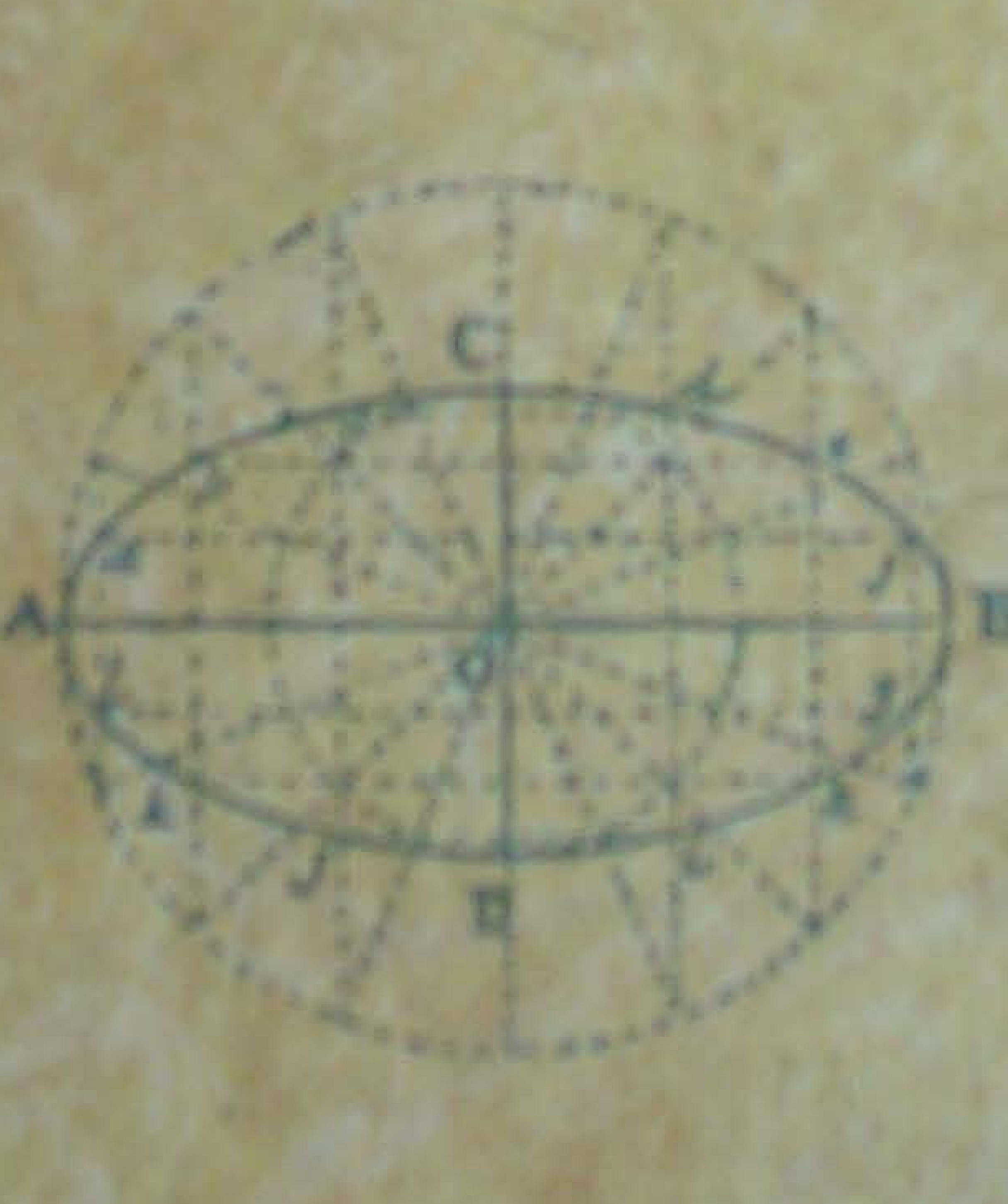
OLAVO FREIRE

Desenho Geométrico e Noções de Geometria

EDIÇÃO ATUALIZADA



LIVRARIA FRANCISCO ALVES
RIO DE JANEIRO — S. PAULO — BELO HORIZONTE

Geraldo Monzoni
1ª Série 2ª Turma
colégio S. Luiz
Nº 18.

Colégio São Luiz

Geraldo Monzoni
1ª Série
Co

DESENHO GEOMÉTRICO
E
NOÇÕES DE GEOMETRIA

Olavo FREIRE

DESENHO GEOMÉTRICO

E

NOÇÕES DE GEOMETRIA

42.ª Edição inteiramente refundida e adaptada
ao uso das escolas profissionais e técnicas

LIVRARIA FRANCISCO ALVES
166, Rua do Ouvidor, 166 — Rio de Janeiro
S. PAULO
292, Rua Libero Badaró
BELO HORIZONTE
Rua Rio de Janeiro, 655
1948

Ao dileto Mestre e Amigo

Dr. J. J. de MENESES VIEIRA,

em testemunho de gratidão

O. D. C.
o
Olavo

Outubro — 1894

OLAVO,

Teu livrinho — *Primeiras noções de Geometria* — é um bom instrumento de ensino e uma prova da conquista que vão fazendo entre nós os são principios pedagógicos.

Conseguiste libertar-te dos velhos moldes quanto ao método, aos exemplos, ao estilo e ao *sestro* de arranjar compêndios por empreitada e *à la minute*: aceita meus sinceros parabens!

Sinto, entretanto, que tivesses em um ponto transigido com a rotina (1), preferindo problemas abstratos às questões práticas, cuja resolução se oferece todos os dias na vida social.

Receaste por ventura os sarcasmos de que foi *vítima* o excelente M. Desargues, o concienscioso propagandista da geometria aplicada às artes!

Que te importaria semelhante afronta?

Aos teus censores responderias com as textuais palavras do ilustre Clairaut em 1741:

"Qu'Euclide se donne la peine de démontrer que les cercles qui se coupent n'ont pas le même centre, qu'un triangle renfermé dans un autre a la somme de ses côtés plus petite que celle des côtés de cet autre, on ne sera pas surpris.

---

(1) *Não transigi em absoluto porque pretendo publicar série de problemas de caráter essencialmente prático.*

O. Freire.

"La géométrie avait à convaincre des sophistes obstinés qui se faisaient gloire de se refuser aux vérités les plus évidentes. Il fallait donc alors que la géométrie eût, comme la logique, des raisonnements pour fermer la bouche à la chicane. Mais les choses ont changé de face. Tout raisonnement qui tombe sur ce que le bon sens seul décide d'avance est aujourd'hui en pure perte et n'est propre qu'à obscurcir la vérité et dégoûter les lecteurs."

E na verdade, meu amigo, la géométrie du bon sens, a geometria realmente descritiva e intuitiva é a única que deve ter o direito de entrada nas escolas primárias.

Este é o parecer do teu velho mestre e amigo dedicado.

Meneses Vieira.

S. C. — 26 Outubro 1894.

NOÇÕES

DE

GEOMETRIA PRÁTICA

CAPÍTULO I

Corpo. — Volume. — Superfície. — Área. — Linha. — Ponto. — Circunferência.

CORPO

Todo corpo ocupa uma certa porção do espaço. É essa porção do espaço ocupada pelos corpos que interessa à Geometria, não importando absolutamente a substância de que são formados, a côr, peso, temperatura, etc. A Geometria só se preocupa com a *forma*, o *tamanho* e a *posição* do corpo.

VOLUME

A quantidade de espaço ocupada por um corpo é o seu *volume*.

Dois corpos podem ter formas muito diversas e terem, entretanto, o mesmo volume.

Basta ver que, com a mesma quantidade de uma substância pastosa (massa de vidraceiro, por ex.), podemos modelar corpos com as formas mais diferentes.

SUPERFÍCIE

A parte externa de um corpo e que o limita, separando-o do espaço, é chamada **superfície** do corpo.

Quando pegamos um corpo qualquer (um livro, por ex.) é na superfície dêsse corpo que tocamos; quando o operário forra, uma parede, é na sua superfície que ele cola o papel. Uma folha de papel finíssima (mais fina que se puder imaginar) dá idéia aproximada de uma superfície. Dizemos aproximada porque uma superfície não tem espessura, ao passo que a folha de papel, por mais fina que seja, tem sempre alguma espessura.

Chama-se **área** à medida de uma superfície.

As superfícies dos corpos podem ser *planas* ou *curvas*.

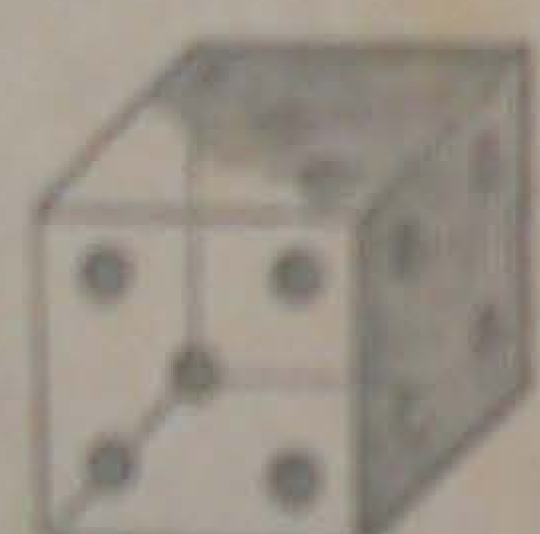


Fig. 1 — O dado é um corpo limitado por superfícies planas.

Fig. 2 — O ovo é um corpo limitado por superfície curva.

As superfícies muito bem alisadas de uma prancheta, da tábua de uma mesa, de um espelho comum, são planas.

O marceneiro emprega o instrumento chamado plaina (fig. 3) para obter uma superfície plana.

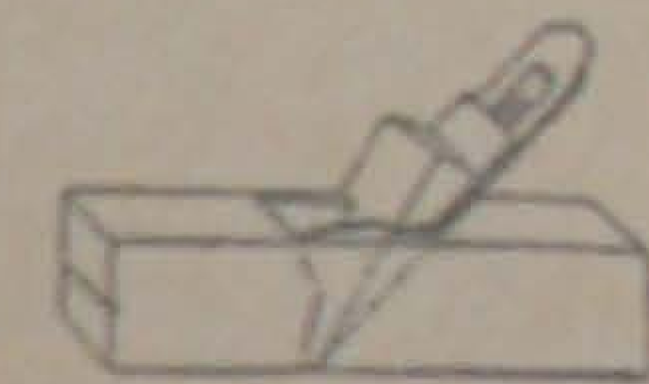


Fig. 3 — Uma plaina

As superfícies do ovo, de uma laranja, de uma bola, são curvas.

Podemos supor uma superfície plana prolongada quanto queiramos em todas as direções; a superfície plana assim estendida chama-se um *plano*.

Figura plana — Quando todos os pontos de uma figura pertencem ao mesmo plano, diz-se que ela é uma *figura plana*.

LINHA

Um fio muito fino, um traço a lapis sôbre uma folha de papel, dão-nos a imagem aproximada, do que se chama **linha**. Dizemos aproximada, porque, por melhor que os façamos, haverá sempre neles uma espessura ou uma largura e a linha considerada geometricamente não tem espessura nem largura, mas só comprimento. Entretanto, para representarmos a linha, deslocamos sôbre uma superfície uma ponta, seja de lapis, giz, aço, carvão, etc.

A linha pode também ser considerada como o encontro ou intersecção de duas superfícies.

Assim, por exemplo, as arestas de um cubo são linhas que resultam da intersecção de duas superfícies planas.

PONTO

As extremidades de uma linha são **pontos**: a intersecção de duas linhas é um **ponto**.

O **ponto** geométrico não tem dimensões, isto é, não tem *comprimento*, *largura* nem *espessura*; entretanto representamo-lo por um sinal deixado pela ponta do lapis, da pena ou do giz em uma superficie. Também representamos o ponto pela intersecção de dois pequenos traços.

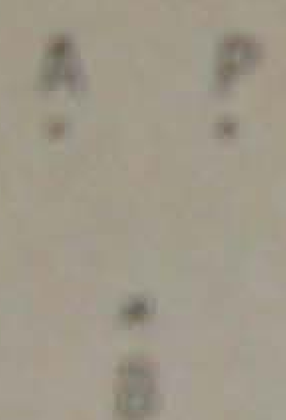


Fig. 4 — Como se representa um ponto.

Designamos um ponto por meio de uma letra; assim, por exemplo: *ponto* A, *ponto* B, *ponto* P, (fig. 4).

LINHA RETA

Linha reta — A mais simples de todas as linhas é a *linha reta* da qual um fio (fig. 5) bem

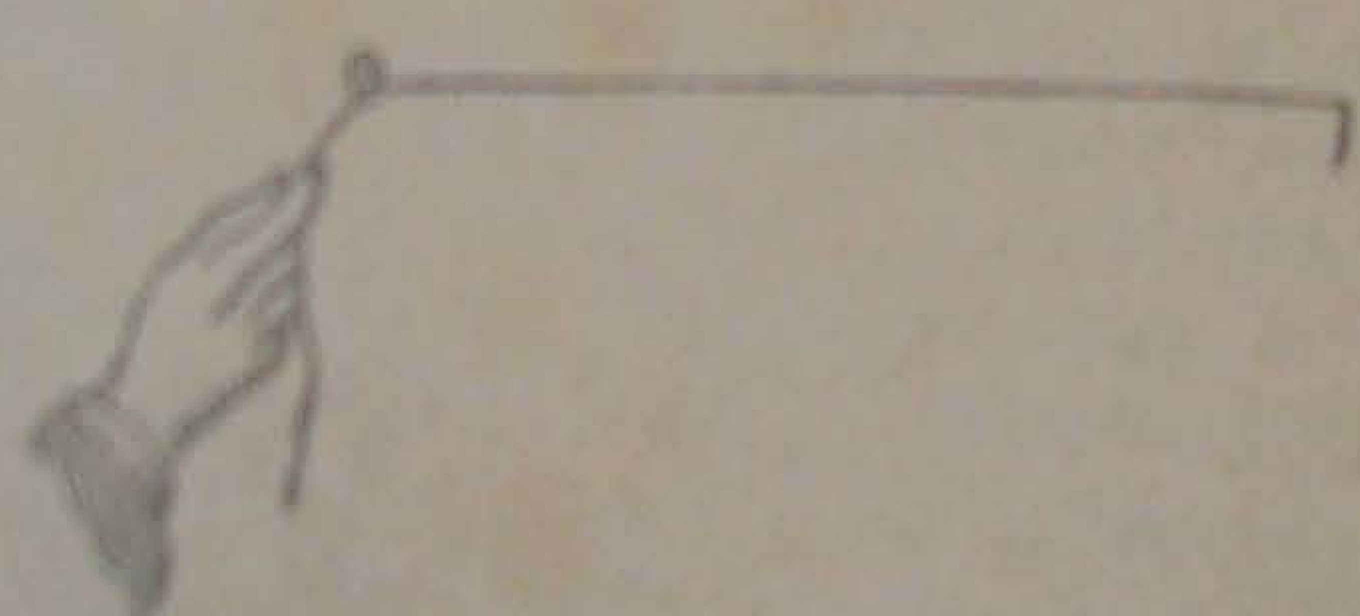


Fig. 5 — Um fio bem esticado dá idéia de uma linha reta.

esticado dá-nos idéia aproximada. Em vez de *linha reta*, diz-se também, abreviadamente, *uma reta*.

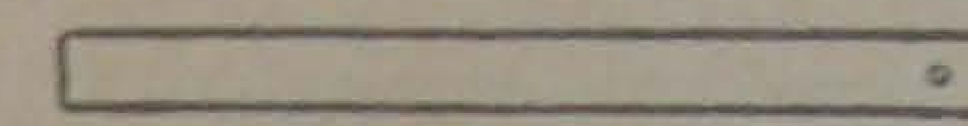


Fig. 6 — Uma régua.

O instrumento usado para auxiliar o traçado das retas chama-se **régua** (fig. 6).

O carpinteiro e o pintor servem-se algumas vezes, para traçar uma reta, de um cordel coberto

Fig. 7

de giz, fixando-o bem esticado pelas extremidades, levantando-o depois pelo meio e largando-o de repente (fig. 7).

Antes de usar uma régua, devemos verificar si ela não tem defeito. Para isto, colocamo-la sôbre o papel e traçamos uma linha apoiando a ponta do lapis contra a aresta da régua; depois, viramos a régua, fazendo-a girar em torno do traço feito e riscamos novamente: o segundo traço deve coincidir com o primeiro.

Propriedade característica da linha reta — *Por dois pontos dados pode-se fazer passar uma linha reta e só uma.*

De acôrdo com esta propriedade, designamos uma reta por meio de duas letras colocadas em dois quaisquer de seus pontos. Assim, quando dizemos — a reta *AB* — estamos designando a reta única que passa pelos pontos *A* e *B* (fig. 8).

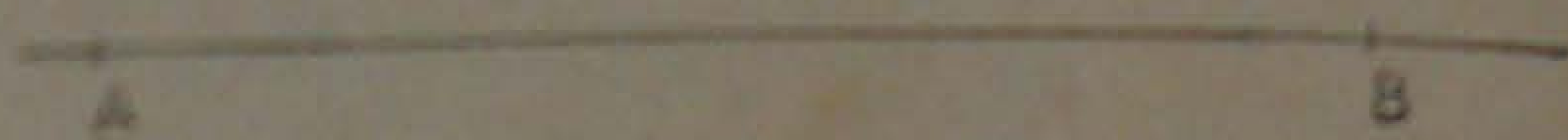


Fig. 8 — A reta *AB*

Da propriedade caracteristica da reta se deduz, ainda, que duas retas distintas não podem ter mais de um ponto comum ou, o que é o mesmo, que duas retas só se podem cortar em um ponto.

Finalmente, a reta nos dá sempre a menor distância entre dois quaisquer de seus pontos.

Posições da reta — A linha reta, segundo a direção que segue, pode estar na posição *vertical*, *horizontal* ou *inclinada*.

Fig. 9 — Fio a prumo.

A reta está na posição *vertical* quando segue a direção do *fio a prumo* (fig. 9).

O fio a prumo compõe-se geralmente de um cordel, na extremidade do qual se acha suspenso um corpo pesado.

O fio a prumo é usado pelos pedreiros para verificar a verticalidade de uma parede.

A reta está em posição *horizontal* quando segue a direção da superficie das águas tranquilas.

Assim, por exemplo, se conseguirmos colocar sôbre a superficie d'água um fósforo e se êste aí se conservar, ficará em posição horizontal.

O instrumento que serve para se verificar se uma reta ou uma superficie está horizontal chama-se *nível* (fig. 10).

Fig. 10 — Um nível.

A reta que não estiver em posição vertical, nem horizontal, está em posição *inclinada*.

A reta é ilimitada — Um ponto que se move sôbre uma reta *AB* pode percorrê-la em dois sentidos: de *A* para *B* ou de *B* para *A* (fig. 7). Assim é que, para traçar essa reta, o lapis pode deslocar-se sôbre o papel da direita para a esquerda ou da esquerda para a direita. Concebe-se então que uma reta pode ser prolongada indefinidamente nos dois sentidos. Diz-se, por isso, que a *reta é ilimitada*.

Semi-reta e segmento de reta — Marquemos sôbre uma reta indefinida um ponto *O*; ela fica dividida em duas porções, cada uma das quais só pode ser prolongada no sentido indicado pela seta correspondente; no outro sentido, cada porção está limitada pelo ponto *O*. Diz-se que a reta ficou dividida em duas *semi-retas;* o ponto *O*, além do

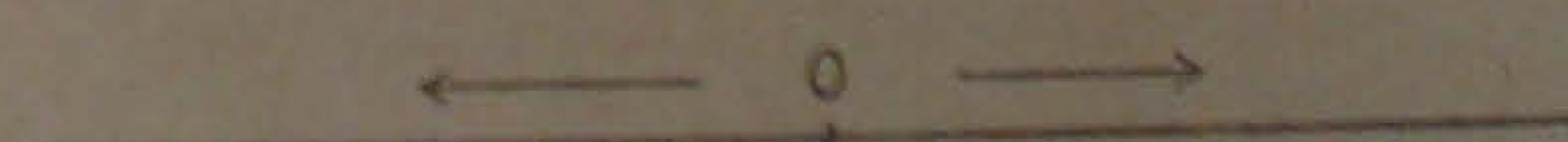


Fig. 11 — O ponto *O* divide a reta em duas semi-retas.

qual não se pode prolongar a semi-reta, chama-se *origem* da semi-reta (fig. 11).

A porção de reta compreendida entre dois pontos, *A* e *B*, é um **segmento de reta** ou *segmento retilíneo*. Os pontos *A* e *B* são as *extremidades* do segmento. Designa-se um segmento de reta pelas duas letras colocadas em suas extremidades.

Dois segmentos que têm uma extremidade comum chamam-se *consecutivos* (fig. 12). Dois

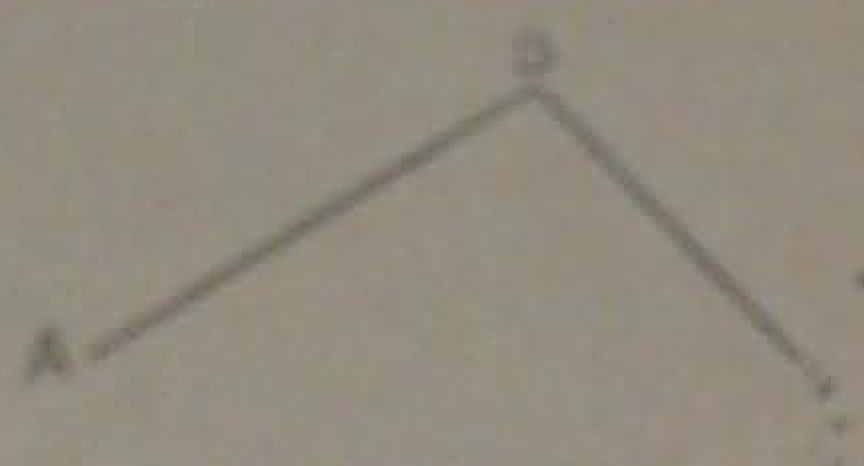


Fig. 12 — Os segmentos *AB* e *BC* são consecutivos.

Fig. 13 — *AB, BC, CD, AC, BD, AD,* são segmentos co-lineares.

segmentos situados sôbre a mesma reta se chamam *co-lineares* (fig. 13).

Já sabemos que a reta nos dá a menor distância entre dois quaisquer de seus pontos. Por isso, quando falamos na *distância entre dois pontos* (*A* e *B*, por exemplo) é ao segmento retilíneo, (*AB*), que os liga, que nos referimos.

A unidade de comprimento. — A medida de um segmento de reta é o seu *comprimento*. A unidade de comprimento é o *metro* (*).

(*) O *metro* é a unidade principal de comprimento e corresponde aproximadamente à décima milionésima parte de um quarto do meridiano terrestre. Rigorosamente o metro é a distância, à temperatura de 0°C, entre dois traços gravados sôbre uma barra de platina iridiada depositada na Repartição Internacional de Pesos e Medidas.

Divide-se o metro em decímetros, centímetros e milímetros. O decímetro é a décima parte do *metro*; o centímetro, a centésima parte e o milímetro a milésima parte. 10 *metros* = 1 decâmetro; 100 *metros* = 1 hectômetro; 1000 *metros* = 1 quilômetro.

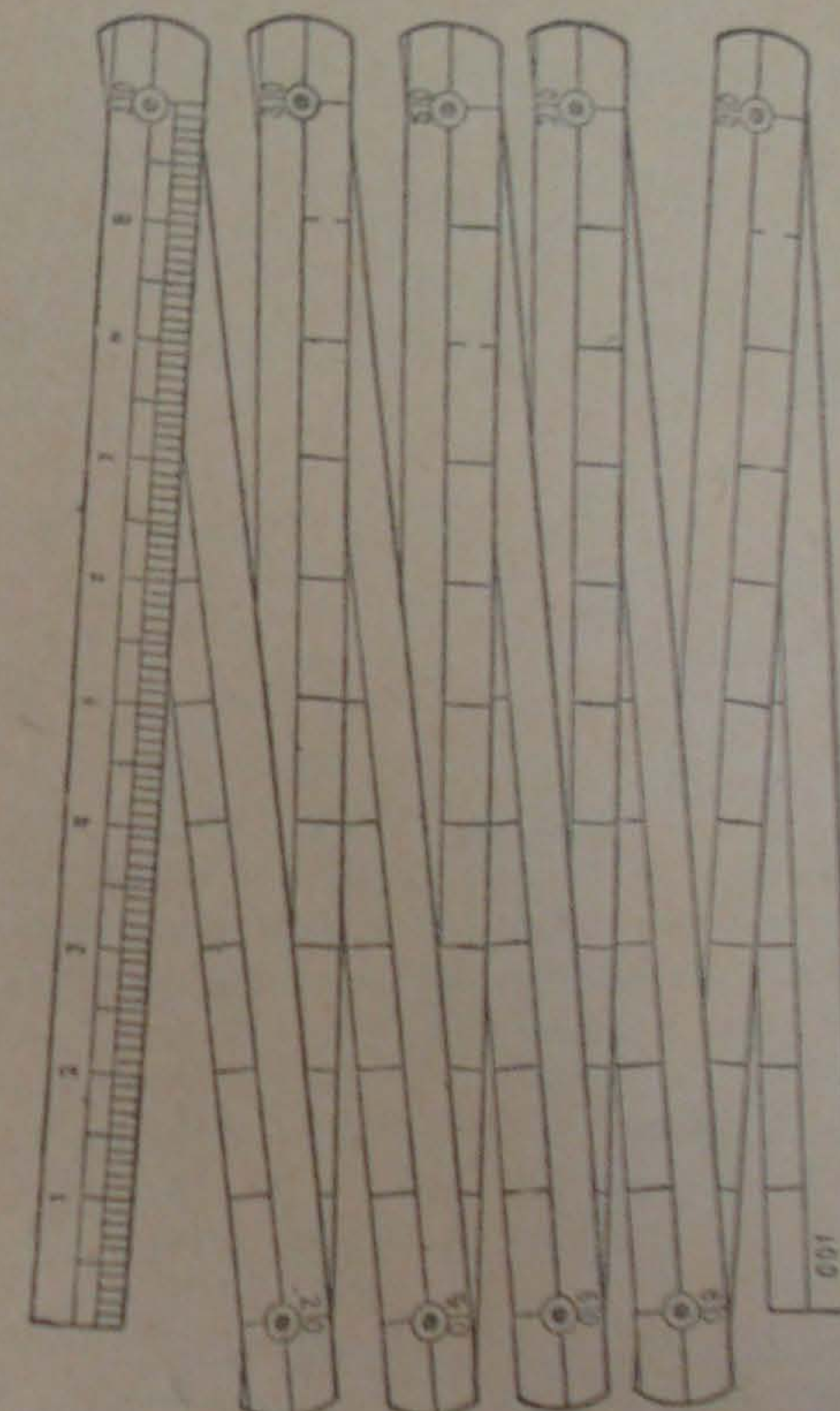


Fig. 14 — Um metro (tamanho natural)

* O *metro* tem geralmente a fôrma de uma regua chata de madeira, sôbre a qual estão marcadas as divisões dos decímetros, centímetros, e, algumas vezes, dos milímetros.

Fabricam-se também *metros* dobradiços (fig. 14) em madeira, osso ou metal; e em fitas de pano, aço ou papel.

No desenho geométrico empregamos o *duplo-decímetro* para medir os segmentos retilíneos.

Linha quebrada ou poligonal — *Linha quebrada* ou *poligonal* é a figura formada por vários segmentos de reta consecutivos mas não co-lineares. Cada segmento é um *lado* da linha poligonal (fig. 15).

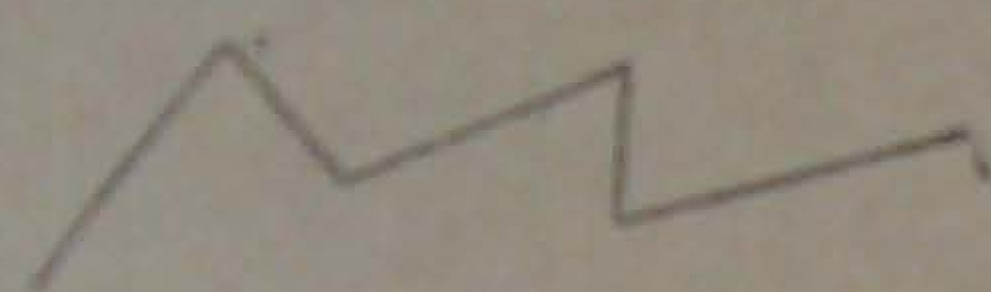


Fig. 15 — Linha poligonal

LINHA CURVA

Linha curva — A linha que não é reta nem quebrada, isto é, nem reta nem formada de porções de reta, é *curva* (fig. 16).

Fig. 16 — Linhas curvas

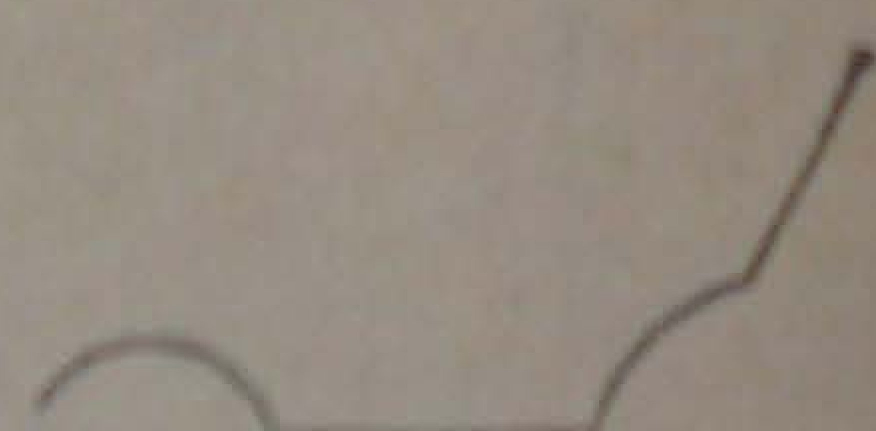


Fig. 17 — Linha mista

A linha composta de porções de retas e de curvas chama-se *mista* (fig. 17).

CIRCUNFERÊNCIA

Circunferência — É a curva plana, fechada, que tem todos os seus pontos a igual distância de um ponto do mesmo plano chamado *centro*. O segmento de reta que liga o centro a qualquer ponto da circunferência é *um raio*. Assim, na fig. 18 *OA* é um raio.

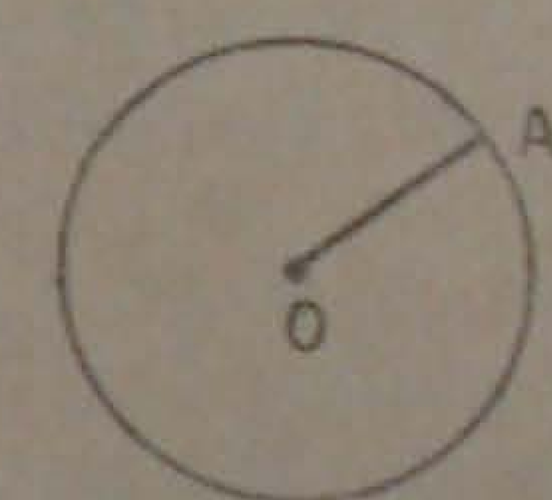


Fig. 18 — *OA* é um raio de circunferência

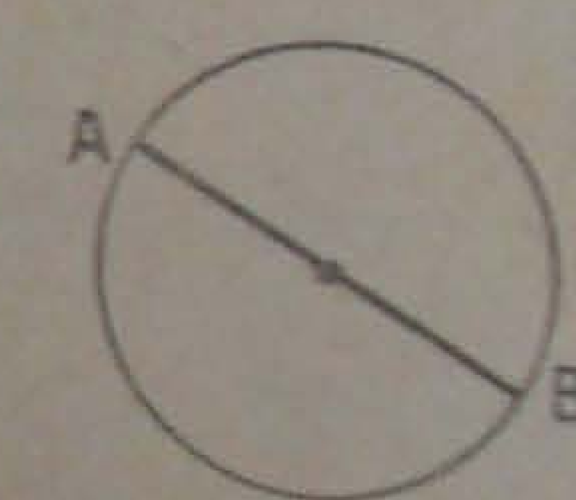


Fig. 19 — *AB* é um diâmetro da circunferência.

O segmento de reta que liga dois pontos da circunferência e passa pelo centro é um *diâmetro*. O diâmetro é, por definição, igual a dois raios (fig. 19).

Evidentemente uma circunferência tem uma infinidade de raios e uma infinidade de diâmetros.

A porção de circunferência compreendida entre dois pontos chama-se *arco* de circunferência.

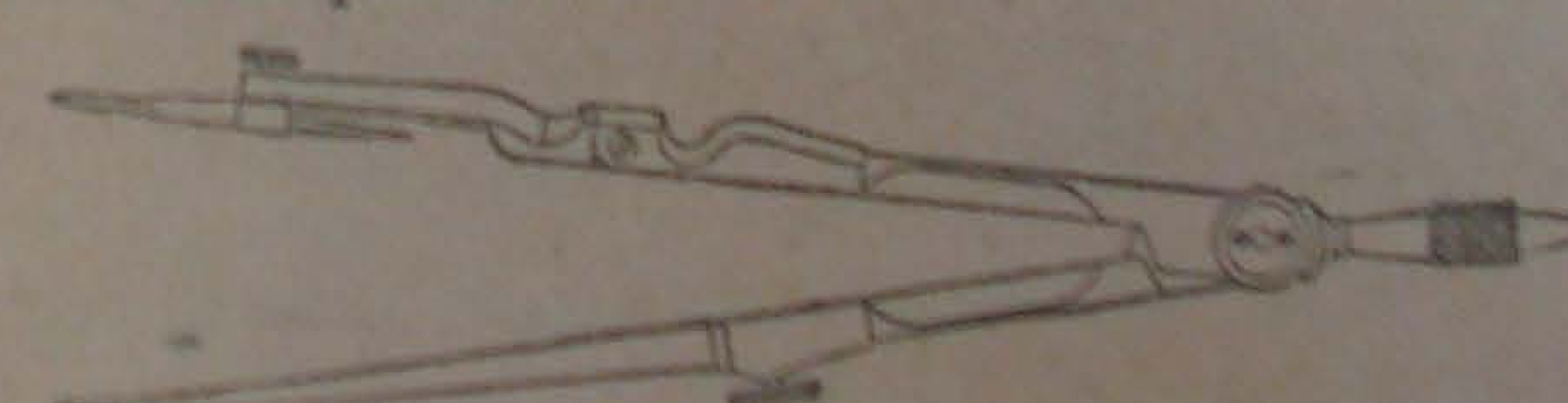


Fig. 20 — Compasso

O traçado de circunferências e de arcos de circunferência é feito com o *compasso* (fig. 20).

Para isto, abrimos o compasso de modo que a distância entre a ponta sêca e a do lapis (ou tira-linhas) preso à outra haste seja igual ao raio da circunferência que se quer traçar; em seguida, fixamos a ponta sêca no centro escolhido e fazemos a outra ponta girar em torno daquela. Quando a ponta móvel voltar ao ponto de partida estará completa a circunferência (fig. 21).

Fig. 21 — Como se traça uma circunferência com o compasso.

Ao ato de fixar a ponta sêca do compasso em determinado ponto chama-se *fazer centro.*

Em um terreno plano, fixamos uma estaca na qual prendemos, por uma das extremidades, um cordel, e na outra extremidade é colocada uma ponteira ou uma vara.

Fig. 22 — Circunferência traçada por um jardineiro

A estaca ocupa o centro, o cordel bem esticado é o raio e a ponteira ou a vara traça a circunferência (fig. 22).

QUESTIONÁRIO

1. Como a Geometria considera os corpos?
2. Que é volume?
3. Que é superfície?
4. Como se chama a medida de uma superfície?
5. Como podem ser as superfícies?
6. Quando se diz que uma figura é plana?
7. Como se representa um ponto?
8. Qual a propriedade característica da linha reta?
9. Como se pode verificar se uma reta está perfeita?
10. Que é semi-reta? e segmento de reta?
11. Como se designa uma linha reta?
12. Quais as posições que uma reta pode ocupar?
13. Que é *fio a prumo?* para que serve?
14. Que é *nível* e para que serve?
15. Que são segmentos consecutivos? e segmentos co-lineares?
16. Que se entende por *distância* entre dois pontos?
17. Qual a unidade de comprimento e como foi obtida?
18. Que é linha quebrada e que outro nome tem?
19. Que é uma linha curva?
20. Como se pode definir a circunferência?

CAPÍTULO II

Ângulo — Classificação dos ângulos — Soma de ângulos — Ângulos complementares e suplementares.

Angulo é a figura formada por duas semi-retas que têm a mesma origem.

As duas semi-retas são os *lados* do ângulo e a origem comum delas é o *vértice* do ângulo.

Fig. 23 — Ângulo *AVB*.

Designa-se um ângulo por três letras colocadas, uma no vértice e uma sôbre cada lado, ou simplesmente por uma letra colocada no vértice, quando, na figura a que pertencer, não houver outro ângulo com o mesmo vértice.

Assim, na fig. 23, podemos dizer: *ângulo V* ou *ângulo AVB*; escrevemos abreviadamente $\wedge$ V ou, ainda, $\wedge$ *AVB*, tendo o cuidado de, neste ultimo caso, dizer e escrever a letra do vértice entre as outras duas.

A grandeza de um ângulo depende exclusivamente do maior ou menor afastamento de seus lados. O comprimento dos lados de um ângulo nada influe em sua grandeza.

Comparação de dois ângulos — Para comparar dois ângulos, transportamos um sôbre outro, fazendo coincidir os vértices e dois lados, o que é sempre possivel. Feito isto, se os outros lados também coincidirem, os dois ângulos são iguais. Em caso contrário, os dois ângulos são desiguais e o que contém o outro é maior. Assim, por exemplo, na figura 24 os ângulos *AVB* e *A'V'B'* são

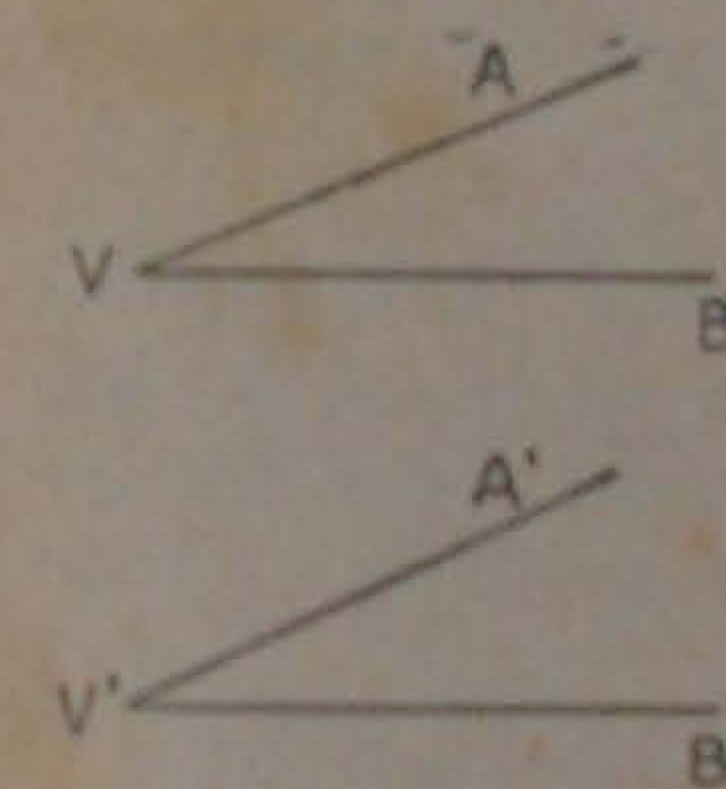


Fig. 24 — Ângulos iguais.

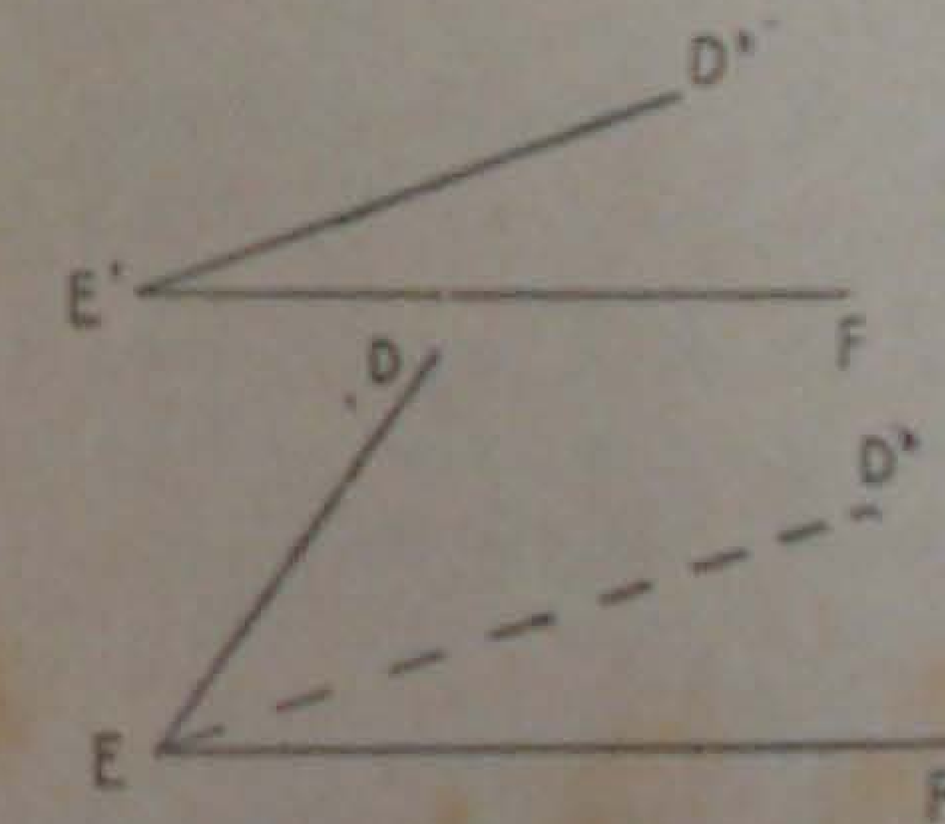


Fig. 25 — Ângulos desiguais

iguais; na fig. 25 os ângulos *DEF* e *D'E'F* são desiguais e *DEF* é o maior.

Ângulos adjacentes — Dois ângulos que têm o mesmo vértice e estão separados por um lado comum chamam-se *adjacentes*. Na fig. 26 os ângulos *BAC* e *CAD* são adjacentes, pois têm o mesmo vér-

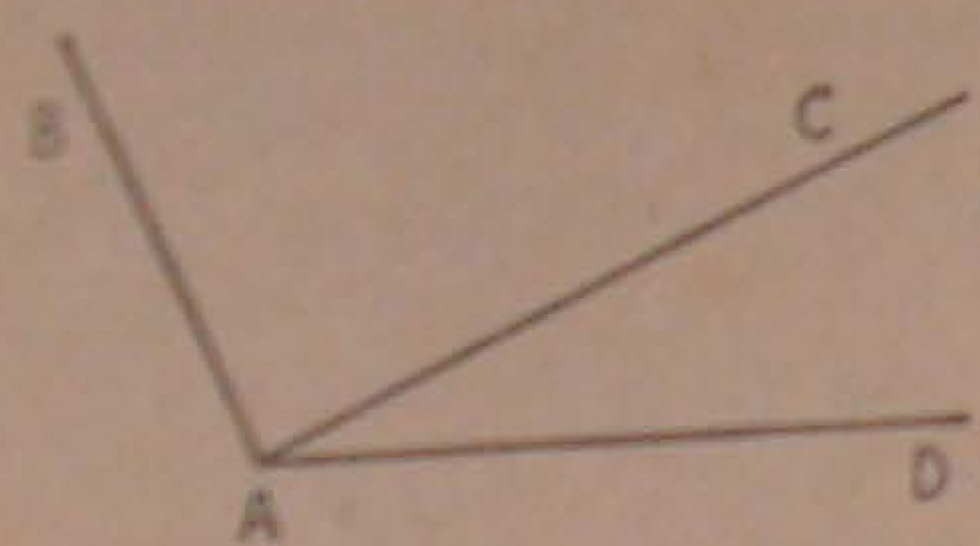


Fig. 26 — Ângulos adjacentes (*BAC* e *CAD*)

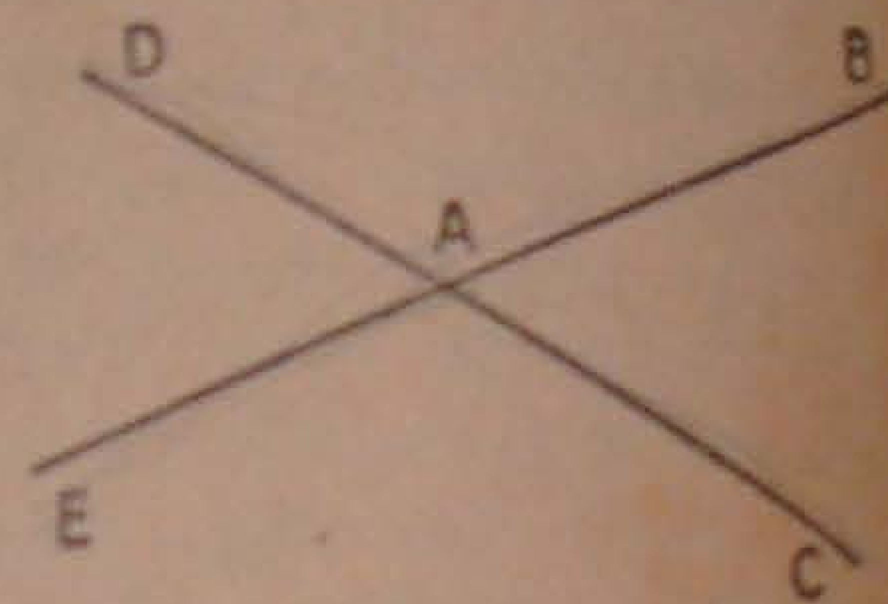


Fig. 27 — Ângulos opostos pelo vértice (*BAC* e *DAE*; ou *BAD* e *CAE*)

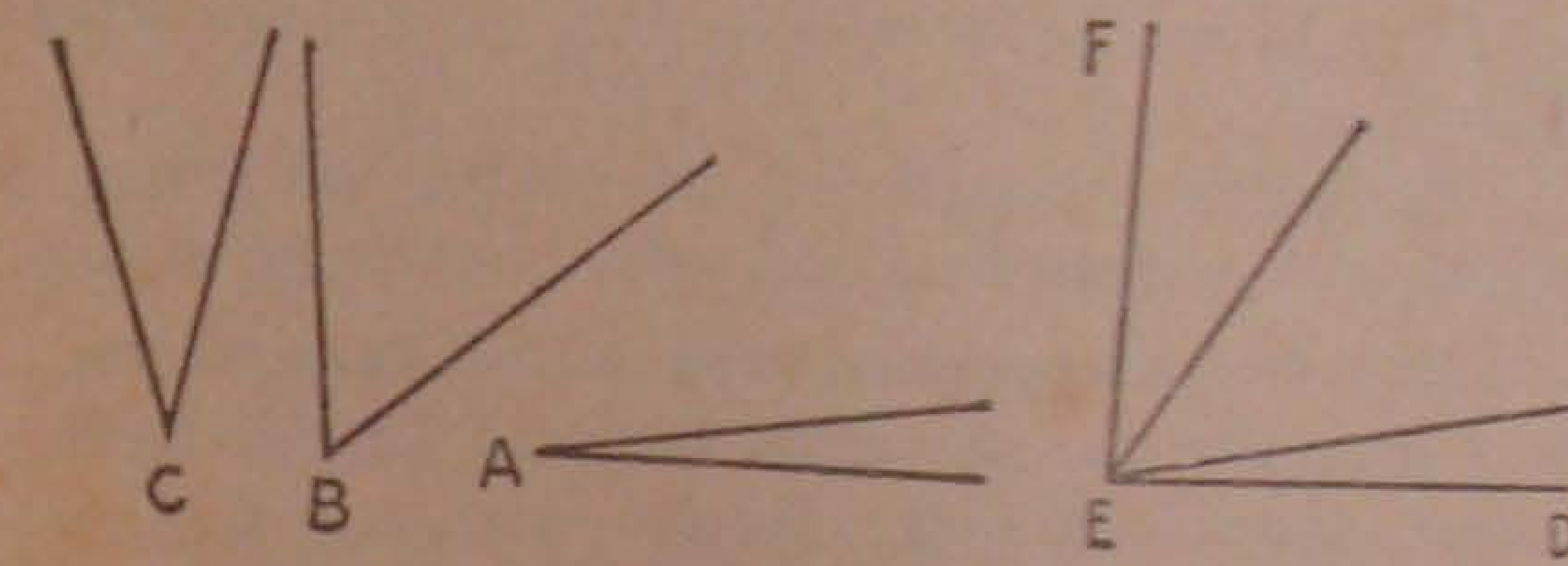
tice *A* e um lado comum, *AC*, que os separa. Os lados *AB* e *AD* chamam-se *exteriores*.

Ângulos opostos pelo vértice — Dois ângulos são opostos pelo vértice quando os lados de um são os prolongamentos dos lados do outro. Os ângulos *BAC* e *DAE* da figura 27 são opostos pelo vértice.

Os ângulos opostos pelo vértice são iguais.

Soma de ângulos — A soma de dois ângulos é outro ângulo que se obtém do seguinte modo: constrói-se um dêles adjacente ao outro e o ângulo formado pelos lados exteriores será a soma dos dois ângulos dados. Se a êsses dois quisermos somar um terceiro, bastará construir êste adjacente à soma dos dois primeiros; e assim sucessivamente,

o ângulo formado pelos lados exteriores dará a soma total (figs. 28 e 29).



Figs. 28 e 29 — O ângulo *DEF* é a soma dos ângulos *A*, *B* e *C*.

Classificação dos ângulos — Quando duas retas se encontram, elas formam quatro ângulos, que, considerados dois a dois, são adjacentes ou opostos pelo vértice. Assim, na figura 27, os ângulos *BAC* e *DAE* são opostos pelo vértice, os ângulos *BAC* e *CAE* são adjacentes.

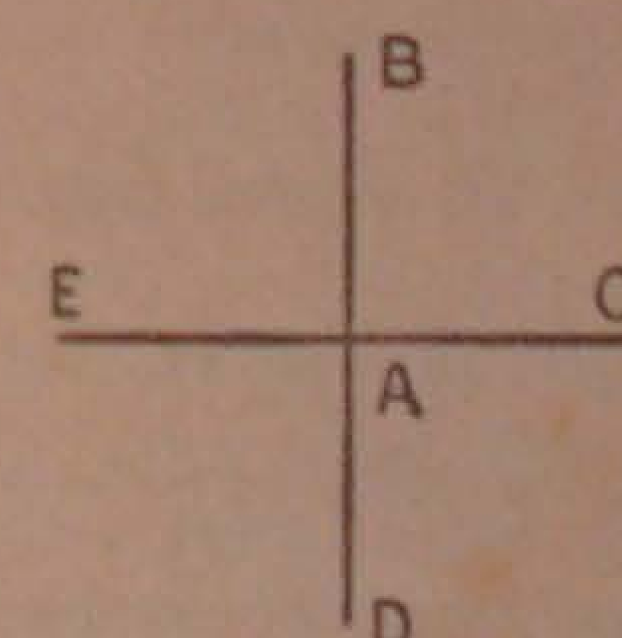


Fig. 30 — Retas perpendiculares.

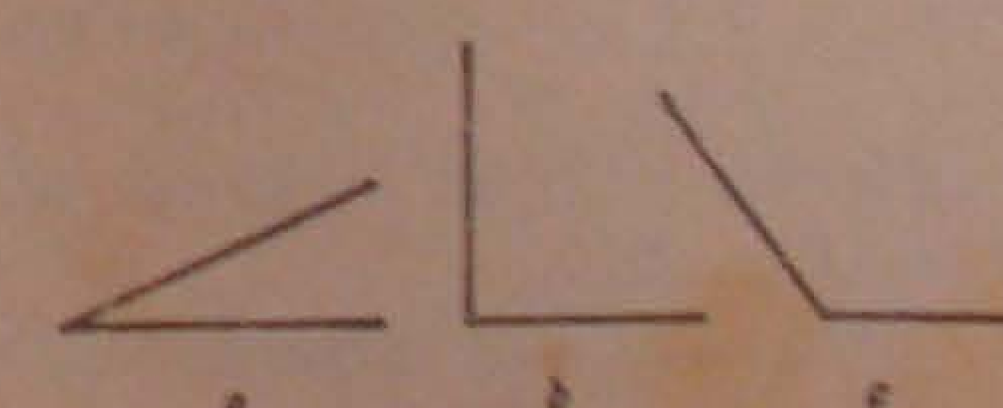


Fig. 31 — Ângulos a) agudo; b) reto; c) obtuso.

Quando duas retas formam entre si ângulos adjacentes iguais, elas se dizem *perpendiculares* (fig. 30) e cada um dos ângulos é um ângulo reto. Os ângulos retos são todos iguais.

O ângulo menor do que o reto se chama agudo e o ângulo maior do que o reto se chama obtuso (fig. 31).

Podemos classificar, portanto, os ângulos quanto à sua grandeza, em retos, agudos e obtusos.

Ângulos complementares e suplementares — Dois ângulos que somados dão um ângulo reto se dizem *complementares;* nesse caso, um é o *complemento* do outro. Os ângulos A e B são comple-

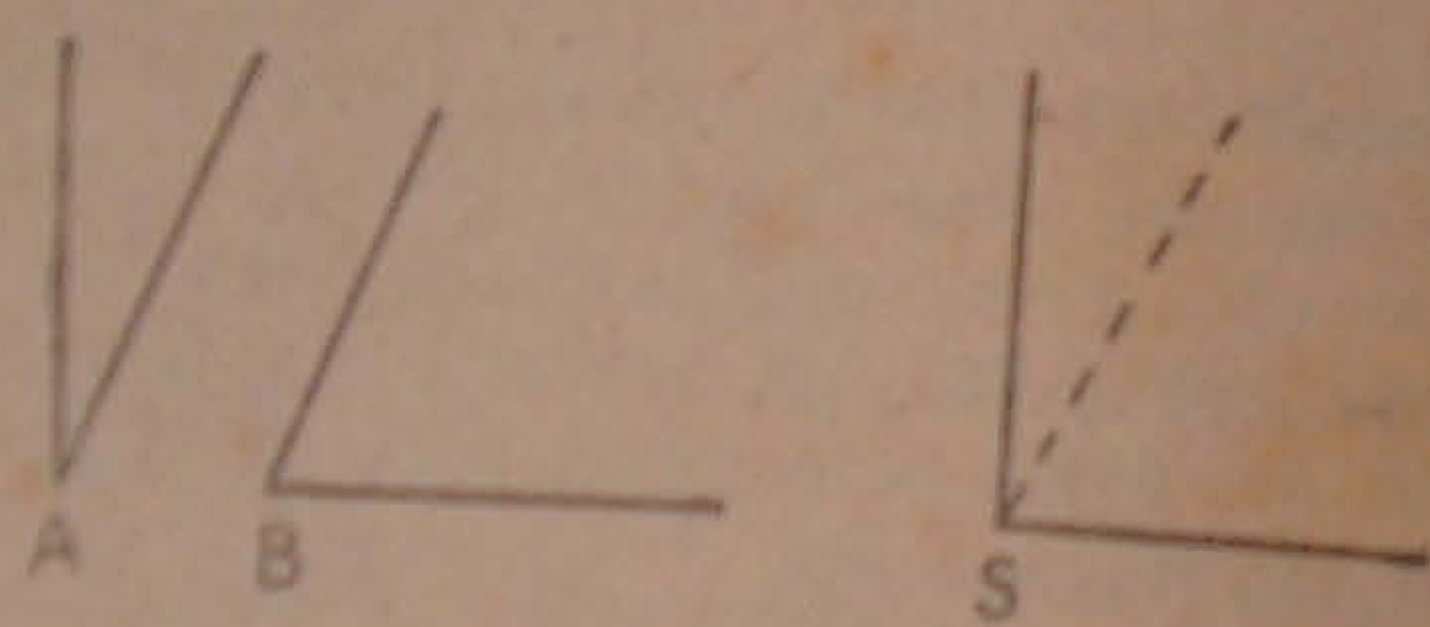


Fig. 32 — Os ângulos A e B são complementares.

mentares, porque a soma dêles, S, é um ângulo reto (fig. 32).

Dois ângulos adjacentes, cujos lados exteriores sejam perpendiculares, são complementares.

Quando a soma de dois ângulos é igual a dois ângulos retos, êles se dizem *suplementares;* neste caso, um é o *suplemento* do outro. Assim, na fig. 33, A e B são ângulos suplementares, porque a sua soma, S, é igual a dois retos.

Dois ângulos adjacentes, cujos lados exteriores estão em linha reta, são evidentemente suple-

mentares. Tais são os ângulos adjacentes ABC e ABD cujos lados BC e BD estão em linha reta (fig. 34).

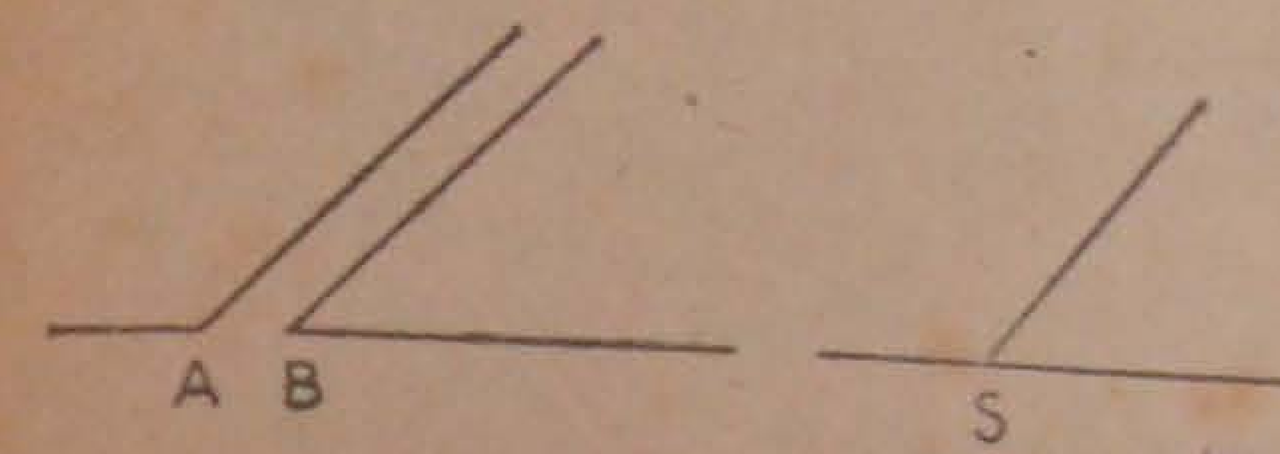


Fig. 33 — Os ângulos A e B são suplementares, porque a sua soma, S, é igual a dois ângulos retos.

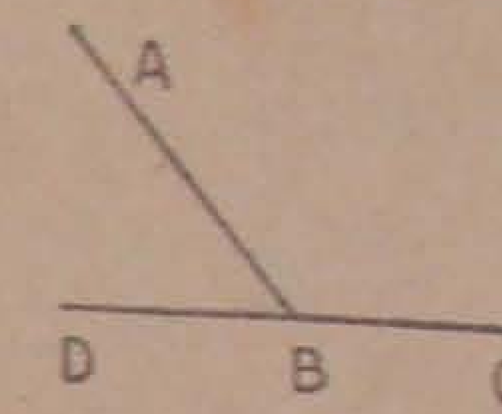


Fig. 34 — Os ângulos adjacentes ABD e ABC são suplementares.

Soma de ângulos consecutivos — A soma dos ângulos consecutivos formados em torno de um ponto do mesmo lado de uma reta é igual a dois ângulos retos. (fig. 35).

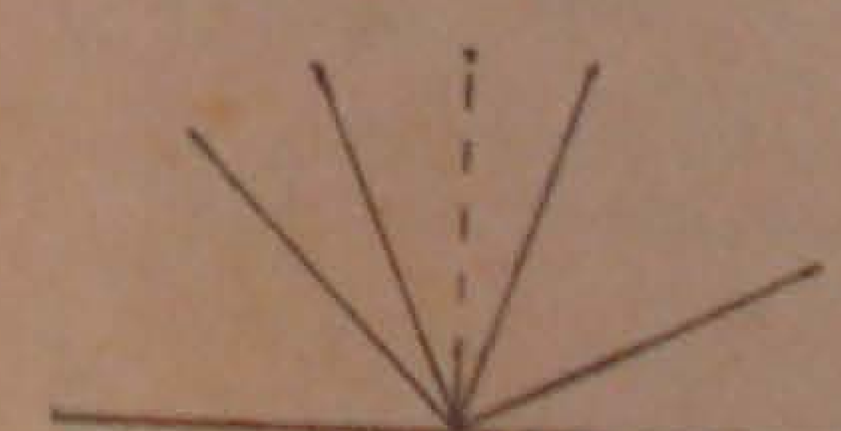


Fig. 35 — Ângulos consecutivos do mesmo lado de uma reta.

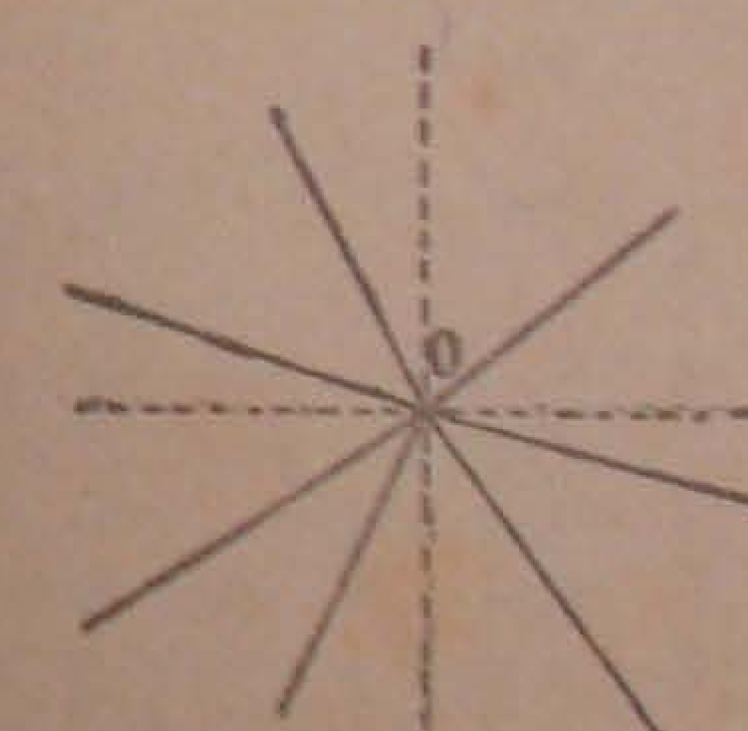


Fig. 36 — Ângulos consecutivos em torno de um ponto.

A soma dos ângulos consecutivos formados em torno de um ponto sôbre um plano é igual a quatro ângulos retos. (fig. 36).

Bissetriz de um ângulo é a semi-reta que, partindo do vértice, divide o ângulo ao meio (fig. 37).
A propriedade da bissetriz de um ângulo é que

Fig. 37 — Ângulo e sua bissetriz

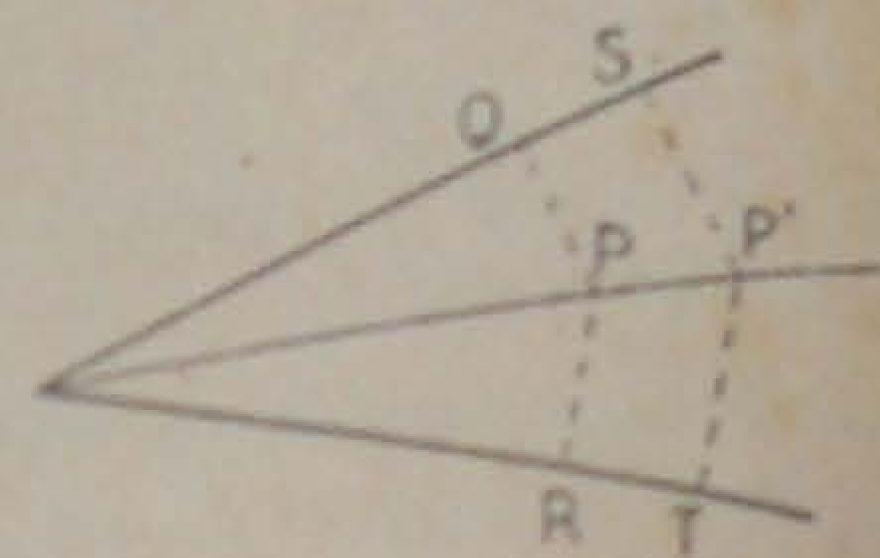


Fig. 38 — Os pontos da bissetriz distam igualmente dos lados do ângulo.

todos os seus pontos distam igualmente dos lados do ângulo. Na (fig. 38) por exemplo, $PQ = PR$, $P'S = P'T$, e assim por diante.

QUESTIONÁRIO

1. Que é ângulo?
2. Como se designa um ângulo?
3. Como se comparam dois ângulos?
4. Que são ângulos adjacentes?
5. Que são ângulos opostos pelo vértice?
6. Como se somam dois ou mais ângulos?
7. Que são retas perpendiculares?
8. Como se classificam os ângulos?
9. Que são ângulos complementares?
10. Que são ângulos suplementares?
11. A que é igual a soma dos ângulos consecutivos formados em torno de um ponto do mesmo lado de uma reta?
12. A que é igual a soma dos ângulos consecutivos formados sôbre um plano em torno de um ponto?
13. Que é bissetriz de um ângulo?
14. Qual a propriedade da bissetriz?

PROBLEMAS

Problema 1. — *Construir um ângulo igual a outro ângulo dado.*

Seja CAB o ângulo dado (fig. 39). Com um raio qualquer e do vértice A, como centro, descrevamos o arco de circunferência de círculo EF compreendido

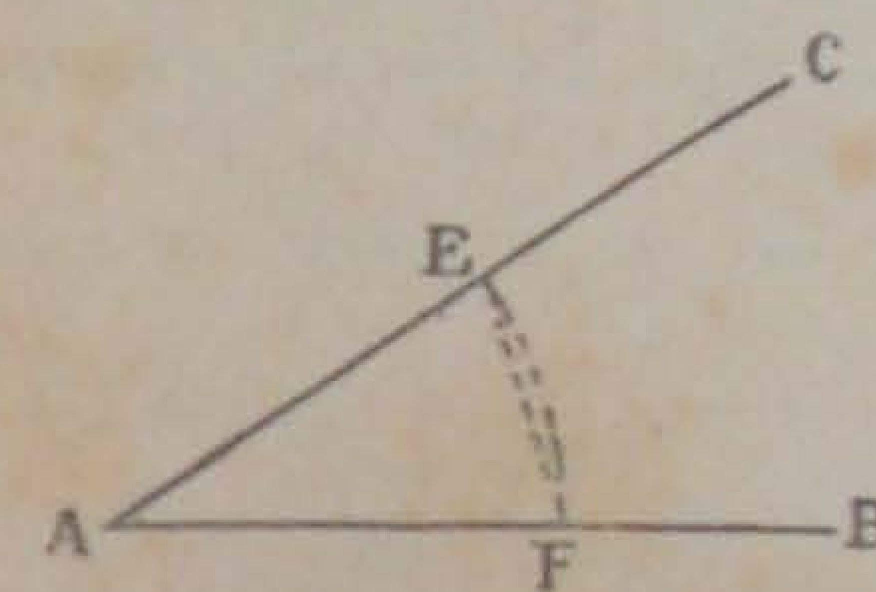


Fig. 39

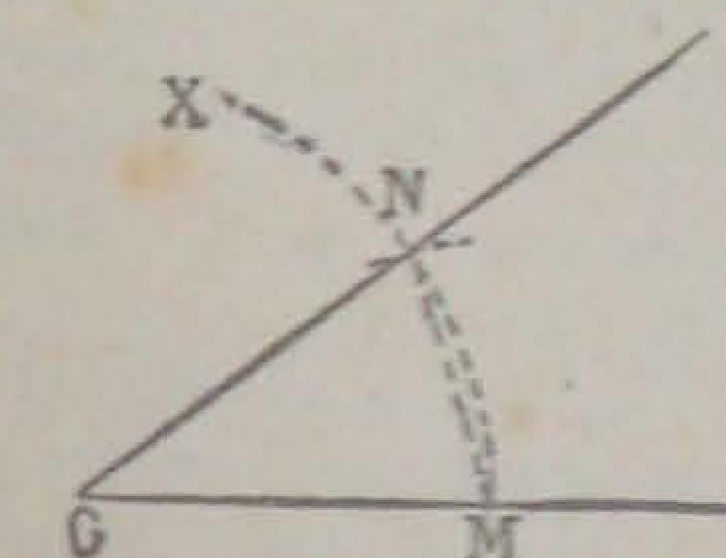


Fig. 40

pelos lados do ângulo. Tracemos uma semi-reta (fig. 40) e de sua origem, G, com o mesmo raio tracemos o arco MX; meçamos com o compasso a distância EF e apliquemo-la em MX: acharemos o ponto N que, ligado a G, resolverá o problema.

Problema 2. — *Traçar a bissetriz de um ângulo ou dividi-lo em duas partes iguais.*

Do ponto A, com um raio qualquer, descrevamos o arco MN. Dos pontos M e N, como centros (fig. 41),

Fig. 41

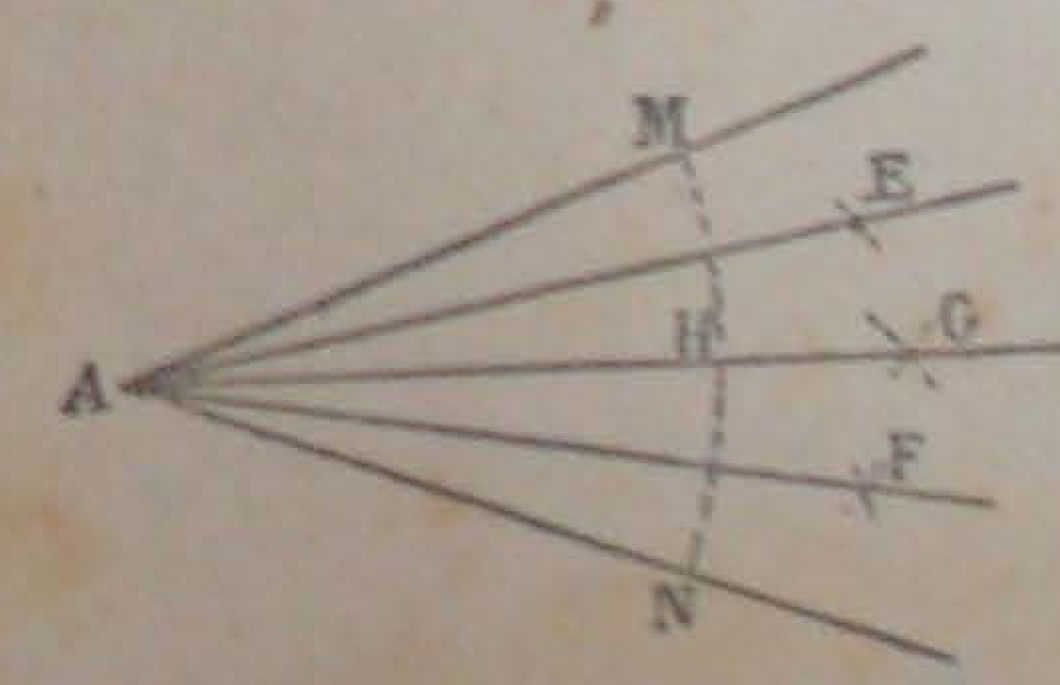


Fig. 42

descrevemos arcos de mesmo raio que se cortem; o ponto de interseção, G, ligado ao vértice do ângulo, isto é, ao ponto A, nos dará a bissetriz pedida.

Problema 3. — *Dividir um ângulo em quatro, oito, dezesseis, trinta e duas partes iguais.*

Para resolver este problema, tiremos a bissetriz do ângulo (fig. 42), depois dividamos cada metade do ângulo em duas partes iguais e prossigamos nesta operação até obter a divisão desejada.

Problema 4. — *Dividir um ângulo reto em três partes iguais.*

Do vértice A (fig. 43) como centro, e com um raio qualquer, descrevamos o arco MD; dos pontos M e D, como centros, e com o mesmo raio, marquemos os pontos H e G, os quais, ligados ao vértice A, resolverão o problema.

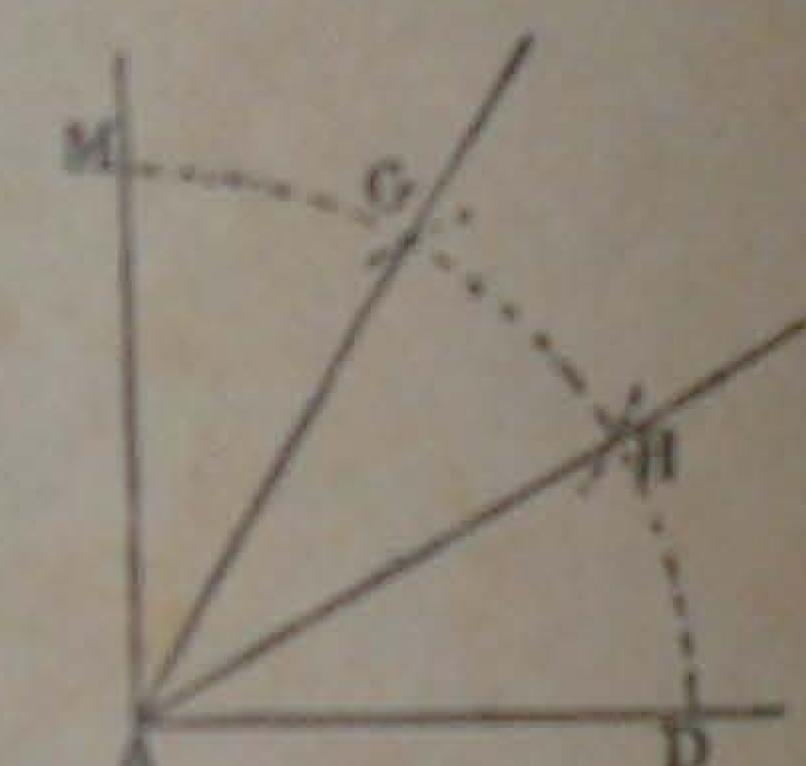


Fig. 43

Problema 5. — *Dado um ângulo agudo, construir o seu complemento.*

Seja DAC o ângulo agudo (fig. 44). Levantemos com o esquadro e a régua, pelo vértice, uma perpendicular AM. O ângulo MAD é o complemento do ângulo DAC.

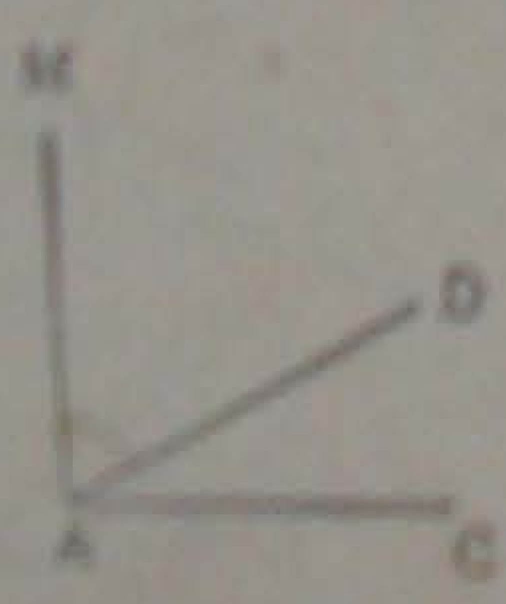


Fig. 44

Fig. 45

Problema 6. — *Dado um ângulo, achar o seu suplemento.*

Seja MDA o ângulo (fig. 45). Prolonguemos o lado DA para além do vértice e acharemos o ângulo MDN suplemento de MDA.

Problema 7. — *Dividir um ângulo em duas partes iguais sem auxílio do compasso.* Seja V o ângulo (fig. 46).

Marquemos, a partir do vértice sôbre um lado, as distâncias VM e MF e reproduzamo-las no outro lado do ângulo em VN e NE. Tracemos ME e NF. A semi-reta VP divide o ângulo V em duas partes iguais.

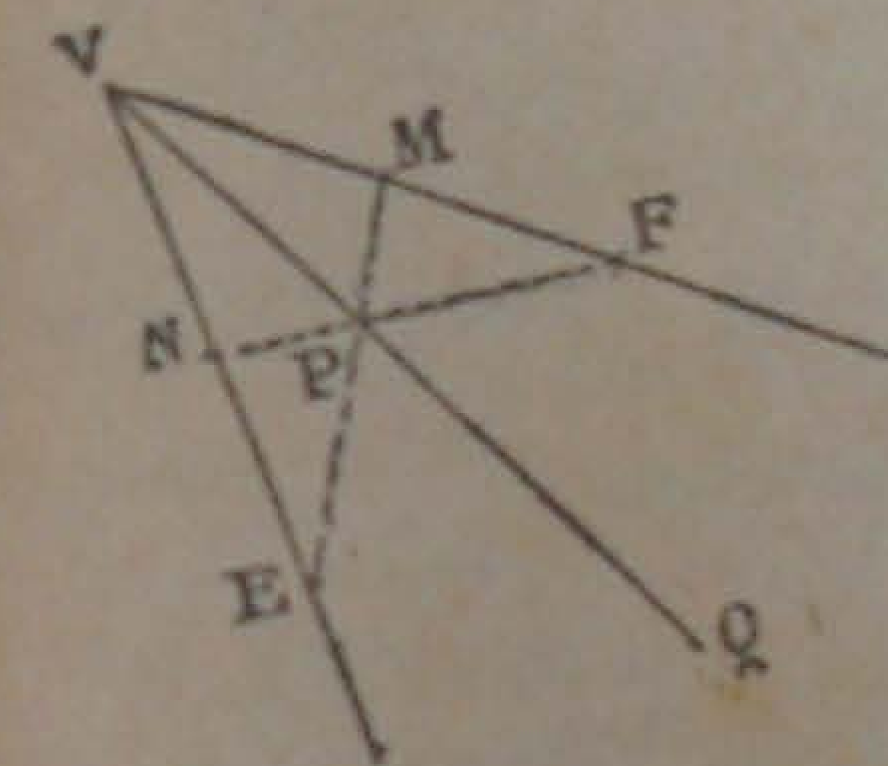


Fig. 46

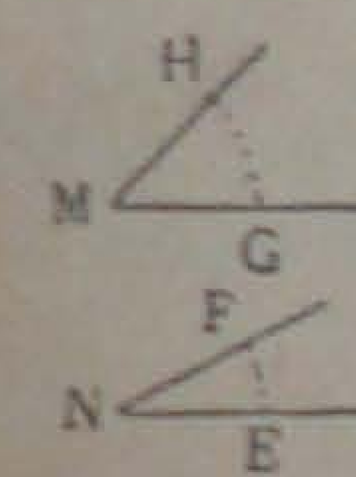


Fig. 47

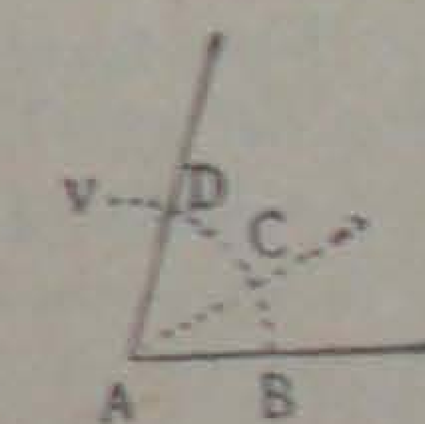


Fig. 48

Problema 8. — *Construir um ângulo igual à soma de dois ângulos dados.*

Sejam M e N os ângulos dados (fig. 47).

Tracemos a semi-reta A. Com o mesmo raio, fazendo centro em N, M e A, tracemos os arcos EF, GH e BV (fig. 48).

Reproduzamos em BC, o arco EF e em CD o arco GH. O ângulo DAB resolve o problema.

Problema 9. — *Construir um ângulo igual à diferença de dois ângulos dados.*

Sejam A e B os dois ângulos dados (fig. 49).

Façamos um ângulo *MCN* igual ao maior dos ângulos dados (fig. 50) e com o mesmo raio descrevamos os arcos DE, FG e MV.

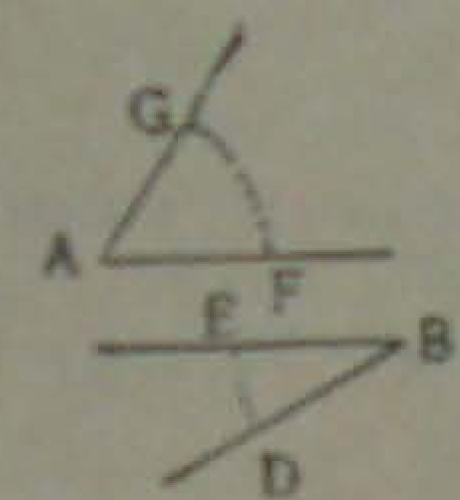


Fig. 49

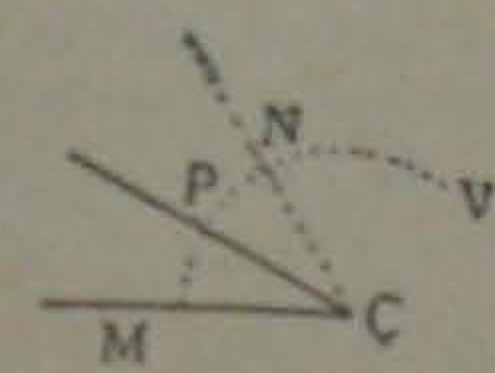
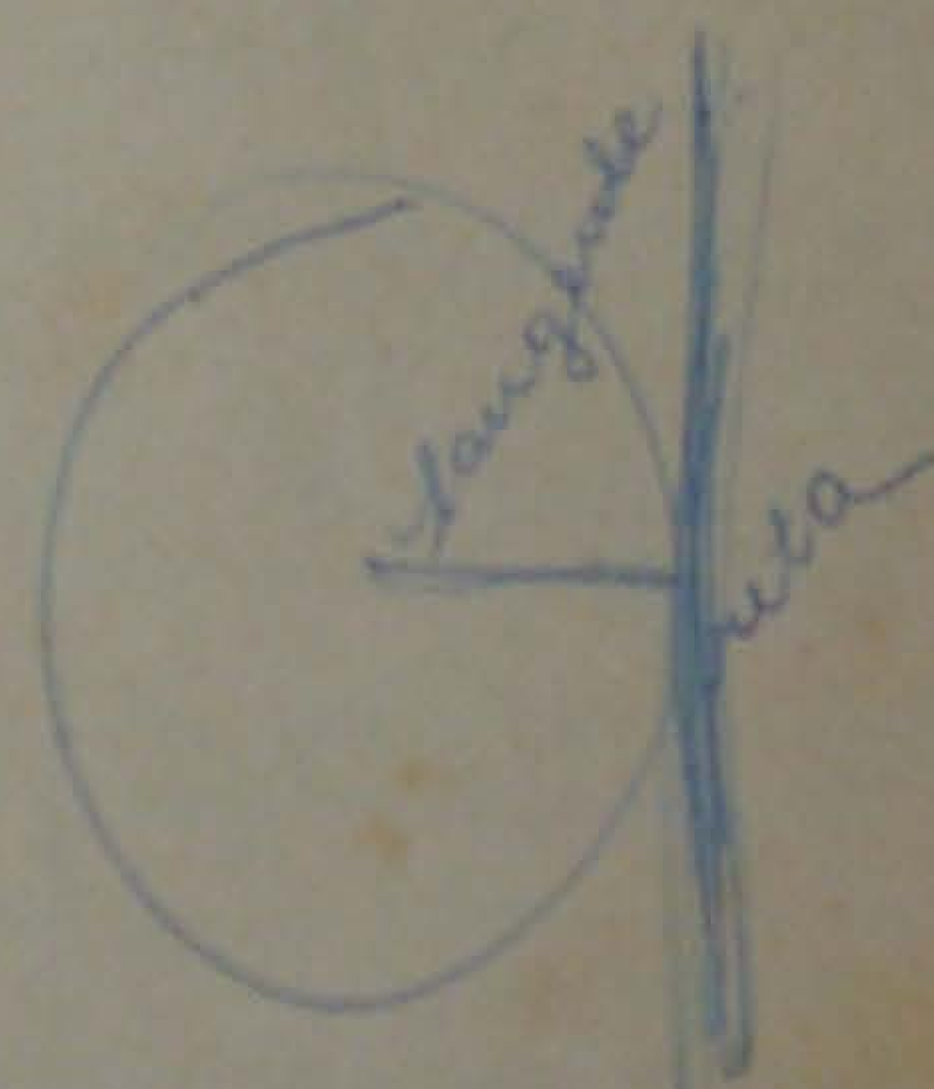


Fig. 50

Reproduzamos em *MN* (fig. 50) a partir de *N*, o arco *NP* igual ao arco *DE*.

O ângulo *PCM* resolve o problema.



CAPÍTULO III

Perpendiculares e oblíquas. — Mediatriz.

Duas retas são *perpendiculares* quando se encontram formando ângulos adjacentes iguais (figura 51).

Duas retas são *oblíquas* quando se encontram formando ângulos adjacentes desiguais (fig. 52). De um ponto tomado fora de uma reta ou sôbre ela podemos traçar uma infinidade de obliquas a essa reta, mas só podemos traçar uma perpendicular.

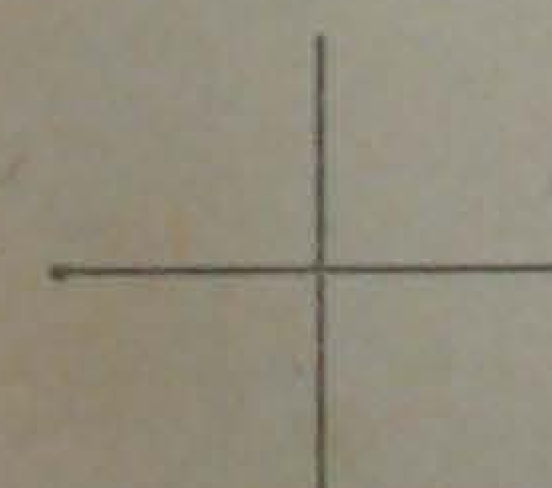


Fig. 51 — Retas perpendiculares

Fig. 52 — Retas oblíquas

Demonstra-se que: *de um ponto dado sôbre uma reta ou fóra dela, pode-se traçar uma perpendicular a essa reta e só uma.*

Demonstra-se ainda que, se de um ponto situado fora de uma reta, traçarmos uma perpendicular e várias oblíquas a essa reta, I) a perpendicular é menor que qualquer oblíqua; II) as oblíquas que se afastam igualmente de pé da perpendicular são iguais; III) as oblíquas que se afastam desigualmente do pé da perpendicular são desiguais e a que mais se afasta é a maior.

Assim, a menor distância do ponto A à reta MN é a perpendicular AB; as distâncias AR e AS são iguais porque estas duas oblíquas se afastam igualmente ($BR = BS$) de B; finalmente, a distância AE é a maior, porque esta oblíqua é a que mais se afasta do pé da perpendicular (fig. 53).

Diz-se que *AB é a distância do ponto A à reta MN*. Fica entendido, portanto, que, sempre que quisermos obter a distância de um ponto a uma

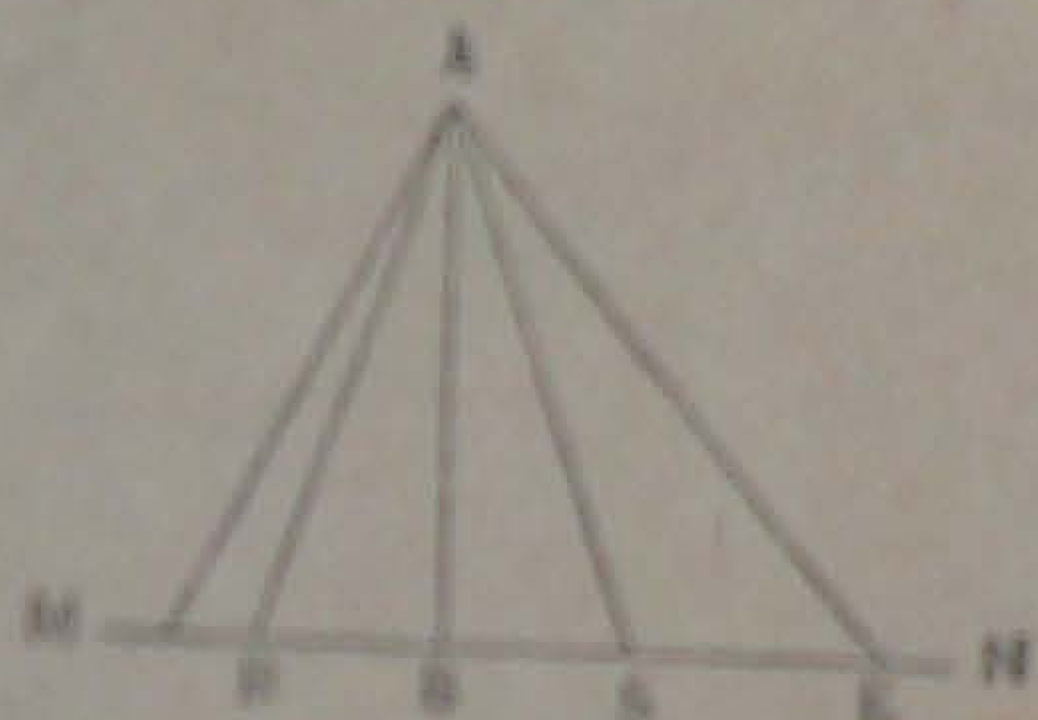


Fig. 53

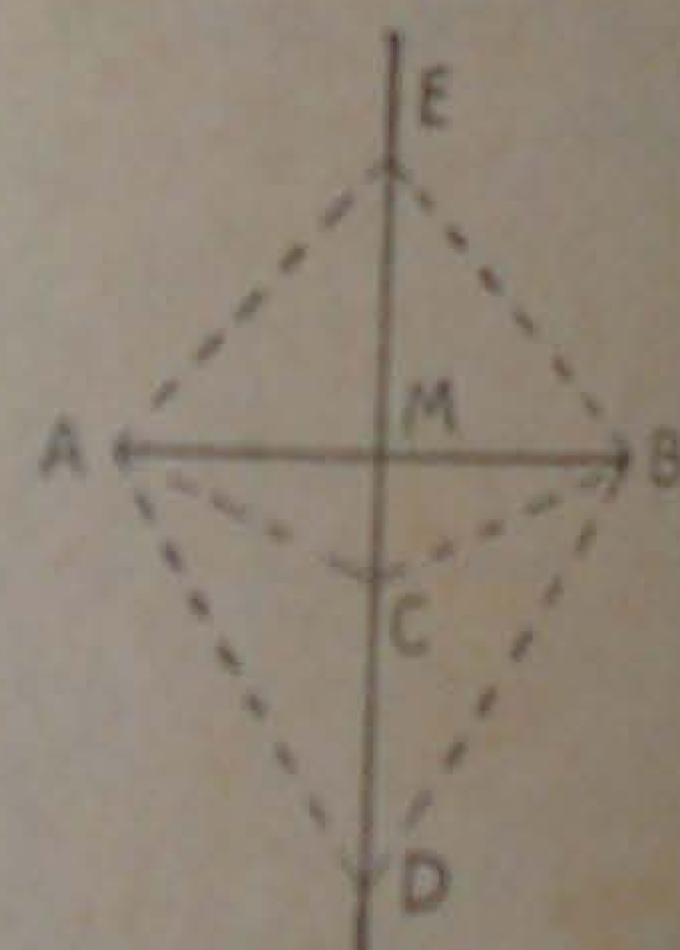


Fig. 54

reta, teremos de traçar dêsse ponto à reta uma perpendicular e tomar desta o segmento compreendido entre o ponto dado e o pé da perpendicular.

Mediatriz de um segmento de reta — Chama-se *mediatriz* de um segmento de reta à perpendicular ao meio dêsse segmento. Assim, a mediatriz do segmento AB (fig. 53) é a perpendicular a AB tirada do ponto M que divide o segmento ao meio.

A propriedade da mediatriz é *ter todos os seus pontos a igual distância das extremidades do segmento*. Com efeito, na fig. 53, $CA = CB$, $DA = DB$, $EA = EB$, etc.

Esquadros — Para o traçado de perpendiculares usam-se os *esquadros*: são peças com forma de triângulo retângulo (*), feitas em madeira, borracha, celulóide, galalite, etc. Geralmente usa-se um par de esquadros, sendo um isósceles, isto é, com os ângulos agudos iguais a 45 graus, e outro em que os ângulos agudos medem 60° e 30°.

Fig. 55 — Par de esquadros.

Fig. 56 — Esquadros perfeitos e esquadros defeituosos.

Antes de usar um esquadro devemos nos certificar de que os seus catetos formam exatamente um ângulo reto. Para isto, aplicamos contra a régua um dos catetos (AC, por exemplo) e com um lapis damos um traço ao longo do outro cateto (AB); fazendo girar o esquadro em torno do traço dado

(*) Veja às págs. 53 e seguintes as propriedades do triângulo retângulo.

Fig. 57

e ajustando bem, novamente, o cateto *AC* contra a régua, o cateto *AB* deve coincidir, com o traço dado. Em caso contrário, o esquadro está defeituoso.

Os desenhistas também usam, para traçar ângulos retos, o instrumento chamado *T* e formado por duas réguas que se ajustam perpendicularmente (fig. 57).

QUESTIONÁRIO

1. Quando se diz que duas retas são perpendiculares?
2. Que relações existem entre a perpendicular e as obliquas à mesma reta tiradas de um ponto?
3. Que é *distância* de um ponto a uma reta?
4. Que é mediatriz de um segmento?
5. Qual a propriedade da mediatriz?
6. Que são esquadros?
7. Como se verifica a perfeição de um esquadro?
8. Que outro instrumento se usa no traçado de perpendiculares?

PROBLEMAS

Problema 10. — *Dividir um segmento de reta em duas partes iguais ou fazer passar uma perpendicular pelo meio de um segmento de reta.*

Façamos centro em *A* e *B* (fig. 58), e com um raio maior que a metade de *AB* determinemos os pontos *C* e *D* pelos quais passa a reta *CD*, isto é, a perpendicular que divide *AB* ao meio (mediatriz).

Observação: Para dividir um segmento de reta em quatro, oito, dezesseis, trinta e duas partes iguais, etc., bastará dividir cada metade, quarta parte, oitava parte, etc., sucessivamente, ao meio.

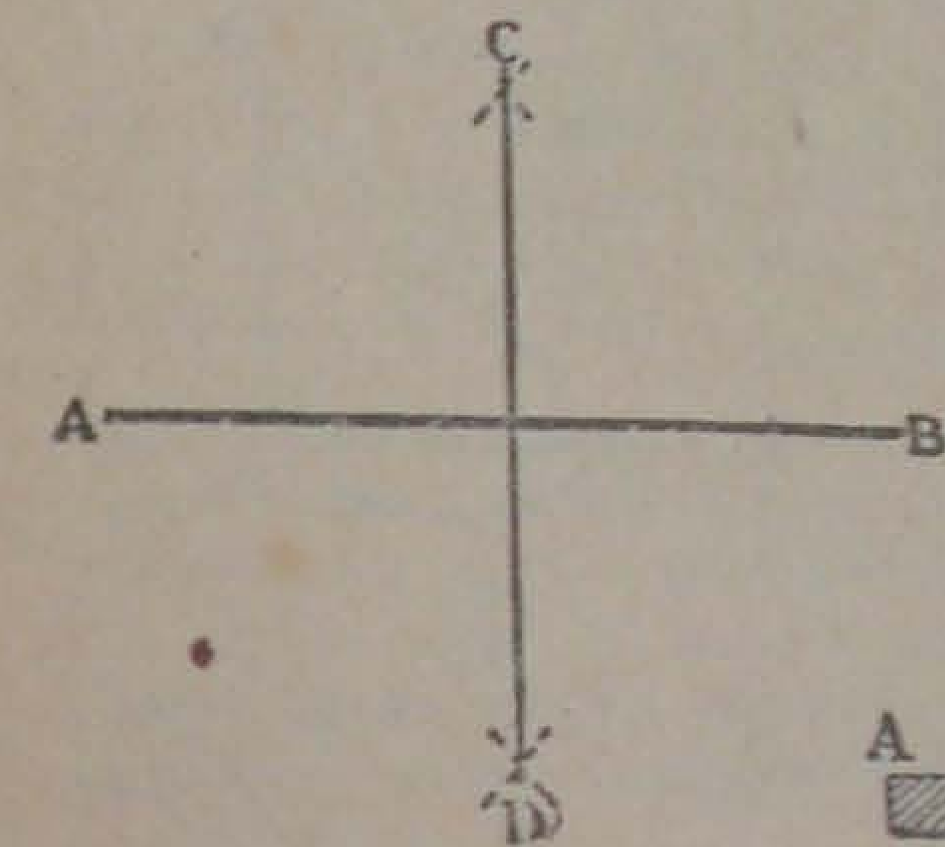


Fig. 58

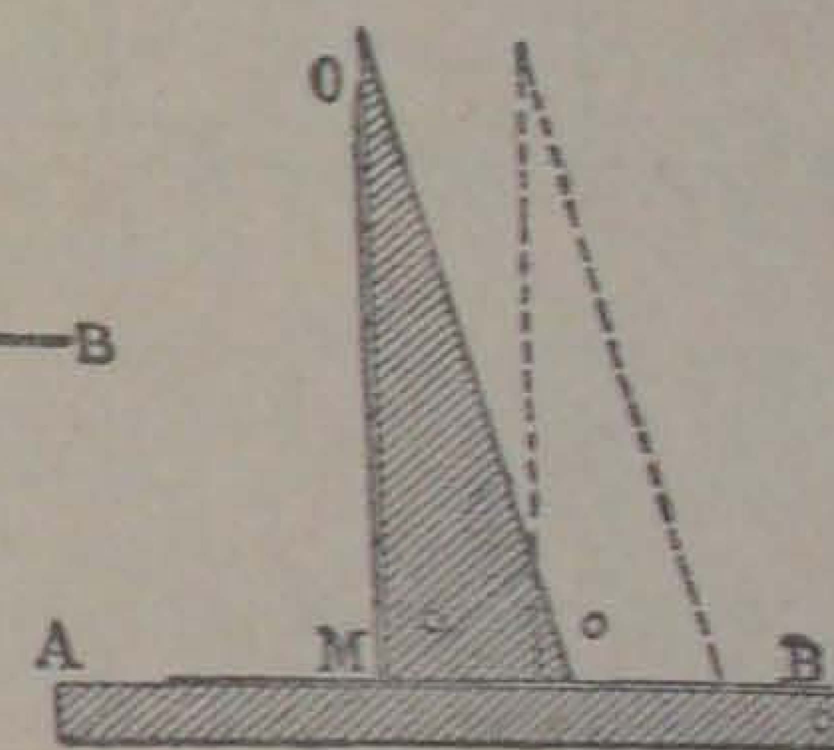


Fig. 59

Problema 11. — *De um ponto situado fora de uma reta traçar uma perpendicular à mesma reta.*

1.ª Solução (com a régua e o esquadro): Sejam o ponto *O* e a reta *AB*.

Façamos coincidir a aresta da régua com a reta *AB* (fig. 59), e escorreguemos o cateto menor do esquadro pela régua até o cateto maior encontrar o ponto *O*. Tracemos a reta *OM* e teremos resolvido o problema.

2.ª Solução (com a régua e o compasso):

Façamos centro no ponto *O* e com um raio evidentemente maior que a distância dêste ponto à reta *AB* (fig. 60) descrevamos um arco que corte essa reta em dois pontos *E* e *F*, dos quais, como centros e com um raio evidentemente maior do que a metade de *EF*, determinemos o ponto *G*, o qual, ligado ao ponto *O*, nos dá a perpendicular pedida.

2.ª Solução. — Sejam o ponto A e a reta MN. Tomemos sôbre a reta MN (fig. 61) um ponto qualquer B e liguemo-lo ao ponto A.

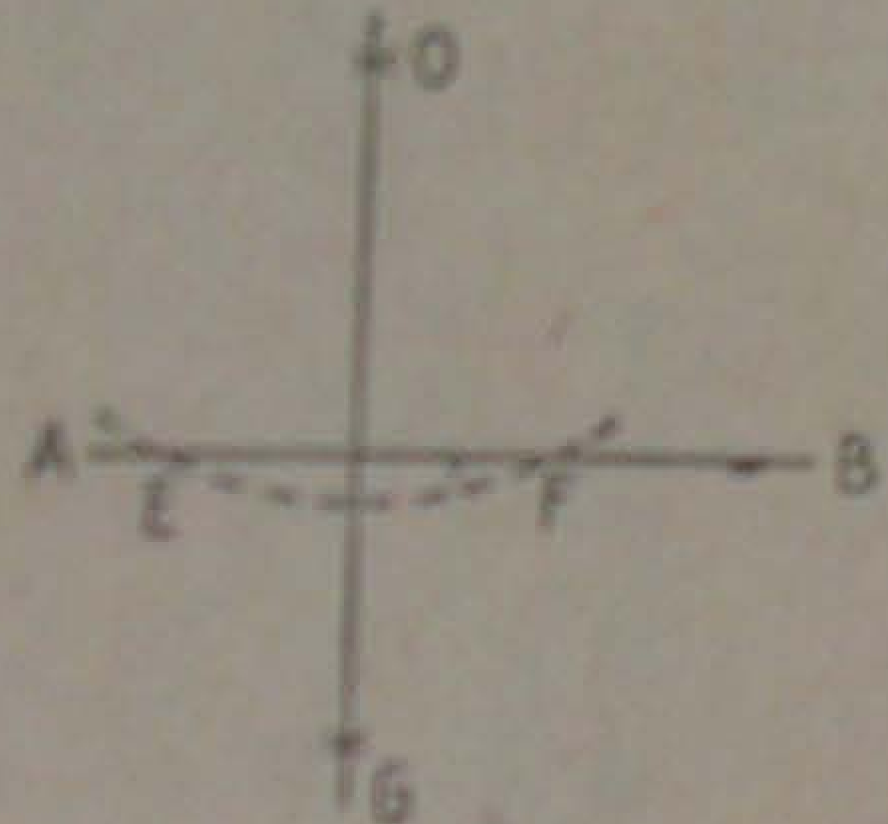


Fig. 60

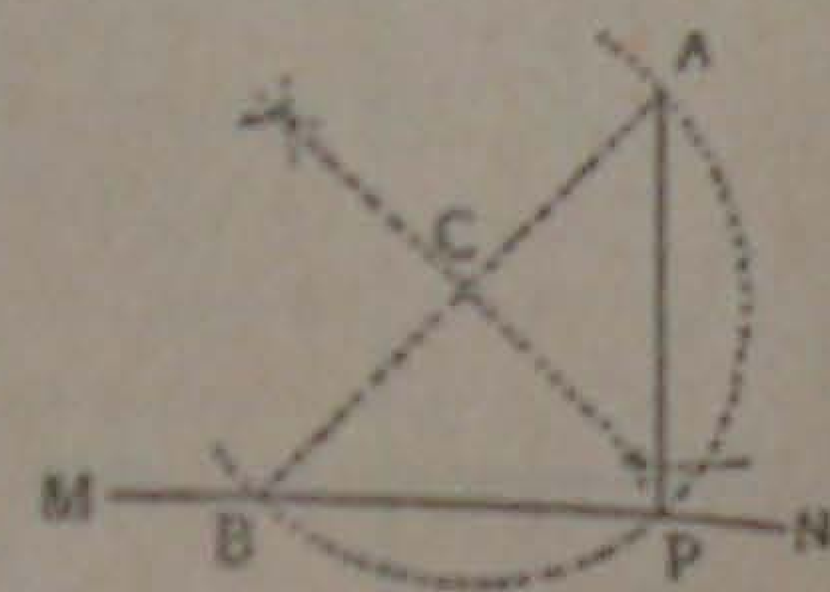


Fig. 61

Dividamos BA ao meio e fazendo centro em C (meio de BA), com um raio CA, descrevamos o arco APB que corta MN no ponto P.

A reta AP é a perpendicular pedida.

Problema 12. — *Por um ponto tomado sôbre uma reta, levantar uma perpendicular a esta reta.*

1.ª Solução (com a régua e o compasso).

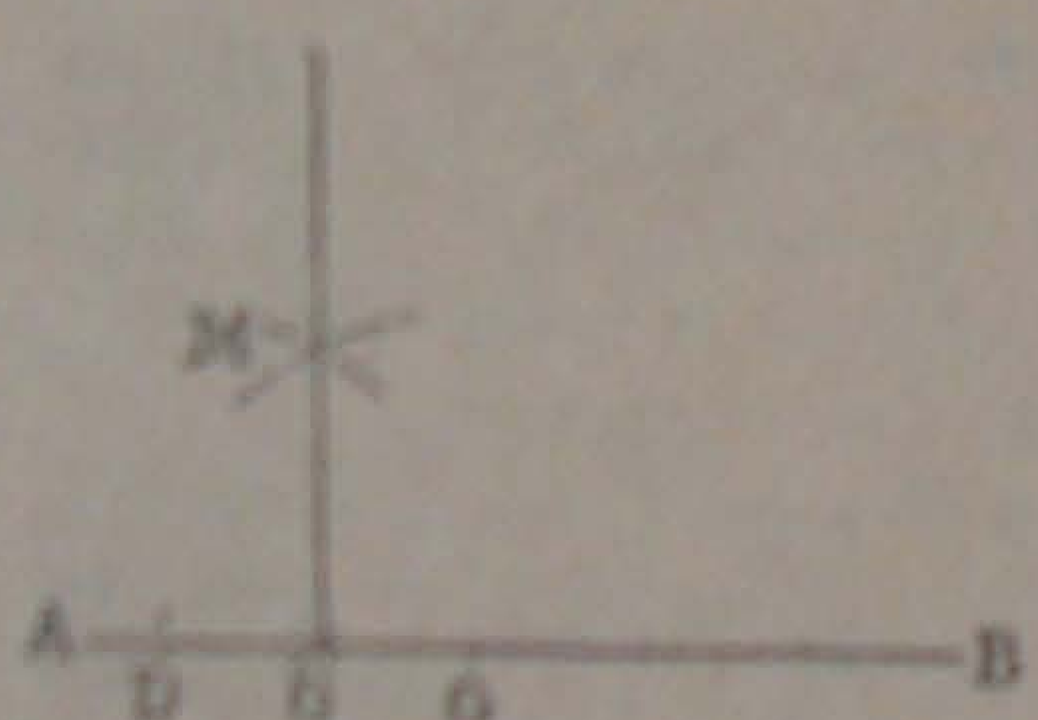


Fig. 62

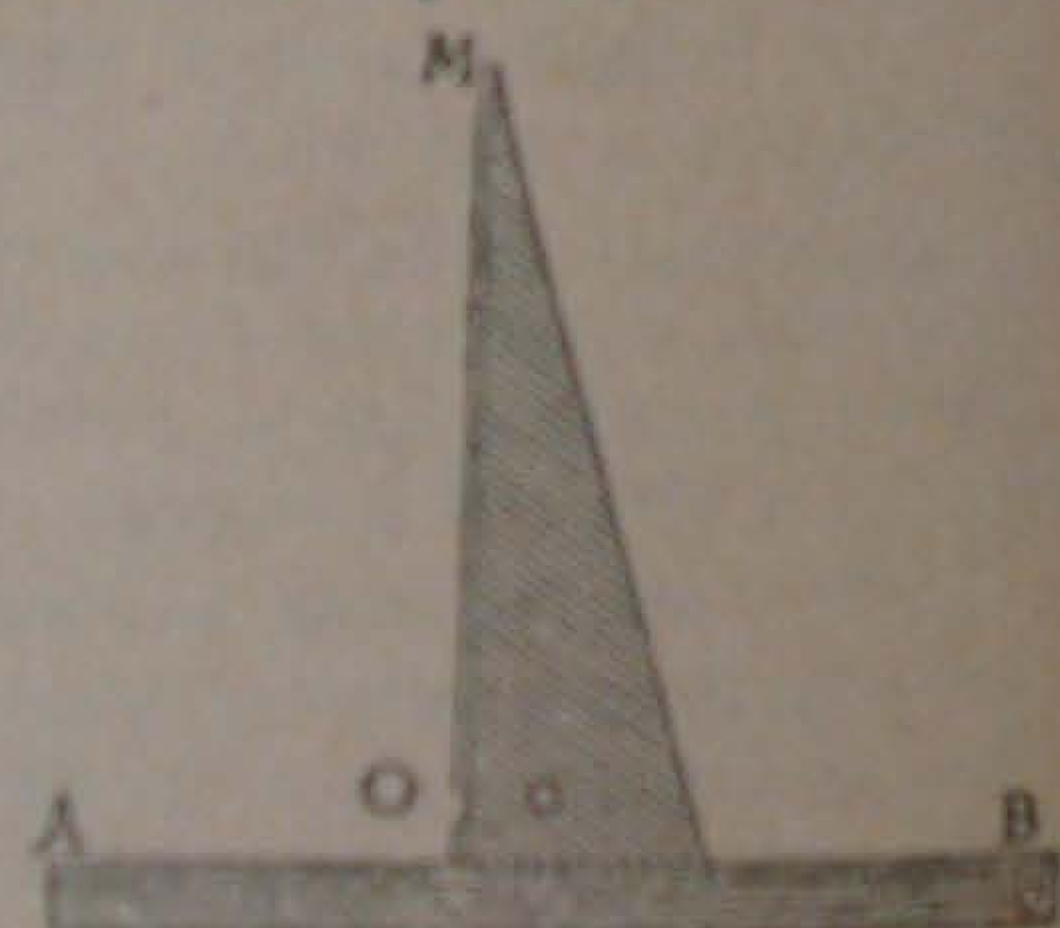


Fig. 63

A partir do ponto O (fig. 62) marquemos duas distâncias iguais, OD e OG.

Dos pontos D e G, como centros, e com um raio maior que OD ou OG, descrevamos dois arcos que determinem o ponto M. A reta OM resolve o problema.

2.ª Solução (com a régua e o esquadro):

Façamos coincidir uma aresta da régua com a reta AB (fig. 63), apliquemos o lado menor do mesmo esquadro contra a régua, fazendo-o deslisar até que o vértice do ângulo reto coincida com o ponto O; tracemos, então OM, que resolve o problema.

Problema 13. — *Levantar uma perpendicular pela origem de uma semi-reta ou pela extremidade de um segmento que não podemos ou não queremos prolongar.*

1.ª Solução. — Seja a semi-reta BA (fig. 64) e, pela origem, B, tracemos BX oblíqua a BA; num ponto qualquer,

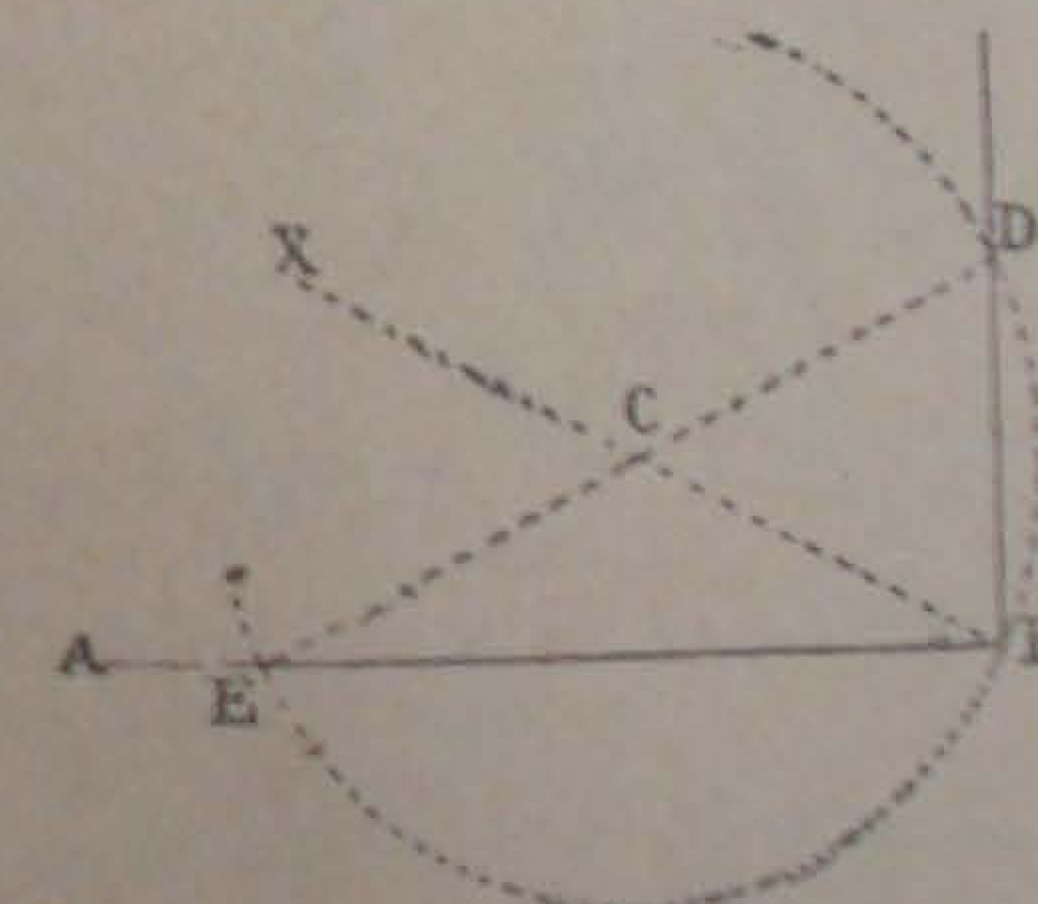


Fig. 64

C, desta oblíqua façamos centro e tracemos um arco de circunferência que passe por B e corte a reta AB em um ponto E.

Liguemos o ponto E ao ponto C, prolonguemos EC até encontrar o arco no ponto D. A reta BD é a perpendicular pedida.

2.ª Solução. — Seja V a semi-reta dada (fig. 65). Fazendo centro na origem, com um raio qualquer, VM, descrevamos o arco MX.

A partir do ponto M, com o mesmo raio VM determinemos o ponto B e, a partir dêste último, o ponto C.

Unamos o ponto B ao ponto C e façamos passar pelo meio de BC uma perpendicular (VE), a qual é a perpendicular pedida.

3.ª Solução.— Seja M a origem da semi-reta (Fig. 66).

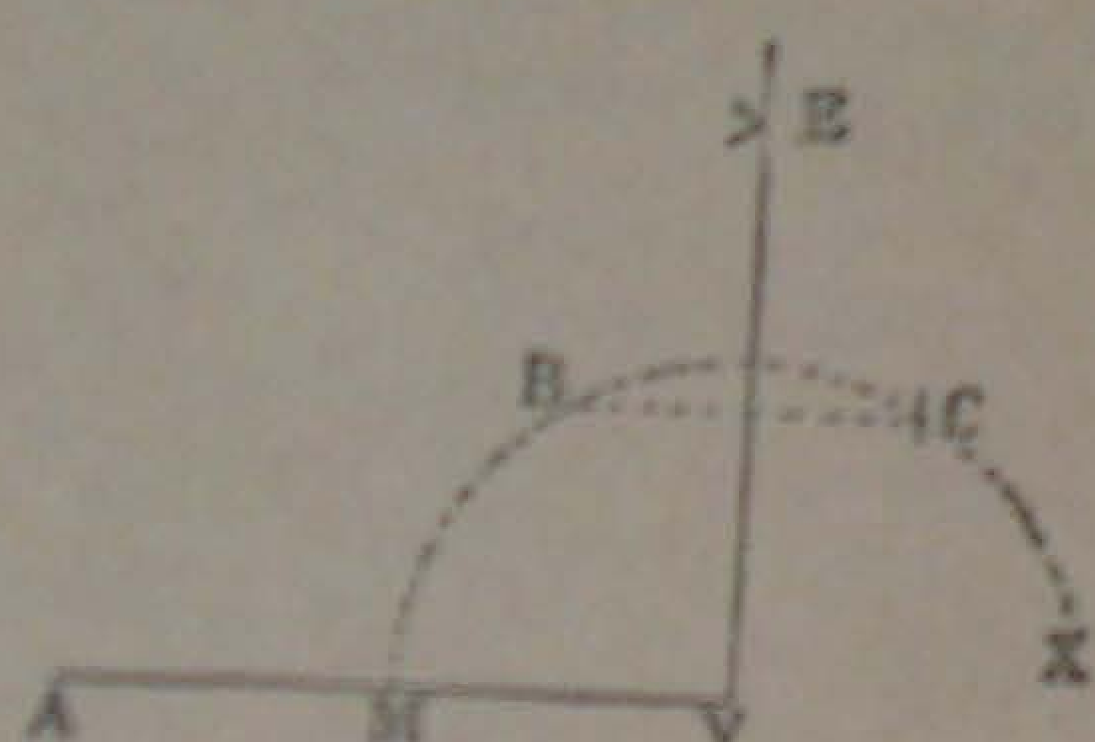


Fig. 65

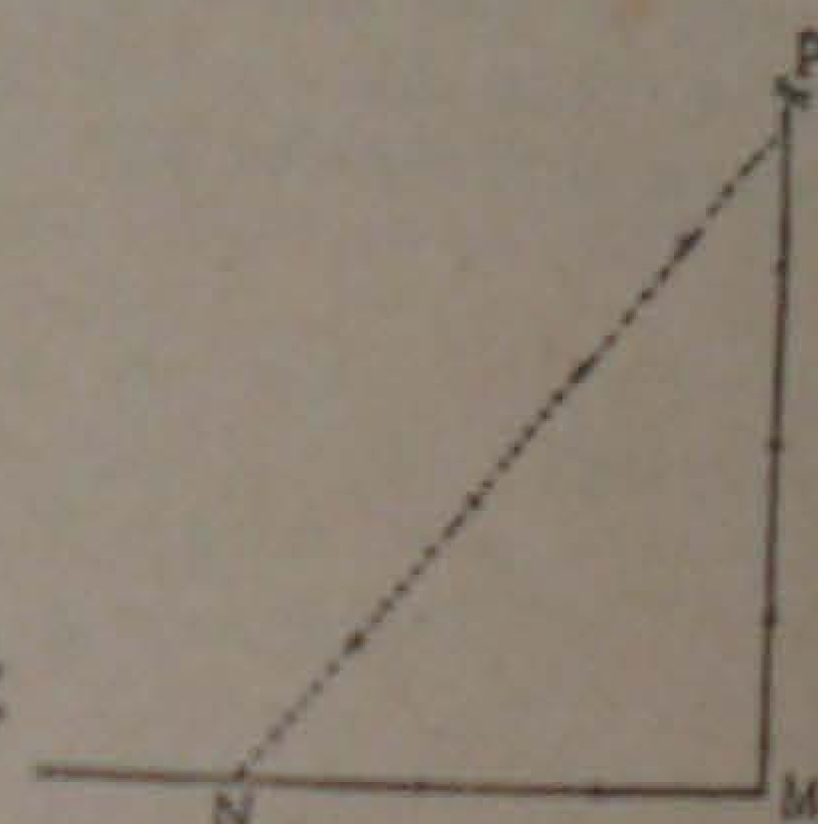


Fig. 66

Apliquemos, de M até N, três medidas iguais a uma unidade qualquer (o centimetro, por exemplo). Façamos centro em M e com raio igual a quatro vezes a mesma unidade, descrevamos um arco, e do ponto N, como centro e com um raio igual a cinco vezes a mesma unidade determinemos o ponto P.

PM é a perpendicular pedida.

Problema 14. — *Sôbre uma reta dada, determinar um ponto equidistante de dois outros situados fora dessa reta.*

Sejam M e N os pontos situados fóra da reta AB (figs. 67 e 68).

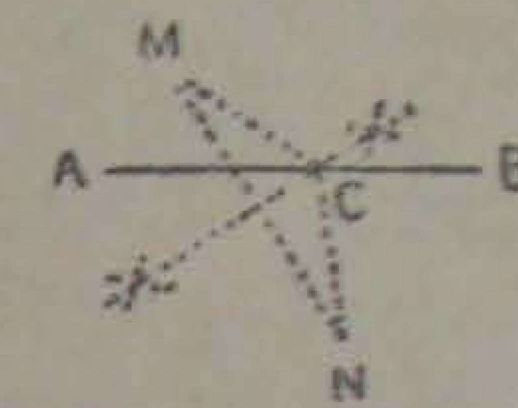


Fig. 67

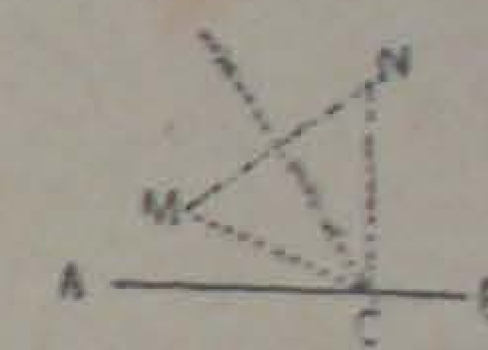


Fig. 68

Tracemos MN e façamos passar pelo meio uma perpendicular que, prolongada, determinará na reta AB o ponto, C, pedido, porquanto $MC = NC$.

Problema 15. — Os proprietarios de duas casas situadas, nas proximidades das margens de um rio, querem fazer uma ponte que fique equidistante das duas moradas: pede-se o lugar em que deverá ser construida a referida ponte.

P e R são as duas casas (fig. 69).

Tracemos PR e em seguida a sua mediatriz. Esta determinará o ponto M, equidistante de P e de R, e onde devem construir a ponte.

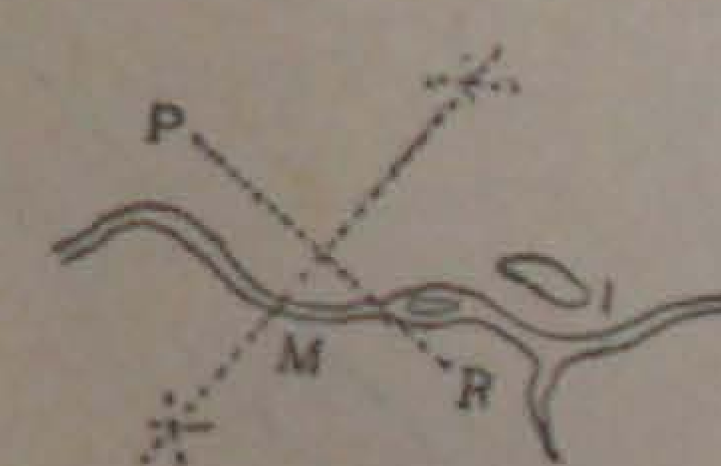


Fig. 69

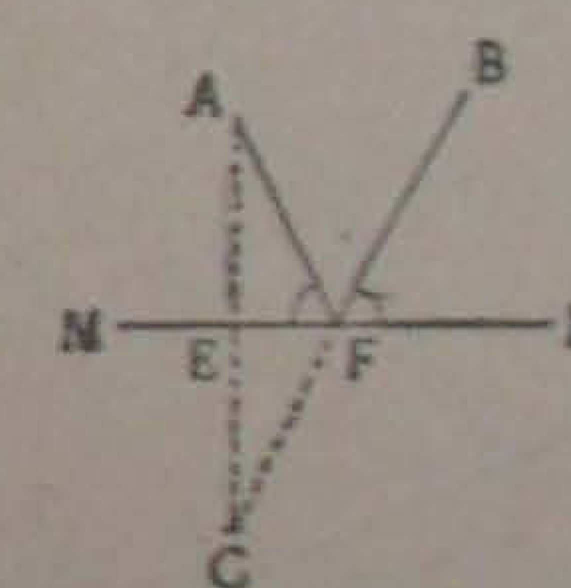


Fig. 70

Problema 16. — *Por dois pontos dados* A *e* B *fazer passar duas retas que encontrem uma terceira reta.* MN. *e com esta formem ângulos iguais.*

Abaixemos do ponto A (fig. 70) uma perpendicular à reta MN e façamos $EC = AE$.

Liguemos C a B e A a F.

AF e BF formam com MN ângulos iguais.

CAPÍTULO IV

Paralelas. — Postulado de Euclides.

Duas retas distintas, situadas no mesmo plano, podem ser *concorrentes* ou *paralelas*. São concorrentes quando têm um ponto comum, de modo que, devidamente prolongadas, elas se encontram

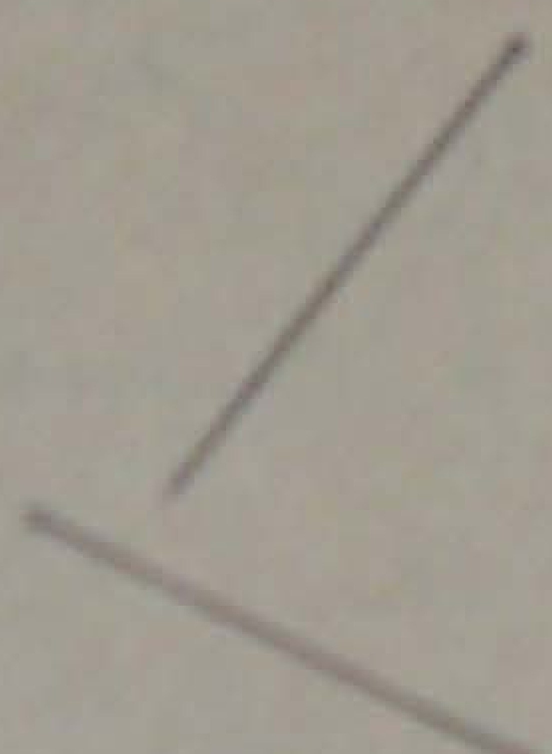


Fig. 71

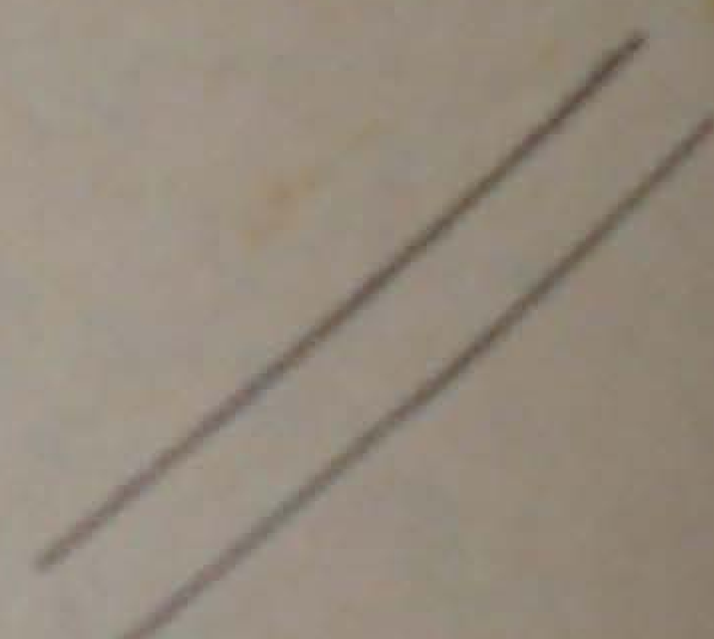


Fig. 72

(fig. 71). São paralelas quando não têm ponto comum, de sorte que, por mais que se prolonguem, nunca se encontram (fig. 72).

Duas retas paralelas conservam-se equidistantes, em toda a sua extensão, isto é, a distância de qualquer ponto de uma à outra é sempre a mesma.

Duas retas paralelas a uma terceira são paralelas entre si.

Tracemos duas perpendiculares à mesma reta *AB*. É fácil demonstrar que *duas perpendiculares à mesma reta são paralelas.*

Com efeito, se não fossem paralelas, as duas perpendiculares a *AB* se encontrariam em algum ponto e nesse caso teríamos duas perpendiculares a uma reta tiradas do mesmo ponto, o que é impossível (fig. 73).

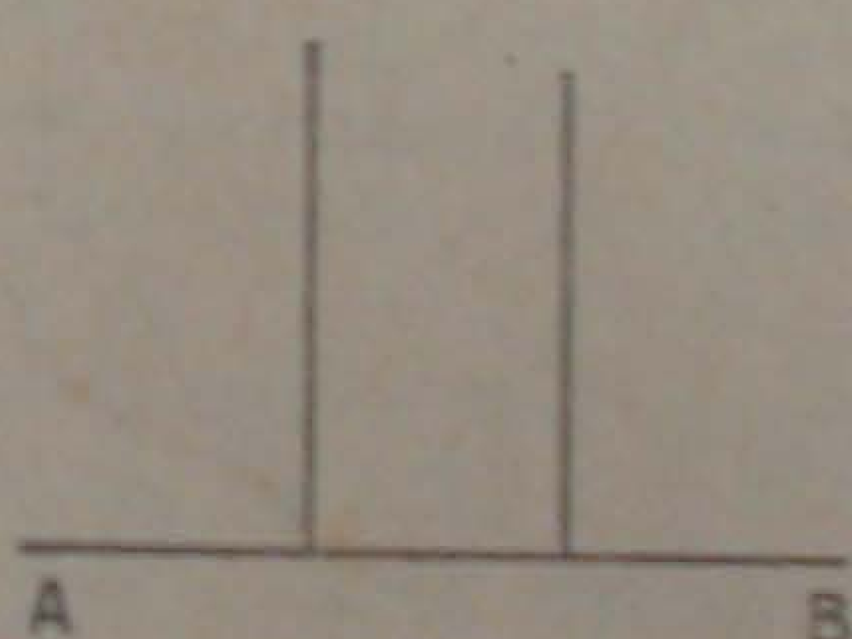


Fig. 73

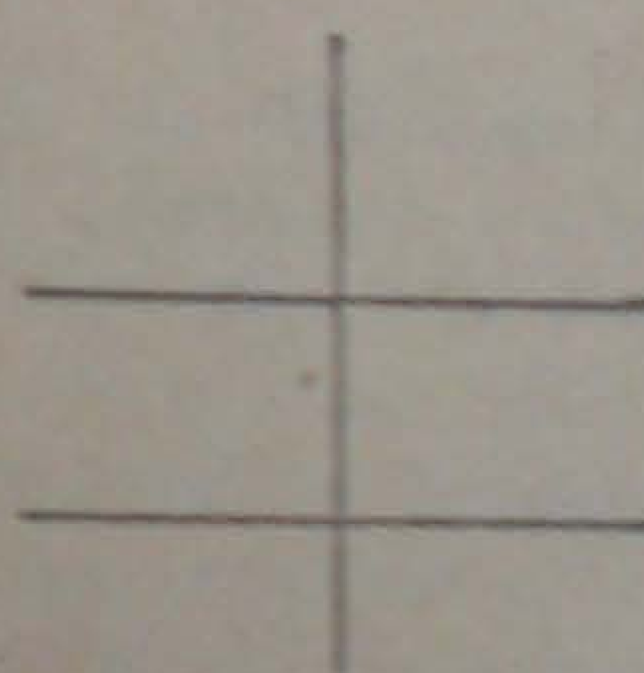


Fig. 74

É evidente que se uma reta for perpendicular a outra, será também perpendicular a qualquer reta paralela a essa outra. Por isso, quando duas paralelas são cortadas por uma perpendicular, os ângulos que se formam são todos retos (fig. 74).

Duas paralelas cortadas por uma obliqua, formam com esta oito ângulos, sendo quatro agudos iguais entre si e quatro obtusos também iguais entre si (fig. 75).

Os ângulos m, b, c e n chamam-se *internos*, porque têm as aberturas para dentro da figura; os ângulos a, e, r, d chamam-se *externos*, porque têm as aberturas para fora da figura.

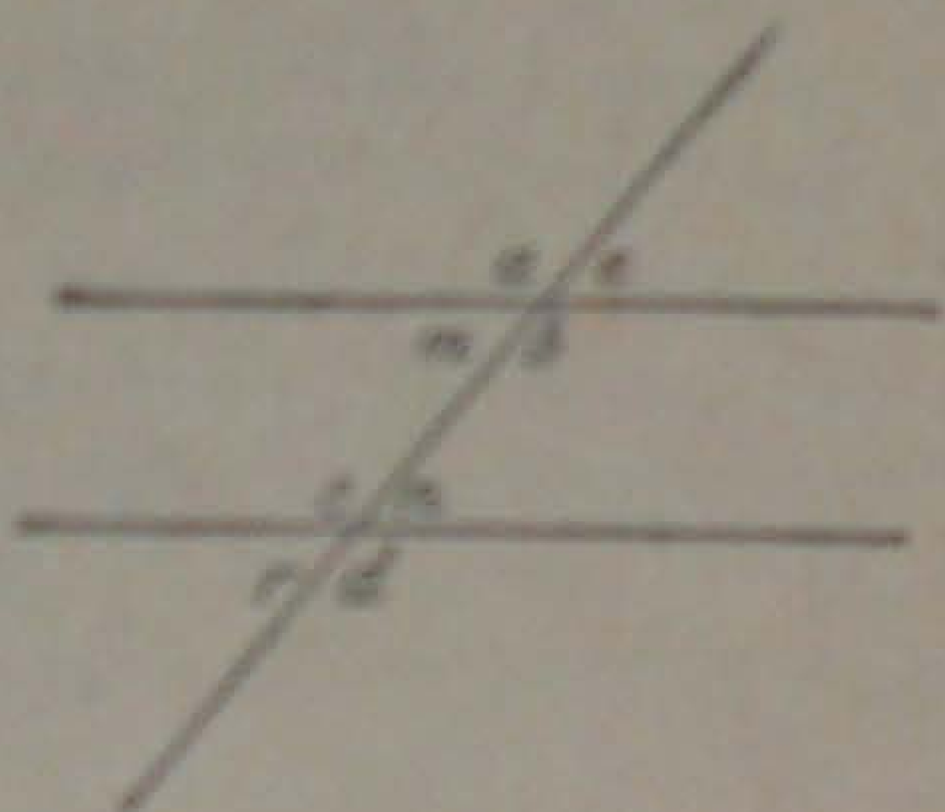


Fig. 75

Estes ângulos, considerados dois a dois, tomam as seguintes denominações: *internos do mesmo lado* ou *colaterais internos* se são ambos internos e estão do mesmo lado da oblíqua, como b e n, ou c e m; *externos do mesmo lado* ou *colaterais externos* se ambos são externos e ficam do mesmo lado da oblíqua, como a e r, ou, ainda, e e d; *alternos-internos* se ambos são internos, porém um de cada lado da oblíqua, como b e c, ou m e n; *alternos-externos* se são ambos externos ficando um de cada lado da oblíqua, como a e d, ou e e r; finalmente, chamam-se *correspondentes* aqueles que, sem ser adjacentes, ficam ambos do mesmo lado da oblíqua, um interno e outro externo; são correspondentes na fig. 75: a e c, m e r, e e n, b e d.

Demonstra-se que duas paralelas cortadas por uma oblíqua formam ângulos alternos-externos iguais; alternos-internos iguais; correspondentes iguais; externos do mesmo lado suplementares e internos do mesmo lado também suplementares.

Postulado de Euclides — Chama-se *postulado* a uma proposição que, embora não seja evidente por si mesma, é aceita sem demonstração.

Um dos postulados mais célebres da Geometria é o de Euclides, grande geômetra grego: *por um ponto de um plano sempre se pode traçar uma paralela a uma reta dêsse plano e uma só.*

QUESTIONÁRIO

1. Como podem ser duas retas distintas situadas no mesmo plano?
2. Qual a propriedade relativa às perpendiculares à mesma reta?
3. Que relação geral existe entre os ângulos formados por paralelas cortadas por uma oblíqua?
4. Trace duas paralelas cortadas por uma oblíqua, e mostre os ângulos externos, os internos, os alternos-internos, alternos-externos, os externos do mesmo lado, os internos do mesmo lado, os correspondentes.
5. Que relação há entre os ângulos alternos-internos, alternos-externos, e correspondentes?
6. Que relação há entre os ângulos internos do mesmo lado e externos do mesmo lado?
7. Que é postulado?
8. Enuncie o postulado de Euclides.

PROBLEMAS

Problema 17. — *Traçar uma paralela a uma reta dada, por um ponto dado.*

1.ª *Solução* (com o compasso e a régua):

Do ponto dado *M* (fig. 76) descrevemos um arco de circunferência *NG*; do ponto *N* e com o mesmo raio *MN* descrevamos o arco *MC*; tomemos *NG* igual *MC* e liguemos o ponto *M* ao ponto *G*.

A reta *MG* é a paralela pedida.

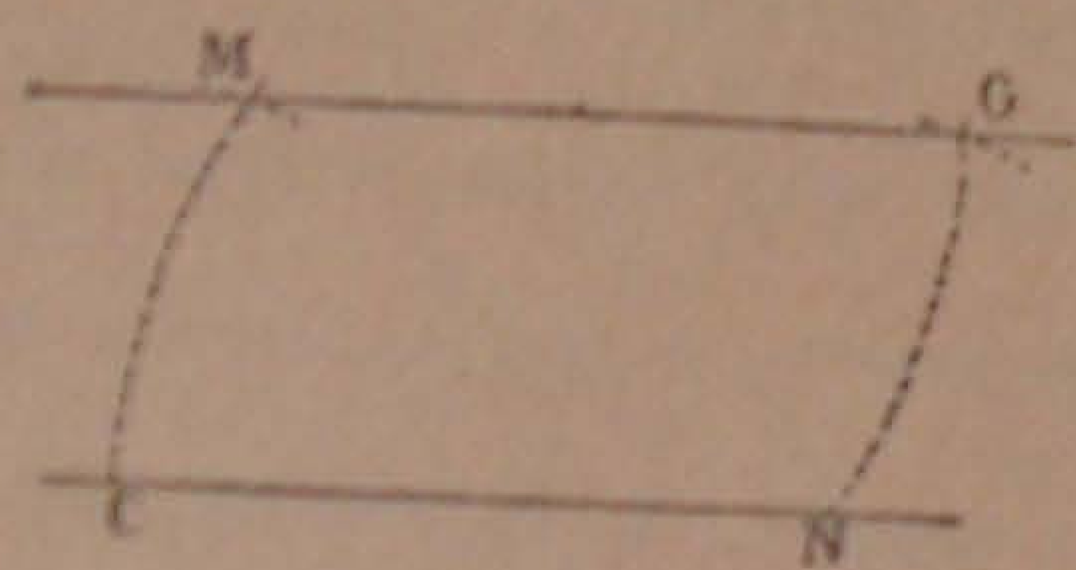


Fig. 76

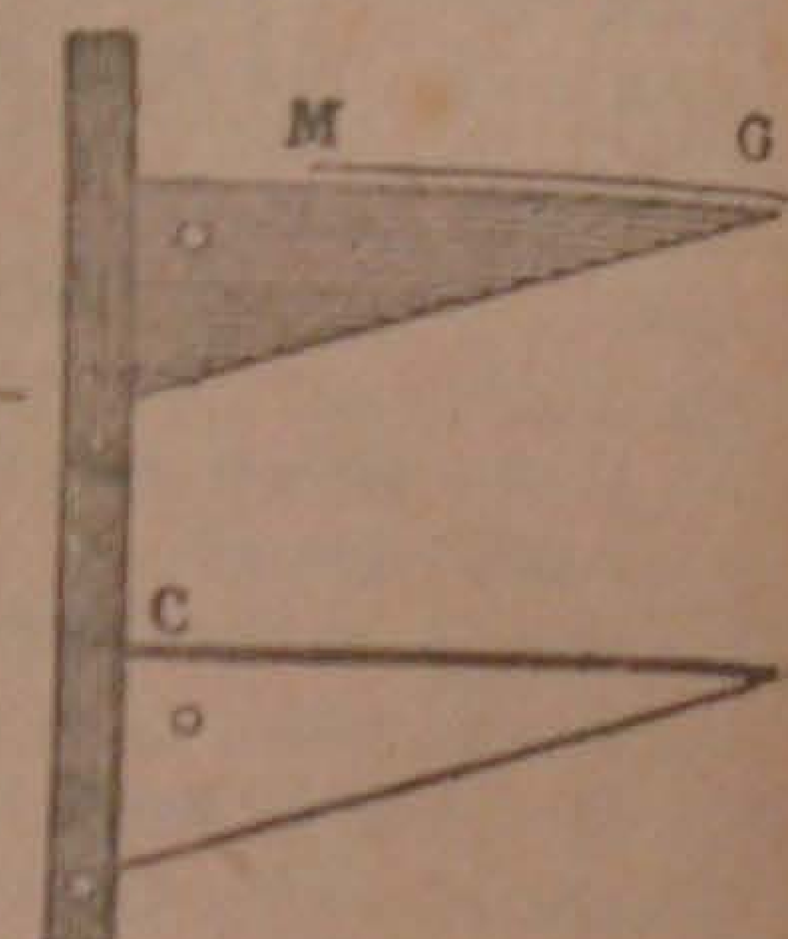


Fig. 77

2.ª *Solução* (com a régua e o esquadro):

Apliquemos firmemente um dos catetos do esquadro sôbre a reta *CN* (fig. 77); em seguida, façamo-lo escorregar pela regua até o ponto *M* ficar sôbre outro cateto; tracemos a reta *MG*, que é paralela a *CN*.

Problema 18. — *Dadas duas retas concorrentes, traçar a bissetriz sem recorrer ao ponto de concorrência.*

1.ª *Solução.* — Sejam *AB* e *CD* (fig. 78) as retas.

Tracemos o segmento *MN* e depois a bissetriz de cada um dos ângulos *AMN*, *CNM*, *BMN*, *DNM* e liguemos o ponto *E* ao ponto *F* e teremos a bissetriz pedida.

2.ª *Solução.* — Sejam *BA* e *DC* as retas (fig. 79). Do ponto *B* levantemos uma perpendicular à reta *BA* e do ponto *D* uma perpendicular à reta *DC*. Sôbre cada uma destas perpendiculares marquemos a partir dos pontos *B* e *D* duas distâncias iguais *BN* e *DM*. Pelo ponto *N* tracemos uma paralela a *BA* e pelo ponto *M* uma outra a *DC*. Dividamos o ângulo *MPN* em duas partes iguais; a bissetriz *PQ* prolongada é a bissetriz pedida.

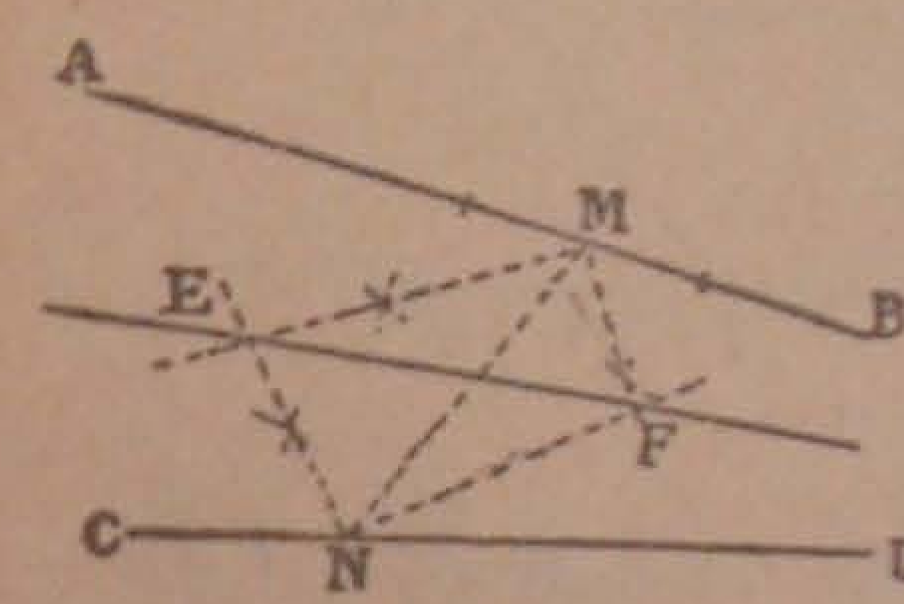


Fig. 78

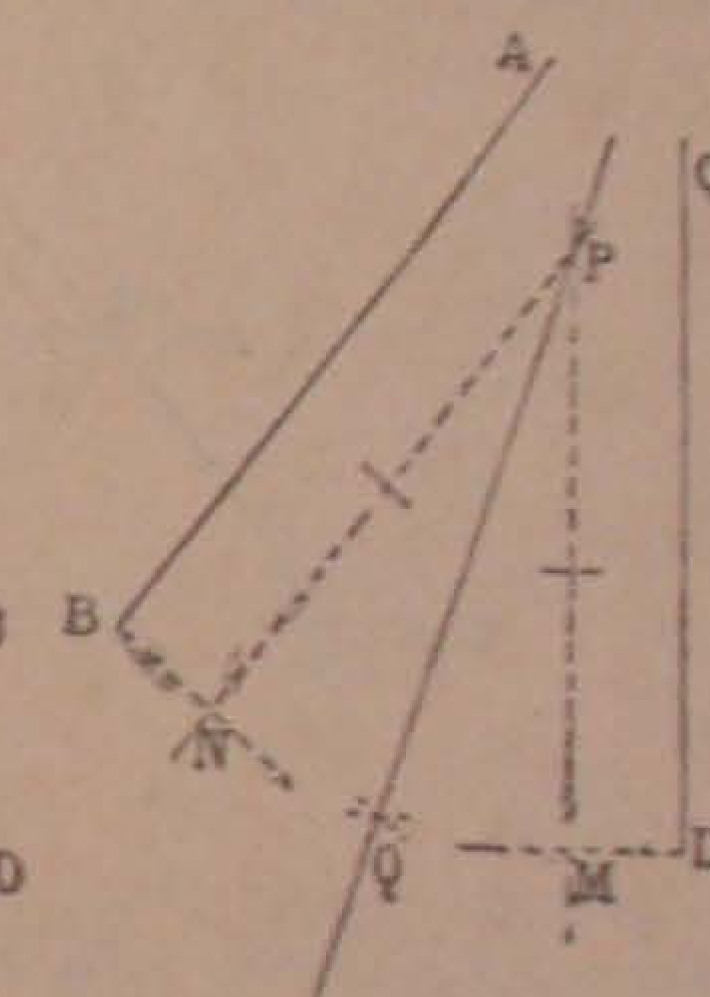


Fig. 79

Problema 19. — *De um ponto dado traçar uma reta que forme com outra um ângulo dado.*

Seja *AB* a reta dada, *M* o ponto e *N* o ângulo (fig. 80). Tracemos do ponto *M* uma paralela a *AB* e do mesmo ponto tracemos *MP* formando com esta paralela um ângulo *CMP* igual ao ângulo *N*. A reta *MP* forma com *AB* o ângulo $MPB = CMP$ e portanto igual ao ângulo *N*.

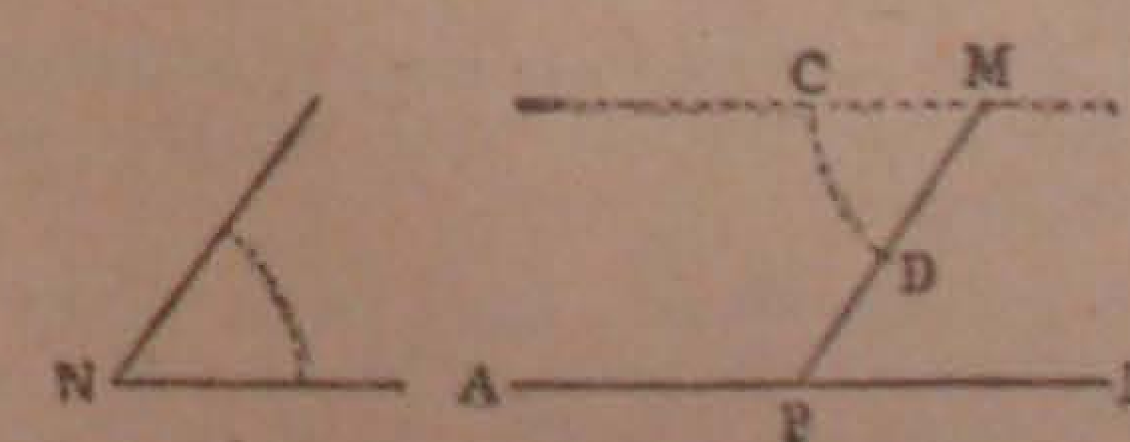


Fig. 80

Problema 20. — *De um ponto dado fora da porção do plano compreendida entre duas paralelas, traçar uma reta sôbre a qual as mesmas paralelas determinem um segmento de comprimento dado.*

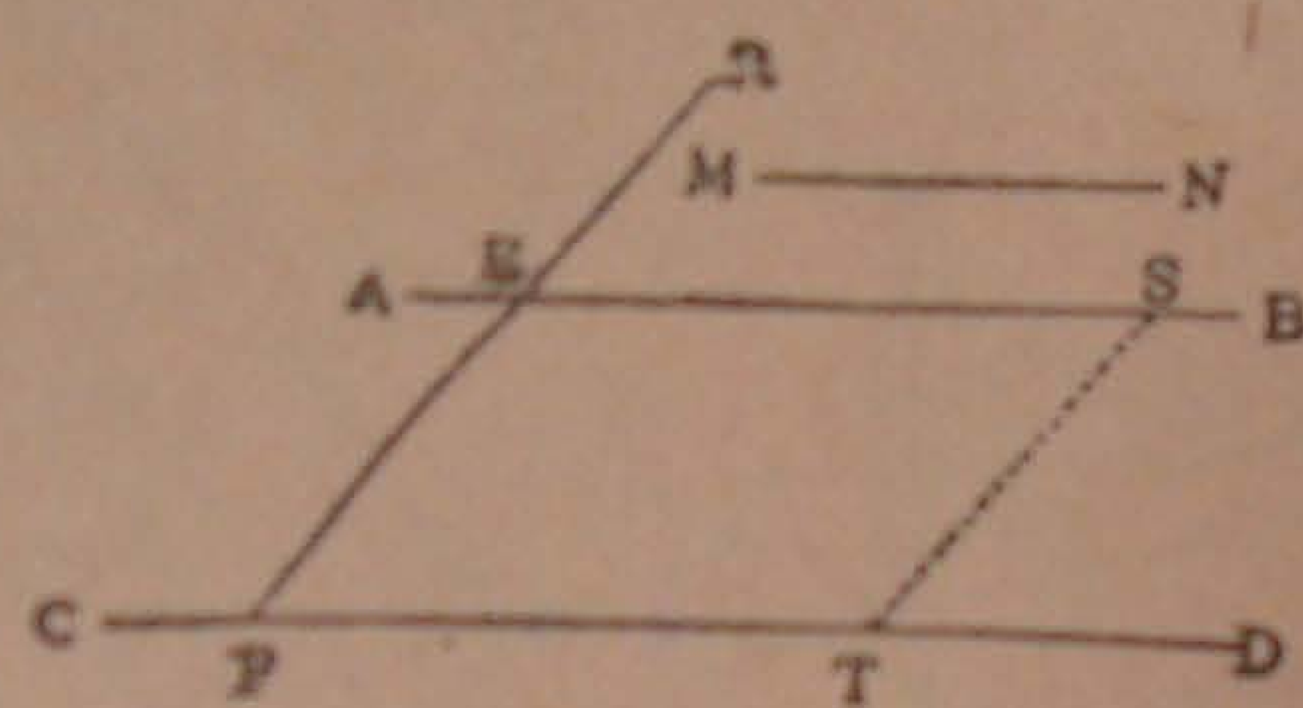


Fig. 81

Seja R o ponto dado, AB e CD as paralelas, e MN a medida do segmento (fig. 81).

Tomemos sôbre AB um ponto qualquer S e, com o centro nesse ponto e raio igual a MN, cortemos a reta CD em T. Do ponto R tiremos RF paralela a ST. O segmento $EF = MN$.

Observação — O problema não tem solução quando MN é menor do que a distância entre as paralelas.

Problema 21. —*Entre duas retas concorrentes, traçar um segmento de reta que fique dividido ao meio por um ponto dado.*

Seja M o ponto situado entre as retas EF e GH (fig. 82). Abaixemos do ponto M sôbre GH a perpendicular MC e prolonguemo-la além de M de uma distância MD igual a MC.

Do ponto D tracemos uma paralela a GH; liguemos o ponto A (interseção dessa paralela com a reta EF) ao ponto M prolongando até encontrar a reta GH. O segmento AB resolve o problema.

Problema 22. — *De um ponto dado traçar uma reta que forme ângulos iguais com duas outras retas não paralelas.*

Seja M o ponto dado, AB e CD as retas dadas não paralelas (fig. 83).

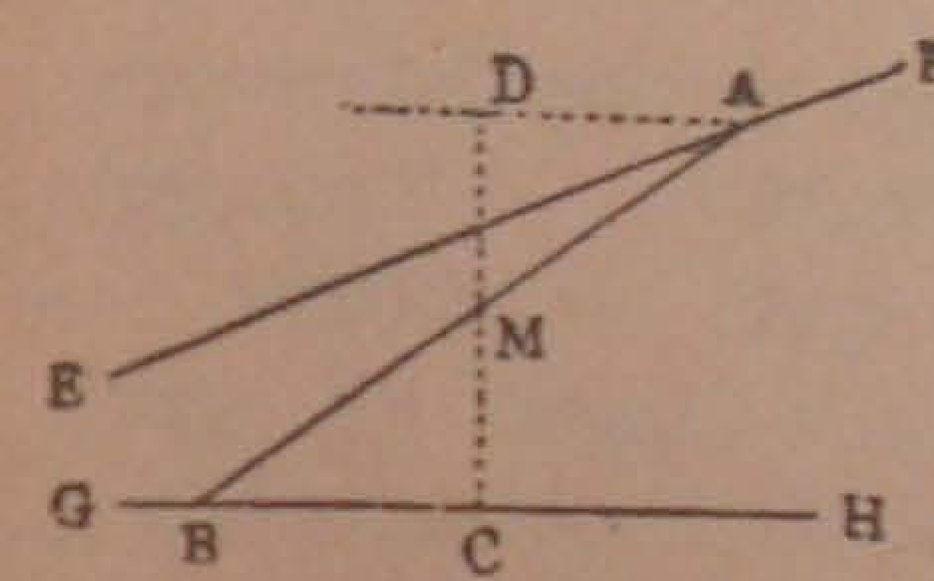


Fig. 82

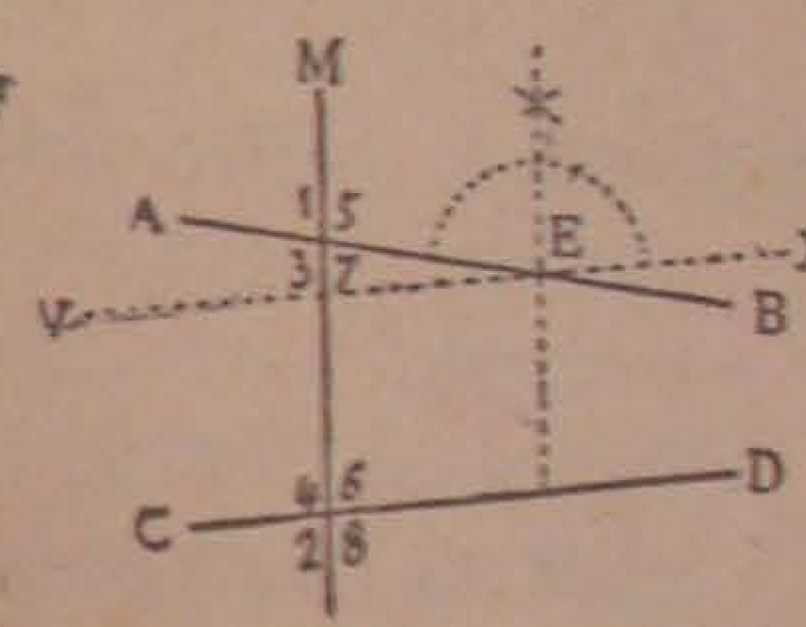


Fig. 83

Tracemos uma reta VX paralela a CD. Tracemos a bissetriz do ângulo AEX e do ponto M tracemos uma paralela a esta bissetriz.

Essa última reta forma, com AB e CD, ângulos iguais: $1 = 7 = 2 = 6$; $3 = 5 = 4 = 8$.

CAPÍTULO V

Triângulos. — Elementos principais e secundários. — Classificação. — Triângulo isósceles. — Triângulo equilátero. — Triângulo retângulo. — Casos de igualdade de triângulos. — Problemas.

Chama-se polígono à porção do plano limitada por uma linha quebrada fechada. Os lados da linha poligonal são também *lados* do polígono e dois lados consecutivos formam um *ângulo* do polígono, o qual também se chama *ângulo interno* do polígono.

Um polígono tem tantos ângulos e tantos vértices quantos lados.

Designa-se um polígono colocando uma letra em cada vértice e enunciando estas letras na ordem em que elas seriam encontradas por um ponto *móvel* que percorresse a linha poligonal no mesmo sentido.

Assim, o polígono da fig. 84 denomina-se *ABCDE*, ao passo que o da fig. 85 denomina-se *ADBCE*.

Chama-se *ângulo externo* de um polígono a todo ângulo formado por um lado e pelo prolon-

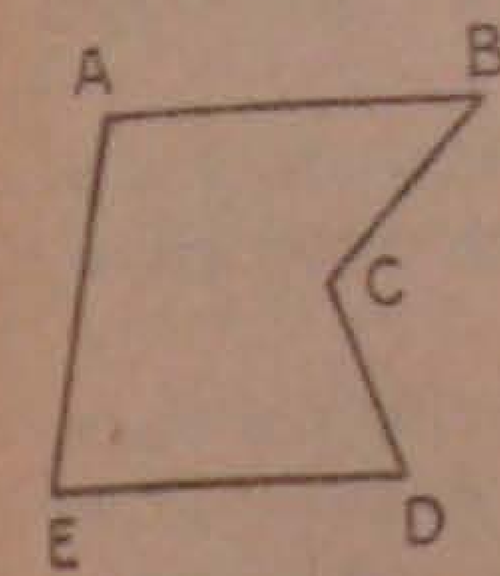


Fig. 84

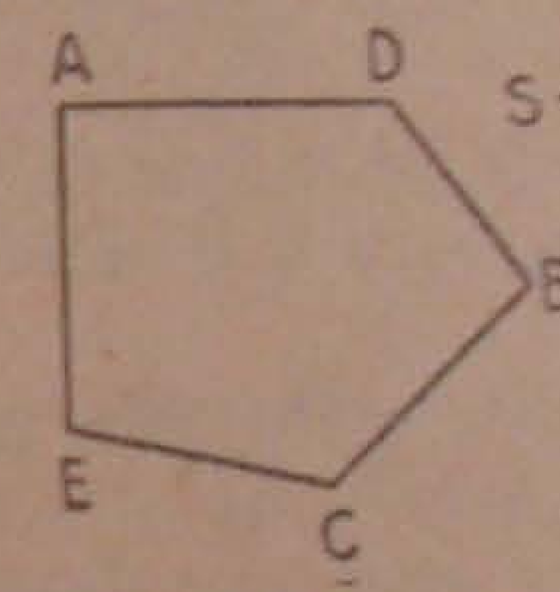


Fig. 85

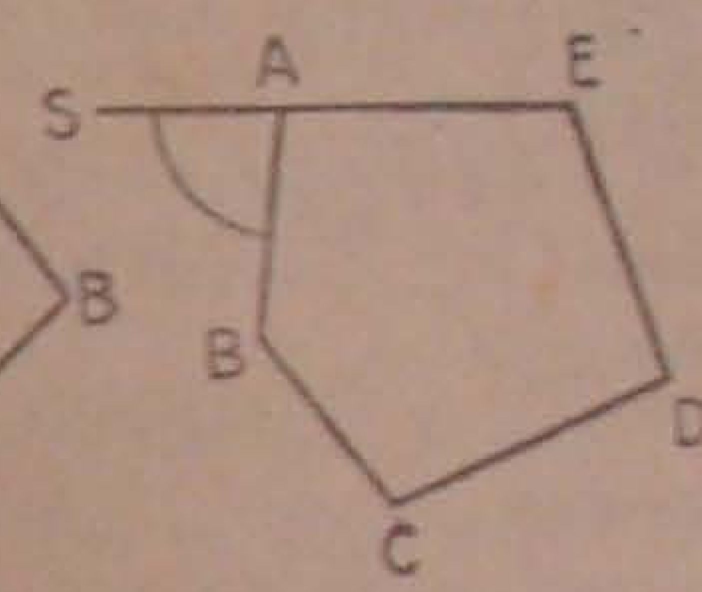


Fig. 86

gamento do lado consecutivo. Na fig. 86 o ângulo *BAS* é um ângulo externo do polígono *ABCDE*.

Perímetro de um polígono é a soma dos comprimentos dos lados do polígono.

TRIÂNGULOS

Triângulo é o polígono de três lados. Um triângulo tem, portanto, três ângulos e três vértices (fig. 87).

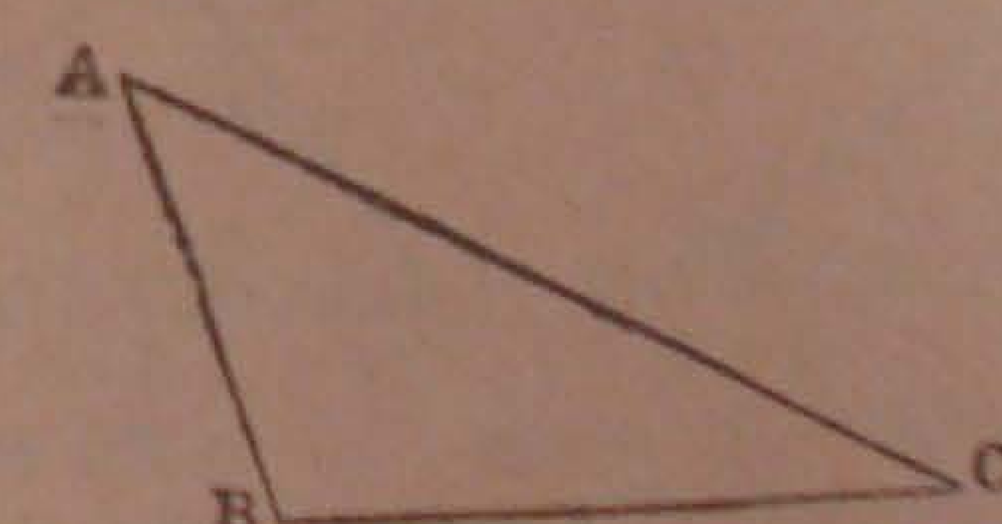


Fig. 87

Os lados e os ângulos são os *elementos principais* do triângulo.

Relação entre os comprimentos dos lados de um triângulo — *Num triângulo, qualquer lado é menor do que a soma dos outros dois e maior do que a sua diferença.*

Esta propriedade se deduz imediatamente daquela que diz ser a reta a menor distância entre dois pontos.

Assim, ao contrário do que poderia parecer, três segmentos quaisquer não servem para lados de um triângulo. Si, por exemplo, um medir 8 e outro 5, o terceiro há de ser menor do que 13 e maior do que 3.

Soma dos ângulos internos de um triângulo — O perímetro de um triângulo, isto é, a soma dos comprimentos de seus lados, pode variar à vontade; mas o mesmo já se não dá com a soma dos seus ângulos internos. Com efeito, demonstra-se que *a soma dos ângulos internos de um triângulo é constante*, isto é, sempre a mesma, *e igual a dois retos.*

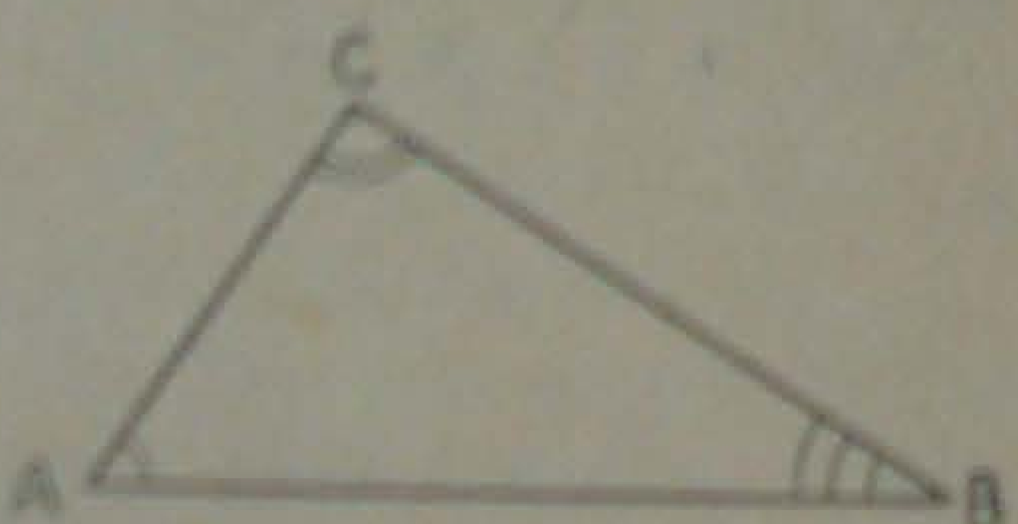


Fig. 88

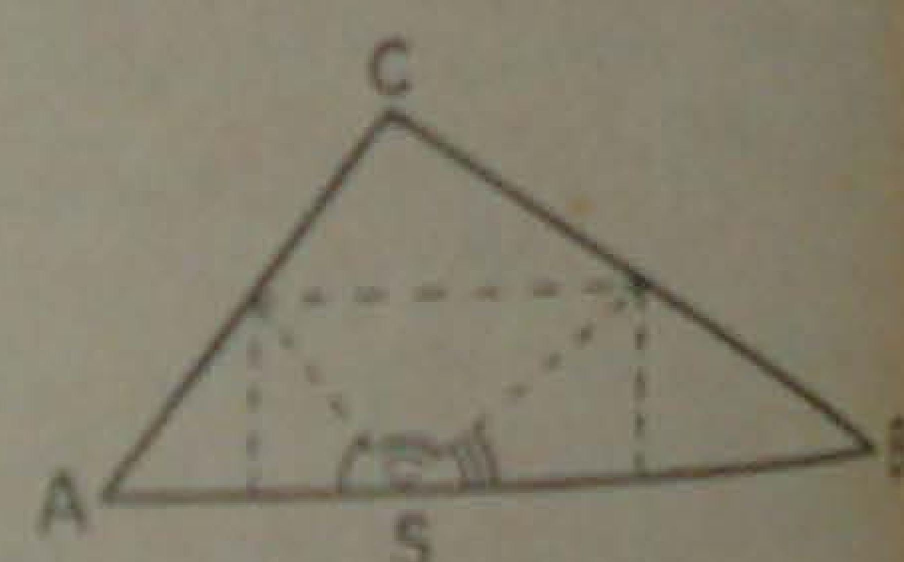


Fig. 89

Esta lei conhecida por "lei angular de Tales" se pode verificar praticamente do seguinte modo: tracemos sôbre cartão ou papel o triângulo ABC (fig. 88) e dobremos os seus ângulos, como se vê

na fig. 89, de sorte a fazer os três vértices coincidirem num mesmo ponto, S, do lado AB. Veremos, então, que os três ângulos se dispõem consecutivamente em tôrno de um ponto e do mesmo lado da reta AB: sua soma é, por conseguinte, igual a dois retos.

Elementos secundários do triângulo — *Os elementos secundários* do triângulo são: as alturas, as medianas e as bissetrizes dos ângulos.

Altura de um triângulo é a perpendicular baixada de um vértice sôbre o lado oposto ou sôbre o seu prolongamento. Este lado se chama, então, *base* do triângulo.

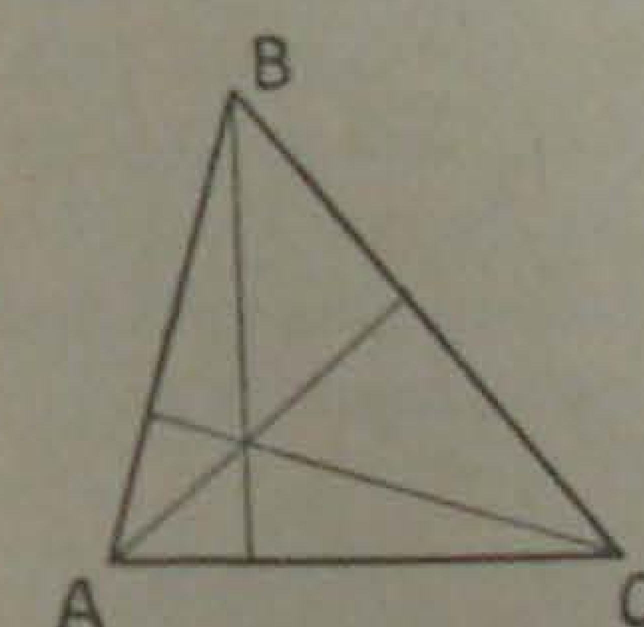


Fig. 90

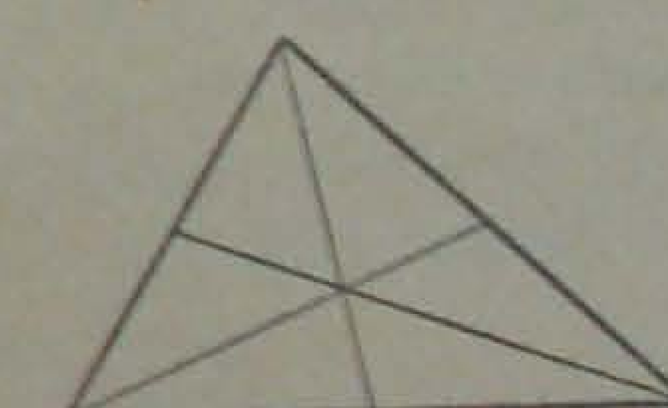
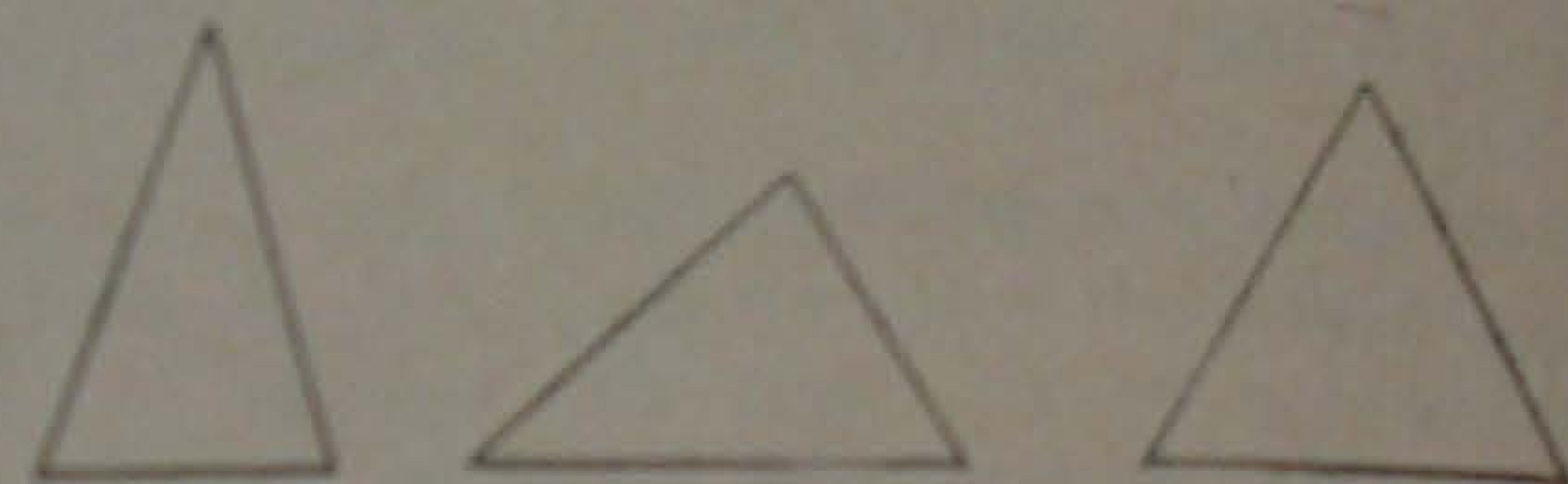


Fig. 91

Mediana é o segmento de reta que liga um vértice ao meio do lado oposto.

Em qualquer triângulo podemos traçar três alturas (fig. 90) e três medianas (fig. 91); assim, qualquer lado de um triângulo pode servir-lhe de base.

Classificação dos triângulos quanto aos lados — Os triângulos quanto à grandeza relativa de seus lados são (fig. 92), *escalenos*, se os lados são desiguais; *isósceles* ou *simétricos* se dois de seus lados são iguais; *equiláteros* se os três lados são iguais.



I II III

Fig. 92 — Triângulo: I) isósceles; II) escaleno; III) equilátero

Classificação dos triângulos quanto aos ângulos — Um triângulo tem sempre dois ângulos agudos, mas o terceiro pode variar, isto é, ser agudo também, reto ou obtuso. Por isto, classificamos os triângulos em *acutângulos*, *retângulos* e *obtusângulos*.

Triângulo acutângulo é o que tem os três ângulos agudos (fig. 93); triângulo retângulo é o que

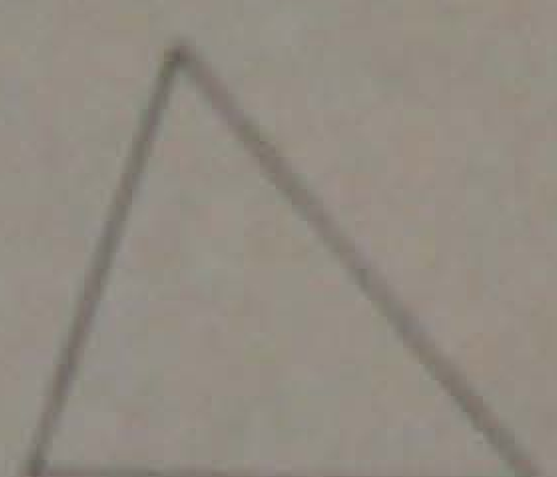


Fig. 93

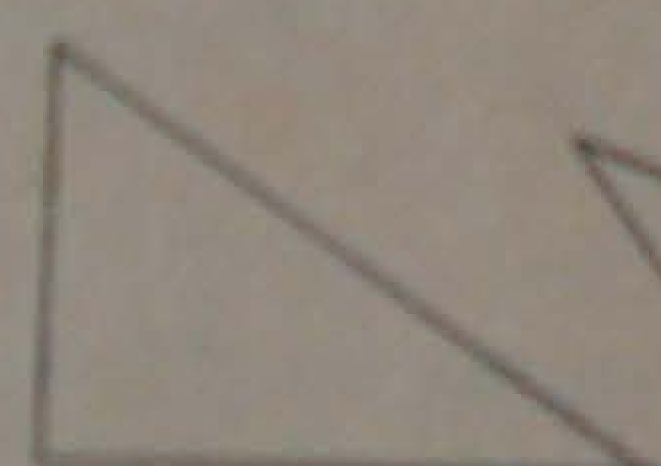


Fig. 94

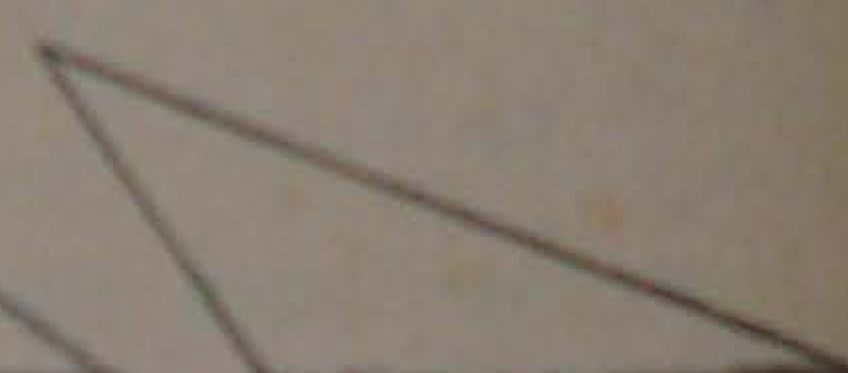


Fig. 95

têm um ângulo reto (fig. 94); triângulo obtusângulo é o que tem um ângulo obtuso (fig. 95).

Triângulo isósceles — No triângulo isósceles chama-se *base* ao lado diferente; *altura do triân-*

gulo isósceles é a altura relativa a êsse lado; *vértice do triângulo* isósceles é o vértice do ângulo oposto à base.

Demonstra-se que *no triângulo isósceles são iguais os ângulos opostos aos lados iguais*. Assim, na fig. 96 os ângulos A e B são iguais.

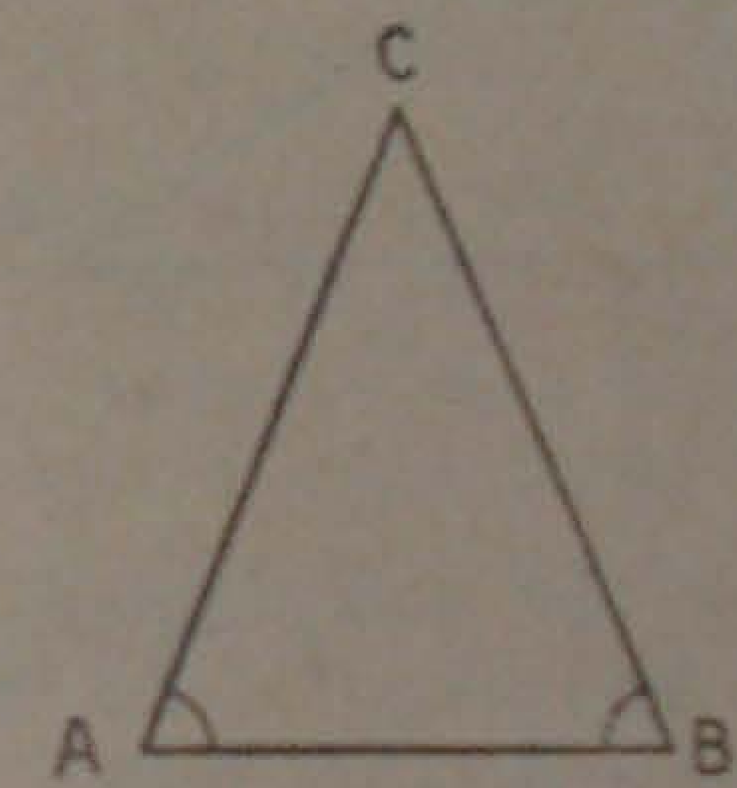


Fig. 96

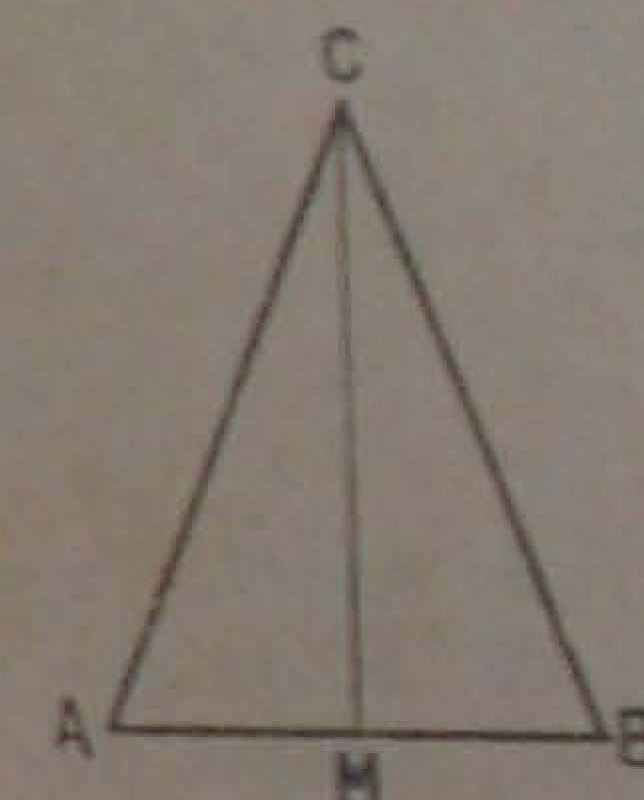


Fig. 97

No triângulo isósceles a altura, a bissetriz do ângulo do vértice e a mediana relativa à base coincidem (fig. 97).

Triângulo equilátero — O triângulo equilátero sendo um caso particular do triângulo isósceles, em que cada lado pode ser considerado como base, conclue-se facilmente: que *o triângulo equilátero é também equiângulo*, isto é, o triângulo que tem os lados iguais também tem os ângulos iguais (figura 98-I).

Triângulo retângulo — No triângulo retângulo, os lados do ângulo reto se chamam *catetos* e o lado que se opõe ao ângulo reto é a *hipotenusa*. Na *fig.* 98-II, que representa um triângulo retângulo, *AC* e *AB* são os catetos; *BC* é a hipotenusa.

O triângulo retângulo goza de muitas propriedades importantes, das quais destacaremos as duas seguintes:

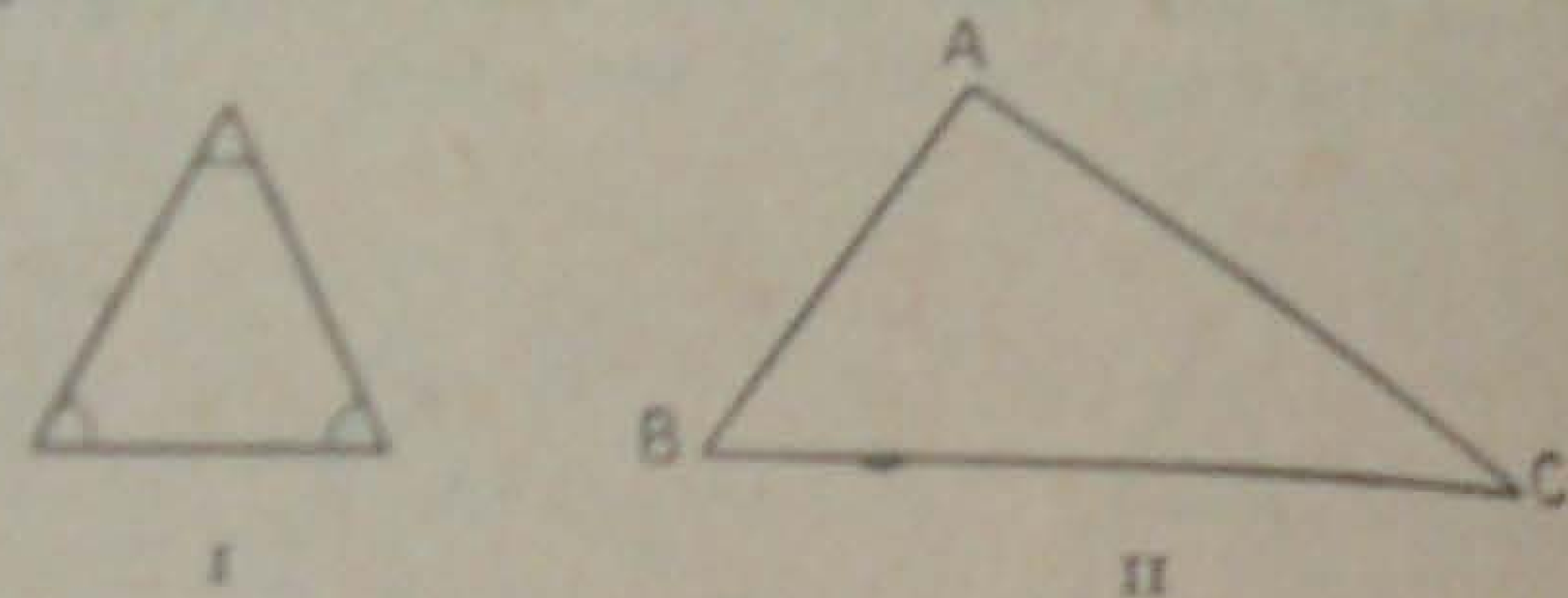


Fig. 98

1.º) *Os ângulos agudos são complementares.* Com efeito, desde que um dos ângulos do triângulo é reto, a soma dos outros dois dá outro reto.

2.º) *O quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.* Esta proposição notável atribuida a Pitágoras, exprime que, se a hipotenusa medir *a* e os catetos medirem, respectivamente, *b* e *c*, teremos sempre

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Desta igualdade, podemos tirar

$$b^2 = a^2 - c^2 \quad \text{e} \quad c^2 = a^2 - b^2$$

isto é, o quadrado de um cateto é igual ao quadrado da hipotenusa menos o quadrado do outro cateto.

Igualdade de triângulos — Quando dois polígonos podem ser levados a coincidir ponto por ponto, diz-se que êles são *iguais*. Si considerarmos

o caso particular de dois triângulos, é evidente que um só poderá coincidir ponto por ponto com outro, si tiverem os três lados respectivamente iguais e, bem assim, os três ângulos. Então, chamando *ABC* e *A'B'C'* os triângulos iguais, devemos ter

$$AB = A'B' \qquad BC = B'C' \qquad AC = A'C'$$
$$\wedge A = \wedge A' \qquad \wedge B = \wedge B' \qquad \wedge C = \wedge C'$$

Entretanto, três dessas seis condições, escolhidas convenientemente, bastam para garantir a igualdade dos dois triângulos. As proposições que exprimem estas condições são chamadas *casos* de igualdade de triângulos. Os casos mais simples de igualdade de triângulos são os seguintes:

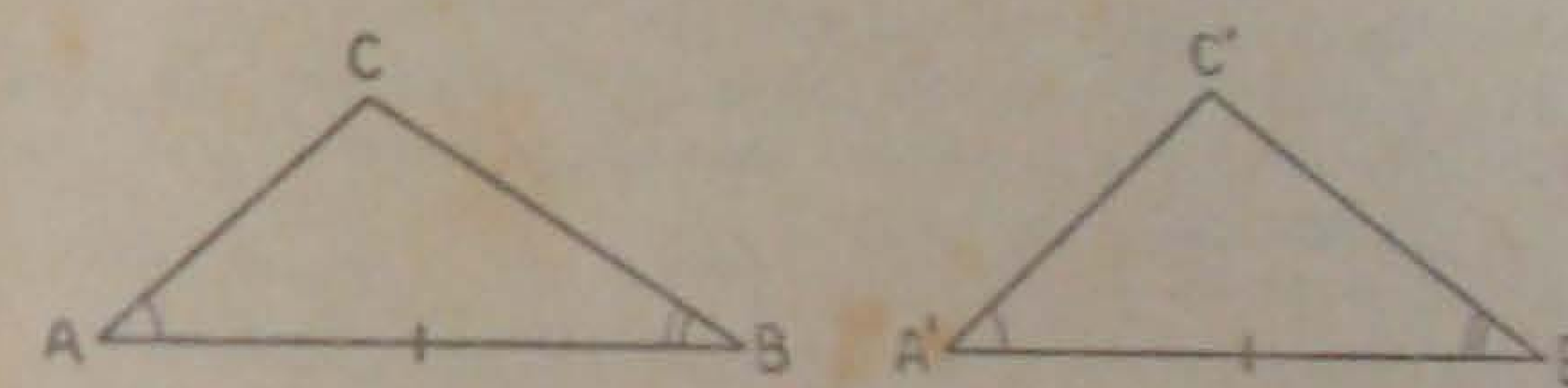


Fig. 99 — 1.º caso de igualdade: $AB = A'B'$; $\wedge A = \wedge A'$; $\wedge B = \wedge B'$

1.º) *Dois triângulos são iguais quando têm um lado igual e os ângulos adjacentes a êsse lado respectivamente iguais;*

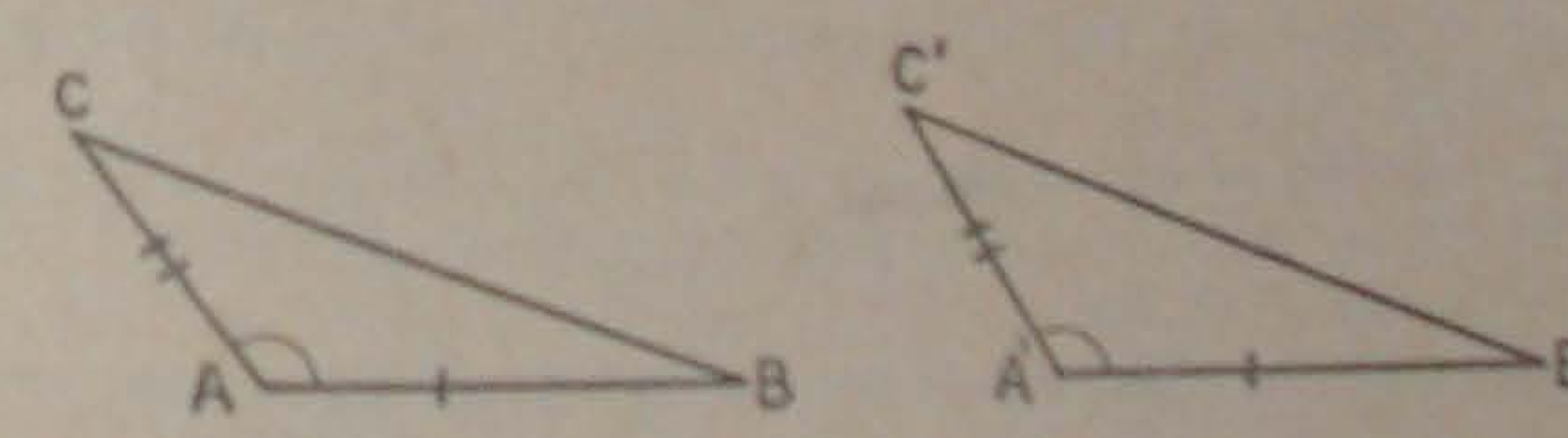


Fig. 100 — 2.º caso de igualdade: $\wedge A = \wedge A'$; $AB = A'B'$; $AC = A'C'$

2.º) *Dois triângulos são iguais quando têm um ângulo igual compreendido entre lados respectivamente iguais;*

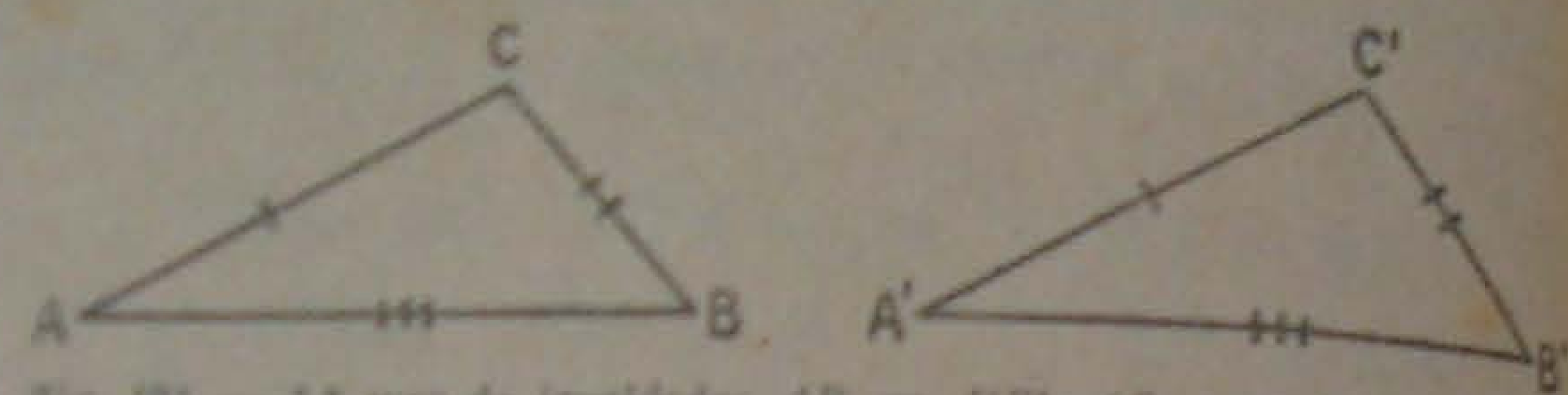


Fig. 101 — 3.º caso de igualdade: $AB = A'B'$; $AC = A'C'$; $BC = B'C'$

3.º) *Dois triângulos são iguais quando têm os três lados respectivamente iguais.*

QUESTIONÁRIO

1. Que é polígono?
2. Como se designa um polígono?
3. Que são ângulos interno e externo de um polígono?
4. Como se chama a soma dos comprimentos dos lados de um polígono?
5. Que é um triângulo?
6. Quais os elementos principais de um triângulo?
7. A que é igual a soma dos ângulos internos de um triângulo (lei angular de Tales)?
8. Quais são os elementos secundários de um triângulo?
9. Classifique os triângulos quanto aos lados e quanto aos ângulos.
10. Que é um triângulo isósceles e qual a sua propriedade?
11. Como se chamam os lados do triângulo retângulo?
12. Que relação há entre os ângulos agudos do triângulo retângulo?
13. Que relação há entre os lados do triângulo retângulo?
14. Enuncie os casos de igualdade de triângulos.

PROBLEMAS

Problema 23. — *Determinar o centro de um triângulo.*

Seja *ABD* o triângulo (fig. 102).

Tiremos as medianas relativas aos lados *AD* e *BD*.

Essas medianas cortam-se em *C* que é o centro do triângulo.

Nota: A mediana relativa ao lado *AB* também passa por *C*.

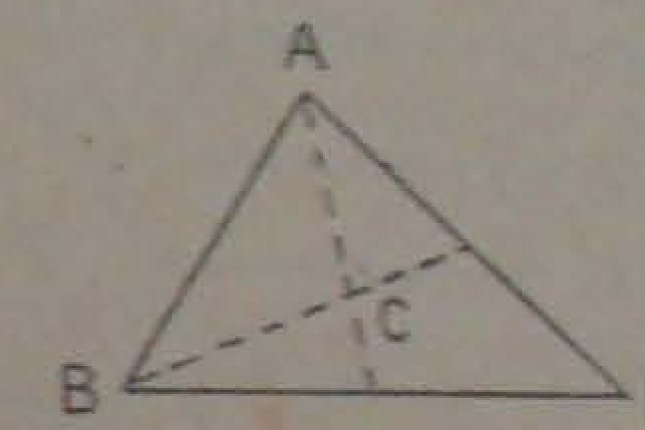


Fig. 102

Problema 24. — *Traçar as alturas de um triângulo.*

Basta tirar de cada vértice a perpendicular ao lado oposto.

Se o triângulo fôr acutângulo, as três alturas caem sôbre os lados (fig. 103).

Se o triângulo fôr retângulo, só haverá uma altura por traçar: a relativa à hipotenusa; a altura relativa a cada cateto é o outro cateto (fig. 104).

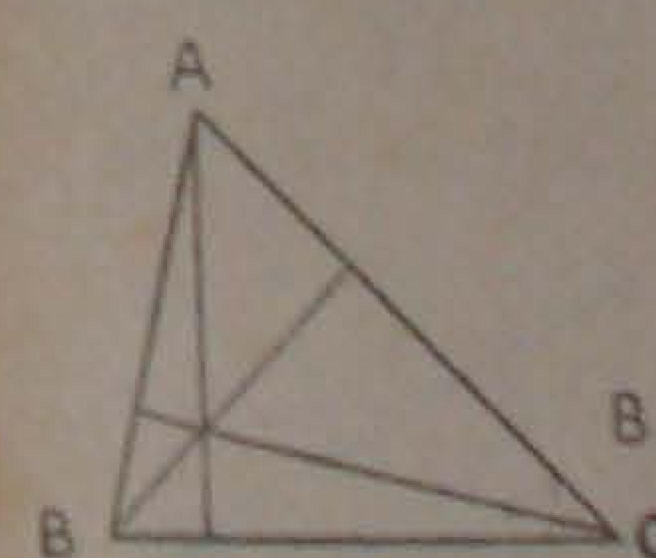


Fig. 103

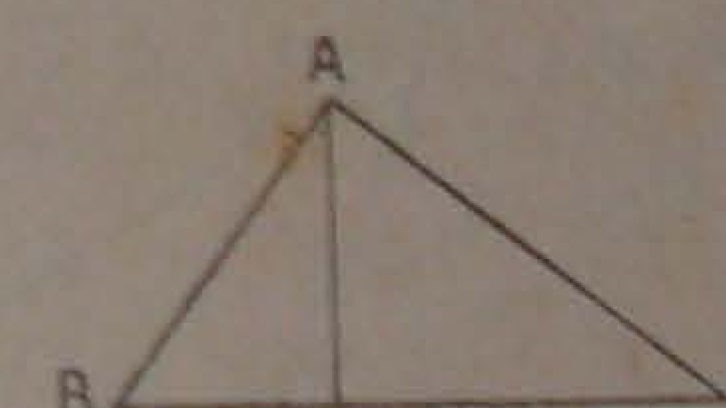


Fig. 104

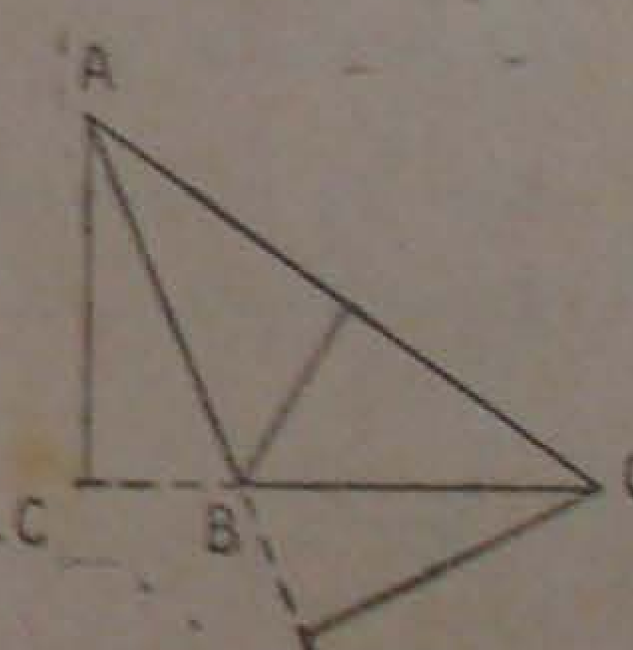


Fig. 105

Se o triângulo fôr obtusângulo, as alturas relativas aos dois menores lados caem fóra destes, isto é, nos seus prolongamentos. (fig. 105).

Problema 25. — *Construir um triângulo conhecendo-se dois lados e o ângulo por êles formados. B (fig. 108)*

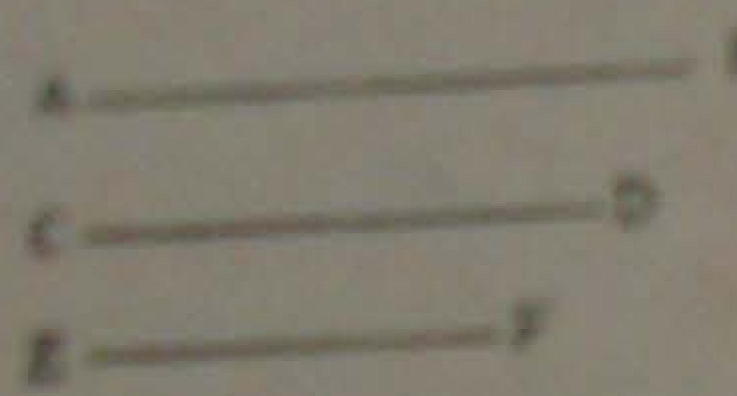


Fig. 106

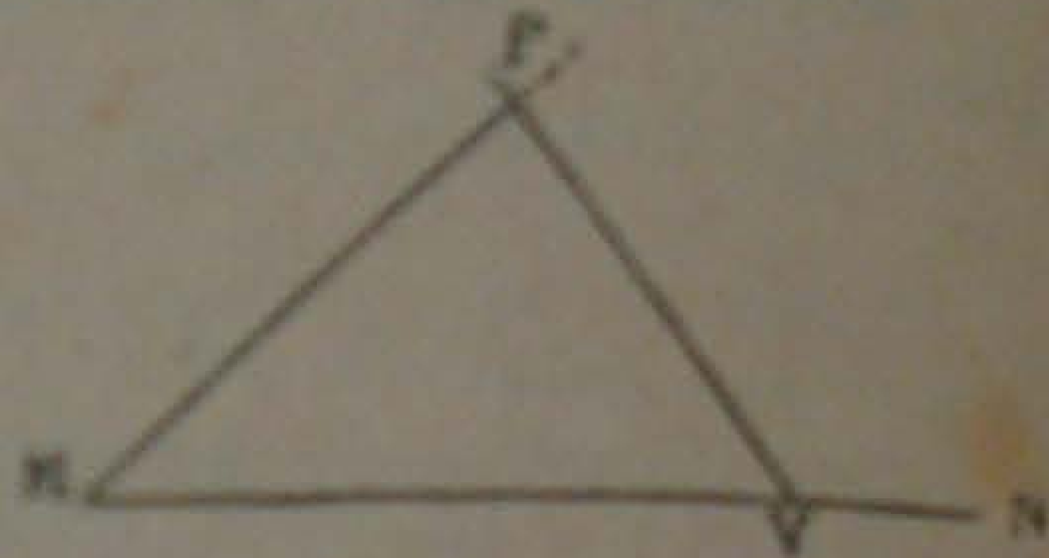


Fig. 107

Sôbre a reta MN, (fig. 107) marquemos $MV = AB$; do ponto M, com um raio igual a EF, tracemos um pequeno arco e de V com raio igual a CD tracemos outro arco que corte o primeiro. Determinamos, assim, o ponto P. Este ligado a M e V forma o triângulo pedido.

Problema 26. — *Construir um triângulo conhecendo-se dois lados e o ângulo por êles formado.* B (fig. 108) é o ângulo; EF e GH (fig. 108) são os lados conhecidos.

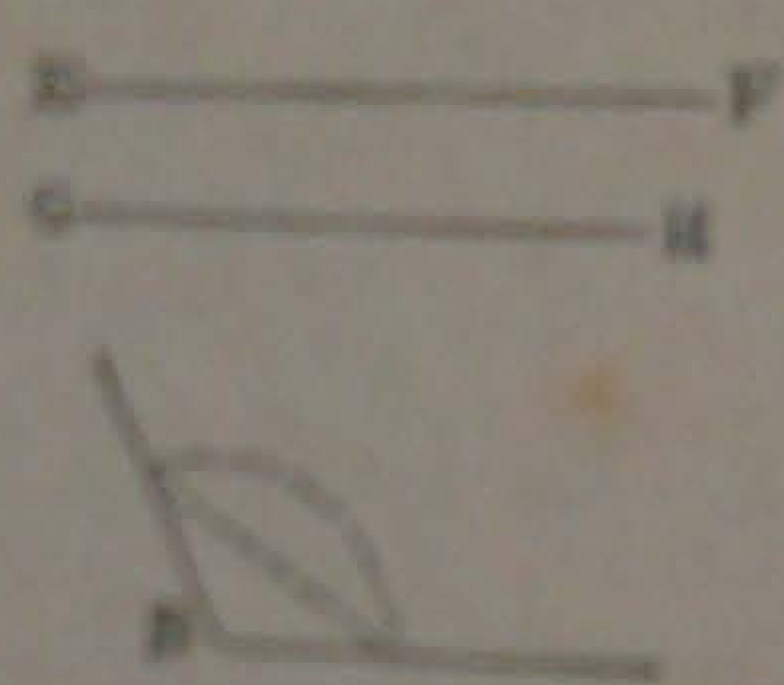


Fig. 108

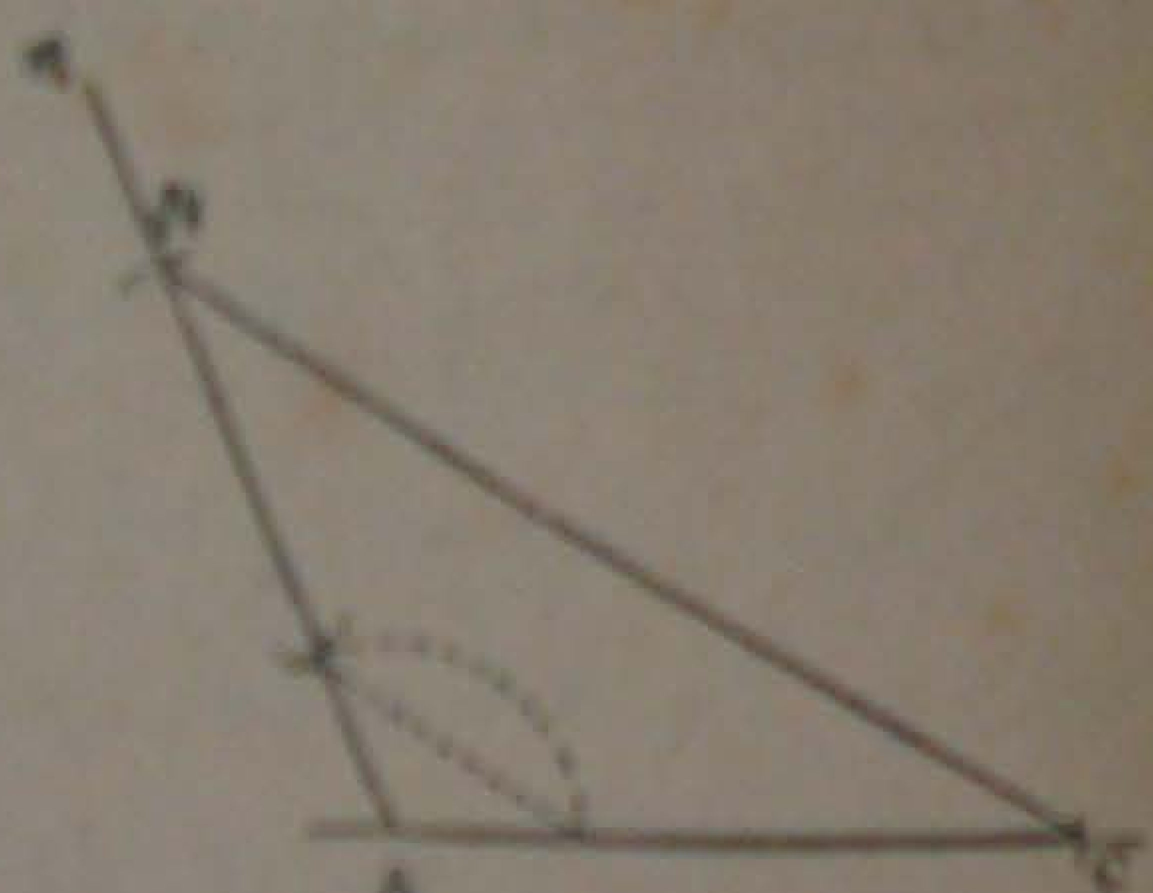


Fig. 109

No ponto A (fig. 109), façamos um ângulo A igual ao ângulo B; sôbre um lado, a partir do vértice, mar-

quemos AN igual a GH; e sôbre o outro lado marquemos $AC = EF$. Liguemos o ponto N ao ponto C e teremos construido o triângulo pedido.

Problema 27. — *Construir um triângulo conhecendo-se um lado e os ângulos adjacentes a êsse lado.*

AB (fig. 110) é o lado; G e H (fig. 111) os ângulos adjacentes. Sôbre a reta MN (fig. 112) marquemos $MD = AB$. Tomando para vértice o ponto M, façamos um

Fig. 110

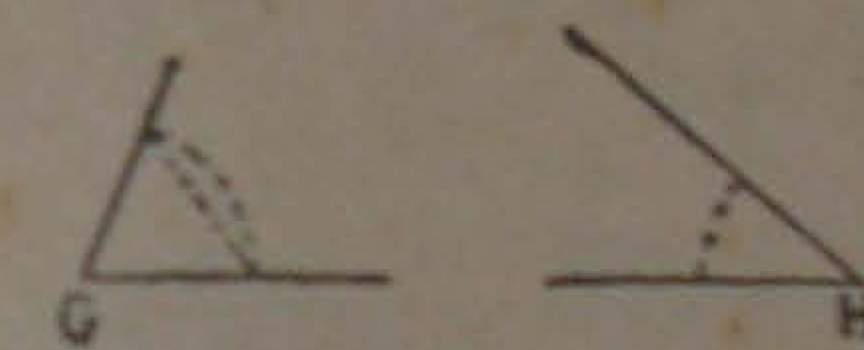


Fig. 111

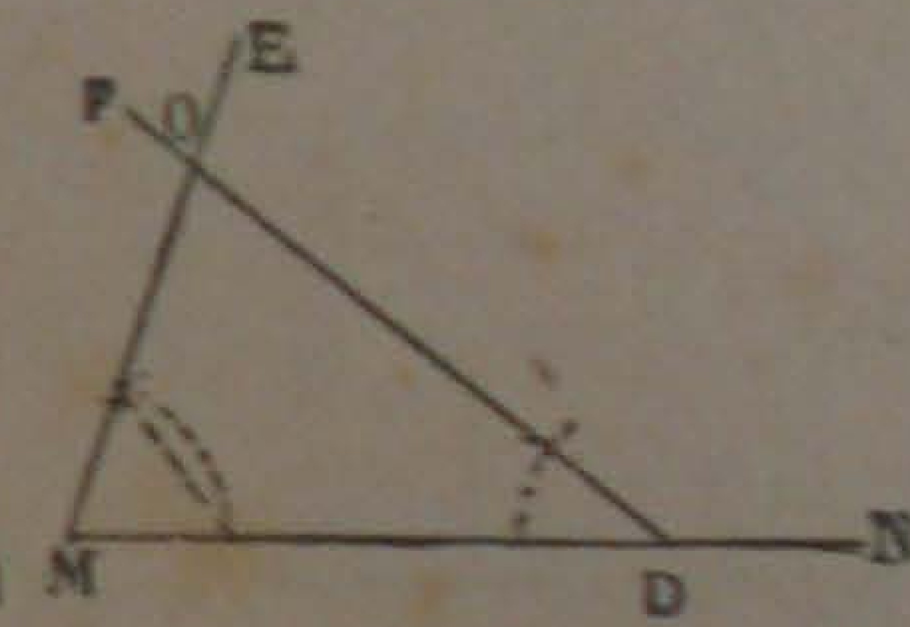


Fig. 112

ângulo igual a G e no ponto D, um ângulo igual a H. Os lados não comuns cortam-se no ponto O; MDO é o triângulo pedido.

Problema 28. — *Construir um triângulo conhecendo-se um lado, um ângulo adjacente e o ângulo oposto a êsse lado.*

RS é o lado (fig. 113); N, (fig. 114) um ângulo adjacente a êsse lado e M (fig. 115) o ângulo oposto.

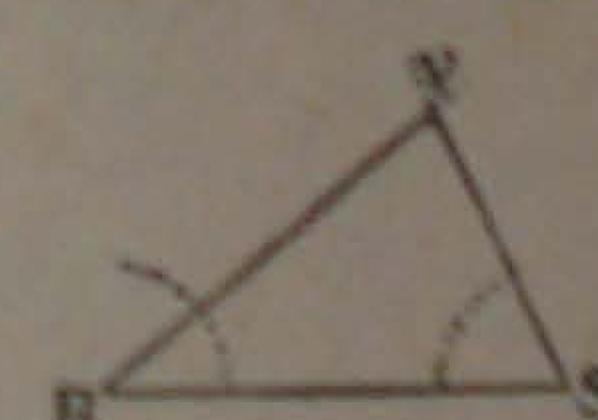


Fig. 113

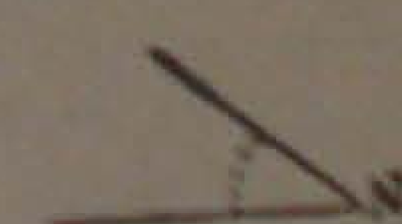


Fig. 114

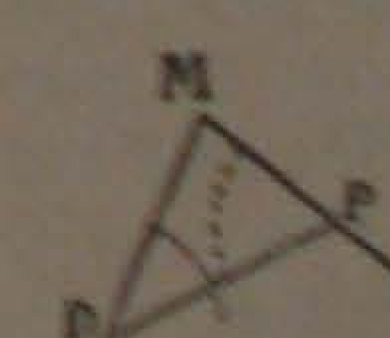


Fig. 115

Por um ponto D tomado sôbre um lado do ângulo M façamos um outro ângulo igual a N.

Os lados dos ângulos D e M determinam o ponto P, formando um ângulo que vai ser no triângulo pedido o outro ângulo adjacente ao lado conhecido. Recaímos assim no problema anterior, pois já estão conhecidos um lado e os dois ângulos adjacentes.

Problema 29. — *Construir um triângulo conhecendo-se dois lados e o ângulo oposto a um dêles.* Sejam m e n os lados e V o ângulo dado (fig. 116).

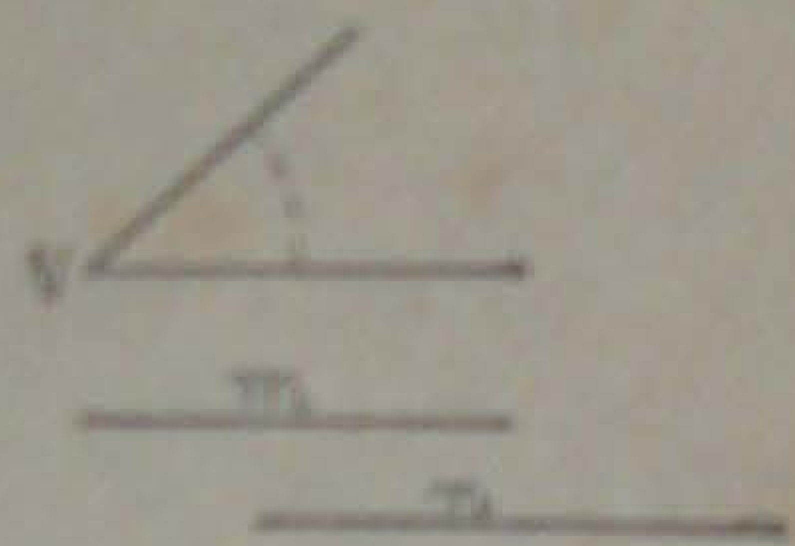


Fig. 116

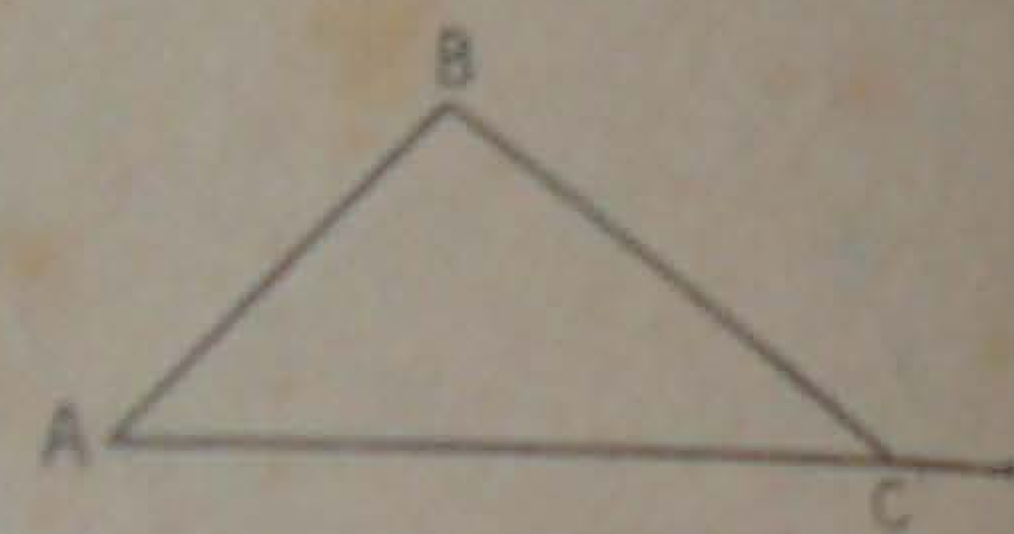


Fig. 117

Façamos um ângulo A igual ao ângulo V e apliquemos em AB (fig. 117) a medida m.

Com o centro em B e raio igual a n determinemos o ponto C. Unamos B a C e obteremos o triângulo pedido ABC.

Observação — Com os elementos fornecidos, o problema teve uma solução e uma só. Entretanto, esta construção (em que se dão um ângulo, um lado dêste e o lado oposto, para se obter o triângulo) nem sempre tem solução e, às vezes, pode ter duas soluções. Examinemos alguns casos que podem surgir, conservando o mesmo ângulo dado.

1.º) O lado oposto ao ângulo dado é igual ou maior do que o outro lado conhecido. É o caso resolvido acima e em que há sempre uma solução e só uma (fig. 117), pois, fazendo centro em B, com raio igual ou maior do que AB, sempre podemos encontrar AF uma vez e só uma.

2.º) O lado oposto ao ângulo A é exatamente a distância de B ao lado desconhecido. Neste caso, temos ainda uma solução: o triângulo retângulo ABC (fig. 118).

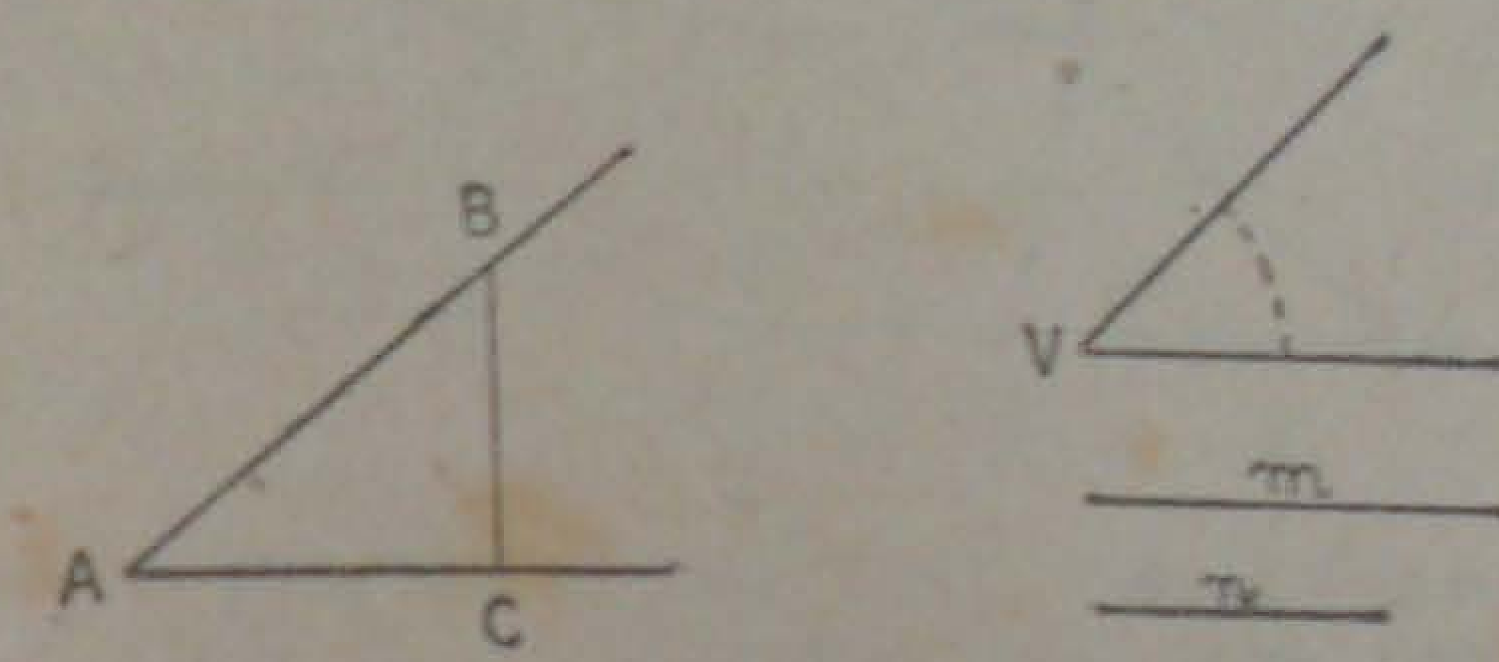


Fig. 118

3.º) O lado oposto ao ângulo A é maior do que a referida distância (de B ao lado desconhecido) porém menor do que m (lado AB). Neste caso há duas soluções. Com efeito: se fizermos centro em B e, com raio igual a n, procurarmos determinar o terceiro vértice do

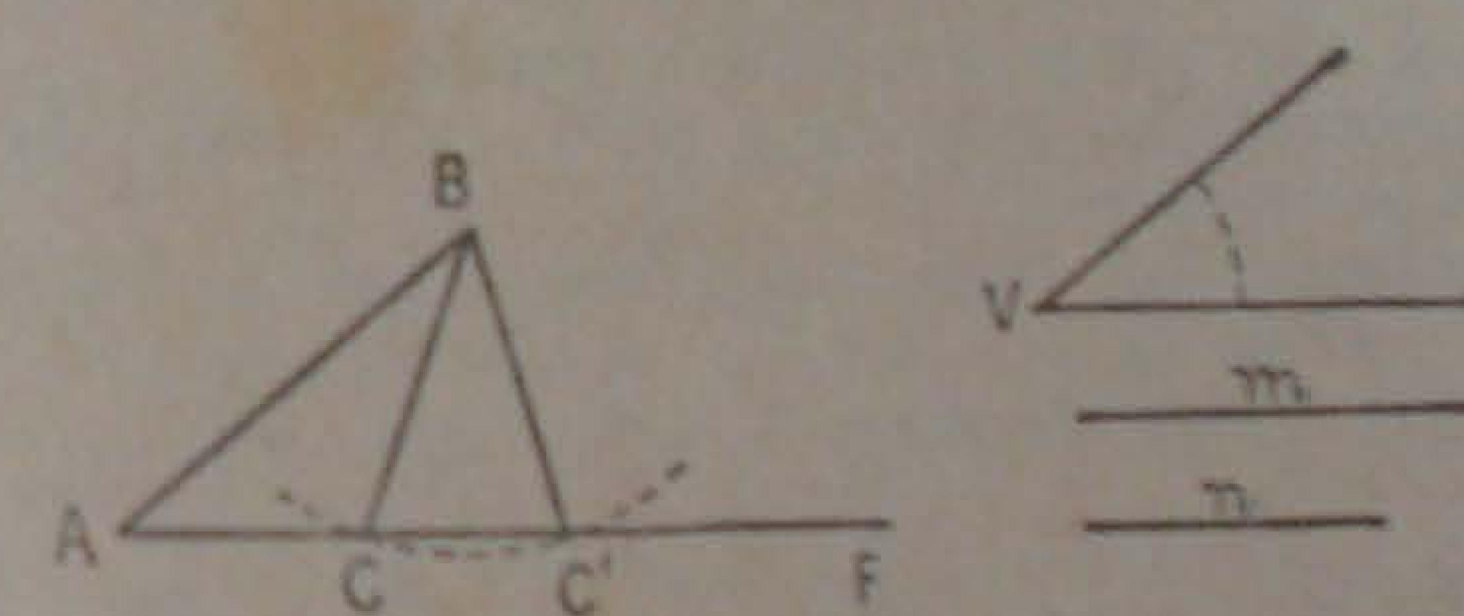


Fig. 119

triângulo, veremos que o arco de raio n corta AF em dois pontos, C e C' donde resultam dois triângulos, ABC e ABC', que resolvem o problema (fig. 119).

4.º) o lado oposto a A é menor do que a distância de B ao lado desconhecido. Desta vez o problema não tem solução, pois, fazendo centro em B, com um tal raio não conseguimos cortar AF (fig. 120).

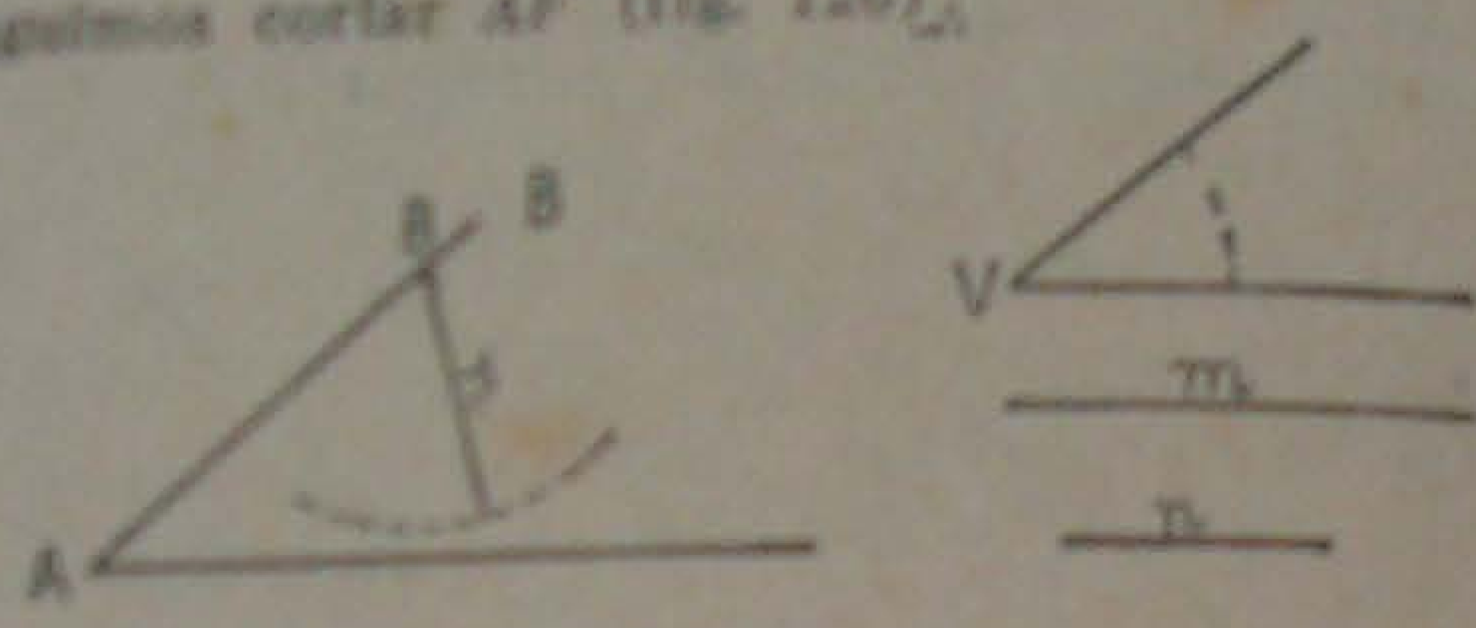


Fig. 120

Problema 30. — *Construir um triângulo conhecendo-se dois lados e uma altura.*

1.º Caso. — A altura é relativa a um dos lados conhecidos.

a e b são os dois lados e m a altura (fig. 121).

Sôbre uma reta marquemos $EF = a$ e por um ponto R (fig. 122) levantemos-lhe uma perpendicular; sôbre esta marquemos $RS = m$.

Façamos passar por S uma paralela a EF e com o centro em F e raio igual a b determinemos G; dêste ponto, e com o raio EF, determinemos D.

Qualquer dos triângulos, EFG, GDF, EFD ou GDE, resolve o problema.

2.º caso. — A altura é relativa ao lado desconhecido.

a e b são os dois lados e m a altura relativa ao 3.º lado (fig. 121). Marquemos sôbre uma reta a medida

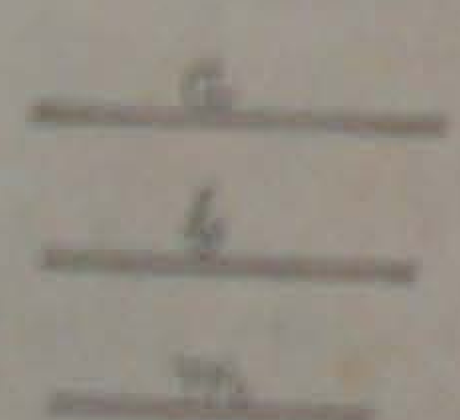


Fig. 121

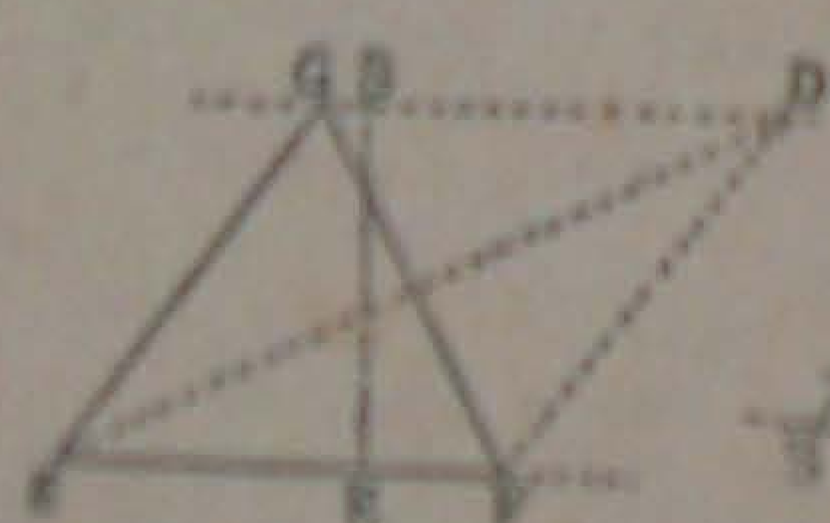


Fig. 122

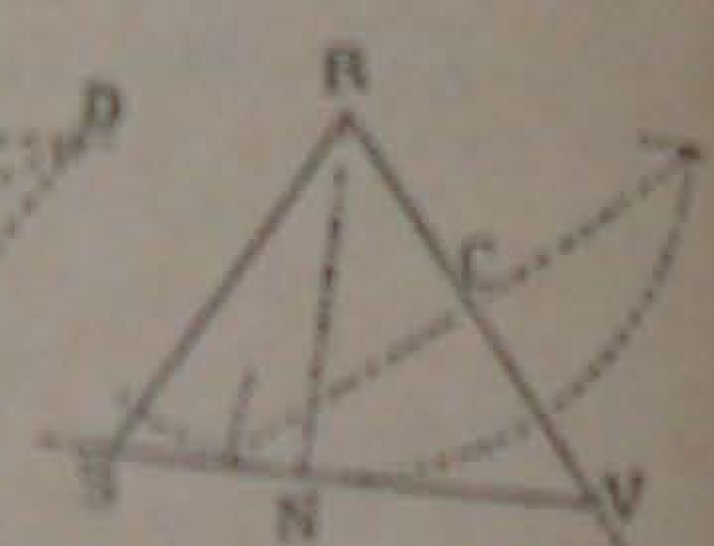


Fig. 123

$RV = a$ (fig. 123) e do ponto R, com um raio igual a m descrevamos um arco de círculo.

Dividamos RV ao meio e do ponto C, com um raio CV ou CR determinemos o ponto N no arco de círculo. Tiremos por VN uma reta.

Centro em R e com um raio igual a b marquemos o ponto S, o qual, unido a R, resolve o problema. RN é a altura.

Problema 31. — *Construir um triângulo conhecendo-se os meios dos três lados.*

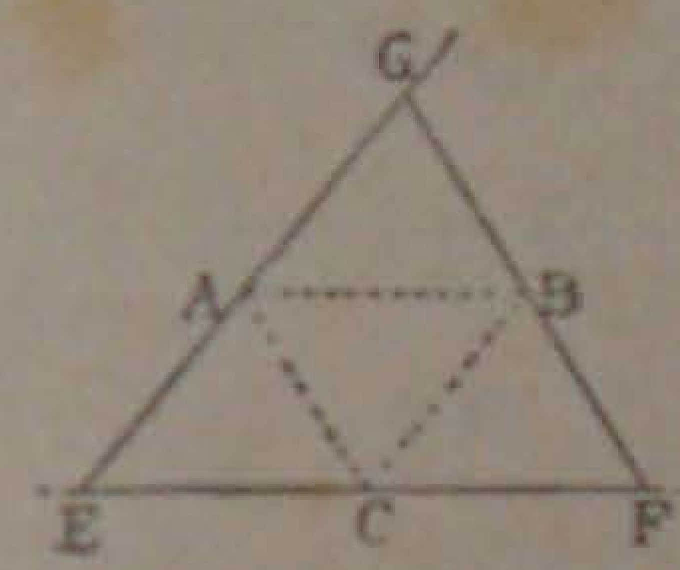


Fig. 124

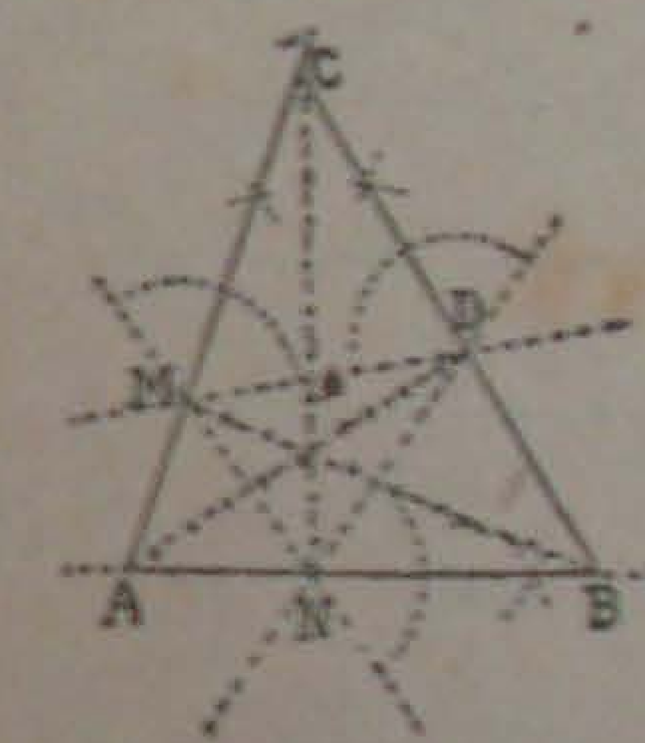


Fig. 125

Unamos entre si os três pontos A, B e C. Resulta o triângulo ABC. (fig. 124) pelos vértices do qual tracemos paralelas aos lados opostos.

As três retas se cortam formando o triângulo pedido EFG.

Problema 32. — *Construir um triângulo conhecendo-se os pés das três alturas.*

Sejam M, N e D os pés das alturas (fig. 125).

Liguemos êstes pontos entre si e prolonguemos as retas além dos pontos dados.

Tracemos as bissetrizes dos ângulos externos do triângulo MND e elas darão a solução do problema: o triângulo ABC.

Problema 33. — *Construir um triângulo conhecendo-se um ângulo, um lado dêste e a altura relativa a êsse lado.*

V é o ângulo, m o lado e h a altura, (fig. 126).

Sôbre uma reta apliquemos $AB = m$ e tomando A para vértice, (fig. 127) façamos um ângulo igual a V; de um ponto E qualquer de AB levantemos uma perpendicular; sôbre esta, a partir do pé, marquemos $EC = h$.

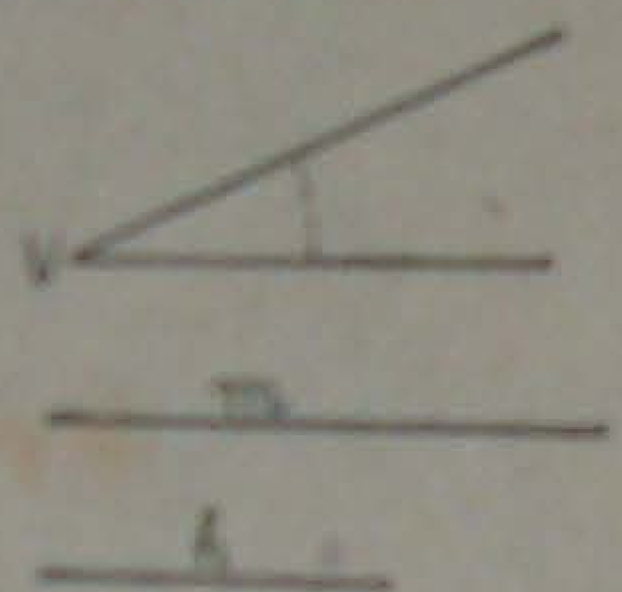


Fig. 126

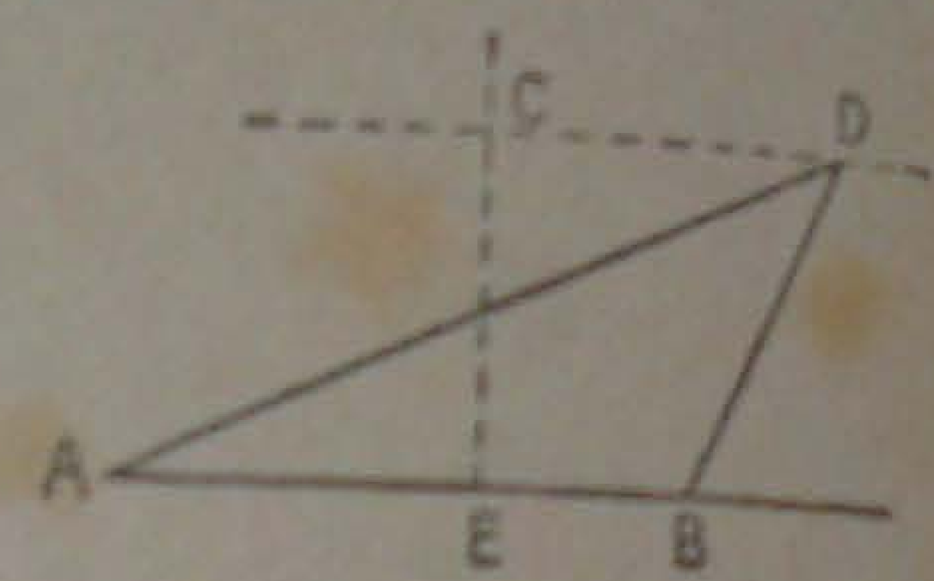


Fig. 127

Do ponto C tracemos uma paralela a AB, a qual vai determinar o ponto D, terceiro vértice do triângulo pedido ABD.

Problema 34. — *Construir um triângulo conhecendo-se os ângulos adjacentes ao mesmo lado e a altura relativa a este lado.*

Fig. 128

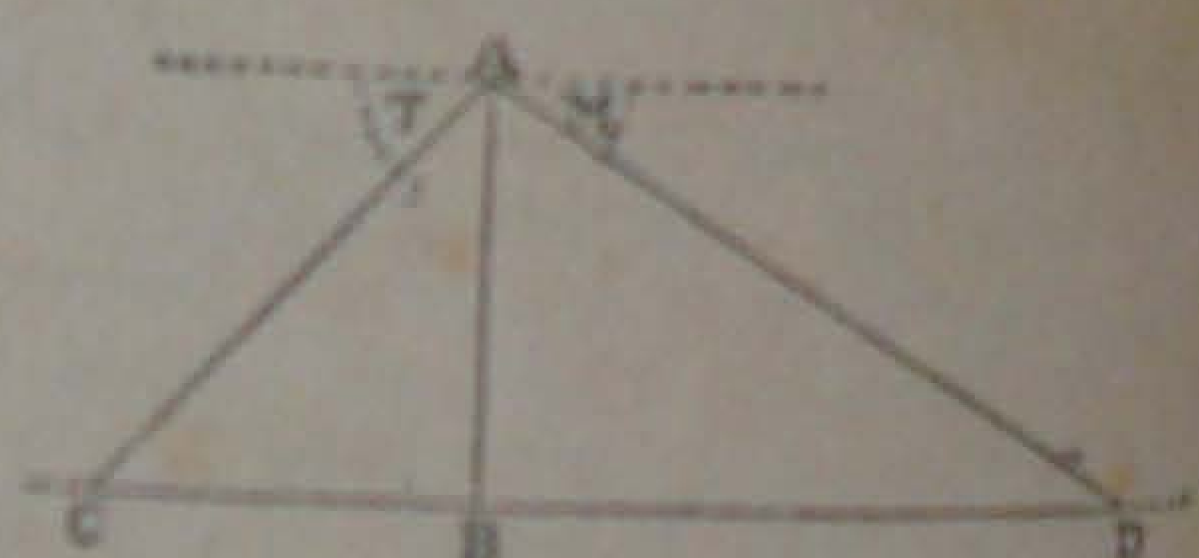


Fig. 129

H e V são os ângulos da base (fig. 128) e AB é a altura (fig. 129). Façamos passar, por A e por B, retas perpendiculares a AB.

Tomando A como vértice, façamos dois ângulos $M = V$ e $T = R$.

Os lados dêsses ângulos, vão determinar os pontos C e D e completam o triângulo pedido CDA.

Problema 35. — *Construir um triângulo conhecendo-se um ângulo e as alturas relativas aos lados dêsse ângulo.*

Façamos um ângulo A igual ao ângulo dado (fig. 130) e do vértice levantemos duas perpendiculares: uma a cada lado do ângulo.

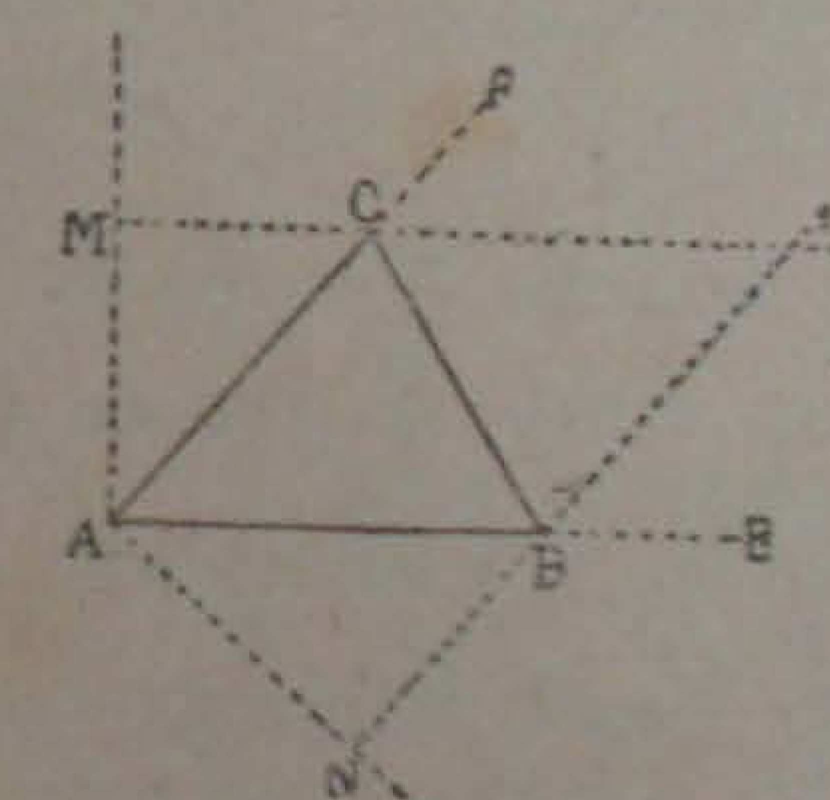


Fig. 130

Em uma destas perpendiculares marquemos AM igual a uma das alturas, e, na outra, AN igual à segunda altura dada.

Por M tracemos uma paralela ao lado AE e por N outra paralela ao lado AF.

As paralelas determinam os pontos B e C, que são os outros dois vértices do triânggulo pedido ABC. Basta então, ligar B a C.

Problema 36. — *Construir um triângulo conhecendo-se as três medianas.*

Formemos um triângulo *ABC* (fig. 132) cujos lados sejam respectivamente iguais a dois terços de cada mediana, isto é:

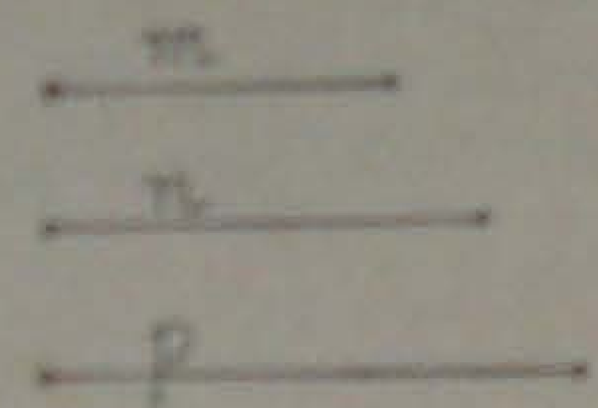


Fig. 131

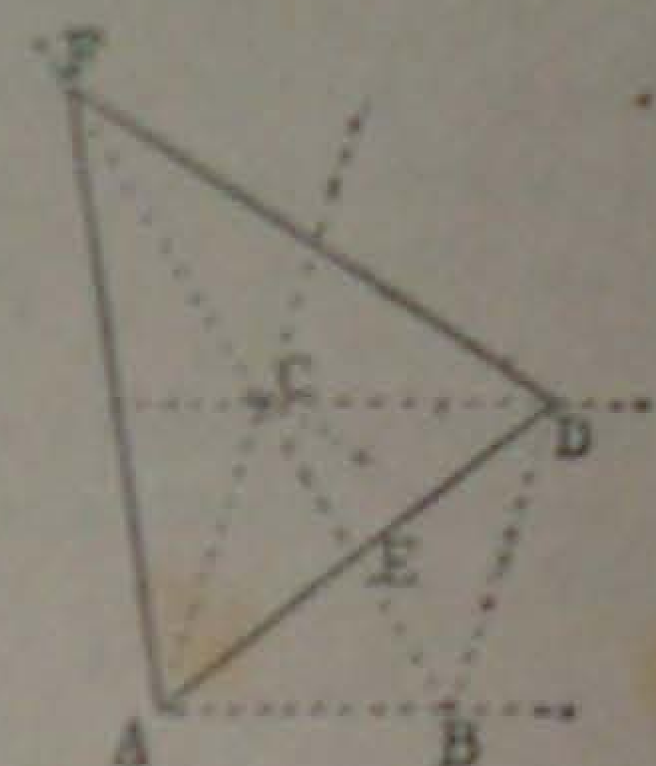


Fig. 132

$$AB = \frac{2}{3} \text{ de } m;\ AC = \frac{2}{3} \text{ de } n \text{ e } BC = \frac{2}{3} \text{ de } p$$

Reproduzamos o triângulo *ABC* em *CDB*, traçando as paralelas aos lados *CA* e *AB*.

Prolonguemos *DC*, *AC* e *BC*; tracemos *AD* e do ponto *E* apliquemos $EF = p$.

Liguemos *F* a *A* e a *D*. O triângulo pedido é *ADF*.

Problema 37. — *Construir um triângulo conhecendo-se o perímetro e dois ângulos.*

Fig. 133

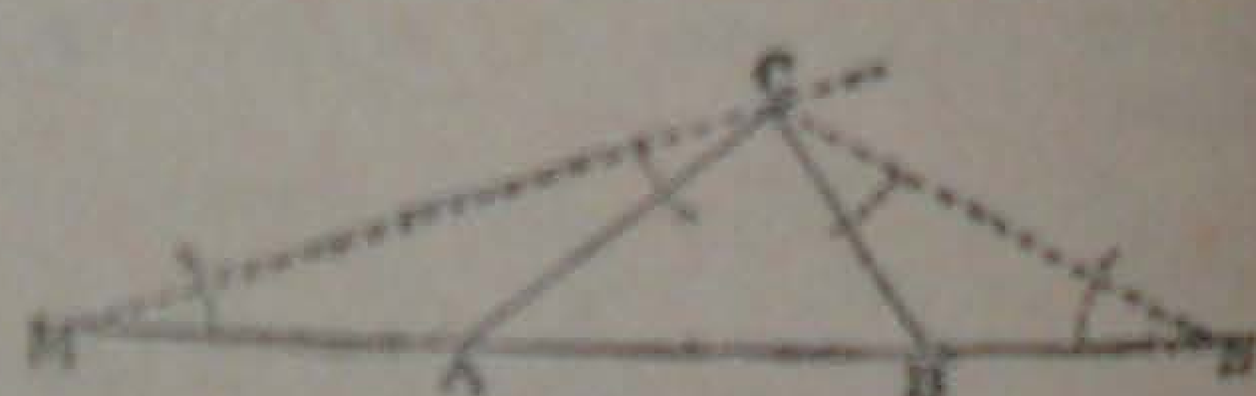


Fig. 134

Sejam *P* e *R* os ângulos dados (fig. 133) e *MN* (fig. 134) o perímetro.

Na extremidade *M* façamos um ângulo igual à metade de *P*; no ponto *N* façamos um ângulo igual à metade de *R*.

Achamos, o ponto *C*; em seguida façamos o ângulo $MCA = \wedge M$ e $\wedge NCB = \wedge N$.

O triângulo *ABC* resolve o problema.

Problema 38. — *Construir um triângulo equilátero dado o lado.* Seja AB (fig. 135) o lado.

Sôbre uma reta tomemos MN (fig. 136) igual a AB.

Fig. 135

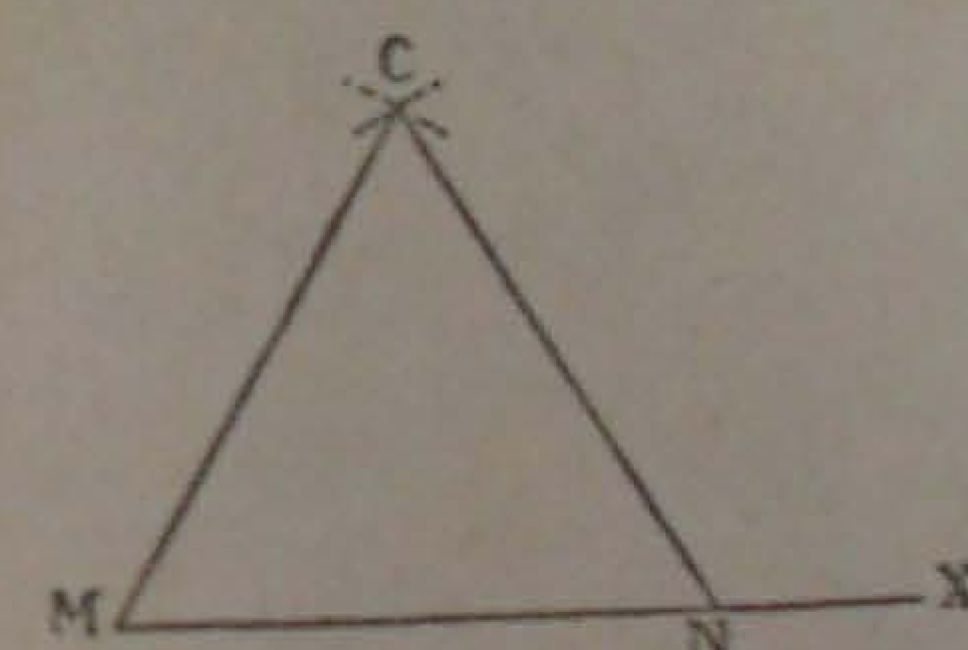


Fig. 136

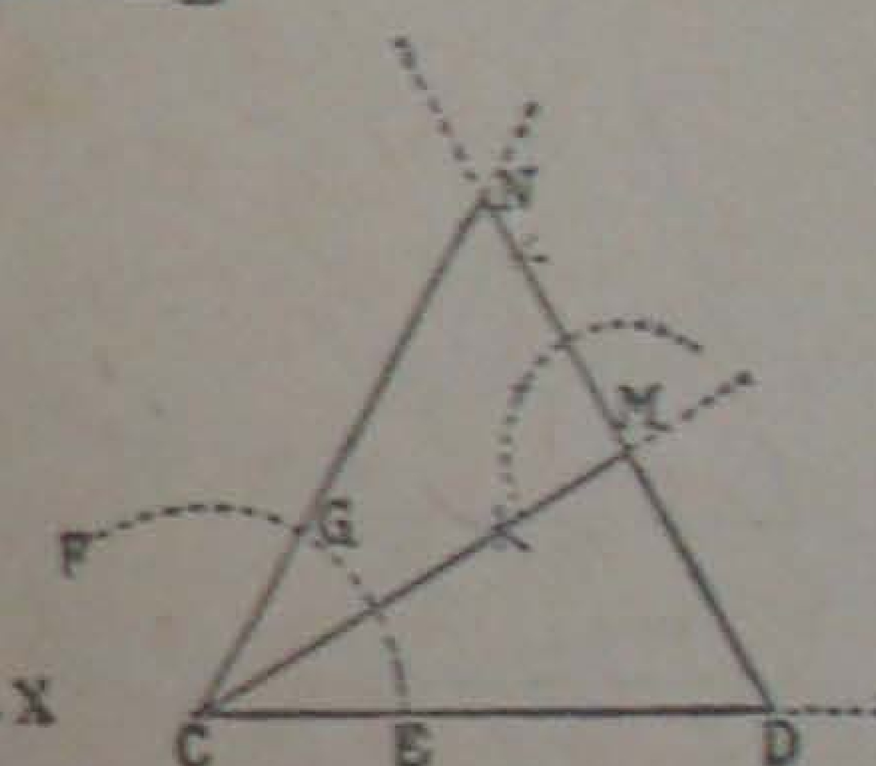


Fig. 137

Façamos centro em *M* e *N* e com raio igual a *AB* determinemos o ponto *C*, que, ligado aos pontos *M* e *N*, resolverá o problema.

Problema 39. — *Traçar um triângulo equilátero conhecendo-se-lhe a altura.*

Tracemos uma reta e, num ponto artrário *C* tomado sôbre ela (fig. 137) façamos centro, descrevendo com um raio qualquer o arco *EF*.

Centro em *E* e com o mesmo raio, determinemos o ponto *G*; liguemos *C* a *G* · depois tracemos bissetriz do ângulo *GCE*.

Apliquemos em *CM* a medida da altura dada e pelo ponto *M* façamos passar uma perpendicular a *CM*. O triângulo *CDN* resolve o problema.

Problema 40. — *Construir um triângulo isósceles conhecendo-se a base e a altura.*

Seja *b* a base e *a* a altura (fig. 138).

Sôbre uma reta tomemos *AB* igual *à* base e façamos passar pelo meio de *AB* uma perpendicular; a partir do pé desta marquemos *DC* igual a *a*.

Liguemos os pontos *A* e *B* ao ponto *C* e teremos resolvido o problema.

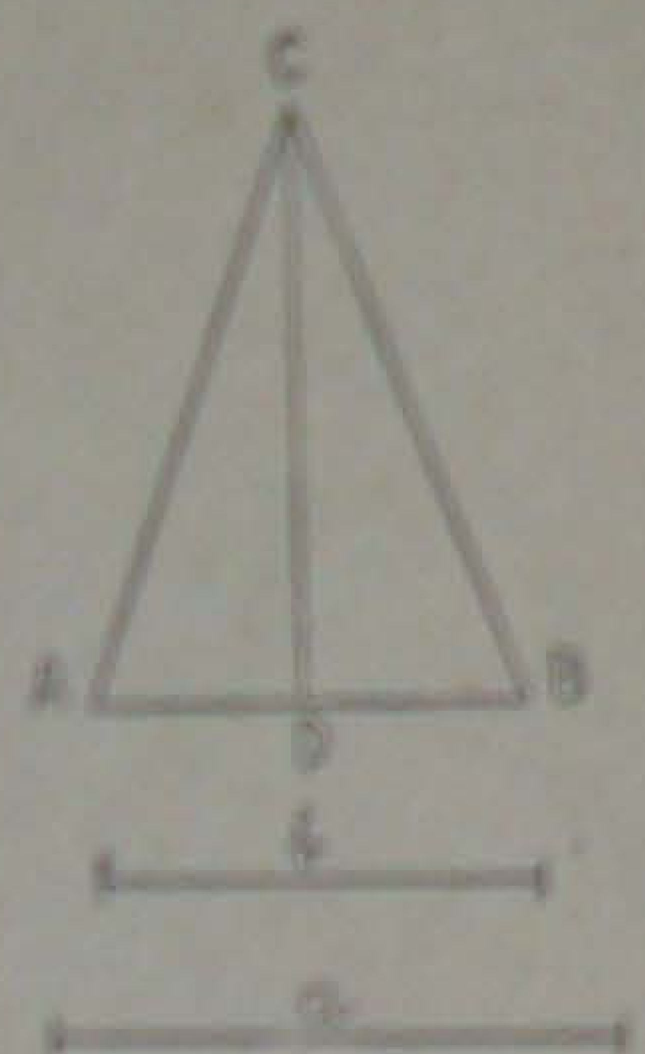


Fig. 138

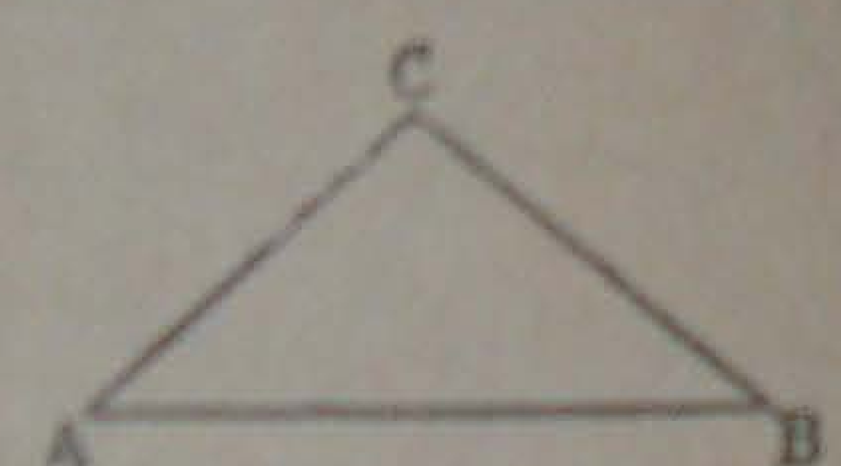


Fig. 139

Problema 41. — *Construir um triângulo isósceles conhecendo a base e o lado.*

Tracemos *AB* (fig. 139), igual à base conhecida.

Dos pontos *A* e *B*, como centros, e com um raio igual ao lado, determinemos o ponto *C*.

Liguemos *C* a *A* e a *B* e obteremos o triângulo pedido *ABC*.

Problema 42. — *Construir um triângulo isósceles conhecendo-se a base e um ângulo adjacente a esta base.*

Seja *m* a base e *E* o ângulo adjacente (fig. 140).

Tracemos *AB* (fig. 141) igual a *m* e em cada extremidade façamos um ângulo igual ao ângulo dado.

O triângulo *ABC* resolve o problema.

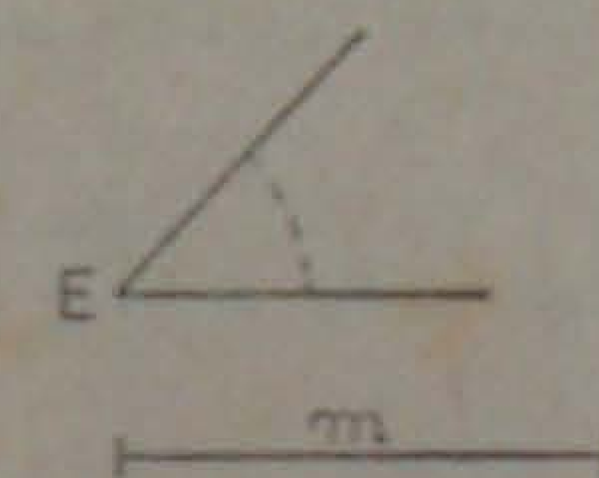


Fig. 140

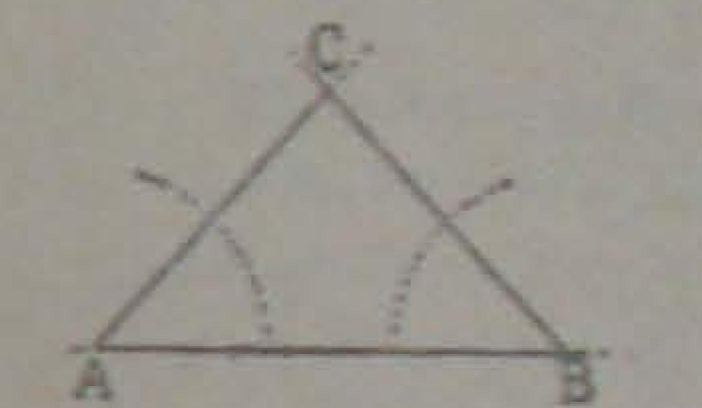


Fig. 141

Problema 43. — *Construir um triângulo isósceles conhecedo-se a altura e o perímetro.*

Seja *MN* perímetro conhecido (fig. 142) e, pelo seu meio, tracemos uma perpendicular; apliquemos em *CB* a medida da altura dada e liguemos *M* e *N* a *B*.

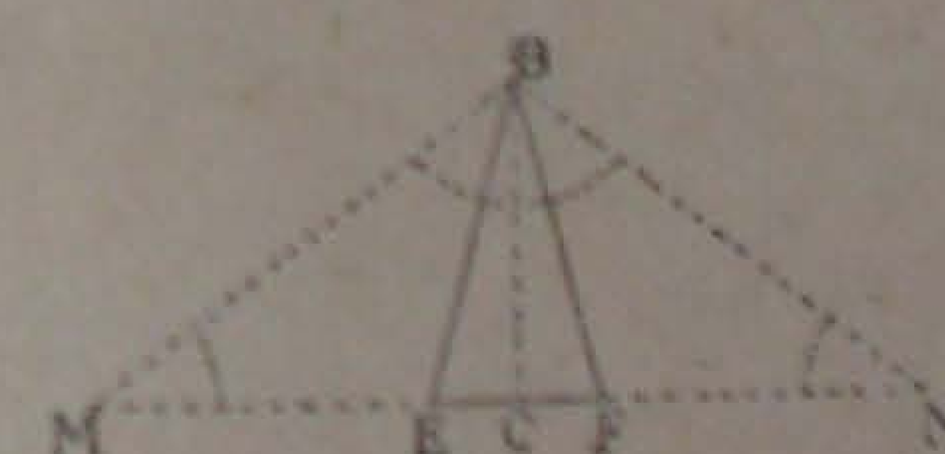


Fig. 142

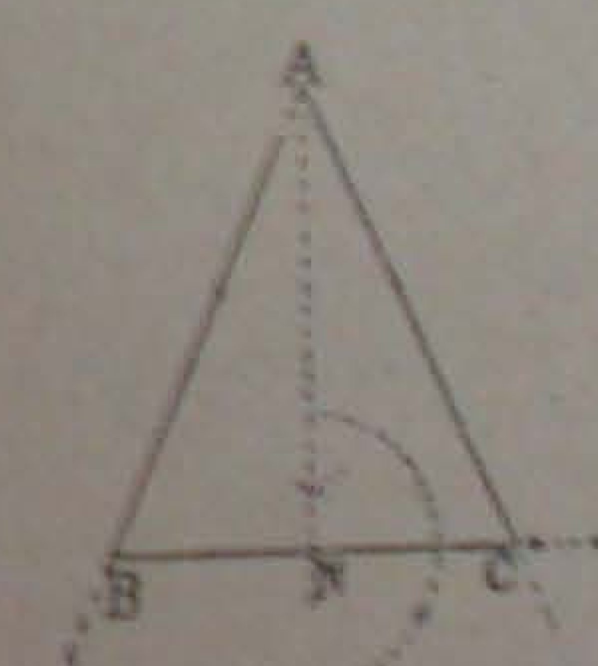


Fig. 143

Façamos os ângulos *MBE* e *NBF* iguais, cada um, ao ângulo *M* ou *N*.

EFB é o triângulo pedido.

Problema 44. — *Construir um triângulo isósceles conhecendo-se a altura e o ângulo do vértice.*

Tracemos a bissetriz do ângulo dado A e sôbre ela (fig. 143) apliquemos AN igual à altura conhecida. Façamos passar por N uma perpendicular a AN, a qual determinará nos lados do ângulo os pontos B e C; o triângulo ABC resolve o problema.

Problema 44 bis. — *Construir um triângulo isósceles, conhecendo-se a base e o ângulo do vértice* (*ângulo oposto à base*).

Seja n a base e V o ângulo do vértice.

Sôbre uma reta tomemos AB igual a n (fig. 144) e no seu prolongamento façamos um ângulo igual a V (fig. 144), tomando B para vértice.

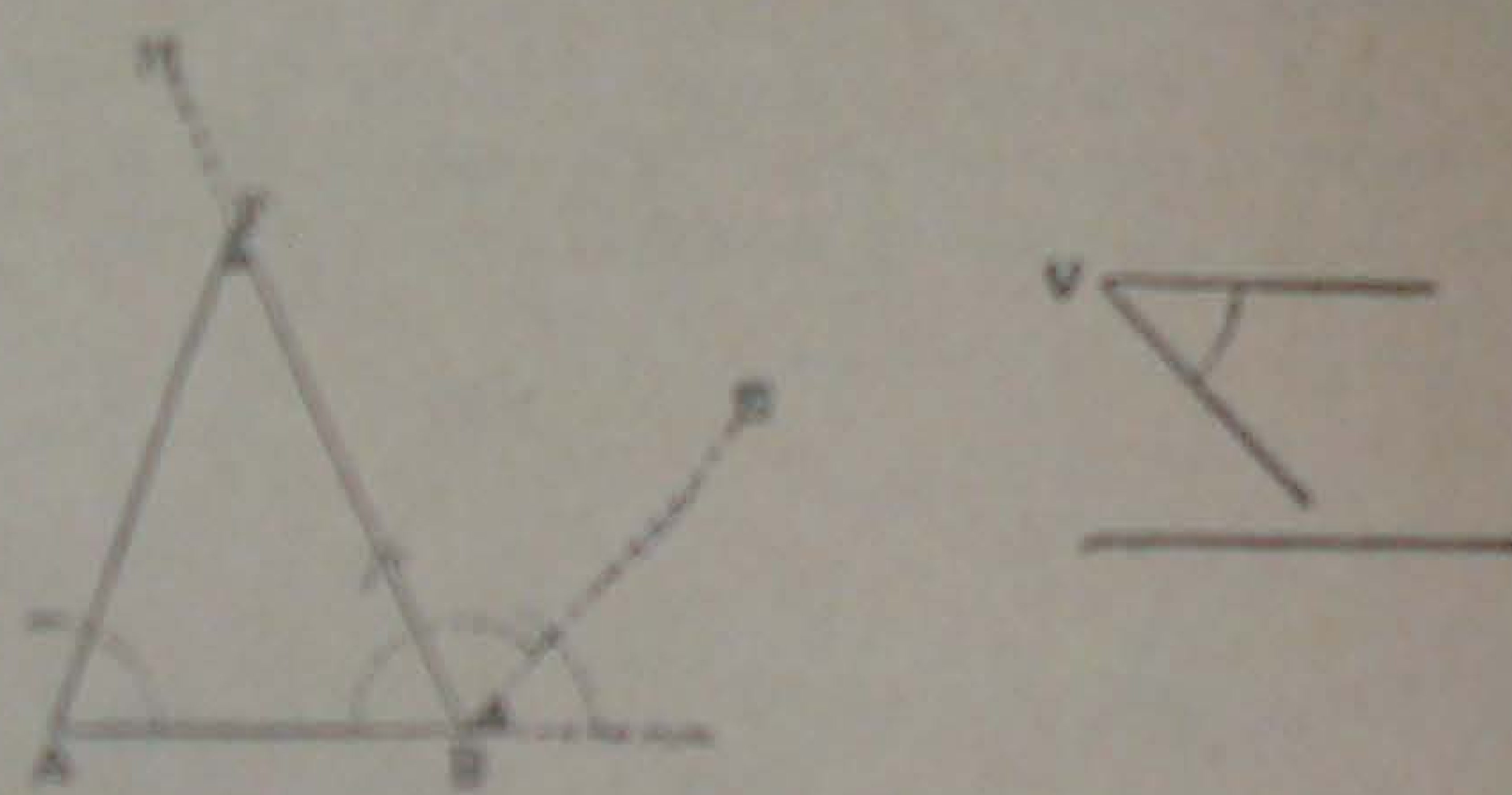


Fig. 144

Tracemos a bissetriz BM do ângulo ABE. O ângulo ABM é o ângulo adjacente à base. O problema se reduz então ao do número 43, pois conhecemos a base e o ângulo adjacente.

Problema 45. — *Construir um triângulo isósceles conhecendo-se o lado e o ângulo da base.*

Seja A o ângulo da base e BC o lado (fig. 145).

Façamos em V (fig. 146) um ângulo igual ao ângulo A e tomemos sôbre um de seus lados, a partir do vértice, a medida $VD = BC$.

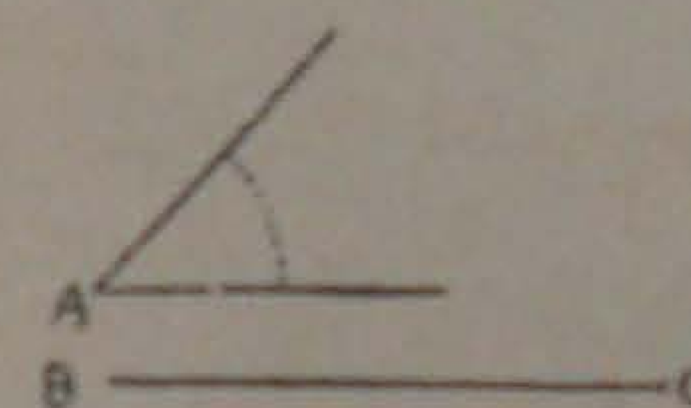


Fig. 145

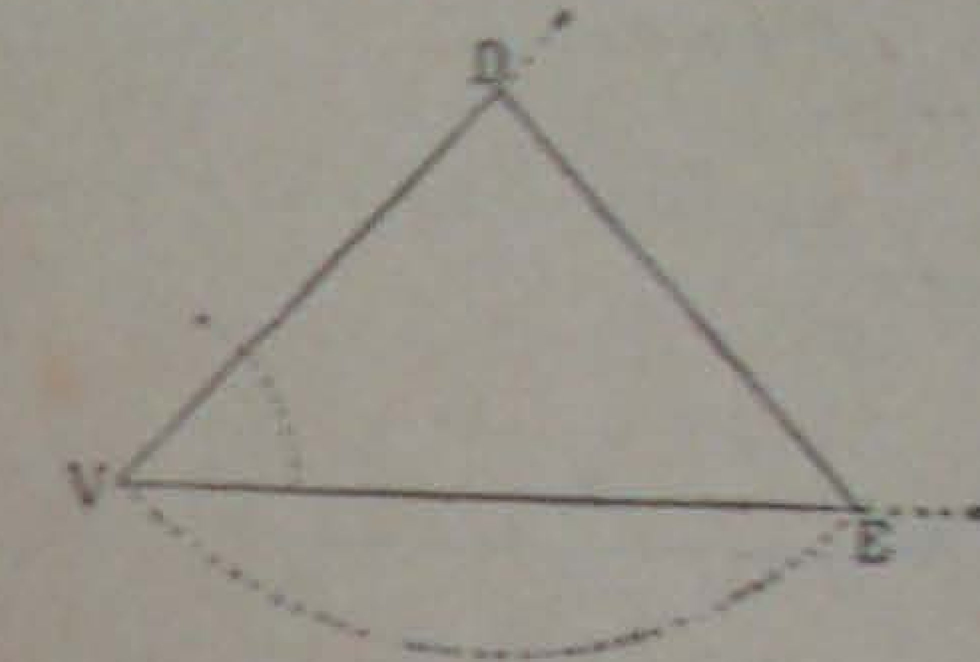


Fig. 146

Com o centro em D e o raio igual a DV, determinemos o ponto E, o qual é ligado ao ponto D. O triângulo VDE resolve o problema.

Problema 46. — *Construir um triângulo retângulo conhecendo-se um ângulo agudo e a hipotenusa.* Sôbre uma reta marquemos MD (fig. 147) igual à hipotenusa; no ponto M façamos um ângulo igual ao ângulo dado, e do ponto D tracemos DE perpendicular a MG.

MDE é o triângulo pedido.

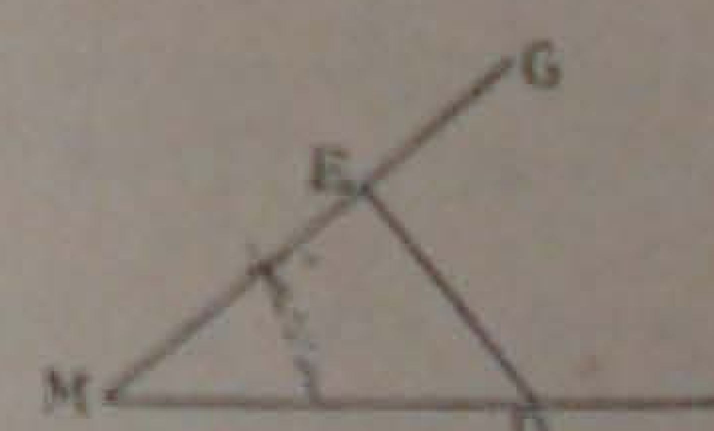


Fig. 147

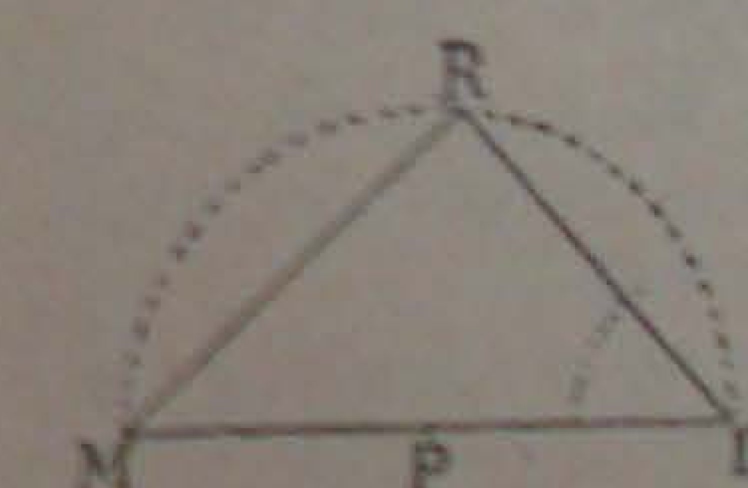


Fig. 148

Outro processo. — Dividamos a hipotenusa MD (fig. 148) ao meio e com o centro em P descrevamos a semi-circunferência de raio PM; isto é, tracemos uma semi-circunferência cujo diâmetro seja a hipotenusa dada.

Tomemos para vértice um dos pontos (*M* ou *D*) e façamos um ângulo igual ao ângulo dado, prolongando o lado até alcançar a curva no ponto *R*. Liguemos *R* a *M* e teremos o triângulo pedido, *MDR*.

Problema 47. — *Construir um triângulo retângulo, conhecendo-se a hipotenusa e um cateto.*

AB (fig. 150) é a hipotenusa e *CD* (fig. 151) é o cateto.

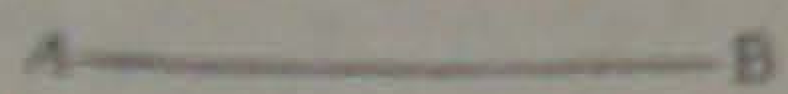


Fig. 150

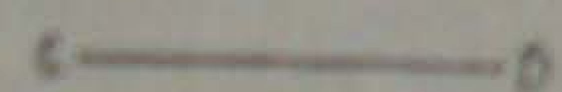


Fig. 151

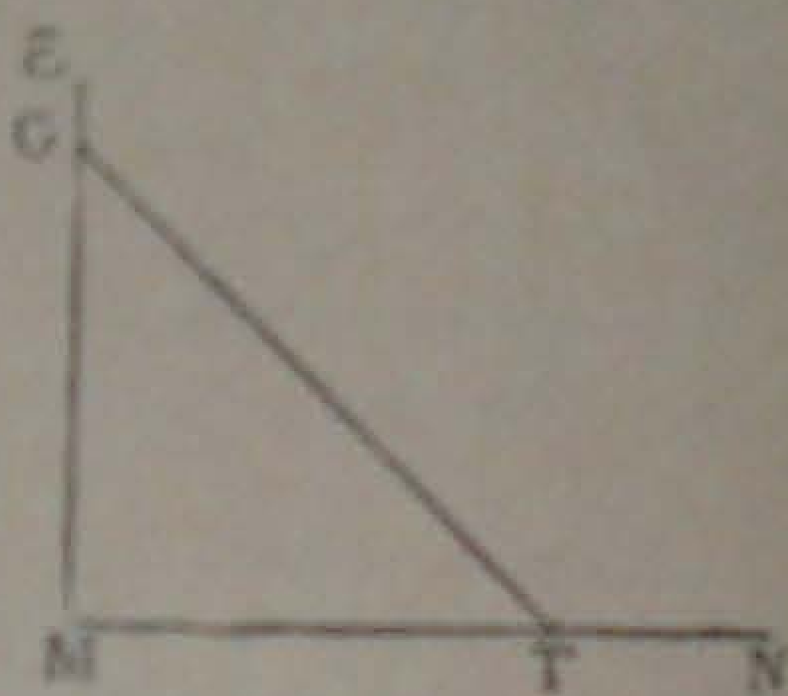


Fig. 152

Sôbre uma reta marquemos $MT = CD$ (fig. 152); pelo ponto *M* levantemos uma perpendicular *ME*; façamos centro em *T* e com um raio igual a *AB* cortemos a perpendicular *ME* no ponto *G* o qual, ligado ao ponto *T*, resolve o problema.

Problema 48. — *Construir um triângulo retângulo, conhecendo-se um cateto e o ângulo agudo adjacente a êsse cateto.*

Sôbre uma reta apliquemos *AB* (fig. 153) igual ao cateto; pela extremidade *A* levantemos uma perpendicular e na outra extremidade reproduzamos o ângulo agudo conhecido. O lado dêsse ângulo determinará, na perpendicular, o ponto *D*. O triângulo *ABD* resolve o problema.

Problema 49. — *Construir um triângulo retângulo isósceles conhendo-se a hipotenusa.*

Seja *AB* (fig.154) igual à hipotenusa dada; tracemos-lhe a mediatriz.

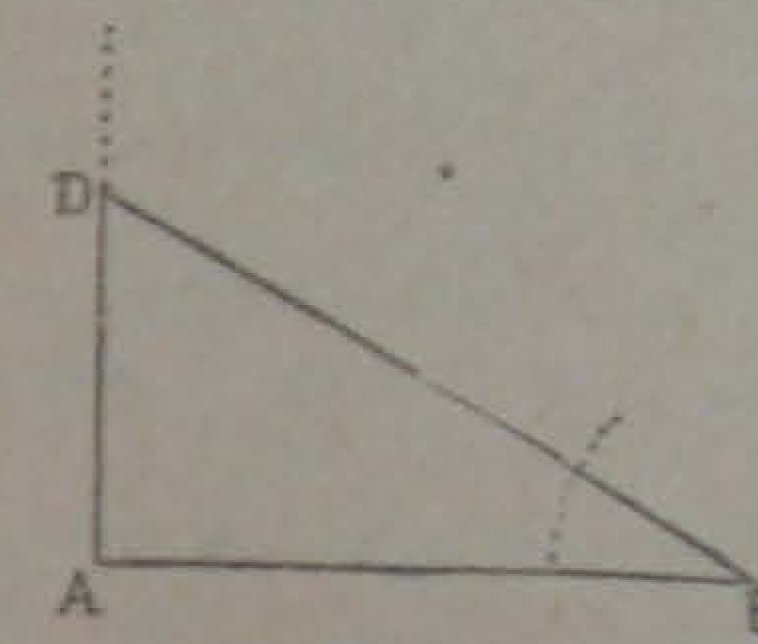


Fig. 153

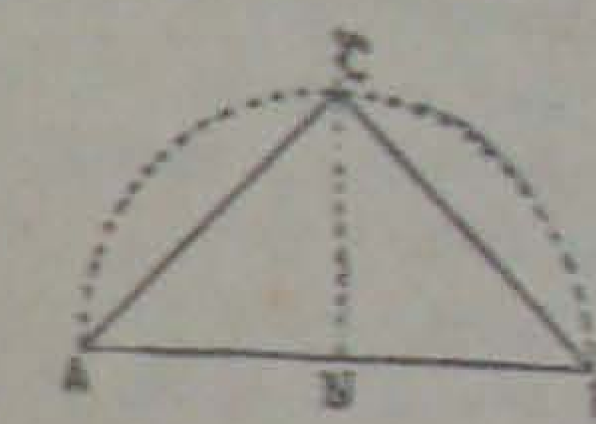


Fig. 154

Com um raio *NA* (metade de *AB*) descrevamos a semi-curcunferência *ACB*.

Liguemos os pontos *A* e *B* ao ponto *C* e obteremos o triângulo pedido.

Problema 50. — *Construir um triângulo retângulo conhecendo-se a hipotenusa e a altura.*

Sôbre a hipotenusa *AB*, como diâmetro, descrevamos uma semi-circunferência (fig. 155) e de um ponto qualquer dêsse diâmetro (*A* por exemplo) levantemos-lhe uma perpendicular, sôbre a qual marquemos *AM* igual à altura dada.

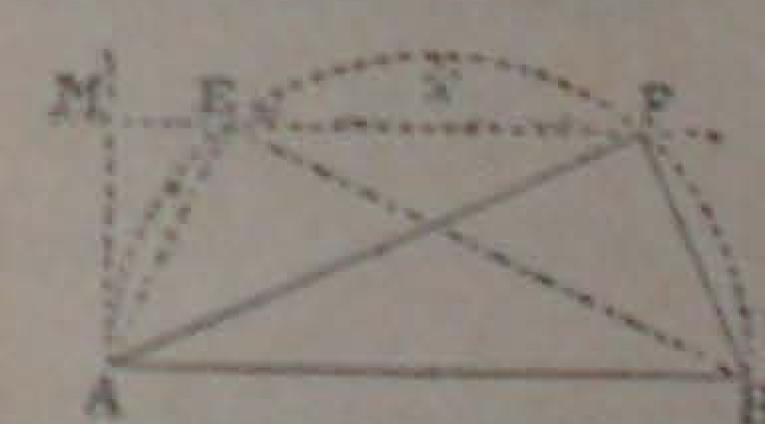


Fig. 155

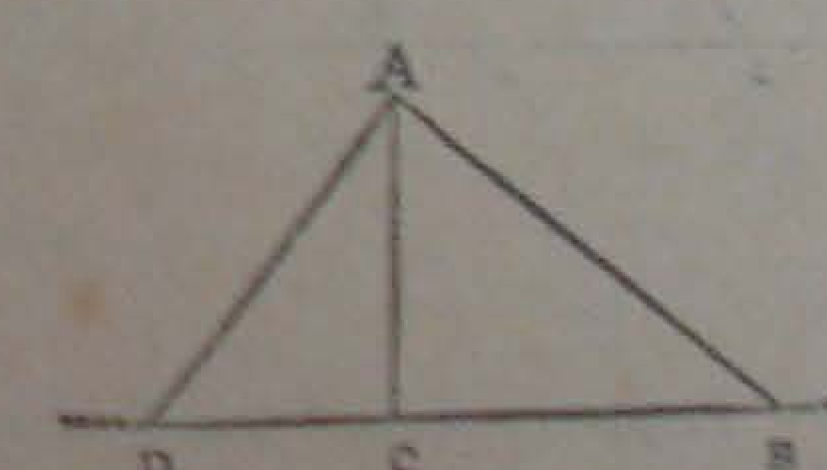


Fig. 156

De *M* tracemos uma paralela a *AB*, a qual determinará *E* e *F* na semi-circunferência.

Qualquer dos triângulos, *AEB* ou *AFB*, resolve o problema.

Nota. — Este problema só terá solução quando a altura fôr igual ou menor do que a metade da hipotenusa.

Problema 51. — *Construir um triângulo retângulo conhecendo-se um cateto e a altura.*

Por um ponto, *C*, de uma reta, levantemos-lhe uma perpendicular e marquemos sôbre esta *CA* igual à altura dada (fig. 156).

Fazendo centro em *A*, com um raio igual ao cateto, marquemos o ponto *B* e tracemos *AB*.

Pelo ponto *A* levantemos *AD* perpendicular a *AB*. *DAB* é o triângulo pedido.

Problema 52. — *Construir um triângulo retângulo conhecendo-se a altura e a diferença dos ângulos agudos.*

Seja *MN* a altura (fig. 157) e *V* a diferença entre os ângulos agudos (fig. 158).

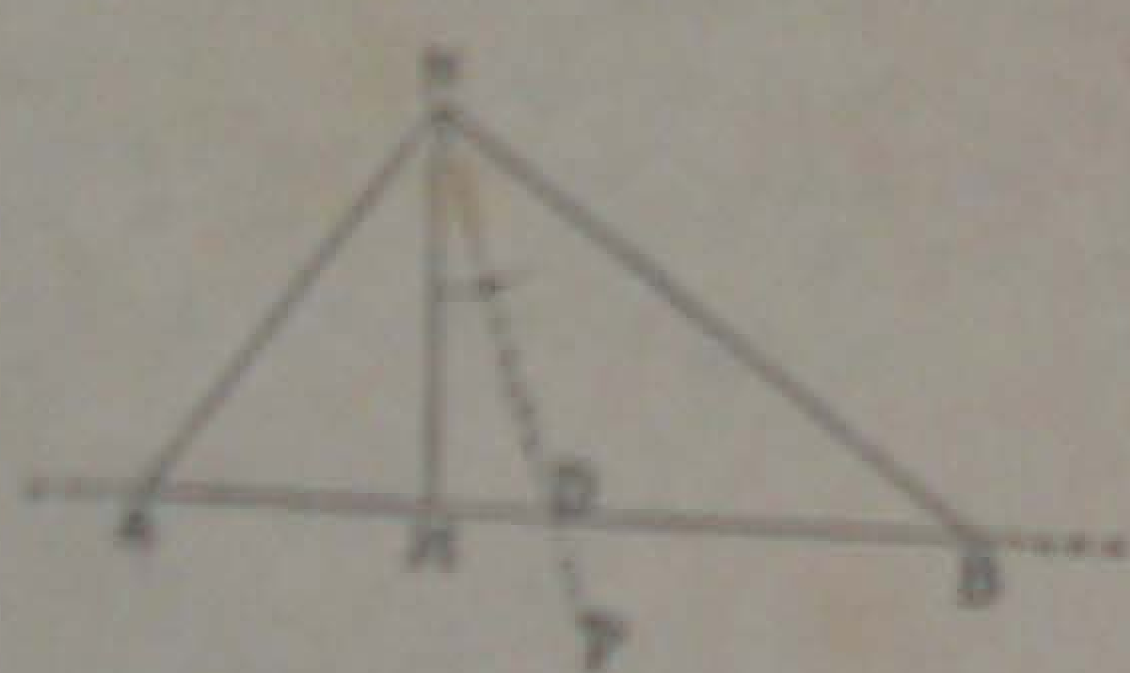


Fig. 157

Fig. 158

Peguemos um ângulo *MNP* = *V* e pela extremidade *M* tracemos uma perpendicular a *MN*; esta perpendicular determina o ponto *D* no lado *NP*.

Reproduzamos em *DB* e *DA* a medida *DN* e unamos *N* a *A* e a *B*; obteremos o triângulo pedido *ANB*.

Problema 53. — *Construir um triângulo retângulo conhecendo-se a altura e a mediana relativas à hipotenusa.*

Tracemos o triângulo retângulo *APR* em que o catêto *AP* é igual à altura dada e a hipotenusa *AR* é a mediana dada (fig. 159).

Prolonguemos *PR* em ambos os sentidos e marquemos *RB* e *RC* iguais a *RA*.

Tracemos *AB* e *AC*.

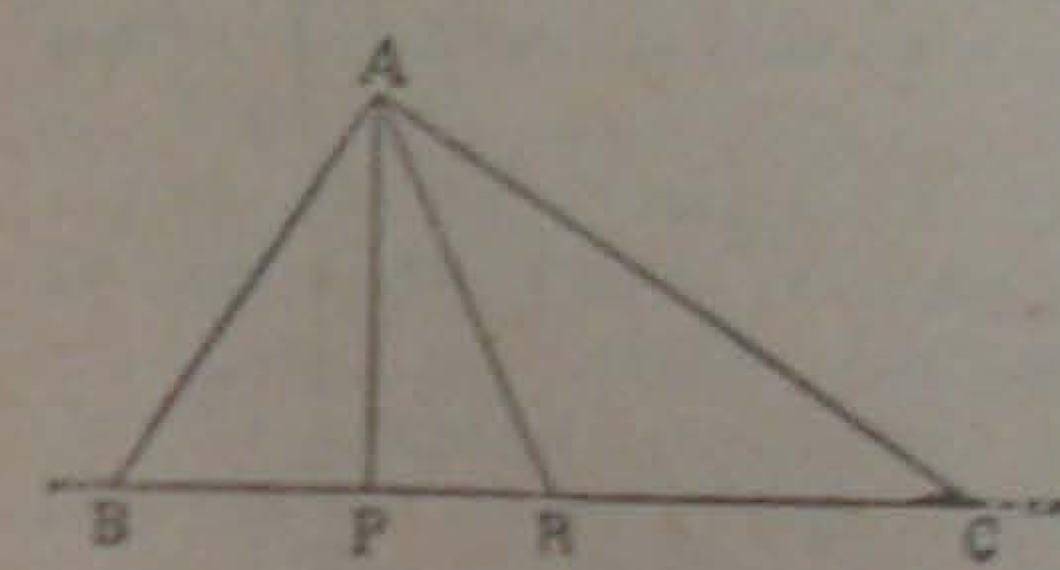


Fig. 159

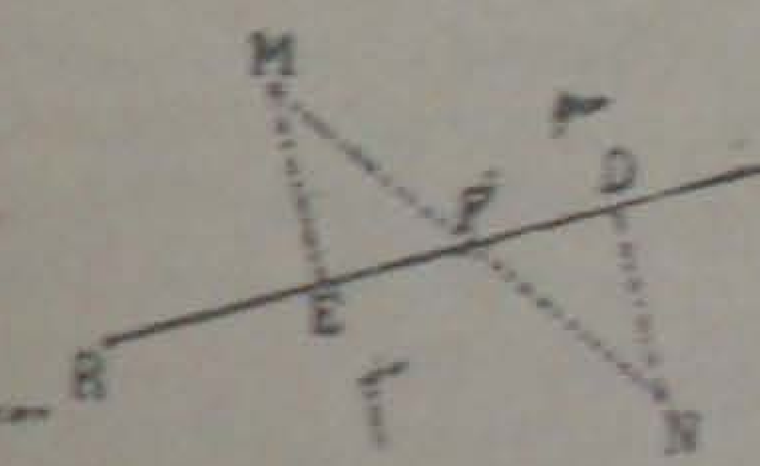


Fig. 160

BAC é o triângulo que resolve o problema.

Problema 54. — *Por um ponto dado, R, traçar uma reta da qual dois outros pontos, M e N, também dados, fiquem equidistantes:*

Tracemos *MN* e determinemos o seu meio *F* (figura 160). A reta *RF* resolve a problema.

Com efeito: os triângulos retângulos *MEF* e *NDF* são iguais por terem as hipotenusas iguais e os ângulos em *F* também iguais; logo *ME* = *ND*.

Nota — O problema não tem solução quando *R*, *M* e *N* estiverem sôbre a mesma reta.

EXERCÍCIOS

1. Construir o triângulo cujos lados medem, respectivamente, 8,5cm, 7cm e 5,2cm. (Pribiema n.° 25).
2. Construir o triângulo em que um ângulo mede 42° e os lados que o formam medem, respectivamente, 5cm e 6,3cm (Problema n° 26).

3. *Construir* o triângulo onde um lado mede 8,2cm e os ângulos adjacentes medem 36° e 48°, respectivamente. (Problema n° 27).
4. Construir o triângulo *ABC* em que *AB* tem 7cm; *AC*, 10cm e a altura relativa a *AB* mede 6cm. (Problema n° 30 — 1° caso).
5. Construir um triângulo em que um lado mede 6,5cm e a altura relativa a esse lado mede 4,3cm. (Problema n° 33).
6. Construir o triângulo *ABC* onde os ângulos *B* e *C* medem, respectivamente, 35° e 62° e a altura relativa a *BC* mede 7cm. (Problema n° 34).
7. Construir o triângulo *ABC* em que o ângulo $A = 40°$ e as alturas relativas aos lados dêsse ângulo medem, respectivamente, 5,2cm e 6,3cm. (Problema n° 35).
8. Construir o triângulo cujas medianas medem 6cm, 7,2cm e 4,8cm. (Problema n° 36).
9. Construir o triângulo que tem 22cm de perímetro e em que um ângulo mede 30° e outro 48° (Problema n° 37).
10. Construir o triângulo equilátero de 5,8cm de lado (Problema n° 38).
11. Construir o triângulo equilátero de 4,5cm de altura. (Problema n° 39).
12. Construir o triângulo isósceles de 6cm de base e 4,8cm de altura. (Problema n° 40).
13. Construir o triângulo isósceles de 5cm de base e 8cm de lado. (Problema n° 41).
14. Construir o triângulo isósceles de 7cm de lado e cujo ângulo da base mede 42°30'. (Problema n° 42).
15. Construir o triângulo isósceles de 18cm de perímetro e 5cm de altura. (Problema n° 43).
16. Construir o triângulo isósceles tendo 40° no ângulo do vértice e 8cm. de altura. (Problema n° 44).
17. Construir o triângulo isósceles cujo lado mede 9cm e o ângulo da base mede 46°. (Problema n° 45).

18. Construir o triângulo retângulo em que a hipotenusa mede 7,5cm e um ângulo mede 62°. (Problema n° 46).
19. Construir o triângulo retângulo cuja hipotenusa mede 6cm e um cateto 3,6cm. (Problema n° 47).
20. Construir o triângulo retângulo em que um cateto é igual a 5,4cm e o ângulo agudo que lhe é adjacente mede 53°. (Problema n° 48).
21. Construir o triângulo retângulo isósceles cuja hipotenusa mede 6cm. (Problema n° 49).
22. Construir um triângulo retângulo com 8cm. de hipotenusa e 2,8cm. de altura. (Problema n° 50).
23. Construir o triângulo retângulo em que um cateto mede 5,2cm e a altura mede 4cm. (Problema n.° 51).
24. Construir o triângulo retângulo onde a altura mede 3,8cm. e a diferença entre os ângulos agudos é 12°. (Problema n° 52).
25. Construir o triângulo retângulo em que a altura mede 4cm e a mediana relativa à hipotenusa mede 5cm. (Problema n° 53).

CAPÍTULO VI

Quadriláteros — Trapézio — Paralelogramo — Retângulo — Losango — Quadrado.

Um poligono pode ser *simples* ou *entrelaçado*. É simples quando a linha poligonal não passa mais de uma vez pelo mesmo ponto. É entrelaçado se houver pontos por onde a linha poligonal passa mais de uma vez (fig. 161).

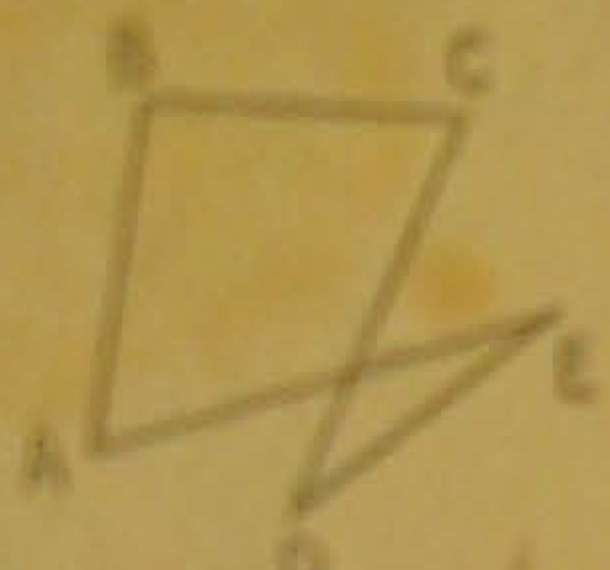


Fig. 161

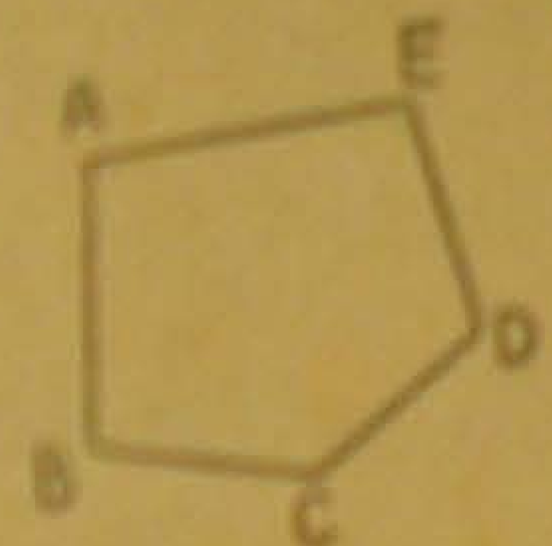


Fig. 162

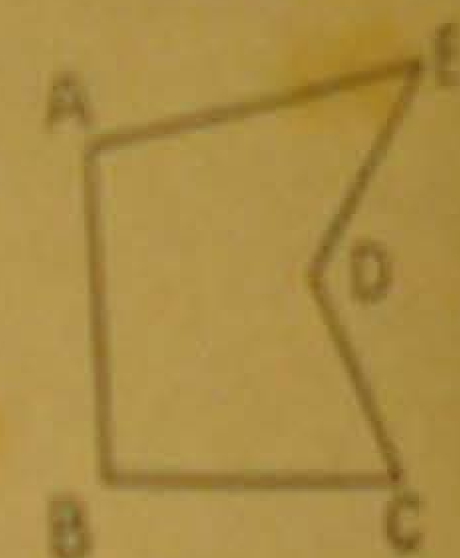


Fig. 163

O poligono simples pode ser *convexo* ou *não convexo*. É convexo quando só tem ângulos salientes (fig. 162), e não convexo quando tem ângulos reentrantes (fig. 163). Evidentemente o triângulo é sempre um poligono convexo, mas já o quadrilátero pode ser não convexo (fig. 164), e até entrelaçado (fig. 165).

Só trataremos daqui por diante dos poligonos convexos.

Quadrilátero é o poligono de quatro lados. Todo quadrilátero tem quatro ângulos e quatro vértices.

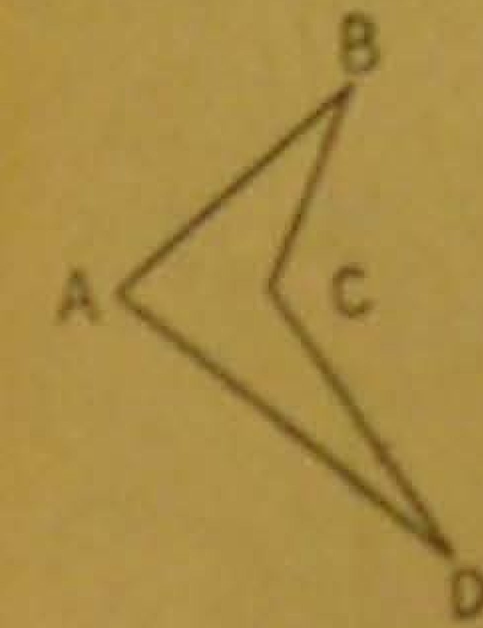


Fig. 164

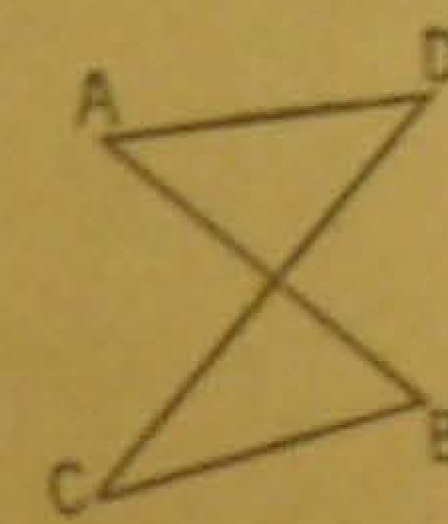


Fig. 165

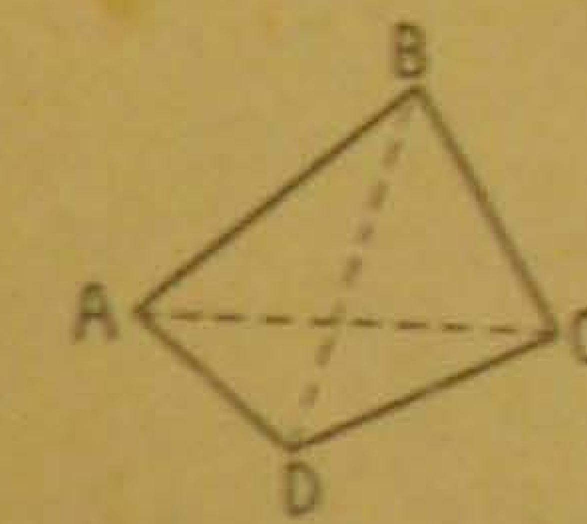


Fig. 166

O segmento de reta que liga dois vértices não consecutivos de um poligono chama-se *diagonal*. Num quadrilátero se podem traçar duas diagonais. AC e BD são as diagonais do quadrilátero $ABCD$ (fig. 166).

Soma dos ângulos internos de um quadrilátero — Si traçarmos uma diagonal de um quadrilátero,

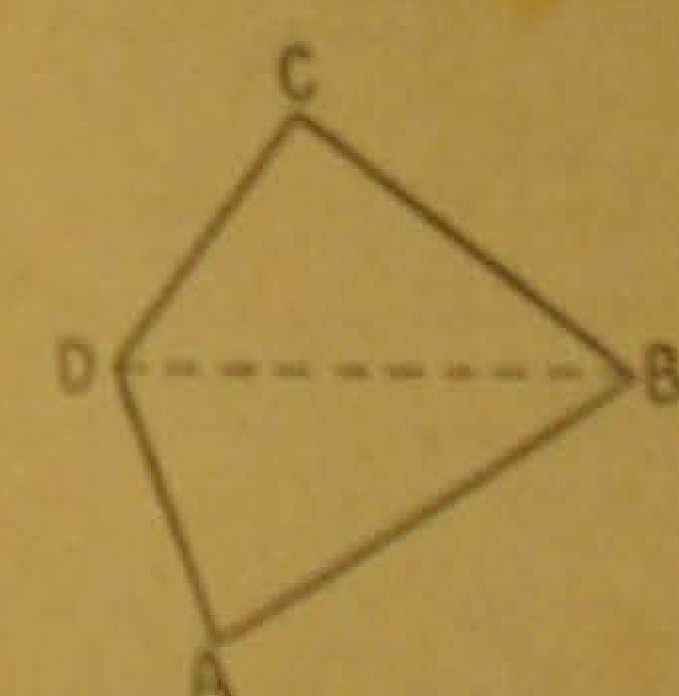


Fig. 167

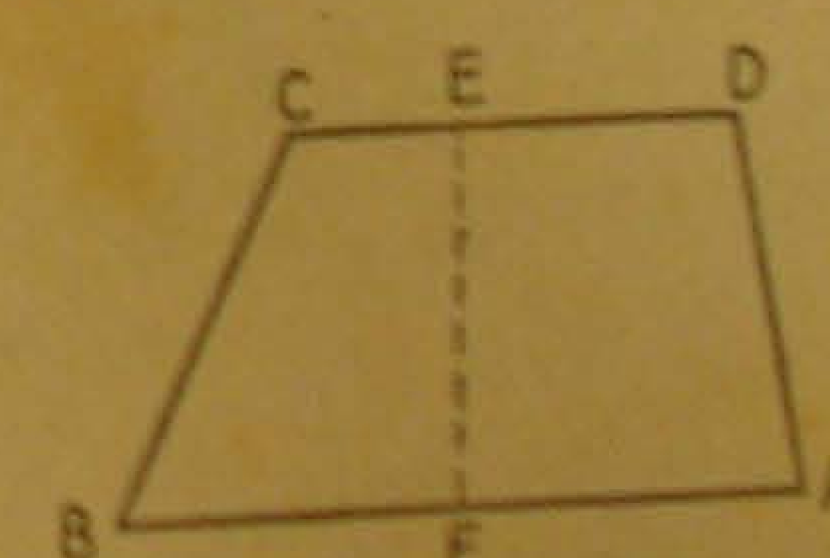


Fig. 168

(fig. 167) observaremos que êle fica dividido em dois triângulos e que a soma dos ângulos internos do quadrilátero é a soma dos ângulos internos dos dois triângulos. Ora, como em cada triângulo os ângulos internos somam dois retos, concluímos que *a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a quatro retos.*

Trapézio — O quadrilátero que tem dois lados paralelos chama-se *trapézio*. Os lados paralelos são as *bases* do trapézio e a distância entre as duas bases é a *altura* do trapézio. No trapézio *ABCD* (fig. 168) as bases são *AB* e *CD* e a altura é *EF*.

O trapézio pode ser: *escaleno, isósceles* e *retângulo*.

Trapézio retângulo é aquele que tem um lado perpendicular às bases. Neste caso, dois ângulos são evidentemente retos e o lado perpendicular às bases fornece a altura (fig. 169).

Fig. 169

Fig. 170

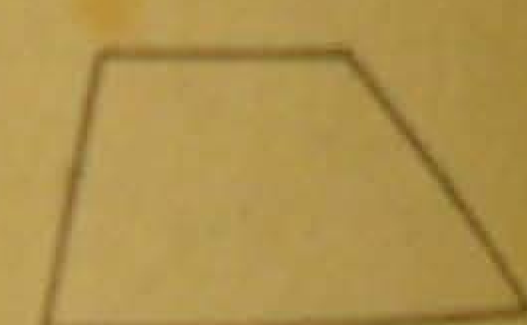


Fig. 171

Trapézio isósceles (também chamado *simétrico*) é aquele em que os lados não paralelos são iguais. No trapézio isósceles os ângulos adjacentes a cada base são iguais (fig. 170). Da mesma forma são iguais as diagonais do trapézio isósceles.

Trapézio escaleno é aquele que não é retângulo nem isósceles. No trapézio escaleno os lados não paralelos são sempre desiguais (fig. 171).

Base média do trapézio — é o segmento de reta que liga os meios dos lados não paralelos (fig 172).

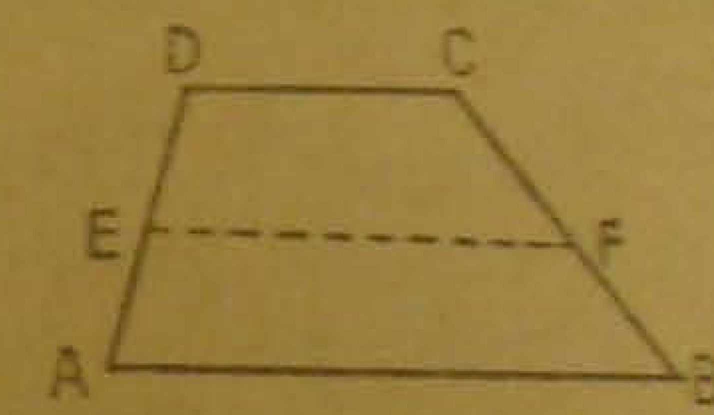


Fig. 172

Demonstra-se que a base média do trapézio é igual à semi-soma das bases.

Paralelogramo — Chama-se paralelogramo o quadrilátero que tem os lados paralelos dois a dois.

Demonstra-se que num paralelogramo: 1°) cada diagonal divide o paralelogramo em dois triângulos iguais; 2°) os lados opostos são iguais; 3°) os ângulos opostos são iguais; 4°) as diagonais cortam-se ao meio. Assim, no paralelogramo *ABCD* (fig. 173): qualquer das diagonais, *AC* ou *BC*, divide-o em dois triângulos iguais; *AB* é igual a *CD*

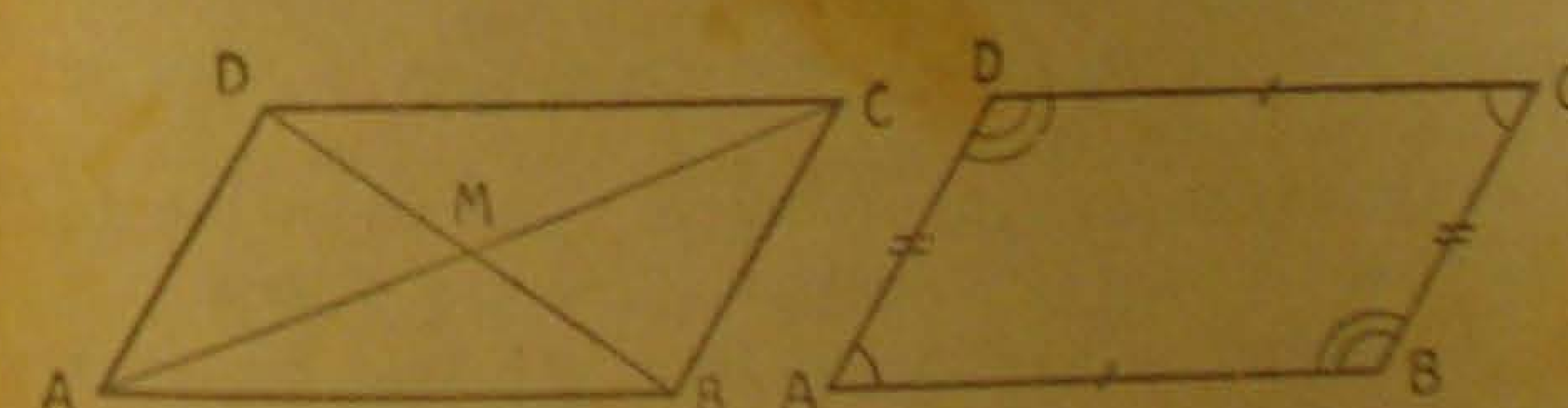


Fig. 173

e *AD* é igual a *BC;* o ângulo *A* é igual ao ângulo *C* e o ângulo *B* é igual ao ângulo *D;* finalmente, o ponto *M* é ao mesmo tempo o meio de *AC* e de *BD*.

Altura de um paralelogramo é a distância entre dois lados paralelos; neste caso, estes lados são as bases. Evidentemente num paralelogramo qualquer lado pode ser tomado como base. Todo paralelogramo tem, portanto, duas bases e duas alturas.

Retângulo — Chama-se *retângulo* o quadrilátero que tem todos os ângulos retos.

Verificamos no retângulo: 1°) os lados opostos são iguais e paralelos; 2°) dois lados consecutivos são perpendiculares; 3°) as diagonais, além de se cortarem ao meio, são iguais; 4°) cada diagonal divide o retângulo em dois triângulos retângulos iguais (figs. 174 e 175).

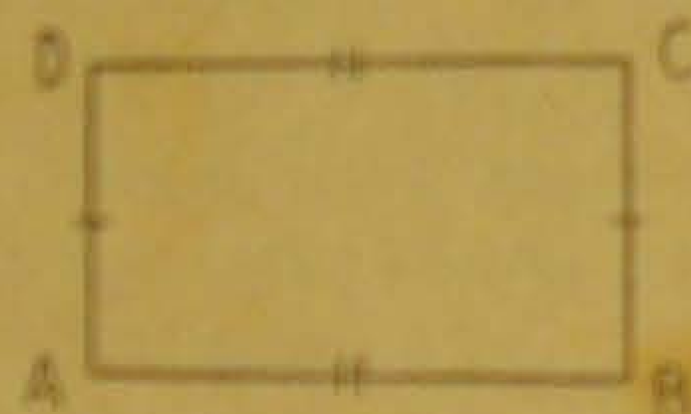


Fig. 174

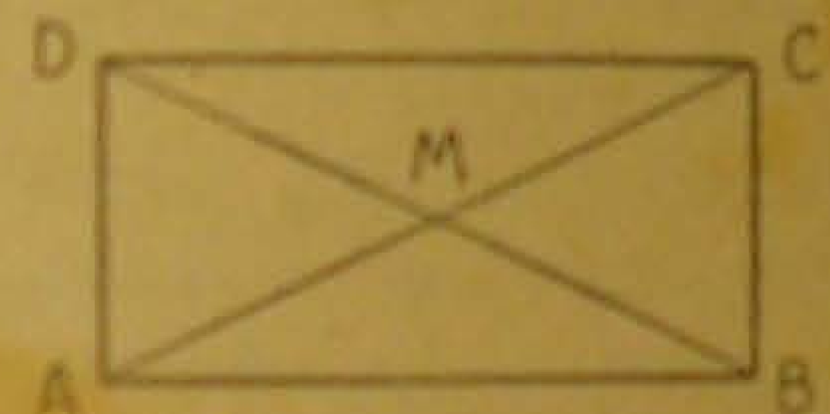


Fig. 175

O retângulo pode ser considerado como o caso particular do paralelogramo em que os ângulos se tornaram todos iguais.

Qualquer lado do retângulo pode servir-lhe de base; o outro diferente será, então, a altura.

Losango — O quadrilátero que tem os lados iguais chama-se *losango* ou *rombo*.

Em qualquer losango observamos as seguintes propriedades: 1.°) os lados são paralelos dois a dois; 2.°) os ângulos opostos são iguais; 3.°) as diagonais além de se cortarem ao meio, são per-

pendiculares; 4.°) cada diagonal é bissetriz dos ângulos cujos vértices ela liga e divide o quadrilátero em dois triângulos isósceles iguais (figs. 176 e 177).

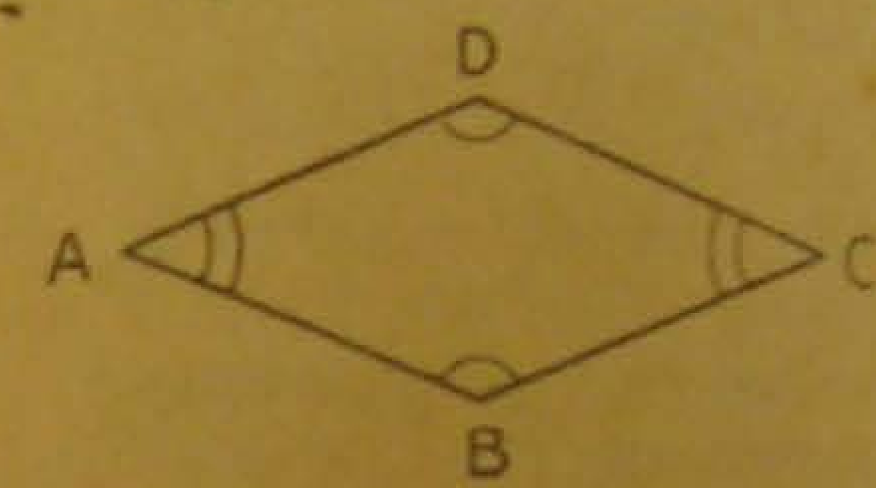


Fig. 176

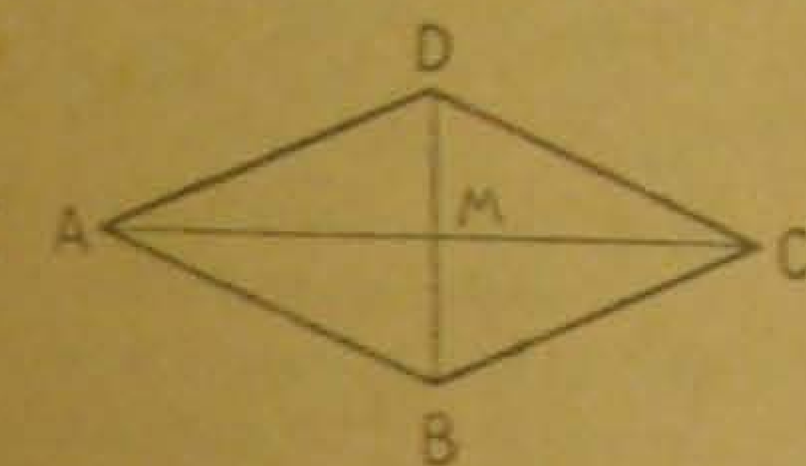


Fig. 177

O losango pode ser considerado como o caso particular do paralelogramo em que os lados são todos iguais.

Base do losango é qualquer dos seus lados; *altura* é a distância entre dois lados paralelos.

Quadrado — Chama-se *quadrado* ao quadrilátero regular, isto é, ao polígono de quatro lados em que todos os lados são iguais e bem assim os ângulos (fig. 178).

O quadrado também pode ser considerado o caso particularíssimo do paralelogramo em que se reunem todas as propriedades dos retângulos e losangos. Com efeito, no quadrado notamos: 1°) os lados opostos são paralelos e dois lados consecutivos são perpendiculares; 2°) as diagonais são iguais e se cortam perpendicularmente ao meio; 3°) cada diagoonal divide o quadrado em dois triângulos retângulos isósceles.

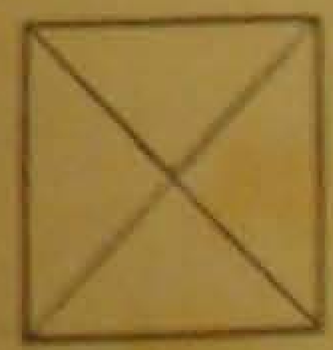


Fig. 178

QUESTIONÁRIO

1. Como se dividem os polígonos?
2. Que é um polígono entrelaçado?
3. Os polígonos simples como podem ser?
4. Existem triângulos não convexos?
5. Como se pode definir o quadrilátero?
6. Que é diagonal?
7. A que é igual a soma dos ângulos internos de um quadrilátero convexo?
8. Que é um trapézio e quais as suas propriedades?
9. Como se dividem os trapézios?
10. A que é igual a base média do trapézio?
11. Que é um paralelogramo?
12. Enuncie as propriedades do paralelogramo.
13. Que é retângulo e quais as suas propriedades?
14. Que outro nome tem o losango e como o podemos definir?
15. Como se chama o quadrilátero regular?
16. Quais são as propriedades do quadrado?

PROBLEMAS

Problema 55. — *Construir um quadrado, conhecendo-se o lado.*

1.ª Solução. — Sôbre uma reta apliquemos o lado *AM* (conhecido) e de cada um dos pontos *A* e *M* (fig.

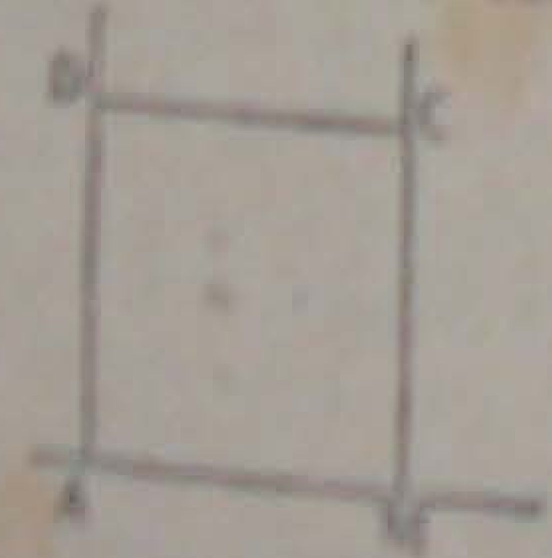


Fig. 179

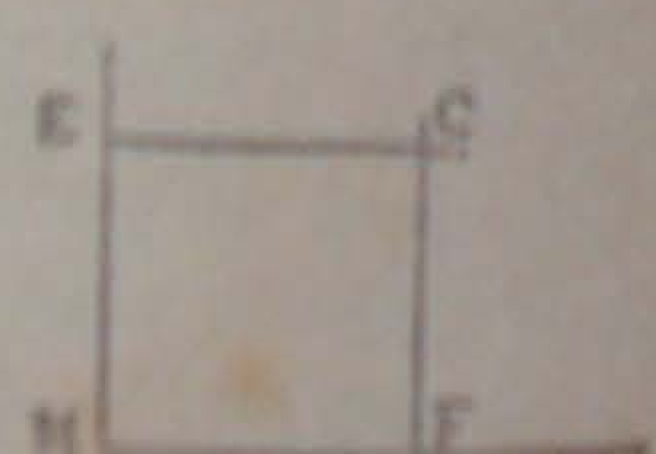


Fig. 180

179) levantemos, com o auxilio de um esquadro, uma perpendicular.

Tomemos as distâncias *AD* e *MC* iguais a *AM*; liguemos o ponto *D* ao ponto *C* e teremos construído o quadrado.

2.ª Solução. — Façamos um ângulo reto (fig. 180).

A partir do vértice *M* e com um raio igual à medida do lado conhecido, determinemos os pontos *E* e *F*; centro nêsses pontos e com o mesmo raio, determinemos *C*, o qual, ligado aos pontos *E* e *F*, resolve o problema.

Problema 56. — *Construir um quadrado conhecendo-se o lado e dado o seu centro.*

Seja *M* o centro (fig. 181). Tracemos duas retas perpendiculares que se cortem no ponto *M*.

Façamos centro em *M* e, com raio igual à metade do lado, determinemos *E, F, G, H*.

Por *E* e *F* tracemos paralelas a *GH* e por *G* e *H*, tracemos paralelas a *EF*; obteremos, assim, o quadrado *BCND*.

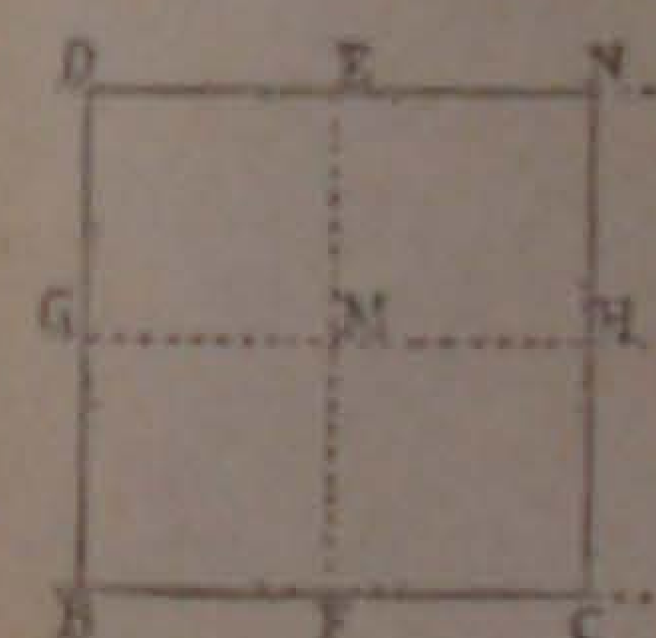


Fig. 181

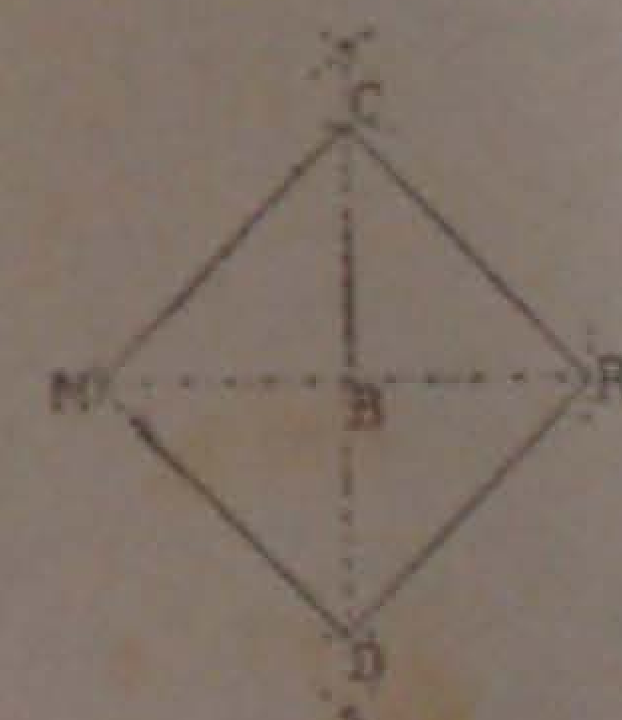


Fig. 182

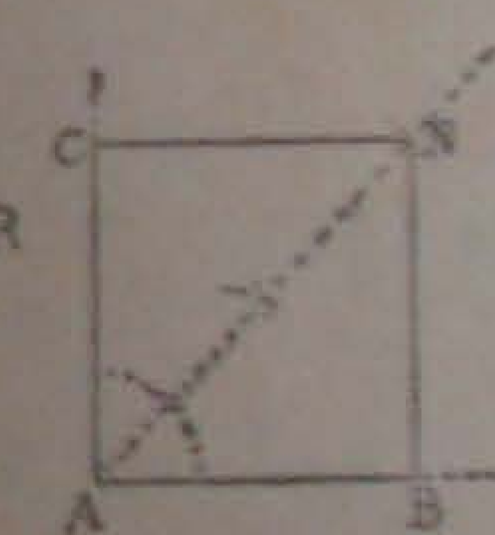


Fig. 183

Problema 57. — *Construir um quadrado conhecendo-se a diagonal.*

1.ª Solução. — Seja *MR* a diagonal (fig. 182). Façamos passar pelo seu meio uma perpendicular e, com o centro em *B* (meio de *MR*) e raio *BM* ou *BR* determinemos os pontos *C* e *D*.

O quadrado *MCRD* resolve o problema.

2.ª Solução — Tracemos um ângulo reto e a sua bissetriz (fig. 183); sôbre esta, a partir do vértice, tomemos *AN* igual à medida da diagonal dada.

Do ponto *N* tracemos *NC* paralela a um lado do ângulo e *NB* paralela ao outro lado.

ABNC é o quadrado pedido.

Problema 58. — *Construir um retângulo, conhecendo-lhe as dimensões (base e altura).*

Façamos um ângulo reto *V*. A partir do vértice, com um raio igual a um dos lados determinemos o ponto *E* (fig. 184), e com raio igual ao outro lado, marquemos o ponto *F*; façamos partir do ponto *F* uma paralela a *VE* e, do ponto *E*, outra a *VF*; estas duas retas encontram-se no ponto G. O quadrilátero *VEGF* é o retângulo pedido.

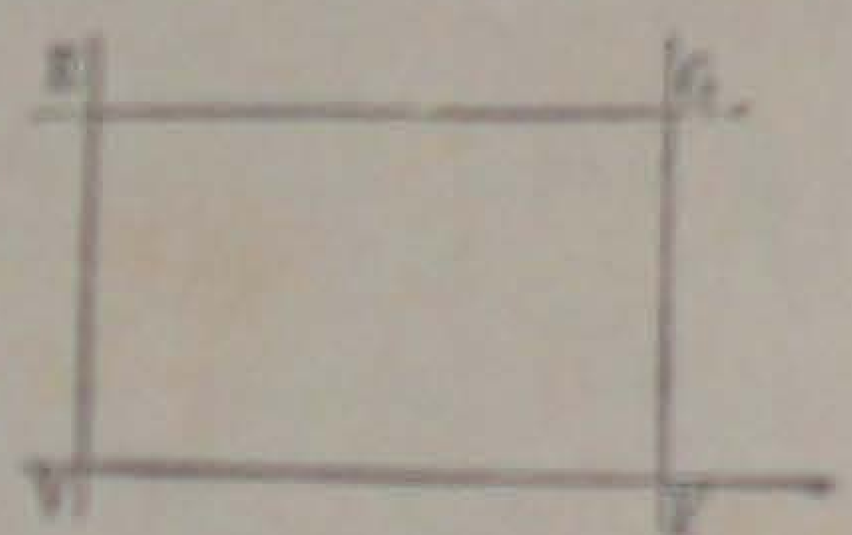


Fig. 184

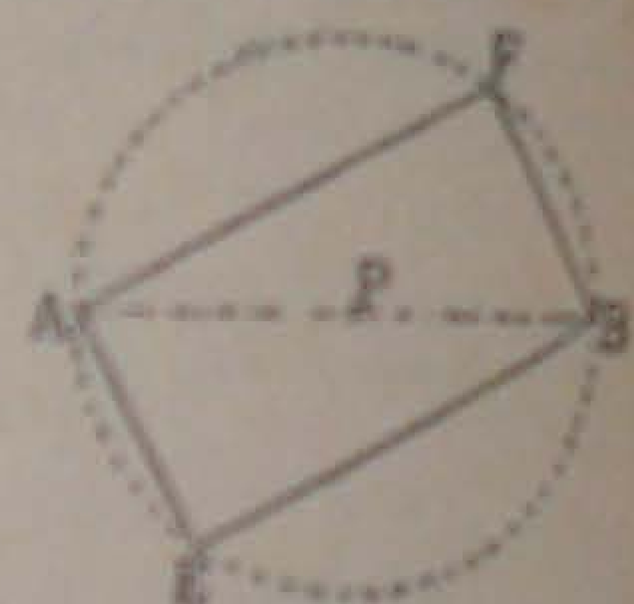


Fig. 185

Problema 59. — *Construir um retângulo conhecendo-se um lado e a diagonal.*

Façamos centro em *P* (meio da diagonal dada *AB*) e com um raio igual a *PB* ou *PA* descrevamos uma circunferência de círculo (fig. 185).

De *A* e *B*, como centros, e com um raio igual ao lado dado, marquemos os pontos *E* e *F*, aos quais liguemos *A* e *B*; obtém-se o retângulo pedido *AEBF*.

Problema 60. — *Construir um retângulo conhecendo-se um lado e o ângulo que forma com êsse lado a diagonal.*

AB é o lado dado (fig. 186).

Formemos na extremidade *B* um ângulo igual ao ângulo conhecido e por *A* e *B* levantemos perpendiculares a *AB*.

A perpendicular tirada do ponto *A* encontra a diagonal no ponto *C*.

De *C* façamos partir uma paralela a *AB*, a qual determinará o ponto *D*.

ABDC é o retângulo pedido.

Problema 61. — *Construir um retângulo conhecendo-se a diagonal e o ângulo que essa diagonal forma com um dos lados.*

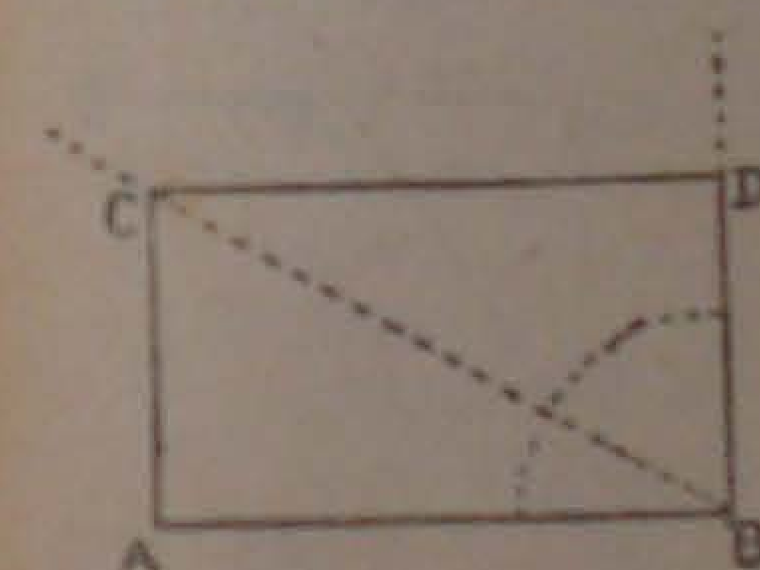


Fig. 186

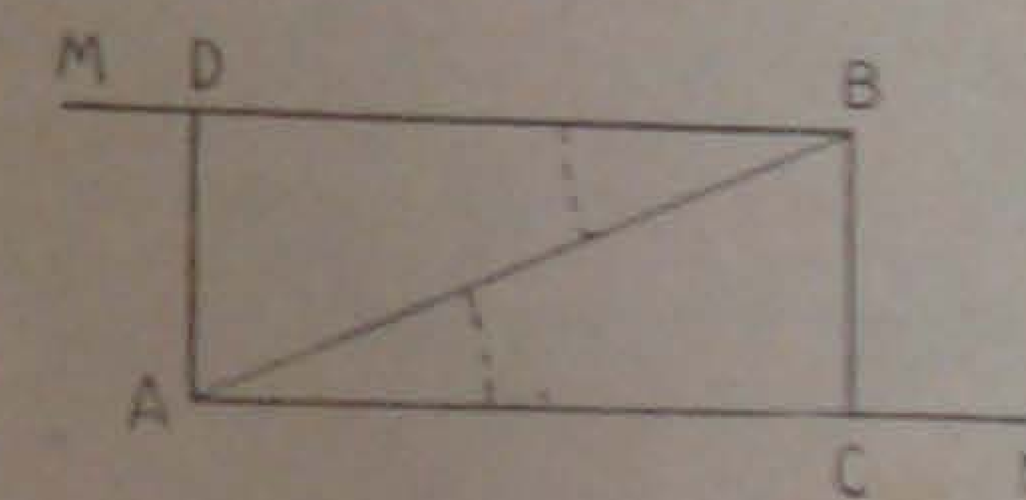


Fig. 187

Seja *AB* a diagonal (fig. 187).

Formemos nas extremidades *A* e *B* os ângulos *ABM* e *BAN* iguais ao ângulo dado.

Levantemos pela extremidade *A* uma perpendicular a *BM* e pela extremidade *B*, uma perpendicular a *AN*; resulta o retângulo *ACBD*.

Problema 62. — *Construir um retângulo conhecendo-se a diagonal e o ângulo formado pelas diagonais.*

Seja *A* o ângulo dado (fig. 188).

Prolonguemos seus lados de modo a formar o ângulo que lhe é oposto pelo vértice.

Façamos centro no vértice do ângulo e com um raio igual à metade da diagonal, determinemos o ponto *B*, *C*, *E* e *D*.

O retângulo pedido é *BCED*.

Problema 63. — *Construir um losango, qualquer.*

Tracemos duas retas, que se cortem perpendicularmente (fig. 189); tomemos, a partir do ponto O, $OM = ON$ e $OP = OR$, mas diferentes de OM, tracemos RM, MP, PN e NR. O quadrilátero $RMPN$ é um losango.

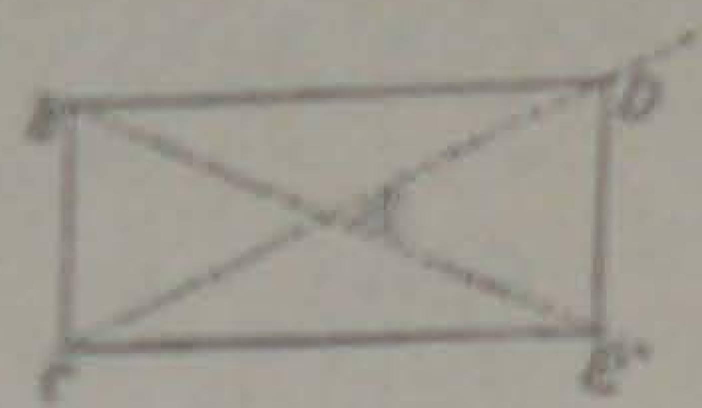


Fig. 188

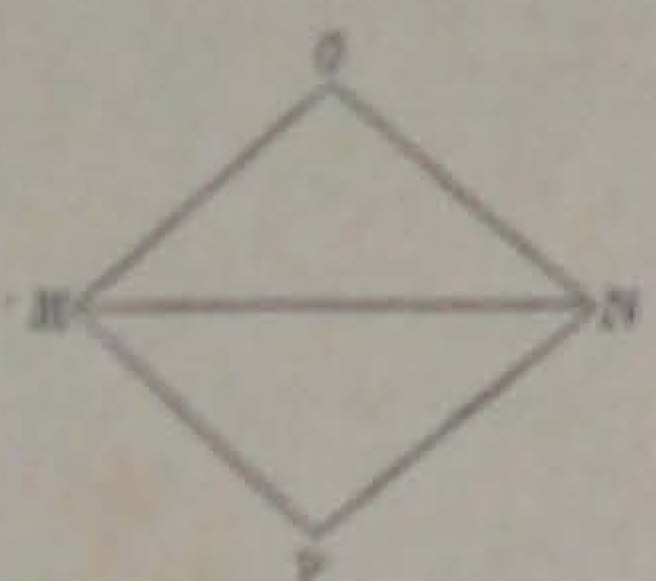


Fig. 190

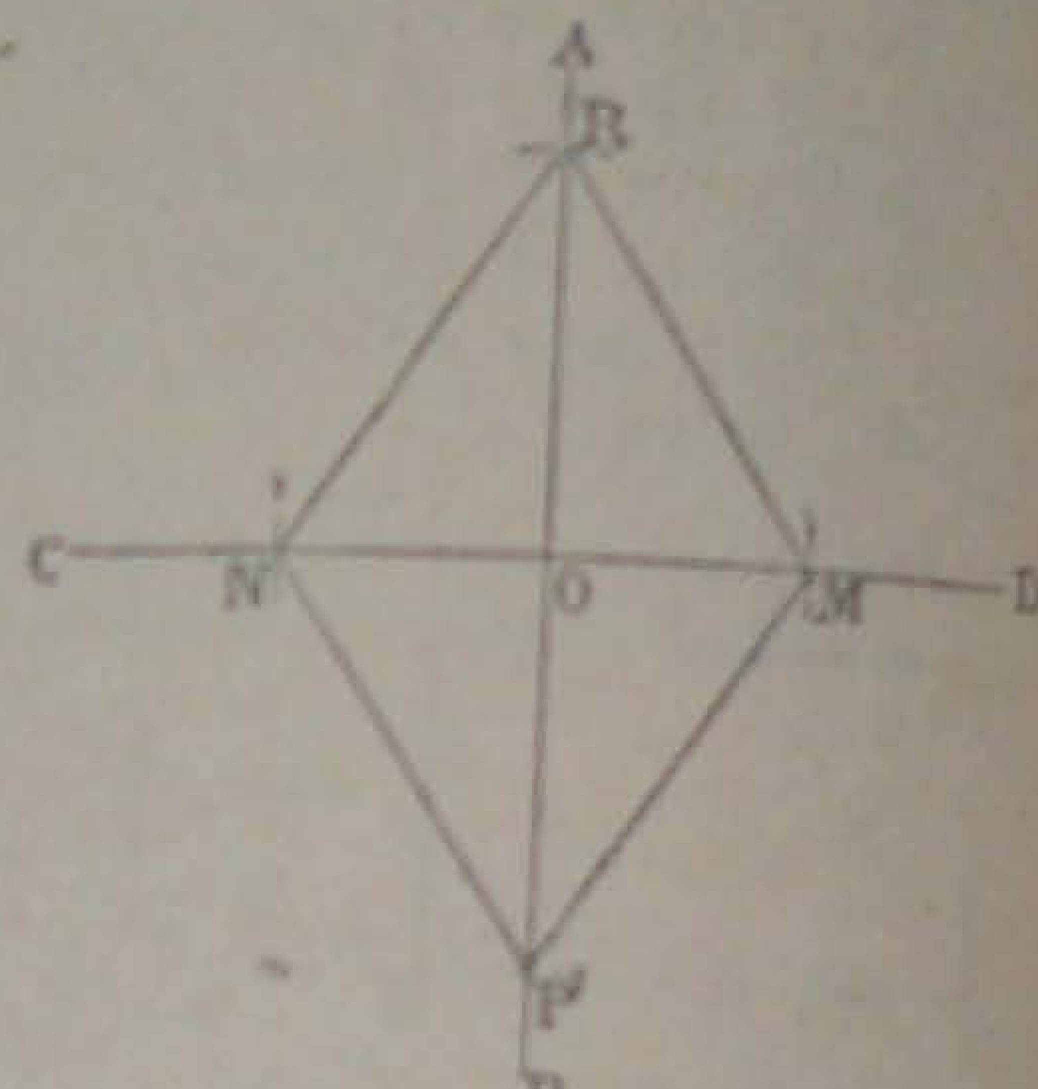


Fig. 189

Problema 64. — *Construir um losango conhecendo-lhe as diagonais.*

Este problema se resolve como o anterior (fig. 189). Apenas, tomam-se OM e ON iguais à metade de uma diagonal e OP e OR iguais à metade da outra diagonal.

Problema 65. — *Construir um losango conhecendo-se o lado e uma diagonal.*

Tracemos MN igual à diagonal e fazendo centro nas extremidades M e N, com um raio igual ao lado, determinemos os pontos O e P (fig. 190).

$MPNO$ é o losango pedido.

Problema 66. — *Construir um losango conhecendo-se o lado e um ângulo.*

Seja PR o lado (fig. 192), e M o ângulo (fig. 191).

Façamos em P um ângulo igual a M e reproduzamos em PS o lado PR.

Com o centro em S e depois em R e com um mesmo raio PR determinemos o ponto N. O losango é $PRNS$.

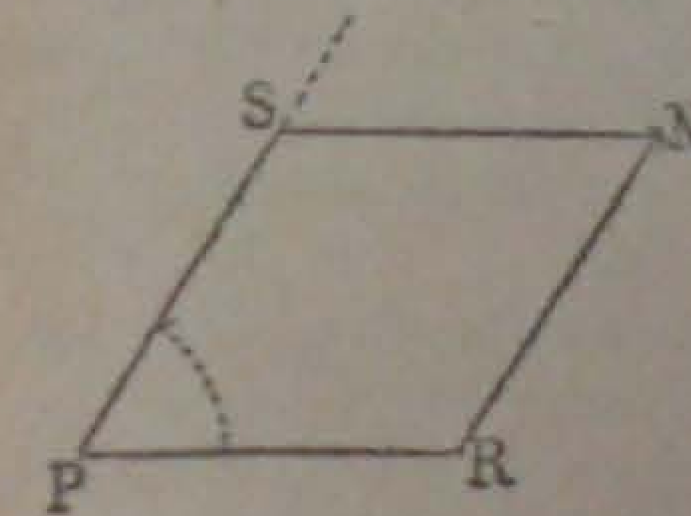


Fig. 192

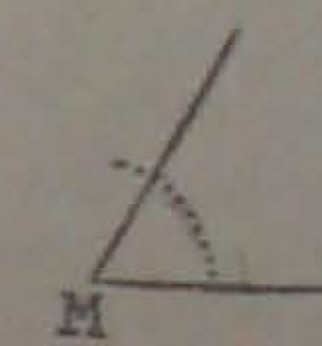


Fig. 191

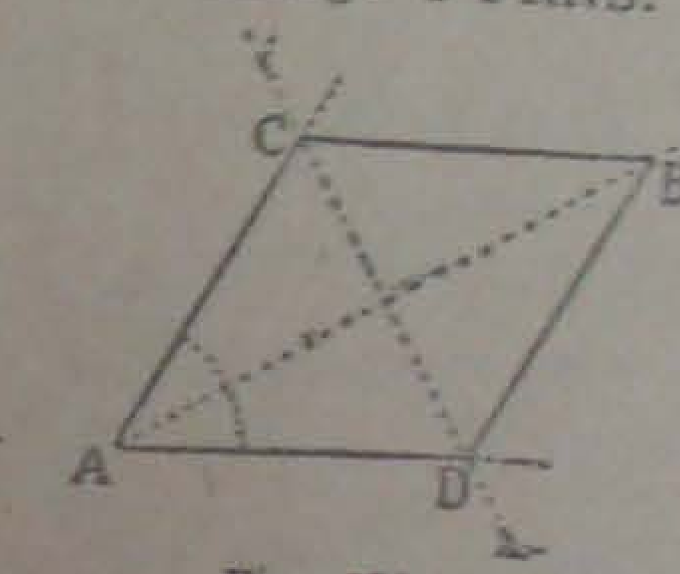


Fig. 193

Problema 67. — *Construir um losango conhecendo-se um ângulo e uma diagonal.*

Tiremos a bissetriz do ângulo conhecido A (fig. 193) e marquemos de A até B a medida da diagonal dada.

Façamos passar pelo meio dessa diagonal uma perpendicular que determinará os pontos C e D nos lados do ângulo A.

O losango pedido é $ACBD$.

Problema 68. — *Construir um paralelogramo, conhecendo-se os dois lados e uma diagonal.*

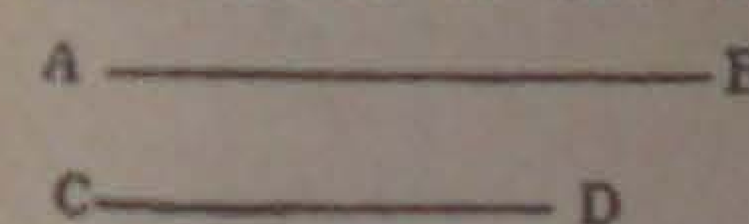


Fig. 194

Fig. 195

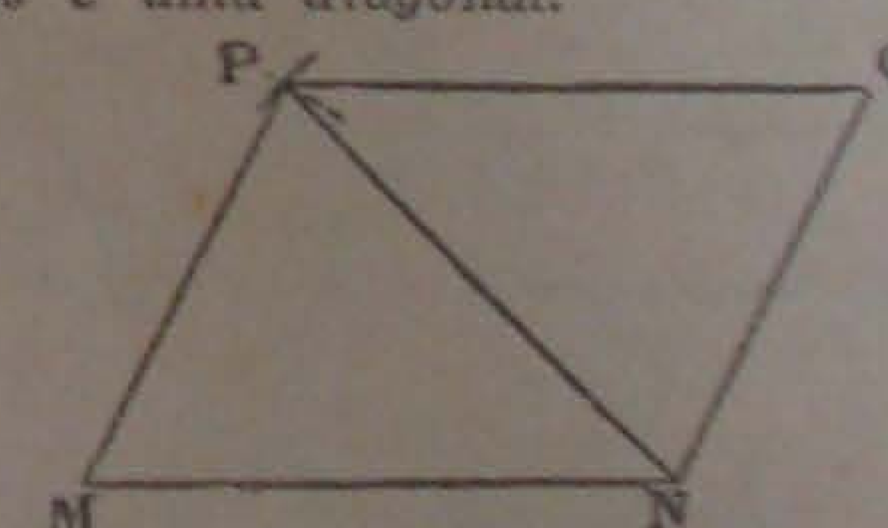


Fig. 196

1.ª Solução — Sejam AB e CD (fig. 194) os lados e EF (fig. 195) a diagonal. Tracemos MN igual a AB; do ponto M (fig. 196) com um raio igual a CD e do ponto N com um raio igual a EF, determinemos o ponto P; liguemos este ponto a M e a N. Do ponto P tiremos uma paralela a MN e do ponto N, outra a MP.

MNQP é o paralelogramo pedido.

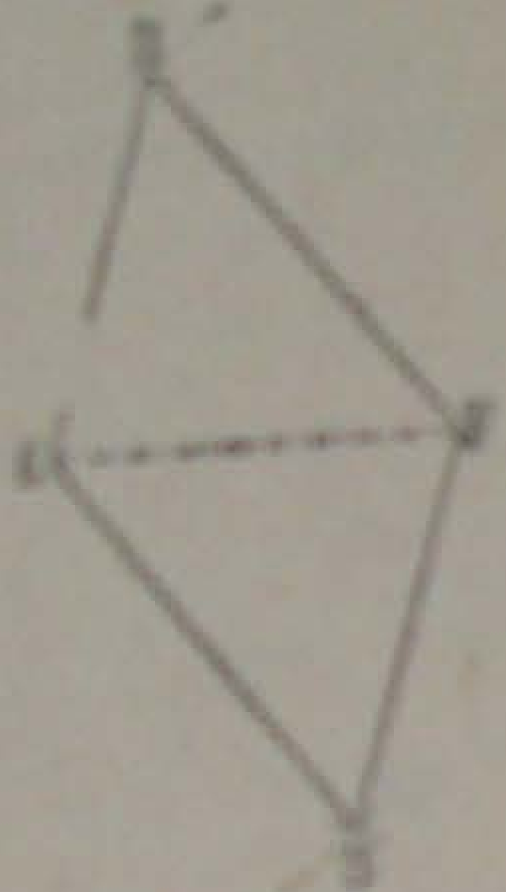


Fig. 197

2.ª Solução. — *EF* é a diagonal (fig. 197).

Façamos centro em *E* e depois em *F* e com um mesmo raio igual a *AB* (fig. 194) descrevamos dois arcos um de um lado e outro do outro lado de *EF*.

Com um raio igual a *CD* (fig. 194) e centro nos mesmos pontos *E* e *F* cortemos os arcos já traçados nos pontos *R* e *S*, aos quais liguemos as extremidades *E* e *F*.

RESF é o paralelogramo pedido.

Problema 69. — *Construir um paralelogramo conhecendo-se os dois lados e a altura.*

Sejam *AB* e *CD* (fig. 198) os lados e *EF* (fig. 199) a altura. Tracemos *MN* igual a *CD* e de um de seus pontos,

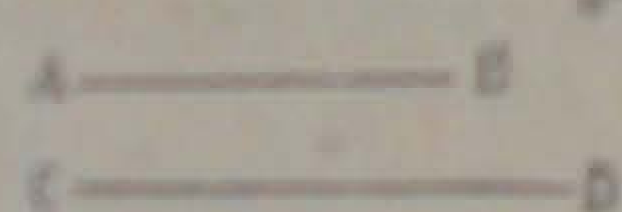


Fig. 198

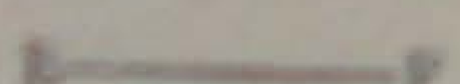


Fig. 199

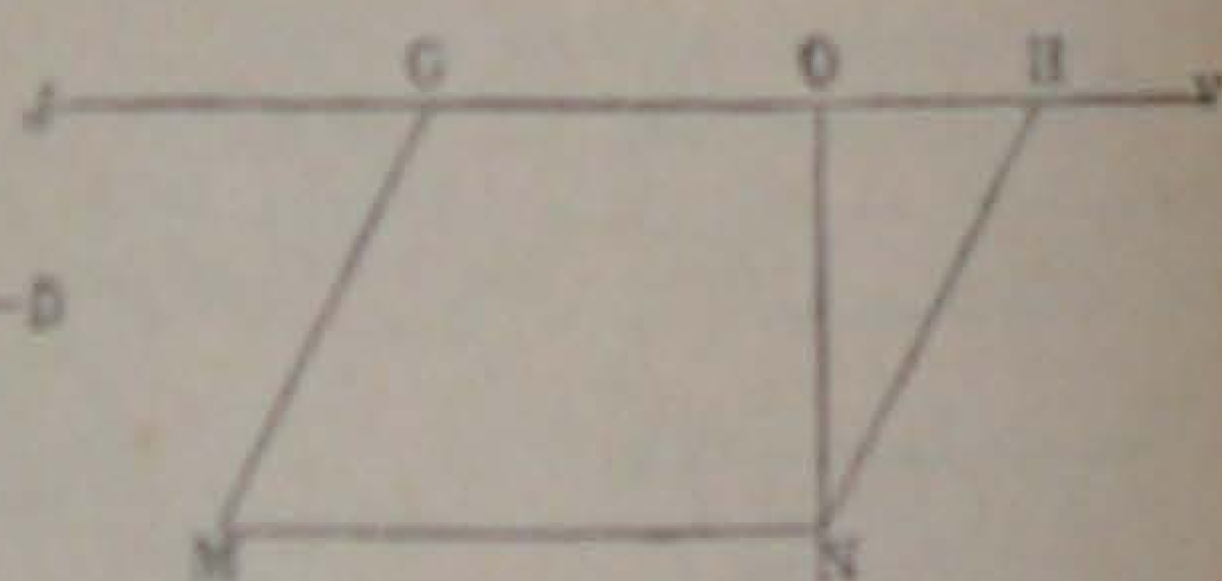


Fig. 200

N por exemplo, (fig. 200) levantemos-lhe uma perpendicular; sôbre esta marquemos *NQ* igual a *EF*. Pelo ponto *Q* tracemos uma paralela a *MN*. Façamos centro em *N* e com um raio igual a *AB* cortemos esta paralela no ponto *H*, o mesmo faremos do ponto *M* para marcar *G*. O paralelogramo pedido é *MNHG*.

Problema 70. — *Construir um paralelogramo conhecendo-se os lados e um ângulo.*

Sejam *AB* e CD (fig. 201) os lados e *E* (fig. 202) o ângulo. Sôbre uma reta indefinida marquemos a distância

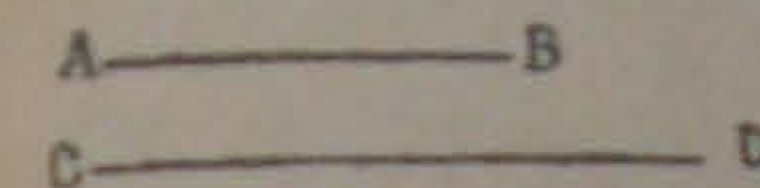


Fig. 201

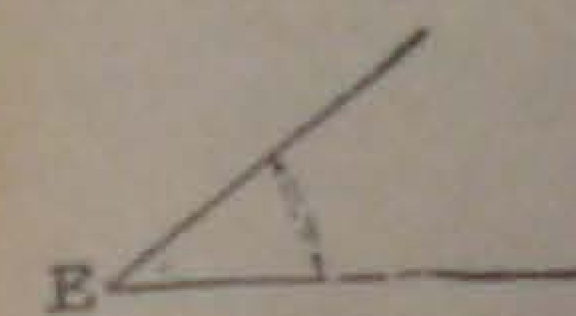


Fig. 202

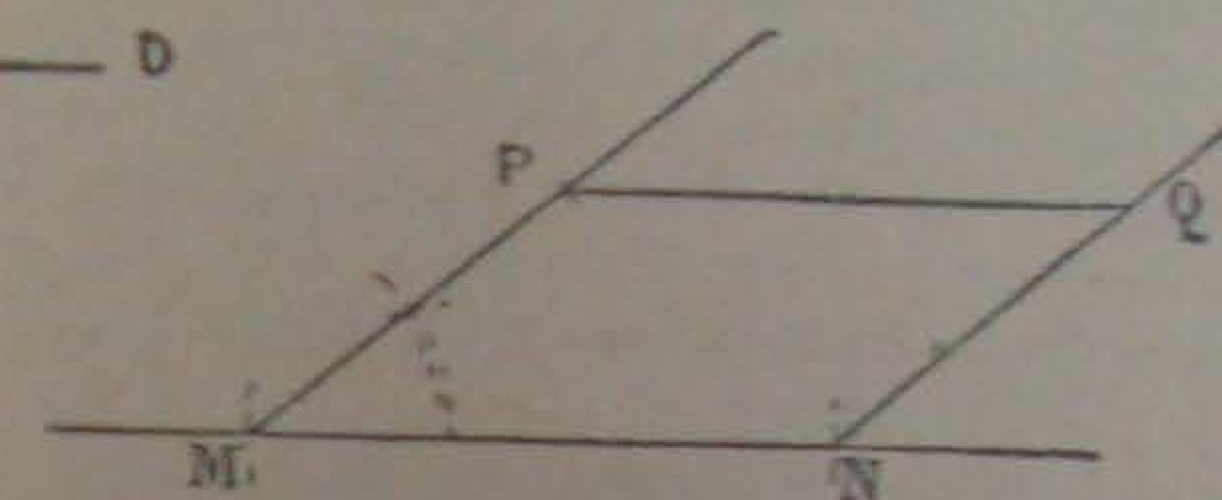


Fig. 203

MN igual a *CD*; no ponto *M* (fig. 203) façamos um ângulo igual a *E* e com um raio igual a *AB* marquemos o ponto *P* a partir de *M*. Do ponto *N* tracemos uma paralela a *MP* e do ponto *P* outra a *MN*. O paralelogramo pedido é *MPQN*.

Problema 71. — *Construir um paralelogramo conhecendo-se as diagonais e um lado.*

Sôbre uma reta marquemos *AB* igual à medida do lado (fig. 204).

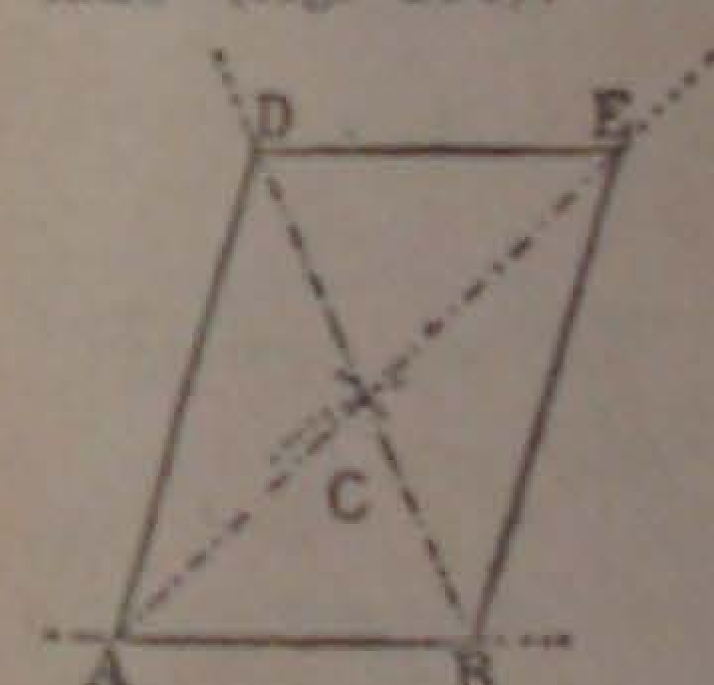


Fig. 204

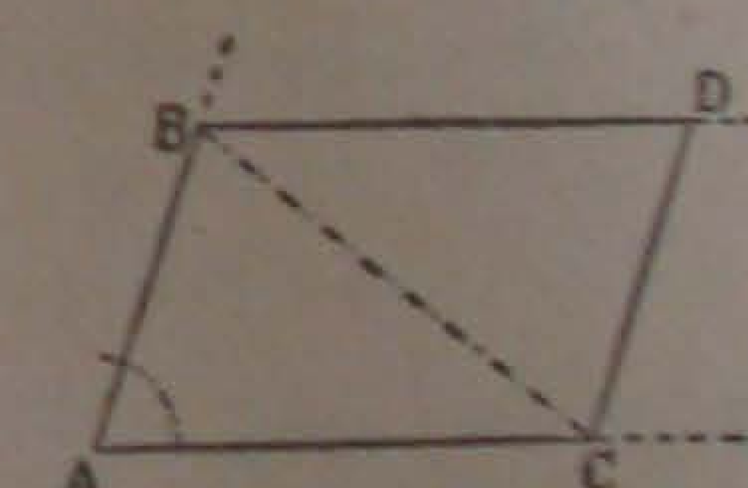


Fig. 205

Construamos o triângulo *ABC* em que os lados são *AB* e as metades das diagonais dadas.

Prolonguemos *AC* e *BC* e reproduzamos em *CD* a medida *CB*, e em *CE* a medida *CA*.

Tracemos *AD*, *DE* e *EB* e teremos em *ABED* o paralelogramo pedido.

Problema 72. — *Construir um paralelogramo conhecendo-se um lado, um ângulo, e uma diagonal.*

Seja A o ângulo (fig. 205):

Marquemos AB igual ao lado e do ponto B, como centro, e com um raio igual à diagonal, determinemos o ponto C, no outro lado do ângulo A.

De B tiremos uma paralela a AC, e de C outra a AB. A solução do problema é $ACDB$.

Observação:

Esta construção, como se viu, depende da construção do prob. 29. Podem surgir, portanto, os mesmos casos e, conforme o tamanho da diagonal fornecida, o problema tem uma solução, duas ou nenhuma.

Problema 73. — *Construir um paralelogramo conhecendo-se um lado, a altura relativa a êsse lado e um ângulo.*

Seja A o ângulo dado (fig. 206). Marquemos AB igual ao lado conhecido e do vértice levantemos uma perpendicular a BA.

Tomemos AM igual à altura. Pelo ponto M tiremos uma paralela a BA e por B uma outra a AC. O quadrilátero $BACD$ resolve o problema.

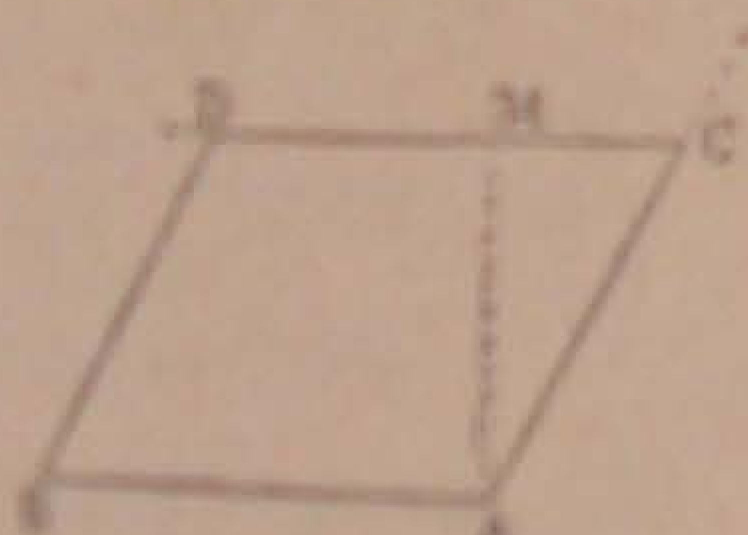


Fig. 206

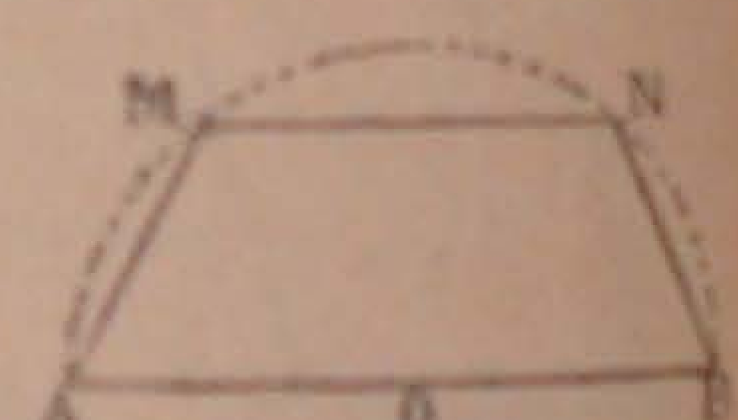


Fig. 207

Problema 74. — *Construir um trapézio simétrico.*

Tracemos um segmento AB (fig. 207), e tomando-o para diâmetro tracemos uma semi-circunferência.

Fazendo centro em A e depois em B, com um mesmo raio menor do que AB, determinemos os pontos M e N.

O quadrilátero $ABNM$ é um trapézio simétrico.

Problema 75. — *Construir um trapézio isósceles conhecendo-se as bases e a altura.*

Sôbre uma reta marquemos BC igual a uma base e pelo meio E de BC (fig. 208) levantemos-lhe uma perpendicular.

A partir de E, tomemos ED igual à altura.

Façamos passar por D uma paralela a BC e com um raio igual à metade da outra base determinemos a partir do ponto D, os pontos F e H.

Liguemos F a B e H a C.

O trapézio pedido é $BCHF$.

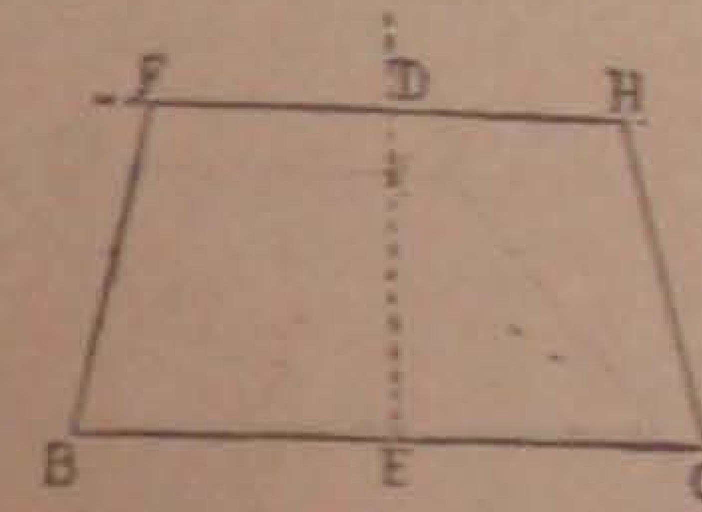


Fig. 208

Problema 76. — *Construir um trapézio isósceles conhecendo-se as bases e um ângulo.*

Seja M o ângulo (fig. 209).

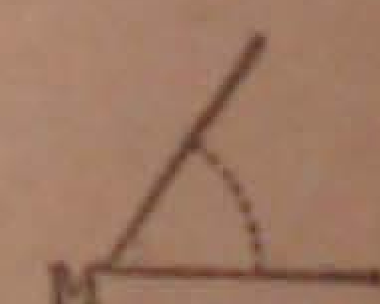


Fig. 209

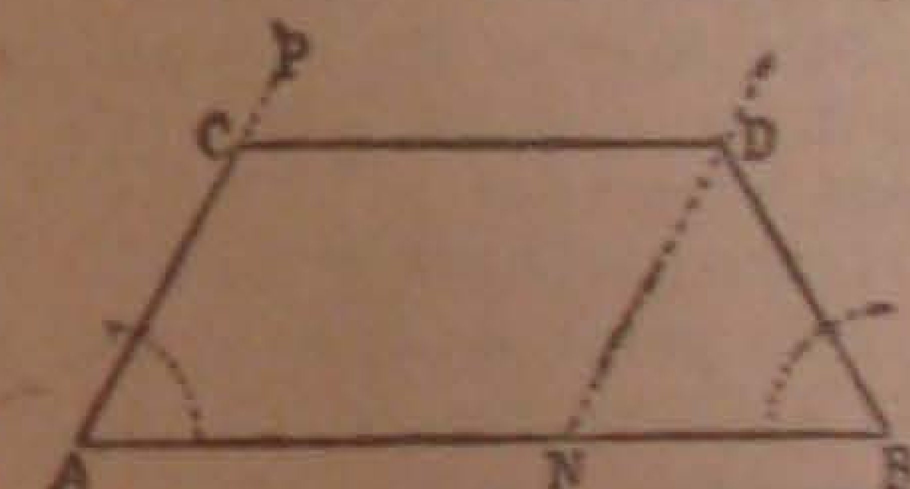


Fig. 210

Sôbre uma reta marquemos AB igual à base maior e AN igual à base menor.

Façamos em A e em B (fig. 210) ângulos iguais a M. De N tracemos uma paralela a AP até determinar o ponto D, do qual tracemos uma paralela a AB.

O trapézio-isósceles pedido é $ABDC$.

Problema 77. — *Construir um trapézio-isósceles conhecendo-se uma base, a altura, e o lado.*

Sôbre uma reta marquemos AB igual à base dada e por um ponto qualquer, B, dessa reta (fig. 211) levantemos-lhe uma perpendicular e tomemos BN igual à altura.

Pelo ponto N tracemos uma paralela a AB.

Centro em A, e depois em B, com um raio igual ao lado determinemos os pontos C e D.

A solução do problema é o trapézio $ABDC$.

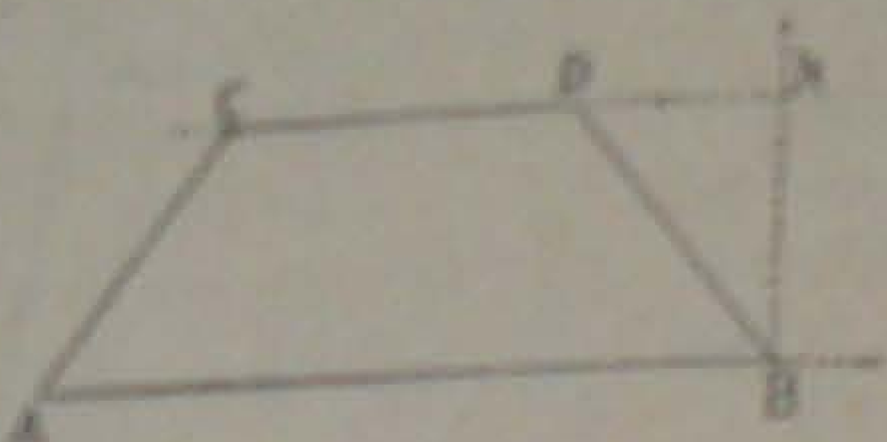


Fig. 211

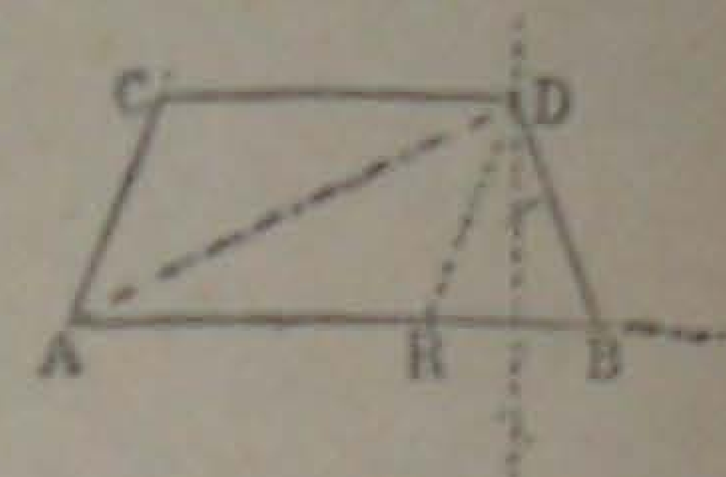


Fig. 212

Problema 78. — *Construir um trapézio isósceles conhecendo-se as bases e a diagonal.*

Marquemos em uma reta: AB igual à base maior e AR igual à base menor.

Pelo meio de RB façamos passar uma perpendicular e de A, como centro, e com raio igual à diagonal determinemos o ponto D.

Liguemos D a B e a R.

Pelo ponto A tiremos uma paralela a RD, e por D outra a AB. O trapézio pedido é $ABDC$.

Problema 79. — *Construir um trapézio conhecendo-se as bases e os dois lados não paralelos.*

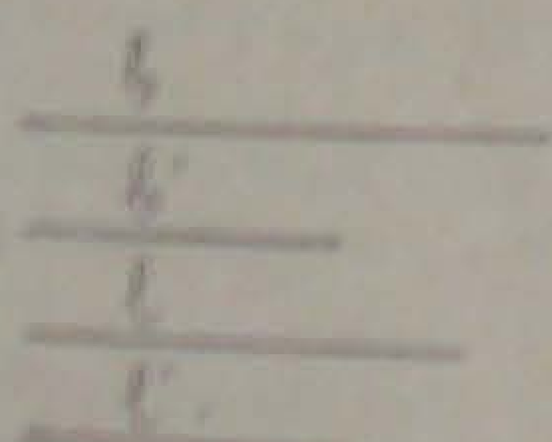


Fig. 213

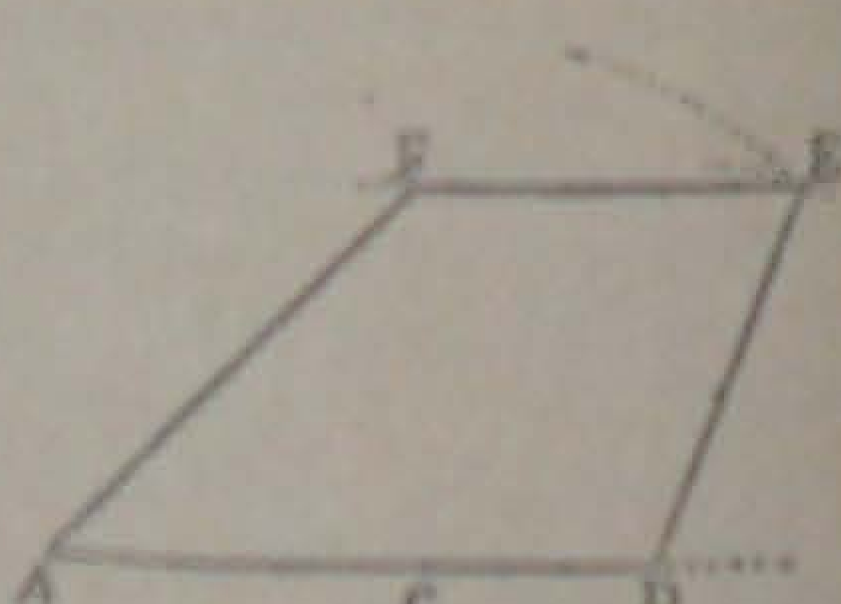


Fig. 214

Sejam as bases b e b' e sejam l e l' os lados (fig. 213).

Marquemos em uma reta: $AD = b$ e $AC = b'$.

Façamos centro em C (fig. 214) e com um raio igual a l descrevamos um arco que será cortado no ponto E por um outro arco, traçado com um raio igual a l' e do ponto D, como centro.

De E tiremos uma paralela a AD e sôbre essa paralela apliquemos EF igual a b'.

Liguemos o ponto F ao ponto A, e E ao ponto D; resolveremos assim o problema.

Problema 80. — *Construir um trapézio conhecendo-se as bases e as diagonais.*

Construamos o triângulo ACD (fig. 215), em que o lado AC é igual à soma das bases do trapézio, AD é uma diagonal e CD a outra diagonal.

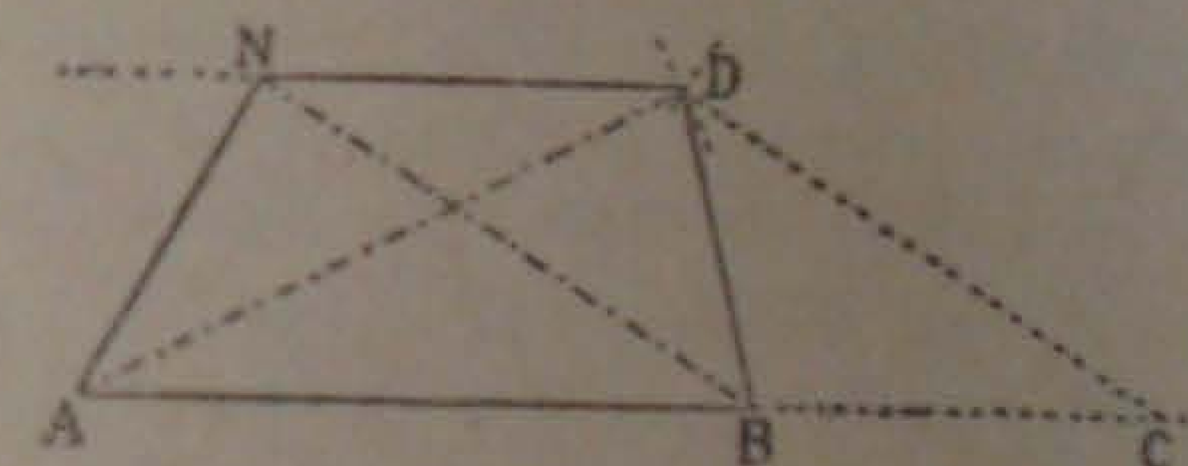


Fig. 215

Do ponto D tracemos uma paralela a AC, e de B uma paralela a CD; as duas retas se cortam em N.

O trapézio pedido é $ABDN$.

EXERCÍCIOS

1 — Construa um quadrado com 6,2cm de lado. (Problema n.º 55).

2 — Construa um quadrado com 5,6cm de diagonal. (Problema n.º 57).

3 — Construa um retângulo cujas dimensões sejam 6cm e 3,8cm. (Problema n.º 58).

4 — Construa um retângulo com 7cm de diagonal e com uma dimensão de 5cm. (Problema n.º 59).

5 — Construir um retângulo em que uma das dimensões, de 6cm, forma com a diagonal um ângulo de 40°. (Problema n.º 60).

6 — Construir o retângulo em que a diagonal, de 7cm, forma com uma das dimensões um ângulo de 35°. (Problema n.º 61).

7 — Construir o retângulo em que as diagonais medem 6,5cm e formam entre si um ângulo de 48°. (Problema n.º 62).

8 — Construir o losango cujas diagonais medem, respectivamente, 5,8cm e 4,3cm. (Problema n.º 64).

9 — Construir o losango de 5,7cm de lado e no qual uma diagonal mede 8cm. (Problema n.º 65).

10 — Construir um losango com 6,4cm de lado e no qual um ângulo mede 41°. (Problema n.º 66).

11 — Construir um losango com uma diagonal de 7cm e um ângulo de 34°. (Problema n.º 67).

12 — Construir um paralelogramo cujos lados medem respectivamente 5cm e 3,4cm e onde uma diagonal mede 6,5cm. (Problema n.º 68).

13 — Construir um paralelogramo que tenha 6cm e 4,3cm de lados e 3,2cm de altura. (Problema n.º 69).

14 — Construir um paralelogramo com um ângulo de 40° e onde os lados medem respectivamente 8cm e 6cm. (Problema n.º 70).

15 — Construir um paralelogramo cujas diagonais sejam 9cm e 6,2cm e onde um lado mede 2,8cm. (Problema n.º 71).

16 — Construir um paralelogramo em que um lado mede 7cm, a diagonal mede 8cm e onde um ângulo tem 60°. (Problema n.º 72).

17 — Construir o paralelogramo em que um lado mede 9cm, a altura relativa a este lado mede 3,8cm e um dos ângulos tem 48°. (Problema n.º 73).

18 — Construa o trapézio simétrico com 6cm e 4,5cm de bases e 3,2cm de altura. (Problema n.º 15).

19 — Construir um trapézio isósceles com um ângulo de 41°, tendo as bases iguais a 7cm e 5,2cm respectivamente. (Problema n.º 76).

20 — Construir um trapézio simétrico com: 6,8cm de base, 3cm de altura e 4,2cm de lado. (Problema n.º 77).

21 — Construir um trapézio isósceles com 7,2cm e 5cm de bases e 4,6cm de diagonal (Problema n.º 78).

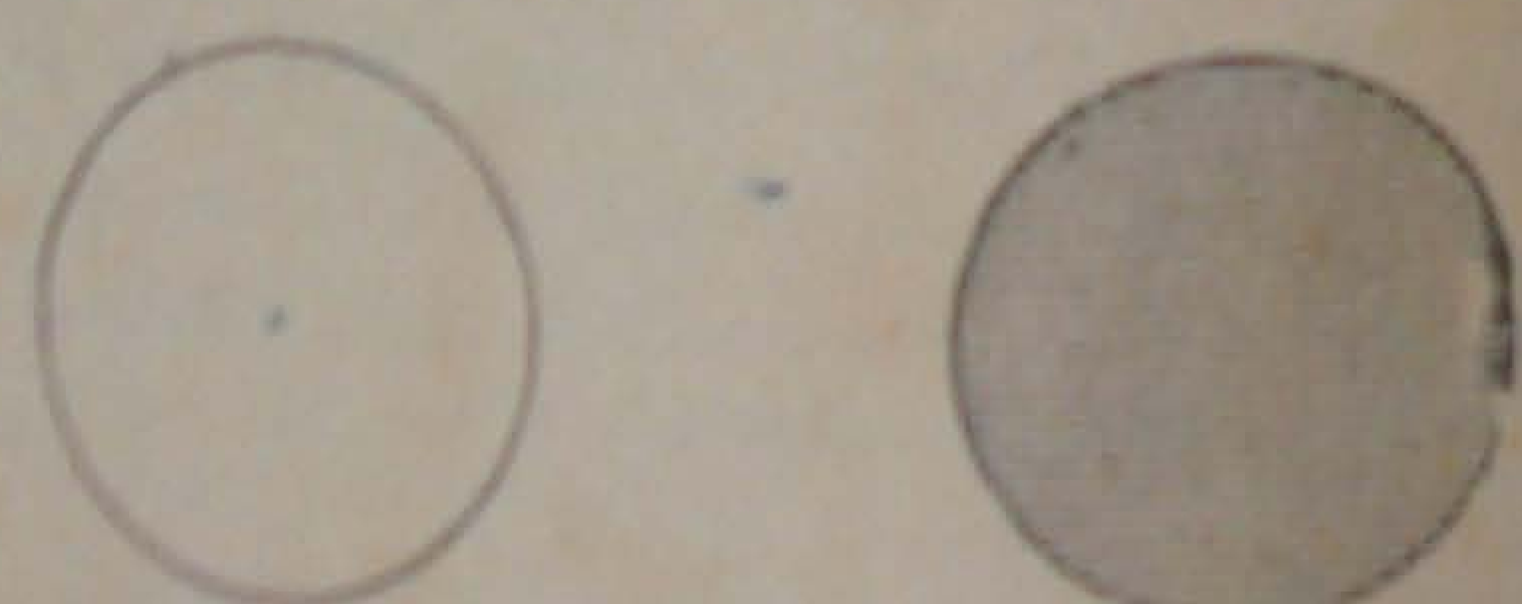
22 — Construir um trapézio com 5cm e 6,2cm de bases, os lados não paralelos medindo 3cm e 3,6cm (Problema n.º 79).

23 — Construir um trapézio com 8cm e 5,8cm de bases e 9,2cm e 6,3cm de diagonais. (Problema n.º 80).

CAPÍTULO VII

Circunferência e círculo — Raio — Corda — Diâmetro — Arcos e cordas do mesmo círculo — Posições relativas de uma circunferência e uma reta — Os ângulos e a circunferência — Medida de arcos — Medida de ângulos — O transferidor — Medida do ângulo inscrito — Posições relativas de duas circunferências — Polígono inscrito e circunscrito à circunferência — Propriedade da mediatriz de uma corda — Segmento, sector e corôa circulares.

Já definimos no 1º capitulo a *circunferência* como a linha curva plana, fechada, cujos pontos



I II

Fig. 216

distam igualmente de um ponto chamado *centro*. Também já vimos como se traça uma circunferência (fig. 216-I).

Propriedades

A porção do plano limitada pela circunferência recebe o nome de *círculo* (fig. 216-II).

O segmento de reta que liga o centro a qualquer ponto da circunferência chama-se *raio*. Exemplo: *OA* na fig. 217 é um raio. Pela própria definição dada, verifica-se que se pode traçar numa circunferência uma infinidade de raios, todos iguais entre si.

O segmento de reta que liga dois pontos quaisquer da circunferência é uma *corda*. Exemplo: *AB* na fig. 218.

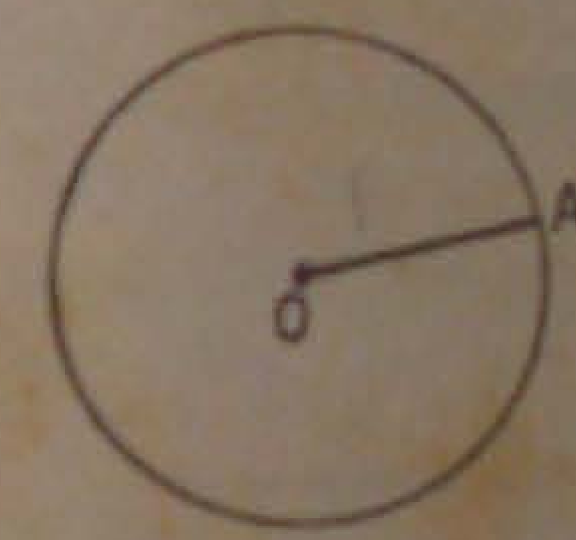


Fig. 217

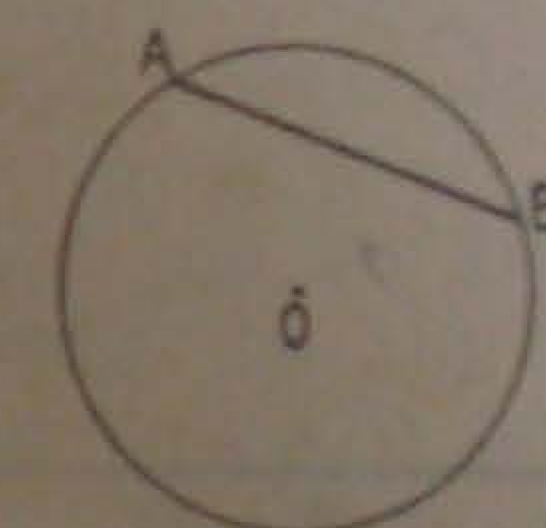


Fig. 218

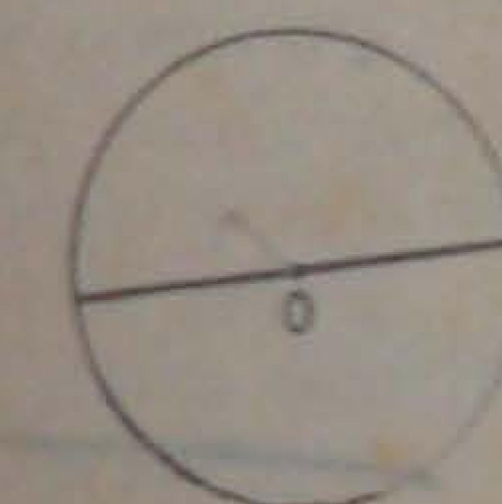


Fig. 219

A corda que passa pelo centro chama-se *diâmetro* (fig. 219). Numa circunferência podemos traçar uma infinidade de diâmetros, todos iguais ao dôbro do raio.

— O diâmetro é a maior corda que se pode traçar numa circunferência e êle divide ao meio tanto a circunferência como o círculo.

— Toda corda divide a circunferência em dois arcos que têm as mesmas extremidades. Assim, a corda *AB*, na fig. 220, divide a circunferência nos arcos *AMB* e *ANB*. Diz-se que a corda *subtende* êsses dois arcos. Já vimos que quando a corda

Prop.

considerada é um diâmetro os dois arcos são iguais; mas, se a corda não for diâmetro, os dois arcos são desiguais, sendo um arco maior e outro menor do que meia circunferência.

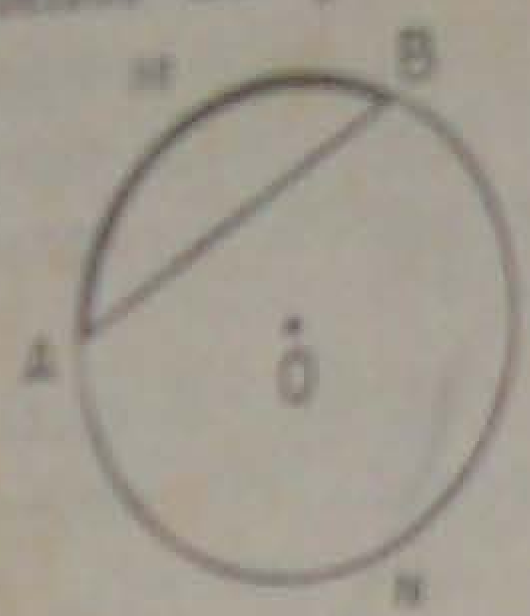


Fig. 220

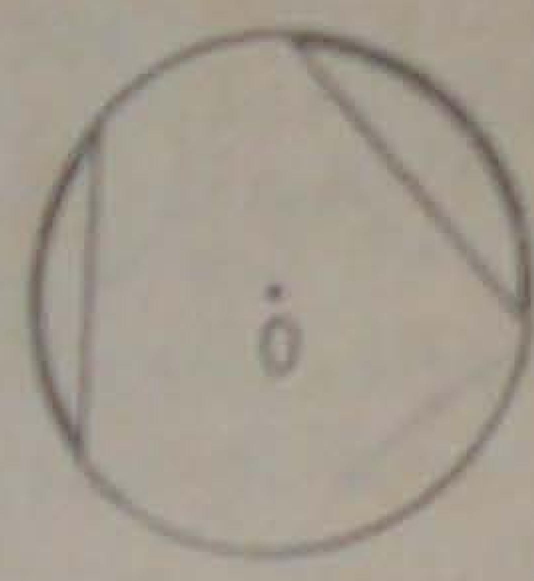


Fig. 221

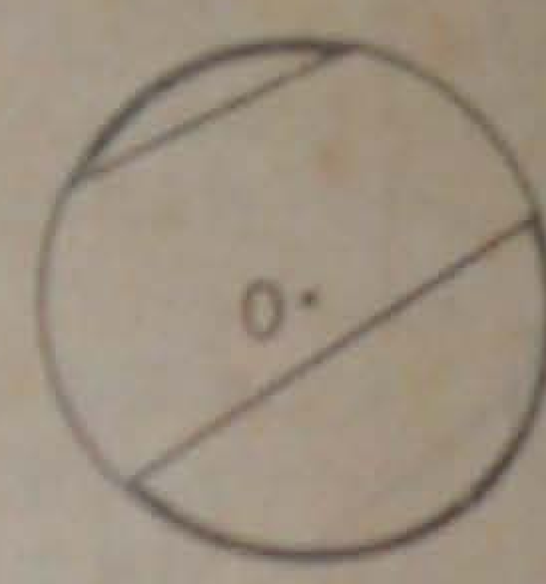


Fig. 222

De modo geral, quando falamos no *arco subtendido por uma corda*, é ao arco menor do que meia circunferência que nos estamos referindo.

Demonstra-se que, no mesmo círculo ou em círculos iguais (que têm o mesmo raio):

~~1.º)~~ *as cordas iguais subtendem arcos iguais* e, vice-versa, arcos iguais são subtendidos por cordas iguais. Por isso, quando, no mesmo círculo ou em círculos iguais, queremos determinar arcos iguais, basta-nos traçar cordas iguais: os arcos subtendidos serão iguais (fig. 221);

2.º) cordas desiguais subtendem arcos desiguais e a maior corda subtende maior arco e, vice-versa, arcos desiguais são subtendidos por cordas desiguais e o maior arco é subtendido pela maior corda (fig. 222).

Também se demonstra que, no mesmo círculo ou em círculos iguais: cordas iguais se afastam igualmente do centro (fig. 223), cordas desiguais se afastam desigualmente e a maior é a que menos

se afasta (fig. 224). Inversamente: se duas cordas se afastam desigualmente do centro, elas são desiguais e a que menos se afasta é a maior.

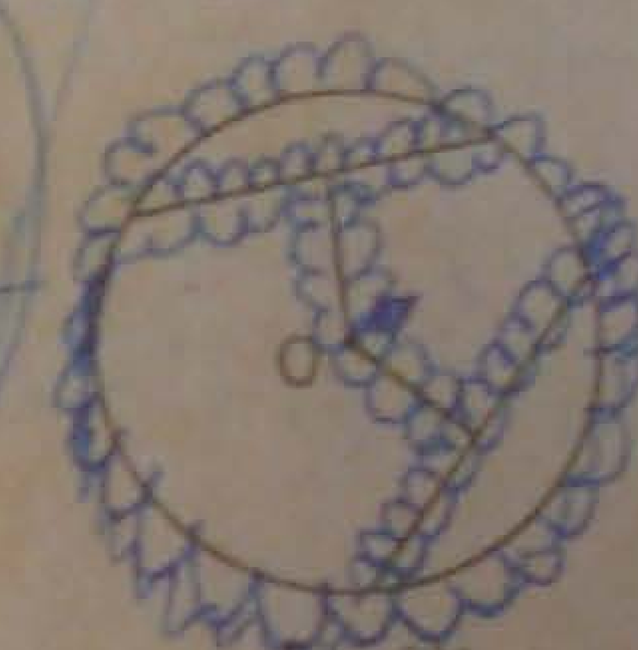


Fig. 223

Fig. 224

Estas propriedades vêm confirmar ser o diâmetro a maior corda.

Posições relativas de uma reta e uma circunferência. — Uma reta pode ocupar três posições em relação a uma circunferência: *exterior, tangente* ou *secante*.

Uma reta é exterior à circunferência quando a distância do centro à reta é maior do que o raio. Nesse caso a reta não tem nenhum ponto comum com a curva (fig. 225).

A reta é tangente à circunferência quando a distância do centro à reta é igual ao raio. Nesse caso há um ponto apenas comum às duas linhas e êsse ponto é chamado *ponto de contacto* ou *ponto de tangência* (*P*, na fig. 226).

1 A propriedade da tangente ao círculo é que ela é perpendicular ao raio que termina no ponto de contacto.

2 Uma reta é secante à circunferência quando a distância do centro à reta é menor do que o raio.

Neste caso a reta corta a curva em dois pontos (*pontos de secância*), mas não pode cortá-la em mais de dois pontos (fig. 227).

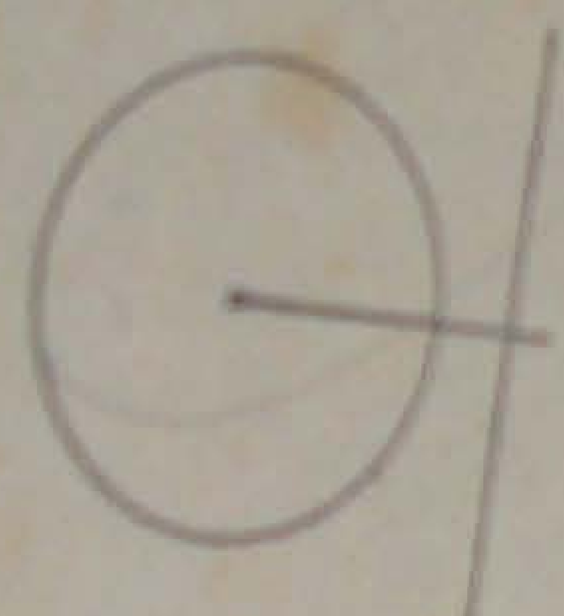


Fig. 225

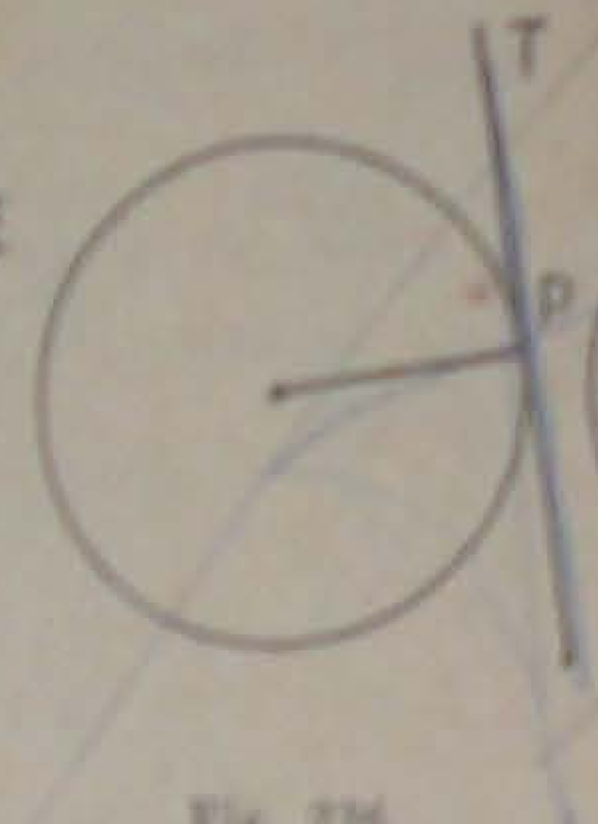


Fig. 226

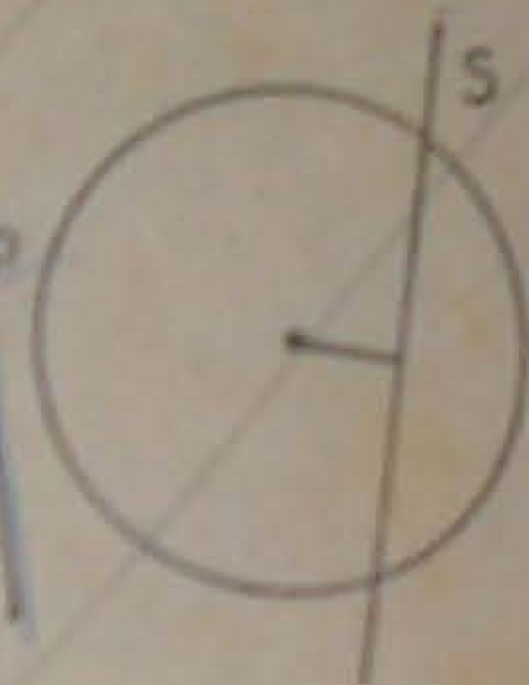


Fig. 227

A mesma reta pode ser tangente a duas circunferências; essa reta é, neste caso, uma *tangente comum*.

Se as duas curvas ficarem do mesmo lado da tangente, esta se chama *tangente comum exterior*

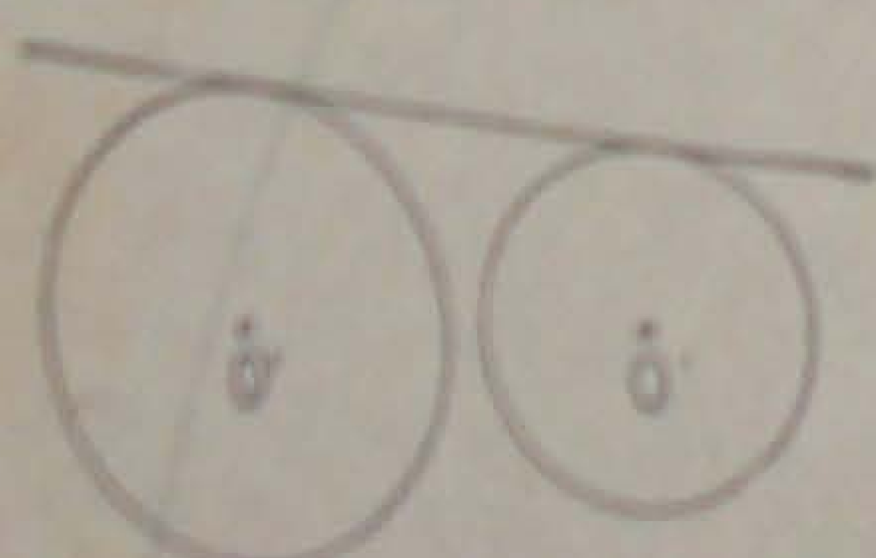


Fig. 228

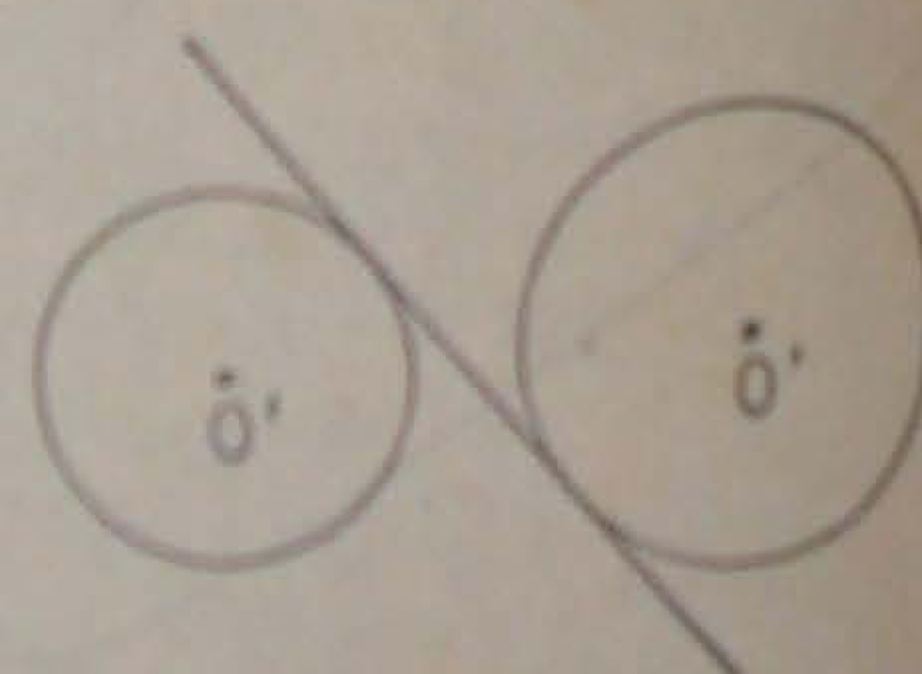


Fig. 229

(fig. 228). Se as curvas ficarem uma de cada lado da tangente, esta se chama *tangente comum interior* (fig. 229).

Os ângulos e a circunferência. — Um ângulo relativamente a uma circunferência pode ser:

Ângulo central — quando tem o vértice no centro da circunferência. Neste caso, os lados são raios. (fig. 230).

Angulo inscrito — aquele que tem o vértice sôbre a curva e cujos lados são cordas. Exemplo: ângulo *BAC* da fig. 231.

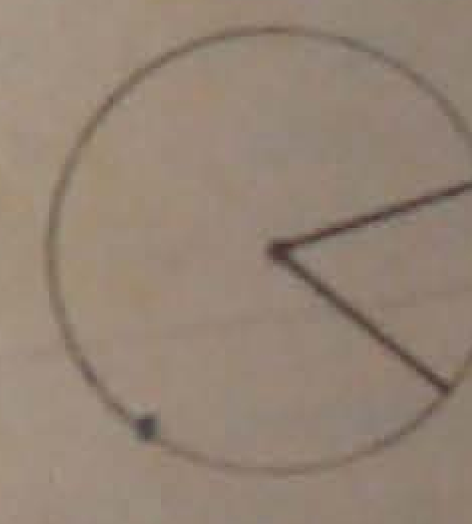


Fig. 230

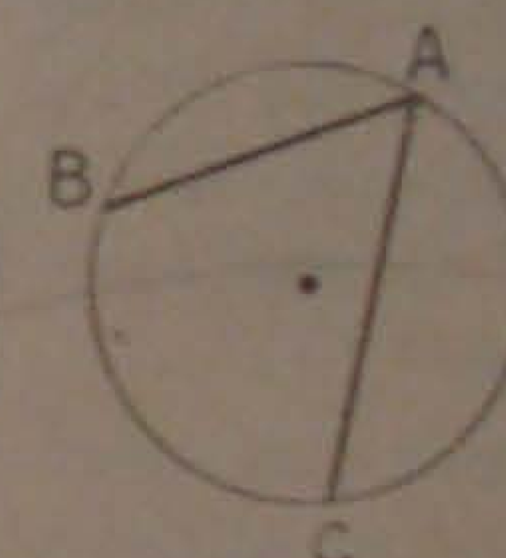


Fig. 231

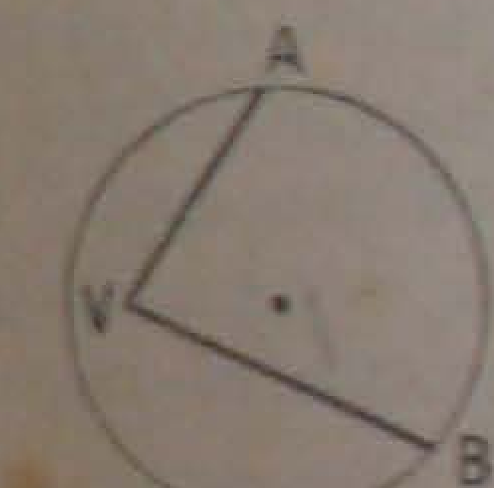


Fig. 232

Angulo interior excêntrico — aquele cujo vértice está no interior do círculo, mas não no centro, como o ângulo *AVB* da figura 232.

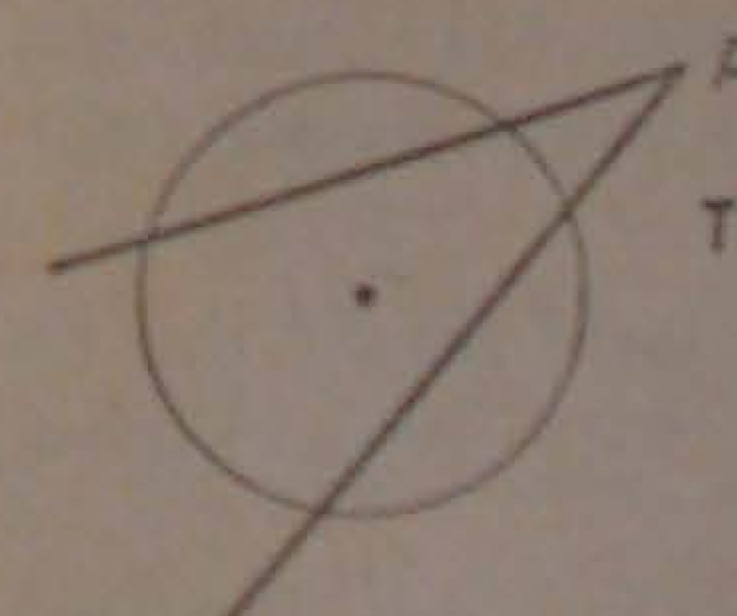


Fig. 233

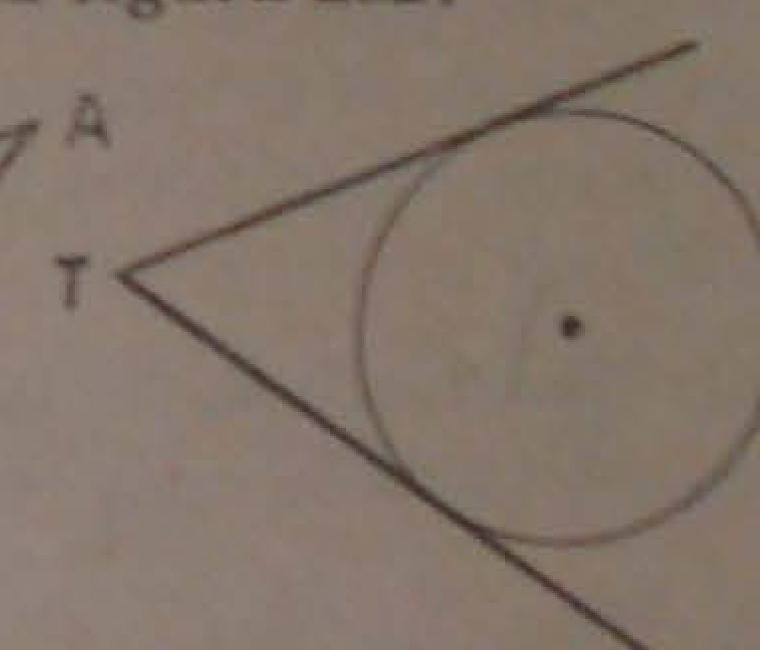


Fig. 234

Angulo exterior — aquele cujo vértice está fóra do círculo e cujos lados são secantes à circunferência; tal é o ângulo *A* da fig. 233.

Ângulo circunscrito — quando tem o vértice fora do círculo e os lados são tangentes à circunferência. Exemplo: o ângulo T da fig. 234.

Medida de arcos. — Medimos um arco de circunferência comparando-o com outro, da mesma circunferência ou de circunferência igual, tomado para unidade.

A unidade principal de arco é o *grau*, que foi obtido dividindo-se a circunferência em 360 partes iguais. Cada arco de grau foi dividido, por sua vez, em 60 pequenos arcos chamados *minutos*; finalmente, cada minuto foi dividido em 60 partes iguais denominadas *segundos*.

Indica-se o grau por um zéro colocado à direita e um pouco acima do número que exprime a medida do arco; exemplo: 6° lê-se 6 graus.

O minuto é designado por um acento e o segundo por dois acentos também colocados à direita e um pouco acima do número; exemplo: $9'$ lê-se 9 minutos e $14''$ lê-se 14 segundos.

De acôrdo com as convenções acima, um ângulo de 19 graus, 14 minutos e 8 segundos exprime-se: $19^\circ 14' 8''$.

Medida dos ângulos. — Para medir um ângulo temos que compará-lo com outro tomado para unidade.

Se considerarmos o ângulo com o vértice no centro da circunferência, notamos que seus lados, de passagem, interceptam um arco. Observamos, ainda que, na mesma circunferência, ou em circunferências iguais, ângulos iguais interceptam

arcos iguais (fig. 235); se um ângulo é duplo de outro, êle intercepta também um arco duplo do arco interceptado por êsse outro; o ângulo três vezes maior do que outro compreende entre os seus

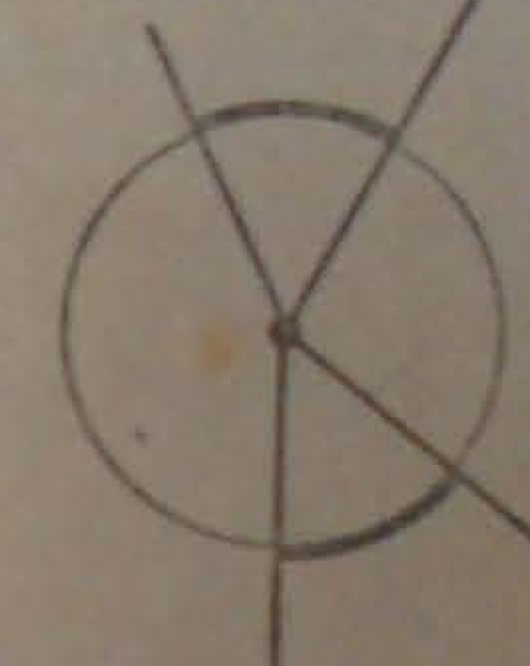


Fig. 235

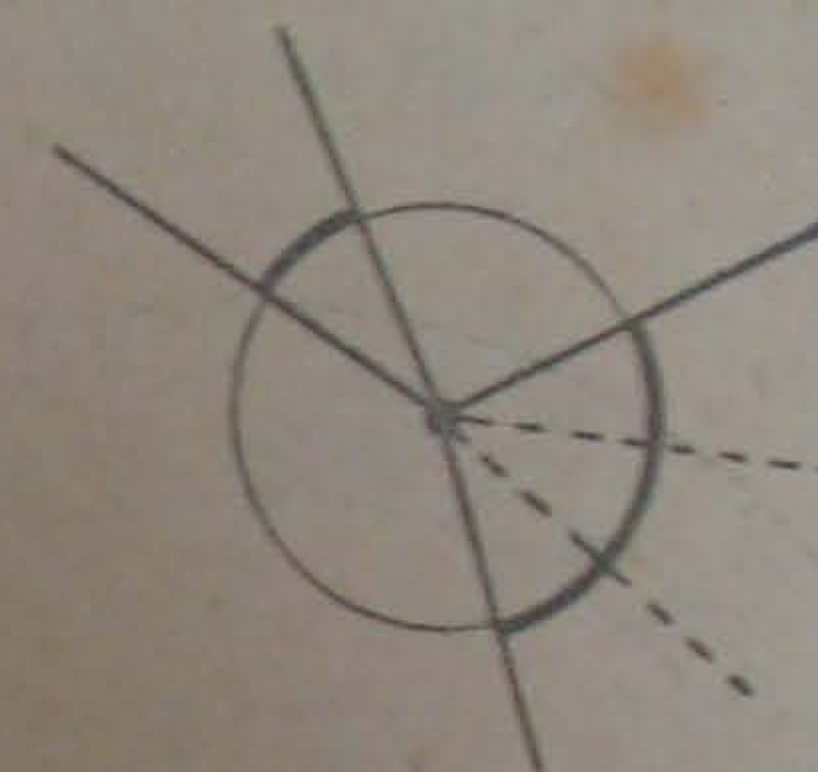


Fig. 236

lados um arco três vezes maior do que o compreendido pelos lados dêste outro (fig. 236); e assim por diante.

Em vista desta correspondência, e para maior facilidade, convencionou-se adotar para unidade de ângulo o ângulo central que compreende entre os seus lados o arco tomado para unidade. Podemos, então, dizer: ângulo central de tantos graus minutos e segundos, conforme o arco compreendido entre os seus lados medir êsse número de graus, minutos e segundos.

Conclusão: *o ângulo central se mede pelo arco compreendido entre os seus lados.*

O Transferidor. — Baseados na propriedade enunciada acima é que usamos, para medir ângulos, o instrumento chamado *transferidor*.

O transferidor consiste geralmente em um semi-círculo de madeira, chifre, latão ou celulóide, cuja semi-circunferência está dividida em 180 partes iguais, cada uma destas valendo, portanto, um grau. A essa semi-circunferência dá-se o nome de *limbo* e ao seu diâmetro chama-se *linha de fé*.

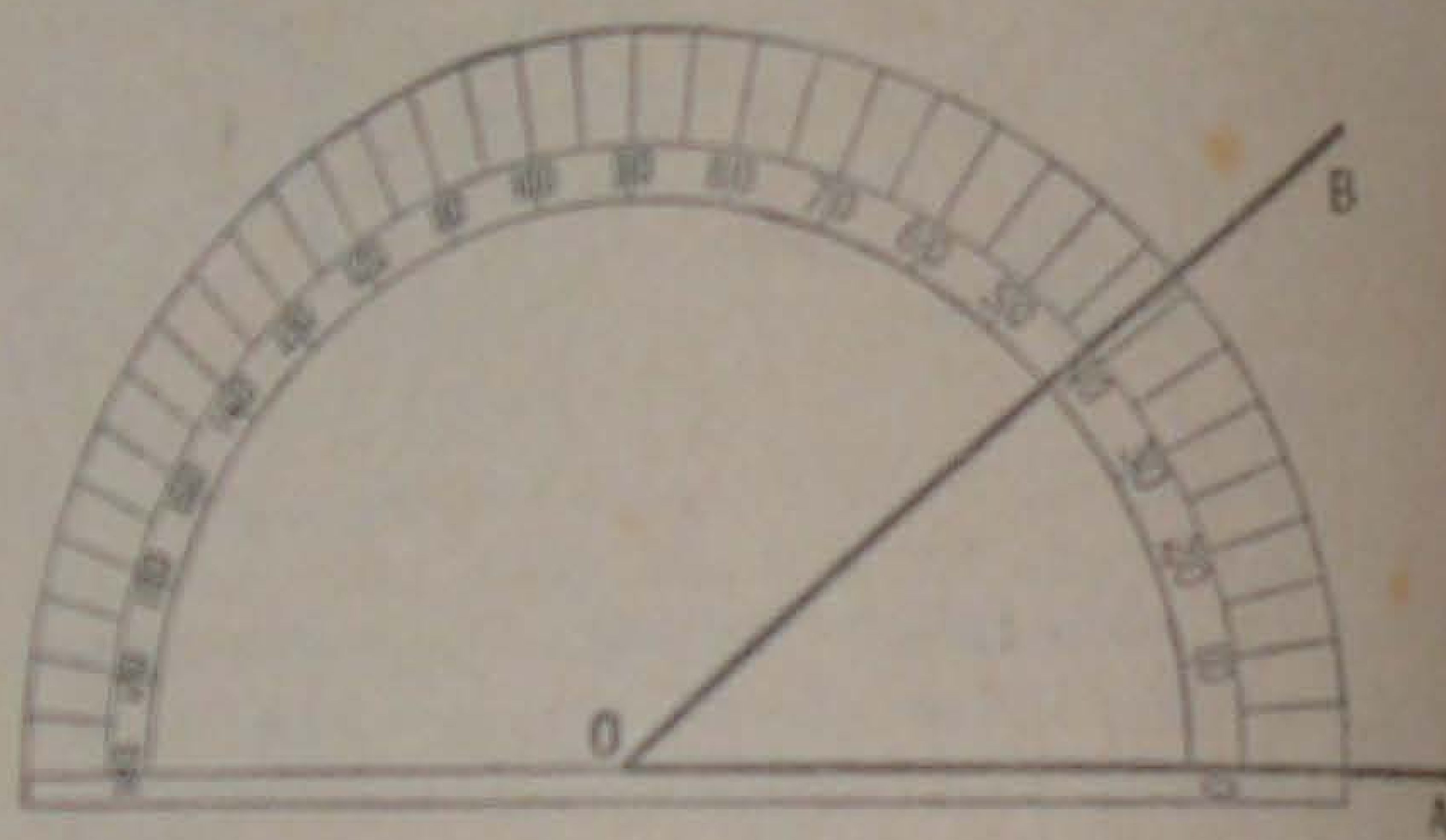


Fig. 237

Vejamos como se pode medir um ângulo com o transferidor: fazemos coincidir o centro do transferidor com o vértice do ângulo e a linha de fé com um dos lados do mesmo; a divisão do limbo sob a qual fica o outro lado do ângulo determina o seu valor.

Também podemos com o transferidor medir um arco qualquer de circunferência: ligamos as extremidades do arco ao centro dêste e medimos o ângulo central que resulta; a medida dêste ângulo nos dá a medida do arco.

Medida do ângulo inscrito. — Seja o ângulo *BAC* da fig. 238; dizemos que êle está *inscrito* no arco *BMC* e *compreende* entre os seus lados o arco *BNC*. Por conseguinte, um ângulo está inscrito num determinado arco quando o seu vértice está sôbre êsse arco e os seus lados passam pelas extremidades do mesmo arco. O arco *BNC* é o arco *compreendido entre os lados* do ângulo *BAC*.

Demonstra-se que *a medida do ângulo inscrito é dada pela metade do arco compreendido entre os seus lados.*

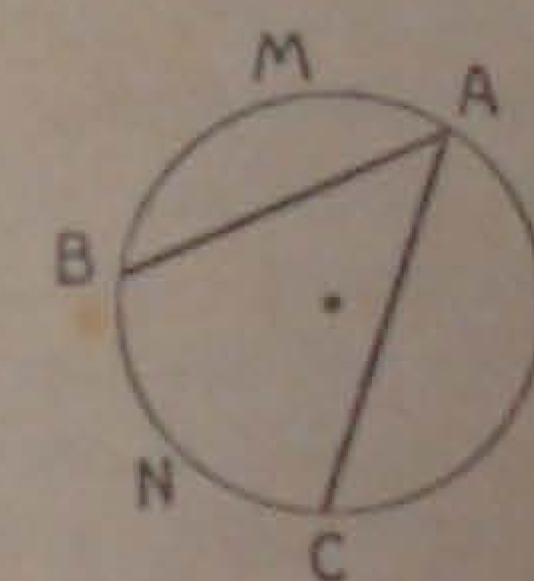


Fig. 238

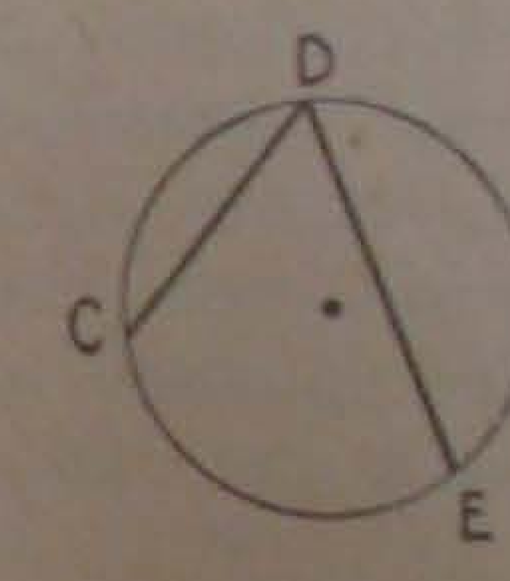


Fig. 239

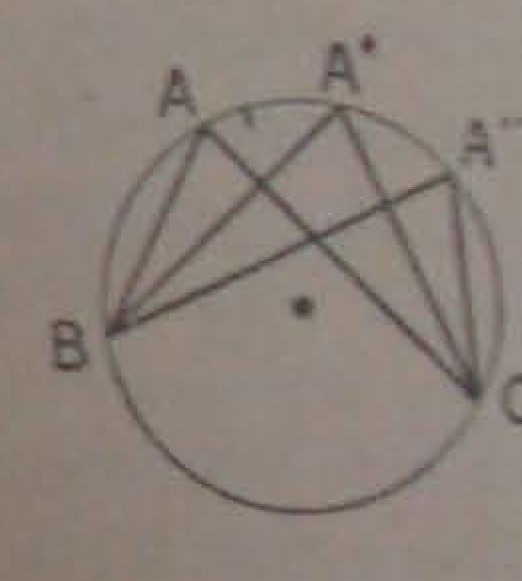


Fig. 240

Assim, o ângulo *CDE* (fig. 239), que compreende entre os seus lados um arco correspondente à terça parte da circunferência (arco de 120°), mede 60°.

Evidentemente os ângulos inscritos no mesmo arco são iguais, porque também compreendem entre os seus lados arcos iguais. Na fig. 240 os ângulos *BAC*, *BA'C*, *BA''C* são todos iguais.

Os ângulos inscritos numa semi-circunferência são todos retos, pois compreendem entre os seus lados a outra semi-circunferência, cuja metade equivale a 90° (fig. 241).

Os ângulos inscritos num arco maior do que uma semi-circunferência são agudos (fig. 242); os

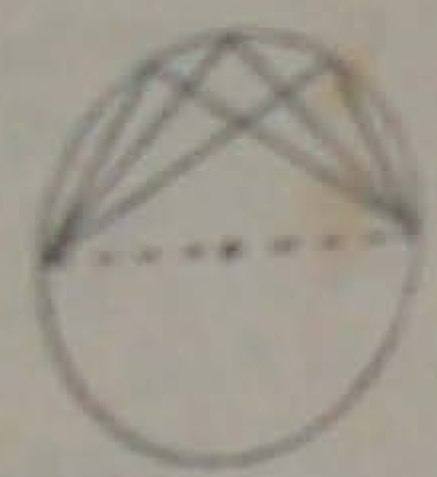


Fig. 241

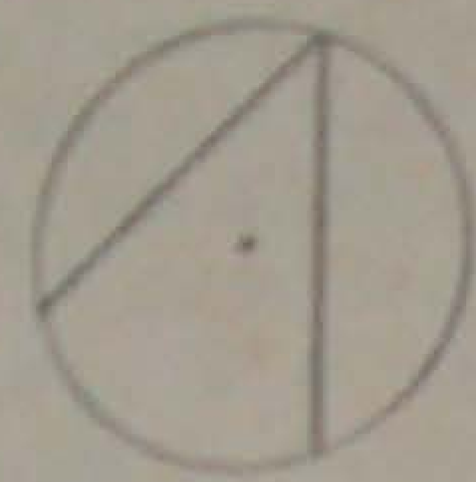


Fig. 242

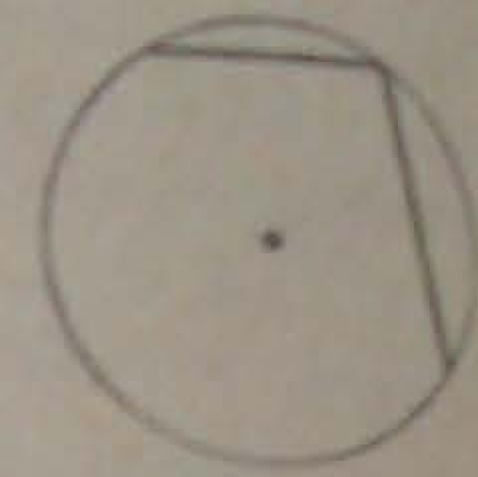


Fig. 243

ângulos inscritos num arco menor do que uma semi-circunferência são obtusos (fig. 243).

Posições relativas de duas circunferências. — Duas circunferências podem ocupar, uma em relação a outra, diversas posições. Vejamos:

Se duas circunferências não têm ponto comum, nem tão pouco os seus círculos, elas se dizem *exteriores* (fig. 244).

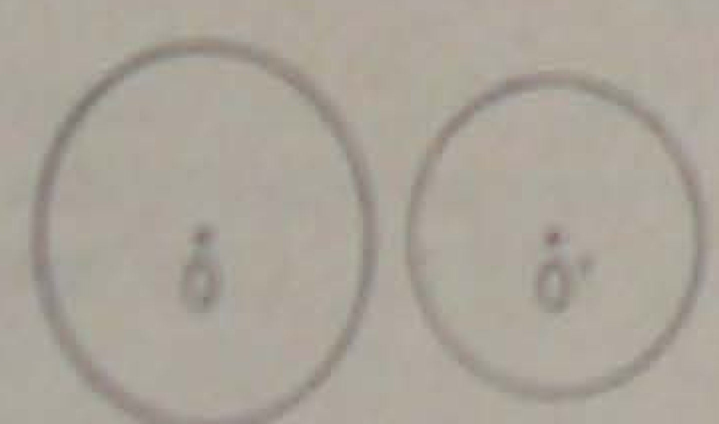


Fig. 244

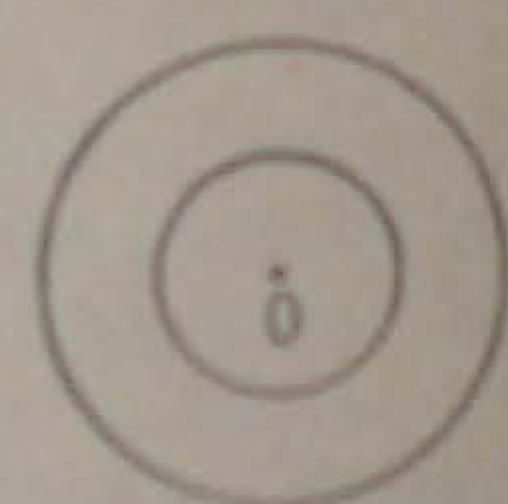


Fig. 245

Se duas circunferências não têm ponto comum, mas os seus círculos têm, elas se dizem *interiores*. Podem-se dar, então, dois casos: ou as circunferências têm o mesmo centro e se chamam *concêntricas* (fig. 245) ou não têm o mesmo centro e se chamam *excêntricas* (fig. 246).

Se duas circunferências só têm um ponto comum, elas são *tangentes*. Duas circunferências po-

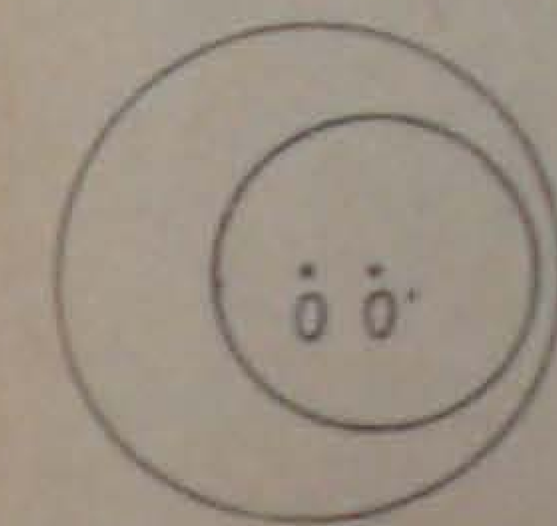


Fig. 246

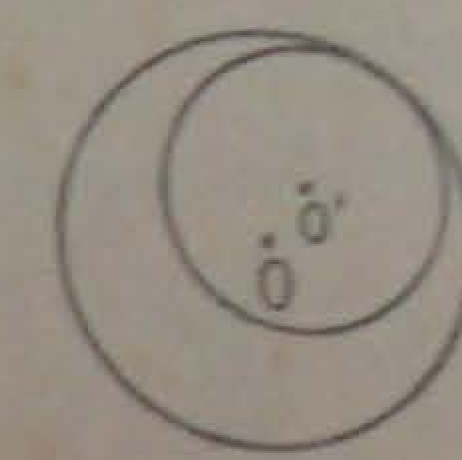
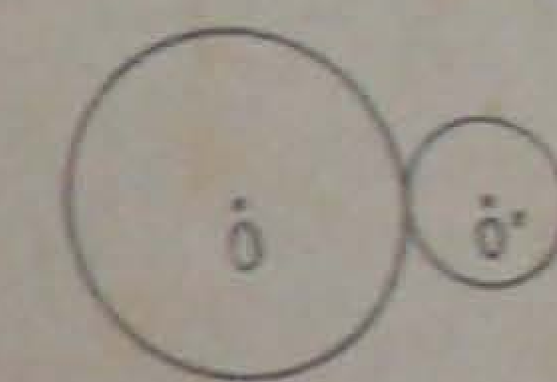


Fig. 247



247a

dem ser tangentes interiormente e exteriormente, como se vê pelas figuras 247 e 247a.

Enfim, quando duas circunferências se cortam, elas se dizem *secantes*. Neste caso, elas têm dois pontos comuns (*pontos de secância*) e não podem ter mais (fig. 248).

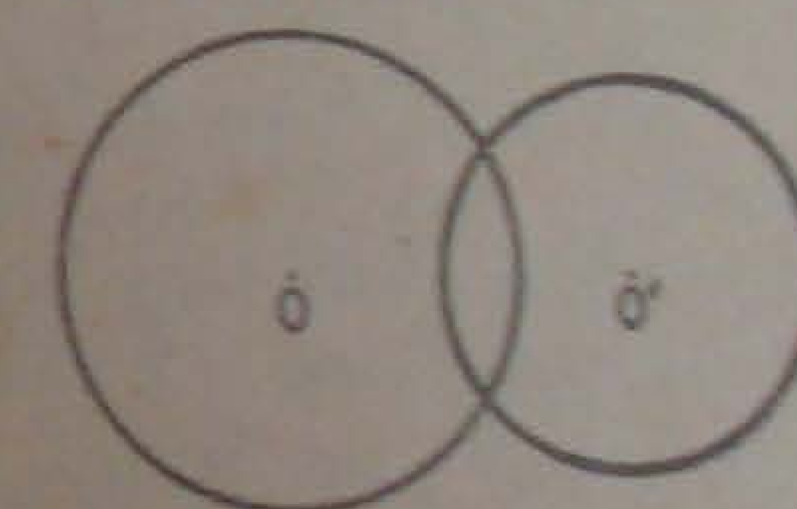


Fig. 248

Polígonos inscrito e circunscrito à circunferência. — Um polígono está *inscrito* na circunferência quando os seus vértices estão sôbre a curva e os seus lados são cordas da circunferência (fig. 249).

Quando o polígono está inscrito na circunferência, também se diz que a circunferência está *circunscrita* ao polígono.

Um polígono está *circunscrito* à circunferência quando os seus lados são tangentes à circunferência. Também se diz, então, que a circunferência está *inscrita* no polígono. (fig. 250).

Quando um polígono pode ser inscrito na circunferência, êle se denomina *inscritível;* analogamente, denomina-se *circunscritível* se puder ser circunscrito à circunferência.

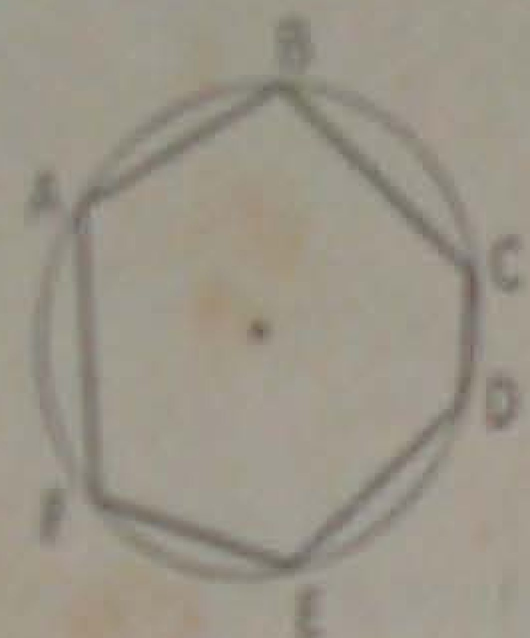


Fig. 249

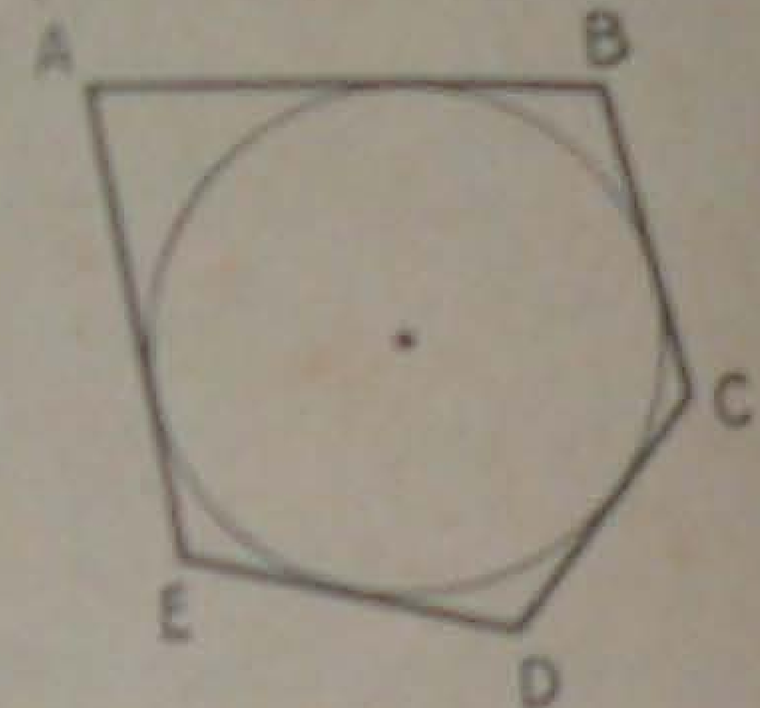


Fig. 250

Demonstra-se que qualquer polígono regular pode ser inscrito ou circunscrito à circunferência.

O único polígono que sempre se pode inscrever ou circunscrever à circunferência, seja regular ou não, é o triângulo.

Propriedade da mediatriz de uma corda. — *A mediatriz de uma corda passa pelo centro e divide ao meio os arcos que a corda subtende.* Quer isto dizer que si, pelo meio, *M*, de qualquer corda (*AB* por exemplo) traçarmos uma perpendicular, esta vai passar pelo centro e dividir ao meio os dois arcos subtendidos por *AB* (fig. 251).

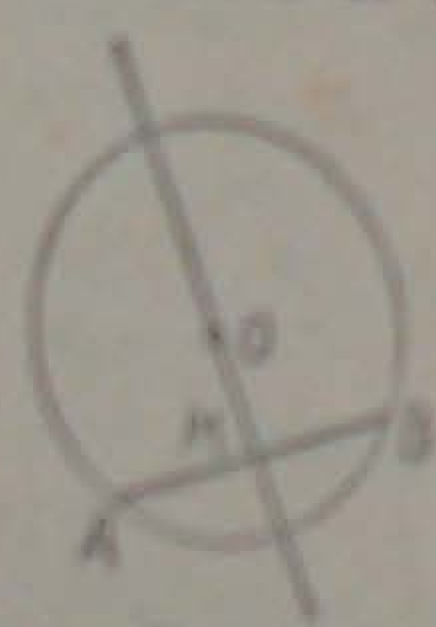


Fig. 251

Por outro lado, se do centro tirarmos uma perpendicular sôbre uma corda, essa perpendicular

dividirá ao meio a corda e os dois arcos por esta subtendidos.

Segmento circular. — Chama-se segmento circular a porção do círculo compreendida entre um arco e a corda que o subtende (fig. 252).

Sector circular. — Chama-se sector circular a porção do círculo compreendida entre um arco e os

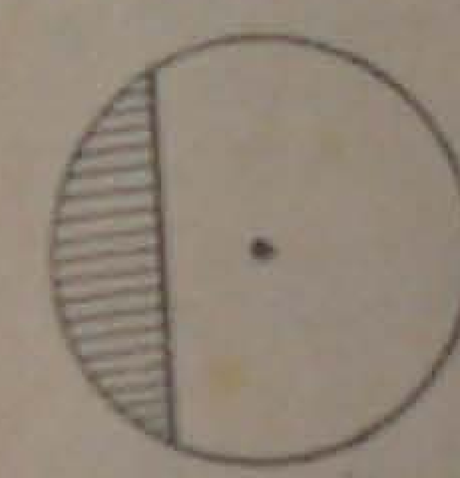


Fig. 252

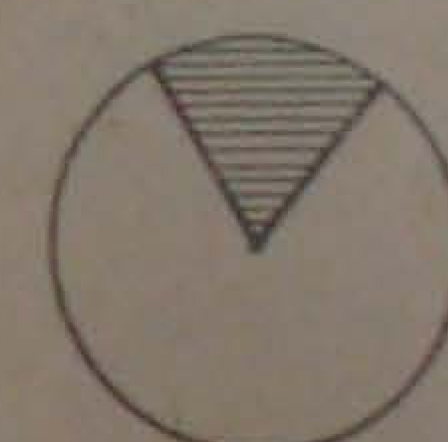


Fig. 253

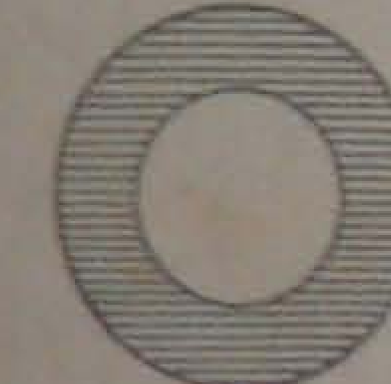


Fig. 254

dois raios que terminam nas extremidades do arco (fig. 253).

Corôa circular. — Corôa circular é a porção do plano limitada por duas circunferências concêntricas (fig. 254).

QUESTIONÁRIO

1. Que diferença se faz entre circunferência e círculo?
2. Que é raio da circunferência?
3. Um diâmetro o que é do raio?
4. Quantos raios e quantos diâmetros tem uma circunferência?
5. Que relações existem entre as cordas e os arcos por elas subtendidos no mesmo círculo ou em círculos iguais?

6. No mesmo circulo ou em circulos iguais, que relações existem entre os tamanhos das cordas e seu afastamento do centro?
7. Quantas posições uma reta pode ocupar relativamente a uma circunferência?
8. Qual a propriedade da tangente à circunferência?
9. Em quantos pontos se podem cortar duas circunferências e como se chamam êsses pontos?
10. Que é ângulo central? ângulo inscrito? ângulo interior? ângulo exterior? ângulo circunscrito?
11. Quantas posições uma circunferência pode ocupar em relação a outra?
12. Quando é que um poligono está inscrito na circunferência?
13. Quando é que um poligono está circunscrito à circunferência?
14. Qualquer poligono pode ser inscrito ou circunscrito a uma circunferência?
15. Enuncie a propriedade relativa à mediatriz de uma corda.
16. Que é segmento circular?
17. Que é sector circular?
18. Que é coroa circular?
19. Como se mede um arco?
20. Como se obteve a unidade principal de arco? e o minuto? e o segundo?
21. Que é que se observa com os ângulos centrais relativamente aos arcos compreendidos pelos seus lados?
22. Qual a convenção adotada para medir os ângulos centrais?
23. Descreva o instrumento chamado transferidor e diga para que serve.
24. Como se mede um ângulo com o transferidor?
25. Qual a medida de um ângulo inscrito num arco de circunferência?
26. Os ângulos inscritos numa semi-circunferência quanto medem?

PROBLEMAS

Problema 81. — *Traçar uma circunferência que passa por dois pontos dados.*

Sejam A e B os pontos. Tracemos o segmento de reta AB e, em seguida, a sua mediatriz, isto é, a perpendicular ao meio de AB, (fig. 255).

Como a mediatriz tem todos os seus pontos a igual distância das extremidades do segmento, qualquer ponto da mediatriz de AB pode servir de centro de uma circunferência que passa por A e por B. O problema tem, por conseguinte, uma infinidade de soluções.

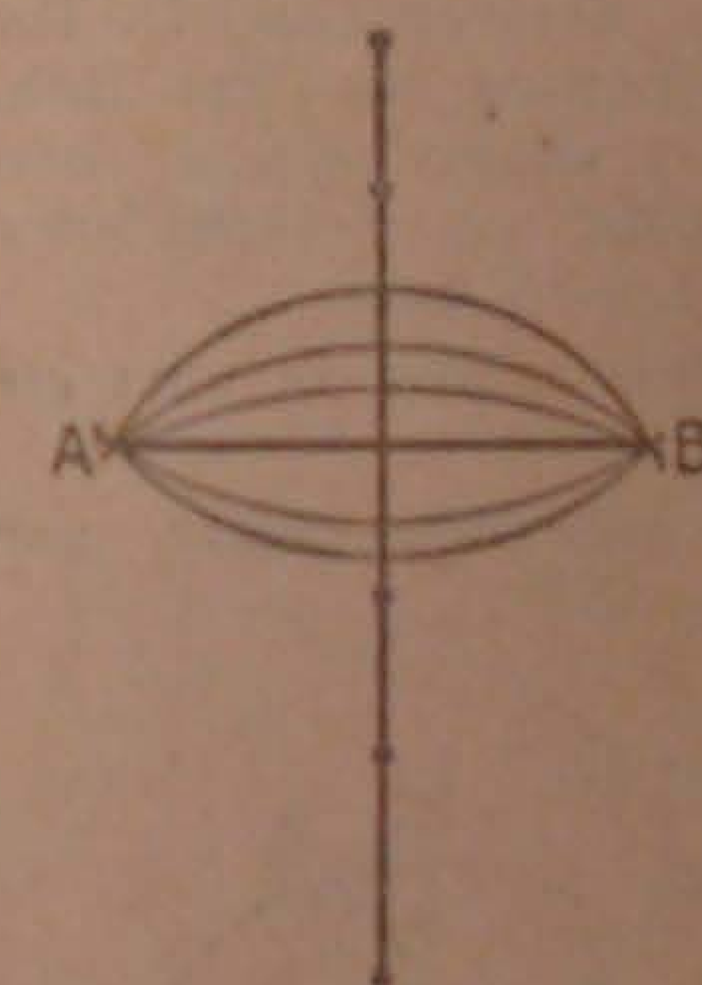


Fig. 255

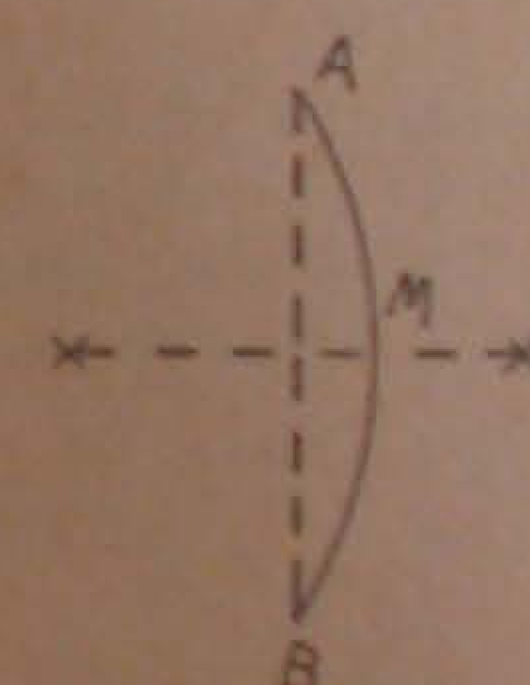


Fig. 256

Problema 81-a. — *Dividir um arco de circulo ao meio.*

Já sabemos que a perpendicular ao meio de uma corda do circulo passa pelo meio do arco por ela subtendido. Então, quando quisermos dividir ao meio um arco de circulo, AB, por exemplo (fig. 256), basta traçar a corda AB e dividi-la ao meio como se divide um segmento de reta qualquer.

Problema 82. — *Fazer passar uma circunferência por três pontos dados não em linha reta.*

Sejam A, B e C os pontos (fig. 257). Unamos os pontos A e B ao ponto C; tracemos uma perpendicular pelo meio de BC e outra pelo meio de AC. Façamos centro em M (ponto de encontro das duas perpendiculares) e com o raio MB descrevamos a circunferência que passará forçosamente pelos pontos A, B e C.

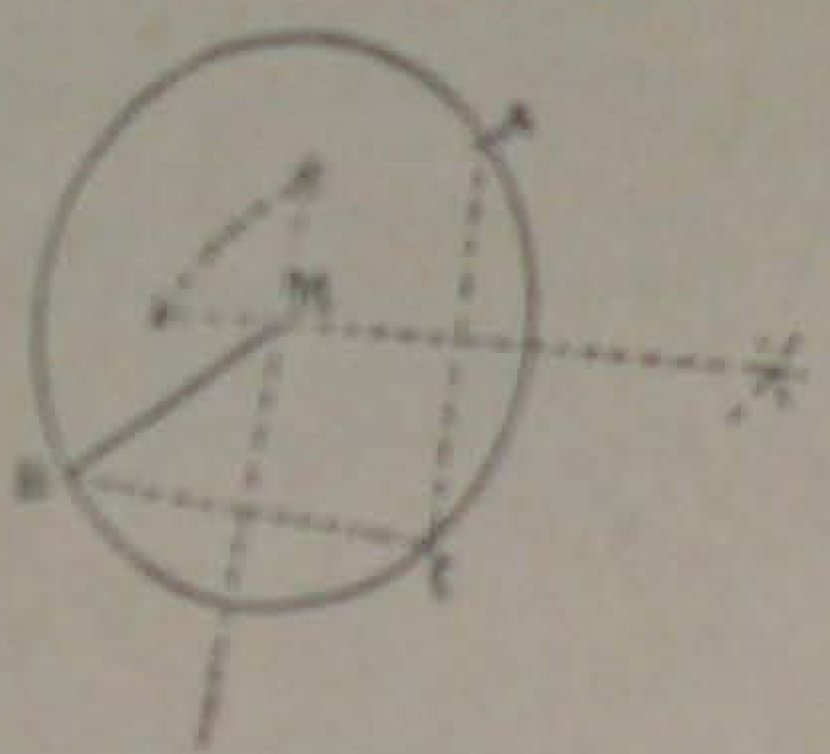


Fig. 257

Observação: — Por 3 pontos não em linha reta sempre se pode fazer passar uma circunferência e só uma.

Problema 83. — *Determinar o centro de uma circunferência ou de um arco.*

Sôbre o arco cujo centro se quer determinar, marquemos três pontos: A, B e C (fig. 258).

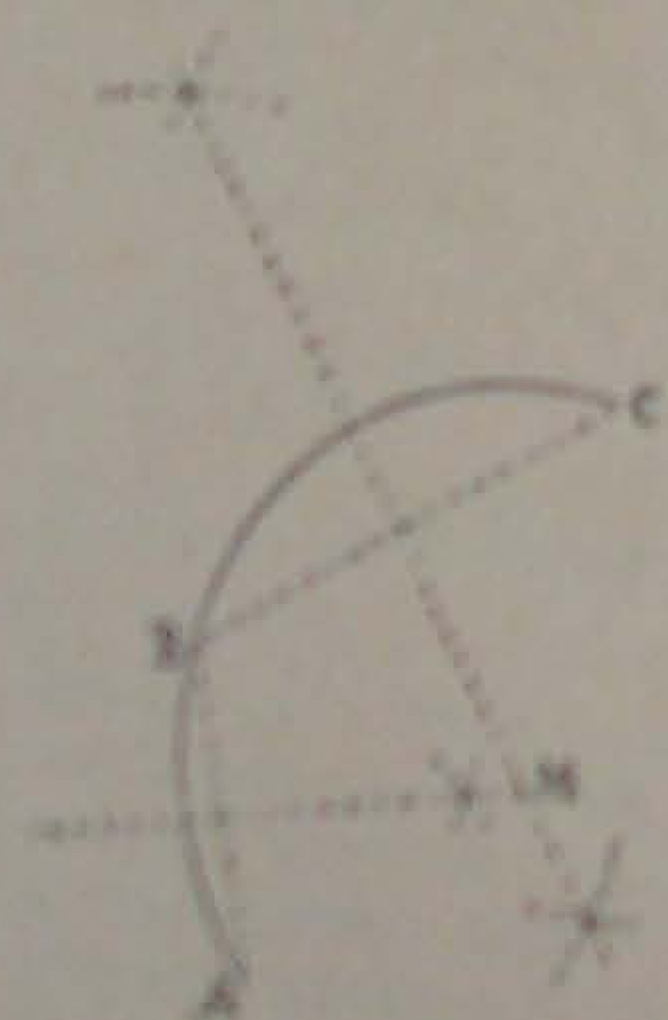


Fig. 258

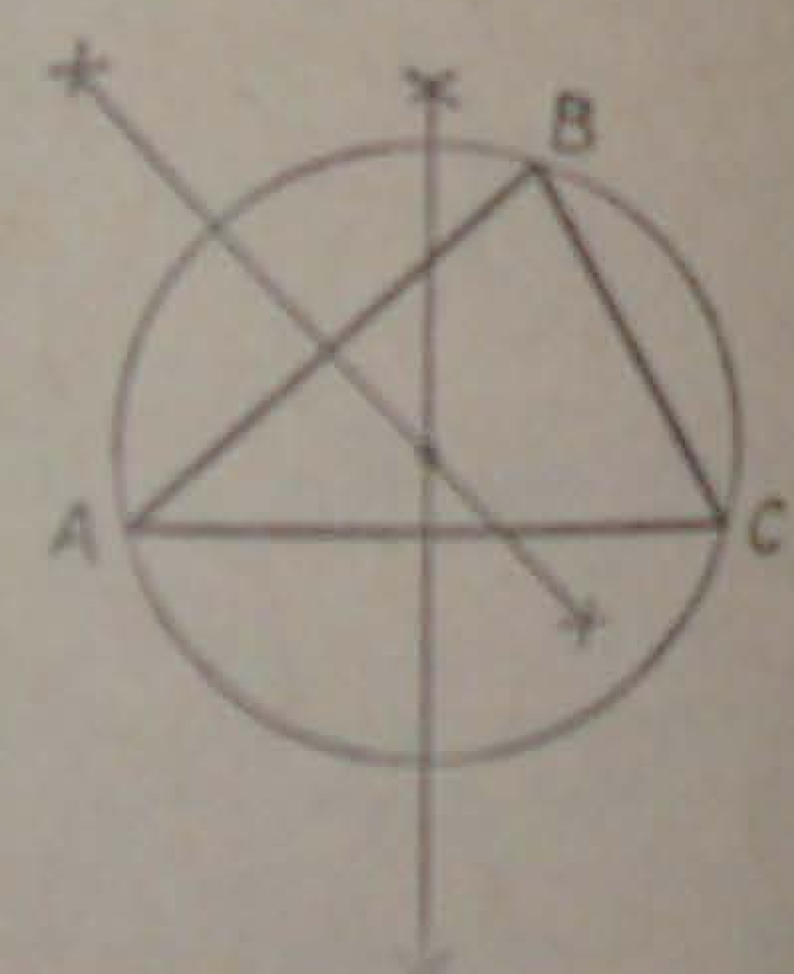


Fig. 259

Basta, agora, proceder, como no problema anterior, pois o centro do arco dado é centro da circunferência única que passa por A, B e C.

Problema 84. — *Circunscrever uma circunferência a um triângulo.*

Seja o triângulo ABC (fig. 259). Como a circunferência pedida deve passar pelos vértices do triângulo dado, que são três pontos não em linha reta, basta-nos proceder como no problema anterior, fazendo passar uma circunferência por A, B e C.

Problema 85. — *Descrever um arco de circunferência igual a um arco dado.*

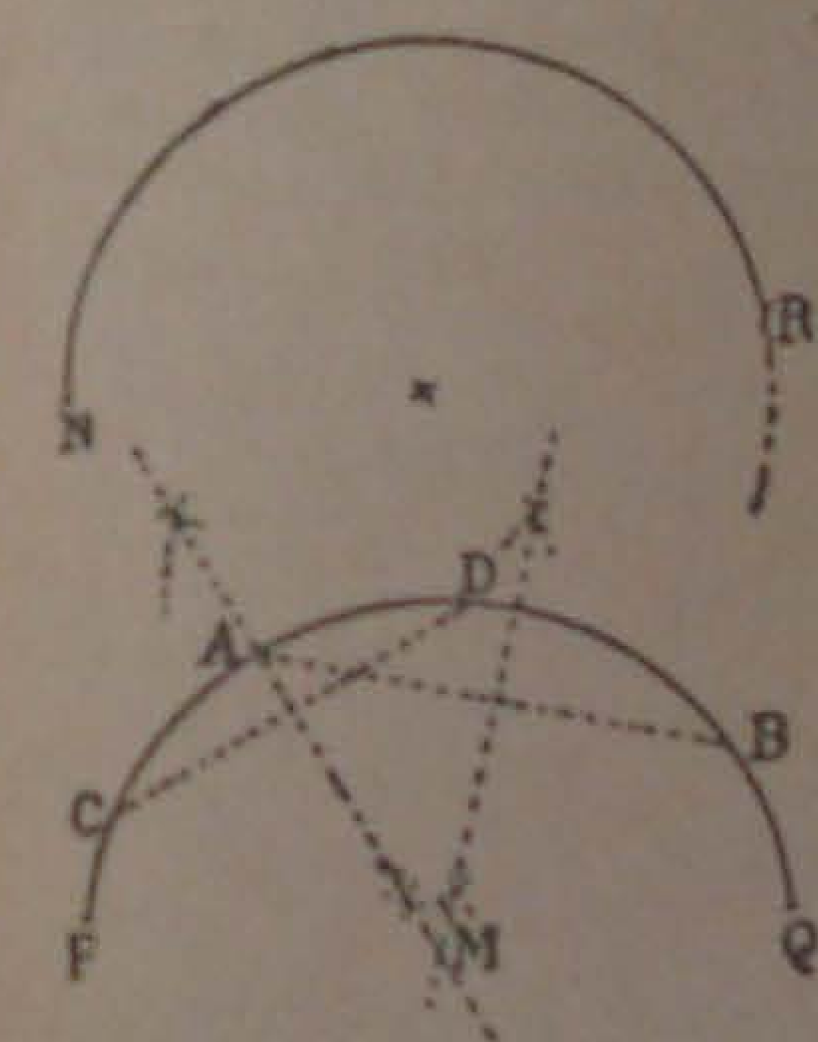


Fig. 260 e 261

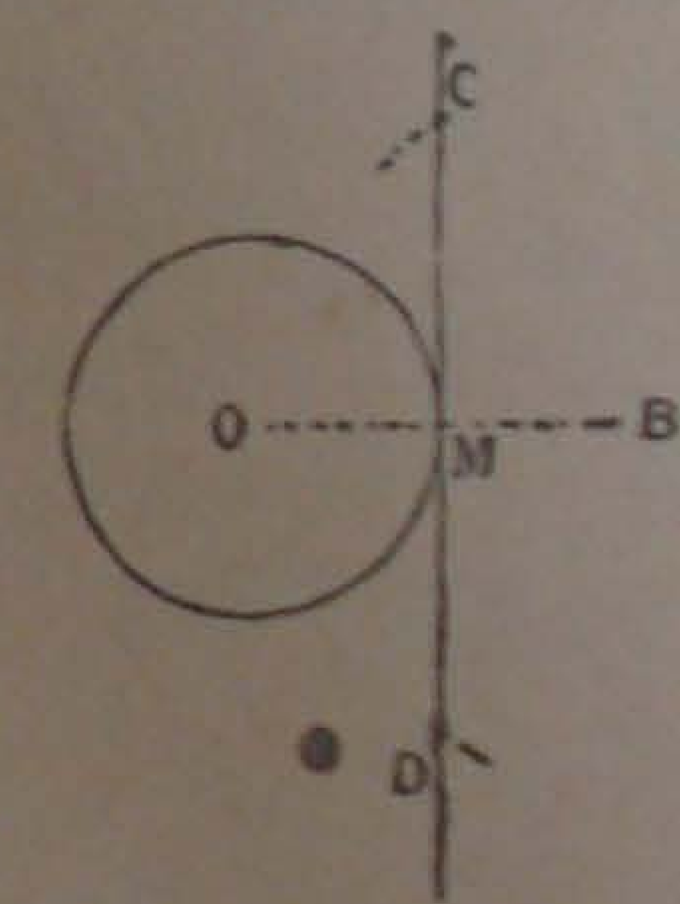


Fig. 262

Seja FQ o arco dado (fig. 260).

Para que dois arcos sejam iguais é preciso:

1.º) que tenham o mesmo raio; 2.º) que sejam subtendidos por cordas iguais. Vamos, por isso, achar o raio do arco FQ, o qual se obtém procurando o centro do mesmo arco. Achado o raio tracemos um arco evidentemente maior do que o arco dado e nele tomemos uma corda *NB* igual à corda *FQ* (fig. 261).

O arco subtendido pela corda *NB* resolve o problema.

Problema 86. — *Traçar uma tangente a uma circunferência num ponto dado.*

Liguemos o centro *O* ao ponto dado *M* (fig. 262). Prolonguemos *OM* de uma distância *MB* = *OM* e depois façamos passar pelo meio de *OB* a perpendicular *CD*, que é a tangente pedida.

Problema 87. — *De um ponto dado fora de uma circunferência, traçar tangentes a esta circunferência.*

Seja traçar as tangentes do ponto *M* à circunferência *O*.

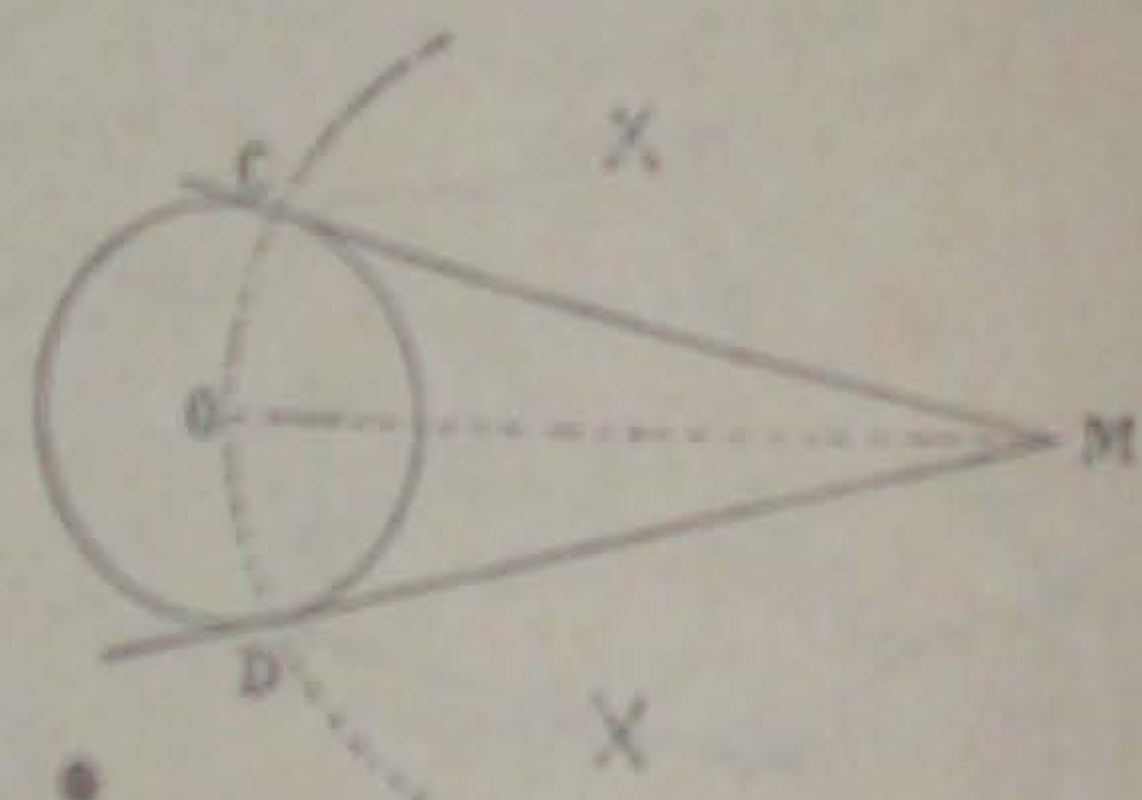


Fig. 263

Liguemos o centro *O* ao ponto *M* e sôbre *OM* (figura 263) como diâmetro, tracemos um arco que corte a circunferência dada em dois pontos *C* e *D*. As retas *CM* e *DM* são as tangentes pedidas.

Problema 88. — *Traçar a tangente a um arco num ponto dado dêsse arco.*

Seja *M* o ponto dado do arco (fig. 264).

Façamos centro nesse ponto e com o mesmo raio arbitrário marquemos sôbre o arco *E* e *F*; tracemos a corda *EF* e, em seguida, a sua mediatriz, a qual passará

por *M*. Finalmente levantemos por *M* uma perpendicular à mediatriz de *EF*. Tal perpendicular é a tangente pedida.

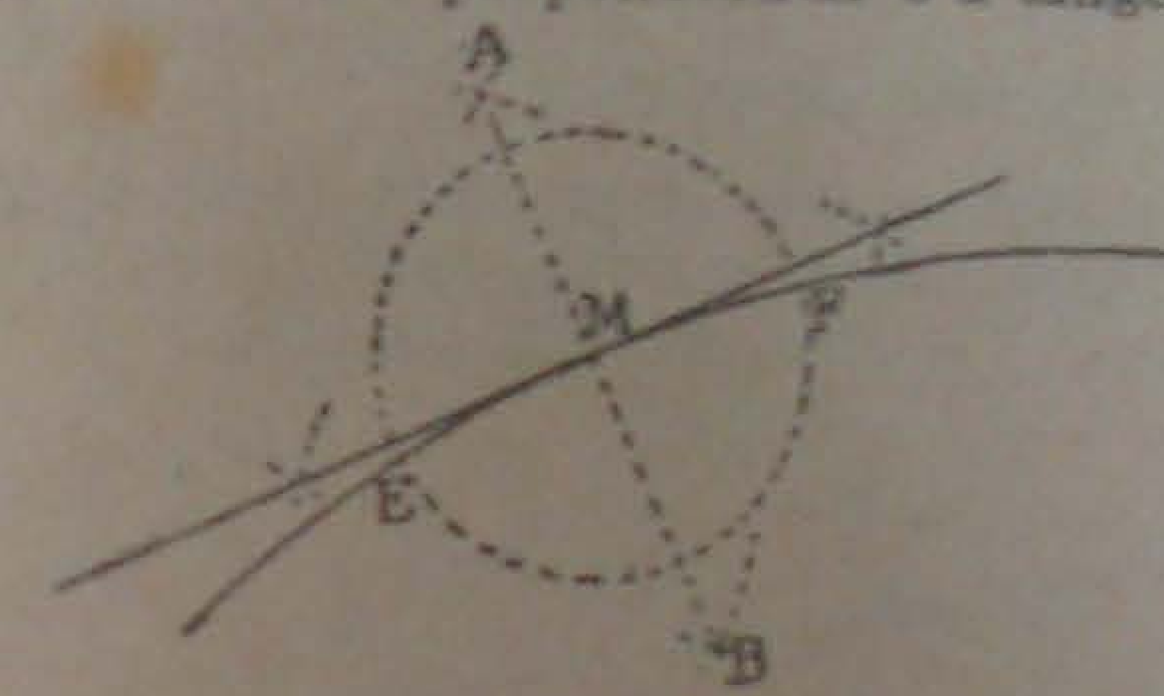


Fig. 264

Problema 89. — *Dadas uma circunferência e uma reta traçar tangentes à mesma circunferência paralelas à reta dada.*

Seja a circunferência de centro *C* (fig. 265) e *AB* a reta.

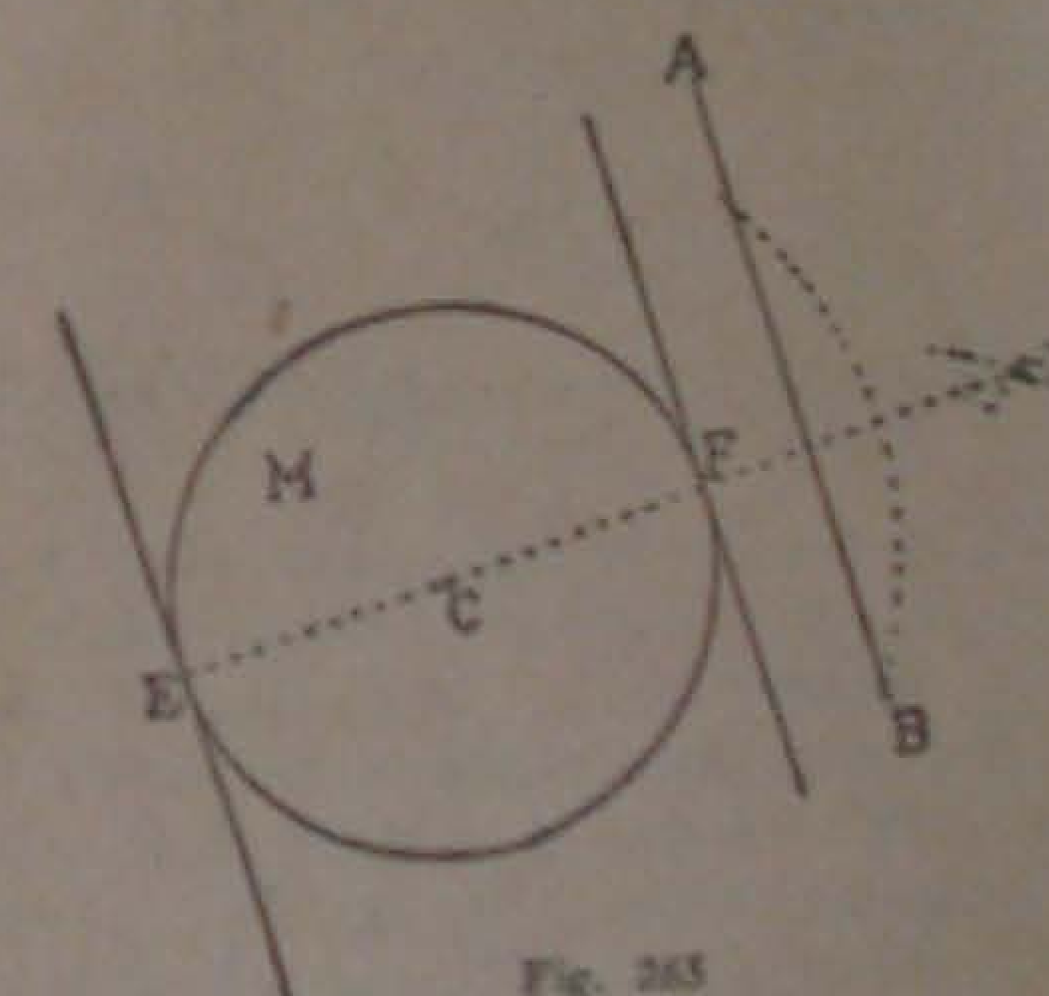


Fig. 265

Do centro *C* tracemos uma perpendicular a *AB*; esta perpendicular determinará na circunferência os pontos *E* e *F* que serão os pontos de contacto das tangentes pedidas.

Estas se obtêm traçando, pelos pontos *E* e *F*, paralelas a *AB*.

Problema 90. — *Traçar as tangentes comuns a duas circunferências.*

1.º) tangentes exteriores.

Façamos passar uma reta pelos centros, *M* e *N*, das duas circunferências (fig. 266), prolongando-a até cortar outra vez, em *E*, a circunferência maior.

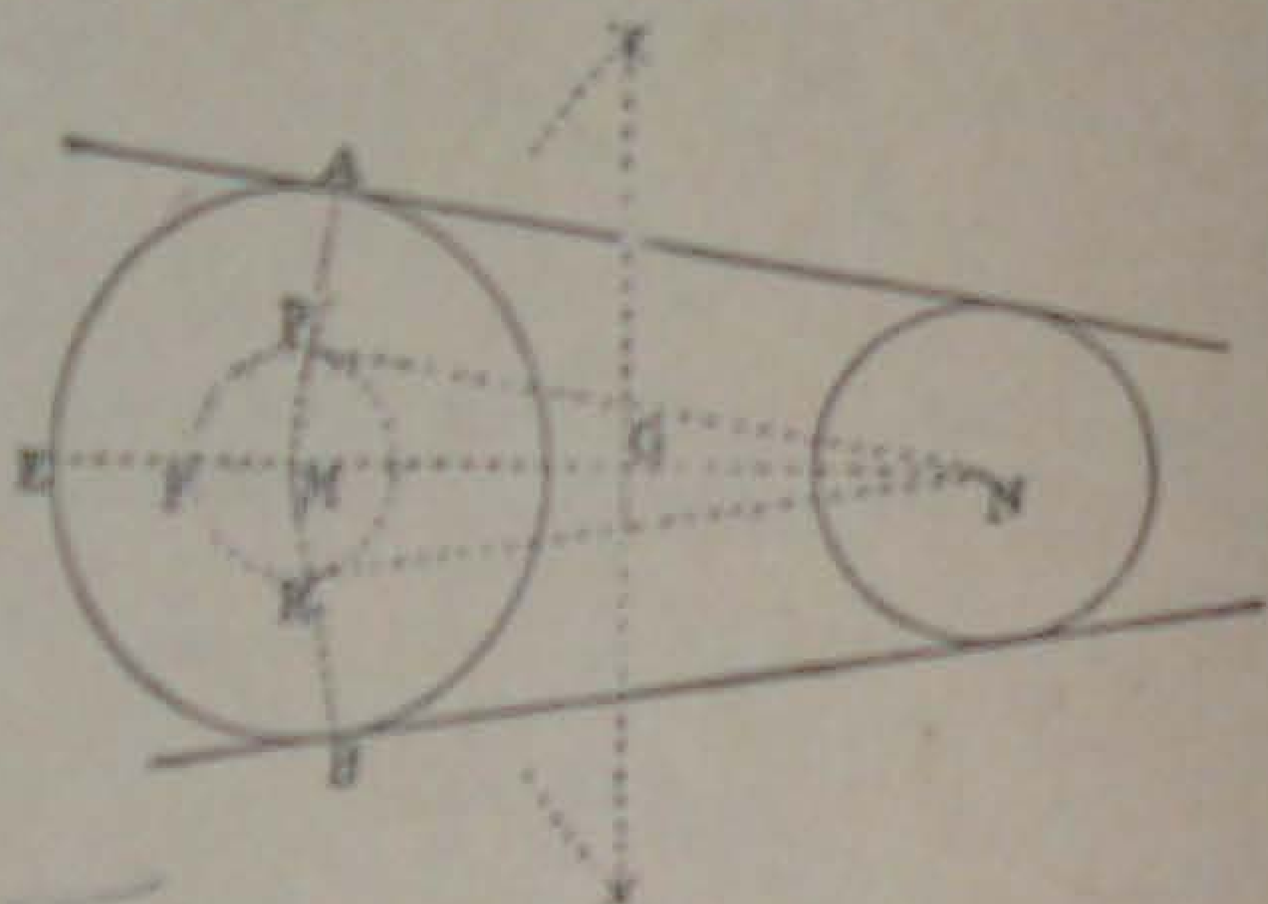


Fig. 266

Reproduzamos em *EF*, a medida do raio da circunferência menor.

Centro em *M* e raio = *MF* descrevamos uma circunferência. Do ponto *N* tracemos as tangentes a esta terceira circunferência (problema n.º 87). *P* e *R* são os pontos de contacto. Em seguida, tracemos os raios *MA* e *MB* da circunferência maior e que passam por *P* e por *R*. Finalmente, das extremidades, *A* e *B*, dêstes raios, tiremos paralelas respectivamente a *NP* e a *NR*. Estas são as tangentes exteriores comuns às duas circunferências dadas.

2.º) tangentes interiores.

Liguemos os centros *A* e *B* (fig. 267) e tracemos os dois raios *AM* e *BN* paralelos mas de sentidos opostos.

Liguemos *M* a *N* por um segmento de reta que cortará *AB* no ponto *C*.

Basta, agora, traçar, do ponto *C*, as tangentes a uma das curvas. Estas tangentes prolongadas além de *C* vão tocar a outra circunferência.

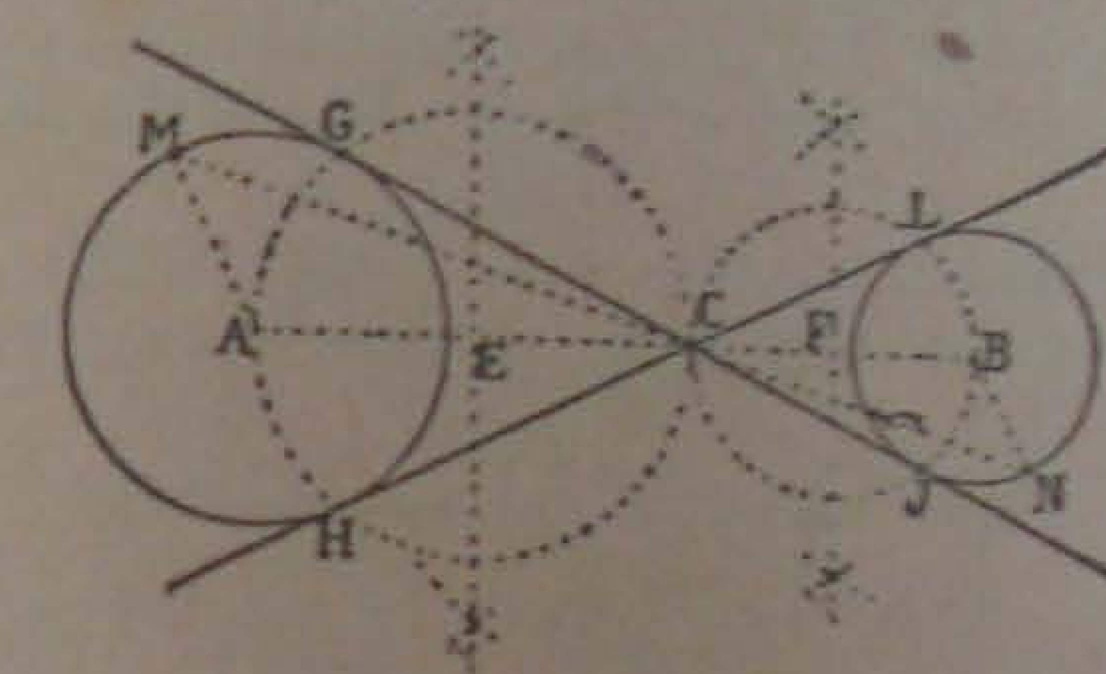


Fig. 267

Problema 91. — *Descrever uma circunferência tangente exteriormente a uma outra em um ponto dado, e que passa por outro ponto, também dado.*

Sejam: *C* a circunferência, *M* o ponto de contacto e *N* o ponto por onde deve passar a circunferência pedida. (fig. 268).

Liguemos *C* e *N* a *M*; prolonguemos *CM* além de *M*. Façamos passar uma perpendicular pelo meio de *MN*; do ponto de intersecção *R*, com raio *RM*, descrevamos uma circunferência, que será tangente à primeira no ponto *M* e passará pelo ponto *N*.

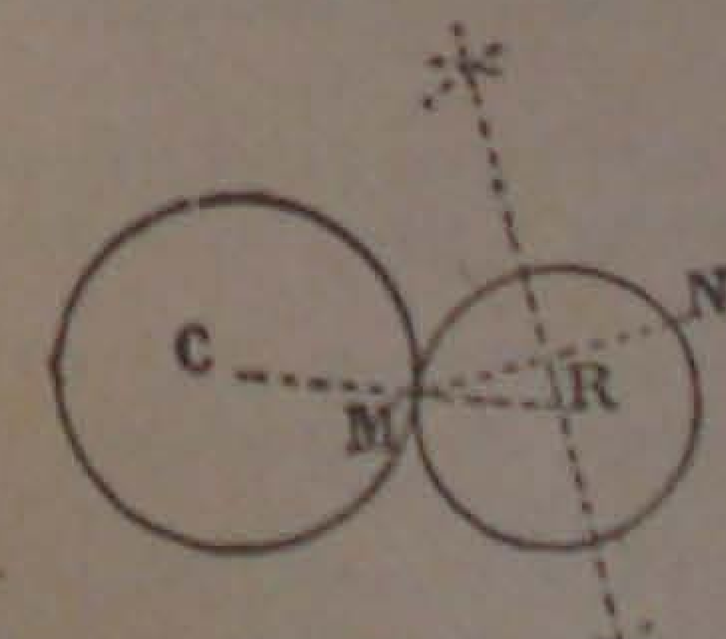


Fig. 268

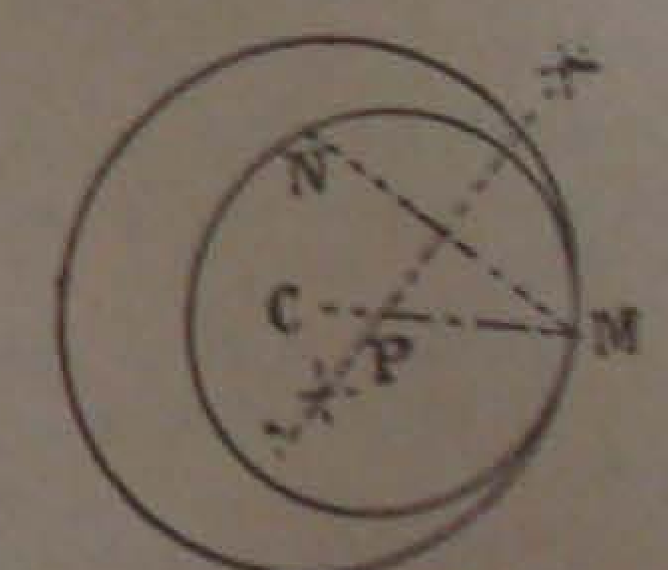


Fig. 269

Problema 92. — *Descrever uma circunferência tangente a uma outra em um ponto dado, e passando por um ponto situado no interior da circunferência.*

Tracemos o raio CM (fig. 269) e unamos entre si os pontos M e N; façamos passar pelo meio de MN uma perpendicular e do ponto de intersecção P, como centro, com raio igual a PM, descrevamos uma circunferência que será tangente à primeira no ponto dado M e passará pelo ponto N.

Problema 93. — *Descrever uma circunferência que passe por um ponto e seja tangente a uma reta em um ponto dado.*

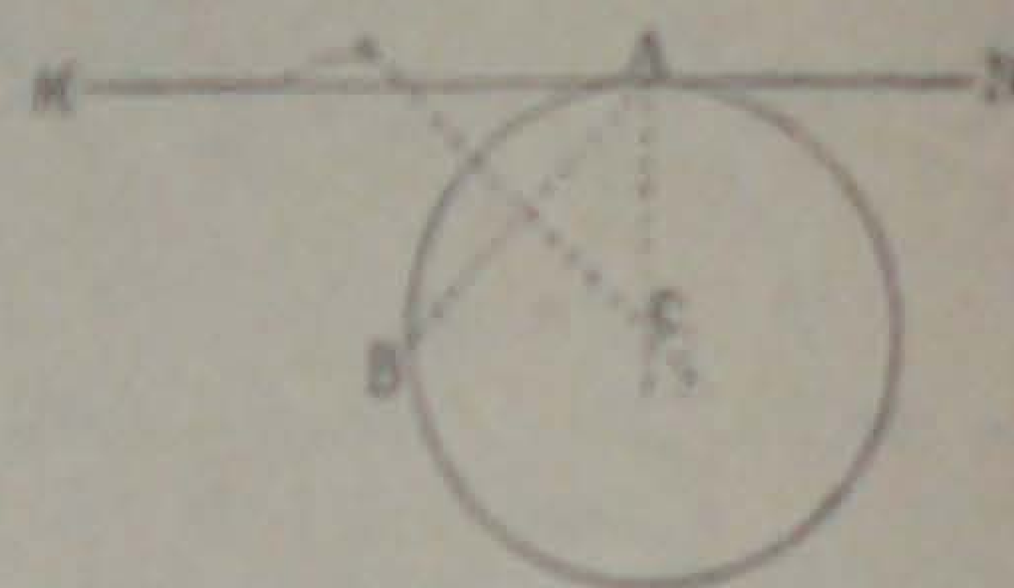


Fig. 270

Seja MN a reta, A o ponto de contacto, e B o outro ponto (fig. 270) pelo qual deve passar a circunferência.

Unamos o ponto A ao ponto B e façamos passar pelo meio uma perpendicular.

Tiremos do ponto A uma perpendicular a MN; esta última cortará a que passa pelo meio de AB, determinando o ponto C, que será o centro da circunferência desejada.

Problema 94. — *Descrever uma circunferência tangente a uma reta e que passa por dois pontos fora da reta.*

Sejam A e C os pontos fora da reta MN (fig. 271).

Tracemos CA e prolonguemos até determinar o ponto E.

Descrevamos a semi-circunferência que tem EC para diâmetro.

Do ponto A levantemos uma perpendicular a EC até determinar o ponto F na semi-circunferência.

Centro em E e raio igual a EF descrevamos o arco FG.

De G levantemos uma perpendicular a MN e pelo meio de AC façamos passar outra perpendicular que se encontrará com a primeira no ponto D, centro da circunferência pedida.

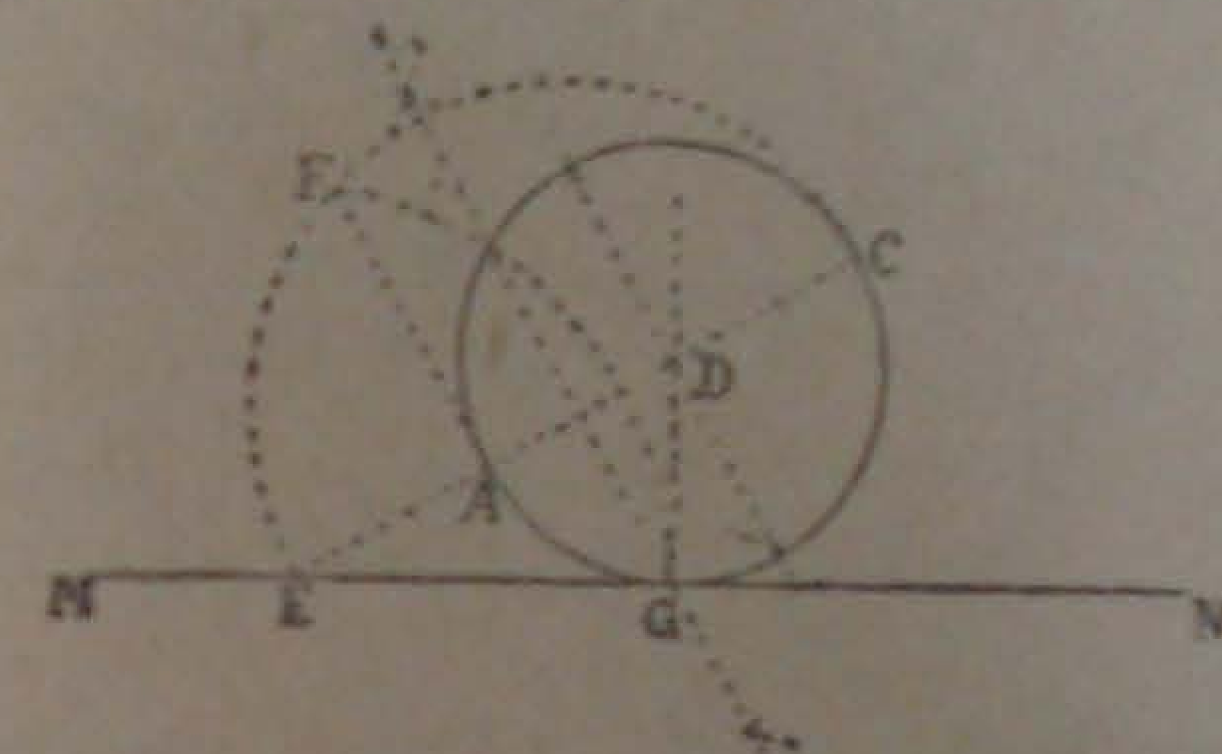


Fig. 271

Problema 95. — *Descrever uma circunferência tangente a outra e a uma reta dadas.*

Seja AB a reta e M a circunferência (fig. 272).

Do centro O tracemos um raio que prolongado corte a reta dada, e façamos passar uma perpendicular ao mesmo raio na sua extremidade P, prolongando tal perpendicular até marcar o ponto N na reta AB.

Tracemos a bissetriz do ângulo PNA a qual cortará OD no ponto E.

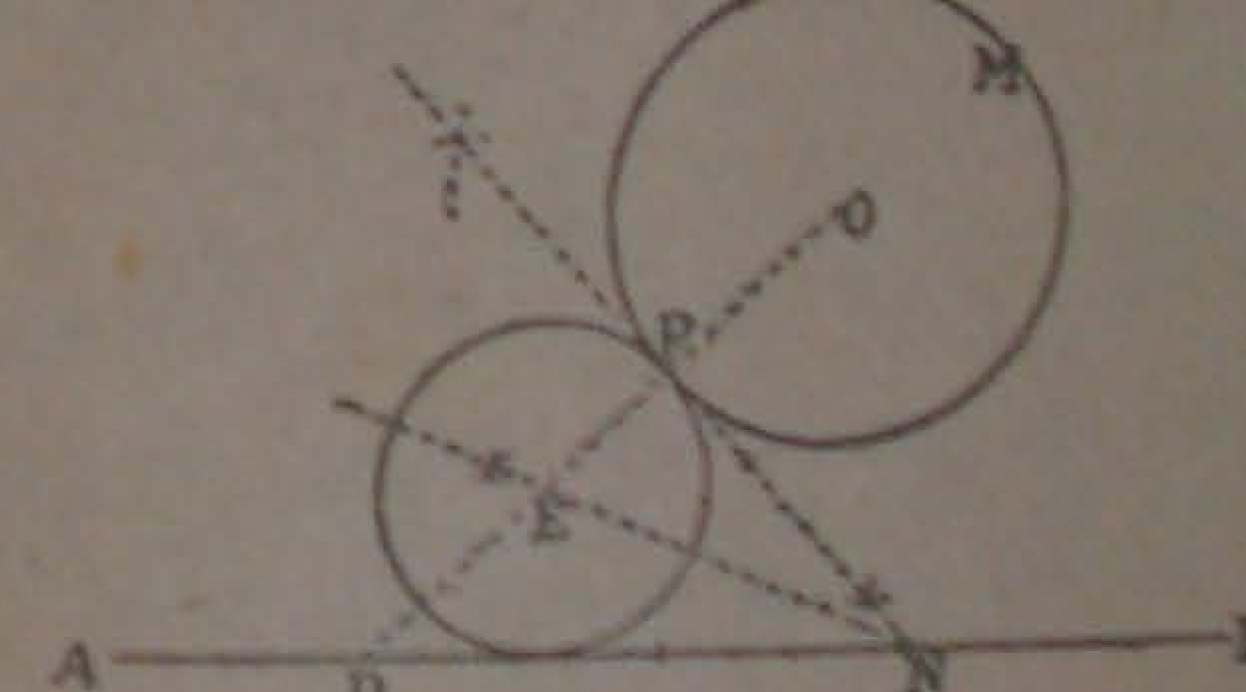


Fig. 272

Descrevamos, com o raio EP e centro em E, a circunferência pedida.

Problema 96. — *Traçar as circunferências inscrita e ex-inscritas (*) num triângulo.*

Seja o triângulo *MNO* (fig. 273) cujos lados prolongamos nos dois sentidos.

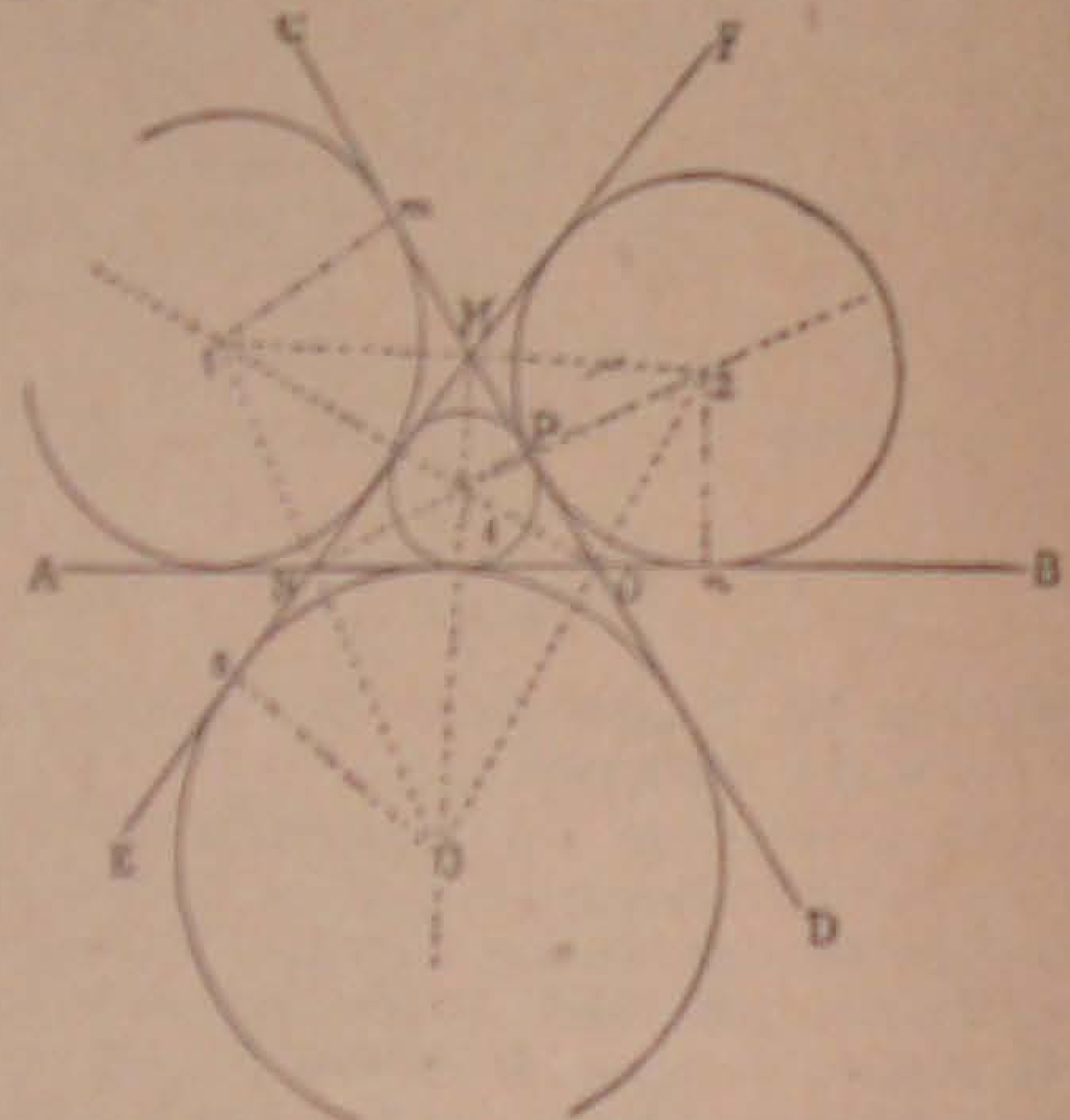


Fig. 273

Tracemos as bissetrizes dos ângulos do triângulo, prolongando-as e também as de três dos ângulos externos do mesmo triângulo, por exemplo, de *FMO*, *NOD* e *MNA*.

Estas bissetrizes prolongadas, além do vértice, servem de bissetrizes dos outros ângulos externos opostos aos primeiros.

As bissetrizes internas encontram-se num ponto (4) que é o centro do circulo inscrito e cujo raio é 4 *P* (perpendicular traçada de (4) sôbre o lado *MO*).

(*) Circunferência ex-inscrita num triângulo é a circunferência tangente a um lado do triângulo e aos prolongamentos dos outros dois lados. Para cada triângulo há três circunferências ex-inscritas.

Cada bissetriz interna se encontra com as externas dos outros ângulos nos pontos 1, 2 e 3 que são os centros das circunferências ex-inscritas.

Os raios destas são, respectivamente, as perpendiculares $1m$, $2n$ e $3s$.

Problema 97. — *Descrever diversas circunferências tangentes entre si e a duas retas dadas.*

Tracemos a bissetriz do ângulo *MVN* formado pelas retas dadas (fig. 274).

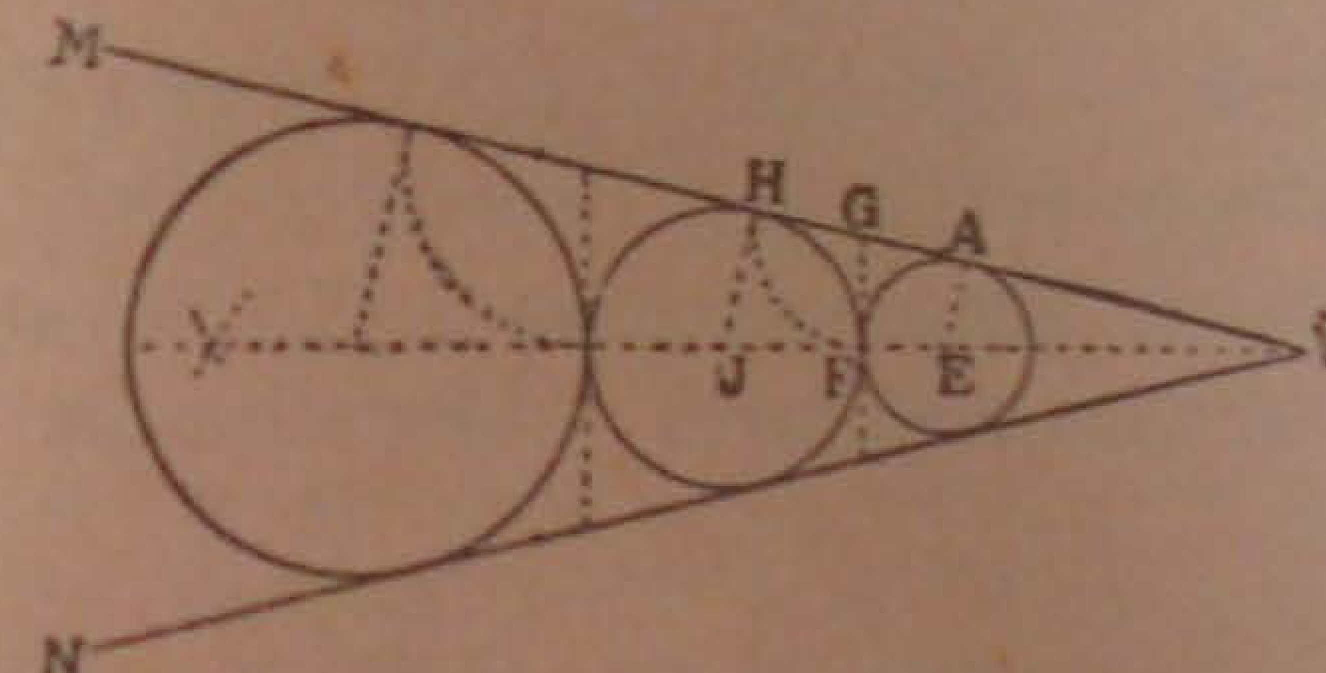


Fig. 274

Tomemos o ponto *A* da reta *MV* como primeiro ponto de contacto e por êle levantemos uma perpendicular até determinar o ponto *E* na bissetriz.

Com o raio *EA* e centro em *E* descrevamos a primeira circunferência.

Pelo ponto *F* façamos passar uma perpendicular à bissetriz e de G, como centro e raio *GF* descrevamos o arco *FH*.

Deste último ponto *H* levantemos outra perpendicular a *MV* até determinar o ponto *J* na bissetriz.

Centro em *J* e raio *JF* descrevamos a segunda circunferência tangente à primeira e às duas retas.

Prosseguindo do mesmo modo, obteremos tantas circunferências quantas quisermos, nas condições do problema.

Observação: Se as retas dadas fossem paralelas, as circunferências seriam todas iguais e ficariam os centros sôbre uma paralela equidistante das duas.

CAPÍTULO VIII

POLÍGONOS

Polígonos. — Denominações — Soma dos ângulos internos do polígono convexo — Medida do ângulo interno — Construção de polígonos regulares — Problemas.

Os polígonos têm nomes especiais conforme o número de lados; assim,

um polígono de
- 5 lados — **pentágono.**
- 6 lados — **hexágono.**
- 7 lados — **heptágono.**
- 8 lados — **octógono.**
- 9 lados — **eneágono.**
- 10 lados — **decágono.**
- 11 lados — **hendecágono.**
- 12 lados — **dodecágono.**
- 15 lados — **pentadecágono.**
- 20 lados — **icoságono.**

Só trataremos, por enquanto, dos polígonos simples convexos.

Soma dos ângulos internos de um polígono. — Já sabemos que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois retos. Vamos aplicar esta propriedade para determinar a soma dos ângulos internos de um polígono convexo qualquer.

Tomemos, para isso, um pentágono convexo (fig. 276). Marquemos um ponto *P*, no seu interior e liguemo-lo a todos os vértices do polígono. Formam-se, então, 5 triângulos, isto é, tantos triângulos quantos são os lados. Os ângulos internos dêsses 5 triângulos somam 5×2 ou 10 retos. Si dêstes 10 retos subtrairmos os ângulos em torno de P, o que restar será a soma dos ângulos do pentágono. Ora, os ângulos consecutivos formados em torno de um ponto somam 4 retos. Logo, a soma dos ângulos do pentágono é igual a 10—4 ou 6 ângulos retos.

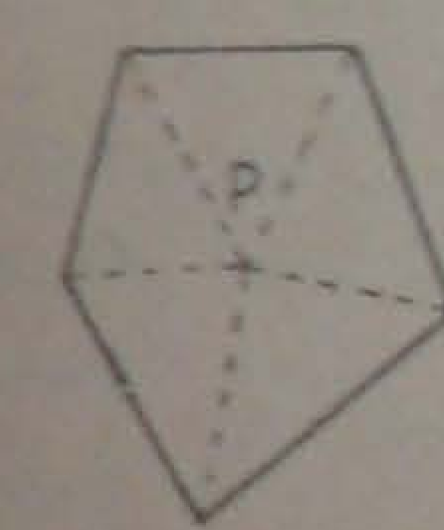


Fig. 276

O que fizemos para o pentágono, poderemos fazer para qualquer polígono e teremos sempre um número de retos igual ao dôbro do número de lados menos 4.

Concluímos, pois, que a *soma dos ângulos internos de um polígono convexo é, em ângulos retos, igual ao dôbro do número de lados menos quatro.*

Medida do ângulo de um polígono regular convexo. — Como no polígono regular todos os ângulos são iguais entre si, podemos agora calcular a medida de cada um dêstes ângulos: bastará, de acôrdo com a lei acima, determinar a soma de todos e depois dividir pelo número dêles.

Exemplifiquemos com o pentágono: a soma é 6 retos ou 540 graus; cada ângulo mede, portanto $\frac{540}{5}$ ou 108 graus.

Damos abaixo uma tabela das medidas do ângulo interno de alguns polígonos regulares:

Triângulo	60°
Quadrado	90°
Pentágono	108°
Hexágono	120°
Octógono	135°
Eneágono	140°
Decágono	144°
Dodecágono	150°
Pentadecágono	156°
Polígono de 16 lados	157°,5
" " 18 "	160°
Icoságono	162°

Apótema. — Já vimos que todo polígono regular pode ser inscrito numa circunferência. O centro desta circunferência é também chamado *centro* do polígono.

Todos os lados do polígono regular distam igualmente do centro por serem cordas iguais da mesma circunferência. A distância constante, *OM* (fig. 277), do centro a qualquer lado do polígono regular chama-se *apótema* do polígono.

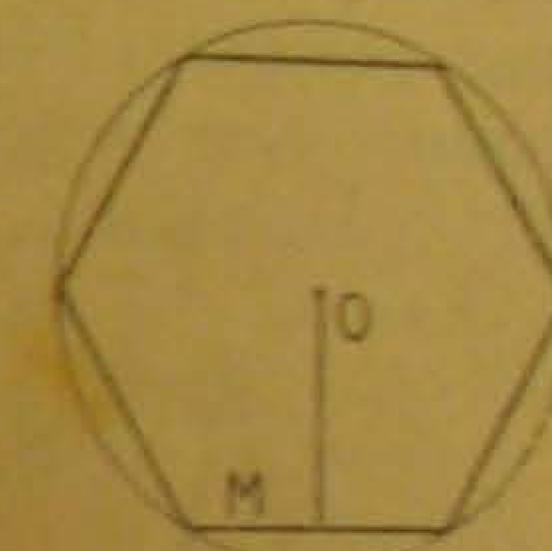


Fig. 277

Para obter o apótema de um polígono, basta, portanto, tirar uma perpendicular do centro sôbre qualquer lado do mesmo.

Construção de polígonos regulares convexos. — Para construir um polígono regular convexo de n lados, dividimos a circunferência em n partes iguais e ligamos consecutivamente os pontos de divisão.

Com efeito, é facil demonstrar que o polígono assim construido é regular: os lados são todos iguais entre si, como cordas que subtendem arcos iguais na mesma circunferência; os ângulos também são iguais entre si por estarem inscritos em arcos iguais. Assim, si dividirmos a circunferência em 8 partes iguais e ligarmos consecutivamente os pontos de divisão, o polígono resultante será um octógono regular.

O problema da construção dos polígonos regulares convexos se reduz pois ao da divisão da circunferência em partes iguais.

Construção de polígonos regulares estrelados. — Dividamos uma circunferência em n partes iguais e liguemos os pontos de divisão de 2 em 2, de 3 em

3, de 4 em 4 e assim por diante; se a linha poligonal fechar depois de passar por todos os pontos, obteremos (pelos mesmos motivos dados acima) um polígono regular. Desta vez, porém, o polígono é entrelaçado e tem o nome de *polígono regular estrelado*.

Fig. 278

Dividamos, por exemplo, a circunferência em 5 partes iguais e liguemos os pontos de divisão de 2 em 2. Formaremos um *pentágono regular estrelado* (fig. 278). Si procurássemos ligar os pontos de divisão de 3 em 3, encontraríamos o mesmo polígono e si ligássemos de 4 em 4, obteríamos o pentágono regular convexo. Concluímos, então, que só há uma espécie de pentágono estrelado.

Vejamos, agora, se podemos formar hexágono estrelado: ligando os pontos de divisão de 2 em 2, resultará um triângulo; ligando de 3 em 3, a figura se reduzirá a um diâmetro. É inútil ligar de 4 em 4, porque isto corresponderia a ligar de 2 em 2 no sentido contrário e voltaríamos, ainda, ao triângulo. Finalmente, também não adiantaria ligar de 5 em 5, pois iríamos obter o hexágono convexo. Chegamos, então, à conclusão de que *não há hexágono estrelado*.

Procedendo da mesma forma, relativamente à circunferência dividida em sete partes iguais, verificaríamos que há duas espécies de heptágonos

estrelados: um que se obtém ligando os pontos de divisão de 2 em 2 e outro quando se ligam êsses pontos de 3 em 3 (figs. 279 e 280).

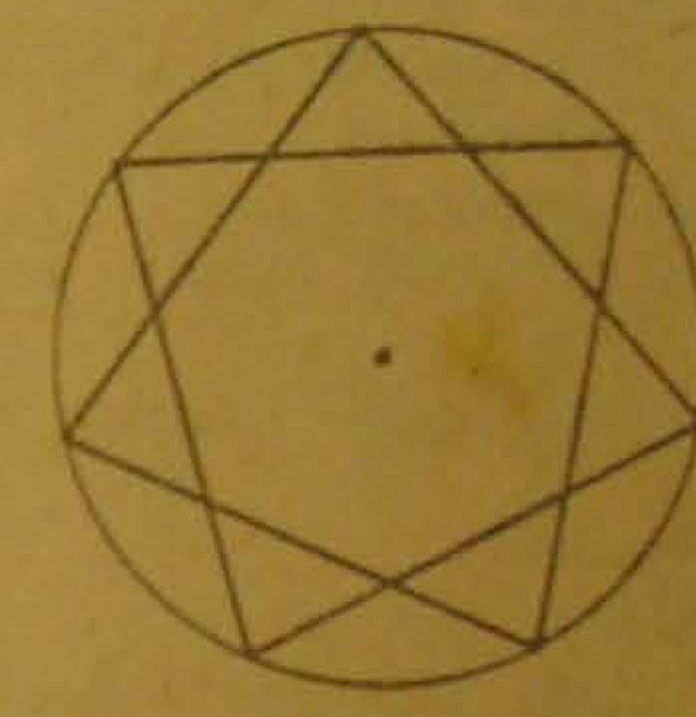


Fig. 279

Fig. 280

De um modo geral, chegamos ao resultado seguinte: *há tantos polígonos regulares de* n *lados quantos forem os números primos com* n *menores do que* $\frac{n}{2}$; dêsses polígonos um é convexo e os demais são estrelados.

Exemplifiquemos: só há duas espécies de octógonos regulares, um convexo e outro estrelado, porque só há dois números primos com 10 menores que 5 : 1 e 3.

Exercício — *Quantas espécies de polígonos regulares de 16 lados há?*

Os números primos com 16 e menores do que a metade de 16 são quatro, a saber:

1, 3, 5, 7,

Há, por conseguinte, quatro espécies de polígonos regulares de 16 lados, sendo um convexo e 3 estrelados.

QUESTIONÁRIO

1. Quais os polígonos que têm nomes especiais?
2. Enuncie a lei que permite calcular a soma dos ângulos internos de um polígono convexo.
3. Como se pode calcular o valor de um ângulo interno num polígono regular convexo?
4. Que é apótema no polígono regular?
5. Como se pode construir um polígono regular convexo?
6. Como se pode construir um polígono regular estrelado?
7. Quantos pentágonos regulares há?
8. Existe algum hexágono regular?
9. Qual é a lei que permite dizer quantas espécies de polígonos regulares de n lados há?
10. Quantas espécies de decágonos regulares há? e quantos icoságonos? Porque?

PROBLEMAS

Problema 98. — *Construir um ângulo dado com o transferidor.*

Tracemos uma reta AB, e marquemos sôbre ela o ponto M, que vai ser o vértice do ângulo.

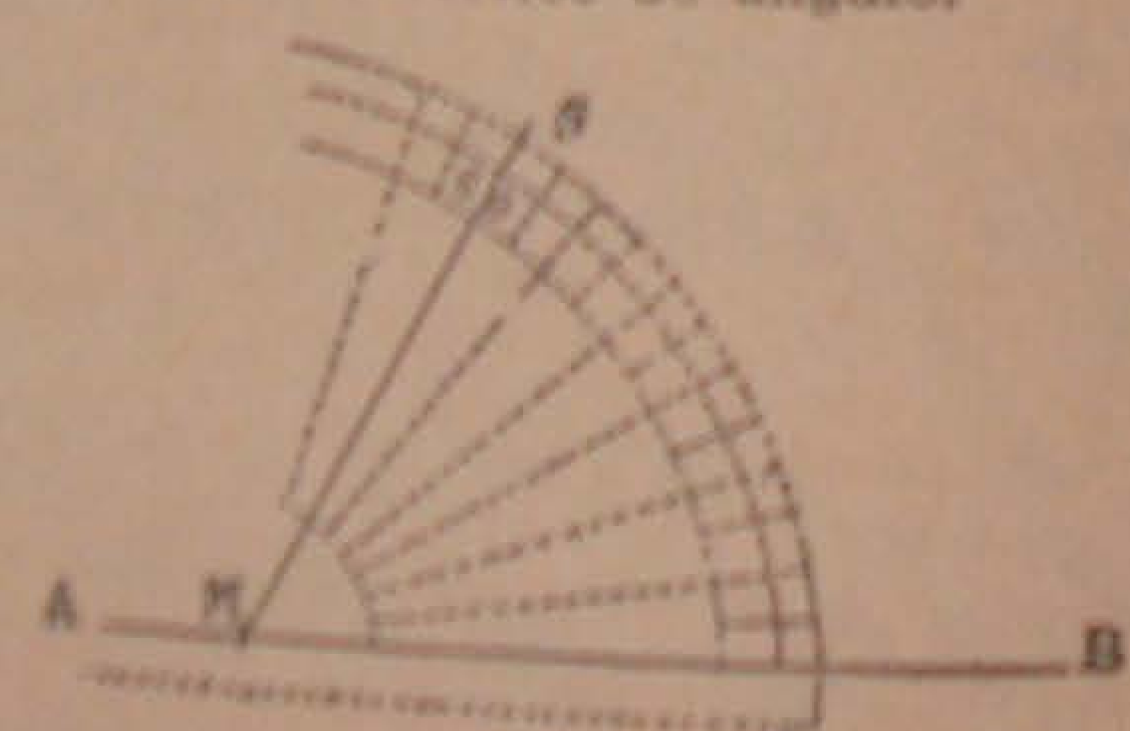


Fig. 281

Escolhamos a semi-reta MB para um lado do ângulo. Coloquemos o transferidor de modo que a linha de fé

coincida com a reta AB, e o centro do transferidor caia em M, procuremos no limbo a medida do ângulo e marquemos um ponto (N) defronte do limite dessa medida.

Ligando êsse ponto ao vértice escolhido, M, teremos o ângulo pedido NMB.

Exemplo: a fig. 281 mostra a construção do ângulo NMB de 60°.

Problema 99. — *Traçar com o compasso e a régua um ângulo de 60°.*

Da origem V de uma semi-reta como centro e com um raio arbitrário, descrevamos um arco de modo que determine o ponto M (fig. 282) sôbre a semi-reta.

Façamos centro nesse ponto e com o mesmo raio determinemos o ponto N sôbre o arco.

Liguemos V a N e formaremos o ângulo NVM de 60°

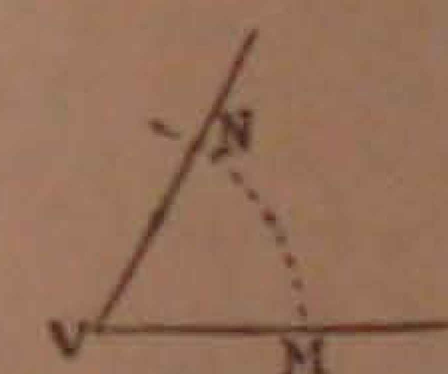


Fig. 282

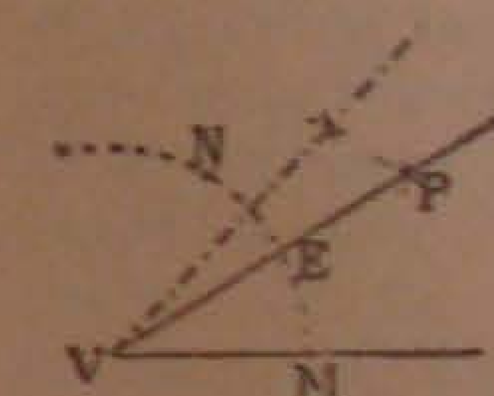


Fig. 283

Problema 99. — *Traçar com o compasso e a régua um ângulo de 30°, de 15° e de 45°.*

Para obter o ângulo de 30° traçamos, como no problema anterior a ângulo de 60° e dividimo-lo ao meio pela bissetriz.

Para obter o ângulo de 15° dividimos ao meio o de 30°.

Finalmente o ângulo de 45° obtém-se traçando a bissetriz do ângulo reto; ou, ainda, (fig. 283) dividindo ao meio o ângulo de 60° e somando uma metade deste com a metade da outra metade ($30 + 15° = 45°$).

Problema 100. — *Traçar com a régua e o compasso um ângulo de 120°.*

Basta proceder como no problema 99 e aplicar sôbre o arco duas vezes, consecutivamente e a partir de M, o mesmo raio (fig. 284).

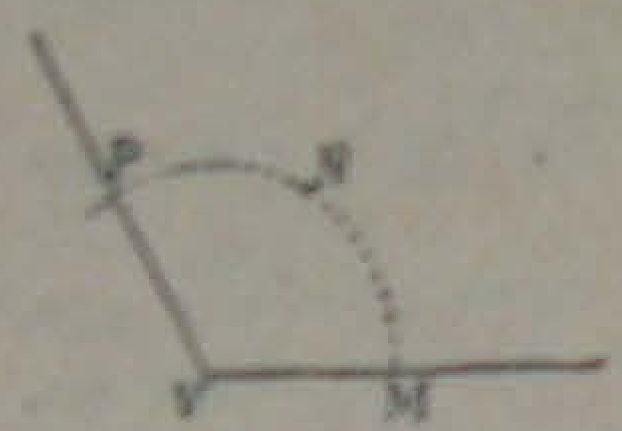


Fig. 284

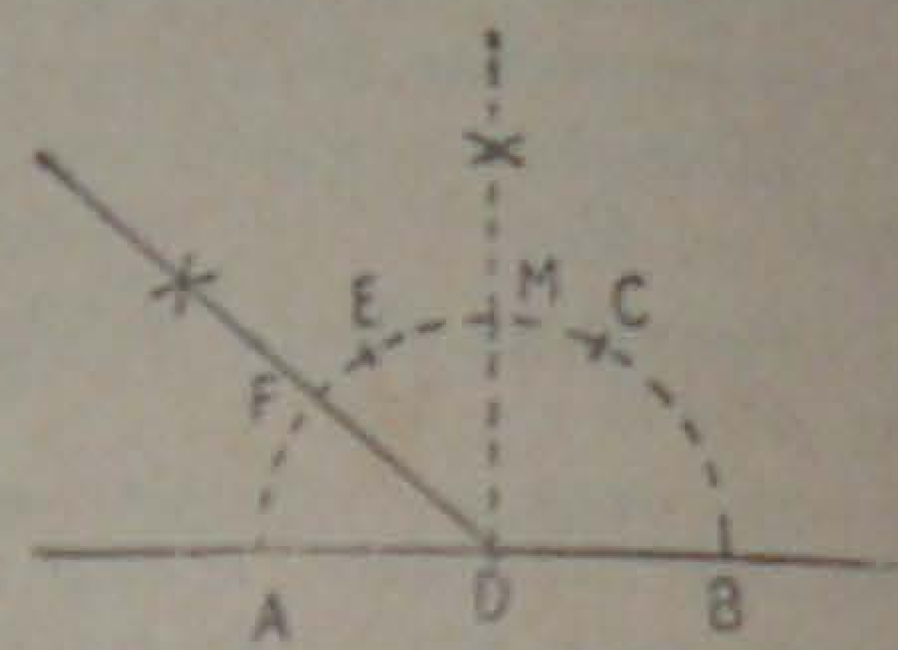


Fig. 285

Problema 101. — *Traçar com o compasso e a régua um ângulo de 135°.*

De um ponto D de uma reta e com um raio arbitrário descrevamos uma semi-circunferência (fig. 285)

Com o mesmo raio, determinemos de B, o ponto C e dêste, o ponto E. Dividamos ao meio o arco EC. O arco MB mede 90° Se, agora, dividirmos o arco MA ao meio e ligarmos este meio, F, ao ponto D, teremos o ângulo FDB de 135°.

Problema 102. — *Traçar com o compasso e a régua um ângulo de 150°.*

Façamos centro num ponto V de uma reta e com um raio arbitrário tracemos uma semi-circunferência (figura 286).

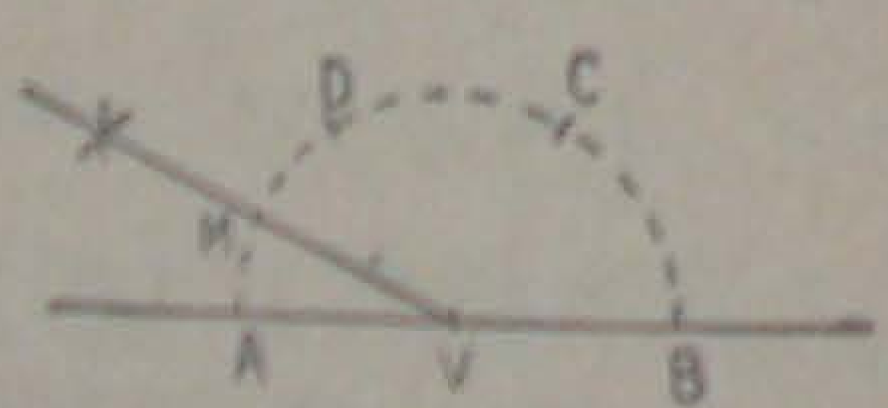


Fig. 286

Apliquemos êsse mesmo raio duas vezes sôbre a circunferência a partir de B. Determina-se, assim, o ponto

D. Em seguida, dividamos o arco DA ao meio. Ligando o meio M do arco DA ao ponto V, temos o ângulo MVB de 150°.

Problema 103. — *Inscrever um quadrado em um círculo.*

Tracemos um diâmetro qualquer AB (fig. 287); tracemos um segundo diâmetro CD perpendicular ao primeiro; as extremidades A, C, B, D, dêsses diâmetros dividem a circunferência em quatro partes iguais.

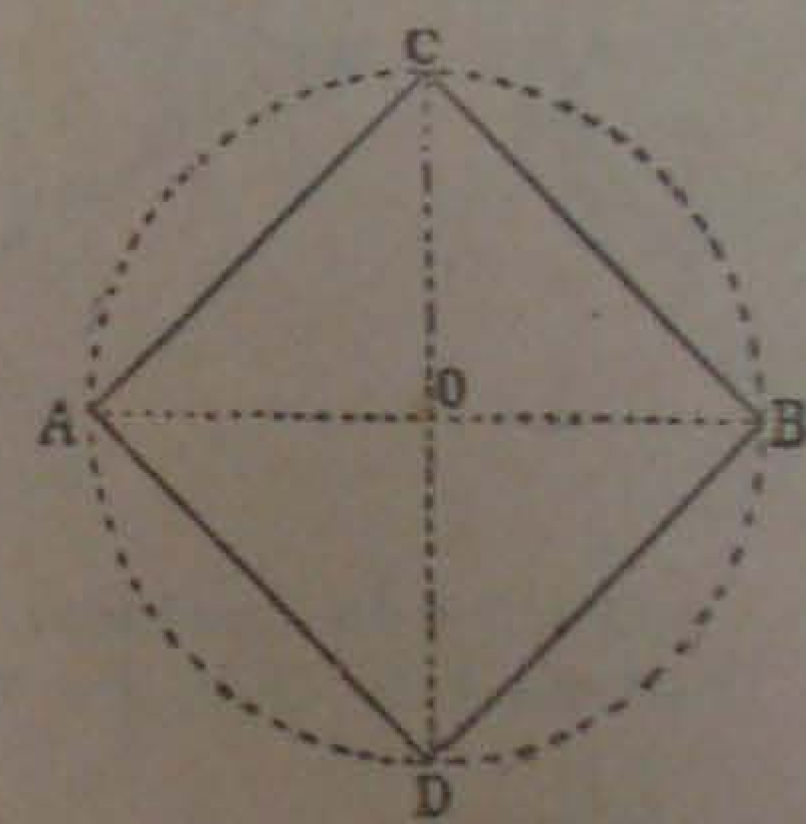


Fig. 287

Ligando-os consecutivamente obtemos o quadrado inscrito.

Observação: — O lado do quadrado inscrito na circunferência é igual ao raio multiplicado pela raiz quadrada de 2, isto é, $l = R\sqrt{2}$, ou, ainda, substituindo $\sqrt{2}$ por 1,4142,

$$l = 1{,}4142 \times R.$$

Quanto ao apótema, basta olhar a figura para ver que é metade do lado.

Problema 104. — *Inscrever um hexágono regular e um triângulo equilátero em um círculo.*

1.° Hexágono regular:

A divisão da circunferência em seis partes iguais é simples: é bastante aplicar consecutivamente, o próprio raio sôbre a circunferência. Ligando os pontos de divisão temos o hexágono regular convexo inscrito na circunferência (fig. 288).

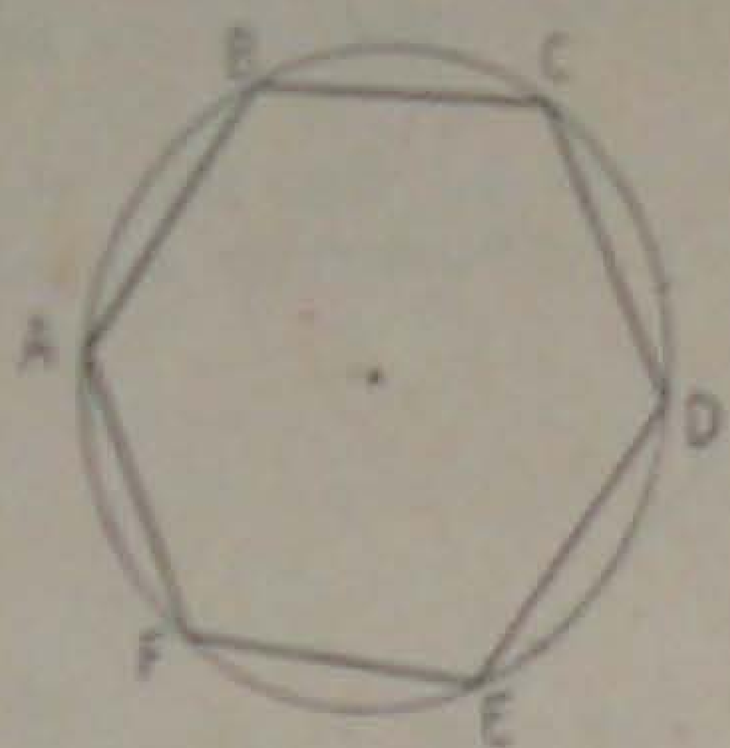


Fig. 288

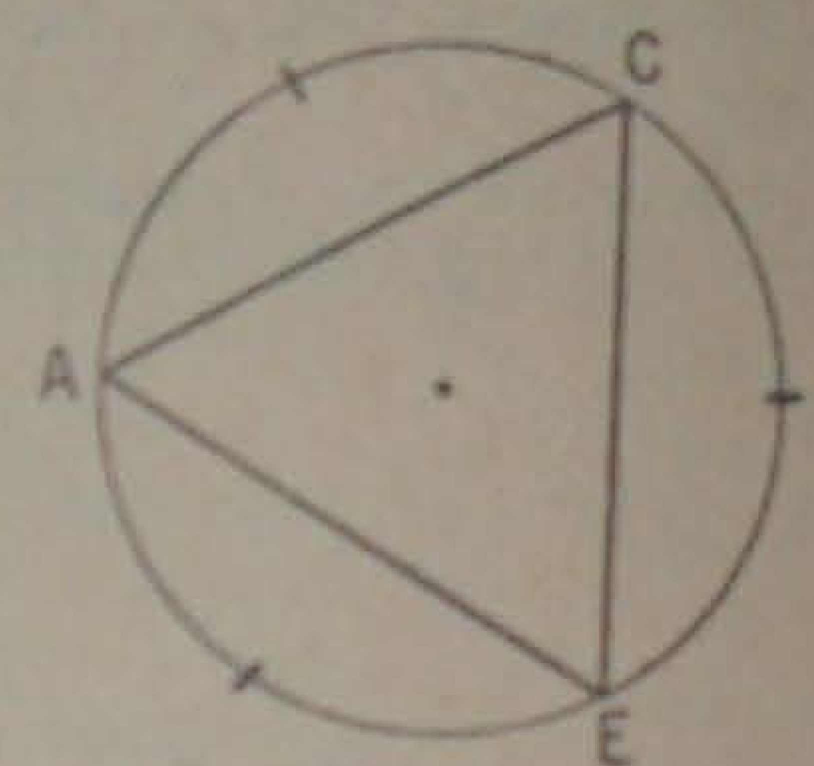


Fig. 289

Observações: — O lado do hexágono inscrito numa circunferência é igual ao raio. Não há hexágono estrelado.

2) Triângulo equilátero:

Para inscrevermos em um circulo um triângulo equilátero, dividimos a circunferência em seis partes e ligamos alternadamente os pontos de divisão; assim, por exemplo: liguemos os pontos *A*, *C* e *E* da figura 289 e acharemos o triângulo equilátero inscrito no circulo.

Observações I — O lado do triângulo equilátero inscrito na circunferência é igual ao raio multiplicado pela raiz quadrada de 3

$$l = R\sqrt{3}$$

ou, ainda, sendo $\sqrt{3} = 1{,}732$

$$l = 1{,}732 \times R.$$

II. — A altura é igual a três meios do raio.

III. — O apótema é igual à metade do raio.

Problema 105. — *Inscrever em um circulo um pentágono regular convexo.*

Tracemos um diâmetro *AB* (fig. 290). Determinemos o meio *M*, da semi-circunferência *AMB*.

Tomemos o meio, *P*, do raio *OA*. Do ponto *P* como centro e com o raio igual a *MP* determinemos o ponto *L*, o qual, ligado ao ponto *M* nos dá o lado do pentágono regular inscrito no circulo *O*.

Apliquemos sôbre a circunferência, a partir de *B*, duas vezes a medida *LM* para um e para outro lado; liguemos consecutivamente os pontos de divisão da circunferência e teremos o pentágono.

Pentágono estrelado. — Podemos traçar um pentágono regular estrelado, o qual se obtém ligando alternadamente os pontos da divisão da circunferência em 5 partes iguais. (Veja fig. 278).

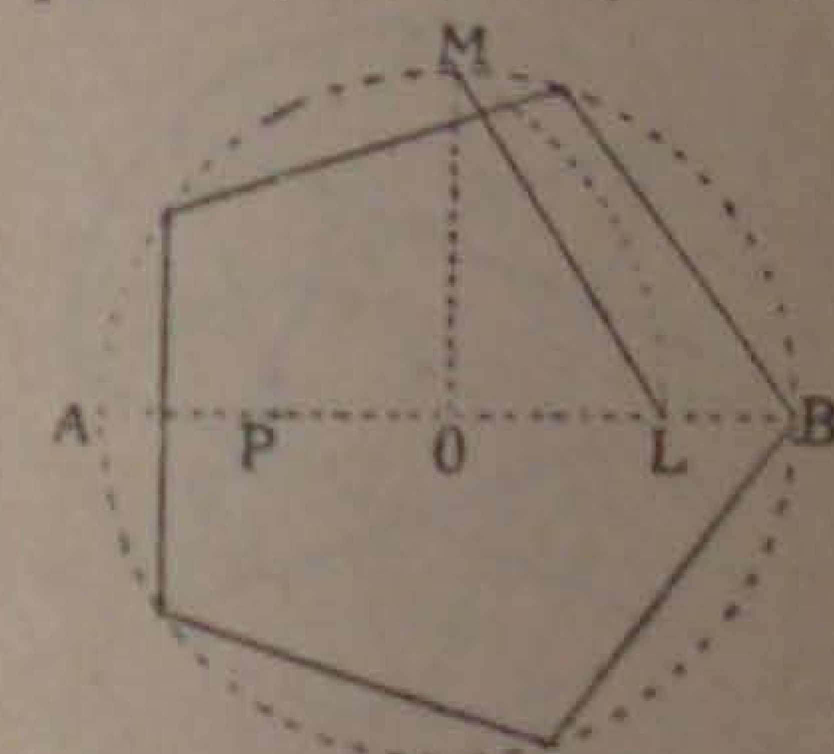


Fig. 290

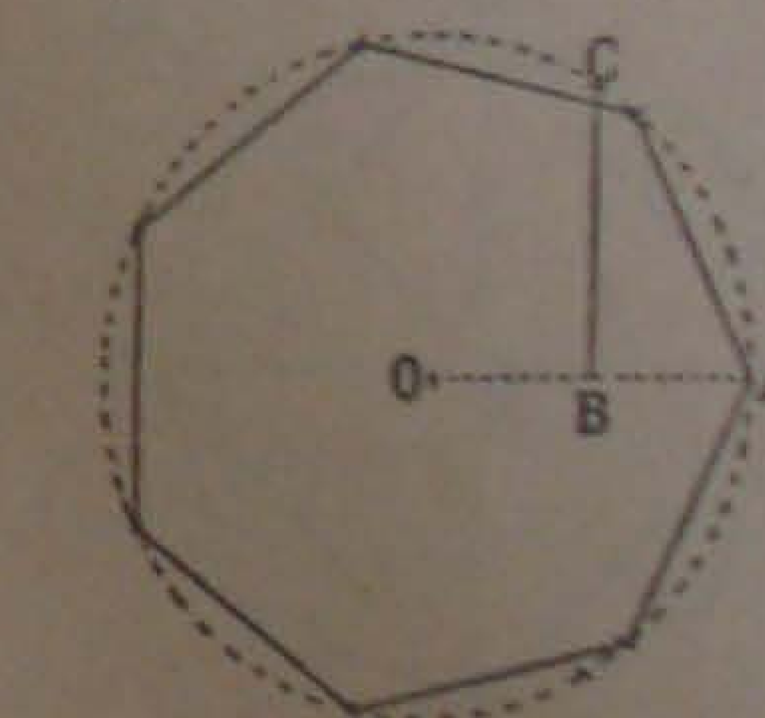


Fig. 291

Problema 106. — *Inscrever em um circulo um heptágono regular convexo.*

Tracemos um raio OA (fig. 291). Levantemos pelo meio do raio uma perpendicular *BC* até encontrar a circunferência. A distância do pé da perpendicular ao ponto em que ela encontra a circunferência será o lado do heptágono regular inscrito.

Apliquemos a partir de *A*, sôbre a circunferência três vezes a medida *BC*, seguidamente, para um e para outro lado. Liguemos consecutivamente os pontos de divisão (*).

(*) Esta construção não é exata; foi obtida aproximadamente, dada a impossibilidade de se dividir a circunferência em sete partes iguais só com auxílio de régua e compasso.

Heptágonos estrelados. — Há 2 heptágonos regulares estrelados que se obtêm ligando os pontos de divisão da circunferência em 7 partes iguais de 2 em 2 e de 3 em 3, (veja figs. 279 e 280 da pag. 129).

Problema 107. — *Inscrever em um círculo o octogono regular convexo.*

Dividamos a circunferência em 4 arcos iguais e depois cada um dêstes arcos ao meio. Fica a circunferência dividida em 8 partes iguais. Ligando consecutivamente os pontos de divisão temos o octogono regular convexo inscrito (fig. 292).

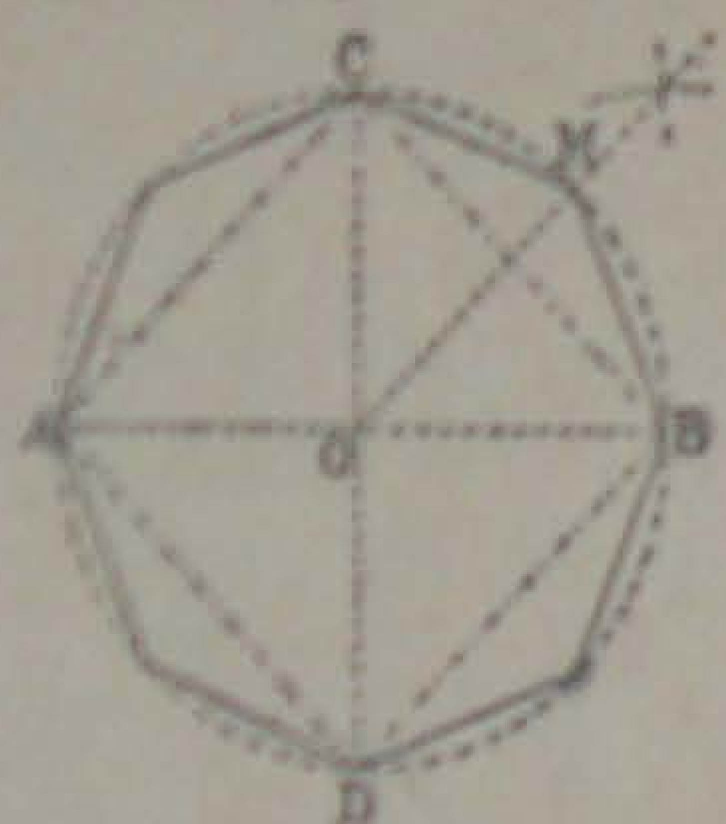


Fig. 292

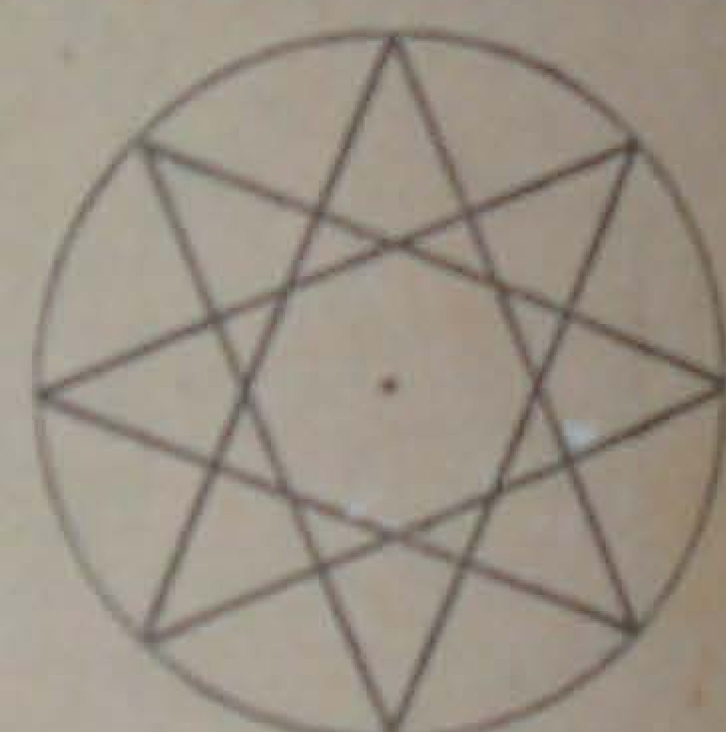


Fig. 293

Octógono estrelado. — Só se pode construir um octógono regular estrelado, que se obtém ligando de 3 em 3 os pontos de divisão da circunferência em 8 partes iguais (fig. 293).

Problema 108. — *Inscrever em um círculo o eneágono regular convexo.*

Tracemos dois diâmetros perpendiculares (fig. 294). Com o centro em *B* e com o mesmo raio (*OB*) descrevamos um arco *OG*; com o centro em *A* e com o raio igual à distância *AG*, descrevamos um arco *GC* até encontrar o prolongamento do diâmetro *FE*. Fazendo centro no ponto *C* e com raio igual a *AC* ou *BC* tracemos o arco *BD*. A distância *DF* será o lado do eneágono regular inscrito,

Reproduzamos sôbre a circunferência, e a partir do ponto *F*, a medida *DF*, quatro vezes seguidamente para cada lado e liguemos consecutivamente os pontos obtidos (*).

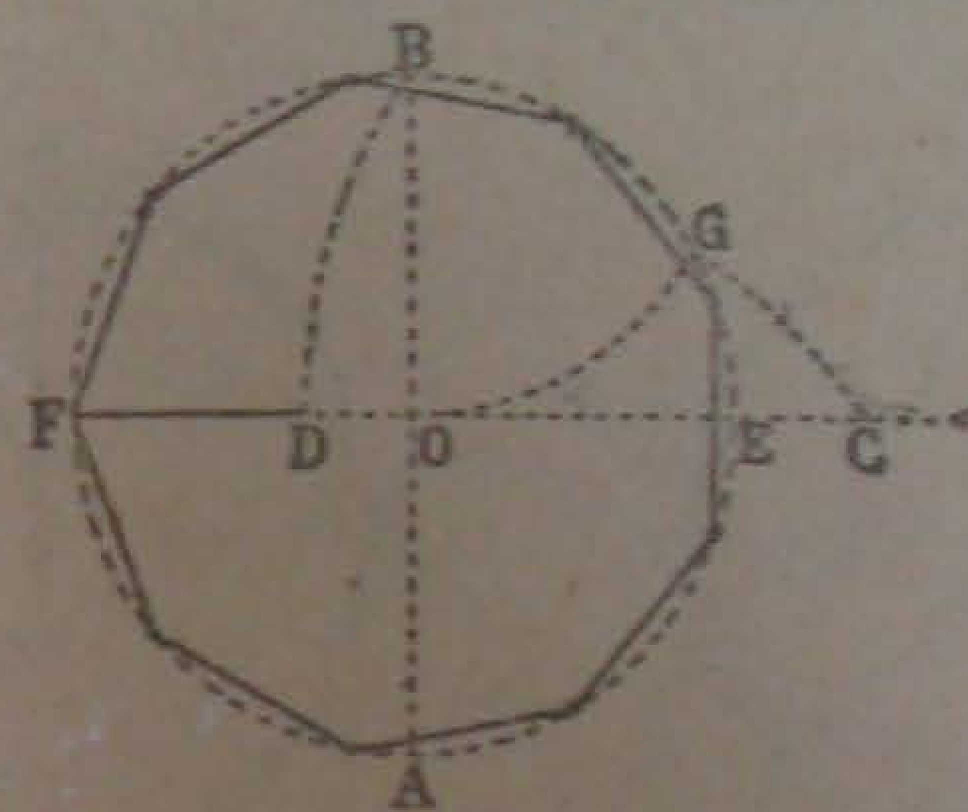


Fig. 294

Eneágonos estrelados. — São dois os eneágonos regulares estrelados que se podem traçar e para isso ligam-se de 2 em 2 e de 4 em 4 os pontos de divisão da circunferência em 9 partes iguais (figs. 295 e 296).

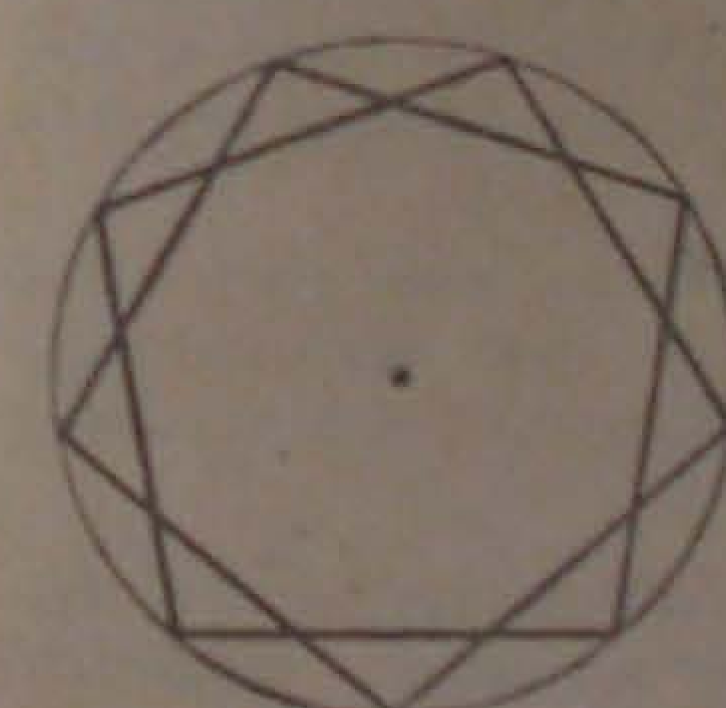


Fig. 295


Fig. 296

(*) Esta construção não é exata; foi obtida aproximadamente, visto não se poder dividir a circunferência em nove partes iguais só com régua e compasso.

Problema 109. — *Inscrever em um circulo o decágono regular convexo.*

Tracemos um diâmetro AB (fig. 297). Determinemos o meio da semi-circunferência AMB.

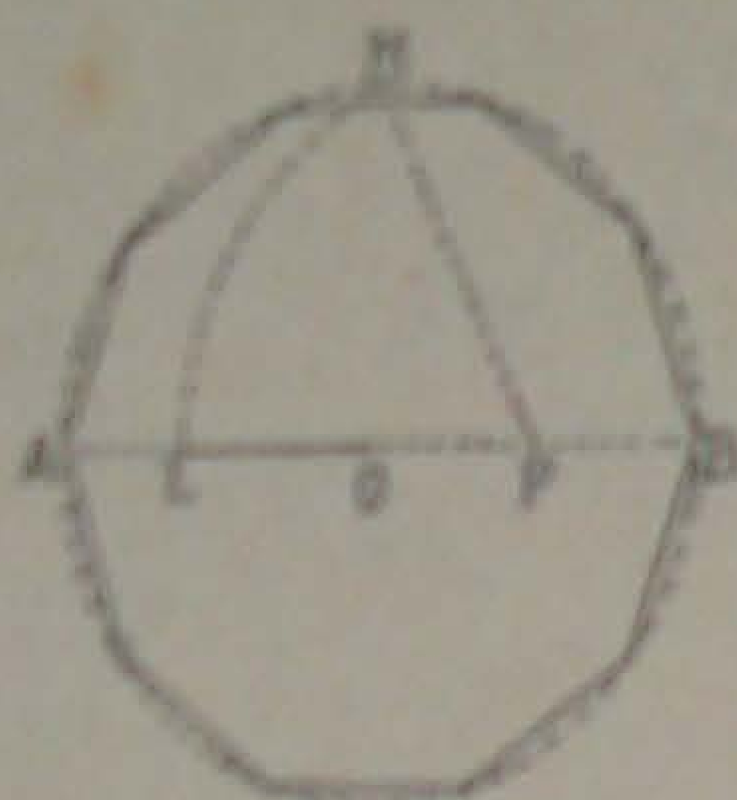


Fig. 297

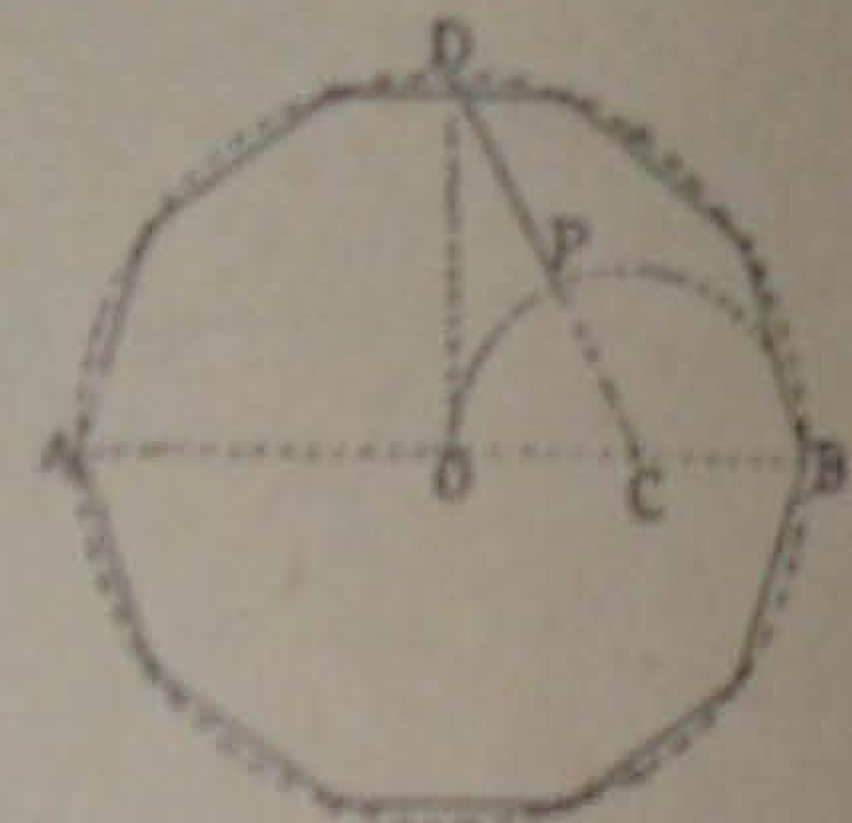


Fig. 298

Tomemos o meio (P) do raio OB; a partir do ponto P, marquemos no diâmetro a distância PL igual a PM. A distância OL será o lado do decágono regular convexo inscrito.

Apliquemos sôbre a circunferência, e a partir dos pontos A e B, a distância OL duas vezes seguidamente para cada lado; liguemos consecutivamente esses pontos de divisão.

Outra solução. — Tracemos um diâmetro AB (figura 298) e o raio OC perpendicular ao mesmo diâmetro.

Dividamos OB ao meio e liguemos C a D.

Centro em C e raio igual a CB determinemos o ponto P.

DP é o lado do decágono regular convexo inscrito.

Decágono estrelado — Só há um decágono estrelado que se obtém ligando de 3 em 3 os pontos da divisão da circunferência em 10 partes iguais (fig. 299).

Problema 110. — *Inscrever em um circulo um hendecágono regular convexo.*

Tracemos o diâmetro AB (fig. 300). Tomemos o meio da semi-circunferência ACB e também do raio OB. Unamos C ao ponto D e dividamos CD ao meio.

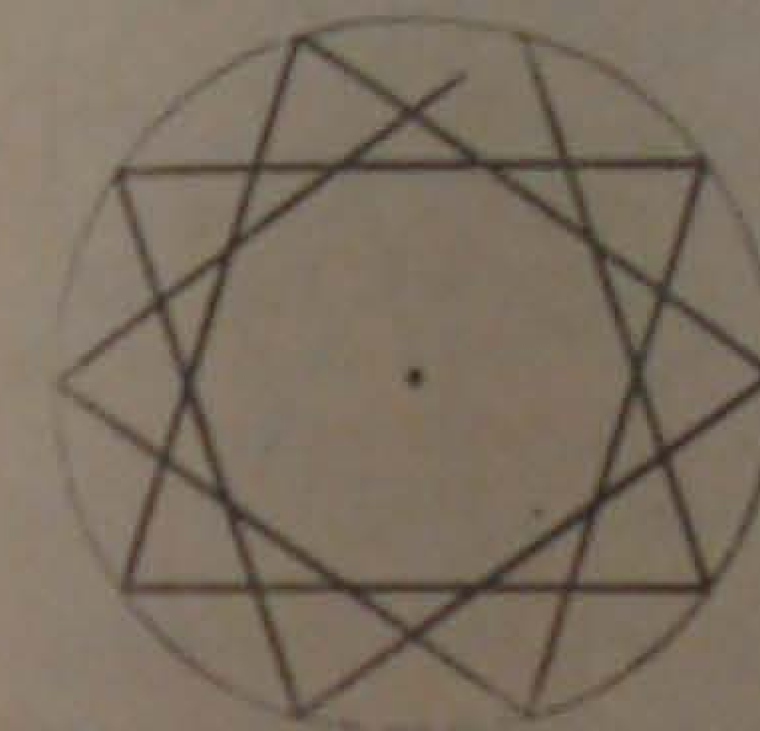


Fig. 299

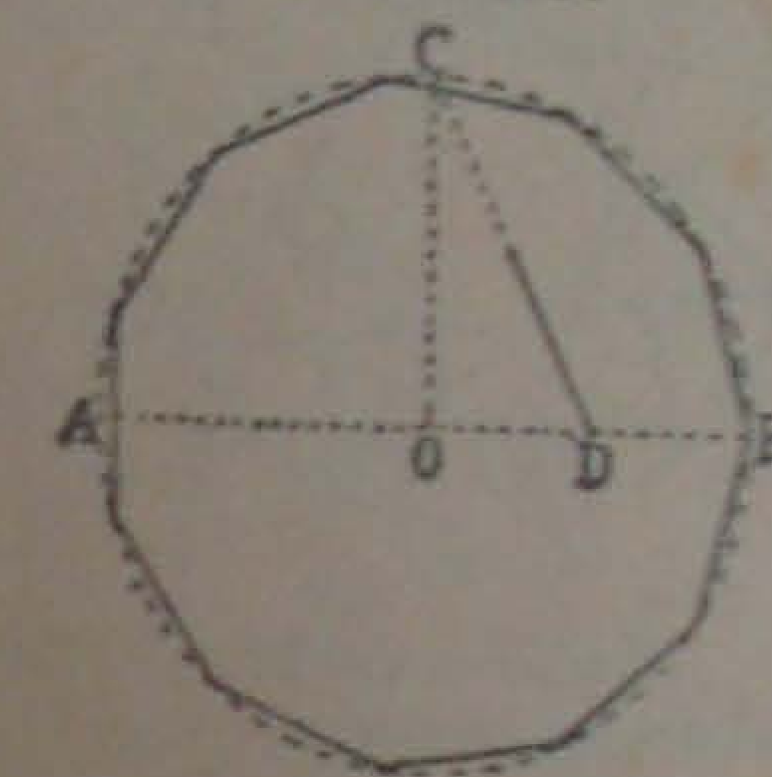


Fig. 300

Com o compasso apliquemos seguidamente a metade de CD, cinco vezes de cada lado, a partir de B, e depois de ligados os pontos de divisão, teremos o hendecágono regular inscrito (*).

Fig. 301

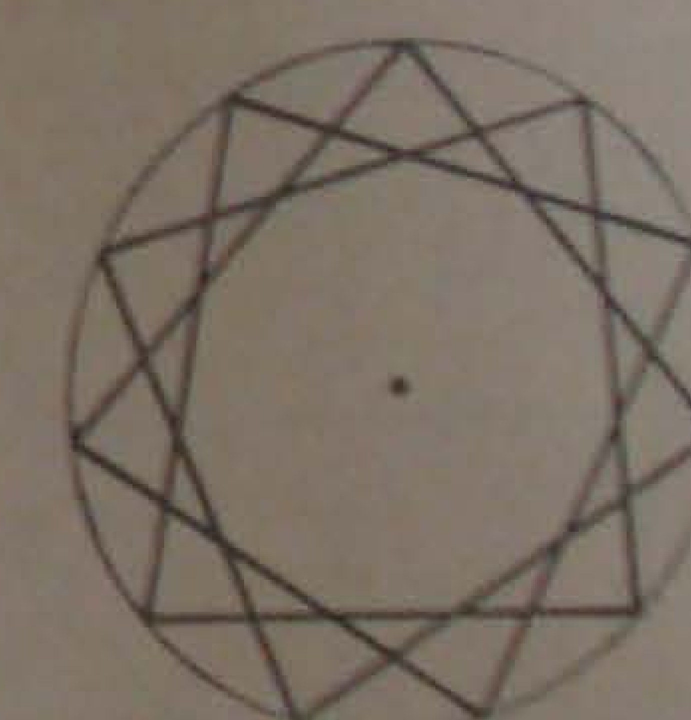


Fig. 302

Hendecágonos regulares estrelados. — Podemos traçar 4 hendecágonos regulares estrelados, ligando de 2 em 2, de

(*) Esta construção também foi obtida aproximadamente, visto não ser possível dividir a circunferência em 11 partes iguais com auxilio de régua e compasso.

3 em 3, de 4 em 4, de 5 em 5, os pontos da divisão da circunferência em 11 partes iguais (figs. 301 a 304).

Fig. 303

Fig. 304

Problema 111. — *Inscrever em um círculo um dodecágono regular convexo.*

Descrevamos uma circunferência e tracemos dois diâmetros *AB* e *CD* perpendiculares entre si (fig. 305).

Centro em cada das extremidades dos diâmetros e com o mesmo raio da circunferência determinemos os pontos: 1 e 2 da extremidade *A*; 3 e 4 de *B*; 5 e 6 de *C* e 7 e 8 de *D*.

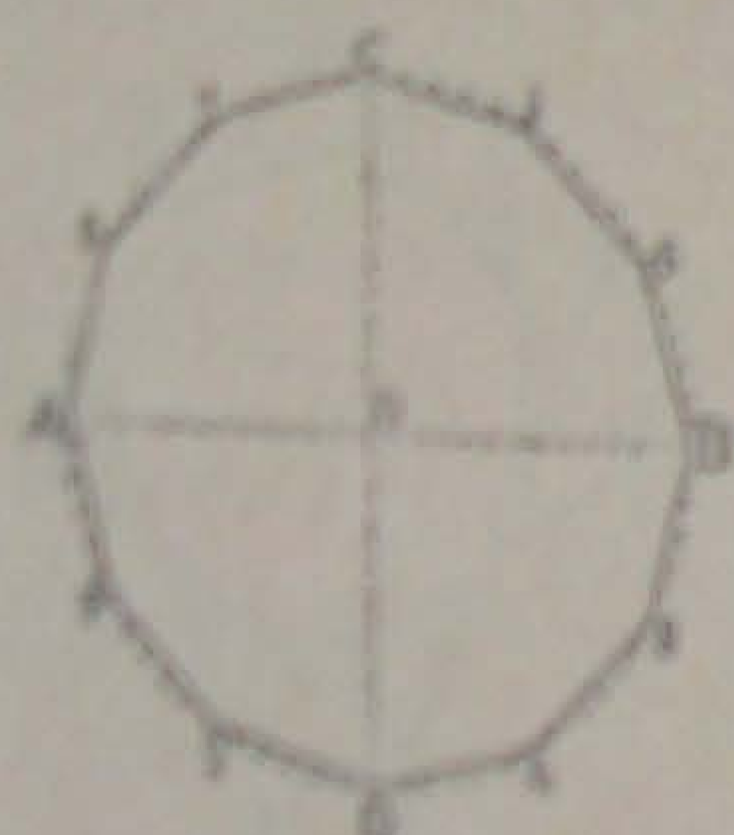


Fig. 305

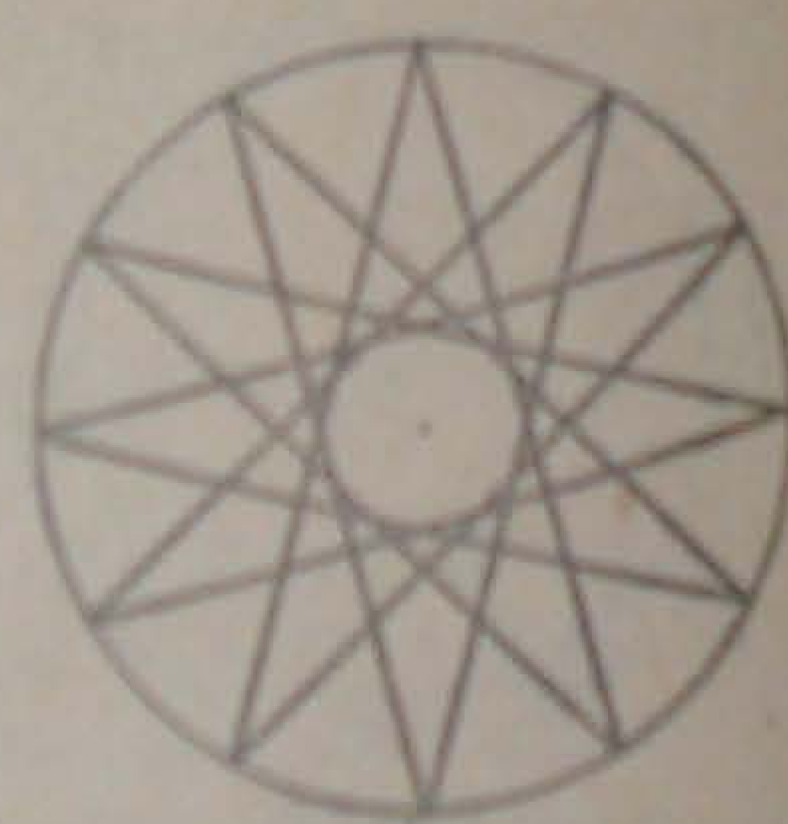


Fig. 306

A circunferência ficou dividida em 12 partes iguais; liguemos consecutivamente esses pontos e teremos o dodecágono regular convexo inscrito.

Dodecágono estrelado. — Só há uma espécie de dodecágono regular estrelado; aquele que se obtém li-

gando de 5 em 5 os pontos da divisão da circunferência em 12 partes iguais (fig. 306).

Problema 112. — *Inscrever em um círculo um pentadecágono regular convexo.*

Descrevamos uma circunferência e determinemos o lado do decágono regular inscrito. *MN* é o lado do decágono (fig. 307).

A partir de um ponto qualquer *A*, apliquemos a medida *AR* igual ao raio e $AP = MN$.

A corda *PR* é o lado do pentadecágono regular inscrito; apliquemo-la pois a partir do ponto *C*, sôbre a circunferência sete vezes de cada lado, e liguemos consecutivamente os pontos de divisão.

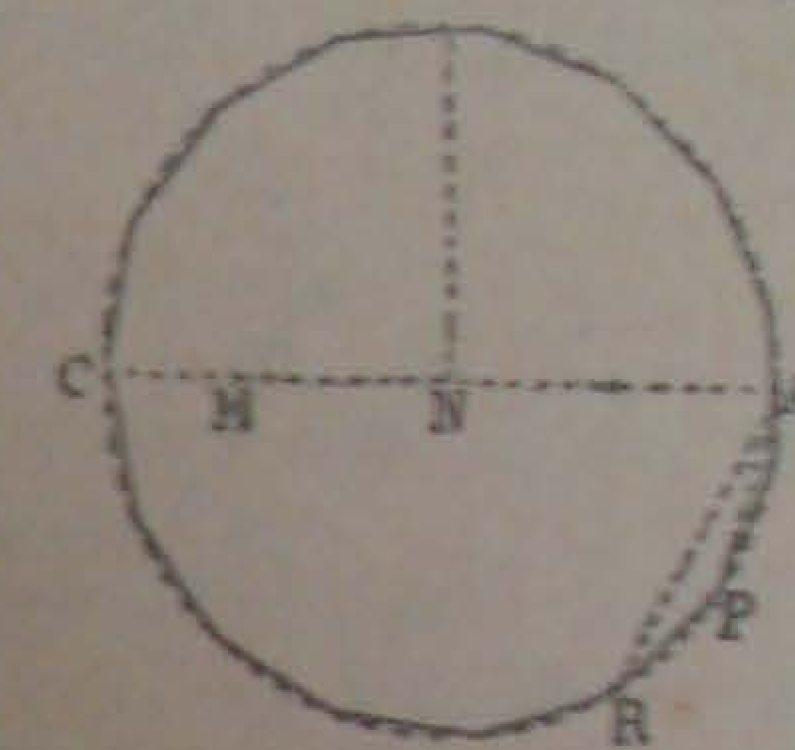


Fig. 307

Pentadecágonos regulares estrelados. — Podemos construir 3 espécies de pentadecágonos regulares ligando de 2 em 2, de 4 em 4 e de 7 em 7 os pontos da divisão da circunferência em 15 partes iguais.

Problema 113. — *Traçar um pentágono regular convexo conhecendo-se o lado.*

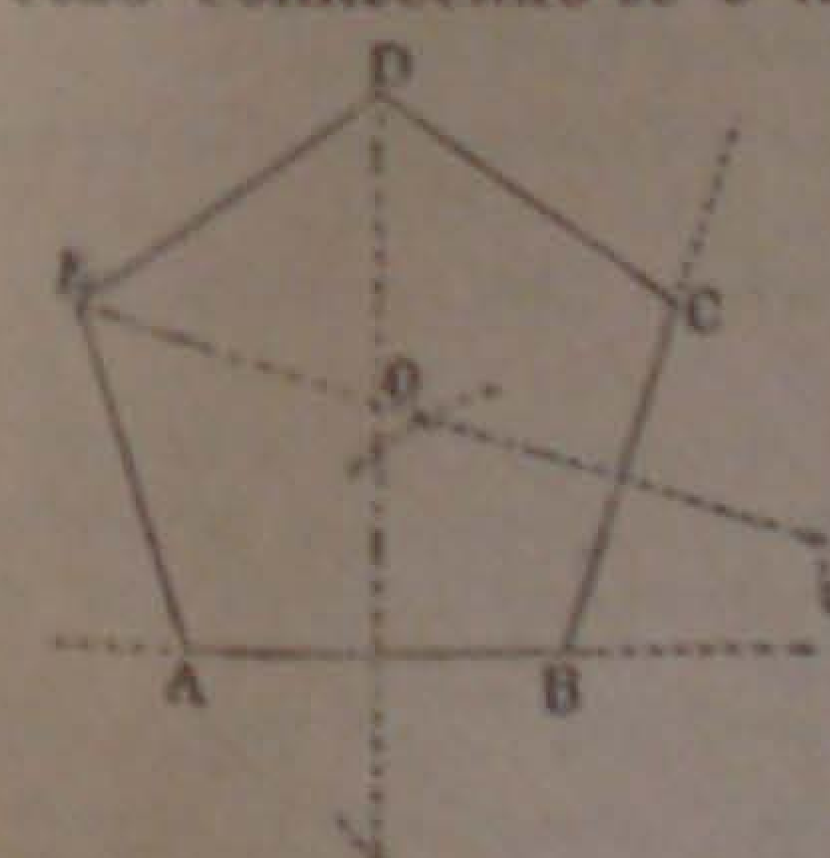


Fig. 308

Seja *AB* o lado (fig. 308).

Façamos um ângulo de 108° na extremidade *B* e apliquemos $BC = AB$.

Façamos passar perpendiculares pelo meio de *AB* e de *BC*.

Centro em *O* e com um raio a *OA* marquemos *D* e *E*.

Liguemos entre si *A* e *E*, *E* e *D*, *D* e *C*.

ABCDE é o polígono pedido.

Problema 114. — *Traçar um heptágono regular convexo conhecendo-se o lado.*

Tracemos um heptágono convexo regular *Abcdefg* inscrito em um círculo qualquer (fig. 309).

Tomemos um vértice como ponto de partida, *A* por exemplo, e prolonguemos os lados do ângulo.

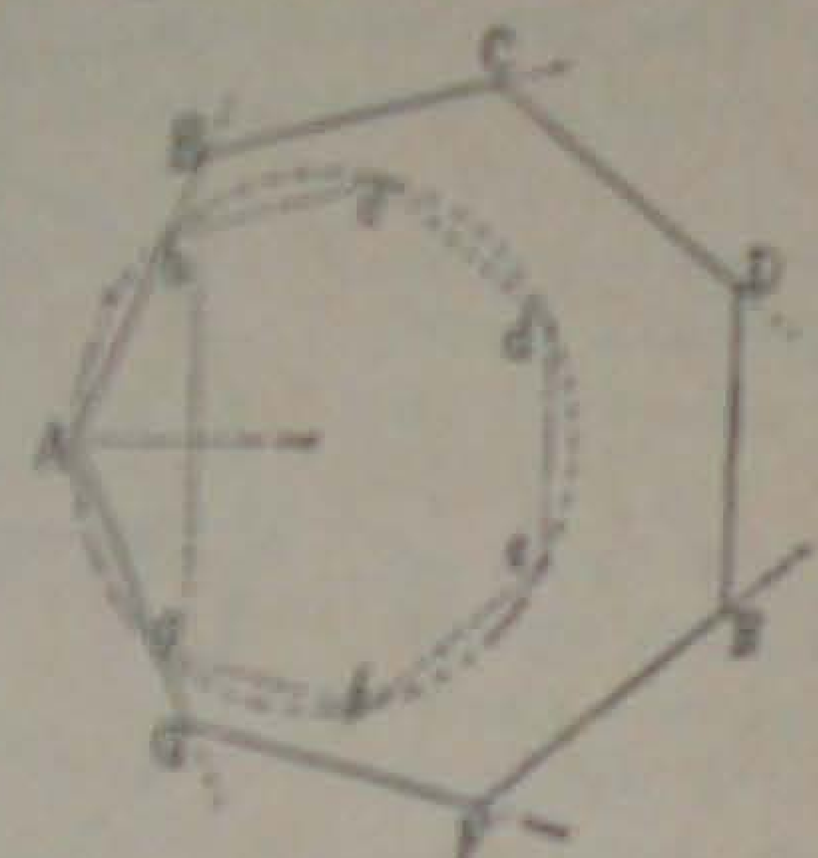


Fig. 309

Façamos *AB* e *AG* iguais ao lado fornecido.

De *B* tiremos uma paralela a *bc* e de *G*, outra a *gf*.

Marquemos em *BC* e *GF* a medida *AB*.

De *C* tracemos uma paralela a *cd* e de *F*, outra a *fe*.

Façamos *CD* e *EF* iguais a *AB* e finalmente liguemos *D* a *E*.

ABCDEFG é o heptágono regular pedido.

Problema 115. — *Traçar um octógono regular dado o lado.*

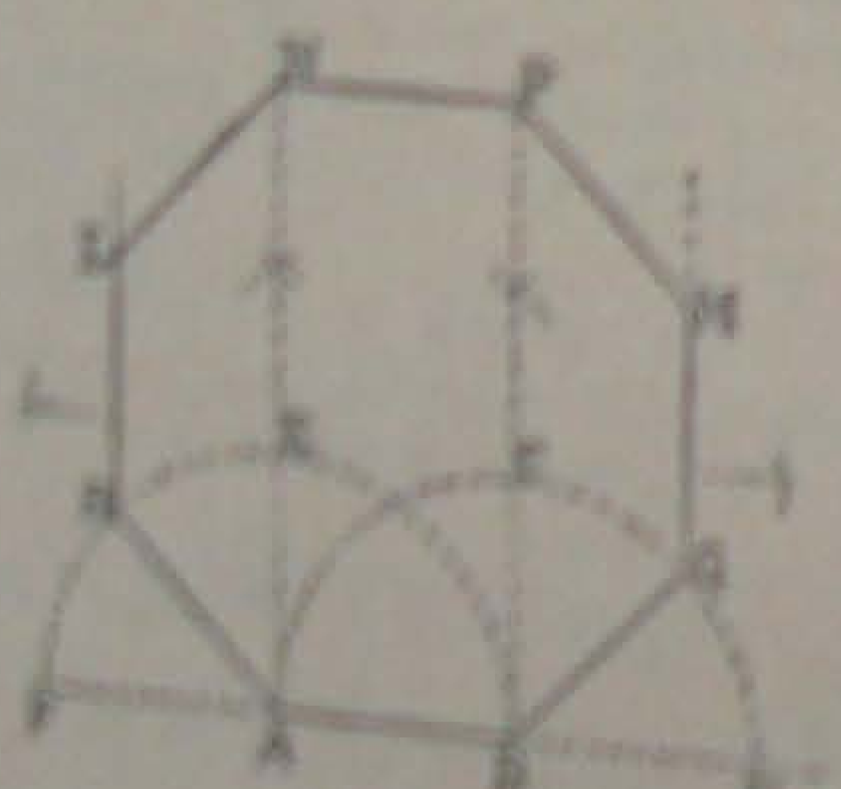


Fig. 310

Seja *AB* o lado (fig. 310).

Prolonguemo-lo em ambos os sentidos e levantemos perpendiculares por *A* e *B*.

Centro em cada um dêsses pontos e com o mesmo raio *AB*, descrevamos as duas semi-circunferências que determinam os pontos *C*, *D*, *E* e *F*.

Tiremos as bissetrizes dos ângulos *CBD* e *FAE*, as quais assinalam os pontos *G* e *H*.

Por *G* e *H* tracemos paralelas a *BC* e façamos *HL* e *GM* iguais a *AB*.

De *L* e de *M*, com centros, e com um raio = *AB*, marquemos *N* e *P*.

Tracemos a linha quebrada *LNPM* e completaremos o octógono *ABGMPNLR* pedido.

EXERCÍCIOS

1 — Inscrever um quadrado num círculo de 3cm de raio.

2 — Trace um hexágono regular com 2,4cm de lado.

3 — Inscreva um triângulo equilátero num círculo de 2,2cm de raio.

4 — Num círculo de 5,8cm de diâmetro inscreva um pentágono regular convexo e outro estrelado.

5 — Inscreva um heptágono regular convexo num círculo de 2,8cm de raio.

6 — Construa um octógono regular convexo num círculo de 6cm de diâmetro.

7 — Inscreva um eneágono regular convexo em um círculo de 2,5cm de raio.

8 — Construa o decágono regular convexo ao qual está circunscrito um círculo de 5,6cm de diâmetro.

9 — Num círculo de 3cm de raio inscreva um hendecágono regular convexo.

10 — Inscreva um pentadecágono regular convexo num círculo de 2,7cm de raio.

11 — Trace um pentágono regular convexo de 14cm de perímetro.

12 — Trace um heptágono convexo de 17,5cm de perímetro.

13 — Construir um octógono regular convexo de 2,5cm de lado.

CAPÍTULO IX

Simetria no plano

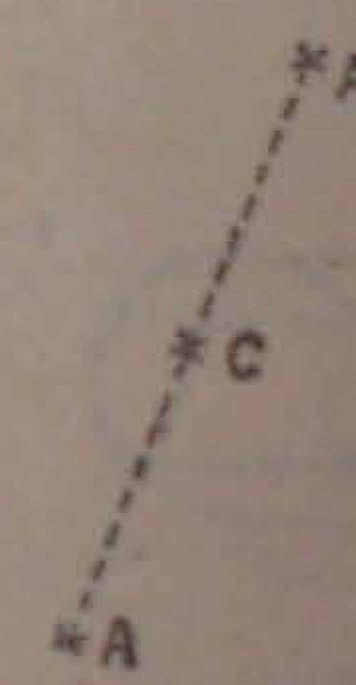
A simetria de figuras num plano pode ser em relação a um ponto (*simetria central*) ou em relação a uma reta (*simetria axial*).

Simetria central. — Dois pontos, A e A', são simétricos em relação a um terceiro, C, quando este é o meio do segmento AA', que liga os dois primeiros. Diz-se, então, que C é o *centro de simetria* e que A' é o *simétrico* de A.

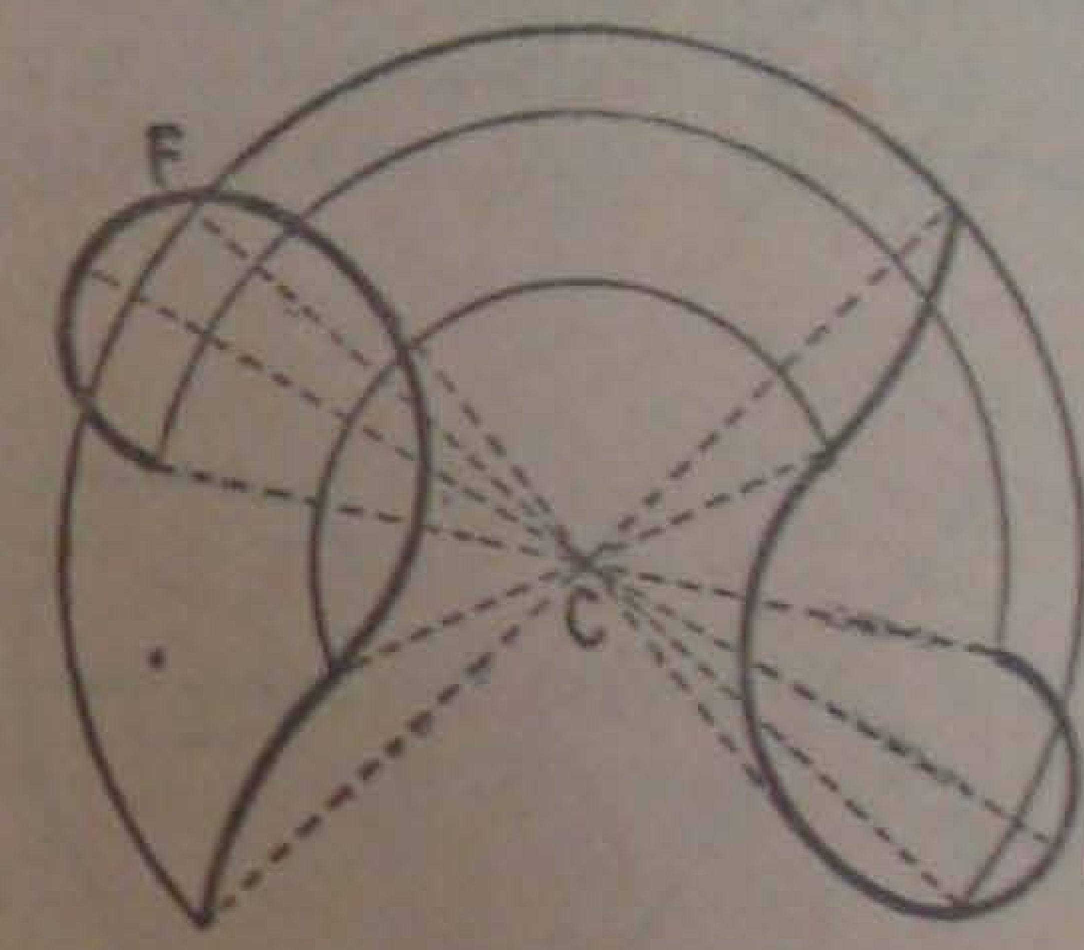
A propria definição mostra como construir o simétrico de um ponto dado, A, em relação ao centro C: basta ligar o ponto A ao centro C, prolongar o segmento e tomar, a partir de C, uma distância CA' igual a AC.

Duas figuras F e F' se dizem *simétricas em relação a um centro* quando cada ponto de uma encontra na outra o seu simétrico em relação ao mesmo centro. Os pontos que se correspondem se chamam *homólogos*.

Dada uma figura, pode-se obter a sua simétrica em relação a um centro, construindo esta ponto por ponto. Outro modo de obtê-la seria imprimir à figura dada uma rotação de 180 graus.



Os pontos A e A' são simétricos em relação a C.

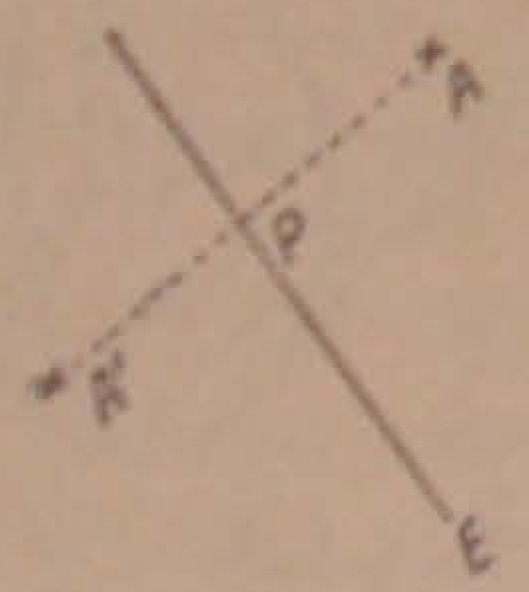


F e F' são figuras simétricas em relação a C.

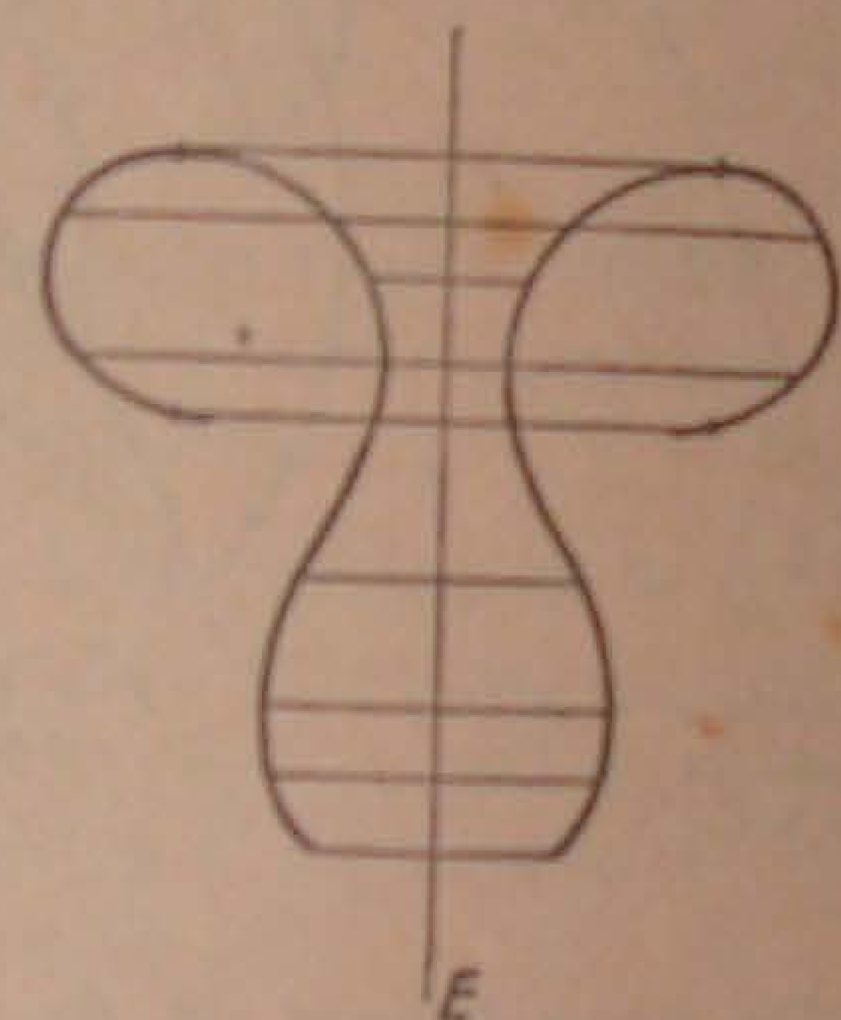
De uma forma ou de outra, verificamos que, na simetria central: I) a figura simétrica de uma reta é outra reta paralela à primeira; II) a figura simétrica de uma semi-reta é outra semi-reta paralela, mas de sentido oposto; III) a figura simétrica de um segmento de reta é outro segmento retilíneo igual; IV) a figura simétrica de um ângulo é outro ângulo igual.

Simetria axial. — Dois pontos, A e A' são simétricos em relação a uma reta, E, quando esta é a mediatriz do segmento (AA') que liga os dois pontos. Diz-se, então, que a reta E é um *eixo de simetria* e que A' é o *simétrico* de A.

Dados um ponto A e uma reta E, pode-se facilmente obter o ponto simétrico do primeiro em relação à reta: basta tirar de A uma perpendicular (AP) sobre E, prolongando-a, e a partir do pé da perpendicular tomar uma distância (PA') igual a AP.



Os pontos A e A' são simétricos em relação à reta E.



Figuras simétricas em relação a um eixo.

Duas figuras se dizem *simétricas em relação a um eixo* quando cada ponto de uma encontra na outra o seu simétrico em relação ao mesmo eixo.

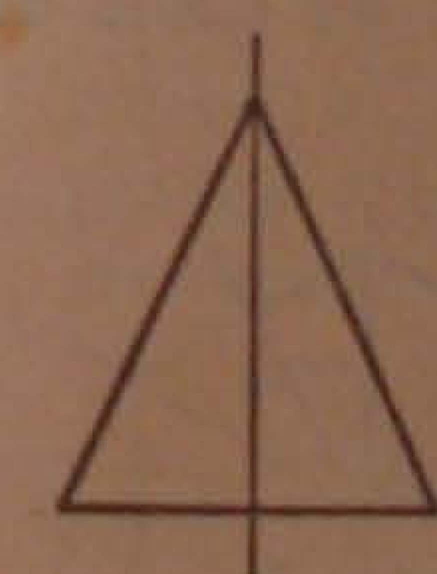
Evidentemente pode-se obter a figura simétrica de outra em relação a um eixo construindo-a ponto por ponto; mas é facil de ver que a simé-

trica também pode ser obtida rebatendo a figura dada em torno do eixo.

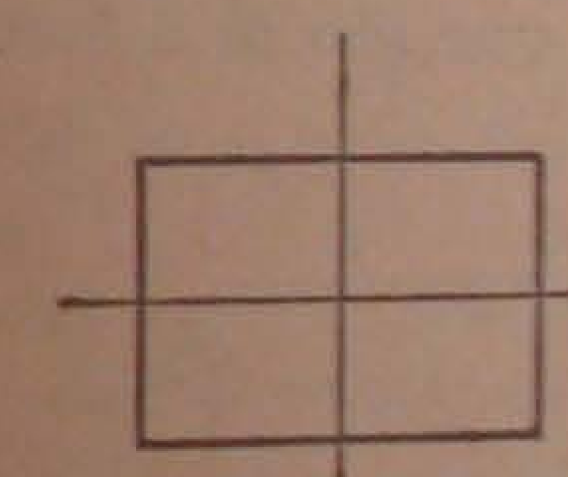
Verifica-se, então, que, em relação a um eixo: I) a figura simétrica de uma reta é outra reta; II) a figura simétrica de uma semi-reta é outra semi-reta; III) a simétrica de um segmento retilíneo é outro segmento igual; IV) a figura simétrica de um ângulo é outro ângulo igual.

SIMETRIA ABSOLUTA

Suponhamos, agora, uma figura em que os pontos sejam, dois a dois, simétricos em relação



O triângulo isósceles tem um eixo de simetria.

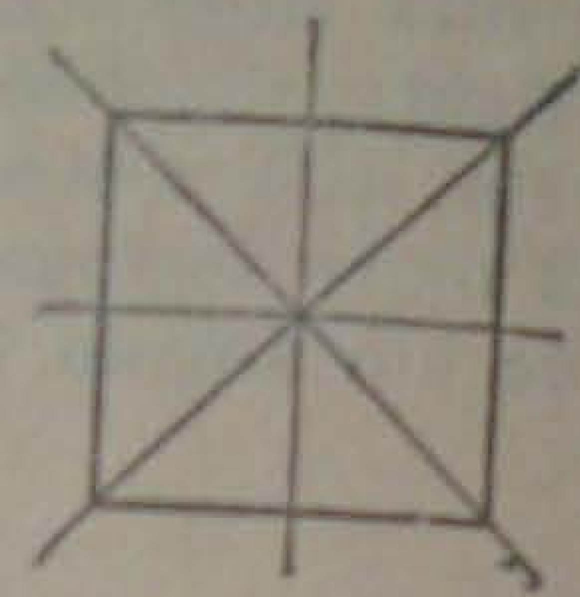


O retângulo tem dois eixos de simetria.

à mesma reta. Dizemos, neste caso, que a *figura tem simetria axial* ou que ela é *simétrica* em relação àquele eixo.

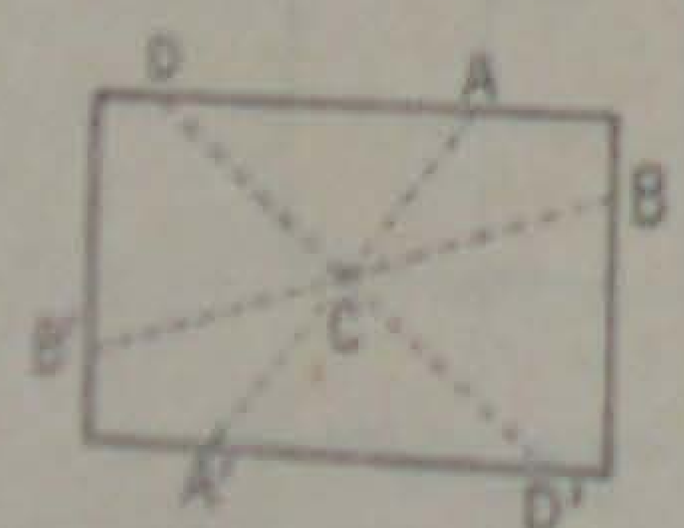
Uma figura pode ter um eixo de simetria (triângulo isósceles), dois eixos de simetria (o retângulo), três eixos (o triângulo equilátero), quatro eixos (o quadrado) e, de um modo geral, todo polígono regular tem tantos eixos de simetria quan-

O triângulo equilátero tem 3 eixos de simetria

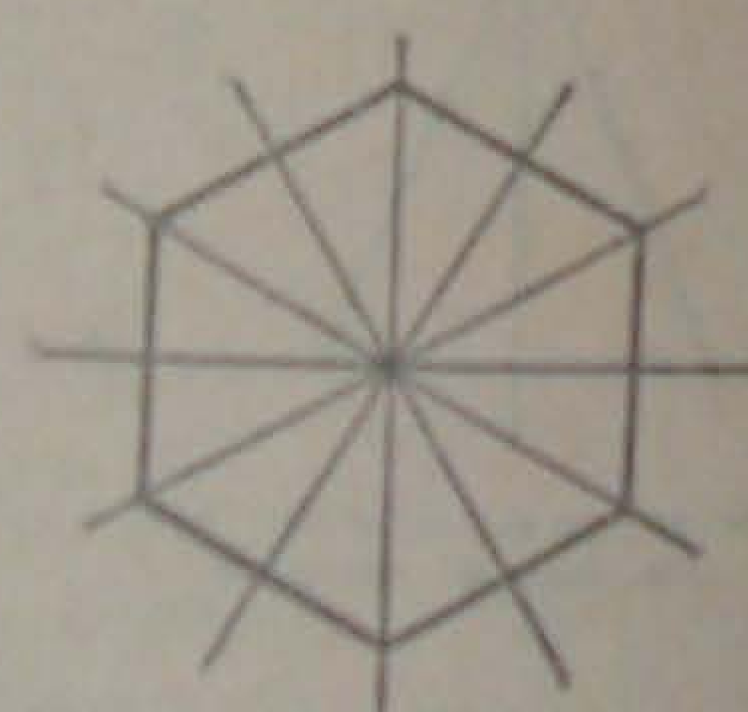


O quadrado tem 4 eixos de simetria.

tos lados. Assim, o pentágono tem cinco eixos de simetria, o hexágono tem seis, etc. A circunferência de círculo tem uma infinidade de eixos de simetria, que são os diâmetros.



O retângulo é uma figura simétrica em relação a um centro.



O hexágono regular convexo tem seis eixos e um centro de simetria.

Do mesmo modo, si os pontos de determinada figura são, dois a dois, simétricos em relação ao

mesmo ponto, dizemos que a figura é *simétrica* em relação a este ponto, que ela tem *centro de simetria*, ou, ainda, que ela tem *simetria central*.

Dentre as figuras geométricas que têm centro de simetria podemos citar: retângulo (interseção das diagonais), o quadrado, o círculo e todos os polígonos regulares de número par de lados.

QUESTIONÁRIO

1 — Como pode ser a simetria no plano?

2 — Quando é que dois pontos são simétricos em relação a um terceiro?

3 — Que são figuras simétricas em relação a um centro?

4 — Qual a simétrica de uma reta em relação a um ponto? e a de uma semi-reta? de um segmento retilíneo? de um ângulo?

5 — Quando é que se diz que uma figura é simétrica em relação a um ponto?

6 — Quando é que dois pontos se dizem simétricos em relação a uma reta? e como se chama, então, esta reta?

7 — Quando é que duas figuras se dizem simétricas em relação a um eixo?

8 — Dados um ponto e uma reta, como construir o simétrico do ponto em relação à reta?

9 — Na simetria axial, qual é a simétrica de uma reta? de uma semi-reta? de um segmento retilíneo? de um ângulo?

10 — Que é uma figura simétrica em relação a um eixo?

11 — *Cite uma figura geométrica que apresente um eixo de simetria, com dois, três, quatro, oito eixos de simetria e diga, em cada caso quais são esses eixos.*

12 — *Há alguma figura geométrica com uma infinidade de eixos de simetria? Qual é?*

13 — *Que figuras geométricas conhece que tenham centro de simetria? Em cada uma delas onde está esse centro?*

CAPÍTULO X

Linhas proporcionais

O quociente, que obtemos dividindo os números que exprimem duas grandezas medidas com a mesma unidade, chama-se *razão*.

Sejam essas grandezas dois segmentos de reta, AB e CD, e tomemos para unidade comum o centimetro. Se o primeiro medir 8cm e o segundo medir 4cm, a razão de AB para CD é $\frac{8}{4}$ ou 2; inversamente, a razão de CD para AB é $\frac{4}{8}$ ou $\frac{1}{2}$.

O primeiro termo de uma razão chama-se *antecedente* e o segundo, *consequente*.

Números proporcionais. — Dados os números $a, b, c, d, e \ldots.$ que correspondam a outros $a', b', c', d', e' \ldots.$ dizemos que êles são proporcionais si pudermos escrever

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} = \frac{e}{e'} = \ldots.$$

Assim, os números 3, 4, 7, 10 e 15 são proporcionais a 9, 12, 21, 30 e 45, porque podemos escrever

$$\frac{3}{9} = \frac{4}{12} = \frac{7}{21} = \frac{10}{30} = \frac{15}{45}$$

Com efeito, simplificando, veremos que qualquer das razões acima é igual a $\frac{1}{3}$.

Do mesmo modo, dados m segmentos de reta (AB, CD, EF, etc.) êles são proporcionais a outros m segmentos ($A'B'$, $C'D'$, $E'F'$, etc), si os números que medirem êsses segmentos forem proporcionais. Podemos, então, escrever

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{EF}{E'F'} = \ldots.$$

Proporção. — Quando se consideram apenas quatro números tais que a razão de dois dêles é igual à razão dos outros dois, a expressão da igualdade dessas razões é uma *proporção*. Exemplo:

$$\frac{3}{7} = \frac{12}{28}$$

é uma proporção e lê-se: 3 está p^a. 7 como 12 p^a. 28.

Do mesmo modo, si a razão de dois segmentos de reta fôr igual à razão de dois outros segmentos,

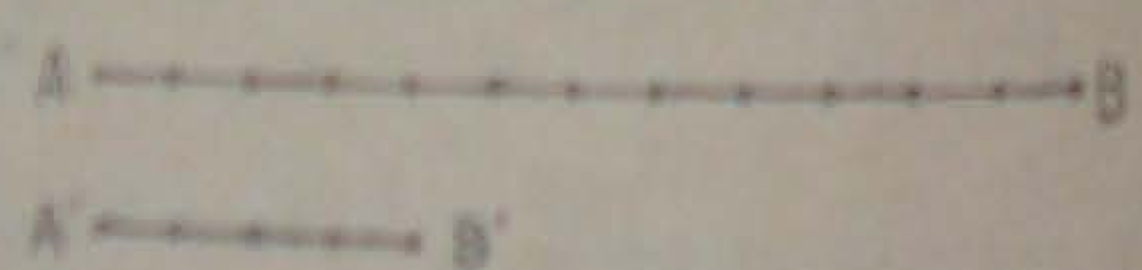


Fig. 311

as duas razões, reunidas pelo sinal de igualdade, formam uma proporção. Exemplo: AB mede 12 e

$A'B'$ mede 4 (fig. 311); CD mede 15 e $C'D'$ mede 5 (fig. 312). A razão de AB para $A'B'$ é $\frac{12}{4}$ ou 3; a

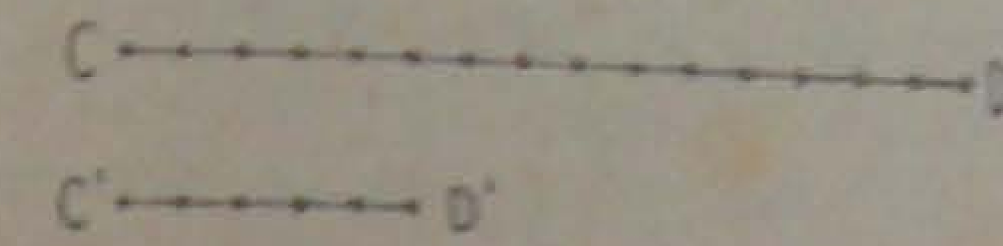


Fig. 312

razão de CD para $C'D'$ é $\frac{15}{5}$ ou 3. Podemos, então, escrever

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'}$$

Na Aritmética estudamos que o primeiro e o último termos da proporção chamam-se *extremos*, o segundo e o terceiro chamam-se *meios*.

A propriedade fundamental das proporções é: *em toda proporção o produto dos meios é igual ao produto dos extremos*

Exemplo: na proporção

$$\frac{6}{5} = \frac{12}{10}$$

tem-se: $5 \times 12 = 10 \times 6$.

Esta propriedade permite calcular um termo qualquer da proporção quando os outros três são conhecidos. Assim, dada a proporção

$$\frac{2}{6} = \frac{4}{x},$$

em virtude da propriedade fundamental, podemos escrever

$$2 \times x = 6 \times 4$$

donde se pode tirar o valor de x

$$x = \frac{6 \times 4}{2} = 12$$

Concluimos, então, que um extremo é igual ao produto dos meios dividido pelo outro extremo.

Do mesmo modo, na proporção $\frac{3}{x} = \frac{9}{12}$ tem-se

$$x = \frac{3 \times 12}{9} = 4$$

isto é, um meio da proporção é igual ao produto dos extremos dividido pelo outro meio.

Em Aritmética demonstra-se, ainda, que: *numa série de razões iguais, a soma dos antecedentes está para a soma dos consequentes como qualquer antecedente para o respectivo consequente.*

Assim, tomando-se varias razões iguais

$$\frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \frac{10}{15}$$

tomando-se os antecedentes e separadamente os consequentes, obtém-se, dividindo a primeira soma pela segunda, a razão $\frac{28}{42}$ que é igual a qualquer das razões dadas. Com efeito, simplificando as razões dadas e a que foi obtida, verificamos que todas são iguais a $\frac{2}{3}$.

Média proporcional. — A proporção cujos meios são iguais chama-se *continua* e, nesse caso, o valor do meio é a *média proporcional* (ou geométrica) entre os dois números que servem de extremos.

É facil mostrar que *a média geométrica entre dois números é igual à raiz quadrada do produto dêles.*

Seja a proporção continua

$$\frac{p}{m} = \frac{m}{q}$$

De acôrdo com a propriedade fundamental tem-se

$$m \times m = p \times q \quad \text{ou} \quad m^2 = q$$

donde

$$m = \sqrt{p \times q}$$

Conclusão: *para achar a média proporcional ou geométrica entre dois números basta extrair a raiz quadrada do produto dêsses números.*

Exemplo: a média geométrica entre 4 e 9 é

$$\sqrt{4 \times 9} = 6$$

Quarta proporcional — Chama-se *quarta* proporcional de três números, o quarto termo de uma proporção da qual os três primeiros termos são os números dados. Portanto,, si quisermos determinar a quarta proporcional dos números 4, 7 e 6, teremos de calcular o valor de x na proporção

$$\frac{4}{7} = \frac{6}{x}$$

A quarta proporcional de 4, 7 e 6 é

$$x = \frac{7 \times 6}{4} = 10{,}5.$$

Algumas propriedades relativas a segmentos de reta proporcionais. — Dentre as propriedades que se referem à proporcionalidade de segmentos de reta em determinadas figuras, citemos algumas de que nos utilizaremos na solução dos problemas dêste capítulo e dos seguintes:

a) Si um feixe de paralelas determinar sôbre uma reta que o corta (*transversal*) segmentos iguais entre si, determinará sôbre qualquer outra transversal segmentos também iguais entre si.

Assim, na fig. 313 sendo $AB = BC = CD$, também $A'B' = B'C' = C'D'$.

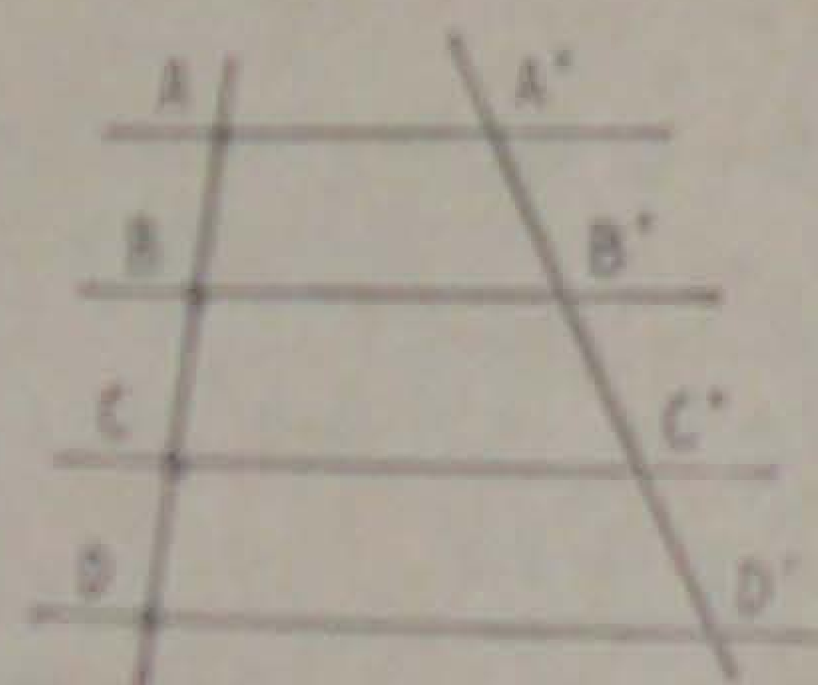


Fig. 313

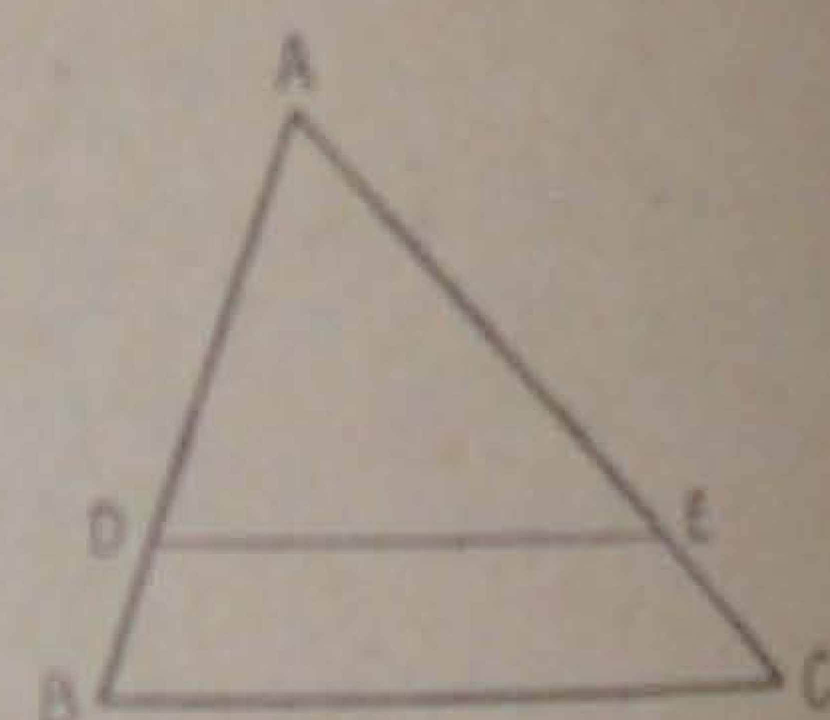


Fig. 314

b) Toda paralela a um lado do triângulo divide os outros dois em partes proporcionais. Na fig. 314, como DE é paralela a BC, tem-se

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

c) Um feixe de paralelas determina sôbre duas retas que o cortam (*transversais*) segmentos proporcionais. Exemplo: na fig. 315 tem-se

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'}$$

d) A perpendicular traçada de um ponto da circunferência sôbre um diâmetro é média proporcional entre os segmentos que determina sôbre êsse diâmetro.

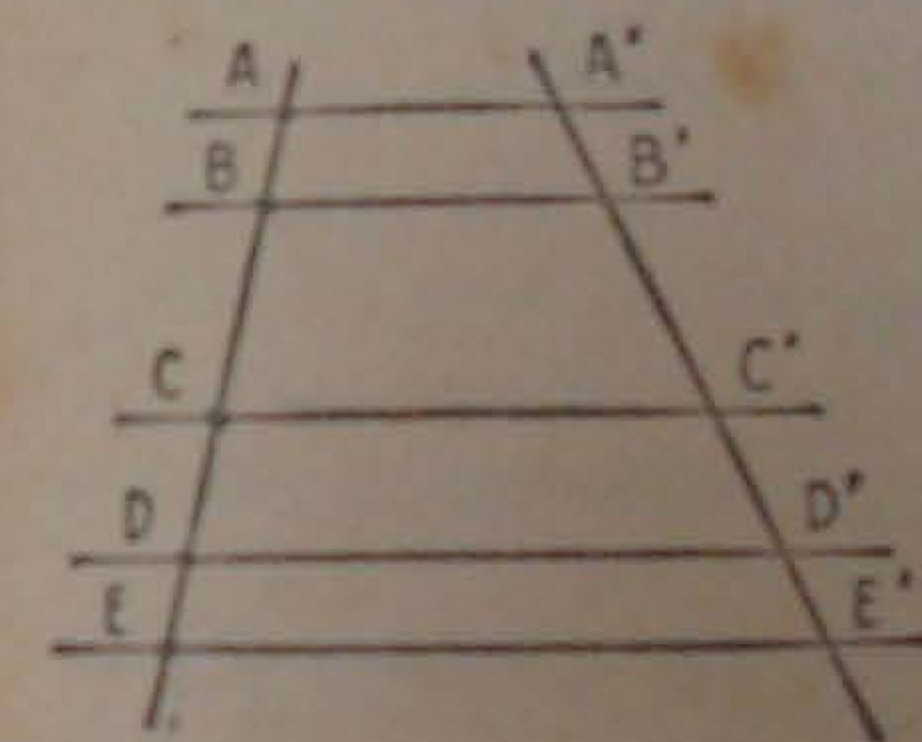


Fig. 315

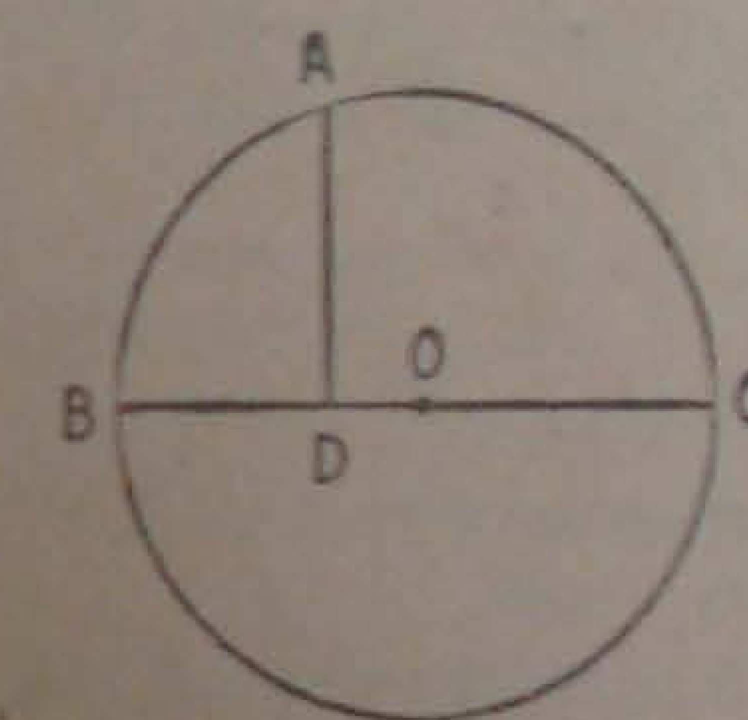


Fig. 316

Na fig. 316, AD é média proporcional entre DB e DC.

QUESTIONÁRIO

1. Que é razão de dois números? e razão de dois segmentos?
2. Quando se diz que *m* números dados são proporcionais a outros?
3. Que é proporção?
4. Como se denominam os têrmos de uma proporção?
5. Qual é a propriedade fundamental das proporções?

6. Que é uma quarta proporcional e como se pode determiná-la?
7. Enuncie a propriedade relativa a uma série de razões iguais.
8. Que é média proporcional ou geométrica entre dois números?
9. Se traçarmos uma paralela a um lado de um triângulo, como vai ela dividir os outros dois lados?
10. A perpendicular baixada de um ponto da circunferência sôbre um diâmetro o que é dos segmentos determinados por ela neste diâmetro?

PROBLEMAS

Problema 116. — *Dividir um segmento de reta em partes iguais.*

Seja o segmento AB (fig. 317), que queremos dividir em cinco partes iguais.

Do ponto A tracemos uma semi-reta AC que forme com AB um ângulo qualquer. A partir do ponto A e sôbre

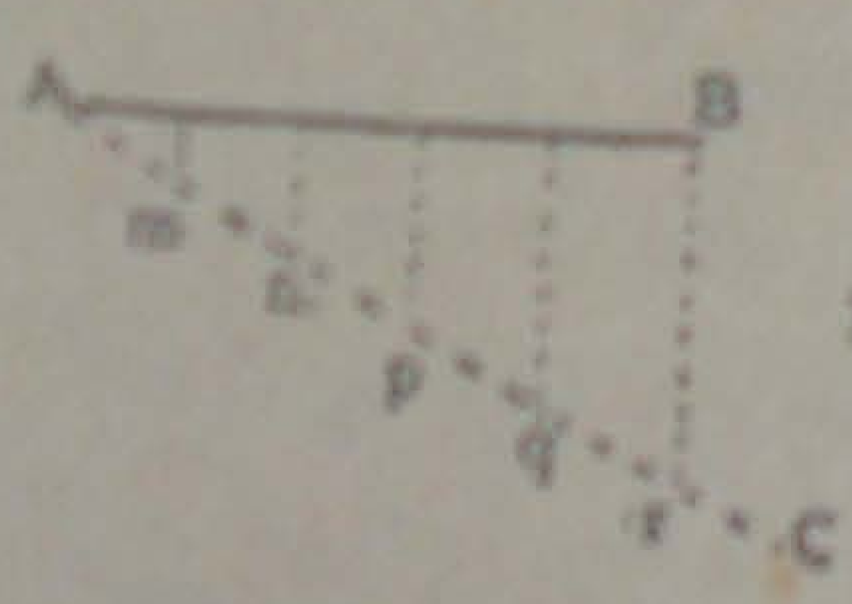


Fig. 317

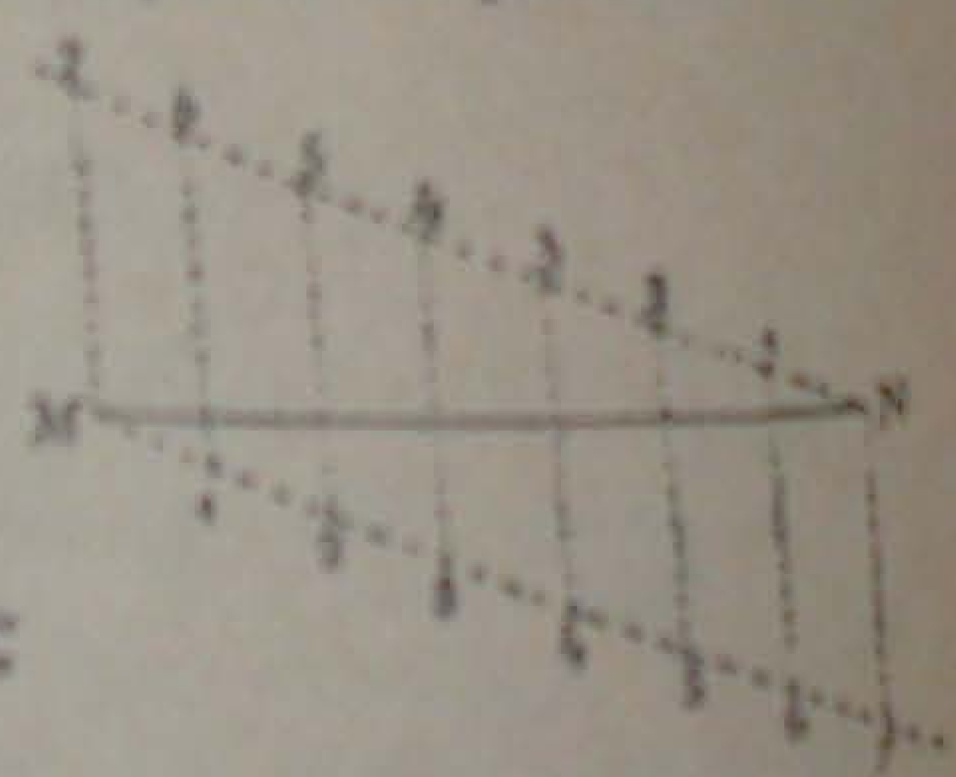


Fig. 318

AC marquemos cinco distâncias iguais Am, mn, np, pq e qr. Liguemos o ponto r ao ponto B e pelos pontos

q, p, n, m tracemos paralelas a rB, as quais vão dividir AB em cinco partes iguais.

Outra solução. — Seja MN o segmento que desejamos dividir em 7 partes iguais (fig. 318).

Formemos na extremidade M um ângulo qualquer e em N outro igual a M.

Apliquemos, a partir de M e de N, sôbre cada uma das semi-retas que formam com MN os ângulos, sete distâncias iguais entre si e liguemos depois M — 7, 1 — 6, 2 — 5, 3 — 4, 4 — 3, 5 — 2, 6 — 1 e 7 — N.

Estes segmentos são todos paralelos e dividem MN em 7 partes iguais.

Problema 117. — *Dividir um segmento de reta em partes proporcionais a outros segmentos dados.*

Seja AB que queremos dividir em partes proporcionais aos segmentos m, n, e p (fig. 319).

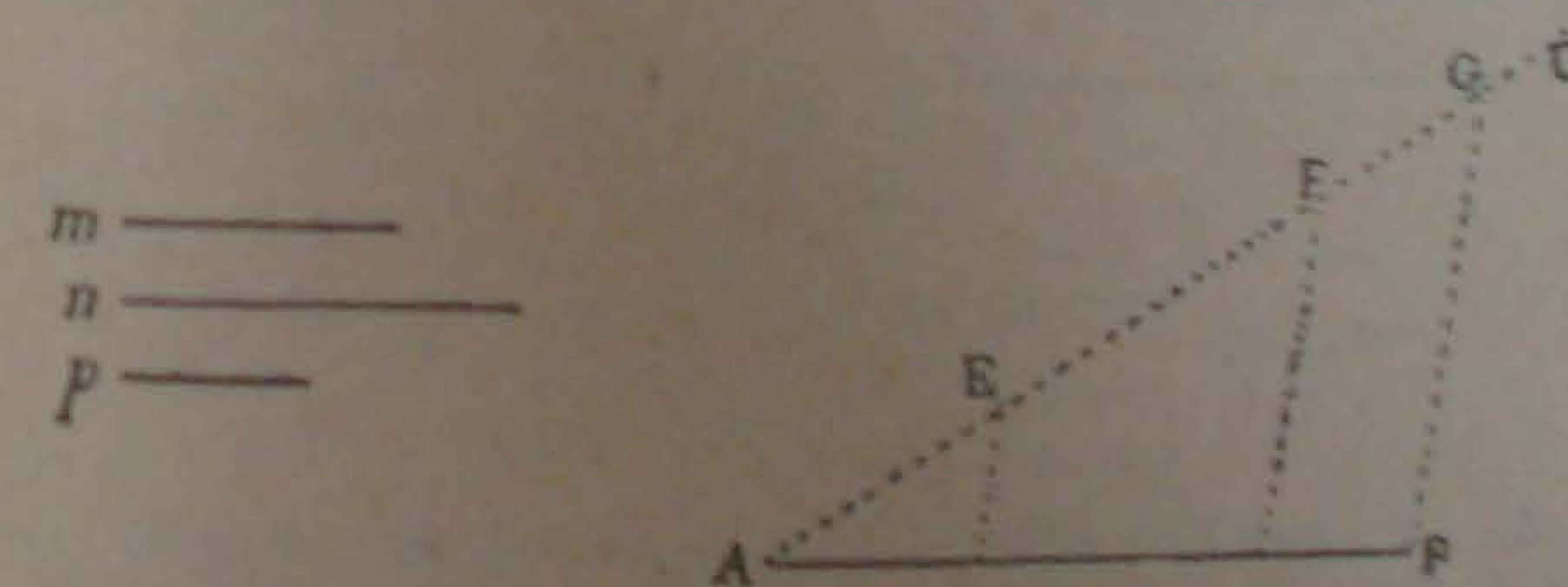


Fig. 319

Do ponto A tracemos uma semi-reta AC que forme com AB um ângulo qualquer. Sôbre AC e a partir de A marquemos $AE = m$, $EF = n$ e $FG = p$; unamos G a B e dos pontos E e F tracemos paralelas a GB. Estas paralelas dividem AB em partes proporcionais às distâncias m, n e p, porque se duas retas cortam um feixe de paralelas, os segmentos correspondentes nas duas retas são proporcionais.

Problema 118. — *Achar a quarta proporcional a três segmentos dados.*

Sejam a, b e c (fig. 320) os segmentos dados.

Tracemos um ângulo qualquer V (fig. 321); sôbre um lado marquemos a distância $VM = a$ e $VN = b$ e,

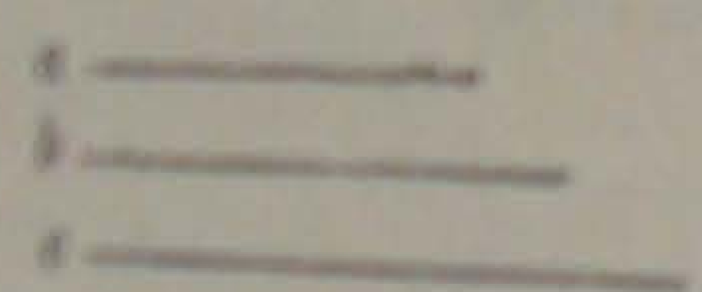


Fig. 320

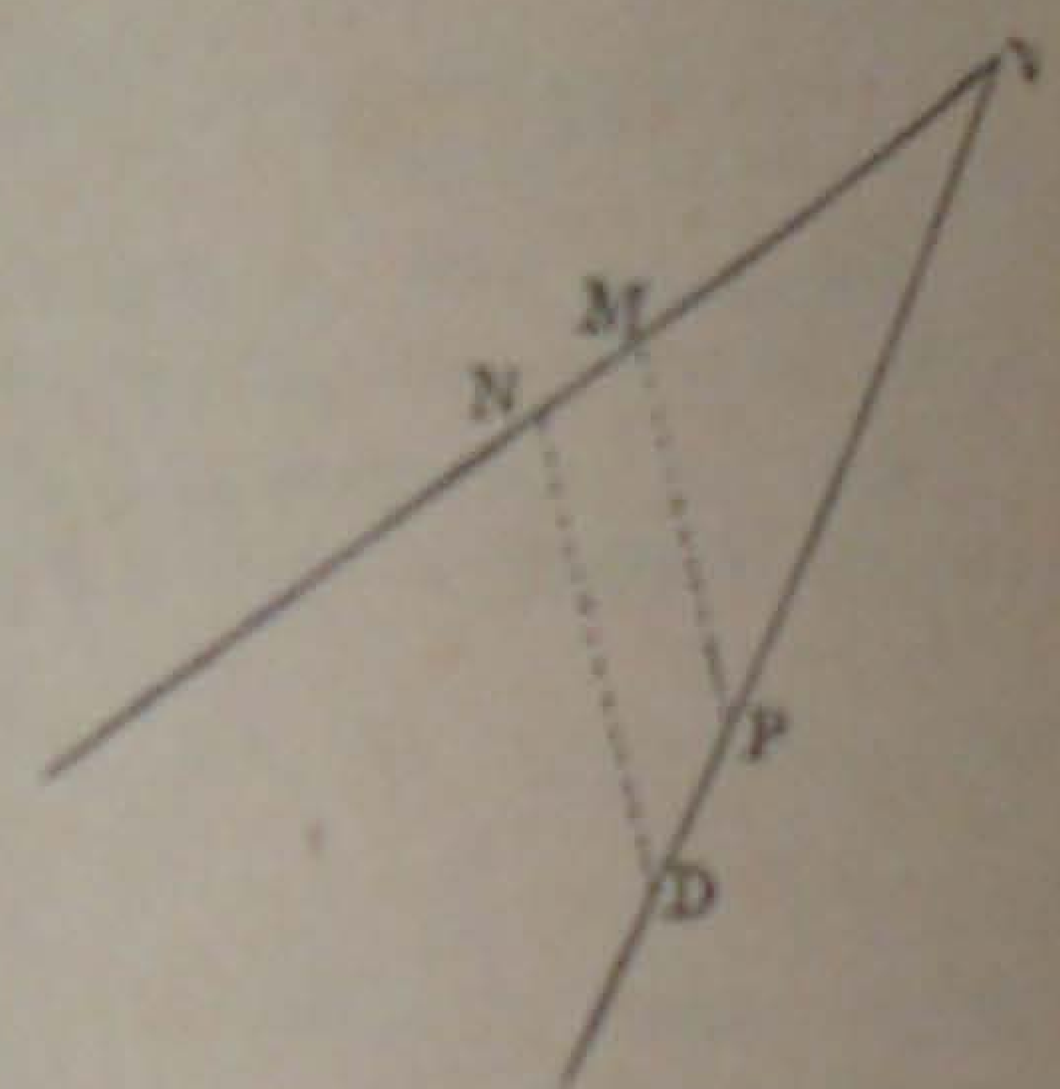


Fig. 321

sôbre o outro lado, $VP = c$. Liguemos o ponto M ao ponto P e do ponto N tracemos uma paralela a MP. A quarta proporcional pedida é VD.

Problema 119. — *Achar a média proporcional a dois segmentos de reta.*

Sejam a e b os segmentos dados (fig. 322). Sôbre uma reta indefinida marquemos MN (fig. 323) igual a a e $NP = b$. Sôbre MP como diâmetro, descrevamos uma

semi-circunferência e pelo ponto N levantemos uma perpendicular. NK é a média proporcional pedida.

Fig. 322

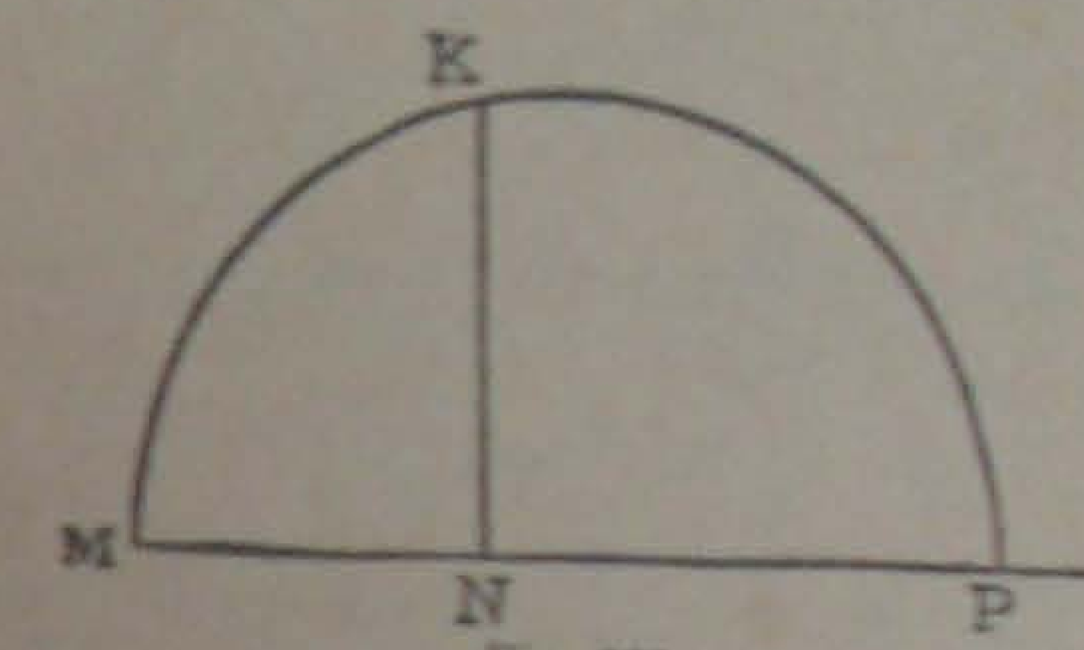


Fig. 323

Problema 120. — *Dividir um segmento de reta em média e extrema razão.*

Seja AB o segmento dado (fig. 324).

Construamos um triângulo ABC em que um catêto seja AB e o outro metade de AB.

Do ponto C, como centro e raio igual a CB, marquemos CE. Finalmente, do ponto A e com raio AE tracemos o arco ED.

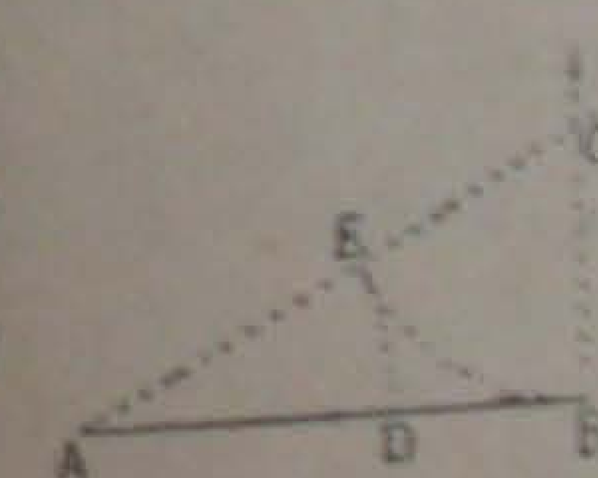


Fig. 324

O ponto D divide AB em média e extrema razão. Diz-se que AD é o *segmento áureo de AB* (*).

Problema 121. — *Construir um triângulo, dado o perímetro e sabendo seus lados proporcionais a três segmentos dados.*

(*) Dividir um segmento de reta em média e extrema razão é dividi-lo em duas partes, de modo que uma delas seja média proporcional entre o segmento todo e a outra parte. Quando no problema 109 (2.a solução) determinamos o lado do decágono regular convexo, não fizemos mais do que dividir o raio do círculo circunscrito em média e extrema razão, pois o lado do decágono regular convexo é igual ao segmento áureo do raio.

Seja AB o perimetro (fig. 325) e m, n e p os segmentos proporcionais aos lados (fig. 326).

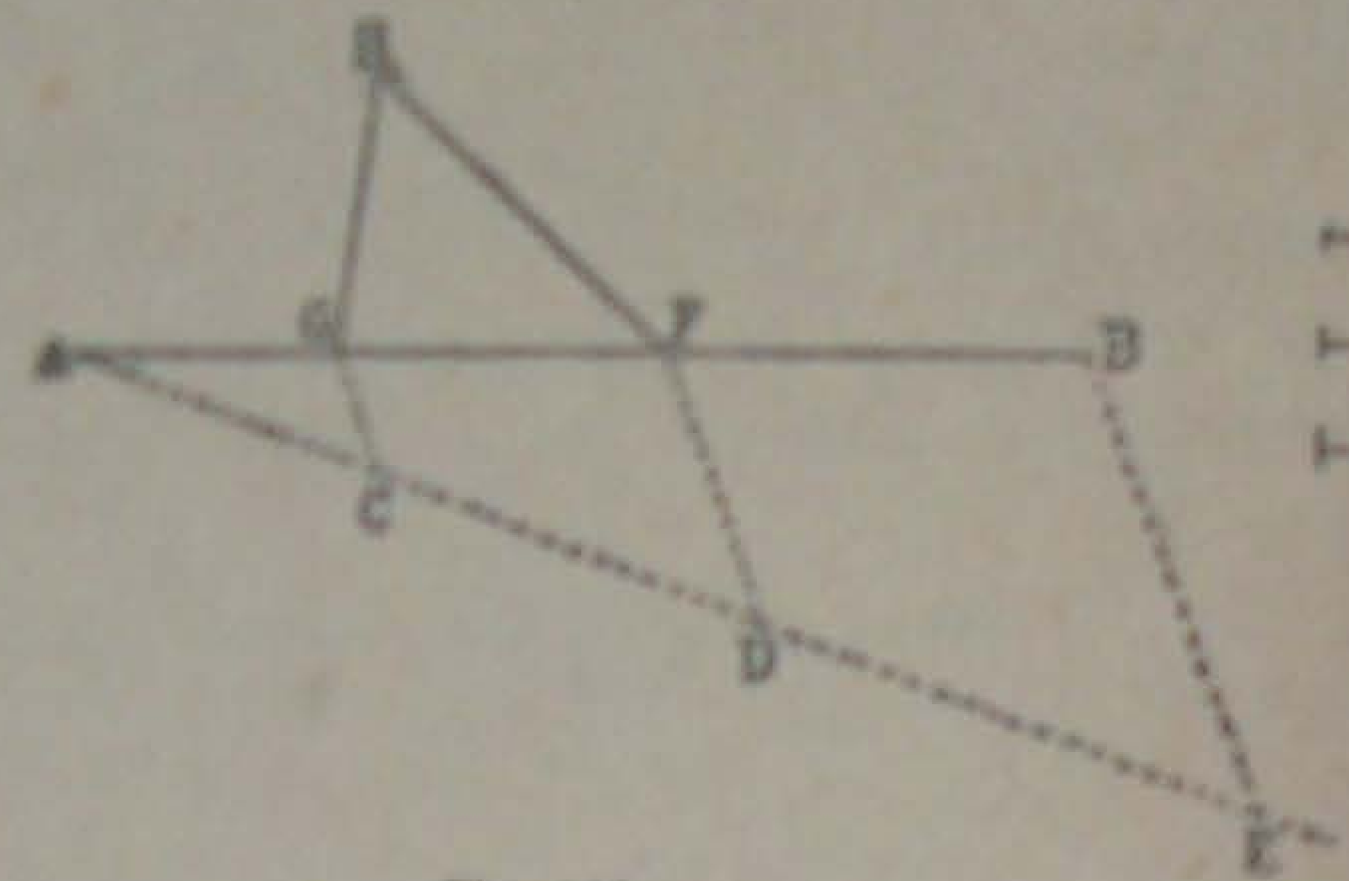


Fig. 325

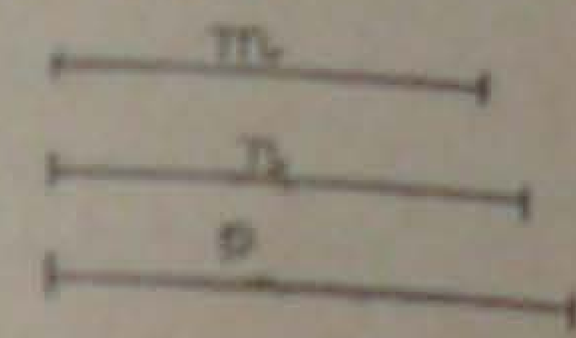


Fig. 326

Do ponto A façamos partir uma semi-reta e apliquemos sôbre ela $AC = m$, $CD = n$ e $DE = p$.

Liguemos o ponto B ao ponto E e de C e D tracemos paralelas a BE.

Os lados do triângulo pedido são iguais a AG, GF e FB respectivamente.

EXERCÍCIOS

1. Trace um segmento de reta qualquer e divida-o em 3, em 5, em 7, em 9, etc. partes iguais.
2. Trace três segmentos de reta e divida o primeiro dêles em partes proporcionais aos outros dois.
3. Trace três segmentos de reta e construa a sua quarta proporcional.
4. Trace dois segmentos de reta e construa a sua média proporcional.
5. Divida gràficamente em média e extrema razão um segmento de reta de 8cm.
6. Construa o triângulo que tem 10cm de perimetro e cujos lados são proporcionais a 2, 3 e 4.

CAPÍTULO XI

Polígonos semelhantes. — Escalas.

Consideremos o polígono $ABCDE$ e construamos depois um outro, $A'B'C'D'E'$ (fig. 327), onde os ângulos são respectivamente iguais aos do primeiro, isto é,

$$\wedge A = \wedge A' \qquad \wedge B = \wedge B' \qquad \wedge C = \wedge C'$$
$$\wedge D = \wedge D' \qquad \wedge E = \wedge E'$$

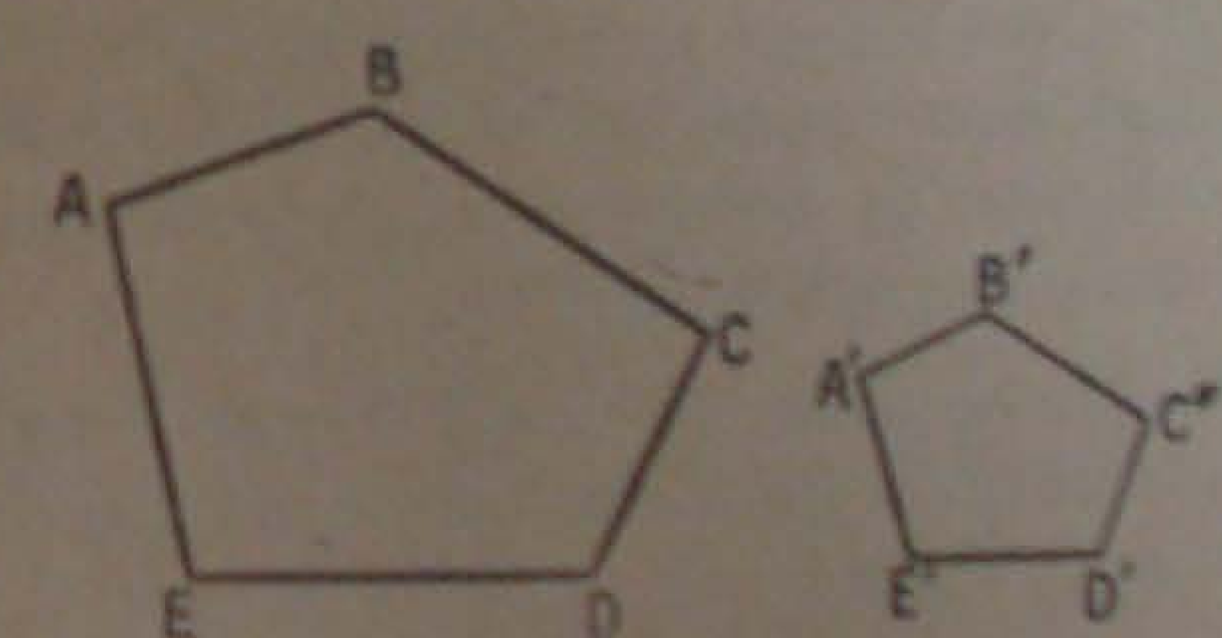


Fig. 327

e os lados são proporcionais, isto é,

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'}$$

Dizemos que esses dois polígonos, $ABCDE$ e $A'B'C'D'E'$, são *semelhantes*. Os elementos que se correspondem nas duas figuras chamam-se *homólogos*. Assim, o lado $A'B'$ é o homólogo de AB, o vértice C é o homólogo de C', etc.

Dois polígonos são, portanto, semelhantes quando têm os ângulos respectivamente iguais e os lados homólogos proporcionais.

Razão de semelhança. — A razão constante que há entre os lados homólogos de dois polígonos semelhantes chama-se *razão de semelhança*. Assim, a razão de semelhança do polígono $ABCDE$ para o polígono $A'B'C'D'E'$ é 2, pois cada lado do primeiro é 2 vezes o seu homólogo; inversamente, a razão de semelhança de $A'B'C'D'E'$ para $ABCDE$ é $\frac{1}{2}$.

Semelhança e igualdade. — Convém não confundir polígonos semelhantes com polígonos iguais: duas figuras são iguais quando podem coincidir ponto por ponto, ao passo que, em geral, as figuras semelhantes não coincidem.

A igualdade pode ser considerada como o caso especial de semelhança em que a razão de semelhança é a unidade.

Semelhança de polígonos regulares. — Os polígonos regulares de mesmo número de lados e de mesma espécie são semelhantes. Quer isto dizer que todos os triângulos equiláteros são semelhantes, assim como todos os quadrados, todos os pen-

tágonos convexos regulares, todos os pentágonos regulares estrelados, etc.

Semelhança de triângulos. — Demonstra-se que toda paralela a um lado do triângulo determina outro triângulo semelhante ao primeiro. Exemplo: na fig. 314 (pag. 156), como DE é paralela a BC, o triângulo ADE é semelhante ao triângulo ABC. Esta propriedade é devida a Tales (*lei linear de Tales*).

Damos abaixo as condições suficientes para a semelhança de dois triângulos (*casos de semelhança de triângulos*):

Dois triângulos são semelhantes quando têm: 1.°) dois ângulos iguais; 2.°) um ângulo igual compreendido entre lados proporcionais; 3.°) os três lados proporcionais.

Decomposição de polígonos semelhantes. — Dois polígonos semelhantes podem ser decompostos no mesmo número de triângulos semelhantes e seme-

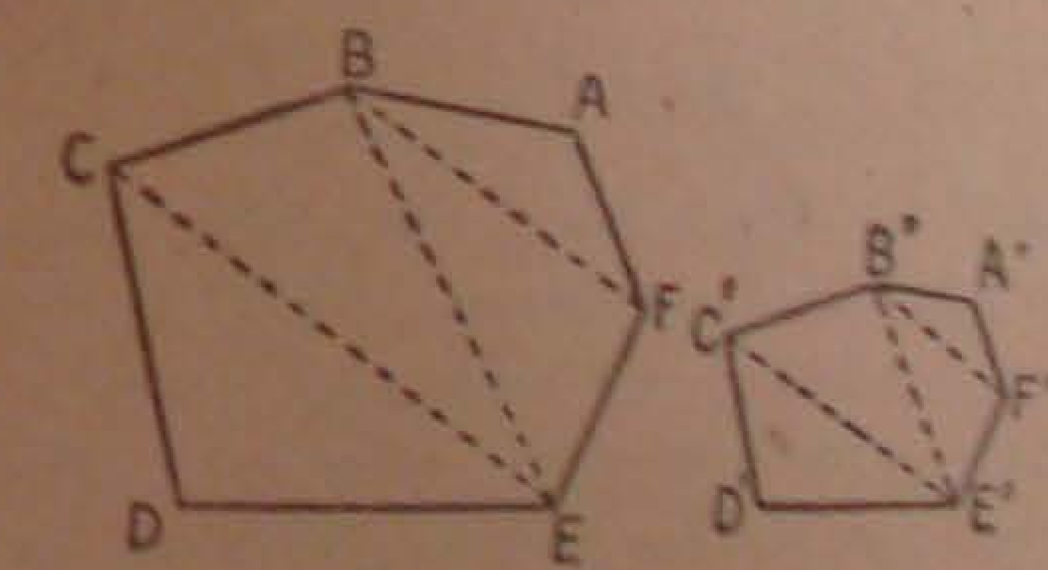


Fig. 328

lhantemente dispostos. É o que se observa na fig. 328 em que o triângulo ABF é semelhante a $A'B'F'$, BEF é semelhante a $B'E'F'$ e assim sucessivamente.

Propriedade relativa aos perímetros de polígonos semelhantes. — Os perímetros de dois polígonos semelhantes estão entre si como dois lados homólogos, isto é, na mesma razão de semelhança.

Esta propriedade nos permite, conhecida a razão de semelhança de dois polígonos e dado o perímetro de um dêles, determinar o perímetro do outro.

Exemplo: A razão de semelhança do polígono P para o polígono P' é $\frac{6}{7}$; o perímetro do primeiro é 18; qual o perímetro do segundo?

Chamando x o perímetro pedido, podemos fazer

$$\frac{18}{x} = \frac{6}{7}$$

donde se tira

$$x = \frac{18 \times 7}{6} = 21$$

O perímetro de P' é 21.

Escalas. — Quando passamos do polígono $ABCDE$ para o seu semelhante $A'B'C'D'E'$ (fig. 327), dizemos que houve uma *redução*, visto como a segunda figura é menor do que a primeira; isto se dá sempre que a razão de semelhança do novo polígono para o primitivo é menor do que a unidade. Ao contrário, se passarmos do polígono $A'B'C'D'E'$ para o polígono $ABCDE$ há uma *ampliação*, visto como a segunda figura é maior do que a primitiva; isto se dá sempre que a razão de semelhança do

novo polígono para o primeiro é maior do que a unidade.

Na redução, chama-se geralmente *escala* a razão de semelhança da figura desenhada para a figura primitiva, que serve de modêlo. Pode-se dizer que escala é a razão das dimensões do desenho para as dimensões reais. Esta razão se costuma exprimir em forma de fração ordinária em que o numerador é a unidade.

Assim, diz-se que um desenho está na escala de *um para vinte* (1 : 20 ou $\frac{1}{20}$), quando a razão de semelhança da redução para o original for $\frac{1}{20}$.

Conhecida, em cada caso, a redução que se quer obter, pode-se construir facilmente uma *escala de redução* traçando duas paralelas e dividindo-as em partes iguais por perpendiculares comuns.

Para desenharmos um modêlo na proporção de 1:10, por exemplo, teríamos que construir uma escala em que cada uma das divisões representasse a décima parte da medida adotada.

Na figura 329 (escala de 1:10) AB que é igual a um decímetro, representa um metro; Ac que é

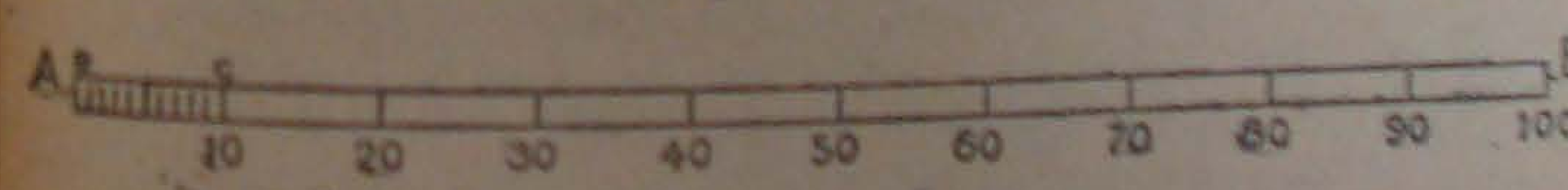


Fig. 329

igual a um centímetro, representa um decímetro e Ac, que é um milímetro, representa um centímetro.

Na figura 330 (escala de 1:20) MN mede cinco *centímetros* e representa um metro, porque cinco centímetros é a vigésima parte do metro; cada di-

Fig. 330

visão é igual a cinco milímetros e representa um *decímetro*; finalmente, divididos cinco milímetros em dez partes iguais, cada uma representará, nessa escala, um centímetro.

As escalas métricas de proporção mais usadas são:

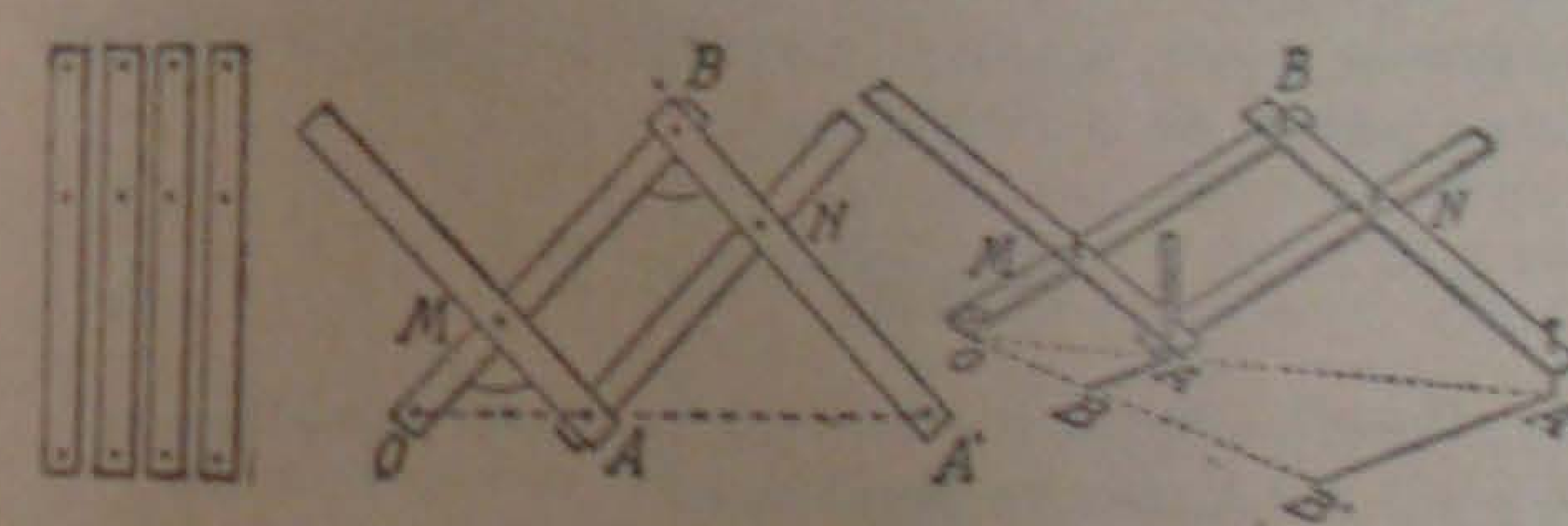
Escala	**Medida real**	**Medida gráfica**
1:5		0,20m
1:10		0,10m
1:20	1 metro	0,05m
1:25		0,04m
1:50		0,02m
1:100		0,01m

Conhecida a escala de um desenho podemos julgar das dimensões reais do modêlo ou objeto representado nêsse desenho.

A **escala decimal transversal** permite divisões muito pequenas as quais não poderíamos obter na escala comum.

Sua construção é baseada na teoria dos triângulos semelhantes (Veja **Problema 122**).

Pantógrafo — O aparelho destinado a traçar figuras semelhantes é o *pantógrafo*, cuja construção se baseia na lei linear de Tales e está ao alcance de qualquer pessoa. Compõe-se ele, essencialmente, de 4 hastes rígidas iguais, cada uma delas dividida por um ponto de modo que a haste toda esteja para um dos segmentos (sôbre ela determinados por tal ponto) como a figura que se deseja deve estar para a figura dada. As 4 hastes são depois articuladas nesses pontos, de sorte a formarem um paralelogramo ($AMBN$).



Suponhamos que se deseja uma ampliação para o triplo, isto é, a razão de semelhança da figura pedida para a figura dada é 3 : 1 ou 3. Cada haste é dividida em três partes iguais e em seguida são as hastes articuladas no primeiro ponto de divisão. A extremidade O é fixada sôbre a mesa; no ponto A existe um estilete e em A', um lapis. Pois bem, quando, deformando o paralelogramo, se fizer o estilete descrever um segmento (AB), o lapis descreverá outro segmento paralelo 3 vezes maior

(*A'B'*). Do mesmo modo, qualquer que seja a figura descrita pelo estilete, o lapis descreverá outra semelhante e que estará para a primeira na razão 3 : 1.

Si quiséssemos uma figura que estivesse para a figura dada na razão 5 : 2, por exemplo, bastaria mudar os pontos de articulação das hastes, dividindo estas em 5 partes iguais e fazendo a articulação pelo segundo ponto de divisão; e assim por diante.

Os pantógrafos geralmente encontrados no mercado são de hastes de metal ou de madeira convenientemente graduadas e construidas de modo que se possa facilmente variar a escala, mudando os pontos de articulação.

QUESTIONÁRIO

1. Quando é que dois poligonos se dizem semelhantes?
2. Que são elementos homólogos?
3. Que é razão de semelhança de dois poligonos?
4. Pode-se confundir semelhança de figuras com igualdade?
5. Mostre que dois poligonos regulares de mesmo número de lados e da mesma espécie são sempre semelhantes.
6. Quais são os casos de semelhança de triângulos?
7. Que é escala?
8. Como se indica geralmente a escala de um desenho?
9. Que é que se observa quanto à decomposição de poligonos semelhantes em triângulos?
10. Qual a razão existente entre os perimetros de poligonos semelhantes?

PROBLEMAS

Problema 122. — *Construir uma escala decimal.*

Tracemos uma reta e marquemos, a partir de um ponto qualquer, diversas medidas, *AB, BC, CD, DE*, etc., iguais entre si e cada uma correspondente à unidade de medida (fig. 331).

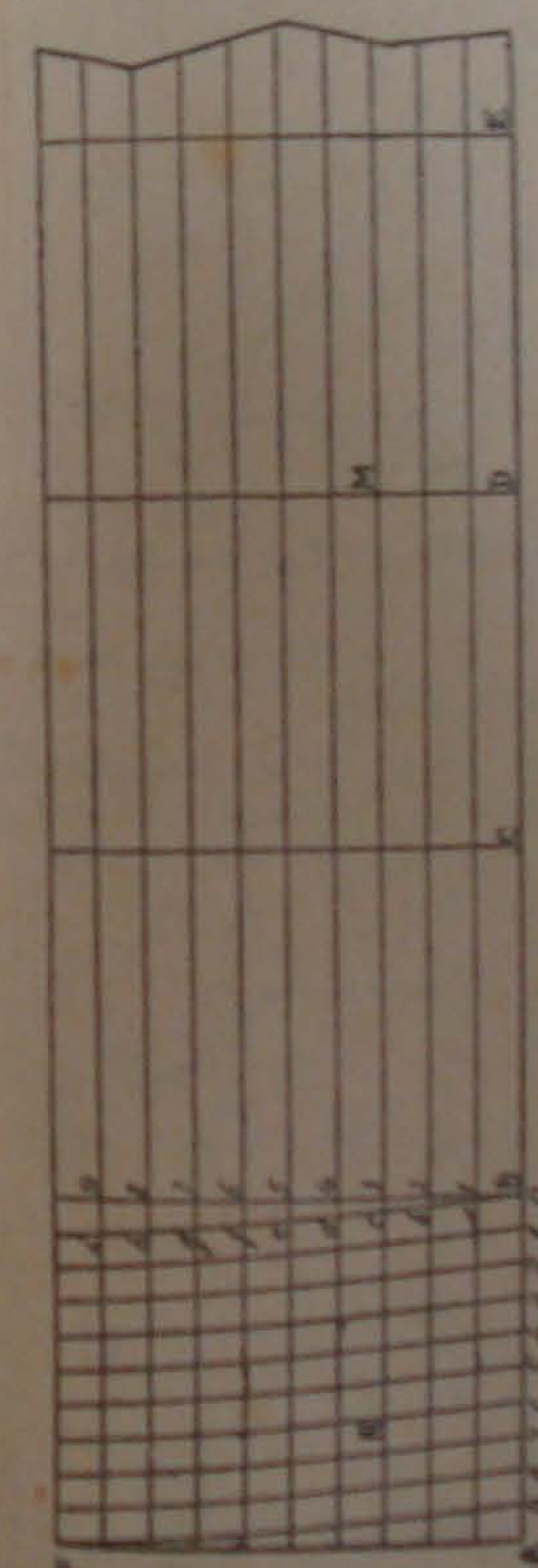


Fig. 331

Dos pontos *A, B, C, D, E* levantemos perpendiculares à reta anteriormente traçada.

Sôbre a perpendicular *A* apliquemos dez vezes uma mesma medida arbitrária e pelos pontos de divisão tracemos paralelas a *AE*. Dividamos *AB* em dez partes iguais, tracemos *F* 9 e tiremos pelos pontos de divisão, paralelas a *F* 9, como indica a fig. 331.

O ponto *B* é o zero da escala; as distâncias crescentes *a1, b2, c3*, etc., exprimem 1, 2, 3, etc., unidades; as partes iguais em que está dividida *AB* são as dezenas e as distâncias *AB, BC, CD*, são as centenas.

Aplicações. — Para marcar 130 unidades, tomemos a distância *C3* em linha horizontal.

Para ter 263 unidades tomemos a distância *MN* porque $MN = M3 + 3c + cN$ ou $200 + 3 + 60 = 263$.

Problema 123. — *Construir um triângulo semelhante a outro dado, conhecido o homólogo de um dos lados.*

Seja *ABC* o triângulo dado (fig. 332) e *C'B'* o homólogo de *CB* (fig. 333).

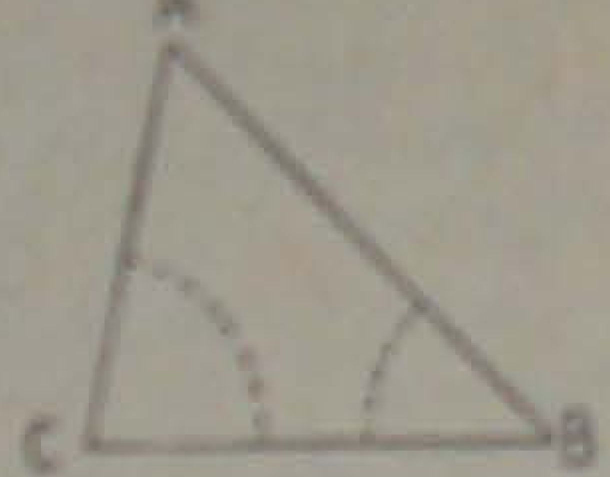


Fig. 332

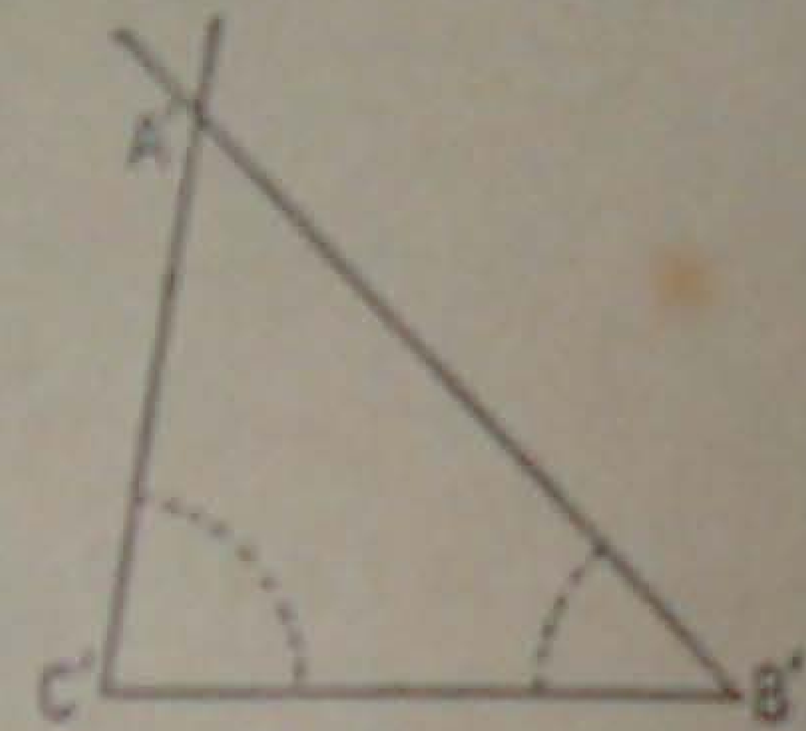


Fig. 333

Façamos no ponto *C'* um ângulo = *C* e no ponto *B'* um outro = *B*.

Os triângulos *ABC* e *A'B'C'* são semelhantes porque têm dois ângulos respectivamente iguais.

Problema 124. — *Construir um polígono semelhante a outro dado, conhecido o homólogo de um dos lados.*

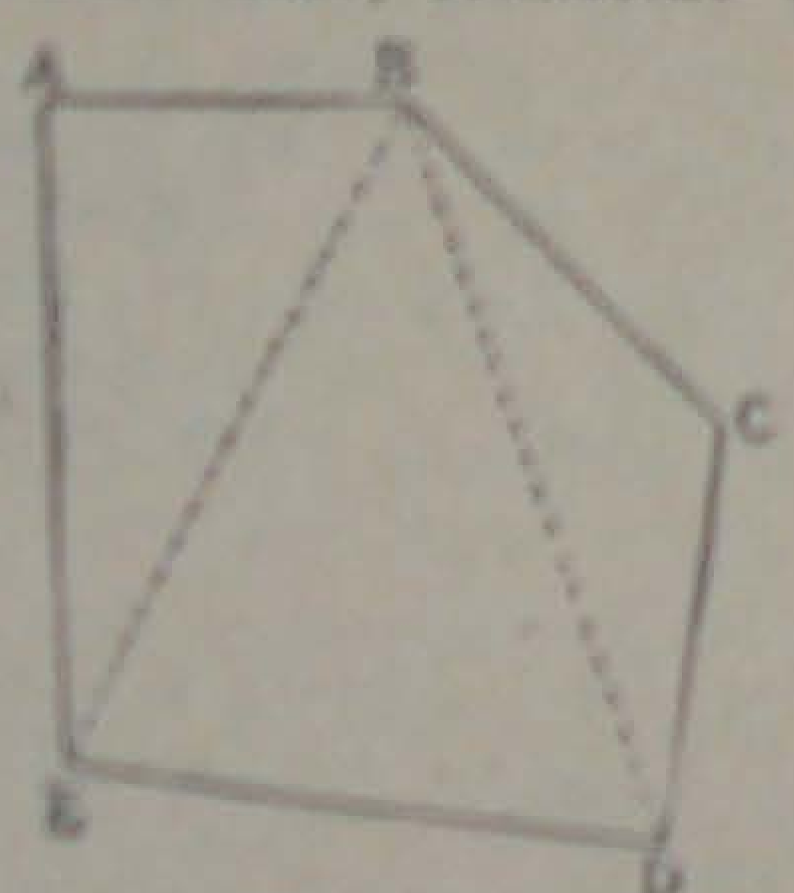


Fig. 334

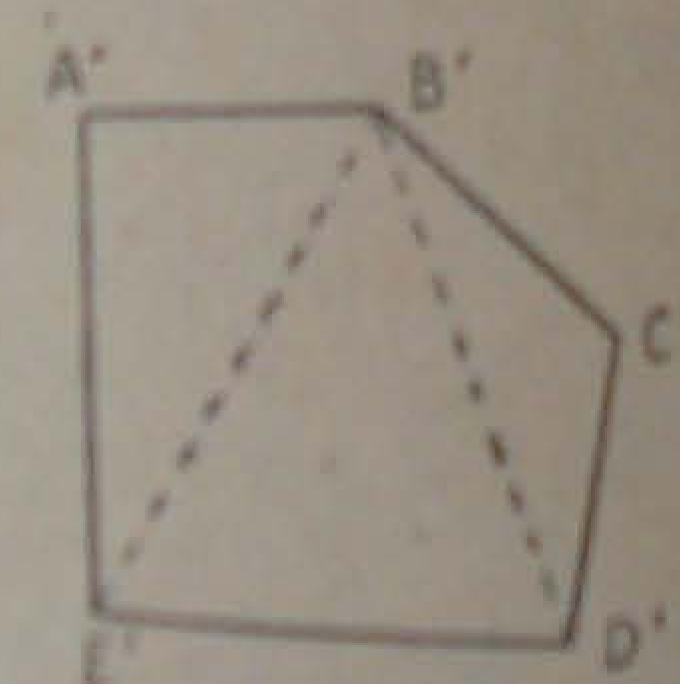


Fig. 335

Seja *ABCDE* polígono dado (fig. 334) e *E'D'* o lado homólogo de *ED* (fig. 335).

Decomponhamos *ABCDE* nos triângulos *ABE*, *BDE* e *BCD*.

Sôbre *E'D'*, façamos um triângulo *B'D'E'* semelhante a *BDE*; sôbre o lado *B'D'* façamos um triângulo *B'C'D'* semelhante a *BCD* e sôbre *B'E'* um triângulo *A'B'E'* semelhante a *ABE*. Os polígonos *A'B'C'D'E'* e *ABCDE* são semelhantes.

Problema 125. — *Construir um retângulo semelhante a outro dado conhecida a razão de semelhança.*

Seja *ABCD* o retângulo dado (fig. 336), e seja 6 : 7 a razão de semelhança do novo retângulo para *ABCD*.

Tiremos a diagonal *AD* e dividamos o lado *AB* em 7 partes iguais.

Pelo ponto 6 levantemos uma perpendicular a *AB* até determinar o ponto *M* na diagonal *AD*.

Do ponto *M* tracemos *MN* paralela a *CD*. O retângulo pedido é *A6MN*, pois seus lados estão para os homólogos em *ABCD* na razão 6:7 ou $\frac{6}{7}$.

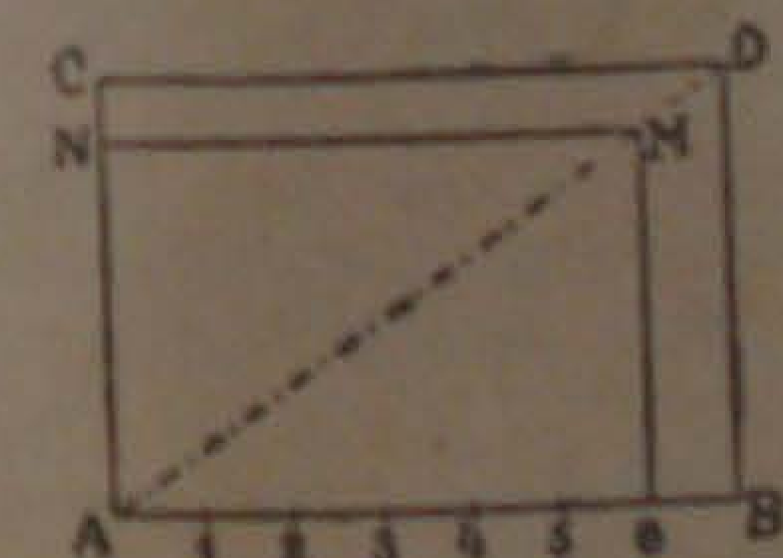


Fig. 336

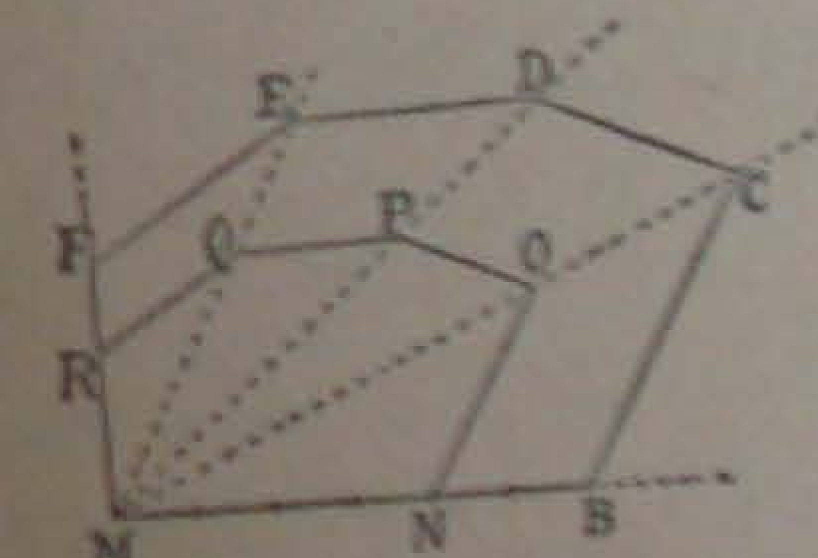


Fig. 337

Problema 126. — *Construir um polígono semelhante a outro, sendo 6:4 a razão de semelhança do novo polígono para o polígono dado.*

Seja *MNOPQR* o polígono (fig. 337).

Dividamos *MN* em 4 partes iguais e prolonguemos *MR* e *MN*.

Apliquemos em NB uma distância igual a $\frac{2}{4}$ de MN, e teremos $\frac{MB}{MN} = \frac{6}{4}$.

Do vértice M tiremos todas as diagonais do polígono dado, prolongando-as.

Tracemos BC, CD, DE e EF respectivamente paralelas a NO, OP, PQ e QR.

O polígono $MBCDEF$ é semelhante ao polígono dado, e a razão de semelhança do primeiro para o segundo é $\frac{6}{4}$.

EXERCÍCIOS

1. Dois pentágonos semelhantes, $ABCDE$ e $A'B'C'D'E'$ têm, respectivamente, 60cm e 45cm de perímetro. Os lados do primeiro medem: AB=12cm; BC=18cm; CD=10cm; DE=14cm. Quanto medem os lados de $A'B'C'D'E'$?
2. Os lados de um quadrilátero medem 3cm, 5cm, 7cm e 10cm. Um outro quadrilátero semelhante tem 75cm de perímetro. Qual a razão de semelhança do primeiro para o segundo?
3. Numa planta o segmento retilíneo de 4,5cm representa uma distância de 4500 metros. Qual a escala usada?
4. A escala empregada em um mapa foi 1:1.000.000 e nele a cidade A está a 7,2cm da cidade B. Qual deve ser a distância real entre as duas cidades?
5. A distância em linha reta entre Belo Horizonte e Rio de Janeiro é aproximadamente 380km e num mapa o segmento retilíneo que liga as duas cidades é de 19cm. Qual a escala do mapa?

CAPÍTULO XII

Medida da circunferência.

Retificar uma curva é obter um segmento retilíneo de comprimento igual ao da curva.

Se ajustarmos um fio de linha em torno de um círculo até completar-lhe a volta e, depois de esticado o fio, medirmos o seu comprimento, teremos retificado a circunferência daquele círculo. Mas, nem sempre se pode proceder a essa medida direta. Temos, por isso, que recorrer ao cálculo para medir indiretamente o comprimento da circunferência. Vejamos como isto é possível, desde que conheçamos o raio ou o diâmetro da circunferência.

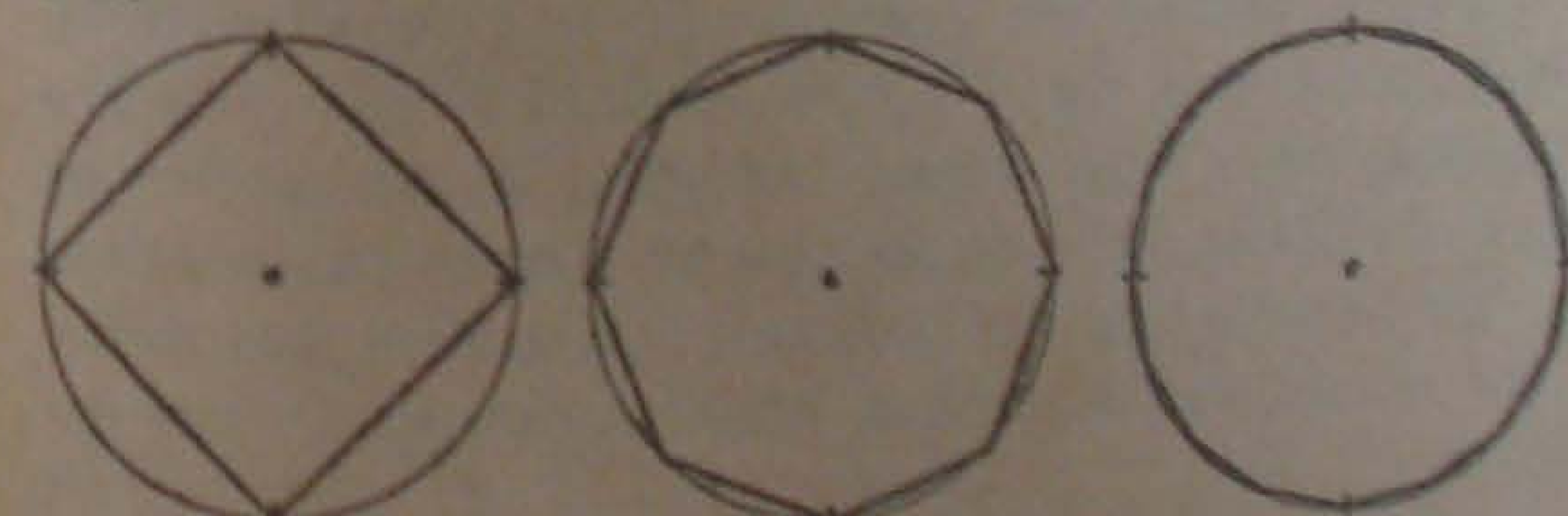


Fig. 338

Tracemos uma circunferência e inscrevamos nela um polígono regular: um quadrado, por exemplo. Notamos que há uma grande diferença entre o perímetro da circunferência e o do quadrado inscrito. Mas, se dobrarmos o número de lados do polígono inscrito, isto é, si o polígono inscrito for o octógono, já não será tão grande a diferença entre os dois comprimentos; esta diferença ainda se tornará menor si o polígono inscrito for de 16 lados. Assim, si aumentarmos cada vez mais o número de lados do polígono regular inscrito, observaremos que cada lado dêste se vai tornando muito pequeno e que o perímetro dêle se vai aproximando da medida da circunferência. Ora, si considerarmos o polígono regular com um número infinitamente grande de lados, êle acabará se confundindo com o círculo e o seu perímetro será, então, igual à medida da circunferência (fig. 33).

O círculo pode, pois, ser considerado como um polígono regular de número infinito de lados, o comprimento de cada lado tendendo para zero; e a medida da circunferência como o perímetro de tal polígono.

Deste modo de considerar a circunferência, concluímos que duas circunferências são sempre semelhantes e que nelas os raios, assim como os diâmetros, são linhas homólogas. Como já sabemos que os perímetros de polígonos semelhantes estão entre si como duas linhas homólogas, podemos escrever

$$\frac{C}{C'} = \frac{R}{R'} \quad \text{ou} \quad \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$$

chamando C o comprimento de uma circunferência de diâmetro D e raio R e C' o comprimento

de outra circunferência de diâmetro D' e raio R'. Essas duas proporções indicam que *duas circunferências estão entre si como os seus raios ou os seus diâmetros.*

Se, agora, trocarmos os meios da segunda proporção escrita acima, teremos

$$\frac{C}{D} = \frac{C'}{D'}$$

o que significa que a razão da primeira circunferência para o seu diâmetro é igual à razão da segunda circunferência para o respectivo diâmetro. Esta razão constante da circunferência para o diâmetro é designada pela letra grega π (pronuncia-se *pi*).

O número π não pode ser calculado exatamente, mas os geômetras, usando metodos engenhosos, determinaram o seu valor com uma aproximação muito grande. Na prática, para os problemas usuais, empregamos 3, 1416.

Medida da circunferência. — Este valor de π nos mostra que o comprimento da circunferência é,

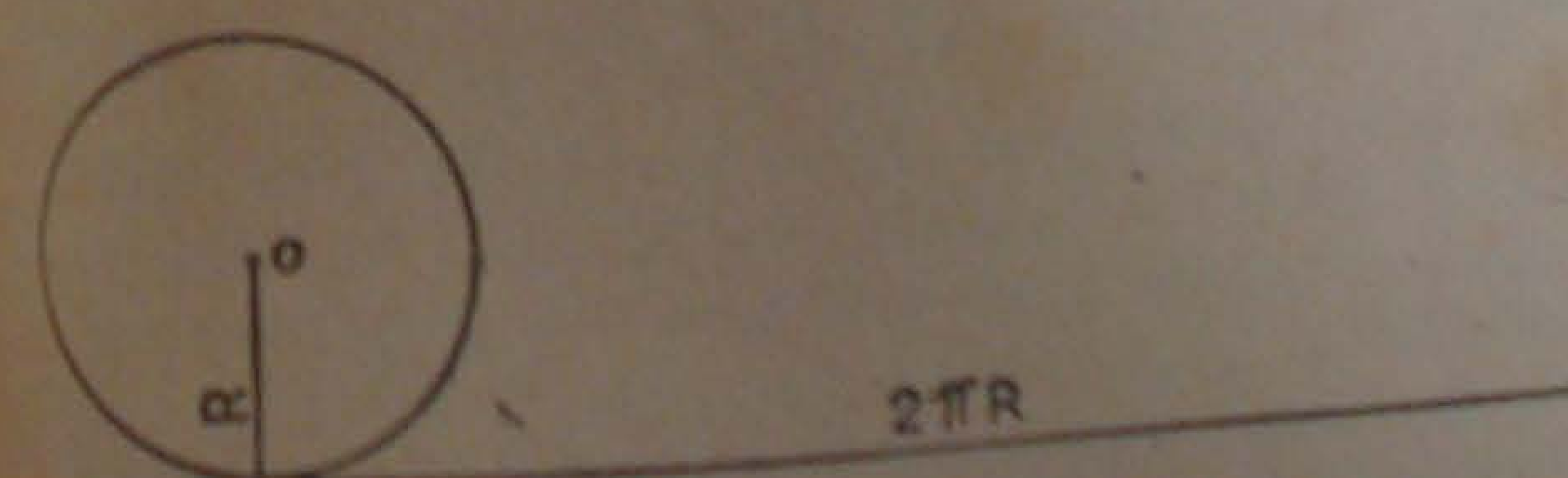


Fig. 33[illegible] — Circunferência retificada aproximadamente, 3 vezes o diâmetro. Com efeito, de

$$\frac{C}{D} = \pi$$

pode-se tirar

$$C = \pi \times D$$

ou, ainda, substituindo o diâmetro pelo dôbro do raio,

$$C = 2\,\pi\,R$$

Conclusão: *obtém-se o comprimento da circunferência multiplicando o seu diâmetro por 3,1416 ou multiplicando o seu raio por 6,2832.*

Exercício — *Qual o comprimento de uma circunferência cujo raio é igual a 6 metros?*

$$C = 2 \times 3{,}1416 \times 6 = 37{,}6992\text{m}$$

Exercício — *Qual a circunferência que tem para diâmetro 16 metros?*

$$C = 3{,}1416 \times 16 = 50{,}2656\text{m}$$

As mesmas fórmulas acima nos dão o diâmetro e o raio de um círculo quando se conhece a sua circunferência. Com efeito, de $C = \pi D$ e $C = 2\pi R$, se pode tirar

$$D = \frac{C}{\pi} \quad \text{e} \quad R = \frac{C}{2\,\pi}$$

isto é, o diâmetro se obtém dividindo o comprimento da circunferência por 3,1416 e o raio se obtém dividindo o comprimento da circunferência por 6,2832.

Exercício — *Qual o diâmetro de um círculo cuja circunferência mede 37,6992m?*

Substituindo-se C pelo valor dado, temos:

$$D = \frac{37{,}6992}{3{,}1416} = 12\text{m}$$

Comprimento de um arco. — Como a circunferência tem 360°, cada grau é $\frac{1}{360}$ da circunferência e um arco de n graus representa $\frac{n}{360}$ da circunferência. Então, para obter o comprimento de de um arco de n graus, bastará multiplicar o comprimento total da circunferência por $\frac{n}{360}$. Chamando a o comprimento do arco, teremos

$$a = \frac{2\,\pi\,R\,n}{360} = \frac{\pi\,R\,n}{180}$$

Exercício — *Qual o comprimento de um arco de 50° numa circunferência de 6 metros de raio?*

$$a = \frac{\pi \times 6 \times 50}{180} = \frac{3{,}1416 \times 6 \times 50}{180} = 5{,}236\text{m}$$

Si ambos os membros da igualdade

$$a = \frac{\pi\,R\,n}{180}$$

forem multiplicados por 180 e depois divididos por $\pi\,R$, obtém-se

$$n = \frac{180\,a}{\pi\,R}$$

isto é, o número de graus de um arco é igual a 180 vezes o seu comprimento dividido por 3,1416 vezes o raio.

Exercício — *Quantos graus tem um arco de 6 metros numa circunferência de 15 metros de raio?*

$$n = \frac{180 \times 6}{3,1416 \times 15} = 22°55'$$

QUESTIONÁRIO

1. Que é retificar uma curva?
2. Qual a razão de duas circunferências?
3. Como se representa a razão constante da circunferência para o seu diâmetro e que valor tem essa razão?
4. Se medirmos uma circunferência com o seu diâmetro quantas vezes ela o conterá?
5. Como se pode obter o comprimento de uma circunferência conhecendo-se o seu diâmetro ou o seu raio?
6. Como obter o comprimento de um arco de circunferência, conhecida a sua medida em graus?
7. Dado o comprimento de um arco, que fórmula permite calcular sua medida em graus?

CAPÍTULO XIII

Área dos polígonos e das figuras circulares.

Medir ou avaliar uma superfície é determinar quantas vezes ela contém uma outra superfície tomada para unidade.

A medida de uma superfície chama-se geralmente *área*.

A unidade de superfície é um quadrado, que tem para lado a unidade de comprimento.

Como no Sistema Métrico Decimal, de uso obrigatório por lei, a unidade de comprimento é o metro, a unidade de superfície é o *metro quadrado* (m^2).

Os submúltiplos do metro quadrado são:

O *decímetro quadrado* (dm^2), isto é, um quadrado cujo lado mede a décima parte do metro;

O *centímetro quadrado* (cm^2), isto é, um quadrado cujo lado mede a centésima parte do metro;

O *milímetro quadrado* (mm^2), isto é, um quadrado cujo lado mede a milésima parte do metro.

Figuras equivalentes. — Duas figuras iguais têm, evidentemente, a mesma área. Duas figuras, que não sejam iguais, podem, entretanto, ter a mesma área. Neste caso, diz-se que as figuras são *equivalentes*. Tomemos, por exemplo, o quadrado *ABCD* (fig. 340). Dividamos os lados *AD* e *BC* ao meio, unamos o ponto M ao ponto N. O quadrado acha-se dividido em dois retângulos iguais. Colo-

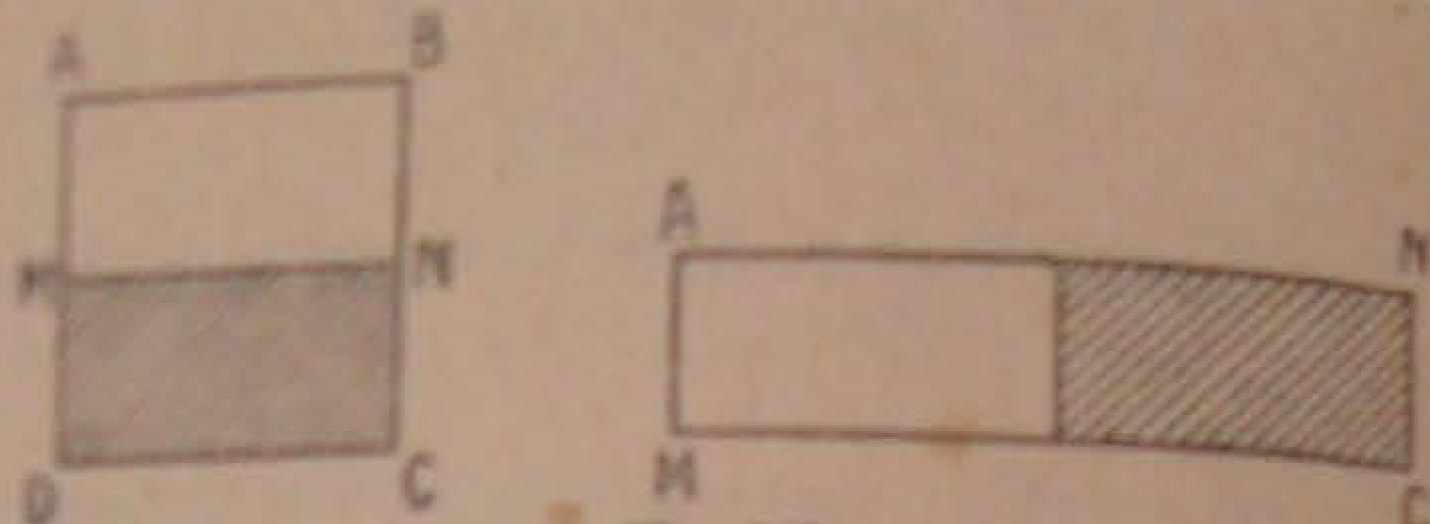


Fig. 340

quemos o retângulo $MNCD$ de sorte que o lado MD coincida com o lado BN do retângulo $ABNM$.

Obtemos dêste modo um retângulo $AMCN$ com a mesma área do quadrado $ABCD$.

O quadrado $ABCD$ e o retângulo $AMCN$ são figuras equivalentes.

Veremos adiante muitos exemplos de figuras desiguais que têm a mesma área.

ÁREA DO RETÂNGULO

Seja o retângulo $ABCD$ (fig. 341).

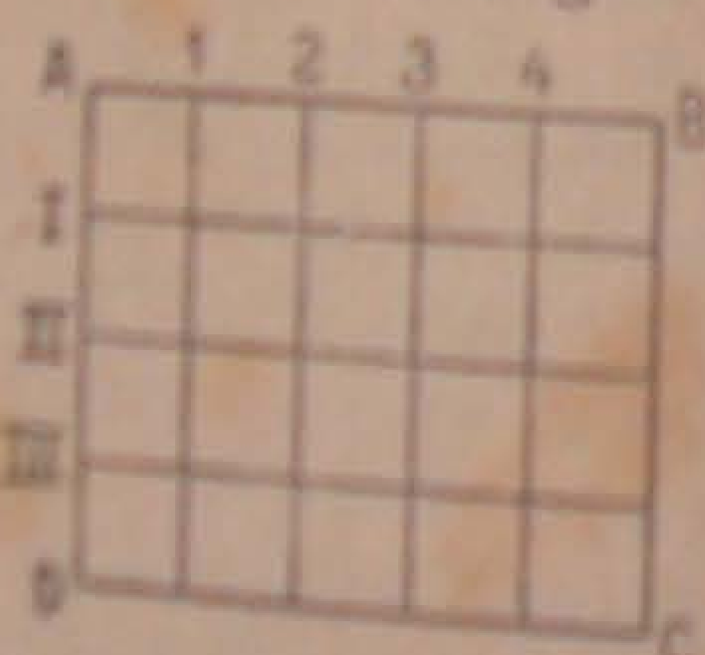


Fig. 341

Apliquemos a unidade de comprimento sôbre AB: verificamos que AB contém 5 vezes a unidade. Em seguida apliquemos a mesma unidade à outra dimensão do retângulo AD; achamos que AD contém 4 vezes a unidade. Se pelos pontos 1,2,3,4, tirarmos paralelas a AD, e pelos pontos I, II, III, tirarmos paralelas a AB, o

retângulo ficará decomposto em 5×4 ou 20 quadrados que tem de lado a unidade de comprimento, isto é, em 20 unidades de superfície. A área do retângulo é, por conseguinte, igual a 20.

Conclusão: *A área do retângulo se obtém fazendo o produto de suas duas dimensões*, ou, seja, *produto da base pela altura*

$$S = B \times A$$

Se conhecermos a área de um retângulo e uma de suas dimensões (base ou altura) podemos determinar a outra dimensão (altura ou base): basta dividir a área pela dimensão conhecida

$$B = \frac{S}{A} \qquad A = \frac{S}{B}$$

Exercício — *A altura de um muro é 2,80m; a área mede 197,40m²; qual o seu comprimento?*

$$B = \frac{197,40}{2,80} = 70,5\text{m}$$

Exercício — *Qual a altura de um retângulo cuja área é 32,30m e a base 8,5m.*

$$A = \frac{32,30}{8,5} = 3,8\text{m}$$

ÁREA DO QUADRADO

O quadrado pode ser considerado o caso especial do retângulo em que as dimensões se tornam iguais, (base igual à altura). Se aplicarmos a regra deduzida para calcular a área do retângulo, teremos de multiplicar o lado do quadrado por si mesmo:

$$S = l \times l = l^2$$

Conclusão: *a área de um quadrado é igual ao quadrado do lado.*

Exercício — *Qual a área de um quadrado de 12,5m de lado?*

Área = $12,5^2 = 12,5 \times 12,5 = 156,25m^2$.

Da fórmula $S = l^2$ deduz-se imediatamente

$$l = \sqrt{S}$$

isto é, *o lado do quadrado é igual à raiz quadrada da área.*

Exercício — *Qual o comprimento do lado de um quadrado, cuja área é igual a $46,24m^2$?*

O lado é igual a $\sqrt{46,24} = 6,8$m.

Já vimos (problema N.º 103, pág. 133) que o lado do quadrado era igual ao raio do círculo circunscrito multiplicado pela raiz quadrada de 2, isto é,

$$l = R\sqrt{2}$$

Podemos, então, obter a área do quadrado, se conhecermos o raio do círculo circunscrito. Vem

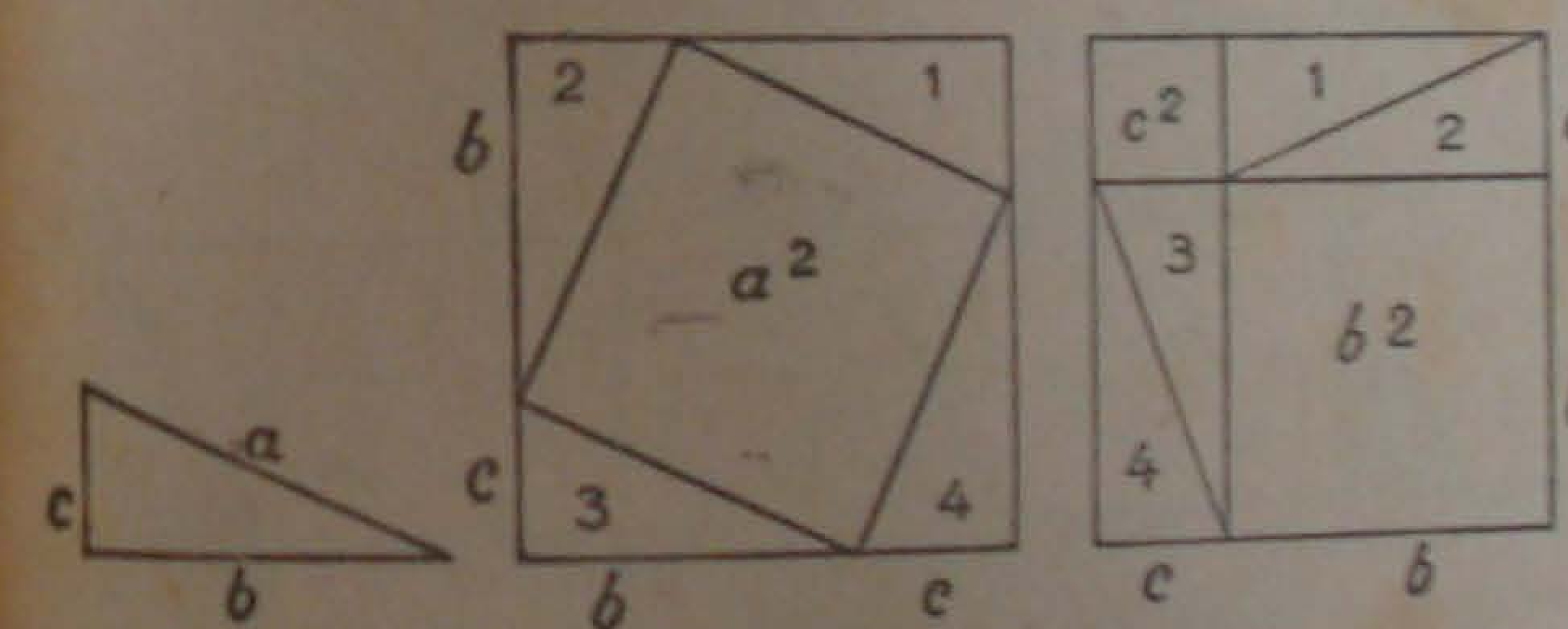
$$S = l^2 = (R\sqrt{2})^2 = 2R^2$$

Conclusão: *a área do quadrado é igual ao dôbro do quadrado do raio do círculo circunscrito.*

Exercício — *Qual a área de um quadrado inscrito em um círculo de raio igual a 15m?*

$S = 2 \times 15^2 = 2 \times 225 = 450m^2$

O teorema de Pitágoras aplicado às áreas — Dissemos na pág. 54 que em todo triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos. Ora, como o quadrado da hipotenusa dá a área do quadrado que tem para lado a hipotenusa e o quadrado de cada cateto dá a área do quadrado cujo lado é o mesmo cateto, podemos concluir: *o quadrado construído sôbre a hipotenusa é equivalente à soma dos quadrados construídos sôbre os catetos.* Isto nos é mostrado claramente pela figura abaixo, em relação ao triângulo de hipotenusa a e catetos b e c.



I II

Os dois quadrados (I e II) são evidentemente iguais, pois ambos têm de lado $b + c$ (soma dos catetos). Entretanto, o primeiro se compõe do quadrado construído sôbre a hipotenusa mais 4 triângulos iguais ao triângulo dado; o segundo se compõe dêstes 4 triângulos mais os quadrados construídos sôbre os catetos. Por conseguinte, a área do quadrado construido sôbre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construidos sôbre os catetos.

ÁREA DO PARALELOGRAMO

O paralelogramo é equivalente a um retângulo de mesma base e mesma altura.

Mostremos isto com o paralelogramo *ABCD* (fig 342).

Do vértice *A* abaixemos a perpendicular *AE* comum às paralelas *AB* e *CD*. *AE* é a altura do paralelogramo.

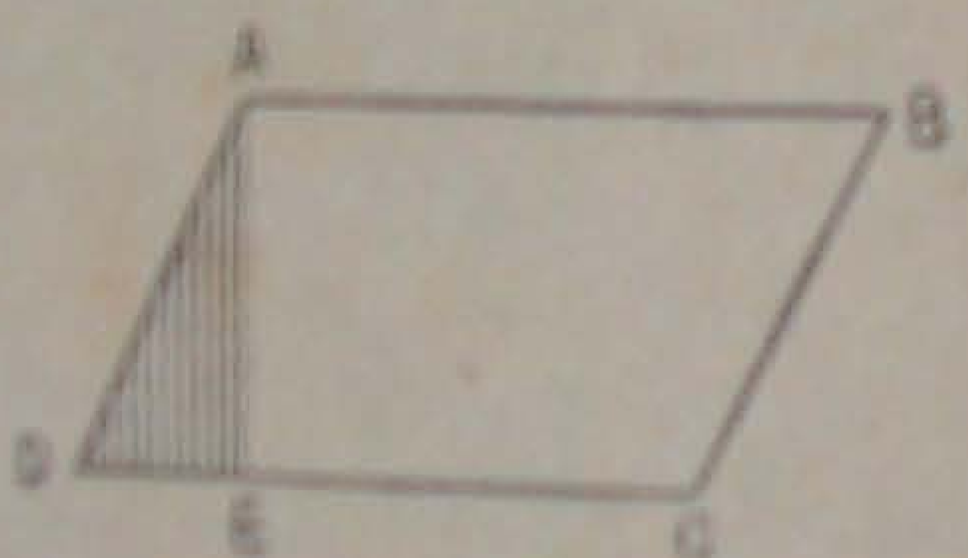


Fig. 342

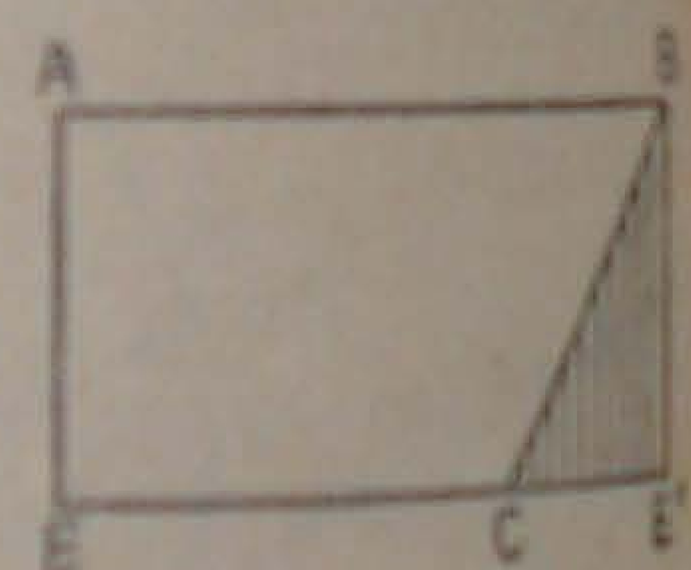


Fig. 343

Destaquemos o triângulo *AED* e transportemo-lo para o outro lado do paralelogramo, que se acha dêste modo transformado em um retângulo equivalente *ABE'E* (fig. 343). A altura *AE* do paralelogramo é também altura do retângulo e *AB* é ao mesmo tempo base de um e de outro quadrilátero. Logo o mesmo produto $AB \times AE$, que dá a área do retângulo, também dá a do paralelogramo. *A área*

do paralelogramo é, portanto, igual ao produto da base pela altura:

$$S = B \times A$$

Exercício — *A base de um paralelogramo mede* 46,88m *e a altura* 12,59m*: qual a área?*

$$S = 46,88 \times 12,59 = 590,2192\text{m}^2$$

ÁREA DO LOSANGO

A área de um losango pode ser obtida como a do paralelogramo: produto da base (o lado do losango) pela altura (fig. 344).

Todo losango é equivalente a um retângulo em que um lado é igual a uma das diagonais do lo-

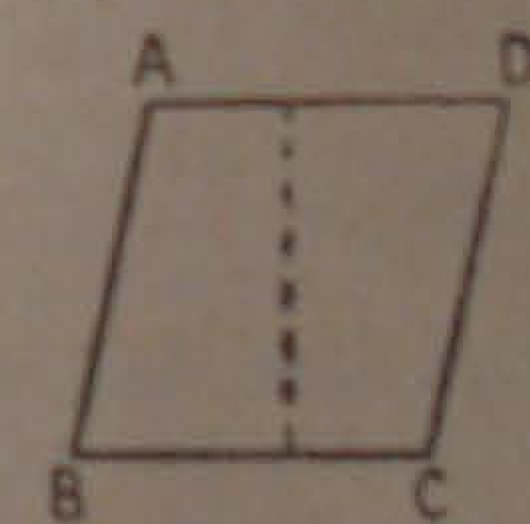


Fig. 344

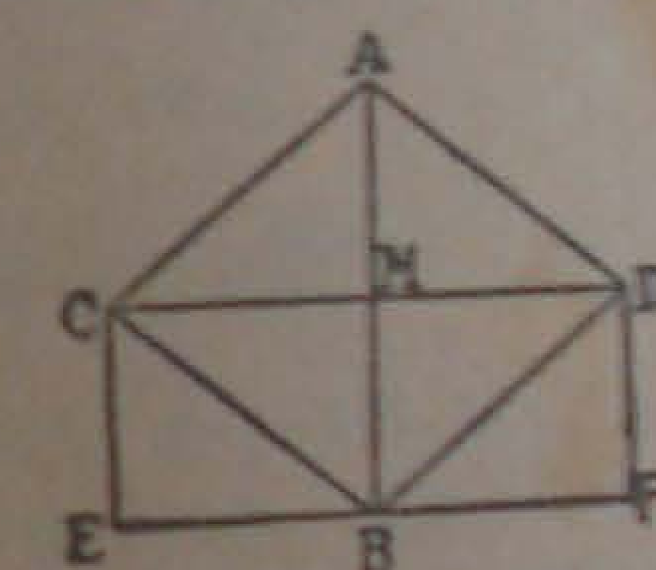


Fig. 345

sango e o outro lado igual à metade da outra diagonal. Assim, o losango *ACBD* (fig. 345) é equivalente ao retângulo *CDFE* em que uma dimensão (*CD*) é uma diagonal do losango e a outra dimensão (*MB*) é metade da outra diagonal. Chamando *D* e *d* as diagonais do losango, podemos escrever.

$$S = \frac{D \times d}{2}$$

isto é, *a área do losango é igual ao semi-produto das suas diagonais.*

Exercício — *Qual a área de um ladrilho losangonal cujas diagonais são respectivamente 0,16m e 0,12m?*

$$\text{Área} = \frac{0{,}16 \times 0{,}12}{2} = 0{,}0096\text{m}^2$$

Da fórmula $S = \dfrac{D \times d}{2}$ deduzem-se:

$$d = \frac{2 \times S}{D} \quad \text{ou} \quad D = \frac{2 \times S}{d}$$

isto é, uma diagonal é igual ao dôbro da área dividido pela outra diagonal.

Exercício — *Um losango tem de área 27,20m² e uma diagonal mede 6,40m. Quanto mede a outra diagonal?*

$$D = \frac{27{,}20 \times 2}{6{,}40} = \frac{27{,}20}{3{,}20} = 8{,}50\text{m.}$$

ÁREA DO TRIÂNGULO

Da área do retângulo vamos também deduzir a do triângulo. Seja o triângulo ABC. Do vértice B (fig 346) abaixemos a perpendicular BM sôbre AC. BM é a altura do triângulo ABC e divide

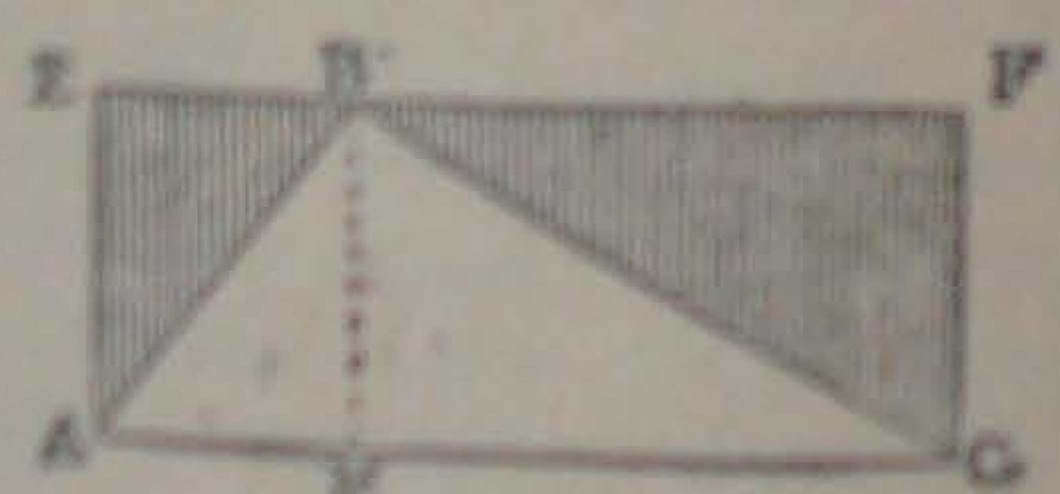


Fig. 346

vide êste triângulo em dois outros BMA e BMC, ambos retângulos em M. Tracemos as retas AE e

CF, ambas perpendiculares à base AC do triângulo ABC, e a paralela EF pelo ponto B.

O retângulo $AEFC$ é o dôbro do triângulo ABC porque o triângulo $BMA = AEB$ e o triângulo $BMC = CFB$.

Ora, a área do retângulo é dada pelo produto da base (AC) pela altura (AE ou BM); logo a área do triângulo é dada pela metade deste produto. Como AC e BM são também, respectivamente, a base e a altura do triângulo, concluimos que

$$S = \frac{B \times A}{2}$$

isto é, *a área do triângulo é igual à metade do produto da base pela altura.*

Exercício — *Seja a base de um triângulo igual a 2 centímetros e a altura igual a 3 centímetros; pede-se a área.*

Substituimos, na fórmula, B e A pelos seus valores:

$$S = \frac{2 \times 3}{2} = 3\text{cm}^2$$

Se conhecemos a área e a altura de um triângulo podemos determinar a base

$$B = \frac{2S}{A}$$

isto é, a base é igual ao dôbro da área dividido pela altura.

Exercício — *Qual é a base de um triângulo cuja área mede 247,5075m² e a altura 15,25m?*

$$\text{Base} = \frac{2 \times 247{,}5075}{15{,}25} = 32{,}46\text{m}$$

De mesmo modo, conhecidas a área e a base, podemos determinar a altura:

$$A = \frac{2S}{B}$$

Isto é a altura é igual ao dôbro da área dividido pela base.

Exercício — *Pede-se a altura de um triângulo cuja área mede 175m² e a base 25 metros.*

$$\text{Altura} = \frac{2 \times 175}{25} = 14 \text{ metros.}$$

Pode-se determinar a área de um triângulo conhecendo-se os três lados: procura-se o semi-perimetro e dêle se subtrai cada lado separadamente; depois extrai-se a raiz quadrada do produto do semi-perimetro pelos três restos.

Geralmente chamamos $2p$ ao perimetro e p ao semi-perimetro do triângulo. Si as medidas dos lados forem respectivamente a, b e c, teremos a fórmula

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Exercício — *Qual a área de um triângulo cujos lados medem respectivamente 6, 8 e 10cm?*

O semi-perimetro é 12; aplicando a fórmula acima, vem:

$$S = \sqrt{12(12-6)(12-8)(12-10)}$$

$$S = \sqrt{12 \times 6 \times 4 \times 2} = \sqrt{576} = 24$$

Resposta: a área do triângulo é 24cm².

Quando o triângulo fôr equilátero, basta conhecer o lado, l, para se obter a área. Neste caso tem-se

$$S = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

Como a raiz quadrada de 3 é aproximadamente 1,732 e, dividindo-se esta por 4 acha-se 0,433, também se pode dizer que a área do triângulo equilátero se obtém multiplicando o quadrado do lado por 0,433, isto é,

$$S = 0{,}433 \times l^2$$

Exercício — *O lado de um triângulo equilátero é 6,80m; pede-se a sua área.*

Substituindo-se na fórmula o valor do lado:

$$0{,}433 \times 6{,}80^2 = 20{,}021920\text{m}^2$$

Sendo o triângulo equilátero inscrito em um circulo cujo raio é conhecido, a sua área é igual ao produto do quadrado do raio por $\frac{3}{4}\sqrt{3}$.

$$S = R^2 \times \frac{3}{4}\sqrt{3}$$

Calculando o valor de $\frac{3}{4}\sqrt{3}$ acha-se 1,299.

Por isso, para obter a área do triângulo equilátero, multiplica-se o quadrado do raio do circulo circunscrito por 1,299.

$$S = 1{,}299 \times R^2$$

Exercício — *Qual a área de um triângulo equilátero inscrito num circulo de 6 centimetros de raio?*

$$\text{Área} = 6^2 \times 1{,}299 = 36 \times 1{,}299 = 46{,}7640\text{cm}^2.$$

ÁREA DO TRAPÉZIO

Seja o trapézio $OPQR$ de bases PQ e OR e de altura PN (fig. 347). Marquemos o meio, M, do lado QR e tracemos PM prolongando até encontrar em T o prolongamento da base maior. Forma-se,

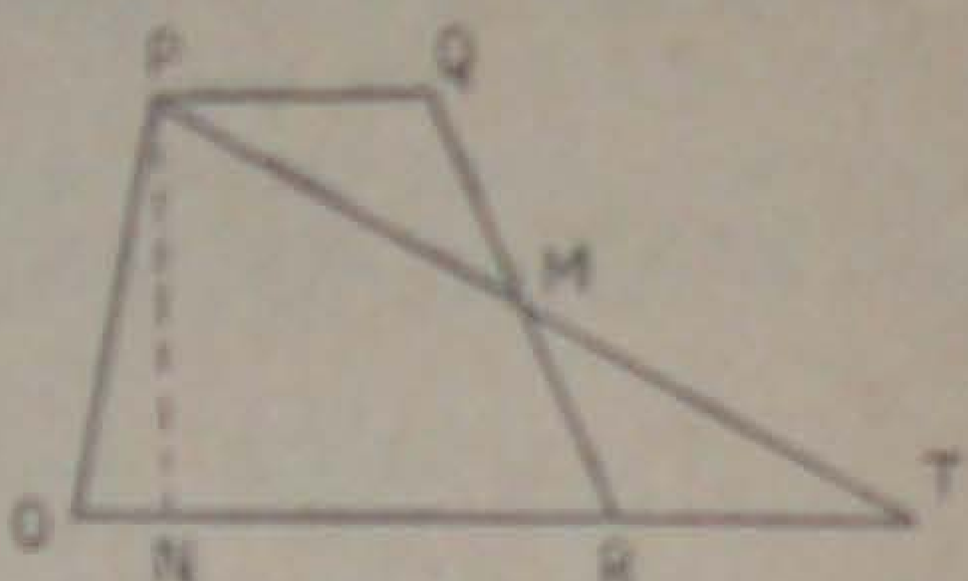


Fig. 347

assim, o triângulo POT, que vamos provar ser equivalente ao trapézio $OPQR$. Com efeito, o quadrilátero $OPMR$ é comum às duas figuras, mas, enquanto o trapézio tem a mais o pequeno triângulo PQM, o triângulo POT tem a mais o pequeno triângulo RMT. Os dois triângulos pequenos, PQM e RMT, são porém, iguais, por terem um lado igual ($MQ=MR$) e dois ângulos respectivamente iguais ($PMQ = RMT$ como opostos pelo vértice e $MQP =$ $= MRT$ como alternos-internos de duas paralelas com a transversal QR).

Podemos, então, dizer que a área do trapézio é a mesma do triângulo. Ora, a área do triângulo POT é

$$\frac{OT}{2} \times PN$$

onde OT é a soma das bases do trapézio ($OT = OR + RT$ ou $OT = OR + PQ$ porque RT é

igual a PQ, dada a igualdade dos triângulos PQM e RMT).

Conclusão: *a área do trapézio é igual à semi-soma das bases multiplicada pela altura.*

Chamando B a base maior, b a base menor e A a altura, temos a fórmula

$$S = \frac{B+b}{2} \times A$$

Como já sabemos que a semi-soma das bases do trapézio dá a sua base média, ainda se pode dizer que *a área do trapézio é igual ao produto da base média pela altura.*

Exercício — *Determinar a área de um trapézio em que as bases medem respectivamente* 15cm *e* 12cm *e cuja altura mede* 9cm.

Substituindo, na fórmula acima, B por 15, b por 12, e A por 9, obtemos

$$S = \frac{15+12}{2} \times 9 = 13{,}5 \times 9 = 121{,}5$$

Resposta: a área do trapézio é 121,50cm².

ÁREA DO POLÍGONO REGULAR

Quando o polígono é regular, efetuamos a decomposição em triângulos, ligando o centro a todos os vértices (fig. 348). Obtemos tantos triângulos quantos são os lados do polígono e cada um tem a mesma base (porque todos os lados do polígono são iguais) e a mesma altura, que é o apótema do polígono.

Avaliemos a área de um dêsses triângulos: *DCO*, por exemplo; basta multiplicar metade da base *DC* (que é um lado do polígono) pela altura *OP* (que é o apótema do polígono).

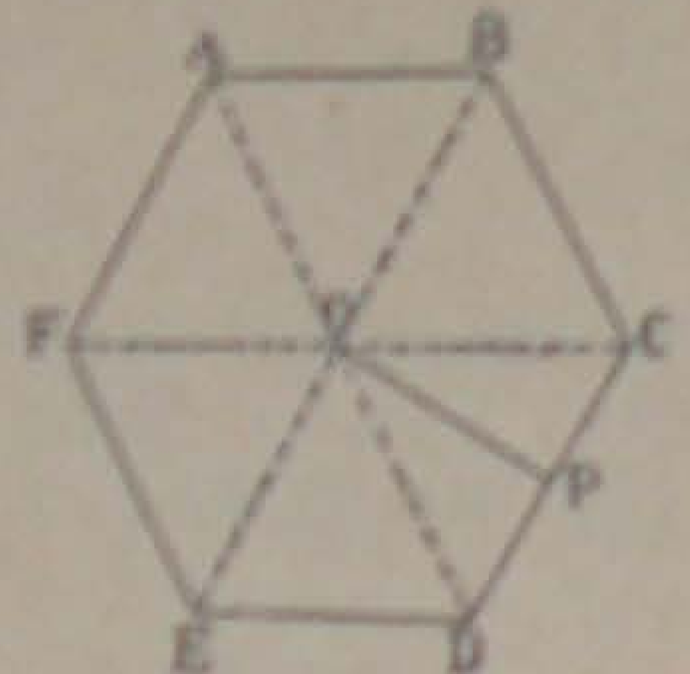


Fig. 348

Se o polígono tem cinco, seis, sete, oito lados, multiplicamos por cinco, seis, sete, oito a área de um triângulo para termos a do polígono. Mas, multiplicando a metade de um lado pelo número de lados, obtemos a metade do perímetro ou o semi-perímetro do polígono. Chegamos, então, à conclusão de que *a área de um polígono regular é igual ao produto do semi-perímetro pelo apótema*, ou

$$S = p \times a$$

sendo p o semi-perímetro e a o apótema.

Área do hexágono. — Apliquemos esta fórmula ao caso do hexágono regular.

Já sabemos que o lado do hexágono é igual ao raio do círculo circunscrito, R; logo, o semi-perímetro do hexágono será $3R$. O apótema do hexágono, como mostra a fig. 349 é igual à metade do lado

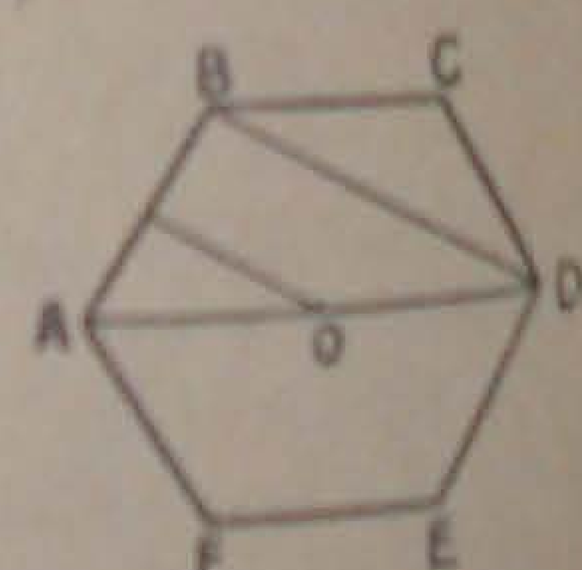


Fig. 349

do triângulo equilátero inscrito no mesmo círculo, isto é, metade de $R\sqrt{3}$, ou

$$a = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

Fazendo o produto do semi-perímetro pelo apótema, vem

$$S = 3R \times \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2} = R^2 \times \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Mas, como o lado do hexágono é igual ao raio, R, e $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ é igual a 2,598, podemos concluir que a área do hexágono é igual ao quadrado do lado (ou do raio do círculo circunscrito) multiplicado por 2,598.

$$S = 2{,}598 \times R^2 \text{ ou } S = 2{,}598 \times l^2$$

Problema 201. — *Determinar a área ocupada pelo pedestal de uma estátua, sabendo-se que é um hexágono regular com 2,84m de lado.*

A área ocupada pelo pedestal $= 2{,}84^2 \times 2{,}598 = 8{,}0656 \times 2{,}598 = 20{,}954428\text{m}^2$.

Outros polígonos regulares. — Procedendo de forma análoga com outros polígonos regulares, podemos determinar a sua área quando lhes conhecemos o lado ou o raio do círculo circunscrito. Em cada caso encontramos o quadrado do lado ou do raio multiplicado por uma quantidade constante, segundo a tabela abaixo:

Pentágono: $S = 1,72 \times L^2$ ou $S = 2,377 \times R^2$

Octógono: $S = 4,828 \times L^2$ ou $S = 2,828\ R^2$

Decágono: $S = 7,694 \times L^2$ ou $S = 2,9389 \times R^2$

Dodecágono: $S = 11,196 \times L^2$ ou $S = 3\ R^2$

ÁREA DUM POLÍGONO QUALQUER

Para avaliarmos a área de um polígono irregular podemos decompô-lo em triângulos traçando todas a diagonais que partem de um mesmo vértice (fig. 350), ou marcando um ponto interior e

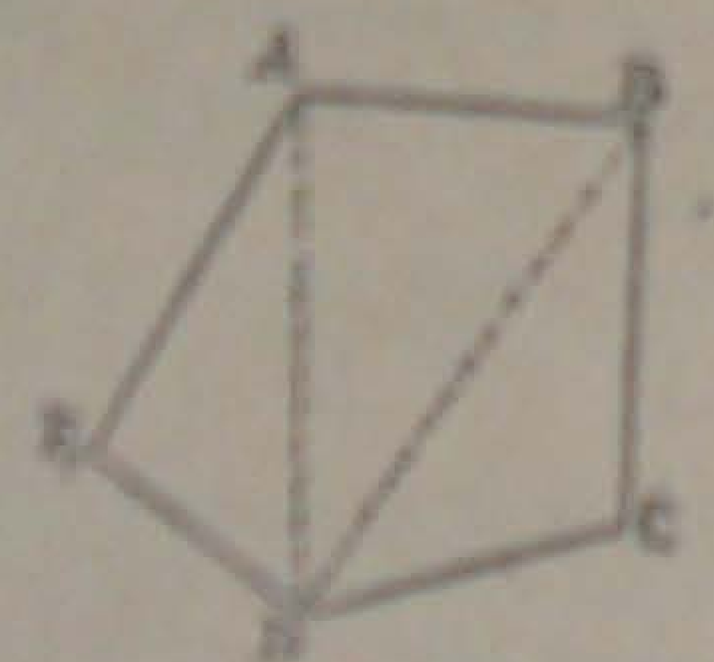


Fig. 350

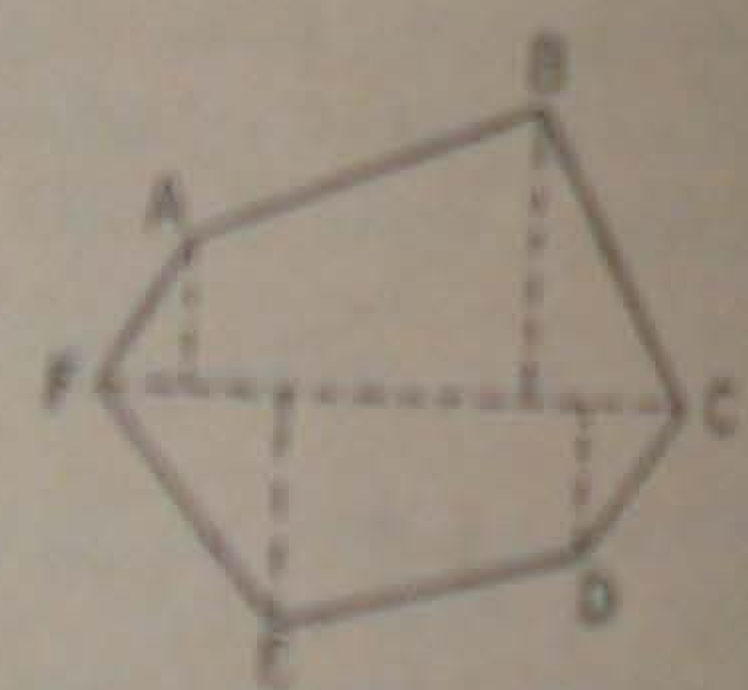


Fig. 351

ligando-o a todos os vértices do polígono; depois calculamos a área de cada um dos triângulos em que ficou decomposto o polígono e somamos os resultados. Embora muito simples, êste processo nem sempre é o mais cômodo. Geralmente decompomos o polígono em triângulos retângulos e trapézios retângulos como se vê na figura 351.

ÁREA DO CÍRCULO

Conforme ficou dito ao estudarmos o comprimento da circunferência, consideramos o círculo como o limite para o qual tende um polígono regular inscrito cujo número de lados cresce ilimitadamente, cada lado tendendo para zero.

É facil verificar, entretanto, que, à medida que o número de lados do polígono aumenta, o apótema cresce e tende a confundir-se com o raio. Se considerarmos, pois, o círculo como o polígono regular de número infinito de lados, o seu apótema deve ser tomado, então, como igual ao raio. Por conseguinte, ao aplicarmos a fórmula $S = p \times a$, faremos o semi-perímetro igual à metade da circunferência do círculo e o apótema igual ao raio

$$S = \frac{2\pi R}{2} \times R \text{ ou } S = \pi R^2$$

Conclusão: *a área do círculo é igual ao quadrado do raio multiplicado por* 3,1416.

Exercício — *Qual a área de um círculo de 5 centímetros de raio?*

$$S = 3{,}1416 \times 25 = 78{,}54\text{cm}^2$$

Da fórmula $S = \pi R^2$ deduz-se o valor do raio do círculo quando se lhe conhece a área:

$$R = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$$

isto é, *obtém-se o raio extraindo a raiz quadrada do quociente da área por* 3,1416.

Exercício — *Que raio tem o círculo com 4225cm² de área?*

Fazendo S igual a 4225, acha-se:

$$R = \sqrt{\frac{4225}{3{,}1416}} = \sqrt{1344{,}85} = 36{,}67\text{cm.}$$

ÁREA DO SECTOR CIRCULAR

A área do sector circular é igual ao produto da metade do arco que lhe serve de base pelo raio.

$$S = \frac{\text{arco}}{2} \times R$$

porque o sector pode ser considerado como a soma de uma infinidade de triângulos, todos com um vértice comum (o centro de círculo) e cujas bases, somadas, perfazem o arco.

Exercício — *Qual a área de um sector circular de 48° e de 6 centímetros de raio?*

O arco de 48° no círculo de 6cm. de raio mede

$$\frac{3{,}1416 \times 6 \times 48}{180}$$

e a metade dêsse arco é $\dfrac{3{,}1416 \times 6 \times 48}{180 \times 2}$,

A área do setor é, portanto,

$$S = \frac{3{,}1416 \times 6 \times 48}{180 \times 2} \times 6 = 15{,}08\text{cm}^2 \text{ aproximadamente.}$$

ÁREA DO SEGMENTO CIRCULAR

A área do segmento circular é igual à do sector menos a do triângulo formado pelos dois raios e pela corda do segmento.

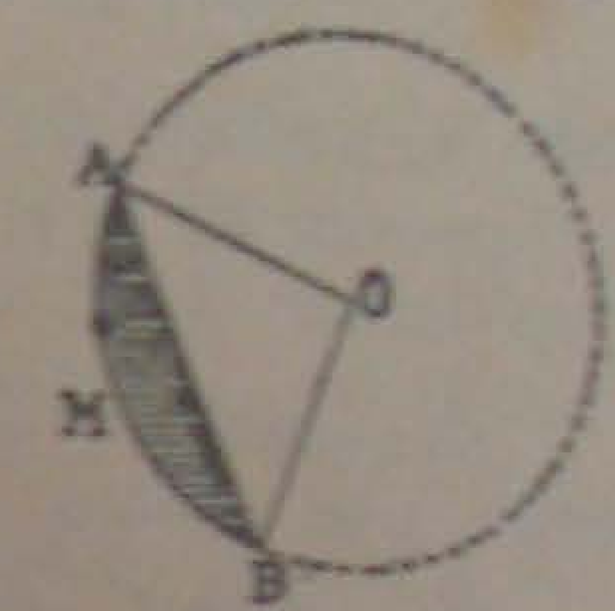


Fig. 352

Vê-se pela fig. 352 que a área do segmento *AMB* é igual à do sector *AMBO* menos a do triângulo *ABO*.

Exercício — *Qual a área de um segmento circular de 90° num círculo de 8cm de raio?*

A área do setor circular de 90° é a quarta parte do círculo ou $\dfrac{\pi R^2}{4}$.

O triângulo *AOB* é retângulo em *O* e para achar sua área podemos tomar o raio *R* como base e como altura, o que dará $\dfrac{R \times R}{2}$ ou $\dfrac{R^2}{2}$.

Então, a área do segmento é

$$S = \frac{\pi R^2}{4} - \frac{R^2}{2}$$

que, para $R = 8$, dá

$$S = \frac{3{,}1416 \times 64}{4} - \frac{64}{2} = 18{,}2656\text{cm}^2.$$

ÁREA DA CORÔA CIRCULAR

A área da corôa circular é igual à diferença dos dois círculos.

Se tomarmos R como raio do circulo maior e r como raio do circulo menor, teremos

$$S = \pi R^2 - \pi r^2 \quad \text{ou} \quad \pi (R^2 - r^2)$$

isto é, a área da coroa circular se obtém fazendo o produto de π pela diferença entre os quadrados dos raios.

Exercicio — *Qual a área da uma corôa circular cujos raios medem 8 centimetros e 6 centimetros?*

Substituindo, na fórmula acima, R por 8 e r por 6, tem-se

$$S = 3{,}1416\,(64 - 36) = 3{,}1416 \times 28 = 87{,}9648$$

Resposta: a área da corôa é 87,9648cm².

QUESTIONÁRIO

1. Como se mede uma superficie?
2. Qual a unidade de superficie no Sistema Métrico Decimal?
3. Que são figuras equivalentes?
4. Como se obtém a área de um retângulo?
5. A que é igual a área de um quadrado?
6. Pode-se calcular a área de um quadrado quando se conhece o raio do circulo circunscrito? como?
7. Como se acha a área do paralelogramo?
8. A que é igual a área do losango?
9. Pode-se determinar uma diagonal do losango, conhecendo-se a área e a outra diagonal?
10. A que é igual a área do triângulo?
11. Qual a fórmula que permite calcular a área do triângulo conhecidos os lados?

12. Dado o lado do triângulo equilátero como obter-lhe a área?
13. Como se determina a área do trapézio conhecidas as bases e a altura?
14. Como se procede para determinar a área de um poligono qualquer?
15. Qual a fórmula da área do poligono regular?
16. A que é igual a área do circulo quando se conhece o raio, ou o diâmetro?
17. Como obter a área de um sector circular? de uma corôa? de um segmento circular?

PROBLEMAS

Problema 127. — *Construir um quadrado equivalente a um retângulo.*

Seja $ABCD$ o retângulo (fig. 353).

Procuremos a média proporcional PQ (fig. 354), entre DC e CB, e construamos o quadrado $PQRS$ (fig. 355), tendo para lado PQ.

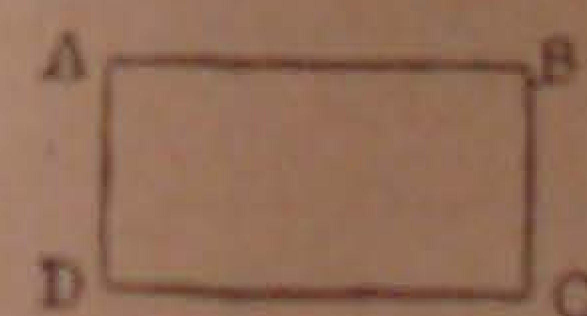


Fig. 353

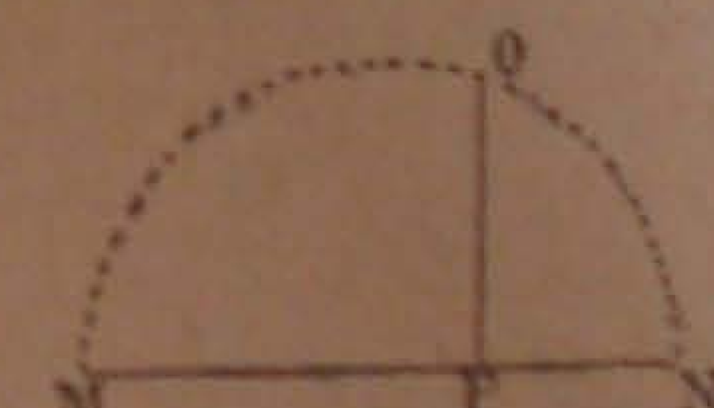


Fig. 354

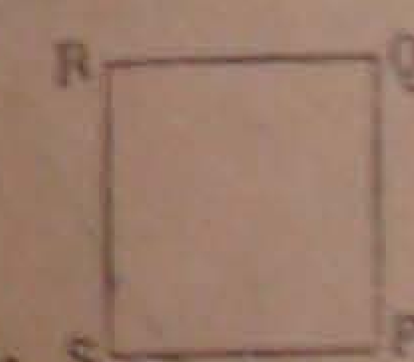


Fig. 355

Com efeito, o lado do quadrado é a média proporcional entre as dimensões do retângulo, pois o produto destas (área do retângulo) deve ser igual ao lado do quadrado multiplicado por si mesmo (área do quadrado).

Problema 128. — *Construir um quadrado equivalente a um paralelogramo.*

Seja $ABDC$ o paralelogramo.

O lado do quadrado é a média proporcional entre a base, AB, e altura, EF, do paralelogramo (figs. 356, 357 e 358).

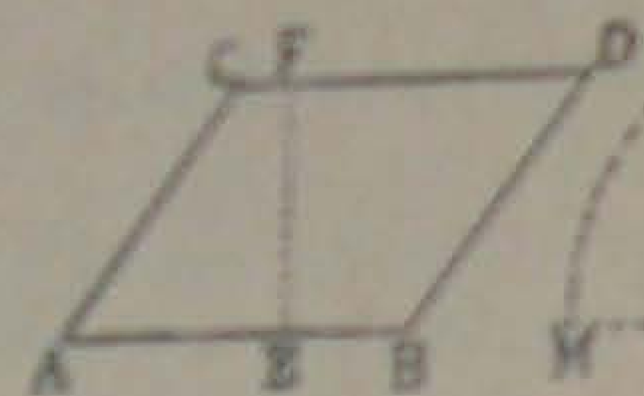


Fig. 356

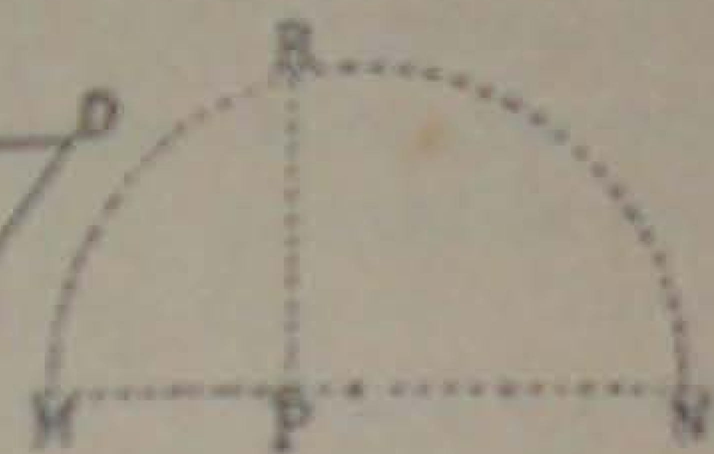


Fig. 357

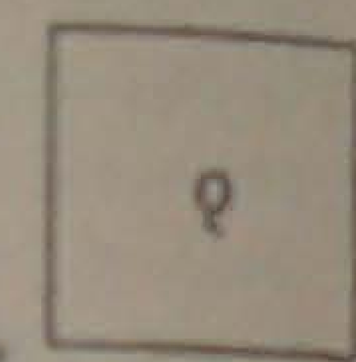


Fig. 358

Com efeito, a área do quadrado tem que ser igual à do paralelogramo e a deste é o produto da base pela altura.

Problema 129. — *Construir um quadrado equivalente a um triângulo.*

O lado do quadrado é a média proporcional entre a metade de um lado do triângulo e altura relativa a êsse lado.

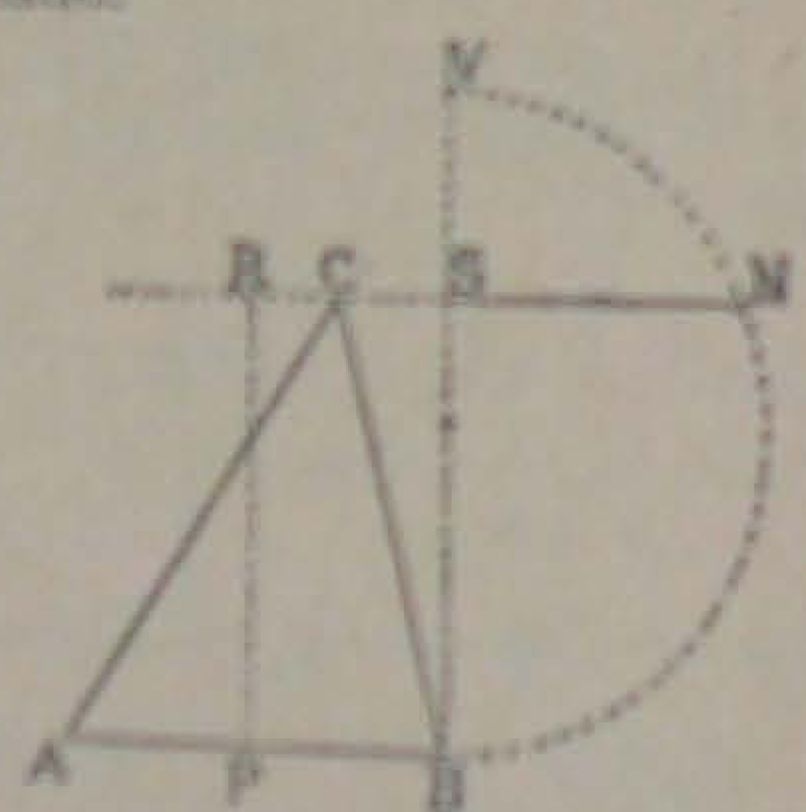


Fig. 359

Fig. 360

Assim, si o triângulo for ABC (fig. 359) procura-se a média proporcional entre AP e PR; acha-se SN, que vai ser o lado do quadrado (fig. 360).

Problema 130. — *Construir um quadrado equivalente a um losango.*

Já sabemos que a área do losango é igual ao produto de uma diagonal pela metade da outra.

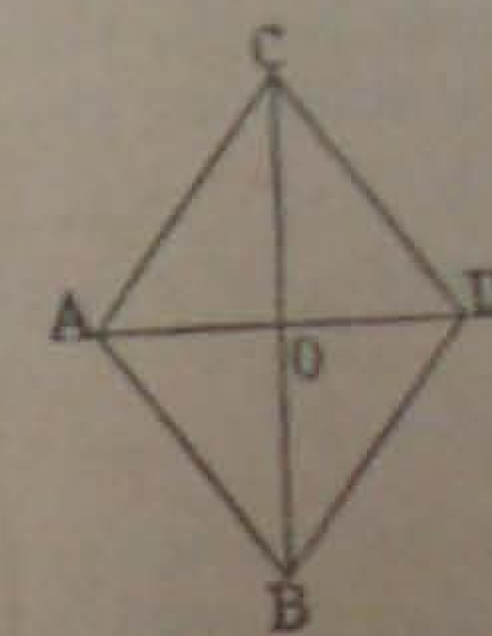


Fig. 361

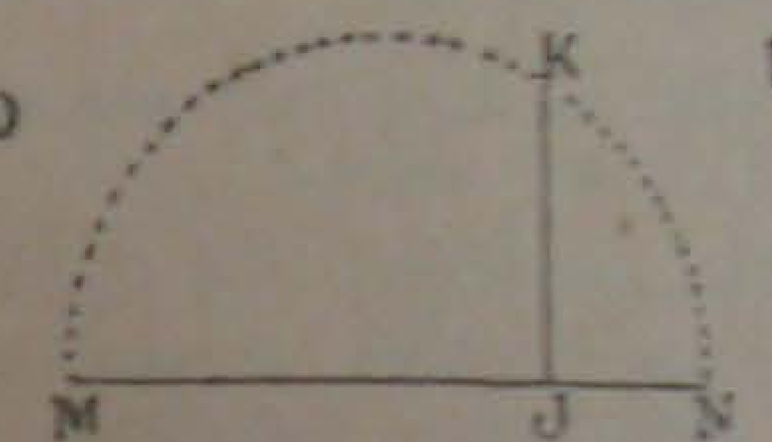


Fig. 362

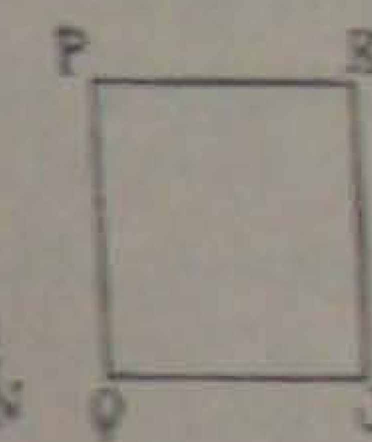


Fig. 363

Por isso, determinando a média proporcional entre BC e AO (fig. 361) temos o lado, JK, do quadrado equivalente ao losango $ABDC$ (fig. 362 e 363).

Problema 131. — *Construir um quadrado equivalente à soma de vários outros.*

Esta construção se baseia no Teorema de Pitágoras (veja pag. 185).

Construamos um triângulo retângulo cujos catêtos sejam os lados de dois dos quadrados fornecidos, A e B, (fig. 364). Já sabemos que a hipotenusa dêsse triângulo (MN na fig. 365) é o lado do quadrado Q equivalente à

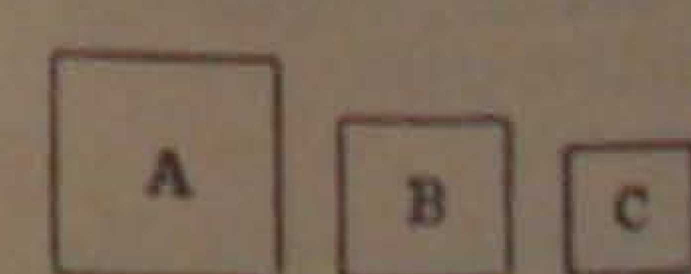


Fig. 364

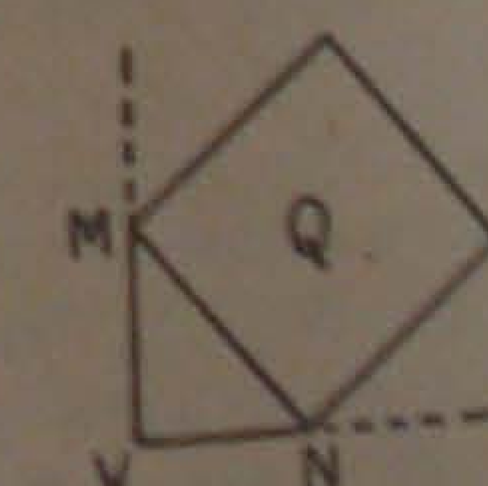


Fig. 365

Fig. 366

soma dos quadrados A e B. Se, agora, tomarmos MN para um catêto e o lado do terceiro quadrado fornecido, C, para outro catêto, construiremos (fig. 366), outro triângulo retângulo (*MNP*) em que a hipotenusa (*MP*) vai ser o lado do quadrado *S* equivalente à soma dos três quadrados fornecidos. Continuando do mesmo modo, poderíamos construir o quadrado equivalente à soma de quantos quadrados fossem dados.

Problema 132. — *Construir um quadrado equivalente à diferença de dois outros.*

Sejam *P* e *R* os quadrados (fig. 367).

Esta construção também se baseia na relação de Pitágoras: Com efeito, desta deduzimos que o quadrado de um catêto é igual ao quadrado da hipotenusa mênos

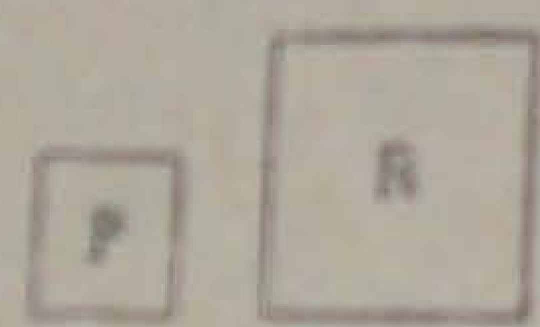


Fig. 367

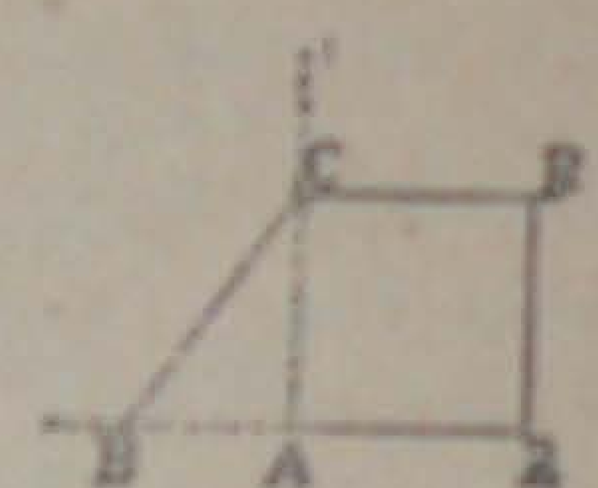


Fig. 368

o quadrado do outro catêto. Basta então construir o triângulo retângulo *ABC* em que a hipotenusa é o lado do quadrado maior (*R*) e um catêto é o lado do quadrado menor (*P*). O outro catêto (*AC* na fig. 368) será o lado do quadrado pedido.

Problema 133. — *Dado um quadrado, traçar um outro cuja área seja o dôbro da do primeiro.*

Seja *ABCD* o quadrado (fig. 369).

Prolonguemos os lados *AB* e *AC* e tracemos a diagonal *AD*, prolongando-a, também, além de *D*.

Façamos centro em *A* e, com um raio igual a *AD*, descrevamos o arco *DE*. Dêste último ponto, como centro, e com um raio = *EA*, cortemos em *F* o prolongamento da diagonal. Centro em *A* e com o mesmo raio cortemos em *G* o prolongamento de *AC*.

Liguemos os pontos *G* e *E* ao ponto *F*.

A área de *AEFG* é o dôbro da área *ABDC*.

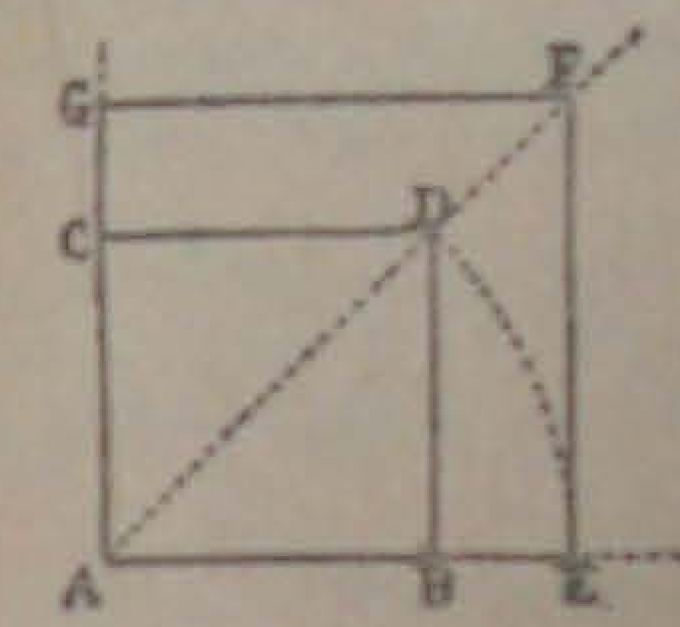


Fig. 369

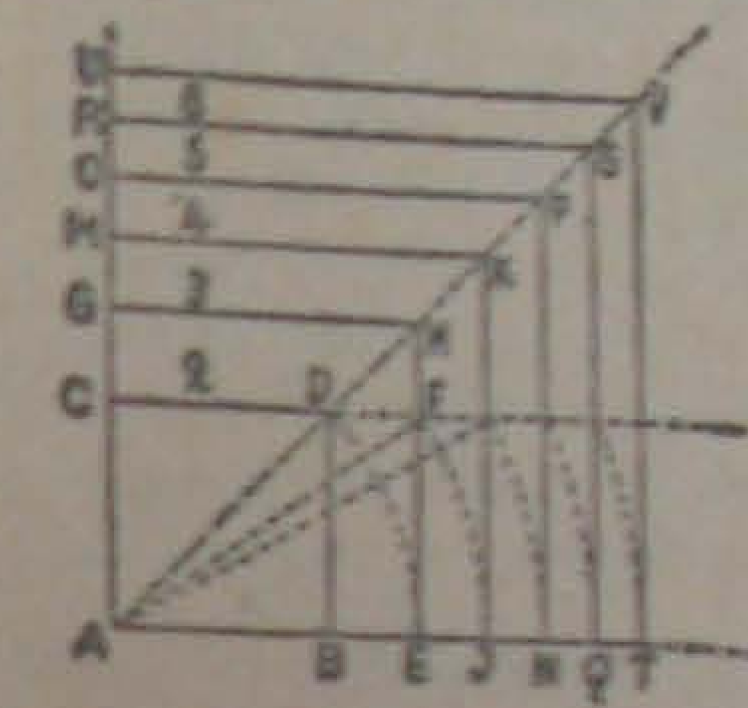


Fig. 370

Problema 134. — *Dado um quadrado, construir outros cujas áreas sejam o dôbro o triplo, o quadruplo, o quintuplo, etc., da área do primeiro.*

Seja *ABDC* o quadrado conhecido (fig. 370).

A área do quadrado *AEHG* é, como já vimos no problema antecendente, o dôbro da do primeiro (*ABDC*).

Para obtermos o quadrado de área tripla, prolonguemos o lado *CD* e, com um raio *AF* e centro em *A*, descrevamos o arco *FJ*. Centro em *J* e raio igual a *JA*, cortemos o prolongamento da diagonal *AD* no ponto *K*; de *A* e com o mesmo raio, determinemos o ponto *M*.

Liguemos *M* e *J* ao ponto *K*. A área do quadrado *AJKM* é o triplo da de *ABDC*.

Procedendo-se sempre do mesmo modo, obteremos quadrados de áreas quadrupla, quintupla, sextupla etc.

Assim: *ANPO* = quádruplo de *ABDC*; *AQSR* = quintuplo do mesmo quadrado; *ATVU* = sextuplo do mesmo quadrado *ABDC*.

Problema 135. — *Construir um triângulo equivalente a outro triângulo dado.*

Seja *ABD* o triângulo dado (fig. 371); pelo vértice *D* tracemos *CM* paralela ao lado *AB*.

Se ligarmos A e B a qualquer ponto, D', desta paralela, formaremos um triângulo equivalente a ABD, pois qualquer triângulo assim formado tem a mesma base e a mesma altura de ABD. Si quiséssemos um triângulo isósceles, bastaria traçar a mediatriz de AB e tomar para terceiro vértice do triângulo o ponto I em que a mediatriz encontrasse a paralela CM.

Se o triângulo pedido fosse retângulo, levantaríamos uma perpendicular a AB, por A ou por B, e tomaríamos para 3º vértice o ponto R ou R' em que a perpendicular encontrasse a paralela CM.

Observação: — Assim como traçamos a paralela a AB pelo vértice D, poderíamos ter traçado por A uma paralela a BD ou por B uma paralela a AD; depois procederíamos do mesmo modo.

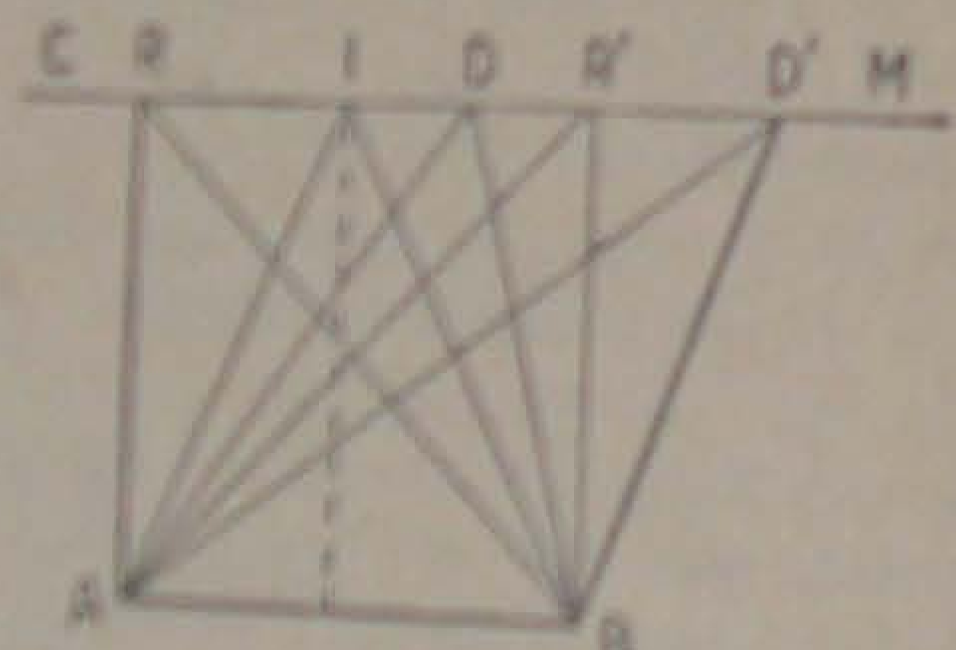


Fig. 371

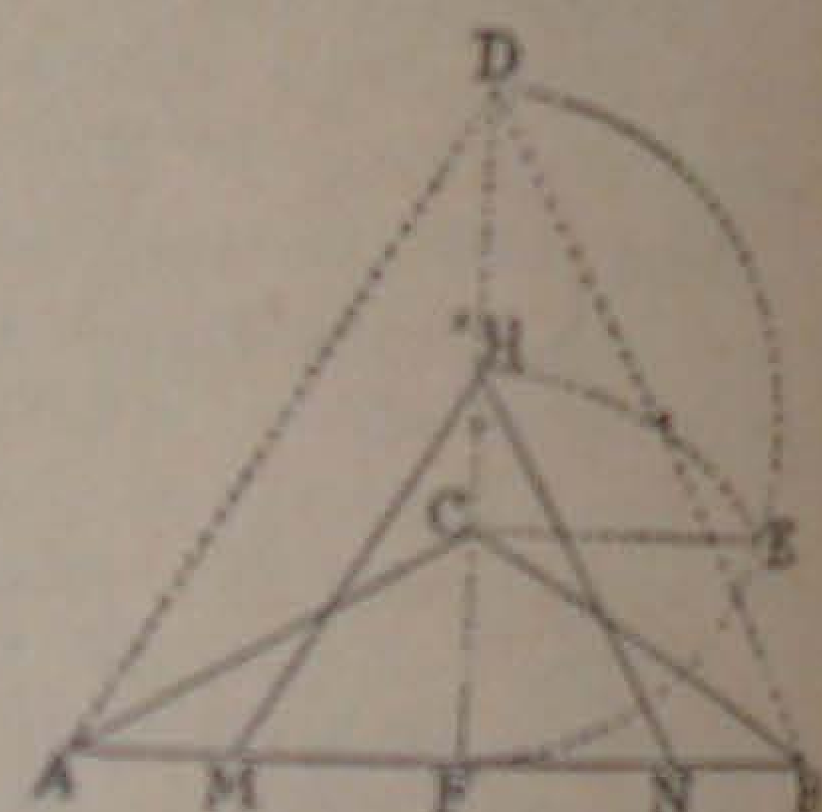


Fig. 372

Problema 136. — *Construir um triângulo equilátero equivalente a um triângulo isósceles.*

Seja ABC o triângulo isósceles (fig. 372).

Construamos sôbre AB (base do triângulo isósceles dado) o triângulo equilátero ABD e tiremos a altura DF.

Sôbre DF como diâmetro, descrevamos uma semi-circunferência, como nos mostra a fig. 372.

Levantemos a perpendicular CE sôbre DF e façamos $FH = FE$.

Do ponto H tracemos HM paralela a DA e HN paralela a DB.

O triângulo MNH é equilátero e equivalente ao triângulo ABC.

Problema 137. — *Construir um triângulo retângulo equivalente a um losango dado.*

Seja $ABCD$ o losango (fig. 373); tracemos CE paralela à diagonal DB e prolonguemos AB até encontrar CE; o triângulo retângulo ACE é equivalente ao losango, porque este tem para área $AC \times OB$; a área daquele é $AC \times \frac{CE}{2}$; porém $\frac{CE}{2} = OB$.

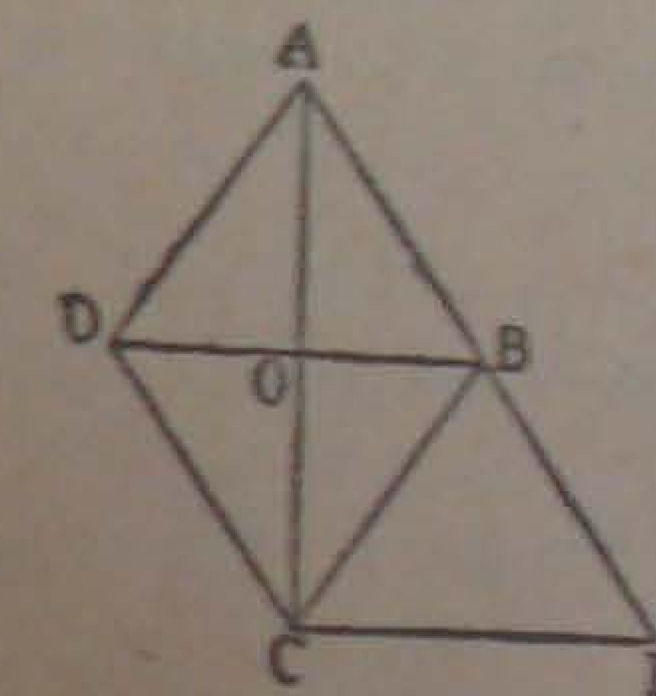


Fig. 373

Problema 138. — *Construir um triângulo equivalente a um hexágono regular convexo.*

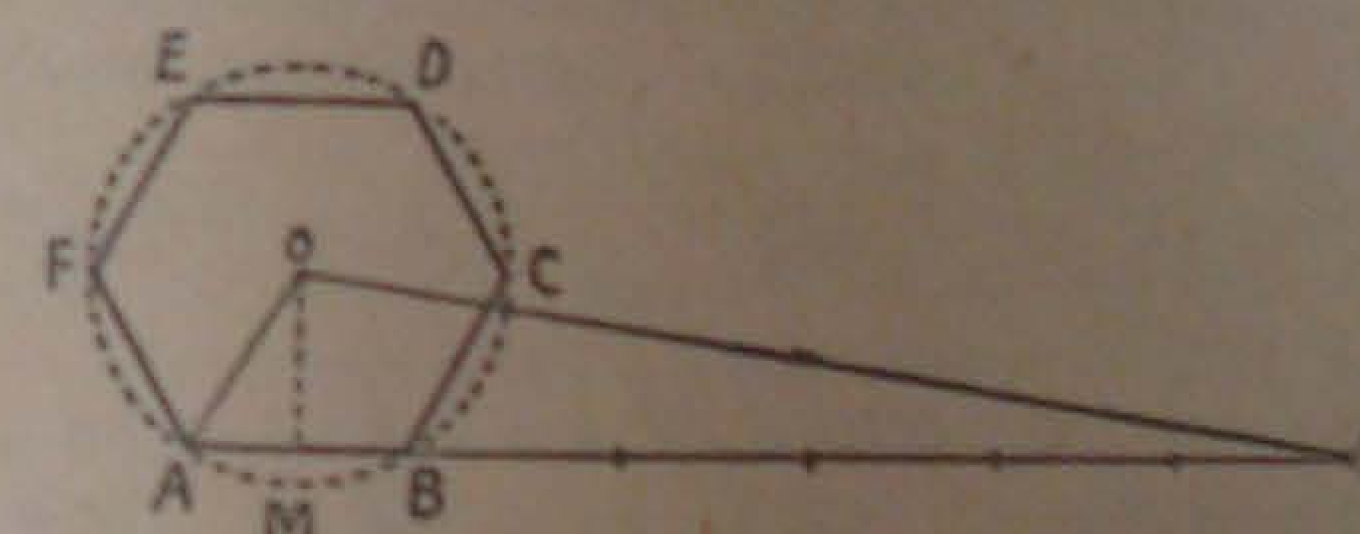


Fig. 374

Seja $ABCDEF$ o hexágono (fig. 374); prolonguemos o lado AB além de B; sôbre êsse prolongamento marquemos 5 vezes consecutivamente o comprimento do lado do hexágono; resulta o segmento AH igual ao perímetro do hexágono. Ligando O a A e H, temos o triângulo OAH equivalente ao polígono dado, porque sua área é metade de AH (semi-perímetro do hexágono) multiplicada pela altura OM (apótema do hexágono).

Problema 138a. — *Construir um retângulo equivalente a um losango dado.*

Seja *ABCD* o losango (fig. 375).

Pelos pontos *A* e *C*, tracemos *AM* e *CN* paralelas à diagonal *DB* e pelo ponto *B*, tracemos *NM* paralela à diagonal *CA*.

O retângulo *AMNC* é equivalente ao losango *ABCD* porque um e outro têm para área $CA \times OB$.

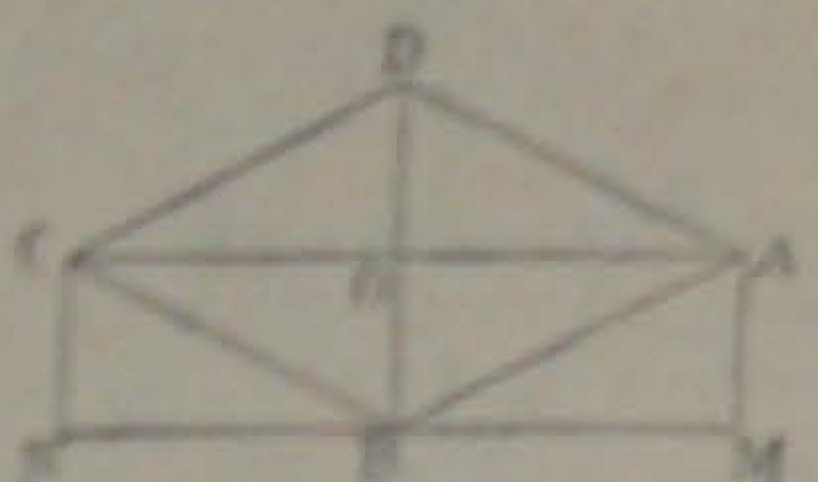


Fig. 375

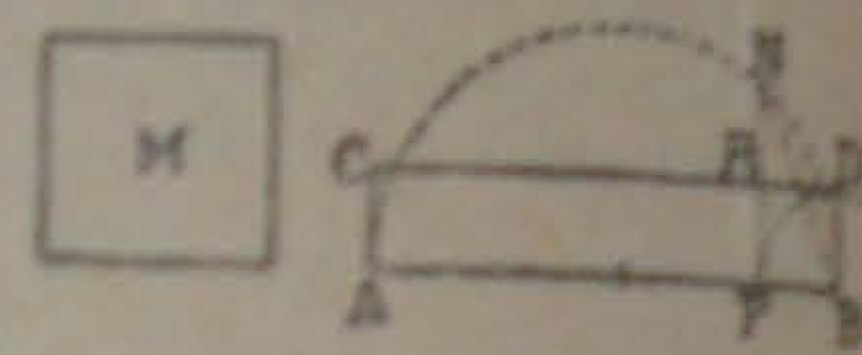


Fig. 376

Problema 139. — *Construir um retângulo equivalente a um quadrado sôbre um segmento dado.*

M é o quadrado (fig. 376) e *AB* o segmento.

Sôbre *AB* como diâmetro, descrevamos uma semi-circunferência.

Do ponto *B*, como centro, e com o raio igual ao lado do quadrado *M*, marquemos o ponto *N*; dêste tiremos *NP* perpendicular a *AB*.

A altura do retângulo é *BP* e a base é *AB*.

Problema 140. — *Sôbre um segmento dado, construir um retângulo equivalente a um outro.*

Seja *ABDC* o retângulo dado (fig. 377).

Sôbre o lado *AB* apliquemos *BE* igual ao segmento dado.

Prolonguemos o lado *BD* e pelo ponto *A* tiremos *AP* paralela a *ED*.

BP é a altura do retângulo pedido, que é *BEFP*.

Problema 141. — *Construir um retângulo equivalente a um quadrado, sendo dado o semi-perímetro do retângulo.*

Seja *Q* o quadrado (fig. 378) e seja *AB* o semi-perímetro, isto é, a soma dos lados diferentes do retângulo pedido (fig. 379).

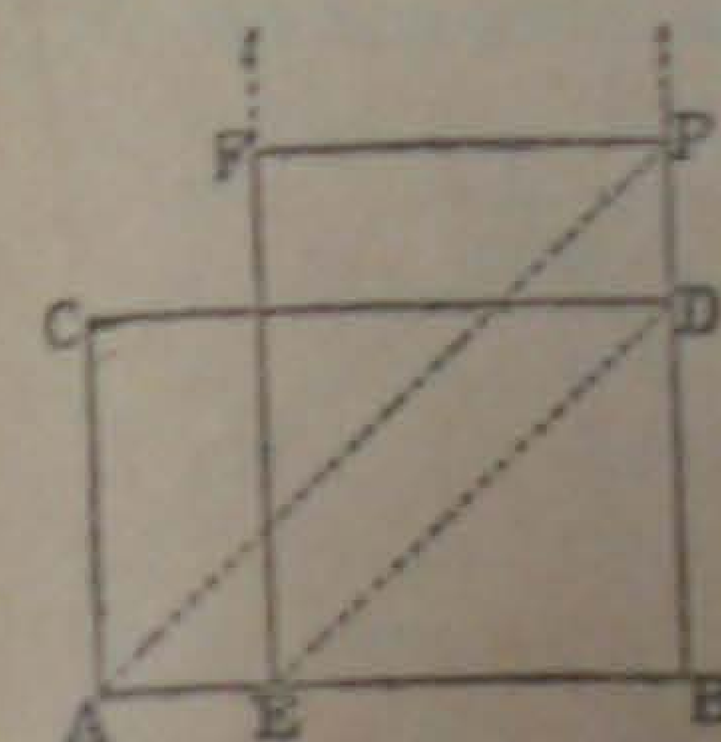


Fig. 377

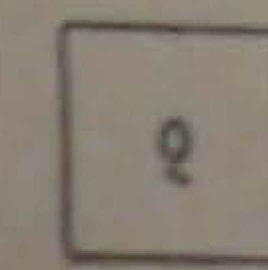


Fig. 378

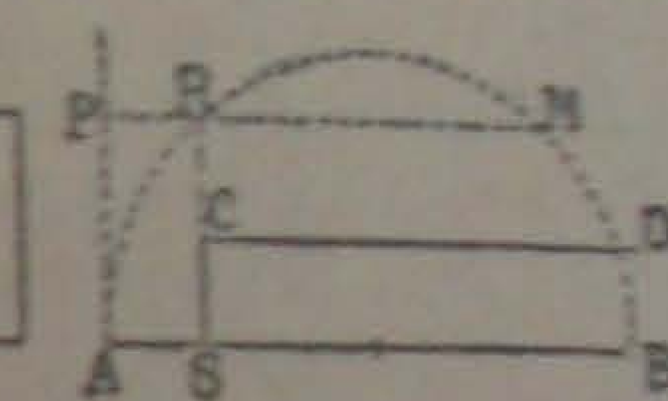


Fig. 379

Descrevamos uma semi-circunferência tendo *AB* para diâmetro.

Levantemos pelo ponto *A* uma perpendicular e marquemos *AP* igual ao lado do quadrado *Q*, e pelo ponto *P* tracemos *PM* paralela a *AB*.

Do ponto *R* tracemos uma perpendicular a *AB*.

As dimensões do retângulo são *AS* e *SB*.

Problema 142. — *Dado um polígono convexo construir outro equivalente com um lado menos do que o polígono dado.*

Seja o polígono convexo *ABCDEF*, de seis lados (fig. 380).

Tracemos a diagonal *BD* e pelo vértice *C* tiremos uma paralela a essa diagonal, prolongando-a até encontrar, no ponto *C'*, o prolongamento de *ED*. Liguemos *B* a *C'*. O polígono *ABC'EF*, com 5 lados apenas, é equivalente ao polígono *ABCDEF* de 6 lados. Com efeito, *ABDEF* é comum aos dois polígonos; as partes não comuns (triângulos *BCD* e *BC'D*) se equivalem, pois são triângulos de mesma base e mesma altura.

Problema 143. — *Dado um polígono convexo, transformá-lo em um triângulo equivalente.*

O problema se resolve aplicando a construção anterior para ir reduzindo, um a um, os lados do polígono *ABCDEF* (fig. 381). Traçamos a diagonal *BF* e por

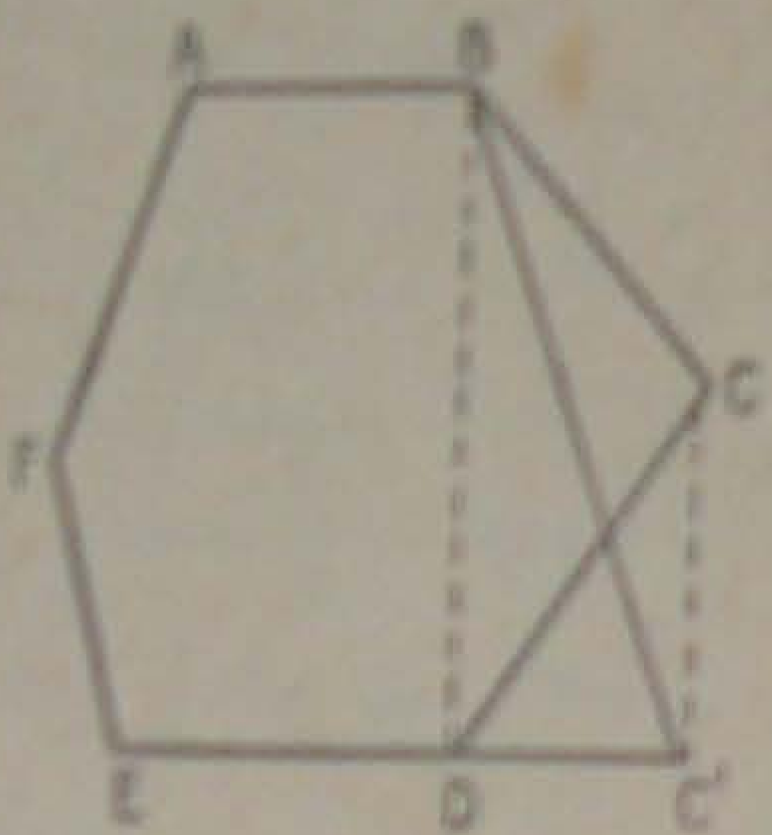


Fig. 380

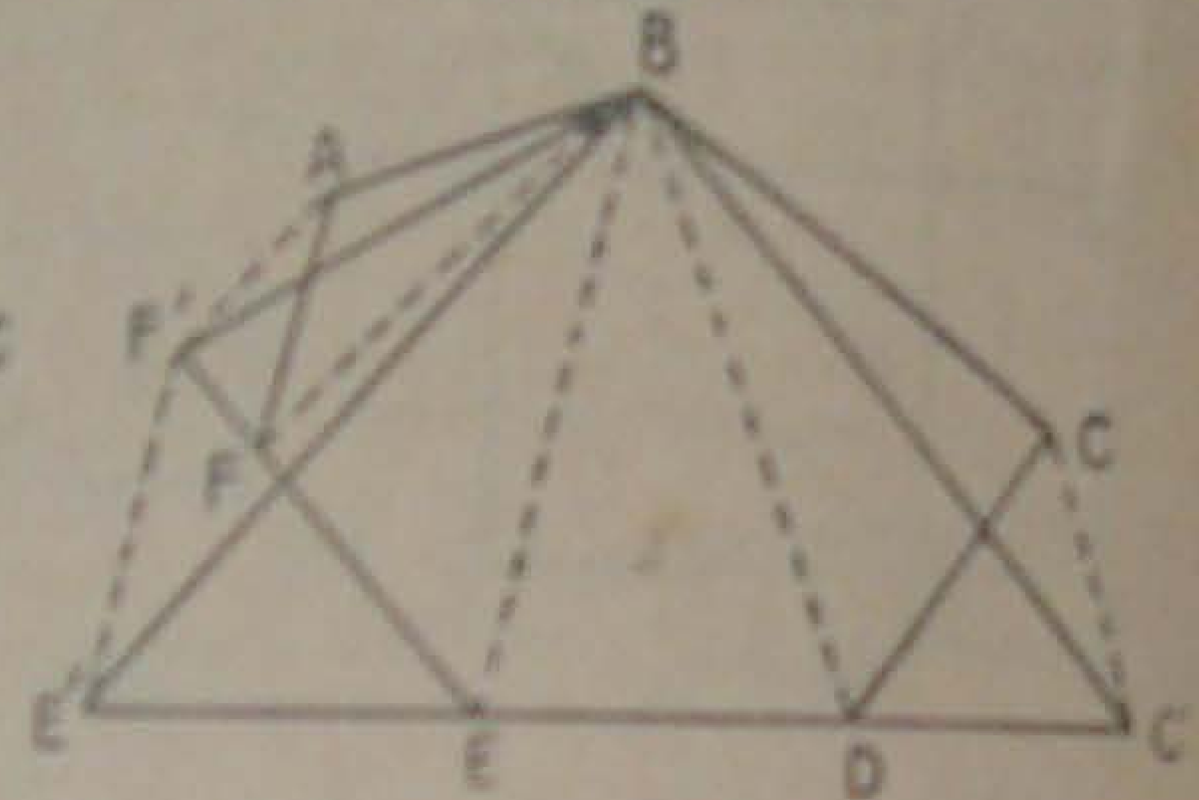


Fig. 381

A tiramos-lhe uma paralela, prolongando-a até encontrar, em *F'*, o prolongamento de *EF*. Em seguida, traçamos a diagonal *BD* e por *C* tiramos-lhe uma paralela, prolongando-a até encontrar, em *C'*, o prolongamento de *ED*.

O polígono dado era de 6 lados e já obtivemos o quadrilátero *BF'EC'* que lhe é equivalente.

Por fim, traçamos a diagonal *BE* do quadrilátero e por *F'* tiramos-lhe uma paralela, prolongando-a até encontrar, em *E'*, o prolongamento de *EC'*. O triângulo *BE'C'* é equivalente ao polígono *ABCDEF*.

EXERCÍCIOS

1. Construa o quadrado equivalente a um retângulo de 8,5cm de base e 4,1cm de altura.
2. Trace um paralelogramo qualquer e construa o quadrado equivalente.
3. Trace um triângulo qualquer e construa o quadrado equivalente.

4. Construa o quadrado equivalente a um losango cujas diagonais medem 6cm e 2,8cm.
5. Trace dois quadrados quaisquer e construa o quadrado equivalente à soma dos dois.
6. Construa o quadrado equivalente à soma de três outros cujos lados medem respectivamente 2cm, 2,7cm e 5,1cm.
7. Construa o quadrado equivalente à diferença de dois outros que têm de lado respectivamente 2cm e 3,8cm.
8. Trace um quadrado qualquer e construa o quadrado de área dupla.
9. Trace um triângulo isósceles com 5cm de base e 7cm de lado e construa em seguida o triângulo equilátero equivalente.
10. Trace um losango qualquer e construa um triângulo retângulo equivalente.
11. Trace o octógono regular convexo e construa um triângulo equivalente.
12. Trace um segmento de reta de 10cm e sôbre êle construa um retângulo equivalente ao quadrado de 8cm de lado.
13. Trace um pentágono irregular convexo e construa um triângulo equivalente.

CAPÍTULO XIV

O plano e a linha reta.

O plano. — Já vimos que as superfícies podem ser planas e curvas.

Uma superficie é dita plana si, aplicando sôbre ela, em qualquer direção, a aresta de uma régua, esta aresta tocar a superficie em toda a sua extensão. Isto significa que todos os pontos de uma reta traçada em um plano estão contidos nesse plano.

Uma prancheta, um quadro negro bem alisado, um espelho comum, dão-nos idéia aproximada de superficies planas.

Fig. 382

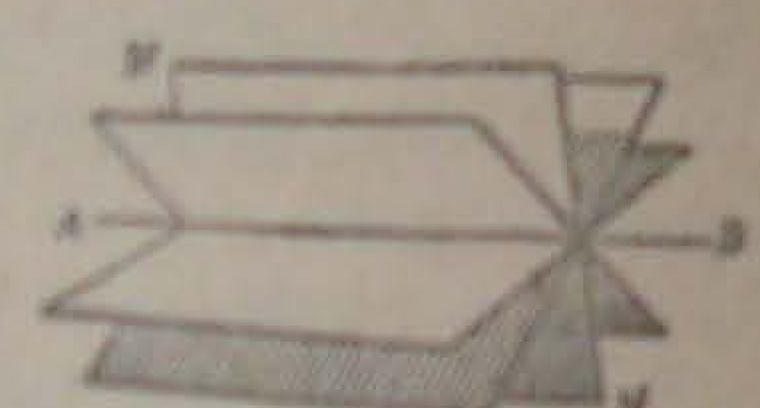


Fig. 383

Como o plano é uma superficie ilimitada, só a podemos representar em parte; por isso, na prática, costumamos representá-lo por uma porção retangular do mesmo (fig. 382).

Determinação de um plano. — Um plano fica determinado: 1.°) por uma reta e um ponto situado fora dessa reta.

2.°) por três pontos não em linha reta;

3.°) por duas retas que se cortam;

4.°) por duas retas paralelas.

Note-se que por uma reta pode passar uma infinidade de planos; porque, desde que um plano passe por uma reta, fazendo-o girar ao redor dessa reta, cada posição que êle toma determina a passagem de um outro plano (fig. 383).

Tomemos um cartão de visita e com os indicadores apertemo-lo por dois dos cantos opostos; sopremos brandamente o cartão assim mantido e o veremos girar ao redor do eixo que une os dois cantos opostos: cada nova posição define um novo plano passando sempre pela mesma reta.

Posições relativas de um plano e uma reta. — Uma reta traçada num plano divide-o em duas regiões chamadas *semi-planos*; a reta é a *origem* dos dois semiplanos.

A reta que tem dois pontos comuns com um plano está toda contida nesse plano e diz-se que ela *pertence* ao plano.

Uma reta que não pertence a um plano pode ser *perpendicular* (fig. 384), *obliqua* (fig. 385) ou *paralela* (fig. 387), a êsse plano.

Uma reta é *perpendicular* a um plano quando é perpendicular a todas as retas que passam por seu pé nêsse plano.

Evidentemente é impossivel traçar todas as retas de um plano que passam pelo mesmo ponto.

Demonstra-se, entretanto, que, se uma reta fôr perpendicular a duas das retas que passem por seu pé no plano, será perpendicular a qualquer outra e, por conseguinte, perpendicular ao plano.

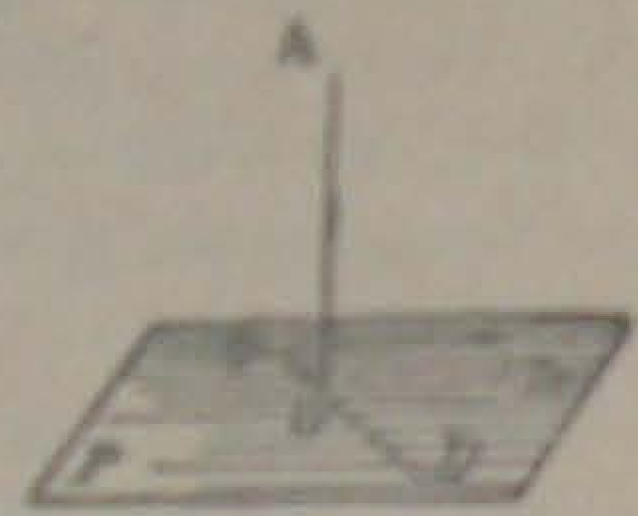


Fig. 384

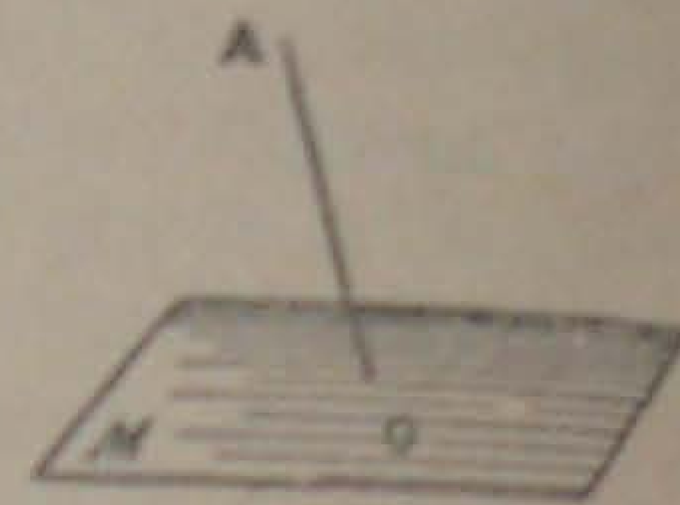


Fig. 385

De um ponto do plano, ou fóra dele, pode-se traçar uma perpendicular a esse plano e só uma.

Duas retas perpendiculares ao mesmo plano são paralelas entre si (fig. 386).

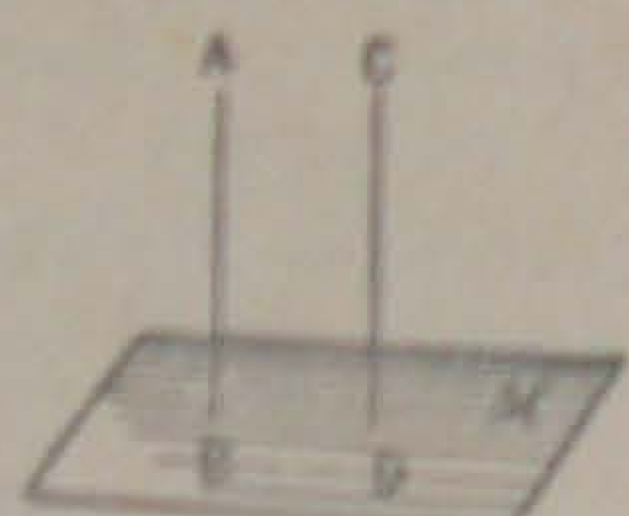


Fig. 386

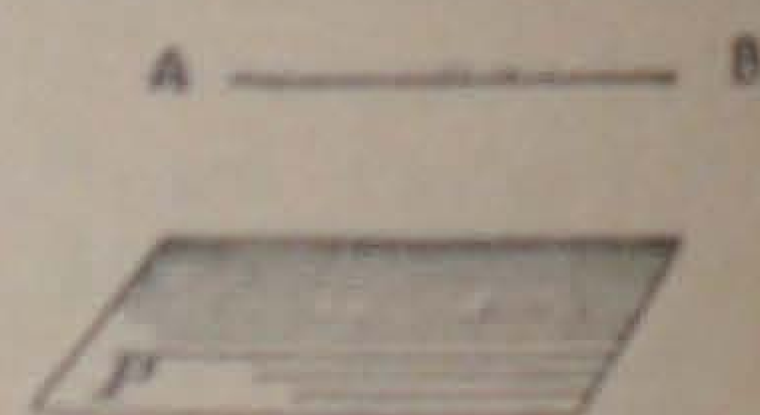


Fig. 387

Uma reta e um plano são paralelos quando indefinidamente prolongados não se encontram.

Intersecção de dois planos. — A intersecção de dois planos é uma linha reta.

Verifica-se isto facilmente dobrando uma folha de papel: a dobra obtida é uma linha reta.

Na fig. 388, os planos MN e PQ se cortam e a sua intersecção é a reta AB.

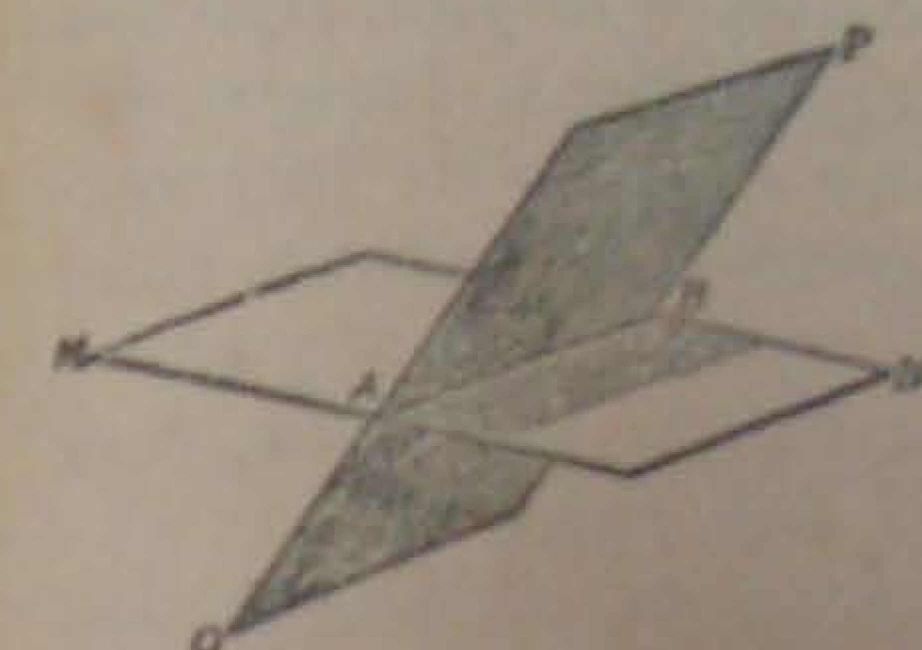


Fig. 388

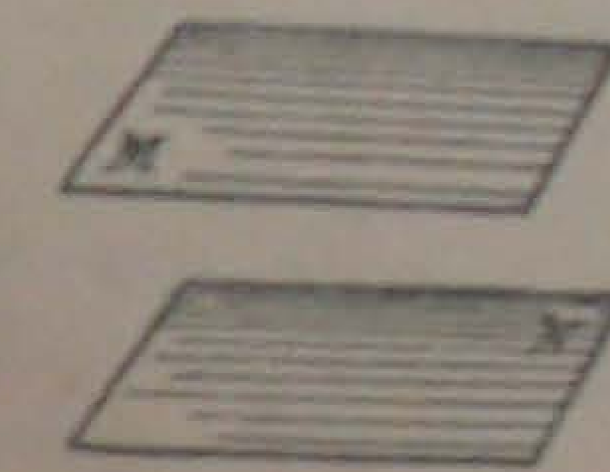


Fig. 389

Planos paralelos. — Dois planos são paralelos (fig. 389) quando, prolongados indefinidamente

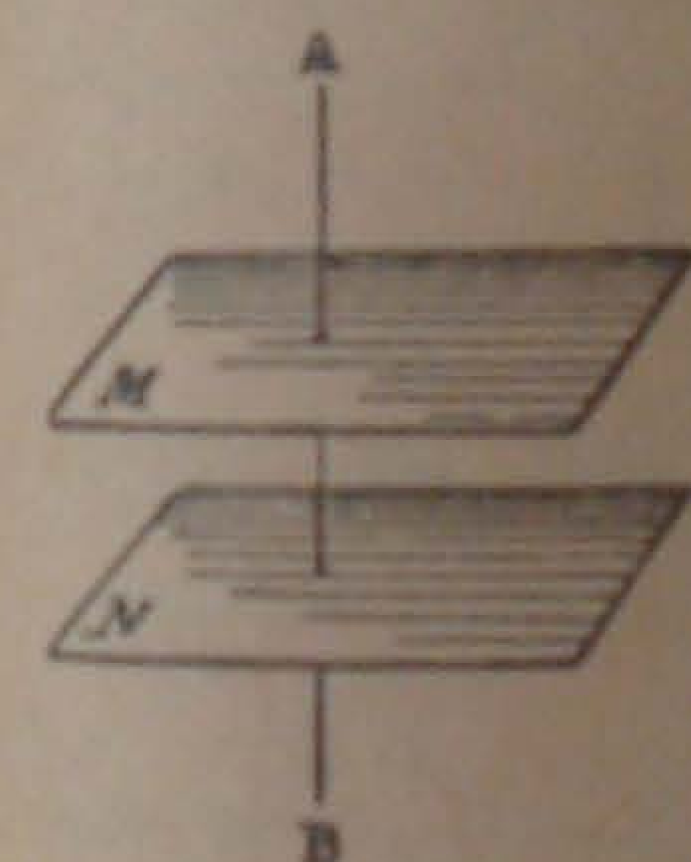


Fig. 390

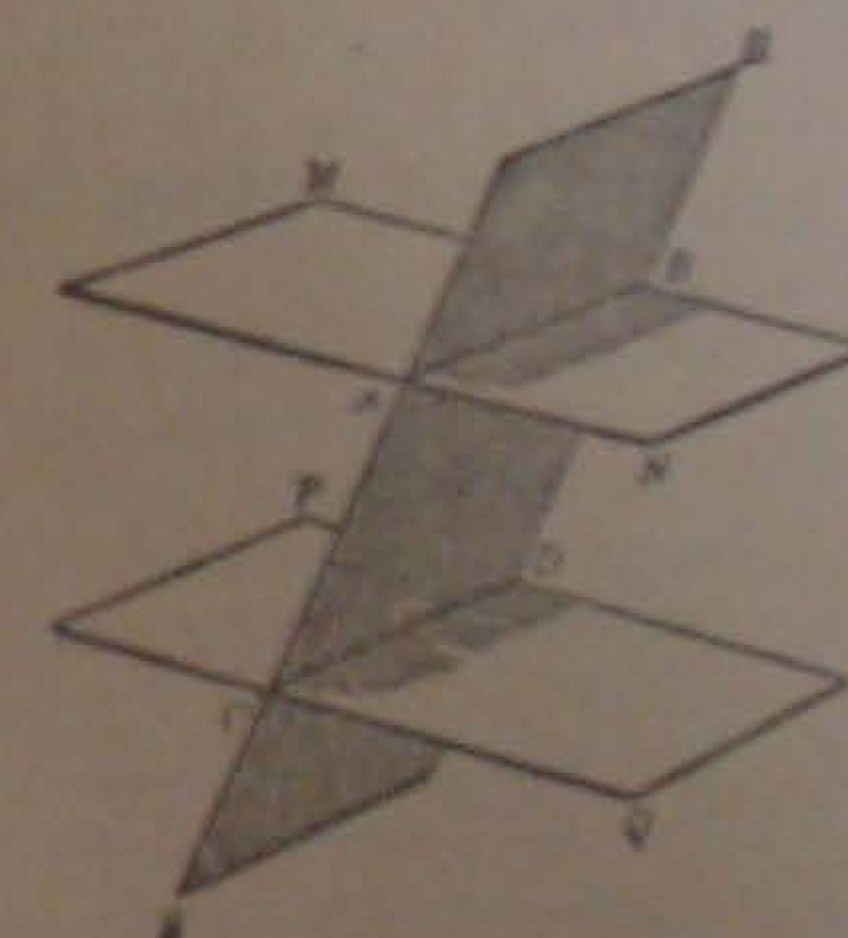


Fig. 391

não se encontram; tais são, por exemplo, os planos das faces opostas de um dado de jogar.

Por um ponto dado sôbre uma reta podemos fazer passar um plano perpendicular a essa reta e só um. Do mesmo modo, de um ponto dado fóra de uma reta podemos fazer passar um plano perpendicular a essa reta e só um.

Dois planos perpendiculares à mesma reta são paralelos (fig. 390) porque, se não o fossem, teríamos por um mesmo ponto da reta de intersecção dois planos perpendiculares à mesma reta, o que é impossível.

As intersecções de dois planos paralelos, com um terceiro plano são paralelas entre si.

Com efeito, si as retas AB e CD (fig. 391) não fossem paralelas elas se encontrariam e, como pertencem aos planos M e N, respectívamente, estes dois planos iriam também encontrar-se; ora, isto não é possível, pois os dois planos foram supostos paralelos.

QUESTIONÁRIO

1. Quando se diz que uma superfície é plana?
2. Como se representa um plano?
3. Quantas posições pode ocupar uma reta relativamente a um plano?
4. Quando se diz que uma reta é perpendicular a um plano? e obliqua? e paralela?
5. Que são planos paralelos?
6. Por um ponto quantos planos podem passar que sejam perpendiculares a uma reta?
7. Dois planos perpendiculares à mesma reta que são entre si?
8. Duas retas perpendiculares ao mesmo plano que são entre si?
9. Quantos planos podem passar por uma reta?
10. De quantos modos fica determinado um plano?
11. Se dois planos paralelos forem cortados por um terceiro, de que natureza são as intersecções.

CAPÍTULO XV

Ângulos diedros — Ângulos sólidos ou poliédricos.

Chama-se *ângulo diedro*, ou simplesmente *diedro*, a figura formada de dois semi-planos que têm a mesma reta de origem.

Os semi-planos são as *faces* e a reta comum de origem chama-se *aresta* do diedro.

Designa-se um diedro por quatro letras, colocadas duas sôbre a aresta e uma sôbre cada face,

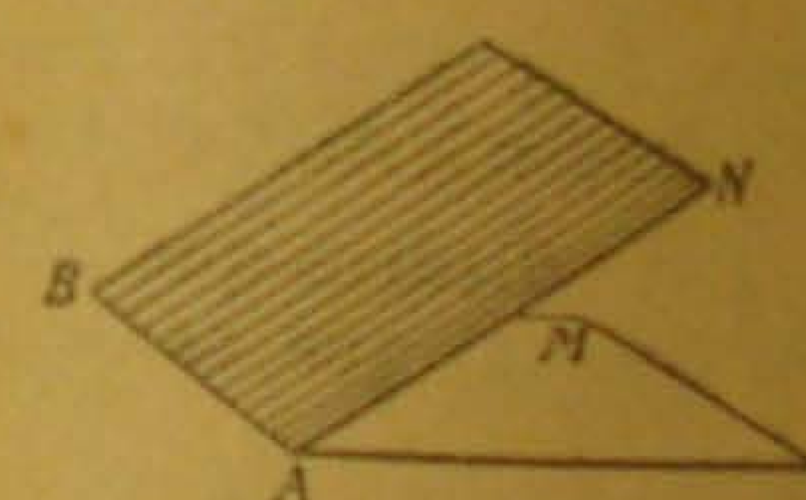


Fig. 392

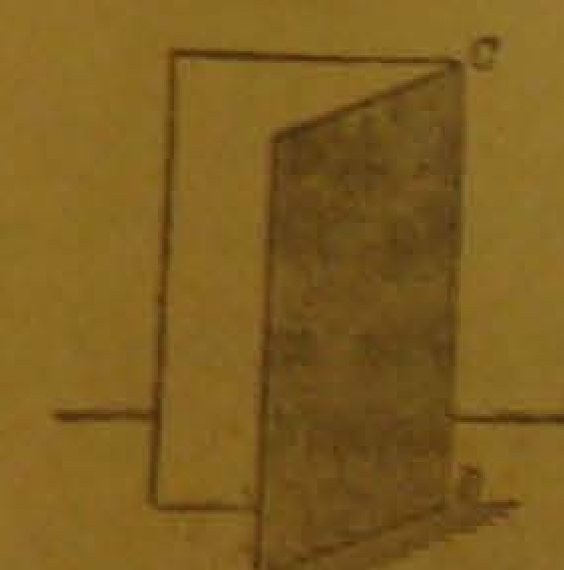


Fig. 393

tendo o cuidado de enunciar as duas da aresta entre as das faces. Exemplo: diedro $MABN$ (fig. 392).

Caso o diedro esteja isolado, podem bastar duas letras sôbre a aresta. Exemplo: diedro BC (fig. 393).

Medida do diedro. — De um ponto da aresta do diedro tracemos em cada face uma perpendicular à aresta naquele ponto. Resulta um ângulo chamado *ângulo plano* ou *ângulo retilíneo* do diedro: tal é o ângulo HIG (fig. 394). Pois bem: o ângulo diedro se mede pelo seu ângulo retilíneo.

Fig. 394

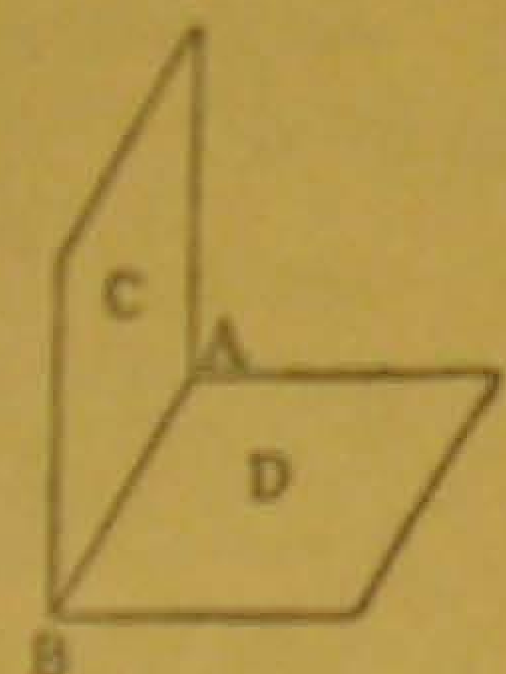


Fig. 395

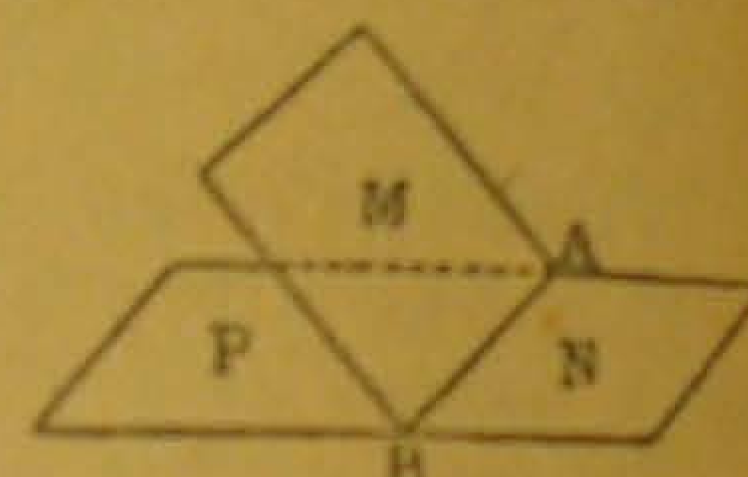


Fig. 396

Os ângulos diedros são, pois, conforme os respectivos ângulos retilíneos: *retos, agudos* e *obtusos*.

O diedro $CABD$ é reto (fig. 395); o diedro $MABP$ (fig. 396) é *agudo* e o diedro $MABN$ é *obtuso*.

Diedros adjacentes. — Dois diedros que têm a mesma aresta e uma face comum que os separa

Fig. 397

chamam-se *adjacentes*. Assim, na fig. 397, o diedro $MABN$ é adjacente ao diedro $NABP$.

Diedros opostos pela aresta. — Dois diedros são opostos pela aresta quando as faces de um são os prolongamentos das faces do outro. Dois diedros opostos pela aresta são iguais (fig. 398).

Quando dois planos se cortam formam-se quatro diedros que, considerados dois a dois, são adjacentes ou opostos pela vértice. Si os diedros adjacentes são iguais, os planos são *perpendiculares;*

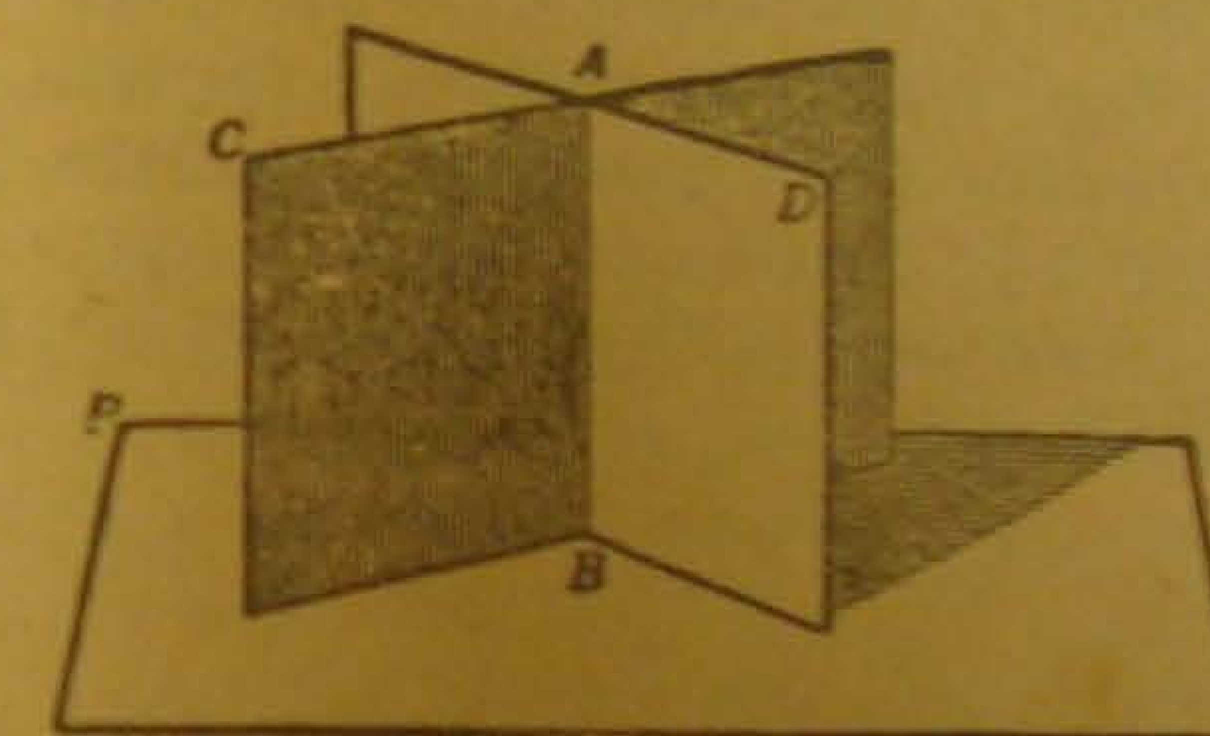


Fig. 398

si os diedros adjacentes são desiguais, os planos são *obliquos*. No primeiro caso, os diedros formados são todos retos; no segundo, dois diedros são agudos e dois obtusos.

Se dois planos que se cortam são perpendiculares a um terceiro plano, a intersecção dos dois primeiros é também perpendicular a êste último.

Os planos C e D (fig. 398) são perpendiculares ao plano P; a reta AB, que é a intersecção, é também perpendicular ao mesmo plano.

Ângulo poliédrico. — Ângulo poliédrico é a figura formada por vários planos que passam por um ponto chamado *vértice*, cada plano se limitando com dois outros. Estas intersecções são as *arestas* e as porções de planos limitadas pelas arestas são as *faces* do ângulo poliédrico.

Assim, a figura 399 representa um ângulo poliédrico *SABCD* cujo vértice é *S*, as arestas são *SA*, *SB*, *SC* e *SD* e cujas faces são os ângulos *ASB*, *BSC*, *CSD* e *DSA*.

Um ângulo poliédrico tem tantas faces quantas arestas e o mesmo número de diedros. Estes são formados por duas faces consecutivas quaisquer. O ângulo poliédrico da fig. 399 tem 4 faces, 4 arestas e 4 diedros. Os diedros são *ASBC*, *BSCD*, *CSDA* e *DSAB*.

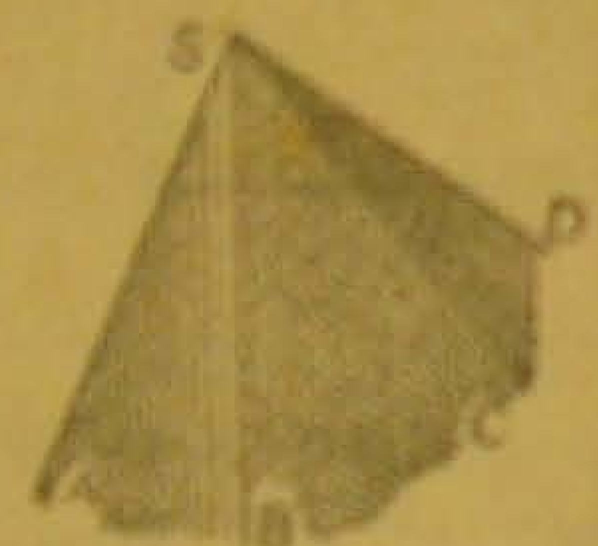


Fig. 399

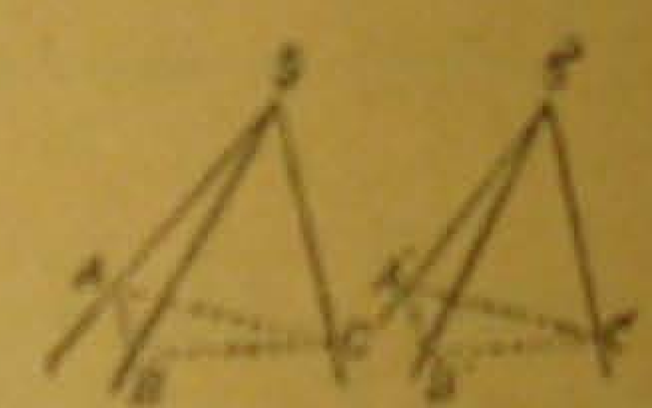


Fig. 400

Denomina-se um ângulo poliédrico pelo número de faces, sendo que o de três faces se chama *triedro*.

Dois ângulos poliédricos se dizem *iguais* quando suas faces e os diedros que elas formam são respectivamente iguais e dispostos na mesma ordem: tais são os ângulos sólidos *SABC* e *S'A'B'C'* da fig. 400.

As faces de um ângulo sólido medem-se em graus, minutos e segundos, como ângulos planos quaisquer. Demonstra-se e é fácil verificar que a soma das faces de um ângulo poliédrico varia entre 0 e 360°.

QUESTIONÁRIO

1. Que é ângulo diedro?
2. Que são faces e arestas de um diedro?
3. Como se designa um diedro?
4. Que é ângulo plano de um diedro?
5. Que outro nome tem o ângulo plano de um diedro?
6. Como se classificam os ângulos diedros?
7. Quando se diz que dois diedros são adjacentes?
8. Que são diedros opostos pela aresta e que relação há entre êles?
9. Quando se diz que dois planos são perpendiculares? e quando se dizem obliquos?
10. Que é um ângulo poliédrico e que outro nome se lhe pode dar?
11. Como se designa um ângulo poliédrico?
12. Quando é que dois ângulos poliédricos são iguais?
13. Como se medem as faces de um ângulo poliédrico?
14. Entre que limites está compreendida a soma das faces de um ângulo poliédrico?

CAPÍTULO XVI

Poliedros — Poliedros regulares.

Os sólidos limitados **exclusivamente** por superfícies planas chamam-se **poliedros.**

Em um poliedro consideramos:

as *faces*
as *arestas,*
os *vértices*
os *ângulos poliédricos*
os *diedros.*

As *faces* são polígonos planos. Os lados dêstes polígonos são as *arestas* e os vértices dos polígonos são os *vértices* do poliedro. Cada aresta é comum a duas faces, as quais formam um *ângulo diedro.* Em cada vértice concorrem três ou mais faces para formarem os *ângulos sólidos* do poliedro.

Alguns poliedros tomam nomes especiais, conforme o número de faces que o limitam; tais são os de quatro, cinco, seis, sete, oito, dez, doze, vinte faces, que se denominam, respectivamente, *tetraedro, pentaedro, hexaedro, heptaedro, octaedro, decaedro, dodecaedro, icosaedro.*

POLIEDROS REGULARES

Se as faces do poliedro são polígonos regulares iguais e todos os ângulos sólidos também são iguais entre si, o poliedro se diz *regular*. Assim, o cubo é um poliedro regular: suas faces são quadrados iguais e seus ângulos sólidos são todos iguais entre si (fig. 408).

Está claro que a igualdade das faces no poliedro regular acarreta a igualdade das arestas do poliedro e, do mesmo modo a igualdade dos ângulos sólidos determina a igualdade dos diedros do poliedro.

Demonstra-se que só há cinco poliedros regulares, sendo três limitados por faces triangula-

Fig. 401

Fig. 402

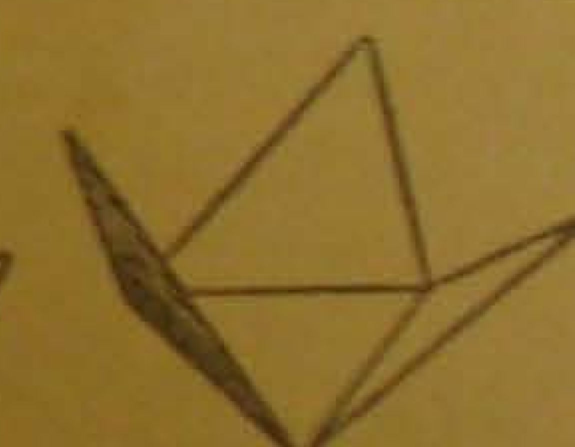


Fig. 403

res, um limitado por faces quadradas e um limitado por faces pentagonais. São êles:

Fig. 404

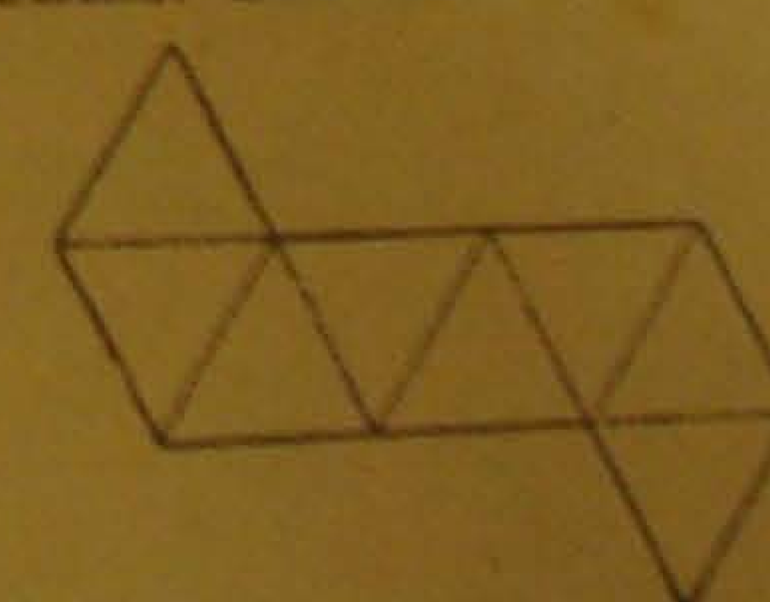


Fig. 405

Tetraedro regular, limitado por 4 triângulos equiláteros (fig. 401);

Octaedro regular, limitado por 8 triângulos equiláteros (fig. 404);

Fig. 406

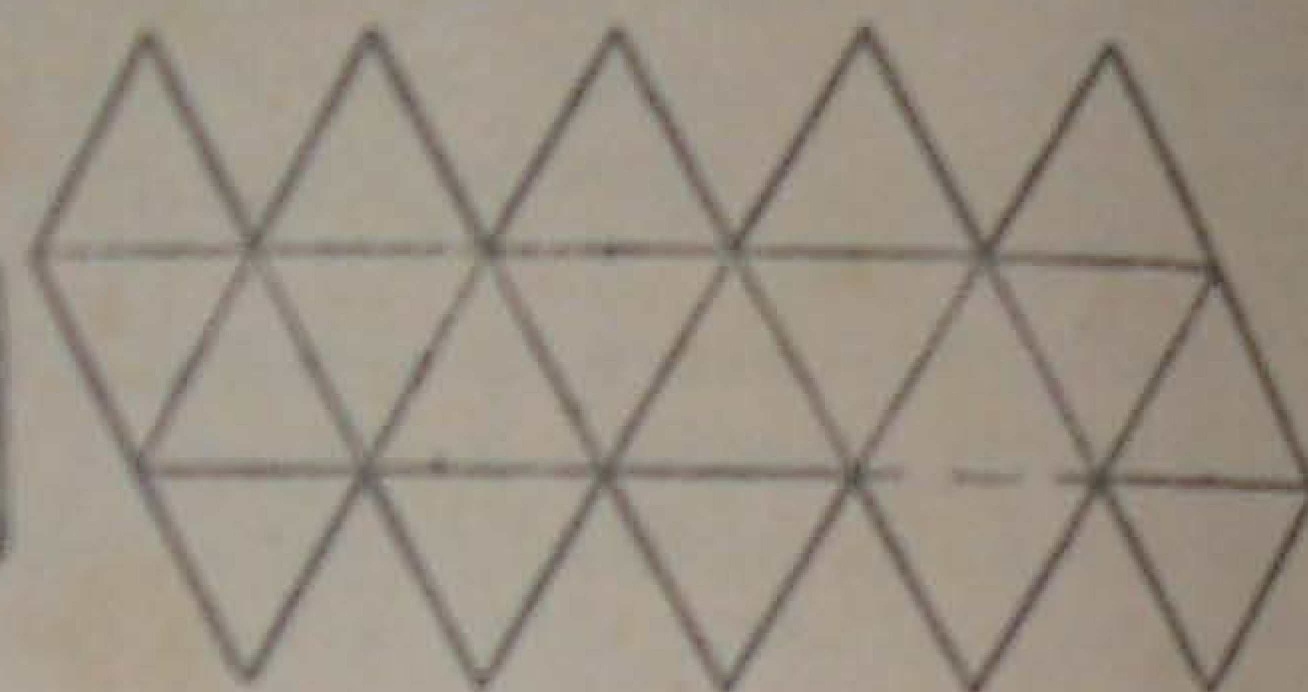


Fig. 407

Icosaedro regular, limitado por 20 triângulos equiláteros (fig. 406).

Fig. 408

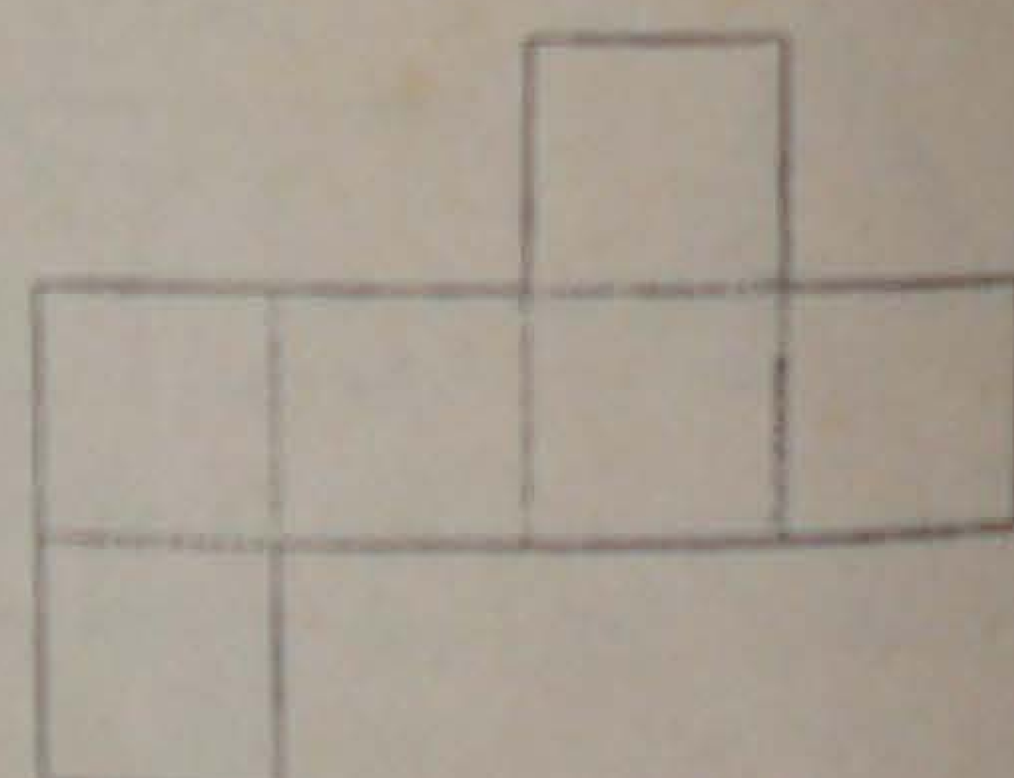


Fig. 409

Hexaedro regular ou *cubo*, limitado por seis quadrados (fig. 408).

Dodecaedro regular, limitado por 12 pentágonos regulares (fig. 410).

Conhecida a natureza e o número das faces de um poliedro, é fácil fazer a planificação dêsse

Fig. 410

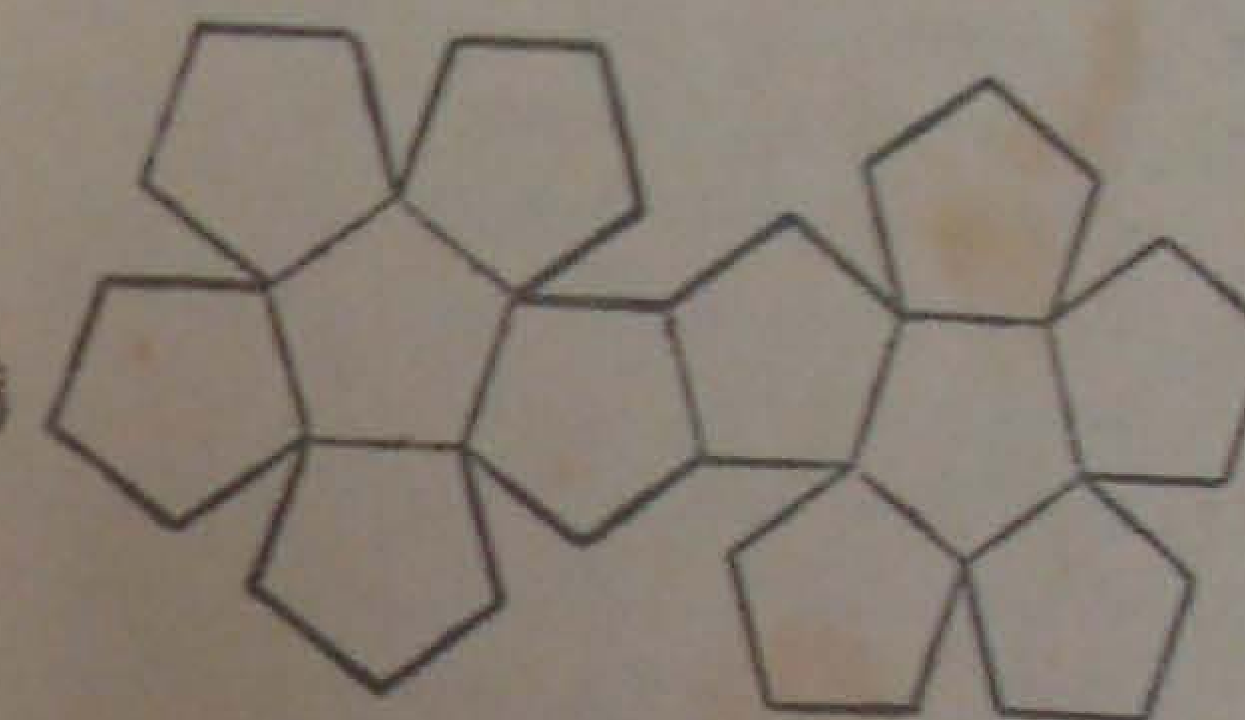


Fig. 411

poliedro, isto é, traçar sôbre um plano, folha de papel ou cartão, todas as suas faces, de modo que, depois, recortando e dobrando convenientemente, se possam formar os sólidos-modelos (fig. 412).

O desenho assim traçado chama-se *rêde* do sólido.

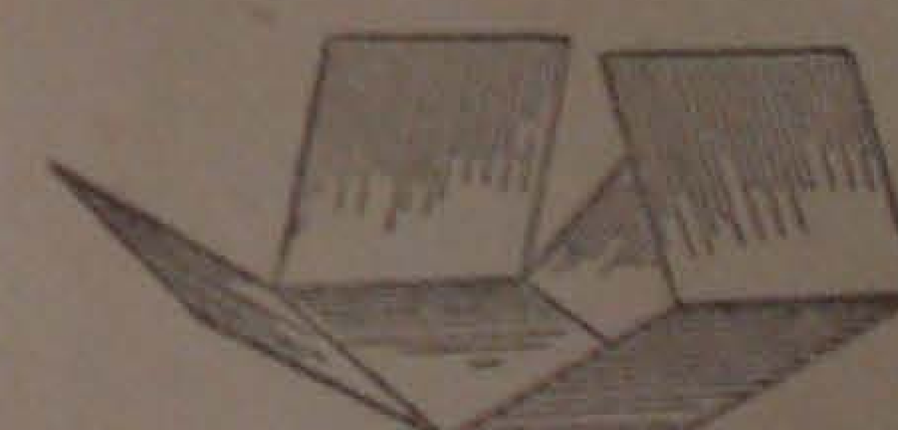


Fig. 412

Entre as figuras dêste capítulo, vemos as rêdes dos poliedros regulares, estando em linhas pontilhadas as arestas que devem ser dobradas.

QUESTIONÁRIO

1. Que são poliedros?
2. Que elementos há a considerar num poliedro?
3. Que são faces, arestas, vértices, diedros e ângulos sólidos de um poliedro?
4. Quais os poliedros que receberam denominações especiais?
5. Quando se diz que um poliedro é regular?
6. Quantos são os poliedros regulares?
7. Quais os poliedros regulares limitados por triângulos?
8. Qual o poliedro regular limitado por quadrados?
9. Qual o poliedro regular limitado por pentágonos?
10. Como se planifica um sólido?
11. Que é rêde de um sólido?

CAPÍTULO XVII

Prismas e pirâmides

Classificar os poliedros exclusivamente pelo número de faces nos levaria a reunir na mesma classe sólidos de aspectos muito diversos. Basta ver as figuras 413 e 414 as quais representam igualmente **hexaedros**, isto é, poliedros de seis faces.

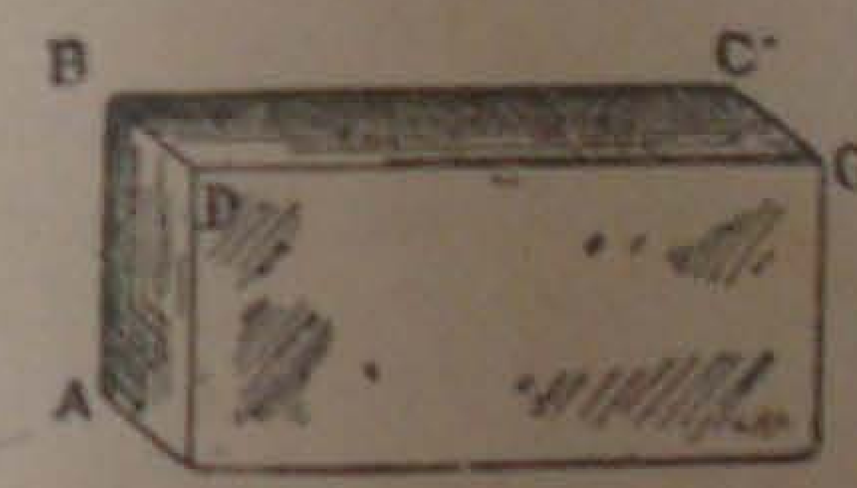


Fig. 413

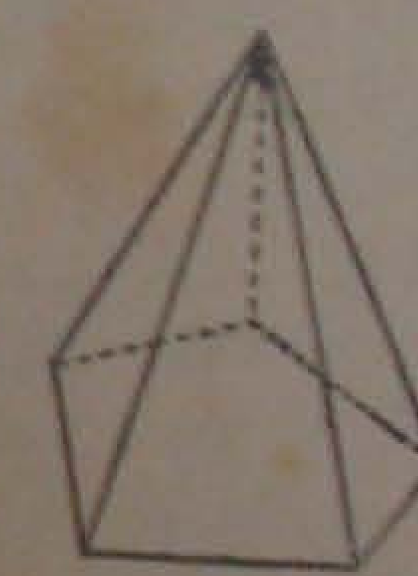


Fig. 414

Vamos, por isso, distinguir, entre os poliedros duas espécies muito importantes: os *prismas* e as *pirâmides*.

PRISMAS

Prisma é o poliedro limitado por dois polígonos iguais e paralelos e por tantos paralelogramos quantos são os lados dêsses polígonos.

Os polígonos iguais e paralelos chamam-se *bases* do prisma e os paralelogramos são as *faces laterais*.

Fig. 415

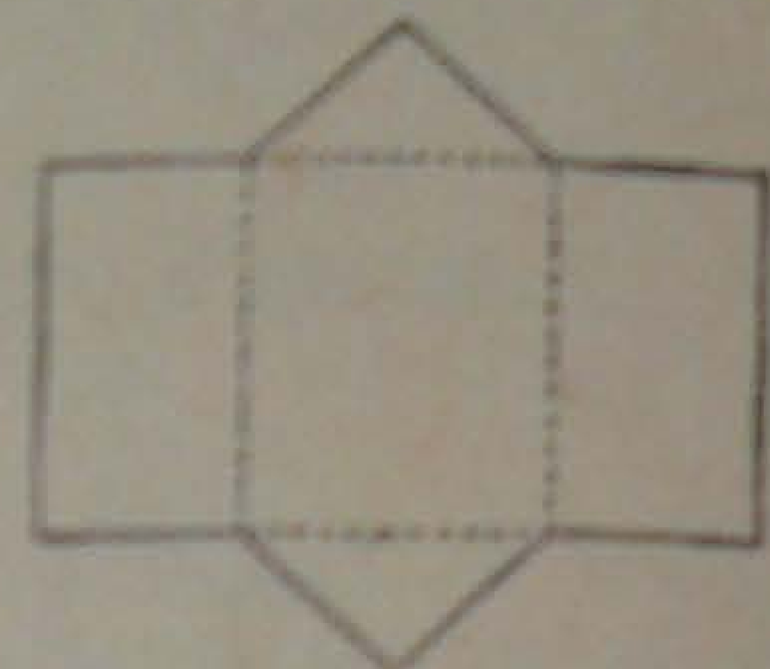


Fig. 416 — Planificação do prisma triangular reto.

O prisma se diz tringular, quadrangular, pentagonal, hexagonal, etc., conforme suas bases forem triângulos, quadriláteros, pentágonos, hexágonos, etc.

A fig. 415 representa um prisma triangular, ao passo que a fig. 417 é a de um prisma hexagonal.

Fig. 417

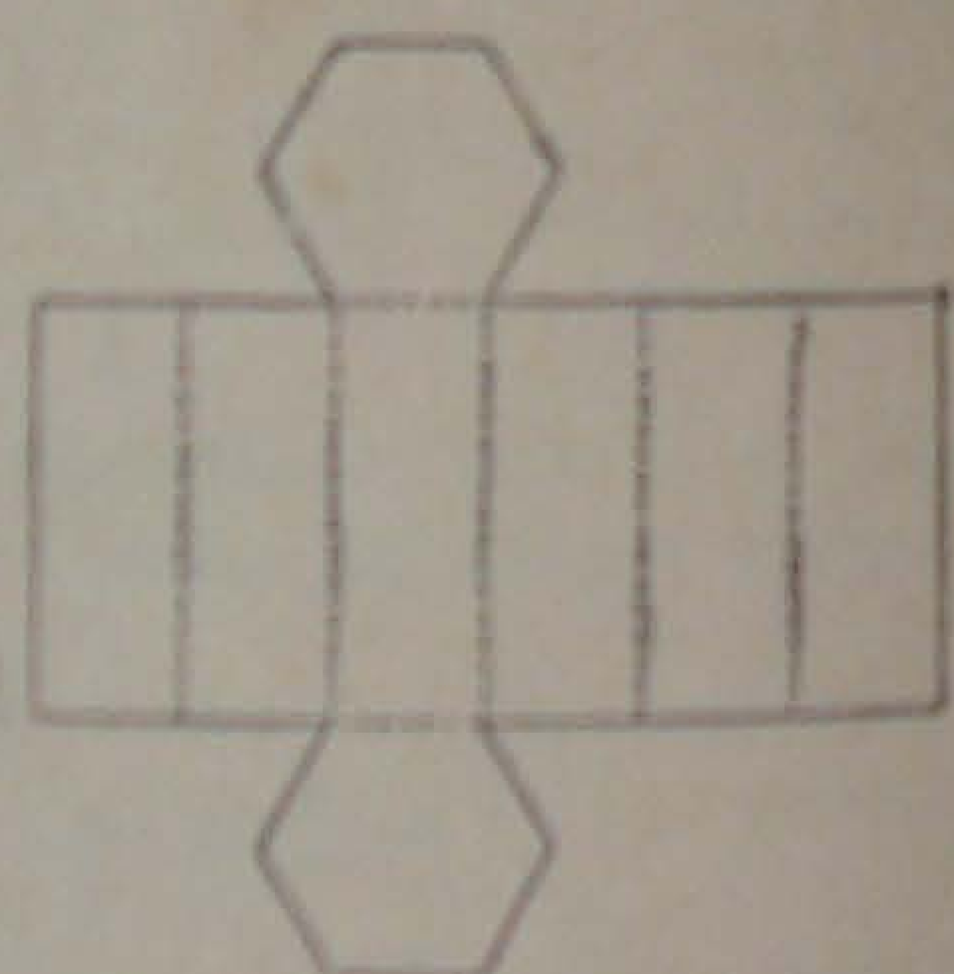


Fig. 418 — Planificação do prisma hexagonal reto.

As arestas do prisma que ligam uma base à outra chamam-se *arestas laterais* do prisma.

Um prisma é *reto* quando as arestas laterais são perpendiculares às bases (figs. 415 e 417); em caso contrário, êle é *oblíquo* (fig. 419).

Quando o prisma é reto, as faces laterais são retangulares.

Fig. 419

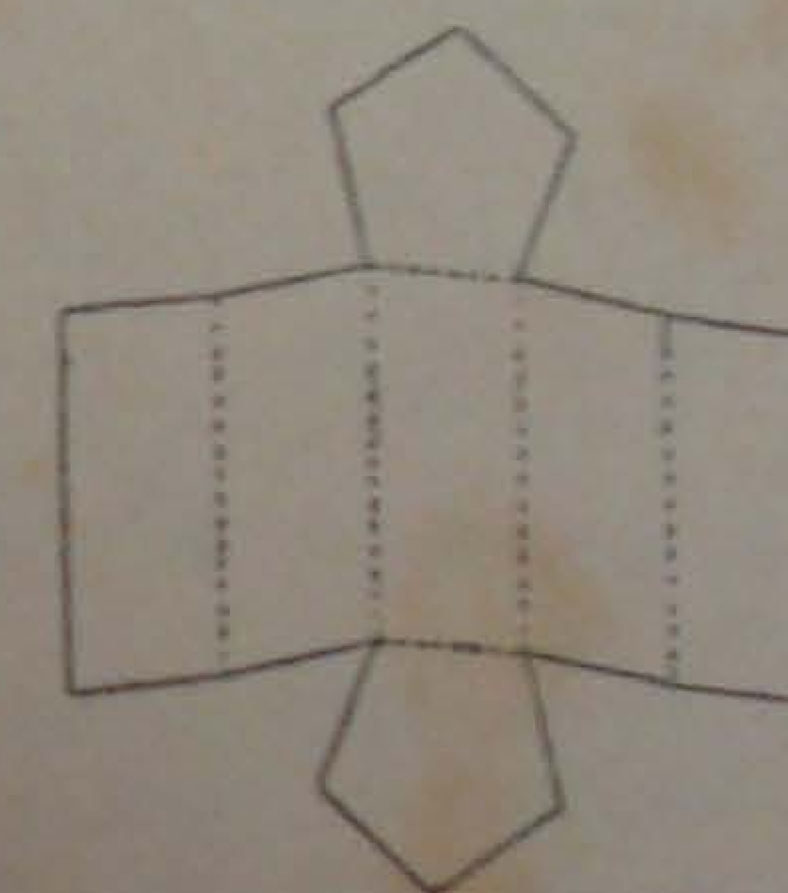


Fig. 419a — Planificação do prisma pentagonal oblíquo.

O prisma reto de base regular chama-se *prisma regular*; no prisma regular as faces laterais são retângulos iguais. A fig. 417 é a de um prisma hexagonal regular.

A distância de uma base à outra do prisma é a *altura* do prisma. Para obter a altura de um prisma, portanto, basta de um ponto qualquer de uma base traçar uma perpendicular ao plano da outra base.

Evidentemente, no prisma reto a altura é igual à aresta lateral; no prisma oblíquo é sempre menor.

Se as bases do prisma também são paralelogramos, o prisma recebe o nome de **paralelepípedo.**

Como qualquer prisma, o paralelepípedo pode ser *reto* ou *oblíquo*, conforme as arestas laterais

Fig. 420

Fig. 421

são perpendiculares (fig. 420) ou oblíquas às bases (fig. 421).

Se um paralelepípedo, além de reto tem a base retangular, êle toma o nome de *paralelepípedo retângulo* (fig. 422). Neste caso, as faces

Fig. 422

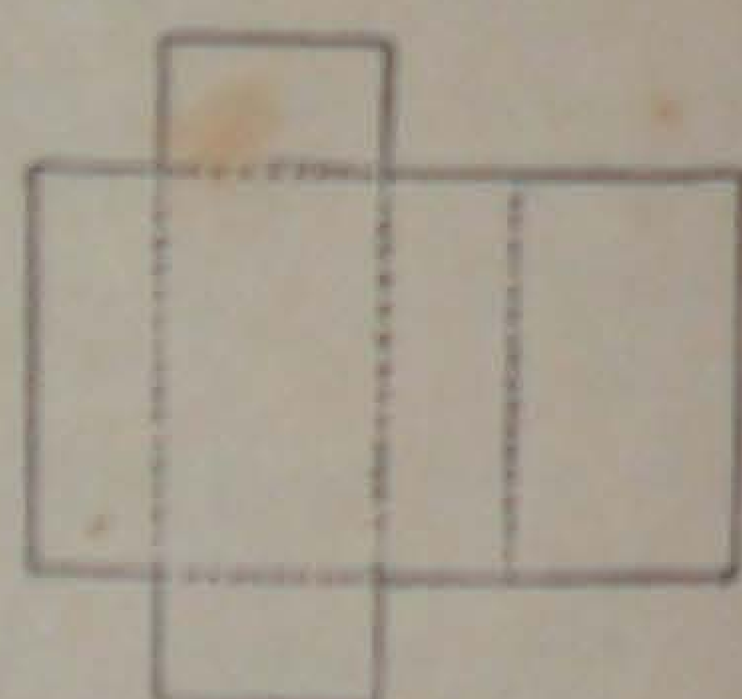


Fig. 423 — Planificação do bloco retangular.

são todas retângulos e, por isso, o paralelepípedo retângulo também é chamado *bloco retangular*.

Chama-se *secção reta* de um prisma a secção plana perpendicular às arestas laterais do prisma (fig. 424).

As faces laterais formam a *superfície lateral* do prisma; a superfície lateral mais as das bases formam a *superfície total*.

Fig. 424

Fig. 425

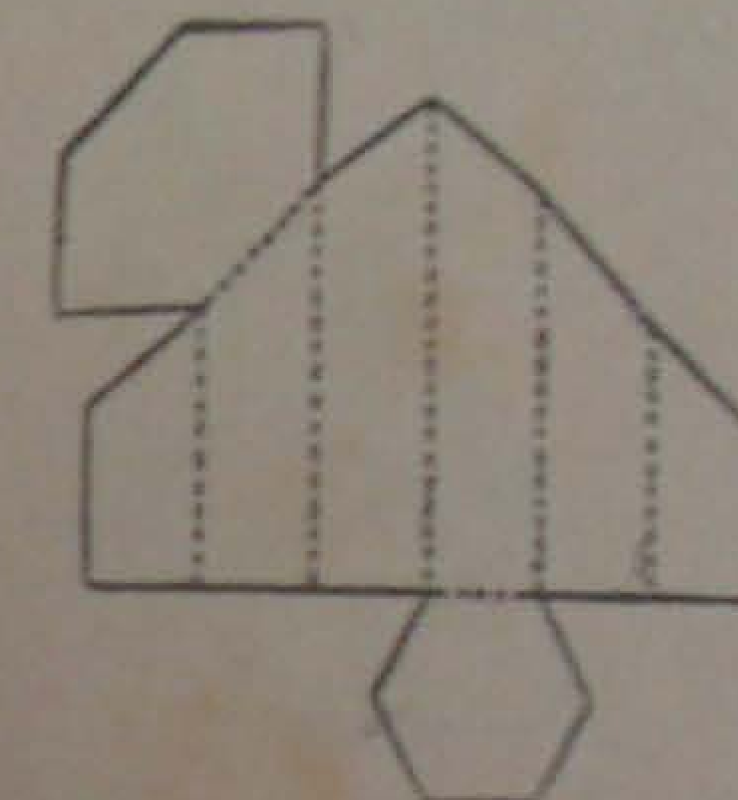


Fig. 426 — Planificação do tronco de prisma hexagonal.

À porção de um prisma compreendida entre uma base e uma secção plana não paralela às bases, mas que corta todas as arestas laterais do prisma, chama-se *tronco de prisma* ou *prisma truncado* (fig. 425).

PIRÂMIDES

Chama-se **pirâmide** ao sólido limitado por um polígono qualquer e por triângulos que têm um vértice comum. O polígono é a *base* da pirâmide; os triângulos são as faces laterais e o vértice comum destas é o *vértice* da pirâmide.

As arestas que partem do vértice chamam-se *arestas* laterais da pirâmide.

Para designar uma pirâmide colocamos uma letra no vértice da pirâmide e uma em cada vértice da base. Na fig. 427 temos a pirâmide *VABCD* (ter o cuidado de ler a letra do vértice da pirâmide

Fig. 427

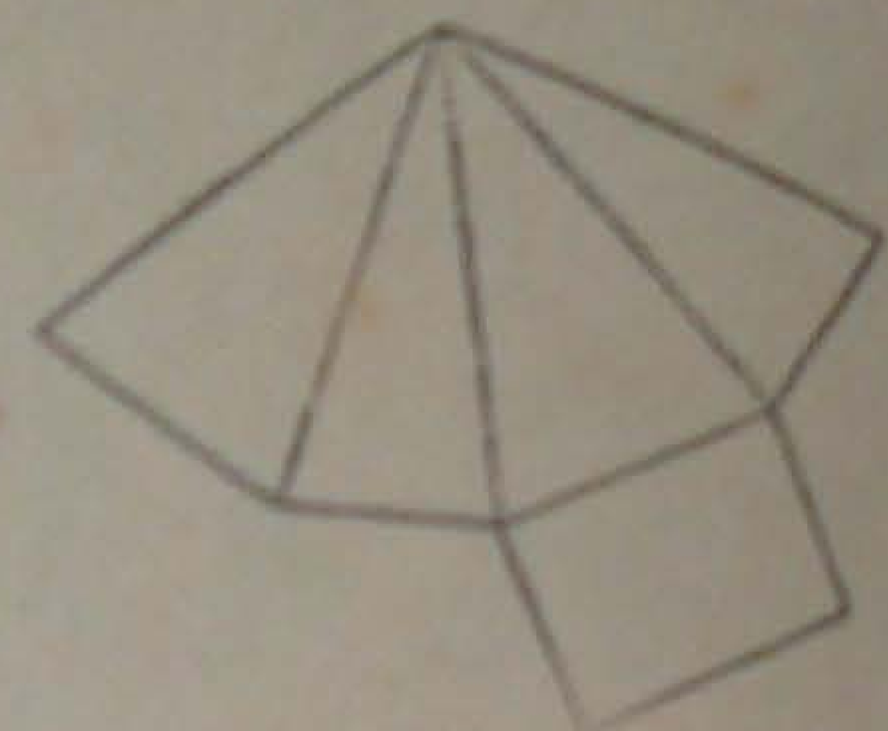


Fig. 428 — Planificação de uma pirâmide quadrangular.

em primeiro lugar) de vértice *V*; sua base é o quadrilátero *ABCD*; suas arestas laterais são *VA*, *VB*, *VC* e *VD*; e suas faces laterais são os triângulos *AVB*, *BVC*, *CVD* e *DVA*.

A distância do vértice ao plano da base é a altura da pirâmide. A altura de uma pirâmide se obtém, portanto, traçando a perpendicular do vértice sôbre o plano da base (fig. 429).

Uma pirâmide se diz triangular, quadrangular, pentagonal, etc., conforme a base é um triângulo, um quadrilátero, um pentágono, etc. A fig 427 representa uma pirâmide quadrangular.

Quando a base da pirâmide é um triângulo, todas as suas faces são triangulares e, como são em número de quatro, o sólido se chama *tetraedro*. (fig. 430). Nêste caso qualquer face pode servir de base.

Uma pirâmide é *regular* quando tem por base um polígono regular e sua altura cai no centro da base. Na pirâmide regular as faces laterais são

Fig. 429

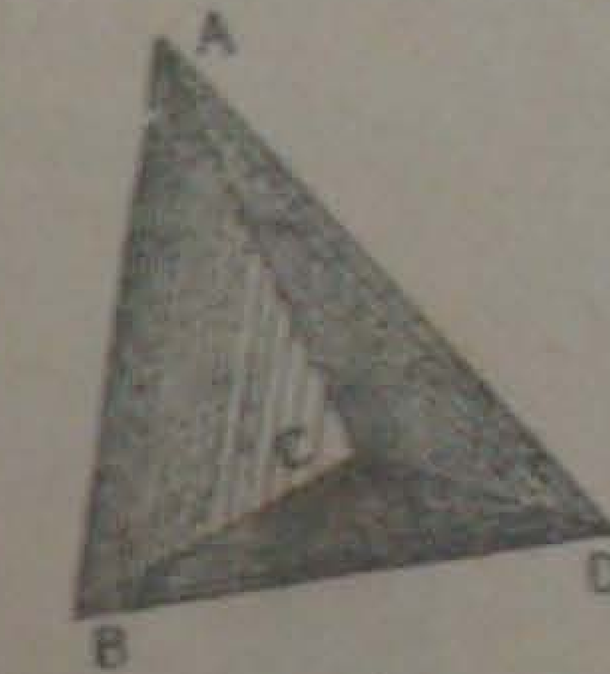


Fig. 430

triângulos isósceles iguais; estes triângulos têm, portanto a mesma altura. Esta altura, igual para todas as faces laterais da pirâmide regular, chama-se *apótema da pirâmide*.

Fig. 431

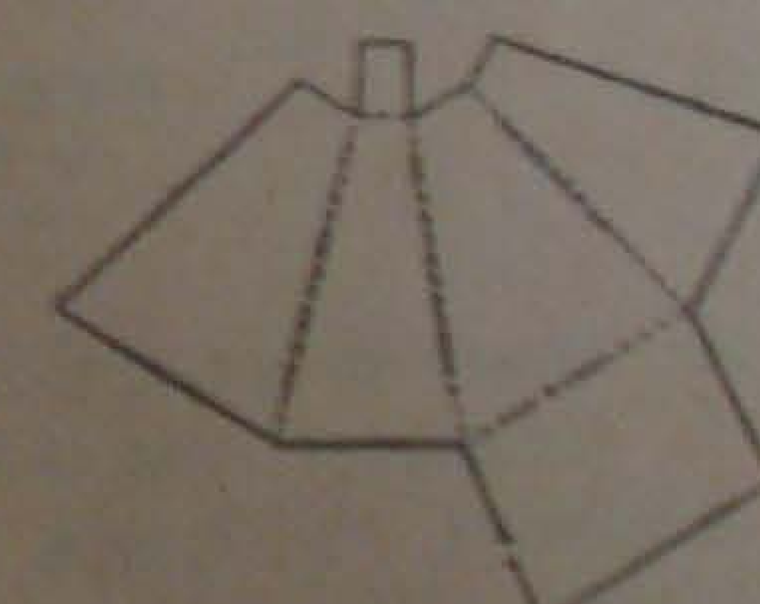


Fig. 432 — Planificação de tronco de pirâmide quadrangular de bases paralelas.

A porção de pirâmide compreendida entre a base e uma secção plana que corta todas as arestas laterais chama-se *tronco de pirâmide* ou *pirâmide truncada*.

A secção pode ser paralela à base, ou não; daqui duas espécies de troncos: *de bases paralelas* (fig. 431) *e de bases não paralelas* (fig. 433).

Fig. 431

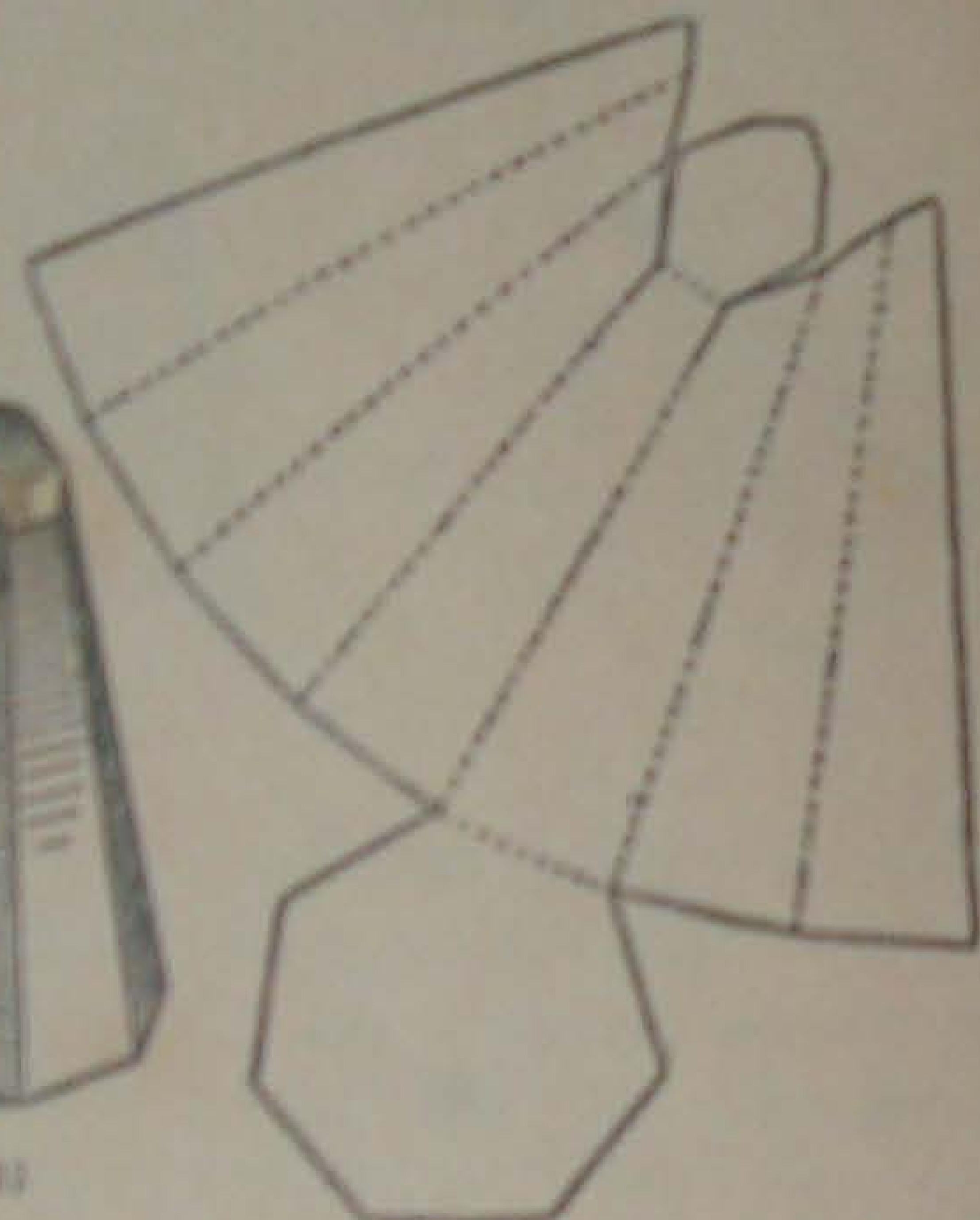


Fig. 434 — Planificação do tronco de pirâmide hexagonal de bases não paralelas.

No tronco de pirâmide de bases paralelas, estas são polígonos semelhantes e as faces laterais são trapézios simétricos todos iguais entre si. A altura dêsses trapézios é o *apótema* do tronco.

QUESTIONÁRIO

1. Que é um prisma?
2. Que forma têm as faces laterais do prisma?
3. Como se denominam os prismas quanto às bases?
4. Quando é que o prisma se diz reto? e quando é oblíquo?

5. Que forma têm as faces laterais do prisma reto?
6. Que é um prisma regular?
7. Quando a base do prisma também é paralelogramo como se chama êle?
8. Como se classificam os paralelepipedos?
9. Que é um bloco retangular?
10. Que é um tronco de prisma ou prisma truncado?
11. Como se pode obter a altura de um prisma?
12. Que é secção reta de um prisma?
13. Que é pirâmide?
14. Como se designa uma pirâmide?
15. Como se classificam as pirâmides quanto às bases?
16. Que é altura da pirâmide?
17. Quando se diz que a pirâmide é regular?
18. Que outro nome tem a pirâmide de base triangular?
19. Que é apótema da pirâmide?
20. Que é tronco de pirâmide ou pirâmide truncada?
21. Como pode ser o tronco de pirâmide?
22. Quando o tronco de pirâmide é de bases paralelas, que relação há entre as bases e que forma têm as faces laterais?

CAPÍTULO XVIII

Cilindro — Cone — Esfera.

CILINDRO

Chama-se *superfície cilíndrica* à superfície gerada por uma reta (*geratriz*) que-se move apoiada numa curva fixa (*diretriz*) e conservando-se paralela a uma direção dada (fig. 435).

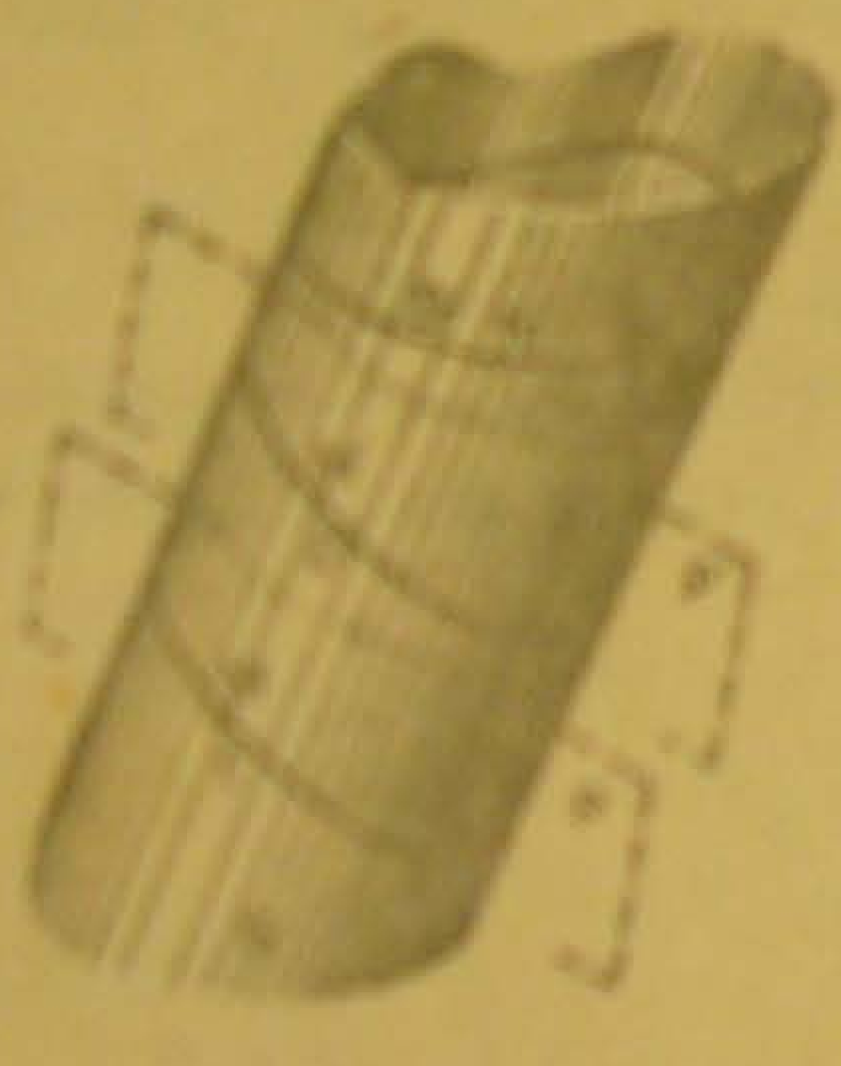


Fig. 435

O sólido limitado por uma superfície cilíndrica e por dois planos paralelos é um **cilindro** (fig. 436). Se estes planos, que são as *bases* do cilindro, forem perpendiculares à geratriz da superfície cilíndrica, o cilindro *é reto;* em caso contrário, é oblíquo. A distância entre as bases é a *altura* do cilindro (*AB* na fig. 436).

Vejamos particularmente o cilindro reto de base circular, isto é, cuja base é um círculo.

O *cilindro reto de base circular* é o sólido gerado pela revolução completa de um retângulo em torno de um de seus lados. Assim, o retângulo

Fig. 436

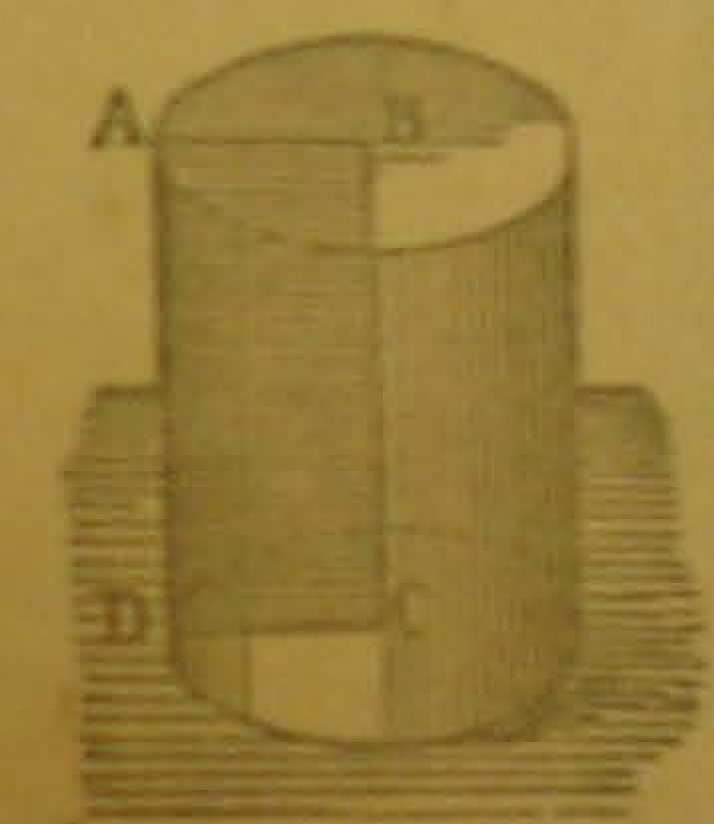


Fig. 437

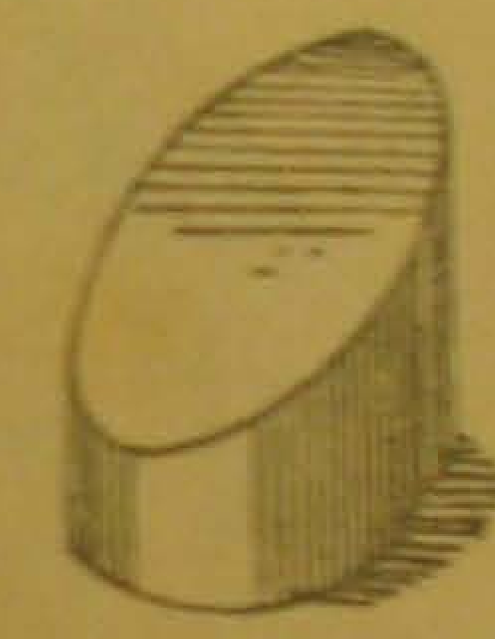


Fig. 438

ABCD, girando em torno de *BC*, gera um cilindro reto de base circular (fig. 437): o lado *BC*, em torno do qual o retângulo gira, é o *eixo;* o lado oposto *AD*, que vai gerar a superfície cilíndrica é a *geratriz;* os círculos gerados pelos lados *AB* e *CD* são as *bases* do cilindro.

No cilindro reto de base circular a altura é igual à geratriz.

Tronco de cilindro. — A porção de cilindro compreendida entre uma base e uma secção plana não paralela às bases, mas que corta todas as geratrizes, chama-se *tronco de cilindro* ou *cilindro truncado*. (fig. 438).

CONE

Chama-se *superfície cônica* (fig. 439) à superfície gerada por uma reta móvel (*geratriz*) que passa por um ponto fixo (*vértice*) e se apoia sôbre uma curva fixa (*diretriz*).

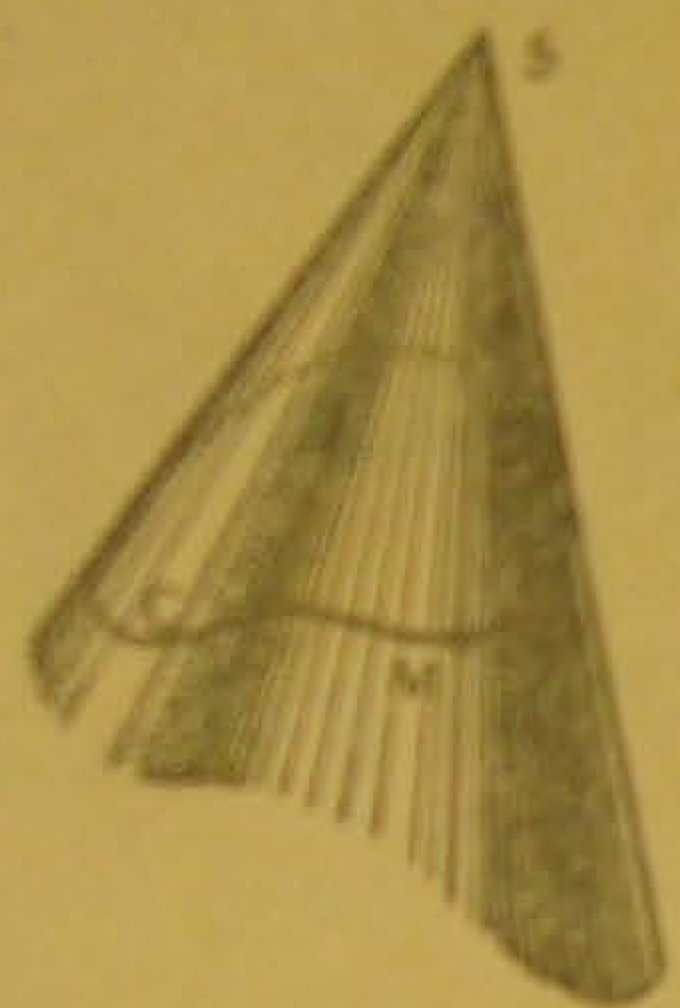


Fig. 439

O sólido limitado por uma superfície cônica e por um plano que corta todas as geratrizes da superfície cônica é um cone (fig. 440). O plano é a base do cone. A distância do vértice ao plano da base é a *altura* do cone (AB na fig. 440).

O cone mais comumente encontrado é o *cone reto de base circular.*

O cone reto de base circular é o sólido gerado pela revolução completa de um triângulo retângulo que gira em torno de um dos catetos. Assim,

Fig. 440

Fig. 441

Fig. 442

o triângulo retângulo *AOS* (fig. 441), girando em torno de *OS*, gerou um cone reto de base circular. Neste caso, *OS* é o **eixo**; a hipotenusa, que gera a

superfície cônica, é a *geratriz* do cone; *S* é o *vértice* do cone; o círculo gerado pelo outro cateto (*AO*) é a *base* do cone.

No cone reto de base circular, a altura se confunde com o eixo e cai, portanto, no centro da base. Quando, embora de base circular, a altura não cai no centro da base, o cone é *oblíquo* (fig. 440).

Tronco de cone. — A porção de cone compreendida entre a base e uma secção plana que corta todas as geratrizes do cone, é um *tronco de cone* ou *cone truncado.*

O tronco de cone pode ser de *bases paralelas* ou de *bases não paralelas,* conforme a secção plana fôr paralela, ou não, à base do cone.

O tronco de cone reto de bases paralelas pode ser considerado como um sólido gerado pela revolução completa de um trapézio retângulo que gira em torno do lado perpendicular às bases (fig. 442). Este lado do trapézio é o *eixo* do tronco.

Secções cônicas. — Quando um plano passa pelo eixo do cone de revolução, a secção é um

Fig. 443

Fig. 444

triângulo isósceles (fig. 443); mas se o plano não passar pelo eixo, a secção será uma curva de aspecto variável conforme a inclinação do referido plano sôbre o eixo. As curvas assim determinadas são chamadas *secções cônicas*.

Se o plano secante fôr perpendicular ao eixo, a secção será um *circulo* (fig. 444).

Se o plano secante fôr obliquo ao eixo, mas cortar todas as geratrizes, a secção será uma *elipse* (fig. 445).

Fig. 445

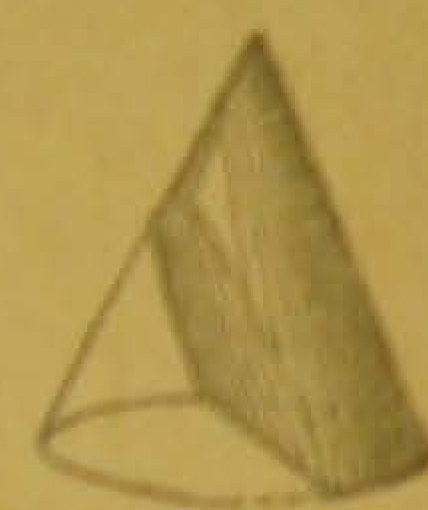


Fig. 446

Fig. 447

Se o plano secante for paralelo a uma só geratriz do cone, a secção será uma *parábola* (fig. 446).

Finalmente, se o plano secante fôr paralelo a duas geratrizes, a secção será uma *hipérbole* (fig. 447).

ESFERA

Esfera é o sólido gerado pela revolução completa de um semi-circulo em torno do seu diâmetro (fig. 448).

A semi-circunferência gera uma superficie redonda, que é a *superficie esférica*.

Podemos dizer que a superficie esférica é aquela cujos pontos são todos equidistantes de um

ponto interior, que é o *centro* da esfera. Essa distância constante de qualquer ponto da superficie esférica ao centro é o *raio* da esfera. O raio da esfera é evidentemente igual ao do circulo gerador.

Fig. 448

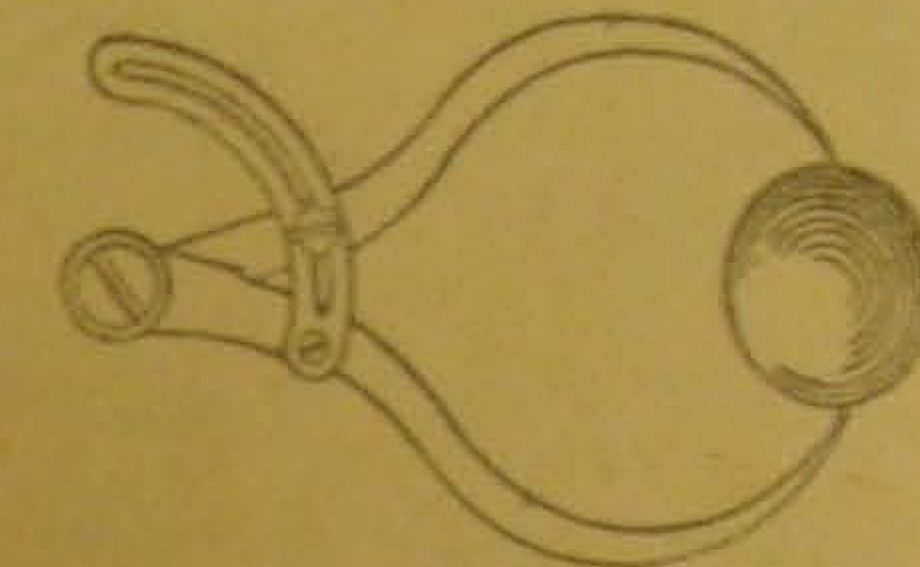


Fig. 449

Praticamente obtém-se o *diâmetro* de uma esfera com um instrumento chamado *compasso esférico* (fig. 449) também usado para traçar circunferencias sôbre a superficie esférica.

Toda secção plana da esfera é um circulo. Si o plano passar pelo centro, a secção é um circulo com o mesmo raio da esfera e se chama *circulo máximo* (fig. 450); si não passar pelo centro, o seu raio será menor do que o da esfera e se chama *circulo menor* (fig. 451).

À proporção que o plano secante se afasta do centro, o raio da secção vai diminuindo, até que se reduz a um ponto. Nesta posição limite dizemos que o plano é *tangente* à esfera, só tendo com esta um ponto comum chamado *ponto de contacto*.

O plano tangente à esfera é perpendicular ao raio que termina no ponto de contacto.

Eixo e polo de um círculo da esfera: — Consideremos um círculo qualquer da esfera. O diâmetro da esfera perpendicular ao plano dêsse círculo chama-se *eixo* dêsse círculo e as extremida-

Fig. 450

Fig. 451

Fig. 452

des do eixo chamam-se *polos* do mesmo círculo da esfera (*A* e *B* na fig. 452).

Considerando um diâmetro qualquer como *eixo de revolução*, o círculo máximo perpendicular a tal eixo chama-se *equador*; os outros círculos menores perpendiculares ao eixo são os *círculos paralelos* (fig. 452).

Os círculos máximos que passam pelos polos do eixo de revolução chamam-se *meridianos* (fig. 452).

Porções da superfície esférica. — As porções da superfície esférica mais importantes são: a zona esférica, a calota e o fuso esférico.

Zona esférica é a porção da superfície esférica compreendida entre dois planos paralelos (fig. 453). Os círculos que os dois planos determinam na superfície esférica são as *bases da zona* e a distância entre as bases é a *altura da zona*.

Se um dos planos se tornar tangente à esfera, uma das bases da zona se reduzirá a um ponto; tem-se, então, a zona de uma só base ou *calota* (fig. 454).

Fig. 453

Fig. 454

Fig. 455

Fuso esférico é a porção da superfície esférica compreendida entre dois semi-círculos máximos que têm o mesmo diâmetro (fig. 455).

Porções da esfera. — Entre as porções da esfera mais comumente encontradas, citaremos: o segmento, a cunha e o sector esféricos.

Segmento esférico. — é a porção da esfera compreendida entre dois planos paralelos (fig. 456). Os círculos que estes planos determinam são as bases do segmento e a distância entre as bases é a altura.

Se um dos planos se torna tangente à esfera, tem-se o segmento esférico de uma só base (fig. 457).

O segmento de duas bases é limitado por estas e por uma zona; o de uma só base é limitado por esta e por uma calota.

Cunha esférica é a porção da esfera limitada por um fuso e pelos dois semi-círculos máximos que determinam o fuso (fig. 458).

Fig. 456

Fig. 457

Fig. 458

Sector esférico é a porção da esfera gerada pela revolução completa de um sector circular em torno de um diâmetro que não o atravessa (fig. 459).

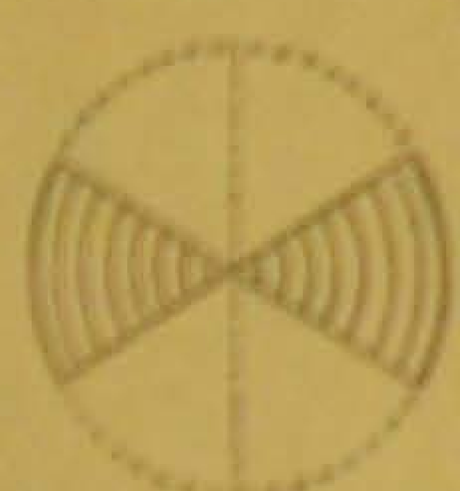


Fig. 459

Fig. 460

O *vértice* do sector é o centro da esfera e a *base* é uma zona ou uma calota (fig. 460).

Nota — Para as lições dos capítulos XV, XVI, XVII e XVIII é vantajoso que o professor disponha de uma coleção de sólidos geométricos.

Esses sólidos devem ser em cartão, e de preferência construídos pelos alunos.

QUESTIONÁRIO

1. Que é superfície cilíndrica?
2. Como se chama o sólido limitado por uma superfície cilíndrica e por dois planos paralelos?
3. Como pode ser o cilindro?
4. Que é altura do cilindro?
5. Como pode ser gerado um cilindro reto de base circular?
6. Em que cilindro a altura é igual à geratriz?
7. Que é tronco de cilindro e que outro nome se lhe dá?
8. Que é superfície cônica?
9. Como se chama o sólido limitado pela superfície cônica e por um plano que corta todas as geratrizes dessa superfície?
10. Que é cone reto de base circular?
11. Onde cai a altura do cone reto de base circular?
12. Que é tronco de cone e que outro nome tem?
13. Como pode ser gerado o cone reto de base circular?
14. Como pode ser gerado o tronco de cone de bases paralelas.
15. Quais são as secções cônicas?
16. Que é superfície esférica?
17. Que é esfera?
18. Com que instrumento se traçam círculos na superfície da esfera?
19. Qualquer secção plana da esfera que forma tem?
20. Como se chama o círculo que tem o mesmo raio da esfera?
21. Que é círculo menor da esfera?
22. Qual a propriedade do plano tangente à esfera?
23. Que são polos de um círculo da esfera?
24. Considerado um diâmetro da esfera como eixo, que é equador? e círculos paralelos? e meridianos?
25. Diga quais as porções da superfície esférica mais importantes e descreva-as.
26. Descreva as porções da esfera mais comumente encontradas.

CAPÍTULO XIX

Áreas dos poliedros e dos corpos redondos.

A área total de um poliedro é igual à soma das áreas de todas as faces.

No poliedro regular, como as faces são iguais entre si, basta multiplicar a área, *a*, de uma face pelo número, *n*, de faces do poliedro.

Eis a fórmula:

$$AT = a \times n$$

HEXAEDRO REGULAR ou CUBO

Cada face do hexaedro é um quadrado cujo lado é a aresta do hexaedro.

A área de cada face é, portanto, a^2 e a área total é igual a 6 vezes a^2, ou

$$AT = 6 \times a^2$$

Exercício — A aresta de um hexaedro regular é igual a 5 centimetros, pede-se a área total.

Apliquemos a fórmula e teremos:

$$AT = 6 \times 5^2 = 6 \times 25 = 150$$

A área total = 150 centimetros quadrados.

Exercício II — Qual a aresta de um caixa cúbica cuja área total é igual a 42336 centimetros quadrados?

A área de uma face é $\frac{42336}{6} = 7.056$

Portanto, a aresta da caixa cúbica é igual a

$\sqrt{7056} = 84$ centimetros.

PRISMA RETO

A área lateral do prisma reto é igual ao perímetro da base multiplicado pela altura:

$$AL = P \times a$$

Exercício I — Pede-se a área lateral de um prisma reto, sabendo-se que a base tem 12cm de perimetro e que a altura é 5cm.

$$AL = 12 \times 5 = 60$$

Resposta: A área lateral é igual $60cm^2$.

A área total é igual à area lateral (perimetro da base multiplicado pela altura) mais as áreas das duas bases:

$$AT = P \times a + 2B$$

Exercício II — Qual a área total de um prisma triangular regular tendo 8 centimetros de altura e 5cm para lado da base?

O perimetro da base $= 3 \times 5 = 15$

Uma base $= \frac{5^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{25 \times 1,732}{4} = 10,8250$

Substituamos na fórmula *P*, *a* e *B* pelos seus valores.

$AT = 15 \times 8 + 2 \times 10,8250 = 120 + 21,65 = 141,65$

Resposta: A área total é $141,65cm^2$.

PARALELEPÍPEDO RETÂNGULO

Chamando *a*, *b* e *c* as dimensões de paralelepípedo retângulo e lembrando que as faces opostas são iguais, acha-se para área total

$$AT = 2ab + 2ac + 2ab = 2\,(ab + ac + bc)$$

Exercício — Qual a área total de um paralelepípedo retângulo cujas dimensões são 2, 5 e 7 centímetros?

$$AT = 2(2 \times 5 + 2 \times 7 + 5 \times 7) = 2 \times 59 = 118$$

Resposta: A área é 118 cm².

PRISMA OBLÍQUO

A área lateral de um prisma oblíquo é igual ao produto da aresta lateral pelo perímetro da secção reta:

$$AL = P\,sr \times a$$

P s r é o perímetro da secção reta e *a* é a aresta lateral do prisma.

Exercício — Qual a área lateral de um prisma oblíquo cuja secção reta tem 24,5m de perímetro e cuja aresta lateral é 42,8m?

$$AL = 24{,}50 \times 42{,}80 = 1048{,}60m^2$$

PIRÂMIDE REGULAR

A área lateral da pirâmide regular é igual ao semi-produto do perímetro da base pelo apótema:

$$AL = \frac{P \times ap}{2}$$

Com efeito, as faces laterais da pirâmide regular são triângulos isósceles iguais e a altura dêsses triângulos é o apótema da pirâmide.

Exercício — Qual a área lateral de uma pirâmide pentagonal cujo apótema mede 14 centímetros e um lado do polígono da base 4 centímetros?

O perímetro da base é $= 4 \times 5 = 20$ centímetros.

O apótema sendo 14, vem

$$AL = \frac{20 \times 14}{2} = 140.$$

Resposta: A área lateral é 140cm².

A área total da pirâmide regular é igual à área lateral (semi-produto do perímetro da base pelo apótema) mais a área da base:

$$AT = \frac{P \times ap}{2} + B$$

Exercício — Qual a área total de uma pirâmide quadrangular regular cujo apótema é igual a 8 centímetros e um lado da base 3 centímetros?

O perímetro da base $= 3 \times 4 = 12$ centímetros

A base $= 3 \times 3 = 9$ centímetros quadrados, portanto

$$AT = \frac{12 \times 8}{2} + 9 = 57$$

Resposta: A área total é 57cm².

TRONCO DE PIRÂMIDE REGULAR

A área lateral de um tronco de pirâmide regular de bases paralelas é igual à semi-soma *dos perímetros das bases multiplicada pelo apótema:*

$$AL = \frac{P+p}{2} \times ap$$

porque esta área se compõe de trapézios iguais, cuja altura é o apótema e cujas bases somadas formam os perímetros das bases do tronco.

Exercício — Qual a área lateral de um tronco de pirâmide de bases paralelas em que estas têm 25m e 35m de perímetro, respectivamente, e cujo apótema é 2,5m.

Substituindo-se P, p e ap pelos seus valores, teremos:

$$AL = \frac{35+25}{2} \times 2{,}50 = 30 \times 2{,}50 = 75.$$

Resposta: A área lateral é $75cm^2$.

CILINDRO RETO DE BASE CIRCULAR

A área lateral, isto é, a área da superfície cilíndrica é igual à circunferência da base multiplicada pela altura:

$$AL = 2\pi R \times a$$

Exercício — Qual a área lateral de um cilindro com 50 centímetros de altura e 10 centímetros de raio da base?

A circunferência da base $= 3{,}1416 \times 0{,}20 = 0{,}62832$ portanto

$$AL = 0{,}62832 \times 0{,}50 = 0{,}314160m^2.$$

A área total é igual à circunferência da base multiplicada pela altura mais duas vezes a área da base:

$$AT = 2\pi R \times a + 2\pi R^2 = 2\pi R\,(a + R)$$

Exercício — A altura de um cilindro é 4 centímetros e o raio da base 2 centímetros; qual é a área total?

Substituamos na fórmula a e R pelos seus valores e teremos:

$$AT = 2 \times 3{,}1416 \times 0{,}02\,(0{,}04 + 0{,}02) = 0{,}125664 \times \times 0{,}06 = 0{,}00753984m^2$$

TRONCO DE CILINDRO

A área lateral de um tronco de cilindro reto é igual ao produto da circunferência da base pela média aritmética entre a maior e a menor das geratrizes (fig. 461).

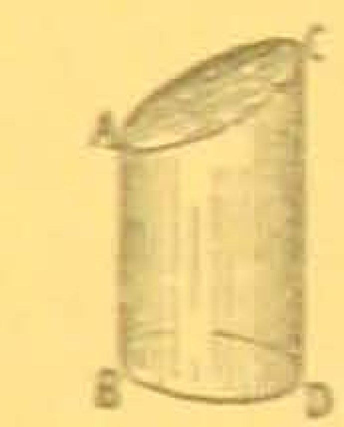


Fig. 461

$$AL = 2\pi R \times \frac{G+g}{2}$$

G é a geratriz maior e g é a geratriz menor.

Exercício — Qual a área lateral de um tronco de cilindro reto cuja base tem 6 metros de raio e no qual a geratriz menor tem 7,5m e a maior 8,3m.

Substituindo-se na fórmula as letras pelos seus valores:

$$AL = 2 \times 3{,}1416 \times 6 \times \frac{8{,}30 + 7{,}50}{2} = 297{,}823680m^2.$$

CONE RETO DE BASE CIRCULAR

A área lateral, isto é, a área da superfície cônica é igual ao semi-produto da circunferência da base pelo apótema ou geratriz

$$AL = \frac{2\pi R g}{2} = \pi R g$$

ângulo dividida por 90. Assim, sendo n o número de graus do ângulo,

$$A = \frac{\pi R^2 n}{90}$$

Exercício — Qual a área de um fuso esférico de 18 graus numa esfera de 5 metros de raio?

$$A = \frac{3{,}1416 \times 25 \times 18}{90} = 15{,}7080m^2$$

Observação — Quando a medida do ângulo fôr expressa em minutos (m minutos, por exemplo), deve-se dividir a expressão acima por 60 e tem-se:

$$A = \frac{\pi R^2 m}{90 \times 60} = \frac{\pi R^2 m}{5400}$$

Finalmente, se a medida do ângulo fôr dada em segundos (s segundos, por exemplo), deve-se dividir esta última expressão por 60 e tem-se

$$A = \frac{\pi R^2 s}{90 \times 60 \times 60} = \frac{\pi R^2 s}{324000}$$

EXERCÍCIOS

1. Calcule a área de um cubo com 2,5m de aresta.
2. Determine a aresta de um cubo de 150cm² de área.
3. Ache a área lateral e a área total de um prisma quadrangular regular tendo o lado da base 2,5cm e a altura 12cm.
4. As dimensões de um paralelepípedo retângulo são: 1,5cm, 12cm e 8cm. Qual a área do paralelepípedo?

5. Ache a área lateral de uma pirâmide hexagonal regular medindo o lado da base 7cm e o apótema da pirâmide 9cm.
6. Calcular a área lateral e a área total de uma pirâmide octogonal regular sabendo que o apótema da pirâmide mede 12cm e que a base está inscrita num círculo de 5cm de raio.
7. Ache a área lateral e a área total de um cilindro circular reto com 16cm de altura e 2,5cm de raio.
8. A geratriz maior de um tronco de cilindro mede 25cm e a menor, 18cm; a base tem 3cm de raio. Qual a área lateral do tronco?
9. Determine a área lateral de um cone circular reto com 8cm de geratriz e 1,4cm de raio. Ache depois a área total.
10. Um tronco de cone circular reto de bases paralelas tem 12cm de geratriz e os raios das bases são, respectivamente, 6,5cm e 4,8cm. Qual a área lateral do tronco?
11. Determinar a área total do tronco de cone a que se refere o problema 10.
12. Determine a área da esfera de 1m de raio.
13. A área de uma esfera é 1m². Qual é o raio?
14. Qual a área de uma zona de 3,8cm de altura numa esfera de 18cm de diâmetro?
15. Ache a área de um fuso esférico de 24°30' sendo o raio 15m.
16. Numa esfera de 10cm de raio, determine a altura de uma zona que tem 2m² de área.
17. De quantos graus é o fuso de 1m² de área numa esfera de 80cm de raio?

CAPÍTULO XX

Volume dos poliedros e dos corpos redondos.

Medir o volume de um corpo é determinar quantas vezes êste corpo contém o volume de outro, tomado para unidade.

A unidade de volume é, em geral, o cubo que tem para aresta a unidade de comprimento. No Sistema Métrico Decimal, é, portanto, o metro cúbico.

Quando dois sólidos, embora não sejam iguais, têm, todavia, o mesmo volume, dizemos que êles são *equivalentes*.

Demonstra-se que dois prismas, duas pirâmides, dois cilindros e dois cones são equivalentes quando têm bases equivalentes e a mesma altura.

PARALELEPÍPEDO RETÂNGULO

O volume do bloco retangular é igual ao produto das suas três dimensões; estas são dadas pelas arestas que convergem em um mesmo vertice.

Suponhamos que no paralelepipedo CF (fig 402) a aresta AB = 4 cm, BD = 6cm e BF = 3cm.

Dividamos AB em quatro partes iguais e pelos pontos de divisão façamos passar planos perpendiculares a AB; o paralelepipedo fica dividido em

4 outros menores, tendo, cada um, 1cm de comprimento, 6 de altura e 3 de profundidade; dividamos BF em três partes iguais e pelos pontos de divisão façamos passar planos perpendiculares a BF: cada paralelepipedo menor, fica dividido em 3 outros, medindo, cada um, 1 centimetro de comprimento, 6 de altura e 1 de profundidade. CF terá, portanto, $4 \times 3 = 12$ paralelepipedos iguais a estes últimos.

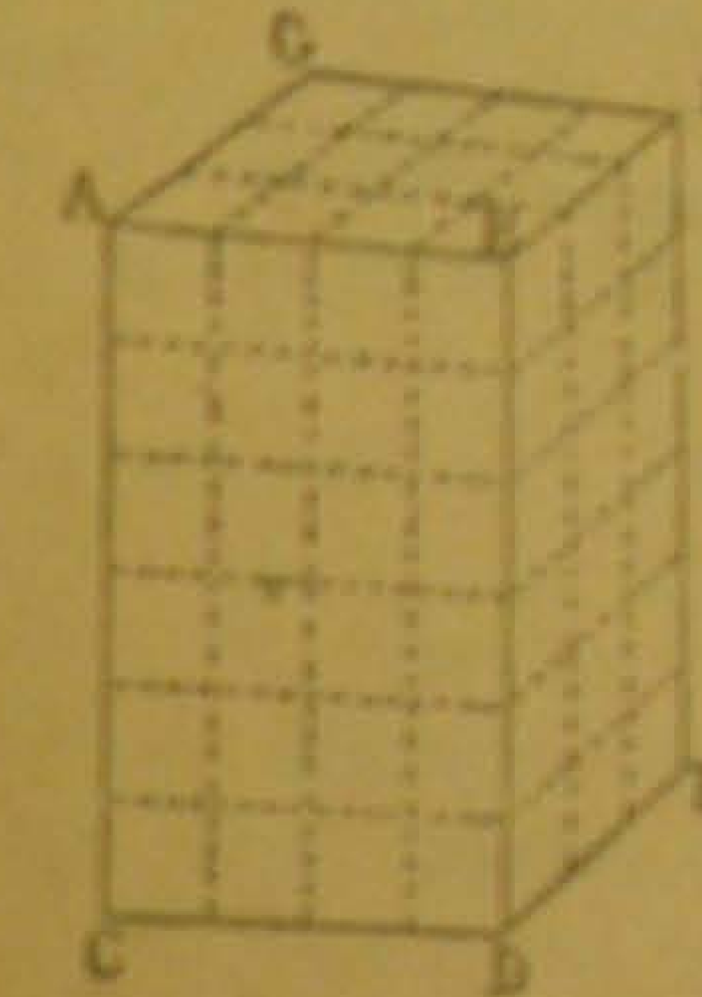


Fig. 402

Dividamos finalmente BD em 6 partes iguais e façamos passar, pelos pontos de divisão, planos perpendiculares a BD: cada um dos 12 paralelepipedos pequenos ficará dividido em 6 cubos de 1 centimetro de aresta.

CF terá então $4 \times 3 \times 6 = 72$ centimetros cubicos.

Como 4×3 é a área da base do paralelepipedo, também se pode dizer que *o volume do paralelepipedo retângulo é igual à area da base multiplicada pela altura.* Podemos, pois, escrever

$$V = a \times b \times c$$

$$\text{ou} \quad V = \text{base} \times \text{altura}.$$

Exercicio — Que volume dágua pode conter um tanque com a forma de bloco retângular, tendo 1,25m de comprimento, 0,80m de profundidade e 0,90m de largura?

$$V = 1{,}25 \times 0{,}80 \times 0{,}90 = 0{,}900m$$

O tanque pode conter 900 decimetros cúbicos dágua.

PARALELEPIPEDO QUALQUER

O volume de um paralelepipedo qualquer é igual ao produto da área da base pela altura, porque um paralelepipedo qualquer é equivalente a um paralelepipedo retângulo de base equivalente e de mesma altura.

HEXAEDRO REGULAR

O volume do hexaedro regular é igual ao cubo da aresta porque o cubo é um caso particular do paralelepipedo retângulo cujas arestas são todas iguais entre si:

$$V = a^3$$

Exercicio I — Qual o volume de uma caixa cúbica cuja aresta mede 6 decimetros?

$$V = 6^3 = 216 \text{ decimetros cúbicos}$$

Da fórmula

$$V = a^3$$

deduz-se

$$a = \sqrt[3]{V}$$

isto é, a aresta é igual à raiz cúbica do volume.

Exercicio II — Que aresta tem uma caixa cúbica cujo volume é 103,823?

$$a = \sqrt[3]{103,823} = 4,7$$

Resposta: a aresta mede 4,7m.

PRISMA

PRISMA TRIANGULAR

O volume de um prisma triangular é igual ao produto da área da base pela altura.

Com efeito, o prisma triangular pode ser considerado (figs. 465 e 466) como a metade de um

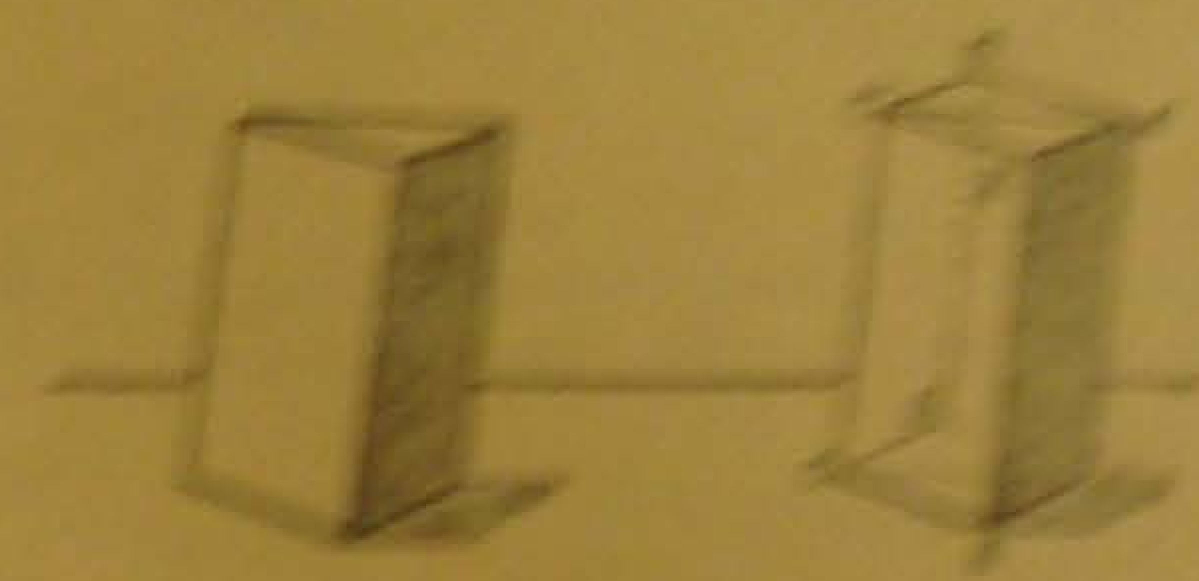


Fig. 465 Fig. 466

paralelepipedo de mesma altura e base dupla. Assim, chamando B a base do prisma, a do paralelepipedo é $2B$. Como o volume de tal paralelepipedo é $2B \times a$, o volume do prisma triangular é

$$V = \frac{2B \times a}{2} \text{ ou } B \times a$$

isto é, o produto da base pela altura.

PRISMA QUALQUER

O volume de um prisma qualquer é igual ao produto da área da base pela altura. Com efeito, demonstra-se que um prisma qualquer pode ser decomposto em prismas triangulares de mesma altura e cujas bases somadas formam a base do prisma dado (figs. 465 e 466).

Fig. 465

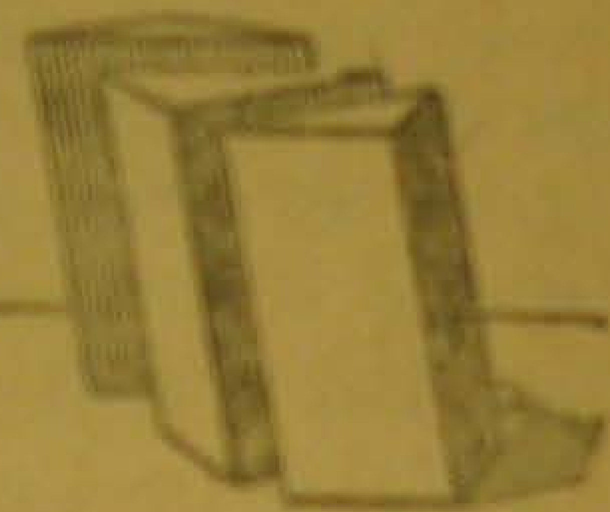


Fig. 466

Exercício I — A altura de um prisma é 6 metros e a área da base mede $2{,}66m^2$; qual é o volume dêsse prisma?

$$V = 2{,}66 \times 6 = 15{,}960m^3$$

Da fórmula

$$V = B \times a$$

deduzem-se

$$\text{base do prisma } B = \frac{V}{a}$$

$$\text{altura do prisma } a = \frac{V}{B}$$

Exercício II — Qual a área da base de um prisma cuja altura mede 12m e o volume $3888m^3$?

$$B = \frac{3888}{12} = 324m^2$$

Exercício III — Qual a altura de uma tôrre prismática cuja base mede $68{,}49m^2$ e o volume $410{,}940m^3$?

$$a = \frac{410{,}940}{68{,}49} = 6 \text{ metros}$$

PIRÂMIDE

PIRÂMIDE TRIANGULAR

Todo prisma triangular pode ser composto em três pirâmides triângulares equivalentes.

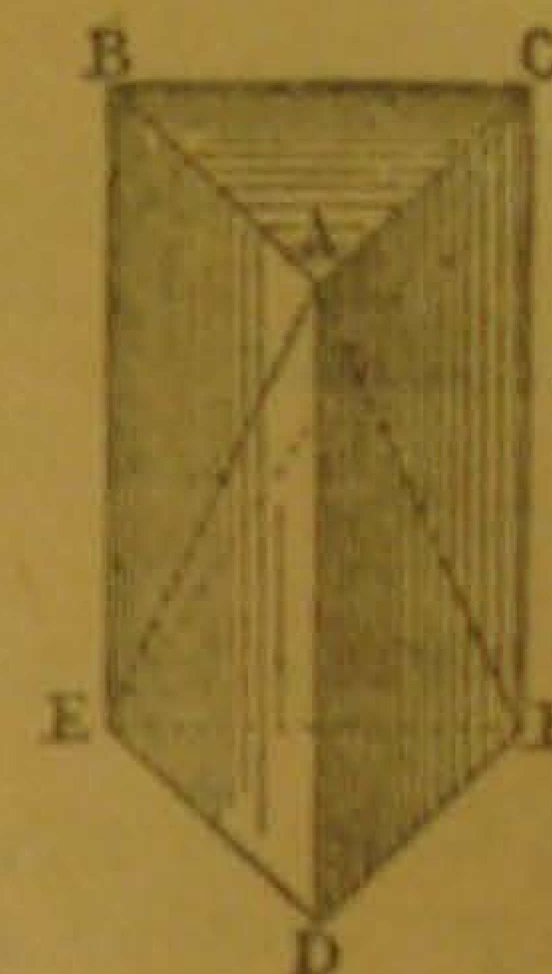


Fig. 467

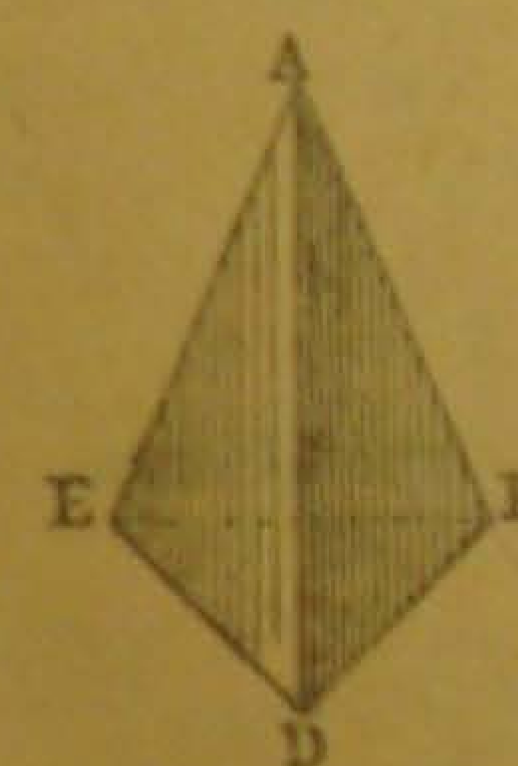


Fig. 468

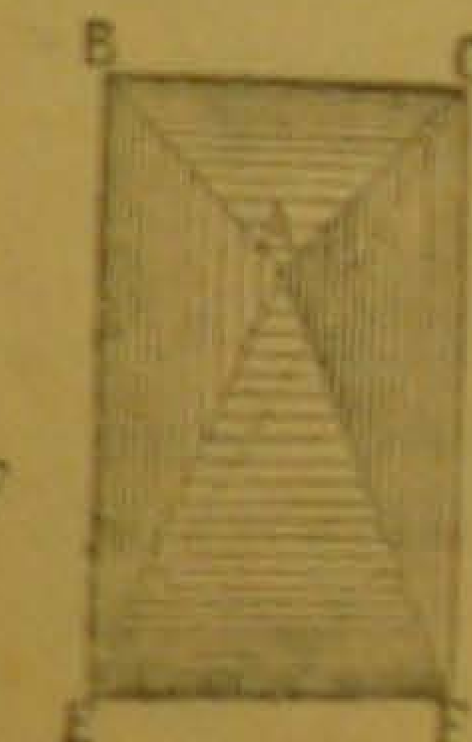


Fig. 469

Seja *AEDFCB* (fig. 467) o prisma triangular. Unamos o ponto A aos pontos *E* e *F*, e por *AE* e *AF* façamos passar um plano; obteremos uma pirâmide *AEDF* que tem a mesma base e a mesma altura que o prisma.

Destaquemos do prisma a pirâmide *AEDF* (fig. 468); obteremos uma outra pirâmide *AEFCB* (fig. 469) tendo para vértice o ponto *A* e para base o retângulo *EFCB;* tracemos a diagonal *CE* e façamos passar por ela e pelo ponto *A*, um plano

EAC que dividirá a pirâmide quadrangular em duas pirâmides triangulares *AEBC* (fig. 470) e *AEFC* (fig. 471) que são equivalentes como tendo para bases os triângulos iguais *EBC* e *CEF* e para

Fig. 470

Fig. 471

altura comum a perpendicular abaixada do ponto *A* sôbre o plano *EFCB*.

Na pirâmide *AEBC* o vértice pode ser considerado o ponto *E* e a base *ABC*; portanto, as pirâmides *AEBC* e *AEDC* são equivalentes como tendo a mesma altura (a altura do prisma) e a mesma base (a base do prisma); logo as três pirâmides são equivalentes.

Uma pirâmide triangular é, por conseguinte, a terça parte de um prisma triangular de mesma base e mesma altura. Como o volume do prisma é dado pelo produto da área da base pela altura, o *volume de uma pirâmide triangular é igual à terça parte do produto da área da base pela altura.*

$$V = \frac{B \times a}{3}$$

Exercício — A área da base de uma pirâmide triangular é 6 metros quadrados e a altura da pirâmide é 12 metros; qual o volume desta pirâmide?

$$V = \frac{6 \times 12}{3} = 24m^3.$$

PIRÂMIDE QUALQUER

O volume de uma pirâmide qualquer é igual a um terço do produto da área da base pela altura, porque uma pirâmide qualquer (fig. 472) pode

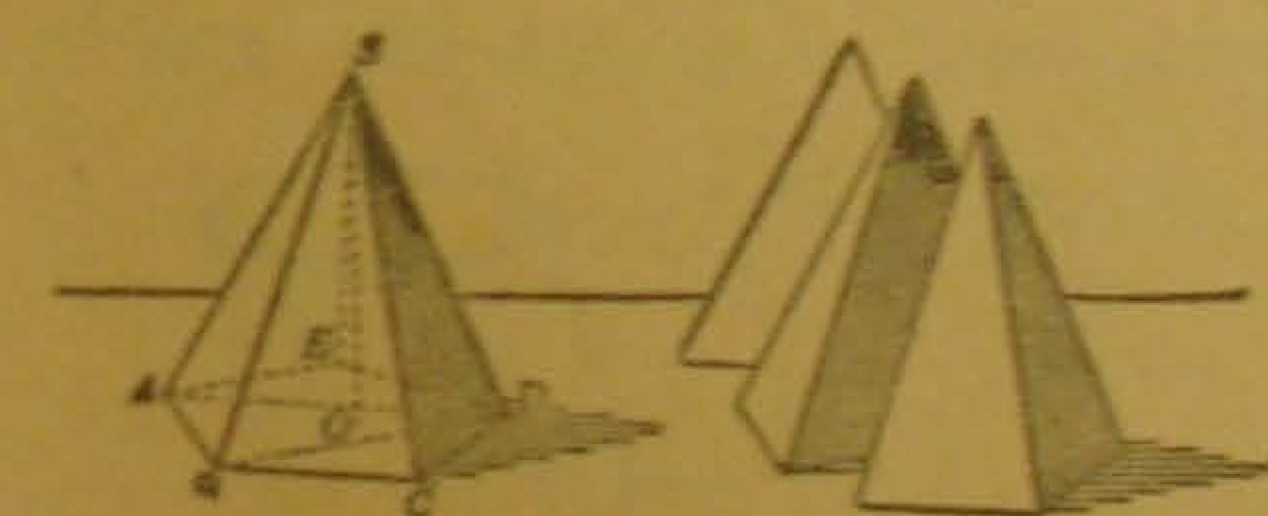


Fig. 472

ser decomposta em pirâmides triangulares tendo cada uma por volume a terça parte do produto da base pela altura; portanto, a soma de todas estas pirâmides, terá por volume a terça parte do produto da soma de suas bases pela altura comum ou, finalmente, um terço do produto da base da pirâmide dada pela altura.

$$V = \frac{B \times a}{3}$$

Desta fórmula, deduzem-se:

$$\text{a base } B = \frac{3\,V}{a}$$

$$\text{a altura } a = \frac{3\,V}{B}$$

Isto é, a base é igual ao triplo do volume dividido pela altura e esta é igual ao triplo do volume dividido pela base.

CILINDRO DE BASE CIRCULAR

O cilindro de base circular (fig. 473) pode ser considerado como um prisma (fig. 474) de base

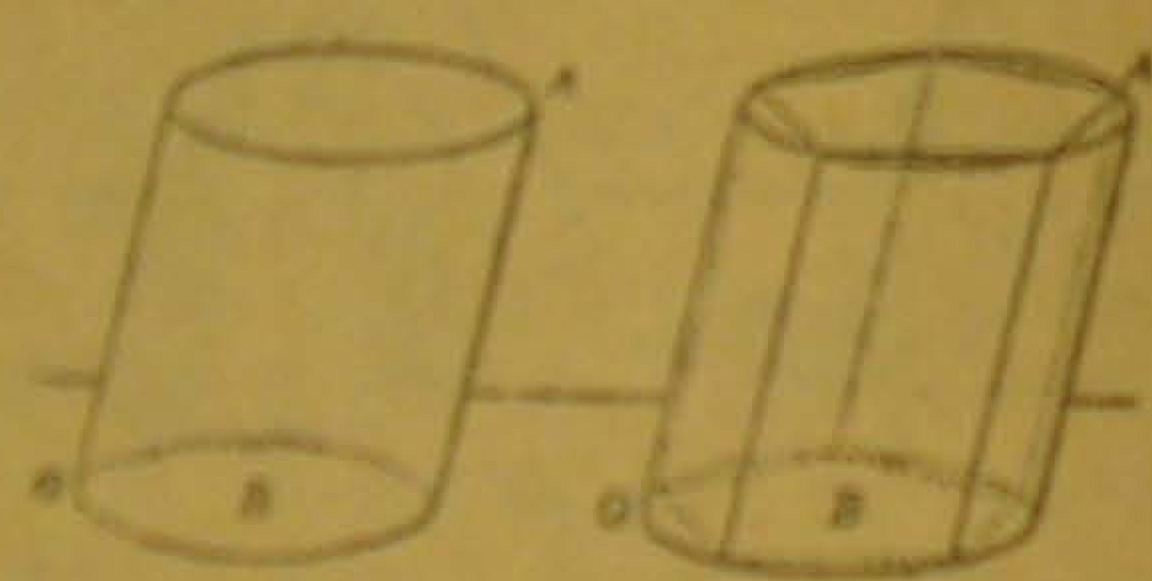


Fig. 473 Fig. 474

regular de um número infinito de lados, cada lado tendendo para zero. Por isso, seu volume também é igual ao produto da área da base pela altura. No caso do cilindro circular, como a base é um círculo, vem, chamando R o raio do círculo,

$$V = \pi R^2 \times a$$

isto é, *o volume do cilindro circular é igual ao produto da área do círculo da base pela altura.*

Exercício — A altura de um cilindro circular é igual a 4 metros e o raio da base igual a 2 metros, qual será o volume dêste cilindro?

$$V = 3{,}1416 \times 4 \times 5 = 62{,}8320\text{m}^3.$$

CONE DE BASE CIRCULAR

O volume do cone é igual a um terço do produto da área da base pela altura. Com efeito, o cone (fig. 475) pode ser considerado como uma pirâmide (fig. 476) cuja base é um polígono re-

Fig. 475 Fig. 476

gular de um número infinito de lados, cada lado tendendo para zero. Então, se a base fôr um círculo de raio R, tem-se:

$$V = \frac{\pi R^2 a}{3}$$

Exercício — Qual o volume de um cône cuja altura mede 9 metros e o raio da base 2,5m?

$$V = \frac{3{,}1416 \times 2{,}5^2 \times 9}{3} = 58{,}905\text{m}^3.$$

TRONCO DE PRISMA TRIANGULAR

O volume do tronco de prisma triângular é igual à terça parte do produto da área da base pela soma das distâncias dos três vértices opostos à mesma base.

Exemplo: o volume do tronco de prisma triangular da fig. 477 se obtém tomando a terça

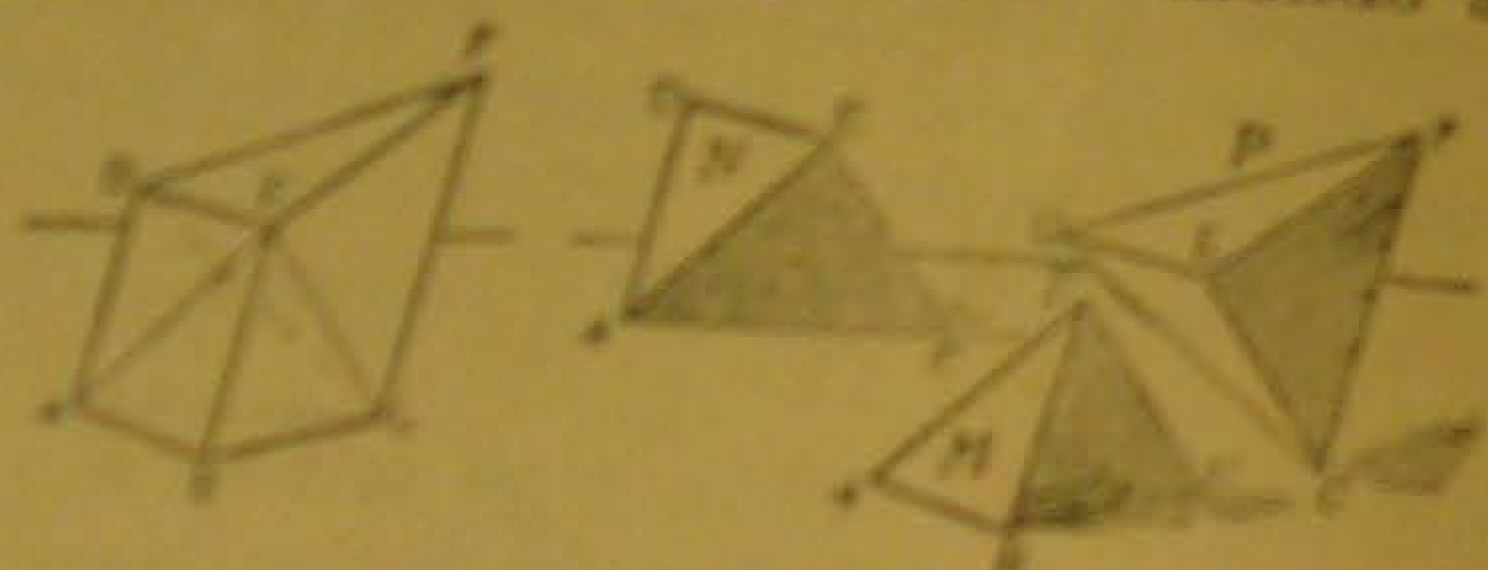


Fig. 477

parte do produto da área da base ABC pela soma das distâncias dos pontos D, E e F ao plano da base.

Com efeito, demonstra-se que o tronco é equivalente à soma de três pirâmides que têm a mesma base do tronco e cujas alturas são, respectivamente, as distâncias dos vértices opostos ao plano da referida base.

Podemos, pois, escrever:

$$V = \frac{B(a + a' + a'')}{3}$$

Exercício — Qual o volume de um tronco de prisma triangular cuja base mede 310 decimetros quadrados de área e as três alturas medem respectivamente 3,60m, 4,50m e 5,22m?

$$V = \frac{3,10(3,6 + 4,5 + 5,22)}{3} = 13,764m^3.$$

TRONCO DE PIRÂMIDE DE BASES PARALELAS

O volume do tronco de pirâmide de bases paralelas é igual ao produto da terça parte de sua altura pela soma das áreas de suas bases e da média proporcional entre estas áreas.

Chamando B e b as áreas das bases do tronco, vem

$$V = \frac{a}{3} \times \left(b + B + \sqrt{b \times B} \right)$$

Exercício — Qual o volume de um tronco de pirâmide de bases paralelas com 21dm de altura e cujas bases têm respectivamente 64 decimetros quadrados e 25 decimetros quadrados de área?

$$V = \frac{21}{3} \times (64 + 25 + \sqrt{64 \times 25}) = 7(64 + 25 + \sqrt{1600}) = 7(64 + 25 + 40) = 7 \times 129 = 903.$$

Resposta: O volume do tronco é 903 decimetros cúbicos.

TRONCO DE CONE DE BASES PARALELAS

Para termos o volume, somamos os quadrados dos raios das bases e o produto dos dois raios entre si; depois multiplicamos êste total por π e pela altura do tronco; finalmente dividimos esse produto por três:

A fórmula é

$$V = \frac{(R^2 + r^2 + Rr) \times \pi a}{3}$$

Exercício — Qual o volume de um tronco de cone em que os raios das bases medem 0,6m e 0,4m respectivamente e a altura 1,30m?

$$V = \frac{(0,36 + 0,16 + 0,24) \times 3,1416 \times 1,30}{3} =$$

$$= \frac{0,76 \times 4,084080}{3} = 0,76 \times 1,361360 = 1,034633600m^3$$

ESFERA

O volume da esfera é igual a um terço do produto da área pelo raio, porque podemos considerar a esfera como sendo formada de uma infinidade de piramides, cujos vértices estão no centro e cujas bases somadas formam a superfície da esfera.

A área da esfera é igual a $4\,\pi\,R^2$; multiplicando-a pelo raio e tomando a terça parte, encontraremos

$$V = \frac{4\,\pi\,R^2 R}{3} = \frac{4\,\pi\,R^3}{3} = \frac{4}{3}\,\pi\,R^3$$

$$\text{Os } \frac{4}{3} \text{ de } \pi = 3,1416 \times \frac{4}{3} = \frac{12,5664}{3} = 4,1888$$

A expressão $\frac{4}{3}\,\pi\,R^3$ equivale, pois, a $4,1888 \times R^3$ isto é: o volume da esfera é igual ao cubo do raio multiplicado por 4,1888.

Exercício — Qual o volume de uma esfera de 0,5m de raio?

$$V = 4,1888 \times 0,5^3 = 4,1888 \times 0,125 = 0,523600m^3$$

SECTOR ESFERICO

O volume do sector esférico é igual a um terço do produto da área da zona, que lhe serve de base, pelo raio da esfera: Como a área da zona é $2\pi Ra$, tem-se

$$V = \frac{2\pi Ra.R}{3} = \frac{2\pi R^2 a}{3} = \frac{2}{3}\,\pi R^2 a$$

Exercício — Qual o volume de um sector de uma esfera de 15 centímetros de raio, sabendo-se que a zona que lhe serve de base mede 6 centímetros de altura?

$$V = \frac{2 \times 3,1416 \times 0,15^2 \times 0,06}{3} = 0,002827440m^3$$

Resposta: O volume é $2,827440dm^3$.

CUNHA ESFÉRICA

O volume da cunha esférica é igual ao produto do volume da esfera, de que é parte a cunha, pelo número de graus do ângulo da cunha dividido por 360.

$$V = \frac{4\,\pi\,R^3 \times n}{3 \times 360} = \frac{\pi\,R^3\,n}{270}$$

chamando n a medida do ângulo em graus.

Se a medida do ângulo for expressa em minutos (m minutos, por exemplo), tem-se

$$\frac{\pi\,R^3\,m}{270 \times 60}$$

Finalmente, se for dada em segundos a medida do ângulo, *s* segundos, por exemplo, tem-se

$$V = \frac{\pi R^3 s}{270 \times 60 \times 60}$$

Exercício — Qual o volume de uma cunha esférica de 12°50', sendo o raio da esfera 0,12m?

Reduzindo 12°50' a minutos, acha-se 770'; então,

$$V = \frac{3{,}1416 \times 0{,}12^3 \times 770}{270 \times 60} = 0{,}258030080\text{dm}^3$$

VOLUME DE CORPOS DE FORMAS QUAISQUER

Mesmo que um corpo não tenha forma geométrica definida, podemos determinar-lhe o volume. Consideremos dois casos:

1.°) Conhecem-se a densidade e o peso do corpo.

Pelo que se estuda na Aritmética, sabemos que o peso de um corpo expresso em gramas é igual ao produto de seu volume expresso em centímetros cúbicos pela sua densidade:

$$P = VD$$

Dividindo ambos os membros desta igualdade por *D*, achamos

$$V = \frac{P}{D}$$

isto é, o volume de um corpo é igual ao quociente de seu peso pela sua densidade.

Observação: — Quando o peso for expresso em kg, deve o volume ser expesso em dm³; quando o peso for expresso em toneladas, o volume será expresso em m³.

Exercício I — Qual a capacidade de um vaso que se encheu com 32,50kg de mercúrio, sabendo-se que a densidade do mercúrio é 13,50?

$$V = \frac{32{,}50}{13{,}50} = 2{,}4\text{dm}^3$$

Como o dm³ equivale ao litro, a capacidade do vaso é 2,4 litros.

Exercício II — Qual o volume de um toro de madeira do peso de 2,4 toneladas, sabendo-se que a densidade dessa madeira é 0,64?

$$V = \frac{2{,}4}{0{,}64} = 3{,}750\text{m}^3$$

Exercício III — Qual o volume de uma barra de metal pesando 468g, sabendo-se que a densidade desse metal é 10,4?

$$V = \frac{468}{10{,}4} = 45\text{cm}^3$$

Exercício IV — Qual o peso de uma ardozia cujo volume é igual a 150cm³ e cuja densidade é 2,88?

$$P = 150 \times 2{,}88 = 432\text{g}$$

2) Quando um sólido não tem forma geométrica definida e não se lhe conhece o peso nem a densidade, procede-se do seguinte modo:

Em um vaso de forma cilíndrica, de que se conhece o raio da base tomado internamente, despeja-se uma certa quantidade d'água e mergulha-se o corpo de que se deseja conhecer o volume.

O volume da porção d'água deslocada, isto é, da porção do liquido que fica acima do primeiro nivel é o volume do corpo.

Exercicio — Determinar o volume de uma pera.

Seja o vaso (fig. 477a) de vidro transparente, de forma cilindrica, tendo, internamente, na base 0,06m de raio.

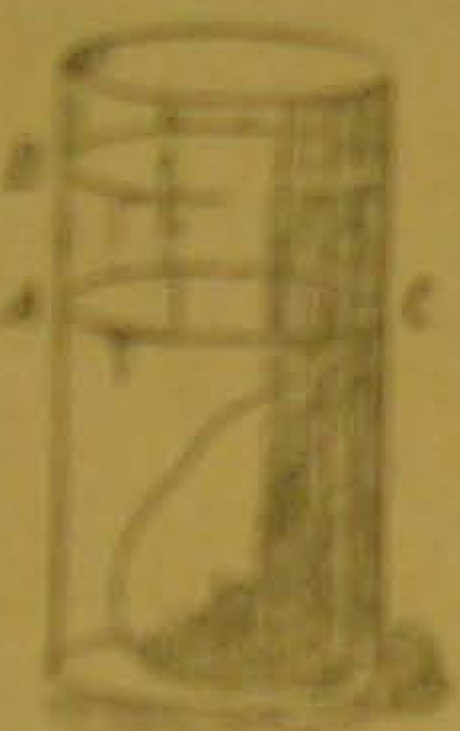


Fig. 477a

Entornemos nesse vaso um pouco d'água colorida de preferência para que seja bem visivel através do vidro.

Mergulhemos nessa água a pêra cujo volume desejamos conhecer: a água deslocada pela imersão do fruto sobe, e depois de bem tranquila a superficie do liquido, tomemos a altura *AB* da coluna que excede do primeiro nivel *AC*; suponhamos que *AB* = 0,015m.

O volume da pêra será igual ao produto da base do vaso pela altura 0m,015:

$$V = \pi R^2 a = 3{,}1416 \times 0{,}06^2 \times 0{,}015 =$$
$$= 3{,}1416 \times 0{,}0036 \times 0{,}015 = 0{,}169646 dm^3.$$

EXERCÍCIOS

1. Ache a capacidade de um reservatório com a forma de bloco retangular, cujas dimensões, tomadas internamente, são: 1,20m, 0,90m e 0,75m.
2. Um paralelepipedo retângulo deve ter $5m^3$ de volume, mas sua altura foi fixada em 60cm. Qual deve ser a área da base?

3. A área da face de um cubo é $0{,}81m^2$. Que volume tem esse cubo?
4. Determine a aresta de um cubo de $343m^3$ de volume.
5. Ache o volume de um prisma triangular regular tendo 15cm de altura e 2cm de lado na base.
6. Determine a altura de um prisma quadrangular regular com $45dm^3$ de volume e 1,5dm de lado na base.
7. Calcule o volume de uma pirâmide hexagonal regular com 20cm de altura e 3cm de lado na base.
8. Determine o volume de um cilindro circular de 1,2dm de altura e 5cm de raio.
9. Determine a geratriz de um cilindro cujo volume é $1178{,}100dm^3$ e cujo raio mede 5dm.
10. Calcule o volume de um cone circular reto com 10cm de altura e 3cm de raio.
11. Determine o raio de um cone circular reto de $1m^3$ de volume sendo a altura 3m.
12. A base de um tronco de prisma triangular regular tem 18cm de lado e as distâncias aos vértices opostos são 10cm, 12,5cm e 14cm. Qual o volume do tronco?
13. Calcule o volume de uma esfera de 1m de diâmetro.
14. Ache o raio de uma esfera de $1m^3$ de volume.
15. Qual o volume de um sector esférico de 20cm de raio, a zona que lhe serve de base tendo 4cm de altura?
16. Ache o volume da cunha esférica de 5cm de raio, o seu ângulo medindo 12°20'.

CAPÍTULO XXI

Concordância de linhas

Concordar duas linhas é ligá-las de sorte que em sua junção não se forme ângulo nem inflexão.

Na concordância de linhas observaremos que:

1.º Uma reta e um arco de circulo se concordam, quando o centro do arco se acha na perpendicular à reta dada no ponto de concordância ou de tangência;

2.º Dois arcos se concordam quando o ponto de contacto e os dois centros estão sôbre a mesma reta.

A concordância de linhas é muito empregada no traçado de molduras.

Pontos de nascença de um arco são os pontos de tangência do arco com as retas que terminam no começo da curva (*A* e *B*, na fig. 478).

Vão ou **abertura** de um arco é a distância em linha reta entre os pontos de nascença (*AB* na fig. 478).

Altura ou **flecha** de um arco é a perpendicular abaixada do meio do arco sôbre a reta que passa pelos pontos de nascença do mesmo arco (*CD* na fig. 478).

Arco abatido é a curva cujos extremos ou pontos de nascença estão sôbre a mesma reta horizontal isto é, no mesmo nível e cuja altura ou flecha é menor do que a metade do vão (fig 478).

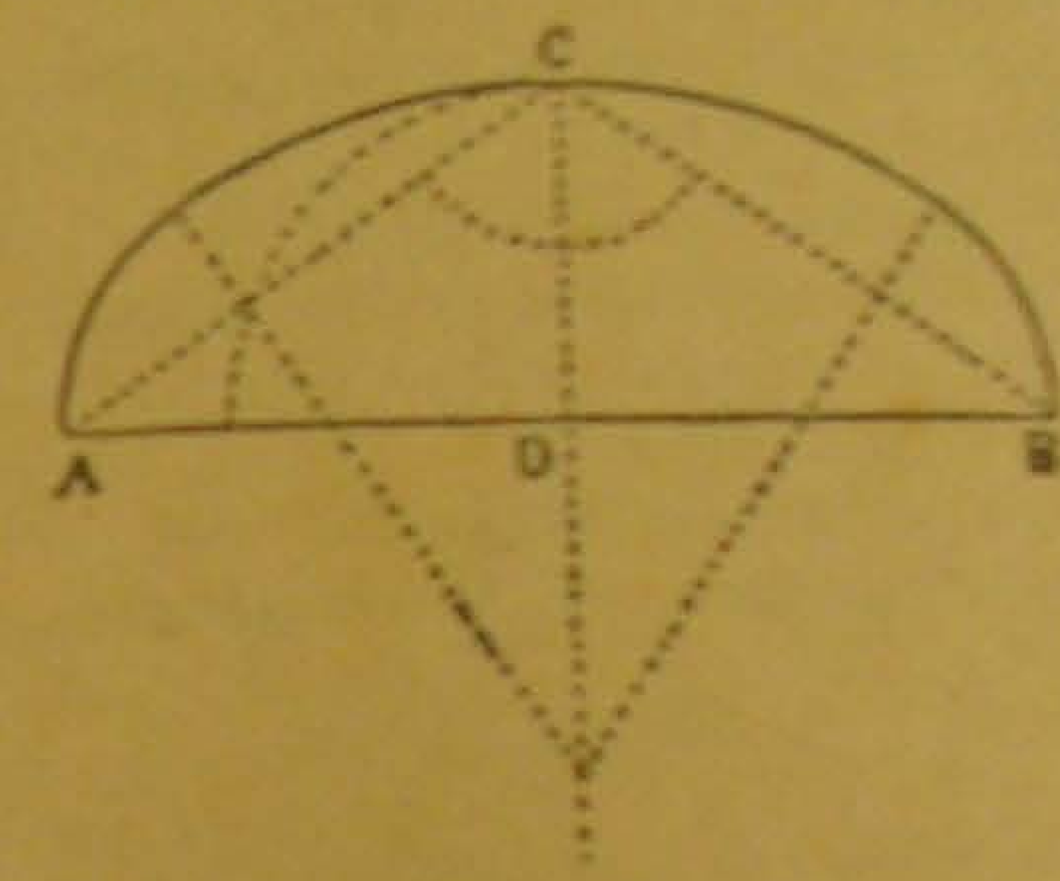


Fig. 478

Asa de cesto é um arco abatido formado de arcos de circulos (fig. 479).

Arco aviajado ou **esconso** (fig. 480) é uma curva de vários centros cujos pontos de nascença

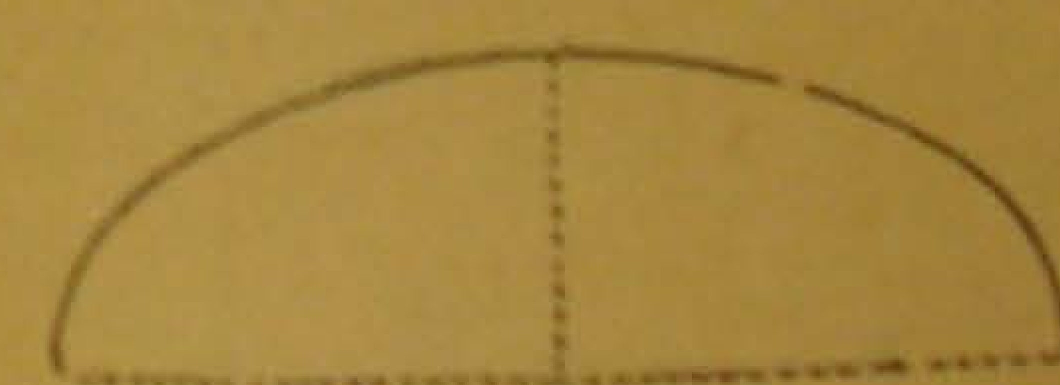


Fig. 479

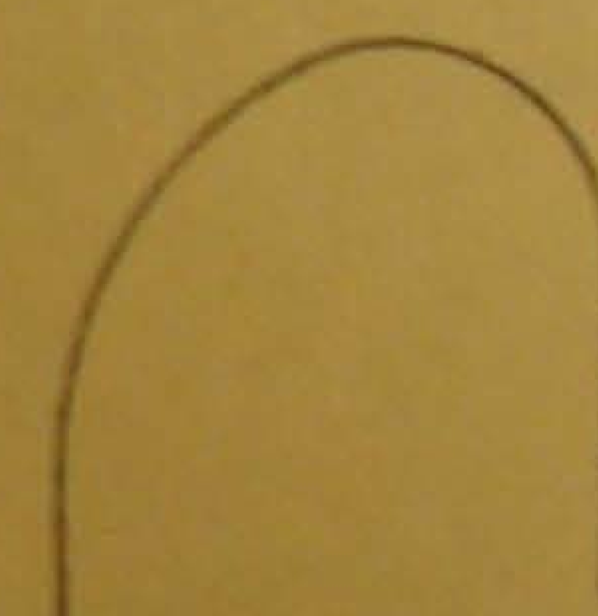


Fig. 480

não estão sôbre a mesma reta horizontal, isto é, não estão no mesmo nível.

Os arcos abatidos e aviajados se empregam frequentemente nos traçados de abóbadas, arcos de pontes, viadutos, etc.

QUESTIONÁRIO

1. *Que é concordar duas linhas?*
2. *Quais as regras observadas na concordância de linhas?*
3. *Que são pontos de nascença?*
4. *Que é vão ou abertura de um arco?*
5. *Que é um arco abatido?*
6. *Que é uma asa de cesto?*
7. *Que é um arco aviajado?*
8. *Onde se empregam os arcos abatidos e aviajados?*

PROBLEMAS

Problema 144. — *Concordar uma reta e um arco de círculo que passe por um ponto dado.*

MN a reta (fig. 481), *M* o ponto de concordância escolhido e *A* o ponto dado.

Levantemos por *M* uma perpendicular a *MN*, unamos *A* a *M* e pelo meio de *AM* façamos passar uma perpendicular, que determinará na primeira o ponto *V*; êste é o centro e *VM* é o raio do arco que, partindo de *M*, passará por *A*.

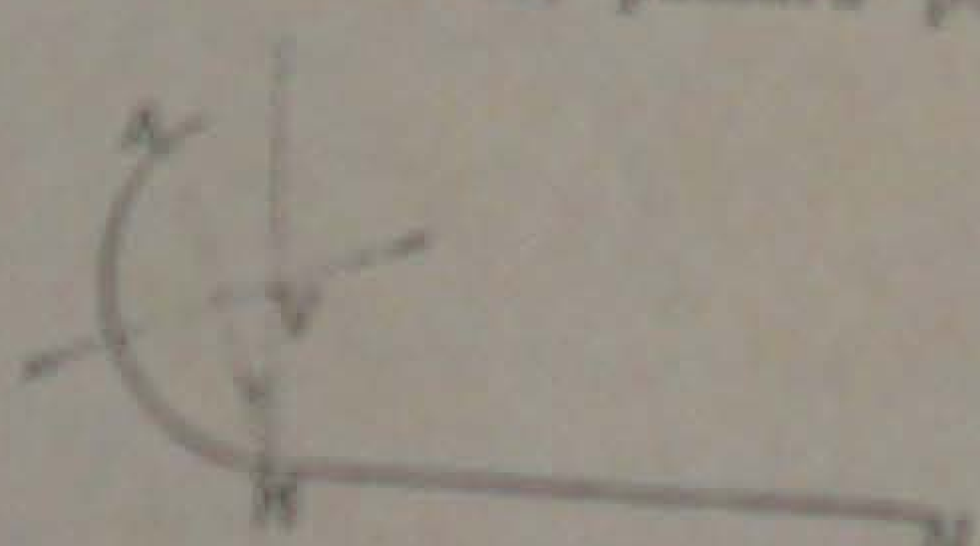


Fig. 481

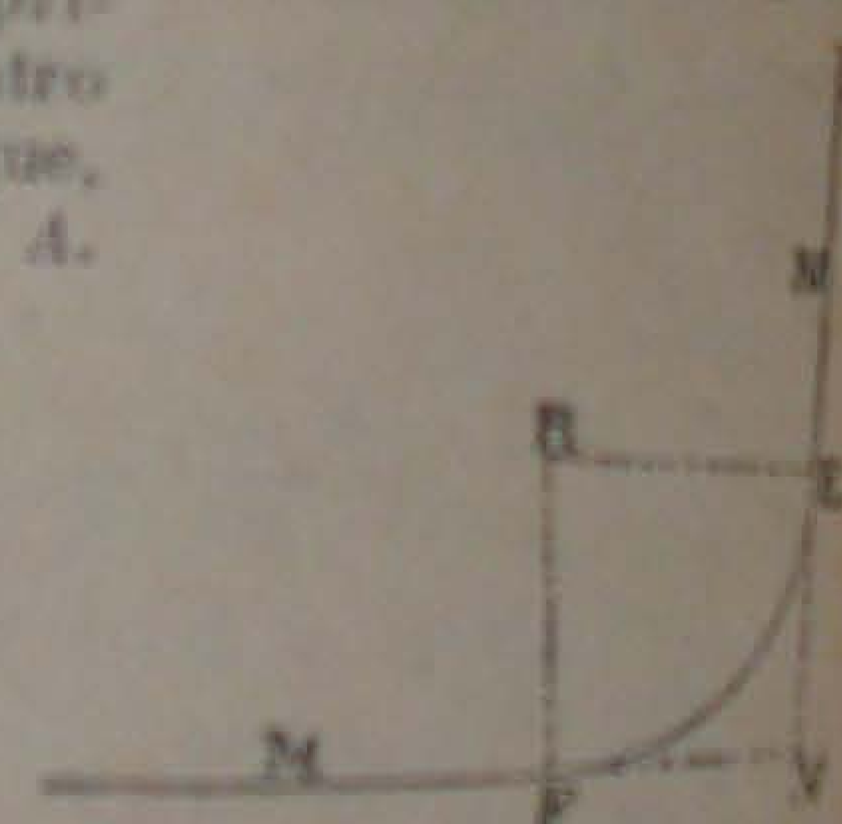


Fig. 482

Problema 145. — *Concordar duas retas concorrentes.*

M e *N* (fig. 482) são as retas dadas. Prolonguemo-las até o ponto *V* do qual, como centro, e com um raio arbitrário determinemos os pontos *E* e *F* equidistantes de *V*.

Pelo ponto *F* levantemos uma perpendicular à reta *M* e pelo ponto *E* uma outra perpendicular à reta *N*.

R, ponto de encontro das duas perpendiculares, é o centro, e *RE* é o raio do arco que, partindo de *E*, passará por *F*.

Problema 146. — *Concordar duas retas concorrentes conhecendo-se o raio do arco de concordância.*

M e *N* são as duas retas e *AB* é o raio e do arco (fig. 483).

Tracemos duas paralelas às retas *M* e *N* distantes destas a medida *AB*. As paralelas determinam o ponto *R* do qual façamos partir as retas *RV* e *RS* perpendiculares respectivamente a *N* e *M*.

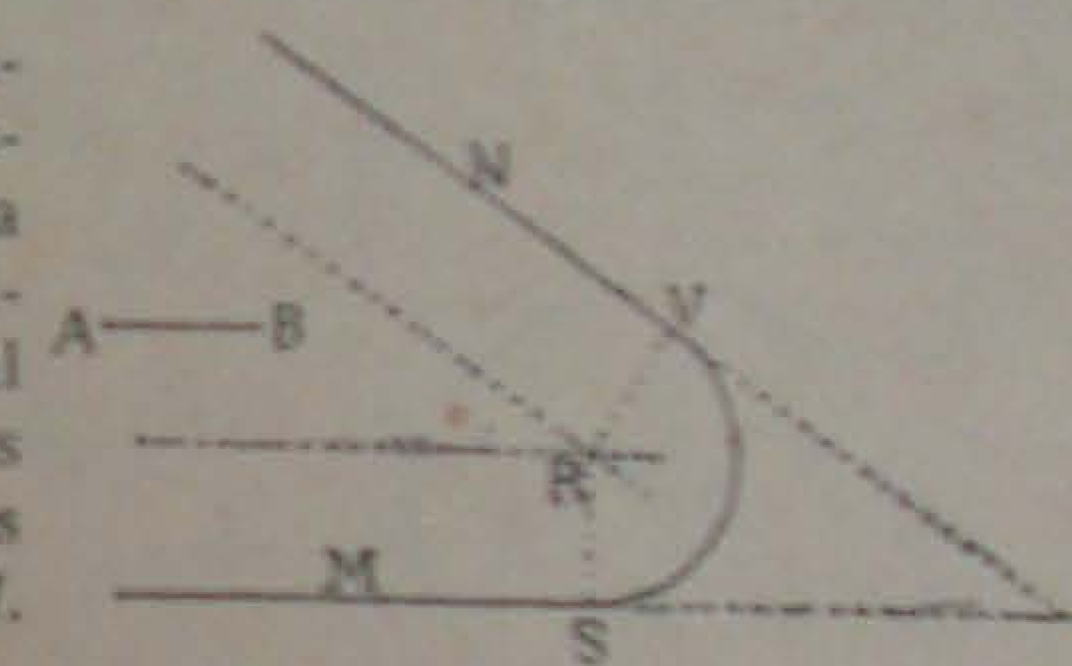


Fig. 483

Do ponto *R*, como centro, e com um raio *RV* descrevamos o arco *VS* que liga as retas dadas.

Problema 147. — *Concordar uma reta com um arco de círculo por meio de um outro arco cujo raio é dado.*

M é a reta (fig. 484); *C* é o centro do arco conhecido e *AB* é o raio dado.

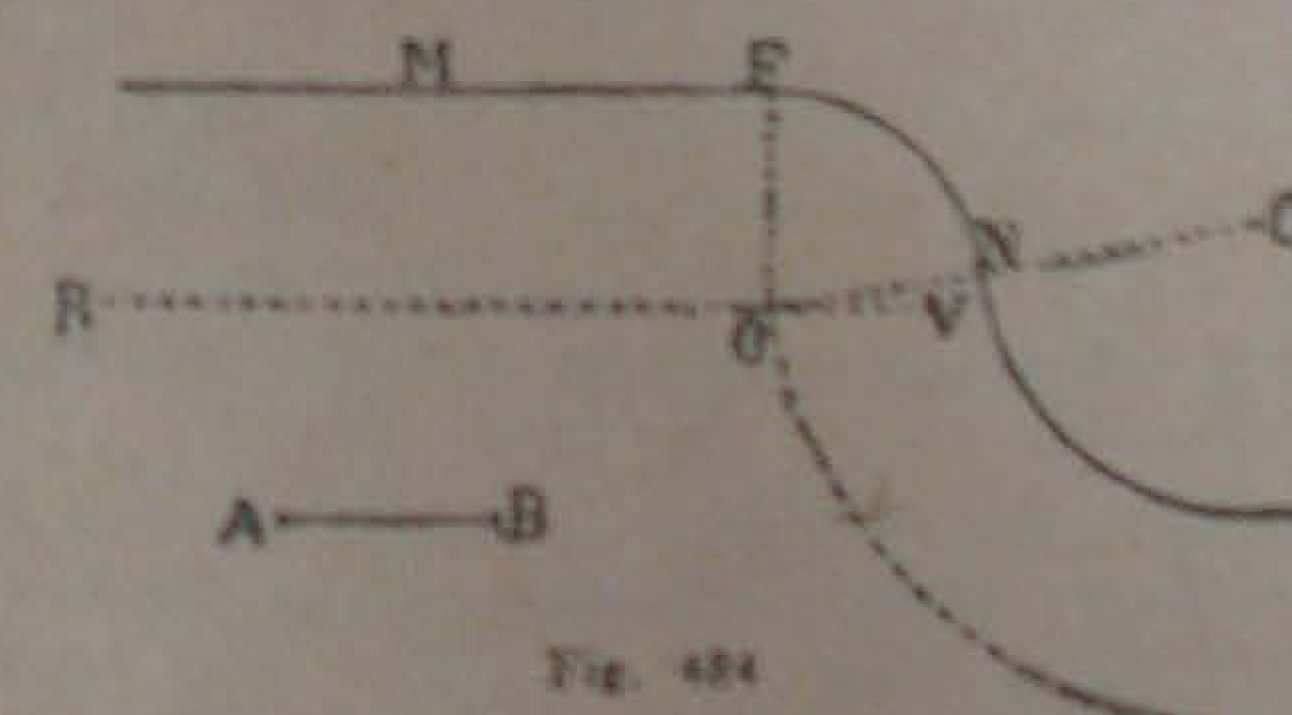


Fig. 484

Tracemos uma paralela à reta *M* e distante dela a medida *AB*.

Do ponto *C*, como centro e com um raio igual ao do arco conhecido mais *AB*, cortemos a paralela *RV* no ponto *O*. Tracemos *OC* e do ponto *O*, com um raio igual a *ON*, descrevamos o arco de concordância *NF*.

Problema 148. — *Concordar dois arcos de círculo por meio de um terceiro cujo raio é dado.*

A e B são os centros dos dois arcos conhecidos (figura 485) e MN é o raio do terceiro.

Dos pontos A e B como centros e com os raios respectivamente iguais aos dos arcos dados aumentados de MN, determinamos o ponto C.

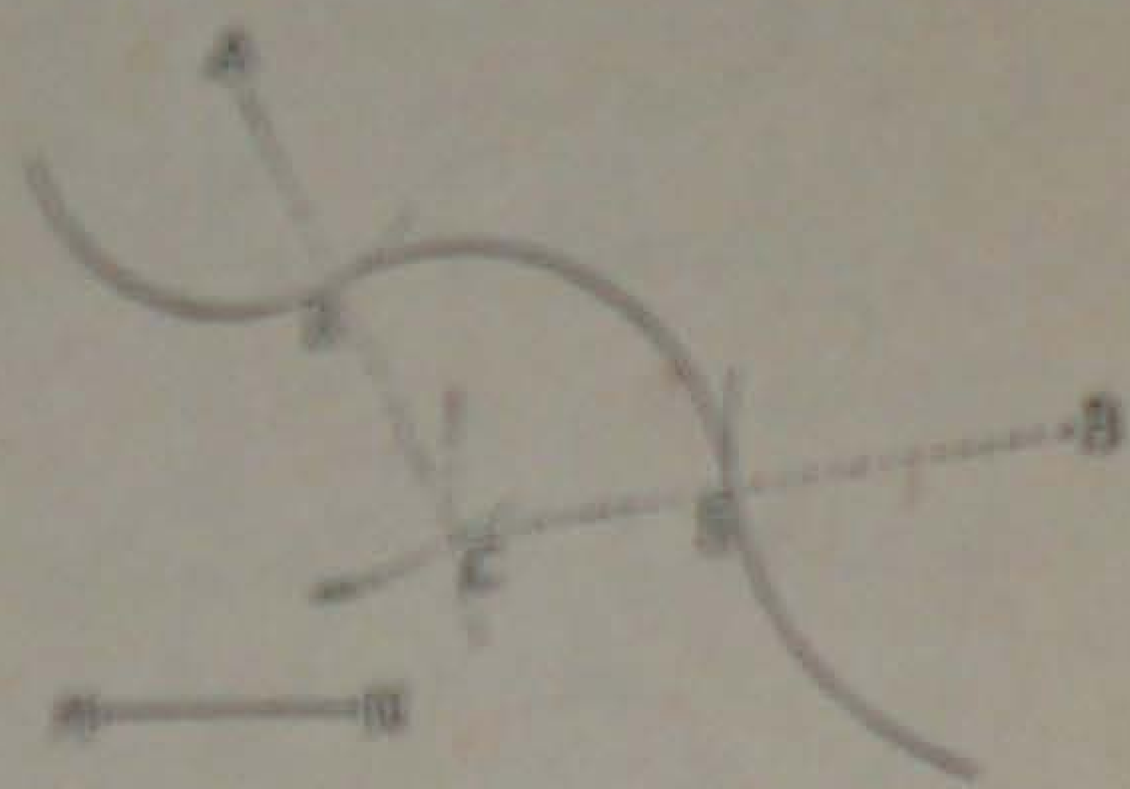


Fig. 485

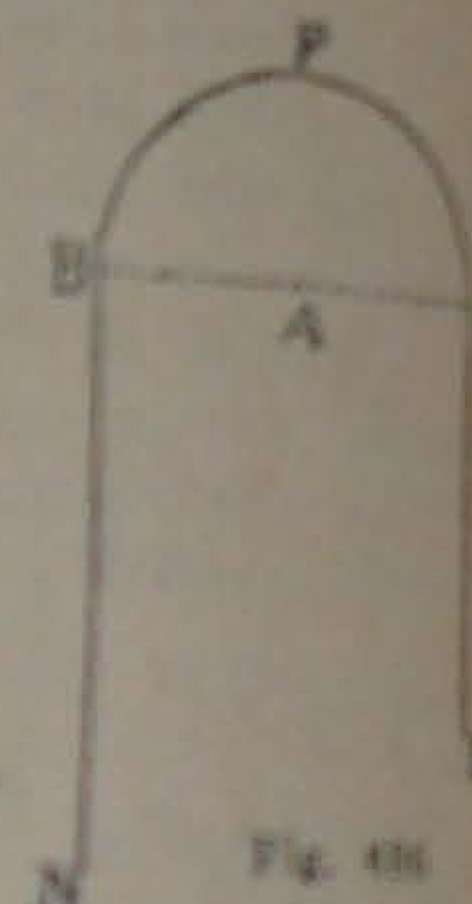


Fig. 486

Liguemos êste ponto a A e B e determinemos os pontos de contacto R e S.

De C, como centro, e com um raio CR, descrevamos o arco RS.

Problema 149. — *Concordar duas retas paralelas, os pontos de nascença estando no mesmo nível.*

BN e PM são as duas paralelas (fig. 486).

Tiremos a perpendicular BP comum às duas paralelas.

Com o centro em A (meio de BP) e com um raio igual a AB tracemos a semi-circunferência BFP que concordará as duas paralelas.

Problema 150. — *Traçar um arco aviajado conhecendo-se o ponto de tangência dos dois arcos, a tangente comum e as paralelas que passam pelos pontos de nascença.*

M (fig. 487) é o ponto de tangência dos dois arcos NP é a tangente comum aos dois arcos e AD e BG as paralelas que passam pelos pontos de nascença E e F.

Façamos passar pelo ponto M uma perpendicular a NP.

Centro em B e com um raio igual a BM descrevamos o arco MF; centro em A e com um raio AM descrevamos o arco ME. Pelos pontos E e F (pontos de nascença) tracemos as retas ER e FV perpendiculares às paralelas AD e BG.

Façamos centro em V e com um raio igual a VM descrevamos o arco FM, e de R, como centro, com o raio RM, descrevamos o arco ME. O arco aviajado é EMF.

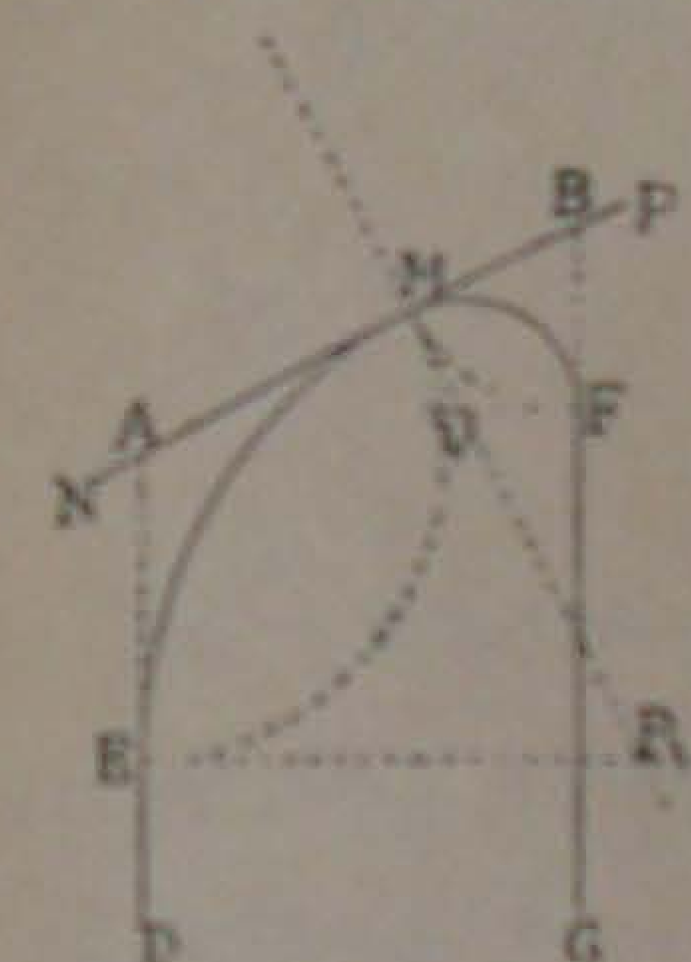


Fig. 487

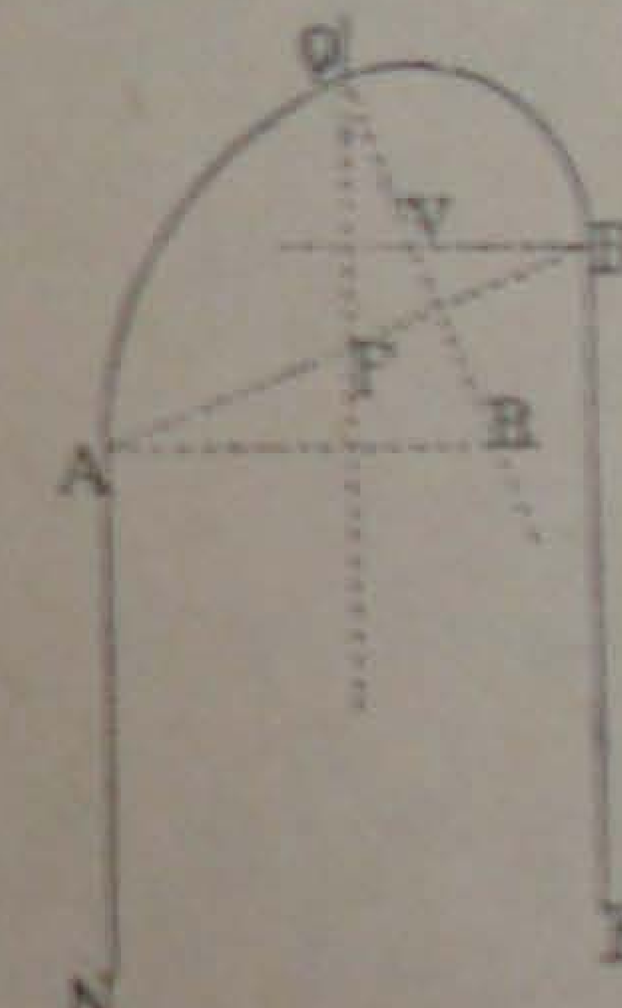


Fig. 488

Problema 151. — *Construir um arco aviajado conhecendo-se os pontos de nascença e a direção da reta tangente ao arco num dêstes pontos.*

A e B são pontos de nascença e AN é a tangente no ponto A (fig. 488).

Liguemos A a B e pelo meio de AB façamos passar uma paralela a AN; levantemos pelos pontos A e B perpendiculares às retas AN e BF.

Transportemos em PQ a medida PA e tiremos pelo ponto Q uma perpendicular a AB.

Esta perpendicular determinará os pontos R e V, centros dos arcos AQ e QB que formam o arco viajado.

Problema 151. — *Traçar uma asa de cesto de três centros conhecendo-se o vão e flecha.*

Pelo meio de AB (fig. 489), vão do arco, façamos passar uma perpendicular e marquemos CD igual à altura dada; liguemos A e B ao ponto D.

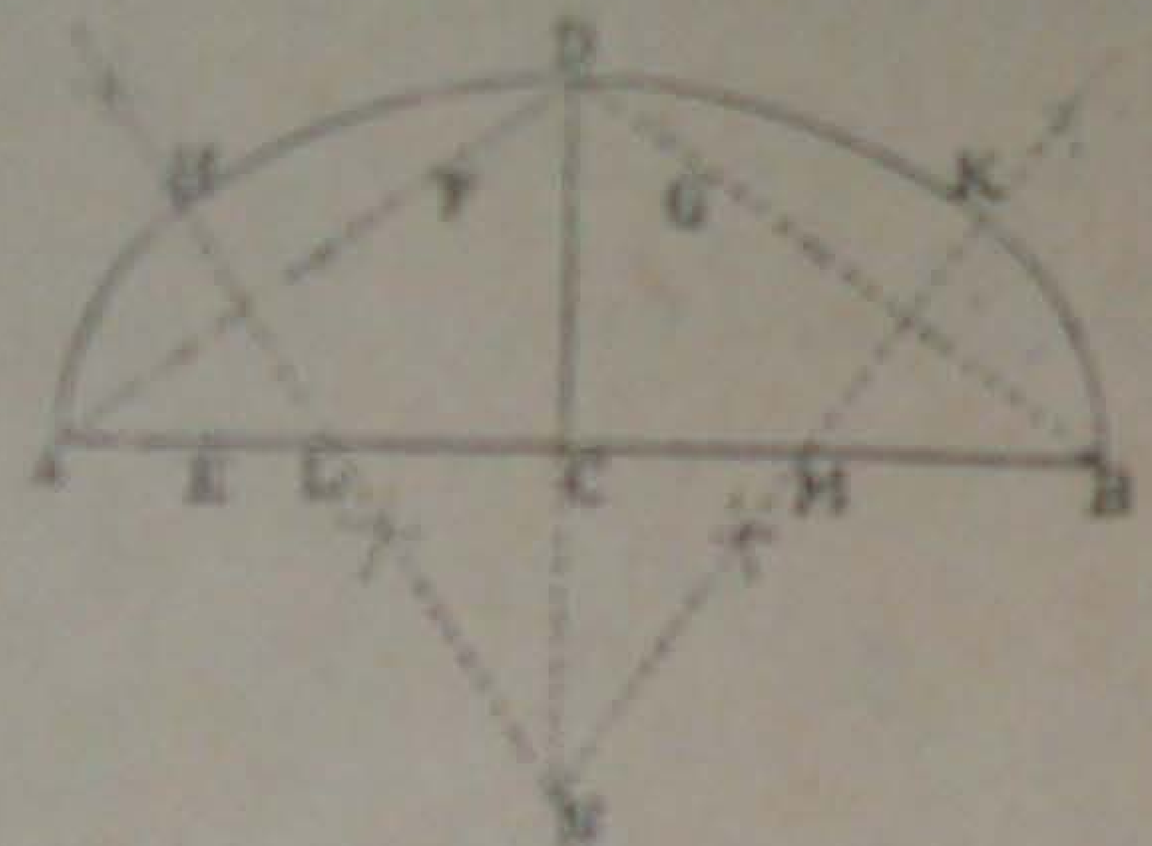


Fig. 489

Tomemos $CE = CD$ e marquemos DF e DG iguais a AE.

Pelos meios de AF e BG tracemos retas perpendiculares que determinarão o ponto N.

De L e M e com o mesmo raio LA (ou MB) descrevamos os arcos AH e BK; finalmente, do ponto N e com um raio NH descrevamos o arco HDK.

$AHDKB$ é a asa de cesto tricêntrica.

Problema 152. — *Traçar uma asa de cesto de cinco centros conhecendo-se o vão e a flecha.*

AB é o vão e CD é a flecha (fig. 490).

Dividamos AB ao meio e do ponto C descrevamos duas semi-circunferências; uma com o raio CA e outra com o raio CD.

Dividamos cada uma destas semi-circunferências em seis partes iguais (veja-se a trissecção do ângulo reto); pelos pontos a, b, c, d tracemos paralelas a CD e por e, f, g, h paralelas a AB; estas encontram aquelas em E, F, G, H.

Tracemos os segmentos AE, EF, GH, HB e pelo meio de AE, EF, GH e HB façamos passar perpendiculares. Duas destas determinam os pontos M e N.

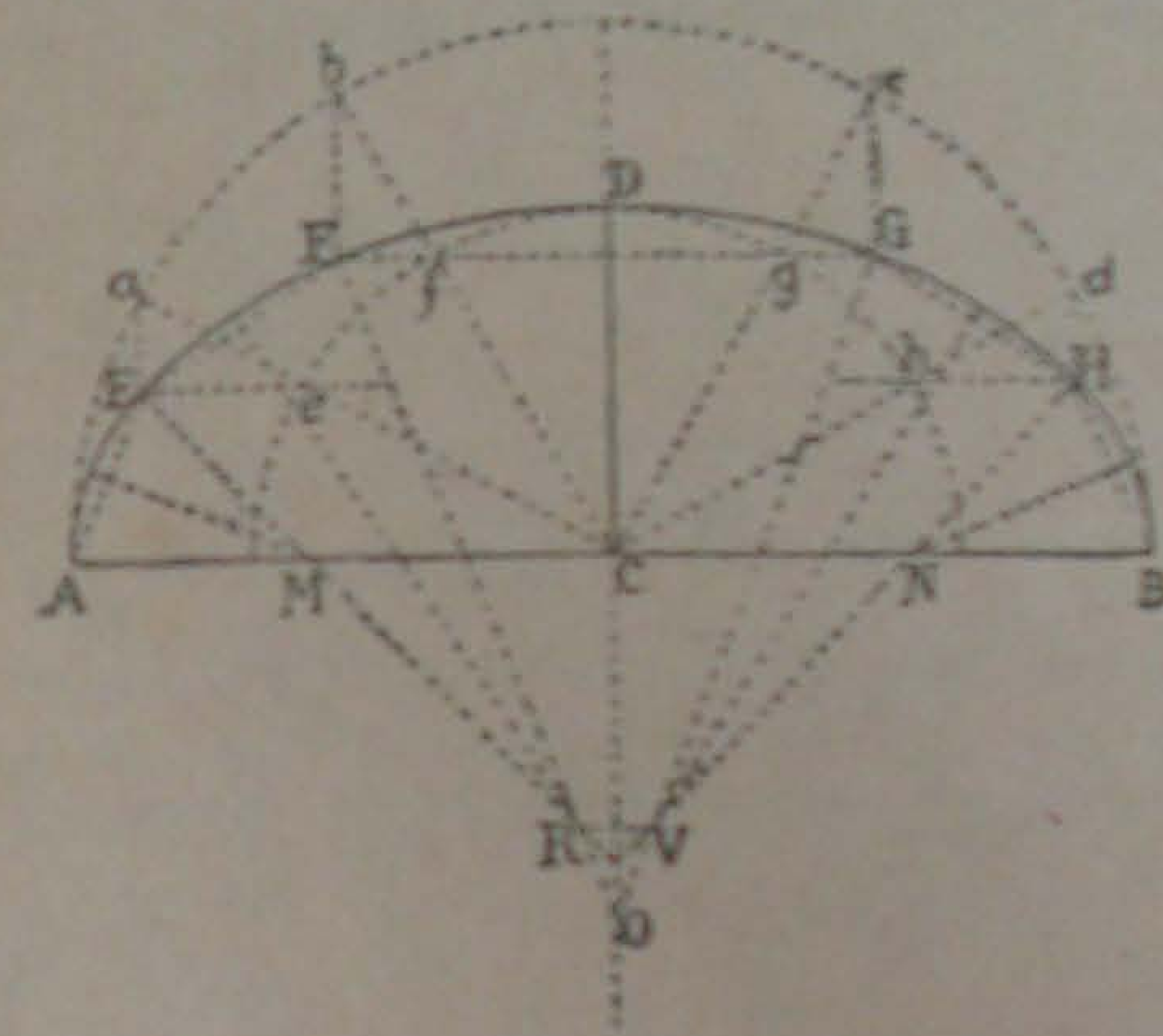


Fig. 490

Tiremos as retas EM e HN prolongando-as até determinarem os pontos R e V; aquele no prolongamento da perpendicular ao meio de EF e êste no prolongamento da perpendicular ao meio de GH.

Tracemos as retas FR e GV prolongando-as tambem até o ponto O. De M e N, com o raio MA descrevamos os arcos AE e BH; de R e V, com o raio RE descrevamos EF e HG; finalmente, do ponto O, com o raio OF descrevamos o arco FG.

Problema 153. — *Traçar uma asa de cesto de sete centros sendo conhecidos o vão e a flecha.*

MN é o vão e AB é a flecha (fig. 491).

Descrevamos duas semi-circunferências concêntricas em A e com os raios AM e AB.

Dividamo-las em oito partes iguais; pelos pontos a, b, c, d, e, f tracemos retas paralelas a AB e pelos pontos g, h, i, j, k, l paralelas a MN.

Todas estas paralelas determinam os pontos *C, D, E, F, G, H.*

Para termos os centros dos arcos que compõem a asa de cesto procedamos da seguinte maneira; *J* e *K* são

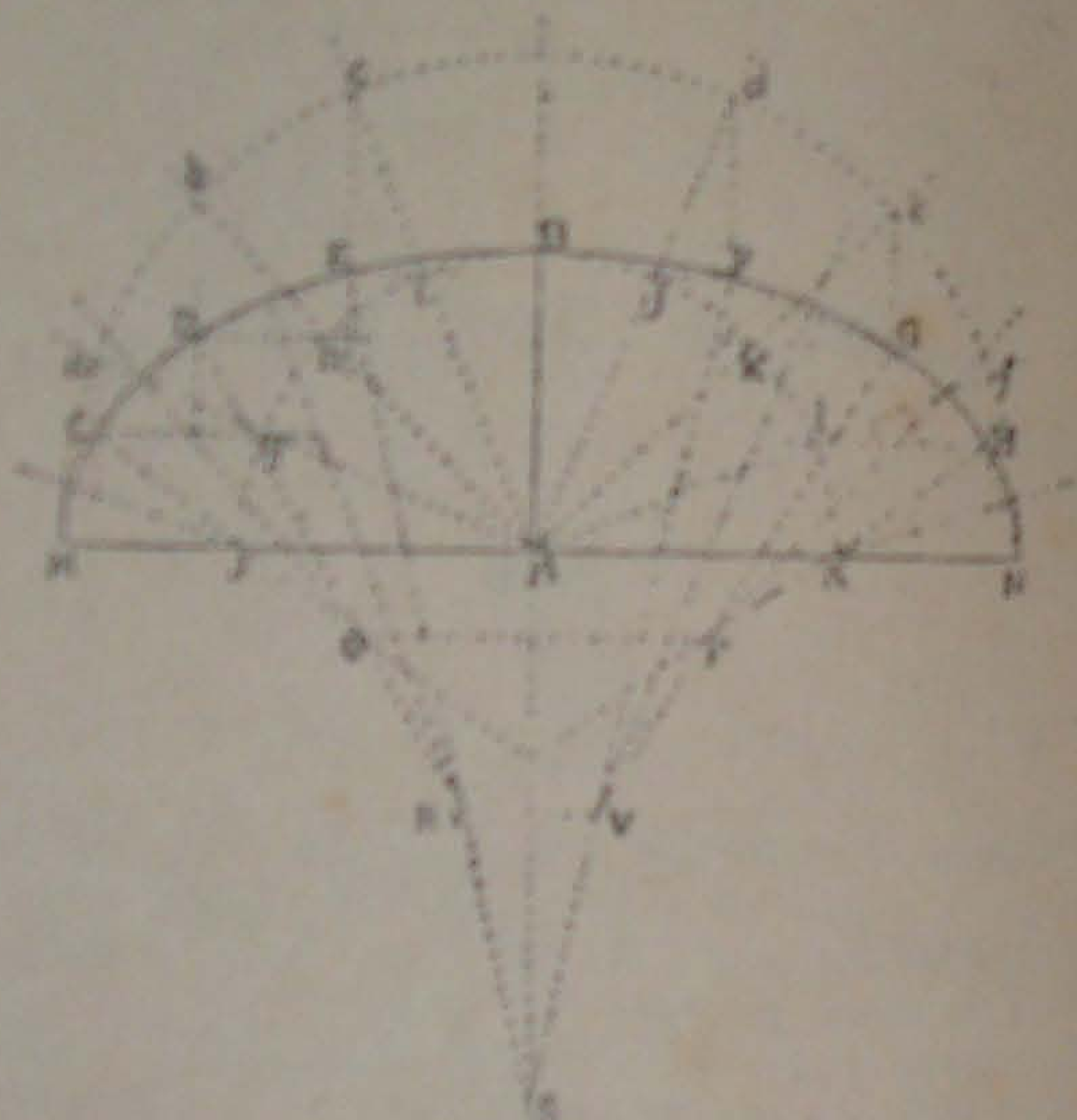


Fig. 491

as intersecções das perpendiculares ao meio de *MC* e *HN* com a reta *MN*; *O* e *P* resultam das intersecções das perpendiculares ao meio de *CD* e *GH* com os prolongamentos de *CJ* e *HK*; *R* e *V* são as intersecções das perpendiculares ao meio de *DE* e *FG* com os prolongamentos das retas *DO* e *GP*, e por último o ponto *S* é o resultado do encontro das retas *ER* e *FV*.

Descrevemos enfim, os sete arcos que formarão a asa de cesto e cujos centros são *S, R, V, O, P, J* e *K*.

CAPÍTULO XXII

Elipse. — Falsa elipse. — Oval. — Parábola. — Hipérbole. — Espiral. — Hélice.

ELIPSE

À linha curva, plana e fechada em que a soma das distâncias de cada um de seus pontos a dous pontos interiores fixos é constante, dá-se o nome de **elipse** (fig. 492).

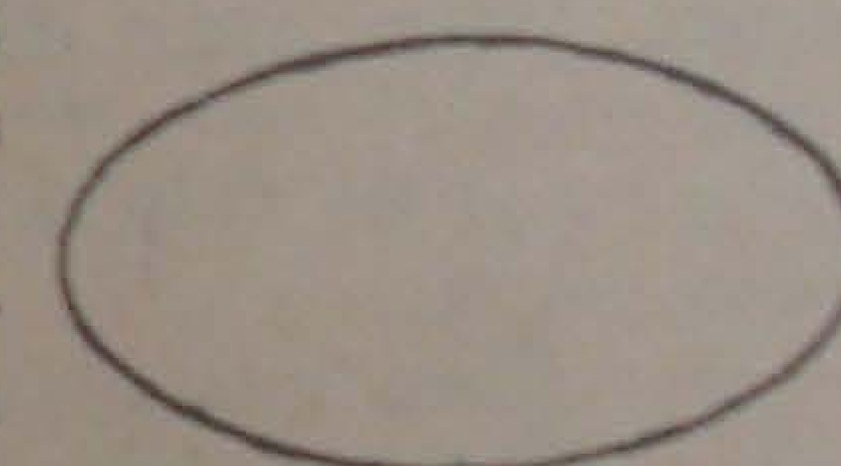


Fig. 492

Os pontos fixos chamam-se *focos* (*E* e *F*, na fig. 493); o segmento de reta que liga os focos chama-se *segmento focal* e a sua medida é a *distância focal*.

A Terra e os outros planetas descrevem elipses ao redor do Sol. Também são muitos os objetos com forma elíptica: molduras, caixas, medalhões, jóias, espelhos, rótulos, bandejas, etc.

A elipse admite dois eixos de simetria, que são: a reta que passa pelos focos e a mediatriz do segmento focal. A intersecção dos dois eixos é o *centro* da elipse. Os pontos *A, B, C* e *D* são os *vértices* da elipse. A distância *AB* é o *eixo maior* e a distância *CD* é o *eixo menor* (fig. 493).

A distância focal é geralmennte representada por $2c$ e o eixo maior por $2a$.

Os segmentos de reta que unem os focos a qualquer ponto da curva tomam o nome de *raios*

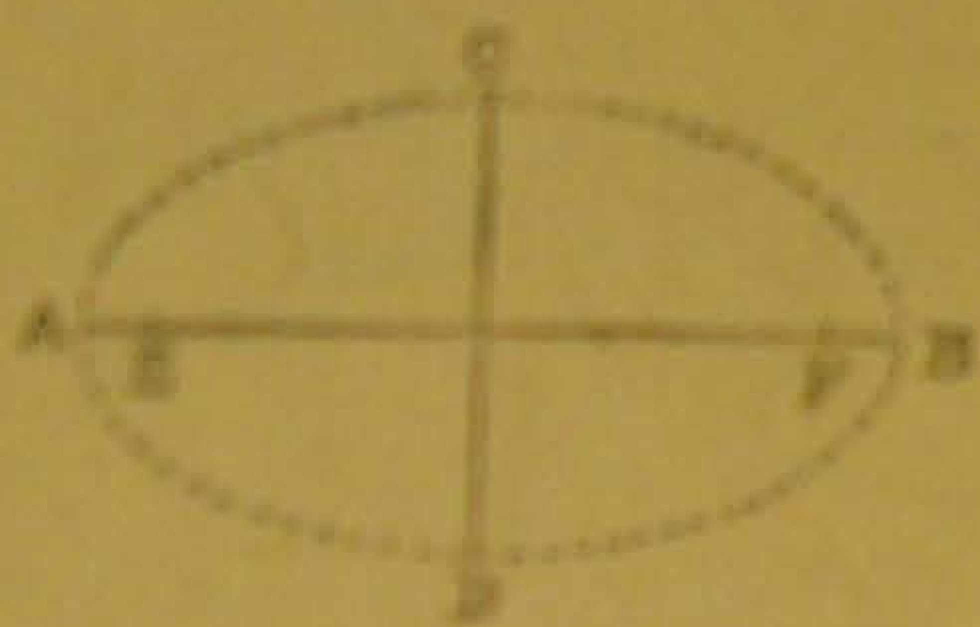


Fig. 493

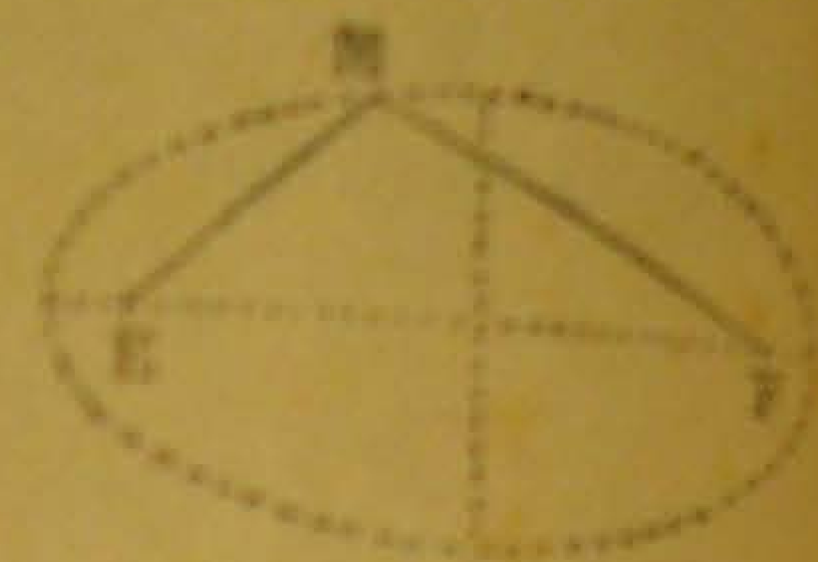


Fig. 494

vetores. Assim, EM e FM, na fig. 494 são raios vetores.

A soma de dois raios vetores é igual ao eixo maior, ou $2a$.

Tal como vimos em relação ao circulo, uma reta pode ser: ***exterior*** à elipse quando não tiver ponto comum com esta; ***secante***, quando tiver com com ela dois pontos comuns; e, finalmente, *tangente* à elipse quando com ela só tiver um ponto comum.

A propriedade da tangente à elipse é que ela forma ângulos iguais com os raios vetores que vêm ter ao ponto de contacto.

Excentricidade de uma elipse é a razão da distância focal para o eixo maior, ou, seja, a razão $\frac{c}{a}$.

A elipse é mais ou menos alongada, conforme sua excentricidade.

Quando $c = 0$, isto é, quando os focos coincidem, a excentricidade é nula e a elipse se reduz a uma circunferência de círculo; quando os focos são muito próximos um do outro, a excentricidade é pequena e nesse caso a elipse é arredondada, pouco diferindo da circunferência; finalmente, à medida que os focos se afastam, a excentricidade aumenta e, neste caso, a elipse alonga-se.

PROBLEMAS

Problema 155. — *Traçar uma elipse dados os eixos.*

1.º processo: (movimento contínuo) — Com uma linha, dois alfinetes e lapis, giz ou carvão. Sejam AB e CD (fig. 495) os eixos da elipse.

Tracemos os dois eixos, cortando-se perpendicularmente ao meio. Do ponto C (fig. 496) como centro e com um raio igual a OA, determinemos os pontos E e F, que são os fócos.

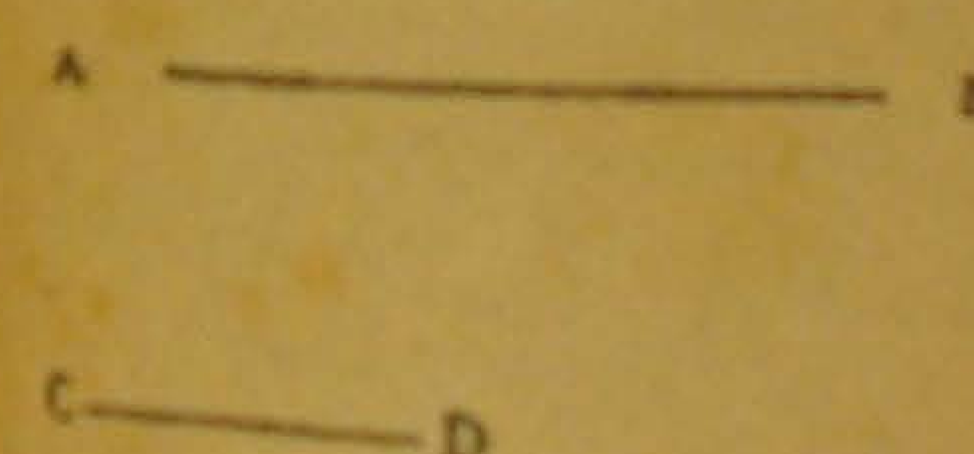


Fig. 495

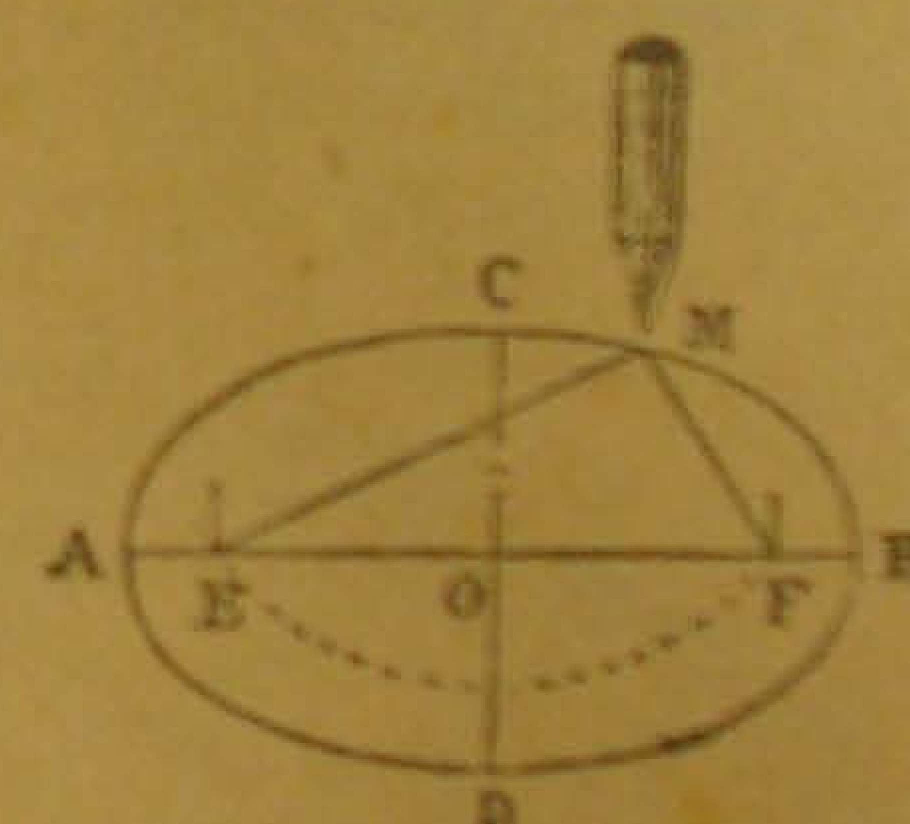


Fig. 496

Tomemos um fio de linha e fixemo-lo com alfinetes, pelas extremidades, nos pontos E e F, do modo que a porção do fio entre E e F, tenha o comprimento do eixo maior (AB). Com a ponta de um lapis, estiquemos o fio e desloquemos a ponta do lapis sôbre o papel, conserxando o fio sempre bem esticado; descreveremos, assim, metade da elipse. Procedamos da mesma forma no outro lado do eixo maior, e teremos a outra metade da elipse que desejávamos traçar.

Este processo facílimo de se executar é baseado na própria definição da elipse e é muito empregado para o traçado da curva em terrenos planos.

Os jardineiros usam dêste processo quando querem dar a um canteiro a forma elíptica, substituindo os alfinetes, por estacas, o lapis ou giz por uma ponteira e a linha por uma corda.

2.º processo: — Com uma tira de papel.

Depois de traçarmos os eixos como no 1.º processo, marquemos em uma tira de papel, cortada em linha reta (fig. 497) a distância *MN* igual a *OB* (fig. 498) e a distância *NP* = *OC*. A distância *PN* exprime a diferença dos semi-eixos.

Fig. 497

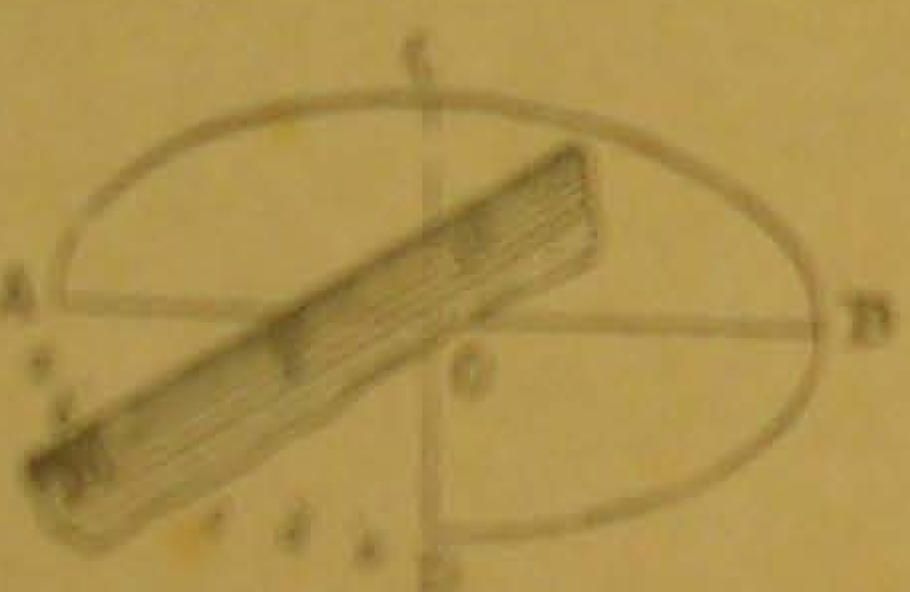


Fig. 498

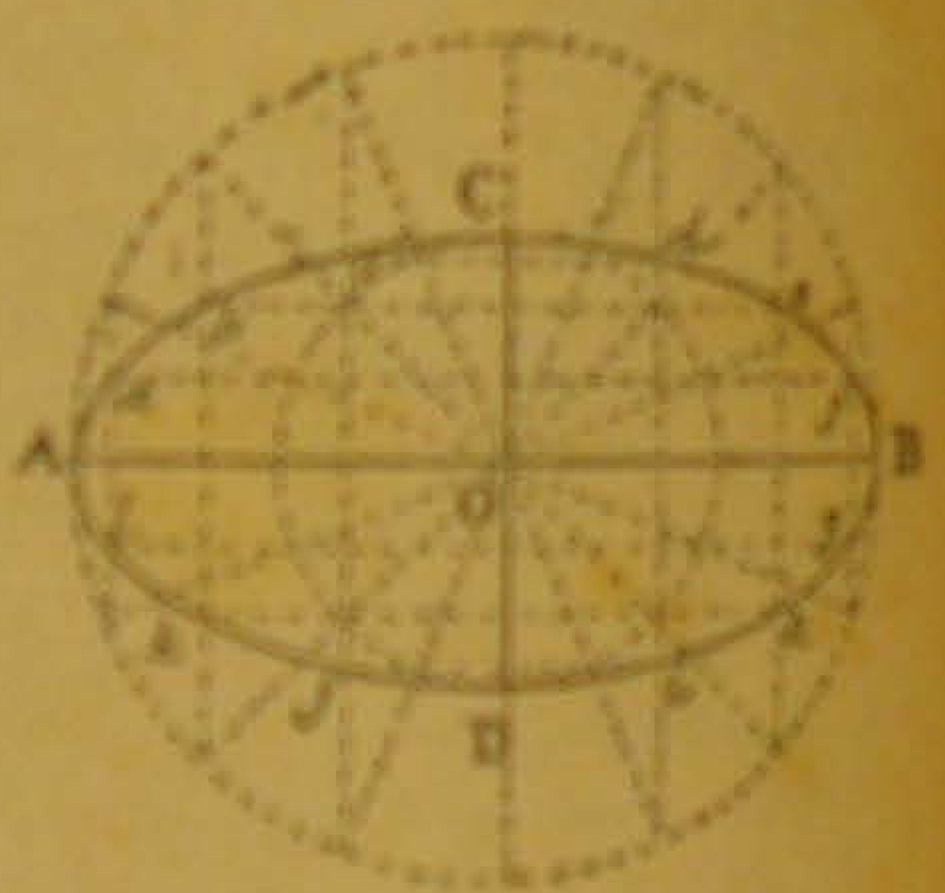


Fig. 499

Apliquemos o ponto *N* sempre sôbre o eixo *CD* e o ponto *P* sempre sôbre o eixo *AB*, de sorte que o ponto *M* determine os diversos pontos *a, b, c, d, e, f*, etc., conforme o ponto *N* se afaste mais ou menos do ponto *O* no eixo *CD* e o ponto *P* se afaste também do ponto *O* no eixo *AB*.

Os pontos *a, b, c, d, e, f*, etc., bem próximos uns dos outros determinam a passagem da curva; resta-nos ligar, a mão livre, êsses pontos para ter a elipse.

3.º processo: — Por meio de duas circunferências concêntricas tendo, cada uma, para diâmetro um eixo da elipse.

Tracemos os dois eixos cortando-se perpendicularmente ao meio e descrevamos duas circunferências concêntricas: uma com o raio igual à metade do eixo maior *AB* (fig. 499) e a outra com o raio igual à metade do eixo menor *CD*.

Dividamos a circunferência maior em um número qualquer de partes iguais, 16 por exemplo, e tracemos todos os raios que terminam nos pontos de divisão. Estes raios também dividem a circunferência menor em 16 partes iguais.

Pelos pontos de divisão da circunferência maior, tracemos paralelas ao eixo menor e pelos pontos de divisão da circunferência menor, paralelas ao eixo maior.

Os pontos *a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, A, B, C, D* são pontos da elipse; liguemo-los portanto, a mão livre.

Observação: — Para uma relativa perfeição do traçado devemos dividir as circunferências no maior número possível de partes iguais.

4.º processo: — Por pontos determinados pelo compasso.

Dividamos a distância *OF* (fig. 500) em um número qualquer de partes iguais, 6 por exemplo.

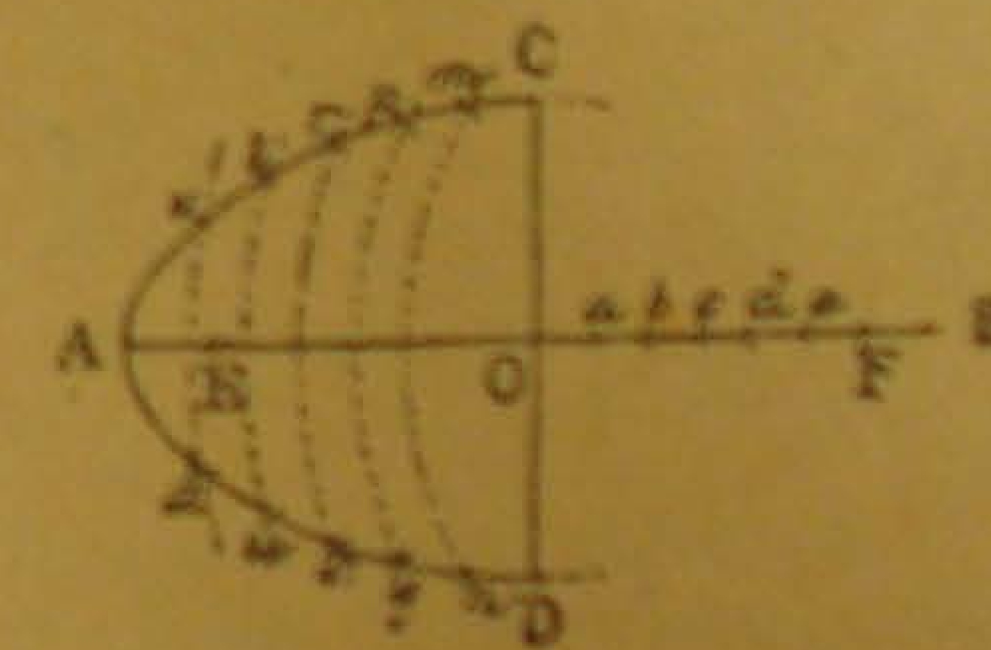


Fig. 500

Façamos centro em *F* e com as distâncias *Aa, Ab, Ac, Ad, Ae* descrevamos arcos de círculo como nos mostra a fig. 500 e do ponto *E*, com as distâncias *aB, bB, cB, dB, eB*, determinemos os pontos *m, n, p, q, r, s, t, u, v, x*, os quais determinam a metade da elipse. Procedamos do mesmo modo em relação à outra metade do eixo *AB* e teremos a elipse completa.

Problema 156. — *Traçar a tangente à elipse num ponto dado.*

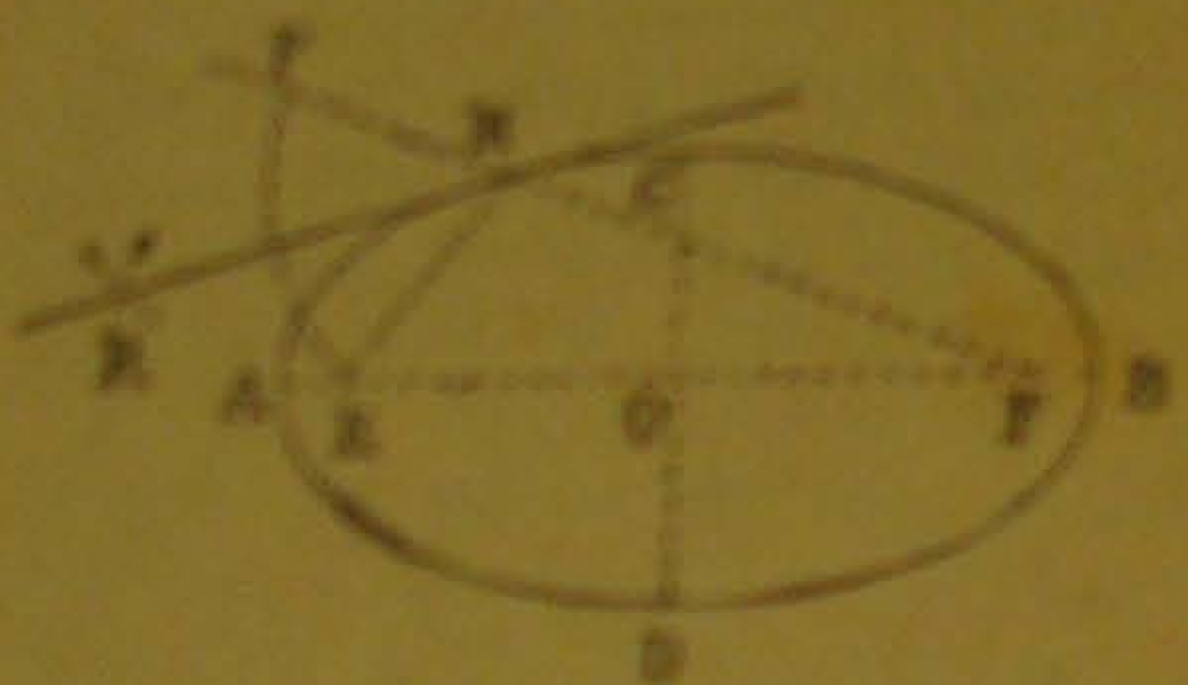


Fig. 501

Seja traçar a tangente à elipse (fig. 501) no ponto *M*. Tracemos os raios vetores dêste ponto prolongando um dêles (*MF*, por exemplo) além de *M*. Em seguida, tiremos a bissetriz do ângulo formado pelo raio vetor *ME* com o prolongamento de *MF*. Essa bissetriz é tangente à elipse no ponto *M*.

Problema 157. — *De um ponto dado, fora da elipse, traçar uma reta tangente a esta curva.*

Seja *P* (fig. 502) o ponto dado.

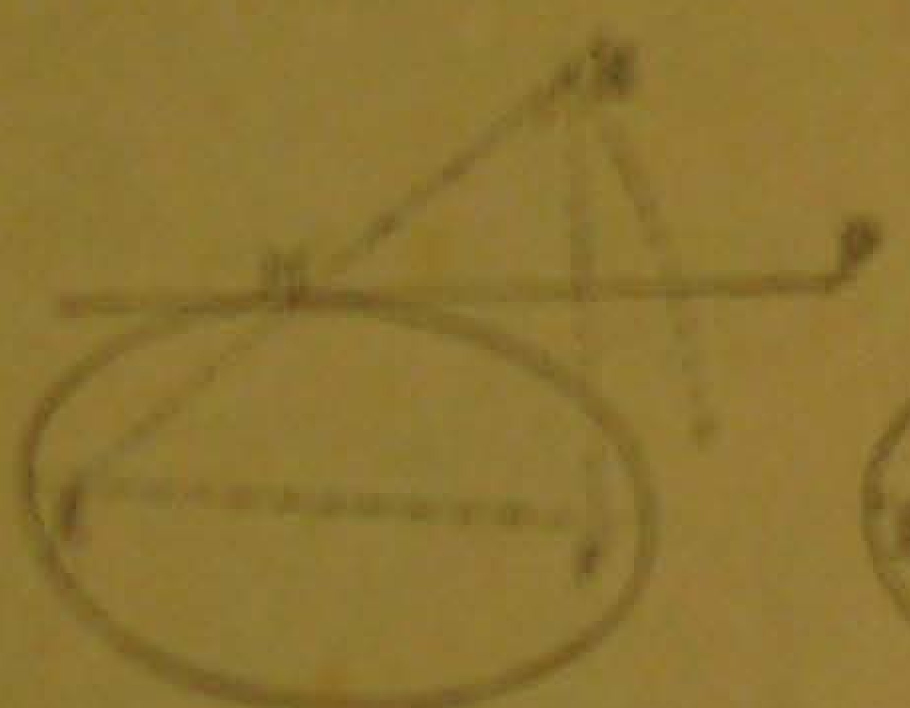


Fig. 502

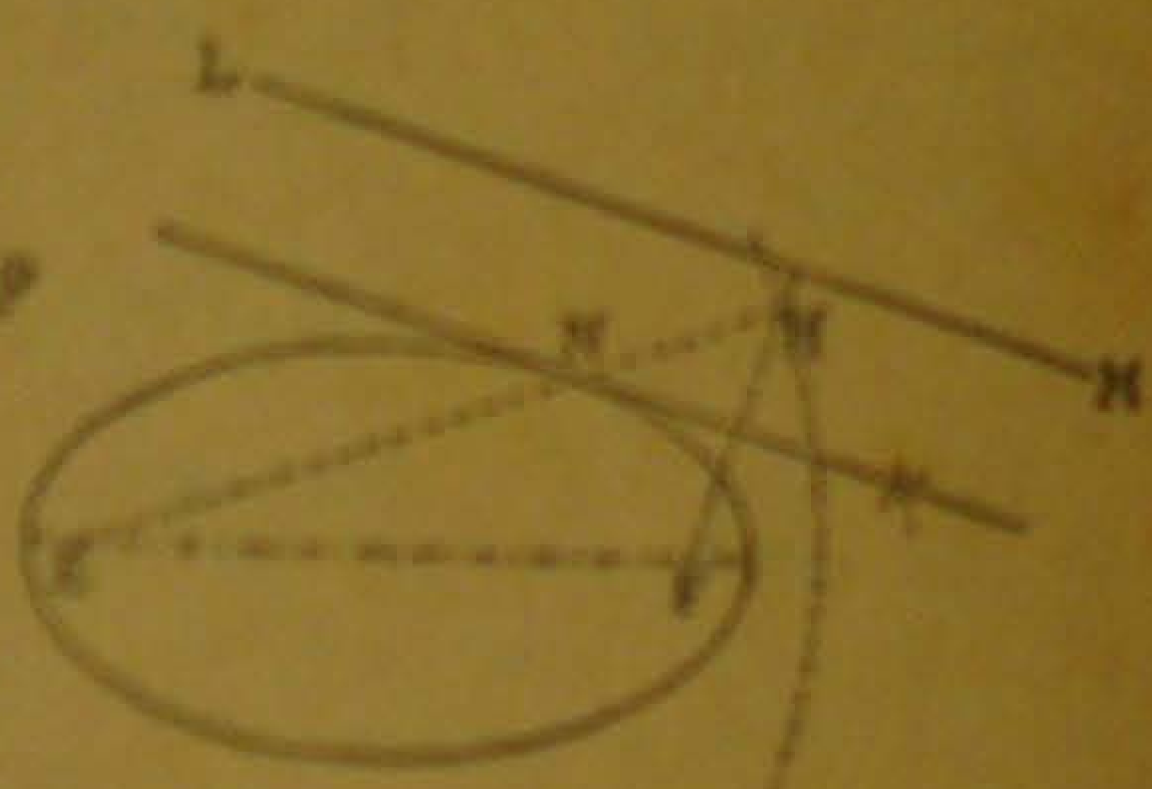


Fig. 503

Do ponto *E*, como centro, com um raio igual ao eixo maior descrevamos um arco; do ponto *P*, como centro, com raio igual a *PF* descrevamos um segundo arco que cortará o primeiro no ponto *H*.

Liguemos *F* e *H* e abaixemos do ponto *P* uma perpendicular a *FH*; esta perpendicular será a tangente pe-

dida. O ponto de contato *M* é determinado pela intersecção desta tangente com a reta *EH*.

Nota. — Para que êste problema seja possivel, é preciso que os dois arcos se cortem e para isso, que a distância *EP* entre os dois centros seja menor que a soma dos raios e maior que a sua diferença.

Problema 158. — *Traçar uma tangente a uma elipse e que seja paralela a uma reta dada.*

Do fóco *E* (fig. 503) e com um raio igual ao eixo maior descrevamos um arco; do ponto *F* tiremos sôbre a reta dada *LM* uma perpendicular, que cortará o arco no ponto *H*.

Pelo meio de *FH* façamos passar uma perpendicular, que é a tangente pedida.

O ponto de contacto *N* é determinado pela intersecção desta tangente com *EH*.

FALSA ELIPSE

Parecida com a elipse há uma curva plana, fechada, composta de quatro arcos de circulo: é a **falsa elipse,** também chamada *oval regular.*

M, N, P, R são os centros dos arcos que formam a falsa elipse representada na fig. 504.

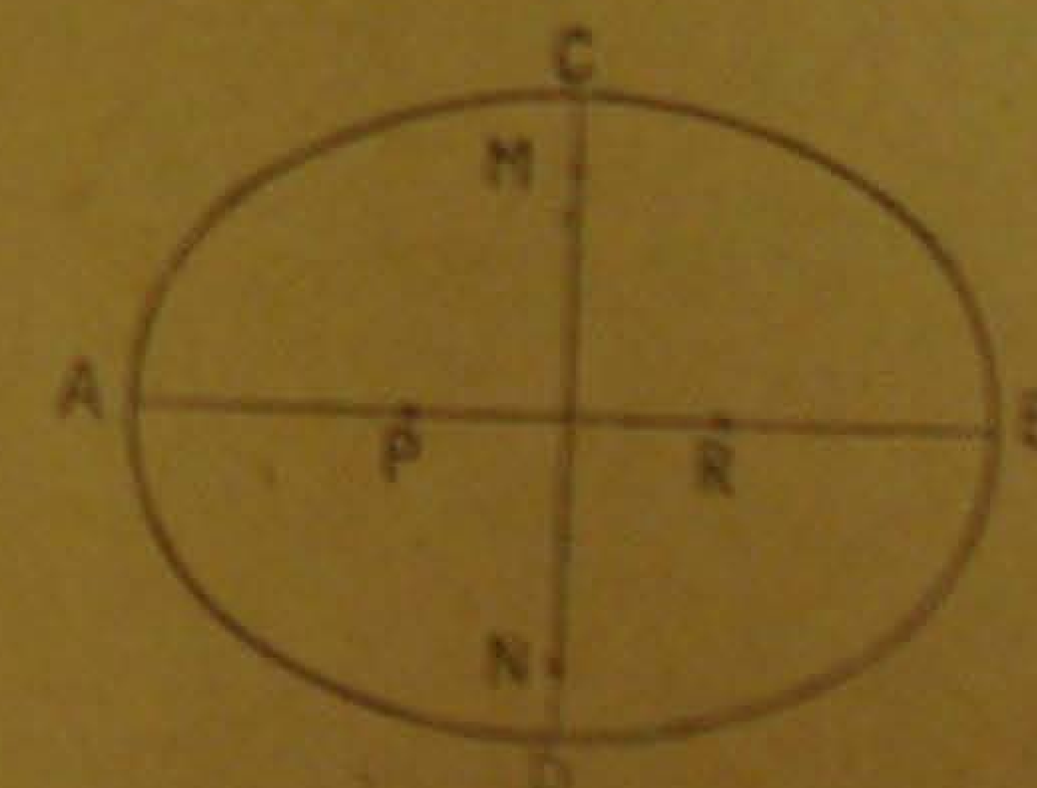


Fig. 504

Como a elipse, a falsa elipse tem dois eixos, um *AB* que passa por *P* e *R* (*eixo maior*) e outro, *CD*, que passa por *M* e *N* (*eixo menor*). A intersecção dos eixos é o *centro* da curva.

Se os centros situados no eixo maior são afastados do eixo menor, a curva é alongada; no caso contrário, a curva é arredondada.

PROBLEMAS

Problema 159. — *Traçar uma falsa elipse dados os eixos.*

1.º — *processo:* — Sejam *AB* e *CD* os dois eixos (fig. 105).

Tracemos *AB* e *CD* perpendicularmente, um pelo meio do outro (fig. 106).

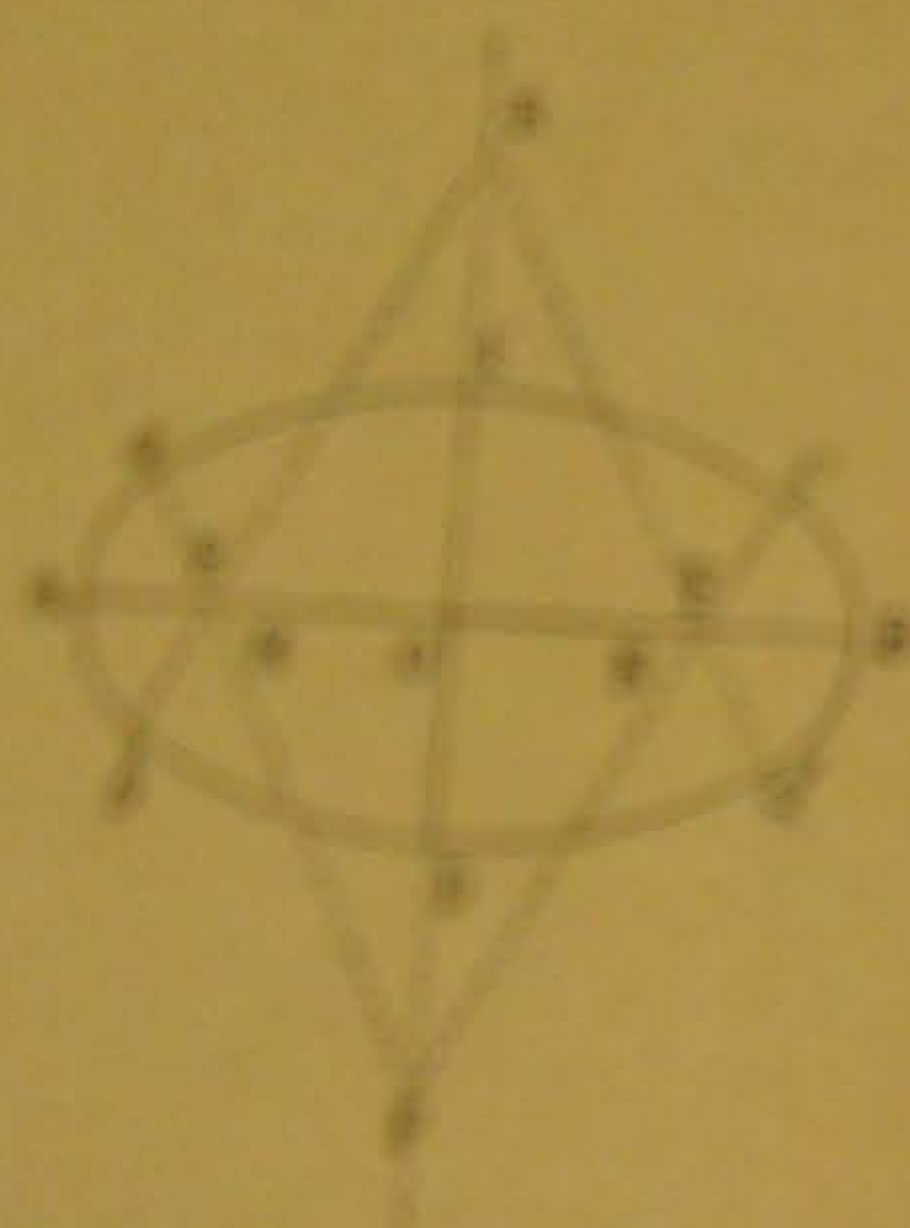


Fig. 105

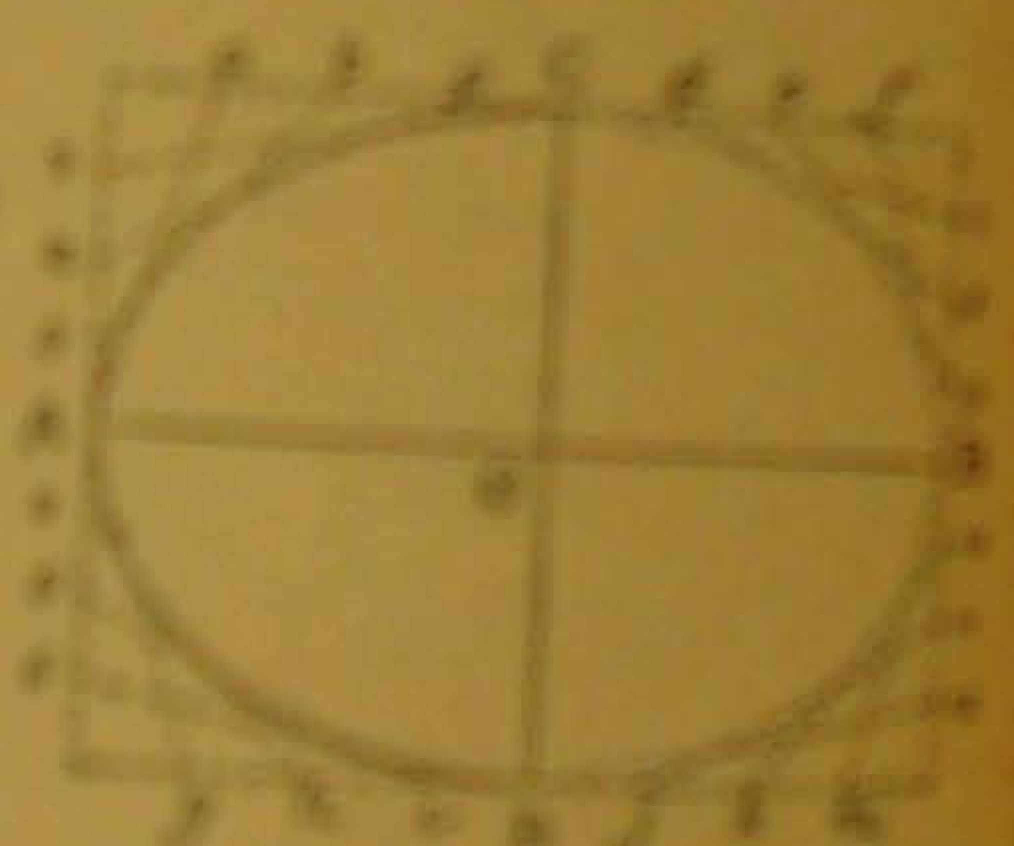


Fig. 106

Fig. 107

Marquemos sôbre o eixo maior *AM* e *BN* iguais a *OC* (fig. 106). A partir de *M* em direção ao ponto *A* e de *N* em direção ao ponto *B* marquemos uma distância (*AE* e *BF*) igual à terça parte de *OM* ou *ON*.

nos pontos *A* e *E*, com o raio *AE* determinamos *a* e *b*; de *F* e *B*, com o mesmo raio determinamos os pontos *c* e *d*. Prolonguemos o eixo menor nos dois sentidos; unamos o ponto *a* ao ponto *E* e prolonguemos a reta até encontrar no ponto *F* o prolongamento de *CD*; tracemos as retas *bEF* e *FFc*. O ponto *E* é o centro do arco *aAb*; o ponto *F* o centro do arco *cBd*; *F*, o centro de *aCc*; finalmente *E*, o centro de *bDd*.

2.º *processo:* — Tracemos os eixos *AB* e *CD* perpendicularmente um pelo meio do outro. Façamos passar pelos pontos *C* e *D* (fig. 107) paralelas ao eixo *AB* e, pelos pontos *A* e *B*, paralelas ao eixo *CD*; obtemos, assim, um retângulo. Dividamos cada lado dêsse retângulo em oito partes iguais e teremos os pontos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *i*, *j*, *k*, *m*.

Unamos os pontos *aA*, *b2*, *c3*, *C1*, *C7* *d8*, *e9*, *f8*, *Bm* *10l*, *11j*, *12D*, *D6*, *i5*, *h4*, *g3*.

Os pontos de intersecção, interiores, dessas retas determinam a passagem da falsa elipse.

Problema 160. — *Construir uma falsa elipse arredondada dado o eixo menor.*

Seja *CD* o eixo menor (fig. 108). Façamos passar pelo meio de *CD* uma perpendicular. Tomemos a metade de *OC* como raio e do ponto *O* marquemos *N* e *M*. Liguemos os pontos *D* e *N*, *D* e *M*, *C* e *N*, *C* e *M*, prolongando as retas *DN*, *DM*, *CN*, *CM*. Do ponto *D* tracemos o arco *mCn*; do ponto *C*, o arco *sDr*; do ponto *N* o arco *ns* e do ponto *M*, o arco *mr*.

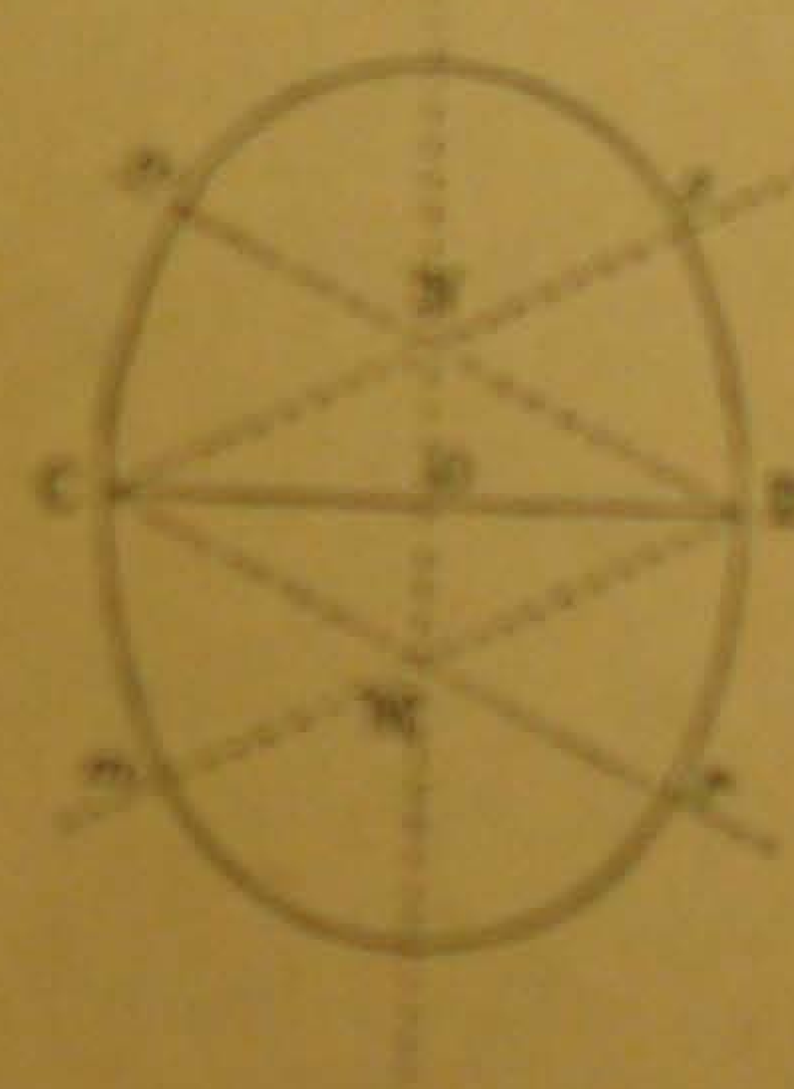


Fig. 108

Problema 161. — *Construir uma falsa elipse arredondada dado o eixo maior. AB é o eixo maior (fig. 109).*

Dividamo-lo em três partes iguais; tracemos os dous triângulos equiláteros *MNP* e *MNR*, prolonguemos *PN*, *PM*, *RN*, *RM*. Dos pontos *M* e *N* tracemos os arcos *nAm* e *sBv*; dos pontos *R* e *P*, os arcos *ms* e *nv*.

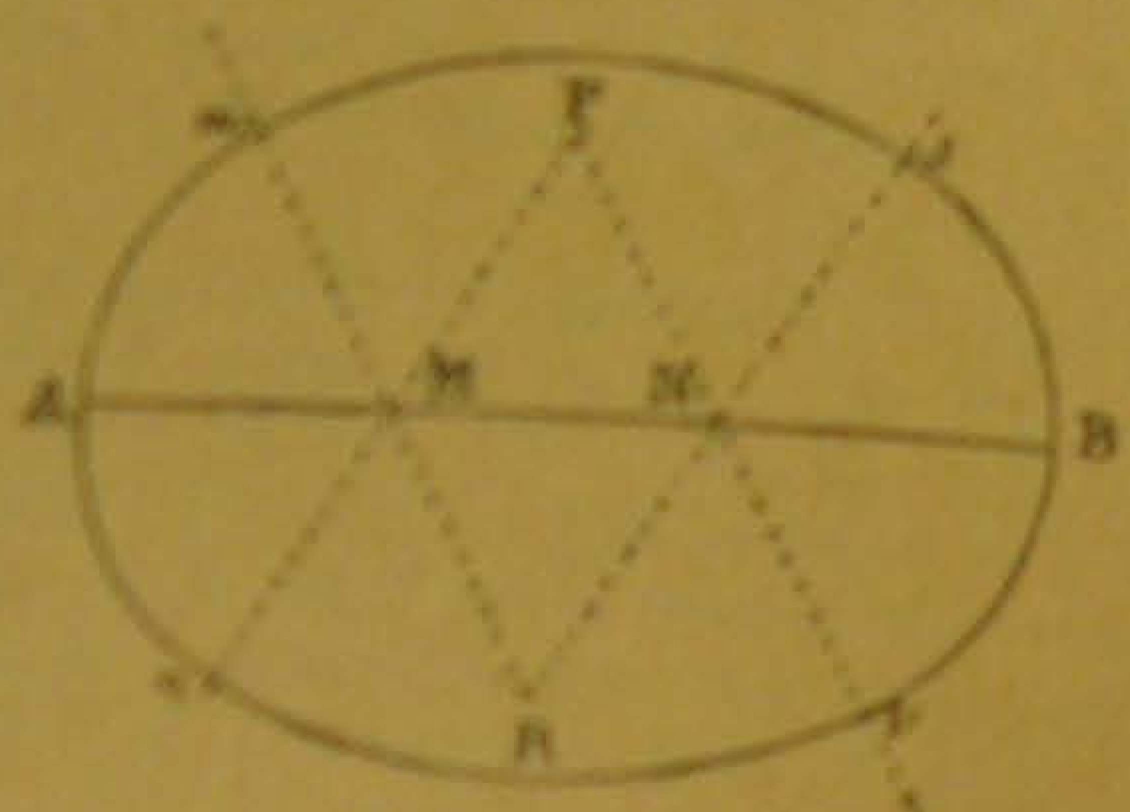


Fig. 509

Problema 162. — *Construir uma falsa elipse alongada dado o eixo menor.* DC é o eixo menor (fig. 510). Façamos passar pelo meio de *DC* uma perpendicular.

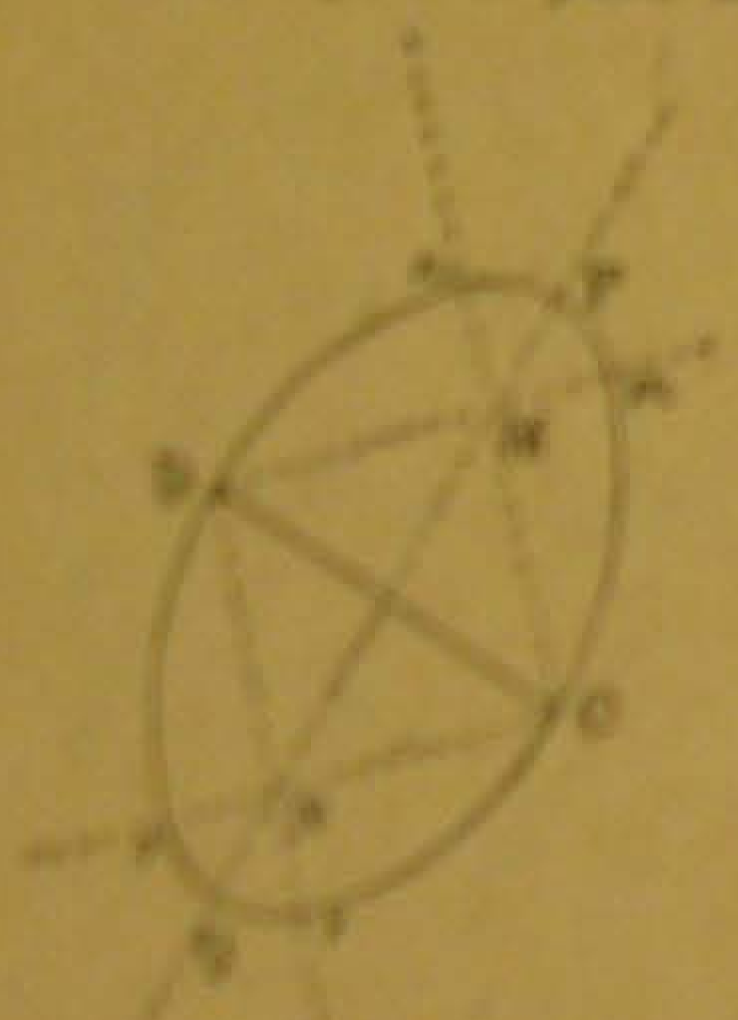


Fig. 510

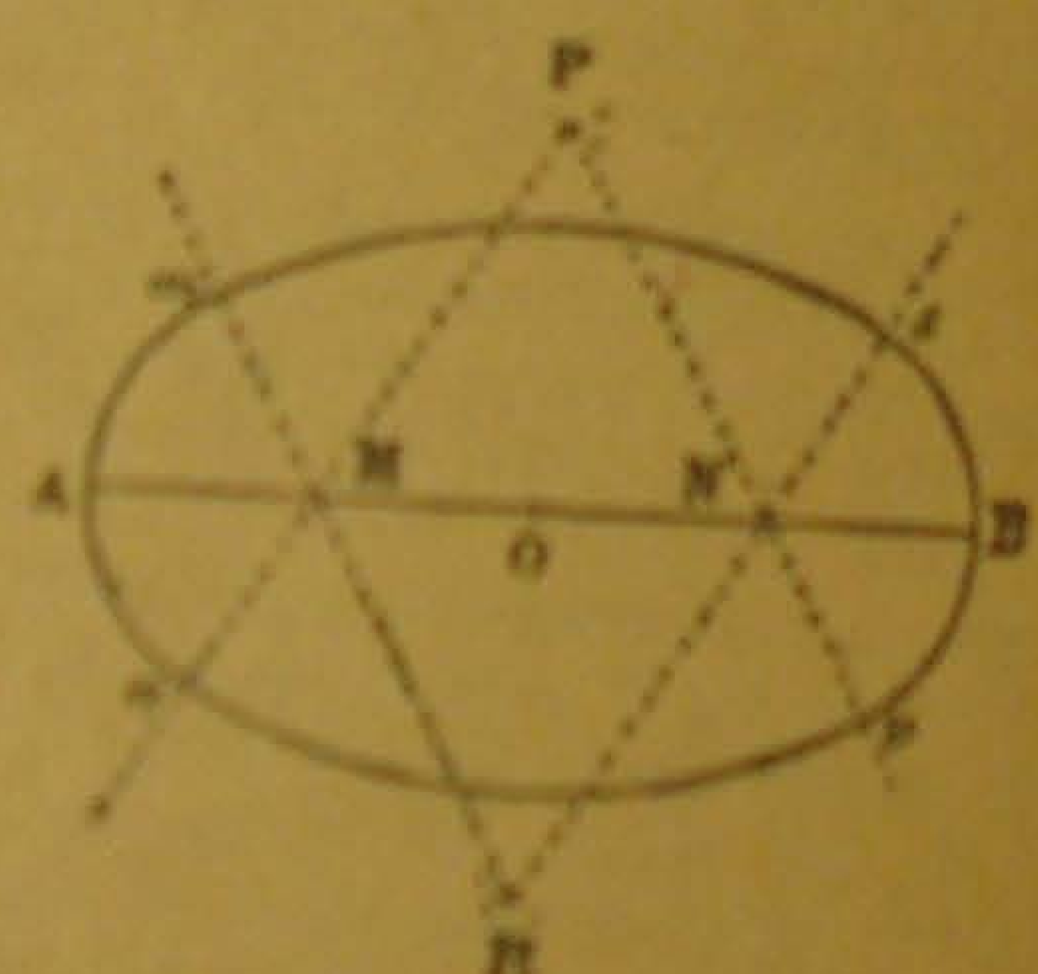


Fig. 511

Formemos o quadrado *DMCN*; prolonguemos *CM*, *CN*, *DM*, *DN*. Dos pontos *C* e *D* descrevamos os arcos *sDn* e *mCr*; dos pontos *M* e *N* os arcos *nPm* e *rQs*.

Problema 163. — *Construir uma falsa elipse alongada dado o eixo maior.*

Seja *AB* o eixo maior (fig. 511); dividamo-lo em quatro partes iguais. Sôbre *MN* façamos os triângulos equiláteros *MNR* e *MNP*. Dos pontos *M* e *N* tracemos os arcos *mAn* e *sBv*; dos pontos *R* e *P* tracemos os arcos *ms* e *nv*.

OVAL

Dá-se o nome de **oval** a uma curva plana, fechada, composta de uma semi-circunferência, de dous grandes arcos e de um pequeno arco (fig. 512).

O nome lhe vem do fato de lembrar a configuração do ovo; entretanto esta curva também é conhecida por *oval irregular* em virtude de alguns autores chamarem *oval regular* à falsa elipse.

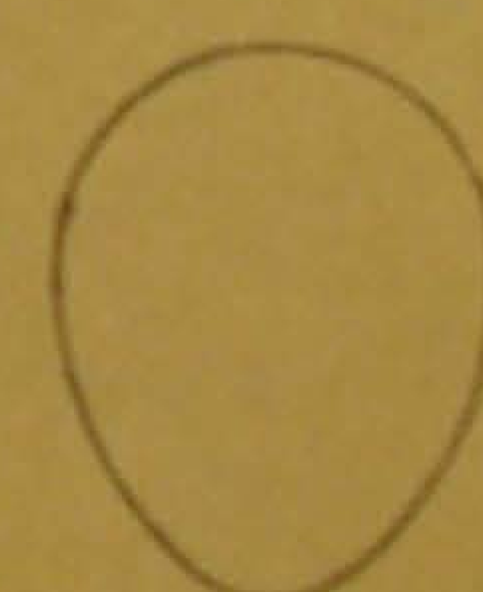


Fig. 512

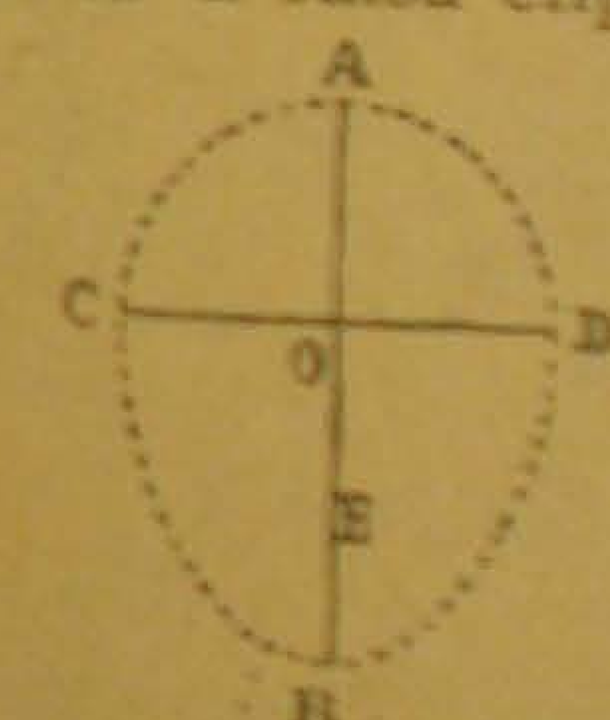


Fig. 513

O segmento de reta que faz de diâmetro da semi-circunferência é o *eixo menor* da oval (*CD*, na fig. 513); a perpendicular ao meio do eixo menor e limitado pela curva é o seu *eixo maior* (*AB*, na pag. 513).

PROBLEMAS

Problema 164. — *Traçar uma oval dado o eixo menor.*

Seja CD o eixo menor (fig. 514). Tracemos pelo meio dêsse eixo uma perpendicular.

Façamos OA e OM iguais a OC (ou OD); unamos C e D ao ponto M e prolonguemos DM e CM.

De O como centro e com raio igual a OD descrevamos a semi-circunferência CAD; dos pontos D e C com raio igual a CD descrevamos os grandes arcos Cm e Dn; finalmente, do ponto M, com raio igual a Mm descrevamos o pequeno arco mBn.

Problema 165. — *Traçar uma oval conhecendo-se o eixo maior.*

Fig. 514

Fig. 515

Fig. 516

Seja MN o eixo maior (fig. 515).

Construamos uma oval auxiliar dado o eixo menor de qualquer tamanho (fig. 516).

Façamos passar pela extremidade M do eixo MN uma perpendicular e apliquemos sôbre ela $MP = CD$ (metade do eixo menor da oval auxiliar).

Reproduzamos em MV a medida AB (eixo maior da oval auxiliar).

Unamos V a P e do ponto N tracemos uma paralela a VP até determinar o ponto R.

MR é a metade do eixo menor da oval pedida.

Apliquemos em NS a medida MR; pelo ponto S façamos passar uma perpendicular ao eixo MN, e depois reproduzamos em SE e SF a mesma medida NS.

Sendo EF o eixo menor, resolvamos o problema como nos ensina o precedente.

PARÁBOLA

A curva plana, aberta, cujos pontos são todos igualmente distantes de um ponto fixo (*foco*) e de uma reta fixa (*diretriz*) chama-se **parábola.**

A perpendicular traçada do foco sôbre a diretriz, chama-se *eixo* da parábola.

A parábola é uma curva simétrica em relação ao eixo.

O ponto em que o eixo encontra a curva é o *vértice* da parábola.

O segmento de reta que liga o foco a um ponto qualquer da curva chama-se *raio vetor*.

A distância do fóco à diretriz denomina-se *parâmetro*.

À reta que, situada no mesmo plano da parábola, tem com esta um só ponto comum, dá-se o nome de tangente; o ponto comum é o *de contacto*.

A distância do vértice ao foco é a *distância focal*.

Todo segmento de reta cujas extremidades estão sôbre a curva é uma *corda*.

Toda reta tirada de um ponto da curva e paralela ao eixo da parábola é um *diâmetro*.

A tangente na extremidade de um diâmetro é paralela às cordas que êste diâmetro divide ao meio.

Na fig. 517, *AX* é o eixo; *F*, o fóco; *MN*, a diretriz; *V*, o vértice; *FP*, um raio vetor; *AF*, o parâmetro; *TG* uma tangente; *P*, o ponto de contacto; *VF*, a distância focal; *DE* uma corda; *HL* um diâmetro.

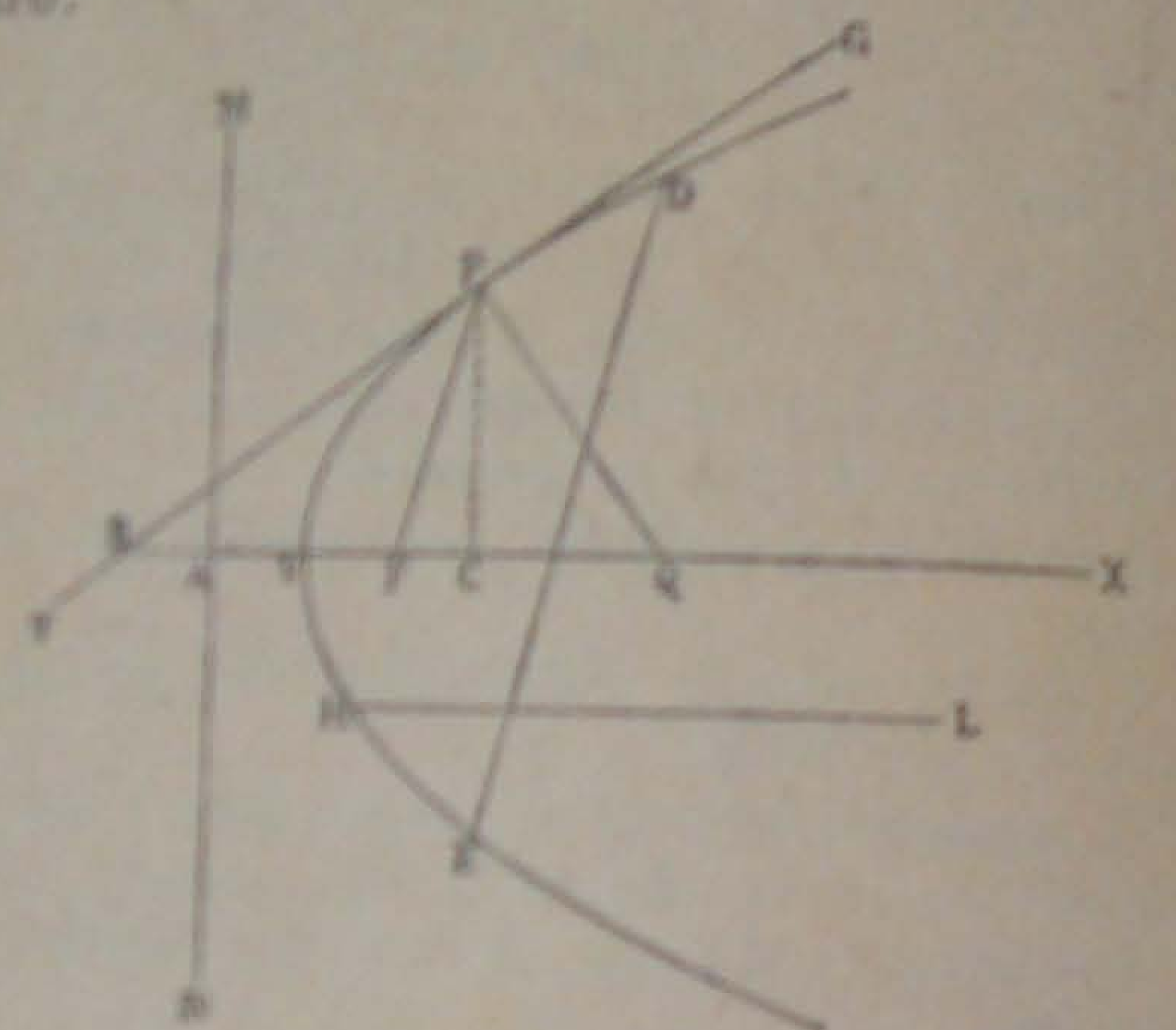


Fig. 517

Os *refletores* das lanternas de alguns carros, das locomotivas, dos navios, em geral, de todos os aparelhos que dão luz para ser vista de muito longe, são parabólicos.

Nos *faróis* são também empregados refletores parabólicos; os espelhos dos telescópios são parabólicos.

PROBLEMAS

Problema 166. — *Traçar uma parábola dados o fóco e a diretriz.*

1.º processo: — (movimento continuo) com régua, esquadro e cordel.

Façamos coincidir uma aresta da régua com a diretriz (fig. 518); apliquemos um catêto do esquadro contra a régua, fixemos um cordel do tamanho do outro catêto do esquadro, nos pontos *G* e *F*.

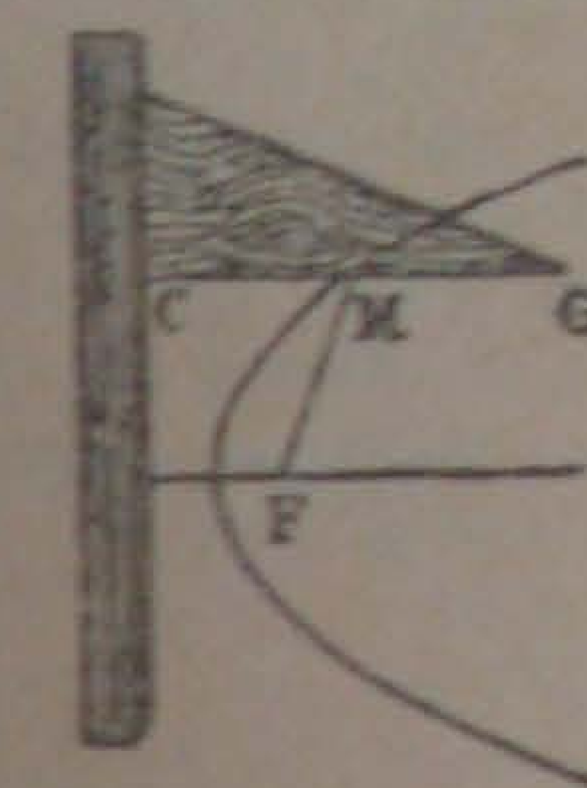


Fig. 518

Com a ponta de um lapis conservemos o cordel constantemente esticado, parte dele ficando aplicado ao longo de *CG*, e façamos ao mesmo tempo escorregar o esquadro pela régua. Com êste movimento continuo, a ponta do lapis conservar-se-á sempre equidistante da régua e do ponto *F*. Esta operação feita de um e de outro lado do eixo completará a parábola.

2.º processo: — Com o compasso.

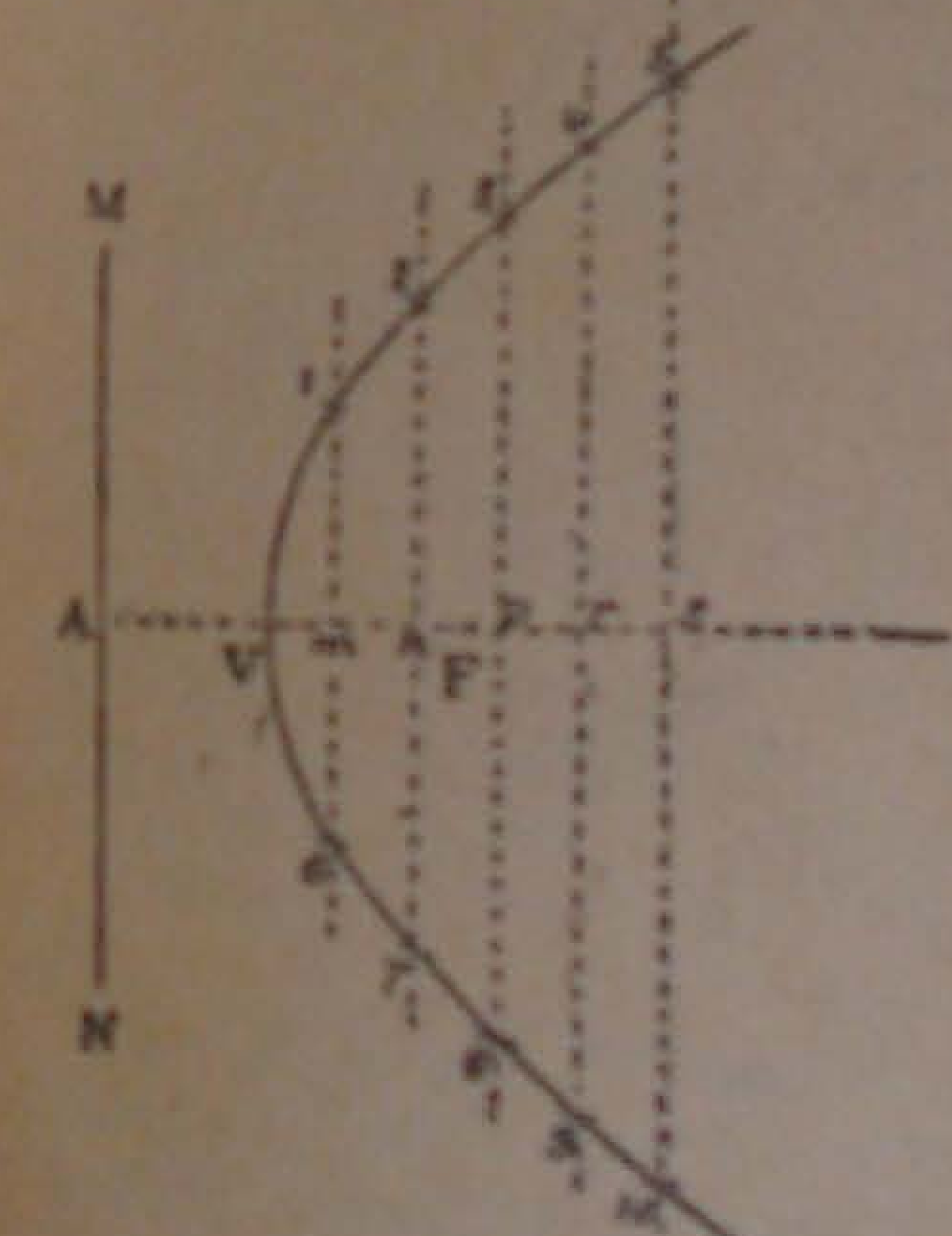


Fig. 519

F é o fóco (fig. 519), *MN* a diretriz. Façamos passar pelo foco uma perpendicular à diretriz; dividamos *FA* ao meio; o ponto *V* será o vértice da parábola.

Tomemos sôbre o eixo as distâncias iguais *mn*, *np*, *pr*, *rs*, etc.; pelos pontos *m*, *n*, *p*, *r*, *s* tracemos paralelas à diretriz. Do foco, como centro, e com os raios iguais a *mA*, *nA*, *pA*, *rA*, *sA*, etc., cortemos as paralelas nos pontos 1 e 6; 2 e 7; 3 e 8; 4 e 9; 5 e 10; etc., os quais determinam a passagem da parábola.

Problema 167. — *Construir uma parábola conhecendo-se a diretriz e o vértice.*

Seja MN a diretriz e V o vértice (fig. 519).

Determinemos o eixo abaixando de V uma perpendicular a MN; e o foco, reproduzindo em VF a medida VA. Desde que conhecemos a diretriz e o foco, recaímos no problema anterior.

Problema 167-a. — *Construir uma parábola conhecendo-se o fóco e duas tangentes.*

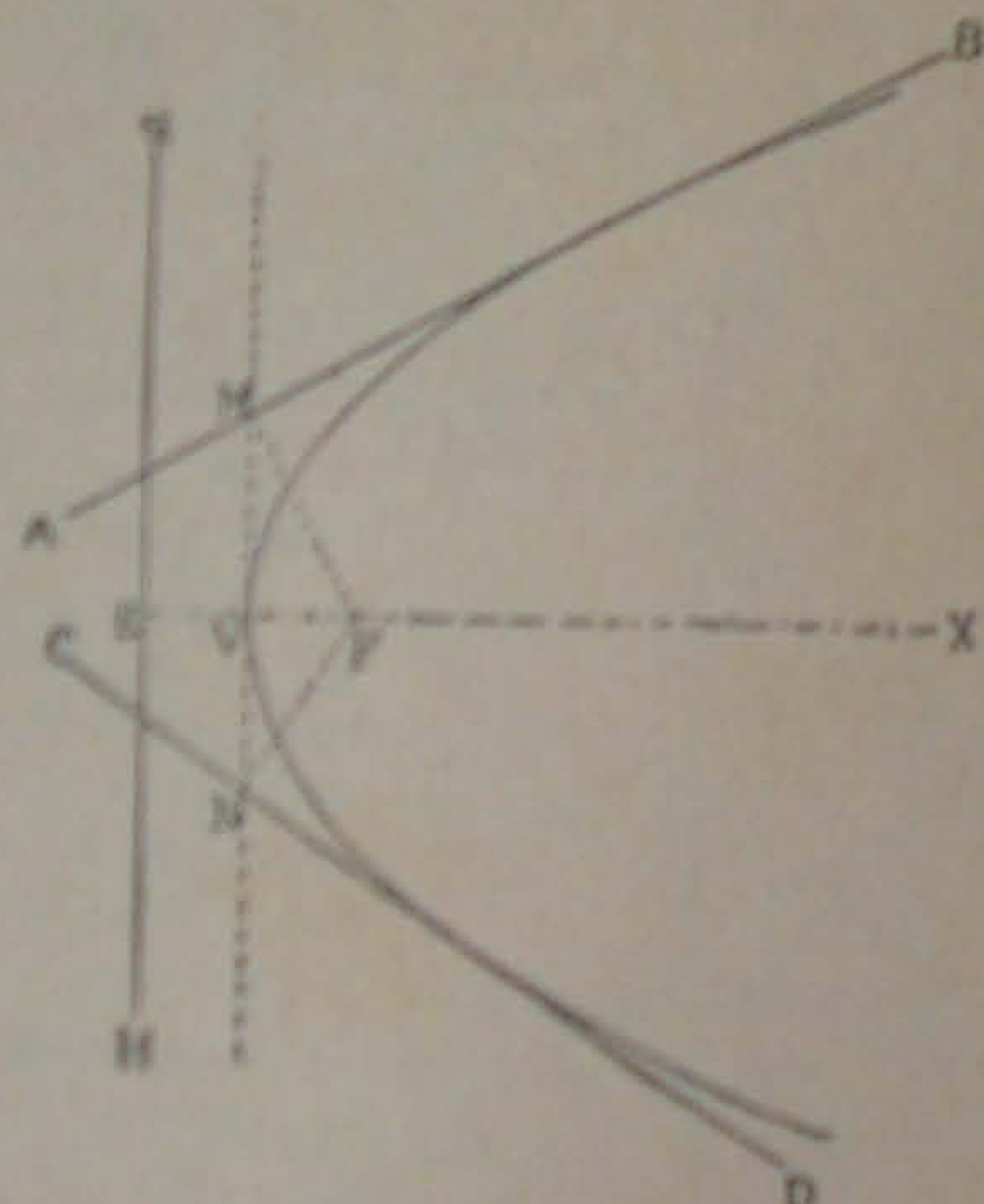


Fig. 520

Seja F o foco e AB e CD as duas tangentes (fig. 520). Abaixemos do foco uma perpendicular sôbre cada tangente; os pontos M e N determinam a passagem da tangente no vértice da curva.

A reta VFX perpendicular ao meio de MN é o eixo.

Tomemos $VE = VF$ e pelo ponto E tracemos GH paralela a MN.

GH é a diretriz e F é o foco; tracemos, agora a parábola como nos ensina o problema 166.

Problema 168. — *Construir uma parábola conhecendo-se o foco, o eixo e uma tangente.*

F é o fóco, MT, a tangente e NX, o eixo (fig. 521).

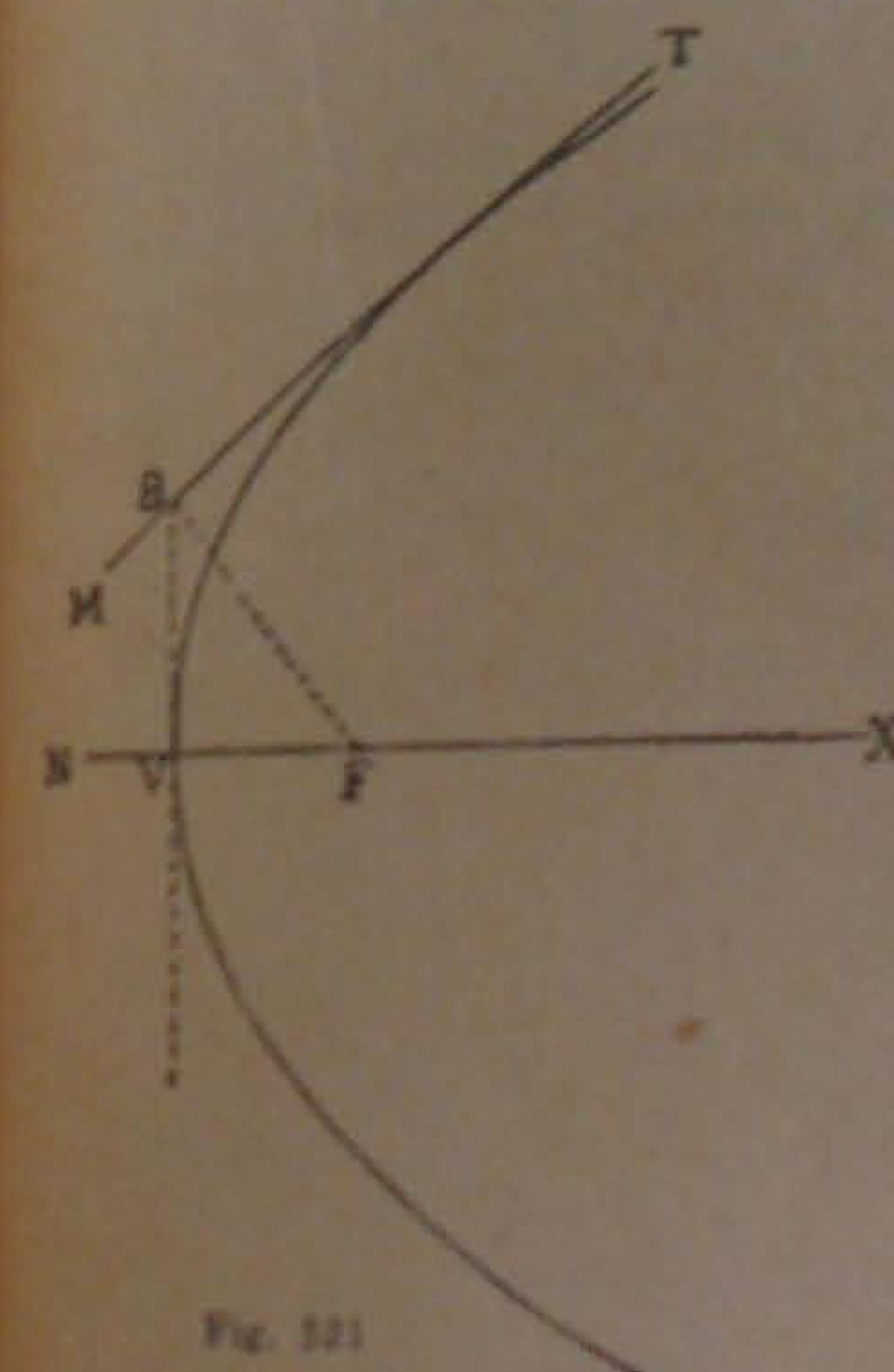


Fig. 521

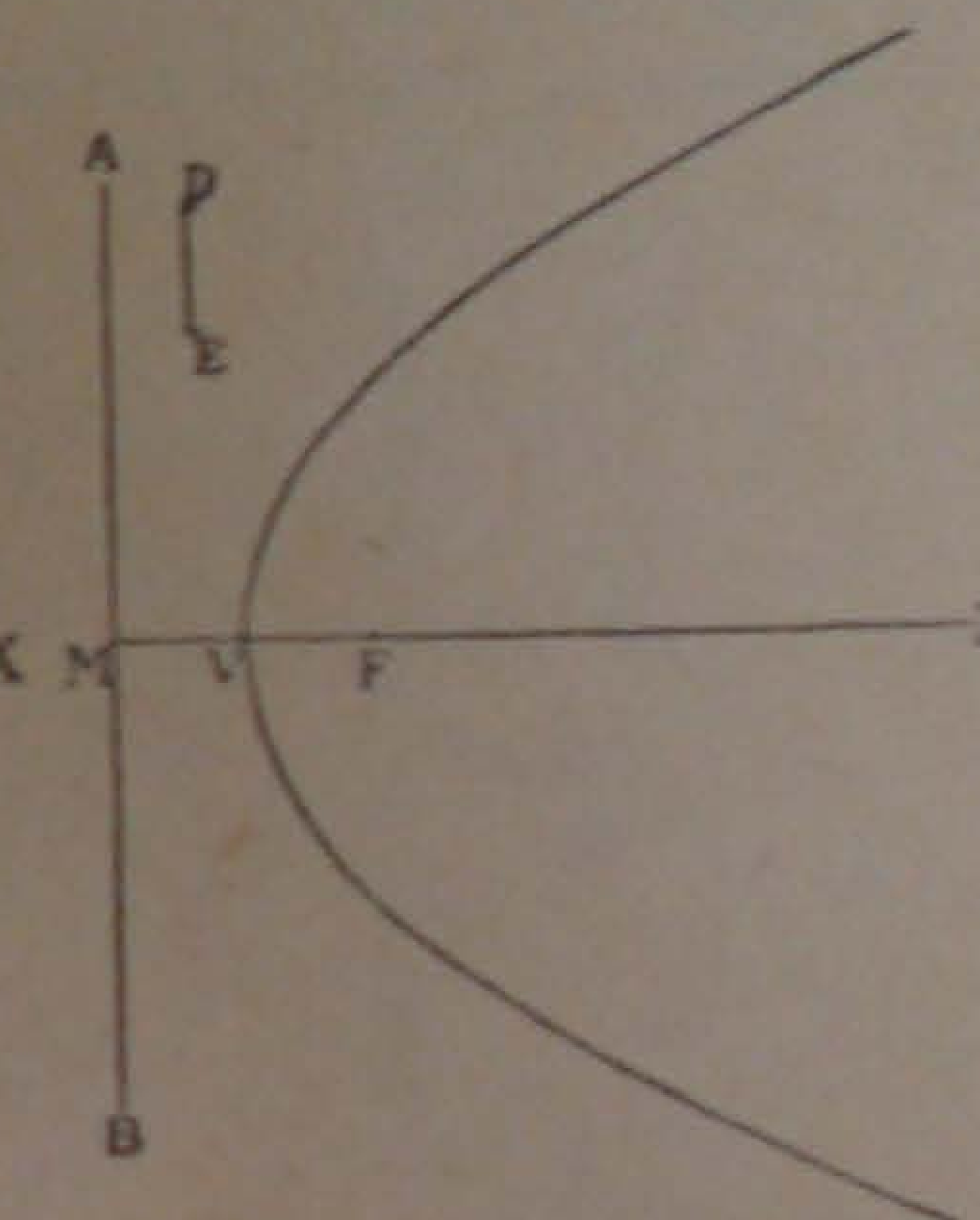


Fig. 522

De F abaixemos uma perpendicular sôbre a tangente e do ponto B uma outra sôbre o eixo.

V é o vértice da parábola.

Com estes elementos, tracemos a parábola como nos indicam os problemas 166 e 167.

Problema 169. — *Construir uma parábola conhecendo-se a distância focal.*

Seja DE a distância focal (fig. 522).

Tracemos uma reta indefinida MX e reproduzamos, a partir de um ponto M, dois segmentos consecutivos MV e VF, iguais à distância DE.

O ponto F é o foco, V, o vértice e M um dos pontos da diretriz da parábola. Tiremos pelo ponto M uma perpendicular AB à reta MX; essa perpendicular é a diretriz.

Com êsses elementos construamos a parábola.

Problema 170. — *Construir uma parábola conhecendo-se a diretriz, uma tangente e o ponto de contato.*

Seja MN a diretriz, TG a tangente, e G o ponto de contacto (fig. 523). Abaixemos do ponto G uma perpendicular sôbre a diretriz, e do ponto A uma outra sôbre a tangente. Como o ponto A é simétrico ao foco, basta tomar $BF = BA$.

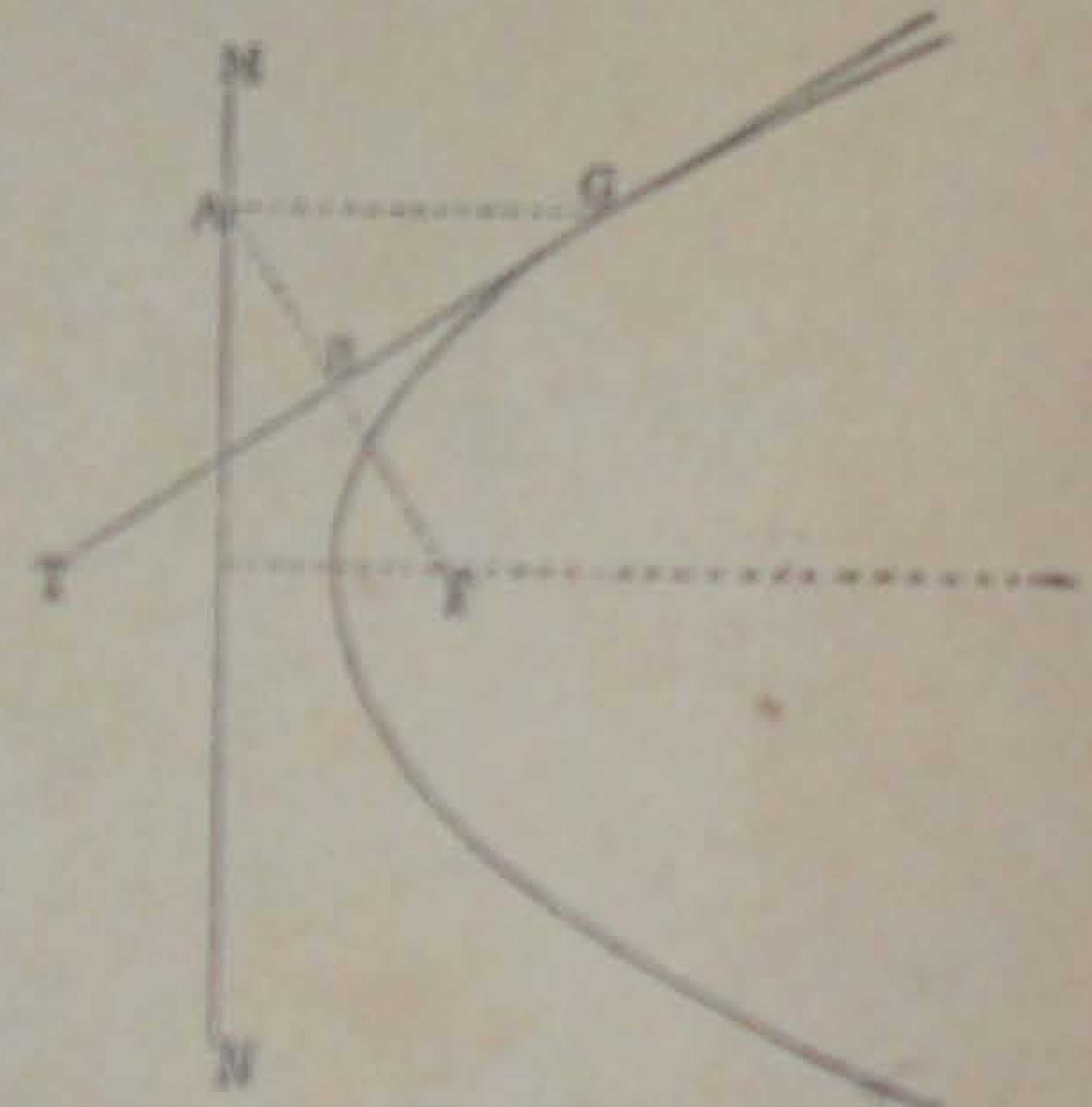


Fig. 523

Com estes elementos (fóco e diretriz) construimos a parábola.

Problema 171. — *Traçar uma tangente à parábola num ponto dado da curva.*

Seja M o ponto dado na parábola (fig. 524).

Façamos $FB = FM$ e tracemos a reta que passa por B e M, e teremos a tangente pedida.

Outro processo. — Abaixemos do ponto M a perpendicular ME sôbre a diretriz e unamos E a F; a tangente será a perpendicular traçada pelo meio de FE.

Problema 172. — *Traçar uma tangente à parábola por um ponto exterior.*

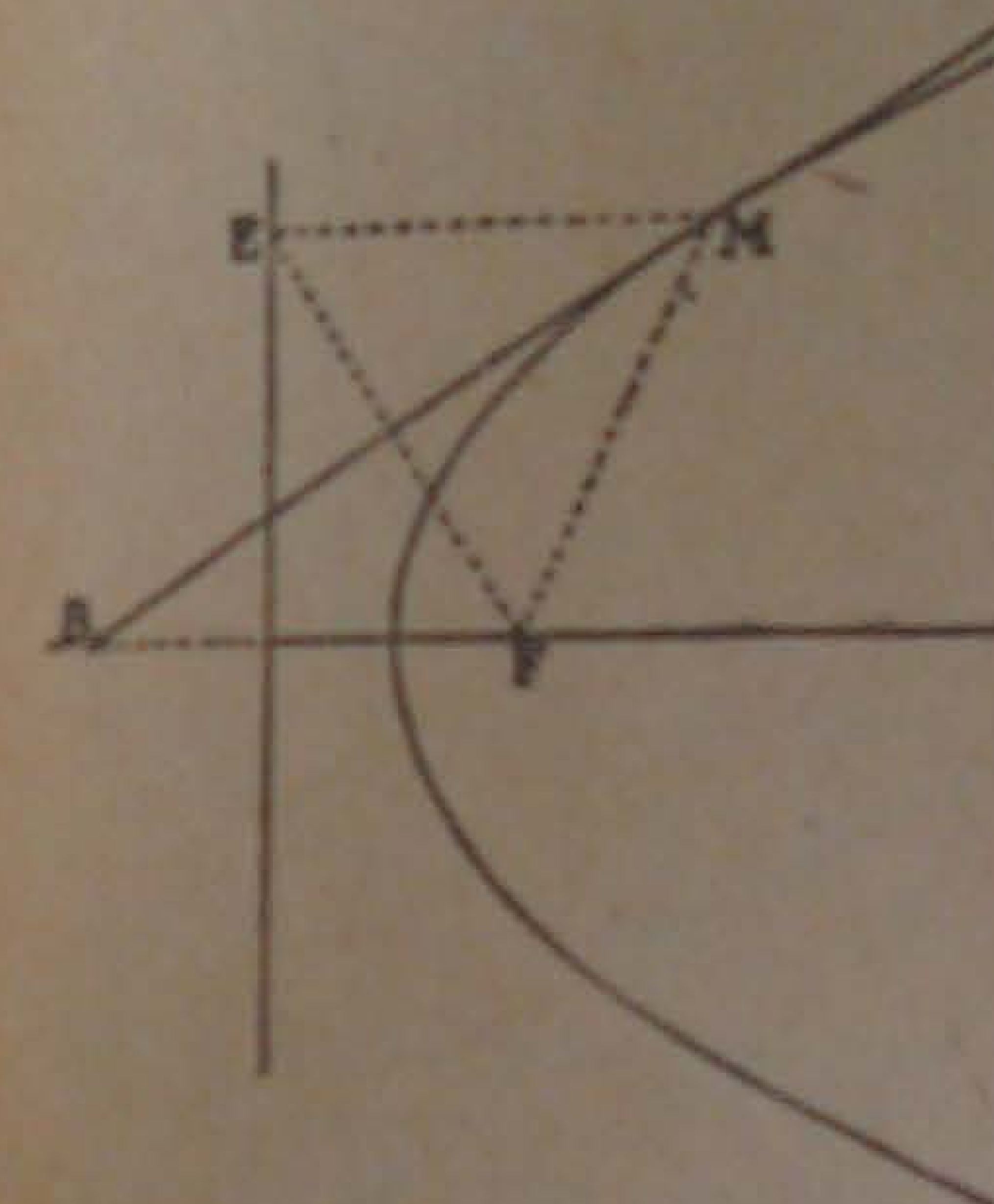


Fig. 524

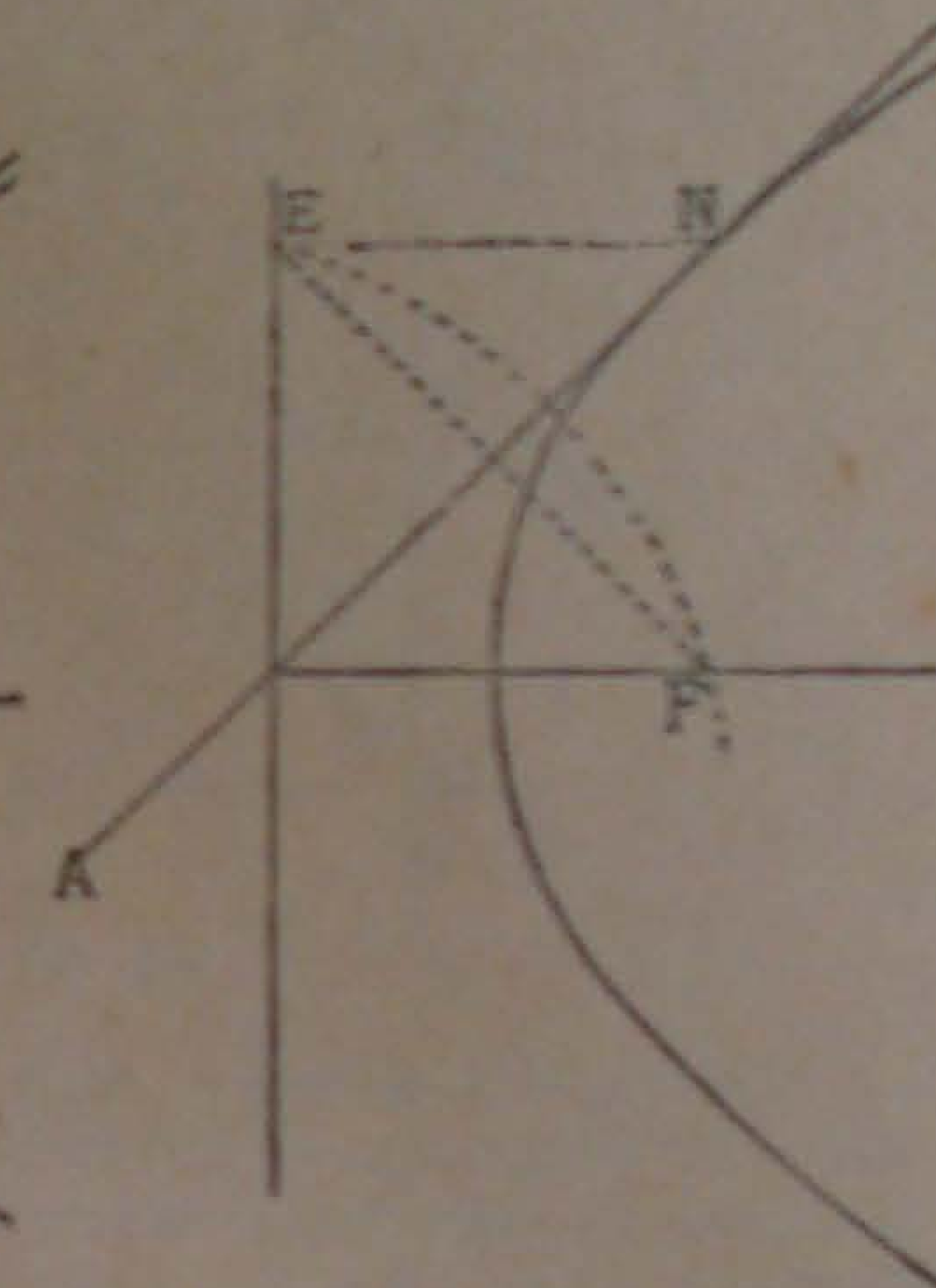


Fig. 525

Seja A o ponto exterior (fig. 525).

Do ponto A, como centro e AF como raio, descrevamos um arco que determinará o ponto E na diretriz.

Tiremos a reta EF e do ponto A abaixemos uma perpendicular sôbre ela. Esta perpendicular será a tangente pedida.

O ponto de contacto N é determinado pela intersecção desta perpendicular com a reta EN paralela ao eixo.

Nota. — Para que este problema possa ter solução é preciso que a distância do ponto A à diretriz seja menor que o raio do círculo descrito do ponto A; isto é, menor que AF.

Problema 173. — *Traçar uma tangente à parábola e que seja paralela a uma reta dada.*

Seja F o foco da parábola e MN a reta dada (fig.526).

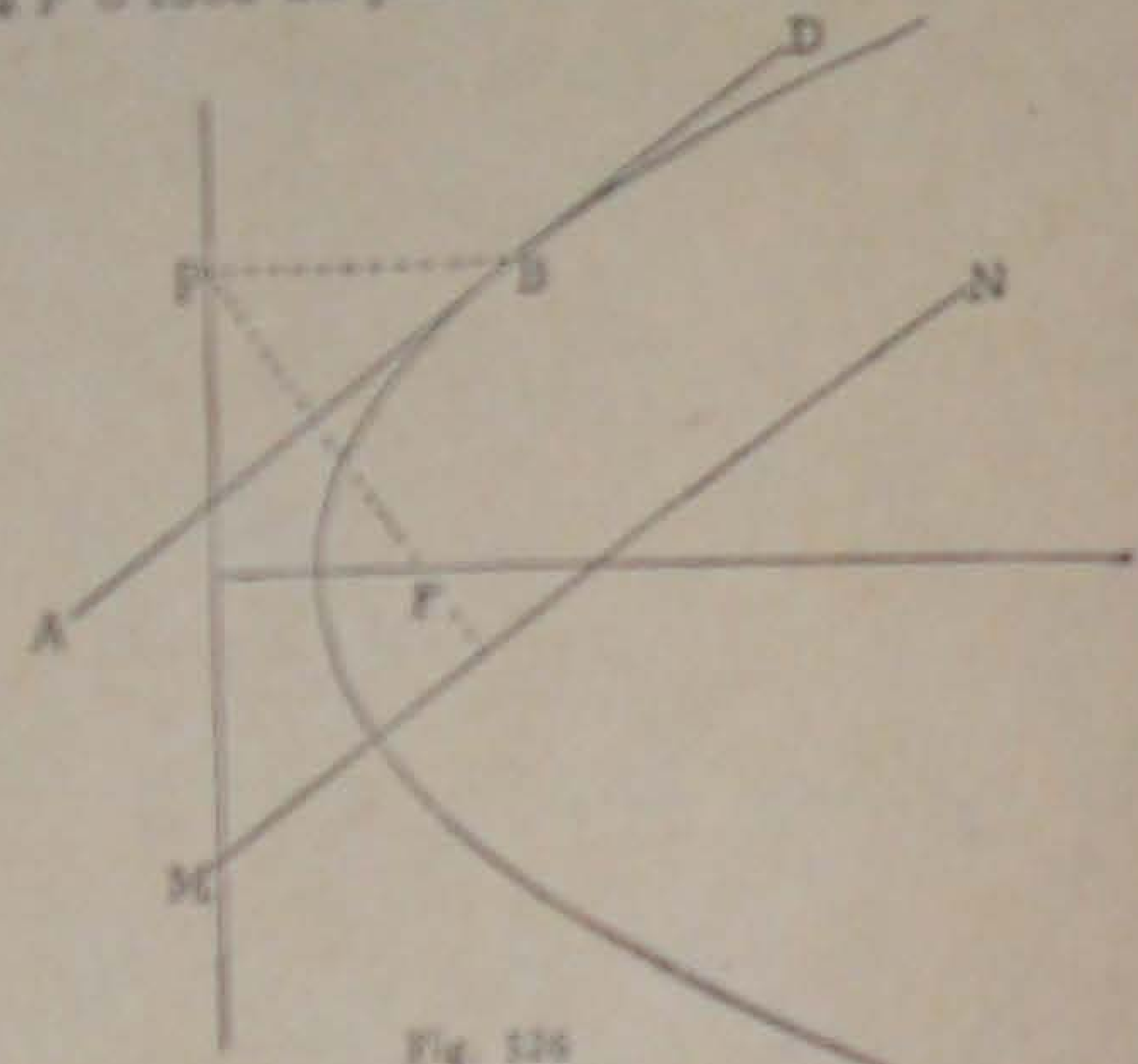


Fig. 526

Do foco abaixemos uma perpendicular sôbre a reta MN e prolonguemo-la até encontrar a diretriz no ponto P; levantemos uma perpendicular AD pelo meio de FP; esta perpendicular será a tangente pedida.

O ponto de contacto B será determinado pela intersecção desta tangente com uma paralela ao eixo, tirada do ponto P.

O problema seria impossivel se a reta MN fosse paralela ao eixo; em qualquer outro será sempre possivel.

Problema 174. — *Sendo dado um arco da parábola, determinar seu eixo, seu foco e sua diretriz.*

Seja BAC o arco de parábola (fig. 527).

Tracemos nesta curva duas cordas paralelas BC e DE e façamos passar pelos meios dessas cordas uma reta que é o diâmetro da curva de extremidade A; tomemos no prolongamento deste diâmetro uma distância $AP = AG$ e liguemos P a B e a C; estas retas serão tangentes à parábola nos pontos B e C.

Conhecidas estas duas tangentes e os pontos de contacto, tracemos, por B e C, as paralelas ao diâmetro, BH e CJ. Façamos os ângulos $PBF = MBH$ e $PCF = JCN$; determinamos, assim, o foco F, pelo qual tracemos FX paralelamente a PG; FX é o eixo da curva.

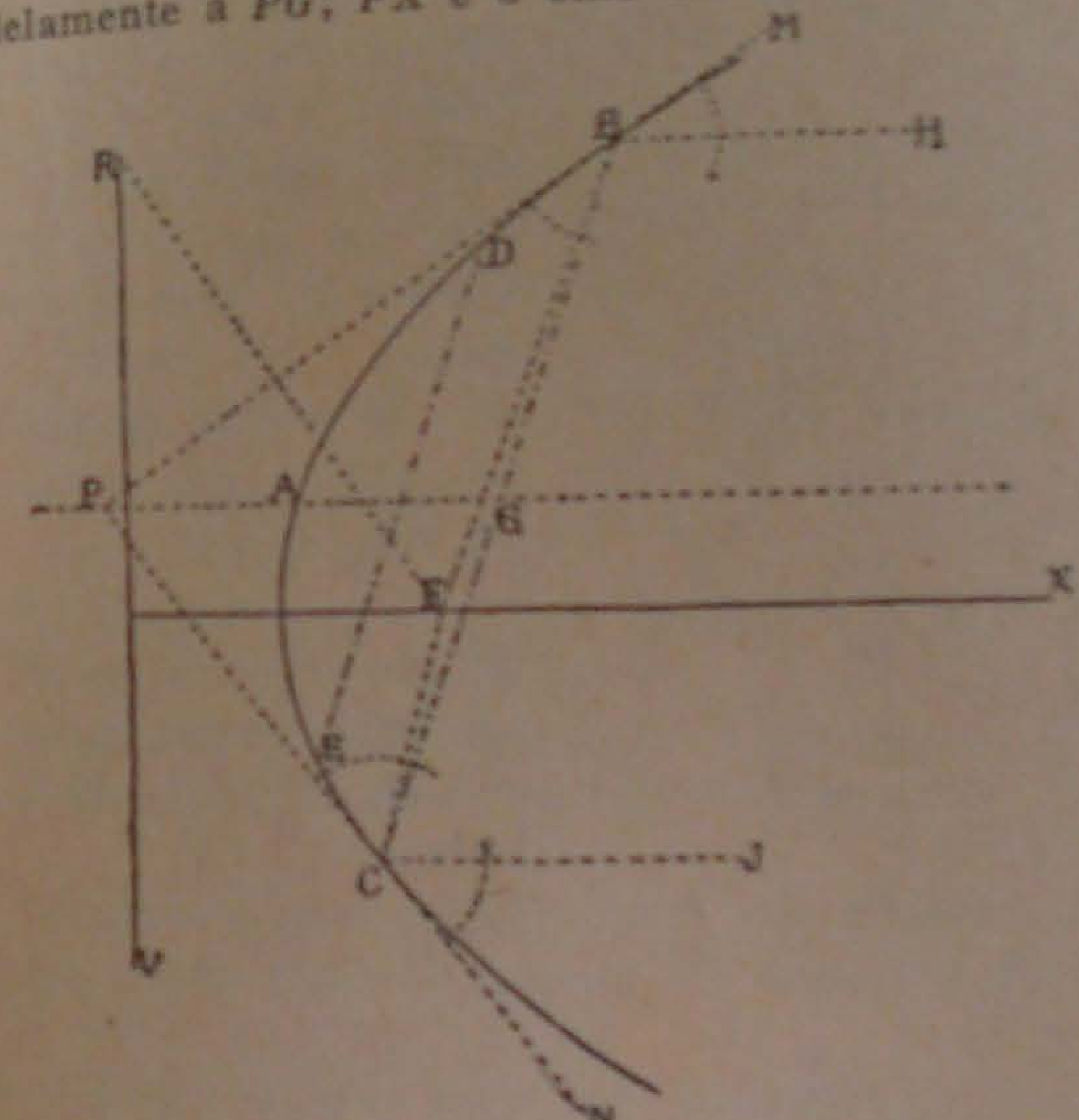


Fig. 527

Para ter a diretriz tomemos o ponto R simétrico ao ponto F em relação à tangente PM e tracemos de R a reta RV perpendicular a FX.

HIPÉRBOLE

Hipérbole é a curva, plana, composta de dous ramos, na qual é constante a diferença das distâncias de qualquer de seus pontos a dous pontos fixos chamados *focos* (fig. 528).

Os segmentos de reta que ligam os focos a qualquer ponto da curva chamam-se *raios vetores*.

A distância entre os focos é a *distância focal*.

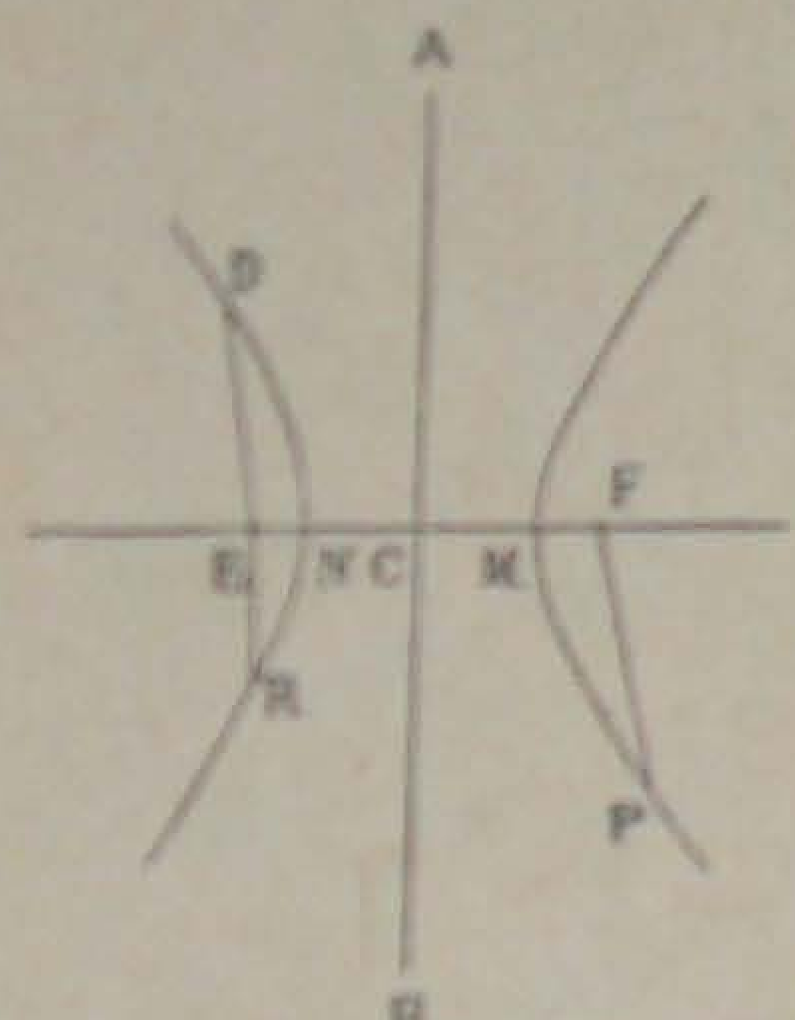


Fig. 528

A hipérbole tem dois eixos: um que passa pelos focos — *eixo transverso*; outro perpendicullar a êste no meio da distância focal—*eixo não transverso*.

O ponto de intersecção dos eixos é o *centro* da hipérbole.

Os pontos de intersecção dos ramos da curva com o eixo transverso são os *vértices* da hipérbole.

À porção do eixo transverso compreendida entre os vértices da curva dá-se o nome de *eixo real*.

O comprimento do eixo real é igual à diferença constante dos raios vetores do mesmo ponto da curva.

Chamam-se *assíntotas* da hipérbole duas retas que passam pelo centro da hipérbole, fazendo com o eixo transverso um mesmo ângulo e tal que os dois ramos da curva delas se aproximam cada vez mais, sem, todavia, nunca as encontrar.

Tangente é qualquer reta situada no plano da curva, e que só tem com esta um ponto comum (*ponto de contacto*).

Circunferência diretora da hipérbole é a de raio igual ao eixo real, e tem o centro em qualquer dos focos.

Uma hipérbole é *equilátera* quando as assíntotas são bissetrizes dos ângulos formados pêlos eixos.

Na fig. 528 os pontos E e F são os focos; N e M, os vértices; C, o centro; a reta EF, o eixo transverso; AB é o eixo não transverso; FP, ED, ER são raios vetores; EF é a distância focal; NM a diferença constante ou eixo real.

PROBLEMAS

Problema 175. — *Traçar uma hipérbole com o compasso, dados os focos e os vértices.*

Tracemos uma reta indefinida; marquemos os focos E e F (fig. 529); M e N os vértices da hipérbole.

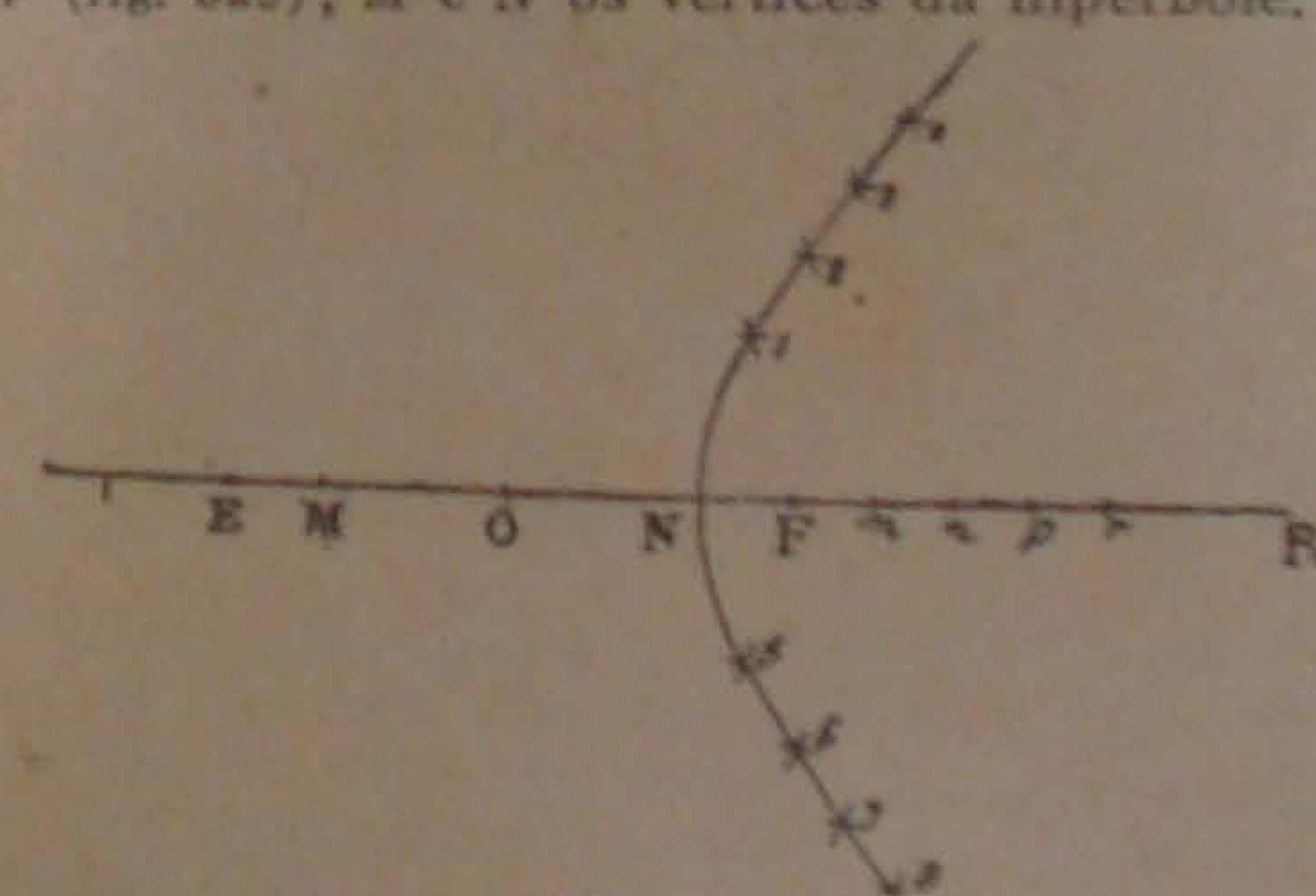


Fig. 529

Dividamos MN ao meio: o ponto O será o centro da hipérbole. Marquemos, a partir de F para R, as distâncias Fm, mn, np, pr iguais entre si. Do ponto F como centro e com os raios mN, nN, pN, rN, descrevamos arcos de um e outro lado do eixo transverso; do ponto E e com raios iguais a mM, nM, pM, rM, determinemos os pontos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 8, os quais marcam a passagem de um ramo da hipérbole.

Procedamos de modo inverso em relação aos focos E e F e obteremos o outro ramo da hipérbole.

Problema 176. — *Traçar uma hipérbole de um movimento contínuo conhecendo-se os focos e a diferença constante dos raios vetores de cada ponto* (comprimento do eixo real).

Sejam MN a diferença constante, E e F os focos (figura 530).

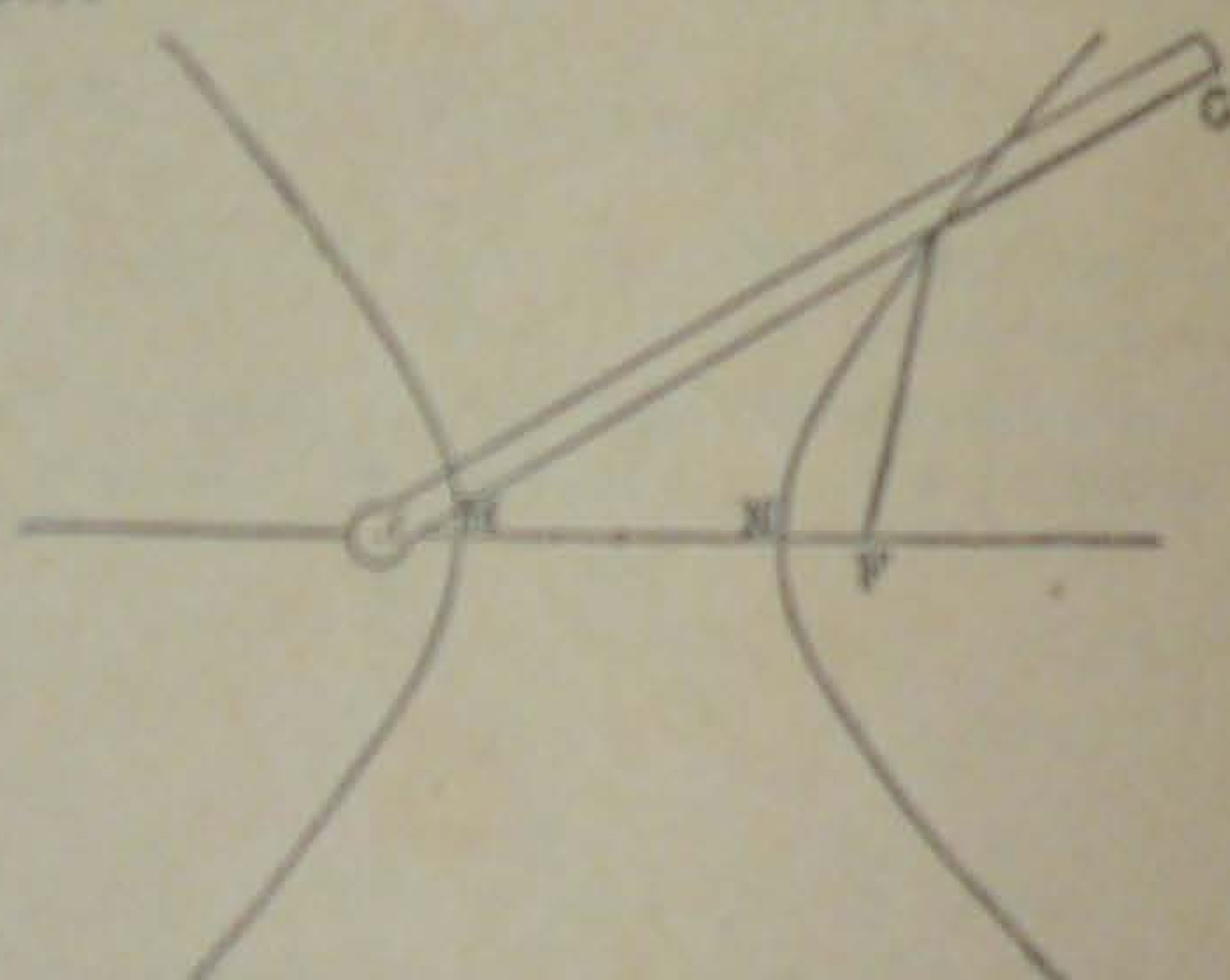


Fig. 530

Descrevamos primeiro o ramo cujos pontos estão mais próximos de F do que de E. No foco E fixemos um prego, parafuso ou alfinete, ao redor do qual faremos girar uma régua EG de comprimento maior que a distância focal; na extremidade dessa régua fixemos um cordel cujo comprimento seja o da régua menos o do eixo real. A outra extremidade do cordel será fixada no ponto F; se fizermos girar a régua ao redor do ponto E e ao mesmo tempo mantivermos um lapis junto à régua e es-

ticando o cordel, a ponta do lapis descreverá o arco da hipérbole.

O outro ramo se obtém procedendo de modo inverso em relação a E e F.

Problema 177. —*Traçar a tangente à hipérbole em um ponto da curva.*

M é o ponto dado na hipérbole (fig. 531).

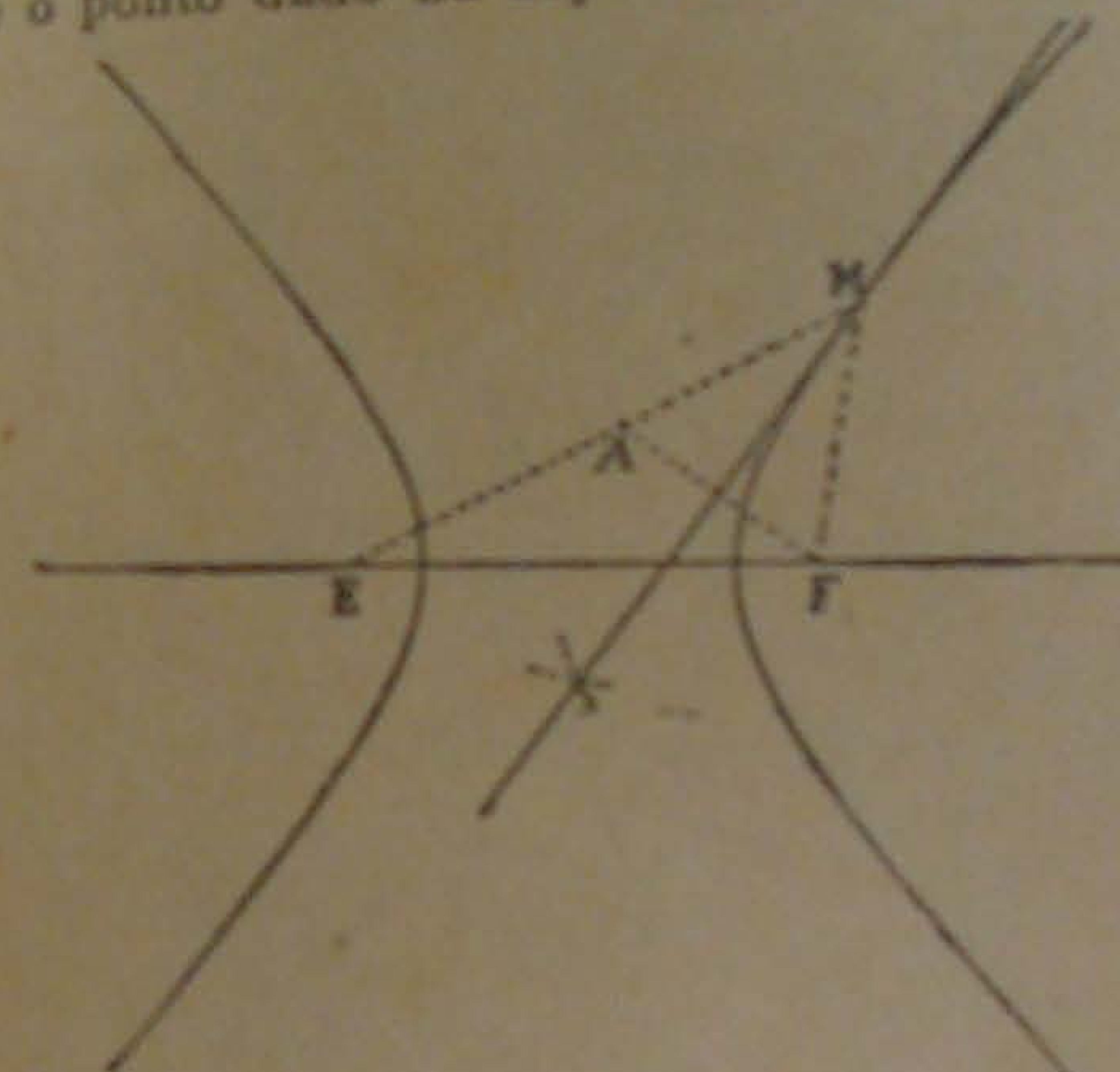


Fig. 531

Tracemos os raios vetores (EM e FM) do ponto de contacto; a bissetriz do ângulo EMF será a tangente pedida.

Para tirarmos essa bissetriz, poderemos marcar $MA = MF$, depois unir A a F e traçar uma perpendicular pelo meio de AF.

Problema 178. — *Traçar uma tangente à hipérbole por um ponto exterior.*

Seja P êste ponto (fig. 532); do ponto E, como centro, com um raio igual ao eixo real, descrevamos uma circunferência; do ponto P, como centro, e PF como raio, descrevamos um arco que corte aquela circunferência nos pontos H e N; tracemos o segmento HF e abaixemos sôbre êle, do ponto P, uma perpendicular; esta será a tangente pedida.

O ponto de contacto M é determinado pela interseção desta tangente com o prolongamento da reta EH.

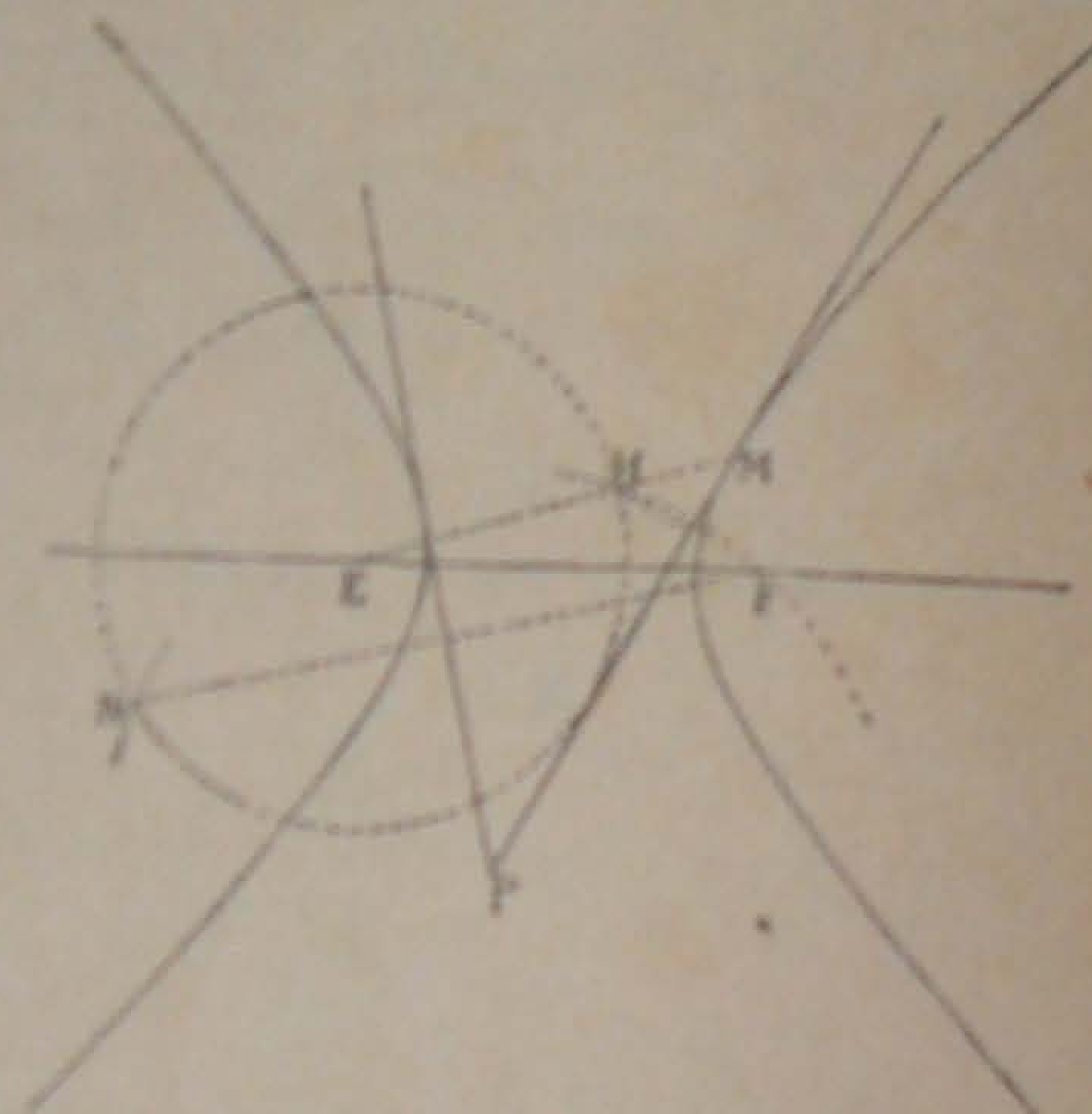


Fig. 532

Do ponto dado, P, ainda se pode tirar outra tangente: é a perpendicular baixada de P sôbre NF.

Problema 179. — *Traçar uma tangente à hipérbole e que seja paralela a uma reta dada.*

AB é a reta dada (fig. 533).

Do foco E como centro, com raio igual ao eixo real, descrevamos a *circunferência diretora*; do foco F tracemos uma perpendicular a AB; esta cortará o círculo em dois pontos M e N; pelos meios de FM e FN tracemos paralelas a AB; estas paralelas serão as tangentes pedidas.

Os pontos de contacto, R e V, serão os pontos de in-

tersecção das tangentes com os prolongamentos das retas EM e NE.

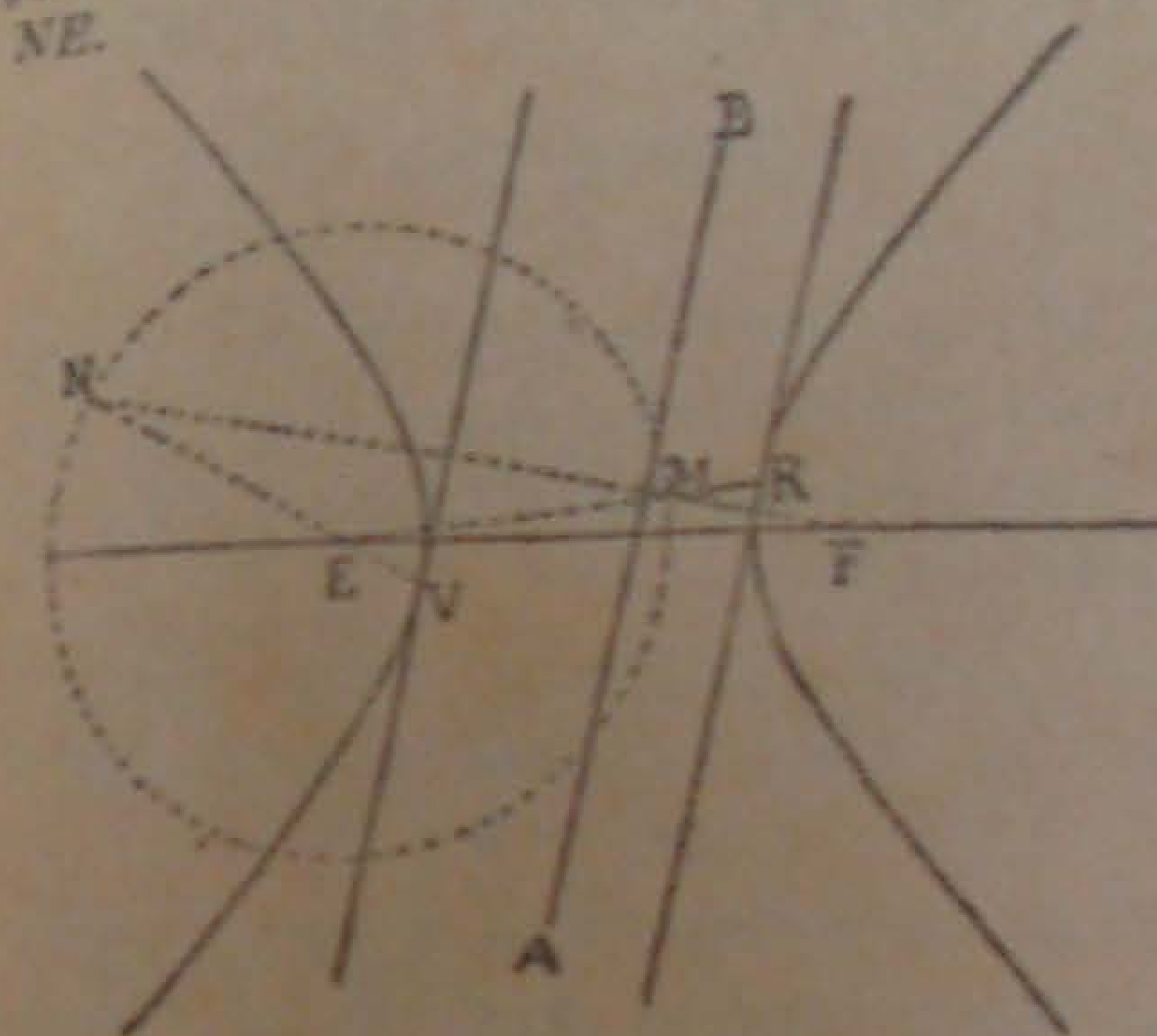


Fig. 533

Problema 180. — *Traçar as assíntotas de uma hipérbole.*

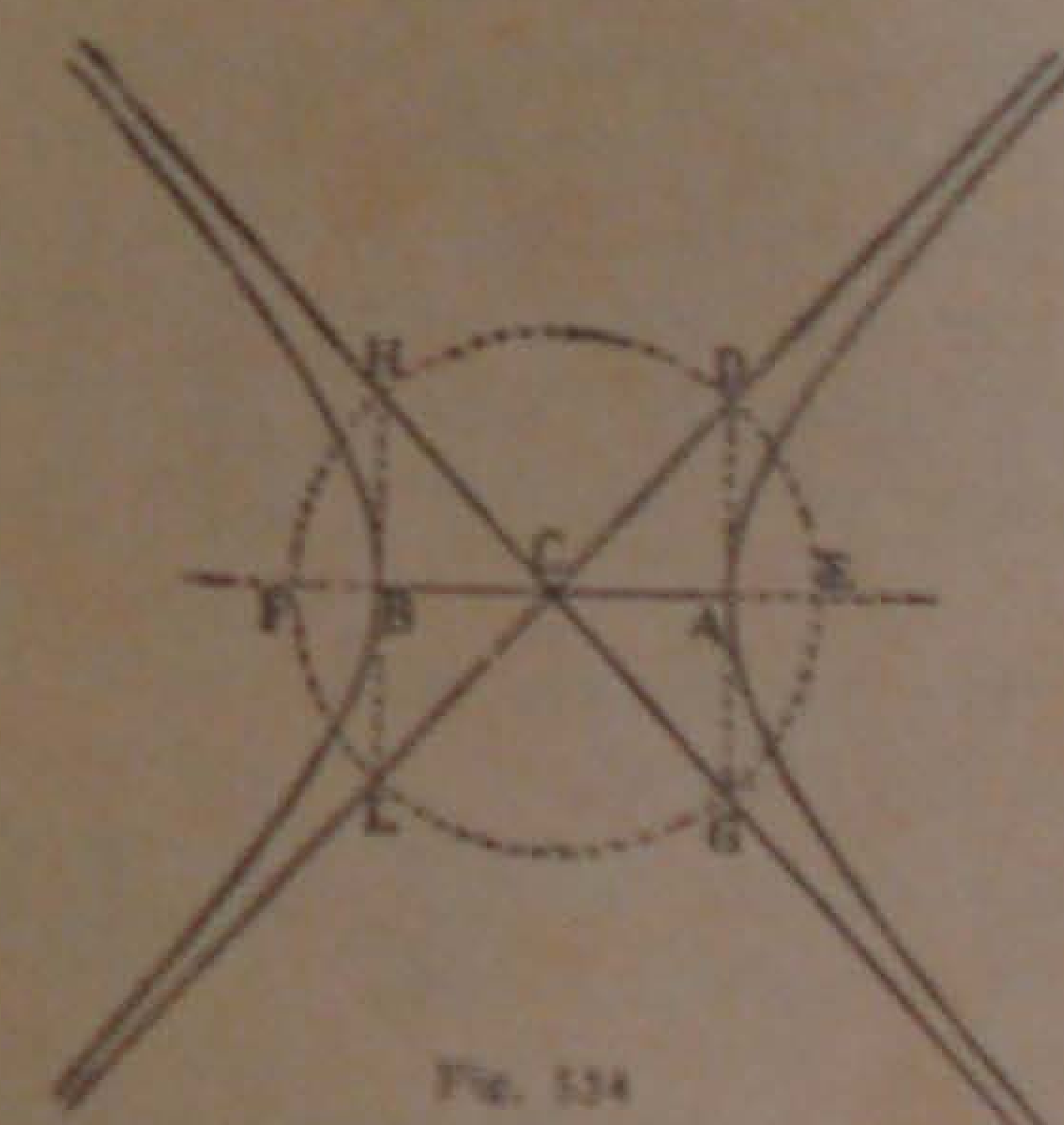


Fig. 534

Descrevamos do ponto C uma circunferência com o raio CF (fig. 534)) e pelos pontos A e B façamos passar perpendiculares ao eixo real.

Estas perpendiculares determinam na circunferência os pontos *D, G, H, L,* por onde passam as assintotas.

ESPIRAL

A curva plana descrita por um ponto que gira em torno de um ponto fixo e se afasta dele progressivamente, chama-se **espiral.** O ponto fixo chama-se *polo* da espiral.

A espiral mais simples e mais conhecida é a de Arquimedes, cujas propriedades foram descobertas por este ilustre geômetra.

A espiral de Arquimedes é a curva plana descrita por um ponto que se desloca em movimento uniforme sôbre uma semi-reta enquanto esta gira uniformemente em torno da sua origem. Esta é o *polo* da espiral. A porção da curva que corresponde a uma rotação completa (4 retos) chama-se *espira.* O segmento de reta que liga o polo a um ponto qualquer da curva é um *raio vetor.* A distância medida sôbre um raio vetor entre duas espiras consecutivas é constante e se chama *passo da espiral.*

A mola que faz mover as rodas de um relógio tem a forma de espiral.

O ornamento em espiral é muito empregado nos trabalhos de ferro forjado em grades, suportes, portões, etc.

Empregam-se também as curvas ânalogas à espiral, chamadas *falsas espirais* com 2, 3, 4, 5 ou mais centros.

PROBLEMAS

Problema 181. — *Traçar uma espiral de Arquimedes.*

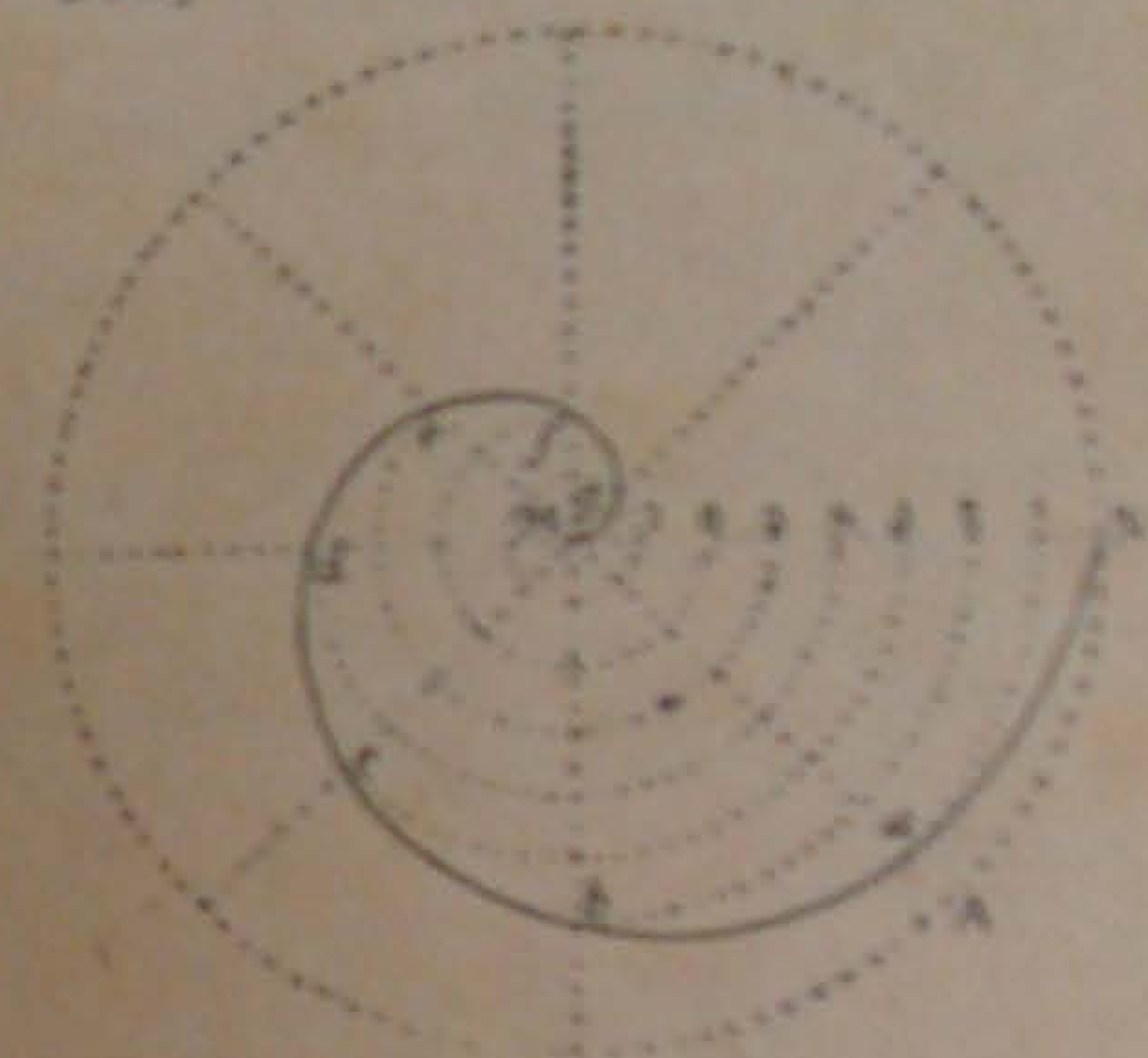


Fig. 535

Seja *M* o polo e *MN* (fig. 535) o passo da espiral; tracemos a circunferência de raio *MN* e dividamo-la em um número arbitrario de partes iguais; tiremos raios pelos pontos de divisão e dividamos um dêles, *MN* por exemplo, no mesmo número de partes em que foi dividida a circunferência.

Façamos centro em *M* e com um raio *M*1 descrevamos um arco que determine no raio *MA* o ponto *a* da curva.

Depois, sempre, com o centro em *M* e com os raios *M*2, *M*3, *M*4, *M*5, *M*6, *M*7 descrevamos os arcos 2*b*, 3*c*, 4*d*, 5*e*, 6*f*, 7*g* cujos pontos extremos *b, c, d, e, f, g* indicam a passagem da espiral, que se traçará a mão livre.

Quanto maior fôr o número de partes em que se dividir a circunferência, melhor se traçará a espiral.

Problema 182. — *Traçar uma falsa espiral de dous centros.*

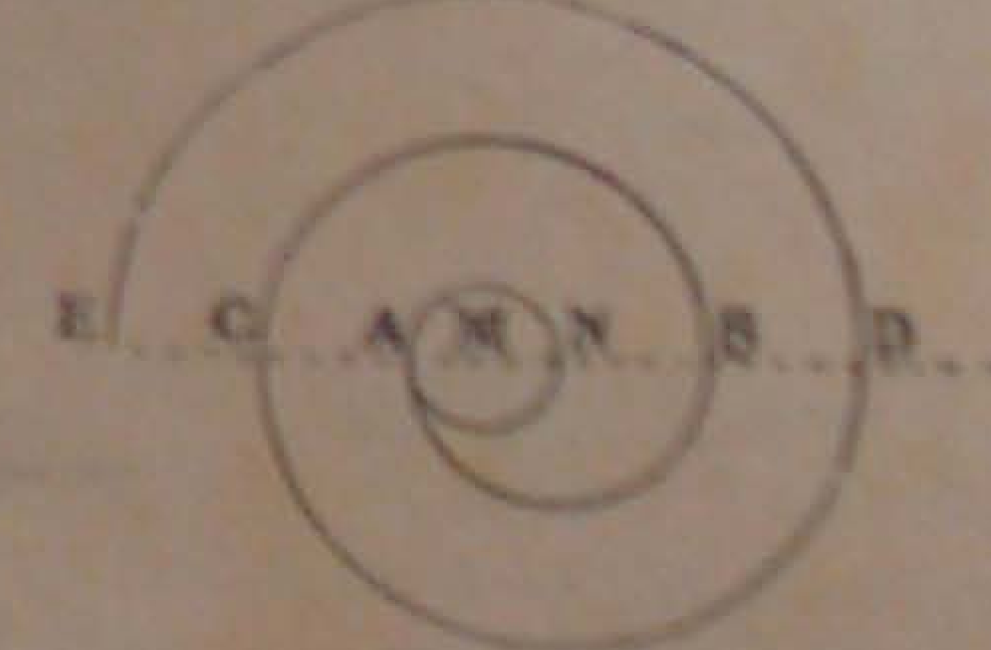


Fig. 536

Tracemos uma reta indefinida (fig. 536) e marquemos sôbre ela os pontos *M* e *N*, que vão ser os centros da espiral. Façamos centro em *M* e com um raio *MN* tracemos a semi-circunferência *AN*. Façamos centro em *N* e com um raio *NA* descrevamos a semi-circunferência *AB*; centro novamente em *M*, descrevamos a semi-circunferência *BC*; e assim por diante, fazendo centro em *N* e *M*, descrevendo as semi-circunferências *CD*, *DE*, etc.

Problema 183. — *Traçar uma falsa espiral de três centros.*

Tracemos um triângulo equilátero *ABC* (fig. 537) e prolonguemos-lhe os lados.

Façamos centro em *A* e, com raio *AC*, descrevamos o arco *CD*; centro em *B*, com raio *BD*, descrevamos o arco *DE*; em seguida em *C*, com o raio *CE*, descrevamos o arco *EF*; e assim por diante, fazendo centro sucessivamente em *A*, *B* e *C*, tomemos como raios as distâncias de cada um dêsses centros à extremidade do último arco descrito.

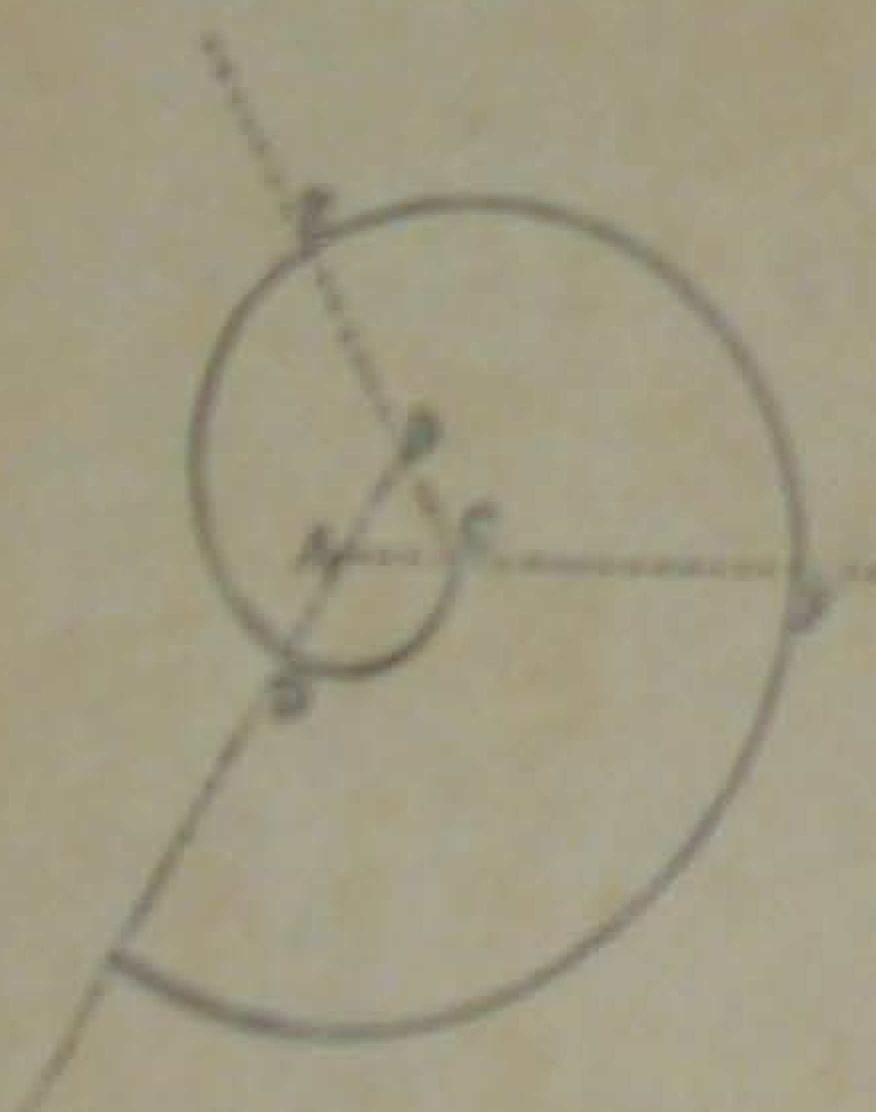


Fig. 537

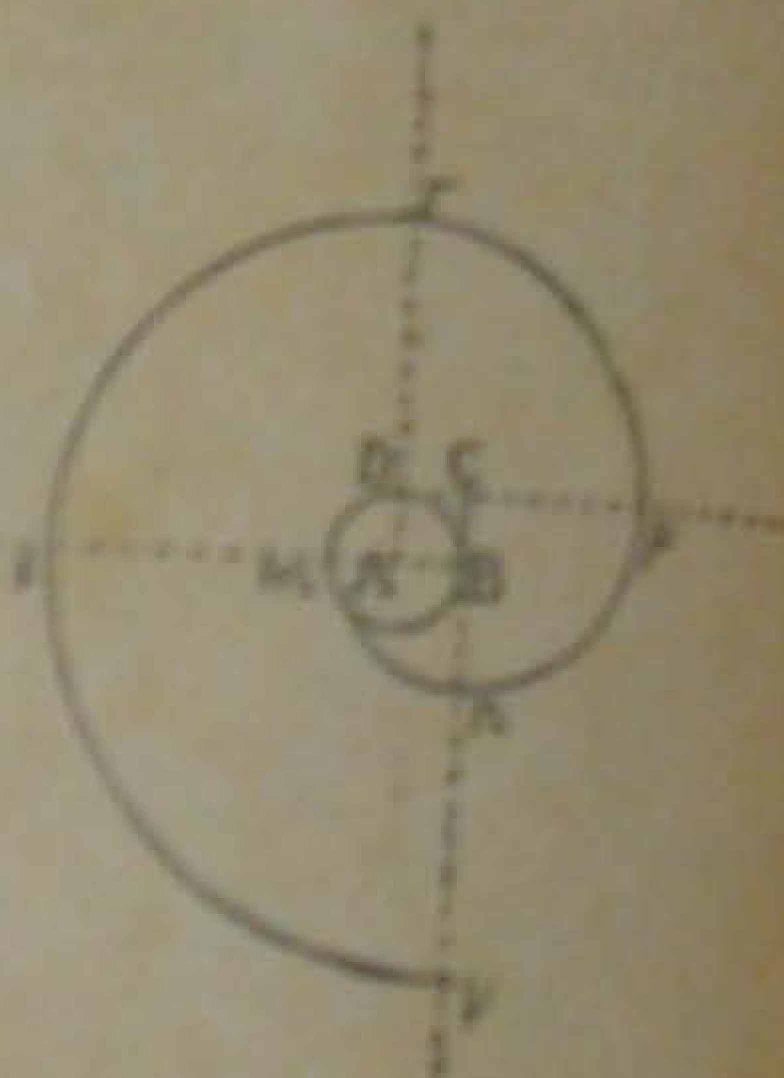


Fig. 538

Problema 184. — *Traçar uma falsa espiral de quatro centros.* Tracemos o quadrado *ABCD* (fig. 538) e prolonguemos-lhe os lados.

Façamos centro em *A* e descrevamos a semi-circunferência *BDm*; o ponto *B* é o centro do arco *mn*, o ponto *C* é o centro do arco *np*; *D* é o centro do arco *pr*; *A* é novamente centro do arco *rs* e assim por diante. Os

pontos *A*, *B*, *C* e *D* são os centros dos arcos que formam a espiral.

Observação: — Segundo a mesma marcha, podemos traçar uma falsa espiral de 5, 6, 7 e mais centros, partindo dos polígonos regulares convexos de igual número de lados.

HÉLICE

Chama-se **hélice** a curva formada sôbre a superfície cilíndrica por um lado de um ângulo que se enrola no cilindro, enquanto o outro lado se enrola no círculo da base do cilindro (fig. 539).

São muito comuns as molas em forma de hélice (fig. 540). Mesmo na natureza encontramos trepadeiras, como a corriola (fig. 541), que se desenvolvem em hélice.

Fig. 539

Fig. 540

Fig. 541

A porção da hélice compreendida entre duas passagens consecutivas da curva pela mesma geratriz do cilindro é uma *espira* da hélice; o segmento da geratriz entre duas passagens consecutivas é o *passo* da hélice.

Observação — É importante assinalar que todas as curvas até aqui estudadas (círculo, elipse, hipérbole, parábola, oval, espiral, etc.), são curvas planas; a hélice, entretanto, não tem todos os seus pontos no mesmo plano e por isso se diz que a hélice é uma curva *reversa*.

QUESTIONÁRIO

1. Que é elipse?
2. Cite astros que em seus movimentos descrevem elipses.
3. Quantos eixos admite a elipse e quais são?
4. Que é distância focal da elipse e como é ela representada?
5. Que são raios vetores da elipse?
6. Quantas posições pode ocupar uma reta em relação à elipse?
7. Qual a propriedade da tangente à elipse?
8. De que depende ser a elipse arredondada ou alongada?
9. Na elipse, que exprime a razão $\frac{c}{a}$?
10. Quando a excentricidade da elipse é nula a que se reduz ela?
11. De que se compõe uma falsa elipse e que outro nome se lhe dá?
12. Que é oval?
13. Quais são os eixos da oval?
14. Que é uma parábola?
15. Defina os seguintes elementos da paráboda: foco, diretriz, eixo, vértice, raio vetor, parâmetro e diâmetro.
16. Que é hipérbole?
17. Defina, em relação à hipérbole: focos, distância focal, raios vetores e vértices.
18. Quantos eixos tem a hipérbole e quais são?
19. Que são assintotas da hipérbole?
20. Que é circunferência diretora da hipérbole?
21. Quando se diz que a hipérbole é equilátera?
22. Que é espiral de Arquimedes?
23. Defina polo e passo da espiral de Arquimedes.
24. Que curvas são chamadas falsas espirais?
25. Que é uma hélice?
26. Porque se diz que a hélice é uma curva reversa?

ÍNDICE

N.º [illegible] — Oficinas Gráficas da Livraria Francisco Alves

Cr$ 15.00