

tem-se

$$M_{15} \cap M_{12} = \{0, 60, 120, \dots\}$$

O mínimo múltiplo comum (diferente de 0) de 15 e 12 é 60 e é indicado da seguinte maneira:

$$\text{m.m.c.} (15,12) = 60$$

Exercícios:

12. Determine o m.m.c. (25,30)

13. Determine o m.m.c. (8,24, 80)

14. Determine o m.m.c. (50,300,500).

É claro que dados dois números, se um deles for múltiplo do outro, então ele será o m.m.c. desses números.

Exemplos:

Calcular m.m.c. (18,9)

18 pertence ao conjunto dos múltiplos de 9 (pois $18=9 \times 2$)
18 é o menor elemento ($\neq 0$) do conjunto dos múltiplos de 18;
logo 18 é o menor múltiplo comum, diferente de zero, de 18 e 9 ou seja,

$$\text{m.m.c.} (18,9) = 18$$

Calcular m.m.c. (7,56)

56 pertence ao conjunto dos múltiplos de 7 (pois $56=8 \times 7$)
56 é o menor elemento ($\neq 0$) do conjunto dos múltiplos de 56
logo 56 é o menor múltiplo comum (diferente de zero) de 56 e 7, ou seja,

$$\text{m.m.c.} (7,56) = 56$$

Se a é múltiplo de b , ($a \neq 0$) então $\text{m.m.c.} (a,b) = a$

Isto se estende para vários números, quando um deles é múltiplo de todos os outros.

Exemplos:

$$\text{m.m.c.} (4, 20, 5) = 20$$

$$\text{m.m.c.} (6, 7, 84) = 84$$

Exercícios:

15. Calcular

$$\text{m.m.c.} (60,30)$$

$$\text{m.m.c.} (45,15)$$

16. Calcular

$$\text{m.m.c.} (15,75,5)$$

$$\text{m.m.c.} (100,200,1\ 000)$$

$$\text{m.m.c.} (64,16,32)$$

4B.4. Divisor

Um número b ($b \neq 0$) é *divisor* de um número a , se, e somente se, a divisão de a por b for exata, isto é, se

$$a = b \times n,$$

onde n é um número inteiro.

Diz-se, neste caso, que a é *divisível por b* ou que b *divide a* .

Exemplos:

$$3 \text{ é divisor de } 27, \text{ pois } 27 = 3 \times 9$$

$$2 \text{ é divisor de } 0, \text{ pois } 0 = 2 \times 0$$

$$11 \text{ é divisor de } 121, \text{ pois } 121 = 11 \times 11$$

$$47 \text{ é divisor de } 47, \text{ pois } 47 = 47 \times 1$$

Chamando de D_{16} , D_{15} e D_{13} o conjunto dos divisores de 16, 15 e 13, respectivamente, temos:

$$D_{16} = \{1, 2, 4, 8, 16\}$$

$$D_{15} = \{1, 3, 5, 15\}$$

$$D_{13} = \{1, 13\}$$

Vale a pena ressaltar certas propriedades:

- I — O menor divisor de qualquer número é 1.
- II — O maior divisor de qualquer número, diferente de zero, é ele mesmo.
- III — É possível determinar todos os divisores de um número.
- IV — O conjunto dos divisores de zero é o conjunto dos números naturais, isto é,

$$D_0 = \{1, 2, 3, 4, \dots\} = \mathbb{N}, \text{ pois}$$

$$0 \times 1 = 0$$

$$0 \times 2 = 0$$

$$0 \times 3 = 0$$

$$0 \times 4 = 0$$

etc.

Para conhecer todos os divisores de um número diferente de zero, basta dividi-lo pelos números naturais, 1, 2, 3, etc., até chegar ao próprio número e separar aqueles que correspondem aos restos nulos.

Para o número 6, por exemplo:

Dividendo	Divisor	Quociente	Resto
6	1	6	0
6	2	3	0
6	3	2	0
6	4	1	2
6	5	1	1
6	6	1	0

$$D_6 = \{1, 2, 3, 6\}$$

Note que os divisores se encontram tanto na coluna dos divisores como na coluna dos quocientes, pois $D = d \cdot q$.

(Dividendo = divisor \times quociente).

Este processo é pouco prático para números grandes, mas logo você terá um melhor.

Exercícios:

17. Dê o conjunto dos divisores de 48.

18. Dê o conjunto dos divisores de 29.

19. Dados o conjunto $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e a relação em A,

“... é divisor de...”
determine o conjunto R. Faça um diagrama.

4B.5. As Relações “é divisor de” e “é múltiplo de”

As expressões “3 é divisor de 42” e “42 é múltiplo de 3” são sinônimas, pois da igualdade

$$42 = 3 \times 14$$

podemos tirar as duas conclusões acima.

Também são sinônimas as expressões

“3 é divisor de zero” e “zero é múltiplo de 3”

pois da igualdade

$$0 = 3 \times 0$$

podemos tirar essas duas conclusões.

Porém, da igualdade

$$0 = 0 \times 0$$

somente podemos concluir que 0 é múltiplo de 0, pois 0 nunca é divisor.

Tem-se, portanto, o seguinte:

Se b é divisor de a , então a é múltiplo de b .

Se a é múltiplo de b , então b é divisor de a , se, e somente se, $b \neq 0$.

Exercício:

20. Dado o m.m.c. de a e b , pergunta-se

a. a divide m.m.c. (a, b)?

b. b divide m.m.c. (a, b)?

4B.6. Número Primo

Os conjuntos dos divisores de alguns números apresentam apenas dois elementos: o próprio número e o número 1. Estão neste caso, por exemplo, 2, 7, 19, 31, pois:

$$D_2 = \{1, 2\}$$

$$D_7 = \{1, 7\}$$

$$D_{19} = \{1, 19\}$$

$$D_{31} = \{1, 31\}$$

Tais números chamam-se *números primos*.

Um número inteiro é primo, se, e somente se, o conjunto dos seus divisores possuir apenas dois elementos.

O número um não é primo, pois

$$D_1 = \{1\}$$

Exercício:

21. Dado o conjunto: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$

forme o conjunto B com os elementos de A que não são números primos e o conjunto C com os que são números primos.

Os conjuntos B e C formam uma partição de A ? Por que?

4B.7. Divisores Comuns de Vários Números

Suponha sejam dados os números 30 e 18 para determinar os *divisores comuns*. Temos

$$D_{30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$$

$$D_{18} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$$

Os elementos comuns desses dois conjuntos pertencem ao conjunto

$$D_{30} \cap D_{18} = \{1, 2, 3, 6\}$$

Os números 1, 2, 3, e 6 são divisores tanto de 30 como de 18 e são, portanto, os divisores comuns de 18 e 30.

Exercícios:

22. Dê os divisores comuns de 32, 24 e 40.

23. Dê os divisores comuns de 13 e 17.

24. Dê os divisores comuns de 0 e 9.

25. Dê os divisores comuns de 24 e 48.

26. Dados dois números a e b é possível que $D_a \cap D_b = \emptyset$? Por que?

4B.8. Máximo Divisor Comum

Sendo os conjuntos dos divisores de 30 e 18, respectivamente

$$D_{30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$$

e

$$D_{18} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\},$$

o conjunto dos divisores comuns de 30 e 18 é

$$D_{30} \cap D_{18} = \{1, 2, 3, 6\}$$

O número 6 é o maior divisor comum de 18 e 30. Por isso é chamado de *máximo divisor comum* dos números 18 e 30 e indicamos: $m.d.c. (18, 30) = 6$

No caso dos números 32, 24 e 40, os seus divisores comuns formam o conjunto: $\{1, 2, 4, 8\}$, e então $m.d.c. (32, 24, 40) = 8$.

Chama-se *Máximo Divisor Comum* de dois ou mais números o maior dos elementos do conjunto dos divisores comuns dos números dados.

Como o $m.d.c.$ de dois números a e b é o *maior* número que divide a e b , então, dado qualquer outro divisor comum de a e b , ele também é divisor do $m.d.c.$

Exemplo:

3 é divisor de 18 e 30
 $m.d.c. (18, 30) = 6$,
logo 3 é divisor de 6

Exercício:

27. Determine:

- a. $m.d.c. (50, 30, 18)$
- b. $m.d.c. (7, 15)$
- c. $m.d.c. (60, 30, 10)$

É claro que dados dois números, se um deles for divisor do outro, então ele será o $m.d.c.$ desses números.

Exemplos:

Calcular $m.d.c. (18, 9)$

9 pertence ao conjunto dos divisores de 18 (pois $18 = 9 \times 2$) e 9 é o maior elemento do conjunto dos divisores de 9;

logo

NOTA: Como o conjunto dos divisores de zero é o \mathbb{N} , não tem sentido calcular o $m.d.c. (0, 0)$ pois neste caso não há o maior elemento do conjunto, visto \mathbb{N} ser um conjunto infinito.

$$m.d.c. (18, 9) = 9$$

Calcular $m.d.c. (7, 56)$

7 pertence ao conjunto dos divisores de 56 e

7 é o maior elemento do conjunto dos divisores de 7;

logo

$$m.d.c. (7, 56) = 7$$

Se b é divisor de a , então $m.d.c. (a, b) = b$

Isto estende-se para vários números, quando um deles é divisor de todos os outros.

Exemplos:

$$m.d.c. (4, 16, 32) = 4$$
$$m.d.c. (3, 27, 81) = 3$$

Exercícios:

28. Calcular

- a. $m.d.c. (60, 30)$
- b. $m.d.c. (45, 15)$

29. Calcular

- a. $m.m.c. (15, 75, 5)$
- b. $m.d.c. (100, 200, 1\ 000)$
- c. $m.d.c. (64, 16, 32)$

4B.9. Números Primos Entre Si

O conjunto dos divisores de 25 é

$$D_{25} = \{1, 5, 25\},$$

e o conjunto dos divisores de 32 é

$$D_{32} = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}.$$

$$D_{25} \cap D_{32} = \{1\},$$

o que quer dizer que o *único* divisor comum de 25 e 32 é o número 1. Aos números que apresentam como divisor comum apenas o número um chamamos de *números primos entre si*.

Os números a e b são primos entre si, se, e somente se,
 $D_a \cap D_b = \{1\}$

Note que 25 não é um número primo e que 32 também não o é.

Não confunda: *número primo* é uma expressão usada apenas para *um número*, e *números primos entre si* serve para comparar *dois* ou *mais números*.

A noção de primos entre si pode ser estendida a mais de 2 números. Por exemplo, dados 49, 14 e 15 temos:

$$D_{49} = \{1, 7, 49\}$$

$$D_{14} = \{1, 2, 7, 14\}$$

$$D_{15} = \{1, 3, 5, 15\}$$

$$(D_{49} \cap D_{14}) \cap D_{15} = \{1, 7\} \cap D_{15} = \{1\}$$

Dizemos que números 49, 14 e 15 são primos entre si, embora 14 e 49 não o sejam.

Exercícios:

30. Você já conhece alguns números primos e, portanto, pode responder: dois números primos são sempre primos entre si? Por que?
31. Você já sabe quando é que um número é divisível por outro, então responda: se um número é divisível por outro, eles podem ser primos entre si? Por que?
32. Dados o conjunto: $A = \{3, 5, 8, 12, 25\}$ e a relação: "... é primo com..." dar o conjunto R e as propriedades desta relação.

Como o único divisor comum de números primos entre si é o número 1, então o m.d.c. de números primos entre si é o

número 1.

Exemplos:

$$D_{25} \cap D_{12} = \{1\}$$

logo

$$\text{m.d.c. } (25, 12) = 1$$

$$D_{22} \cap D_{15} = \{1\}$$

logo

$$\text{m.d.c. } (22, 15) = 1$$

Se a e b são primos entre si, então $\text{m.d.c. } (a, b) = 1$

4B.10. Fatoração

Você sabe que $12+8$, 4×5 , $15+5$, 2×10 e 1×20 são alguns dos numerais de 20.

Aquêles que estão em forma de produto são chamados formas *fatoradas* de 20 ou *fatorações* de 20. Têm muitas aplicações nos seus estudos de Matemática, as formas fatoradas dos números e muito importante é aquela em que todos os fatores são números primos. Neste último caso, diz-se que a *fatoração é completa*.

$2 \times 2 \times 5$ é a fatoração completa de 20, pois 2 e 5 são números primos.

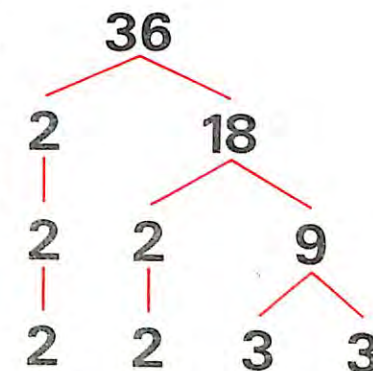
Há inúmeras maneiras de fatorar um número, mas a *fatoração completa de um número é única*, a menos da ordem dos fatores. Para 36, por exemplo:

$$36 = 1 \times 36 = 2 \times 18 = 3 \times 12 = 4 \times 9 = 2 \times 2 \times 3 \times 3.$$

A fatoração completa é a última, pois 2 e 3 são números primos.

É importante escrever um número por meio da fatoração completa, pois, mediante ela, podemos calcular os seus divisores, o m.m.c. e o m.d.c. de dois ou mais números dados, etc.

Para escrever um número na sua forma fatorada completa,



você precisará determinar os seus divisores primos (ou fatores primos) e, para facilitar este seu trabalho, vamos ensiná-lo a:

I. verificar se um número é ou não divisível pelos inteiros:

2, 3, 5, 9 e 10 .

II. reconhecer se um número é ou não primo.

4B.11. Regras de Divisibilidade

Dá-se o nome de *regras de divisibilidade* aos processos usados para se saber, sem efetuar a divisão, se um número é ou não divisível por outro. Como estas regras já são conhecidas suas do curso primário, daremos, somente como recordação, as que são mais usadas.

I. Um número é divisível por 2, se o algarismo das unidades simples for 0, 2, 4, 6 ou 8.

Exemplo: $24\bar{6}$ é divisível por 2.

II. Um número é divisível por 3, se a soma dos valores de seus algarismos (independente da posição que ocupam no numeral) for divisível por 3.

Exemplo:

168 é divisível por 3 porque

$1+6+8 = 15$ e 15 é divisível por 3.

III. Um número é divisível por 5, se o algarismo das unidades simples for 0 ou 5.

Exemplos:

$25\bar{0}$ é divisível por 5

$5\bar{5}$ é divisível por 5.

IV. Um número é divisível por 9, se a soma dos valores de seus algarismos (independentemente da posição que ocupam no numeral) for um número divisível por 9.

Exemplo:

297 é divisível por 9 porque

$2+9+7 = 18$ e 18 é divisível por 9.

V. Um número é divisível por 10, se o algarismo das unidades simples for 0.

VI. Se um número for divisível por dois números *primos entre si*, então ele é divisível pelo produto deles.

Exemplos:

90 é divisível por 2

90 é divisível por 3

$D_2 \cap D_3 = \{1\}$

Logo 90 é divisível por $2 \times 3 = 6$

90 é divisível por 3

90 é divisível por 5

$D_3 \cap D_5 = \{1\}$

Logo 90 é divisível por $3 \times 5 = 15$

90 é divisível por 2

90 é divisível por 15

$D_2 \cap D_{15} = \{1\}$

Logo 90 é divisível por $2 \times 15 = 30$.

Exercícios:

33. Quais das seguintes sentenças são verdadeiras e quais são falsas:

a. Todo número divisível por 3 é divisível por 9

b. Todo número divisível por 9 é divisível por 3.

34. Dê todos os restos possíveis da divisão de um número por 3.

35. Verifique se os números: 78 500, 31 761, 444 e 123 111 são divisíveis por 3 ou 9.

36. Usando a regra VI, dê uma regra de divisibilidade por 6.

37. O mesmo para 12.

38. 384 é divisível por 2? E por 3?

39. 785 é divisível por 2? E por 3? E por 5?

40. 890 é divisível por 2, 5 e 10?

41. A regra de divisibilidade por 11 é a seguinte:

um número é divisível por 11, se a soma de seus algarismos das posições ímpares e a soma dos algarismos das posições pares forem iguais, ou diferirem por 11 ou um múltiplo de 11.

Exemplos:

28 193 é divisível por 11, pois

$$3 + 1 + 2 = 6$$

$$9 + 8 = 17$$

$$17 - 6 = 11$$

79 684 é divisível por 11, pois

$$4 + 6 + 7 = 17$$

$$8 + 9 = 17$$

$$17 - 17 = 0$$

42. Verifique se os números: 273 495, 1 000 347, 372 504 e 4 444 são divisíveis por 11.

43. Coloque o algarismo que falta para que o número 473 5 . 6 seja divisível por 11.

4B.12. Reconhecimento de Um Número Primo

Você é capaz de dizer, rapidamente, que o número 100 e o número 48 não são primos, pois eles são divisíveis por 2.

Todo número divisível por 2 é par.

Todo número que não é divisível por 2 é ímpar

Portanto, dado um número par, diferente de 2, já sabemos, certamente, que ele não é primo. Resta, então, saber, quando é que um número ímpar é primo. Por exemplo, o número 247 é primo? e o número 127? Mediante a aplicação da seguinte regra você saberá se eles são ou não primos.

Dado um número ímpar a , divide-se a , sucessivamente, pelos números primos 3, 5, 7, 11, 13, 17 ... até que o quociente seja menor ou igual ao divisor. Se nenhuma das divisões for exata, então a é primo.

Aplicando esta regra a 247, quando chegar ao divisor 13, você obterá o seguinte:

$$\begin{array}{r|l} 247 & 13 \\ 117 & 19 \\ 00 & \end{array}$$

Logo 13 é divisor de 247, o mesmo acontecendo com 19. Portanto sendo

$$D_{247} = \{1, 247, 13, 19\}$$

247 não é primo.

Vejamos o que acontece com 127.

$\begin{array}{r l} 127 & 3 \\ 07 & 42 \\ 1 & \end{array}$	$\begin{array}{r l} 127 & 5 \\ 27 & 25 \\ 2 & \end{array}$	$\begin{array}{r l} 127 & 7 \\ 57 & 18 \\ 1 & \end{array}$	$\begin{array}{r l} 127 & 11 \\ 17 & 11 \\ 6 & \end{array}$
quociente 42 resto 1	quociente 25 resto 2	quociente 18 resto 1	quociente 11 resto 6

Lembre-se que quando procuramos os divisores de um número, eles estavam tanto na coluna dos divisores como na coluna dos quocientes, portanto, algumas das divisões seguintes teriam resto igual a zero, se isto já tivesse acontecido em alguma das divisões já realizadas. (Ver quadro pág. 162). Devido a este fato é que a regra diz: até encontrar um quociente menor ou igual ao divisor.

Como já achamos um quociente igual ao divisor, concluímos

que 127 é primo.

Logo

$$D_{127} = \{1, 127\}$$

Além deste processo, para ajudá-lo mais, damos aqui os números primos que são menores que 100:

2 3 5 7 11 13 17 19
23 29 31 37 41 43 47 53
59 61 71 73 79 83 89 97

Exercícios:

44. Dado o seguinte quadro:

Dividendo	Divisor	Quociente	Resto
893	2	446	1
893	3	297	2
893	5	178	3
893	7	127	4
893	11	81	2
893	13	68	9
893	17	52	9
893	19	47	0

dizer se 893 é ou não primo. Explicar.

45. A mesma questão para:

Dividendo	Divisor	Quociente	Resto
467	2	233	1
467	3	155	2
467	5	93	2
467	7	66	5
467	11	42	5
467	13	35	12
467	17	27	8
467	19	24	11
467	23	20	7

46. Verifique se os seguintes números são primos: 809, 343 e 317.

4B.13. Fatoração Completa de um Número

Você pode encontrar a fatoração completa de um número, escrevendo-o, inicialmente, como um produto de dois quaisquer dos seus divisores, distintos dos mais evidentes que são o próprio número e a unidade.

Como exemplo, tomemos o número 1 236

$$1\ 236 = 4 \times 309$$

4 e 309 também podem ser escritos por meio de produtos de seus divisores, e então teremos:

$$1\ 236 = 2 \times 2 \times 3 \times 103$$

Os fatores 2, 3 e 103 são números primos, portanto, esta é a fatoração completa de 1 236.

Com a nova notação que você já aprendeu, pode escrever:

$$1\ 236 = 2^2 \times 3 \times 103.$$

O mesmo resultado pode ser obtido dividindo o número do qual se procura a fatoração completa, pelo seu menor divisor primo; a seguir, o quociente desta divisão deve ser dividido pelo seu menor divisor primo e, com o novo quociente, deve se proceder da mesma maneira. O processo termina quando se encontra o quociente 1. Multiplicando-se os divisores encontrados, você terá a fatoração completa do número.

Costuma-se dispor os cálculos do seguinte modo:

1 236	2 é o menor divisor primo de 1 236
618	2 é o menor divisor primo de 618
309	3 é o menor divisor primo de 309
103	103 é o menor divisor primo de 103
1	

$$1\ 236 = 2^2 \times 3 \times 103$$

Note que os quocientes são escritos abaixo dos dividendos, no lugar em que, nas divisões comuns, costumamos colocar os restos.

Para que você compreenda melhor, vamos fatorar o número 11 760

11 760	2	$11\ 760 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 7$
5 880	2	
2 940	2	$\times 7 \times 7$
1 470	2	
735	3	$11\ 760 = 2^4 \times 3 \times 5 \times 7^2$
245	5	
49	7	
7	7	
1		

Exercícios:

47. Dê a fatoração completa dos números:

3 584, 3 030 e 158 631.

48. Dê os divisores primos comuns dos números 345 e 1 449.

4B.14. Determinação de Todos os Divisores de Um Número

Com o auxílio da fatoração completa, você pode descobrir não só os divisores primos de um número, mas também todos os outros divisores além dos primos.

Para exemplificar, tome o número 120:

120	2	$120 = 2^3 \times 3 \times 5$
60	2	
30	2	$120 = 8 \times 3 \times 5$
15	3	
5	5	
1		

Com êstes resultados, você pode concluir que 120 tem como divisores 2, 3, 4, 5 e 8; mas você sabe que se um número é divisível por dois números primos entre si, êle é divisível pelo produto dêstes números. Para o caso de 120 você terá:

$$2 \times 3 = 6$$

$$2 \times 5 = 10$$

$$3 \times 4 = 12$$

$$3 \times 5 = 15$$

$$3 \times 8 = 24$$

$$5 \times 4 = 20$$

$$5 \times 8 = 40$$

$$(2 \times 3) \times 5 = 30$$

$$(4 \times 3) \times 5 = 60$$

$$(8 \times 3) \times 5 = 120$$

Recolhendo todos êstes resultados e não esquecendo que 1 é divisor de qualquer número, temos o conjunto:

$$D_{120} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120\}.$$

Exercícios:

49. Dê o conjunto dos divisores de 90.

50. Dê o conjunto dos divisores de 169.

51. Dê o conjunto dos divisores de 128.

52. Dê o conjunto dos divisores de 256.

4B.15. Máximo Divisor Comum — Regras Práticas

Com o que você aprendeu, torna-se agora mais seguro determinar todos os divisores de um número, todos os divisores comuns de vários números e, também, o máximo divisor comum destes.

Seja calcular: m.d.c. (372, 248)

Em primeiro lugar, você fatora estes números:

$$\begin{array}{r|l} 372 & 2 \\ 186 & 2 \\ 93 & 3 \\ 31 & 31 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 248 & 2 \\ 124 & 2 \\ 62 & 2 \\ 31 & 31 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{l} 372 = 2^2 \times 3 \times 31 \\ 248 = 2^3 \times 31 \end{array}$$

Observe que 3 é um divisor de 372, mas não o é de 248 e, portanto, o m.d.c. destes números não será um múltiplo de 3, mas será com toda certeza um múltiplo de 2 e de 31 (porque 2 e 31 são divisores de 372 e 248).

Mais ainda: será um múltiplo de 2^2 , isto é, 4, pois este fator é comum aos dois números. O m.d.c. destes números será, então, um múltiplo de 31 e de 4 (sendo de 4, é também de 2) e será obtido pelo produto de 4 por 31. Você poderá justificar isto, lembrando-se da divisibilidade de um número por dois números primos entre si.

$$\text{m.d.c. (372, 248)} = 4 \times 31 = 124$$

Regra para obtenção do máximo divisor comum.

Fatora-se os números. O máximo divisor comum é o produto dos fatores primos comuns aos números, devendo-se tomá-los com os *menores* expoentes com que aparecem nas fatorações dos números.

Exemplo:

Determinar o m.d.c. (140, 56)

$$\begin{array}{r|l} 140 & 2 \\ 70 & 2 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 56 & 2 \\ 28 & 2 \\ 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$140 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7$$

$$56 = 2^3 \cdot 7$$

Logo,

$$\text{m.d.c. (140, 56)} = 2^2 \times 7 = 4 \times 7 = 28.$$

Exercício:

53. Determine por este processo:

a. m.d.c. (3 045, 7 560, 12 180).

b. m.d.c. (120, 200, 156).

c. m.d.c. (480, 256).

Outra maneira para determinar o máximo divisor comum é o das divisões sucessivas que você já conhece do curso primário. Apenas, para recordar, vamos dar um exemplo:

	6	1	3	2	2	3
3 048	450	348	102	42	18	6
348	102	042	18	6	0	

$$\text{m.d.c. (3 048, 450)} = 6$$

4B.16. Mínimo Múltiplo Comum — Regras Práticas

Utilizando-se da fatoração completa, você pode determinar o mínimo múltiplo comum de vários números. Tomemos um exemplo: m.d.c. (75, 60)

$$\begin{array}{r|l} 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{l} 75 = 3 \times 5^2 \\ 60 = 2^2 \times 3 \times 5 \end{array}$$

O m.m.c. de 75 e 60 deve ter todos os fatores destes números, pois somente assim será divisível pelos dois. Logo, o m.m.c. (75, 60) deve ter os fatores 2, 3 e 5, mas não apenas estes. Ele deve ser divisível também por 2^2 e por 5^2 . Então, o m.m.c. é:

$$2^2 \times 3 \times 5^2$$

$$\text{m.m.c.} (75, 60) = 2^2 \times 3 \times 5^2 = 4 \times 3 \times 25 = 300$$

Regra para obtenção do mínimo múltiplo comum.

Fatora-se os números. O m.m.c. é o produto de *todos* os fatores primos desses números, tomados com os seus maiores expoentes.

Este mesmo resultado você obtém fatorando os dois números ao mesmo tempo, e isto, com certeza, foi aprendido no curso primário.

Recordando:

75, 60	2
75, 30	2
75, 15	3
25, 5	5
5, 1	5
1, 1	
	300

$$\text{m.m.c.} (75, 60) = 2^2 \times 3 \times 5 = 300$$

Exercícios:

54. Calcular o m.m.c. (140, 56)

55. Calcular o m.m.c. (284, 142, 256)

56. Calcular o m.m.c. (14, 18, 26).

O mínimo múltiplo comum e o máximo divisor comum de dois números estão relacionados de uma maneira muito interessante e que é a seguinte:

$$\text{m.m.c.} (a, b) \times \text{m.d.c.} (a, b) = a \times b$$

No caso em que a é múltiplo de b (ou vice-versa) é evidente, pois

$$\text{m.m.c.} (12, 48) = 48$$

$$\text{m.d.c.} (12, 48) = 12$$

logo

$$\text{m.m.c.} (12, 48) \times \text{m.d.c.} (12, 48) = 12 \times 48$$

Porém, nos outros casos também se verifica.

Exemplo:

$$\text{m.d.c.} (14, 12) = 2$$

$$\text{m.m.c.} (14, 12) = 84$$

$$\begin{aligned} \text{m.d.c.} (14, 12) \times \text{m.m.c.} (14, 12) &= 84 \times 2 = 168 \\ 14 \times 12 &= 168 \end{aligned}$$

Como consequência deste fato, podemos dizer que:

O m.m.c. de dois números primos entre si é o produto deles

Vejamos porque.

Já sabemos que se a e b são primos entre si, então

$$\text{m.d.c.} (a, b) = 1$$

mas, pelo visto, agora

$$\text{m.d.c.} (a, b) \times \text{m.m.c.} (a, b) = a \times b$$

logo

$$1 \times \text{m.m.c.} (a, b) = a \times b$$

ou seja

$$\text{m.m.c.} (a, b) = a \times b$$

Exercícios:

57. O produto de dois números é 1 750. O m.d.c. deles é 5. Qual é seu m.m.c.?
58. Sendo m.d.c. $(a,b) = 6$
m.m.c. $(a,b) = 36$
 $a = 12$,
quanto é b ?

Exercícios — Capítulo 4 — Parte B.

59. Dê o conjunto dos múltiplos de 4, até 31; dê o conjunto dos divisores de 18. Ache o conjunto dos elementos comuns a ambos (intersecção).
60. Fatore completamente:
- a. $45 \times 36 \times 108$;
b. 882;
c. 5 005.
61. Quais são os divisores *primos* de 72?
62. Se $a = b$, $a \in I$, $b \in I$ e m é um inteiro qualquer, qual a relação entre $a.m.$ e $b.m.$? Dê exemplos.
63. Se $a = b$, $a \in I$, $b \in I$, e $m \neq 0$, qual a relação entre $a : m$ e $b : m$, se fôr possível cada divisão?
64. O número 6 é chamado *perfeito* porque a soma dos seus divisores menores do que 6 é igual a 6. De fato, estes são 1, 2, e 3 e $1 + 2 + 3 = 6$. Ache outros números perfeitos.
65. Assinale as sentenças verdadeiras:
- a. 10 é divisor de 100;
b. 105 é divisor de 0;
c. 0 é divisor de 10;
d. 5 é divisor de 5;

- e. 1 é divisor de qualquer número inteiro;
f. 15 é divisor de 5.

66. Dê os fatores primos de 150.
67. Qual o m.d.c. $(17,0)$? e o m.m.c. $(15,0)$?
68. Reconhecer se são primos os seguintes números:
377, 599, 943 e 1 051.
69. Decompor em fatores primos os seguintes números:
2 500, 30 084, 22 803, 48 000, 23 562.
70. Decompor em fatores primos os seguintes números:
 25×84 ; 9×120 ; $25 \times 7 \times 12$.
71. Dados os números: $a = 28 \times 9$ e $b = 32 \times 50$, dar o valor de $a.b$, decomposto em fatores primos.
72. Determine:
m.m.c. $(570, 18, 360)$.
73. Para saber quantos são os divisores de um número, basta acrescentar uma unidade aos expoentes dos seus fatores primos e multiplicar os resultados obtidos.

Exemplo:

Quantos são os divisores de 120?

$$\begin{array}{r|l} 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$120 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1$$

O número de divisores de 120 é

$$(3 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) = 4 \times 2 \times 2 = 16$$

74. Quantos são os divisores

- a. de 256 ?
- b. de 28 ?
- c. de 180 ?

75. Qual o maior número que divide 120, 270 e 612?

76. Qual o menor número que é divisível por 5, 14 e 70?

77. Diga quantos e quais são os divisores de:

528, 1 045 e 9 999.

78. Calcule:

$$D_{528} \cap D_{1\,045} \cap D_{9\,999}$$

79. Complete:

“O resultado do exercício anterior é o conjunto dos...”

80. Os números 21 e 221 são primos entre si? Por que?

81. Um carpinteiro quer dividir, em partes iguais, três vigas cujos comprimentos são, respectivamente, 600cm, 840cm, e 1 080cm, sendo a medida de cada um dos pedaços a maior possível. Qual deve ser o comprimento de cada uma das partes?

82. Calcule:

$$\text{m.m.c.} (120, 270, 612).$$

83. Verifique, sem efetuar a divisão, se o número $2^2 \cdot 3^3$ é divisor de algum dos seguintes números:

- a. $2^5 \cdot 3 \cdot 7$
- b. $2 \cdot 3^3 \cdot 5$
- c. $2^2 \cdot 3^3 \cdot 11$
- d. $2^3 \cdot 3^4 \cdot 7$

84. Dê quatro divisores do número: $2^3 \cdot 3^4 \cdot 7$

85. Dado o conjunto $A = \{3, 5, 11, 16, 22, 27, 36, 64\}$, forme os subconjuntos de A que têm dois elementos, sendo estes elementos números primos entre si.

86. Achar o m.m.c. e o m.d.c. dos seguintes números:

- a. 378, 18 e 9
- b. 472, 2 600 e 324
- c. 36, 4 e 9
- d. 7, 8 e 15
- e. 130, 65 e 444
- f. 22, 14, 15 e 7
- g. 100, 250 e 1 200
- h. 230, 21 e 15.

87. O m.m.c. $(a, b) = 144$. Qual o m.m.c. $(a, b, 28)$?

88. Sabe-se que:
um número $a = 2^3 \cdot 7^2$ e m.m.c. $(a, b) = 2^4 \cdot 3^5 \cdot 7^2$.
Que valores podem ser dados ao número b?

89. Dado o conjunto:

$$A = \{2\,700, 3\,036, 4\,500, 1\,270, 22\,924, 111\,111, 0\},$$

forme os seguintes subconjuntos:

- a. B, dos múltiplos de 2:
- b. C, dos múltiplos de 3:
- c. D, dos múltiplos de 4:
- d. E, dos múltiplos de 5:
- e. F, dos múltiplos de 9:
- f. G, dos múltiplos de 10:
- g. H, dos múltiplos de 11:

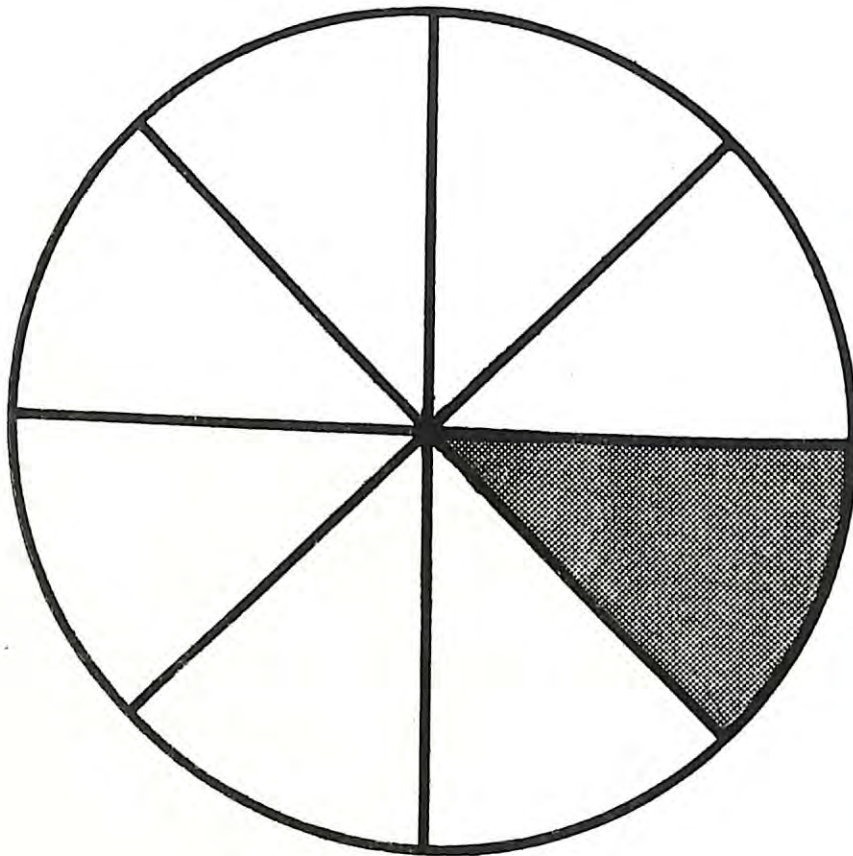
90. Com os subconjuntos do exercício anterior, efetue:

- a. $F \cap H$
- b. $B \cup C$
- c. $F \cup G$
- d. $F \cap G$
- e. $C \cup F$
- f. $C \cap F$
- g. $E \cup G$
- h. $E \cap G$

Capítulo

5A

O conjunto dos números racionais Conceito de número racional Operações



PARTE A: CONCEITO DE NÚMERO RACIONAL. OPERAÇÕES.

5A.1. Noção de Fração

Dados os números inteiros 15 e 3, sabemos que existe outro número inteiro, o 5, tal que

$$15 = 5 \times 3,$$

isto é, 15 é múltiplo de 3; neste caso, dizemos que 5 é o *quociente de 15 por 3*, e podemos representá-lo sob a seguinte forma:

$$5 = \frac{15}{3}.$$

Esta representação, $\frac{15}{3}$ é chamada *fração* de termos 15 e 3, os quais são chamados, respectivamente, o *numerador* e o *denominador* da fração.

Tomemos, agora, os números 10 e 3. Neste caso, *não existe um número inteiro que multiplicado por 3 dê 10*. Isto é, o quociente de 10 por 3 não é um número inteiro.

Embora este quociente não seja inteiro, também será representado sob forma de fração, isto é, na forma $\frac{10}{3}$.

O símbolo $\frac{15}{3}$, ou seja, o *numeral* $\frac{15}{3}$ representa o *número*

inteiro 5. Porém, $\frac{10}{3}$ não representa um número inteiro, mas é um *numeral*, de uma espécie diferente de número, o chamado *número racional*.

Por que é necessário ampliar o conjunto dos números inteiros para um novo conjunto, o dos números racionais? Se você examinar os dois seguintes problemas:

- I. Se 3 meninos comem 4 maçãs cada um, quantas maçãs são necessárias para os 3 meninos?

II. Se 3 maçãs devem ser distribuídas igualmente para 4 meninos, quanto deve receber cada um?

verificará que o I pode ser resolvido por meio dos números inteiros, porém, o II, não possui para resposta um número inteiro. A sua resposta é um número racional representado

pela fração $\frac{3}{4}$.

A leitura de uma fração, por enquanto, deve ser feita da seguinte maneira:

$\frac{15}{3}$ lê-se “quinze sôbre 3”,

$\frac{10}{3}$ lê-se “dez sôbre 3”, etc..

Suponhamos que a e b representem 2 inteiros quaisquer e $b \neq 0$, isto é,

$$a \in \{0, 1, 2, 3, \dots\} \text{ e } b \in \{1, 2, 3, \dots\}.$$

O quociente de a por b será indicado sob forma de uma fração $\frac{a}{b}$, que se lê “ a sôbre b ”; a é o numerador e b é o denominador da fração.

Se a é múltiplo de b , $\frac{a}{b}$ é um numeral de um inteiro. Nos

demais casos, $\frac{a}{b}$ representa um número racional não inteiro.

Exercícios:

1. Represente sob a forma de fração os quocientes abaixo:

- a. de 3 por 7
- b. de 10 por 2
- c. de 9 por 9
- d. de 18 por 7
- e. de 100 por 99
- f. de 13 por 10.

2. Quais das frações do exercício anterior representam números inteiros?

5A.2. O Que Significa Uma Fração?

1. Ao considerar a distribuição de 3 maçãs para 5 crianças, você obterá o significado concreto da divisão de 3 por 5, ou

do quociente $\frac{3}{5}$

Cada criança deve receber 3 partes iguais das 5 em que foi dividida *uma maçã*.

2. Se 4 barras de chocolate devem ser divididas, igualmente, entre 3 pessoas,

o quociente $\frac{4}{3}$ terá o significado: tomar 4 partes iguais a

cada uma das 3 partes iguais em que foi dividida a unidade (barra de chocolate).

Cada pessoa recebe, na realidade, *uma barra de chocolate e mais uma parte* das 3 partes iguais em que foi dividida cada barra.

3. Suponha, que queiramos distribuir, igualmente, 6 lápis para 3 alunos. Cada um receberá 2 lápis, ou seja, $\frac{6}{3} = 2$.

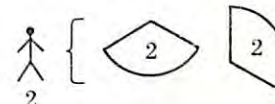
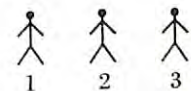
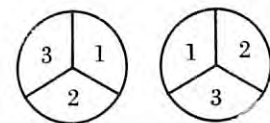
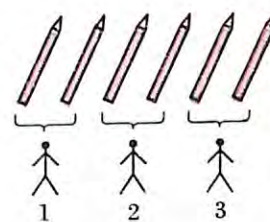
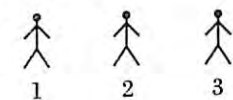
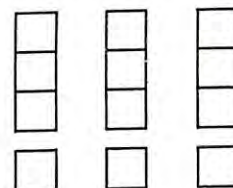
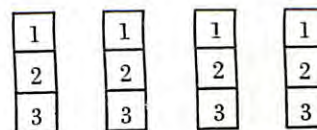
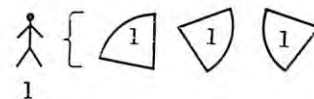
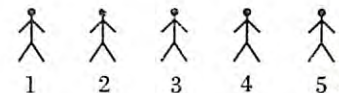
4. Tem-se 2 maçãs para serem divididas igualmente entre 3 pessoas.

Dividimos cada maçã em 3 partes iguais e cada pessoa receberá 2 das 6 partes iguais.

Cada pessoa recebe $\frac{2}{3}$ de uma maçã.

Podemos então, concluir o seguinte: a fração $\frac{2}{3}$ significa

tomar 2 partes de uma unidade (ou inteiro) que foi dividida em 3 partes iguais.

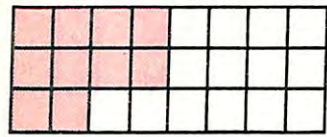


Exercícios:

3. Você sabe que 1 dia pode ser dividido em 24 partes iguais, e a cada uma delas dá-se o nome de *hora*. Portanto, $\frac{1}{24}$ de um dia corresponde a 1 hora.

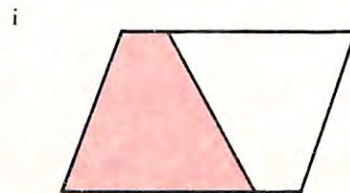
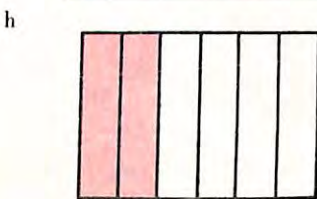
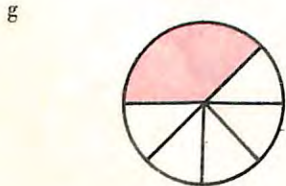
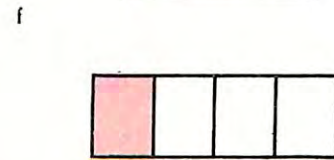
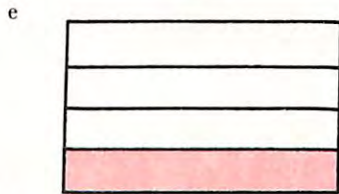
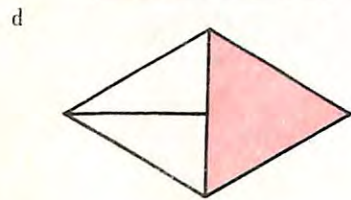
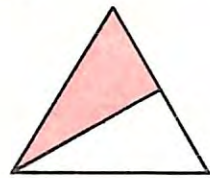
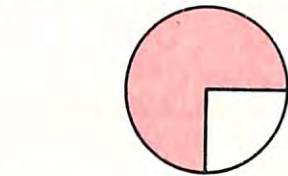
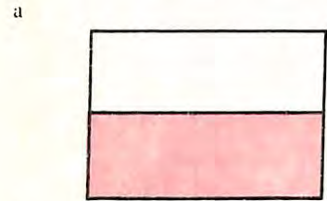
Complete:

- a. 2 horas correspondem a ... do dia
- b. $\frac{3}{24}$ do dia correspondem a ... horas
- c. 7 horas correspondem a ... do dia
- d. $\frac{12}{24}$ do dia correspondem a ... horas
- e. $\frac{37}{24}$ do dia correspondem a ... horas
- f. 48 horas correspondem a ...

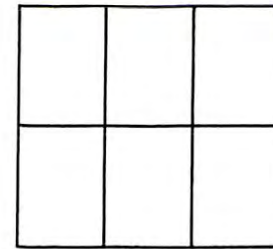


4. Dado o desenho ao lado, represente sob a forma de fração, a parte colorida e a parte não colorida.

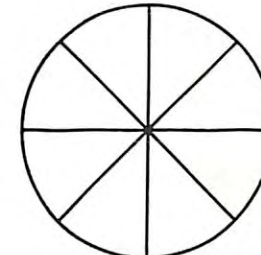
5. Usando o significado das frações, dizer qual fração representa a parte colorida das figuras:



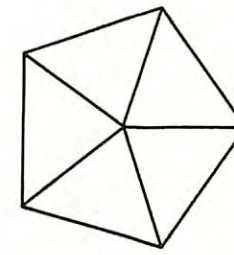
6. Colorir a parte da figura correspondente à fração indicada abaixo:



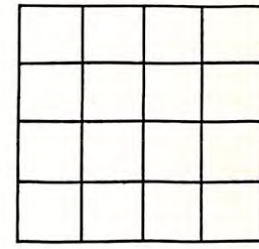
$\frac{1}{2}$



$\frac{3}{8}$



$\frac{4}{5}$



$\frac{1}{4}$

5A.3. Leitura de Uma Fração

Usualmente, ao invés de se usar a linguagem “2 sobre 3” para a fração $\frac{2}{3}$, ou “2 dividido por 3”, empregam-se as convenções:

- a. Os denominadores são 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 100, 1000, etc.

Lê-se o numerador e uma das palavras: meio(s), têrço(s), quarto(s), quinto(s), sexto(s), sétimo(s), oitavo(s), nono(s), décimo(s), centésimo(s), milésimo(s), etc., tomando-se o plural, se o numerador fôr maior do que 1.

Exemplos:

$\frac{1}{2}$: “um meio” ou sòmente “meio”;

$\frac{1}{3}$: “um têrço”;

$\frac{3}{4}$: “três quartos”;

$\frac{7}{9}$: “sete nonos”, etc.

$\frac{4}{5}$: "quatro quintos"

$\frac{9}{6}$: "nove sextos";

$\frac{15}{7}$: "quinze sétimos";

$\frac{12}{8}$: "doze oitavos"

$\frac{5}{10}$: "cinco décimos";

$\frac{81}{100}$: "oitenta e um centésimos";

$\frac{13}{1000}$: "treze milésimos";

$\frac{1}{10}$: "um décimo",
etc.

b. Os denominadores são outros números que não os citados acima.

Lê-se o numerador acompanhado da palavra *avo* ou *avos*, no plural.

Exemplos:

$\frac{2}{15}$: "dois quinze avos";

$\frac{1}{20}$: "um vinte avo", etc.

Exercícios:

7. Ler as seguintes frações:

a. $\frac{1}{5}$ b. $\frac{2}{3}$ c. $\frac{3}{8}$ d. $\frac{35}{76}$ e. $\frac{1}{9}$ f. $\frac{8}{12}$

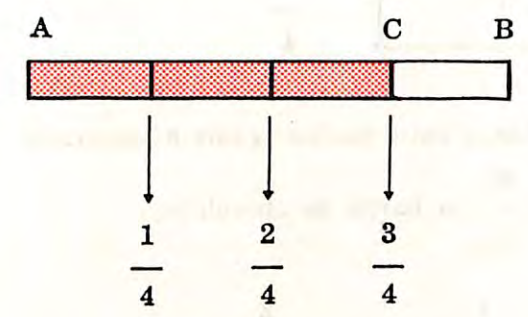
g. $\frac{171}{10}$ h. $\frac{7}{1000}$ i. $\frac{15}{100}$ j. $\frac{1}{10000}$

8. Escrever as frações correspondentes:

- a. dois sétimos
- b. dezessete centésimos
- c. quatro sextos
- d. treze quinze avos
- e. um vinte avo
- f. dois centésimos de milésimos.

5A.4. Frações Equivalentes

Considere uma estrada ligando as cidades A e B, e que $\frac{3}{4}$ da estrada seja percorrido por um carro ao se deslocar do ponto A

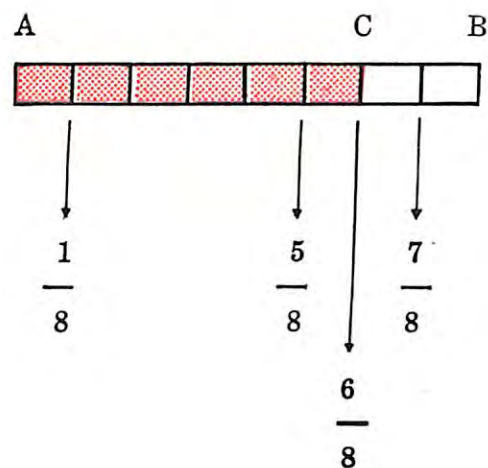


ao ponto C. Isto é, o carro percorre três das quatro partes iguais em que, imaginariamente, dividimos a estrada (unidade). Por exemplo, se a distância da cidade A à cidade B for 200km, até C o automóvel percorreu 150km.

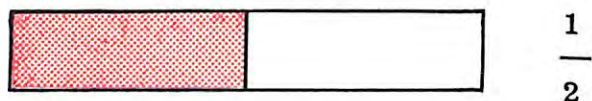
Suponha que um outro carro percorra $\frac{6}{8}$ da mesma estrada.

Observamos que os dois carros terão percorrido a mesma

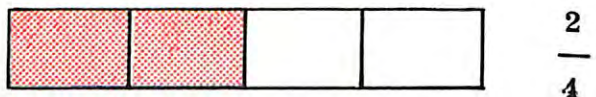
distância, ou seja, $\frac{6}{8}$ dessa estrada é a mesma coisa que $\frac{3}{4}$ da mesma estrada.



Considere uma barra de chocolate dividida em 2 partes iguais.



Cada uma destas partes é uma metade do inteiro (barra de chocolate), isto é, como notamos, $\frac{1}{2}$ da barra de chocolate.



Porém, se dividirmos a barra em 4 partes iguais e tomarmos 2 destas partes, teremos $\frac{2}{4}$ da barra de chocolate.

Você vê que quem recebe $\frac{1}{2}$ da barra e $\frac{2}{4}$ da barra recebe a mesma quantidade de chocolate.

Por êstes exemplos, concluímos que:

$$\frac{3}{4} \text{ e } \frac{6}{8}$$

são numerais diferentes que representam a mesma quantidade.

$$\frac{1}{2} \text{ é } \frac{2}{4}$$

são numerais diferentes que representam a mesma quantidade.

$$\frac{3}{4} \text{ e } \frac{6}{8} \text{ chamam-se frações equivalentes.}$$

$$\frac{1}{2} \text{ e } \frac{2}{4} \text{ chamam-se frações equivalentes.}$$

Simbolicamente, escrevemos

$$\frac{3}{4} \sim \frac{6}{8} \quad \frac{3}{4} \text{ é equivalente a } \frac{6}{8}$$

$$\frac{1}{2} \sim \frac{2}{4} \quad \frac{1}{2} \text{ é equivalente a } \frac{2}{4}$$

Note que $3 \times 8 = 4 \times 6$ e $1 \times 4 = 2 \times 2$, ou seja, se

$$\frac{3}{4} \sim \frac{6}{8}, \quad \text{então} \quad 3 \times 8 = 4 \times 6 \text{ e se}$$

$$\frac{1}{2} \sim \frac{2}{4}, \quad \text{então} \quad 1 \times 4 = 2 \times 2.$$

Exercícios:

9. Se $\frac{1}{2} \sim \frac{3}{6}$, então ...

10. Se $\frac{3}{4} \sim \frac{a}{8}$, então $a = \dots$

11. Se $\frac{m}{5} \sim \frac{3}{15}$, então $m = \dots$

12. Note que, se $3 \times 8 = 4 \times 6$, podemos escrever que $\frac{3}{4} \sim \frac{6}{8}$. Então, se $1 \times 15 = 5 \times 3$, temos que

$$\frac{1}{5} \sim \frac{3}{15}$$

13. Se $\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d}$, então $a \dots = b \dots$.

14. Se $\frac{m}{n} \sim \frac{r}{s}$, então \dots .

5A.5. Número Racional

Seja F o conjunto de *todos* os símbolos da forma $\frac{a}{b}$, com a e b inteiros e $b \neq 0$, isto é, o conjunto de tôdas as frações.

Alguns elementos de F são: $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{0}{5}, \frac{2}{1}, \frac{10}{2}, \frac{0}{25}, \frac{1000}{3}$, etc.

Vamos definir sobre F a relação R da seguinte maneira:

$$\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) \in R \text{ se, e s\o{m}ente se, } a \times d = b \times c$$

Isto é, um par de frações do conjunto F pertence a R , se, e s\o{m}ente se, o produto do numerador da 1.^a pelo denominador da 2.^a é igual ao produto do denominador da 1.^a pelo numerador da 2.^a.

Esta relação satisfaz às seguintes propriedades:

1. Reflexiva

$$\left(\frac{a}{b}, \frac{a}{b}\right) \in R \quad \text{pois } a \times b = b \times a$$

Exemplos:

$$\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right) \in R \quad \text{pois } 2 \times 5 = 5 \times 2$$

$$\left(\frac{3}{8}, \frac{3}{8}\right) \in R \quad \text{pois } 3 \times 8 = 8 \times 3$$

2. Simétrica

$$\text{Se } \left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) \in R \quad \text{ent\aa{o} } \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right) \in R$$

Exemplo:

$$\text{Se } \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{6}\right) \in R \quad \text{ent\aa{o} } 2 \times 6 = 3 \times 4$$

mas também é verdade que

$$\left(\frac{4}{6}, \frac{2}{3}\right) \in R \quad \text{pois } 4 \times 3 = 6 \times 2$$

3. Transitiva

$$\text{Se } \left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) \in R \quad \text{e } \left(\frac{c}{d}, \frac{e}{f}\right) \in R \quad \text{ent\aa{o} } \left(\frac{a}{b}, \frac{e}{f}\right) \in R$$

Exemplo:

$$\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{6}\right) \in R \quad \text{e } \left(\frac{4}{6}, \frac{8}{12}\right) \in R \quad \text{pois}$$

$$2 \times 6 = 3 \times 4 \quad \text{e } 4 \times 12 = 6 \times 8$$

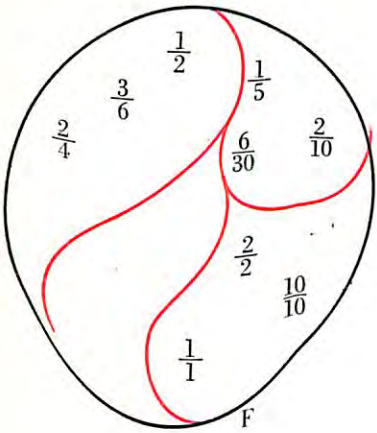
Mas também é verdade que

$$\left(\frac{2}{3}, \frac{8}{12}\right) \in R \quad \text{pois } 2 \times 12 = 3 \times 8$$

Logo, a relação definida é uma *relação de equivalência sobre F* .

Por isso, se $\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) \in R$, dizemos que $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ são *equivalentes*. Como uma relação de equivalência sobre um conjunto determina uma *partição* deste conjunto (ver capítulo 2), o conjunto F fica separado em *classes de equivalência*, onde os elementos de *cada classe* são *tôdas frações equivalentes entre si*.

Algumas classes estão representadas abaixo. Note que é impossível citar tôdas e desenhar tôdas, pois temos *infinitas* classes de equivalência.



$$\left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \dots \right\}$$

$$\left\{ \frac{2}{5}, \frac{4}{10}, \frac{6}{15}, \dots \right\}$$

$$\left\{ \frac{2}{1}, \frac{4}{2}, \frac{6}{3}, \dots \right\}$$

$$\left\{ \frac{0}{1}, \frac{0}{2}, \frac{0}{3}, \dots \right\}$$

etc.

A cada classe está associado um número, chamado *racional*, que pode ser representado por qualquer fração daquela classe. Por isso, cada fração de uma classe é chamada uma *representante da classe*.

Os símbolos de uma *mesma classe*, por exemplo, as frações $\frac{3}{4}, \frac{6}{8}, \frac{9}{12}$, etc., (lembre o exemplo da estrada), são *nomes diferentes* ou *numerais* para um mesmo número racional.

Por exemplo,

$\frac{3}{4}, \frac{6}{8}, \frac{15}{20}$, etc., são representantes de um mesmo número racional.

$$\frac{3}{4} \quad \frac{6}{8} \quad \frac{15}{20} \quad \frac{12}{16} \quad \frac{24}{32}$$



Número Racional

Exercícios:

15. Dê mais cinco representantes da seguinte classe de equivalência: $\left\{ \frac{1}{7}, \frac{2}{14}, \frac{3}{21}, \dots \right\}$

16. Prove que as frações $\frac{7}{8}$ e $\frac{35}{40}$ pertencem à mesma classe de equivalência.

17. Dadas as frações: $\frac{81}{72}, \frac{100}{20}, \frac{5}{3}, \frac{1}{10}, \frac{3}{2}, \frac{35}{7}, \frac{9}{8}, \frac{500}{300}$, diga quais delas representam o mesmo número racional.

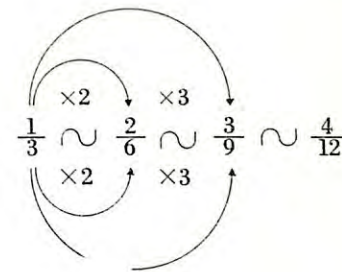
18. Escreva a classe de equivalência, da qual um representante é a fração $\frac{1}{3}$.

19. O mesmo para a fração $\frac{4}{10}$ (cuidado !)

20. O mesmo para a fração $\frac{2}{7}$.

5A.6. Classes de Equivalência

Ao fazer o exercício 18 você deve ter notado que bastava multiplicar o numerador e o denominador de $\frac{1}{3}$ pelos números inteiros diferentes de 1 e 0: 2, 3, 4, 5, 6, ...



para achar todos os outros elementos da classe.

Mas, observe que a fração $\frac{1}{3}$ é composta de termos que são primos entre si, 1 e 3. Dizemos que $\frac{1}{3}$ é uma fração *irreduzível*.

A fração $\frac{a}{b}$ é *irredutível*, se e somente se, $\text{m.d.c.}(a,b) = 1$

No entanto, ao fazer o exercício 19, se você procedeu desta maneira, talvez não tenha se lembrado de outras frações que a ela pertencem.

Isto é, da classe

$$\left\{ \frac{4}{10}, \frac{8}{20}, \frac{12}{30}, \frac{16}{40}, \dots \right\}$$

são também elementos as frações

$$\frac{2}{5}, \frac{6}{15}, \frac{10}{25}, \text{ etc.}$$

Isto porque $\frac{4}{10}$ não é *irredutível*. Para obtermos *todas* frações de uma classe, devemos tomar a fração *irredutível* representante da classe e multiplicar seus termos sucessivamente por 2, 3, 4, 5, 6,

Logo, a classe de equivalência de $\frac{4}{10}$ é:

$$\left\{ \frac{2}{5}, \frac{4}{10}, \frac{6}{15}, \frac{8}{20}, \frac{10}{25}, \frac{12}{32}, \dots \right\}$$

porque a fração *irredutível* equivalente a $\frac{4}{10}$ é $\frac{2}{5}$.

Sempre que, dada uma fração, obtemos uma outra equivalente a ela porém de termos menores, dizemos que a fração dada foi *simplificada*.

Por exemplo, quando de $\frac{4}{10}$ passamos para a fração $\frac{2}{5}$, com

$$\frac{4}{10} \sim \frac{2}{5}, \text{ simplificamos a fração } \frac{4}{10}.$$

Como foi feito isto? Dividindo-se o numerador e denominador de $\frac{4}{10}$ por 2:

$$\frac{4}{10} \xrightarrow{\div 2} \frac{2}{5}$$

Uma fração pode ser simplificada sem se obter a fração *irredutível* equivalente a ela.

Exemplo: $\frac{8}{16} \xrightarrow{\div 2} \frac{4}{8}$ e $\frac{4}{8}$ não é *irredutível*.

Note que $\frac{8}{16} \sim \frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$ é *irredutível*. Como, a partir de $\frac{8}{16}$,

chegamos a $\frac{1}{2}$? Dividindo o numerador e o denominador

de $\frac{8}{16}$ por 8.

De tudo que foi visto e dito, você já deve ter percebido uma propriedade muito importante das frações, que é a seguinte:

Multiplicando-se (ou dividindo-se) ambos os termos de uma fração $\frac{a}{b}$ por um mesmo número, diferente de zero, obtem-se fração equivalente a $\frac{a}{b}$.

Exemplos:

$$\frac{5}{25} \xrightarrow{\div 5} \frac{1}{5}$$

$$\frac{9}{27} \xrightarrow{\div 9} \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{5} \xrightarrow[\times 3]{\times 3} \frac{3}{15}$$

$$\frac{1}{3} \xrightarrow[\times 10]{\times 10} \frac{10}{30}$$

Desta propriedade decorre que:

Para simplificar uma fração é preciso dividir seus termos por um divisor comum a eles. Mas, você pode concluir também que se o numerador e o denominador de uma fração forem divididos pelo *máximo divisor comum* deles, a fração obtida é equivalente à fração dada, e é irredutível.

Exemplo:

$$\frac{4}{10} \quad \text{m.d.c. (4,10)} = 2$$

$$4 \div 2 = 2$$

$$10 \div 2 = 5$$

segue-se

$$\frac{4}{10} \sim \frac{2}{5} \quad \text{e m.d.c. (2,5)} = 1$$

isto é, 2 e 5 são primos entre si.

Exemplo:

Achar a fração irredutível equivalente a $\frac{64}{160}$

$$\text{m.d.c. (64,160)} = 32$$

$$64 \div 32 = 2$$

$$160 \div 32 = 5$$

Portanto, $\frac{2}{5}$ é a fração irredutível equivalente a $\frac{64}{160}$.

$$\frac{2}{5} \sim \frac{64}{160}$$

Exercícios:

21. Simplifique, até obter a fração irredutível:

a. $\frac{8}{10}$ b. $\frac{16}{32}$ c. $\frac{104}{156}$ d. $\frac{13}{47}$

e. $\frac{81}{729}$ f. $\frac{121}{2057}$

22. Determine:

a. uma fração equivalente a $\frac{1}{2}$ de denominador 30;

b. uma fração equivalente a $\frac{16}{32}$ de denominador 6;

c. uma fração equivalente a $\frac{16}{20}$ de numerador 20;

d. uma fração equivalente a $\frac{1}{2}$ cuja soma dos termos seja 15.

23. Dê a classe de equivalência de $\frac{12}{15}$.

24. O mesmo para $\frac{9}{27}$.

5A.7. Redução de Frações ao Mesmo Denominador

Mais adiante você verá que é útil, dadas algumas frações, obter frações equivalentes a elas, porém, com um mesmo denominador.

Exemplo:

Dadas as frações:

$$\frac{3}{5}, \frac{2}{3} \text{ e } \frac{4}{15}$$

calcular frações equivalentes a elas que tenham um denominador comum.

Neste caso, como 15 é múltiplo de 5 e 3, basta multiplicar ambos os termos de $\frac{3}{5}$ por 3 e ambos os termos de $\frac{2}{3}$ por 5 para obter:

$$\frac{9}{15}, \frac{10}{15}, \frac{4}{15};$$

$$\frac{9}{15} \sim \frac{3}{5}, \text{ pois } 9 \times 5 = 15 \times 3,$$

$$\frac{10}{15} \sim \frac{2}{3}, \text{ pois } 10 \times 3 = 15 \times 2.$$

Tem interesse especial o caso em que o denominador comum é o menor possível.

Para tanto, procede-se segundo a regra:

I. Determina-se o m.m.c. dos denominadores, que é o menor denominador comum procurado.

II. Para calcular os numeradores das frações equivalentes, divide-se o m.m.c. achado por cada denominador dado, multiplicando-se o resultado pelo numerador correspondente.

Exemplo:

Calcular frações equivalentes a

$$\frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}$$

que tenham o menor denominador comum possível.

$$\text{m.m.c. } (4,3,6) = 12$$

$$\frac{3}{4} \sim \frac{9}{12} \qquad \frac{2}{3} \sim \frac{8}{12} \qquad \frac{1}{6} \sim \frac{2}{12}$$

Para calcular os novos numeradores, dividimos 12 pelos denominadores 4, 3 e 6 e multiplicamos os resultados pelos respectivos numeradores.

$$12 \div 4 = 3; \quad 3 \times 3 = 9; \quad \text{logo } \frac{3}{4} \sim \frac{9}{12}$$

$$12 \div 3 = 4; \quad 4 \times 2 = 8; \quad \text{logo } \frac{2}{3} \sim \frac{8}{12}$$

$$12 \div 6 = 2; \quad 2 \times 1 = 2; \quad \text{logo } \frac{1}{6} \sim \frac{2}{12}$$

As frações pedidas são $\frac{9}{12}$, $\frac{8}{12}$ e $\frac{2}{12}$.

Exercícios:

25. Reduzir ao menor denominador comum as frações:

a. $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{4}{12}$

b. $\frac{2}{5}, \frac{4}{6}, \frac{3}{1}, \frac{2}{15}$

c. $\frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}$

d. $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{4}$

26. Em cada caso, calcule as frações equivalentes às frações dadas e que possuam o menor denominador comum.

a. $\frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{5}{6}$

b. $\frac{13}{5}, \frac{8}{15}, \frac{4}{21}$

$$c. \frac{5}{7}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}$$

$$d. \frac{5}{210}, \frac{18}{300}, \frac{1}{510}$$

5A.8. Igualdade de Números Racionais

Dois números racionais são iguais, se e somente se, as frações que os representam são equivalentes.

Assim, se $\frac{a}{b}$ representa o número racional “a sobre b” e $\frac{c}{d}$ representa o número racional “c sobre d”, então os dois números racionais são iguais, se e somente se, $\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d}$. Mas já sabemos que isto é o mesmo que $a \times d = b \times c$.

Como já fizemos anteriormente com os números inteiros, ao invés de falarmos

“a fração $\frac{a}{b}$ que representa o número racional “a sobre b”, diremos, por simplicidade de linguagem

“o número racional $\frac{a}{b}$ ”.

Procedendo assim, a sentença

“O número racional “a sobre b” é igual ao número racional “c sobre d”, ”

passará a ser escrita

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Concluindo:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ se e somente se, } a \times d = b \times c$$

Lembre-se que as frações são numerais dos números racionais. Número é sempre uma idéia de quantidade. O símbolo \sim é usado para as frações, e o símbolo $=$ para os números racionais.

Existe equivalência entre as frações (que são numerais). Existe igualdade entre os números racionais.

Exercícios:

27. Complete, para que tenhamos igualdade entre racionais:

$$a. \frac{3}{5} = \frac{a}{10}$$

$$b. \frac{m}{8} = \frac{3}{2}$$

$$c. \frac{21}{a} = \frac{3}{5}$$

$$d. \frac{8}{5} = \frac{40}{x}$$

28. Complete:

$$a. \text{ Se } \frac{3}{5} = \frac{6}{10} \text{ então } 3 \cdot 10 = \dots$$

$$b. \text{ Se } \frac{8}{3} = \frac{32}{12} \text{ então } \dots$$

$$c. \text{ Se } \frac{a}{4} = \frac{x}{6} \text{ então } \dots \cdot 8 = \dots \cdot 6$$

5A.9. Números Inteiros e Números Racionais.

Considere o número racional representado por qualquer fração da classe de equivalência

$$\left\{ \frac{2}{1}, \frac{4}{2}, \frac{6}{3}, \frac{8}{4}, \dots \right\}$$

Com o significado de divisão, $\frac{2}{1} = 2$

$$\frac{4}{2} = 2, \text{ etc.}$$

Identificamos as frações $\frac{2}{1}, \frac{4}{2}, \frac{6}{3}, \dots$ com o número 2,

isto é, as frações acima representam o número inteiro dois. Portanto, o número racional representado pelas frações da

classe $\left\{ \frac{2}{1}, \frac{4}{2}, \dots \right\}$ é o número inteiro dois.

Da mesma forma, o número racional representado por qual-

quer fração da classe $\left\{ \frac{5}{1}, \frac{10}{2}, \frac{15}{3}, \dots \right\}$ é o número inteiro 5.

$$\left\{ \frac{0}{1}, \frac{0}{2}, \frac{0}{3}, \dots \right\} \quad \left\{ \frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4}, \dots \right\} \quad \left\{ \frac{2}{1}, \frac{4}{2}, \frac{6}{3}, \dots \right\}$$

N.º Racional = ZERO N.º Racional = UM N.º Racional = DOIS

Desta forma, você verifica que

O conjunto dos números inteiros é um subconjunto do conjunto dos números racionais.

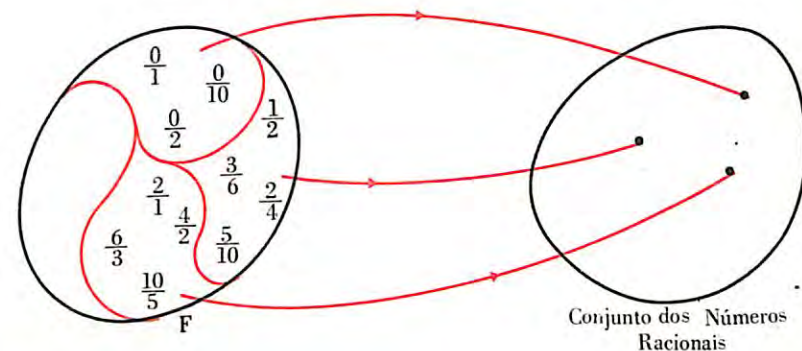
Lembre-se que, no comêço dêste capítulo, dissémos que o conjunto dos números inteiros ia ser *ampliado* para um novo conjunto de números, pois êles não eram suficientes para responder certos tipos de problemas. Agora, esta ampliação está clara, pois, realmente, o conjunto dos inteiros está contido no conjunto dos racionais.

Exercícios:

29. Dê a classe de equivalência do número 10.
30. Qual das seguintes afirmações é verdadeira:
 - a. Todo número inteiro é um número racional.
 - b. Todo número racional é um número inteiro.

5A.10. Representação do Conjunto dos Números Racionais.

A cada classe de equivalência, em que foi separado o conjunto F das frações, está associado um número racional. Como estas classes são infinitas, temos também infinitos números racionais.



O conjunto dos inteiros foi representado por

$$I = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\},$$

mas que também poderia ter sido representado por

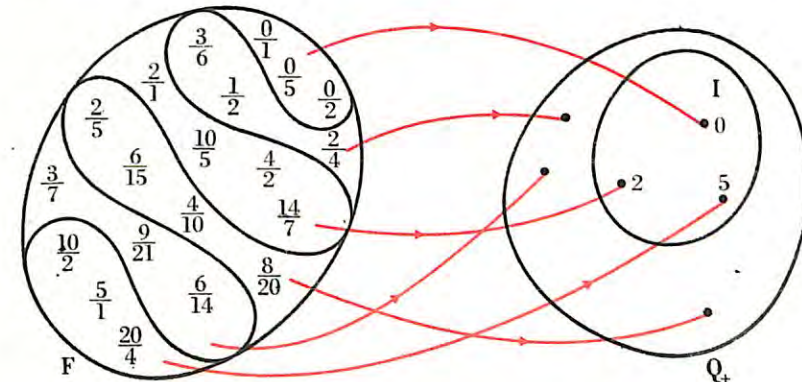
$$I = \{0, 2-1, 1+1, 3:1, \dots\}.$$

Geralmente, para *representar* o conjunto dos números racionais, é usado o próprio conjunto F das frações, lembrando

que dois elementos de F, $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ representam o *mesmo número racional*, se e sômente se, $a \times d = b \times c$.

Assim, em F, aparecem os símbolos $\frac{4}{10}$ e $\frac{20}{50}$ que representam o mesmo racional.

É costume nomear-se o conjunto dos racionais por Q_+ .



Já vimos que o conjunto dos inteiros I está contido no conjunto dos racionais, isto é, o conjunto I é um subconjunto de Q_+ . Simbolicamente $I \subset Q_+$.

Além do próprio conjunto F , podemos usar outras representações para o conjunto dos racionais. Por exemplo, poderíamos tomar um representante de cada classe, de tal maneira que os termos da fração fossem primos entre si.

Teríamos, assim,

$$Q_+ = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{3}{7}, \frac{2}{1}, \frac{0}{1}, \frac{2}{5}, \dots \right\}.$$

5A.11. Desigualdade de Números Racionais

Já sabemos que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, se e somente se, $a \times d = b \times c$.

Dados os números racionais $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{2}$, como $1 \times 2 \neq 2 \times 3$,

então $\frac{1}{2}$ é diferente de $\frac{3}{2}$, ou seja, $\frac{1}{2} \neq \frac{3}{2}$. Note que $1 \times 2 < 2 \times 3$.

Igualmente, $\frac{4}{8} \neq \frac{3}{7}$ pois $4 \times 7 \neq 8 \times 3$. Note que $4 \times 7 > 3 \times 8$.

Exercício:

31. Considere os números racionais abaixo, verifique quais são iguais e quais são diferentes.

a. $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{6}$

b. $\frac{3}{4}$ e $\frac{2}{8}$

c. $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{5}$

d. $\frac{17}{2}$ e $\frac{3}{5}$

e. $\frac{8}{5}$ e $\frac{9}{5}$.

Da mesma maneira que para os números inteiros, dados dois números racionais $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, somente uma das seguintes alternativas se verifica:

ou

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

ou

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d},$$

ou

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}.$$

Já sabemos que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, se e somente se, $a \cdot d = b \cdot c$.

Para os outros dois casos, dá-se as seguintes definições:

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d}, \text{ se e somente se, } a \cdot d > b \cdot c$$

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}, \text{ se e somente se, } a \cdot d < b \cdot c.$$

Exemplos:

$$\frac{3}{4} < \frac{5}{2} \text{ pois } 3 \times 2 < 4 \times 5$$

$$\frac{2}{3} < \frac{4}{3} \text{ pois } 2 \times 3 < 3 \times 4$$

$$\frac{8}{5} > \frac{3}{5} \text{ pois } 8 \times 5 > 5 \times 3$$

$$\frac{1}{2} > \frac{0}{3} \text{ pois } 1 \times 3 > 2 \times 0$$

$$\frac{1}{5} < \frac{2}{8} \text{ pois } 1 \times 8 < 5 \times 2$$

Exercícios:

32. São verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

a. $\frac{3}{8} < \frac{4}{7}$ b. $\frac{4}{5} = \frac{9}{10}$ c. $\frac{7}{2} > \frac{9}{5}$

d. $\frac{3}{16} = \frac{9}{48}$ e. $\frac{3}{5} < \frac{2}{7}$ f. $\frac{4}{9} > \frac{2}{5}$

33. Dê:

a. dois números racionais maiores que $\frac{7}{9}$

b. dois números racionais menores que $\frac{3}{2}$

34. Colocar o sinal conveniente ($>$, $<$ ou $=$), de maneira a obtermos sentenças verdadeiras:

a. $\frac{3}{5} \dots \frac{1}{4}$

d. $\frac{3}{4} \dots \frac{8}{7}$

b. $\frac{2}{3} \dots \frac{3}{7}$

e. $\frac{1}{2} \dots \frac{2}{4}$

c. $\frac{8}{15} \dots \frac{9}{2}$

f. $\frac{3}{8} \dots \frac{1}{4}$

Dadas duas frações de denominadores iguais, é muito fácil saber qual delas representa o menor número racional.

Exemplo:

Dadas $\frac{3}{4}$ e $\frac{5}{4}$, de denominadores iguais a 4,

temos

$$3 \times 4 < 5 \times 4 \text{ porque } 3 < 5.$$

Logo

$$\frac{3}{4} < \frac{5}{4}.$$

Dadas duas frações de *denominadores iguais*, a que tiver *menor numerador* representa o *número racional menor*.

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{b}, \text{ se e somente se, } a < c$$

Conhecendo isto, você pode dispôr em *ordem crescente* (do menor para o maior) *os racionais*,

$$\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \frac{3}{5}$$

Isto é

$$\frac{1}{5} < \frac{2}{5} < \frac{3}{5} < \frac{4}{5}$$

No caso de não serem iguais os denominadores, basta achar frações equivalentes a elas com um denominador comum e aplicar a regra anterior.

Exemplo:

Dispôr em ordem crescente os racionais:

$$2, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}$$

$$\text{m.m.c. } (2,4,6) = 12$$

$$2 \sim \frac{24}{12}$$

$$\frac{1}{2} \sim \frac{6}{12}$$

$$\frac{3}{4} \sim \frac{9}{12}$$

$$\frac{5}{6} \sim \frac{10}{12}$$

Como

$$\frac{6}{12} < \frac{9}{12} < \frac{10}{12} < \frac{24}{12}$$

tem-se

$$\frac{1}{2} < \frac{3}{4} < \frac{5}{6} < 2$$

Exercícios:

35. Dispor em ordem crescente os racionais

$$\text{a. } \frac{3}{8}, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \frac{9}{8}, \frac{2}{8}$$

$$\text{b. } \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{2}{2}, \frac{5}{2}$$

36. Dispor em ordem crescente os racionais

$$\text{a. } \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{7}{40}$$

$$\text{b. } \frac{4}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{8}{15}$$

37. Colocar em ordem decrescente (do maior para o menor usando o sinal $>$).

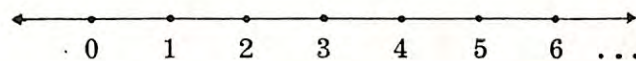
$$\text{a. } \frac{3}{2}, \frac{2}{2}, \frac{1}{2}$$

$$\text{b. } \frac{3}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}$$

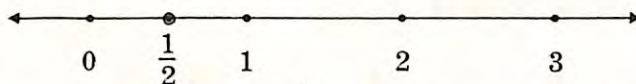
$$\text{c. } \frac{2}{7}, \frac{3}{8}, \frac{7}{4}, \frac{5}{6}$$

5A.12. Representação Geométrica dos Racionais. A Reta Numérica.

Quando estudamos o conjunto dos inteiros $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$, representamos seus elementos através de pontos de uma reta.



Suponha que queiramos representar nessa reta o número racional $\frac{1}{2}$. Basta tomar o ponto médio do segmento de extremidades 0 e 1 (que representa a unidade).



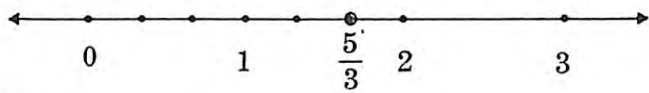
Para representar o número $\frac{3}{4}$, dividimos o segmento de extremidades 0 e 1 em 4 partes de comprimentos iguais, e tomamos 3 delas sucessivas, a partir do zero. A extremidade do último segmento é o ponto que representa $\frac{3}{4}$.



Seja, agora, o número $\frac{5}{3}$. Dividimos o segmento de extre-

midades 0 e 1 em 3 partes de comprimentos iguais, e marca-
mos, sucessivamente a partir do zero, 5 comprimentos iguais
ao obtido. A extremidade do último segmento é o ponto da

reta que representa $\frac{5}{3}$.



Exercícios:

38. Entre que números inteiros estão localizados os números racionais:

$$\frac{7}{5}, \frac{5}{7}, \frac{20}{3}, \frac{3}{11}, \frac{25}{4} \text{ e } \frac{100}{3} ?$$

39. Represente na reta numérica os números racionais dados abaixo. (a fim de facilitar, tome o segmento unitário tendo 8 cm.)

- a. $\frac{3}{2}$ b. $\frac{2}{4}$ c. $\frac{1}{2}$
d. $\frac{4}{8}$ e. $\frac{1}{4}$ f. $\frac{5}{8}$

40. Represente na reta numérica os números racionais dados abaixo. (a fim de facilitar tome o segmento unitário tendo 9 cm.)

- a. $\frac{8}{9}$ b. $\frac{1}{3}$ c. $\frac{12}{6}$
d. $\frac{2}{6}$ e. $\frac{12}{9}$ f. $\frac{4}{3}$

Ao fazer o exercício 39, você deve ter notado que os números racionais $\frac{2}{4}$, $\frac{1}{2}$ e $\frac{4}{8}$ são representados pelo mesmo ponto.

O mesmo acontecendo para $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{6}$ do exercício 40.

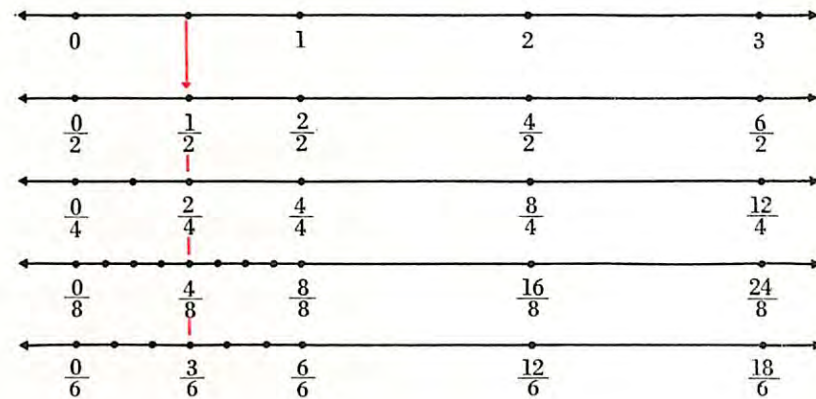
Verifique que $\frac{2}{4}$, $\frac{1}{2}$ e $\frac{4}{8}$ pertencem a uma mesma classe

de equivalência. Também $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{6}$ pertencem a uma mesma

classe de equivalência.

Na verdade como *todos* os elementos de uma classe de equivalência são representantes de um *mesmo número racional* têm-se que

Tôdas as frações de uma classe de equivalência são representadas na reta numérica por um mesmo ponto.



$$\left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \dots \right\} \text{ Mesmo Número Racional}$$

5A.13. Operações com Números Racionais. Adição.

Como $\mathbb{I} \subset \mathbb{Q}_+$ (o conjunto dos números inteiros está contido no conjunto dos números racionais), as definições das operações com números racionais serão dadas de tal maneira que as definições e as propriedades das mesmas sejam conservadas para os casos em que os números racionais em questão sejam inteiros.

Este é um pensamento dominante em matemática: ampliar o domínio de estudo, de modo a conservar as propriedades obtidas anteriormente. Vejamos como isto pode ser feito. Começemos pela adição.

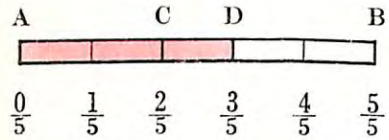
Adição

Suponha uma estrada ligando as cidades A e B e que um ciclista percorra $\frac{2}{5}$ da mesma, atingindo o ponto C e, logo

a seguir, percorra mais $\frac{1}{5}$ da estrada, alcançando o ponto D.

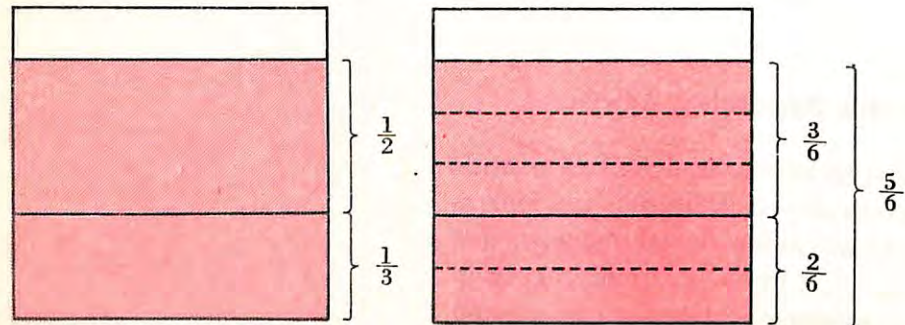
No total, o ciclista terá percorrido $\frac{3}{5}$ da estrada, ou seja,

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$$



Tomemos outro exemplo. Seja uma torneira que despeja em um tanque uma quantidade de água equivalente a $\frac{1}{3}$ do tanque. Uma outra torneira despeja, a seguir, quantidade de água equivalente a $\frac{1}{2}$ do tanque. As duas terão enchido

$\frac{1}{3} + \frac{1}{2}$ do tanque.



Como $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ e $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$, então $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$, o que pode ser visualizado no desenho acima.

Concluindo, $\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2+1}{5} = \frac{3}{5}$ e

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{2+3}{6} = \frac{5}{6}$$

Observe que

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{(1 \times 2) + (3 \times 1)}{3 \times 2} = \frac{2 + 3}{6} = \frac{5}{6}$$

Definição: Dados dois racionais quaisquer $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, chama-se *soma* dos mesmos o número racional $\frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$$

Pela definição, os exemplos dados ficam:

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{(2 \times 5) + (5 \times 1)}{5 \times 5} = \frac{10 + 5}{25} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{(1 \times 2) + (3 \times 1)}{3 \times 2} = \frac{2 + 3}{6} = \frac{5}{6}$$

Outros exemplos:

$$a. \frac{3}{4} + \frac{2}{4} = \frac{(3 \times 4) + (4 \times 2)}{4 \times 4} = \frac{12 + 8}{16} = \frac{20}{16} = \frac{5}{4}$$

$$= \frac{20}{16} = \frac{5}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } \frac{1}{2} + \frac{5}{2} &= \frac{(1 \times 2) + (2 \times 5)}{2 \times 2} = \frac{2 + 10}{4} = \\ &= \frac{12}{4} = \frac{3}{1} = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c. } \frac{4}{5} + \frac{1}{6} &= \frac{(4 \times 6) + (5 \times 1)}{5 \times 6} = \frac{24 + 5}{30} = \\ &= \frac{29}{30} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d. } 3 + \frac{1}{4} &= \frac{3}{1} + \frac{1}{4} = \frac{(3 \times 4) + (1 \times 1)}{1 \times 4} = \\ &= \frac{12 + 1}{4} = \frac{13}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e. } 8 + 5 &= \frac{8}{1} + \frac{5}{1} = \frac{(8 \times 1) + (1 \times 5)}{1 \times 1} = \\ &= \frac{8 + 5}{1} = \frac{13}{1} = 13 \end{aligned}$$

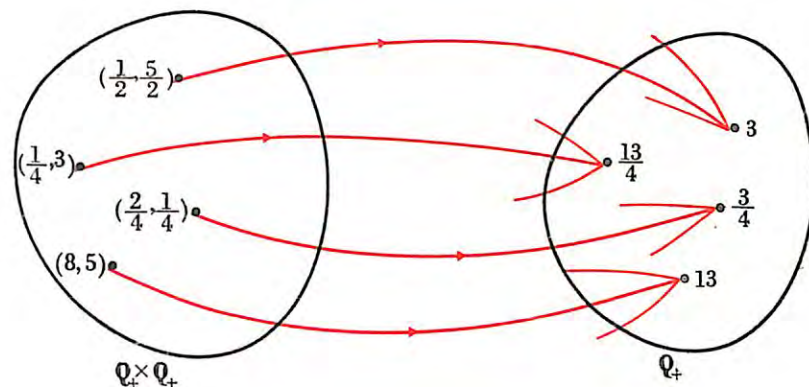
A dois números racionais associamos um terceiro número, também racional.

A operação de adição é a aplicação de $\mathbb{Q}_+ \times \mathbb{Q}_+$ em \mathbb{Q}_+ que associa a cada par ordenado $\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) \in \mathbb{Q}_+ \times \mathbb{Q}_+$ o número

racional $\frac{a.d + b.c}{b.d} \in \mathbb{Q}_+$.

$$\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) \longrightarrow \frac{a.d + b.c}{b.d}$$

Parte de um diagrama da aplicação é ilustrada abaixo.



Exercícios:

Use a definição e complete:

$$41. \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \rightarrow \quad 46. \left(12, \frac{3}{1}\right) \rightarrow$$

$$42. \left(\frac{4}{5}, \frac{5}{5}\right) \rightarrow \quad 47. [0,1] \rightarrow$$

$$43. \left(0, \frac{1}{3}\right) \rightarrow \quad 48. \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{5}\right) \rightarrow$$

$$44. \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{8}\right) \rightarrow \quad 49. \left(\frac{m}{3}, \frac{n}{3}\right) \rightarrow$$

$$45. \left(\frac{1}{2}, 1\right) \rightarrow \quad 50. \left(0, \frac{a}{b}\right) \rightarrow$$

Regras Práticas.

Embora a definição dada seja aplicável à adição de dois números racionais quaisquer, na prática ela é equivalente às seguintes regras:

I. Seja:

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{(2 \times 5) + (5 \times 1)}{5 \times 5} = \frac{10 + 5}{25} =$$

$$= \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$$

Quando os números racionais são representados por frações que têm o mesmo denominador, adicionam-se os numeradores e mantem-se o denominador comum.

II. Como,

$$\frac{4}{15} + \frac{3}{5} = \frac{4 \times 5 + 15 \times 3}{15 \times 5} = \frac{20 + 45}{75} = \frac{65}{75} = \frac{13}{15}$$

e notando ainda, que

$$\frac{4 \times 5 + 3 \times 15}{15 \times 5} = \frac{5 \cdot (4 + 9)}{15 \times 5} = \frac{4 + 9}{15} = \frac{13}{15},$$

obtemos

Adicionam-se números racionais representados por frações de denominadores diferentes, calculando-se as frações equivalentes a elas que tenham o menor denominador comum, e aplicando-se, a seguir, a regra anterior.

Exemplos:

$$a. \frac{3}{5} + \frac{2}{4} = \frac{12 + 10}{20} = \frac{22}{20} = \frac{11}{10}$$

$$b. \frac{1}{3} + \frac{7}{12} = \frac{4 + 7}{12} = \frac{11}{12}$$

$$c. 3 + \frac{2}{7} = \frac{3}{1} + \frac{2}{7} = \frac{21 + 2}{7} = \frac{23}{7}$$

Exercícios:

Usando as regras práticas, determine a soma:

$$51. \frac{3}{4} + \frac{1}{4}$$

$$56. 0 + \frac{8}{3}$$

$$52. \frac{1}{5} + \frac{8}{5}$$

$$57. \frac{2}{3} + 5$$

$$53. \frac{4}{3} + \frac{1}{4}$$

$$58. \frac{1}{2} + \frac{15}{3}$$

$$54. \frac{1}{2} + \frac{2}{6}$$

$$59. \frac{3}{15} + \frac{1}{5}$$

$$55. 1 + \frac{4}{1}$$

$$60. \frac{8}{36} + \frac{7}{9}$$

Considere a adição de dois números racionais, sendo um deles inteiro. Por exemplo,

$$3 + \frac{1}{2}$$

Por definição, temos:

$$\frac{3}{1} + \frac{1}{2} = \frac{3 \cdot 2 + 1}{2} = \frac{6 + 1}{2} = \frac{7}{2}$$

Portanto,

$$3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$

Os símbolos $3 + \frac{1}{2}$ e $\frac{7}{2}$ representam o mesmo racional; $\frac{7}{2}$

chama-se *forma fracionária* e $3 + \frac{1}{2}$ é a *forma mista* do número racional.

Muitas vezes em vez de $3 + \frac{1}{2}$ escrevemos $3 \frac{1}{2}$.

$$\text{Logo, } 3 \frac{1}{2} = 3 + \frac{1}{2} = \frac{(3 \times 2) + 1}{2} = \frac{6 + 1}{2} = \frac{7}{2}$$

Outros exemplos:

$$5 \frac{2}{3} = 5 + \frac{2}{3} = \frac{5 \times 3 + 2}{3} = \frac{17}{3}$$

$$8 \frac{1}{6} = 8 + \frac{1}{6} = \frac{8 \times 6 + 1}{6} = \frac{49}{6}$$

É claro que a representação de um número racional na forma mista só é possível se este número racional for maior do que 1.

Vamos, agora, determinar a forma mista, dada a forma fracionária.

Por exemplo, seja $\frac{7}{5}$. Dividimos 7 por 5; obtemos

$$\begin{array}{r} 7 \overline{) 5} \\ 2 \quad 1 \end{array}$$

quociente 1 e resto 2.

Portanto,

$$\frac{7}{5} = 1 + \frac{2}{5} = 1 \frac{2}{5}$$

Outros exemplos:

$$\frac{15}{4} = 3 + \frac{3}{4} = 3 \frac{3}{4}, \text{ pois}$$

$$\begin{array}{r} 15 \overline{) 4} \\ 3 \quad 3 \end{array}$$

$$\frac{10}{3} = 3 + \frac{1}{3} = 3 \frac{1}{3}, \text{ pois}$$

$$\begin{array}{r} 10 \overline{) 3} \\ 1 \quad 3 \end{array}$$

Exercícios:

61. Escreva a forma fracionária de:

a. $4 \frac{1}{5}$

c. $1 \frac{1}{2}$

b. $3 \frac{2}{7}$

d. $6 \frac{3}{5}$

62. Escreva a forma mista de:

a. $\frac{11}{5}$

c. $\frac{17}{3}$

b. $\frac{3}{2}$

d. $\frac{18}{5}$

5A.14. Multiplicação

Definição: Chama-se *produto* do número racional

$\frac{a}{b}$ pelo número racional $\frac{c}{d}$ o número

racional $\frac{a \cdot c}{b \cdot d}$

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Exemplos:

a. $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{3 \times 2}{4 \times 5} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

b. $\frac{2}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{2 \times 1}{5 \times 3} = \frac{2}{15}$

c. $\frac{3}{2} \times 3 = \frac{3}{2} \times \frac{3}{1} = \frac{3 \times 3}{2 \times 1} = \frac{9}{2}$

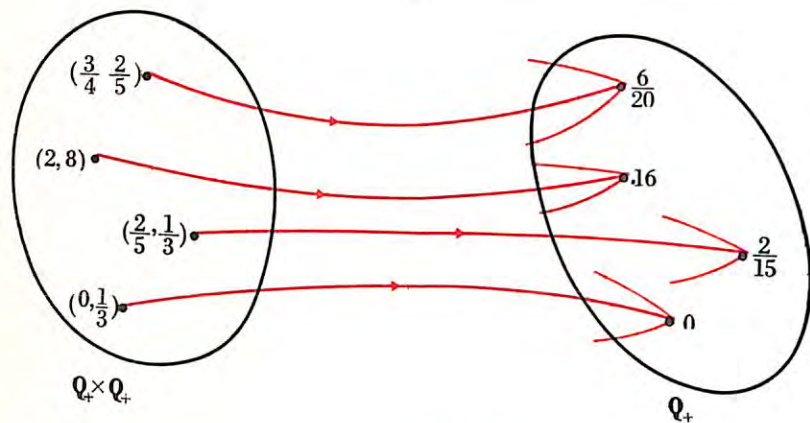
d. $4 \times 8 = \frac{4}{1} \times \frac{8}{1} = \frac{4 \times 8}{1 \times 1} = \frac{32}{1} = 32$

e. $0 \times \frac{3}{4} = \frac{0}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{0 \times 3}{4 \times 4} = \frac{0}{16} = 0$

A operação de multiplicação é a aplicação de $\mathbb{Q}_+ \times \mathbb{Q}_+$ em \mathbb{Q}_+ , que associa ao par $\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) \in \mathbb{Q}_+ \times \mathbb{Q}_+$ o

número racional $\frac{a \times c}{b \times d} \in \mathbb{Q}_+$.

$$\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) \longrightarrow \frac{a \times c}{b \times d}$$



Exercícios:

Complete, usando a definição de multiplicação:

63. $\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{4}\right) \longrightarrow$

68. $\left(\frac{a}{3}, \frac{b}{2}\right) \longrightarrow$

64. $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{8}\right) \longrightarrow$

69. $\left(1, \frac{8}{5}\right) \longrightarrow$

65. $\left(\frac{2}{7}, 0\right) \longrightarrow$

70. $\left(\frac{a}{b}, \frac{m}{n}\right) \longrightarrow$

66. $\left(\frac{8}{6}, 1\right) \longrightarrow$

71. $\left(\frac{x}{y}, \frac{3}{4}\right) \longrightarrow$

67. $(3, 4) \longrightarrow$

72. $\left(8, \frac{1}{2}\right) \longrightarrow$

Observação Importante

Como já foi ressaltado anteriormente, as definições, de adição e multiplicação para números racionais, permitem a manutenção das mesmas com números inteiros, que são particulares números racionais.

$$2 + 3 = \frac{2}{1} + \frac{3}{1} = \frac{(2 \times 1) + (1 \times 3)}{1 \times 1} =$$

$$= \frac{2 + 3}{1} = \frac{5}{1} = 5$$

$$2 \times 3 = \frac{2}{1} \times \frac{3}{1} = \frac{2 \times 3}{1 \times 1} = \frac{6}{1} = 6$$

Um produto de números racionais pode ser obtido mais rapidamente através do *cancelamento* de fatores comuns ao numerador de denominador, quando isto for possível.

Por exemplo:

$$\frac{8}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{8 \times \cancel{3}^1}{\cancel{6}_2 \times 5} = \frac{\cancel{4}^1 \times 1}{\cancel{2}^1 \times 5} = \frac{4 \times 1}{1 \times 5} = \frac{4}{5}$$

Isto nada mais é do que uma aplicação da propriedade dada na página 201, pois $\frac{24}{30} \sim \frac{4}{5}$.

Outros exemplos:

$$\frac{1}{2} \times \frac{8}{3} \times 9 = \frac{1 \times \cancel{8}^4 \times 9}{\cancel{2}_1 \times 3} = \frac{1 \times 4 \times \cancel{3}^3}{1 \times \cancel{3}_1} =$$

$$= \frac{1 \times 4 \times 3}{1 \times 1} = \frac{12}{1} = 12$$

$$\frac{\cancel{4}^1}{\cancel{8}_2} \times \frac{3}{5} \times \frac{\cancel{15}^5}{\cancel{6}_2} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} \times \frac{5}{2} = \frac{1 \times 3 \times \cancel{5}^1}{2 \times \cancel{5}_1 \times 2} =$$

$$= \frac{1 \times 3 \times 1}{2 \times 1 \times 2} = \frac{3}{4}$$

Exercício:

73. Efetue os produtos, cancelando os fatores comuns (caso existam):

a. $5 \times \frac{1}{8} \times 3$

d. $1 \times \frac{10}{13} \times \frac{1}{2} \times 3$

b. $9 \times \frac{3}{5} \times \frac{10}{20} \times 2$

e. $\frac{2}{5} \times \frac{8}{16} \times \frac{1}{4} \times 15$

c. $\frac{3}{15} \times \frac{1}{8} \times 4$

f. $2 \times 5 \times \frac{3}{4} \times \frac{8}{45}$

5A.15. Propriedades da Adição e da Multiplicação

I. Propriedade Comutativa

Adição

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{11}{12}$$

e

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{3} = \frac{11}{12}$$

logo,

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{2}{3}$$

Multiplicação

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{12}$$

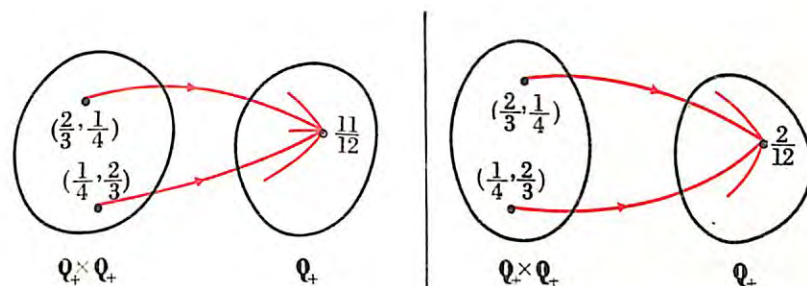
e

$$\frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{12}$$

logo,

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \times \frac{2}{3}$$

Esquemáticamente:



Qualquer que seja o par $\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) \in \mathbb{Q}_+ \times \mathbb{Q}_+$,
tem-se:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$$

e

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \times \frac{a}{b}$$

II. Propriedade Associativa

Como foi estudado para os inteiros, temos que efetuar, muitas vezes, a adição e multiplicação de mais de 2 números racionais. O que fazemos é reduzir ao caso de operação com um par de números racionais.

Assim, as expressões

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{4}$$

devem ser consideradas como

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right) + \frac{1}{4} = \frac{7}{6} + \frac{1}{4} = \frac{17}{12}$$

ou

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{2} + \frac{11}{12} = \frac{17}{12}$$

Portanto,

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \right) + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right)$$

Analogamente,

$$\left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \right) \times \frac{1}{4} = \frac{2}{6} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{24}$$

ou

$$\frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{12} = \frac{2}{24}$$

Portanto,

$$\left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \right) \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{4} \right)$$

Quaisquer que sejam $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ e $\frac{m}{n}$, racionais, tem-se sempre:

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \right) + \frac{m}{n} = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{m}{n} \right)$$

$$\left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \right) \times \frac{m}{n} = \frac{a}{b} \times \left(\frac{c}{d} \times \frac{m}{n} \right)$$

III. Existência de Elemento Neutro

Como $I \subset \mathbb{Q}_+$ e $0 \in I$ e $1 \in I$, é claro que

$$0 \in \mathbb{Q}_+ \text{ e } 1 \in \mathbb{Q}_+.$$

$$0 = \frac{0}{1} = \frac{0}{2} = \dots = \frac{0}{1520} = \dots$$

$$1 = \frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \dots = \frac{1520}{1520} = \dots$$

Adição

$$\frac{2}{3} + 0 = \frac{2}{3} + \frac{0}{3} = \frac{2}{3}$$

e

$$0 + \frac{2}{3} = \frac{0}{3} + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

Donde,

$$\frac{2}{3} + 0 = 0 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

Multiplicação

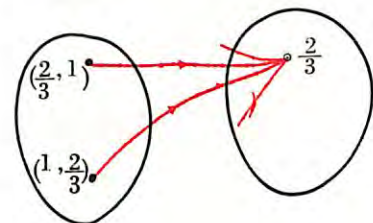
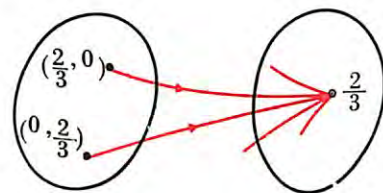
$$\frac{2}{3} \times 1 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{1} = \frac{2}{3}$$

e

$$1 \times \frac{2}{3} = \frac{1}{1} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

Donde,

$$\frac{2}{3} \times 1 = 1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$



O zero é o número racional que adicionado (à esquerda e à direita) a qualquer número racional reproduz este número.

O zero é o elemento neutro da adição e o um é o elemento neutro da multiplicação.

O um é o número racional tal que, multiplicado à esquerda ou à direita por um número racional, reproduz este número.

Qualquer que seja o racional $\frac{a}{b}$, temos:

$$\frac{a}{b} + 0 = 0 + \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$$

e

$$\frac{a}{b} \times 1 = 1 \times \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$$

IV. Existência de Elemento Inverso da Multiplicação

Esta é uma propriedade nova. Seja o racional $\frac{3}{4}$. Existe

um outro racional, $\frac{4}{3}$, tal que $\frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = \frac{12}{12} = 1$, isto

é, o produto é igual ao elemento neutro da multiplicação.

$\frac{4}{3}$ é o *inverso multiplicativo* de $\frac{3}{4}$.

É claro que $\frac{3}{4}$ é o inverso multiplicativo de $\frac{4}{3}$.

Do mesmo modo, o inverso multiplicativo do racional 2 é $\frac{1}{2}$,

pois $2 \times \frac{1}{2} = 1$.

Qual é o inverso multiplicativo de $\frac{0}{7}$? O zero não tem inverso

multiplicativo, pois não existe um número racional que multiplicado por zero resulte 1.

Qualquer que seja o racional $\frac{a}{b} \neq 0$, existe o racio-

nal $\frac{b}{a}$, tal que $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$. O número racio-

nal $\frac{b}{a}$ é chamado *inverso multiplicativo* de $\frac{a}{b}$.

V. Propriedade Distributiva da Multiplicação em Relação à Adição

Considere o produto de $\frac{3}{2}$ pela soma indicada $\frac{2}{5} + \frac{1}{3}$;

$$\frac{3}{2} \times \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{3} \right)$$

Podemos resolver a questão de duas maneiras:

$$i. \quad \frac{3}{2} \times \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{3} \right) = \frac{3}{2} \times \frac{11}{15} = \frac{11}{10}$$

$$ii. \quad \frac{3}{2} \times \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{3} \right) = \frac{3}{2} \times \frac{2}{5} + \frac{3}{2} \times \frac{1}{3} \\ = \frac{3}{5} + \frac{1}{2} = \frac{11}{10}$$

Ou seja,

$$\frac{3}{2} \times \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{3} \right) = \left(\frac{3}{2} \times \frac{2}{5} \right) + \left(\frac{3}{2} \times \frac{1}{3} \right)$$

Verifica-se, facilmente, que:

$$\left(\frac{2}{5} + \frac{1}{3} \right) \times \frac{3}{2} = \left(\frac{2}{5} \times \frac{3}{2} \right) + \left(\frac{1}{3} \times \frac{3}{2} \right)$$

Quaisquer que sejam os racionais $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ e $\frac{m}{n}$, temos:

$$\frac{m}{n} \times \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \right) = \left(\frac{m}{n} \times \frac{a}{b} \right) + \left(\frac{m}{n} \times \frac{c}{d} \right)$$

e

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \right) \times \frac{m}{n} = \left(\frac{a}{b} \times \frac{m}{n} \right) + \left(\frac{c}{d} \times \frac{m}{n} \right)$$

Exercícios:

74. Quais as propriedades que fazem com que as seguintes afirmações sejam verdadeiras?

a. $\frac{3}{5} + \frac{1}{4} + \frac{2}{7} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{3}{5} + \frac{2}{7}$

b. $\frac{3}{5} \times 1 = \frac{3}{5}$

c. $\frac{7}{2} \times \frac{2}{7} = 1$

d. $\frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{2} + \frac{2}{9} \right) =$
 $= \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{5} \right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{9} \right)$

e. $\frac{3}{7} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{4}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{7}$

f. $\frac{9}{11} + 0 = \frac{9}{11}$

g. $\frac{3}{5} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \left(\frac{3}{5} + \frac{2}{3} \right) + \frac{1}{2} = \frac{19}{15} + \frac{1}{2}$

h. $\left(\frac{4}{7} + \frac{1}{2} \right) \cdot \left(3 + \frac{1}{5} \right) = \frac{4}{7} \times 3 + \frac{4}{7} \times \frac{1}{5}$
 $+ \frac{1}{2} \times 3 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{5}$

75. Usando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, calcule:

a. $\frac{3}{5} \times \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right) =$

b. $\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) \cdot \left(\frac{5}{2} + \frac{9}{8} \right) =$

76. Determine (se possível) os inversos multiplicativos dos racionais:

a. $\frac{3}{5}$ b. $\frac{4}{3}$ c. 1 d. 0 e. 4.

77. Complete:

a. Se $3 \cdot x = 1$ então $x = \dots$

b. $\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} = \dots$

c. Se $x \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$ então $x = \dots$

d. Se $m + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$ então $m = \dots$

e. Se $\frac{4}{5} \cdot a = 0$ então $a = \dots$

f. $\frac{1}{2} \cdot 2 = \dots$

78. Use a propriedade distributiva:

a. $\frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{2} + \frac{2}{9} \right) = \dots$

b. $2 \times \left(\frac{4}{6} + 1 + \frac{2}{5} \right) = \dots$

c. $\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{5} + 3 \right) + \frac{1}{3} = \dots$

79. Pode-se efetuar $\left(\frac{4}{7} + \frac{1}{2} \right) \cdot \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{5} \right)$ sem calcular as somas indicadas, fazendo uso da propriedade distributiva:

$$\left(\frac{4}{7} + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{5}\right) = \left(\frac{4}{7} + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{4}{7} + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{5} =$$

$$= \frac{\cancel{2}}{7} \cdot \frac{3}{\cancel{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} + \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} =$$

$$= \frac{6}{7} + \frac{3}{4} + \frac{4}{35} + \frac{1}{10} =$$

$$= \frac{120 + 105 + 16 + 14}{140} =$$

$$= \frac{255}{140} = \frac{51}{28}$$

80. Efetue como acima:

a. $\left(2 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{7}\right)$

b. $\left(\frac{3}{5} + 4\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right)$

c. $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) \cdot \left(\frac{m}{n} + \frac{r}{s}\right)$

81. Dizer a propriedade que está sendo usada:

a. $\frac{3}{5} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{5}$

b. $\frac{1}{2} \times 1 = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

c. $\frac{3}{5} + \frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5} + \frac{3}{5}$

d. $\frac{8}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{7} = \frac{8}{6} \times \frac{3}{7}$

e. $0 + \frac{1}{5} = \frac{1}{5} + 0 = \frac{1}{5}$

f. $\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = 1$

g. $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$

5A.16. Subtração

A mesma situação colocada para números inteiros aparece para os números racionais.

Por exemplo, a *diferença* entre os racionais

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{4}$$

é o racional $\frac{a}{b}$ tal que $\frac{a}{b} + \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$.

Aqui, $\frac{a}{b} = \frac{5}{12}$, pois $\frac{5}{12} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12} + \frac{3}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

Ou seja,

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$$

Todavia, se considerarmos a subtração $\frac{2}{3} - \frac{3}{4}$, não existe

a *diferença* entre $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$, pois não existe um número racio-

nal que adicionado a $\frac{3}{4}$ resulte $\frac{2}{3}$.

A solução desta questão nos levará, mais tarde, à introdução dos racionais negativos, da mesma forma que a impossibilidade de subtração do tipo $3-7$ levou à introdução dos inteiros negativos.

Por ora, vamos considerar os pares ordenados $\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right)$ para os quais $\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d}$. Estes pares formam um subconjunto de $\mathbb{Q}_+ \times \mathbb{Q}_+$, que chamaremos D.

Definamos a aplicação de D em \mathbb{Q}_+ que ao par $\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) \in D$ associa o número racional $\frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d} \in \mathbb{Q}_+$

$$\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) \longrightarrow \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d}$$

Este racional é chamado a *diferença* entre $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ indica-se

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d}$$

$\frac{a}{b}$ é o minuendo e $\frac{c}{d}$ é o subtraendo.

A aplicação é a *operação de subtração*.

Exemplos:

$$a. \quad \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{2 \times 5 - 3 \times 2}{3 \times 5} = \frac{10 - 6}{15} = \frac{4}{15}$$

$$b. \quad \frac{2}{5} - \frac{1}{8} = \frac{2 \times 8 - 5 \times 1}{5 \times 8} = \frac{16 - 5}{40} = \frac{11}{40}$$

$$c. \quad \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{4 \times 3 - 3 \times 2}{3 \times 3} = \frac{12 - 6}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

Exercícios:

Determine a diferença:

$$82. \quad \left(2, \frac{1}{3}\right) \longrightarrow$$

$$83. \quad \left(\frac{3}{5}, \frac{1}{8}\right) \longrightarrow$$

$$84. \quad (4, 5) \longrightarrow$$

$$85. \quad \left(\frac{8}{5}, 0\right) \longrightarrow$$

$$86. \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right) \longrightarrow$$

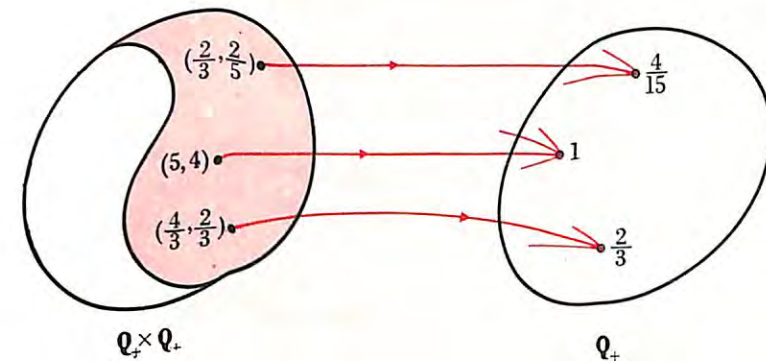
$$87. \quad \left(3, \frac{1}{4}\right) \longrightarrow$$

$$88. \quad \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right) \longrightarrow$$

$$89. \quad \left(\frac{37}{12}, \frac{3}{4}\right) \longrightarrow$$

$$90. \quad \left(\frac{20}{3}, 4\right) \longrightarrow$$

$$91. \quad \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{16}\right) \longrightarrow$$



A definição é dada de tal maneira que, ao ser aplicada para os números inteiros, conserva o resultado já obtido anteriormente.

$$7 - 3 = \frac{7}{1} - \frac{3}{1} = \frac{7 \times 1 - 3 \times 1}{1 \times 1} = \frac{7 - 3}{1} = \frac{4}{1} = 4.$$

Regras Práticas

A definição acima acarreta as duas regras práticas:

i: Se as frações têm o mesmo denominador, basta efetuar subtração dos numeradores e conservar o denominador comum.

De fato,

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3 \times 4 - 4 \times 1}{4 \times 4} = \frac{12 - 4}{16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

e

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3-1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

ii: Se as frações têm denominadores diferentes, considera-se as frações equivalentes às dadas, que tenham para denominador o menor denominador comum e aplica-se a regra anterior.

$$\frac{2}{5} - \frac{3}{15} = \frac{6}{15} - \frac{3}{15} = \frac{6-3}{15} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

Exercícios:

Determine a diferença, usando as regras práticas:

92. $\frac{4}{5} - \frac{1}{8} =$

97. $5 - \frac{7}{5} =$

93. $\frac{3}{5} - \frac{2}{5} =$

98. $\frac{3}{8} - \frac{1}{7} =$

94. $\frac{10}{15} - \frac{7}{15} =$

99. $\frac{2}{7} - \frac{3}{10} =$

95. $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} =$

100. $\frac{8}{5} - \frac{31}{20} =$

96. $\frac{4}{3} - 1 =$

101. $\frac{9}{10} - \frac{83}{100} =$

Como já vimos, não é possível achar, em \mathbb{Q}_+ , a diferença $\frac{2}{3} - \frac{3}{4}$. Por isso, há necessidade de ampliar o conjunto dos racionais, introduzindo-se os números racionais negativos através da seguinte definição:

$$\frac{2}{3} - \frac{3}{4} = - \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3} \right) = - \frac{1}{12}$$

Outros exemplos:

$$\frac{4}{5} - \frac{8}{5} = - \left(\frac{8}{5} - \frac{4}{5} \right) = - \frac{4}{5}$$

$$\frac{2}{7} - \frac{5}{7} = - \left(\frac{5}{7} - \frac{2}{7} \right) = - \frac{3}{7}$$

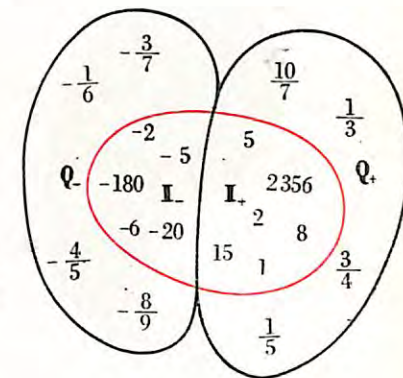
$$\frac{1}{8} - \frac{1}{2} = - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right) = - \frac{3}{8}$$

Se $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, então $\frac{c}{d} > \frac{a}{b}$, e $\frac{c}{d} - \frac{a}{b}$ tem sentido; por isso define-se

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = - \left(\frac{c}{d} - \frac{a}{b} \right)$$

O conjunto dos racionais, que ora estudamos, reunido ao conjunto dos racionais negativos, resulta no conjunto dos racionais relativos, que será estudado na segunda série.

Podemos, também, representar os números racionais negativos na reta numérica.



Exercício:

102. Represente, na reta numérica, os números racionais abaixo. (Sòmente para facilitar, tome o segmento unidade tendo 2 cm.).

a. $\frac{3}{4}$

d. $-\frac{1}{4}$

b. $\frac{1}{2}$

e. $-\frac{3}{4}$

c. $\frac{4}{5}$

f. $-\frac{4}{5}$

5A.17. Divisão

Quando estudamos o conjunto $I = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, vimos que a divisão do inteiro a pelo inteiro b ($b \neq 0$) só é possível quando a é múltiplo de b .

No entanto, no conjunto Q_+ é sempre possível efetuar a divisão do racional $\frac{a}{b}$ pelo racional $\frac{c}{d}$, contanto que $\frac{c}{d}$ seja diferente de zero.

Seja Q^*_+ o conjunto de todos racionais não nulos.

Considere a aplicação de $Q_+ \times Q^*_+$ em Q_+ , que ao par

$\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) \in Q_+ \times Q^*_+$ associa o número $\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$ ou

$\frac{a \times d}{b \times c} \in Q_+$. O quociente de $\frac{a}{b}$ por $\frac{c}{d}$ é $\frac{a \cdot d}{b \cdot c}$ e a aplicação

é a divisão.

$$\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) \longrightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Indica-se: $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$

ou $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$

Exemplos:

$$\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} = \frac{8}{9}$$

$$\frac{1}{2} : \frac{3}{5} = \frac{1}{2} \times \frac{5}{3} = \frac{5}{6}$$

$$4 : \frac{8}{7} = \frac{4}{1} \times \frac{7}{8} = \frac{4 \times 7}{1 \times 8} = \frac{14}{4}$$

É claro que tomamos $Q_+ \times Q^*_+$ e não $Q_+ \times Q_+$ para excluir o zero como segundo elemento dos pares $\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right)$, isto é, para excluir os pares $\left(\frac{a}{b}, 0\right)$, para os quais a divisão não está definida.

Considere, agora, a divisão $7 : 3$. Temos:

$$\frac{7}{1} : \frac{3}{1} = \frac{7}{1} \times \frac{1}{3} = \frac{7 \times 1}{1 \times 3} = \frac{7}{3}$$

Isto é, $7 : 3 = \frac{7}{3}$, como introduzimos no começo deste capítulo.

A definição dada acarreta a regra prática que você conhece:

Para dividir um número racional por outro, multiplica-se o primeiro pelo inverso multiplicativo do segundo.

Exercícios:

Determine o quociente:

103. $\frac{1}{2} : \frac{3}{4} =$

104. $\frac{4}{5} : 8 =$

105. $\frac{1}{4} : \frac{3}{5} =$

106. $3 : \frac{4}{5} =$

107. $2 : 4 =$

108. $\frac{1}{8} : \frac{1}{2} =$

109. $\frac{15}{7} : \frac{30}{35} =$

110. $\frac{3}{4} : \frac{2}{3} =$

111. $1 : \frac{4}{5} =$

112. $1 : \frac{5}{4} =$

5A.18. Subtração e Divisão como Operações Inversas da Adição e Multiplicação

Se ao resultado da subtração

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{4}$$

adicionarmos o subtraendo, $\frac{1}{4}$, obtemos o minuendo $\frac{2}{3}$,

Isto é,

$$\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$$

Por isso, a subtração se diz a operação inversa da adição.

Isto é,

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}, \text{ é o mesmo que } \frac{5}{12} + \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$$

De maneira análoga, se o resultado da divisão

$$\frac{2}{3} : \frac{1}{4}$$

é multiplicado pelo divisor, $\frac{1}{4}$, obtemos o dividendo $\frac{2}{3}$.

Ou seja,

$$\left(\frac{2}{3} : \frac{1}{4}\right) \times \frac{1}{4} = \frac{2}{3}, \text{ pois}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{3} : \frac{1}{4}\right) \times \frac{1}{4} &= \left(\frac{2}{3} \times \frac{4}{1}\right) \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{2}{3} \times \left(\frac{4}{1} \times \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{2}{3} \times 1 \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{3}$$

Donde,

$$\frac{2}{3} : \frac{1}{4} = \frac{8}{3}, \text{ é o mesmo que } \frac{8}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$$

Por isso, a divisão é dita a operação inversa da multiplicação.

Exercício:

113. Usando as operações inversas, complete as igualdades

a. $\frac{5}{7} + \dots = \frac{8}{5}$

b. $3 = \frac{1}{2} \times \dots$

c. $\frac{3}{4} + \frac{2}{7} + \dots = \frac{18}{15}$

d. $\frac{1}{3} - \dots = 0$

e. $1 : \dots = \frac{2}{5}$

f. $\dots : \frac{3}{5} = \frac{4}{11}$

5A.19. Expressões com Números Racionais

Para as expressões com números racionais temos as mesmas regras que para os inteiros. Inicialmente, simplificam-se todas as frações, se possível. Depois, efetuam-se produtos e quocientes na ordem que surgem e, finalmente, as adições e subtrações, também na ordem que surgem. Os sinais de reunião (parêntesis, colchêtes, chaves, etc.) são eliminados de dentro para fóra.

Exemplo:

$$8 - \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} : \frac{4}{12} \right) \times \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{5} \right) \right] : \frac{8}{30}$$

Simplificando, obtemos:

$$\begin{aligned}
& 8 - \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} : \frac{1}{3} \right) \times \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{5} \right) \right] : \frac{4}{15} = \\
& = 8 - \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{1} \right) \times \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{5} \right) \right] : \frac{4}{15} = \\
& = 8 - \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{1} \right) \times \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{5} \right) \right] : \frac{4}{15} = \\
& = 8 - \left[\left(\frac{1+4}{2} \right) \times \left(\frac{15-4}{20} \right) \right] : \frac{4}{15} = \\
& = 8 - \left[\frac{5}{2} \times \frac{11}{20} \right] : \frac{4}{15} = \\
& = 8 - \frac{55}{40} : \frac{4}{15} = 8 - \frac{11}{8} \times \frac{15}{4} = \\
& = 8 - \frac{165}{32} = \frac{256 - 165}{32} = \frac{91}{32}
\end{aligned}$$

Exercícios:

114. Resolva as seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
\text{a. } & \frac{3}{5} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{7} - \frac{1}{8} = \\
\text{b. } & \frac{5}{7} \times \frac{7}{8} : \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = \\
\text{c. } & \frac{2}{7} \times \frac{3}{4} \times \frac{14}{21} \times \frac{7}{8} = \\
\text{d. } & \left(\frac{10}{3} - \frac{5}{2} \right) \times \frac{6}{5} \times \frac{3}{8} = \\
\text{e. } & \frac{3}{7} \times \frac{2}{9} - \frac{1}{21} \times \frac{4}{5} - \frac{2}{35} =
\end{aligned}$$

$$\text{f. } \frac{3}{5} + \frac{2}{3} : \frac{5}{9} - \frac{3}{20} =$$

$$\text{g. } \frac{2}{7} + \frac{3}{4} + \frac{14}{21} + \frac{7}{8} =$$

$$\text{h. } \left(\frac{2}{5} + \frac{7}{10} \right) \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{3}{25} \right) =$$

$$115. \left[\left(\frac{3}{4} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right) : \frac{11}{60} \right] - \left[\left(\frac{5}{4} + \frac{1}{2} - \frac{4}{3} \right) \times \frac{4}{125} \right]$$

$$116. 2 \times \frac{3}{4} - \left(\frac{41}{8} - \frac{31}{8} \right) \times \frac{2}{5} + \frac{4}{3} \times \left(\frac{25}{100} + \frac{1}{2} \right) =$$

$$117. \frac{\frac{4}{5} \times \frac{26}{5} \times 10 \times \frac{5}{100}}{\frac{7}{10} \times \frac{13}{5} : \frac{3}{2}} =$$

Exercícios — Capítulo 5 — PARTE A

118. Um trabalho é feito em 10 dias por uma pessoa, e o mesmo trabalho é feito por outra pessoa em 15 dias. Se as duas trabalhassem juntas, que fração do trabalho total fariam em um dia?

119. Calcular um número, sabendo que $\frac{5}{11}$ dele é igual a $\frac{7}{8}$ de 5 240.

120. Uma coleção de selos tinha 200 exemplares. Uma pessoa vendeu $\frac{1}{4}$ dela. Quantos selos vendeu? Com quantos ficou? Ela poderia ter vendido $\frac{1}{7}$ da coleção?

121. Antonio possui NCr\$ 20,00 e Pedro os $\frac{4}{5}$ do que tem Antonio. Quantos cadernos de NCr\$ 0,50 Pedro poderá comprar com a quantia que possui?

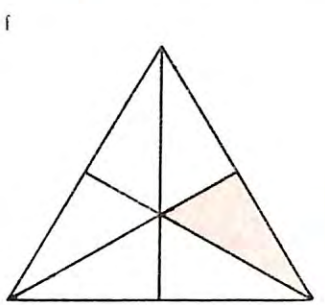
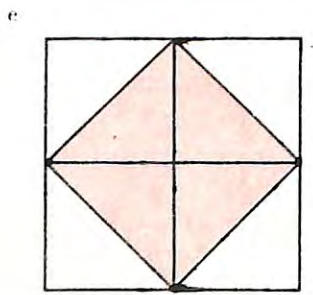
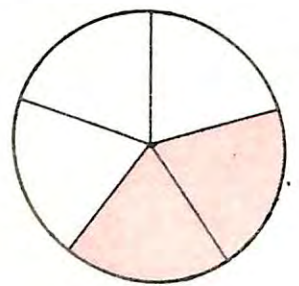
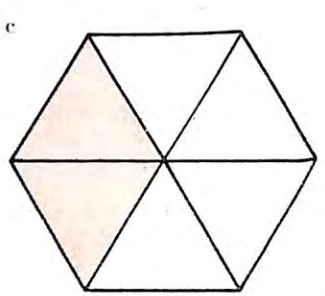
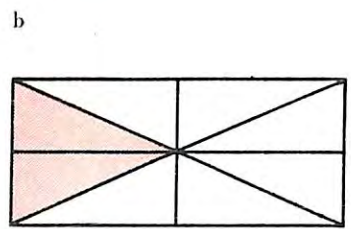
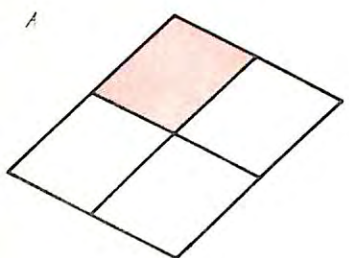
122. Antonio possui NCr\$ 20,00 e esta quantia corresponde aos $\frac{4}{5}$ do que possui João. Qual dos dois tem mais dinheiro? Qual a diferença entre as quantias que os dois possuem?

123. Três irmãos compraram uma casa. O mais velho deu para esta compra NCr\$ 15.000,00, o mais novo, NCr\$ 7.000,00 e o do meio, NCr\$ 8.000,00. Com que frações do preço total entrou cada um deles?

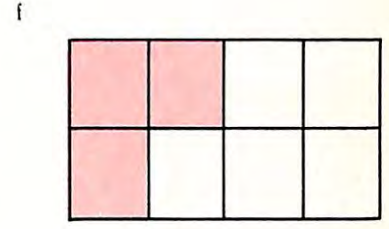
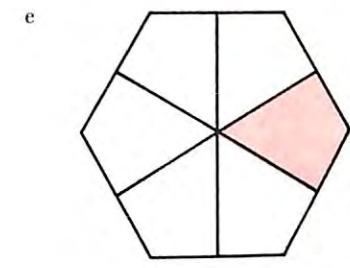
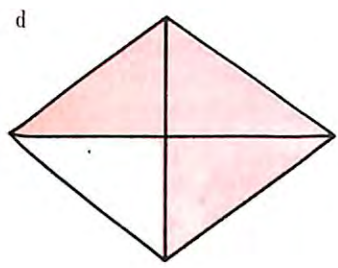
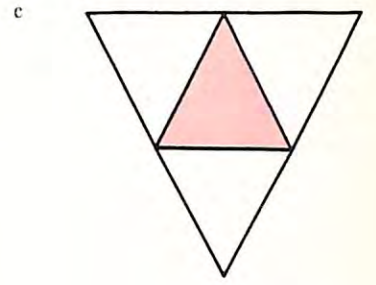
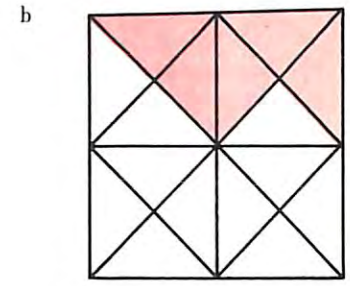
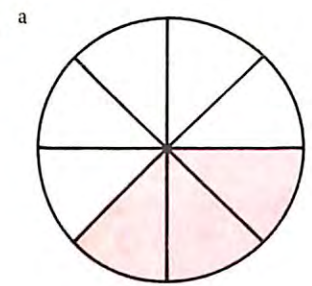
124. Quatro caminhões devem transportar 70 t de carga. O primeiro transportará $\frac{8}{35}$ da carga; o 2.º, $\frac{3}{10}$; o 3.º, $\frac{2}{7}$ e o quarto a carga restante. Dê em toneladas quanto cada um deles transportará.

125. Por quanto foi comprada uma televisão, sabendo-se que $\frac{2}{7}$ do total foram dados como entrada, e que o restante foi pago em 10 prestações de NCr\$ 50,00 cada uma?

126. Nos desenhos seguintes, represente sob forma de fração a parte colorida e a parte não colorida.



127. Diga que fração representa a parte colorida das figuras:



128. Dado o conjunto

$$A = \left\{ \frac{3}{5}, \frac{7}{2}, \frac{8}{2}, \frac{1}{7}, \frac{3}{8}, \frac{5}{5}, \frac{9}{5}, \frac{1}{9} \right\},$$

forme os seguintes subconjuntos:

- a. dos números maiores que 1,
- b. dos números menores que 1 e
- c. dos números iguais a 1.

129. Complete as seguintes igualdades:

- a. $7 \times \dots = 3$
- b. $\frac{1}{2} \times \dots = 5$
- c. $\frac{1}{4} \times \dots = 0$
- d. $0 \times \dots = \frac{7}{10}$
- e. $\frac{2}{5} + \dots = 1$
- f. $1 - \dots = \frac{4}{5}$

$$g. \frac{3}{7} \times \dots = \frac{15}{7} \quad h. \frac{6}{10} : \dots = \frac{12}{5}$$

$$i. \frac{7}{8} - \frac{2}{9} + \dots = 1 \quad j. \frac{4}{3} + \frac{5}{6} - \dots = 1$$

$$k. \frac{8}{3} : \dots = 7 \quad l. \dots : \frac{2}{5} = 10$$

130. Dê a fração que pertence à mesma classe de equivalência de $\frac{2}{3}$ e que tem como denominador 9.

131. No conjunto: $\left\{ \frac{a}{5}, \frac{2}{10}, \frac{b}{15}, \frac{4}{20}, \frac{5}{c}, \frac{6}{d}, \dots \right\}$ substitua as letras por números inteiros, de modo que todas as frações representem o mesmo número racional.

132. Escreva em ordem decrescente os elementos dos conjuntos abaixo:

$$a. \left\{ \frac{5}{3}, \frac{2}{3}, \frac{9}{3}, \frac{1}{3} \right\}$$

$$b. \left\{ \frac{1}{6}, \frac{4}{9}, \frac{7}{30}, \frac{5}{18} \right\}$$

133. Escreva em ordem crescente os elementos dos seguintes conjuntos de números racionais:

$$a. \left\{ \frac{2}{7}, \frac{3}{21}, \frac{22}{70}, \frac{17}{14} \right\}$$

$$b. \left\{ \frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{7}, \frac{5}{3} \right\}$$

134. Suponha que p e q sejam dois números racionais quaisquer, e que p seja maior do que q :

Por exemplo

$$p = 5 \quad e \quad q = 3$$

$$p > q \quad 5 > 3;$$

outro exemplo

$$p = \frac{3}{4} \quad e \quad q = \frac{1}{2} \quad \text{pois} \quad \frac{3}{4} > \frac{1}{2}$$

$p > q$ é uma desigualdade, p e q são chamados membros da desigualdade.

Vamos dividir ambos os membros de uma desigualdade por um mesmo número racional diferente de zero.

Por exemplo, considerando $5 > 3$ vamos dividir ambos os membros por 2. Ficamos com:

$$\frac{5}{2} \quad e \quad \frac{3}{2}$$

Qual a relação entre $\frac{5}{2}$ e $\frac{3}{2}$? Como $5 \cdot 2 > 2 \cdot 3$,

$$\text{temos} \quad \frac{5}{2} > \frac{3}{2}.$$

Ou seja, $5 > 3$ acarreta $\frac{5}{2} > \frac{3}{2}$.

Seja agora, $\frac{3}{4} > \frac{1}{2}$. Vamos dividir ambos os membros por 3:

$$\frac{3}{4} : 3 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4} \quad e$$

$$\frac{1}{2} : 3 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{4} > \frac{1}{6}$$

Como $1 \times 6 > 4 \times 1$ segue-se que $\frac{1}{4} > \frac{1}{6}$.

$$\text{Donde, } \frac{3}{4} > \frac{1}{2} \xrightarrow{\div 3} \frac{1}{4} > \frac{1}{6}$$

Portanto, concluímos:

Dividindo-se ambos os membros de uma desigualdade por um mesmo número racional, diferente de zero, (por que?), obtemos uma desigualdade no mesmo sentido, isto é, se o primeiro membro era maior (menor) do que o segundo continuará a ser maior (menor) depois da divisão.

135. Considere a desigualdade:

$$\frac{3}{4} < \frac{7}{8}$$

O que acontece se multiplicarmos *ambos os membros* por um mesmo número (diferente de 0)? Tome um exemplo e tire uma conclusão.

136. Simplifique as seguintes frações:

a. $\frac{342}{1500}$ c. $\frac{48 + 30}{18}$ e. $\frac{2^5 \times 7}{2^3 \times 3 \times 7^2}$

b. $\frac{535}{1750}$ d. $\frac{3 + 18}{9 + 6}$ f. $\frac{2 \times 3^2 \times 13}{2^4 \times 3^2 \times 7}$

g. $\frac{63}{147}$ h. $\frac{347}{937}$ i. $\frac{192}{980}$

137. Seja o conjunto

$$A = \left\{ \frac{2}{1}, \frac{3}{7}, \frac{6}{5}, \frac{5}{2}, \frac{4}{2}, \frac{8}{15}, \frac{6}{3}, \frac{15}{6} \right\}$$

e a relação

... é equivalente a ...

- a. Dê o conjunto R
- b. Dê as propriedades dessa relação.

138. Seja o conjunto do exercício anterior e a relação: "o numerador de ... é igual ao denominador de ..."

- a. Dê o conjunto R
- b. Faça o diagrama da relação
- c. Dê as propriedades dessa relação.

139. Leia as seguintes frações:

a. $\frac{7}{2}$ d. $\frac{3}{18}$ g. $\frac{4}{100}$

b. $\frac{5}{37}$ e. $\frac{3}{8}$ h. $\frac{4}{49}$

c. $\frac{7}{3}$ f. $\frac{9}{4}$ i. $\frac{5}{9}$

O mesmo para

a. $\frac{1}{5}$ c. $\frac{3}{1000}$ e. $\frac{11}{6}$

b. $\frac{10}{2800}$ d. $\frac{22}{7}$ f. $\frac{1000}{333}$

140. Calcule

a. $\frac{3}{5} + \frac{4}{5} + \frac{1}{5}$ c. $\frac{2}{7} + \frac{1}{4} + \frac{13}{14}$

b. $\frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{7}{8}$ d. $\frac{1}{2} + \frac{3}{5} + 4 + \frac{1}{6}$

141. Simplifique as frações:

a. $\frac{8}{32}$ b. $\frac{342}{900}$

$$c. \frac{7\ 200}{11\ 700}$$

$$d. \frac{16}{35}$$

$$e. \frac{1\ 111}{3\ 333}$$

$$f. \frac{13}{195}$$

142. Faça dois desenhos convenientes e neles pinte:

- quatro das 5 partes iguais de uma unidade;
- uma das 5 partes iguais de quatro unidades;
- represente a parte colorida de seus desenhos de a. e b. por um número racional.
- Como são esses números racionais?

143. Quando o inverso multiplicativo de um número é maior que o número? Dê exemplos.

144. Quando o inverso multiplicativo de um número é menor que o número? Dê exemplos?

145. Quando o inverso multiplicativo de um número é igual ao próprio número?

146. Efetue o produto realizando cancelamento (se possível)

$$a. \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{13}$$

$$f. \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{15}$$

$$l. \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{5}$$

$$b. \frac{1}{5} \cdot 50$$

$$g. \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8}$$

$$m. \frac{5}{6} \cdot 2$$

$$c. 36 \cdot \frac{1}{12}$$

$$h. \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{12}$$

$$n. 72 \cdot \frac{1}{9}$$

$$d. \frac{8}{9} \cdot 1$$

$$i. \frac{4}{5} \cdot \frac{17}{17}$$

$$o. \frac{9}{16} \cdot 1$$

$$e. \frac{13}{5} \cdot \frac{10}{39}$$

$$j. \frac{33}{100} \cdot \frac{90}{99}$$

$$p. \frac{17}{3} \cdot \frac{3}{51}$$

147. Calcule o produto e o reduza na forma de fração irredutível (antes de multiplicar expresse cada fator na forma fracionária)

$$a. 8 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$b. 12 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$c. \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \frac{2}{7}$$

$$d. \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$e. \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$f. \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

148. Calcule os quocientes. Expresse sua resposta como um número inteiro ou um número na forma mista.

$$a. \frac{1}{4} : \frac{1}{8}$$

$$d. \frac{1}{2} : \frac{1}{3}$$

$$g. 5 : \frac{2}{3}$$

$$b. 15 : \frac{1}{5}$$

$$e. \frac{2}{3} : \frac{1}{4}$$

$$h. 7 : 4$$

$$c. \frac{2}{3} : \frac{1}{12}$$

$$f. \frac{3}{4} : \frac{1}{3}$$

$$i. 3 : \frac{1}{2}$$

149. A divisão goza da propriedade comutativa? Calcule cada um dos quocientes abaixo para verificar se você está certo.

$$a. \frac{4}{3} \div \frac{2}{5}$$

$$b. \frac{2}{5} \div \frac{4}{3}$$

150. A divisão goza da propriedade associativa?

Calcule

$$a. \frac{3}{2} \div \left(\frac{9}{4} \div \frac{7}{6} \right)$$

$$b. \left(\frac{3}{2} \div \frac{9}{4} \right) \div \frac{7}{6}$$

151. $\frac{13}{10}$ é menor ou maior que $\frac{13}{100}$? Quantas vezes maior ou quantas vezes menor?

152. Note que, fazendo uso das propriedades de adição, temos:

$$\begin{aligned} 1 \frac{1}{3} + 2 \frac{2}{3} &= 1 + \frac{1}{3} + 2 + \frac{2}{3} \\ &= (1+2) + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) \\ &= 3 + \left(\frac{3}{3}\right) \\ &= 3 + 1 = 4 \end{aligned}$$

Usando este mesmo processo calcule rapidamente:

- a. $33 \frac{1}{3} + 66 \frac{2}{3}$ d. $4 \frac{1}{8} + 3 \frac{4}{8}$
 b. $16 \frac{1}{2} + 37 \frac{1}{3}$ e. $8 \frac{5}{16} + 1 \frac{13}{16}$
 c. $30 + 7 \frac{4}{5}$ f. $2 \frac{12}{32} + 14 \frac{23}{32}$

153. No quadrado abaixo adicione os números segundo as direções indicadas:

	↓	↓	↓	↓
→	$11 \frac{1}{4}$	$2 \frac{1}{2}$	$8 \frac{3}{4}$	
→	5	$7 \frac{1}{2}$	10	
→	$6 \frac{1}{4}$	$12 \frac{1}{2}$	$3 \frac{3}{4}$	

Tal quadrado chama-se "quadrado mágico". Você já descobriu por que?

154. Efetue as seguintes subtrações. Expresse sua resposta sob a forma de fração irredutível.

a. $\frac{15}{64} - \frac{7}{64}$

f. $\left(4 \frac{1}{2} - 1 \frac{1}{4}\right) - 2$

b. $\frac{8}{9} - \frac{2}{3}$

g. $16 \frac{2}{3} - \frac{7}{3}$

c. $3 \frac{4}{5} - \frac{1}{3}$

h. $\frac{90}{100} - \frac{109}{1000}$

d. $5 \frac{9}{16} - 2 \frac{5}{8}$

i. $\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6}\right) - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6}\right)$

e. $\frac{14}{6} - \frac{11}{9}$

j. $\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{6}\right)$

155. Compare os resultados do exercício anterior nas partes i e j. Tome mais exemplos e responda: a multiplicação é distributiva em relação à subtração?

156. Resolva as expressões abaixo e dê a resposta sob forma de fração irredutível.

a. $\frac{29}{20} \times \frac{1 - \frac{1}{2}}{2 - \frac{1}{3}} + \frac{19}{24} =$

b. $\left(\frac{2}{25} + \frac{1}{20} - \frac{3}{100} : 25\right) : \left(\frac{7}{25} + \frac{36}{5}\right) =$

$$c. \left(\frac{5}{16} + \frac{7}{12} \times \frac{13}{4} - \frac{7}{8} \times \frac{37}{21} + \frac{1}{3} \right) :$$

$$: \left(\frac{5}{14} - \frac{3}{7} \times \frac{1}{2} \right) =$$

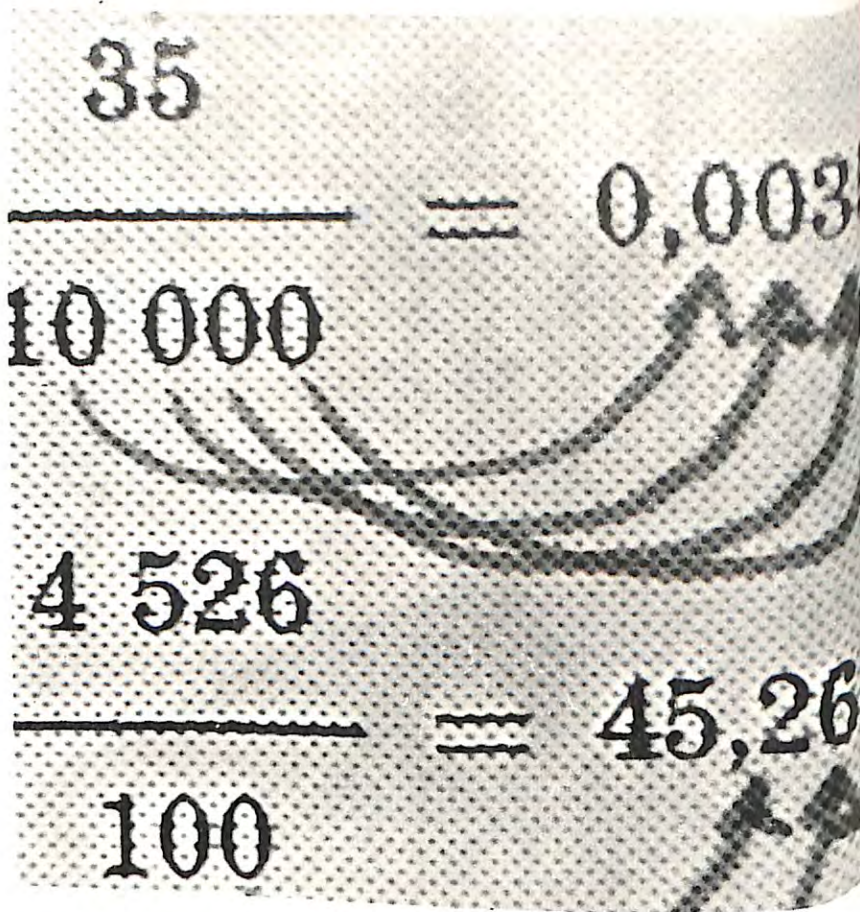
$$d. \frac{9}{4} : \frac{8}{3} + \left(\frac{5}{2} + \frac{26}{5} \right) :$$

$$: \left(\frac{10}{3} + \frac{19}{2} \right) + \frac{1}{2} + \frac{3}{8} \times \frac{3}{20} =$$

Capítulo

5B

O conjunto dos números racionais Representação decimal



PARTE B — REPRESENTAÇÃO DECIMAL DOS NÚMEROS RACIONAIS

5B.1. Introdução

Você certamente já sabe, desde a Escola Primária, que os números racionais podem ser representados por outros tipos de numerais, que não sejam as frações. Tais numerais são chamados *numerais decimais*, comumente, e, imprópriamente, chamados “números decimais”.

Assim, é do seu conhecimento que o número racional “um quarto”, além de ser representado pela fração $\frac{1}{4}$, pode também ser representado pelo numeral decimal 0,25, isto é,

$$\frac{1}{4} = 0,25 .$$

Analogamente,

$$\frac{1}{2} = 0,5 .$$

$$\frac{1}{25} = 0,04,$$

$$\frac{3}{4} = 0,75,$$

$$\frac{1}{3} = 0,333 \dots ,$$

$$\frac{13}{6} = 2,1666 \dots .$$

Vamos estudar mais detidamente estes numerais.

5B.2. Numerais Decimais

Considere as frações cujos denominadores são:

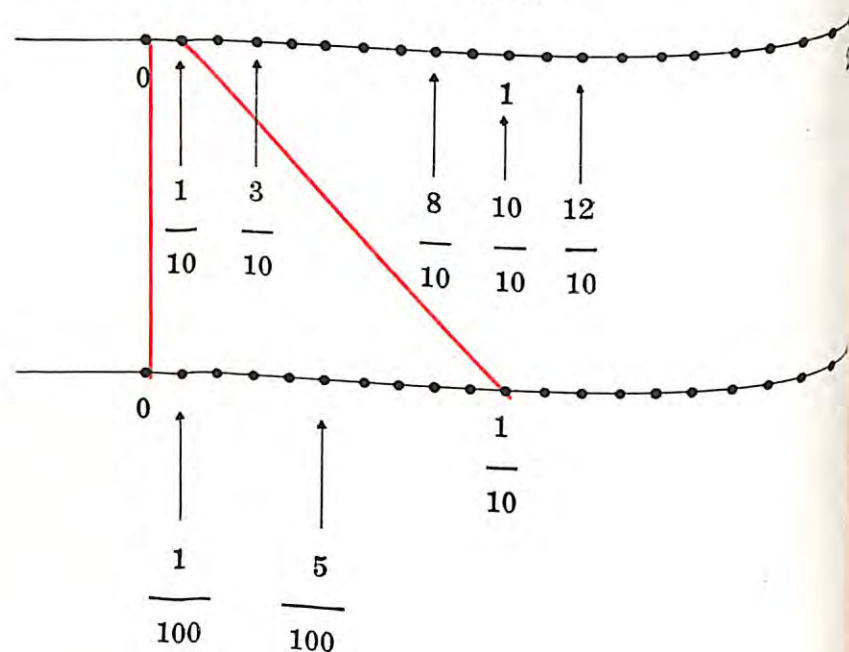
$$\begin{aligned} 10^1 &= 10 \\ 10^2 &= 100 \\ 10^3 &= 1000 \\ \text{etc.} \end{aligned}$$

Tais frações são chamadas *decimais*.

Por exemplo:

$$\frac{1}{10}, \frac{3}{10}, \frac{45}{100}, \frac{13}{1\ 000}, \frac{8}{100}, \text{ etc.}$$

Estas frações são representantes de números racionais. Estes números racionais podem, por sua vez, ser representados na reta numérica, como se vê na figura.



O número racional representado por $\frac{1}{10}$ também pode ser representado por outro numeral, 0,1, chamado *representação decimal* do número racional $\frac{1}{10}$. Isto é, $\frac{1}{10} = 0,1$.

Analogamente,

$$\frac{1}{100} = 0,01$$

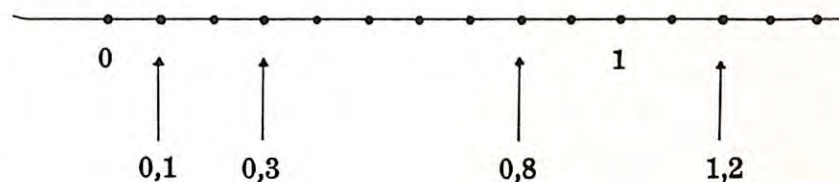
$$\frac{3}{10} = 0,3$$

$$\frac{45}{100} = 0,45$$

$$\frac{13}{1\ 000} = 0,013, \text{ etc.}$$

Note que 0,3 e $\frac{3}{10}$ são *representações diferentes do mesmo número racional*. A 1.^a é chamada *representação decimal*, a 2.^a *representação fracionária*.

Usando a reta numérica,



Para se obter a representação decimal de um número racional, representado por uma fração decimal, usa-se a seguinte regra:

Todo número racional representado por uma fração decimal pode ser representado também por um numeral decimal, obtido do numerador da fração, separando-se nele, com uma vírgula, da direita para a esquerda, tantos algarismos quantos são os zeros do denominador, completando com zeros à esquerda, quando necessário.

Exemplos:

$$\frac{45}{10} = 4,5$$

$$\frac{365}{100} = 3,65$$

$$\frac{4}{100} = 0,04$$

$$\frac{3\ 501}{10} = 350,1$$

$$\frac{35}{10\ 000} = 0,0035$$

$$\frac{4\ 526}{100} = 45,26$$

Exercícios:

1. Represente sob a forma de numeral decimal os seguintes números racionais:

a. $\frac{2}{10}$

b. $\frac{1}{1\ 000\ 000}$

c. $\frac{172}{1\ 000}$

d. $\frac{7}{100}$

e. $\frac{70}{1\ 000}$

f. $\frac{28}{10}$

2. A mesma questão para

a. $\frac{4\ 372}{100}$

b. $\frac{75}{100}$

c. $\frac{49\ 387}{1\ 000}$

d. $\frac{2}{10\ 000}$

e. $\frac{700}{1\ 000}$

f. $\frac{3\ 003}{100\ 000}$

5B.3. Leitura dos Numerais Decimais

A leitura dos numerais decimais é feita da seguinte maneira:

- 0,1 — um décimo
- 0,01 — um centésimo
- 0,001 — um milésimo
- 0,0001 — um décimo de milésimo
- 0,00001 — um centésimo de milésimo
- 0,000001 — um milionésimo,
- etc.

$\frac{1}{10} = 0,1$ é a unidade decimal de 1.^a ordem:

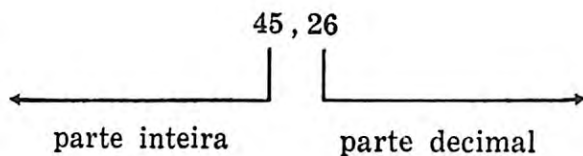
$\frac{1}{100} = 0,01$ é a unidade decimal de 2.^a ordem;

$\frac{1}{1\ 000} = 0,001$ é a unidade decimal de 3.^a ordem; etc.

As unidades simples, dezenas, centenas, etc., passam a ser chamadas *unidades inteiras*. Temos, então, as unidades inteiras e os decimais, na seguinte ordem:

..., centena, dezena, unidade simples, décimo, centésimo, ...

Na representação decimal, os algarismos escritos à esquerda da vírgula constituem a *parte inteira*, e os escritos à direita da vírgula, a *parte decimal*.



Pelo princípio do valor posicional, o 6 escrito à direita do 2, representa unidades 10 vezes menores, o que é verdade,

$$\text{pois } \frac{1}{10} = 10 \times \frac{1}{100},$$

isto é,

um décimo é igual a 10 centésimos.

$$\text{Da mesma maneira, } \frac{1}{100} = 10 \times \frac{1}{1000},$$

$$1 = 10 \times \frac{1}{10} \text{ (ou } 100 \times \frac{1}{100}, \text{ etc.)}$$

45,26 lê-se: “quarenta e cinco inteiros e vinte e seis centésimos”.

4,5 lê-se: “quatro inteiros e cinco décimos”.

0,04 lê-se: “quatro centésimos”.

Exercícios:

3. Faça a leitura dos seguintes numerais decimais:

- a. 0,007
- b. 0,000 008
- c. 2,003
- d. 0,0005
- e. 3,02
- f. 2,1534
- g. 0,101
- h. 4 372,3
- i. 0,00204
- j. 37,005

4. Pelo princípio do valor posicional você sabe, por exemplo, que 0,2 é dez vezes maior que 0,02, então, complete:

- a. 2,1 é ... vezes ... que 0,21
- b. 5 é ... vezes ... que 50
- c. 80 é ... vezes ... que 0,8
- d. 0,07 é ... vezes ... que 0,7
- e. 0,003 é ... vezes ... que 300.

5B.4. Representação Decimal dos Racionais

Até agora vimos numerais decimais de números racionais representados por frações decimais.

Podemos, entretanto, estender o nosso estudo e ver que qualquer número racional tem representação decimal, além da fração.

Vejamos alguns exemplos:

I. Considere o número racional representado por qualquer fração da classe:

$$\left\{ \frac{2}{5}, \frac{4}{10}, \frac{6}{15}, \dots, \frac{40}{100}, \dots, \frac{60}{150}, \dots, \frac{400}{1000}, \dots \right\}$$

Como $\frac{4}{10} = 0,4$, $\frac{40}{100} = 0,40$, etc., segue-se que

$$\frac{2}{5} = 0,4 = 0,40 = 0,400 = \dots \text{ pois } \frac{2}{5} = \frac{4}{10} = \frac{40}{100} = \text{etc.}$$

Na classe de equivalência acima, existem várias frações decimais que representam o mesmo número racional.

Consequência:

Acrescentando-se à esquerda da representação decimal de um número racional, um ou mais zeros, o numeral decimal obtido é representação decimal do mesmo número racional.

Exemplos:

$$0,4 = 0,40 = 0,400 = 0,4000 = \dots$$

$$2,1 = 2,10 = 2,100 = 2,1000 = \dots$$

II. Considere agora, a seguinte classe de equivalência:

$$\left\{ \frac{4}{1}, \frac{8}{2}, \frac{12}{3}, \dots, \frac{40}{10}, \dots, \frac{48}{12}, \dots, \frac{400}{100}, \dots \right\}$$

Como $\frac{40}{10} = 4,0$, $\frac{400}{100} = 4,00$, etc., segue-se que

$$4 = 4,0 = 4,00 = 4,000 = \dots$$

III. Considere, agora, a classe de equivalência

$$\left\{ \frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \frac{4}{12}, \dots, \frac{20}{60}, \dots, \frac{50}{150}, \dots \right\}$$

Vemos que *não é possível* encontrar um representante cujo denominador seja 10 ou 100 ou 1 000, etc. (Por que?)

Então, pergunta-se: *não seria possível encontrar a representação decimal de $\frac{1}{3}$?*

A resposta você já conhece: é possível e, inclusive, no início destacamos que $\frac{1}{3} = 0,333\dots$. É uma representação decimal "um pouco diferente", que será estudada logo após as operações com números racionais escritos como numerais decimais.

Exercícios:

5. Dê uma representação decimal dos racionais:

a. $\frac{3}{100}$

d. $\frac{8}{1\ 000}$

b. $\frac{53}{10}$

e. $\frac{2\ 936}{100}$

c. $\frac{562}{100}$

f. $\frac{35}{10\ 000}$

6. Dê representações decimais dos racionais:

a. $\frac{2}{5}$

d. $\frac{7}{4}$

b. $\frac{4}{5}$

e. $\frac{1}{2}$

c. $\frac{18}{8}$

f. $\frac{3}{25}$

7. Dada uma representação decimal de um número racional, obtem-se uma representação fracionária, escrevendo-se para numerador o numeral decimal sem a vírgula, e para denominador, 1 seguido de tantos zeros quantos fôrem os algarismos da parte decimal.

Exemplos

Dê as representações fracionárias de 34,89, 0,049, e 0,2.

a. 34,89

numerador : 3489

denominador : 100

$$\text{portanto} \quad 34,89 = \frac{3489}{100}$$

b. 0,049

$$\begin{array}{l} \text{numerador} : \quad 49 \\ \text{denominador} : \quad 1\ 000 \end{array}$$

$$\text{portanto} \quad 0,49 = \frac{49}{1\ 000}$$

c. 0,2

$$\begin{array}{l} \text{numerador} : \quad 2 \\ \text{denominador} : \quad 10 \end{array}$$

$$\text{portanto} \quad 0,2 = \frac{2}{10}$$

8. Escreva sob a forma de fração decimal e simplifique, quando possível, os seguintes numerais decimais:

- | | | |
|----------|-----------|-----------|
| a. 0,72 | e. 0,482 | i. 0,409 |
| b. 3,45 | f. 0,0025 | j. 3,02 |
| c. 0,009 | g. 3,0008 | l. 0,480 |
| d. 1,001 | h. 2,3 | m. 457,25 |

9. Dados dois números racionais escritos como numerais decimais, para se saber qual deles é o maior dos dois, procede-se da seguinte maneira:

- Faz-se com que o número de algarismos das partes decimais seja o mesmo, acrescentando-se os zeros necessários.
- Compara-se os números inteiros obtidos após retirar-se a vírgula.

Exemplos:

Comparar 14,765 e 14,78

14,765

$$14,78 = 14,780$$

Como $14\ 780 > 14\ 765$, segue-se que

$$14,78 > 14,765.$$

10. Escreva, na ordem crescente, os elementos dos seguintes conjuntos (use o sinal $<$):

a. $\{0,5; 5; 0,00005; 0,005;\}$

b. $\{3,7; 0,2; 0,05; 2,1; 0,32; 0,048\}$

11. Escreva, na ordem decrescente, os elementos dos seguintes conjuntos (use o sinal $>$)

a. $\{3,2; 0,032; 0,320; 0,00032\}$

b. $\{0,51; 0,087; 3,07; 10,002; 0,0097; 0,99\}$

12. Represente na reta numérica os elementos dos quatro conjuntos dos exercícios anteriores. Faça quatro desenhos.

13. Represente na reta numérica os elementos do seguinte conjunto de números:

$$\left\{ \frac{2}{5}; 0,3; 2; 0,4; 1,5; 3,1; \frac{3}{2}; \frac{3}{10}; \frac{1}{5}; \frac{1}{2}; 0,2 \right\}$$

5B.5. Operações

Como já definimos as operações de adição, de subtração, de multiplicação e de divisão para números racionais, assim como suas respectivas propriedades, não é necessário defini-las novamente, pois ainda estamos trabalhando com os números racionais, porém representados sob uma outra forma.

Basta, portanto, examinar como tais operações na prática se realizam.

5B.6. Adição

Seja:

$$1,3 + 0,78 + 1,056$$

Temos:

$$1,3 + 0,78 + 1,056$$

$$1,3 + 0,78 + 1,056 = \frac{13}{10} + \frac{78}{100} + \frac{1\ 056}{1\ 000}$$

$$= \frac{1\ 300 + 780 + 1\ 056}{1\ 000}$$

$$= \frac{3\ 136}{1\ 000}$$

$$= 3,136$$

Ou seja,

$$1,3 + 0,78 + 1,056 = 3,136$$

O dispositivo prático que você conhece é o que se vê abaixo, colocando os numerais de modo que as vírgulas se correspondam e adicionando como se fôsem inteiros.

$$\begin{array}{r} 1,3 \\ 0,78 \\ 1,056 \\ \hline 3,136 \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{r} 1,300 \\ 0,780 \\ 1,056 \\ \hline 3,136 \end{array}$$

5B.7. Subtração

Se $\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d}$, a subtração $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$ pode ser efetuada usando-se a representação decimal.

Exemplo:

$$3,4 - 1,036 = \frac{34}{10} - \frac{1\ 036}{1\ 000} = \frac{3\ 400 - 1\ 036}{1\ 000} = \frac{1\ 364}{1\ 000} = 1,364$$

Dispositivo prático:

$$\begin{array}{r} 3,4 \\ 1,036 \\ \hline 1,364 \end{array}$$

Exercício:

14. Calcule

- $0,35784 + 0,435 + 3,02 + 5,15205 + 2 + 7,01 =$
- $3,572 + 0,4051 + 12,013 + 0,0007 + 20,0092 =$
- $48,2007 - 15,8959 =$
- $17,347 - 12,95 =$
- $0,92 - 0,3775 =$
- $5 - 0,9872 =$
- $(3,48 + 2,7) - (0,97 + 5,21) =$
- $18 - (3,472 + 0,037) =$
- $(0,25387 + 0,74613) - 0,18009 =$
- $20 - 12,347 + 0,002 - 7,65 =$

5B.8. Multiplicação

Seja, por exemplo, $1,2 \times 5,83$.

$$1,2 \times 5,83 = \frac{12}{10} \times \frac{583}{100} = \frac{12 \times 583}{100} = \frac{6\ 996}{100} = 6,996$$

isto é,

$$1,2 \times 5,83 = 6,996$$

Note que o número de algarismos da parte decimal do produto é igual à soma dos números de algarismos das partes decimais dos fatores.

Na prática, multiplica-se como se fôsem números inteiros, separando-se no resultado, por meio de uma vírgula, da direita para a esquerda, um número de algarismo igual à soma dos números de algarismos das partes decimais dos fatores.

Exemplo:

$$\begin{array}{r} 5,83 \\ \times 1,2 \\ \hline 1166 \\ 583 \\ \hline 6,996 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2,987 \\ \times 34,22 \\ \hline 5974 \\ 5974 \\ 11948 \\ 8961 \\ \hline 102,21514 \end{array}$$

Exercícios:

15. Calcule:

- $3,472 \times 0,42 =$
- $0,035 \times 50 =$
- $2 \cdot (3,2 + 4,5) - 3,5 \cdot (4,5 - 1) =$
- $5,4784 \times 0,048 =$
- $0,025 \times 50 \times 0,8 =$

16. Você viu em exercícios anteriores que:

- 0,2 é dez vezes maior que 0,02;
0,7 é cem vezes maior que 0,007 etc.

Então: $0,02 \times 10 = 0,2$
 $0,007 \times 100 = 0,7$

Você pode concluir: para multiplicar um número racional sob a forma decimal por 10, 100, 1 000, etc., basta deslocar para a direita, a vírgula de um, dois, três, etc., algarismos e acrescentar zeros, se houver necessidade.

17. Calcule:

- $0,00072 \times 100 =$
- $3,47 \times 10 =$
- $0,345 \times 1\ 000 =$
- $2,3899 \times 10\ 000 =$
- $0,025 \times 1\ 000 =$

5B.9. Divisão

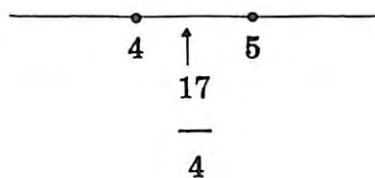
Em primeiro lugar vamos considerar a divisão de dois inteiros

ros. Seja, por exemplo, a divisão de 17 por 4; sabemos que o quociente aproximado por falta é 4, e o resto é 1. (Ver capítulo 4, seção 4A.).

$$\begin{array}{r} 17 \quad | \quad 4 \\ \hline 1 \quad 4 \end{array}$$

Donde, sendo 5 o quociente por excesso, temos

$$4 < \frac{17}{4} < 5 .$$



Assim, se tomarmos 4 como quociente (por falta), o erro que se comete é $\frac{1}{4}$, que é menor do que 1. Do mesmo modo, se

tomarmos 5 como quociente (por excesso), o erro que se comete é $\frac{3}{4}$, menor do que 1. Vemos, neste caso, que o quociente por falta é "melhor" do que o por excesso, já que o erro que se comete é menor.

Porém, procuremos uma aproximação melhor. Façamos a divisão de 170 por 4.

$$\begin{array}{r} 170 \quad | \quad 4 \\ \hline 10 \quad 42 \end{array}$$

Como 42 é o quociente aproximado por falta e 43 é o quociente aproximado por excesso, tem-se

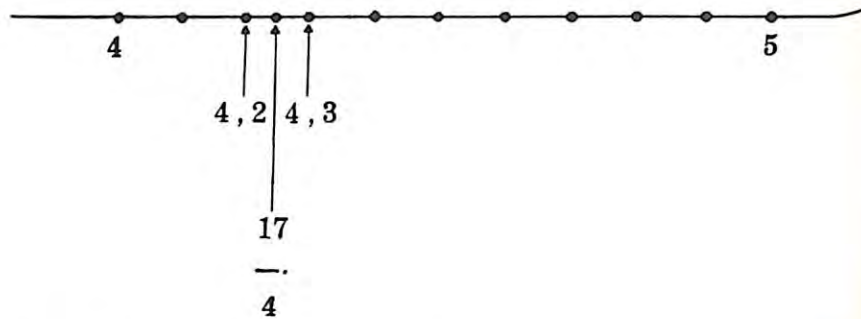
$$42 < \frac{170}{4} < 43 .$$

Se dividirmos todos os termos destas desigualdades por 10 as

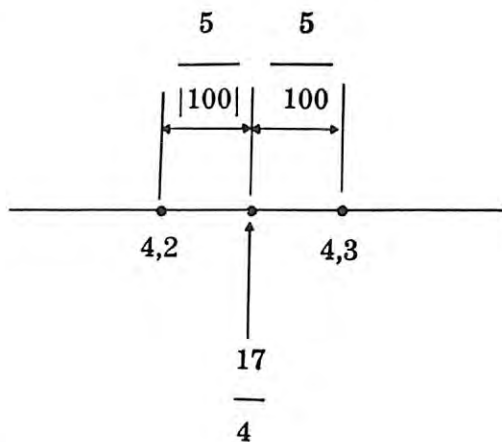
desigualdades se mantêm: logo

$$\frac{42}{10} < \frac{17}{4} < \frac{43}{10}, \text{ ou}$$

$$4,2 < \frac{17}{4} < 4,3$$



4,2 e 4,3 são ditos quocientes por falta e por excesso, respectivamente, de 17 por 4, a *menos de um décimo*, pois o erro que se comete ao tomá-los por quociente verdadeiro de 17 por 4 é *menor do que um décimo* (0,1).



Consideremos, agora, a divisão de 1 700 por 4.

$$\begin{array}{r} 1\ 700 \\ 10 \\ 20 \\ 0 \end{array} \Bigg| \begin{array}{l} 4 \\ 4\ 25 \end{array}$$

Logo,

$$\frac{1\ 700}{4} = 425$$

Mas,

$$\frac{1\ 700}{4} = 100 \times \frac{17}{4}$$

Como a relação de igualdade é transitiva, temos:

$$425 = 100 \times \frac{17}{4}$$

Portanto $\frac{17}{4}$ é 425 dividido por 100, ou seja

$$\frac{17}{4} = \frac{425}{100} = 4,25$$

$$\boxed{\frac{17}{4} = 4,25}$$

Resumindo

$$\begin{array}{r} 17 \\ 1 \end{array} \Bigg| \begin{array}{l} 4 \\ 4 \end{array}$$

quociente aproximado por falta a menos de 1 unidade.

$$\begin{array}{r} 17,0 \\ 10 \\ 5 \end{array} \Bigg| \begin{array}{l} 4 \\ 4,2 \end{array}$$

quociente aproximado por falta a menos de 1 décimo.

$$\begin{array}{r} 17,00 \\ 10 \\ 20 \\ 0 \end{array} \Bigg| \begin{array}{l} 4 \\ 4,25 \end{array}$$

quociente exato de 17 por 4.

Conclusão:

Para se obter o quociente aproximado por falta de dois inteiros, a menos de um décimo, um centésimo, etc., acrescenta-se ao dividendo um, dois, etc., zeros e efetua-se a divisão normalmente e, no quociente, separa-se uma, duas etc., casas decimais, da direita para a esquerda, com uma vírgula.

Se, nas sucessivas divisões, obtivermos um resto nulo, o

quociente obtido é exato. No caso acima, $\frac{17}{4} = 4,25$ é o

quociente exato de 17 por 4.

Exemplos:

- I. Quociente aproximado por falta, a menos de um centésimo, de 35 por 6.

$$\begin{array}{r} 35,00 \\ 50 \\ 20 \\ 2 \end{array} \left| \begin{array}{r} 6 \\ 5,83 \end{array} \right.$$

- II. Quociente aproximado, por falta, a menos de 1 milésimo de 25 por 7.

$$\begin{array}{r} 25,000 \\ 40 \\ 50 \\ 10 \\ 3 \end{array} \left| \begin{array}{r} 7 \\ 3,571 \end{array} \right.$$

Consideremos, em segundo lugar, a divisão de dois racionais escritos na forma decimal. Por exemplo,

$$4,21 \div 5,3 .$$

Temos:

$$7,21 \div 5,3 = \frac{721}{100} \div \frac{53}{10}$$

$$\begin{aligned} & \frac{721}{100} \div \frac{530}{100} \\ & = \frac{721}{100} \times \frac{100}{530} \\ & = \frac{721}{530} \end{aligned}$$

Ou seja, podemos reduzir ao caso anterior, da divisão de dois inteiros. Considere o quociente a menos de 1 centésimo:

$$\begin{array}{r} 721,00 \\ 1910 \\ 3200 \\ 020 \end{array} \left| \begin{array}{r} 530 \\ 1,36 \end{array} \right.$$

Na prática não é necessário proceder como acima, isto é, transformar em frações decimais. Iguala-se o número de algarismos das partes decimais do dividendo e divisor com zeros, e considera-se a divisão como se tivéssemos números inteiros, pois podemos multiplicar o dividendo e o divisor por 10, 100, etc., sem alterar o quociente.

Exemplo: Calcule o quociente por falta, a menos de 0,01 de 3,7 por 1,16.

$$\begin{array}{r} 3,7 \\ 1,16 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 3,70 \\ 1,16 \\ 370,00 \\ 0220 \\ 1040 \\ 112 \end{array} \left| \begin{array}{r} 116 \\ 3,18 \end{array} \right. \rightarrow \begin{array}{r} 370 \\ 116 \end{array}$$

Donde, o quociente procurado é 3,18.

Exercícios:

18. Calcule, a menos de 0,01, os seguintes quocientes:

- de 37 por 17
- de 5 por 285
- de 32,42 por 2,375.

19. Calcule, com a aproximação de 0,001, os seguintes quocientes:

a. de 2,1348 por 0,9

b. de 7 por 11

c. de 15 por 4,32.

20. Calcule, a menos de 0,0001, os seguintes quocientes:

a. de 8 por 9

b. de 1 500 por 124,5

5B.10. Representação Decimal de um Racional Qualquer

Já notamos que certos números racionais, como por exemplo

$\frac{3}{4}$, admitem representação decimal, 0,75 no caso, pois

$$\frac{3}{4} = \frac{75}{100} = 0,75$$

Ou seja, a fração $\frac{75}{100}$ pertence a mesma classe de equiva-

lência que $\frac{3}{4}$, logo representa o mesmo número racional.

$$\left\{ \frac{3}{4}, \frac{6}{8}, \frac{9}{12}, \dots, \frac{75}{100}, \dots \right\}$$

O mesmo não acontece, entretanto, com alguns racionais, como,

por exemplo, $\frac{1}{3}$, pois não é possível encontrar uma fração

equivalente a $\frac{1}{3}$, cujo denominador seja 10, 100, 1 000, etc.

A maneira de achar a representação decimal de $\frac{1}{3}$ é efetuando a divisão de 1 por 3.

$$\begin{array}{r} 1,000 \dots \quad | \quad 3 \\ 10 \quad \quad \quad 0,333 \dots \\ 10 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array}$$

Verifique que a divisão não é exata, e existe um resto que se repete periódicamente e o quociente também se prolonga indefinidamente.

Indica-se:

$$\frac{1}{3} = 0,333 \dots \text{ ou } 0,\bar{3}$$

Tomemos o racional representado por $\frac{13}{6}$.

$$\left\{ \frac{13}{6}, \frac{26}{12}, \frac{39}{18}, \dots \right\}$$

Temos:

$$\begin{array}{r} 13 \quad | \quad 6 \\ 10 \quad 2,166\dots \\ 40 \\ 40 \\ 4 \end{array}$$

$$\frac{13}{6} = 2,166 \dots = 2,1\bar{6}$$

Aqui, também, a divisão não tem fim, e há um resto que se repete periódicamente.

Números Racionais que possuem representação decimal periódica infinita, são chamados *dízimas periódicas*. Eles serão estudados com mais detalhes nos próximos livros.

Assim, acabamos de verificar que *qualquer* número racional possui representação decimal.

Exercícios — Capítulo 5 — PARTE B

21. Dê, de acordo com a sua posição, o valor de cada algarismo nos seguintes numerais:
- | | |
|------------|-------------|
| a. 0,572 | d. 0,00037 |
| b. 3,2 | e. 2003,4 |
| c. 452,328 | f. 2,427078 |
22. Escreva sob a forma de fração e de numeral decimal os seguintes números:
- trinta e sete décimos milésimos.
 - cinco inteiros e trinta e dois milésimos.
 - mil e quatro inteiros e sete centésimos.
 - cem inteiros e um milésimo.
23. Verifique quais das seguintes afirmações são falsas e quais são verdadeiras:
- | | |
|---------------------------|---------------------------|
| a. $0,7 > 0,087$ | d. $1,2 > 0,12$ |
| b. $7,3 < 7,300$ | e. $\frac{1}{2} \neq 0,5$ |
| c. $0,08 = \frac{8}{100}$ | f. $0,25 = 0,25000$ |
24. Dados os números: 3,25 ; 0,08 ; 2,25 ; 0,250 ; 0,9 ; 1,3 e 0,75 faça a leitura deles e represente-os na reta numérica (aproximadamente).
25. Dado o conjunto: $\left\{ \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{6}{3}, \frac{2}{30}, \frac{5}{7}, \frac{18}{45}, \frac{75}{25}, \frac{3}{11} \right\}$ escreva seus elementos como numeral decimal.
26. Calcule, com a aproximação de 0,01, os quocientes:
- de 3,5 por 0,8
 - de 9 por 27
 - de 0,016 por 0,3
27. Efetue as operações abaixo usando a forma de numeral decimal:

a. $\frac{9}{100} + \frac{7}{10} + \frac{21}{100}$	d. $\frac{15}{8} - \frac{8}{15}$
b. $\frac{1}{2} - \frac{3}{1\ 000}$	e. $\frac{2}{3} + \frac{5}{9} + \frac{1}{15}$
c. $\frac{5}{8} + \frac{2}{3}$	f. $\frac{5}{18} - \frac{1}{27}$

28. Quais os pares de números que tornam a igualdade $x + y = 5,6$ verdadeira, nos seguintes casos:
- | | | |
|-------------------------|---|----------------------|
| a. $x \in \mathbf{I}$ | e | $y \in \mathbf{I}$ |
| b. $x \in \mathbf{I}$ | e | $y \in \mathbf{Q}_+$ |
| c. $x \in \mathbf{Q}_+$ | e | $y \in \mathbf{Q}_+$ |
29. Usando a propriedade distributiva efetue os cálculos de:
- $0,5 \cdot (3,8 + 0,16 + 1,2)$
 - $3 \cdot (2 + 0,07)$
30. Calcule:
- $(0,0048 + 3,5 + 0,07 - 3,0548) : 2 =$
 - $0,038 \times 4 + 4,5 : 0,9 =$
 - $1 - 3,2 : 8 =$
 - $10,32 \times 2,5 - 20 + 3 \cdot (2,1) + 0,7 - 11,44 : 11 =$
31. Calcule, usando a forma fracionária:
- $\frac{3}{5} : 0,12 \times \frac{8}{3} - 1,007 =$
 - $\frac{5}{7} : 0,12 \times \frac{21}{12} : 0,5625 =$
32. Efetue:
- | | |
|----------------------|--------------------------|
| a. 35×10 | d. $1,156 \times 1\ 000$ |
| b. $3,56 \times 100$ | e. $13,10 \div 10$ |
| c. $0,03 \times 10$ | f. $4,56 \div 1\ 000$ |

33. Calcule os quocientes aproximados, por falta:

- a. $30 \div 7$, a menos de 0,1
- b. $13 \div 2$, a menos de 0,01
- c. $0,035 \div 2,5$, a menos de 0,001.

34. Ache a representação decimal dos racionais:

- a. $\frac{1}{3}$
- b. $\frac{1}{6}$
- c. $\frac{50}{21}$
- d. $\frac{4}{9}$
- e. $\frac{8}{15}$
- f. $\frac{17}{150}$

35. Resolva:

- a. $\frac{3}{5} + 0,1 - 0,5$
- b. $\frac{2}{3} + 0,25 \times \frac{10}{5} - 0,8$
- c. $3,5 : \frac{5}{10} - \frac{1}{8} \times 3,2$

36. Colocar em ordem crescente (use o sinal $<$)

- a. $0,3$; $\frac{8}{5}$; $\frac{1}{2}$; $0,1$
- b. 3 ; $\frac{7}{2}$; $4,03$; $3,51$
- c. $\frac{1}{3}$; $0,3$; $\frac{7}{20}$; $0,33$

d. $0,9$; $\frac{99}{100}$; 1 ; $0,999$

37. Determine x sabendo que:

- a. $3,56 + x = 8$
- b. $2,103 - 0,85 = x$
- c. $3,15 : x = 7,4$
- d. $8,15 - x = 3,086$
- e. $x : 0,8 = 0,125$

38. Use a propriedade distributiva e depois calcule:

- a. $3,5 \cdot (1 + 0,3) =$
- b. $5 \cdot (2,5 + 3,75) =$
- c. $0,08 \cdot (1 + 0,5 + 3) =$

39. Represente os seguintes racionais na reta numérica (aproximadamente):

- a. $0,35$
- b. $\frac{1}{3}$
- c. $0,222 \dots = 0,2\bar{2}$
- d. $0,3555 \dots = 0,3\bar{5}$
- e. $0,025$

40. Calcule as somas seguintes, de acordo com o exemplo dado:

$$\frac{2}{9} = 0,222 \dots$$
$$+ \frac{6}{9} = 0,666 \dots$$

$$\frac{8}{9} = 0,888 \dots$$

$$\begin{array}{r} \text{a. } \frac{1}{3} = 0,333\dots \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad + \\ \frac{1}{3} = 0,333 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{b. } \frac{52}{99} = 0,525252\dots \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad + \\ \frac{47}{99} = 0,474747\dots \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{c. } \frac{1}{3} = 0,333\dots \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad + \\ \frac{2}{3} = 0,666\dots \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{d. } \frac{2}{9} = 0,222\dots \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad + \\ \frac{7}{9} = 0,777\dots \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{e. } \frac{4}{9} = 0,444\dots \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad + \\ \frac{50}{9} = 5,555\dots \\ \hline \end{array}$$

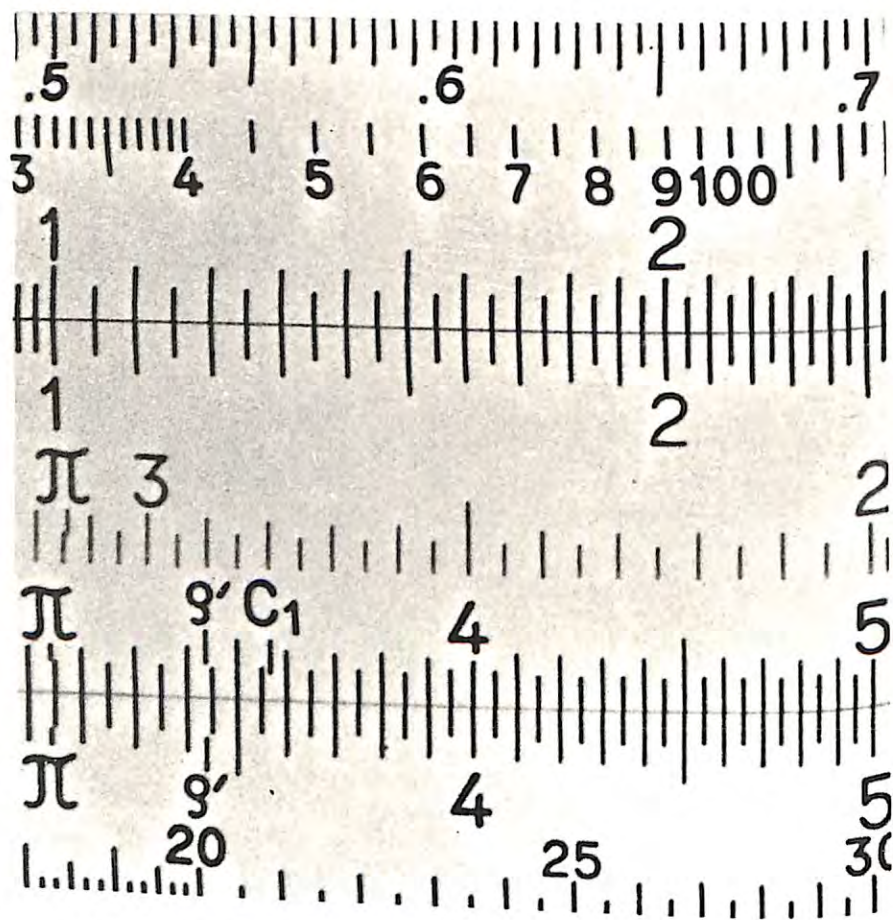
$$\begin{array}{r} \text{f. } \frac{1}{3} = 0,333\dots \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad + \\ \frac{8}{3} = 2,666\dots \\ \hline \end{array}$$

41. Que conclusões você pode tirar do exercício anterior?

Capítulo

6

Medidas



6.1. Noção de Medida

Em muitas ocasiões, você é solicitado a responder *quantos objetos* compõem uma determinada coleção. São exemplos: “Quantas são as salas de aula de seu colégio?” “Quantos dias tem o mês de fevereiro?”

As respostas a estas perguntas são dadas em *números inteiros* que são encontrados através de uma *contagem*. Lembre-se que *contar* os elementos de um conjunto significa estabelecer uma aplicação bijetora entre o conjunto dado e uma parte do conjunto N dos naturais.

Considere agora as questões:

Qual o comprimento desta régua?

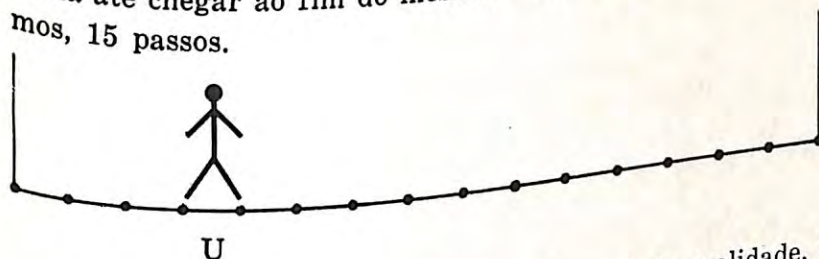
Qual o comprimento do corredor de sua escola?

Qual a quantidade de água que cabe nesta jarra?

Provavelmente, as respostas seriam: a régua tem 30 centímetros, o corredor tem 10 metros, na jarra cabe 1 litro de água. Estas respostas foram obtidas através de uma *medição*, pois tanto a régua, como o corredor ou a jarra não são formados de partes *separadas* que pudessem ser contadas.

Seria natural, perguntarmos, como aparecem estes números, 30, 10 e 1, e o que significam as palavras: “centímetros”, “metro” e “litro” e porque surgiram.

Consideremos o caso do corredor. Você poderia, por exemplo, sair de um dos extremos do corredor e contar quantos passos daria até chegar ao fim do mesmo. Talvez encontrasse, digamos, 15 passos.

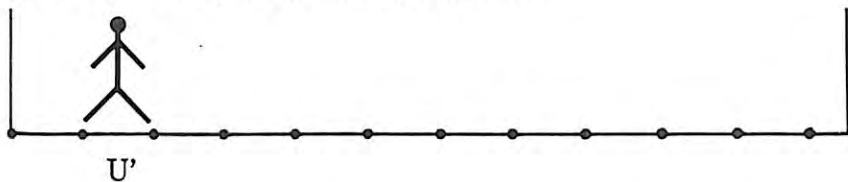


Chamemos de U o “tamanho” de seu passo. Na realidade, o que você fez foi verificar *quantas vezes* U coube no corredor. Dizemos que 15 é a *medida* do corredor com a *unidade* U (passo), e que foi feita uma *medição* do corredor com a *unidade* U .

Note que o processo de medição envolve uma contagem, mas

diferente daquela vista anteriormente. Aqui, não estamos contando os objetos individuais de uma coleção: estamos contando quantas vezes uma unidade (passo, no caso) cabe num determinado objeto a ser medido (corredor).

Vamos concordar que tal procedimento não é prático, porque um colega seu, com um passo maior, poderia encontrar 11 passos e meio para o mesmo corredor.



Neste caso, a medida do corredor, com a nova unidade U' , seria

$$11,5 \text{ ou } 11\frac{1}{2}.$$

Para melhor entendimento entre as pessoas, escolheu-se um tamanho padrão ou unidade padrão para responder perguntas como as que foram feitas acima. No caso da medida do corredor, a unidade padrão é o *metro*. Observe, no entanto, que você pode *medir* sem se utilizar de uma unidade padrão.

Exercícios:

1. Usando:

- o seu lápis como unidade, meça o comprimento da mesa do professor.
- o seu palmo como unidade, meça a altura de um de seus colegas.
- a sua régua como unidade, meça o comprimento e a largura da sala de aula.

2. Nas avaliações das seguintes grandezas:

- a distância de São Paulo ao Rio de Janeiro;
- o conteúdo de uma cesta de laranjas;
- a quantidade de garrafas de refrigerantes da cantina do seu colégio;
- a quantidade de líquido de cada garrafa;
- o número de lados de um polígono;
- o comprimento de um destes lados;

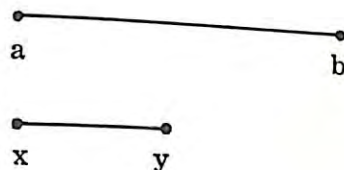
g. a quantidade de árvores plantadas em um terreno;

h. o tamanho deste terreno;

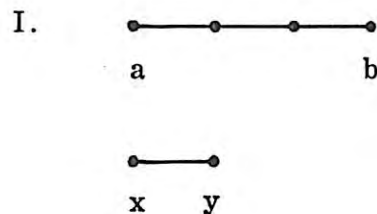
Em quais você faz uma contagem? E em quais você faz uma medição?

6.2. Medida de um Segmento. Unidades de Comprimento.

Medir um segmento \overline{ab} é encontrar quantas vezes um segmento \overline{xy} , escolhido para unidade, está contido em \overline{ab} .

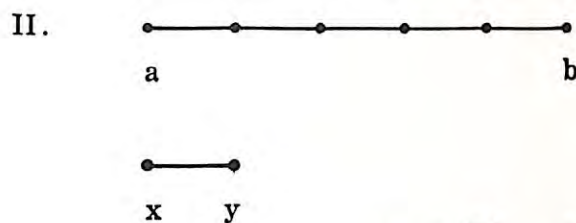


Exemplo:



Como \overline{xy} está contido 3 vezes em \overline{ab} , dizemos que a medida de \overline{ab} , com a unidade \overline{xy} , é 3.

$$\text{med}(\overline{ab}) = 3, \text{ com a unidade } \overline{xy}.$$



$$\text{med}(\overline{ab}) = 5, \text{ com a unidade } \overline{xy}.$$

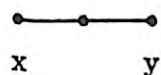
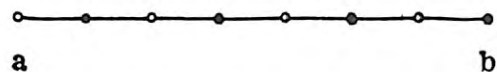
A medida do segmento \overline{ab} é chamada: *distância entre os pontos a e b* ou o *comprimento do segmento ab*.

Observe, pois, a seguinte distinção:

Segmento \overline{ab} é um conjunto de pontos (figura geométrica).
Comprimento do segmento \overline{ab} ou $\text{med}(\overline{ab})$ é um número.

Em geral, o segmento \overline{xy} , tomado como unidade, não cabe um número *exato* de vezes em \overline{ab} . Neste caso, podemos tomar como nova unidade a metade de \overline{xy} , ou a décima parte de \overline{xy} , ou a centésima parte de \overline{xy} , etc.

Exemplo:



Vemos que \overline{xy} não cabe um número exato de vezes em \overline{ab} , mas a metade de \overline{xy} cabe. Então,

$\text{med } (\overline{ab}) = 7$, com a unidade \overline{uv} ,

e $\text{med } (\overline{ab}) = 3 \frac{1}{2}$, com a unidade \overline{xy} .

Exercício:

3. Medir os segmentos abaixo, com as unidades indicadas:



Como vimos, podemos escolher para medir um segmento qualquer unidade de medida (segmento unitário, termo de comparação). Na prática, entretanto, utilizamos as *unidades legais*, adotadas no Brasil e na maioria dos países.

Estas unidades legais são:

1.º — O metro (m) : unidade principal

Frequentemente usam-se múltiplos e submúltiplos da unidade principal, que se chamam *unidades secundárias*.

O quadro abaixo dá as unidades secundárias usuais de medidas relacionadas com a unidade principal (metro).

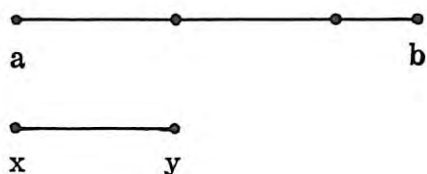
	NOME	NOTAÇÃO	CORRESPONDÊNCIA
Múltiplos	Quilômetro	km	1 km = 10 hm = 100 dam = 1 000 m
	Hectômetro	hm	1 hm = 10 dam = 100 m
	Decâmetro	dam	1 dam = 10 m
Unidade Principal	Metro	m	1 m = 10 dm = 100 cm = 1 000 mm
Submúltiplos	Decímetro	dm	1 dm = 0,1 m = 10 cm = 100 mm
	Centímetro	cm	1 cm = 0,01 m = 0,1 dm = 10 mm
	Milímetro	mm	1 mm = 0,001 m = 0,01 dm = 0,1 cm

Observando o quadro acima, você nota que cada unidade é *dez vezes maior* que a unidade imediatamente inferior a ela.

É, por isto, que este sistema de medidas é chamado *decimal*. Ele está relacionado com o sistema de numeração que usamos comumente.

Assim, quando escrevemos: 3,46 m temos 3 metros e 46 centésimos do metro, mas 1 centésimo do metro é a unidade denominada centímetro, e então podemos ler: 3 metros e 46 centímetros.

Exemplo:



med $\overline{(ab)}$ = 2,5m ;
lê-se

“dois metros e cinco decímetros”.

ou

“dois metros e meio”.

3,56m lê-se : “três metros e cinquenta e seis centímetros”
40,6km lê-se: “quarenta quilômetros e seis hectômetros”.

Exercícios:

4. Faça a leitura das seguintes medidas:

a. 35,75 km

d. 0,35 m

b. 35,750 km

e. 0,002 m

c. 4,372 m

f. 4,7245 cm

5. A unidade de comprimento *mil vezes menor* que o milímetro, e que serve para medir comprimentos muito pequenos, chama-se *micron* e é abreviada pela letra grega μ .

$$1 \mu = \frac{1}{1\,000} \text{ mm}$$

Preencha:

- a. o metro é maior que o micron vezes.
b. um centímetro corresponde a microns.

6. Para medir comprimentos muito grandes, usa-se a “unidade astronômica” cuja abreviação é UA. Uma unidade astronômica é a distância média entre a Terra e o Sol. Esta é uma medida aproximada e indicamos

$$1 \text{ UA} \approx 150\,000\,000 \text{ km.}$$

A estrela mais próxima da Terra, que não pertence ao sistema solar, está a uma distância de 42 000 000 000 (42 bilhões) de quilômetros. Ela é a estrela Alfa.

Preencha corretamente o claro abaixo:

$$42\,000\,000\,000 \text{ km} =$$

UA

Mudança de Unidade

De acordo com as definições dadas para múltiplos e submúltiplos do metro, concluímos:

I. Para passar de uma unidade para outra imediatamente inferior, devemos fazer uma multiplicação por 10, mas para isto, você já sabe que basta deslocar a vírgula de um algarismo para a direita.

Exemplos:

$$2,15 \text{ hm} = (2,15 \times 10) \text{ dam} = 21,5 \text{ dam}$$

$$0,346 \text{ m} = (0,346 \times 10) \text{ dm} = 3,46 \text{ dm}$$

II. Para passar de uma unidade para outra imediatamente superior, deve-se fazer uma divisão por 10; portanto, basta deslocar a vírgula de um algarismo para a esquerda.

Exemplos:

$$35,6 \text{ m} = (35,6 \div 10) \text{ hm} = 3,56 \text{ hm}$$

$$3307,8 \text{ km} = (3307,8 \div 10) \text{ hm} = 330,78 \text{ hm}$$

III. Aplicando-se estas duas conclusões, sucessivamente, podemos passar de uma unidade para outra qualquer.

Exemplos:

- a. 31,5 m para centímetros:
31,5 m = 315 dm = 3 150 cm
- b. 130,866 hm para decímetros:
130,866 hm = 1 308,66 dm = 13 086,6 m = 130 866 dm
- c. 3,56 m para hectômetros:
3,56 m = 0,356 dam = 0,0356 hm.

Exercícios:

7. Faça as seguintes mudanças de unidade:

- a. 372,47 km para decímetro
- b. 0,487 dam para milímetro
- c. 35,478 m para milímetro
- d. 79839 dm para hectômetro
- e. 48,752 dm para quilômetro
- f. 3,47 hm para centímetro
- g. 325,007 m para centímetro.

8. Dê em metros as seguintes medidas:

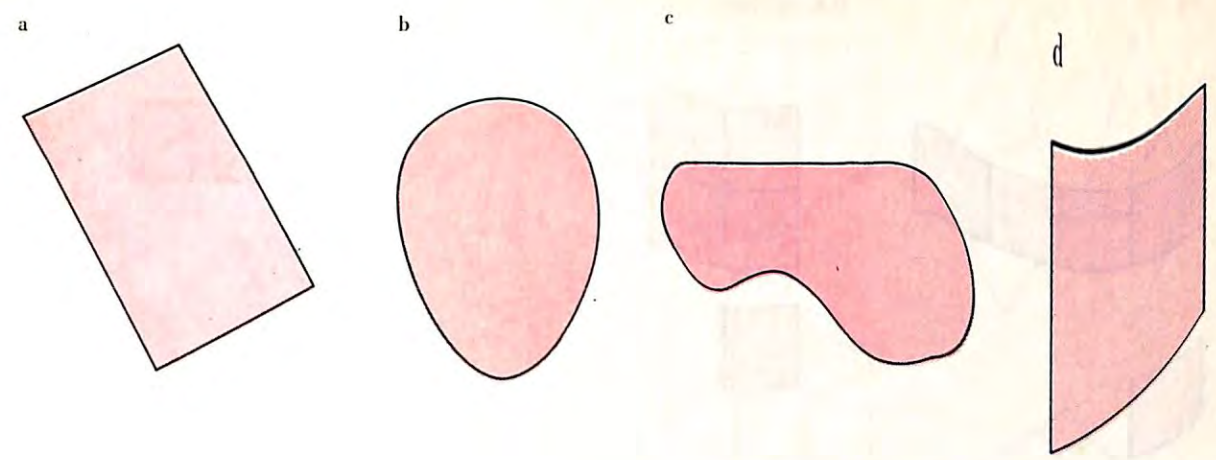
- a. 48 hm;
- b. 352,7 cm;
- c. 0,048 km.

9. Dê em centímetros as seguintes medidas:

- a. 0,32 dm ;
- b. 0,6 mm ;
- c. 300 000μ;
- d. 4,37 dam.

6.3. Medida de Superfície. Unidades de Área.

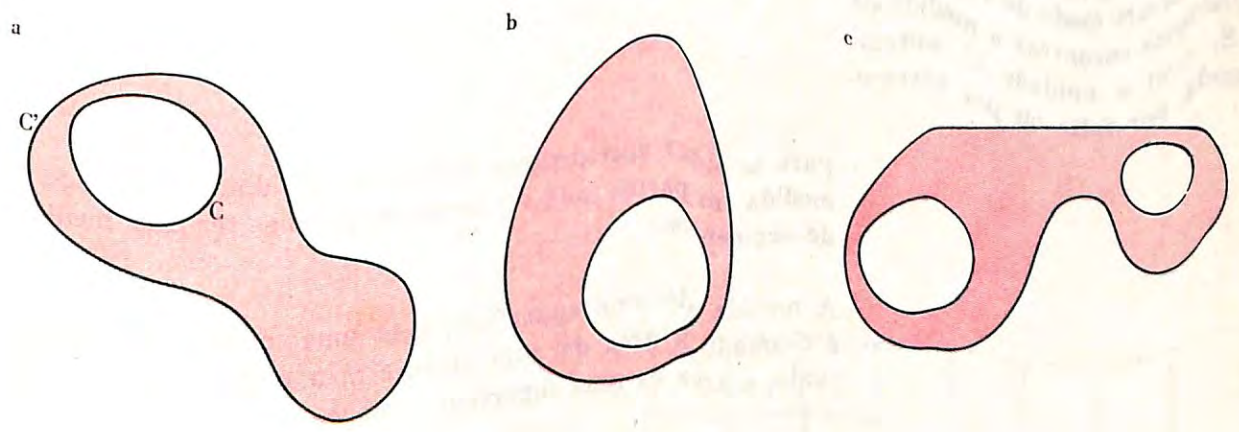
Como já vimos no capítulo 1, quando fizemos um estudo das curvas planas, o conjunto dos pontos interiores a uma curva fechada simples, reunido com a própria curva, constitui uma *região plana*. Uma região plana é também chamada de *superfície plana*. São exemplos de superfícies planas:



Existem casos especiais, como os casos abaixo, onde temos a superfície limitada por 2 (ou mais) curvas fechadas simples.

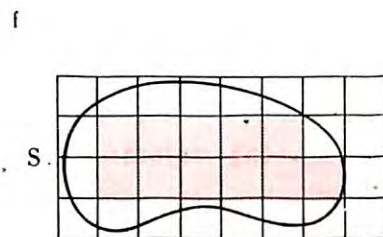
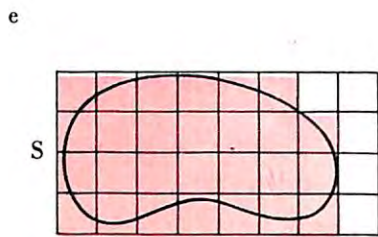
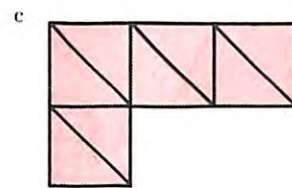
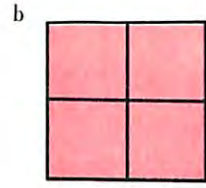
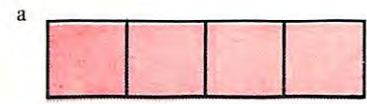
Na figura (a), sejam:

- I o interior da curva C ;
- E o exterior da curva C ;
- J o interior de C' ;
- K o exterior de C' ; então, a superfície limitada pelas curvas C e C' é dada por $E \cap J$. Verifique.



Da mesma forma que para os segmentos, medir uma superfície é compará-la com outra superfície tomada como unidade.

Exemplos:



Neste caso, a unidade não cabe um número exato de vezes em S. Podemos encontrar a medida de S, com a unidade U, aproximada por falta ou por excesso.

med (S) = 27, por excesso, com a unidade U.

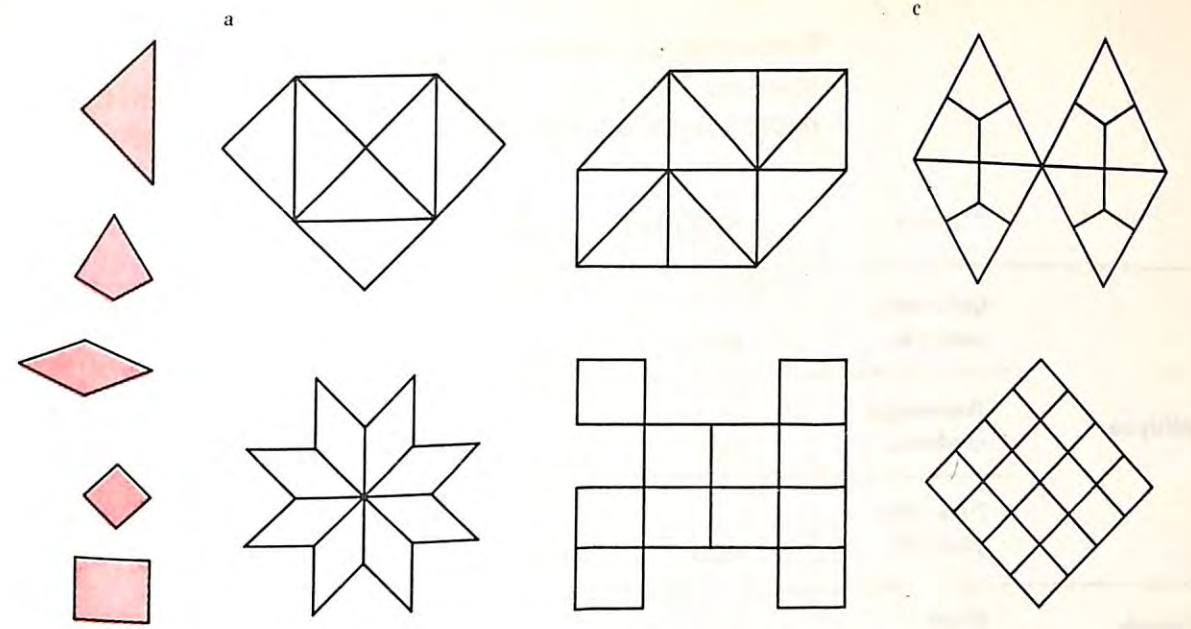
med (S) = 11, por falta, com a unidade U.

Para se obter aproximação melhor, subdividimos a unidade de medida em partes cada vez menores, como se fez para medidas de segmentos.

A medida de uma superfície, com uma unidade de medida, é chamada a *área da superfície*, com a unidade dada. Portanto, a área de uma superfície é um *número*.

Exercício:

10. Determine a área das seguintes superfícies, com as unidades dadas:



Unidade de Área.

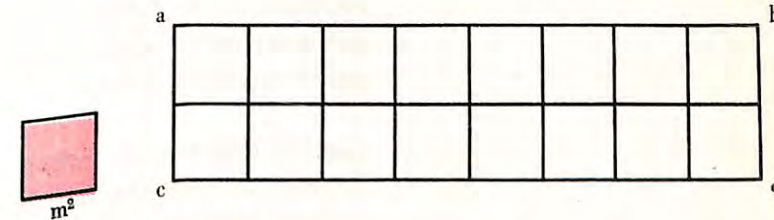
Podemos escolher qualquer superfície para unidade: uma superfície triangular (exemplo (c)), uma superfície quadrangular (exemplos (a), (b) e (d)), etc.

Na prática, escolhe-se para superfície unitária a região quadrangular de 1 metro de lado (isto é, que tem para lado a unidade de comprimento). Ela é a unidade principal de área; é chamada *metro quadrado* e indicada m^2 .



Exemplo:

$$\text{med (abcd)} = 16 \text{ m}^2$$



Frequentemente usam-se múltiplos e submúltiplos da unidade principal. O quadro abaixo dá múltiplos e submúltiplos do metro quadrado, assim como suas relações com êle.

	NOME	NOTAÇÃO	CORRESPONDÊNCIA
Múltiplos	Quilômetro quadrado	km ²	1 km ² = 100 hm ² = 10 000 dam ² = 1 000 000 m ²
	Hectômetro quadrado	hm ²	1 hm ² = 100 dam ² = 10 000 m ²
	Decâmetro quadrado	dam ²	1 dam ² = 100 m ²
Unidade Principal	Metro quadrado	m ²	1 m ² = 100 dm ² = 10 000 cm ² = 1 000 000 mm ²
Submúltiplos	Decímetro quadrado	dm ²	1 dm ² = 0,01 m ² = 100 cm ²
	Centímetro quadrado	cm ²	1 cm ² = 0,0001 m ² = 0,01 dm ² = 100 mm ²
	Milímetro quadrado	mm ²	1 mm ² = 0,000001 m ² = 0,0001 dm ²

Leitura das medidas de superfície.

No caso das medidas de superfície, cada unidade é 100 vezes maior que a unidade imediatamente inferior a ela.

Tomemos como exemplo a medida 2,5 m². Podemos ler: 2 metros quadrados e meio metro quadrado, ou 2 metros quadrados e cinco décimos de metro quadrado. Não podemos ler 2 metros quadrados e 5 decímetros quadrados, pois o decímetro quadrado é a centésima parte do metro quadrado.

Quando estivermos trabalhando com medidas de superfície, devemos ter sempre um número par de algarismos na parte decimal, pois as unidades variam de 100 em 100.

No exemplo acima acrescenta-se um zero, 2,50 m² e lê-se: dois metros quadrados e cinquenta decímetros quadrados.

Leitura de algumas medidas:

3,46 m² lê-se: “três metros quadrados e quarenta e seis decímetros quadrados”.

2,1 km² = 2,10 km² lê-se: “dois quilômetros quadrados e dez hectômetros quadrados”.

Exercício:

11. Acrescente os zeros quando necessários e faça a leitura de:

a. 372,45 km²

b. 4,3 dm²

c. 48,375 m²

d. 0,478 cm²

e. 0,0038 hm²

f. 428,7 mm²

Mudança de Unidade.

Pelo exposto, concluímos:

I. Para passar de uma unidade de área para outra imediatamente inferior, deslocamos a vírgula dois algarismos para a direita, porque estamos fazendo uma multiplicação por 100.

$$3,56 \text{ dam}^2 = (3,56 \times 100) \text{ m}^2 = 356 \text{ m}^2$$

$$0,01 \text{ m}^2 = (0,01 \times 100) \text{ dm}^2 = 1 \text{ dm}^2$$

II. Para passar de uma unidade de área para outra imediatamente superior, deve-se dividir por 100 e portanto desloca-se a vírgula dois algarismos para a esquerda.

$$180 \text{ m}^2 = (180 \div 100) \text{ dam}^2 = 1,80 \text{ dam}^2$$

$$3,56 \text{ cm}^2 = (3,56 \div 100) \text{ dm}^2 = 0,0356 \text{ dm}^2$$

III. Para passar de uma unidade de área para outra qualquer, basta aplicar, sucessivamente, as regras anteriores.

a. Expressar 3,56 km² em m².

$$3,56 \text{ km}^2 = 356 \text{ hm}^2 = 35 600 \text{ dam}^2 = 3 560 000 \text{ m}^2$$

b. Expressar 17,306 mm² em dm².

$$17,306 \text{ mm}^2 = 0,17306 \text{ cm}^2 = 0,0017306 \text{ dm}^2$$

6.4. Unidades agrárias.

As seguintes unidades já foram consagradas na medição de terras, por serem mais práticas:

$$\text{hectare (ha)} : 1 \text{ ha} = 1 \text{ hm}^2 = 10\,000 \text{ m}^2.$$

$$\text{are (a)} : 1 \text{ a} = 1 \text{ dam}^2 = 100 \text{ m}^2$$

$$\text{centiare (ca)} : 1 \text{ ca} = 1 \text{ m}^2$$

Vê-se, portanto, que são as unidades já vistas anteriormente, com nomes diferentes.

Exercícios:

12. Faça a leitura e as reduções indicadas das seguintes medidas:

a. 3,4875 m² para dm²

b. 485,72 km² para hm²

c. 0,3897 km² para m²

d. 425838 cm² para m²

e. 345,96 m² para dam²

f. 48,36 cm² para dm²

g. 0,08 dm² para m²

h. 10 ha para centiares

i. 360 000 m² para ares

j. 345,72 ca para km².

13. Dê em dm² as medidas:

35,487 cm² ; 3 472 m² ; 37,48 mm².

14. Dê em hectares as medidas:

63,098 km² ; 4 375 890 m² ; 97,48 dam².

6.5. Medida de um Sólido. Unidades de Volume.

Os objetos, com os quais temos contacto na vida diária, ocupam uma certa porção do espaço. São chamados *sólidos*.

São exemplos de sólidos: uma mesa, um livro, um lápis, etc.

Para sabermos qual a "quantidade de espaço" ocupada pelo

sólido é necessário tomar uma unidade de medida.

A medida de um sólido, dada uma unidade de medida, é chamada *volume do sólido*. Comumente, chamamos também de "volume" a uma porção do espaço, daí falarmos em "medida de um volume".

Exemplo:

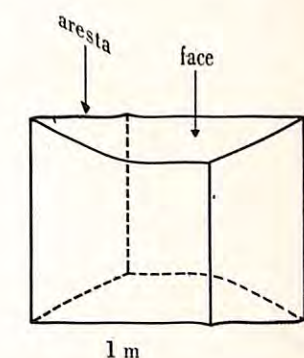
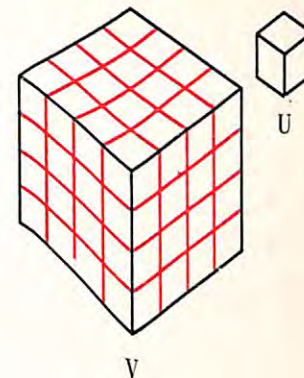
$$\text{med (V)} = 64, \text{ com a unidade U}$$

Para unidade principal de medida de sólidos toma-se uma região cúbica determinada por um cubo, de aresta igual a 1 metro.

O cubo é a reunião de seis superfícies quadrangulares de mesma área dispostas como na figura ao lado. Cada uma destas superfícies se diz uma *face* do cubo. Os lados dos quadrados chamam-se *arestas* do cubo. O interior do cubo reunido ao cubo resulta a *região cúbica*.

Esta unidade é chamada "*metro cúbico*" e se indica por m³: é o volume de uma região cúbica de 1 m de aresta.

Também aqui são usados múltiplos e submúltiplos do metro cúbico. No quadro abaixo os encontramos, assim como suas relações com a unidade principal que é o m³.



	NOME	NOTAÇÃO	CORRESPONDÊNCIA
Múltiplos	Quilômetro cúbico	km ³	1 km ³ = 1 000 hm ³ = 1 000 000 dam ³
	Hectômetro cúbico	hm ³	1 hm ³ = 1 000 dam ³ = 1 000 000 m ³
	Decâmetro cúbico	dam ³	1 dam ³ = 1 000 m ³ = 0,001 hm ³
Unidade Principal	Metro cúbico	m ³	1 m ³ = 1 000 dm ³ = 0,001 dam ³
Submúltiplos	Decímetro cúbico	dm ³	1 dm ³ = 1 000 cm ³ = 0,001 m ³
	Centímetro cúbico	cm ³	1 cm ³ = 1 000 mm ³ = 0,000001 m ³
	Milímetro cúbico	mm ³	1 mm ³ = 0,001 cm ³ = 0,000001 dm ³

Leitura de algumas medidas:

3,560 m³ lê-se: “três metros cúbicos e quinhentos e sessenta decímetros cúbicos”.

10,35 hm³ = 10,350 hm³ lê-se: “dez hectômetros cúbicos e trezentos e cinquenta decâmetros cúbicos”.

Note que as unidades variam de 1 000 em 1 000, e, portanto, para facilitar a leitura, o número de algarismos da parte decimal da medida deve ser múltiplo de 3. Se não o fôr, acrescentam-se ou suprimem-se zeros.

Exercício:

15. Faça a leitura das seguintes medidas:

- | | |
|----------------------------|-------------------------------|
| a. 4,725 dam ³ | d. 48,725683 dam ³ |
| b. 3452,37 dm ³ | e. 3,48 mm ³ |
| c. 0,003 cm ³ | f. 87,35 m ³ |

Mudança de Unidade.

Pelas definições dadas, temos que:

I. Para passar de uma unidade de volume para outra imediatamente inferior, deslocamos a vírgula de três algarismos para a direita porque devemos fazer uma multiplicação por 1 000.

Exemplos:

$$3,2076 \text{ m}^3 = (3,2076 \times 1\,000) \text{ dm}^3 = 3\,207,6 \text{ dm}^3$$
$$0,04508 \text{ hm}^3 = (0,04508 \times 1\,000) \text{ dam}^3 = 45,08 \text{ dam}^3$$

II. Para passar de uma unidade de volume para outra imediatamente superior, deslocamos a vírgula de três algarismos para a esquerda, porque devemos fazer uma divisão por 1 000.

Exemplos:

$$25,086 \text{ m}^3 = (25,086 \div 1\,000) \text{ dam}^3 = 0,025086 \text{ dam}^3$$
$$3,86 \text{ cm}^3 = 3,860 \text{ cm}^3 = (3,860 \div 1\,000) \text{ dm}^3 = 0,003860 \text{ dm}^3$$

III. Aplicando-se estas duas regras, sucessivamente, podemos passar de uma unidade para outra qualquer.

Exemplo:

$$24,09 \text{ m}^3 = 24,090 \text{ dm}^3 = 24\,090\,000 \text{ cm}^3$$

$$252 \text{ mm}^3 = 0,252 \text{ cm}^3 = 0,000\,252 \text{ m}^3$$

Exercícios:

16. Faça as reduções indicadas das seguintes medidas:

- | | |
|------------------------------|--------------------|
| a. 523,775 m ³ | a mm ³ |
| b. 0,328472 dam ³ | a m ³ |
| c. 0,003 cm ³ | a dam ³ |
| d. 45 hm ³ | a dm ³ |
| e. 58976 dm ³ | a m ³ |
| f. 4,379 cm ³ | a dm ³ |

17. Exprima em dm³ as seguintes medidas:

$$2,048 \text{ m}^3 ; \quad 0,432 \text{ dam}^3 ; \quad 472 \text{ mm}^3$$

18. Exprima em m³ as seguintes medidas:

$$15\,427 \text{ cm}^3 ; \quad 0,004 \text{ km}^3 ; \quad 286,48 \text{ dm}^3$$

6.6. Medida de Capacidade

Os líquidos e fluidos não têm forma particular definida, pois apresentam a forma dos recipientes que os contêm.

Se um recipiente estiver cheio de um líquido ou flúido, para se medir o volume dos mesmos, basta determinar o volume do interior do recipiente.

Chamamos *capacidade* de um recipiente o maior volume de líquido ou flúido que ele possa conter, ou seja, seu volume.

Unidades de Capacidade.

A capacidade, por ser um volume, pode ser medida usando-se as unidades de volumes já estudadas.

Há, no entanto, unidades mais práticas para medi-la. São as chamadas unidades de capacidade e delas a principal é o *litro*, notado por *l*.

Por definição 1 litro equivale a 1 dm³.

$$1 \text{ l} = 1 \text{ dm}^3.$$

Uma unidade de capacidade é 10 vezes maior que a que lhe é imediatamente inferior, comportando-se para a leitura e para a redução como as unidades de comprimento.

	NOME	NOTAÇÃO	CORRESPONDÊNCIA
Múltiplos	Quilolitro	kl	1 kl = 1 000 l = 1 000 dm ³ = 1 m ³
	Hectolitro	hl	1 hl = 100 l = 100 dm ³ = 0,1 m ³
	Decalitro	dal	1 dal = 10 l = 10 dm ³
Unidade Principal	Litro	l	1 l = 10 dl = 1 dm ³ = 0,001 m ³
Submúltiplos	Decilitro	dl	1 dl = 0,1 dm ³ = 100 cm ³ = 10 cl
	Centilitro	cl	1 cl = 0,01 dm ³ = 10 cm ³ = 10 ml
	Mililitro	ml	1 ml = 0,001 dm ³ = 1 cm ³ = 0,001 l

A leitura das medidas de capacidade se faz exatamente como as das medidas de comprimento, trocando-se *metro* por *litro*.

3,56 l lê-se : “três litros e cinquenta e seis centilitros”

0,308 l lê-se : “trezentos e oito mililitros”.

Como as unidades de capacidade se comportam como as de comprimento, tudo o que foi dito para estas vale aqui.
Exemplos:

- $35,67 \text{ l} = (35,67 \times 10) \text{ dl} = 356,7 \text{ dl}$.
- $406,07 \text{ dal} = (406,07 \times 10) \text{ hl} = 40,607 \text{ hl}$.
- $0,056 \text{ dal} = (0,056 \times 1\,000) \text{ cl} = 56 \text{ cl}$.

Exercícios:

19. Leia as seguintes medidas:

- | | |
|-------------|---------------|
| a. 3,478 l | d. 475,38 dal |
| b. 48,37 kl | e. 0,3 ml |
| c. 0,039 l | f. 8,97 hl |

20. Faça as seguintes reduções:

- | | |
|------------------------------|----------------------------------|
| a. 438,3 kl a dl | e. 39 650 dl a kl |
| b. 0,38 dl a ml | f. 23,8 cl a dal |
| c. 35 dm ³ a cl | g. 358 453 l a m ³ |
| d. 45,3 kl a dm ³ | h. 472,327 cm ³ a ml. |

21. Exprima em cm³ as medidas:

472 l ; 32,45 cl ; 315 ml.

22. Exprima em dl as medidas:

42,375 cm³ ; 38,43 dal ; 32 ml.

6.7. Medida de Pêso

Quando largamos no ar objetos como pedras, livros, pedaços de pano, etc., eles caem verticalmente para o solo. Conta-se que Newton, grande físico e matemático inglês do século XVII, estava descansando num pomar, à sombra de uma macieira, quando viu uma maçã cair ao chão. Milhares de pessoas antes dele, certamente, haviam presenciado fenômenos semelhantes, mas não haviam pensado sobre o assunto. Newton, entretanto, pôs-se a pensar que deveria haver um motivo para a maçã cair, ao invés de ficar parada no espaço e, assim como a maçã, os outros objetos. Ele concluiu que deveria haver uma força agindo sobre a maçã, obrigando-a a descer. Que força seria essa? Como todos (ou quase todos...) os objetos que largamos, de pequenas ou grandes alturas, se movem em direção à Terra, a única conclusão possível era que a Terra atrai todos os objetos que estão nas suas proximidades. Essa força com que a Terra atrai um objeto é que chamamos *pêso* do objeto. (Ela também é conhecida como *força gravitacional*).

É fácil verificar que nem todos os objetos têm o mesmo *pêso*, isto é, alguns são atraídos mais fortemente pela Terra e outros mais fracamente. Basta colocar diferentes objetos sobre a palma de sua mão, para sentir que a Terra puxa alguns com mais força do que outros.

Nesta altura já surgem diversos problemas: Por que motivo foi dito, algumas linhas atrás, que “quase todos os objetos caem quando são largados”? Por que alguns objetos não caem? Que objetos são esses? Terão *pêso* esses objetos? Por que alguns objetos são “mais fortemente atraídos pela

Terra do que outros?

Num livro de Matemática, não se pode discutir esses problemas que são problemas tipicamente físicos e serão estudados em aulas de Ciências, no Ginásio, e de Física, no Curso Colegial.

A única coisa que importa neste curso de Matemática é que todos os objetos têm peso (mesmo os que sobem quando são largados no ar...) e que nem todos os objetos têm o mesmo peso.

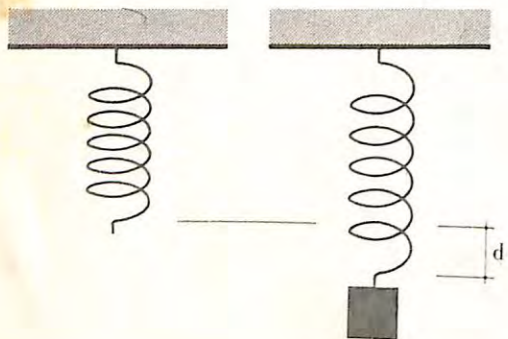
Surge, portanto, o problema de *comparar* os pesos dos diferentes objetos, ou seja, o problema de *medir* o peso de diferentes objetos.

Para medir você já sabe que se faz necessário a escolha de uma unidade, que nada mais é do que um termo de comparação e um instrumento apropriado para fazer a comparação. Por exemplo, para medir comprimentos, você pode usar como termo comparação o comprimento de 1 m e como instrumento, uma barra de madeira reta subdividida em centímetros.

Para medir o peso de um objeto, precisamos de um instrumento que revele se o objeto é muito, ou pouco puxado pela Terra. Podemos usar uma pequena mola presa a um suporte.

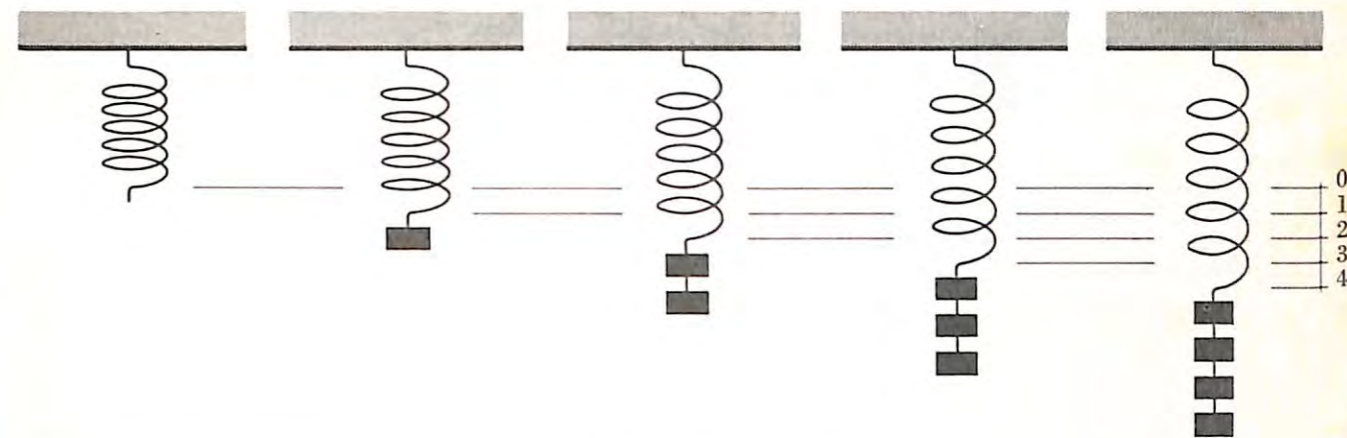
Se suspendermos à mola diferentes objetos, veremos que a mola se alonga mais, ou menos, dependendo do objeto. É claro que os objetos que são mais fortemente puxados para baixo pela Terra distendem mais a mola. Os que são puxados com menos força pela Terra distendem menos a mola.

Esse instrumento é chamado *dinamômetro*, embora muita gente o designe por "balança".

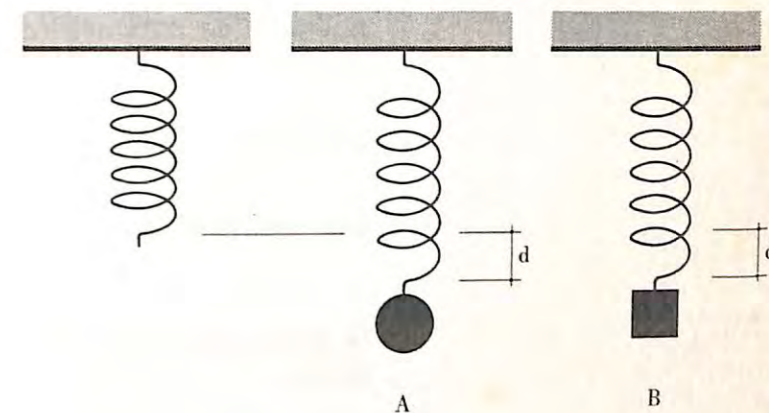


Assim sendo, corpos da mesma matéria, mesma forma e mesmo tamanho provocam alongamentos iguais (para uma mesma mola). Ou seja: eles possuem pesos iguais.

Tomando vários cubinhos de ferro do mesmo tamanho, por exemplo, podemos fabricar um instrumento para medir peso.

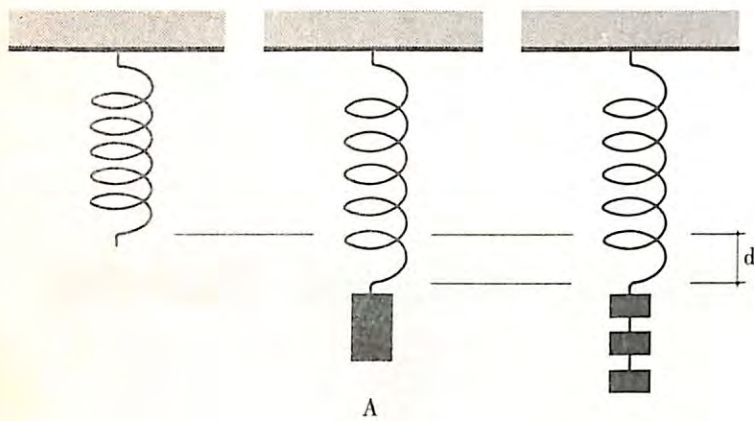


É claro que, corpos distintos que provocam alongamentos iguais possuem pesos iguais.



$d = d'$, peso de A = peso de B.

Portanto, torna-se possível medir o peso de um corpo qualquer, escolhendo-se uma determinada *unidade de peso*, e verificando quantas dessas unidades (ou fração de unidade) são necessárias para produzir o mesmo alongamento provocado pelo corpo do qual se quer conhecer o peso.



■ unidade de peso = U

pêso de A = 3, com a unidade U .

A unidade de peso mais usada atualmente na vida diária é o pêso de um bloco de platina e irídio guardado no Escritório Internacional de Pêsos e Medidas, em Sèvres, na França. O pêso desse bloco, isto é, a força com que a Terra atrai esse bloco, é chamado *quilograma força* (kgf). Cada país tem uma cópia daquele bloco e, em todo o mundo, são fabricados milhares de outros blocos metálicos que têm o mesmo pêso daquele padrão conservado em Paris.

Na prática, usa-se como unidade principal "o grama-fôrça"

que equivale a $\frac{1}{1\ 000}$ do quilograma fôrça.

O grama fôrça tem múltiplos e submúltiplos abaixo relacionados.

	NOME	NOTAÇÃO	CORRESPONDÊNCIA
Múltiplos	Tonelada fôrça	tf	1 tf = 1 000 kgf = 1 000 000 gf
	Quilograma fôrça	kgf	1 kgf = 1 000 gf
	Hectograma fôrça	hgf	1 hgf = 100 gf = 0,1 kgf
	Decagrama fôrça	dagf	1 dagf = 10 gf = 0,01 kgf

Unidade Principal	Gramma fôrça	gf	1 gf = 0,001 kgf = 10 dgf
	decigramma fôrça	dgf	1 dgf = 0,1 gf = 10 cgf
Submúltiplos	centigramma fôrça	cgf	1 cgf = 0,1 dgf = 10 mgf = 0,01 gf
	miligramma fôrça	mgf	1 mgf = 0,001 gf = 0,1 cgf

Mudança de unidade.

A mudança de unidade é feita de maneira análoga às medidas de comprimento e capacidade.

Exemplos:

- 12,56 dagf = (12,56 × 10) gf = 125,6 gf.
- 1,306 cgf = (1,306 ÷ 10) dgf = 0,1306 dgf.
- 35,308 dgf = (35,308 ÷ 10 000) kgf = 0,0035308 kgf.
- 0,0381 hgf = (0,0381 × 100 000) mgf = 3 810 mgf.

Exercícios:

Lembrando-se de que as unidades de peso variam de maneira análoga às de comprimento faça os exercícios 23 e 24.

23. Leia as seguintes medidas:

- | | |
|---------------|--------------|
| a. 325,32 gf | d. 4,38 hgf |
| b. 0,0525 kgf | e. 325,8 dgf |
| c. 227,37 mgf | f. 0,037 gf |

24. Faça as seguintes reduções:

- | | |
|---------------------|--------------------|
| a. 3 400 cgf a gf | d. 3874 dgf a dagf |
| b. 32,432 kgf a dgf | e. 4,38 gf a kgf |
| c. 0,47 dgf a mgf | f. 0,032 gf a dagf |

25. Dê em quilogramas força as seguintes medidas:

45,1 tf ; 451 gf ; 451 000 mgf.

26. Dê em centigramas forças as seguintes medidas:

385 gf ; 427,3 mgf ; 25232 mgf.

Exercícios — Capítulo 6

27. Faça as seguintes reduções:

a. 472,3 dm a dam

b. 32 km a m

c. 1.37 cl a l

d. 45,38 kl a dl

e. 1 500 hg a g

f. 13 tf a kgf

g. 1 237 mgf a dgf

h. 45,397 dm² a m²

i. 382,75 m² a mm²

j. 12 000 m² a ha

l. 4 375 000 cm³ a m³

m. 25 000 l a mm³

n. 37,004 m³ a dm³

o. 22,385 m³ a kl

28. Faça a leitura das medidas do exercício anterior, antes e depois das reduções.

29. Complete:

a. $200 l \times 4 = \dots l = \dots cl$

b. $25 \mu \times 10\ 000 = \dots \mu = \dots cm$

c. $48 m^2 \times \frac{2}{5} = \dots m^2 = \dots dam^2$

d. $200 kgf \times \frac{1}{2} = \dots kgf = \dots dgf$

e. $5 m = 5 \times \dots cm$

f. $12 m^3 = 12 \times \dots dm^3$

g. $15 l = 15 \times \dots dm^3$

h. $1 gf = \dots \times 1 kgf$

30. Efetue, dando o resultado em dm² e em ares

a. $(43,25 m^2 - 3\ 452 cm^2) + 2 \times 0,03 ha =$
 3

b. $\frac{1}{5} \times (325,38 ca + 2a - 0,05 ha) =$

31. Efetue, dando o resultado em cm³ e em kl:

a. $\frac{2}{3} \times 5,763 dm^3 + \frac{1}{5} \times 35 m^3 =$

b. $\frac{1}{2} \times (48,5 l - 5\ 720 ml) - \frac{1}{3} \times 21\ 390 ml =$

32. Complete:

a. 0,1 de 1 m = ... dm

b. 0,1 de 1 m² = ... dm²

c. 0,1 de 1 m³ = ... dm³

d. 0,01 de 1 m = ... cm

e. 0,01 de 1 m² = ... cm²

f. 0,01 de 1 m³ = ... cm³

g. 0,001 de 1 m = ... mm

h. 0,001 de 1 m² = ... mm²

i. 0,001 de 1 m³ = ... mm³

33. Uma pilha de 5 000 fôlhas de papel tem 37 cm de altura. Qual é, em microns, a espessura de cada fôlha?

34. Uma pessoa, viajando de automóvel, observa que às 8h passa pelo marco quilométrico n.º 28 e que às 9h passa pelo marco n.º 108. Quantos quilômetros percorreu o automóvel em uma hora?

35. A terça parte da área de uma fazenda é ocupada no plan-

tio do arroz, e — dessa mesma área é ocupada pelo

20

pomar. Dê em ares e em km^2 as áreas: da plantação de arroz, do pomar e do restante da fazenda, sabendo que esta tem 960 ha de área total.

36. Uma caixa tem 35 dm^3 de volume. Quantos pedaços de sabão podem ser acondicionados nela, se cada um deles tem 70 cm^3 de volume?

37. A cavidade feita para um poço tem 15 m^3 . A terra retirada deve ser removida por um caminhão que transporta $2\,500 \text{ dm}^3$ em cada viagem. Em quantas viagens se fará o transporte de toda terra, se esta depois de deslo-

1

cada acusa um aumento de — do seu volume?

5

38. Sabendo que são necessários $4,5 \text{ m}^3$ de ar para cada pessoa, calcule o volume que deve ter sua sala de aula.

39. Em 1 mm^3 de sangue há, aproximadamente, 5 milhões de glóbulos vermelhos. Em 2 l de sangue, quantos glóbulos vermelhos devem ser encontrados?

40. Um certo automóvel gasta, em média, 9 litros de gasolina para rodar 80 km. Seu tanque tem $45\,900 \text{ cm}^3$ de capacidade, mas para evitar derramamento, ao enchê-lo, colo-

1

ca-se — a menos de gasolina.

10

a. quantos litros são colocados no tanque, supondo-se que êle esteja vazio?

b. que distância percorrerá o automóvel, com esta quantidade de gasolina?

41. Um recipiente vazio pesa 500 gf, e seu volume é de 2 dm^3 .

4

Quanto pesará quando contiver os — de seu volume em

5

óleo, sendo que 1 l deste pesa 0,9 kgf?

42. Qual é, em toneladas fôrça, a produção de arroz de uma plantação de 12,25 ha, que rende 0,3 kgf por m^2 ?

BIBLIOGRAFIA

1. Brunfiel, Eicholz, Shanks: "Fundamental Concepts of Elementary Mathematics" — Addison Wesley, USA.
2. Castrucci, B.: "Elementos da Teoria dos Conjuntos" — LPM, S. P.
3. Farah, E.: "Teoria dos Conjuntos" — S. Paulo (1961).
4. Jacy Monteiro, L. H.: "Algebra Moderna", I — LPM, S. P.
5. OECE (Organisation Européenne de Cooperation Economique): "Un Programme Moderne de Mathématiques pour l'Enseignement Secondaire".
6. Papy, G.: "Mathématiques Modernes", I-II — Dunod, Paris.
7. SMSG (School Mathematics Study Group) — Yale University, USA.



*Este livro foi impresso
nas oficinas da*

SÃO PAULO EDITORA S. A.

03010 — Rua Barão de Ladário, 226

01000 — SÃO PAULO, SP — BRASIL

com filmes fornecidos pelo editor



Fundação Brasileira
para o Desenvolvimento
do Ensino de Ciências

“O preço deste livro só se tornou possível devido à participação do INL/MEC que, em regime de coedição, permitiu o aumento da tiragem e consequente redução do custo industrial”.

Cr\$ 14,00



INVESTIMOS NO FUTURO
ATRAVÉS DA EDUCAÇÃO