

Miguel Bauschat

**Problemas inversos em espalhamento de  
ondas acústicas e a aproximação de Born**

Florianópolis  
2017



Miguel Bauschat

**Problemas inversos em espalhamento de ondas  
acústicas e a aproximação de Born**

Trabalho de conclusão de curso sub-  
metido ao Departamento de Mate-  
mática para a obtenção do Grau  
de Bacharel em Matemática.

Universidade Federal de Santa Catarina

Orientador Prof. Dr. Wagner Barbosa Muniz

Florianópolis  
2017

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Bauschat, Miguel

Problemas inversos em espalhamento de ondas  
acústicas e a aproximação de Born / Miguel Bauschat  
; orientador, Wagner Barbosa Muniz, 2017.  
70 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) -  
Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de  
Ciências Físicas e Matemáticas, Graduação em  
Matemática e Computação Científica, Florianópolis,  
2017.

Inclui referências.

1. Matemática e Computação Científica. 2.  
Matemática aplicada. 3. Ondas acústicas. 4.  
Problemas inversos. I. Muniz, Wagner Barbosa. II.  
Universidade Federal de Santa Catarina. Graduação em  
Matemática e Computação Científica. III. Título.

Miguel Bauschat

**Problemas inversos em espalhamento de ondas  
acústicas e a aproximação de Born**

Esta monografia foi julgada adequada como TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO no Curso de Matemática - Habilitação em Bacharelado da Universidade Federal de Santa Catarina e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora.

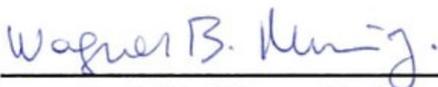
Florianópolis, 5 de dezembro de 2017



---

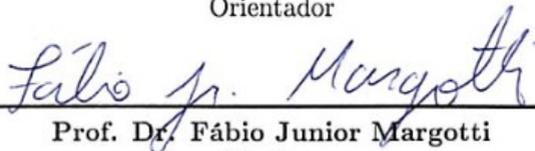
Prof. Dra. Sonia Elena Palomino Castro  
Coordenadora de Curso

Banca Examinadora:



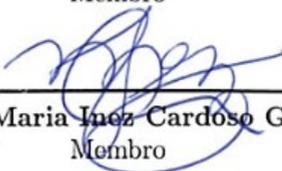
---

Prof. Dr. Wagner Barbosa Muniz  
Orientador



---

Prof. Dr. Fábio Junior Margotti  
Membro



---

Prof. Dra. Maria Inez Cardoso Gonçalves  
Membro



*Àquele, pela fé em quem desejo  
fazer tudo o que faço.*



# Resumo

Esta monografia contém uma introdução sobre a teoria de problemas inversos, com exemplos do mal-condicionamento intrínseco a eles, seguida de uma discussão sobre a teoria de espalhamento de ondas acústicas e o problema direto de espalhamento a partir de obstáculos penetráveis e impenetráveis sob a incidência de ondas com frequência fixa. Resultados sobre existência, unicidade e mal-condicionamento são discutidos. Por fim, ao iluminar uma região de interesse com ondas conhecidas, apresenta-se o problema inverso não linear e mal condicionado de recuperar o índice de refração de um obstáculo penetrável a partir das ondas espalhadas observadas em uma região de medição longe do obstáculo. Sob a hipótese de espalhamento fraco, considera-se a aproximação de Born e a conseqüente linearização do problema. Imagens produzidas com a implementação deste método ilustram o problema inverso.

**Palavras-chave:** Problemas inversos. Teoria de espalhamento. Equação de Lippmann-Schwinger. Aproximação de Born. Tomografia acústica.



# Abstract

This work contains an introduction to inverse ill-posed problems, followed by a discussion of acoustic time-harmonic wave scattering theory, including existence and uniqueness results. Then, from several incident plane waves at fixed frequency, one considers the inverse inhomogeneous medium scattering problem from the scattered fields far away from the scatterer. Under the weak scatterer hypothesis one linearizes the inverse problem through the Born approximation. Finally, some numerical examples are presented.

**Keywords:** Inverse problems. Scattering theory. Born approximation. Lippmann-Schwinger equation. Acoustic tomography.



# Sumário

	<b>Sumário</b> . . . . .	<b>11</b>
<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>13</b>
1.1	Problemas inversos . . . . .	13
1.2	Mal-condicionamento . . . . .	14
1.3	Organização . . . . .	19
<b>2</b>	<b>ELEMENTOS DA TEORIA DE ESPALHAMENTO DE ONDAS</b> . . . . .	<b>21</b>
2.1	Equação de Helmholtz . . . . .	21
2.2	Ondas incidentes e fontes . . . . .	22
2.3	Ondas espalhadas . . . . .	24
2.4	Condições de contorno . . . . .	25
2.4.1	Caso unidimensional . . . . .	25
2.4.2	Em acústica . . . . .	26
2.5	Unicidade da solução . . . . .	27
2.6	Solução fundamental da equação de Helmholtz . . . . .	30
2.7	Equação de Lippmann-Schwinger e existência da solução . . . . .	32
2.8	O padrão de espalhamento . . . . .	37
<b>3</b>	<b>O PROBLEMA INVERSO DE ESPALHAMENTO PARA UM OBSTÁCULO PENETRÁVEL</b> . . . . .	<b>41</b>
3.1	Mal-condicionamento do problema de espalhamento . . . . .	41
3.2	Unicidade do problema inverso . . . . .	42
3.3	Aproximação de Born . . . . .	43
3.4	Série de Neumann . . . . .	44
<b>4</b>	<b>EXPERIMENTOS NUMÉRICOS</b> . . . . .	<b>47</b>
4.1	Imagens . . . . .	50
4.2	Considerações finais . . . . .	60
<b>A</b>	<b>NOTAÇÃO</b> . . . . .	<b>61</b>
<b>B</b>	<b>TEOREMA DE GAUSS E IDENTIDADES DE GREEN</b> . . . . .	<b>63</b>

<b>C</b>	<b>COORDENADAS POLARES E ESFÉRICAS . . . .</b>	<b>65</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>69</b>

# 1 Introdução

Problemas inversos são uma área da matemática com grande possibilidade de aplicações. São utilizados em imagens médicas como tomografia computadorizada (NATTERER; WÜBBELING, 2001) e ultrassonografia, em sondagens e prospecções geológicas (BLEISTEIN; COHEN; STOCKWELL, 2001), em testes não-destrutivos de materiais e estruturas, em processamento de sinais e imagens, em difusão de calor, em imagem de RADAR (BORDEN, 1999), (CHENEY; BORDEN, 2009), entre outros (GROETSCH, 1993; KIRSCH, 2011).

## 1.1 Problemas inversos

Em geral, pode ser difícil definir o que é um problema inverso de forma clara e precisa, pois para determinar um problema inverso necessita-se da descrição do problema direto. Por outro lado, a partir de vários exemplos é fácil deduzir o que são problemas inversos e pode-se classificar ou até criar outros.

A seguir, encontra-se uma lista de problemas inversos:

1. determinar o polinômio cujas raízes são dadas;
2. encontrar a distribuição de massa no interior de um planeta dado o potencial gravitacional na sua superfície;
3. determinar o formato de um objeto a partir da sombra gerada por uma luz conhecida;
4. indicar a posição de uma fonte sonora a partir de microfones (ou ouvidos);
5. estipular o formato de um corpo a partir do espalhamento de ondas causado por ele;
6. encontrar um substantivo masculino que termina com a letra 'a'.

Agora, compara-se a lista anterior com os correspondentes problemas diretos:

1. encontrar as raízes de um polinômio dado;

2. estabelecer o campo gravitacional de um planeta dada a distribuição de massa no seu interior;
3. determinar o formato da sombra de um objeto sob determinada luz;
4. estabelecer o campo de pressão sonora gerado por uma fonte em um determinado meio;
5. determinar o campo de ondas espalhadas por um corpo dada uma fonte;
6. indicar a última letra do substantivo ‘problema’.

Fazendo uma associação entre as duas listas, obtém-se uma ideia do que são problemas inversos. Mas é claro que uma definição mais formal já foi formulada, e não se apoia somente em exemplos. Uma das principais encontra-se em (KELLER, 1976).

**Definição 1.1.** *Dois problemas são ditos inversos um ao outro se a formulação de cada um deles envolve o entendimento total ou parcial do outro.*

A partir desta definição, não existe uma diferenciação entre problema direto e inverso, e sim, um par de problemas inversos um ao outro. Porém, existem algumas características que podem sim ser associadas a problemas diretos, e outras, a problemas inversos. Por exemplo, para cada par de problemas inversos um ao outro existe um que foi estudado primeiro e possivelmente mais profundamente, o qual é chamado, por razões históricas, de direto. E o outro, de inverso.

Uma característica mais marcante para diferenciar problemas inversos e diretos é a relação entre causa e efeito. Associa-se um problema direto a encontrar o efeito de uma determinada causa. O problema inverso seria recuperar a causa de um certo efeito observado.

A seguir, discute-se o mal-condicionamento, que pode ser um outro fator de distinção entre os dois problemas.

## 1.2 Mal-condicionamento

Um fator importante na classificação entre direto e inverso está relacionado com a estabilidade do problema, no sentido de Hadamard. Ele propôs que um problema de relevância física deve ser tal que:

1. existe uma solução do problema (existência);

2. a solução é única (unicidade);
3. a solução depende continuamente dos dados (estabilidade).

Neste caso, tal problema é dito *bem-posto*. Caso uma das condições falhe, o problema é considerado *mal-posto*. Por exemplo, o problema inverso descrito no item 6 da primeira das duas listas acima é mal-posto, porque a solução não é única. Um outro substantivo que o soluciona é ‘tema’.

Se apenas a condição 3 falhar, o problema é dito *mal-condicionado*, e *bem-condicionado* caso ela for satisfeita.

Do ponto de vista matemático, se a solução de um problema é inexistente, pode-se eventualmente aumentar o espaço solução do problema. E se a solução não é única, acrescentam-se restrições para obter apenas uma. Mas se o problema não for estável, é mais difícil resolvê-lo, porque a solução calculada pode não ter nada a ver com os dados originais, já que os dados obtidos a partir de um problema físico possuem algum ruído, pois são provenientes de uma medição. Além disso, os cálculos podem envolver aproximações computacionais, que intrinsecamente inserem ruídos, fazendo com que a solução encontrada esteja arbitrariamente longe da solução real. Por isso, a propriedade de estabilidade pode ser considerada a mais importante.

Em problemas inversos, justamente tal propriedade frequentemente falha, ou seja, problemas inversos são em geral mal-condicionados. Assim, dado um par de problemas inversos um ao outro, aquele que é mais instável será tipicamente considerado inverso, e o outro, direto.

É interessante observar que se um determinado problema direto for bastante suavizante, o seu correspondente problema inverso será bastante instável.

Estes fatos serão ilustrados com os exemplos que seguem.

**Exemplo 1.2** (Diferenciação). Considera-se o operador de diferenciação  $D : C^1(\mathbb{R}) \rightarrow C^0(\mathbb{R})$ , e cada um dos espaços munido da norma infinito. Será mostrado que  $D$  não é estável, ou seja,  $D$  não depende continuamente dos dados, ou ainda, dadas funções  $f, g_n$  arbitrariamente próximas,  $D(f), D(g_n)$  estão arbitrariamente distantes.

Seja  $f \in C^1(\mathbb{R})$  uma função continuamente diferenciável. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , define-se  $e_n(x) = \frac{1}{n} \text{sen}(n^2x)$ , funções que representam ruídos nos dados. Assim,  $g_n = f + e_n$  é uma função que representa medições da função original  $f$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Calculam-se agora os erros.

Dado  $\varepsilon > 0$ , considera-se  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tal que  $N_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$ . Então,  $\forall n > N_\varepsilon$ ,

$$\|g_n - f\|_\infty = \|e_n\|_\infty = \frac{1}{n} \|\text{sen}(n^2x)\|_\infty = \frac{1}{n} < \frac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon,$$

isto é, quanto menor o  $\varepsilon$  escolhido, mais próximas estão  $g_n$  e  $f$ . Porém,

$$\|D(g_n) - D(f)\|_\infty = \|D(e_n)\|_\infty = n \|\text{cos}(n^2x)\|_\infty = n > N_\varepsilon.$$

Logo, quando  $n \rightarrow \infty$ , tem-se  $\|g_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ , mas  $\|D(g_n) - D(f)\|_\infty \rightarrow \infty$ .

**Exemplo 1.3** (Condução de calor). O problema de difusão de calor unidimensional para  $u = u(x, t)$  com condições de contorno de Dirichlet e valores iniciais dados por uma função  $f \in \mathbf{L}^2([0, L])$  é descrito por

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & 0 < x < L, t > 0, \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = f(x), & 0 < x < L. \end{cases}$$

A solução  $u(x, t)$  do problema representa a temperatura de uma barra unidimensional de comprimento  $L$  na posição  $x$  no instante de tempo  $t$ , e é dada, via separação de variáveis, por

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n kt} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

com

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \text{ e } b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(y) \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dy, \text{ para } n \geq 1.$$

Pode-se reescrever a expressão de  $u$  como

$$u(x, t) = \int_0^L K(x, y, t) f(y) dy, \quad (1.1)$$

com

$$K(x, y, t) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n kt} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right)$$

ou também

$$K(x, y, t) = \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n kt} \left[ \cos\left(\frac{n\pi}{L}(x-y)\right) - \cos\left(\frac{n\pi}{L}(x+y)\right) \right].$$

Daí, observa-se que  $K$  é uma função de classe  $C^\infty$ , e portanto,  $u$  também o é, mesmo que  $f$  não seja suave. Tal propriedade é conhecida como propriedade regularizante da equação do calor. A interpretação física é bastante intuitiva. A distribuição de temperatura no instante  $t = 0$  é dada por  $f$ , que nem precisa ser diferenciável. Nos instantes seguintes, a temperatura é dada por  $u$ , que é infinitamente diferenciável. Além disso, quando  $t \rightarrow \infty$ , a temperatura na barra tende a ficar constante igual a zero, pois a temperatura na fronteira está fixada em zero. Portanto, qualquer distribuição inicial de temperatura se aproxima gradativamente da função nula com o decorrer do tempo.

Assim, o problema inverso a este é bastante mal-posto, já que o direto é tão suavizante. Nota-se que o problema inverso consiste em recuperar a distribuição de temperatura inicial sabendo a temperatura na barra em um instante  $t = t_0 > 0$  fixo.

Por exemplo, considera-se um barra de comprimento  $L = \pi$  e temperatura no tempo  $t_0 = 1$  igual a

$$u(x, 1) = Me^{-M^2} \text{sen}(Mx),$$

com  $M \in \mathbb{N}$ . Pela equação (1.1) e a ortogonalidade das autofunções, segue que a distribuição inicial de calor é

$$f(x) = M \text{sen}(Mx).$$

Mas quando  $M \rightarrow +\infty$ ,  $\|u(x, 1)\|_\infty = Me^{-M^2} \rightarrow 0$ , e  $\|f(x)\|_\infty \rightarrow +\infty$ .

Aqui, indica-se o artigo (MUNIZ; VELHO; RAMOS, 1999) para uma discussão aprofundada.

**Exemplo 1.4** (Tomografia computadorizada). Imagens médicas são fundamentais para um bom diagnóstico. Elas permitem observar o interior do corpo sem uma intervenção cirúrgica, o que é bem menos invasivo e possui menos riscos. Tomografia computadorizada consiste em uma série de imagens de seções transversais de uma parte do corpo. Em cada seção, vários feixes de raios X são emitidos em direção ao corpo com certa intensidade inicial  $I_0$ , parte da qual será absorvida pelos tecidos do corpo e parte simplesmente o atravessará, e será capturada e medida do outro lado. A intensidade do feixe de raios X será atenuada de acordo com a densidade do tecido atravessado. Quanto mais denso o material, maior a dificuldade de o feixe passar por ele, e menor será a intensidade que o atravessará.

Se  $f(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ , é a função de suporte compacto que representa a densidade do corpo em determinada seção, e  $I$  é a intensidade da onda de raios X, e  $L$  a reta dada por  $L = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \theta \cdot \mathbf{x} = s\}$ , com

$\theta \in S^1$  direção unitária fixa, e  $s \in \mathbb{R}$  fixo, sobre a qual o feixe será emitido, então a atenuação da intensidade é modelada por

$$\frac{dI}{dt} = -fI,$$

e logo, se a intensidade inicial é dada por  $I_0$  e a medição do feixe sobre a reta  $L$  ocorre após o feixe atravessar completamente o corpo, tem-se

$$\ln I - \ln I_0 = - \int_L f(\mathbf{x}) d\ell(\mathbf{x}).$$

Define-se a transformada de Radon  $Rf$  para cada reta parametrizada por  $\theta, s$  como

$$(Rf)(\theta, s) = - \int_{\theta \cdot \mathbf{x} = s} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

A transformada de Radon representa a intensidade medida após o feixe ter atravessado o corpo pela reta dada por  $(\theta, s)$ . O problema direto consiste em determinar esta transformada para cada  $\theta \in S^1$  e  $s \in \mathbb{R}$ , conhecendo-se a função  $f$ . Já o problema inverso é o problema da tomografia computadorizada de recuperar a função  $f$  da densidade no interior do corpo a partir das medidas de atenuação da intensidade para todas as retas que atravessam o corpo. A solução é dada pela transformada inversa de Radon

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{S^1} \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{ds}(Rf)(\theta, s) \frac{d\theta}{\mathbf{x} \cdot \theta - s} ds d\theta.$$

Para uma referência completa sobre o assunto, recomenda-se (NATTERER; WÜBBELING, 2001).

**Exemplo 1.5** (Espalhamento). O problema de espalhamento direto consiste em descrever o campo de ondas gerado pela interação de um obstáculo, ou *espalhador*, cujas propriedades físicas são conhecidas, com ondas incidentes conhecidas. Tais problemas podem ser classificados de acordo com o tipo de espalhador. Existem problemas cujo espalhador é impenetrável, isto é, devido às características físicas da onda, do meio e do obstáculo, as ondas não entram no objeto, mas são refletidas de alguma forma pela fronteira do objeto de volta ao meio. Outro caso é quando o espalhador é penetrável. Aqui, parte das ondas é refletida e parte atravessa o obstáculo, sofrendo alguma alteração, pois o meio interno é diferente do meio externo.

No problema de espalhamento direto com obstáculo impenetrável, tem-se o espalhador definido por  $D \subset \mathbb{R}^n$ , com  $n = 2, 3$ , em que  $D$

é um conjunto aberto e limitado cuja fronteira  $\partial D$  é suave, e ondas de incidência dadas pela função  $u^{\text{inc}}$ , que satisfaz a equação da onda em  $\mathbb{R}^n \setminus \overline{D}$ . Além disso, uma condição de fronteira sobre  $\partial D$  deve ser fornecida, a fim de saber como a onda é refletida pela parede de  $D$ . Com isso, é possível calcular o campo de ondas espalhadas  $u^s$  em  $\mathbb{R}^n \setminus \overline{D}$ . A soma  $u = u^{\text{inc}} + u^s$  das ondas incidentes e espalhadas é o campo total que pode ser observado e medido. O problema inverso respectivo corresponde a encontrar a forma da fronteira  $\partial D$  com base em medições do campo total  $u = u^{\text{inc}} + u^s$ .

Caso o obstáculo seja penetrável, além do conjunto  $D$ , é necessária uma função  $n(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in D$  que representa o índice de refração da onda no interior de  $D$ , tal que  $n(\mathbf{x}) = 1$ ,  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{D}$ , ou seja, a velocidade da onda é constante fora de  $D$ , pois o meio ali é homogêneo. Uma condição sobre  $u$  em  $\partial D$  também é necessária, chamada de condição de transmissão. Com todas estas informações, calcula-se o campo de ondas espalhadas  $u^s$  e o campo total  $u$ . Inversamente, dado o campo total  $u$ , deseja-se recuperar a função  $n(\mathbf{x})$ , com a qual encontra-se  $D$ .

As ondas incidentes são consideradas, para simplificar, como sendo de frequência fixa, pois no problema físico, tais ondas são produzidas por uma fonte conhecida que gera ondas com propriedades conhecidas. Geralmente, consideram-se ondas incidentes geradas por uma fonte pontual ou ondas planas, como se a fonte estivesse muito longe. As medições do campo total também podem ser de dois tipos. Podem-se considerar medições longe do obstáculo, onde se mede o assim chamado padrão de espalhamento (ou *far-field pattern*), ou também medições próximas ao obstáculo (ou *near field*).

### 1.3 Organização

Nos próximos capítulos, serão desenvolvidos os detalhes do problema de espalhamento. No início do capítulo 2 descreve-se o problema direto de espalhamento, que começa com a equação da onda sob a hipótese de frequência fixa, ou equação reduzida da onda. Depois, descreve-se a modelagem de fontes de ondas acústicas. Com isso, pode-se descrever o problema direto de determinar o campo de ondas espalhadas a partir de um obstáculo. Analisa-se brevemente o caso quando este for impenetrável, e estudam-se condições de contorno. Maior foco é dado quando o obstáculo é penetrável. Prova-se a unicidade da solução do problema direto para este caso. Depois, apresentam-se as soluções fundamentais da equação reduzida da onda em duas e três dimensões, que serão utilizadas mais adiante. Na seção seguinte, apresentam-se resul-

tados sobre a existência da solução do problema direto para um obstáculo penetrável. A equação de Lippmann-Schwinger, que será essencial para a aproximação de Born, é introduzida. Por último, apresenta-se o padrão de espalhamento da solução, que é o comportamento da onda espalhada quando esta se afasta bastante do obstáculo.

O problema inverso que será tratado é aquele que recebe como dados medidos o padrão de espalhamento. No capítulo 3 do trabalho, citam-se resultados que garantem a unicidade deste problema sob certas condições. Depois, a aproximação de Born é motivada e definida. No capítulo 4, um algoritmo baseado neste método é implementado pelo autor é descrito. Para terminar, mostram-se algumas imagens obtidas com o algoritmo.

Três apêndices fecham o trabalho. O primeiro fixa notações utilizadas no texto, o segundo contém as demonstrações das identidades de Green e o terceiro mostra as deduções das fórmulas do laplaciano em coordenadas polares e esféricas, resultados que foram utilizados no decorrer do trabalho.

## 2 Elementos da teoria de espalhamento de ondas

Entender o problema direto é essencial para resolver o problema inverso, como foi ilustrado nos exemplos anteriores. Este capítulo será dedicado a estudar o problema direto de espalhamento de ondas a partir de um objeto com propriedades físicas conhecidas. A discussão decorrerá nos espaços bidimensional e tridimensional paralelamente.

### 2.1 Equação de Helmholtz

Seja  $p(t, \mathbf{x})$  a pressão em um fluido em um tempo  $t$  e em uma posição  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $n = 2, 3$ , satisfazendo a equação da onda

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c(\mathbf{x})^2 \Delta_{\mathbf{x}} p = 0, \quad (2.1)$$

com  $c(\mathbf{x})$  representando a velocidade da onda na posição  $\mathbf{x}$ .

Com a hipótese de que a frequência da onda é constante e que a onda é periódica no tempo, pode-se escrever

$$p(t, \mathbf{x}) = u(\mathbf{x})e^{-i\omega t}, \quad (2.2)$$

ou mais precisamente

$$p(t, \mathbf{x}) = \operatorname{Re} \{u(\mathbf{x})e^{-i\omega t}\},$$

para alguma função complexa  $u = u(\mathbf{x})$ , que não depende do tempo, e  $\omega > 0$  a frequência.

Deseja-se encontrar a equação da onda reduzida sob esta suposição. Para tanto, calcula-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} &= (-i\omega)ue^{-i\omega t} \\ \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} &= -\omega^2 ue^{-i\omega t} \\ \Delta_{\mathbf{x}} p &= e^{-i\omega t} \Delta_{\mathbf{x}} u = e^{-i\omega t} \Delta u. \end{aligned}$$

Substituindo na equação da onda (2.1), obtém-se

$$\begin{aligned} -\omega^2 ue^{-i\omega t} - c(\mathbf{x})^2 e^{-i\omega t} \Delta u &= 0 \\ \omega^2 u + c(\mathbf{x})^2 \Delta u &= 0, \end{aligned}$$

pois  $e^{-i\omega t} \neq 0$ . Como  $c(\mathbf{x})^2 > 0$ , divide-se a equação por  $c(\mathbf{x})^2$ , obtendo-se

$$\frac{\omega^2}{c(\mathbf{x})^2}u + \Delta u = 0.$$

Caso o meio seja homogêneo em um domínio  $\mathbb{R}^n \setminus \overline{D}$ , isto é,  $c(\mathbf{x}) = c_0$ ,  $\forall \mathbf{x} \notin D$ , a velocidade da onda é constante fora de  $D$ , então, define-se o número de onda

$$k = \frac{\omega}{c_0},$$

e a equação fica

$$\Delta u(\mathbf{x}) + k^2 u(\mathbf{x}) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{D}, \quad (2.3)$$

conhecida como a equação de Helmholtz ou equação reduzida da onda.

Caso o meio não seja homogêneo em  $D$ , mas homogêneo fora de  $D$ , define-se o índice de refração  $n(\mathbf{x}) = \frac{c_0^2}{c(\mathbf{x})^2}$ , de modo que a equação da onda se reduz a

$$\Delta u + \frac{\omega^2}{c_0^2} \frac{c_0^2}{c(\mathbf{x})^2} u = 0, \quad (2.4)$$

ou

$$\Delta u + k^2 n(\mathbf{x}) u = 0. \quad (2.5)$$

Observa-se que  $\text{Re } k > 0$  é estritamente maior que zero para que de fato exista uma onda.

## 2.2 Ondas incidentes e fontes

Passa-se agora a analisar possíveis casos para o campo de ondas incidentes. Serão abordados dois tipos: ondas planas e ondas geradas por fontes pontuais.

Na modelagem de ondas planas, considera-se que a distância entre a fonte emissora e a região de interesse é bem grande em relação ao comprimento de onda

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

e ao comprimento típico do obstáculo. Definindo uma direção de propagação unitária  $\mathbf{d} \in S^{n-1}$ , tem-se que a modelagem de tal onda é

$$u^{\text{inc}}(\mathbf{x}) = e^{ik\mathbf{d}\cdot\mathbf{x}}. \quad (2.6)$$

A equação de Helmholtz é satisfeita por  $u^{\text{inc}}$  em todo  $\mathbb{R}^n$ , pois, com  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_n)$ ,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u^{\text{inc}}}{\partial x_\ell} &= ikd_\ell u^{\text{inc}}, \\ \frac{\partial^2 u^{\text{inc}}}{\partial x_\ell^2} &= -k^2 d_\ell^2 u^{\text{inc}},\end{aligned}$$

e logo, usando que  $\mathbf{d}$  é unitário

$$\Delta u^{\text{inc}} = \sum_{\ell=1}^n \frac{\partial^2 u^{\text{inc}}}{\partial x_\ell^2} = \sum_{\ell} -k^2 d_\ell^2 u^{\text{inc}} = -k^2 \sum_{\ell} d_\ell^2 u^{\text{inc}} = -k^2 u^{\text{inc}},$$

o que implica que

$$\Delta u^{\text{inc}} + k^2 u^{\text{inc}} = 0.$$

Em fontes pontuais, tem-se uma fonte emissora em um ponto  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ , cujas ondas se espalham como círculos ou esferas centrados em  $\mathbf{y}$ . Em  $\mathbb{R}^3$ , tem-se

$$u^{\text{inc}}(\mathbf{x}) = \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{y}.$$

Faz-se a verificação de que esta  $u^{\text{inc}}$  satisfaz Helmholtz em  $\mathbb{R}^3$ , para  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ . Sem perda de generalidade, pode-se assumir que  $\mathbf{y} = 0$ . Escrevendo em coordenadas esféricas, tem-se que

$$u^{\text{inc}}(\rho) = \frac{e^{ik\rho}}{\rho}, \quad \rho \neq 0.$$

A equação de Helmholtz se torna, pela fórmula do laplaciano em coordenadas esféricas (C.3),

$$\Delta u(\mathbf{x}) + k^2 u(\mathbf{x}) = \frac{d^2 u}{d\rho^2}(\rho) + \frac{2}{\rho} \frac{du}{d\rho}(\rho) + k^2 u(\rho),$$

pois  $u$  só depende de  $\rho$ . Calculando as derivadas, obtém-se

$$\begin{aligned}\frac{du^{\text{inc}}}{d\rho}(\rho) &= \frac{e^{ik\rho}(ik\rho - 1)}{\rho^2} \\ \frac{d^2 u^{\text{inc}}}{d\rho^2}(\rho) &= \frac{e^{ik\rho}(2 - 2ik\rho - k^2 \rho^2)}{\rho^3}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{d^2 u^{\text{inc}}}{d\rho^2}(\rho) + \frac{2}{\rho} \frac{du^{\text{inc}}}{d\rho}(\rho) + k^2 u^{\text{inc}}(\rho) = 0.$$

## 2.3 Ondas espalhadas

Nesta seção, deseja-se estudar a interação entre ondas e obstáculos.

O problema de um obstáculo impenetrável em  $\mathbb{R}^3$  será considerado primeiro. Seja, então,  $D \subset \mathbb{R}^3$  um domínio limitado. Assume-se também que as ondas incidentes são planas, dadas por (2.6)

$$u^{\text{inc}}(\mathbf{x}) = e^{ik\mathbf{d}\cdot\mathbf{x}}.$$

Da interação com o obstáculo em  $D$ , ocorre uma perturbação da onda incidente, que gera uma onda espalhada, denotada por  $u^s(\mathbf{x})$ . Desse modo, a onda resultante total é dada por

$$u(\mathbf{x}) = u^{\text{inc}}(\mathbf{x}) + u^s(\mathbf{x}),$$

a qual satisfaz

$$\Delta u(\mathbf{x}) + k^2 u(\mathbf{x}) = 0, \text{ para } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D} \quad (2.7)$$

$$u(\mathbf{x}) = 0, \text{ para } \mathbf{x} \in \partial D \quad (2.8)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \frac{\partial u^s}{\partial r} - ik u^s \right) = 0, \text{ com } r = |\mathbf{x}|, \quad (2.9)$$

onde a convergência é válida uniformemente em todas as direções  $\hat{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$ . A equação (2.8) é a condição de contorno de Dirichlet, que foi escolhida para efeitos de apresentação. Mas é claro que outras condições também ocorrem, dependendo da física do problema. Mais sobre condições de contorno será exposto adiante. A equação (2.9) é chamada condição de radiação de Sommerfeld. Fisicamente, ela exige que a onda espalhada seja uma onda que propaga em direção ao infinito, e impede que ela venha do infinito, e matematicamente, ela garantirá a unicidade do problema.

Em  $\mathbb{R}^2$ , a condição de radiação (2.9) se torna

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left( \frac{\partial u^s}{\partial r} - ik u^s \right) = 0 \quad (2.10)$$

Agora, tratando-se de obstáculos penetráveis, tem-se um problema ligeiramente diferente. Usando ainda ondas incidentes planas, o campo total de ondas satisfaz

$$u(\mathbf{x}) = u^{\text{inc}}(\mathbf{x}) + u^s(\mathbf{x}) \quad (2.11)$$

$$\Delta u(\mathbf{x}) + k^2 n(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) = 0, \text{ para } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \quad (2.12)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \frac{\partial u^s}{\partial r} - ik u^s \right) = 0, \text{ com } r = |\mathbf{x}|, \quad (2.13)$$

com  $n - 1$  uma função de suporte compacto, isto é, a região onde o índice de refração é diferente de 1 é limitada, e  $\text{Im } n(\mathbf{x}) \geq 0, \forall \mathbf{x}$  e  $k > 0$ . Novamente, a condição (2.13) deve ser satisfeita uniformemente em todas as direções  $\hat{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$ . Nas próximas seções e capítulos, será utilizada a notação

$$D = \text{supp } (n(\mathbf{x}) - 1) = \overline{\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : n(\mathbf{x}) - 1 \neq 0\}}.$$

## 2.4 Condições de contorno

No estudo de equações diferenciais, são necessárias condições para determinar uma solução específica de um problema. Quando é dada uma informação sobre o comportamento da solução na fronteira do domínio de interesse, chama-se tal dado de condição de contorno.

Serão analisados tipos diferentes de condições de contorno primeiro para o caso simplificado de uma onda unidimensional, por exemplo em uma corda, e depois para o caso de ondas acústicas.

### 2.4.1 Caso unidimensional

Este exemplo está presente com mais detalhes em (KINSLER et al., 2000, p. 41).

Considera-se a solução geral da equação da onda em uma dimensão

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

dada por

$$u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct),$$

com  $f, g$  funções de classe  $C^2$ . Para determinar  $f$  e  $g$  são requeridas condições iniciais e/ou condições de fronteira. Diferentes características físicas do problema são representadas por diferentes condições.

Assumindo  $u(x, t)$  como a amplitude de uma corda vibrante, se uma das pontas da corda está fixada na posição  $x = 0$  para todo  $t$ , tem-se que

$$0 = u(0, t) = f(0 + ct) + g(0 - ct),$$

sem perda de generalidade a soma é nula. Logo,

$$-f(ct) = g(-ct).$$

E por fim a solução se escreve como

$$u(x, t) = f(x + ct) - f(x - ct).$$

Observa-se que agora só há um grau de liberdade, em vez de dois como na solução geral. A função que viaja para a direita é oposta à que viaja para esquerda. Esta condição representa a reflexão em uma fronteira rígida.

Outro caso ocorre quando uma ponta da corda pode mover-se livremente na direção transversal à corda, mas permanecendo na posição  $x = 0$ , i.e., a ponta pode mover-se sobre a eixo  $y$ . Diz-se que a corda está livre na fronteira. Isso implica que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ em } x = 0.$$

Logo, o formato das ondas é o mesmo, quando visto da direção de propagação de cada uma das ondas. E portanto, a solução é escrita como

$$u(x, t) = f(x + ct) + f(x - ct).$$

Este caso representa a reflexão em uma fronteira livre.

#### 2.4.2 Em acústica

Supõe-se que  $\Omega$  é um domínio em  $\mathbb{R}^n$ , não necessariamente limitado. O conjunto  $\Omega$  pode representar um obstáculo ou um meio diferente, por exemplo. Na modelagem acústica, se o meio é homogêneo no exterior de  $\Omega$ , então a velocidade de propagação da onda ali é constante.

Supõe-se que uma onda vindo do exterior de  $\Omega$  atinge a fronteira do conjunto. Três situações diferentes podem ocorrer, dependendo das características físicas de  $\Omega$ .

Se a pressão se anula na fronteira de  $\Omega$ , i.e.,  $p(x) = 0, \forall x \in \partial\Omega$ , diz-se que a fronteira é *sound-soft*. Neste caso ocorre a condição de contorno de Dirichlet.

Caso ocorra reflexão, a derivada normal se anula na fronteira, i.e.,  $\frac{\partial p}{\partial \nu} = 0$ . Tem-se a condição de contorno de Neumann. A fronteira é *sound-hard*.

Por último, pode ocorrer o caso intermediário entre os dois primeiros, chamado de condição de Robin, ou impedância, no qual  $\frac{\partial p}{\partial \nu} + \gamma p = 0$ . Aqui, parte da onda é refletida de volta para o exterior de  $\Omega$  de onde veio, e parte é transmitida para o interior do conjunto. O coeficiente positivo  $\gamma$  determina a proporção em que tais partes se dividem. Em particular, se  $\gamma = 0$ , a fronteira é *sound-hard*.

Mais informações se encontram em (JONES, 1986, p. 43).

## 2.5 Unicidade da solução

Serão mostrados alguns resultados sobre a unicidade da solução do problema de espalhamento direto dado por (2.11), (2.12) e (2.13), que é o problema quando se tem um obstáculo penetrável.

O seguinte teorema, demonstrado em (RELLICH, 1943), é um resultado inicial importante para a unicidade.

**Teorema 2.1.** *Seja  $u$  uma solução duas vezes diferenciável, complexa não identicamente nula da equação de Helmholtz*

$$\Delta u(\mathbf{x}) + k^2 u(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \text{ tal que } |\mathbf{x}| > \rho_0$$

para  $k > 0$ . Então, existe um inteiro positivo  $P$ , tal que, para todo  $\rho$  suficientemente grande e  $\rho_1 > \rho_0$  qualquer, vale

$$\int_{\rho_1}^{\rho} |u|^2 d\mathbf{x} \geq P\rho.$$

Uma consequência imediata deste teorema é o próximo resultado, também presente no artigo de Rellich.

**Teorema 2.2.** *Seja  $u$  uma solução da equação de Helmholtz que satisfaz as condições do Teorema 2.1. Então, não é verdade que*

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{|\mathbf{x}|=\rho} |u(\mathbf{x})|^2 ds(\mathbf{x}) = 0$$

*Demonstração.* Assume-se, por absurdo, que o limite é nulo. Define-se a função

$$f(\rho) = \int_{|\mathbf{x}|=\rho} |u(\mathbf{x})|^2 ds(\mathbf{x}).$$

Então, por hipótese,

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} f(\rho) = 0.$$

Mas pelo Teorema 2.1,

$$\begin{aligned} \int_{\rho_1}^{\rho} |u|^2 d\mathbf{x} &= \int_{r=\rho_1}^{\rho} \int_{\mathbf{x} \in S^{n-1}} |u(r\mathbf{x})|^2 r^{n-1} ds(\mathbf{x}) dr \\ &= \int_{r=\rho_1}^{\rho} \int_{|y|=r} |u(y)|^2 ds(y) dr \\ &= \int_{r=\rho_1}^{\rho} f(r) dr \geq P\rho, \end{aligned}$$

para todo  $\rho$  suficientemente grande. E isso é uma contradição com o fato de que  $f(\rho) \rightarrow 0$  quando  $\rho \rightarrow \infty$ . Assim, segue o resultado.  $\square$

Este fato mostra que soluções da equação de Helmholtz não podem se anular rapidamente em todas as direções e a única situação em que isto ocorre é quando se trata da solução trivial.

Equivalentemente aos dois últimos teoremas, utilizam-se mais comumente os dois próximos resultados, encontrados em (KIRSCH, 2011, Teoremas 6.2 e 6.4). O primeiro é conhecido como Lema de Rellich. Considera-se a partir daqui um número positivo  $a$  tal que  $n(\mathbf{x}) = 1$  sempre que  $|\mathbf{x}| > a$ . Tal número existe porque a função  $n - 1$  tem suporte compacto.

**Teorema 2.3** (Lema de Rellich). *Seja  $u$  uma solução da equação de Helmholtz  $\Delta u + k^2 u = 0$  para  $|\mathbf{x}| > a$ , tal que*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{|\mathbf{x}|=r} |u(\mathbf{x})|^2 ds(\mathbf{x}) = 0.$$

*Então,  $u(\mathbf{x}) = 0$  sempre que  $|\mathbf{x}| > a$ .*

Além do lema de Rellich, é necessário um resultado conhecido como continuação única (ou *unique continuation*).

**Teorema 2.4.** *Seja  $n \in C^2(\mathbb{R}^3)$  tal que  $n(\mathbf{x}) = 1$ , sempre que  $|\mathbf{x}| > a$ . Seja também  $u \in C^2(\mathbb{R}^3)$  solução da equação de Helmholtz*

$$\Delta u + k^2 n u = 0$$

*em  $\mathbb{R}^3$  tal que  $u(\mathbf{x}) = 0$ , sempre que  $|\mathbf{x}| \geq b$ , para algum  $b \geq a$ . Então,  $u$  se anula em todo  $\mathbb{R}^3$ .*

Com estes pares de teoremas, é possível provar a unicidade da solução do problema direto de espalhamento para um obstáculo penetrável.

**Teorema 2.5.** *O problema descrito em (2.11), (2.12) e (2.13) possui no máximo uma solução.*

*Demonstração.* Basta mostrar que se  $u$  é uma solução do problema associada à onda incidente  $u^{\text{inc}} \equiv 0$ , então  $u \equiv 0$ . Se isso for verdade, então dadas duas soluções  $u, v$  associadas a uma mesma onda incidente  $u^{\text{inc}}$  qualquer, tem-se que  $u = u^s + u^{\text{inc}}$  e  $v = v^s + u^{\text{inc}}$ . E daí,  $u - v = u^s - v^s$  satisfaz

$$\begin{aligned} \Delta(u^s - v^s) + k^2 n(u^s - v^s) &= 0 \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \frac{\partial(u^s - v^s)}{\partial r} - ik(u^s - v^s) \right) &= 0. \end{aligned}$$

Logo,  $u - v$  é uma solução associada à onda incidente  $u^{\text{inc}} \equiv 0$ , e pela afirmação inicial,  $u - v \equiv 0$ , e portanto,  $u \equiv v$ .

Agora, segue a demonstração da afirmação. Seja  $u$  solução do problema associada à onda incidente  $u^{\text{inc}} \equiv 0$ . Logo,  $u = u^s$ . Da condição de radiação (2.13), segue que

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \int_{|x|=r} \left| \frac{\partial u}{\partial r} - iku \right|^2 ds(\mathbf{x}) \right) \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} r \left[ \int_{|x|=r} \left( \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right|^2 - \frac{\partial u}{\partial r} (\overline{iku}) - (iku) \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + k^2 |u|^2 \right) ds(\mathbf{x}) \right] \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} r \left[ \int_{|x|=r} \left( \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right|^2 + k^2 |u|^2 \right) ds(\mathbf{x}) + 2k \text{Im} \int_{|x|=r} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} ds(\mathbf{x}) \right], \end{aligned}$$

pois  $z - \bar{z} = 2i \text{Im } z$ . Aplicando a primeira identidade de Green (B.2) ao último termo, obtém-se

$$\int_{|x|=r} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} ds(\mathbf{x}) = \int_{|x|<r} (u \Delta \bar{u} + |\nabla u|^2) dx.$$

Como  $u$  satisfaz Helmholtz,  $\Delta \bar{u} = -k^2 \bar{u}$ . Substituindo isto acima, tem-se

$$\int_{|x|=r} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} ds(\mathbf{x}) = \int_{|x|<r} (-k^2 \bar{n} |u|^2 + |\nabla u|^2) dx.$$

Logo, usando que  $\text{Im } -\bar{z} = \text{Im } z$

$$\text{Im} \int_{|x|=r} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} ds(\mathbf{x}) = \int_{|x|<r} k^2 \text{Im } n |u|^2 dx \geq 0$$

De fato, se  $n$  é real, ocorre a igualdade acima. Porém, mais geralmente,  $n$  pode ser um número complexo. Neste caso, a parte complexa representa uma atenuação na intensidade da onda, ou seja, o meio absorve parte da energia da onda à medida que ela propaga. Para isto fazer sentido fisicamente, a parte complexa é assumida como não negativa,  $\text{Im } n \geq 0$ , e este resultado continua válido.

Portanto, voltando ao limite inicial, como todos os termos são não negativos, tem-se

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \int_{|x|=r} \left( \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right|^2 + k^2 |u|^2 \right) ds(\mathbf{x}) = 0.$$

Logo,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{|x|=r} |u|^2 ds(\mathbf{x}) = 0.$$

Pelos teoremas anteriores, tem-se que  $u \equiv 0$ . Por exemplo, pelo lema de Rellich, conclui-se que  $u(\mathbf{x}) = 0$ , sempre que  $|\mathbf{x}| > a$ , para  $a$  suficientemente grande. E da continuação única, vale que  $u(\mathbf{x}) = 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ .  $\square$

## 2.6 Solução fundamental da equação de Helmholtz

Assume-se que  $u(\mathbf{x})$  é solução da equação de Helmholtz em  $\mathbb{R}^2$  e  $u(\mathbf{x})$  simétrica radialmente. Então, para  $(r, \theta)$  coordenadas polares,  $u(\mathbf{x}) = \varphi(r)\psi(\theta)$  e  $\psi(\theta)$  é constante. Logo, escreve-se  $u(\mathbf{x}) = f(|\mathbf{x}|) = f(r)$ .

Como  $u$  é solução de (2.3), tem-se que  $f$  é solução da equação diferencial de Bessel

$$r^2 f'' + r f' + k^2(r^2 - \alpha^2)f = 0, \quad (2.14)$$

com  $\alpha = 0$ , obtida usando a expressão do laplaciano em coordenadas polares (C.2) e o fato de que  $f$  só depende de  $r$ .

Procuram-se soluções da forma

$$f(r) = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_{\ell} r^{\ell}, \text{ com } a_{\ell} \in \mathbb{R}.$$

Têm-se

$$f'(r) = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_{\ell} \ell r^{\ell-1}$$

$$f''(r) = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_{\ell} \ell(\ell-1) r^{\ell-2}.$$

Como  $f$  satisfaz (2.14),

$$\begin{aligned}
 0 &= \sum_{\ell=0}^{\infty} a_{\ell} \ell(\ell-1)r^{\ell} + \sum_{\ell=0}^{\infty} a_{\ell} \ell r^{\ell} + k^2 \sum_{\ell=0}^{\infty} a_{\ell} r^{\ell+2} \\
 &= \sum_{\ell=0}^{\infty} [a_{\ell} \ell(\ell-1)r^{\ell} + a_{\ell} \ell r^{\ell} + a_{\ell} k^2 r^{\ell+2}] \\
 &= \sum_{\ell=0}^{\infty} [a_{\ell} \ell r^{\ell}(\ell-1+1) + a_{\ell} k^2 r^{\ell+2}] \\
 &= \sum_{\ell=0}^{\infty} [a_{\ell} \ell^2 r^{\ell} + a_{\ell} k^2 r^{\ell+2}] \\
 &= a_1 r + \sum_{\ell=2}^{\infty} [a_{\ell} \ell^2 + a_{\ell-2} k^2] r^{\ell}
 \end{aligned}$$

Daí, igualando cada um dos coeficientes a zero,

$$a_{\ell} = -\frac{k^2 a_{\ell-2}}{\ell^2}, \quad \text{para } \ell \geq 2, \quad \text{e } a_1 = 0.$$

E portanto,

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n k^{2n} a_0}{[2^n (n!)]^2}, \quad \text{para } n = 0, 1, \dots$$

Logo, escolhendo  $a_0 = 1$ , tem-se

$$f(r) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell}}{[2^{\ell} (\ell!)]^2} (kr)^{2\ell} = J_0(kr), \quad (2.15)$$

com  $J_0$  a função de Bessel de ordem 0, cuja convergência é obtida pelo teste da razão, para todo  $r \in \mathbb{R}$ .

A partir das funções de Bessel, constroem-se as funções de Weber

$$Y_{\alpha}(z) = \frac{J_{\alpha}(z) \cos \alpha\pi - J_{-\alpha}(z)}{\text{sen } \alpha\pi}.$$

E quando  $\alpha = n$  é inteiro, (WATSON, 1944, p. 64)

$$Y_n(z) = \lim_{\alpha \rightarrow n} \frac{J_{\alpha}(z) \cos \alpha\pi - J_{-\alpha}(z)}{\text{sen } \alpha\pi}.$$

A solução fundamental da equação de Helmholtz em  $\mathbb{R}^2$  (Equação 2.3) é dada por

$$G_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|\mathbf{x} - \mathbf{y}|), \quad \text{com } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{y} \quad (2.16)$$

com  $H_0^{(1)} = J_0 + iY_0$ , a função de Hankel do tipo 1 de ordem 0.

A solução fundamental da equação de Helmholtz em  $\mathbb{R}^3$  é dada por

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}, \text{ com } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{x} \neq \mathbf{y} \quad (2.17)$$

## 2.7 Equação de Lippmann-Schwinger e existência da solução

Os resultados a seguir, conhecidos como teoremas de representação, são úteis para provar a existência da solução do problema direto. O próximo teorema pode ser encontrado em (COLTON; KRESS, 1983, p. 68).

**Teorema 2.6.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  um domínio. Seja  $u$  uma função em  $C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  solução da equação de Helmholtz*

$$\Delta u + k^2 u = 0 \text{ em } \Omega.$$

Então

$$\int_{\partial\Omega} \left[ u(\mathbf{y}) \frac{\partial\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial\nu(\mathbf{y})} - \frac{\partial u}{\partial\nu}(\mathbf{y}) \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right] ds(\mathbf{y}) = \begin{cases} -u(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega \\ 0, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}. \end{cases}$$

*Demonstração.* Primeiramente, caso  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$ , aplica-se a segunda identidade de Green (B.3) na região  $\Omega$

$$\int_{\partial\Omega} \left[ u(\mathbf{y}) \frac{\partial\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial\nu(\mathbf{y})} - \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial u}{\partial\nu}(\mathbf{y}) \right] ds(\mathbf{y}) = \int_{\Omega} (u\Delta\Phi - \Phi\Delta u) dy.$$

Expandindo o lado direito, tem-se

$$\int_{\Omega} (u\Delta\Phi - \Phi\Delta u) dy = \int_{\Omega} (-k^2 u\Phi + k^2 \Phi u) dy = 0,$$

e segue o resultado.

Agora, seja  $\mathbf{x} \in \Omega$ . Não se pode aplicar a identidade de Green diretamente, pois  $\Phi$  tem uma singularidade em  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ . Por isso, retira-se uma vizinhança deste ponto, ou seja, considera-se a esfera  $S_r(\mathbf{x})$  de raio  $r$  e centro  $\mathbf{x}$ , tal que  $S_r(\mathbf{x}) \subset \Omega$ . O vetor normal à superfície  $S_r(\mathbf{x})$  será definido no sentido do interior de  $S_r(\mathbf{x})$ . Assim, pode-se aplicar a segunda identidade de Green às funções  $u(\mathbf{y})$  e  $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  na região  $D = \Omega \setminus B_r(\mathbf{x})$ , em que  $\partial D = \partial\Omega \cup S_r(\mathbf{x})$  e  $\partial\Omega \cap S_r(\mathbf{x}) = \emptyset$ , obtendo-se

$$\int_{\partial D} \left[ u(\mathbf{y}) \frac{\partial\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial\nu(\mathbf{y})} - \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial u}{\partial\nu}(\mathbf{y}) \right] ds(\mathbf{y}) = \int_D (u\Delta\Phi - \Phi\Delta u) dy$$

Como no caso anterior, o lado direito se anula, pois o domínio  $D$  não contém a singularidade. Logo, usando que  $\partial D = \partial\Omega \cup S_r(\mathbf{x})$ :

$$\begin{aligned} & \int_{\partial D} \left[ u(\mathbf{y}) \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \nu(\mathbf{y})} - \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial u}{\partial \nu}(\mathbf{y}) \right] ds(\mathbf{y}) \\ &= \int_{\partial\Omega} \left( u \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} - \Phi \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) ds + \int_{S_r(\mathbf{x})} \left( u \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} - \Phi \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) ds = 0. \end{aligned}$$

E fazendo  $r \rightarrow 0$ , deve-se ter

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{S_r(\mathbf{x})} \left( u \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} - \Phi \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) ds = u(\mathbf{x}).$$

Segue a prova deste fato. Nota-se que  $\mathbf{y} \in S_r(\mathbf{x}) \Rightarrow |\mathbf{y} - \mathbf{x}| = r$  e portanto, em  $S_r(\mathbf{x})$  pode-se considerar a troca de variáveis

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + r\hat{\mathbf{y}},$$

com  $\hat{\mathbf{y}}$  vetor unitário pertencente à esfera unitária centrada na origem  $S^2$ . Daí, tem-se

$$\int_{S_r(\mathbf{x})} \left( u \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} - \Phi \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) ds(\mathbf{y}) = \int_{S^2} \left( u \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} - \Phi \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) r^2 ds(\hat{\mathbf{y}}).$$

Como

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} = \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \\ \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \nu} &= -\frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial r} = \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \left( \frac{1}{r} - ik \right) \end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned} & \int_{S^2} \left( u(\mathbf{x} + r\hat{\mathbf{y}}) \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \left( \frac{1}{r} - ik \right) - \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) r^2 ds(\hat{\mathbf{y}}) \\ &= \underbrace{\int_{S^2} u(\mathbf{x} + r\hat{\mathbf{y}}) \frac{e^{ikr}}{4\pi} ds(\hat{\mathbf{y}})}_{\text{I}} - ik \underbrace{\int_{S^2} ru(\mathbf{x} + r\hat{\mathbf{y}}) \frac{e^{ikr}}{4\pi} ds(\hat{\mathbf{y}})}_{\text{II}} \\ &\quad - \underbrace{\int_{S^2} r \frac{e^{ikr}}{4\pi} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds(\hat{\mathbf{y}})}_{\text{III}}. \end{aligned}$$

O limite quando o raio  $r$  tende a zero será calculada separadamente em cada termo. Primeiramente, pelo teorema da convergência dominada, o termo I é

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \int_{S^2} u(\mathbf{x} + r\hat{\mathbf{y}}) \frac{e^{ikr}}{4\pi} ds(\hat{\mathbf{y}}) &= \int_{S^2} \lim_{r \rightarrow 0} u(\mathbf{x} + r\hat{\mathbf{y}}) \frac{e^{ikr}}{4\pi} ds(\hat{\mathbf{y}}) \\ &= \int_{S^2} u(x) \frac{1}{4\pi} ds(\hat{\mathbf{y}}) = u(x) \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} ds(\hat{\mathbf{y}}) = u(x). \end{aligned}$$

Notando que o segundo termo difere de I de apenas um fator  $r$ , tem-se

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{S^2} ru(\mathbf{x} + r\hat{\mathbf{y}}) \frac{e^{ikr}}{4\pi} ds(\hat{\mathbf{y}}) = \int_{S^2} \lim_{r \rightarrow 0} \underbrace{r u(\mathbf{x} + r\hat{\mathbf{y}}) \frac{e^{ikr}}{4\pi}}_{\rightarrow u(\mathbf{x})} ds(\hat{\mathbf{y}}) = 0,$$

já que quando  $r$  tende a zero o primeiro fator se anula e o segundo é limitado. Por fim, calculando a norma do termo III,

$$\left| \int_{S^2} r \frac{e^{ikr}}{4\pi} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds(\hat{\mathbf{y}}) \right| \leq \int_{S^2} \left| r \frac{e^{ikr}}{4\pi} \frac{\partial u}{\partial \nu} \right| ds(\hat{\mathbf{y}}) = \int_{S^2} \frac{r}{4\pi} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right| ds(\hat{\mathbf{y}}).$$

Como  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  e  $S^2$  é compacto,  $|u(\hat{\mathbf{y}})| \leq M$  e  $|\nabla u(\hat{\mathbf{y}})| \leq N$ ,  $\forall \hat{\mathbf{y}} \in S^2$ , com  $M, N$  reais. Logo,

$$\int_{S^2} \frac{r}{4\pi} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right| ds(\hat{\mathbf{y}}) \leq \int_{S^2} \frac{r}{4\pi} |\nabla u| |\hat{\mathbf{y}}| ds(\hat{\mathbf{y}}) \leq \int_{S^2} \frac{r}{4\pi} N ds(\hat{\mathbf{y}}).$$

Portanto,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{S^2} \frac{r}{4\pi} N ds(\hat{\mathbf{y}}) = \int_{S^2} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r}{4\pi} N ds(\hat{\mathbf{y}}) = 0,$$

de onde segue o resultado.  $\square$

Uma generalização deste teorema pode ser obtida quando a função  $u$  não necessariamente soluciona a equação de Helmholtz.

**Teorema 2.7.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio,  $\Phi = \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  solução fundamental da equação de Helmholtz em  $\mathbb{R}^n$*

$$\Delta_{\mathbf{y}} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + k^2 \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0.$$

*Se  $u = u(\mathbf{y}) \in C^2(\bar{\Omega})$  é tal que, para  $f \in C(\Omega)$ ,*

$$\Delta u(\mathbf{y}) + k^2 u(\mathbf{y}) = f(\mathbf{y}),$$

então, se  $\mathbf{x} \in \Omega$ ,

$$u(\mathbf{x}) = - \int_{\partial\Omega} \left[ u(\mathbf{y}) \frac{\partial\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial\nu(\mathbf{y})} - \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial u}{\partial\nu}(\mathbf{y}) \right] ds(\mathbf{y}) - \int_{\Omega} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

e se  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$ ,

$$\int_{\partial\Omega} \left[ u(\mathbf{y}) \frac{\partial\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial\nu(\mathbf{y})} - \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial u}{\partial\nu}(\mathbf{y}) \right] ds(\mathbf{y}) = - \int_{\Omega} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

*Demonstração.* Segue novamente da segunda identidade de Green aplicada a  $u$ ,  $\Phi$  na região  $\Omega$ .

$$\int_{\partial\Omega} \left[ u(\mathbf{y}) \frac{\partial\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial\nu(\mathbf{y})} - \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial u}{\partial\nu}(\mathbf{y}) \right] ds(\mathbf{y}) = \int_{\Omega} (u\Delta_{\mathbf{y}}\Phi - \Phi\Delta u) d\mathbf{y}.$$

Somando e subtraindo  $k^2 u\Phi$ , o lado direito é igual a

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (u\Delta_{\mathbf{y}}\Phi + k^2 u\Phi - k^2 u\Phi - \Phi\Delta u) d\mathbf{y} \\ &= \int_{\Omega} u(\Delta_{\mathbf{y}}\Phi + k^2\Phi) d\mathbf{y} - \int_{\Omega} \Phi(k^2 u + \Delta u) d\mathbf{y} \\ &= \int_{\Omega} u(\Delta_{\mathbf{y}}\Phi + k^2\Phi) d\mathbf{y} - \int_{\Omega} \Phi f d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

Caso  $\mathbf{x} \in \Omega$ ,

$$\Delta_{\mathbf{y}}\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + k^2\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\delta(\mathbf{y} - \mathbf{x})$$

com  $\delta$  o delta de Dirac. E logo,

$$\int_{\Omega} u(\Delta_{\mathbf{y}}\Phi + k^2\Phi) d\mathbf{y} = -u(\mathbf{x}),$$

de onde segue a primeira representação do teorema.

Caso  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$ ,

$$\Delta_{\mathbf{y}}\Phi + k^2\Phi = 0$$

e segue a segunda igualdade. □

A função  $f$  representa uma fonte. Um exemplo para tal função, que será utilizado no próximo teorema, é

$$f(\mathbf{y}) = k^2 m(\mathbf{y}) u(\mathbf{y}),$$

com  $m(\mathbf{y})$  uma função em  $\Omega$  dada por  $1 - n(\mathbf{y})$ , e  $n$  representa o índice de refração do meio.

**Teorema 2.8** (Equação de Lippmann-Schwinger). *Uma função  $u \in C^2(\mathbb{R}^3)$  é solução do problema de espalhamento direto dado por (2.11), (2.12) e (2.13) se, e somente se,  $u$  satisfaz*

$$u(\mathbf{x}) = u^{\text{inc}}(\mathbf{x}) - k^2 \int_{\mathbb{R}^3} m(\mathbf{y})u(\mathbf{y})\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3. \quad (2.18)$$

*Demonstração.* Para provar a ida, supõe-se que  $u^s$  é solução do problema de espalhamento direto. Nota-se que  $u$  soluciona

$$\Delta u + k^2 n(\mathbf{x})u = 0 \iff \Delta u + k^2 u = k^2(1 - n(\mathbf{x}))u.$$

Escreve-se  $m(\mathbf{x}) = (1 - n(\mathbf{x}))$ , e usando os teoremas de representação para  $f(\mathbf{x}) = k^2 m(\mathbf{x})u$ , tem-se

$$u(\mathbf{x}) = - \int_{\partial\Omega} \left[ u(\mathbf{y}) \frac{\partial\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial\nu(\mathbf{y})} - \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial u}{\partial\nu}(\mathbf{y}) \right] ds(\mathbf{y}) \\ - k^2 \int_{\Omega} m(\mathbf{y})u(\mathbf{y})\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})d\mathbf{y}$$

Como  $u^{\text{inc}}$  satisfaz Helmholtz,

$$\int_{\partial\Omega} \left[ u^{\text{inc}}(\mathbf{y}) \frac{\partial\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial\nu(\mathbf{y})} - \frac{\partial u^{\text{inc}}}{\partial\nu}(\mathbf{y})\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right] ds(\mathbf{y}) = -u^{\text{inc}},$$

e pelo condição de radiação,

$$\int_{\partial\Omega} \left[ u^s(\mathbf{y}) \frac{\partial\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial\nu(\mathbf{y})} - \frac{\partial u^s}{\partial\nu}(\mathbf{y})\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right] ds(\mathbf{y}) = 0.$$

Como  $u = u^{\text{inc}} + u^s$ , segue que

$$u(\mathbf{x}) = u^{\text{inc}} - k^2 \int_{\Omega} m(\mathbf{y})u(\mathbf{y})\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})d\mathbf{y}.$$

Já que o suporte de  $m$  está contido em  $\Omega$ , pode-se calcular a integral em todo  $\mathbb{R}^3$ , pois a integral é nula fora de  $\Omega$ .

Para a volta, refere-se à demonstração de (COLTON; KRESS, 1998, teorema 8.3, p. 216)  $\square$

**Teorema 2.9.** *Existe uma única solução do problema de espalhamento direto descrito por (2.11), (2.12) e (2.13), ou equivalentemente, por (2.18).*

*Demonstração.* Ver (KIRSCH, 2011, teorema 6.9, p. 202).  $\square$

## 2.8 O padrão de espalhamento

Deseja-se estudar o comportamento da onda quando a distância entre a fonte e o ponto de medição é grande. Existem resultados que garantem que é possível resolver o problema inverso apenas com medições do assim chamado padrão de espalhamento (ou *far-field pattern*). Ele corresponde ao comportamento assintótico da onda espalhada quando esta se afasta indefinidamente do obstáculo. O seguinte teorema mostra o padrão de espalhamento da solução fundamental. Adiante, vê-se que qualquer solução pode ser representada pelo seu padrão de espalhamento.

**Teorema 2.10.** *A solução fundamental*

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}, \text{ com } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{x} \neq \mathbf{y}$$

pode ser escrita como

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{e^{ik|\mathbf{x}|}}{4\pi|\mathbf{x}|} e^{-ik\hat{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{y}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|^2}\right), \quad (2.19)$$

com  $\mathbf{x} = |\mathbf{x}|\hat{\mathbf{x}}$ , isto é,  $\hat{\mathbf{x}}$  é o vetor unitário na direção de  $\mathbf{x} \neq 0$ .

*Demonstração.* Faz-se a seguinte aproximação:

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}-\mathbf{y}| &= ||\mathbf{x}|\hat{\mathbf{x}}-\mathbf{y}| = |\mathbf{x}|\left|\hat{\mathbf{x}}-\frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{x}|}\right| = |\mathbf{x}|\left|\hat{\mathbf{x}}-\frac{|\mathbf{y}|}{|\mathbf{x}|}\hat{\mathbf{y}}\right|, \text{ com } \hat{\mathbf{y}} = \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|} \\ &= |\mathbf{x}|\sqrt{\left\langle\hat{\mathbf{x}}-\frac{|\mathbf{y}|}{|\mathbf{x}|}\hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{x}}-\frac{|\mathbf{y}|}{|\mathbf{x}|}\hat{\mathbf{y}}\right\rangle} \\ &= |\mathbf{x}|\sqrt{\langle\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{x}}\rangle - 2\left\langle\hat{\mathbf{x}}, \frac{|\mathbf{y}|}{|\mathbf{x}|}\hat{\mathbf{y}}\right\rangle + \left\langle\frac{|\mathbf{y}|}{|\mathbf{x}|}\hat{\mathbf{y}}, \frac{|\mathbf{y}|}{|\mathbf{x}|}\hat{\mathbf{y}}\right\rangle} \\ &= |\mathbf{x}|\sqrt{1 - 2\frac{|\mathbf{y}|}{|\mathbf{x}|}\langle\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}\rangle + \frac{|\mathbf{y}|^2}{|\mathbf{x}|^2}}, \end{aligned}$$

pois  $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}$  são unitários. Para  $\varepsilon$  próximo de zero, vale, por Taylor, que

$$\begin{aligned} \sqrt{1-2\alpha\varepsilon+\varepsilon^2} &= 1-\alpha\varepsilon+\mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ \frac{1}{\sqrt{1-2\alpha\varepsilon+\varepsilon^2}} &= 1+\mathcal{O}(\varepsilon) \end{aligned}$$

Agora, quando  $|\mathbf{x}| \gg |\mathbf{y}|$ , tem-se que  $1 \gg \frac{|\mathbf{y}|}{|\mathbf{x}|} > 0$ , e substituindo  $\varepsilon$  por  $\frac{|\mathbf{y}|}{|\mathbf{x}|}$  e  $\alpha$  por  $\langle \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}} \rangle$ , segue que

$$\begin{aligned} |\mathbf{x} - \mathbf{y}| &= |\mathbf{x}| \left( 1 - \frac{|\mathbf{y}|}{|\mathbf{x}|} \langle \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}} \rangle + \mathcal{O} \left( \frac{|\mathbf{y}|^2}{|\mathbf{x}|^2} \right) \right) \\ &= |\mathbf{x}| - \langle \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{y} \rangle + \mathcal{O} \left( \frac{1}{|\mathbf{x}|} \right) = |\mathbf{x}| - \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y} + \mathcal{O} \left( \frac{1}{|\mathbf{x}|} \right), \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} = \frac{1}{|\mathbf{x}|} \left( 1 + \mathcal{O} \left( \frac{|\mathbf{y}|}{|\mathbf{x}|} \right) \right) = \frac{1}{|\mathbf{x}|} + \mathcal{O} \left( \frac{1}{|\mathbf{x}|^2} \right). \quad (2.21)$$

Logo, usando primeiro (2.21) e depois (2.20),

$$\begin{aligned} \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} &= \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{4\pi|\mathbf{x}|} + \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{4\pi} \mathcal{O} \left( \frac{1}{|\mathbf{x}|^2} \right) \\ &= \frac{e^{ik(|\mathbf{x}| - \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y} + \mathcal{O}(\frac{1}{|\mathbf{x}|}))}}{4\pi|\mathbf{x}|} + \mathcal{O} \left( \frac{1}{|\mathbf{x}|^2} \right) \\ &= \frac{e^{ik|\mathbf{x}|}}{4\pi|\mathbf{x}|} e^{-ik\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y}} e^{ik\mathcal{O}(\frac{1}{|\mathbf{x}|})} + \mathcal{O} \left( \frac{1}{|\mathbf{x}|^2} \right) \end{aligned}$$

Nota-se que quando  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ ,  $e^{ik\mathcal{O}(\frac{1}{|\mathbf{x}|})} \rightarrow 1$ , e  $\frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{4\pi} = \mathcal{O}(1)$ . Logo, com  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ ,

$$\frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} = \frac{e^{ik|\mathbf{x}|}}{4\pi|\mathbf{x}|} e^{-ik\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y}} + \mathcal{O} \left( \frac{1}{|\mathbf{x}|^2} \right)$$

□

Como consequência deste teorema, segue o padrão de espalhamento para qualquer solução.

**Teorema 2.11.** *Seja  $u$  uma solução de (2.11), (2.12) e (2.13) em  $\mathbb{R}^3$ . Então,*

$$u(\mathbf{x}) = u^{inc}(\mathbf{x}) + \frac{e^{ik|\mathbf{x}|}}{|\mathbf{x}|} u_{\infty}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{d}) + \mathcal{O} \left( \frac{1}{|\mathbf{x}|^2} \right), \quad (2.22)$$

uniformemente em relação a  $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$ , quando  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ , com

$$u_{\infty}(\hat{\mathbf{x}}) = -\frac{k^2}{4\pi} \int_{|\mathbf{y}| < a} (1 - n(\mathbf{y})) e^{-ik\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y}} u(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad (2.23)$$

com  $\hat{\mathbf{x}} \in S^2$ .

*Demonstração.* Ver (KIRSCH, 2011, Teorema 6.11, p. 203).  $\square$

Em  $\mathbb{R}^2$ , as equações (2.22) e (2.23) devem ser substituídas, conforme (COLTON; KRESS, 1998, p. 67), por:

**Teorema 2.12.** *Seja  $u$  uma solução de (2.11), (2.12) e (2.13) em  $\mathbb{R}^2$ . Então,*

$$u(\mathbf{x}) = u^{inc}(\mathbf{x}) + \frac{e^{ik|\mathbf{x}|}}{\sqrt{|\mathbf{x}|}} \left[ u_{\infty}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{d}) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right) \right] \quad (2.24)$$

uniformemente em relação a  $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$ , quando  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ , com

$$u_{\infty}(\hat{\mathbf{x}}) = -\frac{e^{i\pi/4}k^2}{\sqrt{8\pi k}} \int_{|\mathbf{y}|<a} (1 - n(\mathbf{y}))e^{-ik\hat{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{y}}u(\mathbf{y})d\mathbf{y}, \quad (2.25)$$

com  $\hat{\mathbf{x}} \in S^1$ .

Isso motiva a seguinte notação. Seja

$$\Phi_{\infty,n}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) = \gamma_n e^{-ik\hat{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{y}},$$

com

$$\gamma_n = \begin{cases} \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k}}, & n = 2 \\ \frac{1}{4\pi}, & n = 3. \end{cases}$$

Logo, para um obstáculo penetrável, a equação

$$u_{\infty}(\hat{\mathbf{x}}) = -k^2 \int_{|\mathbf{y}|<a} (1 - n(\mathbf{y}))\Phi_{\infty,n}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{y})u(\mathbf{y})d\mathbf{y}. \quad (2.26)$$

denota o padrão de espalhamento devido à não homogeneidade  $m(\mathbf{x}) = 1 - n(\mathbf{x})$ , medido em  $\hat{\mathbf{x}} \in S^{n-1}$  a partir de uma onda plana incidente na direção  $\mathbf{d}$ .



### 3 O problema inverso de espalhamento para um obstáculo penetrável

Este capítulo trata do problema de determinar o índice de refração  $n$  a partir do padrão de espalhamento  $u_\infty(\hat{\mathbf{x}})$  com ondas incidentes planas. Ou seja, deseja-se encontrar  $n(\mathbf{x})$ , com  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , dado o padrão de espalhamento

$$u_\infty(\hat{\mathbf{x}}) = -k^2 \int_{\mathbb{R}^n} (1 - n(\mathbf{y})) \Phi_{\infty, n}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) u(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (3.1)$$

para várias ondas incidentes planas de direção  $\mathbf{d} \in S^{n-1}$  e várias direções de medição  $\hat{\mathbf{x}} \in S^{n-1}$ . Os dados sobre o padrão de espalhamento  $u_\infty$  são medidos, e portanto, deve-se considerar um erro associado.

Antes de abordar este caso, observa-se que o problema de espalhamento inverso é mal condicionado.

#### 3.1 Mal-condicionamento do problema de espalhamento

Para mostrar o mal-condicionamento, será considerado um obstáculo impenetrável com condição de contorno de Dirichlet, e não um obstáculo penetrável, como vinha-se tratando ultimamente.

Seja  $D \subset \mathbb{R}^2$  um disco impenetrável de raio  $r$  com condição de contorno de Dirichlet e seja o campo de ondas incidentes  $u^{\text{inc}}$  qualquer. A partir do padrão de espalhamento do campo total  $u_\infty(\hat{\mathbf{x}})$ ,  $\hat{\mathbf{x}} = (\cos \theta, \sin \theta) \in S^1$ , deseja-se encontrar o tamanho do disco, isto é, o raio  $r$ .

Seja  $(\tilde{u}_{\infty, n})$  uma sequência de perturbações dos dados originais  $u_\infty$  dada por

$$\tilde{u}_{\infty, n}(\hat{\mathbf{x}}) = u_\infty(\hat{\mathbf{x}}) + \frac{1}{n} e^{in\theta}, n \in \mathbb{N}.$$

Usando a solução fundamental (2.16), a diferença entre o campo total original e o perturbado é dada por

$$\tilde{u}_n^s(\mathbf{x}) - u^s(\mathbf{x}) = H_n^{(1)}(k|\mathbf{x}|) \frac{i}{4n} e^{in\theta}$$

com  $H_n^{(1)}$  as funções de Hankel de ordem  $n$  do tipo 1. Calculando este erro para  $|\mathbf{x}| = r$ , tem-se

$$\tilde{u}_n^s(\mathbf{x}) - u^s(\mathbf{x}) = H_n^{(1)}(kr) \frac{i}{4n} e^{in\theta}$$

A partir da aproximação dada em (COLTON; KRESS, 1998, p. 66), tem-se

$$|\tilde{u}_n^s(\mathbf{x}) - u^s(\mathbf{x})| = \frac{2^n(n-1)!}{4\pi n k^n r^n}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Fazendo  $n \rightarrow \infty$ , tem-se que a perturbação dos dados, i.e., do padrão de espalhamento, tende a zero, mas o erro do campo espalhado na fronteira de  $D$  cresce indefinidamente. Portanto, pequenos erros nos dados podem causar grandes erros na solução, ou até fazer com que a solução deixe de existir.

Este mal-condicionamento faz com que seja necessário estabilizar o problema para resolvê-lo numericamente. Para tanto, utilizam-se métodos de regularização, por exemplo Tikhonov ou TSVD (decomposição em valores singulares truncada). Uma referência clássica sobre o assunto é (ENGL; HANKE; NEUBAUER, 1996).

## 3.2 Unicidade do problema inverso

Apesar de o problema ser mal condicionado, há resultados sobre a unicidade da solução, no entanto, sujeitos a algumas condições. Em  $\mathbb{R}^3$ , vale o teorema provado em (KIRSCH, 2011, Teorema 6.26, p. 224).

**Teorema 3.1.** *Sejam  $n_1, n_2 \in C^2(\mathbb{R}^3)$  dois índices de refração tais que  $n_1(\mathbf{x}) = n_2(\mathbf{x}) = 1$  sempre que  $|\mathbf{x}| > a$ . Sejam  $u_{1,\infty}, u_{2,\infty}$  os padrões de espalhamento correspondentes, tais que  $u_{1,\infty}(\hat{\mathbf{x}}) = u_{2,\infty}(\hat{\mathbf{x}})$ ,  $\forall \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{d} \in S^2$ , isto é, os padrões de espalhamento coincidem em todas as direções, para todas as ondas incidentes. Então,  $n_1 = n_2$ .*

Isto significa que o padrão de espalhamento determina unicamente o índice de refração, desde que se tenham os dados em todas as direções.

Já em  $\mathbb{R}^2$ , existe um resultado análogo apenas para alguns casos específicos. Mas se forem fornecidos mais dados, vale a unicidade, ou seja, quando se tem os padrões de espalhamento em todas as direções para vários valores de  $k$ . Segue o teorema em (COLTON; KRESS, 1998, Teorema 10.19, p. 309).

**Teorema 3.2.** *O índice de refração  $n$  é unicamente determinado pelo padrão de espalhamento  $u_\infty(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{d})$  associado, para  $\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{d} \in S^1$ , e  $k$  pertencente a algum intervalo.*

### 3.3 Aproximação de Born

A equação (3.1) é não-linear, pois há um termo em que a função  $n$  multiplica  $u$ , mas  $u$  depende de  $n$ , basta observar a equação de Lippman-Schwinger (2.18). Será analisado agora um método para resolver o problema inverso que considera uma linearização dessa equação, o qual é conhecido como aproximação de Born.

Definindo o operador  $T_m : C(\mathbb{R}^n) \rightarrow C(\mathbb{R}^n)$  como

$$T_m u(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} m(\mathbf{y})u(\mathbf{y})\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})d\mathbf{y},$$

reescreve-se a equação de Lippmann-Schwinger como

$$u(\mathbf{x}) = u^{\text{inc}}(\mathbf{x}) - k^2 T_m u(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

com  $m(\mathbf{x}) = 1 - n(\mathbf{x})$ . Nota-se que a integral converge, pois o suporte de  $m$  é limitado. Bastaria calcular a integral em uma bola de raio  $a > 0$ .

Usando que  $u = u^s + u^{\text{inc}}$ , segue da linearidade de  $T_m$  que

$$\begin{aligned} u^s(\mathbf{x}) &= -k^2 T_m (u^s + u^{\text{inc}})(\mathbf{x}) \\ u^s(\mathbf{x}) + k^2 T_m u^s(\mathbf{x}) &= -k^2 T_m u^{\text{inc}}(\mathbf{x}) \\ (I + k^2 T_m)u^s(\mathbf{x}) &= -k^2 T_m u^{\text{inc}}(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (3.2)$$

com  $I$  o operador identidade.

Observando que o termo não linear é dado por  $k^2 T_m u^s$ , define-se a aproximação de Born como

$$u_B^s(\mathbf{x}) = -k^2 T_m u^{\text{inc}}(\mathbf{x}), \quad (3.3)$$

ou

$$u_B(\mathbf{x}) = u^{\text{inc}}(\mathbf{x}) - k^2 T_m u^{\text{inc}}(\mathbf{x}). \quad (3.4)$$

Também pode-se definir um operador  $T_m^\infty$  para o padrão de espalhamento a partir da equação (3.1) como

$$T_m^\infty u(\hat{\mathbf{x}}) = \int_{\mathbb{R}^3} m(\mathbf{y})u(\mathbf{y})\Phi_{\infty, n}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{y})d\mathbf{y}.$$

E assim, a aproximação de Born usando o padrão de espalhamento se torna

$$\begin{aligned} u_B^\infty(\hat{\mathbf{x}}) &= -k^2 T_m^\infty u^{\text{inc}}(\hat{\mathbf{x}}) \\ &= -k^2 \gamma_n \int_{\mathbb{R}^n} m(\mathbf{y}) u^{\text{inc}}(\mathbf{y}) e^{-ik\hat{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{y}} d\mathbf{y} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Assumindo que as ondas incidentes são planas, tem-se

$$\begin{aligned} u_B^\infty(\hat{\mathbf{x}}) &= -k^2 \gamma_n \int_{\mathbb{R}^n} m(\mathbf{y}) e^{ik\mathbf{d}\cdot\mathbf{y}} e^{-ik\hat{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{y}} d\mathbf{y} \\ &= -k^2 \gamma_n \int_{\mathbb{R}^n} m(\mathbf{y}) e^{-ik(\hat{\mathbf{x}}-\mathbf{d})\cdot\mathbf{y}} d\mathbf{y}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

que é a Transformada de Fourier da função  $m = 1 - n$

$$u_B^\infty(\hat{\mathbf{x}}) = -k^2 \gamma_n \hat{m}(k\hat{\mathbf{x}} - k\mathbf{d}).$$

Assim, a aproximação de Born é um método para determinar o índice de refração a partir de medições do padrão de espalhamento.

### 3.4 Série de Neumann

A aproximação de Born também pode ser derivada através da série de Neumann, que afirma que a solução de (3.2) pode ser escrita como

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^\ell (k^2 T_m)^\ell u^{\text{inc}}(\mathbf{x}). \quad (3.7)$$

Os primeiros dois termos desta série são a aproximação de Born  $u_B$ .

A equação (3.7) pode ser derivada do Teorema A.29 de (KIRSCH, 2011), o qual afirma que se  $K$  é um operador linear limitado tal que  $\|K\| < 1$ , então

$$(I - K)^{-1} = \sum_{\ell=0}^{\infty} K^\ell$$

Logo, sob condições em  $k$ , no domínio  $D$  e  $m$ , vale o Teorema A.29 para o operador  $K = -k^2 T_m$ . Assim, a equação (3.2) fica

$$\begin{aligned} (I + K)u^s &= K u^{\text{inc}} \\ u^s &= (I + K)^{-1} K u^{\text{inc}} = \left( \sum_{\ell=0}^{\infty} K^\ell \right) K u^{\text{inc}} = \left( \sum_{\ell=1}^{\infty} K^\ell \right) u^{\text{inc}} \\ u &= u^s + u^{\text{inc}} = I u^{\text{inc}} + \left( \sum_{\ell=1}^{\infty} K^\ell \right) u^{\text{inc}} = \left( \sum_{\ell=0}^{\infty} K^\ell \right) u^{\text{inc}}, \end{aligned}$$

e daí segue a equação (3.7).

Para ver mais precisamente quais são as condições para a convergência da série, calcula-se

$$\|K\|_\infty = \|-k^2 T_m\|_\infty = k^2 \sup_{\|u\|_\infty=1} \left\| \int_{\mathbb{R}^n} m(\mathbf{y})u(\mathbf{y})\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})d\mathbf{y} \right\|_\infty$$

Como o suporte de  $m$  é compacto, existe  $a > 0$ , tal que  $m(\mathbf{y}) = 0$  sempre que  $|\mathbf{y}| < a$ . Logo,

$$\begin{aligned} \|K\|_\infty &= k^2 \sup_{\|u\|_\infty=1} \left\| \int_{|\mathbf{y}|<a} m(\mathbf{y})u(\mathbf{y})\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})d\mathbf{y} \right\|_\infty \\ &\leq k^2 \|m\|_\infty \max_{|\mathbf{x}|\leq a} \int_{|\mathbf{y}|<a} |\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})|. \end{aligned}$$

Em  $\mathbb{R}^3$ , vale que (KIRSCH, 2011, p. 204)

$$\|K\|_\infty \leq k^2 \frac{a^2}{2} \|m\|_\infty.$$

E em  $\mathbb{R}^2$ , (de acordo com MUNIZ, W., comunicação pessoal, 2017)

$$\|K\|_\infty \leq k^2 \frac{a^2}{2} \ln(ka) \|m\|_\infty.$$

Portanto, se  $k$ ,  $a$  e  $m$  forem tais que  $\|K\|_\infty < 1$ , então a série de Neumann converge, e existe solução para a equação de Lippmann-Schwinger. Esta é uma consequência direta do Teorema do Ponto Fixo de Banach, aplicado sobre o operador  $I + K : X \rightarrow X$ , com  $X = (C(D), \|\cdot\|_\infty)$ .

A interpretação física da aproximação de Born é que apenas é considerado espalhamento simples, e não múltiplo. Ou seja, supõe-se que a onda incidente reflete no obstáculo e é imediatamente medida, sem encontrar o obstáculo novamente. Esta é a hipótese de espalhamento fraco.



## 4 Experimentos numéricos

Para aplicar o método de inversão discutido, é necessário primeiro gerar dados, isto é, resolver o problema direto. Passa-se à descrição do algoritmo utilizado para gerar o padrão de espalhamento do campo espalhado de um obstáculo dado e ondas incidentes planas.

Sejam  $D \subset \mathbb{R}^2$  um domínio limitado e  $m : D \rightarrow \mathbb{R}$  uma função. A partir de  $D$  encontra-se um raio  $r$  tal que  $\overline{D} \subset B_r(0)$ . Discretiza-se a região de interesse  $Q = [-r, r] \times [-r, r]$  que contém  $D$  de forma a obter  $N$  sub-regiões  $Q_\ell$ ,  $\ell = 1, 2, \dots, N$ , que cobrem o quadrado  $Q$ . Por exemplo, neste trabalho foi gerada uma malha retangular dividindo-se cada lado de  $Q$  por uma quantidade de linhas e colunas, respectivamente. Em particular, definiu-se para  $i, j = 1, 2, \dots, M$ ,

$$Q_{i,j} = \left[ -r + \frac{2(i-1)r}{M}, -r + \frac{2ir}{M} \right] \times \left[ -r + \frac{2(j-1)r}{M}, -r + \frac{2jr}{M} \right],$$

obtendo uma malha regular com  $N = M^2$  quadrados, ou seja, cada elemento da malha é um quadrado com a mesma área.

Em cada  $Q_\ell$  escolhe-se um ponto  $\mathbf{x}_\ell$  qualquer. No caso em questão, foi escolhido

$$\mathbf{x}_{i,j} = \left( -r + \frac{(2i-1)r}{M}, -r + \frac{(2j-1)r}{M} \right),$$

que é o ponto central do quadrado  $Q_{i,j}$ , ou seja, o ponto de interseção das suas diagonais. Aqui é necessário indexar  $\mathbf{x}$  com apenas um índice. Portanto, faz-se a seguinte mudança:

$$\mathbf{x}_\ell = \mathbf{x}_{M(i-1)+j},$$

para  $i, j = 1, 2, \dots, M$ , e logo,  $\ell = 1, 2, \dots, M^2 = N$ .

Este ponto será usado para calcular a integral de  $m$  em  $Q_\ell$ , isto é, o valor de  $m$  em todo o quadrado  $Q_\ell$  será considerado como sendo  $m(\mathbf{x}_\ell)$ . Matematicamente, pode-se dizer isto através da função característica

$$\chi_{Q_\ell}(\mathbf{y}) = \begin{cases} 1, & \text{se } \mathbf{y} \in Q_\ell \\ 0, & \text{se } \mathbf{y} \notin Q_\ell. \end{cases}$$

Assume-se, então, que

$$m(\mathbf{y}) = \sum_{\ell=1}^N m(\mathbf{x}_\ell) \chi_{Q_\ell}(\mathbf{y}). \quad (4.1)$$

De acordo com a equação da aproximação de Born (3.6) para medições realizadas longe do espalhador e ondas incidentes planas, tem-se

$$u_B^\infty(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{d}) = -k^2 \gamma_2 \int_Q m(\mathbf{y}) e^{ik(\mathbf{d}-\hat{\mathbf{x}})\cdot\mathbf{y}} d\mathbf{y}.$$

Agora, usando a discretização sobre  $Q$  e a equação (4.1), tem-se

$$\begin{aligned} u_B^\infty(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{d}) &= -k^2 \gamma_2 \sum_{\ell=1}^M \int_{Q_\ell} m(\mathbf{y}) e^{ik(\mathbf{d}-\hat{\mathbf{x}})\cdot\mathbf{y}} d\mathbf{y} \\ &= -k^2 \gamma_2 \sum_{\ell=1}^M m(\mathbf{x}_\ell) \int_{Q_\ell} e^{ik(\mathbf{d}-\hat{\mathbf{x}})\cdot\mathbf{y}} d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

Caso  $(d_1 - \hat{x}_1)(d_2 - \hat{x}_2) \neq 0$ , com  $\mathbf{d} = [d_1 \ d_2]^\top$  e  $\hat{\mathbf{x}} = [\hat{x}_1 \ \hat{x}_2]^\top$ , a integral pode agora ser analiticamente calculada para um retângulo  $[a, b] \times [c, d]$ :

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_c^d e^{ik(\mathbf{d}-\hat{\mathbf{x}})\cdot\mathbf{y}} d\mathbf{y} &= \int_a^b e^{ik(d_1-\hat{x}_1)y_1} dy_1 \int_c^d e^{ik(d_2-\hat{x}_2)y_2} dy_2 \\ &= \frac{i}{k(d_1 - \hat{x}_1)} \left( e^{ik(d_1-\hat{x}_1)b} - e^{ik(d_1-\hat{x}_1)a} \right) \\ &\quad \frac{i}{k(d_2 - \hat{x}_2)} \left( e^{ik(d_2-\hat{x}_2)d} - e^{ik(d_2-\hat{x}_2)c} \right) \\ &= \frac{- \left( e^{ik(d_1-\hat{x}_1)b} - e^{ik(d_1-\hat{x}_1)a} \right) \left( e^{ik(d_2-\hat{x}_2)d} - e^{ik(d_2-\hat{x}_2)c} \right)}{k^2(d_1 - \hat{x}_1)(d_2 - \hat{x}_2)}. \end{aligned}$$

E caso  $(d_1 - \hat{x}_1)(d_2 - \hat{x}_2) = 0$ ,

$$\int_a^b \int_c^d e^{ik(\mathbf{d}-\hat{\mathbf{x}})\cdot\mathbf{y}} d\mathbf{y} = \int_a^b \int_c^d d\mathbf{y} = (b-a)(d-c).$$

Deseja-se calcular rapidamente o campo espalhado para quaisquer direções de incidência  $\mathbf{d}$  e de medição  $\hat{\mathbf{x}}$ . Observa-se que  $u_B^s$  pode ser interpretado como um produto matriz-vetor. Portanto, denotando

$$\mathbf{A}(\mathbf{d}, \hat{\mathbf{x}}, Q_\ell) = \int_{Q_\ell} e^{ik(\mathbf{d}-\hat{\mathbf{x}})\cdot\mathbf{y}} d\mathbf{y},$$

constroem-se a matriz  $\mathbf{A}$ , o vetor  $\mathbf{m}$  e o vetor  $\mathbf{u}$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{I(i-1)+j,\ell} &= \mathbf{A}(\mathbf{d}_{(i)}, \hat{\mathbf{x}}_{(j)}, Q_\ell) \\ \mathbf{m}_\ell &= m(\mathbf{x}_\ell) \\ \mathbf{u}_{I(i-1)+j} &= u_B^s(\mathbf{d}_{(i)}, \hat{\mathbf{x}}_{(j)}) \end{aligned}$$

para  $i = 1, 2, \dots, I$  direções de incidência,  $j = 1, 2, \dots, J$  direções de medição e  $\ell = 1, 2, \dots, N$  sub-regiões da discretização. Observa-se que a dimensão do vetor  $\mathbf{u}$  corresponde à quantidade de direções de incidência multiplicado pela quantidade de direções de medição. Assim, podemos reescrever o campo espalhado  $u_B^s$  como

$$\mathbf{u}_{I(i-1)+j} = -k^2 \gamma_2 \sum_{\ell=1}^M \mathbf{A}_{I(i-1)+j,\ell} \mathbf{m}_\ell.$$

Logo,

$$\mathbf{u} = -k^2 \gamma_2 \mathbf{A} \mathbf{m}. \quad (4.2)$$

E portanto, o problema direto está determinado.

Para encontrar o vetor  $\mathbf{u}$  falta apenas escolher as direções  $\mathbf{d}_{(i)}$  e  $\hat{\mathbf{x}}_{(j)}$ . A forma mais natural é tomar  $n$  vetores igualmente espaçados no círculo unitário e fazer todas as combinações desses vetores dois a dois. Outra forma é escolher muitas direções de medição e apenas poucas delas como direções de incidência. Por exemplo, tomar  $n = 128$  direções igualmente espaçadas no círculo unitário como medição, e escolher 4 delas como incidência, as quais preferencialmente também estejam igualmente espaçadas. De ambas as formas, a matriz  $\mathbf{A}$  não possui características boas, isto é, ela não é necessariamente quadrada, porque a quantidade de direções de incidência e de medição é independente da discretização da região, e também não tem posto completo, pois, por exemplo,  $\mathbf{A}(\mathbf{d}, \hat{\mathbf{x}}, Q_\ell) = \mathbf{A}(-\hat{\mathbf{x}}, -\mathbf{d}, Q_\ell)$ ,  $\forall \ell$ , o que implica que há linhas iguais na matriz, devido à escolha de direções feita. Isso pode ser uma complicação na hora de resolver o problema inverso.

Porém, a interpretação física do problema permite tal escolha de direções. Na prática, a imagem de um objeto poderá ser produzida com qualidade maior, quanto mais observações ao redor dele forem feitas, e quanto mais ângulos de iluminação diferentes houver.

Agora, pode-se finalmente resolver o problema inverso. Como dados de entrada, tem-se uma região de interesse, o vetor  $\mathbf{u}$  das medições do campo espalhado, e as respectivas direções de incidência e medição. Afinal, é possível (e necessário) saber, para cada valor medido, qual foi a onda incidente e onde foi realizada a medição. Nota-se que a região de interesse não necessariamente coincide com a do problema direto. Neste, a região serviu apenas para gerar os dados, e não pode ser utilizada novamente no problema inverso. De fato, é justamente esta informação que é procurada, junto com o índice de refração.

No algoritmo implementado, escolheu-se a região de busca como um quadrado de dimensões  $[-2r, 2r] \times [-2r, 2r]$ , com  $r$  o raio do pro-

blema direto, ou seja, o obstáculo será procurado em uma região maior do que a que foi usada para gerar os dados. Novamente, faz-se uma discretização do quadrado com  $N'$  subquadrados usando o método anterior. Cada sub-região será um pixel na imagem a ser formada. Calcula-se a matriz  $\mathbf{A}$  como anteriormente, notando que será diferente da matriz usada para gerar os dados, pois a discretização é diferente. Com isso, é possível encontrar o vetor  $\mathbf{m}$  resolvendo o sistema linear (4.2). Aqui, recorda-se que o vetor  $\mathbf{m}$  representa o valor da função  $m$  em cada pixel da imagem, pois é assumido que  $m$  é constante em cada pixel.

Para resolver o sistema linear, foi implementado

$$\mathbf{m} = -\frac{1}{k^2\gamma_2}\mathbf{A}^\dagger\mathbf{u}$$

com  $\mathbf{A}^\dagger$  a pseudo-inversa de  $\mathbf{A}$ , com a qual se resolvem as equações normais e assim também o problema de quadrados mínimos.

## 4.1 Imagens

Em cada um dos experimentos feitos, os dados foram gerados a partir do quadrado  $[-0, 1, 0, 1] \times [-0, 1, 0, 1]$ . A discretização contou com 400 sub-regiões, 20 divisões em cada lado. Exceto o Teste 4, em que foram usadas 1600 sub-regiões, 40 divisões em cada lado.

Em cada teste, foram produzidas duas imagens. A primeira delas corresponde à escolha do mesmo número de direções incidentes e de medição, a saber, 32 direções igualmente separadas no círculo unitário. Para produzir a segunda imagem, foram usadas 128 direções de medição igualmente espalhadas, e 4 direções de incidência, cada uma em um quadrante diferente.

Os obstáculos possuem índice de refração constante igual à 1.003, exceto no experimento 3, no qual há um obstáculo cujo índice de refração é uma função suave. Neste, o índice de refração máximo é 1.003, e tende exponencialmente a 1 quando se afasta no centro.

As imagens representam a região  $[-0, 2, 0, 2] \times [-0, 2, 0, 2]$  do plano. A quantidade de pixels das imagens, que equivale à dimensão do vetor  $\mathbf{m}$ , foi de 3600, correspondendo a 60 linhas e 60 colunas. O contorno na imagem representa o objeto original que gerou o campo espalhado. E a coloração em cada pixel representa o valor da função  $m$ .

Em geral, o número de onda  $k$  foi escolhido sempre como 1, porém no Teste 4, além de testar diferentes combinações de direções de

incidência e medição, variou-se também  $k$ , mas de forma que  $k^2 \|T_m\| < 1$ .

Segue agora uma descrição dos obstáculos em cada experimento.

**Teste 1.** Um círculo de raio 0,05 e centro (0,04, -0,04) com índice de refração 1,003 constante no interior, ou seja,  $m = 0.003$  dentro do círculo. Figuras 1 e 2.

**Teste 2.** Um triângulo de vértices  $(-0,1, 0,1)$ ,  $(-0,1, -0,1)$  e  $(0,1, -0,1)$ , e índice de refração constante igual a 1,003 no interior. Figuras 3 e 4.

**Teste 3.** Uma cúpula suave definida por

$$m(x, y) = 0,003e^{-0,03((x-0,05)^2+y^2)},$$

para  $(x, y) \in [-0,1, 0,1] \times [-0,1, 0,1]$ , e  $m = 0$  caso contrário. Lembrando que a região de busca aqui foi também  $[-0,2, 0,2]^2$ . Figuras 5 e 6.

**Teste 4.** Dois círculos separados, ambos de raio 0,03, um com centro em  $(-0,05, 0,03)$  e outro em  $(0,05, -0,05)$ . Ambos com índice de refração constante igual a 1,003 no interior. Figuras 7 a 12.

Além destes experimentos, foi realizado um outro para ilustrar o mal-condicionamento do problema. Para tanto, usaram-se os dados do Teste 1, isto é, do círculo deslocado da origem, porém não exatos, mas sim com uma perturbação. Foram testadas diferentes taxas de erro, e observou-se que mesmo com um erro pequeno, a imagem se alterou bastante. Para gerar o ruído  $\mathbf{r}$ , tomou-se um vetor com números aleatórios distribuídos normalmente, e de norma igual à norma do vetor dos dados. Os dados originais  $\mathbf{u}$  foram substituídos pela soma  $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + \delta \mathbf{r}$ , com  $\delta$  a taxa de ruído. Depois, foi aplicada a inversão do problema sobre o vetor perturbado  $\tilde{\mathbf{u}}$ , e gerou-se a imagem. As taxas escolhidas foram as seguintes

- (a)  $\delta = 0,3 \cdot 10^{-8}$ ;
- (b)  $\delta = 0,15 \cdot 10^{-7}$ ;
- (c)  $\delta = 0,3 \cdot 10^{-7}$ ;
- (d)  $\delta = 0,3 \cdot 10^{-6}$ .

Para cada taxa, foi produzida uma imagem, que foi rotulada de acordo na Figura 13. Com a menor taxa, a imagem foi bem parecida com a original, porém com a maior, já não foi mais possível identificar o círculo. E a maior taxa corresponde a um erro de no máximo 0,00003% por medição.

Abaixo se encontram as imagens obtidas com o software MATLAB Release 2013a, The MathWorks, Inc., Natick, Massachusetts, United States.

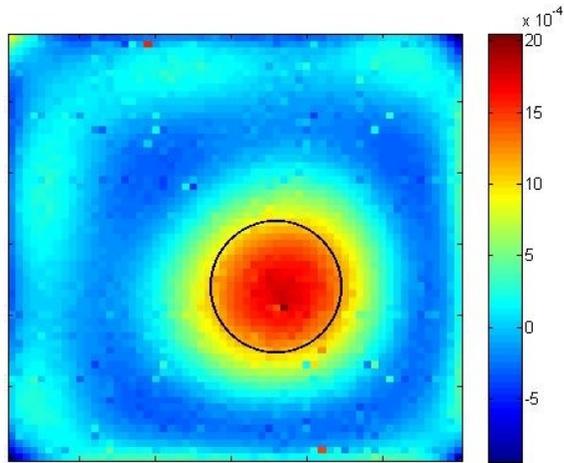


Figura 1 – Teste 1(a): 32 direções de incidência e 32 de medição,  $k = 1$  e  $m = 0.003$ .

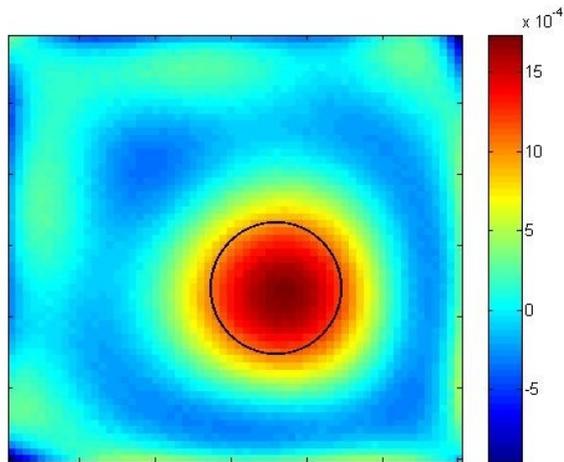


Figura 2 – Teste 1(b): 4 direções de incidência e 128 de medição,  $k = 1$  e  $m = 0.003$ .

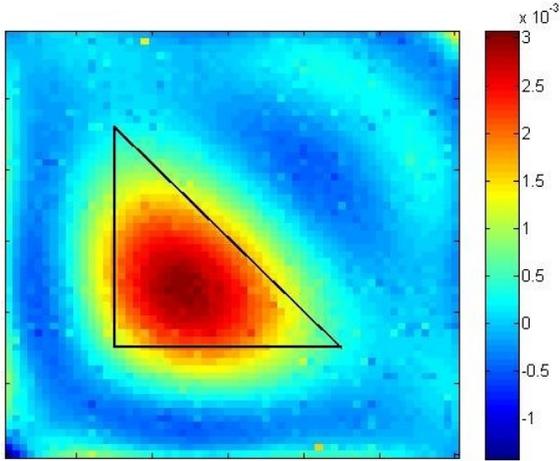


Figura 3 – Teste 2(a): 32 direções de incidência e 32 de medição,  $k = 1$  e  $m = 0.003$ .

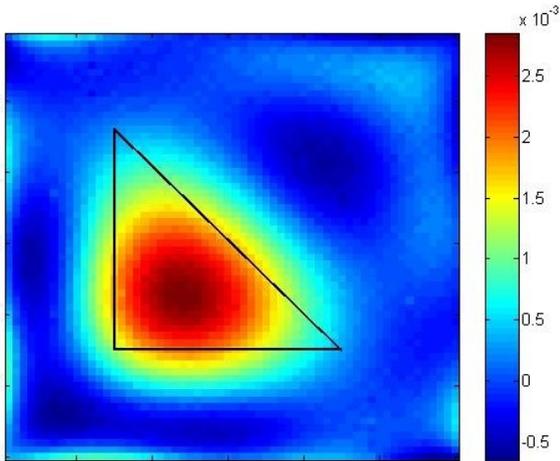


Figura 4 – Teste 2(b): 4 direções de incidência e 128 de medição,  $k = 1$  e  $m = 0.003$ .

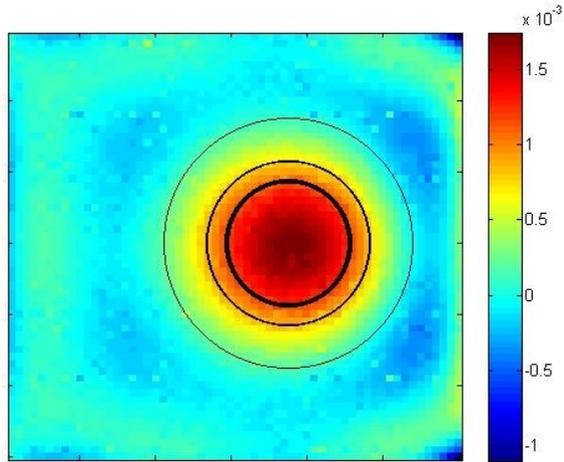


Figura 5 – Teste 3(a): 32 direções de incidência e 32 de medição,  $k = 1$  e  $\max m = 0.003$ .

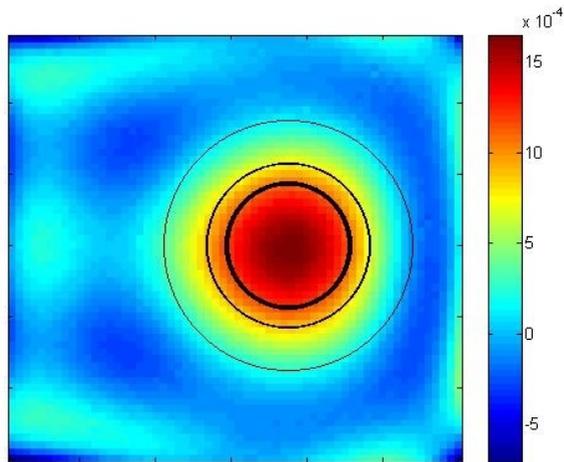


Figura 6 – Teste 3(b): 4 direções de incidência e 128 de medição,  $k = 1$  e  $\max m = 0.003$ .

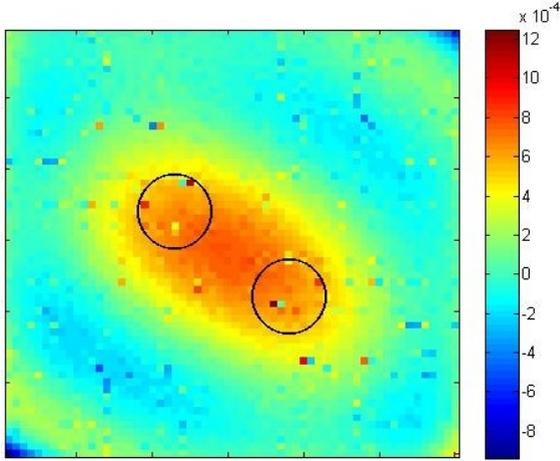


Figura 7 – Teste 4(a): 32 direções de incidência e 32 de medição,  $k = 1$ ,  $m = 0.003$ .

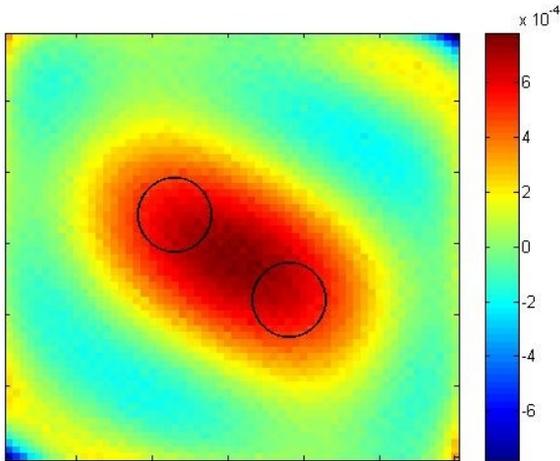


Figura 8 – Teste 4(b): 4 direções de incidência e 128 de medição,  $k = 1$ ,  $m = 0.003$ .

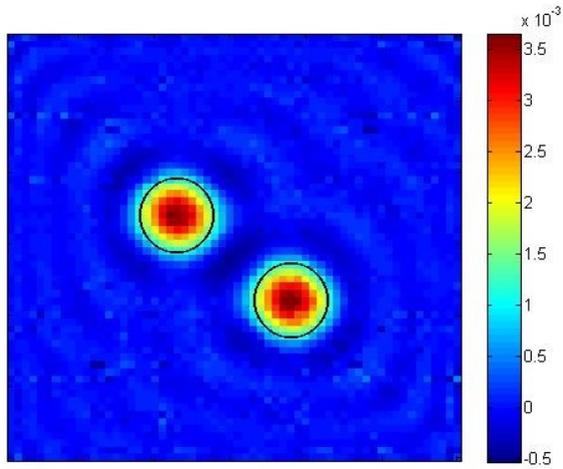


Figura 9 – Teste 4(c): 32 direções de incidência e 32 direções de medição,  $k = 20$ ,  $m = 0.003$ .

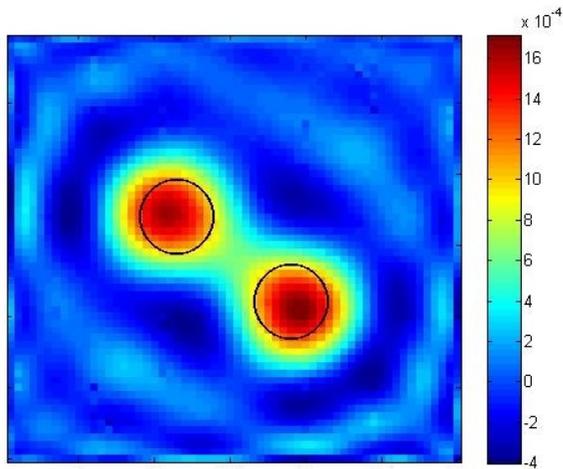


Figura 10 – Teste 4(d): 4 direções de incidência e 128 direções de medição,  $k = 20$ ,  $m = 0.003$ .

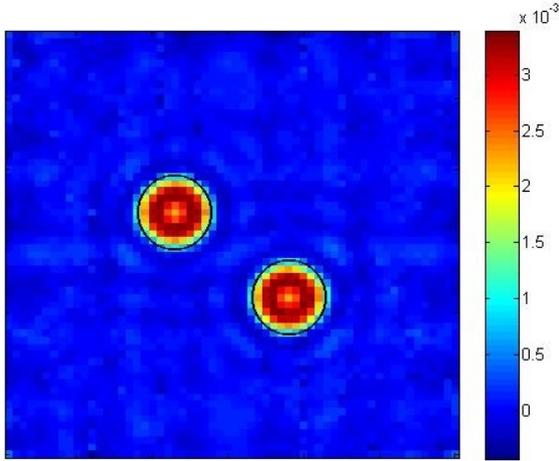


Figura 11 – Teste 4(e): 32 direções de incidência e 32 direções de medição,  $k = 100$ ,  $m = 0.003$ .

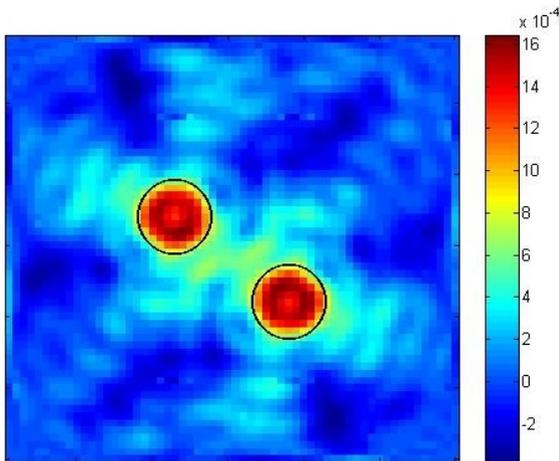


Figura 12 – Teste 4(f): 4 direções de incidência e 128 direções de medição,  $k = 100$ ,  $m = 0.003$ .

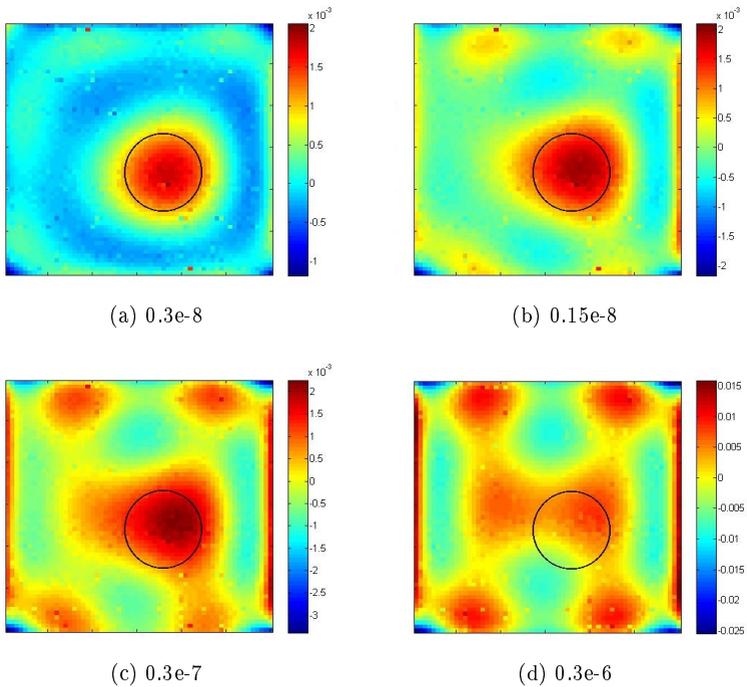


Figura 13 – Teste 5: Diferentes taxas de ruídos sobre os dados do padrão de espalhamento do círculo descrito no Teste 1.

A aproximação de Born foi suficiente para localizar objetos na região de interesse, mas não com muitos detalhes. A ordem do índice de refração nem sempre foi recuperada, e objetos com fronteiras não suaves foram significativamente arredondados. Para conseguir identificar dois objetos separados, é fundamental usar um número de onda adequado. Nota-se que quanto maior  $k$ , mais detalhes são capturados.

Sobre a escolha de direções de incidência e medição, uma malha mais densa de recepção de sinal fez com que a imagem ficasse mais suave e com menos granulação. Porém, no experimento com dois objetos, enviar mais ondas incidentes produziu uma imagem visualmente mais precisa.

## 4.2 Considerações finais

Neste trabalho, o mal-condicionamento dos problemas inversos ficou ressaltado. Em particular, isto foi observado no problema de espalhamento. A partir da teoria desenvolvida no trabalho, foi possível apresentar um método para resolver o problema inverso para o caso de obstáculos penetráveis. Este método, a aproximação de Born, é uma linearização do problema. Mesmo assim, para os obstáculos testados, o método funciona relativamente bem, como uma primeira aproximação. Porém, quando são considerados ruídos nos valores de entrada, o método deixa de funcionar, mesmo para pequenas perturbações. Isso revela que a solução não depende continuamente dos dados. E em um problema físico, no qual os dados provêm geralmente de uma medição, há inevitavelmente um erro associado. Nesta altura, são requeridos métodos de regularização, que possibilitam encontrar uma solução que é ao mesmo tempo estável e fiel aos dados.

# A Notação

A bola aberta de centro  $x$  e raio  $\epsilon$  é o conjunto

$$B_\epsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| < \epsilon\}.$$

A bola fechada de centro  $x$  e raio  $\epsilon$  é o conjunto

$$\overline{B}_\epsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| \leq \epsilon\}.$$

O fecho de um conjunto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é

$$\overline{\Omega} = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall \epsilon > 0, B_\epsilon(x) \cap \Omega \neq \emptyset\}.$$

O interior de um conjunto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é o conjunto

$$\overset{\circ}{\Omega} = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists \epsilon > 0, \text{ tal que } B_\epsilon(x) \subset \Omega\}.$$

A fronteira de um conjunto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é  $\partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \overset{\circ}{\Omega}$ .

Domínio é um conjunto aberto e conexo de  $\mathbb{R}^n$ , geralmente denotado por  $\Omega$ .

O suporte de uma função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}$$

o fecho do conjunto dos pontos em que a função não se anula.

O conjunto  $C^n$  representa o conjunto de todas as funções com derivadas contínuas até ordem  $n$ .

O delta de Dirac é uma distribuição tal que, para  $f \in C^0(\mathbb{R}^n)$

$$\delta_x(f) = f(x).$$

O produto escalar entre  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  será representado por

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

A norma euclidiana de um vetor  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  será escrita como

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}.$$

Define-se o gradiente de uma função vetorial  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C^1$ , como o seguinte vetor coluna:

$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^T.$$

O divergente de um campo vetorial  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $F = (F_1, \dots, F_n)$  é definido como

$$\operatorname{div} F = \nabla \cdot F = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} F_i.$$

Perceba que  $\nabla \cdot F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{x} \mapsto \nabla \cdot F(\mathbf{x})$  é uma função vetorial que assume valores reais.

O operador de Laplace, ou laplaciano, de uma função vetorial  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C^2$ , é definido como

$$\Delta f = \nabla \cdot \nabla f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

## B Teorema de Gauss e Identidades de Green

Alguns teoremas que foram usados no trabalho estão citados e/ou demonstrados aqui.

**Teorema B.1** (Teorema da divergência de Gauss). *Sejam  $D$  um domínio limitado em  $\mathbb{R}^n$  cuja fronteira  $\partial D$  é  $C^1$ , e  $F$  um campo vetorial  $C^1$  em  $\bar{D}$ . Então*

$$\int_D \nabla \cdot F(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\partial D} F \cdot \nu ds.$$

A partir deste teorema, podem-se mostrar algumas importantes identidades, as quais vamos demonstrar.

Se  $u = u(\mathbf{x})$  e  $v = v(\mathbf{x})$  são funções  $C^1$  que assumem valores reais, então vale a seguinte igualdade:

$$\nabla \cdot (u\nabla w) = u\Delta w + \nabla u \cdot \nabla w. \quad (\text{B.1})$$

Para mostrar isto, basta aplicar as definições e usar a regra do produto.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (u\nabla w) &= \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( u \frac{\partial w}{\partial x_i} \right) \\ &= \sum_i \left( u \frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2} + \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i} \right) \\ &= u \left( \sum_i \frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2} \right) + \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i} \\ &= u\Delta w + \nabla u \cdot \nabla w \end{aligned}$$

Integrando ambos os lados de (B.1) em um domínio limitado  $\Omega$  de fronteira suave, obtém-se

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (u\nabla w) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (u\Delta w + \nabla u \cdot \nabla w) d\mathbf{x}.$$

Se  $F = u\nabla w$  é um campo vetorial  $C^2$  em  $\bar{\Omega}$ , pode-se aplicar o teorema da divergência.

$$\int_S (u\nabla w) \cdot \nu ds = \int_{\Omega} (u\Delta w + \nabla u \cdot \nabla w) d\mathbf{x}.$$

Por fim, observando que  $\nabla w \cdot \nu$  é a derivada normal  $\frac{\partial w}{\partial \nu}$ , tem-se

**Teorema B.2** (Primeira identidade de Green). *Seja  $\Omega$  um domínio limitado com fronteira  $S$  suave. Se  $u \in C^1(\bar{\Omega})$ ,  $w \in C^2(\bar{\Omega})$ , então*

$$\int_S u \frac{\partial w}{\partial \nu} ds = \int_{\Omega} (u \Delta w + \nabla u \cdot \nabla w) d\mathbf{x}. \quad (\text{B.2})$$

Para obter a segunda identidade de Green, trocamos as funções  $u$  e  $w$  na equação (B.1) e subtraímos uma da outra para obter

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (u \nabla w) - \nabla \cdot (w \nabla u) &= u \Delta w + \nabla u \cdot \nabla w - w \Delta u - \nabla w \cdot \nabla u \\ &= u \Delta w - w \Delta u \end{aligned}$$

Como o divergente é um operador linear, segue que

$$\nabla \cdot (u \nabla w - w \nabla u) = u \Delta w - w \Delta u.$$

Integrando em um domínio limitado  $\Omega$  de fronteira suave, tem-se

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (u \nabla w - w \nabla u) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (u \Delta w d\mathbf{x} - w \Delta u) d\mathbf{x}.$$

Com a suposição de que  $u \nabla w - w \nabla u$  é  $C^1$  em  $\bar{\Omega}$ , pode-se aplicar o teorema da divergência

$$\int_S (u \nabla w - w \nabla u) \cdot \nu ds = \int_{\Omega} (u \Delta w d\mathbf{x} - w \Delta u) d\mathbf{x}.$$

E portanto, usando a derivada normal, obtém-se

**Teorema B.3** (Segunda identidade de Green). *Seja  $\Omega$  um domínio limitado com fronteira  $S$  suave. Se  $u, w$  são funções  $C^2$  em  $\bar{\Omega}$ , então*

$$\int_S \left( u \frac{\partial w}{\partial \nu} - w \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) ds = \int_{\Omega} (u \Delta w - w \Delta u) d\mathbf{x}. \quad (\text{B.3})$$

## C Coordenadas Polares e Esféricas

Em  $\mathbb{R}^2$  é muitas vezes útil usar o sistema de coordenadas polares. Para cada  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  associa-se unicamente o par  $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times [-\pi/2, 3\pi/2)$  definidos por

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\theta = \begin{cases} -\pi/2, & \text{se } x = 0, y < 0 \\ \arctan |_{(-\pi/2, \pi/2)} \left(\frac{y}{x}\right), & \text{se } x > 0 \\ \pi/2, & \text{se } x = 0, y > 0 \\ \arctan |_{(\pi/2, 3\pi/2)} \left(\frac{y}{x}\right), & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

É claro que esta não é a única forma de definir esta mudança de variável. De fato, pode-se tomar  $\theta$  em qualquer intervalo de comprimento  $2\pi$ .

Inversamente, a partir de coordenadas polares pode-se definir coordenadas cartesianas através da seguinte mudança:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

Com isso, pode-se calcular o laplaciano em coordenadas polares. Lembrando que

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

e calculando as derivadas parciais usando a regra da cadeia obtêm-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} &= \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \\ &\quad + \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r} \frac{\partial r}{\partial x} \right) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \left( \frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + \\ &\quad + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \end{aligned} \tag{C.1}$$

Fazendo as mesmas contas, obtêm-se as derivadas de  $u$  em relação a  $y$ . Basta trocar  $x$  por  $y$  na expressão. Agora, calculam-se as derivadas de

$r$  e  $\theta$  em relação a  $x$  e  $y$ .

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r} = \cos \theta \\ \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} &= \frac{y^2}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3} = \frac{y^2}{r^3} \\ \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{r} = \sin \theta \\ \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} &= \frac{x^2}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3} = \frac{x^2}{r^3}\end{aligned}$$

Lembrando que  $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ , calculam-se as derivadas de  $\theta$ .

$$\begin{aligned}\frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{-y}{r^2} = \frac{-\sin \theta}{r} \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} &= \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2xy}{r^4} \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{x}{r^2} = \frac{\cos \theta}{r} \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} &= \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-2xy}{r^4}\end{aligned}$$

Substituindo isso em (C.1), chega-se a

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} (\cos \theta)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \left( \frac{-y}{r^2} \right) \frac{x}{r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \left( \frac{-\sin \theta}{r} \right)^2 + \\ &\quad + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{y^2}{r^3} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \left( \frac{2xy}{r^4} \right).\end{aligned}$$

Analogamente para  $y$ .

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} (\sin \theta)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \frac{x}{r^2} \frac{y}{r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \left( \frac{\cos \theta}{r} \right)^2 + \\ &\quad + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{x^2}{r^3} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \left( \frac{-2xy}{r^4} \right).\end{aligned}$$

Por fim, somando ambas expressões, obtém-se o **Laplaciano em coordenadas polares**

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}. \quad (\text{C.2})$$

Semelhante a  $\mathbb{R}^2$ , o espaço tridimensional  $\mathbb{R}^3$  possui o sistema de coordenadas esféricas, que também será bastante utilizado neste trabalho. A seguinte notação será utilizada:

$$\begin{aligned}x &= \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta \\y &= \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \\z &= \rho \cos \phi\end{aligned}$$

Desta forma,  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  é a distância euclidiana do vetor  $(x, y, z)$  à origem,  $\phi \in [0, \pi]$  é o ângulo que este vetor faz com o eixo  $z$  positivo e  $\theta$  é o ângulo que a projeção  $(x, y, 0)$  no plano  $x, y$  faz com o eixo  $x$  positivo, como nas coordenadas polares.

Também é possível calcular o laplaciano em coordenadas esféricas, pelo mesmo método usado nas polares. Mas para economizar contas, será abordada uma forma alternativa aqui.

Para tanto, será utilizado o resultado obtido do laplaciano em polares:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}.$$

Aplicado mais uma vez a  $z = \rho \cos \phi$  e  $r = \rho \operatorname{sen} \phi = \sqrt{x^2 + y^2}$ , tem-se

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho}.$$

Somando  $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$  à primeira expressão, chega-se a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}.$$

E pela segunda igualdade,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}.$$

Como  $r = \rho \operatorname{sen} \phi$ , tem-se

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \\ &\quad + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}.\end{aligned}$$

Falta apenas calcular  $\frac{\partial u}{\partial r}$ . Aqui não é mais possível fugir das contas. Começando com a regra da cadeia,

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial r}.$$

Como aplicou-se coordenadas polares sobre  $z$  fazendo o papel de  $x$  e  $r$ , de  $y$ , tem-se

$$\begin{aligned}\rho &= \sqrt{r^2 + z^2} \\ \phi &= \arctan\left(\frac{r}{z}\right)\end{aligned}$$

e  $r$  é independente de  $\theta$ . Com isso, e usando as contas anteriores,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{r}{\rho} + \frac{\partial u}{\partial \phi} \frac{\cos \phi}{\rho} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{r} \frac{\cos \phi}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \phi}\end{aligned}$$

Substituindo  $r = \rho \operatorname{sen} \phi$ , tem-se

$$\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\cos \phi}{\rho^2 \operatorname{sen} \phi} \frac{\partial u}{\partial \phi} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\cot \phi}{\rho^2} \frac{\partial u}{\partial \phi}.$$

Por fim, a expressão do **Laplaciano em coordenadas esféricas** fica

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \\ &\quad + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\cot \phi}{\rho^2} \frac{\partial u}{\partial \phi}\end{aligned}$$

ou

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\cot \phi}{\rho^2} \frac{\partial u}{\partial \phi}. \quad (\text{C.3})$$

# Referências

- BLEISTEIN, N.; COHEN, J. K.; STOCKWELL, J. J. W. *Mathematics of multidimensional seismic imaging, migration, and inversion*. New York: Springer, 2001.
- BORDEN, B. *Radar imaging of airborne targets*. New York: Taylor and Francis, 1999.
- CHENEY, M.; BORDEN, B. *Fundamentals of radar imaging*. Philadelphia: SIAM, 2009.
- COLTON, D.; KRESS, R. *Integral equation methods in scattering theory*. New York: John Wiley and Sons, 1983.
- COLTON, D.; KRESS, R. *Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory*. New York: Springer, 1998.
- ENGL, H. W.; HANKE, M.; NEUBAUER, A. *Regularization of inverse problems*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996.
- GROETSCH, C. W. *Inverse problems in the mathematical sciences*. Braunschweig Wiesbaden: Vieweg, 1993.
- JONES, D. S. *Acoustic and electromagnetic waves*. New York: Oxford University Press, 1986.
- KELLER, J. B. Inverse problems. *The American Mathematical Monthly*, v. 83, n. 2, p. 107–118, Feb. 1976.
- KINSLER, L. E. et al. *Fundamentals of acoustics*. New York: John Wiley and Sons, 2000.
- KIRSCH, A. *An introduction to the mathematical theory of inverse problems*. New York: Springer, 2011.
- MUNIZ, W. B.; VELHO, H. F. de C.; RAMOS, F. M. A comparison of some inverse methods for estimating the initial condition of the heat equation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. 103, p. 145–163, 1999.
- NATTERER, F.; WÜBBELING, F. *Mathematical methods in image reconstruction*. Philadelphia: SIAM, 2001.

RELLICH, F. Über das asymptotische Verhalten von Lösungen von  $\Delta u + \lambda u = 0$  in unendlichen Gebieten. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, v. 53, p. 57–65, 1943.

WATSON, G. *Treatise on the Theory of Bessel Functions*. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1944.