

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA  
ELÉTRICA**

Bruno Remor

**ANÁLISE COMPARATIVA DE DIFERENTES ESTRATÉGIAS  
DE SOLUÇÃO PARA CONTRATAÇÃO DE ENERGIA NO  
AMBIENTE DE CONTRATAÇÃO REGULADA**

Dissertação submetida ao Programa de  
Pós-graduação em Engenharia Elétrica  
da Universidade Federal de Santa  
Catarina para a obtenção do Grau de  
Mestre em Sistemas de Energia  
Orientador: Prof. Dr. Erlon Cristian  
Finardi.

Florianópolis

2017

Catálogo na fonte elaborada pela biblioteca da  
Universidade Federal de Santa Catarina

Remor, Bruno

ANÁLISE COMPARATIVA DE DIFERENTES ESTRATÉGIAS DE  
SOLUÇÃO PARA CONTRATAÇÃO DE ENERGIA NO AMBIENTE DE  
CONTRATAÇÃO REGULADA / Bruno Remor ; orientador,  
Erlon Cristian Finardi, 2017.

99 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de  
Santa Catarina, Centro Tecnológico, Programa de Pós  
Graduação em Engenharia Elétrica, Florianópolis, 2017.

Inclui referências.

1. Engenharia Elétrica. 2. Comercialização de  
energia elétrica. 3. Otimização estocástica. 4.  
Relaxação Lagrangiana. 5. Progressive Hedging. I.  
Finardi, Erlon Cristian . II. Universidade Federal  
de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia Elétrica. III. Título.

Bruno Remor

**ANÁLISE COMPARATIVA DE DIFERENTES ESTRATÉGIAS  
DE SOLUÇÃO PARA A CONTRATAÇÃO DE ENERGIA NO  
AMBIENTE DE CONTRATAÇÃO REGULADA**

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do Título de “Mestre em Engenharia Elétrica”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica pela Universidade Federal de Santa Catarina

Florianópolis, 20 de Março de 2017.

---

Prof. Marcelo Lobo Heldwein, Dr.

Coordenador do Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica

---

Prof. Erlon Cristian Finardi, D. Eng.

Orientador

**Banca Examinadora:**

---

Prof<sup>ta</sup>. Andreia Zanella, Dr.<sup>a</sup>

Universidade Federal de Santa Catarina

---

Prof. Fabrício Yutaka Kuwabata Takigawa, D. Eng.

Instituto Federal de Santa Catarina

---

Prof. Rafael Nilson Rodrigues, D. Eng.

Instituto Federal de Santa Catarina



## AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer primeiramente a meus pais Marco e Tânia, por terem me dado todo o apoio e por serem pessoas que tenho muita admiração. Agradeço também meus irmãos Lucas e Marcel, pela amizade e companheirismo, e a todos meus familiares, em especial aos meus avós Benito e Lenir.

Agradeço ao meu amor e companheira Janaína Senem que conheci durante o período deste mestrado, por todo amor, carinho e amizade. Obrigado por todos os momentos ao meu lado.

Agradeço meu orientador Erlon Cristian Finardi pela amizade e ajuda dada no desenvolvimento deste trabalho. Também a meu colega Marcelo Cordova por passar seus conhecimentos e pela contribuição dada a este trabalho.

Agradeço também aos convidados da banca, Andreia Zanella, Fabrício Yutaka Kuwabata Takigawa e Rafael Nilson Rodrigues, por avaliarem meu trabalho e pelas contribuições dadas.

Faço um agradecimento a meu amigo e colega Guilherme Fredo pela amizade e ajuda dada em diversos momentos ao longo deste mestrado. Também agradeço meu amigo Lucas Alberti Vertuan, pela ajuda e amizade.

Queria agradecer aos meus amigos e colegas Bráulio Soares, José Cesario, Guido Moraes, Cezar Vicentin, João Carlos Yokoyama Menezes, Rodolfo Calderon, Rodolfo Mussiato, Felipe Beltran, Daniel Tenfen, Rodolfo Bialeck, Paulo André Sehn, Fábio Mantelli, Gabriel Bolacel, Andréz, Paulo Larroyd, Murilo Scuzziato e Vitor Luiz de Matos; que de certa forma contribuíram com este trabalho.

Ainda agradeço a todos os Professores da Pós-graduação em Engenharia Elétrica da UFSC, pelos conhecimentos compartilhados.

Por fim, agradeço a todas as pessoas com quem convivi nos últimos anos durante a realização deste mestrado.



## RESUMO

O modelo institucional do Setor Elétrico Brasileiro (SEB), vigente desde 2004, inclui em seu regulamento a obrigatoriedade por parte das empresas de distribuição de contratar antecipadamente, por meio de leilões públicos, a totalidade de sua demanda de energia no Ambiente de Contratação Regulado. Em caso de descumprimento dessa regra, tais empresas ficam sujeitas a multas e restrições no preço de repasse da energia para os consumidores cativos. Diante desse cenário, os agentes distribuidores ficam expostos a perdas financeiras devido às incertezas quanto ao comportamento futuro de sua demanda e dos preços da energia no mercado de curto prazo. Este trabalho tem como objetivo estudar as particularidades que envolvem a contratação de energia, e a partir disso, apresentar um problema de otimização estocástica linear multiestágio, o qual visa minimizar os custos de uma empresa distribuidora. Como resultado desse problema de otimização, pretende-se encontrar as decisões ótimas de compra de energia em leilões, levando em conta as mais diferentes regras do mercado. Outro foco dado neste trabalho diz respeito às estratégias de solução do problema matemático formulado. São utilizados três diferentes métodos de solução, a saber: Equivalente Determinístico, a Relaxação Lagrangiana e o Progressive Hedging. Nesta dissertação, é avaliado o desempenho dos métodos utilizados na solução do problema da contratação de energia, bem como a qualidade da solução fornecida.

**Palavras-chave:** *Contratação de energia, empresas de distribuição, Ambiente de Contratação Regulado, otimização estocástica multiestágio, Programação linear, Relaxação Lagrangiana, Progressive Hedging.*



## ABSTRACT

The Institutional Model of the Brazilian Electric Sector, in force since 2004, includes in its regulation the obligation for the distribution companies to contract in advance, through public auctions, the totality of their energy demand in the Regulated Contracting Environment. In case of non-compliance with this rule, such companies will be subject to fines and restrictions on the sale price of energy to “captive” consumers. Given this scenario, distributors are exposed to financial losses due to uncertainties about the future behavior of their demand and energy prices in the short-term market. This work aims to study the peculiarities that involve the contracting of energy, and from this, to present a multistage linear stochastic optimization problem, which aims to minimize the costs of a distribution company. As a result of this optimization problem, it is intended to find the optimal decisions to buy energy in auctions, taking into account the most different rules of the market. Another focus given in this work concerns the strategies for solving the mathematical problem formulated. Three different methods of solution are used, namely: Deterministic Equivalent, Lagrangian Relaxation and Progressive Hedging. In this dissertation, the performance of the methods used to solve the energy contracting problem is evaluated, as well as the quality of the solution provided.

**Keywords: Energy contracting, distribution companies, Regulated Contracting Environment, multi-stage stochastic optimization, Linear Programming, Lagrangian Relaxation, Progressive Hedging**



## LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1 - Demanda e contratos vigentes com crescimento anual de 1% para a demanda.....	36
Figura 3.2 - Demanda e contratos vigentes com crescimento anual de 3% para a demanda.....	38
Figura 3.3 - Demanda e contratos vigentes para o decréscimo anual de 3%. ....	39
Figura 4.1 - Árvore de cenários de demanda e PLD. ....	42
Figura 4.2 - Representação explícita das não-antecipatividades. ....	43
Figura 4.3 - Processo iterativo da Relaxação Lagrangiana. ....	49
Figura 4.4 - Algoritmo do Progressive Hedging. ....	55
Figura 5.1 - Árvore de cenários utilizada na simulação.....	58
Figura 5.2 - Função objetivo para diferentes valores de $\tau$ mínimo. ....	61
Figura 5.3 - Subgradiente agregado $ g_k $ para diferentes valores de $\tau$ mínimo....	61
Figura 5.4 - Função objetivo para diferentes valores de $\mu$ . ....	64
Figura 5.5 - Norma infinita do gradiente para diferentes valores de $\mu$ .....	65
Figura 5.6 - Evolução do parâmetro de penalidade para as duas heurísticas. ....	68
Figura 5.7 - Norma infinita das não-antecipatividades para diferentes valores de $\mu$ .....	68
Figura 5.8 - Função objetivo para as duas heurísticas utilizadas. ....	69
Figura 5.9 - Função objetivo em 10 iterações da RL. ....	71
Figura 5.10 - Subgradiente agregado $ g_k $ em 10 iterações da RL.....	72
Figura 5.11 - Norma infinita do gradiente para $\mu=0,01$ . ....	72
Figura 5.12 - Função objetivo para $\mu=0,01$ .....	73
Figura 5.13 - Função objetivo dos métodos RL+PH para diferentes valores de $\mu$ . .....	74
Figura 5.14 - Norma Infinita do gradiente para o RL+PH. ....	74
Figura 5.15 - Árvore de cenários da simulação 2.....	79
Figura 5.16 - Função objetivo com a solução pela RL.....	80
Figura 5.17 - Subgradiente agregado $ g_k $ .....	81
Figura 5.18 - Função objetivo do PH.....	82

Figura 5.19 - Norma infinita do vetor gradiente .....	83
Figura 5.20 - Função objetivo com os métodos associados. ....	84
Figura 5.21 - Norma infinita do vetor gradiente com os métodos associados. ..	85



## LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 - Cenário de demanda e PLD. ....	34
Tabela 3.2 - Regras dos contratos. ....	34
Tabela 3.3 - Constantes utilizadas. ....	35
Tabela 3.4 - Decisões de compra de energia por tipo de contrato. ....	35
Tabela 3.5 - Níveis de Contratação com crescimento anual de 1% para a demanda. ....	36
Tabela 3.6 - Custos da solução com crescimento anual de 1% para a demanda. .....	37
Tabela 3.7 - Cenário de demanda com crescimento anual de 3%. ....	37
Tabela 3.8 - Níveis de Contratação com crescimento anual de 3% para a demanda. ....	38
Tabela 3.9 - Custos da solução com crescimento anual de 3% para a demanda. .....	38
Tabela 3.10 - Cenário de demanda com decréscimo anual de 3%. ....	39
Tabela 3.11 - níveis de contratação com decréscimo anual de 3% para a demanda. ....	39
Tabela 3.12 - Custo da solução com decréscimo anual de 3% para a demanda. ....	40
Tabela 4.1 - Decisão de aquisição do primeiro ano obtida com a solução estocástica. ....	47
Tabela 4.2 - Média de demanda e PLD dos cenários sorteados. ....	47
Tabela 4.3 - Decisão de aquisição do primeiro ano obtida com o cenário médio. .....	48
Tabela 4.4 - Decisão de compra do primeiro ano obtida com a RL . ....	52
Tabela 4.5 - Decisão de compra no primeiro ano com o PH. ....	56
Tabela 5.1 - Cenário médio. ....	58
Tabela 5.2 - Decisão de compra no primeiro ano com o ED . ....	59
Tabela 5.3 - Parâmetros de entrada da RL. ....	60
Tabela 5.4 - Resultados da RL para os diferentes valores de $\tau$ mínimo. ....	62

Tabela 5.5 - Decisão de compra no primeiro ano os diferentes valores de $\tau$ mínimo. ....	62
Tabela 5.6 - Parâmetros de inicialização do PH. ....	63
Tabela 5.7 - Resultados do PH para os diferentes valores de $\mu$ .....	65
Tabela 5.8 - Decisão de compra no primeiro ano para os diferentes valores de $\mu$ . .....	66
Tabela 5.9 - Resultados do PH para as heurísticas utilizadas. ....	69
Tabela 5.10 - Decisões de compra no primeiro ano com as heurísticas.....	69
Tabela 5.11 - Parâmetros de entrada da RL.....	71
Tabela 5.12 - Comparação dos resultados obtidos.....	75
Tabela 5.13 - Decisões de compra no primeiro ano.....	76
Tabela 5.14 - Comparação entre o custo obtido em cada metodologia utilizada. .....	77
Tabela 5.15 - Tempos de solução .....	78
Tabela 5.16 - Decisão de compra no primeiro ano com o ED .....	80
Tabela 5.17 - Resultados da RL.....	81
Tabela 5.18 - Decisão de compra no primeiro ano com a RL.....	82
Tabela 5.19 - Resultados do PH. ....	83
Tabela 5.20 - Decisão de compra no primeiro ano com o PH .....	84
Tabela 5.21 - Resultados obtidos com os métodos associados .....	85
Tabela 5.22 - Decisão de compra no primeiro ano com os método associados. ....	86
Tabela 5.23 - Comparação dos resultado obtidos na simulação 2 .....	86
Tabela 5.24 - Comparação das decisões de primeiro ano com os métodos testados. ....	87

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ACL	Ambiente de Contratação Livre
ACR	Ambiente de Contratação Regulada
ANEEL	Agência Nacional de Energia Elétrica
CCEAR	Contrato de Comercialização de Energia no Ambiente Regulado
CCEE	Câmara de Comercialização de Energia Elétrica
CVaR	<i>Conditional Value at Risk</i>
ED	Equivalente Determinístico
IPCA	Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo
MCSD	Mecanismo de Compensação de Sobras e Déicits
MME	Ministério de Minas e Energia
MR	Montante de Reposição
ONS	Operador Nacional do Sistema
PH	<i>Progressive Hedging</i>
PL	Programação Linear
PLD	Preço de Liquidação das Diferenças
PVE	Problema do valor esperado
PROINFA	Programa de Incentivo às Fontes Alternativas
SEB	Setor Elétrico Brasileiro
SIN	Sistema Interligado Nacional
RL	Relaxação Lagrangiana
VR	Valor de Referência
VRE	Valor de Referência de Energia Existente



## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>13</b>
1.1	Objetivos do trabalho.....	14
1.2	Revisão bibliográfica.....	15
1.3	Estrutura do trabalho .....	17
<b>2</b>	<b>COMERCIALIZAÇÃO DE ENERGIA NO ACR .....</b>	<b>19</b>
2.1	Aquisição de energia pelas empresas distribuidoras.....	19
2.2	Tipos de leilão de energia.....	20
2.3	Mecanismos de troca e ajuste contratual .....	21
2.4	Regras de repasse dos custos e limites de contratação.....	22
2.5	Penalidades .....	24
<b>3</b>	<b>MODELAGEM DO PROBLEMA DA CONTRATAÇÃO DE</b>	
	<b>ENERGIA .....</b>	<b>25</b>
3.1	Função objetivo .....	25
3.1.1	Custos com a subcontratação .....	25
3.1.2	Custos com a sobrecontratação.....	26
3.1.3	Limitação de repasse em contratos A-0.....	26
3.1.4	Limitação de repasse em contratos A-3.....	27
3.1.5	Limitação de repasse em contratos de energia nova .....	27
3.1.6	Custos com a aquisição de energia.....	28
3.2	Restrições do problema da contratação de energia .....	28
3.2.1	Restrição de balanço contratual.....	28
3.2.2	Contabilização anual dos contratos .....	29
3.2.3	Determinação do montante de reposição .....	29
3.2.4	Trocas de energia .....	30
3.2.5	Contratação em leilão de energia existente .....	30
3.2.6	Contratação em leilões A-3.....	31
3.2.7	Contratação em leilões de Ajuste .....	31

3.2.8	Contratação entre 100 e 105% .....	31
3.3	Problema da contratação Ótima de Energia.....	32
3.4	Exemplo determinístico do problema da contratação .....	33
<b>4</b>	<b>O PROBLEMA DA CONTRATAÇÃO VIA OTIMIZAÇÃO ESTOCÁSTICA.....</b>	<b>41</b>
4.1	O problema estocástico da contratação.....	44
4.2	Exemplo estocástico do problema da contratação .....	46
4.3	Métodos de decomposição .....	48
4.3.1	Relaxação Lagrangiana .....	49
4.3.2	Progressive Hedging .....	52
<b>5</b>	<b>SIMULAÇÕES E RESULTADOS .....</b>	<b>57</b>
5.1	Simulação 1 .....	57
5.1.1	Solução pelo Equivalente Determinístico .....	59
5.1.2	Relaxação Lagrangiana .....	59
5.1.3	Progressive Hedging .....	63
5.1.4	Associação da RL com o PH.....	70
5.1.5	Comparação com diferentes árvorede cenários.....	76
5.2	Simulação 2.....	78
5.2.1	Solução pelo Equivalente Determinístico .....	79
5.2.2	Relaxação Lagrangiana .....	80
5.2.3	Progressive Hedging .....	82
5.2.4	Associação da RL com o PH.....	84
5.2.5	Comparação entre os métodos .....	86
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS.....</b>	<b>89</b>
<b>7</b>	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>95</b>

## 1 INTRODUÇÃO

As grandes mudanças estruturais enfrentadas pelo setor de energia elétrica brasileiro nas duas últimas décadas trouxeram novos desafios para os agentes do setor. A partir do decreto presidencial 5.163 (BRASIL, 2004) entrou em vigor o Novo Modelo Institucional do Setor Elétrico, o qual estabeleceu novas regras de comercialização.

O novo modelo propôs a criação de dois ambientes de comercialização, chamados de Ambiente de Contratação Livre (ACL) e Ambiente de Contratação Regulada (ACR). No ACL ocorre a comercialização de energia entre geradores e consumidores livres por meio de contratos bilaterais. Já o ACR destina-se a comercialização de energia para atendimento do mercado cativo por meio de leilões de energia. Neste trabalho pretende-se estudar o processo de comercialização pela ótica de uma empresa distribuidora de energia sendo, portanto, empregadas as normas presentes no ACR.

A nova regulação teve como objetivo promover a segurança do suprimento de energia elétrica, alcançar a modicidade tarifária e estabelecer a inserção social no setor por meio de programas de universalização do uso da energia (MME, 2003). Uma das principais medidas para se atingir esses objetivos foi a obrigatoriedade, para os agentes de consumo, consumidores livres e distribuidores, de contratar antecipadamente 100% da sua carga por meio de contratos celebrados no ACR. Caso essa exigência não fosse respeitada a empresa estaria sujeita a multas e penalizações por falta de repasse no preço da energia.

No caso das distribuidoras a maior parte de sua energia seria adquirida em leilões públicos com a concorrência pelo menor preço. Por meio desse mecanismo, concessionárias, permissionárias e autorizadas de serviço público de distribuição de energia elétrica garantiriam o atendimento à totalidade de seu mercado (BRASIL, 2003).

Existem diferentes tipos de leilões realizados no ACR, os quais podem ofertar energia proveniente de novos empreendimentos ou já existentes. A energia nova é ofertada com prazos de entrega de três e cinco anos a partir da realização do leilão. Já a energia existente tem prazo de entrega para o mesmo ano da contratação ou um ano à frente. Tais leilões são realizados pela Câmara de Comercialização de Energia Elétrica (CCEE) por delegação da Agência Nacional de Energia Elétrica (ANEEL).

Percebe-se que as empresas distribuidoras passaram a ter grande parte de sua demanda contratual atendida por meio de leilões com diferentes prazos de entrega de energia. Como a energia adquirida em determinados leilões somente se torna disponível anos após sua contratação, passou a existir a necessidade de se prever a demanda futura a ser atendida.

Destaca-se que atender a demanda para um determinado horizonte de tempo não é uma tarefa fácil, uma vez que a mesma apresenta muitas incertezas em seu comportamento futuro. Dessa forma, o agente distribuidor tem a necessidade de traçar uma estratégia de contratação conforme os possíveis cenários de demanda.

Outro fator de incerteza a ser considerado é o valor do Preço de Liquidação das Diferenças (PLD). Isso porque no caso de déficit de contratação em relação à carga, o montante de energia em falta deverá ser adquirido pelo agente distribuidor no Mercado de Curto Prazo ao valor do PLD. Assim, podem ocorrer grandes perdas financeiras no caso de uma subcontratação significativa em um período com PLD elevado.

Diante do panorama de comercialização exposto fica evidente a necessidade de um planejamento para a aquisição de energia em leilões pelo agente distribuidor, de forma que sejam evitados custos por não atender sua própria demanda conforme as regras do mercado.

## 1.1 OBJETIVOS DO TRABALHO

Este trabalho tem como objetivo apresentar e comparar as metodologias utilizadas na solução do problema da contratação ótima de energia por uma empresa de distribuição. Para isso são apresentadas as particularidades que envolvem o problema da contratação de energia e, a partir disso, é formulado um modelo matemático de otimização.

Pretende-se utilizar uma formulação matemática que represente a compra de energia de acordo com as regras de comercialização no ACR. Tal formulação resulta em um problema de otimização linear multiestágio que considera os custos para a empresa em sua função objetivo e as obrigações contratuais em seu conjunto de restrições. Tendo como base esse modelo matemático da contratação, são utilizadas técnicas computacionais de solução de problemas de otimização para obter uma decisão ótima de compra de energia.

Primeiramente será considerado o problema determinístico da contratação, ou seja, considera-se que o comportamento futuro das variáveis envolvidas no problema seja conhecido. Essa primeira análise

serve para apresentar de forma mais simples o modelo utilizado e tem como método de solução técnicas de Programação Linear (PL).

Contudo, sabe-se que a demanda de energia e o PLD contém um grande nível de incerteza quanto o seu comportamento futuro. Diante disso, em uma segunda análise consideram-se essas duas variáveis como sendo aleatórias, isto é, podem assumir diferentes cenários futuros.

A presença de variáveis aleatórias torna o problema mais complexo, uma vez que a solução exigirá técnicas de otimização estocástica. Apesar de ainda ser possível solucionar o problema estocástico por meio de um PL único, isso resulta em um problema de grande dimensão e que pode se tornar inviável computacionalmente.

Para contornar essa dificuldade são utilizados dois algoritmos clássicos de solução de problemas estocásticos. Um deles é a Relaxação Lagrangiana (RL) e o outro o *Progressive Hedging* (PH). Tais métodos baseiam-se na relaxação de determinadas restrições, de forma que o problema original seja decomposto em subproblemas de menor dimensão. Em vista disso, o trabalho também apresenta a teoria que envolve essas duas metodologias quando aplicadas ao problema da contratação de energia. Ainda pretende-se comparar o desempenho de cada método avaliando-se alguns critérios como o tempo computacional e a qualidade das soluções obtidas.

## 1.2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Entre as referências pesquisadas verifica-se que existem trabalhos destinados a estudar o problema da contratação de energia pela ótica dos seguintes agentes do mercado: geradores, comercializadores, consumidores e distribuidores de energia. Dado que o foco deste trabalho consiste no agente distribuidor serão enfatizadas pesquisas dessa natureza.

Neste trabalho foram exploradas duas principais áreas de estudo, são elas a comercialização de energia elétrica e métodos matemáticos de otimização. A seguir, são apresentados nesta seção os principais trabalhos pesquisados relacionados com os temas estudados.

No caso das regras de comercialização foram consultados principalmente documentos provenientes da ANEEL, como a Resolução Normativa n. 421 (ANEEL, 2010), Resolução Normativa n. 508 (ANEEL, 2012) e a Resolução Normativa n. 521 (ANEEL, 2012). Cita-se também o conjunto de regras disponíveis no site da Câmara de comercialização de energia Elétrica (CCEE, 2016).

Em relação aos trabalhos acadêmicos, observa-se que em Castro (2004) é feita uma análise dos riscos que uma empresa distribuidora estaria exposta prevendo seu mercado com antecedência de cinco anos. É utilizada a simulação de Monte Carlo para gerar cenários de preço e demanda e com isso os riscos são quantificados por meio da função de distribuição das probabilidades obtidas.

Já em Guimarães (2006) é apresentado um modelo para determinar o montante a ser contratado em leilões por uma empresa distribuidora, sob condições de incerteza na demanda. O objetivo é minimizar o custo ponderado da contratação de energia de acordo com as regras de mercado mediante um problema de otimização linear estocástica multiestágio.

Também se encontram trabalhos que utilizam algoritmos genéticos para otimizar a contratação de energia, como em Ramos e Susteras (2006). Nesse trabalho apresenta-se um modelo determinístico de contratação, que leva em conta os custos com a compra de energia, penalizações e repasse de preços.

Observa-se também o uso de otimização estocástica em Pinto et al. (2007), cujo trabalho tem como objetivo minimizar os custos com a compra de energia nos diferentes tipos de leilão e gerenciar os riscos financeiros. O gerenciamento dos riscos é realizado por meio da inclusão de uma restrição especificando o máximo risco admissível. Isso traz a necessidade de incluir no modelo uma variável inteira, resultando em um problema de otimização inteira mista.

Existem também abordagens para determinar a contratação de energia no curto prazo, como em Lazo, Figueiredo e Lima (2012). Nesse trabalho é utilizada a simulação de Monte Carlo e algoritmos genéticos para determinar a contratação nos leilões A-1 e A-0, considerando conhecidos os montantes contratados em leilões A-3 e A-5.

Entre os trabalhos que utilizam métodos de decomposição de problemas estocásticos, cita-se Coral (2013). Nesse trabalho é apresentado um modelo computacional que serve para a tomada de decisões de contratação de uma empresa distribuidora. Tal modelo foi construído como um problema estocástico multiestágio e utiliza o método do PH em sua solução. O autor desenvolve várias simulações com diferentes cenários de crescimento de demanda e PLD, utilizando curvas de permanência para analisar os resultados do modelo e avaliando a qualidade das soluções por meio do cálculo do gap de otimalidade associado às soluções obtidas.

Outro trabalho em que é visto o uso do PH é o de Veronese (2013), o qual também trata do problema da contratação de energia de

uma distribuidora por meio de otimização estocástica multiestágio. Nesse trabalho são realizadas diversas simulações, com as quais se avalia a convergência do método do PH utilizando diferentes métodos de atualização do parâmetro de penalidade. Também se faz uma análise do comportamento do modelo frente a diferentes condições de contratação.

Ainda são encontrados trabalhos que utilizam o PH para resolver problemas de planejamento de sistemas de energia elétrica, como nos trabalhos de Santos (2010), Gonçalves (2011) e Almeida (2013).

Em relação ao uso da Relaxação Lagrangiana encontram-se diversos trabalhos na área de planejamento de sistemas de energia elétrica como em Finardi (2003), Takigawa (2006), Cordova (2014) e Brito (2015). Não foram encontrados trabalhos que utilizam a RL na solução do problema da contratação de energia.

Destaca-se que esta dissertação se baseou nos trabalhos de Coral (2013) e Veronese (2013), desenvolvendo o mesmo problema matemático com pequenas alterações. Assim, este trabalho é de certa forma uma continuação desses trabalhos anteriores.

### 1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO

Nesta seção será descrita a estrutura do presente trabalho, o qual está dividida em cinco capítulos, levando-se em conta o capítulo de introdução. No Capítulo 2 são discutidos os principais aspectos da comercialização no ACR. O intuito principal desse capítulo é expor as regras da contratação por meio de leilões públicos, uma vez que tais regras serão utilizadas na construção do modelo matemático utilizado neste trabalho.

Já no Capítulo 3 é detalhada a construção do problema de otimização da contratação de energia pela ótica de uma empresa de distribuição. Nesse capítulo o problema é considerado determinístico para tornar a apresentação do problema mais simples. Por sua vez, o Capítulo 4 explora o modelo estocástico da contratação de energia no ACR. Nesse capítulo também são demonstrados os métodos de otimização estocástica utilizados na solução do problema. Primeiramente é mostrado o método chamado de Equivalente Determinístico (ED), o qual soluciona o problema de otimização com um único problema de PL. Em seguida são descritos os métodos de decomposição do problema estocástico, conhecidos como RL e PH.

No capítulo 5 são discutidos os resultados computacionais das metodologias propostas quando aplicadas ao problema da contratação

ótima de energia. Nesse capítulo é realizada uma comparação quanto ao desempenho dos métodos utilizados na solução do problema. Também se pretende analisar o comportamento do modelo computacional proposto.

Por fim, são comentadas as principais conclusões deste trabalho no Capítulo 6 e mostradas as referências bibliográficas no Capítulo 7.

## 2 COMERCIALIZAÇÃO DE ENERGIA NO ACR

Neste capítulo são apresentados os principais aspectos da comercialização de energia no Brasil, no âmbito do mercado regulado, após as mudanças ocorridas em 2004 com a implantação do novo modelo institucional do setor elétrico.

### 2.1 AQUISIÇÃO DE ENERGIA PELAS EMPRESAS DISTRIBUIDORAS

Conforme visto no capítulo anterior, o modelo de comercialização vigente tem como característica a obrigatoriedade das empresas de distribuição de contratar toda a sua carga, sob pena de sofrer penalidades caso essa regra não seja atendida.

A principal forma de atender essa demanda contratual se dá por meio de contratos provenientes de leilões públicos. Os leilões são oferecidos em forma de comprador único, ou seja, as empresas de distribuição declaram suas necessidades de compra e se reúnem como um único comprador de energia.

As declarações de compra das distribuidoras devem ser feitas com 60 dias de antecedência, em seu submercado de energia, no ano de realização do leilão (GUIMARÃES, 2006). Com base nas quantidades declaradas ocorrem os leilões, nos quais os geradores competem pelo menor preço.

Após a realização dos leilões, a contratação se dá em forma de *pool*, isto é, os vencedores de cada leilão devem celebrar contratos bilaterais com todas as distribuidoras participantes, em quantidade proporcional a declarada por cada distribuidora. Esses contratos são conhecidos como Contratos de Comercialização de Energia no Ambiente Regulado (CCEARs).

Além da compra de energia via leilões públicos, existem também outras formas de aquisição pelas empresas distribuidoras, são elas:

- Energia da usina Itaipu Binacional: energia compulsória às distribuidoras dos submercados Sudeste/Centro-Oeste e Sul;
- Energia contratada no Programa de Incentivo às Fontes Alternativas (PROINFA): quotas de energia calculadas anualmente pela ANEEL, proporcionalmente ao mercado cativo das distribuidoras;

- Geração Distribuída: pode ser contratada através de chamada pública. O montante contratado não pode exceder a dez por cento da carga do agente de distribuição (BRASIL,2004);
- Contratos Bilaterais: contratos que foram adquiridos antes da Lei nº 10.848.

## 2.2 TIPOS DE LEILÃO DE ENERGIA

A energia ofertada em leilões é classificada em duas categorias chamadas de energia nova e energia existente. A energia nova atende à expansão da oferta por meio da construção de novos empreendimentos, como as usinas hidrelétricas e tem prazo de vigência entre 15 e 30 anos. Os leilões ofertados nessa categoria são:

- Leilão A-3: realizado com três anos de antecedência do ano “A” de entrega da energia negociada. É um leilão composto basicamente por termelétricas e usinas eólicas, que contam com prazos mais curtos de construção em relação às hidrelétricas;
- Leilão A-5: realizado com cinco anos de antecedência para o início do fornecimento de energia. Em geral, é um leilão de usinas hidrelétricas, porém pode conter também usinas termelétricas e eólicas.

Já a energia existente é proveniente de empreendimentos que já estão em operação. Os leilões de energia existente têm o objetivo de renovar contratos que irão vencer e são ofertados nas seguintes modalidades:

- Leilão de Ajuste: é realizado no mesmo ano em que a energia será entregue, sendo utilizado para complementar a contratação do mercado. Como resultado desse leilão, são firmados contratos de curta duração, variando de três meses a dois anos;
- Leilão A-1: realizado um ano antes da entrega da energia, originando contratos que variam de três a quinze anos de vigência. Os contratos oriundos desse tipo de leilão admitem a redução no montante contratado por meio dos Mecanismos de Trocas e Déficits (MCSD).

### 2.3 MECANISMOS DE TROCA E AJUSTE CONTRATUAL

Existem alguns mecanismos que permitem as empresas distribuidoras fazer o ajuste de seus contratos de acordo com sua necessidade de aumentar ou diminuir os níveis de contratação. Esses são chamados de Mecanismos de Compensação de Sobras e Déficits (MCSD) e envolvem algumas modalidades de flexibilização contratual. A seguir são apresentadas as características de cada modalidade do MCSD.

- MCSD mensal: essa modalidade permite devolver as sobras declaradas pelos agentes de distribuição que forem provenientes da migração de consumidores para o ACL e devido a acréscimo de energia decorrentes de contratos anteriores a março de 2004;
- MCSD trocas livres: permite trocas de contratos sem limitação no montante a declarar. Contudo, exige que exista uma parte cedente e outra cessionária, não possibilitando devolução ao vendedor de energia, o que na prática limita as operações de troca.
- MCSD 4%: Os contratos decorrentes dos leilões de energia existente preveem a possibilidade de redução dos montantes contratados, a qual fica limitada a 4% do montante inicial contratado (CCEE, 2016). Portanto, as distribuidoras podem descontratar unilateralmente 4% do total de seus contratos de energia existente a cada ano;
- MCSD ex-post: é um mecanismo financeiro com base no ano civil anterior. Assim, sobras verificadas são repassadas aos distribuidores deficitários somente para fins de apuração da insuficiência de lastro de energia no cálculo das penalidades, não alterando os montantes contratados.

As modalidades mostradas acima envolvem somente contratos de energia existente. Contudo, de acordo com a Resolução Normativa nº 508 da Agência Reguladora de Energia Elétrica (ANEEL, 2012), a distribuidora poderá celebrar acordo bilateral nos casos de CCEAR de energia nova, podendo-se alterar características como o prazo para o início do suprimento, a redução temporária ou permanente da energia contratada e até mesmo a rescisão contratual amigável.

## 2.4 REGRAS DE REPASSE DOS CUSTOS E LIMITES DE CONTRATAÇÃO

Os custos incorridos pela distribuidora relacionados às atividades de geração e transmissão, além de encargos setoriais previstos em legislação específica compõem a chamada Parcela A da tarifa de energia. Esses custos, em certa medida, não são gerenciáveis pela concessionária e, portanto, são passíveis de repasse aos consumidores finais. Por exemplo, o preço de fechamento da energia dos leilões não depende da vontade do agente distribuidor. Nesse sentido, pode-se imaginar que os custos da parcela comprada deveriam ser repassados integralmente ao consumidor final. Contudo, os custos também estão relacionados com a estratégia de compra utilizada por cada agente. Essas características fazem com que o repasse dos custos ocorra mediante determinadas regras que viabilizem a contratação eficiente.

Um dos principais mecanismos que é utilizado no repasse dos custos é o Valor Anual de Referência (VR). Esse valor é definido como a média ponderada dos custos de aquisição de energia em leilões A-3 e A-5, considerando o conjunto total de distribuidoras. O VR tem o objetivo de limitar o repasse da energia nova ao preço médio de aquisição do mercado como um todo e pode ser calculado conforme a equação a seguir.

$$VR = \frac{pA3 \cdot qA3 + pA5 \cdot qA5}{qA3 + qA5} \quad (2.1)$$

Em que:

$pA3$  (R\$/MWh) preço médio da energia nos leilões A-3;

$pA5$  (R\$/MWh) preço médio da energia nos leilões A-5;

$qA3$  (MWh) quantidade de energia adquirida em leilões A-3;

$qA5$  (MWh) quantidade de energia adquirida em leilões A-5.

Como consequência da utilização do VR, a distribuidora que conseguir contratar energia nova abaixo do VR irá obter ganhos financeiros; caso contrário, ocorrerá perdas no repasse dessa energia. Essa dinâmica é mostrada em (GUIMARÃES, 2006), o qual deduz matematicamente que é lucrativo para a distribuidora contratar energia nova com um custo inferior ao VR.

Outro mecanismo de repasse de preço é o valor de referência de energia existente (VRE), que é definido como o valor médio ponderado da compra de energia existente no ano A-1. O VRE é utilizado para limitar o repasse do preço de energia nova nos casos em que não for atingida a recontração mínima de energia existente em leilões A-1.

Nota-se que além das regras de repasse, existem também limitações quanto aos montantes adquiridos em cada modalidade de leilão. As margens de contratação são pequenas para a compra de energia existente, o que traz a necessidade das distribuidoras de comprar energia nova. Além disso, existem também restrições quanto à compra em leilões A-3, tendo em vista que esse tipo de energia é mais cara e poluente.

Em resumo, as regras de repasse e limitação na compra de energia incentivam a contratação antecipada da demanda em leilões A-5 por parte da concessionária. Isso viabiliza a expansão da oferta de energia e a garantia do suprimento. O conjunto de regras de repasse e limitação em cada modalidade consideradas neste trabalho é detalhado a seguir:

- Leilões de ajuste: A compra é limitada a 1% do total de contratos da distribuidora e o preço de repasse é limitado ao VR.
- Leilões A-1: A compra é limitada ao montante de reposição, que é a soma dos contratos que irão vencer no ano A-1, acrescido de 0,5% da carga da distribuidora no ano A-1. A recontração mínima nessa modalidade é de 96% do montante de reposição. Caso essa regra não seja atendida, incide a limitação de repasse de energia nova, referente ao montante que deixou de ser contratado, salvo nos casos em que o descumprimento ocorre por falta na oferta de leilões.
- Leilões A-3: A compra deve ser de no máximo de 2% da carga da distribuidora no ano A-5, sob pena de restrição no repasse do montante que exceder esse limite. Já o repasse do montante que exceder os 2% da carga, fica limitado ao menor valor entre os preços de fechamento dos leilões A-3 e A-5.
- Leilões A-5: Não existem limitações no montante a ser comprado.

Com isso, a distribuidora de energia está sujeita a riscos financeiros associados às restrições de compra e ao preço de repasse da energia. Além desses custos, também existem penalidades relacionadas

com a capacidade de atender a demanda contratual por parte da empresa concessionária. Tais penalidades são apresentadas na seção seguinte.

## 2.5 PENALIDADES

A obrigatoriedade das empresas distribuidoras de contratar a totalidade do seu consumo de energia trouxe consigo a possibilidade da aplicação de penalidades no caso de descumprimento dessa regra.

As penalidades são aplicadas anualmente e consideram três níveis de contratação de uma distribuidora para a sua aplicação, são eles: subcontratação, contratação entre 100 e 105% da demanda e sobrecontratação. Tais níveis são determinados por meio da comparação entre o total de contratos e o consumo verificado no ano anterior e assim são contabilizadas as penalidades no mês de janeiro de cada ano.

No caso da subcontratação, o montante em déficit em relação ao consumo verificado deve ser adquirido no mercado de curto prazo ao valor do PLD. O repasse do custo relacionado com esse montante fica limitado ao menor valor entre o PLD e o VR. Caso o PLD seja menor que o VR, não ocorrerá perda financeira, pois o repasse é feito integralmente à tarifa; caso contrário, ocorre prejuízo devido à diferença entre o preço de compra e venda. Além disso, a empresa que estiver subcontratada deve pagar uma multa proporcional ao montante em déficit, precificada pelo maior valor entre o PLD e o VR.

O outro nível de contratação verificado ocorre quando a distribuidoras tem montantes contratados entre 100 e 105% da demanda. Nesse caso os custos com a compra da energia são integralmente repassados à tarifa. O objetivo da distribuidora é manter seus níveis dentro dessa faixa de contratação, uma vez que não existirão custos com falta de repasse e penalidades.

Por fim, tem-se a situação em que a empresa fica sobrecontratada. Nesse caso, o resultado financeiro da venda do montante excedente depende do preço médio da energia adquirida pela distribuidora e do valor do PLD. Nos casos em que o PLD for maior que a média de aquisição da distribuidora a venda resultará em lucro para empresa; caso contrário resultará em prejuízo.

Com isso, neste capítulo foram apresentadas as regras gerais que balizam a contratação de energia. No capítulo seguinte é apresentado matematicamente o problema da contratação, detalhando-se as equações utilizadas na representação da regulamentação considerada neste trabalho.

### 3 MODELAGEM DO PROBLEMA DA CONTRATAÇÃO DE ENERGIA

Este capítulo tem como objetivo apresentar a modelagem matemática do problema da gestão da contratação de energia elétrica no ACR. Essa modelagem constitui-se por um problema de otimização cuja formulação expressa as regras do mercado de energia.

#### 3.1 FUNÇÃO OBJETIVO

O problema em questão é elaborado de forma a minimizar os custos da distribuidora com penalidades e limitações no preço de repasse. Assim, a função objetivo é composta por uma soma de elementos que representam tais custos no processo de comercialização de energia no ACR.

É importante salientar que todos os custos futuros são representados na função objetivo como seu valor presente. Para isso, é adicionado um fator que multiplica cada um dos termos da função objetivo, atualizando assim monetariamente os custos de acordo com uma determinada taxa de juros ( $J$ ).

Nas equações que descrevem matematicamente o problema, o índice  $h$  refere-se ao número de anos do horizonte de planejamento,  $n$  refere-se ao número de tipos de leilões considerados e  $S$  refere-se ao número total de cenários.

##### 3.1.1 Custos com a subcontratação

Nos casos em que a empresa fica subcontratada há uma restrição de repasse de preço à tarifa. O preço de repasse da quantia em déficit fica limitado ao menor valor entre o PLD e o VR.

Além disso, ocorre uma penalidade proporcional ao montante em déficit, que é valorada pelo maior valor entre o PLD e o VR. O termo que expressa o custo total da subcontratação é exposto na Equação (3.1).

$$\sum_{t=1}^h \frac{1}{(1+j)^{t-1}} [\text{PLD}_t - \min(\text{VR}, \text{PLD}_t) + \max(\text{VR}, \text{PLD}_t)] \text{sub}_t \quad (3.1)$$

Em que:

PLD	preço da energia no mercado de curto prazo;
VR	valor de referência;
$sub_t$	variável que indica o montante subcontratado.

### 3.1.2 Custos com a sobrecontratação

O montante de energia que exceder 105% da demanda total não é repassado integralmente para a tarifa, sendo o excedente vendido no mercado de curto prazo, podendo assim resultar em ganhos ou perdas. A representação matemática dessa penalidade é dada na equação abaixo.

$$\sum_{t=1}^h \frac{1}{(1+j)^{t-1}} [\text{MP} - \text{PLD}_t]^+ \text{ sob}_t \quad (3.2)$$

Em que:

MP	média dos preços de todos os contratos da distribuidora;
$sob_t$	variável que representa o montante contratado acima de 105% da demanda.

Na Equação (3.2) o sinal de positivo representa a exclusão dos ganhos com a venda do montante excedente no mercado de curto prazo, considerando um ganho nulo quando o PLD for maior que MP. Essa consideração é utilizada neste trabalho para que o modelo não tenda a sobrecontratar energia, mantendo os níveis de contratação dentro da faixa ideal.

### 3.1.3 Limitação de repasse em contratos A-0

O preço de repasse da energia proveniente dos leilões de ajuste fica limitado ao VR. Caso o preço de aquisição dessa energia seja maior que o VR, ocorre uma perda financeira, representada pelo termo a seguir.

$$\sum_{t=1}^h \frac{1}{(1+j)^{t-1}} [P_t - \min(P_t, \text{VR})] x_{it} \quad (3.3)$$

Em que

- $P_1$  preço da energia adquirida em leilões de ajuste;
- $x_{1t}$  variável que representa a decisão de compra em leilões de ajuste.

### 3.1.4 Limitação de repasse em contratos A-3

O montante de energia proveniente de leilões A-3, que exceder o limite de 2% da carga total da distribuidora, tem o preço limitado ao menor valor entre os preços de fechamento dos leilões A-3 e A-5. O termo que representa esse custo é dado a seguir:

$$\sum_{t=1}^h \frac{1}{(1+j)^{t-1}} [P_3 - \min[P_3, P_4]] za3_t \cdot Fa3 \quad (3.4)$$

Em que:

- $P_3$  preço da energia adquirida em leilões A-3;
- $za3_t$  Variável que representa o montante de energia contratada em leilões A-3 que ultrapassam 2% da demanda total no estágio t;
- $Fa3$  é um fator que representa o valor presente de uma série de pagamentos uniformes a juros compostos dos contratos A-3.

### 3.1.5 Limitação de repasse em contratos de energia nova

A distribuidora deve recontratar no mínimo 96% do seu montante de reposição em leilões A-1. Caso essa regra não seja atendida ocorre uma limitação no repasse de energia nova, referente ao montante que deixou de ser contratado. O termo que representa esse custo é expresso na função objetivo da seguinte maneira:

$$\sum_{t=1}^h \frac{1}{(1+j)^{t-1}} [\max(P_3, P_4) - VRE_t] za1_t \cdot Fa1 \quad (3.5)$$

Em que:

$z a l_t$  é o montante de energia contratada em leilões A-1 abaixo do mínimo de contratação de 96%.

$VRE_t$  é o valor de referência de energia existente ;

$Fa1$  é um fator que representa o valor presente de uma série de pagamentos uniformes a juros compostos dos contratos A-3.

### 3.1.6 Custos com a aquisição de energia

Os custos com a aquisição de energia em leilões fazem parte da parcela A da tarifa e, portanto, são passíveis de repasse integral aos consumidores. Como a distribuidora vende a energia pelo preço que pagou, não ocorrem perdas ou receitas financeiras devido a essa operação.

Apesar disso, neste trabalho a compra de energia é considerada na função objetivo, sendo ponderada por uma constante de baixo valor ( $\alpha$ ). Esse artifício é utilizado para evitar decisões de compra desnecessárias em alguns casos e ainda induz uma ordem de mérito para a aquisição em cada modalidade de leilão.

O termo que representa esse custo com a compra de energia é mostrado a na Equação (3.6). Destaca-se que o peso na função objetivo devido a esse custo sempre será proporcionalmente pequeno em relação aos custos com penalidades e restrições no repasse.

$$\alpha \sum_{t=1}^h \frac{1}{(1+j)^{t-1}} \sum_{i=1}^4 P_i x_{it} Fax \quad (3.6)$$

## 3.2 RESTRIÇÕES DO PROBLEMA DA CONTRATAÇÃO DE ENERGIA

As restrições utilizadas na formulação do problema representam as normas do ACR. Existem restrições de diferentes naturezas como, por exemplo, determinação dos limites de contratação em cada tipo de leilão e do balanço contratual. Nas seções a seguir apresentam-se todas as restrições do problema.

### 3.2.1 Restrição de balanço contratual

O balanço contratual é uma das principais restrições do problema e faz com que a soma dos contratos vigentes seja igual à demanda em

determinado estágio. Caso isso não seja atendido, as variáveis que indicam subcontratação ou sobrecontratação assumirão valores positivos, de forma que a igualdade seja satisfeita. A equação que define a restrição de balanço contratual em determinado estágio é mostrada a seguir.

$$\sum_{i=1}^n (w_{it} + CA_{it}) + sub_t - int_t - sob_t = D_t \quad (3.7)$$

Em que:

$w_{it}$	montante de contratos do tipo $i$ vigente no estágio $t$ ;
$CA_{it}$	montante de contratos anteriores vigente no estágio $t$ ;
$int_t$	variável que representa o montante contratado no intervalo entre 100% e 105% da demanda no estágio $t$ ;
$D_t$	demanda total no estágio $t$ .

### 3.2.2 Contabilização anual dos contratos

É necessário realizar a contabilização dos contratos vigentes em cada um dos estágios, considerando-se os prazos de entrega e a duração de cada contrato. Assim, essa restrição serve para apurar os montantes de cada tipo de contrato que entram e saem de vigência em cada estágio do horizonte de planejamento. A expressão que define essa restrição é mostrada na Equação (3.8).

$$w_{it} - w_{i,t-1} - x_{i,t-prazo_i} + x_{i,t-prazo_i-duração_i} = 0 \quad (3.8)$$

### 3.2.3 Determinação do montante de reposição

O Montante de Reposição (MR) é a quantidade de energia decorrente do vencimento de contratos dos agentes de distribuição no ano A-1 (Brasil, decreto 5163). Destaca-se que não integram o montante de reposição contratos referentes aos leilões de ajuste.

É necessário apurar o valor do MR, pois este define os limites de compra em leilões A-1. A restrição que representa o MR é mostrada na equação (3.9).

$$mr_t - \sum_{i=2}^n x_{1,t+1-\text{prazo}_i-\text{duração}_i} - \sum_{i=2}^n [CA_{i,t} - CA_{i,t+1}]^+ = 0 \quad (3.9)$$

### 3.2.4 Trocas de energia

Como comentado no capítulo anterior, contratos de energia existente permitem que a distribuidora devolva unilateralmente até 4% do montante contratado via MCSDD, acrescido dos montantes de perda de mercado por migração de consumidores para o mercado livre.

Existem ainda outros mecanismos como o MCSDD trocas livres e acordos bilaterais de energia nova. Não existe limitação quanto ao volume que pode ser intercambiada por estes mecanismos. Entretanto, existem limitações de ordem prática em razão da necessidade de se obter uma parte cedente e outra cessante.

Neste trabalho considerou-se que as trocas são limitadas a um determinado percentual dos montantes de contratos de energia nova e existente. Considera-se também a possibilidade de devolução de 4% do total de contratos de energia existente via MCSDD 4. Na Equação (3.10) estão representadas as devoluções de energia existente via MCSDD 4% e por meio de acordos bilaterais de energia nova. Já na Equação (3.11) são representadas as aquisições com trocas de energia existente e nova.

$$-x_{5,t} - 0,04 (w_{2,t} + w_{5,t} + CA_{2,t}) - \lim_{\text{troca}} (w_{3,t} + w_{4,t} + CA_{3,t} + CA_{4,t}) \leq 0 \quad (3.10)$$

$$x_{5,t} - \lim_{\text{troca}} (w_{2,t} + w_{5,t} + ca_{2,t}) - \lim_{\text{troca}} (w_{3,t} + w_{4,t} + CA_{3,t} + CA_{4,t}) \leq 0 \quad (3.11)$$

### 3.2.5 Contratação em leilão de energia existente

A distribuidora deve recontratar no mínimo 96% do seu montante de reposição em leilões de energia existente, sob pena de sofrer limitação de repasse do montante de energia nova equivalente à parcela

que deixou de ser recomprada. A seguir é mostrada a Equação (3.12), referente a essa regra.

$$-x_{2,t} - zen_t + 0,96mr_t \leq 0 \quad (3.12)$$

Ainda, a contratação em leilões A-1 é limitada ao valor do seu montante de reposição acrescido de 0,5% do seu mercado realizado no ano A-1, como representado na Equação (3.13).

$$x_{2,t} - mr_t \leq 0,005 D_{t-1} \quad (3.13)$$

### 3.2.6 Contratação em leilões A-3

A compra de energia em A-3 deve ficar limitada a 2% da carga da distribuidora no ano A-5, caso contrário, impõem-se restrições no repasse referente ao montante excedente. Essa limitação é incluída no problema de otimização por meio da Equação (3.14), a qual faz com que a variável  $z$  a  $3_t$  assumam valor igual ao montante de energia que exceder o limite de 2% da carga. Como a variável  $z$  a  $3_t$  está presente na função objetivo, ocorrerá uma penalização nos estágios em que essa variável for diferente de zero.

$$x_{3,t-\text{prazo3}} - za3_t \leq 0,02 D_{t-\text{prazo4}} \quad (3.14)$$

### 3.2.7 Contratação em leilões de Ajuste

A compra de energia em leilões de ajuste fica limitada a 1% do total de contratos da distribuidora. A Equação (3.14) representa essa limitação.

$$x_{1,t} - 0,01 \left[ \sum_{i=1}^n (w_{it} + CA_{it}) \right] \leq 0 \quad (3.15)$$

### 3.2.8 Contratação entre 100 e 105%

Não há custo adicional na função objetivo quando ocorrer sobrecontratação no intervalo entre 100 e 105% da demanda. Para inserir essa característica no problema, utiliza-se uma variável de folga. A equação (3.16) apresenta a restrição utilizada para limitar essa variável de folga.

$$int_t \leq 0,05 D_t \quad (3.16)$$

### 3.3 PROBLEMA DA CONTRATAÇÃO ÓTIMA DE ENERGIA

Após a apresentação dos detalhes da função objetivo e das restrições, é possível formular o problema determinístico da contratação de energia utilizado neste trabalho. A seguir é mostrada a formulação matemática completa do problema, a qual não considera qualquer tipo de incerteza no tocante aos dados de entrada como os preços de compra nos leilões, PLD, e demanda.

Minimizar

$$\sum_{t=1}^{t=h} \left[ \begin{aligned} & \frac{1}{(1+j)^{t-1}} [PLD_t - \min(VR, PLD_t) + \max(VR, PLD_t)] sub_t + \\ & \frac{1}{(1+j)^{t-1}} [MP - PLD_t]^+ sob_t + \\ & \frac{1}{(1+j)^{t-1}} [P_1 - \min(P_1, VR)] x_{it} + \\ & \frac{1}{(1+j)^{t-1}} [P_3 - \min(P_3, P_4)] za3_t \cdot Fa3 + \\ & \frac{1}{(1+j)^{t-1}} [\max(P_3, P_4) - VRE_t] za1_t \cdot Fa1 + \\ & \frac{1}{(1+j)^{t-1+Prazo_i}} \alpha \sum_{i=1}^4 P_i x_{it} Fax_t \end{aligned} \right] \quad (3.17)$$

Sujeito a:

Balanco contratual:

$$\sum_{i=1}^n (w_{it} + CA_{it}) + sub_t - int_t - sob_t = D_t \quad (3.18)$$

Contabilização anual dos contratos:

$$w_{it} - w_{i,t-1} - x_{i,t-prazo_i} + x_{i,t-prazo_i-duração_i} = 0 \quad (3.19)$$

Determinação do Montante de Reposição:

$$mr_t - \sum_{i=2}^n x_{1,t+1-\text{prazo}_1-\text{duração}_1} - \sum_{i=2}^n [CA_{it} - CA_{i,t+1}]^+ = 0 \quad (3.20)$$

Trocas de energia:

$$-x_{5,t} - 0,04 (w_{2,t} + w_{5,t} + CA_{2,t}) - \quad (3.21)$$

$$0,5 \lim_{\text{troca}} (w_{3,t} + w_{4,t} + CA_{3,t} + CA_{4,t}) \leq 0$$

$$x_{5,t} - \lim_{\text{troca}} (w_{2,t} + w_{5,t} + CA_{2,t}) - \quad (3.22)$$

$$\lim_{\text{troca}} (w_{3,t} + w_{4,t} + CA_{3,t} + CA_{4,t}) \leq 0$$

Contratação em leilões de energia existente:

$$x_{2,t} - mr_t \leq 0,005 D_{t-1} \quad (3.23)$$

$$-x_{2,t} - zen_t + 0,96mr_t \leq 0 \quad (3.24)$$

Contratação em leilões A-3:

$$x_{3,t-\text{prazo}_3} - za_3 \leq 0,02 D_{t-\text{prazo}_4} \quad (3.25)$$

Contratação em Leilões de Ajuste:

$$x_{1,t} - 0,01 \left[ \sum_{i=1}^n (w_{it} + CA_{it}) \right] \leq 0 \quad (3.26)$$

Contratação entre 100 e 105%:

$$int_t \leq 0,05 D_t \quad (3.27)$$

Para  $t=1, \dots, h$ ;  $i=1, \dots, n$ .

Nota-se que a função objetivo do problema é formada pela soma dos custos com compra de energia e penalidades, contendo em cada um dos seus termos um fator de atualização para valor presente.

### 3.4 EXEMPLO DETERMINÍSTICO DO PROBLEMA DA CONTRATAÇÃO

Para realizar uma análise inicial do problema, apresenta-se um exemplo numérico em que um agente distribuidor deve contratar energia para atender sua demanda em um horizonte de planejamento de seis

anos. A demanda e o preço de curto prazo são considerados conhecidos em cada ano desse horizonte.

A demanda inicial é 100 MWh com um crescimento de 1% ao ano. Já os valores utilizados para o PLD foram obtidos da média anual do subsistema Sul, entre os anos de 2008 e 2014<sup>1</sup> conforme mostra a Tabela 3.1.

**Tabela 3.1 - Cenário de demanda e PLD.**

Ano	1	2	3	4	5	6
Demanda (MWh)	100	101	102,01	103,03	104,06	105,10
PLD (R\$/MWh)	135,29	38,74	70	29,46	166,64	262,56

Na Tabela 3.2 são mostrados os detalhes dos diferentes tipos de contratos, tais como o preço pago pela energia, os prazos para entrada em vigência e a duração dos contratos.

**Tabela 3.2 - Regras dos contratos.**

	Tipos de contrato			
	A0	A1	A3	A5
Preço (R\$/MWh)	110	90	115	95
Prazo para entrada em vigência (anos)	0	1	3	5
Duração (anos)	1	4	15	30

Já a Tabela 3.3 apresenta as constantes utilizadas no problema. O VR e VRE utilizados representam a média dos preços dos contratos de energia nova e de contratos de energia existente, respectivamente. A taxa de juros adotada no cálculo da atualização monetária é de 7,5% ao ano e o limite de trocas de energia entre empresas de 0,5 % do total de contratos da empresa. Por fim, uma constante de ponderação ( $\alpha$ ) foi empregada para reduzir o peso do termo referente à compra de energia.

<sup>1</sup>Dados retirados do site,

[http://www.cmuenergia.com.br/site/apps/files/historicos\\_pld/arquivo/18/Hist%C3%B3rico%20PLD.pdf](http://www.cmuenergia.com.br/site/apps/files/historicos_pld/arquivo/18/Hist%C3%B3rico%20PLD.pdf), acessado em 30/10/2016

**Tabela 3.3 - Constantes utilizadas.**

Valor de referência (VR)	Valor de referência de energia existente (VRE)	Taxa de juros (J)	Limite de trocas de energia	Constante de peso para a compra de energia
105	90	7,5%	0,1 %	0,001

O problema associado com este exemplo numérico possui 16 variáveis por estágio, resultando assim em um PL com 96 variáveis e 80 restrições. A modelagem matemática deste exemplo foi implementada em ambiente C++ e o problema solucionado por meio do software comercial Gurobi Optimization. Com isso, são obtidas as decisões de compra de energia por tipo de contrato para cada ano do horizonte de planejamento, como mostrado na Tabela 3.4.

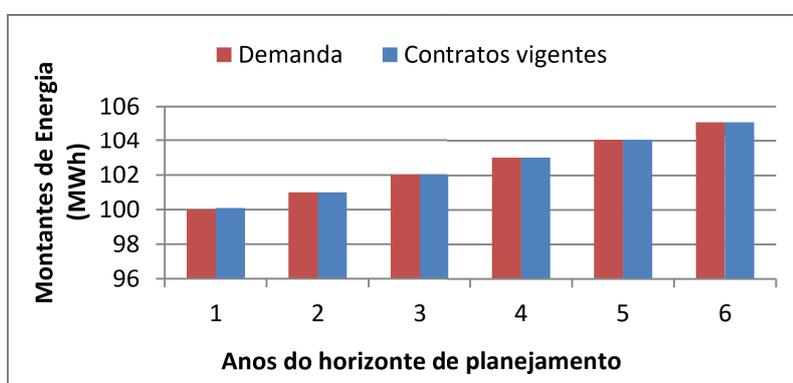
**Tabela 3.4 - Decisões de compra de energia por tipo de contrato.**

Ano	A-0	A-1	A-3	A-5	Trocas
1	0	0,49	1,17	0,43	0,090
2	0,33	0,5	0,42	0	0,090
3	0,75	0,5	0	0	0,091
4	0	0,51	0	0	0,093
5	0	1	0	0	0,094
6	0	0	0	0	0,095

Analisando as decisões do modelo, nota-se que a compra de energia ocorre de maneira diferente de acordo com a modalidade de leilão. Os contratos com maior prazo de entrada em vigência, como os de energia nova, são adquiridos somente nos primeiros estágios, tendo em vista que serão utilizados para atender a demanda nos últimos anos do horizonte. Com isso, conclui-se que o modelo não realiza aquisição de energia para leilões cuja entrada em vigência se dá após o último ano do horizonte de planejamento.

Já os contratos de energia existente tem menor prazo para entrada em vigência, e são adquiridos com maior frequência ao longo do horizonte de planejamento. No caso das trocas são adquiridos em todos os anos com um valor limitado pelas restrições do problema.

Com base nas decisões de compra, são determinados os níveis de contratação em cada estágio, os quais podem ser vistos na Tabela 3.1 e na Tabela 3.5. Observa-se que a solução do problema tende a manter o nível de contratação próximo de 100% da demanda, evitando assim custos com subcontratação e sobrecontratação. Isso indica que os mecanismos de aquisição de energia foram suficientes para atender o crescimento anual de 1% da demanda.



**Figura 3.1 - Demanda e contratos vigentes com crescimento anual de 1% para a demanda.**

Na Tabela 3.5 verifica-se que no primeiro ano o nível de contratos fica em 100,09%, ou seja, valor acima da demanda. Assim, a distribuidora fica no limiar de contratação no qual não incidem penalidades, que é entre 100% e 105% da demanda.

**Tabela 3.5 - Níveis de Contratação com crescimento anual de 1% para a demanda.**

Ano	Demanda (MWh)	Soma de todos os contratos vigentes (MWh)	Porcentagem contratada (%)
1	100	100,09	100,09
2	101	101	100
3	102,01	102,1	100
4	103,03	103,3	100
5	104,06	104,06	100
6	105,1	105,1	100

O valor resultante da função objetivo obtido com a solução do problema de otimização é de R\$ 6,56. Na Tabela 3.6 são mostrados os custos que compõem a função objetivo. O termo referente à compra de energia tem um pequeno valor na função objetivo, uma vez que é ponderada por uma constante com valor de 0,001. Nota-se também um pequeno custo de R\$ 4,76 devido à compra em leilões A-3 acima do limite de 2% da demanda.

**Tabela 3.6 - Custos da solução com crescimento anual de 1% para a demanda.**

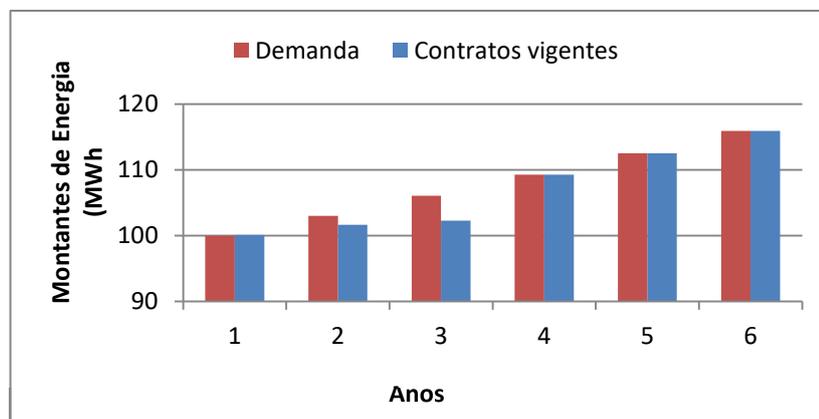
Compra de energia	Sub-contratação	Sobre-contratação	Limite de repasse A-0	Limite de repasse A-3	Limite de repasse Energia nova
1,93	0	0	0	4,76	0

Com o intuito de demonstrar melhor o comportamento do modelo, simula-se o mesmo exemplo anterior, considerando agora um crescimento anual de 3% para a demanda. O cenário utilizado neste caso é mostrado na Tabela 3.7.

**Tabela 3.7 - Cenário de demanda com crescimento anual de 3%.**

Ano	1	2	3	4	5	6
Demanda (MWh)	100	103	106,09	109,27	112,55	115,92

Os níveis de contratação em cada estágio obtidos com a solução do modelo neste caso são mostrados na Figura 3.2 e na Tabela 3.8. Observa-se que no segundo e terceiro ano ocorre um déficit do montante contratado em relação à demanda. Tal déficit ocorre devido à falta de opções contratuais de curto prazo, pois as limitações de compra impostas aos leilões A-0, A-1 e às trocas impossibilitam o atendimento total da demanda. Já os contratos de energia nova, não podem ser utilizados para atender a demanda nos primeiros anos devido ao maior prazo de entrega da energia.



**Figura 3.2 - Demanda e contratos vigentes com crescimento anual de 3% para a demanda.**

**Tabela 3.8 - Níveis de Contratação com crescimento anual de 3% para a demanda.**

Ano	1	2	3	4	5	6
Porcentagem contratada (%)	100,09	98,71	96,40	100	100	100

O valor da função objetivo encontrado com esse cenário é de R\$ 952,5. Nota-se que com o aumento anual da demanda de 1% para 3% a solução resultou em um considerável aumento no custo. Como pode ser visto na Tabela 3.9, o aumento do custo se deve principalmente à penalidade de subcontratação e à falta de repasse em A-3.

**Tabela 3.9 - Custos da solução com crescimento anual de 3% para a demanda.**

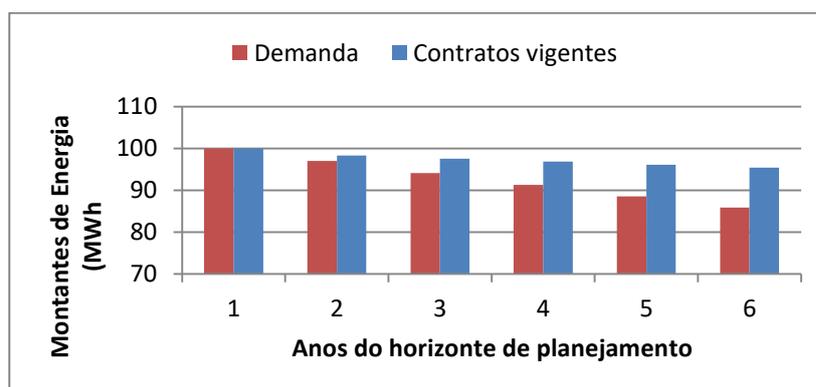
Compra de energia	Sub-contratação	Sobre-contratação	Limite de repasse A-0	Limite de repasse A-3	Limite de repasse Energia nova
7,24	475,84	0	17,59	452,33	0

Por fim, se faz uma simulação considerando agora um decréscimo 3% ao ano da demanda para todo o horizonte de planejamento. O cenário utilizado neste caso é mostrado na Tabela 3.10.

**Tabela 3.10 - Cenário de demanda com decréscimo anual de 3%.**

Ano	1	2	3	4	5	6
Demanda (MWh)	100	97	94,09	91.26	88.52	85.87

A solução do exemplo com essa configuração de demanda indica os níveis de contratação mostrados na Figura 3.3 e na Tabela 3.11. Verifica-se que o modelo descontrata energia, tendo 95,59% dos seus contratos iniciais no último ano. Essa devolução de contratos se dá por meio dos mecanismos de trocas de energia. Porém, devido às limitações impostas a esses mecanismos, não é possível devolver energia suficiente a ponto de não ocorrerem sobrecontratações. Nota-se que a partir do quarto ano a distribuidora fica com seus níveis de contratação acima dos 105% da demanda.

**Figura 3.3 - Demanda e contratos vigentes para o decréscimo anual de 3%.****Tabela 3.11 - níveis de contratação com decréscimo anual de 3% para a demanda.**

Ano	1	2	3	4	5	6
Porcentagem contratada (%)	100	101,40	103,71	106,10	108,58	111,14

O valor da função objetivo encontrado com a solução do cenário é de R\$ 59,05 e os custos que compõem esse valor são mostrados na Tabela 3.12. Percebe-se que o valor da função objetivo é proveniente de custos com as sobrecontratações. Não ocorrem outros tipos de custo, pois com a queda da demanda, não ocorrem subcontratações e não é necessário tomar decisões de compra de energia em leilões.

**Tabela 3.12 - Custo da solução com decréscimo anual de 3% para a demanda.**

Compra de energia	Sub-contratação	Sobre-contratação	Limite de repasse A-0	Limite de repasse A-3	Limite de repasse Energia nova
0	0	59,05	0	0	0

Os exemplos utilizados neste capítulo apresentam uma ideia geral do comportamento do modelo utilizado. Para isso, um problema de otimização determinístico foi simulado, obtendo-se diretamente o resultado pela solução de um problema de PL. Contudo, sabe-se que existem incertezas quanto ao comportamento de diversos fatores que influenciam o problema, em especial, do PLD e da demanda. Nesse sentido, é necessário levar em consideração nas decisões essas incertezas, o que é possível por meio de otimização estocástica. Assim no próximo capítulo é explorado o modelo estocástico da contratação de energia.

#### **4 O PROBLEMA DA CONTRATAÇÃO VIA OTIMIZAÇÃO ESTOCÁSTICA**

No capítulo anterior, todos os fatores que afetam o problema foram considerados conhecidos ao longo do horizonte de planejamento. Isso implica em estimar acontecimentos futuros como possíveis realizações de demanda, preços do mercado de curto prazo, preços de fechamento dos leilões, entre outros. Entretanto, existem muitas incertezas quanto ao comportamento desses dados. Como exemplo, é possível citar o caso da demanda de energia que é fortemente influenciado por fatores macroeconômicos, sendo assim uma variável com alto grau de incerteza.

Outra variável que apresenta um comportamento oscilatório é o valor do PLD, o qual se caracteriza historicamente por longos períodos em que permanece com valores muito baixos, que se alternam com picos de preço muito elevados em momentos de situação hidrológica desfavorável (VERONESE, 2013).

Dessa forma, a necessidade de contratar energia em leilões para atender sua demanda com até cinco anos de antecedência, trouxe grandes desafios para as empresas de distribuição, uma vez que uma previsão equivocada em relação aos dados de entrada do modelo pode resultar em um aumento significativo do custo de comercialização.

Para que sejam levadas em conta as incertezas do problema é possível utilizar um modelo de otimização estocástica, no qual são considerados diversos cenários para representar as circunstâncias futuras. Nesse sentido, as próximas seções abordam de forma básica alguns conceitos que são necessários à formulação do problema estocástico.

Conforme citado anteriormente, neste trabalho são consideradas incertezas em relação às possíveis realizações de demanda e PLD em cada estágio. Tais incertezas podem ser representadas por meio de uma árvore de cenários, como mostrado na Figura 4.1.

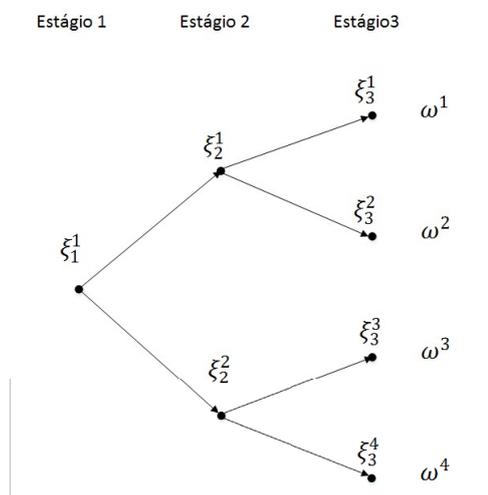


Figura 4.1 - Árvore de cenários de demanda e PLD.

Cada ponto da árvore de cenário, que está representado pela letra  $\xi$ , é chamado de nó e corresponde a uma realização de demanda e PLD. Já os cenários são obtidos por meio de um caminho completo entre o primeiro e o último estágio. Assim, na Figura 4.1 a árvore contém três estágios, sete nós e quatro cenários.

Nota-se ainda na Figura 4.1 que os cenários compartilham alguns nós em comum. Por exemplo, os cenários  $\omega^1$  e  $\omega^2$  compartilham os nós  $\xi_1^1$  e  $\xi_2^1$ . Isso significa que tais cenários estão compartilhando tanto as realizações, quanto as decisões correspondentes a esses nós. Essa é uma característica importante desse tipo de representação e é chamada de condição de não-antecipatividade (ROCKAFELLAR; WETS, 1991).

Em outras palavras, a não-antecipatividade pode ser definida em cada estágio estabelecendo que as decisões tomadas devem ser iguais para todos os cenários que têm o mesmo passado e presente (ROSA ; RUSZCZYNSKI, 1994).

De acordo com a forma de expressar as não-antecipatividades existem duas possibilidades para descrever um problema estocástico: a forma implícita e a forma explícita (FOURER; LOPES, 2006). A forma implícita é conhecida como modelo por nós e possui as não-antecipatividades representadas implicitamente em sua formulação, tendo suas variáveis discriminadas para cada nó do modelo. Já a forma explícita é conhecida como modelo por cenários e possui as não-antecipatividades representadas explicitamente, diferenciando suas

variáveis para cada cenário. Esse último modelo por cenários será utilizado neste trabalho e pode ser representado como na Figura 4.2.

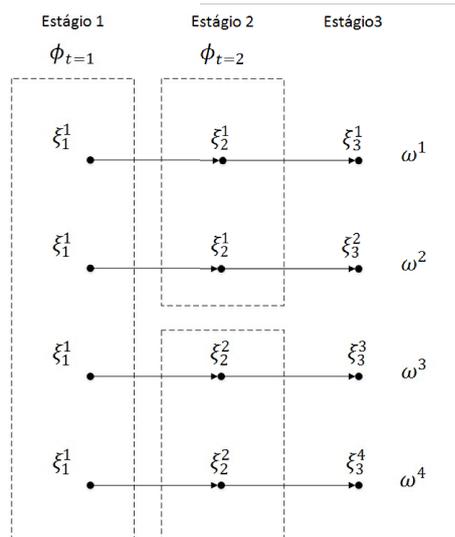


Figura 4.2 - Representação explícita das não-antecipatividades.

Observa-se agora que os cenários estão representados explicitamente, ou seja, cada caminho foi separado em relação à árvore original, gerando assim cada um dos cenários.

Os quadros pontilhados são utilizados para agrupar os cenários que compartilham as mesmas decisões em determinado estágio. Por exemplo, no primeiro estágio todos os cenários têm o mesmo nó em comum, portanto, compartilham das mesmas decisões e estão agrupados no mesmo quadro.

O símbolo  $\phi_t^\omega$  representa o conjunto de cenários que compartilham os mesmos nós. Como exemplo, o conjunto relativo ao cenário  $\omega=1$  é dado por:  $\phi_{t=1}^{\omega=1} = \{\omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4\}$  no primeiro estágio e  $\phi_{t=2}^{\omega=1} = \{\omega^1, \omega^2\}$  no segundo estágio.

É possível representar as condições de não-antecipatividade em um problema de otimização estocástica por meio da adição de restrições no problema. Tais restrições garantem que as decisões dos cenários com nós em comum sejam iguais. Por exemplo, as não-antecipatividades da variável de decisão ( $x_t^\omega$ ) do primeiro cenário ( $\omega^1$ ) no primeiro estágio são representadas pela Equação (4.1).

$$x_{t=1}^{\omega=1} = x_{t=1}^{\omega=2} = x_{t=1}^{\omega=3} = x_{t=1}^{\omega=4} \quad (4.1)$$

Também é possível descrever as não-antecipatividades por meio da média dos cenários presentes no conjunto  $\phi_t^\omega$ . Essa técnica de modelagem é mostrada na Equação (4.2).

$$x_t^\omega - \sum_{k \in \phi_t^\omega} p_t^k x_t^k = 0 \quad (4.2)$$

Em que a variável  $p_t^k$  é a probabilidade de ocorrência dos cenários no conjunto  $\phi_t^\omega$ . Por exemplo, as mesmas restrições de não-antecipatividade da Equação (4.1) podem ser representadas como na Equação (4.3).

$$x_{t=1}^{\omega=1} - \frac{(x_{t=1}^{\omega=1} + x_{t=1}^{\omega=2} + x_{t=1}^{\omega=3} + x_{t=1}^{\omega=4})}{4} = 0 \quad (4.3)$$

A partir dessa forma de representação dos cenários e suas condições de não-antecipatividade, é construído o modelo estocástico da contratação utilizado neste trabalho.

#### 4.1 O PROBLEMA ESTOCÁSTICO DA CONTRATAÇÃO

A ideia central da otimização estocástica consiste em encontrar uma solução ótima frente a vários cenários possíveis e suas respectivas probabilidades de ocorrência. Para tanto, é possível reescrever o problema de forma que seja levado em conta cada cenário utilizado.

Assim, construindo a função objetivo do problema como a soma dos custos ponderados de cada cenário e adicionando as restrições de cada cenário ao conjunto total de restrições, se obtém a formulação estocástica do problema. Esse tipo de representação também é conhecido como problema Equivalente Determinístico (ED) e pode ser observado no conjunto de equações entre a Equação (4.4) até a Equação (4.15).

Minimizar

$$\sum_{\omega=1}^s \sum_{t=1}^h \left[ \begin{aligned} & \frac{1}{(1+j)^{t-1}} [\text{PLD}_t - \min(\text{VR}, \text{PLD}_t) + \max(\text{VR}, \text{PLD}_t)] \text{sub}_t^\omega + \\ & \frac{1}{(1+j)^{t-1}} [\text{MP} - \text{PLD}_t]^+ \text{sob}_t^\omega + \\ & \frac{1}{(1+j)^{t-1}} [P_1 - \min(P_1, \text{VR})] x_{1,t}^\omega + \\ & \frac{1}{(1+j)^{t-1}} [P_3 - \min(P_3, P_4)] \text{za} z_t^\omega \cdot \text{Fa} 3 + \\ & \frac{1}{(1+j)^{t-1}} [\max(P_3, P_4) - \text{VRE}_t] \text{za} I_t^\omega \cdot \text{Fa} 1 + \\ & \frac{1}{(1+j)^{t-1+\text{Prazo}_i}} \alpha \sum_{i=1}^4 P_i x_{it}^\omega \text{Fa} x_t \end{aligned} \right] \quad (4.4)$$

Sujeito a:

$$\sum_{i=1}^n (w_{it}^\omega + \text{CA}_{it}) + \text{sub}_t^\omega - \text{int}_t^\omega - \text{sob}_t^\omega = D_t^\omega \quad (4.5)$$

$$w_{it}^\omega - w_{i,t-1}^\omega - x_{i,t-\text{prazo}_i}^\omega + x_{i,t-\text{prazo}_i-\text{duracao}_i}^\omega = 0 \quad (4.6)$$

$$mr_t^\omega - \sum_{i=2}^n x_{1,t+1-\text{prazo}_1-\text{duracao}_1}^\omega - \sum_{i=2}^n [\text{CA}_{it} - \text{CA}_{i,t+1}]^+ = 0 \quad (4.7)$$

$$-x_{5,t}^\omega - 0,04 (w_{2,t}^\omega + w_{5,t}^\omega + \text{CA}_{2,t}) - \lim_{\text{troca}} (w_{3,t}^\omega + w_{4,t}^\omega + \text{CA}_{3,t} + \text{CA}_{4,t}) \leq 0 \quad (4.8)$$

$$x_{5,t}^\omega - \lim_{\text{troca}} (w_{2,t}^\omega + w_{5,t}^\omega + \text{CA}_{2,t}) - \lim_{\text{troca}} (w_{3,t}^\omega + w_{4,t}^\omega + \text{CA}_{3,t} + \text{CA}_{4,t}) \leq 0 \quad (4.9)$$

$$x_{2,t}^\omega - mr_t^\omega \leq 0,005 D_t^\omega \quad (4.10)$$

$$-x_{2,t-\text{prazo}_2}^\omega - zen_t^\omega + 0,96mr_{t-\text{prazo}_2}^\omega \leq 0 \quad (4.11)$$

$$x_{3,t-\text{prazo}_3}^\omega - za3_t^\omega \leq 0,02 D_{t-\text{prazo}_4}^\omega \quad (4.12)$$

$$x_{1,t}^\omega - 0,01 \left[ \sum_{i=1}^n (w_{1,t}^\omega + CA_{it}) \right] \quad (4.13)$$

$$int_t^\omega \leq 0,05 D_t^\omega \quad (4.14)$$

$$x_{it}^\omega - \sum_{k \in \mathcal{Q}_t^\omega} P_{it}^k x_{it}^k = 0 \quad (4.15)$$

Para  $t=1, \dots, h$ ;  $i=1, \dots, n$ ,  $\omega = 1, \dots, S$ .

Nota-se que a função objetivo agora é formada pela soma ponderada dos custos de cada cenário. Dessa forma, levam-se em conta as incertezas representadas nas diferentes realizações utilizadas. Contudo, aumenta-se a complexidade do problema, já que é necessário dispor de um novo conjunto de variáveis e de restrições referentes a cada um dos cenários.

Também se faz necessário adicionar ao problema as restrições de não-antecipatividade que são representadas pela Equação (4.15). Para cada variável de decisão de compra até o penúltimo estágio inclui-se uma restrição de não-antecipatividade.

#### 4.2 EXEMPLO ESTOCÁSTICO DO PROBLEMA DA CONTRATAÇÃO

Um exemplo de gestão da contratação por meio de um modelo estocástico é mostrado nesta seção. Nesse exemplo serão considerados variáveis aleatórias a demanda e o PLD. Assim, cada cenário utilizado é constituído por um valor demanda e PLD para cada ano do horizonte.

Os cenários foram obtidos por meio de um sorteio aleatório tendo como base uma distribuição normal com determinado desvio padrão. O sorteio é realizado utilizando-se uma demanda média inicial de 100 MWh com crescimento de 2% ao ano e um desvio padrão de 2 MWh. No caso do PLD foi utilizado uma média de 100 R\$/MWh com desvio

padrão de 50,00 R\$/MWh. Considerando-se um horizonte de planejamento de seis anos e uma árvore de cenários com duas aberturas (realizações) por estágio, obtém-se um total de 32 cenários.

O problema de PL associado com o Equivalente Determinístico deste exemplo possui 16 variáveis para cada estágio de cada cenário, resultando em um total de 3072 variáveis. Já o número total de restrições é de 3391, sendo que 800 são restrições de não-antecipatividade.

Observa-se um grande aumento na dimensão do problema em comparação com o caso determinístico. Isso ocorre porque para cada um dos cenários é necessário à utilização de um grupo de variáveis de mesmo número do caso determinístico. Outro fator que afeta bruscamente a dimensão é a necessidade de serem adicionadas restrições de não-antecipatividade ao conjunto de restrições.

A decisão de compra no primeiro ano obtida pela solução estocástica do problema é mostrada na Tabela 4.1. O custo da aquisição de energia por meio do modelo estocástico para a árvore de 32 cenários é de R\$ 2016,18.

**Tabela 4.1 - Decisão de aquisição do primeiro ano obtida com a solução estocástica.**

Ano	A0	A1	A3	A5	Trocas
1	0	0,49	4,20	2,60	0,09

Outra forma de se tomar uma decisão seria por meio de um cenário médio, ou seja, obtendo-se uma média de demanda e PLD de todos os cenários para cada estágio. Na literatura esse é conhecido como Problema do Valor Esperado (PVE) (BIRGE; LOUVEAUX, 2011) e é uma alternativa utilizada na prática para evitar a complexidade associada à solução de problemas estocásticos. O cenário médio dos cenários sorteados nessa seção é mostrado na Tabela 4.2.

**Tabela 4.2 - Média de demanda e PLD dos cenários sorteados.**

Ano	1	2	3	4	5	6
Demanda (MWh)	100	105,63	102,15	106,01	108,02	110,01
PLD (R\$/MWh)	264,26	190,94	60,58	102,44	97,79	93,36

A decisão de compra no primeiro ano obtida pelo PVE é mostrada na Tabela 4.3.

**Tabela 4.3 - Decisão de aquisição do primeiro ano obtida com o cenário médio.**

Ano	A0	A1	A3	A5	Trocas
1	0	0,49	2,50	2,42	0,09

O custo resultante dessa estratégia é de R\$ 1143,2. Portanto, a solução determinística pelo cenário médio resulta em um valor menor do que a solução pelo modelo estocástico. Isso é esperado, pois no caso determinístico, considera-se a informação perfeita, ou seja, uma única realização de PLD e demanda. Já no caso estocástico é encontrada a melhor solução frente a todos os cenários.

Em relação às decisões no primeiro ano, observa-se que com o modelo estocástico o montante adquirido nos leilões A-3 e A-5 é maior do que com o modelo determinístico, indicando assim que o modelo estocástico tende a contratar um montante maior de energia a fim de evitar penalidades com os cenários mais severos.

### 4.3 MÉTODOS DE DECOMPOSIÇÃO

Em problemas de programação estocástica, o número de cenários cresce exponencialmente com o aumento de realizações das variáveis aleatórias e com o número de estágios da árvore de cenários utilizada. Isso representa um obstáculo significativo na solução de problemas de grande porte. Na literatura esse comportamento é conhecido como maldição da dimensionalidade (*curse of dimensionality*) (BELLMAN, 1957).

Essa característica dificulta a solução computacional do problema estocástico formulado em sua forma extensiva, como no caso do modelo do ED. Para contornar essa dificuldade existem métodos que decompõem o problema original em problemas mais simples.

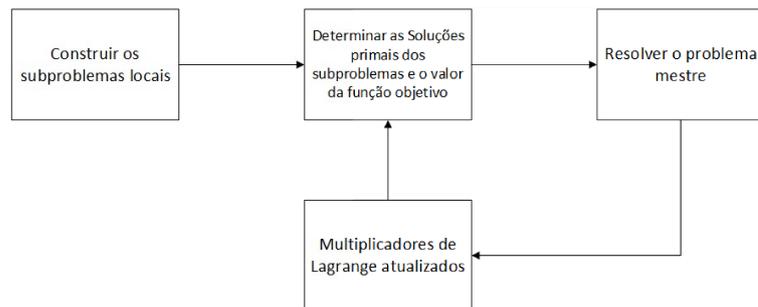
Esta seção tem como objetivo apresentar dois diferentes métodos que podem ser utilizados na solução do problema estocástico da contratação de energia. Tais métodos são conhecidos como Relaxação Lagrangiana (RL) e Progressive Hedging (PH) e serão detalhados nas seções seguintes.

### 4.3.1 Relaxação Lagrangiana

A RL é um método de decomposição de problemas de otimização baseado na relaxação de determinadas restrições. A principal vantagem do método é a possibilidade de resolver o problema original por meio da solução de problemas de menor dimensão.

A solução de um problema via RL pode ser dividida em duas etapas. A primeira delas consiste em construir um conjunto de subproblemas por meio da relaxação de algumas restrições e encontrar a solução dos mesmos.

Já na segunda etapa, se faz a construção de um problema conhecido como mestre, o qual é responsável pela atualização dos multiplicadores de Lagrange utilizados no método. A Figura 4.3 ilustra o processo iterativo da RL.



**Figura 4.3 - Processo iterativo da Relaxação Lagrangiana.**

Fonte: Desenvolvido pelo autor com base em BRITO (2014).

A abordagem utilizada neste trabalho decompõe o problema estocástico original em subproblemas referentes a cada cenário. Essa estrutura de solução é conveniente de ser usada no caso da gestão da contratação, pois os subproblemas resultantes de cada cenário mantêm a mesma estrutura de acoplamento temporal, tornando mais simples esse tipo de decomposição.

A decomposição é realizada relaxando-se as restrições de não-antecipatividade, as quais são transferidas do conjunto de restrições para a função objetivo. Por consequência, é eliminado o acoplamento de variáveis entre os cenários. Para mostrar o processo de construção dos subproblemas, considera-se o problema estocástico mostrado a seguir.

$$\text{Min} \sum_{\omega=1}^S p^{\omega} [f(x_{it}^{\omega})] \quad (4.16)$$

Sujeito a:

$$h^{\omega} = 0 \quad (4.17)$$

$$g^{\omega} = 0 \quad (4.18)$$

$$x_{it}^{\omega} - \sum_{k \in \phi_t^{\omega}} p_{it}^k x_{it}^k = 0 \text{ para todo } k \in \phi_t^{\omega} \quad (4.19)$$

Para  $t=1, \dots, h$ ;  $i=1, \dots, n$ ,  $\omega = 1, \dots, S$ .

Em que:

$f(x_{it}^{\omega})$  é a parcela da função objetivo referente ao cenário  $\omega$ ;

$p^{\omega}$  é a probabilidade de ocorrência do cenário  $\omega$ ;

$h^{\omega}$  é o conjunto de restrições de igualdade do cenário  $\omega$ ;

$g^{\omega}$  é o conjunto de restrições de desigualdade do cenário  $\omega$ .

As restrições de não-antecipatividade, representadas pela Equação 4.19, são relaxadas por meio de um vetor de multiplicadores de Lagrange ( $\pi$ ). Deste modo, a função dual associada é apresentada na Equação (4.20).

$$L_{RL} = \min \sum_{\omega=1}^S \left\{ p^{\omega} [f(x_{it}^{\omega})] + \sum_{t=1}^h \sum_{i=1}^n \pi_{it}^{\omega} \left( x_{it}^{\omega} - \sum_{k \in \phi_t^{\omega}} p_{it}^k x_{it}^k \right) \right\} \quad (4.20)$$

$$\text{s.a: } h^{\omega} = 0, g^{\omega} \leq 0.$$

Em que:

$\pi_{it}^\omega$  é o multiplicador de Lagrange associado às restrições de nãoantecipatividade.

O problema dual (LEMARÉCHAL, 1975; LEMARÉCHAL et al., 1996) é mostrado na Equação (4.21).

$$D_{RL} = \max_{\text{s.a: } \pi \text{ irrestrito}} L_{RL}(\pi) \quad (4.21)$$

Quando os multiplicadores são fixos, a função dual é separável em subproblemas referentes aos cenários, uma vez que esses estão desacoplados. A seguir é mostrada a formulação do subproblema resultante de cada cenário:

$$\psi(x, \pi)^\omega = \text{Min} \left\{ p^\omega [f(x_{it})^\omega] + \sum_{t=h}^n \sum_{i=1}^n \left[ \left( \pi_{it}^\omega - \sum_{k \in \mathcal{C}_i^\omega} p_{it}^k \pi_{it}^k \right) x_{it}^\omega \right] \right\} \quad (4.22)$$

$$\text{s.a: } h^\omega = 0, g^\omega \leq 0.$$

Nota-se que a equação acima não possui variáveis de acoplamento entre cenários, dado que são agrupadas somente as variáveis que pertencem a um único cenário no mesmo subproblema. Isso permite que a solução de cada subproblema seja obtida por meio de um problema de PL, visto que o aumento de cenários não aumenta a dimensão dos subproblemas. A decomposição do problema estocástico do exemplo mostrado neste capítulo resulta em subproblemas com 96 variáveis e 80 restrições, ou seja, a mesma dimensão do problema determinístico.

Com a solução dos subproblemas é obtida a solução primal das variáveis relaxadas, que serve como dado de entrada para o problema mestre. O problema mestre é responsável por atualizar os multiplicadores de Lagrange a cada iteração e para isso resolve o problema dual mostrado na Equação (4.22).

A solução do problema dual exige técnicas de otimização não-diferenciável, dado que em geral a função dual é não-diferenciável quando se considera todo o seu domínio. Entre os métodos mais conhecidos para a otimização do problema dual estão o método do

subgradiente (SHOR, 1985), o método dos planos cortantes (KELLEY, 1960) e o método dos Feixes (LEMARÉCHAL, 1975).

O método dos feixes é considerado o estado da arte na solução de problemas de otimização não-diferenciável e será utilizado neste trabalho na solução do problema dual. Em Cordova (2013) é feita uma comparação entre três variantes do método dos feixes, que são o método dos feixes proximal, o método de nível e o método dos feixes duplamente estabilizado (OLIVEIRA; SOLODOV, 2013). O método dos feixes duplamente estabilizado (MFDE) é a variante utilizada nas simulações realizadas neste trabalho e pode ser encontrado detalhadamente em Oliveira e Solodov (2013).

Tanto os subproblemas do método da RL, quanto o problema mestre foram solucionados em ambiente C++ e por meio do software *Gurobi Optimization*. Com isso, foi possível resolver o problema estocástico por meio da RL. A título de exemplo, sem apresentar as particularidades da simulação, a solução pela RL do exemplo mostrado neste capítulo resulta na solução de primeiro estágio mostrada na Tabela 4.4.

**Tabela 4.4 - Decisão de compra do primeiro ano obtida com a RL .**

Ano	A0	A1	A3	A5	Trocas
1	0	0,49	3,80	2,77	0,09

Observa-se que a decisão de primeiro estágio obtida com a solução do problema pela RL resulta em valores próximos aos obtidos com a solução do ED, tendo somente uma pequena diferença na compra em leilões A-3 e A-5. Apesar disso, o custo da solução obtido com a RL foi de R\$ 2016,18, ou seja, o mesmo custo que foi obtido com o ED.

#### 4.3.2 Progressive Hedging

O PH pertence à classe dos métodos de decomposição baseados no Lagrangiano Aumentado (NOCEDAL; WRIGHT, 1999) o qual, além de relaxar as restrições conforme realizado pela RL, considera ainda um termo quadrático adicional na função objetivo. Esse termo quadrático assegura a viabilidade primal ao final do processo de solução e possibilita que o problema dual seja resolvido por métodos simples, como o método do gradiente.

Considerando o problema estocástico mostrado no capítulo anterior, e realizando-se a relaxação das restrições de não-

antecipatividade, é possível escrever a função dual que é utilizada no PH como na Equação (3.23).

$$L_{PH} = \min \sum_{\omega=1}^S \left\{ p^\omega [f(x_{it}^\omega)] + \sum_{t=h}^h \sum_{i=1}^n \left[ \pi_{it}^\omega \left( x_{it}^\omega - \sum_{k \in \phi_t^\omega} p_{it}^k x_{it}^k \right) + \frac{\mu}{2} \left\| x_{it}^\omega - \sum_{k \in \phi_t^\omega} p_{it}^k x_{it}^k \right\|^2 \right] \right\} \quad (4.23)$$

s.a:  $h^\omega = 0, g^\omega \leq 0$ .

Na equação (4.26),  $\mu$  é o parâmetro de penalidade do método do PH. O problema dual associado ao PH é dado por:

$$D_{PH} = \max_{\text{s.a: } \pi \text{ irrestrito}} L_{PH}(\pi) \quad (4.24)$$

Considerando os multiplicadores de Lagrange  $\pi$  e o parâmetro de penalidade  $\mu$  fixos, a função dual acima não contém restrições de acoplamento entre os cenários. Porém o termo quadrático presente na função objetivo impede que ocorra a separação em subproblemas, tendo em vista que o desenvolvimento do termo quadrático resulta na multiplicação entre variáveis de diferentes cenários.

Para contornar essa dificuldade, nos termos referentes às restrições de não-antecipatividade, são utilizados valores constantes conhecidos como valores meta. Os valores meta são as médias ponderadas das variáveis pertencentes a cada conjunto  $\phi_t^\omega$  e são contabilizados, utilizando a solução primal, ao final de cada iteração por meio da Equação (4.25).

$$\bar{x}_{it}^\omega = \sum_{k \in \phi_t^\omega} p_{it}^k x_{it}^k \quad (4.25)$$

Com a introdução dos valores meta, a função dual do PH torna-se desacoplada em cenários e pode ser reescrita como:

$$\Omega = \sum_{\omega=1}^S \left\{ p^\omega [f(x_{it}^\omega)] + \sum_{t=h}^h \sum_{i=1}^n \left[ \pi_{it}^\omega (x_{it}^\omega - \bar{x}_{it}^\omega) + \frac{\mu}{2} \|(x_{it}^\omega - \bar{x}_{it}^\omega)\|^2 \right] \right\} \quad (4.26)$$

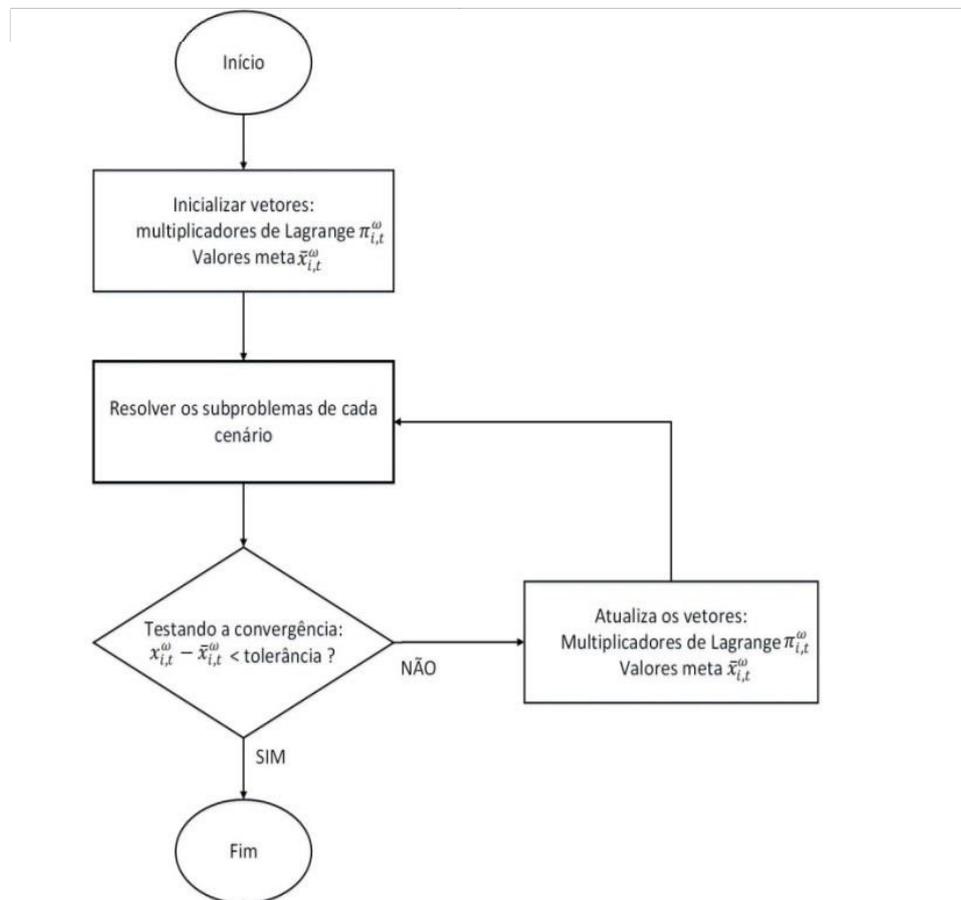
Na Equação, os valores meta são constantes atualizadas a cada iteração. Assim, os termos referentes a cada cenário podem ser agrupados em subproblemas, como mostrado na Equação (4.27).

*Minimizar*

$$\theta^\omega = \mathbf{p}^\omega [f(x_{it})^\omega] + \sum_{t=h}^n \sum_{i=1}^n \pi_{it}^\omega (x_{it}^\omega - \bar{x}_{it}^\omega) + \sum_{t=h}^n \sum_{i=1}^n \frac{\mu}{2} (x_{it}^\omega - \bar{x}_{it}^\omega)^2 \quad (4.27)$$

s.a:  $\mathbf{h}^\omega = 0, \mathbf{g}^\omega \leq 0$ .

É importante notar que somente as restrições de não-antecipatividade da variável  $x$  foram utilizadas no problema. O algoritmo do PH é mostrado na Figura 4.4.



**Figura 4.4 - Algoritmo do PH.**

O primeiro passo do algoritmo do PH é inicializar os multiplicadores de Lagrange e os valores meta, uma vez que esses são valores necessários para resolver a primeira iteração. Depois de escolhido os valores de inicialização, são obtidas as soluções de cada subproblema.

O passo seguinte consiste em testar a convergência do algoritmo. Para isso, o primeiro critério avaliado é o atendimento às não-anticipatividades de todos os cenários em cada estágio. Logo, caso a norma infinita do vetor das variáveis relaxadas, chamado de gradiente, seja menor que uma determinada tolerância, chega-se à convergência do algoritmo. Esse mesmo critério foi utilizado nos trabalhos de Coral (2013) e Veronese (2013).

A norma infinita do gradiente é mostrada Equação (4.28).

$$\delta_{iter} = \left\| x_{iter} - \bar{x}_{iter} \right\|_{\infty} \quad (4.28)$$

O outro critério de parada utilizado é o limite máximo de iterações. Dessa forma evitam-se os casos em que após inúmeras iterações não ocorrem variações perceptíveis a cada iteração. Os critérios de parada estão representados nas equações (4.29) e (4.30).

$$\delta_{iter} < \textit{tolerância} \quad (4.29)$$

$$\textit{iter} > \textit{iter}_{max} \quad (4.30)$$

Caso a convergência não seja atingida, devem ser atualizados os multiplicadores de Lagrange de acordo com a Equação(4.31). É importante notar que nessa equação está presente o parâmetro de penalidade  $\lambda$ .

$$\pi_{iter+1} = \pi_{iter} + \lambda \left( x_{it}^{\omega} - \bar{x}_{it}^{\omega} \right) \quad (4.31)$$

Por fim, com os valores primais da solução, são contabilizados de acordo com a Equação (4.32) o novo valor meta  $\bar{x}_{i,t}^{\omega}$ .

$$\bar{x}_{it}^{\omega} = \sum_{k \in \phi_i^{\omega}} p_{it}^k x_{it}^k \quad (4.32)$$

Assim como na RL, cada subproblema do método PH resulta em um problema de PL com 96 variáveis e 80 restrições, ou seja, a mesma dimensão do problema determinístico. A solução pelo PH, assim como no ED e na RL, resultou em um custo de 2016,18. A decisão de compra no primeiro ano dada pelo PH é mostrada na Tabela 4.5.

**Tabela 4.5 - Decisão de compra no primeiro ano com o PH.**

Ano	A0	A1	A3	A5	Trocas
1	0	0,49	4,20	2,60	0,09

Nota-se que a solução primal obtida com o PH é a mesma solução obtida com o ED. Portanto, o método se mostrou eficiente na busca da solução ótima do problema estocástico.

No capítulo seguinte serão realizadas simulações com o objetivo de avaliar as soluções obtidas com diferentes cenários de contratação e o desempenho computacional de cada algoritmo nas simulações.

## 5 SIMULAÇÕES E RESULTADOS

Este capítulo apresenta os resultados obtidos com as metodologias descritas anteriormente. O objetivo principal consiste em determinar as soluções ótimas do problema da contratação de energia e avaliar o desempenho computacional de cada método aplicado. Para isso, são observados alguns fatores, tais como o tempo de solução, o número de iterações para se atingir a convergência dos algoritmos e a qualidade da solução.

### 5.1 SIMULAÇÃO 1

Primeiramente é realizada a simulação de um problema com um horizonte de tempo de seis anos com três possíveis realizações por estágio; assim, a árvore desse caso possui 243 cenários.

Os cenários de demanda foram obtidos por sorteio obedecendo a uma distribuição normal de probabilidade com média igual a 100 MWh no primeiro ano e um crescimento anual de 2%. O desvio padrão utilizado em todos os anos foi de 2 MWh. No caso do PLD, considera-se que o sorteio de cenários também obedece a uma distribuição normal de probabilidade com média 100 R\$/MWh e desvio padrão de 50 R\$/MWh. Na Figura 5.1 é mostrada a representação da árvore de cenários utilizada.

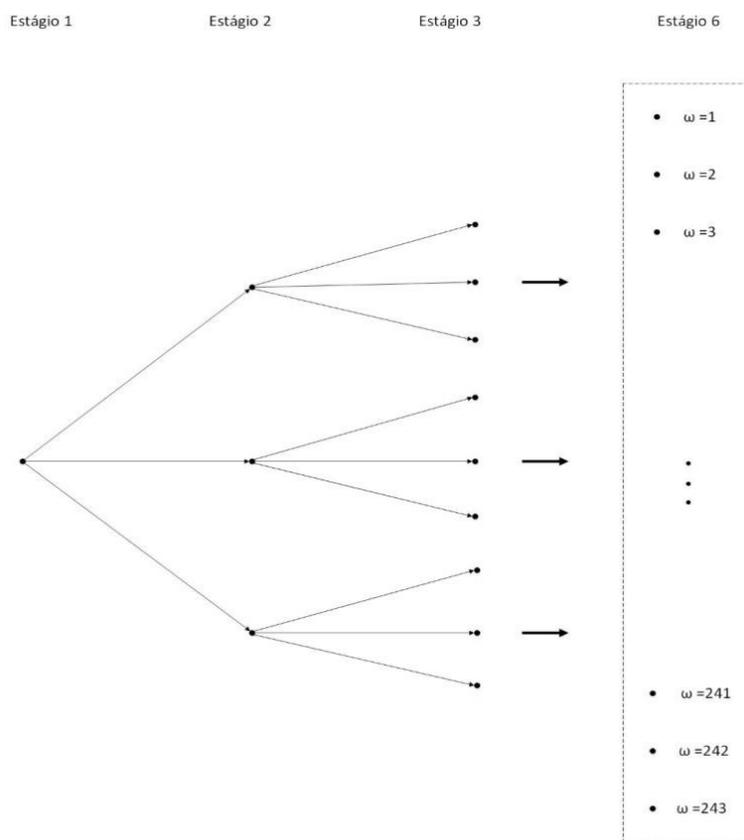


Figura 5.1 - Árvore de cenários utilizada na simulação.

Para melhor compreender a árvore de cenários é mostrado o cenário médio na Tabela 5.1.

Tabela 5.1 - Cenário médio.

Ano	1	2	3	4	5	6
Demanda (MWh)	100	104,99	103,63	109,39	111,89	118,03
PLD (R\$/MWh)	76,12	132,63	62,41	111,89	89,16	134,92

Quanto aos dados de entrada do problema, é utilizada a mesma configuração apresentada no Capítulo 4, tendo os termos relativos à

compra de energia ponderados por um fator 0,001 e o um limite de trocas de energia de 0,5% do total de contratos da distribuidora.

### 5.1.1 Solução pelo Equivalente Determinístico

O problema será inicialmente solucionado por meio do ED, uma vez que esse método resulta na solução exata do problema sempre que a dimensão do problema não exceder os limites computacionais disponíveis. Dessa forma é possível comparar o valor da solução do ED com os outros métodos utilizados.

O problema de PL resultante contém 23328 variáveis e 25757 restrições. Isso mostra a grande dimensão do problema resolvido pelo ED, ainda que a árvore de cenários considerada nesse caso não seja muito grande. Com base nos cenários utilizados nesta seção, a solução obtida com o ED é mostrada na Tabela 5.2.

**Tabela 5.2 - Decisão de compra no primeiro ano com o ED.**

Decisões de compra no primeiro ano (MWh)	
Leilão A-0	0
Leilão A-1	0,49
Leilão A-3	4,15
Leilão A-5	4,00
Trocas	0,09
Custo da solução = R\$ 1723,71	
Tempo de solução = 1,91 minutos	

Os principais resultados obtidos são o custo da solução e as decisões de compra em cada modalidade no primeiro ano, pois essas são as declarações de compra em leilão mais próximas a serem realizadas.

A solução pelo ED apresentou um custo de R\$ 1723,71. Esse é o valor resultante da estratégia de compra adotada e é formado pela média dos custos de todos os cenários com a solução obtida. O desempenho computacional do método pode ser avaliado por meio do tempo de solução que neste caso foi de 1,91 minutos.

### 5.1.2 Relaxação Lagrangiana

Nesta seção o exemplo é resolvido por meio da RL, utilizando a variante do método dos feixes duplamente estabilizado. A decomposição pela RL resulta em 243 subproblemas referentes a cada cenário, sendo

que cada um deles possui 96 variáveis e 80 restrições. Já a dimensão do problema dual é definida de acordo com o número de restrições dualizadas, que neste exemplo é de 25 por subproblema, resultando em um problema dual com 6075 multiplicadores de Lagrange.

A convergência da RL com o método dos feixes duplamente estabilizado é obtida com o atendimento de dois critérios de convergência:

$$\hat{e}_k < 10 \cdot tol \quad , \quad |g_k| < tol \quad (5.1)$$

Em que:

$\hat{e}_k$  é o erro de linearização agregado;

$|g_k|$  é o subgradiente agregado;

$tol$  é a tolerância utilizada.

A tolerância e alguns parâmetros de entrada do método dos feixes duplamente estabilizado (OLIVEIRA, SOLODOV, 2013), que foram utilizados nesta simulação são mostrados na Tabela 5.3. Os valores escolhidos para esses parâmetros foram obtidos empiricamente observando-se o comportamento das simulações. Além disso, destaca-se que todos os multiplicadores de Lagrange foram inicializados com valor nulo.

**Tabela 5.3 - Parâmetros de entrada da RL.**

MI	Mf	Me	$\mu$ máximo	$\tau$ inicial	Tolerância
0,25	0,1	0,4	1	0,1	0,001

Outro parâmetro importante do método utilizado é o parâmetro proximal da RL ( $\tau$ ), o qual é atualizado a cada iteração e está relacionado com a determinação dos valores do próximo iterado. São realizadas simulações variando-se o valor mínimo que o parâmetro proximal pode assumir. Para isso, utilizam-se três diferentes valores para o  $\tau$  mínimo a fim de se observar o comportamento do algoritmo. Os resultados obtidos são apresentados na Figura 5.2 e na Figura 5.3.

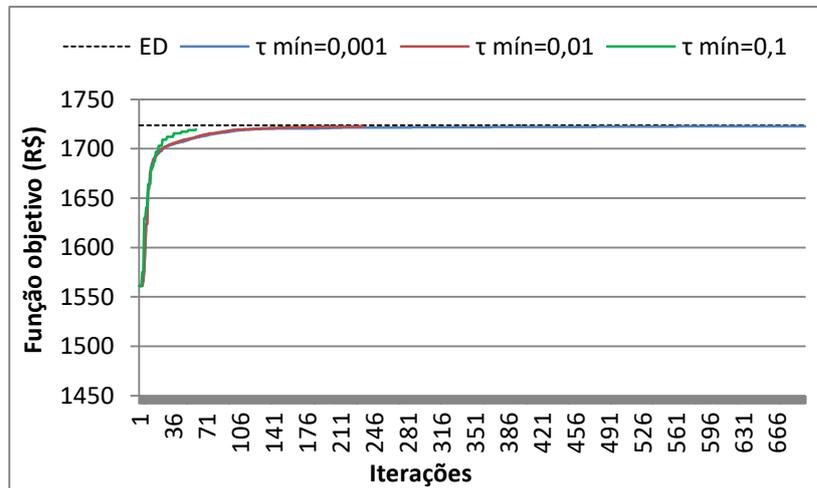


Figura 5.2 - Função objetivo para diferentes valores de  $\tau$  mínimo.

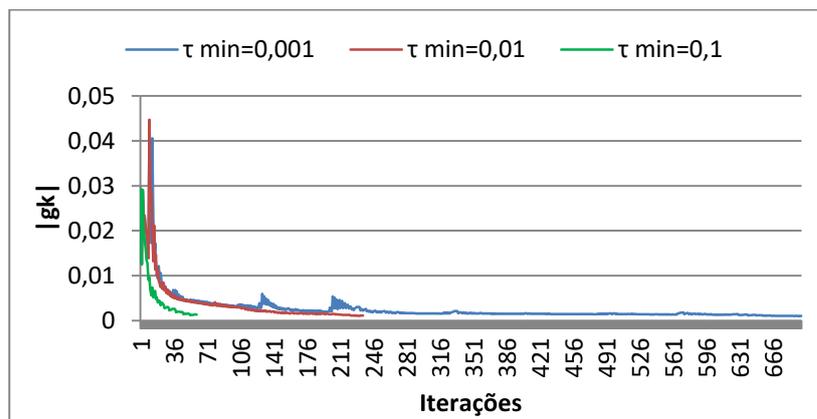


Figura 5.3 - Subgradiente agregado  $|g_k|$  para diferentes valores de  $\tau$  mínimo.

Com a variação do valor de  $\tau$  mínimo são observadas diferenças significativas quanto à convergência do algoritmo. Na Tabela 5.4 são mostrados os resultados obtidos em cada caso.

**Tabela 5.4 - Resultados da RL para os diferentes valores de  $\tau$  mínimo.**

	$\tau_{\min}=0,001$	$\tau_{\min}=0,01$	$\tau_{\min}=0,1$
Valor da solução (R\$)	1722,71	1722,6	1719,55
Desvio em relação ao ED (%)	-0,05	-0,06	-0,24
Número de iterações	696	235	60
Tempo de Processamento (minutos)	51,76	14,48	3,73

Na Tabela 5.4 percebe-se que as simulações utilizando a RL resultam em custos próximos ao valor obtido com o ED, sendo que o maior desvio é de 0,24 % e ocorre para o  $\tau_{\min}=0,1$ . Já o menor desvio é de 0,05% e ocorre com o  $\tau_{\min}=0,001$ .

Em relação à convergência, o  $\tau_{\min}=0,1$  é o que converge mais rapidamente, necessitando apenas 60 iterações, que são resolvidas em 3,73 minutos. Já para o  $\tau_{\min}=0,001$  foram realizadas 696 iterações em 51,76 minutos. Portanto, a escolha do parâmetro  $\tau$  mínimo teve uma grande influência no número de iterações e consequentemente no tempo de solução.

Na Tabela 5.5 são apresentadas as decisões de compra no primeiro ano. As maiores diferenças nessas decisões ocorrem na compra em leilões do tipo A-5, pois essa variável tem uma menor influência no valor da solução, resultando assim em custos muito próximos para diferentes decisões de compra em A-5. Contudo, as variáveis relacionadas a outros leilões, as quais têm uma maior influência no custo da solução, resultam em valores próximos aos obtidos com o ED.

**Tabela 5.5 - Decisão de compra no primeiro ano os diferentes valores de  $\tau$  mínimo.**

Modalidade de leilão	ED	$\tau_{\min}=0,001$	$\tau_{\min}=0,01$	$\tau_{\min}=0,1$
A-0	0	0,00	0,00	0,00
A-1	0,49	0,49	0,49	0,49
A-3	4,15	4,22	4,20	4,07
A-5	4,00	3,62	3,22	2,85
Trocas	0,09	0,09	0,09	0,09

Com os resultados mostrados nesta seção é possível ver que a solução via RL obteve resultados satisfatórios, pois resultou em valores de solução muito próximos aos obtidos com a solução exata. Já o tempo

de solução com a RL foi maior que o do ED em todas as simulações realizadas.

### 5.1.3 Progressive Hedging

Assim como na RL, o PH também decompõe o problema original em subproblemas referentes aos cenários, sendo que cada subproblema possui 96 variáveis e 80 restrições.

No caso do PH, para que a convergência do algoritmo seja atingida, o valor da norma infinita do gradiente das variáveis relaxadas deve ficar dentro de uma determinada tolerância. A tolerância utilizada neste exemplo é de 0,01, isto é, caso o valor da norma utilizada fique abaixo da tolerância, chega-se a convergência do algoritmo.

Em relação às simulações realizadas, são avaliados casos com a utilização de diferentes valores do parâmetro de penalidade. Primeiramente foram testados casos com valores de  $\mu$  constante, variando entre 0,01 e 100. Quanto à inicialização, todos os multiplicadores de Lagrange e valores meta foram inicializados com valor nulo. Os parâmetros de inicialização do PH são mostrados na Tabela 5.6.

**Tabela 5.6 - Parâmetros de inicialização do PH.**

Multiplicadores de Lagrange ( $\pi$ )	Valores meta ( $\bar{X}$ )	Tolerância
0	0	0,01

A solução por meio do PH é mostrada na Figura 5.4, na qual são apresentadas as curvas referentes à evolução da função objetivo, para os diferentes valores de  $\mu$  testados.

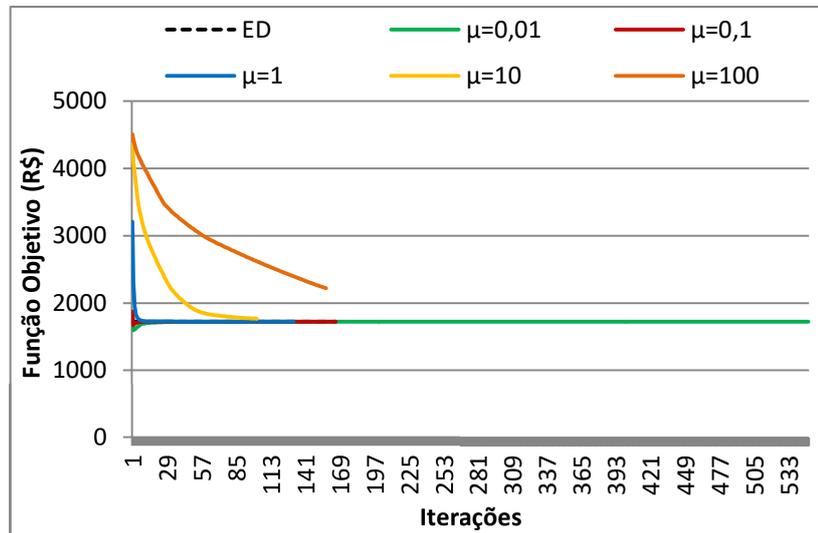
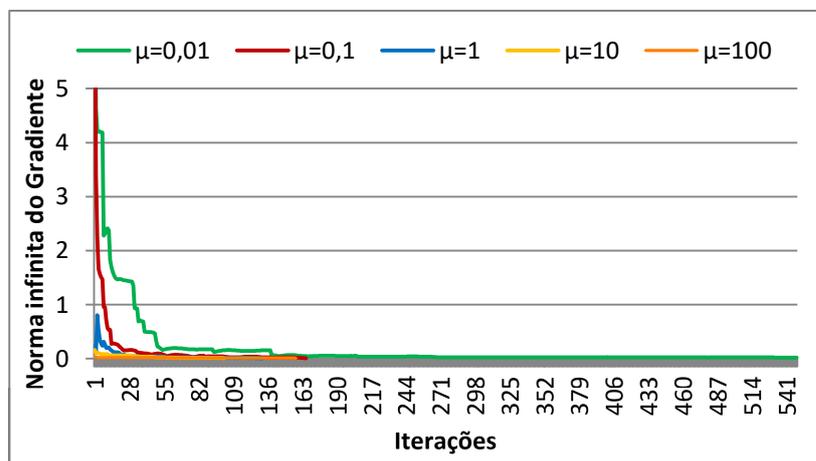


Figura 5.4 - Função objetivo para diferentes valores de  $\mu$ .

Na Figura 5.4 a linha tracejada diz respeito ao valor da função objetivo obtida com a solução do ED. A partir dessa linha tracejada é possível mensurar a qualidade da solução obtida com os diferentes valores do parâmetro  $\mu$ , uma vez que a solução com o ED é exata e não depende de processo iterativo. Nota-se no gráfico acima que, com exceção do caso em  $\mu=100$ , todas as curvas tendem a valores muito próximos aos da linha tracejada, indicando assim que o PH resultou em custos muito próximos do ótimo nesses casos.

A convergência é dada pela norma infinita do vetor gradiente das variáveis relaxadas. A evolução do valor dessa norma com relação às iterações para diferentes valores do parâmetro de penalidade  $\mu$  é mostrada na Figura 5.5.



**Figura 5.5 - Norma infinita do gradiente para diferentes valores de  $\mu$ .**

Na Figura 5.5 nota-se que em todos os casos é possível se atingir a convergência, pois o valor da norma infinita do gradiente atinge valores abaixo da tolerância. Um resumo do desempenho do algoritmo para cada caso é apresentado na Tabela 5.7.

**Tabela 5.7 - Resultados do PH para os diferentes valores de  $\mu$**

	$\mu=0,01$	$\mu=0,1$	$\mu=1$	$\mu=10$	$\mu=100$
Valor da solução (R\$)	1723,70	1723,77	1723,86	1767,25	2219,96
Desvio em relação ao ED (%)	-0,0006	0,0035	0,0087	2,52	28,78
Número de iterações	549	166	132	102	158
Tempo de solução (minutos)	17,65	5,5	4,41	3,15	5,11

Observa-se que a convergência é atingida mais rapidamente com a utilização de  $\mu=10$ , convergindo em 102 iterações. Nos casos em que são utilizados valores do parâmetro muito abaixo ou acima de  $\mu=10$ , é necessário um maior número de iterações para a convergência. Isto pode ser visto para  $\mu=0,01$  e  $\mu=100$ , os quais convergem em 549 e 158 iterações respectivamente. Com isso, conclui-se que a escolha do parâmetro de penalidade tem grande influencia na convergência do algoritmo.

O tempo de solução do algoritmo em cada caso é proporcional ao número de iterações, sendo que o menor tempo observado é de 3,15 minutos com  $\mu=10$ , e o maior de 17,65 minutos com  $\mu=0,01$ .

Quanto à qualidade da solução, nota-se que para os menores valores do parâmetro de penalidade são obtidos os menores desvios da solução em relação ao ED. Isso pode ser visto na Tabela 5.7, observando que para  $\mu=0,01$ , o desvio é de 0,0006% somente, enquanto que com  $\mu=100$  é de 28,78%. Portanto, a escolha do parâmetro de penalidade teve grande influência na qualidade da solução obtida.

Na Tabela 5.8 são mostradas as decisões de compra no primeiro ano. Observa-se que para os menores valores do parâmetro de penalidade são obtidos resultados mais próximos ao ED para as decisões de primeiro estágio. Já para valores maiores do parâmetro, tais decisões de ficam mais distantes da obtida com o ED.

**Tabela 5.8 - Decisão de compra no primeiro ano para os diferentes valores de  $\mu$ .**

Modalidade de leilão	ED	$\mu=0,01$	$\mu=0,1$	$\mu=1$	$\mu=10$	$\mu=100$
A-0	0	0	0	0	0	0
A-1	0,49	0,49	0,49	0,49	0,49	0,49
A-3	4,15	4,16	4,15	4,15	3,32	1,92
A-5	4,00	4,00	2,60	2,46	1,41	0,63
Trocac	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09

Conclui-se dessas simulações que para valores relativamente pequenos do parâmetro de penalidade o algoritmo convergiu para a solução em um maior número de iterações; contudo, obteve soluções com os menores desvios em relação à solução ótima. Isso pode ser visto tanto em relação ao custo, quanto em relação às decisões de primeiro estágio.

Também foram avaliadas outras estratégias para determinar o valor do parâmetro de penalidade. Essas estratégias utilizam o parâmetro  $\mu$  dinâmico, ou seja, seu valor é atualizado a cada iteração de acordo com uma heurística escolhida. Neste trabalho são comparados os resultados utilizando-se duas diferentes heurísticas. A primeira delas é utilizada em Coral (2013) e baseia-se na atualização do parâmetro de penalidade por meio de incremento em seu valor a cada iteração realizada. No caso em questão utilizou-se um  $\mu$  inicial igual a 0,1 e um

incremento de 2% em seu valor a cada iteração. A Equação (5.2) representa o cálculo de atualização do  $\mu$  para a heurística 1.

$$\mu^{it+1} = 1,02 * \mu^{it} \quad (5.2)$$

A segunda heurística testada é baseada em uma estratégia utilizada em Veronese (2011) e realiza a atualização do parâmetro de penalidade com base na norma infinita do vetor gradiente. Dessa forma, o valor de  $\mu$  irá depender do grau de distanciamento da solução ótima em determinada iteração e será maior quanto maior for à norma infinita do gradiente. A Equação (5.3) mostra o cálculo de atualização do parâmetro utilizado neste caso.

$$\mu^{it+1} = \mu^{it} \left(1 + \frac{\delta^{it}}{10}\right) \quad (5.3)$$

Utilizando-se um parâmetro de penalidade inicial de 0,1, são obtidos os resultados com a utilização das duas heurísticas. Verifica-se na Figura 5.6 que as heurísticas utilizadas resultam em valores do parâmetro de penalidade próximos entre si, apresentando a heurística 2 um crescimento maior nas primeiras iterações devido ao maior valor da norma do gradiente nessas iterações. Já a heurística 1 demonstra um crescimento constante ao longo das iterações. A convergência pode ser avaliada na Figura 5.7, que mostra a evolução da norma infinita do vetor gradiente em cada caso simulado.

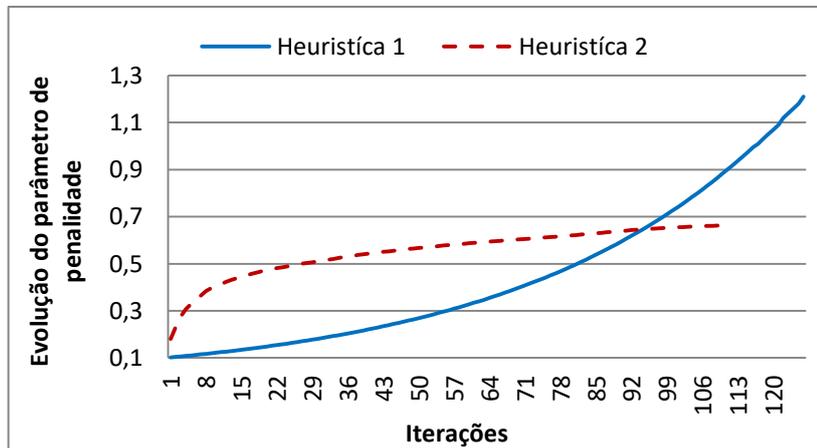


Figura 5.6 - Evolução do parâmetro de penalidade para as duas heurísticas.

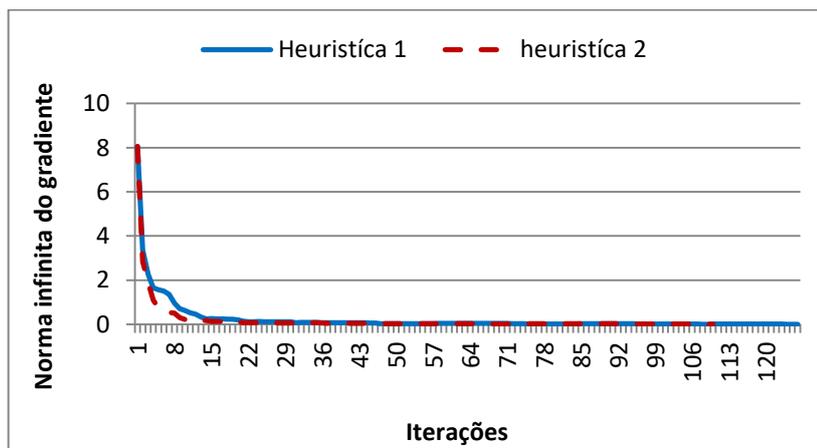


Figura 5.7 - Norma infinita das não-antecipatividades para diferentes valores de  $\mu$ .

É possível ver que a norma infinita do gradiente decai rapidamente nas primeiras iterações, atingindo a convergência em 126 iterações com a heurística 1 e em 110 iterações com a heurística 2. Portanto, com a utilização das heurísticas foi possível diminuir o número de iterações para a convergência, tendo em vista que com a utilização do parâmetro fixo  $\mu=0,1$  foram necessárias 166 iterações.

A evolução do valor da função objetivo deste caso é mostrada na Figura 5.8. Nota-se que com as duas heurísticas o valor da função objetivo atinge valores muito próximos do valor ótimo obtido com o ED.

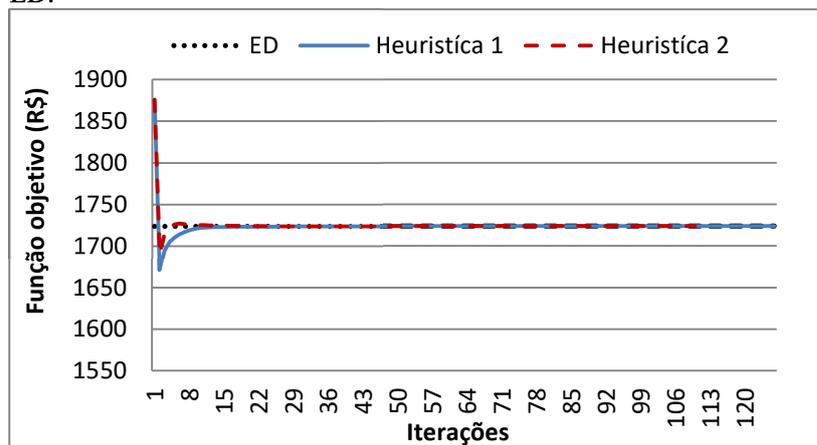


Figura 5.8 - Função objetivo para as duas heurísticas utilizadas.

As tabelas 4.7 e 4.8 apresentam um resumo dos resultados obtidos com as duas heurísticas testadas.

Tabela 5.9 - Resultados do PH com as heurísticas utilizadas.

	Heurística 1	Heurística 2
Valor da solução (R\$)	1723,81	1723,83
Desvio em relação ao ED (%)	0,006	0,007
Número de iterações	126	110
Tempo de Processamento (minutos)	7,9	6,83

Tabela 5.10 - Decisões de compra no primeiro ano com as heurísticas.

Modalidade de leilão	ED	Heurística 1	Heurística 2
A-0	0	0	0
A-1	0,49	0,49	0,49
A-3	4,15	4,14	4,14
A-5	4,00	2,45	2,51
Trocas	0,09	0,09	0,09

Nas simulações realizadas nesta seção constata-se que o PH tem seu desempenho fortemente baseado na escolha do parâmetro de penalidade  $\mu$ , resultando em soluções muito próximas das soluções obtidas com o ED quando se utiliza pequenos valores para o parâmetro de penalidade. Já para valores elevados do parâmetro de penalidade observam-se maiores desvios quanto ao custo ótimo e quanto às decisões de primeiro estágio.

Observa-se que os tempos de convergência obtidos com o PH são, em geral, menores do que na RL, porém, dependendo dos parâmetros utilizados o PH pode ter um tempo maior de solução. Também se verifica que o uso de heurísticas pode melhorar a convergência do método.

#### 5.1.4 Associação da RL com o PH

Depois de concluídas as simulações com os métodos da RL e PH, é avaliado o desempenho dos métodos associados. Para isso são realizadas algumas iterações da RL e do PH na mesma simulação para obter a solução do problema.

A utilização dos métodos combinados se justifica devido a uma possível melhora no que diz respeito à qualidade da solução obtida e à convergência em alguns casos. Isso porque o PH apresenta a desvantagem de não garantir que a solução obtida seja ótima.

A qualidade da solução no PH está diretamente ligada ao valor do parâmetro de penalidade utilizado. Assim, é possível que seja utilizado um valor de  $\mu$  que resulte em uma solução diferente da ótima. Para evitar esse comportamento é possível utilizar de um ponto de partida para o PH. Propõem-se nesta seção que esse ponto de partida seja obtido com a solução de um determinado número de iterações com a RL.

A RL é conveniente de ser utilizada como um método inicial, pois o método dos feixes garante a subida do algoritmo, dando assim um limite inferior para a função dual. Portanto, inicializar o PH após certo número de iterações da RL, irá fazer com que a partida ocorra mais próxima do valor ótimo da solução.

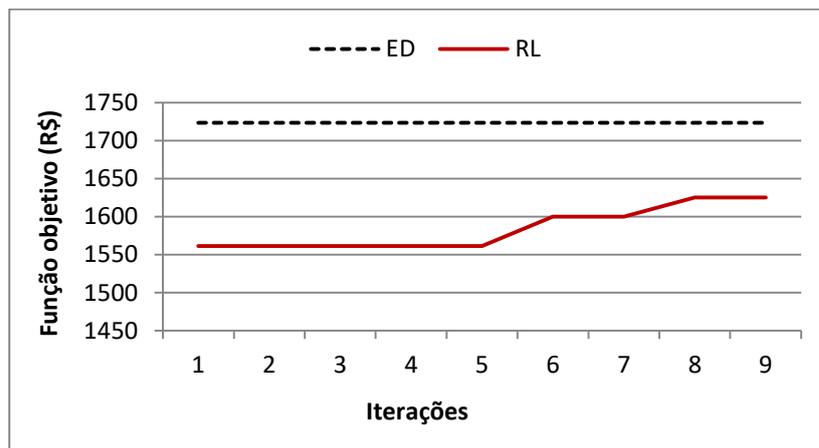
Nesta seção o exemplo é resolvido com os métodos associados, encontrando um ponto de partida para o PH após a realização de um determinado número de iterações da RL. Dessa forma, pretende-se comparar o desempenho dos métodos conjuntos frente ao PH, simulando casos com diferentes parâmetros de penalidade constante.

Os parâmetros de entrada da RL com o método dos feixes duplamente estabilizado são mostrados na Tabela 5.11. Já para o PH, os multiplicadores de Lagrange e valores meta são inicializados com valores nulos.

**Tabela 5.11 - Parâmetros de entrada da RL.**

MI	Mf	Me	$\mu$ máximo	$\tau$ mínimo	Máximo de iterações
0,25	0,1	0,4	1	0,1	10

Os resultados obtidos com a simulação de 10 iterações da RL para o exemplo são mostrados nas Figuras a seguir.



**Figura 5.9 - Função objetivo em 10 iterações da RL.**

Verifica-se na Figura 5.9 que a função objetivo da RL tende a se aproximar do resultado obtido com o ED, tendo um valor de R\$ 1625,39 na última iteração. Na Figura 5.10 é mostrado o subgradiente agregado, o qual apresenta uma queda de cerca de 50% de seu valor inicial até a décima iteração.

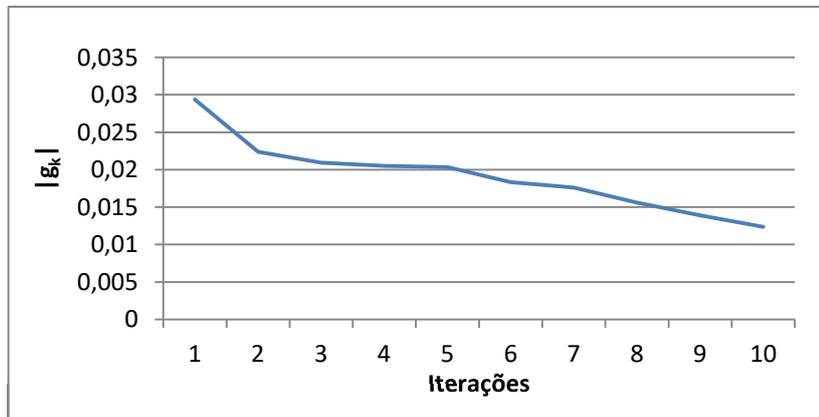


Figura 5.10 - Subgradiente agregado  $|g_k|$  em 10 iterações da RL.

A partir da simulação realizada acima, são obtidos os parâmetros de entrada para o PH, que são os multiplicadores de Lagrange e os valores meta fornecidos pela última iteração da RL. Na Figura 5.11 e Figura 5.12 são mostrados os resultados obtidos com os métodos da RL e do PH combinados, utilizando-se um  $\mu=0,01$ .

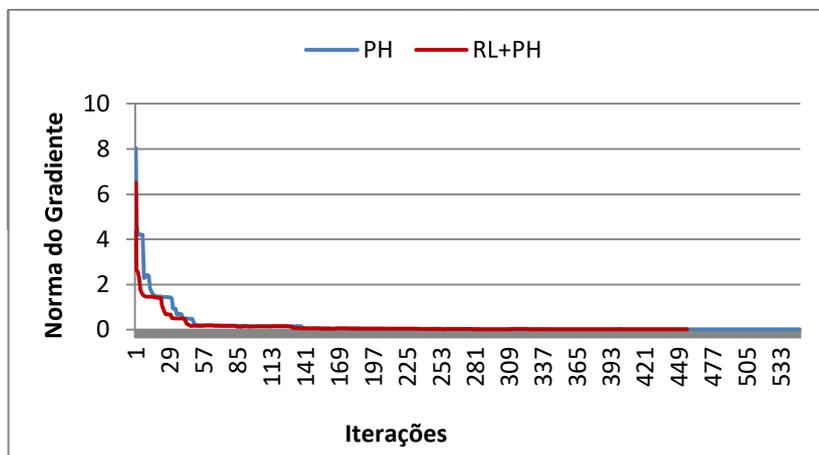


Figura 5.11 - Norma infinita do gradiente para  $\mu=0,01$ .

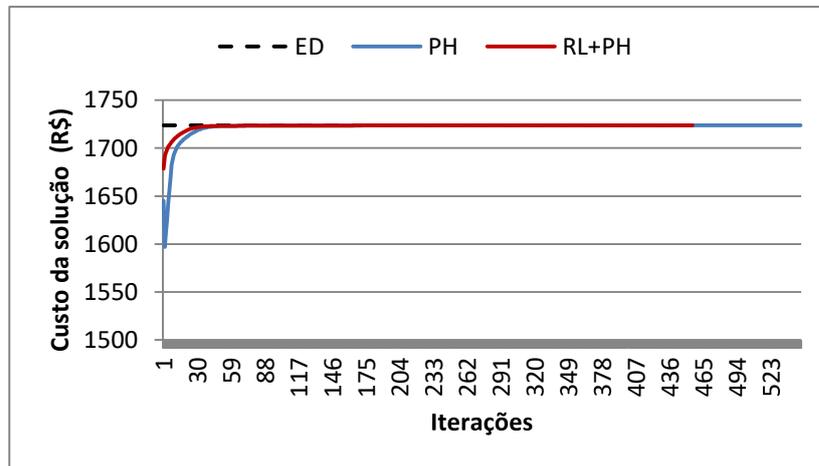


Figura 5.12 - Função objetivo para  $\mu=0,01$ .

Observa-se que a convergência com os métodos agregados é atingida em 456 iterações, enquanto que com o uso exclusivo do PH são necessárias 523 iterações. Portanto, a utilização da RL juntamente com o PH, reduziu significativamente o número de iterações para a convergência neste caso.

Com relação à função objetivo, nota-se na Figura 5.12, que a curva referente aos métodos associados se aproxima do valor do ED em um número menor de iterações, comparando-se com a curva do PH. Essa mesma análise é realizada com diferentes valores do parâmetro de penalidade. Os resultados obtidos com os métodos associados para diferentes valores de  $\mu$  são mostrados Figura 5.13 e Figura 5.14.

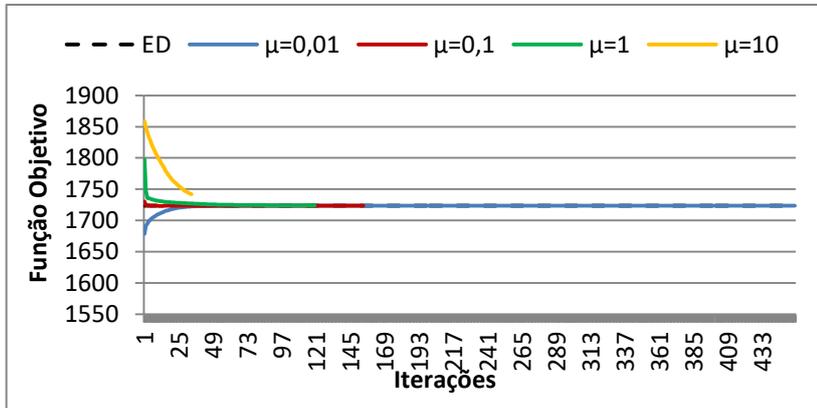


Figura 5.13 - Função objetivo dos métodos RL+PH para diferentes valores de  $\mu$ .

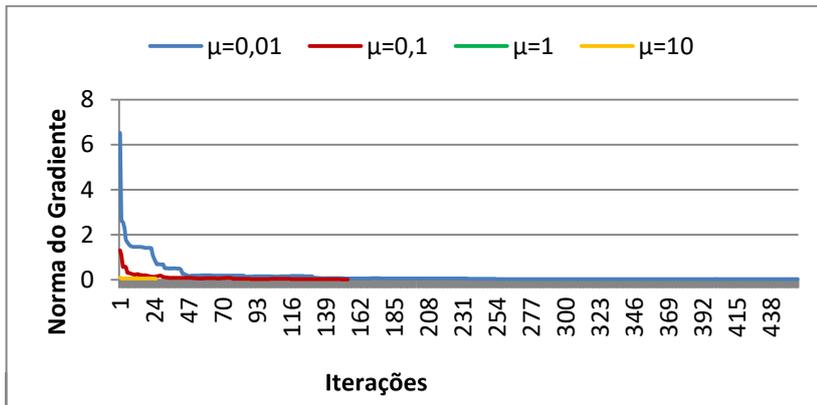


Figura 5.14 - Norma Infinita do gradiente para o RL+PH.

Um resumo dos resultados obtidos com diferentes casos simulados é mostrado na Tabela 5.12.

**Tabela 5.12 - Comparação dos resultados obtidos.**

Parâmetro de penalidade	$\mu=0,01$		$\mu=0,1$		$\mu=1$		$\mu=10$	
	PH	RL+PH	PH	RL+PH	PH	RL+PH	PH	RL+PH
Função Objetivo (R\$)	1723,7	1723,69	1723,77	1723,71	1723,86	1724,01	1767,25	1735,74
Desvio em relação ao ED (%)	0,0006	0,0012	0,0035	0,0000	0,0087	0,0174	2,5259	0,6979
Número de iterações	549	456	166	154	132	120	102	45
Tempo de solução (minutos)	17,65	12,03	5,5	6,31	4,41	4,96	3,15	2,63

Quanto à qualidade da solução, observa-se que tanto o uso exclusivo do PH quanto o uso associado dos métodos em geral resultam em pequenos desvios em relação à solução ótima. Apenas no caso em que  $\mu=10$  verifica-se um desvio mais acentuado com o PH, que é de 2,52% em relação ao custo ótimo. Nesse caso, nota-se que a utilização dos métodos conjuntos reduziu esse desvio para 0,69%. Portanto, quando se utilizam valores elevados do parâmetro de penalidade, a aplicação dos métodos associados resulta em um custo mais próximo do valor ótimo, quando comparado com o uso exclusivo do PH.

Observa-se também que a aplicação dos métodos associados resulta em um menor número de iterações para se chegar à convergência. Por exemplo, no caso em que  $\mu=10$ , o número de iterações passou de 102 para 45 com a aplicação dos métodos associados.

Em relação ao tempo de solução, nota-se que para os valores intermediários do parâmetro, como  $\mu=0,1$  e  $\mu=1$ , o tempo de solução aumentou com a aplicação dos métodos associados, mesmo com a diminuição do número de iterações. Isso se deve ao tempo gasto com a realização das iterações iniciais da RL. Nos outros casos ocorreu uma melhora no tempo de solução, como por exemplo, para  $\mu=0,01$ , o tempo de solução passou de 17,65 minutos para 12,03 minutos.

Na Tabela 5.13 são mostradas as soluções para o primeiro ano do horizonte de planejamento. Constatase que conforme é aumentado o parâmetro de penalidade as decisões de compra no primeiro estágio com o PH, se distanciam dos valores obtidos com o ED. Esse comportamento foi atenuado com o emprego dos métodos associados. Por exemplo, na solução com  $\mu=0,1$  a decisão de compra em leilão A-5 dada pelo PH é de 2,57 MWh, enquanto que com os métodos associados é de 3,86 MWh, ou seja, decisão mais próxima da obtida com o ED.

**Tabela 5.13 - Comparação das decisões de compra no primeiro ano.**

Modalidade de leilão	$\mu=0.01$			$\mu=0.1$		$\mu=1$		$\mu=10$	
	ED	PH	RL+PH	PH	RL+PH	PH	RL+PH	PH	RL+PH
A-0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A-1	0,49	0,49	0,49	0,49	0,49	0,49	0,49	0,49	0,49
A-3	4,15	4,16	4,16	4,14	4,14	4,15	4,15	3,23	4,03
A-5	4,00	4,00	4,02	2,57	3,86	2,64	4,47	1,41	5,45
Trocas	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09

Com os resultados apresentado nesta seção, observa-se no caso do PH, existe *trade off* entre o número de iterações necessárias para a convergência e a qualidade da solução. Quando se utiliza valores relativamente pequenos do parâmetro de penalidade, têm-se soluções muito próximas do valor ótimo, porém, o número de iterações para a convergência é elevado. Com a utilização dos métodos associados foi possível diminuir o número de iterações e o tempo de solução nesses casos. Já nos casos em que se utiliza valores elevados do parâmetro de penalidade, se observa uma considerável melhora na qualidade da solução com a utilização dos métodos combinados.

### 5.1.5 Comparação com diferentes árvores de cenários

Utilizando-se a mesma estrutura da árvore de cenários mostrada na Figura 5.1, são realizados diferentes sorteios para os valores de demanda e PLD. O objetivo é avaliar o custo e o tempo de simulação, utilizando-se diferentes árvores de cenários.

No caso da RL os parâmetros de inicialização utilizados podem ser vistos na Tabela 3.3. Já o PH inicializa com os multiplicadores de Lagrange e valores meta nulos e utiliza o parâmetro de penalidade  $\mu=1$ . No caso das simulações com os métodos conjuntos são utilizadas 10 simulações da RL como ponto de partida para o PH.

Na Tabela 5.14 e Tabela 5.15, são mostrados os resultados obtidos com o ED, a RL, o PH e com os métodos associados, utilizando-se oito diferentes árvores de cenários.

**Tabela 5.14 - Comparação entre o custo obtido em cada metodologia utilizada.**

Árvore	ED	RL	Diferença ao ED (%)	PH	Diferença ao ED (%)	RL+PH	Diferença ao ED (%)
1	916	914,35	-0,18	917,28	0,14	916,35	0,04
2	905,7	904,92	-0,09	907,15	0,16	906,15	0,05
3	1395,16	1391,84	-0,24	1396,13	0,07	1395,55	0,03
4	1013,98	1012,31	-0,16	1014,52	0,05	1014,5	0,05
5	1294,6	1291,74	-0,22	1295,27	0,05	1294,78	0,01
6	987,6	985,31	-0,23	988,1	0,05	987,91	0,03
7	1170,8	1168,7	-0,18	1171,46	0,06	1170,96	0,01
8	1287,1	1284,0	-0,24	1287,73	0,05	1287,55	0,03

Os custos de solução para cada uma das árvores de cenário são mostrados na Tabela 5.14. Observa-se que a solução pelo ED varia de R\$ 905,7 a R\$ 1395,16. Em todas as simulações realizadas o desvio em relação ao ED ficou com valores pequenos, sendo que a utilização dos métodos conjuntos resultou nos menores desvios. Isso pode ser visto nos resultados obtidos com a árvore de cenários 5, com a qual a RL tem um desvio de 0,22%, o PH de 0,05 % e os métodos associado de 0,01%.

Na Tabela 5.15 são mostrados os tempos de solução obtidos nas simulações. Percebe-se que o ED é método tem o menor tempo de solução para uma árvore desta dimensão. Nota-se ainda que os maiores tempos são obtidos com a RL, indicando assim um maior custo computacional deste método quando comparado ao PH. Já com os métodos associados foram obtidos tempos próximos aos do PH.

**Tabela 5.15 - Comparação entre os tempos de solução.**

Árvore	ED	RL	PH	PH+RL
1	1,6	15,85	9,63	6,4
2	1,48	18,8	5,9	8,51
3	1,86	10,53	5,76	8,3
4	1,76	16,16	6,05	7,66
5	1,75	11,56	11,16	8,98
28	1,93	12,48	6,75	8,41
31	1,98	16,75	7,1	8
39	1,83	14,08	8,71	7,95

Nos resultados obtidos nesta seção, verifica-se que todos os métodos utilizados foram eficientes na busca do valor ótimo do problema para diferentes árvores de cenários sorteadas.

## 5.2 SIMULAÇÃO 2

Uma segunda simulação é realizada a fim de se avaliar o desempenho das metodologias de solução frente a um problema de maior porte. Assim, o exemplo utilizado nesta seção possui 1024 cenários, ou seja, uma árvore com seis estágios e quatro realizações de demanda e PLD por estágio. Os valores utilizados para realizar o sorteio da árvore de cenários são os mesmos da simulação 1.

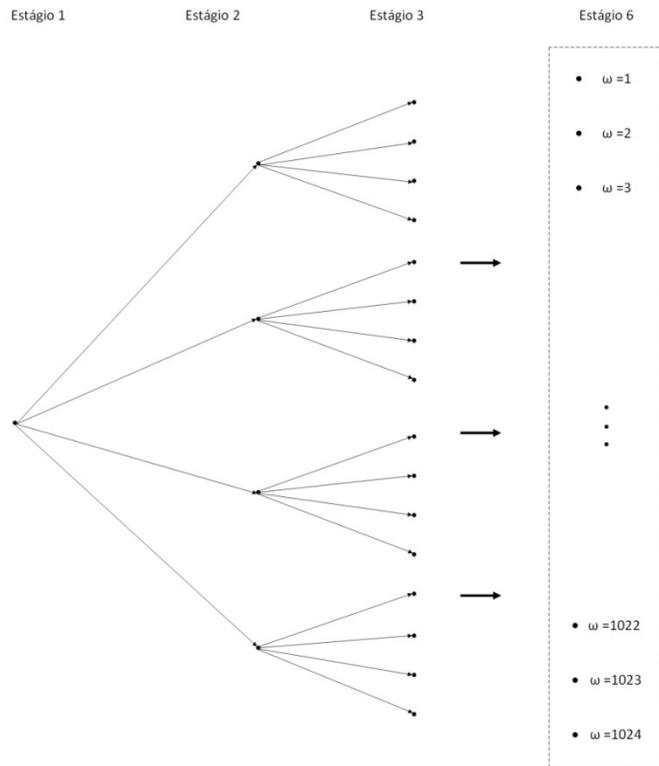


Figura 5.15 - Árvore de cenários da simulação 2.

### 5.2.1 Solução pelo Equivalente Determinístico

Assim como no exemplo anterior, soluciona-se o problema por meio do ED a fim de se ter uma base de comparação para os outros métodos. O problema de PL resultante contém 98304 variáveis e 108543 restrições. Nota-se que com o aumento da árvore de cenários, o ED resulta em um problema de dimensão muito maior em relação ao caso anterior. Os resultados obtidos com a solução do ED são mostrados na Tabela 5.16.

**Tabela 5.16 - Decisão de compra no primeiro ano com o ED.**

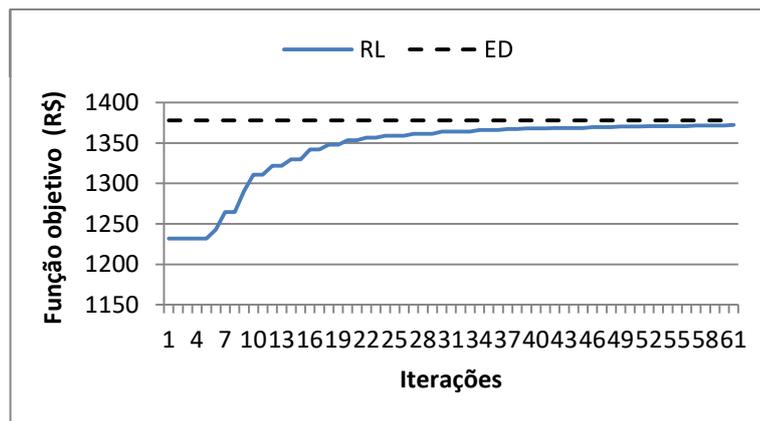
Decisões de compra no primeiro ano (MWh)	
Leilão A0	0
Leilão A1	0,49
Leilão A-3	4,16
Leilão A-5	3,92
Trocas	0,09
Valor da solução = R\$ 1378,15	
Tempo de processamento = 45,9 minutos	

O tempo exigido na solução deste caso é de 45,9 minutos, o qual é consideravelmente maior do que no caso anterior. Isso mostra que um aumento na árvore de cenários tem grande impacto na dimensão do problema ED.

**5.2.2 Relaxação Lagrangiana**

A decomposição pela RL resulta em 1024 subproblemas, sendo que cada um deles possui 96 variáveis e 80 restrições. Do total de variáveis em cada subproblema, 25 são dualizadas, resultando em um problema dual com 25600 multiplicadores de Lagrange.

Os parâmetros de inicialização são os mesmos do exemplo anterior, com exceção da tolerância que nesta simulação é de 0,005. Os resultados obtidos com a aplicação da RL são mostrados na Figura 5.16 e Figura 5.17.



**Figura 5.16 - Função objetivo com a solução pela RL.**

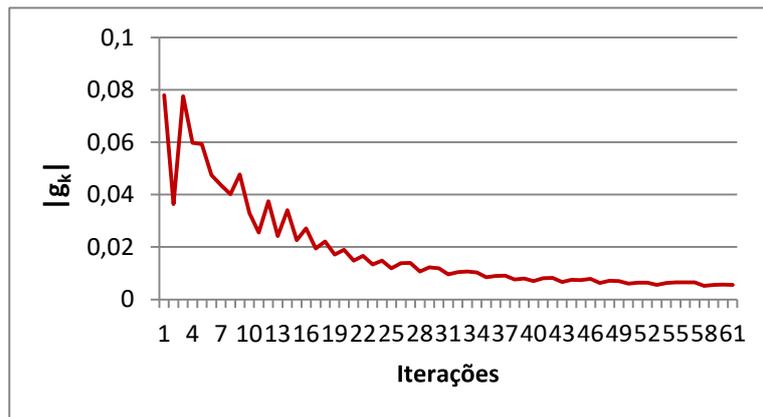


Figura 5.17 - Subgradiente agregado  $|g_k|$ .

Um resumo dos resultados da RL pode ser visto na Tabela 5.17. Verifica-se que a RL converge em 61 iterações, resultando em um desvio da solução de apenas 0,42 % em relação a custo obtido com o ED. Constata-se ainda que o aumento na dimensão do problema afetou muito o tempo de solução pela RL, sendo que neste caso o algoritmo levou 344,01 minutos para realizar as 61 iterações.

Tabela 5.17 - Resultados da RL.

Valor da solução (R\$)	1372,26
Desvio em relação ao ED (%)	-0,42
Iterações	61
Tempo (minutos)	344,01

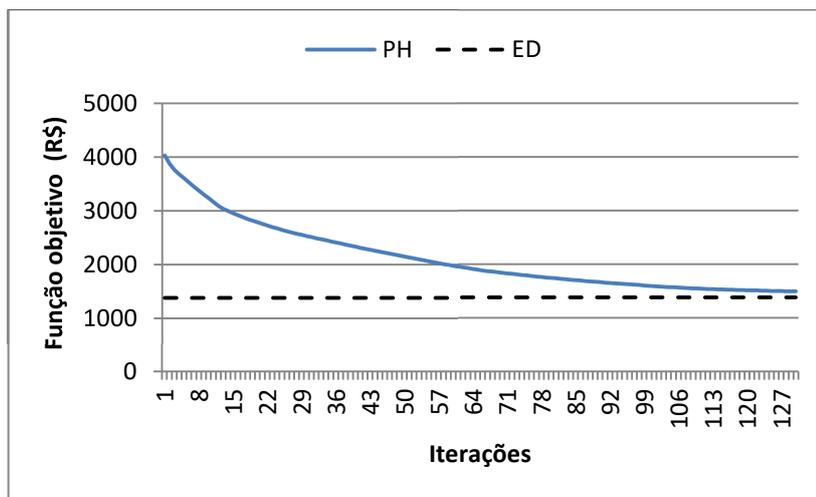
Na Tabela 5.18, são mostradas as decisões de compra no primeiro ano obtidas com a RL. Nota-se que a decisão pela RL resultou em valores próximos ao do ED.

**Tabela 5.18 - Decisão de compra no primeiro ano com a RL.**

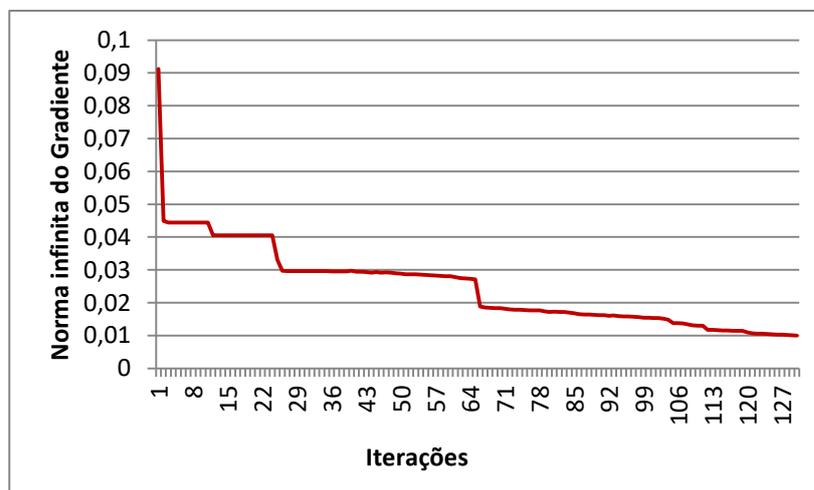
Modalidade de leilão	ED	RL
A0	0	0
A1	0,49	0,49
A-3	4,16	4,16
A-5	3,92	4,09
Trocas	0,09	0,09

### 5.2.3 Progressive Hedging

No caso do PH, a decomposição do problema original também resulta em 1024 subproblemas com 96 variáveis e 80 restrições cada, sendo que 25 dessas variáveis são dualizadas. O exemplo é resolvido com um parâmetro de penalidade  $\mu=10$  e com as mesmas condições iniciais utilizadas na simulação 1. A solução pelo PH é mostrada na Figura 5.18 e na Figura 5.19.



**Figura 5.18 - Função objetivo do PH.**



**Figura 5.19 - Norma infinita do vetor gradiente.**

A solução com o PH converge em 130 iterações e resulta em um custo de R\$ 1492,57, ou seja, uma diferença de 8,3 % em relação ao valor ótimo.

Quanto ao tempo de solução, um resultado que chama a atenção é o tempo computacional obtido com o PH, precisando de apenas 21,71 minutos para atingir a convergência.

**Tabela 5.19 - Resultados do PH.**

Valor da solução (R\$)	1492,57
Desvio em relação ao ED (%)	8,3
Iterações	130
Tempo de solução (minutos)	21,71

Na Tabela 5.20 são mostradas as decisões de compra no primeiro ano para o PH. Nota-se que a decisão tomada com o PH é diferente da obtida com o ED para os leilões A-3 e A-5. Isso é esperado, uma vez que com o  $\mu=10$ , o algoritmo converge para uma solução com considerável desvio em relação ao custo ótimo, conseqüentemente, as decisões de primeiro estágios também ficam distantes da solução ótima.

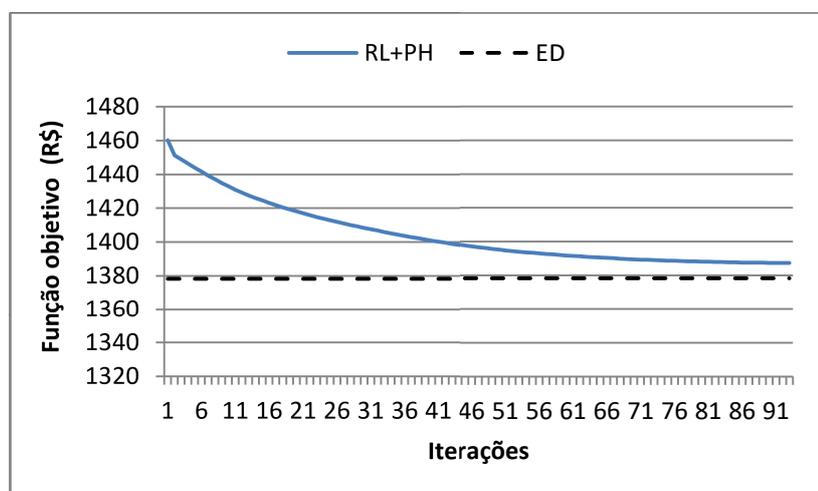
**Tabela 5.20 - Decisão de compra no primeiro ano com o PH.**

Modalidade de leilão	ED	RL
A0	0	0
A1	0,49	0,49
A-3	4,16	2,79
A-5	3,92	1,03
Trocas	0,09	0,09

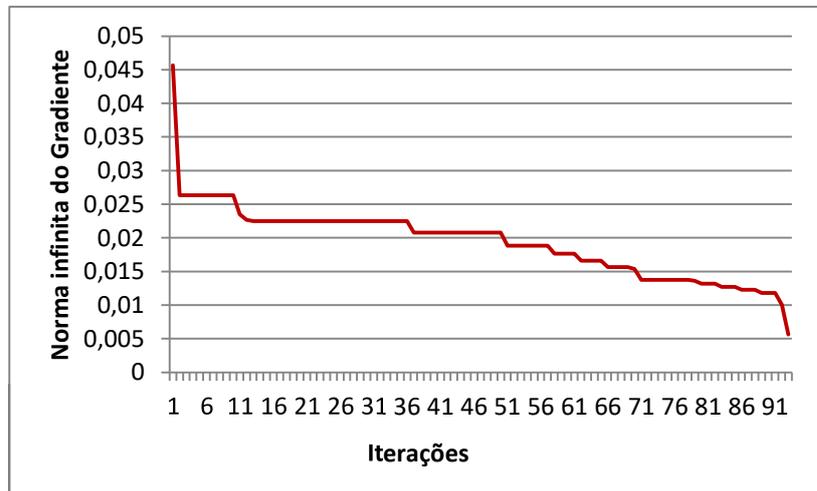
#### 5.2.4 Associação da RL com o PH

Por fim, são testados os métodos associados inicializando o PH com os multiplicadores de Lagrange e valores meta obtidos após 10 iterações da RL.

Na Figura 5.20, mostram-se as curvas da evolução da função objetivo com os métodos associados. Nota-se que neste caso a solução já inicia com um valor próximo da solução e tem um desvio menor em relação à linha tracejada comparando-se com o uso exclusivo do PH.

**Figura 5.20 - Função objetivo com os métodos associados.**

Na Figura 5.21 é mostrada a evolução da norma infinita do gradiente.



**Figura 5.21 - Norma infinita do vetor gradiente com os métodos associados.**

Um resumo dos resultados obtidos com os métodos associados é mostrado na Tabela 5.21.

**Tabela 5.21 - Resultados obtidos com os métodos associados.**

Valor da solução (R\$)	1387,34
Desvio em relação ao ED (%)	0,66
Número de Iterações	93
Tempo de Processamento (minutos)	123,25

Verifica-se que com a aplicação dos métodos conjuntos se obtém um pequeno desvio do custo em relação ao ED, que é de apenas 0,66%. O método converge em 93 iterações e em um tempo de 123,25 minutos. Nota-se que o tempo de solução teve um considerável aumento em relação à simulação 1.

Em relação às decisões de primeiro estágio observa-se na Tabela 5.22 que os métodos associados resultam em decisões próximas às obtidas com o ED.

**Tabela 5.22 - Decisão de compra no primeiro ano com os métodos associados.**

Modalidade de leilão	ED	RL+PH
A0	0	0
A1	0,49	0,49
A-3	4,16	4,04
A-5	3,92	4,17
Trocas	0,09	0,09

### 5.2.5 Comparação entre os métodos

Na Tabela 5.23 são mostrados os resultados obtidos na simulação 2. É possível ver que todos os métodos de solução se aproximam do custo ótimo, tendo o PH com  $\mu=10$  o maior desvio, com valor de 8,3%. Já a aplicação dos métodos associados obteve um custo de apenas 0,66%, ou seja, um desvio bem menor do que com o PH.

Um das principais constatações que podem ser feitas comparando-se os resultados da simulação 2 com a simulação 1, é relativa ao tempo de solução. Nota-se que com o aumento da dimensão do problema, a RL precisou de um tempo consideravelmente maior para chegar à convergência, que neste caso foi de 344,01 minutos. Portanto, o tamanho do problema tem uma influência maior no tempo de solução da RL comparando-se com o do PH, que é de 21,71 minutos. Nota-se ainda que o tempo de solução dos métodos associados têm um aumento considerável em relação a simulação 1, devido principalmente ao tempo gasto com a realização das iterações da RL.

**Tabela 5.23 - Comparação dos resultados obtidos na simulação 2.**

	ED	RL	PH	RL+PH
Valor da solução (R\$)	1378,15	1366,41	1492,57	1387,32
Desvio em relação ao ED (%)	0	-0,8	8,30	0,66
Número de iterações	0	34	130	93
Tempo de Processamento (minutos)	45,9	344,01	21,71	123,25

Na Tabela 5.23 são mostradas as soluções de primeiro estágio em cada caso. Observa-se que no caso do PH as decisões de primeiro ano tem uma diferença maior comparando-se com o ED, principalmente nos

leilões A-3 e A-5. Percebe-se que com aplicação dos métodos associados essas decisões ficam mais próximas as do ED, indicando assim uma melhor qualidade da solução.

**Tabela 5.24 - Comparação das decisões de primeiro ano com os métodos testados.**

Modalidade de leilão	ED	RL	PH	RL+PH
A-0	0	0	0	0
A-1	0,49	0,49	0,49	0,49
A-3	4,15	4,21	2,79	4,04
A-5	4,00	3,38	1,03	4,17
Trocas	0,09	0,09	0,09	0,09

Com as simulações realizadas neste capítulo foi possível avaliar as soluções obtidas e como comparar o desempenho dos métodos. A seguir apresentam-se as conclusões observadas com a aplicação dos métodos testados ao problema da contratação de energia.



## 6 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Neste trabalho foi estudado o processo de comercialização de energia por parte de uma empresa distribuidora atuando no ambiente de comercialização regulado (ACR). Esse tipo de ambiente possui uma forte regulamentação, sendo que a compra e venda de energia é realizada por meio de leilões públicos.

Foi visto que o modelo de comercialização vigente obriga as distribuidoras a contratar a totalidade de sua demanda de energia com antecedência no ACR, ficando sujeita a multas e penalidades em caso de descumprimento dessa norma. Com isso, o agente distribuidor fica exposto a perdas financeiras devido ao alto grau de incerteza quanto ao comportamento futuro de variáveis como a demanda e o preço da energia no mercado de curto prazo.

Os leilões de energia podem ofertar contratos de energia nova ou existente, os quais possuem diferentes prazos e limites de compra. Assim, a distribuidora deve tomar decisões de compra em leilões com diferentes prazos de entrega e limitações de compra, visando manter-se contratada entre 100 e 105% da sua demanda, limite no qual não incidem penalidades. Além dos leilões de energia também foi considerada a possibilidade de se adquirir ou devolver um determinado montante de energia por meio dos mecanismos de troca MCSD. Diante desse panorama, este trabalho estudou estratégias de solução para o problema da compra de energia em leilões públicos, de forma a minimizar os custos, de acordo com as regras do mercado.

No Capítulo 2 foram apresentadas as principais regras que balizam a aquisição de energia no ACR, como os limites de compra, prazos para entrada em vigência e a duração de cada tipo de leilão. As regras apresentadas serviram como base para a formulação do problema matemático.

No Capítulo 3 foi apresentada a modelagem matemática do problema, a qual resultou em um problema de otimização linear multiestágio. A princípio, como forma de demonstrar o comportamento do modelo, o problema é considerado determinístico e é resolvido utilizando-se três diferentes níveis de demanda para um horizonte de compra de seis anos. Assim, foram obtidos os custos e as decisões de compra ao longo do horizonte considerado.

No Capítulo 4, foram consideradas no modelo matemático as incertezas em relação à demanda e ao PLD, resultando assim em um problema de otimização estocástico considerando essas duas variáveis

aleatórias. Tais incertezas foram consideradas por meio de árvores de cenários, obtidas por sorteio aleatório utilizando-se a distribuição normal de probabilidade.

O problema estocástico da contratação foi primeiramente resolvido pelo método Equivalente Determinístico, o qual considera em sua formulação os cenários de demanda e PLD, encontrando a melhor decisão frente a todos os cenários. A grande desvantagem desse método é a elevada dimensão do problema de otimização resultante para casos com elevado número de cenários, tornando-o inviável computacionalmente em alguns casos.

Para contornar esse tipo de dificuldade, é possível se utilizar métodos de decomposição. Neste trabalho foram utilizados dois métodos de decomposição, o primeiro deles é a Relaxação Lagrangeana, a qual decompõe o problema original em subproblemas de menor porte referentes a cada um dos cenários. Na solução da RL utilizou-se o método de solução do problema dual conhecido como método dos feixes duplamente estabilizado. Destaca-se que esse é um método de subida, ou seja, conforme se realizam iterações do método, o algoritmo nunca se distancia da solução ótima.

Outro algoritmo de decomposição utilizado é o *Progressive Hedging*, o qual também decompõe o problema e subproblemas referentes aos cenários. Esse método atualiza os multiplicadores de Lagrange de acordo com a solução primal dos subproblemas. Tal método não garante a otimalidade da solução obtida, tendo seu desempenho baseado na escolha do seu parâmetro de penalidade.

Destaca-se que o problema da contratação, possui em sua formulação várias restrições de acoplamento temporal, inclusive entre diferentes estágios. Essa natureza do problema facilita a aplicação de métodos como a RL e o PH, uma vez que os subproblemas referentes aos cenários mantem as restrições de acoplamento temporal do problema original. Essa tarefa não seria tão simples caso fossem utilizados métodos baseados na decomposição por nós, como é o caso da Programação Dinâmica Dual Estocástica.

No Capítulo 5, foram utilizados dois casos com diferentes árvores de cenários. No primeiro caso foi simulado um exemplo no qual uma empresa distribuidora deve contratar energia para um horizonte de seis anos, considerando que em cada ano existem três possibilidades de realização para a demanda e PLD, resultando assim num panorama de 243 cenários possíveis. Já no segundo caso foi utilizada uma árvore com 1024 cenários, a fim de avaliar o efeito do aumento da dimensão do problema no desempenho das metodologias utilizadas.

Os casos foram resolvidos via Equivalente Determinístico, Relaxação Lagrangiana e *Progressive Hedging*. Os resultados obtidos com tais métodos tiveram seu desempenho comparado analisando-se a qualidade da solução, o número de iterações e os tempos de solução obtidos. Destaca-se que a solução pelo ED resulta sempre no valor ótimo da solução, e, portanto, serviu como base de comparação na análise da qualidade da solução dos outros métodos.

A solução via RL mostrou que o método dos feixes duplamente estabilizado, utilizado neste trabalho, evolui sempre em direção ao ponto ótimo conforme suas iterações são realizadas. O desempenho da RL foi testado com diferentes parâmetros do método, sendo que em todos os casos foi possível se chegar a soluções muito próximas as obtidas com o ED. Em relação ao tempo computacional viu-se que o valor mínimo do parâmetro proximal da RL teve grande influência no desempenho computacional. Destaca-se ainda que a RL resultou em um tempo de solução maior que os outros métodos nas simulações realizadas, mostrando-se assim que é um método mais custoso computacionalmente, apesar de resolver subproblemas de menor porte em relação ao problema original.

Na solução pelo PH, foram realizadas simulações com diferentes valores do parâmetro de penalidade. Os resultados obtidos indicaram que a convergência do método é fortemente influenciada pelo parâmetro de penalidade, sendo que valores pequenos deste parâmetro tendem a convergir para valores muito próximos da solução ótima, porém, demandam um elevado número de iterações para a convergência. Já nos casos em que o parâmetro de penalidade é elevado, a solução resulta em valores mais distantes da solução ótima. Assim, conclui-se que na aplicação do PH existe uma faixa ideal de valores para o parâmetro de penalidade, os quais resultam poucos desvios em relação ao ótimo e ainda convergem em um número razoável de iterações. Para o problema proposto nesse trabalho, essa faixa ficou entre 0,01 e 10. Na solução pelo PH também foram testadas duas heurísticas de atualização do parâmetro de penalidade, as quais resultaram em um melhor desempenho computacional do método em relação ao parâmetro fixo. Os resultados obtidos mostram que o desempenho do PH está diretamente relacionado com a escolha do parâmetro de penalidade  $\mu$ , uma vez que esse parâmetro tem influencia tanto na convergência, quanto na qualidade da solução obtida.

Também foram avaliados casos com a aplicação dos métodos associados, servindo a RL como ponto de partida para o PH. Nos casos

testados foram realizadas 10 iterações da RL para inicializar o PH, aplicando-se diferentes valores do parâmetro de penalidade.

Alguns Resultados interessantes foram obtidos, como a melhora no desempenho em relação ao número de iterações e à qualidade da solução obtida, quando esses resultados são comparados com o uso exclusivo da PH. Isso pode ser visto de forma mais acentuada quando se utilizam valores muito elevados para o parâmetro de penalidade do PH. Por exemplo, na simulação 1 do Capítulo 5, o PH resolvido com o parâmetro de penalidade  $\mu=10$  resulta em um desvio da solução em relação ao ED de 2,53% em 102 iterações. Já o mesmo caso aplicado com a inicialização após 10 iterações da RL resulta em um desvio da solução de apenas 0,69% em 45 iterações. Assim como o custo da solução, a aplicação dos métodos conjuntos resultou em decisões de primeiro estágio mais próximas da obtido com o ED. Nos casos em que o parâmetro de penalidade é muito pequeno, como  $\mu=0,01$ , com a utilização dos métodos combinados ocorre uma diminuição no número de iterações, porém, não ocorrem mudanças significativas quanto à qualidade da solução.

Ainda na primeira simulação, foram resolvidas árvores de cenários com diferentes sorteios para a demanda e o PLD, a fim de se avaliar os custos obtidos e o tempo computacional. As principais conclusões obtidas são que todas as metodologias resultaram em um custo próximo do ótimo, sendo que com os métodos conjuntos foram observados os menores desvios. Quanto ao tempo de solução, percebe-se que a RL demanda um tempo maior de solução, quando comparado ao PH.

No segundo caso estudado foi simulado um exemplo de maior porte, considerando uma árvore com 1024 cenários possíveis. Nesta segunda simulação foi possível observar o comportamento dos métodos quando se aumenta a dimensão do problema a ser resolvido. Observou-se que o ED tem um grande aumento na dimensão do problema de PL, assim, a solução resultou em um tempo consideravelmente maior que no caso anterior.

Para a RL e o PH, verifica-se que ocorre um aumento no número de subproblemas a serem resolvidos e no tamanho do problema dual, entretanto, a dimensão dos subproblemas é a mesma da simulação 1. No caso da RL, o aumento na dimensão da árvore de cenários em um grande aumento no tempo de solução, levando 348,33 minutos para atingir a convergência na simulação 2. Já para o PH, o tempo foi de apenas 21,71 minutos. Portanto, observa-se que o PH é menos custoso computacionalmente, não sendo tão afetado pela dimensão do problema

como no caso da RL. Já na aplicação dos métodos associados chegou-se a convergência do algoritmo em um tempo intermediário entre a RL e o PH, convergindo em 123,25 minutos.

Quanto a qualidade da solução observou-se novamente na simulação 2 uma melhora quando se utiliza os métodos associados. No caso do PH com  $\mu=10$ , ocorre um desvio de solução de 8,4% em relação ao custo ótimo. Já na solução com os métodos associados observa-se que esse desvio é de apenas 0,66%. Isso mostra que a solução pelos métodos associados resulta em uma solução mais próxima do valor ótimo quando comparado ao uso exclusivo do PH.

Com os resultados obtidos nessa dissertação foram atingidos os objetivos da mesma, sendo que foi possível se obter o custo ótimo de compra de energia e as decisões ótimas de compra nos leilões no primeiro ano do horizonte de planejamento em cada caso testado. Viu-se também que todos os métodos utilizados conseguiram solucionar o problema. Assim, foi possível comparar o desempenho computacional de cada método e a qualidade da solução obtida. Destaca-se que a associação de dois métodos clássicos de decomposição obteve bons resultados na solução do problema.

É possível dividir as sugestões para trabalhos futuros em dois temas principais, que são a modelagem do problema da gestão da contratação e os métodos de solução do problema.

Quanto à modelagem, propõe-se que o problema seja considerado estocástico em relação ao preço de aquisição em leilões de energia, considerando assim ao menos duas realizações de preços de leilão por estágio.

Outro fator que poderia ter sido levado em conta é a utilização de técnicas de previsão e agregação de cenários de demanda e PLD, visto que não foi dado foco na geração de cenários neste trabalho.

Também podem ser incorporadas ao problema técnicas de gerenciamento de risco, como por exemplo, a inclusão do CVaR na formulação do problema estocástico.

Quanto aos métodos de solução, sugere-se que o mesmo problema seja resolvido por Programação Dinâmica Dual Estocástica, para que seja possível comparar o desempenho com os métodos aqui utilizados.

Propõe-se ainda que sejam estudadas outras formas de integração dos métodos de decomposição, como se atualizar os multiplicadores de Lagrange pelo método dos feixes no Progressive Hedging. Ainda é possível se testar o PH como método inicial para a partida da RL e testar iterações intercaladas de cada método.

Por fim, um dos aspectos que podem trazer uma melhora significativa no tempo de solução é a aplicação de processamento paralelo nos métodos de decomposição, uma vez que os subproblemas destes métodos são desacoplados e podem ser resolvidos simultaneamente.

## 7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, J. S. **Análise de desempenho de estratégias no algoritmo de *Progressive Hedging* quando aplicado na solução do problema de planejamento da operação energética.** 2013. 90 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis. 2013.

AGÊNCIA NACIONAL DE ENERGIA ELÉTRICA. Resolução Normativa n. 421, de 30 de novembro de 2010. Estabelece os critérios para cálculo do Montante de Reposição e contratações adicionais dos agentes de distribuição do Sistema Interligado Nacional - SIN. **Diário Oficial da União**, Brasília, DF, 2010.

AGÊNCIA NACIONAL DE ENERGIA ELÉTRICA. Resolução Normativa n. 508, de 04 de novembro de 2012. Estabelece critérios e condições para celebração de acordo bilateral entre partes signatárias de CCEAR de energia nova. **Diário Oficial da União**, Brasília, DF, 2012.

BRASIL. Decreto Presidencial nº 5.163, de 30 de julho de 2004. Regulamenta a comercialização de energia elétrica, o processo de outorga de concessões e de autorizações de geração de energia elétrica, e dá outras providências. **Diário Oficial União**, Poder Executivo, Brasília, DF, 2004.

BRASIL. Lei nº 10.848, de 15 de março de 2004. Dispõe sobre a comercialização de energia elétrica. **Diário Oficial da União**, Poder Executivo, Brasília, DF, 2004.

BRITO, B. H. **Análise comparativa de diferentes metodologias para a solução do problema de comissionamento de unidades de usinas hidrelétricas acopladas em cascata.** 2015. 109 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis. 2015.

CORAL, A M. **Planejamento da compra de energia no setor de distribuição**. 2013. 173 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis. 2013.

CORDOVA, M.M. **Técnicas de otimização não-diferenciável para a resolução do problema do comissionamento de unidades geradoras termelétricas**. 2014. 157 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis. 2014.

CAMARA DE COMERCIALIZAÇÃO DE ENERGIA ELÉTRICA. **Regras de Comercialização**. Disponível em: [https://www.ccee.org.br/portal/faces/oquefazemos\\_menu\\_lateral/regras?\\_afzLoop=367082450682185#%40%3F\\_afzLoop%3D367082450682185%26\\_adf.ctrl-state%3D35ezt94b2\\_4](https://www.ccee.org.br/portal/faces/oquefazemos_menu_lateral/regras?_afzLoop=367082450682185#%40%3F_afzLoop%3D367082450682185%26_adf.ctrl-state%3D35ezt94b2_4). Acesso em 28/10/2016.

BELLMAN, R. **Dynamic Programming**. Nova Jersey: Princeton University Press, Princeton, 1957.

BIRGE, J. R.; LOUVEAUX, F. **Introduction to stochastic programming**. 2<sup>nd</sup> Edition. New York: Springer, 2011.

CASTRO, M. A. L. **Análise dos riscos de uma distribuidora associados à compra e venda de energia no novo modelo do setor elétrico**. 2004. 136p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Universidade de Brasília, Brasília, 2004.

FINARDI, E. C. **Alocação de Unidades Geradoras Hidrelétricas em Sistemas Hidrotérmicos Utilizando Relaxação Lagrangeana e Programação Quadrática Seqüencial**. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica), Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis - Brasil, 2003.

FOURER, R.; LOPES, L. **A management system for decompositions in stochastic programming**. *Annals of Operations Research*, v.142, n.1, p.99-118. 2006.

GUIMARÃES, A. R. Estratégia de contratação das distribuidoras em leilões de energia sob incerteza na demanda. 2006. 124p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Pontifícia Universidade Católica, Rio de Janeiro, 2006.

KELLEY JR., J. E. **The cutting-plane method for solving convex programs.** *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, v. 8, n. 4, p. 703–712, 1960.

LAZO, J. G.; FIGUEIREDO, K. ; LIMA, D. A., **Análise de um modelo inteligente de contratação de energia elétrica no curto prazo para distribuidoras.** *Sba Controle & Automação*, Campinas, v. 23, n. 6, p. 711-725, 2012. Disponível em [http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S0103-17592012000600005&lng=en&nrm=iso](http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-17592012000600005&lng=en&nrm=iso). Acesso em 10/01/2016.

LEMARÉCHAL, C.; An Extension of Davidon Methods to Nondifferentiable Problems, **Mathematical Programming Study** (3), pp. 95-109, 1975.

LEMARÉCHAL, C.; PELLEGRINO, F.; RENAUD, A. *et al.*; Bundle Methods Applied to the Unit Commitment Problem, **System Modeling and Optimization**, p.395-402, Chapman and Hall, 1996.

MME. Portaria nº 303, de 18 de novembro de 2004. **Diário Oficial da União**, Brasília, DF, 19/nov/2004. Seção 1, p. 69.

NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. **Numerical optimization.** Second edition. New York: Springer, 2006.

PINTO, L.; FERNANDEZ, M. ; MACEDO, L. H.; SZCUZUPAK, J. | **“Risk Management – beyond Risk Analysis”**, em International Symposium on Circuits and Systems – ISCAS, Maio 2007.

OLIVEIRA, W.; SOLODOV, M. **A doubly stabilized bundle method for nonsmooth convex optimization.** 2013 Disponível em: [http://www.optimization-online.org/DB\\_FILE/2013/04/3828.pdf](http://www.optimization-online.org/DB_FILE/2013/04/3828.pdf). 2013. Acesso em 05/03/2016.

ROCKAFELLAR, R. T.; WETS, J. B. Scenarios and Policy Aggregation in Optimization Under Uncertainty. **Mathematics of Operations Research**, v. 16, n. 1, p. 119-147, 1991.

ROSA, C.; RUSZCZYNSKI, A., 1994; **On Augmented Lagrangian Decomposition Methods For Multistage Stochastic Programs**. Working Paper. International Institute for Applied Systems Analysis. Laxemburg, Áustria.  
Dhttp://www.iiasa.ac.at/Publications/Documents/WP-94-005.ps

SANTOS, M. L. L. **Modelagem e solução do problema do planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos de curto prazo no contexto da programação estocástica: uma aplicação do método Progressive Hedging**. 2010. 135 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis. 2010.

SHOR, N. Z. **The subgradient method**. In: **Minimization Methods for Non-Differentiable Functions**. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 1985, (Springer Series in Computational Mathematics, 3). p. 22–47.

RAMOS, D. S., SUSTERAS, G. L. **Utilização de Algoritmos Genéticos para Previsão da Contratação de Energia pelas Distribuidoras**. IEEE Latin America Transactions, v.4, n. 4, 2006.

SCUZZIATO, M. R. **Proposta de um Modelo para Alocação Ótima de Unidades Hidrelétricas para Usinas em Cascata**. 2011. 107 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis. 2011.

TAKIGAWA, F. Y. K. **Análise comparativa de diferentes estratégias de decomposição do problema da programação diária da operação de sistemas hidrotérmicos com base na relaxação lagrangeana**. 2006. 155 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis. 2006.

VERONESE, H. D. **Um modelo de otimização estocástica baseado em Progressive Hedging para definição de estratégia de contratação de energia no ambiente regulado.** 2013. 162 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis. 2013.