

**5**

# **Matemática**

## **para o 1º grau**

**Lydia Condé Lamparelli  
Adolfo Walter P. Canton  
Pedro Alberto Morettin  
Dalva Fontes Indiani**

**EDART - SÃO PAULO/MEC**



*A Frauch*

**5**

**Matemática  
para o 1º grau**

**OFERTA DO EDITOR**

ESTE LIVRO PODERÁ SER ENCON-  
TRADO NA: EDART - SÃO PAULO  
LIVRARIA EDITORA LTDA,

RUA JAGUARIBE N.º 47 / 49

FONE: 221-9933 — São Paulo

**Exemplar de Professor**

direção editorial  
de Washington Helou

gerência editorial  
de Antonio Orzari

Comunicação Visual

Arquiteto João B. A. Xavier

Colaboradores

Minoru Naruto

Vivaldo Tsukumo

M377  
3.ed. Matemática para o 1.º grau: 5.ª série [por Lydia Condé Lamparelli e outros] 3. ed. São Paulo, EDART; Brasília, INL, 1974. 314p. ilust. 25cm

Suplementado pelo manual do professor.

1. Matemática (1.º grau) I. Brasil. Instituto Nacional do Livro, coed. II. Lamparelli, Lídia Condé.

CCF/CBL/SP-73-0945

CDD:372.7

CDU:372.7

Índice para catálogo sistemático (CDD):

1. Matemática : Ensino de 1.º grau 372.7

Direitos cedidos à EDART-SÃO PAULO - Livraria Editora Ltda. pelo IBECC-UNESCO (seção de São Paulo) conforme contrato registrado em São Paulo no Cartório Adalberto Neto - Registro de Títulos e Documentos - 3.º Ofício, sob n.º 76.9706, no livro F, n.º 29 e na Secretaria da Biblioteca Nacional, de acordo com as leis vigentes e convenções internacionais subscritas pelo Brasil. Proibida a reprodução total ou parcial do texto e das ilustrações.

5

# Matemática para o 1.º grau

3.ª edição

Lydia Condé Lamparelli

Licenciada em Matemática pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo.

Professora Efetiva do Magistério Secundário Oficial do Estado de São Paulo.

Membro do Departamento de Matemática do IBECC.

Adolpho Walter P. Canton

Licenciado em Matemática pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo.

Instrutor do Departamento de Estatística da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo.

Pedro Alberto Morettin

Licenciado em Matemática pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo.

Professor Efetivo do Magistério Secundário Oficial do Estado de São Paulo.

Instrutor do Departamento de Estatística da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo.

Membro do Departamento de Matemática do IBECC.

Dalva Fontes Indiani

Licenciada em Matemática pela Faculdade de Filosofia Sedes Sapientiae de São Paulo.

Professora Efetiva do Magistério Secundário Oficial do Estado de São Paulo.



EDART-SÃO PAULO

Em convênio com o

INSTITUTO NACIONAL DO LIVRO/MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CULTURA

1974

No início de seu curso ginásial, estamos lhe oferecendo um livro de matemática diferente. Certamente você já deve ter constatado isso. Observe que a matéria está disposta de maneira a tornar a sua leitura agradável... Veja as ilustrações como são bonitas! Tudo isso foi feito pensando na pessoa que iria usá-lo: um jovem aluno da 5.<sup>a</sup> série do curso ginásial. Fizemos absoluta questão de lhe oferecer um livro bom e bonito.

Os assuntos que compõem este volume lhe darão uma visão completamente nova de toda a matemática que você aprendeu no curso primário. Ao terminar o seu primeiro ano, você verificará que seus antigos conhecimentos se tornaram organizados e relacionados. Quanto à geometria, ela é iniciada neste volume e continuará nos demais.

Vejam como poderemos orientá-lo a fim de que você melhor aproveite o livro.

Primeiramente, leia com muito cuidado, observando as ilustrações e fazendo anotações no próprio livro. É também muito importante que você siga exatamente a ordem de apresentação dos assuntos, pois ao passar para um novo capítulo você necessitará dos conceitos expostos nos anteriores; mesmo quando o assunto é geometria, introduzimos conceitos que são usados também em álgebra. Quanto aos exercícios, há dois grupos distintos: após cada seção você encontra uma série deles que devem ser resolvidos naquele momento; resolva todos com calma e atenção, pois além de estarem graduados quanto às dificuldades, alguns *complementam* a matéria exposta. Portanto, não pule exercício, sob pena de não ficar com o assunto completamente estudado. No final de cada capítulo há uma série inteira de exercícios gerais.

Esperamos que você faça deste livro um bom companheiro de sua 5.<sup>a</sup> série. Felicidades.

OS AUTORES

## ÍNDICE

### Capítulo 1

#### Geometria Intuitiva

|       |  |    |
|-------|--|----|
| 1.1.  | Introdução .....                                       | 11 |
| 1.2.  | Ponto .....  | 11 |
| 1.3.  | Reta .....   | 15 |
| 1.4.  | Plano .....  | 18 |
| 1.5.  | Figura Geométrica .....                                | 19 |
| 1.6.  | Curvas .....   | 20 |
| 1.7.  | Curvas Fechadas, Curvas Fechadas Simples ..            | 20 |
| 1.8.  | Interior e Exterior de uma Curva Fechada Simples ..... | 22 |
| 1.9.  | Polígonos .....  | 24 |
| 1.10. | Semi-reta .....  | 25 |
| 1.11. | Ângulo .....   | 26 |
| 1.12. | Interior e Exterior de um Ângulo .....                 | 30 |
| 1.13. | Posições Relativas de Duas Retas em um Plano           | 31 |
| 1.14. | Partições do Plano .....                               | 34 |
|       | Exercícios .....                                       | 36 |

### Capítulo 2

#### Relações e Aplicações

|       |   |    |
|-------|---|----|
| 2.1.  | Par Ordenado .....  | 47 |
| 2.2.  | Produto Cartesiano .....  | 52 |
| 2.3.  | Relações .....  | 55 |
| 2.4.  | Algumas Propriedades das Relações .....                                   | 59 |
| 2.5.  | Relação de Equivalência .....   | 63 |
| 2.6.  | Classes de Equivalência .....   | 64 |
| 2.7.  | Partição de um Conjunto Determinada por uma Relação de Equivalência ..... | 66 |
| 2.8.  | Aplicação .....   | 67 |
| 2.9.  | Equipotência .....  | 71 |
| 2.10. | O Conjunto dos Números Naturais e o Conjunto dos Números Inteiros .....   | 72 |
| 2.11. | A Sucessão dos Números Naturais .....                                     | 73 |
|       | Exercícios .....  | 76 |

### Capítulo 3

#### Numeração

|      |                        |    |
|------|------------------------|----|
| 3.1. | Número e Numeral ..... | 85 |
|------|------------------------|----|

|       |                                       |     |
|-------|---------------------------------------|-----|
| 3.2.  | Sistema de Numeração Egípcio .....    | 86  |
| 3.3.  | Sistema de Numeração Babilônico ..... | 88  |
| 3.4.  | Sistema de Numeração Romano .....     | 89  |
| 3.5.  | O Zero .....                          | 92  |
| 3.6.  | Sistema de Numeração Decimal .....    | 93  |
| 3.7.  | Leitura dos Numerais na Base 10 ..... | 95  |
| 3.8.  | Notação Exponencial .....             | 98  |
| 3.9.  | Bases Diferentes de 10 .....          | 99  |
| 3.10. | Base 5 .....                          | 100 |
| 3.11. | Notação Exponencial Para Base 5 ..... | 104 |
| 3.12. | Base 2 .....                          | 104 |
| 3.13. | Mudança de Base .....                 | 106 |
|       | Exercícios .....                      | 110 |

#### Capítulo 4 A

##### O Conjunto dos Números Inteiros

###### Operações

|        |  |     |
|--------|--|-----|
| 4A.1.  | Adição .....                                 | 115 |
| 4A.2.  | Multiplicação .....                          | 117 |
| 4A.3.  | Propriedades da Adição e da Multiplicação .. | 120 |
| 4A.4.  | Aplicações das Propriedades .....            | 124 |
| 4A.5.  | Tábuas para Adição e Multiplicação .....     | 128 |
| 4A.6.  | Subtração .....                              | 129 |
| 4A.7.  | Ampliação do Campo Numérico .....            | 132 |
| 4A.8.  | Noção de Múltiplo de um Número Inteiro ..    | 133 |
| 4A.9.  | Divisão Exata .....                          | 134 |
| 4A.10. | Operações Inversas .....                     | 137 |
| 4A.11. | Divisão Não Exata .....                      | 139 |
| 4A.12. | Expressões Aritméticas .....                 | 142 |
| 4A.13. | Conceito de Operação .....                   | 143 |
|        | Exercícios .....                             | 146 |

#### Capítulo 4 B

##### O Conjunto dos Números Inteiros

###### Múltiplos e Divisores

|       |   |     |
|-------|---|-----|
| 4B.1. | Múltiplo .....                                  | 157 |
| 4B.2. | Múltiplos Comuns de Vários Números .....        | 159 |
| 4B.3. | Mínimo Múltiplo Comum .....                     | 159 |
| 4B.4. | Divisor .....                                   | 161 |
| 4B.5. | As Relações "é divisor de" e "é múltiplo de" .. | 163 |
| 4B.6. | Número Primo .....                              | 164 |
| 4B.7. | Divisores Comuns de Vários Números .....        | 165 |

|        |   |     |
|--------|---|-----|
| 4B.8.  | Máximo Divisor Comum .....                            | 165 |
| 4B.9.  | Números Primos Entre Si .....                         | 167 |
| 4B.10. | Fatoração .....                                       | 169 |
| 4B.11. | Regras de Divisibilidade .....                        | 170 |
| 4B.12. | Reconhecimento de Um Número Primo .....               | 172 |
| 4B.13. | Fatoração Completa de um Número .....                 | 175 |
| 4B.14. | Determinação de Todos os Divisores de Um Número ..... | 177 |
| 4B.15. | Máximo Divisor Comum — Regras Práticas ..             | 178 |
| 4B.16. | Mínimo Múltiplo Comum — Regras Práticas ..            | 179 |
|        | Exercícios .....                                      | 182 |

#### Capítulo 5 A

##### O Conjunto dos Números Racionais

###### Conceito de Número Racional. Operações

|        |  |     |
|--------|--|-----|
| 5A.1.  | Noção de Fração .....  | 187 |
| 5A.2.  | O Que Significa Uma Fração? .....  | 189 |
| 5A.3.  | Leitura de Uma Fração .....  | 191 |
| 5A.4.  | Frações Equivalentes .....   | 193 |
| 5A.5.  | Número Racional .....  | 196 |
| 5A.6.  | Classes de Equivalência .....  | 199 |
| 5A.7.  | Redução de Frações ao Mesmo Denominador ..                                 | 203 |
| 5A.8.  | Igualdade de Números Racionais .....                                       | 206 |
| 5A.9.  | Números Inteiros e Números Racionais .....                                 | 207 |
| 5A.10. | Representação do Conjunto dos Números Racionais .....                      | 209 |
| 5A.11. | Desigualdade de Números Racionais .....                                    | 210 |
| 5A.12. | Representação Geométrica dos Racionais. A Reta. Numérica .....             | 215 |
| 5A.13. | Operações com Números Racionais. Adição ..                                 | 217 |
| 5A.14. | Multiplicação .....  | 225 |
| 5A.15. | Propriedades da Adição e da Multiplicação ..                               | 228 |
| 5A.16. | Subtração .....  | 237 |
| 5A.17. | Divisão .....  | 242 |
| 5A.18. | Subtração e Divisão com Operações Inversas de Adição e Multiplicação ..... | 244 |
| 5A.19. | Expressões com Números Racionais .....                                     | 245 |
|        | Exercícios .....   | 247 |

#### Capítulo 5 B

##### O Conjunto dos Números Racionais

###### Representação Decimal dos Números Racionais

|                  |  |     |
|------------------|--|-----|
| 5B.1.            | Introdução .....   | 261 |
| 5B.2.            | Números Decimais .....                                   | 262 |
| 5B.3.            | Leitura dos Números Decimais .....                       | 265 |
| 5B.4.            | Representação Decimal dos Racionais .....                | 267 |
| 5B.5.            | Operações .....  | 271 |
| 5B.6.            | Adição .....   | 271 |
| 5B.7.            | Subtração .....  | 272 |
| 5B.8.            | Multiplicação .....                                      | 273 |
| 5B.9.            | Divisão .....  | 274 |
| 5B.10.           | Representação Decimal de um Racional Qual-<br>quer ..... | 280 |
| Exercícios ..... |  | 282 |

## Capítulo 6

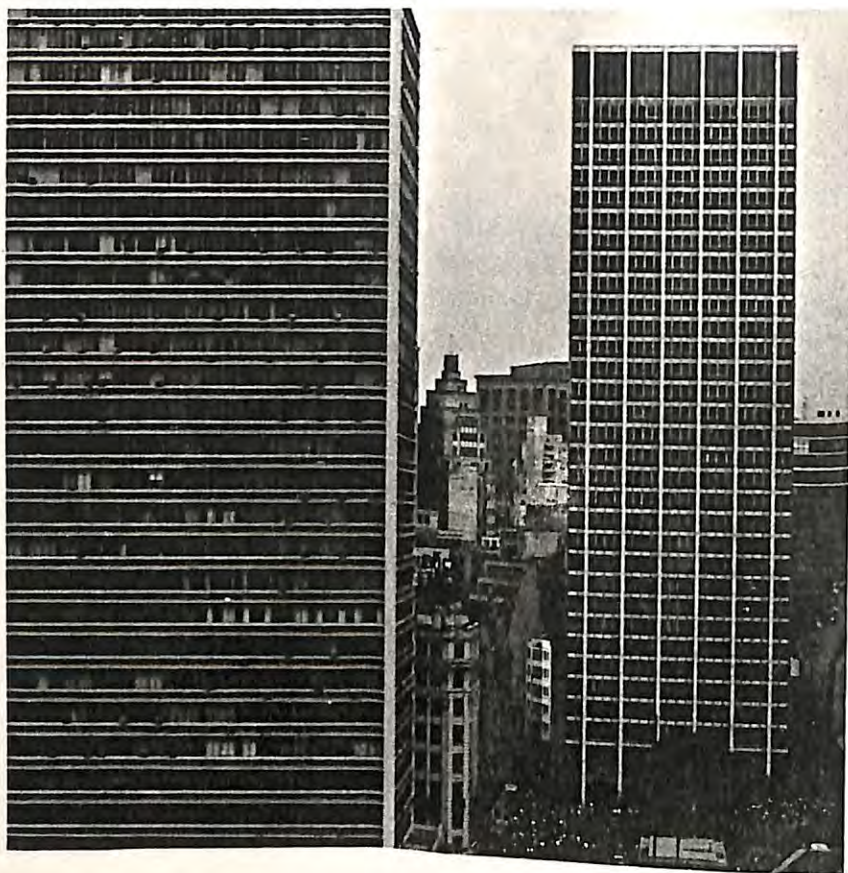
### Medidas

|                  |  |     |
|------------------|--|-----|
| 6.1.             | Noção de Medida .....                                | 289 |
| 6.2.             | Medida de um Segmento. Unidades de Comprimento ..... | 291 |
| 6.3.             | Medida de Superfície. Unidades de Área .....         | 296 |
| 6.4.             | Unidades Agrárias .....                              | 302 |
| 6.5.             | Medida de um Sólido. Unidades de Volume ...          | 302 |
| 6.6.             | Medida de Capacidade .....                           | 305 |
| 6.7.             | Medida de Pêso .....                                 | 307 |
| Exercícios ..... |  | 312 |

# Capítulo

# 1

## Geometria intuitiva



### 1.1. Introdução

Iniciaremos nosso estudo com a apresentação de vários conceitos, muitos dos quais você certamente conhece de suas experiências anteriores. Estes conceitos serão relacionados entre si, e muitas conclusões interessantes serão tiradas e, o que é mais importante, as mesmas serão usadas no decorrer de suas lições através deste livro, ilustrando um fato de grande importância: *os vários assuntos com os quais a matemática lida estão ligados uns aos outros.*

Neste capítulo, veremos as principais *figuras geométricas* e mais particularmente as *figuras geométricas planas*. Toda figura geométrica será representada através de um *desenho*.

Possivelmente você já sabe desenhar um triângulo, um quadrado, um ponto. Começamos então pelo ponto.

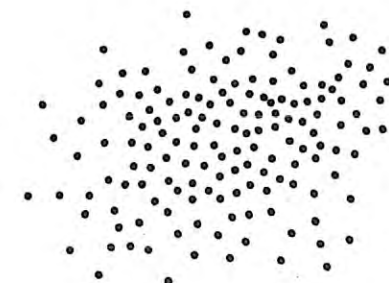
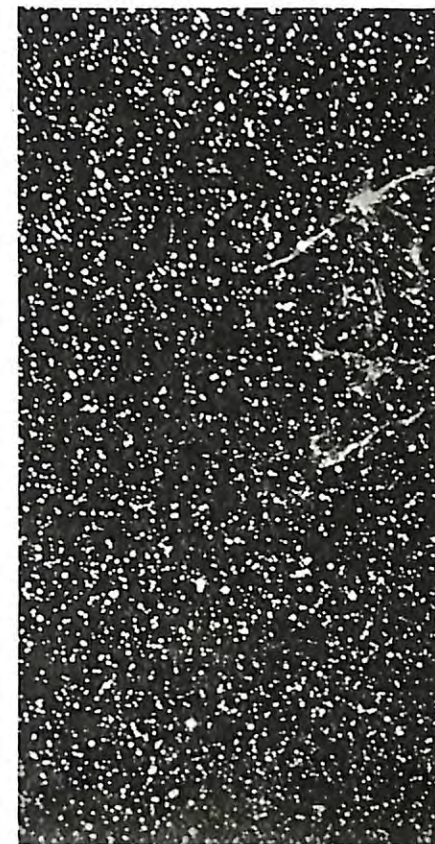
### 1.2. Ponto

A idéia de *ponto* é intuitiva a todos nós pela simples observação dos fatos da natureza. Embora não exista, no mundo em que vivemos, um ponto, êle pode ser sugerido por uma pequena marca feita num papel pela ponta de um lápis, por uma estrêla no céu, pela cabeça de um alfinete, etc. Por causa disso, em geometria não dizemos o que é um ponto, mas trabalhamos — e como — com êle.

A marca feita no papel, que é uma representação de um ponto, tem um atributo físico que é o seu tamanho; ainda que tenha sido feita por um lápis bem apontado, ela cobre uma certa região do papel, que certamente tem um tamanho. Para o matemático, o ponto não possui qualquer qualidade física, logo, não possui tamanho e portanto *uma marca não é um ponto*. Assim sendo, todo desenho que fizermos ou que você encontrar, será sempre uma *representação de uma idéia geométrica*; mas, como é cansativo a todo instante estarmos falando em “êste desenho é a representação de um ponto”, para simplificar a linguagem diremos “êste ponto”, “esta reta”, etc.

Pôsto isto, considere os pontos da figura ao lado.

Como posso eu me referir a êles dizendo: o ponto do canto esquerdo, o ponto do canto inferior direito, etc.? ... Você certamente vai concordar que é muito mais simples dar nomes



a esses pontos e depois chamá-los pelos mesmos, por exemplo:

o ponto a, o ponto b, o ponto c, o ponto d.

Temos acima o conjunto dos pontos a, b, c, d, que na escrita representamos por:

{a, b, c, d}  
ou {a, c, d, b}  
ou {b, c, d, a}  
ou ...

Veja que o mesmo conjunto de pontos pode ser escrito de várias maneiras, portanto

$\{a, b, c, d\} = \{a, c, d, b\} = \{b, c, d, a\}$ , etc.

No seu curso primário, você usou inúmeras vezes o sinal =  
Por exemplo, muitas vezes você escreveu

$2 + 1 = 3$  que se lê 2 + 1 é igual a 3.

Será que, pelo menos uma vez, você parou para indagar sobre o real significado da expressão *é igual a*, em matemática? Será, por acaso, que o *é igual a*, da matemática, é o mesmo da sentença

“a saia de Sueli é igual à saia de Miriam,”?

Evidentemente não!

*É igual a*, da matemática, representado pelo sinal =, quer dizer “é a mesma coisa que”,

$2 + 1 = 3$  quer dizer

$2 + 1$  é a mesma coisa que 3 ou

$2 + 1$  e 3 são nomes diferentes de uma única coisa.

Agora você já percebeu porque a expressão *é igual a*, da sentença citada acima, não é a mesma da matemática, pois não é verdade que

“a saia de Sueli é a mesma que a de Miriam”,  
aqui temos duas saias e não a mesma saia.

Quando escrevemos  $\{a, b, c, d\} = \{b, c, d, a\}$

queremos dizer que  $\{a, b, c, d\}$  e  $\{b, c, d, a\}$

são representações diferentes de um mesmo conjunto de pontos.

### Exercícios:

1. Escreva de todas as maneiras possíveis o conjunto  $\{a, b, c, d\}$ .
2. Assinale as sentenças abaixo, nas quais a expressão “é igual a” é a da matemática
  - a. 10 é igual a  $2 \times 5$ .
  - b. a régua de Maria é igual à régua de Lúcia.
  - c. o conjunto  $\{r, s, t\}$  é igual ao conjunto  $\{t, r, s\}$ .
  - d. o comprimento da régua de Maria é igual ao comprimento da régua de Lúcia.

Considere agora o conjunto  $\{a, b, d\}$ . Os pontos deste novo conjunto são:

o ponto a, o ponto b, o ponto d.

Dizemos que a *pertence* ao conjunto  $\{a, b, d\}$  ou que a é *elemento* de  $\{a, b, d\}$ .

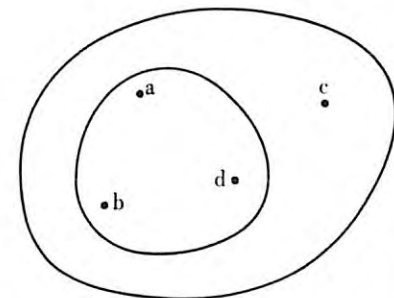
Dizemos que b *pertence* ao conjunto  $\{a, b, d\}$  ou que b é *elemento* de  $\{a, b, d\}$ .

Dizemos que d *pertence* ao conjunto  $\{a, b, d\}$  ou que d é *elemento* de  $\{a, b, d\}$ .

Dizemos que c *não pertence* ao conjunto  $\{a, b, d\}$ , ou que c *não é elemento* de  $\{a, b, d\}$ .

Simbolicamente escrevemos que a *pertence* a  $\{a, b, d\}$  da seguinte maneira:

$$a \in \{a, b, d\}$$





e que  $c$  não pertence a  $\{a, b, d\}$  assim:  $c \notin \{a, b, d\}$ .

$\in$  é um símbolo que significa "pertence a", relacionando elemento e conjunto.

$\notin$  é um símbolo que significa *não pertence a*, relacionando elemento e conjunto.

Se  $A$  fôr o conjunto dos meninos de sua classe e  $a$  fôr você, é claro que

$$a \in A$$

e se  $b$  fôr o seu pai, então

$$b \notin A.$$

Se  $B$  fôr o conjunto dos rios brasileiros,  $d$  fôr o rio Amazonas, e  $n$  o rio Nilo então

$$d \in B$$

$$e \quad n \notin B.$$

### Exercícios:

3. Seja  $A$  o conjunto dos planetas do sistema solar. Quais são os elementos de  $A$ ?
4. Seja  $B$  o conjunto das vogais do nosso alfabeto. A letra  $d$  pertence a êsse conjunto? Escreva a sua resposta simbolicamente.
5. Sua classe é um conjunto de alunos. Você pertence ou não a êsse conjunto? E seu pai? Represente os alunos de sua classe por pontos e seu pai também. Faça um desenho que consiga dizer o que acontece a seu pai e a você, em relação a êsse conjunto.
6. Considere os seguintes conjuntos:
  - a. o conjunto dos números inteiros maiores que 3 e menores que 7:  
 $\{4, 5, 6\}$

- b. o conjunto dos números inteiros maiores que 3 e menores que 5:  
 $\{4\}$

- c. o conjunto dos números inteiros maiores que 3 e menores que 4:  
 $\{ \}$

O segundo conjunto, que é  $\{4\}$ , possui um só elemento; por isso é chamado de *conjunto unitário*.

O terceiro conjunto  $\{ \}$  não possui elementos, por isso é chamado de *conjunto vazio*. Ele é representado por  $\{ \}$  ou pelo símbolo  $\emptyset$ . Existe somente um conjunto vazio, isto é, o conjunto sem elementos é único.

7. Diga quais das seguintes sentenças determinam o conjunto vazio e quais determinam um conjunto unitário.
  - a. O conjunto dos números inteiros tais que, cada um deles somado a 2 resulta 4 (isto é, os números  $x$  inteiros tais que  $x + 2 = 4$ ).
  - b. O conjunto dos números inteiros maiores que 10 e menores que 12 que são pares.
  - c. O conjunto dos números inteiros tais que, cada um deles somado a 2 resulta 2 (isto é, os números inteiros  $x$  tais que  $x + 2 = 2$ ).
  - d. O conjunto dos alunos de sua classe que têm menos de 5 anos.
8. Dê exemplos de conjuntos unitários e exemplos do conjunto vazio.

### 1.3. Reta

Assim como o ponto, não há no mundo físico o que represente exatamente uma reta, mas podemos "sugerir" uma reta quando consideramos uma régua, a borda de uma mesa, um fio esticado, estendido sem limites nos dois sentidos, a arquitetura, as traves do futebol, etc.

A reta é um conjunto de pontos e é ilimitada nos dois sentidos. Por isso, quando desenhamos uma reta, desenhamos somente uma parte dela.

**Exercícios:**

9. Marque numa fôlha de papel um ponto. Trace quantas retas você puder, passando por êsse ponto.
10. Considere a figura formada pelos três pontos a, b, c. É possível traçar uma reta R tal que:  $a \in R$ ,  $b \in R$  e  $c \in R$ ? Onde deve estar o ponto c para que isso aconteça?

Ao conjunto de todos os pontos damos o nome de *espaço*. Isto quer dizer que se p é um ponto, então p é um elemento do espaço.

Uma reta é um conjunto infinito de pontos, porém, nem todos os pontos do espaço pertencem a uma mesma reta. Logo uma reta é uma parte do espaço. Os matemáticos dizem isto da seguinte maneira:

Uma reta é um subconjunto do espaço.

E simbolicamente escrevem  $R \subset E$ ,

sendo E o espaço e, R uma reta qualquer.

$R \subset E$  lê-se:

o conjunto R *está contido* no conjunto E,

ou R é *subconjunto* de E.

$\subset$  é um símbolo que significa "está contido em", relacionando um conjunto a outro conjunto.

Um conjunto A é subconjunto de um conjunto B, se e somente se todo elemento de A é também elemento de B.

Considere o conjunto de pontos {a, b, c}. É claro que se considerarmos o conjunto {b, c}, êle é um subconjunto de {a, b, c}, pois, cada elemento de {b, c} é também elemento de {a, b, c}.

O que você pode dizer de

- {a}
  - {b}
  - {c}
  - {b, c}
  - {a, b}
  - {a, c}
- em relação a {a, b, c}?

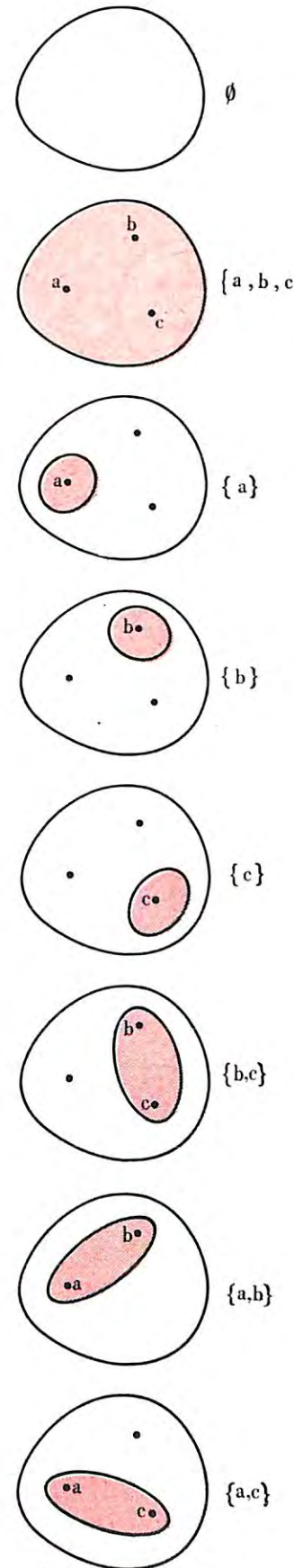
Todos êles são subconjuntos de {a, b, c}.

Preste atenção no seguinte: *todos* os elementos de {a, b, c} são elementos do conjunto {a, b, c}; por isso, dizemos que

{a, b, c} é subconjunto de {a, b, c}, ou seja, {a, b, c} é subconjunto de si próprio.

Vamos, agora, admitir o seguinte:

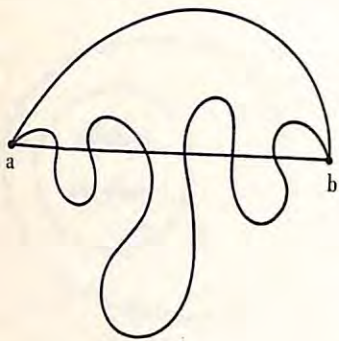
O conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto.





### Exercício:

20 Quais dos desenhos da página anterior, são representações de figuras geométricas planas e quais são representações de figuras geométricas espaciais?

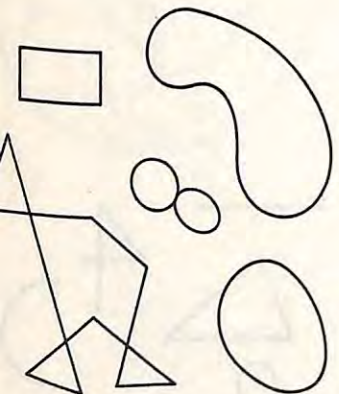


### 1.6. Curvas

Somente nos interessaremos, neste capítulo, por figuras geométricas planas.

Marque dois pontos distintos,  $a$  e  $b$ , numa folha de papel (que é a representação de um plano).

Coloque a ponta de um lápis em  $a$  e desloque o lápis ao acaso, sem levá-lo do papel, até  $b$ ; assim procedendo, você obtém a representação de uma figura geométrica, a qual damos o nome de *curva*. Existem curvas que são ilimitadas, porém a sua representação sempre começa em um ponto e acaba em outro.



### 1.7. Curvas Fechadas, Curvas Fechadas Simples

Observe agora as seguintes figuras geométricas:

Quando você desloca o lápis com continuidade sobre o papel, e termina o desenho no ponto onde o iniciou, não passando de volta sobre um trecho já desenhado, você obtém uma figura como as que estão acima desenhadas. Uma figura obtida nestas condições chama-se *curva fechada*.

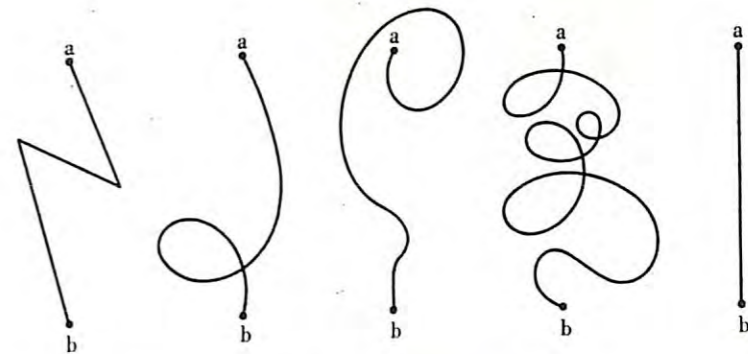
Desenhe você mesmo várias curvas fechadas. É divertido! Cada uma das seguintes curvas fechadas, não apresenta cruzamentos, isto é, o lápis, ao se deslocar com continuidade sobre o papel, não passa por um mesmo ponto mais de uma vez. Neste caso, temos uma *curva fechada simples*.

Repare que a figura abaixo é obtida deslocando o lápis de  $a$  a  $b$ ,



sem o levantar do papel, portanto, ela é também uma *curva*; mas é uma curva especial chamada *segmento de reta*.

Aqui estão várias curvas que ligam  $a$  a  $b$ .

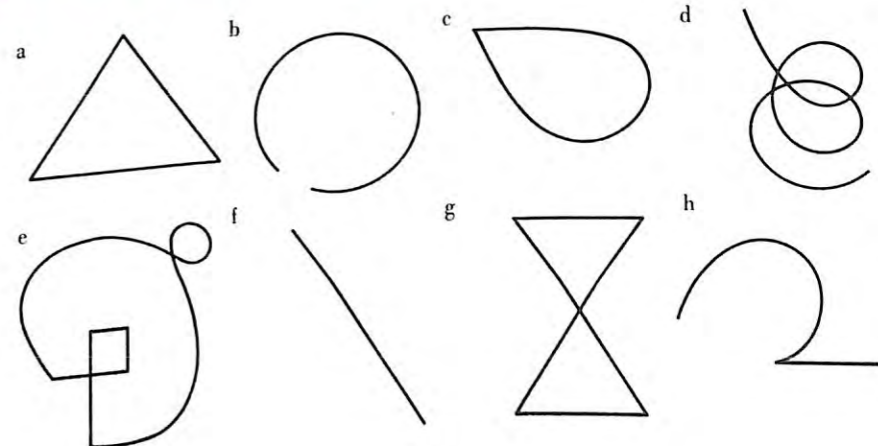


Um segmento de reta cujas extremidades são os pontos  $a$  e  $b$ , é designado por  $\overline{ab}$  ou  $\overline{ba}$ .

### Exercícios:

21. Dados dois pontos  $a$  e  $b$ , quantas curvas começam em  $a$  e terminam em  $b$ ? quantos segmentos de reta?
22. Dados 3 pontos  $a$ ,  $b$  e  $c$  alinhados, quais são os segmentos de reta que unem esses pontos dois a dois?
23. Dados 3 pontos não alinhados, quais são os segmentos de reta que unem esses pontos dois a dois?
24. Dar todos os segmentos de reta que unem esses 5 pontos dois a dois.
25. Quais das seguintes figuras geométricas são

a. curvas, b. curvas fechadas, c. curvas fechadas simples?



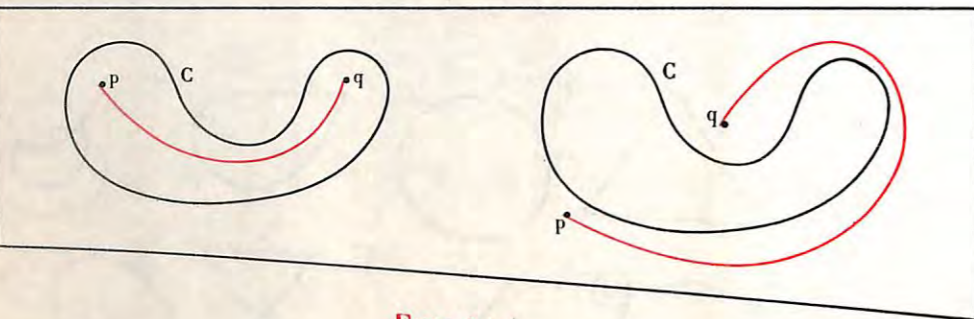
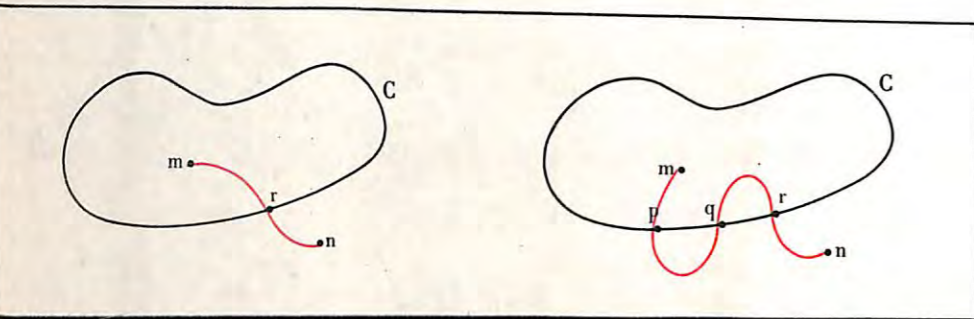
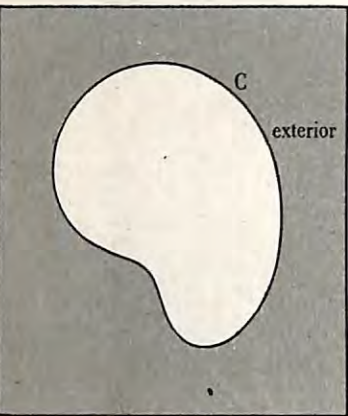
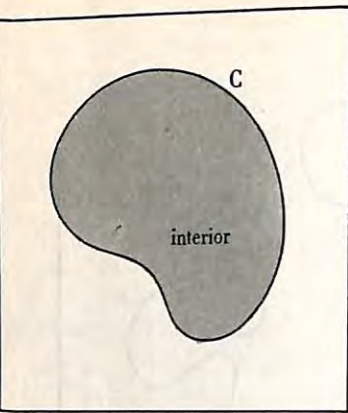
### 1.8. Interior e Exterior de uma Curva Fechada Simples

Observe cada uma das curvas fechadas simples da figura ao lado. Você está vendo que cada uma delas determina no plano 3 conjuntos de pontos: o conjunto dos pontos internos à curva, a curva e o conjunto dos pontos externos à curva. O primeiro é chamado simplesmente o interior da curva e o último, o exterior da curva. A curva  $C$  não está contida nem no interior, nem no exterior.

Considere um ponto  $m$  do interior de uma curva fechada simples  $C$ , e um ponto  $n$  do exterior de  $C$ . Una  $m$  a  $n$  por meio de uma curva; você vai verificar que qualquer que seja a curva unindo  $m$  a  $n$ , esta curva corta  $C$  em pelo menos um ponto. Esta é uma propriedade importante das curvas fechadas simples.

Tome agora dois pontos quaisquer no interior de  $C$ : você poderá sempre uní-los através de uma curva toda contida no interior, isto é, sem cortar a curva dada.

A mesma coisa acontece se você tomar 2 pontos quaisquer do exterior: você poderá sempre uní-los através de uma curva toda contida no exterior, isto é, sem cortar a curva dada.



**Exercício:**

26. Em cada caso do exercício 25 C, pinte o interior da curva de azul e o exterior de vermelho.

Nem sempre a figura de uma curva fechada simples nos permite distinguir rapidamente o seu interior e o seu exterior. Por exemplo, observando a curva fechada simples da figura do lado torna-se difícil dizer quais são os pontos internos e quais são os pontos externos. O ponto  $a$  será interno? e o ponto  $b$ ? Existe um método simples e rápido, para saber se um ponto é interno ou se é externo a uma curva. É o seguinte:

Dado um ponto qualquer do plano que não pertença à curva, traça-se um segmento de reta que une esse ponto a um ponto qualquer da margem da folha de papel.

1. Se o número de pontos de encontro do segmento de reta com a curva for ímpar, o ponto é interno.
2. Se o número de pontos de encontro do segmento de reta com a curva for par, o ponto é externo.

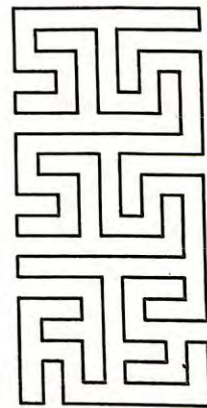
Volte agora à curva da figura e trace o segmento  $\overline{ad}$  e o segmento  $\overline{bc}$

$\overline{ad}$  corta a curva em 7 pontos, logo  $a$  é interno  
 $\overline{bc}$  corta a curva em 8 pontos, logo  $b$  é externo.

A partir do ponto  $a$ , você pode colorir o interior da curva obtendo o seguinte desenho:

**Exercício:**

27. Em cada um dos casos abaixo, determine quais são os pontos externos e quais são os pontos internos às curvas. Depois, pinte o interior de cada uma dessas curvas fechadas simples.



### 1.9. Polígonos

Observe as seguintes curvas fechadas simples:

Elas são constituídas exclusivamente de segmentos de reta: tais curvas fechadas simples chamam-se *polígonos*.

Um segmento de reta de um polígono é chamado de *lado*, se não estiver propriamente contido em algum outro segmento de reta do polígono. Por exemplo na figura ao lado são lados os segmentos de reta

$\overline{ac}$ ,  $\overline{cd}$ ,  $\overline{de}$ ,  $\overline{ef}$  e  $\overline{fa}$   
 Não são lados  $\overline{ab}$  e  $\overline{bc}$  pois  
 $\overline{ab} \subset \overline{ac}$  e  
 $\overline{bc} \subset \overline{ac}$ .

Os *polígonos* recebem nomes especiais conforme o número de lados que possuem. Assim:

- polígono de 3 lados — triângulo
- polígono de 4 lados — quadrilátero
- polígono de 5 lados — pentágono, etc.

As extremidades dos lados chamam-se *vértices*.

#### Exercício:

28. Quais das seguintes figuras são *polígonos*?

Algumas curvas fechadas simples possuem formas conhecidas, e, neste caso, o conjunto de pontos, formado pelos pontos da curva e pelos pontos internos à curva, recebe um nome especial. Se a curva for um triângulo, ele e seu interior formam uma *região triangular*; se for um círculo, ele e seu interior formam uma *região circular*; se for um polígono, ele e seu interior formam uma *região poligonal*.

### 1.10. Semi-reta

Desenhe uma reta e chame-a de R.

Marque nessa reta um ponto *a* qualquer.

O ponto *a* determina na reta R três conjuntos de pontos:

1. O conjunto dos pontos que estão à esquerda de *a* (ou acima de *a*, depende da posição da reta).
2. O conjunto dos pontos que estão à direita de *a* (ou abaixo de *a*, depende da posição da reta).
3. O conjunto {*a*} formado por um só elemento, o ponto *a*.

Cada um dos dois primeiros conjuntos chama-se *semi-reta aberta de origem a*.

Marque na reta R dois pontos *b* e *c*, um em cada uma das semi-retas abertas; elas então poderão ser indicadas por  $\overrightarrow{ab}$  e  $\overrightarrow{ac}$  respectivamente.

Por que  $\overrightarrow{ab}$ ?

$\overrightarrow{ab}$  para lembrar que essa semi-reta começa em *a*, (mas *a* não pertence a ela) passa por *b* e continua...

$\overrightarrow{ac}$  começa em *a*, (*a* não pertence a ela) passa por *c* e continua...

Se considerarmos o ponto *a* fazendo parte das semi-retas então teremos *semi-retas fechadas de origem a*, que designamos por  $\overrightarrow{ab}$  e  $\overrightarrow{ac}$ .

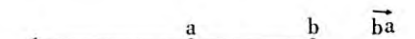
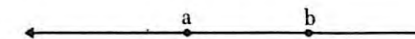
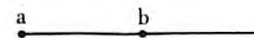
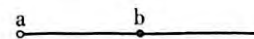
Você já viu, que dois conjuntos são iguais quando possuem os mesmos elementos.  
 (lembre-se:  $\{a, b, c, d\} = \{a, c, b, d\}$ , etc.)

Note agora que as semi-retas  $\overrightarrow{ab}$  e  $\overrightarrow{ba}$  não são iguais, pois não são o mesmo conjunto de pontos.

Vamos ver porque:

$\overrightarrow{ab}$  é a semi-reta fechada que começa em *a*, passa por *b* e continua..

$\overrightarrow{ba}$  é a semi-reta fechada que começa em *b*, passa por *a* e continua..



Assim temos dois conjuntos de pontos bem distintos.

Simbolicamente escrevemos

$$\vec{ab} \neq \vec{ba},$$

onde o sinal  $\neq$  quer dizer "é diferente de".

**Exercícios:**

29. Marque dois pontos  $\hat{a}$  e  $\hat{b}$  numa fôlha de papel:

- a. quantas semi-retas de origem  $a$  existem?
- b. quantas semi-retas de origem  $a$  passam por  $b$ ?

30. Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

- a.  $\vec{ab} \subset \vec{ab}$
- b.  $\vec{ab} \subset \vec{ab}$
- c.  $\vec{ab} \subset \vec{ba}$
- d.  $\vec{ab} \subset \vec{ba}$
- e.  $\vec{ab} \subset \vec{ac}$  se  $\vec{ab} = \vec{ac}$ .



**1.11. Ângulo**

Considere as seguintes figuras geométricas:

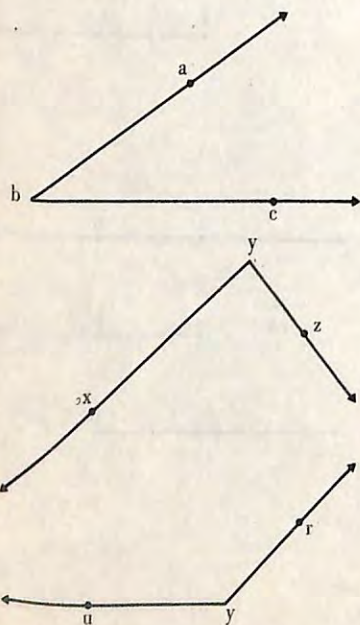
Cada uma delas é formada por duas semi-retas fechadas de mesma origem, distintas, e não alinhadas.

Cada uma delas é o que em geometria chamamos de *ângulo*. Um ponto para pertencer ao primeiro ângulo tem que pertencer a  $\vec{ba}$  ou a  $\vec{bc}$ . Um ponto para pertencer ao segundo ângulo tem que pertencer a  $\vec{yz}$  ou a  $\vec{yx}$ .

Complete você a seguinte frase:

Um ponto para pertencer ao terceiro ângulo tem que pertencer a .... ou a .....

Em cada um dos casos aqui apresentados, você tem dois conjuntos de pontos (as duas semi-retas fechadas) encarados como um só conjunto de pontos, que é o ângulo.

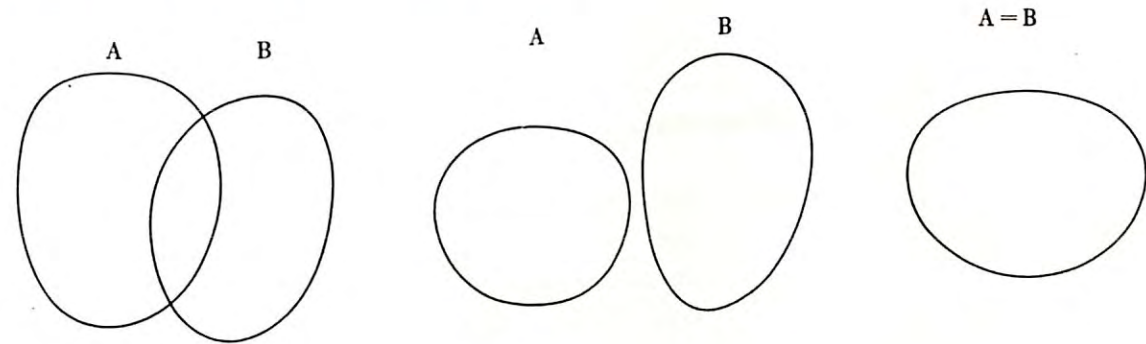


Dados dois conjuntos quaisquer A e B, ao conjunto formado por elementos que são de A, ou de B, ou de ambos, damos o nome de *reunião* de A e B e representamos por  $A \cup B$ .

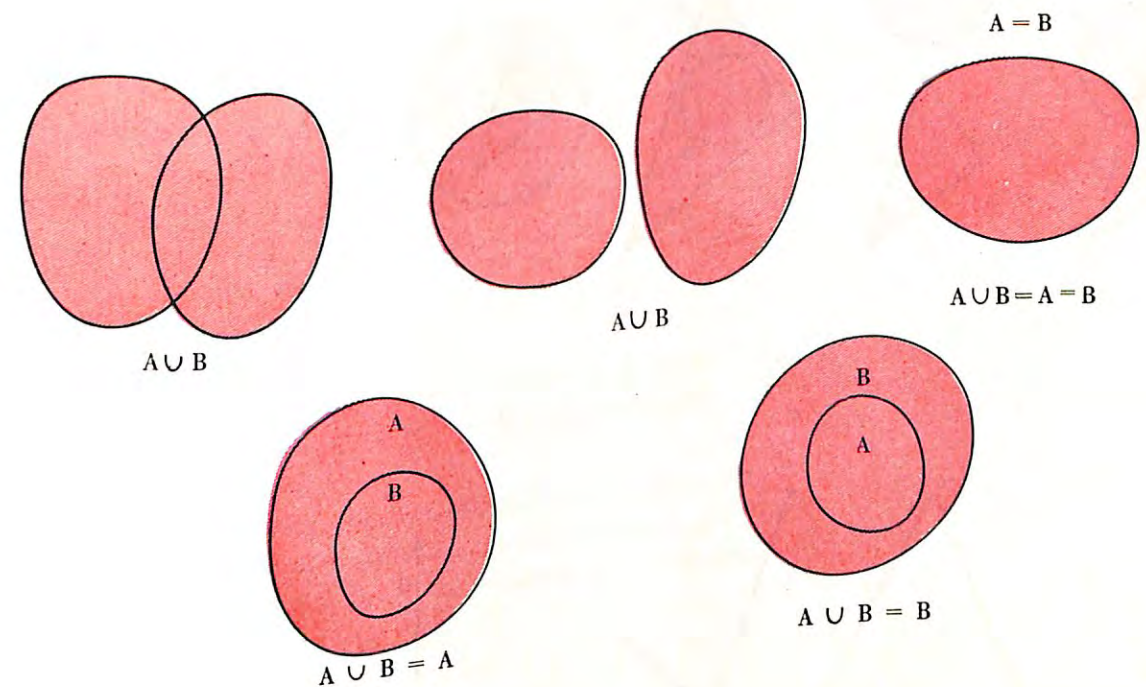
$A \cup B$  lê-se "A união B" ou "A reunião B".

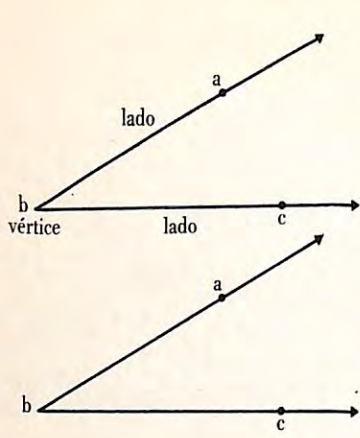
Geralmente representamos os elementos de um conjunto qualquer por meio dos pontos internos a uma curva fechada simples.

Assim sendo, dados dois conjuntos A e B quaisquer, pode ocorrer uma das seguintes possibilidades:



Temos, então, os seguintes conjuntos reuniões, considerando cada uma das possibilidades:





Podemos agora dizer que:  
 ângulo é a reunião de duas semi-retas fechadas de mesma origem, distintas, e não alinhadas.

Cada uma das semi-retas chama-se *lado* do ângulo, e a origem das mesmas *vértice* do ângulo.

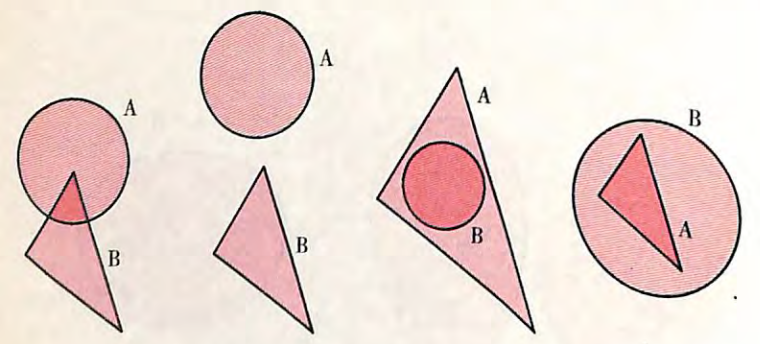
Para podermos nos referir a um ângulo, colocamos letras como as do desenho ao lado, e escrevemos  $\angle abc$ , colocando sempre a letra correspondente ao vértice entre as outras duas letras.

$$\angle abc = \vec{ba} \cup \vec{bc}$$

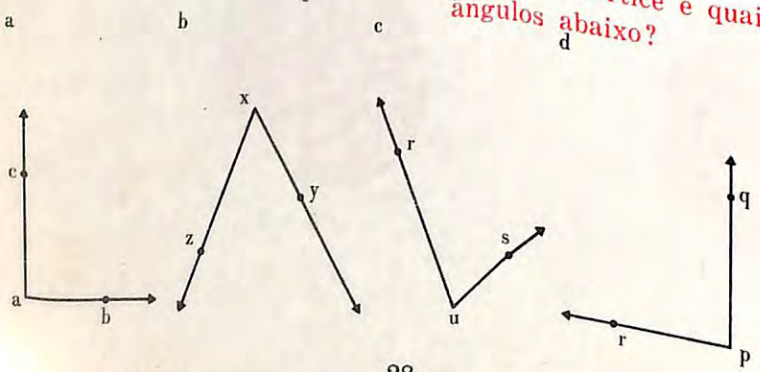
**Exercícios:**

31. Sendo os elementos de um conjunto representados por meio de pontos internos a uma curva fechada simples, posso considerar as seguintes representações, tomando duas formas conhecidas que são o círculo e o triângulo.

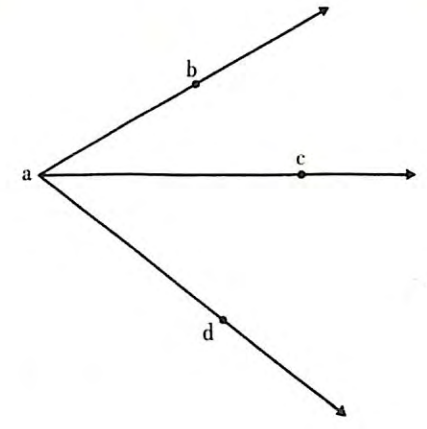
Usando um lápis de cor diferente, assinale, em cada um dos casos, a região que representa  $A \cup B$ .



32. Qual é o vértice e quais são os lados de cada um dos ângulos abaixo?



33. Quantos e quais são os ângulos da seguinte figura?

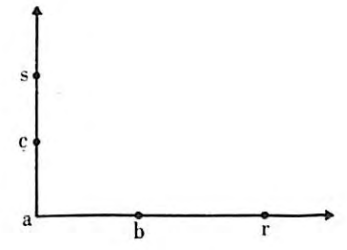


34. Considere o desenho:

Qual das seguintes afirmações é verdadeira? Por que? (Lembre-se do significado do sinal = em matemática)

$$\angle bac = \angle sar$$

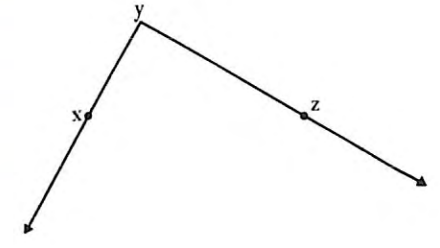
$$\angle bac = \angle xyz$$



35. Seja  $A = \{1, 2, 3, 4\}$   
 $B = \{2, 3, 4, 5\}$

temos

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$



Portanto, em um conjunto, um elemento aparece uma só vez.

Considere agora os conjuntos:

$$E = \{1, 2, 3\}$$

$$F = \emptyset$$

$$H = \{10, 12\}$$

Escreva os seguintes conjuntos:

$$A \cup E, \quad B \cup F, \quad E \cup F, \quad E \cup H.$$

36. Lembrando que, a partir de uma semi-reta aberta, obtemos uma fechada acrescentando à primeira o seu ponto origem, pergunta-se se é falsa ou verdadeira a seguinte afirmação:

$$\vec{ab} = ab \cup \{a\}$$



37. Verifique que são verdadeiras as seguintes afirmações:

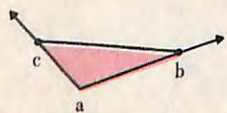
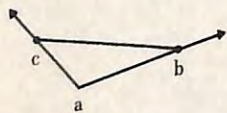
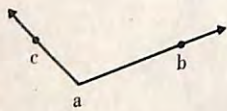
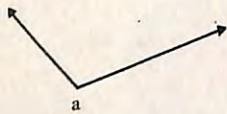
- $\angle xyz = yx \cup yz \cup \{y\}$
- $R = tv \cup ty \cup \{t\}$
- $R = tv \cup tu$
- $R = tv \cup tu$
- $R = tv \cup tu$

### 1.12. Interior e Exterior de um Ângulo

Você já viu que uma curva fechada simples determina, no plano que a contém, três conjuntos de pontos: o exterior da curva, a curva, e o interior da curva. Um ângulo, também, determina, no plano no qual está contido, 3 conjuntos de pontos que são: o exterior do ângulo, o ângulo e o interior do ângulo. O ângulo você já sabe qual parte do plano é. Porém das outras duas partes, qual é o interior? Qual o exterior? Um meio rápido e simples para determinar o interior de um ângulo é o seguinte:

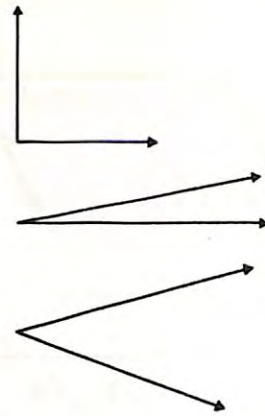
considere um ângulo qualquer, por exemplo a figura ao lado. Tome um ponto  $b$  em um dos lados do ângulo, e um ponto  $c$  no outro lado do ângulo.

Trace o segmento  $\overline{bc}$ ; a reunião dos segmentos  $\overline{ac}$ ,  $\overline{ab}$  e  $\overline{bc}$  é o triângulo  $\triangle abc$ ; esse triângulo, que é uma curva fechada simples, tem um interior que é facilmente determinado. O interior do ângulo é a parte do plano assinalada na figura, que contém o interior do triângulo.



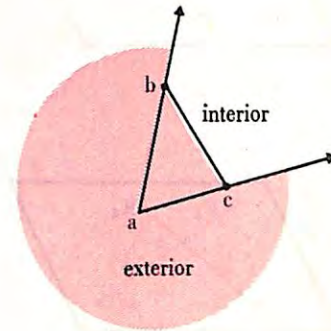
### Exercícios:

38. Assinale, por meio de uma hachura, o interior dos seguintes ângulos:



39. Você viu um processo para determinar o interior de um ângulo. Não falamos em um processo para determinar o exterior, porque, uma vez conhecido o interior, o exterior estará automaticamente determinado.

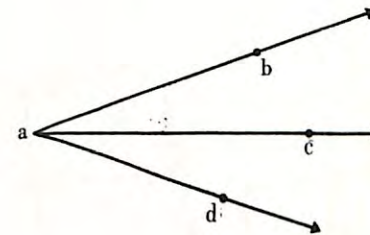
Assinale os exteriores dos ângulos do exercício anterior.



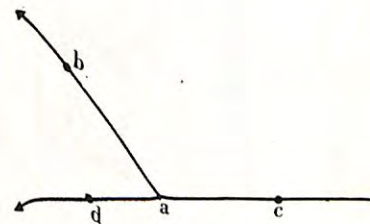
40. Na figura ao lado, podemos considerar os seguintes ângulos:

- $\angle bac$
- $\angle bad$
- $\angle cad$

Pergunta-se: o ponto  $c$  pertence ao interior ou ao exterior de  $\angle bad$ ? a semi-reta aberta  $\overrightarrow{ac}$  está no interior ou exterior de  $\angle bad$ ?



41. Fazemos as mesmas perguntas para o seguinte caso.



### 1.13. Posições Relativas de Duas Retas em um Plano

Dadas duas retas quaisquer contidas em um plano, uma das 3 possibilidades ilustradas na página seguinte deve ocorrer.

No primeiro caso,  $R_1$  e  $R_2$  são o mesmo conjunto de pontos,

isto é

qualquer ponto de  $R_1$  é também ponto de  $R_2$  e  
qualquer ponto de  $R_2$  é também ponto de  $R_1$ .

logo

$$R_1 = R_2;$$

no segundo caso,

qualquer que seja um ponto de  $R_1$ , ele não é ponto de  $R_2$   
e vice-versa; ou seja

se  $a \in R_1$ , então  $a \notin R_2$ ;

se  $b \in R_2$ , então  $b \notin R_1$ .

No terceiro caso  $R_1$  e  $R_2$  possuem um único ponto em comum  
que é  $a$ :

$$a \in R_1 \quad \text{e} \quad a \in R_2.$$

Veja que, nos três casos, nos preocupamos em verificar se  
 $R_1$  e  $R_2$  possuem ou não pontos comuns, isto é, que sejam  
juntos, que será dada agora. Existe uma operação entre con-  
das possibilidades acima estudadas.

Dados dois conjuntos quaisquer  $A$  e  $B$ , ao conjunto formado  
por elementos que são tanto de  $A$  quanto de  $B$ , isto é, de  
tamos por  $A \cap B$ .

$A \cap B$  lê-se "A intersecção B" ou "A inter B".

Exemplo:

Se  $A = \{3, 6, 9\}$  e  $B = \{3, 4, 5, 6\}$ ,

$$\text{então } A \cap B = \{3, 6\}.$$

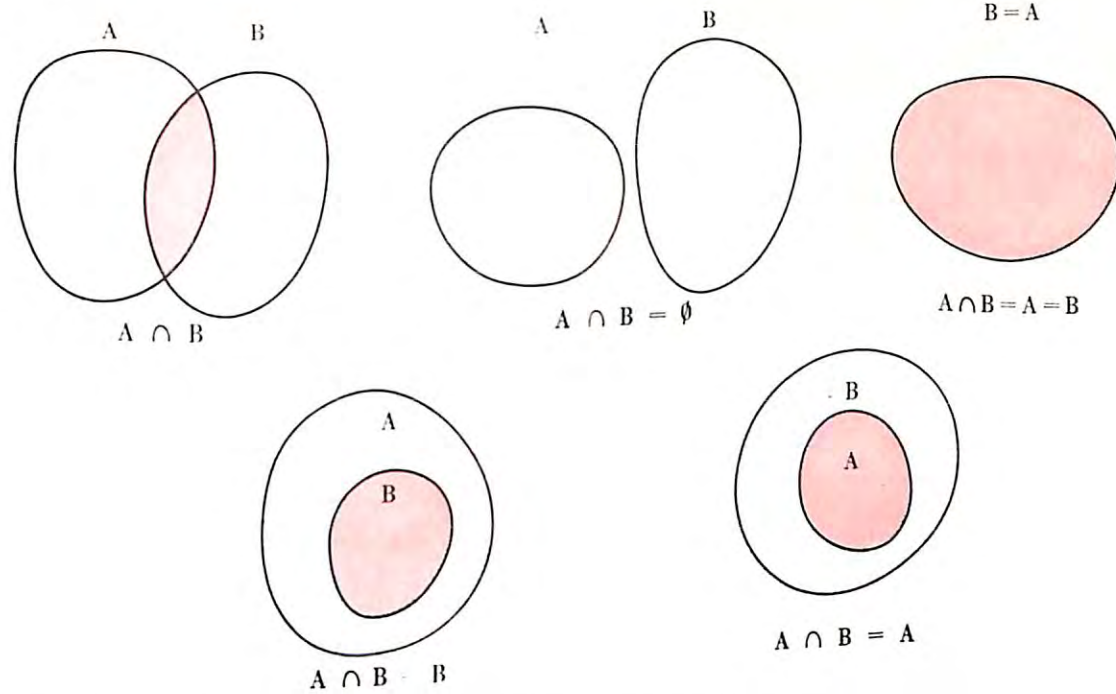
Dados 2 conjuntos quaisquer  $A$  e  $B$ , pode ocorrer uma das  
5 possibilidades ilustradas na página seguinte

Voltando às retas  $R_1$  e  $R_2$  temos:

primeiro caso:  $R_1 \cap R_2 = R_1 = R_2$

segundo caso:  $R_1 \cap R_2 = \emptyset$

terceiro caso:  $R_1 \cap R_2 = \{a\}$

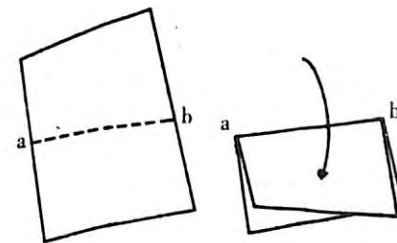


No primeiro e segundo casos, as retas chamam-se *paralelas*.  
No terceiro caso elas chamam-se *concorrentes* (ou *secantes*  
ou *incidentes*).

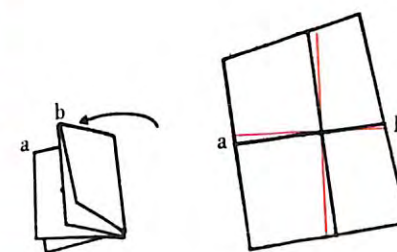
### Exercícios:

42. Sejam  $R_1$ ,  $R_2$  e  $R_3$  retas quaisquer de um plano; sabendo-  
se que  $R_1$  é paralela a  $R_2$  e que  $R_2$  é paralela a  $R_3$ , a  
afirmação

" $R_1$  é paralela a  $R_3$ ", é falsa ou verdadeira?



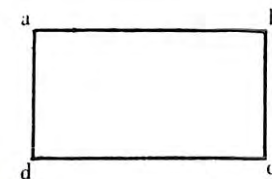
43. Pegue um pedaço qualquer de papel, e siga as instru-  
ções dos desenhos. Ao desdobrar o papel completa-  
mente, você obtém a figura de duas retas concorrentes que  
formam 4 ângulos. Cada um dos ângulos chama-se  
ângulo reto; as retas chamam-se *perpendiculares* entre  
si.



Dê exemplos em sua sala de aula de retas perpendicu-  
res entre si.

44. Dado um retângulo abcd, pergunta-se

- $\overline{ab}$  e  $\overline{bc}$  estão contidos em retas paralelas?
- $\overline{ab}$  e  $\overline{dc}$  estão contidos em retas paralelas?
- $\overline{ad}$  e  $\overline{bc}$  estão contidos em retas perpendiculares?
- $\overline{bc}$  e  $\overline{dc}$  estão contidos em retas perpendiculares?



45. Verifique por meio de desenhos que

- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cap B = B \cap A$
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Nota: os parêntesis indicam quais os conjuntos que devem ser obtidos em primeiro lugar.

### 1.14. Partições do Plano

Dada uma curva fechada simples em um plano P, considere:

C o conjunto dos pontos do plano P que pertencem à curva;

E o conjunto dos pontos do plano P que pertencem ao exterior da curva;

I o conjunto dos pontos do plano P que pertencem ao interior da curva.

Observe que nenhum dos conjuntos C, E, I é vazio, e que todo ponto do plano pertence a um, e somente um, dos conjuntos C, E, I; os matemáticos exprimem esta situação dizendo que os conjuntos C, E, I formam uma *partição do plano P*.  
Simbolicamente, temos:

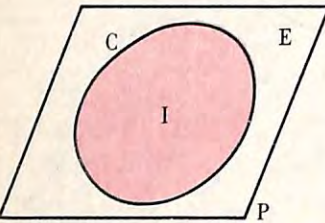
$$\begin{aligned} C &\subset P \\ E &\subset P \quad (\text{Os conjuntos da partição são subconjuntos do} \\ I &\subset P \quad \text{plano P}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &\neq \emptyset \\ E &\neq \emptyset \quad (\text{Nenhum dos conjuntos da partição é vazio}) \\ I &\neq \emptyset \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C \cap E &= \emptyset \\ C \cap I &= \emptyset \quad (\text{Os conjuntos da partição são dois a dois} \\ E \cap I &= \emptyset \quad \text{disjuntos, isto é, não possuem elementos} \\ &\quad \text{comuns}) \end{aligned}$$

e finalmente

$$C \cup E \cup I = P \quad (\text{A reunião dos conjuntos da partição é o próprio plano}).$$



### Exercícios:

46. Seja  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Os conjuntos

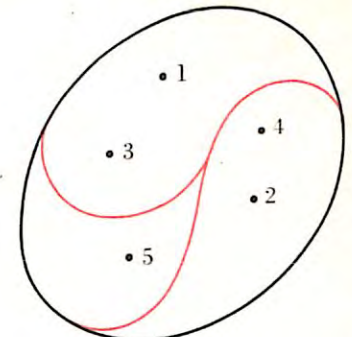
$$\{1, 3\}$$

$$\{2, 4\}$$

$$\text{e } \{5\}$$

formam uma *partição de A*.

- Dê outra partição de A.
- Represente a nova partição por meio de um desenho.



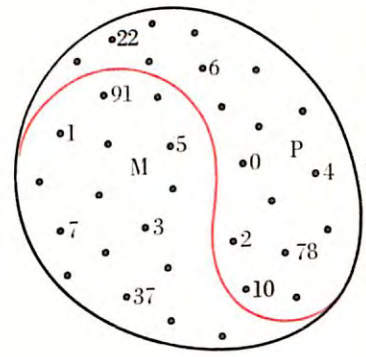
47. Seja

$$I = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\} \quad \text{o conjunto de todos os números inteiros,}$$

$$P = \{0, 2, 4, 6, 8, \dots\} \quad \text{o conjunto de todos os números inteiros pares e}$$

$$M = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\} \quad \text{o conjunto de todos os números inteiros ímpares.}$$

- Os conjuntos P, M formam uma *partição de I*?
- Por que?



48. Seja R uma reta, e a um ponto qualquer de R ( $a \in R$ ). Você já viu que o ponto a determina em R três conjuntos de pontos:

$$\begin{aligned} &\{a\} \\ &\overleftrightarrow{ab} \\ &\overleftrightarrow{ac} \end{aligned}$$

Estes três conjuntos de pontos formam uma *partição de R*, pois:

$$\{a\} \neq \emptyset \quad (\text{pois } a \in \{a\})$$

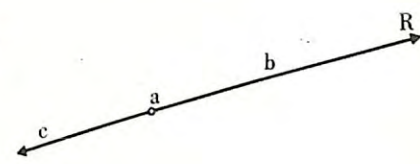
$$\overleftrightarrow{ab} \neq \emptyset \quad (\text{pois } b \in \overleftrightarrow{ab})$$

$$\overleftrightarrow{ac} \neq \emptyset \quad (\text{pois } c \in \overleftrightarrow{ac})$$

$$\{a\} \cap \overleftrightarrow{ab} = \emptyset$$

$$\{a\} \cap \overleftrightarrow{ac} = \emptyset$$

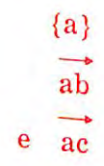
Nota: Não é possível escrever todos os elementos dos conjuntos, pois eles possuem infinitos elementos; por isso, colocam-se reticências para indicar exatamente esse fato.



$$\overrightarrow{ab} \cap \overrightarrow{ac} = \emptyset$$

$$e \overrightarrow{ac} \cup \{a\} \cup \overrightarrow{ab} = \mathbb{R}$$

Se ao invés das semi-retas abertas  $\overrightarrow{ab}$  e  $\overrightarrow{ac}$ , tomássemos as semi-retas fechadas  $\overrightarrow{ab}$  e  $\overrightarrow{ac}$ , os conjuntos



não formariam uma partição de  $\mathbb{R}$ . Explique porque.

49. Os habitantes do hemisfério norte da Terra e os habitantes do hemisfério sul da Terra formam uma *partição* dos habitantes da Terra? Por que?
50. Seja o ângulo  $\angle abc$  contido no plano  $P$ , e sejam:  
 C o conjunto dos pontos de  $P$  que pertencem a  $\angle abc$ .  
 E o conjunto dos pontos de  $P$  que pertencem ao exterior de  $\angle abc$ .  
 I o conjunto dos pontos de  $P$  que pertencem ao interior de  $\angle abc$ .
- C, E, I formam uma partição de  $P$ ?
  - Por que?

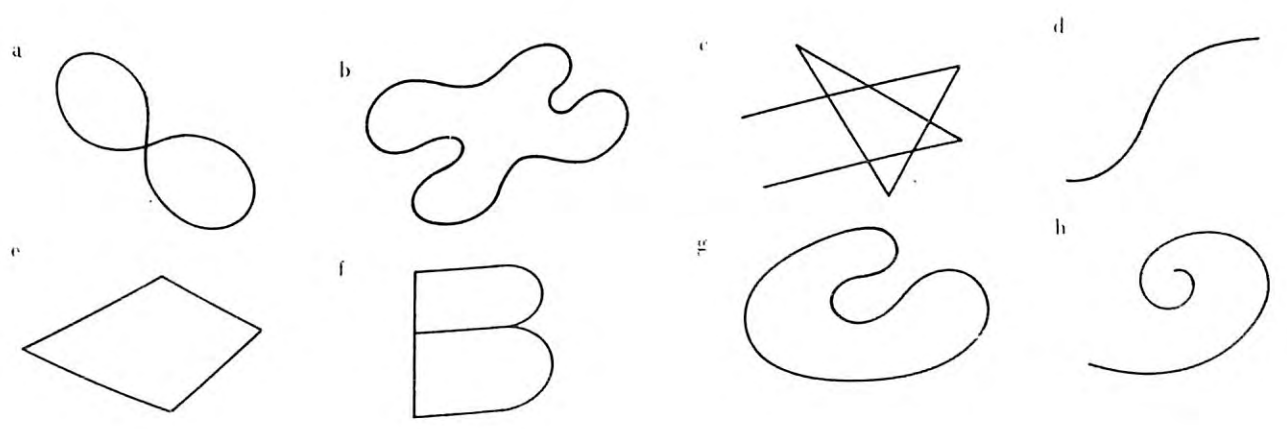
51. Uma reta  $R$  contida em um plano  $P$  determina uma partição de  $P$ ?

**Exercícios — Capítulo I**

52. Assinale com V as sentenças verdadeiras e com F as falsas:
- A marca feita pela ponta de um lápis é um ponto.
  - O conjunto  $\{3, 2, 1, 0\}$  é igual ao conjunto  $\{2, 0, 1, 3\}$ .
  - O conjunto das retas que passam por um ponto é infinito.
  - Os símbolos  $\in$  e  $\subset$  podem ser usados um em lugar do outro.

- O conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto.
- Um plano não é subconjunto do espaço.
- Um cubo é uma figura geométrica espacial.
- A curva que liga dois pontos é única.
- Os segmentos de reta  $\overrightarrow{ab}$  e  $\overrightarrow{ba}$  são iguais.
- As semi-retas  $\overrightarrow{ab}$  e  $\overrightarrow{ba}$  são iguais.
- Duas retas perpendiculares entre si formam ângulos retos.
- A reunião de um triângulo e seu interior é uma região triangular.
- A intersecção de um triângulo e sua região triangular é igual a esta região triangular.
- Duas retas são paralelas quando se interceptam em um único ponto.

53. Represente, nomeando os elementos entre chaves, os seguintes conjuntos:
- dos números pares menores que 30;
  - dos números ímpares menores que 30;
  - dos números inteiros menores do que 20 e maiores do que 12.
54. Dê 3 exemplos de conjuntos, representando seus elementos entre chaves.
55. Quais das seguintes figuras são curvas fechadas?



56. No exercício anterior, quais são as curvas fechadas simples?

57. Se o ponto  $a$  pertence à reta  $R$ , e a reta  $R$  está contida no plano  $A$ , complete as sentenças colocando os símbolos convenientes:

- a.  $a \dots R$
- b.  $R \dots A$
- c.  $a \dots A$

58. Dê três exemplos de conjuntos dos quais você faz parte, e escreva simbolicamente a relação existente entre você e estes conjuntos.

59. Dados:  $A = \{a, e, i, o, u\}$ ,  $B = \{a, b, c, d, e\}$  e  $C$  o conjunto de todas as letras do alfabeto, complete:

- a.  $A \cap B = \dots$
- b.  $A \cup C = \dots$
- c.  $A \cup B = \dots$
- d.  $B \cap C = \dots$
- e.  $B \cup C = \dots$
- f.  $A \cap C = \dots$

60. Seja  $S$  o conjunto das seguintes cidades: São Paulo, Nova Iorque, Montreal, Chicago, México, Buenos Aires e Washington. Represente, nomeando os elementos entre chaves, os seguintes subconjuntos de  $S$ :

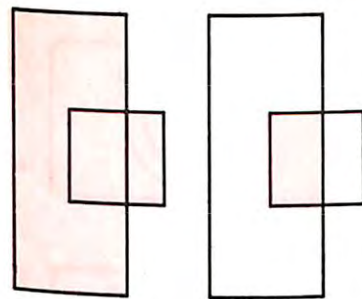
- a. das cidades com mais de 1 000 000 de habitantes atualmente;
- b. das cidades com menos de 100 000 habitantes atualmente;
- c. das cidades que têm como língua oficial o Inglês;
- d. das cidades que têm como língua oficial o Português;
- e. das cidades que têm como língua oficial o Latim;
- f. das cidades que têm como língua oficial o Espanhol.

61. Sendo  $A$  um conjunto qualquer, complete:

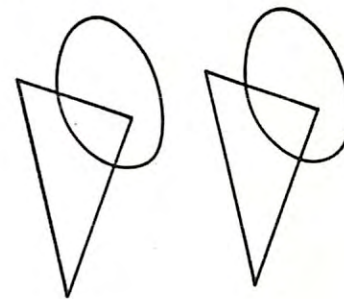
- a.  $A \cup A = \dots$
- b.  $A \cap A = \dots$
- c.  $A \cup \emptyset = \dots$
- d.  $A \cap \emptyset = \dots$

62. Colorir em vermelho a reunião e a intersecção dos conjuntos representados na página seguinte:

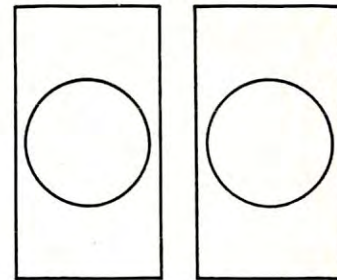
a Modêlo



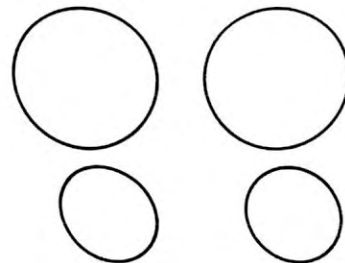
b



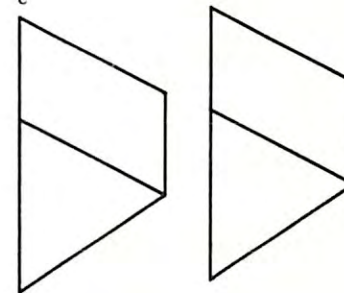
c



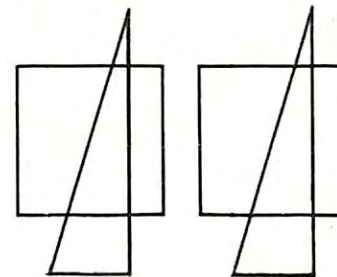
d



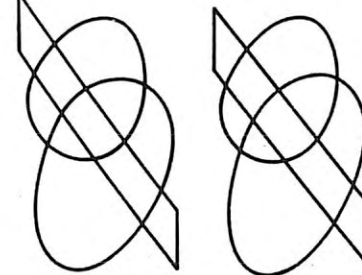
e



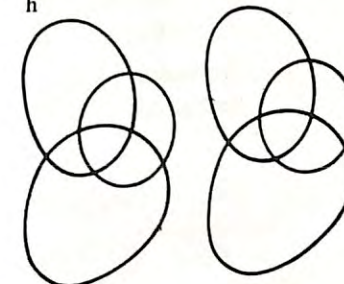
f



g



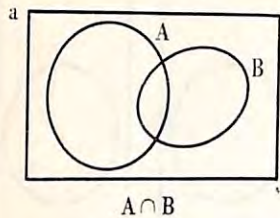
h



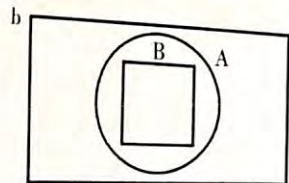
63. Assinale com V as sentenças verdadeiras e com F as falsas:

- a.  $5 \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- b.  $\{0, 1\} \neq \{1, 0\}$
- c.  $\{5, 6, 7\} \subset \{5, 6, 7, 8, 9\}$
- d.  $3 \in \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$
- e.  $\{a\} \in \{a, b, c\}$
- f.  $0 \subset \{0, 1, 2\}$
- g.  $\{0\} = \emptyset$
- h.  $\{0\} \subset \{0, 1, 2\}$
- i.  $0 \in \emptyset$
- j.  $\{1\} = 1$

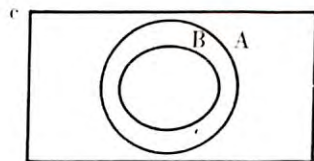
64. Colorir, em cada figura, o conjunto indicado abaixo de cada uma delas:



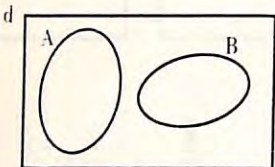
$A \cap B$



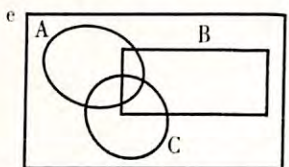
$A \cup B$



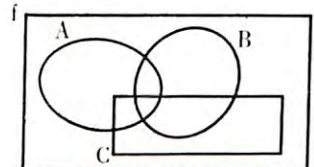
$A \cap B$



$A \cup B$



$A \cap C$



$B \cup C$

65. Dado o polígono abcde:

- dê o conjunto dos lados desse polígono.
- dê o conjunto dos vértices desse polígono.
- dê o conjunto dos ângulos desse polígono.
- complete:  $ab \cap bc = \dots$
- os segmentos de reta, que ligam dois vértices de um polígono e que não são lados, chamam-se *diagonais*.

Dê o conjunto das diagonais do polígono deste exercício.

66. Dados: a curva C e os pontos a, b, c, d, e, f, g:

I. Escreva as relações entre a curva e esses pontos.

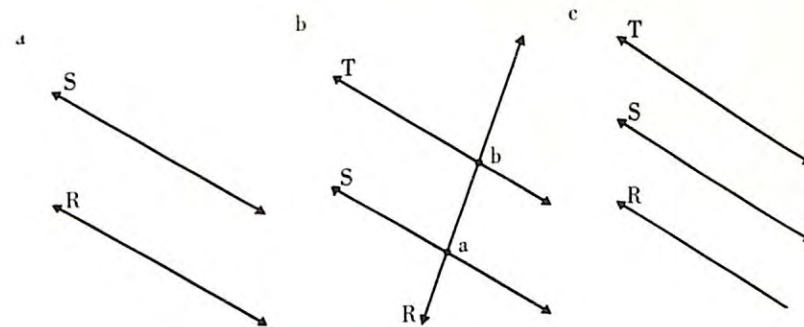
Modêlo:  $a \in C$  ou  $\{a\} \cap C = \{a\}$ .

II. Trace 5 segmentos determinados por estes pontos e dê os conjuntos-intersecção entre a curva C e estes segmentos.

Modêlo:  $\overline{ad} \cap C = \{a\}$ .

67. Complete as sentenças referentes aos desenhos:

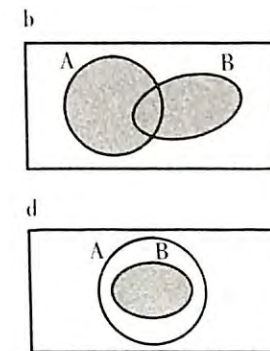
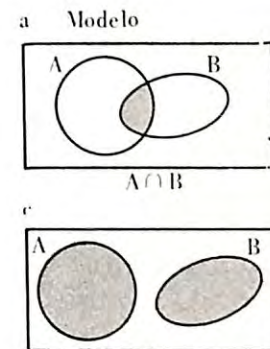
- R é ..... a S, logo  $R \cap S = \dots$
- R e S são ....., logo  $R \cap S = \dots$
- R e T são ....., logo  $R \cap T = \dots$
- S e T são ....., logo  $S \cap T = \dots$
- Se R é paralela a S e S é paralela a T, então R ..... T.



68. Dadas as curvas C e C', escreva com os símbolos que você já conhece:

- C e C' têm um ponto comum que é a.
- C e C' não têm pontos comuns.
- C e C' têm dois pontos comuns que são a e b.

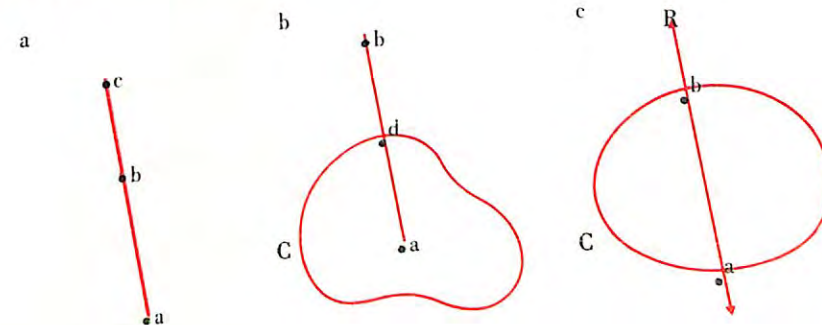
69. Represente, simbolicamente, a região hachurada em cada figura:

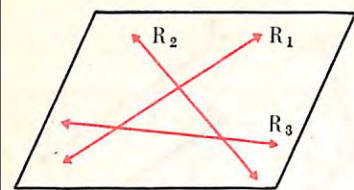


70. Você sabe que para escrever Roberto usamos o seguinte conjunto de letras: {r, o, b, e, t}. Dê o conjunto de letras com as quais você escreve o seu nome.

71. Complete as sentenças referentes aos desenhos:

- $\overline{ab} \cup \overline{bc} = \dots$
- $\overline{ab} \cap C = \dots$
- $R \cap C = \dots$





72. Colorir todos os subconjuntos do plano A determinados pelas retas  $R_1$ ,  $R_2$  e  $R_3$  que sejam disjuntos.

73. Unindo-se  $a$  e  $b$  por uma curva qualquer, esta cortará  $C$  em um número de pontos par ou ímpar?

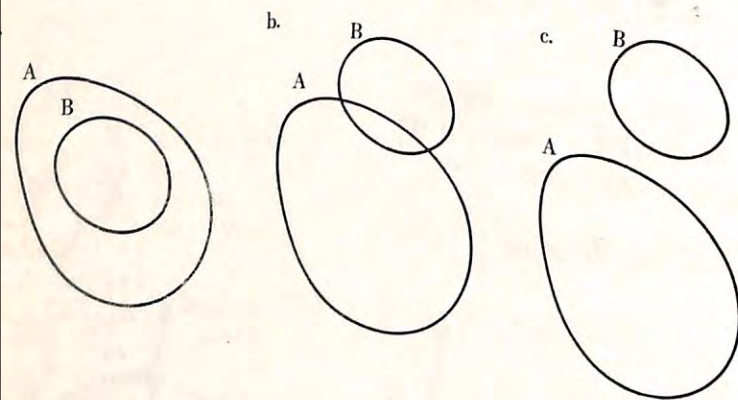
Trace três curvas diferentes ligando  $a$  a  $b$  e verifique se sua resposta está correta nêstes três casos.

74. Complete as seguintes sentenças:

- |   |   |
|---|---|
| a. $\overleftrightarrow{ab} \cap \overleftrightarrow{ab} = \dots$ | e. $\overleftrightarrow{ab} \cap \overleftrightarrow{ab} = \dots$ |
| b. $\overleftrightarrow{ab} \cup \overleftrightarrow{ab} = \dots$ | f. $\overleftrightarrow{ab} \cup \overleftrightarrow{ab} = \dots$ |
| c. $\overleftrightarrow{ab} \cup \overleftrightarrow{ab} = \dots$ | g. $\overleftrightarrow{ab} \cap \overleftrightarrow{ba} = \dots$ |
| d. $\overleftrightarrow{ab} \cup \overleftrightarrow{ab} = \dots$ | h. $\overleftrightarrow{ab} \cup \overleftrightarrow{ab} = \dots$ |

Nota:  $\overleftrightarrow{ab}$  representa a reta que passa pelos pontos  $a$  e  $b$ .

75. Seja  $A$  o conjunto dos brasileiros que trabalharam pela nossa Independência e seja  $B$  o conjunto cujos elementos são: José Bonifácio, Tiradentes, Santos Dumont e Oswaldo Cruz. Qual dos seguintes desenhos representa a relação entre êstes dois conjuntos?



76. Dados os conjuntos:  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  e  $B = \{3, 4, 5, 6\}$ , determine:  $A \cup B$  e  $A \cap B$ . Faça desenhos representando  $A$ ,  $B$ ,  $A \cup B$  e  $A \cap B$ .

77. Se  $A \subset B$  e  $B \subset C$ , o que você pôde afirmar sôbre  $A$  e  $C$ ?

Faça um desenho representando todos êstes fatos.

78. Assinale com V as sentenças verdadeiras e com F as falsas:

- o conjunto dos meses que têm 30 dias é unitário;
- o conjunto dos alunos de sua classe não é um subconjunto do conjunto dos alunos do seu colégio;
- o conjunto dos alunos de sua classe, cujos nomes têm como inicial a letra  $z$ , é o conjunto vazio;
- o conjunto dos estados brasileiros banhados pelo Oceano Atlântico não é unitário.

79. Se a reta  $R$  é paralela à reta  $S$  e se a reta  $S$  é perpendicular à reta  $T$ , então  $R$  e  $T$  são .... Faça um desenho para facilitar sua resposta.

80. Escreva as seguintes sentenças, com os símbolos que você já conhece:

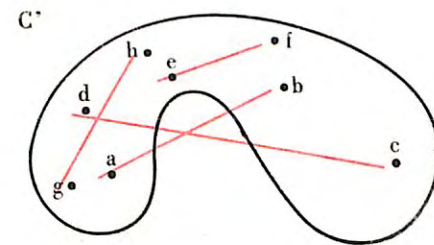
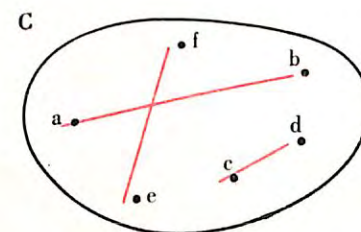
- Paulo é sócio do Clube Recreativo;
- O ponto  $c$  pertence à curva  $C$ ;
- A reta  $R$  não tem ponto algum na curva  $C$ .

81. Quatro pontos  $a, b, c, d$  pertencem a uma mesma reta e se sucedem nesta ordem. Faça um desenho e pinte de azul o conjunto  $ad \cap bc$  e de vermelho o conjunto  $ab \cup cd$ .

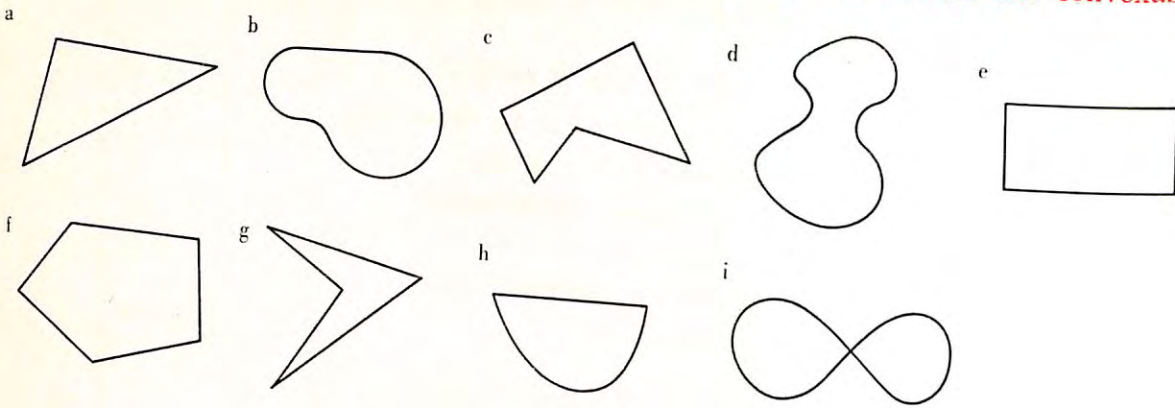
82. Seja  $A$  um conjunto de automóveis e representemos por  $p$  o pneu de um deles. Lembrando que os elementos de  $A$  são *automóveis*, você pode escrever:  $p \in A$ ?

83. Unindo-se dois pontos *qualquer* do interior de  $C$  por um segmento de reta, dizemos que  $C$  é uma *curva convexa* se êste segmento estiver contido no interior de  $C$ . A curva  $C'$  não é convexa.

Explique a razão desta afirmação.



84. Verificar quais das seguintes curvas são convexas:



85. Seja  $S$  o conjunto dos polígonos e consideremos alguns dos seus subconjuntos:

- A é o conjunto dos polígonos convexos
- B é o conjunto dos quadriláteros
- C é o conjunto dos quadrados
- D é o conjunto dos triângulos.

Complete:

- a.  $A \cup S = \dots$
- b.  $A \cap S = \dots$
- c.  $A \cup B = \dots$
- d.  $C \cap S = \dots$
- e.  $B \cup C = \dots$
- f.  $C \cap D = \dots$
- g.  $C \cap A = \dots$
- h.  $A \cup C = \dots$



# Capítulo

# 2

## Relações e aplicações



### 2.1. Par Ordenado

Considere o conjunto formado por dois pontos  $a$  e  $b$ . Este conjunto, como você já viu, pode ser representado por  $\{a,b\}$  ou  $\{b,a\}$  isto é,  $\{a,b\} = \{b,a\}$ .

Isto significa que, ao nomear os elementos de um conjunto, não importa a ordem em que o fazemos.

Suponha que a sua sala de aula apresente a disposição da figura ao lado, com as colunas e filas numeradas como na figura, e que você ocupa a carteira assinalada. Se lhe perguntassem qual é o seu lugar na sala, notando que existem 4 colunas e 6 filas de carteiras, provavelmente a sua resposta seria

“estou sentado na segunda coluna e na terceira fila”.

Se você respondesse apenas:

“estou sentado na segunda coluna”,

a sua resposta não seria completa, isto é, ela não daria com *precisão* a posição da carteira ocupada por você na sala de aula, pois existem 6 carteiras na segunda coluna.

Seu lugar estará precisamente determinado, quando for mencionado um *par* de elementos:

o número da coluna e o número da fila.

Talvez você concorde que a sua posição possa ser representada simbolicamente pelo *par*

$(2,3)$

onde,

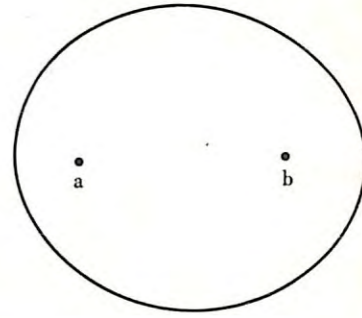
o primeiro número representa a *coluna*

e

o segundo número representa a *fila*.

Se seu amigo João estiver sentado na terceira coluna e na segunda fila, a posição dele pode ser dada pelo par

$(3,2)$ .



|   |                          |                                     |                          |                          |
|---|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 6 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 5 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 4 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 3 | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 2 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 1 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|   | 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        |

Evidentemente, você e João estão sentados em *carteiras diferentes*, por isso

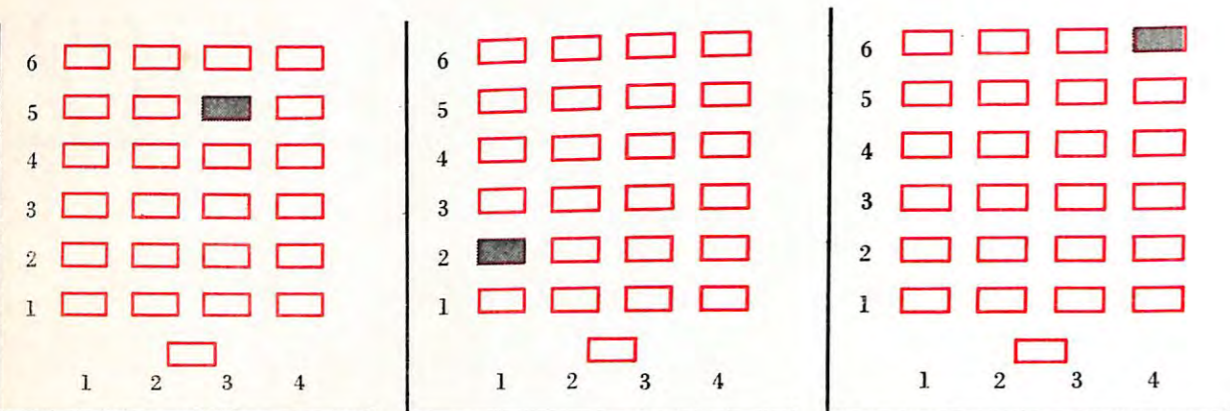
$$(2,3) \neq (3,2),$$

onde o sinal  $\neq$  quer dizer “*não é a mesma coisa que*” ou “*é diferente de*” ou “*não é igual a*”.

Como  $(2,3) \neq (3,2)$ , a *ordem* em que estes números são escritos é agora importante, por isso estes pares chamam-se *pares ordenados*.

### Exercícios:

- Representando sempre a coluna pelo primeiro número e a fila pelo segundo número, quais os pares ordenados que representam as posições assinaladas em cada um dos desenhos?



- Sendo

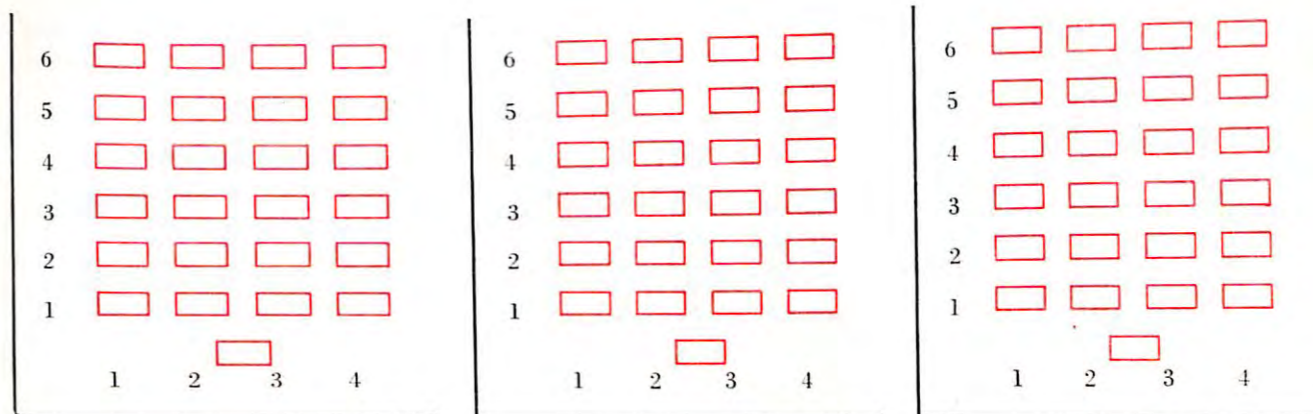
C o conjunto dos alunos que sentam na mesma coluna que você (incluindo você é claro!)

F o conjunto dos alunos que sentam na mesma fila que você (incluindo você é claro!)

- Dê os elementos de C.
- Dê os elementos de F.
- O que é  $C \cap F$ ?

- Os desenhos abaixo representam outra sala de aula; pinte os lugares para os quais

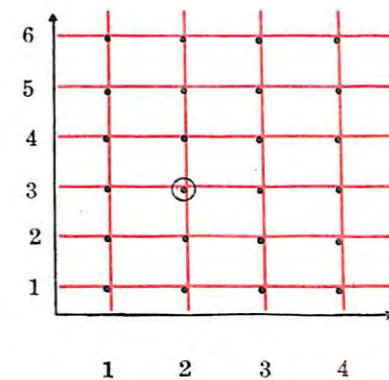
- o número da coluna é igual ao número da fila;
- a soma do número da coluna e o número da fila é maior que 4;
- o produto do número da coluna pelo número da fila é igual a 4.



- Na sua classe o que significa a posição (2,2)? e a (4,4)? A ordem aqui é importante? Explique.

- Se o primeiro número representasse fila e o segundo número representasse coluna, a sua posição ainda seria (2,3)? Por que?

- As posições das carteiras na sua sala de aula também poderiam ser representadas pelo desenho ao lado, onde o ponto assinalado representa a sua carteira. Faça um desenho igual a este e assinale nele quais os pontos que representam as posições (1,1), (2,2), (3,3) e (4,4).



Pegue uma moeda e examine as faces “cara” e “coroa”. Coloque o polegar debaixo da moeda e o impulsione de maneira que a moeda gire no ar e caia sobre uma superfície plana. Representando por *c* a face “cara” e por *r* a face “coroa”, o conjunto dos resultados possíveis do lançamento de uma moeda é

$$A = \{c,r\}.$$

Pegue a moeda e lance-a novamente. Ou é a face cara que sairá, ou é a face coroa. Outra vez o conjunto dos resultados possíveis é

$$A = \{c,r\}.$$

Porém, os resultados que podem ocorrer nos *dois* lançamentos da moeda são os seguintes:

*cara* no primeiro lançamento e *cara* no segundo lançamento,  
*cara* no primeiro lançamento e *coroa* no segundo lançamento,  
*coroa* no primeiro lançamento e *cara* no segundo lançamento,  
*coroa* no primeiro lançamento e *coroa* no segundo lançamento.

Tais resultados podem ser representados pelos pares

$$(c,c), (c,r), (r,c) \text{ e } (r,r),$$

que são também *pares ordenados*, pois

$(c,r)$  quer dizer: "cara no primeiro lançamento e coroa no segundo";

$(r,c)$  quer dizer: "coroa no primeiro lançamento e cara no segundo".

Logo

$$(c,r) \neq (r,c).$$

Podemos, então, escrever o conjunto de todos os resultados possíveis do lançamento de uma moeda duas vezes como sendo

$$B = \{ (c,c), (c,r), (r,c), (r,r) \}.$$

Repare que os elementos deste conjunto são *pares ordenados*.

$$(c,c) \in B$$

$$(c,r) \in B$$

$$(r,c) \in B$$

$$(r,r) \in B.$$

Os elementos do conjunto B podem ser obtidos através de uma tabela abaixo ilustrada:

|               |   | 2º lançamento |       |
|---------------|---|---------------|-------|
|               |   | c             | r     |
| 1º lançamento | c | (c,c)         | (c,r) |
|               | r | (r,c)         | (r,r) |

### Exercícios:

7. Justifique porque as seguintes afirmações são verdadeiras

- $\{2,3\} = \{3,2\}$
- $\{2,3\} \neq \{3,2\}$
- $\{2,3\} \in \{(2,3), (3,2)\}$
- $2 \notin \{2,3\}$
- $2 \notin \{(2,3), (3,2)\}$
- $\{3,3\} = \{3,3\}$

8. Lembrando que

$\{(2,3)\}$  é um conjunto *unitário*, pois possui um só elemento que é o par ordenado  $(2,3)$ ,

e que

$\{2,3\}$  é um conjunto *binário*, isto é, possui dois elementos que são o número 2 e o número 3, pergunta-se, quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

- $\{(2,3)\} = \{2,3\}$
- $\{(3,1), (2,0), (1,4)\}$  é um conjunto que tem 6 elementos
- $\{(1,1)\}$  é um conjunto unitário
- $\{1,1\} = \{1\}$

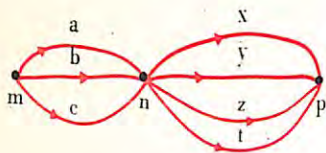
9. Existe um único caso em que a ordem no par não importa, isto é, o caso em que podemos escrever

$$(a,b) = (b,a).$$

Qual é este caso?

## 2.2. Produto Cartesiano

Suponha que existam 3 caminhos para se ir da cidade M à cidade N, e 4 caminhos para se ir da cidade N à cidade P. Representemos as cidades e os caminhos por meio do seguinte desenho:



Seja

$A = \{a, b, c\}$ , o conjunto dos caminhos que unem M a N  
 $B = \{x, y, z, t\}$ , o conjunto dos caminhos que unem N a P.

Você pode querer saber quais e quantos são os possíveis caminhos que unem a cidade M à cidade P, passando pela cidade N. Se você tomar em M o caminho  $a$ , chegando em N poderá escolher *um* dos quatro caminhos  $x, y, z$ , ou  $t$ . A mesma situação se repete, caso a escolha inicial em M, ao invés de  $a$ , for  $b$  ou  $c$ . Tem-se, então, o seguinte conjunto de pares ordenados que representam os possíveis caminhos de M a P passando por N.

$\{(a,x), (a,y), (a,z), (a,t), (b,x), (b,y), (b,z), (b,t), (c,x), (c,y), (c,z), (c,t)\}$ .

Tome um elemento qualquer deste conjunto, por exemplo, o par

$(b,z)$ .

Observe que  $b \in A$  e  $z \in B$ .

Os elementos deste conjunto são, então, todos os pares ordenados tais que, a primeira componente pertence a  $A$  e a segunda componente pertence a  $B$ . A esse conjunto damos o nome de *Produto Cartesiano de A por B* e o representamos  $A \times B$ . Escrevemos o  $A$  em primeiro lugar para indicar que as primeiras componentes dos pares ordenados pertencem ao conjunto  $A$ . Temos, então, a igualdade:

$$A \times B = \{(a,x), (a,y), (a,z), (a,t), (b,x), (b,y), (b,z), (b,t), (c,x), (c,y), (c,z), (c,t)\}.$$

Observe que:

número de elementos de  $A$  é 3,

número de elementos de  $B$  é 4, e

número de elementos de  $A \times B$  é 12 que é igual a  $3 \times 4$ .

$A \times B$ , neste caso, é o conjunto de todos os caminhos possíveis que unem M a P passando por N.

### Exercícios:

- Seja  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  o conjunto das colunas e  $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  o conjunto das filas de carteiras de uma sala de aula.
  - dê o produto cartesiano de  $A$  por  $B$ .
  - quantos são os elementos de  $A \times B$ ?
  - neste caso, qual é o significado de  $A \times B$ ?
- Para se ir da cidade de Salvador à cidade do Rio de Janeiro pode-se ir por via marítima, via aérea ou via terrestre; para se ir da cidade de Rio de Janeiro à cidade de São Paulo pode-se ir por via aérea ou via terrestre. Quais, e quantas, são as maneiras de se ir de Salvador a São Paulo, passando pelo Rio de Janeiro?

Você já viu que são 12 os caminhos que unem a cidade M à cidade P passando por N e que esses caminhos são dados pelos elementos do conjunto  $A \times B$ .

Se você estivesse interessado em voltar de P a M, passando por N, evidentemente teria 12 caminhos de volta para escolher, que são dados pelos elementos do conjunto:

$$B \times A = \{(x,a), (y,b), (z,c), (t,a), (x,b), (y,c), (z,a), (t,b), (x,c), (y,a), (z,b), (t,c)\}.$$

Temos

$$(a,x) \in A \times B$$

$$(x,a) \in B \times A.$$

Como  $(a,x) \neq (x,a)$ , pois são *pares ordenados* então

$$A \times B \neq B \times A.$$

Resumindo tudo o que foi dito anteriormente, temos:

Dados dois conjuntos quaisquer  $A$  e  $B$ , chama-se *Produto Cartesiano de A por B* o conjunto de todos os pares ordenados, cujas primeiras componentes pertencem a  $A$  e cujas

segundas componentes pertencem a B. Indica-se por  $A \times B$  e lê-se "A cartesiano B".

Observe que, se no produto cartesiano  $A \times B$ , tivermos  $A = \emptyset$  ou  $B = \emptyset$ , não é possível construir os pares ordenados, pois

1. se  $A = \emptyset$  não existem pares com as primeiras componentes em A
2. se  $B = \emptyset$  não existem pares com as segundas componentes em B.

Convenciona-se então que se  $A = \emptyset$  ou  $B = \emptyset$ , A cartesiano B é o conjunto vazio, isto é,  $A \times B = \emptyset$ .

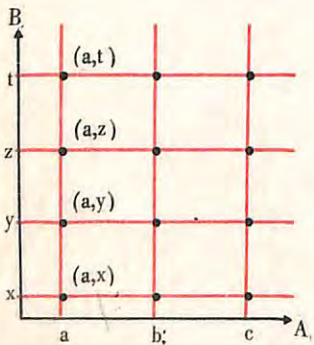
### Exercícios:

12. Seja  $A = \{1, 2, 3\}$ 
  - a. O que é  $A \times A$ ?
  - b. Quantos elementos tem  $A \times A$ ?
13. Quando  $A \times B = B \times A$ ?
14. Se A tem 4 elementos e B tem 5 elementos, quantos elementos tem
  - a.  $A \times B$ ?
  - b.  $B \times A$ ?
  - c.  $A \times A$ ?
  - d.  $B \times B$ ?

15. Sejam:

- m o número de elementos de um conjunto A,  
 n o número de elementos de um conjunto B.
- a. Qual é o número de elementos de  $A \times B$ ?
  - b. Qual é o número de elementos de  $B \times A$ ?
  - c. Qual é o número de elementos de  $A \times A$ ?
  - d. Qual é o número de elementos de  $B \times B$ ?

16. Uma maneira de representar o produto cartesiano  $A \times B$  é pelo desenho ao lado, onde na *reta horizontal* marcam-se elementos do conjunto A e na *reta vertical* os elementos do conjunto B. Os pontos assinalados representam os elementos do produto cartesiano  $A \times B$ . Tal representação chama-se *gráfico do produto cartesiano*  $A \times B$ .



17. Faça o gráfico do produto cartesiano  $A \times B$  onde

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \text{ e}$$

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

### 2.3. Relações

Você já sabe encontrar muito bem o produto cartesiano de dois conjuntos. Dados então

$$A = \{\text{Nova Iorque, São Paulo, Moscou, Brasília, Paris}\}$$

e

$$B = \{\text{Brasil, Estados Unidos, Rússia}\},$$

Vamos calcular  $A \times B$

A fim de simplificar a notação, vamos representar

Nova Iorque por  $c_1$ ,

São Paulo por  $c_2$ ,

Moscou por  $c_3$ ,

Brasília por  $c_4$ ,

Paris por  $c_5$ ,

Brasil por  $p_1$ ,

E.E.U.U. por  $p_2$ ,

Rússia por  $p_3$ .

Assim,

$$A = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5\} \text{ e } B = \{p_1, p_2, p_3\}$$

e

$$A \times B = \{(c_1, p_1), (c_1, p_2), (c_1, p_3), (c_2, p_1), \dots, (c_5, p_3)\},$$

onde as reticências estão no lugar dos pares ordenados que estão faltando para completar o conjunto. (Quais são estes pares?)

Considere agora a seguinte sentença incompleta:

"a cidade ..... está localizada no .....",

onde as primeiras reticências devem ser preenchidas por elementos de A, e as segundas por elementos de B, de maneira a tornarem a sentença verdadeira.

Ela torna-se verdadeira para os seguintes pares ordenados:

(Nova Iorque, Estados Unidos) ou  $(c_1, p_2)$   
 (São Paulo, Brasil) ou  $(c_2, p_1)$   
 (Brasília, Brasil) ou  $(c_4, p_1)$   
 (Moscou, Rússia) ou  $(c_3, p_3)$

pois, é verdade que

Nova Iorque está localizada nos Estados Unidos,  
 São Paulo está localizada no Brasil, etc.

Note que a sentença "a cidade  $c$  está localizada no país  $p$ , onde  $c$  pode ser um elemento de  $A$  e  $p$  pode ser um elemento de  $B$ ," determina uma *relação* entre elementos de  $A$  e elementos de  $B$ , que por sua vez determina o conjunto

$$R = \{(c_1, p_2), (c_2, p_1), (c_4, p_1), (c_3, p_3)\},$$

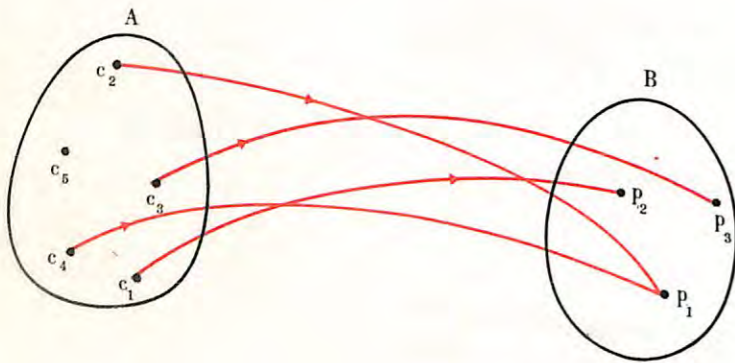
que é um subconjunto de  $A \times B$ , pois

$$R \subset A \times B.$$

Chamamos de *relação* entre elementos de  $A$  e elementos de  $B$ , ou *relação de  $A$  em  $B$*  tanto a sentença "a cidade  $c$  está localizada no país  $p$ " como o conjunto

$$R = \{(c_1, p_2), (c_2, p_1), (c_3, p_3), (c_4, p_1)\}.$$

Um desenho muito conveniente que representa esta relação é o seguinte:

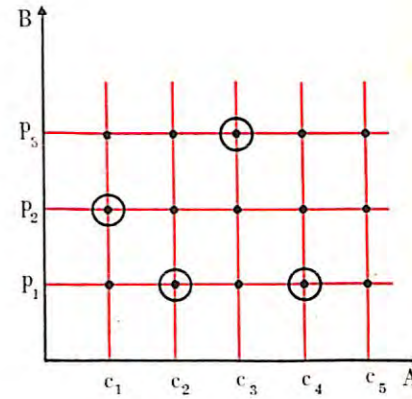


chamado *diagrama* da relação, onde, cada flecha une as componentes de um mesmo par ordenado que pertence a  $R$ .

$$\begin{aligned} (c_1, p_2) &\in R \\ (c_2, p_1) &\in R \\ (c_3, p_3) &\in R \\ (c_4, p_1) &\in R \end{aligned}$$

Voltando ao que já foi visto, uma sentença incompleta determina uma relação  $R$  entre elementos de  $A$  e elementos de  $B$ , que é um subconjunto de  $A \times B$ .

Ao lado, você encontra o gráfico de  $A \times B$  onde estão destacados os elementos de  $R$ .



**Exercícios:**

18. Usando os mesmos conjuntos  $A$  e  $B$  dados agora, considere a sentença incompleta  
 ..... é capital de .....

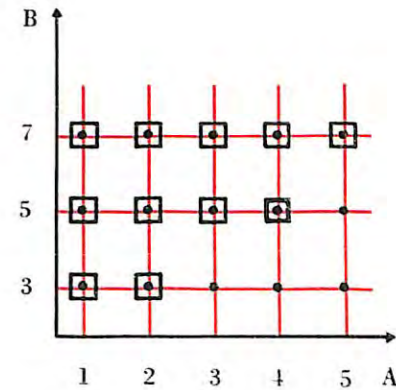
- qual é o conjunto  $R$  neste caso?
- faça um *diagrama* desta relação.
- faça o *gráfico* de  $A \times B$  destacando nele os elementos de  $R$ .

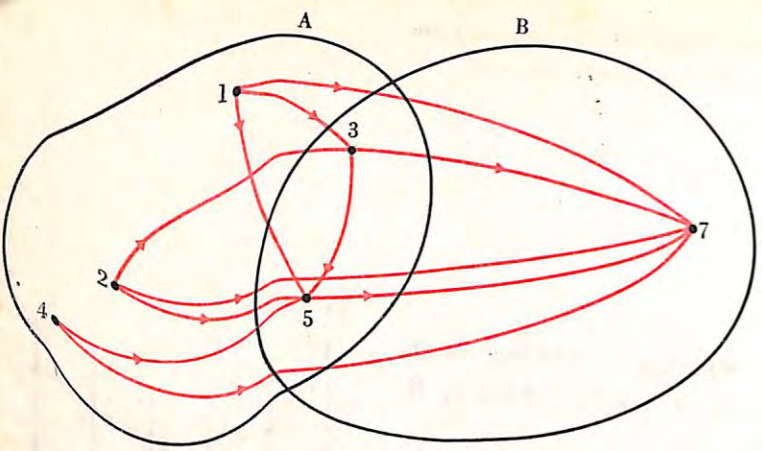
19. Seja  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $B = \{3, 5, 7\}$  e a sentença incompleta

..... é menor que .....

onde as primeiras reticências devem ser preenchidas por elementos de  $A$  e as segundas reticências por elementos de  $B$  de maneira a tornar a sentença verdadeira.

Neste caso,  $R = \{(1,3), (1,5), (1,7), (2,3), (2,5), (2,7), (3,5), (3,7), (4,5), (4,7), (5,7)\}.$

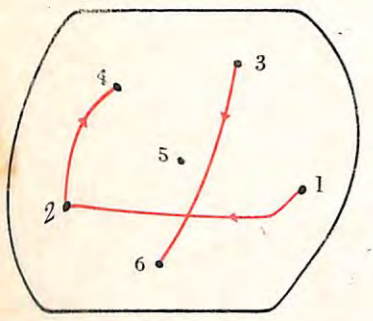




20. Seja  $A = \{5, 6, 7\}$ ,  $B = \{2, 4, 6\}$

e a sentença incompleta  
..... é maior que .....

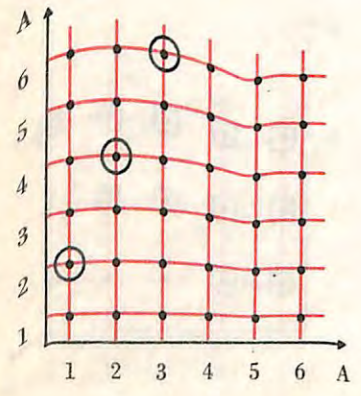
- a. qual é o conjunto R?
- b. faça um diagrama de R.
- c. faça um gráfico de  $A \times B$  destacando nele os elementos de R.



Se  $A = B$ , então  $R \subset A \times A$ , e dizemos que R é uma relação em A.

Por exemplo,

seja  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ;  
logo,  $A \times A = \{(1,1), (1,2), (1,3), \dots, (6,4), (6,5), (6,6)\}$



Considere a sentença incompleta  
..... é a metade de .....

Logo,  
 $R = \{(1,2), (2,4), (3,6)\}$   
é uma relação em A.

Se a relação fôsse

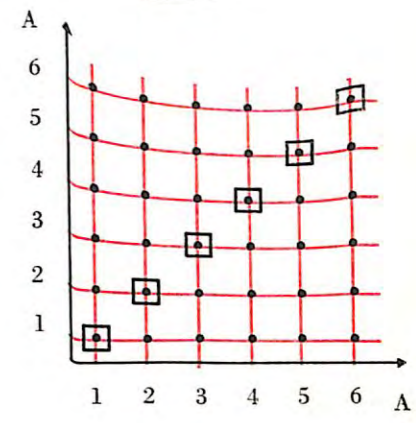
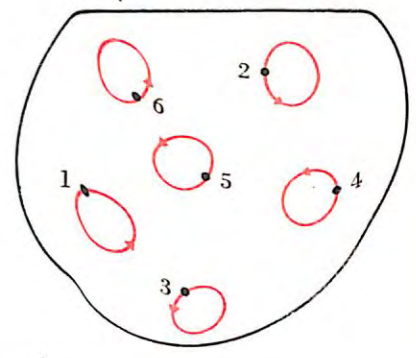
..... é igual a ....., no mesmo conjunto A,  
então,

$$R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\},$$

Neste caso, a relação R se diz uma *relação de igualdade*.

**Exercícios:**

- 21. Seja  $A = \{1, 4, 8, 16, 32\}$ 
  - a. efetue  $A \times A$ .
  - b. qual é a relação em A determinada pela sentença incompleta  
..... é o dobro de .....
  - c. faça um diagrama de R.
  - d. faça o gráfico de  $A \times A$ , destacando nele os elementos de R.
- 22. Seja  $A = \{0, 10, 20, 30, 40\}$ 
  - a. efetue  $A \times A$ .
  - b. qual é a relação em A determinada pela sentença incompleta  
..... termina pelo mesmo algarismo que .....
  - c. faça um diagrama desta relação.



**2.4. Algumas Propriedades das Relações**

Vamos estudar, agora, certas propriedades que as relações em um conjunto A podem apresentar.

**I. Reflexividade**

Seja A o conjunto dos alunos de sua classe, e R a relação em A determinada pela sentença

..... tem a mesma idade que .....

Sendo João um aluno de sua classe, é verdade que

João tem a mesma idade que João,

ou seja,

o par ordenado  $(\text{João}, \text{João}) \in R$ .

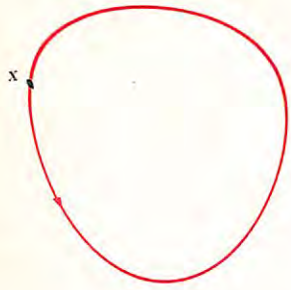
Note que isto acontece com *qualquer* aluno de sua classe.

Se uma relação  $R$  em um conjunto  $A$  for tal que,

qualquer que seja o elemento  $x \in A$  então o par  $(x,x) \in R$

diremos que  $R$  é uma *relação reflexiva*.

Se uma relação  $R$  em  $A$  for *reflexiva*, no seu diagrama *todos* os elementos do conjunto  $A$  devem apresentar o seguinte desenho:



pois isto significa que se  $x \in A$  então  $(x,x) \in R$ .

Seja, agora,

$A = \{\text{João, Antonio, Luiz, Carlos}\}$ ; sabendo-se que

João e Antonio têm 9 anos

Luiz tem 8 anos

e Carlos tem 7 anos

um diagrama da relação, ..... tem a mesma idade que ....., é

Veja que *todos* os elementos de  $A$  se apresentam no diagrama com  $x \rightarrow x$ , pois esta relação é reflexiva.

**Exercícios:**

23. Seja  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  e  $R$  a relação de igualdade em  $A$ .  $R$  é reflexiva? Por que? Faça um diagrama de  $R$ .
24. A relação ..... tem o mesmo pai que ....., onde  $A$  é o conjunto das pessoas de sua cidade, é reflexiva? Por que?
25. A relação "..... é pai de ....." onde  $A$  é o conjunto das pessoas de sua cidade, é reflexiva? Por que?
26. A relação "..... é paralela a ....." onde  $A$  é o conjunto das retas de um plano é reflexiva? Por que?
27. A relação "..... é perpendicular a ....." onde  $A$  é o conjunto das retas de um plano é reflexiva? Por que?

28. A relação "..... é mais alto que ....." onde  $A$  é o conjunto dos alunos de sua classe é reflexiva? Por que?

29. Seja  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  e  $R$  a relação "..... é divisor de ....." é reflexiva? Por que?

**II. Simetria**

Se João e Antonio alunos de sua classe e sendo verdade que João tem a mesma idade que Antonio

então também é verdade que

Antonio tem a mesma idade que João.

Isto é,

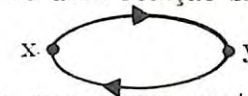
se o par ordenado  $(\text{João, Antonio}) \in R$ , então o par ordenado  $(\text{Antonio, João}) \in R$ .

Se uma relação  $R$  sobre um conjunto  $A$  for tal que

se  $(x,y) \in R$ , então também  $(y,x) \in R$ ,

qualquer que seja o par  $(x,y) \in R$ , diremos que  $R$  é uma *relação simétrica*.

No diagrama de uma relação simétrica, deve-se ter o seguinte desenho:



para *todos* os pares que pertencem à relação, isto é, para

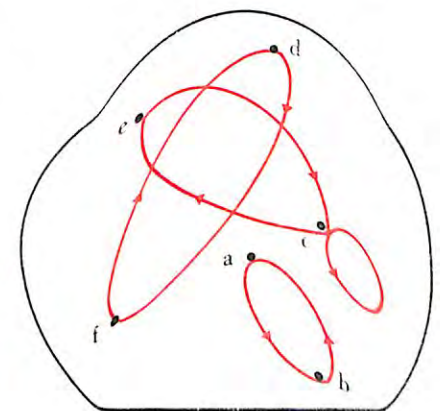
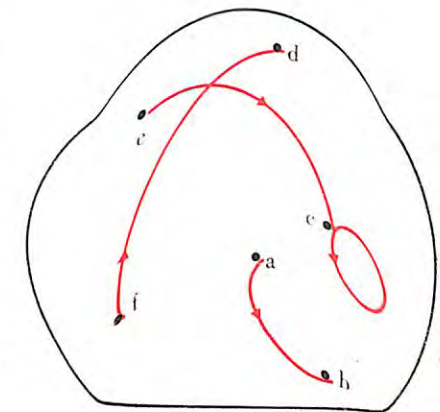
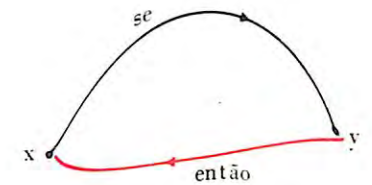
$(x,y) \in R$ .

Assim sendo, se tivéssemos desenhado somente uma parte do diagrama de uma relação, por exemplo

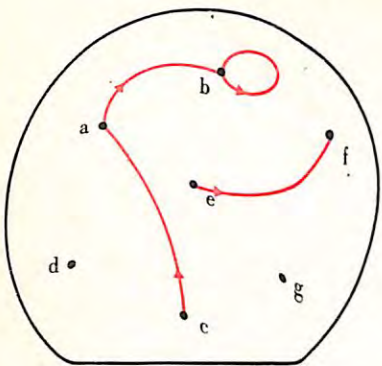
e soubéssemos que esta relação é *simétrica*, poderíamos completá-lo:

**Exercícios:**

30. Quais das relações dadas nos exercícios 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29 são simétricas? Por que?
31. Sendo  $A$  o conjunto dos alunos de sua classe, a relação  $R$  em  $A$  "..... é amigo de ....." é simétrica? Por que?







32. Complete o diagrama da relação R sabendo que R é reflexiva e R é simétrica.

### III. Transitividade

Sendo João, Antonio e José alunos de sua classe, e sendo verdade que

João tem a mesma idade que Antonio

e

Antonio tem a mesma idade que José,

então, também é verdade que

João tem a mesma idade que José.

Isto é,

se o par ordenado  $(\text{João}, \text{Antonio}) \in R$   
 e o par ordenado  $(\text{Antonio}, \text{José}) \in R$   
 então o par ordenado  $(\text{João}, \text{José}) \in R$ .

Se uma relação R sobre um conjunto A for tal que

se  $(x,y) \in R$  e  $(y,z) \in R$  tivermos sempre  $(x,z) \in R$ ,

quaisquer que sejam  $(x, y) \in R$  e  $(y, z) \in R$ , diremos que R é uma relação transitiva.

No diagrama de uma relação transitiva deve-se encontrar sempre o seguinte desenho:

quaisquer que sejam  $(x,y) \in R$  e  $(y,z) \in R$ ,

Se a relação em um conjunto A de pessoas fosse

“..... é amigo de .....”

teríamos uma relação que não é transitiva, pois sendo Marcelo amigo de André e André amigo de Cesar

pode não ser verdade que Marcelo seja amigo de Cesar!

### Exercícios:

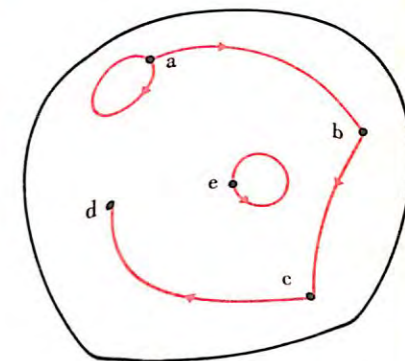
33. Quais as relações dos exercícios 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29 que são transitivas? Por que?

34. A relação “..... é inimigo de .....” no conjunto A das pessoas de sua cidade é transitiva? Por que?

35. Quais as relações dos exercícios 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29 que são reflexivas, simétricas e transitivas?

36. Complete o diagrama da relação ao lado sabendo que ela é transitiva

37. Complete o diagrama da relação ao lado sabendo que ela é reflexiva, simétrica e transitiva.

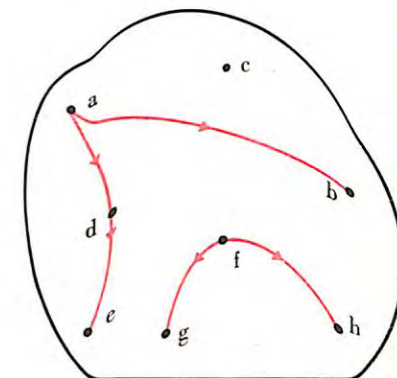


### 2.5. Relação de Equivalência

Nos exercícios anteriores, você viu que as relações

- ..... tem a mesma idade que .....
- ..... é igual a .....
- ..... tem o mesmo pai que .....
- ..... é paralela a .....

nos conjuntos especificados nos exercícios, são, reflexivas, simétricas e transitivas.



Dada uma relação R em um conjunto A, dizemos que R é uma relação de equivalência em A, se e somente se R for reflexiva, simétrica e transitiva.

As relações citadas acima são todas de equivalência.

Se R é uma relação de equivalência, dado  $(x,y) \in R$  dizemos que x e y são equivalentes pela relação R.

### Exercícios:

38. A relação

“..... está na mesma classe que .....” no conjunto dos alunos de seu ginásio, é uma relação de equivalência? Por que?

39. A relação

“... dividido por 2 deixa mesmo resto que ... dividido por 2” no conjunto  $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$  é uma relação de equivalência? Por que? (lembre-se que na divisão por 2, os restos possíveis são 0 e 1).

## 2.6. Classes de Equivalência

Seja E um conjunto de nomes, a saber

$E = \{\text{Álvaro, Cláudia, Décio, Bernardo, Afonso, Dario, Antonio, Dalva, Celso, Adriana}\}$

Considere a relação R em E, determinada pela sentença

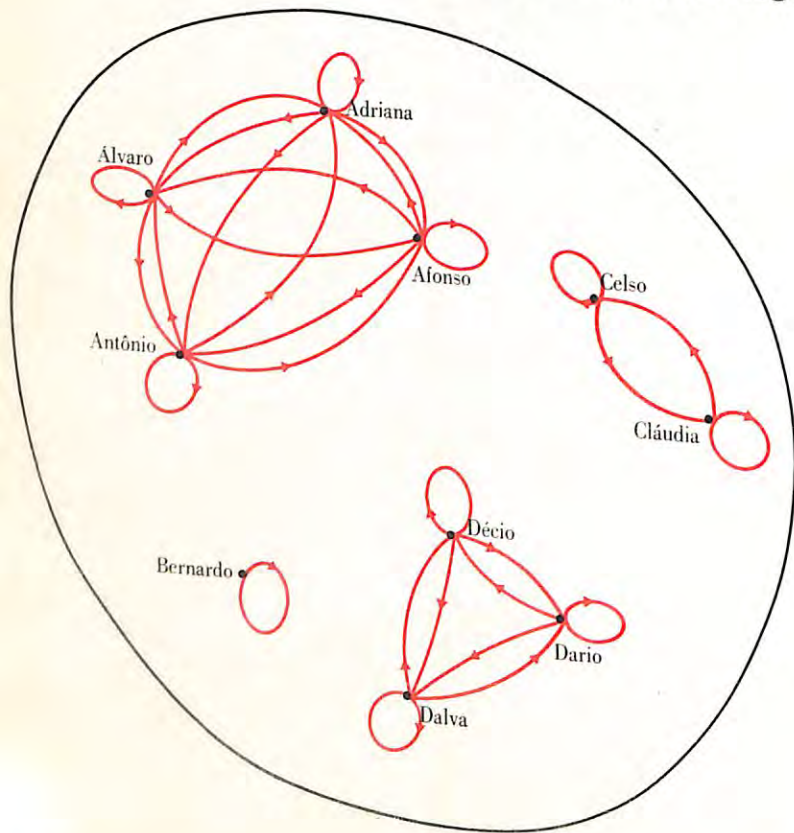
"..... tem a mesma inicial que ....."

$R = \{(\text{Álvaro, Álvaro}), (\text{Álvaro, Afonso}), \dots (\text{Dalva, Décio}), \dots (\text{Bernardo, Bernardo})\}$

Você certamente já descobriu que esta relação é reflexiva, simétrica e transitiva pois

- I. Dalva tem a mesma inicial que Dalva  
Celso tem a mesma inicial que Celso  
etc.
- II. Dalva tem a mesma inicial que Décio e  
Décio tem a mesma inicial que Dalva  
etc.
- III.  $(\text{Dalva, Décio}) \in R$   
 $(\text{Décio, Dario}) \in R$   
e  $(\text{Dalva, Dario}) \in R$ .

Um diagrama de R é o seguinte:



Álvaro e Afonso são equivalentes, pois  $(\text{Álvaro, Afonso}) \in R$ .  
Celso e Cláudia são equivalentes, etc.

Forme os subconjuntos de E constituídos pelo maior número de elementos equivalentes:

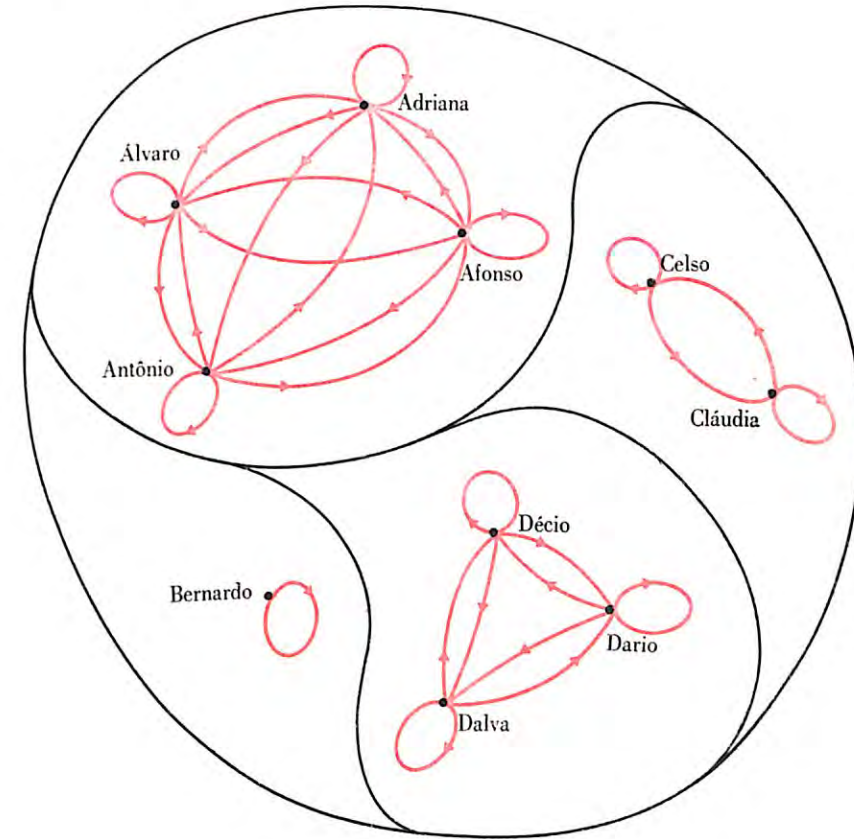
$A = \{\text{Álvaro, Antonio, Afonso, Adriana}\}$

$B = \{\text{Bernardo}\}$

$C = \{\text{Cláudia, Celso}\}$

$D = \{\text{Dario, Décio, Dalva}\}$

Se no diagrama assinalarmos estes subconjuntos, obtemos:



Note que, no diagrama, estão ligados por flechas somente os elementos de um mesmo subconjunto.

Estes subconjuntos de E chamam-se classes de equivalência determinadas pela relação R de equivalência.

Qualquer elemento de uma classe é chamado de um representante da classe. Por exemplo, Décio é um representante da classe D.

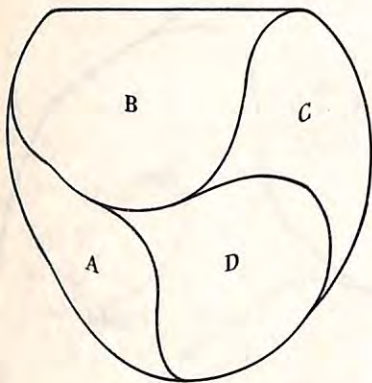
**Exercício:**

40. Dado  $E = \{\text{Álvaro, Cláudia, Décio, Bernardo, Afonso, Dario, Antonio, Dalva, Celso, Adriana}\}$

e  $R$  a relação em  $E$  determinada pela sentença "..... é do mesmo sexo que .....", pergunta-se:

- a.  $R$  é uma relação de equivalência? Por que?
- b. quais as classes de equivalência determinadas por  $R$ ?
- c. dê um representante de cada classe.
- d. faça um diagrama desta relação assinalando nêle as classes de equivalência.

**2.7. Partição de um Conjunto Determinada por uma Relação de Equivalência**



No exemplo anterior as classes de equivalência

$A = \{\text{Álvaro, Afonso, Adriana, Antonio}\}$

$B = \{\text{Bernardo}\}$

$C = \{\text{Cláudia, Celso}\}$

$D = \{\text{Dalva, Dario, Décio}\}$

são tais que:

- 1. nenhuma delas é vazia
- 2. duas a duas, elas não possuem elementos em comum
- 3. a reunião delas é igual a  $E$ .

Portanto, estas classes de equivalência constituem uma *partição de E*.

Dada uma relação de equivalência em um conjunto  $E$ , essa relação determina as classes de equivalência que por sua vez constituem uma *partição de E*.

**Exercícios:**

41. Seja  $E = \{3, 5, 6, 7, 9, 11, 13, 15\}$  e  $R$  a relação em  $E$  determinada pela sentença "..... dividido por 3 deixa o mesmo resto que ..... dividido por 3".

- a.  $R$  é uma relação de equivalência? Por que?
- b. faça um diagrama de  $R$ .

- c. quais as classes de equivalência determinadas por  $R$ ?
- d. assinale, no diagrama, as classes de equivalência.
- e. qual é a partição de  $E$  determinada pela relação  $R$ ?

42. Se no exercício anterior a relação fôsse "..... dividido por 2 deixa o mesmo resto que ..... dividido por 2".

- a. teríamos uma relação de equivalência?
- b. faça um diagrama.
- c. qual a partição de  $E$  neste caso?

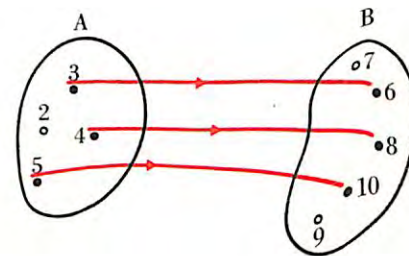
43. É falsa ou verdadeira a seguinte afirmação: "Em um conjunto  $E$ , podem estar definidas várias relações de equivalência, cada uma delas determinando uma partição de  $E$ ".

**2.8. Aplicação**

Os diagramas das relações de  $A$  em  $B$  podem ser dos mais diferentes tipos.

Vamos agora fazer uma convenção: nos diagramas representaremos por

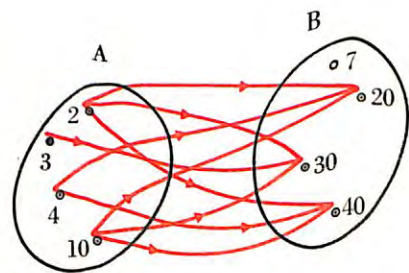
- um elemento de  $A$ , se dêle partir *uma só* flecha, ou
- um elemento de  $B$ , se a êle chegar *uma só* flecha,
- um elemento de  $A$ , se dêle não partir *nenhuma* flecha, ou
- um elemento de  $B$ , se a êle não chegar *nenhuma* flecha;
- um elemento de  $A$ , se dêle partir *mais de uma* flecha, ou
- um elemento de  $B$ , se a êle chegar *mais de uma* flecha.



Pôsto isto, vamos considerar várias relações e seus diagramas respectivos.

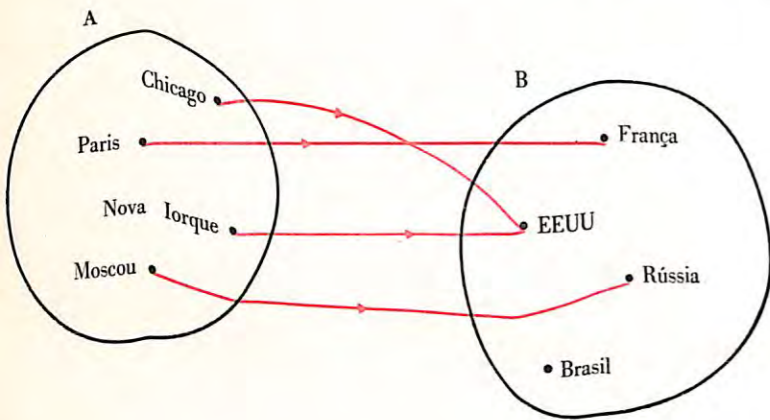
1.  $A = \{2, 3, 4, 5\}$ ,  $B = \{6, 7, 8, 9, 10\}$  e  $R$  dada pela sentença "..... é a metade de ....."

2.  $A = \{2, 3, 4, 10\}$ ,  $B = \{7, 20, 30, 40\}$  e  $R$  dada pela sentença "..... é divisor de ....."



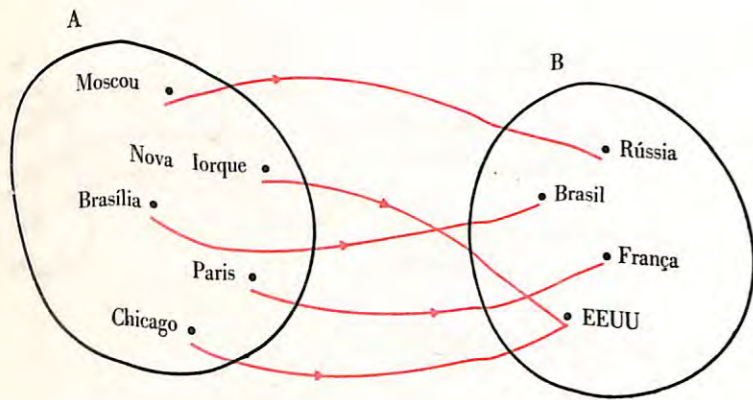
3.  $A = \{\text{Paris, Moscou, Nova Iorque, Chicago}\}$   
 $B = \{\text{França, Rússia, E.E.U.U., Brasil}\}$  e R dada pela sentença

"..... está localizada no país ....."



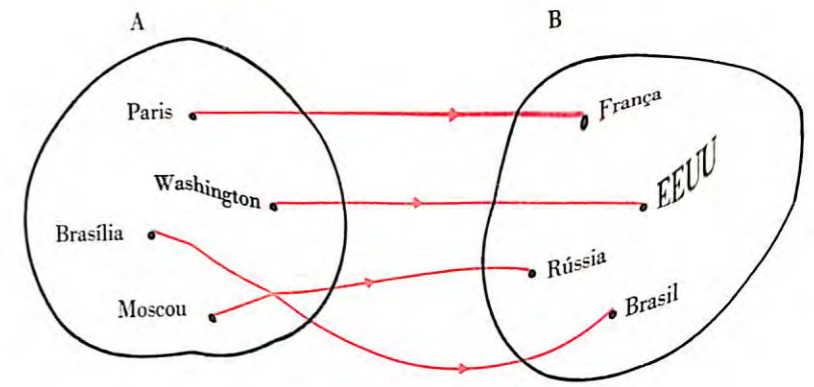
4.  $A = \{\text{Paris, Moscou, Nova Iorque, Chicago, Brasília}\}$   
 $B = \{\text{França, Rússia, E.E.U.U., Brasil}\}$  e R dada pela sentença

"..... está localizada no país ....."



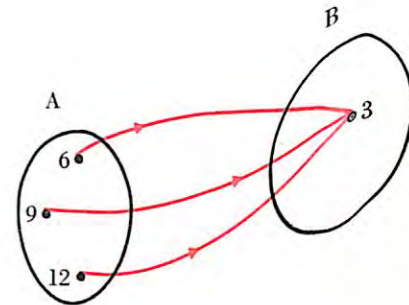
5.  $A = \{\text{Paris, Moscou, Washington, Brasília}\}$   
 $B = \{\text{França, Rússia, E.E.U.U., Brasil}\}$  e R dada pela sentença

"..... é capital de ....."



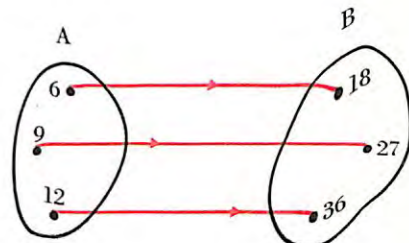
6.  $A = \{6, 9, 12\}$ ,  $B = \{3\}$  e R dada pela sentença

"..... é múltiplo de ....."



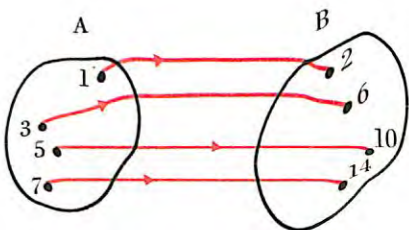
7.  $A = \{6, 9, 12\}$   
 $B = \{18, 27, 36\}$  e R dada pela sentença

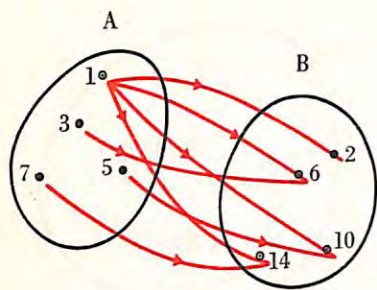
"..... é a terça parte de ....."



8.  $A = \{1, 3, 5, 7\}$   
 $B = \{2, 6, 10, 14\}$  e R dada pela sentença

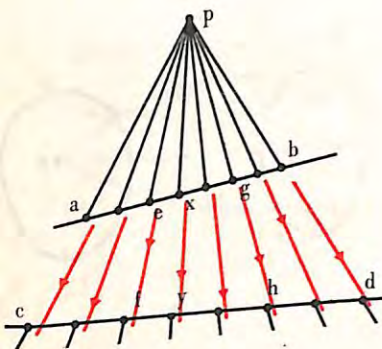
"..... é a metade de ....."





9. Os mesmos conjuntos do exemplo anterior, isto é  $A = \{1, 3, 5, 7\}$  e  $B = \{2, 6, 10, 14\}$  e  $R$  dada pela sentença "..... é divisor de ....."

10.  $A = \overline{ab}$  (os elementos de  $A$  são os pontos do segmento  $\overline{ab}$ )  
 $B = \overline{cd}$  (os elementos de  $B$  são os pontos do segmento  $\overline{cd}$ )  
e  $R$  definida da seguinte maneira:  
 $(x, y) \in R$  e somente se  $p, x, y$  estiverem alinhados.  
(E é claro que  $x \in A$  e  $y \in B$  isto é,  $x \in \overline{ab}$  e  $y \in \overline{cd}$ ).



Nas relações de  $A$  em  $B$  dos exemplos 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, o conjunto  $A$  só possui elementos do tipo  $\bullet$ . Quando isto acontece dizemos que a relação é uma *aplicação* (ou uma *função*).

As aplicações 5, 7, 8 e 10 são tais que todos os elementos de  $B$  são todos do tipo  $\bullet$ . Em cada um destes casos, dizemos que a aplicação é uma *bijeção* de  $A$  em  $B$  ou que  $R$  é uma *aplicação bijetora* de  $A$  em  $B$ . (Necessita ter em  $A$  e  $B$  somente elementos do tipo  $\bullet$ ).

**Exercícios:**

44. Seja  $A$  o conjunto dos vértices de um triângulo, isto é  $A = \{a, b, c\}$ ;  
 $B$  o conjunto dos lados desse triângulo,  
 $B = \{\overline{ab}, \overline{bc}, \overline{ac}\}$ , e  $R$  dada pela sentença "..... é o vértice oposto ao lado ....."
- faça um diagrama de  $R$ .
  - $R$  é uma aplicação?
  - $R$  é uma aplicação bijetora de  $A$  em  $B$ ?
45. Sejam  $A$  e  $B$  os mesmos conjuntos do exercício anterior e  $R$  a relação dada pela sentença "..... é um vértice que pertence ao lado ....."
- faça um diagrama de  $R$ .
  - $R$  é neste caso uma aplicação?

46. Qual é o subconjunto de  $A$  de maior número de elementos que se deve tomar para que a relação dada no exemplo 1 seja uma aplicação?
47. Qual é o subconjunto de  $A$  de maior número de elementos e o subconjunto de  $B$  de maior número de elementos que se deve tomar para que a relação dada no exemplo 1 seja uma aplicação bijetora?
48. Dado um grupo de pessoas, existe uma aplicação bijetora entre o conjunto de suas cabeças e o conjunto de seus narizes? Por que?

**2.9. Equipotência**

Considere a fotografia ao lado. Sem contar o número de soldados e o número de chapéus, você pode afirmar com toda a certeza que

"o número de soldados é igual ao número de chapéus"

Observe que existe uma aplicação bijetora do conjunto dos soldados no conjunto de chapéus (a cada soldado corresponde o seu chapéu).

Dizemos que um conjunto  $A$  tem o mesmo número de elementos que o conjunto  $B$ , ou que  $A$  é equipotente a  $B$  se e somente se existir uma aplicação bijetora de  $A$  em  $B$ .

Se  $A$  o conjunto de soldados,  
 $B$  o conjunto de chapéus,  
 $a$  o número de elementos de  $A$  e  
 $b$  o número de elementos de  $B$ , temos

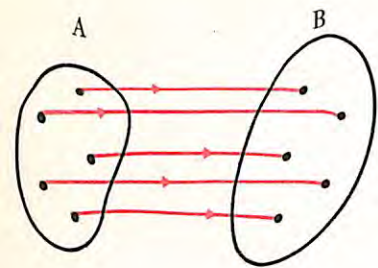
$$a = b$$

**Exercícios:**

49. O conjunto  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  é equipotente ao conjunto  $B = \{6, 7, 8, 9, 10\}$ ?
50. Se  $A$  é equipotente a  $B$  então existe uma aplicação bijetora de  $A$  em  $B$  cujo diagrama é



Neste caso é claro que temos também a aplicação bije-  
 tora de B em A que corresponde ao diagrama



isto é, B é equipotente a A. Portanto  
 se A é equipotente a B, têm-se que B é equipotente a A.  
 Por isso fala-se: *A e B são equipotentes.*

51. Dê exemplos de conjuntos equipotentes.
52. Se A é equipotente a B e B é equipotente a C, é verdade  
 que A é equipotente a C? Faça um diagrama para res-  
 ponder à pergunta.

### 2.10. O Conjunto dos Números Naturais e o Conjunto dos Números Inteiros

Considere a seguinte coleção de conjuntos:

$$C' = \{ \{ \# \}, \{ \odot \}, \{ \star \}, \{ \clubsuit \}, \{ \boxplus \}, \dots \}$$

Todos estes conjuntos são equipotentes, donde todos eles pos-  
 suem o *mesmo número* de elementos, que chamamos *um* e  
 representamos pelo símbolo 1.

Na coleção de conjuntos:

$C'' = \{ \{ \ominus, \Delta \}, \{ \clubsuit, \times \}, \{ \boxminus, \pi \}, \{ \boxtimes, \# \}, \dots \}$  todos os  
 conjuntos são equipotentes, logo todos possuem o *mesmo*  
*número* de elementos que chamamos *dois* e representamos  
 pe o símbolo 2.

Na coleção de conjuntos:

$C''' = \{ \{ \Delta, \#, \star \}, \{ \boxplus, \clubsuit, \ominus \}, \{ \boxtimes, \Delta, \pi \}, \dots \}$  todos os  
 conjuntos são equipotentes, logo todos possuem o *mesmo*  
*número* de elementos que chamamos *três* e representamos  
 por 3.

Se assim continuarmos, iremos obter os números *quatro*, *cinco*,  
*seis*, *sete*, etc., que você tanto conhece. Observe que este  
 processo não tem fim.

Ao conjunto de *todos* estes números damos o nome de *conjunto*  
*dos números naturais* que representamos por N.

$$N = \{ 1, 2, 3, 4, 5, \dots \}$$

sendo que as reticências indicam *todos* os elementos que estão  
 faltando.

Dizemos que o número de elementos do conjunto vazio é *zero*  
 e indicamos por 0.

Se acrescentarmos ao conjunto dos números naturais o número  
 zero, obtemos o que chamamos de conjunto dos *números*  
*inteiros* o qual representamos por I

$$I = \{ 0 \} \cup N$$

ou seja

$$I = \{ 0, 1, 2, 3, 4, \dots \}$$

### Exercícios:

53. O conjunto  $\{ \boxplus, \star, \ominus, \clubsuit \}$  é equipotente ao conjunto  
 $\{ \boxtimes, \#, \Delta \}$ ? por que?
54. Quais das seguintes afirmações são verdadeiras e quais  
 são as falsas?

$$N \subset I$$

$$1 \in I$$

$$0 \in I$$

$$0 \in N$$

$$1 \in N$$

$$\{ 1976\ 854 \} \in N$$

### 2.11. A Sucessão dos Números Naturais

Note que, dadas as coleções  $C'$ ,  $C''$ ,  $C'''$ , etc. somente os con-  
 juntos que pertencem a uma mesma coleção é que são equi-  
 potentes; por isso, se tomarmos dois conjuntos, A e B, de  
 coleções distintas, eles não serão equipotentes, ou seja  
 o número de elementos de A não é igual ao número de  
 elementos de B.

Se a representa o número de elementos de A  
 e b representa o número de elementos de B

$$a \neq b$$

que se lê  
 o número a é diferente do número b.

Neste caso, temos

1. ou o número a é menor que o número b, e representamos  
 por

$$a < b$$

2. ou o número a é maior que o número b, e representamos  
 por

$$a > b$$

Teremos o caso  $a < b$ , quando A fôr equipotente a um subconjunto de B (que não o próprio B).

Exemplo:

$$A = \{\star, \triangle\} \quad \text{e} \quad B = \{\#, \ominus, \boxtimes, \boxplus\} \quad 2 < 4$$

Teremos o caso  $a > b$ , quando B fôr equipotente a um subconjunto de A (que não o próprio A).

Exemplo:

$$A = \{\boxplus, \triangle, \#, \times, \star\} \\ B = \{\boxtimes\} \quad 5 > 1$$

Se  $a = b + 1$

a chama-se o *sucessor de b* (ou o sucessivo de b).

Exemplo:

$$A = \{\boxplus, \otimes\} \quad 2 < 3 \\ B = \{\times, \triangle, \downarrow\} \quad 3 = 2 + 1$$

Costuma-se apresentar o conjunto dos números naturais da seguinte maneira:

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

onde cada elemento é seguido pelo seu sucessor.

No conjunto N dos números naturais, o número 1 não é sucessor de nenhum número. Porém, no conjunto I dos números inteiros, temos

$$0 < 1 \text{ e } 1 = 0 + 1;$$

portanto, em I, 1 é sucessor de zero.

Analogamente ao N, costuma-se escrever o conjunto I da seguinte maneira:

$$I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

Poderíamos resumir tudo o que foi dito.

Dados dois números inteiros quaisquer  $a$  e  $b$  somente uma das seguintes alternativas se verifica:

$$\text{ou } a = b,$$

$$\text{ou } a < b,$$

$$\text{ou } a > b.$$

### Exercícios:

55. A relação "a é menor que b" no conjunto dos números inteiros é transitiva?
56. A relação "a é maior que b" no conjunto dos números inteiros é transitiva?
57. Zero é sucessor de algum número inteiro?
58. Existe o maior número inteiro?
59. Sejam:

A o conjunto dos alunos de sua classe,  
B o conjunto dos narizes dos alunos de sua classe,  
C o conjunto de todos os alunos de seu ginásio,  
D o conjunto dos alunos da 4.<sup>a</sup> série ginásial,

e

$x$  o número de elementos de A,  
 $y$  o número de elementos de B,  
 $z$  o número de elementos de C,  
 $t$  o número de elementos de D.

- a. o que você pode afirmar a respeito de  $x$  e  $y$ ?
- b. de  $x$  e  $z$ ?
- c. de  $z$  e  $t$ ?
- d. de  $y$  e  $z$ ?

60. Sabendo-se que  $a, b, c$ , são três números inteiros tais que

$$a < b \quad \text{e} \quad b < c$$

o que você pode afirmar a respeito de  $a$  e  $c$ ? Por que?

61. Verifique se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

- $\{a,b,c\} = \{(a,b); (c,d)\}$
- $a \in \{(a,b)\}$
- $(a,b) \in \{(a,b); (c,d)\}$
- $\{a,b,c\} \subset \{(a,b); (c,d)\}$
- $\emptyset \subset \{(a,b); (c,d)\}$
- $\{(a,d); (b,c)\} = \{(b,c); (a,d)\}$
- $\{a,c\} \cup \{b,c\} = \{(a,b); (c,d)\}$

62. Dê todos os subconjuntos de:  $\{(1,2); (2,3); (3,4)\}$

63. Efetue:  $\{(1,2); (2,3); (3,4)\} \cap \{1,2,3,4\}$

64. Numa caixa há quatro bolas: uma branca (b), uma azul (a), uma preta (p) e uma vermelha (v). Se você retirar 2 bolas da caixa, sucessivamente, sem repor a primeira, qual o conjunto de resultados possíveis? Você poderá obter, por exemplo (b,v), isto é, a branca foi retirada em primeiro lugar e a vermelha em segundo.

65. Dados:  $A = \{1,2,3\}$ ;  $B = \{3,5\}$ ;  $C = \{0,4,6\}$  e  $D = \{2,3,4,5\}$  calcule:

- |                 |                 |                 |
|-----------------|-----------------|-----------------|
| a. $A \times B$ | b. $B \times A$ | c. $C \times D$ |
| d. $D \times A$ | e. $B \times D$ | f. $B \times C$ |

66. Use os mesmos conjuntos do exercício anterior e calcule:

- $(A \times B) \cap (B \times D)$
- $(A \times B) \cap (B \times A)$
- $(A \times B) \cup (B \times C)$
- $(A \times B) \cup (B \times D)$

67. Dado:  $A = \{a,b,c\}$ , calcule  $A \times A$ .

68. Um conjunto  $A \times B$  tem 18 elementos. Quantos elementos pode ter A? e B? Examine todas as possibilidades.

69. Para um conjunto  $A \times B$  com 13 elementos, responda as mesmas perguntas do exercício anterior.

70. Dado  $E: \{1,2,3,4,5\}$  e a relação ..... é menor que ....., escreva o conjunto R e dê o diagrama da relação.

71. Faça um gráfico da relação ..... limita-se com ..... no conjunto dos estados do Brasil.

72. Seja A o conjunto dos alunos de sua classe e B o conjunto de 10 das principais cidades de sua região. Dê o conjunto R, determinado por: ..... nasceu em .....

73. Dado o conjunto:  $S = \{R_1, L_1, R_2, L_2, L_3\}$ , de retas de um plano, sabe-se que:

$$L_1 // L_2; R_1 // L_1 \text{ e } R_2 // L_3.$$

Dê os conjuntos  $S \times S$  e R, este último, determinado por:

..... é paralela a .....

74. Seja o conjunto dos vértices do polígono ao lado:  $A = \{a,b,c,d,e\}$ .

Calcule  $A \times A$ . Forme o conjunto R dos pares cujas componentes estão ligadas, na figura, por um segmento. O que você pode dizer de  $A \times A$  e R? R é um conjunto determinado por uma relação?

75. Dado o conjunto  $A = \{1,2,3,4,5\}$ , efetue  $A \times A$ .

O diagrama ao lado é da relação:

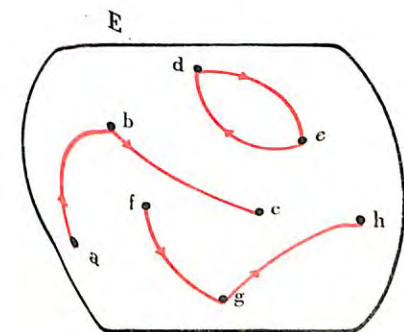
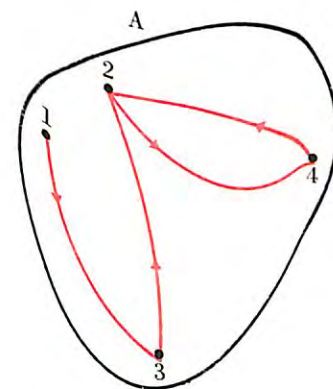
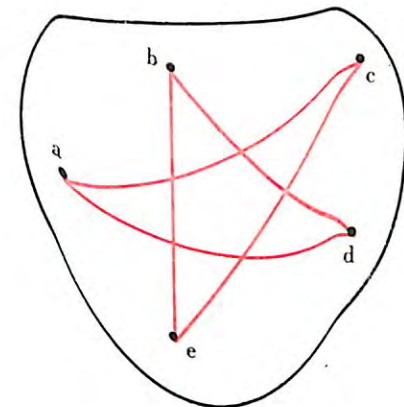
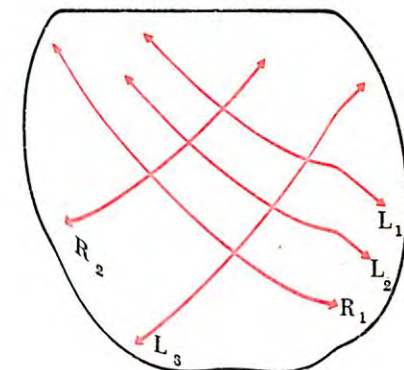
$$R_1 = \{(1,3); (4,2); (2,4); (3,2)\}.$$

Faça os diagramas das relações:

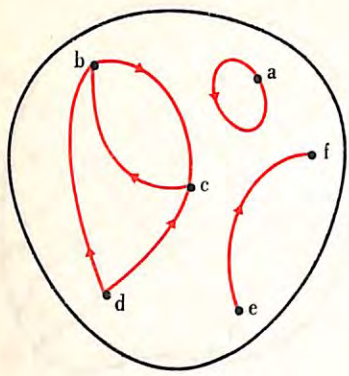
- $R_2 = \{(1,1); (2,3); (3,2); (3,4); (4,2); (5,5)\}$
- $R_3 = \{(1,1); (1,2); (2,3); (3,2); (4,5); (5,1)\}$

76. Dado o conjunto E ao lado e a relação R representada pelo diagrama, dê o conjunto R. Esta relação é

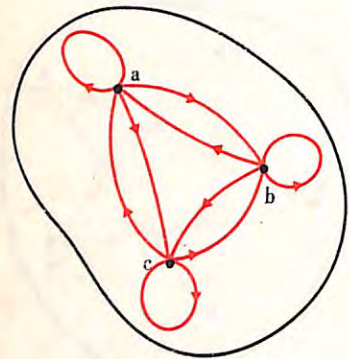
- simétrica?
- reflexiva?
- transitiva?





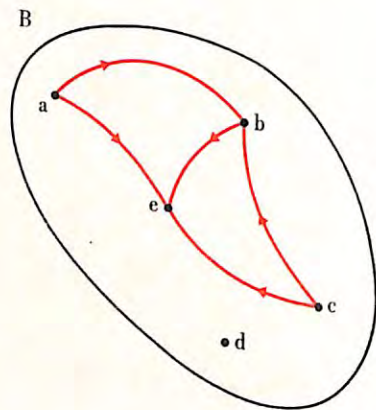
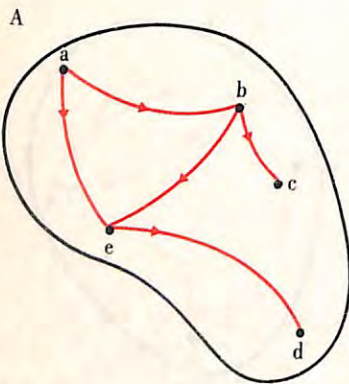


77. Dado o conjunto E ao lado e a relação R representada pelo diagrama, dê o conjunto R. Dê as propriedades desta relação.



78. Dado o conjunto E ao lado e a relação R representada pelo diagrama, dê o conjunto R. Dê as propriedades desta relação.

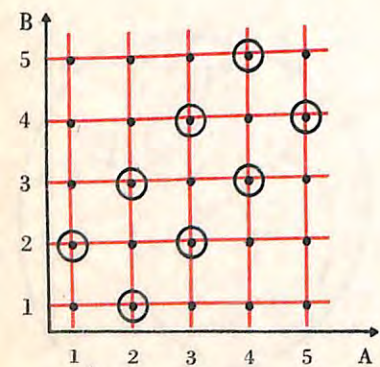
79. As relações abaixo são transitivas? Por que?



80. Dê um exemplo de relação de equivalência.

81. No gráfico ao lado, os pontos assinalados representam os elementos de um conjunto R. Você poderá dizer que esta relação é simétrica? Por que?

82. Dado o conjunto  $A = \{\text{Brasil, Bélgica, Portugal, Itália, França, Bolívia, Polônia, Inglaterra}\}$ , imagine uma relação entre seus elementos que tenha a propriedade transitiva.



83. Dados o conjunto  $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$  e uma relação que é reflexiva e simétrica, verifique se o diagrama ao lado está completo.

Caso não esteja, complete-o.

84. Verifique se são relações de equivalência, as seguintes relações:

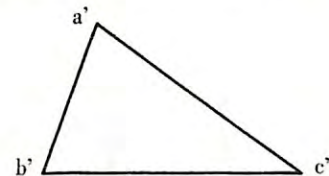
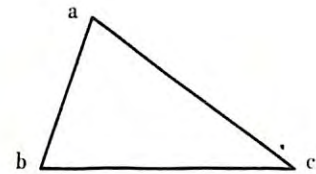
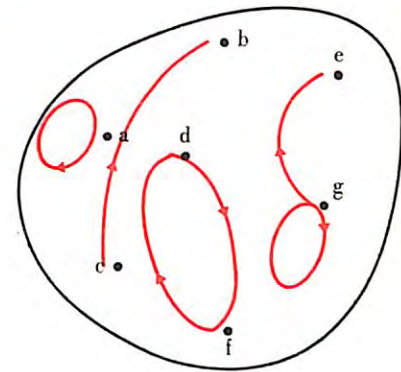
- num conjunto de cidades:  
..... tem a mesma população que .....
- num conjunto de segmentos  
..... pertence ao mesmo plano que .....
- num conjunto de pessoas que trabalham na mesma fábrica  
..... dá ordens para .....

85. Dizemos que duas figuras geométricas são *congruentes* quando têm o mesmo tamanho e a mesma forma. Por exemplo, os triângulos ao lado são *congruentes*; não são iguais, porque não são formados pelo *mesmo conjunto* de pontos.

Para verificar que eles são congruentes, desenhe-os em folhas de papel transparente e superponha-os.

Considere o conjunto de todos os triângulos de um plano e a relação: ..... é congruente a .....

É uma relação de equivalência? Por que?

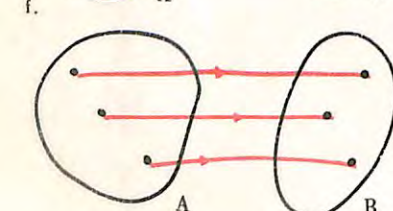
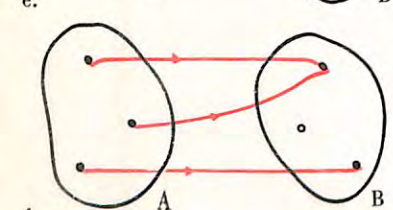
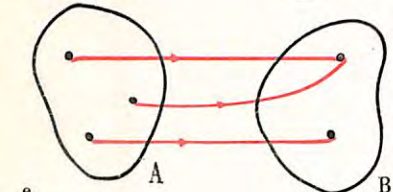
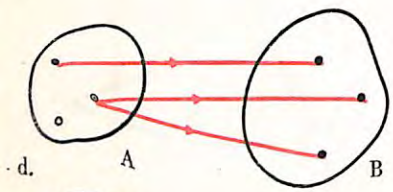
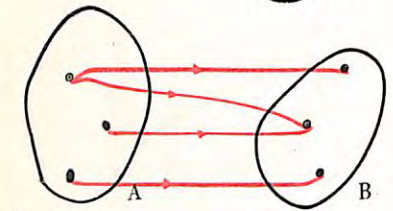
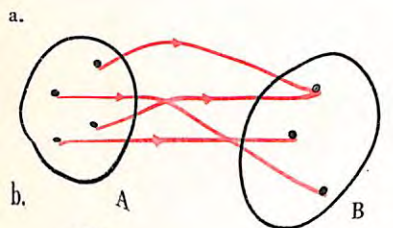
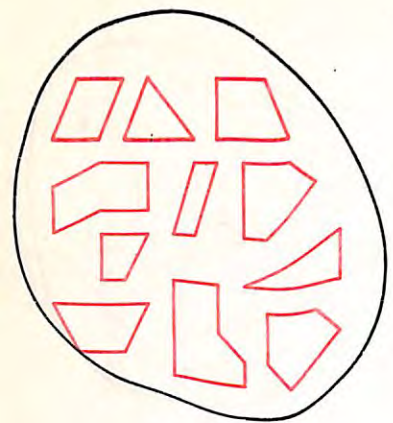


86. No conjunto das ruas de sua cidade, a relação ...  
..... faz esquina com ..... é uma relação de equivalência?

87. Seja S o conjunto dos alunos de sua classe, A o conjunto dos seus colegas que têm média em Matemática, e B o conjunto dos que não têm. Você pode dizer que A e B formam uma partição de S? Por que?

88. Seja A o conjunto de todos os números inteiros terminados em 3 e B o conjunto dos números pares. Você pode dizer que A e B formam uma partição de I? Por que?

89. Seja A o conjunto de todos os números inteiros terminados em zero e B o conjunto dos números pares. Você pode dizer que A e B formam uma partição de I? Por que?



90. No conjunto dos alunos do seu colégio, a relação ..... tem o mesmo professor de Português que ..... determina uma partição?

91. No conjunto das pessoas de sua cidade "invente" uma relação que determine uma partição.

92. Dados o conjunto dos polígonos ao lado e a relação ..... tem tantos lados quanto ..... verifique se a relação é de equivalência. Se a resposta for afirmativa, forme as classes de equivalência, escolha um representante de cada classe e desenhe-os em vermelho.

93. A e B são classes de equivalência. Determine o conjunto e a relação que a elas deram origem.

$$A = \{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70\} \text{ e } B = \{11, 23, 37, 43, 53, 61\}$$

94. Verifique se as relações dos exercícios: 70, 71, 72, 73, 74, 75, 86, 90 e 92 são aplicações.

95. Indique quais das relações ao lado, são aplicações:

96. No exercício anterior, qual das aplicações é uma aplicação bijetora?

97. No conjunto  $N$ , a relação ..... é o dobro de ..... é uma aplicação?

98. Dados os conjuntos:

$V = \{\text{D. Manuel, Anchieta, Princesa Isabel, D. Pedro I, José Bonifácio}\}$

$H = \{\text{Descobrimento do Brasil, Independência do Brasil, Abolição da escravidão}\}$

e a relação ..... é um dos vultos do fato histórico ..... verifique se ela é uma aplicação. Faça um diagrama.

99. Dados o conjunto  $A = \{3, 7, 10, 11\}$  e os conjuntos abaixo, determinados por relações, verifique quais são aplicações. Faça um diagrama para cada um.

a.  $R_1 = \{(3,3); (7,7); (10,10); (11,11)\}$

b.  $R_2 = \{(3,7); (7,10); (10,11); (3,11)\}$

c.  $R_3 = \{(3,11); (7,10); (10,3); (11,7)\}$

d.  $R_4 = \{(3,3); (7,7); (10,10)\}$

100. O conjunto dos alunos de sua classe e o conjunto dos seus números na lista de chamada são conjuntos equipotentes?

101. Considere agora o conjunto dos alunos de seu colégio e o conjunto dos seus números de chamada. Existe uma aplicação entre estes conjuntos? Ela é bijetora?

102. Os conjuntos dos alunos e das carteiras de sua classe são equipotentes?

103. Seja  $E$  o conjunto dos estados do Brasil e  $C$  o conjunto das suas capitais.  $E$  e  $C$  são equipotentes?

104. Verifique se as seguintes afirmações são falsas ou verdadeiras:

- a. conjuntos equipotentes são iguais.
- b. conjuntos diferentes podem ser equipotentes.
- c. conjuntos iguais são equipotentes.

105. Qual o valor de  $x$ , sabendo-se que:  $x > 10$  e  $x < 12$ , e que  $x$  é um número inteiro?

106. Dê o conjunto dos números  $x \in I$  tais que  $x > 7$  e  $x > 10$ .

107. Dê o conjunto dos números  $x \in I$  tais que  $x < 3$  e  $x < 1$ .

108. Qual o valor de  $x$ , sabendo-se que:  $x < 3$  e  $x > 10$  e que  $x$  é um número inteiro?

109. Tem-se os números:  $a, b, c, d$  e sabe-se que:  $a < b, b < c$  e  $c < d$ . Compare  $a$  e  $d$ .

110. Tem-se os números:  $a, b, c, d$  e sabe-se que:  
 $a < b, \quad b = c, \quad c < d.$

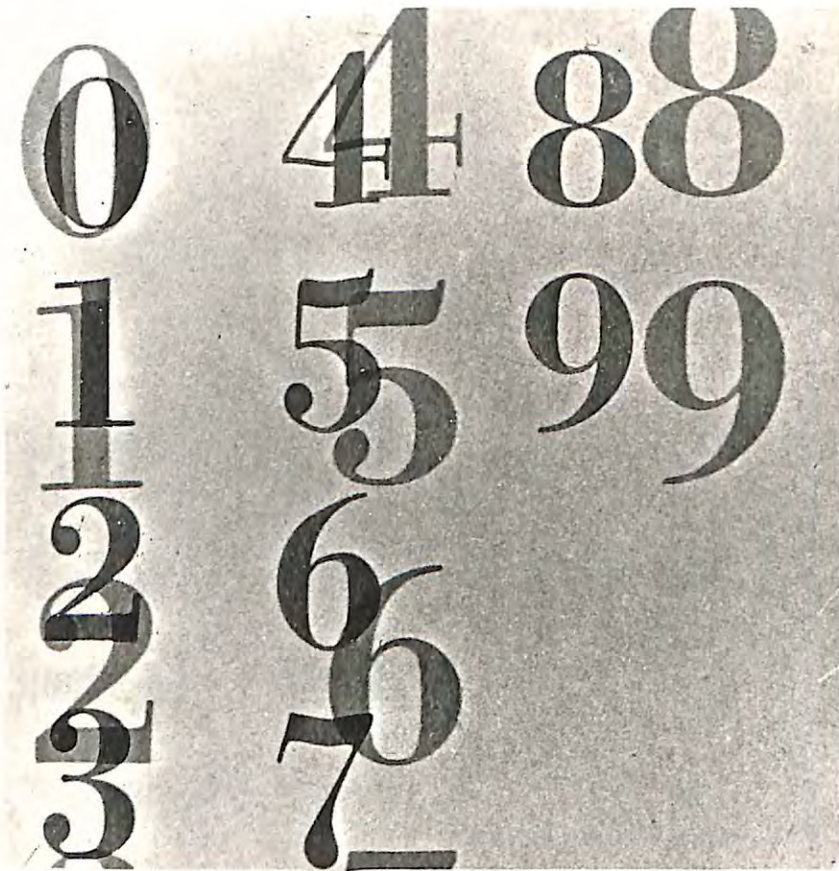
Compare  $a$  e  $d$ .

111. Um conjunto de lápis pretos e vermelhos tem  $a$  elementos; sendo  $b$  o número dos lápis pretos e  $c$  o número dos lápis vermelhos, faça tôdas as comparações possíveis entre  $a, b, e c$ .

# Capítulo

# 3

## Numeração



### 3.1. Número e Numeral

A matemática começou com a invenção dos números para “contar” que são os números naturais.

$$N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Êsses números são tais, que cada um deles está associado a uma certa coleção de conjuntos equipotentes entre si. Por exemplo, o número *cinco* (representado pelo símbolo 5) está associado à coleção de conjuntos:

{ {⊕, △, π, ★, ⊙} {×, ★, △, #, ☞} {☞, ⊙, ⊕, △, ○} ... }  
etc.

Se a cada conjunto desta coleção você acrescentar um elemento, obterá uma nova coleção, à qual está associado o número *seis*, representado pelo símbolo 6.

Pode-se então, obter conjuntos com mais elementos, acrescentando, de cada vez, um novo elemento a cada conjunto da coleção obtida. Existem, portanto, infinitas coleções de conjuntos; logo, seriam necessárias infinitas palavras e infinitos símbolos associados a estas coleções.

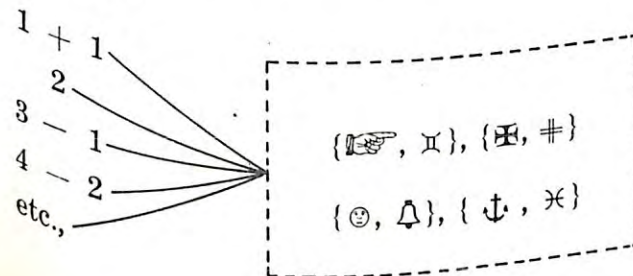
Chama-se *numeração* o estudo de como utilizar um mínimo de palavras e um mínimo possível de símbolos para representar os números.

Os símbolos ou combinações dos símbolos usados chamam-se *numerais*. Por exemplo:

2 é um numeral  
2 0 0 1 é um numeral  
1 0 0 5 é outro numeral, etc.

Os numerais são, portanto, meras representações de idéias de quantidade, que são os números.

Exemplo:



são todos *numerais* de um mesmo número que é *dois*.

### Exercícios:

1. Dê cinco numerais do número *cinco*.
2.  $3 + 1$  e  $2 \times 2$  são numerais de que número?
3. 1 822 e 1 824 são numerais de dois números. Qual dos dois numerais representa o número maior?
4. Dê quatro numerais do número *cento e sete*.

Sòmente para simplificar a linguagem, frequentemente, em vez de falarmos “o numeral 1 234 ...”, dizemos simplesmente “o número 1 234 ...”, mas agora você já sabe que

número é uma idéia e numeral é um símbolo ou uma combinação de símbolos que representa um número.

Atualmente, para representar *qualquer* número usamos sòmente os símbolos

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

que são chamados de *algarismos hindú-arábicos*.

Contudo, no decorrer dos séculos, *outros símbolos* usados por diversos povos foram empregados para representar quantidades. A título de curiosidade e para melhor compreensão do sistema de numeração que empregamos, daremos alguns dos sistemas antigos de numeração.

### 3.2. Sistema de Numeração Egípcio.

É, sem dúvida, um dos primeiros sistemas de numeração dos quais temos conhecimento. Segundo os historiadores surgiu 3 300 A.C. Eis os símbolos que êles usavam:

| Símbolo | Número    | Numerais que usamos |
|---------|-----------|---------------------|
|         | um        | 1                   |
| ∩       | dez       | 10                  |
| ?       | cem       | 100                 |
| ⊗       | mil       | 1 000               |
| ∩       | dez mil   | 10 000              |
| ∩       | cem mil   | 100 000             |
| ⊗       | um milhão | 1 000 000           |

Note que êles agrupavam de 10 e 10, pois

um ∩ são dez | ,  
um ? são dez ∩ , etc.

O número um milhão era representado por um “homem espantado”; provavelmente por acharem que um milhão era um número excessivamente grande.

Outros números eram representados por combinações destes símbolos. As combinações obedeciam à seguinte regra:

um símbolo escrito abaixo ou à direita de outro, adiciona o seu valor a êsse outro.

| Numeral Egípcio              | Numeral que usamos         |
|------------------------------|----------------------------|
|                              | $1+1+1+1+1+1+1 = 8$        |
| ∩∩∩                          | $10+10+10 = 30$            |
| ⊗ 99999 ∩∩∩     <br>9999 ∩∩∩ | $1\ 000+900+60+7 = 1\ 967$ |

### 3.3. Sistema de Numeração Babilônico

Surgiu por volta de 1700 A.C. e os babilônicos usavam os seguintes símbolos, chamados *cuneiformes*:

| representando *um* e  
 < representando *dez*.

Chamam-se *cuneiformes* porque eles eram feitos por uma cunha (pedaço de madeira) na areia.

Para representar números menores que sessenta, usavam a mesma regra dos egípcios.

Por exemplo:

| <i>Numeral Babilônico</i> | <i>Numeral que usamos</i> |
|---------------------------|---------------------------|
|                           | $1+1+1+1+1 = 5$           |
| <<<                       | $10+10+10+1+1 = 32$       |
| <<<<                      | $50+9 = 59$               |

Para números maiores que sessenta, usavam um princípio de *valor de posição*, isto é, de acordo com a sua posição no numeral, o símbolo tem seu valor aumentado sessenta vezes. Exemplo:

| <i>Numeral Babilônico</i> | <i>Numeral que usamos</i> |
|---------------------------|---------------------------|
| <                         | $60+10+1 = 71$            |
| <<<                       | $60+30+2 = 92$            |

Um problema sério era o da representação de sessenta, pois o número *um* e o número *sessenta* eram representados pelo mesmo símbolo, ou seja |

Isto porque eles não possuíam um símbolo para o número zero.

### 3.4. Sistema de Numeração Romano

Surgiu alguns anos antes de Cristo. Os romanos usavam os seguintes símbolos:

| <i>Símbolo</i> | <i>Número</i> | <i>Numerais que usamos</i> |
|----------------|---------------|----------------------------|
| I              | um            | 1                          |
| V              | cinco         | 5                          |
| X              | dez           | 10                         |
| L              | cinquenta     | 50                         |
| C              | cem           | 100                        |
| D              | quinhentos    | 500                        |
| M              | mil           | 1 000                      |

A fim de representar qualquer número, os romanos usavam as seguintes regras para combinar esses símbolos:

- Os símbolos I, X, C e M podiam ser repetidos no máximo três vezes consecutivas; os símbolos V, L e D não eram repetidos.
- Os valores de dois símbolos eram adicionados, sempre que o da esquerda era de valor maior ou igual ao da direita.

Por exemplo:

| <i>Numeral Romano</i> | <i>Numeral que usamos</i> |
|-----------------------|---------------------------|
| XI                    | $10+1 = 11$               |
| XX                    | $10+10 = 20$              |
| LX                    | $50+10 = 60$              |

Esta regra era aplicada para o caso de mais de dois símbolos.

Por exemplo:

| <i>Numeral Romano</i> | <i>Numeral que usamos</i>              |
|-----------------------|--|
| LVII                  | $50 + 5 + 1 + 1 = 57$                  |
| MDCXII                | $1\ 000 + 500 + 100 + 10 + 2 = 1\ 612$ |

3. Se um símbolo de valor menor que outro fôsse escrito à esquerda desse outro, subtraía-se o valor do primeiro do valor do segundo.

Por exemplo:

| <i>Numerais Romanos</i> | <i>Numerais que usamos</i> |
|-------------------------|----------------------------|
| IX                      | $10 - 1 = 9$               |
| CM                      | $1\ 000 - 100 = 900$       |

Observações:

- a. os símbolos V, L e D não eram escritos à esquerda de outros de maior valor;
- b. Para os demais símbolos, a regra 3 se aplicava *sômente* para as seguintes combinações:

|    |    |    |
|----|----|----|
| IV | XL | CD |
| IX | XC | CM |

4. Um traço horizontal colocado acima de um numeral aumentava *mil* vezes o seu valor.

Por exemplo:

| <i>Numeral Romano</i>            | <i>Numeral que usamos</i>                           |
|----------------------------------|---|
| $\overline{\text{C}}$            | $1\ 000 \times 100 = 100\ 000$                      |
| $\overline{\overline{\text{D}}}$ | $1\ 000 \times (1\ 000 \times 500) = 500\ 000\ 000$ |
| $\overline{\text{MCCLV}}$        | $1\ 000 \times 1\ 255 = 1\ 255\ 000$                |

Para representar qualquer número por meio dos numerais romanos, você precisa *sômente* aplicar estas regras:

| <i>Numeral Romano</i>   | <i>Numeral que usamos</i>                          |
|-------------------------|--|
| XIX                     | $10 + (10 - 1) = 10 + 9 = 19$                      |
| $\overline{\text{XIX}}$ | $1\ 000 \times 19 = 19\ 000$                       |
| MCMXLII                 | $1\ 000 + (1\ 000 - 100) + (50 - 10) + 2 = 1\ 942$ |

Exercícios:

5. Escreva em numerais romanos os seguintes números:

|                           |                             |
|---------------------------|-----------------------------|
| mil e um                  | quatrocentos e sete         |
| cento e quatorze          | oitocentos e oitenta e oito |
| duzentos e oitenta e nove | quinhentos e noventa e nove |
| quarenta e nove           | cinquenta.                  |

6. Complete o quadro

| <i>Numerais Romanos</i> | <i>Numerais que usamos</i> |
|-------------------------|----------------------------|
| MDLVI                   |                            |
| DCCLXXXIX               |                            |
| XXII                    |                            |
| CMXLIV                  |                            |
| MDCCCXXII               |                            |
| MD                      |                            |
| MDLIV                   |                            |

7. Quais dos seguintes numerais romanos não estão corretos:

|           |         |
|-----------|---------|
| a. MCCCCI | c. CMXI |
| b. LCXI   | d. LLX  |

- = ≡ 𐤀 𐤁 𐤂 𐤃 𐤄 𐤅 𐤆 𐤇 𐤈 𐤉

𐤀 𐤁 𐤂 𐤃 𐤄 𐤅 𐤆 𐤇 𐤈 𐤉 𐤊 𐤋 𐤌 𐤍 𐤎 𐤏 𐤐

𐤀 𐤁 𐤂 𐤃 𐤄 𐤅 𐤆 𐤇 𐤈 𐤉 𐤊 𐤋 𐤌 𐤍 𐤎 𐤏 𐤐

1 2 3 4 5 6 7 8 9

1 𐤀 𐤁 𐤂 𐤃 𐤄 𐤅 𐤆 𐤇 𐤈 𐤉 𐤊 𐤋 𐤌 𐤍 𐤎 𐤏 𐤐

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Os numerais hindú-arábicos, que usamos atualmente, não se apresentaram sempre com as características atuais.

A ilustração ao lado mostra a evolução da escrita dos numerais através dos séculos.

e o quadro abaixo ilustra os numerais usados por vários povos.

Após ter visto estes sistemas antigos de numeração, note que para representar o número seis

|                |           |    |
|----------------|-----------|----|
| os egípcios    | escreviam |    |
| os babilônicos | escreviam |    |
| os romanos     | escreviam | VI |
| e você         | escreve   | 6. |

ou

5 + 1, 7 - 1, 12 ÷ 2, etc., ou ainda □ | comumente usado em jogos de pingue-pongue, volei, etc.

Todos estes símbolos representam a mesma idéia de quantidade, que é o número seis.

Logo, número é uma idéia (de quantidade) e numeral é um símbolo para representar um número.

Em cada um dos sistemas de numeração dados, você nota que se tem um conjunto de símbolos e um conjunto de regras explicando como devem ser usados os símbolos na escrita.

Um sistema de numeração, portanto, nada mais é do que um conjunto de símbolos e um conjunto de regras que permitem representar qualquer número, fazendo uso desses símbolos.

### 3.5. O Zero

O primeiro povo que reconheceu a necessidade de um símbolo para o número zero foi o hindu. Os árabes aprenderam com os hindus e levaram seus conhecimentos através da Europa. Nas culturas antigas, isto é, egípcia, babilônica, romana, etc., não se encontra o zero como número e, portanto, nem o uso de um símbolo para zero.

A introdução do zero pelos hindús e árabes deveu-se princi-

𐤀 𐤁 𐤂 𐤃 𐤄 𐤅 𐤆 𐤇 𐤈 𐤉 𐤊 𐤋 𐤌 𐤍 𐤎 𐤏 𐤐 <

1 𐤀 𐤁 𐤂 𐤃 𐤄 𐤅 𐤆 𐤇 𐤈 𐤉 𐤊 𐤋 𐤌 𐤍 𐤎 𐤏 𐤐

... .. - ÷ =

- = ≡ 四 五 六 七 八 九 十

A B Γ Δ E F Z H Θ I

I III IIII V VI VII VIII IX X

palmente às exigências da numeração escrita. Por exemplo, se não existisse um símbolo para o zero, o numeral 203, provavelmente, seria escrito 2 3, com o dois e o três um pouco afastados. Isto, sem dúvida alguma, causaria uma certa confusão pois 2 3 poderiam ser tomados como o numeral de vinte e três, de duzentos e trinta, de duzentos e três, etc.

### 3.6. Sistema de Numeração Decimal

A palavra decimal provém da palavra latina *decem* que quer dizer dez.

O sistema decimal realiza agrupamentos de dez em dez e por isso é chamado também sistema de base dez.

Para escrever o numeral de qualquer número neste sistema são necessários os dez símbolos

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 0 que se chamam algarismos hindú-arábicos.

Somente eles são necessários porque nos numerais os algarismos possuem um valor de acordo com a sua posição nos mesmos. Vejamos como isto se realiza.

#### Exemplo 1

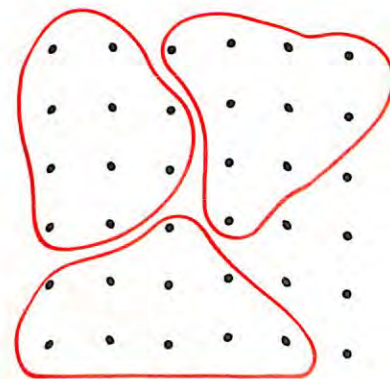
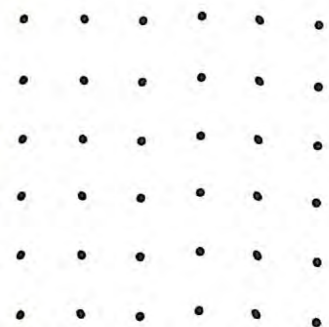
Considere os pontos ao lado; se os agruparmos de dez em dez obtemos:

3 grupos de dez e sobram 6 pontos, por isso, o número de pontos é representado por

36

└─ pontos que sobram

└─ grupos de 10 pontos.





### Exemplo 2.

Considere os pontos ao lado; se os agruparmos de dez em dez obtemos:

onze grupos de dez pontos e sobram 4 pontos. Estes onze grupos podem ser novamente agrupados de dez em dez de maneira a obter:

- 1 grupo de dez grupos de dez pontos
- 1 grupo de dez pontos
- 4 pontos

Por isso o numeral que representa essa quantidade de pontos é

114

└─── pontos que sobram  
└─── 1 grupo de dez pontos  
└─── 1 grupo de dez grupos de dez pontos.

Veja que 1 grupo de dez grupos de dez pontos é um grupo de cem pontos ou um grupo de  $10 \times 10$  pontos. Assim sendo, se nos fôsse apresentado o numeral

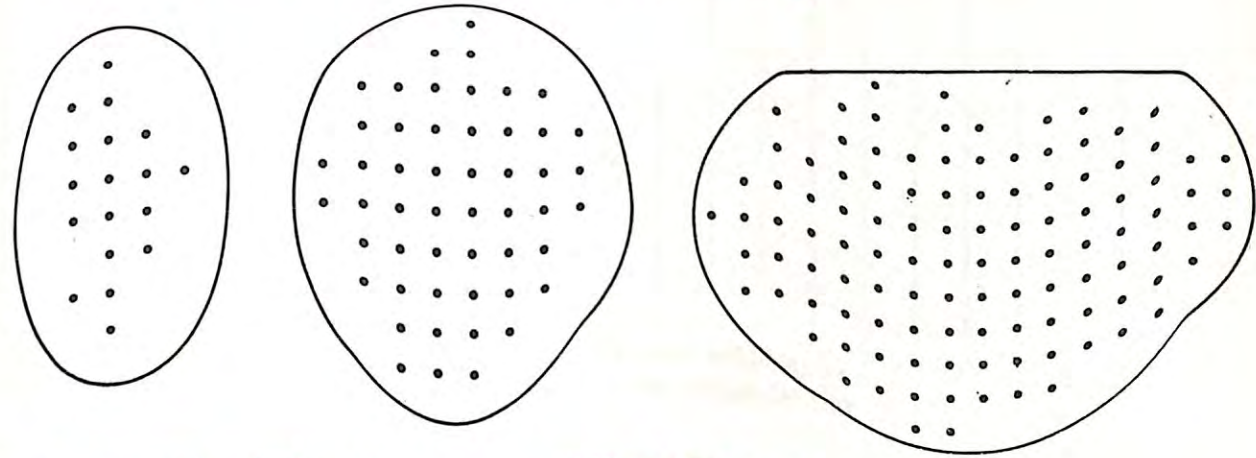
2 342,

poderíamos dizer que, se agrupássemos de 10 em 10 o número de pontos que esse numeral representa, obteríamos:

- 2 grupos de  $10 \times 10 \times 10$ ,
- 3 grupos de  $10 \times 10$ ,
- 4 grupos de 10 e sobriam 2 pontos.

### Exercícios:

8. Agrupe os pontos de cada um dos conjuntos abaixo em grupos de 10. Escreva os numerais correspondentes.



9. Os numerais abaixo representam números na base 10. Diga o que significa cada algarismo nesses numerais.

18      121      356      1 235

Como ficou evidenciado pelos exemplos dados, o valor de um determinado algarismo em um numeral depende de sua posição no mesmo. Por exemplo,

334

quer dizer:

- 3 grupos de  $10 \times 10$ ,
- 3 grupos de 10 e sobram 4

Os dois algarismos 3 no numeral 334 possuem valores bem diferentes.

Isto porque o sistema de base dez adota a seguinte regra para a escrita dos numerais:

#### *Princípio do Valor Posicional*

“Todo algarismo escrito à esquerda de outro vale dez vezes mais que se estivesse no lugar desse outro”.

### 3.7. Leitura dos Numerais na Base 10.

Se fizermos um quadro de maneira a destacar as posições dos algarismos obtemos:

|   |   |   |   |   |   |   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|---|---|---|---|---|---|---|------|------|------|------|------|------|------|------|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| . | . | . | . | . | . | . | 18.a | 17.a | 16.a | 15.a | 14.a | 13.a | 12.a | 11.a | 10.a | 9.a | 8.a | 7.a | 6.a | 5.a | 4.a | 3.a | 2.a | 1.a |
|   |   |   |   |   |   |   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |     |     |     | 1   | 3   | 5   | 0   | 6   |     |
|   |   |   |   |   |   |   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |     | 5   | 1   | 0   | 7   | 8   | 1   | 3   |     |
|   |   |   |   |   |   |   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|   |   |   |   |   |   |   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|   |   |   |   |   |   |   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|   |   |   |   |   |   |   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|   |   |   |   |   |   |   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |     |     |     |     |     |     |     |     |     |

As posições também são chamadas de *ordens*.  
Por exemplo, no numeral

13 506

dizemos que o algarismo 3 ocupa a quarta posição ou que êle é de 4.<sup>a</sup> ordem.

Simplymente para facilitar a leitura dos numerais agrupamos cada *três* ordens em uma *classe* obtendo:

|                                      |                      |   |                     |
|--------------------------------------|----------------------|---|---------------------|
| 1. <sup>a</sup> posição (ou ordem) — | unidades simples     | } | classe das unidades |
| 2. <sup>a</sup> " —                  | dezenas de unidades  |   |                     |
| 3. <sup>a</sup> " —                  | centenas de unidades |   |                     |
| <hr/>                                |                      |   |                     |
| 4. <sup>a</sup> posição —            | milhar               | } | classe dos milhares |
| 5. <sup>a</sup> " —                  | dezena de milhar     |   |                     |
| 6. <sup>a</sup> " —                  | centena de milhar    |   |                     |
| <hr/>                                |                      |   |                     |
| 7. <sup>a</sup> posição —            | milhão               | } | classe dos milhões  |
| 8. <sup>a</sup> " —                  | dezena de milhão     |   |                     |
| 9. <sup>a</sup> " —                  | centena de milhão    |   |                     |

e continuando, teremos as classes dos bilhões, trilhões, quatrilhões, etc.

O quadro das posições dos algarismos se transforma em:

| — |  |  | — |  |  | Quatrilhões | Trilhões | Bilhões | Milhões | Milhares | Unidades |   |   |   |   |   |   |
|---|--|--|---|--|--|-------------|----------|---------|---------|----------|----------|---|---|---|---|---|---|
|   |  |  |   |  |  |             |          |         |         |          |          | 1 | 3 | 5 | 0 | 6 |   |
|   |  |  |   |  |  |             |          |         | 5       |          |          | 1 | 0 | 7 | 8 | 1 | 3 |
|   |  |  |   |  |  |             |          |         |         |          |          |   |   |   |   |   |   |
|   |  |  |   |  |  |             |          |         |         |          |          |   |   |   |   |   |   |
|   |  |  |   |  |  |             |          |         |         |          |          |   |   |   |   |   |   |
|   |  |  |   |  |  |             |          |         |         |          |          |   |   |   |   |   |   |
|   |  |  |   |  |  |             |          |         |         |          |          |   |   |   |   |   |   |

Para realizar a leitura de um numeral, nomeia-se a partir da esquerda, as suas classes sucessivamente.

Lemos os numerais apresentados no quadro da seguinte maneira:

13 506: “treze mil, quinhentos e seis unidades”.

Note que o *zero* representa as ordens *vazias* de unidades e *não* usamos ponto para separar as classes.

5 107 813: “cinco milhões, cento e sete mil e oitocentos e treze unidades”.

Como a leitura é feita por meio das classes, escrevem-se os numerais separando por um pequeno espaço as suas classes.

**Exercícios:**

- 10. Escreva em símbolos os números:
  - a. trezentos e cinquenta e sete.
  - b. mil e trinta e sete.
  - c. sete mil, oitocentos e dois.
  - d. um milhão, sete mil e três.
  - e. dois bilhões, trinta e sete milhões, nove mil e um.

11. Escreva os nomes dos símbolos:

- a. 3 599
- b. 6 764
- c. 999 596
- d. 1 001 001 036
- e. 25 007 008
- f. 599 307

### 3.8. Notação Exponencial

Na matemática temos uma maneira mais rápida de escrever expressões do tipo

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

$$5 \times 5 \times 5$$

$$4 \times 4$$

$$10 \times 10 \times 10 \times 10.$$

Vamos convencionar que

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$$

isto é, escrevemos o numeral que se repete no produto (no caso o 2) e, um pouco acima à direita, *quantas* vezes ele se repete (neste caso cinco). O numeral que se repete chama-se *base* e o número de vezes que ele se repete chama-se *expoente*.

<sup>5</sup> expoente  
 2 base

Do mesmo modo temos

$$5 \times 5 \times 5 = 5^3$$

$$4 \times 4 = 4^2$$

$$10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4.$$

Tome os casos em que o numeral que se repete é 10, isto é, em que a base é 10, e vamos convencionar que  $10^1 = 10$ .

$$10^1 = 10$$

$$10^2 = 10 \times 10 = 100$$

$$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1\,000$$

$$10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10\,000 \text{ etc.}$$

Pôsto isto, decomponha o número 2 532 nas unidades das diversas ordens.

Você já sabe que

$$2\,532 = 2\,000 + 500 + 30 + 2 \text{ ou}$$

$$2\,532 = (2 \times 1\,000) + (5 \times 100) + (3 \times 10) + 2 \text{ ou}$$

$$2\,532 = (2 \times 10 \times 10 \times 10) + (5 \times 10 \times 10) + (3 \times 10) + 2$$

ou, usando a notação dada acima

$$2\,532 = (2 \times 10^3) + (5 \times 10^2) + (3 \times 10^1) + 2$$

que é chamada de *notação exponencial* de 2 532.

Outros exemplos:

$$357 = 300 + 50 + 7$$

$$357 = (3 \times 100) + (5 \times 10) + 7$$

$$357 = (3 \times 10 \times 10) + (5 \times 10) + 7$$

$$357 = (3 \times 10^2) + (5 \times 10) + 7$$

$$54\,072 = (5 \times 10^4) + (4 \times 10^3) + (0 \times 10^2) + (7 \times 10) + 2$$

$\left. \begin{array}{l} | \\ | \\ | \\ | \\ | \end{array} \right\} 10^1$   
 $\left. \begin{array}{l} | \\ | \\ | \end{array} \right\} 10^2$   
 $\left. \begin{array}{l} | \\ | \end{array} \right\} 10^3$   
 $\left. \begin{array}{l} | \\ | \end{array} \right\} 10^4$

Esta notação é importante, porque ela ressalta a quantidade de unidades de cada ordem.

#### Exercícios:

12. Usando a notação exponencial escreva os seguintes números:

- |           |          |           |
|-----------|----------|-----------|
| a. 2 505  | c. 111   | e. 4 890  |
| b. 51 504 | d. 3 714 | f. 25 789 |

13. Qual é a relação entre o *expoente* da última ordem e a quantidade de algarismos do numeral dado?

14. Sendo "abcde" um numeral na base 10, qual é a notação exponencial do mesmo?

### 3.9. Bases Diferentes de 10

O sistema de base 10 é importante, não porque agrupa de 10 em 10, mas sim porque:

1. adota o princípio do valor posicional
2. possui o símbolo 0 (zero) para indicar as ordens vazias.

Portanto, se você adotar estas duas regras, poderá representar os números por meio de numerais em outras bases. A única diferença é que os agrupamentos são feitos de acordo com a base com que se esteja trabalhando. Em cada uma das bases, o princípio do valor posicional é usado da seguinte maneira:

Todo algarismo escrito à esquerda de outro, vale  $x$  vezes mais que se estivesse escrito no lugar desse outro, sendo  $x$  a base em questão.

Para exemplificar bem como tudo isto funciona, estudaremos com você outras bases que não a decimal.

### 3.10. Base 5

Realizemos agora agrupamentos de 5 em 5; precisaremos, portanto, de 5 símbolos:

1, 2, 3, 4 e 0.

Para contar os pontos ao lado na base 5 os agrupamos de 5 em 5

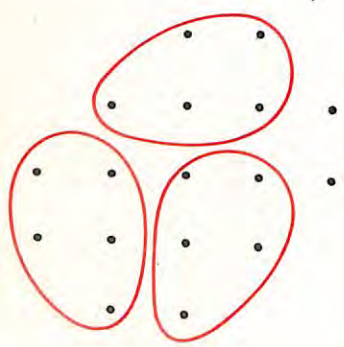
obtendo

3 grupos de 5 sobrando 2 pontos.

Por isso, o numeral na base cinco que representa o número de pontos é

$(32)_5$  que se lê

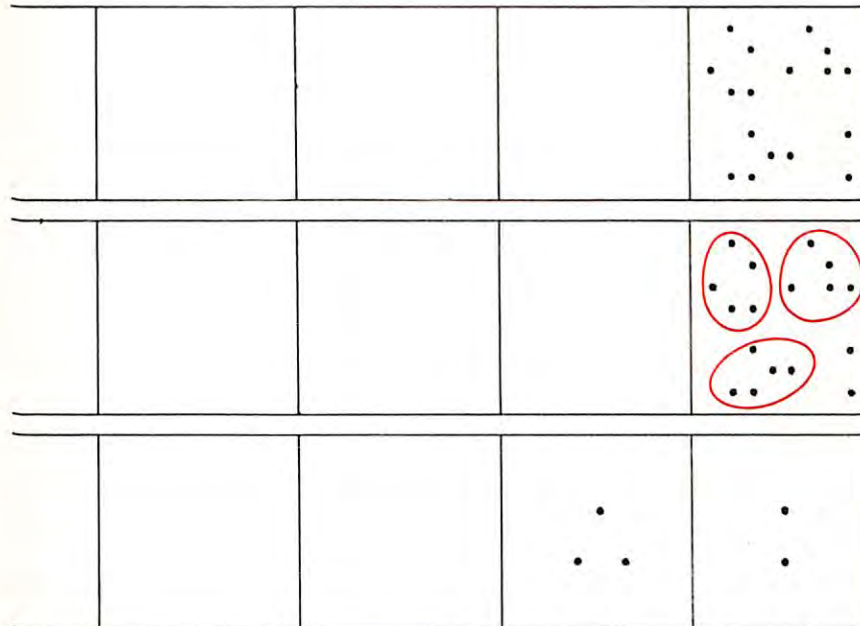
três dois, base cinco.



Para melhor compreender como o princípio do valor posicional funciona nesta base, considere o seguinte desenho:

onde os pontos a serem contados estão todos no interior do 1.º quadrado da direita, sendo que cada quadrado representa uma ordem.

Cada 5 pontos passa valer 1 ponto no quadrado seguinte, assim:



e facilmente você obtém o numeral correspondente na base cinco:

$(32)_5$

que se lê  
três, dois, base cinco.

Outros exemplos:

|  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

Portanto, o numeral na base 5, que representa a quantidade de pontos dada, é

$$(102)_5$$

que se lê um, zero, dois, base cinco.

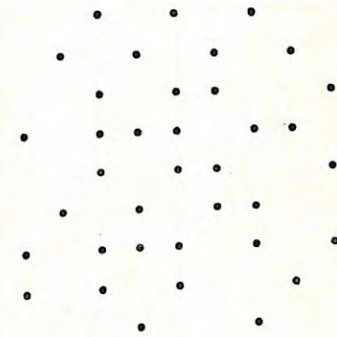
|  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

A quantidade de pontos é dada pelo numeral

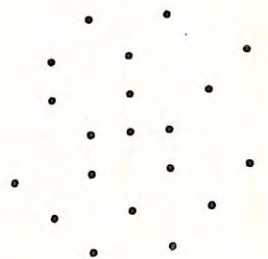
$$(134)_5$$

Exercícios:

15. Dê o numeral na base cinco do número de pontos à direita



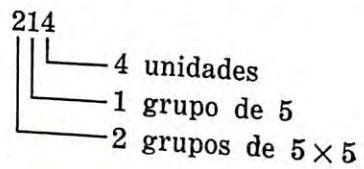
16. Dê o numeral na base cinco do número de pontos à direita



### 3.11. Notação Exponencial Para a Base 5.

Da mesma maneira que para a base 10, podemos representar qualquer número na base 5 mediante uma notação exponencial. Por exemplo:

$$(214)_5 = (2 \times 5^2) + (1 \times 5) + 4$$



Com esta notação, é muito fácil achar qual é o numeral correspondente na base 10, de um numeral da base cinco, pois, por exemplo:

$$\begin{aligned} (201)_5 &= (2 \times 5^2) + (0 \times 5) + 1 = \\ &= (2 \times 25) + 1 = (51)_{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (314)_5 &= (3 \times 5^2) + (1 \times 5) + 4 = \\ &= (3 \times 25) + 5 + 4 = 75 + 9 = (84)_{10} \end{aligned}$$

#### Exercícios:

17. Dê a notação exponencial para  $(14)_5$ ,  $(113)_5$ ,  $(2131)_5$ , etc.
18. a. verifique que  $(1341)_5 = (221)_{10}$   
b. os numerais  $(1341)_5$  e  $(221)_{10}$  são representações de uma mesma idéia de quantidade? por que?

### 3.12. Base 2

Sistema de base 2 também é chamado *Sistema Binário*.

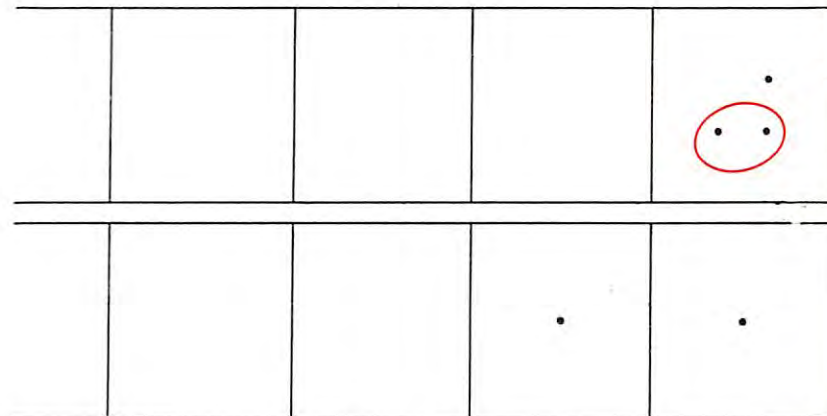
Como você já deve ter descoberto, êle faz agrupamentos de 2 em 2 e são necessários dois algarismos:

0 e 1,

para escrever qualquer numeral.

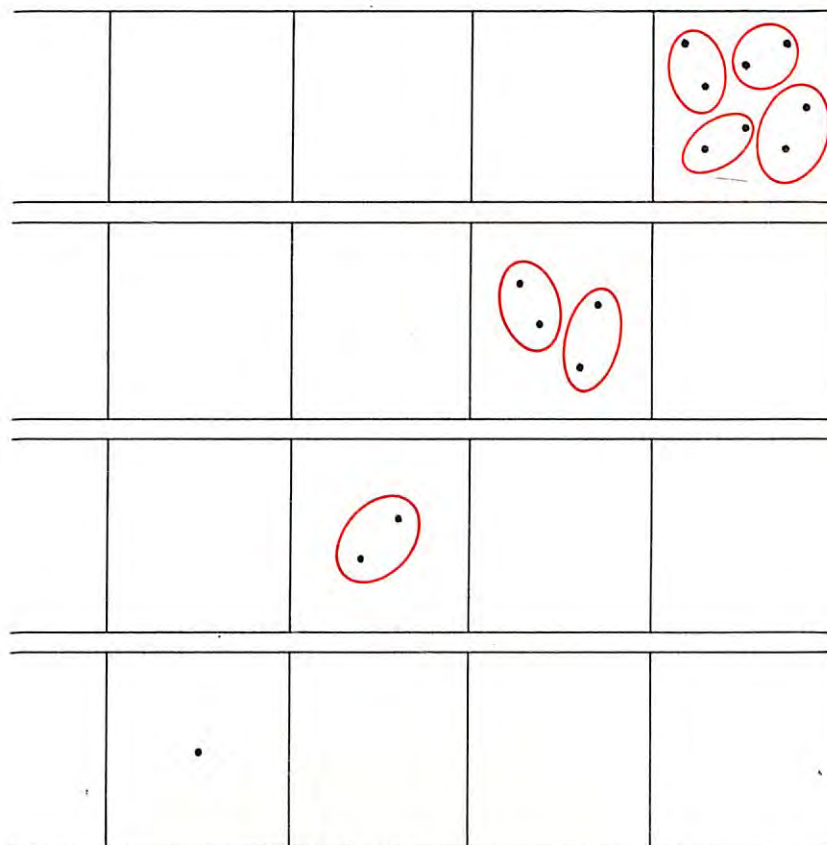
Exemplos:

Agora, cada grupo de 2 pontos passa para a ordem seguinte como 1 só ponto, portanto obtemos:



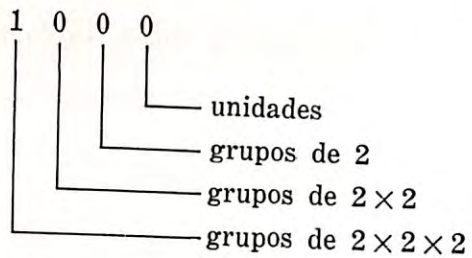
$$(3)_{10} = (11)_2$$

Outro exemplo:



$$(8)_{10} = (1000)_2$$

Usando a notação exponencial teremos:



$$(1000)_2 = (1 \times 2^3) + (0 \times 2^2) + (0 \times 2) + 0 = 1 \times 8 = (8)_{10}$$

O sistema binário (ou base 2) é muito importante atualmente porque é usado nos computadores eletrônicos.

**Exercícios:**

19. Complete o seguinte quadro:

| Numerais na base 10 | Numerais na base 5 | Numerais na base 2 |
|---------------------|--------------------|--------------------|
| 10                  |                    |                    |
|                     | 14                 |                    |
| 8                   |                    |                    |
|                     |                    | 1010               |
|                     | 23                 |                    |
|                     |                    | 1011101            |

3.13. Mudança de Base

Você já viu que:

- dado um numeral em qualquer base, para achar o numeral correspondente na base decimal, basta escrever esse numeral com a notação exponencial e efetuar os cálculos.

**Exemplos:**

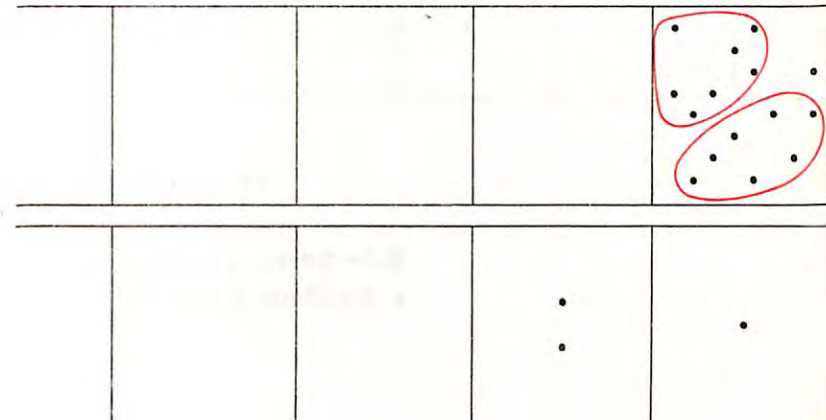
$$\begin{aligned} (121)_3 &= (1 \times 3^2) + (2 \times 3) + 1 \\ &= (1 \times 3 \times 3) + 6 + 1 \\ &= 9 + 6 + 1 \\ &= (16)_{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1011)_2 &= (1 \times 2^3) + (0 \times 2^2) + (1 \times 2) + 1 \\ &= (1 \times 2 \times 2 \times 2) + (0 \times 2 \times 2) + (1 \times 2) + 1 \\ &= 8 + 0 + 2 + 1 \\ &= (11)_{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (601)_7 &= (6 \times 7^2) + (0 \times 7) + 1 \\ &= (6 \times 49) + 1 \\ &= (295)_{10} \end{aligned}$$

- Suponha agora que você queira escrever um numeral decimal em uma outra base qualquer, por exemplo:

a. escrever 15 na base 7



$$15 = (21)_7$$

Você poderia ter obtido o numeral  $(21)_7$  sem fazer uso do desenho, bastando notar que, se você dividisse 15 por 7, obterá

$$\begin{array}{r} 15 \quad | \quad 7 \\ 1 \quad | \quad 2 \end{array}$$

logo

$$15 = (2 \times 7) + 1 = (21)_7$$

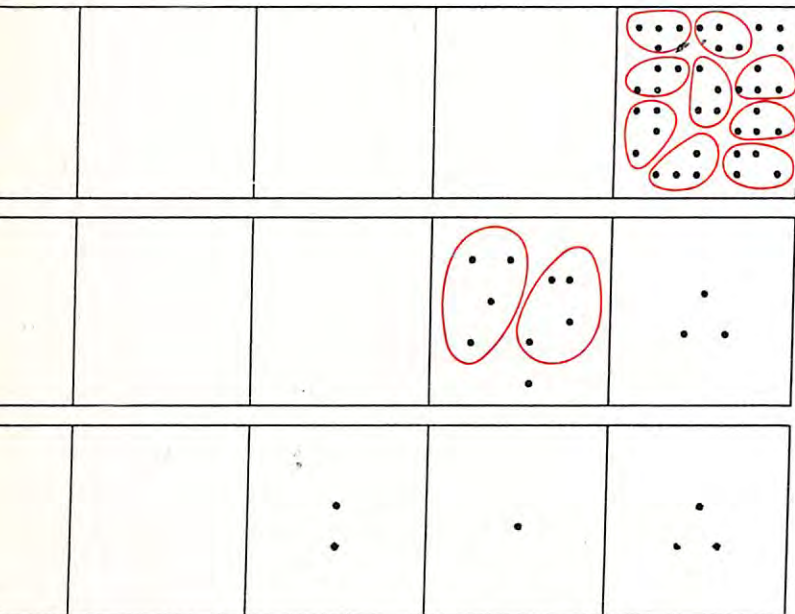
└───┬───┘  
unidades

└───┘  
grupos de 7

Nota: De agora em diante, para facilidade na escrita, sempre que em um numeral não estiver especificada a base, ela é a base 10, isto é  $15 = (15)_{10}$

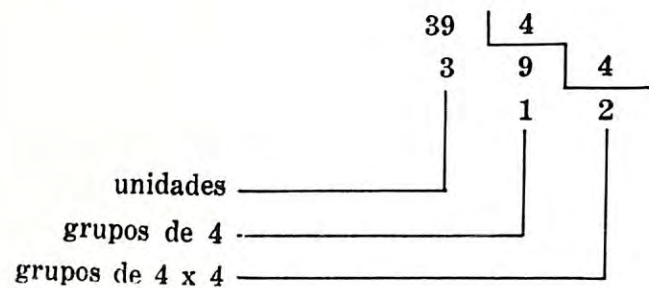
Exemplo:

Escrever 39 na base 4.



$$39 = (213)_4$$

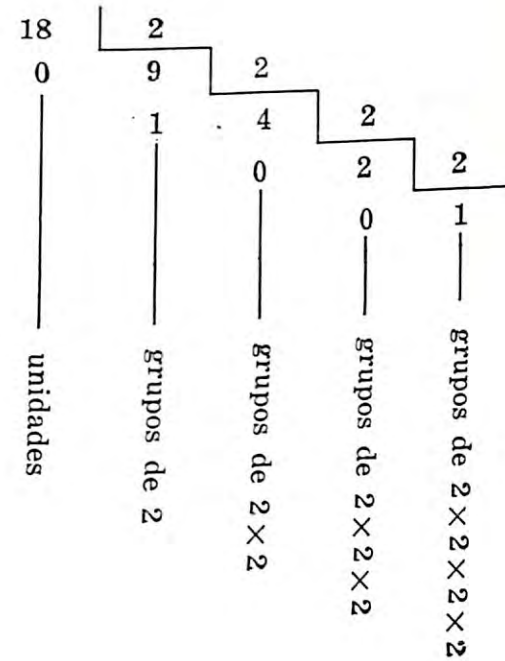
Este mesmo resultado você poderia obter dividindo 39 por 4 e dividindo o quociente obtido por 4.



Sempre que o novo quociente for maior ou igual à base dada, você deve fazer nova divisão.

Exemplo:

Escrever 18 na base 2.



$$18 = (10010)_2$$

Exercícios:

20. Complete as expressões abaixo:

$$36 = ( \quad )_5$$

$$107 = ( \quad )_4$$

$$13 = ( \quad )_2$$

21. Complete as expressões abaixo:

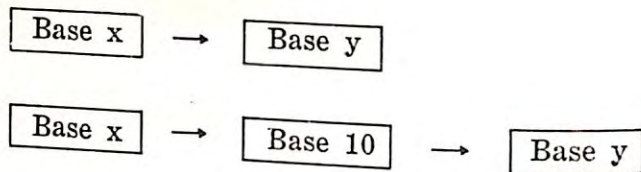
$$40 = ( \quad )_7$$

$$40 = ( \quad )_5$$

$$40 = ( \quad )_2$$

3. Finalmente, se você quiser escrever um numeral de uma base qualquer diferente de 10, como numeral de uma outra base também diferente de 10, você deve em 1.º lugar escrever o numeral na base 10 e depois transformá-lo para a base pedida.  
Esquemáticamente:





Exemplo:

Escrever  $(314)_5$  na base 7.

$$\begin{aligned} \text{a. } (314)_5 &= (3 \times 5^2) + (1 \times 5) + 4 \\ &= (3 \times 5 \times 5) + (1 \times 5) + 4 \\ &= (3 \times 25) + 5 + 4 \\ &= 75 + 5 + 4 \\ &= 84 \end{aligned}$$

$$\text{logo } (314)_5 = 84$$

$$\begin{array}{r} 84 \quad | \quad 7 \\ 14 \quad | \quad 12 \quad | \quad 7 \\ 0 \quad 5 \quad | \quad 1 \end{array} \quad \text{logo } 84 = (150)_7$$

Portanto,

$$(314)_5 = (150)_7$$

### Exercício

22. Preencha corretamente os claros das expressões:

$$(20)_5 = ( \quad )_7$$

$$(21)_3 = ( \quad )_5$$

$$( \quad )_5 = (32)_4$$

$$(18)_9 = ( \quad )_2$$

### Exercícios — Capítulo 3

23. Escreva no sistema decimal de numeração, os seguintes números:

- dois mil e três;
- quatro bilhões, doze mil e um;
- três milhões e quinze mil.

24. Escreva na linguagem corrente os seguintes números:

- 1 000 152
- 4 180 003
- 2 300 004 017.

25. Escreva os números de 1 a 20 no sistema binário de numeração.

26. Como terminam os números pares no sistema de base 2?

27. Se um conjunto tem  $(1010)_2$  elementos e outro tem  $(20)_5$  elementos, eles são equipotentes?

28. Quantas unidades representa o algarismo 4 no numeral  $(2540)_{10}$ ? E no numeral  $(2540)_6$ ?

29. Quantas unidades representa o algarismo 1 no numeral  $(1000000)_{10}$ ? E no numeral  $(1000000)_2$ ?

30. Escreva no sistema binário o número de subconjuntos de  $A = \{\Delta, \square, *\}$ .

31. Escreva no sistema de base 4 o número de elementos de  $A \times B$ , sendo:  $A = \{a, b, c\}$  e  $B = \{d, e, f, h\}$ .

32. Escreva no sistema de base três, os seguintes números:

- trezentos e trinta
- mil e vinte e oito
- vinte e sete.

33. Escreva no sistema romano de numeração as seguintes datas:

- do seu nascimento;
- da Independência do Brasil;
- da Proclamação da República;
- da fundação do seu colégio.

34. Escreva o número 3 239 no sistema de base 12. Você precisará de 12 símbolos para escrever números neste sistema. Use os 10 símbolos que você já conhece e "invente" os dois que estão faltando.

35. Escolha 4 números (menores que 20, para não dar muito

trabalho) e forme dois conjuntos: A e B.  
 A será o conjunto destes números escritos na base 3 e  
 B será o conjunto deles escritos na base 7.  
 Forme o conjunto R, determinado por:  
 ..... tem o mesmo número de algarismos que .....  
 Faça um diagrama e verifique se há uma aplicação  
 de A em B. Explique sua resposta.

36. Dados: o conjunto dos números inteiros escritos na base 2 e a relação: ..... termina com o mesmo algarismo que ..., verifique se esta relação é de equivalência. Em caso afirmativo forme as classes de equivalência.

37. Considere o conjunto: {A,B,C,D,E,F,G,H,I,J,K,L,M,N,O,P,Q,R,S,T,U,V,X,Y,Z} Escreva:

- o número de elementos no sistema de base dois,
- o número das que são formadas apenas por segmentos de reta, no sistema de base quatro.

38. Dado o número  $b = (2 \times 3^3) + (2 \times 3^2) + (1 \times 3) + 2$ , expressá-lo nas bases 2, 10 e 5.

39. Dado o conjunto desenhado ao lado.

exprima o número de elementos no sistema binário.

40. Usando a notação exponencial escreva:

- $3 \times 3 \times 3 =$
- $5 \times 5 \times 5 \times 5 =$
- $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 =$
- $2 \times 4 \times 8 =$
- $8 \times 4 \times 16 =$
- $5 \times 25 =$

41. Decomponha os seguintes números, nas unidades das diversas ordens, usando a notação exponencial:

- 526 =
- 7582 =
- 705 =
- $(135)_6 =$
- $(101)_2 =$
- $(304)_5 =$
- $(10213)_4 =$

42. Escreva os seguintes números na base 10:

- $(2103)_4 =$
- $(10011)_2 =$
- $(1075)_8 =$

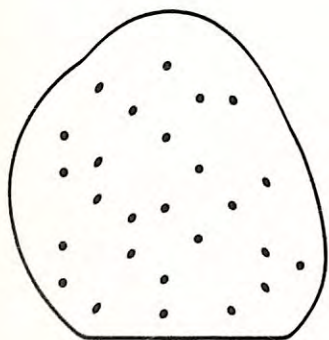
43. Dado o número  $a = (3 \times 10^3) + (5 \times 10^2) + (1 \times 10) + 8$ , expressá-lo nas bases 10, 5 e 2.

44. Quantos numerais poderia você dar para o número sete? Explique.

45. Use a notação exponencial:

- $(abc)_3 =$
- $(abcd)_5 =$
- $a_1 a_2 \dots a_9 a_{10} =$
- $abcde =$

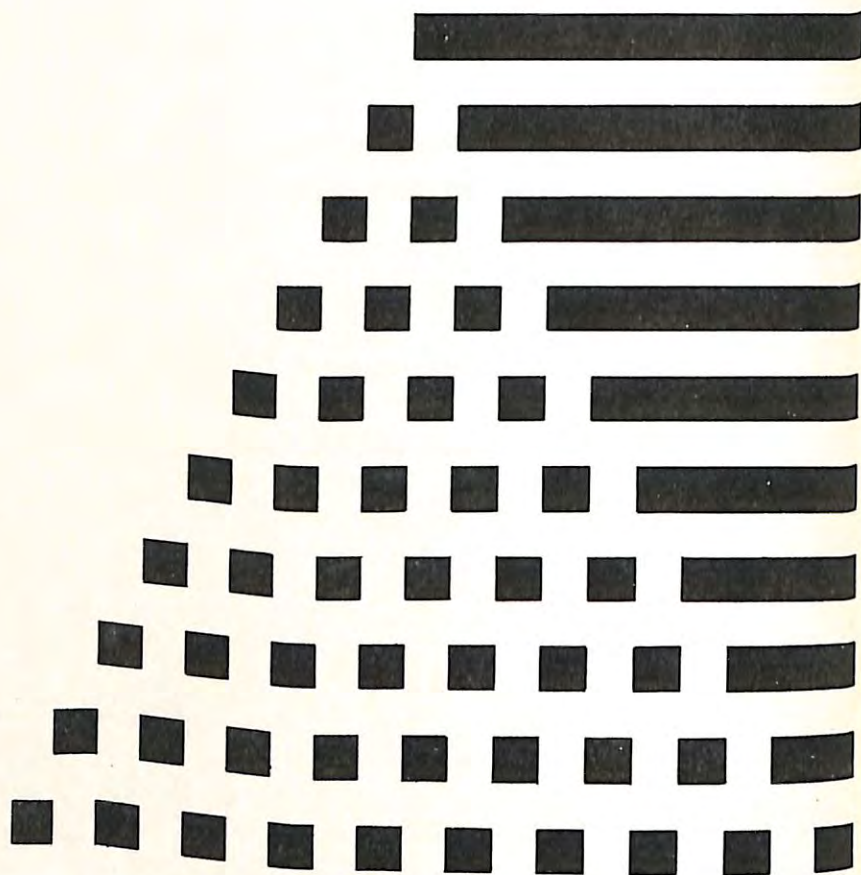
Que valores podem assumir as letras a,b,c,d, etc., em cada exemplo? Por que?



# Capítulo

## 4A

### O conjunto dos números inteiros Operações



## PARTE A: OPERAÇÕES

### 4A.1. Adição

Dado  $I = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ ,  
considere os números 3 e 6 pertencentes a  $I$ ,

$$3 \in I$$

$$6 \in I$$

Construa dois conjuntos  $A$  e  $B$  de tal maneira que

$A$  tenha 3 elementos,

$B$  tenha 6 elementos e

$A \cap B = \emptyset$ , isto é,  $A$  e  $B$  não têm elementos comuns.

Por exemplo:

$$A = \{\Delta, \square, \circ\} \text{ e}$$

$$B = \{a, b, c, d, e, f\}.$$

Efetuada a reunião de  $A$  e  $B$ , você obtém

$$A \cup B = \{\Delta, a, e, \circ, \square, f, c, b, d\}$$

Quantos elementos tem  $A \cup B$ ?

$$A \cup B = \{\Delta, a, e, \circ, \square, f, c, b, d\}$$

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \dots\}$$

O número de elementos de  $A \cup B$  é 9.

O número 9 é chamado *soma* de 3 e 6 e indica-se

$$3 + 6 = 9$$

Note que, ao par ordenado de números inteiros  $(3,6)$ , associamos o número inteiro 9.

Esquemáticamente,

$$(3,6) \longrightarrow 9$$

$$(3,6) \in I \times I \rightarrow 9 \in I$$

De maneira semelhante, dado  $(a,b)$  um elemento qualquer de  $I \times I$ , a êle associamos um elemento  $s$  de  $I$ , obtido do seguinte modo:

constrói-se um conjunto  $A$  com  $a$  elementos,  
constrói-se um conjunto  $B$  com  $b$  elementos,  
e tais que  $A \cap B = \emptyset$ .

Calcula-se  $A \cup B$ .

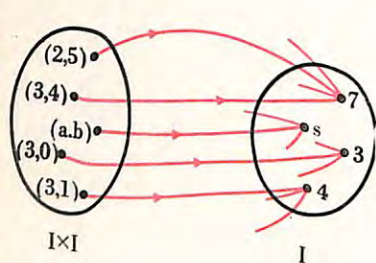
$s$  é o número de elementos de  $A \cup B$ .  
 $s$  chama-se a soma de  $a$  e  $b$  e indica-se

$$a + b = s.$$

Exemplos:

$$\begin{aligned} (2,5) &\longrightarrow 7 \\ (3,4) &\longrightarrow 7 \\ (3,0) &\longrightarrow 3, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Em um diagrama, teríamos:

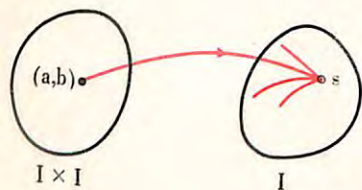


$$a + b = s.$$

Portanto, temos uma aplicação de  $I \times I$  em  $I$ . (Por que?)  
A esta aplicação damos o nome de *operação de adição*;  
 $a$  e  $b$  recebem o nome de *parcelas*.

Podemos, agora, dar a seguinte definição:

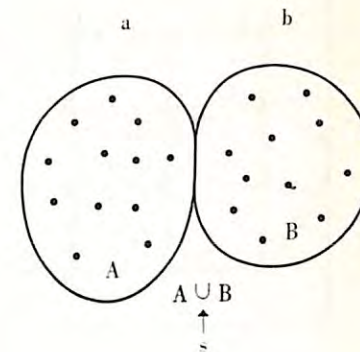
**Operação de Adição** é a aplicação de  $I \times I$  em  $I$ , que, ao par ordenado  $(a,b)$  de  $I \times I$ , associa  $s \in I$ , de tal maneira que  $a$ ,  $b$  e  $s$  sejam, respectivamente, os números de elementos de  $A$ ,  $B$  e  $A \cup B$ , sendo  $A$  e  $B$  dois conjuntos disjuntos quaisquer.



$$(a,b) \longrightarrow s$$

$a$  e  $b$  chamam-se *parcelas*  
 $s$  chama-se *soma* de  $a$  e  $b$  e indica-se

$$a + b = s.$$



Exercícios:

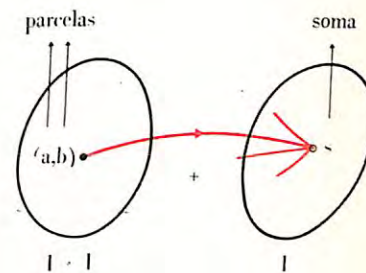
1. Sejam:  $A = \{\square, \triangle, \circ\}$ ,  $B = \{x, y\}$ . Determine:

- o número de elementos de  $A$  e o número de elementos de  $B$ ;
- o número de elementos de  $A \cup B$ ;
- então,  $(\dots) \longrightarrow \dots$ , ou  $\dots + \dots = \dots$ .

2. Proceda exatamente como acima para  $A = \emptyset$  e  $B = \{a,b,c\}$

3. Complete:

$$\begin{aligned} (a,0) &\longrightarrow a & (3,4) &\longrightarrow \\ (0,a) &\longrightarrow & (5,.) &\longrightarrow 8 \\ (a,1) &\longrightarrow & (a,a) &\longrightarrow \\ (1,a) &\longrightarrow 1 + a & (b,.) &\longrightarrow b + 1 \end{aligned}$$



4. Quais os pares  $(a,b)$  de números inteiros que tornam verdadeira a igualdade:

$$a + b = 9 ?$$

#### 4A.2. Multiplicação

Sejam  $3 \in I$  e  $4 \in I$ .

Construa  $A$  e  $B$  conjuntos quaisquer, respectivamente, com 3 e 4 elementos:

$$A = \{a,b,c\}, B = \{x,y,z,v\}$$

Efetue o produto cartesiano de  $A$  por  $B$ .

$$A \times B = \{(a,x), (a,y), (a,z), (a,v), (b,x), (b,y), (b,z), (b,v), (c,x), (c,y), (c,z), (c,v)\}.$$

O número de elementos de  $A \times B$  é 12 (veja o gráfico do produto cartesiano).

Ao par  $(3,4)$  de números inteiros, você pode associar o número inteiro 12.

Esquemáticamente:

$$(3,4) \longrightarrow 12$$

$$(3,4) \in I \times I \longrightarrow 12 \in I$$

De maneira semelhante, dado  $(a,b)$  um elemento qualquer de  $I \times I$ , a ele associamos o elemento  $p \in I$ , obtido da seguinte maneira:

- constrói-se um conjunto A com  $a$  elementos;
- constrói-se um conjunto B com  $b$  elementos;

$p$  é o número de elementos de  $A \times B$ ;  $p$  é o *produto* de  $a$  por  $b$   
Indica-se

$$a \times b = p \text{ ou } a \cdot b = p$$

Exemplos:

$$(2,5) \longrightarrow 10$$

$$(4,5) \longrightarrow 20$$

$$(3,4) \longrightarrow 12$$

etc.

Em um diagrama, teríamos:

Como o conjunto  $I \times I$  é infinito, é impossível representar no diagrama todos os pares ordenados que a ele pertencem; porém, você já sabe, de suas experiências no primário, que *qualquer* que seja o par  $(a,b) \in I \times I$ , existe *sempre um único* número  $p \in I$ , tal que

$$a \times b = p.$$

Portanto, temos uma *aplicação* de  $I \times I$  em  $I$ . (Por que?)  
A esta aplicação damos o nome de *operação de multiplicação*.

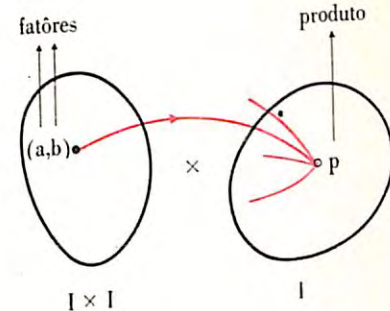
Podemos, agora, definir a operação de multiplicação:

*Operação de Multiplicação* é a aplicação de  $I \times I$  em  $I$ , que, ao par ordenado  $(a,b) \in I \times I$ , associa  $p \in I$ , de maneira que  $a$ ,  $b$  e  $p$  sejam, respectivamente, os números de elementos de  $A$ ,  $B$  e  $A \times B$ , sendo  $A$  e  $B$  conjuntos quaisquer.

$$(a,b) \longrightarrow p$$

$a$  e  $b$  chamam-se *fatôres*;  
 $p$  chama-se *produto* de  $a$  por  $b$  e indica-se

$$a \times b = p \text{ ou } a \cdot b = p$$



Exercícios:

5. Explique porque  $A$  e  $B$  agora não precisam ser disjuntos.
6.  $A$  pode ser igual a  $B$ ?
7. Quando  $A = \emptyset$  ou  $B = \emptyset$ , ou ambos, então  $A \times B = \emptyset$ . Portanto, quando um dos fatôres é nulo, qual é o produto?
8. Complete:
 

|                           |                            |
|---------------------------|----------------------------|
| $(3,4) \longrightarrow$   | $(a,0) \longrightarrow 0$  |
| $(2,5) \longrightarrow$   | $(0,a) \longrightarrow$    |
| $(a,1) \longrightarrow a$ | $(1,1) \longrightarrow$    |
| $(1,a) \longrightarrow$   | $(3,.) \longrightarrow 24$ |
9. Você já deve ter visto o *produto* de  $a$  por  $b$ , dado como a soma de  $b$  parcelas iguais a  $a$ ; por exemplo se  $a = 6$  e  $b = 4$ , então

$$a \times b = 6 \times 4 = 6 + 6 + 6 + 6.$$

Esta é uma outra maneira de definir multiplicação; porém, se déssemos esta definição, teríamos que *impor* um resultado quando  $b$  fôsse 1 ou 0, pois a adição só está definida para 2 ou mais parcelas.

Assim sendo, se aceitarmos esta definição, teremos que admitir as seguintes convenções:

$a \times 0 = 0$  qualquer que seja  $a \in \mathbb{I}$ .  
 $a \times 1 = a$  qualquer que seja  $a \in \mathbb{I}$ .

10. Usando a definição do exercício anterior, calcular os seguintes produtos:

- a.  $12 \times 3$                       c.  $a \times b$ , com  $a$  e  $b \in \mathbb{I}$   
 b.  $32 \times 4$                       d.  $b \times a$ , com  $a$  e  $b \in \mathbb{I}$ .

### 4A.3. Propriedades da Adição e da Multiplicação

Uma vez definidas as operações de adição e multiplicação daremos para você os nomes de algumas propriedades que elas possuem e que você, certamente, já conhece, pois deve tê-las usadas no curso primário.

#### I. Propriedade Comutativa

##### Adição

$$2 + 3 = 5$$

$$3 + 2 = 5 ;$$

portanto (como a igualdade é simétrica e transitiva)

$$2 + 3 = 3 + 2$$

A ordem das parcelas não altera a soma.

##### Multiplicação

$$2 \times 3 = 6$$

$$3 \times 2 = 6$$

portanto (como a igualdade é simétrica e transitiva)

$$2 \times 3 = 3 \times 2$$

A ordem dos fatores não altera o produto.

Tome mais exemplos para ver que isto sempre acontece. Traduzimos estes fatos, dizendo que a adição e a multiplicação gozam da *propriedade comutativa*, ou seja:

Qualquer que seja  $(a,b) \in \mathbb{I} \times \mathbb{I}$  tem-se sempre

$$a + b = b + a$$

$$a \times b = b \times a.$$

#### II. Propriedade Associativa

As expressões do tipo

$$2 + 3 + 6 \quad \text{e} \quad 2 \times 3 \times 6$$

não têm até agora sentido, porque definimos adição e multiplicação somente para pares de números inteiros. Para que expressões como essas tenham sentido, devemos fazer o seguinte:

$$(2+3) + 6 \quad \text{e} \quad (2 \times 3) \times 6$$

convencionando que o que se encontra entre parêntesis são os *resultados* das operações indicadas, isto é

$$(2+3) + 6 = 5 + 6 \quad \text{e} \quad (2 \times 3) \times 6 = 6 \times 6$$

Agora, estas expressões têm sentido, pois estamos operando com *pares* de números:

$$5 + 6 \quad \text{e} \quad 6 \times 6 .$$

Observe que

$$(2+3) + 6 = 5+6 = 11$$

e

$$2 + (3+6) = 2 + 9 = 11 ;$$

portanto,

$$(2+3) + 6 = 2 + (3+6)$$

$$(2 \times 3) \times 6 = 6 \times 6 = 36$$

e

$$2 \times (3 \times 6) = 2 \times 18 = 36 ;$$

portanto,

$$(2 \times 3) \times 6 = 2 \times (3 \times 6)$$

Traduzimos estes fatos dizendo que a adição e a multiplicação gozam da *propriedade associativa*, ou seja

Quaisquer que sejam os números inteiros  $a, b, e c$ , temos sempre

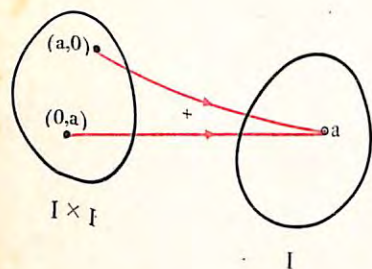
$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

e

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

### III. Existência de Elemento Neutro.

#### Adição



Note que

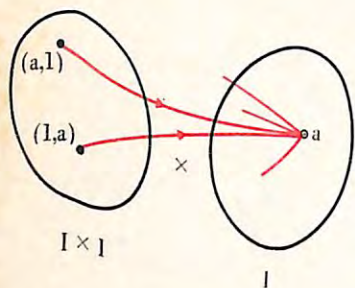
$$\begin{aligned} 2 + 0 &= 0 + 2 = 2 \\ 3 + 0 &= 0 + 3 = 3 \\ \text{etc.} \end{aligned}$$

**ZERO** é o número que, adicionado (à esquerda ou à direita) a qualquer número, reproduz esse número.

#### Multiplicação

$$\begin{aligned} 2 \times 1 &= 1 \times 2 = 2 \\ 1451 \times 1 &= 1 \times 1451 = 1451 \\ \text{etc.} \end{aligned}$$

**UM** é o número que, multiplicado (à esquerda ou à direita) por qualquer número, reproduz esse número.



Traduzimos estes fatos, dizendo que zero é o elemento neutro da adição e um é o elemento neutro da multiplicação, ou seja,

Qualquer que seja  $a \in I$ , existe  $0 \in I$  e  $1 \in I$  tais que

$$\begin{aligned} a + 0 &= 0 + a = a \\ a \times 1 &= 1 \times a = a \end{aligned}$$

### IV. Propriedade Distributiva da Multiplicação em Relação à Adição.

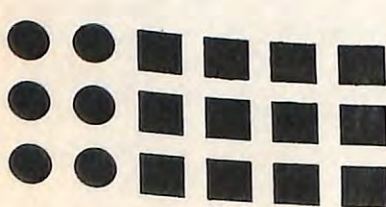
Esta nova propriedade relaciona as duas operações já estudadas. Para entender como ela funciona, vamos examinar um exemplo simples.

Considere a figura ao lado, constituída de botões circulares e botões quadrados, dispostos na ordem apresentada. O número de botões pode ser calculado de várias maneiras, entre as quais as relacionadas abaixo.

a. Em cada linha temos 2 botões circulares e 4 botões quadrados ou seja,  $(2+4)$  botões em cada linha; como são 3 linhas temos um total de botões igual a

$$(2+4) \times 3;$$

b. Temos 2 colunas com 3 botões circulares cada, ou seja  $(2 \times 3)$  botões circulares,



e

4 colunas de 3 botões quadrados cada, ou seja

$$(4 \times 3) \text{ botões quadrados.}$$

O número total de botões é, portanto,

$$(2 \times 3) + (4 \times 3)$$

Como nas duas contagens o número de botões é o mesmo, é claro que

$$(2+4) \times 3 = (2 \times 3) + (4 \times 3).$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} (7+6) \times 3 &= 13 \times 3 = 39 \text{ mas} \\ (7 \times 3) + (6 \times 3) &= 21 + 18 = 39, \text{ logo} \\ (7+6) \times 3 &= (7 \times 3) + (6 \times 3). \end{aligned}$$

Generalizando:

Quaisquer que sejam  $a, b, c$  inteiros temos

$$a \times (b+c) = (a \times b) + (a \times c)$$

e

$$(b+c) \times a = (b \times a) + (c \times a)$$

### Exercícios:

11. Nas seguintes igualdades, dizer qual é a propriedade que está sendo empregada:

a.  $3 + 49 = 49 + 3$

b.  $(4 + 4) + 90 = 4 + (4 + 90)$

c.  $0 + 3 = 3 + 0 = 3$

d.  $(2 \times 40) \times 784 = 2 \times (40 \times 784)$

e.  $4054 \times 1 = 1 \times 4054 = 4054$

f.  $9 \times (10 + 4) = (9 \times 10) + (9 \times 4)$

g.  $90 \times 1804 = 1804 \times 90$

h.  $(1 + 11) \times 50 = (1 \times 50) + (11 \times 50)$

12. Sendo  $a$ ,  $b$  e  $c$  números inteiros quaisquer, dizer quais das expressões abaixo são falsas e quais são verdadeiras:

- I.  $(a + b) + c = c + (b + a)$   
 II.  $(a \times b) + a = (a \times a) + (b \times a)$   
 III.  $(a + b) \times b = (a \times b) + (b \times b)$   
 IV.  $(a + 0) \times b = a \times b$

#### 4A.4. Aplicações das Propriedades

I. Considere a adição dos números 3, 5, 7 e 8. Para efetuá-la, podemos efetuar, primeiramente, a adição dos três primeiros, usando a propriedade associativa e adicionar o resultado ao último:

$$\begin{aligned} 3 + 7 + 5 + 8 &= [(3 + 7) + 5] + 8 \\ &= [10 + 5] + 8 \\ &= 15 + 8 \\ &= 23 \end{aligned}$$

Ou então:

$$\begin{aligned} 3 + 7 + 5 + 8 &= [3 + (7 + 5)] + 8 \\ &= [3 + 12] + 8 \\ &= 15 + 8 \\ &= 23 \end{aligned}$$

Poderíamos fazer, também:

$$3 + [(7 + 5) + 8] = 3 + [12 + 8] = 3 + 20 = 23, \text{ isto é, usando a propriedade associativa para os três últimos e adicionando sua soma ao primeiro.}$$

O mesmo vale para o produto de 4 números:

$$3 \times 7 \times 5 \times 8 = 3 \times [7 \times (5 \times 8)] = 3 \times [7 \times 40] = 3 \times 280 = 840$$

ou,

$$3 \times 7 \times 5 \times 8 = [3 \times (7 \times 5)] \times 8 = [3 \times 35] \times 8 = 105 \times 8 = 840$$

#### Exercícios:

13. Verifique que  $3+7+5+8 = (3+7) + (5+8)$ .  
 O mesmo para  $3 \times 7 \times 5 \times 8 = (3 \times 7) \times (5 \times 8)$ .

14. Faça uso das propriedades convenientes para que a adição se realize mais facilmente.

- a.  $37+89+43+21$   
 b.  $92+64+36+28$

II. Vimos que, sendo  $a$ ,  $b$  e  $c$  números inteiros quaisquer, a propriedade distributiva afirma que:

$$a \times (b+c) = (a \times b) + (a \times c) \text{ ou } (b+c) \times a = (b \times a) + (c \times a)$$

Esta propriedade pode ser estendida para o caso em que temos uma soma indicada de várias parcelas.

Assim,

$$3 \cdot (4+7+5) = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 7 + 3 \cdot 5$$

De fato:

$$\begin{aligned} 3 \cdot (4+7+5) &= 3 \cdot 16 = 48 \\ 3 \cdot 4 + 3 \cdot 7 + 3 \cdot 5 &= 12+21+15 = 48 \end{aligned}$$

Igualmente,

$$a \cdot (b+c+d+e) = a \cdot b + a \cdot c + a \cdot d + a \cdot e.$$

Para calcular  $(3+5) \times (7+8)$ , podemos usar a propriedade distributiva, considerando  $(3+5)$  como *um número*, multiplicado pela soma indicada  $(7+8)$ .

Temos, então:

$$\begin{aligned} (3+5) \cdot (7+8) &= (3+5) \times 7 + (3+5) \times 8 \\ &= (3 \times 7) + (5 \times 7) + (3 \times 8) + (5 \times 8) \\ &= 21 + 35 + 24 + 40 \\ &= 120 \end{aligned}$$

Verifiquemos que de fato vale a igualdade:

$$\begin{aligned} (3+5) \cdot (7+8) &= 8 \times 15 \\ &= 120 \end{aligned}$$

#### Exercícios:

15. Complete:

- a.  $(a+b+c) \times d = \dots$   
 b.  $8 \cdot (3+4+\dots) = 8 \times 3 + 8 \times 4 + 8 \times 7$   
 c.  $(7+\dots+6) \times 3 = 7 \times \dots + 5 \times \dots + \dots \times \dots$



16. Nas seguintes igualdades, dizer quais são as propriedades que estão sendo empregadas:

$$\begin{aligned} \text{a. } 12 \times 48 &= (10+2) \times (40+8) \\ &= 10 \cdot (40+8) + 2 \cdot (40+8) \\ &= (10 \times 40) + (10 \times 8) + (2 \times 40) + (2 \times 8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } 586 + 293 &= (500+80+6) + (200+90+3) \\ &= (500+200) + (80+90) + (6+3) \\ &= (700) + (80+20+70) + (6+3) \\ &= (700+100) + (70) + (6+3) \\ &= 800 + 70 + 9 \\ &= 879 \end{aligned}$$

17. Calcule, usando as propriedades:

$$\begin{aligned} \text{a. } &(10+2) \times (30+3) \\ \text{b. } &(50+1) \times (30+9) \\ \text{c. } &(60+4) \times (40+8) \end{aligned}$$

### III. Justificação das Técnicas Operatórias da Adição e da Multiplicação

Considere a adição:  $47 + 56$

Você efetua normalmente assim:

$$\begin{array}{r} 47 + \\ 56 \\ \hline 103 \end{array}$$

Vamos mostrar porque. Vamos decompor 47 e 56 nas unidades das diversas ordens (unidades simples, dezenas, centenas, etc)

$$\begin{aligned} 47 &= 40 + 7 \\ 56 &= 50 + 6. \end{aligned}$$

Usando as propriedades associativa e comutativa, temos:

$$\begin{aligned} 47 + 56 &= (40+7) + (50+6) \\ &= (40+50) + (7+6) \\ &= (40+50) + (10+3) \\ &= (40+50+10) + 3 \\ &= 100 + 3 \\ &= 103 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 40 + 7 \\ 50 + 6 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{aligned} 90 + (10 + 3) &= \\ &\text{(um que vai)} \\ (90 + 10) + 3 &= \\ 100 + 3 &= 103 \end{aligned}$$

Considere, agora, a multiplicação de 56 por 2.  
Temos, de acordo com o dispositivo prático que você usa:

$$\begin{array}{r} 56 \\ \times 2 \\ \hline 112 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Como } 56 &= 50 + 6, \\ 56 \times 2 &= (50+6) \times 2 \\ &= (50 \times 2) + (6 \times 2) \\ &= 100 + 12 \\ &= (100) + (10+2) \\ &= (100+10) + 2 \\ &= 110 + 2 \\ &= 112 \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{array}{r} 50 + 6 \\ \quad 6 \\ \hline 100 + (10+2) = \\ (100 + 10) + 2 = \\ 110 + 2 = 112 \end{array}$$

Vejamos outro exemplo:

$$26 \times 42.$$

$$\begin{array}{r} \text{Disp. Prático} \\ 26 \\ 42 \\ \hline 52 \\ 104 \\ \hline 1092 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Justificativa} \\ 26 \times 42 = (20+6) \times (40+2) \\ = (20+6) \cdot 40 + (20+6) \cdot 2 \\ = (20 \cdot 40 + 6 \cdot 40) + (20 \cdot 2 + 6 \cdot 2) \\ = (800+240) + (40+12) \\ = 1040 + 52 \\ = 1092 \end{array}$$

**Exercícios:**

18. Efetue as operações abaixo, usando as propriedades:

- a.  $154 + 278$                       c.  $36 \times 12$   
 b.  $78 \times 3$                               d.  $150 \times 36$

19. Efetue as operações abaixo, usando o dispositivo prático e a decomposição nas unidades das diversas ordens:

- a.  $25 + 12$                               c.  $12 \times 14$   
 b.  $13 + 49$                               d.  $33 \times 22$

**4A.5. Tábuas para Adição e Multiplicação**

Costuma-se construir tábuas para as operações, que nada mais são do que a reunião das já conhecidas tabuadas. Tais tábuas servem para memorizar os fatos básicos das operações.

↓

|     |   |   |          |   |   |      |
|-----|---|---|----------|---|---|------|
| +   | 0 | 1 | 2        | 3 | 4 | .... |
| 0   | 0 | 1 | 2        | 3 | 4 | .... |
| 1   | 1 | 2 | 3        | 4 | 5 | .... |
| 2   | 2 | 3 | 4        | 5 | 6 | .... |
| → 3 | 3 | 4 | <b>5</b> | 6 | 7 | .... |
| 4   | 4 | 5 | 6        | 7 | 8 | .... |
| .   | . | . | .        | . | . | .    |
| .   | . | . | .        | . | . | .    |

↓

|     |   |   |          |    |    |      |
|-----|---|---|----------|----|----|------|
| ×   | 0 | 1 | 2        | 3  | 4  | .... |
| 0   | 0 | 0 | 0        | 0  | 0  | .... |
| 1   | 0 | 1 | 2        | 3  | 4  | .... |
| 2   | 0 | 2 | 4        | 6  | 8  | .... |
| → 3 | 0 | 3 | <b>6</b> | 9  | 12 | .... |
| 4   | 0 | 4 | 8        | 12 | 16 | .... |
| .   | . | . | .        | .  | .  | .    |
| .   | . | . | .        | .  | .  | .    |

Estão indicados:  $3 + 2 = 5$  e  $3 \times 2 = 6$ .

**Exercícios:**

20. Da mesma forma que, para a base 10, podemos fazer tábuas de adição e multiplicação para bases diferentes de 10. Por exemplo, tomemos a base 4. Temos que  $6 = (12)_4$ , como é fácil verificar pelo desenho.

Analogamente,  $(3)_4 \times (3)_4 = (21)_4$ .

Complete as tábuas ao lado para adição e multiplicação na base 4.

|   |   |    |    |    |
|---|---|----|----|----|
| + | 0 | 1  | 2  | 3  |
| 0 | 0 | 1  | 2  | 3  |
| 1 | 1 |    | 3  | 10 |
| 2 | 2 |    |    |    |
| 3 | 3 | 10 | 11 |    |

21. Preencha as tábuas ao lado para base 2.

|   |   |   |    |   |
|---|---|---|----|---|
| × | 0 | 1 | 2  | 3 |
| 0 | 0 | 0 |    | 0 |
| 1 |   | 1 |    |   |
| 2 | 0 |   | 10 |   |
| 3 |   | 3 | 12 |   |

22. Usando o exercício 20, efetue:

- a)  $(31)_4 + (21)_4$   
 b)  $(113)_4 + (112)_4$

23. Usando o exercício 21, efetue:

- a)  $(11)_2 + (1)_2$   
 b)  $(101)_2 + (11)_2$

|   |   |   |
|---|---|---|
| + | 0 | 1 |
| 0 |   |   |
| 1 |   |   |

|   |   |   |
|---|---|---|
| × | 0 | 1 |
| 0 |   |   |
| 1 |   |   |

**4A.6. Subtração**

Vamos colocar o seguinte problema: dado  $(a,b)$  um par qualquer de números inteiros, existe sempre um número inteiro  $x$ , de tal maneira que  $x + b = a$  ?

Por exemplo, dado  $(7,3) \in \mathbb{I} \times \mathbb{I}$ , existe  $x \in \mathbb{I}$  tal que  $x + 3 = 7$  ? Neste caso, é claro que  $x$  existe, e é igual a 4, pois  $4 + 3 = 7$ . O número 4 chama-se *diferença* entre 7 e 3 e indica-se  $4 = 7 - 3$ .

Analogamente,

$5 - 2 = 3$  porque  $3 + 2 = 5$ ,

$1\ 984 - 1\ 200 = 784$  porque  $784 + 1\ 200 = 1\ 984$ .

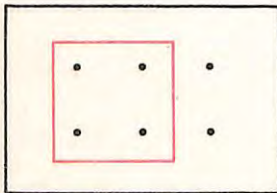
Assim sendo, as sentenças

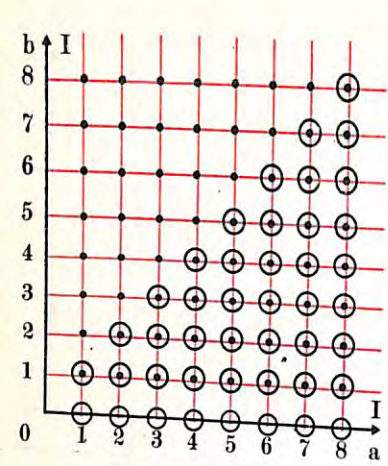
$x + 3 = 7$  e  $7 - 3 = x$

significam exatamente a mesma coisa. Dar uma delas é o mesmo que dar a outra.

Suponha, agora, que o par seja  $(3,7)$ . Existe  $x \in \mathbb{I}$ , para o qual  $x = 3 - 7$ , ou seja

$x + 7 = 3$  ?





Evidentemente não, pois *nenhum número inteiro somado a 7 resulta 3!*

Surge, portanto, a pergunta: para que elementos  $(a,b)$  de  $I \times I$ , existe  $d \in I$ , tal que

$$d + b = a ?$$

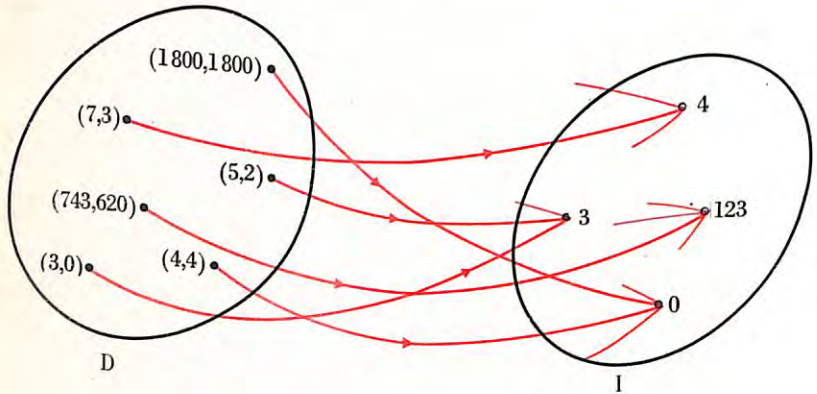
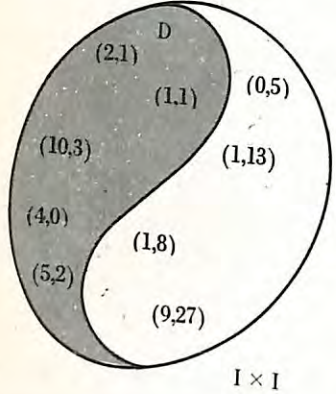
É o que veremos agora ao definir a *operação de subtração para números inteiros*.

No produto cartesiano  $I \times I$ , considere somente os pares ordenados  $(a,b)$ , para os quais  $a$  é maior ou igual a  $b$ , isto é,  $a \geq b$ ; por exemplo os pares  $(5,2)$ ,  $(1\ 800,1\ 800)$ ,  $(743,620)$ , etc.

Todos estes elementos formam um subconjunto de  $I \times I$  que chamaremos D.

A relação de D em I, que a todo par  $(a,b) \in D$  associa o número  $d \in I$ , tal que  $d + b = a$ , é uma aplicação (Por que?)

Diagrama da Relação (somente para alguns elementos)

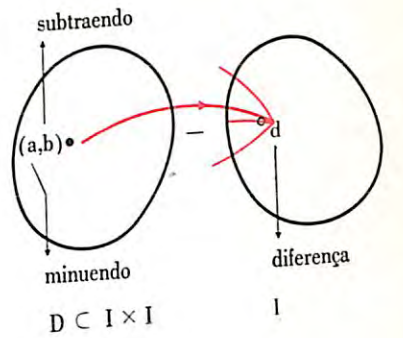


Podemos, então, dar a seguinte definição:

*Operação de subtração* é a aplicação que a cada par ordenado  $(a,b) \in D$  associa  $d \in I$ , de tal maneira que  $d + b = a$ . D é o subconjunto de  $I \times I$  dos pares  $(a,b)$  para os quais  $a \geq b$ .

$(a,b) \longrightarrow d$

$a$  chama-se *minuendo*  
 $b$  chama-se *subtraendo*  
 $d$  chama-se *diferença* entre  $a$  e  $b$  e indica-se

$$a - b = d.$$


**Exercícios:**

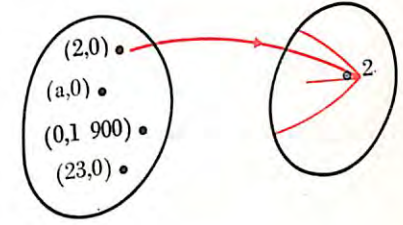
24. Complete:

- a.  $3 - 2 = 1$  porque  $1 + 2 = \dots$
- b.  $9\ 032 - 894 = 8\ 138$  porque  $8\ 138 + 894 = \dots$
- c.  $x - 0 = x$  porque  $x + 0 = \dots$
- d.  $x - y = z$  porque  $z + y = \dots$

25. Justifique porque

- a.  $11 - 3 = 8$
- b.  $900 - 1 = 899$
- c.  $1\ 904 - 4 = 1\ 900$
- d.  $184 - 8 = 176$

26. Complete o diagrama ao lado para os elementos indicados, sabendo que a aplicação é a operação de subtração.



27. A mesma questão para o diagrama seguinte:

28. A subtração goza da propriedade comutativa? Por que?

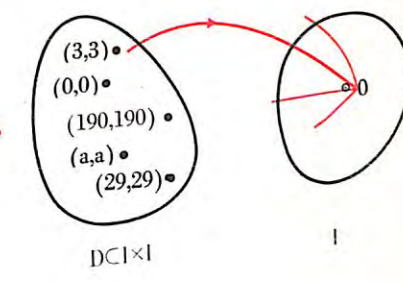
29. A subtração não goza da propriedade associativa, pois, por exemplo

$8 - 4 - 3$  pode ser

$$(8 - 4) - 3 = 4 - 3 = \boxed{1}$$

e

$$8 - (4 - 3) = 8 - 1 = \boxed{7}$$

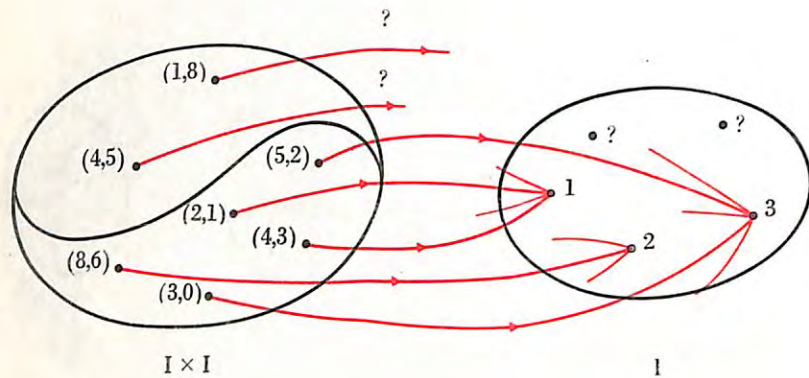


Quando mostramos que uma determinada propriedade não é válida, exibindo um exemplo onde ela não se verifica, tal exemplo recebe o nome de *contra-exemplo*. Dê um *contra-exemplo* da propriedade associativa da subtração.

#### 4A.7. Ampliação do Campo Numérico

Como a subtração só está definida para pares  $(a,b)$  tais que  $a \geq b$ , se  $a < b$ , como  $(3,5)$ ,  $(0,1)$ ,  $(2,8)$ , etc., não é possível encontrar a diferença no conjunto  $I = \{0,1,2,3,4,\dots\}$

$$\begin{aligned} (3,5) &\longrightarrow d = 3-5 \quad ? \\ (0,1) &\longrightarrow d = 0-1 \quad ? \\ (2,8) &\longrightarrow d = 2-8 \quad ? \end{aligned}$$



Surge, pois, a pergunta: *não seria possível achar a diferença  $3-7$ ?* No conjunto  $I$ , isto não é possível. Por isso, houve necessidade de ampliar o campo dos números, introduzindo-se os *números inteiros negativos*, da seguinte maneira:

$$3-7 = -(7-3) = -4 \text{ por definição.}$$

Outros exemplos:

$$\begin{aligned} 2-5 &= -(5-2) = -3, \text{ etc.} \\ 4-9 &= -(9-4) = -5, \text{ etc.} \end{aligned}$$

Generalizando, se  $x < y$ , então  $y > x$  e a diferença  $y-x$  está definida, portanto, é lícito considerarmos a expressão  $y-x$ . Define-se

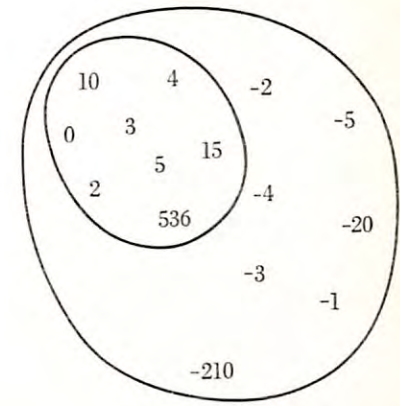
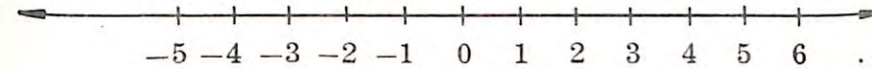
$$x-y = -(y-x)$$

Estes novos números  $-1, -2, -3, -4, \dots$ , são os *números inteiros negativos*, que, reunidos aos números inteiros, constituem o *conjunto dos números inteiros relativos*.

$$\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Este conjunto será estudado pormenorizadamente na *segunda série* e lá você verá as operações definidas sobre o mesmo.

É comum representar os inteiros  $0, 1, 2, 3, \dots$  (os naturais passam a chamar-se inteiros positivos) e os números inteiros negativos  $-1, -2, -3, \dots$  sobre uma reta, que passa a ser chamada *reta numérica* ou *numerada*. Esta é uma *representação geométrica* dos números inteiros relativos.



A representação mais usual é a ilustrada acima, onde à direita do zero colocamos os inteiros  $1, 2, 3, \dots$  e, à esquerda, os negativos  $-1, -2, -3, -4, \dots$  mantendo distâncias iguais entre um número e o seguinte.

#### Exercícios:

30. Dê o valor de:

- |    |         |    |         |
|----|---------|----|---------|
| a. | $8-16$  | c. | $12-44$ |
| b. | $30-40$ | d. | $9-19$  |

31. Assinale, na reta numerada, os resultados obtidos no exercício anterior.

#### 4A.8. Noção de Múltiplo de um Número Inteiro

Considere o número 6 e vamos multiplicá-lo por todos os números do conjunto  $I = \{0,1,2,3, \dots\}$ :

$$6 \times 0; 6 \times 1, 6 \times 2, 6 \times 3, \dots \text{ ou } 0,6,12,18, \dots$$

O conjunto  $\{0,6,12,18, \dots\}$  é chamado o conjunto dos *múltiplos de 6*. Logo, obtemos um múltiplo de 6 multiplicando 6 por um número inteiro qualquer.

Se  $n$  é um número inteiro qualquer, um múltiplo de 6 terá a representação  $6.n$

Temos, pois, a definição:

Múltiplo de um número inteiro é o produto deste número por um número qualquer do conjunto  $I = \{0,1,2,3, \dots\}$

O conjunto dos múltiplos de 3 é

$\{3 \times 0, 3 \times 1, 3 \times 2, \dots, 3 \times n, \dots\}$  ou  $\{0,3,6,9, \dots, 3n, \dots\}$

**Exercícios:**

- 32. Dê os conjuntos dos múltiplos de 2, 1, 5 e 8.
- 33. O conjunto dos múltiplos de 2 é um conjunto conhecido. Qual é ele?
- 34. Quantos múltiplos tem um número diferente de zero?
- 35. O que você pode afirmar a respeito do zero?
- 36. Zero é múltiplo de qualquer número? Por que?
- 37. Se  $n$  é sucessor de  $m$  então  $a.m$  e  $a.n$  são múltiplos consecutivos de  $a$ . Exemplo:  
8 é o sucessor de 7, portanto  
 $3 \times 7$  e  $3 \times 8$  ou seja 21 e 24  
são múltiplos consecutivos de 3.
- 38. Dê dois múltiplos consecutivos quaisquer de 9.

**4A.9. Divisão Exata**

Considere a seguinte questão: dado  $(a,b)$  um par qualquer de números inteiros, com  $b \neq 0$ , existe sempre um número inteiro  $q$ , para o qual se tenha  $q.b = a$ ?

Por exemplo, dado  $(16,2) \in I \times I$  existe  $q \in I$  associado a  $(16,2)$  tal que  $q.2 = 16$ ? Neste caso, é claro que sim, e  $q = 8$ , pois  $8.2 = 16$ . O número 8 chama-se *quociente* de 16 e 2 e indica-se

$$16 \div 2 = 8$$

Esquemáticamente:

$$\begin{array}{l} (16,2) \longrightarrow 8 \\ (16,2) \in I \times I \longrightarrow 8 \in I \end{array}$$

Analogamente,

$$16 \div 4 = 4 \text{ porque } 4 \times 4 = 16$$

$$\text{e } 1\ 250 \div 50 = 25 \text{ porque } 25 \times 50 = 1\ 250.$$

Assim sendo, as sentenças

$$q.2 = 16 \quad \text{e} \quad 16 \div 2 = q$$

significam exatamente a mesma coisa, isto é, dar uma delas é o mesmo que dar a outra.

Suponha, agora, o par ordenado  $(16,3) \in I \times I$ .

Existe um número  $q \in I$  associado a  $(16,3)$ , para o qual  $q.3 = 16$ ? Evidentemente não, pois *nenhum número inteiro multiplicado por 3 resulta 16!*

Surge, portanto, a pergunta; para que elementos  $(a,b) \in I \times I$ , com  $b \neq 0$ , existe  $q \in I$  tal que  $q.b = a$ ? Você provavelmente já encontrou a resposta: só existe  $q \in I$  tal que  $q.b = a$ , se  $a$  for múltiplo de  $b$ .

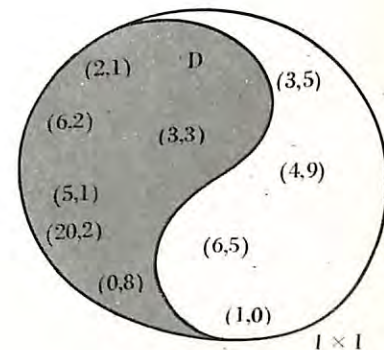
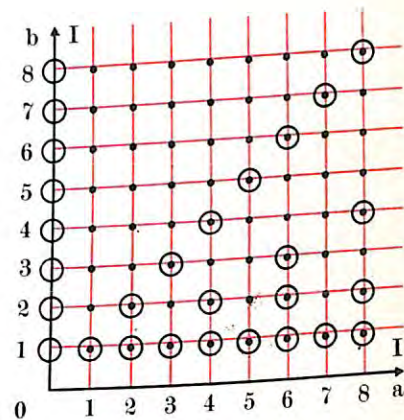
Portanto, considere no produto cartesiano  $I \times I$ , somente os pares ordenados  $(a,b)$  para os quais  $b \neq 0$  e  $a$  múltiplo de  $b$ . Por exemplo, os pares  $(8,2)$ ,  $(0,8)$ ,  $(900,30)$  etc. Estes elementos formam um subconjunto de  $I \times I$  que chamaremos  $D$

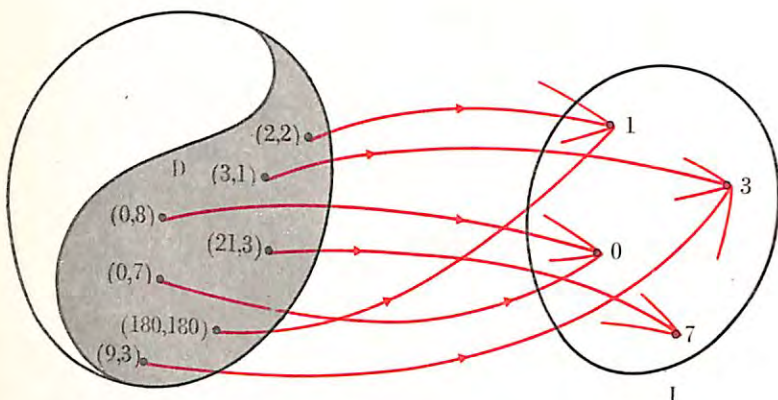
$$D \subset I \times I$$

A relação de  $D$  em  $I$ , que ao par  $(a,b) \in D$  associa o número  $q \in I$ , tal que  $q.b = a$  é uma aplicação. (Por que?)

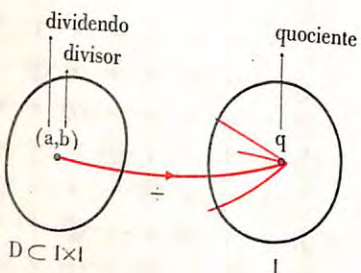
Simbolicamente:

$$(a,b) \in D \longrightarrow q \in I \text{ tal que } q.b = a$$





Podemos, agora dar a seguinte definição:



A operação de divisão é a aplicação que a cada par ordenado  $(a,b) \in D$  associa  $q \in I$ , de tal maneira que  $q \cdot b = a$ .  $D$  é o subconjunto de  $I \times I$  dos pares  $(a,b)$ , para os quais  $b \neq 0$  e  $q \cdot b = a$ .

$$(a,b) \longrightarrow q$$

$a$  chama-se *dividendo*,  
 $b$  chama-se *divisor*,  
 $q$  chama-se *quociente* de  $a$  e  $b$ , e indica-se

$$a \div b = q \text{ ou } a : b = q .$$

**Exercícios:**

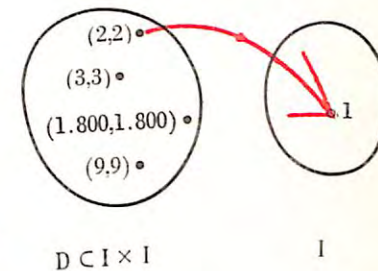
39. Complete:

- a.  $24 \div 2 = 12$  porque  $12 \times 2 = \dots$
- b.  $1\,000 \div 100 = 10$  porque  $10 \times 100 = \dots$
- c. Se  $x \neq 0$ ,  $x \div x = 1$  porque...
- d. Se  $x \neq 0$ ,  $0 \div x = 0$  porque ...

40. Justifique porque

- a.  $410 \div 10 = 41$
- b.  $121 \div 11 = 11$
- c.  $844 \div 2 = 422$
- d.  $900 \div 3 = 300$

41. Complete o diagrama ao lado para os elementos indicados, sabendo que a aplicação é a operação de divisão:



42. A mesma questão para o diagrama seguinte:

43. A divisão goza da propriedade comutativa? Por que?

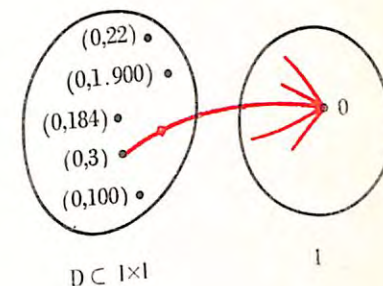
44. Eis um contra-exemplo para mostrar que a divisão não goza da propriedade associativa

$$25 \div 5 \div 5$$

$$25 \div (5 \div 5) = 25 \div 1 = \boxed{25}$$

$$(25 \div 5) \div 5 = 5 \div 5 = \boxed{1}$$

Dê você um outro contra-exemplo.



4A.10. Operações Inversas

Se ao resultado da subtração

$$7 - 3$$

adicionarmos o subtraendo, 3, obtemos o minuendo, isto é,

$$(7 - 3) + 3 = 7$$

Isto se verifica para quaisquer números inteiros, para os quais está definida a operação de subtração.

Genêricamente,

$$(a-b) + b = a$$

Também é verdade que

$$(a+b) - b = a$$

Devido a êstes resultados, dizemos que a subtração é a operação inversa da adição.

Analogamente, se o resultado de

$$16 \div 2$$

fôr multiplicado pelo divisor, 2, obtemos o dividendo.

Genêricamente,

$$(a \div b) \times b = a$$

e

$$(a \times b) \div b = a$$

A divisão é a operação inversa da multiplicação.

Os fatos relacionados acima nos permitem calcular um termo desconhecido de uma operação, fazendo uso da operação inversa.

Exemplos:

$$\text{Se } x + 5 = 12 \text{ então } x = 12 - 5 = 7$$

$$\text{Se } x \div 3 = 4 \text{ então } x = 3 \times 4 = 12$$

Exercícios:

45. Determine o valor de  $x$  para cada um dos seguintes casos:

a.  $x - 3 = 6$

b.  $21 - x = 8$

c.  $x \cdot 8 = 216$

d.  $171 \cdot x = 3\,591$

46. Determine o valor (ou valores) de  $x$  para as seguintes igualdades (cuidado!)

a.  $0 + x = 0$

b.  $x - 0 = 0$

c.  $0 \times x = 0$

d.  $0 \div x = 0$

#### 4A.11. Divisão Não Exata

Suponha os seguintes problemas:

1. Deseja-se distribuir, igualmente, 16 cavalos a 3 pessoas. Quantos cavalos receberá cada uma?
2. Têm-se 16 maçãs para serem distribuídas igualmente a 3 pessoas. Quanto receberá cada uma?

Para o primeiro problema cada pessoa receberá 5 cavalos e sobrarão 1 cavalo, o qual, evidentemente, não pode ser dividido! No segundo problema, cada pessoa receberá 5 maçãs e sobrarão uma, que poderá ser dividida em 3 partes iguais. Isto é, cada uma receberá 5 maçãs mais a *terça parte de uma maçã*.

O primeiro caso será tratado agora e o segundo será investigado no capítulo seguinte, no estudo dos números racionais.

Na seção anterior, você viu que  $(16,3) \notin D$ , pois 16 não é múltiplo de 3, isto é, não existe  $q \in I$  para o qual  $q \cdot 3 = 16$ .

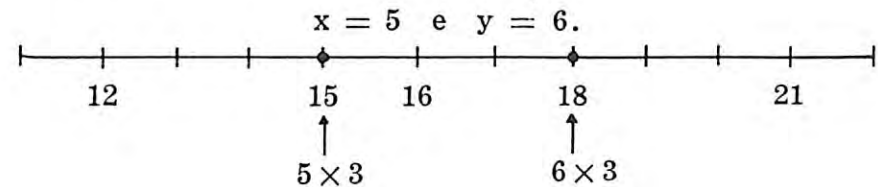
Mas, podemos encontrar 2 números inteiros  $x$  e  $y$ , sendo  $y$  menor que  $x$ , tais que

$$x \cdot 3 < 16 < y \cdot 3$$

isto é, o

número 16 fica compreendido entre 2 múltiplos consecutivos de 3.

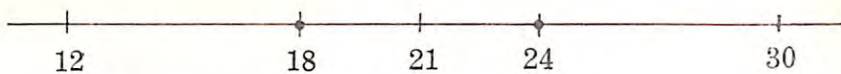
Pela reta numerada, você verifica que,



5 é chamado o *quociente aproximado por falta* de 16 por 3, e 6 é chamado o *quociente aproximado por excesso* de 16 por 3.

É claro que o número 5 foi tomado de tal modo que seja o *maior número inteiro* que, multiplicado por 3, não supera 16.

Seja, agora, o par  $(21,6)$ . Analogamente, existem dois números 3 e 4, tais que  $3 \times 6 = 18$  e  $4 \times 6 = 24$ , isto é,  $18 < 21 < 24$ .



Neste caso, o quociente por falta é 3, e o quociente por excesso é 4.

**Exercício:**

47. Ache o quociente por falta e por excesso das divisões:

- a. 35 : 6
- b. 18 : 4
- c. 45 : 8

O quociente aproximado por falta será chamado simplesmente o quociente aproximado.

A diferença entre o dividendo e o produto do quociente pelo divisor é chamado o resto da divisão.

Assim, na divisão  $16 \div 3$ , o quociente aproximado é 5 e o resto é 1, pois  $16 - 5 \cdot 3 = 1$

$$\begin{array}{r|l} 16 & 3 \\ \hline 1 & 5 \end{array}$$

|           |           |
|-----------|-----------|
| Dividendo | Divisor   |
| Resto     | Quociente |

No segundo exemplo,  $21 \div 6$ , o quociente aproximado é 3, o resto é 3, pois  $21 - 3 \times 6 = 21 - 18 = 3$ .

Quando o par ordenado pertence a  $D$ , já sabemos que o quociente é exato e  $a = bq$ . Diz-se que na divisão exata o resto é zero.

**Exercício:**

48. Dê os quocientes aproximados e os restos das divisões do exercício anterior.

Dado um par ordenado qualquer  $(a,b) \in I \times I$ , com  $b \neq 0$ , procedendo como acima, existe um número  $q \in I$ , tal que seja o maior número inteiro que multiplicado por  $b$  não supera  $a$ , isto é, o produto  $q \cdot b$  é menor ou no máximo igual a  $a$ .

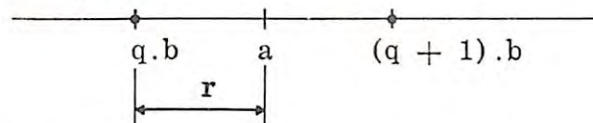
$a$  chama-se *dividendo*,  $b$  chama-se *divisor*  $q$  é o quociente de  $a$  por  $b$  e a diferença  $a - q \cdot b = r$  é o *resto*.

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \hline r & q \end{array}$$

$$\text{Dividendo} = \text{Divisor} \times \text{Quociente} + \text{Resto}$$

Observe que o resto é zero, ou maior que zero, porém sempre menor que o divisor. Somente é nulo, se  $a$  for múltiplo de  $b$ .

Dos exemplos vistos, o número  $a$  está sempre compreendido entre dois múltiplos consecutivos de  $b$ , o primeiro sendo  $q \cdot b$  e o segundo  $(q + 1) \cdot b$



Concluindo tudo o que foi visto, podemos dizer

Dado o par ordenado  $(a,b) \in I \times I$ , com  $b \neq 0$ , existe o par  $(q,r) \in I \times I$  tal que,  $r < b$  e  $r \geq 0$ , e  $a - q \cdot b = r$  ou  $a = q \cdot b + r$ .

**Exercícios:**

49. Determine o par  $(q,r)$  para os seguintes casos:

- a. (2,5)
- e. (5,1)
- i. (a,1)
- b. (3,3)
- f. (8,10)
- j. (b,b)
- c. (0,5)
- g. (100,5)
- d. (1,5)
- h. (0,356)

50. Considere a divisão de 16 por 3.

$$\begin{array}{r|l} 16 & 3 \\ \hline 1 & 5 \end{array}$$

Temos :  $16 = 5 \times 3 + 1$ , isto é, 5 é o quociente e 1 é o resto

Vamos multiplicar o dividendo e o divisor por um mesmo número diferente de zero, por 5, digamos: obtemos 80 e 15.

$$\begin{array}{r|l} 80 & 15 \\ \hline 5 & 5 \end{array}$$

Vê-se que o quociente não se alterou, mas o resto ficou multiplicado por 5.



Portanto, multiplicando-se o dividendo e o divisor de uma divisão por um mesmo número diferente de zero (por que ?), o quociente não se altera e o resto fica multiplicado por este número.

51. Sabendo que  $19 = 4 \cdot 4 + 3$ , qual é o quociente aproximado de 38 por 8? Qual o resto?

52. Considere a divisão  $27 \div 6$  e divida 27 e 6 por 3. O que acontece com o quociente e o resto? Encontre outros exemplos e dê uma conclusão.

#### 4A.12. Expressões Aritméticas

Frequentemente aparecem cálculos numéricos de expressões, onde temos várias operações indicadas. Surge a pergunta: qual operação realizar primeiro?

I. Realizam-se, primeiramente, as operações indicadas dentro dos sinais de reunião ( ), [ ], { }, de dentro para fora da expressão.

II. Se não houver sinais de reunião, realizam-se, em primeiro lugar, as multiplicações e divisões e, em seguida, as adições e subtrações na ordem em que são dadas.

Exemplos

$$2 \times 3 + 5 = 6 + 5 \\ = 11$$

$$[38 + 2(5-4)] \div 20 + 3 = [38 + 2 \cdot 1] \div 20 + 3 \\ = 40 \div 20 + 3 \\ = 2 + 3 \\ = 5$$

#### Exercícios:

53. Calcule os valores das seguintes expressões aritméticas:

a.  $530 + [35 - 12 + (10 - 7)] - 150 + 15 + 451$

b.  $(200 \times 4 - 2 \times 5 + 3 \times 10) \div 10$

c.  $(352 \div 4) \times 10 + 110$

54.

a.  $250 + [6 \times (16 + 28) : 11 + (12 \times 16 - 18) \div 3 + 179]$

b.  $\{ 1500 \div [30 \div (2 \times 4 + 16 \div 8 + 5)] \} \div \{ 10 + [25 - (1 + 19)] \}$

c.  $38 - [4 : 2 + (3 - 6 : 3) + 2 \times (49 - 40)]$

55.

a.  $\{ 420 - 2 \times [12 - 3 \times (11 - 2 \times 4) \div (5 \times 2 - 1)] \div 11 \} \times 4 + 8$

b.  $\{ [(36 \div 2) \times (6 + 4)] \rightarrow 20 + (3 \times 3 + 0 : 4) \} \div 13$

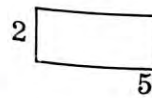
#### 4A.13. Conceito de Operação

Estudamos, neste capítulo, essencialmente, algumas operações com números inteiros: a adição, a multiplicação, a subtração e a divisão. O que faremos agora será precisar o conceito de operação, para que você possa entender melhor as operações com números inteiros, que são, simplesmente, casos particulares.

Exemplo 1.

Considere a operação que consiste em achar a área de um retângulo dado.

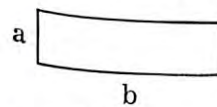
Assim, sendo o retângulo de lados 2cm e 5cm, a operação em foco nos leva à determinação da sua área:  $2 \times 5$  ou  $10\text{cm}^2$ .



Simbolicamente,  
 $(2,5) \longrightarrow 10$ .

Isto é, ao par de números (2,5), que são as medidas dos lados do retângulo, associamos o número 10, área do retângulo.

Generalizando, se um retângulo cujas medidas dos lados são  $a$  e  $b$ , então, ao par (a,b), associamos o número  $a \cdot b$ , que é a área do retângulo.



Simbolicamente  
 $(a,b) \longrightarrow a \cdot b$

Se considerarmos retângulos, cujas medidas dos lados sejam somente números inteiros, o par (a,b) pertence a  $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$  e a este par está associado um só número  $a \cdot b \in \mathbb{I}$ . Temos, pois, uma aplicação de  $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$  em  $\mathbb{I}$  (Explique).

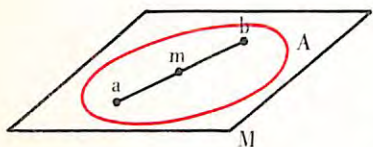
Exemplo 2.

Considere a operação que consiste em determinar a reunião de dois conjuntos A e B quaisquer.

Por exemplo, se  $A = \{1,2,3\}$  e  $B = \{3,4,5\}$ , a operação consiste em se determinar  $A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$

Isto é,

$$(A,B) \longrightarrow A \cup B.$$

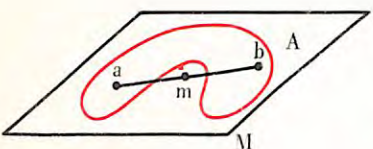


Exemplo 3.

Seja A um conjunto de pontos de um plano M. Vamos definir a operação que permite encontrar o ponto médio do segmento que une dois pontos quaisquer de A.

Por exemplo, sendo a e b pontos de A, ao par (a,b) está associado o ponto m, tal que m seja o ponto médio do segmento ab.

$$(a,b) \longrightarrow m$$



O par  $(a,b) \in A \times A$  e o ponto  $m \in M$ , logo temos uma aplicação de  $A \times A$  em M. (Por que?)

Por que o ponto m não pertence a A, necessariamente? Basta examinar a figura ao lado. Embora a e b estejam em A, m pode não estar em A. Quando  $m \in A$  ?

Exemplo 4.

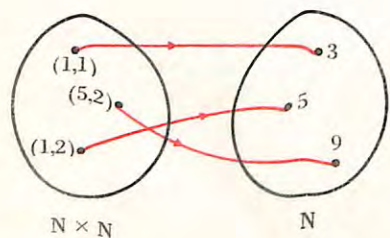
Tomemos o conjunto  $N = \{1,2,3,4, \dots\}$ , isto é, o conjunto dos números naturais e vamos definir uma operação entre 2 números naturais, tal que, a cada par (a,b), esteja associada a soma do primeiro elemento com o dobro do segundo elemento.

$$\begin{aligned} (2,3) &\longrightarrow 2+2.3 = 8 \\ (5,2) &\longrightarrow 5+2.2 = 9 \\ (1,8) &\longrightarrow 1+2.8 = 17, \text{ etc.} \end{aligned}$$

Generalizando, ao par  $(a,b) \longrightarrow a + 2.b$

Note que  $(a,b) \in N \times N$  e  $(a+2b) \in N$  (Verifique!)

Temos, novamente, uma aplicação de  $N \times N$  em N. (Por que?)



Exercícios:

56. Seja  $A = \{1,2\}$ . Construa  $A \times A$ . Considere a operação que associa a cada par de  $A \times A$  o primeiro elemento do par. Descreva completamente esta operação e faça um diagrama.

57. Seja o conjunto A formado pelos conjuntos  $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}$ , isto é,

$$A = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\} \}$$

Considere a operação que associa a dois conjuntos de A a sua intersecção.

Por exemplo:

$$\begin{aligned} (\{1\}, \{1,2\}) &\longrightarrow \{1\} \cap \{1,2\} = \{1\} \\ (\{1\}, \{2\}) &\longrightarrow \{1\} \cap \{2\} = \emptyset \\ \text{etc.} \end{aligned}$$

Complete a tabela abaixo, onde alguns resultados estão indicados.

|             |        |             |             |         |           |
|-------------|--------|-------------|-------------|---------|-----------|
|             | $\cap$ | $\emptyset$ | $\{1\}$     | $\{2\}$ | $\{1,2\}$ |
| $\emptyset$ |        |             | $\emptyset$ |         |           |
| $\{1\}$     |        |             |             |         | $\{1\}$   |
| $\{2\}$     |        |             |             | $\{2\}$ |           |
| $\{1,2\}$   |        |             |             |         |           |

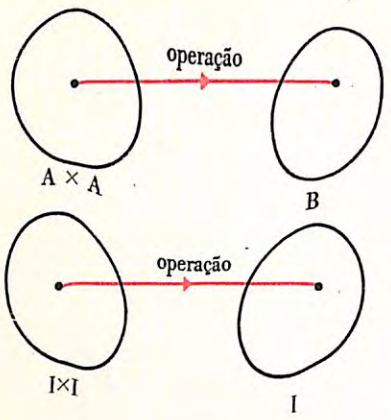
58. Faça uma tabela para o exemplo 4, dado anteriormente.

59. Seja  $(a,b) \in N \times N$  e a éle associemos o número natural  $2a + 3b$ .

Isto é,

$$(a,b) \longrightarrow 2a + 3b.$$

Dê alguns exemplos e faça uma tabela para esta operação.



Dos exemplos dados, podemos concluir que uma operação definida para 2 elementos é uma aplicação de um produto cartesiano em outro conjunto.

Nos estudos que fizemos neste capítulo, nos restringimos aos casos em que as operações eram aplicações de  $I \times I$  em  $I$  ou de um subconjunto de  $I \times I$  em  $I$ . Estas são as chamadas operações com números inteiros.

**Exercícios: Capítulo 4 — Parte A**

60. Calcule, usando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição:
- $(30+5) \cdot (8+9)$
  - $(8+10) \cdot (20+5)$
  - $(a+b) \cdot (c+d)$
  - $(2+5+8) \cdot (8+3+4)$
61. Considere a operação de subtração. As propriedades que valem para a adição continuam a valer para a subtração? Exemplifique e explique.
62. Assinale com F as sentenças falsas e com V as verdadeiras.
- |                                |                              |
|--------------------------------|------------------------------|
| a. $12 \times 1 = 1 \times 12$ | f. $20 + (5+8) = (20+5) + 8$ |
| b. $12+5 = 5+12$               | g. $(8-7)-5 = 8-(7-5)$       |
| c. $8+7 = 7+8$                 | h. $8 \times 7 = 7+8$        |
| d. $20+0 = 0+20$               | i. $1 \times 0 = 0+1$        |
| e. $20-0 = 0-20$               |                              |
63. Se  $x$  representa um número inteiro qualquer, seu sucessor é:
- a.  $x+2$ ; b.  $x-1$ ; c.  $x+0$ ; d.  $x+1$
64. Assinale a sentença falsa:
- |                                       |                                 |
|---------------------------------------|---------------------------------|
| a. $2 \times 3 \times 4 = 6 \times 4$ | c. $3 \times 5 \times 1 = 13+2$ |
| b. $(4-1) \times 2 = 6 \times 1$      | d. $(8+16) \cdot 0 < 1$         |
65. Efetue as seguintes operações, usando o dispositivo prático e a decomposição nas unidades das diversas ordens:

- |                 |                    |
|-----------------|--------------------|
| a. $13+16$      | e. $2\ 567+3\ 789$ |
| b. $25-12$      | f. $46 \times 7$   |
| c. $268+135$    | g. $35 \times 12$  |
| d. $1\ 567-895$ |                    |

66. Complete:
- $2 \cdot (4+3) = \dots\dots$
  - $3 \cdot (4+5+2) = \dots$
  - $(25-13) \cdot 4 = \dots$
  - $18 \cdot (7+5-10) = \dots$
  - $a \cdot (b+c) = \dots\dots$
  - $(A+B-C-D) \cdot M = \dots$
  - $(a+\dots+b) \cdot 6 = \dots+7 \cdot 6+\dots$
  - $3 \cdot (8+\dots+6) = \dots+3 \cdot 5+\dots$
67. Dizer qual a propriedade que está sendo usada:
- $5+6 = 6+5$
  - $3+0 = 0+3 = 3$
  - $a \cdot b = b \cdot a$
  - $(3+4+5) + 6 = 12+6$
  - $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$
  - $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
  - $3 \cdot 1 = 1 \cdot 3 = 3$
68. Complete, com um dos sinais  $=$ ,  $>$ ,  $<$ , de modo a tornar as sentenças verdadeiras.
- $8+6 \dots 6+8$
  - $9+8+6 \dots 7+8+6$
  - $3+5+4 \dots 6+5+4$
  - $8 \cdot 5 \dots 7 \cdot 5$
  - $6 \cdot 8 \cdot 9 \dots 9 \cdot 8 \cdot 9$
69. Sabendo-se que o conjunto A tem 18 elementos, o conjunto B tem 25 elementos e que  $A \cup B$  tem 30 elementos, dar o número de elementos de  $A \cap B$ .
70. Sabendo-se que o conjunto A tem 11 elementos, B tem 15 elementos e  $A \cup B$  tem 26 elementos, dar o número de elementos de  $A \cap B$ .

71. Sabendo-se que A tem 13 elementos, B tem 11 e que  $A \cup B$  tem 13 elementos, dar o número de elementos de  $A \cap B$ .

72. Se você sabe quantos são os elementos de cada um dos conjuntos: A, B, C, D, E e sabe, que estes conjuntos formam uma partição do conjunto M, você é capaz de determinar quantos elementos tem o conjunto M? Explique sua resposta.

73. Seja  $N = \{1,2,3, \dots\}$  e definida sobre este conjunto uma operação tal que, ao par (a,b), esteja associado  $a^2 + b$ , isto é,

$$a * b = a^2 + b$$

Por exemplo:  $(3,5) \longrightarrow 3 * 5 = 3^2 + 5 = 9 + 5 = 14$

- I — Complete:
- a.  $2 * 3 = \dots$
  - b.  $3 * 2 = \dots$
  - c.  $1 * 5 = \dots$
  - d.  $4 * 7 = \dots$
  - e.  $0 * 2 = \dots$
  - f.  $2 * 0 = \dots$

II — Faça uma tabela para a operação definida neste exercício.

III — Esta operação goza da propriedade comutativa?

74. Seja  $I = \{0, 1,2,3, \dots\}$  e definida sobre este conjunto uma operação tal que, ao par (a,b), corresponda

$$a * b = a^2 + b^2$$

- I — Complete:
- a.  $2 * 3 = \dots$
  - b.  $3 * 2 = \dots$
  - c.  $0 * 5 = \dots$
  - d.  $5 * 0 = \dots$
  - e.  $8 * 1 = \dots$
  - f.  $10 * 3 = \dots$

II — Existe o elemento neutro para esta operação?

75. Seja  $I = \{0,1,2,3, \dots\}$  e definida sobre este conjunto uma operação tal que, ao par (a,b) corresponda:

$$a * b = 2.a.b$$

- I — Complete:
- a.  $3 * 5 = \dots$
  - b.  $2 * 4 = \dots$
  - c.  $1 * 3 = \dots$
  - d.  $0 * 7 = \dots$
  - e.  $3 * 1 = \dots$
  - f.  $10 * 10 = \dots$

II — Dê as propriedades desta operação.

76. Quais os pares (a,b) de números inteiros que tornam verdadeira a igualdade:  $a+b = 9$  ?

77. Complete o quadro abaixo, usando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição:

|         | $3 + 2$                          | $7 + 5$  | 8 | 0 |
|---------|----------------------------------|--|---|---|
| 0       |                                  |  |   |   |
| 5       | $5 \cdot (3 + 2) = 15 + 10 = 25$ |  |   |   |
| $4 + 3$ |                                  |  |   |   |
| $5 + 2$ |                                  | $(5 + 2) \cdot (7 + 5) = 35 + 25 + 14 + 10 = 84$ |   |   |

78. Na divisão de 15 por 5 obtém-se o quociente exato 3. Se aumentarmos o dividendo 15 de um múltiplo de 5 continuamos obtendo quocientes exatos. Por exemplo:

$$(15+5):5 = 4;$$

$$(15+15):5 = 6;$$

$$(15+50):5 = 13.$$

Suponha que a divisão de a por b seja exata. De quanto você pode aumentar o dividendo a para que a divisão por b continue exata?

79. Escreva o conjunto dos sete primeiros múltiplos de 13. Qual o quociente de 60 por 13, sem fazer cálculos, mas apenas observando o conjunto de múltiplos que você escreveu?

80. O quociente da divisão de um certo número por 328 é 15 e o resto desta divisão é 12. Dê o número usado como dividendo.

81. Substitua a letra  $x$  por um número tal que o quociente seja exato:

a.  $x.7.8:16 = \dots$

b.  $56:x.8 = \dots\dots\dots$

82. Coloque no lugar dos pontos, os algarismos que estão faltando:

a.

$$\begin{array}{r} 3587 \\ 9.8.4 \\ + 35. \\ .0.03 \\ 3450 \\ \hline \end{array}$$

$$\hline 111402$$

c.

$$\begin{array}{r} 35742 \\ 2.3 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1.7.26 \\ 7.4.40 \\ \hline \end{array}$$

$$\hline 7255626$$

b.

$$\begin{array}{r} 35478 \\ . . . . \\ - \hline 25974 \end{array}$$

d.

$$\begin{array}{r} . . . . \quad | \quad 375 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 828 \quad 12 \\ 78 \end{array}$$

83. Uma máquina faz em um dia 300 peças de certo tipo e faz, ainda, o dôbro dêste número de peças de outro tipo. Vamos representar por uma expressão aritmética o número de peças aproveitadas pela fábrica em um dia, sabendo-se que 12 peças do primeiro tipo e 40 do segundo estragaram-se:

$$300 - 12 + (2 \times 300) - 40.$$

84. Represente por uma expressão aritmética a quantia com que uma senhora voltou para casa, sabendo que ela saiu com NCr\$10,00, gastou NCr\$ 4,00 no armazém e comprou NCr\$2,50 de frutas.

85. Dada a expressão:  $18 - 2 \cdot (5 + 3)$ , redija um problema do qual ela represente a solução.

86. Verifique se as seguintes sentenças são falsas ou verdadeiras (tome alguns exemplos numéricos para cada caso):

a. Se  $a < b$ , então  $a + c < b + c$

b. Se  $a \leq b$ , então  $a + c \leq b + c$

c. Se  $a + c < b + c$ , então  $a > b$

d. Se  $a < b$  e  $c < d$ , então  $a + c > b + d$

e. Se  $a < b$  e  $c < d$ , então não se pode comparar  $a + d$  e  $b + c$ .

87. Um número é igual a um múltiplo de 17 aumentado de 12. Qual é o resto da divisão dêste número por 17?

88. Sabendo que  $180 = 2 \times 6 \times 15$ , qual a maneira mais rápida de calcular  $180:30$ ?

89. Se um número  $a$  é igual a  $2 \times 3 \times 7 \times 9$ , qual o quociente de:  $a$  por 21?  $a$  por 18?  $a$  por 27?

90. Verificar que  $25 \times 52$  é um múltiplo de  $5 \times 26$ .

91. Considere o subconjunto dos inteiros pares:  $P = \{0,2,4,6,\dots\}$  Associe a cada par  $(a,b) \in P \times P$  a soma  $a+b$ . Pergunta-se:  $a+b$  pertence sempre a  $P$ ?

92. Mostre que  $8 + (5 + 3) = (3 + 5) + 8$ , usando as propriedades da adição.

93. Usando a Propriedade Distributiva, complete:

a. Se  $x = 3 \cdot (2 + 5)$  então  $x = \dots + \dots$ ; logo  $x = \dots$

b. Se  $2 \cdot (x + 1) = 18$  então  $x = \dots$

c. Se  $(5 + 3) \cdot x = 40$  então  $x = \dots$

d. Se  $x - 5 = 3 \cdot (8 + 1)$  então  $x = \dots$

94. Efetue:

a.  $10 + (3 + 5) + (8 + 0 + 1) =$

b.  $15 + [(2 + 3 + 1) + (6 + 8 + 3)] =$

95. Efetue:

- a.  $750 + 1\ 280 + 8 + 13 =$
- b.  $16\ 897 + 3\ 156 + 570 + 27 =$
- c.  $900 + 7 + 1\ 005 + 863 =$

96. Efetue:

- a.  $5\ 960 - 911 =$
- b.  $970\ 007 - 850\ 076 =$
- c.  $10\ 000 - 7\ 999 =$
- d.  $150\ 007 - 99\ 819 =$

97. Efetue:

- a.  $425 \times 8 =$
- b.  $900 \times 7\ 600 =$
- c.  $150 \times 19 =$
- d.  $1\ 350 \times 127 =$
- e.  $200\ 953 \times 572 =$

98. Efetue:

- a.  $144 : 12 =$
- b.  $256 : 4 =$
- c.  $1\ 225 : 75 =$
- d.  $683\ 200 : 2\ 700 =$

99. Determinar o valor de  $x$ :

- a. Se  $x + 5 = 12$ , então  $x = 12 - 5 = 7$
- b. Se  $x - 3 = 6$ , então  $x = \dots$
- c. Se  $21 - x = 8$ , então  $x = \dots$
- d. Se  $12 : x = 4$ , então  $x = \dots$
- e. Se  $x \cdot 8 = 216$ , então  $x = \dots$
- f. Se  $171 \cdot x = 3\ 591$ , então  $x = \dots$

100. Lei do Cancelamento para a Adição e Multiplicação

Se  $a, b$  e  $c$  são inteiros e  $a + c = b + c$ , então  $a = b$ .  
Se  $a, b$  e  $c$  são inteiros,  $c \neq 0$  e  $ac = bc$ , então  $a = b$ .

Exemplos:

Se  $3 + 4 = a + 4$ , então  $a = 3$   
Se  $3 \cdot 8 = 3 \cdot a$ , então  $a = 8$

101. Use a Lei do Cancelamento para completar.

- a. Se  $x + 1 = 5 + 1$ , então  $x = \dots$
- b. Se  $3 + m = 3 + 5$ , então  $m = \dots$
- c. Se  $(a - 5) + 7 = 7$ , então  $a - 5 = \dots$  ;  
logo  $a = \dots$
- d. Se  $8 - x = 8 - 5$ , então  $x = \dots$
- e. Se  $y \cdot 15 = 7 \cdot 15$ , então  $y = \dots$
- f. Se  $(3 \cdot x) \cdot 5 = 15 \cdot 5$ , então  $3 \cdot x = \dots$  ;  
logo  $x = \dots$

102. Os valores que pode tomar o número natural  $n$  para satisfazer às 2 condições:  $n \geq 3$  e  $n < 10$  são:

- a. 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
- b. 4, 5, 6, 7, 8, 9
- c. 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
- d. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

103. Que alteração sofre a soma  $s = a + b$ , se aumentarmos a parcela  $a$  de 12 unidades e diminuirmos a parcela  $b$  de 5 unidades?

104. Considere a subtração:  $8 - 5 = 3$ .

O que acontece se adicionarmos um mesmo número a 8 e a 5?

Dê uma conclusão, após considerar outros exemplos.

105. Classes de Restos.

Seja um número inteiro qualquer, 4 por exemplo. Vamos dividir *todos* os números inteiros por 4. Recorde-se que, se o divisor é 4, *os restos possíveis* são 0,1,2 e 3.

Então temos:

A. O conjunto dos números inteiros que, divididos por 4 deixam *resto 0*, designaremos por  $\bar{0}$  :

$$\bar{0} = \{0,4,8,12,16, \dots\}$$

B. O conjunto dos números inteiros que, divididos por 4 deixam *resto 1*, que será indicado por  $\bar{1}$  :

$$\bar{1} = \{1,5,9,13,17, \dots\}$$

C. O conjunto dos números inteiros que divididos por 4 deixam resto 2, será representado por  $\bar{2}$  :

$$\bar{2} = \{2, 6, 10, 14, 18, \dots\}$$

D. Finalmente, o conjunto dos números inteiros que, ao serem divididos por 4, deixam resto 3, será indicado por  $\bar{3}$  :

$$\bar{3} = \{3, 7, 11, 15, 19, \dots\}$$

Procedendo desta maneira, obtemos uma *partição de I*, ou seja, obtemos 4 conjuntos *disjuntos*, não vazios e cuja reunião é *I*.

Por que chamar de  $\bar{0}$ ? Para lembrar que todos os elementos de  $\bar{0}$  divididos por 4 dão zero como resto;  $\bar{0}$  é um conjunto, e não um número.

$$\bar{0} \cup \bar{1} \cup \bar{2} \cup \bar{3} = I$$

Note que  $\bar{0}$ ,  $\bar{1}$ ,  $\bar{2}$ ,  $\bar{3}$  são as classes de equivalência determinadas pela relação de equivalência:

" $x$  dividido por 4 deixa o mesmo resto que  $y$  dividido por 4"

(Verifique que esta relação é reflexiva, simétrica e transitiva).

$\bar{0}$ ,  $\bar{1}$ ,  $\bar{2}$  e  $\bar{3}$  são chamadas *classes de restos módulo 4*. Se  $a$  e  $b$  são dois inteiros quaisquer de uma classe, dizemos que  $a$  e  $b$  são *equivalentes módulo 4* e indica-se

$$a \equiv b \pmod{4}.$$

Pôsto isto, responda:

- Em que classes estão: 31, 56, 95, 100, 1 000, 3 561?
- Tome dois números de  $\bar{0}$ . Em qual conjunto estarão a soma e o produto deles? Por que?
- Repita o exercício anterior para vários números de  $\bar{0}$ ! A que conclusão chega você?
- Mesmo problema para os elementos de  $\bar{1}$ ,  $\bar{2}$  e  $\bar{3}$ .

106. Determine as classes de restos módulo 2.

107. Determine as classes de restos módulo 3.

108. Se fôssemos representar um número na base 12, teríamos que usar 12 símbolos (algarismos), logo deveríamos inventar novos símbolos para o dez e para o onze.

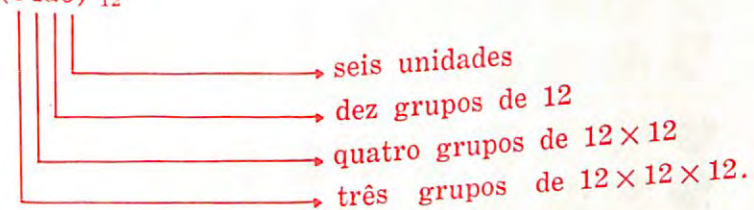
Se representarmos o número dez por  $\alpha$  e o número onze por  $\beta$ , os símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,  $\alpha$ ,  $\beta$  seriam usados para representar um número qualquer na base 12.

Assim,

$(34\alpha 6)_{12}$ , significaria:

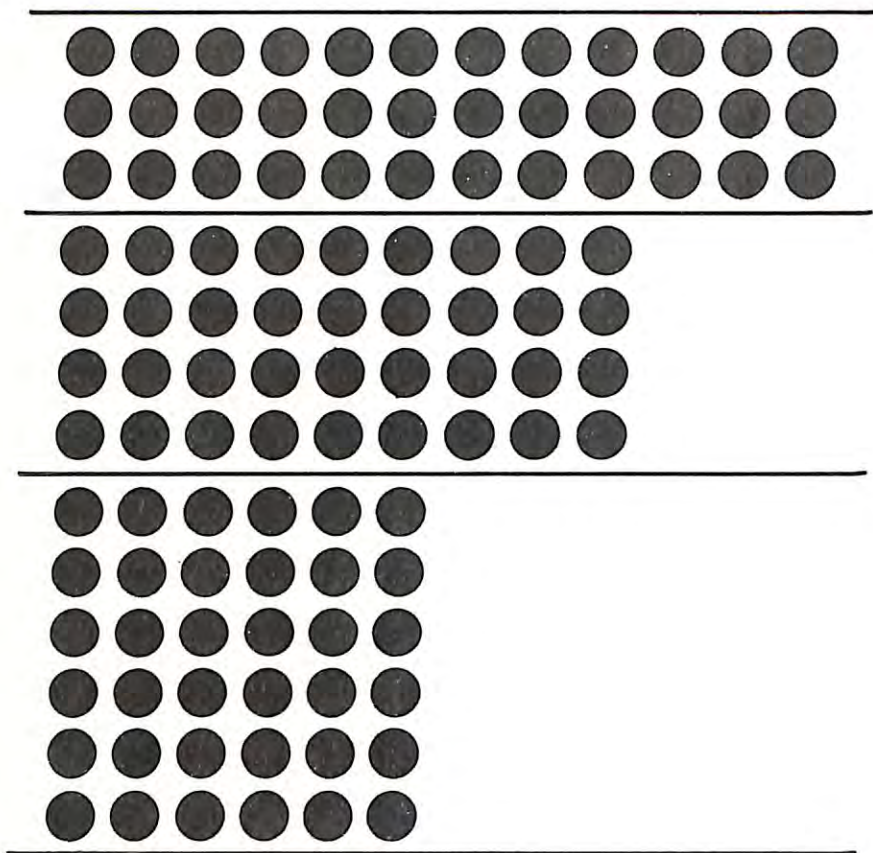
$$(34\alpha 6)_{12} = 3 \times 12^3 + 4 \times 12^2 + \alpha \times 12 + 6 \times 12, \text{ ou}$$

$(34\alpha 6)_{12}$



Pôsto isto, faça uma tábua de adição para a base 12. Escreva  $(2186)_{12}$  e  $(6\beta 2\alpha 5)_{12}$  na base 10.

O conjunto dos números inteiros  
Múltiplos e divisores



Todo o estudo dêste capítulo será feito no conjunto dos números inteiros ou seja, em  $I$ . Por isso, quando no texto aparecer "o número  $a$ " você já sabe que  $a \in I$ .

4B.1. Múltiplo

Na seção 4A.7, você já viu que um número  $a$  é múltiplo de um número  $b$  se, e somente se

$$a = b \times n,$$

onde  $n$  é um número inteiro.

Exemplos:

$$\begin{aligned} 36 \text{ é múltiplo de } 6, \text{ pois } 36 &= \boxed{6} \times 6 \\ 36 \text{ é múltiplo de } 4, \text{ pois } 36 &= \boxed{4} \times 9 \\ 36 \text{ é múltiplo de } 12, \text{ pois } 36 &= \boxed{12} \times 3. \end{aligned}$$

Representando por  $M_{15}$ ,  $M_3$  e  $M_0$  o conjunto dos múltiplos de 15, 3 e zero respectivamente, temos:

$$M_{15} = \{15 \times 0, 15 \times 1, 15 \times 2, 15 \times 3, \dots\}$$

ou

$$M_{15} = \{0, 15, 30, 45, 60, 75, \dots\}$$

$$M_3 = \{3 \times 0, 3 \times 1, 3 \times 2, 3 \times 3, 3 \times 4, \dots\}$$

ou

$$M_3 = \{0, 3, 6, 9, 12, \dots\}$$

$$M_0 = \{0 \times 0, 0 \times 1, 0 \times 2, 0 \times 3, \dots\}$$

$$M_0 = \{0, 0, 0, \dots\}$$

$$M_0 = \{0\}$$

Algumas conclusões:

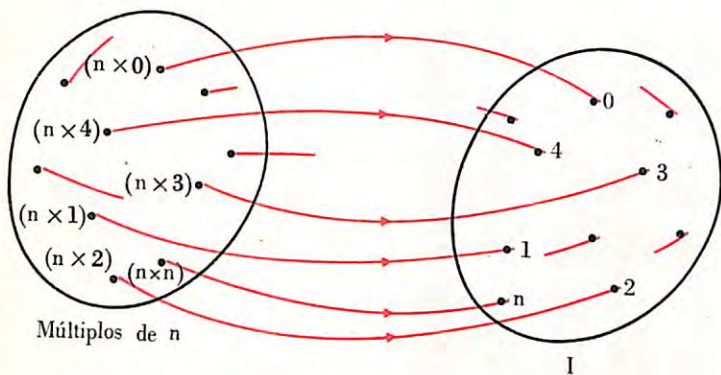
$I$  — Zero é múltiplo de qualquer número.



- II — O *único múltiplo* de zero é o próprio zero.
- III — Um número é sempre múltiplo d'ele mesmo, e é o menor múltiplo diferente de zero.
- IV — O conjunto dos múltiplos de um número, diferente de zero, é equipotente ao conjunto dos números inteiros.

$$M_n = \{n \times 0, n \times 1, n \times 2, n \times 3, n \times 4, \dots\}$$

$$I = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$



### Exercícios:

- Seja  $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ , e a relação em A "... é múltiplo de ...".
  - Dê o conjunto R.
  - Faça um diagrama dessa relação.
  - Quais as propriedades dessa relação?
- Escreva o conjunto  $M_{11}$ .
- Dê os múltiplos de 10 menores que 95.
- $30, 20, 30 + 20, 30 - 20$  são múltiplos de 5?
- $55, 121, 55 + 121, 121 - 55$  são múltiplos de 11?
- Verifique quais das seguintes sentenças são verdadeiras:
  - Apenas alguns números inteiros são múltiplos de 1.
  - 60 é múltiplo de 20 e de 30.
  - Zero é múltiplo apenas dos números que terminam em zero.
- Se  $a$  é múltiplo de  $b$  e  $b$  é múltiplo de  $c$ ,  $a$  é múltiplo de  $c$ ? Tome antes de responder vários exemplos numéricos.

8. Se  $a = b \times n$ ,  $a$  é múltiplo de  $b$ .  $a$  é também múltiplo de  $n$ ? Por que?

### 4B.2. Múltiplos Comuns de Vários Números

Às vezes interessa saber quais são os múltiplos comuns de vários números. Por exemplo, suponha sejam dados os números 8 e 20 para determinar os múltiplos comuns. Temos:

$$M_8 = \{0, 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80, 88, \dots\}$$

$$M_{20} = \{0, 20, 40, 60, 80, 100, 120, \dots\}$$

Os elementos comuns desses dois conjuntos pertencem ao conjunto intersecção ou seja ao conjunto:

$$M_8 \cap M_{20} = \{0, 40, 80, 120, \dots\}$$

### Exercícios:

- Determine o conjunto dos múltiplos comuns de 5, 7 e 15.
- Dê o conjunto de múltiplos comuns de 12 e 25, que são menores que 100.
- Suponha que em sua classe há 40 alunos e que o professor de Matemática avisa que vai arguir os alunos cujos números são múltiplos de 2 e também de 3. Quais os alunos que devem se apresentar para a arguição?

### 4B.3. Mínimo Múltiplo Comum

Dado o conjunto dos múltiplos comuns de dois ou mais números, um de seus elementos nos interessa mais particularmente: é o *menor deles diferente de zero*. Ele chama-se *Mínimo Múltiplo Comum* dos dois ou mais números dados.

Sendo

$$M_{15} = \{0, 15, 30, 45, 60, 75, 90, \dots\}$$

$$M_{12} = \{0, 12, 36, 48, 60, 72, 84, 96, \dots\}$$

NOTA: Como o único múltiplo de zero é o próprio zero, não tem sentido procurar-se o m.m.c. de dois ou mais números, sendo um deles nulo.