

Ubiratãn José Furtado

## **DIFUSÃO DE NEUTRINOS EM UM MEIO NUCLEAR**

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física para a obtenção do Grau de Doutor em Física.

Orientador: Prof. Dr. José Ricardo Marinelli

Florianópolis

2017

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Furtado, Ubiratã José  
Difusão de Neutrinos em um Meio Nuclear /  
Ubiratã José Furtado ; orientador, José Ricardo  
Marinelli - SC, 2017.  
147 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa  
Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas,  
Programa de Pós-Graduação em Física, Florianópolis,  
2017.

Inclui referências.

1. Física. 2. Neutrinos. 3. Livre caminho médio.  
4. Fase pasta. 5. Modelo de Walecka. I. Marinelli,  
José Ricardo. II. Universidade Federal de Santa  
Catarina. Programa de Pós-Graduação em Física. III.  
Título.

Ubiratãn José Furtado

## DIFUSÃO DE NEUTRINOS EM UM MEIO NUCLEAR

Esta Tese foi julgada aprovada para a obtenção do Título de “Doutor em Física”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Física.

Florianópolis, 02 de março 2017.

---

Prof. Dr. Ivan Helmuth Bechtold  
Coordenador

**Banca Examinadora:**

---

Presidente - UFSC/FSC  
Prof. Dr. José Ricardo Marinelli

---

Membro externo - UTFPR/Pato Branco  
Prof. Dr. Clebson Abati Graeff

---

Membro externo - IFC/Rio do Sul  
Prof. Dr. Cezar Augusto Romane Jacob

---

Membro titular - UFSC/FSC  
Prof. Dr. Sidney dos Santos Avancini

---

Membro titular - UFSC/Blumenau  
Prof. Dr. Marcelo Dallagnol Alloy

---

Membro titular - UFSC/FSC  
Prof. Dr. Emmanuel Gräve de Oliveira

Este pequeno trabalho é dedicado a todos que contribuem ou contribuíram para o avanço da ciência.



## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço à minha família, em especial aos meus pais, pelo amor e apoio durante toda a vida.

Agradeço ao meu orientador pela paciência e dedicação durante os mais de oito anos de convívio durante a minha vida acadêmica. Agradeço também aos professores Sidney e Constança.

Agradeço à Universidade Federal de Santa Catarina, à Universidade de Coimbra e ao CNPq por me permitirem realizar este trabalho.



The mind that opens to a new idea never returns to its original size.

(Albert Einstein)



## RESUMO

Estamos interessados em estudar o comportamento do neutrino e suas propriedades em um meio nuclear denso não uniforme, onde também há elétrons e outros neutrinos. O meio nuclear será descrito pelo modelo de Walecka não linear, onde a fase da matéria conhecida como fase pasta, é obtida usando a aproximação de Thomas-Fermi dentro de uma célula de Wigner-Seitz. Além de mésons, nucleons e léptons, incluímos explicitamente os bósons fracos neutro  $Z$  e carregados  $W^+$  e  $W^-$  no modelo, porém o efeito destes últimos é desprezível no cálculo das propriedades do sistema, como a densidade de energia, pressão e fração de partículas, sendo importante apenas no cálculo da seção de choque dos neutrinos. Obtemos também a seção de choque total e o livre caminho médio dos neutrinos, levando em conta tanto espalhamentos, mediados pelo bóson fraco neutro, quanto a absorção de neutrinos pelo meio, mediada pelos bósons carregados. Calculamos também o espalhamento coerente dos neutrinos. Comparamos então o resultado com dois tipos de parametrizações diferentes para a interação forte: uma onde a não linearidade é introduzida explicitamente e os acoplamentos são definidos por constantes e outra onde tais constantes passam a depender da densidade. A solução desse problema tem interesse direto em simulações para a perda de neutrinos no momento da formação de uma estrela de nêutrons a partir da explosão de uma supernova.

**Palavras-chave:** Neutrinos. Livre caminho médio. Fase pasta. Interação fraca. Modelo de Walecka.



## ABSTRACT

The behavior and properties of a neutrino in non-uniform dense nuclear matter, surrounded by electrons and other neutrinos are studied. The nuclear matter itself is modeled by the non-linear Walecka model, where the so-called nuclear pasta phase is described using the Thomas-Fermi approximation, solved in a Wigner-Seitz cell. Besides the nucleons, mesons and leptons, the weak neutral boson and the weak charged bosons are explicitly included in the model, but their effects to the energy density, pressure and particle fractions are negligible, being important only for the calculation of the neutrino cross-section. We also obtain the total cross-section and mean-free path for the neutrinos, taking into account scattering and neutrino absorption. Coherent scattering was also calculated. We compare the final results for two known kinds of model parametrizations: one in which non-linear effects in the strong sector are explicitly written in the model Lagrangian and another one in which the coupling constants are density dependent. The solution for this problem is interesting for the understanding of neutrino diffusion in a newly born neutron star after a supernova explosion.

**Keywords:** Neutrinos. Mean-free path. Pasta phase. Weak force. Walecka's model.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 Diagrama de Feynman para um espalhamento de um neutrino por um nucleon. . . . .	59
Figura 2 Diagrama de Feynman para uma reação de absorção de um neutrino por um nêutron. . . . .	59
Figura 3 Diagramas de Feynman para uma colisão neutrino-elétron . . .	62
Figura 4 Diagramas de Feynman para uma colisão neutrino-neutrino . .	63
Figura 5 Energia livre de Helmholtz para $T = 3$ MeV, FSUGold, $Y_L = 0,4$ e $Y_L = 0,2$ . Gotas (vermelho), cilindros (verde), placas (azul), tubos (rosa), bolhas (azul claro) e matéria uniforme (preto). . . . .	74
Figura 6 Frações de partículas para $T = 3$ MeV, FSUGold, nêutrons (vermelho), prótons e elétrons (preto), neutrinos (azul). Pasta (linha tracejada) e matéria uniforme (linha cheia). $Y_L = 0,4$ (esquerda) e $Y_L = 0,2$ (direita). . . . .	74
Figura 7 Fração de prótons na pasta para $T = 3$ MeV, para diferentes parametrizações. $Y_L = 0.4$ (esquerda) e $Y_L = 0.2$ (direita). . . . .	76
Figura 8 Potencial químico para $T = 3$ MeV, FSUGold, nêutrons (vermelho), próton (preto), elétrons (rosa) e neutrinos (azul). Pasta (linha tracejada) e matéria uniforme (linha cheia). $Y_L = 0.4$ (esquerda) e $Y_L = 0.2$ (direita). . . . .	76
Figura 9 Densidade de partículas radial na célula para FSUGold e $T = 3$ MeV. Nêutrons (vermelho), próton (preto), elétrons (rosa) e neutrinos (azul). De cima para baixo temos: gota, cilindro, placa, tubo e bolha. $Y_L = 0.4$ (esquerda) e $Y_L = 0.2$ (direita). . . . .	77
Figura 10 Energia livre de Helmholtz, frações de partículas e potenciais químicos para $T = 1$ MeV, FSUGold e $\mu_\nu = 0$ . Pasta (linha tracejada) e matéria uniforme (linha cheia). . . . .	79
Figura 11 Densidade de partículas radial na célula para $T = 1$ MeV, FSUGold e $\mu_\nu = 0$ . Nêutrons (vermelho), próton (preto) e elétrons (rosa). Gota (esquerda) e tubo (direita). . . . .	80
Figura 12 LCMN para matéria uniforme, parametrização GM1, $Y_L = 0.4$ , $E_\nu = \mu_\nu$ e $T = 5$ MeV. Nosso trabalho com o fator de forma do nucleon (linha cheia), nosso trabalho sem o fator de forma do nucleon (linha pontilhada) e o trabalho de (REDDY; PRAKASH; LATTIMER, 1998) (linha tracejada). A linha preta representa espalhamento neutrino-nêutron e a linha vermelha absorção. . . . .	82

Figura 13 LCMN na pasta para cada contribuição individual $i$ , para $T = 3$ MeV, FSUGold e $E_\nu = \mu_\nu$ . $Y_L = 0.4$ (esquerda) e $Y_L = 0.2$ (direita). . .	83
Figura 14 LCMN total para $T = 3$ MeV, $E_\nu = \mu_\nu$ e várias parametrizações. $Y_L = 0.4$ (esquerda) e $Y_L = 0.2$ (direita). . . . .	83
Figura 15 LCMN total para FSUGold, $E_\nu = \mu_\nu$ , $T = 3$ MeV (preto), $T = 5$ MeV (vermelho) e $T = 7$ MeV (azul). Pasta (linha tracejada) e matéria uniforme (linha cheia). $Y_L = 0.4$ (esquerda) e $Y_L = 0.2$ (direita)..	84
Figura 16 LCMN total para $T = 3$ MeV e para várias parametrizações. Os triângulos indicam quando $E_\nu = \mu_\nu$ para a respectiva parametrização. $\rho_B = 0,02 \text{ fm}^{-3}$ (em cima) e $\rho_B = 0,05 \text{ fm}^{-3}$ (embaixo). $Y_L = 0.4$ (esquerda) e $Y_L = 0.2$ (direita). . . . .	85
Figura 17 LCMN total para FSUGold, $T = 3$ MeV (preto), $T = 5$ MeV (vermelho) e $T = 7$ MeV (azul). $\rho_B = 0,02 \text{ fm}^{-3}$ (em cima) e $\rho_B = 0,05 \text{ fm}^{-3}$ (embaixo). Pasta (linha tracejada) e matéria uniforme (linha cheia). $Y_L = 0.4$ (esquerda) e $Y_L = 0.2$ (direita). . . . .	87
Figura 18 Coeficiente de difusão $D_2$ para $T = 3$ MeV, FSUGold, $Y_L = 0.4$ (esquerda) e $Y_L = 0.2$ (direita). Pasta (linha tracejada) e matéria uniforme (linha cheia). . . . .	88
Figura 19 Coeficiente de difusão $D_3$ para $T = 3$ MeV, FSUGold, $Y_L = 0.4$ (esquerda) e $Y_L = 0.2$ (direita). Pasta (linha tracejada) e matéria uniforme (linha cheia). . . . .	89
Figura 20 Coeficiente de difusão $D_4$ para $T = 3$ MeV, FSUGold, $Y_L = 0.4$ (esquerda) e $Y_L = 0.2$ (direita). Pasta (linha tracejada) e matéria uniforme (linha cheia). . . . .	89
Figura 21 LCMN para cada contribuição individual $i$ na pasta, para $T = 1$ MeV, FSUGold, $\mu_\nu = 0$ e $E_\nu = \pi T$ . . . . .	90
Figura 22 LCMN total para $T = 1$ MeV, FSUGold e $\mu_\nu = 0$ . Pasta (linha tracejada) e matéria uniforme (linha cheia). $\rho_B = 0,02 \text{ fm}^{-3}$ (esquerda) e $\rho_B = 0,06 \text{ fm}^{-3}$ (direita). . . . .	91
Figura 23 Perfil lateral das posições dos nêutrons para a rede CCC, FSUGold, $Y_L = 0.4$ , $\rho_B = 0,02 \text{ fm}^{-3}$ e $T = 3$ MeV. . . . .	93
Figura 24 Função de correlação para a rede CCC, FSUGold, $Y_L = 0.4$ , $\rho_B = 0,02 \text{ fm}^{-3}$ e $T = 3$ MeV. . . . .	94
Figura 25 Ajuste da função de correlação para a rede CCC, FSUGold, $Y_L = 0.4$ , $\rho_B = 0,02 \text{ fm}^{-3}$ e $T = 3$ MeV. Dados (preto tracejado) e ajuste (vermelho). . . . .	94
Figura 26 $S(E_\nu)$ para a rede CCC, FSUGold, $Y_L = 0.4$ , $\rho_B = 0,02 \text{ fm}^{-3}$ e $T = 3$ MeV. $g(r) = 1$ além da borda (preto tracejado) e ajuste (vermelho). . . . .	95

Figura 27 LCMN de transporte para a rede CCC, FSUGold, $Y_L = 0.4$ , $\rho_B = 0,02 \text{ fm}^{-3}$ e $T = 3 \text{ MeV}$ . $g(r) = 1$ além da borda (azul tracejado), ajuste (vermelho), $S(E_\nu) = 1$ (preto), espalhamento por uma partícula sem fator de forma do nucleon (verde) e espalhamento por uma partícula com fator de forma do nucleon (rosa). . . . .	96
Figura 28 Perfil lateral da posição dos nêutrons para a rede CFC, FSU-Gold, $Y_L = 0.4$ , $\rho_B = 0,02 \text{ fm}^{-3}$ e $T = 3 \text{ MeV}$ . . . . .	97
Figura 29 Posição dos nêutrons para a rede CFC, FSUGold, $Y_L = 0.4$ , $\rho_B = 0,02 \text{ fm}^{-3}$ e $T = 3 \text{ MeV}$ . . . . .	98
Figura 30 Função de correlação para a rede CFC, FSUGold, $Y_L = 0.4$ , $\rho_B = 0,02 \text{ fm}^{-3}$ e $T = 3 \text{ MeV}$ . . . . .	98
Figura 31 Função de correlação para a rede CFC, FSUGold, $Y_L = 0.4$ , $\rho_B = 0,02 \text{ fm}^{-3}$ e $T = 3 \text{ MeV}$ . Dados (preto tracejado) e ajuste (vermelho). . . . .	99
Figura 32 $S(E_\nu)$ para a rede CFC, FSUGold, $Y_L = 0.4$ , $\rho_B = 0,02 \text{ fm}^{-3}$ e $T = 3 \text{ MeV}$ . $g(r) = 1$ além da borda (preto tracejado) e ajuste (vermelho). . . . .	100
Figura 33 LCMN de transporte para a rede CFC, FSUGold, $Y_L = 0.4$ , $\rho_B = 0,02 \text{ fm}^{-3}$ e $T = 3 \text{ MeV}$ . $g(r) = 1$ além da borda (azul tracejado), ajuste (vermelho), $S(E_\nu) = 1$ (preto), espalhamento por uma partícula sem fator de forma do nucleon (verde) e espalhamento por uma partícula com fator de forma do nucleon (rosa). . . . .	101
Figura 34 Perfil lateral da posição dos nêutrons para a rede CCC, FSU-Gold, $\mu_\nu = 0$ , $\rho_B = 0,02 \text{ fm}^{-3}$ e $T = 1 \text{ MeV}$ . . . . .	102
Figura 35 Função de correlação para a rede CCC, FSUGold, $\mu_\nu = 0$ , $\rho_B = 0,02 \text{ fm}^{-3}$ e $T = 1 \text{ MeV}$ . . . . .	103
Figura 36 Função de correlação para a rede CCC, FSUGold, $\mu_\nu = 0$ , $\rho_B = 0,02 \text{ fm}^{-3}$ e $T = 1 \text{ MeV}$ . Dados em preto tracejado e o ajuste em vermelho contínuo. . . . .	103
Figura 37 $S(E_\nu)$ para a rede CCC, FSUGold, $\mu_\nu = 0$ , $\rho_B = 0,02 \text{ fm}^{-3}$ e $T = 1 \text{ MeV}$ . $g(r) = 1$ além da borda (preto tracejado) e ajuste (vermelho). . . . .	104
Figura 38 LCMN de transporte para a rede CCC, FSUGold, $\mu_\nu = 0$ , $\rho_B = 0,02 \text{ fm}^{-3}$ e $T = 1 \text{ MeV}$ . $g(r) = 1$ além da borda (azul tracejado), ajuste (vermelho), $S(E_\nu) = 1$ (preto), espalhamento por uma partícula (rosa) e espalhamento por uma partícula sem o fator $(1 - \cos(\theta))$ (alaranjado). . . . .	105
Figura 39 LCMN de transporte para FSUGold, $Y_L = 0.4$ , $\rho_B = 0,02 \text{ fm}^{-3}$ e $T = 3 \text{ MeV}$ . CFC (azul tracejado) e CCC (vermelho). . . . .	106
Figura 40 LCMN de transporte para FSUGold, $\mu_\nu = 0$ , $\rho_B = 0,02 \text{ fm}^{-3}$ e $T = 1 \text{ MeV}$ . CFC (azul tracejado) e CCC (vermelho). . . . .	106

Figura 41 Função de correlação para a rede CFC, FSUGold, $\mu_\nu = 0$ , $\rho_B = 0,02 \text{ fm}^{-3}$ e $T = 1 \text{ MeV}$ . Dados (preto tracejado) e ajuste (vermelho).....	107
Figura 42 Região cinza é a região de integração para o caso 2. O gráfico não está em escala. ....	144
Figura 43 Região cinza é a região de integração para o caso 3. O gráfico não está em escala. ....	145
Figura 44 Região cinza é a região de integração para o caso 4. O gráfico não está em escala. ....	146

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Partículas do sistema.....	27
Tabela 2	Propriedades das parametrizações para matéria nuclear simétrica infinita em temperatura zero na densidade de saturação nuclear $\rho_0$ . $E_B/A$ é a energia de ligação por nucleon, $K$ é a incompressibilidade, $M^*$ é a massa efetiva do nucleon, $a_{sym}$ é a energia de simetria e seu <i>slope</i> é $L$ (DUCOIN et al., 2011). ....	73
Tabela 3	Densidades bariônicas (em $\text{fm}^{-3}$ ) aproximadas onde acaba o intervalo onde a estrutura indicada é mais estável. A partir da bolha temos matéria uniforme. $T = 3 \text{ MeV}$ e $Y_L = 0,2$ . ....	75



## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	23
<b>2</b>	<b>LAGRANGEANA DO MODELO E AS EQUAÇÕES DE ESTADO</b> .....	29
2.1	MODELO DE WALECKA NÃO-LINEAR (NLWM) .....	29
<b>2.1.1</b>	<b>Aproximação de Thomas-Fermi</b> .....	33
<b>2.1.2</b>	<b>Densidade Lagrangeana da Interação Fraca</b> .....	34
2.1.2.1	Corrente de Interação Fraca do Bóson Z .....	34
2.1.2.2	Corrente de Interação Fraca dos Bósons $W^\pm$ .....	36
<b>2.1.3</b>	<b>Inclusão dos Neutrinos</b> .....	37
<b>2.1.4</b>	<b>Cálculo da Energia e Pressão</b> .....	38
2.2	PARAMETRIZAÇÃO DEPENDENTE DA DENSIDADE .....	46
2.3	FASE PASTA .....	50
<b>3</b>	<b>LIVRE CAMINHO MÉDIO DOS NEUTRINOS</b> .....	57
3.1	ESPALHAMENTO POR UMA PARTÍCULA .....	57
3.2	ESPALHAMENTO COERENTE .....	64
3.3	COEFICIENTES DE DIFUSÃO .....	69
<b>4</b>	<b>RESULTADOS</b> .....	71
4.1	EQUAÇÃO DE ESTADO .....	71
4.2	LIVRE CAMINHO MÉDIO DOS NEUTRINOS .....	81
<b>4.2.1</b>	<b>Livre caminho médio dos neutrinos para fração de léptons fixa</b> .....	81
<b>4.2.2</b>	<b>Coefficientes de difusão</b> .....	88
<b>4.2.3</b>	<b>Livre caminho médio dos neutrinos para <math>\mu_\nu = 0</math></b> .....	90
4.3	ESPALHAMENTO COERENTE .....	92
<b>4.3.1</b>	<b>Espalhamento coerente para <math>Y_L = 0,4</math></b> .....	92
<b>4.3.2</b>	<b>Espalhamento coerente para <math>\mu_\nu = 0</math></b> .....	99
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS</b> .....	109
	<b>REFERÊNCIAS</b> .....	113
	<b>APÊNDICE A – Cálculo da amplitude de transição <math>\mathcal{M}</math></b> .....	123
	<b>APÊNDICE B – Cálculo da integral da seção de choque</b> .....	131
	<b>APÊNDICE C – Cálculo da integral para a seção de choque no Espalhamento Coerente</b> .....	139
	<b>APÊNDICE D – Cálculo da função de correlação</b> .....	143



## 1 INTRODUÇÃO

Dentre as partículas consideradas fundamentais na constituição do Modelo Padrão, os neutrinos sempre estiveram associados aos grandes enigmas da Física do século XX. Desde sua descoberta, provocada pela necessidade de se preservar as leis de conservação de energia-momento e que causou grande controvérsia na interpretação do decaimento Beta, até mais recentemente com o fenômeno conhecido como oscilação de neutrinos, atualmente comprovado por várias observações experimentais e que tem importantes implicações para o Modelo Padrão, como o estabelecimento do fato de que o neutrino possui afinal massa de repouso. Apesar de não possuir carga elétrica e ter uma massa relativamente pequena, e por isso mesmo ser de difícil detecção, os neutrinos podem revelar aspectos da estrutura da matéria que outras partículas, quando usadas como pontas de prova, não podem. A principal razão para isso é que o neutrino interage fracamente com as outras partículas, podendo assim carregar a informação dessa interação sem causar grandes distúrbios na estrutura e distribuição original das mesmas. Outra forma de dizermos isso é afirmando que a seção de choque dos neutrinos é pequena, ou analogamente, que seu livre caminho médio é grande dentro da matéria. Assim, por exemplo, os neutrinos foram importantes na confirmação da existência dos quarks dentro do nucleon, assim como no estudo de sua estrutura (BUDNY, 1970).

Nas últimas duas a três décadas, neutrinos se tornaram extremamente importantes no estudo da formação e evolução de objetos astrofísicos, especialmente estrelas. Assim foi na observação dos neutrinos emitidos pelo Sol, a qual deu origem ao fenômeno conhecido como oscilação de neutrinos (GRIFFITHS, 2009) e também na observação dos neutrinos provenientes da explosão da supernova observada em 1987. A esse respeito, acredita-se hoje que estrelas de nêutrons são formadas a partir dessa explosão e o comportamento dos neutrinos durante o seu processo de formação tem recebido bastante atenção da comunidade desde então. Na verdade, o papel dos neutrinos em eventos deste tipo foi preconizado já bem antes da observação de 1987 (GLENDEENING, 2000).

Sobre o espalhamento de neutrinos pela matéria hadrônica, apesar das dificuldades experimentais e teóricas, alguns progressos têm sido feitos, sendo exemplos a colaboração Karmen (BODMANN et al., 1994) e os resultados de Los Alamos (IMLAY, 1998). Mais recentemente, experimentos como o MiniBoone, o NOvA e outros experimentos similares com aceleradores (AGUILAR-AREVALO et al., 2008; WALTON et al., 2015) estão em operação. Embora o objetivo desses experimentos seja obter informações

além do Modelo Padrão e sobre oscilações de neutrinos, um conhecimento preciso sobre a interação neutrino-hádron tanto quanto a estrutura hadrônica dos alvos (PRAET, 2009) é necessário.

Os modelos para o colapso de supernovas evoluíram nas últimas décadas, prevendo agora, sob certas condições, uma explosão guiada pelos neutrinos. Porém os mecanismos que guiam os estágios evolucionários de estrelas massivas (JANKA et al., 2007) do colapso à explosão e, posteriormente, formação de uma proto-estrela de nêutrons (PNS) não são ainda completamente entendidos. Entretanto, um grande progresso nesta área tem sido feito devido às melhorias no tratamento das interações e do transporte dos neutrinos em um meio denso (BRUENN, 1985; MARTÍNEZ-PINEDO et al., 2012; PONS et al., 1999) e, simultaneamente, devido a um melhor conhecimento da equação de estado (EOS) nuclear. Logicamente, esse conhecimento é fundamental para que as simulações produzam de forma satisfatória o fenômeno da explosão e descrevam quantitativamente o processo de nucleossíntese. Sob o ponto de vista atual, logo após a explosão de uma supernova, uma PNS é formada cujo centro é feito de matéria densa, quente e rica em prótons, sendo opaca aos neutrinos, que por processos combinados de desleptonização e perda de energia, torna-se uma estrela compacta, fria, transparente para os neutrinos e rica em nêutrons. Nos estágios iniciais de uma PNS os neutrinos estão armadilhados, pois seu livre caminho médio é consideravelmente menor que o raio da estrela. Durante este intervalo de tempo, os neutrinos são essencialmente degenerados. Entretanto, em alguns poucos segundos os neutrinos armadilhados se difundem para fora da neutrino-esfera, aquecendo as camadas mais externas da estrela através de colisões enquanto diminuem as frações de léptons e prótons.

No presente trabalho estamos interessados em estudar o comportamento dos neutrinos como parte de um gás de partículas interagentes formado por um setor hadrônico, constituído por prótons, nêutrons e mésons e um setor leptônico formado por elétrons e neutrinos de elétron. Em particular, queremos obter o livre caminho médio dos neutrinos (LCMN) dentro desse gás como função da energia do mesmo e da densidade. Para isso, temos que obter a equação de estado do sistema, onde efeitos de temperatura são explicitamente considerados. Embora cálculos desse tipo existam na literatura considerando vários níveis de sofisticação e incluindo outras partículas, além das citadas acima, nos limitaremos aqui a focar a atenção na obtenção da seção de choque dos neutrinos (e portanto do LCMN), utilizando o menor grau de aproximação possível nesse cálculo, ou seja, consideramos espalhamentos por todas as partículas do sistema, assim como processos com transferência de energia e tanto processos de corrente neutra como carregada, sempre que possível, deixando para um futuro trabalho a inclusão de maiores

sofisticações no modelo que nos deem resultados que possam eventualmente simular o que se espera de objetos estelares compactos. Para isso temos que definir inicialmente o modelo que usaremos para o gás em questão.

Modelos relativísticos de campo médio têm sido vastamente usados para descrever a matéria nuclear. Tais modelos são usados também para descrever núcleos finitos assim como a matéria de estrelas de nêutrons. Na formação de tais estrelas, após uma explosão de supernova, sabemos que a maior parte da energia gravitacional é liberada através de neutrinos (GLEN-DENNING, 2000). Os neutrinos são também os principais responsáveis pelo resfriamento destas estrelas, pois levam para fora da mesma, parte da energia gerada no decaimento  $\beta$ . Os neutrinos vindo de supernovas, se constituem desta forma em uma importante fonte para o estudo das mesmas e também para o estudo da constituição de estrelas de nêutrons, pois a grande maioria destes neutrinos mantém as informações iniciais inalteradas até chegarem aos detectores, pelas razões discutidas acima.

A densidade média de uma estrela de nêutrons é  $\rho \approx 10^{14} \text{g/cm}^3$ , enquanto que a densidade média da Terra é  $\rho \approx 6 \text{g/cm}^3$ . Em densidades desta ordem os neutrinos ficam aprisionados na matéria, com o livre caminho médio sendo estimado de alguns centímetros ou metros, valor bem diferente para o caso de neutrinos produzidos no núcleo do Sol, onde a grande maioria escapa sem sofrer colisões. Nestas condições, os neutrinos se termalizam e obedecem a uma função de distribuição.

Os neutrinos interagem apenas através da força fraca e gravitacionalmente, mas esta última pode ser desprezada na obtenção da equação de estado do sistema e na obtenção da seção de choque. Introduzimos os neutrinos, que consideramos sem massa de repouso, como um gás interagente na matéria nuclear. A interação entre os neutrinos e outras partículas do sistema, como elétrons e nucleons, é mediada pelos bósons da interação fraca  $Z$  e  $W^\pm$ . Porém, como as massas destes bósons são muito grandes, a interação fraca não contribui significativamente para a equação de estado. Desta forma, os neutrinos acabam sendo incluídos como um gás livre. Apesar disso, há ainda restrições sobre os neutrinos, que vem do fato de impormos equilíbrio  $\beta$  para o sistema. Isso nos permite descrever a equação de estado e o LCMN de forma consistente, assim como investigar o papel que diferentes parametrizações do Pções para a interação entre os bárions pode ter no comportamento dos neutrinos.

O LCMN em um meio nuclear denso e uniforme já foi investigado em dissertação de mestrado anterior (FURTADO, 2012). No entanto, em algumas partes de uma estrela de nêutrons, e principalmente no centro de uma Supernova, onde a densidade nuclear é  $\rho \sim (0, 1 - 1, 0)\rho_0$ , com  $\rho_0$  sendo a densidade de saturação nuclear, podem haver fases da matéria em que a fase

uniforme não é a mais estável (AVANCINI et al., 2008). Nesta região, os nucleons se agrupam formando núcleos e, dependendo da densidade, eles podem ser diferentes da forma aproximadamente esférica dos núcleos atômicos, podendo ser: gotas, cilindros, placas, tubos e bolhas. Esta fase de matéria nuclear não uniforme é conhecida como fase pasta. Espera-se encontrar a fase pasta na crosta interna de uma estrela de nêutrons, a aproximadamente 1km da superfície (LIMA, 2012), e ela pode representar até 20% da massa total do núcleo de uma Supernova antes do colapso (HOROWITZ; PÉREZ-GARCÍA; PIEKAREWICZ, 2004). A dinâmica de uma Supernova é influenciada diretamente pelo comportamento dos neutrinos durante o processo, pois estes são os principais transportadores de energia e influenciam diretamente nas densidades das outras partículas, através de favorecimento ou não de reações nucleares.

O fato de o meio nuclear não ser uniforme (fase pasta) deve ser levado em conta no cálculo do LCMN. Um dos nossos objetivos é analisar qual o efeito da fase pasta sobre o LCMN. Calculamos a seção de choque dos neutrinos considerando tanto espalhamentos individuais por outras partículas quanto espalhamento coerente por mais de uma partícula do sistema e comparamos os dois casos. Espera-se que o espalhamento coerente seja mais importante para neutrinos com baixas energias (HOROWITZ; PÉREZ-GARCÍA; PIEKAREWICZ, 2004; HOROWITZ et al., 2004; REDDY; BERTSCH; PRAKASH, 2000), quando o comprimento de onda é maior e, portanto, o neutrino não consegue distinguir os componentes do alvo.

O estudo do efeito da fase pasta sobre a evolução de uma PNS, em particular, sobre a difusão de neutrinos, já foi considerado previamente (SONODA et al., 2007; ALLOY; MENEZES, 2011). No primeiro caso, uma simulação usando dinâmica quântica molecular baseada em uma interação fenomenológica simples, que leva em conta apenas colisões de corrente neutra para os neutrinos, foi usada para obter as seções de choque. No segundo caso, uma interação mais realista foi usada para calcular as estruturas de pasta mas com uma aproximação simplificada para determinar as seções de choque. Mesmo assim, neste último caso, uma importante diferença, comparado ao caso de matéria uniforme, foi encontrada nos coeficientes de difusão dos neutrinos quando a fase pasta é considerada. Ainda, simulações recentes (FISCHER et al., 2012), têm mostrado que temperaturas e densidades próximas da borda de uma PNS podem ser compatíveis com as condições esperadas para a formação da fase pasta, poucos segundos após o choque.

Em (PONS et al., 1999), os autores enfatizaram a importância de se tratar a interação neutrino-matéria consistentemente com a EOS. Em (REDDY; PRAKASH; LATTIMER, 1998), os autores consideraram a interação de neutrinos armadilhados com matéria uniforme em equilíbrio  $\beta$ , com fração

de léptons fixa. Seus resultados são apropriados para os estágios iniciais de uma PNS, sendo a energia dos neutrinos a energia de Fermi ( $E_\nu = \mu_\nu$ ) para diferentes temperaturas e atenção especial foi dada para densidades supra-nucleares. Aqui também consideramos matéria em equilíbrio  $\beta$  com fração de léptons fixa. Entretanto, nosso foco está na interação dos neutrinos com a fase pasta. Escolhemos a fração de elétrons  $Y_L = 0,4$  e  $Y_L = 0,2$ , valores que foram escolhidos nos trabalhos (ALLOY; MENEZES, 2011; REDDY; PRAKASH; LATTIMER, 1998) e que é consistente com simulações de supernova recentes (Fischer, Tobias et al., 2014).

Descreveremos a matéria nuclear através do modelo de Walecka não linear (SEROT; WALECKA, 1986; GLENDENNING, 2000; TYPEL; WOLTER, 1999). Tal modelo considera que os nucleons interagem via troca de mésons escalares, vetoriais e isovetoriais. O sistema deve ser eletricamente neutro, e para isto incluiremos os elétrons com a condição de neutralidade de carga elétrica. A tabela 1 apresenta as partículas que iremos considerar.

Campo	Descrição	Partículas	Massas (MeV)
$\psi$	Báron	p, n	$M = 939$
$\psi_e$	Elétron	e	$m_e = 0.511$
$\psi_\nu$	Neutrino	$\nu$	zero
$\phi$	Méson escalar neutro	$\sigma$	$m_s = 550$
$V^\mu$	Méson vetorial neutro	$\omega$	$m_v = 783$
$\vec{b}^\mu$	Méson isovetorial carregado	$\rho^+, \rho^-, \rho^0$	$m_\rho = 763$
$Z^\mu$	Bóson fraco neutro	Z	$M_Z = 91,1876 \cdot 10^3$
$W^{\pm\mu}$	Bósons fracos carregados	$W^\pm$	$M_W = 80,4120 \cdot 10^3$
$A^\mu$	Fótons	$\gamma$	zero

Tabela 1 – Partículas do sistema

Embora saibamos que a presença de outros bárions (além de próton e nêutron), como os bárions estranhos, possa modificar substancialmente a equação de estado (GLENDENNING, 2000), assim como possivelmente o LCMN, aqui consideraremos apenas as partículas mostradas na tabela 1, principalmente devido às densidades aqui consideradas. Múons (e seus respectivos neutrinos) também devem ser importantes na composição de estrelas de nêutrons, especialmente a altas temperaturas e densidades (REDDY; PRAKASH, 1997), porém sua inclusão não modifica as técnicas usadas aqui para a obtenção da equação de estado, assim como do LCMN. Em particular para a obtenção desse último, lembremos que as constantes de acoplamento com os hádrons é independente do sabor do neutrino.

Uma maneira de obter a fase pasta é considerar células de Wigner-Seitz eletricamente neutras e de geometrias apropriadas contendo nêutrons,

prótons, elétrons e neutrinos usando uma aproximação variacional. A maioria das aplicações recentes neste caso têm usado a aproximação de Thomas-Fermi (MARUYAMA et al., 2006, 2005; AVANCINI et al., 2008), mas cálculos de Hartree-Fock (GRYGOROV; GÖGELEIN; MÜTHER, 2010) e cálculos de Thomas-Fermi tri-dimensional (OKAMOTO et al., 2012) são também encontrados na literatura, todos dentro da aproximação de Wigner-Seitz. Recentemente, foi mostrado em (OKAMOTO et al., 2013) que fazendo um cálculo de pasta tomando uma célula grande o suficiente para incluir várias unidades de núcleos, distribuições de matéria diferentes das usuais consideradas dentro da aproximação de Wigner-Seitz (WS) podem ser energeticamente mais favoráveis em alguns intervalos de densidades. Uma outra aproximação, que também vai além da aproximação de WS, é baseada na técnica de dinâmica quântica molecular (HOROWITZ; PÉREZ-GARCÍA; PIEKAREWICZ, 2004; HOROWITZ et al., 2005; WATANABE et al., 2005; SONODA et al., 2008; WATANABE et al., 2009; SCHNEIDER et al., 2013). Aqui a pasta será descrita usando a aproximação de Thomas-Fermi dentro de uma célula de WS (AVANCINI et al., 2010).

No capítulo 2, a densidade Lagrangeana modelo para descrever a interação entre os nucleons é definida. Apresentamos também a interação fraca entre as partículas que compõem o sistema na forma Lagrangeana. A solução para o modelo é então discutida e apresentada, a partir da qual obtêm-se a equação de estado.

No capítulo 3, apresentamos a forma de cálculo para a seção de choque total dos neutrinos. Isto é feito com o mínimo de aproximação possível, além do fato que consideramos uma região cinemática cujo momento transferido é bem menor que a massa do bóson mediador. Finalmente, no capítulo 4, os resultados numéricos para o LCMN, são apresentados. Analisamos o efeito que possíveis formas de parametrização para a interação forte pode ter nos resultados, além da contribuição que a interação com cada tipo de partícula tem para o LCMN. Comparamos também o LCMN para a fase pasta com o caso de matéria uniforme (FURTADO, 2012). Algumas conclusões e perspectivas são discutidas e apontadas. Detalhes do cálculo da seção de choque são apresentados nos Apêndices A-D.

## 2 LAGRANGEANA DO MODELO E AS EQUAÇÕES DE ESTADO

Neste capítulo apresentamos o formalismo usado na descrição da matéria hadrônica e como os neutrinos e elétrons são introduzidos no sistema. Os neutrinos são incluídos por ser nosso objeto de estudo e os elétrons para se obter uma descrição mais próxima da realidade encontrada em supernovas e proto-estrelas de nêutrons, mantendo a matéria eletricamente neutra.

A matéria hadrônica, composta por prótons e nêutrons, ou simplesmente nucleons, será descrita por uma densidade Lagrangeana, onde usaremos duas versões, frequentemente usadas na literatura. Na primeira versão, são introduzidas constantes de acoplamento que descrevem a interação entre os nucleons e termos de auto-interação dos mésons envolvidos na descrição do sistema para se obter um melhor acordo com dados experimentais. Chamaremos esta versão de modelo de Walecka não-linear (NLWM) (GLENDENNING, 2000). Na segunda versão, as “constantes” de acoplamento passam a depender da densidade bariônica, e os termos de auto-interação dos mésons não são necessários. Chamaremos esta versão de parametrização dependente da densidade (DD) (TYPEL; WOLTER, 1999).

Sabemos que matéria e energia alteram o espaço-tempo e o espaço-tempo move e modela as distribuições de matéria e de energia. Sabemos também que em qualquer ponto do espaço-tempo podemos construir um referencial inercial local (ou referencial de Lorentz local). Mesmo para um objeto extremamente massivo (como uma estrela de nêutrons), a mudança relativa na métrica sobre uma distância típica de bárions é extremamente pequena, sendo tal mudança da ordem de  $10^{-19}$  ou menor (GLENDENNING, 2000). Portanto, para se ter uma mudança relevante na métrica, precisaríamos estender o referencial sobre um número muito grande de bárions. No entanto, as interações forte e fraca são de curto alcance e, por simplicidade, efeitos gravitacionais não serão considerados aqui. Quanto à interação eletromagnética, como veremos adiante, ela não tem efeitos de longa distância nos sistemas aqui considerados, fase pasta e matéria uniforme eletricamente neutra. Desta forma, o uso da métrica de Minkowski fica justificado na descrição do sistema por nós utilizada, em primeira aproximação.

### 2.1 MODELO DE WALECKA NÃO-LINEAR (NLWM)

A densidade Lagrangeana  $\mathcal{L}$  que descreve a matéria hadrônica juntamente com os elétrons é constituída da densidade Lagrangeana do modelo de Walecka não-linear (SEROT; WALECKA, 1986; GLENDENNING, 2000),

além do termo cinético dos elétrons e do campo eletromagnético. Desta forma, onde adotamos a convenção  $\hbar = c = 1$ , temos:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_N + \mathcal{L}_e + \mathcal{L}_\sigma + \mathcal{L}_\omega + \mathcal{L}_\rho + \mathcal{L}_\gamma + \mathcal{L}_{\omega\rho}, \quad (2.1)$$

onde

$$\mathcal{L}_N = \bar{\Psi} [i\gamma_\mu D^\mu - M^*] \Psi; \quad (2.2)$$

$$\mathcal{L}_e = \bar{\Psi}_e [\gamma_\mu (i\partial^\mu + eA^\mu) - m_e] \Psi_e; \quad (2.3)$$

$$\mathcal{L}_\sigma = \frac{1}{2} \left( \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m_s^2 \phi^2 - \frac{\kappa}{3} \phi^3 - \frac{\lambda}{12} \phi^4 \right); \quad (2.4)$$

$$\mathcal{L}_\omega = \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2} V_{\mu\nu} V^{\mu\nu} + m_v^2 V_\mu V^\mu + \frac{\zeta}{12} g_v^4 (V_\mu V^\mu)^2 \right); \quad (2.5)$$

$$\mathcal{L}_\rho = \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2} \vec{B}_{\mu\nu} \cdot \vec{B}^{\mu\nu} + m_\rho^2 \vec{b}_\mu \cdot \vec{b}^\mu \right); \quad (2.6)$$

$$\mathcal{L}_\gamma = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}; \quad (2.7)$$

$$\mathcal{L}_{\omega\rho} = \Lambda (g_\rho^2 \vec{b}_\mu \cdot \vec{b}^\mu) (g_v^2 V_\nu V^\nu), \quad (2.8)$$

com

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_p \\ \Psi_n \end{pmatrix}; \quad (2.9)$$

$$iD^\mu = i\partial^\mu - g_s V^\mu - \frac{1}{2} g_\rho \vec{\tau} \cdot \vec{b}^\mu - \frac{1}{2} e(1 + \tau_3) A^\mu; \quad (2.10)$$

$$M^* = M - g_s \phi; \quad (2.11)$$

$$V_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu; \quad (2.12)$$

$$\vec{B}_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec{b}_\nu - \partial_\nu \vec{b}_\mu - g_\rho \vec{b}_\mu \times \vec{b}_\nu; \quad (2.13)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (2.14)$$

O méson escalar representa a interação atrativa entre os nucleons através de  $-g_s \bar{\Psi} \phi \Psi$ , onde  $g_s$  é a constante de acoplamento e  $\bar{\Psi} \Psi$  é a densidade escalar de bárions. O méson vetorial representa a interação repulsiva entre os nucleons através de  $g_v \bar{\Psi} \gamma_\mu V^\mu \Psi$ , onde  $g_v$  é a constante de acoplamento e  $\bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi$  é a corrente bariônica conservada. O méson isovetorial diferencia prótons de nêutrons e a interação com os mesmos é  $(g_\rho/2) \bar{\Psi} \gamma_\mu \vec{\tau} \cdot \vec{b}^\mu \Psi$ , onde  $g_\rho$  é a constante de acoplamento,  $\bar{\Psi} \gamma_\mu \vec{\tau} \cdot \Psi$  é a corrente de isospin bariônica e  $\vec{\tau}$  é o operador de isospin para o nucleon.  $A_\mu$  é o campo eletromagnético,  $e$  é a carga elétrica e os  $\gamma^\mu$ 's são as matrizes de Dirac. Por último,  $D^\mu$  é cha-

mado de derivada covariante e  $M^*$  é a massa efetiva dos nucleons. Note-se ainda que incluímos a possibilidade de termos não-lineares para os campos escalar e vetorial. No caso do campo escalar, sabe-se que esses são importantes para reproduzir a compressibilidade da matéria nuclear (GAMBHIR; RING; THIMET, 1990). Para o méson vetorial  $\omega$ , a autointeração é essencial para suavizar a equação de estado em altas densidades. O acoplamento entre os mésons  $\omega$  e isovetorial  $\rho$  é incluído para modificar a dependência com a densidade da energia de simetria (HOROWITZ; PIEKAREWICZ, 2001; TODD-RUTEL; PIEKAREWICZ, 2005). Lembramos que, a princípio, os campos dos férmions e bósons são aqui operadores.

É importante notar que a quantidade  $\Psi$  engloba os campos dos prótons e dos nêutrons, sendo uma coluna de oito elementos. O espaço de isospin  $2 \times 2$  diferencia os prótons dos nêutrons, enquanto que elementos  $4 \times 4$ , como as matrizes de Dirac  $\gamma_\mu$ 's, atuam apenas em  $\psi_p$  (para prótons) ou  $\psi_n$  (para nêutrons). Quantidades escalares, ou seja  $1 \times 1$ , sempre têm uma matriz identidade de ordem apropriada implicitamente multiplicada por ela, a fim de manter as dimensões corretas.

A métrica de Minkowski é usada com assinatura  $(+ - - -)$ . As matrizes de Dirac, são usadas na representação de Dirac:

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma_k = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma_k \\ -\sigma_k & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

onde  $\mathbf{1}$  e  $\mathbf{0}$  são as matrizes identidade e nula  $2 \times 2$ , respectivamente, e os  $\sigma_k$ 's são as matrizes de Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

As equações de Euler-Lagrange para os campos mesônicos são:

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + m_s^2 \phi + \frac{\kappa}{2} \phi^2 + \frac{\lambda}{6} \phi^3 = g_s \bar{\Psi} \Psi; \quad (2.17)$$

$$\partial_\mu V^{\mu\nu} + m_v^2 V^\nu + \frac{\zeta}{6} g_v^4 V^\nu (V_\mu V^\mu) + 2\Lambda (g_\rho^2 \vec{b}_\mu \cdot \vec{b}^\mu) g_v^2 V^\nu = g_v \bar{\Psi} \gamma^\nu \Psi; \quad (2.18)$$

$$\partial_\mu \vec{B}^{\mu\nu} + m_\rho^2 \vec{b}^\nu - g_\rho \vec{b}_\mu \times \vec{B}^{\mu\nu} + 2\Lambda g_\rho^2 \vec{b}^\nu (g_v^2 V_\mu V^\mu) = \frac{g_\rho}{2} \bar{\Psi} \gamma^\nu \vec{\tau} \Psi; \quad (2.19)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = e \bar{\Psi} \gamma^\nu \frac{1}{2} (1 + \tau_3) \Psi - e \bar{\psi}_e \gamma^\nu \psi_e. \quad (2.20)$$

Para os férmions:

$$[i\gamma_\mu D^\mu - M^*] \Psi = 0; \quad (2.21)$$

$$[i\gamma_\mu \partial^\mu - m_e + e\gamma^\mu A_\mu] \psi_e = 0. \quad (2.22)$$

Resolver as equações acima é muito difícil ou até mesmo impossível. Portanto, para obter a equação de estado do sistema e outras quantidades, fazemos algumas aproximações. A primeira aproximação é a aproximação de campo médio (*Mean Field Theory* - MFT), onde os campos dos mésons são substituídos pelos seus valores esperados:

$$\begin{aligned} V_\mu &\rightarrow V_\mu = \delta_{0\mu} V_0(\vec{r}), & A_\mu &\rightarrow A_\mu = \delta^{0\mu} A_0(\vec{r}), \\ (\vec{b}^\mu)_i &\rightarrow (\vec{b}^\mu)_i = \delta^{0\mu} \delta_{0i} b_0(\vec{r}), & \phi &\rightarrow \phi = \phi_0(\vec{r}). \end{aligned} \quad (2.23)$$

A média ... é tomada em relação a um estado do sistema  $\psi_T$  na temperatura  $T$ . Assumimos que o sistema é estático, ou seja, não há dependência temporal nos campos mesônicos, apenas na posição  $\vec{r}$ , pois estamos considerando também a fase pasta. Por outro lado,  $\vec{V} = 0$  devido à invariância rotacional, o que significa que não há correntes dentro do sistema. Por questões visuais e de clareza, nem sempre vamos escrever a dependência com a posição.

Com esta aproximação, temos:

$$V_{\mu\nu} V^{\mu\nu} = -2(\nabla V_0)^2; \quad (2.24)$$

$$\vec{B}_{\mu\nu} \vec{B}^{\mu\nu} = -2(\nabla b_0)^2; \quad (2.25)$$

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -2(\nabla A_0)^2. \quad (2.26)$$

As equações de campo bosônicas tornam-se:

$$(-\nabla^2 + m_s^2)\phi_0 = g_s \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} - \frac{1}{2} \kappa \phi_0^2 - \frac{1}{6} \lambda \phi_0^3; \quad (2.27)$$

$$(-\nabla^2 + m_v^2)V_0 = g_v \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} - \frac{1}{3!} \zeta g_v^4 V_0^3 - 2\Lambda g_\rho^2 b_0^2 g_v^2 V_0; \quad (2.28)$$

$$(-\nabla^2 + m_\rho^2)b_0 = \frac{g_\rho}{2} \hat{\Psi}^\dagger \tau_3 \hat{\Psi} - 2\Lambda g_\rho^2 b_0 g_v^2 V_0^2; \quad (2.29)$$

$$-\nabla^2 A_0 = e \hat{\Psi}^\dagger \frac{1}{2} (1 + \tau_3) \hat{\Psi} - e \psi_e^\dagger \psi_e. \quad (2.30)$$

### 2.1.1 Aproximação de Thomas-Fermi

Outra aproximação que fazemos para facilitar a obtenção da equação de estado é a aproximação de Thomas-Fermi. Tal aproximação consiste em identificar os valores esperados dos operadores de campo dos nucleons e dos elétrons da seguinte maneira (AVANCINI et al., 2008):

$$\rho(\vec{r}) = \rho_p(\vec{r}) + \rho_n(\vec{r}) = \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi}; \quad (2.31)$$

$$\rho_3(\vec{r}) = \rho_p(\vec{r}) - \rho_n(\vec{r}) = \hat{\Psi}^\dagger \tau_3 \hat{\Psi}; \quad (2.32)$$

$$\rho_s(\vec{r}) = \rho_{s_p}(\vec{r}) + \rho_{s_n}(\vec{r}) = \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi}; \quad (2.33)$$

$$\rho_e(\vec{r}) = \hat{\Psi}_e^\dagger \hat{\Psi}_e, \quad (2.34)$$

onde

$$\rho_i(\vec{r}) = \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3k (\eta_{ki}(T) - \bar{\eta}_{ki}(T)), \quad i = p, n, e; \quad (2.35)$$

$$\rho_s(\vec{r}) = \sum_{i=p,n} \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{M^*}{E^*} (\eta_{ki}(T) + \bar{\eta}_{ki}(T)), \quad E^* = \sqrt{k^2 + M^{*2}}, \quad (2.36)$$

são as densidades de partículas e escalar, respectivamente, dependentes da posição,  $\gamma = 2$  é a multiplicidade de spin e  $\vec{k}$  é o momento. As funções de distribuição,  $\eta_{ki}(T)$ , são as distribuições de Fermi-Dirac para uma dada temperatura  $T$ :

$$\eta_{ki}(T) = \{ \exp[(E_i - \mu_i)/K_B T] + 1 \}^{-1}; \quad (2.37)$$

$$\bar{\eta}_{ki}(T) = \{ \exp[(\bar{E}_i - \bar{\mu}_i)/K_B T] + 1 \}^{-1}, \quad (2.38)$$

onde  $E_i$  ( $\bar{E}_i$ ) é a energia de uma partícula (antipartícula),  $\mu_i$  ( $\bar{\mu}_i$ ) é o potencial químico das partículas (antipartículas) e  $K_B$  é a constante de Boltzmann. As distribuições acima dependem de  $\vec{r}$ , pois  $M^*$  e  $E_i$  ( $\bar{E}_i$ ) dependem da posição.

Na aproximação de Thomas-Fermi, consideramos o sistema uniforme localmente, e a consideração de que, localmente, as partículas comportam-se como ondas planas é válida. Tal fato justifica as expressões para as densidades acima, que serão deduzidas mais adiante juntamente com a energia  $E_i$  de uma partícula.

O fato de que as partículas comportam-se como ondas planas localmente será importante no nosso cálculo da seção de choque dos neutrinos com as outras partículas do sistema.

## 2.1.2 Densidade Lagrangeana da Interação Fraca

Até o momento tratamos apenas da matéria composta por prótons, nêutrons e elétrons. No entanto, como estamos interessados no comportamento dos neutrinos neste meio, precisamos conhecer as interações dos mesmos com as outras partículas do sistema. Para isto, escrevemos agora a interação devida às correntes fracas em termos dos bósons mediadores da interação fraca,  $Z$  e  $W^\pm$ , tanto para os léptons como para os hádrons.

### 2.1.2.1 Corrente de Interação Fraca do Bóson $Z$

A interação de uma corrente fraca neutra  $j_\mu$  com o bóson vetorial  $Z^\mu$  é  $-g j_\mu Z^\mu$  (HALZEN; MARTIN, 1984), sendo:

$$j_\mu = j_\mu^3 - \text{sen}^2(\theta_w) j_\mu^{em}, \quad (2.39)$$

onde  $j_\mu^{em}$  é a corrente eletromagnética,  $j_\mu^3$  é a terceira componente da corrente de isospin fraca,  $\theta_w$  é o ângulo de Weinberg, e:

$$g = \frac{e}{\text{sen}(\theta_w) \cos(\theta_w)}; \quad e^2 = \frac{4\pi}{137}. \quad (2.40)$$

A corrente fraca neutra para os nucleons é:

$$j_\mu^N = j_\mu^{N3} - \text{sen}^2(\theta_w) j_\mu^{N,em}, \quad (2.41)$$

com

$$j_\mu^{N,em} = \bar{\psi}_p \gamma_\mu \psi_p; \quad (2.42)$$

$$j_\mu^{N3} = \bar{\Psi}_L \frac{\gamma_\mu}{2} \tau_3 \Psi_L = \bar{\psi}_{pL} \frac{\gamma_\mu}{2} \psi_{pL} - \bar{\psi}_{nL} \frac{\gamma_\mu}{2} \psi_{nL}, \quad (2.43)$$

onde o subíndice  $L$  indica a componente de mão esquerda do campo, ou seja,  $\psi_L = \frac{(1-\gamma^5)}{2} \psi$ . Portanto:

$$j_\mu^N = \bar{\psi}_p \frac{\gamma_\mu}{2} \left[ \frac{(1-\gamma^5)}{2} - 2\text{sen}^2(\theta_w) \right] \psi_p - \bar{\psi}_n \frac{\gamma_\mu}{2} \frac{(1-\gamma^5)}{2} \psi_n. \quad (2.44)$$

Podemos escrever a expressão acima como:

$$j_\mu^N = \sum_{i=p,n} \bar{\psi}_i \frac{\gamma_\mu}{2} (c_V - c_A \gamma^5) \psi_i, \quad (2.45)$$

onde para os prótons:

$$c_V = \frac{1}{2} - 2\text{sen}^2(\theta_w); \quad c_A = \frac{1}{2}; \quad (2.46)$$

e para os nêutrons:

$$c_V = -\frac{1}{2}; \quad c_A = -\frac{1}{2}. \quad (2.47)$$

Para os léptons, a corrente fraca neutra é:

$$j_\mu^l = J_\mu^{l3} - \text{sen}^2(\theta_w) j_\mu^{l,em}, \quad (2.48)$$

com

$$j_\mu^{l,em} = -\bar{\psi}_e \gamma_\mu \psi_e \quad (2.49)$$

e

$$J_\mu^{l3} = (\bar{\psi}_{\nu L} \quad \bar{\psi}_{eL}) \frac{\gamma_\mu}{2} \tau_3 \begin{pmatrix} \psi_{\nu L} \\ \psi_{eL} \end{pmatrix} = \bar{\psi}_{\nu L} \frac{\gamma_\mu}{2} \psi_{\nu L} - \bar{\psi}_{eL} \frac{\gamma_\mu}{2} \psi_{eL}. \quad (2.50)$$

Logo:

$$j_\mu^l = \bar{\psi}_{\nu L} \frac{\gamma_\mu}{2} \psi_{\nu L} - \bar{\psi}_e \frac{\gamma_\mu}{2} \left[ \frac{(1 - \gamma^5)}{2} - 2\text{sen}^2(\theta_w) \right] \psi_e. \quad (2.51)$$

Assim:

$$j_\mu^l = \sum_{i=e,\nu} \bar{\psi}_i \frac{\gamma_\mu}{2} (c_V - c_A \gamma^5) \psi_i, \quad (2.52)$$

onde para os elétrons:

$$c_V = -\frac{1}{2} + 2\text{sen}^2(\theta_w); \quad c_A = -\frac{1}{2}; \quad (2.53)$$

enquanto que para os neutrinos:

$$c_V = \frac{1}{2}; \quad c_A = \frac{1}{2}. \quad (2.54)$$

A densidade Lagrangeana dos termos que envolvem o bóson  $Z$  é, portanto:

$$\mathcal{L}_Z = -g j_\mu^N Z^\mu - g j_\mu^l Z^\mu - \frac{1}{4} Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} + \frac{M_Z^2}{2} Z_\mu Z^\mu, \quad (2.55)$$

onde  $Z_{\mu\nu} = \partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu$ . Os dois últimos termos acima são o termo cinético

e o termo de massa do bóson  $Z$ , respectivamente.

### 2.1.2.2 Corrente de Interação Fraca dos Bósons $W^\pm$

A interação de uma corrente fraca carregada  $j_\mu^+$  com o bóson vetorial  $W^{+\mu}$  é  $-(g'/\sqrt{2})j_\mu W^{+\mu}$  (HALZEN; MARTIN, 1984), sendo:

$$j_\mu^{+N} = \bar{\Psi}_L \gamma^\mu \tau_+ \Psi_L = \bar{\Psi}_p \gamma_\mu \frac{1-\gamma^5}{2} \Psi_n \quad (2.56)$$

para os nucleons e

$$j_\mu^{+l} = (\bar{\Psi}_{eL} \quad \bar{\Psi}_{\nu L}) \gamma^\mu \tau_+ \begin{pmatrix} \bar{\Psi}_{\nu L} \\ \bar{\Psi}_{eL} \end{pmatrix} = \bar{\Psi}_\nu \gamma_\mu \frac{1-\gamma^5}{2} \Psi_e \quad (2.57)$$

para os léptons, onde

$$g' = \frac{e}{\sin(\theta_w)}; \quad \tau_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.58)$$

Podemos escrever as correntes como:

$$j_\mu^{+N} = \bar{\Psi}_p \frac{\gamma_\mu}{2} (g_V - g_A \gamma^5) \Psi_n; \quad (2.59)$$

$$j_\mu^{+l} = \bar{\Psi}_\nu \frac{\gamma_\mu}{2} (g_V - g_A \gamma^5) \Psi_e, \quad (2.60)$$

onde tanto para os nucleons quanto para os léptons  $g_V = 1 = g_A$ . No entanto, como o nucleon é uma partícula composta, nós redefinimos estas constantes mais adiante.

Para o bóson  $W^{-\mu}$  temos  $-(g'/\sqrt{2})j_\mu^- W^{-\mu}$  com:

$$j_\mu^{-N} = j_\mu^{+N\dagger} = \bar{\Psi}_n \frac{\gamma_\mu}{2} (g_V - g_A \gamma^5) \Psi_p; \quad (2.61)$$

$$j_\mu^{-l} = j_\mu^{+l\dagger} = \bar{\Psi}_e \frac{\gamma_\mu}{2} (g_V - g_A \gamma^5) \Psi_\nu. \quad (2.62)$$

A densidade Lagrangeana dos termos que envolvem os bósons  $W^\pm$  é então:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_W = & -\frac{g'}{\sqrt{2}} j_\mu^{+N} W^{+\mu} - \frac{g'}{\sqrt{2}} j_\mu^{+l} W^{+\mu} - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^+ W^{+\mu\nu} + \frac{M_W^2}{2} W_\mu^+ W^{+\mu} \\
& - \frac{g'}{\sqrt{2}} j_\mu^{-N} W^{-\mu} - \frac{g'}{\sqrt{2}} j_\mu^{-l} W^{-\mu} - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^- W^{-\mu\nu} + \frac{M_W^2}{2} W_\mu^- W^{-\mu},
\end{aligned} \tag{2.63}$$

onde  $W_{\mu\nu}^\pm = \partial_\mu W_\nu^\pm - \partial_\nu W_\mu^\pm$ . Os termos  $-\frac{1}{4} W_{\mu\nu}^\pm W^{\pm\mu\nu}$  e  $\frac{M_W^2}{2} W_\mu^\pm W^{\pm\mu}$  são os termos cinético e de massa, respectivamente, dos bósons fracos carregados.

### 2.1.3 Inclusão dos Neutrinos

Com as considerações anteriores, a densidade Lagrangeana para incluir os neutrinos e a interação fraca no sistema é:

$$\mathcal{L}_{weak} = \mathcal{L}_V + \mathcal{L}_Z + \mathcal{L}_W; \tag{2.64}$$

$$\mathcal{L}_V = \bar{\psi}_\nu i \gamma_\mu \partial^\mu \psi_\nu, \tag{2.65}$$

onde o último termo é o termo cinético dos neutrinos, que consideramos sem massa.

Em alguns casos consideramos que os neutrinos estão armadilhados e em equilíbrio no sistema, e portanto, para temperatura diferente de zero, eles devem obedecer a uma distribuição de Fermi.

As equações de campo para  $Z$  e  $W^\pm$  são:

$$g j^{N\nu} + g j^{l\nu} = M_Z^2 Z^\nu + \partial_\mu Z^{\mu\nu}; \tag{2.66}$$

$$\frac{g'}{\sqrt{2}} j_\nu^{\pm N} + \frac{g'}{\sqrt{2}} j_\nu^{\pm l} = M_W^2 W_\nu^\pm + \partial^\mu W_{\mu\nu}^\pm. \tag{2.67}$$

Devido à massa dos bósons mediadores da interação fraca ser muito grande, os campos fracos contribuem muito pouco para propriedades como energia e pressão do sistema. Tais campos são importantes apenas no cálculo da seção de choque dos neutrinos com as outras partículas, que veremos mais adiante (ver Apêndice A).

Assim, incluímos apenas o termo cinético  $\mathcal{L}_V$  na densidade Lagrangeana total para calcular as densidades de partículas, a energia e a pressão do sistema. Usando a aproximação de Thomas-Fermi, onde desta vez a multiplicidade de spin é  $\gamma = 1$ , pois os neutrinos tem quiralidade bem definida, temos

que a densidade de neutrinos é dada por:

$$\rho_\nu(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k (\eta_{k\nu}(T) - \bar{\eta}_{k\nu}(T)). \quad (2.68)$$

### 2.1.4 Cálculo da Energia e Pressão

A densidade Lagrangeana, para efeito da obtenção da equação de estado e levando em conta a aproximação de campo médio, torna-se a seguinte:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\Psi} \left[ i\gamma_\mu \partial^\mu - g_\nu \gamma^0 V_0 - \frac{1}{2} g_\rho \tau_3 \gamma^0 b_0 - e \frac{1}{2} (1 + \tau_3) \gamma^0 A_0 - M^* \right] \Psi \\ & - \frac{1}{2} (\nabla \phi_0)^2 - \frac{1}{2} m_s^2 \phi_0^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\kappa}{3} \phi_0^3 + \frac{\lambda}{12} \phi_0^4 \right) \\ & + \frac{1}{2} (\nabla V_0)^2 + \frac{1}{2} m_v^2 V_0^2 + \frac{\zeta}{24} g_v^4 (V_0)^4 \\ & + \frac{1}{2} (\nabla b_0)^2 + \frac{1}{2} m_\rho^2 b_0^2 + \Lambda g_\rho^2 b_0^2 g_v^2 V_0^2 + \frac{1}{2} (\nabla A_0)^2 \\ & + \bar{\psi}_e (i\gamma_\mu \partial^\mu + e\gamma^0 A_0 - m_e) \psi_e + i\bar{\psi}_\nu \gamma_\mu \partial^\mu \psi_\nu. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Usando a aproximação de Thomas-Fermi, reescrevemos as equações de campo:

$$(-\nabla^2 + m_s^2) \phi_0 = g_s \rho_s(\vec{r}) - \frac{1}{2} \kappa \phi_0^2 - \frac{1}{6} \lambda \phi_0^3; \quad (2.70)$$

$$(-\nabla^2 + m_v^2) V_0 = g_v \rho_B(\vec{r}) - \frac{1}{3!} \zeta g_v^4 V_0^3 - 2\Lambda g_\rho^2 b_0^2 g_v^2 V_0; \quad (2.71)$$

$$(-\nabla^2 + m_\rho^2) b_0 = \frac{g_\rho}{2} \rho_3(\vec{r}) - 2\Lambda g_\rho^2 b_0 g_v^2 V_0^2; \quad (2.72)$$

$$-\nabla^2 A_0 = e(\rho_p(\vec{r}) - \rho_e(\vec{r})); \quad (2.73)$$

$$\left[ i\gamma_\mu \partial^\mu - g_\nu \gamma^0 V_0 - \frac{1}{2} g_\rho \tau_3 \gamma^0 b_0 - e \frac{1 + \tau_3}{2} \gamma^0 A_0 - M^* \right] \Psi = 0; \quad (2.74)$$

$$[i\gamma_\mu \partial^\mu - m_e + e\gamma^0 A_0] \psi_e = 0; \quad (2.75)$$

$$i\gamma_\mu \partial^\mu \psi_\nu = 0. \quad (2.76)$$

Para calcular a densidade de energia e a pressão, usamos o tensor energia-momento. Em mecânica dos meios contínuos, o tensor energia-momento é definido por:

$$T_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}\mathcal{L} + \frac{\partial q_i}{\partial x^\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu q_i)}, \quad (2.77)$$

com  $\partial_\nu(T_\mu^\nu) = 0$ , onde, em nosso caso, os  $q_i$ 's representam os campos. Para um sistema uniforme, ou localmente uniforme, onde não há condução de calor e não há viscosidade, o tensor energia-momento pode também ser escrito como (SEROT; WALECKA, 1986):

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = (\varepsilon + P)u_\mu u_\nu - P g_{\mu\nu}, \quad (2.78)$$

onde  $\varepsilon$  é a densidade de energia,  $P$  é a pressão e  $u_\mu$  é a quadri-velocidade do fluido. Sabendo que  $u_\mu^2 = 1$ , e que para um fluido em repouso  $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$ , temos:

$$\langle T_{00} \rangle = \varepsilon; \quad (2.79)$$

$$\frac{1}{3} \langle T_{ii} \rangle = P. \quad (2.80)$$

Para o nosso caso:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} = & i\bar{\Psi}\gamma_\mu\partial_\nu\Psi + i\bar{\psi}_e\gamma_\mu\partial_\nu\psi_e + i\bar{\psi}_\nu\gamma_\mu\partial_\nu\psi_\nu \\ & + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi_0)}\frac{\partial\phi_0}{\partial x^\nu} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu V_0)}\frac{\partial V_0}{\partial x^\nu} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu b_0)}\frac{\partial b_0}{\partial x^\nu} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu A_0)}\frac{\partial A_0}{\partial x^\nu} \\ & - g_{\mu\nu}\left[-\frac{1}{2}(\nabla\phi_0)^2 - \frac{1}{2}m_s^2\phi_0^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\kappa}{3}\phi_0^3 + \frac{\lambda}{12}\phi_0^4\right)\right. \\ & + \frac{1}{2}(\nabla V_0)^2 + \frac{1}{2}m_v^2V_0^2 + \frac{\zeta}{24}g_v^4(V_0)^4 \\ & \left. + \frac{1}{2}(\nabla b_0)^2 + \frac{1}{2}m_\rho^2b_0^2 + \Lambda g_\rho^2b_0^2g_v^2V_0^2 + \frac{1}{2}(\nabla A_0)^2\right], \quad (2.81) \end{aligned}$$

onde usamos as equações de campo 2.74, 2.75 e 2.76. Segundo Serot e Walecka (SEROT; WALECKA, 1986), não é necessário simetrizar o  $T_{\mu\nu}$  da expressão 2.81 para o sistema em questão, pois o processo de simetrização adiciona uma divergência total ao tensor energia-momento, sendo que os elementos diagonais da matriz de uma divergência total são identicamente nulos.

Para calcular a densidade de energia e a pressão, precisamos encontrar os campos  $\Psi$ ,  $\psi_e$  e  $\psi_\nu$  usando as equações 2.74, 2.75 e 2.76, respectivamente. Para resolver a equação de Dirac 2.74, propomos uma solução de onda plana do tipo:

$$\psi = \psi_\alpha e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\varepsilon(k)t}, \quad (2.82)$$

onde  $\psi_\alpha$  é um spinor de Dirac,  $\vec{k}$  é o momento e  $\varepsilon(k)$  deve ser determinado. Agora, por simplicidade,  $\psi = \psi_p$  ou  $\psi = \psi_n$ . Lembramos que estamos utilizando a condição de que na aproximação de Thomas-Fermi o sistema é uniforme localmente, sendo válida a proposta acima. Substituindo a expressão acima na equação 2.74, onde agora  $t_3$  denotará a terceira componente de isospin dos nucleons, ou seja,  $t_3 = +1$  para prótons e  $t_3 = -1$  para nêutrons, obtemos:

$$\left[ \gamma^0 \varepsilon(k) - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} - M^* - g_v \gamma^0 V_0 - \frac{1}{2} g_\rho t_3 \gamma^0 b_0 - e \frac{1+t_3}{2} \gamma^0 A_0 \right] \psi_\alpha = 0. \quad (2.83)$$

Lembramos que  $M^* \equiv M - g_s \phi_0$  é a massa efetiva. Multiplicamos a equação acima por  $\gamma^0$ , elevamos ao quadrado e após um rearranjo dos termos, obtemos:

$$\varepsilon^\pm(k) = g_v V_0 + \frac{1}{2} g_\rho t_3 b_0 + e \frac{1+t_3}{2} A_0 \pm E^*, \quad (2.84)$$

onde

$$E^* = \sqrt{\vec{k}^2 + M^{*2}}. \quad (2.85)$$

A solução geral é a superposição das funções de ondas planas em todos os momentos  $\vec{k}$  e em todos os spins  $\lambda$ . Assim, o campo dos nucleons, após quantização, pode ser escrito na forma:

$$\begin{aligned} \psi(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}, \lambda} \left\{ A_{\vec{k}, \lambda} U(\vec{k}, \lambda) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\varepsilon^+(k)t} \right. \\ \left. + B_{\vec{k}, \lambda}^\dagger V(\vec{k}, \lambda) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\varepsilon^-(k)t} \right\}, \end{aligned} \quad (2.86)$$

onde  $1/\sqrt{V}$  é a normalização de  $\psi(\vec{x}, t)$ . O spinor  $U(\vec{k}, \lambda)$  satisfaz a equação de Dirac para  $\vec{k}$  e  $\varepsilon^+(k)$ , e o spinor  $V(\vec{k}, \lambda)$  satisfaz a equação de Dirac para  $-\vec{k}$  e  $\varepsilon^-(k)$ . Os operadores de criação (aniquilação) de partículas ( $A$ ) e anti-partículas ( $B$ ) satisfazem as regras de anticomutação usuais:

$$\{A_{\vec{k}, \lambda}, A_{\vec{k}', \lambda'}^\dagger\} = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \delta_{\lambda, \lambda'} = \{B_{\vec{k}, \lambda}, B_{\vec{k}', \lambda'}^\dagger\}; \quad (2.87)$$

$$\{A_{\vec{k}, \lambda}, B_{\vec{k}', \lambda'}^\dagger\} = \{A_{\vec{k}, \lambda}^\dagger, B_{\vec{k}', \lambda'}^\dagger\} = 0; \quad (2.88)$$

$$\{A_{\vec{k}, \lambda}^\dagger, B_{\vec{k}', \lambda'}\} = \{A_{\vec{k}, \lambda}, B_{\vec{k}', \lambda'}\} = 0. \quad (2.89)$$

Podemos ainda obter, a partir da equação de Dirac, os seguintes resultados para os spinores:

$$M^*U^\dagger(\vec{k}, \lambda)U(\vec{k}, \lambda) = E^*\bar{U}(\vec{k}, \lambda)U(\vec{k}, \lambda); \quad (2.90)$$

$$M^*V^\dagger(\vec{k}, \lambda)V(\vec{k}, \lambda) = -E^*\bar{V}(\vec{k}, \lambda)V(\vec{k}, \lambda). \quad (2.91)$$

Para encontrar os campos  $\psi_e$  e  $\psi_\nu$  seguimos um procedimento análogo. Para os elétrons temos:

$$\begin{aligned} \psi_e(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}, \lambda} \left\{ A_{\vec{k}, \lambda}^e U^e(\vec{k}, \lambda) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\varepsilon_e^+(k)t} \right. \\ \left. + B_{\vec{k}, \lambda}^{e\dagger} V^e(\vec{k}, \lambda) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\varepsilon_e^-(k)t} \right\}; \end{aligned} \quad (2.92)$$

$$\varepsilon_e^\pm(k) = -eA_0 \pm \sqrt{k^2 + m_e^2}. \quad (2.93)$$

onde o spinor  $U^e(\vec{k}, \lambda)$  satisfaz a equação de Dirac para  $\vec{k}$  e  $\varepsilon_e^+(k)$ , e o spinor  $V^e(\vec{k}, \lambda)$  satisfaz a equação de Dirac para  $-\vec{k}$  e  $\varepsilon_e^-(k)$ .

Para os neutrinos a solução geral é a superposição das funções de onda planas em todos os momentos  $\vec{k}$ , e como temos apenas neutrinos de quiralidade bem definida, não é necessário somar em todos os spins, uma vez que já estamos somando no momento. Desta forma:

$$\begin{aligned} \psi_\nu(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \left\{ A_{\vec{k}}^l U(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\varepsilon_l^+(k)t} + B_{\vec{k}}^{l\dagger} V(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\varepsilon_l^-(k)t} \right\}; \\ \varepsilon_l^\pm(k) = \pm\sqrt{k^2} = \pm k. \end{aligned} \quad (2.94)$$

Podemos agora calcular a densidade de energia e a pressão do sistema. A densidade de energia é dada pela expressão 2.79:

$$\begin{aligned} \varepsilon = T_{00} = i\Psi^\dagger \partial_0 \Psi + i\psi_e^\dagger \partial_0 \psi_e + i\psi_\nu^\dagger \partial_0 \psi_\nu \\ - \left\langle \left[ -\frac{1}{2}(\nabla\phi_0)^2 - \frac{1}{2}m_s^2\phi_0^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\kappa}{3}\phi_0^3 + \frac{\lambda}{12}\phi_0^4 \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2}(\nabla V_0)^2 + \frac{1}{2}m_v^2 V_0^2 + \frac{\zeta}{24}g_v^4 V_0^4 \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2}(\nabla b_0)^2 + \frac{1}{2}m_\rho^2 b_0^2 + \Lambda g_\rho^2 b_0^2 g_v^2 V_0^2 + \frac{1}{2}(\nabla A_0)^2 \right] \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.95)$$

A fim de calcular os valores esperados acima, definimos as seguintes médias em termos das distribuições de férmions a uma dada temperatura  $T$ :

$$\psi_T | A_{k'\lambda'}^\dagger A_{k\lambda} | \psi_T = \delta_{k', \vec{k}} \delta_{\lambda', \lambda} \eta_k(T); \quad (2.96)$$

$$\psi_T |B_{k'\lambda'}^\dagger B_{k\lambda}| \psi_T = \delta_{\vec{k}', \vec{k}} \delta_{\lambda', \lambda} \bar{\eta}_k(T); \quad (2.97)$$

$$\psi_T |A_{k\lambda}^\dagger B_{k\lambda}| \psi_T = 0; \quad (2.98)$$

$$\psi_T |B_{k\lambda}^\dagger A_{k\lambda}| \psi_T = 0, \quad (2.99)$$

onde  $\eta_k(T)$  é a função de distribuição das partículas e  $\bar{\eta}_k(T)$  é a função de distribuição das antipartículas. O mesmo vale para os elétrons e os neutrinos. Além das relações acima, assumimos que os spinores são normalizados:

$$U^\dagger(\vec{k}, \lambda) U(\vec{k}, \lambda) = 1 = V^\dagger(\vec{k}, \lambda) V(\vec{k}, \lambda). \quad (2.100)$$

Finalmente, no limite de um volume infinitamente grande, a transição do discreto para o contínuo é feita usando a relação:

$$\frac{1}{V} \sum_{\vec{k}, \lambda} \rightarrow \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3k. \quad (2.101)$$

Com as relações acima podemos encontrar as densidades 2.35 e 2.36. Voltamos agora à expressão 2.95 para calcular os valores esperados. Encontramos para a densidade de energia do sistema:

$$\begin{aligned} \varepsilon = & \sum_{i=p,n} \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3k E^* (\eta_{ki}(T) + \bar{\eta}_{ki}(T)) \\ & + \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3k \sqrt{k^2 + m_e^2} (\eta_{ke}(T) + \bar{\eta}_{ke}(T)) \\ & + \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k k (\eta_{kv}(T) + \bar{\eta}_{kv}(T)) \\ & + g_v V_0 \rho_B + \frac{1}{2} g_\rho b_0 \rho_3 + e A_0 (\rho_p - \rho_e) \\ & - \left[ -\frac{1}{2} (\nabla \phi_0)^2 - \frac{1}{2} m_s^2 \phi_0^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\kappa}{3} \phi_0^3 + \frac{\lambda}{12} \phi_0^4 \right) + \frac{1}{2} (\nabla V_0)^2 + \frac{1}{2} m_v^2 V_0^2 \right. \\ & \left. + \frac{\zeta}{24} g_v^4 V_0^4 + \frac{1}{2} (\nabla b_0)^2 + \frac{1}{2} m_\rho^2 b_0^2 + \Lambda g_\rho^2 b_0^2 g_v^2 V_0^2 + \frac{1}{2} (\nabla A_0)^2 \right]. \quad (2.102) \end{aligned}$$

Além da matéria uniforme, estamos analisando o caso da fase pasta. Na pasta, a matéria é dividida em células iguais. A energia de uma célula é dada pela integral da densidade de energia acima sobre o todo o volume da célula:

$$H = \int_V d^3r \varepsilon. \quad (2.103)$$

Usando  $\nabla \cdot (f\vec{v}) = f(\nabla \cdot \vec{v}) + \vec{v} \cdot \nabla f$ , e o fato de que a derivada do campo vai a zero na superfície da célula, temos:

$$\begin{aligned} \int_V \nabla \cdot (\phi_0 \nabla \phi_0) d^3 r &= \oint_{\partial V} (\phi_0 \nabla \phi_0) \cdot d\vec{S} = 0 \\ &= \int_V (\phi_0 \nabla^2 \phi_0 + (\nabla \phi_0)^2) d^3 r, \end{aligned} \quad (2.104)$$

e com a ajuda da equação de campo 2.70:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_V d^3 r (\nabla \phi_0)^2 &= -\frac{1}{2} \int_V d^3 r \phi_0 \nabla^2 \phi_0 \\ &= \int_V d^3 r \phi_0 \left( \frac{g_s}{2} \rho_s - \frac{m_s}{2} \phi_0 - \frac{1}{4} \kappa \phi_0^2 - \frac{1}{12} \lambda \phi_0^3 \right), \end{aligned} \quad (2.105)$$

de onde

$$\begin{aligned} \int_V d^3 r \left( \frac{1}{2} (\nabla \phi_0)^2 + \frac{m_s}{2} \phi_0^2 + \frac{1}{6} \kappa \phi_0^3 + \frac{1}{24} \lambda \phi_0^4 \right) \\ = \int_V d^3 r \left( \frac{g_s}{2} \rho_s \phi_0 - \frac{1}{12} \kappa \phi_0^3 - \frac{1}{24} \lambda \phi_0^4 \right). \end{aligned} \quad (2.106)$$

Fazendo o mesmo para os outros campos, e voltando à expressão para a energia, obtemos uma forma mais concisa para a energia da célula:

$$\begin{aligned} H = \int_V d^3 r \left\{ \sum_i \varepsilon_i(\vec{r}) + \frac{g_s}{2} \phi_0(\vec{r}) \rho_s(\vec{r}) - \frac{1}{12} \kappa \phi_0^3(\vec{r}) - \frac{1}{24} \lambda \phi_0^4(\vec{r}) \right. \\ + \frac{g_v}{2} V_0(\vec{r}) \rho_B(\vec{r}) + \frac{\zeta}{24} g_v^4 V_0^4(\vec{r}) + \frac{g_\rho}{4} b_0(\vec{r}) \rho_3(\vec{r}) \\ \left. + \Lambda g_\rho^2 b_0^2 g_v^2 V_0^2 + \frac{e}{2} A_0(\vec{r}) [\rho_p(\vec{r}) - \rho_e(\vec{r})] \right\}, \end{aligned} \quad (2.107)$$

onde

$$\varepsilon_i(\vec{r}) = \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3 k E_i^* (\eta_{ki}(T) + \bar{\eta}_{ki}(T)), \quad i = p, n, e, \nu. \quad (2.108)$$

As distribuições são:

$$\eta_{ki}(T) = \{ \exp[(E_i - \mu_i)/K_B T] + 1 \}^{-1}; \quad (2.109)$$

$$\bar{\eta}_{ki}(T) = \{ \exp[(\bar{E}_i - \bar{\mu}_i)/K_B T] + 1 \}^{-1}, \quad (2.110)$$

onde  $E_i$  ( $\bar{E}_i$ ) é a energia de uma partícula (antipartícula),  $\mu_i$  ( $\bar{\mu}_i$ ) é o potencial

químico das partículas (antipartículas) e  $K_B$  é a constante de Boltzmann. A energia de uma partícula é  $E_i = \varepsilon_i^+(k)$  e a energia de uma antipartícula é  $\bar{E}_i = -\varepsilon_i^-(k)$ , com  $\varepsilon_i^\pm(k)$  dado pelas expressões 2.84, 2.93 ou 2.94. Assim, para os prótons:

$$E_p = E^* + g_v V_0(\vec{r}) + \frac{1}{2} g_\rho b_0(\vec{r}) + e A_0(\vec{r}); \quad (2.111)$$

$$\bar{E}_p = E^* - g_v V_0(\vec{r}) - \frac{1}{2} g_\rho b_0(\vec{r}) - e A_0(\vec{r}); \quad (2.112)$$

para os nêutrons:

$$E_n = E^* + g_v V_0(\vec{r}) - \frac{1}{2} g_\rho b_0(\vec{r}); \quad (2.113)$$

$$\bar{E}_n = E^* - g_v V_0(\vec{r}) + \frac{1}{2} g_\rho b_0(\vec{r}); \quad (2.114)$$

para os elétrons:

$$E_e = \sqrt{k^2 + m_e^2} - e A_0(\vec{r}); \quad (2.115)$$

$$\bar{E}_e = \sqrt{k^2 + m_e^2} + e A_0(\vec{r}); \quad (2.116)$$

e para os neutrinos:

$$E_\nu = k = \bar{E}_\nu. \quad (2.117)$$

Sabendo que no equilíbrio termodinâmico, a energia livre de Helmholtz  $F$  para temperatura  $T$  e volume  $V$  fixos é mínima,  $\delta F = \mu_i \delta N_i + \bar{\mu}_i \delta \bar{N}_i = 0$ , e que o número total de partículas é conservado,  $\delta N_{i,total} = \delta N_i - \delta \bar{N}_i = 0$ , obtemos  $\delta F = \delta N_i (\mu_i + \bar{\mu}_i) = 0$ . Como as variações no número de partículas  $\delta N_i$  são arbitrárias, reduzimos o número de parâmetros a serem determinados, pois temos assim que:

$$\bar{\mu}_i = -\mu_i. \quad (2.118)$$

A pressão pode ser calculada através da expressão 2.80, onde  $\vec{\alpha} = \gamma^0 \vec{\gamma}$ .

Temos:

$$\begin{aligned}
\hat{P} &= \frac{1}{3}(T_{11} + T_{22} + T_{33}) \\
&= -\frac{i}{3}\Psi^\dagger \vec{\alpha} \cdot \nabla \Psi - \frac{i}{3}\psi_e^\dagger \vec{\alpha} \cdot \nabla \psi_e - \frac{i}{3}\psi_v^\dagger \vec{\alpha} \cdot \nabla \psi_v \\
&\quad - (\nabla \phi_0)^2 + (\nabla V_0)^2 + (\nabla b_0)^2 + (\nabla A_0)^2 \\
&\quad + \left[ -\frac{1}{2}(\nabla \phi_0)^2 - \frac{1}{2}m_s^2 \phi_0^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\kappa}{3} \phi_0^3 + \frac{\lambda}{12} \phi_0^4 \right) \right. \\
&\quad + \frac{1}{2}(\nabla V_0)^2 + \frac{1}{2}m_v^2 V_0^2 + \frac{\zeta}{24} g_v^4 (V_0)^4 \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}(\nabla b_0)^2 + \frac{1}{2}m_\rho^2 b_0^2 + \Lambda g_\rho^2 b_0^2 g_v^2 V_0^2 + \frac{1}{2}(\nabla A_0)^2 \right]. \tag{2.119}
\end{aligned}$$

Usando os seguintes resultados para os spiniores:

$$U^\dagger(\vec{k}, \lambda) \vec{\alpha} \cdot \vec{k} U(\vec{k}, \lambda) = \frac{k^2}{E^*}; \tag{2.120}$$

$$V^\dagger(\vec{k}, \lambda) (-\vec{\alpha} \cdot \vec{k}) V(\vec{k}, \lambda) = -\frac{k^2}{E^*}, \tag{2.121}$$

e seguindo um procedimento similar ao que foi feito na obtenção da densidade de energia, obtemos:

$$\begin{aligned}
P &= \frac{1}{3} \sum_{i=p,n} \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{k^2}{E^*} (\eta_{ki}(T) + \bar{\eta}_{ki}(T)) \\
&\quad + \frac{1}{3} \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + m_e^2}} (\eta_{ke}(T) + \bar{\eta}_{ke}(T)) \\
&\quad + \frac{1}{3} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k k (\eta_{kv}(T) + \bar{\eta}_{kv}(T)) \\
&\quad - \frac{3}{2}(\nabla \phi_0)^2 - \frac{1}{2}m_s^2 \phi_0^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\kappa}{3} \phi_0^3 + \frac{\lambda}{12} \phi_0^4 \right) \\
&\quad + \frac{3}{2}(\nabla V_0)^2 + \frac{1}{2}m_v^2 V_0^2 + \frac{\zeta}{24} g_v^4 (V_0)^4 \\
&\quad + \frac{3}{2}(\nabla b_0)^2 + \frac{1}{2}m_\rho^2 b_0^2 + \Lambda g_\rho^2 b_0^2 g_v^2 V_0^2 + \frac{3}{2}(\nabla A_0)^2. \tag{2.122}
\end{aligned}$$

## 2.2 PARAMETRIZAÇÃO DEPENDENTE DA DENSIDADE

Até agora tratamos as constantes de acoplamento da interação forte como tendo o mesmo valor para qualquer densidade bariônica. Tais constantes são ajustadas para reproduzir propriedades da matéria nuclear na densidade bariônica de saturação. As auto-interações dos mésons  $\sigma$  e  $\omega$  foram introduzidas para se obter um melhor acordo com outras propriedades de interesse. No entanto, modelos sem as auto-interações, mas agora contendo “constantes” de acoplamento que dependem explicitamente da densidade bariônica, foram também propostos na literatura (TYPEL; WOLTER, 1999), os quais também são capazes de reproduzir tais propriedades, além de produzir um excelente acordo com dados experimentais de núcleos, como energia de ligação e raio de carga ((FUCHS; LENSKE; WOLTER, 1995; LENSKE; FUCHS, 1995)).

Uma vez que um de nossos objetivos aqui é comparar os dois tipos de parametrizações na obtenção do LCMN, tratamos agora do caso onde as constantes de acoplamento do modelo de Walecka são dependentes da densidade bariônica. A densidade Lagrangeana para o setor hadrônico é a seguinte:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\Psi} \left[ i\gamma_\mu \partial^\mu - g_v \gamma^\mu V_\mu - \frac{1}{2} g_\rho \gamma^\mu \vec{\tau} \cdot \vec{b}_\mu - e \frac{1 + \tau_3}{2} \gamma^\mu A_\mu - M^* \right] \Psi \\ & - \frac{1}{2} m_s^2 \phi^2 + \frac{1}{2} m_v^2 V_\mu V^\mu + \frac{1}{2} m_\rho^2 \vec{b}_\mu \cdot \vec{b}^\mu + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi) \\ & - \frac{1}{4} V_{\mu\nu} V^{\mu\nu} - \frac{1}{4} \vec{B}_{\mu\nu} \cdot \vec{B}^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (2.123)$$

onde agora  $g_s = g_s(\hat{\rho}_B)$ ,  $g_v = g_v(\hat{\rho}_B)$  e  $g_\rho = g_\rho(\hat{\rho}_B)$ . As equações de Euler-Lagrange para os campos permanecem as mesmas que anteriormente (com  $\kappa = \lambda = \zeta = \Lambda = 0$ ), com exceção da equação de campo para  $\bar{\Psi}$ , pois agora  $g_s$ ,  $g_v$  e  $g_\rho$  dependem de  $\hat{\rho}_B = \sqrt{j_\mu j^\mu}$ ,  $j^\mu = \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi$ . Obtemos:

$$\begin{aligned} & \left[ i\gamma_\mu \partial^\mu - g_v \gamma^\mu V_\mu - \frac{1}{2} g_\rho \gamma^\mu \vec{\tau} \cdot \vec{b}_\mu - e \frac{1 + \tau_3}{2} \gamma^\mu A_\mu - M^* \right] \Psi \\ & - \left[ \frac{\partial g_v}{\partial \hat{\rho}_B} \frac{\partial \hat{\rho}_B}{\partial \bar{\Psi}} \bar{\Psi} \gamma^\mu V_\mu + \frac{1}{2} \frac{\partial g_\rho}{\partial \hat{\rho}_B} \frac{\partial \hat{\rho}_B}{\partial \bar{\Psi}} \bar{\Psi} \gamma^\mu \vec{\tau} \cdot \vec{b}_\mu - \frac{\partial g_s}{\partial \hat{\rho}_B} \frac{\partial \hat{\rho}_B}{\partial \bar{\Psi}} \bar{\Psi} \phi \right] \Psi = 0. \end{aligned} \quad (2.124)$$

Substituindo  $\partial \hat{\rho}_B / \partial \bar{\Psi} = \gamma^\mu j_\mu \Psi / \hat{\rho}_B$  na equação acima resulta:

$$\left[ i\gamma_\mu \partial^\mu - g_\nu \gamma^\mu V_\mu - \frac{1}{2} g_\rho \gamma^\mu \vec{\tau} \cdot \vec{b}_\mu - e \frac{1 + \tau_3}{2} \gamma^\mu A_\mu - M^* \right] \Psi - \gamma^\mu \frac{j_\mu}{\hat{\rho}_B} \left[ \frac{\partial g_\nu}{\partial \hat{\rho}_B} \bar{\Psi} \gamma^\nu V_\nu \Psi + \frac{1}{2} \frac{\partial g_\rho}{\partial \hat{\rho}_B} \bar{\Psi} \gamma^\nu \vec{\tau} \cdot \vec{b}_\nu \Psi - \frac{\partial g_s}{\partial \hat{\rho}_B} \bar{\Psi} \phi \Psi \right] \Psi = 0 \quad (2.125)$$

ou

$$\left[ \gamma^\mu (i\partial_\mu - \Sigma_\mu) - M^* \right] \Psi = 0, \quad (2.126)$$

onde

$$\Sigma_\mu = g_\nu V_\mu + \frac{g_\rho}{2} \vec{\tau} \cdot \vec{b}_\mu + e \frac{1 + \tau_3}{2} A_\mu + \Sigma_\mu^R \quad (2.127)$$

e  $\Sigma_\mu^R$  é o chamado termo de rearranjo:

$$\Sigma_\mu^R = \frac{j_\mu}{\hat{\rho}_B} \left[ \frac{\partial g_\nu}{\partial \hat{\rho}_B} \bar{\Psi} \gamma^\nu V_\nu \Psi + \frac{1}{2} \frac{\partial g_\rho}{\partial \hat{\rho}_B} \bar{\Psi} \gamma^\nu \vec{\tau} \cdot \vec{b}_\nu \Psi - \frac{\partial g_s}{\partial \hat{\rho}_B} \bar{\Psi} \phi \Psi \right]. \quad (2.128)$$

Dentro da aproximação de campo médio e com a aproximação de Thomas-Fermi, temos:

$$(-\nabla^2 + m_s^2) \phi_0 = g_s \rho_s(\vec{r}); \quad (2.129)$$

$$(-\nabla^2 + m_v^2) V_0 = g_v \rho_B(\vec{r}); \quad (2.130)$$

$$(-\nabla^2 + m_p^2) b_0 = \frac{g_\rho}{2} \rho_3(\vec{r}); \quad (2.131)$$

$$-\nabla^2 A_0 = e(\rho_p(\vec{r}) - \rho_e(\vec{r})); \quad (2.132)$$

$$[i\gamma_\mu \partial^\mu - m_e + e\gamma^0 A_0] \psi_e = 0; \quad (2.133)$$

$$i\gamma_\mu \partial^\mu \psi_v = 0; \quad (2.134)$$

$$[i\gamma_\mu \partial^\mu - \gamma^0 \Sigma_0 - M^*] \psi = 0, \quad (2.135)$$

com

$$\Sigma_0 = g_\nu V_0 + g_\rho \frac{t_3}{2} b_0 + e \frac{1 + t_3}{2} A_0 + \Sigma_0^R \quad (2.136)$$

e

$$\Sigma_0^R = \frac{\partial g_\nu}{\partial \rho_B} \rho_B V_0 + \frac{\partial g_\rho}{\partial \rho_B} \frac{\rho_3}{2} b_0 - \frac{\partial g_s}{\partial \rho_B} \rho_s \phi_0. \quad (2.137)$$

As soluções para  $\psi_e$ ,  $\psi_v$  e  $\psi$  ( $\psi = \psi_p$  ou  $\psi = \psi_n$ ) permanecem as mesmas, com a exceção de que agora:

$$\varepsilon^\pm(k) = \Sigma_0 \pm E^*, \quad (2.138)$$

onde

$$E^* = \sqrt{\vec{k}^2 + M^{*2}}. \quad (2.139)$$

O tensor energia-momento passa a ser:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} = & i\bar{\Psi}\gamma_\mu\partial_\nu\Psi + i\bar{\psi}_e\gamma_\mu\partial_\nu\psi_e + i\bar{\psi}_\nu\gamma_\mu\partial_\nu\psi_\nu \\ & + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi_0)}\frac{\partial\phi_0}{\partial x^\nu} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu V_0)}\frac{\partial V_0}{\partial x^\nu} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu b_0)}\frac{\partial b_0}{\partial x^\nu} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu A_0)}\frac{\partial A_0}{\partial x^\nu} \\ & - g_{\mu\nu}\left[-\frac{1}{2}(\nabla\phi_0)^2 - \frac{1}{2}m_s^2\phi_0^2 + \frac{1}{2}(\nabla V_0)^2\right. \\ & + \frac{1}{2}m_v^2V_0^2 + \frac{1}{2}(\nabla b_0)^2 + \frac{1}{2}m_\rho^2b_0^2 + \frac{1}{2}(\nabla A_0)^2 \\ & \left. + \frac{\partial g_\nu}{\partial\rho_B}\rho_B^2V_0 + \frac{1}{2}\frac{\partial g_\rho}{\partial\rho_B}\rho_B\rho_3b_0 - \frac{\partial g_s}{\partial\rho_B}\rho_B\rho_s\phi_0\right], \end{aligned} \quad (2.140)$$

onde usamos as equações de campo 2.133, 2.134 e 2.135.

Fazendo o mesmo procedimento anterior encontramos para a energia:

$$\begin{aligned} H = \int_V d^3r \left[ \sum_i \varepsilon_i(\vec{r}) + \frac{g_s}{2}\phi_0(\vec{r})\rho_s(\vec{r}) \right. \\ \left. + \frac{g_\nu}{2}V_0(\vec{r})\rho_B(\vec{r}) + \frac{g_\rho}{4}b_0(\vec{r})\rho_3(\vec{r}) + \frac{e}{2}A_0(\vec{r})(\rho_p(\vec{r}) - \rho_e(\vec{r})) \right]. \end{aligned} \quad (2.141)$$

A expressão acima é idêntica ao caso anterior com a diferença de que os acoplamentos são agora funções da densidade e não há termos de autointeração dos mésons. As energias de uma partícula para os prótons e nêutrons são, no entanto, dadas agora por:

$$\begin{aligned} E_p = & E^* + g_\nu V_0(\vec{r}) + \frac{1}{2}g_\rho b_0(\vec{r}) + eA_0(\vec{r}) \\ & + \frac{\partial g_\nu}{\partial\rho_B}\rho_B V_0 + \frac{\partial g_\rho}{\partial\rho_B}\frac{\rho_3}{2}b_0 - \frac{\partial g_s}{\partial\rho_B}\rho_s\phi_0; \end{aligned} \quad (2.142)$$

$$\begin{aligned} \bar{E}_p = & E^* - g_\nu V_0(\vec{r}) - \frac{1}{2}g_\rho b_0(\vec{r}) - eA_0(\vec{r}) \\ & - \frac{\partial g_\nu}{\partial\rho_B}\rho_B V_0 - \frac{\partial g_\rho}{\partial\rho_B}\frac{\rho_3}{2}b_0 + \frac{\partial g_s}{\partial\rho_B}\rho_s\phi_0; \end{aligned} \quad (2.143)$$

$$\begin{aligned}
E_n = & E^* + g_v V_0(\vec{r}) - \frac{1}{2} g_\rho b_0(\vec{r}) \\
& + \frac{\partial g_v}{\partial \rho_B} \rho_B V_0 + \frac{\partial g_\rho}{\partial \rho_B} \frac{\rho_3}{2} b_0 - \frac{\partial g_s}{\partial \rho_B} \rho_s \phi_0; \quad (2.144)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{E}_n = & E^* - g_v V_0(\vec{r}) + \frac{1}{2} g_\rho b_0(\vec{r}) \\
& - \frac{\partial g_v}{\partial \rho_B} \rho_B V_0 - \frac{\partial g_\rho}{\partial \rho_B} \frac{\rho_3}{2} b_0 + \frac{\partial g_s}{\partial \rho_B} \rho_s \phi_0. \quad (2.145)
\end{aligned}$$

A pressão por sua vez é:

$$\begin{aligned}
\hat{P} = & \frac{1}{3} (T_{11} + T_{22} + T_{33}) = -\frac{i}{3} \Psi^\dagger \vec{\alpha} \cdot \nabla \Psi - \frac{i}{3} \psi_e^\dagger \vec{\alpha} \cdot \nabla \psi_e - \frac{i}{3} \psi_v^\dagger \vec{\alpha} \cdot \nabla \psi_v \\
& - (\nabla \phi_0)^2 + (\nabla V_0)^2 + (\nabla b_0)^2 + (\nabla A_0)^2 \\
& + \left[ -\frac{1}{2} (\nabla \phi_0)^2 - \frac{1}{2} m_s^2 \phi_0^2 + \frac{1}{2} (\nabla V_0)^2 \right. \\
& + \frac{1}{2} m_v^2 V_0^2 + \frac{1}{2} (\nabla b_0)^2 + \frac{1}{2} m_\rho^2 b_0^2 + \frac{1}{2} (\nabla A_0)^2 \\
& \left. + \frac{\partial g_v}{\partial \rho_B} \rho_B^2 V_0 + \frac{1}{2} \frac{\partial g_\rho}{\partial \rho_B} \rho_B \rho_3 b_0 - \frac{\partial g_s}{\partial \rho_B} \rho_B \rho_s \phi_0 \right]. \quad (2.146)
\end{aligned}$$

Após alguns cálculos temos:

$$\begin{aligned}
P = & \frac{1}{3} \sum_{i=p,n} \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3 k \frac{k^2}{E^*} (\eta_{ki}(T) + \bar{\eta}_{ki}(T)) \\
& + \frac{1}{3} \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3 k \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + m_e^2}} (\eta_{ke}(T) + \bar{\eta}_{ke}(T)) \\
& + \frac{1}{3} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 k (k) (\eta_{kv}(T) + \bar{\eta}_{kv}(T)) \\
& - \frac{3}{2} (\nabla \phi_0)^2 - \frac{1}{2} m_s^2 \phi_0^2 + \frac{3}{2} (\nabla V_0)^2 + \frac{1}{2} m_v^2 V_0^2 + \frac{3}{2} (\nabla b_0)^2 + \frac{1}{2} m_\rho^2 b_0^2 \\
& + \frac{3}{2} (\nabla A_0)^2 + \frac{\partial g_v}{\partial \rho_B} \rho_B^2 V_0 + \frac{1}{2} \frac{\partial g_\rho}{\partial \rho_B} \rho_B \rho_3 b_0 - \frac{\partial g_s}{\partial \rho_B} \rho_B \rho_s \phi_0. \quad (2.147)
\end{aligned}$$

As densidades são as mesmas dadas pelas expressões 2.35 e 2.36 e as funções de distribuição das partículas e antipartículas são dadas pelas expressões 2.110 com a equação 2.118 válida.

Poderíamos ainda considerar uma dependência das massas dos mésons

com a densidade, mas consideramos aqui as massas constantes. A dependência dos parâmetros com a densidade segue aqui como em (TYPEL; WOLTER, 1999), ou seja, para os mésons  $\sigma$  e  $\omega$  são calculadas através de:

$$g_i(\rho_B) = g_i(\rho_0)f_i(x), \quad i = \sigma, \omega, \quad (2.148)$$

onde

$$f_i(x) = a_i \frac{1 + b_i(x + d_i)^2}{1 + c_i(x + d_i)^2}, \quad x = \frac{\rho_B}{\rho_0}, \quad (2.149)$$

e  $\rho_0$  é a densidade de saturação da matéria nuclear. Obviamente devemos ter  $f_i(1) = 1$ . Portanto, as oito quantidades  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  e  $d_i$  não são independentes. Para diminuir ainda mais o número de parâmetros livres é exigido que  $f_s''(1) = f_v''(1)$  e  $f_i''(0) = 0$ . A última condição garante que os termos de rearranjo permaneçam finitos para densidade bariônica zero e que eles não diverjam, como em outras parametrizações. Desta forma, temos apenas três parâmetros livres. Cálculos de Dirac-Brueckner para matéria nuclear assimétrica (FUCHS; LENSKE; WOLTER, 1995) indicam uma forte dependência na densidade do acoplamento do méson  $\rho$ , a qual se torna muito pequena em altas densidades. A constante de acoplamento do méson  $\rho$  é então parametrizada por:

$$g_\rho(\rho_B) = g_\rho(\rho_0)\exp[-a_\rho(x - 1)], \quad (2.150)$$

com apenas um parâmetro adicional,  $a_\rho$ .

### 2.3 FASE PASTA

Aqui descrevemos brevemente as características e equações que utilizamos para descrever a fase pasta (AVANCINI et al., 2008, 2009, 2010). Para densidades bariônica entre  $(0.01 - 0.1)\text{fm}^{-3}$ , ou seja, abaixo da densidade de saturação da matéria nuclear,  $\rho_0 \approx 0.15\text{fm}^{-3}$ , espera-se que os nucleons se agrupem em núcleos, a fim de reduzir a energia do sistema. Os núcleos atômicos são aproximadamente esféricos, no entanto, para matéria estelar com as densidades citadas anteriormente, outras formas podem ser mais convenientes, dependendo da densidade bariônica e da parametrização da densidade Lagrangeana.

Assume-se que os núcleos formem uma estrutura cristalina. Tipos de redes cristalinas com os maiores fatores de empacotamento são boas candidatas para o agrupamento dos núcleos. As formas dos núcleos podem ser: gotas, cilindros, placas, tubos e bolhas. As gotas (semelhantes aos núcleos atômicos) e bolhas possuem simetria esférica, necessitando de uma

descrição em 3 dimensões (3D). Os cilindros e tubos possuem simetria em relação a rotações em torno do eixo  $z$ , necessitando de uma descrição em 2 dimensões (2D). Por fim, as placas são descritas em 1 dimensão (1D). Usamos a aproximação de células de Wigner-Seitz para calcular a pasta. Para o caso de gotas e bolhas, a célula de Wigner-Seitz da rede é substituída (aproximada) por uma esfera, para cilindros e tubos a célula é um cilindro e para placas a célula é uma placa. No caso de gotas e bolhas, o volume e os limites da célula ficam completamente determinados a partir do seu raio. No entanto, este não é o caso para as outras formas. Logo, para limitar a célula, escolhemos as alturas dos cilindros e tubos iguais ao respectivo raio, e para as placas, tomamos a altura e a profundidade iguais à largura.

Vamos estudar como resolvemos as equações de campo mesônicas 2.70-2.72 ou 2.129-2.131. Expandimos os campos mesônicos na base do oscilador harmônico na dimensão desejada e, por razões de simetria, usamos apenas as autofunções do oscilador harmônico com momento angular  $l = 0$ .

Em 3D, as autofunções são (não confundir  $\psi_n(\vec{r})$  com os spinores de Dirac):

$$\psi_n(\vec{r}) = \Phi_n(r)Y_{00}(\Omega), \quad (2.151)$$

$$\Phi_n(r) = \frac{2^{1/2}\Gamma(n)^{1/2}}{b_B^{3/2}\Gamma(n+\frac{1}{2})^{1/2}} \mathcal{L}_{n-1}^{1/2}\left(\frac{r^2}{b_B^2}\right) \exp\left(-\frac{r^2}{2b_B^2}\right), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.152)$$

com a condição de normalização

$$\int_0^\infty dr r^2 \Phi_n(r)\Phi_{n'}(r) = \delta_{nn'}, \quad (2.153)$$

satisfeita.  $\mathcal{L}_n^m(x)$  são os polinômios associados de Laguerre,  $Y_{00}(\Omega)$  é o harmônico esférico,  $\Gamma(n)$  é a função gamma, e  $b_B$  é o comprimento do oscilador.

Em 2D, sendo  $(r, \phi)$  as coordenadas cilíndricas,

$$\psi_n(\vec{r}) = \Phi_n(r) \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad (2.154)$$

$$\Phi_n(r) = \frac{2^{1/2}}{b_B} \mathcal{L}_{n-1}^0\left(\frac{r^2}{b_B^2}\right) \exp\left(-\frac{r^2}{2b_B^2}\right), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.155)$$

satisfazendo a condição de normalização

$$\int_0^\infty dr r \Phi_n(r)\Phi_{n'}(r) = \delta_{nn'}. \quad (2.156)$$

A base do oscilador 1D é dada pelos estados  $\psi_n(\vec{r}) = \Phi_n(r)$ , com co-

ordenadas cartesianas ( $z=r$ ). Vamos sempre assumir que temos simetria em relação à origem na direção  $z$ , isto é, levamos em conta apenas os estados de base pares. Temos, onde os  $H_n$ 's são os polinômios de Hermite:

$$\Phi_n(r) = \frac{1}{b_B^{1/2}} \frac{1}{(\pi^{1/2} 2^n n!)^{1/2}} H_n\left(\frac{r}{b}\right) \exp\left(-\frac{r^2}{2b_B^2}\right), \quad n = 0, 2, 4, \dots, \quad (2.157)$$

satisfazendo a condição de normalização

$$\int_{-\infty}^{\infty} dr \Phi_n(r) \Phi_{n'}(r) = \delta_{nn'}. \quad (2.158)$$

Por conveniência vamos usar a expressão

$$\mathcal{L}_n^{-1/2}(x) = \frac{(-1)^n}{2^{2n} n!} H_{2n}(\sqrt{x}), \quad (2.159)$$

para reescrever a base 1D (par) como:

$$\begin{aligned} \Phi_n(r) = & \frac{1}{b_B^{1/2} \pi^{1/4}} \frac{(-2)^{(n-1)} (n-1)!}{\sqrt{(2n-2)!}} \\ & \cdot \mathcal{L}_{n-1}^{-1/2}\left(\frac{r^2}{b_B^2}\right) \exp\left(-\frac{r^2}{2b_B^2}\right), \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.160)$$

As equações de campo 2.70-2.72 ou 2.129-2.131, podem ser reescritas como:

$$\left(-\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + m_\xi^2\right) \xi = s_\xi \quad (3D); \quad (2.161)$$

$$\left(-\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + m_\xi^2\right) \xi = s_\xi \quad (2D); \quad (2.162)$$

$$\left(-\frac{d^2}{dr^2} + m_\xi^2\right) \xi = s_\xi \quad (1D), \quad (2.163)$$

onde usamos a simetria de cada dimensão. Os campos  $\phi_0(r)$ ,  $V_0(r)$  e  $b_0(r)$  são representados por  $\xi$ . As fontes correspondentes,  $s_\xi$ , são:

$$s_\sigma = g_s \rho_s(\vec{r}) - \frac{1}{2} \kappa \phi^2(\vec{r}) - \frac{1}{6} \lambda \phi^3(\vec{r}); \quad (2.164)$$

$$s_\omega = g_v \rho_B(\vec{r}) - \frac{1}{3!} \zeta g_v^4 V_0^3(\vec{r}) - 2\Lambda g_\rho^2 b_0^2 g_v^2 V_0; \quad (2.165)$$

$$s_\rho = \frac{g_\rho}{2} \rho_3(\vec{r}) - 2\Lambda g_\rho^2 b_0 g_v^2 V_0^2 \quad (2.166)$$

para o modelo de Walecka não linear e

$$s_\sigma = g_s \rho_s(\vec{r}); \quad s_\omega = g_v \rho_B(\vec{r}); \quad s_\rho = \frac{g_\rho}{2} \rho_3(\vec{r}) \quad (2.167)$$

para a parametrização dependente da densidade.

Os campos e as fontes são expandidos como:

$$\xi(r) = \sum_{i=1}^{NB} a_i \Phi_i(r); \quad (2.168)$$

$$s_\xi(r) = \sum_{i=1}^{NB} b_i \Phi_i(r), \quad (2.169)$$

onde  $N_B$  é o número de vetores da base usados na expansão.

Podemos mostrar que, em 3D:

$$\begin{aligned} \langle \Phi_n | -\nabla^2 + m_\xi^2 | \Phi_{n'} \rangle &= \left\langle \Phi_n \left| -\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + m_\xi^2 \right| \Phi_{n'} \right\rangle \\ &= \left[ \frac{1}{b_B^2} \left( 2(n-1) + \frac{3}{2} \right) + m_\xi^2 \right] \delta_{nn'} \\ &\quad + \frac{1}{b_B^2} \sqrt{n' \left( n' + \frac{1}{2} \right)} \delta_{n n'+1} \\ &\quad + \frac{1}{b_B^2} \sqrt{n \left( n + \frac{1}{2} \right)} \delta_{n+1 n'}; \end{aligned} \quad (2.170)$$

em 2D:

$$\begin{aligned} \langle \Phi_n | -\nabla^2 + m_\xi^2 | \Phi_{n'} \rangle &= \left\langle \Phi_n \left| -\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + m_\xi^2 \right| \Phi_{n'} \right\rangle \\ &= \left[ \frac{2n-1}{b_B^2} + m_\xi^2 \right] \delta_{nn'} \\ &\quad + \frac{(n-1)}{b_B^2} \delta_{n n'+1} \\ &\quad + \frac{n'-1}{b_B^2} \delta_{n+1 n'}; \end{aligned} \quad (2.171)$$

e finalmente em 1D:

$$\begin{aligned}
\langle \Phi_n | -\nabla^2 + m_\xi^2 | \Phi_{n'} \rangle &= \left\langle \Phi_n \left| -\frac{d^2}{dr^2} + m_\xi^2 \right| \Phi_{n'} \right\rangle \\
&= \left[ \frac{4n-3}{2b_B^2} + m_\xi^2 \right] \delta_{nn'} \\
&\quad - \frac{\sqrt{(2n'-2)(2n'-3)}}{2b_B^2} \delta_{n+1 n'} \\
&\quad - \frac{\sqrt{(2n-2)(2n-3)}}{2b_B^2} \delta_{n n'+1}. \quad (2.172)
\end{aligned}$$

Substituindo as expansões nas equações de Klein-Gordon (eqs.2.161-2.163) e usando os resultados acima, nos resta um sistema matricial a ser resolvido. Em particular, em 3D temos:

$$\begin{aligned}
\sum_{n'=1}^{NB} a_{n'} \left\{ \left[ \frac{1}{b_B^2} \left( 2(n-1) + \frac{3}{2} \right) + m_\xi^2 \right] \delta_{nn'} + \frac{1}{b_B^2} \sqrt{n' \left( n' + \frac{1}{2} \right)} \delta_{n n'+1} \right. \\
\left. + \frac{1}{b_B^2} \sqrt{n \left( n + \frac{1}{2} \right)} \delta_{n+1 n'} \right\} = b_n, \quad (2.173)
\end{aligned}$$

onde

$$b_n = \int_0^\infty dr r^2 \Phi_n(r) s_\xi(r). \quad (2.174)$$

A equação de Klein-Gordon se transforma em uma equação matricial de forma tri-diagonal que pode ser resolvida por algoritmos bem eficientes (DEVRIES, 1994).

Para a equação de Poisson, equações 2.73 ou 2.132, vamos utilizar diretamente as funções de Green, de acordo com a dimensão desejada, pois neste caso a convergência é lenta devido ao caráter de longo alcance da interação. Definindo  $\rho_{ch}(r') = e(\rho_p(r') - \rho_e(r'))$  obtemos em 3D:

$$A_0(r) = \int_0^\infty dr' r'^2 G_{3D}(r, r') \rho_{ch}(r'), \quad (2.175)$$

onde

$$G_{3D}(r, r') = \frac{1}{r_{>}}. \quad (2.176)$$

Em 2D:

$$A_0(r) = \int_0^{\infty} dr' r' G_{2D}(r, r') \rho_{ch}(r'), \quad (2.177)$$

onde

$$G_{2D}(r, r') = \ln \frac{1}{r_{>}}. \quad (2.178)$$

Nas eqs. acima  $r_{>}$  corresponde a  $r$  se  $r > r'$  e vice-versa. Finalmente, em 1D:

$$A_0(r) = \int_{-\infty}^{\infty} dr' G_{1D}(r, r') \rho_{ch}(r'), \quad (2.179)$$

onde

$$G_{1D}(r, r') = -\frac{1}{2} |r - r'|. \quad (2.180)$$

Usando a simetria em relação ao eixo z, podemos escrever:

$$A_0(r) = \int_0^{\infty} dr' \tilde{G}_{1D}(r, r') \rho_{ch}(r'), \quad (2.181)$$

onde

$$\tilde{G}_{1D}(r, r') = -\frac{1}{2} (|r + r'| + |r - r'|) = -r_{>}. \quad (2.182)$$



### 3 LIVRE CAMINHO MÉDIO DOS NEUTRINOS

Vamos calcular o LCMN no sistema de duas formas diferentes. Na primeira maneira, calculamos a seção de choque com a amplitude de transição apenas para o espalhamento partícula-partícula, somando então as contribuições de todas as partículas do sistema. Na segunda, calculamos a seção de choque com a amplitude de transição total, que leva em conta o espalhamento coerente por todo o sistema. Fazemos assim uma comparação dos dois métodos e analisamos em que situações cada um deles deve ser usado.

#### 3.1 ESPALHAMENTO POR UMA PARTÍCULA

Queremos calcular o LCMN  $\lambda$  nos sistemas descritos anteriormente. Para isto calculamos primeiro a seção de choque  $\sigma$  dos neutrinos com as partículas dentro do volume  $V$  (volume ocupado por uma partícula para matéria uniforme ou por uma célula na fase pasta), sendo o livre caminho médio dado por:

$$\lambda = \left( \frac{\sigma}{V} \right)^{-1}. \quad (3.1)$$

A seção de choque diferencial para uma colisão de duas partículas é (HALZEN; MARTIN, 1984):

$$d\sigma = \frac{|\mathcal{M}|^2}{F} dQ, \quad (3.2)$$

onde  $|\mathcal{M}|^2$  é calculado tomando a média sobre os spins iniciais e a soma sobre os spins finais do módulo quadrado da amplitude de transição  $\mathcal{M}$ ,  $F$  é o fluxo inicial de partículas e  $dQ$  é o chamado espaço de fase das partículas emergentes na colisão.

Para o cálculo da seção de choque adotamos uma outra normalização para os spinors no lugar da condição 2.100, porém o resultado é independente da normalização. A normalização adotada é a seguinte:

$$U^\dagger(\vec{k}, \lambda) U(\vec{k}, \lambda) = 2E^* = V^\dagger(\vec{k}', \lambda') V(\vec{k}, \lambda), \quad (3.3)$$

onde  $E^* = \sqrt{k^2 + M^{*2}}$  para os nucleons,  $E^* = \sqrt{k^2 + m_e^2}$  para os elétrons e  $E^* = k$  para os neutrinos. Por simplicidade, não escrevemos a dependência dos campos com o raio da célula  $\vec{r}$ , ficando também implícita a dependência para a massa efetiva,  $E^*$ , etc.

Para um espalhamento  $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ , onde 1 e 2 são as partículas

incidentes e 3 e 4 são as partículas emergentes após a colisão, e levando em conta a normalização 3.3, temos:

$$F = |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| \cdot 2E_1^* \cdot 2E_2^*; \quad (3.4)$$

$$dQ = (2\pi)^4 \delta^4(P_1 + P_2 - P_3 - P_4) \cdot \frac{1 - \eta_3(T)}{2E_3^*} \frac{d\vec{k}_3}{(2\pi)^3} \frac{1 - \eta_4(T)}{2E_4^*} \frac{d\vec{k}_4}{(2\pi)^3}, \quad (3.5)$$

onde  $P_i = (E_i, \vec{k}_i)$ ,  $E_i$  é a energia total da partícula,  $v_i = |\vec{k}_i|/E_i^*$  e  $\eta_i(T)$  é a função de distribuição da partícula  $i$ . Os fatores  $(1 - \eta_3(T))$  e  $(1 - \eta_4(T))$  são incluídos devido ao princípio da exclusão de Pauli, que restringe os estados disponíveis para as partículas emergentes (REDDY; PRAKASH; LATIMER, 1998). Estes fatores influenciam fortemente a seção de choque, uma vez que as partículas são praticamente degeneradas. Assim, as partículas próximas da energia de Fermi contribuem majoritariamente para a seção de choque. Além disso, quanto menor a energia do neutrino menos colisões são possíveis, como poderemos ver nos resultados.

A probabilidade da partícula 1 colidir com todas as partículas dentro do volume  $d\vec{r}$  em torno de  $\vec{r}$  e que possuam momento dentro de  $d\vec{k}_2$  em torno de  $\vec{k}_2$  é obtida multiplicando  $d\sigma$  por:

$$d\vec{r} \gamma \eta_2(T) \frac{d\vec{k}_2}{(2\pi)^3}. \quad (3.6)$$

A integração no espaço e nos momentos  $\vec{k}_2, \vec{k}_3$  e  $\vec{k}_4$  fornece a seção de choque total. Lembramos que o  $\gamma$  acima é a multiplicidade de spin.

Os neutrinos podem interagir de diferentes maneiras, podendo colidir com todas as partículas do sistema. No caso de uma colisão neutrino-nucleon, o espalhamento pode ser elástico, com o diagrama de Feynman dado na figura 1, onde os espalhamentos são mediados pelo bóson fraco  $Z$ , mas ele também pode ser absorvido por um nêutron, produzindo um próton e um elétron no fim da reação. A figura 2 mostra o diagrama de Feynman para uma reação de absorção de um neutrino por um nêutron, onde essa reação de absorção é mediada pelo bóson fraco  $W^+$ .

Para os diagramas das figuras 1 e 2 podemos escrever uma mesma expressão para  $|\mathcal{M}|^2$  (ver apêndice A), pois  $g'/M_W = g/M_Z$  (HALZEN; MARTIN, 1984):

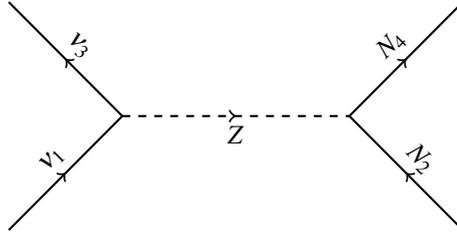


Figura 1 – Diagrama de Feynman para um espalhamento de um neutrino por um nucleon.

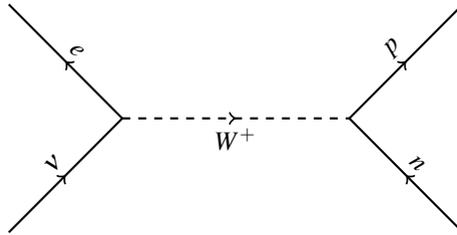


Figura 2 – Diagrama de Feynman para uma reação de absorção de um neutrino por um nêutron.

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{M}|^2 &= \frac{g^4}{2M_Z^4} E_1^* E_2^* E_3^* E_4^* \cdot \{(\mathcal{V} + \mathcal{A})^2 (1 - v_2 \cos(\theta_{12})) (1 - v_4 \cos(\theta_{34})) \\
 &\quad + (\mathcal{V} - \mathcal{A})^2 (1 - v_4 \cos(\theta_{14})) (1 - v_2 \cos(\theta_{23})) \\
 &\quad - \frac{M^{*2}}{E_2^* E_4^*} (\mathcal{V}^2 - \mathcal{A}^2) (1 - \cos(\theta_{13}))\}, \quad (3.7)
 \end{aligned}$$

onde  $\cos(\theta_{ij})$  é o ângulo entre os momentos  $\vec{k}_i$  e  $\vec{k}_j$  e para um espalhamento  $\mathcal{V} = c_V$  e  $\mathcal{A} = c_A$  enquanto que para uma absorção  $\mathcal{V} = g_V$  e  $\mathcal{A} = g_A$ . A seção de choque é, portanto:

$$\begin{aligned}
\sigma = & 2 \int d^3 r \int \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k_3}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k_4}{(2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta^4(P_1 + P_2 - P_3 - P_4) \frac{1}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} \\
& \cdot \eta_2(T)(1 - \eta_3(T))(1 - \eta_4(T)) \frac{g^4}{32M_Z^4} \\
& \cdot \{(\mathcal{V} + \mathcal{A})^2(1 - v_2 \cos(\theta_{12}))(1 - v_4 \cos(\theta_{34})) \\
& + (\mathcal{V} - \mathcal{A})^2(1 - v_4 \cos(\theta_{14}))(1 - v_2 \cos(\theta_{23})) \\
& - \frac{M^{*2}}{E_2^* E_4^*} (\mathcal{V}^2 - \mathcal{A}^2)(1 - \cos(\theta_{13}))\}. \tag{3.8}
\end{aligned}$$

Embora tenhamos uma mesma expressão para a seção de choque de absorção e de espalhamento neutrino-nucleon, a integração na função delta de Dirac é diferente (ver apêndice B). Para o caso do espalhamento, as integrações nas funções delta de Dirac fornecem:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\nu,N} = & \frac{2}{(2\pi)^5} \frac{g^4}{32M_Z^4} \int d^3 r \int d^3 k_2 \int_0^\pi \text{sen}(\theta_3) d\theta_3 \int_0^{2\pi} d\phi_3 k_2^2 \\
& \cdot \frac{\eta_2(T)(1 - \eta_3(T))(1 - \eta_4(T))}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} \frac{k_1 + E_2^* - k_3}{k_1(1 - \cos(\theta_3)) + E_2^* - k_2 \cos(\theta_{23})} \\
& \cdot \left\{ (c_V + c_A)^2 (1 - v_2 \cos(\theta_2)) \left( 1 - \frac{k_1 \cos(\theta_3) + k_2 \cos(\theta_{23}) - k_3}{E_4^*} \right) \right. \\
& + (c_V - c_A)^2 \left( 1 - \frac{k_1 + k_2 \cos(\theta_2) - k_3 \cos(\theta_3)}{E_4^*} \right) (1 - v_2 \cos(\theta_{23})) \\
& \left. - \frac{M^{*2}}{E_2^* E_4^*} (c_V^2 - c_A^2) (1 - \cos(\theta_3)) \right\}, \tag{3.9}
\end{aligned}$$

onde

$$\cos(\theta_{ij}) = \cos(\theta_i) \cos(\theta_j) + \text{sen}(\theta_i) \text{sen}(\theta_j) \cos(\phi_i - \phi_j); \tag{3.10}$$

$$k_3 = \frac{k_1 (E_2^* - k_2 \cos(\theta_2))}{k_1 + E_2^* - k_1 \cos(\theta_3) - k_2 \cos(\theta_{23})}; \tag{3.11}$$

$$k_4^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + 2(k_1 k_2 \cos(\theta_2) - k_1 k_3 \cos(\theta_3) - k_2 k_3 \cos(\theta_{23})). \tag{3.12}$$

Para o caso de absorção temos:

$$\begin{aligned}
\sigma_{abs} = & \frac{2}{(2\pi)^5} \frac{g^4}{32M_Z^4} \int d^3r \int d^3k_2 \int_0^\pi \text{sen}(\theta_3) d\theta_3 \int_0^{2\pi} d\phi_3 k_3^2 \\
& \cdot \frac{\eta_2(T)(1-\eta_3(T))(1-\eta_4(T)) \sqrt{m_e^2 + k_3^2} (C - \sqrt{m_e^2 + k_3^2})}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} \frac{Ck_3 - F\sqrt{m_e^2 + k_3^2}}{E_4^*} \\
& \cdot \left\{ (g_V + g_A)^2 (1 - v_2 \cos(\theta_2)) \left( 1 - \frac{F - k_3}{E_4^*} \right) \right. \\
& + (g_V - g_A)^2 \left( 1 - \frac{k_1 + k_2 \cos(\theta_2) - k_3 \cos(\theta_3)}{E_4^*} \right) (1 - v_2 \cos(\theta_{23})) \\
& \left. - \frac{M^{*2}}{E_2^* E_4^*} (g_V^2 - g_A^2) (1 - \cos(\theta_3)) \right\}, \tag{3.13}
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
k_3 = & -\frac{2F(C^2 + m_e^2 - D)}{4F^2 - 4C^2} \\
& - \frac{\sqrt{16m_e^2 C^2 F^2 + 4C^2(C^2 + m_e^2 - D)^2 - 16m_e^2 C^4}}{4F^2 - 4C^2}; \tag{3.14}
\end{aligned}$$

$$D = (\vec{k}_1 + \vec{k}_2)^2 + M^{*2}; \tag{3.15}$$

$$C = k_1 + E_2^* - g_\rho b_0; \tag{3.16}$$

$$F = k_1 \cos(\theta_3) + k_2 \cos(\theta_{23}). \tag{3.17}$$

Os diagramas de Feynman possíveis para uma colisão neutrino-elétron são mostrados na figura 3, onde o primeiro diagrama corresponde à interação por corrente neutra e o segundo por corrente carregada.

Neste caso, a expressão para  $|\mathcal{M}|^2$  é igual à expressão 3.7, com as seguintes mudanças:  $M^* \rightarrow m_e$ ,  $\mathcal{V} = c_V^* = c_V + 1$  e  $\mathcal{A} = c_A^* = c_A + 1$ . A seção de choque total fica igual à expressão 3.9 com estas mudanças.

Temos dois diagramas de Feynman possíveis para um espalhamento neutrino-neutrino (figura 4). Para este caso:

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{4g^4}{M_Z^4} k_1 k_2 k_3 k_4 (1 - \cos(\theta_{12}))(1 - \cos(\theta_{34})). \tag{3.18}$$

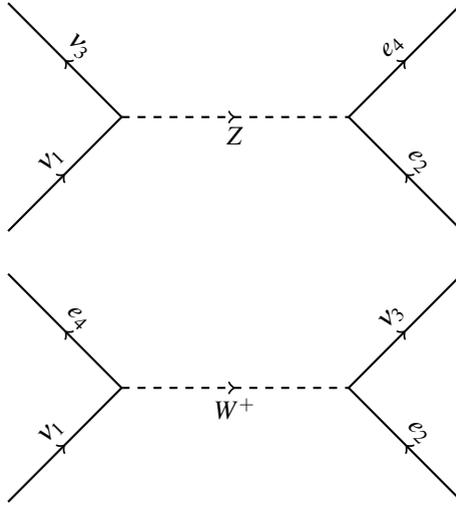


Figura 3 – Diagramas de Feynman para uma colisão neutrino-elétron

E a seção de choque é dada por:

$$\sigma = \int d^3 r \int \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k_3}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k_4}{(2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta^4(P_1 + P_2 - P_3 - P_4) \frac{1}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} \cdot \eta_2(T)(1 - \eta_3(T))(1 - \eta_4(T)) \frac{g^4}{4M_Z^4} (1 - \cos(\theta_{12}))(1 - \cos(\theta_{34})). \quad (3.19)$$

Finalmente:

$$\sigma_{\nu, \nu} = \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{g^4}{4M_Z^4} \int d^3 r \int d^3 k_2 \int_0^\pi \text{sen}(\theta_3) d\theta_3 \int_0^{2\pi} d\phi_3 k_3^2 \cdot \frac{\eta_2(T)(1 - \eta_3(T))(1 - \eta_4(T))}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} \frac{k_1 + k_2 - k_3}{k_1(1 - \cos(\theta_3)) + k_2(1 - \cos(\theta_{23}))} \cdot (1 - \cos(\theta_2)) \left( 1 - \frac{k_1 \cos(\theta_3) + k_2 \cos(\theta_{23}) - k_3}{k_4} \right), \quad (3.20)$$

onde

$$k_3 = \frac{k_1 k_2 (1 - \cos(\theta_2))}{k_1 + k_2 - k_1 \cos(\theta_3) - k_2 \cos(\theta_{23})}. \quad (3.21)$$

Nos cálculos acima fizemos sempre  $\vec{k}_1 = k_1 \hat{z}$ , sem perda de generalidade. A

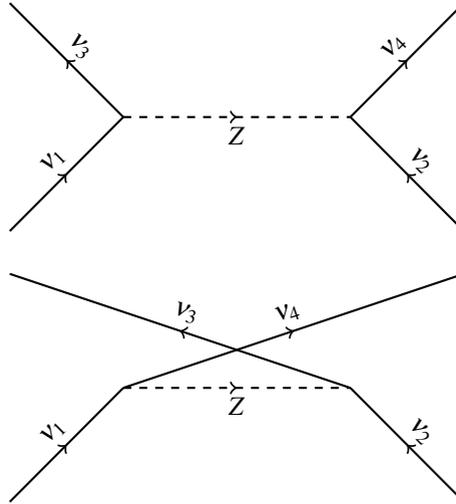


Figura 4 – Diagramas de Feynman para uma colisão neutrino-neutrino

dependência das seções de choque com o meio está implícita na dependência com a posição das distribuições de Fermi-Dirac, através dos potenciais e da massa efetiva.

A justificativa para levar em conta apenas diagramas de Feynman de ordem mais baixa é baseada no fato de que os potenciais químicos máximos para os valores de densidade e temperatura consideradas aqui são da ordem de:

$$\mu_\nu \approx 160\text{MeV}; \quad \mu_p, \mu_N \approx 950\text{MeV}; \quad \mu_e \approx 400\text{MeV}. \quad (3.22)$$

Como as partículas obedecem uma distribuição de Fermi-Dirac, a probabilidade de se encontrar uma partícula com energia maior que o potencial químico, diminui rapidamente. Assim, não temos partículas com o momento muito maior que os correspondentes aos potenciais químicos citados acima e, neste caso, temos que  $q^2 = |\vec{k}_1 - \vec{k}_3| \ll M_{W,Z}^2$ , justificando a aproximação.

Neste ponto, vamos redefinir as constantes de acoplamento vetorial e axial-vetorial da interação fraca, apresentadas no capítulo anterior. Isso se deve essencialmente a dois fatores. Ao contrário da corrente eletromagnética, não temos uma lei de conservação para a corrente fraca. Tal fato é expresso por uma mudança nas constantes do termo axial da corrente (HALZEN; MARTIN, 1984). Além disso, no caso do nucleon, o qual é em última análise composto por quarks, a experiência mostra que devemos modificar

algumas constantes, e também mostra que para a interação fraca observa-se o que chamamos de *não conservação de geração dos quarks*, levando à introdução do fator de Cabibbo,  $C$ , (HALZEN; MARTIN, 1984; GRIF-FITHS, 2009) no vértice da interação mediada pelos bósons  $W^\pm$ . Com isso, temos para cada um dos casos considerados aqui (REDDY; PRAKASH; LAT-TIMER, 1998):

$$\begin{aligned} \text{neutrino - próton: } c_V &= 1/2 - 2\text{sen}^2(\theta_w); & c_A &= 1,23/2; \\ \text{neutrino - nêutron: } c_V &= -1/2; & c_A &= -1,23/2; \\ \text{neutrino - elétron: } c_V &= -1/2 + 2\text{sen}^2(\theta_w); & c_A &= -1/2; \\ \text{neutrino - neutrino: } c_V &= 1/2; & c_A &= 1/2; \\ \text{absorção (neutrino - nêutron): } g_V &= C; & g_A &= 1,23C, \end{aligned}$$

onde  $C = 0,973$  e  $\text{sen}^2(\theta_w) = 0,230$ . Como precisamos apenas da razão  $g/M_Z$ , usamos a constante de Fermi  $G_F$ , tal que:

$$G_F = \frac{\sqrt{2}}{8} \frac{g^2}{M_Z^2} = 1,16637(1) \times 10^{-5} \text{GeV}^{-2}. \quad (3.23)$$

Para incluir uma dependência da interação neutrino-nucleon em relação à energia do neutrino incidente devido ao fato do nucleon ser uma partícula composta, multiplicamos as constantes  $c_V$  ( $g_V$ ) e  $c_A$  ( $g_A$ ) acima pelo fator de forma (MARINELLI; GRAEFF, 2014; GALSTER et al., 1971):

$$\left(1 + \frac{4,97q^2}{4M^2}\right)^{-2}, \quad (3.24)$$

sendo  $M$  a massa do nucleon livre e  $\vec{q}$  o momento transferido,  $\vec{q} = \vec{k}_1 - \vec{k}_3$ . Dessa forma estamos então levando em conta de alguma forma a estrutura interna dos nucleons. A expressão acima foi parametrizada para ajustar resultados experimentais de espalhamento elástico de elétrons por prótons e dêuterons.

### 3.2 ESPALHAMENTO COERENTE

O tratamento descrito na seção anterior é mais adequado para energias do neutrino tais que seu comprimento de onda associado é bem menor que

as dimensões do alvo como um todo. No caso de um núcleo ou de uma célula da pasta, o espalhamento por diferentes constituintes do sistema pode ser coerente. Em outras palavras, quando o comprimento de onda da minha ponta de prova tiver as mesmas dimensões ou for maior que a distância entre as diferentes partículas do alvo, a amplitude de transição total deve levar em conta a contribuição de cada espalhamento individual, assim como sua fase relativa. Na seção anterior, o cálculo da amplitude de transição foi feito para interação partícula-partícula, e a seção de choque foi calculada a partir das amplitudes individuais. Após a determinação da seção de choque partícula-partícula, somamos sobre os alvos (integramos em  $d^3r$  e  $d^3k_2$ ) para calcular a seção de choque neutrino-célula.

Segundo Freedman 1977 (FREEDMAN et al., 1977), quando um projétil é espalhado elasticamente por um sistema composto, a amplitude de espalhamento total  $\mathcal{M}(\vec{k}_3, \vec{k}_1)$ , onde  $\vec{k}_1$  e  $\vec{k}_3$  são os momentos do projétil antes e após a colisão, respectivamente, pode ser escrita como a soma das amplitudes individuais  $\mathcal{M}_j(\vec{k}_3, \vec{k}_1)$  para cada constituinte do sistema na posição  $\vec{r}_j$ , desde que  $\mathcal{M}_j(\vec{k}_3, \vec{k}_1)$  seja pequeno o suficiente para se desprezar múltiplo espalhamento, o que é bem satisfeito para neutrinos. Assim:

$$\mathcal{M}(\vec{k}_3, \vec{k}_1) = \sum_j \mathcal{M}_j(\vec{k}_3, \vec{k}_1) e^{i(\vec{k}_3 - \vec{k}_1) \cdot \vec{r}_j}, \quad (3.25)$$

onde o fator de fase leva em conta a fase relativa do espalhamento da onda em  $\vec{r}_j$ .

Para analisar a importância do espalhamento coerente no cálculo da seção de choque dos neutrinos no sistema, vamos fazer algumas simplificações. Vamos analisar apenas as colisões de corrente neutra (apenas as colisões mediadas pelo bóson fraco  $Z$ ) com os nêutrons. Por simplicidade também, vamos considerar os nêutrons muito massivos, considerando que estes não sofrem alteração de momento linear ao sofrerem uma colisão dos neutrinos. Isto é válido, pois para as condições consideradas aqui, temos que os neutrinos possuem energias bem menores que a massa dos nêutrons. Assim, a energia do neutrino antes e após a colisão será a mesma. O momento transferido é, portanto,  $q = |\vec{k}_3 - \vec{k}_1| = 2k_1 \sin(\theta/2)$ , onde  $\theta$  é o ângulo entre  $\vec{k}_1$  e  $\vec{k}_3$ .

Como veremos mais adiante, a densidade bariônica máxima na pasta é da ordem de  $\rho_B \approx 0,12 \text{ fm}^{-3}$ . Para essas densidades, o “raio” do nucleon é aproximadamente:

$$R = \left( \frac{3}{4\pi\rho_B} \right)^{\frac{1}{3}} \approx 1,26 \text{ fm}, \quad (3.26)$$

e a distância entre dois nucleons é  $2R$ . Quando  $2Rq \gg 1$ , efeitos de coerência

deixam de ser importantes (FREEDMAN et al., 1977). Logo, quando a energia do neutrino é tal que  $q \approx \frac{1}{2R}$ , esperamos diferenças importantes no LCMN entre os casos com e sem espalhamento coerente.

A amplitude de transição individual para um espalhamento neutrino-nêutron via corrente neutra é (ver apêndice A):

$$\mathcal{M}_j(\vec{k}_3, \vec{k}_1) = \frac{g^2}{8M_Z^2} \left[ \bar{\psi}_{\nu 3} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \psi_{\nu 1} \right] \left[ \bar{\psi}_4 \gamma^\mu (c_V - c_A \gamma^5) \psi_2 \right], \quad (3.27)$$

onde  $\psi_{\nu 1} \equiv \psi_{\nu 1}(\vec{k}_1, \lambda)$  é o spinor do neutrino incidente,  $\psi_{\nu 3} \equiv \psi_{\nu 3}(\vec{k}_3, \lambda)$  é o spinor do neutrino emergente,  $\psi_2 \equiv \psi_2(\vec{k}_2, \lambda)$  é o spinor do alvo e  $\psi_4 \equiv \psi_4(\vec{k}_4, \lambda)$  é o spinor do alvo após a colisão. Ainda dentro da aproximação de nêutrons relativamente massivos, escrevemos seus spinores como:

$$U_1 \equiv U(\vec{k}, 1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad U_2 \equiv U(\vec{k}, 2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.28)$$

onde usamos a normalização  $U_1^\dagger U_1 = 1$  e  $U_2^\dagger U_2 = 1$ .

Freedman 1974 (FREEDMAN, 1974), 1977 (FREEDMAN et al., 1977), e Horowitz 2004 (HOROWITZ; PÉREZ-GARCÍA; PIEKAREWICZ, 2004) argumentam que espera-se que, como os nucleons agrupam-se em pares de estados singletos de spin nos núcleos atômicos, eles também agrupem-se em estados singletos de spin na pasta. No limite não-relativístico, temos  $\vec{\gamma}\gamma^5 \rightarrow \vec{\sigma}$ . Desta forma, espera-se que a contribuição do termo axial-vetorial em  $\mathcal{M}_j(\vec{k}_3, \vec{k}_1)$  seja fortemente reduzida nesta configuração. Assim, analisamos daqui para a frente apenas o termo vetorial em  $\mathcal{M}_j(\vec{k}_3, \vec{k}_1)$ . Agora,  $\mathcal{M}_j(\vec{k}_3, \vec{k}_1)$  não depende do spin dos nêutrons e utilizando os spinores acima, vemos que também não depende de  $j$ . Podemos tirar  $\mathcal{M}_j(\vec{k}_3, \vec{k}_1)$  do somatório da equação 3.25, ficando com:

$$\mathcal{M}(\vec{k}_3, \vec{k}_1) = \mathcal{M}_j(\vec{k}_3, \vec{k}_1) \sum_j e^{i(\vec{k}_3 - \vec{k}_1) \cdot \vec{r}_j}. \quad (3.29)$$

O somatório na equação acima está relacionado à transformada de Fourier da densidade dos nêutrons:

$$\hat{\rho}_n(\vec{q}) = \sum_j e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}_j}. \quad (3.30)$$

Assim:

$$|\mathcal{M}(\vec{k}_3, \vec{k}_1)|^2 = G_F^2 \mathcal{V}^2 (1 + \cos(\theta)) |\Psi_f| \hat{\rho}_n(\vec{q}) |\Psi_i|^2, \quad (3.31)$$

onde já desprezamos a contribuição do termo axial-vetorial.

A seção de choque total é a seção de choque partícula-partícula multiplicada pelo fator de estrutura estático. A seção de choque partícula-partícula,  $\sigma_0$ , com o fluxo inicial e espaço de fase dados por:

$$F = 1, \quad dQ = \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} (2\pi) \delta(k_1 - k_3), \quad (3.32)$$

é

$$\frac{d\sigma_0}{d\Omega} = \frac{G^2}{4\pi^2} k_1^2 \mathcal{V}^2 (1 + \cos(\theta)), \quad (3.33)$$

onde já efetuamos a integração em  $dk_3$ .

A seção de choque diferencial por nêutron para o espalhamento coerente é, portanto:

$$\frac{1}{N} \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{G^2}{4\pi^2} k_1^2 \mathcal{V}^2 (1 + \cos(\theta)) S(\vec{q}). \quad (3.34)$$

O fator de estrutura estático por nêutron,  $S(\vec{q})$ , é dado por:

$$S(\vec{q}) = \frac{1}{N} \sum_{f \neq i} |\Psi_f| \hat{\rho}_n(\vec{q}) |\Psi_i|^2, \quad (3.35)$$

onde a soma sobre os estados finais é efetuada pois queremos a probabilidade de transição do estado inicial para todos os estados finais acessíveis.

Usando a relação de completudeza  $\sum_j \Psi_j \Psi_j = 1$ , temos:

$$\begin{aligned} S(\vec{q}) &= \frac{1}{N} (\Psi_i | \hat{\rho}_n^\dagger(\vec{q}) (1 - |\Psi_i \Psi_i|) \hat{\rho}_n(\vec{q}) | \Psi_i) \\ &= \frac{1}{N} (\Psi_i | \hat{\rho}_n^\dagger(\vec{q}) \hat{\rho}_n(\vec{q}) | \Psi_i - |\Psi_i | \hat{\rho}_n(\vec{q}) | \Psi_i|^2). \end{aligned} \quad (3.36)$$

O último termo é o fator de forma elástico da célula (núcleo). Usamos agora a função de correlação nêutron-nêutron (HOROWITZ; PÉREZ-GARCÍA; PI-EKAREWICZ, 2004; MCMILLAN, 1965):

$$g(\vec{r}) = \frac{1}{N \hat{\rho}_n} \sum_{j \neq l} \Psi_i | \delta(\vec{r} - \vec{r}_{jl}) | \Psi_i. \quad (3.37)$$

Substituindo a expressão acima em 3.36 e usando a expressão 3.30, obtemos:

$$S(\vec{q}) = 1 + \bar{\rho}_n \int [g(\vec{r}) - 1] e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} d^3r, \quad (3.38)$$

onde  $\bar{\rho}_n$  é a densidade global de nêutrons.

A função de correlação depende apenas do módulo da distância:  $g(\vec{r}) = g(r)$ . Logo:

$$S(\vec{q}) = 1 + \frac{4\pi\bar{\rho}_n}{q} \int_0^\infty r[g(r) - 1] \text{sen}(qr) dr. \quad (3.39)$$

A seção de choque de transporte é definida logo abaixo para levar em conta os processos com um ângulo maior de espalhamento, pois nestes casos a transferência de momento para o meio é mais eficiente (HOROWITZ; PÉREZ-GARCÍA; PIEKAREWICZ, 2004; REDDY; BERTSCH; PRAKASH, 2000):

$$\sigma_T = \int \frac{1}{N} \frac{d\sigma}{d\Omega} (1 - \cos(\theta)) d\Omega = \frac{G^2 k^2}{6\pi} S(k), \quad (3.40)$$

onde já usamos  $\mathcal{V} = c_V = 1/2$  e fazendo  $b = 2rk$  (ver apêndice C):

$$S(k) = 1 + \frac{4\pi\bar{\rho}_n}{k^2} \int_0^\infty [g(r) - 1] \left[ \frac{72}{b^4} (\cos(b) + b\text{sen}(b) - 1) - \frac{6}{b^2} (5\cos(b) + b\text{sen}(b) + 1) \right] dr. \quad (3.41)$$

O LCMN é dado por:

$$\lambda = \frac{1}{\sigma_T \cdot \bar{\rho}_n}. \quad (3.42)$$

Quando há neutrinos armadilhados no sistema, devemos multiplicar a expressão 3.40 por  $(1 - \eta(k))$ , onde  $\eta(k)$  é a função de distribuição de Fermi-Dirac dos neutrinos.

A função de correlação fornece a probabilidade de, quando se está junto de um nêutron, encontrar outro nêutron a uma distância  $r$ . Segundo McMillan (MCMILLAN, 1965), podemos escrever:

$$g(r) = \frac{dN(r)}{4\pi r^2 dr N \bar{\rho}_n}, \quad (3.43)$$

onde  $dN(r)$  é o número de nêutrons a uma distância  $r$ .

Para calcular a função de correlação, precisamos conhecer as posições dos nêutrons. Na seção 2.3, dissemos que assume-se que os núcleos e, portanto, as células, formem redes cristalinas. Dissemos também que redes com um fator de empacotamento alto são boas candidatas. Após escolher uma rede, podemos sortear posições para os nêutrons levando em conta a distribuição destes ao longo da célula. Neste trabalho, a distribuição é a densidade de nêutrons ao longo da célula de Wigner-Seitz, calculada na aproximação de Thomas-Fermi (AVANCINI et al., 2008, 2009, 2010). O sistema é resolvido dentro de uma única célula e, assim, todas as células possuem a mesma distribuição. Devido às simetrias para cada forma de núcleo considerada aqui, obtemos uma densidade radial ao longo da célula. O espaçamento da rede é ajustado de acordo com a densidade global. A cada ponto da rede corresponde uma célula. Para saber o número de nêutrons em uma célula, basta usar a densidade e o volume da mesma. Como a interação entre os nucleons é fortemente repulsiva para pequenas distâncias, impomos uma distância mínima de aproximação entre os nêutrons. O valor escolhido é o raio magnético do nêutron,  $\sqrt{r_M^2} = 0,862_{-0,008}^{+0,009} fm$  (GROUP, 2012). Sorteamos, então, posições para os nêutrons dentro da célula, e podemos assim calcular a função de correlação. Detalhes do cálculo da função de correlação são dados no apêndice D.

### 3.3 COEFICIENTES DE DIFUSÃO

Em uma proto-estrela de nêutrons, é fundamental entender as propriedades de transporte dos neutrinos (HEMPEL et al., 2012; Fischer, T. et al., 2010; PONS et al., 1999). Medidas dessas propriedades podem ser expressas através dos coeficientes de difusão, como definido em (REDDY; PRAKASH; LATTIMER, 1998). Aqui reproduzimos as expressões que definem tais quantidades. Os coeficientes de difusão são:

$$D_n = \int_0^\infty dE_\nu E_\nu^n \lambda_\nu(E_\nu) \eta_\nu(E_\nu) (1 - \eta_\nu(E_\nu)), \quad (3.44)$$

onde agora:

$$\lambda_\nu^{-1}(E_\nu) = \frac{1}{1 - \eta_\nu(E_\nu)} \sum_i \frac{\sigma_i}{V}, \quad i = e, \nu, p, n, abs. \quad (3.45)$$

Estes representam momentos da distribuição em energia do livre caminho médio dos neutrinos. No capítulo seguinte apresentaremos alguns resultados numéricos para os mesmos.



## 4 RESULTADOS

Neste capítulo apresentamos os resultados deste trabalho. Além do LCMN para o espalhamento por uma partícula e coerente, mostrando a contribuição de cada tipo de partícula para o LCMN total, apresentamos também algumas propriedades da fase pasta e da matéria uniforme, como a energia livre, potenciais químicos, frações de partículas e densidades de partículas ao longo da célula.

Efeitos da temperatura, densidade bariônica global, energia do neutrino incidente e parametrização usada na descrição da matéria hadrônica sobre o LCMN são também apresentados.

### 4.1 EQUAÇÃO DE ESTADO

Para calcular as propriedades do sistema aqui estudado são necessárias algumas condições iniciais. Impusemos o seguinte:

- $\rho_p = \rho_e \longrightarrow$  neutralidade global de carga elétrica;
- $\mu_\nu + \mu_n = \mu_p + \mu_e \longrightarrow$  equilíbrio  $\beta$ ;
- Fração de léptons,  $Y_L = (\rho_e + \rho_\nu)/\rho_B$ , constante;
- temperatura constante;
- densidade bariônica global constante.

Consideramos ainda o caso em que os neutrinos não estão armadilhados, quando  $\mu_\nu = 0$ , e a condição de  $Y_L$  fixo não é necessária. Este último caso será apresentado em uma seção separada mais adiante. Para uma dada parametrização, densidade bariônica, fração de léptons e temperatura, fazemos um procedimento auto-consistente para encontrar os campos mesônicos. Os passos do cálculo são os seguintes:

- (a) fornecemos um raio e uma forma para a célula;
- (b) escolhemos uma tentativa inicial para as densidades;
- (c) com as densidades calculamos as fontes através das equações 2.164-2.166, sem os termos não lineares, que são incluídos posteriormente;
- (d) com as fontes, usamos a equação 2.174 para encontrar os coeficientes da expansão das mesmas;

- (e) com os coeficientes de expansão das fontes, resolvemos a equação 2.173, ou equivalente para outra dimensão, para encontrar os coeficientes da expansão dos campos;
- (f) para incluir os termos não lineares das fontes, usamos o campo encontrado anteriormente e calculamos novas fontes, agora com todos os termos. Repetimos este processo até as fontes e, portanto, os campos não diferirem da iteração anterior;
- (g) o campo  $A_0$  é calculado através das equações 2.175, 2.177 ou 2.181;
- (h) com os campos, usamos as equações 2.35 e 2.68 para obtermos os potenciais químicos, impondo as condições de densidade bariônica global fixa, fração de léptons constante (ou  $\mu_\nu = 0$ ), neutralidade global de carga e equilíbrio  $\beta$ ;
- (i) com os potenciais químicos, calculamos então novas densidades e repetimos o processo até obtermos convergência.

Buscamos então o raio que fornece a menor energia livre de Helmholtz,  $F = E - TS$ . Comparamos o valor de  $F$  para cada estrutura, sendo aquela com a menor energia livre a configuração mais estável para aquela parametrização, densidade bariônica, fração de léptons e temperatura. A entropia  $S$  pode ser encontrada usando a seguinte relação:

$$E = TS - pV + \sum_i \mu_i N_i. \quad (4.1)$$

Para iniciar o “loop” de auto-consistência, usamos como funções tentativas para as densidades do tipo gota (droplet), cilindro (rod) e placa (slab) funções do tipo Fermi, isto é:

$$R = r_0 A^{1/3}; \quad (4.2)$$

$$\rho_B(r) = \frac{\rho_c}{1 + \exp((r - R)/a)}; \quad (4.3)$$

$$\rho_p(r) = y_p \rho_B(r); \quad (4.4)$$

$$\rho_n(r) = (1 - y_p) \rho_B(r); \quad (4.5)$$

$$\rho_s(r) = 0.95 \rho_B(r); \quad (4.6)$$

$$\rho_e(r) = \frac{3\rho_p}{4\pi R_{WZ}^3}, \quad (4.7)$$

onde  $R_{WZ}$  é o raio da célula de Wigner-Seitz,  $a$  e  $\rho_c$  são constantes e  $\rho_p$  é a densidade global de prótons dentro da célula. No caso de estruturas do tipo

Tabela 2 – Propriedades das parametrizações para matéria nuclear simétrica infinita em temperatura zero na densidade de saturação nuclear  $\rho_0$ .  $E_B/A$  é a energia de ligação por nucleon,  $K$  é a incompressibilidade,  $M^*$  é a massa efetiva do nucleon,  $a_{sym}$  é a energia de simetria e seu *slope* é  $L$  (DUCOIN et al., 2011).

	$\rho_0$ (fm <sup>-3</sup> )	$E_B/A$ (MeV)	$K$ (MeV)	$M^*/M$	$a_{sym}$ (MeV)	$L$ (MeV)
FSUGold	0,148	16,299	271,76	0,6	37,4	60,4
GM3	0,153	16,3	240	0,78	32,5	89,66
NL3	0,148	16,3	272	0,6	37,4	118,3
NL3 $\omega\rho$ ( $l_v = 0,3$ )	0,148	16,3	272	0,6	31,7	55,2
TW	0,153	16,247	240	0,555	33,39	55,3

bolha (bubble) e tubo (tube), as funções tentativas são obtidas a partir das densidades acima pela identificação:

$$\rho_i(r) = \rho_i(|r - R_{WZ}|), \quad i = B, p, n, s, e. \quad (4.8)$$

Várias parametrizações para a interação forte entre os nucleons são usadas na literatura (DUCOIN et al., 2011). Uma parametrização bastante utilizada atualmente para o modelo de Walecka não linear, é a parametrização devida à Todd-Rutel e Piekarewicz (TODD-RUTEL; PIEKAREWICZ, 2005), chamada de FSUGold. A maioria dos resultados aqui apresentados utilizam esta parametrização. Vamos comparar alguns resultados para parametrizações diferentes, a fim de entender a importância destas no livre caminho médio dos neutrinos. As parametrizações utilizadas para o modelo de Walecka não linear, além da FSUGold, são as seguintes: GM3 (GLEN-DENNING, 2000), NL3 (LALAZISSIS; KÖNIG; RING, 1997) e NL3 $\omega\rho$  (HOROWITZ; PIEKAREWICZ, 2001). Para o modelo dependente da densidade, a parametrização escolhida é a TW (TYPEL; WOLTER, 1999). A tabela 2 mostra as propriedades das parametrizações para matéria nuclear simétrica infinita em temperatura zero na densidade de saturação nuclear  $\rho_0$ .

A figura 5 apresenta a energia livre de Helmholtz em função da densidade bariônica. Nota-se que a fase pasta (linha tracejada), para os dois casos considerados  $Y_L = 0,4$  e  $Y_L = 0,2$ , possui, em geral, uma energia livre menor que a matéria uniforme (linha cheia), portanto, a fase pasta é mais estável. Para cada  $\rho_B$ , consideramos apenas a forma dos núcleos com a menor energia livre e pode-se ver onde cada forma é mais estável. Para densidades mais altas, onde a energia livre para pasta e matéria uniforme são iguais, o cálculo da pasta fornece resultados iguais ao do segundo caso, ou seja, a densidade de partículas ao longo da célula é constante. Apresentamos apenas o resul-

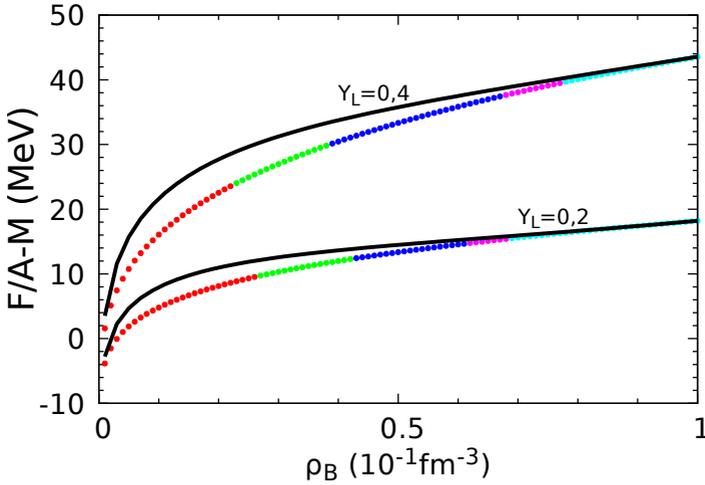


Figura 5 – Energia livre de Helmholtz para  $T = 3$  MeV, FSUGold,  $Y_L = 0,4$  e  $Y_L = 0,2$ . Gotas (vermelho), cilindros (verde), placas (azul), tubos (rosa), bolhas (azul claro) e matéria uniforme (preto).

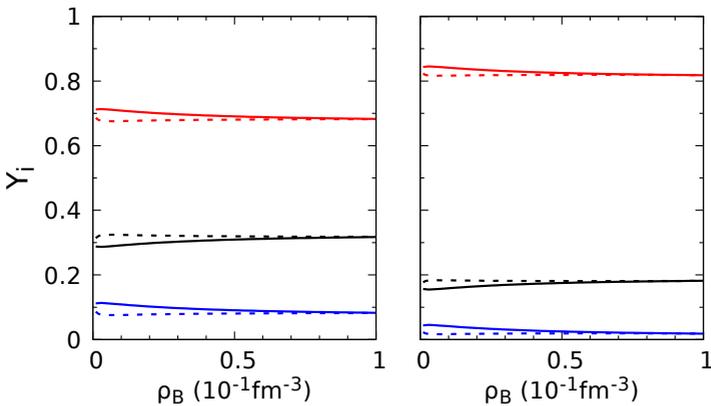


Figura 6 – Frações de partículas para  $T = 3$  MeV, FSUGold, nêutrons (vermelho), prótons e elétrons (preto), neutrinos (azul). Pasta (linha tracejada) e matéria uniforme (linha cheia).  $Y_L = 0,4$  (esquerda) e  $Y_L = 0,2$  (direita).

Tabela 3 – Densidades bariônicas (em  $\text{fm}^{-3}$ ) aproximadas onde acaba o intervalo onde a estrutura indicada é mais estável. A partir da bolha temos matéria uniforme.  $T = 3 \text{ MeV}$  e  $Y_L = 0, 2$ .

	Gota	Cilindro	Placa	Tube	Bolha
FSUGold	0,026	0,042	0,061	0,068	0,090
GM3	0,021	0,028	-	0,042	0,085
NL3	0,024	0,034	-	0,053	0,080
NL3 $\omega\rho$ ( $l_v = 0.3$ )	0,029	0,046	0,062	0,072	0,098
TW	0,027	0,044	0,063	0,071	0,095

tado para a parametrização FSUGold e temperatura  $T = 3 \text{ MeV}$ . A tabela 3 apresenta as densidades de transição de uma estrutura para outra para as diferentes parametrizações. Note que não há a placa para GM3 e NL3.

A figura 6 mostra as frações de partículas  $Y_i = \rho_i/\rho_B$ , onde  $i = p, n, e$  e  $\nu$ . Consideramos a parametrização FSUGold,  $T = 3 \text{ MeV}$ ,  $Y_L = 0,4$  (esquerda) e  $Y_L = 0,2$  (direita). Veremos mais adiante que o fato de que na pasta há mais prótons e elétrons e menos nêutrons que na matéria uniforme será uma das explicações para a diferença entre o LCMN para os dois casos. Como esperado, para densidades mais altas, quando a pasta se aproxima da matéria uniforme, as frações de partículas também se aproximam. A fração de prótons e a fração de elétrons são iguais devido à neutralidade de carga imposta. Na figura 7 pode-se ver a fração de prótons na pasta para as diferentes parametrizações, o que será útil na discussão do LCMN.

Os potenciais químicos são apresentados na figura 8 e também serão úteis na discussão do LCMN. O potencial químico dos neutrinos no intervalo de densidades e temperaturas considerados aqui vão até aproximadamente 160 MeV. Escolhemos então a energia do neutrino incidente,  $E_\nu$ , até 200 MeV nos cálculos do LCMN em função de  $E_\nu$  para uma dada densidade bariônica global fixa, que é apresentado mais adiante. Estes resultados são para FSUGold e  $T = 3 \text{ MeV}$ , mas os comportamentos para outras parametrizações e baixas temperaturas, são similares.

Na figura 9 é apresentada a densidade de partículas em função do raio da célula. O local onde as curvas de  $\rho_e$  e  $\rho_\nu$  terminam correspondem ao tamanho da célula.

Quando  $\mu_\nu = 0$ , não temos o termo  $(1 - \eta_3(T))$  na expressão 3.5 quando tratamos de processos com um neutrino entre as partículas emergentes, ou seja, não há restrição de estados para o neutrino emergente da colisão. As condições iniciais para encontrar a equação de estado e outras propriedades do sistema são as mesmas da seção 4.1, com a exceção de que agora usamos  $\mu_\nu = 0$  no lugar de  $Y_L$  fixo. Apresentamos esses resultados em uma

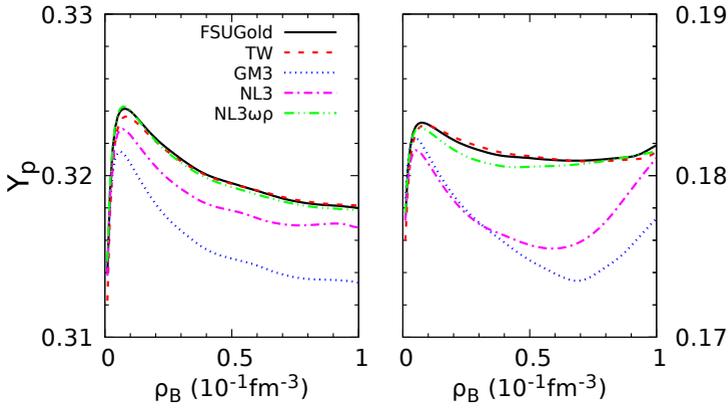


Figura 7 – Fração de prótons na pasta para  $T = 3$  MeV, para diferentes parametrizações.  $Y_L = 0.4$  (esquerda) e  $Y_L = 0.2$  (direita).

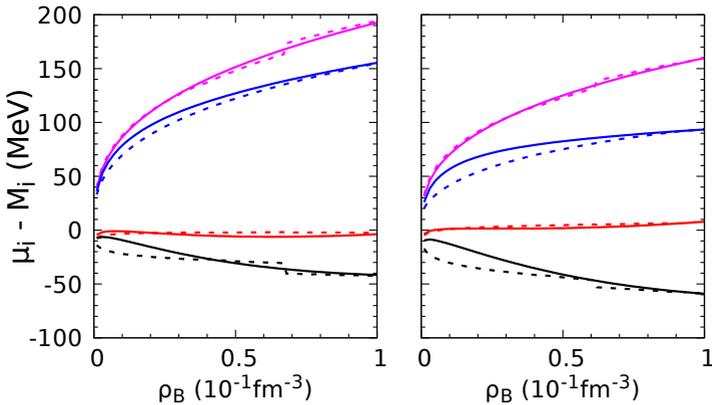


Figura 8 – Potencial químico para  $T = 3$  MeV, FSUGold, nêutrons (vermelho), próton (preto), elétrons (rosa) e neutrinos (azul). Pasta (linha tracejada) e matéria uniforme (linha cheia).  $Y_L = 0.4$  (esquerda) e  $Y_L = 0.2$  (direita).

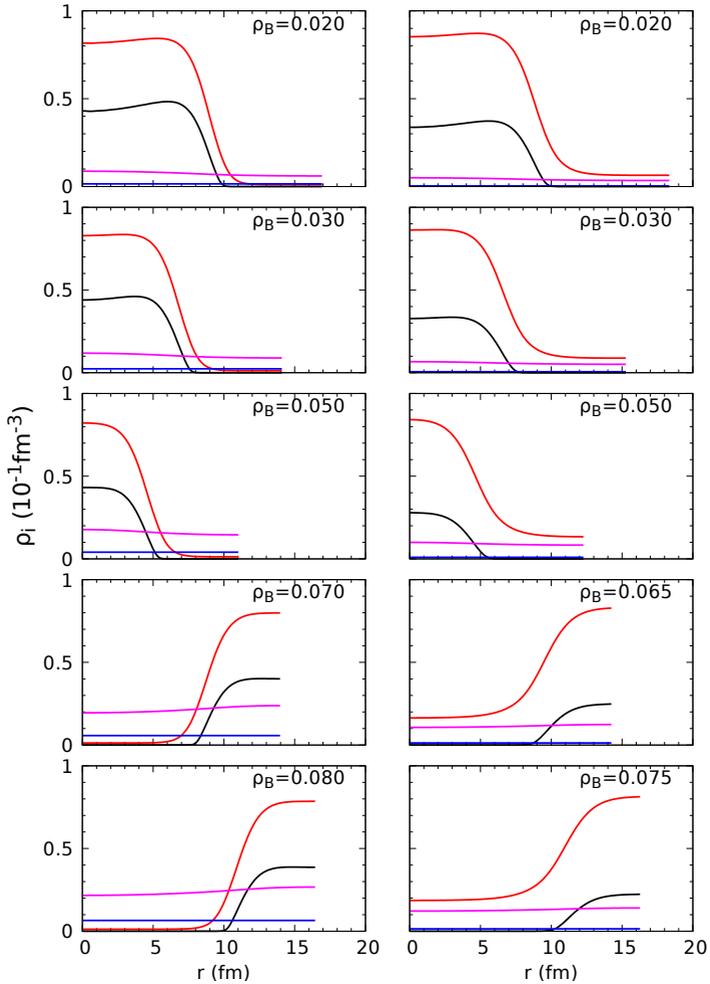


Figura 9 – Densidade de partículas radial na célula para FSUGold e  $T = 3$  MeV. Nêutrons (vermelho), próton (preto), elétrons (rosa) e neutrinos (azul). De cima para baixo temos: gota, cilindro, placa, tubo e bolha.  $Y_L = 0.4$  (esquerda) e  $Y_L = 0.2$  (direita).

seção separada pois a temperatura escolhida é diferente. Todos os gráficos aqui apresentados quando  $\mu_\nu = 0$  são para  $T = 1$  MeV. Esse valor é mais adequado para esta situação, fase final de resfriamento da proto-estrela de nêutrons.

Na figura 10 é apresentada a energia livre de Helmholtz, as frações de partículas e os potenciais químicos. A diferença de energia livre entre a fase pasta e a matéria uniforme é menor do que quando  $Y_L = 0,4$  ou  $Y_L = 0,2$ . A matéria uniforme passa a ser mais estável para  $\rho_B = 0,078 \text{ fm}^{-3}$ . Nota-se também que há apenas duas estruturas estáveis: gota e tubo. Pode-se ver também que a matéria é quase que constituída inteiramente por nêutrons. Pela figura 11, onde é mostrada a densidade de partículas ao longo da célula, observa-se que a pasta está bem próxima de uma densidade uniforme para  $\rho_B = 0,060 \text{ fm}^{-3}$ .

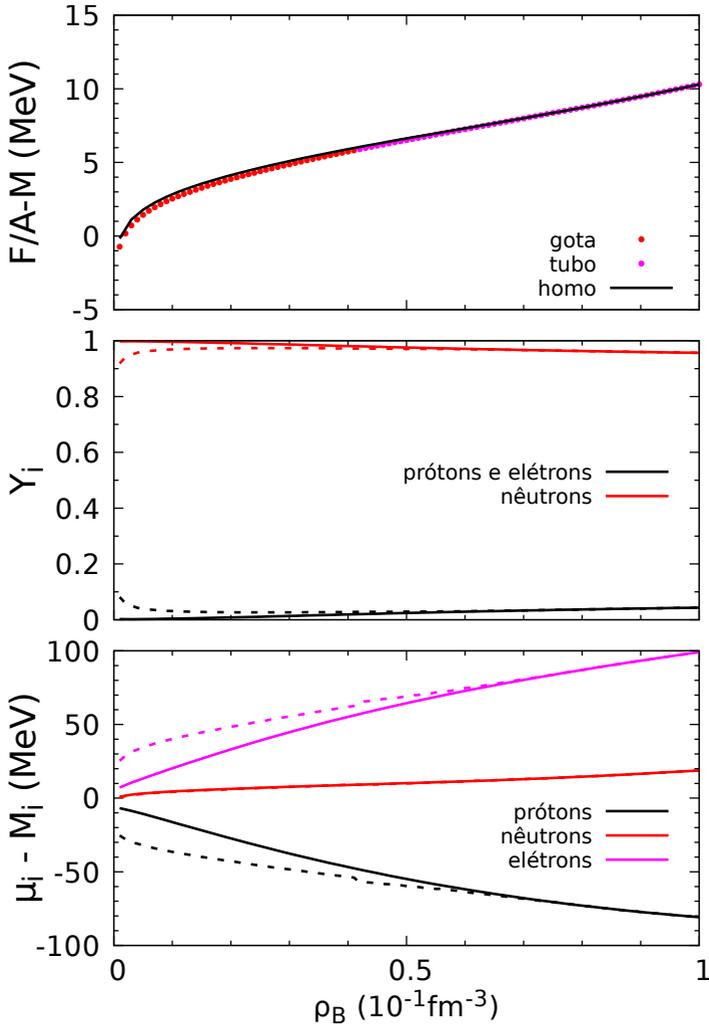


Figura 10 – Energia livre de Helmholtz, frações de partículas e potenciais químicos para  $T = 1$  MeV, FSUGold e  $\mu_\nu = 0$ . Pasta (linha tracejada) e matéria uniforme (linha cheia).

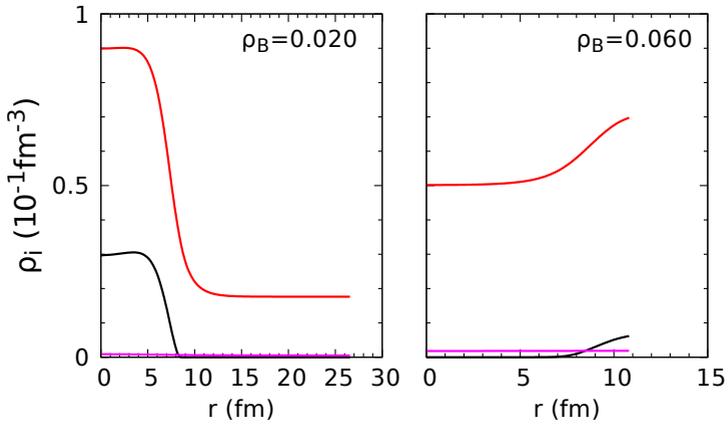


Figura 11 – Densidade de partículas radial na célula para  $T = 1$  MeV, FSU-Gold e  $\mu_\nu = 0$ . Nêutrons (vermelho), próton (preto) e elétrons (rosa). Gota (esquerda) e tubo (direita).

## 4.2 LIVRE CAMINHO MÉDIO DOS NEUTRINOS

Nesta seção apresentamos os resultados para o LCMN, tanto para fração de léptons fixa quanto para  $\mu_\nu = 0$ , sem considerar o espalhamento coerente, conforme a seção 3.1.

### 4.2.1 Livre caminho médio dos neutrinos para fração de léptons fixa

Na figura 12 é apresentada uma comparação dos nossos resultados, a título de verificação de nossos cálculos, com os resultados do trabalho feito por Reddy, Prakash, e Lattimer (REDDY; PRAKASH; LATTIMER, 1998). A parametrização utilizada é a mesma em todos os casos, ou seja, GM1, e pode ser encontrada na referência citada. Os resultados para o LCMN sem o fator de forma dos nucleons da expressão 3.24 também é mostrado. O fator de forma causa uma diminuição na seção de choque, aumentando então o LCMN.

A figura 13 mostra a contribuição de cada tipo de interação que o neutrino pode sofrer no sistema para o LCMN total (aquele obtido a partir da soma da seção de choque de todas as contribuições) na pasta, ou seja, mostra o LCMN levando em conta somente um tipo de interação, seja ela espalhamento do neutrino por prótons ( $\lambda_p = 1/\sigma_{\nu,p}$ ) ou absorção do neutrino por nêutrons ( $\lambda_{abs} = 1/\sigma_{abs}$ ), e assim por diante. Pode-se observar que a principal contribuição vem da reação de absorção, mas as outras interações não podem ser descartadas. A energia do neutrino incidente escolhida é  $E_\nu = \mu_\nu$ . Novamente, apresentamos resultados apenas para FSUGold e  $T = 3$  MeV, mas os comportamentos para outras parametrizações e baixas temperaturas, são similares.

A sensibilidade do LCMN total para as diferentes parametrizações é mostrada na figura 14, considerando  $T = 3$  MeV e  $E_\nu = \mu_\nu$ , tanto para  $Y_L = 0,4$  e  $Y_L = 0,2$ . É apresentado também o LCMN total na matéria uniforme para FSUGold (FSUGold homo). Em densidades bem baixas, os LCMN para as diferentes parametrizações não diferem muito. Isto é esperado desde que todas tem comportamento similar, em particular, a fração de prótons é quase a mesma para todas, de acordo com a figura 7. GM3 e NL3 possuem os menores LCMN: uma fração de prótons menor (ver a figura 7) corresponde a uma fração de elétrons menor (neutralidade de carga), o que aumenta a fração de neutrinos ( $Y_L$  é fixo) e o potencial químico dos neutrinos. A fração de nêutrons também aumenta. Todos estes fatores favorecem a reação de absorção do neutrino pelo nêutron e, conseqüentemente, o LCMN é menor.

Considerando o espalhamento de neutrinos por nucleons individuais

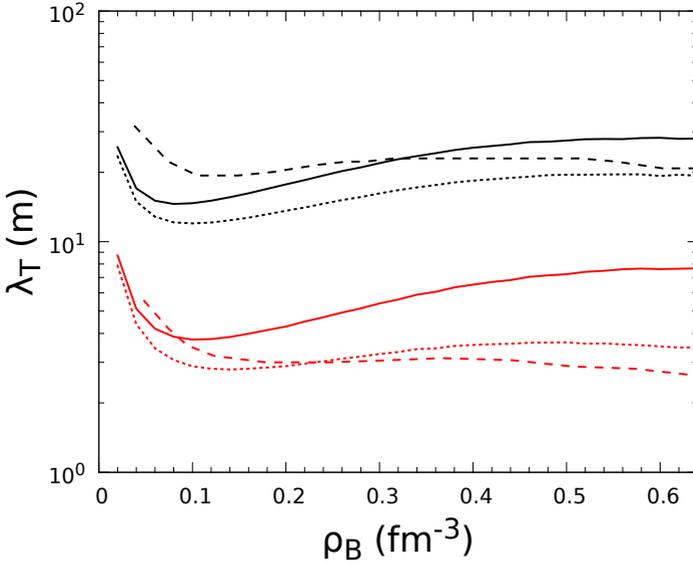


Figura 12 – LCMN para matéria uniforme, parametrização GM1,  $Y_L = 0.4$ ,  $E_\nu = \mu_\nu$  e  $T = 5$  MeV. Nosso trabalho com o fator de forma do nucleon (linha cheia), nosso trabalho sem o fator de forma do nucleon (linha pontilhada) e o trabalho de (REDDY; PRAKASH; LATTIMER, 1998) (linha tracejada). A linha preta representa espalhamento neutrino-nêutron e a linha vermelha absorção.

da pasta, como feito no presente cálculo, observa-se que o LCMN aumenta muito em comparação ao caso de matéria uniforme, principalmente em baixas densidades, quando a diferença entre a fração de prótons na matéria uniforme e na pasta é maior (ver a figura 6) e, portanto, a reação de absorção e o espalhamento por nêutrons são menos prováveis de acontecer no último caso. Outra razão é que os processos são fortemente suprimidos devido aos efeitos do Princípio de Exclusão de Pauli no interior da célula, onde o potencial químico efetivo das partículas  $\nu_i$  (podemos obter  $\nu_i$  da equação  $E_i - \mu_i = E_i^* - \nu_i$ ) é maior, enquanto que na borda da célula o espaço é quase vazio. Como esperado, quanto maior as densidades de prótons e nêutrons, mais próxima fica a pasta da matéria uniforme, assim o LCMN na pasta aproxima-se do LCMN na matéria uniforme. Tal comportamento também pode ser observado na figura 15.

A dependência com a temperatura para o LCMN total é apresentada

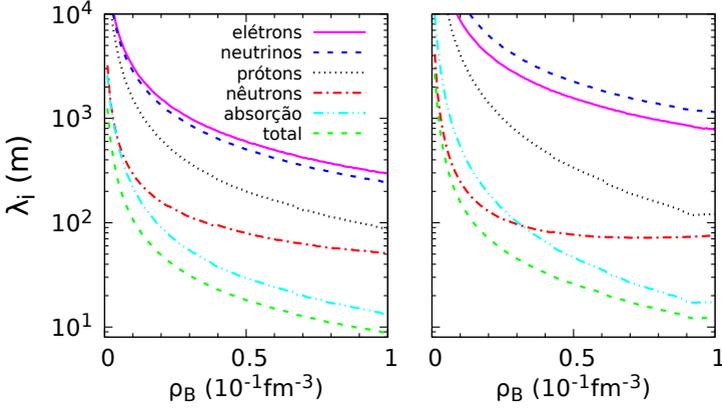


Figura 13 – LCMN na pasta para cada contribuição individual  $i$ , para  $T = 3$  MeV, FSUGold e  $E_\nu = \mu_\nu$ .  $Y_L = 0.4$  (esquerda) e  $Y_L = 0.2$  (direita).

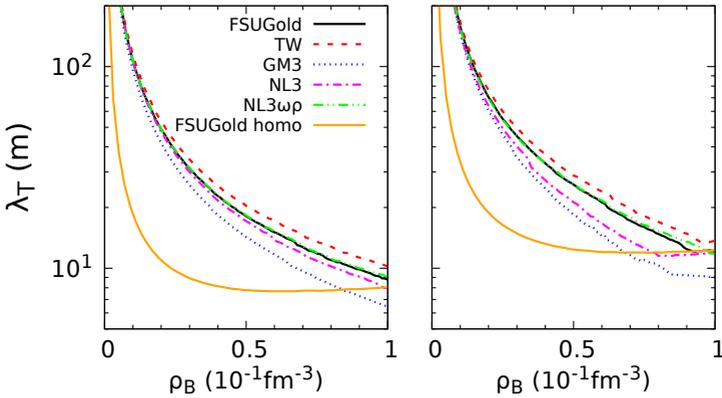


Figura 14 – LCMN total para  $T = 3$  MeV,  $E_\nu = \mu_\nu$  e várias parametrizações.  $Y_L = 0.4$  (esquerda) e  $Y_L = 0.2$  (direita).

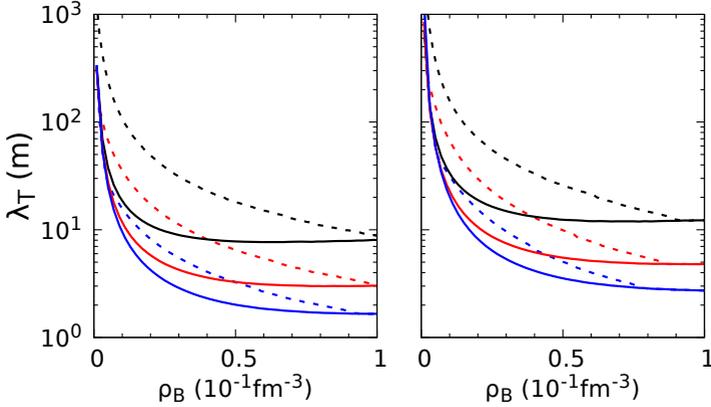


Figura 15 – LCMN total para FSUGold,  $E_\nu = \mu_\nu$ ,  $T = 3$  MeV (preto),  $T = 5$  MeV (vermelho) e  $T = 7$  MeV (azul). Pasta (linha tracejada) e matéria uniforme (linha cheia).  $Y_L = 0.4$  (esquerda) e  $Y_L = 0.2$  (direita).

na figura 15. Consideramos a parametrização FSUGold e três temperaturas:  $T = 3$  MeV,  $T = 5$  MeV e  $T = 7$  MeV. A diminuição do LCMN total com o aumento da temperatura é explicada pelo fato de que há uma suavização da função distribuição de Fermi das partículas quanto maior a temperatura, diminuindo o efeito do Princípio de Exclusão de Pauli, permitindo assim ocorrer um número maior de colisões. A temperatura tem um forte efeito sobre as estruturas da pasta. Embora em cálculos de Thomas-Fermi ainda exista pasta para  $T > 10$  MeV, de acordo com (PETHICK; POTEKHIN, 1998), se flutuações térmicas são consideradas, a estrutura de células de Wigner-Seitz supostamente começa a derreter para  $T > 7$  MeV. Quanto maior a temperatura mais suave fica a densidade de partículas ao longo da célula, ou seja, para temperaturas mais altas mais a pasta aproxima-se da matéria uniforme. Portanto, quanto maior a temperatura, mais próximo o LCMN na pasta torna-se do LCMN na matéria uniforme.

Até o momento, foi apresentado apenas o LCMN em função da densidade bariônica, onde a energia do neutrino incidente era  $E_\nu = \mu_\nu$ , tanto para  $Y_L = 0,4$  quanto para  $Y_L = 0,2$ . A seguir apresentamos o LCMN em função da energia do neutrino incidente para uma densidade bariônica fixa. Na figura 16 pode-se ver o LCMN total para as diferentes parametrizações aqui consideradas. Na parte de cima  $\rho_B = 0,02 \text{ fm}^{-3}$  e na de baixo  $\rho_B = 0,05 \text{ fm}^{-3}$ . Na coluna da esquerda  $Y_L = 0,4$  e na coluna da direita  $Y_L = 0,2$ . Nota-se que, quando  $\rho_B = 0,02 \text{ fm}^{-3}$ , o LCMN total para energias menores é menor que

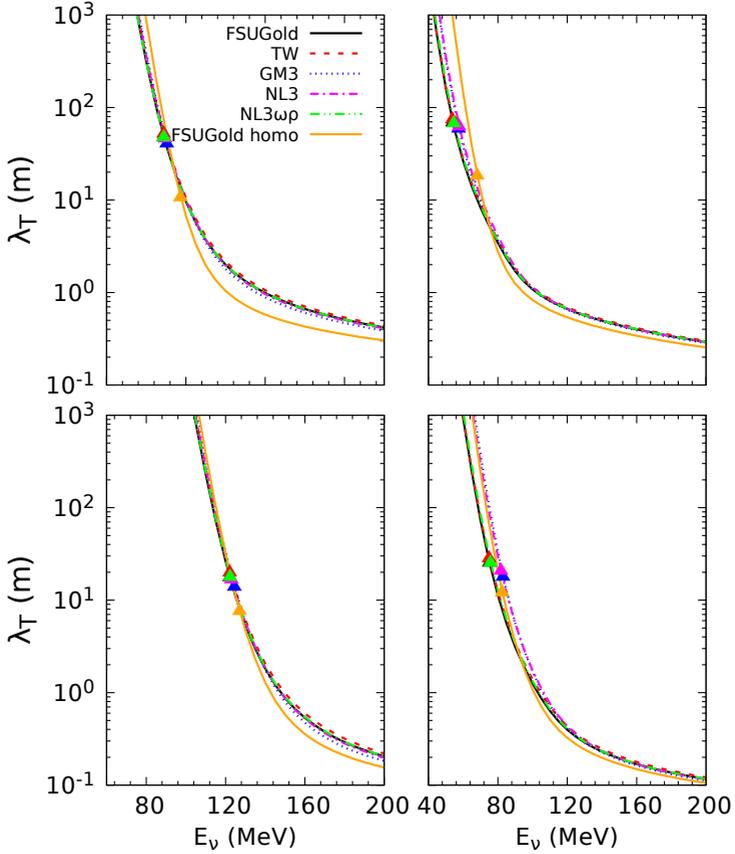


Figura 16 – LCMN total para  $T = 3 \text{ MeV}$  e para várias parametrizações. Os triângulos indicam quando  $E_\nu = \mu_\nu$  para a respectiva parametrização.  $\rho_B = 0,02 \text{ fm}^{-3}$  (em cima) e  $\rho_B = 0,05 \text{ fm}^{-3}$  (embaixo).  $Y_L = 0.4$  (esquerda) e  $Y_L = 0.2$  (direita).

quando  $\rho_B = 0,05 \text{ fm}^{-3}$ . A explicação para isso é que o efeito do Princípio de Exclusão de Pauli é menor para o primeiro caso (observar os triângulos que indicam  $E_\nu = \mu_\nu$  para a respectiva parametrização) que no segundo. Quando  $E_\nu$  vai aumentando, o efeito do Princípio de Exclusão de Pauli perde força e, como esperado, o LCMN total para  $\rho_B = 0,05 \text{ fm}^{-3}$  fica menor que o LCMN em  $\rho_B = 0,02 \text{ fm}^{-3}$ , pois há mais partículas para o neutrino colidir. Os altos valores do LCMN total para  $E_\nu$  menores devem-se novamente ao Princípio de Exclusão de Pauli, que limita os estados disponíveis para as partículas emergentes após a colisão, ou seja, o neutrino não tem energia suficiente para fazer com que as partículas emergentes atinjam um estado disponível. Para  $\rho_B = 0,05 \text{ fm}^{-3}$ , mais suave fica a densidade de partículas ao longo da célula, se aproximando da matéria uniforme, e a fração de prótons também é mais próxima à fração de prótons na matéria uniforme (ver a figura 6). Consequentemente, o LCMN na pasta se aproxima do LCMN na matéria uniforme.

A dependência com a temperatura para o LCMN total em função da energia do neutrino incidente é apresentada na figura 17, para FSUGold e  $T = 3 \text{ MeV}$ ,  $T = 5 \text{ MeV}$  e  $T = 7 \text{ MeV}$ . Na parte de cima  $\rho_B = 0,02 \text{ fm}^{-3}$  e na de baixo  $\rho_B = 0,05 \text{ fm}^{-3}$ . Na coluna da esquerda  $Y_L = 0,4$  e na coluna da direita  $Y_L = 0,2$ . Pode-se ver que, como a densidade bariônica é fixa, a temperatura não interfere no LCMN total para  $E_\nu$  grande, o que pode ser explicado pelo fato de que os neutrinos com energias altas sentem pouco o efeito do Princípio de Exclusão de Pauli, ou seja, os neutrinos possuem energia suficiente para tornar praticamente qualquer colisão possível.

Espera-se que os neutrinos com energia próxima ao potencial químico forneçam a principal contribuição para a dispersão de energia no sistema, pois em baixas temperaturas o sistema é praticamente degenerado e efeitos do Princípio de Exclusão de Pauli enfraquecem outras contribuições. O regime altamente degenerado é esperado para  $\mu_i/T \gg 1$ , e esta condição é essencialmente verdadeira para temperaturas abaixo da temperatura de derretimento da pasta.

Pode-se observar de ambas as figuras 16 e 17, que o LCMN para neutrinos com baixas energias são menores na pasta, e neutrinos com energias maiores tem um LCMN maior na pasta, em comparação ao LCMN na matéria uniforme. Isto ocorre porque para baixas energias, o Princípio de Exclusão de Pauli suprime a interação dos neutrinos com nucleons dentro da pasta e na matéria uniforme, mas colisões com nucleons na superfície da célula são ainda possíveis. Com o aumento da energia do neutrino, o Princípio de Exclusão perde força e o LCMN na matéria uniforme é menor, como já discutido anteriormente.

As diferenças entre o LCMN na pasta e na matéria uniforme, podem alterar o que é conhecido na literatura como “energy sphere radius  $R_{ES}$ ” e

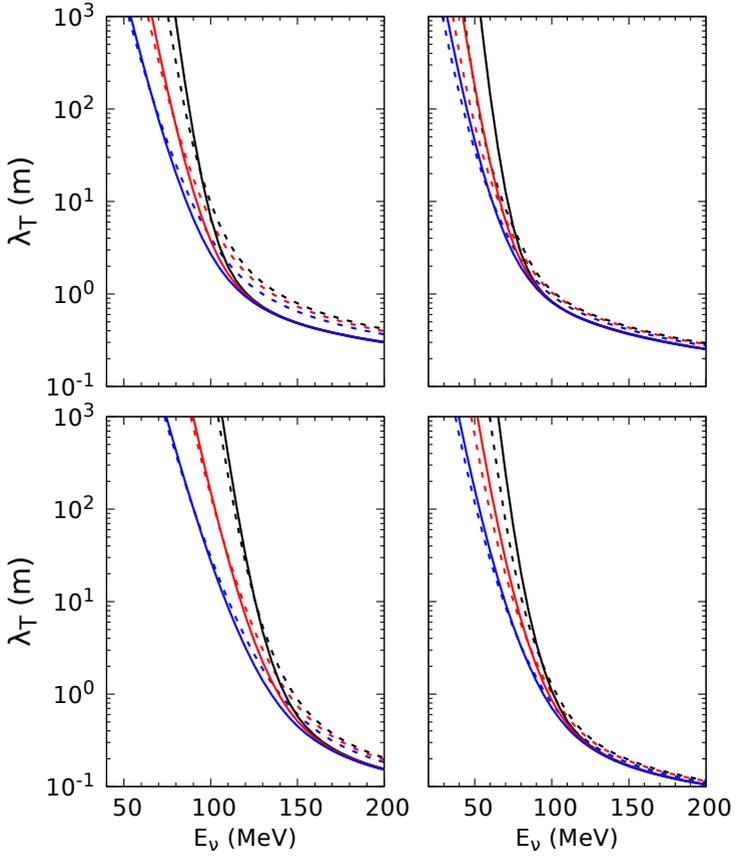


Figura 17 – LCMN total para FSUGold,  $T = 3$  MeV (preto),  $T = 5$  MeV (vermelho) e  $T = 7$  MeV (azul).  $\rho_B = 0,02 \text{ fm}^{-3}$  (em cima) e  $\rho_B = 0,05 \text{ fm}^{-3}$  (embaixo). Pasta (linha tracejada) e matéria uniforme (linha cheia).  $Y_L = 0.4$  (esquerda) e  $Y_L = 0.2$  (direita).

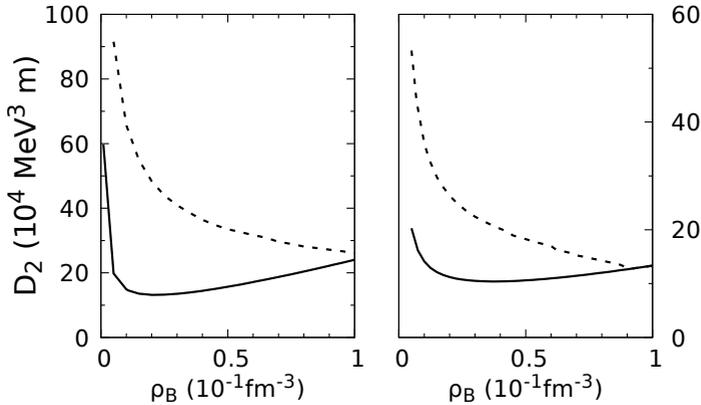


Figura 18 – Coeficiente de difusão  $D_2$  para  $T = 3$  MeV, FSUGold,  $Y_L = 0.4$  (esquerda) e  $Y_L = 0.2$  (direita). Pasta (linha tracejada) e matéria uniforme (linha cheia).

“average transport neutrinosphere  $R_{tr}$ ” (FISCHER et al., 2012; RAFFELT, 2001).

#### 4.2.2 Coeficientes de difusão

Nas figuras 18, 19 e 20, são apresentados os coeficientes de difusão dos neutrinos. Além da pasta, são também apresentados os coeficientes de difusão para a matéria uniforme. Os resultados estão de acordo com os apresentados por (REDDY; PRAKASH; LATTIMER, 1998), para as densidades apresentadas e matéria homogênea. Para a pasta foram obtidos coeficientes de difusão maiores do que para matéria uniforme, uma consequência do LCMN ser maior para o primeiro caso.

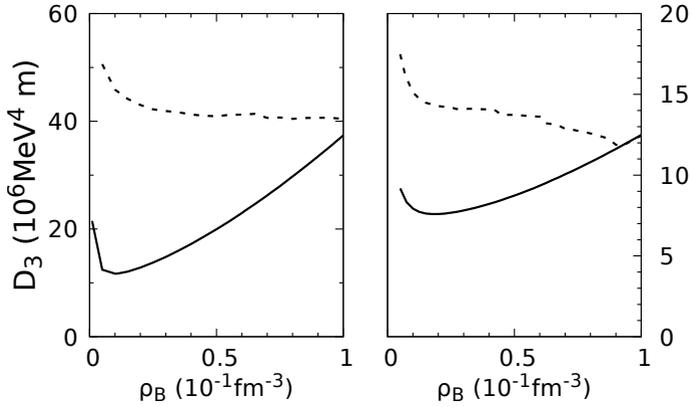


Figura 19 – Coeficiente de difusão  $D_3$  para  $T = 3$  MeV, FSUGold,  $Y_L = 0.4$  (esquerda) e  $Y_L = 0.2$  (direita). Pasta (linha tracejada) e matéria uniforme (linha cheia).

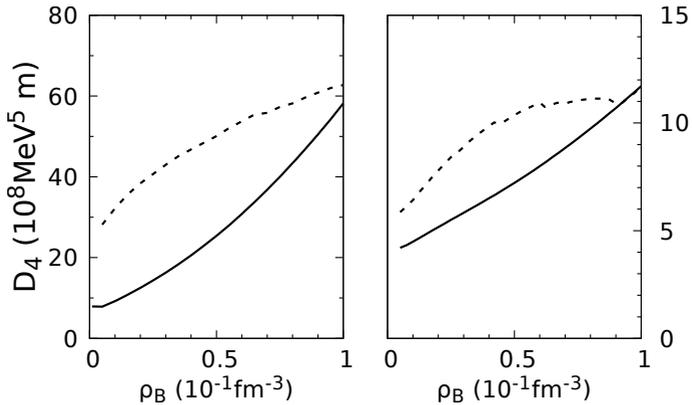


Figura 20 – Coeficiente de difusão  $D_4$  para  $T = 3$  MeV, FSUGold,  $Y_L = 0.4$  (esquerda) e  $Y_L = 0.2$  (direita). Pasta (linha tracejada) e matéria uniforme (linha cheia).

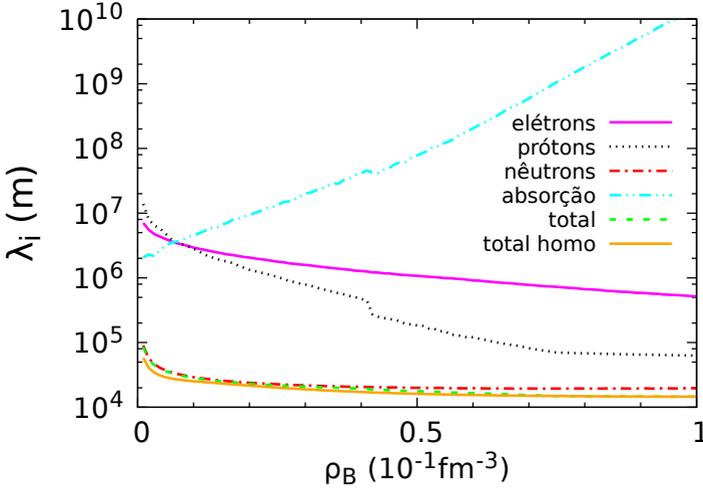


Figura 21 – LCMN para cada contribuição individual  $i$  na pasta, para  $T = 1$  MeV, FSUGold,  $\mu_\nu = 0$  e  $E_\nu = \pi T$ .

### 4.2.3 Livre caminho médio dos neutrinos para $\mu_\nu = 0$

A figura 21 mostra a contribuição de cada tipo de interação que o neutrino pode sofrer no sistema para o LCMN total. Agora, a principal contribuição vem do espalhamento por corrente neutra dos nêutrons. A energia do neutrino incidente escolhida é  $E_\nu = \pi T$ , que é a mesma escolhida em outros trabalhos, como em (REDDY et al., 1999; PONS et al., 1999). Como esta energia é bem pequena comparada aos casos mostrados anteriormente ( $Y_L = 0,4$  e  $Y_L = 0,2$ ), a saber, igual ao potencial químico dos neutrinos, não há energia suficiente para realizar as colisões de corrente carregada, pois estes processos possuem a restrição do Princípio de Exclusão de Pauli para as duas partículas emergentes da colisão, enquanto que no espalhamento por corrente neutra dos nêutrons tal restrição vale para apenas uma delas. Além disso, a diferença entre os níveis de energia dos nêutrons é bem menor que a diferença entre os níveis de energia dos prótons e elétrons.

O LCMN total em função da energia do neutrino é apresentado na figura 22. Quando  $\rho_B = 0,06 \text{ fm}^{-3}$ , como dito antes, o cálculo da pasta fornece uma densidade bem próxima da uniforme. Assim, os LCMN's devem estar bem próximos, como pode-se ver de ambas as figuras 21 e 22.

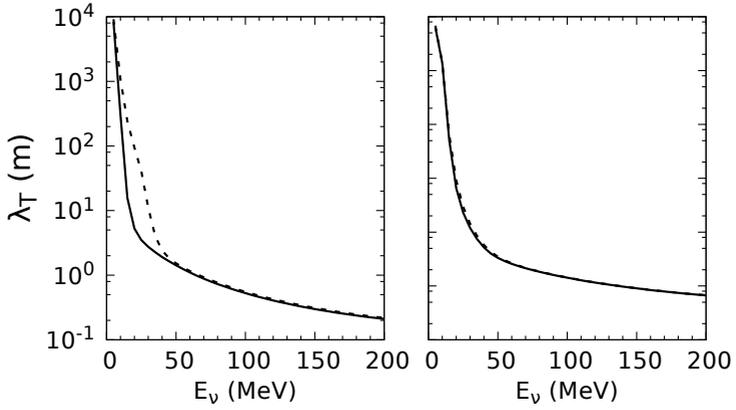


Figura 22 – LCMN total para  $T = 1$  MeV, FSUGold e  $\mu_\nu = 0$ . Pasta (linha tracejada) e matéria uniforme (linha cheia).  $\rho_B = 0,02 \text{ fm}^{-3}$  (esquerda) e  $\rho_B = 0,06 \text{ fm}^{-3}$  (direita).

### 4.3 ESPALHAMENTO COERENTE

Nesta seção apresentamos os resultados para o LCMN, tanto para fração de léptons fixa quanto para  $\mu_V = 0$ , considerando o espalhamento coerente, conforme a seção 3.2.

#### 4.3.1 Espalhamento coerente para $Y_L = 0,4$

Como foi dito na seção 3.2, dependendo do comprimento de onda do neutrino, o espalhamento pode ser coerente. Para comprimentos de onda maiores, o espalhamento pode ser coerente até mesmo por mais de uma célula de Wigner-Seitz. Todos os resultados apresentados nesta sub-seção para o espalhamento coerente são para densidade bariônica global  $\rho_B = 0,02 \text{ fm}^{-3}$ , que corresponde ao caso gota,  $T = 3 \text{ MeV}$  e parametrização FSUGold. Lembramos também que consideraremos agora apenas o espalhamento por nêutrons. Apresentamos resultados para duas redes diferentes: cúbica de face centrada (CFC) e cúbica de corpo centrado (CCC), cujos fatores de empacotamento são 0,74 e 0,68, respectivamente.

Para a rede CCC, a figura 23 apresenta o perfil em 2D do sorteio das posições dos nêutrons, para  $Y_L = 0,4$ . Lembramos que o sorteio é feito de acordo com o dito no final da seção 3.2. Perfis laterais para outros pares de coordenadas são similares e não fornecem informação adicional.

A figura 24 mostra a função de correlação,  $g(r)$ , obtida para o caso da figura 23. A distância mínima de aproximação imposta entre os nêutrons (ver seção 3.2), explica porque  $g(r)$  começa em zero, informando que a probabilidade de encontrar um nêutron próximo a outro com uma distância menor que  $0,862 \text{ fm}$  é nula. O primeiro pico tem aproximadamente a largura de uma célula, e corresponde aos nêutrons dentro de uma mesma célula. Devido ao padrão bem definido da rede, a função de correlação oscila bastante, mas como esperado tende ao valor  $g(r) = 1$  quando  $r$  é grande. Devido a problemas numéricos, explicados no apêndice D, obtivemos  $g(r)$  somente até um certo valor de  $r$ , que chamamos de borda.

No entanto, para calcular o LCMN é necessário estender  $g(r)$  além da borda. Consideramos dois casos: um em que estendemos fazendo  $g(r) = 1$ , e outro em que aproximamos  $g(r)$  perto da borda por uma função do tipo:

$$f(x) = a \cos(bx + c)e^{-ex} + 1. \quad (4.9)$$

Na figura 25 é mostrado o ajuste do último caso. Na figura 26, pode-se ver  $S(E_V)$  (expressão 3.41) para ambos os casos.

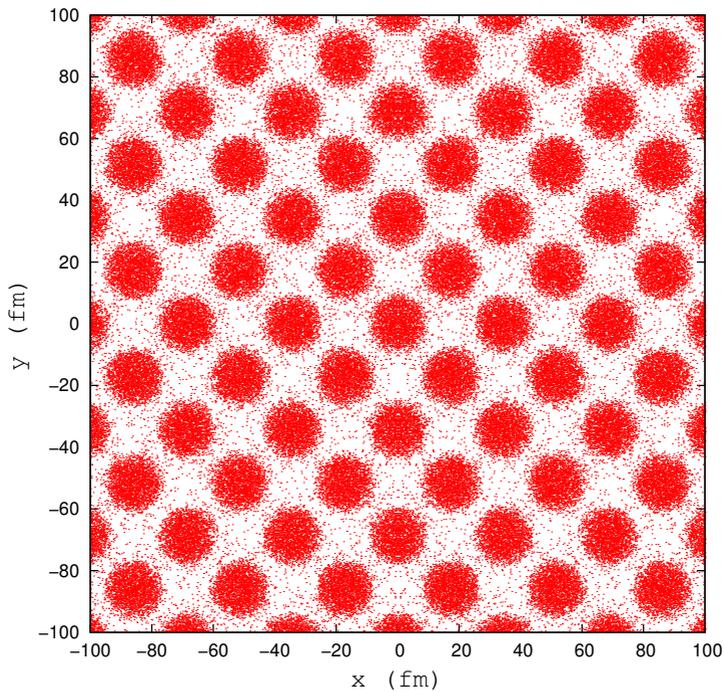


Figura 23 – Perfil lateral das posições dos nêutrons para a rede CCC, FSU-Gold,  $Y_L = 0.4$ ,  $\rho_B = 0,02 \text{ fm}^{-3}$  e  $T = 3 \text{ MeV}$ .

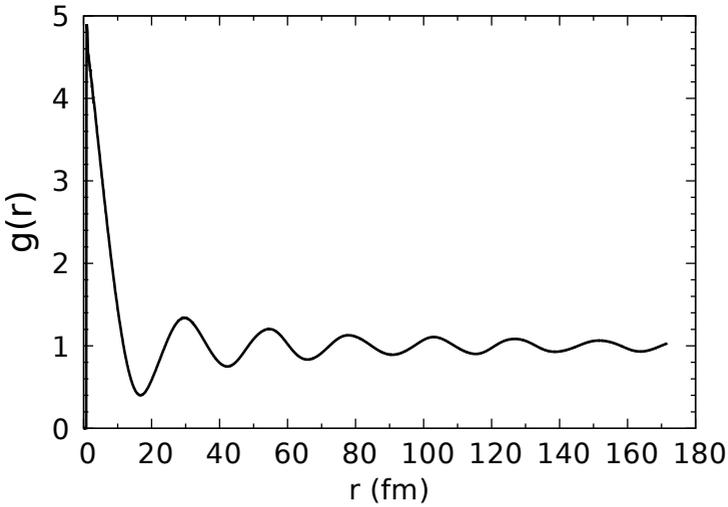


Figura 24 – Função de correlação para a rede CCC, FSUGold,  $Y_L = 0.4$ ,  $\rho_B = 0,02 \text{ fm}^{-3}$  e  $T = 3 \text{ MeV}$ .

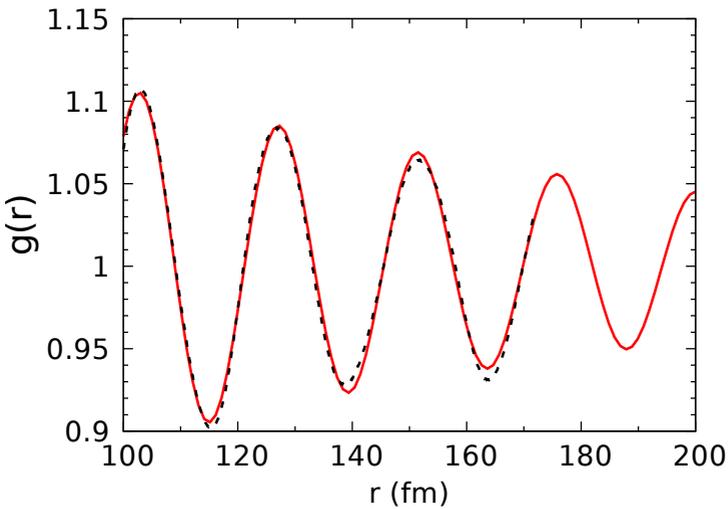


Figura 25 – Ajuste da função de correlação para a rede CCC, FSUGold,  $Y_L = 0.4$ ,  $\rho_B = 0,02 \text{ fm}^{-3}$  e  $T = 3 \text{ MeV}$ . Dados (preto tracejado) e ajuste (vermelho).

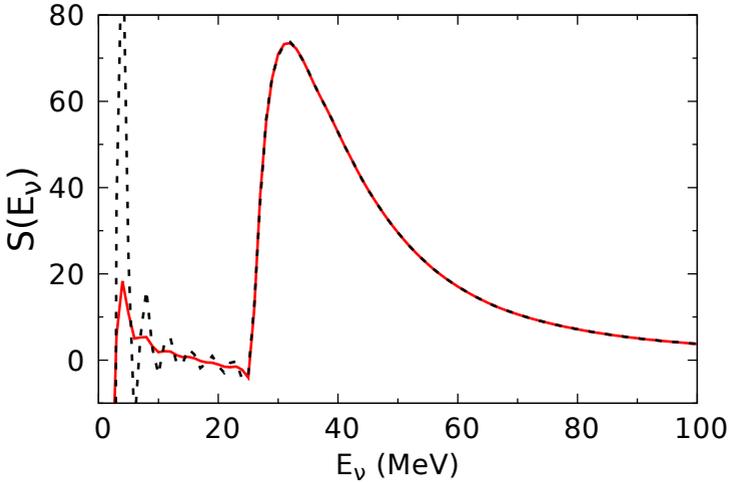


Figura 26 –  $S(E_\nu)$  para a rede CCC, FSUGold,  $Y_L = 0.4$ ,  $\rho_B = 0,02 \text{ fm}^{-3}$  e  $T = 3 \text{ MeV}$ .  $g(r) = 1$  além da borda (preto tracejado) e ajuste (vermelho).

Para energias do neutrino bem baixas,  $E_\nu < 7 \text{ MeV}$ , quando o comprimento de onda do neutrino é grande comparado ao tamanho da célula de Wigner-Seitz, vemos que os valores de  $S(E_\nu)$  não são bem comportados. Aumentando um pouco a energia, nota-se que quando estendemos  $g(r)$  com a ajuda da função, a curva fica mais suave do que quando usamos  $g(r) = 1$ . Mesmo assim, quando  $E_\nu \approx 17 - 25 \text{ MeV}$ ,  $S(E_\nu)$  tem valores negativos, o que teoricamente não é correto, pois o LCMN seria negativo. Para  $E_\nu > 30 \text{ MeV}$ , as duas curvas concordam entre si. Evidentemente, é necessário estender o cálculo numericamente para obter  $g(r)$  além da borda mostrada na figura 24, para evitar as dificuldades quando a energia é baixa. Em contrapartida, os valores obtidos para  $S(E_\nu)$  são confiáveis para energias maiores do que  $30 \text{ MeV}$ .

Podemos agora comparar vários casos para o LCMN aqui considerados. Na figura 27 temos o LCMN de transporte (com o fator  $(1 - \cos(\theta))$ ) levando em conta somente o espalhamento de corrente neutra por nêutrons. Quando a energia é menor que o potencial químico dos neutrinos  $\mu_\nu = 88,791 \text{ MeV}$ , o LCMN cresce rapidamente com a diminuição de  $E_\nu$ , devido principalmente ao Princípio de Exclusão de Pauli. Para a faixa de energia do neutrino apresentada, pode-se notar que  $S(E_\nu)$  não difere entre os casos com  $g(r) = 1$  além da borda (azul tracejado) e com o ajuste (vermelho), e, portanto, os LCMN's de transporte são iguais. Em preto, temos  $S(E_\nu) = 1$ ,

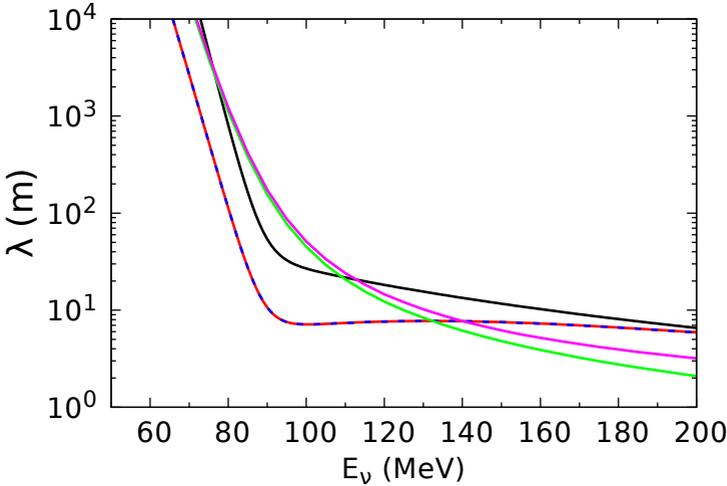


Figura 27 – LCMN de transporte para a rede CCC, FSUGold,  $Y_L = 0.4$ ,  $\rho_B = 0,02 \text{ fm}^{-3}$  e  $T = 3 \text{ MeV}$ .  $g(r) = 1$  além da borda (azul tracejado), ajuste (vermelho),  $S(E_\nu) = 1$  (preto), espalhamento por uma partícula sem fator de forma do nucleon (verde) e espalhamento por uma partícula com fator de forma do nucleon (rosa).

que corresponde ao caso de espalhamentos individuais em uma densidade constante de nêutrons  $\bar{\rho}_n$ . Como esperado, quanto maior a energia dos neutrinos, menos importante é o efeito coerente, e estas curvas se aproximam. Temos ainda o caso de espalhamento por uma partícula (expressão 3.9 com o fator  $(1 - \cos(\theta))$ ) sem fator de forma do nucleon (ver expressão 3.24) em verde e espalhamento por uma partícula com fator de forma do nucleon em rosa. Como o fator de forma do nucleon diminui a seção de choque, o LCMN é maior. Há uma maior restrição nos estados finais disponíveis para os nêutrons no centro do núcleo após a colisão, como discutido anteriormente. Isto não ocorre para o caso  $S(E_\nu) = 1$ . Assim, quando  $E_\nu$  está próximo de  $\mu_\nu$ , o LCMN de transporte para  $S(E_\nu) = 1$  é menor do que os casos das linhas verde e rosa, pois, nestes últimos casos, o neutrino não tem energia suficiente para tornar vários espalhamentos possíveis. Quando a energia aumenta, o Princípio de Pauli fica menos efetivo e como os últimos casos levam em conta também espalhamentos que mudam a energia das partículas, possibilitando mais colisões, o LCMN de transporte para  $S(E_\nu) = 1$  é maior.

Para a rede CFC, a figura 28 apresenta o perfil em 2D do sorteio dos

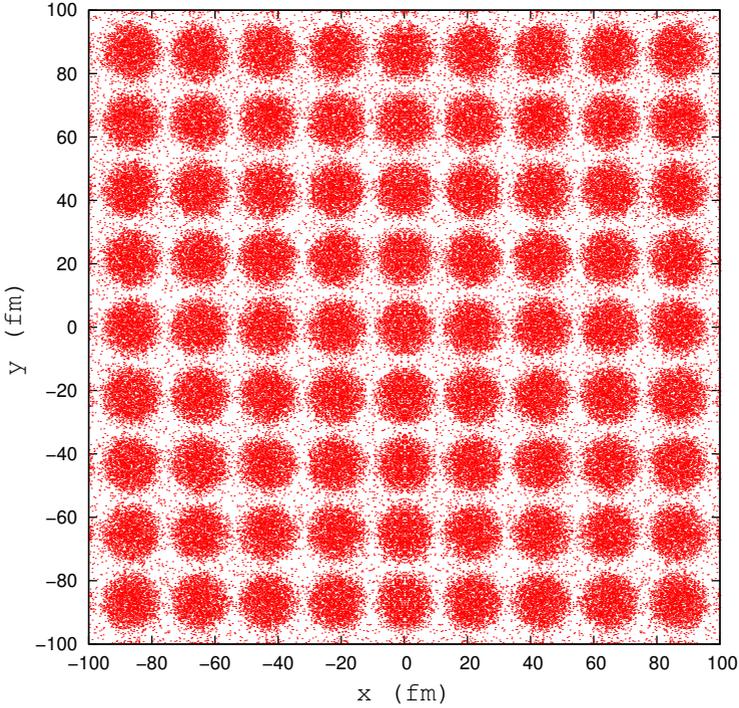


Figura 28 – Perfil lateral da posição dos nêutrons para a rede CFC, FSUGold,  $Y_L = 0.4$ ,  $\rho_B = 0,02 \text{ fm}^{-3}$  e  $T = 3 \text{ MeV}$ .

nêutrons, para a parametrização FSUGold,  $Y_L = 0,4$  e  $T = 3 \text{ MeV}$ . Como antes, perfis laterais para outros pares de coordenadas são similares e não fornecem informação adicional. No entanto, diferente da rede CCC, o gráfico em 2D não possibilita a visualização da posição dos núcleos das faces e um gráfico em 3D é mais informativo. Na figura 29 mostramos uma parte da rede, onde pode-se ver os núcleos nos centros das faces. A figura 30 mostra a função de correlação. O comportamento de  $g(r)$  é parecido com o da rede CCC. Como antes a função de correlação oscila bastante, mas como esperado tende ao valor  $g(r) = 1$  quando  $r$  é grande.

Fazemos os mesmos procedimentos para estender  $g(r)$  além da borda:  $g(r) = 1$  e o ajuste pela função 4.9. Na figura 31 é mostrado o ajuste do último caso. Na figura 32, nota-se que  $S(E_\nu)$  possui as mesmas dificuldades para baixas energias do neutrino. O comportamento é essencialmente o mesmo do

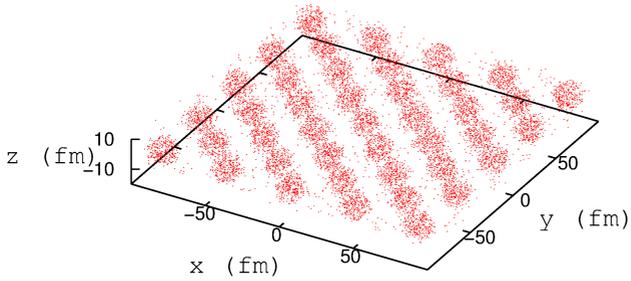


Figura 29 – Posição dos nêutrons para a rede CFC, FSUGold,  $Y_L = 0.4$ ,  $\rho_B = 0,02 \text{ fm}^{-3}$  e  $T = 3 \text{ MeV}$ .

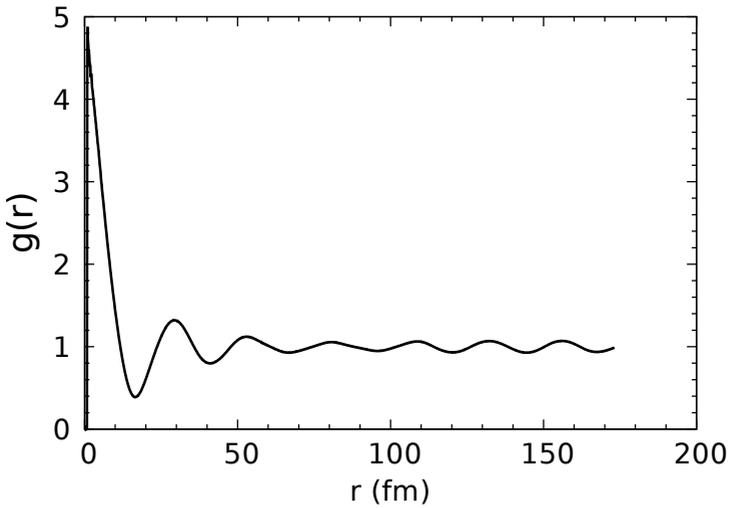


Figura 30 – Função de correlação para a rede CFC, FSUGold,  $Y_L = 0.4$ ,  $\rho_B = 0,02 \text{ fm}^{-3}$  e  $T = 3 \text{ MeV}$ .

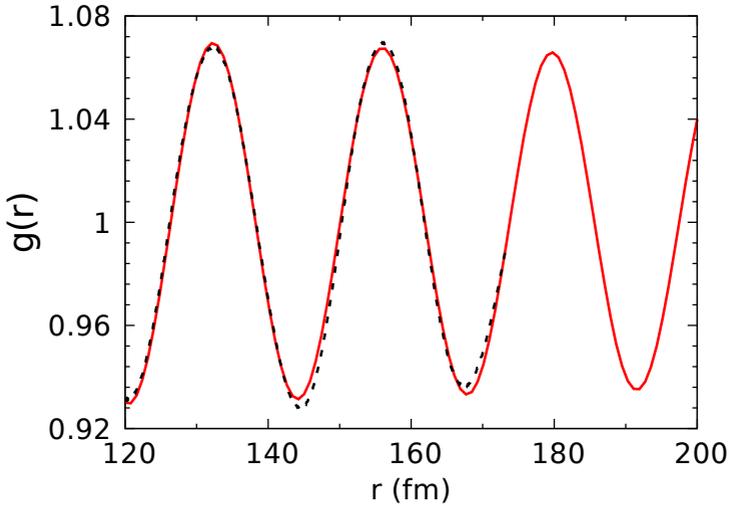


Figura 31 – Função de correlação para a rede CFC, FSUGold,  $Y_L = 0.4$ ,  $\rho_B = 0,02 \text{ fm}^{-3}$  e  $T = 3 \text{ MeV}$ . Dados (preto tracejado) e ajuste (vermelho).

obtido para o caso da rede CCC.

Na figura 33 é apresentado o LCMN de transporte (com o fator  $(1 - \cos(\theta))$ ) levando em conta somente o espalhamento por nêutrons, para a parametrização FSUGold,  $\rho_B = 0,02 \text{ fm}^{-3}$ ,  $Y_L = 0,4$  e  $T = 3 \text{ MeV}$ . Os diferentes LCMN são os mesmos do caso para a rede CCC, assim como o comportamento.

### 4.3.2 Espalhamento coerente para $\mu_\nu = 0$

A seguir temos os resultados para o caso em que não há neutrinos armadilhados no sistema, ou seja,  $\mu_\nu = 0$ . Neste caso, não há restrição para o neutrino após a colisão, e poderemos ver melhor o efeito do espalhamento coerente quando  $E_\nu$  é pequeno.

Novamente consideramos a rede CCC. A figura 34 apresenta o perfil em 2D do sorteio dos nêutrons. Como no caso para  $Y_L = 0,4$ , perfis laterais para outros pares de coordenadas são similares e não fornecem informação adicional. A figura 35 mostra a função de correlação,  $g(r)$ . Como anteriormente, a distância mínima de aproximação imposta entre os nêutrons (ver seção 3.2), explica porque  $g(r)$  começa em zero. O primeiro pico corresponde

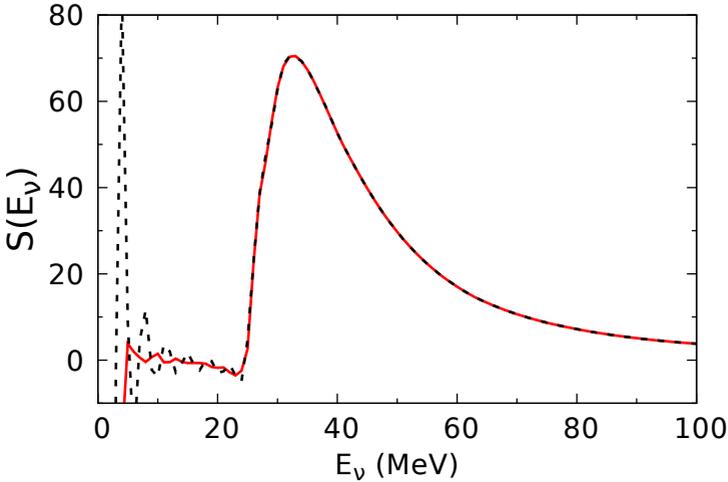


Figura 32 –  $S(E_\nu)$  para a rede CFC, FSUGold,  $Y_L = 0.4$ ,  $\rho_B = 0,02 \text{ fm}^{-3}$  e  $T = 3 \text{ MeV}$ .  $g(r) = 1$  além da borda (preto tracejado) e ajuste (vermelho).

aos nêutrons dentro de um mesmo núcleo. Diferentemente do caso com armadilhamento de neutrinos, a densidade de nêutrons ao longo da célula é mais próxima da densidade uniforme, como podemos ver das figuras 34 e 11. Logo, a função de correlação oscila menos, e tende a  $g(r) = 1$  rapidamente.

Mesmo  $g(r)$  se aproximando rapidamente do valor constante  $g(r) = 1$  com o aumento de  $r$ , estendendo o gráfico com  $g(r) = 1$  além da borda ou aproximando o final por um ajuste a uma função do tipo dado pela expressão 4.9 (ver figura 36), causa uma diferença em  $S(E_\nu)$  quando  $E_\nu$  é pequeno, como pode-se ver da figura 37. Note que não há valores negativos para  $S(E_\nu)$ , pois  $g(r)$  é bem aproximada por  $g(r) = 1$  além da borda.

Na figura 38 é apresentado o LCMN de transporte e, como antes, levamos em conta somente o espalhamento por nêutrons. Além de alguns dos LCMN's mostrados nas figuras 33 e 27, adicionamos o espalhamento por uma partícula (expressão 3.9) sem o fator  $1 - \cos(\theta)$  em alaranjado. Para  $E_\nu > 20 \text{ MeV}$ ,  $S(E_\nu)$  não difere entre os casos com  $g(r) = 1$  além da borda (azul tracejado) e com o ajuste (vermelho), e, portanto, os LCMN's são iguais. Foi apresentado até  $E_\nu = 100 \text{ MeV}$ , porém pode-se ver que o caso com  $S(E_\nu) = 1$  se aproxima mais rapidamente do caso com espalhamento coerente do que nas figuras 27 e 33, pois o sistema está mais próximo da matéria uniforme. Para o caso de espalhamento por uma partícula (expressão

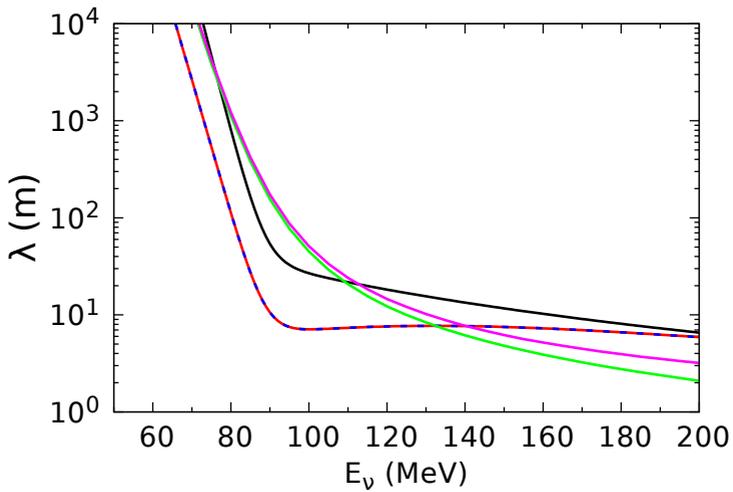


Figura 33 – LCMN de transporte para a rede CFC, FSUGold,  $Y_L = 0.4$ ,  $\rho_B = 0,02 \text{ fm}^{-3}$  e  $T = 3 \text{ MeV}$ .  $g(r) = 1$  além da borda (azul tracejado), ajuste (vermelho),  $S(E_\nu) = 1$  (preto), espalhamento por uma partícula sem fator de forma do nucleon (verde) e espalhamento por uma partícula com fator de forma do nucleon (rosa).

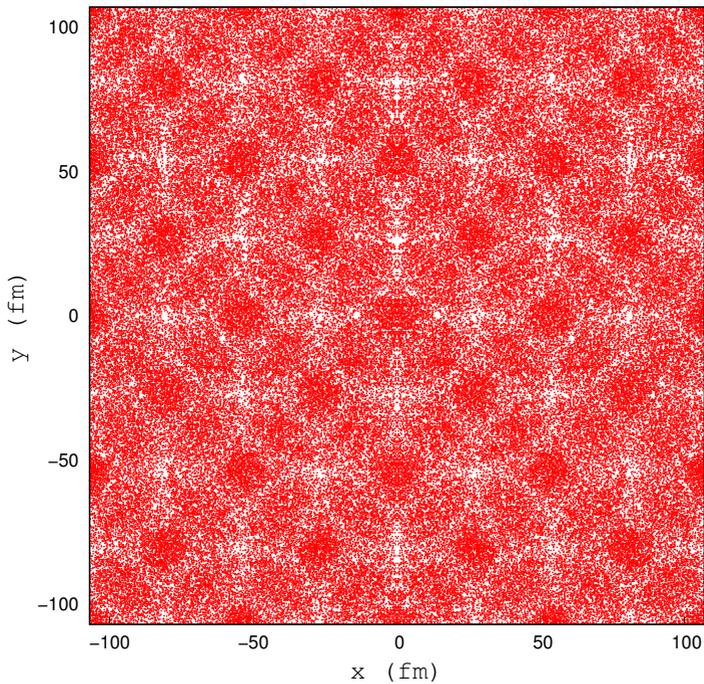


Figura 34 – Perfil lateral da posição dos nêutrons para a rede CCC, FSUGold,  $\mu_V = 0$ ,  $\rho_B = 0,02 \text{ fm}^{-3}$  e  $T = 1 \text{ MeV}$ .

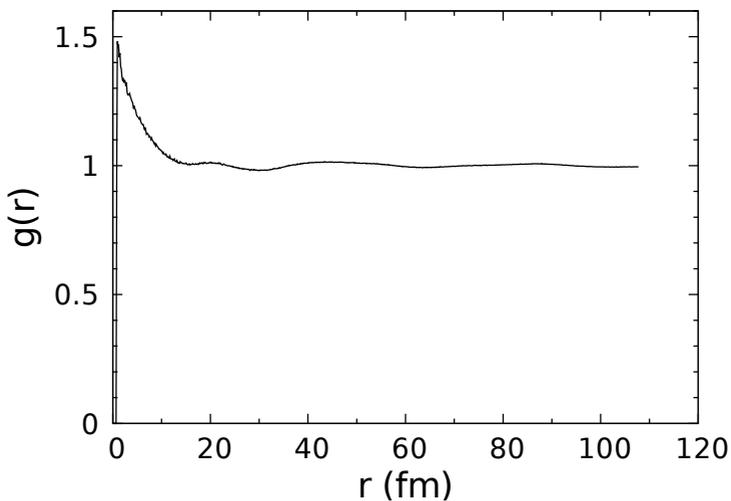


Figura 35 – Função de correlação para a rede CCC, FSUGold,  $\mu_v = 0$ ,  $\rho_B = 0,02 \text{ fm}^{-3}$  e  $T = 1 \text{ MeV}$ .

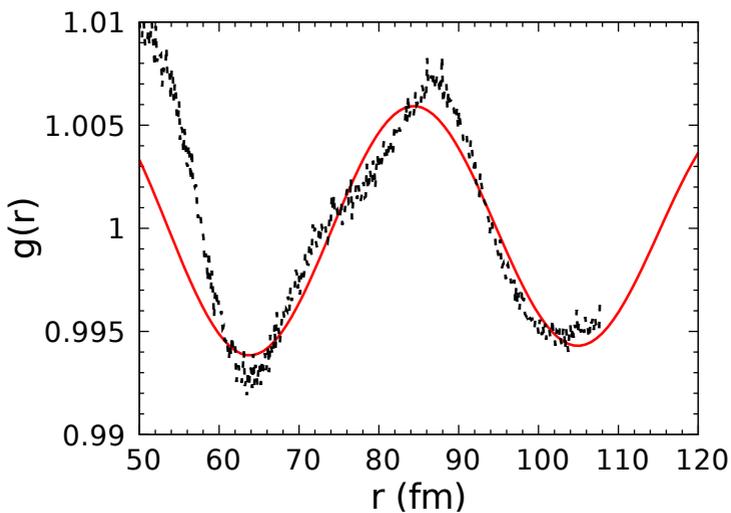


Figura 36 – Função de correlação para a rede CCC, FSUGold,  $\mu_v = 0$ ,  $\rho_B = 0,02 \text{ fm}^{-3}$  e  $T = 1 \text{ MeV}$ . Dados em preto tracejado e o ajuste em vermelho contínuo.

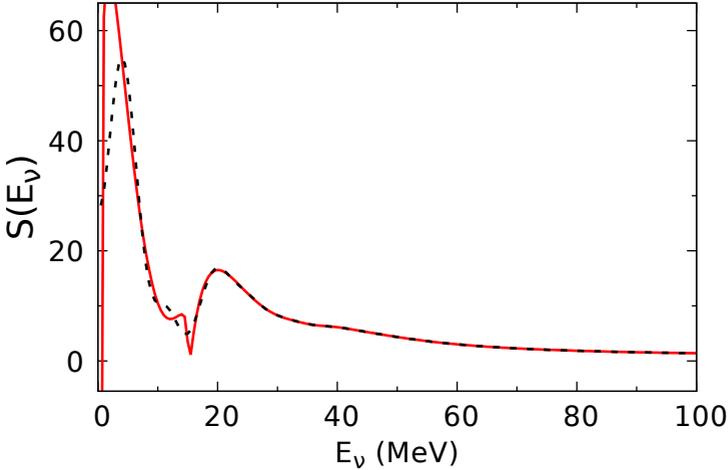


Figura 37 –  $S(E_\nu)$  para a rede CCC, FSUGold,  $\mu_\nu = 0$ ,  $\rho_B = 0,02 \text{ fm}^{-3}$  e  $T = 1 \text{ MeV}$ .  $g(r) = 1$  além da borda (preto tracejado) e ajuste (vermelho).

3.9 com o fator  $(1 - \cos(\theta))$  (ver expressão 3.24), como o sistema está mais próximo da matéria uniforme, há mais possibilidades para interação com o gás de fundo do que no caso com armadilhamento de neutrinos e, portanto, o LCMN de transporte para  $S(E_\nu) = 1$  é maior para todo o intervalo de energia considerado. Observa-se ainda que o LCMN de transporte (com o fator  $(1 - \cos(\theta))$ ) não é muito diferente do LCMN sem tal fator.

A figura 39 apresenta uma comparação do LCMN de transporte levando em conta somente os espalhamentos via corrente neutra por nêutrons para as redes CFC e CCC. Usamos FSUGold,  $Y_L = 0.4$ ,  $\rho_B = 0,02 \text{ fm}^{-3}$  e  $T = 3 \text{ MeV}$ . A função de correlação foi estendida usando o ajuste. Para energias do neutrino mais baixas que as apresentadas, o LCMN cresce muito, como já foi explicado antes. Já a figura 40 apresenta o LCMN para  $\mu_\nu = 0$  e  $T = 1 \text{ MeV}$ , com as outras condições iguais. Desta vez, a função de correlação foi estendida fazendo  $g(r) = 1$ , pois a função usada para fazer o ajuste para a rede CCC não é adequada para a rede CFC, como podemos ver da figura 41. Em ambos os gráficos, para energias altas, quando o comprimento de onda do neutrino é menor do que o tamanho do núcleo, o espalhamento é coerente por apenas uma ou parte de uma célula. Como o cálculo da pasta não depende do tipo de rede, a densidade de células é a mesma para as duas redes, pois a densidade global é a mesma. Assim, espera-se que o

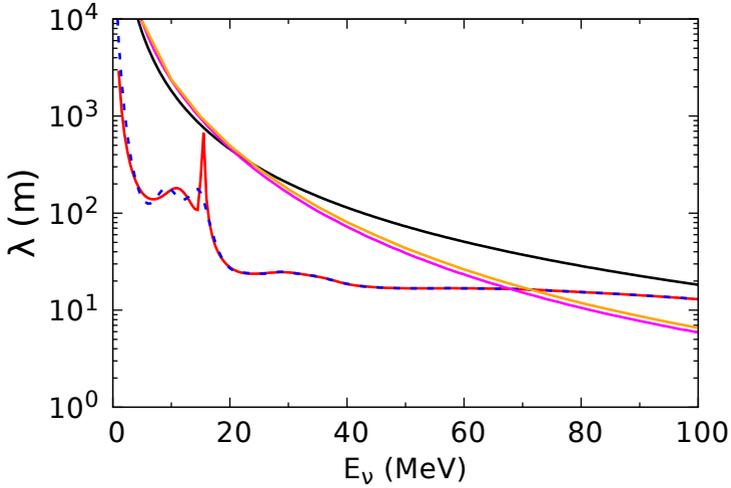


Figura 38 – LCMN de transporte para a rede CCC, FSUGold,  $\mu_\nu = 0$ ,  $\rho_B = 0,02 \text{ fm}^{-3}$  e  $T = 1 \text{ MeV}$ .  $g(r) = 1$  além da borda (azul tracejado), ajuste (vermelho),  $S(E_\nu) = 1$  (preto), espalhamento por uma partícula (rosa) e espalhamento por uma partícula sem o fator  $(1 - \cos(\theta))$  (alaranjado).

resultado seja independente da rede, como obtido. Para  $\mu_\nu = 0$  podemos ver um possível efeito da escolha da rede para energias baixas, porém, devido às dificuldades já discutidas anteriormente, uma análise mais aprofundada deve ser feita no futuro.

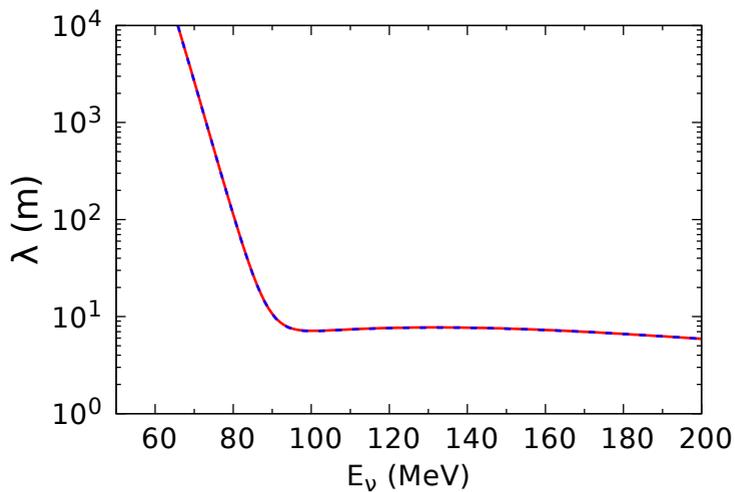


Figura 39 – LCMN de transporte para FSUGold,  $Y_L = 0.4$ ,  $\rho_B = 0,02 \text{ fm}^{-3}$  e  $T = 3 \text{ MeV}$ . CFC (azul tracejado) e CCC (vermelho).

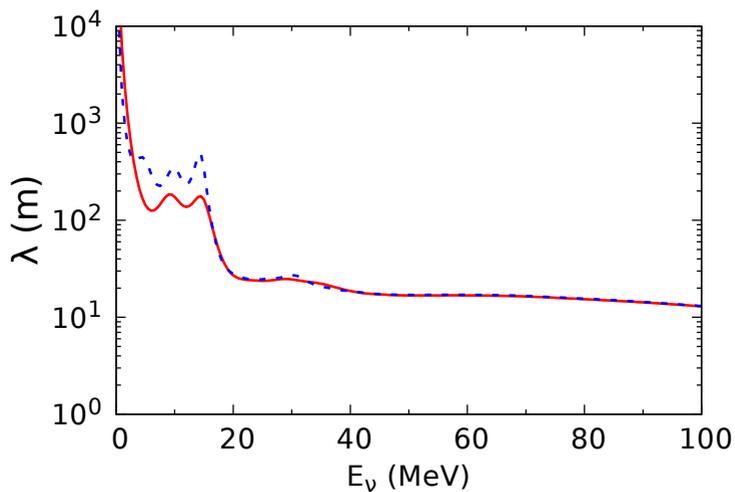


Figura 40 – LCMN de transporte para FSUGold,  $\mu_\nu = 0$ ,  $\rho_B = 0,02 \text{ fm}^{-3}$  e  $T = 1 \text{ MeV}$ . CFC (azul tracejado) e CCC (vermelho).

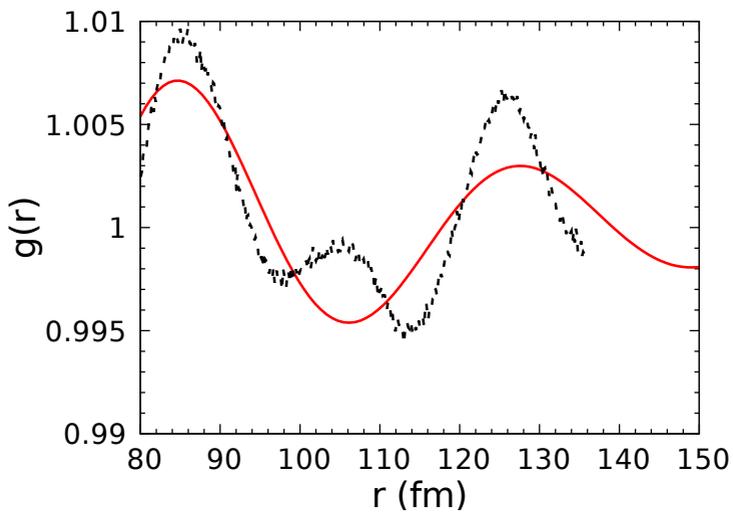


Figura 41 – Função de correlação para a rede CFC, FSUGold,  $\mu_v = 0$ ,  $\rho_B = 0,02 \text{ fm}^{-3}$  e  $T = 1 \text{ MeV}$ . Dados (preto tracejado) e ajuste (vermelho).



## 5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

Neste trabalho, discutimos o efeito de um sistema conhecido como fase pasta, situação que ocorre em algumas regiões de uma estrela de nêutrons e numa Supernova antes do colapso, sobre o livre caminho médio de neutrinos neste meio. O formalismo utilizado na obtenção do LCMN, pode facilmente ser reduzido para o caso de matéria nuclear infinita, uniforme e estática. Discutimos também a condição para saber qual a estrutura de pasta é mais estável, a saber, qual estrutura tem a menor energia livre de Helmholtz. Tratamos o sistema, formado por nucleons, elétrons e neutrinos, a partir de um modelo relativístico, onde a interação forte entre os nucleons foi descrita pelo Modelo de Walecka em duas de suas versões: uma em que incluíse a autointeração entre os mésons explicitamente na densidade Lagrangeana e outro em que as constantes de acoplamento são funções da densidade bariônica. A fase pasta foi obtida usando a aproximação de Thomas-Fermi (AVANCINI et al., 2008, 2010). A interação fraca foi explicitamente incluída na densidade Lagrangeana total, porém seu efeito na equação de estado é totalmente desprezível, ao menos para as energias e temperaturas aqui consideradas. A solução para o modelo admite sempre a densidade bariônica e a temperatura como constantes fixas, além de neutralidade global de carga, equilíbrio  $\beta$  e fração de léptons constante ou  $\mu_\nu = 0$ , casos que imagina-se encontrar em uma proto-estrela de nêutrons (PONS et al., 1999).

O método de obtenção da seção de choque total dos neutrinos com as partículas que formam o sistema baseia-se nas regras de Feynman usuais, incluindo os efeitos do Princípio da Exclusão de Pauli e assumindo distribuições de Fermi para cada um dos tipos de partícula. Essas últimas ficam plenamente determinadas pela obtenção da equação de estado. Consideramos processos de corrente neutra e corrente carregada. No caso de espalhamentos individuais, a solução exata para as seções de choque nos leva a uma integração múltipla nos ângulos de espalhamento, o que foi feito via método de Monte Carlo. O objetivo final é a determinação do LCMN, o qual foi então apresentado para diferentes vínculos, temperaturas, densidades e para os dois tipos de parametrizações usadas aqui para a interação forte. Os resultados fornecem um bom acordo em ordem de grandeza e comportamento com outros cálculos presentes na literatura (REDDY; PRAKASH; LATTIMER, 1998; PONS et al., 1999). A seção de choque de absorção é dominante para as temperaturas e densidades bariônicas aqui tratadas (ao menos para o caso em que os neutrinos estão armadilhados na matéria), porém a seção de choque de espalhamento não pode ser desprezada.

É importante notar a dependência de todas as quantidades aqui estuda-

das em relação à parametrização usada para descrever a interação forte entre os nucleons. Em baixas densidades,  $\rho_B < 0.02\text{fm}^{-3}$ , onde a pasta obtida para diferentes parametrizações possui propriedades semelhantes (GRILL; PROVIDÊNCIA; AVANCINI, 2012), o LCMN tem uma pequena dependência com a parametrização. Quando a densidade aumenta, correspondendo às camadas próximas da borda superior da crosta interna da estrela, a dependência com a parametrização se torna mais importante. Para uma fração de prótons maior, o processo de absorção é menos provável de ocorrer. Consequentemente, parametrizações com fração de prótons maiores resultam em maiores LCMN. Uma vez que a fração de prótons está intimamente relacionada à energia de simetria, esta última irá gerar diferenças não desprezíveis no LCMN.

Por outro lado, temos também uma diferença importante dos resultados ao incluir o fator de forma do nucleon nos cálculos, ou seja, nos parece importante levar em conta a dependência da interação neutrino-nucleon, em relação à energia do neutrino incidente, devido ao fato do nucleon ser uma partícula composta. Em relação à temperatura, há uma grande dependência do LCMN, como esperado. Além disso, as diferenças entre o LCMN entre a pasta e a matéria homogênea também diminui com a temperatura (como também esperado), embora continuem a ser bastante significativas na região de temperaturas em que se acredita que a pasta exista.

Além do efeito da fração de prótons maior da fase pasta, efeitos do Princípio da Exclusão de Pauli também aumentam o LCMN em relação à matéria uniforme. De fato, os espalhamentos são fortemente suprimidos dentro do cluster, onde a energia de Fermi é maior que na matéria uniforme. Por outro lado, fora dos núcleos há poucas partículas para contribuir significativamente com a seção de choque. Nas temperaturas aqui consideradas, os neutrinos são degenerados e o Princípio da Exclusão de Pauli assegura que apenas neutrinos perto da energia de Fermi se envolvem em colisões. O fato de que neutrinos degenerados na fase pasta possuem energias menores do que na matéria uniforme também contribui para um maior LCMN. Quando a densidade ou temperatura aumenta, originando o derretimento da pasta, ambos os LCMN na pasta e na matéria uniforme se aproximam.

Foi mostrado que o LCMN é maior por até uma ordem de magnitude na pasta que na matéria uniforme na mesma densidade. Este efeito produzirá tempos de emissão de neutrinos em uma simulação de supernova, mais curtos. Além disso, isto significa que se a pasta for levada em conta adequadamente no estágio de neutrinos armadilhados, a energia transferida para as camadas de baixas densidades da superfície da PNS é mais eficiente. Nossos resultados implicam que os efeitos da fase pasta não podem ser desprezados no cálculo do LCMN em densidades bariônicas abaixo de  $0.1\text{fm}^{-3}$  e temperaturas abaixo de  $10\text{MeV}$ . A parametrização usada para descrever a fase pasta

também tem influência nos resultados.

Quanto ao espalhamento coerente, apesar de algumas pequenas incertezas numéricas encontradas no método de ajuste da função de correlação, pudemos constatar que há uma diferença que pode alcançar mais de uma ordem de grandeza para neutrinos com baixas energias, em relação ao cálculo do espalhamento por partículas individuais, diferença esta que obviamente não pode ser desprezada.

Ainda dentro deste formalismo há a possibilidade de se estudar estruturas de pasta que exijam uma descrição mais complexa, como fases de núcleos deformados. Tais melhorias no cálculo do LCMN e a extensão para estruturas deformadas, podem ser usadas para calcular seções de choque entre neutrinos e núcleos, visto que o modelo aqui usado para descrever a fase pasta pode oferecer a princípio uma boa descrição de núcleos pesados.

O nosso método se mostrou eficiente na obtenção do LCMN no sistema considerado. Com a expressão obtida pode-se obter coeficientes de difusão dos neutrinos, como mostrado nos resultados, e outras propriedades importantes no estudo da formação de uma estrela de nêutrons, como o fluxo de neutrinos emitidos e o espectro de energia dos mesmos, assim como a quantidade de energia carregada pelos neutrinos para fora da estrela durante o seu processo de resfriamento (REDDY; PRAKASH; LATTIMER, 1998; PONS et al., 1999; YAKOVLEV et al., 2001).

Como comentado na Introdução, a detecção de neutrinos pode dar importantes informações a respeito do meio com o qual o mesmo interage, pois como sua interação com a matéria é relativamente fraca, eles mantêm as informações iniciais, sendo bastante sensíveis aos detalhes do modelo usado para reproduzir os possíveis dados experimentais. Os resultados por nós obtidos indicam assim para a necessidade de se testar outras parametrizações e modelos para o sistema aqui analisado. Em particular, uma comparação entre as parametrizações com coeficientes dependentes da densidade e aquelas com termos de autointeração na densidade Lagrangeana, em que a compressibilidade, energia de simetria, massa efetiva e energia total no ponto de saturação produzissem valores bastante próximos entre si, seria de grande interesse.

Para temperaturas acima de  $3 \text{ MeV}$ , a superfluidez da matéria nuclear não deve afetar significativamente a equação de estado. No entanto, para  $T = 1 \text{ MeV}$ , efeitos de emparelhamento não devem ser desprezíveis e merecem assim serem investigados no futuro dentro do modelo de Thomas-Fermi, investigação esta que já está em andamento.



## REFERÊNCIAS

- AGUILAR-AREVALO, A. A. et al. Measurement of muon neutrino quasielastic scattering on carbon. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 100, p. 032301, Jan 2008. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.100.032301>>.
- ALLOY, M. D.; MENEZES, D. P. Nuclear “pasta phase” and its consequences on neutrino opacities. **Phys. Rev. C**, American Physical Society, v. 83, p. 035803, Mar 2011. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.83.035803>>.
- AVANCINI, S. S. et al. Nuclear “pasta” phase within density dependent hadronic models. **Phys. Rev. C**, American Physical Society, v. 79, p. 035804, Mar 2009. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.79.035804>>.
- AVANCINI, S. S. et al. Warm “pasta” phase in the thomas-fermi approximation. **Phys. Rev. C**, American Physical Society, v. 82, p. 055807, Nov 2010. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.82.055807>>.
- AVANCINI, S. S. et al. Warm and cold pasta phase in relativistic mean field theory. **Phys. Rev. C**, American Physical Society, v. 78, p. 015802, Jul 2008. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.78.015802>>.
- BODMANN, B. et al. Neutrino interactions with carbon: recent measurements and a new test of  $\nu_e, \bar{\nu}_\mu$  universality. **Physics Letters B**, v. 332, n. 3, p. 251 – 257, 1994. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269394912505>>.
- BRUENN, S. W. Stellar core collapse: numerical model and infall epoch. **Ap. J. Suppl.**, v. 58, p. 771–841, Feb 1985.
- BUDNY, R. V. Highly inelastic neutrino-nucleon scattering. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 2, p. 1271–1277, Oct 1970. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.2.1271>>.
- DEVRIES, P. L. **A First Course in Computational Physics**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1994.
- DUCOIN, C. et al. Core-crust transition in neutron stars: Predictivity of density developments. **Phys. Rev. C**, American Physical Society, v. 83, p.

045810, Apr 2011. Disponível em:

<<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.83.045810>>.

FISCHER, T. et al. Neutrino spectra evolution during protoneutron star deleptonization. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 85, p. 083003, Apr 2012. Disponível em:

<<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.85.083003>>.

Fischer, T. et al. Protoneutron star evolution and the neutrino-driven wind in general relativistic neutrino radiation hydrodynamics simulations. **A&A**, v. 517, p. A80, 2010. Disponível em:

<<http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361/200913106>>.

Fischer, Tobias et al. Symmetry energy impact in simulations of core-collapse supernovae. **Eur. Phys. J. A**, v. 50, n. 2, p. 46, 2014.

Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1140/epja/i2014-14046-5>>.

FREEDMAN, D. Z. Coherent effects of a weak neutral current. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 9, p. 1389–1392, Mar 1974. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.9.1389>>.

FREEDMAN, D. Z. et al. The weak neutral current and its effects in stellar collapse. **Annual Review of Nuclear Science**, v. 27, n. 1, p. 167–207, 1977. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1146/annurev.ns.27.120177.001123>>.

FUCHS, C.; LENSKE, H.; WOLTER, H. H. Density dependent hadron field theory. **Phys. Rev. C**, American Physical Society, v. 52, p. 3043–3060, Dec 1995. Disponível em:

<<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.52.3043>>.

FURTADO, U. J. **Gás de Neutrinos Interagentes em um Meio Nuclear Denso**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC, 2012.

GALSTER, S. et al. Elastic electron-deuteron scattering and the electric neutron form factor at four-momentum transfers  $5 \text{ fm}^{-2} < q^2 < 14 \text{ fm}^{-2}$ . **Nuclear Physics B**, v. 32, n. 1, p. 221 – 237, 1971. ISSN 0550-3213.

Disponível em:

<<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/055032137190068X>>.

GAMBHIR, Y.; RING, P.; THIMET, A. Relativistic mean field theory for finite nuclei. **Annals of Physics**, v. 198, n. 1, p. 132 – 179, 1990. ISSN 0003-4916. Disponível em:

<<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/000349169090330Q>>.

GLENDENNING, N. K. **Compact Stars**. 2. ed. [S.l.]: Springer, 2000.

GRIFFITHS, D. J. **Introduction to Elementary Particles**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2009.

GRILL, F.; PROVIDÊNCIA, C. m. c.; AVANCINI, S. S. Neutron star inner crust and symmetry energy. **Phys. Rev. C**, American Physical Society, v. 85, p. 055808, May 2012. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.85.055808>>.

GROUP, P. D. **PARTICLE PHYSICS BOOKLET**. [S.l.]: APS physics, 2012.

GRYGOROV, P.; GÖGELEIN, P.; MÜTHER, H. Neutrino propagation in the nuclear ‘pasta phase’ of neutron stars. **Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics**, v. 37, n. 7, p. 075203, 2010. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0954-3899/37/i=7/a=075203>>.

HALZEN, F.; MARTIN, A. D. **Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1984.

HEMPEL, M. et al. New equations of state in simulations of core-collapse supernovae. **The Astrophysical Journal**, v. 748, n. 1, p. 70, 2012. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0004-637X/748/i=1/a=70>>.

HOROWITZ, C. J. et al. Dynamical response of the nuclear “pasta” in neutron star crusts. **Phys. Rev. C**, American Physical Society, v. 72, p. 035801, Sep 2005. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.72.035801>>.

HOROWITZ, C. J. et al. Nonuniform neutron-rich matter and coherent neutrino scattering. **Phys. Rev. C**, American Physical Society, v. 70, p. 065806, Dec 2004. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.70.065806>>.

HOROWITZ, C. J.; PÉREZ-GARCÍA, M. A.; PIEKAREWICZ, J. Neutrino-“pasta” scattering: The opacity of nonuniform neutron-rich matter. **Phys. Rev. C**, American Physical Society, v. 69, p. 045804, Apr 2004. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.69.045804>>.

HOROWITZ, C. J.; PIEKAREWICZ, J. Neutron star structure and the neutron radius of  $^{208}\text{pb}$ . **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 86, p. 5647–5650, Jun 2001. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.86.5647>>.

IMLAY, R. New results on electron-neutrino carbon scattering and muon-neutrino carbon scattering at LSND. **Nuclear Physics A**, v. 629, n. 1, p. 531 – 537, 1998. ISSN 0375-9474. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375947497007331>>.

JANKA, H.-T. et al. Theory of core-collapse supernovae. **Physics Reports**, v. 442, n. 1 - 6, p. 38 – 74, 2007. ISSN 0370-1573. The Hans Bethe Centennial Volume 1906-2006. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157307000439>>.

LALAZISSIS, G. A.; KÖNIG, J.; RING, P. New parametrization for the lagrangian density of relativistic mean field theory. **Phys. Rev. C**, American Physical Society, v. 55, p. 540–543, Jan 1997. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.55.540>>.

LENSKE, H.; FUCHS, C. Rearrangement in the density dependent relativistic field theory of nuclei. **Physics Letters B**, v. 345, n. 4, p. 355 – 360, 1995. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037026939401664X>>.

LIMA, R. C. R. de. **Matéria NPE Não Homogênea na Presença de Campos Magnéticos Gigantes na Aproximação de Thomas-Fermi**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC, 2012.

MARINELLI, J. R.; GRAEFF, C. A. Nucleon size effects in the parity violating electron scattering asymmetry. **EPJ Web of Conferences**, EDP Sciences, v. 66, n. 02068, March 2014.

MARTÍNEZ-PINEDO, G. et al. Charged-current weak interaction processes in hot and dense matter and its impact on the spectra of neutrinos emitted from protoneutron star cooling. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 109, p. 251104, Dec 2012. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.109.251104>>.

MARUYAMA, T. et al. Recent developments in physics. v. 7, n. 1, 2006.

MARUYAMA, T. et al. Nuclear “pasta” structures and the charge screening effect. **Phys. Rev. C**, American Physical Society, v. 72, p. 015802, Jul 2005. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.72.015802>>.

MCMILLAN, W. L. Ground state of liquid He<sup>4</sup>. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 138, p. A442–A451, Apr 1965. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.138.A442>>.

OKAMOTO, M. et al. Three-dimensional structure of low-density nuclear matter. **Physics Letters B**, v. 713, n. 3, p. 284 – 288, 2012. ISSN 0370-2693. Disponível em:

<<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269312005850>>.

OKAMOTO, M. et al. Nuclear “pasta” structures in low-density nuclear matter and properties of the neutron-star crust. **Phys. Rev. C**, American Physical Society, v. 88, p. 025801, Aug 2013. Disponível em:

<<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.88.025801>>.

PETHICK, C.; POTEKHIN, A. Liquid crystals in the mantles of neutron stars. **Physics Letters B**, v. 427, n. 1 - 2, p. 7 – 12, 1998. ISSN 0370-2693. Disponível em:

<<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269398003414>>.

PONS, J. A. et al. Evolution of proto-neutron stars. **The Astrophysical Journal**, v. 513, n. 2, p. 780, 1999. Disponível em:

<<http://stacks.iop.org/0004-637X/513/i=2/a=780>>.

PRAET, C. **Modeling quasi-free neutrino-nucleus reactions for accelerator-based experiments**. IV, 130 p. Tese (Doutorado) — Ghent University, 2009. Disponível em:

<[http://lib.ugent.be/fulltxt/RUG01/001/350/800/RUG01-001350800\\_2010\\_0001\\_AC.pdf](http://lib.ugent.be/fulltxt/RUG01/001/350/800/RUG01-001350800_2010_0001_AC.pdf)>.

RAFFELT, G. G. Mu- and tau-neutrino spectra formation in supernovae. **The Astrophysical Journal**, v. 561, n. 2, p. 890, 2001. Disponível em:

<<http://stacks.iop.org/0004-637X/561/i=2/a=890>>.

REDDY, S.; BERTSCH, G.; PRAKASH, M. First order phase transitions in neutron star matter: droplets and coherent neutrino scattering. **Physics Letters B**, v. 475, n. 1 - 2, p. 1 – 8, 2000. ISSN 0370-2693. Disponível em:

<<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269300000496>>.

REDDY, S.; PRAKASH, M. Neutrino scattering in a newly born neutron star. **The Astrophysical Journal**, v. 478, n. 2, p. 689, 1997. Disponível em:

<<http://stacks.iop.org/0004-637X/478/i=2/a=689>>.

REDDY, S.; PRAKASH, M.; LATTIMER, J. M. Neutrino interactions in hot and dense matter. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 58, p. 013009, May 1998. Disponível em:

<<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.58.013009>>.

REDDY, S. et al. Effects of strong and electromagnetic correlations on neutrino interactions in dense matter. **Phys. Rev. C**, American Physical

Society, v. 59, p. 2888–2918, May 1999. Disponível em:  
<<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.59.2888>>.

SCHNEIDER, A. S. et al. Nuclear “pasta” formation. **Phys. Rev. C**, American Physical Society, v. 88, p. 065807, Dec 2013. Disponível em:  
<<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.88.065807>>.

SEROT, B.; WALECKA, J. D. **Advances in Nuclear Physics**. [S.l.]: Plenum Press, 1986.

SONODA, H. et al. Impact of nuclear “pasta” on neutrino transport in collapsing stellar cores. **Phys. Rev. C**, American Physical Society, v. 75, p. 042801, Apr 2007. Disponível em:  
<<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.75.042801>>.

SONODA, H. et al. Phase diagram of nuclear “pasta” and its uncertainties in supernova cores. **Phys. Rev. C**, American Physical Society, v. 77, p. 035806, Mar 2008. Disponível em:  
<<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.77.035806>>.

TODD-RUTEL, B. G.; PIEKAREWICZ, J. Neutron-rich nuclei and neutron stars: A new accurately calibrated interaction for the study of neutron-rich matter. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 95, p. 122501, Sep 2005. Disponível em:  
<<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.95.122501>>.

TYPEL, S.; WOLTER, H. Relativistic mean field calculations with density-dependent meson-nucleon coupling. **Nuclear Physics A**, v. 656, n. 3 - 4, p. 331 – 364, 1999. ISSN 0375-9474. Disponível em:  
<<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375947499003103>>.

WALTON, T. et al. Measurement of muon plus proton final states in  $\nu_\mu$  interactions on hydrocarbon at  $E_\nu = 4.2$  GeV. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 91, p. 071301, Apr 2015. Disponível em:  
<<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.91.071301>>.

WATANABE, G. et al. Simulation of transitions between “pasta” phases in dense matter. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 94, p. 031101, Jan 2005. Disponível em:  
<<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.94.031101>>.

WATANABE, G. et al. Formation of nuclear “pasta” in supernovae. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 103, p. 121101, Sep 2009. Disponível em:  
<<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.103.121101>>.

YAKOVLEV, D. et al. Neutrino emission from neutron stars. **Physics Reports**, v. 354, n. 1 - 2, p. 1 – 155, 2001. ISSN 0370-1573. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157300001319>>.



## **APÊNDICE A – Cálculo da amplitude de transição $\mathcal{M}$**



A fim de obter a amplitude de transição, precisamos antes de mais nada conhecer a interação entre as partículas. A interação dos neutrinos com elétrons ou nucleons ou ainda com outros neutrinos, é mediada pelos bósons fracos  $Z$  e  $W^\pm$ . As equações 2.55 e 2.63 mostram esta interação. A interação responsável pelo espalhamento ou absorção é a interação fraca, mas os nucleons e elétrons também estão interagindo entre si e são descritos pelas equações 2.74 e 2.75 ou 2.135 e 2.133. Aqui utilizaremos a aproximação de Thomas-Fermi, considerando que o sistema é uniforme dentro do raio de ação da interação. Assim, para efeito do cálculo da amplitude de transição, podemos considerar o sistema uniforme em todo o espaço e que as partículas são descritas por ondas planas antes e depois da interação.

A figura 1 mostra o diagrama de Feynman para o espalhamento de um neutrino por um nucleon. Conforme (HALZEN; MARTIN, 1984), podemos escrever a amplitude de transição como

$$T_{fi} = -i \frac{g^2}{M_Z^2} \int j^{l\mu}(x) j_\mu^A(x) d^4x \quad (\text{A.1})$$

onde as correntes fracas são

$$j^{l\mu}(x) = \frac{1}{2} \bar{\psi}_{\nu 3}(x) \frac{\gamma^\mu}{2} (1 - \gamma^5) \psi_{\nu 1}(x); \quad (\text{A.2})$$

$$j^{A\mu}(x) = \frac{1}{2} \bar{\psi}_4(x) \gamma^\mu (c_V - c_A \gamma^5) \psi_2(x). \quad (\text{A.3})$$

Os  $\psi_i$ 's são funções de onda de uma partícula e o índice “ $\nu$ ” indica que é a função de onda de um neutrino. Com soluções de onda plana do tipo

$$\psi_i(x) = \psi_\alpha e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\varepsilon(k)t}, \quad (\text{A.4})$$

a integração em  $d^4x$  fornece o fator  $(2\pi)^4 \delta^4(P_1 + P_2 - P_3 - P_4)$  que aparece na expressão 3.5, onde a componente zero dos  $P_i$ 's são as energias de partícula única e  $\psi_\alpha$  é o spinor de Dirac. O mesmo vale para a reação de absorção.

A amplitude de transição  $\mathcal{M}$  para o diagrama da figura 1 é

$$\mathcal{M} = \frac{g^2}{8M_Z^2} \left[ \bar{\psi}_{\nu 3} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \psi_{\nu 1} \right] \left[ \bar{\psi}_4 \gamma^\mu (c_V - c_A \gamma^5) \psi_2 \right] \quad (\text{A.5})$$

onde  $\psi_{\nu 1} \equiv \psi_{\nu 1}(\vec{k}_1, \lambda)$  é o spinor do neutrino incidente,  $\psi_{\nu 3} \equiv \psi_{\nu 3}(\vec{k}_3, \lambda)$  é o spinor do neutrino emergente,  $\psi_2 \equiv \psi_2(\vec{k}_2, \lambda)$  é o spinor do alvo e  $\psi_4 \equiv \psi_4(\vec{k}_4, \lambda)$  é o spinor do alvo após a colisão.

O módulo quadrado da equação acima é

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{g^4}{64M_Z^4} [\bar{\psi}_{\nu 3} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \psi_{\nu 1}] [\bar{\psi}_{\nu 3} \gamma_\beta (1 - \gamma^5) \psi_{\nu 1}]^* \cdot [\bar{\psi}_4 \gamma^\mu (c_V - c_A \gamma^5) \psi_2] [\bar{\psi}_4 \gamma^\beta (c_V - c_A \gamma^5) \psi_2]^*. \quad (\text{A.6})$$

Usando  $[\bar{\psi}_i \Gamma \psi_j]^* = [\bar{\psi}_j \gamma^0 \Gamma^\dagger \gamma^0 \psi_i]$ , encontramos

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{g^4}{64M_Z^4} [\bar{\psi}_{\nu 3} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \psi_{\nu 1}] [\bar{\psi}_{\nu 1} \gamma_\beta (1 - \gamma^5) \psi_{\nu 3}] \cdot [\bar{\psi}_4 \gamma^\mu (c_V - c_A \gamma^5) \psi_2] [\bar{\psi}_2 \gamma^\beta (c_V - c_A \gamma^5) \psi_4]. \quad (\text{A.7})$$

Para tomar a média sobre os spins iniciais devemos somar  $\psi_{\nu 1}$  e  $\psi_2$  sobre os spins e multiplicar por um fator  $1/2$ , pois o nucleon pode ter duas orientações de spin, enquanto que quando definimos o momento do neutrino, a sua orientação de spin fica definida. No entanto, para facilitar o cálculo, efetuamos a soma sobre  $S_1$  e  $S_3$ , pois o fator  $(1 - \gamma^5)/2$  seleciona apenas os neutrinos de mão esquerda (HALZEN; MARTIN, 1984; GRIFFITHS, 2009). Assim, somando sobre os spins finais

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{g^4}{128M_Z^4} \sum_{S_3} \left[ \bar{\psi}_{\nu 3} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \sum_{S_1} \psi_{\nu 1} \bar{\psi}_{\nu 1} \gamma_\beta (1 - \gamma^5) \psi_{\nu 3} \right] \cdot \sum_{S_4} \left[ \bar{\psi}_4 \gamma^\mu (c_V - c_A \gamma^5) \sum_{S_2} \psi_2 \bar{\psi}_2 \gamma^\beta (c_V - c_A \gamma^5) \psi_4 \right]. \quad (\text{A.8})$$

Precisamos calcular  $\sum_{S_2} \psi_2 \bar{\psi}_2$ , porém, como dissemos antes, o nucleon interage com o resto do sistema, e a soma sobre os spins  $\sum_S \psi \bar{\psi}$  não é apenas:

$$\sum_S \psi \bar{\psi} = \gamma_\mu P^\mu + M, \quad (\text{A.9})$$

que é o caso de um nucleon livre.

A equação de Dirac para o spinor  $U(\vec{k}, \lambda)$  dos nucleons para o modelo de Walecka não-linear pode ser escrita como:

$$\left[ \gamma^0 \varepsilon^+(k) - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} - M^* - g_\nu \gamma^0 V_0 - \frac{1}{2} g_\rho \tau_3 \gamma^0 b_0 - e \frac{1 + \tau_3}{2} \gamma^0 A_0 \right] U(\vec{k}, \lambda) = 0 \quad (\text{A.10})$$

ou

$$\begin{pmatrix} E^* - M^* & -\vec{k} \cdot \vec{\sigma} \\ \vec{k} \cdot \vec{\sigma} & -E^* - M^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_a \\ u_b \end{pmatrix} = 0. \quad (\text{A.11})$$

Para a parametrização dependente da densidade, a equação de Dirac para  $U(\vec{k}, \lambda)$  é:

$$\begin{aligned} & \left[ \gamma^0 \varepsilon^+(k) - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} - M^* - \gamma^0 \left( g_v + \frac{\partial g_v}{\partial \rho_B} \rho_B \right) V_0 \right. \\ & \left. - \gamma^0 \left( g_\rho + \frac{\partial g_\rho}{\partial \rho_B} \rho_B \right) \frac{\tau_3}{2} b_0 + \gamma^0 \frac{\partial g_s}{\partial \rho_B} \rho_s \phi_0 - e \frac{1 + \tau_3}{2} \gamma^0 A_0 \right] U(\vec{k}, \lambda) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

ou

$$\begin{pmatrix} E^* - M^* & -\vec{k} \cdot \vec{\sigma} \\ \vec{k} \cdot \vec{\sigma} & -E^* - M^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_a \\ u_b \end{pmatrix} = 0. \quad (\text{A.13})$$

As equações A.11 e A.13 são iguais à equação para uma partícula livre, mas com a energia dada por  $E^*$  e a massa dada por  $M^*$ . Temos então que os spinores dos nucleons devem satisfazer:

$$\sum_S \psi \bar{\psi} = \gamma_\mu P^{*\mu} + M^*. \quad (\text{A.14})$$

Da mesma forma para os elétrons e neutrinos, respectivamente:

$$\sum_S \psi_e \bar{\psi}_e = \gamma_\mu P^{*\mu} + m_e; \quad (\text{A.15})$$

$$\sum_S \psi_\nu \bar{\psi}_\nu = \gamma_\mu P^{*\mu}, \quad (\text{A.16})$$

onde  $P^* = (E^*, \vec{k})$ ,  $E^* = \sqrt{k^2 + M^{*2}}$  para os nucleons,  $E^* = \sqrt{k^2 + m_e^2}$  para os elétrons e  $E^* = k$  para os neutrinos.

Assim:

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = & \frac{g^4}{128M_Z^4} \sum_{S_3} \left[ \bar{\psi}_{\nu 3} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \gamma_\alpha P_1^{*\alpha} \gamma_\beta (1 - \gamma^5) \psi_{\nu 3} \right] \\ & \cdot \sum_{S_4} \left[ \bar{\psi}_4 \gamma^\mu (c_V - c_A \gamma^5) (\gamma_\sigma P_2^{*\sigma} + M^*) \gamma^\beta (c_V - c_A \gamma^5) \psi_4 \right] \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= \frac{g^4}{128M_Z^4} \text{Tr} \left[ \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \gamma_\alpha P_1^{*\alpha} \gamma_\beta (1 - \gamma^5) \gamma_\lambda P_3^{*\lambda} \right] \\ &\quad \cdot \text{Tr} \left[ \gamma^\mu (c_V - c_A \gamma^5) (\gamma_\sigma P_2^{*\sigma} + M^*) \gamma^\beta (c_V - c_A \gamma^5) (\gamma_\eta P_4^{*\eta} + M^*) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Utilizando teoremas do traço (GRIFFITHS, 2009) obtemos:

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= \frac{g^4}{2M_Z^4} E_1^* E_2^* E_3^* E_4^* \cdot \{ (c_V + c_A)^2 (1 - v_2 \cos(\theta_{12})) (1 - v_4 \cos(\theta_{34})) \\ &\quad + (c_V - c_A)^2 (1 - v_4 \cos(\theta_{14})) (1 - v_2 \cos(\theta_{23})) \\ &\quad - \frac{M^{*2}}{E_2^* E_4^*} (c_V^2 - c_A^2) (1 - \cos(\theta_{13})) \}, \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

onde  $v_i = |\vec{p}_i|/E_i^*$  e  $\cos(\theta_{ij})$  é o ângulo entre os vetores  $\vec{p}_i$  e  $\vec{p}_j$ .

Para uma reação de absorção de um neutrino por um nêutron temos o diagrama de Feynman mostrado na figura 2. A amplitude de transição para tal diagrama é:

$$\mathcal{M} = \frac{g'^2}{8M_W^2} \left[ \bar{\psi}_3 \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \psi_1 \right] \left[ \bar{\psi}_4 \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma^5) \psi_2 \right]. \quad (\text{A.20})$$

onde  $\psi_1$  é o spinor do neutrino,  $\psi_3$  é spinor do elétron,  $\psi_2$  é spinor do nêutron e  $\psi_4$  é spinor do próton.

O módulo quadrado da equação acima é:

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{g'^4}{64M_W^4} [\bar{\psi}_3 \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \psi_1] [\bar{\psi}_3 \gamma_\beta (1 - \gamma^5) \psi_1]^* \\ &\quad \cdot [\bar{\psi}_4 \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma^5) \psi_2] [\bar{\psi}_4 \gamma^\beta (g_V - g_A \gamma^5) \psi_2]^*. \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Usando  $[\bar{\psi}_i \Gamma \psi_j]^* = [\bar{\psi}_j \Gamma^\dagger \psi_i]$ ,

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{g'^4}{64M_W^4} [\bar{\psi}_3 \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \psi_1] [\bar{\psi}_1 \gamma_\beta (1 - \gamma^5) \psi_3] \\ &\quad \cdot [\bar{\psi}_4 \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma^5) \psi_2] [\bar{\psi}_2 \gamma^\beta (g_V - g_A \gamma^5) \psi_4] \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = & \frac{g'^4}{128M_W^4} \sum_{S_3} \left[ \bar{\psi}_3 \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \sum_{S_1} \psi_1 \bar{\psi}_1 \gamma_\beta (1 - \gamma^5) \psi_3 \right] \\ & \cdot \sum_{S_4} \left[ \bar{\psi}_4 \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma^5) \sum_{S_2} \psi_2 \bar{\psi}_2 \gamma^\beta (g_V - g_A \gamma^5) \psi_4 \right] \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = & \frac{g'^4}{128M_W^4} \text{Tr} \left[ \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \gamma_\alpha P_1^{*\alpha} \gamma_\beta (1 - \gamma^5) (\gamma_\lambda P_3^{*\lambda} + m_e) \right] \\ & \cdot \text{Tr} \left[ \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma^5) (\gamma_\sigma P_2^{*\sigma} + M^*) \gamma^\beta (g_V - g_A \gamma^5) (\gamma_\eta P_4^{*\eta} + M^*) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Utilizando novamente teoremas do traço obtemos:

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = & \frac{g'^4}{2M_W^4} E_1^* E_2^* E_3^* E_4^* \cdot \{ (g_V + g_A)^2 (1 - v_2 \cos(\theta_{12})) (1 - v_4 \cos(\theta_{34})) \\ & + (g_V - g_A)^2 (1 - v_4 \cos(\theta_{14})) (1 - v_2 \cos(\theta_{23})) \\ & - \frac{M^{*2}}{E_2^* E_4^*} (g_V^2 - g_A^2) (1 - \cos(\theta_{13})) \}. \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

No caso de uma colisão neutrino-elétron, os dois processos possíveis são mostrados na figura 3. As amplitudes de transição para cada diagrama são, respectivamente (HALZEN; MARTIN, 1984):

$$\mathcal{M}_1 = \frac{g^2}{8M_Z^2} \left[ \bar{\psi}_{\nu 3} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \psi_{\nu 1} \right] \left[ \bar{\psi}_4 \gamma^\mu (c_V - c_A \gamma^5) \psi_2 \right]; \quad (\text{A.26})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_2 = & \frac{g'^2}{8M_W^2} \left[ \bar{\psi}_4 \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \psi_{\nu 1} \right] \left[ \bar{\psi}_{\nu 3} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \psi_2 \right] \\ = & - \frac{g^2}{8M_Z^2} \left[ \bar{\psi}_{\nu 3} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \psi_{\nu 1} \right] \left[ \bar{\psi}_4 \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \psi_2 \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Não sabemos qual reação pode ocorrer, e a amplitude total é:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = & \mathcal{M}_1 - \mathcal{M}_2 \\ = & \frac{g^2}{8M_Z^2} \left[ \bar{\psi}_{\nu 3} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \psi_{\nu 1} \right] \left[ \bar{\psi}_4 \gamma^\mu (c_V^* - c_A^* \gamma^5) \psi_2 \right], \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

onde o sinal negativo vem da regra de Feynman de antissimetriação,  $c_V^* = c_V + 1$  e  $c_A^* = c_A + 1$ . A expressão acima tem a mesma forma do caso do espalhamento neutrino-nucleon, portanto:

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= \frac{g^4}{2M_Z^4} E_1^* E_2^* E_3^* E_4^* \cdot \{ (c_V^* + c_A^*)^2 (1 - v_2 \cos(\theta_{12})) (1 - v_4 \cos(\theta_{34})) \\ &\quad + (c_V^* - c_A^*)^2 (1 - v_4 \cos(\theta_{14})) (1 - v_2 \cos(\theta_{23})) \\ &\quad - \frac{m_e^2}{E_2^* E_4^*} (c_V^{*2} - c_A^{*2}) (1 - \cos(\theta_{13})) \}. \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

Para uma colisão neutrino-neutrino, não temos como saber qual dos neutrinos emergentes veio do neutrino alvo ou do neutrino incidente. A figura 4 mostra os dois diagramas de Feynman possíveis para tal colisão. Desta forma, para uma colisão neutrino-neutrino temos:

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 - \mathcal{M}_2; \quad (\text{A.30})$$

$$\mathcal{M}_1 = \frac{g^2}{16M_Z^2} \left[ \bar{\psi}_{\nu 3} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \psi_{\nu 1} \right] \left[ \bar{\psi}_{\nu 4} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \psi_{\nu 2} \right]; \quad (\text{A.31})$$

$$\mathcal{M}_2 = \frac{g^2}{16M_Z^2} \left[ \bar{\psi}_{\nu 4} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \psi_{\nu 1} \right] \left[ \bar{\psi}_{\nu 3} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \psi_{\nu 2} \right] \quad (\text{A.32})$$

onde já usamos  $c_V = 1/2$  e  $c_A = 1/2$  para os neutrinos.

Para a equação A.30 temos:

$$|\mathcal{M}|^2 = |\mathcal{M}_1|^2 + |\mathcal{M}_2|^2 - \mathcal{M}_1^* \mathcal{M}_2 - \mathcal{M}_2^* \mathcal{M}_1. \quad (\text{A.33})$$

A média sobre os spins iniciais e a soma sobre os spins finais fornece:

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= \frac{4g^4}{M_Z^4} (P_1^* \cdot P_2^*) (P_3^* \cdot P_4^*) \\ &= \frac{4g^4}{M_Z^4} k_1 k_2 k_3 k_4 (1 - \cos(\theta_{12})) (1 - \cos(\theta_{34})), \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

onde já usamos  $E_i^* = |\vec{k}_i| = k_i$ .

## **APÊNDICE B – Cálculo da integral da seção de choque**



A delta de Dirac na expressão 3.8 é:

$$\delta^4(P_1 + P_2 - P_3 - P_4) = \delta(E_1 + E_2 - E_3 - E_4) \delta^3(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 - \vec{k}_3 - \vec{k}_4). \quad (\text{B.1})$$

Realizando a integração em  $d^3k_4$ , fazendo  $\vec{k}_1 = k_1 \hat{z}$ , temos:

$$\begin{aligned} \sigma = & \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{g^4}{32M_Z^4} \int d^3r \int d^3k_2 \int k_3^2 dk_3 \int_0^\pi \text{sen}(\theta_3) d\theta_3 \int_0^{2\pi} d\phi_3 \\ & \cdot \delta(E_1 + E_2 - E_3 - E_4) \frac{\eta_2(T)(1 - \eta_3(T))(1 - \eta_4(T))}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} \\ & \cdot \left\{ (\mathcal{V} + \mathcal{A})^2 (1 - v_2 \cos(\theta_2)) \left( 1 - \frac{k_1 \cos(\theta_3) + k_2 \cos(\theta_{23}) - k_3}{E_4^*} \right) \right. \\ & + (\mathcal{V} - \mathcal{A})^2 \left( 1 - \frac{k_1 + k_2 \cos(\theta_2) - k_3 \cos(\theta_3)}{E_4^*} \right) (1 - v_2 \cos(\theta_{23})) \\ & \left. - \frac{m^2}{E_2^* E_4^*} (\mathcal{V}^2 - \mathcal{A}^2) (1 - \cos(\theta_3)) \right\} \quad (\text{B.2}) \end{aligned}$$

onde agora  $\vec{k}_4 = \vec{k}_1 + \vec{k}_2 - \vec{k}_3$  e

$$v_4 \cos(\theta_{i4}) = \frac{k_4}{E_4^*} \frac{\vec{k}_i \cdot \vec{k}_4}{k_i k_4} = \frac{\vec{k}_i \cdot (\vec{k}_1 + \vec{k}_2 - \vec{k}_3)}{k_i E_4^*}. \quad (\text{B.3})$$

Realizaremos agora a integração em  $k_3$ . Para isto usaremos a seguinte propriedade da função delta de Dirac (GRIFFITHS, 2009):

$$\int f(x) \delta(g(x)) dx = \sum_i \frac{f(x_i)}{|g'(x_i)|} \quad (\text{B.4})$$

com  $g(x_i) = 0$ . Escrevemos então:

$$\sigma = \int f(k_3) \delta(g(k_3)) dk_3, \quad (\text{B.5})$$

onde

$$\begin{aligned}
 f(k_3) = & \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{g^4}{32M_Z^4} \int d^3 r \int d^3 k_2 \int_0^\pi \text{sen}(\theta_3) d\theta_3 \int_0^{2\pi} d\phi_3 k_3^2 \\
 & \cdot \frac{\eta_2(T)(1-\eta_3(T))(1-\eta_4(T))}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} \\
 & \cdot \left\{ (\mathcal{V} + \mathcal{A})^2 (1 - v_2 \cos(\theta_2)) \left( 1 - \frac{k_1 \cos(\theta_3) + k_2 \cos(\theta_{23}) - k_3}{E_4^*} \right) \right. \\
 & + (\mathcal{V} - \mathcal{A})^2 \left( 1 - \frac{k_1 + k_2 \cos(\theta_2) - k_3 \cos(\theta_3)}{E_4^*} \right) (1 - v_2 \cos(\theta_{23})) \\
 & \left. - \frac{m^2}{E_2^* E_4^*} (\mathcal{V}^2 - \mathcal{A}^2) (1 - \cos(\theta_3)) \right\}; \tag{B.6}
 \end{aligned}$$

$$g(k_3) = E_1 + E_2 - E_3 - E_4; \tag{B.7}$$

$$k_4^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + 2(k_1 k_2 \cos(\theta_2) - k_1 k_3 \cos(\theta_3) - k_2 k_3 \cos(\theta_{23})). \tag{B.8}$$

Para o caso do espalhamento:

$$g(k_3) = E_1 + E_2 - E_3 - E_4 = E_1^* + E_2^* - E_3^* - E_4^* = k_1 + E_2^* - k_3 - \sqrt{m^2 + k_4^2} \tag{B.9}$$

cuja solução para  $g(k_3) = 0$  é

$$k_3 = \frac{k_1 (E_2^* - k_2 \cos(\theta_2))}{k_1 + E_2^* - k_1 \cos(\theta_3) - k_2 \cos(\theta_{23})}. \tag{B.10}$$

Para o caso acima

$$|g'(k_3)| = \frac{k_1 (1 - \cos(\theta_3)) + E_2^* - k_2 \cos(\theta_{23})}{k_1 + E_2^* - k_3}. \tag{B.11}$$

Finalmente

$$\begin{aligned}
 \sigma = & \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{g^4}{32M_Z^4} \int d^3r \int d^3k_2 \int_0^\pi \text{sen}(\theta_3) d\theta_3 \int_0^{2\pi} d\phi_3 k_3^2 \\
 & \cdot \frac{\eta_2(T)(1-\eta_3(T))(1-\eta_4(T))}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} \frac{k_1 + E_2^* - k_3}{k_1(1 - \cos(\theta_3)) + E_2^* - k_2 \cos(\theta_{23})} \\
 & \cdot \left\{ (c_V + c_A)^2 (1 - v_2 \cos(\theta_2)) \left( 1 - \frac{k_1 \cos(\theta_3) + k_2 \cos(\theta_{23}) - k_3}{E_4^*} \right) \right. \\
 & + (c_V - c_A)^2 \left( 1 - \frac{k_1 + k_2 \cos(\theta_2) - k_3 \cos(\theta_3)}{E_4^*} \right) (1 - v_2 \cos(\theta_{23})) \\
 & \left. - \frac{m^2}{E_2^* E_4^*} (c_V^2 - c_A^2) (1 - \cos(\theta_3)) \right\}. \tag{B.12}
 \end{aligned}$$

Para o caso de absorção:

$$\begin{aligned}
 g(k_3) = & E_1 + E_2 - E_3 - E_4 = E_1^* + E_2^* - E_3^* - E_4^* - g_\rho b_0 \\
 = & k_1 + E_2^* - \sqrt{m_e^2 + k_3^2} - \sqrt{M^{*2} + k_4^2} - g_\rho b_0 \tag{B.13}
 \end{aligned}$$

cuja solução para  $g(k_3) = 0$  é

$$\begin{aligned}
 k_3 = & -\frac{2(k_1 \cos(\theta_3) + k_2 \cos(\theta_{23}))(C^2 + m_e^2 - D)}{4(k_1 \cos(\theta_3) + k_2 \cos(\theta_{23}))^2 - 4C^2} \\
 & - \frac{\sqrt{16m_e^2 C^2 (k_1 \cos(\theta_3) + k_2 \cos(\theta_{23}))^2 + 4C^2 (C^2 + m_e^2 - D)^2 - 16m_e^2 C^4}}{4(k_1 \cos(\theta_3) + k_2 \cos(\theta_{23}))^2 - 4C^2} \tag{B.14}
 \end{aligned}$$

onde

$$C = k_1 + E_2^* - g_\rho b_0; \quad D = (\vec{k}_1 + \vec{k}_2)^2 + M^{*2}. \tag{B.15}$$

A derivada de  $g(k_3)$  aplicada no  $k_3$  acima é:

$$\begin{aligned}
 |g'(k_3)| = & \frac{k_3}{\sqrt{m_e^2 + k_3^2}} + \frac{k_3 - (k_1 \cos(\theta_3) + k_2 \cos(\theta_{23}))}{C - \sqrt{m_e^2 + k_3^2}} \\
 = & \frac{Ck_3 - (k_1 \cos(\theta_3) + k_2 \cos(\theta_{23}))\sqrt{m_e^2 + k_3^2}}{\sqrt{m_e^2 + k_3^2}(C - \sqrt{m_e^2 + k_3^2})}. \tag{B.16}
 \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}
 \sigma &= \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{g^4}{32M_Z^4} \int d^3r \int d^3k_2 \int_0^\pi \text{sen}(\theta_3) d\theta_3 \int_0^{2\pi} d\phi_3 k_3^2 \\
 &\cdot \frac{\eta_2(T)(1-\eta_3(T))(1-\eta_4(T))}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} \frac{\sqrt{m_e^2 + k_3^2} \left( C - \sqrt{m_e^2 + k_3^2} \right)}{Ck_3 - (k_1 \cos(\theta_3) + k_2 \cos(\theta_{23})) \sqrt{m_e^2 + k_3^2}} \\
 &\cdot \left\{ (g_V + g_A)^2 (1 - v_2 \cos(\theta_2)) \left( 1 - \frac{k_1 \cos(\theta_3) + k_2 \cos(\theta_{23}) - k_3}{E_4^*} \right) \right. \\
 &+ (g_V - g_A)^2 \left( 1 - \frac{k_1 + k_2 \cos(\theta_2) - k_3 \cos(\theta_3)}{E_4^*} \right) (1 - v_2 \cos(\theta_{23})) \\
 &\left. - \frac{m^2}{E_2^* E_4^*} (g_V^2 - g_A^2) (1 - \cos(\theta_3)) \right\}. \tag{B.17}
 \end{aligned}$$

Para um espalhamento neutrino-neutrino:

$$\begin{aligned}
 f(k_3) &= \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{g^4}{4M_Z^4} \int d^3k_2 \int_0^\pi \text{sen}(\theta_3) d\theta_3 \int_0^{2\pi} d\phi_3 k_3^2 \\
 &\cdot \frac{\eta_2(T)(1-\eta_3(T))(1-\eta_4(T))}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} (1 - \cos(\theta_2))(1 - \cos(\theta_{34})); \tag{B.18}
 \end{aligned}$$

$$g(k_3) = E_1 + E_2 - E_3 - E_4 = k_1 + k_2 - k_3 - k_4, \tag{B.19}$$

cuja solução para  $g(k_3) = 0$  é

$$k_3 = \frac{k_1 k_2 (1 - \cos(\theta_2))}{k_1 + k_2 - k_1 \cos(\theta_3) - k_2 \cos(\theta_{23})}. \tag{B.20}$$

Neste caso

$$|g'(k_3)| = \frac{k_1 (1 - \cos(\theta_3)) + k_2 (1 - \cos(\theta_{23}))}{k_1 + k_2 - k_3}; \tag{B.21}$$

$$\sigma = \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{g^4}{4M_Z^4} \int d^3r \int d^3k_2 \int_0^\pi \sin(\theta_3) d\theta_3 \int_0^{2\pi} d\phi_3 k_3^2 \cdot \frac{\eta_2(T)(1-\eta_3(T))(1-\eta_4(T))}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} \frac{k_1 + k_2 - k_3}{k_1(1-\cos(\theta_3)) + k_2(1-\cos(\theta_{23}))} \cdot (1-\cos(\theta_2)) \left( 1 - \frac{k_1 \cos(\theta_3) + k_2 \cos(\theta_{23}) - k_3}{k_4} \right). \quad (\text{B.22})$$

Para calcular as integrais apresentadas aqui utilizamos dois métodos de Monte Carlo. Para cada variável de integração sorteamos um ponto aleatoriamente no espaço de integração. Para cada conjunto de pontos sorteados, calculamos o valor da função e somamos os valores para depois calcular a média e obter o resultado final. No segundo método, os limites de integração são tomados maiores que os originais, e para cada conjunto de pontos sorteados aleatoriamente, calculamos o valor da função e comparamos com outro número sorteado aleatoriamente. Contamos então o número de pontos que ficam abaixo do valor da função. O resultado da integral é obtido multiplicando a fração de pontos que ficam abaixo da hipersuperfície da função pelo hipervolume do espaço de integração aumentado. Os dois métodos estão em ótimo acordo, porém o primeiro se mostrou menos sensível ao número de pontos utilizados e também ao valor da semente do gerador de números aleatórios. Os resultados aqui apresentados são para o primeiro método.

Calculamos o desvio padrão em torno da média:

$$\Delta x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}, \quad (\text{B.23})$$

para testar o método descrito acima para o LCMN. Usamos  $N = 20$  e as integrais foram calculadas com 1.000.000 de pontos de Monte Carlo para cada  $x_i$ . O desvio padrão encontrado é de no máximo 1%, o que nos leva a concluir que o método é bastante confiável.



**APÊNDICE C - Cálculo da integral para a seção de choque no  
Espalhamento Coerente**



A partir da expressão 3.40, usando 3.34 e 3.39, temos

$$\begin{aligned}
 \sigma_T &= \int \frac{1}{N} \frac{d\sigma}{d\Omega} (1 - \cos(\theta)) d\Omega \\
 &= \int \frac{G^2}{4\pi^2} k^2 \gamma^2 (1 + \cos(\theta))(1 - \cos(\theta)) \\
 &\quad \cdot \left\{ 1 + \frac{4\pi\bar{\rho}_n}{q} \int_0^\infty r[g(r) - 1] \text{sen}(qr) dr \right\} d\Omega \\
 &= \frac{G^2}{4\pi^2} k^2 \gamma^2 \left\{ \int (1 - \cos^2(\theta)) d\Omega \right. \\
 &\quad \left. + 4\pi\bar{\rho}_n \int (1 - \cos^2(\theta)) \int_0^\infty r[g(r) - 1] \frac{\text{sen}(qr)}{q} dr d\Omega \right\}. \quad (\text{C.1})
 \end{aligned}$$

A primeira integral é

$$I_1 = \int (1 - \cos^2(\theta)) d\Omega = \frac{8\pi}{3}. \quad (\text{C.2})$$

A segunda integral é

$$\begin{aligned}
 I_2 &= 4\pi\bar{\rho}_n \int (1 - \cos^2(\theta)) \int_0^\infty r[g(r) - 1] \frac{\text{sen}(qr)}{q} dr d\Omega \\
 &= 4\pi\bar{\rho}_n \int_0^\infty [g(r) - 1] I_3 dr. \quad (\text{C.3})
 \end{aligned}$$

Podemos calcular a integral em  $d\Omega$ . A integral em  $d\phi$  é trivial:

$$\begin{aligned}
 I_3 &= \int (1 - \cos^2(\theta)) r \frac{\text{sen}(qr)}{q} d\Omega. \\
 &= 2\pi \int_{-1}^1 (1 - \cos^2(\theta)) r \frac{\text{sen}(2kr\sqrt{1 - \cos(\theta)})}{\sqrt{2k}\sqrt{1 - \cos(\theta)}} d\cos(\theta). \quad (\text{C.4})
 \end{aligned}$$

Fazendo  $u = \cos(\theta)$ , e depois  $v = \sqrt{1 - u}$ , obtemos

$$I_3 = 2\pi \int_{\sqrt{2}}^0 (2v^2 - v^4) r \frac{\text{sen}(av)}{2kv} (-2v) dv, \quad (\text{C.5})$$

onde  $a = \sqrt{2}kr$ . A solução, onde  $b = 2kr$ , é

$$I_3 = \frac{8\pi}{3k^2} \left[ \frac{72}{b^4} (\cos(b) + b\text{sen}(b) - 1) - \frac{6}{b^2} (5\cos(b) + b\text{sen}(b) + 1) \right]. \quad (\text{C.6})$$

Logo,

$$\sigma_T = \frac{G^2}{4\pi^2} k^2 \gamma^2 (I_1 + I_2). \quad (\text{C.7})$$

## **APÊNDICE D – Cálculo da função de correlação**



Após sortear os nêutrons dentro de uma caixa cúbica, podemos calcular a função de correlação  $g(r)$ . Infelizmente, o lado do cubo foi limitado por razões computacionais (dimensão das matrizes). Como precisamos conhecer ao mesmo tempo a posição de todos os nêutrons para medir a distância entre eles, temos que limitar o número de nêutrons ao tamanho de vetor disponível do programa numérico.

No entanto, como o cubo tem um tamanho finito e queremos obter  $g(r)$  para até o maior  $r$  possível, não podemos usar o fator  $4\pi r dr$ , que representa a área de uma casca esférica de espessura  $dr$ , na expressão 3.43, pois, como a caixa cúbica é finita, a casca esférica pode sair da caixa. Usando  $4\pi r dr$ , estaríamos considerando espaços onde não há nêutrons. Temos então que calcular a área  $A_j(r)$  da parte da casca esférica, centrada no nêutron  $j$ , com um raio  $r$ , que fica dentro da caixa.

O raio  $r$  é discretizado para facilitar o cálculo. Para cada  $r$ , temos um número de nêutrons  $dN_j(r)$  a uma distância entre  $r$  e  $r + dr$  do nêutron  $j$ . A contribuição do nêutron  $j$  para a função de correlação é

$$g_j(r) = \frac{dN_j(r)}{A_j(r)drN\bar{\rho}_n}. \quad (\text{D.1})$$

A função de correlação total é a soma em  $j$  de  $g_j(r)$ :  $g(r) = \sum_{j=1}^N g_j(r)$ .

Fazemos algumas mudanças para poder calcular  $A_j(r)$ . Como já calculamos a distância entre o nêutron  $j$  e o resto, podemos mudar aquele de octante para facilitar o cálculo da área devido à simetria da caixa. Por conveniência, transferimos o nêutron para o primeiro octante. Para um nêutron na posição  $P$ , tal que a origem é o centro do cubo, suas coordenadas são  $(x_P, y_P, z_P)$ . Fazemos

$$x_P \rightarrow |x_P|, \quad y_P \rightarrow |y_P|, \quad z_P \rightarrow |z_P|. \quad (\text{D.2})$$

Como veremos mais adiante, facilita reordenar as coordenadas, sem alterar a área, para obter

$$z_P \geq y_P \geq x_P. \quad (\text{D.3})$$

Assim,  $d_{xy} \geq d_{zx} \geq d_{yz}$ , onde  $d_{ij}$  é a distância entre  $P$  até a aresta  $ij$  do cubo. Por exemplo, onde  $B$  é a metade do lado do cubo,

$$d_{xy} = \sqrt{(B - x_P)^2 + (B - y_P)^2}. \quad (\text{D.4})$$

Outra definição útil é

$$x'_1 = B - x_P, \quad x'_2 = B - y_P, \quad x'_3 = B - z_P, \quad (\text{D.5})$$

onde já usamos  $(x_P, y_P, z_P)$  redefinidos.

Vamos considerar apenas  $r < B$ . Podemos dividir o cálculo da área em quatro casos, dependendo da relação entre  $r$  e  $d_{ij}$ .

Caso 1:  $r \leq d_{ij}$ . Neste caso, se a distância entre  $P$  e o lado  $i$  for menor que  $r$ , sai uma calota esférica do cubo por este lado, e devemos descontar a área desta. Em geral, se

$$\frac{x_i'}{r} < 1, \quad (\text{D.6})$$

então

$$A_{cali} = 2\pi r^2 \int_0^{\theta_i} \sin(\theta) d\theta = 2\pi r^2 (1 - \cos(\theta_i)), \quad \cos(\theta_i) = \frac{x_i'}{r}. \quad (\text{D.7})$$

A área da casca dentro do cubo é

$$A_P(r) = 4\pi r^2 - \sum_{i=1}^3 A_{cali}. \quad (\text{D.8})$$

Caso 2:  $r > d_{yz}$  mas  $r \leq d_{xy}$  e  $r \leq d_{zx}$ . A casca esférica sai pela aresta  $yz$  e pode sair uma calota pelo lado  $x$ . A parte sombreada da figura 42 apresenta a região de integração nos ângulos polar  $\theta$  e azimutal  $\phi$ , onde não sai uma calota pelo lado  $x$ .

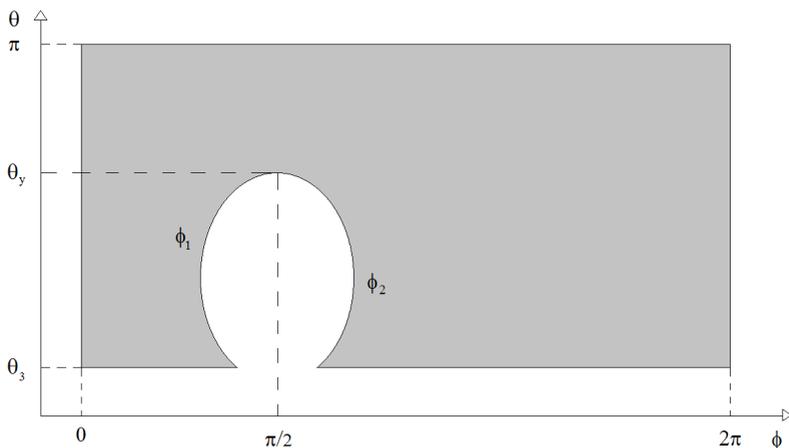


Figura 42 – Região cinza é a região de integração para o caso 2. O gráfico não está em escala.

Lembrando que o elemento de área de uma casca esférica é  $dA =$

$r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi$ , obtemos

$$\frac{A_P(r)}{r^2} = 2\pi + \pi(\cos(\theta_y) + \cos(\theta_3)) + 2 \int_{\theta_3}^{\theta_y} \sin(\theta) \sin^{-1} \left( \frac{y'}{r \sin(\theta)} \right) d\theta - \frac{A_{calx}}{r^2}, \quad (D.9)$$

onde já incluímos uma possível calota no lado  $x$ , calculada como no Caso 1, e

$$\cos(\theta_3) = \frac{x'_3}{r}, \quad \cos(\theta_y - \pi/2) = \frac{x'_2}{r}. \quad (D.10)$$

Caso 3:  $r > d_{yz}$ ,  $r > d_{zx}$ , mas  $r \leq d_{xy}$ . A casca esférica sai pelas arestas  $yz$  e  $zx$ . A região de integração é mostrada na figura 43. Temos

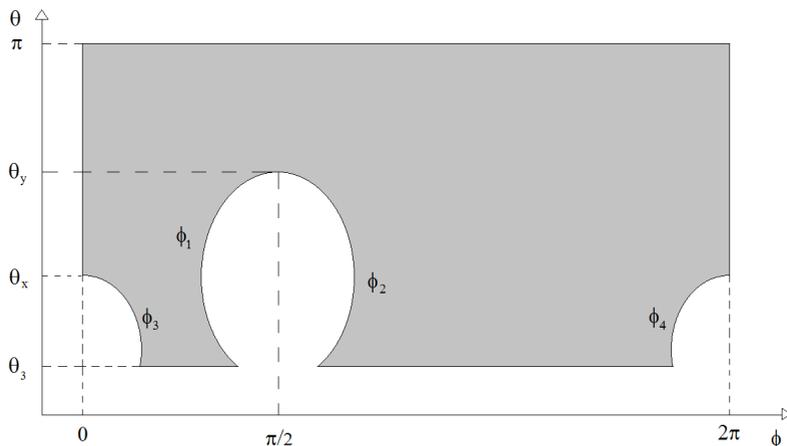


Figura 43 – Região cinza é a região de integração para o caso 3. O gráfico não está em escala.

$$\begin{aligned} \frac{A_P(r)}{r^2} &= 2\pi + \pi(\cos(\theta_y) + \cos(\theta_3)) + 2 \int_{\theta_3}^{\theta_y} \sin(\theta) \sin^{-1} \left( \frac{y'}{r \sin(\theta)} \right) d\theta \\ &\quad - 2 \int_{\theta_3}^{\theta_x} \sin(\theta) \cos^{-1} \left( \frac{x'}{r \sin(\theta)} \right) d\theta \\ &\quad + 2 \int_{\theta_x}^{\theta_y} \sin(\theta) \sin^{-1} \left( \frac{y'}{r \sin(\theta)} \right) d\theta. \end{aligned} \quad (D.11)$$

Devido à condição D.3, temos sempre  $\theta_y > \theta_x$ , onde

$$\cos(\theta_x - \pi/2) = \frac{x'_1}{r}. \quad (\text{D.12})$$

Caso 4:  $r > d_{ij}$ . A casca esférica sai pelas arestas e pode sair pelo vértice  $xyz$ . A figura 44 mostra a região de integração quando a casca esférica não sai pelo vértice  $xyz$ .

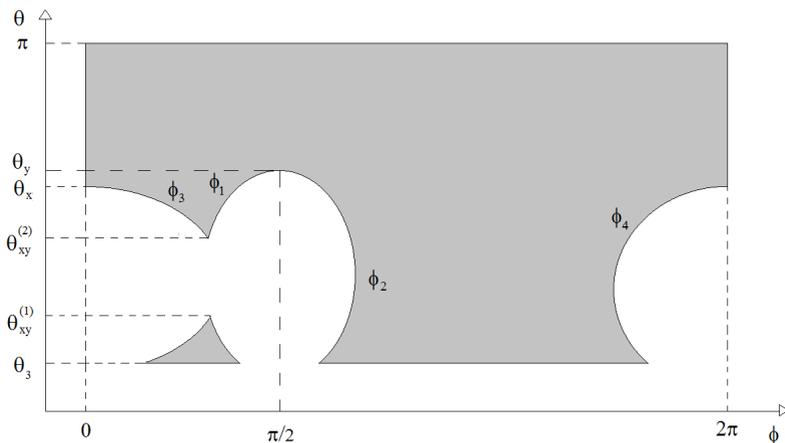


Figura 44 – Região cinza é a região de integração para o caso 4. O gráfico não está em escala.

Se sair pelo vértice  $xyz$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{A'}{r^2} = & 2\pi + \pi(\cos(\theta_y) + \cos(\theta_3)) + 2 \int_{\theta_x}^{\theta_y} \text{sen}(\theta) \text{sen}^{-1}\left(\frac{y'}{r\text{sen}(\theta)}\right) d\theta \\ & + \int_{\theta_{xy}^{(2)}}^{\theta_x} \text{sen}(\theta) \left[ \text{sen}^{-1}\left(\frac{y'}{r\text{sen}(\theta)}\right) - \cos^{-1}\left(\frac{x'}{r\text{sen}(\theta)}\right) \right] d\theta \\ & + \int_{\theta_3}^{\theta_x} \text{sen}(\theta) \left[ \text{sen}^{-1}\left(\frac{y'}{r\text{sen}(\theta)}\right) - \cos^{-1}\left(\frac{x'}{r\text{sen}(\theta)}\right) \right] d\theta. \quad (\text{D.13}) \end{aligned}$$

Caso não saia, temos o termo adicional

$$\frac{A''}{r^2} = \int_{\theta_3}^{\theta_{xy}^{(1)}} \text{sen}(\theta) \left[ \text{sen}^{-1}\left(\frac{y'}{r\text{sen}(\theta)}\right) - \cos^{-1}\left(\frac{x'}{r\text{sen}(\theta)}\right) \right] d\theta. \quad (\text{D.14})$$

A área total é

$$A_P(r) = A' + A'', \quad (\text{D.15})$$

onde

$$\theta_{xy}^{(1)} = \frac{\pi}{2} - \alpha, \quad \theta_{xy}^{(2)} = \frac{\pi}{2} + \alpha, \quad \cos(\alpha) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}. \quad (\text{D.16})$$

Como dissemos antes, apenas  $r < B$ , para a casca esférica não sair por outras arestas e lados.

Para testar se as áreas acima e o código numérico estão corretos, há um teste bem eficaz. Para um sistema formado por partículas em posições aleatórias sem nenhuma restrição, a função de correlação deve ser  $g(r) = 1$  para todo  $r$ . Fizemos o teste sorteando nêutrons aleatoriamente sem nenhuma restrição dentro de um cubo e encontramos  $g(r) = 1$ , corroborando os cálculos acima.