$$

O vetor $\mathbf{b}_{\bar{o}}(\mathbf{z}_o, \mathbf{z}_{\bar{o}}) \in \mathbb{R}^{(n-r)}$ e a matriz $\boldsymbol{\Delta}_{\bar{o}}(\mathbf{z}_o, \mathbf{z}_{\bar{o}}) \in \mathbb{R}^{(n-r) \times m}$ definem a dinâmica interna do sistema e são formadas por:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{b}_{\bar{o}}(\mathbf{z}_o, \mathbf{z}_{\bar{o}}) &= \begin{bmatrix} L_f \psi_1(\boldsymbol{\phi}^{-1}(\mathbf{z}_o, \mathbf{z}_{\bar{o}})) \\ \vdots \\ L_f \psi_{(n-r)}(\boldsymbol{\phi}^{-1}(\mathbf{z}_o, \mathbf{z}_{\bar{o}})) \end{bmatrix}; \\
 \boldsymbol{\Delta}_{\bar{o}}(\mathbf{z}_o, \mathbf{z}_{\bar{o}}) &= \begin{bmatrix} L_{g_1} \psi_1(\boldsymbol{\phi}^{-1}(\mathbf{z}_o, \mathbf{z}_{\bar{o}})) & \cdots & L_{g_m} \psi_1(\boldsymbol{\phi}^{-1}(\mathbf{z}_o, \mathbf{z}_{\bar{o}})) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{g_1} \psi_{(n-r)}(\boldsymbol{\phi}^{-1}(\mathbf{z}_o, \mathbf{z}_{\bar{o}})) & \cdots & L_{g_m} \psi_{(n-r)}(\boldsymbol{\phi}^{-1}(\mathbf{z}_o, \mathbf{z}_{\bar{o}})) \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Apresentando em uma forma compacta tem-se que

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{z}}_o &= \mathbf{b}(\boldsymbol{\phi}^{-1}(\mathbf{z}_o, \mathbf{z}_{\bar{o}})) + \boldsymbol{\Delta}(\boldsymbol{\phi}^{-1}(\mathbf{z}_o, \mathbf{z}_{\bar{o}}))\mathbf{u}, \\
 \dot{\mathbf{z}}_{\bar{o}} &= \mathbf{b}_{\bar{o}}(\mathbf{z}_o, \mathbf{z}_{\bar{o}}) + \boldsymbol{\Delta}_{\bar{o}}(\mathbf{z}_o, \mathbf{z}_{\bar{o}})\mathbf{u}, \\
 \mathbf{y} &= [z_{o,1}^1 \ z_{o,1}^2 \ \cdots \ z_{o,1}^m]^T.
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

O subsistema $\dot{\mathbf{z}}_o$ em (4.13) pode ser rearranjado para uma estrutura do tipo (4.2), de modo que a lei de controle

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x})\mathbf{v}, \quad (4.14)$$

com

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) &= -\boldsymbol{\Delta}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{b}(\mathbf{x}) = -\boldsymbol{\Delta}^{-1}(\boldsymbol{\phi}^{-1}(\mathbf{z}_o, \mathbf{z}_{\bar{o}})) \mathbf{b}(\boldsymbol{\phi}^{-1}(\mathbf{z}_o, \mathbf{z}_{\bar{o}})), \\ \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x}) &= \boldsymbol{\Delta}^{-1}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\Delta}^{-1}(\boldsymbol{\phi}^{-1}(\mathbf{z}_o, \mathbf{z}_{\bar{o}})), \end{aligned}$$

quando aplicada resulta em um conjunto de subsistemas lineares desacoplados na forma canônica de Brunowsky

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}_o^i &= \mathbf{A}_{o,i} \mathbf{z}_o^i + \mathbf{b}_{o,i} v_i, \\ y_i &= \mathbf{c}_{o,i} \mathbf{z}_o^i, \end{aligned} \quad (4.15)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{o,i} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r_i \times r_i}, & \mathbf{b}_{o,i} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r_i}, \\ \mathbf{c}_{o,i} &= [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0] \in \mathbb{R}^{1 \times r_i}. \end{aligned}$$

Tais conjuntos de subsistemas lineares consistem essencialmente na conexão em cascata de r_i integradores.

Já o subsistema $\dot{\mathbf{z}}_{\bar{o}}$ em (4.13) é transformado, após a aplicação da lei de controle (4.14), em:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}_{\bar{o}} &= \mathbf{b}_{\bar{o}}(\mathbf{z}_o, \mathbf{z}_{\bar{o}}) + \boldsymbol{\Delta}_{\bar{o}}(\mathbf{z}_o, \mathbf{z}_{\bar{o}}) \underbrace{\left(\boldsymbol{\Delta}^{-1}(\boldsymbol{\phi}^{-1}(\mathbf{z}_o, \mathbf{z}_{\bar{o}})) \left(-\mathbf{b}(\boldsymbol{\phi}^{-1}(\mathbf{z}_o, \mathbf{z}_{\bar{o}})) + \mathbf{v} \right) \right)}_{\mathbf{u}} \\ &= \mathbf{f}_{\bar{o}}(\mathbf{z}_o, \mathbf{z}_{\bar{o}}) + \mathbf{G}_{\bar{o}}(\mathbf{z}_o, \mathbf{z}_{\bar{o}}) \mathbf{v}. \end{aligned}$$

O subsistema $\mathbf{z}_{\bar{o}}$ é não observável, uma vez que sua dinâmica não afeta diretamente \mathbf{z}_o ou y e por esse motivo é denominado dinâmica interna. Por outro lado \mathbf{z}_o é observável (LANTOS; MÁRTON, 2011). Tem-se também que se a distribuição $G = \text{span}\{g_1, \dots, g_m\}$ for involutiva na vizinhança de \mathbf{x}_0 , então é

possível encontrar funções $\Psi(\mathbf{x})$ de modo que

$$\Delta_{\bar{\delta}}(\mathbf{z}_o, \mathbf{z}_{\bar{\delta}}) = \mathbb{O}_{(n-r) \times m}, \quad \forall 1 \leq i \leq (n-r), \quad \forall 1 \leq j \leq m \quad (4.16)$$

e para todo \mathbf{x} na vizinhança de \mathbf{x}_0 (ISIDORI, 1995, pg. 222). Quando isto é possível $\dot{\mathbf{z}}_{\bar{\delta}}$ passa a não ser influenciado pela entrada \mathbf{u} e consequentemente pela nova dinâmica imposta por \mathbf{v} .

Definindo um perfil desejado $\bar{\mathbf{y}}$ para a saída \mathbf{y} , onde $\bar{\mathbf{y}}: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$ é de classe C^∞ , o objetivo é que a lei de controle final projetada seja capaz de forçar \mathbf{y} a seguir $\bar{\mathbf{y}}$ com um erro $\mathbf{e} = \mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}$ que tenda assintoticamente para zero quando $t \rightarrow \infty$. Tendo o mapeamento entrada-saída linearizado, a nova entrada \mathbf{v} pode ser então projetada para estabilizar a dinâmica do erro \mathbf{e} . Derivando sucessivamente $e_i = y_i - \bar{y}_i$ com relação ao tempo, obtém-se:

$$e_i^{(k)} = y_i^{(k)} - \bar{y}_i^{(k)}, \quad i = 1, \dots, m, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Estabelecendo $k = r_i$ e usando (4.10), tem-se que

$$\mathbf{e}^{(r)} = \mathbf{y}^{(r)} - \bar{\mathbf{y}}^{(r)} = \mathbf{b}(\mathbf{x}) + \Delta(\mathbf{x})\mathbf{u} - \bar{\mathbf{y}}^{(r)} = \mathbf{v} - \bar{\mathbf{y}}^{(r)} = \mathbf{w},$$

com

$$\mathbf{y}^{(r)} = \begin{bmatrix} y_1^{(r_1)} \\ y_2^{(r_2)} \\ \vdots \\ y_m^{(r_m)} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{y}}^{(r)} = \begin{bmatrix} \bar{y}_1^{(r_1)} \\ \bar{y}_2^{(r_2)} \\ \vdots \\ \bar{y}_m^{(r_m)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}^{(r)} = \begin{bmatrix} e_1^{(r_1)} \\ e_2^{(r_2)} \\ \vdots \\ e_m^{(r_m)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix}.$$

Sendo assim, a lei de controle

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} + \bar{\mathbf{y}}^{(r)} \quad (4.17)$$

pode ser projetada para que o erro em malha fechada tenha uma dinâmica linear $\mathbf{e}^{(r)} = \mathbf{w}$.

Sintetizando os conceitos apresentados nesta seção, tem-se que um sistema não linear MIMO pode ter o mapeamento entrada-saída linearizado na vizinhança U_0 de um ponto \mathbf{x}_0 , caso a saída \mathbf{y} admita um vetor de grau relativo \mathbf{r} e a matriz de desacoplamento $\Delta(\mathbf{x})$ seja invertível. Existe então uma transformação não linear suave $\mathbf{z} = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})$, onde $\mathbf{z} = [\mathbf{z}_o^T \quad \mathbf{z}_{\bar{\delta}}^T]^T$, sendo que \mathbf{z}_o é localmente observável enquanto $\mathbf{z}_{\bar{\delta}}$ é localmente não observável. Aplicando a realimentação estática não linear $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \Delta^{-1}(\mathbf{x})(-\mathbf{b}(\mathbf{x}) + \mathbf{v})$, a parte observável é transformada em uma cascata de integradores desacoplados na forma canônica de Brunowsky e a parte não observável permanece não linear

na forma $\dot{\mathbf{z}}_{\bar{o}} = \mathbf{f}_{\bar{o}}(\mathbf{z}_o, \mathbf{z}_{\bar{o}}) + \mathbf{G}_{\bar{o}}(\mathbf{z}_o, \mathbf{z}_{\bar{o}}) \mathbf{v}$. A parte observável é influenciada pela estabilidade da parte não observável que é chamada dinâmica interna do sistema não linear (LANTOS; MÁRTON, 2011, pg. 56). Ao final, a nova entrada \mathbf{v} pode ser utilizada de modo a impor uma dinâmica linear ao erro de seguimento de referência \mathbf{e} .

4.2 REPRESENTAÇÃO NO ESPAÇO DE ESTADOS DO SISTEMA FORMADO PELO VANT HÍBRIDO DE DOIS ROTORES INCLINÁVEIS COM O GIMBAL AZ-EL INTEGRADO

Partindo do modelo obtido na Seção 3.3, define-se o vetor de estados $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{20}$ para a representação da dinâmica do sistema, sendo composto por:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}.$$

Considerando sistemas na forma (4.1), é estabelecido que

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}_u(\mathbf{x})\mathbf{u}_{\otimes} + \mathbf{G}_d(\mathbf{x})\mathbf{d}_{\otimes},$$

onde $\mathbf{u}_{\otimes} = [f_1 \quad f_2 \quad \tau_{\alpha_1} \quad \tau_{\alpha_2} \quad \tau_{\gamma_1} \quad \tau_{\gamma_2}]^T$ e \mathbf{d}_{\otimes} ocorre devido a distúrbios externos. Analisando equação de Euler-Lagrange em (3.19), encontra-se:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{M}_{\otimes}^{-1}(\mathbf{q}) \left(\mathbf{B}_{\otimes}(\mathbf{q})\mathbf{u}_{\otimes} + \mathbf{d}_{\otimes} - \mathbf{C}_{\otimes}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{G}_{\otimes}(\mathbf{q}) \right),$$

de modo que

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{M}_{\otimes}^{-1}(\mathbf{q}) \left(\mathbf{B}_{\otimes}(\mathbf{q})\mathbf{u}_{\otimes} + \mathbf{d}_{\otimes} - \mathbf{C}_{\otimes}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{G}_{\otimes}(\mathbf{q}) \right) \end{bmatrix}. \quad (4.18)$$

De onde é possível identificar os campos vetoriais não lineares:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \left[\mathbf{M}_{\mathbb{2}}^{-1}(\mathbf{q}) \left(-\mathbf{C}_{\mathbb{2}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{G}_{\mathbb{2}}(\mathbf{q}) \right) \right]; \quad (4.19)$$

$$\mathbf{G}_u(\mathbf{x}) = \left[\begin{array}{c} \mathbb{O}_{10 \times 6} \\ \mathbf{M}_{\mathbb{2}}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{B}_{\mathbb{2}}(\mathbf{q}) \end{array} \right]; \quad (4.20)$$

$$\mathbf{G}_d(\mathbf{x}) = \left[\begin{array}{c} \mathbb{O}_{10 \times 10} \\ \mathbf{M}_{\mathbb{2}}^{-1}(\mathbf{q}) \end{array} \right], \quad (4.21)$$

onde $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{20}$, $\mathbf{G}_u(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{20 \times 6}$ e $\mathbf{G}_d(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{20 \times 10}$.

Os pontos de equilíbrio do modelo (4.18) são valores assumidos pelas coordenadas generalizadas \mathbf{q} e pelas entradas de controle $\mathbf{u}_{\mathbb{2}}$, para os quais as velocidades e acelerações do sistema ($\dot{\mathbf{q}}$ e $\ddot{\mathbf{q}}$) são nulas, ou seja:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{M}_{\mathbb{2}}^{-1}(\mathbf{q}) \left(\mathbf{B}_{\mathbb{2}}(\mathbf{q})\mathbf{u}_{\mathbb{2}} + \mathbf{d}_{\mathbb{2}} - \mathbf{C}_{\mathbb{2}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{G}_{\mathbb{2}}(\mathbf{q}) \right) \end{array} \right] = \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{10 \times 1} \\ \mathbb{O}_{10 \times 1} \end{bmatrix}. \quad (4.22)$$

Assumindo um cenário com ausência de distúrbios externos, $\mathbf{d}_{\mathbb{2}} = \mathbb{O}_{10 \times 1}$, a seguinte relação é obtida de (4.22):

$$\mathbf{B}_{\mathbb{2}}(\mathbf{q})\mathbf{u}_{\mathbb{2}} - \mathbf{G}_{\mathbb{2}}(\mathbf{q}) = \mathbb{O}_{10 \times 1}. \quad (4.23)$$

O sistema composto pelo VANT de dois rotores inclináveis com o *gimbal* Az-El tem seis entradas de controle, com isso apenas seis dos seus estados podem ser controlados de modo a seguirem trajetórias desejadas. Enquanto isso, o restante dos estados não são livres para assumirem valores quaisquer, apenas podem ser estabilizados em seus pontos de equilíbrio. Esta é uma característica dos sistemas subatuados.

A Tabela 1 apresenta os dados do VANT com câmera cujo modelo foi obtido na Seção 3.3. Os valores de massa e momento de inércia do *gimbal* com a câmera foram estimados baseando-se em dados técnicos de produtos comerciais. Para o restante dos corpos, os valores desses parâmetros, bem como as dimensões do VANT foram estabelecidos com base nos trabalhos de Almeida Neto (2014) e Donadel (2015).

Para habilitar o VANT com câmera a realizar de forma autônoma o rastreamento de um alvo em movimento, são escolhidos os estados que definem a posição linear (x , y e z) e o direcionamento (ψ) do VANT, bem como o apontamento da câmera (γ_1 e γ_2) para efetuar o seguimento de uma trajetória de referência definida por $\mathbb{T} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{\psi}, \bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2)$. Analisando (4.23), observa-se que a estabilidade do sistema não é comprometida com a imposição

Tabela 1 – Parâmetros do sistema.	
Parâmetros	Valores
$m_1; m_2; m_3$	0,15 kg
m_4	1,5 kg
${}^{\mathfrak{B}}\mathbf{d}_{\mathfrak{C}_1}$	$[0 \quad -0,3 \quad 0,5]^T$ m
${}^{\mathfrak{B}}\mathbf{d}_{\mathfrak{C}_2}$	$[0 \quad 0,3 \quad 0,5]^T$ m
${}^{\mathfrak{B}}\mathbf{d}_{\mathfrak{C}_3}$	$[0 \quad 0 \quad -0,1]^T$ m
${}^{\mathfrak{B}}\mathbf{d}_{\mathfrak{C}_4}$	$[0 \quad 0 \quad -0,03]^T$ m
I_{xx1}, I_{xx2}	0,00008 kg m ²
I_{yy1}, I_{yy2}	0,00007 kg m ²
I_{zz1}, I_{zz2}	0,00002 kg m ²
$I_{xx3}, I_{yy3}, I_{zz3}$	0,00002 kg m ²
I_{xx4}	0,01912 kg m ²
I_{yy4}	0,00693 kg m ²
I_{zz4}	0,01851 kg m ²
g	9,81 ms ⁻²
k_{τ}	$1,7 \times 10^{-7}$ Nms ²
k_e	$9,5 \times 10^{-6}$ Ns ²
β	5°

Fonte: Elaborado pelo autor.

de \mathbb{T} , ou seja, o sistema pode se encontrar em equilíbrio independente de quais sejam esses valores de referência. Contudo, ao planejar as trajetórias $\tilde{\gamma}_1$ e $\tilde{\gamma}_2$ deve-se evitar as situações de singularidade (acoplamento cinemático) do *gimbal*.

Define-se $\tilde{\mathbf{x}} = [\tilde{\mathbf{q}}^T \quad \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T]^T$, onde

$$\tilde{\mathbf{q}} = [\tilde{x} \quad \tilde{y} \quad \tilde{z} \quad \phi_{eq} \quad \theta_{eq} \quad \tilde{\psi} \quad \alpha_{1eq} \quad \alpha_{2eq} \quad \tilde{\gamma}_1 \quad \tilde{\gamma}_2]^T,$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = [\dot{\tilde{x}} \quad \dot{\tilde{y}} \quad \dot{\tilde{z}} \quad 0 \quad 0 \quad \dot{\tilde{\psi}} \quad 0 \quad 0 \quad \dot{\tilde{\gamma}}_1 \quad \dot{\tilde{\gamma}}_2]^T,$$

como o vetor de referências para os estados do sistema, sendo composto pela trajetória \mathbb{T} , suas derivadas e os valores correspondentes ao ponto de equilíbrio para o restante dos estados. Substituindo os parâmetros da Tabela 1 em (4.23) e resolvendo o sistema de equações não lineares encontra-se:

$$\begin{aligned} \phi_{eq} &= 0 \text{ rad}; & \theta_{eq} &= -0,0214 \text{ rad}; \\ \alpha_{1eq} &= 0,0213 \text{ rad}; & \alpha_{2eq} &= 0,0213 \text{ rad}, \end{aligned}$$

junto com entradas:

$$\begin{aligned} f_{1eq} &= 9,6013 \text{ N} ; & f_{2eq} &= 9,6013 \text{ N} ; \\ \tau_{\alpha_1 eq} &= 0 \text{ N m} ; & \tau_{\alpha_2 eq} &= 0 \text{ N m} ; \\ \tau_{\gamma_1 eq} &= 0 \text{ N m} ; & \tau_{\gamma_2 eq} &= 0 \text{ N m} , \end{aligned}$$

qualificam um ponto de equilíbrio do sistema. É importante lembrar que em operação, devido a presença de distúrbios e dinâmicas não modeladas, o equilíbrio do sistema pode apresentar valores distintos dos obtidos.

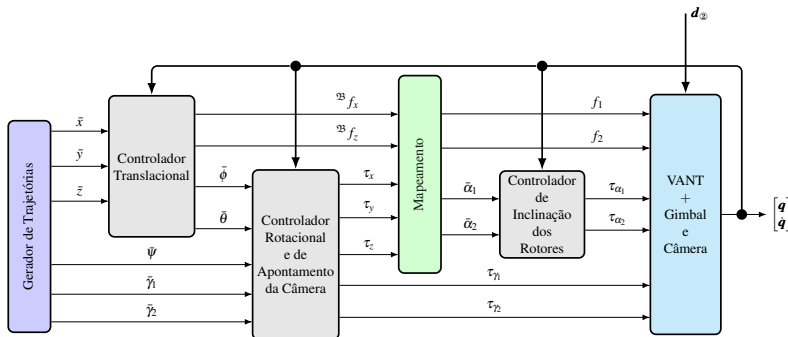
4.3 CONTROLE APLICADO

Nesta seção é apresentada uma solução para o problema de controle em malha fechada do sistema não linear formado pelo VANT híbrido de dois rotores inclináveis com um *gimbal* Az-El integrado, estabelecido em (4.18), proporcionando o seguimento de trajetórias predefinidas para as coordenadas generalizadas de posição do VANT no espaço (x , y e z), de seu direcionamento (ψ) e de apontamento da câmera (γ_1 e γ_2), mantendo estáveis as coordenadas generalizadas restantes. Para tanto, é assumido que todos os estados do sistema podem ser fisicamente medidos de forma precisa e estão disponíveis para serem usados na realimentação.

A estratégia de controle projetada possui uma estrutura em cascata como mostra a Figura 23. No nível mais interno, a dinâmica de inclinação dos rotores tem a relação entrada-saída linearizada, com as saídas α_1 e α_2 controladas atuando-se em τ_{α_1} e τ_{α_2} . Em outro bloco de linearização entrada-saída, a dinâmica de rotação do VANT e de apontamento da câmera, definida pelas saídas ϕ , θ , ψ , γ_1 e γ_2 é controlada através da atuação em τ_x , τ_y , τ_z , τ_{γ_1} e τ_{γ_2} . Devido à subatuação do sistema, as referências dos estados ϕ e θ ($\bar{\phi}$, $\bar{\theta}$) são usadas como entradas intermediárias de controle. Com isso, neste bloco, as saídas x , y e z são controladas atuando-se em ${}^{\mathfrak{B}}f_x$, ${}^{\mathfrak{B}}f_z$, $\bar{\phi}$ e $\bar{\theta}$.

As entradas ${}^{\mathfrak{B}}f_x$, ${}^{\mathfrak{B}}f_z$, τ_x , τ_y e τ_z utilizadas não correspondem a entradas reais de atuação do sistema, mas sim às forças e torques em \mathfrak{B} , necessários para que o VANT efetue os movimentos desejados. Assim, o bloco "Mapeamento", mostrado na Figura 23, simboliza uma relação que estabelece a magnitude das forças f_1 e f_2 e a inclinação dos rotores $\bar{\alpha}_1$ e $\bar{\alpha}_2$ requeridas para que tais forças e torques em \mathfrak{B} apareçam.

Figura 23 – Estrutura de controle.

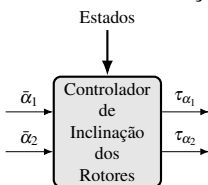


Fonte: Elaborado pelo autor.

4.3.1 Controlador de inclinação dos rotores

Esta subseção aborda a elaboração de uma lei de controle, Figura 24 que linearize e estabilize o subsistema de inclinação dos rotores. Lembrando que para a execução da linearização entrada-saída é necessário que as saídas do sistema admitam um vetor de grau relativo r e que a matriz de desacoplamento $\Delta(x)$ seja invertível, além disso o número de entradas e saídas deve ser igual.

Figura 24 – Controle da inclinação dos rotores.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Utiliza-se o subíndice A para caracterizar os componentes do subsistema formado ao tomar como saídas α_1 e α_2 e as entradas de atuação τ_{α_1} e

τ_{α_2} . Assumindo distúrbios externos nulos, o subsistema tem a forma:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}_{Au}(\mathbf{x}) \mathbf{u}_A ; \\ \mathbf{u}_A &= \begin{bmatrix} \tau_{\alpha_1} \\ \tau_{\alpha_2} \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{y}_A = \mathbf{h}_A(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} h_{A1}(\mathbf{x}) \\ h_{A2}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_7 \\ x_8 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.24)$$

com $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ como encontrado em (4.19) e

$$\mathbf{G}_{Au}(\mathbf{x}) = [\mathbf{g}_3(\mathbf{x}) \quad \mathbf{g}_4(\mathbf{x})] = \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{10 \times 2} \\ \mathbf{M}_{\mathbb{2}}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{B}_{\mathbb{2}[3,4]} \end{bmatrix}, \quad (4.25)$$

onde $\mathbf{B}_{\mathbb{2}[3,4]}$ é uma submatriz formada pela terceira e quarta colunas de $\mathbf{B}_{\mathbb{2}}(\mathbf{q})$. Analisando (3.18), identifica-se que $\mathbf{B}_{\mathbb{2}[3,4]} = [\mathbb{O}_{6 \times 2} \quad \mathbb{I}_{2 \times 2} \quad \mathbb{O}_{2 \times 2}]^T$ e portanto

$$\mathbf{G}_{Au}(\mathbf{x}) = [\mathbf{g}_3(\mathbf{x}) \quad \mathbf{g}_4(\mathbf{x})] = \begin{bmatrix} g_{1,3}(\mathbf{x}) & g_{1,4}(\mathbf{x}) \\ g_{2,3}(\mathbf{x}) & g_{2,4}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots \\ g_{20,3}(\mathbf{x}) & g_{20,4}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{10 \times 2} \\ \mathbf{M}_{\mathbb{2}[7,8]}^{-1} \end{bmatrix}, \quad (4.26)$$

onde $\mathbf{M}_{\mathbb{2}[7,8]}^{-1}$ é uma submatriz formada pela sétima e oitava colunas de $\mathbf{M}_{\mathbb{2}}^{-1}(\mathbf{q})$.

Ao derivar as componentes da saída \mathbf{y}_A para encontrar o grau relativo tem-se que:

$$\begin{aligned} y_{A1}^{(1)} &= L_f h_{A1}(\mathbf{x}) + [L_{g_3} h_{A1}(\mathbf{x}) \quad L_{g_4} h_{A1}(\mathbf{x})] \mathbf{u}_A = h_{A1}^1(\mathbf{x}) + \Delta_{A1}^1(\mathbf{x}) \mathbf{u}_A \\ &= f_3(\mathbf{x}) + [\mathbb{O}_{1 \times 2} \quad 1 \quad \mathbb{O}_{1 \times 17}] [\mathbf{g}_3(\mathbf{x}) \quad \mathbf{g}_4(\mathbf{x})] \mathbf{u}_A ; \\ y_{A2}^{(1)} &= L_f h_{A2}(\mathbf{x}) + [L_{g_3} h_{A2}(\mathbf{x}) \quad L_{g_4} h_{A2}(\mathbf{x})] \mathbf{u}_A = h_{A2}^1(\mathbf{x}) + \Delta_{A2}^1(\mathbf{x}) \mathbf{u}_A \\ &= f_4(\mathbf{x}) + [\mathbb{O}_{1 \times 3} \quad 1 \quad \mathbb{O}_{1 \times 16}] [\mathbf{g}_3(\mathbf{x}) \quad \mathbf{g}_4(\mathbf{x})] \mathbf{u}_A . \end{aligned}$$

De (4.26) tem-se que $\Delta_{A1}^1(\mathbf{x}) = [g_{3,3}(\mathbf{x}) \quad g_{3,4}(\mathbf{x})] = \mathbb{O}_{1 \times 2}$ e também $\Delta_{A2}^1(\mathbf{x}) = [g_{4,3}(\mathbf{x}) \quad g_{4,4}(\mathbf{x})] = \mathbb{O}_{1 \times 2}$. Assim, deriva-se novamente as componentes da saída \mathbf{y}_A de modo que:

$$\begin{aligned} y_{A1}^{(2)} &= L_f^2 h_{A1}(\mathbf{x}) + [L_{g_3} L_f h_{A1}(\mathbf{x}) \quad L_{g_4} L_f h_{A1}(\mathbf{x})] \mathbf{u}_A = h_{A1}^2(\mathbf{x}) + \Delta_{A1}^2(\mathbf{x}) \mathbf{u}_A \\ &= f_{13}(\mathbf{x}) + [\mathbb{O}_{1 \times 12} \quad 1 \quad \mathbb{O}_{1 \times 7}] [\mathbf{g}_3(\mathbf{x}) \quad \mathbf{g}_4(\mathbf{x})] \mathbf{u}_A ; \\ y_{A2}^{(2)} &= L_f^2 h_{A2}(\mathbf{x}) + [L_{g_3} L_f h_{A2}(\mathbf{x}) \quad L_{g_4} L_f h_{A2}(\mathbf{x})] \mathbf{u}_A = h_{A2}^2(\mathbf{x}) + \Delta_{A2}^2(\mathbf{x}) \mathbf{u}_A \\ &= f_{14}(\mathbf{x}) + [\mathbb{O}_{1 \times 13} \quad 1 \quad \mathbb{O}_{1 \times 6}] [\mathbf{g}_3(\mathbf{x}) \quad \mathbf{g}_4(\mathbf{x})] \mathbf{u}_A . \end{aligned}$$

Identifica-se que $\Delta_{A1}^2(\mathbf{x}) = [g_{13,3}(\mathbf{x}) \quad g_{13,4}(\mathbf{x})]$, além de $\Delta_{A2}^2(\mathbf{x}) = [g_{14,3}(\mathbf{x}) \quad g_{14,4}(\mathbf{x})]$, e com isso

$$\Delta_A^2(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \Delta_{A1}^2(\mathbf{x}) \\ \Delta_{A2}^2(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{13,3}(\mathbf{x}) & g_{13,4}(\mathbf{x}) \\ g_{14,3}(\mathbf{x}) & g_{14,4}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}_A^2(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} h_{A1}^2(\mathbf{x}) \\ h_{A2}^2(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{13}(\mathbf{x}) \\ f_{14}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}.$$

Uma vez que as componentes de $\Delta_A^2(\mathbf{x})$ correspondem à terceira e quarta linhas de $\mathbf{M}_{\otimes[7,8]}^{-1}$ o posto da matriz $\Delta_A^2(\mathbf{x})$, $\text{posto}(\Delta_A^2(\mathbf{x}))$, pode ser calculado. Encontra-se que $\text{posto}(\Delta_A^2(\mathbf{x}_0)) = 2$, ao atribuir a \mathbf{x}_0 o ponto de equilíbrio encontrado na Seção 4.2, indicando que $\Delta_A^2(\mathbf{x}_0)$ possui inversa ao menos em uma vizinhança de \mathbf{x}_0 . Sendo assim, o vetor de grau relativo para a saída \mathbf{y}_A é $\mathbf{r}_A = [r_{A1} \quad r_{A2}]^T = [2 \quad 2]^T$ e a soma dos graus relativos é $r_A = r_{A1} + r_{A2} = 4$. Portanto, a matriz de desacoplamento $\Delta_A(\mathbf{x})$ e o vetor $\mathbf{b}_A(\mathbf{x})$ do subsistema são dados por:

$$\Delta_A(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \Delta_{A1}^{r_{A1}}(\mathbf{x}) \\ \Delta_{A2}^{r_{A2}}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \Delta_A^2(\mathbf{x}); \quad \mathbf{b}_A(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} h_{A1}^{r_{A1}}(\mathbf{x}) \\ h_{A2}^{r_{A2}}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \mathbf{h}_A^2(\mathbf{x}).$$

A transformação

$$\boldsymbol{\theta}_A(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \theta_{A1}(\mathbf{x}) \\ \theta_{A2}(\mathbf{x}) \\ \theta_{A3}(\mathbf{x}) \\ \theta_{A4}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{A1}(\mathbf{x}) \\ L_f h_{A1}(\mathbf{x}) \\ h_{A2}(\mathbf{x}) \\ L_f h_{A2}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_7 \\ \dot{x}_7 \\ x_8 \\ \dot{x}_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \dot{\alpha}_1 \\ \alpha_2 \\ \dot{\alpha}_2 \end{bmatrix}$$

possui apenas $r_A = 4$ linhas linearmente independentes, de modo que $n - r_A = 20 - 4 = 16$ funções adicionais são necessárias para completar a transformação. A solução mais evidente é construir $\boldsymbol{\psi}_A(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{16}$ a partir dos estados restantes, uma vez que atendem o requisito de a transformação final ser constituída por $n = 20$ linhas linearmente independentes. Assim, toma-se

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\psi}_A(\mathbf{x}) &= [\psi_{A1}(\mathbf{x}) \quad \cdots \quad \psi_{A16}(\mathbf{x})]^T \\ &= [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6 \quad x_9 \quad x_{10} \quad x_{11} \quad x_{12} \quad x_{13} \quad x_{14} \quad x_{15} \quad x_{16} \quad x_{19} \quad x_{20}]^T \\ &= [x \quad y \quad z \quad \phi \quad \theta \quad \psi \quad \gamma_1 \quad \gamma_2 \quad \dot{x} \quad \dot{y} \quad \dot{z} \quad \dot{\phi} \quad \dot{\theta} \quad \dot{\psi} \quad \dot{\gamma}_1 \quad \dot{\gamma}_2]^T. \end{aligned}$$

Ao aplicar a transformação $\boldsymbol{\phi}_A(\mathbf{x}) = [\boldsymbol{\theta}_A^T(\mathbf{x}) \quad \boldsymbol{\psi}_A^T(\mathbf{x})]^T$ com a lei de controle $\mathbf{u}_A = \Delta_A^{-1}(\mathbf{x})(-\mathbf{b}_A(\mathbf{x}) + \mathbf{v}_A)$, com $\mathbf{v}_A = [v_{\alpha_1} \quad v_{\alpha_2}]^T$, obtém-se para

o subsistema observável:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}}_{Ao} &= \begin{bmatrix} \dot{z}_{Ao}^1 \\ \dot{z}_{Ao}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{Ao,1} & \mathbb{O}_{2 \times 2} \\ \mathbb{O}_{2 \times 2} & \mathbf{A}_{Ao,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{Ao}^1 \\ \mathbf{z}_{Ao}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{Ao,1} & \mathbb{O}_{2 \times 1} \\ \mathbb{O}_{2 \times 1} & \mathbf{b}_{Ao,2} \end{bmatrix} \mathbf{v}_A \\ &= \begin{bmatrix} \dot{z}_{Ao,1}^1 \\ \dot{z}_{Ao,2}^1 \\ \dot{z}_{Ao,1}^2 \\ \dot{z}_{Ao,2}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{Ao,1}^1 \\ z_{Ao,2}^1 \\ z_{Ao,1}^2 \\ z_{Ao,2}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{\alpha_1} \\ v_{\alpha_2} \end{bmatrix}; \\ \mathbf{y}_A &= \begin{bmatrix} y_{A1} \\ y_{A2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{Ao,1} & \mathbb{O}_{1 \times 2} \\ \mathbb{O}_{1 \times 2} & \mathbf{c}_{Ao,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{Ao}^1 \\ \mathbf{z}_{Ao}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{Ao,1}^1 \\ z_{Ao,2}^1 \\ z_{Ao,1}^2 \\ z_{Ao,2}^2 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Como $\mathbf{z}_{Ao}^1 = [\alpha_1 \quad \dot{\alpha}_1]^T$ e $\mathbf{z}_{Ao}^2 = [\alpha_2 \quad \dot{\alpha}_2]^T$, as novas entradas apresentam uma relação linear com os estados, que é descrita por:

$$\ddot{\alpha}_1 = v_{\alpha_1}; \quad \ddot{\alpha}_2 = v_{\alpha_2}.$$

Para os estados do subsistema não observável,

$$\begin{aligned}\mathbf{z}_{A\bar{o}} &= [z_{A\bar{o}1} \quad \cdots \quad z_{A\bar{o}16}]^T \\ &= [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6 \quad x_9 \quad x_{10} \quad x_{11} \quad x_{12} \quad x_{13} \quad x_{14} \quad x_{15} \quad x_{16} \quad x_{19} \quad x_{20}]^T \\ &= [x \quad y \quad z \quad \phi \quad \theta \quad \psi \quad \gamma_1 \quad \gamma_2 \quad \dot{x} \quad \dot{y} \quad \dot{z} \quad \dot{\phi} \quad \dot{\theta} \quad \dot{\psi} \quad \dot{\gamma}_1 \quad \dot{\gamma}_2]^T\end{aligned}$$

tem-se que as funções escolhidas para compor $\boldsymbol{\psi}_A(\mathbf{x})$ não anulam totalmente

$$\boldsymbol{\Delta}_{A\bar{o}}(\mathbf{z}_{Ao}, \mathbf{z}_{A\bar{o}}) = L_{G_{Au}} \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\phi}_A^{-1}(\mathbf{z}_{Ao}, \mathbf{z}_{A\bar{o}})) = \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_A}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) \mathbf{G}_{Au}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{16 \times 2},$$

o que evitaria a influência da entrada \mathbf{u}_A na dinâmica interna, neste caso referente a estados que ainda serão controlados. Contudo, como $\mathbf{G}_{Au}(\mathbf{x})$ em (4.26) tem as componentes da metade superior com valor zero, então

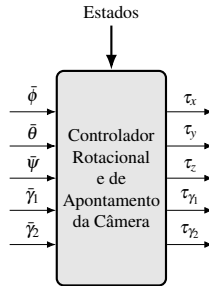
$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}}_{A\bar{o}} &= \mathbf{b}_{A\bar{o}}(\mathbf{z}_{Ao}, \mathbf{z}_{A\bar{o}}) + \boldsymbol{\Delta}_{A\bar{o}}(\mathbf{z}_{Ao}, \mathbf{z}_{A\bar{o}}) \mathbf{u}_A \\ &= L_f \boldsymbol{\psi}_A(\boldsymbol{\phi}_A^{-1}(\mathbf{z}_{Ao}, \mathbf{z}_{A\bar{o}})) + \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{8 \times 2} \\ L_{G_{Au}} \boldsymbol{\psi}_{A9}(\boldsymbol{\phi}_A^{-1}(\mathbf{z}_{Ao}, \mathbf{z}_{A\bar{o}})) \\ \vdots \\ L_{G_{Au}} \boldsymbol{\psi}_{A16}(\boldsymbol{\phi}_A^{-1}(\mathbf{z}_{Ao}, \mathbf{z}_{A\bar{o}})) \end{bmatrix} \mathbf{u}_A \\ &= \mathbf{f}_{Au}(\mathbf{z}_{Ao}, \mathbf{z}_{A\bar{o}}) + \mathbf{G}_{Au}(\mathbf{z}_{Ao}, \mathbf{z}_{A\bar{o}}) \mathbf{v}_A.\end{aligned}$$

Com isso observa-se que \mathbf{u}_A e conseqüentemente a nova entrada \mathbf{v}_A afeta os estados restantes somente através da dinâmica de $\dot{\mathbf{z}}_{A\bar{\sigma}_9} \cdots \dot{\mathbf{z}}_{A\bar{\sigma}_{16}}$.

4.3.2 Controlador rotacional e de apontamento da câmara

Esta subseção trata do controle das saídas ϕ , θ , ψ , γ_1 e γ_2 , relativas à rotação do VANT e apontamento da câmara, Figura 25. Para tanto é efetuada a linearização da relação entre essas saídas e as entradas de atuação τ_x , τ_y , τ_z , τ_{γ_1} e τ_{γ_2} .

Figura 25 – Controle da rotação do VANT e apontamento da câmara.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A influência da lei controle projetada para o subsistema de inclinação dos rotores na subseção anterior é desprezada e a dinâmica dos acoplamentos não considerados é tratada como erro de modelagem, além de considerar nulos os distúrbios externos. Utiliza-se o subíndice B para simbolizar componentes específicos deste subsistema que é descrito por:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}_{Bu}(\mathbf{x}) \mathbf{u}_B ;$$

$$\mathbf{u}_B = \begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \\ \tau_{\gamma_1} \\ \tau_{\gamma_2} \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{y}_B = \mathbf{h}_B(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} h_{B1}(\mathbf{x}) \\ h_{B2}(\mathbf{x}) \\ h_{B3}(\mathbf{x}) \\ h_{B4}(\mathbf{x}) \\ h_{B5}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_9 \\ x_{10} \end{bmatrix} . \quad (4.27)$$

O campo vetorial $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ em (4.27) é o mesmo de (4.19) e

$$\mathbf{G}_{Bu}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{10 \times 5} \\ \mathbf{M}_{\otimes}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{B}_{\otimes}^*_{[4,5,6,9,10]} \end{bmatrix} , \quad (4.28)$$

onde

$$\mathbf{B}_{\textcircled{2}[4,5,6,9,10]}^* = \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{3 \times 3} & \mathbb{O}_{3 \times 2} \\ \mathbf{W}_\eta^T & \mathbb{O}_{3 \times 2} \\ \mathbb{O}_{2 \times 3} & \mathbb{O}_{2 \times 2} \\ \mathbb{O}_{2 \times 3} & \mathbb{I}_{2 \times 2} \end{bmatrix}$$

é uma submatriz formada pelas colunas quatro, cinco, seis, nove e dez da matriz $\mathbf{B}_{\textcircled{2}}^*(\mathbf{q})$ apresentada em (3.17).

Devido à estrutura de $\mathbf{G}_{Bu}(\mathbf{x})$ em (4.28), ao derivar \mathbf{y}_B para encontrar o grau relativo obtém-se:

$$\Delta_B^1(\mathbf{x}) = L_{G_{Bu}} \mathbf{h}_B(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{h}_B}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) \mathbf{G}_{Bu}(\mathbf{x}) = \mathbb{O}_{5 \times 5}.$$

Assim, deriva-se novamente as componentes da saída \mathbf{y}_B de modo que:

$$\mathbf{y}_B^{(2)} = L_f^2 \mathbf{h}_B(\mathbf{x}) + L_{G_{Bu}} L_f \mathbf{h}_B(\mathbf{x}) \mathbf{u}_B = \mathbf{h}_B^2(\mathbf{x}) + \Delta_B^2(\mathbf{x}) \mathbf{u}_B.$$

Tem-se que $\text{posto}(\Delta_B^2(\mathbf{x}_0)) = 5$ no ponto de equilíbrio, indicando a existência de inversa para a matriz em uma vizinhança de \mathbf{x}_0 . Sendo assim, o vetor de grau relativo para a saída \mathbf{y}_B é $\mathbf{r}_B = [r_{B1} \ r_{B2} \ r_{B3} \ r_{B4} \ r_{B5}]^T = [2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2]^T$, a soma dos graus relativos é $r_B = r_{B1} + r_{B2} + r_{B3} + r_{B4} + r_{B5} = 10$ e a matriz de desacoplamento $\Delta_B(\mathbf{x})$ e o vetor $\mathbf{b}_B(\mathbf{x})$ que linearizam o subsistema são dados por:

$$\Delta_B(\mathbf{x}) = \Delta_B^2(\mathbf{x}); \quad \mathbf{b}_B(\mathbf{x}) = \mathbf{h}_B^2(\mathbf{x}).$$

Obtém-se então uma transformação

$$\boldsymbol{\theta}_B(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \theta_{B1}(\mathbf{x}) \\ \theta_{B2}(\mathbf{x}) \\ \theta_{B3}(\mathbf{x}) \\ \theta_{B4}(\mathbf{x}) \\ \theta_{B5}(\mathbf{x}) \\ \theta_{B6}(\mathbf{x}) \\ \theta_{B7}(\mathbf{x}) \\ \theta_{B8}(\mathbf{x}) \\ \theta_{B9}(\mathbf{x}) \\ \theta_{B10}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{B1}(\mathbf{x}) \\ L_f h_{B1}(\mathbf{x}) \\ h_{B2}(\mathbf{x}) \\ L_f h_{B2}(\mathbf{x}) \\ h_{B3}(\mathbf{x}) \\ L_f h_{B3}(\mathbf{x}) \\ h_{B4}(\mathbf{x}) \\ L_f h_{B4}(\mathbf{x}) \\ h_{B5}(\mathbf{x}) \\ L_f h_{B5}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_4 \\ \dot{x}_4 \\ x_5 \\ \dot{x}_5 \\ x_6 \\ \dot{x}_6 \\ x_9 \\ \dot{x}_9 \\ x_{10} \\ \dot{x}_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi \\ \dot{\phi} \\ \theta \\ \dot{\theta} \\ \psi \\ \dot{\psi} \\ \gamma_1 \\ \dot{\gamma}_1 \\ \gamma_2 \\ \dot{\gamma}_2 \end{bmatrix},$$

que possui $r_B = 10$ linhas linearmente independentes, necessitando de $n - r_B = 20 - 10 = 10$ funções adicionais para completar a transformação. Novamente, a solução trivial é construir $\boldsymbol{\Psi}_B(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{10}$ utilizando os estados restantes, o que

resulta em:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Psi}_B(\mathbf{x}) &= [\boldsymbol{\psi}_{B1}(\mathbf{x}) \quad \cdots \quad \boldsymbol{\psi}_{B10}(\mathbf{x})]^T \\ &= [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_7 \quad x_8 \quad x_{11} \quad x_{12} \quad x_{13} \quad x_{17} \quad x_{18}]^T \\ &= [x \quad y \quad z \quad \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dot{x} \quad \dot{y} \quad \dot{z} \quad \dot{\alpha}_1 \quad \dot{\alpha}_2]^T.\end{aligned}$$

Utilizando a transformação $\boldsymbol{\phi}_B(\mathbf{x}) = [\boldsymbol{\theta}_B^T(\mathbf{x}) \quad \boldsymbol{\psi}_B^T(\mathbf{x})]^T$ com a lei de controle $\mathbf{u}_B = \boldsymbol{\Delta}_B^{-1}(\mathbf{x})(-\mathbf{b}_B(\mathbf{x}) + \mathbf{v}_B)$, sendo $\mathbf{v}_B = [v_\phi \quad v_\theta \quad v_\psi \quad v_{\gamma_1} \quad v_{\gamma_2}]^T$, o subsistema observável tem sua representação descrita por:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}}_{Bo} &= \begin{bmatrix} \dot{z}_{Bo}^1 \\ \dot{z}_{Bo}^2 \\ \vdots \\ \dot{z}_{Bo}^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{Bo,1} & \mathbb{O}_{2 \times 2} & \mathbb{O}_{2 \times 2} & \mathbb{O}_{2 \times 2} \\ \mathbb{O}_{2 \times 2} & \mathbf{A}_{Bo,2} & \mathbb{O}_{2 \times 2} & \mathbb{O}_{2 \times 2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O}_{2 \times 2} & \mathbb{O}_{2 \times 2} & \mathbb{O}_{2 \times 2} & \mathbf{A}_{Bo,5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{Bo}^1 \\ z_{Bo}^2 \\ \vdots \\ z_{Bo}^5 \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{Bo,1} & \mathbb{O}_{2 \times 1} & \mathbb{O}_{2 \times 1} & \mathbb{O}_{2 \times 1} \\ \mathbb{O}_{2 \times 1} & \mathbf{b}_{Bo,2} & \mathbb{O}_{2 \times 1} & \mathbb{O}_{2 \times 1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O}_{2 \times 1} & \mathbb{O}_{2 \times 1} & \mathbb{O}_{2 \times 1} & \mathbf{b}_{Bo,5} \end{bmatrix} \mathbf{v}_B; \\ \mathbf{y}_B &= \begin{bmatrix} y_{B1} \\ y_{B2} \\ \vdots \\ y_{B5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{Bo,1} & \mathbb{O}_{1 \times 2} & \mathbb{O}_{1 \times 2} & \mathbb{O}_{1 \times 2} \\ \mathbb{O}_{1 \times 2} & \mathbf{c}_{Bo,2} & \mathbb{O}_{1 \times 2} & \mathbb{O}_{1 \times 2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O}_{1 \times 2} & \mathbb{O}_{1 \times 2} & \mathbb{O}_{1 \times 2} & \mathbf{c}_{Bo,5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{Bo}^1 \\ z_{Bo}^2 \\ \vdots \\ z_{Bo}^5 \end{bmatrix},\end{aligned}$$

onde

$$\mathbf{A}_{Bo,i} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_{Bo,i} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_{Bo,i} = [1 \quad 0], \quad i = 1, 2, \dots, 5.$$

Como é estabelecida a relação linear:

$$\ddot{\phi} = v_\phi; \quad \ddot{\theta} = v_\theta; \quad \ddot{\psi} = v_\psi; \quad \dot{\gamma}_1 = v_{\gamma_1}; \quad \dot{\gamma}_2 = v_{\gamma_2}.$$

A dinâmica dos estados

$$\begin{aligned}\mathbf{z}_{B\bar{o}} &= [z_{B\bar{o}1} \quad \cdots \quad z_{B\bar{o}10}]^T \\ &= [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_7 \quad x_8 \quad x_{11} \quad x_{12} \quad x_{13} \quad x_{17} \quad x_{18}]^T \\ &= [x \quad y \quad z \quad \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dot{x} \quad \dot{y} \quad \dot{z} \quad \dot{\alpha}_1 \quad \dot{\alpha}_2]^T\end{aligned}$$

do subsistema não observável é

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{z}}_{B\bar{o}} &= \mathbf{b}_{B\bar{o}}(\mathbf{z}_{B_o}, \mathbf{z}_{B\bar{o}}) + \mathbf{\Delta}_{B\bar{o}}(\mathbf{z}_{B_o}, \mathbf{z}_{B\bar{o}}) \mathbf{u}_B \\
 &= L_f \Psi_B(\phi_B^{-1}(\mathbf{z}_{B_o}, \mathbf{z}_{B\bar{o}})) + \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{5 \times 5} \\ L_{G_{Bu}} \Psi_{B6}(\phi_B^{-1}(\mathbf{z}_{B_o}, \mathbf{z}_{B\bar{o}})) \\ \vdots \\ L_{G_{Bu}} \Psi_{B10}(\phi_B^{-1}(\mathbf{z}_{B_o}, \mathbf{z}_{B\bar{o}})) \end{bmatrix} \mathbf{u}_B \\
 &= \mathbf{f}_{Bu}(\mathbf{z}_{B_o}, \mathbf{z}_{B\bar{o}}) + \mathbf{G}_{Bu}(\mathbf{z}_{B_o}, \mathbf{z}_{B\bar{o}}) \mathbf{v}_B.
 \end{aligned}$$

Com isso observa-se que \mathbf{u}_B e conseqüentemente a nova entrada \mathbf{v}_B afeta os estados restantes somente através da dinâmica de $\dot{\mathbf{z}}_{B\bar{o}_6} \cdots \dot{\mathbf{z}}_{B\bar{o}_{10}}$.

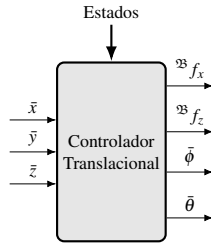
4.3.3 Controlador translacional

Um modelo aproximado do subsistema de translação é obtido ao considerar o centro de massa do sistema do VANT com câmera coincidente ao centro de rotação. Ao fazer isso o termo $m_{\xi, \eta} = {}^J \mathbf{R}_{\mathfrak{B}} \mathbf{H} \mathbf{W}_\eta$ da matriz de inércia (3.14) torna-se nulo, pois $\mathbf{H} = -\sum_{i=1}^4 m_i \mathbf{S}({}^{\mathfrak{B}} \mathbf{d}_{e_i}) = \mathbb{O}_{3 \times 3}$ se as distâncias ${}^{\mathfrak{B}} \mathbf{d}_{e_i}$ forem nulas para $i = 1, 2, 3, 4$. Assim, negligenciando essa dinâmica que acopla os subsistemas de translação e rotação, a dinâmica de translação resume-se a:

$$\begin{aligned}
 m_t {}^J \ddot{\boldsymbol{\xi}} &= {}^J \mathbf{R}_{\mathfrak{B}} {}^{\mathfrak{B}} \mathbf{f} + m_t {}^J \mathbf{g} \\
 m_t \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} c_\psi c_\theta & c_\psi s_\theta s_\phi - s_\psi c_\phi & c_\psi s_\theta c_\phi + s_\psi s_\phi \\ s_\psi c_\theta & s_\psi s_\theta s_\phi + c_\psi c_\phi & s_\psi s_\theta c_\phi - c_\psi s_\phi \\ -s_\theta & c_\theta s_\phi & c_\theta c_\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{\mathfrak{B}} f_x \\ {}^{\mathfrak{B}} f_y \\ {}^{\mathfrak{B}} f_z \end{bmatrix} + m_t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

Toma-se ${}^{\mathfrak{B}} f_x$, ${}^{\mathfrak{B}} f_z$, $\bar{\phi}$ e $\bar{\theta}$ como entradas de atuação, sendo x , y e z as saídas. Lembrando que a componente de força ${}^{\mathfrak{B}} f_y$ só aparece devido à inclinação lateral β dos rotores. Além disso, como são inclinações contrárias uma da outra, em situações como a que ocorre quando o VANT está pairando, as contribuições laterais de f_1 e f_2 tendem a se anular, levando a ${}^{\mathfrak{B}} f_y = 0$. Assumindo esta condição para o projeto do controlador translacional, Figura 26, a dinâmica (4.29) é reduzida para:

Figura 26 – Controle da translação do VANT.



Fonte: Elaborado pelo autor.

$$m_t \ddot{x} = (c_\theta c_\psi) \mathfrak{B} f_x + (c_\phi c_\psi s_\theta + s_\phi s_\psi) \mathfrak{B} f_z ; \quad (4.30)$$

$$m_t \ddot{y} = (c_\theta s_\psi) \mathfrak{B} f_x + (c_\phi s_\theta s_\psi - c_\psi s_\phi) \mathfrak{B} f_z ; \quad (4.31)$$

$$m_t \ddot{z} = (-s_\theta) \mathfrak{B} f_x + (c_\phi c_\theta) \mathfrak{B} f_z - m_t g. \quad (4.32)$$

Como proposto por Donadel (2015), com base nas equações (4.32), (4.30) e (4.31), encontra-se a seguinte realimentação linearizante para o controlador translacional:

- da dinâmica em (4.32)

$$\mathfrak{B} f_z = \frac{m_t g + m_t v_z + \mathfrak{B} f_x s_\theta}{c_\phi c_\theta} ; \quad (4.33)$$

- da dinâmica em (4.30)

$$\mathfrak{B} f_x = \frac{1}{c_\psi c_\theta} ; \quad (4.34)$$

$$\bar{\phi} = \text{sen}^{-1} \left(\frac{m_t v_x s_\psi - m_t v_y c_\psi}{\mathfrak{B} f_z} \right) ; \quad (4.35)$$

- da dinâmica em (4.31)

$$\bar{\theta} = \text{sen}^{-1} \left(\frac{m_t v_x - 1}{\mathfrak{B} f_z c_\phi c_\psi} - \frac{s_\phi s_\psi}{c_\phi c_\psi} \right) , \quad (4.36)$$

onde v_x , v_y e v_z são as novas entradas de controle e definem a dinâmica linear desejada para o subsistema de translação. As referências dos estados ϕ e θ ($\bar{\phi}$ e $\bar{\theta}$) são utilizadas como entradas intermediárias de controle para que, por

consequência da inclinação gerada, o VANT movimenta-se para as laterais ou longitudinalmente.

É importante se atentar ao fato de que a função $\text{sen}^{-1}(\mu)$ usada em (4.35) e (4.36) é definida apenas no intervalo $-1 < \mu < 1$. Para assegurar que o argumento dessa função esteja sempre dentro da região permitida utiliza-se a operação de saturação $\sigma(\kappa)$ como proposto por Chowdhury, Kulhare e Raina (2012), tal que:

$$\sigma(\kappa) = \left\{ \begin{array}{lll} 1 & \text{se} & \kappa > 1 \\ \kappa & \text{se} & -1 < \kappa < 1 \\ -1 & \text{se} & \kappa < -1 \end{array} \right\}.$$

Assim, (4.35) e (4.36) são redefinidas como:

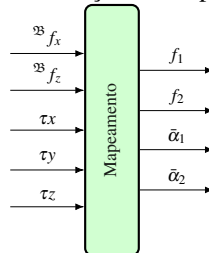
$$\bar{\phi} = \text{sen}^{-1} \left(\sigma \left(\frac{m_t v_x s_\psi - m_t v_y c_\psi}{\mathfrak{B} f_z} \right) \right); \quad (4.37)$$

$$\bar{\theta} = \text{sen}^{-1} \left(\sigma \left(\frac{m_t v_x - 1}{\mathfrak{B} f_z c_\phi c_\psi} - \frac{s_\phi s_\psi}{c_\phi c_\psi} \right) \right). \quad (4.38)$$

4.3.4 Mapeamento

As entradas $\mathfrak{B} f_x$, $\mathfrak{B} f_z$, τ_x , τ_y e τ_z consideradas durante o projeto dos controladores não correspondem a entradas reais de atuação do sistema, mas sim às forças e torques em \mathfrak{B} necessários para que o VANT efetue os movimentos desejados. Assim, a função de mapeamento, Figura 27, estabelece uma relação entre essas entradas e a magnitude f_1 e f_2 , bem como as inclinações dos rotores $\bar{\alpha}_1$ e $\bar{\alpha}_2$ requeridas para que tais forças e torques se manifestem em \mathfrak{B} .

Figura 27 – Função de mapeamento.



Fonte: Elaborado pelo autor.

As funções de mapeamento são estabelecidas ao assumir $\beta = 0$ e desconsiderar os torques gerados pelo arrasto das hélices (${}^{\mathfrak{B}}\boldsymbol{\tau}_{M_1}$ e ${}^{\mathfrak{B}}\boldsymbol{\tau}_{M_2}$). Sob tais condições, as forças de translação e torques de rotação em \mathfrak{B} definidos por (3.15) e (3.16) passam a ser:

$$\begin{aligned} {}^{\mathfrak{B}}\mathbf{f} &= ({}^{\mathfrak{B}}\mathbf{f}_1 + {}^{\mathfrak{B}}\mathbf{f}_2) = [{}^{\mathfrak{B}}\hat{\mathbf{u}}_{f_1} \quad {}^{\mathfrak{B}}\hat{\mathbf{u}}_{f_2}] \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} {}^{\mathfrak{B}}f_x \\ {}^{\mathfrak{B}}f_y \\ {}^{\mathfrak{B}}f_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{\alpha_1} & s_{\alpha_2} \\ 0 & 0 \\ c_{\alpha_1} & c_{\alpha_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}; \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned} {}^{\mathfrak{B}}\boldsymbol{\tau} &= {}^{\mathfrak{B}}\boldsymbol{\tau}_{f_1} + {}^{\mathfrak{B}}\boldsymbol{\tau}_{f_2} \\ &= ({}^{\mathfrak{B}}\mathbf{d}_{\mathbf{e}_1} \times {}^{\mathfrak{B}}\hat{\mathbf{u}}_{f_1} f_1) + ({}^{\mathfrak{B}}\mathbf{d}_{\mathbf{e}_2} \times {}^{\mathfrak{B}}\hat{\mathbf{u}}_{f_2} f_2) \\ &= \begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -d_y c_{\alpha_1} & d_y c_{\alpha_2} \\ d_z s_{\alpha_1} & d_z s_{\alpha_2} \\ d_y s_{\alpha_1} & -d_y s_{\alpha_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Como proposto por Donadel (2015), combinando (4.39), (4.40) e a relação ${}^{\mathfrak{B}}f_x = \frac{\tau_y}{{}^{\mathfrak{B}}d_z}$, é possível estabelecer que:

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\tau_y}{{}^{\mathfrak{B}}d_z} + \frac{\tau_z}{{}^{\mathfrak{B}}d_y} \right)^2 + \left(-{}^{\mathfrak{B}}f_z + \frac{\tau_x}{{}^{\mathfrak{B}}d_y} \right)^2}; \\ f_2 &= \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{-\tau_y}{{}^{\mathfrak{B}}d_z} + \frac{\tau_z}{{}^{\mathfrak{B}}d_y} \right)^2 + \left({}^{\mathfrak{B}}f_z + \frac{\tau_x}{{}^{\mathfrak{B}}d_y} \right)^2}; \\ \bar{\alpha}_1 &= \tan^{-1} \left(\frac{\frac{\tau_y}{{}^{\mathfrak{B}}d_z} + \frac{\tau_z}{{}^{\mathfrak{B}}d_y}}{{}^{\mathfrak{B}}f_z - \frac{\tau_x}{{}^{\mathfrak{B}}d_y}} \right); \\ \bar{\alpha}_2 &= \tan^{-1} \left(\frac{\frac{\tau_y}{{}^{\mathfrak{B}}d_z} - \frac{\tau_z}{{}^{\mathfrak{B}}d_y}}{{}^{\mathfrak{B}}f_z + \frac{\tau_x}{{}^{\mathfrak{B}}d_y}} \right). \end{aligned}$$

Dadas as simplificações do modelo, necessárias para estabelecer estas relações, é possível constatar que a tarefa de distribuir o esforço de controle desejado no corpo do veículo, dentre um conjunto redundante de atuadores, não é trivial, tornando-se uma parte sensível do projeto.

4.3.5 Projeto da realimentação estabilizante

Uma vez linearizadas as relações entrada-saída dos subsistemas, a nova realimentação é projetada para impor ao sistema em malha fechada uma dinâmica desejada.

De (4.17), tem-se que $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \bar{\mathbf{y}}^{(r)}$, sendo $\mathbf{w} = \mathbf{e}^{(r)}$. Com base nisso, estipula-se uma dinâmica desejada para o erro descrita pela equação

$$\ddot{\mathbf{e}} + K_D \dot{\mathbf{e}} + K_P \mathbf{e} = 0, \quad (4.41)$$

de modo que:

$$\begin{aligned} v_\phi &= w_\phi + \ddot{\phi} = -K_{D\phi} \dot{e}_\phi - K_{P\phi} e_\phi + \ddot{\phi}, \\ v_\theta &= w_\theta + \ddot{\theta} = -K_{D\theta} \dot{e}_\theta - K_{P\theta} e_\theta + \ddot{\theta}, \\ v_{\alpha_1} &= w_{\alpha_1} + \ddot{\alpha}_1 = -K_{D\alpha_1} \dot{e}_{\alpha_1} - K_{P\alpha_1} e_{\alpha_1} + \ddot{\alpha}_1, \\ v_{\alpha_2} &= w_{\alpha_2} + \ddot{\alpha}_2 = -K_{D\alpha_2} \dot{e}_{\alpha_2} - K_{P\alpha_2} e_{\alpha_2} + \ddot{\alpha}_2, \end{aligned} \quad (4.42)$$

A dinâmica (4.41) é suficiente para estabilizar os estados θ , ϕ , α_1 e α_2 , contudo, de modo a proporcionar o seguimento de trajetórias desejadas para as saídas x , y , z , ψ , γ_1 e γ_2 , além de rejeitar perturbações constantes, um termo integrativo é adicionado na dinâmica desejada do erro, ou seja:

$$\ddot{\mathbf{e}} + K_D \dot{\mathbf{e}} + K_P \mathbf{e} + K_I \int \mathbf{e} = 0. \quad (4.43)$$

Mais precisamente, é estabelecido que:

$$\begin{aligned} v_x &= w_x + \ddot{x} = -K_{Dx} \dot{e}_x - K_{Px} e_x - K_{Ix} \int e_x + \ddot{x}; \\ v_y &= w_y + \ddot{y} = -K_{Dy} \dot{e}_y - K_{Py} e_y - K_{Iy} \int e_y + \ddot{y}; \\ v_z &= w_z + \ddot{z} = -K_{Dz} \dot{e}_z - K_{Pz} e_z - K_{Iz} \int e_z + \ddot{z}; \\ v_\psi &= w_\psi + \ddot{\psi} = -K_{D\psi} \dot{e}_\psi - K_{P\psi} e_\psi - K_{I\psi} \int e_\psi + \ddot{\psi}; \\ v_{\gamma_1} &= w_{\gamma_1} + \ddot{\gamma}_1 = -K_{D\gamma_1} \dot{e}_{\gamma_1} - K_{P\gamma_1} e_{\gamma_1} - K_{I\gamma_1} \int e_{\gamma_1} + \ddot{\gamma}_1; \\ v_{\gamma_2} &= w_{\gamma_2} + \ddot{\gamma}_2 = -K_{D\gamma_2} \dot{e}_{\gamma_2} - K_{P\gamma_2} e_{\gamma_2} - K_{I\gamma_2} \int e_{\gamma_2} + \ddot{\gamma}_2, \end{aligned} \quad (4.44)$$

Fazendo $i \in \{x, y, z, \phi, \theta, \psi, \alpha_1, \alpha_2, \gamma_1, \gamma_2\}$, tem-se que K_{Pi} , K_{Di} e K_{Ii} são ganhos a ser designados, sendo que $e_i = i - \bar{i}$ e $\dot{e}_i = \dot{i} - \dot{\bar{i}}$ são erros relativos.

vos aos estados e as devidas referências, estabelecidas por \bar{i} e suas derivadas.

Os ganhos são projetados para obedecer os seguintes requisitos:

- tempo de acomodação (5%) de 0,07 segundos para os ângulos α_1 e α_2 ;
- tempo de acomodação (5%) de 0,2 segundos para os ângulos ϕ e θ ;
- tempo de acomodação (5%) de 0,5 segundos para os ângulos ψ , γ_1 e γ_2 ;
- tempo de acomodação (5%) de 2 segundos para as coordenadas de translação x , y e z .

Ao aplicar a transformada de Laplace em (4.41) e (4.43), obtêm-se, respectivamente, as seguintes equações no domínio da frequência:

$$s^2 + K_D s + K_P = 0 ; \quad (4.45)$$

$$s^3 + K_D s^2 + K_P s + K_I = 0 . \quad (4.46)$$

A determinação dos ganhos do controlador é realizada tomando-se como base a equação característica de um sistema de segunda ordem em malha fechada, ou seja,

$$s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2 ,$$

onde ζ é o coeficiente de amortecimento e ω_n é a frequência natural não amortecida da dinâmica desse sistema. Para as realimentações (4.44), adiciona-se um terceiro polo, s_d , com dinâmica mais rápida de modo que a sua influência seja mínima na resposta em malha fechada do sistema. Sendo assim, de acordo com os requisitos desejados:

- para α_1 e α_2 , encontra-se $\zeta = 0,69$ e $\omega_n = 62,11$, resultando no sistema de segunda ordem $(s + (40 \pm 47,51i))^2 = s^2 + 80s + 3857,88$. Comparando com a equação (4.45), obtém-se $K_{D\alpha_1} = K_{D\alpha_2} = 80$ e $K_{P\alpha_1} = K_{P\alpha_2} = 3857,88$;
- para ϕ e θ , encontra-se $\zeta = 0,69$ e $\omega_n = 21,74$, resultando no sistema de segunda ordem $(s + (15 \pm 15,74i))^2 = s^2 + 30s + 472,62$. Comparando com a equação (4.45), obtém-se $K_{D\phi} = K_{D\theta} = 30$ e $K_{P\phi} = K_{P\theta} = 472,62$;
- para ψ , γ_1 e γ_2 , encontra-se $\zeta = 0,69$ e $\omega_n = 8,69$, resultando no sistema de segunda ordem $(s + (6 \pm 6,29i))^2 = s^2 + 12s + 75,61$. Adiciona-se um terceiro polo desejado à dinâmica do sistema, $s_d = -36$, ou seja, $(s^2 + 12s + 75,61)(s + 36) = s^3 + 48s^2 + 507,6s + 2722$. Comparando com a equação (4.46), obtém-se $K_{D\psi} = K_{D\gamma_1} = K_{D\gamma_2} = 48$, $K_{P\psi} = K_{P\gamma_1} = K_{P\gamma_2} = 507,6$ e $K_{I\psi} = K_{I\gamma_1} = K_{I\gamma_2} = 2722$;

- para x , y e z , encontra-se $\zeta = 0,69$ e $\omega_n = 2,17$, resultando no sistema de segunda ordem $(s + (1,5 \pm 1,57i))^2 = s^2 + 3s + 4,72$. Adiciona-se um terceiro polo desejado à dinâmica do sistema, $s_d = -4,5$, ou seja, $(s^2 + 3s + 4,72)(s + 4,5) = s^3 + 7,5s^2 + 18,23s + 21,26$. Comparando com a equação (4.46), obtém-se $K_{D_x} = K_{D_y} = K_{D_z} = 7,5$, $K_{P_x} = K_{P_y} = K_{P_z} = 18,23$ e $K_{I_x} = K_{I_y} = K_{I_z} = 21,26$.

4.4 RESULTADOS DE SIMULAÇÃO

O desempenho do controlador projetado na Subseção 4.3 é testado, através de simulação, com sua aplicação ao modelo não linear do VANT híbrido de dois rotores inclináveis com o *gimbal* Az-El, obtido na Seção 3.3. Os valores numéricos utilizados na simulação são aqueles apresentados na Tabela 1.

Considera-se que os atuadores respondem instantaneamente quando acionados, isto é, se uma dada força de propulsão é requerida dos rotores ela é exercida de imediato. O mesmo serve para o torque nas juntas de inclinação dos rotores e do *gimbal*. Entretanto, são impostas condições de saturação a todos os atuadores. Assume-se que os rotores conseguem entregar forças de propulsão no intervalo $0 < \{f_1, f_2\} < 18\text{N}$ e os motores que atuam nas juntas são capazes de exercer torques no intervalo $-2 < \{\tau_{\alpha_1}, \tau_{\alpha_2}, \tau_{\gamma_1}, \tau_{\gamma_2}\} < 2\text{Nm}$.

A simulação é executada de modo que as seguintes trajetórias de referência são fornecidas aos controladores:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{20}t\right); & \bar{y} &= \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{20}t\right); & \bar{z} &= 3 - 2 \cos\left(\frac{\pi}{20}t\right); \\ \bar{\psi} &= \frac{\pi}{10} \sin\left(\frac{\pi}{20}t\right); & \bar{\gamma}_1 &= \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{5}t\right); & \bar{\gamma}_2 &= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{5} \sin\left(\frac{\pi}{5}t\right). \end{aligned}$$

Para testar o comportamento do sistema junto ao controle, são impostas as condições iniciais $\phi_0 = \theta_0 = \psi_0 = 0.1$ rad, $\gamma_{10} = \gamma_{20} = 0.5$ rad e zero para os estados restantes, de modo que algumas condições de partida relacionadas à posição e orientação do VANT, bem como de apontamento da câmera não coincidem inicialmente com as referências. Adicionalmente, são considerados, distúrbios constantes em diferentes instantes do tempo, com objetivo de analisar a habilidade do controlador em rejeitar a ação de torques e forças aerodinâmicas que afetam as coordenadas generalizadas do sistema. Seus valores e tempos de início estão apresentados na Tabela 2.

É importante notar que devido a algumas condições de partida estabelecidas estarem distantes da referência, o VANT passa por uma etapa transitória com maior oscilação até que a trajetória executada atinja a trajetória de re-

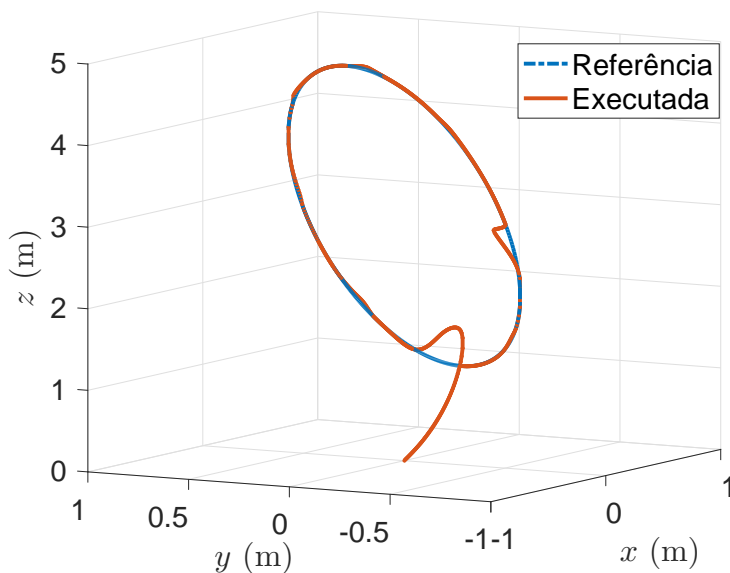
Tabela 2 – Parâmetros de perturbação.

Perturbação	Valor	Tempo (s)	Unidade
d_{α_1}	0.1	5	N·m
d_x	0.5	10	N
d_y	0.5	15	N
d_z	-1	20	N
d_{α_2}	0.1	20	N·m
d_{γ_1}	0.02	20	N·m
d_{ϕ}	0.5	25	N·m
d_{θ}	0.5	30	N·m
d_{ψ}	0.5	35	N·m
d_{γ_2}	0.02	35	N·m

Fonte: Elaborado pelo autor.

ferência, como pode ser observado na Figura 28. Essa é uma situação adversa, criada para testar o comportamento do VANT com a lei de controle projetada.

Figura 28 – Trajetória do VANT no espaço.

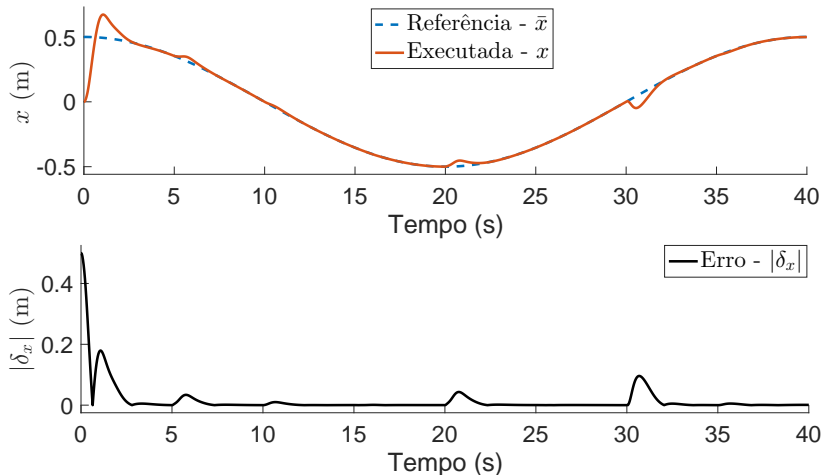


Fonte: Elaborado pelo autor.

Em uma situação real é de se esperar que o sistema de planejamento seja capaz de gerar trajetórias com condições de partida coincidentes com a posição em que o VANT se encontra. Contudo, independente da situação transitória inicial, é possível notar que o seguimento de trajetórias de referência para as coordenadas de translação é alcançada.

Das Figuras 29, 30 e 31, identifica-se, ao analisar os gráficos que exibem os erros de seguimento das coordenadas de translação (em módulo $|\delta_x|$, $|\delta_y|$ e $|\delta_z|$), que a perturbação d_{θ} , iniciada após 30 segundos de simulação, é a maior causadora de oscilações na trajetória dessas coordenadas. Este é um fato

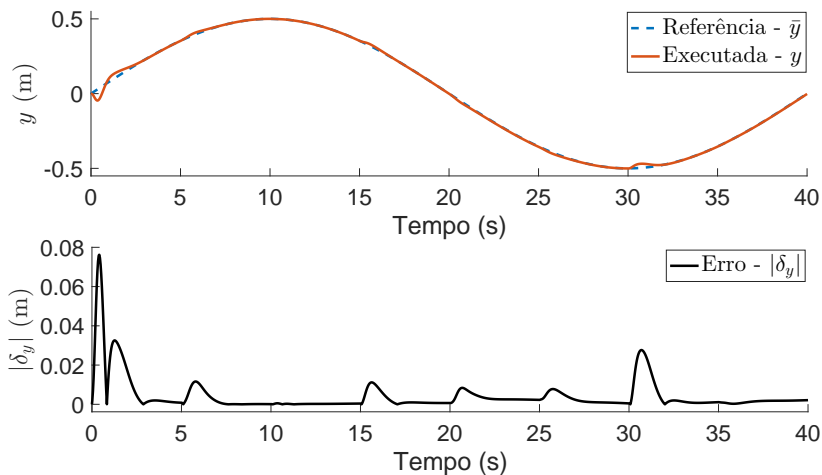
Figura 29 – Trajetória da coordenada generalizada x e erro de seguimento δ_x .



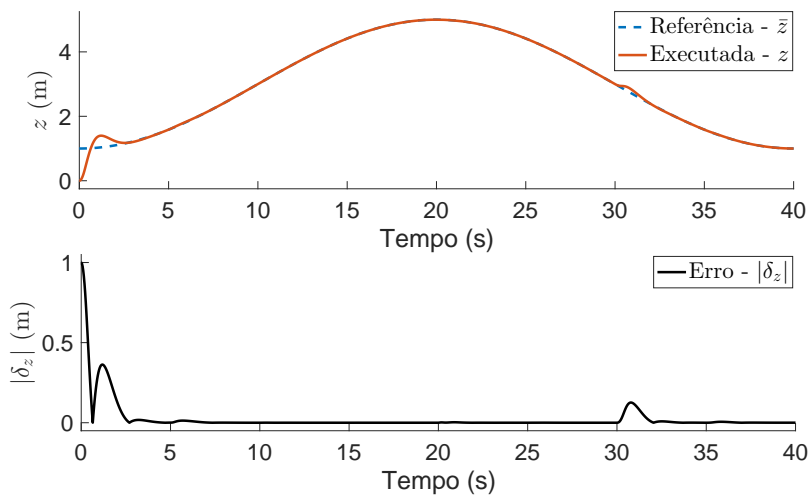
Fonte: Elaborado pelo autor.

justificável e sua ocorrência está relacionada as características construtivas do VANT utilizado e a dificuldade que se tem de atuar em θ . Além disso, como é de se esperar, perturbações que afetam o ângulo de inclinação dos rotores d_{α_1} e d_{α_2} , iniciados em 0.5 s e 20 s também influenciam na translação.

As perturbações d_{α_x} , d_{α_y} e d_{α_z} , iniciadas em 10 s, 15 s e 20 s respectivamente, apesar de forçarem diretamente o corpo do VANT a sair da trajetória de translação, são compensadas sem que haja grandes distanciamentos. Nota-se, dos gráficos de erro das coordenadas de translação, que a ocorrência das perturbações tem um efeito menor na direção y do que nas demais direções, contudo a resposta do sistema apresenta aproximadamente as mesmas carac-

Figura 30 – Trajetória da coordenada generalizada y e erro de seguimento δ_y .

Fonte: Elaborado pelo autor.

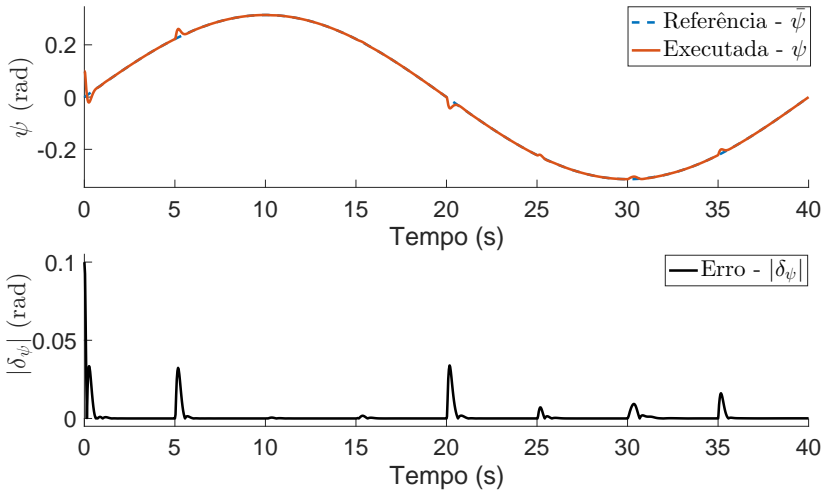
Figura 31 – Trajetória da coordenada generalizada z e erro de seguimento δ_z .

Fonte: Elaborado pelo autor.

terísticas, com retorno à trajetória desejada no tempo estabelecido de 2s.

Da Figura 32, ao analisar o gráfico do erro (em módulo $|\delta_\psi|$) de seguimento da trajetória desejada para o ângulo de guinada ψ (ângulo de direcionamento do VANT), nota-se que as perturbações na inclinação dos rotores d_{α_1} e d_{α_2} , iniciadas em 0.5 s e 20 s são as causadoras dos erros com magnitude mais elevada, chegando a ser maior do que a do erro causado pela perturbação direta d_{ψ} , iniciada em 35 s. Contudo, como a alteração nos ângulos de inclinação dos rotores é a principal forma de atuar no direcionamento do VANT, é de se esperar que ψ seja sensível a perturbações que os afetem.

Figura 32 – Trajetória da coordenada generalizada ψ e erro de seguimento δ_ψ .

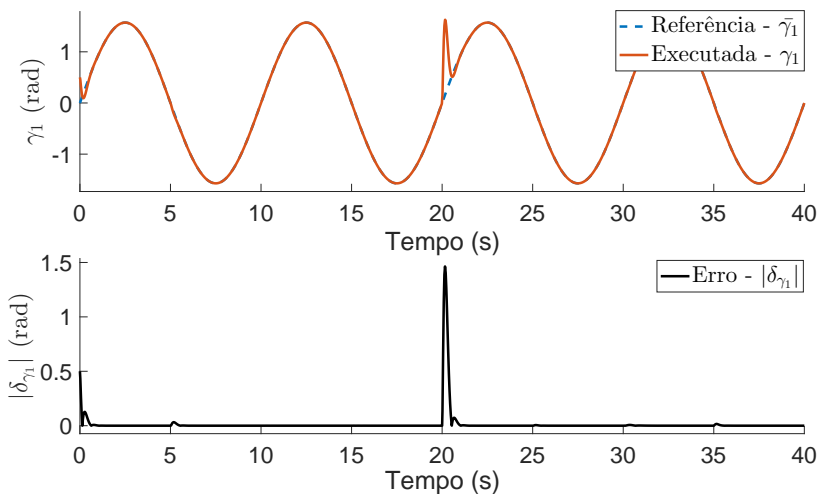


Fonte: Elaborado pelo autor.

As Figuras 33 e 34 são referentes às trajetórias dos ângulos do *gimbal*, de onde é possível observar os erros causados pelas perturbações d_{γ_1} e d_{γ_2} , iniciadas em 20 s e 35 s respectivamente. Apesar da sensibilidade que cada um desses estados têm a perturbações diretas, o controlador projetado corrige-as rapidamente. Além disso, é possível notar que ambos os estados são pouco afetados pelas perturbações aplicadas nas demais coordenadas.

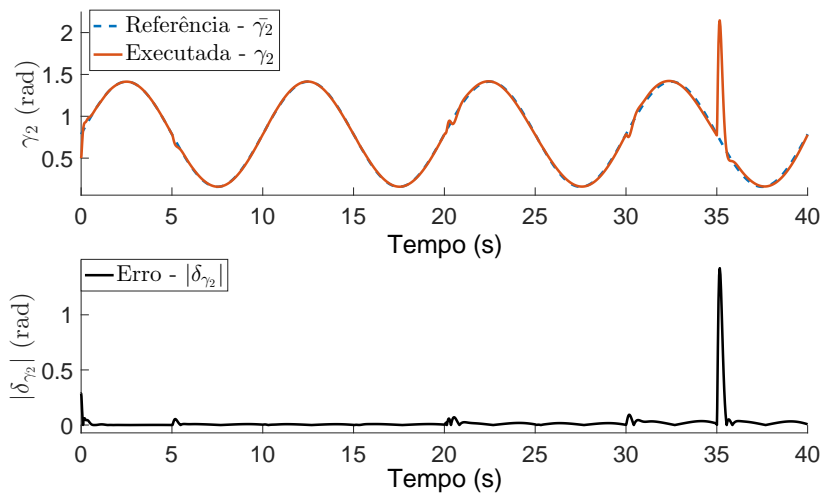
Na Figura 35 pode-se observar que os ângulos de rolagem e arfagem seguem suas referências nos instantes iniciais, quando há ausência de perturbações. Contudo, a ação das perturbações desloca os pontos de equilíbrio onde esses estados são estabilizados. Deve-se a isso as diferenças notadas entre as referências e as trajetórias executadas. Lembrando que as referências

Figura 33 – Trajetória da coordenada generalizada γ_1 e erro de seguimento δ_{γ_1} .



Fonte: Elaborado pelo autor.

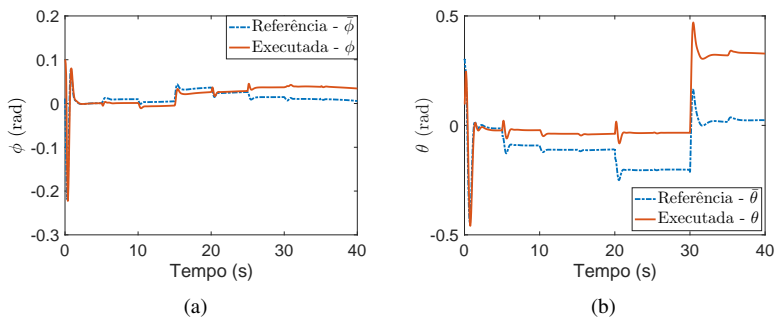
Figura 34 – Trajetória da coordenada generalizada γ_2 e erro de seguimento δ_{γ_2} .



Fonte: Elaborado pelo autor.

fornecidas para estes ângulos são provenientes do controlador translacional e expressam as inclinações necessárias para que VANT movimente-se lateralmente (atuando na referência de ϕ) e também contribua para o movimento longitudinal (atuando na referência de θ). Contudo, pode-se constatar que

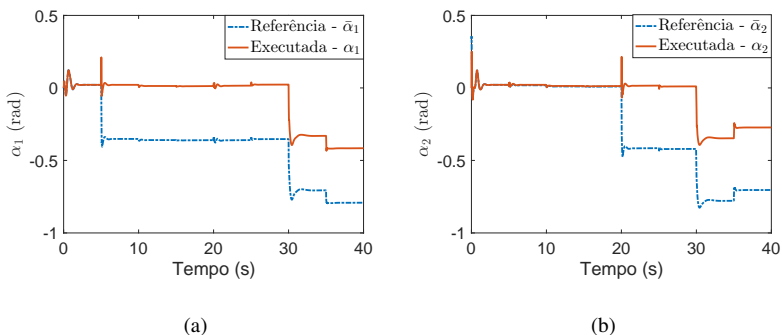
Figura 35 – Trajetória das coordenadas generalizadas (a) ϕ e (b) θ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

se a câmera estivesse rigidamente fixada ao corpo principal do VANT, não seria possível o rastreamento de um alvo, já que seu apontamento estaria inevitavelmente vinculado às trajetórias de ϕ e θ .

Figura 36 – Trajetória das coordenadas generalizadas (a) α_1 e (b) α_2 .



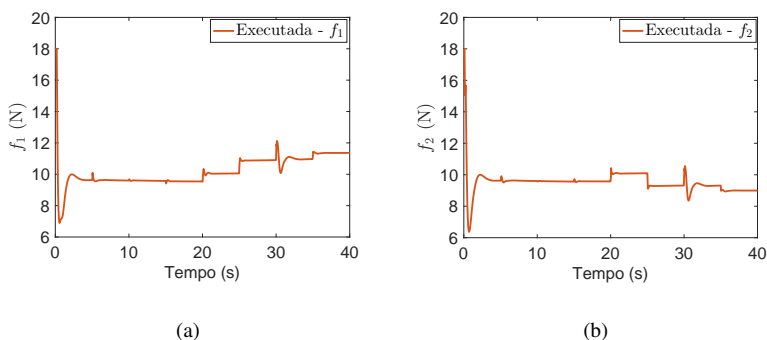
Fonte: Elaborado pelo autor.

Os ângulos de inclinação dos rotores, Figura 36, sofrem uma alteração similar aos de rolagem e arfagem, quando há presença de distúrbios. Entretanto seus pontos de equilíbrio só são alterados pelos distúrbios diretos d_{α_1} e d_{α_2} ,

iniciados em 0.5 s e 20s respectivamente.

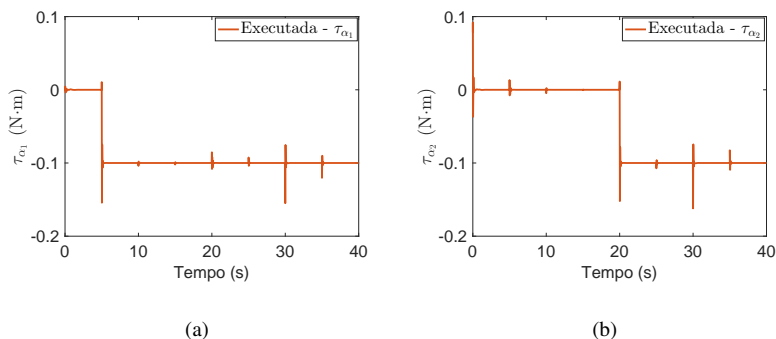
As Figuras 37, 38 e 39 mostram que a força de propulsão necessária dos atuadores f_1 e f_2 bem como a ação na inclinação dos rotores e no *gimbal* é mantida dentro de limites factíveis dos atuadores. As forças de propulsão atingem o nível superior de saturação na situação de transição inicial, contudo como já mencionado, essa é uma situação que não deve ocorrer em condições normais de operação, quando o VANT parte de uma posição sobre a trajetória desejada.

Figura 37 – Forças de propulsão (a) f_1 e (b) f_2 .



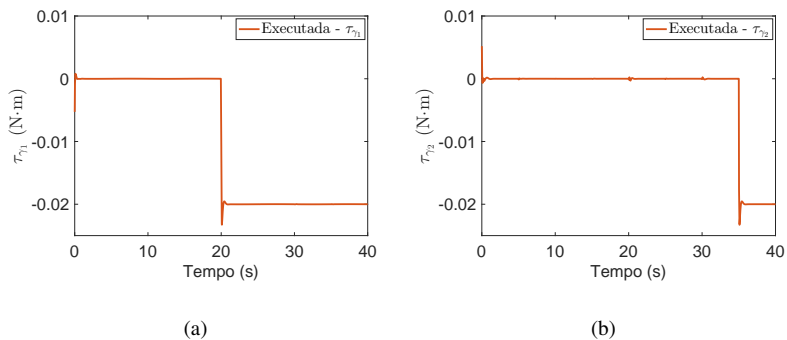
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 38 – Torques (a) τ_{α_1} e (b) τ_{α_2} .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 39 – Torques (a) τ_{γ_1} e (b) τ_{γ_2} .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Os testes realizados mostram que o controle projetado atende os requisitos impostos, com uma boa recuperação face as perturbações que podem ocorrer durante uma missão, sem ultrapassar os limites dos atuadores.

Naturalmente, a implementação prática dessa estratégia de controle necessita considerar o fato de que nem todos os estados podem estar disponíveis para realimentação e, além disso, a medida de algumas variáveis pode estar contaminada por ruídos, necessitando de uma filtragem do sinal medido.

5 CONCLUSÃO

Este trabalho tratou dos desafios relacionados ao desenvolvimento de sistemas de vigilância mais eficientes, os quais pretende-se aprimorar através da integração de veículos aéreos com câmera embarcada. Tais robôs móveis são destinados a desempenhar tarefas de ronda e rastreamento de alvos predefinidos de forma autônoma. O trabalho consistiu na modelagem de veículos aéreos que exibem características construtivas atrativas do ponto de vista da aplicação, incluindo mecanismos que proporcionam graus de liberdade adicionais no que diz respeito ao apontamento da câmera. Adicionalmente, apresentou-se uma solução para o problema de rastreamento de trajetórias relativas à translação de um VANT híbrido de dois rotores inclináveis, ao seu direcionamento e ao apontamento da câmera através de um na configuração *gimbal* Az-El.

O estudo inicial consistiu da modelagem da dinâmica dos VANTs a partir da formulação de Euler-Lagrange. Modelos de VANTs existentes na literatura foram expandidos e a dinâmica do *gimbal* foi integrada ao abordar o conjunto VANT e câmera como um sistema multi-corpo. O modelos resultantes captaram as principais características que regem o comportamento dos VANTs, com considerações adicionais como o deslocamento do centro de rotação do *gimbal* que é comumente negligenciado. Ao fazer isso cria-se um ambiente de simulação com comportamento próximo aos sistemas reais.

A lei de controle utilizada consiste de uma estrutura que, por meio de realimentação não linear de estados, lineariza a relação entrada-saída de determinados subsistemas. A estes blocos linearizados é então imposta uma dinâmica linear desejada. Optou-se pela utilização de uma lei de controle do tipo realimentação linearizante pois permite utilizar leis de controle de forma análoga à linearização em torno de um ponto de equilíbrio. Uma desvantagem desse tipo de realimentação linearizante deve-se ao fato de que seu desempenho depende de quão preciso é o modelo matemático disponível (SLOTINE; LI, 1991). Contudo, apesar das simplificações e dinâmicas negligenciadas durante o projeto da lei de controle foi possível atingir, em simulação, o seguimento das trajetórias desejadas mesmo na presença de distúrbios externos.

5.1 PROPOSTAS PARA TRABALHOS FUTUROS

Dentro do contexto de se desenvolver um robô móvel para atuar de forma conjunta com os sistemas de vigilância convencionais, existem ainda muitos aspectos a serem considerados, como a própria construção do robô

móvel e de uma estação de teleoperação, bem como o desenvolvimento de sistemas de localização, mapeamento, planejamento e geração de trajetórias, além do tratamento de imagem para captura das referências do alvo, entre outros. No que diz respeito ao problema de controle, identifica-se a necessidade e possibilidade de avançar a pesquisa no seguintes aspectos:

- métodos de controle que envolvem o cancelamento das não linearidades através da realimentação de estados, têm seu desempenho afetado diretamente pelas divergências entre o modelo utilizado no projeto do controlador e o sistema real. Nestes casos, dinâmicas não modeladas, parâmetros com valores alterados e distúrbios externos podem levar o sistema a instabilidade. Trabalhos futuros deverão considerar este problema, levando à alterações ou mesmo a síntese de novos controladores que possam fazer face a eles. Neste sentido pode-se investigar o uso de técnicas de controle de estrutura variável por modos deslizantes;
- durante o projeto do controlador identificou-se o problema de se distribuir, dentre um conjunto redundante de atuadores, o esforço de controle desejado no corpo do veículo. Este tipo de problema de alocação de controle surge em diversas áreas (JOHANSEN; FOSSEN, 2013) e é alvo de várias pesquisas inclusive envolvendo veículos aéreos. Assim, uma possibilidade de estudos futuros é investigar as soluções já existentes para este problema;
- outra proposta é a síntese de controladores para o VANT híbrido de quatro rotores inclináveis bem como uma possível comparação com os resultados para o VANT híbrido de dois rotores inclináveis obtidos neste trabalho.

APÊNDICE A – Conceitos adicionais sobre cinemática

A.1 PROPRIEDADES DAS MATRIZES DE ROTAÇÃO

A orientação de um corpo rígido pode ser descrita por uma matriz de transformação que relaciona uma base fixa ao corpo $\mathfrak{B}\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$ a uma base inercial $\mathfrak{I}\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$. Tais bases são definidas por três vetores unitários ortogonais. Seguindo a regra da mão direita, a rotação do corpo é representada por uma matriz de dimensão 3×3 , que transforma vetores, expressos em uma das bases, numa representação expressa na outra base (CHATURVEDI; SANYAL; MCCLAMROCH, 2011). Assim, um dado vetor ${}^{\mathfrak{B}}\mathbf{p}$, expresso na base \mathfrak{B} , é representado na base \mathfrak{I} por

$${}^{\mathfrak{I}}\mathbf{p} = {}^{\mathfrak{I}}\mathbf{R}_{\mathfrak{B}} {}^{\mathfrak{B}}\mathbf{p}.$$

As três colunas da matriz ${}^{\mathfrak{I}}\mathbf{R}_{\mathfrak{B}}$ representam os vetores unitários ortogonais da base \mathfrak{B} expressos na base \mathfrak{I} , assim como as três linhas representam os vetores unitários ortogonais da base \mathfrak{I} expressos na base \mathfrak{B} .

Matrizes de rotação tridimensionais \mathbf{R} , como a matriz ${}^{\mathfrak{I}}\mathbf{R}_{\mathfrak{B}}$, pertencem a um grupo chamado de *Special Orthogonal*, ou $SO(3)$, e possuem algumas propriedades importantes (DIEBEL, 2006):

1. $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T \in SO(3)$;
2. $({}^{\mathfrak{I}}\mathbf{R}_{\mathfrak{X}})({}^{\mathfrak{X}}\mathbf{R}_{\mathfrak{B}}) = {}^{\mathfrak{I}}\mathbf{R}_{\mathfrak{B}} \in SO(3)$;
3. $\det(\mathbf{R}) = \pm 1$.

Matrizes de rotação com $\det(\mathbf{R}) = -1$ são chamadas *impróprias* e não representam rotações de corpos rígidos. Assim, para aplicações como as deste trabalho, apenas matrizes *próprias* com $\det(\mathbf{R}) = 1$ são analisadas.

A segunda propriedade define que sucessivas rotações podem ser representadas por uma única matriz de rotação resultante, também pertencente ao $SO(3)$.

Com base na propriedade 1, é possível determinar, adicionalmente, que:

1. (a)
$$({}^{\mathfrak{I}}\mathbf{R}_{\mathfrak{B}})^{-1} = ({}^{\mathfrak{I}}\mathbf{R}_{\mathfrak{B}})^T = {}^{\mathfrak{B}}\mathbf{R}_{\mathfrak{I}} \in SO(3); \quad (\text{A.1})$$

- (b)
$$\mathbf{R}^{-1} \mathbf{R} = \mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbb{I}_{3 \times 3}. \quad (\text{A.2})$$

A.2 PROPRIEDADES DAS MATRIZES ANTI-SIMÉTRICAS

Uma matriz \mathbf{S} de dimensão $n \times n$ é considerada anti-simétrica se, e somente se,

$$\mathbf{S} = -\mathbf{S}^T, \quad (\text{A.3})$$

ou ainda

$$\mathbf{S}^T + \mathbf{S} = \mathbb{O}_{n \times n}. \quad (\text{A.4})$$

Considerando apenas matrizes anti-simétricas de dimensão 3×3 , um conjunto é formado e denominado $so(3)$ em (SPONG; HUTCHINSON; M., 2006). Uma matriz $\mathbf{S} \in so(3)$ tem como componentes s_{ij} , com $i, j = 1, 2, 3$ e, com isso, (A.4) é equivalente a

$$s_{ij} + s_{ji} = 0 \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (\text{A.5})$$

Para satisfazer (A.5), componentes em que $i = j$, ou seja, pertencentes à diagonal principal de \mathbf{S} , devem ser iguais a zero, sendo essa a única solução de $s_{ii} + s_{ii} = 2s_{ii} = 0$. De um modo similar, componentes fora da diagonal principal, onde $i \neq j$, devem satisfazer $s_{ij} = -s_{ji}$. Com isso, dos nove componentes da matriz $\mathbf{S} \in so(3)$, existem apenas três elementos independentes, resultando em

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & -s_3 & s_2 \\ s_3 & 0 & -s_1 \\ -s_2 & s_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

Além disso, um dado vetor $\mathbf{a} = [a_x \quad a_y \quad a_z]^T \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ pode ser representado em uma matriz da seguinte forma

$$\mathbf{S}(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.7})$$

Matrizes anti-simétricas possuem propriedades úteis para a obtenção da derivada de matrizes de rotação. As principais são:

1. o operador \mathbf{S} é linear, isto é,

$$\mathbf{S}(\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}) = \alpha \mathbf{S}(\mathbf{a}) + \beta \mathbf{S}(\mathbf{b}) \quad (\text{A.8})$$

para quaisquer vetores \mathbf{a} e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ e escalares α e β ;

2. para quaisquer vetores \mathbf{a} e $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{S}(\mathbf{a})\mathbf{p} = \mathbf{S}(\mathbf{p})^T \mathbf{a} = \mathbf{a} \times \mathbf{p}, \quad (\text{A.9})$$

em que $\mathbf{a} \times \mathbf{p}$ é um produto vetorial;

3. para $\mathbf{R} \in SO(3)$ e $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{R} \mathbf{S}(\mathbf{a}) \mathbf{R}^T = \mathbf{S}(\mathbf{R}\mathbf{a}) \quad (\text{A.10})$$

A.3 TEOREMA DE ROTAÇÃO DE EULER

Pelo teorema de rotação de Euler, descrito em (JAZAR, 2011), há doze diferentes combinações de três sucessivas rotações em torno dos eixos locais, de modo a relacionar duas bases quaisquer. São elas:

1. $(\mathbf{R}_{x,\phi})(\mathbf{R}_{y,\theta})(\mathbf{R}_{z,\psi})$;
2. $(\mathbf{R}_{y,\phi})(\mathbf{R}_{z,\theta})(\mathbf{R}_{x,\psi})$;
3. $(\mathbf{R}_{z,\phi})(\mathbf{R}_{x,\theta})(\mathbf{R}_{y,\psi})$;
4. $(\mathbf{R}_{z,\phi})(\mathbf{R}_{y,\theta})(\mathbf{R}_{x,\psi})$;
5. $(\mathbf{R}_{y,\phi})(\mathbf{R}_{x,\theta})(\mathbf{R}_{z,\psi})$;
6. $(\mathbf{R}_{x,\phi})(\mathbf{R}_{z,\theta})(\mathbf{R}_{y,\psi})$;
7. $(\mathbf{R}_{x,\phi})(\mathbf{R}_{y,\theta})(\mathbf{R}_{x,\psi})$;
8. $(\mathbf{R}_{y,\phi})(\mathbf{R}_{z,\theta})(\mathbf{R}_{y,\psi})$;
9. $(\mathbf{R}_{z,\phi})(\mathbf{R}_{x,\theta})(\mathbf{R}_{z,\psi})$;
10. $(\mathbf{R}_{x,\phi})(\mathbf{R}_{z,\theta})(\mathbf{R}_{x,\psi})$;
11. $(\mathbf{R}_{y,\phi})(\mathbf{R}_{x,\theta})(\mathbf{R}_{y,\psi})$;
12. $(\mathbf{R}_{z,\phi})(\mathbf{R}_{y,\theta})(\mathbf{R}_{z,\psi})$.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, M. M. de; RAFFO, G. V. Nonlinear control of a tiltrotor UAV for load transportation. **International Federation of Automatic Control - IFAC**, Elsevier, v. 48, n. 19, p. 232–237, 2015.
- Almeida Neto, M. M. de. **Control strategies of a tilt-rotor UAV for load transportation**. Tese (Dissertação de Mestrado) — Universidade Federal de Minas Gerais, 2014.
- ALTUG, E.; OSTROWSKI, J. P.; MAHONY, R. Control of a quadrotor helicopter using visual feedback. In: **Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Robotics & Automation**. Washington, D.C.: IEEE, 2002. v. 1, p. 72–77.
- AMIRI, N.; RAMIREZ-SERRANO, A.; DAVIES, R. Modelling of opposed lateral and longitudinal tilting dual-fan unmanned aerial vehicle. In: **Preprints of the 18th IFAC World Congress**. Milano: IFAC, 2011. p. 2054–2059.
- ASTRÖM, K. J.; MURRAY, R. M. **Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers**. New Jersey: Princeton University Press, 2010.
- AUSTIN, R. **Unmanned aircraft systems : UAVs design, development and deployment**. Reino Unido: Wiley, 2010.
- BOUABDALLAH, S.; MURRIERI, P.; SIEGWART, R. Design and control of an indoor micro quadrotor. In: **Proceedings of the 2004 IEEE International Conference on Robotics & Automation**. New Orleans: IEEE, 2004. v. 5, p. 4393–4398.
- BOUABDALLAH, S.; SIEGWART, R. Backstepping and sliding-mode techniques applied to an indoor micro quadrotor. In: **Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation**. Barcelona: IEEE, 2005. v. 2005, p. 2247–2252.
- CASTILLO, P.; DZUL, A.; LOZANO, R. Real-time stabilization and tracking of a four-rotor mini rotorcraft. **IEEE Transactions on Control Systems Technology**, v. 12, n. 4, p. 510–516, jul 2004.
- CHATURVEDI, N.; SANYAL, A.; MCCLAMROCH, N. Rigid-body attitude control. **IEEE Control Systems Magazine**, v. 31, n. 3, p. 30–51, jun 2011.

CHAUMETTE, F.; HUTCHINSON, S. Visual servo control - part I: Basic approaches. **IEEE Robotics and Automation Magazine**, v. 13, n. 4, p. 82–90, 2006.

CHAUMETTE, F.; HUTCHINSON, S. Visual servo control - part II: Advanced approaches. **IEEE Robotics and Automation Magazine**, v. 14, n. 1, p. 109–118, 2007.

CHOWDHURY, A. B.; KULHARE, A.; RAINA, G. Back-stepping control strategy for stabilization of a Tilt-rotor UAV. **24th Chinese Control and Decision Conference, CCDC 2012**, n. 25, p. 3475–3480, 2012.

CRUZ, H. O. et al. Precise real-time detection of nonforested areas with UAVs. **IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing**, v. 55, n. 2, p. 632–644, 2017.

DICKESON, J. J. et al. Robust LPV H-infinity Gain-Scheduled Hover-to-Cruise conversion for a tilt-wing rotorcraft in the presence of CG variations. In: **Proceedings of the 2007 American Control Conference**. New York: IEEE, 2007. p. 5266–5271.

DIEBEL, J. **Representing attitude: Euler angles, unit quaternions, and rotation vectors**. California: Stanford University, 2006. 1–35 p.

DONADEL, R. **Modeling and control of a tiltrotor unmanned aerial vehicle for path tracking**. Tese (Dissertação de Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, 2015.

DONADEL, R.; RAFFO, G. V.; BECKER, L. B. Modeling and control of a tiltrotor UAV for path tracking. In: **Proceedings of the 19th World Congress The International Federation of Automatic Control**. Cape Town: IFAC, 2014. v. 19, n. 3, p. 3839–3844.

EKSTRAND, B. Equations of motion for a two-axes gimbal system. **IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems**, v. 37, n. 3, p. 1083–1091, jul 2001.

ELFEKY, M. et al. Quadrotor helicopter with tilting rotors: Modeling and simulation. In: **World Congress on Computer and Information Technology (WCCIT) 2013**. Sousse, Tunisia: IEEE, 2013. p. 1–5.

ESPIAU, B.; CHAUMETTE, F.; RIVES, P. A new approach to visual servoing in robotics. **IEEE Transactions on Robotics and Automation**, v. 8, n. 3, p. 313–326, 1992.

- FLORES, G. R. et al. Quad-tilting rotor convertible MAV: Modeling and real-time hover flight control. **Journal of Intelligent and Robotic Systems: Theory and Applications**, v. 65, p. 457–471, 2012.
- FLORES, P. **Concepts and formulations for spatial multibody dynamics**. Cham: Springer International Publishing, 2015.
- FU, M. et al. Autonomous landing of a quadrotor on an UGV. In: **Proceedings of 2016 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation, ICMA**. Harbin: IEEE, 2016. p. 988–993.
- García Carrillo, L. R. et al. **Quad rotorcraft control vision-based hovering and navigation**. London: Springer London, 2013. 190 p.
- GOLDSTEIN, H.; POOLE, C.; SAFKO, J. **Classical mechanics**. 3. ed. New York: Addison Wesley, 2001. ISBN 0201657023.
- GONÇALVES, F. S. et al. Small scale UAV with birotor configuration. In: **2013 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)**. Atlanta: IEEE, 2013. p. 761–768.
- HILKERT, J. M. Inertially stabilized platform technology concepts and principles. **IEEE Control Systems Magazine**, v. 28, n. 1, p. 26–46, 2008.
- HUA, M. D. et al. Introduction to feedback control of underactuated VTOL vehicles: A review of basic control design ideas and principles. **IEEE Control Systems Magazine**, v. 33, n. 1, p. 61–75, feb 2013.
- HUA, M. D.; HAMEL, T.; SAMSON, C. Control of VTOL vehicles with thrust-tilting augmentation. **Automatica**, Elsevier, v. 52, p. 1–7, 2015.
- HURÁK, Z.; REZÁČ, M. Image-based pointing and tracking for inertially stabilized airborne camera platform. **IEEE Transactions on Control Systems Technology**, v. 20, n. 5, p. 1146–1159, sep 2012.
- ISIDORI, A. **Nonlinear Control Systems**. London: Springer London, 1995. ISSN 1049-8923.
- JAZAR, R. N. **Advanced dynamics: Rigid body, multibody, and aerospace applications**. Hoboken: Wiley, 2011. 1344 p.
- JOHANSEN, T. A.; FOSSEN, T. I. Control allocation - A survey. **Automatica**, v. 49, n. 5, p. 1087–1103, 2013.
- KELLY, R.; DAVILA, V. S.; PEREZ, J. A. L. **Control of robot manipulators in joint space**. Germany: Springer-Verlag London, 2005.

KENDOUL, F.; FANTONI, I.; LOZANO, R. Modeling and control of a small autonomous aircraft having two tilting rotors. In: **Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference 2005**. Seville: IEEE, 2005. v. 22, n. 6, p. 8144–8149.

KHALIL, H. K. **Nonlinear Systems**. New Jersey: Prentice Hall, 2002.

KINGSTON, D.; BEARD, R. W.; HOLT, R. S. Decentralized perimeter surveillance using a team of UAVs. **IEEE Transactions on Robotics**, v. 24, n. 6, p. 1394–1404, dec 2008.

LANTOS, B.; MÁRTON, L. **Nonlinear Control of Vehicles and Robots**. London: Springer London, 2011. ISSN 1430-9491.

LEE, D.; RYAN, T.; KIM, H. J. Autonomous landing of a VTOL UAV on a moving platform using image-based visual servoing. In: **2012 IEEE International Conference on Robotics and Automation**. Saint Paul: IEEE, 2012. p. 971–976.

LEE, J.-h.; MIN, B.-m.; KIM, E.-t. Autopilot design of tilt-rotor UAV using particle swarm optimization method. In: **International Conference on Control, Automation and Systems 2007**. Seoul: IEEE, 2007. p. 1629–1633.

LEIRA, F. S.; JOHANSEN, T. A.; FOSSEN, T. I. Automatic detection, classification and tracking of objects in the ocean surface from UAVs using a thermal camera. In: **IEEE Aerospace Conference Proceedings**. Big Sky: IEEE, 2015. v. 2015-June, p. 1–10.

LEMOS, N. A. **Mecânica analítica**. Niterói: Livraria da Física, 2007.

LI, Z.; DING, J. Ground moving target tracking control system design for UAV surveillance. In: **IEEE International Conference on Automation and Logistics**. Jinan: IEEE, 2007. p. 1458–1463.

LIN, C. E.; YANG, S. K. Camera gimbal tracking from UAV flight control. In: **2014 CACS International Automatic Control Conference**. Kaohsiung: IEEE, 2014. p. 319–322.

LIN, Q. et al. Trajectory tracking control for hovering and acceleration maneuver of Quad Tilt Rotor UAV. In: **Proceedings of the 33rd Chinese Control Conference, CCC 2014**. Nanjing: IEEE, 2014. p. 2052–2057.

LOMBARDI, W. C. **Desenvolvimento de controladores robustos para sistemas de visão acoplados em robôs móveis**. Tese (Dissertação de Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, 2008.

- MADANI, T.; BENALLEGUE, A. Backstepping control for a quadrotor helicopter. In: **Proceedings of the 2006 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems**. Beijing: IEEE, 2006. p. 3255–3260.
- MAISEL, M. D.; GIULIANETTI, D. J.; DUGAN, D. C. **The history of the XV-15 tilt rotor research aircraft: From concept to flight**. Washington, D.C.: NASA History Division, 2000.
- MANECY, A. et al. A novel hyperacute gimbal eye to implement precise hovering and target tracking on a quadrotor. In: **2016 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)**. Stockholm: IEEE, 2016. p. 3212–3218.
- MERHEB, A.-R.; BATEMAN, F.; NOURA, H. Passive and active fault tolerant control of octorotor UAV using second order sliding mode control. In: **2015 IEEE Conference on Control Applications (CCA)**. Sydney: IEEE, 2015. p. 1907–1912.
- MILLER, R. et al. Gimbal system configurations and line-of-sight control techniques for small UAV applications. In: **Airborne Intelligence, Surveillance, Reconnaissance (ISR) Systems and Applications X**. Baltimore: SPIE, 2013. v. 8713, p. 1–15.
- MISTLER, V.; BENALLEGUE, A.; M'SIRDI, N. K. Exact linearization and noninteracting control of a 4 rotors helicopter via dynamic feedback. **IEEE International Workshop on Robot and Human Interactive Communication**, IEEE, p. 586–593, 2001.
- MOKHTARI, A. et al. Feedback linearization and linear observer for a quadrotor unmanned aerial vehicle. **Advanced Robotics**, v. 20, n. 1, p. 71–91, 2006.
- MOUTINHO, A.; MATEOS, E.; CUNHA, F. The tilt-quadrotor: Concept, modeling and identification. In: **2015 IEEE International Conference on Autonomous Robot Systems and Competitions**. Vila Real: IEEE, 2015. p. 156–161.
- ÖNER, K. T. et al. Dynamic model and control of a new quadrotor unmanned aerial vehicle with tilt-wing mechanism. **International Journal of Mechanical, Aerospace, Industrial, Mechatronic and Manufacturing Engineering**, v. 2, n. 9, p. 1008–1013, 2008.

OOSEDO, A. et al. Flight control systems of a quad tilt rotor unmanned aerial vehicle for a large attitude change. In: **2015 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)**. Seattle: IEEE, 2015. p. 2326–2331.

OSBORNE, J.; HICKS, G.; FUENTES, R. Global analysis of the double-gimbal mechanism. **IEEE Control Systems Magazine**, v. 28, n. 4, p. 44–64, 2008.

PAPACHRISTOS, C.; ALEXIS, K.; TZES, A. Design and experimental attitude control of an unmanned Tilt-Rotor aerial vehicle. In: **The 15th International Conference on Advanced Robotics**. Tallinn: IEEE, 2011. p. 465–470.

PAPACHRISTOS, C.; ALEXIS, K.; TZES, A. Hybrid model predictive flight mode conversion control of unmanned quad-tiltrotors. In: **2013 European Control Conference (ECC)**. Zürich: EUCA, 2013. p. 1793–1798.

PRABOWO, Y. A.; TRILAKSONO, B. R.; TRIPUTRA, F. R. Hardware in-the-loop simulation for visual servoing of fixed wing UAV. In: **The 5th International Conference on Electrical Engineering and Informatics 2015**. Bali: IEEE, 2015. p. 247–252.

QUIGLEY, M. et al. Target acquisition, localization, and surveillance using a fixed-wing mini-UAV and gimbaled camera. In: **Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation**. Barcelona: IEEE, 2005. p. 2600–2606.

RAFFO, G. V.; ORTEGA, M. G.; RUBIO, F. R. Nonlinear H-infinity controller for the quad-rotor helicopter with input coupling. In: **Proceedings of the 18th World Congress The International Federation of Automatic Control**. Milano: IFAC, 2011. p. 13834–13839.

RAFI, F. et al. Autonomous target following by unmanned aerial vehicles. **Defense and Security Symposium**, v. 6230, 2006.

RAJESH, R. J.; ANANDA, C. M. PSO tuned PID controller for controlling camera position in UAV using 2-axis gimbal. In: **IEEE International Conference on Power and Advanced Control Engineering (ICPACE) 2015**. Bangalore: IEEE, 2015. p. 128–133.

RAMIREZ-PAREDES, J. P. et al. Urban target search and tracking using a UAV and unattended ground sensors. In: **Proceedings of the American Control Conference**. Chicago: AACC, 2015. p. 2401–2407.

RYLL, M.; BULTHOFF, H. H.; GIORDANO, P. R. Modeling and control of a quadrotor UAV with tilting propellers. In: **2012 IEEE International Conference on Robotics and Automation**. Saint Paul: IEEE, 2012. p. 4606–4613.

RYLL, M. et al. First flight tests for a quadrotor UAV with tilting propellers. In: **2013 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)**. Karlsruhe: IEEE, 2013. p. 295–302.

SANCHEZ, A. et al. Autonomous hovering of a noncyclic tiltrotor UAV: Modeling, control and implementation. In: **Proceedings of the 17th World Congress The International Federation of Automatic Control**. Seoul: IFAC, 2008. p. 803–808.

SEDDON, J.; NEWMAN, S. **Basic helicopter aerodynamics**. 3. ed. Noida: Wiley, 2011.

SELVARAJAN, M.; ANANDA, C. M. Quaternion based pointing algorithm for two-axis gimbal of micro aerial vehicles. In: **2016 IEEE International Conference on Recent Trends in Electronics, Information & Communication Technology (RTEICT)**. India: IEEE, 2016. p. 1335–1339.

SEMSCH, E. et al. Autonomous UAV surveillance in complex urban environments. In: **IEEE/WIC/ACM International Conference on Intelligent Agent Technology (IAT) 2009**. Milan: IEEE, 2009. v. 2, p. 82–85.

SHABANA, A. A. **Dynamics of multibody systems**. 4. ed. New York: Cambridge University Press, 2013.

SHTESSEL, Y. et al. **Sliding mode control and observation**. New York: Springer New York, 2014.

SHUSTER, M. D. A Survey of attitude representations. **The Journal of the Astronautical Sciences**, American Astronautical Society, v. 1, n. 4, p. 439–517, 1993.

SINESP - Sistema Nacional de Informações de Segurança Pública. **Estatísticas Criminais**. 2016. Disponível em: <<https://www.sinesp.gov.br/estatisticas-publicas>>.

SKJONG, E. et al. Autonomous search and tracking of objects using model predictive control of unmanned aerial vehicle and gimbal: Hardware-in-the-loop simulation of payload and avionics. **2015 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)**, IEEE, Denver, p. 904–913, 2015.

- SLOTINE, J. J. E.; LI, W. **Applied nonlinear control**. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, 1991.
- SPONG, M. W.; HUTCHINSON, S.; M., V. **Robot modeling and control**. New York: Wiley, 2006.
- SROLLE, S.; RYSDYK, R. Flight path following guidance for unmanned air vehicles with pan-tilt camera for target observation. In: **22nd Digital Avionics Systems Conference Proceedings DASC-03**. Indianapolis: IEEE, 2003. p. 8.B.3–81.
- SUMALAN, A. L.; POPESCU, D.; ICHIM, L. Flood evaluation in critical areas by UAV surveillance. In: **8th International Conference on Electronics, Computers and Artificial Intelligence (ECAI) 2016**. Ploiesti: IEEE, 2016. p. 3–8.
- SUN, M.; ZHU, R.; YANG, X. UAV path generation, path following and gimbal control. In: **Proceedings of 2008 IEEE International Conference on Networking, Sensing and Control, ICNSC**. Sanya, China: IEEE, 2008. p. 870–873.
- THORNTON, S. T.; MARION, J. B. **Classical dynamics of particles and systems**. 5. ed. Belmont: Brooks Cole, 2004.
- TIIMUS, K.; TAMRE, M. Camera gimbal control system for unmanned platforms. In: **7th International DAAAM Baltic Conference**. Tallinn, Estonia: IEEE, 2010. p. 202–207.
- TSAKIRIS, D. P.; RIVES, P.; SAMSON, C. Applying visual servoing techniques to control nonholonomic mobile robots. In: **International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS'97)**. Grenoble, France: IEEE, 1997.
- UTKIN, V.; GULDNER, J.; SHI, J. **Sliding mode control in electro-mechanical systems**. 2. ed. USA: CRC Press, 2009.
- VALAVANIS, K. P.; VACHTSEVANOS, G. J. **Handbook of unmanned aerial vehicles**. New York: Springer, 2014.
- VATTAPPARAMBAN, E. et al. Drones for smart cities: Issues in cybersecurity, privacy, and public safety. In: **2016 International Wireless Communications and Mobile Computing Conference, IWCMC 2016**. Paphos, Cyprus: IEEE, 2016. p. 216–221.
- Vintage Wings of Canada. **The mother of all drones**. 2017. Disponível em: <<https://goo.gl/F7Mkkc>>.

WANG, L.; ZHANG, Z. Automatic detection of wind turbine blade surface cracks based on UAV-taken images. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, PP, n. 99, p. 1–10, 2017.

WANG, X.; CAI, L. Mathematical modeling and control of a tilt-rotor aircraft. **Aerospace Science and Technology**, v. 47, p. 473–492, 2015.

XIANG, T. et al. UAV based target tracking and recognition. In: **2016 IEEE International Conference on Multisensor Fusion and Integration for Intelligent Systems (MFI)**. Baden-Baden, Germany: IEEE, 2016. p. 19–21.

YANGUO, S.; HUANJIN, W. Design of flight control system for a small unmanned tilt rotor aircraft. **Chinese Journal of Aeronautics**, v. 22, n. 3, p. 250–256, 2009.