

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA E  
ELETRÔNICA**

Bráulio Rangel de Castro Soares

**APLICAÇÃO DE TÉCNICA DE LINEARIZAÇÃO POR  
PARTES A PROBLEMAS DE PLANEJAMENTO DA  
OPERAÇÃO DE SISTEMAS HIDROTÉRMICOS**

Florianópolis(SC)

2017



Bráulio Rangel de Castro Soares

**APLICAÇÃO DE TÉCNICA DE LINEARIZAÇÃO POR  
PARTES A PROBLEMAS DE PLANEJAMENTO DA  
OPERAÇÃO DE SISTEMAS HIDROTÉRMICOS**

Dissertação submetida ao Programa  
de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica  
para a obtenção do Grau de Mestre.  
Orientadora: Prof<sup>ª</sup>. Katia Campos de  
Almeida, Ph.D. UFSC

Florianópolis(SC)

2017

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Soares, Bráulio Rangel de Castro

Aplicação de técnica de linearização por partes a problemas de planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos / Bráulio Rangel de Castro Soares ; orientadora, Kátia Campos de Almeida, 2017.  
166 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico, Programa de Pós Graduação em Engenharia Elétrica, Florianópolis, 2017.

Inclui referências.

1. Engenharia Elétrica. 2. Otimização não convexa. 3. Linearização por partes. 4. Programação inteira mista. 5. Otimização binível. I. Almeida, Kátia Campos de . II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica. III. Título.

Bráulio Rangel de Castro Soares

**APLICAÇÃO DE TÉCNICA DE LINEARIZAÇÃO POR  
PARTES A PROBLEMAS DE PLANEJAMENTO DA  
OPERAÇÃO DE SISTEMAS HIDROTÉRMICOS**

Esta Dissertação foi julgada aprovada para a obtenção do Título de “Mestre em Engenharia Elétrica”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica.

Florianópolis(SC), 28 de Março 2017.

---

Prof. Marcelo Lobo Heldwein, Ph.D. UFSC  
Coordenador do Curso

---

Prof<sup>a</sup>. Katia Campos de Almeida, Ph.D. UFSC  
Orientadora

**Banca Examinadora:**

---

Prof. Eduardo Camponogara, Ph.D. UFSC

---

Prof. Antonio José Alves Simões Costa, Ph.D. UFSC

---

Prof. Hans Helmut Zürn, Ph.D. UFSC



Dedico este trabalho aos meus pais, irmãos por estarem ao meu lado sempre; à minha família, em especial ao meu avô, que onde estiver, sei que está orgulhoso.





## AGRADECIMENTOS

A DEUS, que todos os dias da minha vida me deu forças pra nunca desistir.

Ao departamento de Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina, pelo apoio à minha participação no mestrado.

À minha orientadora, Professora Katia Campos, por seu apoio e amizade, além de sua dedicação, competência e especial atenção nas revisões e pontuais sugestões, fundamentais na conclusão deste trabalho. A todos os professores do mestrado que muito contribuíram na minha formação como seus ensinamentos.

A meus pais, Luiz e Cristiane, meu infinito agradecimento que com as palavras certas, na hora certa, sempre me fizeram persistir e nunca desistir. Obrigada pelo amor incondicional!

A meus irmãos, Rafael e Vinícius, minha madrastra Núbia, meu agradecimento especial, pois, a seu modo, sempre se orgulharam de mim e confiaram em meu trabalho. A meus tios, tias, primos e primas que sempre me incentivaram e apoiaram nessa jornada. Obrigada pela força!

Aos colegas de laboratório pelo companheirismo desde o início desta jornada que contribuíram com sugestões, críticas ou dicas.



*Aprenda com o ontem, viva para o hoje,  
esperança para o amanhã. O importante  
é não parar de questionar.*

Albert Einstein



## RESUMO

O planejamento da operação do sistema elétrico brasileiro é feito de forma centralizada. Devido à matriz energética predominantemente hídrica, tal planejamento é feito considerando horizontes de estudo de até 10 anos e a natureza estocástica das vazões afluentes dos rios. Busca-se, desta forma, otimizar os custos de geração. No entanto, num ambiente competitivo é necessário encarar o problema do ponto de vista dos diversos agentes que fazem parte do sistema, porque os interesses desses agentes não são os mesmos. Um dos agentes é o produtor de energia elétrica, que nem sempre tem seus interesses atendidos. Uma questão importante para um produtor é como definir sua estratégia de participação no mercado de energia elétrica, de forma a atender as suas próprias metas econômicas. Este é o que se conhece como “o problema do produtor”, que usa informações advindas do despacho das usinas do sistema. Para analisar as vantagens de se adotar as soluções obtidas ao se resolver esses problemas matemáticos, é necessário modelá-los de forma adequada. Além disso, é preciso garantir que as soluções obtidas para esses problemas através de métodos de otimização são as melhores possíveis. Os problemas de despacho centralizado e do produtor possuem funções não convexas em suas formulações, assim como a maioria das modelagens de fenômenos encontrados na natureza. Infelizmente os métodos de solução de problemas de otimização não convexas não garantem uma solução ótima global. Assim, se torna necessária a reformulação desses problemas matemáticos de maneira que suas soluções ótimas globais possam ser obtidas pelos métodos de otimização existentes. Este trabalho analisa o uso de uma técnica de linearização por partes, a Combinação Convexa Desagregada, para obter as soluções ótimas globais dos problemas de despacho centralizado e do produtor. **Palavras-chave:** Otimização Não Convexa, Linearização Por Partes, Programação Inteira Mista, Otimização Binível.



## ABSTRACT

The planning of the operation of the Brazilian electrical system is carried out in a centralized manner. As this is a predominantly hydro system, the dispatch is obtained using a planning horizon of 10 years and taking into consideration the stochastic nature of water inflows. However, it is necessary to face the problem of producing electrical energy in an efficient manner from the points of view of all the agents that participate in this process, because every agent has its own objectives. One of these agents is the power producer. An important issue for such agent is to determine the best strategy to participate in the electric power market in order to meet its own economic goals. This is known as “the problem of the producer”, which, to be solved, uses information from the power dispatch. To evaluate the advantages of adopting, in system planning, the solutions obtained by solving such mathematical problems, special care must be taken when formulating these problems. It is also important to ensure that the solutions obtained for these problems are the best possible ones. The dispatch problem and the producer problem are represented using nonconvex functions, as it occurs with other phenomena found in nature. Unfortunately, most of the optimization methods are not able to obtain the global optima of nonconvex problems. Thus, it is necessary to reformulate such problems in order to obtain their best solutions. This work evaluates the use of a piecewise linearization technique, the Disaggregated Convex Combination, in the solution of the power dispatch problem and the producer problem.

**Keywords:** Non-convex optimization, Piecewise Linearization, Mixed Integer Programming, Bilevel Optimization.





## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1	Problema de decisão de operação.....	32
Figura 2.2	FCI e FCF.....	33
Figura 2.3	Etapas do Planejamento da Operação Energética e Despacho do Sistema.....	34
Figura 2.4	Partes de uma Hidrelétrica.....	38
Figura 2.5	Balanço Hídrico.....	39
Figura 2.6	Princípio de funcionamento das termelétricas.....	42
Figura 2.7	Curva de entrada e saída de uma termelétrica.....	43
Figura 3.1	Classificação dos jogos.....	57
Figura 3.2	Sistema fictício de duas barras.....	71
Figura 4.1	Mínimo local e global em função não convexa.....	75
Figura 4.2	Função convexa linear por partes.....	76
Figura 4.3	Aproximação linear por partes.....	77
Figura 4.4	Aproximação linear por partes de uma função não con- vexa [1].....	78
Figura 4.5	Linearização por partes de função bidimensional não convexa.....	79
Figura 4.6	Função linear por partes não convexa com domínio unidimensional.....	81
Figura 4.7	Função não convexa com domínio bidimensional.....	85
Figura 4.8	Resultado da triangulação.....	86
Figura 4.9	Triangulação J1 em cada plano $\mathbb{R}^2$ do espaço $\mathbb{R}^3$ .....	87
Figura 4.10	Decomposição do cubo em 5 tetraedros.....	88
Figura 5.1	Curvas de nível.....	101
Figura 5.2	Sistema CESP - 15 barras.....	102
Figura 5.3	Perfil de carga sistema CESP.....	103
Figura 5.4	Afluências do sistema CESP para dois cenários estu- dados.....	103
Figura 5.5	Despacho centralizado e comp. térmica do sistema CESP para os cenário 1 (2013) e cenário 2 (2014), respectiva- mente.....	104
Figura 5.6	Volumes dos reservatórios do sistema CESP para dois cenários estudados.....	105

Figura 5.7	Distribuição do corte de carga no despacho centralizado no sistema CESP.....	106
Figura 5.8	Sistema SUL - 32 barras .....	110
Figura 5.9	Perfil de carga sistema SUL.....	111
Figura 5.10	Afluências do sistema SUL para dois cenários estudados, 2013 e 2014.....	112
Figura 5.11	Despacho centralizado e comp. térmica do sistema SUL para os dois cenários estudados, 2013 e 2014.....	112
Figura 5.12	Volume dos reservatórios do sistema SUL para dois cenários estudados.....	113
Figura 5.13	Sistema fictício de 3 barras.....	117
Figura 5.14	Afluências do sistema fictício no ano 2014.....	117
Figura 5.15	Despacho do problema do produtor e comp. térmica do sistema fictício.....	118
Figura 5.16	Volume dos reservatórios do sistema CESP para cenário de 2014.....	118
Figura 5.17	Despacho do problema do produtor e comp. térmica - sistema CESP.....	121
Figura 5.18	Volume dos reservatórios do sistema CESP para cenário de 2014.....	122
Figura C.1	Padrões de subdivisão.....	152
Figura C.2	Ordenação dos vértices ao longo dos 3 eixos .....	153

## LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1	Dilema do Prisioneiro .....	60
Tabela 3.2	Resultado Cournot .....	62
Tabela 3.3	Resultado Bertrand .....	63
Tabela 3.4	Resultado Stackelberg .....	64
Tabela 5.1	Resultados no modelo não linear e linear .....	101
Tabela 5.2	Diferença dos valores de potência gerada e comp. térmica em MW .....	105
Tabela 5.3	Diferença dos volumes de água nos reservatórios em $\text{hm}^3$ .....	106
Tabela 5.4	Resultados no modelo não linear e linear no despacho centralizado CESP .....	107
Tabela 5.5	Volume final esperado dos modelos não linear e linear no despacho centralizado CESP .....	108
Tabela 5.6	Resultados no modelo não linear e linear inteiro misto no despacho centralizado CESP .....	108
Tabela 5.7	Resultados da programação linear inteiro misto no despacho centralizado CESP .....	109
Tabela 5.8	Diferença dos valores de potência gerada em MW ...	111
Tabela 5.9	Diferença dos volumes armazenados nos reservatórios em $\text{hm}^3$ .....	113
Tabela 5.10	Resultados no modelo não linear e linear no despacho centralizado Sul .....	114
Tabela 5.11	Volume final esperado dos modelos não linear e linear no despacho centralizado SUL .....	115
Tabela 5.12	Resultados no modelo não linear e linear no despacho centralizado SUL .....	115
Tabela 5.13	Resultados da programação linear inteiro misto no despacho centralizado SUL .....	115
Tabela 5.14	Diferença dos valores de potência gerada e comp. térmica em MW .....	117
Tabela 5.15	Volumes finais armazenados nos reservatórios em $\text{hm}^3$ - Sistema Fictício .....	119
Tabela 5.16	Diferença dos volumes armazenados nos reservatórios em $\text{hm}^3$ .....	119

Tabela 5.17	Resultados Obtidos para o Problema do Produtor - Sistema Fictício.....	119
Tabela 5.18	Resultados no modelo não linear e linear no despacho do problema do produtor sistema fictício.....	120
Tabela 5.19	Diferença dos valores de potência gerada e comp. térmica em MW.....	121
Tabela 5.20	Volumes finais armazenados nos reservatórios em hm <sup>3</sup> - Sistema CESP.....	122
Tabela 5.21	Diferença dos volumes armazenados nos reservatórios em hm <sup>3</sup> .....	123
Tabela 5.22	Resultados no modelo não linear e linear no problema do produtor CESP.....	123
Tabela 5.23	Resultados no modelo não linear e linear no despacho do problema do produtor CESP.....	124
Tabela D.1	Usinas hidrelétricas do sistema CESP.....	158
Tabela D.2	Coefficientes da função cota montante das usinas CESP.....	158
Tabela D.3	Coefficientes da função cota jusante das usinas CESP.....	159
Tabela D.4	Produtibilidade das usinas CESP.....	159
Tabela D.5	Dados das linhas de transmissão do sistema CESP ..	160
Tabela D.6	Distribuição das cargas entre as barras do sistema CESP.....	160
Tabela D.7	Usinas hidrelétricas do sistema SUL.....	161
Tabela D.8	Coefficientes da função cota montante das usinas SUL.....	161
Tabela D.9	Coefficientes da função cota jusante das usinas SUL.....	162
Tabela D.10	Produtibilidade das usinas SUL.....	162
Tabela D.11	Dados das linhas de transmissão do sistema SUL.....	163
Tabela D.12	Distribuição das cargas entre as barras do sistema SUL.....	164

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

FCI	Função de Custo Imediato .....	32
FCF	Função de Custo Futuro .....	32
ONS	Operador Nacional do Sistema .....	37
SIN	Sistema Interligado Nacional .....	37
CESP	Companhia Energética de São Paulo .....	97
GAMS	General Algebraic Modeling System .....	97
PNL	Programação Não Linear .....	97
MINOS	Modular In-core Nonlinear Optimization System .....	98
PL	Programação Linear .....	98
PLIM	Programação Linear Inteira Mista .....	98



## LISTA DE SÍMBOLOS

$v_{i,t}(\omega)$	Volume de água no reservatório da usina $i$ no período $t$ , no cenário $\omega$ . . . . .	39
$q_{i,t}(\omega)$	Vazão turbinada da usina $i$ no período $t$ , no cenário $\omega$ . . . . .	39
$u_{i,t}(\omega)$	Vazão vertida da usina $i$ no período $t$ , no cenário $\omega$ . . . . .	39
$h$	Duração do intervalo de tempo usado na contabilização do montante de água que chega e sai do reservatório $i$ , no cenário $\omega$ . . . . .	39
$r_{i,t}(\omega)$	Afluência natural que chega ao reservatório $i$ , no cenário $\omega$ . . . . .	39
$\Omega_i$	Conjunto de reservatórios $m$ a montante de um reservatório $i$ . . . . .	39
$alt_i$	Conjunto de reservatórios $m$ à montante de um reservatório $i$ . . . . .	40
$hm_i$	Função cota a montante dependente do volume $v$ do reservatório $i$ no período $t$ . . . . .	40
$hj_i$	Função cota a jusante dependente da vazão turbinada $q$ e vertida $u$ no reservatório $i$ no período $t$ . . . . .	40
$E_{i,t}(\omega)$	Energia elétrica produzida pela usina $i$ no período $t$ e cenário $\omega$ . . . . .	40
$Ep_{i,t}(\omega)$	Energia potencial da massa de água transformada em energia elétrica na usina $i$ no período $t$ e cenário $\omega$ . . . . .	40
$\eta_i$	Rendimento médio dos conjuntos usina-gerador da usina $i$	40
$alt_{i,t}(\omega)$	Queda líquida da usina $i$ , definida como sendo a altura da queda bruta $alt_i$ . . . . .	41
$Ph_{i,t}(\omega)$	Potência ativa gerada pela usina $i$ . . . . .	41
$\rho_i$	Produtibilidade usina $i$ , sendo $\rho_i$ é expressa em $MW/((m^3/s)*m)$ . . . . .	41
$hm_i$	Funções não-lineares de nível a montante . . . . .	41
$hj_i$	Funções não-lineares de nível a jusante . . . . .	41
$Ph_i^{min}$	Potência mínima gerada pela usina $i$ . . . . .	42
$Ph_i^{max}$	Potência máxima gerada pela usina $i$ . . . . .	42
$v_i^{min}$	Volume mínimo do reservatório da usina $i$ . . . . .	42
$v_i^{max}$	Volume máximo do reservatório da usina $i$ . . . . .	42
$q_i^{min}$	Vazão turbinada mínima pela usina $i$ . . . . .	42

$q_i^{max}$	Vazão turbinada máxima pela usina $i$ . . . . .	42
$u_i^{min}$	Vazão vertida mínima pela usina $i$ . . . . .	42
$u_i^{max}$	Vazão vertida máxima pela usina $i$ . . . . .	42
$y_{k,t}(\omega)$	Corte de carga na barra $k$ , no período $t$ , no cenário $w$ . . .	43
$\theta_{mn}$	Abertura entre os ângulos das barras terminais $m$ e $n$ . . .	45
$\theta_{mn}$	Abertura entre os ângulos das barras terminais $m$ e $n$ . . .	45
$N_b$	Número de barras do sistema . . . . .	45
$\Omega_n$	Conjunto das barras adjacentes à barra $n$ . . . . .	45
$\theta_t(\omega)$	Vetor de ângulos das tensões nodais de todas as barras . .	46
$\mathbf{P}_t(\omega)$	Vetor das injeções de potência ativa em todas as barras .	46
$\hat{B}_{n,s}$	Elemento da matriz $\hat{\mathbf{B}}$ referente à linha $n$ e coluna $s$ . . .	47
$\hat{\theta}_{s,t}(\omega)$	Elemento da linha $s$ do vetor $\hat{\theta}_t(\omega)$ . . . . .	47
$H$	Número de hidrelétricas do sistema . . . . .	48
$N_y$	Número de barras que permitem o corte de carga do sistema . . . . .	48
$Pd_{n,t}$	Carga demandada na barra $n$ , no período $t$ . . . . .	48
$f_{l,t}(\omega)$	Fluxo de potência ativa na linha $l$ , no período $t$ , no cenário $w$ . . . . .	48
$f_l^{max}$	Fluxo máximo de potência ativa na linha $l$ . . . . .	48
$\mathbf{f}_t(\omega)$	Vetor $N_l \times 1$ dos fluxos de potência ativa em todos os ramos do sistema . . . . .	49
$y_{k,t}(\omega)$	Corte de carga na barra $k$ , no período $t$ e cenário $w$ . . . .	50
$i$	Índice que vai de 1 até o número de usinas do sistema $H$	51
$t$	Índice que vai de 1 até o número de períodos $T$ . . . . .	51
$m$	Índice que representa as usinas à montante da usina atual	
$i$	. . . . .	51
$w$	Índice que vai de 1 até o número de cenários $N_w$ . . . . .	51
$n$	Índice que vai de 1 até o número de barras do sistema $N_b$	51
$k$	Índice que vai de 1 até o número de barras de corte de carga do sistema $N_y$ . . . . .	51
$l$	Índice que vai de 1 até o número linhas do sistema $N_l$ . .	51
$s_i$	Estratégia adotada pelo jogador $i$ . . . . .	58
$s_{-i}$	Conjunto de estratégia dos outros jogadores concorrentes	58
$s_i^*$	Estratégia de ação que traz a melhor recompensa para o jogador $i$ . . . . .	59



$s_{-i}^*$	Estratégia de ação adotada pelos concorrentes que traz a melhor recompensa para o jogador $i$ . . . . .	59
$Of_{i,t}(\omega)$	Oferta de geração de energia feita pela usina $i$ , no período $t$ , no cenário $w$ . . . . .	67
$\tau(\omega)$	Conjunto de variáveis primais do problema de nível inferior em cada cenário $w$ . . . . .	67
$\psi(\omega)$	Conjunto dos multiplicadores de Lagrange do problema inferior em cada cenário $w$ . . . . .	69
$\mathcal{E}$	Conjunto dos multiplicadores de Lagrange do problema inferior em cada cenário $w$ . . . . .	69
$\mathcal{D}$	Domínio onde a função linear por partes existe . . . . .	80
$\mathcal{P}$	Conjunto de polítopos $P$ . . . . .	80
$\mathcal{V}(\mathcal{P})$	Conjunto de vértices de cada polítopo $P \in \mathcal{P}$ . . . . .	80
$\delta_{P,\vartheta}$	Coefficientes que parametrizam as combinações convexas dos vértices . . . . .	82
$y_P$	Variável binária que ativa ou não o cada simplex; o número de variáveis $y_p$ é igual ao número de simplexes . . . . .	82
$\mathbf{x}$	Vetor de variáveis independentes função não convexa a ser linearizada . . . . .	84
$C_{v,i}$	Valor dos vértices referentes ao volume . . . . .	89
$C_{q,i}$	Valor dos vértices referentes ao vazão turbinada . . . . .	89
$C_{u,i}$	Valor dos vértices referentes ao vazão vertida . . . . .	89
$C_{Ph,i}$	Valor dos vértices referentes à energia elétrica produzida . . . . .	89
$\alpha_{i,t}(\omega)$	Multiplicador de Lagrange relacionado à restrição hídrica . . . . .	92
$\beta_{i,t}(\omega)$	Multiplicador de Lagrange relacionado à função de produção . . . . .	92
$\lambda_{i,t}(\omega)$	Multiplicador de Lagrange relacionado ao balanço de potência . . . . .	92
$\gamma_{i,t}^{min}(\omega)$	Multiplicador de Lagrange relacionado ao limite mínimo de geração das usinas . . . . .	92
$\gamma_{i,t}^{max}(\omega)$	Multiplicador de Lagrange relacionado ao limite máximo de geração das usinas . . . . .	92
$\rho_{i,t}^{min}(\omega)$	Multiplicador de Lagrange relacionado ao limite mínimo de volume nos reservatórios das usinas . . . . .	92
$\rho_{i,t}^{max}(\omega)$	Multiplicador de Lagrange relacionado ao limite máximo de volume nos reservatórios das usinas . . . . .	92
$\sigma_{i,t}^{min}(\omega)$	Multiplicador de Lagrange relacionado ao limite mínimo de turbinamento das usinas . . . . .	92

$\sigma_{i,t}^{max}(\omega)$	Multiplicador de Lagrange relacionado ao limite máximo de turbinamento das usinas.....	92
$\kappa_{i,t}^{min}(\omega)$	Multiplicador de Lagrange relacionado ao limite mínimo de vertimento das usinas.....	92
$\kappa_{i,t}^{max}(\omega)$	Multiplicador de Lagrange relacionado ao limite máximo de vertimento das usinas.....	92
$\pi_{i,t}^{min}(\omega)$	Multiplicador de Lagrange relacionado ao limite mínimo de corte de carga nas barras de corte de carga.....	92
$\pi_{i,t}^{max}(\omega)$	Multiplicador de Lagrange relacionado ao limite máximo de corte de carga nas barras de corte de carga.....	92
$\zeta_{i,t}^{min}(\omega)$	Multiplicador de Lagrange relacionado ao limite mínimo de fluxo nas linhas de transmissão.....	92
$\zeta_{i,t}^{max}(\omega)$	Multiplicador de Lagrange relacionado ao limite máximo de fluxo nas linhas de transmissão.....	92

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	27
1.1 APLICAÇÕES DE TÉCNICAS DE LINEARIZAÇÃO POR PARTES EM ESTUDOS DE SISTEMAS DE POTÊNCIA ..	28
1.2 CONTRIBUIÇÕES .....	29
1.3 ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO .....	30
<b>2 OPERAÇÃO DE SISTEMAS HIDROTÉRMICOS</b> ...	31
2.1 PLANEJAMENTO SOB INCERTEZA E PROGRAMAÇÃO ESTOCÁSTICA .....	35
2.2 FORMULAÇÃO DO DESPACHO CENTRALIZADO .....	37
<b>2.2.1 Modelagem do Sistema</b> .....	37
2.2.1.1 Usina Hidrelétrica .....	37
2.2.1.2 Usina Termelétrica e Corte de Carga .....	42
2.2.1.3 Rede Elétrica .....	44
2.2.1.4 Fluxo de Potência Linearizado .....	44
<b>2.2.2 Despacho Centralizado</b> .....	50
<b>2.2.3 Conclusão</b> .....	51
<b>3 PROBLEMA DO PRODUTOR</b> .....	53
3.1 ESTRUTURA DE MERCADO .....	53
3.2 COMPETIÇÃO .....	55
<b>3.2.1 Monopolista</b> .....	55
<b>3.2.2 Oligopolista</b> .....	56
3.3 TEORIA DOS JOGOS .....	57
<b>3.3.1 Equilíbrio de Nash</b> .....	59
<b>3.3.2 Modelos</b> .....	60
3.3.2.1 Modelo de Cournot .....	60
3.3.2.2 Modelo de Bertrand .....	62
3.3.2.3 Modelo de Stackelberg .....	63
3.4 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DO PRODUTOR .....	64
3.4.0.1 Condições de Otimalidade .....	68
3.5 EXEMPLO .....	70
3.6 CONCLUSÃO .....	74
<b>4 LINEARIZAÇÃO POR PARTES</b> .....	75
4.1 CONCEITOS INICIAIS .....	76
4.2 DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO LINEAR CONTÍNUA POR PARTES .....	80
<b>4.2.1 Exemplo</b> .....	80
4.3 MODELOS LINEARES POR PARTES .....	80

4.4	MODELO DE COMBINAÇÃO CONVEXA DESAGREGADA	81
4.4.1	Caso unidimensional	83
4.4.2	Caso Bidimensional	83
4.4.3	Caso tridimensional	87
4.5	FORMULAÇÃO DOS PROBLEMAS LINEARIZADOS	88
4.5.1	Despacho Centralizado	88
4.5.2	Problema do Produtor	90
4.6	CONCLUSÃO	94
<b>5</b>	<b>RESULTADOS</b>	<b>97</b>
5.1	DESCRIÇÃO DO ESTUDO	99
5.2	CASO BIDIMENSIONAL	100
5.3	DESPACHO CENTRALIZADO	102
5.3.1	Resultados para o caso CESP - 15 barras	102
5.3.2	Resultado para o Sistema SUL - 32 Barras	110
5.4	PROBLEMA DO PRODUTOR	116
5.4.1	Resultados para sistema de 3 barras	116
5.4.2	Resultados para o CESP - 15 barras	120
5.5	CONCLUSÃO	124
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>125</b>
6.1	USO DE TÉCNICA DE LINEARIZAÇÃO POR PARTES NO PROBLEMA DE DESPACHO CENTRALIZADO E PRO- BLEMA DO PRODUTOR	125
6.2	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	126
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>129</b>
	<b>APÊNDICE A – Problema do Produtor</b>	<b>135</b>
	<b>APÊNDICE B – Problema de Otimização</b>	<b>147</b>
	<b>APÊNDICE C – Triangulação</b>	<b>151</b>
	<b>APÊNDICE D – Dados dos Sistemas</b>	<b>157</b>

## 1 INTRODUÇÃO

O Brasil possui uma produção de energia elétrica proveniente, em sua maior parte, de fonte hídrica, especificamente 61,13% [2]. Assim, todo o planejamento e operação do sistema elétrico leva em conta esse recurso e, conseqüentemente, as incertezas associadas à sua disponibilidade. O despacho é feito de forma centralizada e coordenada em todo o país com intuito de garantir um fornecimento de energia elétrica seguro, contínuo e econômico aos consumidores. O modelo centralizado leva em consideração todo o sistema de produção e transmissão do país. Sendo assim, permite o intercâmbio de geração entre as regiões com o intuito de aproveitar a característica pluviométrica de cada região da melhor forma possível. Este modelo pressupõe que todos os agentes envolvidos na geração, transmissão, distribuição e consumo de energia elétrica tenham um objetivo comum a ser atendido pelo despacho.

A desregulamentação do setor de energia elétrica tornou mais claras as diferenças entre os agentes envolvidos no setor, cada um com seus próprios objetivos e restrições. Podemos denominar esses agentes de forma genérica como: operador do sistema, produtor, distribuidor e consumidor. Como os interesses dos agentes são distintos, o planejamento e a operação do sistema é visto de forma diferente por cada agente. Por exemplo, o melhor despacho de geração para o operador não necessariamente é o melhor para o produtor, e vice versa. Este trabalho analisa o planejamento da operação de médio prazo de um sistema predominantemente hidrelétrico sob dois pontos de vista: o do operador do sistema e o de um agente produtor.

Ao adotar o ponto de vista do operador do sistema, admite-se a operação de forma centralizada, ou seja, o operador recebe informações dos demais agentes sobre disponibilidade de geração, transmissão e distribuição e sobre a carga do sistema, e usa tais informações para determinar o despacho de todas as usinas do sistema. O problema do operador é formulado como um problema de otimização não linear e não convexo.

Ao adotar o ponto de vista do produtor de energia, considera-se que suas ações dependem das ações do operador e dos outros produtores de energia do sistema, e que essas ações representam interesses antagônicos. Nestas situações os sistemas podem ser modelados matematicamente utilizando teoria dos jogos e otimização em 2 níveis [3]. O modelo de Stackelberg pode ser usado para representar o problema do produtor.

Na literatura sobre planejamento da operação de sistemas e estratégias de atuação em mercados de energia elétrica podem ser encontrados vários trabalhos que contemplam os diferentes pontos de vista dos agentes envolvidos. Nesses estudos modelos de otimização em dois níveis são utilizados por permitirem a representação dos interesses antagônicos dos agentes envolvidos. Em [3] é proposta uma formulação de despacho descentralizado de forma que os interesses dos geradores sejam considerados, sem deixar de considerar as restrições do sistema e o interesse do operador. Por outro lado, em [4], onde é proposto um problema de otimização que representa o despacho de potência ativa e reativa supondo competição na produção de energia, cujos critérios de nível superior e inferior são, respectivamente, o custo mínimo de oportunidade e o preço mínimo oferecido de potência ativa.

Devemos levar em consideração a possibilidade de sempre buscarmos soluções ótimas globais para os problemas estudados. E este é propósito desta dissertação. Transformamos o problema não linear e não convexo em um problema linear inteiro misto, adicionando restrições para isso e fazendo com que a solução alcançada seja ótima global.

A seguir é feito um resumo de algumas aplicações de técnicas de linearização por partes a problemas de otimização.

## 1.1 APLICAÇÕES DE TÉCNICAS DE LINEARIZAÇÃO POR PARTES EM ESTUDOS DE SISTEMAS DE POTÊNCIA

Nos estudos de sistemas de potência, as técnicas de linearização por partes são empregadas para obter ótimos globais de problemas de otimização não lineares, não convexos e que podem ter ou não variáveis inteiras. A maior parte das aplicações é em problemas com variáveis inteiras ([5]-[7]), porém as técnicas de linearização são também usadas em problemas não lineares com variáveis contínuas ([8] e [9]). Podem ser encontradas aplicações dessas técnicas tanto a problemas de planejamento da expansão como de planejamento da operação dos sistemas de potência.

Em problemas de planejamento da expansão de sistemas, as técnicas de linearização por partes foram empregadas para representar com precisão aceitável o balanço de potência na rede elétrica. Em [5], a linearização por partes é aplicada na representação das perdas de potência ativa, que são quase sempre negligenciadas com a utilização do fluxo de potência linearizado em problemas de planejamento de ex-

pansão da rede de transmissão. Em [6] o problema de expansão da transmissão é formulado usando as equações não lineares de balanço de potência ativo. Diferentes modelos de linearização por partes são empregadas na resolução do problema, dentre eles o modelo de combinação convexa desagregada, que é usado neste trabalho. Em [7], a linearização por partes é usada para aproximar as equações não lineares do fluxo de potência num problema que, ao ser resolvido, fornece a partição ótima de sistema em subsistemas (ilhas) com geração própria, de forma a limitar cortes de energia em grandes áreas.

Duas aplicações das técnicas de linearização por partes a problemas da operação de sistemas são descritas em ([7],[8]). Em [8], é proposto um modelo programação linear inteiro misto, para linearizar a função de produção de uma usina hidrelétrica, no caso, a relação entre potência gerada, vazão turbinada e volume do reservatório, não levando em consideração o vertimento. Através da linearização, calculam-se as soluções ótimas globais dos problemas do operador do sistema e do produtor. Em [9], é feita uma linearização por partes das equações de balanço de potência do sistema visando resolver o problema de fluxo de potência ótimo (FPO) com representação de equipamentos FACTS tipo TCSC. Apesar da rede elétrica ser representada pelo modelo linear, a presença da reatância variável do TCSC transforma FPO num problema de otimização não linear e não convexo, que é reformulado como um problema linear inteiro-misto. O objetivo do estudo é ajustar as reatâncias dos TCSCs de forma a otimizar as reservas de geração do sistema.

Os trabalhos anteriores mostram o potencial das técnicas de linearização por partes na resolução de problemas de otimização difíceis, que podem possuir ótimos locais e globais. Os resultados descritos nesses artigos motivaram o desenvolvimento desta dissertação de mestrado.

## 1.2 CONTRIBUIÇÕES

Este trabalho foi desenvolvido a partir da constatação feita em [10], segundo a qual os “solvers” de otimização não linear e otimização não linear inteira mista nem sempre são capazes de resolver apropriadamente problemas de despacho de geração em sistemas predominantemente hidrelétricos. Neste trabalho, apresentamos modelos em programação linear inteira-mista (combinação convexa desagregada) para o problema de despacho centralizado e o problema do produtor. As-

sim, reformulamos os dois problemas com o objetivo de encontrar uma solução ótima global.

### 1.3 ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

Esta dissertação está dividida em seis capítulos e quatro apêndices.

Capítulo 2 apresenta as características de um sistema hidrotérmico e como elas são representadas matematicamente. Além disso, nesse capítulo o problema de despacho de médio prazo de usinas hidrelétricas é formulado.

No Capítulo 3 primeiramente são apresentados conceitos de microeconomia que permitem um melhor entendimento da teoria de Jogos Não Cooperativos. Posteriormente é feita uma breve introdução sobre problemas de otimização em dois níveis, que podem ser usados para representar matematicamente Jogos de Stackelberg. Por fim, formula-se o problema do produtor como um problema de otimização de dois níveis.

O Capítulo 4 descreve o modelo de combinação convexa desagregada, que é usado para representar as funções não convexas presentes nas restrições dos problemas formulados nos capítulos 2 e 3.

No Capítulo 5 é feita uma comparação das soluções obtidas resolvendo os problemas não lineares originais com as soluções obtidas resolvendo os problemas lineares inteiros mistos, mostrando vantagens e desvantagens de ambos.

O Capítulo 6 apresenta um resumo da dissertação, os resultados alcançados e uma proposta para trabalhos futuros.

O Apêndice A detalha a formulação do problema do produtor. Os Apêndices B e C apresentam conceitos e ilustrações que auxiliam no entendimento da técnica de linearização por partes empregada neste trabalho. Por fim, o Apêndice D contém os dados dos sistemas utilizados nas simulações.



## 2 OPERAÇÃO DE SISTEMAS HIDROTÉRMICOS

A fonte de energia usada para produzir eletricidade varia nos países dependendo da matriz energética de cada um. Por exemplo, em países onde não existem muitos recursos hídricos, combustíveis fósseis são mais utilizados; em países que possuem recursos hídricos abundantes, a força das águas é usada, nas usinas hidrelétricas, para gerar eletricidade. Também existem as fontes de energia solar, eólica entre outras.

O problema de despacho hidrotérmico consiste em determinar o despacho de usinas hidrelétricas e termelétricas por um dado horizonte de tempo, tendo como objetivo principal o mínimo custo operacional de produção.

A ferramenta matemática utilizada no planejamento da operação de sistemas elétricos essencialmente é a otimização, que pode ser definida da seguinte forma:

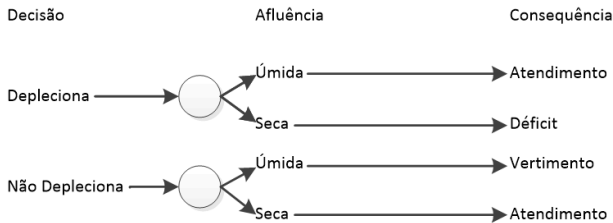
Otimização é uma ferramenta na ciência de decisão e na análise de sistemas físicos. Para usá-la, é preciso primeiro identificar algum objetivo, uma medida quantitativa do desempenho do sistema em estudo. Este objetivo poderia ser o lucro, tempo, energia potencial, ou qualquer quantidade ou combinação de quantidades que podem ser representados por um único número. O objetivo depende de certas características do sistema, chamados de variáveis ou desconhecidos. Nosso objetivo é encontrar valores das variáveis que otimizam o objetivo. As variáveis podem ser irrestritas ou restritas de alguma forma. [11, p. 1].

Dentro deste conceito está presente o processo de modelagem do problema, que é o processo de identificação dos objetivos, das variáveis e das restrições para o problema. No caso da coordenação hidrotérmica, o objetivo pode ser minimização de custo operacional através da utilização mínima de termelétricas ou mínimo corte de carga; já as restrições são os limites físicos do sistema, tais como: limites de geração, de vertimento, de vazão turbinada, de corte de carga, de transmissão nas linhas, entre outros. Mais adiante, na seção 2.2.1, esses conceitos são melhor explicados.

Nos sistemas com predominância hidrelétrica, os recursos para a geração dependem das vazões afluentes naturais dos rios. Ou seja, no

despacho das usinas devem ser levadas em consideração as condições futuras de afluência, tornando-se necessário fazer o planejamento da operação a curto, a médio e longo prazo. Isso é chamado de *acoplamento temporal*, ou seja, uma decisão tomada hoje (se aumenta ou não o montante de água armazenada nos reservatórios ou não, por exemplo) afeta o despacho no futuro. Por outro lado, as usinas partilham o mesmo rio ou bacia hidrográfica, o que as torna interdependentes. Isso é chamado de *acoplamento espacial*. Esses dois fatores exigem uma estratégia de operação bastante distinta daquela exigida por um sistema com geração predominantemente termelétrica. Quando se têm muitas usinas hidrelétricas, o planejamento deve considerar um horizonte de até vários anos, dependendo das capacidades dos reservatórios, enquanto que num sistema com predominância de geração termelétrica, o horizonte de planejamento é curto, em torno de algumas semanas, já que as usinas são independentes e o combustível pode ser considerado sempre disponível [12].

A Figura 2.1 evidencia de forma mais clara a situação de decisão comentada anteriormente. Por exemplo, utilizando a água do reservatório antes de um período seco, corre-se o risco de despachar térmicas de custo mais elevado no futuro; ou se não utilizarmos a água dos reservatório, utilizando as térmicas antes de um período úmido, ocorrerão vertimentos e conseqüentemente desperdício de energia.



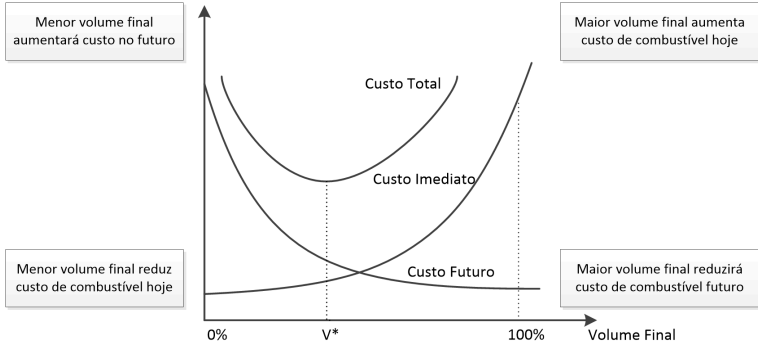
Fonte: baseado em [13, p. 81]

Figura 2.1: Problema de decisão de operação

Dessa forma, uma operação ótima dos reservatórios requer um compromisso entre usar a água armazenada ou não usar (utilizando as termelétricas). Há, portanto, duas funções custo associados a essa decisão, a função de custo imediato (FCI) e a função de custo futuro (FCF), que está relacionado à expectativa de despacho térmico [13]. A FCF de certa forma precifica a água armazenada nos reservatórios. A Figura 2.2 mostra as duas funções e a função total, que é a soma das

outras duas.

A FCI cresce com o aumento do volume final, ou seja, quanto maior a quantidade de água armazenada final, maior o uso da termelétrica hoje. A FCF decresce com o aumento da quantidade de água armazenada final e menor uso de termelétricas.



Fonte: baseado em [13, p. 82]

Figura 2.2: FCI e FCF

O volume do reservatório ótimo é encontrado quando anulamos a derivada do custo total em relação ao volume final, assim:

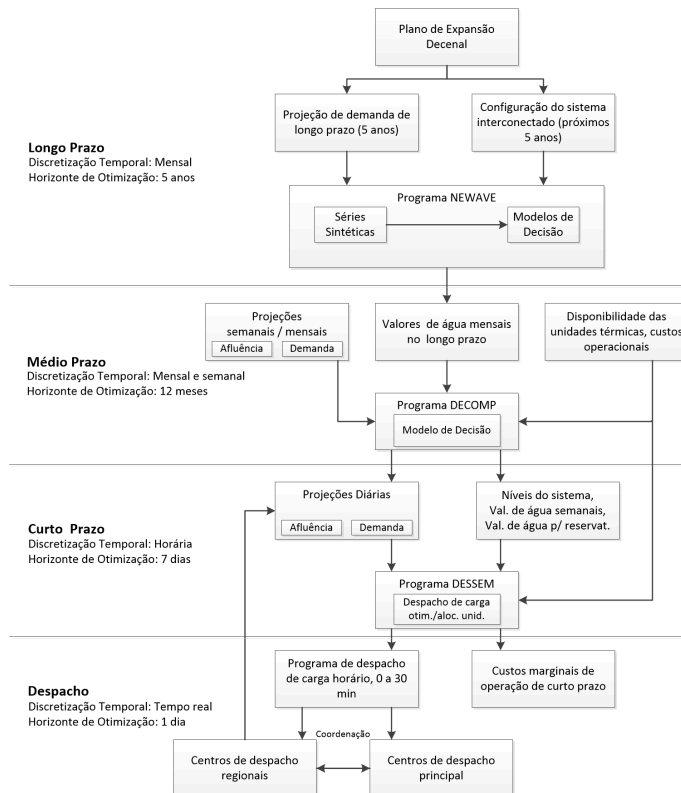
$$\frac{\partial(FCI + FCF)}{\partial V} = 0 \rightarrow \frac{\partial(FCI)}{\partial V} = -\frac{\partial(FCF)}{\partial V} \quad (2.1)$$

O planejamento da operação energética no Brasil é dividido em etapas, devido à sua complexidade: planejamento de longo prazo, de médio prazo, de curto prazo e pré-despacho. Cada etapa é modelada de forma diferente, levando-se em conta a aleatoriedade e incertezas das afluências e o grau de detalhamento na modelagem [13]. Programas computacionais são usados para determinar o despacho de geração. Os três principais estão listados a seguir:

- NEWAVE usado no despacho de longo prazo. Tem como objetivo minimizar o custo operacional, considerando 2 mil séries hidrológicas sintéticas ou um conjunto de séries históricas, fornecendo uma função de custo futuro;
- DECOMP usado no despacho de médio prazo. Recebe a função de custo futuro criada pelo NEWAVE e define as metas de geração de cada usina que são representadas individualmente, com horizonte anual e discretização semanal no primeiro mês e mensal nos

seguintes; aqui são considerados os aspectos elétricos da operação, sob a forma de restrições operativas;

- DESSEM calcula o despacho com horizonte de até duas semanas, com os primeiros dias discretizados em intervalos de 30 minutos; há uma modelagem mais detalhada, incluindo transmissão, por meio do fluxo de potência linearizado.



Fonte: baseado em [12, p. 45]

Figura 2.3: Etapas do Planejamento da Operação Energética e Despacho do Sistema

A Figura 2.3 nos mostra de forma resumida todas as etapas do planejamento da operação energética feita aqui no Brasil. Num primeiro momento é feita uma projeção de demanda através do Plano de

Expansão Decenal. Esse resultado serve de entrada para o programa NEWAVE que calcula a função de custo futuro que será passada para o planejamento a médio prazo, o DECOMP. Nesta etapa, é definido o despacho ótimo do sistema, alocando a contribuição de cada geradora em intervalos semanais no primeiro mês e mensais nos demais, além da determinação da evolução dos valores da água. O planejamento de curto prazo, DESSEM, recebe a função de custo futuro do DECOMP adicionada às projeções diárias de demanda e aflúências o que possibilita um despacho viável do sistema [12]. Neste trabalho adotamos um horizonte de planejamento de médio prazo, com 12 meses.

## 2.1 PLANEJAMENTO SOB INCERTEZA E PROGRAMAÇÃO ESTOCÁSTICA

Uma das dificuldades encontradas no planejamento de sistemas hidrotérmicos é a impossibilidade de previsão das aflúências naturais dos rios. Além dessa, outros exemplos de incerteza são os valores das demandas das cargas, as restrições ambientais, a ocorrência de contingências entre outras. Consideraremos neste trabalho apenas as incertezas relacionadas às aflúências, todas as outras são desprezadas. Apesar das incertezas ou informações imperfeitas, decisões precisam ser tomadas, isso é o que motiva o uso da programação estocástica na modelagem desses problemas [14].

A programação estocástica é utilizada para resolver o problema, minimizando o “valor esperado” do custo (para o caso centralizado) ou do desvio de volume (para o caso do problema do produtor). Os dados sobre os cenários das aflúências são retirados das séries históricas de vazões para todas as usinas pertencentes ao Sistema Interligado Nacional (SIN), com dados mensais registrados desde 1931 até 2014 [15].

Devido à sua aleatoriedade e grande influência sobre a determinação da operação do SIN, as aflúências são consideradas um processo estocástico e o despacho de médio prazo das usinas hidrelétricas e termelétricas é formulado como um problema de programação estocástica. Na formulação deste problema a carga é considerada conhecida, ou seja, aqui é adotado um perfil da carga no decorrer de um ano. Os dados sobre o perfil da carga de demanda podem ser vistos no site do ONS [16].

Um processo estocástico é constituído por um conjunto de variáveis aleatórias agrupadas sequencialmente no tempo.

Processos estocásticos que abrangem um determinado horizonte

de tempo podem ser representados por cenários. Por exemplo, o processo estocástico  $\lambda$  pode ser representado pelo vetor  $\lambda(\omega)$ ,  $\omega = 1, \dots, N_\Omega$ , onde  $\omega$  representa um índice para cenário e  $N_\Omega$  é o número de cenários considerados. Denotamos por  $\lambda_\Omega$  o conjunto de possíveis realizações do processo estocástico  $\lambda$ , isto é,  $\lambda_\omega = \lambda(1), \dots, \lambda(N_\Omega)$ .

Cada realização  $\lambda(\omega)$  é associada a uma probabilidade  $\Pi(\omega)$ , assim podemos definir que:

$$\Pi(\omega) = P(\omega | \lambda = \lambda(\omega)), \quad \text{onde} \quad \sum_{\omega \in \Omega} \Pi(\omega) = 1. \quad (2.2)$$

Para se obter o despacho ótimo de geração no horizonte de médio prazo devem ser tomadas decisões sob incerteza; Neste caso, o problema de otimização a ser resolvido é formulado definindo-se estágios de tomada de decisão. No primeiro estágio são tomadas decisões que não dependam da realização do processo estocástico, ou ainda, do valor assumido pela variável aleatória. Portanto, as variáveis do primeiro estágio representam as gerações das usinas e as condições operativas do sistema no primeiro período do horizonte de planejamento. No segundo estágio são tomadas decisões que dependem das decisões do primeiro estágio e do valor assumido pela variável aleatória. Então as variáveis do segundo estágio representam os despachos de geração e as condições operativas do sistema, no segundo período de planejamento, para cada cenário de vazões afluentes. E assim por diante, até o final do horizonte de planejamento. Portanto, o problema de despacho ótimo de geração no horizonte de médio prazo é um problema estocástico de múltiplos estágios.

Devido à elevada dimensão do problema de múltiplos estágios, neste trabalho o problema é simplificado para dois estágios. No primeiro estágio são tomadas decisões supondo conhecidas as vazões afluentes das usinas. As variáveis de primeiro estágio representam as potências geradas pelas usinas e as condições operativas do sistema no primeiro mês do horizonte de planejamento. No estágio seguinte são tomadas decisões que dependem das definições obtidas no primeiro estágio e das realizações do processo estocástico, que a partir deste instante possui caráter aleatório. Um conjunto de variáveis de decisão do segundo estágio é definido para cada cenário considerado e para todos os períodos.

As relações entre as variáveis de decisão são resolvidas simultaneamente em um único problema de otimização, ponderando cada realização do processo estocástico com a probabilidade de ocorrência especificada.

## 2.2 FORMULAÇÃO DO DESPACHO CENTRALIZADO

O despacho centralizado realizado pelo Operador Nacional do Sistema (ONS) considera as disponibilidades de cada uma das usinas em condições de operação no Sistema Interligado Nacional (SIN). Essas usinas são despachadas visando o menor custo operacional possível, tendo-se em vista as afluências hidrológicas, o armazenamento de água dos reservatórios, os preços ofertados pelas usinas térmicas e as restrições operacionais. Assim, os agentes proprietários de usinas sujeitas ao despacho centralizado pelo ONS não têm controle sobre seu nível de geração, independentemente de seus compromissos de venda de energia realizados com base nas garantias físicas.

### 2.2.1 Modelagem do Sistema

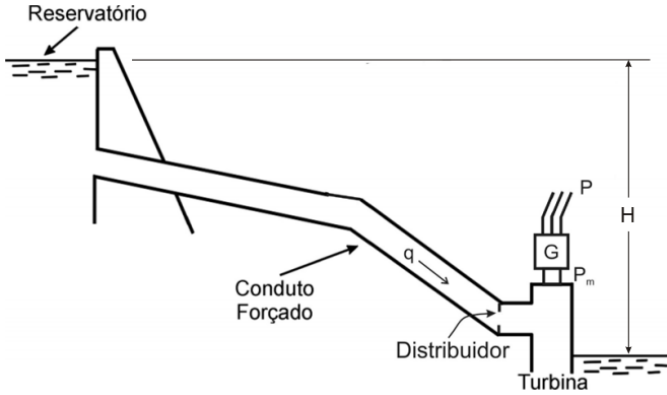
A modelagem da função objetivo e de todas as restrições são mostradas a seguir.

#### 2.2.1.1 Usina Hidrelétrica

As usinas hidrelétricas utilizam os recursos hídricos do local onde estão estabelecidas na produção de energia elétrica. Num primeiro momento, transformam energia potencial em energia cinética, através de uma barragem, que cria a diferença de potencial entre os níveis montante e jusante; logo depois, através da passagem da água pela turbina, a energia cinética é transformada em energia elétrica pelo gerador. A Figura 2.4 mostra as partes que compõem a usina hidrelétrica.

As usinas hidrelétricas podem ser classificadas de acordo com seus reservatórios em três tipos:

- Usinas de acumulação: são capazes de acumular água no seu reservatório no período de chuvas para posterior utilização no período de estiagem;
- Usinas a fio d'água: possuem capacidade de armazenamento de água muito pequena e só pode utilizar água à medida que a recebe;
- Usinas com armazenamento por bombeamento: capazes de reaproveitar a água já utilizada a partir de seu bombeamento até um reservatório a montante.



Fonte: [17]

Figura 2.4: Partes de uma Hidrelétrica

Dois conceitos são muito importantes na modelagem do problema de despacho de geração e devem ser bem compreendidos: o balanço hídrico e a função de produção das usinas hidrelétricas.

Como na lei de Kirchhoff das correntes, onde a soma das correntes que chegam em um nó é igual a soma das correntes que saem do mesmo nó, a operação dos reservatórios obedece ao mesmo princípio de conservação.

A Figura 2.5 evidencia a lei de conservação de massa entre os reservatórios do sistema. Ou seja, o volume do reservatório da usina  $i$  ao final do período  $t$  é igual ao volume inicial mais o volume de água recebido, menos o volume defluído, que é o turbinado mais o vertido mais o evaporado (que nesta análise é desconsiderado) [12]. Esses valores dependem ainda das condições hidrológicas representadas por cenários de afluência.

Assim, matematicamente, o balanço hídrico é representado pela equação (2.3):

$$v_{i,t}(\omega) = v_{i,t-1}(\omega) + h[r_{i,t}(\omega) - q_{i,t}(\omega) - u_{i,t}(\omega)] + \sum_{m \in \Omega_i} h[q_{m,t}(\omega) + u_{m,t}(\omega)] \quad (2.3)$$

onde:

$v_{i,t}(\omega)$  é o volume de água no reservatório da usina  $i$  no período  $t$ , no cenário  $\omega$ ;



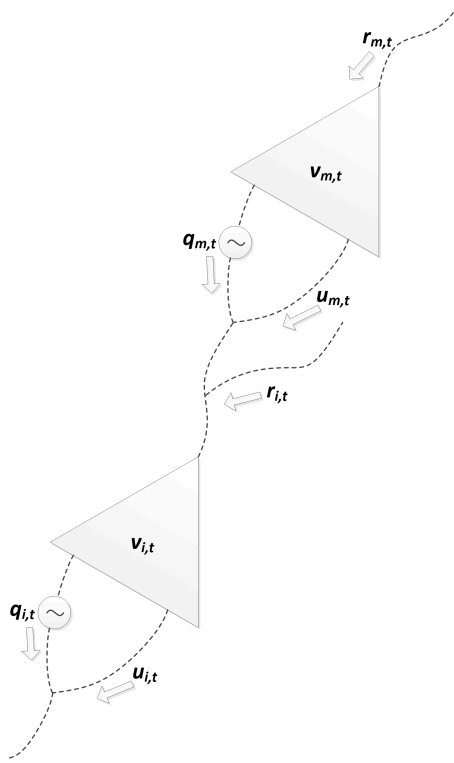


Figura 2.5: Balanço Hídrico

$q_{i,t}(\omega)$  é a vazão turbinada da usina  $i$  no período  $t$ , no cenário  $\omega$ ;

$u_{i,t}(\omega)$  é a vazão vertida da usina  $i$  no período  $t$ , no cenário  $\omega$ ;

$h$  é a duração do intervalo de tempo usado na contabilização do montante de água que chega e sai do reservatório  $i$ , no cenário  $\omega$ ;

$r_{i,t}(\omega)$  é a afluência natural que chega ao reservatório  $i$ , no cenário  $\omega$ ;

$\Omega_i$  é o conjunto de reservatórios  $m$  a montante do reservatório  $i$ .

A potência que a turbina hidráulica entrega ao eixo do gerador depende diretamente da altura de queda, diferença entre o nível montante e jusante do reservatório, a que esteja submetida. Os níveis

montantes e jusante são modelados como funções não-lineares do volume armazenado e da vazão defluente, respectivamente [18] [12].

A equação (2.4) define a altura de queda como sendo:

$$alt_{i,t}(\omega) = hm_i[v_{i,t}(\omega)] - hj_i[q_{i,t}(\omega) + u_{i,t}(\omega)] \quad (2.4)$$

onde:

$alt_{i,t}(\omega)$  é a altura da queda bruta da usina  $i$  no período  $t$ ;

$hm_i$  é a função cota a montante dependente do volume  $v$  do reservatório  $i$  no período  $t$ ;

$hj_i$  é a função cota a jusante dependente da vazão turbinada  $q$  e vertida  $u$  no reservatório  $i$  no período  $t$ .

A energia elétrica gerada é proporcional à energia potencial ponderada por um fator que é o rendimento do gerador, como mostrado na seguinte equação:

$$E_{i,t}(\omega) = Ep_{i,t}(\omega)\eta_i \quad (2.5)$$

onde:

$E_{i,t}(\omega)$  é a energia elétrica produzida na usina  $i$  no período  $t$  e cenário  $\omega$ ;

$Ep_{i,t}(\omega)$  é a energia potencial da massa de água transformada em energia elétrica na usina  $i$  no período  $t$  e cenário  $\omega$ ;

$\eta_i$  é o rendimento médio dos conjuntos usina-gerador da usina  $i$ , que neste trabalho é considerado constante.

Sabendo que energia potencial de um corpo é o produto da massa da sua massa pela gravidade ( $9.81 \text{ m/s}^2$ ) e pela altura que esse corpo se encontra [19], podemos reescrever a equação (2.5) da seguinte forma:

$$E_{i,t}(\omega) = 9.81 \text{ me } q_{i,t}(\omega) \text{ } atll_{i,t}(\omega) \eta_i \quad (2.6)$$

onde:

$me$  é a massa específica da água, que é  $1000 \text{ Kg/m}^3$ ;

$atll_{i,t}(\omega)$  é a queda líquida da usina  $i$ , definida como sendo a altura da queda bruta,  $alt_i$ , menos as perdas causadas por elementos físicos da usina como grades, válvulas, curvas entre outros; é dada em metros (m).

Dividindo a equação (que fornece a energia em joules) (2.6) pelo tempo, teremos a informação de energia por unidade de tempo, ou ainda, a potência ativa fornecida pelo gerador. Assim teremos:

$$Ph_{i,t}(\omega) = 9.81 \times 10^{-3} q_{i,t}(\omega) \text{ alt}_{i,t}(\omega) \eta_i \quad (2.7)$$

onde:

$Ph_{i,t}(\omega)$  é a potência ativa gerada pela usina  $i$ , em MW.

Definimos como *produtibilidade* da usina  $i$  o termo:

$$\rho_i = 9.81 \times 10^{-3} \eta_i \quad (2.8)$$

onde:

$\rho_i$  é expressa em  $MW/((m^3/s) * m)$ ;

Na equação final teremos:

$$Ph_{i,t}(\omega) = \rho_i(hm_i - hj_i)q_{i,t}(\omega) - P_{perdas} \quad (2.9)$$

onde:

$P_{perdas}$  representa as perdas de potência no conduto forçado, que são desprezadas neste trabalho.

As funções não-lineares que representam as alturas a montante e a jusante são polinômios de até quarto grau [18], assim:

$$hm_i = a_0 + a_1v_{i,t}(\omega) + a_2v_{i,t}^2(\omega) + a_3v_{i,t}^3(\omega) + a_4v_{i,t}^4(\omega) \quad (2.10)$$

$$hj_i = b_0 + b_1(q_{i,t}(\omega) + u_{i,t}(\omega)) + b_2(q_{i,t}(\omega) + u_{i,t}(\omega))^2 + b_3(q_{i,t}(\omega) + u_{i,t}(\omega))^3 + b_4(q_{i,t}(\omega) + u_{i,t}(\omega))^4 \quad (2.11)$$

A potência gerada, o volume do reservatório as vazões turbinadas e vertidas de cada usina  $i$ , devem respeitar os limites seus físicos em cada período  $t$  em cada cenário  $w$ , portanto, na operação da hidrelétrica, essas grandezas devem respeitar as seguintes desigualdades:

$$Ph_i^{min} \leq Ph_{i,t}(\omega) \leq Ph_i^{max} \quad (2.12)$$

$$v_i^{min} \leq v_{i,t}(\omega) \leq v_i^{max} \quad (2.13)$$

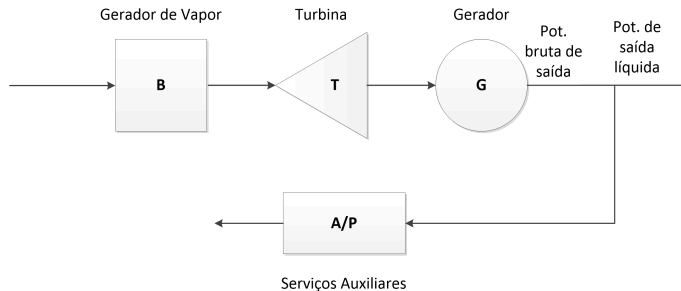
$$q_i^{min} \leq q_{i,t}(\omega) \leq q_i^{max} \quad (2.14)$$

$$0 \leq u_{i,t}(\omega) \leq u_{i,t}^{max} \quad (2.15)$$

Dessa forma as restrições individuais das usinas são, resumidamente, a equação (2.9) e os limites (2.12) - (2.15).

### 2.2.1.2 Usina Termelétrica e Corte de Carga

As usinas termelétricas geram energia elétrica a partir da energia térmica liberada pela queima de combustível. Basicamente a fonte de calor aquece uma caldeira, criando vapor pressurizado que gira as turbinas do gerador. O princípio de funcionamento está ilustrado na Figura 2.6. Outra forma de movimentar a turbina é pela expansão dos gases resultantes da queima do combustível (gás).



Fonte: [12, p. 52]

Figura 2.6: Princípio de funcionamento das termelétricas

Na modelagem das termelétricas, suas características físicas devem ser consideradas. Assim, o modelo deve levar em conta a relação entre a potência de entrada e saída da usina, seus limites mínimo e máximo de geração e outros limites operativos importantes [12].

Um dos parâmetros mais importantes na modelagem de uma termelétrica é o seu custo de produção,  $F$ , que relaciona a taxa de aumento do consumo do combustível e de custo de operação com o aumento do nível de geração [20].

Vemos através da Figura 2.7 que a curva do custo de produção é não-linear, mas é uma aproximação da curva real que não é tão com-

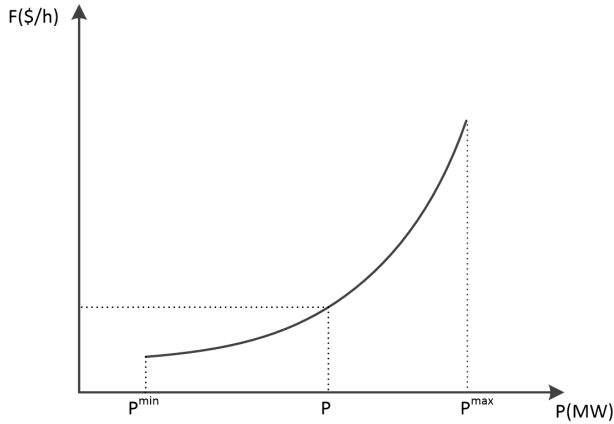


Figura 2.7: Curva de entrada e saída de uma termelétrica

portada como a que vemos. Em estudos de longo prazo a curva é linearizada aproximando-a por segmentos lineares [12].

O corte de carga é o déficit de fornecimento de energia. Consiste na retirada de carga do sistema para atendimento à restrição de igualdade de balanço de potência e à recuperação dos níveis de armazenamento dos reservatórios, quando a geração é incapaz de suprir a carga[10]. Também utilizado para restabelecer a segurança dinâmica do sistema.

O corte de carga é modelado como uma termelétrica fictícia de capacidade de geração  $y_{k,t}(\omega)$  infinita [21]. Assim, no problema de planejamento da operação, deve-se considerar a restrição:

$$0 \leq y_{k,t}(\omega) \quad (2.16)$$

onde:

$y_{k,t}(\omega)$  é o corte de carga na barra  $k$ , no período  $t$ , no cenário  $w$ .

As termelétricas não serão utilizadas neste trabalho, portanto não serão modeladas. Já o corte de carga sim. Ele é incluído na equação de balanço de potência e é limitado pela restrição (2.16).

### 2.2.1.3 Rede Elétrica

A rede elétrica é representada por seu circuito equivalente monofásico em p.u. A modelagem do sistema é estática, feita por equações e inequações algébricas, ou seja, ignoram-se os eventos transitórios que possam acontecer. Geradores e cargas são modelados através de injeções de potência nos nós da rede. Os outros componentes são as linhas de transmissão, que são modelados pelos circuitos  $\pi$ , e os transformadores, por suas reatâncias série [22].

O fluxo de carga ou fluxo de potência determina o estado da rede de energia elétrica, a distribuição dos fluxos na rede elétrica, os valores das magnitudes, os ângulos das tensões nas barras de carga e os ajustes dos controles presentes no sistema, tais como transformadores variáveis ou compensadores em derivação. As equações de fluxo de potência são obtidas a partir das Leis de Kirchhoff. Usando essas leis, são obtidas as expressões dos fluxos de potência e impõe-se que a potência líquida injetada de cada barra do sistema deva ser igual à soma dos fluxos de potência que saem da barra no sentido das barras adjacentes. Essas equações devem ser satisfeitas em todos os períodos do horizonte de planejamento e cenários hidrológicos.

### 2.2.1.4 Fluxo de Potência Linearizado

As equações do fluxo de potência linearizado surgem da observação de que o fluxo de potência ativa em uma linha de transmissão é aproximadamente proporcional à abertura angular na linha e desloca-se no sentido dos ângulos maiores para os menores. Essas equações são válidas para sistemas de extra-lata tensão e permitem estimar a distribuição dos fluxos de potência ativa na rede com um custo computacional reduzido e precisão aceitável.

As principais simplificações do fluxo de potência linearizado são apresentadas abaixo [22]:

- a magnitude das tensões nodais de todas as barras são consideradas iguais a 1,0 pu;
- as resistências e admitâncias shunt das linhas de transmissão são desprezadas;
- as equações de balanço de potência reativa na rede são desprezadas;

- os taps de transformadores de tensão não são considerados;
- as aberturas entre os ângulos das barras terminais de todas as linhas são consideradas pequenas, de forma que a função seno de uma diferença angular, medida em radianos, seja igual à própria diferença angular, assim:

$$\text{sen}(\theta_n - \theta_m) \approx (\theta_n - \theta_m) \text{ rads} \quad (2.17)$$

- as perdas são desprezadas.

Fazendo-se essas simplificações, obtemos a equação (2.18) para expressar o fluxo de potência ativa que flui da barra  $n$  à barra  $m$  da rede elétrica no período  $t$  e cenário  $\omega$ :

$$f_{l,t}(\omega) = \frac{\theta_{n,t}(\omega) - \theta_{m,t}(\omega)}{x_{nm}} \quad (2.18)$$

onde:

$l$  é o índice do circuito que conecta a barra  $n$  à barra  $m$ ;

$\theta_{m,t}(\omega)$  ângulo da tensão na barra  $m$  no período  $t$  e cenário  $\omega$ ;

$\theta_{n,t}(\omega)$  ângulo da tensão na barra  $n$  no período  $t$  e cenário  $\omega$ ;

$x_{nm}$  é a reatância série desse circuito.

Já a injeção de potência ativa na barra  $n$ , que é a soma dos fluxos das linhas de transmissão adjacentes a essa barra, é expressa pela equação :

$$P_{n,t}(\omega) = \sum_{m \in \Omega_n} \frac{\theta_{n,t}(\omega) - \theta_{m,t}(\omega)}{x_{nm}} \quad (2.19)$$

onde:

$N_b$  é o número de barras do sistema;

$\Omega_n$  é o conjunto das barras adjacentes à barra  $n$ .

A equação (2.19) deve ser atendida nas  $N_b$  barras do sistema. Para representar esse sistema de equações de forma compacta define-se a matriz  $\mathbf{B}$  do fluxo de potência linearizado [17]:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \sum_{m \in \Omega_1} \frac{1}{x_{1m}} & -\frac{1}{x_{12}} & -\frac{1}{x_{13}} & \dots & -\frac{1}{x_{1N_b}} \\ -\frac{1}{x_{21}} & \sum_{m \in \Omega_2} \frac{1}{x_{2m}} & -\frac{1}{x_{23}} & \dots & -\frac{1}{x_{2N_b}} \\ -\frac{1}{x_{31}} & -\frac{1}{x_{32}} & \sum_{m \in \Omega_3} \frac{1}{x_{3m}} & \dots & -\frac{1}{x_{3N_b}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{x_{N_b 1}} & -\frac{1}{x_{N_b 2}} & -\frac{1}{x_{N_b 3}} & \dots & \sum_{m \in \Omega_{N_b}} \frac{1}{x_{N_b m}} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Assim a equação de injeção de fluxo de potência da equação (2.19), é reescrita da seguinte forma:

$$P_{n,t}(\omega) = B_{nn}\theta_{n,t}(\omega) + \sum_{m=1}^{N_b} B_{nm}\theta_{m,t}(\omega) \quad (2.21)$$

Considerando as  $N_b$  barras do sistema, no período  $t$  e cenário  $\omega$ , de planejamento tem-se a equação matricial:

$$\mathbf{P}_t(\omega) = \mathbf{B}\boldsymbol{\theta}_t(\omega) \quad (2.22)$$

onde:

$\boldsymbol{\theta}_t(\omega)$  é o vetor de ângulos das tensões nodais de todas as barras;

$\mathbf{P}_t(\omega)$  é o vetor das injeções de potência ativa em todas as barras.

Utilizamos o ângulo em alguma barra do sistema como referência, eliminando assim uma coluna da matriz  $\mathbf{B}$  e um elemento do vetor de ângulos do sistema  $\boldsymbol{\theta}$ . Definimos, portanto a matriz  $\hat{\mathbf{B}}$  como matriz  $N \times (N - 1)$  obtida de  $\mathbf{B}$  sem a coluna de referência e o vetor  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  como o vetor  $(N - 1)$  obtido de  $\boldsymbol{\theta}$  pela eliminação do ângulo da barra de referência. Assim teremos:

$$\mathbf{P}_t(\omega) = \hat{\mathbf{B}}\hat{\boldsymbol{\theta}}_t(\omega) \quad (2.23)$$

Portanto, a potência injetada na barra  $n$  no período  $t$  e cenário  $\omega$  é

$$P_{n,t}(\omega) = \sum_{s=1}^{N_b-1} \hat{B}_{n,s}\hat{\theta}_{s,t}(\omega) \quad (2.24)$$



onde:

$\hat{B}_{n,s}$  é o elemento da matriz  $\hat{\mathbf{B}}$  referente à linha  $n$  e coluna  $s$ ;

$\hat{\theta}_{s,t}(\omega)$  é o elemento da linha  $s$  do vetor  $\hat{\theta}_t(\omega)$ .

A injeção de potência na barra  $n$  deve ser igual à diferença entre a potência gerada e consumida nessa barra. Como são considerados cortes de carga, à potência gerada na barra  $n$  deve ser somado o corte de carga na barra.

Para associar a potência hidrelétrica gerada às barras que possuem usinas, definimos a matriz de incidência *barras-hidrelétricas*  $\mathbf{Ah}$ , assim:

$$Ah_{n,i} = \begin{cases} 1, & \text{se o gerador hidrelétrico } i \text{ está conectado à barra } n; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.25)$$

Para associar o corte de carga às barras que podem cortar carga, definimos a matriz de incidência *barras-corte de carga*  $\mathbf{Ay}$ , assim:

$$Ay_{n,k} = \begin{cases} 1, & \text{se o corte de carga } k \text{ é representado na barra } n; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.26)$$

A potência da carga conectada à barra  $n$  é considerada constante em cada período  $t$ . Além disso, o perfil de carga do sistema, ou seja, o conjunto de cargas de todos os períodos, não varia com o cenário hidrológico.

Com as potências definidas, a restrição de balanço de potência da barra  $n$ , no período  $t$  e cenário  $\omega$  fica assim:

$$\sum_{i=1}^H Ah_{n,i} Ph_{i,t}(\omega) + \sum_{k=1}^{N_y} Ay_{n,k} y_{k,t}(\omega) - \sum_{s=1}^{N_b-1} \hat{B}_{n,s} \hat{\theta}_{s,t}(\omega) = Pd_{n,t} \quad (2.27)$$

onde:

$H$  é o número de hidrelétricas do sistema;

$N_y$  é número de barras que permitem o corte de carga do sistema;

$Pd_{n,t}$  é a carga demandada na barra  $n$ , no período  $t$ .

Os limites impostos sobre os fluxos de potência ativa nos ramos deve ser modelado também, assim temos que:

$$-f_l^{max} \leq f_{l,t}(\omega) \leq f_l^{max} \quad (2.28)$$

onde:

$f_{l,t}(\omega)$  é o fluxo de potência ativa na linha  $l$ , no período  $t$ , no cenário  $w$ .

$f_l^{max}$  é o fluxo máximo de potência ativa na linha  $l$ .

O sinal negativo do limite de fluxo de potência máximo  $f_l^{max}$  indica o sentido do fluxo, ou seja, em módulo os limites são iguais, mas o fluxo pode estar em qualquer um dos dois sentidos opostos.

Sabendo da equação (2.18), podemos reescrever a equação (2.28) da seguinte forma:

$$-f_l^{max} \leq \frac{\theta_{n,t}(\omega) - \theta_{m,t}(\omega)}{x_{nm}} \leq f_l^{max} \quad (2.29)$$

Para representar de forma mais compacta, definimos a matriz de incidência *ramos-barra*  $\tilde{\mathbf{A}}_{n,k}$  como sendo a matriz  $N_l \times N_b$  dada por [17]:

$$\tilde{\mathbf{A}}_{n,k} = \begin{cases} 1, & \text{se a barra de origem da linha } l \text{ é a barra } i; \\ -1, & \text{se a barra de chegada da linha } l \text{ é a barra } i; \\ 0, & \text{se a linha } l \text{ não incidir na barra } i. \end{cases} \quad (2.30)$$

A partir da matriz  $\tilde{\mathbf{A}}_{n,k}$ , definimos também a matriz de incidência *ramos-barra reduzida* de  $\mathbf{A}$  pela eliminação da barra de referência do sistema e a matriz *primitiva das capacidades dos ramos*, dada por:

$$\mathbf{\Gamma} = \text{diag} \left\{ \frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_{N_l}} \right\}. \quad (2.31)$$

onde:

$N_l$  é o número de ramos ou linhas no sistema.

Assim, teremos a equação (2.18) na forma vetorial:

$$\mathbf{f}_t(\omega) = \mathbf{\Gamma} \mathbf{A} \hat{\boldsymbol{\theta}}_t(\omega). \quad (2.32)$$

onde:

$\mathbf{f}_t(\omega)$  é o vetor  $N_l \times 1$  dos fluxos de potência ativa em todos os ramos do sistema.

E os limites de fluxo podem ser reescritos da seguinte forma:

$$-\mathbf{f}^{max} \leq \mathbf{\Gamma A} \hat{\boldsymbol{\theta}}_t(\omega) \leq \mathbf{f}^{max}. \quad (2.33)$$

onde:

$\mathbf{f}^{max}$  é o vetor  $N_l \times 1$  que contém os limites superiores dos fluxos de potência ativa em todos os ramos do sistema.

A partir das equações (2.32) e (2.33) podemos expressar o fluxo de potência em cada linha  $l$ , período  $t$  e cenário  $\omega$  considerado no estudo. De (2.32) tem-se que:

$$f_{l,t}(\omega) = \sum_{n=1}^{N_b-1} \Gamma_{l,l} A_{l,n} \hat{\theta}_{n,t}(\omega) \quad (2.34)$$

e os limites podem ser expressos como:

$$-f_l^{max} \leq \sum_{n=1}^{N_b-1} M_{l,n} \hat{\theta}_{n,t}(\omega) \leq f_l^{max} \quad (2.35)$$

onde:

$M_{l,n} = \Gamma_{l,l} A_{l,n}$  é o elemento da linha  $l$  e coluna  $n$  da matriz  $\mathbf{M}=\mathbf{\Gamma A}$ .

Portanto, os limites de transmissão podem ser expressos por (2.35).

## 2.2.2 Despacho Centralizado

No Brasil, o despacho elétrico é centralizado e é feito pela ONS. O critério operativo ou função objetivo é a minimização dos custos de produção de energia, considerando os horizontes de curto, médio e longo prazo. Cabe ao agente produtor apenas aceitar o que é instruído pelo Operador.

O objetivo adotado no despacho centralizado é a minimização do custo operacional do sistema. Na formulação do problema não são representadas explicitamente as usinas termelétricas. Supõe-se que o corte de carga indica quanto essas usinas precisarão gerar para que toda a demanda do sistema seja atendida. Assim, a função objetivo do problema de despacho centralizado usada neste trabalho é:

$$\sum_{\omega=1}^{N_{\omega}} \prod(\omega) \sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^{N_y} y_{k,t}(\omega) \quad (2.36)$$

onde:

$y_{k,t}(\omega)$  é o corte de carga na barra  $k$ , no período  $t$  e cenário  $w$ .

A função objetivo (2.36) é minimizada respeitando-se as restrições de igualdade (2.3), (2.9) e (2.27) e as restrições de desigualdade (2.12)-(2.16) e (2.35). Além disso, como as vazões afluentes são consideradas conhecidas no primeiro período de planejamento, as variáveis associadas a esse período são iguais para todos os cenários. Assim teremos as seguintes restrições adicionais no problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} Ph_{i,1}(1) = Ph_{i,1}(2) = \dots = Ph_{i,1}(\omega) \\ v_{i,1}(1) = v_{i,1}(2) = \dots = v_{i,1}(\omega) \\ q_{i,1}(1) = q_{i,1}(2) = \dots = q_{i,1}(\omega) \\ u_{i,1}(1) = u_{i,1}(2) = \dots = u_{i,1}(\omega) \\ \hat{\theta}_{n,1}(1) = \hat{\theta}_{n,1}(2) = \dots = \hat{\theta}_{n,1}(\omega) \\ y_{k,1}(1) = y_{k,1}(2) = \dots = y_{k,1}(\omega) \end{array} \right. \quad (2.37)$$

O problema de otimização associado ao despacho centralizado é expresso como:

$$\min \sum_{\omega=1}^{N_w} \prod(\omega) \sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^{N_y} y_{k,t}(\omega)$$

s.a.

Conjunto de Restrições (2.37)

$$v_{i,t}(\omega) = v_{i,t-1}(\omega) + h_t[r_{i,t} - q_{i,t}(\omega) - u_{i,t}(\omega)] + \sum_{m \in \Omega} h_t[q_{m,t}(\omega) + u_{m,t}(\omega)]$$

$$Ph_{i,t}(\omega) = \rho_i[hm_{i,t}(\omega) - hj_{i,t}(\omega)]q_{i,t}(\omega)$$

$$\sum_{i=1}^H Ah_{n,i}Ph_{i,t}(\omega) + \sum_{k=1}^{N_y} Ay_{n,k}y_{k,t}(\omega) - \sum_{s=1}^{N_b-1} \hat{B}_{n,s}\hat{\theta}_{s,t}(\omega) = Pd_{n,t}$$

$$Ph_i^{min} \leq Ph_{i,t}(\omega) \leq Ph_i^{max}$$

$$v_i^{min} \leq v_{i,t}(\omega) \leq v_i^{max}$$

$$q_i^{min} \leq q_{i,t}(\omega) \leq q_i^{max}$$

$$0 \leq u_{i,t}(\omega) \leq u_{i,t}^{max}$$

$$0 \leq y_{k,t}(\omega) \leq y_{k,t}^{max}$$

$$-f_l^{max} \leq \sum_{n=1}^{N_b-1} M_{l,n}\hat{\theta}_{n,t}(\omega) \leq f_l^{max}$$

(2.38)

onde:

$i$  índice que vai de 1 até o número de usinas do sistema  $H$ ;

$t$  índice que vai de 1 até o número de períodos  $T$ ;

$m$  índice que representa as usinas à montante da usina atual  $i$ ;

$w$  índice que vai de 1 até o número de cenários  $N_w$ ;

$n$  índice que vai de 1 até o número de barras do sistema  $N_b$ ;

$k$  índice que vai de 1 até o número de barras de corte de carga do sistema  $N_y$ ;

$l$  índice que vai de 1 até o número linhas do sistema  $N_l$ .

### 2.2.3 Conclusão

Neste capítulo apresentamos as formulações matemáticas para a representação do problema de despacho centralizado de médio prazo

em um sistema hidrotérmico. Foi formulado um modelo não linear de otimização estocástica de dois estágios que realiza o despacho ótimo das usinas hidrelétricas tendo como objetivo a minimização do corte de carga, que representa a complementação térmica

As explicações contidas aqui são importantes no entendimento do capítulo seguinte sobre problema do produtor que, como veremos, possui o problema de despacho centralizado como restrição.

### 3 PROBLEMA DO PRODUTOR

No capítulo anterior vimos a formulação do despacho centralizado e explicamos que o mesmo é formulado tomando como referência o ponto de vista do operador do sistema elétrico. O problema do produtor reflete os objetivos desse agente em sua participação no mercado de energia. Sendo assim, para formularmos o problema do produtor é necessário que façamos uma revisão sobre alguns conceitos de microeconomia, tais como mercado, competição e teoria dos jogos.

#### 3.1 ESTRUTURA DE MERCADO

O termo mercado designa um local, físico ou não, no qual ofertantes e demandantes se relacionam com o fim de realizar transações de determinados bens. Como nenhum membro da sociedade é auto-suficiente, surge a necessidade de haver uma relação de troca entre esses membros. Essa interação gera um mecanismo de oferta e procura, que formará o valor do objeto de comercialização de acordo com a necessidade de cada um e, também, de acordo com a disponibilidade do bem.

Em uma situação ideal de mercado competitivo, o preço é determinado pela interação entre as forças de oferta e demanda [23], ou seja, a influência de um único produtor ou consumidor isolado é insignificante na formação do preço de determinado produto. Quando essa situação ideal inexistente, temos o monopólio ou o monopsonio.

O monopólio é uma situação de mercado em que existe apenas um produtor de determinado produto e vários consumidores desse mesmo produto em um mercado, podendo, assim, este produtor influenciar o preço do produto. Obviamente esse produtor não deve elevar o preço do produto como bem entende, deverá levar em consideração a demanda e a racionalidade do consumidor. Mais especificamente, o preço do produto e a quantidade a ser produzida devem ser escolhidos de tal forma que o custo marginal seja igual à receita marginal. A receita marginal é a variação na receita do produtor resultante do aumento da produção de uma unidade, e o custo marginal é a mudança no custo variável associada ao aumento de uma unidade de produto [23].

Por exemplo, seja a função custo de produção de uma usina termelétrica:

$$F(P) = 400 + 2,0P + 0,002P^2 \text{ \$/h} \quad (3.1)$$

Derivando a equação (3.1) em relação à potência gerada  $P$ , que é o produto, obtemos o custo marginal da usina:

$$\frac{\Delta F(P)}{\Delta(P)} = 2,0P + 0,004P \text{ \$/h} \quad (3.2)$$

A equação (3.2) representa a variação no custo, no caso o custo variável da termelétrica, associado ao aumento da sua produção  $P$  em uma unidade.

Na prática o monopólio de um produtor apenas (monopólio puro) é incomum, pois normalmente existem outros produtores no mercado, que podem formar um oligopólio, onde poucos produtores detêm o controle do comércio daquele produto. Dessa forma, utiliza-se o conceito de poder de monopólio, ou seja, o produtor não tem o monopólio puro do mercado, mas possui um poder de monopólio que pode ser mensurado. Se o produtor possui poder de monopólio, o preço do seu produto é maior que o seu custo marginal; no caso em que o preço é igual ao custo marginal, o produtor é competitivo e não exerce nenhum monopólio, poder de monopólio nulo [23].

Para mensurarmos o poder de monopólio, utilizamos o índice de Lerner de poder de monopólio [23], que é a diferença entre o preço e o custo marginal, dividida pelo preço, assim:

$$L = \frac{P - CM_g}{P} \quad (3.3)$$

onde, para um produtor perfeitamente competitivo o preço será igual ao custo marginal e seu índice será nulo; e para um custo marginal 0, o índice será 1.

O objetivo é medir o excesso de preço sobre o custo marginal como uma fração do preço, que é a medida do quanto as pessoas estão dispostas a pagar a mais pelo produto.

Através da curva de demanda do produto, que é o quanto os consumidores estão dispostos a consumir o produto em diferentes preços, é possível tirarmos conclusões sobre o poder de monopólio do produtor, ou seja, quanto menos elástica for a curva de demanda, mais poder de monopólio ele terá [23].

Esse poder de monopólio pode vir de três fontes:

- a elasticidade da demanda de mercado: a elasticidade de demanda do mercado mede a sensibilidade causada na demanda



de um produto com variação de seu preço. Assim, produtos com demanda inelástica possuem um poder de monopólio maior; a energia elétrica pode ser considerado um produto com demanda inelástica;

- quantidade de produtores: com um número alto de produtores fornecendo o mesmo produto, fica difícil influenciar o preço de mercado;
- interação entre produtores: em uma situação com uma acirrada concorrência entre os produtores, mais uma vez, fica muito complicado haver algum que irá elevar seu lucro com o aumento do preço, já que todos os produtores estão com o mesmo objetivo.

O monopsonio ocorre quando existe apenas um consumidor e vários vendedores, podendo, assim, este comprador influenciar no preço do produto, exercendo uma influência de mercado.

Da mesma forma definida anteriormente com o produtor influenciando o mercado, podemos definir aqui também o oligopsonio, que é quando a influência de mercado é exercida por poucos consumidores, não por um apenas; e o poder de monopsonio que é a capacidade que o comprador tem de influenciar o preço do produto, podendo adquiri-lo por um preço inferior ao preço num mercado competitivo [23].

Como o foco do trabalho é analisar a competição entre os produtores, um maior detalhamento sobre monopsonio não será feito aqui. É importante mencionar que tudo o que existe na análise do monopólio, visto anteriormente, existe no monopsonio, porém tudo é visto sob o ponto de vista do comprador.

## 3.2 COMPETIÇÃO

Mercados podem ser perfeitamente competitivos ou imperfeitos. Como já foi dito, o monopólio é uma competição imperfeita onde existe apenas um ofertante no mercado, o que é uma situação rara de ocorrer. Mas existem outros tipos de competições imperfeitas. Duas situações, a competição monopolista e a oligopolista, são vistas aqui.

### 3.2.1 Monopolista

A competição monopolista fica entre a competição perfeita e o monopólio. Apresenta as seguintes características principais [23]:

1. Os produtos são levemente diferenciados um dos outros e podem ser substituídos um pelo outro facilmente;
2. Há a livre entrada ou saída de ofertantes, entrando ou saindo do mercado, se for lucrativo ou não para cada um deles; é um mercado de acesso fácil.

Notam-se algumas consequências como a impossibilidade de altos lucros, devido à facilidade de entrada de novos produtores no mercado atraídos pela possibilidade de também terem lucros. Isso, a longo prazo, acaba equilibrando a competição, impossibilitando, por exemplo, um produtor de aumentar o preço de seu produto de forma exorbitante. Lembrando que o longo prazo, aqui citado, é o instante em que nenhum produtor tem incentivo para entrar ou sair da competição. Mas é importante salientar que o mesmo continuará com seu poder de monopólio.

Um bom exemplo desse tipo de competição é o mercado de refrigerantes, em que podemos perceber os conceitos vistos: muitas marcas competindo, não há uma disparidade muito alta de preços das marcas, pequenas características que diferem um produto do outro.

### 3.2.2 Oligopolista

Na competição oligopolista o mercado apresenta duas características principais [23]:

1. Os produtos podem ser ou não diferenciados um dos outros;
2. É muito difícil ou impossível que novas empresas entrem no mercado.

Devido a essas características, notamos algumas consequências como a possibilidade de altos lucros no longo prazo, devido a dificuldades na entrada de novos produtores no mercado. Dificuldades essas devidas à economia de escala, a patentes, necessidade de gastar muito dinheiro para tornar uma marca conhecida, entre outros motivos.

Nas estratégias de ação dos produtores em uma competição oligopolista, cada um deve levar em consideração as reações dos concorrentes, já que são poucos competindo. Assim, supondo que os produtores possuem ações e reações racionais, cada um fará o que acha melhor que pode em função do que seus concorrentes estão fazendo, atingindo um equilíbrio chamado equilíbrio de Nash [23].

Uma das situações abordadas neste trabalho é uma competição oligopolista. Sendo assim, faz-se necessário falarmos um pouco mais sobre ela. Para isso e para uma melhor análise dessa competição, utilizaremos o menor número possível de concorrentes na competição oligopolista, que é dois, ou ainda, duopólio, nos exemplos dos modelos. Assim, um produtor deve levar apenas o outro em consideração nas suas estratégias de ação.

Os principais modelos que representam uma competição oligopolista são o de Cournot, o de Stackelberg e o de Bertrand. Esses modelos são explicados na próxima seção.

### 3.3 TEORIA DOS JOGOS

A teoria dos jogos é um ramo da matemática que analisa situações onde há agentes tomadores de decisão (competidores) com objetivo de chegar na melhor estratégia de ação para os agentes [24], sendo que as decisões tomadas devem ser racionais e sempre levam-se em consideração, na decisão de um competidor, as decisões dos demais.

O jogo é uma descrição da interação estratégica que incluem as restrições das ações que os jogadores podem tomar e os interesses dos jogadores, mas não especifica as ações que os jogadores devem tomar.

O diagrama da Figura 3.1 a seguir mostra como os jogos são classificados [24]:

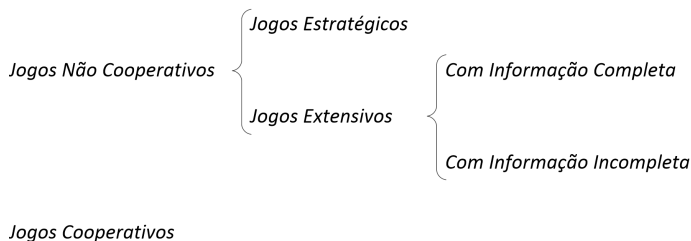


Figura 3.1: Classificação dos jogos

Nos jogos não cooperativos, as decisões dos jogadores são tomadas apenas baseando-se em seus próprios interesses. Aqui, cada competidor toma suas decisões visando obter o maior benefício, dadas as ações dos concorrentes [23]. Os leilões de energia são exemplos de jogos não cooperativos: cada jogador deve levar em conta a ação do concorrente para oferecer seu lance e definir sua estratégia de ação.

Já os jogos cooperativos analisam estratégias ótimas para competidores, presumindo que eles possam unir esforços no que diz respeito a suas estratégias adotadas. Os competidores formam coalizões. Ou seja, cada grupo de jogadores toma ações conjuntas independentemente do restante dos jogadores [24]. Um situação que serve como exemplo é uma possível união entre duas empresas para desenvolver algum produto, já que sozinhas elas não conseguiriam fazê-lo. O lucro das vendas seria então dividido entre as duas.

O jogo estratégico modela um evento em que cada jogador escolhe sua estratégia simultaneamente e independentemente, sem conhecer a ação do concorrente, exceto suas ações passadas. Leilões são exemplos desse tipo de jogo. Um jogo estratégico possui:

- Um conjunto finito de jogadores  $i = \{1, 2, \dots, I\}$ ;
- Um conjunto de estratégias  $S_1, S_2, \dots, S_I$ , uma para cada jogador  $i \in I$ ;
- Recompensa  $u_i$ , que é o “payoff” de cada jogador para cada combinação de estratégias que poderia ser escolhido por ele;
- A função recompensa (ou função de utilidade ou função de payoff)  $u_i(s)$  que associa a cada vetor de estratégias possíveis (perfil de estratégias)  $s = \{s_1, \dots, s_I\}$  um vetor de payoff para cada jogador, onde  $s \in \mathbf{S}$  e  $\mathbf{S} = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_I$ .

Uma estratégia é dita dominante se, quando adotada pelo jogador  $i$ , possuir mais retorno que todas as outras possibilidades de estratégia utilizadas por ele e pelos outros jogadores, assim a seguinte condição será satisfeita:

$$u_i(s'_i, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i}) \quad (3.4)$$

onde:

- $i$  representa um jogador;
- $-i$  todos os outros participantes do jogo;
- $s'_i$  é a estratégia adotada pelo jogador  $i$ ;
- $s_{-i}$  é o conjunto de estratégias dos outros jogadores concorrentes.

O jogo extensivo modela uma situação onde cada jogador pode alterar sua estratégia em qualquer instante, não só no início do jogo,

ou seja, as ações não são feitas simultaneamente pelos jogadores e eles podem mudar sua estratégia no decorrer do jogo. Normalmente é representado em forma de árvore. Neste tipo de jogo, pode haver a situação onde o jogador possui informação completa (ou perfeita) sobre as ações escolhidas pelos concorrentes no passado, ou ainda, onde cada jogador conhece a função payoff dos demais jogadores; ou a situação em que essa informação é incompleta (ou imperfeita), ou seja, pelo menos um jogador não conhece a função payoff dos outros jogadores [25].

### 3.3.1 Equilíbrio de Nash

O equilíbrio de Nash, já citado anteriormente, é um conceito usado na análise de jogos não cooperativos [26].

Considerando um jogo não-cooperativo, com os jogadores agindo de forma racional, o equilíbrio de Nash é um perfil de estratégias tal que a estratégia de cada jogador é ótima para as estratégias dos outros jogadores [25], ou seja, gera o melhor payoff para todos os jogadores e nenhum jogador desvia de sua estratégia dado que os outros jogadores não desviam. A condição para o equilíbrio é dada pela seguinte expressão:

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*) \quad (3.5)$$

onde:

$s_i^*$  é a estratégia de ação que traz a melhor recompensa (recompensa ótima) para o jogador  $i$ ;

$s_{-i}^*$  é a estratégia de ação adotada pelos outros jogadores participantes do jogo que traz a melhor recompensa para o jogador  $i$ .

Para explicar melhor o equilíbrio de Nash é utilizado o jogo *dilema do prisioneiro*. Nesse jogo duas pessoas estão presas por um crime; a polícia não possui provas o suficiente para incriminá-los, logo coloca cada prisioneiro em celas diferentes a fim de que eles não se comuniquem e testemunhem um contra o outro (jogo não cooperativo). A situação para os presos é que, se ambos confessarem, ambos terão penas de 3 anos; se ambos não confessarem, ambos terão penas de 1 ano; se um confessar e acusar o outro, aquele que confessou não ficará preso e o outro terá uma pena de 10 anos. A estratégia de ação de cada prisioneiro é um dilema para eles. Nesse tipo de análise utilizamos a *matriz*

de *payoff*, que é a tabela que mostra o benefício que cada competidor terá em função de sua decisão e da decisão de seu concorrente [23]. Na Tabela 3.1 podemos ver a matriz de *payoff* deste jogo:

Tabela 3.1: Dilema do Prisioneiro

		B	
		Confessa	$\tilde{N}$ Confessa
A	Confessa	-3,-3	0,-10
	$\tilde{N}$ Confessa	-10,0	-1,-1

Se os dois pudessem se comunicar para entrarem em acordo, escolheriam não confessar, mas eles estão impossibilitados de fazê-lo, pois estão incomunicáveis; e mesmo que pudessem, não poderiam confiar um no outro, sendo que um prisioneiro confessando e outro não, o que confessou se livraria da prisão e o outro ficaria preso. Se o prisioneiro A não confessar ele poderá ficar preso 1 ano, caso o prisioneiro B não confesse também, mas há o risco dele ficar preso por 10 anos caso o prisioneiro B confesse; idem na situação contrária. Logo a melhor estratégia para cada prisioneiro, que é também a melhor para todos, é confessar. O equilíbrio de Nash ocorrerá se os dois prisioneiros confessarem.

### 3.3.2 Modelos

Os modelos vistos a seguir são representações abstratas de situações reais e todos são competições oligopólicas não cooperativas.

#### 3.3.2.1 Modelo de Cournot

A primeira aplicação do raciocínio da teoria dos jogos que aparece na literatura econômica foi feita na discussão de oligopólio por Cournot em 1838.

Neste modelo de oligopólio, a variável de decisão é a quantidade, logo cada produtor supõe a quantidade produzida pelo concorrente simultaneamente (jogo estratégico) e todos decidem ao mesmo tempo a quantidade a ser produzida. Além disso, a produção é homogênea, ou seja, não existe diferenciação entre os produtos oferecidos pelas empresas concorrentes [23].

O equilíbrio de Nash deste modelo, também chamado de Cournot-

Nash, acontece quando cada um dos produtores produz uma quantidade que maximiza seus lucros em função da quantidade que está sendo produzida pelos concorrentes, de forma que nenhum deles se motive a alterar a quantidade que produz. Matematicamente, podemos considerar para este modelo a condição de equilíbrio da expressão (3.5).

Um exemplo simples desse modelo seria uma situação hipotética onde existem duas termelétricas (um duopólio), com funções custo de produção iguais:

$$C_1(q_1) = 24q_1 \quad (3.6)$$

$$C_2(q_2) = 24q_2 \quad (3.7)$$

onde  $q_1$  e  $q_2$  são as quantidades de energia produzida ou potência gerada pelas usinas 1 e 2, respectivamente.

Elas disputam um mercado consumidor de energia que possui uma função curva de demanda

$$P = 240 - 2q \quad (3.8)$$

onde,  $P$  representa o preço da energia e  $q = q_1 + q_2$ .

O benefício, ou lucro, de cada usina é calculado como sendo sua receita menos seu custo, assim:

$$B_1 = P \times q_1 - C_1 \quad (3.9)$$

$$B_2 = P \times q_2 - C_2 \quad (3.10)$$

Substituindo a variável  $P$  da equação (3.8) nas equações (3.9) - (3.10), chegamos que para as usinas 1 e 2 o benefício é:

$$B_1 = 216q_1 - 2q_1^2 - 2q_1q_2 \quad (3.11)$$

$$B_2 = 216q_2 - 2q_2^2 - 2q_1q_2 \quad (3.12)$$

O benefício máximo é obtido derivando e igualando a zero as funções benefício, representadas nas expressões (3.11) - (3.12) em função, respectivamente de  $q_1$  e  $q_2$ . Fazendo isso e algumas manipulações, encontramos as funções de reação das duas usinas:

$$q_1 = \frac{108 - q_2}{2} \quad (3.13)$$

$$q_2 = \frac{108 - q_1}{2} \quad (3.14)$$

Essas funções relacionam a produção de um usina com a produção da outra, medindo assim sua reação à variação da quantidade produzida pela usina concorrente.

O solução de equilíbrio para esse problema é encontrada resolvendo o sistema formado pelas expressões (3.13) e (3.14). Assim, obtemos os resultados a seguir:

Tabela 3.2: Resultado Cournot

$q_1$	$q_2$	$q$	$P$
36	36	72	96

O modelo de Cournot, devido às suas características como decisão da estratégia simultânea de cada jogador, pode ser usado para modelar uma situação de mercado onde uma dada empresa não apresenta vantagens sobre suas concorrentes.

### 3.3.2.2 Modelo de Bertrand

Em 1883, Bertrand propôs um modelo alternativo de competição oligopolista, no qual os produtores têm seus preços como variável de decisão, ao invés de quantidade produzida [26].

Como no modelo de Cournot, os produtos são homogêneos e todos decidem simultaneamente (jogo estratégico) qual o preço que será cobrado [23].

O equilíbrio de Nash deste modelo acontece quando cada um dos produtores estabelece um preço que maximiza seus lucros em função dos preços adotados pelos concorrentes, de forma que nenhum deles se motive a alterar seus preços. Matematicamente, podemos considerar para este modelo a condição para o equilíbrio a expressão (3.5).

Utilizamos como exemplo a mesma situação hipotética da seção anterior. Como a competição aqui é pelo menor preço, o menor preço possível do produto para cada usina será o seu custo marginal.

$$P_1 = CM_{a1} \quad (3.15)$$

$$P_2 = CM_{a2} \quad (3.16)$$

onde  $CM_{a1}$  e  $CM_{a2}$  são, respectivamente, os custos marginais das usinas 1 e 2.

O custo marginal é encontrado derivando a função custo de cada



usina em relação à quantidade produzida por ela. Como as funções custo das usinas são iguais (equações (3.6) - (3.7)), obtemos o preço  $P = 24$  para ambas as usinas.

Assim, substituindo esse valor de preço na curva de demanda, expressão (3.8), obtemos uma quantidade de energia a ser produzida  $q = 108$ , sendo que a usina 1 produz  $q_1 = 54$  e a usina 2  $q_2 = 54$ . Resumidamente na Tabela 3.3 a seguir:

Tabela 3.3: Resultado Bertrand

$q_1$	$q_2$	$q$	$P$
54	54	108	24

O modelo Bertrand, como o modelo de Cournot, pode ser utilizado em mercados onde uma dada empresa não apresenta vantagens sobre as concorrentes.

### 3.3.2.3 Modelo de Stackelberg

Ambos os modelos vistos anteriormente são jogos onde as decisões são tomadas simultaneamente pelos concorrentes. Em contraste a isso, Stackelberg propôs em 1934 um modelo de competição oligopolista em que as decisões tomadas pelos produtores não são simultâneas, ou seja, um produtor, chamado “líder”, decide sua estratégia em um primeiro instante antes dos concorrentes, chamados “seguidores”. É um jogo de duas etapas, sendo que [26]:

- Na primeira etapa, o líder determina sua quantidade de produção;
- Na segunda etapa, os remanescentes escolhem simultaneamente a sua quantidade de produção.

Novamente utilizamos como exemplo a mesma situação hipotética da seção sobre o modelo de Cournot. A usina 1 será o líder e a usina 2 será o seguidor. A variável de decisão será a quantidade de energia produzida pelas usinas.

A solução é encontrada substituindo a função de reação da usina seguidora, expressões (3.14), na função benefício do líder, expressões (3.9). Assim, a nova função benefício da usina líder será:

$$B_1 = 108q_1 - q_1^2 \quad (3.17)$$

Derivamos a expressão (3.17) em função da quantidade produzida pelo líder e igualamos a zero para obtermos o seu máximo benefício. Assim encontramos a quantidade de energia que deverá ser produzida pela usina líder,  $q_1 = 54$ . Pela expressão (3.14), que representa a função de reação da usina seguidora, obtemos a quantidade de energia que ela terá que produzir,  $q_2 = 27$ .

Com os valores encontrados para as potência gerada de cada usina, temos a potência gerada total, que é a soma de  $q_1$  e  $q_2$ ,  $q = 81$ . Utilizando a expressão (3.8) da curva de demanda, encontramos o preço da energia,  $P = 78$ . Resumidamente na Tabela 3.4 a seguir, os valores na situação de equilíbrio:

Tabela 3.4: Resultado Stackelberg

$q_1$	$q_2$	$q$	$P$
54	27	81	78

O modelo de Stackelberg, que é um modelo de jogo extensivo, pode ser utilizado em uma situação onde uma empresa possui poder de mercado maior sobre as demais. Por exemplo, uma empresa que já está atuando no mercado (líder) e uma outra empresa esta querendo se instalar (seguidor).

### 3.4 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DO PRODUTOR

O mercado de energia elétrica é considerado um mercado multi-commodity, incluindo pelo menos 4 produtos: energia, energia de reserva, energia de regulação e energia de balanço. Isso ocorre pois este mercado possui vários agentes (operador, produtor, distribuidor, consumidor) e a relação entre eles, em diferentes horizontes de tempo (longo, médio e curto prazo), cria interesses distintos com objetivos diferentes (mercado futuro, mercado de curto prazo, mercado de regulação e de reserva) [14].

Portanto, podemos estudar estratégias de atuação no mercado e de operação do sistema adotando diferentes pontos de vista: o do operador do sistema, o do produtor, o do consumidor e o ponto de vista do distribuidor.

O problema visto pelo agente produtor é encontrado em [8], onde é feita uma abordagem focando na maximização dos lucros de uma empresa de geração de energia hidrelétrica em um mercado do dia seguinte

de eletricidade, ou seja, em curto prazo.

O problema do produtor avalia o mercado sob o ponto de vista do produtor, tentando encontrar a melhor ação estratégica para maximizar o benefício para as suas usinas hidrelétricas, considerando que o operador do sistema minimiza o custo total de geração. A ação estratégica neste caso é o conjunto de ofertas de potência.

Por exemplo, em um sistema fictício formado por duas usinas hidrelétricas, o operador do sistema decide que o despacho de cada uma será 200 MW e 300 MW em um determinado período. Esses são valores ótimos, ou seja, serão os valores que cada usina deverá produzir para que se obtenha o mínimo custo operacional. Mas esses valores podem não ser os melhores para as duas usinas, tanto porque o operador não considerou algumas restrições particulares dessas usinas como também porque pode determinar que elas produzam energia em um nível mais baixo do que elas mesmas estavam programando (o que significa que elas terão lucro menor do que o projetado). Já que um mercado de energia foi implantado no Brasil, é importante analisar como atuariam os agentes produtores de eletricidade caso pudessem determinar seus despachos de geração. Para isso analisa-se o “problema do produtor”.

A interação entre o produtor, que busca definir a quantidade de energia que oferta ao mercado, e o operador do sistema, que reage à oferta realizada pelo produtor buscando um despacho global de mínimo custo, é representada pelo modelo de Stackelberg, tendo o produtor o papel de líder e o operador do sistema o papel de seguidor.

O conceito matemático utilizado na modelagem do problema do produtor é a otimização em dois níveis, no qual o objetivo e as restrições do produtor são modelados no problema de nível superior e o objetivo e as restrições impostas pelo operador do sistema são modelados no problema de nível inferior. O interesse dos dois agentes (produtor e operador do sistema) é antagônico, já que o produtor quer aumentar sua receita (proporcional à sua geração) e o operador acaba limitando essa receita, pois seu interesse é atender a carga com o menor custo possível. A equação (3.18) nos mostra de forma generalizada um problema de otimização bi-nível:

$$\begin{aligned}
 \min_{x \in R^n} \quad & f(x, y) \\
 \text{s.a.} \quad & c(x, y) \geq 0 \\
 & \min_{y \in R^m} g(x, y) \\
 & d(x, y) \geq 0
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

onde:

- $x$  é o vetor de variáveis do problema superior;
- $y$  é o vetor de variáveis do problema inferior, cujo valor ótimo depende do valor da variável  $x$  do nível superior;
- $f(x, y)$  é a função objetivo do problema superior;
- $g(x, y)$  é a função objetivo do problema inferior;
- $c(x, y)$  é o vetor de restrições do problema superior;
- $d(x, y)$  é o vetor de restrições do problema inferior.

O problema (3.18) modela uma situação na qual as decisões são tomadas na seguinte ordem: o planejador no nível 1 (líder) anuncia um plano de ação; logo em seguida o planejador no nível 2 (seguidor) reage de forma racional ao plano proposto pelo planejador de nível 1, otimizando seu plano de ação considerando seus próprios objetivos e restrições, tendo em vistas a proposta do nível superior; então o planejador do nível 1 responde racionalmente à proposta encaminhada pelo seguidor com um novo plano de ação. Tal interação prossegue até que não haja alterações nas propostas do líder e do seguidor. As propostas finais são a solução do problema.

Existem três formas principais de resolução do problema de dois níveis não lineares [27]:

- a que substitui as condições de otimalidade do problema de nível inferior como restrições do problema de nível superior, resultando em um problema de otimização não-convexo com um único nível;
- a que usa dupla-penalidade para aproximar os dois níveis por uma sequência de problemas de otimização irrestritos das funções objetivos aumentadas e penalizadas;
- a que usa métodos de descida para o problema de nível superior com informações sobre o gradiente do nível inferior.

A ação do agente produtor irá maximizar seu lucro, através da minimização do desvio de volume com relação a uma meta de volume, levando em conta a ação do operador do sistema, que garantirá o atendimento da carga, das restrições de transmissão, limites do reservatório e de todas as restrições que foram vistas antes para o despacho centralizado, visando um mínimo custo de operação. As ofertas de energia dos demais agentes produtores serão consideradas constantes na resolução do problema de um produtor.

Considerando como critério de desempenho a minimização do corte de carga, para o operador do sistema (problema inferior), e atendimento de meta de volume para o produtor  $i$  (problema superior), temos o problema do produtor é modelado da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
& \min \sum_{\omega=1}^{N_\omega} \prod(\omega) |v_{i,T}(\omega) - v_i^{esp}| \\
& \text{s.a.:} \\
& \text{Conj.} \quad \text{de Restrições (2.37)} \\
& Of_{i,1}(1) = Of_{i,1}(2) = \dots = Of_{i,1}(N_\omega) \\
& Ph_i^{min} \leq Of_{i,t}(\omega) \leq Ph_i^{max} \\
& \min_{\tau(\omega)} \prod(\omega) \sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^{N_y} y_{k,y}(\omega) \\
& \text{s.a.:} \\
& v_{i,t}(\omega) = v_{i,t-1}(\omega) + h_t[r_{i,t} - q_{i,t}(\omega) - u_{i,t}(\omega)] + \\
& \quad + \sum_{m \in \Omega} h_t[q_{m,t}(\omega) + u_{m,t}(\omega)] \\
& Ph_{i,t}(\omega) = \rho_i[hm_{i,t}(\omega) - hj_{i,t}(\omega)]q_{i,t}(\omega) \quad \omega = 1, \dots, N_\omega \\
& \sum_{i=1}^H Ah_{n,i}Ph_{i,t}(\omega) + \sum_{k=1}^{N_y} Ay_{n,k}y_{k,t}(\omega) - \\
& \quad - \sum_{s=1}^{N_b-1} \hat{B}_{n,s}\hat{\theta}_{s,t}(\omega) = Pd_{n,t} \\
& Ph_i^{min} \leq Ph_{i,t}(\omega) \leq Of_{i,t}(\omega) \\
& v_i^{min} \leq v_{i,t}(\omega) \leq v_i^{max} \\
& q_i^{min} \leq q_{i,t}(\omega) \leq q_i^{max} \\
& 0 \leq u_{i,t}(\omega) \leq u_{i,t}^{max} \\
& 0 \leq y_{k,t}(\omega) \leq y_{k,t}^{max} \\
& -f_l^{max} \leq \sum_{n=1}^{N_b-1} M_{l,n}\hat{\theta}_{n,t}(\omega) \leq f_l^{max}
\end{aligned} \tag{3.19}$$

onde:

$Of_{i,t}(\omega)$  oferta de geração de energia feita pelos produtores, variável controlada pelo problema superior (produtor);

$\tau(\omega)$  vetor de variáveis primais do problema de nível inferior em cada cenário  $w$ :  $\tau(\omega) = [Ph_{i,t}(\omega), v_{i,t}(\omega), q_{i,t}(\omega), u_{i,t}(\omega), \theta_{i,t}(\omega), y_{k,t}(\omega)]$ .

O procedimento adotado para a resolução do problema bi-nível é substituir o problema de nível inferior por suas condições de otimalidade, que são expressas usando a condição de dualidade forte. Isolamos o problema inferior visto na equação (3.19) e o mostramos a seguir, associando cada restrição a um multiplicador de Lagrange:

$$\begin{aligned}
& \min_{\tau(\omega)} \quad \prod(\omega) \sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^{N_y} y_{k,y}(\omega) \\
& \text{s.a.:} \\
& v_{i,t}(\omega) - v_{i,t-1}(\omega) - h_t[r_{i,t} - q_{i,t}(\omega) - u_{i,t}(\omega)] - \\
& \quad - \sum_{m \in \Omega} h_t[q_{m,t}(\omega) + u_{m,t}(\omega)] = 0 \quad : \alpha_{i,t}(\omega) \\
& Ph_{i,t}(\omega) - \rho_i[hm_{i,t}(\omega) - hj_{i,t}(\omega)]q_{i,t}(\omega) = 0 \quad : \beta_{i,t}(\omega) \\
& \sum_{i=1}^H Ah_{n,i}Ph_{i,t}(\omega) + \sum_{k=1}^{N_y} Ay_{n,k}y_{k,t}(\omega) - \\
& \quad - \sum_{s=1}^{N_b-1} \hat{B}_{n,s} \hat{\theta}_{s,t}(\omega) - Pd_{n,t} = 0 \quad : \lambda_{i,t}(\omega) \\
& Ph_{i,t}(\omega) - Ph_i^{min} \geq 0 \quad : \gamma_{i,t}^{min}(\omega) \\
& -Ph_{i,t}(\omega) + Of_{i,t}(\omega) \geq 0 \quad : \gamma_{i,t}^{max}(\omega) \\
& v_{i,t}(\omega) - v_i^{min} \geq 0 \quad : \rho_{i,t}^{min}(\omega) \\
& -v_{i,t}(\omega) + v_i^{max} \geq 0 \quad : \rho_{i,t}^{max}(\omega) \\
& q_{i,t}(\omega) - q_i^{min} \geq 0 \quad : \sigma_{i,t}^{min}(\omega) \\
& -q_{i,t}(\omega) + q_i^{max} \geq 0 \quad : \sigma_{i,t}^{max}(\omega) \\
& u_{i,t}(\omega) - 0 \geq 0 \quad : \kappa_{i,t}^{min}(\omega) \\
& -u_{i,t}(\omega) + u_i^{max} \geq 0 \quad : \kappa_{i,t}^{max}(\omega) \\
& y_{i,t}(\omega) - 0 \geq 0 \quad : \pi_{k,t}^{min}(\omega) \\
& -y_{i,t}(\omega) + y_i^{max} \geq 0 \quad : \pi_{k,t}^{max}(\omega) \\
& \sum_{n=1}^{N_b-1} M_{l,n} \hat{\theta}_{n,t}(\omega) + f_l^{max} \geq 0 \quad : \zeta_{l,t}^{min}(\omega) \\
& - \sum_{n=1}^{N_b-1} M_{l,n} \hat{\theta}_{n,t}(\omega) + f_l^{max} \geq 0 \quad : \zeta_{k,t}^{max}(\omega)
\end{aligned} \tag{3.20}$$

### 3.4.0.1 Condições de Otimalidade

A cada problema de otimização, que chamamos de primal,  $P(\omega)$ , está associado um outro problema chamado dual,  $D(\omega)$ . Ambos apresentam dois pontos de vista diferentes sobre os mesmos dados, e ainda, caso algum deles tenha solução ótima, a existência de solução ótima para outro está garantida, e se ambos possuem soluções ótimas, os valores ótimos de suas funções objetivos são iguais caso  $P(\omega)$  seja convexo

(condição de dualidade forte) [10].

Assim, o problema do operador, representado por (3.20), é substituído pelas restrições dos problemas primal e dual e pela condição de dualidade forte.

Para conseguirmos o problema dual, primeiramente definimos o Lagrangeano de (3.20),  $\mathcal{L}(\tau(\omega), \psi(\omega))$ . A função objetivo do problema dual é definida como:

$$d[\psi(\omega)] = \min_{\tau(\omega)} \mathcal{L}[\tau(\omega), \psi(\omega)] \quad (3.21)$$

onde:

$\psi(\omega)$  é o vetor formado pelos multiplicadores de Lagrange do problema inferior em cada cenário  $w$ .

Tendo sido obtida a função dual, o problema dual é definido como:

$$\max_{\psi(\omega) \in \mathcal{E}} d[\psi(\omega)] \quad (3.22)$$

onde:

$\mathcal{E}$  é o conjunto factível dos multiplicadores de Lagrange.

O Apêndice A detalha a obtenção do dual do problema (3.20) e da condição de dualidade forte. A solução ótima de (3.20) deve satisfazer:

- as restrições desse problema;
- as restrições do dual desse problema;
- a condição de dualidade forte.

Portanto, o problema (3.20) pode ser substituído pelas condições acima, transformando o problema do produtor (3.19) no problema de otimização de um único nível expresso em (3.23):

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{\omega=1}^{N_\omega} \prod(\omega) |v_{i,t}(\omega) - v_i^{esp}| \\
\text{s.a.:} \quad & \text{Conjunto de Restrições (2.37)} \\
& Of_{i,1}(1) = Of_{i,1}(2) = \dots = Of_{i,1}(N_\omega) \\
& Ph_i^{min} \leq Of_{i,t}(\omega) \leq Ph_i^{max} \\
& v_{i,t}(\omega) = v_{i,t-1}(\omega) + h_t[r_{i,t} - q_{i,t}(\omega) - u_{i,t}(\omega)] + \\
& \quad + \sum_{m \in \Omega} h_t[q_{m,t}(\omega) + u_{m,t}(\omega)] \\
& Ph_{i,t}(\omega) = \rho_i[hm_{i,t}(\omega) - hj_{i,t}(\omega)]q_{i,t}(\omega) \\
& \sum_{i=1}^H Ah_{n,i}Ph_{i,t}(\omega) + \sum_{k=1}^{N_y} Ay_{n,k}y_{k,t}(\omega) - \\
& \quad - \sum_{s=1}^{N_b-1} \hat{B}_{n,s}\hat{\theta}_{s,t}(\omega) = Pd_{n,t} \quad \omega = 1, \dots, N_\omega \\
& Ph_i^{min} \leq Ph_{i,t}(\omega) \leq Of_{i,t}(\omega) \\
& v_i^{min} \leq v_{i,t}(\omega) \leq v_i^{max} \\
& q_i^{min} \leq q_{i,t}(\omega) \leq q_i^{max} \\
& 0 \leq u_{i,t}(\omega) \leq u_{i,t}^{max} \\
& 0 \leq y_{k,t}(\omega) \leq y_{k,t}^{max} \\
& -f_l^{max} \leq \sum_{n=1}^{N_b-1} M_{l,n}\hat{\theta}_{n,t}(\omega) \leq f_l^{max} \\
& \text{Condições (A.3) - (A.9) e (A.12)}
\end{aligned} \tag{3.23}$$

### 3.5 EXEMPLO

Um exemplo de formulação é feito para um melhor entendimento sobre o problema do produtor. Aqui foi utilizado um sistema fictício de 2 barras, com 2 usinas (Chavantes e Capivara) conectadas às duas barras do sistema. Em uma das barras está conectada a carga. Este sistema é mostrado na Figura 3.2.

Os dados das usinas são encontrados no Apêndice D. Os cenários de afluência utilizados são do ano 2013 e 2014.

O objetivo do problema é encontrar as ofertas da usina Chavantes em todos os períodos e que ela alcance sua meta de volume ao final do horizonte de tempo de planejamento. É definida uma oferta para a



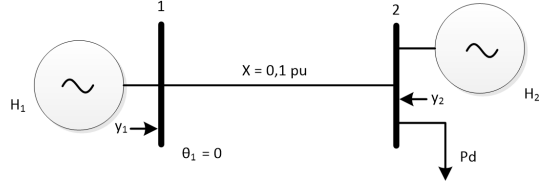


Figura 3.2: Sistema fictício de duas barras.

usina de Capivara que será fixa durante todos os períodos.

As ofertas das usinas são utilizadas como limites máximos de geração para o operador (problema inferior) calcular o despacho.

As equações de balanço de potência são mostradas as seguir:

$$\begin{aligned} Ph_{1,t}(\omega) + y_{1,t}(\omega) - Pd - P_{1,t}(\omega) &= 0 \\ Ph_{2,t}(\omega) + y_{2,t}(\omega) - Pd - P_{2,t}(\omega) &= 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

O fluxo de potência é calculado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f_{1,t}(\omega) &= \frac{\theta_{1,t}(\omega) - \theta_{2,t}(\omega)}{x_{12}} \quad (\text{da barra 1 para a barra 2}) \\ f_{2,t}(\omega) &= \frac{\theta_{2,t}(\omega) - \theta_{1,t}(\omega)}{x_{12}} \quad (\text{da barra 2 para a barra 1}) \end{aligned} \quad (3.25)$$

Como há apenas uma linha, teremos que:

$$\begin{aligned} P_1(\theta) &= \frac{\theta_{1,t}(\omega) - \theta_{2,t}(\omega)}{x_{12}} = -\frac{\theta_{2,t}(\omega)}{x_{12}} = -10\theta_{2,t}(\omega) \\ P_2(\theta) &= \frac{\theta_{2,t}(\omega) - \theta_{1,t}(\omega)}{x_{12}} = \frac{\theta_{2,t}(\omega)}{x_{12}} = 10\theta_{2,t}(\omega) \end{aligned} \quad (3.26)$$

As funções de produção são:

$$\begin{aligned} Ph_{1,t}(\omega) &= \rho_1 [hm_{1,t}(\omega) - hj_{1,t}(\omega)] q_{1,t}(\omega) \\ Ph_{2,t}(\omega) &= \rho_2 [hm_{2,t}(\omega) - hj_{2,t}(\omega)] q_{2,t}(\omega) \end{aligned} \quad (3.27)$$

Os limites das usinas são:

$$\begin{aligned}
0 &\leq Of_{1,t}(\omega) \leq Ph_1^{max} \\
0 &\leq Of_{1,t}(\omega) \leq Ph_1^{max} \\
0 &\leq Of_{1,t}(\omega) \leq Ph_1^{max} \\
v_1^{min} &\leq v_{1,t}(\omega) \leq v_1^{max} \\
v_2^{min} &\leq v_{2,t}(\omega) \leq v_2^{max} \\
q_1^{min} &\leq q_{1,t}(\omega) \leq q_1^{max} \\
q_2^{min} &\leq q_{2,t}(\omega) \leq q_2^{max} \\
0 &\leq u_{1,t}(\omega) \leq u_1^{max} \\
0 &\leq u_{2,t}(\omega) \leq u_2^{max} \\
0 &\leq y_{1,t}(\omega) \leq y_1^{max} \\
0 &\leq y_{2,t}(\omega) \leq y_2^{max}
\end{aligned} \tag{3.28}$$

O problema do produtor fica assim:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \Pi(1)|v_{1,1}(\omega) - v_1^{esp}| + \Pi(2)|v_{1,2}(\omega) - v_1^{esp}| \\
\text{s.a.:} \quad & Ph_1^{min} \leq Of_{1,1}(2) \leq Ph_1^{max} \\
& Ph_1^{min} \leq Of_{1,2}(2) \leq Ph_1^{max} \\
& Ph_1^{min} \leq Of_{1,1}(2) \leq Ph_1^{max} \\
& Ph_1^{min} \leq Of_{1,2}(2) \leq Ph_1^{max} \\
& Of_{1,1}(1) = Of_{1,1}(2) \\
& \text{Problema do Operador } \omega=1 \text{ (cenário 1)} \\
& \text{Problema do Operador } \omega=2 \text{ (cenário 2)} \\
& Ph_{1,1}(1) = Ph_{1,1}(2) \\
& Ph_{2,1}(1) = Ph_{2,1}(2) \\
& v_{1,1}(1) = v_{1,1}(2) \\
& v_{2,1}(1) = v_{2,1}(2) \\
& q_{1,1}(1) = q_{1,1}(2) \\
& q_{2,1}(1) = q_{2,1}(2) \\
& u_{1,1}(1) = u_{1,1}(2) \\
& u_{2,1}(1) = u_{2,1}(2) \\
& y_{1,1}(1) = y_{1,1}(2) \\
& y_{2,1}(1) = y_{2,1}(2)
\end{aligned} \tag{3.29}$$

O problema do operador  $\omega = 1$  para o cenário 1 fica assim:

$$\begin{aligned}
& \min \quad \prod(1)[y_{1,1}(1) + y_{1,2}(1) + y_{2,1}(1) + y_{2,2}(1)] \\
& \text{s.a.:} \\
& Ph_{1,1}(1) + y_{1,1}(1) + 10\theta_{2,1}(1) = 0 \\
& Ph_{2,1}(1) + y_{2,1}(1) - Pd - 10\theta_{2,1}(1) = 0 \\
& Ph_{1,1}(1) + y_{1,1}(1) + 10\theta_{2,2}(1) = 0 \\
& Ph_{2,2}(1) + y_{2,2}(1) - Pd - 10\theta_{2,2}(1) = 0 \\
& -f_1^{max} \leq -10\theta_{2,1}(1) \leq f_1^{max} \\
& -f_1^{max} \leq -10\theta_{2,2}(1) \leq f_1^{max} \\
& Ph_1^{min} \leq Ph_{1,1}(1) \leq Of_{1,1}(1) \\
& Ph_2^{min} \leq Ph_{2,1}(1) \leq Ph_2^{max} \\
& Ph_{1,1}(1) = \rho_1[hm_{1,1}(1) - hj_{1,1}(1)]q_{1,1}(1) \\
& Ph_{2,1}(1) = \rho_2[hm_{2,1}(1) - hj_{2,1}(1)]q_{2,1}(1) \\
& Ph_1^{min} \leq Ph_{1,2}(1) \leq Of_{1,2}(1) \\
& Ph_2^{min} \leq Ph_{2,2}(1) \leq Ph_2^{max} \\
& Ph_{1,2}(1) = \rho_1[hm_{1,2}(1) - hj_{1,2}(1)]q_{1,2}(1) \\
& Ph_{2,2}(1) = \rho_2[hm_{2,2}(1) - hj_{2,2}(1)]q_{2,2}(1) \\
& v_1^{min} \leq v_{1,1}(1) \leq v_1^{max} \\
& v_1^{min} \leq v_{1,2}(1) \leq v_1^{max} \\
& v_2^{min} \leq v_{2,1}(1) \leq v_2^{max} \\
& v_2^{min} \leq v_{2,2}(1) \leq v_2^{max} \\
& q_1^{min} \leq q_{1,1}(1) \leq q_1^{max} \\
& q_1^{min} \leq q_{1,2}(1) \leq q_1^{max} \\
& q_2^{min} \leq q_{2,1}(1) \leq q_2^{max} \\
& q_2^{min} \leq q_{2,2}(1) \leq q_2^{max} \\
& 0 \leq u_{1,1}(1) \leq u_1^{max} \\
& 0 \leq u_{1,2}(1) \leq u_1^{max} \\
& 0 \leq u_{2,1}(1) \leq u_2^{max} \\
& 0 \leq u_{2,2}(1) \leq u_2^{max} \\
& 0 \leq y_{1,1}(1) \leq y_1^{max} \\
& 0 \leq y_{1,2}(1) \leq y_1^{max} \\
& 0 \leq y_{2,1}(1) \leq y_2^{max} \\
& 0 \leq y_{2,2}(1) \leq y_2^{max} \\
& v_{1,1}(1) = v_{1,0}(1) + [r_{11}(1) - q_{1,1}(1) - u_{1,1}(1)]h \\
& v_{1,2}(1) = v_{1,1}(1) + [r_{12}(1) - q_{1,2}(1) - u_{1,2}(1)]h \\
& v_{2,1}(1) = v_{2,0}(1) + [r_{21}(1) - q_{2,1}(1) - u_{2,1}(1)]h \\
& v_{2,2}(1) = v_{2,1}(1) + [r_{22}(1) - q_{2,1}(1) - u_{2,2}(1)]h
\end{aligned} \tag{3.30}$$

O problema do operador para o cenário 2 é análogo ao do cenário

1.

### 3.6 CONCLUSÃO

Apresentamos neste capítulo a formulação matemática do problema do produtor de um sistema hidrotérmico. Foi formulado um modelo binível não linear de otimização estocástica de dois estágios que determina as ofertas ótimas do produtor tendo em vista sua meta de volume de água armazenada ao final do período de planejamento. Considerando que qualquer desvio em relação à meta de volume do produtor representa um custo adicional para esse agente, o objetivo aqui é minimizar as perdas do produtor tendo em vista as ações tomadas pelo operador do sistema, que visam atender a todas restrições do sistema com mínima complementação térmica.

Com este capítulo, os dois problemas abordados neste trabalho foram formulados. Observa-se que são problemas não lineares e não convexos que podem possuir ótimos locais e globais. A linearização por partes, usada para calcular os ótimos globais desses problemas, é explicada a seguir, juntamente com a reformulação destes problemas.

## 4 LINEARIZAÇÃO POR PARTES

Vários dos fenômenos encontrados na natureza são modelados como funções não lineares e não convexas. Na formulação dos problemas de otimização, muitos desses fenômenos precisam ser utilizadas na função objetivo ou nas restrições desses problemas.

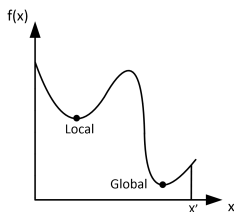


Figura 4.1: Mínimo local e global em função não convexa.

A Figura 4.1 indica uma função  $f(x)$  não convexa. Suponha que se deseja resolver o problema  $\min f(x)$ , sujeito a  $0 \leq x \leq 1$ . Através da observação da Figura 4.1, podemos perceber que este problema não convexo possui diferentes pontos de mínimo dentro do espaço factível. A grande maioria dos métodos numéricos de otimização podem obter um ou outro ponto de mínimo, dependendo do ponto de partida adotado. Assim, faz sentido utilizarmos dois termos distintos: solução ótima local e solução ótima global. A solução ótima global é a melhor das soluções ótimas locais. Uma definição mais completa sobre mínimo e máximo local, região factível e função convexa é encontrada no Apêndice B.

Em um problema não convexo, onde fica impossível termos uma noção de como é a região factível, não temos como saber se a solução encontrada é um ótimo local ou global. Uma abordagem utilizada para tentar contornar essa situação é a linearização por partes das funções não lineares.

As funções não lineares presentes num problema de otimização podem ser aproximadas por funções lineares por partes através da introdução de variáveis binárias auxiliares e restrições adicionais, que relacionam as variáveis contínuas do modelo com as variáveis binárias auxiliares. Com a transformação das funções não lineares em funções lineares por partes, o problema de otimização se transforma em um problema linear inteiro-misto que pode ser resolvido por métodos de busca exaustiva utilizados em “solvers” de estado da arte para Programação Linear Inteira-Mista (PLIM) [28].

## 4.1 CONCEITOS INICIAIS

Uma função  $f(x) : R^n \rightarrow R$  é uma função convexa linear por partes se puder ser expressa em termos de  $m$  vetores  $a_i$  e escalares  $b_i$  da seguinte forma (Figura 4.2):

$$f(x) = \max_{(i=1, \dots, m)} (a_i^T x + b_i) \quad (4.1)$$

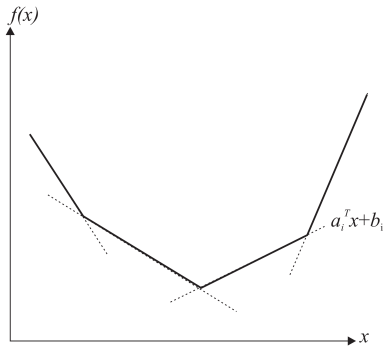


Figura 4.2: Função convexa linear por partes.

Para minimizar  $f(x)$  deve-se resolver o seguinte problema:

$$\min_x \max_{(i=1, \dots, m)} (a_i^T x + b_i) \quad (4.2)$$

que é equivalente a

$$\begin{array}{ll} \min_{t, x} & t \\ \text{s.a} & a_i^T x + b_i \leq t, \quad i = 1, \dots, m \end{array} \quad (4.3)$$

Considere agora o seguinte problema de otimização convexa:

$$\min_{x \in S} F(x) \quad (4.4)$$

sendo  $x$  um vetor de variáveis reais.

Este problema pode ser resolvido por um método de programação linear se  $F(x)$  for representada por uma função linear por partes. Suponha que  $F(x)$  seja representada por 4 segmentos de reta (Figura 4.3). O problema de otimização é reformulado como:

$$\begin{aligned}
 \min_{t, x \in S} \quad & t \\
 \text{s.a.} \quad & a_1^T x + b_1 \leq t \\
 & a_2^T x + b_2 \leq t \\
 & a_3^T x + b_3 \leq t \\
 & a_4^T x + b_4 \leq t
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

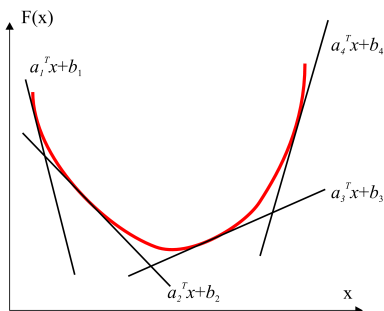


Figura 4.3: Aproximação linear por partes.

Após a linearização, se o problema tiver uma única solução ótima, ela estará num dos pontos de intercessão dos segmentos de reta usados na linearização.

Quando a função a ser minimizada é não convexa, a estratégia explicada anteriormente não pode ser usada, pois a função linear por partes que aproxima uma função não convexa também é não convexa. Neste caso, é necessário usar variáveis binárias. Um exemplo para entendimento da metodologia de utilização de variáveis binárias para representar uma função não convexa [1] é mostrado a seguir. A função custo não convexa  $c'(x)$  representada na Figura 4.4-a deve ser aproximada por uma função linear por partes e minimizada.

Na Figura 4.4-b a função  $c'(x)$  é aproximada por uma função linear por partes  $c(x)$  expressa da seguinte forma:

$$c(x) = \begin{cases} b_1 + k_1(x - 0) & \text{se } 0 \leq x \leq a_1 \\ b_2 + k_2(x - a_1) & \text{se } a_1 \leq x \leq a_2 \\ b_3 + k_3(x - a_2) & \text{se } a_2 \leq x \leq a_3 \end{cases} \tag{4.6}$$

Verifica-se, pela equação anterior, que cada segmento de reta usado na linearização de  $c(x)$  é válido numa parte específica do domínio da função. Para minimizar  $c(x)$  é necessário conhecer o segmento de reta que determina o ponto de mínimo. Assim, o domínio da

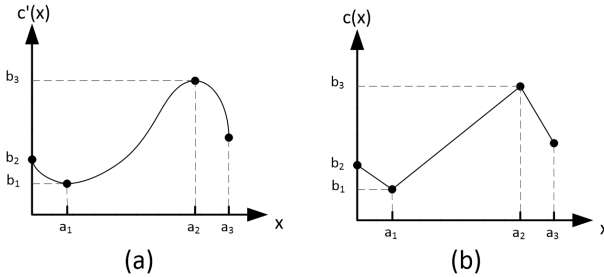


Figura 4.4: Aproximação linear por partes de uma função não convexa [1].

função é representado pelo conjunto de restrições (4.7) a seguir, onde as variáveis binárias  $y_1$ ,  $y_2$  e  $y_3$  são utilizadas para escolher cada segmento de reta utilizado na linearização.

$$\begin{aligned} 0 &\leq (x - 0) \leq y_1 a_1 \\ 0 &\leq (x - a_1) \leq y_2 (a_2 - a_1) \\ 0 &\leq (x - a_2) \leq y_3 (a_3 - a_2) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Como nós queremos que apenas uma segmento esteja ativo por vez, utilizamos a restrição (4.8) a seguir:

$$y_1 + y_2 + y_3 = 1 \quad (4.8)$$

Assim, temos a função por partes do custo  $c(x)$ :

$$c(x) = y_1(b_1 + k_1(x - 0)) + y_2(b_2 + k_2(x - a_1)) + y_3(b_3 + k_3(x - a_2)) \quad (4.9)$$

Com isso, podemos formular o problema de otimização linear por partes da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min \quad & (y_1 k_1 + y_2 k_2 + y_3 k_3)x + y_1 b_1 + y_2 (b_2 - k_2 a_1) + y_3 (b_3 - k_3 a_2) \\ \text{s.a.} \quad & 0 \leq x \leq y_1 a_1 \\ & a_1 \leq x \leq y_2 (a_2 - a_1) + a_1 \\ & a_2 \leq x \leq y_3 (a_3 - a_2) + a_2 \end{aligned} \quad (4.10)$$

Os exemplos anteriores mostram que, ao se usar linearização por partes para representar uma função não linear num problema de otimização, novas restrições devem ser acrescentadas a esse problema.



Quando a função é não convexa, o problema, que era não linear, passa a ser linear inteiro misto.

Para representar a função  $c'(x)$  da Figura 4.4, o domínio da função é particionado começando em  $x = 1$  e terminando em  $x = a_3$ . Quando se lineariza uma função bidimensional não convexa (Figura 4.5-a), devem ser usados polítopos, tal como mostrado na Figura 4.5-b. Ao contrário do que ocorre com os seguimentos de reta que linearizam uma função univariável, os polítopos da Figura 4.5-b possuem 4 pontos de conexão com polítopos adjacentes. Cada ponto de intercessão dos polítopos é um candidato à solução ótima do problema.

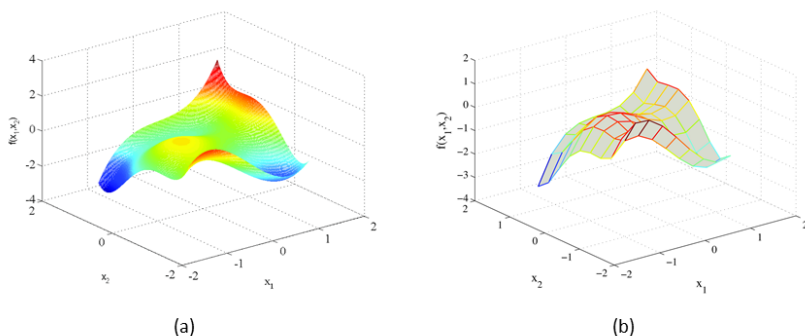


Figura 4.5: Linearização por partes de função bidimensional não convexa.

Para resolver um problema de otimização com funções não convexas linearizadas, os polítopos usados na linearização são divididos em simplexes. Simplex é o polítopo mais simples de sua dimensão. Formalmente, um simplex no espaço de dimensão  $k$  é o menor polítopo que une  $k + 1$  vértices, ou ainda a envoltória convexa de  $k + 1$  pontos. Portanto, no espaço de dimensão 0, o simplex é um ponto; no espaço unidimensional, o simplex é um segmento de reta unindo 2 pontos e, no espaço bidimensional, o simplex é um triângulo isósceles unindo 3 pontos. Já em um espaço tridimensional, os tetraedros são a forma volumétrica mais simples.

Considere os polítopos que aparecem na Figura 4.5-b. Cada um deles pode ser dividido em 2 triângulos isósceles de duas formas diferentes, dependendo da diagonal utilizada. A esta divisão denomina-se triangulação. Nota-se que, para percorrer a função na busca do ponto de mínimo, é necessário estabelecer uma lógica de ordenação para os

simplexes. O Apêndice C fornece maiores detalhes sobre o processo de triangulação e a lógica de ordenação utilizados neste trabalho. Além disso, o Apêndice C explica alguns conceitos usados na linearização das funções.

A metodologia utilizada neste trabalho é a combinação convexa desagregada, ela será melhor explicada mais adiante.

## 4.2 DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO LINEAR CONTÍNUA POR PARTES

Uma função contínua  $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , onde o domínio  $\mathcal{D}$  é limitado, é uma função linear por partes se e somente se existe  $\{m_P\}_{P \in \mathcal{P}} \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $\{c_P\}_{P \in \mathcal{P}} \subseteq \mathbb{R}$  e um conjunto finito de politopos  $\mathcal{P}$  tal que  $\mathcal{D} = \cup_{P \in \mathcal{P}} P$  e:

$$f(x) := m_P x + c_P, \quad x \in P, \quad \forall P \in \mathcal{P} \quad (4.11)$$

O conjunto de politopos  $\mathcal{P}$  é gerado de uma triangulação de  $\mathcal{D}$ . Para qualquer  $\mathcal{P}$ , teremos um conjunto finito de vértices  $\mathcal{V}(\mathcal{P}) = \cup_{P \in \mathcal{P}} V(P)$ , em que  $V(P)$  é o conjunto de vértices de cada politopo  $P$  [29]. A seguir veremos alguns exemplos com o intuito de facilitar o entendimento destas definições.

### 4.2.1 Exemplo

Na Figura 4.6 temos uma função linear por partes unidimensional. Esta função exemplifica o conceito apresentado na equação (4.11) e foi definida com base no exemplo mostrado em [28].

O domínio da função é  $\mathcal{D} = [0, 4]$ , dividido em uma família de simplexes  $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ , onde  $P_1 = [0, 1]$ ,  $P_2 = [1, 2]$ ,  $P_3 = [2, 3]$ ,  $P_4 = [3, 4]$ ,  $V(P_1) = \{0, 1\}$ ,  $V(P_2) = \{1, 2\}$ ,  $V(P_3) = \{2, 3\}$  e  $V(P_4) = \{3, 4\}$ , com os pontos do gráfico  $G = (\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) : \mathbf{x} \in \mathcal{D}$  sendo  $\{(0, 20), (1, 10), (2, 30), (3, 15), (4, 20)\}$ .

## 4.3 MODELOS LINEARES POR PARTES

Existem três estratégias principais para formular modelos lineares por partes. São elas:

- Combinação convexa: utilizam variáveis binárias para selecionar

cada segmento de reta que aproxima a função não linear, e calculam o valor da função como uma combinação convexa dos pontos de interseção dos segmentos de reta, ou ainda, nós vizinhos. Os métodos utilizados são classificados em dois grupos: métodos agregados e desagregados;

- Métodos de múltipla escolha: também utilizam variáveis binárias para selecionar cada segmento de reta da linearização. Calculam o valor da função linearizada a partir da inclinação dos segmentos de reta e dos pontos de interceptação desses segmentos;
- Modelo incremental: aqui a função é calculada como a soma de quantidades incrementais em cada segmento de reta usado na linearização, e as variáveis binárias determinam os segmentos usados no cálculo da função.

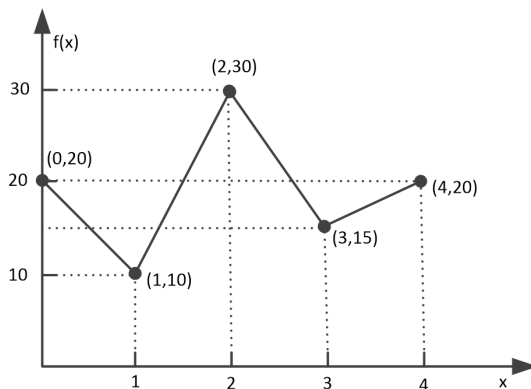


Figura 4.6: Função linear por partes não convexa com domínio unidimensional.

#### 4.4 MODELO DE COMBINAÇÃO CONVEXA DESAGREGADA

Considere a equação de  $f(x)$ . Existem vários modelos de programação inteira mista para linearização por partes desta função. O modelo adotado aqui é o mais simples, chamado de modelo de combinação convexa desagregada (DCC) básico. Quando a função a ser linearizada é univariável, este modelo é definido pela seguinte formulação:

$$\sum_{P \in \mathcal{P}} \sum_{\vartheta \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} \delta_{P,\vartheta} \vartheta = x \quad (4.12a)$$

$$\sum_{P \in \mathcal{P}} \sum_{\vartheta \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} \delta_{P,\vartheta} f(\vartheta) = f(x) \quad (4.12b)$$

$$\delta_{P,\vartheta} \geq 0, \forall P \in \mathcal{P}, \forall \vartheta \in \mathcal{V}(\mathcal{P}) \quad (4.12c)$$

$$\sum_{\vartheta \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} \delta_{P,\vartheta} = y_P, \forall P \in \mathcal{P} \quad (4.12d)$$

$$\sum_{P \in \mathcal{P}} y_P = 1, y_P \in \{0, 1\}, \forall P \in \mathcal{P} \quad (4.12e)$$

onde:

$P$  representa cada simplex,  $P \in \mathcal{P}$ ;

$\vartheta$  representa os vértices dos simplexes,  $\vartheta \in \mathcal{V}$ ;

$x$  variável independente da função não convexa a ser linearizada;

$\delta_{P,\vartheta}$  variáveis que parametrizam as combinações convexas dos vértices; há um conjunto delas (igual ao número de vértices) para cada simplex;

$y_P$  variável binária que ativa ou não os simplexes; número dessas variáveis é igual ao número de simplexes.

A equação (4.12e) representa uma restrição que ativa apenas um simplex por vez, desativando os outros, através do uso das variáveis binárias  $y_P$ .

Com apenas um simplex ativo, ou seja, valendo 1 (os outros são desativados porque as variáveis binárias relacionadas a eles valem 0), a equação (4.12d) faz com que apenas as variáveis  $\delta_{P,\vartheta}$ , relacionadas aos vértices do simplex ativo  $y_P$ , assumam valores no intervalo  $[0,1]$ ; todas as outras são anuladas. Isso é feito para limitar a combinação convexa a apenas um simplex.

As restrições 4.12a-4.12c representam um ponto do gráfico  $(x, f(x))$  como combinação convexa de  $(\vartheta, f(\vartheta))$  para  $\vartheta \in \mathcal{V}(\mathcal{P})$  [29].

#### 4.4.1 Caso unidimensional

A fim de que entendamos os conceitos apresentados, a formulação do modelo DCC básico para a função linear por partes unidimensional da Figura 4.6 é apresentada. Assim temos:

$$\sum_{P \in \mathcal{P}} \sum_{\vartheta \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} \delta_{P,\vartheta} \vartheta = x \leftrightarrow \begin{cases} \delta_{P_1,0}0 + \delta_{P_1,1}1 + \delta_{P_2,1}1 + \delta_{P_2,2}2 + \\ \delta_{P_3,2}2 + \delta_{P_3,3}3 + \delta_{P_4,3}3 + \delta_{P_4,4}4 = x \end{cases}$$

$$\sum_{P \in \mathcal{P}} \sum_{\vartheta \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} \delta_{P,\vartheta} f(\vartheta) = f(x) \leftrightarrow \begin{cases} \delta_{P_1,0}20 + \delta_{P_1,1}10 + \delta_{P_2,1}10 + \delta_{P_2,2}30 + \\ \delta_{P_3,2}30 + \delta_{P_3,3}15 + \delta_{P_4,3}15 + \delta_{P_4,4}20 = f(x) \end{cases}$$

$$\delta_{P,\vartheta} \geq 0, \forall P \in \mathcal{P}, \forall \vartheta \in \mathcal{V}(\mathcal{P}) \leftrightarrow \begin{cases} \delta_{P_1,0} \geq 0, \delta_{P_1,1} \geq 0, \delta_{P_2,1} \geq 0, \delta_{P_2,2} \geq 0, \\ \delta_{P_3,2} \geq 0, \delta_{P_3,3} \geq 0, \delta_{P_4,3} \geq 0, \delta_{P_4,4} \geq 0 \end{cases}$$

$$\sum_{\vartheta \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} \delta_{P,\vartheta} = y_P, \forall P \in \mathcal{P} \leftrightarrow \begin{cases} \delta_{P_1,0} + \delta_{P_1,1} = y_{P_1} \\ \delta_{P_2,1} + \delta_{P_2,2} = y_{P_2} \\ \delta_{P_3,2} + \delta_{P_3,3} = y_{P_3} \\ \delta_{P_4,3} + \delta_{P_4,4} = y_{P_4} \end{cases}$$

$$\sum_{P \in \mathcal{P}} y_P = 1 \leftrightarrow y_{P_1} + y_{P_2} + y_{P_3} + y_{P_4} = 1$$

$$y_P \in \{0, 1\}, \forall P \in \mathcal{P} \leftrightarrow y_{P_1} \in \{0, 1\}, y_{P_2} \in \{0, 1\}, y_{P_3} \in \{0, 1\}, y_{P_4} \in \{0, 1\}$$

#### 4.4.2 Caso Bidimensional

O modelo 4.12 pode ser generalizado para funções multivariáveis. Basta acrescentarmos outra restrição como (4.12a), referente à variável que se quer adicionar. Os outros parâmetros não mudam. Assim, generalizando teremos:

$$\sum_{P \in \mathcal{P}} \sum_{\vartheta \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} \delta_{P,\vartheta} \vartheta = \mathbf{x} \quad (4.13a)$$

$$\sum_{P \in \mathcal{P}} \sum_{\vartheta \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} \delta_{P,\vartheta} f(\vartheta) = f(\mathbf{x}) \quad (4.13b)$$

$$\delta_{P,\vartheta} \geq 0, \quad \forall P \in \mathcal{P}, \quad \forall \vartheta \in \mathcal{V}(\mathcal{P}) \quad (4.13c)$$

$$\sum_{\vartheta \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} \delta_{P,\vartheta} = y_P, \quad \forall P \in \mathcal{P} \quad (4.13d)$$

$$\sum_{P \in \mathcal{P}} y_P = 1, \quad y_P \in \{0, 1\}, \quad \forall P \in \mathcal{P} \quad (4.13e)$$

onde:

$\mathbf{x}$  vetor de variáveis independentes função não convexa a ser linearizada.

O caso bidimensional é mostrado através de uma função linear por partes aproximada da função não convexa a seguir:

$$f(x, y) = 3(1-x)^2 e^{-x^2-(y+1)^2} - 10\left(\frac{x}{5} - x^3 - y^5\right) e^{-x^2-y^2} - e^{-(x+1)^2-y^2} \quad (4.14)$$

Na Figura 4.7, vemos a equação (4.14) plotada, onde seu domínio é  $\mathcal{D} = [-2, 2]^2$ .

No caso de um domínio bidimensional, é preciso lançar mão de uma estratégia de subdivisão do domínio da função  $\mathcal{D} = [-2, 2]^2$ . À essa estratégia, damos o nome de triangulação. Aqui, é adotada a triangulação J1 que resulta em subdivisões de malhas quadradas regulares onde os quadrados da malha são subdivididos por uma de suas diagonais de forma alternada. Nessas triangulações regulares, todos os triângulos são retângulo isósceles, como podemos ver na Figura 4.8. Esses triângulos são simplexes no espaço bidimensional. Assim, temos que  $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_{32}\}$ , o conjunto de politopos. Há também um conjunto de vértices associado a cada politopo, são eles  $\vartheta(P_1) = \{(-2, -2), (-1, -2), (-1, -1)\}$ ,  $\vartheta(P_2) = \{(-2, -2), (-1, -2), (-1, -1)\}$ , ...,  $\vartheta(P_{32}) = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2)\}$ .

Para fins didáticos, a formulação do modelo DCC básico para a função linear por partes bidimensional da Figura 4.7 é:

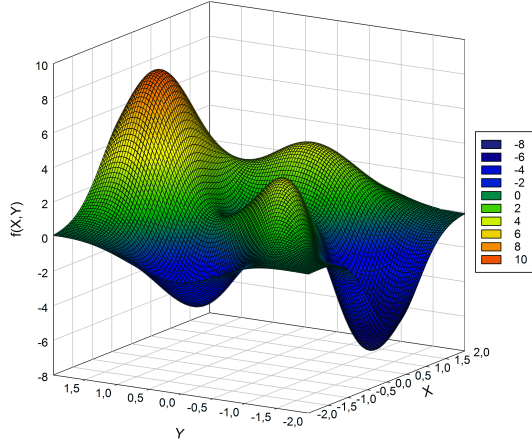


Figura 4.7: Função não convexa com domínio bidimensional

$$\sum_{P \in \mathcal{P}} \sum_{\vartheta \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} \delta_{P, \vartheta} \vartheta = x \leftrightarrow \begin{cases} \delta_{P_1, \vartheta_1^{P_1}}(-2) + \delta_{P_1, \vartheta_2^{P_1}}(-2) + \\ \delta_{P_1, \vartheta_3^{P_1}}(-1) + \delta_{P_2, \vartheta_1^{P_2}}(-2) + \\ \delta_{P_2, \vartheta_2^{P_2}}(-1) + \delta_{P_2, \vartheta_3^{P_2}}(-1) + \\ + \dots + \delta_{P_{32}, \vartheta_1^{P_{32}}}(1) + \delta_{P_{32}, \vartheta_2^{P_{32}}}(2) + \\ \delta_{P_{32}, \vartheta_3^{P_{32}}}(2, 2) = x \end{cases}$$

$$\sum_{P \in \mathcal{P}} \sum_{\vartheta \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} \delta_{P, \vartheta} \vartheta = y \leftrightarrow \begin{cases} \delta_{P_1, \vartheta_1^{P_1}}(-2) + \delta_{P_1, \vartheta_2^{P_1}}(-1) + \\ \delta_{P_1, \vartheta_3^{P_1}}(-1) + \delta_{P_2, \vartheta_1^{P_2}}(-2) + \\ \delta_{P_2, \vartheta_2^{P_2}}(-2) + \delta_{P_2, \vartheta_3^{P_2}}(-1) + \\ + \dots + \delta_{P_{32}, \vartheta_1^{P_{32}}}(1) + \delta_{P_{32}, \vartheta_2^{P_{32}}}(1) + \\ \delta_{P_{32}, \vartheta_3^{P_{32}}}(2) = y \end{cases}$$

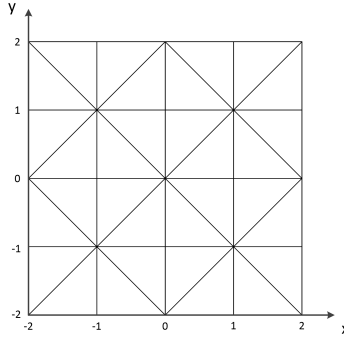


Figura 4.8: Resultado da triangulação

$$\sum_{P \in \mathcal{P}} \sum_{\vartheta \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} \delta_{P,\vartheta} f(\vartheta) = f(x, y) \leftrightarrow \begin{cases} \delta_{P_1, \vartheta_1^{P_1}} (0.0423) + \delta_{P_1, \vartheta_2^{P_1}} (-0.2203) + \\ \delta_{P_1, \vartheta_3^{P_1}} (1.6106) + \delta_{P_2, \vartheta_1^{P_2}} (0.0423) + \\ \delta_{P_2, \vartheta_2^{P_2}} (-0.6043) + \delta_{P_2, \vartheta_3^{P_2}} (1.6106) + \dots + \\ \delta_{P_{32}, \vartheta_1^{P_{32}}} (2.4293) + \delta_{P_{32}, \vartheta_2^{P_{32}}} (0.5804) + \\ \delta_{P_{32}, \vartheta_3^{P_{32}}} (0.1328) = f(x, y) \end{cases}$$

$$\delta_{P,\vartheta} \geq 0, \forall P \in \mathcal{P}, \forall \mathcal{V}(\mathcal{P}) \leftrightarrow \delta_{P_1, \vartheta_1^{P_1}} \geq 0, \delta_{P_1, \vartheta_2^{P_1}} \geq 0, \dots, \delta_{P_{32}, \vartheta_3^{P_{32}}} \geq 0$$

$$\sum_{\vartheta \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} \delta_{P,\vartheta} = y_P, \forall P \in \mathcal{P} \leftrightarrow \begin{cases} \delta_{P_1, \vartheta_1^{P_1}} + \delta_{P_1, \vartheta_2^{P_1}} + \delta_{P_1, \vartheta_3^{P_1}} = y_{P_1} \\ \delta_{P_2, \vartheta_1^{P_2}} + \delta_{P_2, \vartheta_2^{P_2}} + \delta_{P_2, \vartheta_3^{P_2}} = y_{P_2} \\ \vdots \\ \delta_{P_{32}, \vartheta_1^{P_{32}}} + \delta_{P_{32}, \vartheta_2^{P_{32}}} + \delta_{P_{32}, \vartheta_3^{P_{32}}} = y_{P_{32}} \end{cases}$$

$$\sum_{P \in \mathcal{P}} y_P = 1 \leftrightarrow y_{P_1} + y_{P_2} + \dots + y_{P_{32}} = 1$$

$$y_P \in \{0, 1\}, \forall P \in \mathcal{P} \leftrightarrow y_{P_1} \in \{0, 1\}, y_{P_2} \in \{0, 1\}, \dots, y_{P_{32}} \in \{0, 1\}$$

No Apêndice C são encontrados, além dos conceitos de trian-



gulação, politopo e simplex, a lógica de ordenação e obtenção dos vértices para cada politopo.

### 4.4.3 Caso tridimensional

Estendendo a lógica usada no caso anterior, podemos aplicar o mesmo conceito em uma situação envolvendo três variáveis, com algumas mudanças.

A triangulação utilizada aqui é uma extensão da ideia de triangulação J1, vista no tópico anterior. Há uma triangulação J1 (Figura 4.8) em cada um dos três planos ( $yz, xz, yz$ ) do espaço tridimensional, como vemos na Figura 4.9.

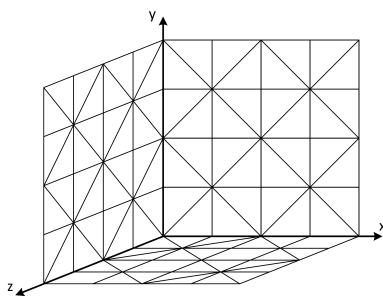


Figura 4.9: Triangulação J1 em cada plano  $\mathbb{R}^2$  do espaço  $\mathbb{R}^3$

À medida que seguimos esse padrão de triangulação em cada plano, obteremos um particionamento do espaço em várias células cúbicas. Para célula cúbica é adotada uma estratégia de subdivisão em 5 politopos iguais (5 tetraedros regulares), como vemos na Figura 4.10. Assim, teremos uma estrutura como mostrada na Figura C.2. Por exemplo, para um espaço com 4 partições em cada eixo, serão 128 cubos. Como cada cubo possuirá 5 tetraedros, então nesta situação o total de tetraedros será 640.

O caso tridimensional é apenas uma expansão do caso anterior, ao invés de 2 (caso bidimensional) teremos 3 vértices em cada politopo e o número de politopos aumenta. A lógica de ordenação e obtenção dos vértices para cada politopo é uma extensão da lógica utilizada no caso anterior. No apêndice C podem ser encontradas mais informações.

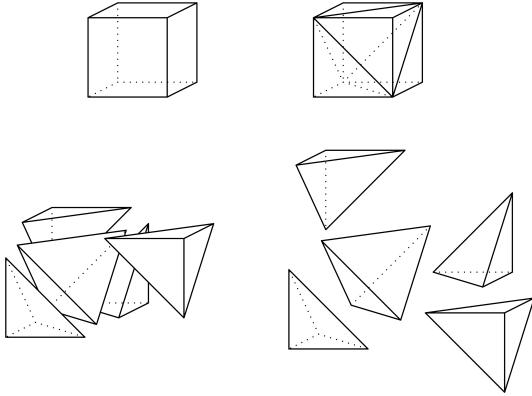


Figura 4.10: Decomposição do cubo em 5 tetraedros

## 4.5 FORMULAÇÃO DOS PROBLEMAS LINEARIZADOS

Nesta seção incluímos a metodologia de linearização por partes nos modelos de despacho centralizado e o problema do produtor, explicados anteriormente.

### 4.5.1 Despacho Centralizado

Como visto na equação (2.38), o modelo de despacho centralizado possui apenas um conjunto de restrições não convexas que são as funções de produção das usinas. Relembrando o que foi mencionado antes, essas equações relacionam as potências geradas pelas usinas e os valores de volume, turbinamento e vertimento das mesmas, equação (2.9).

Utilizamos para a função de produção a triangulação vista no caso tridimensional da seção anterior, pois a geração depende de 3 variáveis,  $Ph(v, q, u)$ . Em outras palavras, o espaço tridimensional definido pelas variáveis  $v$  (volume do reservatório),  $q$  (vazão turbinada) e  $u$  (vazão vertida) é particionado em cubos, onde cada cubo é também particionado em tetraedros. Os vértices de cada tetraedro guardarão os valores das três variáveis ( $v$ ,  $q$  e  $u$ ) e mais o valor da função de geração ( $Ph$ ) nesse ponto. Toda a lógica de ordenação e obtenção dos valores dos vértices de cada politopo e enumeração dos politopos é explicada no apêndice C.

Seguindo o que foi explicado na subseção 4.4.2, é criada uma nova restrição, como a restrição (4.12a), para cada variável da função de produção:  $v$ ,  $q$  e  $u$ . Os valores dos vértices referentes a cada variável são chamados de  $C_{v,i}$ ,  $C_{q,i}$ ,  $C_{u,i}$  e  $C_{Ph,i}$ . Esses valores são derivados das subdivisões feitas em cada dimensão, ou seja, valores das subdivisões do limite inferior ao superior de cada variável.

Assim, a formulação do problema de despacho centralizado 2.38 é a seguinte:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{\omega=1}^{N_\omega} \prod(\omega) \sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^{N_y} y_{k,y}(\omega) \\
 \text{s.a.} \quad & \text{Conjunto de Restrições (2.37)} \\
 & v_{i,t}(\omega) = v_{t-1,i}(\omega) + h_t[r_{i,t} - q_{i,t}(\omega) - u_{i,t}(\omega)] + \\
 & \quad + \sum_{m \in \Omega} h_t[q_{m,t}(\omega) + u_{m,t}(\omega)] \\
 & \sum_{P \in \mathcal{P}} \sum_{\vartheta \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} \delta_{P,\vartheta,i,t}(\omega) C_{v,i} = v_{i,t}(\omega) \\
 & \sum_{P \in \mathcal{P}} \sum_{\vartheta \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} \delta_{P,\vartheta,i,t}(\omega) C_{q,i} = q_{i,t}(\omega) \\
 & \sum_{P \in \mathcal{P}} \sum_{\vartheta \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} \delta_{P,\vartheta,i,t}(\omega) C_{u,i} = u_{i,t}(\omega) \\
 & \sum_{P \in \mathcal{P}} \sum_{\vartheta \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} \delta_{P,\vartheta,i,t}(\omega) C_{Ph,i} = Ph_{i,t}(\omega) \\
 & \delta_{P,\vartheta,i,t} \geq 0, \quad \forall P \in \mathcal{P}, \quad \forall \vartheta \in \mathcal{V}(\mathcal{P}) \\
 & \sum_{\vartheta \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} \delta_{P,\vartheta,i,t}(\omega) = y_{P,i,t}(\omega), \quad \forall P \in \mathcal{P} \\
 & \sum_{P \in \mathcal{P}} y_{P,i,t}(\omega) = 1, \quad y_{P,i,t}(\omega) \in \{0, 1\}, \quad \forall P \in \mathcal{P} \\
 & \sum_{i=1}^H Ah_{n,i} Ph_{i,t}(\omega) + \sum_{k=1}^{N_y} Ay_{n,k} y_{k,t}(\omega) - \sum_{s=1}^{N_b-1} \hat{B}_{n,s} \hat{\theta}_{s,t}(\omega) = Pd_{n,t} \\
 & Ph_i^{\min} \leq Ph_{i,t}(\omega) \leq Ph_i^{\max} \\
 & v_i^{\min} \leq v_{i,t}(\omega) \leq v_i^{\max} \\
 & q_i^{\min} \leq q_{i,t}(\omega) \leq q_i^{\max} \\
 & 0 \leq u_{i,t}(\omega) \leq u_{i,t}^{\max} \\
 & 0 \leq y_{k,t}(\omega) \leq y_{k,t}^{\max} \\
 & -f_l^{\max} \leq \sum_{n=1}^{N_b-1} M_{l,n} \hat{\theta}_{n,t}(\omega) \leq f_l^{\max}
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

para:  $i = 1, \dots, H$ ,  $t = 1, \dots, T$ ,  $\omega = 1, \dots, N_\omega$ ,  $k = 1, \dots, N_b$  e  $l = 1, \dots, N_l$

Podemos ver na formulação que haverá uma linearização por partes para a função de produção de cada usina ( $i$ ), período ( $t$ ) e cenário

( $\omega$ ). Conseqüentemente, o número de variáveis relacionadas à linearização depende do número de usinas hidrelétricas, de períodos do horizonte de estudo e da quantidade de cenários considerados.

#### 4.5.2 Problema do Produtor

Na formulação do problema do produtor, visto anteriormente, aparecem várias funções não convexas como restrições. São elas:

- funções de produção (3.19);
- as restrições que representam três condições de otimalidade (A.3) - (A.5);
- as restrições que representam a condição de dualidade forte (A.12).

Além disso, e devido ao fato de usarmos programação linear inteira mista, a função objetivo, que é modular e, portanto, não linear, deve ser representada de outra forma. Como vimos, a função objetivo do problema do produtor  $i$ , (3.19), é a seguinte:

$$\sum_{w=1}^{N_w} \prod(\omega) |v_{i,T}(\omega) - v_i^{esp}| \quad (4.16)$$

Usando a variável auxiliar  $var(\omega)$ ,

$$var(\omega) = v_{i,T}(\omega) - v_i^{esp} \quad (4.17)$$

A equação (4.16) pode ser expressa como:

$$\sum_{w=1}^{N_w} \prod(\omega) var(\omega), \quad (4.18)$$

desde que sejam adicionadas ao problema as seguintes restrições:

$$v_{i,T}(\omega) - v_i^{esp} \leq var(\omega), \quad (4.19)$$

$$-(v_{i,T}(\omega) - v_i^{esp}) \leq var(\omega), \quad (4.20)$$

e

$$var(\omega) \geq 0. \quad (4.21)$$

Foram criadas funções auxiliares para representar os termos não convexos das restrições citadas acima. Assim, a restrição (A.3) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_{i,t}(\omega)} = & -\alpha_{i,t}(\omega) + \alpha_{i,t+1}(\omega) - \rho_{i,t}^{min}(\omega) + \rho_{i,t}^{max}(\omega) + \\ & + faux1_{i,t}(\omega) = 0 \end{aligned} \quad (4.22)$$

sendo:

$$\begin{aligned} faux1_{i,t}(\omega) = & q_{i,t}(\omega)\beta_{i,t}(\omega)\rho_i[cv_{1,i} + 2cv_{2,i}v_{t,i}(\omega) + \\ & + 3cv_{3,i}v_{t,i}(\omega)^2 + 4cv_{4,i}v_{t,i}(\omega)^3] \end{aligned} \quad (4.23)$$

A restrição (A.4) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{i,t}(\omega)} = & -\alpha_{i,t}(\omega)h_t + \sum_{m \in \Omega} \alpha_{m,t}(\omega)h_t + faux2_{i,t}(\omega) - faux3_{i,t}(\omega) - \\ & - \sigma_{i,t}^{min}(\omega) + \sigma_{i,t}^{max}(\omega) - faux4_{i,t}(\omega) = 0 \end{aligned} \quad (4.24)$$

sendo:

$$\begin{aligned} faux2_{i,t}(\omega) = & \beta_{i,t}(\omega)\rho_i[cv_{0,i} + cv_{1,i}v_{t,i}(\omega) + cv_{2,i}v_{t,i}(\omega)^2 + \\ & + cv_{3,i}v_{t,i}(\omega)^3 + cv_{4,i}v_{t,i}(\omega)^4] \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} faux3_{i,t}(\omega) = & \beta_{i,t}(\omega)\rho_i[cq_{0,i} + cq_{1,i}[q_{i,t}(\omega) + u_{i,t}(\omega)] + cq_{2,i}[q_{i,t}(\omega) + \\ & + u_{i,t}(\omega)]^2 + cq_{3,i}[q_{i,t}(\omega) + u_{i,t}(\omega)]^3 + cq_{4,i}[q_{i,t}(\omega) + u_{i,t}(\omega)]^4] \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} faux4_{i,t}(\omega) = & q_{i,t}(\omega)\beta_{i,t}(\omega)\rho_i[cq_{1,i} + 2cq_{2,i}[q_{i,t}(\omega) + u_{i,t}(\omega)] + \\ & + 3cq_{3,i}[q_{i,t}(\omega) + u_{i,t}(\omega)]^2 + 4cq_{4,i}[q_{i,t}(\omega) + u_{i,t}(\omega)]^3] \end{aligned} \quad (4.27)$$

A restrição (A.5) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{i,t}(\omega)} = & -\alpha_{i,t}(\omega)h_t + \sum_{m \in \Omega} \alpha_{m,t}(\omega)h_t - \kappa_{i,t}^{min}(\omega) + \\ & + \kappa_{i,t}^{max}(\omega) - faux4_{i,t}(\omega) = 0 \end{aligned} \quad (4.28)$$

A restrição (A.12) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \prod(\omega) \sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^{N_y} y_{k,y}(\omega) + faux5_{i,t}(\omega) - faux6_{i,t}(\omega) - faux7_{i,t}(\omega) + \\ - \alpha_{i,t}(\omega)h_t r_{i,t}(\omega) - \lambda_{n,t}(\omega)Pd_{n,t} - \gamma_{i,t}^{min}(\omega)Ph_i^{min} + faux8_{i,t}(\omega) - \\ - \rho_{i,t}^{min}(\omega)v_i^{min} + \rho_{i,t}^{max}(\omega)v_i^{max} - \sigma_{i,t}^{min}(\omega)q_i^{min} + \sigma_{i,t}^{max}(\omega)q_i^{max} + \\ + \kappa_{i,t}^{max}(\omega)u_i^{max} + \pi_{i,t}^{max}(\omega)y_k^{max} + \zeta_{l,t}^{min}(\omega)f_l^{max} + \zeta_{l,t}^{max}(\omega)f_l^{max} = 0 \end{aligned} \quad (4.29)$$

sendo:

$$\begin{aligned} faux5_{i,t}(\omega) = v_{i,t}(\omega)q_{i,t}(\omega)\beta_{i,t}(\omega)\rho_i[cv_{1,i} + 2cv_{2,i}v_{t,i}(\omega) + \\ + 3cv_{3,i}v_{t,i}(\omega)^2 + 4cv_{4,i}v_{t,i}(\omega)^3] \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} faux6_{i,t}(\omega) = q_{i,t}(\omega)q_{i,t}(\omega)\beta_{i,t}(\omega)\rho_i[cq_{1,i} + 2cq_{2,i}[q_{i,t}(\omega) + u_{i,t}(\omega)] + \\ + 3cq_{3,i}[q_{i,t}(\omega) + u_{i,t}(\omega)]^2 + 4cq_{4,i}[q_{i,t}(\omega) + u_{i,t}(\omega)]^3] \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} faux7_{i,t}(\omega) = u_{i,t}(\omega)q_{i,t}(\omega)\beta_{i,t}(\omega)\rho_i[cq_{1,i} + 2cq_{2,i}[q_{i,t}(\omega) + u_{i,t}(\omega)] + \\ + 3cq_{3,i}[q_{i,t}(\omega) + u_{i,t}(\omega)]^2 + 4cq_{4,i}[q_{i,t}(\omega) + u_{i,t}(\omega)]^3] \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$faux8_{i,t}(\omega) = \gamma_{i,t}^{max}(\omega)Of_{i,t}(\omega) \quad (4.33)$$

Nota-se que cada função auxiliar criada depende de duas ou três variáveis independentes. Isso quer dizer que podemos utilizar os dois casos (bidimensional e tridimensional) de linearização por partes con-

vexa explicados anteriormente.

Outro ponto importante a ser frisado é a presença da variável  $\beta_{i,t}(\omega)$  (multiplicador de Lagrange relacionado à função de produção no problema de nível inferior) e da variável  $\gamma_{i,t}^{max}(\omega)$  (multiplicador de Lagrange relacionado ao limite máximo de geração das usinas no problema inferior ou operador). Como já sabemos, a metodologia utilizada exige que saibamos de antemão os limites dessas variáveis, mas elas são variáveis calculadas dentro do problema do produtor. Assim, os valores escolhidos para esses limites são estabelecidos de forma antecipada tomando como bases seus comportamentos no modelo não linear.

A fim de reduzir o espaço ocupado pela formulação do problema do produtor no texto, o conjunto de restrições adicionais relacionadas à linearização de cada função não convexa (4.23) - (4.33) é mostrado no apêndice A.

Com isso, o problema do produtor pode ser escrito da seguinte forma:

$$\min \sum_{w=1}^{N_w} \prod(\omega) \text{var}(\omega)$$

s.a.:

Conjunto de Restrições (2.37)

$$Of_{i,1}(1) = Of_{i,1}(2) = \dots = Of_{i,1}(N_w)$$

$$v_{i,t}(\omega) - v_i^{esp} \leq \text{var}(\omega)$$

$$-(v_{i,t}(\omega) - v_i^{esp}) \leq \text{var}(\omega)$$

$$\text{var}(\omega) \geq 0$$

$$Ph_i^{min} \leq Of_{i,t}(\omega) \leq Ph_i^{max}$$

$$v_{i,t}(\omega) = v_{i,t-1}(\omega) + h_t[r_{i,t} - q_{i,t}(\omega) - u_{i,t}(\omega)] + \\ + \sum_{m \in \Omega} h_t[q_{m,t}(\omega) + u_{m,t}(\omega)]$$

Restrições (A.13) – (A.20)

$$\sum_{i=1}^H Ah_{n,i} Ph_{i,t}(\omega) + \sum_{k=1}^{N_y} Ay_{n,k} y_{k,t}(\omega) -$$

$$\omega = 1, \dots, N_w$$

$$- \sum_{s=1}^{N_b-1} \hat{B}_{n,s} \hat{\theta}_{s,t}(\omega) = Pd_{n,t}$$

$$Ph_i^{min} \leq Ph_{i,t}(\omega) \leq Of_{i,t}(\omega)$$

$$v_i^{min} \leq v_{i,t}(\omega) \leq v_i^{max}$$

$$q_i^{min} \leq q_{i,t}(\omega) \leq q_i^{max}$$

$$0 \leq u_{i,t}(\omega) \leq u_{i,t}^{max}$$

$$0 \leq y_{k,t}(\omega) \leq y_{k,t}^{max}$$

$$-f_l^{max} \leq \sum_{n=1}^{N_b-1} M_{l,n} \hat{\theta}_{n,t}(\omega) \leq f_l^{max}$$

Restrições (4.22), (4.24), (4.28), (A.6) – (A.9), (4.29)

(4.34)

## 4.6 CONCLUSÃO

Neste capítulo descrevemos a metodologia adotada para linearização do problema de despacho centralizado e problema do produtor e, também, a reformulação dos problemas utilizando o modelo de combinação convexa desagregada.

É importante notar aqui que a nova formulação dos problemas aumenta consideravelmente o número de variáveis de otimização. No próximo capítulo será mostrado esse aumento. Também é interessante frisar que é necessário saber de antemão os valores mínimos e máximos



que podem assumir as variáveis da função a ser linearizada, como foi mostrado nos exemplos de duas e de três variáveis.

Nas manipulações matemáticas realizadas na formulação do problema do produtor, duas variáveis,  $\beta$  e  $\gamma^{max}$ , que são multiplicadores de Lagrange associados a restrições do problema do produtor, aparecem em restrições que são linearizadas. Neste caso, foi adotado um intervalo de possíveis valores baseado nos resultados dessas variáveis do problema do produtor não linear.



## 5 RESULTADOS

Neste capítulo é feita a análise dos resultados obtidos pelos modelos de despacho centralizado e o problema do produtor. Como já dito antes, o primeiro considera a minimização do corte de carga, o segundo o alcance das metas de volume.

Os testes computacionais foram feitos nos sistemas a seguir:

- um sistema fictício de 3 barras com 2 hidrelétricas e uma termelétrica, onde o caso de duas variáveis descrito na seção 4.4.2 é utilizado;
- um equivalente que representa o sistema de 440 kV da rede de transmissão de São Paulo que possui 15 barras 4 usinas hidrelétricas e uma usina termelétrica equivalente. Aqui, o caso de 2 variáveis descrito na seção 4.4.2 é utilizado;
- um equivalente que representa o subsistema da Região Sul do Brasil com 32 barras, 7 usinas hidrelétricas e uma usina termelétrica equivalente, onde é utilizado o caso de duas variáveis descrito na seção 4.4.2 e de três variáveis descrito na seção 4.4.3.

Os dados dos sistemas de São Paulo e da Região Sul do Brasil são fornecidos no Apêndice D.

O problema do produtor utiliza o sistema fictício de 3 barras e o sistema de São Paulo de 15 barras; o problema do operador utiliza o sistema de São Paulo de 15 barras e o sistema da Região Sul do Brasil de 32 barras.

Os códigos que modelam os problemas de otimização foram desenvolvidos usando o aplicativo General Algebraic Modeling System (GAMS), que consiste em um compilador, com uma linguagem própria, que integra vários solvers de alta performance utilizados para modelar programação e otimização matemática. Além desse, o MATLAB é utilizado como interface enviando as entradas dos programas e recebendo as respostas dos solvers.

O GAMS possui vários programas de otimização (“solvers”). Os que foram utilizados aqui são mostrados a seguir com uma breve explicação:

1. CONOPT - é usado para resolver problemas de Programação Não Linear (PNL). Ele é baseado no método do gradiente reduzido para solução de modelos de PNL em que todas as variáveis são

contínuas e todas as restrições são suaves, com primeiras derivadas suaves; ele procura achar um ótimo local em que sejam satisfeitas as condições de otimalidade de Karush-Kuhn-Tucker. Este solver foi usado nos modelos não lineares propostos aqui;

2. MINOS - é utilizado para a resolução de problemas de programação linear e não linear. Para resolver os problemas com restrições não lineares as funções objetivo e restrições sofrem linearizações sucessivas. Devido a essa característica, apenas a solução final é viável para os modelos não lineares. Assim como o CONOPT, este solver também foi utilizado nos modelos não lineares;
3. CPLEX - foi nomeado dessa forma porque, inicialmente, era um método simplex, implementado na linguagem de programação C; capaz de resolver problemas de Programação Linear (PL), Programação Linear Inteira Mista (PLIM) e Programação Quadrática. Para os problemas de PLIM são utilizados algoritmos de *branch & bound*. Este solver foi utilizado na resolução dos modelos lineares inteiros mistos.

Os algoritmos de *branch & bound* enumeram as soluções candidatas à solução ótima inteira de um problema. Apenas uma fração das soluções factíveis é realmente examinada. O termo *branch* refere-se ao fato de que o método efetua divisões no espaço das soluções e o termo *bound* é devido ao fato de que a prova da otimalidade da solução utiliza-se de limites calculados ao longo da enumeração.

Este método é repetido exaustivamente até que se alcance uma tolerância, que compara a resposta da solução linear com a melhor resposta inteira. A tolerância é definida no código do programa através do *gap absoluto* e *gap relativo*. Outra forma de controle é a utilização de limites de iteração e de recursos do processador.

O gap absoluto é o módulo da diferença entre a melhor solução inteira obtida até a iteração corrente e a solução do problema linear. O gap relativo é o gap absoluto dividido pelo módulo da solução inteira, ou seja, uma diferença percentual máxima em relação ao ideal teórico

O computador usado nos estudos foi um notebook DELL 5470 Vostro, processador Intel Core i7-4500, 8GB de memória Single Channel DDR3L 1600MHz, memória dedicada para vídeo NVIDIA GeForce GT 740M 2GB DDR3.

## 5.1 DESCRIÇÃO DO ESTUDO

Este estudo consiste em comparar os resultados dos modelos não lineares com os resultados dos modelos lineares inteiros mistos, tanto para o problema de despacho centralizado quanto para o problema do produtor, considerando diferentes inicializações para as variáveis (para o modelo não linear). O objetivo é verificar se os resultados são ótimos globais ou locais e escrever sobre as vantagens e desvantagens de utilizar o método de linearização estudado.

Para podermos fazer uma boa comparação entre os resultados dos modelos, é necessário que mantenhamos algumas informações fixas nos dois modelos, não linear e linear inteiro misto. São as seguintes:

- Foram utilizados 2 cenários distintos de afluência, os anos de 2013 e 2014. Em ambos, as informações foram retiradas do banco de dados do ONS [15];
- A carga é considerada conhecida com precisão aceitável, e foi adotado o perfil de carga de 2014 da região CO\SE para o sistema CESP e o perfil de carga da região SUL para o sistema SUL [16];
- Considera-se que, no início do período de planejamento, todos os reservatórios do sistema fictício de três 3 barras, da CESP estão com volumes de água armazenada iguais a 80% dos reservatórios; já o sistema SUL inicializa seus reservatórios com 75% de sua capacidade, com exceção do reservatório da usina de Passo Fundo que inicializa com 15% do volume do seu reservatório cheio. Esses valores foram escolhidos observando a quantidade de água nesses reservatórios, no início do ano;
- Para os problemas de programação linear inteira mista o *gap absoluto* e o *gap relativo* são arbitrados para cada problema e sistema teste.

No problema de despacho centralizado, as seguintes informações são comparadas:

- A potência gerada por usina em cada período e cenário;
- O volume nos reservatórios por usina em cada período e cenário;
- O corte de carga, que representa a complementação térmica, por barra de carga em cada período e cenário;

- O tempo de execução dos programas e o número de variáveis de cada modelo;
- As diferenças encontradas no modelo não linear resultantes de inicializações diferentes;
- O gap encontrado para o modelo linear inteiro misto.

No problema do produtor, as seguintes informações são comparadas:

- Os volumes de água nos reservatórios ao final do período de planejamento.
- A potência gerada por usina em cada período e cenário.
- O volume nos reservatórios por usina em cada período e cenário.
- O corte de carga, que representa a complementação térmica, por barra de carga em cada período e cenário.
- O tempo de execução dos programas e o número de variáveis de cada modelo.
- As diferenças encontradas no modelo não linear resultantes de inicializações diferentes.
- O gap encontrado para o modelo linear inteiro misto.

## 5.2 CASO BIDIMENSIONAL

A linearização utilizando o modelo de combinação convexa desagregada foi aplicada ao problema de maximização da função bidimensional não convexa (4.14). A Figura 5.1, mostra as curvas de nível da função (4.14), e os limites das variáveis  $x$  e  $y$ . A fim de que possamos testar a eficácia deste método de linearização, resolvemos o problema não linear partindo de 3 pontos iniciais diferentes. Depois resolvemos o problema, com método de linearização aplicado, partindo dos mesmos pontos iniciais e comparamos os resultados na Tabela 5.1.

Através da Tabela 5.1 podemos ver a grande vantagem de usarmos este método de linearização. Independentemente dos pontos de partida, o método converge para o ótimo global. Por outro lado, o método de otimização não linear converge para um ótimo local dependendo do ponto de partida. No primeiro caso, converge para o ponto

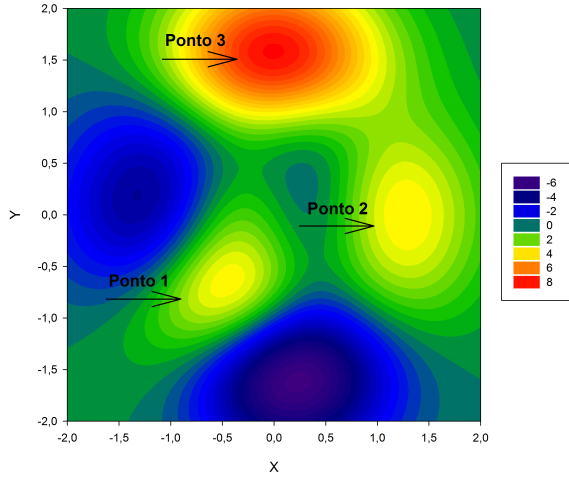


Figura 5.1: Curvas de nível

Tabela 5.1: Resultados no modelo não linear e linear

Modelo	Não Linear	Linear
$(x, y, z)^0$	$(-1, -1, 0)$	$(-1, -1, 0)$
$(x, y, z)^*$	$(-0.44907, -0.64357, 3.4464)$	$(0, 1.5625, 8.078281)$
$(x, y, z)^0$	$(1, -1, 0)$	$(1, -1, 0)$
$(x, y, z)^*$	$(1.2867, -0.004875, 3.5889)$	$(0, 1.5625, 8.078281)$
$(x, y, z)^0$	$(2, 2, 0)$	$(2, 2, 0)$
$(x, y, z)^*$	$(-0.0067856, 1.5834, 8.0858)$	$(0, 1.5625, 8.078281)$

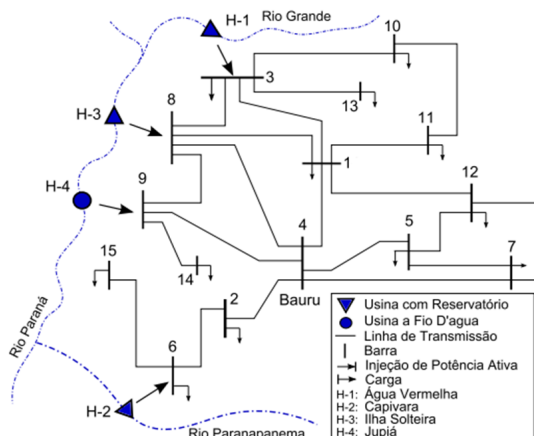
1 da Figura 5.1, que é um ótimo local; no segundo, converge para o ponto 2, novamente um ótimo local; no terceiro caso, a resposta é o ponto 3, que é o ótimo global. A grande desvantagem do modelo linear por partes é o tempo computacional necessário para obter sua solução. Por exemplo, no terceiro caso o tempo computacional foi de 18.327601 segundos, enquanto a solução do modelo não linear levou 0.591866 segundo para ser obtida.

### 5.3 DESPACHO CENTRALIZADO

Analisaremos os resultados do despacho centralizado para dois sistemas, CESP e SUL. Será feita uma comparação dos resultados dos modelos não linear e linear, sendo esses resultados mostrados através de gráficos e tabelas com os valores do módulo das diferenças das variáveis do dois modelos. Nos estudos, foram utilizadas 4 subdivisões no processo de linearização da função de produção.

#### 5.3.1 Resultados para o caso CESP - 15 barras

O sistema elétrico equivalente da CESP possui 4 usinas hidrelétricas, 15 barras e 21 linhas de transmissão. Através da Figura 5.2 podemos constatar 3 usinas em cascata: a primeira com reservatório no Rio Grande, a segunda com reservatório no Rio Paraná e a terceira a fio d'água nesse mesmo rio. A quarta usina está localizada no Rio Paranapanema, possui reservatório e não apresenta acoplamento hídrico com as demais usinas.



Fonte: baseado em [10, p. 205]

Figura 5.2: Sistema CESP - 15 barras

Nesta análise, como já foi citado anteriormente, utilizamos o perfil de carga normalizado das regiões sudeste e centro-oeste no ano de 2014. O perfil de carga normalizado é multiplicado pela capacidade



máxima de produção do sistema CESP, fornecendo a curva de demanda indicada na Figura 5.3.

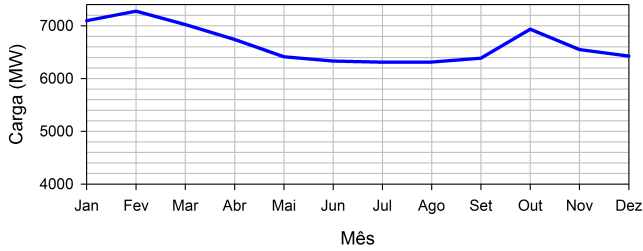


Figura 5.3: Perfil de carga sistema CESP

A Figura 5.4 indica as vazões afluentes nas usinas do sistema nos dois cenários considerados. Os cenários correspondem as vazões médias mensais de 2013 (cenário 1) e 2014 (cenário 2). Pode-se observar que as vazões no cenário 1 são maiores do que no cenário 2.

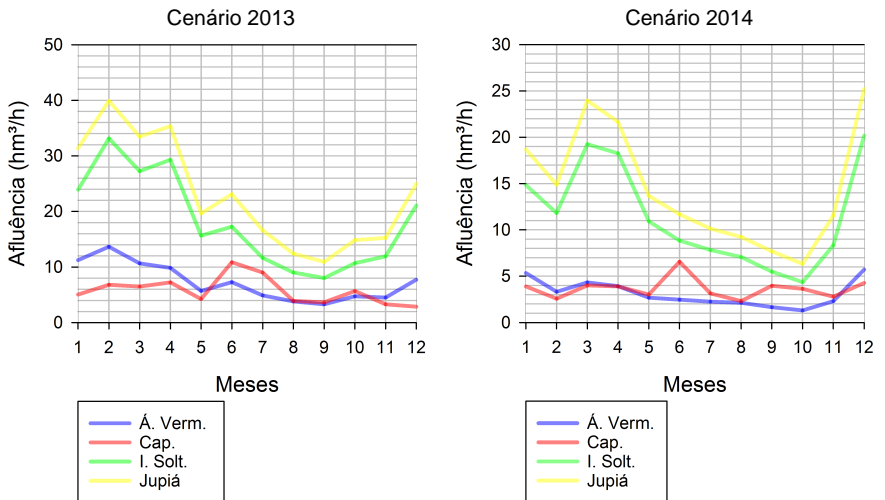


Figura 5.4: Afluências do sistema CESP para dois cenários estudados.

A Figura 5.5 indica os valores calculados para as potências fornecidas pelas hidrelétricas em cada cenário. A linha contínua mostra a

solução para o modelo não linear, já a pontilhada mostra o resultado do modelo linear inteiro misto.

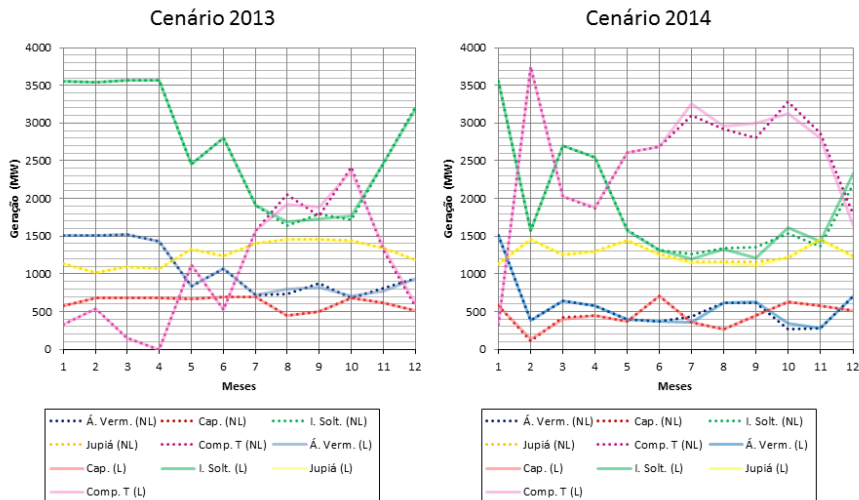


Figura 5.5: Despacho centralizado e comp. térmica do sistema CESP para o cenário 1 (2013) e cenário 2 (2014), respectivamente.

Como vemos na Figura 5.5, os valores de potência gerada obtidos pelos dois modelos diferem em alguns períodos em ambos os cenários de afluência. No cenário de baixa afluência, a diferença é maior na geração de Ilha Solteira nos meses 7, 9, 10 e 11; aparecem também diferenças na geração de Água Vermelha nos períodos 7 e 10; e, por último, na complementação térmica os resultados são diferentes nos meses 7, 9, 10 e 11. A Tabela 5.2 mostra os valores absolutos das diferenças entre as gerações ótimas obtidas pelos modelos não linear e linear. Pode-se notar que tais diferenças podem ser consideráveis. Uma possível explicação para essa diferença pode ser a criticidade da afluência no segundo cenário, vista na Figura 5.4.

A Figura 5.6 indica o comportamento dos volumes dos reservatórios do sistema nos dois cenários de afluência. Observa-se que para os modelos linear e não linear os volumes são praticamente iguais. Apenas no cenário de baixa afluência, aparece alguma diferença na usina de Ilha Solteira nos meses 9, 10 e 11; na usina de Água Vermelha no mês 10 também aparece uma diferença.

Vemos que foram obtidos resultados ligeiramente diferentes nos

Tabela 5.2: Diferença dos valores de potência gerada e comp. térmica em MW

Diferenças entre Potências Geradas (MW) - Cenário 1												
Á. Vermelha	0.6	0.7	0.1	1.1	0.7	0.9	0.3	67.1	51.2	20.7	45.9	0.2
Capivara	1.8	0.9	1	0.2	0.8	0.6	0.4	0.4	0.1	0.4	0.7	0
Ilha Solteira	1.7	0.4	0.3	0.5	2.6	0.8	0.9	59.5	59.5	41.4	1.5	34.2
Jupiá	3.2	0.1	1.7	0.8	2.3	4.1	2.6	0	0	7.2	4.9	0.6
C. Térmica	2.9	1.3	0.9	0	1.7	3.2	1.9	126	110.4	54.7	40.3	33.6
Diferenças entre Potências Geradas (MW) - Cenário 2												
Á. Vermelha	0.6	0	0.6	0.7	0.1	0	74.8	4.1	12.8	77.6	0	0.6
Capivara	1.8	18.3	20.3	0.4	0.2	0	0	0.5	0.4	1	0.1	0
Ilha Solteira	1.7	2.6	0.4	2	2.6	2.9	65.3	11.3	142.9	77.5	67.9	147
Jupiá	3.2	0	16.6	12.8	0.3	4.1	19.4	19.4	60.7	6.9	0	4.2
C. Térmica	2.9	15.7	4.9	16.1	2.9	7.2	159.6	35.4	191.4	161	67.9	142.6

meses 9, 10 e 11 na complementação térmica. A Tabela 5.2 aponta que houve diferenças na complementação térmica ao longo do ano, para ambos os cenários.

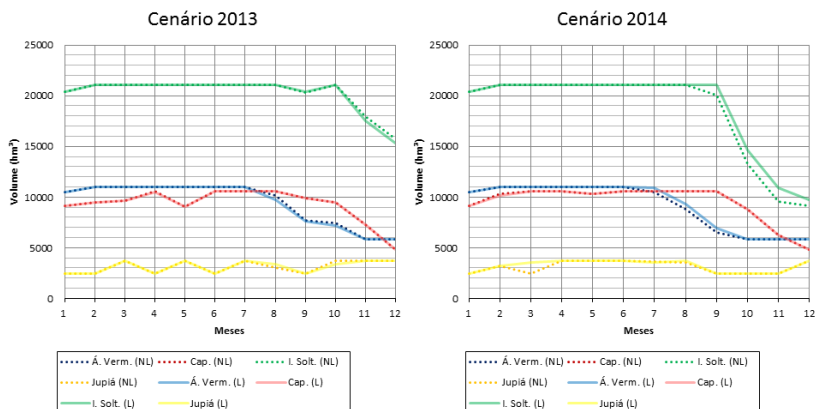


Figura 5.6: Volumes dos reservatórios do sistema CESP para dois cenários estudados.

A Tabela 5.3 mostra os valores absolutos das diferenças dos volumes dos reservatórios, obtidos pelos modelo linear inteiro misto e não linear.

Para o corte de carga, que neste trabalho é representado pela complementação térmica, os resultados são diferentes em sua distribuição. Ou seja, a soma do corte de carga em ambos os cenários é muito próxima no modelo não linear e no modelo linear inteiro misto,

Tabela 5.3: Diferença dos volumes de água nos reservatórios em hm<sup>3</sup>

Diferenças entre Volumes de Água nos Reservatórios (hm <sup>3</sup> ) - Cenário 1													
Á. Vermelha	0	0	0	0	0	0	0	0	392.1	112.4	272.9	0	0
Capivara	18.9	18.9	18.9	23.2	23.2	0	0	0	0	0	0	0	0
Ilha Solteira	0	0	0	0	0	0	0	0	0	112.4	0	408.7	408.7
Jupiá	0	0	0	0	0	0	0	0	392.1	0	279.3	0	0
Diferenças entre Volumes de Água nos Reservatórios (hm <sup>3</sup> ) - Cenário 2													
Á. Vermelha	0	0	0	0	0	0	0	397.9	451.1	460	0	0	0
Capivara	18.9	130.6	0	0	0	0.1	0	0	0	0	0	0	0
Ilha Solteira	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1045	1340	1340	598.4
Jupiá	0	0	1135	0	0	0	0	97.4	150.2	0	0	0	0

como podemos ver na Figura 5.5, mas as barras onde os cortes de carga ocorrem são diferentes.

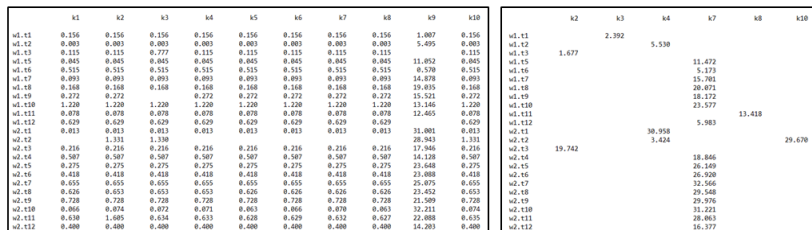


Figura 5.7: Distribuição do corte de carga no despacho centralizado no sistema CESP.

A melhor forma encontrada de mostrar a diferença na distribuição do corte de carga entre os modelos é através de um recorte do arquivo de saída do GAMS, mostrado na Figura 5.7. Do lado direito temos o resultado para o modelo linear inteiro misto, do esquerdo temos o resultado para o modelo não linear. O índice  $k$  indica a barra de carga onde o corte ocorre, o índice  $\omega$  indica o cenário e o índice  $t$  indica o período. Verifica-se que o valor esperado de corte de carga nos 12 meses é o mesmo, mas a localização da barra onde o corte ocorre é diferente. No modelo (2.37) (pág. 48), a função objetivo do problema é o valor esperado do corte de carga considerando todos os períodos e cenários. Como os limites de transmissão nas linhas não foram alcançados, o corte de carga pode acontecer em qualquer barra de carga, desde que a soma do corte seja a mínima.

Dois conjuntos diferentes de valores de inicialização das variáveis do modelo não linear foram feitas, com o objetivo de encontrar resultados diferentes.

As variáveis foram inicializadas de duas formas:

- Caso não linear 1: variáveis de potência gerada, vazão turbinada e volume iguais aos limites máximos e variáveis de vertimento e de corte de carga iguais a zero.
- Caso não linear 2: variáveis de potência gerada, volume e vazão turbinada iguais aos limites mínimos e variáveis de vertimento e corte de carga iguais aos limites máximos.

Neste caso, a solução da função objetivo encontrada em ambas as situações foi a mesma. Algumas diferenças ocorreram, como o tempo de execução do programa e o número de iterações, além de uma distribuição dos cortes de carga (em quais barras de carga ocorreram cortes) diferente e no tempo computacional necessário para convergência. A Tabela 5.4 mostra os resultados e compara com a solução encontrada para o modelo linear inteiro misto. Os resultados indicam os valores esperados de energia elétrica gerada (E), volume de água turbinada (Q), volume de água vertida (U) e corte de carga (Y). Esses valores foram calculados

Os valores esperados de potência, corte de carga, vazões turbinadas e vertidas são multiplicadas por 8760, a quantidade de horas no intervalo de um ano analisado aqui. Assim, conseguimos a quantidade de energia produzida e a quantidade de água vertida e turbinada. Esse cálculo é feito em todos os outros resultados que serão mostrados no decorrer do trabalho.

Tabela 5.4: Resultados no modelo não linear e linear no despacho centralizado CESP.

Modelo	E (GWh)	Q (hm <sup>3</sup> )	U (hm <sup>3</sup> )	Y (GWh)
Não Linear 1	513469.1	6070233.2	1731668	184193.016
Não Linear 2	513469.1	6070233.2	1731668	184193.016
Linear Inteiro Misto	513356.148	6061197.3	1738422	185750.5

É importante ressaltar que o resultado do modelo linear comprova que a solução encontrada no modelo não linear é ótima. Um valor esperado de corte de carga maior acontece para o modelo linear inteiro misto em comparação com modelo não linear. Isso é justificado pela linearização das funções, ou seja, acontece um erro de aproximação. Um aumento do número de subdivisões pode reduzir esse erro, que não foi feito pela limitação de memória.

O resultado da Tabela 5.4 para o modelo não linear é justificado pelo comportamento da função de produção, que é a função linearizada. Apesar de ser uma função de quinta ordem e possuir três variáveis, quando plotada, nota-se que ela possui um comportamento, ou uma característica bem linear. Esse comportamento explica porque que com conjunto de variáveis iniciais diferentes, a solução é a mesma. Mas mesmo assim, a segunda inicialização demorou um pouco mais que a primeira para alcançar o solução. Além disso, há uma distribuição do corte de carga diferente, tal como ocorre no modelo linear.

O valor esperado do volume dos reservatórios no último período é mostrado na Tabela 5.5, a seguir:

Tabela 5.5: Volume final esperado dos modelos não linear e linear no despacho centralizado CESP.

Modelo	V (hm <sup>3</sup> )
Não Linear 1	26771.4
Não Linear 2	26771.4
Linear Inteiro Misto	26866.3

A Tabela 5.6 mostra o número de variáveis do modelo não linear e do modelo linear, o tempo de execução e o número de iterações para convergência.

Tabela 5.6: Resultados no modelo não linear e linear inteiro misto no despacho centralizado CESP.

Modelo	Variáveis Reais	Variáveis Binárias	Tempo (s)	Iterações
Não Linear 1	1489	0	0.252	77
Não Linear 2	1489	0	0.691	509
Linear Inteiro Misto	155089	30720	32648.09	7405372

Foram utilizadas 4 subdivisões no processo de linearização da função de produção. Assim, o número de variáveis binárias pode ser calculado utilizando as seguintes equações:

- para funções não lineares com 2 variáveis:

$$2 \times (n^\circ \text{ de subdiv.})^2 \times (n^\circ \text{ de cen.}) \times (n^\circ \text{ de per.}) \times (n^\circ \text{ de usinas}) \quad (5.1)$$

- para funções não lineares com 3 variáveis:

$$5 \times (n^\circ \text{ de subdiv.})^3 \times (n^\circ \text{ de cen.}) \times (n^\circ \text{ de per.}) \times (n^\circ \text{ de usinas}) \quad (5.2)$$

A Tabela 5.7 mostra o valor do *gap absoluto* e *gap relativo*, além da solução MIP e a melhor estimativa de solução. Todos esses valores fazem parte do processo de resolução de problemas lineares inteiro misto. A melhor solução possível é a solução do problema linear. Primeiro é solucionado um problema linear e essa solução é comparada com o as soluções do problema inteiro. Quando a solução do problema inteiro misto não alcança a solução linear são usados os critérios de tolerância: gap absoluto e relativo.

Os valores da Tabela 5.7 é a solução ótima da função objetivo (ou seja, complementação térmica total esperada) dado pelo solver. Esse valor é a média da soma dos cortes de carga dos dois cenários. Se multiplicarmos esses valor por dois e 8760, teremos a quantidade de energia que as termelétricas precisariam produzir na situação analisada.

A execução do programa foi interrompida por estouro de memória, sendo a última solução disponível considerada ótima. Isso contribui para as pequenas diferenças entre os modelos não linear e linear ocorridas.

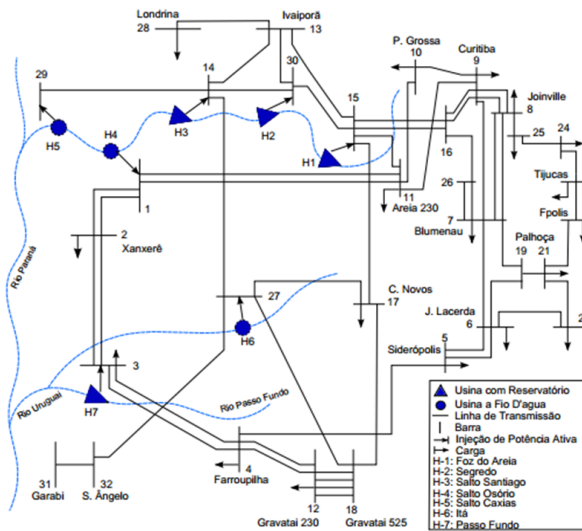
Tabela 5.7: Resultados da programação linear inteiro misto no despacho centralizado CESP.

Solução MIP	Melhor Possível	Gap Absoluto	Gap Relativo
212.04	209.13	2.91	0.013

Como podemos ver na Tabela 5.6, há uma grande diferença no tempo de execução dos dois modelos. O modelo linear inteiro misto, apesar de resultar em uma solução ótima, utiliza mais variáveis e um tempo muito maior que o não linear, devido ao método de resolução utilizado. O modelo não linear conseguiu alcançar a solução de ótimo global com pontos de partida diferentes. Mas como visto antes, a distribuição dos cortes de carga nas barras por período são diferentes, logo é um problema de múltiplas soluções. Assim, mesmo com um tempo de execução desvantajoso, o modelo linear é importante para confirmar que a solução é ótima.

### 5.3.2 Resultado para o Sistema SUL - 32 Barras

O sistema Sul equivalente possui 7 usinas hidrelétricas, 32 barras e 50 linhas de transmissão, como podemos ver na Figura 5.8. Ao longo do Rio Iguaçu estão localizadas cinco usinas hidrelétricas em cascata: três usinas com reservatório e duas a fio d'água. O sistema Sul ainda apresenta mais duas usinas: uma a fio d'água no Rio Uruguai e uma com reservatório no Rio Passo Fundo.



Fonte: baseado em [10, p. 231]

Figura 5.8: Sistema SUL - 32 barras

Nesta análise utilizamos o perfil da carga da Região Sul no ano de 2014. O perfil da carga normalizado é multiplicado pela capacidade máxima de produção do sistema SUL, Figura 5.9.

A Figura 5.10 mostra as vazões afluentes nas usinas nos dois cenários, sendo o cenário 1 referente a 2013 e o cenário 2 referente a 2014. Nota-se que as vazões são mais elevadas no cenário 2.

A Figura 5.11 indica as gerações hidrelétricas e complementação térmica em cada cenário. A linha contínua mostra a solução para o modelo não linear, já a pontilhada mostra o resultado do modelo linear inteiro misto.

Como vemos na Figura 5.11, os valores de potência gerada das



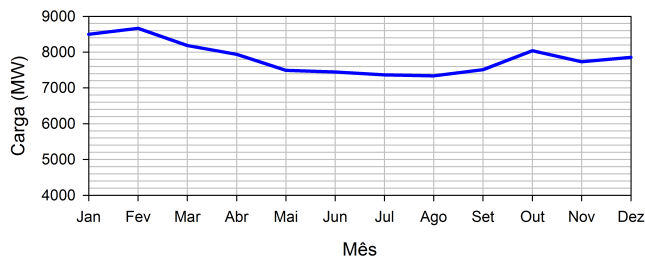


Figura 5.9: Perfil de carga sistema SUL

usinas difere em alguns períodos. No primeiro cenário, que é o de menor afluência, há diferenças na usina G. B. Munhoz nos meses 4 e 8; na usina Salto Santiago no mês 8 também aparece uma diferença; na usina Passo Fundo, nos meses 8 e 9, há também valores ligeiramente diferentes.

Os resultados de complementação térmica são mais diferentes no mês 4. A Tabela 5.8 mostra as diferenças, em módulo, entre os modelos em ambos os cenários.

Tabela 5.8: Diferença dos valores de potência gerada em MW

Diferenças entre Potências Geradas (MW) - Cenário 1												
G.B. Munhoz	1.7	0.4	91.8	197.9	55	5.8	4.4	322.7	124.1	15.5	7.8	9.2
Segredo	0	0	1.2	1.6	0.5	0.9	0.7	3.3	0.2	0.1	0.6	0.5
Salto Santiago	0.7	0.9	1.6	5.9	1.3	1.6	1.6	177	5.6	17.6	1.1	1.4
Salto Osório	5.1	4.8	1	9.1	5.2	2.5	1.7	19.2	12	3.5	2.7	5.3
Salto Caxias	1.7	1.8	0.6	3.4	1.8	1.2	0.8	8	5.3	5.8	0.9	1.9
Itá	0.1	0.7	0.4	0.7	0.6	0.3	0.5	0.4	0.3	0	0.6	0.7
Passo Fundo	41.5	39	22.5	78	20.1	0	0	115.6	112.3	0	0.1	0.1
C. Térmica	50.6	45.6	68.5	256.9	82.6	0	0	0	0	0	9	1.9
Diferenças entre Potências Geradas (MW) - Cenário 2												
G.B. Munhoz	1.7	0.8	20.5	11.8	8.8	289.3	87.1	0.4	1	6	4.1	0
Segredo	0	0	0.6	0.5	0.2	41.4	35.6	0	0.6	0.2	0.6	0.5
Salto Santiago	0.7	0.4	0.1	1.3	1.3	145.1	16.9	0	1	0.8	1.1	1.1
Salto Osório	5.1	2.7	1.1	5.3	5.3	10	1.7	2	4.4	3.4	5.1	5.1
Salto Caxias	1.7	1	0.3	1.9	1.8	10.8	21.4	0.9	1.5	1.3	1.8	1.7
Itá	0.1	0.6	0.2	0.6	0.6	164.7	88	0.1	0.4	0.8	0.6	0.2
Passo Fundo	41.5	25.1	4.8	20.9	0	0	0	0	0	0	0.2	0.1
C. Térmica	50.6	20.7	26.5	25.4	0	0	0	3	6.9	0	2.3	7.5

Na Figura 5.12 vemos as diferenças encontradas nos volumes dos reservatórios das usinas. No primeiro cenário, da esquerda, as usinas G. B. Munhoz e Salto Santiago apresentam as maiores diferenças. No

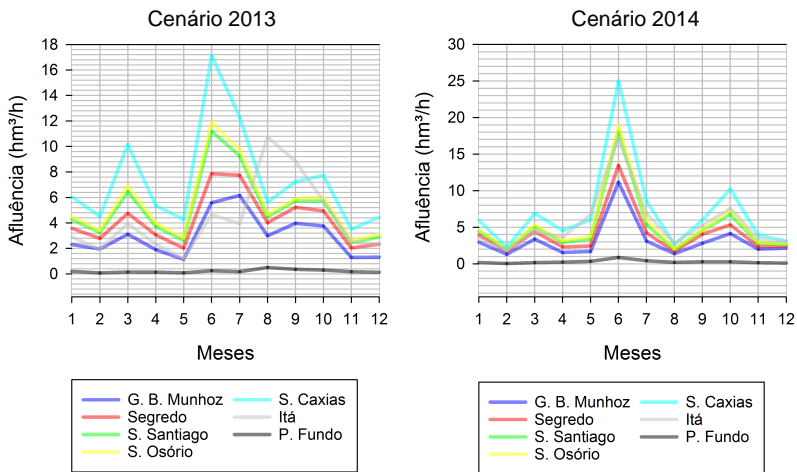


Figura 5.10: Afluências do sistema SUL para dois cenários estudados, 2013 e 2014.

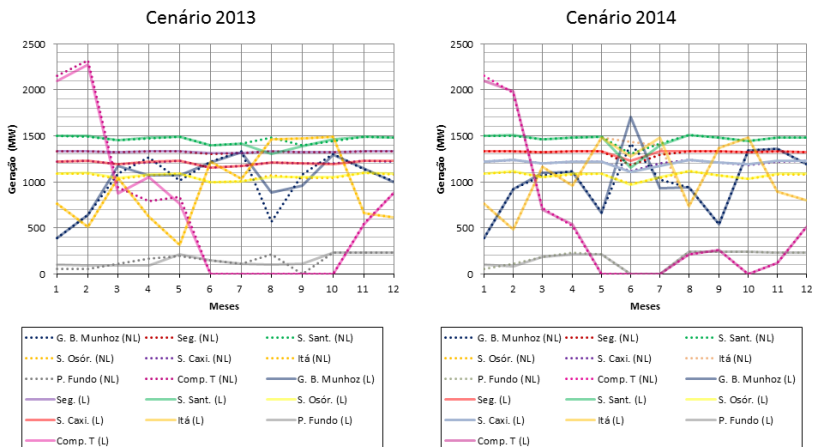


Figura 5.11: Despacho centralizado e comp. térmica do sistema SUL para os dois cenários estudados, 2013 e 2014.

segundo cenário apenas a usina Salto Santiago apresentou diferença no mês 6. As diferenças novamente ocorrem no cenário mais crítico que, neste caso, é o primeiro, como vemos na Figura 5.10.

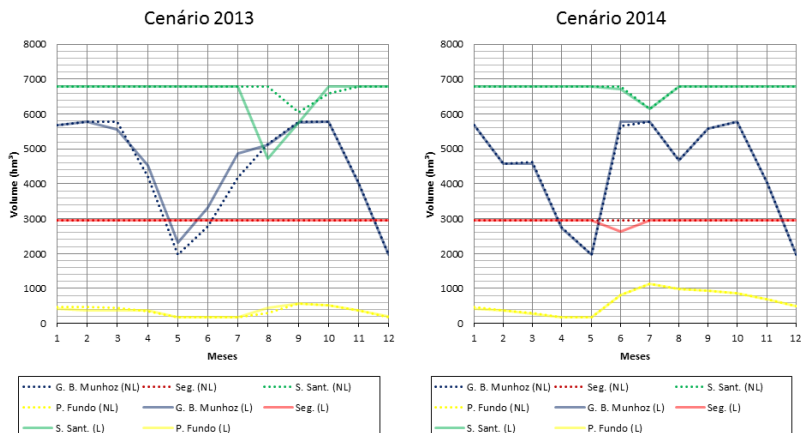


Figura 5.12: Volume dos reservatórios do sistema SUL para dois cenários estudados.

A Tabela 5.9 mostra os valores absolutos das diferenças dos volumes dos reservatórios calculados pelos modelos não linear e linear inteiro misto. Vemos também que o cenário mais crítico de água apresenta diferenças maiores entre os modelos.

Tabela 5.9: Diferença dos volumes armazenados nos reservatórios em  $\text{hm}^3$

Diferenças entre Volumes de Água nos Reservatórios ( $\text{hm}^3$ ) - Cenário 1											
G.B. Munhoz	0	0	218.6	318.5	343.5	524.4	685.2	19.3	32.9	0	26.9
Segredo	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Salto Santiago	0	0	0	0	0	0	0	2061.8	288.2	188.03	0
Salto Osório	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Salto Caxias	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Itá	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Passo Fundo	48.5	94.2	68.1	23.9	0	0	0	137.4	7.1	7.1	7.1
Diferenças entre Volumes de Água nos Reservatórios ( $\text{hm}^3$ ) - Cenário 2											
G.B. Munhoz	0	0.001	45.9	25.8	0	123.9	0	0.001	12.3	0	0
Segredo	0	0.001	0	0	0	309.2	0	0.001	0	0	0
Salto Santiago	0	0	0	0	0	54.3	0.002	0.003	0	0	0
Salto Osório	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Salto Caxias	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Itá	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Passo Fundo	48.5	18.9	24.8	0	0	0	0	0	0	0	0

Para o corte de carga, que neste trabalho representa a complementação térmica, os resultados obtidos pelos dois modelos diferem de acordo com o período, o cenário e a barra de carga onde cada corte é

feito. No entanto, os cortes de carga totais em cada cenário calculados pelos dois modelos são muito próximos, como podemos ver na Figura 5.11.

O mesmo comportamento obtido na distribuição dos cortes nas barras de carga do sistema da seção anterior (Figura 5.7), aconteceu para este sistema.

Dois conjuntos diferentes de valores de inicialização das variáveis do modelo não linear foram utilizados. As mesmas estratégias de inicialização usadas para o sistema CESP foram empregadas. Os valores ótimos da função objetivo obtidos foram os mesmos. Quase todas as variáveis alcançaram os mesmos valores ótimos. No entanto, os cortes de carga ocorreram em barras diferentes, ou seja, os valores das variáveis  $y_t(\omega)$  foram distintos. Ocorreram também diferenças no tempo de execução do programa e o número de iterações para convergência.

Tabela 5.10: Resultados no modelo não linear e linear no despacho centralizado Sul.

Modelo	E (GWh)	Q (hm <sup>3</sup> )	U (hm <sup>3</sup> )	Y (GWh)
Não Linear 1	758566.9	3319054.5	4145433.5	65426.7
Não Linear 2	758566.9	3319054.5	4145433.5	65426.7
Linear Inteiro Misto	758772.4	3315966.6	4148455.7	65215.6

A Tabela 5.10 indica os resultados obtidos pelos modelos. Conforme comentado, a solução obtida para o modelo não linear foi a mesma para as duas inicializações empregadas. No entanto, a solução obtida pelo modelo linear inteiro-misto leva a uma complementação térmica ligeiramente menor.

As soluções obtidas para o modelo não linear usando as duas inicializações apresentaram os mesmos valores de potência gerada, vazão turbinada, vertimento, volume de água armazenada e complementação térmica total. No entanto, os valores das variáveis que representam a complementação térmica foram distintos. Isso prova que o modelo não linear possui múltiplas soluções.

O valor esperado do volume dos reservatórios no último período é mostrado na Tabela 5.11

A Tabela 5.12 mostra o número de variáveis do modelo não linear e do modelo linear inteiro misto, o tempo de execução e número de iterações para a convergência do problema. Como podemos ver na Tabela 5.12, há uma grande diferença no tempo de execução dos dois modelos. O modelo linear inteiro misto, apesar de resultar em uma

Tabela 5.11: Volume final esperado dos modelos não linear e linear no despacho centralizado SUL.

Modelo	V (hm <sup>3</sup> )
Não Linear 1	21425.1
Não Linear 2	21425.1
Linear Inteiro Misto	21428.6

solução ótima, utiliza mais variáveis e um tempo muito maior que o não linear, devido ao método de resolução utilizado. O modelo não linear conseguiu alcançar a mesma solução ótima para a função objetivo com pontos de partida diferentes, mas número de iterações e tempo de processamento diferentes.

Tabela 5.12: Resultados no modelo não linear e linear no despacho centralizado SUL.

Modelo	Variáveis Reais	Variáveis Binárias	Tempo (s)	Iterações
Não Linear 1	3313	0	1.018	92
Não Linear 2	3313	0	2.418	2176
Linear Inteiro Misto	272113	53760	46061.37	6123612

Aqui também foram utilizadas 4 subdivisões no processo de linearização da função de produção. O número de variáveis inteiras pode ser calculado utilizando a equação (5.2).

A Tabela 5.13 mostra o valor do *gap absoluto* e *gap relativo*, além da solução MIP e a melhor estimativa de de valor para a função objetivo. Todos esses valores fazem parte do processo de resolução de problemas lineares inteiro misto. Mais uma vez a execução do programa foi interrompida por estouro de memória, sendo a última solução obtida considerada a resposta final. Isso também justifica as pequenas diferenças entre os modelos não linear e linear ocorridas, já comentadas anteriormente. Esses valores não foram convertidos em MW, ou seja, estão em pu.

Tabela 5.13: Resultados da programação linear inteiro misto no despacho centralizado SUL.

Solução MIP	Melhor Possível	Gap Absoluto	Gap Relativo
74.447	72.58	1.866	0.025

## 5.4 PROBLEMA DO PRODUTOR

No problema do produtor, por ser mais complexo, os resultados conseguiram, de forma mais clara, evidenciar a importância de usarmos técnicas de linearização. Primeiro mostraremos os resultados para um sistema fictício de 3 barras e depois para o sistema CESP.

O problema não linear é resolvido usando diferentes inicializações para verificarmos a existência de soluções locais. Esses resultados serão comparados com os resultados do modelo linear e mostrados através de tabelas. Além disso, é feita uma comparação entre o número de variáveis, tempo de execução e número de iterações para obter as soluções dos dois modelos. Nas simulações, foram utilizadas 2 subdivisões no processo de linearização das restrições não lineares do problema 4.34.

### 5.4.1 Resultados para sistema de 3 barras

O sistema mostrado na Figura 5.13 foi criado para mostrar de maneira mais simples o comportamento do problema do produtor. Ele é composto por duas usinas reais, Chavantes (usina 1) e Capivara (usina 2), estando a primeira a montante da segunda. São usadas as afluências médias mensais medidas para esses reservatórios em 2014 (Figura 5.14). O perfil de carga utilizado nesta análise é igual ao adotado na seção 5.3.1.

Supõe-se que cada usina hidrelétrica pertença a um agente gerador. A seguir são analisados os resultados obtidos para o problema do agente que controla Chavantes e busca definir suas ofertas de geração de forma que, ao final do período de planejamento, o volume de água armazenada em seu reservatório seja a metade da capacidade do reservatório, ou seja  $7274.5 \text{ hm}^3$ .

A linha contínua mostra a solução para modelo não linear, já a pontilhada mostra o resultado do modelo linear inteiro misto.

A Figura 5.15 mostra que os valores de potência gerada das usinas para o modelo não linear e linear seguem trajetórias similares, mas diferem ao longo do horizonte de planejamento. A complementação térmica apresenta o mesmo comportamento.

A Tabela 5.14 mostra os valores absolutos das diferenças entre as gerações ótimas obtidas pelos modelos não linear e linear. Nota-se que tais diferenças podem ser consideráveis. Essas diferenças acontecem devido ao fato do problema do produtor ser mais complexo que o

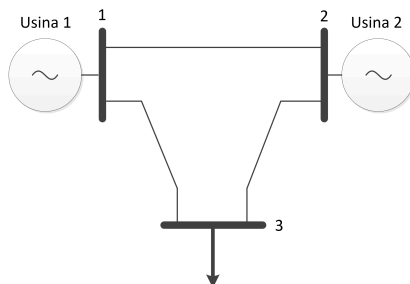


Figura 5.13: Sistema fictício de 3 barras.

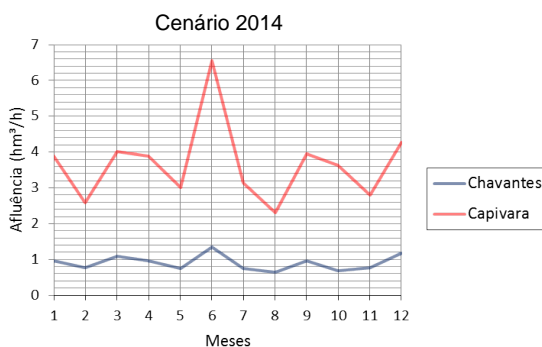


Figura 5.14: Afluências do sistema fictício no ano 2014.

despacho centralizado.

Tabela 5.14: Diferença dos valores de potência gerada e comp. térmica em MW

	Diferenças entre Potências Geradas (MW)											
Chavantes	121.4	3.4	76.4	36	202.7	86.4	52.3	312.1	193.4	213.9	40.2	366.1
Capivara	98.6	266.2	200	35.3	93.3	61.1	157.3	146.8	464.2	171.3	67.7	17
C. Térmica	220	262.8	123.5	0.7	109.4	25.2	105	165.2	657.6	42.5	107.9	383.2

O comportamento do volume dos reservatórios neste problema é mostrado na Figura 5.16. A usina de Capivara apresenta diferenças no mês 2, 5, 8 e 12. Para Chavantes, houve diferenças mais expressivas nos meses 8, 9 e 10. Nos soluções ótimas obtidas pelos dois modelos a meta de volume de Chavantes é alcançada, ou seja, obtém-se o mínimo global da função objetivo do problema de nível superior.

A Tabela 5.15 nos mostra que a meta de volume do reservatório

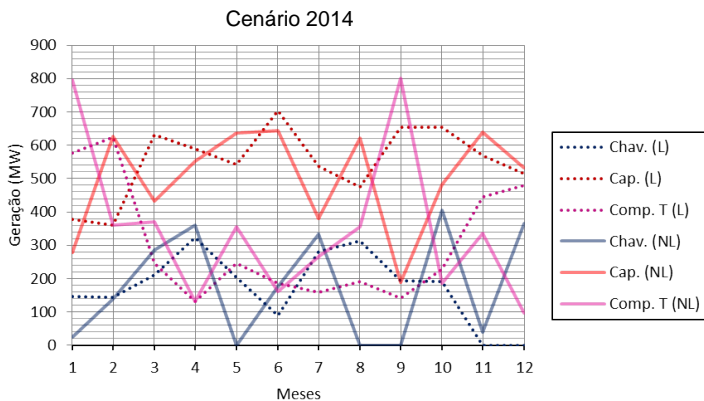


Figura 5.15: Despacho do problema do produtor e comp. térmica do sistema fictício.

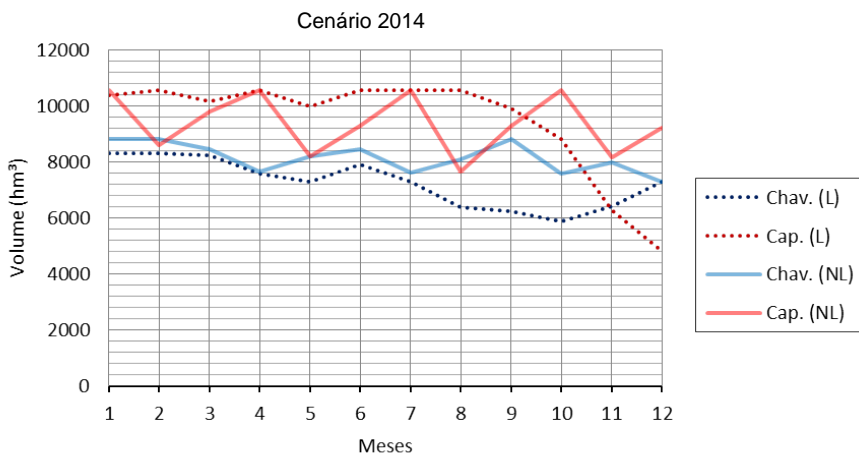


Figura 5.16: Volume dos reservatórios do sistema CESP para cenário de 2014.

de Chavantes foi atingida em ambos os modelos, mas houve uma diferença nos volumes finais do reservatório da usina de Capivara.

A Tabela 5.16 mostra os valores absolutos das diferenças entre os volumes de água nos reservatórios calculados pelos modelos não linear e linear inteiro misto. Conforme explicado anteriormente, o volume final de Chavantes é o mesmo nas duas soluções.



Tabela 5.15: Volumes finais armazenados nos reservatórios em  $\text{hm}^3$  - Sistema Fictício

Modelo	Não Linear	Linear Inteiro Misto
Chavantes	7274.5	7274.5
Capivara	9222.2	4816

Tabela 5.16: Diferença dos volumes armazenados nos reservatórios em  $\text{hm}^3$ 

Diferenças entre Volumes de Água nos Reservatórios ( $\text{hm}^3$ )												
Chavantes	484.2	500.7	193.1	50.9	902.4	553.1	348.7	1720.2	2571.7	1720.2	1558.1	0
Capivara	161.1	1962.4	339.1	0	1799.1	1251.4	0	2893.1	607.9	1715.5	1878.2	4406.2

Tal como foi feito para o problema de despacho centralizado, o modelo não linear foi resolvido usando diferentes inicializações para o CONOPT. As variáveis foram inicializadas das seguintes formas:

- Caso não linear 1: variáveis de potência gerada, vazão turbinada e volume iguais aos limites máximos e variáveis de vertimento e de corte de carga iguais a zero.
- Caso não linear 2: variáveis de potência gerada, volume e vazão turbinada iguais aos limites mínimos e variáveis de vertimento e corte de carga iguais aos limites máximos.

A Tabela 5.17 mostra os resultados e compara as duas soluções obtidas para o modelo não linear com a solução do modelo linear inteiro misto encontrada.

Tabela 5.17: Resultados Obtidos para o Problema do Produtor - Sistema Fictício.

Modelo	E (GWh)	Q ( $\text{hm}^3$ )	U ( $\text{hm}^3$ )	Y (GWh)
Não Linear 1	71343	599056	1077.5	36913.8
Não Linear 2	35113.6	328684	324339	73145.1
Linear Inteiro Misto	76234.8	652698.8	280.32	32022.2

Vale ressaltar que a meta de volume de Chavantes foi alcançada. Portanto, o valor final da função objetivo do problema de nível superior é zero. A função objetivo de segundo nível é o corte de carga total no horizonte considerado, que é mostrado na última coluna da Tabela 5.17.

Aqui é possível entender a importância da linearização de forma bem clara. Notamos que, pelo problema do produtor ser mais complexo do que o despacho centralizado, obtemos soluções ótimas diferentes para o modelo não linear para as duas inicializações adotadas. A meta de volume especificada é alcançada nas soluções do modelo não linear e na solução do modelo linear por partes.

Outro fato interessante é que a solução encontrada para o modelo linear é melhor, pois corta menos carga (menos complementação térmica na nossa representação) com relação às soluções obtidas para o modelo não linear.

A Tabela 5.23 mostra o número de variáveis e o tempo computacional requerido para encontrar as soluções do modelo não linear e do modelo linear inteiro misto.

Tabela 5.18: Resultados no modelo não linear e linear no despacho do problema do produtor sistema fictício.

Modelo	Variáveis Simples	Variáveis Binárias	Tempo (s)	Iteração
Não Linear 1	580	0	1.754	51
Não Linear 2	580	0	1.198	43
Linear Inteiro Misto	35908	7104	963.9	2967499

Para linearizar cada restrição não linear foram utilizada 2 subdivisões do intervalo de variação de cada variável. Este problema possui 7 restrições não lineares de 3 variáveis e 2 restrições de 2 variáveis. Assim, para o cálculo do número de variáveis inteiras foram utilizadas as equações (5.1) e (5.2).

A grande desvantagem do modelo linear inteiro misto é ele possuir muitas variáveis auxiliares, tanto reais quanto binárias, gerando um número de iteração e tempo de execução maior que o modelo não linear.

#### 5.4.2 Resultados para o CESP - 15 barras

O mesmo sistema CESP e perfil de carga da seção 5.3.1 são utilizados nesta seção para analisarmos os resultados para o problema do produtor. O problema é formulado considerando que cada usina pertença a um produtor e visando atender os interesses do produtor de Água Vermelha. Na formulação é considerado apenas o cenário de afluência de 2014 devido ao aumento da complexidade do problema.

A Figura 5.17 indica as potências geradas pelas hidrelétricas e a

complementação térmica nas soluções obtidas para o modelos não linear e linear inteiro misto. Nesta figura vemos que os valores de potência gerada das usinas para o modelo não linear e linear seguem a mesma trajetória, mas diferem em vários pontos. A complementação térmica também segue esta tendência.

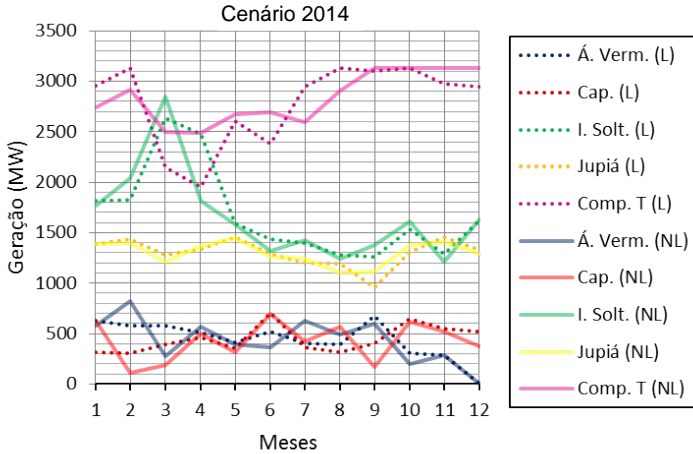


Figura 5.17: Despacho do problema do produtor e comp. térmica - sistema CESP.

A Tabela 5.19 mostra os valores absolutos das diferenças entre as gerações ótimas obtidas pelos modelos não linear e linear. Essas diferenças são substanciais, o que leva a gerações totais distintas considerando todo o horizonte de planejamento.

Tabela 5.19: Diferença dos valores de potência gerada e comp. térmica em MW

	Diferenças entre Potências Geradas (MW)											
Água Vermelha	42.5	240.6	302.0	62.3	13.4	156.1	219.2	96.3	73.9	109.4	1.1	0.1
Capivara	304.4	201.0	202.5	46.0	43.9	5.9	58.6	250.8	229.8	33.1	26.9	145.6
Ilha Solteira	47.8	221.3	220.1	669.7	6.1	115.1	32.9	36.2	119.9	78.8	81.3	10.9
Jupia	0.1	43.5	74.0	27.0	4.2	34.3	33.6	85.9	157.8	63.7	43.8	46.5
C. Térmica	213.8	217.4	358.6	534.5	67.5	311.3	344.2	225.2	26.0	0	150.8	181.4

A Figura 5.18 mostra o comportamento do volume dos reservatórios nas soluções obtidas. A usina de Ilha Solteira apresenta diferenças nos meses 3 e 8. Em Capivara, houveram diferenças mais expressivas nos meses 1 e 8.

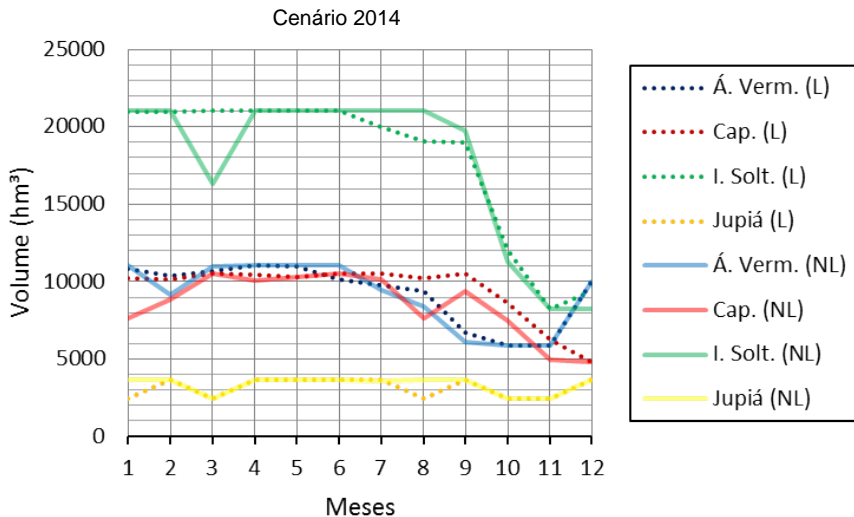


Figura 5.18: Volume dos reservatórios do sistema CESP para cenário de 2014.

A Tabela 5.20 indique como ficam os volumes finais dos reservatórios. A usina de Água Vermelha tinha como meta atingir 10000 hm<sup>3</sup> de seu reservatório e conseguiu alcançá-la em ambos os modelos.

Tabela 5.20: Volumes finais armazenados nos reservatórios em hm<sup>3</sup> - Sistema CESP

Modelo	Não Linear	Linear Inteiro Misto
Água Vermelha	10000	10000
Capivara	4816	4816
Ilha Solteira	8232	8232
Jupia	3680	3676.556

A Tabela 5.21 mostra os valores absolutos das diferenças observadas entre os volumes calculados pelo modelo não linear e linear inteiro misto. Podemos notar que essas diferenças não influenciam o volume final dos reservatórios.

Tal como feito para o sistema fictício, a solução do modelo não linear foi obtida a partir de duas soluções iniciais. A Tabela 5.22 compara as soluções obtidas para o modelo não linear com a solução encontrada para modelo linear inteiro misto.

Tabela 5.21: Diferença dos volumes armazenados nos reservatórios em  $hm^3$ 

Cenário 2014											
Água Vermelha	216.9	1196.1	301.7	0	072.5	851.1	368.8	988.8	653.9	0	0
Capivara	2555	1311.2	0	326.5	40.4	0	425.5	2574.6	1134.8	1134.8	1346.5
Ilha Solteira	95.4	80.2	4733.6	0	0	0	1060.7	1966.9	713.3	796.2	42.2
Jupiaá	1230.0	0	0	0	0	0	96.4	1230.0	0	0	0

Tabela 5.22: Resultados no modelo não linear e linear no problema do produtor CESP.

Modelo	E (GWh)	Q ( $hm^3$ )	U ( $hm^3$ )	Y (GWh)
Não Linear 1	400997.8	5058505.8	542165.2	298110.7
Não Linear 2	370082.8	4466373.6	1149075.5	329025.6
Linear Inteiro Misto	406510.4	5044393.4	529025.2	292596.3

O mesmo comportamento do caso anterior se repetiu aqui. Ao se empregar o modelo linear inteiro misto, obtém-se uma solução com menor corte de carga. Portanto, esse modelo obtém a melhor solução para o problema de nível inferior.

O objetivo do produtor é alcançado em todas as soluções obtidas, ou seja, a meta de volume de  $10000 hm^3$  para a usina Água Vermelha foi conseguida no modelo não linear e no modelo linear por partes. No entanto, na solução fornecida pelo modelo linear inteiro misto sua geração é maior. Assim, tanto para o produtor como para o operador do sistema a melhor solução é a obtida pelo modelo linear inteiro misto. Assim, tanto para o produtor quanto para o operador o melhor modelo é o linear inteiro misto.

Novamente mostramos a importância de se usar o modelo linear inteiro misto, pois com ele se obtém a solução ótima global do problema.

A Tabela 5.23 mostra o tempo de execução e o número de variáveis do modelo não linear e do modelo linear. Observa-se novamente as grandes desvantagens do modelo linear inteiro misto: possui elevado número de variáveis e requer muito tempo computacional para resolução.

O processo de resolução do problema linear inteiro misto alcançou o resultado para duas subdivisões do espaço de busca. Acima disso, o programa é interrompido por limitação de memória. A melhor reposta possível e a solução MIP obtida, para duas subdivisões, foi zero, ou seja, a meta foi atingida. Foi encontrada uma solução ótima sem parada do programa por limitação de memória.

Tabela 5.23: Resultados no modelo não linear e linear no despacho do problema do produtor CESP.

Modelo	Variáveis Reais	Variáveis Binárias	Tempo (s)	No. Iterações
Não Linear 1	2200	0	0.328	49
Não Linear 2	2200	0	0.517	186
Linear Inteiro Misto	72856	14208	35033.7	1119455

## 5.5 CONCLUSÃO

A técnica de linearização por partes apresentada nas seções anteriores foi aplicada com sucesso em um sistema fictício e dois equivalentes do sistema Brasileiro, para o problema do operador e para o produtor. No entanto, a dimensão dos problemas definidos após a linearização por partes limita a aplicação dessa técnica a sistemas de grande porte. O número de cenários de vazão afluyente considerados no estudo é também limitado.

No problema do operador, a necessidade de estudarmos linearização é justificada e vista mais claramente, pois temos soluções diferentes e melhores para o modelo não linear por partes comparado com o modelo não linear.

## 6 CONCLUSÃO

A busca pela solução ótima global é sempre o objetivo ao se resolver um problema de otimização. A maior parte dos métodos de otimização não linear possuem a desvantagem de encontrar apenas um ótimo local ou até soluções estacionárias, dependendo da inicialização de suas variáveis; porém modelos não lineares representam os fenômenos da natureza com maior fidelidade.

Os modelos lineares alcançam soluções ótimas, mas normalmente são modelos muito simplificados de situações reais, o que torna menos exata a representação do fenômeno natural.

Este trabalho adotou uma técnica de linearização por partes para resolver dois problemas do planejamento da operação de sistemas predominantemente hidrelétricos. Com essa técnica foram obtidas, para tais problemas, soluções ótimas globais mais exatas do que aquelas calculadas usando modelos lineares. A seguir são indicadas as principais conclusões do trabalho realizado e feitas sugestões para a continuação desta pesquisa.

### 6.1 USO DE TÉCNICA DE LINEARIZAÇÃO POR PARTES NO PROBLEMA DE DESPACHO CENTRALIZADO E PROBLEMA DO PRODUTOR

A linearização por partes utilizando um modelo básico de combinação convexa desagregada permite que se obtenha uma solução ótima global para um problema de otimização.

No problema de despacho centralizado, a linearização foi aplicada na função de produção da usina hidrelétrica. Essa função é não linear e não convexa e relaciona três variáveis, volume do reservatório, vazão turbinada e vazão vertida com a potência gerada pela usina.

Os estudos indicaram que o modelo não linear de despacho centralizado possui múltiplas soluções, que podem ser obtidas através de diferentes inicializações para o algoritmo de solução. No entanto, todas as soluções obtidas estão associadas à mesma complementação térmica. No sistema CESP a solução do modelo não linear foi melhor que a solução obtida pelo modelo linear inteiro misto; no caso do sistema SUL, a solução do modelo linearizado ficou um pouco mais barata do que a melhor solução obtida para o modelo não linear.

O problema do produtor é originalmente de dois níveis. O pro-

blema equivalente de um único nível apresenta várias restrições não lineares e não convexas, incluindo as funções de produção. Ao resolvermos esse problema, pudemos evidenciar mais ainda a importância da linearização, já que as soluções obtidas pelo algoritmo de otimização não linear estão associadas a valores diferentes de corte de carga, que variam de acordo com a inicialização empregada. Além disso, pelos resultados vistos, a solução obtida no modelo linear inteiro misto foi melhor, levando em consideração o objetivo do problema inferior, ou seja, as soluções desse modelo tiveram um corte de carga menor.

A análise dos resultados indica que, para ambos os problemas de planejamento, a linearização por partes permite o cálculo de uma solução ótima global.

A grande desvantagem do modelo linear inteiro misto é sua dimensão. Para se obter uma solução para este modelo é necessário um grande esforço computacional, ou seja, elevado tempo de processamento e uso de memória. Ao se resolver o problema de despacho centralizado tanto para o sistema CESP como para o sistema SUL, não foi possível reduzir o gap de dualidade até a tolerância especificada devido à falta de memória no computador. A solução ótima indicada foi a melhor obtida nas iterações feitas.

É importante também ressaltar que, embora cada sistema teste tenha um único conjunto de limites físicos/operacionais, as soluções obtidas para o problema de despacho centralizado são muito diferentes daquelas obtidas para o problema do produtor. Essas diferenças comprovam a necessidade de avaliar o problema de planejamento da operação sob o ponto de vista dos diversos agentes do setor elétrico.

## 6.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

A técnica de linearização utilizada aqui é a mais básica de um conjunto grande de metodologias de linearização por partes. Outras formas de linearização conseguem reduzir o número de variáveis e, conseqüentemente, o esforço computacional. O grande esforço computacional foi o fator que impossibilitou a realização de testes com maior número de cenários de afluência e com sistemas maiores e mais complexos.

O método de linearização escolhido, por ser o mais simples entre os existentes na literatura, deixou o programa muito grande e a execução do mesmo muito lento. Assim, não foi possível realizar testes com maior número de cenários e com melhor representação das funções



não lineares. Logo, como proposta para trabalho futuro fica a utilização de outros métodos de linearização por partes na solução de ambos os problemas. Alguns desses métodos que podem ser implementados são [29]:

- Modelo logaritmo de combinação convexa desagregada;
- Modelo básico de combinação convexa agregada;
- Modelo logaritmo de combinação convexa agregada;

A vantagem desses modelos com relação ao modelo básico de combinação convexa desagregada é que o número de variáveis diminui, o que pode melhorar o desempenho dos programas criados para resolver os problemas de despacho centralizado e problema do produtor.

Outra sugestão é a normalização das variáveis físicas dos problemas discutidos. As variáveis que representam a potência gerada pelas usinas, volume dos reservatórios, vazão turbinada e vertida, podem ser normalizadas de forma que seus limites fiquem entre um mínimo (0) e um máximo (1). Isso pode trazer uma melhoria na execução dos programas e redução do uso de memória do computador.



## REFERÊNCIAS

- [1] GIORDANO, F.; FOX, W.; HORTON, S. A *First Course in Mathematical Modeling*. Cengage Learning, 2013. ISBN 9781285531762. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=PYUWAAAQBAJ>>.
- [2] ONS. *Matriz de Energia Elétrica*. ONS, Novembro 2016. Disponível em: <<https://www2.aneel.gov.br/aplicacoes/capacidadebrasil/OperacaoCapacidadeBrasil.cfm>>.
- [3] ALMEIDA, K. C.; CONEJO, A. J. Medium-term power dispatch in predominantly hydro systems: An equilibrium approach. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 28, n. 3, p. 2384–2394, Aug 2013. ISSN 0885-8950.
- [4] ALMEIDA, K. C.; SENNA, F. S. Optimal active-reactive power dispatch under competition via bilevel programming. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 26, n. 4, p. 2345–2354, Nov 2011. ISSN 0885-8950.
- [5] ZHANG, H. et al. A mixed-integer linear programming approach for multi-stage security-constrained transmission expansion planning. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 27, n. 2, p. 1125–1133, May 2012. ISSN 0885-8950.
- [6] CAMPONOGARA, E.; ALMEIDA, K. C. de; HARDT, R. Piecewise-linear approximations for a non-linear transmission expansion planning problem. *IET Generation, Transmission Distribution*, v. 9, n. 12, p. 1235–1244, 2015. ISSN 1751-8687.
- [7] TRODDEN, P. A. et al. Optimization-based islanding of power networks using piecewise linear ac power flow. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 29, n. 3, p. 1212–1220, May 2014. ISSN 0885-8950.
- [8] CONEJO, A. J. et al. Self-scheduling of a hydro producer in a pool-based electricity market. *IEEE Power Engineering Review*, v. 22, n. 9, p. 60–60, Sept 2002. ISSN 0272-1724.
- [9] SAHRAEI-ARDAKANI, M.; HEDMAN, K. W. Day-ahead corrective adjustment of facts reactance: A linear programming approach. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 31, n. 4, p. 2867–2875, July 2016. ISSN 0885-8950.

- [10] ALENCAR, H. *Análise de soluções de equilíbrio na programação da operação de médio prazo*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Programa de Pós Graduação Engenharia Elétrica, 2015.
- [11] NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. *Numerical Optimization*. Springer New York, 2006. (Springer Series in Operations Research and Financial Engineering). ISBN 9780387303031. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=eNIPAAAAMAAJ>>.
- [12] SILVA, E. da. *Formação de preços em mercados de energia elétrica*. Sagra Luzzatto, 2001. ISBN 9788524106460. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=J9FMAAAACAAJ>>.
- [13] TOLMASQUIM, M. *Novo modelo do setor elétrico brasileiro*. Synergia, 2011. ISBN 9788561325596. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=R5iUZwEACAAJ>>.
- [14] CONEJO, A.; CARRIÓN, M.; MORALES, J. *Decision Making Under Uncertainty in Electricity Markets*. Springer US, 2010. (International Series in Operations Research & Management Science). ISBN 9781441974211. Disponível em: <[https://books.google.com.au/books?id=zta0qWS\\_W98C](https://books.google.com.au/books?id=zta0qWS_W98C)>.
- [15] ONS. *Séries Históricas de Vazões*. ONS, Junho 2016. Disponível em: <[http://www.ons.org.br/operacao/vazoes\\_naturais.aspx](http://www.ons.org.br/operacao/vazoes_naturais.aspx)>.
- [16] ONS. *Perfil da Carga de Demanda*. ONS, Outubro 2016. Disponível em: <[http://www.ons.org.br/historico/carga\\_propria\\_de\\_demanda.aspx](http://www.ons.org.br/historico/carga_propria_de_demanda.aspx)>.
- [17] COSTA, A. S. *Planejamento da operação de sistemas de energia elétrica*. [S.l.]: Notas de Aula, 2006.
- [18] SOARES, S.; CARNEIRO, A. A. F. M. Optimal operation of reservoirs for electric generation. *IEEE Transactions on Power Delivery*, v. 6, n. 3, p. 1101–1107, Jul 1991. ISSN 0885-8977.
- [19] HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. *Fundamentos de Física*. Companhia Editorial Continental, 2001. (Fundamentos de física, vol. 1). ISBN 9789702401759. Disponível em: <[https://books.google.com.br/books?id=q\\_7ZAAAACAAJ](https://books.google.com.br/books?id=q_7ZAAAACAAJ)>.

- [20] WOOD, A.; WOLLENBERG, B. *Power Generation, Operation, and Control*. Wiley, 1996. (A Wiley-Interscience publication). ISBN 9780471586999. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=xg6yQgAACAAJ>>.
- [21] ANEEL. *Modelo DECOMP - CEPEL - Manual de Referência*. [S.l.], 2001. Disponível em: <[http://www2.aneel.gov.br/aplicacoes/noticias/arquivos/pdf/Manual{\\\_}Referencia{\\\_}DECOMP.pdf](http://www2.aneel.gov.br/aplicacoes/noticias/arquivos/pdf/Manual{\_}Referencia{\_}DECOMP.pdf)>.
- [22] MONTICELLI, A.; (BRASIL), C. de Pesquisas de E. E. *Fluxo de carga em redes de energia elétrica*. E. Blucher, 1983. Disponível em: <[https://books.google.com.br/books?id=b\\_qAkgEACAAJ](https://books.google.com.br/books?id=b_qAkgEACAAJ)>.
- [23] PINDYCK, R.; RUBINFELD, D. *Microeconomia*. Pearson Brasil, 2006. ISBN 9788576050186. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=N7OJAAAACAAJ>>.
- [24] OSBORNE, M.; RUBINSTEIN, A. *A Course in Game Theory*. MIT Press, 1994. ISBN 9780262650403. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=5ntdaYX4LPkC>>.
- [25] FUDENBERG, D.; TIROLE, J. *Game Theory*. MIT Press, 1991. ISBN 9780262061414. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=pFPHKwXro3QC>>.
- [26] VEGA-REDONDO, F. *Economics and the Theory of Games*. Cambridge University Press, 2003. ISBN 9780521772518. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=c11gQgAACAAJ>>.
- [27] FALK, J. E.; LIU, J. On bilevel programming, part i: General nonlinear cases. *Mathematical Programming*, v. 70, n. 1, p. 47–72, 1995. ISSN 1436-4646. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/BF01585928>>.
- [28] THIAGO, T. *Formulações inteiras mistas para modelos lineares por partes multidimensionais: aplicações na otimização da produção de petróleo sob restrições de pressão*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Programa de Pós Graduação Engenharia de Automação, 2012.
- [29] VIELMA, J. P.; AHMED, S.; NEMHAUSER, G. Mixed-integer models for nonseparable piecewise-linear optimization: Unifying framework and extensions. *Operations Research*, v. 58, n. 2, p. 303–315, 2010. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1287/opre.1090.0721>>.

[30] GOMES, J.; VELHO, L.; SOUSA, M. *Computer Graphics: Theory and Practice*. CRC Press, 2012. ISBN 9781439865576. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=hvTRBQAAQBAJ>>.

## APÊNDICE A - Problema do Produtor





## A.1 PARTE NÃO LINEAR

Lagrangeano do problema inferior, representado na equação (3.20):

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\tau(\omega), \psi(\omega)] = & \sum_{w=1}^{N_w} \prod(\omega) \sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^{N_y} y_{k,y}(\omega) - \\
& - \alpha_{i,t}(\omega) [v_{i,t}(\omega) - v_{i,t-1}(\omega) - h_t[r_{i,t} - q_{i,t}(\omega) - u_{i,t}(\omega)] - \sum_{m \in \Omega} h_t [q_{m,t}(\omega) + u_{m,t}(\omega)]] - \\
& - \beta_{i,t}(\omega) [Ph_{i,t}(\omega) - \rho_i [hm_{i,t}(\omega) - hj_{i,t}(\omega)] q_{i,t}(\omega)] - \\
& - \lambda_{n,t}(\omega) \left[ \sum_{i=1}^H Ah_{n,i} Ph_{i,t}(\omega) + \sum_{k=1}^{N_y} Ay_{n,k} y_{k,t}(\omega) - \sum_{s=1}^{N_b-1} \hat{B}_{n,s} \hat{\theta}_{s,t}(\omega) - Pd_{n,t} \right] - \\
& - \gamma_{i,t}^{min}(\omega) [Ph_{i,t}(\omega) - Ph_i^{min}] - \gamma_{i,t}^{max}(\omega) [-Ph_{i,t}(\omega) + Of_{i,t}(\omega)] - \\
& - \rho_{i,t}^{min}(\omega) [v_{i,t}(\omega) - v_i^{min}] - \rho_{i,t}^{max}(\omega) [-v_{i,t}(\omega) + v_i^{max}] - \\
& - \sigma_{i,t}^{min}(\omega) [q_{i,t}(\omega) - q_i^{min}] - \sigma_{i,t}^{max}(\omega) [-q_{i,t}(\omega) + q_i^{max}] - \\
& - \kappa_{i,t}^{min}(\omega) [u_{i,t}(\omega) - 0] - \kappa_{i,t}^{max}(\omega) [-u_{i,t}(\omega) + u_i^{max}] - \\
& - \pi_{k,t}^{min}(\omega) [y_{i,t}(\omega) - 0] - \pi_{k,t}^{max}(\omega) [-y_{i,t}(\omega) + y_i^{max}] - \\
& - \zeta_{l,t}^{min}(\omega) \left[ \sum_{n=1}^{N_b-1} M_{l,n} \hat{\theta}_{n,t}(\omega) + f_l^{max} \right] - \zeta_{k,t}^{max}(\omega) \left[ - \sum_{n=1}^{N_b-1} M_{l,n} \hat{\theta}_{n,t}(\omega) + f_l^{max} \right]
\end{aligned} \tag{A.1}$$

Reescrevendo a equação (A.1), teremos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\tau(\omega), \psi(\omega)] = & v_{i,t}(\omega)[- \alpha_{i,t}(\omega) + \alpha_{i,t+1}(\omega) - \rho_{i,t}^{min}(\omega) + \rho_{i,t}^{max}(\omega)] + \\
& + q_{i,t}(\omega)[- \alpha_{i,t}(\omega)h_t + \sum_{m \in \Omega} \alpha_{m,t}(\omega)h_t + \beta_{i,t}(\omega)[Ph_i(\omega) - \rho_i[hm_{i,t}(\omega) - \\
& - hj_{i,t}(\omega)]q_i(\omega)] - \sigma_{i,t}^{min}(\omega) + \sigma_{i,t}^{max}(\omega)] + \\
& + Ph_{i,t}(\omega)[- \beta_{i,t}(\omega) - \lambda_{n,t}(\omega) \sum_{i=1}^H Ah_{n,i} - \gamma_{i,t}^{min}(\omega) + \gamma_{i,t}^{max}(\omega)] + \\
& + \hat{\theta}_{n,t}(\omega)[\lambda_{n,t}(\omega) \sum_{s=1}^{N_b-1} \hat{B}_{n,s} - \zeta_{l,t}^{min}(\omega) \sum_{n=1}^{N_b-1} M_{l,n} + \zeta_{l,t}^{max}(\omega) \sum_{n=1}^{N_b-1} M_{l,n}] + \\
& + y_{k,t}(\omega) \left[ \sum_{\omega=1}^{N_w} \prod(\omega) - \lambda_{n,t}(\omega) \sum_{k=1}^{N_y} Ay_{n,k} - \pi_{k,t}^{min}(\omega) + \pi_{k,t}^{max}(\omega) \right] + \\
& + u_{i,t}(\omega)[- \alpha_{i,t}(\omega)h_t + \sum_{m \in \Omega} \alpha_{m,t}(\omega)h_t - \kappa_{i,t}^{min}(\omega) + \kappa_{i,t}^{max}(\omega)] + \\
& + \alpha_{i,t}(\omega)h_t r_{i,t}(\omega) + \lambda_{n,t}(\omega)Pd_{n,t} + \gamma_{i,t}^{min}(\omega)Ph_i^{min} - \\
& - \gamma_{i,t}^{max}(\omega)Of_{i,t}(\omega) + \rho_{i,t}^{min}(\omega)v_i^{min} - \rho_{i,t}^{max}(\omega)v_i^{max} + \sigma_{i,t}^{min}(\omega)q_i^{min} - \\
& - \sigma_{i,t}^{max}(\omega)q_i^{max} - \kappa_{i,t}^{max}(\omega)u_i^{max} - \pi_{i,t}^{max}(\omega)y_k^{max} - \zeta_{l,t}^{min}(\omega)f_l^{max} - \\
& - \zeta_{l,t}^{max}(\omega)f_l^{max}
\end{aligned} \tag{A.2}$$

As derivadas de primeira ordem do Lagrangeano com relação ao conjunto de variáveis primais,  $\tau(\omega)$ , são utilizadas para encontrarmos o seu ponto de mínimo. Elas são mostradas a seguir:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_{i,t}(\omega)} = & - \alpha_{i,t}(\omega) + \alpha_{i,t+1}(\omega) - \rho_{i,t}^{min}(\omega) + \rho_{i,t}^{max}(\omega) + \\
& + q_{i,t}(\omega)\beta_{i,t}(\omega)\rho_i[cv_{1,i} + 2cv_{2,i}v_{t,i}(\omega) + 3cv_{3,i}v_{t,i}(\omega)^2 + \\
& + 4cv_{4,i}v_{t,i}(\omega)^3] = 0
\end{aligned} \tag{A.3}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{i,t}(\omega)} = & - \alpha_{i,t}(\omega)h_t + \sum_{m \in \Omega} \alpha_{m,t}(\omega)h_t + \beta_{i,t}(\omega)\rho_i[hm_{i,t}(\omega) - \\
& - hj_{i,t}(\omega)] - \sigma_{i,t}^{min}(\omega) + \sigma_{i,t}^{max}(\omega) - q_{i,t}(\omega)\beta_{i,t}(\omega)\rho_i[cq_{1,i} + \\
& + 2cq_{2,i}[q_{i,t}(\omega) + u_{i,t}(\omega)] + 3cq_{3,i}[q_{i,t}(\omega) + u_{i,t}(\omega)]^2 + \\
& + 4cq_{4,i}[q_{i,t}(\omega) + u_{i,t}(\omega)]^3] = 0
\end{aligned} \tag{A.4}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{i,t}(\omega)} = & -\alpha_{i,t}(\omega)h_t + \sum_{m \in \Omega} \alpha_{m,t}(\omega)h_t - \kappa_{i,t}^{min}(\omega) + \kappa_{i,t}^{max}(\omega) - \\ & - q_{i,t}(\omega)\beta_{i,t}(\omega)\rho_i[cq_{1,i} + 2cq_{2,i}[q_{i,t}(\omega) + u_{i,t}(\omega)] + \\ & + 3cq_{3,i}[q_{i,t}(\omega) + u_{i,t}(\omega)]^2 + 4cq_{4,i}[q_{i,t}(\omega) + u_{i,t}(\omega)]^3] = 0 \end{aligned} \quad (A.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Ph_{i,t}(\omega)} = & -\beta_{i,t}(\omega) - \lambda_{n,t}(\omega) \sum_{i=1}^H Ah_{n,i} - \\ & - \gamma_{i,t}^{min}(\omega) + \gamma_{i,t}^{max}(\omega) = 0 \end{aligned} \quad (A.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \hat{\theta}_{n,t}(\omega)} = & \lambda_{n,t}(\omega) \sum_{s=1}^{N_b-1} \hat{B}_{n,s} - \zeta_{l,t}^{min}(\omega) \sum_{n=1}^{N_b-1} M_{l,n} + \\ & + \zeta_{l,t}^{max}(\omega) \sum_{n=1}^{N_b-1} M_{l,n} = 0 \end{aligned} \quad (A.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_{k,t}(\omega)} = & \sum_{w=1}^{N_w} \Pi(\omega) - \lambda_{n,t}(\omega) \sum_{k=1}^{N_y} Ay_{n,k} - \\ & - \pi_{k,t}^{min}(\omega) + \pi_{k,t}^{max}(\omega) = 0 \end{aligned} \quad (A.8)$$

Como as restrições de desigualdades tem que apresentar valores maiores ou iguais a zero, todos o multiplicadores relacionados à essas restrições também deve ser maiores ou iguais a zero, assim:

$$\begin{aligned} \psi(\omega) = & [\gamma_{i,t}^{min}(\omega), \gamma_{i,t}^{max}(\omega), \rho_{i,t}^{min}(\omega), \rho_{i,t}^{max}(\omega), \\ & \sigma_{i,t}^{min}(\omega), \sigma_{i,t}^{max}(\omega), \kappa_{i,t}^{min}(\omega), \kappa_{i,t}^{max}(\omega), \\ & \pi_{i,t}^{min}(\omega), \pi_{i,t}^{max}(\omega), \zeta_{i,t}^{min}(\omega), \zeta_{i,t}^{max}(\omega)] \geq 0 \end{aligned} \quad (A.9)$$

Como vimos, a função dual é o ponto de mínimo do Lagrangeano, assim, considerando as condições de ponto mínimo representado pelas equações (A.3), (A.4), (A.5), (A.6), (A.7), (A.8), teremos que:

$$\begin{aligned}
d[\psi(\omega)] = & -v_{i,t}(\omega)q_{i,t}(\omega)\beta_{i,t}(\omega)\rho_i[cv_{1,i} + 2cv_{2,i}v_{t,i}(\omega) + \\
& + 3cv_{3,i}v_{t,i}(\omega)^2 + 4cv_{4,i}v_{t,i}(\omega)^3] + \\
& + q_{i,t}(\omega)q_{i,t}(\omega)\beta_{i,t}(\omega)\rho_i[cq_{1,i} + 2cq_{2,i}[q_{i,t}(\omega) + u_{i,t}(\omega)] + \\
& + 3cq_{3,i}[q_{i,t}(\omega) + u_{i,t}(\omega)]^2 + 4cq_{4,i}[q_{i,t}(\omega) + u_{i,t}(\omega)]^3] + \\
& + u_{i,t}(\omega)q_{i,t}(\omega)\beta_{i,t}(\omega)\rho_i[cq_{1,i} + 2cq_{2,i}[q_{i,t}(\omega) + u_{i,t}(\omega)] + \\
& + 3cq_{3,i}[q_{i,t}(\omega) + u_{i,t}(\omega)]^2 + 4cq_{4,i}[q_{i,t}(\omega) + u_{i,t}(\omega)]^3] + \\
& + \alpha_{i,t}(\omega)h_t r_{i,t}(\omega) + \lambda_{n,t}(\omega)Pd_{n,t} + \gamma_{i,t}^{min}(\omega)Ph_i^{min} - \gamma_{i,t}^{max}(\omega)Of_{i,t}(\omega) + \\
& + \rho_{i,t}^{min}(\omega)v_i^{min} - \rho_{i,t}^{max}(\omega)v_i^{max} + \sigma_{i,t}^{min}(\omega)q_i^{min} - \sigma_{i,t}^{max}(\omega)q_i^{max} - \\
& - \kappa_{i,t}^{max}(\omega)u_i^{max} - \pi_{i,t}^{max}(\omega)y_k^{max} - \zeta_{l,t}^{min}(\omega)f_l^{max} - \zeta_{l,t}^{max}(\omega)f_l^{max}
\end{aligned} \tag{A.10}$$

A função dual, representada pela equação (A.10), é a função objetivo do problema dual  $D(\omega)$ . Como citado antes, no ponto ótimo os valores das funções objetivo dos problemas dual e primal apresentam o mesmo valor, assim a condição de dualidade forte é representada pela seguinte equação:

$$\sum_{w=1}^{N_w} \prod(\omega) \sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^{N_y} y_{k,y}(\omega) - d[\psi(\omega)] = 0 \tag{A.11}$$

ou

$$\begin{aligned}
& \sum_{w=1}^{N_w} \prod(\omega) \sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^{N_y} y_{k,y}(\omega) + v_{i,t}(\omega)q_{i,t}(\omega)\beta_{i,t}(\omega)\rho_i[cv_{1,i} + \\
& + 2cv_{2,i}v_{t,i}(\omega) + 3cv_{3,i}v_{t,i}(\omega)^2 + 4cv_{4,i}v_{t,i}(\omega)^3] - \\
& - q_{i,t}(\omega)q_{i,t}(\omega)\beta_{i,t}(\omega)\rho_i[cq_{1,i} + 2cq_{2,i}[q_{i,t}(\omega) + u_{i,t}(\omega)] + \\
& + 3cq_{3,i}[q_{i,t}(\omega) + u_{i,t}(\omega)]^2 + 4cq_{4,i}[q_{i,t}(\omega) + u_{i,t}(\omega)]^3] - \\
& - u_{i,t}(\omega)q_{i,t}(\omega)\beta_{i,t}(\omega)\rho_i[cq_{1,i} + 2cq_{2,i}[q_{i,t}(\omega) + u_{i,t}(\omega)] + \\
& + 3cq_{3,i}[q_{i,t}(\omega) + u_{i,t}(\omega)]^2 + 4cq_{4,i}[q_{i,t}(\omega) + u_{i,t}(\omega)]^3] + \\
& - \alpha_{i,t}(\omega)h_t r_{i,t}(\omega) - \lambda_{n,t}(\omega)Pd_{n,t} - \gamma_{i,t}^{min}(\omega)Ph_i^{min} + \\
& + \gamma_{i,t}^{max}(\omega)Of_{i,t}(\omega) - \rho_{i,t}^{min}(\omega)v_i^{min} + \rho_{i,t}^{max}(\omega)v_i^{max} - \\
& - \sigma_{i,t}^{min}(\omega)q_i^{min} + \sigma_{i,t}^{max}(\omega)q_i^{max} + \kappa_{i,t}^{max}(\omega)u_i^{max} + \pi_{i,t}^{max}(\omega)y_k^{max} + \\
& + \zeta_{l,t}^{min}(\omega)f_l^{max} + \zeta_{l,t}^{max}(\omega)f_l^{max} = 0
\end{aligned} \tag{A.12}$$

Agora podemos substituir o problema do operador (inferior) por

um conjunto de restrições, representadas pelas equações (A.3), (A.4), (A.5), (A.6), (A.7), (A.8), (A.9) e (A.12). Assim o problema do produtor, antes de dois níveis, agora se transforma em um problema de um nível apenas.

## A.2 LINEARIZAÇÃO DAS FUNÇÕES AUXILIARES

Aqui estão descritas todas as restrições adicionais da linearização de cada função não convexa da formulação do problema do produtor. Cada conjunto de equações foi chamado de bloco.

Bloco 1:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{P \in \mathcal{P}} \sum_{\vartheta \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} \delta_{P,\vartheta,i,t}(\omega) C_{v,i} = v_{i,t}(\omega) \\
 & \sum_{P \in \mathcal{P}} \sum_{\vartheta \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} \delta_{P,\vartheta,i,t}(\omega) C_{q,i} = q_{i,t}(\omega) \\
 & \sum_{P \in \mathcal{P}} \sum_{\vartheta \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} \delta_{P,\vartheta,i,t}(\omega) C_{u,i} = u_{i,t}(\omega) \\
 & \sum_{P \in \mathcal{P}} \sum_{\vartheta \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} \delta_{P,\vartheta,i,t}(\omega) C_{Ph,i} = Ph_{i,t}(\omega) \\
 & \delta_{P,\vartheta,i,t} \geq 0, \quad \forall P \in \mathcal{P}, \quad \forall \vartheta \in \mathcal{V}(\mathcal{P}) \\
 & \sum_{\vartheta \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} \delta_{P,\vartheta,i,t} y_{P,i,t}(\omega), \quad \forall P \in \mathcal{P} \\
 & \sum_{P \in \mathcal{P}} y_{P,i,t}(\omega) = 1, \quad y_{P,i,t}(\omega) \in \{0, 1\}, \quad \forall P \in \mathcal{P}
 \end{aligned} \tag{A.13}$$

Bloco 2:

$$\begin{aligned}
& \sum_{P \in \mathcal{P}} \sum_{\vartheta \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} \delta_{P,\vartheta,i,t}(\omega) C_{\beta,i} = \beta_{i,t}(\omega) \\
& \sum_{P \in \mathcal{P}} \sum_{\vartheta \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} \delta_{P,\vartheta,i,t}(\omega) C_{v,i} = v_{i,t}(\omega) \\
& \sum_{P \in \mathcal{P}} \sum_{\vartheta \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} \delta_{P,\vartheta,i,t}(\omega) C_{q,i} = q_{i,t}(\omega) \\
& \sum_{P \in \mathcal{P}} \sum_{\vartheta \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} \delta_{P,\vartheta,i,t}(\omega) C_{faux1,i} = faux1_{i,t}(\omega) \\
& \delta_{P,\vartheta,i,t} \geq \mathbf{0}, \forall P \in \mathcal{P}, \forall v \in \mathcal{V}(\mathcal{P}) \\
& \sum_{\vartheta \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} \delta_{P,\vartheta,i,t} y_{P,i,t}(\omega), \forall P \in \mathcal{P} \\
& \sum_{P \in \mathcal{P}} y_{P,i,t}(\omega) = 1, y_{P,i,t}(\omega) \in \{0, 1\}, \forall P \in \mathcal{P}
\end{aligned} \tag{A.14}$$

Bloco 3:

$$\begin{aligned}
& \sum_{P \in \mathcal{P}} \sum_{\vartheta \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} \delta_{P,\vartheta,i,t}(\omega) C_{\beta,i} = \beta_{i,t}(\omega) \\
& \sum_{P \in \mathcal{P}} \sum_{\vartheta \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} \delta_{P,\vartheta,i,t}(\omega) C_{v,i} = v_{i,t}(\omega) \\
& \sum_{P \in \mathcal{P}} \sum_{\vartheta \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} \delta_{P,\vartheta,i,t}(\omega) C_{faux2,i} = faux2_{i,t}(\omega) \\
& \delta_{P,\vartheta,i,t} \geq \mathbf{0}, \forall P \in \mathcal{P}, \forall v \in \mathcal{V}(\mathcal{P}) \\
& \sum_{\vartheta \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} \delta_{P,\vartheta,i,t} y_{P,i,t}(\omega), \forall P \in \mathcal{P} \\
& \sum_{P \in \mathcal{P}} y_{P,i,t}(\omega) = 1, y_{P,i,t}(\omega) \in \{0, 1\}, \forall P \in \mathcal{P}
\end{aligned} \tag{A.15}$$

Bloco 4:

$$\begin{aligned}
& \sum_{P \in \mathcal{P}} \sum_{\vartheta \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} \delta_{P,\vartheta,i,t}(\omega) C_{\beta,i} = \beta_{i,t}(\omega) \\
& \sum_{P \in \mathcal{P}} \sum_{\vartheta \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} \delta_{P,\vartheta,i,t}(\omega) C_{q,i} = q_{i,t}(\omega) \\
& \sum_{P \in \mathcal{P}} \sum_{\vartheta \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} \delta_{P,\vartheta,i,t}(\omega) C_{u,i} = u_{i,t}(\omega) \\
& \sum_{P \in \mathcal{P}} \sum_{\vartheta \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} \delta_{P,\vartheta,i,t}(\omega) C_{faux3,i} = faux3_{i,t}(\omega) \\
& \delta_{P,\vartheta,i,t} \geq 0, \quad \forall P \in \mathcal{P}, \quad \forall v \in \mathcal{V}(\mathcal{P}) \\
& \sum_{\vartheta \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} \delta_{P,\vartheta,i,t} y_{P,i,t}(\omega), \quad \forall P \in \mathcal{P} \\
& \sum_{P \in \mathcal{P}} y_{P,i,t}(\omega) = 1, \quad y_{P,i,t}(\omega) \in \{0, 1\}, \quad \forall P \in \mathcal{P}
\end{aligned} \tag{A.16}$$

Bloco 5:

$$\begin{aligned}
& \sum_{P \in \mathcal{P}} \sum_{\vartheta \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} \delta_{P,\vartheta,i,t}(\omega) C_{\beta,i} = \beta_{i,t}(\omega) \\
& \sum_{P \in \mathcal{P}} \sum_{\vartheta \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} \delta_{P,\vartheta,i,t}(\omega) C_{q,i} = q_{i,t}(\omega) \\
& \sum_{P \in \mathcal{P}} \sum_{\vartheta \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} \delta_{P,\vartheta,i,t}(\omega) C_{u,i} = u_{i,t}(\omega) \\
& \sum_{P \in \mathcal{P}} \sum_{\vartheta \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} \delta_{P,\vartheta,i,t}(\omega) C_{faux4,i} = faux4_{i,t}(\omega) \\
& \delta_{P,\vartheta,i,t} \geq 0, \quad \forall P \in \mathcal{P}, \quad \forall v \in \mathcal{V}(\mathcal{P}) \\
& \sum_{\vartheta \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} \delta_{P,\vartheta,i,t} y_{P,i,t}(\omega), \quad \forall P \in \mathcal{P} \\
& \sum_{P \in \mathcal{P}} y_{P,i,t}(\omega) = 1, \quad y_{P,i,t}(\omega) \in \{0, 1\}, \quad \forall P \in \mathcal{P}
\end{aligned} \tag{A.17}$$

Bloco 6:

$$\begin{aligned}
& \sum_{P \in \mathcal{P}} \sum_{\vartheta \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} \delta_{P,\vartheta,i,t}(\omega) C_{\beta,i} = \beta_{i,t}(\omega) \\
& \sum_{P \in \mathcal{P}} \sum_{\vartheta \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} \delta_{P,\vartheta,i,t}(\omega) C_{v,i} = v_{i,t}(\omega) \\
& \sum_{P \in \mathcal{P}} \sum_{\vartheta \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} \delta_{P,\vartheta,i,t}(\omega) C_{q,i} = q_{i,t}(\omega) \\
& \sum_{P \in \mathcal{P}} \sum_{\vartheta \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} \delta_{P,\vartheta,i,t}(\omega) C_{faux5,i} = faux5_{i,t}(\omega) \\
& \delta_{P,\vartheta,i,t} \geq \mathbf{0}, \forall P \in \mathcal{P}, \forall v \in \mathcal{V}(\mathcal{P}) \\
& \sum_{\vartheta \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} \delta_{P,\vartheta,i,t} y_{P,i,t}(\omega), \forall P \in \mathcal{P} \\
& \sum_{P \in \mathcal{P}} y_{P,i,t}(\omega) = 1, y_{P,i,t}(\omega) \in \{0, 1\}, \forall P \in \mathcal{P}
\end{aligned} \tag{A.18}$$

Bloco 7:

$$\begin{aligned}
& \sum_{P \in \mathcal{P}} \sum_{\vartheta \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} \delta_{P,\vartheta,i,t}(\omega) C_{\beta,i} = \beta_{i,t}(\omega) \\
& \sum_{P \in \mathcal{P}} \sum_{\vartheta \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} \delta_{P,\vartheta,i,t}(\omega) C_{q,i} = q_{i,t}(\omega) \\
& \sum_{P \in \mathcal{P}} \sum_{\vartheta \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} \delta_{P,\vartheta,i,t}(\omega) C_{u,i} = u_{i,t}(\omega) \\
& \sum_{P \in \mathcal{P}} \sum_{\vartheta \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} \delta_{P,\vartheta,i,t}(\omega) C_{faux6,i} = faux6_{i,t}(\omega) \\
& \delta_{P,\vartheta,i,t} \geq \mathbf{0}, \forall P \in \mathcal{P}, \forall v \in \mathcal{V}(\mathcal{P}) \\
& \sum_{\vartheta \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} \delta_{P,\vartheta,i,t} y_{P,i,t}(\omega), \forall P \in \mathcal{P} \\
& \sum_{P \in \mathcal{P}} y_{P,i,t}(\omega) = 1, y_{P,i,t}(\omega) \in \{0, 1\}, \forall P \in \mathcal{P}
\end{aligned} \tag{A.19}$$

Bloco 8:



$$\begin{aligned}
& \sum_{P \in \mathcal{P}} \sum_{\vartheta \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} \delta_{P,\vartheta,i,t}(\omega) C_{\beta,i} = \beta_{i,t}(\omega) \\
& \sum_{P \in \mathcal{P}} \sum_{\vartheta \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} \delta_{P,\vartheta,i,t}(\omega) C_{q,i} = q_{i,t}(\omega) \\
& \sum_{P \in \mathcal{P}} \sum_{\vartheta \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} \delta_{P,\vartheta,i,t}(\omega) C_{u,i} = u_{i,t}(\omega) \\
& \sum_{P \in \mathcal{P}} \sum_{\vartheta \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} \delta_{P,\vartheta,i,t}(\omega) C_{faux7,i} = faux7_{i,t}(\omega) \\
& \delta_{P,\vartheta,i,t} \geq 0, \quad \forall P \in \mathcal{P}, \quad \forall v \in \mathcal{V}(\mathcal{P}) \\
& \sum_{\vartheta \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} \delta_{P,\vartheta,i,t} y_{P,i,t}(\omega), \quad \forall P \in \mathcal{P} \\
& \sum_{P \in \mathcal{P}} y_{P,i,t}(\omega) = 1, \quad y_{P,i,t}(\omega) \in \{0, 1\}, \quad \forall P \in \mathcal{P}
\end{aligned} \tag{A.20}$$

Bloco 9:

$$\begin{aligned}
& \sum_{P \in \mathcal{P}} \sum_{\vartheta \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} \delta_{P,\vartheta,i,t}(\omega) C_{gama,i} = gama_{i,t}(\omega) \\
& \sum_{P \in \mathcal{P}} \sum_{\vartheta \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} \delta_{P,\vartheta,i,t}(\omega) C_{Of,i} = Of_{i,t}(\omega) \\
& \sum_{P \in \mathcal{P}} \sum_{\vartheta \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} \delta_{P,\vartheta,i,t}(\omega) C_{faux8,i} = faux8_{i,t}(\omega) \\
& \delta_{P,\vartheta,i,t} \geq 0, \quad \forall P \in \mathcal{P}, \quad \forall v \in \mathcal{V}(\mathcal{P}) \\
& \sum_{\vartheta \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} \delta_{P,\vartheta,i,t} y_{P,i,t}(\omega), \quad \forall P \in \mathcal{P} \\
& \sum_{P \in \mathcal{P}} y_{P,i,t}(\omega) = 1, \quad y_{P,i,t}(\omega) \in \{0, 1\}, \quad \forall P \in \mathcal{P}
\end{aligned} \tag{A.21}$$



## **APÊNDICE B – Problema de Otimização**



Um problema de programação matemática (ou, simplesmente, problema de otimização) apresenta o seguinte modelo geral:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a. :} \quad & g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, m \\ & h_j(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

onde:

$\mathbf{x}$  é o vetor de variáveis de decisão;

$f(\mathbf{x})$  função objetivo;

$g_i(\mathbf{x})$  restrições de desigualdade;

$h_j(\mathbf{x})$  restrições de igualdade.

O espaço viável ou espaço factível do problema é definido da seguinte forma:

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{x} | g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \forall i = 1, 2, \dots, m \wedge h_j(\mathbf{x}) = 0, \forall j = 1, 2, \dots, n\} \quad (\text{B.2})$$

Quando ao menos uma das funções  $f(\mathbf{x})$ ,  $g(\mathbf{x})$  ou  $h(\mathbf{x})$  é não linear e não convexa, o problema é dito não linear e não convexo.

Definição de mínimo local e global:

1. mínimo local: se  $\mathbf{x}^* \in \mathcal{S}$  é um mínimo local de  $f(\mathbf{x})$  sobre  $\mathcal{S}$ , então existe um  $\delta > 0$ , onde  $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^*) \forall \mathbf{x} \in \mathcal{S}$ , tal que  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*| < \delta$ ;
2. mínimo global: se  $\mathbf{x}^* \in \mathcal{S}$  é um mínimo global de  $f(\mathbf{x})$  sobre  $\mathcal{S}$ , então  $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^*) \forall \mathbf{x} \in \mathcal{S}$ , tal que  $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$ .

Uma função é convexa se para dois pontos quaisquer  $\mathbf{x}_A$  e  $\mathbf{x}_B$  sempre é válido:

$$f(\lambda \mathbf{x}_A + (1-\lambda)\mathbf{x}_B) \leq \lambda f(\mathbf{x}_A) + (1-\lambda)f(\mathbf{x}_B), \quad \forall \lambda \in [0, 1] \quad (\text{B.3})$$

Condição necessária de Kuhn-Tucker para otimalidade:

$$\begin{aligned} \nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^m \mu_i \nabla g_i(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^n \lambda_j \nabla h_j(\mathbf{x}^*) &= \mathbf{0} \\ \mu_i g_i(\mathbf{x}^*) &= 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

onde:

- $\mu$  conjunto de multiplicadores de Lagrange relacionados às restrições de desigualdade;
- $\lambda$  conjunto de multiplicadores de Lagrange relacionados às restrições de igualdade.

Para  $\mathbf{x}^*$  ser um ótimo local do problema, deve existir um conjunto de multiplicadores  $\mu^* \in \mathbb{R}^m$  e  $\lambda^* \in \mathbb{R}^n$  com  $\mu^* \geq \mathbf{0}$ .

Se o problema é convexo, ele possui apenas ótimo global. Neste caso, as condições de KKT são necessárias e suficientes. Por outro lado se o problema é não convexo, ele pode possuir ótimos locais e um ótimo global. Neste caso KKT é apenas necessária e um ponto que resolve KKT pode ser de mínimo, de máximo ou de sela.

## APÊNDICE C - Triangulação





## C.1 FORMULAÇÃO

Simplex é o polítopo mais simples de sua dimensão, ou seja, um triângulo retângulo-isósceles (2D) é o polígono que possui menos vértices e arestas. Já em um espaço tridimensional, os tetraedros são a forma volumétrica mais simples só comparável aos cubos em simplicidade e utilidade.

Os cubos podem ser subdivididos em 5, 6 ou 12 tetraedros regulares (simplexes) [30]. À essas subdivisões damos o nome de triangulação. Se as faces do cubo, já subdividido, são refletidas plano, obtemos a triangulação  $\mathbf{J1}$ .

A triangulação CFK (devida a Coxeter, Freudenthal e Kuhn) do cubo unitário  $I^m = [0, 1]^m$ , da qual deriva a triangulação  $\mathbf{J1}$  de  $\mathbb{R}^m$ , é apresentada.

Seja  $\pi$  uma permutação de  $\{1, 2, \dots, m\}$  a qual vamos denotar pela  $m$ -upla ordenada  $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m)$ , e  $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ , base canônica de  $\mathbb{R}^m$ .

A triangulação CFK é definida como o conjunto de simplex  $\sigma_\pi = [v_0, v_1, \dots, v_m]$ , onde:

$$\begin{cases} v_0 = (0, \dots, 0) \in I^m; \\ v_i = v_{i-1} + e_{\pi_i}, i = 1, \dots, m \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

A triangulação  $\mathbf{J1}$  de  $\mathbb{R}^m$  é obtida pela reflexão da triangulação CFK de  $I_m$ , com relação às faces de dimensão  $m - 1$  de  $I_m$ .

Para cada  $v_0 \in \{v \in \mathbb{Z}^m | v_i \text{ é ímpar}\}$ ,  $s = (s_1, \dots, s_m) \in \{-1, 1\}^m$  e  $\pi$  permutação de  $\{1, 2, \dots, m\}$ , definimos  $\sigma = \mathbf{J1}(v_0, \pi, s) = [v_0, v_1, \dots, v_m]$ , onde:

$$\begin{cases} v_0 = (0, \dots, 0) \in I^m; \\ v_i = v_{i-1} + s_{\pi_i} e_{\pi_i}, i = 1, \dots, m \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

## C.2 LÓGICA DE ORDENAÇÃO

Ordenação é a forma como os simplexes são enumerados para serem percorridos, ou seja, qual simplex a busca percorre em primeiro lugar, em segundo lugar, etc. A lógica de ordenação foi criada com base na observação de padrões dos simplexes e como os vértices se comportam nesses padrões. Para entendermos de forma mais clara, o algoritmo com a lógica de ordenação e obtenção dos vértices de cada simplex do exemplo bidimensional é mostrada a seguir.

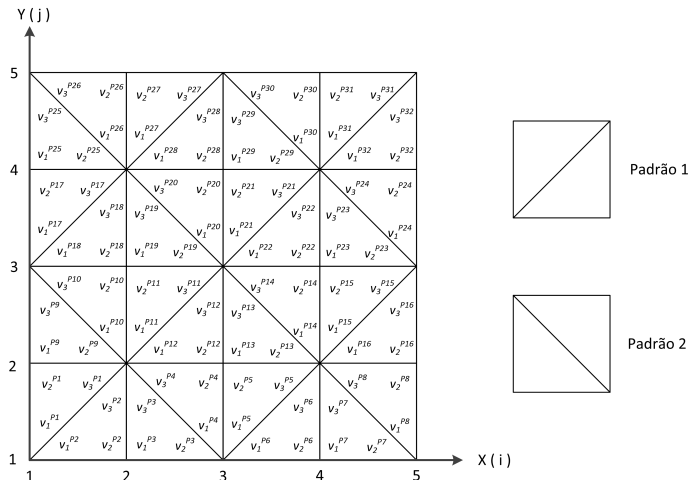


Figura C.1: Padrões de subdivisão

Vemos na Figura C.1 que a triangulação J1 bidimensional apresenta dois padrões de quadrados subdivididos (em um, a diagonal é inclinada pra direita; no outro, para esquerda), que se repetem, também mostrados à direita da mesma figura. Podemos observar que quando o índice  $j$ , relacionado à variável  $y$ , é ímpar, se o índice  $i$ , relacionado à variável  $x$  for ímpar, será utilizado padrão 1; se o índice  $i$  for par, será utilizado padrão 2; caso  $j$  seja par, se o índice  $i$  for par, será utilizado padrão 2; e se o índice  $i$  for ímpar, será utilizado padrão 1.

Assim a forma como o espaço de soluções é percorrido em busca do ponto ótimo consiste em varrer (através do uso de um laço *for*, por exemplo) para cada valor de  $y$ , todos os valores de  $x$ , armazenando em uma matriz auxiliar os valores de  $x$ ,  $y$  e  $f(x, y)$  para cada vértice, de todos os simpleses, seguindo a ordem observada na Figura C.1.

A mesma lógica foi utilizada para a triangulação do cubo. Foram observados dois padrões de subdivisão do cubo em 5 tetraedros regulares (simpleses) tal como na Figura C.2. Esses padrões vão se alternando, percorrendo o eixos das variáveis. Uma forma fácil de compreender é imaginar o cubo particionado no padrão 1. Rotacionando ele para direita, obtemos o padrão 2; rotacionando novamente, agora com o cubo no padrão 2, voltamos ao cubo no padrão 1.

Uma estrutura semelhante a mesma estratégia que foi sugerida para o caso bidimensional (através do uso de um laço *for*, por exemplo), pode ser utilizada aqui também, para varrer todo o espaço, arma-

zenando em uma matriz auxiliar os valores de cada variável de  $x$ ,  $y$ ,  $z$  e  $f(x, y, z)$ .

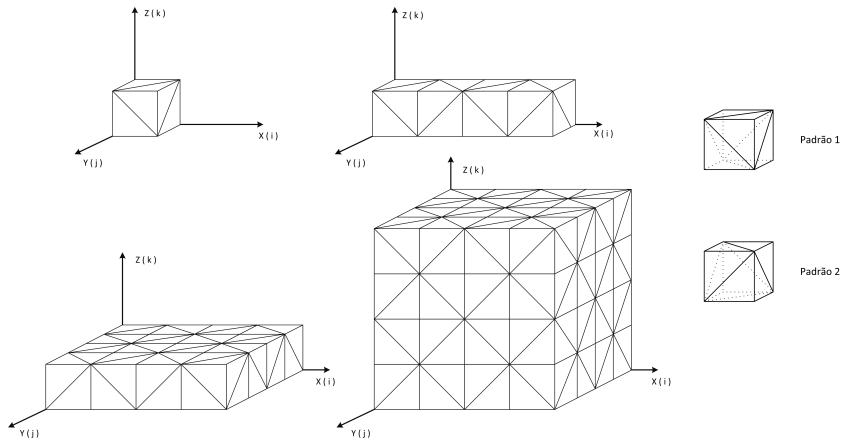


Figura C.2: Ordenação dos vértices ao longo dos 3 eixos



## APÊNDICE D – Dados dos Sistemas



## D.1 SISTEMA CESP

Tabela D.1: Usinas hidrelétricas do sistema CESP

Usina	$v^{min}$	$v^{max}$	$v^{ini}$	$q^{min}$	$q^{max}$	$Ph^{min}$	$Ph^{max}$
Água Vermelha	5856	11025	11025	0	10.519	0	15.2356
Capivara	4816	10540	10540	0	6.278	0	7.0465
Ilha Solteira	8232	21060	21060	0	31.824	0	35.9817
Jupiá	2450	3680	3680	0	27.367	0	14.5107

Tabela D.2: Coeficientes da função cota montante das usinas CESP

Usina	$cv_0$	$cv_1$	$cv_2$	$cv_3$	$cv_4$
Água Vermelha	$3.5202979 \times 10^2$	$4.995856 \times 10^{-3}$	$-2.7416399 \times 10^{-7}$	$7.0983098 \times 10^{-12}$	0
Capivara	$2.97875 \times 10^2$	$7.1880668 \times 10^{-3}$	$-6.629309 \times 10^{-7}$	$3.948028 \times 10^{-11}$	$-9.871108 \times 10^{-16}$
Ilha Solteira	$2.939248 \times 10^2$	$3.6005899 \times 10^{-3}$	$-1.846150 \times 10^{-7}$	$5.877640 \times 10^{-12}$	$-7.503618 \times 10^{-17}$
Jupiá	$2.8 \times 10^2$	0	0	0	0



Tabela D.3: Coeficientes da função cota jusante das usinas CESP

Usina	$cq_0$	$cq_1$	$cq_2$	$cq_3$	$cq_4$
Água Vermelha	$3.23123 \times 10^2$	$-4.57701 \times 10^{-4}$	$3.98765 \times 10^{-7}$	$-4.22106 \times 10^{-11}$	$1.39866 \times 10^{-15}$
Capivara	$2.83463 \times 10^2$	$1.30832 \times 10^{-3}$	$-6.90215 \times 10^{-8}$	$1.67580 \times 10^{-12}$	0
Ilha Solteira	$2.79954 \times 10^2$	$4.26853 \times 10^{-5}$	$4.24971 \times 10^{-8}$	$-3.10115 \times 10^{-12}$	$6.55613 \times 10^{-17}$
Jupiá	$2.53441 \times 10^2$	$5.7866 \times 10^{-4}$	$1.44023 \times 10^{-8}$	$-1.41555 \times 10^{-12}$	$2.60905 \times 10^{-17}$

Tabela D.4: Produtibilidade das usinas CESP

Usina	Produtibilidade
Água Vermelha	0.008829
Capivara	0.008829
Ilha Solteira	0.008829
Jupiá	0.008731

Tabela D.5: Dados das linhas de transmissão do sistema CESP

$Bar_{ini}$	$Bar_{fin}$	$x$	$f^{max}$
1	3	5.68	50.00
1	4	6.39	50.00
1	8	2.36	50.00
1	11	1.72	48.00
1	12	2.36	56.50
2	4	1.88	29.00
2	6	1.82	38.00
3	8	2.43	70.00
3	10	1.21	58.00
3	13	3.04	56.00
4	5	2.41	46.80
4	7	2.58	48.00
4	8	2.48	57.00
4	9	0.96	48.00
5	7	3.06	48.00
5	12	2.33	45.00
6	15	1.85	28.00
7	12	1.24	35.00
8	9	6.75	48.00
9	14	8.33	48.00
10	11	10.70	48.00

Tabela D.6: Distribuição das cargas entre as barras do sistema CESP

Barra	Distribuição da carga
1	6.21%
2	0.37%
3	0.00%
4	0.00%
5	19.84%
6	0.00%
7	30.58%
8	0.00%
9	0.00%
10	1.36%
11	19.60%
12	14.78%
13	1.69%
14	0.94%
15	4.62%

## D.2 SISTEMA SUL

Tabela D.7: Usinas hidrelétricas do sistema SUL

Usina	$v^{min}$	$v^{max}$	$v^{ini}$	$q^{min}$	$q^{max}$	$Ph^{min}$	$Ph^{max}$
G.B. Munhoz	1974	5779	5779	0	4.9536	0	17.1375
Segredo	2562	2950	2950	0	4.5648	0	13.3381
Salto Santiago	2662	6775	6775	0	5.6736	0	15.0930
Salto Osório	1124	1124	1124	0	6.4224	0	11.2649
Salto Caxias	3160	3160	3160	0	7.5600	0	12.4816
Itá	5100	5100	5100	0	5.7240	0	14.9064
Passo Fundo	185	1589	1589	0	0.3744	0	2.4326

Tabela D.8: Coeficientes da função cota montante das usinas SUL

Usina	$cv_0$	$cv_1$	$cv_2$	$cv_3$	$cv_4$
G.B. Munhoz	$6.5087598 \times 10^2$	$3.4986801 \times 10^{-2}$	$-6.5001800 \times 10^{-6}$	$7.7779688 \times 10^{-10}$	$-3.9528598 \times 10^{-14}$
Segredo	$5.5254492 \times 10^2$	$2.4692200 \times 10^{-2}$	$-2.1034291 \times 10^{-6}$	0	0
Salto Santiago	$4.4773190 \times 10^2$	$1.8233201 \times 10^{-2}$	$-2.8712191 \times 10^{-6}$	$3.0025979 \times 10^{-10}$	$-1.2729700 \times 10^{-14}$
Salto Osorio	$3.97 \times 10^2$	0	0	0	0
Salto Caxias	$3.25 \times 10^2$	0	0	0	0
Ita	$3.70 \times 10^2$	0	0	0	0
Passo Fundo	$5.8039093 \times 10^2$	$2.2150099 \times 10^{-2}$	$-1.4134300 \times 10^{-5}$	$6.3446781 \times 10^{-9}$	$-1.1547200 \times 10^{-12}$

Tabela D.9: Coeficientes da função cota jusante das usinas SUL

Usina	$cq_0$	$cq_1$	$cq_2$	$cq_3$	$cq_4$
G.B. Munhoz	$6.01886 \times 10^2$	$1.10583 \times 10^{-3}$	$4.20885 \times 10^{-7}$	$-8.31147 \times 10^{-11}$	$4.76112 \times 10^{-15}$
Segredo	$4.90039 \times 10^2$	$6.08410 \times 10^{-5}$	$2.92476 \times 10^{-7}$	$-2.32012 \times 10^{-11}$	$4.56450 \times 10^{-16}$
Salto Santiago	$3.94416 \times 10^2$	$2.11101 \times 10^{-3}$	$-7.92307 \times 10^{-8}$	$2.35157 \times 10^{-12}$	$-2.71386 \times 10^{-17}$
Salto Osório	$3.21837 \times 10^2$	$2.28099 \times 10^{-3}$	$-1.40271 \times 10^{-7}$	$3.84188 \times 10^{-12}$	$-5.36304 \times 10^{-17}$
Salto Caxias	$2.57920 \times 10^2$	$6.20838 \times 10^{-4}$	$-1.71840 \times 10^{-8}$	$2.28268 \times 10^{-13}$	$1.21707 \times 10^{-20}$
Itá	$2.61363 \times 10^2$	$3.01186 \times 10^{-3}$	$-5.63608 \times 10^{-7}$	$6.79144 \times 10^{-11}$	$-3.02848 \times 10^{-15}$
Passo Fundo	$3.35100 \times 10^2$	$8.16667 \times 10^{-3}$	$-5.66667 \times 10^{-8}$	0	0

Tabela D.10: Produtibilidade das usinas SUL

Usina	Produtibilidade
G.B. Munhoz	0.009025
Segredo	0.009026
Salto Santiago	0.008829
Salto Osório	0.008829
Salto Caxias	0.009026
Itá	0.008927
Passo Fundo	0.008926

Tabela D.11: Dados das linhas de transmissão do sistema SUL

$Bar_{ini}$	$Bar_{fin}$	$x$	$f_l^{max}$
1	2	0.1621	13.10
1	2	0.1621	13.10
1	11	0.1165	13.10
1	11	0.1165	13.10
2	3	0.0854	13.10
2	3	0.0854	13.10
3	4	0.2378	13.10
3	4	0.2378	13.10
4	5	0.1987	13.10
4	12	0.0824	13.10
4	12	0.0824	13.10
5	6	0.1002	13.10
5	6	0.1002	13.10
6	7	0.1650	13.10
6	19	0.1183	23.10
6	20	0.0590	26.70
7	8	0.0852	13.10
7	8	0.0852	13.10
7	9	0.0823	13.10
7	19	0.1313	23.10
7	26	0.1152	16.70
7	26	0.1152	16.70
8	9	0.0932	13.10
8	9	0.0932	13.10
8	25	0.0316	16.70
9	10	0.1046	13.10
9	11	0.2395	13.10
9	16	0.0125	26.70
9	16	0.0125	26.70
10	11	0.1809	13.10
11	15	0.0125	26.70
12	18	0.0125	26.70
12	18	0.0125	16.70
12	18	0.0125	26.70
12	18	0.0125	26.70
13	14	0.0194	27.00
13	15	0.0201	27.00
13	28	0.1394	37.00
14	27	0.2170	37.00
14	29	0.0108	37.00
14	30	0.0070	27.00
15	16	0.0273	27.00
15	16	0.0298	27.00
15	17	0.0205	27.00
15	30	0.0070	37.00
16	26	0.1603	37.00
17	18	0.0309	27.00
17	27	0.0122	37.00
18	27	0.3977	37.00
19	21	0.0621	26.70
20	21	0.2683	22.32
21	22	0.0118	22.32
22	23	0.1048	22.32
23	24	0.1181	22.32
24	25	0.1872	22.32
27	32	0.0276	37.00
31	32	0.0163	37.00

Tabela D.12: Distribuição das cargas entre as barras do sistema SUL

Barra	Distribuição da carga
1	5.13%
2	6.63%
3	0.03%
4	6.37%
5	3.70%
6	3.03%
7	5.65%
8	6.11%
9	11.92%
10	2.57%
11	3.50%
12	17.88%
13	0.00%
14	0.00%
15	0.00%
16	0.00%
17	6.70%
18	0.00%
19	0.00%
20	0.60%
21	0.78%
22	0.75%
23	0.49%
24	0.57%
25	2.22%
26	0.00%
27	0.00%
28	6.20%
29	0.00%
30	0.00%
31	0.00%
32	9.17%