Ben-Hur Eidt

Espaços separáveis

Florianópolis, Santa Catarina.
2017

Ben-Hur Eidt

Espaços separáveis

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao curso de Matemática do Departamento de Matemática do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Danilo Royer

Florianópolis, Santa Catarina.
2017

Ben-Hur Eidt

Espaços separáveis

Esta monografia foi julgada adequada como TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO no Curso de Matemática - Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora.

Florianópolis, 14 de novembro de 2017.

Profª. Dra. Sonia Palomino
Coordenadora do curso

Banca Examinadora:

Danilo Royer

Prof. Dr. Danilo Royer
Orientador

Matheus Cheque Bortolan.

Prof. Dr. Matheus Cheque Bortolan

Luciano Bedin

Prof. Dr. Luciano Bedin

Agradecimentos

A todos os meus amigos de Itapiranga, em especial, ao Haimon, Luiz e Yuri que em 2014, saíram da cidade junto comigo rumo à UFSC e à Kelly por todos os tererês sempre que eu voltava.

A todas as pessoas que conheci no PET-Matemática, um lugar onde aprendi muito. Em especial ao professor José Luiz Rosas Pinho, pelo exemplo de profissionalismo e humanidade.

A todos os amigos que fiz no curso de Matemática e durante minha graduação, principalmente àqueles que desde 2014 têm convivido comigo diariamente.

Ao Carlos por todas as dicas e conselhos dados.

À Sabrina por ser uma amiga sempre presente.

Ao Gabriel por sempre conseguir explicar e esclarecer, com uma humildade sem tamanho, nossas dúvidas.

Ao Mateus pelas melhores piadas matemáticas.

Ao Jean por todas as risadas dadas e pela companhia.

À minha namorada, Fernanda, pela paciência, entendimento e apoio dados, principalmente neste ano.

A todos que durante as greves do RU participavam dos corriqueiros almoços no Panela.

Aos professores Dr. Matheus Cheque Bortolan e Dr. Luciano Bedin por aceitarem o convite para compor a banca e pelo tempo dedicado a esse trabalho.

Ao meu orientador, professor Dr. Danilo Royer, por todos os conselhos dados, por todas as dúvidas tiradas e por, desde as primeiras pesquisas, confiar em mim.

Por fim, a pessoa mais importante da minha vida, minha mãe, Olga, que a muitos anos vem sendo pai e mãe, que sempre me motivou a buscar estudo, que sempre me proporcionou um amparo para tal e que acima de tudo, é meu exemplo.

Ao meu pai João (in memoriam) e à minha mãe Olga.

Resumo

Nesse texto começamos apresentando importantes espaços métricos e observando propriedades fundamentais dos mesmos, como por exemplo, a completude e a separabilidade. Em seguida, trabalhamos com espaços normados, falando um pouco da topologia deles, de operadores entre eles, de séries e de como novos resultados envolvendo a separabilidade aparecem e podem ser úteis. Com algumas hipóteses, conseguimos um primeiro teorema de classificação de espaços separáveis, através de uma imersão em l^∞.

Posteriormente estudamos espaços com a estrutura de um produto interno e, em especial, os espaços de Hilbert. Discutimos também vários resultados envolvendo conceitos relacionados a ortogonalidade. Por fim, conseguimos classificar, com exatidão, uma classe de espaços através de um teorema conhecido como Teorema de Riesz-Fischer.

Palavras-chave: Separabilidade, Espaços Normados, Espaços de Hilbert, Teorema de Riesz-Fischer.

Abstract

In this text, we start presenting important metric spaces and observing their fundamental properties, as example, the completeness and separability. After, we deal with normed spaces, talking about their topology, operators between them, series and how new results involving separability appear and can be useful. With some hypothesis, we obtain a first classification theorem about separable spaces, through a immersion in l^∞.

Posteriorly, we require that our spaces have a inner product structure and we study, in particular, the Hilbert spaces. We discuss results involving concepts associated with orthogonality. Finally, we classify a class of spaces through the Riesz-Fischer theorem.

Key-words: Separability, Normed spaces, Hilbert spaces, Riesz-Fischer theorem.

Sumário

1 Introdução

O presente trabalho é um estudo sobre espaços separáveis. Começamos estudando esse conceito no âmbito de espaços métricos, posteriormente trabalharemos com espaços normados e finalmente com espaços com produto interno, estrutura na qual, um dos principais resultados desse trabalho é enunciado. Nesse processo de enriquecer a estrutura com a qual trabalhamos, estudamos vários outros tópicos relacionados a tais estruturas e que se mostram úteis no decorrer do texto.

No Capítulo 1, a primeira seção é destinada à apresentação de alguns espaços métricos. Escolhemos essa abordagem pois ela enriquece o nosso leque de exemplos e também porque alguns desses espaços desempenham um papel fundamental no restante do trabalho. O restante do capítulo é destinado à completude e separabilidade, com ênfase nos espaços recém apresentados. Na parte final do capítulo, fazemos a transição de espaços métricos para espaços normados visando obter novos resultados, damos destaque ao Teorema 2.3.16 que é fundamental para o texto.

O Capítulo 2 é totalmente destinado aos espaços normados. Inicialmente, abordamos alguns conceitos topológicos que devido à norma e aos espaços vetoriais ganham novas caracterizações. Obtemos alguns resultados clássicos, como por exemplo, a caracterização de espaços normados de dimensão finita através da bola fechada unitária. Em seguida, os operadores entre espaços normados ganham atenção. Nessa seção surgem os conceitos de isomorfismo e isometria, além disso, caracterizamos os operadores contínuos entre espaços normados. Posteriormente, falamos sobre séries (em espaços normados), que serão especialmente úteis no último capítulo. Finalizando o Capítulo 2, mostramos que todo espaço normado separável pode ser visto, através de um isomorfismo isométrico, como subespaço de l^∞.

No terceiro e último capítulo, adicionamos a hipótese de que a norma seja induzida por um produto interno. Essa estrutura nos permite obter novos resultados, a maioria deles relacionados à questão da ortogonalidade. Também, esse é um capítulo em que usamos a teoria dos dois capítulos anteriores, seja para exemplos ou novas conclusões. Quando adicionamos a hipótese de que o espaço seja completo na métrica induzida pelo produto interno, conseguimos aprimorar ainda mais os resultados. Espaços com essa propriedades são chamados de *espaços de Hilbert*.

Comentamos também que historicamente os espaços de Hilbert demoraram para obter sua axiomatização atual. l^2 era entendido como **o** espaço de Hilbert. A axiomatização foi evoluindo com os trabalhos de von Neumann, em 1927 e os espaços de Hilbert receberam sua primeira generalização. Apesar disso, a separabilidade era tida como axiomática em espaços de Hilbert, ou seja, espaços de Hilbert, por definição, eram separáveis e o motivo disso era o bom funcionamento do processo de Gram-Schmidt. Em 1934, F. Riesz forneceu uma nova demonstração desse processo que não exigia separabilidade, foi a partir deste momento que concebemos os espaços de Hilbert na forma em que são atualmente tratados. Devido à sua similaridade com os espaços euclidianos, historicamente muitos dos teoremas geométricos consagrados receberam o mesmo nome em suas versões para espaços de Hilbert (Pitágoras, lei do paralelogramo).

Na última seção mostramos que, a menos de um isomorfismo isométrico, l^2 é o único espaço de Hilbert separável e de dimensão infinita, o que evidencia a importância desse espaço.

Sobre os pré-requisitos para a leitura do texto, Álgebra linear, Análise em $\mathbb{R}^n$ e um pouco de Análise em Espaços Métricos são suficientes para a compreensão. Os conteúdos acima mencionados podem ser encontrados em [4], [7], [8] e [6].

2 Preliminares

2.1 Alguns espaços importantes

Neste capítulo trabalharemos com espaços métricos. Começamos relembrando esse conceito.

Definição 2.1.1. *Seja X um conjunto não-vazio. Uma **métrica** em X é uma função $d : X \times X \to \mathbb{R}$ que satisfaz, $\forall x, y, z \in X$, os seguintes axiomas:*

M1: $d(x, y) \geq 0$.

M2: $d(x, y) = 0$ *se, e somente se,* $x = y$.

M3: $d(x, y) = d(y, x)$.

M4: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$. *(Essa propriedade é conhecida como desigualdade triangular).*

*Ao par (M, d) damos o nome de **espaço métrico**.*

Lembramos também que um subespaço de um espaço métrico é um subconjunto do mesmo com a métrica induzida. Introduziremos agora os principais espaços métricos com os quais trabalharemos. Assumiremos familiaridade com alguns deles, bem conhecidos, tais como $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$. Salvo menção explícita, sempre que falarmos dos espaços que serão introduzidos em seguida, consideraremos a métrica definida nessa seção. O mesmo vale para $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$, que são considerados com a métrica usual.

1. **Espaço das sequências limitadas**. Considere o conjunto de todas as sequências limitadas de números complexos. Denotamos tal conjunto por l^∞. Um elemento de l^∞ é uma sequência $x = (a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $|a_j| \leq C_x \ \forall j \in \mathbb{N}$ onde C_x é uma constante depende de x (e não depende de j). Dados $x = (a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ e $y = (b_j)_{j\in\mathbb{N}}$ em l^∞ definimos $d : l^\infty \times l^\infty \to \mathbb{R}$ dada por $d(x, y) = \sup\limits_{j\in\mathbb{N}}\{|a_j - b_j|\}$ e afirmamos que (l^∞, d) é um espaço métrico.

   Com efeito, tomando $x = (a_j)_{j\in\mathbb{N}}$,$y = (b_j)_{j\in\mathbb{N}}$ e $z = (c_j)_{j\in\mathbb{N}}$ quaisquer em l^∞ temos que:

   - $d(x, y) = \sup\limits_{j\in\mathbb{N}}\{|a_j - b_j|\} \geq 0$.

- Se $d(x,y) = \sup\limits_{j\in\mathbb{N}}\{|a_j - b_j|\} = 0$ então, como $|a_j - b_j| \geq 0$, temos $a_j = b_j$ $\forall j \in \mathbb{N}$, assim $x = y$. Se $x = y$ temos $a_j = b_j$ $\forall j \in \mathbb{N}$ logo $\sup\limits_{j\in\mathbb{N}}\{|a_j - b_j|\} = \sup\{0\} = 0$.
- $d(x,y) = \sup\limits_{j\in\mathbb{N}}\{|a_j - b_j|\} = \sup\limits_{j\in\mathbb{N}}\{|b_j - a_j|\} = d(y,x)$.
- $d(x,y) = \sup\limits_{j\in\mathbb{N}}\{|a_j - b_j|\} \leq \sup\limits_{j\in\mathbb{N}}\{|a_j - c_j| + |c_j - b_j|\} = \sup\limits_{j\in\mathbb{N}}\{|a_j - c_j|\} + \sup\limits_{j\in\mathbb{N}}\{|c_j - b_j|\}$.

Fica assim provado que (l^∞, d) é um espaço métrico.

2. **Alguns subespaços de** (l^∞, d). Denote por c o conjunto de todas as sequências de números complexos que convergem para algum ponto. Denote também por c_0 o conjunto de todas as sequências de números complexos que convergem para 0, mais especificamente, $c_0 = \{(a_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C} : a_j \to 0\}$. Ainda, denotamos por c_{00} o conjunto de todas as sequências de números complexos eventualmente nulas, ou seja, $c_{00} = \{(a_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C} :$ existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_j = 0$ se $j > j_0\}$. Observamos que das definições acima dadas decorre que $c_{00} \subseteq c_0 \subseteq c \subseteq l^\infty$ e portanto os conjuntos definidos são espaços métricos com a métrica induzida de l^∞.

3. **Espaço das sequências**. Considere M o conjunto de todas as sequências de números complexos. Defina $d : M \times M \to \mathbb{R}$ dada por $d(x,y) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j}\left(\frac{|a_j - b_j|}{1 + |a_j - b_j|}\right)$, onde $x = (a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ e $y = (b_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Observe que a série em questão converge pelo teste da comparação. Afirmamos que (M, d) é um espaço métrico.

   Note que $M1, M2$ e $M3$ são satisfeitas. Resta-nos portanto verificar a desigualdade triangular, o que será feito com o auxílio da função $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) = \dfrac{t}{1+t}$. Derivando f obtemos $f'(t) = \dfrac{1}{(1+t)^2}$. Como $f'(t) \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$ concluímos que f é crescente. Desse modo, se $p, q \in \mathbb{R}$ então $f(|p+q|) \leq f(|p| + |q|)$, ou seja,

$$\frac{|p+q|}{1+|p+q|} \leq \frac{|p|+|q|}{1+|p|+|q|} = \frac{|p|}{1+|p|+|q|} + \frac{|q|}{1+|p|+|q|} \leq \frac{|p|}{1+|p|} + \frac{|q|}{1+|q|}.$$

   Agora, considere $x = (a_j)_{j\in\mathbb{N}}$, $y = (b_j)_{j\in\mathbb{N}}$ e $z = (c_j)_{j\in\mathbb{N}}$ quaisquer em M. Fixando j, façamos $p = a_j - c_j$ e $q = c_j - b_j$. Usando a desigualdade anterior obtemos:

$$f(|p+q|) = f(|a_j - b_j|) = \frac{|a_j - b_j|}{1+|a_j - b_j|} \leq \frac{|a_j - c_j|}{1+|a_j - c_j|} + \frac{|c_j - b_j|}{1+|c_j - b_j|}.$$

   Multiplicando os dois lados da inequação acima por $\dfrac{1}{2^j}$ e posteriormente somando sobre j, de 1 até ∞, concluimos que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \left(\frac{|a_j - b_j|}{1 + |a_j - b_j|} \right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \left(\frac{|a_j - c_j|}{1 + |a_j - c_j|} \right) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \left(\frac{|c_j - b_j|}{1 + |c_j - b_j|} \right).$$

Portanto $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

4. **Espaço das funções limitadas.** Dado um conjunto A, denotamos por $B(A)$ o conjunto de todas as funções $f : A \to \mathbb{C}$ limitadas, ou seja, cuja imagem é um subconjunto limitado de $\mathbb{C}$. Afirmamos que $(B(A), d)$, onde $d : B(A) \times B(A) \to \mathbb{R}$ é dada por $d(x, y) = \sup\limits_{t \in A}\{|x(t) - y(t)|\}$, é um espaço métrico. Inicialmente, veja que d está bem definida pois $x, y \in B(A)$.

   Considere $x, y, z \in B(A)$ quaisquer. Claro que $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = d(y, x)$. Agora, se $d(x, y) = \sup\limits_{t \in A}\{|x(t) - y(t)|\} = 0$ então $x(t) - y(t) = 0$ $\forall t \in A$, de modo que $x = y$. Reciprocamente, se $x = y$ então $x(t) = y(t)$, $\forall t \in A$ e assim $d(x, y) = \sup\limits_{t \in A}\{|x(t) - y(t)|\} = 0$. Quanto à desigualdade triangular, observe que, para todo $t \in A$, temos

$$|x(t) - y(t)| \leq |x(t) - z(t)| + |z(t) - y(t)| \leq \sup_{t \in A}\{|x(t) - z(t)|\} + \sup_{t \in A}\{|z(t) - y(t)|\}.$$

   O lado direito da última inequação é cota superior para o conjunto $\{|x(t) - y(t)| : t \in A\}$, logo

$$\sup_{t \in A}\{|x(t) - y(t)|\} \leq \sup_{t \in A}\{|x(t) - z(t)|\} + \sup_{t \in A}\{|z(t) - y(t)|\}.$$

   Isso significa que $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

   Cabe aqui uma observação interessante. Escolhendo $A = \mathbb{N}$ obtemos o espaço das sequências limitadas de números complexos, visto anteriormente e denotado por l^{∞}. Em alguns casos, iremos considerar o espaço das funções limitadas com imagem em $\mathbb{R}$, que será denotado por $B(A, \mathbb{R})$. A prova de que esse é um espaço métrico é a mesma que foi feita acima.

5. **Espaço das funções contínuas com a métrica do supremo.** Mencionamos aqui também o espaço métrico das funções contínuas, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, denotado por $C[a, b]$. O espaço $C[a, b]$ é um subespaço de $B([a, b], \mathbb{R})$ (pois a imagem de um conjunto compacto por uma função contínua é também um conjunto compacto, que em particular é limitado) com a métrica induzida. Pelo Teorema de Weierstrass sobre máximos e mínimos de funções contínuas definidas em compactos, segue que $d(x, y) = \sup\limits_{t \in [a,b]}\{|x(t) - y(t)|\} = \max\limits_{t \in [a,b]}\{|x(t) - y(t)|\}$.

6. **Espaço das funções contínuas com a métrica da integral**. Seja $Y = C[0,1]$. Defina $d : Y \times Y \to \mathbb{R}$ por:

$$d(x,y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)|dt.$$

Afirmamos que (Y,d) é um espaço métrico. As propriedades $M1, M3$ e $M4$ são claras. Quanto a $M2$, se $x = y$ é claro que $d(x,y) = 0$. Resta portanto provar que se $d(x,y) = 0$ então $x = y$. Por absurdo, suponha que isso não aconteça. Assim, existe $t_0 \in [0,1]$ satisfazendo $x(t_0) \neq y(t_0)$. Pela continuidade da função $x - y$ existe $\delta > 0$ tal que $|x(t) - y(t)| \geq \dfrac{|x(t_0) - y(t_0)|}{2}$ para todo $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \cap [0,1]$ e portanto

$$d(x,y) = \int_0^{t_0-\delta} |x(t) - y(t)|dt + \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} |x(t) - y(t)|dt + \int_{t_0+\delta}^{1} |x(t) - y(t)|dt \geq$$

$$\geq \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} |x(t) - y(t)|dt \geq \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} \frac{|x(t_0) - y(t_0)|}{2}dt = \delta|x(t_0) - y(t_0)| > 0.$$

Chegamos assim em uma contradição. Segue que (Y,d) é um espaço métrico.

7. **Os espaços l^p.** Seja $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$ um número fixado. Por definição, os elementos do conjunto l^p são todas as sequências $x = (a_1, a_2, \ldots)$ de números complexos tais que a série $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |a_j|^p$ converge. Definimos $d : l^p \times l^p \to \mathbb{R}$ dada por $d(x,y) = \left(\sum\limits_{j=1}^{\infty} |a_j - b_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, onde $x = (a_1, a_2, \ldots)$ e $y = (b_1, b_2, \ldots)$. Para provarmos que (l^p, d) é um espaço métrico, recorremos aos lemas abaixo, que por sinal, serão úteis em várias ocasiões.

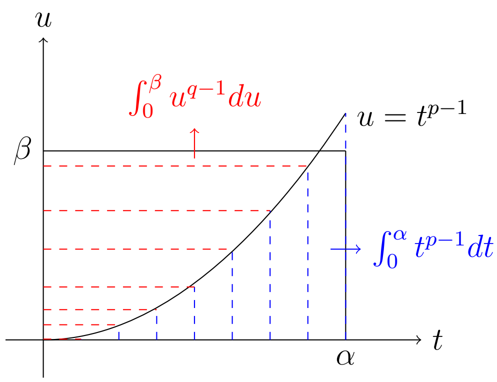
Lema 2.1.2 (Desigualdade de Hölder)**.** *Seja $p > 1$ um número real fixado. Considere q tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Dados $x = (a_j)_{j\in\mathbb{N}} \in l^p$ e $y = (b_j)_{j\in\mathbb{N}} \in l^q$ vale que:*

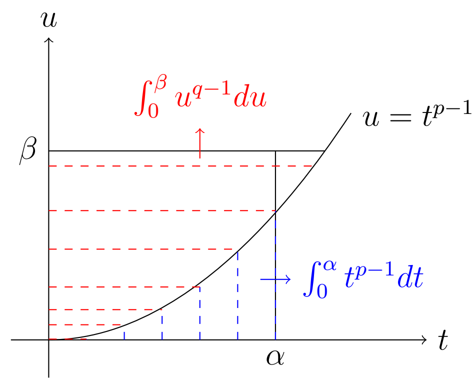
$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_j b_j| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{m=1}^{\infty} |b_m|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Demonstração. Observamos incialmente que se alguma das sequências $x = (a_j)_{j\in\mathbb{N}} \in l^p$ e $y = (b_j)_{j\in\mathbb{N}} \in l^q$ for nula, o resultado é imediato. Da igualdade $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ segue que

$$\frac{p+q}{pq} = 1; \qquad p + q = pq; \qquad (p-1)(q-1) = 1.$$

Assim, se $u = t^{p-1}$ então $t = t^{(p-1)(q-1)} = u^{q-1}$. Considerando agora $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, observamos os seguintes gráficos:





De todo modo, segue que

$$\alpha\beta \leq \int_0^\alpha t^{p-1}dt + \int_0^\beta u^{q-1}du = \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}.$$

Assim, se $x = (a_j)_{j\in\mathbb{N}} \in l^p$ e $y = (b_j)_{j\in\mathbb{N}} \in l^q$ são sequências não nulas, definimos:

$$A_j = \frac{a_j}{\left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}} \qquad e \qquad B_j = \frac{b_j}{\left(\sum_{m=1}^{\infty} |b_m|^q\right)^{\frac{1}{q}}}.$$

Observe que $|A_j|^p = \dfrac{|a_j|^p}{\left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p\right)}$, logo $\sum_{j=1}^{\infty} |A_j|^p = 1$. Do mesmo modo, $\sum_{j=1}^{\infty} |B_j|^q = 1$.

Façamos agora $\alpha = |A_j|$ e $\beta = |B_j|$. Daí $\alpha\beta = |A_jB_j| \leq \dfrac{1}{p}|A_j|^p + \dfrac{1}{q}|B_j|^q$. Somando sobre j, de 1 até ∞, obtemos:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |A_jB_j| \leq \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{\infty} |A_j|^p + \frac{1}{q}\sum_{j=1}^{\infty} |B_j|^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Substituindo A_j e B_j na inequação acima e multiplicando pelos seus denominadores concluimos que

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_jb_j| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{m=1}^{\infty} |b_m|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Fica assim provada a desigualdade de Hölder. $\square$

Observamos que na demonstração acima, quando definimos A_j e B_j, poderíamos, alternativamente, definí-los como:

$$A_j = \frac{a_j}{\left(\sum\limits_{k=1}^{N} |a_k|^p\right)^{\dfrac{1}{p}}} \qquad e \qquad B_j = \frac{b_j}{\left(\sum\limits_{m=1}^{N} |b_m|^q\right)^{\dfrac{1}{q}}}$$

para um certo natural N. O restante da demonstração seguiria analogamente e o resultado seria uma "versão finita" da desigualdade de Hölder, com o índice do somatório variando de 1 até N.

Observamos também que para $p = 1$ e $q = \infty$ temos a seguinte desigualdade:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_j b_j| \le \sum_{j=1}^{\infty} |a_j| \left(\sup_{j\in\mathbb{N}}\{|b_j|\}\right) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p\right)^{\dfrac{1}{p}} \left(\sup_{j\in\mathbb{N}}\{|b_j|\}\right).$$

Lema 2.1.3 (Desigualdade de Minkowski.). *Considere $x = (a_j)_{j\in\mathbb{N}} \in l^p$ e $y = (b_j)_{j\in\mathbb{N}} \in l^p$, onde $p \ge 1$ é fixo. Assim, vale que:*

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j + b_j|^p\right)^{\dfrac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p\right)^{\dfrac{1}{p}} + \left(\sum_{m=1}^{\infty} |b_m|^p\right)^{\dfrac{1}{p}}.$$

Demonstração. Para $p = 1$ temos $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |a_j + b_j| \le \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k| + \sum\limits_{m=1}^{\infty} |b_m|$ o que é consequência imediata da desigualdade triangular para números. Escrevemos agora $w_j = a_j + b_j$, assim $|a_j + b_j|^p = |w_j|^p = |a_j + b_j||w_j|^{p-1} \le (|a_j| + |b_j|)|w_j|^{p-1}$. Somando sobre j, de 1 até n fixo, obtemos:

$$\sum_{j=1}^{n} |w_j|^p \le \sum_{j=1}^{n} |a_j||w_j|^{p-1} + \sum_{j=1}^{n} |b_j||w_j|^{p-1}.$$

Considerando q de modo a termos $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, vale que $pq = p + q$, $pq - q = p$, ou ainda, $(p-1)q = p$. Observe que $((w_j)^{p-1})_{j\in\mathbb{N}} \in l^q$ pois $(p-1)q = p$. Aplicando a Desigualdade de Hölder (nesse caso, a versão finita) aos dois termos do lado direito da equação acima obtemos:

$$\sum_{j=1}^{n} |a_j||w_j|^{p-1} \le \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\dfrac{1}{p}} \left(\sum_{m=1}^{n} |w_m|^{(p-1)q}\right)^{\dfrac{1}{q}}.$$

$$\sum_{j=1}^{n} |b_j||w_j|^{p-1} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{m=1}^{n} |w_m|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Assim,

$$\sum_{j=1}^{n} |w_j|^p \leq \left[\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right] \left(\sum_{m=1}^{n} |w_m|^p\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Dividindo ambos os lados por $\left(\sum\limits_{m=1}^{n} |w_m|^p\right)^{\frac{1}{q}}$ e observando que $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$ obtemos:

$$\frac{\sum\limits_{j=1}^{n} |w_j|^p}{\left(\sum\limits_{m=1}^{n} |w_m|^p\right)^{\frac{1}{q}}} = \left(\sum_{j=1}^{n} |w_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{m=1}^{n} |b_m|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Agora, fazendo $n \to \infty$ observe que as séries que aparecem do lado direito da inequação convergem pois $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$, $(b_j)_{j\in\mathbb{N}} \in l^p$. Assim a série do lado esquerdo também converge (Teste da Comparação) e portanto o resultado está provado. $\square$

Estamos aptos a provar que (l^p, d) é um espaço métrico. Para tanto, consideramos $x = (a_j)_{j\in\mathbb{N}}, y = (b_j)_{j\in\mathbb{N}}$ e $z = (c_j)_{j\in\mathbb{N}} \in l^p$. Segue da desigualdade de Minkowski que $d(x, y) = \left(\sum\limits_{j=1}^{\infty} |a_j - b_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ converge. Sendo assim, é imediata a validade de $M1, M2$ e $M3$. Quanto a desigualdade triangular, usamos novamente a desigualdade de Minkowski para obter

$$d(x, y) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j - b_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} (|a_j - c_j| + |c_j - b_j|)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j - c_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{\infty} |c_j - b_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} = d(x, z) + d(z, y).$$

2.2 Completude

Para iniciar essa seção lembramos que uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sobre um espaço métrico (X, d) é dita ser convergente (para um certo $x \in X$) se $\forall\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0$, vale $d(x_n, x) < \epsilon$. Nesse caso, dizemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para x e escrevemos $x_n \to x$. Lembramos também que uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ é dita ser de Cauchy se: para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $m, n \geq n_0$ então $d(x_m, x_n) < \epsilon$. Um espaço métrico (X, d) é dito ser completo quando toda sequência de Cauchy sobre X converge para algum ponto de X. O principal objetivo dessa seção é demonstrar a completude (ou não) da maioria dos espaços recém apresentados. Ainda, lembramos que o fecho de um conjunto $M \subseteq X$ é o conjunto de todos os limites de sequências cujos elementos estão em M. O fecho de M será denotado por $\overline{M}$. Se $M = \overline{M}$ dizemos que M é fechado. Para mais informações sobre conceitos de análise, sugerimos [6]. A proposição abaixo nos dá algumas informações sobre espaços completos e seus subespaços.

Lema 2.2.1. *Todo subespaço completo de um espaço métrico é fechado. Também, todo subespaço fechado de um espaço completo é completo.*

Demonstração. Seja X um espaço métrico, $M \subseteq X$ um subespaço completo e considere $x \in \overline{M}$. Assim, existe uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M$ tal que $x_n \to x$. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy. Do fato de M ser completo segue que $x_n \to x'$ para um certo $x' \in M$. Assim $x = x'$ e $\overline{M} \subseteq M$ o que mostra que M é fechado.

Suponhamos agora M fechado de X, com X completo. Considere $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M$ uma sequência de Cauchy. Como $M \subseteq X$ e X é completo, temos $x_n \to x$ para certo $x \in X$. Como M é fechado, segue que $x \in M$. Portanto M é completo. $\square$

A seguir, iremos analisar a completude dos espaços apresentados na seção anterior. Teremos uma série de proposições que analisarão, individualmente, essa questão. Esses conceitos serão especialmente úteis no Capítulo 2, quando abordaremos os *espaços de Banach.*

Proposição 2.2.2. *O espaço l^∞ é completo.*

Demonstração. Seja $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy sobre l^∞, onde $x_m = (a_1^{(m)}, a_2^{(m)}, \ldots)$. Como $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy, para qualquer $\epsilon' > 0$ $\exists n_0' \in \mathbb{N}$ tal que se $m, n \geq n_0'$ então $d(x_m, x_n) = \sup_{j\in\mathbb{N}}\{|a_j^{(m)} - a_j^{(n)}|\} < \epsilon'$. Consequentemente se $m, n \geq n_0$

$$|a_j^{(m)} - a_j^{(n)}| < \epsilon' \ , \ \forall j \in \mathbb{N}. \tag{2.1}$$

Isto nos diz que fixado j, a sequência de números $(a_j^{(1)}, a_j^{(2)}, a_j^{(3)}, \ldots)$ é de Cauchy e portanto converge, digamos que $a_j^{(n)} \xrightarrow{n\to\infty} a_j$. Definimos agora $x = (a_1, a_2, \ldots)$. Afirmamos que $x_m \to x$ e $x \in l^\infty$.

Fixe $\epsilon > 0$. Tome $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n, m \geq n_0$ então $d(x_n, x_m) < \dfrac{\epsilon}{2}$. Dado $j \in \mathbb{N}$, tomamos $n^* \geq n_0$ tal que $|a_j^{(n^*)} - a_j| < \dfrac{\epsilon}{2}$, daí se $m \geq n_0$ temos

$$|a_j^{(m)} - a_j| \leq |a_j^{(m)} - a_j^{(n^*)}| + |a_j^{(n^*)} - a_j| < d(x_{n^*}, x_m) + |a_j^{(n^*)} - a_j| < \epsilon. \tag{2.2}$$

Portanto (2.2) é válida para todo $j \in \mathbb{N}$ e todo $m \geq n_0$, o que nos permite concluir que $d(x_m, x) = \sup\limits_{j \in \mathbb{N}} |a_j^{(m)} - a_j| \leq \epsilon$, assim $x_m \to x$. Como $x_{n_0} = (a_j^{(n_0)})_{j \in \mathbb{N}} \in l^\infty$ existe K_{n_0} tal que $|a_j^{(n_0)}| \leq K_{n_0}$ $\forall j \in \mathbb{N}$. Segue disso e da desigualdade triangular que

$$|a_j| \leq |a_j - a_j^{(n_0)}| + |a_j^{(n_0)}| < \epsilon + K_m \ \ \forall j \in \mathbb{N}.$$

Assim, $x = (a_1, a_2, \ldots)$ é limitada e $x \in l^\infty$. Concluimos que l^∞ é completo. $\square$

Proposição 2.2.3. *c é completo.*

Demonstração. Pelo Lema 2.2.1 basta provar que c é um subconjunto fechado de l^∞. Seja $x = (a_1, a_2, \ldots) \in \overline{c}$. Assim, existe uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq c$, com $x_n = (a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \ldots)$, tal que $x_n \to x$. Portanto, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0$ então $d(x_n, x) = \sup\limits_{j \in \mathbb{N}} \{|a_j^{(n)} - a_j|\} < \dfrac{\epsilon}{3}$. Dessa forma, $\forall j \in \mathbb{N}$ temos

$$|a_j^{(n_0)} - a_j| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Como $x_{n_0} \in c$, $(a_1^{(n_0)}, a_2^{(n_0)}, \ldots)$ converge, logo é de Cauchy. Existe assim $j_1 \in \mathbb{N}$ tal que se $j, k \geq j_1$ temos $|a_j^{(n_0)} - a_k^{(n_0)}| < \dfrac{\epsilon}{3}$. Então,

$$|a_j - a_k| \leq |a_j - a_j^{(n_0)}| + |a_j^{(n_0)} - a_k^{(n_0)}| + |a_k^{(n_0)} - a_k| < \epsilon \quad \text{desde que } j, k \geq j_1$$

o que mostra que $x = (a_1, a_2, \ldots)$ é uma sequência de números de Cauchy, portanto é convergente. Segue que $x \in c$ e $\overline{c} = c$. $\square$

Proposição 2.2.4. *c_0 é completo.*

Demonstração. Seja $x \in \overline{c_0}$, onde $x = (a_1, a_2, \ldots)$. Então existe uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq c_0$, com $x_n = (a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \ldots)$, tal que $x_n \to x$. Portanto, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0$ temos $d(x_n, x) = \sup\limits_{j \in \mathbb{N}} \{|a_j^{(n)} - a_j|\} < \dfrac{\epsilon}{2}$. Como consequência, para todo $j \in \mathbb{N}$ temos:

$$|a_j - a_j^{(n_0)}| \leq \sup_{j \in \mathbb{N}} \{|a_j^{(n_0)} - a_j|\} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Também, como $x_{n_0} \in c_0$, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $j \geq j_0$ vale que $|a_j^{(n_0)}| < \dfrac{\epsilon}{2}$. Logo, se $j \geq j_0$ então

$$|a_j| \leq |a_j - a_j^{(n_0)}| + |a_j^{(n_0)}| < \epsilon.$$

Segue que $a_j \to 0$ e assim c_0 é fechado de l^∞ e portanto, é completo. □

O Lema 2.2.1 também nos fornece uma estratégia simplificada para provarmos que alguns espaços não são completos, como mostra o seguinte exemplo.

Exemplo 2.2.5. *c_{00} não é completo. Vamos verificar que c_{00} não é fechado em l^∞. Para tanto considere a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $x_n = \left(1, \dfrac{1}{2}, \ldots, \dfrac{1}{n}, 0, 0, \ldots\right)$. Daí, $x_n \to x$ em l^∞, onde $x = \left(1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \ldots\right) \notin c_{00}$, visto que $d(x_n, x) = \dfrac{1}{n+1} \to 0$. Assim c_{00} não é subconjunto fechado de l^∞ e consequentemente, não é completo.*

Pois bem, finalizemos o estudo da completude com os espaços l^p e $B(A)$.

Proposição 2.2.6. *O espaço l^p é completo, para $1 \leq p < \infty$.*

Demonstração. Seja $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em l^p, onde $(x_m) = (a_1^{(m)}, a_2^{(m)}, \ldots)$. Assim, dado $\epsilon' > 0$ $\exists n_0' \in \mathbb{N}$ tal que se $m, n \geq n_0'$ então

$$d(x_m, x_n) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j^{(m)} - a_j^{(n)}|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon'. \tag{2.3}$$

Portanto, $\forall j \in \mathbb{N}$ temos que $|a_j^{(m)} - a_j^{(n)}| < \epsilon$ desde que $m, n \geq n_0'$. Isto nos diz que, fixado j, a sequência de números $(a_j^{(1)}, a_j^{(2)}, a_j^{(3)}, \ldots)$ é de Cauchy e portanto converge. Digamos que $a_j^{(m)} \xrightarrow{m\to\infty} a_j$. Definimos $x = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$. Afirmamos que $x \in l^p$ e $x_m \to x$.

Fixe $k \in \mathbb{N}$ e $\epsilon > 0$. Para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$ tome $n_j \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_i$ temos $|a_j^{(n)} - a_j|^p < \dfrac{\epsilon^p}{2^p k}$ o que é possível pois $a_j^{(m)} \xrightarrow{m\to\infty} a_j$. Também, tome $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $m, n \geq n_0$ então $d(x_m, x_n) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j^{(m)} - a_j^{(n)}|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \dfrac{\epsilon}{2}$. Seja $N = \max\{n_0, n_1, \ldots, n_k\}$. Daí, dado $n \geq N$ pela desigualdade de Minkowski vale que para todo $m \geq n_0$

$$\left(\sum_{j=1}^{k} |a_j^{(m)} - a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{k} |a_j^{(m)} - a_j^{(n)}|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{k} |a_j^{(n)} - a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Fazendo $k \to \infty$ vemos que

$$d(x_m, x) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j^{(m)} - a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \epsilon.$$

desde que $m \geq n_0$ o que mostra que $x_m \to x$. Lembrando da desigualdade de Minkowski temos

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j - a_j^{(n_0)}|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j^{(n_0)}|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

o que mostra que $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p$ converge e assim $x \in l^p$. $\square$

Proposição 2.2.7. *O espaço $B(A)$ é completo.*

Demonstração. Seja $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $B(A)$. Daí, $\forall \epsilon' > 0$ existe $n_0' \in \mathbb{N}$ tal que se $m, n \geq n_0'$ temos:

$$d(x_m, x_n) = \sup_{t\in A}\{|x_m(t) - x_n(t)|\} < \epsilon'.$$

Portanto, para t fixo, temos

$$|x_m(t) - x_n(t)| < \epsilon'$$

garantindo que $(x_1(t), x_2(t), \ldots)$ é de Cauchy em $\mathbb{C}$. Como $\mathbb{C}$ é completo, segue que a mesma converge, digamos que $x_n(t) \xrightarrow{n\to\infty} x(t)$. Desse modo a cada $t \in A$ associamos o número real $x(t)$, ficando assim definida pontualmente uma função $x : A \to \mathbb{C}$. Afirmamos que $x_m \to x$ e que $x \in B(A)$.

Fixado $\epsilon > 0$, tomamos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $m, n \geq n_0$ temos $d(x_m, x_n) < \frac{\epsilon}{2}$. Agora, para cada t fixo, considere também $n \geq n_0$ tal que $|x_n(t) - x(t)| < \frac{\epsilon}{2}$. Daí, se $m \geq n_0$ obtemos

$$|x_m(t) - x(t)| = |x_m(t) - x_n(t)| + |x_n(t) - x(t)| \leq d(x_m, x_n) + |x_n(t) - x(t)| < \epsilon.$$

Como a desigualdade acima é válida para todo $t \in A$

$$\sup_{t\in A}\{|x_m(t) - x(t)|\} \leq \epsilon \quad (m \geq n_0)$$

o que garante que $x_m \to x$. Também, do que foi feito acima, podemos concluir que $|x(t)| \leq |x(t) - x_{n_0}(t)| + |x_{n_0}(t)| \leq \epsilon + K_{n_0}$ onde K_{n_0} é uma constante, mostrando que $x \in B(A)$ e que $B(A)$ é completo. $\square$

O Lema 2.2.1 pode ser novamente usado para demonstrar o seguinte corolário.

Corolario 2.2.8. *$C[a, b]$, com a métrica do supremo, é completo.*

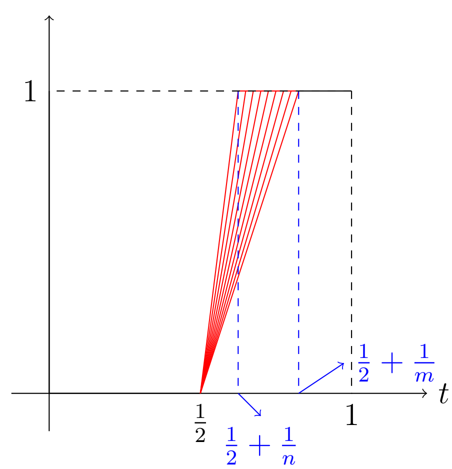
Demonstração. Seja $x \in \overline{C[a,b]}$, logo existe uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C[a,b]$ tal que $x_n \to x$ em $B[a,b]$. Isso nos diz que $\forall \epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0$ temos $d(x_n, x) = \sup_{t\in[a,b]} |x_n(t) - x(t)| < \epsilon$. Portanto, $|x_n(t) - x(t)| < \epsilon$ para todo $t \in [a,b]$ e $n \geq n_0$, o que significa que $x_n \to x$ uniformemente em $[a,b]$. Como o limite uniforme de uma sequência de funções contínuas é também uma função contínua, segue que $C[a,b]$ é fechado em $B[a,b]$ (e assim completo). □

Certamente o leitor percebe que além do espaço em questão, a métrica do espaço influencia no fato do espaço ser ou não completo. No colorário acima vimos que a métrica do supremo torna $C[a,b]$ completo. Abaixo, como último item dessa seção, veremos que métrica da integral torna $C[0,1]$ um espaço métrico não completo.

Exemplo 2.2.9. *Em $C[0,1]$, com a métrica da integral, consideremos a sequência $(x_n)_{n\geq 2}$ dada por*

$$x_n(t) = \begin{cases} 0 \ \ se \ t \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right). \\ nt - \dfrac{n}{2} \ \ se \ t \in \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n}\right). \\ 1 \ \ se \ t \in \left[\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n}, 1\right]. \end{cases}$$

Para $n > m$ temos graficamente o seguinte:



Veja que a distância entre x_m e x_n é área hachurada do triângulo maior na figura acima. Daí, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy pois dado $\epsilon > 0$ tomamos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{n_0} < \epsilon$, de modo que se $n > m > n_0$ então $d(x_m, x_n) = \dfrac{\frac{1}{m} - \frac{1}{n}}{2} < \epsilon$.

Afirmamos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não converge. Para tanto, vejamos que para todo $x \in C[0,1]$

$$d(x_n,x) = \int_0^{\frac{1}{2}} |x_n(t)-x(t)|dt + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} |x_n(t)-x(t)|dt + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^{1} |x_n(t)-x(t)|dt =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} |x(t)|dt + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} |x_n(t)-x(t)|dt + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^{1} |1-x(t)|dt.$$

Como cada integrando é positivo, assim são os valores das integrais. Portanto se $d(x_n,x) \to 0$ *cada integral deve convergir para* 0. *Como* x *é contínua, devemos ter* $x(t) = 0$ *se* $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ *e* $x(t) = 1$ *se* $t \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$, *o que é impossível. Segue que a sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *não converge para uma função de* $C[0,1]$. *Um exemplo idêntico garante que* $C[a,b]$ *com a métrica da integral também não é completo.*

2.3 Separabilidade

Iremos estudar agora o conceito de separabilidade e, assim como na seção anterior, daremos ênfase a separabilidade dos espaços apresentados na Seção 1. Em geral, espaços separáveis (ver definição a seguir) possuem propriedades que facilitam sua manipulação e tornam a teoria mais rica.

Definição 2.3.1. *Um espaço métrico* (M,d) *é dito separável se possui um subconjunto denso e enumerável (ou seja se existe* $X \subset M$ *enumerável com* $\overline{X} = M$*).*

Exemplo 2.3.2. *Para* $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^n$ *é separável pois* $\mathbb{Q}^n$ *é um subconjunto enumerável e denso em* $\mathbb{R}^n$.

Proposição 2.3.3. *O espaço* l^p, *com* $1 \leq p < \infty$ *é separável.*

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$ defina M_n como o conjunto de todas as sequências da forma $(a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, 0\ldots)$ em que $a_i \in \mathbb{Q}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Observe que M_n é enumerável. Definimos agora $M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$ que é enumerável pois é uma união enumerável de conjuntos enumeráveis. Afirmamos que $\overline{M} = l^p$.

Com efeito, considere $x = (a_j)_{j\in\mathbb{N}} \in l^p$. Daí, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{j=n_0+1}^{\infty} |a_j|^p < \frac{\epsilon^p}{2}$ visto que $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p$ converge.

Como $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, para cada a_j existe $b_j \in \mathbb{Q}$ tal que $|a_j - b_j| < \frac{\epsilon}{(2n_0)^{\frac{1}{p}}}$. Podemos assim obter $y \in M$, com $y = (b_1, b_2, \ldots, b_{n_0}, 0, 0, \ldots)$ tal que $\sum_{j=1}^{n_0} |a_j - b_j|^p < \frac{\epsilon^p}{2}$. Segue que

$$d(x,y)^p = \sum_{j=1}^{\infty} |a_j - b_j|^p = \sum_{j=1}^{n_0} |a_j - b_j|^p + \sum_{j=n_0+1}^{\infty} |a_j|^p < \epsilon^p.$$

Assim M é denso em l^p e portanto l^p é separável. $\square$

Proposição 2.3.4. *Seja X um conjunto infinito. Então, $B(X)$ não é separável.*

Demonstração. Iremos provar que todo subconjunto de $B(X)$ que é denso em $B(X)$ deve obrigatoriamente ser não-enumerável. Com efeito, para cada $Y \subseteq X$ defina a função

$$f_Y : X \to \mathbb{C} \text{ dada por } f_Y(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \in Y \\ 0 \text{ se } x \notin Y \end{cases}.$$

Seja A o conjunto de todas as funções dessa forma. A quantidade de funções definidas assim é não enumerável pois está em bijeção com $P(X)$ e como X é infinito, segue que $P(X)$ é não enumerável. Observe que dados $Y_1, Y_2 \subseteq X$ subconjuntos distintos, temos $f_{Y_1} \neq f_{Y_2}$ e assim $d(f_{Y_1}, f_{Y_2}) = 1$ devido a métrica de $B(X)$. Agora, para cada $f \in A$ defina $B_f = B\left(f, \frac{1}{2}\right)$. Observe que essas bolas não se intersectam e que existe uma quantidade não enumerável delas. Dessa forma, se $M \subseteq B(X)$ é denso em $B(X)$ então há pelo menos um ponto de M em cada uma dessas bolas e assim M é não enumerável, como queríamos. Segue que $B(X)$ não é separável. $\square$

Corolario 2.3.5. *O espaço l^∞ não é separável.*

Demonstração. Basta tomar $X = \mathbb{N}$ na proposição anterior. $\square$

Apresentaremos agora, uma equivalência do conceito de separabilidade válida em qualquer espaço métrico. Antes disso, lembramos que uma coleção β de conjuntos abertos de um espaço métrico M é dita uma **base de abertos** para M se todo aberto $A \subseteq M$ pode ser escrito como $A = \bigcup_{\lambda \in I} B_\lambda$ onde $B_\lambda \in \beta$ e λ varia num conjunto I de índices. Equivalentemente, β é uma base de abertos se, dados A aberto de M e $x \in A$ qualquer existe $B \in \beta$ tal que $x \in B \subseteq A$. Se a coleção β for enumerável, diremos que M possui uma **base enumerável de abertos**.

Teorema 2.3.6. *Seja (M, d) um espaço métrico. São equivalentes:*

1. *M é separável.*

2. *M possui uma base enumerável de abertos.*

3. *Toda cobertura aberta de M possui uma subcobertura enumerável.*

Demonstração. $1 \Rightarrow 2$. Seja $X \subseteq M$ um subconjunto denso e enumerável cuja existência é garantida pela hipótese. Fixado $x \in X$ e $r \in \mathbb{Q}$ considere a bola $B(x, r)$. Seja β a coleção de todas as bolas da forma $B(x, r)$ para $x \in X$ e $r \in \mathbb{Q}$. Observe que β assim definido é enumerável (união enumerável de enumeráveis). Afirmamos que β é uma base para M. Para tanto, considere A aberto de M e $a \in A$ qualquer. Do fato de A ser aberto e da densidade de X podemos obter $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$ tal que $B(a, 2r) \subseteq A$ e $y \in X$ tal que $d(y, a) < r$. Observe que $B(y, r) \in \beta$. Além disso, se $z \in B(y, r)$ então $d(z, a) \leq d(z, y) + d(y, a) < 2r$. Logo $B(y, r) \subseteq B(a, 2r)$. Portanto $a \in B(y, r) \subseteq B(a, 2r) \subseteq A$ e assim β é uma base enumerável de abertos para M.

$2 \Rightarrow 3$ Seja β uma base enumerável de abertos para M e considere ζ uma cobertura aberta de M. Seja também β' a sub coleção de β formada pelos abertos de β que estão contidos em algum conjunto de ζ. Observe que β' é enumerável pois assim é β. Agora, a cada $B' \in \beta'$ associamos um conjunto $C' \in \zeta$ tal que $B' \subseteq C'$. Assim, a coleção dos conjuntos C' escolhidos é enumerável, chamemos de ζ' tal coleção. Afirmamos que ζ' é uma cobertura de M, com efeito, dado $x \in M$ existe $C \in \zeta$ tal que $x \in C$. Como β é uma base existe $B' \in \beta$ tal que $x \in B' \subseteq C$, portanto $B' \in \beta'$ e temos associado a ele um conjunto $C' \in \zeta'$ com $B' \subseteq C'$. Assim $x \in C'$ como queríamos.

$3 \Rightarrow 1$ Fixe $n \in \mathbb{N}$. A coleção de todas as bolas abertas de centro em um ponto de M e raio $\frac{1}{n}$ constitui uma cobertura de abertos para M, da qual podemos extrair uma subcobertura enumerável por hipótese. Os centros das bolas dessa sub-cobertura constituem também um conjunto enumerável, denotemos-o por E_n. Defina $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ que é enumerável por ser uma união enumerável de conjuntos enumeráveis. Quanto a densidade, dados $x \in M$ e $\epsilon > 0$ tomamos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{n_0} < \epsilon$. Escreva $E_{n_0} = \{x_{1_{n_0}}, x_{2_{n_0}}, \ldots\}$, assim a coleção formada pelas bolas $B\left(x_{1_{n_0}}, \dfrac{1}{n_0}\right), B\left(x_{2_{n_0}}, \dfrac{1}{n_0}\right), \ldots$ cobre M, de modo que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B\left(x_{k_{n_0}}, \dfrac{1}{n_0}\right)$. Portanto $d(x, x_{k_{n_0}}) < \dfrac{1}{n_0} < \epsilon$, assim $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ é denso em M. $\square$.

Da proposição acima podemos obter o seguinte,

Corolario 2.3.7. *Seja (M, d) um espaço métrico. As seguintes afirmações são válidas:*

1. *Se M é compacto então M é separável.*

2. *Se M for separável então todo subespaço de M também é separável.*

Demonstração. Quanto a primeira afirmação, se M é compacto, toda cobertura aberta admite subcobertura finita, em particular, enumerável. Assim, o item c) da proposição anterior é satisfeito e M é separável.

Vamos demonstrar 2. Seja β uma base enumerável de abertos para M e X um subespaço de M. Seja β^* a coleção dos conjuntos da forma $B \cap X$ para $B \in \beta$. Afirmamos que β^* é uma base enumerável de abertos para X. Com efeito, todo aberto de X é da forma $A \cap X$ com A aberto de M. Como $A = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} B_n$ com $B_n \in \beta$ temos $A \cap X = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} (B_n \cap X)$. □

A recíproca do item 1 do corolário não é verdadeira, pois por exemplo, $\mathbb{R}$ é separável mas não é compacto, já que em particular não é limitado. O item 2 juntamente com o fato de M ser um subespaço de si mesmo nos conta que M é separável se e somente se todo subespaço de M o for.

No âmbito de buscarmos mais alguns resultados sobre separabilidade iremos enriquecer um pouco a estrutura e que estamos trabalhando (inclusive, essa prática se repetirá algumas vezes ainda). O leitor deve ter percebido que tudo que fizemos até agora exigia apenas uma métrica no espaço. Adicionaremos agora a hipótese de que a métrica seja induzida por uma norma, ou seja, vamos considerar **espaços normados**.

Definição 2.3.8. *Seja X um espaço vetorial. Uma* ***norma*** *em X é uma função $\| \ \| : X \to \mathbb{R}$ que satisfaz, $\forall x, y \in X$ e α escalar:*

N1: $\|x\| \geq 0$ *sendo que* $\|x\| = 0$ *se, e somente se,* $x = 0$.

N2: $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$.

N3: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Nesse caso, o par $(X, \| \ \|)$ é dito ser um espaço vetorial normado, ou simplesmente, um ***espaço normado****.*

Nesse texto consideraremos apenas espaços normados sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ficando sub-entendido essa informação sempre que usarmos o termo espaço normado. Dos axiomas definidos, segue que toda norma define uma métrica, d, dada por $d(x, y) = \|x - y\|$. Nesse caso dizemos que d é induzida por $\| \ \|$. Desse modo, o conceito de espaços completos faz sentido em espaços normados. Espaços normados que são completos em relação a métrica induzida pela norma são chamados de **Espaços de Banach**.

A noção de norma é mais profunda do que a de métrica pois estamos dando a ideia de "tamanho" de um elemento do espaço, enquanto a noção de métrica nos permite apenas comparar distância entre os elementos, podendo não saber o seu "tamanho". Métricas induzidas por normas tem algumas propriedades adicionais. Por exemplo, uma métrica d em um espaço vetorial X, induzida por uma norma $\| \ \|$, satisfaz, $\forall x, y, z \in X$ e $\forall t$ escalar:

- $d(x + z, y + z) = \|x + z - (y + z)\| = \|x - y\| = d(x, y)$

- $d(tx, ty) = \|tx - ty\| = |t|\|x - y\| = |t|d(x, y)$.

É interessante observar que se as duas propriedades acima são satisfeitas por uma distância d num espaço vetorial então podemos induzir uma norma colocando $\|x\| = d(x, 0)$ e obteremos assim um espaço normado. Vejamos através dos exemplos da primeira seção, como algumas métricas são oriundas de uma norma. Porém, antes disso, vamos ver que nem toda métrica é induzida por uma norma. Consequentemente nem todo espaço métrico é um espaço normado (na verdade, a discrepância entre espaços métricos e normados não é referente apenas à noção de métrica ou norma, é sempre bom ter em mente que um espaço métrico é apenas um **conjunto** com uma métrica, enquanto isso, um espaço normado é um **espaço vetorial** com uma norma.) Assim, qualquer espaço métrico (M, d) tal que M não é um espaço vetorial não é um espaço normado.

Exemplo 2.3.9. *Consideremos o espaço métrico das sequências, definido na primeira seção, cuja métrica é dada por* $d(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j}\left(\frac{|a_j - b_j|}{1 + |a_j - b_j|}\right)$. *Estamos considerando-o agora como espaço vetorial com as operações habituais de sequências. Supomos que tal espaço seja normado e consideramos* $x = (1, 0, 0 \ldots)$, $y = (0, 0, \ldots)$ *e* $t = 3$. *Daí,* $3d(x, y) = \frac{3}{4}$ *enquanto* $d(3x, 3y) = \frac{3}{8}$, *o que não poderia acontecer. Portanto tal espaço não é normado.*

Exemplo 2.3.10. *Em* l^∞, *considerado como um espaço vetorial com as operações habituais de sequências, consideramos a norma* $\|x\| = \sup_{j \in \mathbb{N}}\{|a_j|\}$, *onde* $x = (a_1, a_2, \ldots)$ *(veja que de fato os axiomas são satisfeitos). Observe também que a norma acima definida induz a métrica definida na primeira seção e que torna* l^∞ *completo. Assim,* l^∞ *é um espaço de Banach. Observe também que os subespaços (métricos)* c_{00}, c_0 *e* c *são todos subespaços (vetoriais) de* l^∞ *o que decorre das propriedades das operações de sequências. O que mostramos nas Proposições 2.2.3, 2.2.4 e no Exemplo 2.2.5 garante que* c_0 *e* c *são espaços de Banach enquanto* c_{00} *não o é.*

Exemplo 2.3.11. *Em* l^p, *observamos primeiro que a desigualdade de Minkowski garante que a soma (usual) de dois elementos de* l^p *pertence a* l^p. *Também é verdade que, se* $x \in l^p$ *então* $\alpha x \in l^p$ *para todo escalar* α. *Definimos aqui a norma dada por:*

$$\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{onde } x = (a_j)_{j \in \mathbb{N}}.$$

Novamente com a ajuda da desigualdade de Minkowski vemos que os axiomas de norma são de fato satisfeitos, bem como que a norma coincide com a métrica definida anteriormente que o torna completo. Segue que l^p *é um espaço de Banach.*

Exemplo 2.3.12. *Consideramos agora $C[a,b]$, visto com as operações usuais de funções e com a métrica do supremo. É imediato que a métrica do supremo é induzida pela seguinte norma:*

$$\|x\| = \max_{t\in[a,b]}\{|x(t)|\}.$$

A Proposição 2.2.7 garante que $C[a,b]$ é um espaço de Banach.

Exemplo 2.3.13. *O espaço $C[0,1]$ visto com as operações usuais de funções e com a métrica da integral é um espaço normado, cuja norma é dada por:*

$$\|x\| = \int_0^1 |x(t)|dt$$

e induz a métrica da integral já definida. O Exemplo 2.2.9 garante que esse não é um espaço de Banach por não ser completo. O mesmo vale para $C[a,b]$ com a métrica da integral.

Para diferenciar as duas normas acima escreveremos $(C[a,b], \|\ \|_\infty)$ quando nos referirmos a norma do supremo e escreveremos explicitamente quando estivermos falando da norma da integral. Também, em situações que envolvem normas em variados espaços simultaneamente, poderemos anexar ao símbolo padrão de norma, $\|\ \|$, um índice referente ao espaço com o qual estamos calculando-a. Por exemplo, $\|\ \|_{l^p}$ denota a norma padrão de l^p.

Provemos agora a continuidade da função norma. Isso facilitará algumas manipulações algébricas futuramente.

Lema 2.3.14. *Seja $(E, \|\ \|)$ um espaço normado. A norma $\|\ \| : E \to \mathbb{R}$ é uma função contínua.*

Demonstração. Veja que $\forall x, y \in E$ temos $\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$, ou seja, $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$. Analogamente, $\|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|$, logo $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$. Portanto, dado $\epsilon > 0$ tomamos $\delta = \epsilon$, se $\|x - y\| < \delta$ então $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| < \delta = \epsilon$, o que prova continuidade da norma. □

Voltando a separabilidade, podemos provar o seguinte teorema:

Teorema 2.3.15. *Todo espaço normado de dimensão finita é separável.*

Demonstração. Considerando $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base para o espaço normado X o conjunto $A = \left\{ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j;\ \text{com } \alpha_j \in \mathbb{Q}\ \forall j \in \{1, \ldots, n\} \right\}$ é enumerável e denso em X se X for um $\mathbb{R}$-espaço vetorial. Com efeito, fixado $\epsilon > 0$ e escolhendo $y \in X$ arbitrário escrevemos

$y = \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j$ para certos $\beta_1, \ldots, \beta_n$ escalares. Escolhemos agora $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{Q}$ tais que para todo $j = 1, \ldots, n$ vale

$$|\alpha_j - \beta_j| < \frac{\epsilon}{\max\limits_{j=1,\ldots,n} \{\|e_j\|\}} \cdot \frac{1}{n}$$

o que é possível pois $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$. Escrevendo $x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j$, observamos que $x \in A$. Além disso,

$$\|x - y\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j - \beta_j) e_j \right\| \leq |\alpha_1 - \beta_1| \|e_1\| + \ldots + |\alpha_n - \beta_n| \|e_n\|.$$

Temos ainda que

$$|\alpha_1 - \beta_1| \|e_1\| + \ldots + |\alpha_n - \beta_n| \|e_n\| \leq |\alpha_1 - \beta_1| \max_{j=1,\ldots,n} \{\|e_j\|\} + \ldots + |\alpha_n - \beta_n| \max_{j=1,\ldots,n} \{\|e_j\|\}.$$

Desse modo,

$$\|x - y\| \leq |\alpha_1 - \beta_1| \|e_1\| + \ldots + |\alpha_n - \beta_n| \|e_n\| \leq \overbrace{\frac{\epsilon}{n} + \ldots + \frac{\epsilon}{n}}^{n \text{ vezes}} = \epsilon.$$

A enumerabilidade de A segue da enumerabilidade de $\mathbb{Q}$ e da dimensão finita de X. Se X for um $\mathbb{C}-$espaço vetorial consideremos em vez de $\mathbb{Q}$ o conjunto $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q} = \{p + iq : \; p, q \in \mathbb{Q}\}$ na definição de A. Como $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{C}$ e também enumerável a demonstração segue analogamente. $\square$

Na demonstração acima, poderíamos também ter normalizado a base no início da demonstração para deixar as contas um pouco mais amenas. Para finalizar essa seção, demonstraremos um teorema de fundamental importância nesse trabalho que aparecerá com bastante frequência no decorrer do texto. Trata-se de uma equivalência sobre espaços normados separáveis (já mostramos uma válida em espaços métricos no Teorema 2.3.6).

Teorema 2.3.16. *Um espaço normado E é separável se, e somente se, existe um subconjunto enumerável $A \subset E$ tal que $spanA$ é denso em E.*

Demonstração. Se E é separável, existe $A \subseteq E$ denso e enumerável. Observe que $E = \overline{A} \subseteq \overline{spanA} \subseteq E$. Assim $spanA$ é denso em E. Reciprocamente supomos que existe $A \subseteq E$ enumerável tal que $\overline{spanA} = E$. Defina B como o conjunto de todas as combinação lineares finitas de elementos de A com coeficientes em $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ (para $\mathbb{R}$-espaço vetorial ou $\mathbb{C}$-espaço vetorial, respectivamente).

Fixado $n \in \mathbb{N}$, o conjunto das combinações lineares de n elementos de A com coeficientes em $\mathbb{Q}$ (ou $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$) é enumerável. Assim B é enumerável pois é uma união enumerável de enumeráveis.

Quanto a densidade de B, consideramos $x \in E$ e $\epsilon > 0$. Como $\overline{spanA} = E$ existe $y_0 \in spanA$ tal que $\|x - y_0\| \leq \frac{\epsilon}{2}$ onde $y_0 = \sum_{j=1}^{k} b_j x_j$, $k \in \mathbb{N}$, $b_1, \ldots, b_k \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) e $x_1, \ldots, x_k \in A$. Da densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$ (ou de $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ em $\mathbb{C}$) existem $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{Q}$ (ou $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$) tais que $|a_j - b_j| < \dfrac{\epsilon}{2\left(1 + \sum_{i=1}^{k} \|x_i\|\right)}$ para todo $j = 1, \ldots, k$. Tomando $y = \sum_{j=1}^{k} a_j x_j$ temos $y \in B$ e além disso:

$$\|x - y\| \leq \|x - y_0\| + \|y_0 - y\| \leq \frac{\epsilon}{2} + \|(b_1 - a_1)x_1 + \ldots + (b_k - a_k)x_k\| \leq$$

$$\leq \frac{\epsilon}{2} + \max_{j=1,\ldots,k}\{|b_j - a_j|\}(\|x_1\| + \ldots \|x_k\|) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon\left(\sum_{i=1}^{k} \|x_i\|\right)}{2\left(1 + \sum_{i=1}^{k} \|x_i\|\right)} \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

como desejávamos. □

Corolario 2.3.17. *O espaço c_0 é separável.*

Demonstração. Para cada n seja $e_n = (\overbrace{0}^{1}, \ldots, \overbrace{1}^{n}, \overbrace{0}^{n+1}, \ldots) \in c_0$, ou seja, e_n possui a n-ésima coordenada igual a 1 e as demais são nulas. Seja $A = \{e_1, e_2, \ldots\}$. Dado $x = (a_j)_{j \in \mathbb{N}} \in c_0$ considere $x_n = \sum_{j=1}^{n} a_j e_j$. Assim $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq spanA$ e

$$\lim_{k \to \infty} \left\| x - \sum_{j=1}^{k} a_j e_j \right\| = \lim_{k \to \infty} \|(0, 0, \ldots, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots)\| = \lim_{k \to \infty} \sup_{j > k}\{|a_j|\} = 0$$

onde a última igualdade é válida pois $a_j \to 0$. Assim $x_n \to x$ e $x \in \overline{spanA}$. O Teorema 2.3.16 garante que c_0 é separável. □

O corolário acima garante também que c_{00} é separável por ser um subespaço de c_0.

Corolario 2.3.18. *O espaço $(C[a,b], \|\ \|_\infty)$ é separável.*

Demonstração. Seja $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ onde para cada $n \in \mathbb{N}$ temos $x_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por $x_n(t) = t^n$. Observe que $A \subseteq C[a,b]$ e $spanA$ é o conjunto de todos os polinômios. Pelo teorema de Stone-Weierstrass (veja, por exemplo, [8]) temos que $\overline{spanA} = C[a,b]$ e assim $C[a,b]$ é separável pelo Teorema 2.3.16.□

3 Espaços normados

3.1 Topologia dos espaços normados

No final do capítulo anterior, introduzimos os espaços normados e já obtivemos alguns resultados interessantes. Comecemos esse capítulo explorando um pouco da topologia desses espaços.

Lema 3.1.1. *Seja $\{x_1, \ldots, x_n\}$ um conjunto linearmente independente de um espaço normado X. Assim, existe uma constante $c > 0$ tal que para quaisquer $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ escalares temos $\|\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n\| \geq c\,(|\alpha_1| + \ldots + |\alpha_n|)$.*

Demonstração. Se $s = |\alpha_1| + \ldots + |\alpha_n| = 0$ então todos os escalares em questão são nulos e a desigualdade é válida para qualquer constante positiva. Suponha então $s > 0$ e façamos $\beta_j = \dfrac{|\alpha_j|}{s}$. Assim obtemos a seguinte desigualdade:

$$\|\beta_1 x_1 + \ldots + \beta_n x_n\| \geq c$$

com $\sum\limits_{j=1}^{n} |\beta_j| = 1$. Desse modo, é suficiente mostrarmos que existe uma constante $c > 0$ tal que a desigualdade acima é satisfeita para todo n-upla de escalares $\beta_1, \ldots, \beta_n$ tais que $\sum\limits_{j=1}^{n} |\beta_j| = 1$. Suponha por absurdo que não seja assim. Daí para cada $m \in \mathbb{N}$ existem escalares $\beta_1^{(m)}, \ldots, \beta_n^{(m)}$ tais que:

$$\|\beta_1^{(m)} x_1 + \ldots + \beta_n^{(m)} x_n\| \leq \frac{1}{m} \qquad \text{e} \qquad \sum_{j=1}^{n} |\beta_j^{(m)}| = 1.$$

Obtemos uma sequência $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$, onde $y_m = \beta_1^{(m)} x_1 + \ldots \beta_n^{(m)} x_n$ é tal que $\|y_m\| \xrightarrow{m\to\infty} 0$. Agora, como $\sum\limits_{j=1}^{n} |\beta_j^{(m)}| = 1$ vem que $|\beta_j^{(m)}| \leq 1\ \forall j \in \mathbb{N}$. Fixando j, observamos que $(\beta_j^{(1)}, \beta_j^{(2)}, \ldots) = (\beta_j^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada e assim admite subsequência convergente. Então, $(\beta_1^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ possui subsequência convergente, digamos que a mesma convirja para β_1 e denotamos por $(y_{1,m})_{m\in\mathbb{N}}$ a subsequência de $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ correspondente, no sentido que $(y_{1,m})_{m\in\mathbb{N}}$ contém apenas vetores cujos coeficientes de x_1 são aqueles que aparecem na subsequência convergente. Novamente pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass a sequência $(y_{1,m})_{m\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência $(y_{2,m})_{m\in\mathbb{N}}$ tal que a subsequência correspondente de $(\beta_2^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ convirja, digamos para β_2. Após n etapas produziremos uma subsequência $y_{n,m} = (y_{n,1}, y_{n,2} \ldots)$ de y_m tal que:

$$y_{n,m} = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j^{(m)} x_j \quad \text{com} \quad \sum_{j=1}^{n} |\gamma_j^{(m)}| = 1 \quad \text{e} \quad \gamma_j^{(m)} \xrightarrow{m\to\infty} \beta_j.$$

Consequentemente temos $y_{n,m} \xrightarrow{m\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j x_j := y$, onde $\sum\limits_{j=1}^{n} |\beta_j| = 1$. Assim existe ao menos um número $j \in \mathbb{N}$ com $1 \leq j \leq n$ tal que $\beta_j \neq 0$. Como $\{x_1, \ldots, x_n\}$ é L.I temos $y \neq 0$. Por outro lado, como $y_{n,m} \to y$ segue da continuidade da norma que $\|y_{n,m}\| \to \|y\|$. Como $\|y_m\| \to 0$ e $y_{n,m}$ é subsequência de y_m temos que $\|y\| = 0$ e assim $y = 0$ o que é um absurdo. Fica assim provada a proposição. □

Teorema 3.1.2. *Todo espaço normado Y de dimensão finita é completo.*

Demonstração. Seja $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em Y, $n \in \mathbb{N}$ tal que $\dim Y = n$ e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base para Y. Assim, cada elemento da sequência $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ pode ser escrito como

$$y_m = \alpha_1^{(m)} e_1 + \ldots + \alpha_n^{(m)} e_n$$

onde $\alpha_1^{(m)}, \ldots, \alpha_n^{(m)}$ são escalares. Agora, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $m, r \geq n_0$ então $\|y_m - y_r\| < \epsilon$. Juntamente com o lema anterior podemos obter $c > 0$ e escrever

$$c \cdot \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)}| \leq \left\| \sum_{j=1}^{n} \left(\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)} \right) e_j \right\| = \|y_m - y_r\| < \epsilon$$

ou ainda, conforme é de nosso interesse, obter a seguinte desigualdade, que é valida desde que $m, r \geq n_0$

$$|\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)}| \leq \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)}| < \frac{\epsilon}{c}.$$

A inequação acima nos mostra que, fixado j, a sequência $(\alpha_j^{(1)}, \alpha_j^{(2)}, \ldots)$ é de Cauchy e portanto converge. Digamos que $\alpha_j^{(m)} \xrightarrow{m\to\infty} \alpha_j$. Definimos agora $y = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n$. Pela escolha dos escalares temos que $y \in Y$ e além disso

$$\|y_m - y\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} \left(\alpha_j^{(m)} - \alpha_j \right) e_j \right\| \leq \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j^{(m)} - \alpha_j| \|e_j\|.$$

Como $\alpha_j^{(m)} \xrightarrow{m\to\infty} \alpha_j$ temos que $\|y_m - y\| \xrightarrow{m\to\infty} 0$ e então $y_m \to y$. Fica assim demonstrado que Y é completo. □

Corolario 3.1.3. *Se X é um espaço normado então todo subespaço $Y \subseteq X$ de dimensão finita é fechado (de X).*

Demonstração. Pelo Teorema 3.1.2 concluímos que é Y completo. Pelo Lema 2.2.1 temos Y fechado de X. □

Ressaltamos que o corolário falha sem a hipótese da dimensão finita do espaço Y. Tome por exemplo $X = (C[0,1], \|\ \|_\infty)$ e $Y = span\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ onde $x_j(t) = t^j$. Assim Y é o conjunto de todos os polinômios. Podemos usar o teorema de Stone-Weierstrass para obter uma sequência de polinômios que tem como limite uniforme (e portanto o limite é referente à métrica do supremo) uma função contínua que não é um polinômio, por exemplo $x(t) = e^t$. Isso significa que Y não é fechado.

Teorema 3.1.4. *Se X é um espaço normado de dimensão finita então $M \subseteq X$ é compacto se e somente é fechado e limitado.*

Demonstração. Sabemos que M compacto implica M fechado e limitado, um resultado válido em qualquer espaço métrico, veja por exemplo [6]. Suponhamos portanto M fechado e limitado e consideremos uma sequência $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ sobre M. Seja $n = \dim X$ e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base para X. Assim cada elemento da sequência pode ser representado da seguinte maneira:

$$x_m = \alpha_1^{(m)} e_1 + \ldots + \alpha_n^{(m)} e_n$$

onde $\alpha_1^{(m)}, \ldots, \alpha_n^{(m)}$ são escalares. Como $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é limitada existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $\|x_m\| < k$ $\forall m \in \mathbb{N}$. Pelo Lema 3.1.1 temos garantida a existência de $c \in \mathbb{R}_+$ tal que:

$$c \cdot \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j^{(m)}| \leq \left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^{(m)} e_j \right\| = \|x_m\| \leq k.$$

Agora fixando j, a desigualdade acima garante que $(\alpha_j^{(1)}, \alpha_j^{(2)}, \ldots)$ é limitada, logo possui subsequência convergente. Desse modo $(\alpha_1^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente, digamos que convirja para α_1 e denote por $(x_{1,m})_{m\in\mathbb{N}}$ a respectiva subsequência de $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ (no mesmo sentido usado na demonstração do Lema 3.1.1). Do mesmo modo, $(x_{1,m})_{m\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência, $(x_{2,m})_{m\in\mathbb{N}}$, tal que a respectiva subsequência de $(\alpha_2^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ seja convergente, denote por α_2 o limite dessa última. Prosseguindo assim, após n etapas obteremos uma subsequência $(z_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ satisfazendo

$$z_m \xrightarrow{m\to\infty} \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n = z.$$

Como M é fechado, $z \in M$ e portanto demonstramos que toda sequência sobre M possui uma subsequência que converge para algum ponto de M. Segue que M é compacto. $\square$

Exemplo 3.1.5. *Considere $\mathbb{N}$, munido com a métrica $0-1$ (ou seja, $d(x,y) = 1$ se $x \neq y$ e $d(x,y) = 0$ se $x = y$). $(\mathbb{N}, 0-1)$ é fechado e é limitado devido a métrica $0-1$. Apesar disso, não é compacto pois a sequência $(2, 4, 6, \ldots)$ satisfaz $d(x_n, x_m) = 1$ se $m \neq n$ e assim não possui nenhuma subsequência de Cauchy, logo não possui nenhuma subsequência convergente. O exemplo pode ser generalizado para um conjunto M infinito munido com a métrica $0-1$ e considerando sequências sobre M onde todos os termos são distintos.*

Exemplo 3.1.6. *A bola unitária fechada de l^p, $p \geq 1$ é outro exemplo de conjunto fechado e limitado que não é compacto: visto que a sequência formada pelos vetores $(\,1, 0, 0 \ldots)\,,(\,0, 1, 0 \ldots)$ etc, é tal que a distância entre quaisquer dois elementos distintos é $2^{\frac{1}{p}}$ a sequência não possui nenhuma subsequência de Cauchy, portanto, não possui nenhuma subsequência convergente.*

Lema 3.1.7 (Lema de Riesz)**.** *Seja Z um espaço normado e Y um subespaço fechado de Z com $Y \subsetneq Z$. Assim, para qualquer número $\theta \in (0,1)$ existe $z_0 \in Z$ tal que*

$$\|z_0\| = 1 \qquad e \qquad \|z_0 - y\| \geq \theta \quad \forall y \in Y.$$

Demonstração. Tome $v \in Z - Y$ e seja $a = \inf\limits_{y \in Y}\{\|v - y\|\}$, ou seja, $a = d(Y, v)$. Como Y é fechado e $v \notin Y$ (e assim $v \notin \overline{Y}$ pois Y é fechado) segue que $a > 0$. Tome agora $\theta \in (0,1)$, assim $a < \dfrac{a}{\theta}$. Por definição de ínfimo existe $y_0 \in Y$ tal que:

$$a \leq \|v - y_0\| \leq \frac{a}{\theta}.$$

Defina agora $c = \dfrac{1}{\|v - y_0\|}$ e $z_0 = c(v - y_0)$. Evidentemente $\|z_0\| = 1$. Além disso $\forall y \in Y$ temos que:

$$\|z_0 - y\| = \|c(v - y_0) - y\| = c\left\|v - \left(y_0 + \frac{y}{c}\right)\right\|.$$

Como $y_o + \dfrac{y}{c} \in Y$ pois Y é um subespaço temos $\left\|v - \left(y_0 + \dfrac{y}{c}\right)\right\| \geq a$. Assim,

$$\|z_0 - y\| = c\left\|v - \left(y_0 + \frac{y}{c}\right)\right\| \geq c \cdot a = \frac{a}{\|v - y_o\|} \geq \theta.$$

Fica portanto demonstrado o lema. □

Teorema 3.1.8. *Seja X um espaço normado. Então, a bola unitária fechada, $M = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$, é compacta se, e somente se, X tem dimensão finita.*

Demonstração. Para um dos sentidos temos X com dimensão finita. Nesse caso o Teorema 3.1.4 nos dá a equivalência de compactos com fechados e limitados. Como M é fechado e limitado M é compacto.

Agora vamos provar que se M é compacto X tem dimensão finita. Para tanto suponha, por absurdo, que X possui dimensão infinita. Tome $x_1 \in X$ tal que $\|x_1\| = 1$ e seja $X_1 = span\{x_1\}$, assim $\dim X_1 = 1$. Pelo Corolario 3.1.3 segue que X_1 é fechado de X e $X_1 \subsetneq X$ pois X possui dimensão infinita. Pelo Lema de Riesz existe $x_2 \in X$ tal que $\|x_2\| = 1$ e $\|x_2 - x_1\| \geq \dfrac{1}{2}$.

Considerando agora $X_2 = span\{x_1, x_2\}$, usamos o mesmo raciocínio para obtermos $x_3 \in X$ tal que $\|x_3\| = 1$, $\|x_3 - x_2\| \geq \dfrac{1}{2}$ e $\|x_3 - x_1\| \geq \dfrac{1}{2}$. Prosseguindo indutivamente, obtemos uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$ temos $\|x_n\| = 1$ e portanto $x_n \in M$. Além disso, pelo exposto vale que $\|x_n - x_m\| \geq \dfrac{1}{2}$ sempre que $m \neq n$, isso nos permite concluir que a sequência em questão não possui nenhuma subsequência convergente e assim M não é compacto, o que é um absurdo. □

O Exemplo 3.1.6 juntamente com o teorema acima garante, por exemplo, que os espaços l^p, $p \geq 1$ possuem dimensão infinita.

3.2 Operadores entre espaços normados

Nessa seção, trataremos de operadores lineares entre espaços normados. O conceito de operador linear pode ser definido em espaços vetorais, não dependendo da norma.

Definição 3.2.1. *Um operador $T : X \to Y$, onde X e Y são espaços vetoriais (sobre um mesmo corpo), é dito ser **linear** quando para todos $x_1, x_2 \in X$, e α escalar temos $T(x+y) = T(x) + T(y)$ e $T(\alpha x) = \alpha T(x)$.*

Segue da definição que, se T for um operador linear então $T(0) = T(x-x) = T(x) - T(x) = 0$ e $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$.

Exemplo 3.2.2. *O operador identidade e o operador nulo são lineares.*

Exemplo 3.2.3 (Operador de diferenciação)**.** *Seja X o conjunto de todos os polinômios definidos em um intervalo $[a, b]$. Defina $T : X \to X$ dado por $T(x) = x'(t)$. A linearidade do operador T segue das propriedades de derivação.*

Exemplo 3.2.4 (Operador de integração)**.** *O operador $T : C[a, b] \to C[a, b]$ dado por*

$$T(x(t)) = \int_a^t x(\tau)d\tau$$

é linear devido as propriedades de integração.

Seguem mais algumas definições que agora misturam conceitos topológicos e algébricos.

Definição 3.2.5. *Sejam X e Y espaços normados. Um **isomorfismo** entre X e Y é um operador $T : X \to Y$, tal que T é linear, contínuo, bijetor e o operador inverso T^{-1} é contínuo. Se esse operador existir dizemos que X e Y são **isomorfos**.*

Veremos no Exemplo 3.2.18 que de fato existem operadores lineares, contínuos e bijetores tais que o operador inverso não é contínuo.

Definição 3.2.6. *Uma* ***isometria*** *entre dois espaços normados X e Y é um operador $T : X \to Y$ que satisfaz $\|T(x)\| = \|x\|$ $\forall x \in E$. Uma* ***isometria linear*** *é um operador linear, T, que é uma isometria.*

Definição 3.2.7. *Dois espaços normados X e Y são ditos* ***isometricamente isomorfos*** *se existe um operador $T : X \to Y$ tal que T é um isomorfismo e também uma isometria.*

No intuito de clarear um pouco a relação dos conceitos acima, apresentamos a seguinte proposição.

Proposição 3.2.8. *Sejam X e Y espaços normados. São válidas:*

1. *Toda isometria linear $T : X \to Y$ é (uniformemente) contínua e injetora.*

2. *Toda isometria linear sobrejetora $T : X \to Y$ é inversível e sua inversa, T^{-1}, é também uma isometria, sendo portanto contínua.*

Demonstração. Quanto a primeira afirmação, dado $\epsilon > 0$ tomamos $\delta = \epsilon$, assim se $x_1, x_2 \in X$ satisfazem $\|x_1 - x_2\| < \delta$ então $\|T(x_1) - T(x_2)\| = \|T(x_1 - x_2)\| = \|x_1 - x_2\| < \epsilon$, portanto, T é (uniformemente) contínua. A injetividade decorre do seguinte:

$$T(x_1) = T(x_2) \Rightarrow \|T(x_1 - x_2)\| = 0 \Rightarrow \|x_1 - x_2\| = 0 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Para a segunda afirmação, observamos que T é inversível pois é bijetora (sobrejetora por hipótese e injetora pelo item 1). Dado $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $T(x) = y$. Assim:

$$\|T^{-1}(y)\| = \|T^{-1}(T(x))\| = \|x\| = \|T(x)\| = \|y\|.$$

Portanto T^{-1} é uma isometria. □

A proposição acima nos proporciona certa praticidade na hora de trabalharmos com isomofismos e isometrias. Por uma questão de comodidade enunciaremos o seguinte corolário.

Corolario 3.2.9. *Sejam X e Y espaços normados. Se $T : X \to Y$ é uma isometria linear e sobrejetora então T é um isomorfismo entre X e Y.*

Definição 3.2.10 (Operador limitado)**.** *Sejam X e Y espaços normados e $T : X \to Y$ um operador linear. O operador T é dito ser* ***limitado*** *se existe um número real C tal que $\|T(x)\| \leq C\|x\|$ para todo $x \in X$.*

Observamos que a motivação para o termo operador limitado vem do fato de que $T : X \to Y$, sendo limitado, transforma subconjuntos limitados do seu domínio em subconjuntos limitados do contradomínio: com efeito, se $A \subseteq X$ é limitado então existe K tal que $\|x\| \leq K$ $\forall x \in A$ e assim $\|T(x)\| \leq C\|x\| \leq C \cdot K$.

Exemplo 3.2.11. *Seja* $1 \leq p < \infty$ *e fixe* $(b_j)_{j\in\mathbb{N}} \in l^p$. *Defina o operador*

$$T : l^\infty \to l^p \qquad \textit{dado por} \qquad T\left((a_j)_{j\in\mathbb{N}}\right) = (a_j b_j)_{j\in\mathbb{N}}.$$

Como

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_j b_j|^p \leq \sum_{j=1}^{\infty} |b_j|^p \left(\sup_{j\in\mathbb{N}}\{|a_j|\}\right)^p = (\|(b_j)_{j\in\mathbb{N}}\|_{l^p})^p \ \ (\|(a_j)_{j\in\mathbb{N}}\|_{l^\infty})^p$$

o operador T *está bem definido. Também,* T *é claramente linear devido as operações com sequências. Observando que*

$$\|T((a_j)_{j\in\mathbb{N}})\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j b_j|^p\right)^{\dfrac{1}{p}} \leq (\|(b_j)_{j\in\mathbb{N}}\|_{l^p})\,(\|(a_j)_{j\in\mathbb{N}}\|_{l^\infty})$$

vemos que T *é limitado, com* $C = \|(b_j)_{j\in\mathbb{N}}\|_{l^p}$. *O operador* T *é conhecido como* ***operador diagonal pela sequência*** $(b_j)_{j\in\mathbb{N}}$.

Definição 3.2.12. *Seja* $T : X \to Y$ *um operador linear limitado. Definimos a* ***norma*** *de* T, *denotada por* $\|T\|$, *como:*

$$\|T\| = \sup_{x\in X-\{0\}} \left\{\frac{\|T(x)\|}{\|x\|}\right\}.$$

Em primeiro lugar, observe que o supremo acima existe pois o operador T é limitado. Salientamos que se $X = \{0\}$ definimos $\|T\| = 0$, além disso, $\forall x \in X$ vale que $\|T(x)\| \leq \|T\|\|x\|$. Também, denote por $L(X,Y)$ o conjunto de todos os operadores lineares limitados, $T : X \to Y$. Com as operações usuais de funções $L(X,Y)$ é um espaço vetorial. Vamos agora, justificar o termo empregado na definição acima e tornar $L(X,Y)$ um espaço normado.

Lema 3.2.13. *Se* T *é um operador linear limitado então:*

1. $\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : x \in X \text{ e } \|x\| = 1\}$.
2. *A norma,* $\|T\|$, *definida acima, é de fato uma norma no espaço* $L(X,Y)$, *satisfazendo assim os devidos axiomas.*

Demonstração. 1. Dado $a \in \left\{\dfrac{\|T(x)\|}{\|x\|} : x \in X - \{0\}\right\}$ existe $x_0 \in X$ tal que $a = \dfrac{\|T(x_0)\|}{\|x_0\|}$, a linearidade do operador e as propriedades da norma garantem que $\|T(\frac{x_0}{\|x_0\|})\| = a$ e assim $a \in \{\|T(x)\| : x \in X \text{ e } \|x\| = 1\}$. A outra inclusão entre esses conjuntos é análoga de modo que eles são iguais e 1 está provado.

2. Claro que $\|T\| \geq 0$. Se $T = 0$ então $\|T\| = 0$, reciprocamente se $\|T\| = 0$ então $\|T(x)\| = 0 \ \forall x \in X$ e assim $T(x) = 0 \ \forall x \in X$, portanto T é o operador nulo. A desigualdade abaixo verifica mais uma das propriedades necessárias:

$$\|\alpha T\| = \sup\{\|\alpha T(x)\| : x \in X \text{ e } \|x\| = 1\} = |\alpha| \sup\{\|T(x)\| : x \in X \text{ e } \|x\| = 1\} = |\alpha|\|T\|$$

Quanto a desigualdade triangular, observamos que

$$\|T_1 + T_2\| = \sup\{\|T_1(x) + T_2(x)\| : x \in X \text{ e } \|x\| = 1\} \leq$$

$$\leq \sup\{\|T_1(x)\| : x \in X \text{ e } \|x\| = 1\} + \sup\{\|T_2(x)\| : x \in X \text{ e } \|x\| = 1\} = \|T_1\| + \|T_2\|$$

o que completa nossa demonstração. □

Exemplo 3.2.14. *Seja T o operador definido no Exemplo 3.2.11. Lá vimos que*

$$\|T(a_j)_{j\in\mathbb{N}}\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j b_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq (\|(b_j)_{j\in\mathbb{N}}\|_{l^p}) \ \ (\|(a_j)_{j\in\mathbb{N}}\|_{l^\infty})$$

o que garante que $\|T\| \leq \|(b_j)_{j\in\mathbb{N}}\|$. Por outro lado, para $(a_j)_{j\in\mathbb{N}} = (1,1,1,\ldots)$ temos $\|T(a_j)_{j\in\mathbb{N}}\| = \|(b_j)_{j\in\mathbb{N}}\|_{l^p}$. Portanto, $\|T\| = \|(b_j)_{j\in\mathbb{N}}\|_{l^p}$.

Teorema 3.2.15. *Se um espaço normado X tem dimensão finita então todo operador linear T, com domínio X, é limitado.*

Demonstração. Seja $n = \dim X$ e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base para X. Assim, se $x \in X$ podemos escrever $x = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j e_j$ para certos $\alpha_1, \ldots, \alpha_j$. Se T é um operador linear qualquer em X temos

$$\|T(x)\| = \left\|\sum_{j=1}^{n} \alpha_j T(e_j)\right\| \leq \max_{k=1,\ldots,n}\{\|T(e_k)\|\} \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|.$$

Agora, pelo Lema 3.1.1 obtemos $c > 0$ tal que

$$\sum_{j=1}^{n} |\alpha_j| \leq \frac{1}{c}\left\|\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j\right\|.$$

Juntando o que foi feito podemos escrever

$$\|T(x)\| \leq \underbrace{\left(\max_{k=1,\ldots,n}\{\|T(e_k)\|\}\right) \cdot \frac{1}{c}}_{\delta}\left\|\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j\right\| = \delta\|x\|$$

o que prova que T é limitado. □

Provaremos agora uma importantíssima caracterização de operadores lineares limitados.

Teorema 3.2.16. *Seja $T : X \to Y$ um operador linear, onde X, Y são espaços normados. Assim, são válidas:*

1. *T é contínuo se e somente se T é limitado.*

2. *Se T é contínuo em um certo $x_0 \in X$ então T é contínuo.*

Demonstração. 1. Suponha T limitado. Se T é o operador nulo o resultado é imediato. Suponha portanto $T \neq 0$, assim $\|T\| > 0$. Considere $x_0 \in X$ e $\epsilon > 0$ quaisquer. Tome $\delta = \dfrac{\epsilon}{\|T\|}$, assim se $\|x - x_0\| < \delta$ então:

$$\|T(x) - T(x_0)\| = \|T(x - x_0)\| \leq \|T\|\|x - x_0\| < \|T\|\frac{\epsilon}{\|T\|} = \epsilon.$$

Reciprocamente, suponha T contínuo no seu domínio. Assim, se $x_0 \in X$ é arbitrário segue que dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $\|x - x_0\| < \delta$ então $\|T(x) - T(x_0)\| < \epsilon$. Considerando $y \in X$ com $y \neq 0$ tomamos $x = x_0 + \dfrac{\delta}{2\|y\|}y$ e assim $\|x - x_0\| < \delta$. Usando a linearidade e a continuidade de T obtemos:

$$\|T(x) - T(x_0)\| = \|T(x - x_0)\| = \left\|T\left(\frac{\delta}{\|y\|}y\right)\right\| = \frac{\delta}{2\|y\|}\|T(y)\| < \epsilon$$

Segue que $\|T(y)\| \leq \dfrac{2\epsilon}{\delta}\|y\|$ e portanto T é limitado.

2. Se T é contínuo em um ponto $x_0 \in X$ então conseguimos provar que T é limitado (isso foi feito no item anterior). Se T é limitado então T é contínuo (novamente pelo item anterior). □

Os Teoremas 3.2.15 e 3.2.16 nos mostram que em dimensão finita não há motivos para estudar especificamente operadores lineares limitados e contínuos pois todos os operadores lineares assim são.

Exemplo 3.2.17. *Seja $P[0,1] \subseteq (C[0,1], \|\ \|_\infty)$ o conjunto de todos os polinômios definidos em $[0,1]$. Claramente $P[0,1]$ é um subespaço (vetorial) de $C[0,1]$. Afirmamos que o operador*

$$T : P[0,1] \to P[0,1] \qquad T(f) = f'$$

não é contínuo. Se fosse, ele seria limitado pelo teorema acima. Existiria assim uma constante $C > 0$ tal que $\|T(f)\| \leq C\|f\|$ para todo f em $P[0,1]$. Considerando para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in P[0,1]$ dado por $f_n(t) = t^n$, temos $f'(t) = nt^{n-1}$ e assim

$$n = \|f_n'\| = \|T(f_n)\| \leq C\|f_n\| = C$$

o que é um absurdo. Portanto, T não é contínuo.

Exemplo 3.2.18. *Defina* $T : c_{00} \to c_{00}$ *dado por*

$$T\left((a_j)_{j\in\mathbb{N}}\right) = T\left((a_1, a_2, \ldots, a_N, 0, \ldots)\right) = \left(a_1, \frac{a}{2}, \ldots, \frac{a_N}{N}, 0, \ldots\right).$$

Observe que T *é linear e claramente injetor. Dado* $c = (c_j)_{j\in\mathbb{N}} \in c_{00}$, $c = (c_1, c_2, \ldots, c_N, 0, \ldots)$ *definimos* $a_j = jc_j$ *para todo* $j = 1, \ldots, N$ *e* $a_j = 0$ *se* $j > N$. *Daí,*

$$T((a_j)_{j\in\mathbb{N}})) = \left(a_1, \frac{a_2}{2}, \ldots, \frac{a_N}{N}, 0, \ldots\right) = (c_1, c_2, \ldots, c_N, 0, \ldots) = (c_j)_{j\in\mathbb{N}}$$

o que prova que T *é sobrejetor. A desigualdade*

$$\|T(a_j)_{j\in\mathbb{N}}\| = \left\|\left(a_1, \frac{a_2}{2}, \ldots, \frac{a_N}{N}, 0, \ldots\right)\right\| = \max_{j=1,\ldots,N}\left\{\left|\frac{a_j}{j}\right|\right\} \leq \max_{j=1,\ldots,N}\{|a_j|\} = \|(a_j)_{j\in\mathbb{N}}\|$$

garante que T *é contínuo por ser limitado. Por fim, vejamos que o operador* T^{-1}, *dado por* $T^{-1}((c_j)_{j\in\mathbb{N}})) = (c_1, 2c_2, \ldots, Nc_N, 0, \ldots)$ *não é contínuo. Com esse intuito, para cada* $n \in \mathbb{N}$ *considere a sequência* $x_n = (1, 1, \ldots, \underbrace{1}_{n}, 0, 0, \ldots)$, *mais precisamente, a sequência tem as* n*-primeiras coordenadas iguais a* 1 *e as restantes nulas. De sorte que* $\|x_n\| = 1$ *e* $\|T^{-1}(x_n)\| = n$ *vemos que* T^{-1} *é ilimitado e portanto não é contínuo.*

Teorema 3.2.19. *Se* Y *é um espaço de Banach então* $L(X, Y)$ *também o é.*

Demonstração: Seja $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy sobre $L(X, Y)$. Fixe $x \in X$. Assim, para todo $\epsilon' > 0$ existe $n_0' \in \mathbb{N}$ tal que $\forall m, n \geq n_0'$ temos $\|T_m - T_n\| < \dfrac{\epsilon'}{\|x\| + 1}$. Portanto,

$$\|T_n(x) - T_m(x)\| = \|(T_m - T_n)x\| \leq \|T_m - T_n\|\|x\| < \frac{\epsilon'}{\|x\| + 1}\|x\| \leq \epsilon' \tag{3.1}$$

o que mostra que para cada $x \in X$, $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em Y. Como Y é completo podemos definir o operador

$$T : X \to Y \text{ dado por } T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x).$$

Afirmamos que $T_n \to T$ e que $T \in L(X, Y)$. Veja que T é linear pois $T(x_1 + \beta x_2) = \lim\limits_{n\to\infty} T_n(x_1 + \beta x_2) = \lim\limits_{n\to\infty} T_n(x_1) + \beta \lim\limits_{n\to\infty} T_n(x_2) = T(x_1) + \beta T(x_2)$.

Fixe $\epsilon > 0$. Tome $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n, m \geq n_0$ então $\|T_m - T_n\| < \dfrac{\epsilon}{2}$ (e então $\|T_m(x) - T_n(x)\| \leq \|T_m - T_n\|\|x\| \leq \dfrac{\epsilon}{2}\|x\|$ para todo $x \in X$). Agora, com x fixo, como $T(x) = \lim\limits_{n\to\infty} T_n(x)$ escolhemos $m \geq n_0$ tal que $\|T_m(x) - T(x)\| < \dfrac{\epsilon}{2}\|x\|$. Assim se $n \geq n_0$ temos

$$\|T_n(x) - T(x)\| \leq \|T_n(x) - T_m(x)\| + \|T_m(x) - T(x)\| < \frac{\epsilon}{2}\|x\| + \frac{\epsilon}{2}\|x\| = \epsilon\|x\|.$$

Observando que a desigualdade acima é válida para todo $x \in X$, o que fizemos nos mostra que $T_n - T$ $(n \geq n_0)$ é limitado e $T_n \to T$. Também, como $T = T - T_{n_0} + T_{n_0}$ temos $\|T(x)\| \leq \|T(x) - T_{n_0}(x)\| + \|T_{n_0}(x)\| < (\epsilon + K_{n_0})\|x\|$ o que mostra que T é limitado. Concluimos que $L(X, Y)$ é completo. $\square$

Definição 3.2.20. *Um* ***funcional linear****, é um operador linear definido em um espaço normado X cuja imagem está contida em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, conforme o corpo de escalares de X. O conjunto de todos os funcionais lineares limitados, $f : X \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), é chamado* ***espaço dual*** *de X e denotado por X', em outras palavras, $X' = L(X, \mathbb{R})$ (ou $\mathbb{C}$).*

Do que já foi visto é imediato que X' é um espaço normado com $\|f\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \{|f(x)|\}$. Além disso, como $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ são completos o Teorema 3.2.19 garante que o espaço dual de um espaço normado qualquer é sempre um espaço de Banach.

3.3 Sobre séries em espaços normados

Observe que espaços normados são a estrutura adequada para se falar de séries pois lembrando das definições de séries numéricas, recordamos que precisamos duas ideias: uma ideia de distância (para convergência) e outra sobre operações entre elementos (para definirmos as somas parciais). Ambas estão presentes quando nossa estrutura é a de espaço normado.

Outro detalhe importante, é que a partir dessa seção admitiremos e usaremos alguns resultados derivados do Teorema de Hahn-Banach, que serão enunciados quando for pertinente. Pois bem, vamos às definições que são similares, na medida do possível, as de séries numéricas.

Definição 3.3.1. *Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em um espaço normado E. Dizemos que a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$* ***converge*** *se existe $x \in E$ tal que a sequência $\left(\sum\limits_{j=1}^{n} x_j\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para x. Nesse caso, escrevemos $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$.*

Se E é um espaço de Banach, a completude do espaço garante que a sequência $\left(\sum\limits_{j=1}^{n} x_j\right)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ converge (e portanto a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ converge) se e somente se for de Cauchy, ou seja, se $\forall \epsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $m > n \geq n_0$ vale $\left\|\sum\limits_{j=n+1}^{m} x_j\right\| < \epsilon$. Esse é o **Critério de Cauchy** numa versão para espaços de Banach.

Exemplo 3.3.2. *Para cada n seja $e_n = (\overbrace{0}^{1}, \ldots, \overbrace{1}^{n}, \overbrace{0}^{n+1}, \ldots) \in l^p$, ou seja, e_n possui a n-ésima coordenada igual a 1 e as demais são nulas. Dado $x = (a_j)_{j\in\mathbb{N}} \in l^p$ temos*

$$\lim_{k\to\infty} \left\| x - \sum_{j=1}^{k} a_j e_j \right\|^p = \lim_{k\to\infty} \|(0, 0, \ldots, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots)\|^p = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=k+1}^{\infty} |a_j|^p = 0$$

*onde a última igualdade é válida pois $(a_j)_{j\in\mathbb{N}} \in l^p$. Daí, pela Definição 3.3.1 podemos escrever $x = \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j e_j$. Considerando agora $\{e_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq c_0$, a conta feita no Corolário 2.3.17 garante que dado $x = (b_j)_{j\in\mathbb{N}} \in c_0$ vale $x = \sum\limits_{j=1}^{\infty} b_j e_j$. O conjunto $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ é chamado de **base canônica** de l^p (ou c_0) e é um exemplo de base de **Schauder** (veja [3] para mais informações).*

Definição 3.3.3. *Dizemos que uma série é **incondicionalmente convergente** se for convergente em qualquer reordenação de suas parcelas, ou seja, se para toda função bijetora $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ converge.*

Na Definição 3.3.3 exigimos que cada reordenação convirja. Entretanto, a priori, os valores para os quais cada reordenação converge poderiam ser diferentes. Felizmente, isso não ocorre. Para demonstrar esse fato usaremos a seguinte consequência do Teorema de Hahn-Banach. Para ver uma demonstração, consulte [1].

Lema 3.3.4. *Sejam E um espaço normado, $E \neq \{0\}$ e $x \in E$. Então,*

$$\|x\| = \sup\{|\varphi(x)| : \varphi \in E' \text{ e } \|\varphi\| \leq 1\} = \max\{|\varphi(x)| : \varphi \in E' \text{ e } \|\varphi\| = 1\}.$$

Proposição 3.3.5. *Seja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ uma série incondicionalmente convergente em um espaço normado E. Se σ_1 e σ_2 são bijeções de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$ então $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{\sigma_1(n)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{\sigma_2(n)}$.*

Demonstração: Seja $\phi \in E'$. Como ϕ é contínua a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \phi(x_n)$ também é incondicionalmente convergente. Como séries numéricas incondicionalmente convergentes tem o mesmo limite, independendo da ordem das parcelas (veja [5]) temos:

$$\phi\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma_1(n)}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi(x_{\sigma_1(n)}) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi(x_{\sigma_2(n)}) = \phi\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma_2(n)}\right).$$

Daí, visto que ϕ é linear temos $\phi\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{\sigma_1(n)} - \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{\sigma_2(n)}\right) = 0$. Observando que o argumento acima é válido para todo $\phi \in E'$ usamos o Lema 3.3.4 para obter $\left\|\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{\sigma_1(n)} - \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{\sigma_2(n)}\right\| = 0$. Portanto $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{\sigma_1(n)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{\sigma_2(n)}$ e o resultado está provado. $\square$

Definição 3.3.6. *Dizemos que a série* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *é absolutamente convergente se a série* $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ *for convergente.*

Em $\mathbb{R}$ sabemos que séries absolutamente convergentes são incondicionalmente convergentes. Uma indagação natural é se isso acontece em espaços normados. Uma dica para responder essa pergunta pode ser dada pela própria demonstração desse fato em $\mathbb{R}$, que usa a completude do espaço através do critério de Cauchy.

Exemplo 3.3.7. *Seja* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq c_{00}$ *a sequência dada por* $x_n = \left(0, \ldots, \frac{1}{n^2}, 0, \ldots\right)$, *mais precisamente,* x_n *é a sequência cujas coordenadas são nulas, com exceção da* $n-$*ésima coordenada que tem como valor* $\frac{1}{n^2}$. *Veja que* $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$, *assim a série* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *é absolutamente convergente. Por outro lado, tomando* $x = \left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \ldots\right)$ *temos:*

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{n} x_k - x \right\| = \lim_{n\to\infty} \left\| \left(0, 0, \ldots, \frac{-1}{(n+1)^2}, \frac{-1}{(n+2)^2}, \ldots\right) \right\| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = 0$$

o que mostra que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x \notin c_{00}$. *Exibimos assim uma série em* c_{00} *que é absolutamente convergente mas não é convergente nesse espaço.*

O fato de c_{00} não ser completo foi fundamental no exemplo acima. Mais precisamente, esse tipo de exemplo só pode ser construído em espaços que não são completos pois, caso contrário, temos o seguinte teorema:

Teorema 3.3.8. *As seguintes afirmações são equivalentes para um espaço normado* E.

1. *Toda série absolutamente convergente em* E *é incondicionalmente convergente.*
2. *Toda série absolutamente convergente em* E *é convergente.*
3. E *é um espaço de Banach.*

Demonstração. É claro que $1 \Rightarrow 2$. Para provarmos que $2 \Rightarrow 3$ consideramos uma sequência de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em E. Seja $n_0^{(1)} \in \mathbb{N}$ tal que se $m, n \geq n_0^{(1)}$ temos $\|x_m - x_n\| < 2^{-1}$. Escolha $n_1 \geq n_0^{(1)}$. Prossiga considerando $n_0^{(2)} \in \mathbb{N}$, com $n_0^{(2)} \geq n_0^{(1)}$ tal que se $m, n \geq n_0^{(2)}$ então $\|x_m - x_n\| < 2^{-2}$. Escolha $n_2 \geq n_0^{(2)}$. Agora, considere $n_0^{(3)} \in \mathbb{N}$, com $n_0^{(3)} \geq n_0^{(2)}$, tal que se $m, n \geq n_0^{(3)}$ temos $\|x_m - x_n\| < 2^{-3}$. Escolha $n_3 \geq n_0^{(3)}$. Prosseguindo dessa forma obteremos uma sequência $(n_1, n_2, n_3, \ldots)$ que satisfaz, $\forall j \in \mathbb{N}$

$$\|x_{n_j} - x_{n_{j+1}}\| < 2^{-j}.$$

Somando sobre j, de 1 até ∞, obtemos

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|x_{n_{j+1}} - x_{n_j}\| < \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} = 1.$$

Pela hipótese, a série $\sum_{j=1}^{\infty} x_{n_{j+1}} - x_{n_j}$ é convergente. Como

$$x_{n_{j+1}} = x_{n_1} + \sum_{k=1}^{j} \left(x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\right) \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

concluimos que a sequência $(x_{n_{j+1}})_{j\in\mathbb{N}}$ é convergente. Assim, acabamos de exibir uma subsequência convergente de uma sequência de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qualquer. Segue que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge e E é completo. Por fim, vamos demonstrar que $3 \Rightarrow 1$. Suponha que a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ seja absolutamente convergente, então $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ converge. Como essa é uma série absolutamente convergente de números reais tal série é incondicionalmente convergente (veja [5]). Assim, dada uma bijeção $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $m > n \geq n_0$ então

$$\left\| \sum_{j=n+1}^{m} x_{\sigma(j)} \right\| \leq \sum_{j=n+1}^{m} \|x_{\sigma(j)}\| < \epsilon.$$

Como E é completo, isso é suficiente para provar a convergência incondicional (critério de Cauchy). □

Finalizemos essa seção mostrando que a recíproca do item 1 da equivalência acima não é verdadeira, ou seja, existem séries incondicionalmente convergentes que não são absolutamente convergentes.

Exemplo 3.3.9. *Seja* $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ *a base canônica de* c_0*. Defina, para cada* $n \in \mathbb{N}$, $x_n = \dfrac{e_n}{n}$ *e observe que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| = \lim_{n\to\infty} (\|x_1\| + \ldots + \|x_n\|) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = \infty$$

o que mostra que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *não é absolutamente convergente. Apesar disso, afirmamos que a série é incondicionalmente convergente e seu limite é* $x = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right)$*. Para tanto, seja* $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *uma bijeção qualquer e* $\epsilon > 0$, *tome* $N \geq \frac{1}{\epsilon}$*. Como* σ *é uma bijeção, para cada* $j = 1, \ldots, N$ *existe* $n_j \in \mathbb{N}$ *tal que* $\sigma(n_j) = j$*. Seja* $n_0 = \max\{n_1, \ldots, n_N\}$*. Assim, se* $n \geq n_0$, *ao menos as* N *primeiras coordenadas de* $\sum_{j=1}^{n} x_{\sigma(j)}$ *são iguais as de* x*. Portanto*

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} x_{\sigma(j)} - x \right\| \leq \frac{1}{N+1} < \epsilon.$$

o que prova a convergência incondicional, visto que $\sum_{j=1}^{\infty} x_{\sigma(j)} = x$.

3.4 Imersão de espaços separáveis em l^∞.

O objetivo dessa seção é identificar, através de isomorfismos isométricos, os espaços normados separáveis dentro de um espaço maior, a saber, l^∞.

Lema 3.4.1. *Sejam E um espaço normado, M um subespaço fechado de E, $y_0 \in E - M$ e $d = d(y_0, M)$. Assim, existe um funcional linear $\varphi \in E'$ tal que $\|\varphi\| = 1$, $\varphi(y_0) = d$ e $\varphi(x) = 0$ para todo $x \in M$.*

Demonstração. Seja $N = M + span\{y_0\}$. Como M é um subespaço de E e $y_0 \notin M$, dado $z \in N$ existem únicos $x \in M$ e α escalar tais que $z = x + \alpha y_0$. Defina

$$\varphi_0 : N \to \mathbb{C} \quad \text{dada por} \quad \varphi_0(x + \alpha y_0) = \alpha d.$$

Da definição é imediato que $\varphi_0(y_0) = d$, $\varphi_0(M) = \{0\}$ e que φ_0 é linear. Também, se $\alpha \neq 0$ vale que

$$\|z\| = \|x + \alpha y_0\| = |\alpha| \left\| \frac{x}{-\alpha} - y_0 \right\| \geq |\alpha| d = |\varphi_0(z)|.$$

Se $\alpha = 0$ temos $\|z\| \geq |\varphi_0(z)| = 0$. Daí, $\|\varphi_0\| \leq 1$ e em particular φ_0 é contínuo. Por outro lado, dado $\epsilon > 0$ existe $x_\epsilon \in M$ tal que $d \leq \|y_0 - x_\epsilon\| < d + \epsilon$. Definindo $z_\epsilon = \dfrac{y_0 - x_\epsilon}{\|y_0 - x_\epsilon\|}$ vemos que $z_\epsilon \in N$, $\|z_\epsilon\| = 1$ e $\varphi(z_\epsilon) = \dfrac{d}{\|y_0 - x_\epsilon\|} \geq \dfrac{d}{d+\epsilon}$. Fazendo $\epsilon \to 0^+$ concluimos que $\|\varphi_0\| \geq 1$. Portanto, $\|\varphi_0\| = 1$. Pelo teorema de Hahn-Banach existe uma extensão de φ_0, digamos $\varphi \in E'$ tal que $\|\varphi\| = \|\varphi_0\| = 1$. $\square$

Precisaremos ainda do seguinte lema que é uma consequência do teorema de Hahn-Banach, veja [1] para mais informações.

Lema 3.4.2. *Seja E um espaço normado. Para todo $x_0 \in E$, $x_0 \neq 0$, existe um funcional linear $\varphi \in E'$ tal que $\|\varphi\| = 1$ e $\varphi(x_0) = \|x_0\|$.*

Teorema 3.4.3. *Todo espaço normado separável é isometricamente isomorfo a um subespaço de l^∞.*

Demonstração. Seja E um espaço normado. Se $E = \{0\}$ não há o que fazer pois o operador nulo é um isomorfismo isométrico. Suponhamos que $E \neq \{0\}$ e consideramos $D \subseteq E$, $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ com D denso em E, podemos supor que $0 \notin D$, pois caso contrário retiramos 0 do conjunto D e adicionamos uma sequência de termos não-nulos que converge para 0, o conjunto resultante é ainda denso e enumerável. Pelo Lema 3.4.2 para cada $x_n \neq 0$ existe um funcional $\varphi_n \in E'$ tal que $\|\varphi_n\| = 1$ e $\varphi_n(x_n) = \|x_n\|$. Assim, podemos definir o operador

$$T : E \to l^\infty \quad \text{dado por} \quad T(x) = (\varphi_n(x))_{n\in\mathbb{N}}.$$

Daí, $|\varphi_n(x)| \leq \|\varphi_n\|\|x\| = \|x\|$, de modo que o operador está bem definido pois $(\varphi_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty$ para cada $x \in E$. Agora observe que T é linear:

$$T(\lambda x + y) = (\varphi_n(\lambda x + y))_{n\in\mathbb{N}} = \lambda(\varphi_n(x))_{n\in\mathbb{N}} + (\varphi_n(y))_{n\in\mathbb{N}} = \lambda T(x) + T(y).$$

Também, para cada $x \in E$, $\|T(x)\| = \sup\{|\varphi_n(x)| : n \in \mathbb{N}\} \leq \|x\|$, o que prova que T é limitado (e contínuo). Por outro lado, dado $k \in \mathbb{N}$ temos

$$\|T(x_k)\| = \sup\{|\varphi_n(x_k)| : n \in \mathbb{N}\} \geq |\varphi_k(x_k)| = \|x_k\|$$

de modo que para todo $k \in \mathbb{N}$ temos $\|T(x_k)\| = \|x_k\|$. Também, dado $x \in E$ existe uma sequência $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq D$ tal que $x_k \to x$, assim $T(x_k) \to T(x)$ pois T é contínua, como $T(x_k) = x_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ então $x_k \to T(x)$, logo $T(x) = x$ e $\|T(x)\| = \|x\|$ o que nos permite concluir que T é uma isometria linear sobrejetora sobre sua imagem. O Corolário 3.2.9 garante que E é isometricamente isomorfo a $T(E) \subseteq l^\infty$. $\square$

4 Espaços de Hilbert

4.1 Espaços com produto interno

Nesse capítulo iremos restringir ainda mais a origem da noção de distância presente nas estruturas em que trabalhamos. No final da última seção vimos a existência de um isomorfismo isométrico de um espaço normado separável qualquer com um subespaço de l^∞, apesar disso, não fomos capazes de expressar explicitamente esse subespaço. A restrição imposta será forte o suficiente para que no final do capítulo possamos dar um teorema de classificação, dessa vez muito mais específico do queo Teorema 3.4.3.

Definição 4.1.1. *Seja X um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). Um* ***produto interno*** *em X é uma função $\langle\ ,\ \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) que satisfaz, para todos $x, y, z \in X$ e α escalar:*

PI1: $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$.

PI2: $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$.

PI3: $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$.

PI4: $\langle x, x\rangle \geq 0$, *ocorrendo a igualdade se e somente se* $x = 0$.

Ao par $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ damos o nome de ***espaço com produto interno****.*

Da definição de produto interno, seguem as seguintes propriedades que serão usadas sempre que necessário e sem comentários (o leitor perceberá a importância disso em diversas contas adiante).

- $\langle x, \alpha y\rangle = \overline{\langle \alpha y, x\rangle} = \overline{\alpha\langle y, x\rangle} = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle$.
- $\langle x, y + z\rangle = \overline{\langle y + z, x\rangle} = \overline{\langle y, x\rangle} + \overline{\langle z, x\rangle} = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$.
- $\langle x, 0\rangle = \langle x, x - x\rangle = \langle x, x\rangle - \langle x, x\rangle = 0$ (Analogamente $\langle 0, x\rangle = 0$).

Exemplo 4.1.2. *$\mathbb{R}^n$ é um espaço com produto interno (chamado de produto interno usual) dado por $\langle x, y\rangle = a_1b_1 + \ldots + a_nb_n$ onde $x = (a_1, \ldots, a_n)$ e $y = (b_1, \ldots, b_n)$. A verificação dos axiomas de produto interno é imediata.*

Exemplo 4.1.3. *$\mathbb{C}^n$ é um espaço com produto interno, o qual é dado por $\langle x, y\rangle = a_1\overline{b_1} + \ldots + a_n\overline{b_n}$ onde $x = (a_1, \ldots, a_n)$ e $y = (b_1, \ldots, b_n)$. A verificação dos axiomas é imediata também.*

Exemplo 4.1.4. *Definimos em* l^2 *o produto interno dado por* $\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \overline{b_j}$ *onde* $x = (a_1, a_2, \ldots)$ *e* $y = (b_1, b_2, \ldots)$*. Do fato que* $x, y \in l^2$ *e da desigualdade de Hölder obtemos*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_j \overline{b_j}| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2} \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |\overline{b_j}|^2} = \|x\|_{l^2} \|y\|_{l^2}$$

o que garante a convergência absoluta de $\langle x, y\rangle$ *e consequentemente de* $\langle x, y\rangle$*. A verificação dos axiomas de produto interno também é simples no caso de* l^2*.*

Exemplo 4.1.5. *Em* $C[0,1]$ *definimos* $\langle x, y\rangle_2 = \int_0^1 x(t)y(t)dt$*. As propriedades* $PI1, PI2$ *e* $PI4$ *seguem das propriedades de integração.* $PI3$ *é imediata pois estamos considerando funções com imagem real. Segue que* $(C[0,1], \langle\ ,\ \rangle_2)$ *é um espaço com produto interno.*

No exemplo acima, poderiamos ter considerado funções com imagem em $\mathbb{C}$ com o devido cuidado na hora de definir o produto interno, que nesse caso seria dado por $\langle x, y\rangle = \int_0^1 x(t)\overline{y(t)}dt$, de modo que $PI3$ seria válida usando a continuidade do conjugado e escevendo a integral como um limite. Iremos agora provar um importante resultado válido em espaços com produto interno. Por comodidade iremos usar a notação $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Ficará claro em breve o porquê, através de um corolário do seguinte teorema.

Teorema 4.1.6 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)**.** *Seja* X *um espaço vetorial munido de um produto interno* $\langle\ ,\ \rangle$*. A seguinte desigualdade é satisfeita* $\forall x, y \in X$*:*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|,$$

ocorrendo a igualdade se e somente se $\{x, y\}$ *for linearmente dependente.*

Demonstração. Se $y = 0$ não há o que fazer. Suponha portanto $y \neq 0$ e considere α um escalar qualquer. Assim, observamos que:

$$0 \leq \langle x - \alpha y, x - \alpha y\rangle = \|x\|^2 - \overline{\alpha}\langle x, y\rangle - \alpha\left(\langle y, x\rangle - \overline{\alpha}\langle y, y\rangle\right).$$

Escolhendo $\alpha = \dfrac{\langle x, y\rangle}{\|y\|^2}$ e substituindo na equação acima obtemos:

$$0 \leq \|x\|^2 - \frac{\langle y, x\rangle}{\|y\|^2}\langle x, y\rangle$$

ou equivalentemente

$$|\langle x, y\rangle|^2 = \langle y, x\rangle\langle x, y\rangle \leq \|x\|^2\|y\|^2.$$

Extraindo a raiz de ambos os membros obtemos a desigualdade desejada. Quanto a igualdade, do desenvolvimento acima a igualdade vale se e somente se $y = 0$ ou $0 = \langle x - \alpha y, x - \alpha y\rangle$ para

$\alpha = \dfrac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2}$. Nesse caso, $x - \alpha y = 0$ e portanto $x = \alpha y$ o que mostra que $\{x, y\}$ é linearmente dependente. $\square$

Corolario 4.1.7. *Seja X um espaço vetorial (sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) munido de um produto interno $\langle\ ,\ \rangle$. A função $\|\ \| : X \to \mathbb{R}$ dada por $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ é uma norma.*

Demonstração. Todas as axiomas de norma, com exceção da desigualdade triangular são consequência imediatada da definição da função $\|\ \|$ e dos axiomas de produto interno. Quanto a desigualdade triangular vemos que

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \|y\|^2 = \|x\|^2 + 2Re(\langle x, y \rangle) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| + \|y\|^2.$$

Da desigualdade de Cauchy-Schwarz temos $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|\|y\|$ e portanto, aplicando-a acima concluímos que

$$\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

O resultado segue extraindo a raiz de ambos os lados. $\square$

Com base nesse resultado, sempre que tivermos um espaço com produto interno e não falarmos nada sobre a norma, estaremos considerando a norma induzida pelo próprio produto interno. Outra fato relevante é a continuidade do produto interno.

Lema 4.1.8 (Continuidade do produto interno)**.** *Seja X um espaço com produto interno. Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são sequências sobre X tais que $x_n \to x$ e $y_n \to x$ então $\langle x_n, y_n \rangle \to \langle x, y \rangle$.*

Demonstração. Observe que

$$|\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| = |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, y \rangle + \langle x_n, y \rangle - \langle x, y \rangle| = |\langle x_n, y_n - y \rangle + \langle x_n - x, y \rangle| \leq$$

$$\leq |\langle x_n, y_n - y \rangle| + |\langle x_n - x, y \rangle| \leq \|x_n\|\|y_n - y\| + \|x_n - x\|\|y\|$$

onde na última desigualdade usamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz. Por hipótese $x_n \to x$, portanto, $\|x_n - x\| \to 0$. Do mesmo jeito, $\|y_n - y\| \to 0$. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente e portanto limitada temos:

$$\|x_n\|\|y_n - y\| + \|x_n - x\|\|y\| \to 0$$

e o resultado segue. $\square$

Vamos agora demonstrar um teorema que nos mostra uma identidade que pode ser vista geometricamente e um modo prático de relacionarmos o produto interno com a norma.

Teorema 4.1.9. *Seja X um espaço com produto interno. As seguintes afirmações são válidas $\forall x, y \in X$:*

1. $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ *(identidade do paralelogramo).*

2. $\langle x, y\rangle = \dfrac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$ *se X for um $\mathbb{R}$-espaço vetorial.*

3. $\langle x, y\rangle = \dfrac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2)\right]$ *se X for um $\mathbb{C}$-espaço vetorial.*

Demonstração. Inicialmente observamos que:

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \|y\|^2. \tag{4.1}$$

$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - \langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle + \|y\|^2. \tag{4.2}$$

Somando as equações (3.1) e (3.2) obtemos a). Subtraindo obtemos

$$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 2\langle x, y\rangle + 2\langle y, x\rangle. \tag{4.3}$$

Supondo que X é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial temos $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ e portanto (3.3) equivale a b). Para mostrarmos c), começamos com as seguintes igualdades:

$$\|x+iy\|^2 = \|x\|^2 - i\langle x, y\rangle + i\langle y, x\rangle + \|y\|^2. \tag{4.4}$$

$$\|x-iy\|^2 = \|x\|^2 + i\langle x, y\rangle - i\langle y, x\rangle + \|y\|^2. \tag{4.5}$$

Subtraindo (3.5) de (3.4) e multiplicando a equação obtida por i concluimos que

$$i(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2) = 2\langle x, y\rangle - 2\langle y, x\rangle. \tag{4.6}$$

Agora, somando (3.3) e (3.6) obtemos c), conforme desejado. $\square$.

A presença de um produto interno é uma restrição a mais para o espaço. Essa restrição é rígida o suficiente para que vários espaços comentados e discutidos neste texto não admitam essa estrutura. Mais especificamente temos

Exemplo 4.1.10. *O espaço l^p com $p \neq 2$ não é um espaço com produto interno. Suponha por absurdo que a norma de l^p é induzida de um produto interno, e portanto l^p é um espaço com produto interno. Escolha $x = (1, 1, 0, 0, 0, \ldots) \in l^p$ e $y = (1, -1, 0, 0, 0, \ldots) \in l^p$. Com tais escolhas temos:*

$$\|x\| = 2^{\frac{1}{p}} = \|y\| \quad e \quad \|x+y\| = 2 = \|x-y\|.$$

Assim, observe que $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 8$ e $2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = 4 \cdot 2^{\frac{2}{p}}$. Pela identidade do paralelogramo temos $8 = 4 \cdot 2^{\frac{2}{p}}$, portanto devemos ter $p = 2$, o que não pode ocorrer. Chegamos assim em uma contradição.

Exemplo 4.1.11. *O espaço l^∞ não é um espaço com produto interno.*

Usaremos um raciocínio idêntico ao anterior. Escolhemos $x = (1, 1, 0, 0, 0, \ldots) \in l^p$, $y = (1, -1, 0, 0, 0, \ldots) \in l^\infty$. Com tal escolha temos: $\|x\| = 1 = \|y\|$, $\|x + y\| = 2 = \|x - y\|$. Portanto, da identidade do paralelogramo temos: $8 = 2^2 + 2^2 = 2(1^2 + 1^2) = 4$, um absurdo. Assim, l^∞ não é um espaço com produto interno.

Exemplo 4.1.12. *O espaço $(C[a, b], \|\ \|_\infty)$ não é um espaço com produto interno.*

Seguiremos o mesmo padrão dos exemplos anteriores. Escolha

$$x(t) = 1 \qquad e \qquad y(t) = \frac{t-a}{b-a}.$$

Observe que $\|x\| = 1$ e $\|y\| = 1$. Além disso,

$$x(t) + y(t) = 1 + \frac{t-a}{b-a} \qquad e \qquad x(t) - y(t) = 1 - \frac{t-a}{b-a}.$$

Assim $\|x+y\| = 2$ e $\|x-y\| = 1$. Da lei do paralelogramo temos $5 = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2$ $= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = 4$, o que é um absurdo. Assim, $C[a, b]$ não é um espaço com produto interno.

Enfatizamos que nos exemplos acima, vimos que a norma com a qual estamos trabalhando nos respectivos espaços não pode ser induzida por um produto interno. A priori, podem existir outras normas e nada impede que as mesmas sejam induzidas por um produto interno. Por exemplo, $C[a, b]$ não é um espaço com produto interno com a norma do supremo, entretanto, vimos no Exemplo 4.1.5 como definir um produto interno nesse espaço.

No Corolário 4.1.7 vimos que todo produto interno induz uma norma, e por consequência uma métrica. Uma questão que surge naturalmente nesse âmbito é a completude ou não do espaço na métrica induzida pelo produto interno. Espaços cuja resposta a essa questão é positiva, recebem um nome especial.

Definição 4.1.13 (Espaço de Hilbert)**.** *Seja X um espaço vetorial com um produto interno. Se X é completo com relação a métrica induzida pelo produto interno, X é dito um* ***espaço de Hilbert****.*

Pelos Exemplos 4.1.10, 4.1.11 e 4.1.12, l^p com $p \neq 2$, l^∞ e $(C[a, b], \|\ \|_\infty)$ não são espaços de Hilbert pois sequer são espaços com produto interno (apesar de serem espaços de Banach). Em particular, nem todo espaço normado é um espaço com produto interno.

Exemplo 4.1.14. *Dos Exemplos 4.1.2, 4.1.3 e 4.1.4 sabemos que $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ e l^2 são espaços com produto interno. Uma conta rápida nos mostra que a norma induzida pelo produto interno coincide com a que estamos trabalhando desde o início desse texto e que por sua vez torna esses espaços completos. Segue que $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ e l^2 são espaços de Hilbert.*

Exemplo 4.1.15. *O espaço $C[0,1]$ com o produto interno definido no Exemplo 4.1.5, não é um espaço de Hilbert pois não é completo. Com efeito, consideramos a sequência vista no Exemplo 2.2.9. Dado $\epsilon > 0$ tomamos $n_0 \geq \frac{1}{\epsilon}$. Assim, se $n > m \geq n_0$ vale*

$$\|x_n - x_m\|^2 = \int_0^1 (x_n(t) - x_m(t))^2 dt = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} (n-m)^2 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 dt + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}} \left(1 - m\left(t - \frac{1}{2}\right)\right)^2 dt =$$

$$\frac{(n-m)^2}{3n^3} + \frac{1}{m} - \frac{1}{n} - \frac{1}{m} + \frac{m}{n^2} + \frac{1}{3m} - \frac{m^2}{3n^3} = \frac{(n-m)^2}{3n^2 m} < \frac{1}{3m} + \frac{1}{3n} \leq \frac{2}{3\epsilon} < \epsilon$$

portanto temos uma sequência de Cauchy. Essa sequência não converge. O argumento é o mesmo feito no Exemplo 2.2.9 com a seguinte igualdade ($x \in C[0,1]$ qualquer)

$$\|x_n - x\|^2 = \int_0^1 (x_n(t) - x(t))^2 dt = \int_0^{\frac{1}{2}} (0 - x(t))^2 dt + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} (x_n(t) - x(t))^2 dt + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^1 (1 - x(t))^2 dt.$$

Terminamos essa seção com um importante teorema de existência e unicidade.

Teorema 4.1.16. *Seja E um espaço com produto interno e seja M um subespaço completo de E. Para todo $x \in E$ existe um único $p \in M$ tal que*

$$\|x - p\| = d(x, M).$$

Demonstração. Seja $D = d(x, M)$. Daí, existe uma sequência $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$D \leq \|x - y_n\| < D + \frac{1}{n}. \tag{4.7}$$

Agora, dados $m, n \in \mathbb{N}$ aplicamos a lei do paralelogramo aos vetores $x - y_n$ e $x - y_m$:

$$2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_m\|^2 = \|x - y_n + x - y_m\|^2 + \|y_m - y_n\|^2.$$

Portanto,

$$\|y_m - y_n\|^2 = 2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_m\|^2 - \|2x - (y_n + y_m)\|^2 =$$
$$= 2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_m\|^2 - 4\left\|x - \left(\frac{y_n + y_m}{2}\right)\right\|^2.$$

Usando 4.7 e o fato de M ser subespaço (assim $\frac{y_n + y_m}{2} \in M$) concluímos que

$$\|y_m - y_n\|^2 \leq 2\left(D + \frac{1}{n}\right)^2 + 2\left(D + \frac{1}{m}\right)^2 - 4D^2.$$

Fazendo $m, n \to \infty$, temos $\|y_m - y_n\|^2 \to 0$. Assim $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em M, logo converge, digamos que $y_n \to p$, para certo $p \in M$. Portanto, fazendo $n \to \infty$ em 4.7 obtemos $\|x - p\| = D$.

Quanto a unicidade, suponha que $q \in M$ também satisfaz $\|x - q\| = D$. Aplicando a lei do paralelogramo aos vetores $x - p$ e $x - q$ e imitando o raciocínio já feito temos que

$$\|q - p\|^2 = 2D^2 + 2D^2 - 4\left\|x - \left(\frac{p+q}{2}\right)\right\|^2 \leq 4D^2 - 4D^2 = 0.$$

Isso mostra que $\|q - p\| = 0$ e portanto $q = p$. □

4.2 Ortogonalidade

Nessa seção estudaremos o conceito de ortogonalidade para espaços com produto interno. Seja E um espaço com produto interno $a, b \in E$ e $A \subseteq E$. Diremos que a é **ortogonal** a b se $\langle a, b\rangle = 0$, nesse caso escrevemos $a \perp b$. A seguinte notação será usada: $A^{\perp} = \{y \in E : \langle x, y\rangle = 0 \ \ \forall x \in A\}$, onde lemos $A^{\perp}$ como A-perp. Observamos que da definição segue que $0 \in A^{\perp}$ sempre que $A \neq \emptyset$.

Proposição 4.2.1. *Seja E um espaço com produto interno e $A \subseteq E$. São válidas as seguintes afirmações:*

1. $A \subseteq (A^{\perp})^{\perp}$.

2. $E^{\perp} = \{0\}$ *e* $\{0\}^{\perp} = E$.

3. $A^{\perp}$ *é um subespaço fechado de* E.

4. $A \cap A^{\perp} = \begin{cases} \{0\} \text{ se } 0 \in A. \\ \emptyset \text{ se } 0 \notin A. \end{cases}$

Demonstração. As duas primeiras afirmações decorrem imediatamente da definição de $A^{\perp}$. Quanto a terceira, dados $y_1, y_2 \in A$ e α escalar temos $\langle \alpha y_1 + y_2, x\rangle = \alpha\langle y_1, x\rangle + \langle y_2, x\rangle = 0$ para todo $x \in A$, o que mostra que $A^{\perp}$ é um subespaço. Para mostramos que $A^{\perp}$ é fechado, consideramos $y \in \overline{A^{\perp}}$, portanto existe uma sequência $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\perp}$ tal que $y_n \to y$. Da continuidade do produto interno temos que $\langle y_n, x\rangle \to \langle y, x\rangle$. Como $\langle y_n, x\rangle = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ segue que $\langle y, x\rangle = 0$ e assim $y \in A^{\perp}$.

Quanto a quarta afirmação, se existe $x \in A \cap A^{\perp}$ temos $\langle x, x\rangle = 0$, logo $x = 0$. Dessa forma só temos duas opções $A \cap A^{\perp} = \{0\}$ ou $A \cap A^{\perp} = \emptyset$. Como $0 \in A^{\perp}$ para todo conjunto $A \neq \emptyset$, o resultado segue. □

Com os resultados que temos nessa seção já podemos demonstrar um importante teorema sobre a decomposição de um espaço de Hilbert. Esse é um dos teoremas fundamentais da teoria desses espaços.

Teorema 4.2.2. *Seja H um espaço de Hilbert e M um subespaço fechado de H. Então $H = M \oplus M^{\perp}$, ou seja, cada $x \in H$ admite uma única representação na forma $x = p + q$, com $p \in M$ e $q \in M^{\perp}$. Além disso, $\|x - p\| = d(x, M)$.*

Demonstração. Seja $x \in H$. Como M é fechado e H é completo, M é completo (Lema 2.2.1). Pelo Teorema 4.1.16 existe um único vetor $p \in M$ tal que $\|x - p\| = d(x, M)$. Tomemos portanto $q = x - p$ e provemos que $q \in M^{\perp}$. Para tanto, observamos que dados $y \in M$ e λ escalar o vetor $p + \lambda y \in M$ pois M é subespaço. Daí,

$$\|q\|^2 = \|x - p\|^2 \leq \|x - (p + \lambda y)\|^2 = \|q - \lambda y\|^2 = \|q\|^2 - \overline{\lambda}\langle q, y\rangle - \lambda\langle y, q\rangle + |\lambda|^2\|y\|^2.$$

Segue que $|\lambda|^2\|y\|^2 - 2Re(\lambda\langle y, q\rangle) \geq 0$. Escrevendo $\langle y, q\rangle$ na forma polar temos $\langle y, q\rangle = |\langle y, q\rangle|e^{i\theta}$. Agora, para cada $t \in \mathbb{R}$ escolha $\lambda = te^{-i\theta}$. Portanto $t^2\|y\|^2 - 2t|\langle y, q\rangle| \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Pois bem, essa é uma equação de segundo grau em t e portanto analisando seu discriminante concluímos que $|\langle y, q\rangle|^2 \leq 0$. Daí, $\langle y, q\rangle = 0$ e $q \in M^{\perp}$.

Quanto a unicidade, suponhamos que $p + q = p_1 + q_1$ com $p, p_1 \in M$ e $q, q_1 \in M^{\perp}$. Como M e $M^{\perp}$ são subespaços temos $p - p_1 \in M$ e $q - q_1 \in M^{\perp}$. Como $p - p_1 = q - q_1$ concluímos que $p - p_1 \in M \cap M^{\perp} = \{0\}$. Logo $p = p_1$, consequentemente, $q = q_1$. Fica provada assim a unicidade. □

Uma consequência dessa decomposição do espaço é o seguinte corolário.

Corolario 4.2.3. *Se Y é um subespaço fechado de um espaço de Hilbert H então $Y = (Y^{\perp})^{\perp}$.*

Demonstração. Da Proposição 4.2.1, item a), sabemos que $Y \subseteq (Y^{\perp})^{\perp}$. Agora, dado $x \in (Y^{\perp})^{\perp} \subseteq H$ usamos o Teorema 4.2.2 para escrever $x = y + z$, onde, $y \in Y \subseteq (Y^{\perp})^{\perp}$ e $z \in Y^{\perp}$. Como $(Y^{\perp})^{\perp}$ é um subespaço (Proposição 4.2.1) temos que $x - y = z \in (Y^{\perp})^{\perp}$. Ora, assim temos $z \in Y^{\perp} \cap (Y^{\perp})^{\perp} = \{0\}$. Assim $z = 0$ e consequentemente $x = y$. Portanto $x \in Y$ e a igualdade $Y = (Y^{\perp})^{\perp}$ está provada. □

Outra consequência importante é a caracterização de alguns conjuntos densos em espaços de Hilbert.

Corolario 4.2.4. *Seja M um subconjunto não vazio de um espaço de Hilbert H. Então $X := \overline{spanM} = H$ se, e somente se, $M^{\perp} = \{0\}$.*

Demonstração. Suponha que $X = H$ e seja $x \in M^{\perp} \subseteq H$. Daí, existe uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq spanM$ tal que $x_n \to x$. Da continuidade do produto interno segue que $\langle x_n, x\rangle \to \langle x, x\rangle$. Como $\langle x_n, x\rangle = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que $\langle x, x\rangle = 0$. Portanto $x = 0$ e $M^{\perp} = \{0\}$.

Reciprocamente suponha que $M^{\perp} = \{0\}$. Se $y \in X^{\perp}$ então $y \in M^{\perp}$ e assim $y = 0$. Desse modo, como X é um subespaço fechado de H usamos o Teorema 4.2.2 para escrever $H = X \oplus X^{\perp} = X \oplus \{0\}$. Portanto $\overline{spanM} = X = H$, como queríamos. □

Introduziremos agora o conceito de conjunto ortonormal. Essa definição será de suma importância em tudo o que segue.

Definição 4.2.5 (Conjunto Ortonormal)**.** *Seja E um espaço com produto interno. Um conjunto $S \subseteq E$ que satisfaz, $\forall x, y \in S$, $\langle x, y\rangle = \begin{cases} 0 & se\ x \neq y \\ 1 & se\ x = y \end{cases}$, é denominado um **conjunto ortonormal**.*

Exemplo 4.2.6. *A base canônica de $\mathbb{R}^n$ é um conjunto ortonormal em $\mathbb{R}^n$. De modo análogo, o conjunto $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto ortonormal em l^2.*

Da definição segue que todo subconjunto de um conjunto ortonormal é também ortonormal. Vejamos agora que tais conjuntos são linearmente independentes.

Proposição 4.2.7. *Seja E um espaço com produto interno e $S \subseteq E$. Se S é ortonormal então S é linearmente independente.*

Demonstração. Considere uma combinação linear finita qualquer de elementos de S, digamos que seja $\sum\limits_{j=1}^{N} \alpha_j x_j$, onde os α_j denotam escalares e os x_j denotam elementos de S. Se $\sum\limits_{j=1}^{N} \alpha_j x_j = 0$, para cada $k = 1, \ldots, N$ vale que $0 = \left\langle \sum\limits_{j=1}^{N} \alpha_j x_j, x_k \right\rangle = \alpha_k \langle x_k, x_k\rangle = \alpha_k$. Assim $\alpha_1 = \ldots = \alpha_N = 0$ o que prova que S é linearmente independente. $\square$

Nos Teoremas 4.1.16 e 4.2.2 vimos a existência de um vetor p com propriedades interessantes de minimização. Com algumas hipóteses a mais podemos dar uma nova caracterização a esse vetor, conforme atesta a proposição seguinte.

Proposição 4.2.8. *Seja H um espaço de Hilbert, $\{x_1, \ldots, x_n\}$ um conjunto ortonormal finito em H e $M = span\{x_1, \ldots, x_n\}$. São válidas:*

1. *Dado $x \in H$, $\left\| x - \sum\limits_{i=1}^{n} \langle x, x_i\rangle x_i \right\| = d(x, M)$.*
2. *Para todo $x \in H$, $\sum\limits_{i=1}^{n} |\langle x, x_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2$.*

Demonstração. Para provar 1, vemos que $\dim M = n < \infty$, assim M é fechado de H. Pelo Teorema 4.2.2 dado $x \in H$ existem $p \in M$ e $q \in M^\perp$ tais que $x = p + q$ e $\|x - p\| = d(x, M)$. Visto que $p \in M$, existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ escalares tais que $p = \alpha_1 x_1 + \ldots \alpha_n x_n$. Como $x - p = q \in M^\perp$, $(x - p) \perp x_j$ para todo $j = 1, \ldots, n$. Portanto:

$$0 = \langle x - p, x_j\rangle = \langle x, x_j\rangle - \alpha_j.$$

Assim, $\alpha_j = \langle x, x_j \rangle$, consequentemente $p = \sum\limits_{i=1}^{n} \langle x, x_i \rangle x_i$ e 1 está provado. Quanto a 2, dado $x \in H$, sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ como no item anterior. Visto que $\{x_1, \ldots, x_n\}$ é um conjunto ortonormal temos

$$0 \leq \left\langle x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, x_i \rangle x_i, x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, x_i \rangle x_i \right\rangle = \|x\|^2 - \left\langle x, \sum_{i=1}^{n} \langle x, x_i \rangle x_i \right\rangle - \left\langle \sum_{i=1}^{n} \langle x, x_i \rangle x_i, x \right\rangle +$$

$$+ \left\langle \sum_{i=1}^{n} \langle x, x_i \rangle x_i, \sum_{i=1}^{n} \langle x, x_i \rangle x_i \right\rangle = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\langle x, x_i \rangle|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\langle x, x_i \rangle|^2 + \sum_{i=1}^{n} |\langle x, x_i \rangle|^2.$$

Portanto $\sum\limits_{i=1}^{n} |\langle x, x_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2$, como queríamos demonstrar. $\square$

No resultado anterior tínhamos um conjunto ortonormal finito e conseguimos representar vetores como combinações lineares finitas adequadas. Agora, vamos ver o que conseguimos fazer com conjuntos ortonormais não necessariamente finitos. Comecemos com um lema:

Lema 4.2.9. *Considere I um conjunto de índices qualquer e seja $S = \{x_i : i \in I\}$ um conjunto ortonormal no espaço de Hilbert H. Assim, para cada $x \in H$, com $x \neq 0$, o conjunto*

$$I^x = \{i \in I : \langle x, x_i \rangle \neq 0\}$$

é enumerável (podendo ser finito).

Demonstração. Considere $x \neq 0 \in H$, dado $k \in \mathbb{N}$ definimos $I_k^x = \left\{ i \in I : |\langle x, x_i \rangle| > \dfrac{1}{k} \right\}$, portanto, $I^x = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} I_k^x$. Veja que se para cada k natural o conjunto I_k^x for finito, o resultado está provado. Pois bem, afirmamos que I_k^x é finito para todo $k \in \mathbb{N}$. Começamos observando que se $I_0 \subseteq I$ é finito temos $\sum\limits_{i \in I_0} |\langle x, x_i \rangle| \leq \|x\|^2$ pelo item 2 da proposição anterior. Agora, dado um número finito de elementos de I_k^x, digamos, $i_1, \ldots, i_n$ temos

$$\frac{n}{k^2} = \underbrace{\frac{1}{k^2} + \ldots \frac{1}{k^2}}_{n \text{ vezes}} < |\langle x, x_1 \rangle|^2 + \ldots + |\langle x, x_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Portanto $n \leq k^2 \|x\|^2$. Provamos assim que o número de elementos de qualquer subconjunto finito de I_k^x é no máximo $k^2\|x\|^2$. Concluímos que I_k^x é finito.$\square$

O grande ganho desse lema reside na garantia de que somas adequadas sobre o conjunto I^x são sempre enumeráveis, ou seja, podemos lidar com séries numéricas. Na Proposição 4.2.8 conseguimos uma desigualdade somando sobre um conjunto finito de índices. Vamos estender essa mesma desigualdade para um conjunto infinito.

Teorema 4.2.10 (Desigualdade de Bessel)**.** *Seja $S = \{x_i : i \in I\}$ um conjunto ortonormal no espaço de Hilbert H. Para todo $x \in H$, vale que*

$$\sum_{i \in I^x} |\langle x, x_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

onde $I^x = \{i \in I : \langle x, x_i \rangle \neq 0\}$. Por consequência, a série exposta é convergente.

Demonstração. Pelo lema anterior, I^x é enumerável. Se I^x for finito o item 2 da Proposição 4.2.8 garante o resultado. Suponha portanto I^x infinito. Como $|\langle x, x_i \rangle| > 0$, qualquer ordenação da série, caso ela convirja, produzirá o mesmo limite. Consideramos então uma ordenação qualquer de I^x, digamos que seja $I = \{i_1, i_2, i_3, \ldots\}$. Daí, para cada $n \in \mathbb{N}$ usamos novamente o item 2 da Proposição 4.2.8 para obter $\sum\limits_{k=1}^{n} |\langle x, x_{i_k} \rangle| \leq \|x\|^2$. Passando ao limite em n e observando que a sequência das somas parcias é monótona e limitada obtemos $\sum\limits_{i \in I^x} |\langle x, x_{i_k} \rangle|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\langle x, x_{i_k} \rangle|^2 \leq \|x\|^2$, conforme desejado. $\square$

Nas condições do enunciado da desigualdade de Bessel, notamos que fica também demonstrado que $(\langle x, x_i \rangle)_{i \in \mathbb{N}} \in l^2$.

4.3 Sistemas ortonormais completos

Na seção anterior vimos proposições que envolviam conjuntos ortonormais. Com mais uma hipótese conseguiremos ampliar esses resultados de forma surpreendente e, dentre outras coisas, representaremos vetores em espaços de Hilbert de um modo especial. Na Seção 2.3 falamos um pouco sobre séries em espaços normados, em especial espaços de Banach. Com relação aos espaços de Hilbert (que são espaços de Banach) apresentamos o seguinte

Lema 4.3.1. *Seja $S = \{x_i : i \in I\}$ um conjunto ortonormal no espaço de Hilbert H. Então, para cada $x \in H$ a série*

$$\sum_{i \in I^x} \langle x, x_i \rangle x_i$$

é incondicionalmente convergente, onde $I^x = \{i \in I : \langle x, x_i \rangle \neq 0\}$.

Demonstração. Pelo Lema 4.2.9, I^x é enumerável. Se I^x é finito, o resultado é imediato, suponha portanto que seja infinito. Seja $\{i_1, i_2, \ldots\} = I^x$ uma enumeração qualquer de I^x e $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \langle x, x_{i_k} \rangle x_{i_k}$. Vamos mostrar que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy. Da desigualdade de Bessel $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\langle x, x_{i_k} \rangle|^2$ converge. Assim, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $m, n \geq n_0$ temos $\sum\limits_{k=m+1}^{n} |\langle x, x_{i_k} \rangle|^2 < \epsilon$. Agora, vejamos que,

$$\|S_n - S_m\|^2 = \left\| \sum_{k=m+1}^{n} \langle x, x_{i_k} \rangle x_{i_k} \right\|^2 = \left\langle \sum_{k=m+1}^{n} \langle x, x_{i_k} \rangle x_{i_k}, \sum_{k=m+1}^{n} \langle x, x_{i_k} \rangle x_{i_k} \right\rangle = \sum_{k=m+1}^{n} |\langle x, x_{i_k} \rangle|^2 < \epsilon$$

onde na última igualdade usamos a hipótese de S ser ortonormal. Assim $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em H e portanto converge. $\square$.

Pela Proposição 3.3.5 o valor da série, seja qual for a ordenação das parcelas, é o mesmo. Cometeremos um abuso de notação quando nos referirmos a série $\sum_{i\in I^x} \langle x, x_i \rangle x_i$. Dado $x \in H$ iremos escrever $\sum_{i\in I} \langle x, x_i \rangle x_i$ (somando sobre I) no lugar de $\sum_{i\in I^x} \langle x, x_i \rangle x_i$. Esse abuso será feito tendo em vista o lema anterior e o Lema 4.2.9.

Definição 4.3.2 (Sistema ortonormal completo)**.** *Seja S um conjunto ortonormal de um espaço com produto interno. Se S satisfaz $S^\perp = \{0\}$ dizemos que S é um* ***sistema ortonormal completo****.*

Exemplo 4.3.3. *A base canônica de $\mathbb{R}^n$ é um sistema ortonormal completo em $\mathbb{R}^n$. De modo análogo, o conjunto $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ é um sistema ortonormal completo em l^2.*

Exemplo 4.3.4. *O conjunto $S = \{e_2, e_3, \dots\} \subseteq l^2$ não é um sistema ortonormal completo pois $\emptyset \neq span\{e_1\} = S^\perp$.*

Uma das vantagens de trabalharmos com sistemas ortonormais completos está no teorema que segue.

Teorema 4.3.5. *Seja $S = \{x_i : i \in I\}$ um conjunto ortonormal em um espaço de Hilbert H. São equivalentes:*

a) Para cada $x \in H$, $x = \sum_{i\in I} \langle x, x_i \rangle x_i$.

b) S é um sistema ortonormal completo.

c) $\overline{span\ S} = H$.

d) Para cada $x \in H$, vale que $\|x\|^2 = \sum_{i\in I} |\langle x, x_i \rangle|^2$.

e) Para todos $x, y \in H$, $\langle x, y \rangle = \sum_{i\in I} \langle x, x_i \rangle \overline{\langle y, x_i \rangle}$.

Demonstração. Iremos provar: $a) \Leftrightarrow b)$, $b) \Rightarrow c) \Rightarrow d) \Rightarrow e) \Rightarrow b)$. Comecemos provando que $a) \Rightarrow b)$. Para tanto, considere $x \in S^\perp$, daí $\langle x, x_i \rangle = 0$ para todo $i \in I$. Pela hipótese, temos $x = \sum_{i\in I} \langle x, x_i \rangle x_i = 0$, portanto, $S^\perp = \{0\}$.

Provemos agora que $b) \Rightarrow a)$. Pelo Lema 4.2.9, dado $x \in H$ o conjunto $\{i \in I : \langle x, x_i \rangle \neq 0\}$ é enumerável. Em um primeiro momemento, vamos supô-lo infinito e considerar uma enumeração qualquer do mesmo, digamos que seja $\{i_1, i_2, \ldots\}$. Do Lema 4.3.1 segue que

$$\sum_{i \in I} \langle x, x_i \rangle x_i = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, x_{i_k} \rangle x_{i_k}. \qquad (*)$$

Assim, dado $i \in I$, podemos ter $i \in I^x$ ou $i \notin I^x$. No primeiro caso, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $i = i_{k_0}$. Nesse caso, usando o fato de $\{x_i : i \in I\}$ ser ortonormal temos

$$\left\langle x - \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, x_{i_k} \rangle x_{i_k}, x_{i_{k_0}} \right\rangle = \langle x, x_{i_{k_0}} \rangle - \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, x_{i_k} \rangle x_{i_k}, x_{i_{k_0}} \right\rangle = 0.$$

No segundo caso, vale que

$$\left\langle x - \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, x_{i_k} \rangle x_{i_k}, x_i \right\rangle = \langle x, x_i \rangle = 0.$$

Em ambos os casos, como S é um sistema ortonormal completo concluimos que

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, x_{i_k} \rangle x_{i_k} = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, x_i \rangle x_i.$$

No caso em que I^x for finito, a equação $(*)$ se transforma em uma igualdade de somas finitas e é trivialmente válida. O restante da demonstração é análogo ao que foi feito.

O Corolário 4.2.4 nos garante que $b) \Rightarrow c)$. Para provarmos que $c) \Rightarrow d)$, consideramos $x \in H$ e $\epsilon > 0$. Da densidade de $spanS$ em H existe $y \in spanS$ tal que $\|x - y\| < \epsilon$ e podemos encontrar $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n} \in S$ e $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_n}$ escalares tais que $y = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{i_k} x_{i_k}$.

Agora, aplicamos a Proposição 4.2.8 (item a) com $M = span\{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}\}$ e obtemos

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, x_{i_k} \rangle x_{i_k} \right\| = d(x, M) \leq \|x - y\| < \epsilon.$$

Como $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}\}$ é ortonormal temos

$$\epsilon^2 > \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, x_{i_k} \rangle x_{i_k} \right\|^2 = \left\langle x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, x_{i_k} \rangle x_{i_k}, x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, x_{i_k} \rangle x_{i_k} \right\rangle = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, x_{i_k} \rangle|^2.$$

Combinando o que foi feito com a desigualdade de Bessel concluimos que

$$\|x\|^2 < \sum_{k=1}^{n} |\langle x, x_{i_k} \rangle|^2 + \epsilon^2 \leq \sum_{i \in I} |\langle x, x_i \rangle|^2 + \epsilon^2 \leq \|x\|^2 + \epsilon^2.$$

Como as desigualdades acima são válidas para todo $\epsilon > 0$ fazemos $\epsilon \to 0$ e obtemos $\|x\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x, x_i \rangle|^2$, que por sinal, é chamada de **Identidade de Parseval**.

Vamos demonstrar agora que $d) \Rightarrow e)$. Sejam $x, y \in H$ e λ um escalar, usando algumas propriedades do produto interno e nossa hipótese temos

$$|\lambda|^2\|x\|^2 + \lambda\langle x, y\rangle + \overline{\lambda}\langle y, x\rangle + \|y\|^2 = \langle \lambda x + y, \lambda x + y\rangle = \|\lambda x + y\|^2 = \sum_{i\in I} |\langle \lambda x + y, x_i\rangle|^2 =$$

$$= \sum_{i\in I}\langle \lambda x + y, x_i\rangle\overline{\langle \lambda x + y, x_i\rangle} = \sum_{i\in I}(|\lambda|^2|\langle x, x_i\rangle|^2 + \lambda\langle x, x_i\rangle\langle x_i, y\rangle + \overline{\lambda}\langle y, x_i\rangle\langle x_i, x\rangle + |\langle x_i, y\rangle|^2).$$

Agora, observamos que $\sum_{i\in I} |\lambda|^2|\langle x, x_i\rangle|^2$ e $\sum_{i\in I} |\langle x_i, y\rangle|^2$ convergem devido a nossa hipótese, a mesma hipótese que juntamente com a desigualdade de Hölder garante a convergência de $\sum_{i\in I} \lambda\langle x, x_i\rangle\langle x_i, y\rangle$ e $\sum_{i\in I} \overline{\lambda}\langle y, x_i\rangle\langle x_i, x\rangle$. Segue daí que

$$|\lambda|^2\|x\|^2 + \lambda\langle x, y\rangle + \overline{\lambda}\langle y, x\rangle + \|y\|^2 =$$

$$= \sum_{i\in I} |\lambda|^2|\langle x, x_i\rangle|^2 + \sum_{i\in I} \lambda\langle x, x_i\rangle\langle x_i, y\rangle + \sum_{i\in I} \overline{\lambda}\langle y, x_i\rangle\langle x_i, x\rangle + \sum_{i\in I} |\langle x_i, y\rangle|^2$$

e consequentemente, pela nossa hipótese, que

$$\lambda\langle x, y\rangle + \overline{\lambda}\langle y, x\rangle = \sum_{i\in I} \lambda\langle x, x_i\rangle\langle x_i, y\rangle + \sum_{i\in I} \overline{\lambda}\langle y, x_i\rangle\langle x_i, x\rangle.$$

Escolhendo $\lambda = 1$ temos

$$\langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle = \sum_{i\in I}\langle x, x_i\rangle\langle x_i, y\rangle + \sum_{i\in I} \langle y, x_i\rangle\langle x_i, x\rangle.$$

Logo $Re(\langle x, y\rangle) = Re\left(\sum_{i\in I}\langle x, x_i\rangle\langle x_i, y\rangle\right)$. Analogamente, fazendo $\lambda = i$ temos $Im(\langle x, y\rangle) = Im\left(\sum_{i\in I}\langle x, x_i\rangle\langle x_i, y\rangle\right)$ e o resultado segue.

Finalmente, provemos que $e) \Rightarrow b)$. Para tal, considere $x \in S^\perp$. Daí, $\langle x, x_i\rangle = 0\ \forall i \in I$. Assim, pela hipótese, $\langle x, x\rangle = \sum_{i\in I}\langle x, x_i\rangle\overline{\langle x, x_i\rangle} = 0$. Portanto $x = 0$. $\square$

Do teorema anterior, fica claro o quão significante é a presença de sistemas ortonormais completos em espaços de Hilbert e as propriedades que os mesmos têm. O nosso próximo passo será justamente encontrar condições sobre as quais podemos garantir a existência desses sistemas. Com esse objetivo em mente, enunciaremos a seguir, sem demonstração, um clássico teorema de Álgebra Linear, conhecido como Processo de Gram-Schmidt. Acreditamos que o leitor já tenha visto a demonstração (construtiva) do mesmo em algum momento do curso de Álgebra Linear.

Proposição 4.3.6 (Gram Schmidt)**.** *Sejam E um espaço com produto interno e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de vetores linearmente independentes em E. Assim, existe uma sequência de vetores ortonormais, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, em E, tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ temos:*

$$span\{x_1, \ldots, x_n\} = span\{e_1, \ldots, e_n\}$$

Precisaremos ainda do seguinte,

Corolario 4.3.7. *Seja E um espaço com produto interno e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de vetores L.I em E. Assim, existe uma sequência de vetores ortonormais, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, em E, tal que:*

$$span\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = span\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$$

Demonstração. Seja $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sequência obtida no processo de Gram-Schmidt. Dado $v \in span\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é verdade que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $v \in span\{x_1, \ldots, x_k\}$. Usando a proposição anterior, $v \in span\{x_1, \ldots, x_k\} = span\{e_1, \ldots, e_k\} \subseteq span\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$. Portanto $span\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq span\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$. A outra inclusão é análoga. □

Teorema 4.3.8. *Um espaço de Hilbert H de dimensão infinita é separável se e somente se, existe um sistema ortonormal completo e enumerável em H.*

Demonstração. Suponha que $S = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq H$ seja uma sistema ortonormal completo e enumerável em H. Pelo Teorema 4.3.5 temos $\overline{spanS} = H$. Pelo Teorema 2.3.16 segue que H é separável.

Agora, suponhamos que H é separável. Seja $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ um conjunto enumerável e denso em H. Seja $B \subseteq D$ uma base para $spanD$ (que existe pois D gera $spanD$). Se B for finita, digamos $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ temos $H = \overline{spanD} = \overline{spanB} = spanB$ pois subespaços de dimensão finita são fechados (Corolário 3.1.3). Chegamos assim em um absurdo pois H tem dimensão infinita por hipótese.

Assim, B é infinita. Como $B \subseteq D$ e D é enumerável, B é enumerável. Pois bem, digamos que $B = \{v_n : n \in \mathbb{N}\}$. Pelo Corolário 4.3.7 existe um conjunto ortonormal $S \subseteq H$ tal que $spanS = spanB$. Portanto $\overline{spanS} = \overline{spanB} = \overline{spanD} = H$. Pelo Teorema 4.3.5 segue que S é um sistema ortonormal completo. □

Perceba que, em particular, acabamos de mostrar que em um espaço de Hilbert separável de dimensão infinita sempre existe um sistema ortonormal completo e portanto as equivalências do Teorema 4.3.5 são todas válidas quando aplicadas a esse sistema.

4.4 l^2 é o único espaço de Hilbert separável

Por fim, apresentamos agora dois teoremas que mostram a importância do espaço l^2 e como todos os demais espaços de Hilbert separáveis de dimensão infinita se relacionam com ele.

Teorema 4.4.1 (Riesz-Fischer)**.** *Todo espaço de Hilbert separável e de dimensão infinita é isometricamente isomorfo a l^2.*

Demonstração. Seja H um espaço de Hilbert separável e de dimensão infinita. Pelo teorema anterior, existe um sistema ortonormal completo e enumerável em H, denotemos-o por $S = \{x_j : j \in \mathbb{N}\}$. Da desigualdade de Bessel, dado $x \in H$ temos $(\langle x, x_j\rangle)_{j\in\mathbb{N}} \in l^2$, de modo que podemos definir o operador:

$$T : H \to l^2 \qquad\qquad T(x) = (\langle x, x_j\rangle)_{j\in\mathbb{N}}.$$

Veja que $T(\alpha x + y) = (\langle \alpha x + y, x_j\rangle)_{j\in\mathbb{N}} = \alpha(\langle x, x_j\rangle)_{j\in\mathbb{N}} + (\langle y, x_j\rangle)_{j\in\mathbb{N}} = \alpha T(x) + T(y)$ e portanto o operador T é linear. Lembrando da identidade de Parseval (Teorema 4.3.5, item d) temos:

$$\|x\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\langle x, x_j\rangle|^2 = \|T(x)\|^2$$

o que mostra que T é uma isometria. Quanto a sobrejetividade, seja $(a_j)_{j\in\mathbb{N}} \in l^2$. Afirmamos que $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j x_j$ converge em H. Com efeito, seja $S_k = \sum\limits_{j=1}^{k} a_j x_j$ onde $k \in \mathbb{N}$. Assim, se $m > n$ temos

$$\|S_m - S_n\|^2 = \left\| \sum_{j=n+1}^{m} a_j x_j \right\|^2 = \sum_{j=n+1}^{m} \|a_j x_j\|^2 = \sum_{j=n+1}^{m} |a_j|^2$$

onde usamos o fato de $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ser um sistema ortonormal completo.

Como $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |a_j|^2$ converge pois $(a_j)_{j\in\mathbb{N}} \in l^2$ a sequência $(S_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em H e portanto converge para algum ponto de H. Assim, $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j x_j \in H$. Agora, basta observar que

$$T\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j\right) = \left(\left\langle \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j, x_n \right\rangle\right)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

e assim T é sobrejetora. O Corolário 3.2.9 garante que T é um isomorfismo isométrico. $\square$

Exemplo 4.4.2. *(Aplicação do Teorema de Riesz-Fischer) Considere o espaço $C[0,1]$ com o produto interno visto no Exemplo 4.1.5, denotemos a norma induzida pelo produto interno por $\| \ \|_2$. Do Exemplo 4.1.15 sabemos que $(C[0,1], \| \ \|_2)$ não é completo. Seja $(H, \| \ \|_0)$ o seu completamento. Sabemos que H é um espaço de Hilbert (para detalhes, consulte a página 139 de [3]).*

Afirmação 1: O espaço normado $(C[0,1], \| \ \|_2)$ é separável.

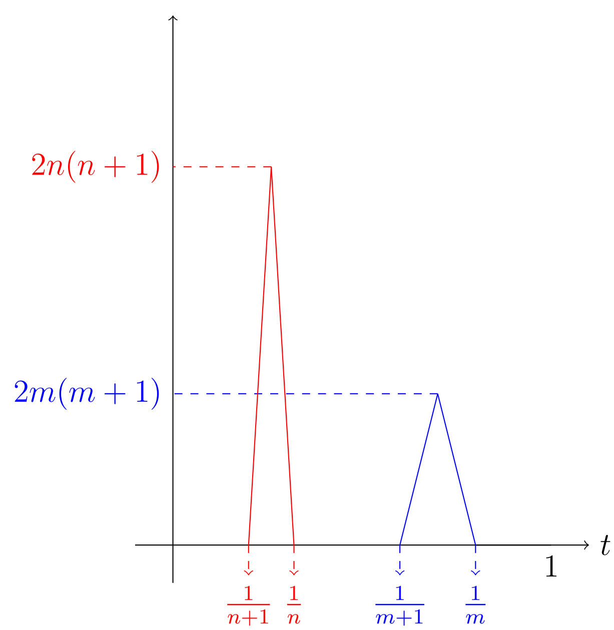
Dado $f \in C[0,1]$ temos
$$\|f\|_2^2 = \int_0^1 |f(t)|^2 dt \leq \int_0^1 (\sup_{t\in[0,1]} |f(t)|)^2 dt = \|f\|_\infty^2.$$
Logo $\|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$. Como $(C[0,1], \| \ \|_\infty)$ é separável pelo Corolário 2.3.18, existe $D = \{f_1, f_2, \ldots\}$ denso em $(C[0,1], \| \ \|_\infty)$ e enumerável, de modo que dado $\epsilon > 0$ e $f \in C[0,1]$ podemos tomar $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|f - f_N\|_\infty < \epsilon$. Portanto
$$\|f - f_N\|_2 \leq \|f - f_N\|_\infty < \epsilon$$
o que prova a separabilidade de $(C[0,1], \| \ \|_2)$.

Afirmação 2: $(H, \| \ \|_0)$ é separável.

Seja $g \in H$ e $\epsilon > 0$. Da construção do completamento (veja [3] novamente) existe $f \in C[0,1]$ tal que $\|g - f\|_0 < \dfrac{\epsilon}{2}$. Também, da separabilidade de $(C[0,1], \| \ \|_2)$ existe $f_N \in D$ tal que $\|f - f_N\|_2 < \dfrac{\epsilon}{2}$. Como $f, f_N \in C[0,1]$ temos $\|f - f_N\|_2 = \|f - f_N\|_0$ (o valor da norma de H e de $C[0,1]$ coincide quando calculada nos elementos de $C[0,1]$). Portanto $\|g - f_N\|_0 \leq \|g - f\|_0 + \|f - f_N\|_0 < \epsilon$. Assim D é também denso em $(H, \| \ \|_0)$ e portanto esse espaço é separável.

Afirmação 3: H possui dimensão infinita.

Considere a sequência de funções $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ onde $(f_n)^2 : [0,1] \to \mathbb{R}$ é dada por $(f_n(t))^2 = 0$ sempre que $t \in \left(0, \dfrac{1}{n+1}\right) \bigcup \left(\dfrac{1}{n}, 1\right)$ e que entre os pontos $\dfrac{1}{n+1}$ e $\dfrac{1}{n}$ é representada pelo gráfico seguinte. Lembre que a norma de H quando calculada em elementos de $C[0,1]$ coincide com a norma de $C[0,1]$.



Segue que $\|f_n\|_0 = \|f_n\|_2 = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e assim $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência contida na bola unitária fechada de H (ou então de $C[0,1]$). Também, se $m \neq n$ temos $\|f_n - f_m\|_2^2 = 2$ e portanto $\|f_n - f_m\|_2 = \sqrt{2}$ o que mostra que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ não possui nenhuma subsequência de Cauchy, logo não possui nenhuma subsequência convergente. Segue que a bola unitária fechada de H não é compacta e portanto H tem dimensão infinita.

O Teorema de Riesz-Fischer garante que existe um isomorfismo isométrico entre l^2 e H. Na literatura, H é denotado por $L^2[0,1]$. Em especial, pelo Teorema 4.3.5 os vetores de $L^2[0,1]$ podem ser representados como no item a) desse teorema, os coeficientes $\langle x, x_i\rangle$ (onde cada um dos x_i's é um elemento de um certo sistema ortonormal completo) que aparecem nessa representação são chamados de **coeficientes de Fourier** e estão diretamente ligados à representação de funções em série de Fourier.

Para finalizar, vamos apresentar uma espécie de recíproca do teorema de Riesz-Fischer.

Teorema 4.4.3. *Seja $(E, \|\ \ \|)$ um espaço normado. Se existe um isomorfismo isométrico, $T : E \to l^2$ então E é um espaço de Hilbert separável e com dimensão infinita.*

Demonstração. Primeiramente vamos definir $\langle\ ,\ \rangle : E\times E \to \mathbb{C}$ dado por $\langle x, y\rangle = \langle T(x), T(y)\rangle_{l^2}$. Segue que $\langle\ ,\ \rangle$ é um produto interno pois $\langle\ ,\ \rangle_{l^2}$ é um produto interno e T é um isomorfismo isométrico.

Também, $\langle x, x\rangle = \langle T(x), T(x)\rangle_{l^2} = \|T(x)\|^2 = \|x\|^2$ o que mostra que em $(E, \|\ \ \|)$ a norma é induzida pelo produto interno acima definido. Também, dada uma sequência de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ vale que $\forall \epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $m, n \geq n_0$ então $\|x_m - x_n\| < \epsilon$. Como T é uma isometria linear

$$\|T(x_n) - T(x_m)\| = \|T(x_n - x_m)\| = \|x_n - x_m\| < \epsilon$$

o que mostra que a sequência $(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em l^2 que é completo. Segue que $T(x_n) \to y$ para certo $y \in l^2$. Ainda, a sobrejetividade de T garante que existe $x \in E$ tal que $T(x) = y$. A continuidade do operador T^{-1} garante que $x_n \to x$ em E e logo E é completo. Segue que E é um espaço de Hilbert.

Quanto a separabilidade, existe em l^2 um subconjunto D, denso e enumerável. Vejamos que $T^{-1}(D)$ é denso e enumerável em E. A enumerabilidade segue do fato de T ser bijetora e D ser enumerável, para checarmos a densidade, dado $x \in E$, $T(x) \in l^2$ e assim existe uma sequência $(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D$ tal que $T(x_n) \to T(x)$. Da continuidade de T^{-1}, $x_n \to x$, donde podemos concluir que $T^{-1}(D)$ é denso em E. A dimensão infinita de E é consequência da dimensão infinita de l^2 pois se E tivesse dimensão finita, $T(E) = l^2$ (T é sobrejetora) teria dimensão finita, o que é um absurdo. $\square$

5 Conclusão

Nesse trabalho, estudamos os espaços separáveis e obtemos vários resultados relacionados a eles nas mais diversas estruturas. Percebemos que a teoria de espaços separáveis é mais rica do que a de espaços no geral, em grande parte dos casos isso é devido a existência do conjunto denso e enumerável, que facilita argumentações (pela enumerabilidade) e permite transferir informações para o espaço maior (pela densidade).

Todos os tópicos abordados tiveram sua importância no decorrer do texto, seja ela de caráter mais complementar ou não. Vimos alguns teoremas de classificação de espaços separáveis (sobre vários pontos de vista), e em especial, o Teorema de Riesz-Fischer classifica os espaços de Hilbert, separáveis e de dimensão infinita.

Para finalizar, não custa mencionar que grandes avanços na matemática se dão devido à existência dessa classe de teoremas. Ao nos depararmos com estruturas novas e desconhecidas podemos associá-las (de acordo com propriedades em comum) a espaços bem conhecidos, estudarmos o que queremos nesse espaço conhecido e posteriormente transferirmos o resultado para a nova estrutura.

Referências

[1] Geraldo Botelho, Daniel Pellegrino, and Eduardo Teixeira. *Fundamentos de análise funcional*. SBM, 2015.

[2] César R De Oliveira. *Introdução à análise funcional*. Impa, 2015.

[3] Erwin Kreyszig. *Introductory functional analysis with applications*, volume 1. wiley New York, 1989.

[4] Elon Lages Lima. *Algebra Linear, 2a. ediçao*. 1996.

[5] Elon Lages Lima. *Análise Real volume 1*. 2009.

[6] Elon Lages Lima. *Espaços métricos*, volume 4. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2015.

[7] Elon Lages Lima. *Curso de análise, Volume 1*. 2016.

[8] Walter Rudin et al. *Principles of mathematical analysis*, volume 3. McGraw-hill New York, 1964.