

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA**

Leandro Passos de Figueiredo

**INVERSÃO SÍSMICA BAYESIANA COM MODELAGEM
A PRIORI INTEGRADA COM FÍSICA DE ROCHA**

Florianópolis (SC)

2017

Leandro Passos de Figueiredo

**INVERSÃO SÍSMICA BAYESIANA COM MODELAGEM
A PRIORI INTEGRADA COM FÍSICA DE ROCHA**

Tese submetida ao Programa de Pós-
Graduação em Física para a obtenção
do Grau de Doutorado em física.

Orientador: Dr. Wagner Figueiredo

Coorientador: Dr. Marcio Santos

Florianópolis (SC)

2017

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

de Figueiredo, Leandro Passos
Inversão sísmica Bayesiana com modelagem a priori
integrada com física de rocha / Leandro Passos de
Figueiredo ; orientador, Wagner Figueiredo,
coorientador, Márcio Santos, 2017.
104 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas,
Programa de Pós-Graduação em Física, Florianópolis,
2017.

Inclui referências.

1. Física. 2. Problema inverso. 3. Monte Carlo.
4. Inversão sísmica petrofísica. 5. Física de Rocha.
I. Figueiredo, Wagner . II. Santos, Márcio. III.
Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de
Pós-Graduação em Física. IV. Título.

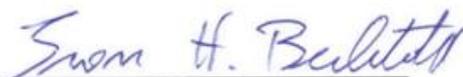
INVERSÃO SÍSMICA BAYESIANA COM MODELAGEM A PRIORI INTEGRADA COM FÍSICA DE ROCHA

Leandro Passos de Figueiredo

Esta Tese foi julgada adequada para a obtenção do título de **DOUTOR EM FÍSICA**, na área de concentração **Física da Matéria Condensada e Mecânica Estatística** e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Física.



Prof. Dr. Wagner Figueiredo
(UFSC - orientador)



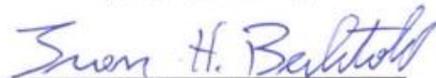
Ivan Helmuth Bechtold
(UFSC - Coordenador do Programa)



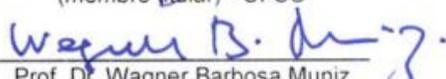
Prof. Dr. Márcio Santos
(UFSC - presidente)



Prof. Dr. Guillaume François Gilbert
Barraut
(membro titular) - UFSC



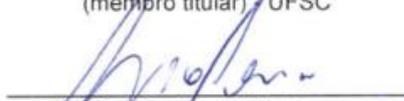
Prof. Dr. Leonardo Azevedo
(membro externo) - IST/Lisboa)



Prof. Dr. Wagner Barbosa Muniz
(membro titular) - UFSC



Prof. Dr. João Felipe Costa
(membro externo) - UFRGS



Prof. Dr. Lucas Nicolao
(membro titular) - UFSC/FSC

Prof. Dr. Mauro Roisenberg
(membro suplente) - UFSC

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer a CAPES pela bolsa de estudos (processo nº 3224 / 15-5) e também a Petrobras pelo suporte e disponibilidade durante o projeto de pesquisa.

... The language of probability allows us to speak quantitatively about some situation which may be highly variable, but which does have some consistent average behavior.

...

Our most precise description of nature must be in terms of probabilities.

Richard Phillips Feynman

RESUMO

A inversão sísmica conjunta para as propriedades elásticas e petrofísicas é um problema inverso com solução não única. Existem vários fatores que afetam a precisão dos resultados como a relação estatística de física de rocha, os erros dos dados experimentais e de modelagem. Apresentamos uma metodologia para incorporar um modelo linearizado de física de rocha em uma distribuição Gaussiana multivariada. A proposta é usada para definir um modelo de mistura Gaussiana para a distribuição conjunta a priori das propriedades elásticas e petrofísicas, no qual cada componente é interpretada como uma litofácies. Este processo permite introduzir uma correlação teórica entre as propriedades, com interpretação geológica específica dos parâmetros da física de rocha para cada fácies. Com base nesta modelagem *a priori* e no modelo convolucional, obtemos analiticamente as distribuições condicionais da amostragem de Gibbs. Em seguida, combinamos o algoritmo de amostragem com métodos de simulação geoestatística para obter a distribuição *a posteriori* de Bayes. Aplicamos a proposta em um conjunto de dados sísmicos reais, com três poços, para obter múltiplas realizações geoestatísticas tridimensionais das propriedades e das litofácies. A proposta é validada através de testes de poço cego e comparações com a inversão Bayesiana tradicional. Usando a probabilidade das litofácies, também calculamos a isosuperfície de probabilidade do reservatório de óleo principal do campo estudado. Além da proposta de inversão sísmica conjunta, apresentamos também uma formulação revisitada para o método de simulação geoestatística *FFT-Moving Average*. Nessa formulação, o filtro de correlação é derivado através de apenas um único ruído aleatório, o que permite a aplicação do método sem qualquer suposição sobre as características do ruído.

Palavras-chave: Inversão Sísmica, Monte Carlo, inferência Bayesiana, modelagem a priori, física de rocha, propriedades petrofísicas

ABSTRACT

Joint seismic inversion for elastic and petrophysical properties is an inverse problem with a nonunique solution. There are several factors that affect the accuracy of the results such as the statistical rock-physics relation and observation errors. We present a general methodology to incorporate a linearized rock-physics model into a multivariate Gaussian distribution. The proposal is used to define a Gaussian mixture model for the joint prior distribution of the elastic and petrophysical properties, in which each component is interpreted as a lithofacies. This process allows to introduce a theoretical correlation between the properties with specific geological interpretation for the rock physics parameters of each facies. Based on the prior model and on the convolutional model, we analytically obtain the conditional distributions of the Gibbs sampling. Then, we combine the sampling algorithm with geostatistical simulation methods to calculate the Bayesian posterior distribution. We applied the proposal to a real seismic data set with three wells to obtain multiple three-dimensional geostatistical simulations of the properties and the lithofacies. The proposal is validated through a blind well test and a comparison with the traditional Bayesian inversion. Using the probability of the reservoir lithofacies, we also calculated a 3D isosurface probability model of the main oil reservoir in the studied field.

Keywords: Seismic inversion, monte carlo, Bayesian inference, prior modeling, rock-physics, petrophysical properties

LISTA DE FIGURAS

- Figura 1 Exemplo de aplicação da Equação 2.64 usando um modelo de covariograma Gaussiano. No topo: Simulação usando o filtro tradicional em preto e usando o filtro exato em azul. À esquerda: Filtro tradicional em preto e filtro exato em azul. À direita: O covariograma teórico em vermelho, covariograma experimental usando o filtro tradicional em preto e usando o filtro exato em azul. 50
- Figura 2 Fluxo de trabalho do Simulação Gaussiana Truncada: Campo aleatório discreto (à direita) gerado pelo truncamento do campo contínuo (à esquerda). Os limiares são obtidos a partir da distribuição Gaussiana cumulativa inversa (abaixo) e uma dada proporção de fácies (15 % de fácies 1, 35 % de fácies 2 e 50 % de fácies 3 para este exemplo)..... 52
- Figura 3 Exemplo de dados sísmico empilhado. À esquerda temos um traço sísmico e à direita, temos diversos traços formando o conjunto completo dos dados sísmicos..... 57
- Figura 4 Resultado de simulação do algoritmo de *FFT-MA*. Acima, simulação geoestatística com correlações espaciais definidas pelos correlogramas abaixo: a esquerda, correlograma teórico e a direita, correlograma experimental da simulação. 76
- Figura 5 Seção arbitrária dos dados sísmicos *post-stack* utilizados nos métodos de inversão. O eixo vertical é o tempo de trânsito e o eixo horizontal X é a distância do primeiro traço ao longo da seção arbitrária. Os dois horizontes em preto destacam a região principal do reservatório de petróleo..... 77
- Figura 6 A esquerda: *Cross-plot* dos logs de poços de porosidade e impedância, juntamente com a curva teórica obtida usando os modelos de física de rocha de inclusão e a distribuição *a priori* para o vetor modelo $\mathbf{m}_t = (\ln(z_t), \phi_t)$. A direita: *Cross-plot* dos logs de poços de porosidade e impedância, codificados por cores para cada fácies, juntamente com as curvas teóricas obtidas usando os modelos de rocha-física de inclusão e a distribuições *a priori* para o vetor modelo \mathbf{m} , calculado para cada fácies. 78
- Figura 7 Interpolação dos dados de poços de impedância acústica e a porosidade (A e B, respectivamente) e suas variâncias (C e D, respectivamente) usadas para definir o modelo prévio de subsuperfície \mathbf{f} e a matriz de covariância Σ_f 80

Figura 8	A <i>wavelet s</i> usado no processo de inversão.	80
Figura 9	Máximo <i>a posteriori</i> da impedância acústica e porosidade (em A e B, respectivamente) para uma distribuição Gaussiana <i>a priori</i> simples, e a média de impedância e porosidade das múltiplas configurações do algoritmo de Gibbs (em C e D, respectivamente). Para comparação visual, os dados de poços estão filtrados por um filtro passa-baixa com frequência de corte de 100 Hz.	81
Figura 10	Uma realização de impedância e porosidade (em A e B, respectivamente) na iteração 100 do algoritmo de Gibbs, e os desvios padrões calculados a partir de todas as iterações (em C e D, respectivamente).	81
Figura 11	Probabilidade da fácies reservatório e modelo de fácies mais provável obtido usando a abordagem analítica com distribuição <i>a priori</i> Gaussiana simples em A e B, e obtida usando a mistura Gaussiana com algoritmo de Gibbs em C e D.	82
Figura 12	A isosuperfície de 70 % de probabilidade da fácies reservatório, aplicando a metodologia analítica em A e o algoritmo de Gibbs em B.	83
Figura 13	Teste de poço cego. As duas primeiras imagens mostram a impedância e porosidade (dados de poço em preto, MAP do método analítico em azul claro, distribuição <i>a posteriori</i> do algoritmo de Gibbs em escala de cores com média em azul e MAP em azul tracejado, e MAP de inversão Bayesiana padrão em verde). As demais imagens mostram a classificação real das fácies no poço, o modelo de fácies mais provável obtido pelas duas propostas e pela abordagem Bayesiana tradicional.	84
Figura 14	Seção arbitrária dos dados sísmicos <i>pre-stack</i> . Os dois horizontes em preto destacam o principal reservatório de óleo no campo.	88
Figura 15	Os dados de poços das propriedades elásticas e petrofísicas codificadas por cores para cada fácies, com os modelos de física de rocha calibrados e as projeções 3D das componentes Gaussianas <i>a priori</i> (representadas pelas isosuperfícies de probabilidade).	89
Figura 16	Uma realização de cada propriedade na iteração 100 do algoritmo de Gibbs.	90
Figura 17	Média de cada propriedade calculada ponto a ponto a partir de todas as iterações do algoritmo. Para as litofácies, o modelo mais provável é mostrado.	90

Figura 18 Desvio padrão de cada propriedade calculado ponto a ponto a partir de todas as iterações do algoritmo. Para as litofácies, probabilidade da fácies do reservatório é mostrada.	91
Figura 19 Teste de poço cego. No lado esquerdo as estimativas das propriedades da subsuperfície são comparadas com os dados de poço (distribuição posterior em escala de cores com solução MAP em azul e média em azul tracejado, dado do poço em preto e MAP de inversão Bayesiana tradicional em verde. No lado direito, a classificação de fácies do poço é comparada com os modelos mais prováveis de fácies, obtidos pela proposta e pela abordagem Bayesiana tradicional.....	92
Figura 20 Histograma experimental dos dados de poços em comparação com a distribuição marginal <i>a posteriori</i> do método de inversão proposto em azul, e da inversão Bayesiana tradicional em verde.....	93
Figura 21 A isosuperfície com 65 % da probabilidade de fácies reservatório calculada entre para região entre os dois horizontes de Figura 14.....	93

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Parâmetros dos modelos de física de rocha de inclusão: módulo de compressão da rocha sólida, módulo <i>bulk</i> do fluido, densidade da rocha sólida e densidade do fluido. O modelo 2 representa o modelo para facies reservatório; O Modelo 1 representa o modelo para as demais fácies.	78
Tabela 2	Erro percentual absoluto médio da impedância e porosidade estimadas na localização do poço utilizado para o teste cego.	84
Tabela 3	Parâmetros calibrados do modelo de física de rocha de Pride com substituição de fluidos.	86
Tabela 4	Erro percentual médio absoluto das propriedades estimadas na localização do poço utilizado para o teste cego.	87

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

DNM	Distribuição Normal Multivariada
MCMC	Monte Carlo via Cadeias de Markov
MAP	Máximo a posteriori
RPM	Modelo de física de rocha
FFT	<i>Fast Fourier Transform</i>
MA	<i>Moving Average</i>
NMO	<i>Normal Moveout</i>
CMP	<i>Common midpoint</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

d	Dado experimental, dado sísmico
m	Parâmetros do modelo
μ	Média
Σ	Matriz de covariância
λ	Variograma
α	Velocidade da onda-P
β	Velocidade da onda-S
ρ	Densidade
K	Módulo elástico <i>bulk</i>
G	Módulo elástico <i>shear</i>
ϕ	Porosidade
s_w	Saturação de água
s	<i>Wavelet</i>
c	Refletividade
θ	Ângulo de incidência da onda
Γ	Matriz de correlação
z	Propriedades elásticas
r	Propriedades petrofísicas
J	Matriz Jacobiana
f	Modelo prévio de subsuperfície
g	Operador direto
G	Operador direto linear
o	Dados observados - Sísmica e modelo prévio
π	Litofácies
M	Módulo de compressão

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	25
1.1	INFERÊNCIA BAYESIANA	28
1.2	PROBLEMA INVERSO	30
1.3	OBJETIVOS	32
2	MÉTODOS ESTATÍSTICOS	33
2.1	MÉTODOS DE MONTE CARLO	33
2.1.1	Algoritmo de Metropolis-Hastings	36
2.1.2	Algoritmo de Gibbs	37
2.2	ANÁLISE ESTATÍSTICA MULTIVARIADA	38
2.3	DISTRIBUIÇÃO NORMAL MULTIVARIADA	39
2.4	PRODUTO DE N DISTRIBUIÇÕES MULTIVARIADAS	39
2.5	CONSTRUÇÃO DAS MATRIZES DE COVARIÂNCIA	40
2.6	DISTRIBUIÇÃO DE COMBINAÇÕES LINEARES DE VARIÁ-VEIS NORMALMENTE DISTRIBUÍDAS	42
2.7	DISTRIBUIÇÃO CONDICIONAL DE VARIÁVEIS NORMALMENTE DISTRIBUÍDAS	42
2.8	SIMULAÇÃO GEOESTATÍSTICA	45
2.8.1	FFT-Moving Average	46
2.8.1.1	Formulação revisitada	48
2.8.2	Simulação Gaussiana Truncada	51
3	FÍSICA DE ROCHA	53
3.1	MODELO DE INCLUSÃO DE KUSTER-TOKSOZ	54
3.2	MODELO EMPÍRICO DE PRIDE	55
3.3	MÉTODO SÍSMICO DE REFLEXÃO	56
3.3.1	Modelagem de dados Post-stack	57
3.3.2	Modelagem de dados Pre-stack	59
4	METODOLOGIA	61
4.1	MODELAGEM <i>A PRIORI</i> COM FÍSICA DE ROCHA PARA IMPEDÂNCIA ACÚSTICA E POROSIDADE	61
4.2	GENERALIZAÇÃO DA MODELAGEM <i>A PRIORI</i> COM FÍSICA DE ROCHA	63
4.3	INCORPORAÇÃO DE UM MODELO PRÉVIO DE SUB-SUPERFÍCIE	66
4.4	DISTRIBUIÇÃO CONDICIONAL DAS PROPRIEDADES ELÁSTICAS E PETROFÍSICAS	67
4.5	DISTRIBUIÇÃO CONDICIONAL DAS LITOFÁCIES	69

4.6	ALGORITMO DE GIBBS PARA AMOSTRAGEM A <i>POSTERIORI</i> COM CORRELAÇÃO ESPACIAL.....	70
5	APLICAÇÕES E RESULTADOS	75
5.1	INVERSÃO PARA IMPEDÂNCIA ACÚSTICA E POROSIDADE	76
5.2	INVERSÃO PARA VELOCIDADE-P, VELOCIDADE-S, DENSIDADE, POROSIDADE E SATURAÇÃO DE ÁGUA	85
6	CONCLUSÕES	95
6.1	PERSPECTIVAS	96
	REFERÊNCIAS	99

1 INTRODUÇÃO

Do ponto de vista matemático, a estimativa das propriedades da subsuperfície a partir de dados sísmicos é um problema inverso. O objetivo da modelagem inversa é estimar informações de um sistema físico parametrizado a partir de dados observáveis, das relações teóricas entre os parâmetros observáveis e não observáveis do sistema, e também das informações a priori sobre os parâmetros não observáveis (TARANTOLA, 2005). A inversão sísmica é um passo importante no processo de modelagem e caracterização de reservatórios de petróleo e gás, pois permite estimar as propriedades elásticas das rochas a partir de dados sísmicos (RUSSELL, 1988; SEN, 2006; BACON; SIMM; REDSHAW, 2003). As propriedades elásticas estão relacionadas a outras propriedades tais como porosidade e saturação de fluidos (MAVKO; MUKERJI; DVORKIN, 2009; BOSCH; MUKERJI; GONZALEZ, 2010), dentro do contexto de caracterização de reservatórios estas propriedades são chamadas de propriedades petrofísicas, as quais permitem a quantificação do volume de hidrocarbonetos dentro do reservatório.

Típicamente, os dados sísmicos são medidos de acordo com uma geometria regular; os traços sísmicos são medidos em vários locais ao longo de direções ortogonais (chamados de *inline* e *crossline*). O conjunto de dados inclui as medidas de tempo de trânsito da onda e de suas amplitudes sísmicas. Por sua vez, os dados de poços são geralmente usados na caracterização do reservatório para uma validação dos resultados da inversão. Além disso, os dados dos poços fornecem medições diretas das propriedades das rochas e dos fluidos, como velocidade de onda-P e S, densidade, porosidade e saturação de fluido, entre outras. Estas informações são essenciais para a estimativa do pulso sísmico (ou *wavelet*) (DE FIGUEIREDO et al., 2014) e a calibração do modelo de física de rocha (GRANA; ROSSA, 2010). A estimativa do pulso sísmico afeta os resultados da inversão sísmica, diferenças em sua fase causam alterações na posição vertical das interfaces das rochas e além disso, equívocos em relação a energia do pulso causam variações nos valores das propriedades.

O modelo de física de rocha fornece uma relação entre as propriedades petrofísicas e as propriedades elásticas. Geralmente, o modelo é definido por um conjunto de equações que podem ser obtidas por um simples ajuste dos dados de poço ou por uma relação teórica mais complexa (DVORKIN; GUTIERREZ; GRANA, 2014; MAVKO; MUKERJI; DVORKIN, 2009; GRANA; ROSSA, 2010). A distribuição dos valores das pro-

priedades elásticas e petrofísicas na subsuperfície depende do tipo de rocha, ou seja, das litofácies. Neste trabalho, uma litofácies (ou simplesmente fácies) é definida como um geo-corpo com características físicas e geológicas específicas, relacionadas às condições sedimentológicas, deposicionais e de conteúdo de fluidos (READING, 1996).

O principal desafio na inversão sísmica é a banda limitada dos dados sísmicos e, conseqüentemente, a não-unicidade da solução, particularmente fora desta banda. Assim, é possível encontrar diferentes valores dos parâmetros do modelo que são compatíveis com os dados experimentais. Além disso, a presença de ruídos nos dados e de erros associados ao processo de modelagem, aquisição e processamento, afetam a precisão dos resultados da inversão (BOSCH; MUKERJI; GONZALEZ, 2010; SEN, 2006; TARANTOLA, 2005). Métodos de otimização numérica, que buscam minimizar uma função objetivo, têm sido propostos para resolver problemas de inversão sísmica (LI; LIN; YANG, 2015; CONTI et al., 2013; SEN, 2006). Entretanto, quando compreendemos as diversas fontes de incerteza existentes no processo, a ideia de encontrar uma única solução se mostra inadequada e acompanhada por um otimismo injustificável de que somos capazes de entendermos uma realidade complexa, a qual temos acesso através de medidas indiretas e imprecisas. Estes fatores motivam o desenvolvimento de métodos de inversão estocástica, que buscam gerar várias configurações, ou realizações estocásticas, das propriedades da subsuperfície, proporcionando uma quantificação da incerteza e um conjunto de soluções com diferentes cenários de modelo do reservatório (BULAND; OMRE, 2003b; GUNNING; GLINSKY, 2004; GRANA; MUKERJI et al., 2012; DVORKIN; GUTIERREZ; GRANA, 2014; BOSCH et al., 2009a; RAY et al., 2013). Devido a estas razões, a abordagem Bayesiana tem sido apresentada como a escolha natural para resolver a inversão sísmica petrofísica (RIMSTAD; AVSETH; OMRE, 2012; BOSCH; MUKERJI; GONZALEZ, 2010).

A solução da abordagem Bayesiana é definida pela distribuição *a posteriori* condicionada a todos os dados observados disponíveis, erros e conhecimento *a priori* sobre a subsuperfície, como correlações espaciais, tendências de deposição e modelo prévio. Portanto, a metodologia quantifica a incerteza através de uma função de densidade de probabilidade das propriedades, dado todos os erros de modelagem e observação (BOSCH; MUKERJI; GONZALEZ, 2010; TARANTOLA, 2005). Considerando um operador direto que pode ser linearizado e sob a suposição Gaussiana para as distribuições dos parâmetros do modelo e do ruído sísmico, Buland e Omre (BULAND; OMRE, 2003a) propõem uma solução analítica da distribuição *a posteriori* das propriedades elásti-

cas. Figueiredo et al. (DE FIGUEIREDO et al., 2014) aplicaram a mesma metodologia para a inversão acústica. A solução analítica do problema inverso leva a algoritmos muito eficientes, porém a solução só é possível quando as distribuições *a priori* são completamente conhecidas.

Os algoritmos de amostragem baseados em métodos de Monte Carlo via Markov Chain (MCMC) fornecem soluções mais gerais (BULAND; OMRE, 2003b; DE FIGUEIREDO et al., 2013). De fato, os métodos MCMC, como o algoritmo Metropolis, podem ser aplicados sem nenhuma suposição sobre a distribuição ou o operador direto (BOSCH et al., 2009b; RAY et al., 2013), embora exija mais esforço computacional para a amostragem numérica da distribuição *a posteriori*. Uma boa introdução aos algoritmos MCMC pode ser encontrada nas referências (BROOKS et al., 2011; GILKS; RICHARDSON; SPIEGELHALTER, 1996; NEWMAN; BARKEMA, 1999). O algoritmo de amostragem pode ser combinado com métodos geoestatísticos para incorporar correlações espaciais às propriedades da subsuperfície (BOSCH et al., 2009b; LANG; GRANA, 2017). Além disso, as múltiplas realizações do modelo de reservatório, obtidas pela amostragem numérica da distribuição *a posteriori*, fornecem um conjunto de diferentes cenários, que é utilizado para a análise de incerteza das propriedades estimadas (DE FIGUEIREDO et al., 2014; GRANA; ROSSA, 2010; CAERS, 2011).

A inversão elástica proposta por Buland e Omre (BULAND; OMRE, 2003a) pode ser estendida a modelos de mistura Gaussiana para as distribuições *a priori*. Este tipo de distribuição representa melhor o comportamento multimodal dos dados de poço, e cada componente da mistura é interpretada como uma litofácies diferente. Neste caso, a distribuição *a posteriori* é também uma mistura Gaussiana que pode ser calculada analiticamente (GRANA; ROSSA, 2010; GRANA; MUKERJI et al., 2012). A incorporação das litofácies no processo de inversão é importante, pois cada fácies possui uma interpretação geológica diferente e uma parametrização de física de rocha específica. Portanto, a classificação de litofácies durante o processo de inversão fornece uma relação mais realista entre as propriedades elásticas e petrofísicas, bem como suas incertezas (BOSCH; MUKERJI; GONZALEZ, 2010). Além disso, as múltiplas realizações de fácies podem ser usadas para calcular a probabilidade de conectividade (MOYEN; DOYEN, 2009) entre estruturas geológicas. Esta probabilidade é uma informação crucial para a análise de risco da estratégia de produção. Ao longo dos últimos anos, vários métodos foram propostos para a inversão sísmica e petrofísica conjunta, incluindo o trabalho das referências (BOSCH et al., 2009a; RIMSTAD; AVSETH; OMRE, 2012; GONZÁLEZ; MUKERJI; MAVKO, 2008). As vantagens

da abordagem conjunta para a inversão são argumentadas em termos de uma melhor consistência entre as propriedades elásticas e petrofísicas do reservatório, e uma melhor quantificação das incertezas (BOSCH; MUKERJI; GONZALEZ, 2010).

Neste trabalho, propomos uma abordagem Bayesiana juntamente com uma modelagem *a priori* integrada com a física de rocha, visando a estimativa conjunta das propriedades da subsuperfície a partir dos dados sísmicos. A distribuição *a priori* é definida por uma mistura Gaussiana, na qual cada componente está associado à uma litofácies e a um modelo de física de rocha específico. A distribuição *a posteriori* é obtida pela combinação de análise estatística multivariada, métodos geoestatísticos e método de Monte Carlo. Os capítulos desta Tese foram organizados de forma a introduzir, primeiramente, os conceitos mais fundamentais sobre a inferência Bayesiana aplicada em problemas inversos, seguidos das metodologias e algoritmos estatísticos utilizados, para enfim apresentar as propostas de inversão sísmica conjunta, assim como os resultados obtidos, as conclusões e as perspectivas de trabalhos futuros.

1.1 INFERÊNCIA BAYESIANA

A inferência Bayesiana pode ser interpretada como um método prático para obter informações de grandezas através de dados observados usando uma estrutura estatística. A característica probabilística inerente à abordagem Bayesiana permite uma quantificação consistente das incertezas, representada por distribuições de probabilidade. Portanto, a inferência proporciona uma melhor compreensão dos riscos, suportando as tomadas de decisão que são feitas baseadas em seus resultados. Além disso, as inferências, assim como suas incertezas, podem ser facilmente atualizadas à medida em que mais evidências ou informações se tornam disponíveis.

Após estabelecer o modelo estatístico para a distribuição de probabilidade conjunta para todas as grandezas de um problema, a inferência de uma grandeza não observada M é feita pelo condicionamento aos dados observados D :

$$P(M|D) = \frac{P(M \cap D)}{P(D)}, \quad (1.1)$$

o fato de $P(M \cap D) = P(D \cap M)$ leva ao Teorema de Bayes:

$$P(M|D) = \frac{P(D|M)P(M)}{P(D)}, \quad (1.2)$$

onde $P(M|D)$ é chamada de distribuição *a posteriori*.

Analogamente, para variáveis contínuas, a distribuição *a posteriori* dos parâmetros de um modelo \mathbf{m} , condicionada aos dados observados \mathbf{d} , é definida por uma função densidade de probabilidade:

$$p(\mathbf{m}|\mathbf{d}) = \frac{p(\mathbf{m}, \mathbf{d})}{p(\mathbf{d})} = \frac{p(\mathbf{d}|\mathbf{m})p(\mathbf{m})}{p(\mathbf{d})}. \quad (1.3)$$

A distribuição *a posteriori* de Bayes $p(\mathbf{m}|\mathbf{d})$ é o produto da distribuição *likelihood* $p(\mathbf{d}|\mathbf{m})$ com a distribuição *a priori* $p(\mathbf{m})$. A distribuição dos dados observados $p(\mathbf{d})$ é encarada apenas como um fator de normalização (BROOKS et al., 2011).

A relação entre os dados observados \mathbf{d} e os parâmetros do modelo \mathbf{m} é probabilística e é representada pela *likelihood*. Os valores da *likelihood* são entendidos como uma medida de quão adequado o modelo é em relação aos dados. Por outro lado, todo o conhecimento prévio sobre os parâmetros do modelo, antes de qualquer observação, é expresso pela distribuição *a priori*. Resumindo, na inferência Bayesiana, todas as informações dos dados observados e da distribuição *a priori* são combinadas para produzir a distribuição de probabilidade *a posteriori*. Além disso, a incerteza da inferência é expressa por uma função densidade de probabilidade das grandezas de interesse (GELMAN et al., 2004).

Preferencialmente, a distribuição *a priori* deve ser definida para conter informações que não são cobertas pela *likelihood*, a fim de resolver as ambiguidades que a metodologia não é capaz usando apenas os dados observados. No entanto, as probabilidades *a priori* são intrinsecamente subjetivas e a escolha da distribuição pode afetar drasticamente as conclusões *a posteriori*. Assim, a definição desta distribuição é um desafio e deve ser cuidadosamente avaliada. Por esta razão, a dificuldade em selecionar uma distribuição prévia é um inconveniente fundamental da metodologia, e é o ponto mais criticado da inferência Bayesiana (ROBERT, 2001; JEFFREYS, 1946).

Com o objetivo de reduzir a influência da distribuição *a priori* sobre a inferência resultante, foram propostas várias técnicas para fornecer mais consistência e robustez à abordagem Bayesiana. As técnicas mais populares podem ser consideradas como as modelagens conjugada,

hierárquica e empírica. Particularmente, a modelagem *a priori* conjugada consiste no uso de distribuições teóricas como a normal, Poisson, gama e binomial, que permitem um tratamento analítico da distribuição *a posteriori*. Além disso, mais recentemente, foram apresentados novos desenvolvimentos, como a análise de sensibilidade, para a avaliação da influência da distribuição na inferência (CAERS, 2011). Este processo funciona como uma ferramenta eficiente para avaliar a robustez da distribuição *a priori* (ROBERT, 2001).

Outra peculiaridade da abordagem Bayesiana é o fato de que a distribuição *a posteriori* pode ser facilmente atualizada à medida em que mais evidências e dados se tornam disponíveis. Por exemplo, a distribuição *a posteriori* do parâmetro do modelo \mathbf{m} , condicionada a um dado observado \mathbf{d}_1 , pode ser usada como uma distribuição *a priori* para atualizar a inferência com uma nova evidência \mathbf{d}_2 de acordo com o teorema de Bayes:

$$p(\mathbf{m}|\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) \propto p(\mathbf{d}_2|\mathbf{m})p(\mathbf{m}|\mathbf{d}_1) = p(\mathbf{d}_2|\mathbf{m})p(\mathbf{d}_1|\mathbf{m})p(\mathbf{m}), \quad (1.4)$$

que pode ser estendido para qualquer número n de observações:

$$p(\mathbf{m}|\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n) \propto p(\mathbf{d}_n|\mathbf{m})p(\mathbf{m}|\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{n-1}) = \\ p(\mathbf{d}_n|\mathbf{m})p(\mathbf{d}_{n-1}|\mathbf{m}) \dots p(\mathbf{d}_1|\mathbf{m})p(\mathbf{m}) \quad (1.5)$$

1.2 PROBLEMA INVERSO

A teoria de inversão é utilizada para resolver problemas em diversas áreas da ciência e da tecnologia, para fazer a inferência de valores de parâmetros importantes de um processo, a partir de dados experimentais. O problema inverso pode ser descrito como a teoria que procura obter informações de um sistema físico parametrizado a partir de dados observáveis, das relações teóricas entre os parâmetros observáveis e não observáveis do sistema, e também das informações *a priori* sobre os parâmetros não observáveis.

Usualmente, os parâmetros do modelo e os dados experimentais são representados, respectivamente, pelo vetores \mathbf{m} e \mathbf{d} , e são relacionados entre si através de um operador direto g (também conhecido como *forward model*):

$$\mathbf{d} = g(\mathbf{m}) + \mathbf{e}_d, \quad (1.6)$$

o vetor \mathbf{e}_d representa os erros, ruídos e incertezas envolvidas na mode-

lagem.

O operador de modelagem direta, ou operador direto g (*forward model*) é, em geral, um operador não linear baseado em teorias ou leis físicas que possibilitam calcular as medidas experimentais, dado uma configuração de um sistema físico parametrizado. Enquanto a teoria que possibilita que o operador simule os dados observáveis a partir do modelo, o problema inverso procura justamente o caminho inverso, ou seja, obter os parâmetros do modelo a partir dos dados experimentais. Mais especificamente, a inversão sísmica procura obter as propriedades das rochas que compõe a subsuperfície, através das aquisições sísmicas artificiais e das relações teóricas de propagação de ondas acústicas. (BACON; SIMM; REDSHAW, 2003; SEN, 2006).

A metodologia frequentemente utilizada para os problemas inversos, consiste em um algoritmo de otimização para adaptar um modelo de subsuperfície, com intuito de minimizar a função erro ou função objetivo. Esta função envolve basicamente a diferença entre a sísmica experimental e a sísmica sintética gerada pelo modelo. Outros termos podem ser adicionados na função erro para que a inversão respeite não apenas o dado experimental, mas também alguns conhecimentos a priori sobre a subsuperfície. Entre os vários algoritmos aplicados com esta finalidade pode-se citar Ant Colony Optimization Algorithm (CONTI et al., 2013), Simulated Annealing (KIRKPATRICK; GELATT; VECCHI, 1983), os Algoritmo Genéticos (HOLLAND, 1992), Enxame de Partículas (KENNEDY; EBERHART, 1995) e Estratégias Evolucionárias (BEYER; SCHWEFEL, 2002).

Frequentemente, existem ruídos e erros associados no processo que não permitem a obtenção exata dos valores dos parâmetros do modelo. Outra característica típica dos problemas de inversão sísmica é a não unicidade da solução, ou seja, existem diversos modelos que satisfazem a mesma sísmica experimental. Estes fatores motivaram, e continuam a motivar, o desenvolvimento de métodos estocásticos de inversão. Tais métodos produzem diversas amostragens, ou realizações estocásticas, das propriedades da subsuperfície com resolução maior do que a sísmica, fornecendo um conjunto de soluções com diversos cenários do reservatório, auxiliando na elaboração das estratégias de exploração.

Neste contexto, o conjunto de possíveis soluções da subsuperfície que atende uma mesma medida experimental, lembra o conjunto das configurações microscópicas de um sistema termodinâmico, que gera uma medida macroscópica. Em ambos os casos, este conjunto está relacionado com uma distribuição de probabilidade. Na Mecânica

Estatística estas configurações atendem a distribuição de Boltzmann, enquanto na inversão Bayesiana as soluções atendem a distribuição *a posteriori* de Bayes, que envolve relações probabilísticas entre os dados observáveis, os parâmetros do modelo, e as informações *a priori* (NEWMAN; BARKEMA, 1999; BOSCH; MUKERJI; GONZALEZ, 2010).

1.3 OBJETIVOS

As múltiplas soluções dos métodos estocásticos fornecem a incerteza do resultado da inversão. A quantificação das incertezas inerentes aos processos de inversão é importante em problemas geofísicos, pois fornecem as informações de risco para a elaboração das estratégias de exploração dos reservatórios, que por sua vez, envolvem custos elevados para sua realização. Devido a estas razões, a inferência Bayesiana está sendo apresentada como a melhor escolha para resolver problemas inversos em geofísica (BOSCH; MUKERJI; GONZALEZ, 2010; RIMSTAD; AVSETH; OMRE, 2012; DVORKIN; GUTIERREZ; GRANA, 2014; TARANTOLA, 2005; RAY et al., 2013), onde a distribuição de probabilidade *a posteriori* dos parâmetros do modelo é a solução mais geral e permite uma quantificação robusta das incertezas envolvidas no processo.

Dentro deste contexto, o objetivo deste trabalho foi o desenvolvimento de um método de inferência Bayesiana de inversão conjunta de dados sísmicos para propriedades elásticas, petrofísicas e litofácies. A proposta visa a quantificação das incertezas e a geração de cenários com sentido geológico ao estimar a distribuição *a posteriori* do problema inverso. Aplicamos a proposta em dados reais e comparamos os resultados com a abordagem de inversão sequencial, com objetivo secundário de mostrar a importância da abordagem de inversão conjunta, o qual leva a uma melhor estimativa das propriedades da subsuperfície.

2 MÉTODOS ESTATÍSTICOS

Neste capítulo, discutiremos todos os métodos estatísticos nos quais este trabalho se baseia. A proposta principal de inversão sísmica consiste num algoritmo de Gibbs, que é um método de Monte Carlo via Cadeias de Markov. Desta forma, a base do algoritmo de amostragem é discutida, assim como sua relação com o algoritmo de Metropolis. Em seguida, apresentamos os teoremas da Análise Estatística Multivariada utilizados para obter as distribuições condicionais que possibilitam a amostragem. Por último, dois métodos geoestatísticos são revistos, o *FFT-Moving Average* e a Simulação Gaussiana Truncada. Para a *FFT-Moving Average*, apresentamos uma formulação revisitada onde derivamos o operador de filtro utilizando um único ruído aleatório.

2.1 MÉTODOS DE MONTE CARLO

O método de Monte Carlo é um método estatístico utilizado em simulações estocásticas com diversas aplicações em áreas como a Física, a Matemática e a Biologia. Sua principal característica é a utilização de números aleatórios na tomada de decisão. Seu nome surgiu em referência ao cassino de Monte Carlo, que utilizava um gerador de números aleatórios em jogos de azar (BROOKS et al., 2011). Um dos pioneiros a utilizar o método foram Metropolis e colaboradores (METROPOLIS et al., 1953), ao desenvolverem uma simulação de um líquido em equilíbrio com sua fase gasosa, e propondo que, para obter o equilíbrio térmico do sistema, não seria necessário simular toda a dinâmica do fenômeno, mas apenas uma cadeia de Markov que obedece a função distribuição de probabilidade do equilíbrio.

Em Física Estatística o Algoritmo de Metropolis é utilizado para estudar uma grande variedade de sistemas (NEWMAN; BARKEMA, 1999; LANDAU; BINDER, 2005). Um exemplo é sua aplicação no estudo dos fenômenos de transições de fase, como no caso de um fluido que alcança uma temperatura limite e se solidifica. Para a formação de um estado cristalino (sólido) sem defeitos, um resfriamento lento precisa ser feito no material. Caso contrário, se obtém um material metaestável, que corresponde a uma estrutura cristalina com defeitos e com uma energia não tão pequena, fora do estado de mínima energia. Encontrar o estado de mínima energia, em Mecânica Estatística, é um problema de otimização com aspectos comuns aos de otimização combinatória.

Os procedimentos iterativos de busca global na resolução de problemas de otimização são similares aos processos da Mecânica Estatística. Pequenas modificações aplicadas a uma solução, a fim de obter uma solução melhor, lembram os rearranjos de configurações microscópicas das partículas de um material, e a avaliação da função erro do problema de otimização pode ser escrita como uma avaliação da diferença de energia ($\Delta Energia \rightarrow \Delta Erro$) entre dois estados microscópicos. Esta ideia foi explorada por Kirkpatrick (KIRKPATRICK; GELATT; VECCHI, 1983) para o problema do caixeiro-viajante, no qual um determinado parâmetro faz o papel da temperatura. Mas, diferentemente do algoritmo de Metropolis, a temperatura (parâmetro) não é fixa, diminuindo de valor em cada iteração. Tal método é conhecido como *Simulated Annealing* (IZQUIERDO, 2000), que quando aplicado na inversão sísmica, sua função erro consiste basicamente, na soma do quadrado da diferença entre a sísmica experimental e a sísmica gerada pelo modelo.

Existem vários exemplos do uso do *Simulated Annealing* e outros métodos de otimização para a inversão sísmica (SEN, 2006; PEDERSEN; VESTERGAARD; ZIMMERMAN, 2005; CONTI et al., 2013; OLIVEIRA et al., 2009). No entanto, a solução única que melhor corresponde a uma função objetivo, que é obtida por técnicas de otimização, não considera qualquer incerteza nos dados observados e não fornece qualquer informação sobre as incertezas de estimativa. Devido a isso, o uso dos métodos de Monte Carlo para a inversão sísmica através da abordagem de inferência Bayesiana tornou-se popular durante as últimas décadas (BULAND; OMRE, 2003a; BOSCH et al., 2009a; GUNNING; GLINSKY, 2004; GRANA; ROSSA, 2010; BOSCH; MUKERJI; GONZALEZ, 2010; DE FIGUEIREDO et al., 2014). Os métodos de Monte Carlo são utilizados na inversão sísmica devido à complexidade da distribuição *a posteriori*, que não pode ser obtida de forma analítica ou amostrada por métodos tradicionais de geração de números aleatórios.

Na abordagem Bayesiana, como discutido no capítulo anterior, deseja-se estimar a distribuição de probabilidade *a posteriori* $p(\mathbf{m}|\mathbf{d})$ dos parâmetros do modelo \mathbf{m} condicionada ao dados observados \mathbf{d} e as informações *a priori*. Nos casos em que a distribuição *a posteriori* não pode ser analiticamente derivada, a distribuição é obtida computacionalmente por uma cadeia de Markov, que em seu regime estacionário, gera novas configurações de parâmetros que seguem a distribuição *a posteriori*. Basicamente, uma cadeia de Markov consiste em uma sequência de variáveis aleatórias com dependência serial apenas entre os componentes adjacentes da cadeia.

Por exemplo, o algoritmo Metropolis é capaz de realizar um caminho aleatório, como um movimento browniano, no qual novas configurações de parâmetro $\tilde{\mathbf{m}}$ (obtida por uma perturbação aleatória da configuração anterior) são aceitas, ou não, de acordo com a probabilidade r . Este fator de aceitação depende somente da última configuração de parâmetro \mathbf{m}^{last} pela razão das probabilidades *a posteriori* de cada configuração:

$$r = \min \left\{ 1, \frac{p(\tilde{\mathbf{m}}|\mathbf{d})}{p(\mathbf{m}^{last}|\mathbf{d})} \right\}, \quad (2.1)$$

que pela definição da distribuição de probabilidade *a posteriori* da Equação 1.3, pode por escrito como:

$$r = \min \left\{ 1, \frac{p(\mathbf{d}|\tilde{\mathbf{m}})p(\tilde{\mathbf{m}})}{p(\mathbf{d}|\mathbf{m}^{last})p(\mathbf{m}^{last})} \right\}. \quad (2.2)$$

Na prática, esse fator de aceitação faz com que o algoritmo de Metropolis sempre aceite novas configurações com uma maior probabilidade *a posteriori* (mais adequadas com os dados observados e conhecimento *a priori*), embora ocasionalmente também aceite configurações ruins com menor probabilidade *a posteriori*.

O algoritmo começa com uma dada configuração inicial e após algumas iterações, período denominado de *burn-in*, a cadeia converge para a distribuição *a posteriori* desejada na condição conhecida como regime estacionário. Não há uma regra geral para quanto tempo o algoritmo leva para alcançar este regime, depende fortemente do problema em particular e o quão distante a configuração inicial está dos valores de equilíbrio. Portanto, um número inicial de amostras deve ser descartado para o cálculo correto da distribuição *a posteriori* através da amostragem.

Nos casos particulares em que a densidade de probabilidade *a priori* $p(\mathbf{m})$ é simples e pode ser amostrada por métodos tradicionais, o fator de aceitação é calculado usando apenas a razão das *likelihoods* de cada configuração, pois a amostragem *a priori* já gera configurações com probabilidade $p(\mathbf{m})$. Podemos encontrar diversas aplicações como esta em problemas inversos na geofísica, em que a distribuição *a priori* é uma distribuição multivariada com um determinado modelo de correlação espacial e pode ser amostrada pelos métodos geoestatísticos como *Sequential Gaussian Simulation*, *Direct Sequential Simulation*, and *FFT-Moving Average* (TARANTOLA, 2005; BOSCH et al., 2009a).

Nas próximas subseções discutimos os métodos de Monte Carlo com mais detalhes técnicos. O algoritmo Metropolis-Hastings é uma

generalização do Metropolis, que pode ser aplicado com passos aleatórios assimétricos. Enquanto o algoritmo de Gibbs é um caso especial do Metropolis-Hastings, no qual todas as novas configurações são aceitas resultando em um algoritmo muito eficiente.

2.1.1 Algoritmo de Metropolis-Hastings

Como o algoritmo de Metropolis tradicional, a ideia principal deste método é simular um caminho aleatório como um movimento Browniano, no qual novas configurações são obtidas respeitando alguma regra probabilística de aceitação, com o intuito de convergir para uma distribuição desejada. Mais especificamente, a amostragem é feita através da construção de uma cadeia de Markov que, quando entra em seu regime estacionário, ou seja, quando sua média converge para um valor bem definido, cada novo estado da cadeia corresponde a uma amostra da distribuição desejada $p(\mathbf{m}|\mathbf{d})$.

O algoritmo consiste em definir uma configuração ou estado inicial para o parâmetro de interesse \mathbf{m} e, a partir dele, um novo estado $\tilde{\mathbf{m}}$ é gerado utilizando a distribuição auxiliar $J(\mathbf{m}|\mathbf{m}^{i-1})$ (GELMAN et al., 2004; BROOKS et al., 2011; ROBERT, 2001). A nova configuração é aceita, ou não, dependendo do valor do fator de aceitação r dado por

$$r = \min \left\{ 1, \frac{p(\tilde{\mathbf{m}}|\mathbf{d})/J(\tilde{\mathbf{m}}|\mathbf{m}^{i-1})}{p(\mathbf{m}^{i-1}|\mathbf{d})/J(\mathbf{m}^{i-1}|\tilde{\mathbf{m}})} \right\}. \quad (2.3)$$

Observe que a Equação 2.2 do algoritmo Metropolis tradicional é um caso particular de equação acima quando $J(\tilde{\mathbf{m}}|\mathbf{m}^{i-1}) = J(\mathbf{m}^{i-1}|\tilde{\mathbf{m}})$, o que significa que a probabilidade de gerar a configuração $\tilde{\mathbf{m}}$ de \mathbf{m}^{i-1} é o mesmo de gerar \mathbf{m}^{i-1} de $\tilde{\mathbf{m}}$. Portanto, em aplicações onde os parâmetros da distribuição auxiliar J mudam em relação a cada iteração, ou a maneira com que as novas configurações são geradas, ou mesmo se J é uma função assimétrica, a Equação 2.3 deve ser utilizada para garantir a convergência correta da cadeia.

Se $r \geq 1$ a nova configuração é aceita. Por outro lado, se $r < 1$, a nova configuração é aceita com probabilidade r . O procedimento acima é repetido um certo número de vezes, dependendo do número de amostras que se queira gerar. Abaixo, apresenta-se um algoritmo relativo ao método descrito.

Define estados iniciais de \mathbf{m}^0 tal que $p_s(\mathbf{m}^0) > 0$
for $i=1, \dots, k + n$ **do**

Amostre $\tilde{\mathbf{m}}$ de $p(\mathbf{m}|\mathbf{m}^{i-1})$

Calcula:

$$r = \min \left\{ 1, \frac{p(\tilde{\mathbf{m}}|\mathbf{d})/J(\tilde{\mathbf{m}}|\mathbf{m}^{i-1})}{p(\mathbf{m}^{i-1}|\mathbf{d})/J(\mathbf{m}^{i-1}|\tilde{\mathbf{m}})} \right\}.$$

Define $\mathbf{m}^i = \begin{cases} \tilde{\mathbf{m}} & \text{com probabilidade } r \\ \mathbf{m}^{i-1} & \text{com probabilidade } 1 - r \end{cases}$

end for

A variável k é o número de iterações necessárias para a convergência da cadeia para seu regime estacionário. Em geral, a cadeia é analisada durante a execução do algoritmo para identificação da convergência. n é o número de amostras que o algoritmo irá realizar dentro da distribuição $p(\mathbf{m}|\mathbf{d})$.

2.1.2 Algoritmo de Gibbs

Um caso especial do algoritmo de Metropolis foi introduzido por Geman e Geman (GEMAN; GEMAN, 1984), dando origem ao chamado algoritmo de Gibbs, ou amostragem de Gibbs, que é uma maneira eficiente de obter amostras da distribuição a posteriori para inferência Bayesiana. Neste algoritmo, a distribuição auxiliar é definida pelas distribuições condicionais de cada elemento do parâmetro do modelo, dados todos os outros elementos em uma dada iteração i :

$$J_j^{Gibbs}(\tilde{\mathbf{m}}|\mathbf{m}^{i-1}) = p(\tilde{\mathbf{m}}_j|\mathbf{m}_{-j}^{i-1}, \mathbf{d}), \quad (2.4)$$

$$J_j^{Gibbs}(\mathbf{m}^{i-1}|\tilde{\mathbf{m}}) = p(\mathbf{m}_j^{i-1}|\tilde{\mathbf{m}}_{-j}, \mathbf{d}), \quad (2.5)$$

onde m_j é o j -ésimo elemento e m_{-j} são todos os demais:

$$\mathbf{m}_{-j}^{i-1} = \{m_1^i, \dots, m_{j-1}^i, m_{j+1}^{i-1}, \dots, m_n^{i-1}\}. \quad (2.6)$$

Se substituirmos a distribuição auxiliar de Gibbs J_j^{Gibbs} na Equação 2.3, temos

$$r = \frac{p(\tilde{\mathbf{m}}|\mathbf{d})/p(\tilde{\mathbf{m}}_j|\mathbf{m}_{-j}^{i-1}, \mathbf{d})}{p(\mathbf{m}^{i-1}|\mathbf{d})/p(\mathbf{m}_j^{i-1}|\tilde{\mathbf{m}}_{-j}, \mathbf{d})}. \quad (2.7)$$

Notando que $\mathbf{m} = (\mathbf{m}_j, \mathbf{m}_{-j})$ e $\tilde{\mathbf{m}}_{-j} = \mathbf{m}_{-j}^{i-1}$,

$$r = \frac{p(\tilde{\mathbf{m}}_j, \tilde{\mathbf{m}}_{-j} | \mathbf{d}) / p(\tilde{\mathbf{m}}_j | \mathbf{m}_{-j}^{i-1}, \mathbf{d})}{p(\mathbf{m}_j^{i-1}, \mathbf{m}_{-j}^{i-1} | \mathbf{d}) / p(\mathbf{m}_j^{i-1} | \mathbf{m}_{-j}^{i-1}, \mathbf{d})}, \quad (2.8)$$

usando a regra da probabilidade condicional da Equação 1.3, concluímos que

$$r = \frac{p(\mathbf{m}_{-j}^{i-1})}{p(\mathbf{m}_{-j}^{i-1})} = 1. \quad (2.9)$$

O método consiste em executar, em cada iteração i , uma amostragem de todos os componentes de \mathbf{m} condicionadas ao estado atual dos demais componentes. Isto garante que a probabilidade de aceitação r do algoritmo de Metropolis da subseção anterior seja sempre maior que 1 (GEMAN; GEMAN, 1984; GELMAN et al., 2004). Portanto, a amostragem pelo algoritmo de Gibbs é mais rápida, pois dispensa a geração de estados não existentes da cadeia de Markov. Neste contexto, o algoritmo de Gibbs pode ser escrito como:

```

Define estados iniciais de  $\mathbf{m}^0$  tal que  $p(\mathbf{m}^0 | \mathbf{d}) > 0$ 
for  $i=1, \dots, k + n$  do
  Amostre  $\mathbf{m}_j^i$  de  $p(\tilde{\mathbf{m}} | \mathbf{m}_{-j}^{i-1}, \mathbf{d})$ , para  $j = 1, \dots, n$ 
end for

```

Como discutido anteriormente, o algoritmo de Gibbs também precisa de um certo número de iterações k para que a cadeia entre em seu regime estacionário e assim, realizar n amostras dentro da distribuição desejada.

2.2 ANÁLISE ESTATÍSTICA MULTIVARIADA

Nesta seção apresenta-se uma análise analítica e detalhada dos métodos estatísticos que foram utilizados. O entendimento básico das técnicas de inversão em si não necessita destas análises, mas somente de seus resultados. No entanto, este conteúdo é extremamente importante para fundamentar a aplicação dos teoremas nas técnicas propostas.

2.3 DISTRIBUIÇÃO NORMAL MULTIVARIADA

Como Anderson (ANDERSON, 1984) apresenta, o estudo das distribuições normais multivariadas (DNM) é a base da análise estatística multivariada, pois em geral se aproxima muito bem das distribuições encontradas em medidas amplamente amostradas.

Da mesma maneira com que o teorema do limite central conduz a uma distribuição normal univariada para variáveis individuais, para um conjunto de variáveis, o teorema conduz para uma distribuição normal multivariada, dada por:

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right) \equiv N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}). \quad (2.10)$$

Diferente da distribuição univariada, a DNM em vez de envolver uma simples variância possui uma matriz de covariância $\boldsymbol{\Sigma}$. Análogo à uma variável aleatória, \mathbf{x} é um campo aleatório definido como um vetor de n componentes, que são variáveis aleatórias correlacionadas entre si. As correlações são dadas pelas componentes fora da diagonal principal da matriz de covariância. As variâncias das variáveis aleatórias são dadas pelas componentes da diagonal principal da matriz de covariância. O vetor $\boldsymbol{\mu}$ é o vetor média e possui as médias de cada componente de \mathbf{x} . Uma forma compacta de representar uma DNM é utilizar a terceira forma da Equação 2.10 ($N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$).

Outra vantagem de se trabalhar com uma DNM é que ela é passível de tratamento matemático exato, sendo sua análise baseada principalmente em operações matriciais convencionais, facilitando a obtenção exata das distribuições envolvidas em um processo, ou de pelo menos algumas características e propriedades importantes.

2.4 PRODUTO DE N DISTRIBUIÇÕES MULTIVARIADAS

A DNM da equação 2.10 pode ser escrita na notação canônica como:

$$p(\mathbf{x}) = \exp\left(\boldsymbol{\zeta} + \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{x} - \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{x}\right), \quad (2.11)$$

onde

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} \quad , \quad \boldsymbol{\zeta} = -\frac{1}{2} (d \ln(2\pi) + \ln|\boldsymbol{\Sigma}| + \boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\eta}) .$$

Desta maneira, o produto de n DNMs é:

$$\prod_{i=1}^n p_i(\mathbf{x}) = \exp \left[\sum_{i=1}^n \zeta_i + \left(\sum_{i=1}^n \boldsymbol{\eta}_i \right)^T \mathbf{x} - \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \left(\sum_{i=1}^n \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} \right) \mathbf{x} \right] . \quad (2.12)$$

Definindo as variáveis

$$\boldsymbol{\Sigma}_s^{-1} = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} \quad , \quad \boldsymbol{\eta}_s = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\eta}_i \quad (2.13)$$

e

$$\zeta_s = -\frac{1}{2} (n \ln(2\pi) + \ln|\boldsymbol{\Sigma}_s| + \boldsymbol{\eta}_s^T \boldsymbol{\Sigma}_s \boldsymbol{\eta}_s) .$$

A Equação 2.12 pode ser escrita como

$$\prod_{i=1}^n p_i(\mathbf{x}) = \exp \left(\sum_{i=1}^n \zeta_i - \zeta_s \right) \exp \left(\zeta_s + \boldsymbol{\eta}_s^T \mathbf{x} - \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \boldsymbol{\Sigma}_s^{-1} \mathbf{x} \right) , \quad (2.14)$$

ou ainda

$$\prod_{i=1}^n p_i(\mathbf{x}) = \exp \left(\sum_{i=1}^n \zeta_i - \zeta_s \right) N(\boldsymbol{\mu}_s, \boldsymbol{\Sigma}_s) . \quad (2.15)$$

Portanto, o produto de duas DNM resulta em uma outra DMN multiplicada por um fator de escala dado pelo termo exponencial na Equação 2.15. Este fator de escala depende da distância entre as médias das distribuições e de suas variâncias. Em geral, quanto mais distantes estiverem, menor o fator de escala.

2.5 CONSTRUÇÃO DAS MATRIZES DE COVARIÂNCIA

A covariância entre duas variáveis aleatórias quaisquer x_i e x_j pode ser definida por:

$$\Sigma_{i,j} = E\{(x_i - E\{x_i\})(x_j - E\{x_j\})\} , \quad (2.16)$$

na qual a média é calculada a partir de diversas amostras de x_i e x_j . Quando i é igual a j , tem-se a medida da variância σ_i^2 da variável aleatória x_i .

Desta mesma forma, também pode-se definir as componentes (i, j) da matriz de covariância, onde x_i e x_j são componentes do vetor aleatório \mathbf{x} . Esta definição da matriz de covariância pode ser generalizada pela equação:

$$\Sigma = E\{(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T\}, \quad (2.17)$$

na qual $\boldsymbol{\mu}$ é a média do vetor aleatório \mathbf{x} .

Pela definição da correlação de variáveis aleatórias, pode-se, ainda, definir as componentes i, j da matriz de correlação como:

$$\nu_{i,j} = \frac{E\{(x_i - E\{x_i\})(x_j - E\{x_j\})\}}{\sigma_i\sigma_j}. \quad (2.18)$$

Portanto, a partir da matriz de correlação $\boldsymbol{\nu}$ e das variâncias das variáveis, é possível calcular as componentes de uma matriz de covariância como:

$$\Sigma_{i,j} = \nu_{i,j}\sigma_i\sigma_j. \quad (2.19)$$

Esta técnica é muito útil para construir distribuições *a priori* para vetores aleatórios com correlações temporais ou espaciais em processos estocásticos, utilizando uma função de correlação teórica ou experimental. Na literatura é possível encontrar diversos exemplos de funções de correlação analíticas (TARANTOLA, 2005; BULAND; OMRE, 2003b).

A função de covariância ou a função de correlação podem ser calculadas também a partir dos dados experimentais, através das equações 2.20 e 2.21 respectivamente:

$$C(h) = E\{[x(t) - \mu(t)][x(t+h) - \mu(t+h)]\} \quad (2.20)$$

e

$$c(h) = \frac{C(h)}{C(0)}, \quad (2.21)$$

na qual h é a distância espacial ou temporal entre as amostras $x(t)$ e $x(t+h)$ e $C(0)$ é a variância da variável x . Em geral estas equações são aplicadas nos dados experimentais para, posteriormente e de alguma forma, adaptar uma função teórica com características semelhantes.

2.6 DISTRIBUIÇÃO DE COMBINAÇÕES LINEARES DE VARIÁVEIS NORMALMENTE DISTRIBUÍDAS

Nesta seção apresenta-se a dedução de um teorema que é descrita em mais detalhes em (ANDERSON, 1984), e será utilizado algumas vezes nas próximas seções. Assumindo que um vetor aleatório $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ atende uma distribuição $N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ e dada uma transformação linear não singular em \mathbf{x} do tipo:

$$\mathbf{y} = \mathbf{v} + \mathbf{T}\mathbf{x}, \quad (2.22)$$

na qual \mathbf{v} é um vetor constante, sua distribuição é obtida a partir da distribuição $N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ substituindo \mathbf{x} por $\mathbf{x} = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{v})$.

Partindo do argumento da exponencial de $N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ da equação 2.10, temos que:

$$(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \quad (2.23)$$

$$= (\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{v}) - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{T}\boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{v}) - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{T}\boldsymbol{\mu}) \quad (2.24)$$

$$= (\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{v} - \mathbf{T}\boldsymbol{\mu}))^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{v} - \mathbf{T}\boldsymbol{\mu}) \quad (2.25)$$

$$= (\mathbf{y} - \mathbf{v} - \mathbf{T}\boldsymbol{\mu})^T \mathbf{T}^{-1T} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{v} - \mathbf{T}\boldsymbol{\mu}) \quad (2.26)$$

$$= (\mathbf{y} - (\mathbf{T}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{v}))^T (\mathbf{T}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{T}^T)^{-1} (\mathbf{y} - (\mathbf{T}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{v})) \quad (2.27)$$

$$= (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_y)^T \boldsymbol{\Sigma}_y^{-1} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_y) \quad (2.28)$$

Portanto a distribuição de \mathbf{y} é $N(\mathbf{T}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{v}, \mathbf{T}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{T}^T)$, demonstrando o teorema abaixo.

Teorema 1. *Dado $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ que atende uma distribuição $N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Uma transformação $\mathbf{y} = \mathbf{v} + \mathbf{T}\mathbf{x}$, com \mathbf{v} constante, atende a distribuição $N(\mathbf{T}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{v}, \mathbf{T}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{T}^T)$, para \mathbf{T} não singular.*

2.7 DISTRIBUIÇÃO CONDICIONAL DE VARIÁVEIS NORMALMENTE DISTRIBUÍDAS

Se um vetor aleatório $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é particionado em dois sub-vetores $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ e $\mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^{n-n_1}$, que atendem as respectivas distribuições $N(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\Sigma}_{11})$ e $N(\boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\Sigma}_{22})$, então ele possui a seguinte distribuição conjunta:

$$\mathbf{x} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}), \quad (2.29)$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix} \sim N \left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{\mu}_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{pmatrix} \right). \quad (2.30)$$

Com a distribuição conjunta expressa desta forma, o cálculo da distribuição condicional fica inviável devido a dependência entre as variáveis. Então, aplicando-se uma transformação linear não-singular \mathbf{T} nos sub-vetores \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 para \mathbf{y}_1 e \mathbf{y}_2 :

$$\mathbf{y} = \mathbf{T} \mathbf{x}, \quad (2.31)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix}, \quad (2.32)$$

na qual \mathbf{I} é a matriz identidade e \mathbf{B} é uma matriz n_1 por $n - n_1$, a fim de torná-los descorrelacionados (ANDERSON, 1984), obtêm-se um requisito suficiente para garantir a independência dos vetores \mathbf{y}_1 e \mathbf{y}_2 , desde que tais vetores sejam normais multivariados.

Utilizando o teorema 1, a transformação $\mathbf{y} = \mathbf{T}\mathbf{x}$ atende a distribuição $N(\mathbf{T}\boldsymbol{\mu}, \mathbf{T}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{T}^T)$ e, portanto, sua média será dada por

$$E \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} E\{\mathbf{x}_1\} + \mathbf{B}E\{\mathbf{x}_2\} \\ E\{\mathbf{x}_2\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 + \mathbf{B}\boldsymbol{\mu}_2 \\ \boldsymbol{\mu}_2 \end{pmatrix}, \quad (2.33)$$

enquanto sua matriz de covariância será

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{I} \end{pmatrix} = \\ \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} + \boldsymbol{\Sigma}_{12}\mathbf{B}^T + \mathbf{B}\boldsymbol{\Sigma}_{21} + \mathbf{B}\boldsymbol{\Sigma}_{22}\mathbf{B}^T & \boldsymbol{\Sigma}_{12} + \mathbf{B}\boldsymbol{\Sigma}_{22} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} + \boldsymbol{\Sigma}_{22}\mathbf{B}^T & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{pmatrix}. \quad (2.34)$$

Então, impondo covariância nula entre os subvetores de \mathbf{y} a fim de garantir a independência de \mathbf{y}_1 e \mathbf{y}_2 , e considerando que $\boldsymbol{\Sigma}_{22}$ é não-singular, temos que

$$\boldsymbol{\Sigma}_{12} + \mathbf{B}\boldsymbol{\Sigma}_{22} = 0, \quad (2.35)$$

$$B = -\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}, \quad (2.36)$$

assim,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 + B\mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix} \sim N \left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 + B\boldsymbol{\mu}_2 \\ \boldsymbol{\mu}_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma_{1|2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Sigma_{22} \end{pmatrix} \right). \quad (2.37)$$

$$\Sigma_{1|2} = \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21} \quad (2.38)$$

Escrevendo a distribuição conjunta da equação 2.37 na forma exponencial em termos de \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 e rearranjando os termos obtém-se a seguinte expressão para a distribuição conjunta (ANDERSON, 1984):

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n_1}{2}} |\Sigma_{1|2}|^{\frac{1}{2}}} \exp \left(-\frac{1}{2} \left[\mathbf{x}_1 - \left(\boldsymbol{\mu}_1 + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(\mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\mu}_2) \right) \right]^T \right. \\ &\quad \left. \Sigma_{1|2}^{-1} \left[\mathbf{x}_1 - \left(\boldsymbol{\mu}_1 + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(\mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\mu}_2) \right) \right] \right) \\ &\quad \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-n_1}{2}} |\Sigma_{22}|^{\frac{1}{2}}} \exp \left((\mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\mu}_2)^T \Sigma_{22}^{-1} (\mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\mu}_2) \right) \quad (2.39) \end{aligned}$$

Observando que a segunda exponencial da equação 2.39 é a distribuição marginal de \mathbf{x}_2 ($N(\boldsymbol{\mu}_2, \Sigma_{22})$) e pela definição de distribuição condicional $p(\mathbf{x}_1|\mathbf{x}_2) = p(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)/p(\mathbf{x}_2)$ é possível concluir que:

$$p(\mathbf{x}_1|\mathbf{x}_2) = N(\boldsymbol{\mu}_{1|2}, \Sigma_{1|2}), \quad (2.40)$$

$$\boldsymbol{\mu}_{1|2} = \boldsymbol{\mu}_1 + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(\mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\mu}_2), \quad (2.41)$$

e

$$\Sigma_{1|2} = \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}. \quad (2.42)$$

As equações acima permitem escrever o seguinte teorema (ANDERSON, 1984):

Teorema 2. *Sejam $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ que atende uma distribuição $N(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ di-*

vidido em dois sub-vetores \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 , sua média $\boldsymbol{\mu}$ dividida em $\boldsymbol{\mu}_1$ e $\boldsymbol{\mu}_2$ e sua matriz de covariância dividida em $\boldsymbol{\Sigma}_{11}$, $\boldsymbol{\Sigma}_{12}$ e $\boldsymbol{\Sigma}_{22}$ (matrizes de covariância de \mathbf{x}_1 , \mathbf{x}_1 com \mathbf{x}_2 e \mathbf{x}_2 respectivamente). A distribuição condicional de \mathbf{x}_1 dado \mathbf{x}_2 é a distribuição normal $N(\boldsymbol{\mu}_{1|2}, \boldsymbol{\Sigma}_{1|2})$ com média $\boldsymbol{\mu}_{1|2} = \boldsymbol{\mu}_1 + \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}(\mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\mu}_2)$ e matriz de covariância $\boldsymbol{\Sigma}_{1|2} = \boldsymbol{\Sigma}_{11} - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{21}$.

2.8 SIMULAÇÃO GEOESTATÍSTICA

Os métodos de simulação geoestatística são amplamente utilizados para gerar campos aleatórios que reproduzem as heterogeneidades da subsuperfície, a fim de simular a variabilidade espacial relacionada à estratigrafia geológica e deposição de uma área de estudo (DOYEN, 2007). A variabilidade espacial de interesse é determinada por um variograma (ou covariograma) teórico, que é definido geralmente com base em um variograma experimental, ou a partir de um conhecimento *a priori* sobre as heterogeneidades desejadas. Existem diversos modelos teóricos que são utilizados, os mais populares são os modelos Gaussiano, exponencial e esférico (DOYEN, 2007).

Por definição, o variograma experimental é definido por:

$$\lambda(\Delta t) = E\{[y(t) - y(t + \Delta t)]^2\}, \quad (2.43)$$

onde y é um campo aleatório, $E\{\cdot\}$ é o operador média e t é o domínio onde y está definido. O variograma está relacionado ao covariograma ou função de covariância por:

$$\lambda(\Delta t) = c(0) - c(\Delta t), \quad (2.44)$$

onde $c(\Delta t)$ é a função de covariância:

$$c(\Delta t) = E\{y(t)y(t + \Delta t)\}. \quad (2.45)$$

Estas funções descrevem como os componentes do campo aleatório estão espacialmente correlacionados em relação a uma distância Δt .

Podemos distinguir dois tipos de campos aleatórios: variáveis contínuas, que tomam um intervalo contínuo de valores possíveis, e variáveis discretas, também chamadas de variáveis categóricas, que possuem apenas um conjunto finito de valores. Há várias técnicas que podem ser usadas para simular os modelos estocásticos, a mais popular é a Simulação Sequencial Gaussiana, que realiza um caminho aleatório no

grid do modelo, amostrando as propriedades dentro distribuição da Krigagem condicionada às amostras anteriores (DOYEN, 2007; MATHERON, 1971). Além disso, várias outras técnicas são baseadas neste conceito sequencial como a Simulação Sequencial de Mistura Gaussiana, Simulação Sequencial direta e Simulação Sequencial da Indicatriz (GRANA; MUKERJI et al., 2012; DEUTSCH; JOURNEL, 1992; JOURNEL; GOMEZ-HERNANDEZ, 1990; SOARES, 2001; DARIO et al., 2012).

Além dos métodos sequenciais, outros métodos estão disponíveis, incluindo os *turning band methods*, decomposição de Cholesky ou LU da matriz de covariância e o *FFT-Moving Average*. Este último é uma técnica muito eficiente para simulação geoestatística, especialmente em aplicações com grandes dimensões em que os métodos sequenciais são relativamente lentos.

2.8.1 FFT-Moving Average

O método *FFT-Moving Average* (*FFT-MA*) consiste em gerar uma simulação de campo aleatório pelo processo de filtragem de um ruído branco. A filtragem é definida matematicamente pela convolução entre um sinal qualquer e um operador de filtro. O filtro usualmente é um sinal digital com banda limitada, que quando convolucionado com um outro sinal, remove conteúdos de frequência que não são desejados. Baseado neste processo, o método *FFT-Moving Average* gera um campo aleatório pela convolução de um ruído branco com um operador de filtro específico, o qual impõe as correlações espaciais desejadas (OLIVER, 1995; RAVALEC; NOETINGER; HU, 2000).

Embora seja uma metodologia muito rápida, especialmente quando a convolução é calculada no domínio da frequência, para simular campos aleatórios condicionados a dados amostrados, é necessária uma técnica adicional chamada *Probability Field Simulation*. Mas este pós-processo pode fazer surgir dois artefatos indesejáveis como a presença de extremos locais e alterações no covariograma (PYRCZ; DEUTSCH, 2001). Mesmo com essas limitações, a metodologia é amplamente utilizada devido à sua simplicidade e eficiência para gerar simulações com grandes dimensões (DOYEN, 2007).

A metodologia foi inicialmente introduzida por Oliver (OLIVER, 1995). A derivação do filtro é feita através da definição do campo aleatório correlacionado $y(\mathbf{x})$ como a convolução do filtro $f(\mathbf{x})$ com o

ruído branco $z(\mathbf{x})$:

$$y(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) * z(\mathbf{x}) = \int_U f(\mathbf{x} - \mathbf{x}')z(\mathbf{x}')d\mathbf{x}'. \quad (2.46)$$

Por definição, a função de covariância de $y(\mathbf{x})$ é

$$c(\Delta\mathbf{x}) = E \{y(\mathbf{x})y(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x})\} = \quad (2.47)$$

$$E \left\{ \int_U f(\mathbf{x} - \mathbf{x}')z(\mathbf{x}')d\mathbf{x}' \int_U f(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x} - \mathbf{x}'')z(\mathbf{x}'')d\mathbf{x}'' \right\}.$$

Assumindo que o operador média pode ser aplicado sobre diversas amostras de $y(\mathbf{x})$, a função de covariância torna-se

$$c(\Delta\mathbf{x}) = \int_U \int_U f(\mathbf{x} - \mathbf{x}')f(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x} - \mathbf{x}'')E \{z(\mathbf{x}')z(\mathbf{x}'')\} d\mathbf{x}'d\mathbf{x}''. \quad (2.48)$$

Considerando que o ruído $z(\mathbf{x})$ é branco, temos que

$$E \{z(\mathbf{x}')z(\mathbf{x}'')\} = \sigma_z^2 \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}''), \quad (2.49)$$

onde σ_z^2 é a variância do ruído. Então,

$$c(\Delta\mathbf{x}) = \sigma_z^2 \int_U f(\mathbf{x} - \mathbf{x}')f(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x} - \mathbf{x}')d\mathbf{x}'. \quad (2.50)$$

Como a convolução comuta sobre translações e assumindo que o filtro é real e par, obtemos finalmente a relação entre o filtro e a função de covariância:

$$c(\Delta\mathbf{x}) = \sigma_z^2 f(\mathbf{x}) * f(\mathbf{x}). \quad (2.51)$$

Como a convolução no domínio da frequência é um simples produto pontual das duas funções, a Equação 2.51 no domínio da frequência é

$$C(\mathbf{w}) = \sigma_z^2 F(\mathbf{w})^2. \quad (2.52)$$

O operador filtro também foi derivado diretamente no domínio da frequência por Ravalec et al. (RAVALEC; NOETINGER; HU, 2000). Com base no teorema de Wiener-Khinchin, a função de autocovariância $C(w)$ da amostra $Y(w)$ no domínio da frequência é:

$$C(w) = Y(w)Y^*(w). \quad (2.53)$$

A transformada de Fourier da Equação 2.46 é $Y(w) = F(w)Z(w)$,

onde $F(w)$ e $Z(w)$ são as transformadas de Fourier do filtro e do ruído respectivamente. Calculando a média das funções de covariância de várias amostras, temos

$$C(w) = F(w)F^*(w)E\{Z(w)Z^*(w)\}. \quad (2.54)$$

Considerando que $z(t)$ é um ruído branco e que o filtro é real e par ($F(w)F^*(w) = F(w)^2$), obtemos a mesma expressão de Equação 2.52:

$$C(w) = \sigma_z^2 F(w)^2. \quad (2.55)$$

2.8.1.1 Formulação revisitada

Durante as investigações deste trabalho, foi possível derivar o operador do método *FFT-Moving Average* utilizando apenas um único ruído aleatório. Enquanto as derivações apresentadas anteriormente, derivam o filtro pela média de diversas amostragens, nossa derivação do operador de filtro é feita usando a representação discreta de um ruído aleatório:

$$z(t) = \sum_{t_0} \delta(t - t_0)\xi(t_0), \quad (2.56)$$

onde $\delta(t)$ é a função delta de Dirac e $\xi(t)$ é uma função aleatória. Como discutido, o campo aleatório correlacionado $y(t)$ é a convolução do ruído $z(t)$ com o filtro $f(t)$:

$$y(t) = f(t) * z(t) = \sum_{t_0} \xi(t_0)f(t - t_0). \quad (2.57)$$

Com base no teorema de Wiener-Khinchin na forma discreta, a função de autocovariância $C(w)$ de $y(t)$ no domínio da frequência é:

$$C(w) = \frac{1}{N}Y(w)Y^*(w), \quad (2.58)$$

onde $Y(w)$ é a transformada de Fourier de $y(t)$:

$$Y(w) = \sum_{t_0} \xi(t_0)F(w)e^{-iwt_0} \quad (2.59)$$

e $F(w)$ é a transformada de Fourier de $f(t)$. Substituindo $Y(w)$ na

Equação 2.58, temos que

$$C(w) = \frac{1}{N} \sum_{t_0} \sum_{t'_0} \xi(t_0)\xi(t'_0)F(w)F^*(w)e^{iw(t'_0-t_0)}. \quad (2.60)$$

Considerando que o filtro é par ($F(w)F^*(w) = F(w)^2$), então

$$C(w) = \frac{F(w)^2}{N} \sum_{t_0} \sum_{t'_0} \xi(t_0)\xi(t'_0)e^{iw(t'_0-t_0)}, \quad (2.61)$$

e separando os somatórios em dois termos, temos

$$C(w) = \frac{F(w)^2}{N} \left[\sum_{t_0} \xi(t_0)^2 + 2 \sum_{t_0=0}^N \sum_{t'_0=t_0+1}^N \xi(t_0)\xi(t'_0)e^{iw(t'_0-t_0)} \right], \quad (2.62)$$

no qual o primeiro termo é relacionado com o produto dos componentes com mesmo índice, e o segundo termo aos componentes diferentes.

Definindo $\Delta t = t'_0 - t_0$ na Equação 2.62, temos

$$C(w) = \frac{F(w)^2}{N} \left[\sum_{t_0} \xi(t_0)^2 + 2 \sum_{t_0=0}^N \sum_{\Delta t=1}^{N-t_0} \xi(t_0)\xi(\Delta t + t_0)e^{iw(\Delta t)} \right], \quad (2.63)$$

ou ainda

$$C(w) = F(w)^2 \left[\frac{1}{N} \sum_{t_0} \xi(t_0)^2 + 2 \sum_{\Delta t=1}^{N-t_0} e^{iw(\Delta t)} \left(\frac{1}{N} \sum_{t_0=0}^N \xi(t_0)\xi(\Delta t + t_0) \right) \right]. \quad (2.64)$$

Está claro na Equação 2.64 que o termo destacado entre parênteses é a definição da função de autocovariância do ruído aleatório $\xi(t)$. No caso particular em que $\xi(t)$ é um ruído branco, o termo entre parênteses é zero para qualquer $\Delta t > 0$. Além disso, o primeiro somatório da Equação 2.64 é a definição da variância do ruído $\xi(t)$, portanto a Equação 2.64 torna-se:

$$C(w) = \sigma_z^2 F(w)^2. \quad (2.65)$$

Apesar de alcançarmos o mesmo resultado das derivações anteriores, a Equação 2.64 também pode ser aplicada para qualquer tipo de ruído. Por exemplo, é improvável que um ruído perfeitamente branco seja gerado usando as técnicas tradicionais de amostragem aleatória

(para campos aleatórios com tamanho limitado, número de componentes inferiores a 10^4). Se a equação 2.64 for calculada para um ruído específico, não necessariamente branco, a convolução com o filtro exato leva a um campo aleatório correlacionado com um covariograma experimental exatamente igual ao teórico. O que não acontece em todos os outros métodos de simulação, quando aplicados para simular campos aleatórios com dimensões pequenas.

A Figura 1 mostra um exemplo usando um modelo de covariograma Gaussiano. A convolução de um ruído branco com o filtro tradicional do FFT-MA, usando a equação 2.52, é mostrada em preto enquanto a convolução com o filtro exato, usando a equação 2.64, é mostrada em azul. Os campos aleatórios assim obtidos são muito semelhantes, porém, quando calculamos as funções de covariograma experimentais (também mostradas na Figura 1), podemos ver que a simulação obtida pelo filtro exato possui um covariograma experimental exatamente igual ao teórico.

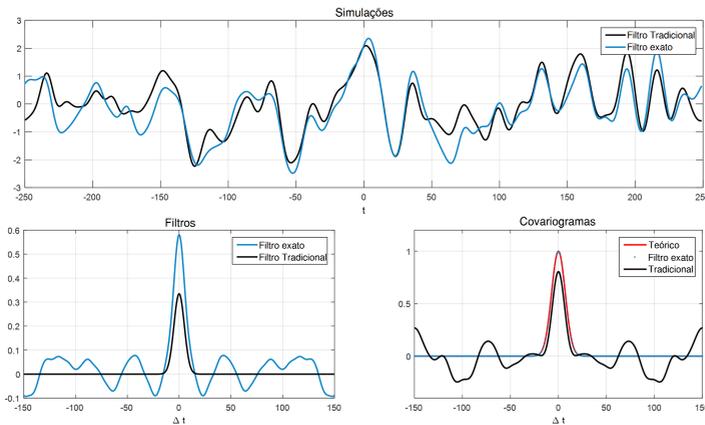


Figura 1 – Exemplo de aplicação da Equação 2.64 usando um modelo de covariograma Gaussiano. No topo: Simulação usando o filtro tradicional em preto e usando o filtro exato em azul. À esquerda: Filtro tradicional em preto e filtro exato em azul. À direita: O covariograma teórico em vermelho, covariograma experimental usando o filtro tradicional em preto e usando o filtro exato em azul.

2.8.2 Simulação Gaussiana Truncada

O Simulação Gaussiana Truncada é uma técnica popular para simular campos aleatórios discretos, ou ditos categóricos. É comumente utilizado para gerar realizações estocásticas de litofácies. Uma litofácies, ou simplesmente fácies, pode ser interpretada como um tipo específico de rocha. Uma fácies é definida como um corpo-geológico com características físicas e geológicas específicas, que estão relacionadas com as condições sedimentológicas e de deposição (READING, 1996).

O método consiste em gerar o campo aleatório discreto pelo truncamento de um campo aleatório Gaussiano contínuo normalizado. O truncamento é feito com base em um limiar (*threshold*), que determina as proporções de fácies, enquanto que a estrutura de covariância espacial do campo contínuo determina a continuidade espacial da realização de fácies (MATHERON et al., 1987; ARMSTRONG et al., 2003; DOYEN, 2007). Para um melhor controle das proporções de fácies, definimos os limiares a partir da distribuição cumulativa Gaussiana inversa. Por exemplo, à esquerda da Figura 2, temos um campo aleatório contínuo (realizado por FFT-*Moving Average*) usado para gerar a simulação de fácies à direita. Na parte inferior da figura, está a distribuição cumulativa inversa usada para calcular os limiares das truncagens, com objetivo de determinar as proporções de fácies na simulação como 15 % de fácies 1, 35 % de fácies 2 e 50 % de fácies 3.

Usando esta metodologia também é fácil incorporar proporções de fácies não-estacionárias com base em algum conhecimento sobre a região do estudo. Os limiares são então definidos de forma pontual por um mapa de probabilidades de cada fácies, que pode ser obtido por exemplo, a partir de dados geofísicos como os dados sísmicos e de poços.

Apesar das vantagens práticas do Simulação Gaussiana Truncada, ele apresenta algumas limitações. Por exemplo, o método impõe apenas uma única função de covariância espacial (dada pelo campo aleatório contínuo) para controlar a estrutura de correlação espacial de todas as fácies. Portanto, não é possível impor características de anisotropia diferentes para cada fácies individualmente. A segunda limitação está associada com as transições entre as fácies. No exemplo da Figura 2, a fácies 2 está sempre entre as fácies 1 e 3, sendo muito improvável encontrar uma transição direta das fácies 1 para 3. Por este motivo, não é possível incorporar conhecimento físico na simulação, como o fato de que uma fácies que representa óleo deveria sempre estar acima de uma fácies que representa água, devido à diferença de densidade en-

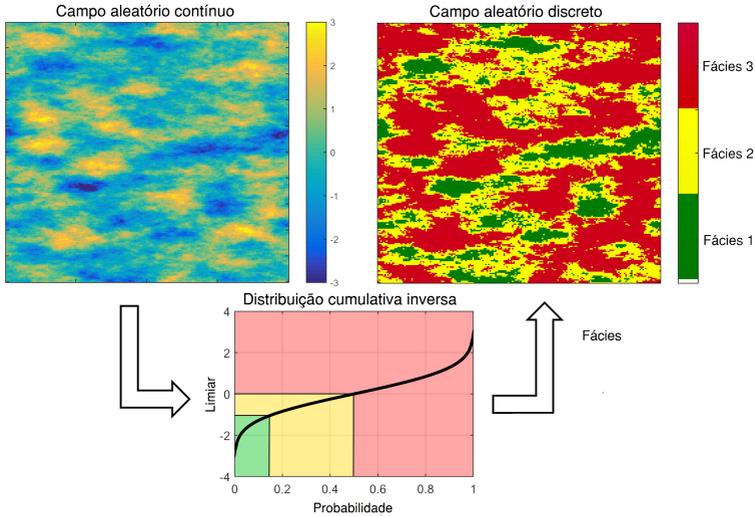


Figura 2 – Fluxo de trabalho do Simulação Gaussiana Truncada: Campo aleatório discreto (à direita) gerado pelo truncamento do campo contínuo (à esquerda). Os limiares são obtidos a partir da distribuição Gaussiana cumulativa inversa (abaixo) e uma dada proporção de fácies (15 % de fácies 1, 35 % de fácies 2 e 50 % de fácies 3 para este exemplo).

tre os fluidos. Algumas dessas limitações podem ser superadas usando mais de um campo aleatório contínuo, metodologia conhecida como *Pluri-Gaussian Simulation* (ARMSTRONG et al., 2003; DOYEN, 2007).

3 FÍSICA DE ROCHA

Quando uma fonte de vibração mecânica é acionada, uma perturbação pode se propagar no ambiente a sua volta, transferindo energia da fonte para as partículas do meio na forma de uma onda. A propagação ocorre por pequenos deslocamentos das partículas em torno de uma condição de equilíbrio. Existem dois tipos de ondas, a Primária ou onda-P e a Secundária ou onda-S, também conhecida como Cisalhante (*shear*). No primeiro caso, a vibração das partículas ocorre sempre na direção da propagação, enquanto na onda-S ela é perpendicular à propagação. Assumindo um meio homogêneo, isotrópico e elástico, a velocidade α da onda-P e a velocidade β da onda-S dependem das propriedades dos meios pelas relações (BACON; SIMM; REDSHAW, 2003; MAVKO; MUKERJI; DVORKIN, 2009):

$$\alpha = \sqrt{\frac{K_s + \frac{4}{3}G_s}{\rho}} \quad e \quad \beta = \sqrt{\frac{G_s}{\rho}}, \quad (3.1)$$

onde K_s é o módulo *bulk* do meio, G_s é o módulo *shear* e ρ é a densidade.

No caso particular das ondas sísmicas, estas variáveis estão relacionadas a características geológicas das rochas, por exemplo o conteúdo de mineral, de fluidos, porosidade, forma do grão e cimentação. O modelo de física de rocha é um conjunto de equações que relaciona todas essas propriedades de rocha (levando em conta os fluidos existentes em seus poros) a sua resposta elástica.

A densidade da rocha ρ depende da densidade do mineral ρ_m e da densidade do fluido ρ_f por:

$$\rho = \rho_m(1 - \phi) + \rho_f\phi, \quad (3.2)$$

onde ϕ é a porosidade da rocha. Assumindo a existência de água e hidrocarboneto nos poros da rocha, a densidade do fluido é definida por

$$\rho_f = \rho_{hc}(1 - s_w) + \rho_w s_w, \quad (3.3)$$

na qual ρ_w e ρ_{hc} são as densidades da água e do hidrocarboneto respectivamente e s_w é saturação de água.

Nas duas próximas seções, discutiremos os modelos de física de rocha que são aplicados nos resultados deste trabalho. Em seguida, apresentamos a modelagem sísmica, que é usada para calcular a res-

posta sísmica da subsuperfície, dada suas propriedades elásticas.

3.1 MODELO DE INCLUSÃO DE KUSTER-TOKSOZ

Na primeira aplicação deste trabalho nos concentramos nas relações de física de rocha entre a porosidade e a impedância-P (ou seu logaritmo), definida pelo produto entre a densidade e a velocidade-P da rocha ($z = \rho\alpha$). Essas relações podem ser derivadas utilizando a teoria da poroelasticidade e do meio efetivo, em termos do comportamento elástico de cavidades esféricas ou elipsoidais e de inclusão. Vários modelos de inclusão estão disponíveis na literatura e são geralmente adequados para rochas carbonáticas (MAVKO; MUKERJI; DVORKIN, 2009). Kuster e Toksoz derivaram as expressões para os módulos elásticos K_s e G_s de uma rocha saturada (KUSTER; TOKSOZ, 1974), baseando-se na teoria de espalhamento de primeira ordem de comprimento de onda longo:

$$(K_s - K_m) \frac{(K_m + \frac{4}{3}G_m)}{(K_s + \frac{4}{3}G_m)} = \phi (K_f - K_m) P, \quad (3.4)$$

$$(G_s - G_m) \frac{(G_m + \xi)}{(G_s + \xi)} = -\phi G_m Q, \quad (3.5)$$

onde

$$\xi = \frac{G_m}{6} \frac{9K_m + 8G_m}{K_m + 2G_m}, \quad (3.6)$$

K_m e G_m são os módulos *bulk* e *shear* da fase sólida (chamada também de fase mineral ou matriz) da rocha, K_f é o módulo *bulk* da fase fluida, ϕ é a porosidade da rocha, P e Q são coeficientes que descrevem o efeito da inclusão do fluido na matriz da rocha. Estas expressões são escritas para uma variedade de formas de inclusão, neste trabalho assumimos que os poros são esféricos. Portanto, de acordo com as equações de Kuster-Toksoz temos que

$$P = \frac{K_m + \frac{4}{3}G_m}{K_f + \frac{4}{3}G_m}, \quad Q = \frac{G_m + \xi}{\xi}. \quad (3.7)$$

Se resolvermos explicitamente os módulos *bulk* e *shear*, obtemos:

$$K_s = \frac{4K_m G_m + 3K_m K_f + 4G_m K_f \phi - 4K_m G_m \phi}{4G_m + 3K_f - 3K_f \phi + 3K_m \phi}, \quad (3.8)$$

e

$$G_s = \frac{G_m(9K_m + 8G_m)(1 - \phi)}{9K_m + 8G_m + 6(K_m + 2G_m)\phi}. \quad (3.9)$$

A partir dos módulos elásticos é possível calcular a impedância-P a partir das Equações 3.1 e 3.2 da rocha:

$$z = \rho\alpha = \sqrt{\rho \left(K_s + \frac{4}{3}G_s \right)} = f_{KT}(\phi), \quad (3.10)$$

onde f_{KT} é o modelo de Kuster Toksoz, não linear em relação à porosidade. Os parâmetros da física de rocha são o módulo *bulk* da fase mineral K_m , o módulo *shear* G_m e as densidades ρ_m e ρ_f .

3.2 MODELO EMPÍRICO DE PRIDE

Na segunda aplicação focamos nas relações físicas entre as propriedades elásticas velocidade-P, velocidade-S e densidade com as propriedades petrofísicas porosidade e saturação de água (ϕ e s_w). Essas relações podem ser estimadas por modelos complexos, como o apresentado na última seção, ou por modelos empíricos mais simples como o discutido na referência (PRIDE; BERRYMAN; HARRIS, 2004), que propõe as seguintes equações para os módulos elásticos da rocha seca:

$$K_d = K_m \frac{1 - \phi}{1 + c\phi}, \quad G_d = G_m \frac{1 - \phi}{1 + 3c\phi/2}, \quad (3.11)$$

onde K_m e G_m são os módulos *bulk* e *shear* da fase mineral e c é o parâmetro de consolidação, que é inversamente proporcional ao grau de consolidação entre os grãos, seu valor pode ser definido dentro do intervalo aproximado $2 < c < 20$ (PRIDE; BERRYMAN; HARRIS, 2004). Utilizamos este modelo pela dificuldade encontrada no ajuste de modelos teóricos mais complexos nos dados de poços de velocidade-P e S simultaneamente.

Com os módulos elásticos da rocha seca, podemos usar a equação de Biot-Gassmann para obter qual a resposta elástica da rocha quando saturada com diferentes fluidos. A teoria assume um módulo mineral homogêneo, isotropia estatística do espaço poroso e funciona melhor para ondas de baixa frequência. A equação de Biot-Gassmann define

os módulos *bulk* e *shear* da rocha saturada como

$$K_s = K_d + \frac{(1 - K_d/K_m)^2}{\phi/K_{fl} + (1 - \phi)/K_m - K_d/K_m^2}, \quad G_s = G_d, \quad (3.12)$$

onde k_{fl} é o módulo *bulk* da fase de fluido, que depende dos tipos de fluidos existentes e suas saturações. Por exemplo, assumindo novamente a presença de água e hidrocarboneto, temos a relação:

$$K_{fl} = K_{hc}(1 - s_w) + K_w s_w, \quad (3.13)$$

na qual K_w e K_{hc} são o módulo *bulk* da água e do hidrocarboneto respectivamente.

3.3 MÉTODO SÍSMICO DE REFLEXÃO

Durante a propagação de uma onda sísmica, quando a onda encontra uma superfície de contato entre duas camadas de rocha, parte da energia é refletida de volta e a parte restante é transmitida para a próxima camada. Com base neste fenômeno, o método de reflexão sísmica consiste em gerar pulsos acústicos em diferentes posições sob a superfície, e em seguida medir a energia refletida através de geofones regularmente espalhados (SEN, 2006; BACON; SIMM; REDSHAW, 2003).

Após a aquisição sísmica os dados são submetidos a técnicas de processamento sísmico. Este processo envolve vários ajustes e filtros com o objetivo de remover todos os efeitos indesejados como múltiplas reflexões, refração, distorção, atenuação, entre outros. No final, os dados sísmicos contêm apenas o sinal das reflexões de interface, consistente com a geologia e estratigrafia da subsuperfície.

Os dados sísmicos processados podem ser *post-stack* ou *pre-stack*. O primeiro caso aproxima a resposta da subsuperfície a uma onda plana de incidência normal (fonte e receptor localizados no mesmo local). Enquanto os dados *pre-stack* representam a resposta sísmica refletida pela subsuperfície para um determinado ângulo de incidência.

As medições das amplitudes sísmicas são exibidas como um traço sísmico, que é um gráfico da amplitude do sinal em relação ao tempo de trânsito da onda, exibido convencionalmente com o eixo do tempo apontando verticalmente para baixo (veja Figura 3). O eixo vertical também está relacionado com a profundidade pela integração da velocidade da onda ao longo do tempo de trânsito. O dado sísmico completo consiste em diversos traços sísmicos regularmente distribuídos ao longo

de direções ortogonais (ou seja, *inline* e *crossline*), associado a localização de cada receptor (veja a figura 3).

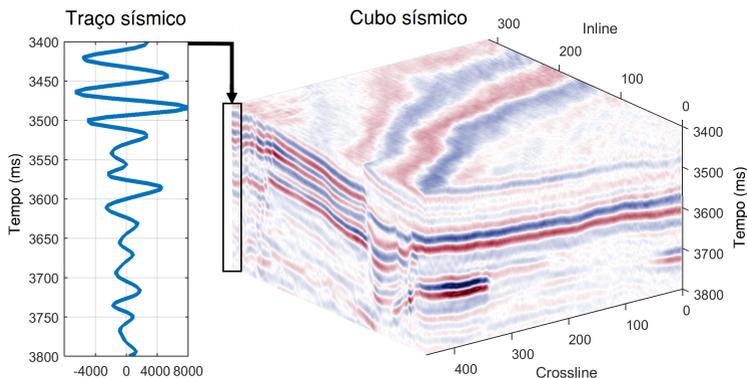


Figura 3 – Exemplo de dados sísmico empilhado. À esquerda temos um traço sísmico e à direita, temos diversos traços formando o conjunto completo dos dados sísmicos.

Ambos os tipos de dados sísmicos são obtidos reunindo todos os traços que possuem um mesmo ponto médio entre as posições da fonte e do receptor (*common midpoint* ou CMP). Os traços de um mesmo CMP podem ser somados (empilhados), se o aumento do tempo de trânsito, em relação a distância entre fonte e receptor, for corrigido pela correção *Normal Moveout* (NMO). A diferença entre *post* e *pre-stack* é que o primeiro é empilhado usando todos os ângulos de incidência, enquanto que o *pre-stack* é empilhado por diferentes faixas de ângulos. O processamento sísmico está além do escopo deste trabalho, o leitor pode encontrar mais detalhes sobre o processo nas referências (SEN, 2006; MAVKO; MUKERJI; DVORKIN, 2009; BACON; SIMM; REDSHAW, 2003).

3.3.1 Modelagem de dados Post-stack

Existem diversas maneiras de modelar um dado sísmico, entre elas, os métodos numéricos para solucionar equações de onda têm sido utilizados nos últimos anos (VIRIEUX; OPERTO, 2009). Porém os métodos de inversão utilizando estas técnicas demandam intensos recursos computacionais de processamento e memória RAM, necessitando de meses de processamento, e ainda possuem limitações na complexidade

do problema, além de não fornecerem informações de incerteza sobre as estimativas obtidas (SEN, 2006).

Por outro lado, os métodos de inversão que utilizam o modelo convolucional discutido nesta seção demandam de minutos a alguns dias de processamento, dependendo do tamanho do dado sísmico e da abordagem utilizada. Por este motivo, atualmente ainda existe grande interesse nestas técnicas de inversão, principalmente nas abordagens estocásticas, pois as incertezas dos resultados da inversão são encontradas conjuntamente (BULAND; OMRE, 2003b), (BOSCH; MUKERJI; GONZALEZ, 2010) e (RIMSTAD; AVSETH; OMRE, 2012).

Quando o traço sísmico é submetido ao pré-processamento sísmico como Migração, *Normal Moveout* e Empilhamento, o modelo convolucional apresentado nesta seção pode ser utilizado, uma vez que leva em conta somente as refletividades provindas das interfaces e nenhum outro efeito como múltiplas reflexões, espalhamento e etc. Neste caso, o dado sísmico empilhado pode ser aproximado como a resposta de uma subsuperfície com camadas planas em relação a uma onda plana de incidência normal. Como demonstrado nas referências (SEN, 2006; BACON; SIMM; REDSHAW, 2003), para esta situação, o coeficiente de reflexão é definido pela equação abaixo:

$$c(t) = \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{z(t + \Delta t) + z(t)}. \quad (3.14)$$

na qual $z(t) = \rho(t)\alpha(t)$ é a impedância acústica definida pelo produto da velocidade-P $\alpha(t)$ de propagação da onda acústica com a densidade da rocha $\rho(t)$ no tempo t . Para coeficientes de reflexão menores que 0.3, a Equação 3.14 pode ser aproximada por (DE FIGUEIREDO et al., 2014; BULAND; OMRE, 2003a):

$$c(t) \approx \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \ln(z(t)). \quad (3.15)$$

A fonte da onda sísmica gera um pulso de onda cuja energia varia em função do tempo, e cuja amplitude do pulso, no tempo, é chamada de *wavelet*. Se fosse possível transmitir um pulso como uma delta de Dirac para a subsuperfície, o dado sísmico medido seria a própria refletividade. Como isto não é possível, a onda refletida medida é a refletividade dentro da banda de frequência da *wavelet* que, matematicamente, é a convolução da refletividade com a *wavelet*. Pode-se,

então, definir um traço sísmico por:

$$d(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)c(t - \tau)d\tau + e_d(t), \quad (3.16)$$

onde $d(t)$ é o dado sísmico, $s(t)$ é a *wavelet* e $e_d(t)$ é um erro ou ruído aleatório.

Computacionalmente, a integral da Equação 3.16 pode ser representada em um domínio discreto por uma multiplicação matricial (SEN, 2006; RIMSTAD; AVSETH; OMRE, 2012), isto é:

$$\mathbf{d} = \mathbf{S}\mathbf{c} + \mathbf{e}_d, \quad (3.17)$$

nas quais os vetores são representações discretas das variáveis da Equação 3.16 e \mathbf{S} é a matriz de convolução construída com os dados da *wavelet* \mathbf{s} . Se considerarmos ainda um operador diferencial de primeira ordem \mathbf{D} , podemos então definir o operador $\mathbf{C} = \frac{1}{2}\mathbf{S}\mathbf{D}$, obtendo uma relação linear entre o dado sísmico \mathbf{d} e o logaritmo da impedância $\ln(\mathbf{z})$

$$\mathbf{d} = \mathbf{C}\ln(\mathbf{z}) + \mathbf{e}_d. \quad (3.18)$$

Portanto, se uma sequência de valores de impedância acústica da subsuperfície ao longo de um eixo vertical é conhecida, sua resposta sísmica pode ser calculada com a Equação 3.18.

3.3.2 Modelagem de dados Pre-stack

Agora, se os dados sísmicos são processados e empilhados por um determinado intervalo de ângulo de incidência com média θ , eles também podem ser modelados por um modelo convolucional com dependência angular:

$$d(t, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau, \theta)c(t - \tau, \theta)d\tau + e_d(t, \theta), \quad (3.19)$$

onde $d(t, \theta)$ é um traço sísmico, $s(t, \theta)$ é a *wavelet*, $e_d(t, \theta)$ é um ruído aleatório e $c(t, \theta)$ é a refletividade que é obtida pela extensão em tempo contínuo de uma série de refletividade (AKI; RICHARDS, 2002; STOLT; WEGLEIN, 1985; BULAND; OMRE, 2003a):

$$c(t, \theta) = a_\alpha(t, \theta) \frac{\partial}{\partial t} \ln \alpha(t) + a_\beta(t, \theta) \frac{\partial}{\partial t} \ln \beta(t) + \quad (3.20)$$

$$a_\rho(t, \theta) \frac{\partial}{\partial t} \ln \rho(t).$$

onde α é a velocidade-P, β é a velocidade-S, ρ é a densidade e os coeficientes $a_\alpha(\theta)$, $a_\beta(\theta)$ e $a_\rho(\theta)$ são dados por:

$$a_\alpha(t, \theta) = \frac{1}{2}(1 + \tan^2 \theta), \quad (3.21)$$

$$a_\beta(t, \theta) = -4 \frac{\beta(t)^2}{\alpha(t)^2} \sin^2 \theta, \quad (3.22)$$

$$a_\rho(t, \theta) = \frac{1}{2}(1 + a_\beta(\theta)). \quad (3.23)$$

O modelo convolucional pode ser escrito no domínio discreto usando a versão discreta da função de refletividade da Equação 3.20 apresentada por (BULAND; OMRE, 2003a):

$$\mathbf{d} = \mathbf{SAD} \mathbf{z} + \mathbf{e}_d, \quad (3.24)$$

onde

$$\mathbf{z} = (\ln \alpha, \ln \beta, \ln \rho)^T. \quad (3.25)$$

Nesta equação \mathbf{d} são os traços sísmicos de todos os diferentes ângulos disponíveis, \mathbf{S} é a matriz de convolução com as *wavelets* discretizadas de cada ângulo, a matriz \mathbf{A} é definida pelos coeficientes $a_\alpha(t, \theta)$, $a_\beta(t, \theta)$ e $a_\rho(t, \theta)$, e \mathbf{D} é um operador diferencial de primeira ordem (DE FIGUEIREDO et al., 2014; RIMSTAD; AVSETH; OMRE, 2012).

Desta forma, se uma sequência de valores de velocidade-P, velocidade-S e densidade da subsuperfície ao longo de um eixo vertical é conhecida, sua resposta sísmica para um determinado ângulo θ pode ser calculada com a Equação 3.24.

4 METODOLOGIA

Conforme discutido no capítulo anterior, a relação física entre as propriedades elásticas e petrofísicas é geralmente dada por um conjunto de equações conhecido como modelo de física de rocha (DVORKIN; GUTIERREZ; GRANA, 2014; GRANA; ROSSA, 2010; BOSCH; MUKERJI; GONZALEZ, 2010; MAVKO; MUKERJI; DVORKIN, 2009). Nesta seção, introduzimos primeiramente uma correlação linear estatística entre a porosidade e o logaritmo natural da impedância acústica. Em seguida, apresentamos uma metodologia geral para incorporar um modelo linearizado de física de rocha em uma distribuição Gaussiana multivariada. A proposta é utilizada para definir um modelo de mistura Gaussiana para a distribuição *a priori* conjunta das propriedades elásticas e petrofísicas a fim de introduzir uma correlação com base teórica entre as propriedades. Com esta modelagem *a priori* de física de rocha juntamente com o modelo convolucional da Seção 3.3, obtemos uma expressão analítica para as distribuições condicionais da amostragem de Gibbs. O algoritmo proposto para resolver o problema inverso consiste na combinação do algoritmo de amostragem com métodos de simulação geoestatística para calcular a distribuição a posteriori.

4.1 MODELAGEM *A PRIORI* COM FÍSICA DE ROCHA PARA IMPEDÂNCIA ACÚSTICA E POROSIDADE

Nesta seção, propomos definir a relação de física de rochas por uma distribuição Gaussiana *a priori* em conjunto para o logaritmo da impedância e porosidade (vetor modelo \mathbf{m}). Portanto, a distribuição *a priori* proposta para um ponto da subsuperfície é

$$p(\mathbf{m}_t) = p(\ln(z_t), \phi_t) = N_2(\mathbf{m}_t; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}), \quad (4.1)$$

onde

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_{\ln} \\ \mu_{\phi} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{\ln}^2 & \sigma_{\ln, \phi} \\ \sigma_{\phi, \ln} & \sigma_{\phi}^2 \end{pmatrix},$$

z_t e ϕ_t são a impedância e a porosidade respectivamente, no tempo de trânsito t que corresponde a um ponto específico da subsuperfície. Usamos a notação \mathbf{m}_t para especificar que estamos trabalhando no domínio bidimensional \ln de Impedância-porosidade.

A matriz de covariância $\boldsymbol{\Sigma}$ pode ser calculada a partir dos da-

dos de poços experimentais, entretanto a distribuição assim obtida não ajusta necessariamente os modelos teóricos de física de rocha. Neste trabalho propomos calcular a matriz de covariância da distribuição *a priori* através de um modelo linearizado de física de rocha. Com a abordagem proposta a matriz de covariância tem um significado físico porque seus elementos representam a variabilidade e correlação dos parâmetros geológicos que caracterizam a rocha. Portanto, considerando um modelo de física de rocha $f_{RPM}(\phi)$, definimos a relação entre $\ln(z)$ e ϕ como:

$$\ln(z) = \ln(f_{RPM}(\phi)) = g(\phi) + e_g, \quad (4.2)$$

onde e_g é um erro aleatório.

Podemos linearizar o modelo calculando a expansão em primeira ordem da série de Taylor (GRANA, 2016) da Equação 4.2 em torno do valor médio μ_ϕ , então:

$$\ln(z) \approx g(\mu_\phi) + g'(\mu_\phi)(\phi - \mu_\phi) + e_g. \quad (4.3)$$

A Equação 4.3 fornece uma função linear com coeficiente angular $A = g'(\mu_\phi)$ e coeficiente linear $B = g(\mu_\phi) - g'(\mu_\phi)\mu_\phi$. Dado o coeficiente angular A , podemos calcular a matriz de autovetores \mathbf{V} da matriz de covariância *a priori* Σ usando o ângulo $\theta = \text{atan}(A)$:

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) & \cos(\theta) \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Os autovetores são vetores ortogonais e o autovetor correspondente ao maior autovalor define a direção ao longo da qual a distribuição tem a maior variância. Usando o teorema de decomposição de autovalores obtemos a matriz de covariância priori:

$$\Sigma = \mathbf{V} \Lambda \mathbf{V}^{-1}, \quad (4.5)$$

onde Λ é a matriz diagonal que contém a variância para cada direção de autovetor.

Finalmente, estendemos esta relação aos vetores do logaritmo de impedância $\ln(\mathbf{z})$ e porosidade ϕ ao longo de todo o traço sísmico, incluindo um modelo de correlação espacial vertical. Assim, definimos a distribuição *a priori* de \mathbf{m} como:

$$p(\mathbf{m}) = p(\ln(\mathbf{z}), \phi) =$$

$$N_{2n}(\mathbf{m}; \boldsymbol{\mu}_m, \boldsymbol{\Sigma}_m) = N_{2n} \left(\begin{pmatrix} \ln(\mathbf{z}) \\ \boldsymbol{\phi} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_{\ln} \\ \boldsymbol{\mu}_{\phi} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma_{11}\boldsymbol{\Gamma} & \Sigma_{12}\boldsymbol{\Gamma} \\ \Sigma_{21}\boldsymbol{\Gamma} & \Sigma_{22}\boldsymbol{\Gamma} \end{pmatrix} \right), \quad (4.6)$$

onde

$$\boldsymbol{\mu}_{\ln} = \mu_{\ln} \mathbf{1}_{n,1}, \quad \boldsymbol{\mu}_{\phi} = g^{-1}(\mu_{\ln}) \mathbf{1}_{n,1}, \quad (4.7)$$

e μ_{\ln} é a média *a priori* do logaritmo de impedância. A Equação 4.6 define a distribuição *a priori* com dependência espacial para todo um traço sísmico, incluindo a matriz de correlação temporal $\boldsymbol{\Gamma}$. Os componentes da matriz de correlação são definidos de acordo com um modelo teórico de função de covariância. Nesta Tese utilizamos o modelo exponencial abaixo, pois é o modelo teórico de função de correlação que melhor se ajusta à função experimental dos poços.

$$\Gamma_{t,t'} = \exp\left(-\frac{|t-t'|}{L}\right). \quad (4.8)$$

A Equação 4.8 define a correlação entre os elementos do modelo m_t e $m_{t'}$ nos tempos t e t' . O parâmetro de alcance temporal de correlação L é calibrado para simular a estratigrafia geológica e deposição e também está relacionado com a resolução vertical da impedância acústica e porosidade (BULAND; OMRE, 2003a).

4.2 GENERALIZAÇÃO DA MODELAGEM *A PRIORI* COM FÍSICA DE ROCHA

Como discutido anteriormente, o modelo de física da rocha é dado por um conjunto de equações $f_{RPM}(\mathbf{r})$ que define a dependência das propriedades elásticas \mathbf{z} com as propriedades petrofísicas \mathbf{r} :

$$\mathbf{z} = \ln(f_{RPM}(\mathbf{r})) + \mathbf{e}_g = g(\mathbf{r}) + \mathbf{e}_g, \quad (4.9)$$

onde \mathbf{e}_g é um ruído aleatório, cuja variância $\boldsymbol{\Sigma}_g$ pode ser calculada pela variabilidade dos dados dos poços em torno do modelo de física da rocha. Na aplicação deste trabalho, consideramos as propriedades elásticas \mathbf{z} como velocidade-P, velocidade-S e densidade $(\ln \alpha, \ln \beta, \ln \rho)^T$, enquanto as petrofísicas \mathbf{r} como porosidade e a saturação de água $(\phi, s_w)^T$. No entanto, a metodologia apresentada para incorporação da física de rochas na distribuição *a priori* pode ser aplicada para qualquer conjunto de propriedades.

Baseado no modelo de física da rocha, propomos uma correlação linear estatística entre todas as propriedades. Como proposto na

seção anterior, a relação é definida por uma distribuição conjunta normal multivariada para todas as propriedades (vetor modelo \mathbf{m}). Desta forma, a distribuição *a priori* em qualquer ponto da subsuperfície é:

$$p(\mathbf{m}_t) = p(\ln \alpha_t, \ln \beta_t, \ln \rho_t, \phi_t, s_{w_t}) = N_5(\mathbf{m}_t; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}), \quad (4.10)$$

na qual

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_{z_t} \\ \boldsymbol{\mu}_{r_t} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_g & \boldsymbol{\Sigma}_{g,r} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{g,z} & \boldsymbol{\Sigma}_r \end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{\mu}_z$ é a média das propriedades elásticas, $\boldsymbol{\mu}_r$ é a média das propriedades petrofísicas e t é o tempo de trânsito que corresponde a um ponto específico da subsuperfície.

Podemos calcular a matriz de covariância experimental $\boldsymbol{\Sigma}$ através dos dados de poços. No entanto, a direção de maior probabilidade, dada pelas correlações da distribuição assim obtida, não corresponde necessariamente a um modelo teórico de física de rocha. Propomos então construir a distribuição *a priori* baseada em um modelo de física de rocha linearizado pela expansão de Taylor. Neste trabalho, foi utilizado o modelo empírico de Pride (PRIDE; BERRYMAN; HARRIS, 2004) com a substituição do fluido de Gassmann (GASSMANN, 1951) (discutido em mais detalhes na seção 3.2).

A física de rocha da Equação 4.9 pode ser aproximado pela expansão em série de Taylor de primeira ordem no valor médio $\boldsymbol{\mu}_{r_t}$:

$$\mathbf{z} \approx g(\boldsymbol{\mu}_{r_t}) + \mathbf{J}_{\mu_r}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\mu}_{r_t}) + \mathbf{e}_g, \quad (4.11)$$

o qual é uma função linear com coeficiente angular $A = \mathbf{J}_{\mu_r}$, onde \mathbf{J}_{μ_r} é a matriz jacobiana calculada na média $\boldsymbol{\mu}_{r_t} = (\mu_{\phi_t}, \mu_{s_{w_t}})^T$. A Equação 4.11 pode também ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{J}_{\mu_r} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_g \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g(\boldsymbol{\mu}_r) - \mathbf{J}_{\mu_r} \boldsymbol{\mu}_r \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

Desta maneira, podemos aplicar o teorema da transformação linear de uma variável aleatória Gaussiana (Seção 2.6), com objetivo de obter a distribuição *a priori* conjunta de todas as propriedades, tendo em vista que é possível calcular a distribuição conjunta do vetor $(\mathbf{e}_g, \mathbf{r})$ a partir dos dados de poços:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_g \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} \sim N_5 \left(\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\mu}_{r_t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_g & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Sigma}_r \end{pmatrix} \right). \quad (4.13)$$

Portanto, a matriz de covariância da distribuição conjunta *a priori* de todas as propriedades $\mathbf{m}_t = (\mathbf{z}, \mathbf{r})$ da Equação 4.10, com as correlações de acordo com a física de rochas linearizada, torna-se:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_g + \mathbf{J}_{\mu_r} \Sigma_r \mathbf{J}_{\mu_r}^T & \mathbf{J}_{\mu_r} \Sigma_r \\ \Sigma_r \mathbf{J}_{\mu_r}^T & \Sigma_r \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

Finalmente, é possível estender estas relações entre propriedades elásticas e petrofísicas ao longo de todo o traço sísmico, definindo a distribuição *a priori* para \mathbf{m} como:

$$p(\mathbf{m}) = p(\ln \alpha, \ln \beta, \ln \rho, \phi, \mathbf{s}_w) = N_{5n}(\mathbf{m}; \boldsymbol{\mu}_m, \Sigma_m), \quad (4.15)$$

onde

$$\boldsymbol{\mu}_m = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_z \\ \boldsymbol{\mu}_r \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mu}_z = (\mu_\alpha \mathbf{1}_{n,1}, \mu_\beta \mathbf{1}_{n,1}, \mu_\rho \mathbf{1}_{n,1}) \quad , \quad (\mu_\alpha, \mu_\beta, \mu_\rho) = g(\boldsymbol{\mu}_{r_t}),$$

$$\boldsymbol{\mu}_r = (\mu_{\phi_t} \mathbf{1}_{n,1}, \mu_{s_w t} \mathbf{1}_{n,1}),$$

$$\Sigma_m = \begin{pmatrix} \sigma_\alpha^2 \Gamma & \sigma_{\alpha,\beta} \Gamma & \sigma_{\alpha,\rho} \Gamma & \sigma_{\alpha,\phi} \Gamma & \sigma_{\alpha,s_w} \Gamma \\ \sigma_{\beta,\alpha} \Gamma & \sigma_\beta^2 \Gamma & \sigma_{\beta,\rho} \Gamma & \sigma_{\beta,\phi} \Gamma & \sigma_{\beta,s_w} \Gamma \\ \sigma_{\rho,\alpha} \Gamma & \sigma_{\rho,\beta} \Gamma & \sigma_\rho^2 \Gamma & \sigma_{\rho,\phi} \Gamma & \sigma_{\rho,s_w} \Gamma \\ \sigma_{\phi,\alpha} \Gamma & \sigma_{\phi,\beta} \Gamma & \sigma_{\phi,\rho} \Gamma & \sigma_\phi^2 \Gamma & \sigma_{\phi,s_w} \Gamma \\ \sigma_{s_w,\alpha} \Gamma & \sigma_{s_w,\beta} \Gamma & \sigma_{s_w,\rho} \Gamma & \sigma_{s_w,\phi} \Gamma & \sigma_{s_w}^2 \Gamma \end{pmatrix},$$

sendo μ_{ϕ_t} e $\mu_{s_w t}$ são a média da porosidade e da saturação respectivamente. Como a Equação 4.15 define a distribuição *a priori* para um traço inteiro, Γ é a matriz de correlação temporal definida conforme discutido na seção anterior.

Com a Equação 4.15 consideramos uma única distribuição Gaussiana baseada em um modelo parametrizado de física de rochas para a distribuição *a priori*. No entanto, a presença de mais de uma litofácies com diferentes parâmetros de física de rocha é muito frequente nos estudos de reservatório, e a distribuição das propriedades não é bem descrita por apenas um modelo Gaussiano simples. Para superar esta limitação aplicamos a Equação 4.15 para todas as M fácies, baseado em uma interpretação geológica e parametrização de física de rocha específicos. Desta forma, definimos a distribuição *a priori* das propriedades \mathbf{m} como um modelo de mistura Gaussiana:

$$p(\mathbf{m}) = \sum_{\pi=1}^M \omega_\pi N_{5n}(\mathbf{m}; \boldsymbol{\mu}_m^\pi, \Sigma_m^\pi), \quad (4.16)$$

onde ω_π pode ser interpretado como a proporção de cada fácies π (GRANA; ROSSA, 2010; GRANA; MUKERJI et al., 2012).

O comportamento localmente linear do modelo de física da rocha fornece outra vantagem para esta aplicação, porque as fácies definem um intervalo limitado de valores das propriedades, onde a linearização da física de rochas é mais precisa quando comparada com a aplicação em todo o dado de poço.

4.3 INCORPORAÇÃO DE UM MODELO PRÉVIO DE SUBSUPERFÍCIE

Com objetivo de incorporar mais algum conhecimento prévio da subsuperfície no resultado da inversão, além da física de rochas, propomos relacionar o vetor modelo \mathbf{m} com um modelo prévio da subsuperfície \mathbf{f} usando a equação:

$$\mathbf{f} = \mathbf{m} + \mathbf{e}_f, \quad (4.17)$$

onde a variável \mathbf{e}_f é um termo aleatório de tolerância com covariância Σ_f , que define o quão similar a inversão é em relação a \mathbf{f} . O modelo \mathbf{f} pode ser qualquer modelo prévio da subsuperfície, por exemplo, um modelo de baixa frequência ou algum modelo de subsuperfície de outros métodos de inversão.

Com objetivo de incorporar os dados de poços nos resultados, nós construímos um modelo prévio de subsuperfície \mathbf{f} usando a interpolação geoestatística (Krigagem) dos dados de poços dentro de um grid estratigráfico (BOSCH et al., 2009a; DOYEN, 2007). O modelo interpolado é de banda completa, portanto, tem a informação de baixa frequência, assim como a informação de alta resolução extraída dos dados de poço. Como as frequências mais altas são confiáveis somente nas regiões próximas aos locais dos poços, a variância do erro \mathbf{e}_f é definida como alta em regiões distantes dos poços e baixa em regiões próximas aos poços. A variância do método de interpolação Krigagem (DOYEN, 2007) possui exatamente estas características, a variância nos locais dos poços é zero ou perto de zero (devido ao efeito pepita), enquanto a variância longe dos poços, a distâncias maiores que o intervalo de correlação, é igual à variância de \mathbf{e}_f .

4.4 DISTRIBUIÇÃO CONDICIONAL DAS PROPRIEDADES ELÁSTICAS E PETROFÍSICAS

Os resultados desta seção são adequados para ambas as distribuições *a priori* discutidas nas seções 4.1 e 4.2, alterando apenas em relação à definição do vetor modelo \mathbf{m} e consequentemente às dimensões das distribuições e de suas matrizes de covariância.

Com base nas Equações 3.18 e 3.24, podemos definir o operador direto como:

$$\mathbf{d} = \mathbf{G}\mathbf{m} + \mathbf{e}_d, \quad (4.18)$$

onde \mathbf{d} é o dado sísmico, \mathbf{m} é o vetor de parâmetros do modelo e \mathbf{e}_d é um ruído aleatório. No caso em que o vetor modelo é definido considerando a impedância e a porosidade ($\mathbf{m} = (\ln \mathbf{z}, \phi)^T$), como na seção 4.1, o operador direto é definido por

$$\mathbf{G} = (\mathbf{C} \quad \mathbf{0}). \quad (4.19)$$

Por outro lado, no caso em que o vetor modelo é definido de acordo com a seção 4.2 ($\mathbf{m} = (\ln \boldsymbol{\alpha}, \ln \boldsymbol{\beta}, \ln \boldsymbol{\rho}, \phi, \mathbf{s}_w)^T$), o operador direto é definido por

$$\mathbf{G} = (\mathbf{SAD} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0}). \quad (4.20)$$

As equações 4.17 e 4.18 podem então ser escritas na forma matricial como

$$\begin{pmatrix} \mathbf{m} \\ \mathbf{d} \\ \mathbf{f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{G} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{m} \\ \mathbf{e}_d \\ \mathbf{e}_f \end{pmatrix}, \quad (4.21)$$

de forma que esta equação define uma relação linear entre o vetor $(\mathbf{m}, \mathbf{d}, \mathbf{f})^T$ e as variáveis não correlacionadas $(\mathbf{m}, \mathbf{e}_d, \mathbf{e}_f)^T$. Portanto, podemos aplicar o teorema da transformação linear de variáveis aleatórias (Seção 2.6) para obter a distribuição conjunta de $(\mathbf{m}, \mathbf{d}, \mathbf{f})^T$ (DE FIGUEIREDO et al., 2014; ANDERSON, 1984). Em seguida, a distribuição *a posteriori* do vetor modelo \mathbf{m} , condicionada aos dados sísmicos \mathbf{d} e o modelo prévio \mathbf{f} é obtida usando o teorema de distribuições condicionais da Seção 2.7 (ANDERSON, 1984).

Nomeando o vetor \mathbf{o} como o vetor de dados observados, definido pelos dados sísmicos \mathbf{d} e o modelo prévio \mathbf{f} , a distribuição *a posteriori* do problema inverso, considerando as distribuições *a priori* da Equação 4.6 ou 4.15, fica

$$p(\mathbf{m}|\mathbf{o}) = N\left(\mathbf{m}; \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{m}|\mathbf{o}}, \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{m}|\mathbf{o}}\right), \quad (4.22)$$

onde

$$\boldsymbol{\mu}_{m|o} = \boldsymbol{\mu}_m + \boldsymbol{\Sigma}_{m,o} \boldsymbol{\Sigma}_o^{-1} (\mathbf{o} - \boldsymbol{\mu}_o), \quad (4.23)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{m|o} = \boldsymbol{\Sigma}_m - \boldsymbol{\Sigma}_{m,o} \boldsymbol{\Sigma}_o^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{o,m}, \quad (4.24)$$

$$\mathbf{o} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{d} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu}_o = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_m \\ \mathbf{G}\boldsymbol{\mu}_m \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma}_{o,m} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_m \\ \mathbf{G}\boldsymbol{\Sigma}_m \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_o = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_m + \boldsymbol{\Sigma}_f & \boldsymbol{\Sigma}_m \mathbf{G}^T \\ \mathbf{G}\boldsymbol{\Sigma}_m & \mathbf{G}\boldsymbol{\Sigma}_m \mathbf{G}^T + \boldsymbol{\Sigma}_d \end{pmatrix},$$

e $\boldsymbol{\mu}_m$ e $\boldsymbol{\Sigma}_m$ são a média e a covariância *a priori*. Assumindo que as variáveis aleatórias \mathbf{e}_d e \mathbf{e}_f das Equações 4.17 e 4.18 são ruídos brancos, as matrizes $\boldsymbol{\Sigma}_d$ e $\boldsymbol{\Sigma}_f$ são definidas simplesmente por matrizes diagonais. A Equação 4.22 é a distribuição *a posteriori* considerando uma distribuição *a priori* Gaussiana simples. Neste caso temos que $\boldsymbol{\mu}_{m|o}$ é a solução mais provável ou também chamada de Máximo *a Posteriori* (MAP).

No caso em que a distribuição *a priori* é uma mistura Gaussiana como a da Equação 4.16 (GRANA; MUKERJI et al., 2012; LANG; GRANA, 2017), temos a situação em que a distribuição *a posteriori* também é uma mistura Gaussiana:

$$p(\mathbf{m}|\mathbf{o}) = \sum_{\pi=1}^M \lambda_{\pi} N\left(\mathbf{m}; \boldsymbol{\mu}_{m|o}^{\pi}, \boldsymbol{\Sigma}_{m|o}^{\pi}\right), \quad (4.25)$$

consistindo em uma combinação linear das distribuições *a posteriori* com média $\boldsymbol{\mu}_{m|o}^{\pi}$ e covariância $\boldsymbol{\Sigma}_{m|o}^{\pi}$ para todas as M fácies π , cuja seus coeficientes são dados por

$$\lambda_{\pi} = \frac{\omega_{\pi} N(\mathbf{o}; \boldsymbol{\mu}_o^{\pi}, \boldsymbol{\Sigma}_o^{\pi})}{\sum_{\pi=1}^M N(\mathbf{o}; \boldsymbol{\mu}_o^{\pi}, \boldsymbol{\Sigma}_o^{\pi})}. \quad (4.26)$$

Para este caso, a solução \mathbf{m}_{est} do problema inverso pode ser considerada como a média da mistura Gaussiana:

$$\mathbf{m}_{est} = \sum_{\pi=1}^M \lambda_{\pi} \boldsymbol{\mu}_{m|o}^{\pi}. \quad (4.27)$$

Para a classificação das litofácies, os pesos λ_{π} podem ser calculados pontualmente e interpretados como as probabilidades de fácies a

posteriori (GRANA; MUKERJI et al., 2012; LANG; GRANA, 2017), o que nos permite calcular a solução mais provável de fácies condicionada aos dados observados \mathbf{o} .

4.5 DISTRIBUIÇÃO CONDICIONAL DAS LITOFÁCIES

A definição das fácies na localização do poço é feita através das diversas medidas de propriedades nos poços. Existem vários algoritmos de classificação na literatura que são usados para definição das fácies, tais como redes neurais, K-Means e Maximização de Expectativas (HASTIE; TIBSHIRANI; FRIEDMAN, 2009). Em particular, o método de Maximização da Expectativa estima os parâmetros de um modelo de mistura Gaussiana a partir dos dados experimentais. Em nossa implementação, assumimos que cada componente Gaussiano pode ser interpretado como uma fácies (LINDBERG; GRANA, 2015; GRANA; ROSSA, 2010). Uma vez que as fácies são classificadas com base nos dados de treinamento na localização do poço, podemos definir a distribuição de probabilidade das propriedades \mathbf{m}_t em qualquer tempo de viagem t para cada fácies $\boldsymbol{\pi}$ como uma distribuição Gaussiana:

$$p(\mathbf{m}_t|\boldsymbol{\pi}) = N(\mathbf{m}_t; \boldsymbol{\mu}_\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\Sigma}_\boldsymbol{\pi}). \quad (4.28)$$

A matriz de covariância $\boldsymbol{\Sigma}_\boldsymbol{\pi}$ e a média $\boldsymbol{\mu}_\boldsymbol{\pi}$ podem ser calculadas a partir dos dados de poços experimentais para cada fácies, uma vez que elas foram classificadas. Entretanto, como uma fácies é caracterizada por uma interpretação geológica específica, podemos aplicar a modelagem *a priori* proposta nas seções 4.1 e 4.2 individualmente para cada fácies. Assim, obtemos as distribuições com parâmetros específicos de física de rocha consistentes com a geologia das fácies.

Após a definição das distribuições $p(\mathbf{m}_t|\boldsymbol{\pi})$, é possível calcular a probabilidade de cada ponto da subsuperfície, em um tempo t , pertencer a uma fácies $\boldsymbol{\pi}$ condicionado aos dados observados \mathbf{o} pela equação:

$$p(\boldsymbol{\pi}_t|\mathbf{o}_t) = \int_m p(\boldsymbol{\pi}_t|\mathbf{m}_t)p(\mathbf{m}_t|\mathbf{o}_t)d\mathbf{m}_t. \quad (4.29)$$

Aplicando o teorema de Bayes, obtemos

$$p(\boldsymbol{\pi}_t|\mathbf{o}_t) \propto p(\boldsymbol{\pi}_t) \int_m p(\mathbf{m}_t|\boldsymbol{\pi}_t)p(\mathbf{m}_t|\mathbf{o}_t)d\mathbf{m}_t. \quad (4.30)$$

sendo $p(\boldsymbol{\pi}_t)$ é a probabilidade *a priori* de cada fácies. Notando que am-

bas as distribuições dentro da integral são Gaussianas, e que o produto de duas funções Gaussianas é também uma Gaussianas multiplicada por um fator de escala (como demonstrado na Seção 2.4), temos que

$$p(\boldsymbol{\pi}_t | \mathbf{o}_t) \propto p(\boldsymbol{\pi}_t) \exp \left(\sum_i \zeta_i - \zeta_s \right). \quad (4.31)$$

onde

$$\zeta_i = -\frac{1}{2} \left(d \ln(2\pi) + \ln |\boldsymbol{\Sigma}_i| + \boldsymbol{\mu}_i^T \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} \boldsymbol{\mu}_i \right) \quad i = \{\pi, m | o\},$$

$$\zeta_s = -\frac{1}{2} \left(d \ln(2\pi) + \ln |\boldsymbol{\Sigma}_s| + \boldsymbol{\mu}_s^T \boldsymbol{\Sigma}_s^{-1} \boldsymbol{\mu}_s \right),$$

e

$$\boldsymbol{\Sigma}_s = \left(\sum_{i=1}^2 \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} \right)^{-1} \quad \boldsymbol{\mu}_s = \boldsymbol{\Sigma}_s \sum_{i=1}^2 \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} \boldsymbol{\mu}_i.$$

A Equação 4.31 nos permite calcular a probabilidade de cada fácies condicionada ao dado sísmico \mathbf{d} e o modelo prévio \mathbf{f} , através das distribuições de cada fácies.

4.6 ALGORITMO DE GIBBS PARA AMOSTRAGEM A *POSTERIORI* COM CORRELAÇÃO ESPACIAL

A formulação proposta anteriormente é uma abordagem traço a traço, portanto a solução das propriedades não considera qualquer correlação horizontal. Além disso, como a classificação de litofácies utilizando a Equação 4.26 é feita pontualmente, o processo fornece modelos não-realistas que não preservam a continuidade geológica (LANG; GRANA, 2017). Para superar estas limitações propomos uma metodologia baseada em um algoritmo de amostragem de Gibbs, que obtém iterativamente a distribuição *a posteriori* $p(\mathbf{m}, \boldsymbol{\pi} | \mathbf{o})$ das propriedades e das fácies, condicionada aos dados sísmicos e o modelo prévio. O algoritmo de Gibbs consiste num método de Monte Carlo, que computa a distribuição desejada realizando múltiplas amostragens das distribuições condicionais de cada variável dadas todas as demais (Seção 2.1.2). As simulações das propriedades e das fácies no algoritmo são realizadas por métodos geoestatísticos, considerando a correlação espacial em todas as direções em um *grid* estratigráfico. As correlações são definidas por um modelo de covariograma conforme discutido na seção 2.8, com

objetivo de simular a estratigrafia e deposição geológica.

A múltipla amostragem do algoritmo produz vários cenários da subsuperfície com diferentes valores das propriedades simuladas, que podem ser utilizadas para análise de incerteza, por exemplo em simulações de fluxo de fluido, probabilidade de volume de reservatório e conectividade (CAERS, 2011; BACA; ARNETT; LANGFORD, 1984).

As distribuições condicionais de cada variável dado todas as outras devem ser obtidas para implementar o algoritmo de Gibbs. Considerando uma dada configuração para o vetor modelo $\mathbf{m} = \mathbf{m}^i$ na iteração i na Equação 4.30, a distribuição $p(\mathbf{m}|\mathbf{o}_z)$ é uma função delta de Dirac δ . Portanto, a probabilidade de uma fácies $\boldsymbol{\pi}$ condicionada aos dados observados \mathbf{o} e o modelo \mathbf{m}^i no tempo de trânsito t é:

$$p(\boldsymbol{\pi}_t|\mathbf{o}_t, \mathbf{m}_t^i) \propto p(\boldsymbol{\pi}_t) \int_{\mathbf{m}} p(\mathbf{m}|\boldsymbol{\pi}_t) \delta(\mathbf{m}_t^i - \mathbf{m}) d\mathbf{m}, \quad (4.32)$$

ou seja:

$$p(\boldsymbol{\pi}_t|\mathbf{o}_t, \mathbf{m}_t^i) \propto p(\boldsymbol{\pi}_t) p(\mathbf{m}_t^i|\boldsymbol{\pi}_t). \quad (4.33)$$

Assumindo que as fácies são equiprováveis *a priori*, obtemos

$$p(\boldsymbol{\pi}_t|\mathbf{o}_t, \mathbf{m}_t^i) \propto p(\mathbf{m}_t^i|\boldsymbol{\pi}_t) = N(\mathbf{m}_t^i; \boldsymbol{\mu}_\pi, \boldsymbol{\Sigma}_\pi). \quad (4.34)$$

Para o cálculo efetivo das probabilidades das fácies, o resultado da Equação 4.34 deve ser normalizado:

$$p(\boldsymbol{\pi}_t|\mathbf{o}_t, \mathbf{m}_t^i) = \frac{N(\mathbf{m}_t^i; \boldsymbol{\mu}_\pi, \boldsymbol{\Sigma}_\pi)}{\sum_{\pi=1}^M N(\mathbf{m}_t^i; \boldsymbol{\mu}_\pi, \boldsymbol{\Sigma}_\pi)}. \quad (4.35)$$

Agora, considerando uma dada configuração de fácies $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}^i$ na iteração i , a distribuição condicional do vetor modelo \mathbf{m} é a componente da mistura Gaussiana da Equação 4.22:

$$p(\mathbf{m}|\mathbf{o}, \boldsymbol{\pi}^i) = N(\mathbf{m}; \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{m}|\mathbf{o}}^{\boldsymbol{\pi}^i}, \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{m}|\mathbf{o}}^{\boldsymbol{\pi}^i}), \quad (4.36)$$

onde $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{m}|\mathbf{o}}^{\boldsymbol{\pi}^i}$ e $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{m}|\mathbf{o}}^{\boldsymbol{\pi}^i}$ são definidos pelas equações 4.23 e 4.24 considerando uma distribuição *a priori* referente à fácies específica $\boldsymbol{\pi}^i$.

Com as distribuições das Equações 4.35 e 4.36, é possível desenvolver a amostragem de Gibbs do Algoritmo 1. Para cada iteração, amostramos uma simulação para todas as propriedades (vetor de modelo \mathbf{m}^i) dado a configuração de fácies anterior, em seguida amostramos uma simulação categorica para as fácies $\boldsymbol{\pi}^i$ dadas as propriedades.

Após a convergência da cadeia, calculamos as estatísticas dos vários modelos de subsuperfície e analisamos sua incerteza.

As etapas do Algoritmo 1 estão descritas em detalhes abaixo, sendo que as etapas 1 a 3 são executadas apenas uma vez para definir as configurações iniciais, permitindo as demais amostragens do algoritmo.

Algoritmo 1 Proposta de algoritmo de Gibbs

1. Define as componentes Gaussianas *a priori* para obter $p(\mathbf{m}|\boldsymbol{\pi})$
 2. Calcula as soluções *a posteriori* para cada fácies a fim de definir $p(\mathbf{m}|\mathbf{o}, \boldsymbol{\pi})$ para todos os traços
 3. Define a configuração inicial das propriedades como $\mathbf{m}^0 = \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{m}|\mathbf{o}}^{\boldsymbol{\pi}}$
for $i=1, \dots, n$ **do**
 4. Calcula $p(\boldsymbol{\pi}|\mathbf{o}, \mathbf{m}^{i-1})$
 5. Amostra $\boldsymbol{\pi}^i$ de $p(\boldsymbol{\pi}|\mathbf{o}, \mathbf{m}^{i-1})$
 6. Amostra \mathbf{m}_i de $p(\mathbf{m}|\mathbf{o}, \boldsymbol{\pi}^i)$
 - end for**
 7. Análise estatística das amostragens \mathbf{m}^i e $\boldsymbol{\pi}^i$ de $i = k, \dots, n$.
-

1. Com base em um modelo de física de rocha parametrizado para cada fácies, define as componentes da mistura Gaussiana *a priori* $N_5(\mathbf{m}; \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{m}}^{\boldsymbol{\pi}}, \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{m}}^{\boldsymbol{\pi}})$ usando a Equação 4.15 ou 4.6 para definir $p(\mathbf{m}|\boldsymbol{\pi})$.
2. Computa as componentes Gaussianas *a posteriori* $N_{5n}(\mathbf{m}; \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{m}|\mathbf{o}}^{\boldsymbol{\pi}}, \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{m}|\mathbf{o}}^{\boldsymbol{\pi}})$ para as propriedades \mathbf{m} usando a Equação 4.22, para definir a distribuição $p(\mathbf{m}|\mathbf{o}, \boldsymbol{\pi})$ condicionada ao dado sísmico e o modelo prévio.
3. A configuração inicial das propriedades \mathbf{m}^0 é definida arbitrariamente por uma das médias $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{m}|\mathbf{o}}^{\boldsymbol{\pi}}$ calculadas no etapa anterior.
4. Para cada ponto da subsuperfície t , computa a probabilidade $p(\boldsymbol{\pi}_t|\mathbf{o}_t, \mathbf{m}_t^{i-1})$, usando a Equação 4.34, de cada fácies condicionada ao dado sísmico e ao modelo prévio \mathbf{m}_t^{i-1} .
5. Usando um método geoestatístico de simulação de variáveis categóricas (DOYEN, 2007), amostra uma configuração de fácies $\boldsymbol{\pi}^i$ com as probabilidades $p(\boldsymbol{\pi}|\mathbf{o}, \mathbf{m}^{i-1})$ calculadas na última etapa. Neste trabalho, o método Simulação Gaussiana Truncada discutido na seção 2.8.2 foi utilizado (MATHERON et al., 1987).

6. Utilizando um método de simulação geoestatística (DOYEN, 2007), amostra as propriedades \mathbf{m}^i da distribuição $p(\mathbf{m}|\mathbf{o}, \boldsymbol{\pi}^i) = N(\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{m}|\mathbf{o}}^{\boldsymbol{\pi}^i}, \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{m}|\mathbf{o}}^{\boldsymbol{\pi}^i})$ condicionada pela configuração de fácies da etapa anterior. Primeiramente, amostra as propriedades $\mathbf{m}|\boldsymbol{\pi}$ de $N(\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{m}|\mathbf{o}}^{\boldsymbol{\pi}}, \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{m}|\mathbf{o}}^{\boldsymbol{\pi}})$ para todas as fácies individualmente, gerando assim uma configuração de toda a região para cada fácies $\boldsymbol{\pi}$. Em seguida, uma única configuração é construída definindo seus valores de propriedades \mathbf{m}_t^i , como o valor amostrado $\mathbf{m}|\boldsymbol{\pi}_t^i$ para a fácies específica $\boldsymbol{\pi}_t^i$, o qual foi amostrada na etapa anterior no ponto t .

Para a realização das simulações geoestatísticas, utilizamos o método de simulação FFT-Moving Average em um *grid* estratigráfico.

7. Calcula as estatísticas das amostras para obter a distribuição a *posteriori* $p(\mathbf{m}, \boldsymbol{\pi}|\mathbf{o})$, média correspondente, modelo mais provável e incerteza. Onde k é o número de iterações que a amostragem leva para convergir para a distribuição posterior.

5 APLICAÇÕES E RESULTADOS

As propostas discutidas na seção de Metodologia foram aplicadas em dados sísmicos reais com dados de poços de três localizações. A área de estudo consiste em um reservatório carbonático saturado com água e hidrocarboneto. O *grid* do dado sísmico possui 312 *ms* em espessura de tempo de trânsito, 450 *inlines* e 315 *crosslines*, com taxa de amostragem vertical de 4 *ms* e taxa de amostragem lateral de 25 *m*. Os resultados foram validados através de testes de poço cego e comparações com a inversão Bayesiana tradicional proposta por Buland e Omre (BULAND; OMRE, 2003b).

Na primeira seção deste capítulo apresentamos os resultados de inversão conjunta para impedância acústica, porosidade e litofácies. Neste primeiro exemplo aplicamos duas metodologias distintas. Inicialmente utilizamos a abordagem analítica traço a traço discutida na Seção 4.4 e 4.5, considerando uma distribuição Gaussiana simples *a priori* (Equação 4.6). Mais especificamente, a Equação 4.22 foi usada para a estimativa do Máximo a Posteriori da impedância e da porosidade, e sequencialmente a Equação 4.31 foi aplicada para o cálculo da probabilidade de cada fácies. Em seguida, o algoritmo de Gibbs proposto na Seção 4.6 foi aplicado para o mesmo problema. Esta última abordagem mostrou resultados quantitativamente melhores. Por este motivo na segunda seção deste capítulo mostramos os resultados da inversão conjunta para velocidade-P, velocidade-S, densidade, porosidade e saturação apenas da metodologia da Seção 4.6 utilizando o algoritmo de amostragem.

As simulações estocásticas dos métodos geoestatísticos *FFT-MA* e Simulação Gaussiana Truncada foram realizadas em um grid estratigráfico com as dimensões citadas anteriormente, utilizando um modelo esférico de função de covariância com isotropia horizontal. O parâmetro de alcance horizontal foi definido como 550 metros e o vertical como 12 *ms*. Para verificar a qualidade do algoritmo do *FFT-MA* implementado, a Figura 4 mostra uma seção horizontal do covariograma teórico mencionado juntamente com o covariograma experimental de uma simulação. A similaridade entre as imagens demonstra que algoritmo é capaz de reproduzir as estatísticas de interesse, podendo ser utilizado dentro da proposta de inversão sísmica.

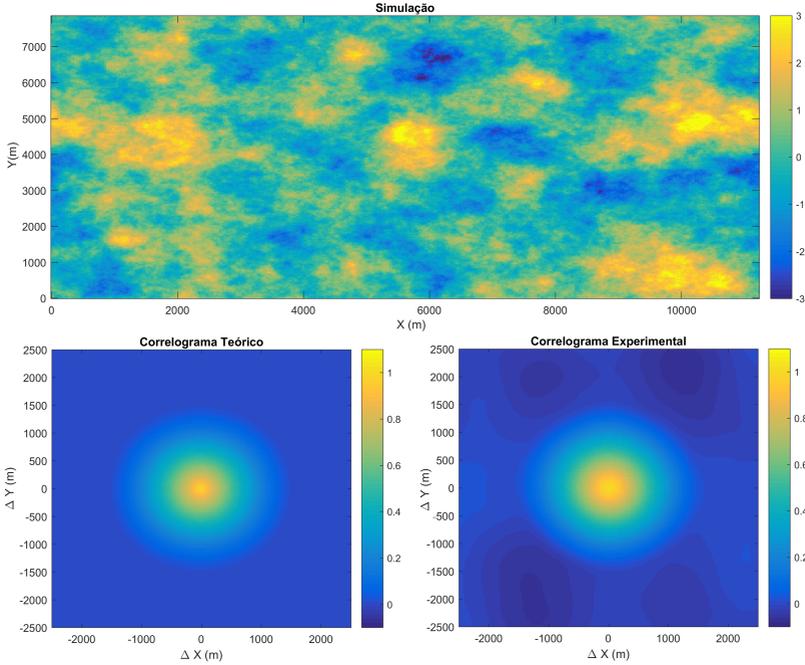


Figura 4 – Resultado de simulação do algoritmo de *FFT-MA*. Acima, simulação geostatística com correlações espaciais definidas pelos correlogramas abaixo: a esquerda, correlograma teórico e a direita, correlograma experimental da simulação.

5.1 INVERSÃO PARA IMPEDÂNCIA ACÚSTICA E POROSIDADE

A Figura 5 mostra os dados sísmicos *post-stack* utilizados nesta aplicação, ao longo de uma seção arbitrária passando por dois poços. Os dois horizontes interpretados na Figura 5 (linhas pretas) destacam a localização principal do reservatório de óleo.

Os logs de poço de porosidade e impedância são mostrados na Figura 6A, apresentando uma forte correlação entre as propriedades. Três fácies foram identificados nos locais dos poços: a fácies reservatório caracterizada por alta porosidade (fácies de reservatório, ou fácies 3) e duas fácies não-reservatório com baixa porosidade (fácies 1 e 2), mostrado na Figura 6 B.

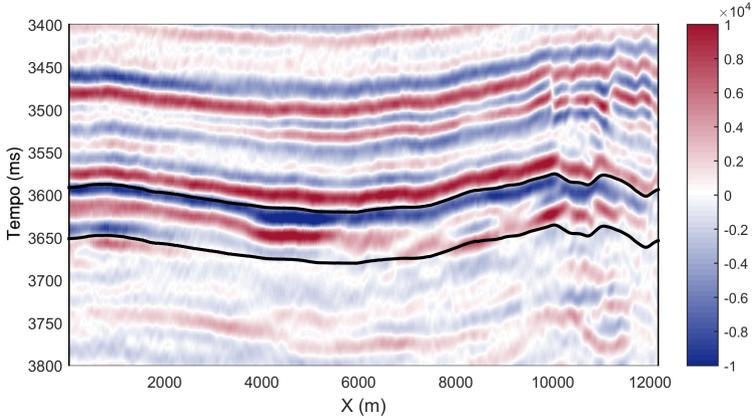


Figura 5 – Seção arbitrária dos dados sísmicos *post-stack* utilizados nos métodos de inversão. O eixo vertical é o tempo de trânsito e o eixo horizontal X é a distância do primeiro traço ao longo da sação arbitrária. Os dois horizontes em preto destacam a região principal do reservatório de petróleo.

De acordo com a literatura de física de rocha, uma relação adequada para descrever a relação entre porosidade e impedância em rochas carbonáticas é fornecida pelo modelo de física de rocha de inclusão (KUSTER; TOKSOZ, 1974), discutido na Seção 3.1. O modelo requer o conhecimento dos parâmetros de mineral e de fluido tais como o módulo de compressão M_m , a densidade ρ_m do mineral, o módulo *bulk* K_f e a densidade ρ_f do fluido. O módulo de compressão é definido como $M_m = K_m + \frac{4}{3}G_m$, onde K_m e G_m são módulos *bulk* e *shear* do mineral.

Em nossa aplicação dois fluidos estão presentes no reservatório: água e óleo. As propriedades do fluido são retiradas da literatura sobre física da rocha. Os parâmetros de rocha dentro do reservatório são calibrados para coincidir com os dados de poço da fácies reservatório (Modelo 1, a curva calibrada é mostrada em vermelho nas Figuras 6A e 6B). Da mesma forma, os parâmetros de rocha fora do reservatório são calibrados para coincidir com os dados de poço das fácies 1 e 2 (Modelo 2, a curva calibrada é mostrada em preto na Figura 6B). A Tabela 1 mostra os parâmetros de física da rocha obtidos para as fácies reservatório e não-reservatório.

Seguindo a metodologia apresentada na Seção 4.1 a distribuição

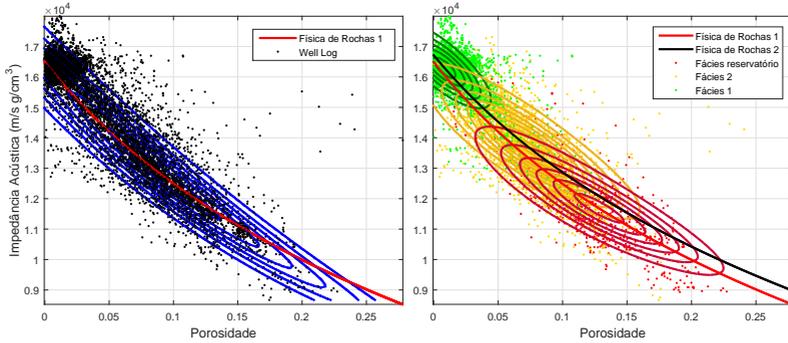


Figura 6 – A esquerda: *Cross-plot* dos logs de poços de porosidade e impedância, juntamente com a curva teórica obtida usando os modelos de física de rocha de inclusão e a distribuição *a priori* para o vetor modelo $\mathbf{m}_t = (\ln(z_t), \phi_t)$. A direita: *Cross-plot* dos logs de poços de porosidade e impedância, codificados por cores para cada fácies, juntamente com as curvas teóricas obtidas usando os modelos de rocha-física de inclusão e a distribuições *a priori* para o vetor modelo \mathbf{m} , calculado para cada fácies.

	M_m (GPa)	K_f (GPa)	ρ_m (g/cm ³)	ρ_f (g/cm ³)
Modelo 1	100.75	0.8	2.7	0.8
Modelo 2	103.48	2.25	2.7	1

Tabela 1 – Parâmetros dos modelos de física de rocha de inclusão: módulo de compressão da rocha sólida, módulo *bulk* do fluido, densidade da rocha sólida e densidade do fluido. O modelo 2 representa o modelo para facies reservatório; O Modelo 1 representa o modelo para as demais fácies.

a priori da Equação 4.6 é calculada usando os modelos de física de rocha. A Figura 6A mostra a distribuição Gaussiana simples *a priori* (em azul) usada na abordagem analítica, e a Figura 6B mostra as componentes Gaussianas para cada fácies do modelo de mistura Gaussiana, que é na abordagem com o algoritmo de Gibbs. A distribuição da Figura 6A é calculada usando a física da rocha (em vermelho), com média e variância obtidas a partir dos dados do log de poço. Para as distribuições da Figura 6B, usamos as médias e variâncias dependentes de cada fácies. A curva vermelha é usada para a distribuição *a priori*

da fácies do reservatório, enquanto a curva preta é usada para a distribuição *a priori* das fácies não-reservatórios. Além disso, o parâmetro de alcance L da função de correlação (Equação 4.8) é usado como 7 *m.s.*

O modelo prévio de subsuperfície \mathbf{f} e sua variância Σ_f são obtidos pela interpolação geoestatística dos dados de poços em um *grid* estratigráfico. A impedância acústica interpolada e sua variância estão mostradas nas Figuras 7A e 7C, e a porosidade e sua variância nas Figuras 7B e 7D. De acordo com o modelo de variância, esperamos que perto do poço o resultado da inversão será semelhante ao modelo interpolado \mathbf{f} e, conseqüentemente aos dados de poço, devido aos baixos valores de variâncias e_f nessas regiões. A *wavelet* s usada no processo de inversão é mostrada na Figura 8. Ela é obtida usando a parte suave do espectro de amplitude dos dados sísmicos, e também usando dados de poço para otimizar o espectro de fase da *wavelet*, a fim de para ajustar o traço sísmico sintético com o experimental (OLIVEIRA et al., 2009).

Utilizando os dados apresentados (sísmica, distribuição *a priori*, *wavelet*, modelos prévios e suas variâncias), as metodologias propostas podem então ser aplicadas. No método analítico a distribuição *a priori* Gaussiana simples da Figura 6A é usada para calcular a distribuição condicional na Equação 4.6, para obter a solução MAP de impedância e porosidade (Figuras 9A e 9B).

Utilizando os três componentes Gaussianos na Figura 6B, aplicamos o algoritmo de Gibbs (Algoritmo 1) para obter várias realizações do modelo de subsuperfície. As realizações dos modelos de impedância e porosidade na iteração 100 estão mostradas na Figuras 10A e 10B. Após todas as iterações do algoritmo serem completadas, as médias e desvios padrões das propriedades são calculadas (Figuras 9 C e D e Figuras 10C e 10D, respectivamente).

A impedância e a porosidade dos dados de poços estão exibidos com a mesma escala de cores dos resultados, para possibilitar uma comparação visual dos resultados. É possível observar que as propriedades estimadas foram condicionadas aos dados do poço e que também honram os dados sísmicos nas regiões entre os poços. Comparando os resultados das duas metodologias, constata-se que os resultados de inversão usando uma distribuição Gaussiana simples possuem um intervalo menor de valores de propriedades do que os resultados de inversão obtidos usando a mistura Gaussiana anterior. Este fato pode estar relacionado com a baixa probabilidade *a priori* de valores extremos ao utilizar uma única distribuição Gaussiana.

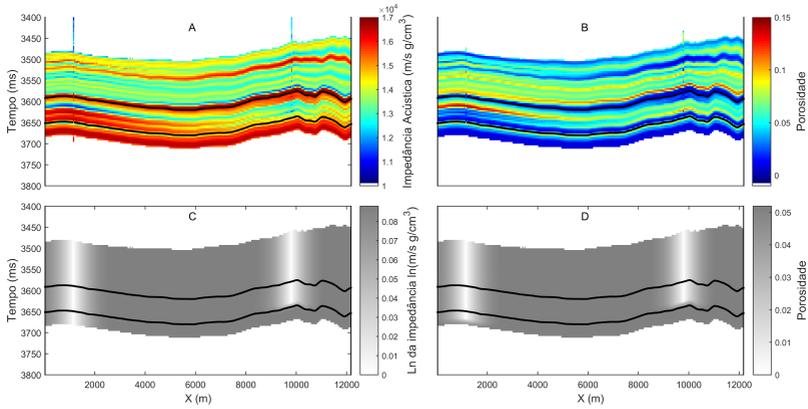


Figura 7 – Interpolação dos dados de poços de impedância acústica e a porosidade (A e B, respectivamente) e suas variâncias (C e D, respectivamente) usadas para definir o modelo prévio de subsuperfície f e a matriz de covariância Σ_f .

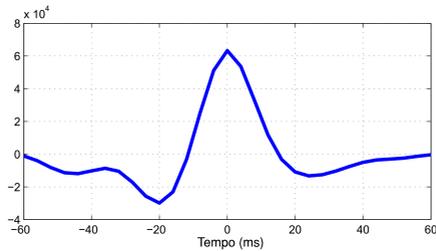


Figura 8 – A *wavelet* s usado no processo de inversão.

Usando os resultados de impedância e porosidade mostrados nas Figuras 9A e 9B e suas variâncias, usamos a Equação 4.31 para calcular a probabilidade de cada fácies condicionada aos dados sísmicos. A probabilidade da fácies reservatório, obtida por esta abordagem analítica, está mostrada na Figura 11A. Calculando também as probabilidades das demais fácies, podemos estimar a configuração mais provável de fácies para todos os pontos da subsuperfície. A Figura 11B exhibe este resultado ao longo de uma seção arbitrária (cada fácies é representada pela cor de sua distribuição correspondente na Figura 6). Na segunda metodologia, utilizando o algoritmo de Gibbs, a probabilidade pontual

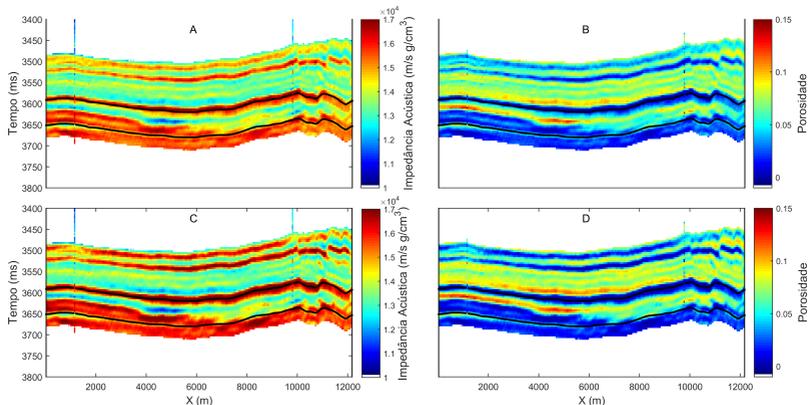


Figura 9 – Máximo *a posteriori* da impedância acústica e porosidade (em A e B, respectivamente) para uma distribuição Gaussiana *a priori* simples, e a média de impedância e porosidade das múltiplas configurações do algoritmo de Gibbs (em C e D, respectivamente). Para comparação visual, os dados de poços estão filtrados por um filtro passa-baixa com frequência de corte de 100 Hz.

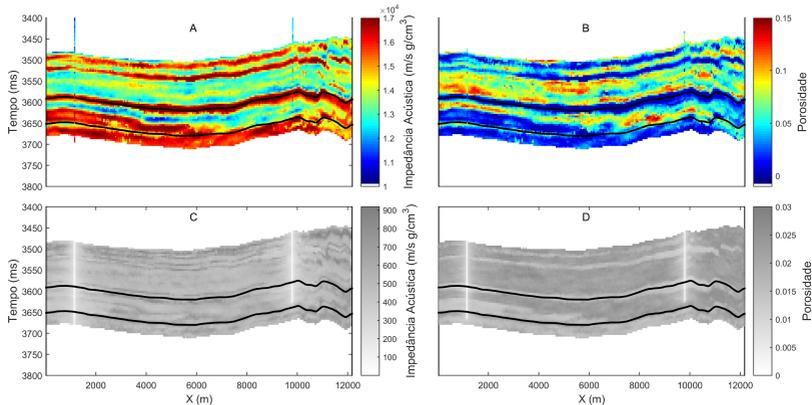


Figura 10 – Uma realização de impedância e porosidade (em A e B, respectivamente) na iteração 100 do algoritmo de Gibbs, e os desvios padrões calculados a partir de todas as iterações (em C e D, respectivamente).

da fácies reservatório é obtida através das várias configurações de fácies geradas durante a execução (Figura 11C), enquanto a configuração mais provável de fácies é exibida na Figura 11D.

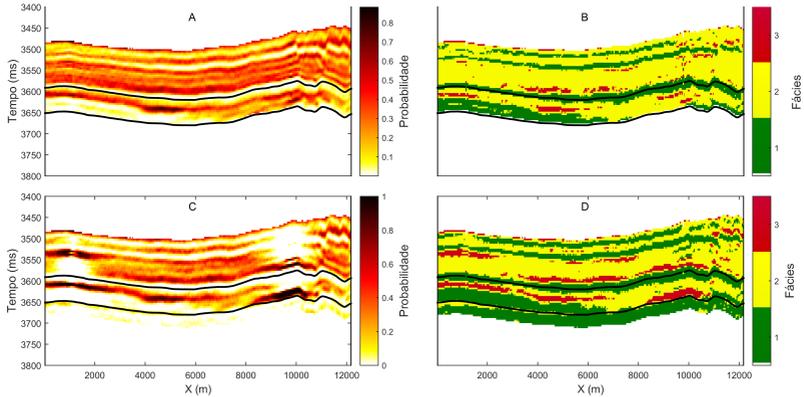


Figura 11 – Probabilidade da fácies reservatório e modelo de fácies mais provável obtido usando a abordagem analítica com distribuição *a priori* Gaussiana simples em A e B, e obtida usando a mistura Gaussiana com algoritmo de Gibbs em C e D.

Para visualizar o reservatório principal mostramos a isosuperfície de probabilidade da fácies reservatório para destacar as regiões com mais de 70 % de probabilidade de pertencer à fácies reservatório.

A Figura 12A mostra a isosuperfície de probabilidade obtida do método analítico que utiliza uma única distribuição Gaussiana. Por outro lado a Figura 12B mostra a isosuperfície de probabilidade obtida do algoritmo de Gibbs que utiliza uma mistura Gaussiana *a priori*.

Comparando os dois resultados da Figura 12 nota-se que a primeira abordagem, com uma única distribuição Gaussiana, subestima o volume do reservatório em comparação com a segunda abordagem. De fato, a abordagem com a mistura Gaussiana estima mais adequadamente os valores extremos das propriedades. Tipicamente, a fácies de reservatório apresenta alta porosidade e baixa impedância. Estes valores são melhor estimados pela mistura Gaussiana, levando a uma melhor previsão do volume do reservatório.

Para validar os resultados de inversão realizamos um teste de poço cego, no qual um dos poços é retirado do condicionamento e utilizado para avaliação dos resultados das estimativas. Os resultados

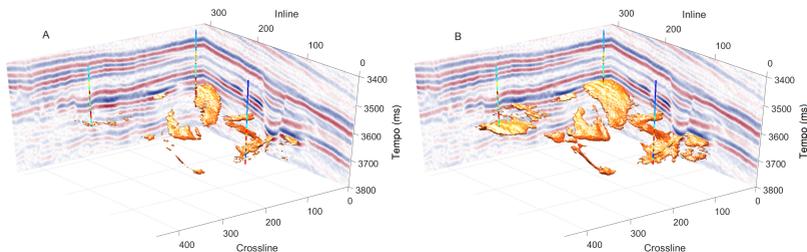


Figura 12 – A isosuperfície de 70 % de probabilidade da fácies reservatório, aplicando a metodologia analítica em A e o algoritmo de Gibbs em B.

dos métodos propostos são comparados também aos resultados obtidos pela aplicação de uma inversão Bayesiana tradicional (BULAND; OMRE, 2003a; DE FIGUEIREDO et al., 2014). Na abordagem tradicional, a distribuição *a posteriori* das propriedades de interesse é calculada analiticamente através da regra de Bayes, assumindo o mesmo operador direto convolucional utilizado nos métodos propostos. Para uma comparação justa, um modelo de baixa frequência foi utilizado como a média *a priori* na abordagem tradicional (DE FIGUEIREDO et al., 2014).

A Figura 13 mostra os logs de impedância e de porosidade (em preto), a solução MAP da abordagem analítica (em azul claro), a distribuição posterior do algoritmo de Gibbs em escala de cor (média em azul e solução MAP em azul tracejado) e o MAP da inversão Bayesiana tradicional (em verde). Todos as estimativas mostram uma correspondência satisfatória com os dados do de poços. Em geral, os resultados do algoritmo de Gibbs capturam melhor o comportamento multimodal das propriedades. A falta de correspondência no intervalo de tempo entre 3615 ms a 3635 ms é provavelmente devido ao ruído e a resolução limitada de dados sísmicos.

Na Figura 13 também comparamos as fácies na localização do poço com os modelos de fácies mais prováveis obtidos, assim como a classificação Bayesiana tradicional. Os modelos previstos dos métodos propostos mostram resultados semelhantes incluindo algumas classificações erradas devido à banda limitada dos dados sísmicos e, em geral proporcionam uma melhor previsão do que a abordagem tradicional.

Para quantificar a qualidade da inversão calculamos o erro percentual absoluto médio em relação ao poço (Tabela 2). A partir desta análise quantitativa concluímos que os resultados do algoritmo de Gibbs

correspondem melhor aos dados de poços. Esses resultados corroboram a observação de que o este método descreve melhor o comportamento multimodal das propriedades do reservatório, o que leva a uma melhor previsão do volume do reservatório (Figura 12).

	Tradicional	Análítico	Média Gibbs	MAP Gibbs
Impedância	5.86	5.20	4.16	4.11
Porosidade	29.14	32.95	27.64	25.64

Tabela 2 – Erro percentual absoluto médio da impedância e porosidade estimadas na localização do poço utilizado para o teste cego.

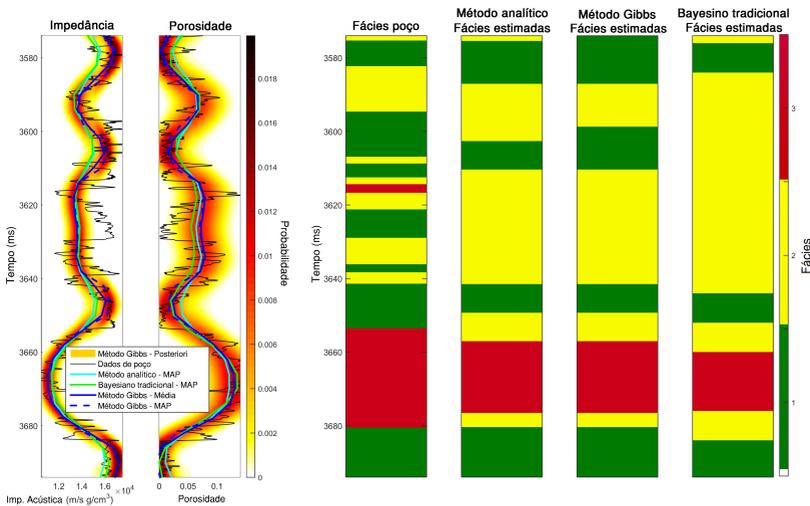


Figura 13 – Teste de poço cego. As duas primeiras imagens mostram a impedância e porosidade (dados de poço em preto, MAP do método analítico em azul claro, distribuição *a posteriori* do algoritmo de Gibbs em escala de cores com média em azul e MAP em azul tracejado, e MAP de inversão Bayesiana padrão em verde). As demais imagens mostram a classificação real das fácies no poço, o modelo de fácies mais provável obtido pelas duas propostas e pela abordagem Bayesiana tradicional.

Usando um computador com processador Intel Core i7-3930k de 3,2 GHz com 50% da capacidade de processamento, o método usando uma única distribuição Gaussiana *a priori*, leva em torno de 10 minutos

para o cálculo da equação 4.23 para todos os traços do volume sísmico. Se simplificarmos o modelo de variância assumindo uma variância homogênea, o custo computacional diminui para apenas 1 minuto. Para um modelo de variância não-homogêneo, a matriz de covariância Σ_f deve ser recalculada para cada traço, o que leva a um custo computacional maior. O algoritmo de Gibbs, assumindo uma mistura Gaussiana, leva 90 minutos para a geração de 115 modelos das propriedades da rocha, usando o mesmo computador e a mesma capacidade de processamento.

5.2 INVERSÃO PARA VELOCIDADE-P, VELOCIDADE-S, DENSIDADE, POROSIDADE E SATURAÇÃO DE ÁGUA

Para testar a metodologia na estimativa das propriedades velocidade-P, velocidade-S, densidade, porosidade e saturação de água, aplicamos a metodologia nos mesmos dados sísmicos da seção anterior, porém no conjunto de dados sísmicos *pre-stack*. Os dados estão mostrados na Figura 14 para uma seção arbitrária passando por dois poços, os dois horizontes em preto destacam o reservatório de óleo principal.

Os dados de poços coloridos por fácies estão exibidos na Figura 15, juntamente com os modelos parametrizados de física de rocha. Aplicamos o modelo empírico de Pride com a substituição de fluido de Gassmann, apresentados na Seção 3.2. O modelo requer a calibração de três parâmetros minerais (módulo elásticos de mineral K_m , G_m e consolidação c) e o conhecimento do módulo elásticos e densidade dos fluidos, que foram extraídos da literatura de física de rocha (MAVKO; MUKERJI; DVORKIN, 2009).

Os parâmetros de física da rocha para o reservatório são ajustados para corresponder aos dados do poço da fácies reservatório (modelo 2 na Figura 15). Enquanto que os parâmetros do modelo 1 de física de rocha são ajustados para coincidir com os dados de poço das fácies 1 e 2. A Tabela 3 mostra os parâmetros obtidos pela calibração de ambos os modelos, sendo que os valores calibrados estão de acordo com o conhecimento geológico sobre as rochas. O conteúdo mineral das rochas é basicamente o mesmo, com diferentes níveis de consolidação para as diferentes litofácies.

Como discutido na Seção 4.2 usamos os modelos de física de rocha para definir as componentes Gaussianas da distribuição *a priori* de todas as propriedades (Equação 4.15). As componentes de cada fácies estão representadas pelas isosuperfícies de probabilidade 3D codifica-

	K_m (GPa)	G_m (GPa)	c
Modelo física de rocha 1	63.10	29.89	6.54
Modelo física de rocha 2	63.41	27.43	8.90

Tabela 3 – Parâmetros calibrados do modelo de física de rocha de Pride com substituição de fluidos.

das por uma cor para cada fácies. A verde é obtida usando o modelo de física de rocha 2 da fácies reservatório, enquanto as demais distribuições são obtidas usando o modelo de física de rocha 2 das demais fácies não-reservatório.

Nesta aplicação o modelo prévio \mathbf{f} introduzido na seção 4.3 foi definido como um modelo de baixa frequência, obtido através da filtragem passa-baixa da interpolação geoestatística dos dados de poços (DOYEN, 2007; DE FIGUEIREDO et al., 2017). Com o modelo prévio, as componentes Gaussianas da distribuição *a priori* e os parâmetros de variância Σ_d e Σ_f , podemos então aplicar o algoritmo de Gibbs proposto para obter a distribuição *a posteriori*. O algoritmo gera diferentes simulações geoestatísticas em cada iteração, gerando um conjunto de múltiplas soluções de subsuperfície que são aceitáveis para uma dada variância de ruído sísmico Σ_d .

A Figura 16 mostra uma simulação de cada propriedade na iteração 100 da amostragem. Após 150 iterações as estatísticas pontuais da amostragem são calculadas, as Figuras 17 e 18 mostram a média e o desvio padrão de todas as propriedades respectivamente (para as fácies, é mostrado o modelo mais provável e a probabilidade de fácies do reservatório). Nestas figuras é possível verificar o condicionamento dos dados de poços nas simulações.

Para uma melhor análise dos resultados da proposta mostramos o resultado do teste de poço cego na Figura 19, onde comparamos nossa proposta não apenas com os dados de poço real, mas também com a inversão Bayesiana tradicional (BULAND; OMRE, 2003a). Para uma comparação justa, aplicamos o método tradicional com os mesmos parâmetros de variância e média *a priori* definida pelo mesmo modelo de baixa frequência. No lado esquerdo da Figura 19 mostramos os dados de poço em preto, a distribuição *a posteriori* obtida pelo algoritmo de Gibbs em escala de cor (média em azul e Máximo *a posteriori* - MAP em azul tracejado), e a solução MAP da abordagem Bayesiana tradicional em verde. Na mesma figura, também mostramos a classificação real das fácies na localização do poço com o modelo de fácies

mais provável obtido por nossa proposta, em comparação com a classificação Bayesiana tradicional das fácies. As fácies estimadas são muito semelhantes, a proposta foi capaz de classificar a segunda camada de fácies reservatório em torno do tempo 2570 *ms*, que também pode ser visto na fácies real.

Para quantificar a comparação do teste de poço cego calculamos o erro percentual absoluto médio entre as estimativas e os dados dos poços (Tabela 4). Também exibimos a distribuição marginal *a posteriori* das propriedades elásticas obtidas pelos dois métodos de inversão, nas localizações dos poços, em comparação com o histograma do log de poço (Figura 20). A partir destes resultados, concluímos que a proposta apresenta uma melhor correspondência com dados de poços e também captura o comportamento multimodal das propriedades subterrâneas.

	Bayesiano tradicional	Proposta Média	Proposta MAP
Velocity-P	4.29	4.72	4.81
Velocity-S	6.00	4.14	4.16
Densidade	2.20	1.93	1.94
Porosidade	X	37.02	38.53
Saturação	X	6.75	7.59

Tabela 4 – Erro percentual médio absoluto das propriedades estimadas na localização do poço utilizado para o teste cego.

Como na seção anterior, é possível calcular a isosuperfície da probabilidade da fácies reservatório, para mostrar as regiões com mais de 65 % de probabilidade de pertencer à fácies do reservatório (Figura 21).

Em um computador com processador Intel Core i7-3930k de 3,2 GHz e 50 % de capacidade de processamento, o algoritmo leva 7 horas para calcular os componentes Gaussianas *a posteriori* da Equação 4.36, 1,5 horas para a Krigagem requerida pelo condicionamento de poço das simulações usando FFT-MA, e 1,7 horas para a amostragem de 150 modelos de todas as propriedades de subsuperfície e litofácies.

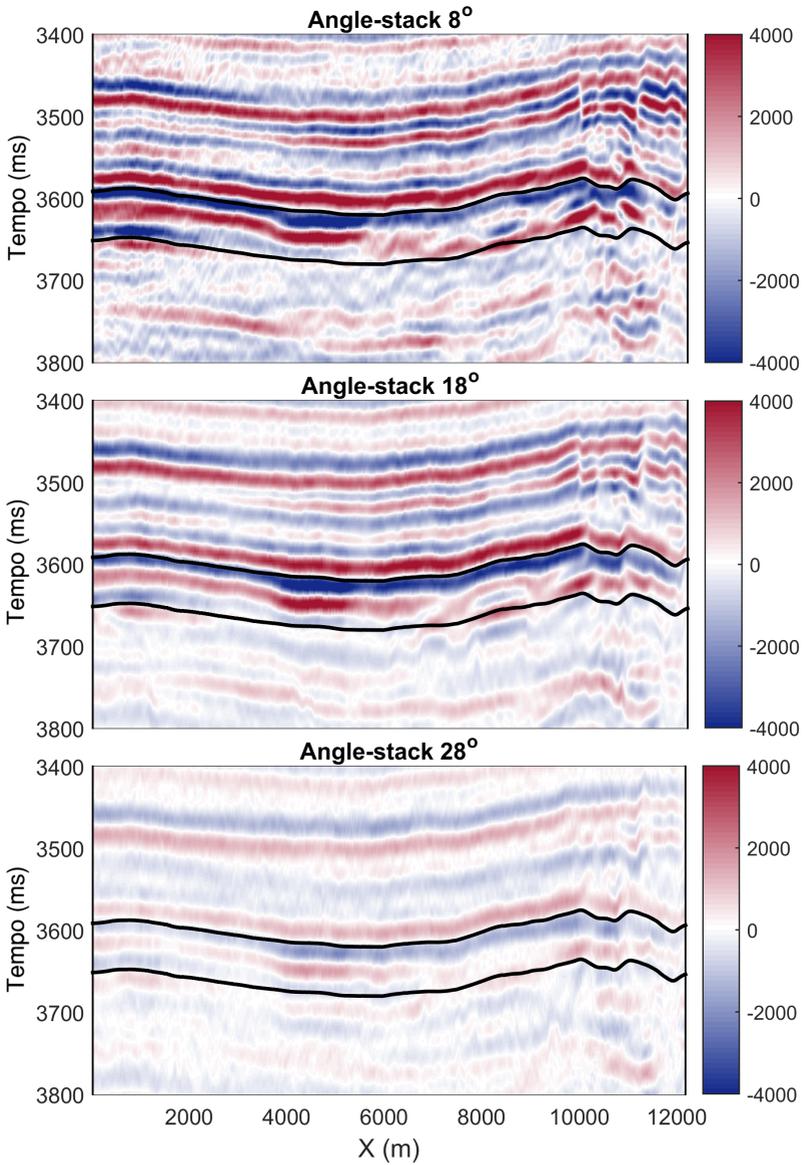


Figura 14 – Seção arbitrária dos dados sísmicos *pre-stack*. Os dois horizontes em preto destacam o principal reservatório de óleo no campo.

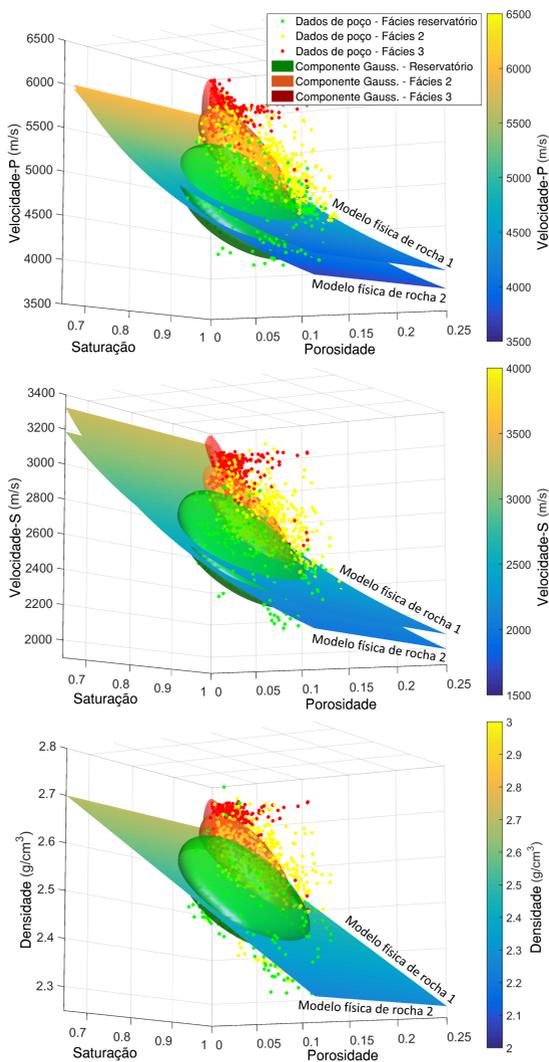


Figura 15 – Os dados de poços das propriedades elásticas e petrofísicas codificadas por cores para cada fácies, com os modelos de física de rocha calibrados e as projeções 3D das componentes Gaussianas *a priori* (representadas pelas isosuperfícies de probabilidade).

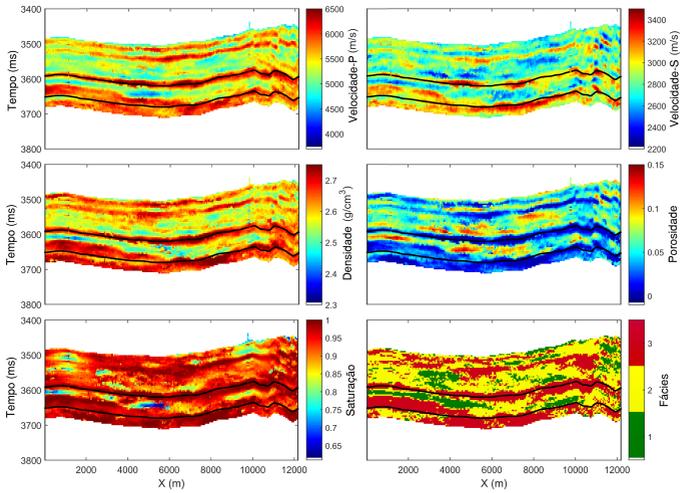


Figura 16 – Uma realização de cada propriedade na iteração 100 do algoritmo de Gibbs.

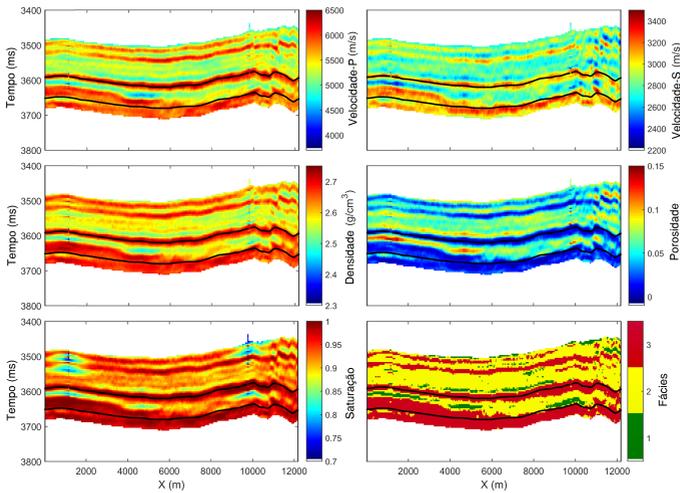


Figura 17 – Média de cada propriedade calculada ponto a ponto a partir de todas as iterações do algoritmo. Para as litofácies, o modelo mais provável é mostrado.

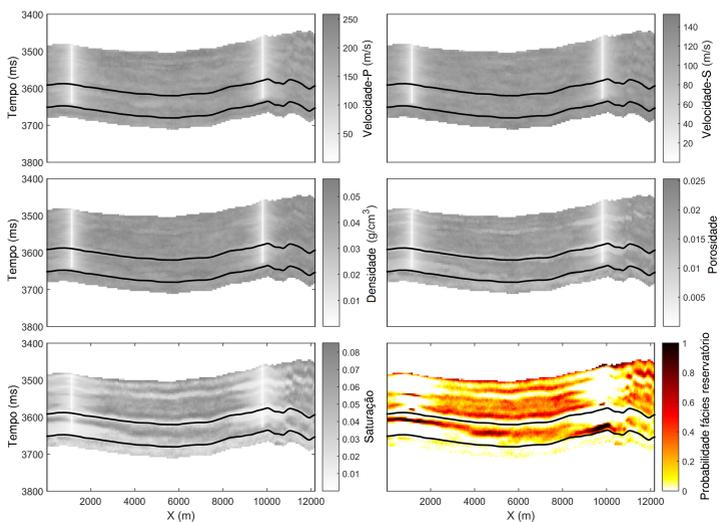


Figura 18 – Desvio padrão de cada propriedade calculado ponto a ponto a partir de todas as iterações do algoritmo. Para as litofácies, probabilidade da fácies do reservatório é mostrada.

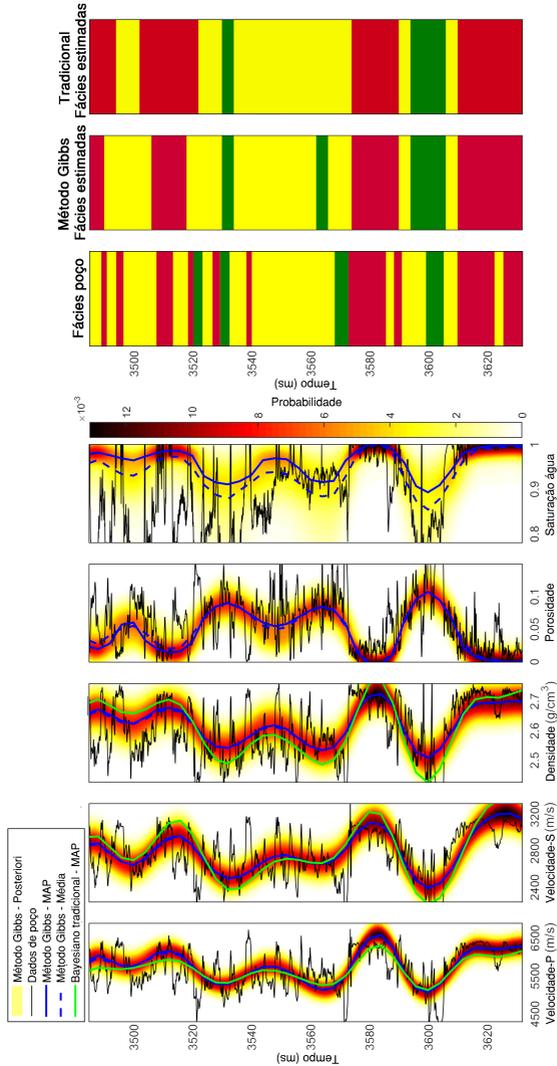


Figura 19 – Teste de poço cego. No lado esquerdo as estimativas das propriedades da subsuperfície são comparadas com os dados de poço (distribuição posterior em escala de cores com solução MAP em azul e média em azul tracejado, dado do poço em preto e MAP de inversão Bayesiana tradicional em verde). No lado direito, a classificação de fácies do poço é comparada com os modelos mais prováveis de fácies, obtidos pela proposta e pela abordagem Bayesiana tradicional.

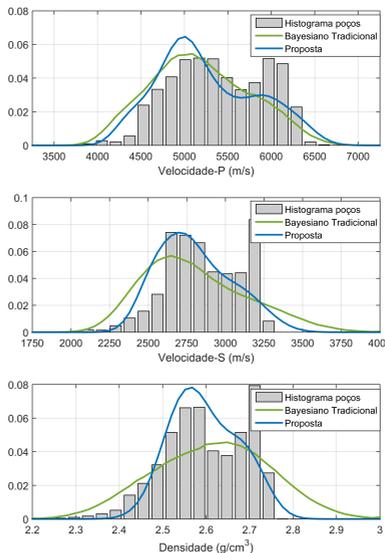


Figura 20 – Histograma experimental dos dados de poços em comparação com a distribuição marginal *a posteriori* do método de inversão proposto em azul, e da inversão Bayesiana tradicional em verde.

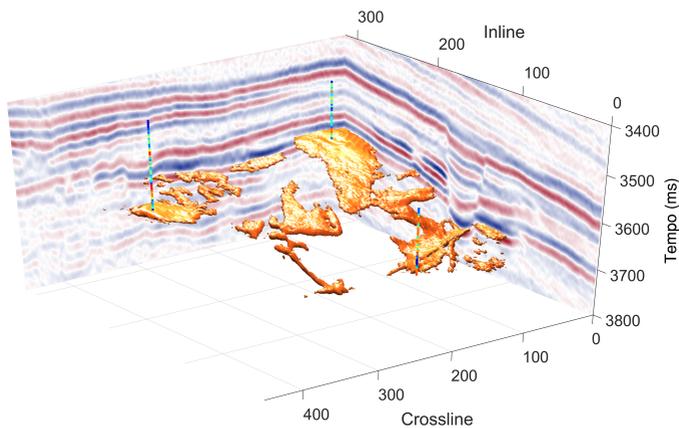


Figura 21 – A isosuperfície com 65 % da probabilidade de fácies reservatório calculada entre para região entre os dois horizontes de Figura 14.

6 CONCLUSÕES

Introduzimos uma metodologia para incorporar um modelo de física de rocha linearizado em uma distribuição Gaussiana, a qual é aplicada para definir um modelo de mistura Gaussiana para a distribuição conjunta *a priori* das propriedades elásticas e petrofísicas. Cada componente da mistura é interpretada como uma litofácies diferente com parâmetros específicos do modelo de física de rocha. Com base nessa modelagem *a priori* e no operador direto convolucional, combinamos métodos geoestatísticos com o algoritmo de amostragem de Gibbs para obter múltiplas realizações das propriedades da subsuperfície, as quais permitem a análise estatística para determinação da distribuição *a posteriori* do problema inverso. A utilização de métodos geoestatísticos eficientes, juntamente com as expressões analíticas das distribuições condicionais do algoritmo, permitem uma amostragem eficiente com baixo custo computacional. A proposta foi aplicada em um conjunto de dados sísmicos reais com três poços. Os resultados foram validados através de testes de poço cego e uma comparação com o método Bayesiano tradicional, utilizando os mesmos parâmetros de variância. A estimativa das propriedades apresentam um erro percentual menor em relação ao dado de poço, e as realizações também melhor capturam o comportamento multimodal dos poços. Usando a probabilidade da fácies reservatório, também calculamos a isosuperfície de probabilidade com objetivo de visualizar as regiões com maior probabilidade de reservatório.

A abordagem Bayesiana se mostrou como uma ótima escolha para resolver problemas inversos, fornecendo distribuições de probabilidade das propriedades as quais possuem momentos estatísticos de acordo com os medidos nos poços. Entretanto, para problemas que possuem um operador direto não linear o algoritmo de Metropolis deve ser utilizado, o qual necessita de muitas iterações para a convergência da amostragem para a distribuição a posteriori e gera diversas configurações que não são utilizadas durante o processo. Por este motivo a abordagem Bayesiana pode ser problemática e até mesmo inviável para resolver problemas em que o operador direto demanda um alto custo computacional. Além disso, os resultados desta Tese fortalecem o entendimento de que a inversão conjunta fornece uma estimativa melhor das propriedades. Este fato pode ser atribuído principalmente pela caracterização e amostragem estatística das fácies durante o processo, pois as fácies são o principal fator contribuinte na bimodalidade obser-

vada nos dados de poços e ainda definem diferentes relações entre as propriedades elásticas e petrofísicas.

Na formulação revisitada do método *FFT-Moving Average* apresentada neste trabalho, não é necessário utilizar a média de vários campos aleatórios para obter o filtro, comprovando que a metodologia é válida mesmo para um único ruído. A derivação também permite a aplicação do método para casos em que o ruído não é branco, apesar de necessitar de mais esforço computacional para calcular o operador de filtro. Neste caso, um filtro específico é obtido o qual impõe uma função de covariograma exata no ruído. Em outras palavras, o covariograma experimental é exatamente igual ao teórico, o que não acontece nas técnicas usuais de simulação.

6.1 PERSPECTIVAS

A abordagem Bayesiana proposta para inversão sísmica atualmente assume distribuições Gaussianas para os erros experimentais e distribuições *a priori* das propriedades. Esta suposição possibilita o cálculo analítico das distribuições de probabilidade do amostrador de Gibbs, resultado em um algoritmo muito eficiente. Entretanto a distribuição Gaussiana não representa de forma realista as distribuições experimentais de propriedades petrofísicas. Por este motivo, o estudo de outras distribuições passíveis de tratamento analítico pode ser realizado, como a Chi-quadrado e Q-Gaussiana. Outra abordagem que também pode ser aplicada é trabalhar com as distribuições experimentais dos poços, ou definidas numericamente pela Física de Rochas juntamente com uma amostragem aleatória. Todas essas metodologias podem aprimorar a estimativa das propriedades e suas distribuições, e elucidar o quão a aproximação Gaussiana é inadequada em relação a distribuições mais realistas. Mesmo na abordagem Gaussiana, é possível estudar técnicas para aprimorar as distribuições *a priori*. Por exemplo, definir a média como um *trend* linear em função da profundidade, com objetivo de representar a deposição geológica. Uma vez que a média é variável, também pode-se estudar maneiras de definir as covariâncias das distribuições baseadas na linearização local da Física de Rochas, utilizando expansão de primeira ordem em Taylor nos valores das médias.

Uma vez que as metodologias estão validadas, é importante realizar uma análise de sensibilidade para verificar a influência dos parâmetros de entrada nos resultados como, por exemplo, volume de reser-

vatório e probabilidade de conexão, obtendo um melhor entendimento de todo o processo (CAERS, 2011). Como as metodologias de inversão propostas demandam um baixo custo computacional, será possível não apenas identificar as entradas mais relevantes, mas também analisar quais os possíveis cenários geológicos que elas representam e quais são as mais compatíveis com os dados experimentais. Mais especificamente, pretendemos desenvolver um método de amostragem baseado no Algoritmo de Metropolis para realizar múltiplos cenários dos parâmetros da inversão, buscando um melhor ajuste dos erros com a sísmica e os dados de poços. Para análise e visualização de todos os modelos de subsuperfície gerados, é necessário a aplicação de técnicas de redução de dimensionalidade. Esperamos que a abordagem irá fornecer um conhecimento aprofundado das metodologias de inversão que foram propostas, e também estimar qual cenário geológico (estratigrafia e física de rochas) é mais compatível com o dado sísmico e dados de poços.

REFERÊNCIAS

- AKI, K.; RICHARDS, P. **Quantitative Seismology**. [S.l.]: Univ Science Books, 2002. (Geology (University Science Books): Seismology). ISBN 9780935702965.
- ANDERSON, T. **An introduction to multivariate statistical analysis**. [S.l.]: Wiley, 1984. (Wiley series in probability and mathematical statistics: Probability and mathematical statistics). ISBN 9780471889878.
- ARMSTRONG, M. et al. **Plurigaussian simulations in geosciences**. [S.l.]: Springer, 2003.
- BACA, R. G.; ARNETT, R. C.; LANGFORD, D. W. Modelling fluid flow in fractured-porous rock masses by finite-element techniques. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, John Wiley & Sons, Ltd, v. 4, n. 4, p. 337–348, 1984. ISSN 1097-0363.
- BACON, M.; SIMM, R.; REDSHAW, T. **3-D Seismic Interpretation**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2003.
- BEYER, H.-G.; SCHWEFEL, H.-P. Evolution strategies: A comprehensive introduction. **Natural Computing**, Kluwer Academic Publishers, v. 1, n. 1, p. 3–52, 2002. ISSN 1567-7818.
- BOSCH, M. et al. Petrophysical seismic inversion conditioned to well-log data: Methods and application to a gas reservoir. **Geophysics**, Society of Exploration Geophysicists, v. 74, n. 2, p. O1–O15, 2009.
- BOSCH, M. et al. Petrophysical seismic inversion conditioned to well-log data: Methods and application to a gas reservoir. **Geophysics**, v. 74, n. 2, p. O1–O15, 2009.
- BOSCH, M.; MUKERJI, T.; GONZALEZ, E. Seismic inversion for reservoir properties combining statistical rock physics and geostatistics: A review. **Geophysics**, v. 75, n. 5, p. 75A165, 2010.
- BROOKS, S. et al. **Handbook of Markov Chain Monte Carlo**. [S.l.]: Taylor & Francis, 2011. (Chapman & Hall/CRC Handbooks of Modern Statistical Methods). ISBN 9781420079425.

BULAND, A.; OMRE, H. Bayesian linearized AVO inversion. **Geophysics**, v. 68, n. 1, p. 185–198, 2003.

BULAND, A.; OMRE, H. Joint AVO inversion, wavelet estimation and noise-level estimation using a spatially coupled hierarchical Bayesian model. **Geophysical Prospecting**, v. 51, n. 6, p. 531–550, 2003.

CAERS, J. **Modeling Uncertainty in the Earth Sciences**. [S.l.]: Wiley, 2011. ISBN 9781119998716.

CONTI, C. et al. Fast seismic inversion methods using ant colony optimization algorithm. **Geoscience and Remote Sensing Letters, IEEE**, v. 10, n. 5, p. 1119–1123, 2013. ISSN 1545-598X.

DARIO, G. et al. Sequential simulations of mixed discrete-continuous properties: Sequential gaussian mixture simulation. In: **Geostatistics Oslo 2012**. Dordrecht: Springer Netherlands, 2012. p. 239–250. ISBN 978-94-007-4153-9.

DE FIGUEIREDO, L. P. et al. Bayesian seismic inversion based on rock-physics prior modeling for the joint estimation of acoustic impedance, porosity and lithofacies. **Journal of Computational Physics**, v. 336, p. 128 – 142, 2017. ISSN 0021-9991.

DE FIGUEIREDO, L. P. et al. Stochastic Bayesian algorithm to a jointly acoustic inversion and wavelet estimation. In: SEG (Ed.). **SEG Technical Program Expanded Abstracts 2013**. Houston, EUA: Society of Exploration Geophysicists, 2013. p. 3273–3277.

DE FIGUEIREDO, L. P. et al. Bayesian framework to wavelet estimation and linearized acoustic inversion. **Geoscience and Remote Sensing Letters, IEEE**, v. 11, n. 12, p. 2130–2134, Dec 2014. ISSN 1545-598X.

DEUTSCH, C.; JOURNAL, A. G. **GSLIB: Geostatistical Software Library and User's Guide**. [S.l.]: Oxford University Press, 1992. (Centre de Morphologie Mathématique Fontainebleau: Les cahiers du Centre de Morphologie Mathématique de Fontainebleau).

DOYEN, P. **Seismic reservoir characterization: an earth modelling perspective**. [S.l.]: EAGE publications, 2007. (Education tour series). ISBN 9789073781771.

DVORKIN, J.; GUTIERREZ, M.; GRANA, D. **Seismic Reflections of Rock Properties**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2014. ISBN 9781107782730.

GASSMANN, F. Über die elastizität poroser medien. **Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zurich**, v. 96, p. 1–23, 1951.

GELMAN, A. et al. **Bayesian Data Analysis**. [S.l.]: Chapman & Hall/CRC, 2004. ISBN 9781584883883.

GEMAN, S.; GEMAN, D. Stochastic relaxation, Gibbs distributions, and the bayesian restoration of images. **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence**, IEEE Computer Society, Los Alamitos, CA, USA, v. 6, n. 6, p. 721–741, 1984. ISSN 0162-8828.

GILKS, W.; RICHARDSON, S.; SPIEGELHALTER, D. **Markov Chain Monte Carlo in Practice**. [S.l.]: Chapman & Hall, 1996. (Interdisciplinary Statistics). ISBN 9780412055515.

GONZÁLEZ, E. F.; MUKERJI, T.; MAVKO, G. Seismic inversion combining rock physics and multiple-point geostatistics. **GEOPHYSICS**, v. 73, n. 1, p. R11–R21, 2008.

GRANA, D. Bayesian linearized rock-physics inversion. **Geophysics**, v. 81, n. 6, p. D625–D641, 2016.

GRANA, D.; MUKERJI, T. et al. Sequential bayesian gaussian mixture linear inversion of seismic data for elastic and reservoir properties estimation. In: SOCIETY OF EXPLORATION GEOPHYSICISTS. **2012 SEG Annual Meeting**. [S.l.], 2012.

GRANA, D.; ROSSA, E. D. Probabilistic petrophysical-properties estimation integrating statistical rock physics with seismic inversion. **Geophysics**, v. 75, n. 3, p. O21–O37, 2010.

GUNNING, J.; GLINSKY, M. E. Delivery: an open-source model-based Bayesian seismic inversion program. **Computers & Geosciences**, v. 30, n. 6, p. 619–636, jul. 2004.

HASTIE, T.; TIBSHIRANI, R.; FRIEDMAN, J. **The Elements of Statistical Learning: Data Mining, Inference, and Prediction, Second Edition**. [S.l.]: Springer, 2009. (Springer Series in Statistics). ISBN 9780387848587.

HOLLAND, J. H. **Adaptation in natural and artificial systems**. Cambridge, MA, USA: MIT Press, 1992. ISBN 0-262-58111-6.

IZQUIERDO, V. B. **Uma proposta de especificação formal e fundamentação teórica para Simulated Annealing**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2000.

JEFFREYS, H. An invariant form for the prior probability in estimation problems. **Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, The Royal Society, v. 186, n. 1007, p. 453–461, 1946. ISSN 0080-4630.

JOURNAL, A. G.; GOMEZ-HERNANDEZ, J. Stochastic imaging of the wilmington clastic sequence. In: **AAPG Bulletin (American Association of Petroleum Geologists);(USA)**. [S.l.: s.n.], 1990. v. 74:5.

KENNEDY, J.; EBERHART, R. Particle swarm optimization. In: **Neural Networks, 1995. Proceedings., IEEE International Conference on**. [S.l.: s.n.], 1995. v. 4, p. 1942–1948 vol.4.

KIRKPATRICK, S.; GELATT, C. D.; VECCHI, M. P. Optimization by simulated annealing. **Science**, v. 220, n. 4598, p. 671–680, 1983.

KUSTER, G. T.; TOKSOZ, M. N. Velocity and attenuation of seismic waves in two-phase media; part 1, theoretical formulations. **Geophysics**, v. 39, n. 5, p. 587–606, 1974.

LANDAU, D.; BINDER, K. **A Guide To Monte Carlo Simulations In Statistical Physics**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2005. ISBN 9780521842389.

LANG, X.; GRANA, D. Geostatistical inversion of pre-stack seismic data for the joint estimation of facies and seismic impedances using stochastic sampling from gaussian mixture posterior distributions. **Geophysics**, 2017. In review.

LI, J.; LIN, G.; YANG, X. A frozen gaussian approximation-based multi-level particle swarm optimization for seismic inversion. **Journal of Computational Physics**, v. 296, p. 58 – 71, 2015. ISSN 0021-9991.

LINDBERG, D. V.; GRANA, D. Petro-elastic log-facies classification using the expectation–maximization algorithm and hidden markov models. **Mathematical Geosciences**, v. 47, n. 6, p. 719–752, 2015. ISSN 1874-8953.

MATHERON, G. **The Theory of Regionalized Variables and Its Applications**. [S.l.]: École nationale supérieure des mines, 1971. (Centre de Morphologie Mathématique Fontainebleau: Les cahiers du Centre de Morphologie Mathématique de Fontainebleau).

MATHERON, G. et al. Conditional simulation of the geometry of fluvio-deltaic reservoirs. society of petroleum engineers. **Society of Petroleum Engineers**, 1987.

MAVKO, G.; MUKERJI, T.; DVORKIN, J. **The Rock Physics Handbook**. Second. [S.l.]: Cambridge University Press, 2009. Cambridge Books Online. ISBN 9780511626753.

METROPOLIS, N. et al. Equation of state calculations by fast computing machines. **Journal of Chemical Physics**, v. 21, p. 1087–1092, 1953.

MOYEN, R.; DOYEN, P. M. Reservoir connectivity uncertainty from stochastic seismic inversion. In: **SEG Technical Program Expanded Abstracts 2009**. [S.l.: s.n.], 2009. p. 2378–2382.

NEWMAN, E.; BARKEMA, G. **Monte Carlo Methods in Statistical Physics**. [S.l.]: Clarendon Press, 1999. ISBN 9780198517979.

OLIVEIRA, S. et al. Nonlinear impedance inversion for attenuating media. **Geophysics**, v. 74, n. 6, 2009.

OLIVER, D. S. Moving averages for gaussian simulation in two and three dimensions. **Mathematical Geology**, v. 27, n. 8, p. 939–960, 1995. ISSN 1573-8868.

PEDERSEN, J. M.; VESTERGAARD, P. D.; ZIMMERMAN, T. Simulated annealing-based seismic inversion. In: **SEG Technical Program Expanded Abstracts 1991**. [S.l.: s.n.], 2005. p. 941–944.

PRIDE, S. R.; BERRYMAN, J. G.; HARRIS, J. M. Seismic attenuation due to wave-induced flow. **Journal of Geophysical Research: Solid Earth**, v. 109, n. B1, p. n/a–n/a, 2004. ISSN 2156-2202. B01201.

PYRCZ, M. J.; DEUTSCH, C. V. Two artifacts of probability field simulation. **Mathematical Geology**, v. 33, n. 7, p. 775–799, 2001. ISSN 1573-8868.

RAVALEC, M.; NOETINGER, B.; HU, L. The fft moving average (fft-ma) generator: An efficient numerical method for generating and conditioning gaussian simulations. **Mathematical Geology**, Kluwer Academic Publishers-Plenum Publishers, v. 32, n. 6, p. 701–723, 2000. ISSN 0882-8121.

RAY, A. et al. Robust and accelerated bayesian inversion of marine controlled-source electromagnetic data using parallel tempering. **Geophysics**, v. 78, n. 6, p. E271–E280, 2013.

READING, H. G. **Sedimentary Environments: Processes, Facies and Stratigraphy**. [S.l.]: Wiley, 1996. ISBN 9780632036271.

RIMSTAD, K.; AVSETH, P.; OMRE, H. Hierarchical Bayesian lithology/fluid prediction: A north sea case study. **Geophysics**, v. 77, n. 2, p. B69–B85, 2012.

ROBERT, C. **The Bayesian Choice: From Decision-Theoretic Foundations to Computational Implementation**. [S.l.]: Springer, 2001. (Springer Texts in Statistics). ISBN 9780387952314.

RUSSELL, B. **Introduction to Seismic Inversion Methods**. [S.l.]: Society of Exploration Geophysicists, 1988. (Course Notes Ser. : No. 27). ISBN 9780931830655.

SEN, M. K. **Seismic Inversion**. Richardson, TX, USA: Society of Petroleum Engineers, 2006. ISBN 978-1-55563-110-9.

SOARES, A. Direct sequential simulation and cosimulation. **Mathematical Geology**, v. 33, n. 8, p. 911–926, 2001. ISSN 1573-8868.

STOLT, R. H.; WEGLEIN, A. B. Migration and inversion of seismic data. **Geophysics**, v. 50, n. 12, p. 2458–2472, 1985.

TARANTOLA, A. **Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation**. [S.l.]: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2005. ISBN 9780898715729.

VIRIEUX, J.; OPERTO, S. An overview of full-waveform inversion in exploration geophysics. **Geophysics**, v. 74, n. 6, p. WCC1–WCC26, 2009.