

Susane Calegari

Invariância Conforme na
Física

Florianópolis
2017

Susane Calegari

Invariância Conforme na Física

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física da UFSC, para a obtenção de Título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Jeferson de Lima Tomazelli

Florianópolis
2017

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Calegari, Susane
Invariância Conforme na Física / Susane Calegari ;
orientador, Jeferson de Lima Tomazelli - SC, 2017.
180 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de
Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e
Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Física,
Florianópolis, 2017.

Inclui referências.

1. Física. 2. Gravitação Conforme. 3. Invariância
Conforme. 4. Modelo Padrão Conforme. I. Tomazelli,
Jeferson de Lima. II. Universidade Federal de Santa
Catarina. Programa de Pós-Graduação em Física. III.
Título.

À minha mãe, Elenise Pisetta.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à minha mãe, e aos meus irmãos, Rosane e Jean, pelo apoio, incentivo e amor incondicional.

Aos meus amigos, por todos os cafés, as cervejas e as risadas.

Ao professor Dr. Jeferson de Lima Tomazelli por sua orientação durante o desenvolvimento deste trabalho.

Ao Renné, pelo amor e paciência.

"Quand le doigt montre le ciel,
l'imbécile regarde le doigt.
[Quando o dedo aponta para o céu,
o tolo olha para o dedo.]"

Jean-Pierre Jeunet

Resumo

Nas últimas décadas, a simetria conforme vem desempenhando um papel central nos modelos físicos, que vão desde a matéria condensada à física de altas energias e à cosmologia. A invariância conforme revela-se particularmente promissora no contexto da gravitação quântica como uma teoria de *gauge*; tem sido sugerido que a gravitação conforme se adapta melhor às curvas de rotação galácticas, cujas anomalias são geralmente atribuídas à presença de matéria escura não-bariônica. Na teoria quântica de campos, a invariância conforme é um caminho rumo a modelos renormalizáveis, uma vez que as teorias conformes são unitárias devido à simetrias discretas simultâneas de paridade e reversão temporal. O presente trabalho visa uma melhor compreensão dos avanços recentes no assunto, revisitando cuidadosamente a literatura original que fundamentou as teorias de campo conformes modernas. Nossa principal motivação é acomodar os grupos de simetria do Mo-

delo Padrão de interações entre as partículas fundamentais no grupo conforme. Assim, aplicamos a transformação conforme a campos de spin 0, $1/2$ e 1, mostrando que as equações de campos livres são covariantes se relaxarmos a exigência de que as respectivas massas de repouso permaneçam constantes sob tal operação e calculamos as conseqüências não somente para as equações de campo, mas para os tensores de curvatura da relatividade geral de Einstein. Discutimos também o papel das simetrias conformes substituindo o símbolo de Christoffel e a ação de Einstein-Hilbert pela conexão de Weyl e a ação de Weyl-Bach.

Como uma perspectiva futura, abordaremos a questão da energia escura e as chamadas contribuições *back reaction* na cosmologia clássica e quântica.

Palavras-chave: Gravitação Conforme; Modelo Padrão Conforme. Invariância Conforme.

Abstract

In the last decades conformal symmetry has been playing a central role in physical models, ranging from condensed matter to high-energy physics and cosmology. Conformal invariance reveals particularly promising in the context of quantum gravity as a gauge theory; it has been suggested that conformal gravity best fits the galactic rotation curves, whose anomalies are usually attributed to the presence of non-baryonic dark matter. In quantum field theory, conformal invariance is a road towards renormalizable models, since conformal theories are unitary due to simultaneous parity and time reversal discrete symmetries.

The present work aims at reaching a better understanding of recent advances in the subject, by carefully revisiting the original literature which grounded modern conformal field theories. Our main motivation is to accommodate the symmetry groups of the Standard Model of fundamental particle inter-

actions in the conformal group. So, we apply the conformal transformation to 0, $1/2$ and 1 spinor fields, showing that the free field equations are covariant if we relax the requirement that rest masses remain constant under such operation, and work out the consequences not only for the field equations but for the curvature tensors of Einstein's general relativity. We also discuss the role of conformal symmetries by replacing the Christoffel symbol and the Einstein-Hilbert's action by Weyl's connection and Weyl-Bach's action.

As a future perspective, we shall approach the issue of dark energy and the so-called back reaction contributions in classical and quantum cosmology.

Keywords: Conformal Gravity; Conformal Standard Model. Conformal Invariance.

Lista de Figuras

2.1	Transformações conformes preservam ângulos.	10
2.2	Diagrama de Venn que mostra a relação entre TC, transformação passiva, ativa e de Weyl. .	12
2.3	Observador em um laboratório vendo a trajetória de uma partícula.	13
2.4	Transformação passiva: um observador vendo o movimento de uma partícula de dois pontos diferentes do laboratório.	14

2.5	Transformação ativa: um observador situado em pontos distintos do laboratório assiste o movimento de uma partícula num mesmo sistema de coordenadas.	15
2.6	Transformação de Weyl.	16
2.7	Transformação ativa que desfaz o resultado de uma transformação passiva.	17
2.8	Diagrama de Venn que mostra o grupo conforme e seus subgrupos, de Poincaré e de Lorentz.	21
2.9	Transporte paralelo sobre uma esfera.	32
5.1	Superfícies do tipo espaço.	122

Sumário

1	Introdução	1
2	Gravitação Conforme	9
2.1	Transformações Conformes	9
2.1.1	Transformação Passiva	12
2.1.2	Transformação Ativa	14
2.1.3	Transformação de Weyl	16
2.1.4	Transformação Conforme	17
2.1.5	Grupo Conforme C	20
2.2	Gravitação de Einstein	26
2.2.1	Princípios Básicos da Relatividade Geral	27
2.2.2	Geodésica	30

2.2.3	Derivada Covariante e Derivada Direcional	31
2.2.4	Tensor de Curvatura de Riemann	32
2.2.5	Equação de Campo de Einstein	34
2.3	Gravitação Conforme	41
2.3.1	Espaço de Riemann	42
2.3.2	Espaço de Weyl	51
2.3.3	Ação Conforme	57
3	Spin Zero	65
3.1	Equação de Klein-Gordon	68
3.1.1	Equações de Klein-Gordon Através das Equações de Bargmann-Wigner	70
3.2	Equação de Klein-Gordon com Interação Gravitacional	73
3.2.1	Equação de Klein-Gordon com Conexão de Weyl	75
3.2.2	Tensor Energia-Momento para o Campo Escalar	77

4 Spin 1/2	83
4.1 Equação de Dirac	83
4.1.1 Transformações de Lorentz sobre Espi- nores	85
4.1.2 Equação de Dirac para Partícula Livre	93
4.1.3 Matrizes de Dirac	99
4.2 Invariância C_0 da Equação de Dirac	104
4.2.1 Tensor Energia-Momento para o Campo de Dirac	109
5 Spin Um	111
5.1 Equações de Maxwell	111
5.1.1 Equações de Maxwell na Forma Cova- riante	113
5.1.2 Equações de Maxwell com Interação Gravitacional	116
5.1.3 Equações de Maxwell no Espaço de Weyl	119
5.1.4 Tensor Energia-Momento do Campo Ele- tromagnético	123
5.2 Equação de Proca	126

5.2.1	Formulação de Bargmann-Wigner para a Equação de Proca	127
5.2.2	Simetria Conforme da Equação de Proca	132
5.2.3	Tensor Energia-Momento da Lagrangiana de Proca	134
5.3	Condição de Lorentz	136
6	Considerações finais	137
A	Deduções envolvendo as variações	141
A.1	$\delta g^{\mu\nu} \rightarrow \delta g^{\mu\nu}$ e $\delta\sqrt{-g}$	141
A.2	δR	144
B	Densidade Tensorial	146
B.1	Derivada covariante de uma densidade tensorial	147
C	Transformação Conforme dos Tensores de Curvatura	149
	Referências Bibliográficas	156

Capítulo 1

Introdução

Nas últimas décadas, a simetria conforme vem desempenhando um papel central nos modelos físicos, que vão desde a matéria condensada à física de altas energias e à cosmologia, revelando-se particularmente promissora no contexto da gravitação quântica como uma teoria de *gauge*. Na teoria quântica de campos, a invariância conforme é um caminho rumo a modelos renormalizáveis, uma vez que as teorias conformes são unitárias devido a simetrias discretas simultâneas de paridade e reversão temporal.

A invariância das equações da física pelo grupo de Lorentz, foi amplamente estudada após o enunciado da teoria da Relatividade Especial, em 1905[1]. Quatro anos depois, de maneira independente, Bateman[2] e Cunnigham[3], mostraram que as equações de Maxwell, além de serem covariantes sob transformações de Lorentz, são covariantes por uma extensão desse grupo, o grupo Conforme Especial C_o . A possibilidade de se obter um grupo de simetria maior, incentivou a investiga-

ção de outras equações com essa característica, embora, mais tarde, tenha-se percebido que equações de movimento para partículas massivas não são conformemente invariantes.

Em 1936, Page[4] desenvolve, em dois artigos, uma relatividade especial baseada no o grupo C_o , ao invés do grupo de Lorentz. Uma consequência imediata dessa formulação é que além de termos equivalência entre todos os referenciais com velocidade relativa constante, temos equivalência entre todos com aceleração relativa constante, onde distâncias seriam medidas apenas com sinais de luz. No segundo artigo, Page[5] indica, em sua eletrodinâmica, a necessidade de transformar a massa de repouso para a equação do elétron com a aceleração conforme.

Dirac[6] propôs, em 1928, uma equação relativística de primeira ordem que descreve partículas de spin 1/2. Já em 1936, o próprio Dirac[7] sugere uma generalização de sua equação com simetria C_o ; no entanto, conclui que não existe uma maneira de se obter uma equação de onda para o elétron no espaço conforme que corresponda ao resultado em um espaço ordinário. No mesmo ano, Bhabha[8] revisa o trabalho de Dirac, apontando alguns erros e reformulando sua prova. Todavia a equação de onda continua adquirindo um fator de escala que a torna degenerada.

Equações de onda conformes dependem da métrica apenas em termos da densidade tensorial $\mathfrak{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(-g)^{-\frac{1}{4}}$, que é uma quantidade invariante pela transformação $g_{\mu\nu} \rightarrow \Omega^2 g_{\mu\nu}$ em 4 dimensões. Com isso em mente, em 1941, Haantjes[9] reavalia a equação conforme de Dirac, verificando que é invariante para partículas de massa nula. Sob a suposição de que a dimensão física $[ML]$ é invariante, Haantjes conclui que se

as distâncias ρ no espaço se transformam com peso conforme $1/2$, ou seja, $\rho \rightarrow \Omega\rho$, as massas de repouso devem se transformar com peso $-1/2$. Assumindo $m \rightarrow \Omega^{-1}m$, a equação conforme de Dirac para partículas com massa também faz-se invariante. Considerando que a constante de Planck tem peso conforme zero e dimensão $[ML^2T^{-1}]$, essa hipótese parece razoável.

A busca por equações conformes estendeu-se ainda durante as décadas de 60 e 70. Lomont[10], em 1961, mostra que todas as equações de campo livre, semelhantes à de Dirac, para partículas de spin inteiro e semi-inteiro, com massa nula são conformemente invariantes. Além de estender essa simetria para um conjunto muito maior de equações, Lomont mostra que associado a essa simetria também se obtém uma nova lei de conservação.

A dilatação e a aceleração conforme (AC) são transformações do grupo C_o , que modificam o elemento de linha, ds^2 , por um fator de escala. Para a dilatação o elemento de linha se altera por um fator de escala independente do espaço-tempo. Define-se AC de maneira semelhante, dita como um grupo de *gauge* geométrico, cujos elementos mapeiam os intervalos ds que são transformados por um fator dependente do espaço-tempo.

Kastrup[11] se propõe a esclarecer as propriedades físicas elementares da dilatação e principalmente da AC, tendo em vista que pouco se sabia sobre as quantidades conservadas e quase-conservadas associadas a esse grupo. Kastrup explora isto, considerando que essas transformações são simetrias aproximadas em física de partículas, no sentido que se tornam um "bom" grupo num regime de altas energias, mas

são quebradas em baixas energias, quando a massa de repouso faz-se relevante.

Classificado como um bom grupo de simetria, o grupo de Poincaré tem a restrição de que, em certas interações, a reflexão espacial e a invariância CP podem ser quebradas. Isso mostra que simetrias aproximadas ou quebradas existem e assim, podemos questionar se existem simetrias aproximadas do espaço-tempo adicionais, que podem ser "mal"quebradas a baixas energias, mas que em altas energias se tornam boas simetrias. Muitos pesquisadores consideram que a dilatação e a AC são simetrias deste tipo.

O grupo $O(2,4)$ é isomórfico ao grupo conforme C_o e à vista disso, Kastrup, relaciona espinores e tensores do grupo $O(2,4)$ aos espinores e tensores que aparecem nas equações de Maxwell, Dirac, etc. Como resultado, observa que, exceto pelos termos com massa, as equações de campo (1/2, 0 e 1) para sistemas com interação exibem invariância conforme. Considerando que o sentido físico dessas massas não é completamente claro, pode-se ou descartá-las, ou considerar que as massas físicas são uma consequência de interações, ideia explorada no início do século passado por Poincaré[12] em sua teoria do elétron, cuja massa teria origem puramente eletromagnética.

Quando relaxamos a exigência de que as massas de repouso permaneçam constantes, outro resultado interessante aparece: a aceleração conforme parece implicar em valores contínuos de massa, $m \rightarrow \Omega^{-1}(x)m$, o que não é observado experimentalmente. Portanto estas simetrias precisam ser, de alguma maneira, quebrada a baixas energias. Kastrup, aponta que uma das possibilidades é a quebra espontânea dessas si-

metrias, como consequência do estado fundamental não ser invariante por dilatações e acelerações conformes.

Seguindo os passos de Kastrup, em 1969, Mack e Salam[13] investigam a manifestação da formulação covariante de equações de onda para campos quantizados, definidos sobre um espaço projetivo de 6 dimensões, cuja variedade η_A é relacionada com x_μ , de Minkowski, acreditando que esta abordagem fornece ao grupo conforme uma perspectiva mais favorável para explorar fisicamente essa simetria, se comparada com o método usual. Essa escolha é feita devido a dificuldade de se encontrar uma maneira de quebrar a simetria conforme de forma que esta recaia na invariância de Poincaré. Drew[14], em 1972, utiliza o procedimento de Salam e Mack, para mostrar que as equações de campo resultantes em seis dimensões equivalem às equações de Weyl em Minkowski para partículas sem massa, quando se requer que as componentes "físicas" dos espinores tenham dimensão de escala $l = -3/2$.

Quando se discute a invariância conforme no formalismo lagrangiano, nota-se que as equações de Euler-Lagrange provenientes nem sempre têm a forma invariante. A razão para que isso ocorra são a propriedade de transformação das coordenadas do espaço-tempo e do campo presente na densidade lagrangiana. Um escalar de Lorentz deve se transformar como $\phi'(x') = \Omega\phi(x)$; assim, a ação que depende de $\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi$, é covariante, mas $\partial_\mu\partial^\mu\phi$ não. Kubo, em 1978, aponta para esse fato e apresenta a transformação de diversos campos sob aceleração conforme, estabelecendo regras de transformação para campos espinoriais, escalares e vetoriais, dado o acoplamento de campos espinoriais com campos escalares e vetoriais.

A forma como iremos proceder com a TC nesta dissertação

é por meio de uma mudança do espaço de Minkowski para o espaço de Riemann e desta para o espaço de Weyl, espaço conformemente invariante. Isto se dá com a introdução da derivada covariante cuja conexão afim é invariante por TC, a conexão de Weyl. Este modo de se explorar a simetria conforme foi proposto por Weyl[15] em 1918. Além de ser o objeto de estudo de Rohrlich, Witten e Fulton[16], no artigo de revisão *Conformal Invariance in Physics*, publicado em 1962. Nesta dissertação, utilizaremos este formalismo para estudarmos a invariância conforme.

No capítulo 2, exibiremos as ferramentas necessárias para o estudo das transformações conformes para os campos de spin 0, 1/2 e 1. Embora seja comum se referir às transformações de Weyl aqui tratadas como transformações conformes, é adequado, na primeira seção, definirmos o que é uma transformação conforme e qual relação que esta tem com transformações de coordenadas e transformações de Weyl. Ainda neste capítulo, apresentaremos uma breve revisão da gravitação de Einstein, para que na seção 2.3, possamos definir o espaço de Weyl e os elementos que devem ser substituídos na gravitação de Einstein para se obter uma gravitação conforme.

O capítulo 3 é dedicado ao estudo do campo escalar. Através da equação de Klein-Gordon, mostraremos como esta equação é escrita quando se considera interação gravitacional e quais as alterações que esta equação exibe quando expressa no espaço de Weyl. Como a simetria conforme exige certas características do tensor energia-momento (TEM), mais precisamente que este tenha traço nulo, estudaremos o TEM para o campo escalar e como é possível obtermos um TEM cujas características sejam adequadas à teoria conforme.

No capítulo 4, deduziremos a equação de Dirac através das transformações do grupo de Lorentz, construindo espinores que se transformam de modo covariante. Em seguida, estudaremos a invariância conforme das equações de Dirac pelo grupo C_o , portanto em um espaço plano.

Para o campo de spin 1, estudaremos as equações de Maxwell e de Proca no capítulo 5. A invariância conforme das equações de Maxwell já é muito bem estabelecida, sendo as primeiras equações a terem essa simetria estudada. Porém, as equações de Proca exibem um comportamento peculiar quando feita a transformação conforme, se comparada com os outros campos com massa não nula.

Por fim, teceremos algumas considerações, apontando perspectivas futuras, como desdobramento do presente estudo.

Capítulo 2

Gravitação Conforme

Neste capítulo definiremos transformações conformes (TC) com o objetivo de diferenciar, o que chamamos de TC e a transformação de Weyl. Visando um melhor entendimento sobre o grupo conforme C^1 , exploraremos os geradores associados ao grupo. Na seção seguinte 2.2, revisaremos a teoria da gravitação de Einstein (GE) para entendermos como os tensores de curvatura se alteram com C . Na última seção 2.3, estudaremos quais as deficiências da GE quando requeremos a simetria conforme, e quais os tensores que podem ser substituídos para suprir essa deficiência.

2.1 Transformações Conformes

Transformações conformes mantêm invariante o tensor métrico a menos de um fator de escala Ω

¹Junto com seu subgrupo, conforme especial C_o .

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \Omega^2 g_{\mu\nu}, \tag{2.1}$$

onde Ω é uma função escalar não nula, positiva e dependente do espaço-tempo. Uma TC preserva ângulos entre vetores quaisquer v e w ,

$$\cos \theta = \frac{g(v,w)}{\sqrt{g(v,v)g(w,w)}}.$$

Porém, em geral, não preserva sua norma,

$$g(v,v) \rightarrow \Omega^2 g(v,v).$$

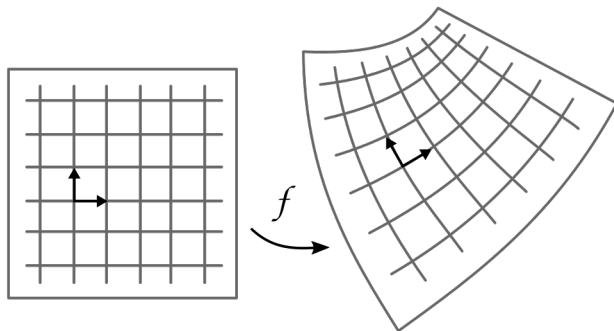


Figura 2.1: Transformações conformes preservam ângulos.

Matematicamente, uma TC é uma função que preserva ângulos. Geralmente a função tem um domínio e uma imagem

no plano real, ou seja, dados os subconjuntos U e V de \mathbb{R}^n , uma função $f : U \rightarrow V$ é dita conforme se para todo ponto $u \in U$, preserva ângulos orientados entre curvas através de u . Uma característica importante da TC é que, apesar de não preservar a magnitude, preserva a forma de pequenos polígonos. Na figura 2.1 vemos que um retângulo à esquerda e sua imagem após uma TC f . Mesmo que a última esteja distorcida é possível observar que os ângulos entre as grades continua sendo de 90° .

Existem duas maneiras diferentes de se definir uma "transformação conforme". Estas geram resultados diferentes, razão pela qual nos ocuparemos nas próximas subseções em definir a TC utilizada neste trabalho. Alguns autores chamam de "transformação conforme", ou mapa conforme o que aqui denominaremos **transformação de Weyl** (TW). Para nosso entendimento, empregaremos o termo **transformação conforme** (TC) à transformação conforme do espaço-tempo, onde não apenas o tensor métrico é alterado mas o sistema de coordenadas; já a transformação que ativamente reescala o tensor métrico, mas mantém o sistema de coordenadas inalterado é a transformação de Weyl.

Nesta seção, vamos definir TC através das definições de transformação passiva, ativa e de Weyl. A TC não é uma transformação que simplesmente altera o sistema de coordenadas (transformação passiva) ou apenas altera ativamente o tensor métrico por um fator de escala (transformação de Weyl), mas é uma transformação que faz ambos.

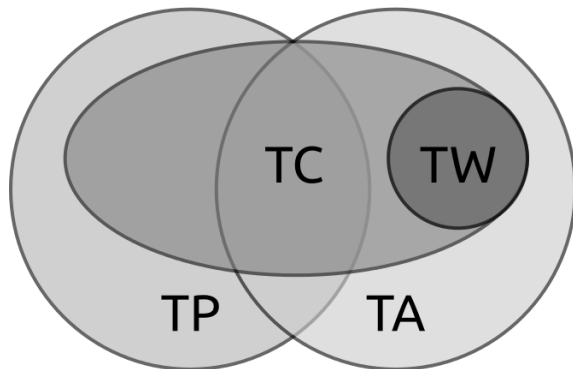


Figura 2.2: Diagrama de Venn que mostra a relação entre TC, transformação passiva, ativa e de Weyl.

2.1.1 Transformação Passiva

Transformações de coordenadas, ou transformações passivas (TP), são transformações que mudam o sistema de coordenadas, mas que não alteram o local físico. Um observador num laboratório vê o movimento de uma partícula como mostra a figura 2.3.

Se este observador pode alterar sua localização dentro do laboratório sem que isso altere o movimento da partícula, a única diferença é que a descrição da trajetória vai estar em um sistema de coordenadas diferente², como mostra a figura 2.4

Matematicamente, dadas duas variedades M e N , com métricas $g_{\mu\nu}$ e $h_{\alpha\beta}$ e coordenadas x e x' , respectivamente,

²Em relatividade especial, além de um local, devemos especificar em cada ponto a respectiva coordenada temporal de um dado **evento** no espaço-tempo, i.e. consideramos a linha de universo da partícula

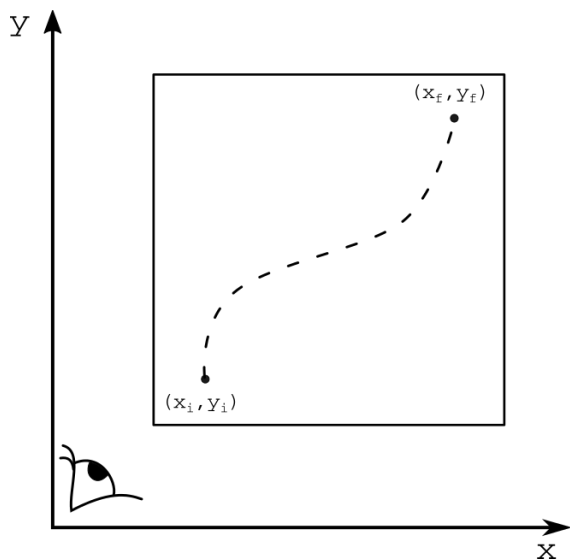


Figura 2.3: Observador em um laboratório vendo a trajetória de uma partícula.

uma TP $f : M \rightarrow N$ transforma as coordenadas,

$$x' = f(x).$$

Já o tensor métrico se transforma de acordo com a aplicação contínua $f * g = h$, a qual, em coordenadas, pode ser lida como

$$g_{\mu\nu}(x) \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} = h_{\alpha\beta}(x'). \quad (2.2)$$

Como esse tipo de transformação apenas altera o sistema de coordenadas, a norma de vetores permanece a mesma e,

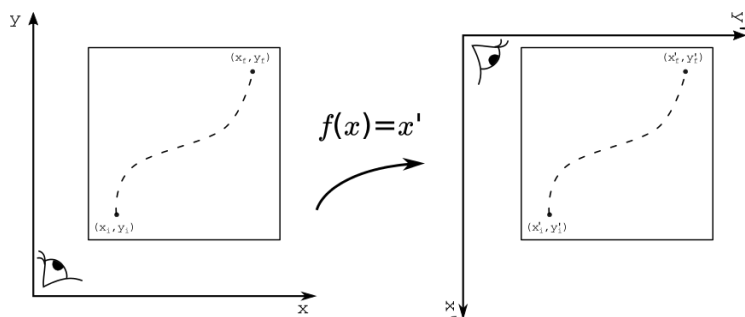


Figura 2.4: Transformação passiva: um observador vendo o movimento de uma partícula de dois pontos diferentes do laboratório.

como consequência, o elemento de linha é invariante.

2.1.2 Transformação Ativa

Existe um outro tipo de transformação, a ativa, também conhecida como transformação de ponto. Tal transformação mantém o sistema de coordenadas, mas arrasta o sistema físico (transformação de ponto). Novamente, usando o exemplo do laboratório, ao invés de deslocar o observador de um ponto do laboratório para outro, deslocamos o laboratório inteiro, como mostra a figura 2.5.

Embora possa parecer que não há diferença entre transformações passivas e ativas, matematicamente, estas são descritas de forma diferente. Ao contrário da transformação passiva, na transformação ativa (TA) temos apenas uma variedade (M, g) com coordenadas x . Nesse tipo de transformação, usa-

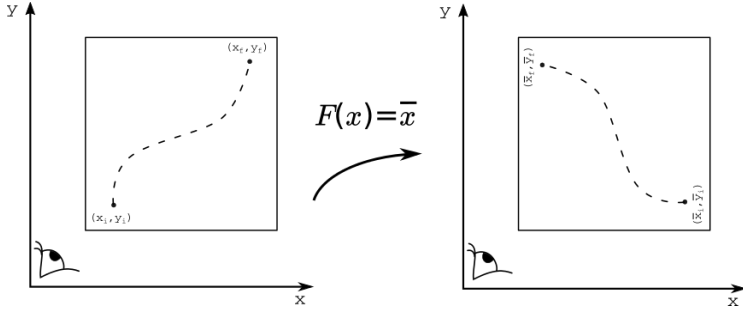


Figura 2.5: Transformação ativa: um observador situado em pontos distintos do laboratório assiste o movimento de uma partícula num mesmo sistema de coordenadas.

remos barras sobreescritas para distinguir os diferentes pontos do sistema de coordenadas $(x, \bar{x}, \bar{\bar{x}}, \dots)$. Assim, dada uma função $F : M \rightarrow M$, que leva de um ponto a outro,

$$\bar{x} = F(x),$$

o tensor métrico se transforma como

$$g_{\mu\nu}(\bar{x}) \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\beta} = g_{\alpha\beta}(x).$$

Tanto na TA quanto na passiva, o elemento de linha é mantido invariante

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu = h_{\alpha\beta}(x') dx'^\alpha dx'^\beta, \quad (\text{TP})$$

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu = g_{\alpha\beta}(\bar{x}) d\bar{x}^\alpha d\bar{x}^\beta. \quad (\text{TA})$$

2.1.3 Transformação de Weyl

A transformação de Weyl (TW) é uma TA, com a diferença que agora o tensor métrico transformado é escrito como

$$g_{\mu\nu}(\bar{x}) \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\beta} = \Omega^2(x) g_{\alpha\beta}(x). \quad (2.3)$$

Do modo como definimos a TW parece ser necessário que haja uma transformação de ponto $F(x) = \bar{x}$. Porém, usualmente a TW é definida com $\bar{x} = x$ e, portanto, o tensor métrico se transforma simplesmente como

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow \Omega^2(x) g_{\mu\nu}(x).$$

Com essa mudança de escala no tensor métrico, o elemento de linha também é alterado:

$$ds^2 \rightarrow \Omega^2 ds^2.$$

A TW é interessante porque através dessa transformação podemos alterar a curvatura do espaço-tempo sem alterar o sistema de coordenadas.

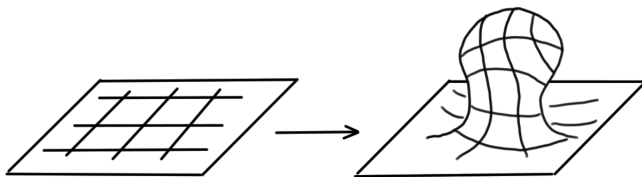


Figura 2.6: Transformação de Weyl.

2.1.4 Transformação Conforme

Usando a TW e a TP podemos definir a TC. Para isso, inicialmente vamos supor que há uma TA que desfaz o resultado de uma TP. Assim, no fim das contas, estamos com um sistema de coordenadas diferente, embora vejamos o experimento da mesma forma, como mostra a figura 2.7.

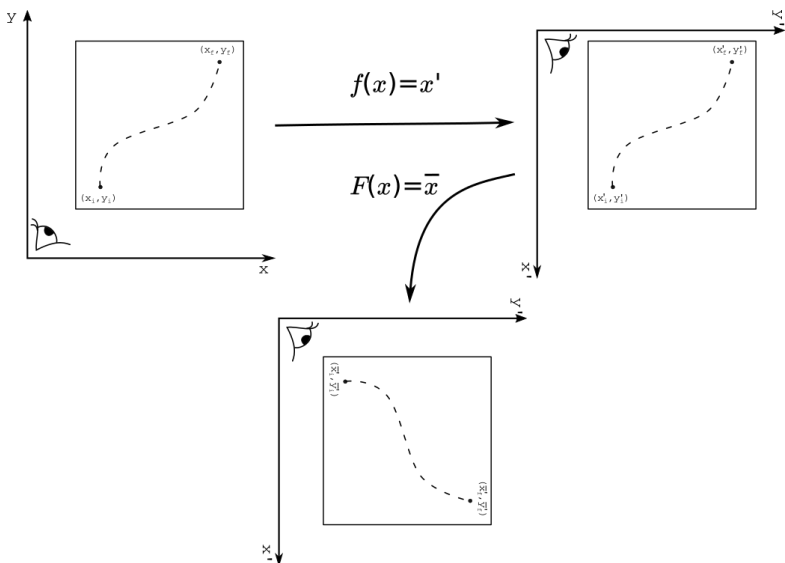


Figura 2.7: Transformação ativa que desfaz o resultado de uma transformação passiva.

Nada impede que se estenda esse mesmo processo a uma TW ao invés de uma TA ordinária. Neste caso, poderíamos, por exemplo, considerar o laboratório da figura 2.7; além de uma rotação poderíamos também efetuar uma mudança

de escala, como na figura 2.6. Matematicamente, temos a condição

$$\bar{x}' = F(x') = F(f(x)) \doteq x.$$

Ao impor $\bar{x}' \doteq x$, segue

$$\frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \doteq \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial \bar{x}'^\alpha}. \quad (2.4)$$

O símbolo "=" indica que esta igualdade é válida apenas no sistema de coordenadas indicado nesta equação.

Para sabermos como o tensor métrico se transforma neste caso, vamos reescrever a equação (2.3) usando (2.4),

$$g_{\mu\nu}(x) \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\beta} = \Omega^2(\bar{x}) g_{\alpha\beta}(\bar{x}). \quad (2.5)$$

Além disso, devemos reescrever a equação (2.2) para \bar{x}

$$g_{\mu\nu}(\bar{x}) \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial \bar{x}'^\alpha} \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial \bar{x}'^\beta} = h_{\alpha\beta}(\bar{x}'). \quad (2.6)$$

Substituindo a equação (2.6) em (2.5), ficamos então com a TC do tensor métrico

$$h_{\mu\nu}(\bar{x}') = \Omega^2(x) g_{\mu\nu}(x).$$

Com essa transformação, o elemento de linha também é transformado, adquirindo o mesmo fator de escala da métrica,

$$ds^2(\bar{x}') \doteq \Omega^2(x) ds^2(x).$$

A transformação conforme é dada por uma função F tal que $F : M \rightarrow M$ é um difeomorfismo tal que $F^* g = \Omega^2 g$

em que $g : M \rightarrow (T^* M)^{\otimes 2}$ é o tensor métrico. Com essa definição, obtemos uma TC que não é simplesmente uma TP ou TA; essa definição é consistente considerando-se ambas. Usaremos a notação

$$g_{\mu\nu}^c(x) = h_{\mu\nu}(\bar{x}'),$$

para representar uma TC da métrica.

A transformação das componentes contravariantes do tensor métrico é obtida utilizando o delta de Kronecker como invariante,

$$\begin{aligned} \delta_{\beta}^{\alpha} &= g_{\mu\beta}^c g_c^{\mu\alpha} \\ &= \Omega^2 g_{\mu\beta} g_c^{\mu\alpha}. \end{aligned}$$

Como o delta de Kronecker também pode ser escrito como $\delta_{\beta}^{\alpha} = g_{\mu\beta} g^{\mu\alpha}$, isso implica a transformação

$$g^{\mu\nu} \rightarrow \frac{1}{\Omega^2} g^{\mu\nu}.$$

Portanto,

$$g_{\mu\nu}^c(x) = \Omega^2(x) g_{\mu\nu}(x) \quad \text{e} \quad g_c^{\mu\nu}(x) = \Omega^{-2}(x) g^{\mu\nu}(x).$$

Transformações desse tipo formam o grupo C_g . Todas as variedades que se distinguem entre si apenas por elementos de C_g são chamadas de **espaços conformes**. Nesses espaços, o elemento de linha ds^2 não tem valor absoluto porque a comparação da distância entre dois pontos em diferentes espaços envolve o fator de escala, que é arbitrário. Os invariantes são

os ângulos em cada ponto dos espaços.

Existe um grupo C , chamado **grupo conforme** ou **grupo conforme estendido** que, além de ter o grupo C_g como subgrupo, também contém o grupo de todas as transformações de coordenadas.

2.1.5 Grupo Conforme C

Por definição, as transformações do grupo conforme levam $x \rightarrow x'$, deixando o tensor métrico invariante a menos de um fator de escala, como vimos na subseção 2.1. Tensores que se transformam dessa forma são ditos **conformemente invariantes**.

O conjunto de todas as transformações que geram um fator de escala entre as métricas, ou seja, que são conformemente equivalentes, formam o grupo C . O grupo de Poincaré³ (translações espaço-temporais e de Lorentz) é um subgrupo do grupo conforme, cuja função de escala é $\Omega(x) \equiv 1$.

Com o intuito de encontrar todas as possíveis transformações em x^μ que geram um fator de escala Ω no tensor métrico, vamos considerar uma transformação infinitesimal mais geral possível, $x^\mu \rightarrow x^\mu + \epsilon^\mu(x)$. Assim, o tensor métrico se transforma conformemente de acordo com

³Em geral, denomina-se grupo de Poincaré, ou grupo de Lorentz estendido, o grupo de Lorentz especial junto com o grupo de translações.

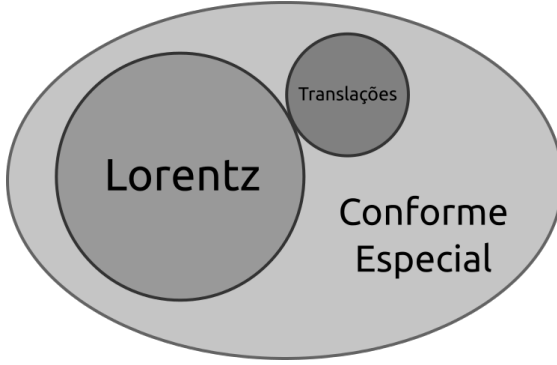


Figura 2.8: Diagrama de Venn que mostra o grupo conforme e seus subgrupos, de Poincaré e de Lorentz.

$$\begin{aligned}
 \Omega^2 g_{\mu\nu} &= \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} g_{\alpha\beta} \\
 &= (\delta_{\mu}^{\alpha} + \partial_{\mu}\epsilon^{\alpha})(\delta_{\nu}^{\beta} + \partial_{\nu}\epsilon^{\beta})g_{\alpha\beta} \\
 &= g_{\mu\nu} + (\partial_{\mu}\epsilon_{\nu} + \partial_{\nu}\epsilon_{\mu}) + \mathcal{O}(\epsilon_{\mu}^2). \quad (2.7)
 \end{aligned}$$

Considerando uma TC com um fator de escala dado por

$$\Omega^2(x) = e^{2\omega(x)}, \quad (2.8)$$

quando a transformação dada é infinitesimal, temos

$$\Omega^2(x) \simeq (1 + 2\omega).$$

Com a definição acima para o fator de escala e a transformação do tensor métrico dada por (2.7), podemos identificar a relação

$$\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu = 2\omega g_{\mu\nu}. \quad (2.9)$$

Queremos, através da expressão acima, encontrar uma expressão para $\epsilon_\mu(x)$. Efetuando o traço da equação acima, podemos ver que

$$4\omega = \partial_\alpha \epsilon^\alpha. \quad (2.10)$$

Por outro lado, se partirmos da equação (2.9) assumindo, por simplicidade, que estamos no espaço-tempo de Minkowski ($g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$) podemos aplicar ∂_ρ a ambos os lados da equação e posteriormente fazer permutações dos índices $\rho \leftrightarrow \mu$ e $\rho \leftrightarrow \nu$, resultando no conjunto de equações

$$\begin{aligned} \partial_\rho \partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\rho \partial_\nu \epsilon_\mu &= 2\eta_{\mu\nu} \partial_\rho \omega, \\ \partial_\mu \partial_\rho \epsilon_\nu + \partial_\mu \partial_\nu \epsilon_\rho &= 2\eta_{\rho\nu} \partial_\mu \omega, \\ \partial_\nu \partial_\mu \epsilon_\rho + \partial_\nu \partial_\rho \epsilon_\mu &= 2\eta_{\mu\rho} \partial_\nu \omega. \end{aligned}$$

Uma combinação linear dessas equações fornece a expressão

$$\partial_\mu \partial_\nu \epsilon_\rho = \eta_{\rho\nu} \partial_\mu \omega + \eta_{\mu\rho} \partial_\nu \omega - \eta_{\mu\nu} \partial_\rho \omega; \quad (2.11)$$

contraíndo essa equação com $\eta^{\mu\nu}$, ficamos com

$$\partial^2 \epsilon_\rho = -2\partial_\rho \omega. \quad (2.12)$$

Agora temos duas equações que expressam a relação entre $\epsilon_\mu(x)$ e $\omega(x)$, (2.12) e (2.10). Aplicando ∂^ρ à equação (2.12) e ∂^2 a (2.10), temos respectivamente

$$\begin{cases} 4\partial^2\omega &= \partial^2\partial_\alpha\epsilon^\alpha \\ -2\partial^\rho\partial_\rho\omega &= \partial^\rho\partial^2\epsilon_\rho \end{cases} \implies \partial^2\omega(x) = 0. \quad (2.13)$$

Concluimos então, que a função $\omega(x)$ deve ser do tipo

$$\omega(x) = A + B_\mu x^\mu.$$

Dada a equação (2.9) e a condição para $\omega(x)$ acima, podemos considerar que $\epsilon_\mu(x)$ seja de ordem quadrática

$$\epsilon_\mu = a_\mu + b_{\mu\nu}x^\nu + c_{\mu\nu\rho}x^\nu x^\rho, \quad \text{com } c_{\mu\nu\rho} = c_{\mu\rho\nu}. \quad (2.14)$$

Como os vínculos (2.9) e (2.11) são válidos para todo x^μ , podemos analisar a equação (2.14) termo a termo. O termo mais simples, e o único sem vínculos, é dado pela constante a_μ . Este termo é responsável pela translação infinitesimal, que não altera a métrica. Um dos vínculos é obtido isolando ω na equação (2.10) e substituindo em (2.9)

$$\partial_\mu\epsilon_\nu + \partial_\nu\epsilon_\mu = \frac{1}{2}\partial_\alpha\epsilon^\alpha g_{\mu\nu}.$$

Dessa relação, temos um vínculo para o termo linear em x_μ ,

$$b_{\mu\nu} + b_{\nu\mu} = \frac{1}{2}b_\alpha^\alpha \eta_{\mu\nu}.$$

A forma mais simples para $b_{\mu\nu}$ é

$$b_{\mu\nu} = \lambda\eta_{\mu\nu} + m_{\mu\nu},$$

onde λ é o parâmetro infinitesimal de dilatação. Na dilatação,

o fator de escala da métrica é dado por um fator de proporcionalidade constante. A transformação de Lorentz é obtida pelo tensor antissimétrico $m_{\mu\nu}$. Finalmente, para o termo quadrático, derivamos a condição diretamente da equação (2.11),

$$c_{\rho\mu\nu} = \eta_{\rho\nu}\partial_\mu\omega + \eta_{\mu\rho}\partial_\nu\omega - \eta_{\mu\nu}\partial_\rho\omega. \quad (2.15)$$

Contraindo a equação acima com $\eta^{\rho\mu}$, temos

$$\partial_\nu\omega = \frac{1}{4}c^\alpha_{\alpha\nu} \equiv b_\nu \quad \implies \quad c_{\mu\nu\rho} = b_\mu\eta_{\rho\nu} + b_\nu\eta_{\mu\rho} - b_\rho\eta_{\mu\nu}.$$

Os quatro parâmetros dados por b_μ correspondem a uma transformação infinitesimal

$$x'^\mu = x^\mu + 2x^\mu x^\alpha b_\alpha - b^\mu x^2,$$

conhecida como transformação conforme especial, ou aceleração conforme. Neste caso, temos um fator de escala Ω que depende de x^μ . Com as condições analisadas acima, a equação (2.14) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\epsilon_\mu = a_\mu + \lambda x_\mu + m_{\mu\nu}x^\nu + 2x_\mu x^\alpha b_\alpha - b_\mu x^2. \quad (2.16)$$

A forma finita das transformações de translação, de dilatação e de Lorentz e de dilatação são semelhantes às infinitesimais e facilmente obtidas:

$$\begin{aligned}x'^{\mu} &= x^{\mu} + a^{\mu}, \\x'^{\mu} &= \alpha x^{\mu}, \\x'^{\mu} &= \Lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu}.\end{aligned}$$

A forma finita da aceleração conforme já não é tão evidente. Uma maneira de obtê-la é considerando a aceleração conforme como uma inversão seguida de uma translação e novamente de uma inversão, onde a inversão é dada por $x^{\mu} \rightarrow x^{\mu}/x^2$ e a translação em questão é $x^{\mu} \rightarrow x^{\mu} - b^{\mu}$. A expressão para aceleração conforme finita fica dada por

$$x'^{\mu} = \frac{x^{\mu} - b^{\mu} \mathbf{x}^2}{1 - 2\mathbf{b} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}^2 \mathbf{x}^2}. \quad (2.17)$$

A função de escala para a aceleração conforme é a única que não é trivial, sendo justamente o denominador da (2.17),

$$\Omega(x) = 1 - 2\mathbf{b} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}^2 \mathbf{x}^2.$$

As transformações conformes em 4 dimensões formam o grupo $\text{SO}(5,1)$. Os geradores de translação P_{μ} e rotação (transformações de Lorentz) $M_{\mu\nu}$ são já bem conhecidos. No grupo conforme, ganhamos o gerador de dilatação D e o da aceleração conforme K_{μ} . Uma TC sobre uma função $\phi(x)$ resulta numa função de forma geral

$$\phi(x) \rightarrow \phi(x^{\mu} + \epsilon^{\mu}(x)) = \left[1 + ia^{\mu} P_{\mu} - \lambda D + \frac{1}{2} m^{\mu\nu} M_{\mu\nu} + ib^{\mu} K_{\mu} \right] \phi(x^{\mu}), \quad (2.18)$$

onde os geradores infinitesimais são

$$\begin{aligned}
P_\mu &= -i\partial_\mu, \\
D &= -x^\mu\partial_\mu, \\
M_{\mu\nu} &= i(x^\mu\partial_\nu - x^\nu\partial_\mu), \\
K_\mu &= 2ix_\mu x^\nu\partial_\nu - ix^2\partial_\mu,
\end{aligned}$$

e obedecem as relações de comutação

$$\begin{aligned}
[D, P_\mu] &= P_\mu, \\
[D, K_\mu] &= -K_\mu, \\
[K_\mu, P_\nu] &= 2\eta_{\mu\nu}D - 2iM_{\mu\nu}, \\
[K_\rho, M_{\mu\nu}] &= i(\eta_{\rho\mu}K_\nu - \eta_{\rho\nu}K_\mu), \\
[P_\rho, M_{\mu\nu}] &= i(\eta_{\rho\mu}P_\nu - \eta_{\rho\nu}P_\mu), \\
[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] &= i(\eta_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} - \eta_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma}M_{\mu\rho}).
\end{aligned} \tag{2.19}$$

2.2 Gravitação de Einstein

Antes de falarmos a respeito da gravitação conforme, façamos uma breve revisão da teoria já bem estabelecida, a gravitação de Einstein (GE).

Em 1905, Einstein publica o artigo *On the Electrodynamics of Moving Bodies* [1], em que formula os dois postulados da relatividade especial:

- (a) O princípio da relatividade. Todas as leis da física são as mesmas em todos os referenciais inerciais;
- (b) A velocidade da luz tem o mesmo valor c em todos os referenciais inerciais.

O que separa a teoria newtoniana clássica da teoria da relatividade especial não é o princípio da relatividade especial, mas sim a constância da velocidade da luz. Através deste postulado, foi introduzida a relatividade da simultaneidade e as transformações de Lorentz, como forma de relacionar as coordenadas de dois sistemas inerciais diferentes.

Em seguida, Einstein confrontou-se com dois problemas: a não concordância da nova teoria com a já consagrada teoria de gravitação newtoniana e a necessidade de encontrar um formalismo que não apenas mostrasse a invariância das leis da Física em referenciais inerciais, mas também em referenciais acelerados. Esses problemas foram solucionados com a imposição de uma invariância sob transformações gerais de coordenadas e a incorporação dos efeitos do campo gravitacional ao tensor métrico $g_{\mu\nu}$.

2.2.1 Princípios Básicos da Relatividade Geral

A GE mantém os postulados da relatividade especial e a generaliza. Embora a relatividade geral não traga claramente novos postulados, existem alguns pontos importantes que são consequência do fato da relatividade geral ser uma teoria geométrica. Muito brevemente vamos discutir esses pontos:

- (i) O espaço-tempo (M, g) é definido como uma variedade

pseudo-riemanniana em 4 dimensões, suave e conexa. A métrica é caracterizada pela imposição de que localmente deve convergir à métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$. O princípio da equivalência é consequência dessa propriedade, pois se o resultado de uma experiência local não deve depender do ponto no espaço-tempo, mesmo em um espaço curvo, este, localmente, deve parecer plano.

O tensor métrico também deve ser contínuo, não-degenerado e simétrico. Por não ser degenerado sabemos que $g = |g_{\mu\nu}|$ é não nulo, o que nos permite definir sua inversa via

$$g^{\mu\alpha} g_{\nu\alpha} = \delta_{\nu}^{\mu}.$$

Dado um espaço plano, a métrica sempre pode ser levada à sua forma canônica $g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$, que, no presente trabalho, será sempre definida como

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

- (ii) A causalidade é uma consequência da constância da velocidade da luz. Sinais de luz podem ser enviados entre eventos (pontos no espaço-tempo) somente se a curva que liga estes eventos não for do tipo espaço $ds^2 < 0$;
- (iii) O tensor energia-momento $T^{\mu\nu}$ é simétrico e descreve a densidade e fluxo de energia e momento no espaço-

tempo. Este tensor é conservado localmente $\nabla_{\mu}T^{\mu\nu} = 0$. O tensor energia-momento de Hilbert (TEMH) é obtido através da ação da matéria através da variação

$$T^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{mat}}{\delta g_{\mu\nu}}.$$

Existem outras formas de se obter um tensor energia-momento, porém somente este pode ser usado nas equações de campo de Einstein. Na subseção 2.2.5 estudaremos em mais detalhe essa relação.

- (iv) as equações de campo de Einstein são obtida através da variação do tensor métrico na ação da matéria e do campo gravitacional. Um dos pontos importantes é que Einstein postula que a ação gravitacional é dada pelo escalar de Ricci,

$$S_g = \frac{-1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} R.$$

Como consequência, obtemos a equação de campo

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} = 8\pi T^{\mu\nu}.$$

Esta equação relaciona a geometria do espaço dada pelo lado esquerdo da equação, que contém o tensor e o escalar de Ricci, com o lado direito da equação, que representa a matéria e energia dadas pelo tensor energia-momento. A equação acima está escrita em unidades naturais, assim como todas as equações ao longo desta monografia.

2.2.2 Geodésica

O caminho que minimiza a distância $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ entre dois pontos, em qualquer geometria (plana ou curva), obedece à equação da geodésica. Para encontrar essa equação, partimos da ação

$$S = \int ds, \quad (2.20)$$

onde ds^2 é um elemento de linha do tipo tempo ($ds^2 > 0$). Sendo assim, podemos reescrever a ação (2.20) parametrizada pelo tempo próprio τ

$$S = \int \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} d\tau. \quad (2.21)$$

Podemos agora variar a ação (2.21) com respeito a x^μ e aplicar o princípio variacional, $\delta S = 0$. Obtemos a equação de Euler-Lagrange, ou equação da geodésica,

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0, \quad (2.22)$$

onde

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_\mu g_{\beta\nu} + \partial_\nu g_{\beta\mu} - \partial_\beta g_{\mu\nu}). \quad (2.23)$$

é o símbolo de Christoffel, o qual possui um papel central no formalismo da GE.

2.2.3 Derivada Covariante e Derivada Direcional

Quando saímos de um espaço plano para um espaço curvo, um problema imediato é que a derivada parcial ∂_μ não se transforma como um tensor. Por isso, definimos a derivada covariante ∇_μ , que, esta sim, se transforma como um tensor. O símbolo de Christoffel (2.23) entra na definição da derivada covariante desempenhando o papel de conexão afim:

$$\nabla_\mu V^\alpha = \partial_\mu V^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha V^\nu. \quad (2.24)$$

A derivada covariante possui todas as propriedades de uma derivada parcial. Por exemplo, ela é linear e obedece à regra de Leibniz do produto.

Quando o espaço em questão é plano munido de coordenadas inerciais, retornamos à derivada parcial, pois o símbolo de Christoffel é identicamente nulo. Com a derivada covariante, podemos definir uma derivada covariante direcional e o transporte paralelo. A derivada covariante direcional é descrita através da parametrização de $x^\mu(\lambda)$

$$\frac{D}{d\lambda} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \nabla_\mu,$$

e o transporte paralelo se dá quando a derivada covariante direcional de um tensor é nula:

$$\frac{DV^\alpha}{d\lambda} = 0.$$

Quando isso ocorre, dizemos que o vetor foi paralelamente transportado ao longo da curva $x^\mu(\lambda)$.

Na figura 2.9, podemos observar que, ao depender do cami-

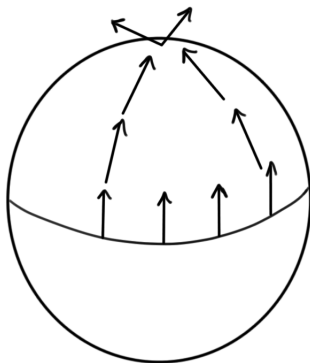


Figura 2.9: Transporte paralelo sobre uma esfera.

no escolhido, o resultado do transporte paralelo de um vetor resulta em outro distinto no ponto de partida. Isso ocorre apenas em espaços curvos. Por fim, através da derivada direcional, podemos reescrever a equação da geodésica (2.22) de forma alternativa,

$$\frac{D}{d\tau} \left(\frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0. \quad (2.25)$$

2.2.4 Tensor de Curvatura de Riemann

O tensor de curvatura de Riemann pode ser obtido calculando o comutador das derivadas covariantes

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]V^\alpha = R_{\beta\mu\nu}^\alpha V^\beta.$$

Este resultado é calculado levando em conta um espaço sem torção, ou seja, com $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ simétrico nos índices $\mu \leftrightarrow \nu$. O tensor de Riemann é definido em termos do símbolo de Christoffel como

$$R_{\sigma\mu\nu}^\alpha = \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\alpha - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha + \Gamma_{\mu\gamma}^\alpha \Gamma_{\nu\sigma}^\gamma - \Gamma_{\nu\gamma}^\alpha \Gamma_{\mu\sigma}^\gamma.$$

Feita a contração do tensor de Riemann, obtemos o tensor de Ricci $R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu}^\alpha$. Com mais uma contração, obtemos o escalar de Ricci, $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$. Todos estes possuem informação sobre a curvatura do espaço-tempo. Por exemplo, dado um espaço-tempo, este é plano se e somente se todas as componentes de $R_{\sigma\mu\nu}^\alpha$ são nulas.

Quando um espaço-tempo é plano, além do tensor de Riemann, o símbolo de Christoffel é nulo. Isso faz com que a equação da geodésica (2.22) descreva a segunda lei de Newton para uma partícula livre na ausência de gravidade vista de um referencial acelerado.

Para o caso do tensor de Riemann não nulo, ainda assim podemos escolher um sistema de coordenadas cujo tensor de Ricci é nulo. Um exemplo é a métrica de Schwarzschild, que dá correções à gravitação newtoniana, permitindo obter resultados como o desvio da luz emitido por uma estrela distante ao passar próximo ao Sol. A métrica de Schwarzschild é a única solução em relatividade geral com simetria esférica no vácuo. Em coordenadas esféricas $\{t, r, \theta, \phi\}$, tal métrica é dada por

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2.$$

2.2.5 Equação de Campo de Einstein

Nosso próximo passo é encontrar as equações de campo de Einstein através do princípio variacional. Na formulação lagrangiana clássica para um sistema estacionário, dadas as coordenadas generalizadas $\{q_k\}_{k=1,2,\dots,N}$ independentes entre si, a ação é um funcional das coordenadas q_k e pode ser escrita através da integral no tempo da lagrangiana $L = L(q_k, \dot{q}_k, t)$ entre t_1 e t_2 ,

$$S[q_k] \equiv \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_k, \dot{q}_k, t),$$

com a condição de que, nos extremos, a trajetória física e a teste coincidam:

$$\delta q_k(t_1) = \delta q_k(t_2) = 0.$$

Segundo o princípio de Hamilton, a trajetória física é a que minimiza a energia e, como consequência, minimiza a ação. Assim,

$$\frac{\delta S}{\delta q(t)} = 0.$$

Aplicando o princípio de Hamilton, obtemos as equações de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = 0, \quad \forall k.$$

Através das equações de Euler-Lagrange, podemos chegar às equações de movimento do sistema. Essa teoria pode ser estendida a infinitos graus de liberdade, na formulação lagrangiana de campos contínuos. A passagem de uma teoria a outra é feita substituindo as coordenadas generalizadas pelo campo $q_k(t) \rightarrow \phi(x)$, o somatório sobre todos os q_k por uma integral no espaço $\sum_k \rightarrow \int_{\Omega} dx^3$ e a lagrangiana pela respectiva densidade lagrangiana. Novamente, temos a condição de extremização, mas dessa vez o que consideramos como extremo é a borda do volume Ω :

$$\delta\phi(x)|_{\partial\Omega} = 0.$$

Como agora estamos no espaço-tempo de Minkowski, com métrica $\eta_{\mu\nu}$, o campo depende das coordenadas do espaço-tempo x^μ . A ação no espaço-tempo de Minkowski possui a forma

$$S = \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\alpha \phi; \eta_{\mu\nu}).$$

A equação de Euler-Lagrange resultante desta ação é

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \phi)} \right) = 0,$$

a qual, ao invés de equações de movimento, gera equações de

campo.

Como, nos cálculos que seguem, nem sempre a métrica utilizada será a de Minkowski e muitas vezes não é constante, vamos inserir a métrica na ação. Efetuando a transformação $\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}$, devemos incluir na integral de ação o determinante da matriz Jacobiana dessa transformação:

$$S = \int_{\Omega} |\det J| d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\alpha \phi; g_{\mu\nu}).$$

Sabendo que a matriz que representa o tensor métrico G pode ser escrita como $G = J^T J$, onde J é a matriz Jacobiana, o determinante do tensor métrico é dada por

$$\begin{aligned} \det G &= \det(J^T J) \\ &= (\det J)^2. \end{aligned}$$

Com essa alteração, a ação pode ser escrita na forma

$$S = \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}(\phi, \partial_\alpha \phi; g_{\mu\nu}).$$

É preciso cuidado ao calcular a variação da ação, observando se a métrica também é afetada ou se permanece constante. Quando passamos do espaço-tempo de Minkowski \mathfrak{M} para um espaço curvo \mathcal{A} , temos as substituições

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\nu} &\rightarrow g_{\mu\nu}, \\ \partial_\mu &\rightarrow \nabla_\mu, \\ d^4x &\rightarrow d^4x \sqrt{-g}, \end{aligned}$$

que precisam levar em conta a curvatura do espaço-tempo. Além dessas mudanças precisamos levar em conta a ação do campo gravitacional S_g . A ação gravitacional considerada para encontrar as equações de campo de Einstein é a ação de Einstein-Hilbert⁴

$$S_g = \frac{-1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} R,$$

onde R é o escalar de Ricci e as constantes $\frac{-1}{16\pi}$ são necessárias para recair na gravitação newtoniana no limite de campo fraco. A ação total assume a forma

$$S = \frac{-1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} R + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L},$$

onde o segundo termo é devido à matéria.

Vamos calcular as equações geradas a partir desta ação, dada uma variação no tensor métrico $g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \left(\frac{-1}{16\pi} \delta(\sqrt{-g} R) + \delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}) \right) \\ &= \int d^4x \left(\frac{-1}{16\pi} \delta(\sqrt{-g}) R - \frac{1}{16\pi} \sqrt{-g} \delta R + \delta(\sqrt{-g}) \mathcal{L} + \sqrt{-g} \delta \mathcal{L} \right). \end{aligned}$$

No apêndice [A.1](#) fizemos os cálculos referentes à variação da métrica

⁴Escrita na sistema de unidades naturais com $c = h = G = 1$.

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \delta g_{\alpha\beta}, \quad (2.26)$$

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}. \quad (2.27)$$

Os cálculos da variação do escalar de Ricci estão no apêndice [A.2](#)

$$\delta R = -h^{ab}R_{ab} + \nabla_a \nabla_b h^{ab} - \nabla^2 h^a_a$$

onde $h^{ab} = \delta g^{ab}$. Na equação acima, os termos com derivada covariante, na integral de volume, consistem em termos de superfície⁵,

$$\int d^4x \sqrt{-g} \nabla_a \nabla_b h^{ab} - \int d^4x \sqrt{-g} \nabla^2 h^a_a = 0. \quad (2.28)$$

Essa integral de superfície é nula pois, nas bordas do volume de integração, a variação (2.26) é zero. A variação do escalar de Ricci assume, portanto, a forma

$$\delta R = -h^{ab}R_{ab}. \quad (2.29)$$

Usando os resultados (2.26), (2.27) e (2.29) com $\delta S = 0$, podemos escrever

⁵Pelo teorema de Gauss, $\int_{\Omega} \partial_{\mu} A^{\mu} d^4x = \oint_{\partial\Omega=\sigma} A^{\mu} d\sigma_{\mu}$.

$$\int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{16\pi} \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) \delta g_{\mu\nu} + \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g_{\mu\nu}} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \mathcal{L} \right) \delta g_{\mu\nu} \right\} = 0. \quad (2.30)$$

No primeiro termo, aparece o tensor de curvatura de Einstein

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R. \quad (2.31)$$

No segundo termo, temos o tensor energia-momento de Hilbert, proveniente da variação da ação da matéria em relação ao tensor métrico:

$$-\frac{1}{2} T^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{mat}}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g_{\mu\nu}} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (2.32)$$

Portanto, as equações (2.30) geradas pela ação, equivalente às equações de Euler-Lagrange no espaço de Riemann curvo, são as equações de Einstein

$$G^{\mu\nu} = 8\pi T^{\mu\nu}. \quad (2.33)$$

As equações de campo de Einstein descrevem a interação gravitacional como resultado da curvatura do espaço-tempo, devido à matéria e energia. Do lado esquerdo de 2.33, temos o tensor de Einstein, que descreve a geometria do espaço-tempo, cuja curvatura é caracterizada pelo tensor de Riemann. Do lado direito, identificamos o setor da matéria, dado pelo tensor

energia-momento de Hilbert, obtido através da lagrangiana do respectivo campo. Essa equação aparece pela primeira vez em 1915, no artigo *Die Feldgleichungen der Gravitation* (As equações de campo da gravitação). Pouco tempo depois, percebe-se que a equação (2.33), quando aplicada, descreve um universo em expansão, que não havia sido observado na época. Para corrigir esse "erro", um termo extra foi adicionado à ação do campo gravitacional pelo próprio Einstein, em 1917, $\frac{1}{8\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \Lambda$. Este termo contém a constante cosmológica Λ , que entra na equação para compensar o fator responsável pela expansão. Portanto, a equação que descrevesse um universo estático tomaria a forma

$$G^{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T^{\mu\nu}. \quad (2.34)$$

Em 1929, Hubble descobre que o universo não é estático, mas sim em expansão. Isso tornou a constante Λ desnecessária; em 1999, observações cosmológicas apontaram que o universo, além de se expandir, o faz de modo acelerado. Esta e outras observações fizeram com que se retomasse o estudo da constante cosmológica. Atribuiu-se a Λ diversos significados. Quando implementada na ação gravitacional, pode ser vista como um tipo de fluido com pressão negativa que, aparentemente, permeia o universo. Este fluido é conhecido como energia escura. Outra forma de interpretar Λ é simplesmente considerá-la uma constante gravitacional fundamental. Essa duas visões devem levar ao mesmo resultado: um universo em expansão acelerada.

Um problema ocorre quando tentamos incluir considerações da teoria quântica de campos na gravitação de Einstein. Sabemos que os vácuos dos campos de radiação e matéria

têm densidade de energia associada. Através do efeito Casimir para um universo com fronteiras, podemos avaliar a relevância da energia do vácuo para as equações de Einstein. Segundo as equações de campo de Einstein (2.34), a energia de vácuo já teria colapsado o universo. Este é o conhecido "problema da constante cosmológica". De alguma forma, ou a energia do vácuo não interage com o campo gravitacional ou existe um constante oposta a Λ que compensa exatamente esse efeito catastrófico.

Pelo que sabemos sobre energia e matéria escura, o universo seria constituído de 70% de energia escura, 25% de matéria escura e apenas 5% de matéria bariônica ordinária. Levando em consideração que a matéria escura ainda não foi detectada e a energia escura ainda não é muito bem entendida, é plausível que a gravitação de Einstein seja modificada para corrigir esses problemas, ou até mesmo substituída. Como veremos na subseção 2.3.3, Mannheim e Kazanas propõem uma solução: a imposição da invariância conforme local. Com a imposição dessa simetria, o problema da constante cosmológica desaparece, juntamente com outros problemas que a teoria traz. Obviamente, esta é uma das soluções propostas na literatura. Muitos autores propuseram outra teoria alternativa para a gravitação com o intuito de contornar as dificuldades apontadas.

2.3 Gravitação Conforme

Nesta seção, estudaremos as alterações que devem ser feitas na teoria gravitacional de Einstein, para obtermos simetria

conforme. Partindo dos conceitos estudados até esta seção, aplicaremos a TC aos tensores de curvatura no espaço de Riemann e verificar que para obtermos simetria conforme, precisamos substituir a conexão afim, dada pelo símbolo de Christoffel, pela conexão de Weyl. Estudaremos como esta substituição alteram os tensores de curvatura. Verificaremos que mesmo com a conexão de Weyl, a ação de Einstein-Hilbert não tem simetria conforme, em virtude disso investigaremos possíveis substitutos para essa ação.

2.3.1 Espaço de Riemann

O espaço de Riemann é dotado de uma métrica $g_{\mu\nu}$ que tende, na geodésica local, à métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ com assinatura $(+, -, -, -)$. O tensor $g_{\mu\nu}$ deve ainda ser simétrico e ter determinante g não nulo.

A TC do tensor métrico, como vimos na seção anterior, é

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \Omega^2 g_{\mu\nu} \quad \text{e} \quad g^{\mu\nu} \rightarrow \frac{1}{\Omega^2} g^{\mu\nu}.$$

Como consequência imediata, o determinante da métrica também se transforma. De fato, o determinante da métrica pode ser escrito

$$g = \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} g_{0\mu} g_{1\nu} g_{2\alpha} g_{3\beta},$$

donde, dada a TC da métrica, se obtém

$$g \rightarrow \Omega^8 g.$$

Naturalmente, o valor do expoente de Ω depende da dimen-

são do espaço-tempo usado. Para um espaço de n dimensões, teremos $g \rightarrow \Omega^{2n}g$. Todos os resultados deste capítulo serão dados para 4 dimensões. No apêndice, o leitor encontrará os resultados generalizados para n dimensões.

No espaço de Riemann, a conexão afim da derivada covariante é dada pelo símbolo de Christoffel⁶ $\Gamma_{\mu\lambda}^{\nu}$, (2.23):

$$\nabla_{\mu}V^{\nu} = \partial_{\mu}V^{\nu} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu}V^{\lambda}.$$

É fácil mostrar, a partir da própria definição do símbolo de Christoffel, que a derivada covariante do tensor métrico é nula no espaço de Riemann:

$$\nabla_{\alpha}g_{\mu\nu} = 0.$$

Veremos, na seção 2.3.2, que isso não é sempre verdade no espaço de Weyl.

Fazendo uma TC no símbolo de Christoffel, que depende da métrica e suas derivadas, vem

$$\Gamma_{\mu\lambda}^{\nu} \rightarrow \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu} + \frac{1}{\Omega} \left(\delta_{\mu}^{\nu} \nabla_{\lambda} \Omega + \delta_{\lambda}^{\nu} \nabla_{\mu} \Omega - g_{\mu\lambda} g^{\nu\alpha} \nabla_{\alpha} \Omega \right).$$

Para facilitar os cálculos seguintes, vamos reescrever a equação acima definindo um novo tensor $s_{\mu} = \nabla_{\mu} \ln \Omega$. Como a derivada covariante depende da conexão e muitos dos tensores que transformaremos a seguir são definidos pela derivada covariante, é importante deixar a TC da conexão afim a mais

⁶A derivada covariante de um vetor contravariante tem conexão afim $\Gamma_{\mu\lambda}^{\nu}$. De modo geral, $\Gamma_{\mu\lambda}^{\nu} \neq \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu}$, a menos que a conexão afim seja simétrica nesses índices. Tal distinção será feita quando necessário.

compacta possível.

$$\delta\Gamma_{\mu\lambda}^{\nu} = \delta_{\mu}^{\nu}s_{\lambda} + \delta_{\lambda}^{\nu}s_{\mu} - g_{\mu\lambda}s^{\nu}.$$

Seguindo essa notação, a TC da derivada covariante de um vetor toma a forma

$$\nabla_{\nu}V^{\mu} \rightarrow \nabla_{\nu}V^{\mu} + \delta_{\nu}^{\mu}V^{\alpha}s_{\alpha} + V^{\mu}s_{\nu} - V_{\nu}s^{\mu}. \quad (2.35)$$

Podemos também calcular como se transforma a derivada covariante de um tensor $T^{\mu\nu}$ de rank 2 e simétrico entre os índices. Como resultado, temos

$$\nabla_{\nu}T^{\mu\nu} \rightarrow \nabla_{\nu}T^{\mu\nu} + 6s_{\nu}T^{\mu\nu} - s^{\mu}T^{\nu}_{\nu}.$$

Na relatividade geral, partindo da métrica e da derivada covariante, podemos definir alguns tensores que caracterizam a curvatura do espaço-tempo, o tensor de Riemann sendo o principal deles. O tensor de Riemann pode ser definido através do símbolo de Christoffel:

$$R^{\alpha}_{\sigma\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma} - \partial_{\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\gamma}\Gamma^{\gamma}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\gamma}\Gamma^{\gamma}_{\mu\sigma}.$$

É interessante analisar como este tensor muda quando fazemos uma TC. Os cálculos desta seção podem ser encontrados no apêndice C. Lá, calculamos não só a TC do tensor de Riemann $R^{\alpha}_{\beta\mu\nu}$, como também de sua contração, conhecida como tensor de Ricci, $R_{\mu\nu}$, e do seu traço R , chamado de escalar de Ricci.

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu}.$$

Como resultado, obtemos para o tensor de Riemann

$$R_{\mu\beta\nu}^{\alpha} \rightarrow R_{\mu\beta\nu}^{\alpha} + \left(\delta_{\beta}^{\alpha} s_{\mu} s_{\nu} + g_{\mu\nu} s^{\alpha} s_{\beta} + \delta_{\nu}^{\alpha} \nabla_{\beta} s_{\mu} + g_{\beta\mu} (\delta_{\nu}^{\alpha} s_{\lambda} s^{\lambda} + \nabla_{\nu} s^{\alpha}) - \beta \leftrightarrow \nu \right),$$

e, para o tensor de Ricci,

$$R_{\mu\nu} \rightarrow R_{\mu\nu} + 2(s_{\mu} s_{\nu} - \nabla_{\mu} s_{\nu}) - g_{\mu\nu} (2s_{\alpha} s^{\alpha} + \nabla_{\alpha} s^{\alpha}).$$

Por fim, para calcularmos o escalar de Ricci conforme, basta contraí-lo com a métrica conforme $\Omega^{-2} g^{\alpha\beta}$, resultando em

$$R \rightarrow \frac{R}{\Omega^2} - \frac{6}{\Omega^2} (s_{\alpha} s^{\alpha} + \nabla_{\alpha} s^{\alpha}) \quad (2.36)$$

Com o tensor de Ricci e seu escalar em mãos, podemos calcular o tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ conforme. Vimos que as equações de Einstein, obtidas em 2.2.5, dependem tanto do tensor de Einstein quanto do tensor energia-momento.

Aplicando as transformações já calculadas a (2.31), obtemos

$$G_{\mu\nu} \rightarrow G_{\mu\nu} + 2(s_{\mu} s_{\nu} - \nabla_{\mu} s_{\nu}) + g_{\mu\nu} (s_{\alpha} s^{\alpha} + 2\nabla_{\alpha} s^{\alpha}).$$

Como podemos observar, o tensor de Einstein não é invariante sob TC, o que implica em um tensor energia-momento que também não é invariante por essa transformação. Nos próximos capítulos, quando calcularmos a TC das equações de campo para partículas com spin zero, 1/2 e um, também

calcularemos o tensor energia-momento de Hilbert para cada um deles, analisando a TC de cada caso particular. Por ora, vamos nos concentrar em estudar a mudança nos tensores de curvatura sob uma TC. Para finalizarmos a análise dos tensores de curvatura no espaço de Riemann, precisamos definir um último tensor, o tensor de curvatura de Weyl.

Weyl, em 1918, percebendo que o tensor de Riemann não é invariante sob TC, propõe um tensor invariante que caracterizasse a curvatura do espaço-tempo, com todas as propriedades e simetrias do tensor de Riemann. O tensor de curvatura de Weyl $C_{\beta\mu\nu}^{\alpha}$ é definido subtraindo do tensor de Riemann todas as possíveis contrações. Seu traço é, portanto, nulo. Essa propriedade se mostrará útil quando, na seção 2.3.3, estudarmos uma ação com simetria conforme.

O tensor de Weyl assim se escreve:

$$C_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\alpha\beta\mu\nu} + \frac{1}{6}R(g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu}) - \frac{1}{2}(g_{\alpha\mu}R_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu}R_{\beta\mu} - g_{\beta\mu}R_{\alpha\nu} + g_{\beta\nu}R_{\alpha\mu}), \quad (2.37)$$

onde $C_{\alpha\beta\mu\nu} = g_{\alpha\sigma}C_{\beta\mu\nu}^{\sigma}$. Também calculamos a TC do tensor de Weyl. Como esperado, sua variação é nula:

$$\delta C_{\beta\mu\nu}^{\alpha} = 0.$$

Sabemos que, quando o tensor de curvatura de Riemann é nulo, é sempre possível encontrar um sistema de coordenadas em que a métrica é a de Minkowski. De forma equivalente, quando o tensor de curvatura de Weyl é nulo, é possível es-

crever a métrica como a de Minkowski a menos de um fator de escala: $g_{\mu\nu} = \Omega(x)^2 \eta_{\mu\nu}$.

Para estudarmos o modo como a TC altera a curvatura, podemos considerarmos uma TC que aplicada em um espaço-tempo plano gera um espaço-tempo plano. Como já comentamos anteriormente, o tensor de Riemann caracteriza a curvatura do espaço-tempo; no caso, para um espaço-tempo plano, temos o tensor de Riemann nulo. Como consequência, o escalar de Ricci também é nulo, o que facilita muito os cálculos. Pela equação (2.36), com $R = R^c = 0$, obtemos o vínculo

$$s_\alpha s^\alpha + \nabla_\alpha s^\alpha = 0, \quad (2.38)$$

onde a derivada covariante é equivalente à derivada convencional, pois, quando se trata de um espaço plano, é sempre possível fazer uma transformação na métrica de forma que suas componentes sejam constantes e, assim, o símbolo de Christoffel é nulo.

Deste modo, obtemos uma gama de possíveis s_μ que obedecem à equação (2.38). Um resultado possível, e por sinal o mais trivial, é $s_\mu = \nabla_\mu \ln \Omega = 0$, e portanto Ω é contante. Na subseção 2.1.5 estudamos o grupo conforme. Este possui um subgrupo, denominado grupo conforme especial C_o , que tem todas as propriedades que estudamos do grupo C , porém está restrito ao espaço-tempo de Minkowski. No grupo C_o temos a dilatação com esses atributos, levando um espaço plano a outro espaço plano, com um fator de escala constante $\Omega = e^\omega$.

De forma mais geral, para o grupo C_o , temos a função de escala dada por $\Omega = e^{\omega(x)}$ e o tensor métrico é o de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$. Portanto, a métrica conforme fica

$$g_{\mu\nu}^c(x) = e^{2\omega(x)}\eta_{\mu\nu}.$$

Para esse grupo a dependência do tensor métrico conforme no espaço-tempo está completamente ligada ao fator de escala.

As transformações que fizemos até o presente foram transformações finitas da métrica, porém, na maioria das vezes, lidamos com perturbações da métrica e, portanto, com transformações infinitesimais

$$\begin{aligned}g_{\mu\nu} &\rightarrow (1 + \epsilon)g_{\mu\nu}, \\g^{\mu\nu} &\rightarrow (1 - \epsilon)g^{\mu\nu}.\end{aligned}$$

A primeira mudança que ocorre é no determinante da métrica. Fazendo uma expansão em $(1 + \epsilon)^4$ desprezando potências maiores que ϵ , ficamos com

$$g \rightarrow (1 + 4\epsilon)g.$$

Os tensores de curvatura calculados anteriormente ficam da forma

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} &\rightarrow \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} + \frac{1}{2} \left(\delta_{\mu}^{\alpha} \nabla_{\nu} \epsilon + \delta_{\nu}^{\alpha} \nabla_{\mu} \epsilon - g_{\mu\nu} \nabla_{\alpha} \epsilon \right), \\
R_{\mu\beta\nu}^{\alpha} &\rightarrow R_{\mu\beta\nu}^{\alpha} + \frac{1}{2} \left(\delta_{\nu}^{\alpha} \nabla_{\beta} \nabla_{\mu} \epsilon - g_{\mu\nu} \nabla_{\beta} \nabla^{\alpha} \epsilon \right) - (\beta \leftrightarrow \nu), \\
R_{\mu\nu} &\rightarrow R_{\mu\nu} - \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} \epsilon - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla_{\alpha} \nabla^{\alpha} \epsilon, \\
R &\rightarrow R - 3 \nabla_{\alpha} \nabla^{\alpha} \epsilon, \\
G_{\mu\nu} &\rightarrow G_{\mu\nu} - \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} \epsilon + g_{\mu\nu} \nabla_{\alpha} \nabla^{\alpha} \epsilon.
\end{aligned}$$

Claramente, os tensores se simplificam muito com a transformação infinitesimal, porém continuam não invariantes.

Como já vimos na subseção 2.2.2, a geodésica descreve a trajetória de uma partícula. Para o caso de um espaço plano, a trajetória recai em uma linha reta, como esperado, já que não há efeitos de curvatura agindo sobre a partícula. Porém, quando fazemos uma TC no espaço, o fator de escala é dependente de x^{μ} . Assim, mesmo que o símbolo de Christoffel seja nulo, $\Omega(x)$ não é. Isto faz com que a equação de trajetória da partícula não seja mais uma reta, e sim uma função depende do fator de escala. A equação da geodésica (2.22) transformada fica

$$\frac{d^2 x^{\alpha}}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} + \left(2s_{\mu} \frac{dx^{\alpha}}{d\tau} \frac{dx^{\mu}}{d\tau} - s^{\alpha} g_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} \right) = 0, \quad (2.39)$$

a qual, evidentemente, é invariante conforme apenas no caso em que s_{μ} é nulo. Como vimos a subseção 2.1.5, isto ocorre no grupo C para uma dilatação do espaço-tempo, em que

Ω é contante. Fisicamente, é esperado que uma dilatação uniforme do espaço não altere a trajetória de uma partícula.

Poderíamos ter observado que a geodésica é alterada pela TC através da derivada covariante. Sendo v^μ o vetor tangente à linha mundo da partícula,

$$v^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}.$$

A equação da geodésica afim é dada por

$$v^\mu \nabla_\mu v^\nu = 0,$$

enquanto que a geodésica não-afim tem a forma

$$v^\mu \nabla_\mu v^\nu = \lambda v^\nu.$$

Como vimos, a TC da derivada covariante é dada pela equação (2.35) a qual, contraída com v^ν , fornece uma expressão alternativa para a TC da geodésica

$$v^\nu \nabla_\nu v^\mu = 0 \rightarrow v^\nu \nabla_\nu v^\mu + 2v^\mu v^\nu s_\nu - v^\nu v_\nu s^\mu = 0. \quad (2.40)$$

As equações (2.39) e (2.40) são equivalentes, e em ambas podemos ver que a TC não preserva geodésicas. Se considerarmos o caso em que temos um intervalo do tipo luz ($v^\mu v_\mu = 0$), podemos escrever a geodésica da forma não-afim, com

$$\lambda = 2v^\alpha s_\alpha. \quad (2.41)$$

O mesmo vale para as equações (2.39), com $g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = 0$. Na seção 2.1.5, encontramos a forma do fator de escala para cada uma das transformações infinitesimais do grupo C , e

podemos facilmente calcular λ para cada uma. As translações e as transformações de Lorentz, com $\Omega = 1$, e a dilatação, com Ω contante, têm $s_\mu = 0$ e $\lambda = 0$, e portanto preservam a geodésica afim da partícula. Para o caso da aceleração conforme, temos um fator de escala quadrático e λ é dado por

$$\lambda = 2v^\mu b_\mu (x^\nu b_\nu)^{-1},$$

não preservando a equação da geodésica.

2.3.2 Espaço de Weyl

Para preservarmos a simetria conforme, estamos interessados em quantidades que sob TC se comportem como tensores de Weyl, ou seja, com um fator de escala

$$T \rightarrow \Omega^{2n} T,$$

onde n é peso conforme. Dizemos, portanto, que um tensor que se transforma deste modo é do tipo W_n . Um exemplo de quantidades que se transformam dessa forma sob uma TC é o tensor métrico que, como vimos anteriormente, é um tensor com peso conforme 1.

É importante notar que quando um vetor covariante, B_μ , é do tipo W_o , não significa que seu dual contravariante é W_o . Lembrando que

$$B_c^\nu = g^{\mu\nu} B_\mu^c = \frac{B^\nu}{\Omega},$$

percebe-se que B^ν é do tipo W_{-1} . O mesmo ocorre para

tensores de demais *ranks*, por exemplos, se $F_{\mu\nu}$ é do tipo W_o , $F^{\mu\nu}$ é do tipo W_{-2} .

De acordo com a análise feita na subseção anterior, não é isso que ocorre com a conexão afim e os tensores de curvatura no espaço de Riemann. O símbolo de Christoffel quando sofre uma TC é alterado, ganhando um novo termo. Os tensores de curvatura, por serem escritos em função da conexão afim, também ganham termos, tornando impossível manter a simetria conforme.

A conexão afim é importante para definir a derivada covariante. Sendo assim, precisamos de uma conexão que torne a derivada covariante invariante sob TC. Weyl propõe uma tal conexão,

$$\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\mu} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} - \left(\delta_{\alpha}^{\mu} k_{\beta} + \delta_{\beta}^{\mu} k_{\alpha} - g_{\alpha\beta} k^{\mu} \right). \quad (2.42)$$

Para que seja invariante sob TC, é necessário que o vetor k_{μ} se transforme de acordo com

$$k_{\mu} \rightarrow k_{\mu} + s_{\mu} \quad \text{e} \quad k^{\mu} \rightarrow \frac{1}{\Omega^2} (k^{\mu} + s^{\mu}).$$

O espaço de Weyl se diferencia do espaço de Riemann pela conexão afim, se tornando invariante por TC. Isso torna o espaço de Weyl interessante para estudarmos grandezas físicas. Nos capítulos seguintes, quando fizermos uma TC nos campos, antes de transformarmos a métrica, transformaremos a derivada covariante do espaço de Riemann para a derivada covariante no espaço de Weyl, com a conexão dada por (2.42)

$$\bar{\nabla}_{\nu} V^{\mu} = \partial_{\nu} V^{\mu} + V^{\alpha} \bar{\Gamma}_{\nu\alpha}^{\mu}.$$

Essa alteração produz um resultado interessante quando

calculamos a derivada covariante do tensor métrico que passa a não ser mais nula

$$\bar{\nabla}_\mu g_{\alpha\beta} = 2k_\mu g_{\alpha\beta}.$$

É importante estudar qual o significado geométrico disso. O transporte paralelo visto na subseção 2.2.3 de um vetor contravariante sobre uma curva parametrizada por λ , dado pela equação (2.25), depende da derivada covariante. Portanto, no espaço de Weyl, o transporte paralelo das componentes contravariantes de um vetor não implica necessariamente que temos o transporte paralelo das componentes covariantes do mesmo vetor,

$$\begin{aligned} \frac{\bar{D}V_\mu}{d\lambda} &= \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \bar{\nabla}_\alpha (g_{\mu\nu} V^\nu) \\ &= 2V_\mu k_\alpha \frac{dx^\alpha}{d\lambda}, \end{aligned}$$

o que é diferente de zero, a não ser que k_μ seja nulo. Portanto, o transporte paralelo da norma V_μ , altera a própria norma,

$$\bar{D} \ln \sqrt{l_V^2} = k_\alpha dx^\alpha. \quad (2.43)$$

onde $\sqrt{l_V^2} = \sqrt{V^\mu V_\mu}$ é a norma do vetor V^μ .

Com esse resultado, aparentemente, o transporte de vetores altera sua magnitude, o que não é apenas estranho, mas nunca foi observado. Esta é exatamente a mesma situação da teoria falha de Weyl [15] para a Gravitação e o Eletromagnetismo, publicada em 1918. Neste trabalho, Weyl defende essa ideia dizendo que a formulação da geometria Riemanniana é

baseada no conceito de transferência-paralela (ou transporte paralelo) infinitesimal. Dados dois pontos, A e B, conectados por uma curva, podemos transferir um vetor de A a B ao longo dessa curva, mantendo o vetor paralelo a ele mesmo. No entanto, a transferência do vetor de A a B é, em geral, não integrável, isto é, o vetor obtido em B depende do caminho. A integrabilidade mantém-se no espaço euclidiano, na ausência de interação gravitacional. Assim, a geometria Riemanniana contém um elemento residual de geometria rígida, que é consequência da teoria ser construída a partir da geometria euclidiana. A métrica permite que a norma de dois vetores seja comparada, não apenas para vetores no mesmo ponto, mas em quaisquer dois pontos arbitrariamente separados.

Segundo Fulton et al [16], a invariância conforme da teoria implica que a comparação de comprimentos em pontos diferentes do espaço-tempo, em princípio, não tem sentido. Podemos apenas comparar comprimentos infinitesimais no mesmo ponto. Devido à natureza invariante da velocidade da luz, a única comparação que pode ser feita em pontos separados por uma distância finita, deve envolver o envio de sinais de luz.

Por fim, é interessante escrever k_μ de uma forma mais fundamental.

Definição de k_μ

A conexão afim deve depender apenas do tensor métrico e de suas derivadas. Isso deve ser válido não apenas no espaço de Riemann, mas no espaço de Weyl e, portanto, k_μ deve

também depender apenas da métrica e suas derivadas. Podemos encontrar k_μ fazendo uma contração da conexão afim no espaço de Weyl,

$$\bar{\Gamma}_\mu = \Gamma_\mu - 4k_\mu. \quad (2.44)$$

Vamos começar por escrever a contração do símbolo de Christoffel de uma forma mais fundamental

$$\Gamma_\mu = \frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}\partial_\mu g_{\alpha\lambda}. \quad (2.45)$$

No apêndice [A.1](#) está a demonstração que nos permite escrever

$$g^{\alpha\lambda}\partial_\mu g_{\alpha\lambda} = \partial_\mu \ln g.$$

Substituindo a equação acima em [\(2.45\)](#) ficamos com

$$\Gamma_\mu = \partial_\mu \ln \sqrt{g}. \quad (2.46)$$

Com isso a equação [\(2.44\)](#) pode ser reescrita como

$$\bar{\Gamma}_\mu = \partial_\mu \ln \sqrt{g} - 4k_\mu. \quad (2.47)$$

Usando propriedades da derivada covariante de uma densidade tensorial apresentadas no apêndice [B](#), sabemos que

$$\bar{\nabla}_\mu g = \partial_\mu g - 2g\bar{\Gamma}_\mu \quad \implies \quad \bar{\Gamma}_\mu = \partial_\mu \ln \sqrt{-g} - \bar{\nabla}_\mu \ln \sqrt{-g} \quad (2.48)$$

Substituindo a equação acima em [\(2.47\)](#), chegamos em uma expressão mais fundamental para k_μ

$$k_\mu = \frac{1}{4} \bar{\nabla}_\mu \ln \sqrt{-g}.$$

Como esperado, k_μ depende da métrica e é apenas válido no espaço de Weyl⁷.

Como vimos no início dessa seção, k_μ se transforma como $k_\mu + s_\mu$. Agora que sabemos como k_μ é definido em relação à métrica, podemos verificar a TC⁸,

$$\begin{aligned} k_\mu^c &= \frac{1}{4} \bar{\nabla}_\mu \ln \left(\Omega^4 \sqrt{-g} \right) \\ &= \frac{1}{4} \bar{\nabla}_\mu \ln \sqrt{-g} + \bar{\nabla}_\mu \ln \Omega \\ &= k_\mu + s_\mu, \end{aligned} \tag{2.49}$$

resultado que está de acordo com o esperado.

Tensores de Curvatura com Conexão de Weyl

Alteramos a conexão afim para que esta fosse invariante por TC, ficando agora da forma (2.42). Podemos reescrever os tensores de curvatura com a conexão afim de Weyl

⁷ $\nabla_\mu g$ é nulo no espaço de Riemann.

⁸Notando que $g \rightarrow \Omega^{2d} g$, onde d é o número de dimensões.

$$\begin{aligned}
\bar{R}_{\mu\beta\nu}^{\alpha} &= R_{\mu\beta\nu}^{\alpha} + [\delta_{\beta}^{\alpha} k_{\mu} k_{\nu} + g_{\mu\nu} k^{\alpha} k_{\beta} + g_{\beta\mu} (\delta_{\nu}^{\alpha} k_{\lambda} k^{\lambda} - \nabla_{\nu} k^{\alpha})] \\
&\quad - (\beta \leftrightarrow \nu), \\
\bar{R}_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} + 2(k_{\mu} k_{\nu} + \nabla_{\mu} k_{\nu}) - g_{\mu\nu} (2k_{\alpha} k^{\alpha} - \nabla_{\alpha} k^{\alpha}), \\
\bar{R} &= R - 6(k_{\alpha} k^{\alpha} - \nabla_{\alpha} k^{\alpha}), \\
\bar{G}_{\mu\nu} &= G_{\mu\nu} + 2(k_{\mu} k_{\nu} + \nabla_{\mu} k_{\nu}) + g_{\mu\nu} (k_{\alpha} k^{\alpha} - 2\nabla_{\alpha} k^{\alpha}).
\end{aligned}$$

O tensor de Riemann, de Ricci e até mesmo o de Einstein são invariantes sob TC quando utilizada a conexão de Weyl; porém, o escalar de Ricci, por precisar de uma contração a mais, se transforma com peso conforme -1

$$\bar{R} \rightarrow \frac{\bar{R}}{\Omega^2}.$$

Como veremos na próxima subseção, isso afeta a ação de Einstein-Hilbert. O tensor de Einstein, mesmo dependendo do escalar de Ricci, não é afetado, pois este tem peso conforme inverso ao do tensor métrico, pelo qual este está multiplicado.

2.3.3 Ação Conforme

A ação de Einstein-Hilbert foi proposta inicialmente por Hilbert em 1915. A escolha da dependência da ação no escalar de Ricci parecia ser óbvia. Este é o único escalar no formalismo da relatividade geral que possui curvatura espaço-temporais intrínseca, além de ser invariante sob transformações do grupo de Poincaré. Dentre os tensores estudados na época, este parece ser o mais plausível. Porém, como já vimos em 2.3.1, o

escalar de Ricci não tem simetria conforme. Uma mudança imediata seria usar o escalar de Ricci com a conexão de Weyl

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \bar{R}.$$

Porém, como vimos na subseção 2.3.2, o escalar de Ricci se transforma com peso -1 , enquanto o determinante da métrica se transforma com peso conforme 4, e como consequência, $\sqrt{-g} \rightarrow \Omega^4 \sqrt{-g}$. Quando fazemos uma variação em x^μ nessa ação quando transformada conformemente, ficamos com um termo dependente de $\delta\Omega(x)$, dado por

$$\begin{aligned} \delta S^c &= \int d^4x \delta \left(\Omega^2 \sqrt{-g} \bar{R} \right) \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \Omega^2 \left(2\bar{R} \frac{\delta\Omega}{\Omega} + \frac{1}{2} \bar{R} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} + \delta \bar{R} \right). \end{aligned}$$

Por envolver um termo com dependência em $\delta\Omega(x)$, sendo $\Omega(x)$ uma função arbitrária de x^μ , essa ação não tem simetria conforme.

Existem diversas propostas para uma ação com simetria conforme, muitas delas simplesmente tentam modificar a ação de Einstein-Hilbert para torná-la conforme. A ação que estudaremos nesta seção tem o intuito de substituir completamente a ação de Einstein-Hilbert. Weyl, como vimos na subseção 2.3.1, propôs um tensor de curvatura $C_{\alpha\beta\mu\nu}$ que possui todas as propriedades e informações sobre a curvatura do espaço-tempo que o tensor de Riemann, com a vantagem de ter traço nulo e ser invariante por transformações do grupo conforme. A ação proposta por Weyl é da forma

$$\begin{aligned}
S &= \frac{-1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} C_{\alpha\beta\mu\nu} C^{\alpha\beta\mu\nu} \\
&= \frac{-1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} C_{\beta\mu\nu}^\alpha C_{\sigma\lambda\delta}^\rho g_{\alpha\rho} g^{\beta\sigma} g^{\mu\lambda} g^{\nu\delta}. \quad (2.50)
\end{aligned}$$

Na equação acima, sabemos que o tensor de Weyl $C_{\beta\mu\nu}^\alpha$ é invariante por TC; a diferença dessa ação é que os tensores métricos que estão contraindo o tensor de Weyl se transformam de forma inversa a $\sqrt{-g}$, quando em 4 dimensões. Portanto, essa ação tem simetria conforme.

É importante notar que, se queremos uma ação com simetria conforme, um termo do tipo $\int d^4x \sqrt{-g} \Lambda$ não pode ser adicionado à ação (2.50), pois esse termo tem peso conforme 2.

Deste ponto em diante, podemos tomar dois caminhos diferentes para encontrar a equação de movimento para esta ação. Dada uma variação em x^μ , podemos calcular a variação desta ação dada a definição do tensor de Weyl (2.37). O resultado obtido é a equação de Bach

$$(2\nabla_\beta \nabla_\alpha - R_{\alpha\beta}) C^{\mu\alpha\nu\beta} = \kappa T^{\mu\nu}. \quad (2.51)$$

O termo com o tensor energia-momento $T^{\mu\nu}$ vem da ação da matéria (??), já calculado na subseção 2.2.5. Uma outra abordagem, mas que produz um resultado compatível com a equação acima, envolvendo a simplificação da ação quadrática de Weyl,

$$C_{\alpha\beta\mu\nu} C^{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\alpha\beta\mu\nu} R^{\alpha\beta\mu\nu} - 2R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} + \frac{1}{3} R^2.$$

Da expressão acima, podemos subtrair o termo de Gauss-Bonnet

$$\sqrt{-g}(R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu} - 4R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} + R^2).$$

Segundo o teorema de Gauss-Bonnet, a integral dessa quantidade é um invariante topológico e como tal não se altera sob variações infinitesimais, devendo ser um divergente total. A ação conforme simplifica-se a

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} R^2 \right).$$

Fazendo um variação $g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$ nesta ação ficamos com

$$\begin{aligned} \delta S = \int d^4x \sqrt{-g} & \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left(R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} R^2 \right) \delta g_{\mu\nu} \right. \\ & \left. + 2R^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} - 2R^\nu_\alpha R^{\mu\alpha} \delta g_{\mu\nu} - \frac{2}{3} R \delta R \right], \end{aligned} \quad (2.52)$$

onde o termo quadrático do tensor de Ricci separa-se em dois termos,

$$\begin{aligned} \delta \left(R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \right) &= \delta \left(R_{\alpha\beta} R_{\gamma\sigma} g^{\alpha\gamma} g^{\beta\sigma} \right) \\ &= 2R^{\alpha\beta} \delta R_{\alpha\beta} - 2R^{\alpha\beta} R^\gamma_\beta \delta g_{\alpha\gamma}, \end{aligned} \quad (2.53)$$

e o termo quadrático do escalar de Ricci tem a variação dada simplesmente por $\delta R^2 = 2R\delta R$. Para não sobrecarregar em demasia a notação, vamos considerar que a variação infinite-

simal seja tal que $g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$, onde $\delta g_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$. No apêndice (A) fizemos os cálculos referentes à variação do tensor métrico e do tensor de Riemann. O resultado obtido é

$$\begin{aligned}\delta(\sqrt{-g}) &= \frac{1}{2}\sqrt{-g}h^\alpha_\alpha, \\ \delta R_{\alpha\beta} &= \nabla_\gamma \nabla_{(\alpha} h^\sigma_{\beta)} - \frac{1}{2} \left(\nabla^2 h_{\alpha\beta} + \nabla_\beta \nabla_\alpha h^\gamma_\gamma \right), \\ \delta R &= -h^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} + \nabla_\alpha \nabla_\beta h^{\alpha\beta} - \nabla^2 h^\gamma_\gamma.\end{aligned}$$

Um cálculo semelhante a esse foi feito na subseção 2.2.5, onde encontramos as equações de campo de Einstein através da ação gravitacional de Einstein-Hilbert. O cálculo em questão tem um dificuldade a mais, pois nas equações de Einstein excluimos os termos com derivada covariante por serem termos de superfície. Aqui, esses termos estão contraídos com outros tensores, por isso precisamos calcular $R^{\alpha\beta} \delta R_{\alpha\beta}$ e $R \delta R$. Para ambos os casos, basta fazer duas integrações por partes para liberarmos a variação $\delta g_{\mu\nu}$,

$$\begin{aligned}R^{\nu\alpha} \delta R_{\nu\alpha} &= \frac{1}{2} \left(2\nabla_\alpha \nabla^\mu R^{\alpha\nu} - \nabla^2 R^{\mu\nu} - \nabla_\alpha \nabla_\beta R^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} \right) \delta g_{\mu\nu}, \\ R \delta R &= \left(-R R^{\mu\nu} + \nabla^\nu \nabla^\mu R - g^{\mu\nu} \nabla^2 R \right) \delta g_{\mu\nu}.\end{aligned}$$

Substituindo as equações acima em (2.52) e impondo $\delta S = 0$, ficamos com uma equação de movimento para o vácuo

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}g^{\mu\nu} \left(R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}R^2 \right) + 2\nabla_\alpha \nabla^\mu R^{\alpha\nu} - \nabla^2 R^{\mu\nu} - 2R^\nu_\alpha R^{\mu\alpha} \\ & - \nabla_\alpha \nabla_\beta R^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} - \frac{2}{3} \left(-RR^{\mu\nu} + \nabla^\nu \nabla^\mu R - g^{\mu\nu} \nabla^2 R \right) = 0. \end{aligned}$$

Usando a contração da identidade de Bianchi $\nabla_\beta R^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\nabla^\alpha R$, conseguimos simplificar o quinto termo com o último

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}g^{\mu\nu} \left(R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}R^2 \right) - \nabla^2 \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{6}g^{\mu\nu} R \right) \\ & + 2\nabla_\alpha \nabla^\mu R^{\alpha\nu} - \frac{2}{3}\nabla^\nu \nabla^\mu R - 2R^\nu_\alpha R^{\mu\alpha} + \frac{2}{3}RR^{\mu\nu} = 0. \end{aligned}$$

Este resultado concorda com os resultados obtidos na literatura. Dzhunushaliev e Schmidt [26] obtêm o mesmo resultado e Mannheim [27] um resultado com o sinal diferente, que surge devido a uma convenção, embora ambas equações possuam a mesma interpretação física. Essa equação de movimento, quando obtida junto com a ação da matéria, leva a equações semelhantes às equações de campo de Einstein,

$$\alpha_g W^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}, \quad (2.54)$$

onde α_g é uma constante e $W^{\mu\nu}$ é dado por

$$\begin{aligned} W^{\mu\nu} = & \frac{1}{2}g^{\mu\nu} \left(R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}R^2 \right) - \nabla^2 \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{6}g^{\mu\nu} R \right) \\ & + 2\nabla_\alpha \nabla^\mu R^{\alpha\nu} - \frac{2}{3}\nabla^\nu \nabla^\mu R - 2R^\nu_\alpha R^{\mu\alpha} + \frac{2}{3}RR^{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Este tensor faz o mesmo papel que o tensor de Einstein (2.31) na equação (2.33), ou seja, carrega a informação sobre a geometria do espaço-tempo. Além disso, a métrica de Schwarzschild é solução exata desta equação na região $T^{\mu\nu} = 0$. Mannheim[28], em 2016, mostrou que próximo a uma estrela (o sistema solar, por exemplo) recupera-se a gravitação newtoniana. Porém, para grandes distâncias, as equações se distinguem. Explicando a rotação anômala das galáxias sem recorrer à matéria escura.

Capítulo 3

Spin Zero

A equação dinâmica de Schrödinger tem um papel fundamental na mecânica quântica. Pode ser considerada como a lei dinâmica de partículas na mecânica quântica ondulatória, que tem como contrapartida as equações de movimento de Newton para sistemas clássicos de partículas. Ambas descrevem o movimento de partículas para velocidades muito menores que a da luz. Na teoria de Schrödinger, o Hamiltoniano de uma partícula sob a influência de um potencial externo $V(x)$ tem a forma de um operador

$$H = \frac{-1}{2m}\nabla^2 + V(x),$$

e a equação dinâmica correspondente é

$$\frac{1}{i}\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \frac{1}{2m}\nabla^2\Phi + V(x)\Phi = 0. \quad (3.1)$$

A solução dessa equação fornece uma função de estado $\Phi(x,t)$ que possibilita calcular valores esperados de observá-

veis físicos. Em particular, temos a densidade de probabilidade de encontrar uma partícula numa vizinhança dada por

$$\rho = \Phi^* \Phi = |\Phi|^2,$$

a qual satisfaz a equação de continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla^2 \mathbf{j} = 0,$$

onde a corrente de probabilidade é definido como

$$\mathbf{j} = \frac{1}{2mi} (\Phi^* \nabla \Phi - \Phi \nabla \Phi^*).$$

Entretanto, a equação de movimento de Schrödinger não está de acordo com a RE, não sendo invariante sob transformações de Lorentz. Sabemos que sob transformações de Lorentz,

$$\partial_\mu \rightarrow \Lambda_\mu^\nu \partial_\nu, \quad \Phi'(x') = \Phi(x), \quad x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu.$$

A equação (3.1) para uma partícula livre claramente não se transforma dessa forma

$$i \frac{\partial \Phi(x)}{\partial t} = -\frac{1}{2m} \nabla^2 \Phi(x) \quad \not\rightarrow \quad i \frac{\partial \Phi'(x')}{\partial t'} = -\frac{1}{2m} \nabla'^2 \Phi'(x');$$

ao invés de manter a forma. A mesma coisa ocorre quando tentamos transformar a quadricorrente $j^\mu = (\rho, \mathbf{j})$

$$j^\mu \rightarrow \Lambda^\mu_\nu j^\nu.$$

A componente $j^o = \rho$ deveria se transformar de acordo com a equação acima, mas ao invés disso, como temos $\Phi'(x') = \Phi(x)$, ficamos com $\rho' = \rho$, o que não é válido.

A equação de Schrödinger (3.1) pode ser obtida formalmente a partir da relação clássica da energia

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(x), \quad (3.2)$$

pelo princípio da correspondência. O que não condiz com a RE, pois a relação de dispersão relativística envolvendo a energia e momento linear (para uma partícula livre) é

$$E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2, \quad (3.3)$$

e não a equação (3.2).

Neste capítulo, vamos estudar a equação de Klein-Gordon. Partimos da equação de Klein-Gordon no espaço-tempo de Minkowski, com métrica $\eta_{\mu\nu}$, generalizando-a para admitir uma interação gravitacional, com métrica $g_{\mu\nu}$. Para testarmos a invariância conforme da equação é necessário introduzir o espaço de Weyl, onde a derivada covariante é invariante sob TC. Observaremos que a equação é covariante se admitirmos uma mudança de escala na massa. Além de estudarmos a equação de movimento, é interessante estudar o tensor energia-momento (TEM) para um campo escalar e como é possível construir um TEM que condiz com uma teoria conforme.

3.1 Equação de Klein-Gordon

A equação que fornece a relação entre a energia e o momento relativística pode ser reescrita para o quadrimomento $p_\mu = (\frac{E}{c}, \mathbf{p})$,

$$E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2 \quad \Longrightarrow \quad p_\mu p^\mu = m^2. \quad (3.4)$$

Nessa notação, o princípio da correspondência assume a forma

$$p_\mu \rightarrow i\partial_\mu,$$

que quando aplicado na equação (3.4), obtem-se a equação de Klein-Gordon no espaço-tempo de Minkowski

$$\left(\partial_\mu \partial^\mu + m^2\right) \phi(x) = 0. \quad (3.5)$$

Essa equação de movimento pode ser obtida através da variação $\phi \rightarrow \phi + \delta\phi$ da densidade lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2. \quad (3.6)$$

Podemos imediatamente notar que a equação (3.5) é invariante sob transformações de Lorentz,

$$\left(\partial_\mu \partial^\mu + m^2\right) \phi(x) = 0 \quad \rightarrow \quad \left(\partial'_\mu \partial'^\mu + m^2\right) \phi'(x') = 0 \quad (3.7)$$

A solução da equação de Klein-Gordon livre é a onda plana

$$\phi(x) = N e^{ip^\mu x_\mu} \quad \Longrightarrow \quad p^\mu p_\mu = m^2,$$

que está de acordo com a equação (3.3). Portanto, diferentemente da equação de Schrödinger que só admite resultados para energias positivas, a equação de Klein-Gordon permite energias negativas. Este "problema" também é observado para as soluções da equação de Dirac, levando o mesmo a propor a antipartícula correspondente ao elétron, o pósitron. No capítulo (4), discutiremos com maior detalhe sobre a equação de Dirac.

A equação de continuidade pode ser obtida multiplicando a equação (3.5) por ϕ^* , e a equação de Klein-Gordon para ϕ^* por ϕ

$$\begin{aligned}\phi^* \partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi^* \phi &= 0, \\ \phi \partial_\mu \partial^\mu \phi^* + m^2 \phi \phi^* &= 0.\end{aligned}$$

Subtraindo as equações acima e manipulando o resultado, obtemos

$$\begin{aligned}0 &= \phi^* \partial_\mu \partial^\mu \phi - \phi \partial_\mu \partial^\mu \phi^* \\ &= [\partial_\mu (\phi^* \partial^\mu \phi) - \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi] - [\partial_\mu (\phi \partial^\mu \phi^*) - \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^*] \\ &= \partial_\mu (\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*) \\ &= \partial_\mu j^\mu\end{aligned}$$

onde a quadricorrente é dada por

$$\begin{aligned}j^\mu &= i(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*) \\ &= i\phi^* \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi.\end{aligned}$$

3.1.1 Equações de Klein-Gordon Através das Equações de Bargmann-Wigner

Existem diversas formas de se obter a equação de Klein-Gordon (KG). Uma dessas formas, a receita de Schrödinger para a equação relativística de energia, foi vista no início deste capítulo, porém esta não é a forma mais fundamental. Com o intuito de encontrar uma forma mais fundamental de introduzir a equação de KG, vamos fazer uma breve introdução à formulação de Bargmann-Wigner. Na mecânica quântica relativística, as equações de Bargmann-Wigner (BW) descrevem partículas livres de spin arbitrário s , que incluem tanto bósons (spins inteiros) quanto férmions (spins semi-inteiros). As funções de onda encontradas como soluções estão na forma de campos de multiespinores.

A construção de BW leva, através da equação de Dirac, a equações de campo para spins superiores. Através do operador $(i\gamma^\nu \partial_\nu + m)$ aplicado às equações de BW, podemos verificar que cada componente da função de onda ψ satisfaz a equação de Klein-Gordon. Não entraremos em detalhes da dedução das equações de BW, caso o leitor queira se aprofundar mais no assunto recomendamos a leitura do capítulo 15, *Wave Equations for Particles with Arbitrary Spins*, do livro *Relativistic Quantum Mechanics: Wave equation* do autor W. Greiner[29].

Para uma partícula livre, de spin s , as equações de BW são

$$\left. \begin{aligned} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)_a{}^{a'} \psi_{a'b\dots c}(x) &= 0, \\ (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)_b{}^{b'} \psi_{ab'\dots c}(x) &= 0, \\ &\vdots \\ (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)_c{}^{c'} \psi_{ab\dots c'}(x) &= 0. \end{aligned} \right\} 2s,$$

onde os índices em letra grega são índices tensoriais, enquanto os índices em letra latina são espinoriais. Entendendo o padrão dessas equações podemos reescrevê-las como

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)_{a_i}{}^{a'_i} \psi_{a_1\dots a'_i\dots a_{2s}}(x) = 0, \quad (3.8)$$

com $i = 1, \dots, 2s$.

A função de onda $\Psi(x)$ tem componentes

$$\psi_{a_1\dots a_{2s}}(x),$$

sendo um campo espinorial de 4 componentes de ordem $2s$. Assim, temos 4^{2s} componentes que, devido à simetria da função de onda, se reduzem à $2(2s + 1)$ componentes independentes. Na equação (3.8) os objetos γ^μ são as matrizes de Dirac. No próximo capítulo, voltaremos a sobre essas matrizes, mas por enquanto basta saber que são elementos de uma álgebra de Clifford e, portanto, seu anticomutador é dado por

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}. \quad (3.9)$$

Para obtermos a equação de Klein-Gordon basta atuarmos o operador $(i\gamma^\nu \partial_\nu - m)$ à esquerda da equação de BW

$$\begin{aligned} (i\gamma^\nu \partial_\nu + m)_{b_i}^{a_i} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)_{a_i}^{a'_i} \psi_{a_1 \dots a'_i \dots a_{2s}}(x) &= 0, \\ \left(-(\gamma^\nu \gamma^\mu)_{b_i}^{a_i} \partial_\nu \partial_\mu - m^2 \mathbb{I}_{b_i}^{a_i} \right) \psi_{a_1 \dots a'_i \dots a_{2s}}(x) &= 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Podemos escrever $\gamma^\nu \gamma^\mu$ como a soma do comutador e anticomutador

$$\gamma^\nu \gamma^\mu = \frac{1}{2} \{ \gamma^\mu, \gamma^\nu \} - \frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

Substituindo a equação acima em (3.10), ficamos com

$$\left(-\frac{1}{2} (\{ \gamma^\mu, \gamma^\nu \} - [\gamma^\mu, \gamma^\nu])_{b_i}^{a_i} \partial_\nu \partial_\mu - m^2 \mathbb{I}_{b_i}^{a_i} \right) \psi_{a_1 \dots a'_i \dots a_{2s}}(x) = 0. \quad (3.11)$$

Porém, como $\partial_\mu \partial_\nu$ é simétrico por troca de índices μ e ν , o comutador (que é antissimétrico) contraído com as derivadas é nulo, de modo que

$$\left(-\frac{1}{2} \{ \gamma^\mu, \gamma^\nu \} \partial_\nu \partial_\mu - m^2 \right)_{b_i}^{a_i} \psi_{a_1 \dots a'_i \dots a_{2s}}(x) = 0.$$

Substituindo o anticomutador pelo tensor métrico, como indica a equação (3.9), chegamos finalmente à equação de Klein-Gordon

$$\left(\eta^{\mu\nu} \partial_\nu \partial_\mu + m^2 \right)_{b_i}^{a_i} \psi_{a_1 \dots a'_i \dots a_{2s}}(x) = 0,$$

válida não só para campos escalares (spin zero) como também para spins quaisquer.

3.2 Equação de Klein-Gordon com Interação Gravitacional

Para considerar uma curvatura no espaço-tempo temos que passar da métrica de Minkowski para uma métrica no espaço curvo de Riemann $\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}$. Com isto, a derivada covariante faz o papel de derivada usual $\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu$, onde a derivada covariante, dada pela equação (2.24), tem a conexão dada pelo símbolo de Christoffel. A equação de Klein-Gordon com interação gravitacional assume a forma

$$\left(g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu + m^2\right)\phi = 0. \quad (3.12)$$

Poderíamos manter essa equação tal como foi escrita acima, mas é interessante desenvolver a derivada covariante para sabermos como a equação se distingue da equação de Klein-Gordon usual (3.5). Sabemos que a derivada covariante de uma função escalar não é nada mais que a derivada parcial; porém, quando aplicamos novamente a derivada covariante, temos

$$g^{\mu\nu}\nabla_\mu(\partial_\nu\phi) = g^{\mu\nu}\left(\partial_\mu\partial_\nu\phi - \partial_\alpha\phi\Gamma_{\mu\nu}^\alpha\right). \quad (3.13)$$

Na equação acima, podemos identificar que o termo com $g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ comparece na derivada covariante da métrica,

$$\nabla_\mu g^{\mu\alpha} = \partial_\mu g^{\mu\alpha} + g^{\mu\alpha}\Gamma_\mu + g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = 0.$$

Isolando $-g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ e substituindo $\Gamma_\mu = \partial_\mu \ln \sqrt{-g}$, ficamos com a expressão

$$-g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \partial_\mu g^{\mu\alpha} + g^{\mu\alpha} \frac{\partial_\mu \sqrt{-g}}{\sqrt{-g}};$$

substituindo a equação acima em (3.13),

$$g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\phi = g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi + \partial_\alpha\phi \left(\partial_\mu g^{\mu\alpha} + g^{\mu\alpha} \frac{\partial_\mu \sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} \right).$$

Podemos identificar a equação acima como o resultado de uma regra da cadeia de uma derivada ∂_μ

$$g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\phi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi).$$

Reescrevendo a equação de Klein-Gordon com o auxílio dessa expressão, chegamos a uma equação menos compacta que (3.12), mas equivalente,

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi) + m^2\phi = 0. \quad (3.14)$$

Podemos verificar que se voltarmos para um espaço-tempo plano com a métrica de Minkowski, teremos $\sqrt{-g} = 1$ e a derivada da métrica nula, $\partial_\mu g^{\mu\nu} = \partial_\mu \eta^{\mu\nu} = 0$. Assim, recuperamos a equação usual (3.5).

Na subsecção (2.2.5), derivamos as equações de campo de Einstein. Para o campo escalar, o lado direito da equação, referente ao campo de matéria, corresponde à lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2. \quad (3.15)$$

3.2.1 Equação de Klein-Gordon com Conexão de Weyl

Para testarmos a simetria conforme do campo escalar, precisamos substituir o símbolo de Christoffel pela conexão de Weyl (2.42). Portanto, na equação (3.12) fazemos a substituição $\nabla_\mu \rightarrow \bar{\nabla}_\mu$,

$$\left(g^{\mu\nu}\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu + m^2\right)\phi = 0. \quad (3.16)$$

Novamente poderíamos deixar a equação dessa forma e seguirmos em frente, mas estamos interessados em avaliar as diferenças entre a equação com conexão de Weyl e a que envolve o símbolo de Christoffel,

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu\phi &= g^{\mu\nu}\bar{\nabla}_\mu(\partial_\nu\phi) \\ &= g^{\mu\nu}\left(\partial_\mu\partial_\nu\phi - \partial_\alpha\phi\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha\right). \end{aligned}$$

Como a conexão de Weyl é dada pelo símbolo de Christoffel somado a um termo que depende de k_μ , podemos reescrever a equação acima como

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu\phi &= g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\phi + g^{\mu\nu}\partial_\alpha\phi\left(\delta_\mu^\alpha k_\nu + \delta_\nu^\alpha k_\mu - g_{\mu\nu}k^\alpha\right) \\ &= g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\phi - 2k^\alpha\partial_\alpha\phi. \end{aligned}$$

Portanto, a equação (3.16) é equivalente a

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) - 2k^\alpha \partial_\alpha \phi + m^2 \phi = 0. \quad (3.17)$$

A equação acima se distingue da equação (3.14) por um termo em k_μ , como esperado. Lembrando que $k_\mu = \frac{1}{4} \bar{\nabla}_\mu \ln \sqrt{-g}$, quando usamos a conexão dada pelo símbolo de Christoffel ao invés da conexão de Weyl temos $k_\mu = \frac{1}{4} \nabla_\mu \ln \sqrt{-g} = 0$, voltando à equação de Klein-Gordon (3.14). Porém, para calcular a TC da equação de Klein-Gordon é mais intuitivo manter a equação na forma (3.16)

$$(g^{\mu\nu} \bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\nu + m^2) \phi = 0,$$

pois a derivada covariante é um invariante conforme

$$\bar{\nabla}_\mu^c V^\nu = \bar{\nabla}_\mu V^\nu.$$

Como vimos na subseção (2.1.5), quando transformamos o campo escalar $\phi(x^\mu) \rightarrow \phi(x^\mu + \epsilon^\mu)$ o transformamos de acordo com os geradores do grupo, como mostra a equação (2.18). Porém, apesar do rótulo do campo se transformar, o campo em si permanece o mesmo. Portanto, não precisamos nos preocupar com esse termo. Finalmente, podemos fazer uma transformação conforme na equação de Klein-Gordon (3.16)

$$\begin{aligned} (g_c^{\mu\nu} \bar{\nabla}_\mu^c \bar{\nabla}_\nu^c + m^2) \phi &= 0 \\ \left(\frac{g^{\mu\nu}}{\omega^2} \bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\nu + m^2 \right) \phi &= 0. \end{aligned}$$

372. Equação de Klein-Gordon com Interação Gravitacional

Observamos na equação acima que, para que haja covariância conforme, seria necessário que a massa se transformasse conformemente $m \rightarrow m^c = m/\omega$. Para um campo escalar com massa nula, teríamos a equação

$$g^{\mu\nu} \bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\nu \phi = 0,$$

que é covariante sob TC.

3.2.2 Tensor Energia-Momento para o Campo Escalar

O tensor energia-momento de Hilbert para o campo de Klein-Gordon é obtido, como vimos na seção (2.2.5), pela variação da ação em relação ao tensor métrico (2.32), ou em termos da lagrangiana,

$$T^{\mu\nu} = -2 \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g_{\mu\nu}} - g^{\mu\nu} \mathcal{L}.$$

O primeiro passo para calcular $T^{\mu\nu}$, é calcular a variação da lagrangiana em relação à métrica. Como o campo ϕ não se altera sob variações da métrica, a variação da lagrangiana (3.15) é

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \delta g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi \\ &= -\frac{1}{2} \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi \delta g_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

O tensor energia-momento para o campo de Klein-Gordon fica

$$T^{\mu\nu} = \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left(\nabla_\alpha \phi \nabla^\alpha \phi - m^2 \phi^2 \right).$$

Com o procedimento da subseção anterior, obtemos o tensor energia momento com conexão de Weyl fazendo $\nabla_\mu \rightarrow \bar{\nabla}_\mu$. Novamente, para um campo escalar sem massa, teríamos um tensor energia momento covariante sob transformações conformes,

$$T_{\mu\nu} = \bar{\nabla}_\mu \phi \bar{\nabla}_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \bar{\nabla}_\alpha \phi \bar{\nabla}_\beta \phi. \quad (3.18)$$

Na CFT (*Conformal Field Theory*) um requisito para o tensor energia momento é possuir traço nulo. Isto decorre da necessidade de uma ação invariante sob TC. Se, na ação da matéria, fizermos uma perturbação $\delta g_{\mu\nu}$ podemos reescrevê-la como

$$\delta S = \int d^4x T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}. \quad (3.19)$$

Se a ação é conforme, então é invariante por dilatação,

$$\begin{aligned} x^\mu &\rightarrow \lambda x^\mu, \\ ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu &\rightarrow \lambda^2 g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \end{aligned}$$

onde $\lambda = e^\epsilon$. Para uma transformação infinitesimal $|\epsilon| \ll 1$, $\lambda^2 \simeq (1+2\epsilon)$. Podemos substituir na equação (3.19) a variação da métrica por $\delta g_{\mu\nu} = 2\epsilon g_{\mu\nu}$,

$$\delta S = \int d^4x T_\mu^\mu \epsilon.$$

3.2. Equação de Klein-Gordon com Interação Gravitacional

Porém, se a dilatação é uma simetria, precisamos ter $\delta S = 0$ e, portanto, o traço é nulo,

$$T^\mu_\mu = 0.$$

O tensor energia-momento para o campo escalar sem massa (3.18) claramente não tem traço nulo em $d = 4$ dimensões; na verdade, este tem traço nulo apenas para $d = 2$,

$$T^\mu_\mu = \nabla^\mu \phi \nabla_\mu \phi - \frac{d}{2} \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi.$$

Segundo Callan e Coleman (1970) [30], apenas quando consideramos a interação gravitacional todo significado físico emerge. Para isto podemos acoplar conformemente o campo escalar com a gravidade, substituindo a ação

$$S = \int d^d x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{16\pi} R + \mathcal{L}_{mat} \right]$$

por uma ação do tipo

$$S = \int d^d x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{16\pi} R - \xi \phi^2 R + \mathcal{L}_{mat} \right],$$

onde o parâmetro ξ permite um acoplamento mínimo. Em nosso caso, como queremos um acoplamento conforme, temos

$$\xi = \frac{d-2}{4(d-1)}. \quad (3.20)$$

Com uma variação da ação em relação ao campo, obtemos a equação de movimento

$$0 = \frac{\delta S}{\delta \phi} \implies (\partial_\alpha \partial^\alpha - \xi R) \phi = 0.$$

Para uma variação em relação à métrica, temos um resultado semelhante ao cálculo feito na subseção (2.2.5), quando derivamos as equações de campo de Einstein, exceto pelo novo termo dado por $\xi R \phi^2$,

$$\begin{aligned} \delta S_\xi &= -\xi \int d^d x \left[\delta \sqrt{-g} \phi^2 R + \sqrt{-g} \phi^2 \delta R \right] \\ &= -\xi \int d^d x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \phi^2 R \delta g_{\mu\nu} + \phi^2 \delta R \right]. \end{aligned}$$

No apêndice A fizemos os cálculos referentes à variação do tensor métrico e do tensor de Riemann. Da mesma forma que na subseção (2.3.3), precisamos efetuar duas integrações por partes para liberar os termos com $\delta g_{\mu\nu}$,

$$\begin{aligned} \delta R &= -\delta g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} + \nabla_\alpha \nabla_\beta \delta g^{\alpha\beta} - \nabla^2 (g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta}), \\ \phi^2 \delta R &= \left(-\phi^2 R_{\mu\nu} + \nabla_\nu \nabla_\mu \phi^2 - g_{\mu\nu} \nabla^2 \phi^2 \right) \delta g^{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Esse termo novo gera equações semelhantes às de Einstein (2.33),

$$(1 - \xi \phi^2) G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^\phi + \Delta T_{\mu\nu}^\phi,$$

onde $T_{\mu\nu}^\phi$ é tensor energia-momento usual para o campo escalar e $\Delta T_{\mu\nu}^\phi$ é a parte proveniente do novo termo na ação,

8.12. Equação de Klein-Gordon com Interação Gravitacional

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= T_{\mu\nu}^{\phi} + \Delta T_{\mu\nu}^{\phi} \\ &= \nabla_{\mu}\phi\nabla_{\nu}\phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla_{\alpha}\phi\nabla^{\alpha}\phi + \xi\left(g_{\mu\nu}\nabla_{\alpha}\nabla^{\alpha}\phi^2 - \nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\phi^2\right). \end{aligned}$$

Podemos calcular o traço da equação acima para verificar o valor de ξ para garantir que o traço seja nulo, para qualquer dimensão d ,

$$\begin{aligned} T_{\mu}^{\mu} &= \left(1 - \frac{d}{2}\right)\nabla_{\alpha}\phi\nabla^{\alpha}\phi + \xi(d-1)\nabla_{\alpha}\nabla^{\alpha}\phi^2 \\ &= \left(1 - \frac{d}{2}\right)\nabla_{\alpha}\phi\nabla^{\alpha}\phi + 2\xi(d-1)[\phi\nabla_{\alpha}\nabla^{\alpha}\phi + \nabla_{\alpha}\phi\nabla^{\alpha}\phi]. \end{aligned}$$

Porém, como a equação de Klein-Gordon com massa nula é $\nabla_{\alpha}\phi\nabla^{\alpha}\phi = 0$,

$$T_{\mu}^{\mu} = \left(1 - \frac{d}{2} + 2\xi(d-1)\right)\nabla_{\alpha}\phi\nabla^{\alpha}\phi = 0, \quad (3.21)$$

o que implica em um parâmetro de acoplamento mínimo

$$\xi = \frac{d-2}{4(d-1)}. \quad (3.22)$$

Para 4 dimensões, o parâmetro ξ , de acoplamento do campo escalar com a gravidade, é $\xi = 1/6$, o que produz um TEM consistente com a teoria conforme.

Capítulo 4

Spin 1/2

Nosso objetivo neste capítulo é definir a equação de Dirac estudando o modo como espinores se transformam através do grupo de Lorentz, além de aplicar a transformação conforme nesta equação para estudar quais as condições para obtermos invariância conforme.

4.1 Equação de Dirac

A relatividade especial (RE) foi introduzida em 1905 por Einstein [1] e, portanto, em 1925, quando a mecânica quântica foi descoberta, a RE já estava bem estabelecida. Era sabido que para uma teoria mais abrangente que a teoria clássica deveria ser invariante de Lorentz. As partículas conhecidas na época eram apenas três: fóton, elétron e próton. Dirac assumiu que:

- (i) RE + MQ deveriam se incorporar a uma equação de

movimento com a forma da equação de Schrödinger;

(ii) a equação deveria ser de primeira ordem no tempo.

Como vimos no capítulo anterior, com a receita de Schrödinger para a equação de energia relativística resulta na equação de Klein-Gordon. Uma equação que aplicada duas vezes à função de onda ψ resulta na equação de Klein-Gordon é a equação de Dirac¹.

$$(i\gamma^\nu \partial_\nu + m)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0 \implies (\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\psi = 0.$$

A equação de Dirac livre, como veremos na próxima seção, corresponde à prescrição de como estados de spin 1/2 se transformam pelo grupo de Lorentz. As transformações de Lorentz (TL), como vimos na subseção 2.1.5, constituem um subgrupo do grupo conforme.

Neste capítulo, vamos introduzir a equação de Dirac, não do modo como Dirac a apresenta em seu artigo [6], mas como Gottfried [31] a introduz. Através das transformações do grupo de Lorentz, vamos construir espinores que se transformam mantendo a covariância. Em seguida, vamos identificar uma equação que relaciona dois espinores de Weyl (onde um é a imagem do outro sob reflexões espaciais), como a própria equação de Dirac no espaço dos momentos. Mediante uma transformada de Fourier e algumas mudanças na notação, é possível escrever a equação de Dirac no espaço das coordenadas.

¹Não é tão simples assim. Ainda nesta seção, calcularemos com maior cuidado essa relação entre a equação de Klein-Gordon e a de Dirac.

Existem duas formas de verificar a invariância conforme da equação de Dirac. A primeira, e mais fácil, envolvendo um espaço-tempo plano, com métrica de Minkowski. Deste modo, a invariância conforme é simples e facilmente implementável. Por outro lado, quando trabalhamos num espaço-tempo curvo, dificuldades aparecem, devido à derivada covariante de um espinor e é conveniente introduzir o conceito de tetradas. Por simplicidade, estudaremos apenas a invariância conforme num espaço-tempo plano dada pelo grupo C_o . Isto será apresentado na seção 4.2.

4.1.1 Transformações de Lorentz sobre Espinores

Podemos representar quadri-vetores de posição², $x^\mu = (t, \mathbf{x})$, como matrizes 2×2 Hermitiana

$$X_+ = t - \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} t - z & -x + iy \\ -x - iy & t + z \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

onde $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$ são as matrizes de Pauli.

Como o vetor posição escrito dessa forma, podemos reescrever o elemento de linha³ ds^2 , como o determinante da matriz acima

$$\det X_+ = t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = Q.$$

²No início desta seção vamos usar essa notação para o vetor de posição, ao invés da que estávamos usando até então neste trabalho $x^\mu = (x^0, \mathbf{x})$, para coincidir com a notação da referência [31].

³O elemento de linha, assim como tudo nesta seção está escrito na métrica de Minkowski

Como sabemos, as TL de Lorentz preservam o elemento de linha, portanto, nesta notação podemos dizer que uma TL é uma transformação que preserva o determinante \mathcal{Q} da matriz. Neste contexto, podemos representar uma TL em um quadri-vetor x^μ como uma transformação linear em X_+ que mantém a matriz Hermitiana e não altera \mathcal{Q} . Uma TL sob a matriz X_+ , ocorre do seguinte modo:

$$X'_+ = \Lambda_+ X_+ \Lambda_+^\dagger. \quad (4.2)$$

Logo, o determinante da matriz transformada é

$$\begin{aligned} \det X'_+ &= \det \Lambda_+ \det X_+ \det \Lambda_+^\dagger \\ &= |\det \Lambda_+|^2 \det X_+. \end{aligned}$$

Com o requerimento que \mathcal{Q} seja invariante, temos a primeira propriedade encontrada para a matriz de transformação

$$|\det \Lambda_+| = 1. \quad (4.3)$$

No grupo de Lorentz, as rotações formam um subgrupo, nesse subgrupo a matriz de transformação é unitária, o que não ocorre para o caso mais geral do grupo de Lorentz. É através do traço de X_+ e X'_+ que percebemos se a matriz de transformação é unitária. Isso ocorre porque

$$\begin{aligned}
\text{Tr } X'_+ &= \text{Tr} \left(\Lambda_+ X_+ \Lambda_+^\dagger \right) \\
&= \text{Tr} \left(X_+ \Lambda_+ \Lambda_+^\dagger \right) \\
&= \text{Tr } X_+ \quad \Longrightarrow \quad \Lambda_+ \Lambda_+^\dagger = 1 \quad (\text{unitário}).
\end{aligned}$$

No caso de uma transformação mais geral, dada a equação (4.1), o traço de X_+ depende explicitamente do tempo

$$\text{Tr } X_+ = 2t \quad \Longrightarrow \quad \text{Tr } X'_+ = 2t',$$

consequentemente, o traço só é invariante, se e somente se $t = t'$. Portanto, Λ_+ só é unitária se as TL não altera a componente temporal do quadri-vetor.

Para estudarmos como essa matriz de transformação Λ_+ age em um espinor, vamos introduzir o espinor de Weyl de duas componentes,

$$\chi_+ = \begin{pmatrix} \chi_{+1} \\ \chi_{+2} \end{pmatrix}.$$

Podemos transformar a quantidade $X_+\chi_+$, para definir-mos como o espinor se transforma

$$X_+\chi_+ \rightarrow \Lambda_+(X_+\chi_+) \equiv X'_+\chi'_+ = \left(\Lambda_+ X_+ \Lambda_+^\dagger \right) \chi'_+.$$

Como Λ_+ não é necessariamente unitário, temos a transformação do espinor de Weyl como sendo

$$\chi'_+ = (\Lambda_+^\dagger)^{-1} \chi_+. \quad (4.4)$$

Apenas quando a transformação Λ_+ é uma rotação que $(\Lambda_+^\dagger)^{-1} = \Lambda_+$ é válido.

O grupo de Lorentz é dado pelas transformações que obedecem (4.3). Dentre essas transformações, existem dois tipos cuja classificação é dada valor do determinante. As transformações chamadas **próprias**, com $\det \Lambda_+ = 1$ e as **impróprias**, com $\det \Lambda_+ = -1$. A inversão espacial I_s , é uma transformação imprópria. Se queremos que nossa equação tenha covariância sob transformações do grupo de Lorentz, precisamos incorporar a inversão espacial. Para isso é necessário definir uma segunda matriz que represente x^μ com os sinais das componentes espacial invertidos

$$I_s : X_- = t + \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} t + z & x - iy \\ x + iy & t - z \end{pmatrix}.$$

Esta matriz possui o mesmo determinante \mathcal{Q} que X_+ , portanto, a inversão mantém o elemento de linha invariante. Para obtermos uma transformação dada pela equação (4.2) que transforme $I_s : X_+ \rightarrow X_-$ é necessário que

$$\begin{aligned} \Lambda_+ X_+ \Lambda_+^\dagger &= \Lambda_+ (t - \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \Lambda_+^\dagger \\ &= t + \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma} \\ &= X_-. \end{aligned}$$

Para que isso ocorra é necessário encontrarmos uma matriz que anticomute com as matrizes de Pauli

$$\Lambda_+ \Lambda_+^\dagger = 1 \quad \text{e} \quad \Lambda_+ \boldsymbol{\sigma} \Lambda_+^\dagger = -\boldsymbol{\sigma}. \quad (4.5)$$

Considerando tudo o que foi apresentado até então, podemos notar alguns problemas na teoria:

- (i) Não há uma matriz 2×2 que anticomute com todas as matrizes de Pauli, como requer (4.5);
- (ii) É necessário haja duas matrizes X_+ e X_- para representar um quadri-vetor x^μ , o que não é muito prático;
- (iii) Também será necessário definir um segundo espinor de Weyl, para que sob reflexão espacial

$$I_s : \chi_+ \rightarrow \chi_-,$$

onde o espinor χ_- , que é a imagem de χ_+ sob reflexão espacial;

- (iv) Precisamos definir uma segunda matriz de transformação Λ_- , que transforme a matriz X_- e o espinor χ_- como uma TL própria, assim

$$X_- \rightarrow \Lambda_- X_- \Lambda_-^\dagger \quad \text{e} \quad \chi_- \rightarrow (\Lambda_-^\dagger) \chi_-.$$

Uma maneira de solucionar todos esses problemas de uma só vez é **mudar a dimensão das matrizes**. Ao invés de usarmos os espinores de Weyl com duas componentes vamos introduzir o **espinor de Dirac** (com 4 componentes)

$$\psi = \begin{pmatrix} \chi_+ \\ \chi_- \end{pmatrix},$$

Essa mudança também deve se refletir nas matrizes de transformação Λ_+ e Λ_- . Como a matriz de TL própria não pode misturar os espinores χ_+ e χ_- , a melhor opção é definir a matriz como

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_+ & 0 \\ 0 & \Lambda_- \end{pmatrix}.$$

Com isso a reflexão espacial age no espinor ψ trocando $\chi_+ \leftrightarrow \chi_-$, isso ocorre com a matriz de Dirac γ^o

$$I_s : \quad \psi \rightarrow \gamma^o \psi, \quad \text{onde} \quad \gamma^o = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Com todo esse formalismo pronto, nosso próximo passo é construir a matriz Λ . Para isso podemos reescrevê-las como uma combinação linear da matriz identidade e das matrizes de Pauli

$$\Lambda_+ = a + i\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \tag{4.6}$$

onde a e \mathbf{b} são complexos. Para garantirmos a condição (4.3) precisamos que a e \mathbf{b} sejam definidos a menos de uma fase

$$|\det \Lambda_+| = 1 \quad \implies \quad a^2 + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = e^{2i\varphi},$$

onde φ é real. Podemos absorver a fase nos parâmetros, substituindo $a \rightarrow e^{i\varphi} a$ e $\mathbf{b} \rightarrow e^{i\varphi} \mathbf{b}$, portanto temos

$$\det \Lambda_+ = a^2 + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = 1 \quad \implies \quad a = \sqrt{1 - \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}}.$$

Com isso, as TL própria pode ser parametrizada apenas

com os seis parâmetros dados pelas três componentes do vetor complexo \mathbf{b} . Para a rotação esse vetor é dado por $\mathbf{b} = -\hat{\mathbf{n}} \sin \frac{1}{2}\theta$, onde $\hat{\mathbf{n}}$ é o eixo e θ , o ângulo de rotação.

Para construirmos Λ_+ não é necessário generalizar a transformação para qualquer direção, é suficiente calcular para apenas uma direção. Com as TL dada na direção z , temos

$$X_+ = t - z\sigma_z = \begin{pmatrix} t - z & 0 \\ 0 & t + z \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Um bom modo de garantir que duas transformações sucessivas somem seus argumentos, assim como ocorre para rotações, é escolher uma transformação do tipo

$$\begin{aligned} t - z &\rightarrow (t - z)e^{-\zeta} \equiv t' - z', \\ t + z &\rightarrow (t + z)e^{\zeta} \equiv t' + z', \end{aligned}$$

assim, duas transformações consecutivas ζ_1 e ζ_2 são equivalentes a uma transformação com argumento $\zeta_1 + \zeta_2$

$$t' - z' \rightarrow t'' - z'' = (t' - z')e^{-\zeta_2} = (t - z)e^{-(\zeta_1 + \zeta_2)}. \quad (4.8)$$

Para que Λ_+ haja assim nos elementos de X_+ , é necessário que tenha a forma

$$\Lambda_+ = e^{-\frac{2}{i}\zeta\sigma_z}.$$

Podemos verificar que, X_+ , escrito deste modo, se transformará da maneira desejada

$$\begin{aligned}
 X'_+ &= e^{-\frac{2}{i}\zeta\sigma_z}(t - z\sigma_z)e^{-\frac{2}{i}\zeta\sigma_z} \\
 &= e^{-\zeta\sigma_z}(t - z\sigma_z) \\
 &= (\cosh \zeta - \sigma_z \sinh \zeta)(t - z\sigma_z) \\
 &= (t \cosh \zeta + z \sinh \zeta) - \sigma_z(z \cosh \zeta + t \sinh \zeta) \\
 &= t' - z'\sigma_z,
 \end{aligned}$$

o que implica em

$$t' = t \cosh \zeta + z \sinh \zeta \quad \text{e} \quad z' = z \cosh \zeta + t \sinh \zeta.$$

Para mantermos a coerência, a matriz Λ_- que transforma X_- deve ter o sinal oposto

$$\begin{cases} \Lambda_+ = e^{-\frac{1}{2}\zeta\sigma_z} \\ \Lambda_- = e^{\frac{1}{2}\zeta\sigma_z} \end{cases} \implies \Lambda = \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}\zeta\sigma_z} & 0 \\ 0 & e^{\frac{1}{2}\zeta\sigma_z} \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

onde ζ é chamado de *rapidity*, em português, **rapidez**. A rapidez é relacionada à velocidade por

$$\begin{cases} \tanh \zeta = v \\ \cosh \zeta = \frac{1}{\sqrt{1-v}} = \gamma \\ \sinh \zeta = v\gamma, \end{cases} \quad (4.10)$$

onde v é a velocidade entre os referenciais S e S' . Uma transformação desse tipo é chamada de *boost*. Neste caso em particular temos um *boost* na direção z , mas nada nos impede de generalizar as TL para uma direção \hat{n} , assim as matrizes

ficam

$$\Lambda_{\pm} = e^{\mp \frac{1}{2} \zeta \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}} = \cosh \frac{\zeta}{2} \mp \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \sinh \frac{\zeta}{2}. \quad (4.11)$$

O parâmetro \mathbf{b} , definido em (4.6), para esse caso é escrito como

$$\mathbf{b} = i \hat{\mathbf{n}} \sinh \frac{\zeta}{2}. \quad (4.12)$$

Para o caso em que \mathbf{b} é um imaginário puro temos um *boost* e real para uma rotação.

Em (4.4), definimos a forma estranha com que o espinor de Weyl se transforma no grupo de Lorentz. Agora, sabendo que as TL tem a forma dada por (4.11) podemos identificar essa transformação como sendo simplesmente

$$\begin{aligned} (\Lambda_+^\dagger)^{-1} = \Lambda_- &\implies \chi'_+ = \Lambda_- \chi_+, \\ (\Lambda_-^\dagger)^{-1} = \Lambda_+ &\implies \chi'_- = \Lambda_+ \chi_-. \end{aligned}$$

Agora, que temos a matriz de TL e o modo como os espinores de Weyl se transformam, podemos derivar a equação de Dirac.

4.1.2 Equação de Dirac para Partícula Livre

Vamos considerar uma partícula com spin 1/2 e massa m . Em um sistema referencial S , em repouso, onde podemos usar a mecânica quântica não-relativística, o estado dessa

partícula é dado pelo espinor de Pauli ξ . Passando de S para um sistema referencial relativístico S' , com a transformação dada por (4.9) temos o momento dado por

$$\frac{p_z}{m} = v_z \gamma = \sinh \zeta. \quad (4.13)$$

Dado o estado ξ , podemos transformá-lo através de Λ_+ e Λ_- , que resultam em χ_- e χ_+ , respectivamente, para o mesmo momento p_z :

$$\chi_+(p_z) = e^{\frac{1}{2}\zeta\sigma_z}\xi \quad \text{e} \quad \chi_-(p_z) = e^{-\frac{1}{2}\zeta\sigma_z}\xi. \quad (4.14)$$

Eliminando ξ na equação acima, ficamos com a equação de Dirac num formato não tanto reconhecível

$$\chi_-(p_z) = e^{-\zeta\sigma_z}\chi_+(p_z) \quad \text{ou} \quad \chi_+(p_z) = e^{\zeta\sigma_z}\chi_-(p_z). \quad (4.15)$$

Podemos rescrevê-la da forma mais comum. Para isso precisamos lembrar como relacionamos a velocidade v com a rapidez ζ pelas equações (4.10) e do modo como escrevemos o quadrimomento em termos da energia E e do momento p_z

$$p^\mu = (E, p_z) = (\gamma m, \gamma m v) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} E = m \cosh \zeta, \\ p_z = m \sinh \zeta. \end{cases} .$$

Com isso em mente, podemos multiplicar a equação (4.15) pela massa m e identificar a energia e o momento

$$\begin{cases} (E - \sigma_z p_z)\chi_+(p_z) = m\chi_-(p_z), \\ (E + \sigma_z p_z)\chi_-(p_z) = m\chi_+(p_z). \end{cases}$$

Generalizando para um momento numa direção qualquer ficamos com as equações

$$\begin{cases} (E - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})\chi_+(\mathbf{p}) = m\chi_-(\mathbf{p}), \\ (E + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})\chi_-(\mathbf{p}) = m\chi_+(\mathbf{p}), \end{cases} \quad (4.16)$$

que é a equação de Dirac para uma partícula livre no espaço dos momentos. Substituindo

$$\mathbf{p} \rightarrow -i\nabla \quad \text{e} \quad E \rightarrow i\partial_t, \quad (4.17)$$

além de efetuar uma transformação de Fourier para passar do espaço de espinores de momento $\chi_{\pm}(\mathbf{p})$ para o espaço de espinores das coordenadas $\varphi_{\pm}(\mathbf{r}, t)$

$$\varphi_{\pm}(\mathbf{r}, t) = \int d^3p \, e^{-iEt} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \chi_{\pm}(\mathbf{p}),$$

onde $E = \sqrt{p^2 + m^2}$. A equação (4.16) assume a forma

$$(\partial_t \mp \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla)\varphi_{\pm}(\mathbf{r}, t) + im\varphi_{\mp}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (4.18)$$

Finalmente, definiremos os espinores e as matrizes de Dirac, com o intuito de deixar a equação acima com uma aparência mais covariante, além de deixar a notação mais simples. O espinor de Dirac é definido em função dos espinores $\varphi_{\pm}(\mathbf{r}, t)$ como

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi_{+1} \\ \varphi_{+2} \\ \varphi_{-1} \\ \varphi_{-2} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}, \quad (4.19)$$

e uma matriz Σ^i , contendo as matrizes de Pauli com os devidos sinais para cada ψ

$$\Sigma^i = \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & -\sigma_i \end{pmatrix}. \quad (4.20)$$

Com essa mudanças podemos reescrever as equações (4.18) como uma só

$$\left(\partial_o + \Sigma^i \partial_i + im\gamma^o \right) \psi = 0,$$

onde a matriz γ^o foi definida em (4.6). Como a massa m é invariante e tendo em mente que $(\gamma^o)^2 = 1$, podemos multiplicar a equação pela esquerda por γ^o .

$$\left(\gamma^o \partial_o + \gamma^o \Sigma^i \partial_i + im \right) \psi = 0.$$

Através de $\gamma^o \Sigma^i = \gamma^i$ que definimos as demais matrizes de Dirac

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, podemos escrever a equação de Dirac na forma convencional

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0. \quad (4.21)$$

Para levar a equação de Dirac para a equação de Klein-Gordon basta aplicar $i\gamma^\nu \partial_\nu$

$$i\gamma^\nu \partial_\nu (i\gamma^\mu \partial_\mu \psi) = im\gamma^\nu \partial_\nu \psi,$$

lembrando que pela equação (4.21) temos

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi = m\psi, \quad \text{e que} \quad \gamma^\mu \gamma^\nu = \frac{1}{2}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} + \frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]. \quad (4.22)$$

Podemos reescrever a equação (4.22) como

$$-\frac{1}{2}(\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} + [\gamma^\mu, \gamma^\nu]) \partial_\mu \partial_\nu \psi = m^2 \psi$$

$$\left(\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu + m^2\right) \psi = 0.$$

onde o termo com o comutador das matrizes gamma é nulo pois está contraído com $\partial_\mu \partial_\nu$ que é simétrico por troca de índices $\mu \leftrightarrow \nu$, enquanto o comutador é, obviamente, antissimétrico. Está escrita a equação de Klein-Gordon através da equação de Dirac

$$\left(\partial^\mu \partial_\mu + m^2\right) \psi = 0.$$

Outra equação importante é a **equação de Weyl**⁴, que descreve uma partícula com spin 1/2 e massa nula. Quando

⁴Apesar do mesmo nome, essa equação de Weyl não tem nenhuma relação com o tensor ou a transformação de Weyl, vistos no capítulo Gravação Conforme.

definimos os espinores de Weyl usamos o símbolo \pm para diferenciar os espinor antes e depois de uma reflexão espacial, porém é mais comum utilizar os termos L (*left*) e R (*right*), para distinguir esses espinores de duas componentes. A equação de Dirac escrita na forma matricial fica

$$\begin{pmatrix} -m & i\sigma^\mu\partial_\mu \\ i\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = 0 \implies \begin{cases} i\sigma^\mu\partial_\mu\psi_R - m\psi_L = 0, \\ i\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_L - m\psi_R = 0. \end{cases}$$

Para $m \neq 0$, a equação, resulta em duas equações acopladas em ψ_L e ψ_R . Porém, para $m = 0$ temos as equações de Weyl

$$\begin{cases} i\sigma^\mu\partial_\mu\psi_R = 0, \\ i\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_L = 0. \end{cases}$$

Para esse caso, ψ_L e ψ_R são campos independentes que estão associados à partículas com $m = 0$ e velocidade relativística. Cada um desses campos tem uma helicidade associada diferente. Nenhuma partícula com essas características foi encontrada até então.

Para finalizar esta subseção podemos escrever lagrangiana que produz a equação de Dirac (4.21)

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu\partial_\mu - m) \psi, \tag{4.23}$$

onde o espinor $\bar{\psi}$ é

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0 = \begin{pmatrix} \psi_R^\dagger & \psi_L^\dagger \end{pmatrix}. \tag{4.24}$$

4.1.3 Matrizes de Dirac

As matrizes de Dirac são elementos de uma **álgebra de Clifford**⁵

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}. \quad (4.25)$$

A álgebra de Clifford é mais geral do que qualquer representação em particular das matrizes γ . As matrizes γ , apresentadas nesta seção, são uma forma particular das matrizes de Dirac conhecidas como **representação de Weyl**

$$\gamma^o = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.26)$$

Expandindo as matrizes de Dirac ficamos com

$$\begin{aligned} \gamma^o &= \begin{pmatrix} & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \\ 0 & 1 & \end{pmatrix}, & \gamma^1 &= \begin{pmatrix} & 0 & 1 \\ & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \\ -1 & 0 & \end{pmatrix}, \\ \gamma^2 &= \begin{pmatrix} & 0 & -i \\ & i & 0 \\ 0 & i & \\ -i & 0 & \end{pmatrix}, & \gamma^3 &= \begin{pmatrix} & 1 & 0 \\ & 0 & -1 \\ -1 & 0 & \\ 0 & 1 & \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Uma outra possibilidade é a **representação Majorana**:

⁵Usaremos a métrica de Minkowski, porque estamos apenas interessados em transformações do grupo C_o .

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, & \gamma^1 &= \begin{pmatrix} i\sigma^3 & 0 \\ 0 & i\sigma^3 \end{pmatrix}, \\ \gamma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, & \gamma^3 &= \begin{pmatrix} -i\sigma^1 & 0 \\ 0 & i\sigma^1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Assim como a representação de Weyl, a representação Majorana é uma representação $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$ do grupo de Lorentz. Ambas são fisicamente equivalentes. Para ambas as representações temos

$$\left\{ \begin{aligned} (\gamma^0)^2 &= \mathbb{I}, \\ (\gamma^i)^2 &= -\mathbb{I}, \end{aligned} \right. \implies \left\{ \begin{aligned} \gamma^{0\dagger} &= \gamma^0, \\ \gamma^{i\dagger} &= -\gamma^i. \end{aligned} \right. \quad (4.27)$$

Como vimos na equação (4.25) o anticomutador das matrizes de Dirac estão diretamente ligados ao tensor métrico, já o comutador dessas matrizes está ligado aos geradores de Lorentz $M_{\alpha\beta}$. Podemos mostrar isso definindo o comutador como

$$\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu], \quad (4.28)$$

desenvolvendo esse comutador e adicionando zero $(\gamma^\nu\gamma^\mu - \gamma^\nu\gamma^\mu)$, ficamos com

$$\begin{aligned}
\sigma^{\mu\nu} &= \frac{i}{2} (\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\nu \gamma^\mu) \\
&= \frac{i}{2} (\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu - \gamma^\nu \gamma^\mu - \gamma^\nu \gamma^\mu) \\
&= i (\eta^{\mu\nu} - \gamma^\nu \gamma^\mu).
\end{aligned}$$

Queremos calcular o comutador $[\sigma^{\mu\nu}, \sigma^{\alpha\beta}]$, para isso vamos primeiramente calcular o comutador⁶

$$\begin{aligned}
[\sigma^{\mu\nu}, \gamma^\alpha] &= -i[\gamma^\nu \gamma^\mu, \gamma^\alpha] = i[\gamma^\alpha, \gamma^\nu \gamma^\mu] \\
&= i(\{\gamma^\alpha, \gamma^\nu\} \gamma^\mu - \gamma^\nu \{\gamma^\alpha, \gamma^\mu\}) \\
&= 2i(\eta^{\alpha\nu} \gamma^\mu - \eta^{\alpha\mu} \gamma^\nu). \tag{4.29}
\end{aligned}$$

Com esse cálculo prévio podemos então calcular o comutador dos comutadores das matrizes de Dirac⁷

$$\begin{aligned}
[\sigma^{\mu\nu}, \sigma^{\alpha\beta}] &= \frac{i}{2} [\sigma^{\mu\nu}, [\gamma^\alpha, \gamma^\beta]] \\
&= \frac{-i}{2} ([\gamma^\alpha, [\gamma^\beta, \sigma^{\mu\nu}]] + [\gamma^\beta, [\sigma^{\mu\nu}, \gamma^\alpha]]) \\
&= 2i (\eta^{\mu\beta} \sigma^{\nu\alpha} - \eta^{\nu\beta} \sigma^{\mu\alpha} + \eta^{\nu\alpha} \sigma^{\mu\beta} - \eta^{\mu\alpha} \sigma^{\nu\beta}).
\end{aligned}$$

Na subsecção 2.1.5, definimos as transformações possíveis dentro do grupo conforme, dentre elas está as TL com gerador $M_{\alpha\beta}$, cuja relação de comutação é igual a

⁶Usando a identidade $[A, BC] = \{A, B\}C - B\{A, C\}$.

⁷Usando a identidade de Jacobi $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$.

$$\left[\frac{\sigma^{\mu\nu}}{2}, \frac{\sigma^{\alpha\beta}}{2} \right] = i \left(\eta^{\mu\beta} \frac{\sigma^{\nu\alpha}}{2} - \eta^{\nu\beta} \frac{\sigma^{\mu\alpha}}{2} + \eta^{\nu\alpha} \frac{\sigma^{\mu\beta}}{2} - \eta^{\mu\alpha} \frac{\sigma^{\nu\beta}}{2} \right). \quad (4.30)$$

O comutador das matrizes de Dirac $\frac{\sigma^{\mu\nu}}{2}$ satisfaz a mesma álgebra dos geradores do grupo de Lorentz $M^{\mu\nu}$, portanto é uma representação do grupo de Lorentz

$$M_{dirac}^{\mu\nu} = S^{\mu\nu} = \frac{\sigma^{\mu\nu}}{2}.$$

Com essa representação, podemos escrever as TL do espinor de Dirac como

$$\psi' = \Lambda_s \psi.$$

Cujas TL que age sobre o espinor ψ são dadas por

$$\Lambda_s = \exp \left(i\theta_{\alpha\beta} S^{\alpha\beta} \right) \quad \text{ou} \quad \Lambda_s = \exp \left(-\frac{1}{4} \theta_{\alpha\beta} [\gamma^\alpha, \gamma^\beta] \right). \quad (4.31)$$

onde $\theta_{\alpha\beta}$ são seis parâmetros reais, três para rotações e três para *boost*.

Podemos notar que uma das matrizes de Dirac, γ^o , é hermitiana. Mais do que isso, podemos notar que

$$\gamma^o \gamma^i \gamma^o = -\gamma^i = \gamma^{i\dagger}, \quad \gamma^o \gamma^o \gamma^o = \gamma^{o\dagger},$$

portanto, podemos escrever $\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^o \gamma^\mu \gamma^o$. Deste modo, as TL dada por (4.31) podem ser reescrita

$$\begin{aligned}
\gamma^o (S^{\mu\nu})^\dagger \gamma^o &= \gamma^o \frac{i}{4} [\gamma^{\mu\dagger}, \gamma^{\nu\dagger}] \gamma^o \\
&= \frac{i}{4} [\gamma^o \gamma^{\mu\dagger} \gamma^o, \gamma^o \gamma^{\nu\dagger} \gamma^o] \\
&= \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \\
&= S^{\mu\nu}.
\end{aligned}$$

Com isso a matriz de transformação Λ_s^{-1} pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
\gamma^o \Lambda_s^\dagger \gamma^o &= \gamma^o \exp \left(i\theta_{\alpha\beta} S^{\alpha\beta} \right)^\dagger \gamma^o \\
&= \gamma^o \exp \left(-i\theta_{\alpha\beta} S^{\alpha\beta\dagger} \right) \gamma^o \\
&= \exp \left(-i\theta_{\alpha\beta} \gamma^o S^{\alpha\beta\dagger} \gamma^o \right) \\
&= \Lambda_s^{-1}.
\end{aligned}$$

Podemos calcular as TL da quantidade $\bar{\psi}\psi \equiv \psi^\dagger \gamma^o \psi$

$$\begin{aligned}
\psi^\dagger \gamma^o \psi &\rightarrow (\psi^\dagger \Lambda_s^\dagger) \gamma^o (\Lambda_s \psi) \\
&= \Lambda_s^\dagger \gamma^o \Lambda^{-1} \Lambda_s \psi \\
&= \psi^\dagger \gamma^o \psi.
\end{aligned}$$

Portanto, $\bar{\psi}\psi$ é invariante sob TL. Já a quantidade $\psi^\dagger \psi$ é invariante apenas para o caso em que $\Lambda_s^\dagger = \Lambda_s^{-1}$, portanto unitário, o que só ocorre para rotações. Outros objetos que

também se transformam como tensores sob o grupo de Poincaré⁸ são

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \quad \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^\nu\psi, \quad \bar{\psi}\partial_\mu\psi$$

e como consequência a lagrangiana de Dirac dada pela equação (4.23).

4.2 Invariância C_o da Equação de Dirac

Quando estudamos, no capítulo 3, a transformação do campo de spin zero ϕ pelo grupo conforme não tivemos muito cuidado em distinguir entre espaço-tempo plano e curvo. Para o espaço-tempo curvo usamos diretamente a derivada covariante estudada no capítulo 2 sem nos preocupar com a função ϕ . Para a equação de Dirac, essa relação entre espaço de Riemann e Minkowski não é tão simples, devido à natureza espinorial do campo. Quando escolhermos uma derivada covariante não basta que seja invariante sob transformações de coordenadas ($\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}$), deve também ser invariante de Lorentz.

Influenciados pelos trabalhos de Bateman e Cunninham[3] em 1910, que mostrava a invariância conforme das equações de Maxwell, muitos trabalhos foram publicados para estudar a invariância conforme da equação de Dirac. Desde 1934, por Schouten e Haantjes, passando por Dirac em 1936 [7] e Pauli em 1940. Tendo em mente que a equação de Dirac foi proposta

⁸O grupo de Poincaré, além de conter o grupo de Lorentz também contém translações.

em 1928, pouco tempo depois já se queria expandir o grupo de simetria do grupo de Lorentz para o grupo conforme. Em 36, Dirac tinha a intenção de propor uma equação de onda no espaço conforme que correspondesse à equação de onda num espaço ordinário. Para isso, ele fez uma generalização do espaço-tempo, passando de espaço-tempo ordinário para um espaço de-Sitter. Segundo Dirac em seu artigo, todas as equações da física podem ser generalizadas para um espaço de-Sitter em 5 dimensões, mas apenas algumas podem ser generalizadas para um espaço conforme de 6 dimensões⁹. A equação de Dirac é a equação cuja tentativa foi mal sucedida para a TC devido à um termo com degenerescência na equação. No mesmo ano Bhabha[8] aponta alguns equívocos cometidos por Dirac e reforça a procura por uma simetria conforme. Em 1941, Haantjes[9], aponta para o fato de que se assumirmos que a massa também se transforme conformemente ganhamos a invariância conforme da equação. Assim, a extensão dos estudos de invariância conforme na equação de Dirac é, novamente, dependente da transformação da massa, assim como na equação de Klein-Gordon estudada no capítulo 3. Para obtermos a invariância conforme devemos ter a massa se transformando sob C como $m \rightarrow m^c = m/\Omega$.

Como já mencionamos há uma grande simplificação para a demonstração da invariância conforme quando nos restringimos apenas a invariância em C_o . Para isso passamos de um espaço de Minkowski para um espaço curvilinear de Riemann, porém com curvatura nula. Estudar a invariância da equação apenas para C_o é completamente aceitável caso não tenhamos

⁹Neste trabalho Dirac trabalha com uma superfície hiperquádrica de 4 dimensões em um espaço projetivo em 5 dimensões.

a intensão de estudarmos a unificação da mecânica quântica com a relatividade geral. Neste subgrupo C_o a transformação da métrica é dada por

$$g_{\mu\nu}^c = \Omega^2 \eta_{\mu\nu}.$$

Vale lembrar que nesta seção, mesmo quando escrevemos a métrica como $g_{\mu\nu}$ estamos nos referindo à um espaço plano, portanto que pode ser levado através de uma transformação de coordenadas para o espaço de Minkowski.

Para aplicarmos as técnicas matemáticas usadas nos capítulos anteriores, é primeiramente necessário mudar do espaço de Minkowski para o espaço de Riemann¹⁰, só então que generalizaremos para o espaço de Weyl. Quando obtida a equação para o espaço de Weyl podemos proceder efetuando a transformação conforme, só assim é possível estudar a invariância conforme. Como vimos na seção anterior a equação de Dirac no espaço de Minkowski é dada por

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0, \quad \text{onde} \quad \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}. \quad (4.32)$$

As matrizes de Dirac, pela álgebra de Clifford, tem dependência com o tensor métrico dada pelo anticomutador. Mesmo quando se trata de um espaço de Riemann plano temos que mudar o tensor métrico de $\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}$ e portanto o anticomutador das matrizes de Dirac ficam

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}. \quad (4.33)$$

¹⁰Com $R_{\alpha\nu\beta}^\mu = 0$.

e a derivada convencional é substituída pela DC

$$(i\gamma^\mu \nabla_\mu - m)\psi = 0. \quad (4.34)$$

As matrizes de Dirac são funções do espaço-tempo, porém como estamos em um espaço plano mantemos

$$\nabla_\mu \gamma^\nu = 0. \quad (4.35)$$

Com isso, as matrizes de Dirac ainda são constantes, no sentido que sua derivada covariante é nula. A equação (4.35) não é válida quando estamos em um espaço com curvatura. Como estamos nos restringindo à um espaço plano a equação (4.34) fica simplificada. Para coordenadas cartesianas a DC do espinor de Dirac é levada a derivada parcial

$$\nabla_\mu \psi = \partial_\mu \psi, \quad (4.36)$$

assim voltamos para a equação (4.32). Mesmo quando passamos do espaço de Riemann para o espaço de Weyl não mudamos a derivada covariante a forma como a derivada covariante (4.36) age no espinor. Quando consideramos o espinor ψ do tipo W_o , portanto invariante por mudança de escala nos sobra apenas analisar como as matrizes de Dirac são alteradas com uma TC. Como o anticomutador (4.33) é uma quantidade invariante, podemos notar que as matrizes de Dirac também precisam se transformar conformemente

$$\begin{aligned} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} &= 2g^{\mu\nu} \\ \{\gamma_c^\mu, \gamma_c^\nu\} &= 2g_c^{\mu\nu} \\ \gamma_c^\mu \gamma_c^\nu + \gamma_c^\nu \gamma_c^\mu &= \frac{2g^{\mu\nu}}{\Omega^2} \\ \Omega^2 (\gamma_c^\mu \gamma_c^\nu + \gamma_c^\nu \gamma_c^\mu) &= 2g^{\mu\nu}. \end{aligned}$$

O que implica em uma transformação do tipo

$$g^{\mu\nu} \rightarrow \frac{g_{\mu\nu}}{\Omega^2} \quad \Longrightarrow \quad \gamma^\mu \rightarrow \frac{\gamma^\mu}{\Omega}. \quad (4.37)$$

Sendo assim, γ_μ é um tensor com peso conforme 1/2. Logo, para obtermos a invariância da equação é necessário que a massa se transforme $m \rightarrow m/\Omega$.

$$\begin{aligned} (\gamma_c^\mu \nabla_\mu - m_c)\psi &= 0 \\ \frac{1}{\Omega^2}(\gamma^\mu \nabla_\mu - m)\psi &= 0 \\ (\gamma^\mu \nabla_\mu - m)\psi &= 0. \end{aligned}$$

Para um espaço curvo, apesar da dificuldade de se calcular a derivada covariante, o resultado é o mesmo. Dada a imposição de uma invariância conforme é necessário uma transformação conforme da massa de repouso.

Quando consideramos o campo de Dirac com interação eletromagnética, ganhamos um termo com o quadri-potencial eletromagnético na equação

$$[\gamma^\mu (\nabla_\mu + ieA_\mu) - m] \psi = 0.$$

Como o vetor A_μ é um vetor W_o , essa equação é claramente invariante por C_o .

4.2.1 Tensor Energia-Momento para o Campo de Dirac

A partir da lagrangiana de Dirac (4.23), tanto a equação de Dirac (4.21) quanto a equação adjunta de Dirac¹¹ podem ser obtidas¹². Para calcularmos o TEMH (2.32), como já vimos no capítulo anterior, efetuamos uma variação na ação do campo de Dirac em relação à métrica $g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$, ou escrito em termos da lagrangiana

$$T^{\mu\nu} = -2 \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g_{\mu\nu}} - g^{\mu\nu} \mathcal{L}.$$

Primeiramente, vamos calcular a variação da lagrangiana dada uma variação $\delta g_{\mu\nu}$

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i g^{\mu\nu} \gamma_\mu \partial_\nu - m) \psi \quad \begin{cases} \delta \mathcal{L} &= \bar{\psi} \delta g^{\mu\nu} \gamma_\mu \partial_\nu \psi \\ &= -\bar{\psi} \gamma^\mu \partial^\nu \psi \delta g_{\mu\nu}. \end{cases}$$

O que implica em

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g_{\mu\nu}} = -\bar{\psi} \gamma^\mu \partial^\nu \psi.$$

O tensor energia-momento para o campo de spin 1/2 é

¹¹Equação de Dirac que tem o espinor adjunto $\bar{\psi}$ no lugar ψ .

¹²No primeiro caso variando a lagrangiana em relação à ψ e no segundo caso em relação à $\bar{\psi}$.

dada por

$$T^{\mu\nu} = 2i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial^\nu\psi - g^{\mu\nu}\left(i\bar{\psi}\gamma^\alpha\partial_\alpha\psi - m\bar{\psi}\psi\right).$$

Como vimos na subseção (3.2.2), a teoria conforme requer um tensor energia momento com traço nulo. Isso ocorre devido à invariância da ação em relação a uma dilatação. Para o caso de um campo de spin 1/2 o traço do TEM é

$$T^\mu_\mu = (2 - d)i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + dm\bar{\psi}\psi.$$

O termo de massa impede que o traço seja nulo. Considerando os últimos dois capítulos deste trabalho, é possível perceber que: **A teoria conforme apresenta dificuldades devido à massa.** No entanto, mesmo se considerarmos o TEM para espiniores com massa nula, o traço é

$$T^\mu_\mu = (2 - d)i\bar{\psi}\gamma^\mu\nabla_\mu\psi,$$

que é nulo apenas para o caso em duas dimensões.

Capítulo 5

Spin Um

Para um campo de spin 1, vamos estudar separadamente o caso onde temos um campo de partículas de massa nula e um campo de partículas massivas. Para o primeiro caso temos as equações de campo dadas pelas equações de Maxwell e para o segundo as equações de Proca. Para ambos os casos vamos analisar a TC das equações de campo, bem como o TEM.

5.1 Equações de Maxwell

As equações de Maxwell são um conjunto de equações diferenciais que junto com a lei de força de Lorentz descrevem os fenômenos eletromagnéticos. Na presença de carga e corrente elétrica as equações de Maxwell são escritas, em unidades naturais¹, como

¹No sistema de unidades de Heaviside-Lorentz.

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \quad (5.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (5.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (5.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (5.4)$$

onde $\rho(\mathbf{x}, t)$ é a densidade de carga e $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$ a densidade de corrente. A equação para carga magnética (5.3) permite escrever o campo magnético em termos de um potencial $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$,

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (5.5)$$

o que, devido à identidade²

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0, \quad \forall \mathbf{A},$$

garante que \mathbf{B} tenha divergente nulo. Substituindo a identidade (5.5) na equação de Faraday-Lenz para o campo elétrico (5.4),

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial(\nabla \times \mathbf{A})}{\partial t} \\ \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Lembrando que o rotacional do gradiente de qualquer função é nulo³,

²Apenas válido no domínio estrelado.

³Novamente, apenas válido no domínio estrelado.

$$\nabla \times (-\nabla V) = 0 \quad \forall V, \quad (5.7)$$

a equação (5.6) possibilita escrever o campo elétrico em termos do potencial vetor \mathbf{A} e um potencial escalar V ,

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla V. \quad (5.8)$$

5.1.1 Equações de Maxwell na Forma Covariante

Na formulação covariante, reunimos o potencial vetor e o escalar em um quadripotencial vetor $A^\mu = (V; \mathbf{A})$. Os campos elétrico e magnético podem ser escritos na forma de componentes,

$$\begin{aligned} (\mathbf{B})_i &= (\nabla \times \mathbf{A})_i \\ &= \epsilon_{ijk} \partial_j A_k, \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{E})_i &= \left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla V \right)_i \\ &= -\partial_0 A_i - \partial_i V. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Vamos reescrever as equações de Maxwell com fontes na forma de componentes para então definir o tensor eletromagnético. Assim como em (5.9)

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{B})_i &= \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)_i \\ \epsilon_{ijk} \partial_j B_k &= \partial_o E_i + j_i. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Usando as definições de E (5.10) e B (5.9) e substituindo na equação acima, obtemos

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk} \partial_j (\epsilon_{klm} \partial_l A_m) - \partial_o (-\partial_o A_i - \partial_i V) &= j_i, \\ (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \partial_j \partial_l A_m + \partial_o \partial_o A_i + \partial_o \partial_i V &= j_i, \\ (\partial_o \partial_o - \partial_j \partial_j) A_i + \partial_i (\partial_o V + \partial_j A_j) &= j_i. \end{aligned}$$

Usando a condição de *gauge* de Lorentz $\partial_o V + \partial_j A_j = 0$,

$$(\partial_o \partial_o - \partial_j \partial_j) A^i = j^i, \quad (5.12)$$

em (5.1), escrita na forma de componentes, e substituindo o campo elétrico por (5.10), obtemos

$$\begin{aligned} \partial_i E_i &= \rho, \\ \partial_i (-\partial_o A_i - \partial_i V) &= \rho, \\ -\partial_o \partial_i A_i - \partial_i \partial_i V &= \rho. \end{aligned}$$

A condição de *gauge* de Lorentz pode ser utilizada novamente, dessa vez para substituir $\partial_i A_i = -\partial_o V$,

$$(\partial_o \partial_o - \partial_j \partial_j) V = \rho. \quad (5.13)$$

As equações (5.12) e (5.13) podem ser reescritas se de-

finirmos o quadripotencial $A^\mu \rightarrow (V, \mathbf{A})$, a quadricorrente $j^\mu \rightarrow (\rho, \mathbf{j})$ e a componente covariante da derivada parcial $\partial_\mu \rightarrow (\partial_o, \nabla)$, transformando-se numa única equação,

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = j^\nu.$$

O campo elétrico, como já vimos na equação (5.11), é escrito na forma de componentes, podemos fazer o mesmo com o campo magnético quando contraído com o pseudo-tensor de Levi-Civita

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk} B^k &= \epsilon_{ijk} (\epsilon_{klm} \partial_m A^l) \\ &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \partial_m A^l \\ &= \partial_i A^j - \partial_j A^i, \quad \forall i \neq j. \end{aligned}$$

Esses campos podem então ser escritos com um tensor antissimétrico

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (5.14)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.15)$$

$F_{\mu\nu}$ é o tensor eletromagnético. As equações de Maxwell

na representação covariante se resumem à duas

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu, \quad (5.16a)$$

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0, \quad (5.16b)$$

onde a equação (5.16b) é a identidade de Bianchi. A equação (5.16a) dá informações a respeito da relação entre o campo eletromagnético e as fontes eletromagnéticas. Estas equações são dadas na métrica de Minkowski, portanto, a relação entre as componentes contravariantes e as covariantes é dada por $F^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}F_{\alpha\beta}$. A quadricorrente j^μ pode ser devido à uma carga pontual

$$j^\mu(x) = e \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - z) \frac{dz^\mu}{d\tau} d\tau,$$

ou devido à uma distribuição contínua de carga

$$j^\mu(x) = \rho(x)u^\mu(x),$$

onde $z^\mu(\tau)$ é a linha mundo da partícula e τ é seu tempo próprio, ρ é a densidade de carga e $u^\mu(x)$ é a quadrivelocidade de um ponto no espaço-tempo.

5.1.2 Equações de Maxwell com Interação Gravitacional

O primeiro passo para passarmos do espaço-tempo de Minkowski \mathfrak{M} para um espaço \mathcal{A} é fazer uma mudança $\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu$ com a conexão afim dada pelo símbolo de Christoffel. Deste

modo, as equações de Maxwell ficam

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu, \quad (5.17a)$$

$$\nabla_\alpha F_{\beta\gamma} + \nabla_\beta F_{\gamma\alpha} + \nabla_\gamma F_{\alpha\beta} = 0. \quad (5.17b)$$

Antes de mais nada é necessário verificar que o próprio tensor eletromagnético é invariante por mudança do espaço \mathfrak{M} para o espaço \mathcal{A} .

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu \\ &= \partial_\mu A_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha A_\alpha - \partial_\nu A_\mu + \Gamma_{\nu\mu}^\alpha A_\alpha \\ &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \end{aligned}$$

como no espaço \mathcal{A} não temos torção, pois o símbolo de Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ é simétrico nos índices μ e ν , verificamos que o tensor eletromagnético é independente da conexão, desde que o espaço em questão tenha tensor métrico simétrico. Portanto, é invariante não só no espaço \mathcal{A} como no espaço de Weyl \mathcal{W} . Na identidade de Bianchi (5.17b) temos a mesma situação,

$$\begin{aligned} &\partial_\alpha F_{\beta\gamma} - \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda F_{\lambda\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma}^\lambda F_{\beta\lambda} \\ &+ \partial_\beta F_{\gamma\alpha} - \Gamma_{\beta\gamma}^\lambda F_{\lambda\alpha} - \Gamma_{\beta\alpha}^\lambda F_{\gamma\lambda} \\ &+ \partial_\gamma F_{\alpha\beta} - \Gamma_{\gamma\alpha}^\lambda F_{\lambda\beta} - \Gamma_{\gamma\beta}^\lambda F_{\alpha\lambda} = 0. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Além da conexão simétrica, é necessário usar o fato que o tensor eletromagnético é antissimétrico $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$. A equação (5.18) se reduz á

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0. \quad (5.19)$$

A identidade de Bianchi é invariante não somente sob transformação para o espaço \mathcal{A} , bem como para o espaço \mathcal{W} , pois não depende da conexão afim. Para a equação (5.17a) o cálculo é um pouco mais complexo. No espaço \mathcal{A} ,

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu. \quad (5.20)$$

Desenvolvendo o lado esquerdo da equação

$$\begin{aligned} \nabla_\mu F^{\mu\nu} &= \partial_\mu F^{\mu\nu} + F^{\mu\nu}\Gamma_\mu + F^{\mu\alpha}\Gamma_{\mu\alpha}^\nu \\ &= \partial_\mu F^{\mu\nu} + F^{\mu\nu}\partial_\mu \ln \sqrt{-g} \\ &= \frac{\partial_\mu (\sqrt{-g}F^{\mu\nu})}{\sqrt{-g}}, \end{aligned}$$

na primeira linha do desenvolvimento da equação o terceiro termo é nulo $F^{\mu\alpha}\Gamma_{\mu\alpha}^\nu = 0$, pois temos a contração de um tensor antissimétrico com um simétrico. Comparando esse resultado com o lado direito da equação (5.20)

$$\frac{\partial_\mu (\sqrt{-g}F^{\mu\nu})}{\sqrt{-g}} = j^\nu. \quad (5.21)$$

Esta é a equação de Maxwell para a interação entre o campo eletromagnético e a quadricorrente no espaço \mathcal{A} .

5.1.3 Equações de Maxwell no Espaço de Weyl

Para passarmos para o espaço \mathcal{W} precisamos passar de $\partial_\mu \rightarrow \bar{\nabla}_\mu$, onde a conexão de Weyl é dada por (2.42). Primeiramente, podemos calcular a derivada covariante do tensor eletromagnético

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_\mu F^{\mu\nu} &= \partial_\mu F^{\mu\nu} + F^{\mu\nu} \bar{\Gamma}_\mu + F^{\mu\alpha} \bar{\Gamma}_{\mu\alpha}^\nu \\ &= \partial_\mu F^{\mu\nu} + F^{\mu\nu} (\partial_\mu \ln \sqrt{-g} - \bar{\nabla}_\mu \ln \sqrt{-g}),\end{aligned}$$

ou pode ser escrito como

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_\mu F^{\mu\nu} + \bar{\nabla}_\mu \ln \sqrt{-g} &= \partial_\mu F^{\mu\nu} + F^{\mu\nu} \partial_\mu \ln \sqrt{-g} \\ \frac{\bar{\nabla}_\mu (\sqrt{-g} F^{\mu\nu})}{\sqrt{-g}} &= \frac{\partial_\mu (\sqrt{-g} F^{\mu\nu})}{\sqrt{-g}}.\end{aligned}\quad (5.22)$$

Identificando o lado direito da equação acima com a equação (5.21), encontramos a equação de Maxwell com fonte no espaço de Weyl

$$\frac{\bar{\nabla}_\mu (\sqrt{-g} F^{\mu\nu})}{\sqrt{-g}} = j^\nu.$$

Para obter uma equação com a aparência mais próxima à no espaço-tempo de Minkowski podemos usar a definição de densidade tensorial. Definindo a densidade tensorial do campo eletromagnético e da quadricorrente como

$$\mathfrak{F}^{\mu\nu} = \sqrt{-g} F^{\mu\nu} \quad \text{e} \quad \mathfrak{j}^\nu = \sqrt{-g} j^\nu, \quad (5.23)$$

respectivamente. Ambos sendo densidades tensoriais de peso um. Assim conseguimos escrever a equação de Maxwell com fonte como

$$\bar{\nabla}_\mu \mathfrak{F}^{\mu\nu} = j^\nu. \quad (5.24)$$

Mostramos deste modo que a equação de Maxwell (5.17a) é covariante sob transformações conformes, pois mantém a mesma forma. Já a identidade de Bianchi não só é covariante sob transformação conforme como também é invariante, pois não depende da conexão afim usada.

Conservação de carga no espaço de Weyl

Podemos aproveitar a equação (5.24) para verificar a equação de continuidade aplicando uma segunda derivada covariante na densidade tensorial do campo eletromagnético

$$\bar{\nabla}_\nu \bar{\nabla}_\mu \mathfrak{F}^{\mu\nu} = \bar{\nabla}_\nu j^\nu. \quad (5.25)$$

Desenvolvendo o lado direito da equação, usando a definição de derivada covariante para uma densidade tensorial contravariante (B.5)

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_\nu j^\nu &= \partial_\nu j^\nu + j^\alpha \bar{\Gamma}_{\nu\alpha}^\nu - j^\nu \bar{\Gamma}_\nu^\nu \\ &= \partial_\nu j^\nu. \end{aligned}$$

Para desenvolver o lado esquerdo da equação (5.25) precisamos lembrar que $\mathfrak{F}^{\mu\alpha}$ é antissimétrico enquanto $\bar{\Gamma}_{\mu\alpha}^\nu$ é simétrico nos índices covariantes, portanto, quando contraídos igualam a zero

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_\nu \bar{\nabla}_\mu \mathfrak{F}^{\mu\nu} &= \bar{\nabla}_\nu \left(\partial_\mu \mathfrak{F}^{\mu\nu} + \bar{\Gamma}_\mu \mathfrak{F}^{\mu\nu} + \bar{\Gamma}_{\mu\alpha}^\nu \mathfrak{F}^{\mu\alpha} - \bar{\Gamma}_\mu \mathfrak{F}^{\mu\nu} \right) \\
&= \bar{\nabla}_\nu (\partial_\mu \mathfrak{F}^{\mu\nu}) \\
&= \partial_\nu \partial_\mu \mathfrak{F}^{\mu\nu} + \bar{\Gamma}_\nu \partial_\mu \mathfrak{F}^{\mu\nu} - \bar{\Gamma}_\nu \partial_\mu \mathfrak{F}^{\mu\nu} \\
&= \partial_\nu \partial_\mu \mathfrak{F}^{\mu\nu} \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{5.26}$$

Portanto, na equação (5.25) temos, no lado esquerdo, a contração de um tensor simétrico $\bar{\nabla}_\nu \bar{\nabla}_\mu$ com uma densidade tensorial antissimétrica, o campo eletromagnético, obtendo assim uma quantidade nula. Podemos concluir que a equação de continuidade é invariante, pois não depende da conexão,

$$\partial_\nu j^\nu = 0. \tag{5.27}$$

Outra maneira de verificar a conservação de carga é calculando a carga total em uma superfície do tipo espaço. A carga total é dada pela integral

$$Q = \int j^\mu d\sigma_\mu.$$

Dadas duas superfícies do tipo espaço, σ_1 e σ_2 , que unidas formam o volume Ω . Essa configuração pode ser dada por superfícies que estão infinitesimalmente próximas, ou pode existir uma hipersuperfície do tipo tempo σ_∞ no infinito, de tal forma que a carga total nessa superfície é nula, pois o campo vai à zero no infinito, assim como no caso da figura (5.1).

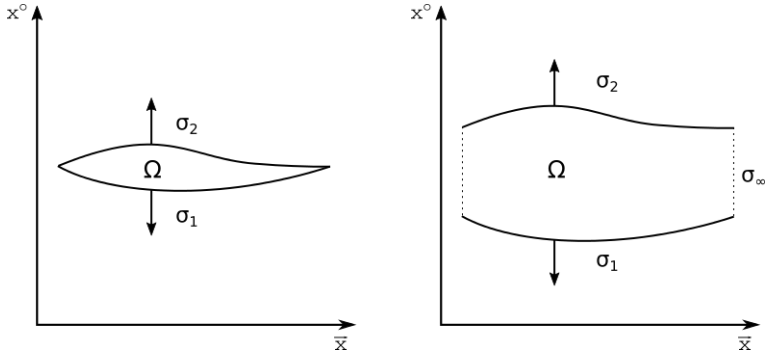


Figura 5.1: Superfícies do tipo espaço.

Para ambas as situações podemos escrever as cargas referentes às superfícies

$$Q_1 = \int_{\sigma_1} j^\mu d\sigma_\mu, \quad Q_2 = - \int_{\sigma_2} j^\mu d\sigma_\mu.$$

O sinal para a carga Q_2 é devido à direção do vetor normal à superfícies. No cálculo da carga Q_1 podemos somar e subtrair a carga Q_2 de modo que

$$\begin{aligned} Q_1 &= Q_1 + Q_2 - Q_2 \\ &= \left(\int_{\sigma_1} j^\mu d\sigma_\mu - \int_{\sigma_2} j^\mu d\sigma_\mu \right) + \int_{\sigma_2} j^\mu d\sigma_\mu \\ &= \oint_{\partial\Omega} j^\mu d\sigma_\mu + Q_2. \end{aligned} \tag{5.28}$$

O teorema de Gauss em $(3+1)$ dimensões é tal que a integral no volume Ω do divergente de um vetor A^μ é equivalente à integral na superfície fechada que delimita este volume do vetor A^μ ,

$$\int_{\Omega} \partial_{\mu} A^{\mu} d^4x = \oint_{\partial\Omega=\sigma} A^{\mu} d\sigma_{\mu}.$$

Usando o teorema de Gauss na equação (5.28), temos

$$Q_1 = \int_{\Omega} \partial_{\mu} j^{\mu} d^4x + Q_2.$$

Assim, devido a equação de continuidade (5.27), o primeiro termo do lado direito da equação acima é nulo, logo, a carga total é conservada, $Q_1 = Q_2$, e não depende da superfície do tipo espaço.

5.1.4 Tensor Energia-Momento do Campo Eletromagnético

Neste trabalho, calculamos o TEM dos campos de spin zero e $1/2$ através da equação (2.32), dada pelo TEMH, apresentado na subseção 2.2.5. Porém, este não é o único método de se calcular o TEM. Uma outra maneira é dada pelo tensor energia-momento canônico (TEMC), onde dada a invariância da ação por uma translação do espaço-tempo, através do teorema de Noether obtemos

$$\Theta^{\mu}_{\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} A_{\lambda})} \partial_{\nu} A_{\lambda} - \delta^{\mu}_{\nu} \mathcal{L}, \quad \text{onde} \quad \partial_{\mu} \Theta^{\mu}_{\nu} = 0. \quad (5.29)$$

Com a densidade lagrangiana do eletromagnetismo

$$\mathcal{L} = \frac{-1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu},$$

temos um TEMC dado por

$$\Theta^\mu{}_\nu = -F^{\mu\lambda} \partial_\nu A_\lambda + \frac{1}{4} \delta_\nu^\mu F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}.$$

Como podemos observar, o TEMC, não necessariamente gera um tensor simétrico. Para simetrizar o TEMC é necessário adicionar um termo do tipo $\partial_\lambda K^{\lambda\mu\nu}$. Este método de simetrização do tensor energia-momento foi proposto por Belinfante[32] e Rosenfeld em 1940. Precisamos que $K^{\lambda\mu\nu}$ seja antissimétrico nos índices λ e μ , para que quando aplicarmos a derivada no TEM simetrizado, este continue sendo nulo.

$$K^{\lambda\mu\nu} = -K^{\mu\lambda\nu} \quad \implies \quad \partial_\mu \partial_\lambda K^{\lambda\mu\nu} = 0.$$

O tensor simetrizado em termos do tensor não-simetrizado é

$$T^{\mu\nu} = \Theta^{\mu\nu} + \partial_\lambda K^{\lambda\mu\nu}.$$

O modo de encontrar $K^{\lambda\mu\nu}$ é encontrado facilmente nos livros de teoria quântica de campos. Portanto, usaremos diretamente o resultado $\partial_\lambda K^{\lambda\mu\nu} = \partial_\lambda (F^{\mu\lambda} A^\nu)$. Como nesse caso não temos interação, portanto, $\partial_\lambda F^{\mu\lambda} = 0$, o tensor energia-momento para o campo eletromagnético é

$$T^\mu{}_\nu = -F^{\mu\lambda} F_{\nu\lambda} + \frac{1}{4} \delta_\nu^\mu F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}, \quad (5.30)$$

Este é um TEMC simetrizado e que coincide com o TEMH. Porém, o fato desses tensores coincidirem para esse caso específico não indica que o TEM na equação de Einstein (2.33) possa ser descrito pelo TEMC. Para a equação de campo de Einstein, como vimos na subseção (2.2.5), deve ser escrito através do TEMH, obtido da variação da ação da matéria em relação ao tensor métrico, como mostra a equação (2.32).

A lagrangiana do eletromagnetismo com fonte é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{-1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - A_\mu j^\mu. \quad (5.31)$$

O cálculo do TEMC, dada a lagrangiana com fonte, é

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = -j^\mu F^\nu{}_\mu, \quad (5.32)$$

onde $T^{\mu\nu}$ é dado pela equação (5.30). Podemos estudar também como a essa equação se transforma conformemente. Fazendo a transformação do espaço-tempo de Minkowski para o espaço de Riemann $\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu$

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = -j^\mu F^\nu{}_\mu.$$

O cálculo de $\nabla_\mu T^{\mu\nu}$ é muito semelhante ao que fizemos para calcular $\nabla_\mu F^{\mu\nu}$, na seção 5.1.3. Portanto, podemos escrever diretamente a equação no espaço de Weyl

$$\frac{\bar{\nabla}_\mu(\sqrt{-g}T^\mu{}_\alpha)}{\sqrt{-g}} = F_{\nu\alpha}j^\nu, \quad (5.33)$$

que escrito em termos de densidades tensoriais, adquire a forma

$$\bar{\nabla}_\mu \mathfrak{T}^\mu_\alpha = F_{\nu\alpha} j^\alpha.$$

Concluimos assim, que tanto as equações de Maxwell tem simetria conforme quanto a identidade (5.32). Além disso, como já é sabido o traço do TEM para o eletromagnetismo é nulo para 4 dimensões, o que condiz com as prescrições de uma teoria conforme

$$T^\mu_\mu = -F^{\mu\lambda} F_{\mu\lambda} + \frac{1}{4} \delta^\mu_\mu F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \quad (5.34)$$

$$= \left(-1 + \frac{d}{4}\right) F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}. \quad (5.35)$$

5.2 Equação de Proca

Proposta em 1936, por Alexandru Proca[33], a equação de Proca descreve um campo massivo de spin 1 no espaço-tempo de Minkowski. O campo de Proca tem semelhanças com o campo eletromagnético, cuja descrição é feita pelo quadripotencial $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$ enquanto o campo de Proca é descrito por uma generalização deste campo, sendo $B^\mu = (\varphi, \mathbf{B})$ seu quadripotencial. No modelo padrão, essa equação, descreve o movimento dos três bósons massivos responsáveis pela interação fraca: W^\pm e Z^0 . Nesta seção vamos deduzir a equação de Proca através da formulação de Bargmann-Wigner, do mesmo modo como é feita no livro *Relativistic Quantum Mechanics*, Greiner[29], e estudar a simetria conforme desta equação.

5.2.1 Formulação de Bargmann-Wigner para a Equação de Proca

As equações de BW⁴ são equações de movimento que para campos massivos de spin s que podem ser escritas como

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)_{a_i}^{a'_i} \psi_{a_1 \dots a'_i \dots a_{2s}}(x) = 0, \quad \text{com} \quad i = 1, \dots, 2s.$$

No caso de Proca, temos um campo com spin 1 ($s = 1$), logo, a função de onda $\Psi(x)$ é rotulada com dois índices $\psi_{ab}(x)$. Portanto, temos duas equações de Dirac para a matriz simétrica $\psi_{ab}(x)$

$$(i\gamma_\mu \partial^\mu - m)\Psi(x) = 0 \quad \text{e} \quad \Psi(x)(i\gamma_\mu^T \overleftarrow{\partial}^\mu - m) = 0. \quad (5.36)$$

Estas equações também podem ser reescritas com os índices espinoriais de acordo com

$$(i\gamma_{aa'}^\mu \partial^\mu - m\delta_{aa'})\psi_{a'b} = 0 \quad \text{e} \quad \psi_{ab'}(i\gamma_{bb'}^\mu \overleftarrow{\partial}^\mu - m\delta_{bb'}) = 0.$$

Sendo o espinor ψ_{ab} , uma matriz simétrica, podemos expandi-lo em um conjunto de matrizes de elementos simétricos da representação padrão da álgebra de Clifford. Esta representação padrão consistem em dez matrizes simétricas e seis antissimétricas

⁴As equações de BW foram utilizadas na subseção 3.1.1 para mostrar que todos os campos relativísticos obedecem a equação de Klein-Gordon e no apêndice ??, mostramos a dedução através da equação de Dirac.

$$\text{Matrizes Simétricas} \begin{cases} \gamma^\mu C \\ \sigma^{\mu\nu} C \end{cases}, \quad \text{Matrizes Antissimétricas} \begin{cases} \gamma^\mu \gamma^5 C \\ i\gamma_5 C \\ C \end{cases}, \quad (5.37)$$

onde $C = i\gamma^2\gamma^o$ é a carga conjugada, $\sigma^{\mu\nu}$ é comutador das matrizes de Dirac (4.28) e $\gamma^5 = -i\gamma^o\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. Podemos observar que enquanto para as matrizes simétricas o transposto é⁵

$$\begin{aligned} (\gamma^\mu C)^T &= C^T \gamma^{\mu T} \\ &= -(i\gamma^2\gamma^o)(\gamma^o\gamma^{\mu*}\gamma^o) \\ &= -i\gamma^2\gamma^{\mu*}\gamma^o \\ &= \gamma^\mu(i\gamma^2\gamma^o) \\ &= \gamma^\mu C, \end{aligned}$$

enquanto que para as matrizes antissimétricas temos

$$\begin{aligned} (i\gamma_5 C)^T &= C^T i\gamma_5^T \\ &= -(i\gamma^2\gamma^o)i\gamma_5 \\ &= -i\gamma_5 C. \end{aligned}$$

Assim, podemos escrever o espinor com as matrizes $\gamma^\mu C$ e $\sigma^{\mu\nu} C$ de acordo com

⁵Usando álgebra de Clifford (3.9).

$$\Psi(x) = m\gamma^\mu C B_\mu(x) + \frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu} C G_{\mu\nu}(x), \quad (5.38)$$

onde $B_\mu(x)$ e $G_{\mu\nu}(x)$ são funções geralmente complexas e que sob TL se transformam como um vetor e um tensor antissimétrico, respectivamente. Substituindo este espinor nas equações de BW (5.36), adquirimos as equações

$$(i\gamma_\alpha \partial^\alpha - m) \left(m\gamma^\mu B_\mu + \frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu} G_{\mu\nu} \right) C = 0, \quad (5.39)$$

$$\left(m\gamma^\mu B_\mu + \frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu} G_{\mu\nu} \right) C (i\gamma_\alpha^T \overleftarrow{\partial}^\alpha - m) = 0. \quad (5.40)$$

Com os índices matriciais, podemos reescrever as equações acima tendo em mente que $B_\mu(x)$ e $G_{\mu\nu}(x)$ não fazem parte da multiplicação matricial, logo

$$(i\gamma_\alpha \partial^\alpha - m)_{aa'} \left(m(\gamma^\mu C)_{a'b} B_\mu + \frac{1}{2}(\sigma^{\mu\nu} C)_{a'b} G_{\mu\nu} \right) = 0,$$

$$(i\gamma_\alpha \partial^\alpha - m)_{bb'} \left(m(\gamma^\mu C)_{ab'} B_\mu + \frac{1}{2}(\sigma^{\mu\nu} C)_{ab'} G_{\mu\nu} \right) = 0.$$

Na equação (5.41) podemos fatorar C para o lado direito da equação. Sabendo que $C\gamma_\alpha^T = -\gamma_\alpha C$, obtemos

$$\left(m\gamma^\mu B_\mu + \frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu} G_{\mu\nu} \right) (-i\gamma_\alpha \overleftarrow{\partial}^\alpha - m) C = 0. \quad (5.41)$$

Assim, desenvolvendo as equações (5.39) e (5.41), temos

$$\begin{aligned} \left(im\partial_\alpha B_\mu \gamma^\alpha \gamma^\mu - m^2 \gamma^\mu B_\mu + \frac{1}{2} i \gamma^\alpha \sigma^{\mu\nu} \partial_\alpha G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} m \sigma^{\mu\nu} G_{\mu\nu} \right) C &= 0, \\ \left(im\partial_\alpha B_\mu \gamma^\mu \gamma^\alpha + m^2 \gamma^\mu B_\mu + \frac{1}{2} i \sigma^{\mu\nu} \gamma^\alpha \partial_\alpha G_{\mu\nu} + \frac{1}{2} m \sigma^{\mu\nu} G_{\mu\nu} \right) C &= 0. \end{aligned}$$

A diferença entre as duas equações acima é

$$\left(im\partial_\alpha B_\mu [\gamma^\alpha, \gamma^\mu] - 2m^2 \gamma^\mu B_\mu + \frac{1}{2} i [\gamma^\alpha, \sigma^{\mu\nu}] \partial_\alpha G_{\mu\nu} - m \sigma^{\mu\nu} G_{\mu\nu} \right) C = 0. \quad (5.42)$$

O comutador $[\gamma^\alpha, \sigma^{\mu\nu}]$ foi calculado no capítulo anterior (4.29), cujo resultado é

$$[\gamma^\alpha, \sigma^{\mu\nu}] = 2i(\eta^{\alpha\mu} \gamma^\nu - \eta^{\alpha\nu} \gamma^\mu).$$

Substituindo o comutador acima na equação (5.42) temos

$$\left(2m\partial_\alpha B_\mu \sigma^{\alpha\mu} - 2m^2 \gamma^\mu B_\mu + \gamma_\nu \partial_\alpha G^{\alpha\nu} - \gamma_\mu \partial_\alpha G^{\mu\alpha} - m \sigma^{\mu\nu} G_{\mu\nu} \right) C = 0. \quad (5.43)$$

Usando o fato de $G_{\mu\nu}$ e $\sigma_{\mu\nu}$ serem antissimétricos podemos agrupar a equação em dois termos proporcionais as matrizes simétricas da álgebra de Clifford

$$m(\partial^\alpha B^\mu - \partial^\mu B^\alpha - G^{\alpha\mu}) \sigma_{\alpha\mu} C - 2\gamma_\mu C (\partial_\alpha G^{\alpha\nu} + m^2 B^\mu) = 0. \quad (5.44)$$

Como as matrizes $\sigma_{\alpha\mu} C$ e $\gamma_\mu C$ são linearmente independentes os coeficientes devem ser nulos separadamente. Portanto, conseguimos definir

$$G^{\mu\nu} = \partial^\mu B^\nu - \partial^\nu B^\mu, \quad (5.45)$$

$$\partial_\mu G^{\mu\nu} = -m^2 B^\nu. \quad (5.46)$$

Essas são as equações de Proca. Como pode-se observar, quando $m = 0$, essas equações recaem nas equações de Maxwell (5.14) e (5.16a) sem fonte. Substituindo a equação (5.45) em (5.46), podemos encontrar a equação de Proca em termos do campo vetorial $B^\mu(x)$

$$\partial_\mu \partial^\mu B^\nu - \partial_\mu \partial^\nu B^\mu = -m^2 B^\nu.$$

Com uma generalização da condição de *gauge* de Lorentz, onde $\partial_\mu A^\mu = 0$ (quadripotencial eletromagnético) torna-se $\partial_\mu B^\mu = 0$. Assim

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)B^\nu = 0, \quad (5.47)$$

que é compatível com a equação de Klein-Gordon, como já havíamos mostrado em 3.1.1 para o caso mais geral.

Note que através da definição do tensor de Proca $G^{\mu\nu}$, dada pela equação (5.45), também podemos obter a identidade de Bianchi

$$\partial_\alpha G_{\mu\nu} + \partial_\mu G_{\nu\alpha} + \partial_\nu G_{\alpha\mu} = 0. \quad (5.48)$$

E assim definir um tensor dual

$$\tilde{G}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} G_{\alpha\beta}, \quad \text{tal que} \quad \partial_\mu \tilde{G}^{\mu\nu} = 0.$$

5.2.2 Simetria Conforme da Equação de Proca

As equações de Proca se transformam para o espaço de Riemann e, posteriormente para o espaço de Weyl, de modo muito semelhante as equações de Maxwell vistas nas subseções 5.1.2 e 5.1.3. Considerando essas semelhanças, vamos poupar o leitor de cálculos repetitivos. A identidade de Bianchi para $G_{\mu\nu}$, dada pela equação (5.48), independe da conexão afim usada, portanto, é invariante tanto no espaço de Riemann quanto no espaço de Weyl

$$\bar{\nabla}_\mu \tilde{G}^{\mu\nu} = \nabla_\mu \tilde{G}^{\mu\nu} = \partial_\mu \tilde{G}^{\mu\nu} = 0.$$

A definição do tensor de Proca dada pela equação (5.45), também independe da conexão afim utilizada

$$\nabla^\mu B^\nu - \nabla^\nu B^\mu = \partial^\mu B^\nu - \partial^\nu B^\mu = G^{\mu\nu}.$$

Portanto, o que resta é verificar a equação (5.46) que para o espaço de Riemann se torna

$$\frac{\partial_\mu (\sqrt{-g} G^{\mu\nu})}{\sqrt{-g}} = -m^2 B^\nu. \quad (5.49)$$

Quando passamos para o espaço de Weyl, vemos que

$$\frac{\partial_\mu (\sqrt{-g} G^{\mu\nu})}{\sqrt{-g}} = \frac{\bar{\nabla}_\mu (\sqrt{-g} G^{\mu\nu})}{\sqrt{-g}}. \quad (5.50)$$

Assim, podemos escrever a equação (5.46) no espaço de Weyl através das densidades tensoriais

$$\bar{\nabla}_\mu \mathfrak{G}^{\mu\nu} = -m^2 \mathfrak{B}^\nu. \quad (5.51)$$

Como podemos observar, na equação acima, o lado esquerdo da equação é invariante por TC devido à derivada covariante de Weyl e a densidade tensorial $\mathfrak{G}^{\mu\nu}$, porém o lado direito é um termo de massa. Caso transformamos a massa com $m \rightarrow \Omega^{-1}m$, como exigem as equações para o campo de spin zero e meio, preservamos a simetria conforme desta equação. Por outro lado, se reescrevemos a equação de Proca em termos do campo vetorial podemos reconhecer imediatamente sua covariância.

A equação de Proca em termos do campo vetorial com interação gravitacional é escrita da mesma maneira que a equação de Klein-Gordon

$$(\nabla_\mu \nabla^\mu + m^2)B^\nu = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu B^\alpha) + m^2 B^\alpha = 0.$$

Quando passamos para o espaço de Weyl, a equação ganha um termo dependente de k_μ , idêntico ao caso da equação de Klein-Gordon (3.17)

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu B^\alpha) - 2k^\alpha \partial_\alpha B^\alpha + m^2 B^\alpha = 0.$$

Ou escrita de forma equivalente (e muito mais simples)

$$(g^{\mu\nu} \bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\nu + m^2)B^\nu = 0.$$

Novamente vemos a necessidade de uma transformação conforme da massa

$$g^{\mu\nu} \rightarrow \frac{g^{\mu\nu}}{\Omega^2} \quad \Longrightarrow \quad m \rightarrow \frac{m}{\Omega}. \quad (5.52)$$

5.2.3 Tensor Energia-Momento da Lagrangiana de Proca

A lagrangiana de Proca é idêntica à lagrangiana do campo eletromagnético exceto por um termo de massa

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}G^{\mu\nu}G_{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu \quad (5.53)$$

$$= -\frac{1}{4}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}G_{\mu\nu}G_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}m^2 g^{\mu\nu} A_\mu A_\nu. \quad (5.54)$$

A equação de Proca pode ser obtida através dessa lagrangiana pelas equações de Euler-Lagrange. No entanto, estamos interessados no TEMH, dado pela equação (2.32). Para isso precisamos primeiramente calcular a variação da lagrangiana dada uma variação na métrica

$$\begin{aligned} \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta g_{\mu\nu}} &= -\frac{1}{4}\delta(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta})G_{\mu\nu}G_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A_\nu \delta g^{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{4}(\delta g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} + g^{\mu\alpha}\delta g^{\nu\beta})G_{\mu\nu}G_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}m^2 A^\mu A^\nu \delta g_{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{2}\left(g_{\alpha\beta}G^{\mu\alpha}G^{\beta\nu} + m^2 A^\mu A^\nu\right)\delta g_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Portanto, temos

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g_{\mu\nu}} = -\frac{1}{2} \left(G^{\mu\alpha} G_{\alpha}{}^{\nu} + m^2 A^{\mu} A^{\nu} \right). \quad (5.55)$$

Com o resultado acima, podemos escrever o TEMH

$$T^{\mu\nu} = -2 \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g_{\mu\nu}} - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (5.56)$$

$$= G^{\mu\alpha} G_{\alpha}{}^{\nu} + m^2 A^{\mu} A^{\nu} - g^{\mu\nu} \left(-\frac{1}{4} G^{\mu\alpha} G_{\alpha\mu} + \frac{1}{2} m^2 A_{\mu} A^{\mu} \right) \quad (5.57)$$

$$= G^{\mu\alpha} G_{\alpha}{}^{\nu} + g^{\mu\nu} \frac{1}{4} G^{\alpha\beta} G_{\alpha\beta} + m^2 \left(A^{\mu} A^{\nu} - g^{\mu\nu} \frac{1}{2} A_{\alpha} A^{\alpha} \right). \quad (5.58)$$

O traço do TEM para o campo de Proca é

$$T_{\mu}^{\mu} = G^{\mu\alpha} G_{\alpha\nu} + \frac{d}{4} G^{\alpha\beta} G_{\alpha\beta} + m^2 \left(A^{\mu} A_{\mu} - \frac{d}{2} A_{\alpha} A^{\alpha} \right) \quad (5.59)$$

Para $d = 4$, no caso do campo eletromagnético temos o traço do TEM nulo, porém, como temos um termo de massa, obtemos

$$T_{\mu}^{\mu} = -m^2 A^{\mu} A_{\mu}, \quad (5.60)$$

o que não condiz com a teoria conforme.

5.3 Condição de Lorentz

Neste capítulo, utilizamos em dois momentos a condição de *gauge* de Lorentz

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (5.61)$$

Esta condição é válida, neste formato, no espaço-tempo de Minkowski. Porém, quando passamos para o espaço de Riemann, sua forma muda

$$\begin{aligned} \partial_\mu A^\mu = 0 \quad \implies \quad \nabla_\mu A^\mu &= \partial_\mu A^\mu + \Gamma_\mu A^\mu \\ &= \partial_\mu A^\mu + A^\mu \partial_\mu \ln \sqrt{-g} \\ &= \frac{\partial_\mu (\sqrt{-g} A^\mu)}{\sqrt{-g}} = 0. \end{aligned}$$

Para o espaço de Weyl essa condição se torna

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_\mu A^\mu &= \partial_\mu A^\mu + \bar{\Gamma}_\mu A^\mu \\ &= \frac{\partial_\mu (\sqrt{-g} A^\mu)}{\sqrt{-g}} - \frac{\bar{\nabla}_\mu \sqrt{-g}}{\sqrt{-g}}. \end{aligned}$$

Portanto, a condição de Lorentz no espaço de Weyl é

$$\frac{\bar{\nabla}_\mu (\sqrt{-g} A^\mu)}{\sqrt{-g}} = \frac{\partial_\mu (\sqrt{-g} A^\mu)}{\sqrt{-g}} = 0. \quad (5.62)$$

Capítulo 6

Considerações finais

Tendo em vista o crescente interesse da simetria conforme nos modelos físicos, que vão desde a matéria condensada à física de altas energias e à cosmologia, elaboramos uma revisão crítica dos principais desenvolvimentos dessa teoria, em nível clássico.

Baseado no procedimento de Weyl, alteramos as equações de campo do espaço de Minkowski para o espaço de Weyl, onde a invariância conforme é natural. Essa mudança de *gauge* se dá com a alteração simultânea do tensor métrico $g_{\mu\nu} \rightarrow \exp(2\omega)g_{\mu\nu}$ e da derivada covariante $\nabla_\mu \rightarrow \nabla_\mu + C_\mu$, onde C_μ depende do tensor métrico e do fator de escala. O fator de escala pode ou não ser uma função do espaço-tempo, dependendo da transformação conforme estudada. Como vimos, a dilatação exige um fator de escala constante, enquanto que a aceleração conforme se manifesta na transformação do tensor métrico com uma dependência espaço-temporal. As demais transformações do grupo C_o pertencem ao grupo de

Poincaré, cujo fator de escala é 1.

Com o intuito de explorar a simetria conforme na gravitação de Einstein, no capítulo 2, estudamos as consequências de uma transformação conforme nos tensores de curvatura. Nota-se que, para exigirmos uma invariância conforme da teoria, é necessário utilizar a conexão de Weyl. Esta conexão afim faz com que o espaço de Weyl se mantenha invariante por transformação conforme. Neste espaço, os tensores de Riemann e Ricci são invariantes por uma transformação conforme, embora, mesmo com essa mudança, a ação de Einstein-Hilbert não o seja. Isto se deve ao escalar de Ricci ter peso conforme -1 , enquanto $\int d^4x \sqrt{-g}$ tem peso 2. Sendo assim, é necessário introduzir uma nova ação, que tenha invariância conforme. Uma das opções apresentadas na literatura é a ação de Weyl-Bach, que produz equações de campo semelhantes às equações de Einstein. Esta é uma das possíveis gravitações modificadas, que atualmente visam explicar efeitos geralmente atribuídos à energia e matéria escura. Esta teoria possui alguns problemas, sendo um deles que, no limite de campo fraco, o fato de não recair na gravitação Newtoniana diretamente. Porém, a métrica de Schwarzschild é solução exata desta equação na região $T^{\mu\nu} = 0$.

Nos capítulos seguintes, obtivemos as transformações conformes das equações de campo espinorial 0, 1/2 e 1. Para campos com massa nula, mostramos que a invariância conforme é automática, quando estas equações estão escritas no espaço de Weyl. Porém, para campos massivos, o termo de massa, aparentemente, causa a quebra da invariância, exceto se relaxarmos a exigência de que as massas de repouso permaneçam constantes. Quando se permite a transformação

$m \rightarrow \Omega^{-1}m$, as equações de campo para spin 0, 1/2 e 1 se tornam invariantes. As equações de Proca no espaço de Weyl são escritas como,

$$\bar{\nabla}_\mu \mathfrak{G}^{\mu\nu} = -m^2 \mathfrak{B}^\nu, \quad (6.1)$$

onde o lado esquerdo da equação é invariante por transformações conformes. Se exigimos a transformação das massas, o lado direito da equação também terá peso conforme zero, preservando portanto a invariância conforme. Também verificamos que, do espaço-tempo de Minkowski para o espaço de Weyl, a condição de *gauge* de Lorentz se transforma,

$$\partial_\mu B^\mu = 0 \quad \Longrightarrow \quad \bar{\nabla}_\mu \mathcal{B}^\mu = 0, \quad (6.2)$$

resultado que segue imediatamente tomando a derivada de Weyl de ambos os membros da equação (6.1). Assim, a condição de Lorentz decorre das equações de movimento, assim como no espaço-tempo de Minkowski. Ou seja, a condição é covariante sob Weyl, porém, depende agora do fator conforme, o que dificulta a introdução de interação via o princípio de *gauge*, conforme Bhabha[8] já apontava. O problema está nos graus de liberdade físicos, que devem desacoplar para reconhecermos os modos transversais e longitudinais do campo, seja sem massa ou o de Proca, que compõem nas interações eletro-fracas.

Como perspectiva futura, acreditamos ser possível estender do Modelo Padrão da física de partículas e suas interações fundamentais, a fim de incluir a simetria conforme como um grupo de simetria ampliado. Pawłowski e Raczka[17], propuseram, em 1994, essa extensão, de modo que o Modelo Padrão

teria simetria $SU(3) \times SU(2)_L \times U(1) \times C$, onde C é o grupo conforme local. Trabalhos nesse sentido aparentam ser promissores, visando obter uma teoria de grande unificação, onde efeitos gravitacionais possam ser naturalmente incorporados via princípio de equivalência local.

Apêndice A

Deduções envolvendo as variações

Neste trabalho usaremos em dois momentos a variação da ação para encontrar equações de movimento. Para não saturarmos o texto com cálculos em demasia, faremos a variação do tensor métrico e dos tensores de curvatura neste apêndice.

A.1 $\delta g^{\mu\nu} \rightarrow \delta g^{\mu\nu}$ e $\delta\sqrt{-g}$

No texto usaremos algumas vezes propriedades do tensor métrico, seu determinante e sua inversa, razão pela qual é importante ter as ferramentas apropriadas para os cálculos. Precisamos inicialmente encontrar como a variação do tensor métrico se relaciona com seu inverso. Sabendo que

$$g^{\mu\alpha} g_{\nu\alpha} = \delta_{\nu}^{\mu}.$$

Calculamos a variação da equação acima, encontrando a relação

$$\delta(g^{\mu\alpha})g_{\nu\alpha} = -g^{\mu\alpha}\delta(g_{\nu\alpha}).$$

Isolando o tensor métrico ou a inversa obtemos as expressões

$$\begin{aligned}\delta g_{\mu\nu} &= -g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}\delta g^{\alpha\beta}, \\ \delta g^{\mu\nu} &= -g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\delta g_{\alpha\beta},\end{aligned}$$

Para facilitar a notação ao apresentarmos os cálculos podemos escrever a variação infinitesimal $\delta g_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$. Efetuando esta substituição percebemos que ganhamos um sinal negativo quando levantamos ou abaixamos os índices de $h_{\mu\nu}$,

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\delta g_{\alpha\beta} \quad \rightarrow \quad h^{\mu\nu} = -g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}h_{\alpha\beta}. \quad (\text{A.1})$$

A próxima dedução não é utilizada apenas para a variação da ação, mas também para calcularmos contrações dos símbolos de Christoffel. Vamos demonstrar que a contração do índice superior com o inferior do símbolo de Christoffel pode ser escrita em termos do determinante do tensor métrico,

$$\begin{aligned}\Gamma_{\alpha} &= \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_{\alpha}g_{\mu\nu} \\ &= \partial_{\alpha} \ln \sqrt{-g}.\end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Dada uma matriz G , temos $\ln(\det G) = \text{Tr}(\ln G)$ como uma propriedade conhecida. Diferenciando,

$$\frac{1}{\det G} \partial_\alpha (\det G) = \text{Tr}(G^{-1} \partial_\alpha G).$$

Sendo G a matriz do tensor métrico $g_{\mu\nu}$, podemos reescrevê-la em forma de componentes

$$\frac{\partial_\alpha g}{g} = g^{\mu\nu} \partial_\alpha g_{\mu\nu}.$$

Assim, fica demonstrada a expressão (A.2),

$$\partial_\alpha \ln g = g^{\mu\nu} \partial_\alpha g_{\mu\nu}. \quad (\text{A.3})$$

A variação do determinante do tensor métrico $\delta\sqrt{-g}$ aparece em toda as ações para o campo gravitacional que estudaremos neste trabalho e, portanto, é conveniente ter os cálculo em mãos. Aproveitando a equação acima e substituindo a derivada pela variação, temos

$$\delta g = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}.$$

Mediante cálculos simples, chegamos a

$$\begin{aligned} \delta\sqrt{-g} &= \frac{-1}{2} \frac{\delta g}{\sqrt{-g}} \\ &= \frac{-1}{2} \frac{g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}}{\sqrt{-g}} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

A.2 δR

Para deduzirmos tanto as equações de Einstein (2.33) quanto a equação de Bach (2.54) é necessário calcular a variação do tensor de Riemann e contraí-lo para obtermos a variação do tensor e o escalar de Ricci¹. O tensor de Riemann (2.26) depende do símbolo de Christoffel (2.23). A variação do símbolo de Christoffel pode ser derivada utilizando a equação (A.1),

$$\delta\Gamma_{bc}^a = -h^{ad}\Gamma_{dbc} + \frac{1}{2}g^{ad}(\partial_b h_{dc} + \partial_c h_{db} - \partial_d h_{bc}).$$

A equação acima pode ser reescrita em termos de derivadas covariantes,

$$\delta\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2}g^{ad}(\nabla_b h_{dc} + \nabla_c h_{db} - \nabla_d h_{bc}). \quad (\text{A.5})$$

A variação do tensor de Riemann é escrita em termos dos símbolos de Christoffel,

$$\begin{aligned} \delta R_{bcd}^a &= \partial_c \delta\Gamma_{db}^a - \partial_d \delta\Gamma_{cb}^a \\ &\quad + \delta\Gamma_{ce}^a \Gamma_{bd}^e + \Gamma_{ce}^a \delta\Gamma_{bd}^e \\ &\quad - \delta\Gamma_{de}^a \Gamma_{bc}^e - \Gamma_{de}^a \delta\Gamma_{bc}^e. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Podemos rearranjar os termos da equação acima de forma a serem escritos como derivadas covariantes,

¹Nesta seção do apêndice usaremos a notação do livro de Wald[34], onde os índices latinos representam uma formulação independente da base.

$$\begin{aligned}
\delta R_{bcd}^a &= \nabla_c \delta \Gamma_{bd}^a - (c \leftrightarrow d) \\
&= \frac{1}{2} g^{ae} (\nabla_c \nabla_b h_{ed} + \nabla_c \nabla_d h_{eb} - \nabla_c \nabla_e h_{bd}) - (c \leftrightarrow d) \\
&= \frac{1}{2} (\nabla_c \nabla_b h_d^a + \nabla_c \nabla_d h_b^a - \nabla_c \nabla^a h_{bd}) - (c \leftrightarrow d).
\end{aligned}$$

Para o tensor de Ricci, basta fazer $a = c$ na equação acima:

$$\begin{aligned}
\delta R_{bd} &= \frac{1}{2} (\nabla_a \nabla_b h_d^a + \nabla_a \nabla_d h_b^a - \nabla_a \nabla^a h_{bd}) \\
&\quad - \frac{1}{2} (\nabla_d \nabla_b h_a^a + \nabla_d \nabla_a h_b^a - \nabla_d \nabla^a h_{ba}) \\
&= \nabla_a \nabla_{(b} h_{d)}^a - \frac{1}{2} (\nabla^2 h_{bd} + \nabla_d \nabla_b h_a^a). \quad (\text{A.7})
\end{aligned}$$

Sabendo que $R = g^{ab} R_{ab}$, temos

$$\begin{aligned}
\delta R &= \delta g^{ab} R_{ab} + g^{ab} \delta R_{ab} \\
&= -h^{ab} R_{ab} + \nabla_a \nabla_b h^{ab} - \nabla^2 h_a^a \quad (\text{A.8})
\end{aligned}$$

Para chegarmos as equações de Einstein, δR fica simplificado, pois os termos com derivada covariante são termos de superfície e se anulam. No caso da equação de Bach, o cálculo é um pouco mais trabalhoso já que aparecem termos quadráticos no tensor e no escalar de Ricci.

Apêndice B

Densidade Tensorial

Sabemos que dada uma transformação de coordenadas, o tensor métrico se transforma como

$$g_{\mu'\nu'}(x') = \partial_{\mu'}x^\alpha \partial_{\nu'}x^\beta g_{\alpha\beta}(x).$$

Aplicando o determinante na equação acima, ficamos com

$$g' = \left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right|^2 g.$$

Para o caso em que a transformação se dá de um tensor métrico qualquer para o tensor métrico de Minkowski $g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$, cujo determinante é $\det(\eta_{\mu\nu}) = -1$. A expressão acima pode ser reescrita como,

$$\sqrt{-g} = \left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right|.$$

Escrevendo o tensor métrico em termos do Jacobiano, $g_{\mu\nu} = (J^T J)_{\mu\nu}$, temos,

$$g = \det(J^T J). \quad (\text{B.1})$$

Deste modo, podemos definir uma densidade tensorial como uma generalização do conceito de tensor. Dado um tensor A , a densidade tensorial correspondente, \mathfrak{A} , é dada por este tensor multiplicado pelo determinante do Jacobiano com um peso w , ou, em termos do tensor métrico,

$$\mathfrak{A} = (\sqrt{-g})^w A.$$

B.1 Derivada covariante de uma densidade tensorial

A derivada covariante no espaço de Weyl de uma densidade tensorial é definida de maneira diferente. Como temos $\bar{\nabla}_\mu g \neq 0$, precisamos estudar o modo como isso afeta $\bar{\nabla}_\mu \mathfrak{A}$.

Para calcularmos $\bar{\nabla}_\mu g$, usa-se a equação (A.3), substituindo a derivada parcial pela derivada covariante do espaço de Weyl,

$$\bar{\nabla}_\alpha \ln g = g^{\mu\nu} \bar{\nabla}_\alpha g_{\mu\nu}.$$

Calculando o lado direito da equação, temos

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\nabla}_\alpha g}{g} &= g^{\mu\nu} \bar{\nabla}_\alpha g_{\mu\nu} \\ &= g^{\mu\nu} \left(\partial_\alpha g_{\mu\nu} - g_{\lambda\nu} \bar{\Gamma}_{\alpha\mu}^\lambda - g_{\mu\lambda} \bar{\Gamma}_{\alpha\nu}^\lambda \right) \\ &= \frac{\partial_\alpha g}{g} - 2\bar{\Gamma}_\alpha. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Portanto, podemos escrever a derivada covariante de g como

$$\bar{\nabla}_\alpha g = \partial_\alpha g - 2g\bar{\Gamma}_\alpha. \quad (\text{B.3})$$

Dada uma densidade tensorial contravariante \mathcal{A}^α com peso w , a derivada covariante desta é obtida com

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_\beta \mathcal{A}^\alpha &= (\bar{\nabla}_\beta \sqrt{-g^w}) \mathcal{A}^\alpha + \sqrt{-g^w} \bar{\nabla}_\beta \mathcal{A}^\alpha \\ &= -\frac{w}{2} g^{\frac{w}{2}-1} (\bar{\nabla}_\beta g) \mathcal{A}^\alpha + \sqrt{-g^w} (\partial_\beta \mathcal{A}^\alpha + \bar{\Gamma}_{\beta\lambda}^\alpha \mathcal{A}^\lambda) \\ &= -\frac{w}{2} g^{\frac{w}{2}-1} \mathcal{A}^\alpha (\partial_\beta g - 2g\bar{\Gamma}_\beta) + \sqrt{-g^w} \partial_\beta \mathcal{A}^\alpha + \bar{\Gamma}_{\beta\lambda}^\alpha \mathcal{A}^\lambda \\ &= \mathcal{A}^\alpha \partial_\beta \sqrt{-g^w} - w \mathcal{A}^\alpha \bar{\Gamma}_\beta + \sqrt{-g^w} \partial_\beta \mathcal{A}^\alpha + \bar{\Gamma}_{\beta\lambda}^\alpha \mathcal{A}^\lambda \\ &= \partial_\beta \mathcal{A}^\alpha + \mathcal{A}^\lambda \bar{\Gamma}_{\beta\lambda}^\alpha - w \mathcal{A}^\alpha \bar{\Gamma}_\beta. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Podemos notar que no espaço de Riemann a derivada covariante de \mathcal{A} é

$$\nabla_\mu \mathcal{A}^\alpha = \partial_\mu \mathcal{A}^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \mathcal{A}^\nu,$$

isto é devido à $\nabla_\mu g = 0$.

O mesmo procedimento pode ser utilizado para calcular as componentes covariantes e também é similar ao procedimento para calcular uma densidade escalar,

$$\bar{\nabla}_\mu \mathcal{A}^\nu = \partial_\mu \mathcal{A}^\nu + \mathcal{A}^\alpha \bar{\Gamma}_{\mu\alpha}^\nu - w \mathcal{A}^\nu \bar{\Gamma}_\mu \quad (\text{B.5})$$

$$\bar{\nabla}_\mu \mathcal{A}_\nu = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \mathcal{A}_\alpha \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha - w \mathcal{A}_\nu \bar{\Gamma}_\mu \quad (\text{B.6})$$

$$\bar{\nabla}_\mu \mathcal{A} = \partial_\mu \mathcal{A} - w \mathcal{A} \bar{\Gamma}_\mu \quad (\text{B.7})$$

Apêndice C

Transformação Conforme dos Tensores de Curvatura

No capítulo 2 definimos a TC, como vimos, esta transformação gera um fator de escala no tensor métrico, como consequência, todos os tensores de curvatura são alterados.

Os cálculos da TC dos tensores de curvatura são simples, porém muito trabalhosos. Uma maneira mais simples de fazê-los é utilizando o Mathematica. Mais especificamente o pacote `xTensor` que está incluído no pacote `xAct` do Mathematica. Para obter o *notebook* basta clicar no ícone abaixo. É necessário ter o Mathematica instalado para abri-lo e o pacote `xTensor` para fazer os cálculos. O *notebook* em questão foi compilado no Mathematica 11.



Caso esteja visualizando esta dissertação na versão impressa, a seguir está disponível o código do *notebook*.

Apêndice C

Dada uma transformação conforme, a métrica é alterada por um fator de escala, o que gera mudanças nos tensores de curvatura. Neste notebook apresentamos os cálculos utilizados no capítulo 1, da dissertação Invariância Conforme apresentada por Susane Calegari com orientação do professor Dr. Jeferson de Lima Tomazelli.

Definições Gerais

Para chamar o pacote xTensor utiliza-se o comando

```
In[1]:= << xAct/xTensor/xTensor.m
```

```
-----
Package xAct`xPerm` version 1.2.3, {2015, 8, 23}
Copyright (C) 2003-2015, Jose M. Martin-Garcia, under the General Public License.
Connecting to external MinGW executable...
Connection established.
-----
Package xAct`xTensor` version 1.1.2, {2015, 8, 23}
Copyright (C) 2002-2015, Jose M. Martin-Garcia, under the General Public License.
-----
These packages come with ABSOLUTELY NO WARRANTY; for details type
Disclaimer[.]. This is free software, and you are welcome to redistribute
it under certain conditions. See the General Public License for details.
-----
```

Os seguintes comandos são apenas estéticos:

```
In[2]:= $PrePrint = ScreenDollarIndices;
Off[ToCanonical::"cmods"];
```

Definimos a variedade M com 4 dimensões e tensor métrico $g[-a,-b]$, que apresenta três dimensões espaciais e uma temporal. Dois tensores também são definidos, um escalar Ω e um vetor s^a .

```
In[4]:= DefManifold[M, 4, {a, b, c, d, e, f}];
DefMetric[{3, 1, 0}, g[-a, -b], Cd];
DefTensor[ $\Omega$ [], M];
DefTensor[s[-a], M];
```

2 | ApC.nb

```

** DefManifold: Defining manifold M.
** DefVBundle: Defining vbundle TangentM.
** DefTensor: Defining symmetric metric tensor g[-a, -b].
** DefTensor: Defining antisymmetric tensor epsilon[-a, -b, -c, -d].
** DefTensor: Defining tetrametric Tetrag[-a, -b, -c, -d].
** DefTensor: Defining tetrametric Tetrag[-a, -b, -c, -d].
** DefCovD: Defining covariant derivative Cd[-a].
** DefTensor: Defining vanishing torsion tensor TorsionCd[a, -b, -c].
** DefTensor: Defining symmetric Christoffel tensor ChristoffelCd[a, -b, -c].
** DefTensor: Defining Riemann tensor RiemannCd[-a, -b, -c, -d].
** DefTensor: Defining symmetric Ricci tensor RicciCd[-a, -b].
** DefCovD: Contractions of Riemann automatically replaced by Ricci.
** DefTensor: Defining Ricci scalar RicciScalarCd[].
** DefCovD: Contractions of Ricci automatically replaced by RicciScalar.
** DefTensor: Defining symmetric Einstein tensor EinsteinCd[-a, -b].
** DefTensor: Defining Weyl tensor WeylCd[-a, -b, -c, -d].
** DefTensor: Defining symmetric TFRicci tensor TFRicciCd[-a, -b].
** DefTensor: Defining Kretschmann scalar KretschmannCd[].
** DefCovD: Computing RiemannToWeylRules for dim 4
** DefCovD: Computing RicciToFRicci for dim 4
** DefCovD: Computing RicciToEinsteinRules for dim 4
** DefTensor: Defining weight +2 density Detg[]. Determinant.
** DefTensor: Defining tensor Omega[].
** DefTensor: Defining tensor s[-a].

```

O comando `Abrir` quando aplicado em um tensor de curvatura o reescreve como uma função explícita do tensor métrico. É necessário aplicar este comando antes de fazermos a transformação conforme. `Simpli`

```
In[9]:= Abrir[x_] := ChristoffelToGradMetric[RiemannToChristoffel[x]];
```

`Simplificar` atua contraindo o tensor métrico quando possível, substituindo derivada parcial pela derivada covariante (e símbolo de Christoffel), expande a expressão, etc. Faz o necessário para simplificar a expressão até chegar na forma desejada. O comando `DerivContr` permite que haja derivada covariante com índice contravariante.

```
In[9]:= Simplificar[x_] :=
x // Expand // (ChangeCovD[#, PD, Cd] &) // Abrir // ContractMetric // Simplification
DerivContr[x_] :=
x // (ContractMetric[#, g, AllowUpperDerivatives -> True] &) // Simplification

```

Transformação Conforme

O comando `TC` atua como um regra que transforma o tensor métrico de $g_{ab} \rightarrow \Omega^2 g_{ab}$ e para as

componentes contravariantes $g^{ab} \rightarrow \Omega^{-2} g^{ab}$

```
In[11]:= TC = # /. {
  IndexRule[g[a_?UpIndexQ, b_?UpIndexQ], Ω[]^(-2) g[a, b]],
  IndexRule[g[a_?DownIndexQ, b_?DownIndexQ], Ω[]^(2) g[a, b]]
} &;
```

S aplica uma regra sob a derivada covariante do fator de escala Ω onde $\nabla_a \Omega \rightarrow \Omega s_a$, isso é equivalente à dizer que $s_a = \nabla_a \ln \Omega$. Esta substituição é apenas estética, permite que as equações fiquem mais simples.

```
In[12]:= S = # /. {
  IndexRule[Cd[a_?UpIndexQ] [Ω[]], Ω[] s[a]],
  IndexRule[Cd[a_?DownIndexQ] [Ω[]], Ω[] s[a]]
} &;
```

Abacadabra é um comando que devolve a diferença entre o tensor conformemente transformado e o original, com todas as simplificações já aplicadas.

```
In[13]:= Abacadabra[X_] :=
  TC[Abriu[x]] - Abriu[x] // Simplificar // Simplificar // DerivContr // S //
  Simplificar // S // Simplificar
```

Transformação Conforme nos Tensores de Curvatura

Nesta seção do notebook obteremos $\delta T^{ab} = T^{cab} - T^{ab}$ dos tensores de curvatura, onde T^{cab} é o tensor conformemente transformado.

Símbolo de Christoffel $\delta \Gamma^a_{bc}$

```
In[14]:= Abacadabra[ChristoffelCd[a, -b, -c]]
```

```
Out[14]= -δbc sa + δac sb + δab sc
```

Derivadas Covariantes δv^a e δT^{ab}

```
In[15]:= DefTensor[v[a], M];
Abacadabra[Cd[-b] [v[a]] // ChangeCovD[#, Cd, PD] &]
** DefTensor: Defining tensor v[a].
```

```
Out[16]= Sb va - sa vb + δab sc vc
```

```
In[17]:= DefTensor[T[a, b], M, Symmetric[{a, b}]];
Abacadabra[Cd[-b] [T[a, b]] // ChangeCovD[#, Cd, PD] &]
** DefTensor: Defining tensor T[a, b].
```

```
Out[18]= 6 sb Tab - sa Tbb
```

4 | ApC.nb

Tensor de Riemann δR^a_{bcd}

```
In[19]:= DeltaRiemann = Abracadabra[RiemannCd[a, -b, -c, -d]] // Expand
Out[19]:= gbd sa sc - δad sb sc - gbc sa sd + δac sb sd + δad gbc se se -
δac gbd se se - gbd (∇c sa) + δad (∇c sb) + gbc (∇d sa) - δac (∇d sb)
```

Reorganizando os termos acima.

$$[g_{bd} s^a s_c - \delta^a_d s_b s_c + \delta^a_c s_b s_d + \delta^a_d g_{bc} s_e s^e - g_{bc} (\nabla^a s_d) + \delta^a_d (\nabla_c s_b)] - [g_{bc} s^a s_d + \delta^a_d s_b s_c + \delta^a_c g_{bd} s_e s^e + g_{bd} (\nabla^a s_c) + \delta^a_c (\nabla_d s_b)]$$

Pode - se notar que os dois termos da equação acima são iguais com a troca de índices $b \leftrightarrow c$.

Tensor de Ricci δR_{ab}

```
In[20]:= DeltaRicci = Abracadabra[RiemannCd[c, -a, -c, -b]]
Out[20]:= 2 sa sb - 2 (∇b sa) - gab (2 sc sc + ∇c sc)
```

Escalar de Ricci δR

Para o escalar de Ricci não utilizaremos o comando Abracadabra. Como sabemos, $R = g^{ab} R_{ab}$, sendo assim podemos usar o resultado anterior δR_{ab} para calcular δR .

```
In[21]:= DeltaR = DeltaRiemann delta[-a, c] Ω[] ^ -2 g[b, d] // Simplification // DerivContr
Out[21]:= - 6 ( sa sa + ∇a sa ) / Ω2
```

Tensor de Einstein δG_{ab}

Para o tensor de Einstein também usaremos resultados anteriores.

```
In[22]:= DeltaEinstein =
DeltaRicci - 1/2 Ω[] ^ 2 g[-a, -b] ReplaceDummies[DeltaR, IndexList[e, f]] //
Simplification // DerivContr
Out[22]:= 2 sa sb - 2 (∇b sa) + gab ( se se + 2 (∇e se) )
```

Tensor de Weyl δC^a_{bcd}

O cálculo da TC do tensor de Weyl C^a_{bcd} apesar de ter o resultado mais simples é o mais complexo para calcular. Começaremos reescrevendo o tensor de Weyl em função do tensor de Riemann e suas contrações.

```
In[23]:= WeylCd[a, -b, -c, -d] // WeylToRiemann // TC
Out[23]:= 1/2 δab R[∇] cd - 1/2 δac R[∇] bd + R[∇] bc da - 1/2 gdb R[∇] ac Ω2 +
1/2 gcb R[∇] ad Ω2 - 1/6 δad gcb R[∇] Ω2 + 1/6 δac gdb R[∇] Ω2
```

Copiaremos este resultado substituindo os tensores pelos resultados já calculados anteriormente. Porém antes é necessário definir uma regra que desfaz o comando S.

```
In[24]= revS = # /. {
  IndexRule[s[a_?UpIndexQ], Cd[a][Log[Ω]]],
  IndexRule[s[a_?DownIndexQ], Cd[a][Log[Ω]]]
} &;
```

Assim sendo, a TC do tensor de Weyl é escrita como

```
In[25]= WeylTC = 1/2 δ_d^a (DeltaRicci /. a → c) - 1/2 δ_c^a (DeltaRicci /. a → d) +
  DeltaRiemann - 1/2 g_db g[a, e] (DeltaRicci /. {a → e, b → c}) +
  1/2 g_cb g[a, e] (DeltaRicci /. {a → e, b → d}) -
  1/6 δ_d^a g_cb (DeltaR /. a → f) Ω^2 + 1/6 δ_c^a g_db (DeltaR /. a → e) Ω^2
```

```
Out[25]= B_bd s^a s_c - δ^a_d s_b s_c - g_bc s^a s_d + δ^a_c s_b s_d + δ^a_d g_bc s_e s^e -
  δ^a_c g_bd s_e s^e - g_bd (∇_c s^a) + δ^a_d (∇_c s_b) + g_bc (∇_d s^a) - δ^a_c (∇_d s_b) -
  δ_c^a g_db (s_e s^e + ∇_e s^e) + 1/2 δ_d^a (2 s_b s_c - 2 (∇_b s_c) - g_cb (2 s_e s^e + ∇_e s^e)) -
  1/2 δ_c^a (2 s_b s_d - 2 (∇_b s_d) - g_db (2 s_e s^e + ∇_e s^e)) + δ_d^a g_cb (s_f s^f + ∇_f s^f) -
  1/2 g^ae g_db (2 s_c s_e - 2 (∇_c s_e) - g_ec (2 s_f s^f + ∇_f s^f)) +
  1/2 g^ae g_cb (2 s_d s_e - 2 (∇_d s_e) - g_ed (2 s_f s^f + ∇_f s^f))
```

```
In[26]= WeylTC // Simplification // revS // Simplification
```

```
Out[26]= 0
```

Com algumas simplificações conseguimos obter o resultado esperado $\delta C^o_{bcd} = 0$.

Simplificação de Weyl ao Quadrado $C^{abcd} C_{abcd}$

Outro cálculo do capítulo 1 que também pode ser facilmente implementado no Mathematica é o tensor de Weyl ao quadrado $C^{abcd} C_{abcd}$, necessário para calcular a ação de Weyl-Bach.

```
In[27]= WeylCd[a, b, c, d] WeylCd[-a, -b, -c, -d] // WeylToRiemann // ContractMetric //
  Simplification
```

```
Out[27]= -2 R[∇]_ab R[∇]^ab + R[∇]^2_3 + R[∇]_abcd R[∇]^abcd
```

Referências Bibliográficas

- [1] Albert Einstein. Zur elektrodynamik bewegter körper. *Annalen der physik*, 322(10):891–921, 1905.
- [2] Harry Bateman. The transformation of the electrodynamic equations. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 2(1):223–264, 1910.
- [3] E. Cunningham. The principle of relativity in electrodynamics and an extension thereof. *Proceedings of the London Mathematical Society*, s2-8(1):77–98, 1 1910.
- [4] Leigh Page. A new relativity. paper i. fundamental principles and transformations between accelerated systems. *Physical Review*, 49(3):254, 1936.
- [5] Leigh Page and NI Adams Jr. A new relativity. paper ii. transformation of the electromagnetic field between accelerated systems and the force equation. *Physical Review*, 49(6):466, 1936.

- [6] Paul AM Dirac. The quantum theory of the electron. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 117, pages 610–624. The Royal Society, 1928.
- [7] Paul A. M. Dirac. Wave equations in conformal space. *Annals Math.*, 37:429–442, 1936.
- [8] H. J. Bhabha. The wave equation in conformal space. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 32(4):622–631, 12 1936.
- [9] J Haantjes. The conformal dirac equation. *Nederlandse Akademie van Wetenschappen: Proceedings of the section of sciences*, 44:324, 1941.
- [10] J. S. Lomont. Conformal invariance of massless dirac-like wave equations. *Il Nuovo Cimento (1955-1965)*, 22(4):673–679, 1961.
- [11] HA Kastrop. Gauge properties of the minkowski space. *Physical Review*, 150(4):1183, 1966.
- [12] MH Poincaré. Sur la dynamique de l'électron. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (1884-1940)*, 21(1):129–175, 1906.
- [13] G Mack and Abdus Salam. Finite-component field representations of the conformal group. *Annals of Physics*, 53(1):174–202, 1969.
- [14] M. S. Drew. On conformally covariant spinor field equations. *Canadian Journal of Physics*, 50:2100, 1972.

- [15] H. Weyl. Gravitation and electricity. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, 1918:465, 1918.
- [16] T. Fulton, F. Rohrlich, and L. Witten. Conformal invariance in physics. *Rev. Mod. Phys.*, 34:442–457, Jul 1962.
- [17] Marek Pawłowski and Ryszard Raczka. A unified conformal model for fundamental interactions without dynamical higgs field. *Foundations of Physics*, 24(9):1305–1327, 1994.
- [18] Stephen A. Fulling. Nonuniqueness of canonical field quantization in Riemannian space-time. *Phys. Rev.*, D7:2850–2862, 1973.
- [19] TAEYOON MOON, JOOHAN LEE, and PHILLIAL OH. Conformal invariance in einstein–cartan–weyl space. *Modern Physics Letters A*, 25(37):3129–3143, 2010.
- [20] A.O. Barut. *Electrodynamics and Classical Theory of Fields & Particles*. Dover Books on Physics Series. Macmillan, 1964.
- [21] S. Weinberg. *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*. Wiley, 1972.
- [22] S.M. Carroll. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Addison Wesley, 2004.
- [23] B.F. Schutz. *A First Course in General Relativity*. Series in physics. Cambridge University Press, 1985.

- [24] F. Mandl and G. Shaw. *Quantum Field Theory*. Wiley, 2013.
- [25] C. Quigg. *Gauge Theories of the Strong, Weak, and Electromagnetic Interactions: Second Edition*. Princeton University Press, 2013.
- [26] V. Dzhunushaliev and H.-J. Schmidt. New vacuum solutions of conformal weyl gravity. *Journal of Mathematical Physics*, 41(5):3007–3015, 2000.
- [27] Philip D. Mannheim. Alternatives to dark matter and dark energy. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 56(2):340 – 445, 2006.
- [28] Philip D. Mannheim. Mass Generation, the Cosmological Constant Problem, Conformal Symmetry, and the Higgs Boson. *Prog. Part. Nucl. Phys.*, 94:125–183, 2017.
- [29] Walter Greiner et al. *Relativistic quantum mechanics*, volume 3. Springer, 1990.
- [30] Curtis G Callan, Sidney Coleman, and Roman Jackiw. A new improved energy-momentum tensor. *Annals of Physics*, 59(1):42 – 73, 1970.
- [31] Kurt Gottfried and Tung-Mow Yan. *Relativistic Quantum Mechanics*, pages 577–606. Springer New York, New York, NY, 2003.
- [32] FJ Belinfante. On the current and the density of the electric charge, the energy, the linear momentum and the angular momentum of arbitrary fields. *Physica*, 7(5):449–474, 1940.

- [33] AL Proca. Sur la théorie ondulatoire des électrons positifs et négatifs. *J. phys. radium*, 7(8):347–353, 1936.
- [34] Robert M Wald. *General relativity*. University of Chicago press, 2010.