Desenho Linear Geométrico

compilados por

Policeno.

ELEMENTOS

DE

DESENHO LINEAR GEOMETRICO

COMPILADOS POR

POLUCENO

RIO DE JANEIRO
Companhia Typographica do Brazil, rua dos Invalidos, [illegible]

189[illegible]

Começa-se a considerar o desenho não só como uma arte agradavel mas tambem como uma especie de escripta universal da forma, que falla aos olhos. Nenhuma outra, em certos casos, lhe póde supprir.

O desenho desenvolve o gosto pelo bello da arte, presta um grande auxilio ás industrias, e ajunta-lhes a belleza.

Assim, pois, é, como diz o Sr. L. de Henriet, no seu Curso racional de desenho: «As exposições universaes nos teem mostrado, que nas lutas pacificas que se estabelecem actualmente entre as nações, que o futuro, isto é, o bem estar ou a riqueza pertence áquellas que, capazes de actividade de iniciativa bem util, guardam a superioridade do gosto.»

Por isso, as nações esforçam-se por estender os conhecimentos do desenho a todas as classes sociaes.

Por ser difficil tal emprehendimento, em vista da difficuldade do desenho, e sendo a comprehensão das linhas que na natureza limitam as superficies dos corpos mais ou menos complicadas, e muito irregulares, as nações limitam a dar a todas as classes sociaes os conhecimentos do desenho das figuras elementares geometricas, por serem as linhas dessas figuras, as mais simples, muito

Começa-se a considerar o desenho não só como uma arte agradavel mas tambem como uma especie de escripta universal da forma, que falla aos olhos. Nenhuma outra, em certos casos, lhe póde supprir.

O desenho desenvolve o gosto pelo bello da arte, presta um grande auxilio as industrias, e ajunta-lhes a belleza.

Assim, pois, é, como diz o Sr. L. de Henriet, no seu Curso racional de desenho. «As exposições universaes nos tem mostrado, que nas lutas pacificas que se estabelecem actualmente entre as nações, que o futuro, isto é, o bem estar ou a riqueza pertence áquellas que, capazes de actividade de iniciativa bem util, guardam a superioridade do gosto.»

Por isso, as nações esforçam-se por estender os conhecimentos de desenho a todas as classes sociaes.

Por ser difficil tal emprehendimento, em vista da difficuldade do desenho, e sendo a comprehensão das linhas que na natureza limitam as superficies dos corpos mais ou menos complicadas, e muito irregulares, as nações limitam a dar á todas as classes sociaes os conhecimentos do desenho das figuras elementares geometricas, por serem as linhas dessas figuras, as mais simples, meios

ELEMENTOS

DE

DESENHO LINEAR GEOMETRICO

irregulares que as da natureza, e como ellas são definidas tornam tambem de uma linguagem concisa e energica.

Sabendo-se desenhar estas figuras nas posições das que lhes servem de modelos, tem-se adquirido os conhecimentos de desenho, precisos para grande numero de applicações nos misteres da vida, e se está nos casos de comprehender e começar a desenhar as linhas que limitam os objectos da natureza, não obstante serem ellas muito complicadas. A vista exercitada nas formas geometricas, facilmente decompõe ás da natureza n'aquellas, tomando em primeiro logar o conjuncto e depois os detalhes dos contornos do objecto.

O estudo de desenho educa ao mesmo tempo a vista e a mão.

O desenho geometrico não é sómente a base de outros desenhos, é tambem um auxiliar ás sciencias como, por exemplo, a geometria demonstrativa, a physica, a geographia, etc.

ELEMENTOS

DE

DESENHO LINEAR GEOMETRICO

Desenho é a arte de representar em uma superficie os objectos, imitando por meio de claro-escuro os seus contornos e relevo.

Divide-se o desenho em desenho imitativo e desenho de approximação rigorosa.

Fazem parte do desenho imitativo, os de figura humana, paisagem, etc.

Fazem parte do desenho de approximação rigorosa, os de architectura, machinas, etc.

O desenho imitativo desenvolve o gosto pelo bello da arte, o rigoroso é um auxiliar ás industrias.

Desenho linear é o que se occupa das figuras elementares geometricas; e é a base de todas as especies de desenhos.

Divide-se o desenho linear, em linear á vista e linear geometrico ou simplesmente desenho geometrico.

Desenho linear á vista é o que se occupa das figuras elementares geometricas em suas representações sem auxilio de instrumento de precisão.

Desenho linear geometrico occupa-se das figuras elementares geometricas, em suas representações, definições, propriedades e soluções dos problemas por processos graphicos.

No linear geometrico empregam-se instrumentos de precisão nas construcções proprias da Geometria ; o seu estudo deve ser precedido ou simultaneo do de uma parte da Geometria pratica.

Geometria é a sciencia que se occupa das propriedades das figuras e das medidas de extensão.

Corpo é tudo o que occupa uma porção limitada do espaço infinito.

Chama-se volume a extensão limitada de um espaço ou o logar occupado pelo corpo.

Superficie de um corpo é o seu limite ou o logar que o separa do espaço infinito.

Quando duas superficies se encontram ou se cortam, o logar de intersecção chama-se linha, e existe simultaneamente nas duas superficies.

Ponto é logar de encontro ou de intersecção de duas linhas, e tambem os extremos de uma linha.

O ponto pertence ao mesmo tempo ás linhas que o determinam.

Chama-se figura, ao volume, superficie e linha quando se attende ás suas formas, attendendo-se ás suas grandezas tomam o nome de extensão.

Comprimento é a extensão de uma linha, área é a extensão de uma superficie ; tem comprimento e largura.

Volume é a extensão de um espaço ; tem comprimento, largura e altura.

A altura tambem denomina-se profundidade, e sendo diminuta, espessura.

As grandezas d'estas differentes extensões são avaliadas ou medidas em unidade de volume, de superficie e de linha.

O ponto não tem figura nem grandeza. Por convenção representa-se um ponto em uma superficie dada, por

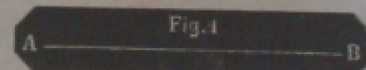
meio de uma pequena marca ou vestigio de tinta, lapis, etc., e junto a elle se colloca uma lettra que serve para designal-o.

A linha geometrica não tem largura nem altura ; por convenção se a representa em uma superficie dada, por um traço de lapis, tinta, etc., que não póde deixar de ter alguma largura e altura.

DEFINIÇÕES DAS FIGURAS E SUAS PROPRIEDADES

Linha recta é a mais curta distancia entre dous pontos. (fig. 1).

Fig. 1



Uma linha recta designa-se por duas lettras collocadas uma em cada extremo d'ella ; *A B* indica a recta que estas lettras assignalam os seus extremos ; lê-se a recta AB.

Toda recta póde imaginar-se prolongada indefinidamente nos dous extremos.

O traço da recta chama-se sua direcção. Esta direcção é unica para cada recta.

Duas rectas distinctas não podem ter mais de um ponto commum ; tendo dous pontos communs ellas confundem-se.

Dous pontos determinam a posição de uma recta.

Chama-se linha quebrada toda a linha composta de rectas.

A linha quebrada é designada pelas lettras collocadas nos extremos das rectas de que ella se compõe. (fig. 2). *A B C D E*, lê-se, linha quebrada *A B C D E*.

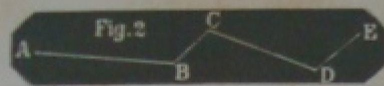


Fig. 2

Linha curva é aquella, de que nenhuma porção apreciavel é rigorosamente recta; ex: *A B C*, *A B C D* (fig. 3).

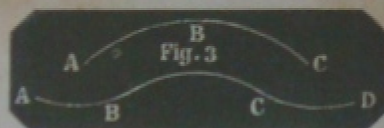


Fig. 3

Linha mixta é a composta de rectas e de curvas, ex: *A B C D E* (fig. 4).

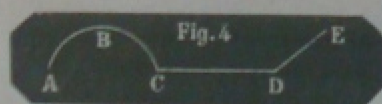


Fig. 4

A linha recta é menor que outra qualquer linha que tenha os mesmos extremos; ex: A linha recta *A B*. (fig. 5).

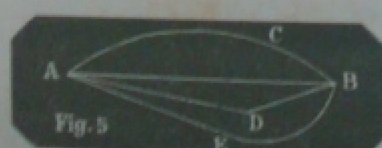


Fig. 5

é mais curta do que a linha curva *A C B*, que a quadrada *A D B* e que a linha mixta *A E B*.

SUPERFICIES

Chama-se plano ou superficie plana, uma superficie indefinida tal, que por qualquer de seus pontos se lhe póde applicar uma linha recta em todas as direcções.

Superficie quebrada é a que se compõe de superficies planas, concorrendo duas a duas.

Superficie curva é a que não contém porção alguma de superficie plana.

Chama-se figura plana a que tem todos seus pontos no mesmo plano.

Figuras rectilineas são as formadas por linhas rectas.

Chamam-se parallelas duas rectas que existindo no mesmo plano não se encontram por mais que se prolonguem em qualquer sentido. As rectas *A B*, *C D* (fig. 6).

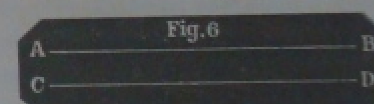


Fig. 6

são parallelas.

Duas parallelas são equidistantes em toda a sua extensão.

Por um ponto fóra de uma recta não se póde traçar mais de uma parallela a mesma recta.

CIRCULO

Circumferencia de circulo é uma linha curva, plana e fechada, cujos pontos distam todos igualmente de um ponto tomado no mesmo plano. A este ponto C (fig. 7) se dá o nome de centro.

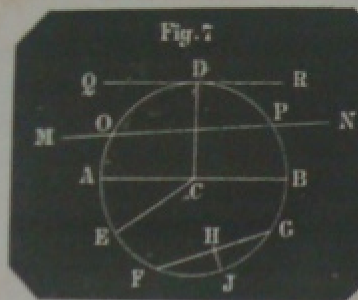


Fig. 7

Circulo é a porção de plano limitada pela circumferencia; o seu centro C é commum ao da circumferencia.

Raio é a linha que vai do centro á circumferencia; ex: CA, CE, CB; podem-se traçar tantos raios quantos se queiram. Todos os raios da mesma circumferencia são iguaes.

Diametro é a linha que passando pelo centro C termina de um lado e outro na circumferencia. Todos os diametros da mesma circumferencia são iguaes: cada um compõe-se de dous raios. O diametro AB compõe-se dos raios AC, e CB.

Qualquer diametro divide ao meio a circumferencia e o circulo.

Arco é qualquer porção de circumferencia, ex: EA, AD, etc.; o arco igual á quarta parte da circumferencia chama-se quadrante, e o igual á metade da circumferencia chama-se semi-circumferencia.

Corda é a recta que une os extremos de um arco; ex: a recta FG é uma corda. Quando a corda passa pelo centro do circulo torna-se um diametro, e é a maior corda que se póde traçar no circulo.

Para não se confundir um arco com a sua corda colloca-se um pequeno traço curvo sobre as duas lettras que designam o arco; ex: $\widehat{FG}$, lê se, arco FG; não tendo o traço curvo, ex: FG, lê-se, corda FG.

Flexa é a recta limitada por um arco e sua corda e os divide ao meio; ex: A recta HJ é flexa.

Secante é a linha MN que corta a circumferencia em dous pontos. Compõe-se a secante MN da corda OP e das partes exteriores MO, PN.

Tangente é a recta QR que tem sómente um ponto D commum com a circumferencia, o ponto D commum chama-se ponto de contacto. O raio CD que toca no ponto D de contacto não pende nem para um lado da tangente nem para o outro.

Sendo uma recta tangente á uma circumferencia, tambem esta é tangente á recta.

Sector circular é a porção do circulo limitada por um arco e os dous raios extremos; ex.: $CAOD$, CAE, etc.

Segmento circular é a porção do circulo limitada por um arco e sua corda; ex.: o segmento $FJGF$.

O segmento igual a metade do circulo chama-se semicirculo.

DIVISÃO DA CIRCUMFERENCIA

Por convenção dos geometras dividem-se todas as circumferencias em 360 partes ou arcos iguaes, que se chamam grãos; cada grão em 60 partes ou arcos iguaes, chamados minutos; cada minuto em 60 arcos iguaes chamados segundos: e assim continuando.

O grão indica-se com o signal...... $^{\circ}$
O minuto......................... $'$
O segundo........................ $''$
Etc.

Querendo-se, por exemplo indicar um arco que contém 40 grãos, 30 minutos e 8 segundos, escreve-se d'este modo 40° 30' 8'', lê-se quarenta grãos, trinta minutos e oito segundos.

A semi-circumferencia contém cento e oitenta grãos (180°).

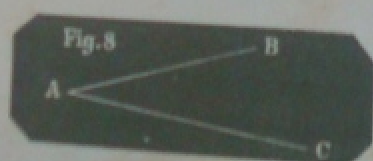
O quadrante ou quarta parte da circumferencia contém noventa grãos (90°).

A sexta parte da circumferencia tem sessenta grãos, (60°) convindo notar, que a corda d'este arco é igual ao raio do circulo a que o arco pertence.

Observação:—Nas figuras, quando uma lettra é repetida uma, duas etc., vezes, colloca-se acima e á direita da lettra o signal ' ou '' etc.; ex : *A*, *A'*, *A''* etc.; lê-se *A*, *A* linha, *A* duas linhas, etc.

ANGULOS

Duas linhas *A B*, *A C* (fig. 8) que se encontram fazem entre si uma abertura grande ou pequena, esta abertura chama-se angulo.



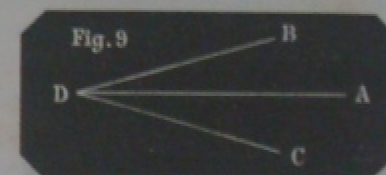
Diz-se que, angulo é a porção de um plano limitada em parte por duas linhas que se encontram, o ponto de encontro se chama vertice, e as duas linhas lados do angulo,

A grandeza de um angulo depende unicamente de sua maior ou menor abertura e não do comprimento de seus

lados, estes podem prolongar-se indefinidamente que em nada influe na grandeza do angulo.

Designa-se um angulo por tres lettras, uma em cada lado e no vertice, lendo a lettra do vertice no meio das outras duas; ex.: angulo *B A C*, (fig. 8) quando o angulo se acha isolado, póde designal-o somente pela lettra do vertice; ex.: angulo *A*.

A recta que divide um angulo em duas partes iguaes chama-se bissectriz. Um angulo não póde ter senão uma bissectriz.



A recta *D A* é bissectriz do angulo *B D C* (fig. 9).

Dous angulos são iguaes quando teem as aberturas iguaes.

Sendo desiguaes as aberturas de dous angulos, o de abertura maior é o maior angulo.

MEDIDA DOS ANGULOS

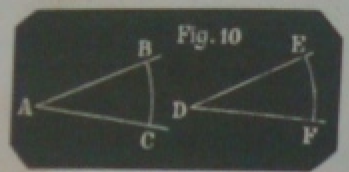
Para julgar-se rigorosamente da grandeza dos angulos recorre-se ao arco de circulo.

A medida de um angulo é o arco de circulo comprehendido entre os seus lados e descripto do vertice como centro. Em relação a este arco toma o angulo o nome de angulo central.

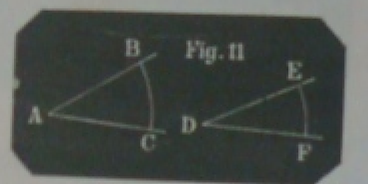
Quando os angulos centraes teem os arcos descriptos com o mesmo raio (a mesma abertura de compasso): resulta que:

Angulos centraes iguaes correspondem arcos iguaes; ao maior angulo central corresponde maior arco.

São iguaes os angulos centraes $B\,A\,C$, $E\,D\,F$ (fig. 10) por terem os arcos $B\,C$, $E\,F$ iguaes.



O angulo $B\,A\,C$ (fig. 11) é maior que o angulo $E\,D\,F$, por ter o angulo $B\,A\,C$ o arco $B\,C$ maior que o arco $E\,F$ do outro angulo.



Para medirem-se os arcos dos angulos centraes basta compararem-se ou medirem-se as cordas dos seus arcos; porque:

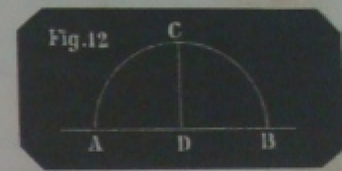
No mesmo circulo ou em circulos iguaes a arcos iguaes correspondem cordas iguaes; ao maior arco corresponde maior corda. (*)

PERPENDICULARES E OBLIQUAS

Quando uma recta $C\,D$ encontra outra recta $A\,B$ (fig. 12) fazendo com ella dous angulos iguaes $C\,D\,A$, $C\,D\,B$, cada um d'estes se chama angulo recto, e a recta $C\,D$ é perpendicular á recta $A\,B$; o ponto D é o pé da perpendicular.

(*) Vide problemas (fig. 100 etc.) sobre os angulos.

Se uma recta $C\,D$ é perpendicular á outra $A\,B$ tambem esta é perpendicular á primeira.



Os lados do angulo recto são perpendiculares entre si.

Todos os angulos rectos são iguaes, cada um tem por medida 90.°, visto que, é sempre um quadrante o arco limitado pelos seus lados e descripto do vertice como centro.

Chama-se agudo o angulo menor que o angulo recto; obtuso o maior que o recto.

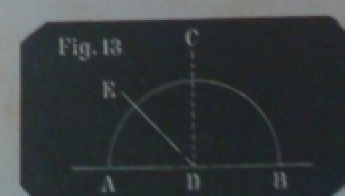
A medida dos angulos agudos e obtusos é variavel quanto á sua grandeza.

O angulo agudo tem por limite de sua medida, menos de 90.° e mais que zero.

O angulo obtuso tem por limite de sua medida, menos de 180.° e mais que 90.°.

Quando uma recta $E\,D$ encontra outra recta $A\,B$ (fig. 13) fazendo com ella dous angulos desiguaes, um d'estes $E\,D\,A$ é agudo e outro $E\,D\,B$ obtuso; e a recta $E\,D$ é obliqua á recta $A\,B$; o ponto D, é o pé da obliqua.

Se uma recta $E\,D$ é obliqua á outra recta $A\,B$ tambem esta é obliqua á primeira.



Os angulos agudos e obtusos são chamados em geral angulos obliquos.

Angulos adjacentes são os que teem um lado commum achando-se os outros na mesma linha recta. Os angulos adjacentes valem em somma dous angulos rectos.

Os angulos $E D A$, $E D B$ (fig. 13) são adjacentes, teem um lado $E D$ commum e os outros lados $A D$, $D B$ na mesma linha recta $A B$; estes dous angulos valem em somma dous angulos rectos, porque a somma dos arcos AE, $E B$ é igual a semi-circumferencia $A E B$ ou igual a 180.°.

Se considerar-se uma perpendicular $C D$ á recta AB formam-se dous angulos rectos $C D A$, $C D B$ (tambem adjacentes, tendo o lado CD commum e os outros lados na mesma linha recta $A B$) a somma destes dous angulos é igual á d'aquelles dous.

Complemento de um angulo é outro angulo, quando a somma dos dous é igual a um angulo recto.

Supplemento de um angulo é outro angulo quando a somma dos dous é igual a dous angulos rectos.

Um angulo recto não tem complemento, e tem por supplemento outro angulo recto.

Um angulo agudo tem por complemento outro angulo agudo, e tem por supplemento um angulo obtuso.

Um angulo obtuso tem sómente supplemento que é um angulo agudo.

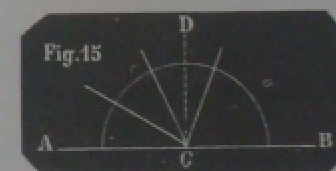
Dous angulos que teem o mesmo complemento ou o mesmo supplemento, são iguaes.

Dous angulos são verticalmente oppostos, quando os lados de um são prolongamentos dos de outro. Os angulos

$C E A$ e $B E D$ ou $C E B$ e $A E D$ são verticalmente oppostos. (fig. 14)

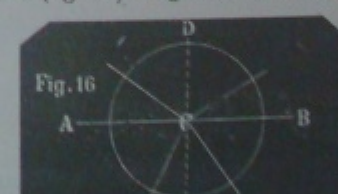
Os angulos verticalmente oppostos são iguaes; ex.: angulos $C E A$ e $B E D$ são iguaes; tem o mesmo supplemento $C E B$ ou $A E D$ por ser qualquer d'estes dous adjacentes a qualquer d'aquelles dous.

A somma de todos os angulos existentes no mesmo lado de uma recta $A B$ (fig. 15) e de vertices em um ponto C da recta, é igual a dous angulos rectos.



A somma dos arcos comprehendidos entre os lados d'estes angulos é igual a semi-circumferencia ou a 180°, portanto a somma dos angulos é igual a dous angulos rectos. Considerando a perpendicular $D C$ formam os angulos rectos $A C D$ e $D C B$.

A somma de todos os angulos formados em derredor de um ponto C (fig. 16) é igual a quatro angulos rectos.



A somma da medida d'estes angulos é igual á circumferencia ou 360.°, logo os angulos valem em somma quatro angulos rectos. A recta *D F* é perpendicular á recta *A B*; os quatro angulos rectos *A C D*, *D C B*, *B C F*, *F C A* valem em somma 360° como a daquelles em derredor do ponto *C*.

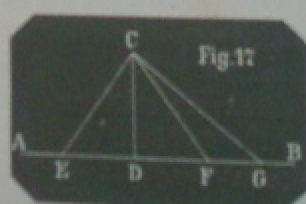
Por um ponto não se póde passar mais de uma perpendicular a uma recta, quer esteja o ponto na recta quer fóra d'ella.

Traçando-se de um ponto *C* (fig. 17) fóra de uma recta *A B*, a perpendicular *C D*, e qualquer numero de obliquas *C E*, *C F* e *C G*:

As obliquas *C E*, *C F*, que distam igualmente da perpendicular, são iguaes.

Das obliquas *C F*, *C G* que se desviam desigualmente da perpendicular, a que mais se desvia *C G* é a maior.

A perpendicular *C D* é mais curta que qualquer das obliquas.

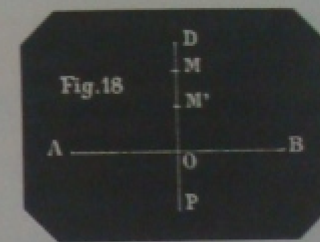


A perpendicular mede a distancia de um ponto a uma recta.

De um ponto para uma recta não se podem traçar tres rectas iguaes.

A perpendicular *D P* ao meio de uma recta *A B* (fig. 18) passa por todos os pontos *M*, *M'*,

etc., igualmente distantes dos extremos d'ella *A* e *B*. (*)



A' circumferencia é preciso accrescentar:

A flexa é perpendicular ao meio da corda, e sendo prolongada sufficientemente, passa pelo centro do circulo e divide a circumferencia e o circulo em duas partes iguaes:

A tangente é perpendicular ao extremo do raio que termina no ponto de contacto.

Por um ponto da circumferencia só se póde traçar uma tangente.

Por um ponto exterior á circumferencia não se podem traçar mais de duas tangentes á mesma circumferencia.

Por um ponto dentro do circulo nenhuma.

A perpendicular no meio de uma corda passa pelo centro do circulo e pelo meio de cada um dos dous arcos (estes arcos constituem a circumferencia).

A perpendicular abaixada do centro do circulo sobre uma corda divide ao meio a mesma corda e os dous arcos que ella subentende.

No mesmo circulo são iguaes os arcos comprehendidos entre duas cordas parallelas.

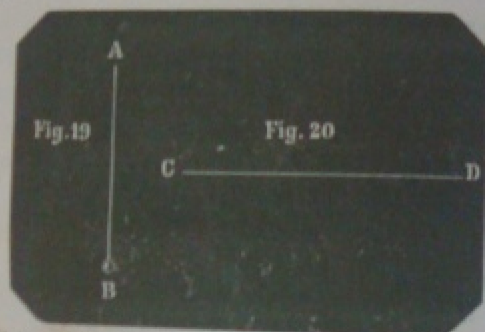
Tambem são iguaes os arcos comprehendidos entre a corda e a tangente parallelas.

(*) Vêde problemas (Fig. 10), etc. sobre perpendiculares.

Diz-se levantar perpendicular a uma recta quando ella parte de um ponto da recta; abaixar quando o ponto está fóra da recta.

LINHAS: VERTICAL, HORIZONTAL E OBLIQUA

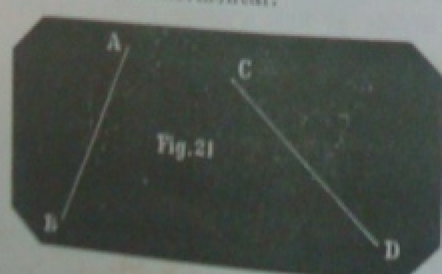
Observação. — A direcção que toma um fio abandonado a sua propria acção e livremente suspenso por um de seus extremos tendo no outro atado um peso, chama-se direcção do fio a prumo.



Linha vertical é a recta *A B* (fig. 19) que tem a direcção do fio a prumo.

Linha horizontal *C D* (fig. 20) é aquella cuja direcção forma angulo recto com a vertical se a encontrar.

Linha obliqua é qualquer recta *A B* ou *C D* (fig. 21) que não é vertical nem horizontal.



Uma obliqua é de quarenta e cinco gráos quando a sua inclinação é tal que possa formar com uma vertical ou com uma horizontal um angulo igual a metade do angulo recto ou que possa formar com alguma dessas linhas um angulo de 45°.

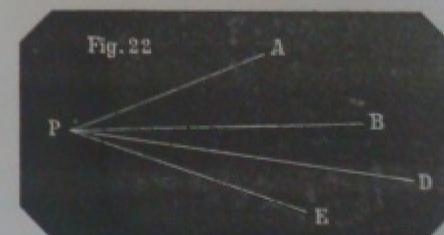
A obliqua *C D* (fig. 21) é de quarenta e cinco gráos.

Observação. — Deve-se logo estabelecer no papel, ou no plano em que se pretende desenhar, qual a margem que se destina para occupar a parte de baixo; a essa margem inferior dá-se o nome, linha da base do quadro ou simplesmente base.

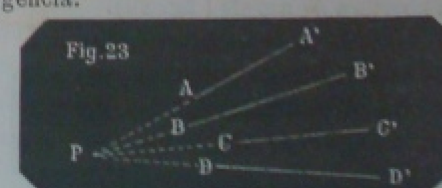
As linhas verticaes são perpendiculares á base.

As horizontaes são parallelas á base.

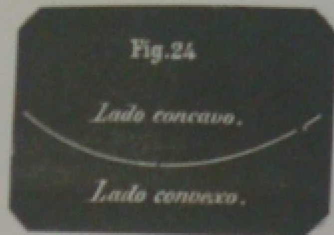
Linhas divergentes são as rectas *P A*, *P B*, *P D* e *P E* (fig. 22) que partindo de um mesmo ponto P se dirigem em diversos sentidos.



Linhas convergentes são rectas *AA'*, *BB'*, *CC'*, *DD'* (fig. 23) que sufficientemente prolongadas, se encontram em um ponto commum *P* chamado ponto de convergencia.



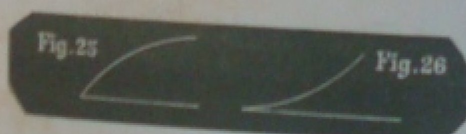
Chamam-se lado concavo de uma curva aquelle para o qual os seus extremos estão voltados, e lado convexo o opposto ao concavo (fig. 24).



Chama-se angulo mixtilineo ao que é formado por uma recta e uma curva.

Angulo mixtilineo convexo tem a convexidade do lado curvo, fóra da abertura do angulo (fig. 25).

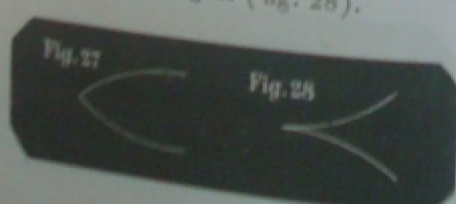
Angulo mixtilineo concavo tem a convexidade dentro da abertura do angulo (fig. 26).



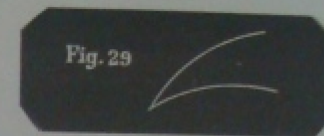
Chama-se angulo curvelineo ao que é formado por duas curvas.

Angulo curvelineo convexo tem as convexidades fóra da abertura do angulo (fig. 27).

Angulo curvelineo concavo tem as convexidades dentro da abertura do angulo (fig. 28).



Angulo curvelineo convexo-concavo tem uma das convexidades de seus lados fóra da abertura do angulo e a outra dentro (fig. 29).



Tem-se de accrescentar ás rectas parallelas o seguinte:

As perpendiculares á uma recta existentes no mesmo plano são parallelas entre si.

Se duas rectas são parallelas toda a perpendicular á uma d'ellas é perpendicular á outra.

A perpendicular e a obliqua e uma recta necessariamente se encontram sendo prolongadas sufficientemente.

Duas rectas parallelas á uma terceira, são entre si parallelas.

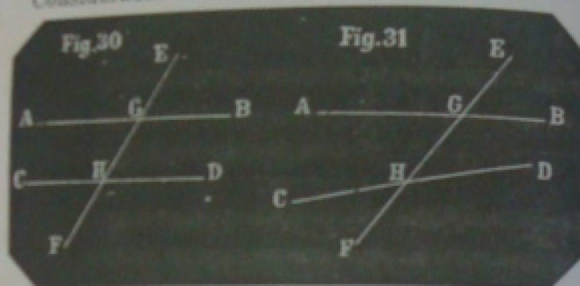
Se duas parallelas se cortarem com outras duas parallelas ; as partes interceptas das duas primeiras serão iguaes entre si, e tambem as das segundas, serão iguaes entre si.

SECANTE Á DUAS RECTAS

A recta que corta duas rectas, parallelas ou não, se chama secante.

Quando duas rectas AB, CD (figs. 30 e 31) parallelas ou não, são cortadas por uma secante EF, esta fórma com as duas oito angulos, que, considerados isoladamente ou comparados dous a dous, tomam as seguintes denominações :

Consideradas isoladamente :



Chama-se interno cada um dos angulos $A\,G\,H$, $C\,H\,G$, $B\,G\,H$, $D\,H\,G$, por ter a abertura entre as duas linhas $A\,B$, $C\,D$.

Chama-se externo cada um dos angulos $A\,G\,E$, $C\,H\,F$, $B\,G\,E$, $D\,H\,F$ formados fóra da area contida entre as duas linhas $A\,B$ e $C\,D$.

Estes angulos considerados dous a dous têm as seguintes denominações :

Dous angulos do mesmo lado da secante, um interno outro externo, de aberturas voltadas para a mesma parte, chamam-se correspondentes ; taes são $A\,G\,H$, $C\,H\,F$; $C\,H\,G$, $A\,G\,E$; $B\,G\,H$, $D\,H\,F$; $B\,G\,E$, $D\,H\,G$.

Dous angulos do mesmo lado da secante ambos internos, chamam-se internos da mesma parte, taes são : $A\,G\,H$, $C\,H\,G$; $B\,G\,H$, $D\,H\,G$.

Dous angulos do mesmo lado da secante ambos externos, chamam-se externos da mesma parte ; taes são : $A\,G\,E$, $C\,H\,F$; $B\,G\,E$, $D\,H\,F$.

Dous angulos internos um de um lado da secante e outro do outro lado d'ella, cada um de vertice em uma das linhas cortadas pela secante, chamam-se alternos-internos ; taes são : $A\,G\,H$, $D\,H\,G$; $C\,H\,G$, $B\,G\,H$.

Dous angulos externos, um de um lado da secante e outro do outro lado d'ella, cada um de vertice em cada uma das linhas cortadas pela secante, chamam-se alternos-externos; taes são : $A\,G\,E$, $D\,H\,F$; $C\,H\,F$, $B\,G\,E$.

Quando as rectas são parallelas : (fig. 30).

Os angulos correspondentes são iguaes.

Os angulos alternos-internos são iguaes.

Os angulos alternos-externos são iguaes.

Os angulos internos da mesma parte são entre si supplementos.

Os angulos externos da mesma parte são entre si supplementos.

Quando as rectas não são parallelas : (fig. 31).

Os angulos correspondentes são desiguaes.

Os angulos alternos-internos são desiguaes.

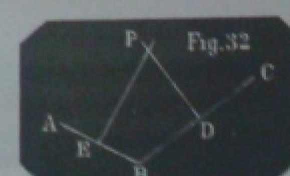
Os angulos alternos-externos são desiguaes.

Os angulos internos da mesma parte valem em somma mais ou menos de dous angulos rectos.

Os angulos externos da mesma parte valem em somma mais ou menos de dous angulos rectos.

Quando duas rectas se encontram, as suas perpendiculares traçadas no mesmo plano tambem encontram-se.

Se as perpendiculares são traçadas ao meio de cada uma das duas rectas $A\,B$, $B\,C$ (fig. 32.) o ponto P de encontro das perpendiculares $E\,P$, $D\,P$, distará igualmente dos extremos A, B, C, das duas rectas



Baseada n'esta propriedade resolvem-se os seguintes problemas :

Achar o centro de uma circumferencia ou de um arco, fazer passar uma circumferencia por tres pontos dados que não estejam em linha recta.

ANGULOS DE LADOS PARALLELOS

Os angulos *A G H*, *C H F* (fig. 33), que têm os lados parallelos e as aberturas voltadas para a mesma parte são iguaes. Os arcos *m n*, *t r* de suas medidas são iguaes.

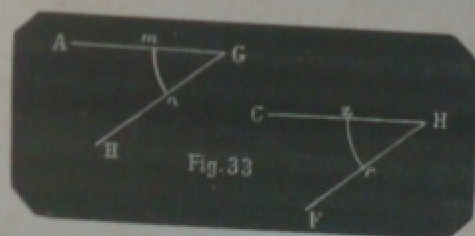


Fig.33

Os angulos *A G H*, *G H D* (fig. 34) que têm os lados parallelos e as aberturas voltadas para partes oppostas são iguaes. Os arcos *m n*, *t r* de suas medidas são iguaes.

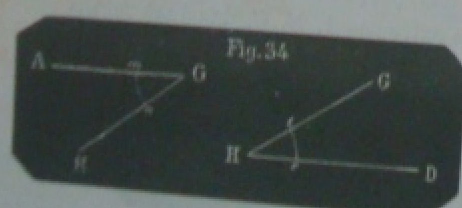


Fig.34

Dous angulos *A G H*, *C H G* (fig. 35) de lados parallelos com as aberturas voltadas para partes diversas (não oppostas) são entre si supplementos.

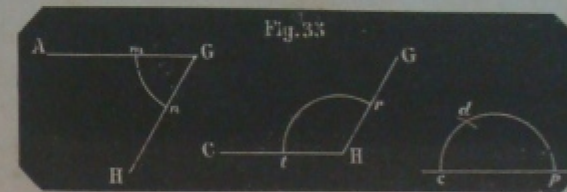


Fig.35

A somma dos arcos *m n*, *t r* de suas medidas é igual a semi-circumferencia *c d p* e por isso os dous angulos valem em somma 180°, ou dous angulos rectos.

TRIANGULO

A superficie plana fechada ou limitada por um qualquer numero de rectas chama-se polygono; com menos de tres rectas não se póde fechar ou limitar uma extensão plana.

Triangulo é a porção de um plano limitada por tres linhas rectas : é o mais simples dos polygonos. A figura 36 é um triangulo

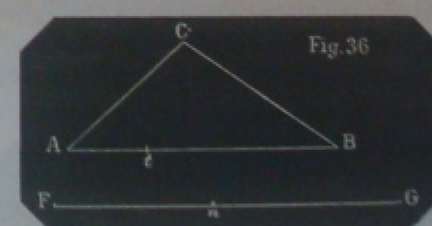


Fig.36

As tres rectas *A B*, *A C*, *C B* chamam-se lados e os seus encontros duas a duas formam tres angulos, os vertices d'estes angulos são tambem do triangulo.

O triangulo é designado pelas lettras dos vertices; ex.: $A B C$ significa o triangulo; para não se confundir o triangulo com um dos seus angulos, se faz preceder ás tres lettras o signal $\wedge$ quando se quer designar um angulo do triangulo; exemplo $\wedge A B C$ designa um angulo do triangulo.

A somma de qualquer dois lados $A C$ e $C B$ de um triangulo $A B C$ é maior que o terceiro lado $A B$.

O lado $A C$ sommado com o lado $C B$ é igual á linha $F G$, esta é visivelmente maior do que o terceiro lado $A B$ do triangulo.

Qualquer lado de um triangulo é maior que a differença dos dous outros: ex.:

O lado $A C$ é maior que a differença $A t$ dos dous outros lados $A B$ e $C B$.

O triangulo, em relação ás grandezas relativas dos seus lados, toma as denominações de:

Triangulo escaleno quando tem os tres lados desiguaes.

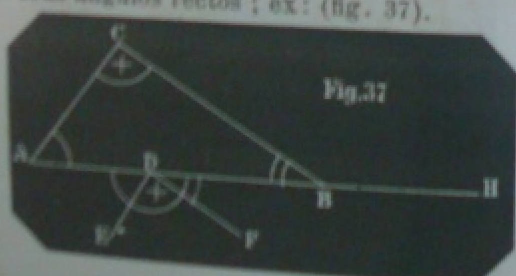
Triangulo isosceles quando tem dous lados iguaes.

Triangulo equilatero quando tem os tres lados iguaes.

Em todo o triangulo ao maior lado $A B$ se oppõe o maior angulo $A C B$, ao menor lado $A C$ se oppõe o menor angulo $A B C$ etc.

Quando o triangulo é isosceles, a lados iguaes se oppõe angulos iguaes.

Em todo o triangulo a somma dos tres angulos é igual a dous angulos rectos; ex: (fig. 37).



Os tres angulos $A D E$, $E D F$, $F D B$ são iguaes por construcção aos tres angulos $C A B$, $A C B$, $A B C$ do triangulo $A B C$; a somma dos tres primeiros é igual a dous angulos rectos por existirem do mesmo lado de uma recta $A B$ e terem os vertices em um ponto D d'ella, por isso os tres angulos do triangulo valem em somma dous angulos rectos, como iguaes aos de vertices no ponto D.

Um triangulo não póde ter mais de um angulo recto, nem mais de um obtuso, nem um recto e um obtuso, por que a somma de qualquer d'estes dous seria igual ou maior que dous angulos rectos, portanto, não poderia existir o terceiro angulo do triangulo.

Qualquer angulo $A B C$, de um triangulo (fig. 37) é supplemento da somma dos dous outros $B A C$, $B C A$.

Se dous triangulos tiverem dous angulos de um iguaes aos dous angulos de outro, o terceiro angulo de um será igual ao terceiro do outro.

O triangulo em relação aos seus angulos tem as denominações de:

Triangulo rectangulo o que tem um angulo recto. O lado opposto a este angulo toma o nome de hypothenusa, cada um dos dous outros catheto; os dous angulos agudos são entre si complementos n'esse triangulo.

Triangulo obtusangulo ao que tem angulo obtuso.

Triangulo acutangulo ao que tem os tres angulos agudos.

O triangulo obtusangulo e o triangulo acutangulo são chamados em geral triangulos obliquangulos.

O triangulo equilatero tem todos os angulos iguaes, e por isso é equiangulo; tem lados iguaes e angulos iguaes.

Angulo externo a qualquer polygono é formado por um dos lados desse polygono com o prolongamento d'um outro lado contiguo.

Em um triangulo $A\ B\ C$ (fig. 37) o angulo externo $H\ B\ C$ é igual á somma dos internos não adjacentes $B\ A\ C$, $B\ C\ A$; e portanto maior do que qualquer d'elles ; Ex. :

O angulo externo $H\ B\ C$ tem por supplemento o angulo interno $C\ B\ A$ por lhe ser adjacente.

A somma dos dous angulos internos não adjacentes $B\ A\ C$, $B\ C\ A$ tem por supplemento o terceiro angulo $C\ B\ A$ do triangulo.

Por terem o mesmo supplemento : o externo é igual á somma dos internos não adjacentes.

CASOS DE IGUALDADE DE TRIANGULOS

1.° Quando dous triangulos têm os tres lados de um iguaes aos tres lados de um outro, esses triangulos são iguaes em todas suas partes.

2.° Quando dous triangulos têm, cada um a cada um, um lado igual adjacente a dous angulos iguaes, esses triangulos são iguaes em todas suas partes.

3.° Quando dous triangulos têm um angulo igual comprehendido entre dous lados iguaes, cada um a cada um, esses triangulos são iguaes em todas suas partes.

QUADRILATERO

Quadrilatero é o polygono de quadro lados; distinguem-se diversas especies de quadrilateros :

Quadrilatero simplesmente dito é o que não tem lado parallelo (fig. 38).

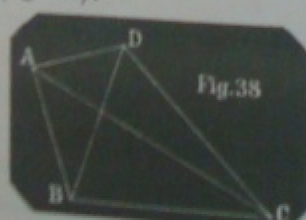


Fig.38

Parallelogrammo é quadrilatero que tem os lados oppostos parallelos e iguaes dous a dous : existem quatro que são :

Quadrado, tem todos os angulos rectos e todos os lados iguaes (fig. 39).

Rectangulo, tem todos os angulos rectos e os lados contiguos desiguaes (fig. 40).

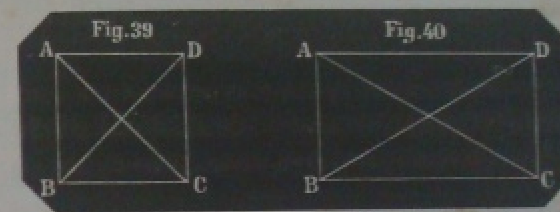


Fig.39 Fig.40

Rhomboide, tem todos os angulos obliquos e os lados contiguos desiguaes (fig. 41).

Losango ou rhombo, tem todos os angulos obliquos e todos os lados iguaes (fig. 42).

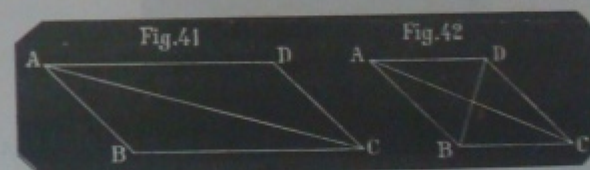


Fig.41 Fig.42

Trapezio é o quadrilatero que tem sómente dous lados parallelos ; dá-se o nome de :

Trapezio rectangulo quando tem dous angulos rectos (fig. 43).

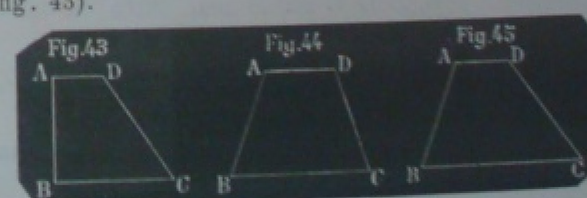


Fig.43 Fig.44 Fig.45

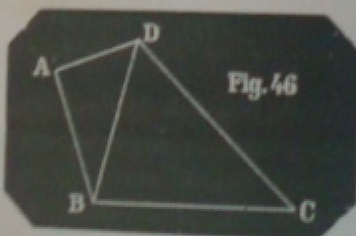
Trapezio symetrico ou isosceles, quando tem os lados não parallelos iguaes (fig. 44).

Trapezio escaleno, quando são desiguaes os lados não parallelos e são obliquos todos os seus angulos (fig. 45).

Chamam-se angulos oppostos em qualquer quadrilatero os que não têm lado commum, e voltam a abertura um para o outro mutuamente; ex.: os angulos *D A B*, *D C B* são oppostos (fig. 38, 39, 40, etc.)

Chama-se diagonal em um quadrilatero a recta *A C* traçada de um a outro vertice de angulos oppostos, em todo o quadrilatero se podem traçar duas diagonaes.

Traçando-se uma diagonal em qualquer quadrilatero o divide em dous triangulos.



Em todo o quadrilatero *A B C D* (fig. 46), a somma dos quatro angulos é igual a quatro angulos rectos:

Traçando-se uma diagonal *B D*, o quadrilatero fica dividido em dous triangulos *B D A*, *B D C*.

O angulo *A D C* do quadrilatero é igual á somma dos angulos *A D B*, *B D C* um de um, outro de outro triangulo.

O angulo *A B C* é igual a somma dos angulos *A B D*, *D B C* um de um triangulo, outro do outro.

O angulo *D A B* é commum ao quadrilatero e a um triangulo; o mesmo se diz do angulo *B C D*.

Logo a somma dos quatro angulos do quadrilatero vale quatro angulos rectos, por ser igual á somma dos angulos dos dous triangulos em que elle ficou dividido; cada triangulo vale dous angulos rectos, por isso o quadrilatero vale quatro angulos rectos.

Sendo iguaes os angulos de um quadrilatero, são todos rectos, porque sendo a somma d'elles igual a quatro rectos e todos iguaes, cada um d'elles deve valer um angulo recto.

Os angulos oppostos de um parallelogrammo são iguaes por terem os lados parallelos e as aberturas voltadas para partes oppostas.

Os lados oppostos de um parallelogrammo são iguaes como partes de parallelas limitadas entre parallelas.

A diagonal *A C* de um parallelogrammo qualquer, *A B C D* (fig. 41), divide-o em dous triangulos *A C B*, *A C D* iguaes por terem um lado *A C* commum, sendo os outros lados *A B* igual a *C D*, *A D* igual a *B C*, como partes de parallelas comprehendidas entre outras parallelas.

PROPRIEDADES DAS DIAGONAES DOS PARALLELOGRAMMOS

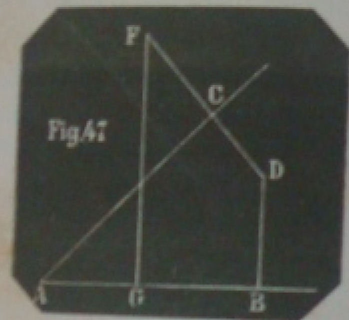
As diagonaes do quadro são iguaes se cortam mutuamente em quatro partes iguaes e em angulo recto, a intersecção d'ellas é o centro do quadrado.

As diagonaes do rectangulo são iguaes se cortam mutuamente em quatro partes iguaes e em angulos obliquos, a intersecção d'ellas é o meio do rectangulo.

As diagonaes do rhomboide são desiguaes se cortam mutuamente em duas partes iguaes e em angulos obliquos, a intersecção d'ellas é o meio do rhomboide.

As diagonaes do losango são desiguaes se cortam mutuamente em duas partes iguaes e em angulos rectos, a intersecção d'ellas é o meio do losango.

O angulo que tem os lados respectivamente perpendiculares aos lados de outro angulo, é supplemento ou igual a esse outro.



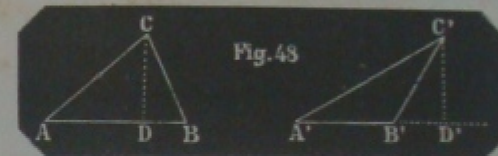
Seja o angulo $C\ A\ B$ (fig. 47) marque dentro d'elle um ponto D d'este ponto abaixem perpendiculares $D\ B$, e $D\ C$ aos dous lados $A\ B$, $A\ C$, fica formado um quadrilatero $B\ D\ C\ A$: ora, sendo rectos os angulos $D\ C\ A$ e $D\ B\ A$ terá o angulo $C\ A\ B$ por supplemento o angulo $C\ D\ B$. (Logo é verdadeira a 1ª parte do enunciado).

A 2ª parte.

Prolongue-se até um ponto F a perpendicular $C\ D$ á recta $A\ C$ do ponto F, abaixe a perpendicular $F\ G$ á recta $A\ B$.

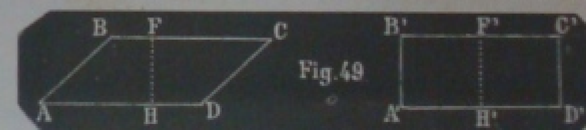
O angulo $D\ F\ G$ tem por supplemento o angulo $F\ D\ B$ como internos da mesma parte das parallelas $F\ G$, $D\ B$ e secante $F\ D$, por isso o angulo $D\ F\ G$ é igual ao angulo $C\ A\ B$ por terem o mesmo supplemento $F\ D\ B$ (Logo a 2ª parte tambem é verdadeira).

Base de um triangulo (fig. 48) é um qualquer dos seus lados $A\ B$, vertice C é o que fica opposto á base, altura é a perpendicular $C\ D$ abaixada do vertice sobre a base ou seu prolongamento.



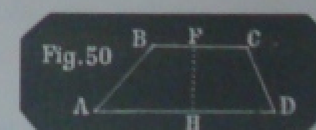
Note-se que a perpendicular $C'\ D'$ cahe no prolongamento da base do triangulo $A'\ B'\ C'$.

Base de um qualquer parallelogrammo é um qualquer dos seus lados, altura é a perpendicular á base e limitada pelo lado opposto. (fig. 49).



As rectas $A\ D$ e $A'\ D'$ são bases; $F\ H$ e $F'\ H'$ são alturas, uma do rhomboide e outra do rectangulo.

Bases do trapezio são os dous lados parallelos, altura é a perpendicular as bases, e limitada por ellas. (fig. 50).



As rectas $A\ D$ e $B\ C$ são bases, $F\ H$ é altura do trapezio.

Quadrilatero que não é parallelogrammo nem trapezio, não tem base nem altura.

EXPLICAÇÕES DE ALGUNS SIGNAES DE ABREVIATURAS

A addição indica-se pelo signal $+$ que se pronuncia mais; exemplos $6+4+5$, $A+C+D$ lêm-se: 6 mais 4 mais 5; A mais C mais D.

Observação.—Quando se quer representar numeros de modo um geral, empregam-se as lettras do alphabeto; ex: A, B exprimem quaesquer numeros.

A subtracção indica-se pelo signal — que se pronuncia menos; ex: $6-4$; ou $A-B$, se lêm: 6 menos 4, A menos B.

A multiplicação, indica-se pelo signal $\times$ que se pronuncia multiplicado por; ex: 3×8; $B\times A$ se lêm: 3 multiplicado por 8, B multiplicado por A.

A divisão, indica-se pelo signal (:) collocado entre os dous termos, ou risca de quebrado, sendo o dividendo numerador e o denominador o divisor; ex: $12 : 4$ ou $\frac{12}{4}$; $A : B$ ou $\frac{A}{B}$ se lêm: 12 dividido por 4, A dividido por B.

A igualdade indica-se pelo signal $=$ que posto entre duas quantidades exprime que são iguaes; ex: $3+5=8$, ou $A=B$ se lêm: 3 mais 5 igual a 8; A igual a B.

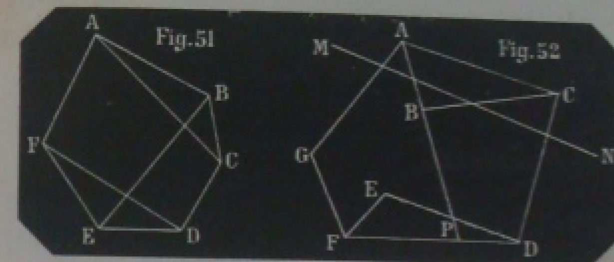
O signal $>$, a abertura deste signal se colloca para o lado da maior expressão; ex: $8>5$, $5<8$, se lêm: 8 maior que 5; 5 menor que 8.

Este signal $::$ lê-se, assim como.

Este signal $\therefore$ lê-se, logo.

Ao que já se disse do polygono tem-se de accrescentar que: Lados do polygono são as rectas que o fecham encontrando-se duas a duas, angulos são os formados por dous lados contiguos, os seus vertices são tambem do polygono, os quaes são tantos quantos são os lados.

As figuras 51 e 52 são polygonos.



Os lados considerados em seu conjuncto são o contorno ou o perimetro do polygono.

Diagonaes são rectas AC, FD, etc., que unem vertices não consecutivos (fig. 51 ou 52).

E' util notar que o polygono $A\ B\ C\ D\ E\ F\ G$ (fig. 52) tem dous angulos ABC, FED, cujas aberturas estão voltadas para fóra da figura.

Distinguem-se tres especies de polygonos, que são:

Polygonos irregulares são os que têm angulos e lados desiguaes.

Polygonos symetricos são os que têm lados oppostos parallelos e iguaes.

Polygonos regulares são os que têm todos os lados e angulos iguaes.

Quadrilateros symetricos são: o rectangulo, o rhomboide, o losango ou rhombo.

O quadrilatero regular é o quadrado.

O triangulo regular é o equilatero.

Os polygonos são designados em geral pelo numero de seus lados, dizem-se por ex: polygono de tres lados, de quatro lados, de cinco lados, de 18 lados, etc.; tendo porém doze d'elles nomes particulares, além d'aquellas designações, taes são o de:

3	lados	chamado	Triangulo
4	»	»	Quadrilatero
5	»	»	Pentagono
6	»	»	Hexagono
7	»	»	Heptagono
8	»	»	Octogono
9	»	»	Enneagono
10	»	»	Decagono
11	»	»	Hendecagono
12	»	»	Dodecagono
15	»	»	Pentadecagono
20	»	»	Icosagono

Polygonos convexos são aquelles cujos angulos são todos salientes (fig. 51).

Angulos salientes são os que têm as aberturas voltadas para dentro da figura; angulos reintrantes são os que têm as aberturas voltadas para fóra da figura.

Polygonos concavos são os que têm um ou mais angulos reintrantes (fig. 52). Os angulos $A\,B\,C,\ F\,E\,D$ são reintrantes.

Os principaes caracteres dos polygonos convexos são:

Uma recta traçada no seu plano não póde cortar o perimetro em mais de dous pontos.

O prolongamento de qualquer um de seus lados não corta o perimetro.

Todas as diagonaes são interiores.

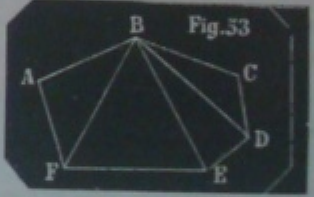
Um polygono concavo (fig. 52) não tem estas propriedades. N'este póde uma recta cortar o perimetro em mais de dous pontos; ex: recta $M\,N$ corta em quatro pontos.

Algum lado sendo prolongado póde cortar o perimetro; ex: o lado $A\,B$ prolongado corta o perimetro no ponto P.

Ha diagonaes exteriores; como as diagonaes $A\,C,\ F\,D$, dos angulos $A\,B\,C,\ F\,E\,D$ (fig. 52).

A circumferencia é uma linha convexa, por ter a propriedade dos polygonos convexos de não poder ser cortada por uma recta em mais de dous pontos.

Traçando diagonaes por um vertice de um polygono para todos os outros, divide-se o polygono em tantos triangulos, quantos são os lados menos duas unidades.



O polygono $A\,B\,C\,D\,E\,F$ (fig. 53) tem lados $6-2=4$, logo, traçando-se de um dos vertices B diagonaes para todos os outros, o polygono fica dividido em quatro triangulos.

A somma de todos os angulos internos de qualquer polygono convexo (fig. 53) é igual a tantas vezes dous rectos quantos são os lados menos dous, pois que esta somma se compõe das dos angulos de todos os triangulos em que fica o polygono dividido (traçando diagonaes de um dos vertices para todos os outros), cada triangulo vale dous angulos rectos; logo: triangulos $4 \times 2 = 8$ angulos rectos é a somma dos angulos internos d'esse polygono.

Applicando o mesmo processo a qualquer polygono convexo, obtem-se a somma dos seus angulos internos; ex:

Polygonos	Lados	Angulos rectos	Somma dos angulos internos expressa em angulos rectos
Triangulo	$3 - 2 = 1$	$\times\ 2 =$	2 angulos rectos.
Quadrilatero	$4 - 2 = 2$	$\times\ 2 =$	4 » »
Pentagono	$5 - 2 = 3$	$\times\ 2 =$	6 » »
Hexagono	$6 - 2 = 4$	$\times\ 2 =$	8 » »
Heptagono	$7 - 2 = 5$	$\times\ 2 =$	10 » »

e assim por diante.

Conhecida a somma dos angulos internos de um polygono equiangulo (angulos iguaes), conhecido fica o valor de cada um dos seus angulos. Para isto, divide-se a somma dos angulos internos pelo numero de angulos ou de lados do polygono; ex:

Polygonos regulares:		Cada angulo
Triangulo	somma dos ang. int. / n.° de lados $= \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$	de um angulo rect
Quadrado	somma dos ang. int. / n.° de lados $= \frac{4}{4} = 1$	angulo recto
Pentagono	somma dos ang. int. / n.° de lados $= \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$	angulo recto
Hexagono	$\frac{8}{6} = 1\frac{2}{6}$	angulo recto

e assim por diante.

Do mesmo modo, conhecida a somma dos angulos internos de qualquer polygono regular, conhecida fica a medida de cada um dos seus angulos expressa em grãos.

Para isto, multiplica-se 90 pelo numero que exprime a somma dos angulos internos do polygono e divide-se o producto pelo numero que exprime os lados do respectivo polygono; ex.:

Observação. — 90 exprimem os grãos da medida do angulo recto.

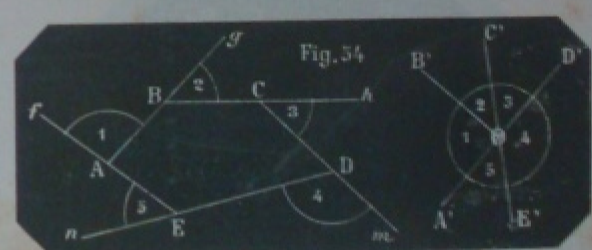
Polygonos regulares:

Triangulo	$\frac{90 \times 2}{3} = \frac{180}{3} = 60°$	cada um angulo
Quadrado	$\frac{90 \times 4}{4} = \frac{360}{4} = 90°$	cada um angulo
Pentagono	$\frac{90 \times 6}{5} = \frac{540}{5} = 108°$	cada um angulo
Hexagono	$\frac{90 \times 8}{6} = \frac{720}{6} = 120°$	cada um angulo

e assim por diante.

Em qualquer polygono convexo, prolongando-se pelo vertice de cada um dos seus angulos um lado do polygono a somma de todos os angulos externos é igual a quatro angulos rectos.

Seja o polygono $A\ B\ C\ D\ E$ (fig. 54).



Cada angulo externo com o interno adjacente valem em somma dous angulos rectos; ex.: os angulos $B\ A\ f + B\ A\ E = 2$ rectos por serem adjacentes; os angulos $C\ B\ g + C\ B\ A = 2$ rectos e...

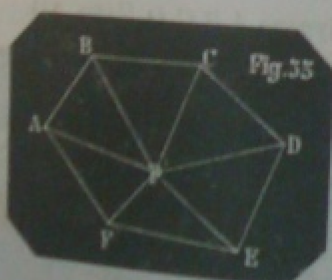
Por serem iguaes estas sommas parciaes (2 rectos) multiplica-se uma d'ellas pelo numero que exprime os lados (5) de polygono e do producto (10) subtrahe-se a somma dos angulos internos (6) do polygono o resto será quatro angulos rectos, valor da somma dos angulos externos.

A mesma figura 54. Solução com o compasso.

Os angulos existentes á roda do ponto O valem em somma quatro angulos rectos, cada um destes angulos é igual por construcção a cada um dos angulos externos do polygono, logo, os angulos externos do polygono tambem valem quatro angulos rectos.

O angulo $A' \; O \; B'$ de vertice no ponto O é igual ao angulo $B \; A \; f$ externo do polygono; o angulo $B' \; O \; C' = C B g$; o angulo $C' \; O \; D' = D C h \ldots$

Traçando-se rectas de um ponto P (fig. 55) tomado no interior de um polygono convexo, para todos os vertices, o polygono ficará dividido em tantos triangulos quantos forem os lados.



Estando o polygono decomposto em triangulos d'este modo, obtem-se a somma dos angulos internos do polygono multiplicando dous (angulos rectos) pelo numero (6) que, exprimem os lados do polygono, do producto (12 angulos

rectos) subtrahe-se quatro que é a somma dos angulos de vertice á roda do ponto P que não pertencem ao polygono, o resto 8 é a somma dos angulos internos do polygono; isto é, valem em somma oito angulos rectos os angulos internos d'este polygono.

Dous polygonos são iguaes quando se compoem do mesmo numero de triangulos respectivamente iguaes e dispostos semelhantemente.

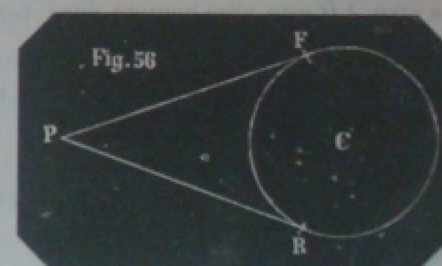
Todo polygono regular é equilatero e equiangulo, isto é, tem todos os lados e angulos iguaes.

Um angulo se diz inscripto em um circulo, quando o seu vertice existe na circumferencia, os lados são cordas.

Um angulo é circumscripto ao circulo, quando os seus lados são tangentes.

Quando duas tangentes $P F$, $P R$ se encontram em um ponto P são iguaes as distancias d'esse ponto aos pontos R e F de contactos; (fig. 56). O angulo $F P R$ é circumscripto ao circulo C.

A distancia $P F = P R$.



O angulo inscripto tem por medida metade do arco comprehendido entre os seus lados (fig. 57).

Observação. — A medida natural de um angulo é sempre o arco comprehendido entre seus lados e descripto do vertice como centro; as diversas medidas dos angulos inscriptos e excentricos, que se seguem, são secundarias.

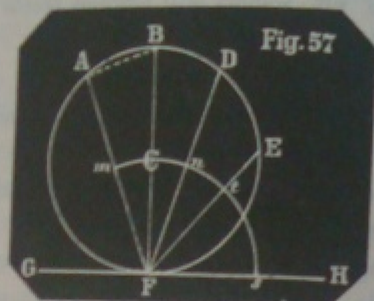


Fig. 57

São tres os casos dos angulos inscriptos (fig. 57); ou o centro C do circulo existe em um dos lados, ou entre elles, ou fóra do angulo.

Primeiro caso: O angulo $A\,F\,B$ tem por medida o arco $\frac{AB}{2}$. Por ser o arco $\widehat{mC}$ a medida natural do angulo e ter sido descripto com o raio $F\,C$ do circulo C, applicando (por meio de um compasso) a grandeza do arco $\widehat{mC}$ sobre o arco $\widehat{AB}$ este arco conterá duas vezes o arco $\widehat{mC}$; o que mostra a verdade do enunciado.

Segundo caso: Do mesmo modo, o angulo $A\,F\,D$ tem por medida o arco $\frac{\widehat{AD}}{2} = \widehat{mn}$.

Terceiro caso: Pelo mesmo motivo o angulo $D\,F\,E$ tem por medida o arco $\frac{\widehat{DE}}{2} = \widehat{nt}$.

O angulo no semi-circulo é recto. Isto é, o angulo inscripto $B\,A\,F$ cujos lados $A\,B$, $A\,F$ passam pelos extremos de um diametro $B\,F$ é recto; tem por medida o arco $\frac{\widehat{BDF}}{2} = \frac{180°}{2} = 90°$.

O angulo $E\,F\,H$ formado por corda $E\,F$ e tangente $F\,H$, tambem tem por medida metade do arco comprehendido entre os seus lados $E\,F$, $F\,H$. Por ser o arco $\frac{\widehat{EF}}{2} = \widehat{ts}$, este arco é a medida natural do angulo $E\,F\,H$.

Um angulo diz-se inscripto n'um arco ou n'um segmento, quando tem o vertice num ponto do arco d'esse segmento, e os lados terminam nos extremos da corda do segmento. (fig. 58). Exemplos:

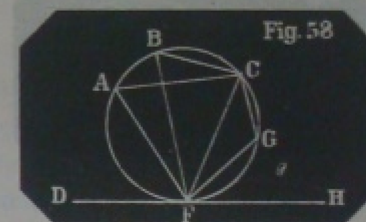


Fig. 58

$C\,B\,F\,C$ é um segmento; $C\,G\,F\,C$ é outro segmento, formados pela corda $C\,F$.

Todos os angulos inscriptos no mesmo segmento e o angulo formado pela corda do segmento com a tangente ao extremo d'ella são iguaes; ex:

Os angulos $C\,G\,F$, $C\,F\,D$ são iguaes por terem a mesma medida o arco $\frac{\widehat{CBF}}{2}$

O primeiro destes angulos está inscripto no segmento $C\,G\,F\,C$, e o segundo é formado pela corda $C\,F$ do segmento com a tangente $F\,D$ ao extremo della.

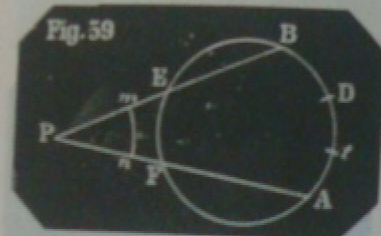
Do mesmo modo os angulos $C\,B\,F$, $C\,A\,F$, $C\,F\,H$ são iguaes por terem a mesma medida o arco $\frac{\widehat{CF}}{2}$

Um angulo é excentrico, (fig. 59 ou 60) quando o seu vertice não existe nem no centro da circumferencia nem sobre ella.

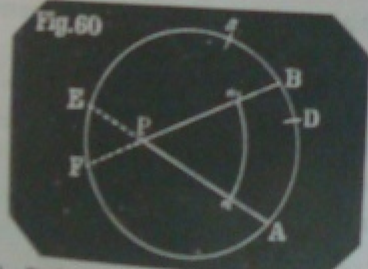
O angulo excentrico é exterior a um circulo quando seus lados são seccantes a circumferencia.

O angulo $B\,P\,A$ excentrico exterior (fig. 59) tem por medida a metade da differença dos arcos comprehendidos entre os seus lados: ex: o angulo $B\,P\,A$ a sua medida é o arco $\frac{\widehat{BA}-\widehat{EF}}{2} = \frac{DA}{2} = \widehat{mn}$ que é a sua medida natural e é descripto com o raio desse circulo.

$\widehat{At} = \widehat{tD} = \widehat{mn}$



O angulo excentrico é interior quando o seu vertice existe entre a circumferencia e o seu centro.



O angulo $B\,P\,A$ excentrico interior (fig. 60) tem por medida metade da somma dos arcos comprehendidos entre os lados desse angulo e do outro $E\,P\,F$ seu verticalmente opposto; ex:

Esse angulo $B\,P\,A$ tem por medida os arcos $\frac{\widehat{AB}+\widehat{EF}}{2} = \frac{AS}{2} = \widehat{AD}$ ou $\widehat{DS} = \widehat{mn}$ que é a sua medida natural, e é descripto com o raio desse circulo.

O arco $\widehat{SD} = \widehat{DA} = \widehat{mn}$.

POLYGONOS INSCRIPTOS E CIRCUMSCRIPTOS AO CIRCULO

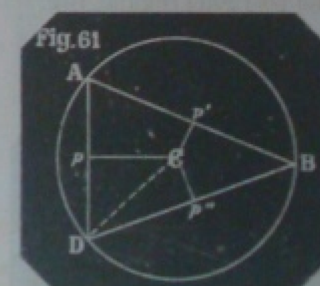
Um polygono é inscripto em um circulo, quando os seus vertices existem na circumferencia; os lados do polygono são cordas.

O polygono é circumscripto ao circulo, quando os seus lados são tangentes.

E' sempre possivel circumscrever ou inscrever um circulo a um triangulo qualquer.

As perpendiculares ao meio dos tres lados de um triangulo (fig. 61) concorrem um ponto C, que é o centro do circulo circumscripto.

O triangulo $A\,B\,D$ (fig. 61) está inscripto no circulo C, as perpendiculares ao meio dos seus lados são as rectas



Cp, Cp', Cp'', que se encontram, no ponto C que é centro do circulo circumscripto, e qualquer recta $C\,D$ traçada do centro C a qualquer dos vertices do triangulo é raio do *circulo circumscripto*.

As rectas que dividem ao meio os tres angulos de um triangulo (fig. 62) concorrem em um ponto C, que é o centro do circulo inscripto ao triangulo.

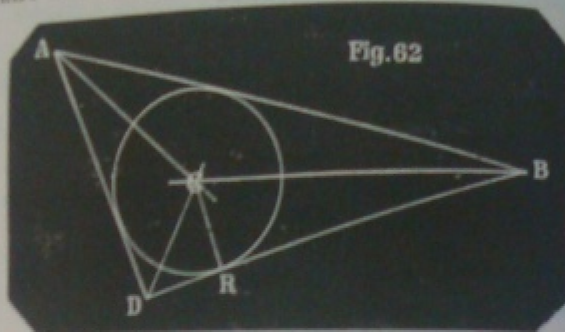


Fig. 62

O triangulo $A\ B\ D$ (fig. 62) esta circumscripto ao circulo C, as rectas $C\,A$, $C\,B$, $C\,D$ são as que dividem ao meio os angulos, o ponto C de encontro é o centro do circulo. Qualquer perpendicular $C\,R$ abaixada do centro C sobre qualquer dos lados $D\,B$ é o raio do circulo inscripto.

Centro de um polygono regular (fig. 63) é o ponto C em que concorrem as rectas $A\,C$, $B\,C$, etc., que dividem ao meio os seus angulos. Tambem

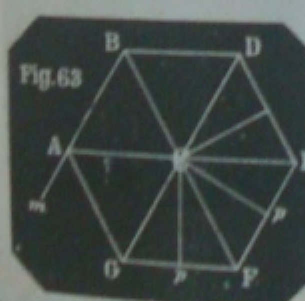


Fig. 63

as perpendiculares ao meio de cada um dos lados de um polygono regular concorrem a um ponto C que é o centro do polygono.

O centro do polygono, dista igualmente dos seus vertices e dos seus lados.

Apothema é a perpendicular ao meio de um dos lados do polygono traçada do seu centro.

Todos os apothemas $C\,p$, $C\,p'$, etc. do mesmo polygono são iguaes.

Raios do polygono são as rectas traçadas do centro para os vertices.

Todos os raios $C\ A$, $C\ B$, etc., do mesmo polygono são iguaes.

Os polygonos que não são regulares não têm centro, nem raio, nem apothema.

O angulo central $B\ C\ A$ de um polygono regular (fig. 63) é supplemento do angulo interno $B\ A\ G$ do mesmo polygono, e igual ao angulo $m\ A\ G$ externo do polygono.

A todo polygono regular (fig. 64) póde-se sempre inscrever ou circumscrever um circulo.

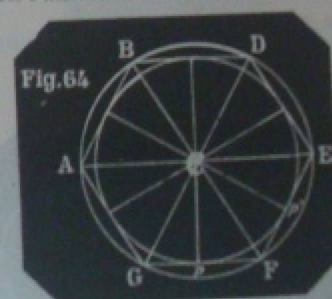


Fig. 64

O centro C do polygono é commum ao centro do circulo inscripto e do circulo circumscripto.

A pothema $C\,p$, etc., é o raio do circulo inscripto.

Raio do polygono $C\ G$, etc. é tambem do circulo circumscripto.

Dividindo uma circumferencia n'um certo numero de partes iguaes, traçando as cordas desses arcos, obtem-se

As rectas que dividem ao meio os tres angulos de um triangulo (fig. 62) concorrem em um ponto C, que é o centro do circulo inscripto ao triangulo.

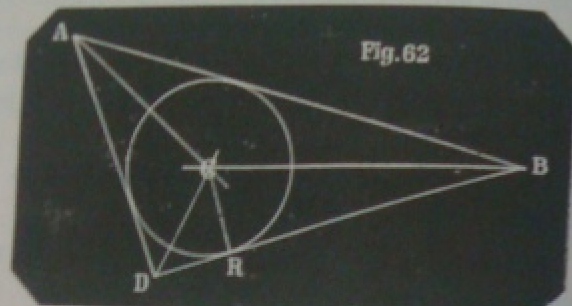


Fig. 62

O triangulo $A\ B\ D$ (fig. 62) está circumscripto ao circulo C, as rectas $C\,A$, $C\,B$, $C\,D$ são as que dividem ao meio os angulos, o ponto C de encontro é o centro do circulo. Qualquer perpendicular $C\,R$ abaixada do centro C sobre qualquer dos lados $D\,B$ é o raio do circulo inscripto.

Centro de um polygono regular (fig. 63) é o ponto C em que concorrem as rectas $A\,C$, $B\,C$, etc., que dividem ao meio os seus angulos. Tambem

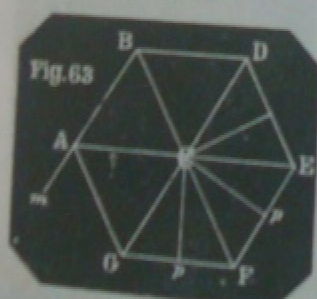


Fig. 63

as perpendiculares ao meio de cada um dos lados de um polygono regular concorrem a um ponto C que é o centro do polygono.

O centro do polygono, dista igualmente dos seus vertices e dos seus lados.

Apothema é a perpendicular ao meio de um dos lados do polygono traçada do seu centro.

Todos os apothemas $C\,p$, $C\,p'$, etc. do mesmo polygono são iguaes.

Raios do polygono são as rectas traçadas do centro para os vertices.

Todos os raios $C\,A$, $C\,B$, etc., do mesmo polygono são iguaes.

Os polygonos que não são regulares não têm centro, nem raio, nem apothema.

O angulo central $B\ C\ A$ de um polygono regular (fig. 63) é supplemento do angulo interno $B\ A\ G$ do mesmo polygono, e igual ao angulo $m\ A\ G$ externo do polygono.

A todo polygono regular (fig. 64) póde-se sempre inscrever ou circumscrever um circulo.

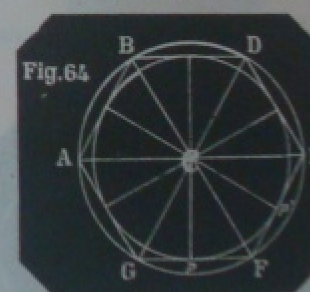


Fig. 64

O centro C do polygono é commum ao centro do circulo inscripto e do circulo circumscripto.

A pothema $C\,p$, etc., é o raio do circulo inscripto.

Raio do polygono $C\,G$, etc. é tambem do circulo circumscripto.

Dividindo uma circumferencia n'um certo numero de partes iguaes, traçando as cordas desses arcos, obtem-se um polygono regular inscripto, e traçando tangentes pelos pontos de divisão, obtem-se um polygono regular circumscripto, de tantos lados quantos forem as divisões.

Em um polygono regular inscripto (fig. 65) n'um circulo, traçando-se tangentes pelo meio de cada um dos arcos, obtem-se um polygono regular, circumscripto do mesmo numero de lados, respectivamente parallelos aos do polygono inscripto.

Fig. 65

A recta traçada do centro de uma circumferencia ao centro de outra, chama-se linha dos centros.

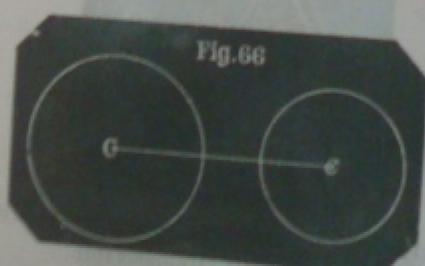


Fig. 66

Circumferencias exteriores são as que não se tocam, existindo no mesmo plano, cada uma fóra da outra (fig. 66). A recta *C c* é a linha dos centros.

Circumferencias tangentes-exteriores são as que têm um ponto de contacto *T*, cada uma d'ellas existe fóra da

outra (fig. 67). O ponto *T* de contacto existe na linha dos centros.

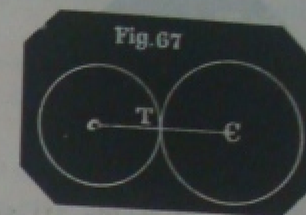


Fig. 67

Circumferencias tangentes-interiores são as que têm um ponto de contacto *T*, estando uma dentro do circulo da outra (fig. 68). O ponto *T* de contacto existe no prolongamento da linha *C c* dos centros.

Fig. 68

Circumferencias secantes são as que se cortam (fig. 69). A recta *A B* traçada de um ponto de intersecção ao outro é uma corda commum, a linha dos centros *C C'* é perpendicular a corda commum e a divide ao meio.

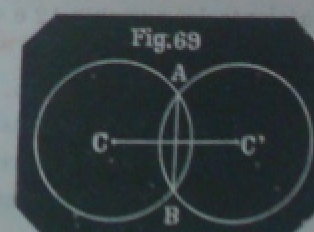
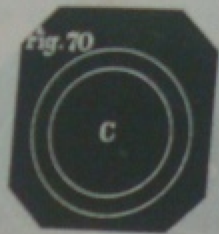


Fig. 69

Circumferencias concentricas, (fig. 70) são as que têm o mesmo centro *C*.



Circumferencias-excentricas, (fig. 71) são as que não têm o mesmo centro e não se tocam, uma existe dentro do circulo da outra.

RAZÃO

Quando se comparam duas grandezas da mesma especie entre si, o numero que exprime o resultado da comparação toma o nome de razão ou relação.

Razão por quociente ou simplesmente razão, é o quociente da divisão entre duas quantidades. Exemplos:

A razão por quociente dos numeros 12 e $4 = \frac{12}{4} = 3$, tres é a razão.

E dos numeros 6 e $2 = \frac{6}{2} = 3$ é a razão.

Chamam-se termos de uma razão os dous numeros ou quantidades que se comparam, o que se escreve ou enuncia-se em primeiro logar, chama-se antecedente, o outro consequente.

PROPORÇÃO

Sendo iguaes duas razões por quociente, formam uma proporção.

Escreve-se uma proporção do modo seguinte:

12 : 4 : : 6 : 2, lê-se 12 está para 4 assim como 6 está para 2.

Todos os quatro numeros que constituem a proporção, são chamados em commum termos d'ella, ao primeiro e quarto dá-se o nome de extremos, ao segundo e terceiro chamam-se meios.

Dá-se o nome de primeira razão, a reunião do primeiro e segundo termos; de segunda razão, a reunião do terceiro e quarto termos.

Chamam-se antecedentes aos primeiros termos de cada uma razão, consequentes aos segundos; ex.: 12 : 4 : : 9 : 3, são antecedentes 12 e 9, consequentes 4 e 3.

Em toda proporção o producto dos extremos é igual ao producto dos meios. Os extremos $12 \times 3 = 36$, os meios $4 \times 9 = 36$.

Em toda proporção é costume avaliar-se a razão dividindo os antecedentes pelos seus consequentes, os resultados chamam-se razão commum, esta pode ser numero inteiro, numero fraccionario, ou fracção propriamente dita.

Quando em uma proporção falta um extremo, este determina-se, ou encontra-se dividindo o producto dos meios pelo extremo conhecido;

Ex.: 12:3::8: x. $\frac{3 \times 8}{12} = \frac{24}{12} = 2$ que é o extremo.

Se falta um meio, divide-se o producto dos extremos pelo meio conhecido. Ex.: 12:3::x: 2, $\frac{12 \times 2}{3} = \frac{24}{3} = 8$

que é o meio. Colloca-se a letra x ou y, etc. no logar do termo que falta.

Quando uma proporção tem os meios iguaes, chama-se proporção continua; ex.: 8:4::4:2, o meio neste caso se chama meio proporcional, dos dous numeros, e é igual a raiz quadrada do producto dos extremos.

Quando quatro linhas são avaliadas ou medidas com uma mesma unidade e dão numeros que constituam uma proporção, diz-se que ellas na ordem em que estão consideradas formam uma proporção.

N. B.—Por se ter tratado de numeros, não supponha-se que se tenha de resolver os problemas de desenho pelo methodo numerico, o que se tratou por meio de proporções numericas, foi para melhor comprehenderem-se as proporcionalidades das linhas, que se suppõem avaliadas ou medidas; o methodo do desenho é o graphico, nelle só se empregam régua e compasso.

E' propriedade de certas figuras geometricas serem suas linhas proporcionaes, por exemplo, as seguintes:

Se dous lados *C A*, *C B* de um triangulo *A B C* (fig. 72) forem cortados por uma parallela *D F* ao terceiro lado *A B*, os dous lados ficam divididos em partes directamente proporcionaes; ex:

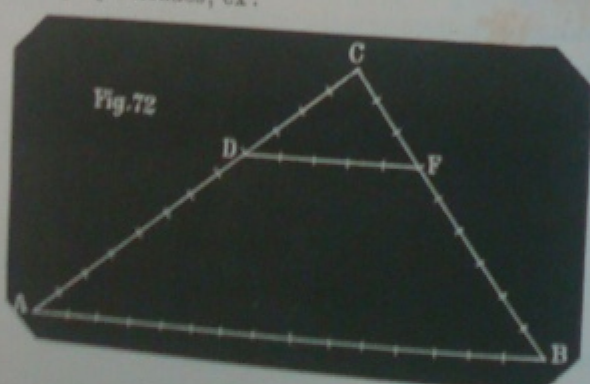


Fig.72

1ª $C\,D : D\,A :: C\,F : F\,B$ — ex. $C\,D \times F\,B = 4 \times 6 = 24$
$4 : 8 :: 3 : 6$ — m. $D\,A \times C\,F = 8 \times 3 = 24$

Tambem cada um dos lados *C A* e *C B* com cada uma de suas partes, são proporcionaes:

2ª $C\,A : C\,D :: C\,B : C\,F$ — ex. $C\,A \times C\,F = 12 \times 3 = 36$
$12 : 4 :: 9 : 3$ — m. $C\,D \times C\,B = 4 \times 9 = 36$

ou

3ª $C\,A : D\,A :: C\,B : F\,B$ — ex. $C\,A \times F\,B = 12 \times 6 = 72$
$12 : 8 :: 9 : 6$ — m. $D\,A \times C\,B = 8 \times 9 = 72$

Cada um dos dous lados *C A* ou *C B* com a parte respectiva *C D* ou *C F*, são proporcionaes ao terceiro lado *A B* e a sua parallela *D F*.

4ª $C\,A : C\,D :: A\,B : D\,F$ — ex. $C\,A \times D\,F = 12 \times 5 = 60$
$12 : 4 :: 15 : 5$ — m. $C\,D \times A\,B = 4 \times 15 = 60$

ou

5ª $C\,B : C\,F :: A\,B : D\,F$ — ex. $C\,B \times D\,F = 9 \times 5 = 45$
$9 : 3 :: 15 : 5$ — m. $C\,F \times A\,B = 3 \times 15 = 45$

Se a parallela *D F* approximar-se ou apartar-se do vertice *C* ou tambem se a unidade fôr maior ou menor, a proporção existirá sempre.

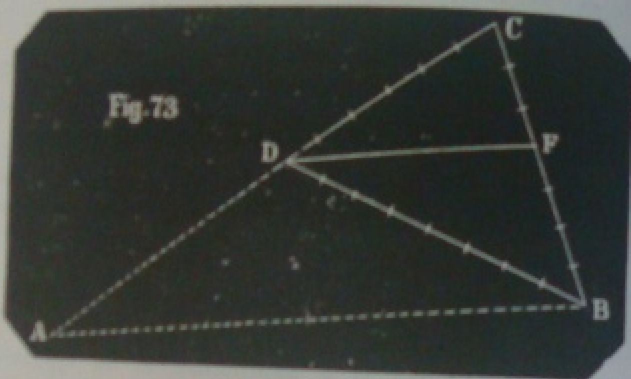
Duas linhas dividem-se em partes directamente proporcionaes, quando as partes de uma linha occupam os antecedentes, as de outra os consequentes de uma proporção; ou as partes de uma occupam a primeira razão, as de outra a segunda.

Duas linhas são directamente proporcionaes ás suas partes quando uma d'ellas e a respectiva parte occupam os antecedentes ou a primeira razão; a outra com a sua parte os consequentes ou a segunda razão.

Duas linhas dividem-se em partes inversamente proporcionaes, quando as partes de uma occupam os extremos e as de outra os meios da proporção.

Duas linhas são inversamente proporcionaes ás suas partes, quando uma d'ellas e sua parte occupam os extremos, a outra com a sua parte os meios da proporção.

A recta $D\ F$ (fig. 73) que divide ao meio qualquer anglo $C\ D\ B$ de um triangulo $D\ B\ C$ corta o lado opposto $C\ B$ em duas partes $C\ F$ e $F\ B$ proporcionaes aos lados correspondentes; ex:



$$\begin{matrix} CD : DB :: CF : FB \\ 6 : 8 :: 3 : 4 \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \text{ex.} \ C\ D \times F\ B = 6 \times 4 = 24 \\ \text{m.} \ D\ B \times C\ F = 8 \times 3 = 24 \end{matrix} \right.$$

Resultado que mostra a verdade do enunciado.

Si prolongar $C\ D$ uma porção $D\ A$ igual a $D\ B$, e do ponto A traçando $A\ B$ parallela a $D\ F$: tem-se

$$\begin{matrix} CD : DA :: CF : FB \\ 6 : 8 :: 3 : 4 \end{matrix}$$

FIGURAS SEMELHANTES

Figuras semelhantes são as que têm a mesma fórma, sendo as suas grandezas diversas.

D'ellas se diz vulgarmente, que uma é em pequeno o mesmo que a outra é em grande.

Em duas figuras semelhantes chamam-se homologos, a dous pontos, duas linhas, dous angulos, dous vertices que se correspondem n'ellas.

Todas linhas homologas são proporcionaes e a razão constante d'essas proporções toma o nome de razão de semelhança das duas figuras.

A razão de semelhança é sempre maior ou menor que a unidade; si fôr a unidade, as figuras são iguaes.

Dous triangulos são semelhantes quando têm os angulos iguaes, portanto, os lados que se correspondem são proporcionaes.

Si os angulos de um triangulo são iguaes aos de outro, são equiangulos os dous triangulos.

Os lados oppostos aos angulos iguaes em dous triangulos semelhantes, são os homologos.

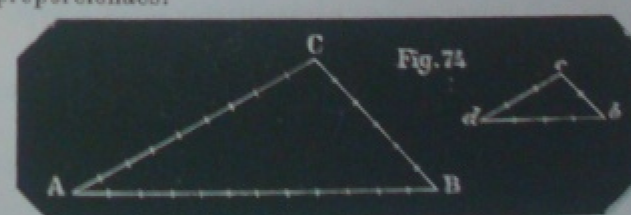
Dous triangulos que têm os lados respectivamente parallelos são semelhantes.

Dous triangulos que têm os lados respectivamente perpendiculares são semelhantes.

A recta que corta um triangulo e é parallela a um dos lados, fórma um outro triangulo semelhante ao primitivo.

Polygonos semelhantes são os que se compõem de igual numero de triangulos semelhantes dous a dous e igualmente collocados.

Os triangulos $A\ B\ C$ e *abc* (fig. 74) têm os angulos respectivamente iguaes, são semelhantes, seus lados são proporcionaes.



São iguaes os angulos $C = c$, $A = a$, $B = b$. São homologos os lados AB e ab, BC e bc, AC e ac por se opporem a angulos respectivamente iguaes; e por isso:

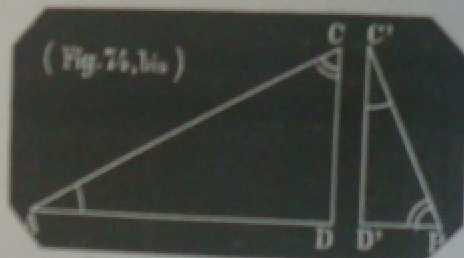
$AB : ab :: BC : bc :: AC : ac$.

$12 : 4 :: 6 : 2 :: 9 : 3$.

Neste exemplo a razão de semelhança é 3.

Os triangulos ADC e $C'D'B$ (fig. 74 bis) são semelhantes por terem os angulos D e D' iguaes por serem rectos, os angulos A e C' iguaes por terem a mesma medida, e os angulos C e B iguaes porque tambem têm a mesma medida.

Os lados homologos oppoem-se aos angulos iguaes e formam a pro porção $AD : D'C' :: DC : D'B$.



(Fig. 74, bis)

Para comprehender-se bem o que segue, imagine-se que estes dous triangulos tenham se approximado um para o outro de modo que o menor catheto CD do maior triangulo ADC encontre o maior catheto $C'D'$ do menor triangulo $C'D'B$. Neste caso fórma um triangulo rectangulo que contem aquelles dous.

Se do vertice do angulo recto de um triangulo rectangulo (fig. 75) baixar-se uma perpendicular sobre a hypothenusa:

1.° A perpendicular divide o triangulo em dous outros que lhe são semelhantes, e entre si.

2.° A perpendicular é meia proporcional entre os dous segmentos da hypothenusa.

3.° Cada catheto é meia proporcional entre o segmento da hypothenusa que lhe é adjacente e a hypothenusa inteira.

Seja o triangulo ABC, CD a perpendicular, ADC e CDB os triangulos parciaes (fig. 75).

Comparando o triangulo primitivo com cada um dos parciaes; chamaremos o primitivo primeiro triangulo e aos parciaes 2° e 3°.

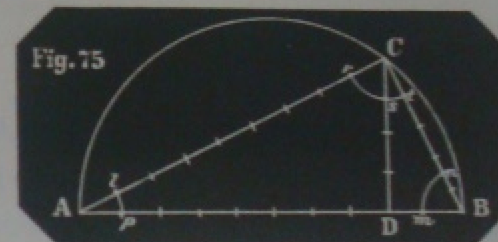


Fig. 75

O 1° triangulo ABC e o 2° ADC tem um angulo A commum, e o angulo ACB do 1° igual ao angulo ADC do 2°, por serem rectos, logo, o terceiro angulo ABC do 1° igual ao 3° angulo ACD do 2° triangulo: por isso o 1° e o 2° triangulos são semelhantes.

O 1° triangulo ABC e o 3° BDC têm um angulo em B commum, e o angulo ACB do 1° igual ao angulo BDC do 3° por serem rectos, logo, o 3° angulo BAC do 1° é igual ao 3° angulo BCD do 3° triangulo; 1° e o 3° triangulos são semelhantes.

Os dous triangulos parciaes ADC, BDC sendo semelhantes ao primitivo ABC, são semelhantes entre si.

Observação. — Podem-se verificar as igualdades dos angulos do 2° e 3° triangulos pelos arcos $\widehat{rs} = \widehat{mn}$; $\widehat{st} = \widehat{lp}$; os outros angulos ADC, BDC são iguaes por serem rectos.

Comparando os triangulos parciaes $A\,D\,C$, $B\,D\,C$ que têm os lados homologos perpendiculares.

(Maiores cathetos do 1.º e do 2.º triangulos) (Menores cathetos do 1.º e do 2.º triangulos)

$$\left.\begin{array}{l} A\,D : D\,C :: D\,C : D\,B \\ 8 : 4 :: 4 : 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{ex: } A\,D \times D\,B = 8 \times 2 = 16 \\ \text{m. } DC \times DC = 4 \times 4 = 16 \end{array}$$

Comparando o primeiro triangulo $A\,B\,C$ com o parcial $A\,D\,C$.

(As hypothenusas do 1.º e do 2.º triangulos) (Maiores cathetos do 1.º e do 2.º triangulos)

$$\left.\begin{array}{l} A\,B : A\,C :: A\,C : A\,D. \\ 10 : 8{,}95 :: 8{,}95 : 8. \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{ex: } A\,B \times A\,D = 10 \times 8 = 80 \\ \text{m. } AC \times AC = 8{,}95 \times 8{,}95 = 80 \end{array}$$

Comparando o 1º triangulo $A\,B\,C$ com o parcial $B\,D\,C$.

(As hypothenusas do 1.º e do 2.º triangulos) (Os menores cathetos do 1.º e do 2.º triangulos)

$$\left.\begin{array}{l} A\,B : B\,C :: B\,C : B\,D \\ 10 : 4{,}5 :: 4{,}5 : 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{ex: } A\,B \times B\,D = 10 \times 2 = 20 \\ \text{m. } B\,C \times B\,C = 4{,}5 \times 4{,}5 = 20 \end{array}$$

Os numeros que exprimem a hypothenusa e cada um dos cathetos, de um triangulo rectangulo $A\,B\,C$ são taes que:

O quadrado da hypothenusa é igual a somma dos quadrados dos dous cathetos

$$A\,B^2 = A\,C^2 + BC^2$$

A mesma figura.

Diz-se que a linha $A\,D$ é a projecção de $A\,C$ sobre $A\,B$, e a linha $D\,B$ a projecção de $B\,C$ sobre $A\,B$.

Si sobre $A\,B$ como diametro traçar-se uma circumferencia, esta passa pelo vertice C do angulo $A\,C\,B$, elle está inscripto no semi-circulo, tendo por medida metade

da semi-circumferencia. Por isso, as propriedades do triangulo rectangulo podem mudar nestas outras:

N. B.—A hypothenusa é agora um diametro.

Cada catheto é uma corda do circulo considerado.

Se de um qualquer ponto C da circumferencia baixar-se uma perpendicular $C\,D$ sobre o diametro $A\,B$; teremos:

1.º A perpendicular é meia proporcional entre os dous segmentos do diametro; ex:

(Segmento do diametro)		(a perpendicular)			(segmento do diametro)
$A\,D$	:	$D\,C$ ::	$D\,C$	:	$D\,B.$
8	:	4 ::	4	:	2

2.º A corda que em um extremo toca o diametro, é meia proporcional entre o diametro e a projecção da mesma corda sobre o diametro; ex:

(Diametro)		(corda)			(projecção da corda A C)
$A\,B$	:	$A\,C$ ::	$A\,C$	:	$A\,D.$
10	:	8,95 ::	8,95	:	8

outro ex:

(Diametro)		(corda)			(projecção da corda B C)
$A\,B$	:	$B\,C$ ::	$B\,C$	:	$D\,B.$
10	:	4, 5 ::	4, 5	:	2.

As mesmas propriedades expostas de um outro modo:

O quadrado de uma dessas cordas, é igual ao producto do diametro pela projecção da mesma corda sobre o diametro; ex.:

$$A\,C^2 = A\,B \times A\,D$$
$$8^2{,}95 = 10 \times 8.$$

outro ex.:

$$B\,C^2 = A\,B \times D\,B.$$
$$4^2{,}\,5 = 10 \times 2.$$

A perpendicular $C\ D$ baixada de um ponto C qualquer da circumferencia sobre o diametro, $A\ B$ chama-se ordenada, é meia proporcional entre os segmentos do diametro; ex:

$$C\ D^2 = A\ D \times D\ B.$$

AVALIAÇÃO E COMPARAÇÃO DAS AREAS

Area de uma figura qualquer, é a porção de superficie encerrada entre as linhas que limitam esta figura.

E' evidente que duas figuras de fórmas muito differentes podem encerrar a mesma porção de superficie, taes figuras chamam-se equivalentes.

Um parallelogrammo qualquer é equivalente a um rectangulo da mesma base e da mesma altura.

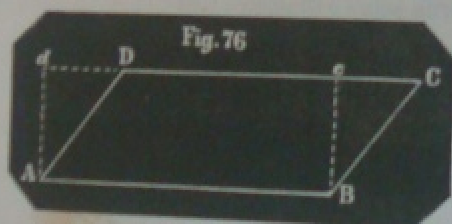


Fig. 76

Tomemos para exemplo o parallelogrammo $A\ B\ C\ D$ e o rectangulo $A\ B\ c\ d$ (fig. 76) da mesma base $A\ B$ e da mesma altura $c\ B$.

Os triangulos $d\ D\ A$ e $c\ B\ C$ são iguaes, por terem os lados $A\ D = B\ C$, $d\ A = c\ B$, os dous primeiros como lados oppostos do parallelogrammo, os dous ultimos como lados oppostos do rectangulo, e os angulos $d\ A\ D$, $c\ B\ C$ são iguaes por terem os lados parallelos e as aberturas para a mesma parte.

Si do trapezio $A\ B\ C\ d$ tirar-se o triangulo $c\ B\ C$ restará o rectangulo $A\ B\ c\ d$ se em vez deste tirar-se o

triangulo $d\ D\ A$ restará o parallelogrammo $A\ B\ C\ D$: o que mostra que são equivalentes as duas figuras.

Um triangulo qualquer é metade de um parallelogrammo da mesma base e da mesma altura.

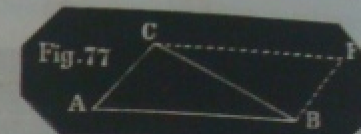


Fig. 77

Si pelo vertice C traça-se uma parallela $C\ F$ ao lado $A\ B$ do triangulo $A\ B\ C$ (fig. 77) e pelo vertice B a parallela $B\ F$ ao lado $A\ C$, a figura $A\ B\ F\ C$ será um parallelogrammo da mesma base e da mesma altura que a do triangulo e de que $C\ B$ é diagonal, por isso, o triangulo $A\ B\ C$ ou $B\ C\ F$ é metade do parallelogrammo.

Os triangulos da mesma base e da mesma altura ou de bases iguaes e alturas iguaes, são equivalentes dous a dous, como metade de parallelogrammos equivalentes.

Taes são os triangulos $A\ B\ C$, $A\ B\ C'$, e $a\ b\ C$ (fig. 78) cujos vertices C, C', se acham em uma parallela a base $A\ B$; a base $a\ b$ do ultimo triangulo é igual a base commum dos dous primeiros triangulos e é o prolongamento della.

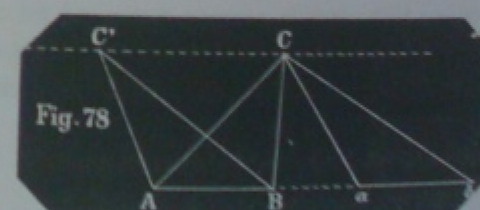


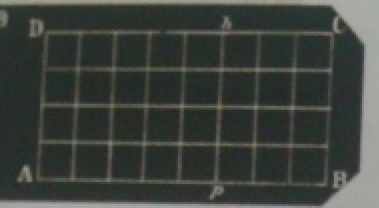
Fig. 78

Medida das areas tem por fim saber-se quantas vezes uma area qualquer contém uma outra tomada para unidade ou para termo de comparação.

E' costume escolher para unidade um quadrado que tenha o lado igual a recta tomada por unidade de comprimento.

Querendo-se saber quantas vezes o rectangulo *A B C D* (fig. 79) contém o quadrado *a b c d* unidade;

Fig. 79



divide-se o rectangulo em quadrados iguaes ao quadrado *a b c d* unidade, como vê-se na figura.

O numero que indica a quantidade do quadrado unidade contido no rectangulo é a medida desse rectangulo ou a sua area. Neste exemplo é o numero 32 a medida ou a area do rectangulo.

O verdadeiro processo para avaliar areas é o seguinte:

Medem-se a base *A B* e a altura *h p* do rectangulo *A B C D* com o lado *a b* do quadrado *a b c d* unidade, o numero 8 que indica quantas vezes *a b* foi contido na base *A B* e o numero 4 que indica quantas vezes *a b* foi contido na altura *h p* do rectangulo, sendo multiplicados dá em producto 32 que é, como já se disse, a area do rectangulo.

(Base)		(altura)		(area do rectangulo)
8	$\times$	4	$=$	32 unidades

A area do rectangulo é igual ao producto dos seus dous lados contiguos *A B* e *A D*; por ser $h\,p = A\,D$.

A area de qualquer parallelogrammo é igual ao producto da sua base pela sua altura; por ser um

parallelogrammo equivalente a um rectangulo da mesma base e da mesma altura.

A area de um quadrado é igual ao producto de um dos seus lados por si mesmo; por ser a base igual á altura.

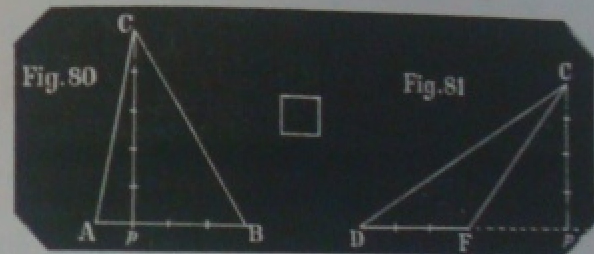
A area de qualquer triangulo é metade do producto da base pela altura; por ser um triangulo metade de um parallelogrammo da mesma base e da mesma altura. Ex.:

O triangulo *A B C* (fig. 80) sua area é igual a $\frac{A\,B \times C\,p}{2} = \frac{4 \times 5}{2} = 10$ unidades.

O triangulo *D F C* (fig. 81) sua area é igual a $\frac{D\,F \times C\,p}{2} = \frac{3 \times 4}{2} = 6$ unidades.

Fig. 80

Fig. 81

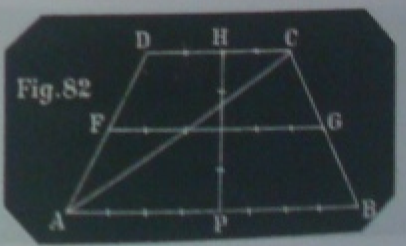


Tambem obtem-se a area de um triangulo pelo seguinte processo:

Multiplicando a base pela metade da altura, ou vice-versa.

A area de um trapezio é igual ao producto da altura pela semi-somma das bases.

Fig. 82



O trapezio $A\ B\ C\ D$ (fig. 82) sua area é igual a $\frac{AB+DC}{2} \times HP = \frac{8+4}{2} \times 4 = 6 \times 4 = 24$ unidades.

Outro processo: — A area do trapezio $A\ B\ C\ D$ é igual a altura $H\ P$ multiplicada pela parallela $F\ G$ equidistante das bases.

Area do trapezio $A\ B\ C\ D = HP \times FG = 4 \times 6 =$ 24 unidades.

Traçando-se a diagonal $A\ C$, se dividirá o trapezio em dous triangulos $B\ A\ C$ e $C\ A\ D$.

As areas destes triangulos em que ficou dividido o trapezio são a do triangulo $BAC =$

$$\frac{A\ B}{2} \times H\ P = \frac{8}{2} \times 4 = 16 \text{ unidades}$$

e do triangulo $D\ A\ C =$

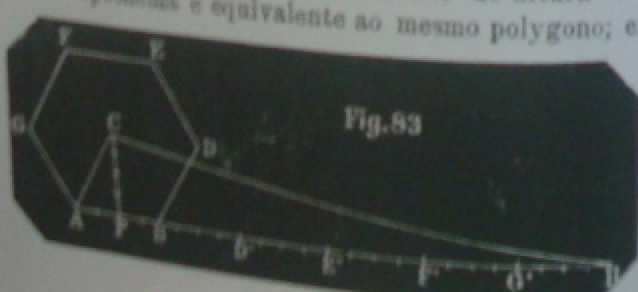
$$\frac{DC}{2} \times HP = \frac{4}{2} \times 4 = \underline{8} \text{ unidades}$$

Somma das areas dos dous triangulos 24 unidades.

A area de um polygono regular é igual a metade do producto do seu perimetro pelo seu apothema.

Avalia-se a area de um polygono irregular dividindo-o em triangulos ou trapezios, avaliam-se as areas destes triangulos ou trapezios, a somma dellas será a area do polygono.

Um triangulo ACH (fig. 83) de base igual ao perimetro de um polygono regular $A\ B\ D\ E\ F\ G$ e de altura $C\ P$ igual ao apothema é equivalente ao mesmo polygono; ex:



A base $A\ H$ do triangulo é igual ao perimetro ou a somma dos lados $A\ B + B\ D + D\ E + E\ F + F\ G + G\ A$ do polygono, á altura $C\ P$ é igual ao apothema.

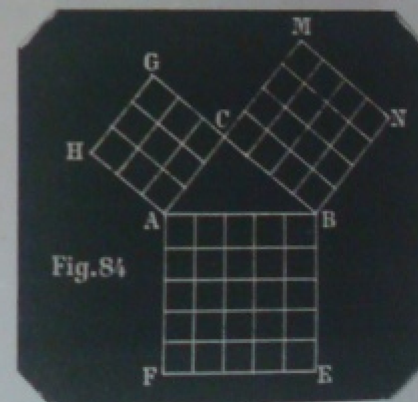
Area do triangulo $= \frac{A\ H}{2} \times C\ P = \frac{24}{2} \times 3{,}25 =$ $12 \times 3{,}23 = 38{,}7$ unidades.

Area do polygono $=$

$$\frac{A\ B + B\ D + D\ E + E\ F + F\ G + G\ A}{2} \times C\ P =$$

$\frac{24}{2} \times 3{,}23 = 38{,}7$ unidades.

O quadrado construido sobre a hypothenusa $A\ B$ de um triangulo rectangulo $A\ B\ C$ (fig. 84) é equivalente á somma dos quadrados construidos sobre os dous cathetos $A\ C$, $C\ B$. Ex.:



Area do quadrado $A\ C\ G\ H =$ 9

Area do quadrado $B\ C\ M\ N =$ $\underline{16}$

Area do quadrado $A\ B\ E\ F =$ 25

Em duas figuras semelhantes, se uma tem os lados homologos metade em comprimento dos lados da outra, a area da que tem os lados metade em comprimento, é a quarta parte da area da outra (fig. 85).

Area do quadrado $ABEF = AB^2 = 6^2 = 36$ unidades

Area do quadrado $ADmn = AD^2 = 3^2 = 9$ »

A area deste quadrado é a quarta parte da area do outro.

Obtem-se o quadrado de area igual a metade da area de um quadrado $ABEF$, dado, determinando a média proporcional entre um lado AB do quadrado dado e sua metade AD; o que se consegue traçando sobre AB como diametro uma semi-circumferencia ACB, do ponto D metade de AB levantando a perpendicular DC, traçando a corda AC essa será o lado do quadrado de area igual a metade da area do quadrado $ABEF$. Ex.:

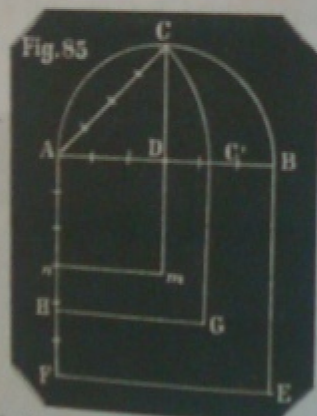


Fig. 85

Por ser $AC^2 = AB \times AD =$
$4^2 25 = 6 \times 3 = 18$ } (Observe que $AC = AC'$)

Será a area do quadrado $AC'GH = AC'^2 = 4^2,25 =$ 18 unidades.

A area desse quadrado é metade da area do quadrado $ABEF$.

DIMENSÕES DAS FIGURAS

Chamam-se dimensões de um rectangulo sua base e altura; o rectangulo é figura de duas dimensões, dá-se a

uma dellas, de ordinario a maior, o nome de comprimento, a outra o de largura.

Dos mais parallelogramos medem-se as areas como as dos rectangulos, a base pela altura. Essas linhas são suas dimensões, isto é, seu comprimento e sua largura.

A linha é a extensão de uma dimensão, comprimento.

As dimensões de um triangulo são a base e a metade da altura; as de um trapezio, a altura e a parallela equidistante das bases.

Por analogia chamam-se dimensões de qualquer superficie limitada (plana ou curva), a duas linhas cujo producto representa sua area, pois que póde essa superficie ter a area equivalente á de um rectangulo.

A extensão que tem por dimensões, comprimento, largura e altura chama-se volume, solido ou corpo.

Duas cordas que se cortam n'um circulo, ficam divididas em partes inversamente proporcionaes.

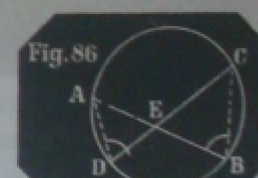


Fig. 86

Sejam AB e CD (fig. 86) as duas cordas; traçando-se as cordas AD e BC formam-se dous triangulos AED e CEB semelhantes; o angulo $EDA = EBC$ por serem inscriptos e terem a mesma medida o arco $\frac{AC}{2}$, pela mesma razão o angulo $EAD = ECB$ por terem a mesma medida o arco $\frac{DB}{2}$ e o $\angle AED = BEC$ como verticalmente oppostos.

Os lados homologos destes triangulos formam a proporção $A E : E C :: D E : E B$ em que o 1° e 2° termos são lados oppostos aos angulos $A D C$, $A B C$ iguaes e inscriptos, que tem por medida o arco $\frac{A C}{2}$, tambem o 3° e 4° termos são lados oppostos aos angulos $D A B$, $D C B$ iguaes e inscriptos, que têm por medida o arco $\frac{D B}{2}$.

As duas cordas estão divididas em partes inversamente proporcionaes; porque as partes de uma $A E$ e $E B$ occupam os extremos, e as partes de outra $D E$ e $E C$ occupam os meios da proporção.

Duas seccantes $A B$, $D B$ que se encontram em um ponto B fóra do circulo (fig. 87), são inversamente proporcionaes ás suas partes externas.

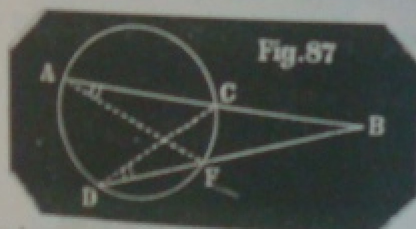


Fig.87

Traçando-se as cordas $A F$, $D C$ fórmam os triangulos $B A F$, $B D C$ semelhantes por ser o angulo B commum, os angulos $B A F$ e $B D C$ inscriptos e iguaes por terem a mesma medida o arco $\frac{C F}{2}$; logo, 3° angulo $A F B$ de um triangulo é igual ao 3° angulo $D C B$ do outro.

Os lados homologos desses triangulos fórmam a proporção $A B : D B :: F B : C B$ em que o 1° e 2° termos são lados oppostos aos maiores angulos $A F B$, $D C B$ e iguaes dos respectivos triangulos, o 3° e 4° termos oppoem-se aos iguaes angulos $F A B$, $C D B$ inscriptos da mesma medida o arco $\frac{C F}{2}$.

Como se vê, são as secantes inversamente proporcionaes ás suas partes externas, porque uma secante $A B$ e sua parte $C B$ occupam os extremos, outra $D B$ e sua parte $F B$ occupam os meios da proporção.

Traçando-se de um mesmo ponto B uma secante $B A$ e uma tangente $B D$ a um circulo (fig. 88) a tangente é meia proporcional entre a secante e a sua parte externa.

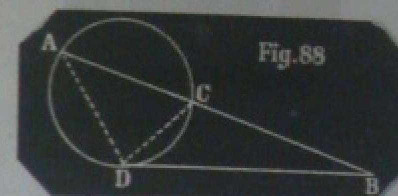


Fig.88

Traçando as cordas $A D$, $D C$ formam se os triangulos $A B D$ e $B D C$ semelhantes, por ser o angulo B commum, o angulo $B A D = B D C$ por terem a mesma medida, o arco $\frac{\widehat{D C}}{2}$, um destes angulos é inscripto, o outro é formado por corda $C D$ e tangente $D B$; o 3.° angulo $A D B$ de um triangulo será igual ao 3.° $D C B$ do outro.

Os lados $A B$ e $D B$ oppostos aos angulos $A D B$ e $D C B$ iguaes, formam a primeira razão, os lados $D B$ e $C B$ oppostos a outros angulos $B A D$ e $B D C$ iguaes, formam a segunda razão da proporção:

$$A B : D B :: D B : C B$$

em que a tangente BD occupa os meios, e a secante BA com a sua parte externa BC occupam os extremos.

A circumferencia do circulo é o limite para o qual tende o perimetro do polygono regular inscripto, do qual se duplica continua e indefinidamente o numero dos lados:

Ex.:

Tome-se um polygono regular inscripto no circulo C (fig. 89), seja um quadrado $A\ B\ D\ E$; seu apothema é Cp, o raio é $C\ A$ que tambem é raio do circulo circumscripto.

Duplique-se o numero dos lados formando o otogono regular $A\ a\ B\ b\ D\ d\ E\ e$. Duplique novamente o numero dos lados; os perimetros dos polygonos se tornam successivamente maiores sem comtudo ser algum delles igual a circumferencia. O apothema cresce tambem, como vê-se em Cp' porém é sempre menor que o raio $C\ A$.

As areas desses polygonos ainda que se tornem maiores são, porém, sempre menores que o circulo.

Quando o numero de lados é infinito, o ultimo polygono não differe do circulo, o perimetro confunde-se com a circumferencia, o apothema torna-se igual ao raio. Por isso:

O circulo póde ser considerado como um polygono regular de infinitos lados (cada um infinitamente pequeno) cujo apothema não differe do raio.

Os lados infinitamente pequenos deste polygono são chamados os elementos da circumferencia.

Rectificar uma circumferencia é reduzil-a a uma linha recta, que é o seu comprimento.

Razão ou relação da circumferencia para seu diametro é um numero constante, que é designado pela lettra grega—π—que se lê—pi obtem-se do modo seguinte essa relação:

Imagine-se um fio applicado exactamente sobre a circumferencia de modo que os dous extremos se toquem no mesmo ponto da circumferencia; este fio desdobrado em linha recta e medido em unidades lineares, representa o comprimento da circumferencia.

Applicando-se sobre uma circumferencia rectificada o seu diametro, este se contém nella tres vezes e mais um resto.

A relação approximada da circumferencia para o diametro foi Archimedes o primeiro que a fixou em $\frac{22}{7}$; isto quer dizer que, se uma circumferencia tem 22 unidades de comprimento, o seu diametro terá 7 destas unidades.

Conforme Archimedes, a circumferencia contém 3 vezes o diametro e mais $\frac{1}{7}$ deste mesmo diametro ($\frac{22}{7}=3\frac{1}{7}$); isto é, a razão ($3\frac{1}{7}$) da circumferencia para o diametro em qualquer circulo, é um numero constante.

Depois de Archimedes, Adriano Metius achou a relação $\frac{355}{113}$ que é mais approximada que a de Archimedes, nesta, a circumferencia contém 355 unidades, e o diametro contém 113 destas mesmas unidades.

Depois de Archimedes e Metius, outros geometras acharam outra relação mais approximada que as duas anteriores, a qual é esta $\pi=3{,}1415926\ldots$

Esse numero exprime tambem o comprimento da circumferencia cujo diametro é 1; isto é, em que o diametro é igual á unidade.

As relações de Archimedes e de Metius sendo reduzidas a decimaes e comparando-as com a ultima achada, reconhece-se que é esta a menor dellas :

1.° Archimedes $\pi = \frac{22}{7} = 3,142\ldots\ldots.$

2.° Metius $\pi = \frac{355}{113} = 3,1415929\ldots$

3.° $\pi = 3,1415926\ldots$

A relação de Archimedes é maior que as duas outras, desde a 5.ª casa decimal, a de Metius é maior que a ultima, desde a 7.ª casa decimal. A ultima porém é a mais exacta.

Pela analogia do circulo com o polygono regular de infinitos lados, cada um infinitamente pequeno, em que o perimetro confunde-se com a circumferencia, o apothema com o raio ; as dimensões do circulo são metade da circumferencia e o raio, por ser as do polygono regular metade do perimetro e o apothema.

COMPRIMENTO DA CIRCUMFERENCIA

O comprimento da circumferencia é igual ao producto da relação π pelo diametro. Ex. :

Circumferencia $= 3,1416 \times$ diametro.

Se uma circumferencia tem 6 metros de diametro, o seu comprimento é igual.

$$\pi D = 3,1416 \times 6 = 18^{m}, 8496.$$

(N. B. Na pratica é costume servir-se da 2.ª ou 3.ª relação π até a quarta casa decimal augmentada de um decimo millesimo ; ex. : em vez da relação 3,1415, toma-se 3,1416.)

Por outro modo:

O comprimento da circumferencia é igual ao producto de $2\,\pi$ (6,2832) pelo raio.

Circumferencia $= 2\,\pi \times$ raio

Se uma circumferencia tem 3 metros de raio, o seu comprimento é igual:

$$2\,\pi\,R = 6,2832 \times 3 = 18^{m}, 8496$$

N. B — $2\,\pi = 6,2832$

AREA DO CIRCULO

A area do circulo é igual á metade da circumferencia multiplicada pelo raio.

Area do circulo $= \frac{2\,\pi\,R}{2} \times R$ ou $\pi\,R^2$; essa ultima formula quer dizer que obtem-se tambem a area do circulo multiplicando a relação π pelo quadrado do raio.

Se um circulo tem 4 metros de raio, a sua area é igual a

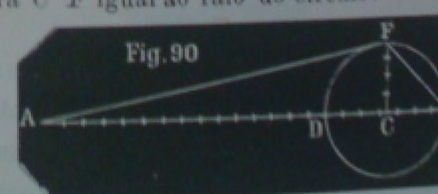
(1° processo.) — $\frac{2\,\pi\,R}{2} \times R = \frac{6,2832 \times 4}{2} \times 4 = 12,5664 \times 4 = 50^{m2}, 2656.$

(2° processo) — (quadrado do raio)

A area do mesmo circulo $= \pi\,R^2 = 3,1416 \times 4^2 = 3,1416 \times 16 = 50^{m2}, 2656.$

A area do sector circular é igual a metade do arco que o limita, multiplicada pelo raio; esse arco é a base do sector.

O triangulo $A\ B\ F$ é equivalente ao circulo C (fig. 90) por ser a base $A\ B$ do triangulo igual a 3 vezes o diametro, $D\ B$ mais um setimo do mesmo diametro, e a altura $C\ F$ igual ao raio do circulo.



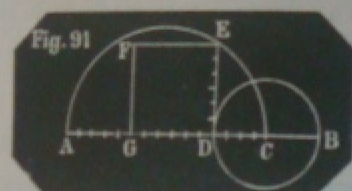
A recta $A\,B$ é o comprimento da circumferencia.

Area do triangulo $A\,B\,F = \frac{A\,B}{2} \times C\,F = \frac{22}{2} \times 3{,}5 = 11 \times 3{,}5 = 38{,}5$ quadrados unidades.

Area do circulo $= \frac{A\,B}{2} \times C\,F = \frac{22}{2} \times 3{,}5 = 11 \times 3{,}5 = 38{,}5$ quadrados unidades.

Ou igual a $\pi R^2 = 3{,}1416 \times 3^2{,}5 = 3{,}1416 \times 12{,}25 = 38{,}48$ unidades.

O quadrado $D\,E\,F\,G$ é equivalente ao circulo C (fig. 91) por ser o seu lado $D\,E$ média proporcional entre $A\,D$ (que é metade da circumferencia) e o raio $D\,C$.



$$A\,D : D\,E :: D\,E : D\,C$$

$$11 : 6{,}2 :: 6{,}2 : 3{,}5$$

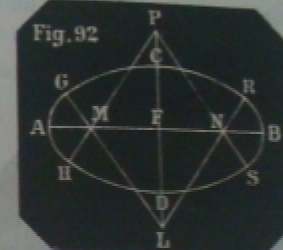
Area do quadrado $D\,E\,F\,G = D\,E^2 = 6^2{,}2 = 38{,}44$ quadrados unidades.

Area do circulo C = a metade da circumferencia pelo raio $= A\,D \times D\,C = 11 \times 3{,}5 = 38{,}5$ quadrados unidades; ou $\pi R^2 = 3{,}1416 \times 3^2{,}5 = 3{,}1416 \times 12{,}25 = 38{,}48$ unidades.

OVAL

Oval é uma curva plana fechada, composta de quatro arcos de circulo, os centros destes arcos são tambem da oval.

A oval é regular (fig. 92) quando os seus arcos são iguaes dous a dous. Ex.:



O arco $\widehat{G\,H} = \widehat{R\,S}$, $\widehat{G\,R} = \widehat{H\,S}$, que tem por centros os pontos M, N, L, P, respectivamente.

Eixo da oval é a recta que a divide em duas partes iguaes.

Eixo maior $A\,B$ é a maior recta que se póde traçar na oval regular, a perpendicular $C\,D$ ao meio do eixo maior e limitada pela curva é o seu eixo menor.

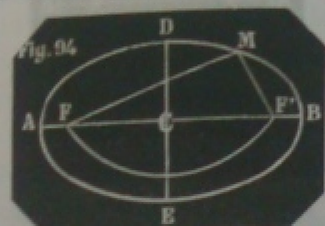
Oval irregular ou ovulo (fig. 93) é aquella que tem dous dos seus arcos oppostos desiguaes, um destes é sempre a semi-circumferencia.

A oval irregular tem um só eixo $C\,D$, pelos seus extremos passam os arcos desiguaes.

Os seus quatro arcos são $A\,C\,B$, $G\,H$, $B\,H$, $A\,G$, cujos centros são F, P, A, B respectivamente.

ELLIPSE

Ellipse é uma curva plana fechada na qual a somma das distancias de cada um de seus pontos a dous pontos fixos $F F'$ (fig. 94) chamados fócos, situados no seu plano, é a mesma para todos os pontos da curva.



A recta $A B$ que passa pelos fócos e tem os extremos na curva, chama-se eixo maior da ellipse.

A recta $D E$ perpendicular ao meio do eixo maior e tem os extremos na curva, é o eixo menor da ellipse.

O centro da ellipse é o ponto C em que os eixos se cortam. Os fócos distam igualmente do centro C da ellipse.

A distancia $F F'$ existente entre os fócos, chama-se distancia focal.

Vertice da ellipse é cada um dos quatro pontos $A, D, B, E,$ da curva em que terminam os eixos.

Chamam-se raios vectores da ellipse, quaesquer rectas $F M, F' M$ traçadas de um ponto M da curva para os fócos.

A somma de dous raios vectores que terminem no mesmo ponto da curva, é sempre igual ao eixo maior da ellipse. Ex.:

$$F M + M F' = A B.$$

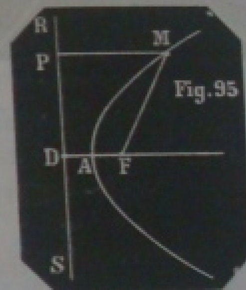
O arco $F F'$ de raio igual a $C B$ metade do eixo maior, e descripto de um extremo D do eixo menor, passa

pelos fócos. E' deste modo que se acham os fócos da ellipse.

A ellipse differe da oval em não ser formada de arcos de circulo e ter um só centro, a oval tem quatro centros e é formada de arcos de circulo.

PARABOLA

A parabola é uma curva plana aberta, em que todos os seus pontos são igualmente distantes de um ponto fixo e de uma recta fixa, situados no seu plano. (fig. 95).



O ponto fixo F chama-se fóco e a recta $R S$ fixa chama-se directriz.

Chama-se eixo da parabola a perpendicular $F D$ traçada do fóco F sobre a directriz.

Chama-se vertice da parabola ao ponto A que divide ao meio a distancia $F D$ do fóco a directriz, por outro modo: vertice é o meio do eixo $D F$ da parabola.

Toda a recta $F M$ traçada do fóco F a qualquer ponto M da curva chama-se raio vector.

Qualquer raio vector de um ponto é igual á perpendicular abaixada desse ponto a directriz. Ex: $F M = M P$.

Hyperbole (fig. 96) é uma curva plana de dous ramos separados e abertos, na qual a differença das distancias de cada um dos seus pontos a dous pontos fixos chamados fócos F, F' é sempre a mesma.

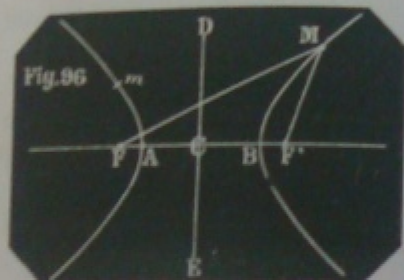


Fig. 96

Chama-se primeiro eixo, eixo transverso ou eixo limitado da hyperbole á recta A B que termina nos dous ramos da curva e cujo prolongamento passa pelos fócos F, F'.

Chama-se segundo eixo, eixo não transverso ou eixo illimitado da hyperbole á recta E D perpendicular ao meio do eixo transverso A B; e o ponto C que divide ao meio o eixo transverso é o centro da hyperbole.

Vertices da hyperbole são os pontos A e B em que a curva encontra o eixo transverso.

As rectas traçadas dos fócos a qualquer ponto da curva chamam-se raios vectores.

A differença dos raios vectores $F'M$ e F' M de um mesmo ponto M da curva é sempre igual ao eixo transverso A B; ex.: $FM - F'M = A$ B, $F'm - Fm = A$ B e assim em todo outro qualquer ponto da curva.

INSTRUMENTOS INDISPENSAVEIS AO DESENHO GEOMETRICO

Regua é um instrumento com que se traçam linhas rectas. Tem a fórma que se vê na fig. 97. Os seus bordos são linhas rectas

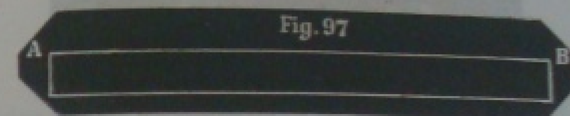


Fig. 97

Para verificar a rectidão de uma regua, traça-se uma linha unida a todo o comprimento A B da regua, depois voltando os extremos da regua, de modo que o extremo em A passe para o extremo em B e o em B para A; traça-se uma linha, se esta linha coincidir com a primeira, a regua é perfeita.

A figura 98 representa um tira-linhas. Em uma extremidade tem duas laminas de aço, tendo um parafuso que as permitte approximarem-se ou afastarem-se, para deste modo cheias de tinta fazerem-se traços finos ou grossos.

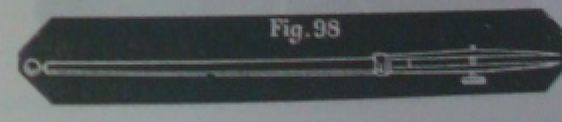


Fig. 98

A figura 99 representa um compasso.

Chamam-se pernas do compasso as duas peças unidas por uma articulação que permitte afastarem-se mais ou menos uma peça da outra; as pernas terminam em pontas.

Serve o compasso para dividir e transportar comprimentos.

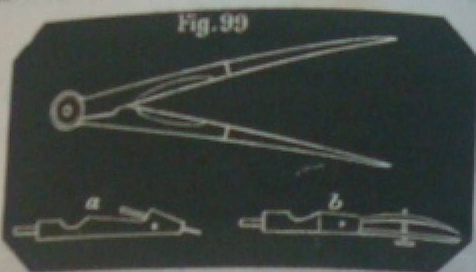


Fig. 99

Entre os compassos ha uns em que se podem substituir parte de uma das pernas por um porta-lapis (fig. *a*) ou por um tira-linhas (fig. *b*) para deste modo traçar circumferencias e arcos de circulo.

Esquadro é um instrumento que serve para traçar perpendiculares e parallelas. Tem varias fórmas, os que têm a fórma de triangulo rectangulo são os mais usados no desenho (fig. 100).

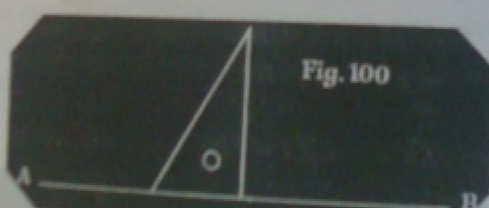


Fig. 100

Verifica se que um esquadro é perfeito, collocando-se um dos cathetos sobre uma recta *A B* e traça-se pelo outro catheto uma linha, volta-se o esquadro para o lado opposto a esta linha, de novo ajusta-se um catheto á recta *A B* e outro á linha, traça-se por este catheto uma outra linha; se as duas linhas coincidirem, o esquadro é perfeito.

Transferidor é um instrumento que serve para medir os gráos dos angulos e para construir angulos de certo numero de gráos. (fig. 101)

Tem a fórma de um semi-circulo cuja semi-circumferencia ou limbo é dividida em 180°.

Linha de fé é o diametro *A B*, no meio da linha de fé ha uma cavidade *F* que é o centro do transferidor.

Fig. 101

Mede-se um angulo *M F N* com o transferidor, collocando a linha de fé *A B* sobre um lado *M F* do angulo, de modo que o centro *F* do transferidor caia sobre o vertice *F* do angulo; o numero de gráos comprehendidos entre a abertura do angulo é a medida d'esse angulo. Ex.:

O angulo *M F N* tem por medida 60°.

Tinta da China é a que serve para depois de bem certos os traços de lapis cobril-os afim de bem conserval-os.

Godet é um utensil em que dissolve-se a tinta.

Prancheta é uma taboa rectangular plana, sobre ella se fixa o papel para se desenhar.

Nas construcções das figuras de desenho linear geometrico faz-se uso de certas linhas chamadas auxiliares ou de construcção, que servem para determinar os pontos das linhas que constituem a figura.

Chamam-se principaes as linhas que constituem a figura; são representadas por um traço cheio e continuo. Ex.: A linha $A\ B$ (fig. 102) é principal.

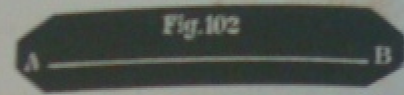


Fig.102

Todas as linhas principaes que não podem ser vistas pelo desenhista da posição em que se o suppõe collocado, são representadas por uma serie de pontos, e tomam o nome de linha pontuada. Ex.: $A\ B$ (fig. 103).

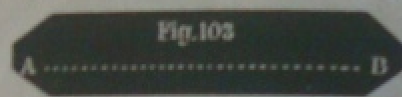


Fig.103

As linhas auxiliares não fazem parte da figura ou do desenho.

Chama-se linha auxiliar interrompida a que é representada por uma serie de traços. Ex.: $A\ B$ (fig. 104).

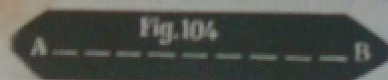


Fig.104

Chama-se linha auxiliar mixta a que é representada por traços e pontos. Ex.: $A\ B$ (fig. 105)

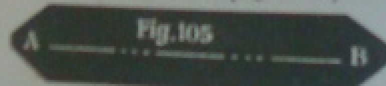


Fig.105

SOLUÇÕES DE PROBLEMAS ELEMENTARES POR PROCESSOS GRAPHICOS

Problema. — Constituir um angulo igual a outro dado.

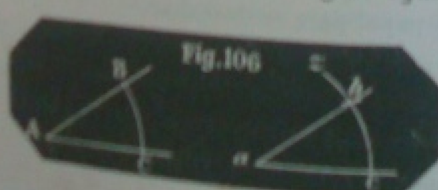


Fig.106

Seja $B\ A\ C$ o angulo dado (fig. 106). Trace-se uma recta $a\ c$, do vertice A do angulo dado como centro e com uma abertura arbitraria de compasso; descreva-se um arco $B\ C$ de circulo limitado pelos lados do angulo; com a mesma abertura de compasso e do ponto a da recta $a\ c$ como centro, descreva-se um arco $c\ z$; do ponto c como centro e com uma abertura de compasso igual a $B\ C$ descreva-se um pequeno arco que corte o arco $c\ z$ em um ponto b, trace-se do ponto a ao ponto b uma recta $a\ b$. O angulo $b\ a\ c$ é o pedido.

Problema.—Construir um angulo igual á somma de dous angulos dados.

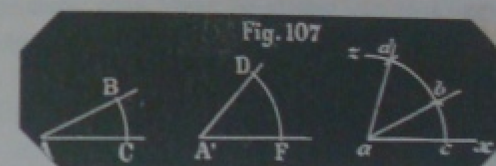


Fig. 107

Sejam $B\ A\ C$, $D\ A'\ F$ os angulos dados (fig. 107). Trace-se uma recta $a\ x$; e de cada um dos vertices A e A' dos angulos dados descreva-se com a mesma abertura de compasso, um arco, $C\ B$, $F\ D$, com a mesma abertura de compasso, descreva-se de um ponto a da recta $a\ x$ um arco $c\ z$, tome-se neste arco a porção $c\ b$ igual ao arco $B\ C$, trace-se uma recta $a\ b$ que forma com a recta $a\ c$ um angulo $b\ a\ c$ igual ao angulo $B\ A\ C$; no arco $b\ z$ tome-se a porção $b\ d$ igual ao arco $D\ F$, trace a recta $a\ d$; o angulo $b\ a\ d = D\ A'\ F$.

O angulo $d\ a\ c$ é igual á somma dos dous angulos dados.

Problema.—Construir um angulo igual á differença de dous angulos dados.

Sejam $B\ A\ C$ e $D\ A'\ F$ (fig. 108) os dous angulos.

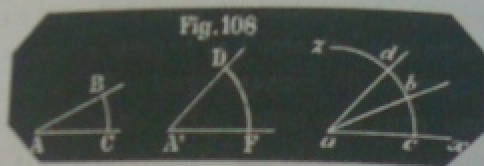


Fig. 108

Trace-se uma recta $a\ x$: e de cada um dos vertices A e A' dos dous angulos dados, descreva-se com a mesma abertura de compasso, um arco $B\ C$, $D\ F$, e ainda com a mesma abertura de compasso, descreva-se do ponto a da recta $a\ x$ um arco $c\ z$, tomem-se nesse arco, começando do ponto c a porção $c\ b$ igual ao arco $B\ C$, e a porção $c\ d$ igual ao arco $D\ F$.

Tracem-se as rectas $a\ b$, $a\ d$.

O angulo $d\ a\ b$ é igual á differença dos dous angulos dados.

Problema.—Por um ponto C dado em uma recta $A\ B$ (fig. 109) levantar-se uma perpendicular a essa recta.

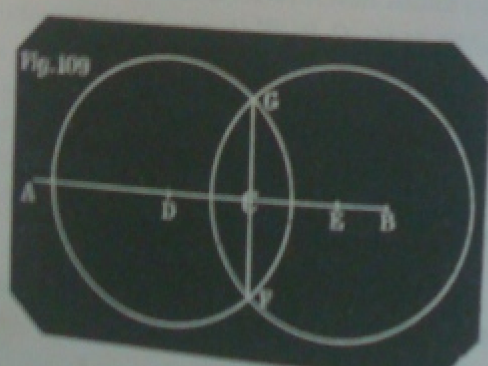


Fig. 109

Marque-se na recta $A\ B$ para um e outro lado do ponto C dado, duas distancias iguaes $C\ D$ e $C\ E$; do ponto D como centro e raio maior que a metade da distancia DE, descreva-se uma circumferencia, com o mesmo raio e do ponto E descreva-se outra circumferencia; os pontos F e G de intersecções das duas circumferencias pertencem á perpendicular pedida.

Trace-se a recta $F\ G$ que será a perpendicular pedida.

As duas circumferencias são secantes, e a recta $F\ G$ é uma corda commum que tem a propriedade de ser perpendicular á linha $D\ E$ dos centros D e E.

Para resolver este problema basta traçar-se dos pontos D e E dous arcos com o mesmo raio, comtanto que seja maior que metade da distancia $D\ E$.

Problema. — Por um ponto C dado fóra de um recta $A\ B$ (fig. 110) baixar uma perpendicular a essa recta.

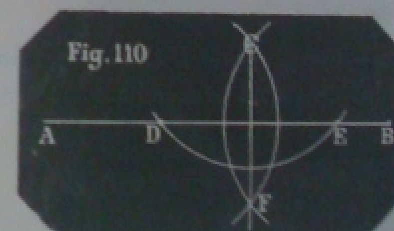
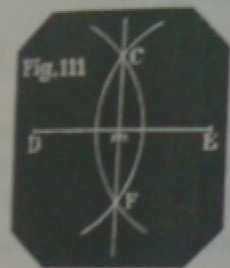


Fig. 110

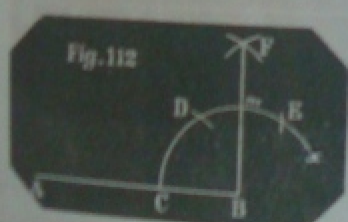
Do ponto C como centro trace-se um arco de raio $C\ E$ tal que possa cortar a recta $A\ B$ em dous pontos D e E, do ponto D como centro e raio maior que metade da distancia $D\ E$, descreva-se um arco, do ponto E e com o mesmo raio descreva-se outro arco, pelos pontos C e P de intersecções destes dous arcos, trace-se uma recta $C\ P$ que será a perpendicular pedida.

Problema.—Dividir em duas partes iguaes uma recta $D\ E$ (fig. 111) de grandeza determinada. Por outro modo: Achar o meio de uma linha recta.



Do extremo D como centro e raio maior que metade da distancia $D\ E$, descreva-se um arco, do extremo E como centro e com o mesmo raio descreva-se outro arco; pelos pontos C e F de intersecções destes dous arcos, trace-se uma recta $C\ F$, esta recta corta a recta $D\ E$ no ponto m em duas partes iguaes e lhe é perpendicular neste mesmo ponto m.

Problema.—Por um ponto B extremo de uma recta $A\ B$ (fig. 112) levantar uma perpendicular a essa recta.



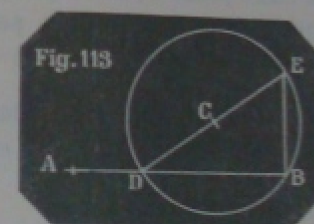
Do ponto B como centro e com qualquer raio $B\ C$ descreva-se um arco $C\ x$; com o mesmo raio $B\ C$ tomem-se

nesse arco começando em C duas porções iguaes $C\ D$ e $D\ E$, uma em seguida á outra, de cada um dos pontos D e E como centro e raio maior que metade da distancia $D\ E$, descreva-se um arco; pelo ponto F de intersecção dos arcos ao ponto B trace-se a recta $F\ B$ que será a perpendicular pedida.

O arco $C\ D + D\ E = 60° + 60° = 120°$, subtrahindo a porção $Em = 30°$, resta o arco $Cm = 90°$.

A questão, levantar uma perpendicular na extremidade de uma recta, póde-se prolongar a recta e applicar o processo da figura 109.

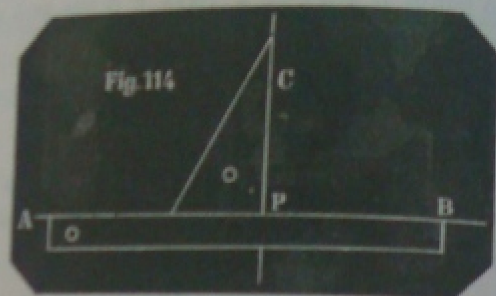
Problema.—Levantar uma perpendicular na extremidade B de uma recta $A\ B$ (fig. 113) que se não póde prolongar.



Tome-se um ponto C fóra da recta, escolhido de modo tal que descrevendo-se delle com um raio igual $C\ B$ uma circumferencia, esta encontre em dous pontos B e D a recta $A\ B$; pelo ponto D e o centro C do circulo trace-se o diametro $D\ E$, do seu extremo E para B trace uma recta $E\ B$, que será a perpendicular pedida por ser o angulo $E\ B\ D$ inscripto no semi-circulo.

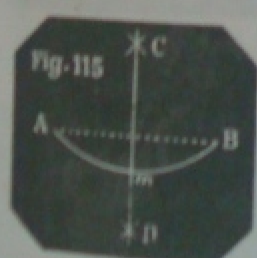
Problema.— Por um ponto C dado fóra de uma recta $A\ B$ (fig. 114) traçar uma perpendicular a essa recta.

Solução com o esquadro.



Ajuste-se uma regua a recta $A\ B$, colloque-se um dos cathetos do esquadro sobre a recta $A\ B$ e a regua ; escorregue o esquadro ao longo da regua até que o outro catheto coincida com o ponto C, nessa posição, e por esse catheto trace a linha $C\ P$, que passará pelo ponto C e será perpendicular a recta $A\ B$.

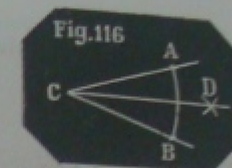
Problema.— Dividir um arco em duas partes iguaes. E' o mesmo que dividir sua corda em duas partes iguaes.



Seja o arco $A\ B$ (fig. 115). Trace-se a corda $A\ B$ deste arco, ao meio della trace uma perpendicular

$C\ D$ a mesma corda ; essa perpendicular divide o arco no ponto m em duas partes iguaes ; $A\ m = m\ B$.

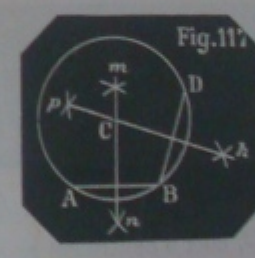
Problema.— Traçar a bissectriz de um angulo.



Seja o angulo $A\ C\ B$ (fig. 116).

Do vertice C como centro e com qualquer raio, trace-se um arco $A\ B$ de circulo que corte os dous lados do angulo em dous pontos A e B ; destes pontos como centros e com um raio maior que metade da distancia $A\ B$, descrevam-se dous arcos de circulo, que se cortarão em um ponto D ; trace a recta $C\ D$ que será a bissectriz deste angulo.

Problema.— Descrever uma circumferencia que passe por tres pontos dados que não estejam em linha recta.



Sejam A, B, D os tres pontos dados (fig. 117).

Trace-se de um qualquer dos pontos, B, por exemplo, para cada um dos dous outros pontos A e D uma recta $B\ A$ e $B\ D$, trace-se uma perpendicular $m\ n$ ao meio da recta $A\ B$; ao meio da recta $B\ D$ trace-se uma perpendicular $p\ h$; do ponto C, de encontro das duas perpendiculares, como centro e raio $C\ A$ ou $C\ B$, etc, descreva-se uma circumferencia que passará pelos tres pontos dados.

Problema.— Achar o centro de uma circumferencia.

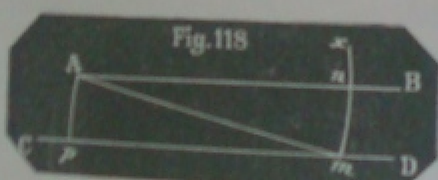
A mesma figura.

Marquem-se tres quaesquer pontos, sejam A, B e D sobre a circumferencia, trace de um qualquer dos pontos B por exemplo, para cada um dos dous outros A e D uma recta $B\ A$, $B\ D$, trace-se uma perpendicular ao meio de cada uma dellas; o ponto C de encontro das duas perpendiculares $m\ n$, $p\ h$ será o centro da circumferencia.

Dado um diametro, traçar uma circumferencia.

O centro do circulo será o meio, raio será a metade da linha dada considerada como diametro.

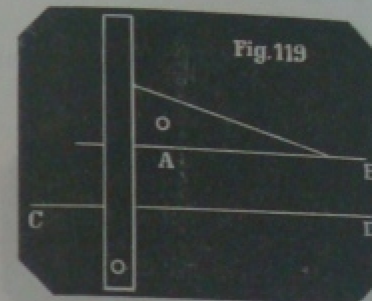
Problema.— Por um ponto A fóra de uma recta $C\ D$ traçar uma parallela a esta recta (fig. 118).



Trace-se do ponto A qualquer recta $A\ m$ que encontre a recta $C\ D$, com o centro em m e raio $m\ A$ trace um arco $A\ p$, com o mesmo raio e centro no ponto A, trace um arco $m\ x$; tome neste arco uma parte $m\ n$ igual ao arco $A\ p$, trace-se do ponto A ao ponto n uma recta $A\ B$. Esta recta é a parallela pedida por serem iguaes os angulos alternos internos $A\ m\ C$, $m\ A\ B$.

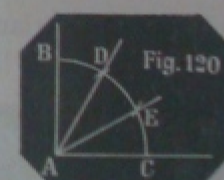
Problema. — Por um ponto A fóra de uma recta $C\ D$ traçar uma parallela a esta recta (fig. 119).

Solução com o esquadro.



Ajuste-se o maior catheto do esquadro a recta $C\ D$, pelo outro catheto colloque uma regua, conservando a regua bem firme, escorregue o esquadro ao longo da regua até o maior catheto coincidir com o ponto A; por este ponto e pelo bordo do maior catheto, trace a recta $A\ B$ que será a parallela pedida.

Problema.— Dividir um angulo recto em tres partes iguaes.



Seja o angulo $B\ A\ C$ (fig. 120). Do vertice A como centro e com qualquer raio, descreva-se um arco $B\ C$, do extremo B d'este arco como centro e com o mesmo raio, descreva-se um pequeno arco que corte o arco $B\ C$ em um ponto E, do extremo C do mesmo arco $B\ C$ como centro e com o mesmo raio, descreva um arco que corte o arco $B\ C$ no ponto D. Tracem as rectas $A\ D$ e $A\ E$, que dividem o angulo em tres partes iguaes.

Quando o angulo não é recto só por tentativa se o póde dividir em tres partes iguaes.

Problema. — Dados dous angulos de um triangulo construir o terceiro.

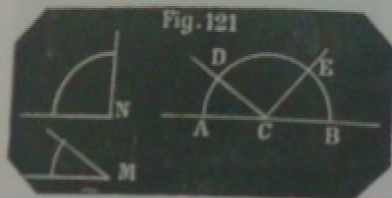


Fig. 121

Sejam os angulos M e N os dous angulos dados (fig. 121).

Trace uma recta $A\ B$, de um ponto C desta recta tomado para vertices dos angulos, façam-se o angulo $A\ C\ D$ igual ao angulo M, e o angulo $D\ C\ E$ igual ao angulo N.

O angulo $E\ C\ B$ é o terceiro angulo do triangulo, por ser supplemento da somma dos dous dados.

Problema. — Construir um triangulo, sendo dados um lado e dous angulos adjacentes ao lado.

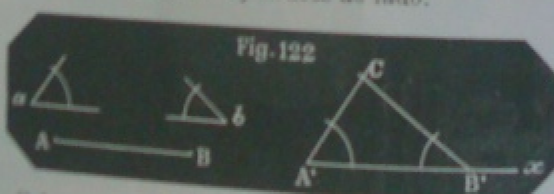


Fig. 122

Sejam $A\ B$ o lado (fig. 122), a e b os angulos adjacentes. Trace-se uma recta indefinida $A'\ x$, marque-se nella um comprimento $A'\ B'$ igual a recta $A\ B$ dada,

façam-se no extremo A' da recta $A'\ B'$ um angulo A' igual ao angulo a, no outro extremo B' outro angulo $A'\ B'\ C$ igual ao angulo b dados.

Os lados dos angulos A' e $A'\ B'\ C$ prolongados encontram-se em um ponto C, se formará o triangulo pedido $A'\ B'\ C$.

Se o problema fosse — Construir um triangulo dados dous angulos, sendo um adjacente e o outro opposto ao lado dado ;— determinar-se-ia o terceiro angulo do triangulo, o qual seria o outro angulo adjacente.

Em qualquer dos dous casos a somma dos dous angulos dados deve ser menor que dous angulos rectos para o problema ser possivel.

Problema. — Construir um triangulo sendo dados dous lados e o angulo por elles formado.

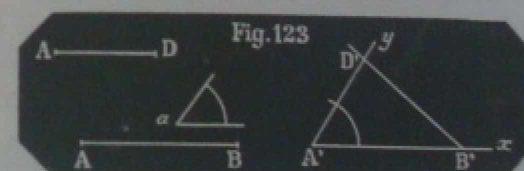


Fig. 123

Sejam $A\ B$ e $A\ D$ os lados e a o angulo dado (fig. 123). Trace-se uma recta indefinida $A'\ x$, e faça-se um angulo $y\ A'\ x$ igual ao angulo dado a, e tomem-se no lado $A'x$ uma porção $A'\ B'$ igual a recta $A\ B$, no lado $A'y$ uma porção $A'\ D'$ igual a recta $A\ D$; trace a recta $D'\ B'$ que completará o triangulo pedido $A'\ B'\ D'$.

Este problema é sempre possivel.

Problema. — Construir um triangulo sendo dados dous lados e um qualquer angulo opposto ao maior delles.

Sejam $D\,B$, $A\,D$ os dous lados dados e o angulo a obtuso opposto do maior lado $D\,B$ (fig. 124).

Fig. 124

Trace-se uma recta indefinida $A'\,x$, faça-se um angulo $y\,A'\,x$ igual ao angulo a dado, tome-se em um dos lados deste angulo, por exemplo, no lado $A\,y$ uma porção $A'\,D'$ igual ao *menor* lado $A\,D$, do ponto D' como centro e raio igual ao *maior* lado $D\,B$ dado, descreva-se um arco, que sempre corta a recta $A'\,x$ em um ponto B' situado na parte da abertura do angulo; trace-se a recta $D'\,B'$.

O triangulo $A'\,B'\,D'$ é o pedido.

Quando o *maior* lado dos dous dados, é o que deve ser opposto ao angulo dado, o problema é sempre possivel e determinado. Neste caso, o angulo dado póde ser agudo, recto ou obtuso.

Problema.—Construir um triangulo, sendo dados dous lados e um angulo agudo opposto ao menor delles.

Sejam $A\,D$ e $D\,B$ os dous lados dados e o angulo a agudo opposto ao menor lado $D\,B$ (fig. 125).

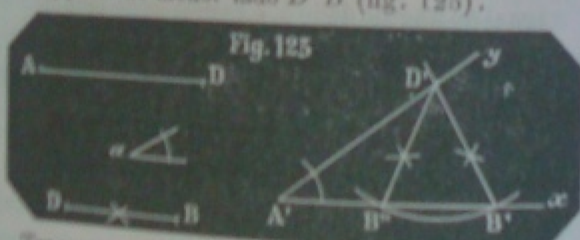


Fig. 125

Trace-se uma recta $A'\,x$, faça-se um angulo $y\,A'\,x$ igual ao angulo a dado, tome-se em um dos lados, $A'\,Y$,

uma porção $A'\,D'$ igual ao *maior* lado dado $A\,D$, do ponto D' como centro e raio igual ao *menor* lado $D\,B$, trace-se um arco, que as mais das vezes corta ao outro lado $A'\,x$ do angulo $y\,A'\,x$ em dous pontos B' e B'' situados na parte da abertura do angulo $y\,A'\,x$. Tracem-se as rectas $D'\,B'$ e $D'\,B''$. Formam-se dous triangulos $A'\,B'\,D'$ e $A'\,B''\,D'$.

O problema tem duas soluções que são os dous triangulos; qualquer delles satisfaz a todas condições da questão. Isto é, são diversos os dous triangulos, entretanto, em cada um delles o menor dos lados dados está opposto ao angulo dado.

Póde acontecer quando se dão dous lados e um angulo agudo opposto ao menor dos dous lados dados, ser o menor lado dado igual á perpendicular $D'\,B'$, (fig. 126) baixada do ponto D' ao lado $A'\,x$ do angulo $y\,A'\,x$, neste

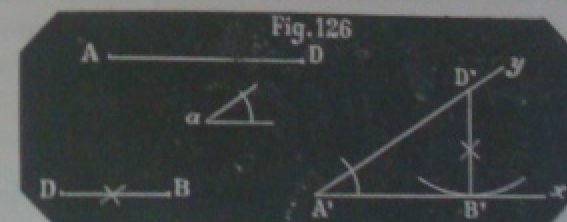


Fig. 126

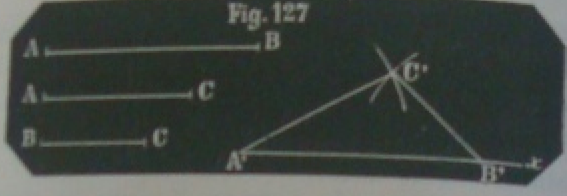
caso o problema tem uma só solução, que é o triangulo rectangulo $A'\,B'\,D'$. Além desta circumstancia, póde occorrer esta outro:—ser o menor dos dous lados dados, menor que a perpendicular $D'\,B'$ e então é impossivel o problema.

Quando o angulo dado deve se oppor ao menor lado, dos dous dados, como no precedente problema, o angulo dado não póde ser recto nem obtuso, porque qualquer destes angulos se oppoem sempre ao maior lado do triangulo.

Problema.—Construir um triangulo, sendo dados tres lados.

Sejam $A\ B$, $A\ C$ e $B\ C$ os tres lados dados (fig. 127).

Fig. 127



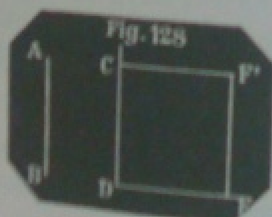
Trace-se uma recta indefinida $A'\ x$, e tome-se nella um comprimento igual a um dos lados dados, seja o comprimento $A'\ B'$ igual ao lado $A\ B$, do ponto A' como centro e raio igual a um dos dous outros lados, por exemplo, $A\ C$ descreva-se um arco, e do ponto B' como centro e raio igual ao lado $B\ C$ descreva-se outro arco, esses arcos encontram-se em um ponto C', tracem as rectas $A'\ C'$ e $B'\ C'$.

O triangulo $A'\ B'\ C'$ é o pedido.

O problema só é possivel quando o maior dos lados dados é menor que a somma dos outros dous.

Problema.—Construir um quadrado conhecendo o seu lado.

Fig. 128



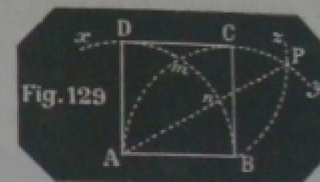
Seja $A\ B$ o lado. Faça-se um angulo recto D (fig. 128), e nos seus lados tomem-se os comprimentos $D\ C$ e $D\ F$ iguaes á recta $A\ B$; e com esta recta como raio descrevam-se do ponto C um arco, do ponto F outro, estes arcos cortam-se em um ponto F', tracem as rectas $F'\ F$ e $C\ F'$.

O quadrado $C\ D\ F\ F'$ é o pedido.

Outra construcção

Seja $A\ B$ o lado dado (fig. 129). Do extremo A como

Fig. 129



centro e raio $A\ B$ igual ao mesmo lado dado, trace-se um arco $B\ x$, com o mesmo raio e centro no ponto B, trace-se um arco $A\ y$, estes dous arcos cortam-se em um ponto m, desse ponto como centro e com o mesmo raio, trace-se um arco $B\ z$ que corta o arco $A\ y$ no ponto P, trace-se a recta $A\ P$, essa recta divide o arco $m\ B$ no ponto n ao meio; do ponto m como centro e raio igual a $m\ n$, tracem-se um pequeno arco que corte o arco $B\ x$ no ponto D, e outro que corte o arco $A\ y$ no ponto C.

Traçando-se as rectas $A\ D$, $D\ C$ e $C\ B$ fica construido o quadrado $A\ B\ C\ D$, pedido.

Problema. — Construir um rhombóide, conhecendo-se sua base, um angulo que lhe seja adjacente e sua altura.

Sejam $A\ B$ a base, $H\ F$ a altura, e a o angulo dados. (fig. 130).

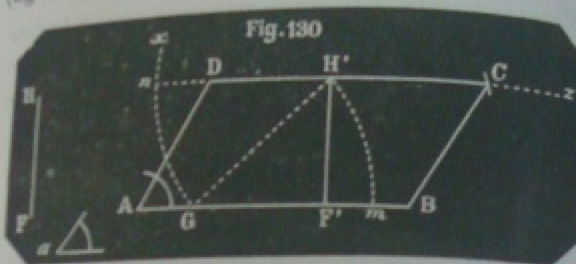


Fig. 130

Sobre a recta $A\ B$ levante-se uma perpendicular $H\ F$ igual a recta $H\ F$, de um ponto G da recta $A\ B$, trace ao ponto H' uma recta $G\ H'$, do ponto G como centro e raio igual a $G\ H'$ trace um arco $H'\ m$, do ponto H' como centro e com o mesmo raio, trace-se um arco $G\ x$ nesse arco tome-se a porção $G\ n$ igual a $H'\ m$; pelos pontos $n\ H'$ trace-se uma recta indefinida $n\ z$; na recta $A\ B$ e o ponto A para vertice, faça-se um angulo $D\ A\ B$ igual ao angulo a dado, do ponto D, em que a recta $A\ D$ encontra a recta $n\ z$, como centro e raio igual a $A\ B$, trace-se um pequeno arco que corte a recta $n\ z$ no ponto C, desse ponto ao ponto B trace uma recta $B\ C$.

O rhombóide $A\ B\ C\ D$ é o pedido.

Problema. — Construir um losango conhecendo-se as suas diagonaes.

Sejam $A\ B$ e $C\ D$ as diagonaes (fig. 131).

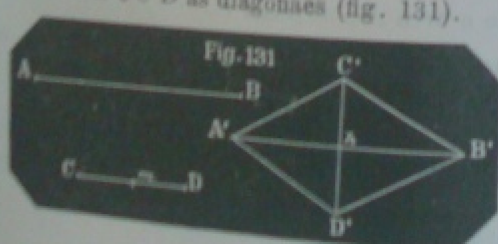


Fig. 131

Trace-se uma recta $A'\ B'$ igual a diagonal $A\ B$, divida-se aquella recta ao meio no ponto h por uma perpendicular, nessa perpendicular e começando do ponto h; marquem-se os comprimentos $h\ C'$ e $h\ D'$ iguaes a $C\ m$ ou $m\ D$ metade da diagonal $C\ D$.

Tracem-se as rectas $A'\ D'$, $D'\ B'$, $B'\ C'$ e $C'\ A'$.

O rhombo ou losango $A'\ C'\ B'\ D'$ é o pedido.

Problema. — Construir um polygono igual a outro dado.

Seja o polygono dado $A\ B\ C\ D\ E$ (fig. 132).

Divida-o em triangulos tirando-se de um vertice A diagonaes $A\ C$, $A\ D$ para todos os outros não consecutivos.

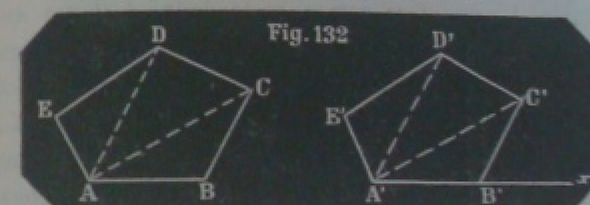


Fig. 132

Trace-se uma recta indefinida $A'\ x$, marque-se nella um comprimento $A'\ B'$ igual a um lado $A\ B$ do polygono dado, do ponto B' como centro e raio igual ao lado $B\ C$ do polygono, descreva-se um arco, do ponto A' como centro e raio igual á diagonal $A\ C$, descreva-se outro arco que corte o primeiro no ponto C', tracem as rectas $B'\ C'$ e $A'\ C'$, fica construido um triangulo $A'\ C'\ B'$ igual ao triangulo $A\ C\ B$; do mesmo modo construam sobre $A'\ C'$, e depois sobre $A'\ D'$ os triangulos $A'\ C'\ D'$, $A'\ D'\ E'$ iguaes aos triangulos $A\ C\ D$, $A\ D\ E$ do polygono

13

dado, ficará construido o polygono $A' B' C' D' E'$ igual ao dado.

Problema. — Dividir uma recta em um numero qualquer de partes iguaes.

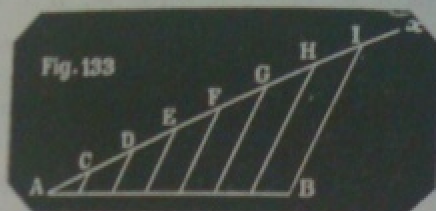


Fig. 133

Seja a recta $A B$ a dividir em sete partes iguaes (fig. 133); trace-se por um dos extremos A uma recta indefinida $A x$ que faça com a recta dada $A B$ um angulo qualquer; começando do ponto A e com uma abertura de compasso arbitraria, marquem-se sobre a recta $A x$ sete divisões iguaes, sejam $A C$, $C D$, $D E$.. $H I$, trace-se do ultimo ponto da divisão I ao extremo B da recta dada uma recta $I B$, a essa recta tracem-se parallelas pelos outros pontos de divisão C, D, E, F, G, H. As parallelas dividem a recta $A B$ em sete partes iguaes.

Outra solução.— Do extremo A da recta dada $A B$ (fig. 134) trace-se uma recta indefinida $A x$ que faça com ella um angulo qualquer, no outro extremo B trace-se $B x$ parallela a $A x$. Marquem-se de A para x sete distancias iguaes. C, D, E, F, G, H, I, e de B para x marquem-se as mesmas distancias $C' D' \dots I'$: Tracem-se as rectas $I B$, $H C'$; $G D'$, $F E'$, $E F'$, $D G'$

$C H'$, $A I'$; estas rectas dividem a recta dada $A B$ em sete partes iguaes.

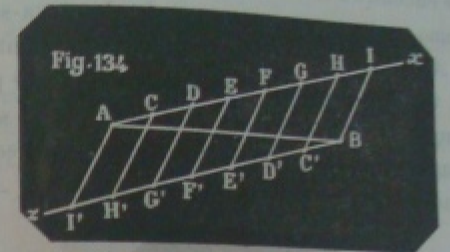


Fig. 134

Problema.— Dividir em duas partes iguaes um angulo cujo vertice seja desconhecido.

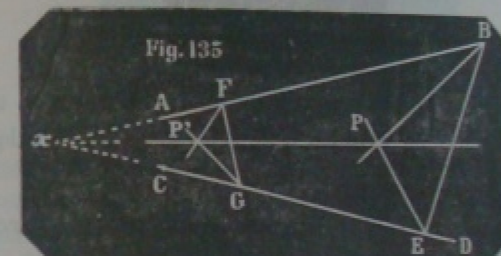


Fig. 135

Sejam $A B$ e $C D$ (fig. 135) os dous lados do angulo dado. De dous quaesquer pontos B e F tomados no lado $A B$ do angulo dado tracem-se quaesquer rectas $B E$ e $F G$ que terminem no lado $C D$ do angulo. Trace-se a bissectriz de cada um dos angulos $A B E$, $B E C$, $A F G$ e $F G C$, as duas primeiras bissectrizes encontram-se no ponto P as duas ultimas no ponto P':

A recta $P P'$ que passa pelos pontos de encontro das bissectrizes divide em duas partes iguaes o angulo dado.

Problema.— Traçar uma recta que seja tangente a uma circumferencia em um ponto dado.

Seja a circumferencia de centro C (fig. 136) e A o ponto dado.

Do ponto A como centro e raio $A\ C$ trace-se um arco $C\ B$ que encontre a circumferencia em um ponto B desse ponto como centro e com o mesmo raio descreva-se outro arco $C\ A\ D$, e trace-se a recta $C\ B\ D$, e do ponto D ao ponto A trace-se a recta $D\ A$ que será a tangente pedida.

Porque traçando o raio $C\ A$ fica inscripto no semicirculo o angulo $C\ A\ D$ e portanto é recto; isto é, a recta $A\ D$ é perpendicular ao raio $C\ A$ que toca no ponto A dado.

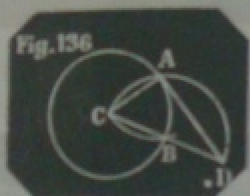


Fig. 136

Podia-se obter a tangente pedida levantando-se uma perpendicular no extremo A do raio $C\ A$ por qualquer processo.

Problema.— Por um ponto A fóra de um circulo traçar-lhe uma tangente (fig. 137).

Trace-se do centro C do circulo ao ponto A, uma recta $C\ A$, sobre essa recta como diametro, trace-se uma circumferencia que cortará a do circulo dado em dous pontos B e D,

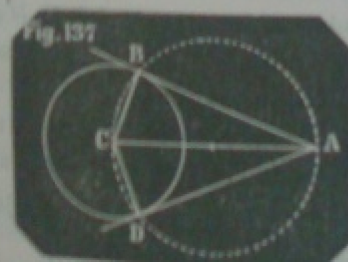


Fig. 137

tracem-se as rectas $A\ B$ e $A\ D$, que serão tangentes ao circulo C.

Porque, traçando-se os raios $C\ B$ e $C\ D$ ficam inscriptos em semi-circulos os angulos $C\ B\ A$ e $C\ D\ A$ e por isso são rectos.

O problema tem duas soluções que são as rectas $A\ B$ e $A\ D$.

Problema.—Dada uma circumferencia do centro C (fig. 138) descrever outra que lhe seja tangente em um ponto A dado e passe por um ponto B situado fóra della.

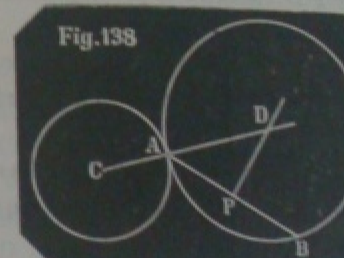


Fig. 138

Trace-se o raio $C\ A$ e prolongue-se-o além do ponto A, desse ponto ao ponto B, trace-se a recta $A\ B$ e ao meio P dessa recta, levante-se uma perpendicular $P\ D$, que encontre o prolongamento do raio $C\ A$ em um ponto D.

Do ponto D, como centro e raio $D\ A$ ou $D\ B$, trace-se uma circumferencia que será tangente á circumferencia dada no ponto A dado e passará no ponto B dado.

Problema.—Descrever uma circumferencia que toque outra dada em um ponto determinado, e seja tangente a uma recta dada.

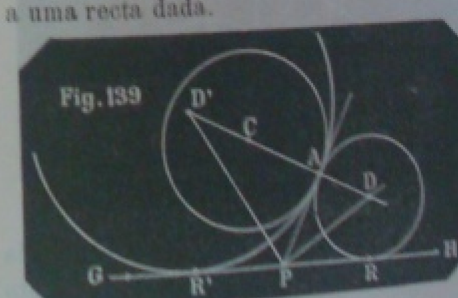


Fig. 139

Sejam C o centro da circumferencia dada, A o ponto della e $G H$ a recta (fig. 139).

Do centro C da circumferencia dada ao ponto A dado nella, trace-se um raio $C A$, e pelo mesmo ponto A trace-se uma tangente $A P$ á mesma circumferencia. A tangente faz com a recta dada $G H$ dous angulos adjacentes $A P H$ e $A P G$, cada uma das suas bissectrizes $P D$ e $P D'$ encontra os prolongamentos do raio $C A$ nos pontos D e D'.

A circumferencia descripta com o centro em D e raio $D A$ satisfaz a questão, e tambem a descripta com o centro em D' e raio $A D'$.

Os pontos R e R' são os em que ellas tocam á recta $G H$. O problema tem duas soluções que são as duas circumferencias de centros D e D'.

Problema.—Descrever uma circumferencia de circulo que toque outra dada e seja tangente a uma recta dada em um ponto dado nella.

Sejam C a circumferencia $G H$ a recta e A o ponto situado na recta (fig. 140).

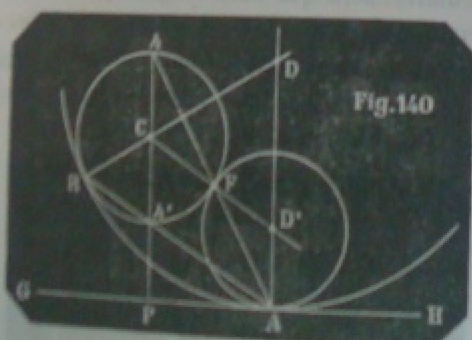


Fig.140

Trace-se pelo centro C da circumferencia dada uma perpendicular—$h P$—á recta $G H$ dada, e do ponto A da

recta $G H$ levante-lhe uma perpendicular $A D$, do extremo h do diametro $h h'$ trace-se ao ponto A uma recta $h A$, que córta a circumferencia no ponto F, por esse ponto e pelo centro C do circulo trace-se um raio $C F$, o prolongamento desse raio encontra a perpendicular $A D$ em um ponto D', deste ponto, como centro e raio $D' A$ ou $D' F$, trace-se uma circumferencia que satisfará a questão.

Pode-se descrever outro circulo que tambem satisfaz a questão do modo seguinte:

Trace-se do ponto A ao extremo h' do diametro $h h'$, uma recta $A h'$ e prolongue-se-a até encontrar a circumferencia C em um ponto R, deste ponto e pelo ponto C trace-se uma recta $R C D$ que encontre a perpendicular $A D' D$ no ponto D, deste ponto como centro e raio $R D$ ou $A D$ trace-se uma circumferencia que será tangente ao circulo C no ponto R e a recta dada no tponto A dado.

Tangente commum exterior a dous circulos é aquella (fig. 141) que os dous circulos tocam-lhe de um mesmo lado.

Problema.—Traçar uma tangente commum exterior a dous circulos dados, C e B (fig. 141).

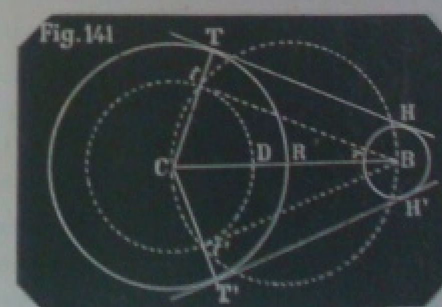


Fig. 141

Unam-se por uma recta C B os centros C e B dos dous circulos dados, tome-se no raio C R do circulo maior C começando de R, a porção R D igual ao raio B r do circulo menor B; descreva-se com o centro em C e raio C D, uma circumferencia auxiliar e outra que tenha C B como diametro; dos pontos t e t' de intersecções das duas circumferencias auxiliares, tracem-se para o ponto B, as tangentes t B e t' B, do menor circulo auxiliar C tracem-se os raios C t e C t' aos pontos de contactos das duas tangentes, estes raios sendo prolongados encontram a outra circumferencia concentrica nos pontos T e T'; do ponto T trace-se T H parallela á recta t B, e do ponto T' a parallela T' H' á recta t' B.

T H e T' H são tangentes communs exteriores aos dous circulos dados.

O problema tem duas soluções que são as tangentes T H e T' H.

Tangente commum interior a dous circulos é aquella (fig. 142) que é tocada por um circulo de um lado e por outro no outro lado.

Problema.— Traçar uma tangente commum interior a dous circulos dados C, B (fig. 142).

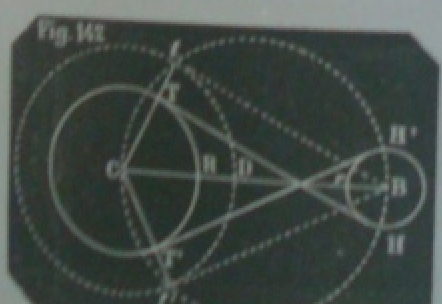


Fig. 142

Unam-se por uma recta C B os centros C e B dos dous circulos dados, augmente-se o raio C R do maior dos circulos dados C, a porção R D igual ao raio B r do circulo menor B; descreva-se com o raio C D assim augmentado e centro em C uma circumferencia auxiliar e outra que tenha C B como diametro; dos pontos t e t' de intersecções das duas circumferencias auxiliares, tracem-se para o ponto B, as rectas t B e t' B, e para o centro C os raios C t e C t', estes raios cortam a outra circumferencia concentrica nos pontos T e T'; do ponto T trace-se T H parallela á recta t B, e do ponto T' a parallela T' H' á recta t' B.

As rectas T H e T' H' são tangentes communs interiores aos dous circulos dados.

O problema tem duas soluções que são as tangentes T H e T' H'.

A solução do problema seguinte (fig. 143) basea-se nessas propriedades:

Todos os pontos O, O', O'', da bissectriz $C H$ de um angulo B C D distam igualmente dos seus lados C B e $C D$.

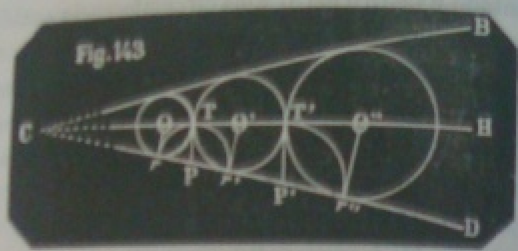
Circumferencias tangentes têm os pontos de contactos T e T' na linha dos centros $C H$ (nesse caso é a bissectriz do angulo).

São iguaes as distancias ($Pr = PT$, $PT = Pr'$, etc.) do ponto (P; etc.) de partida de duas tangentes (Pr e PT; PT e Pr'; etc.) que se encontram, aos pontos de contactos (r e T; T e r', etc.)

A perpendicular (r O, ou r' O', ou r'' O'') a tangente (C D) no ponto de contacto passa pelo centro do circulo O ou O' ou O''.

Problema.—Descrever circumferencias tangentes entre si e a duas rectas dadas que se encontram.

Sejam dadas as rectas $C B$ e $C D$ (fig. 143).

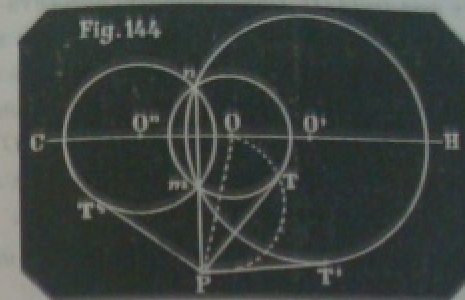


Determine-se a bissectriz $C H$ do angulo $B C D$ formado por ellas.

Levante-se á bissectriz $C H$ em um qualquer ponto T uma perpendicular $T P$, do ponto P como centro e raio $P T$, descreva-se uma semi-circumferencia $r T r'$, dos pontos r e r' levantem-se ao lado $C D$ do angulo, as perpendiculares $r O$ e $r' O'$, com o centro O e raio $O r$ descreva-se a primeira circumferencia, com o centro O' e raio $O' r'$ a segunda; do ponto T' levante-se $T' P'$ perpendicular a $C H$, com o centro em P' e raio $P' T'$ trace-se um arco $T' r''$, do ponto r'' levante-se $r'' O''$ perpendicular a $C D$, com o centro em O'' e raio $O'' r''$ trace-se a terceira circumferencia e assim successivamente.

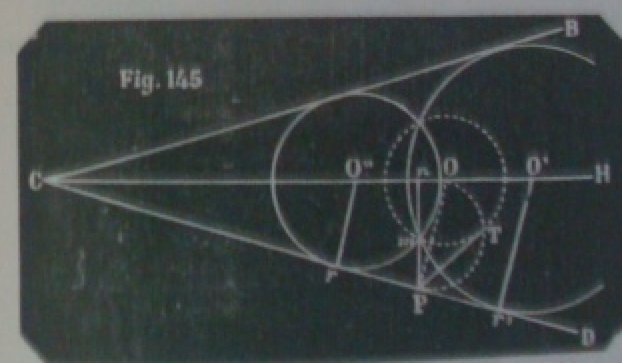
Quando muitas circumferencias de circulo passam por dous pontos n e m (fig. 144) os centros O, O' e O'' dessas existem na perpendicular $C H$ ao meio da recta $n m$ que une os dous pontos n e m. Nesse caso, prolongando a recta $n m$ até um qualquer ponto P; são iguaes as distancias do ponto de partida P das tangentes PT; PT' e $P T''$ aos pontos de contactos T, T' e T'' de quaesquer

das circumferencias de centros O, O' e O'' que passem pelos dous pontos n e m. A tangente $PT = PT' = PT''$.



Problema.— Traçar uma circumferencia de circulo que passe por um ponto dado e seja tangente a duas rectas dadas que se encontram entre ellas está o ponto.

Sejam dadas as rectas $C B$ e $C D$ (fig. 145). Determine-se a bissectriz $C H$ do angulo $B C D$ formado por ellas, dentro do qual está o ponto m dado.



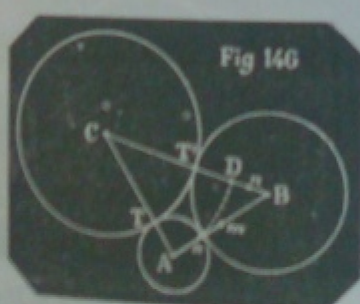
Pelo ponto m trace-se uma recta $n P$ com as condições unicas de ser perpendicular á bissetriz $C H$ e encontrar o lado $C D$ do angulo em um ponto P; tome-se como centro um qualquer ponto — O —da bissectriz e com o raio $O\,m$ descreva-se uma circumferencia auxiliar que passe pelo ponto m dado; do ponto P trace-se uma recta OP, sobre essa recta OP como diametro, descreva-se uma semi-circumferencia que corte a circumferencia auxiliar no ponto T, trace a recta $P\,T$. Tomem-se os comprimentos $P\,r$ e $P\,r'$ iguaes a distancia $P\,T$; dos pontos r e r levantem-se á recta $C\,D$ as perpendiculares $r'\,O'$ e $r\,O''$, com o centro em O' e raio $O'\,r'$ descreva-se uma circumferencia, com o centro em O'' e raio $O''\,r$ outra.

Estas circumferencias passam pelo ponto m e são tangentes a rectas dadas.

O problema tem duas soluções, uma é a circumferencia de centro — O — e outra a de centro — O' quaesquer dellas são tangentes as duas rectas CB e CD, dadas e passam no ponto m dado.

Problema. — Descrever tres circumferencias que se toquem exteriormente duas a duas e que tenham os centros em pontos dados.

Sejam dados os pontos A, B, C (fig. 146).



Unam-se os pontos A, B e C pelas rectas $A\,B$, $A\,C$ e $C\,B$, divida-se ao meio uma qualquer dellas, seja a recta $A\,B$ que se divide ao meio no ponto m; com o raio CA e

centro no ponto C descreva-se um arco $A\,D$, divida ao meio $D\,B$ no ponto n; na recta $A\,B$ tome-se a porção $m\,r$ igual á $D\,n$.

Com o raio $B\,r$ descreva-se a circumferencia de centro no ponto B; com o raio $A\,r$ e centro no ponto A descreva-se outra; com o raio $C\,T$ ou $C\,T'$ e centro no ponto C descreva-se a terceira circumferencia.

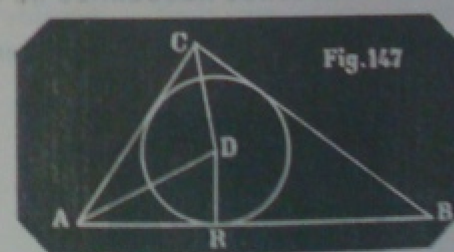
Estas circumferencias são as pedidas.

O raio da circumferencia de centro no ponto B é igual a metade da recta $A\,B$ sommada com $D\,n$ ou $n\,B$ metade da differença das rectas $C\,A$ e $C\,B$; o raio da circumferencia de centro no ponto A e igual a metade da recta $A\,B$ subtrahida $D\,n$ metade da differença das rectas CA e CB.

INSCRIPÇÃO E CIRCUMSCRIPÇÃO DE CIRCULO AO TRIANGULO

Problema.—Dado um triangulo inscrever-lhe um circulo,

Seja dado o triangulo $A\ B\ C$ (fig. 147).

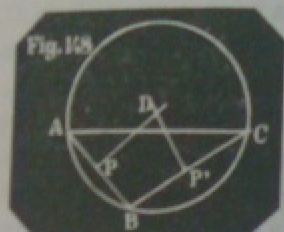


De dous dos seus angulos A e C tracem-se as bissectrizes $A\,D$ e $C\,D$, abaixe do ponto D, em que se encontram as bissectrizes, sobre um dos lados $A\,B$ uma perpendicular $D\,R$.

Com o centro em D e raio $D\,R$ descreva-se um circulo que será inscripto ao triangulo dado.

Problema.—Dado um triangulo circumscrever-lhe um circulo.

Seja $A\,B\,C$ o triangulo dado (fig. 148).

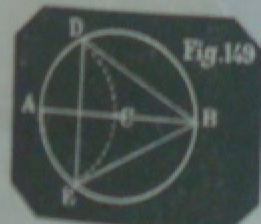


Ao meio de dous dos seus lados $A\,B$ e $B\,C$ levantem-se as perpendiculares $P\,D$ e $P'\,D$, do ponto D, em que ellas se encontram, como centro e raio igual a $D\,A$ ou $D\,B$, etc., descreva-se um circulo, que será circumscripto ao triangulo dado.

A qualquer triangulo é sempre possivel inscrever ou circumscrever um circulo.

INSCRIPÇÃO DOS POLYGONOS REGULARES NO CIRCULO

Problema.—Dado um circulo inscrever-lhe um triangulo equilatero.



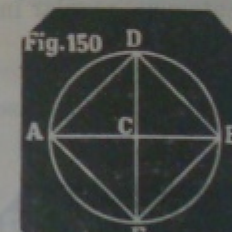
Trace-se no circulo dado C (fig. 149), um diametro $A\,B$, com o centro em A e o raio $A\,C$ do mesmo circulo

C, descreva-se um arco que encontre a circumferencia em dous pontos D e E. Os pontos B, D e E dividem a circumferencia em tres partes iguaes.

Tracem as cordas $B\,D$, $B\,E$ e $E\,D$. Fica construido o triangulo equilatero inscripto no circulo dado.

Problema.—Dado um circulo inscrever-lhe um quadrado.

Tracem-se no circulo dado C (fig. 150), dous diametros $A\,B$ e $D\,E$ perpendiculares entre si.

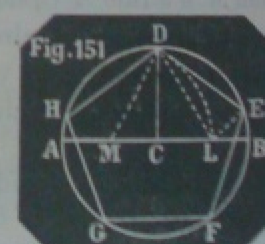


Os pontos A, D, B e E dividem a circumferencia em quatro partes iguaes.

Tracem as cordas $A\,D$, $A\,E$, $B\,D$ e $B\,E$.

Fica construido o quadrado inscripto no circulo dado.

Problema.—Dado um circulo inscrever-lhe um pentagono regular.



Tracem-se no circulo dado C (fig. 151) um diametro $A\,B$ e um raio $C\,D$ que lhe seja perpendicular, divida ao meio o raio $A\ C$ no ponto M, do ponto M ao D trace-se uma recta $M\ D$, com o centro em M e raio $M\ D$ trace-se um arco $D\ L$, sua corda $D\ L$ será igual ao lado do pentagono regular inscripto no circulo C.

Applique-se o comprimento $D\ L$ sobre a circumferencia começando de um qualquer ponto D, que determinarão os pontos E, F, G e H, esses pontos dividem a circumferencia em cinco partes iguaes.

Tracem-se as cordas $D\ E$, $E\ F$, $F\ G$, $G\ H$ e $H\ D$. Fica construido o pentagono regular inscripto no circulo dado.

Problema.—Dado um circulo inscrever-lhe um hexagono regular.

Fig. 152

Trace-se no circulo dado C (fig. 152) um diametro $A\ B$, com o centro em A e o raio $A\ C$, do mesmo circulo C, trace-se um arco que encontre a circumferencia em dous pontos D e E, com o mesmo raio e centro no ponto B, trace-se outro arco que encontre a circumferencia em dous pontos F e G.

Os pontos A, D, F, B, G e E dividem a circumferencia em seis partes iguaes.

Tracem-se as cordas $A\ D$, $D\ F$, $F\ B$, $B\ G$, $G\ E$ e $E\ A$. Fica construido o hexagono regular inscripto no circulo dado.

Problema.— Dado um circulo inscrever-lhe um heptagono regular.

Fig. 153

Trace-se no circulo dado C (fig. 153), um raio $A\ C$, e pelo meio M levante-lhe uma perpendicular $M\ B$ que toque a circumferencia em um ponto B.

Applique-se o comprimento $M\ B$ sobre a circumferencia começando de um qualquer ponto B, determinarão os pontos D, E, F, G, H e I, a circumferencia ficará dividida em sete partes.

Tracem as cordas $B\ D$, $D\ E$, $E\ F$, FG, $G\ H$, $H\ I$ e $I\ B$. Fica construido o heptagono inscripto no circulo dado.

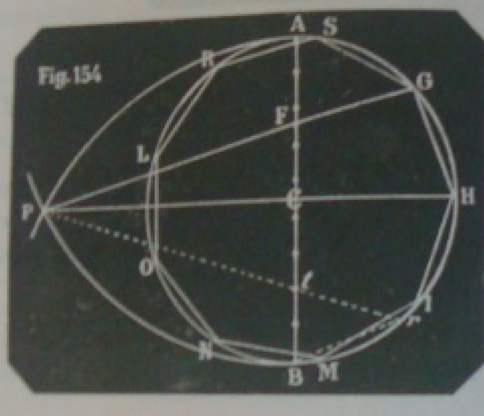
A recta $M\ B$ é um pouco menor que o verdadeiro lado do heptagono regular inscripto ; não existe processo para obter-se o verdadeiro lado.

Para inscrever-se um octogono regular em um circulo, traçam-se dous diametros perpendiculares entre si, dividem-se os quadrantes ao meio, traçam-se as cordas dos oitos arcos iguaes em que fica dividida a circumferencia.

As cordas desses arcos formarão um octogono regular inscripto no circulo.

PROCESSO GERAL PARA INSCREVER QUALQUER POLYGONO REGULAR NO CIRCULO

Divide-se um diametro do circulo dado em tantas partes iguaes quantos são os lados do polygono que se pretende inscrever no circulo; supponha-se que é um polygono regular de nove lados (fig. 154).



Divida-se o diametro $A B$ em nove partes iguaes, e com elle $A B$ como raio e de cada um dos seus extremos A e B como centros tracem arcos que se cortem em um ponto P, desse ponto trace-se uma recta $P H$ que passe pelo centro C do circulo e termine na circumferencia em um ponto H, marque a distancia $C F$ igual a duas das divisões do diametro, do ponto P trace-se outra recta $P G$ que passe pelo ponto F e termine na circumferencia em um ponto G.

A corda $G H$ será o lado do polygono inscripto de nove lados.

Este processo é de Bion, modificado por Tempier. Bion manda tomar as duas divisões $B t$ do diametro $A B$ começando de um extremo B delle, e do ponto P traça-se uma recta Pr que passa pelo ponto t e termina na circumferencia em um ponto r. A corda $B r$ será o lado do polygono inscripto de nove lados; pelo processo de Bian.

Nem o processo de Bion, nem a modificação de Tempier são exactos. Prefere-se o processo de Bion na inscripção de polygono de sete lados nesse unico caso, dá o lado mais approximado ao verdadeiro do que o de Tempier ou de outro qualquer; e o de Tempier na de qualquer polygono de mais de oito lados, quando elles não tem processo especial que dê o verdadeiro lado do polygono regular a inscrever-se. X

Problema. — Dado um circulo inscrever-lhe um decagono regular.

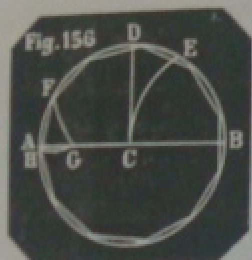
Tracem-se no circulo dado C (fig. 155) um diametro $A B$ e um raio $C D$ que lhe seja perpendicular, divida ao meio o raio $A C$ no ponto M e desse ponto ao D trace-se uma recta $M D$ e com o centro em M e raio $M C$ trace-se um arco $C N$.

Com o centro em D e o raio $D N$ trace-se um arco $N F E$, tracem-se as cordas $D E$, $E G$... todas iguaes a $D F$, ficará inscripto o decagono regular pedido; logo:

O lado do decagono regular inscripto é igual ao maior segmento ($D\ F$) do raio ($C\ D$) dividido em meio e extremo.

O ponto F divide o raio $C\ D$ de modo que fórma a proporção continua $C\ D : D\ F : : D\ F : F\ C$.

Problema. — Dado um circulo inscrever-lhe um hendecagono regular.



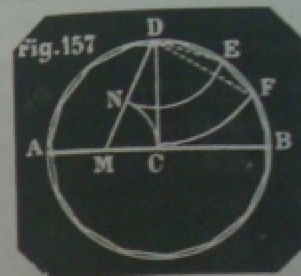
Tracem-se no circulo dado C (fig. 156) um diametro $A\ B$ e um raio $C\ D$ que lhe seja perpendicular, com o centro em B e raio $B\ C$ descreva-se um arco $C\ E$ que encontre a circumferencia em um ponto E, com o centro em E e raio $B\ D$ descreva-se um outro arco $F\ G$ limitado pela circumferencia e diametro, com o centro em F e raio $F\ G$ descreva-se um terceiro arco $G\ H$ que encontre a circumferencia em um ponto H.

A corda $F\ H$ será o lado do hendecagono regular inscripto.

Para inscrever-se um dodecagono regular em um circulo, se toma uma abertura de compasso igual ao raio do circulo dado e se applica sobre a circumferencia, que fica dividida em seis arcos iguaes, divide ao meio cada um destes arcos e traçam suas cordas.

Fica inscripto um dodecagono regular.

Problema. — Dado um circulo inscrever-lhe um pentadecagono regular.



Tracem-se no circulo dado C (fig. 157) um diametro $A\ B$ e um raio $C\ D$ que lhe seja perpendicular, divida ao meio o raio $A\ C$ no ponto M e desse ponto ao D trace-se uma recta $M\ D$ e com centro em M e raio $M\ C$ trace-se um arco $C\ N$, com o centro em D e raio $D\ N$ trace outro arco $N\ E$; do mesmo centro D e raio $D\ C$ trace-se o arco $C\ F$.

A corda $E\ F$ será o lado do pentadecagono regular inscripto no circulo C; porque :

O lado $D\ F$ é igual ao de um hexagono regular inscripto no circulo C, o arco $D\ F$ é de 60.°; o lado $D\ E$ é igual ao de um decagono regular inscripto, o arco $D\ E$ é de 36.°; subtrahindo o menor desses arcos do maior resta o arco $E\ F = 24$ grãos que é a decima quinta parte da circumferencia ; logo :

O lado do pentadecagono regular inscripto é igual a corda $E\ F$ da differença dos arcos $D\ F$ e $D\ E$ do hexagono e do decagono regulares inscriptos no mesmo circulo.

Problema. — Construir uma quarta proporcional a tres rectas dadas.

(A solução deste problema e outros que se seguem são baseadas nas propriedades da fig. 72).

Sejam $C\,D$, $D\,A$ e $C\,F$ as tres rectas dadas (fig. 158).

Arme-se uma proporção na ordem que se queiram as rectas; seja essa: $C\,D : D\,A :: C\,F : X$

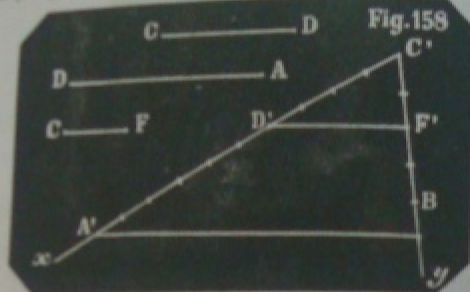


Fig. 158

Construa-se um qualquer angulo $X\ C'\ Y$ tomem-se em um dos lados $C'\,X$, começando do vertice C', uma porção $C'\,D'$ igual a recta $C\,D$ e em seguida outra porção $D'\,A'$, igual á recta $D\,A$; tome-se no outro lado $C'\,Y$ do angulo, a porção $C'\ F'$ igual a recta $C\,F$.

Trace-se do ponto D' ao ponto F' uma recta $D'\ F'$, a esta recta trace-se do ponto A a parallela $A'\ B$.

A quarta pedida é $F'\ B$ por que:
$C\,D' : D'A' :: C\,F' : F\,B$. Avaliando estas linhas tem-se $4 : 6 :: 2 : 3$. Ou outra proporção se tomar outra unidade.

N. B. — As rectas que occupam o 1° e o 2° termos da proporção são collocadas no mesmo lado $C'\ X$ do angulo $X\,C'\,Y$, como se vê $C'\ D'$ e $D'\ A'$; e a recta que occupa o 3° termo é collocada no outro lado $C'\ Y$, como $C'\,F'$. Feito isto: da 1ª para a 3ª porção do angulo $X\,C'\,Y$ traça-se uma recta, isto é, do ponto D' ao F' traça-se uma recta $D'\ F'$ e da 2ª porção traça-se uma parallela á recta que liga a 1ª porção á 3ª; isto é, do ponto A' traça-se $A'\,B$ parallela á recta $D'\ F'$.

A 1ª e 3ª porções tomadas no angulo $x\ C'\ y$ são iguaes as rectas que occupam os antecedentes da proporção, e a 2ª é igual ao consequente da primeira razão.

Problema. — Construir uma quarta proporcional a tres rectas dadas.

Sejam $C\,A$, $C\,D$ e $C\,B$ as tres rectas dadas (fig. 159) Arme-se uma proporção na ordem que se queiram as rectas; seja essa: $C\,A : C\,D :: C\,B : X$.

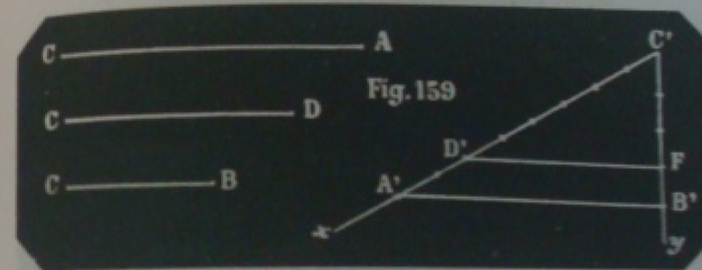


Fig. 159

Construa-se um qualquer angulo $X\ C'\ Y$, tomem-se em um dos lados $C'\,X$, começando do vertice C' as porções $C'\ A'$ e $C'\ D'$ iguaes as rectas dadas $C\,A$ e $C\,D$; tome-se no outro lado $C'\ Y$, a porção $C'\ B'$ igual á recta $C\,B$ dada.

Trace-se do ponto A' ao ponto B' uma recta $A'\ B'$, a esta recta trace do ponto D' uma pararella $D'\ F$.

A quarta pedida é a recta $C'\,F$, por que:

$$C'\,A' : C'\,D' :: C'\,B' : C'\,F.$$
$$8 : 6 :: 4 : 3.$$

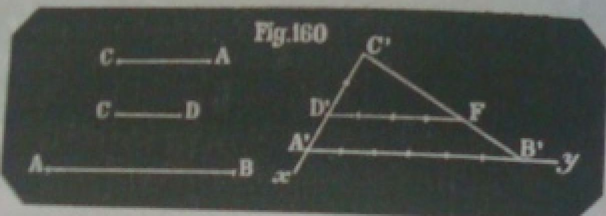
Do mesmo modo acima: o N. B.— As rectas que occupam o 1° e 2° termos da proporção são collocadas do mesmo lado $C'\,X$ do angulo $X\,C'\,Y$, como se vê $C'\,A'$ e $C'\,D'$; e a recta que occupa 3° termo é collocada no outro lado $C'\ Y$, como $C'\ B'$. Feito isto, da 1ª para a 3ª porções do angulo $X\ C'\ Y$, traça-se uma recta, isto é, do ponto A'

ao B' traça-se uma recta $A' B'$, e da 2^a porção traça-se uma parallela á recta que liga a 1^a porção á 3^a, isto é, do ponto D' traça-se $D' F$ parallela á recta $A' B'$.

Nesse problema fez-se uso da segunda propriedade da figura 72, no anterior empregou-se a primeira, no seguinte se empregará a quarta propriedade; não se faz uso da terceira.

Problema.—Construir uma quarta proporcional a tres rectas dadas.

Sejam $C A$, $C D$ e $A B$ (fig. 160) as tres rectas dadas, que formem a proporção $C A : C D :: A B : x$.



Trace-se uma recta $C x$, tomem-se nella, começando do extremo C' as porções $C' A'$ e $C' D'$ iguaes as rectas $C A$ e $C D$ dadas; trace-se do ponto A' uma recta $A' y$ em qualquer direcção e tome-se nella a porção $A' B'$ igual a recta $A B$ dada; trace-se do ponto C' ao ponto B uma recta $C' B$, e do ponto D' trace-se a recta $D' F$ parallela á recta $A' B'$.

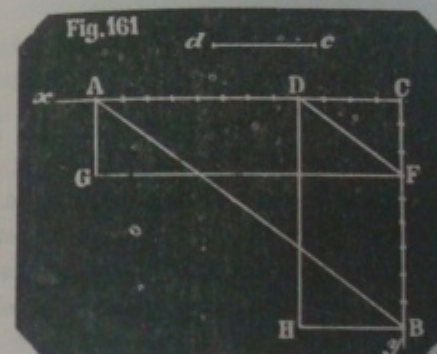
A quarta pedida é a recta $D' F$, porque

$$C A' : C' D' :: A' B' : D' F.$$
$$3 \ : \ 2 \ :: \ 6 \ : \ 4.$$

Quando em duas rectas, uma occupa um extremo e a outra os meios de uma proporção continua, a recta do 4^o termo, toma o nome de terceira proporcional.

A terceira proporcional a duas rectas dadas é determinada do mesmo modo que a quarta proporcional a tres dadas; só differe desta na segunda e terceira rectas dadas; só differe desta na segunda e terceira porções tomadas no angulo $(x C y)$ em serem iguaes á recta que occupam os meios da proporção continua.

Problema.—Dada uma recta $d c$ achar uma outra que com ella forme um rectangulo equivalente a um outro rectangulo dado $A C F G$ (fig. 161).



Essa questão é a mesma que a de achar uma quarta proporcional a tres rectas. As tres rectas nestes casos, são a dada e as duas dimensões (base e altura) da figura dada. A recta dada occupa sempre o 1^o termo e as dimensões da figura dada occupam o 2^o e 3^o termos de uma porporção. Portanto, com essas condições, arme-se uma proporção

$$c d : C A :: C F : x.$$

Coustrua-se um qualquer angulo ou utilise-se do angulo $A C F$ do rectangulo dado; prolonguem-se o lado $C F$ a porção $F y$, e o lado $C A$ a porção $A x$; tome-se no lado $x C$, começando do vertice C a porção $C D$ igual á recta dada $c d$, a segunda porção $C A$ é o proprio lado do rectangulo dado; no lado $C\,y$ a porção $C\,F$ é outro lado do mesmo rectangulo.

Trace-se do ponto D ao ponto F, uma recta $D\,F$ a esta recta, trace-se do ponto A uma parallela $A\,B$.

A quarta ou a recta pedida é $C\,B$, porque:

$$C\,D : C\,A :: C\,F : C\,B.$$
$$4 : 12 :: 3 : 9.$$

Construindo-se com as rectas $C\,D$ e $C\,B$ dos extremos desta proporção, um rectangulo $B\,C\,D\,H$, será equivalente ao rectangulo dado. Os meios são as dimensões da figura dada.

Como se vê da 1ª para 3ª porções tomadas no angulo $x\,C\,y$, e que correspondem ao 1º e 3º termos da proporção, traçou-se uma recta $D\,F$ e da 2ª porção, que corresponde ao 2º termo, traçou-se uma parallela $A\,B$ á recta que liga a 1ª porção á 3ª.

Resolveu-se esse problema pela segunda propriedade da figura 72, o seguinte tambem o será.

Problema. — Dada uma recta $a\,c$ construir um rectangulo equivalente a um losango dado $C\,D\,M\,N$ (fig. 162).

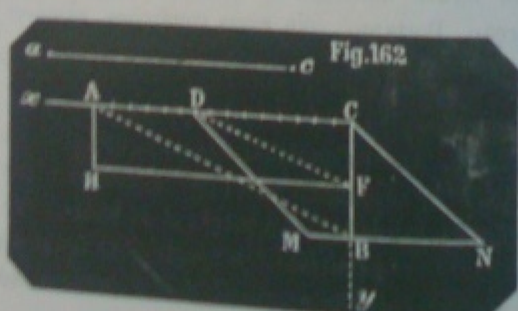


Fig.162

Arme-se a proporção

$a\,c : C\,D :: C\,B : x$, em que a recta dada occupa o 1º termo e as dimensões da figura dada occupam os meios.

Construa-se um qualquer angulo ou sobre o lado $C\,D$ do losango, construa-se um angulo recto $x\,C\,y$ de vertice no ponto C.

Tome-se no lado $C\,x$, começando do vertice C a porção $C\,A$ igual a recta $a\,c$ dada, a segunda porção $C\,D$ é a base do losango; no lado $C\,y$ a porção $C\,B$ é a altura.

Trace-se do ponto A ao ponto B uma recta $A\,B$, a esta recta trace-se do ponto D uma parallela $D\,F$.

A quarta ou a recta pedida é $C\,F$, porque:

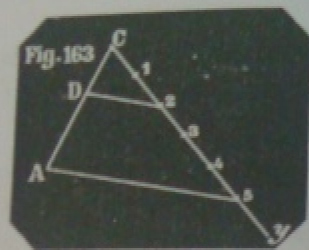
$$C\,A : C\,D :: C\,B : C\,F.$$
$$15 : 9 :: 6 : 3{,}6.$$

A recta $A\,B$ une 1ª á 3ª porções tomadas no angulo $x\,C\,y$, as quaes correspondem ao 1º e 3º termos da proporção; do extremo D que corresponde ao 2º termo, traçou-se uma parallela $D\,F$ á recta $A\,B$.

Construindo-se com as rectas $C\,A$ e $C\,F$ dos extremos desta proporção um rectangulo $A\,C\,F\,H$ será elle equivalente ao losango dado, porque os meios são as dimensões da figura dada, e os extremos são as dimensões da figura pedida.

Problema. — Dada uma recta $C\,A$ dividil-a de modo que a relação entre ella e uma de suas partes seja a mesma que a de 5 para 2 (fig. 163), isto é: que formem a proporção:

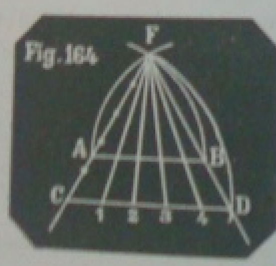
$$5 : 2 :: C A : x.$$



De um extremo C da recta $C A$ dada trace-se uma recta $C y$, e tomem-se nesta, começando do ponto C, cinco partes iguaes e arbitrarias; do ponto 5 ao extremo A da recta dada, trace-se uma recta 5 A, a esta recta trace-se do ponto 2 uma parallela 2 D.

A parte pedida é $C D$, porque fórma a proporção $5 : 2 :: C A : C D$.

Problema. — Dada uma recta A B dividil-a em cinco partes iguaes (fig. 164).



Com a recta dada A B como raio e com o centro no seu extremo A descreva-se um arco, do extremo B como centro, e com o mesmo raio descreva outro arco que

encontre o primeiro em um ponto F, deste ponto para o ponto A trace-se uma recta $F A$ e prolongue-a indefinidamente, do mesmo ponto F para o ponto B trace-se outra recta $F B$ e prolongue-a indefinidamente.

Na recta $F A$ assim prolongada e começando do ponto F, marquem-se cinco partes iguaes de grandeza arbitraria, sendo o ponto C a ultima destas partes.

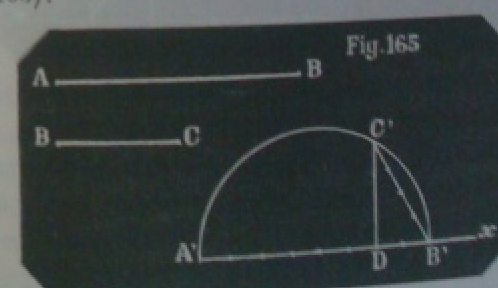
Do ponto C como centro e raio $C F$ trace-se um arco que corte o prolongamento de $F B$ em um ponto D, trace-se a recta $C D$ e nesta recta marquem-se as mesmas partes iguaes marcadas em $C F$, tracem-se rectas do ponto F para os pontos 1, 2, 3, 4 de divisão da recta C D.

A recta dada A B fica dividida em cinco partes iguaes.

Soluções de problemas baseadas nas propriedades, da ordenada e diametro, diametro e a corda adjacente.

Essas propriedades foram explicadas na figura n. 75.

Problema. — Construir uma terceira proporci ona a duas rectas dadas. A B e B C, isto é, achar uma recta que seja o 4° termo da proporção $A B : B C :: B C : x$ fig. 165).



Trace-se uma recta $A' x$, tome-se nella a porção $A' B'$ igual á maior recta $A B$ dad sobre aquella recta considerada como diametro descreva-se uma semi-circumferencia, do ponto B' como centro e raio igual á menor recta BC dada, descreva-se um pequeno arco que corte a semi-circumferencia em um ponto C' trace-se a corda $C'B'$, e do seu extremo C' abaixe-se a perpendicular $C'D$ sobre o diametro $A'B'$.

A recta DB' é a terceira proporcional pedida, porque: $A'B' : B'C' :: B'C' : DB'$. Avaliando estas linhas dá a proporção 8 : 4 :: 4 : 2.

N. B. — DB' é a projecção da corda $C'B'$. Os extremos da proporção são o diametro e a projecção da corda sobre elle.

Problema. — Construir uma medida proporcional a duas rectas dadas AB e BD, isto é, achar uma recta que seja a media da proporção continua.

$AB : x :: x : BD$ (fig. 166).

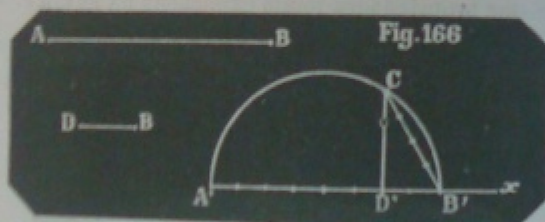


Fig. 166

Trace-se uma recta $A'x$, tome-se nella a porção $A'B'$ igual á maior recta dada AB, sobre aquella recta, considerada como diametro, descreva-se uma semi-circumferencia, no diametro tome-se a porção $D'B'$ igual á menor recta DB dada, e do ponto D' do diametro levante-lhe a perpendicular $D'C$, trace-se a corda CB'.

A recta CB' é a media proporcional pedida, porque:

$$A'B' : B'C :: B'C : B'D'$$
$$8 : 4 :: 4 : 2$$

N. B. — Quando se tratou de terceira proporcional baixou-se sobre o diametro uma perpendicular $C'D$ do ponto C da circumferencia (fig. 165) a qual determinou a terceira proporcional DB'.

Agora fig. 166 que se trata de media proporcional, levantou-se ao diametro e do ponto D' uma perpendicular CD' que determinou a media proporcional CB'.

Problema. — Construir uma terceira proporcional a duas rectas dadas AD e DC, isto é, achar uma recta que seja o 4° termo da proporção:

$AD : DC :: DC : x$ (fig. 167).

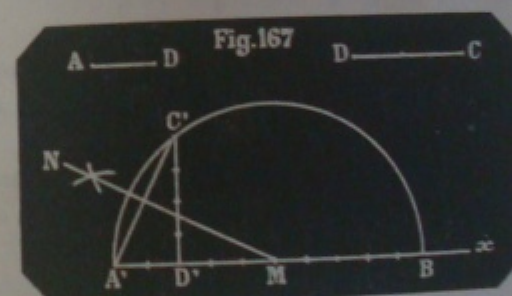


Fig. 167

Trace-se uma recta $A'x$, tome-se nella a porção $A'D'$ igual á menor recta AD dada, do ponto D' daquella recta, levante-lhe uma perpendicular $D'C'$ igual á maior recta DC dada, trace-se a recta $C'A'$ e pelo meio della trace-lhe a perpendicular NM que encontre a recta $A'x$ em um ponto M, deste ponto como centro e raio MA', descreva-se uma semi-circumferencia que cortará a recta $A'x$ no ponto B.

A recta $D'B$ é a terceira proporcional pedida porque:

$$A'D' : D'C' :: D'C' : D'B$$
$$2 : 4 :: 4 : 8$$

Se a questão fosse de media, isto é, se dessem-se as rectas $A'D'$ e $D'B$ e pedisse uma recta que formasse com as duas dadas uma proporção continua:

$$A'D' : x :: x : D'B.$$

Resolvia-se a questão do modo seguinte: (fig. 167).

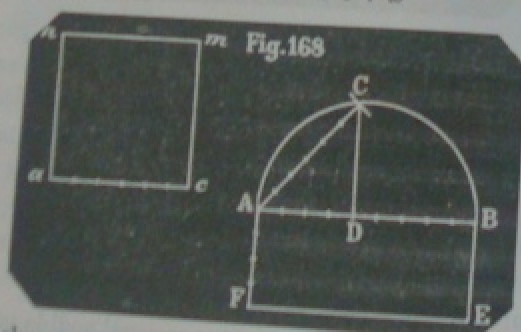
Traçava-se uma recta $A'x$, tomavam-se nella a porção $A'D'$ e em seguida a porção $D'B$; sobre $A'B$ como diametro descrevia-se uma semi-circumferencia, e do ponto D, do diametro levantava-lhe uma perpendicular $D'C'$ que seria a media pedida, porque:

$$A'D' : D'C' :: D'C' : D'B$$
$$2 : 4 :: 4 : 8$$

Problema — Dada uma recta $A\ B$ construir um rectangulo equivalente a um quadrado dado $a\ c\ m\ n$ (fig. 168).

Arme-se uma proporção em que a recta dada occupe o 1° termo e as dimensões da figura dada occupem o 2° e 3° termos.

$$A\ B : a\ c :: a\ c : x$$



Sobre a recta dada $A\ B$ como diametro descreva-se uma semi-circumferencia, com o lado $a\ c$ do quadrado dado como raio e do ponto A como centro descreva-se um

arco que corte a semi-circumferencia em um ponto C desse ponto baixe sobre $A\ B$ uma perpendicular $C\ D$.

A terceira ou a recta pedida é $A\ D$; porque:

$$A\ B : A\ C :: A\ C : A\ D$$
$$9 : 6 :: 6 : 4.$$

$A\ C$ é egual ao lado $a\ c$ do quadrado dado.

Construindo-se com as rectas $A\ B$ e $A\ D$ dos extremos dessa proporção, um rectangulo $A\ B\ E\ F$, será equivalente ao quadrado dado.

$A\ B$ é a base e $A\ D$ é egual a altura $A\ F$ do rectangulo.

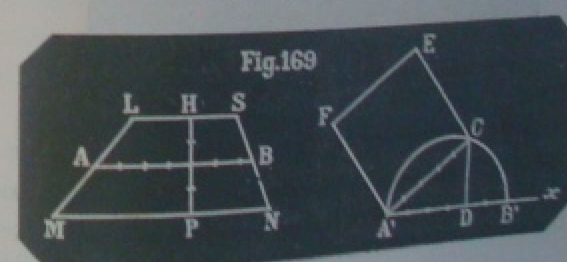
Nesta fig. 168 se baixou do ponto C a perpendicular $C\ D$ ao diametro $A\ B$ para se determinar a terceira $D\ A$; na fig. 169 se levantará do ponto D uma perpendicular $D\ C$ ao diametro $A\ B$ para se determinar a media $A.\ C$.

E' nisso que differem os dous processos.

Problema. — Dado um trapezio $M\ N\ S\ L$ (fig. 169) construir um quadrado que lhe seja equivalente.

Arme-se uma proporção em que as dimensões $A\ B$ e $H\ P$ da figura dada occupem os extremos de uma proporção continua.

$$A\ B : x :: x : H\ P$$



Trace-se uma recta $A' x$, tome-se nella a porção $A' B'$ egual á $A B$ maior das dimensões da figura dada, trace-se sobre $A' B'$ como diametro uma semi-circumferencia; no diametro tome-se $A' D$ egual a $H P$, menor das dimensões da figura; do ponto D do diametro levante-lhe uma perpendicular $D C$ que encontre a semi-circumferencia em um ponto C.

Trace-se a corda $A' C$ que será o lado do quadrado pedido, porque:

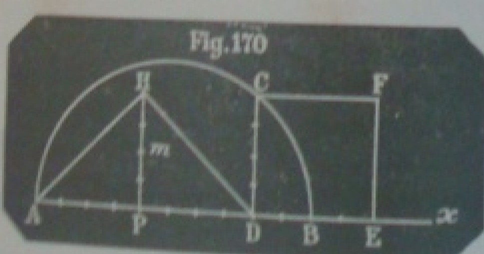
$$A' B' : A' C :: A' C : A' D$$
$$6,25 : 5 :: 5 : 4.$$

Construindo com a recta $A' C$, que occupa os meios dessa proporção continua, um quadrado $A' C E F$ será elle equivalente ao trapezio dado.

Problema. — Dado um triangulo $A D H$ (fig. 170), construir um quadrado que lhe seja equivalente.

Arme-se uma proporção em que as dimensões $A D$ e $\frac{H P}{2} = m P$ da figura dada occupem os extremos de uma proporção continua.

$$A D : x :: x : m P.$$



Prolongue-se a base $A D$ do triangulo dado uma porção $D x$, tome-se nella e porção $D B$ egual $m P$, sobre $A B$ como diametro trace-se uma semi-circumferencia, do

ponto D do diametro levante-lhe uma perpendicular $D C$ que encontre a semi-circumferencia em um ponto C.

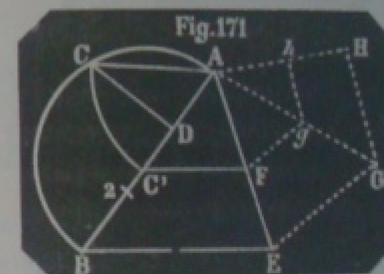
A recta $D C$ será o lado do quadrado pedido, porque

$$A D : D C :: D C : D B.$$
$$8 : 4 :: 4 : 2$$

Construindo sobre $D C$ um quadrado $C D E F$ será elle equivalente ao triangulo dado.

Construcções de figuras semelhantes sendo dada a razão da semelhança.

Problema.—Dado um triangulo $A E B$, construir um outro, que lhe seja semelhante, sendo $1/3$ a razão da semelhança (fig. 171).



Sobre um dos lados $A B$ do triangulo dado, como diametro descreva-se uma semi-circumferencia divida-se o diametro em tres partes eguaes, pelo ponto D da 1ª divisão do diametro, levante-lhe uma perpendicular $D C$, trace-se a recta $A C$; (esta recta e a homologa á recta $A B$).

Do ponto A como centro e raio $A C$ descreva-se um arco $C C'$, do ponto C' trace-se a recta $C' F$ parallela á recta $B E$.

O triangulo $A F C'$ é semelhante ao triangulo dado $A E B$, e a razão da semelhança é $1/3$.

Se o problema fosse: Dado um polygono $B\ E\ G\ H\ A$ (fig. 171) construir um outro que lhe fosse semelhante, sendo a razão da semelhança $1/3$: applicava-se o mesmo processo applicado ao triangulo $A\ B\ E$; e continuavam-se a traçar as rectas $F\ g$ paralella a $E\ G$, $g\ h$ parallela à $G\ H$.

O polygono $C'\ F\ g\ h\ A$ que resultasse seria semelhante e sua área seria $1/3$ da do polygono dado; e a razão de semelhança $1/3$.

Problema.— Construir um quadrado que seja $\frac{4}{9}$ de um quadrado dado $A\ B\ F\ G$ (fig. 172).

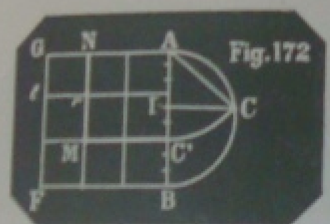


Fig.172

Sobre AB como diametro, descreva-se uma semi-circumferencia, divida o diametro (em tantas partes eguaes quantas são o denominador da fracção $\frac{4}{9}$) em nove partes eguaes, e começando de um extremo A, tome-se $A\ D$ egual a 4 das divisões do diametro (quantas são as unidades do numerador da fracção), ao diametro levante-se do ponto D a perpendicular $D\ C$, trace-se a recta $A\ C$, dá a proporção $A\ B : A\ C :: A\ C : A\ D$.

Com a recta $A\ C$ como raio e centro no ponto A trace-se um arco $C\ C'$.

Construa-se sobre a recta $A\ C'$ um quadrado $A\ C'\ M\ N$ que será egual a quatro nonos do quadrado dado.

Avaliando-se os dous quadrados com a unidade $G\ N\ r\ t$:

A'rea do quadrado $A\ C'\ M\ N = A\ C'^2 = 2^2 = 4$ unidades.

A'rea do quadrado $A\ B\ F\ G = A\ B^2 = 3^2 = 9$ unidades.

Problema.— Construir um quadrado que seja $\frac{4}{9}$ de um quadrado dado $C\ D\ M\ N$ (fig. 173).

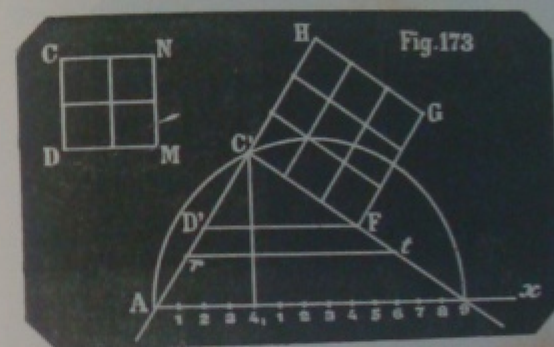


Fig.173

Trace-se uma recta $A\ x$, sobre ella e começando do ponto A, marquem-se quatro partes eguaes e de grandeza arbitraria, (estas partes são tantas quantas indica o denominador da fracção $\frac{4}{9}$), começando do algarismo 4, marquem-se mais 9 das mesmas partes (tantas quantas indica o numerador da fracção); descreva-se sobre $A\ 9$ como diametro uma semi-circumferencia, e levante do algarismo 4 uma perpendicular $4\ C'$ ao diametro $A\ 9$.

Tracem-se do ponto C' para o ponto A uma recta $C'\ A$ e para o ponto 9 a recta $C'\ 9$.

Em $C'\ A$ marque-se a porção $C'\ D'$ egual ao lado $C\ D$ do quadrado dado, do ponto D' trace-se a recta $D'F$ parallela ao diametro $A\ 9$.

A recta C' F será o lado do quadrado pedido.

Construindo sobre C' F um quadrado C' F G H será elle nove quartos do quadrado dado.

Problema.— Construir um circulo que seja metade de um circulo dado.

Seja o circulo A F G o dado, e B o seu centro, (fig. 174).

Fig.174

Sobre um raio A B como diametro, trace-se uma semi-circumferencia, ao diametro A B, do ponto D que o divide ao meio, levante-lhe uma perpendicular D C; trace-se a recta B C.

Com o centro em B e raio B C, descreva-se um circulo que será metade do circulo dado; porque : A B : BC : : BC : BD.

Problema.— Dado um circulo A F G de centro B e raio B F, (a mesma figura), construir um outro que lhe seja duplo.

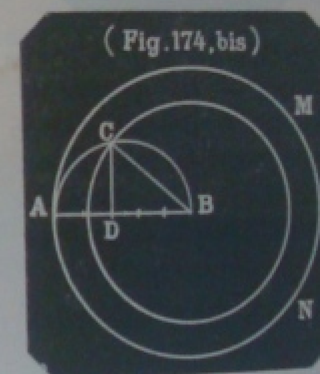
O raio do circulo desconhecido será a corda F G do quadrante ou a hypothenusa do triangulo F G B rectangulo isosceles, cujos cathetos B F e B G são raios do

circulo dado A F G ; portanto, com o raio B M egual a corda F G do quadrante, e centro em um qualquer ponto, B, descreva-se um circulo M N L, que será duplo do circulo dado A F G.

Se no angulo A C' 9 (fig. 173) se tomasse por exemplo, a grandeza $C'r$ como raio e se descrevesse um circulo e tambem tomasse a grandeza C' t como raio e se descrevesse outro circulo, este seria $\frac{3}{4}$ do primeiro.

Problema. — Dado um circulo A M N (fig. 174 bis) traçar um outro cuja área seja $\frac{3}{5}$ da do circulo dado.

(Fig.174, bis)



Divida-se o raio AB do circulo dado em 5 partes eguaes e considerando AB como diametro trace-se sobre elle uma semi-circumferencia A C B, no diametro tome-se um segmento BD egual a 3 de suas divisões e levante-se-lhe uma perpendicular DC que termine na semi-circumferencia em um ponto C, trace-se a corda CB que é o raio do circulo pedido; porque : A B: B C : : B C : B D.

Problema. — Avaliar a área de um circulo C (fig. 175) sendo dado o quadrado unidade $a\ b\ c\ d$.

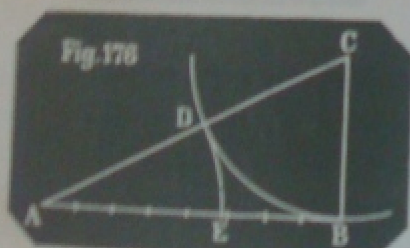
A área de qualquer circulo avalia-se, multiplicando a metade da circumferencia pelo raio, ou multiplicando a relação π pelo quadrado do raio.

O raio $C\ A$ do circulo dado contêm tres vezes o lado $a\ b$ do quadrado unidade $a\ b\ c\ d$, por isso:

A área do circulo C é egual a $\pi\ R^2 = 3{,}1416 \times 3^2 = 3{,}1416 \times 9 = 28{,}2 \ldots$ quadrados unidades.

Problema. — Dada uma recta $A\ B$ (fig. 176) dividil-a em duas partes taes, que a maior seja a média proporcional entre a menor e a recta inteira.

(Chama-se a isto dividir a recta em média e extrema razão).



De um dos extremos B da recta dada $A\ B$ levante-lhe uma perpendicular $B\ C$ egual a metade da mesma recta dada $A\ B$. Com o centro em C, e raio $C\ B$ descreva-se

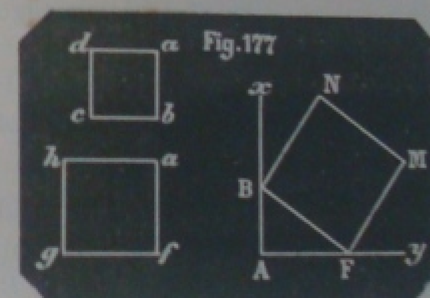
uma circumferencia ou um arco. Trace-se a recta $C\ A$ que é cortada no ponto D pelo arco $D\ B$. Com o raio $A\ D$ e centro no ponto A descreva-se um arco $D\ E$, fica resolvido o problema, porque:

$$\left.\begin{array}{l} AB : AE :: AE : EB \\ 8 : 4{,}95 :: 4{,}95 : 3{,}05 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{ex: } AB \times EB = 8 \times 3{,}05 = 24{,}4 \\ \text{m: } AE \times AE = 4{,}95 \times 4{,}95 = 24{,}5 \end{array}$$

Se com a recta $A\ B$ como raio descreve-se uma circumferencia, e com o maior segmento $A\ E$ da recta applica-se successivamente á circumferencia, como corda, forma um decagono regular inscripto, porque:

O lado do decagono regular inscripto é egual ao maior segmento do raio dividido em meio e extremo.

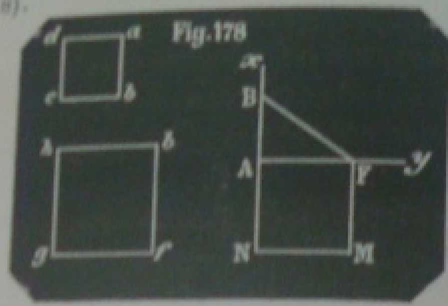
Problema. — Construir um quadrado que seja egual á somma de dous quadrados dados $a\ b\ c\ d$, $a\ f\ g\ h$ (fig. 177).



Construa-se um angulo recto $x\ A\ y$, marquem-se em seus lados começando do vertice A, as porções $A\ B$, $A\ F$ eguaes aos lados $a\ b$, $a\ f$ cada um de cada um dos quadrados dados, trace-se a recta $B\ F$.

O quadrado $B\ F\ M\ N$ construido sobre a recta $B\ F$ é egual á somma dos quadrados dados, por ser a recta $B\ F$ hypothenusa de um triangulo rectangulo em que cada catheto é um lado de cada um quadrado dado.

Problema.—Construir um quadrado que seja egual á differença de dous quadrados dados $a\,b\,c\,d$, $b\,f\,g\,h$ (fig. 178).

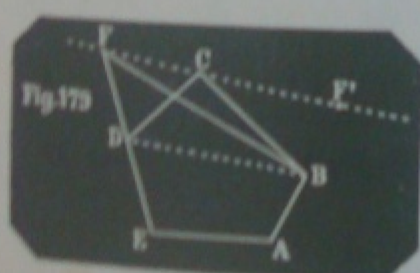


Construa-se um angulo recto $x\,A\,y$, marque-se em um lado começando do vertice A, a porção $A\,B$ egual a um lado $a\,b$ do menor quadrado dado, e do ponto B como centro e raio egual a um lado $b\,f$ do maior quadrado dado, descreva se um arco que corte o lado $A\,y$ do angulo $x\,A\,y$ no ponto F, trace-se a recta $B\,F$.

Fica formado um triangulo rectangulo $B\,A\,F$, construindo um quadrado $A\,F\,M\,N$ sobre o catheto $A\,F$ será egual á differença dos dous quadrados dados.

Problema.—Transformar um polygono qualquer em um outro que tenha menos um lado e lhe seja equivalente.

Seja de cinco lados o polygono dado $A\,B\,C\,D\,E$ (fig. 179).



Trace-se uma diagonal $D\,B$ que forme com dous lados do polygono um triangulo $B\,D\,C$, pelo vertice C opposto a diagonal, trace-se uma parallela $F\,F'$ a esta diagonal; prolongue-se um lado $E\,D$ do polygono, que passe em um extremo D da diagonal, até encontrar á parallela $F\,F'$ em um ponto F, deste ponto ao ponto B trace-se uma recta $F\,B$; se formará o quadrilatero $A\,B\,F\,E$ equivalente ao pentagono dado; porque:

Os triangulos $B\,D\,C$, $D\,B\,F$ têm a mesma base $D\,B$ e a mesma altura, por estarem os seus vertices C e F situados em uma mesma parallela $F\,F'$ á esta base $D\,B$; por isso, elles são equivalentes.

Portanto, se á figura $A\,B\,D\,E$ ajuntar-se o triangulo $B\,D\,C$ forma-se de novo o pentagono dado, se em vez deste triangulo ajuntar-se o outro triangulo $D\,B\,F$, que lhe é equivalente, forma-se o quadrilatero $A\,B\,F\,E$, por isso, são equivalentes o quadrilatero $A\,B\,F\,E$ e o pentagono dado $A\,B\,C\,D\,E$.

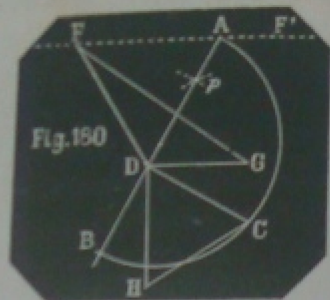
Executando sobre o quadrilatero $A\,B\,F\,E$ uma construcção semelhante á precedente se o transformará em um triangulo equivalente a este quadrilatero.

Observação.— O prolongamento do lado do polygono que passa no extremo D da diagonal $D\,B$ tanto póde ser o lado $E\,D$ até F como o lado $A\,B$ até F'.

Neste ultimo caso em vez daquelle quadrilatero, ter-se-ía este $A\,F'\,D\,E$, si se completasse a figura traçando as linhas $A\,F'$, $D\,F'$.

Problema.— Dado um triangulo qualquer transformal-o em um outro equilatero que lhe seja equivalente.

Seja $D\,G\,F$ o triangulo dado (fig. 180).



Do vertice F trace-se uma parallela $F\,F'$ á base $D\,G$, dos pontos D e G, como centros e com o raio $D\,G$ tracem-se arcos que cortem-se em um ponto p deste ponto ao ponto D trace-se uma recta $D\,p$ prolongue-a até encontrar á recta $F\,F'$ em um ponto A, tambem prolongue-a no extremo D marque-se neste prolongamento a porção $D\,B$ egual a recta $D\,G$.

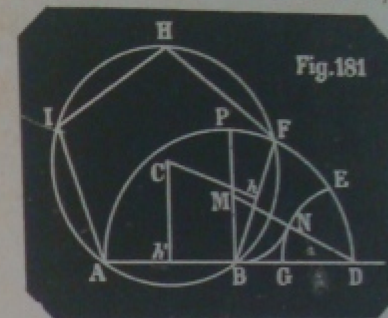
Sobre a recta $A\,B$ como diametro descreva-se uma semi-circumferencia, do ponto D da recta $A\,B$, levante-se-lhe uma perpendicular $D\,C$; com esta recta como lado, construa-se um triangulo equilatero $D\,C\,H$, que será equivalente ao triangulo dado $D\,G\,F$.

A recta $D\,C$ é média proporcional entre a base $D\,G$ e á obliqua $D\,A$ a ella limitada pela parallela $F'\,F'$ e á base $D\,G$. O angulo $A\,D\,G$ é de 60°.

Problema.— Sobre uma recta dada como lado construir um pentagono regular.

Seja a recta dada $A\,B$ (fig. 181); prolongue-a, do ponto B como centro e raio $A\,B$ egual á recta dada $A\,B$ descreva-se uma semi-circumferencia que corte o prolongamento da recta $A\,B$ em um ponto D; a terminar na

semi-circumferencia levante-se do ponto B uma perpendicular $B\,P$ á recta $A\,D$, divida esta perpendicular $B\,P$ ao meio no ponto M; trace-se uma recta $M\,D$; do ponto M



como centro e raio $M\,B$ descreva-se um arco $B\,N$, do ponto D como centro e raio $D\,N$ descreva-se um arco $G\,N\,E$, tome-se na semi-circumferencia um arco $E\,F$ egual a $E\,D$.

Trace-se uma recta $B\,F$, ao meio dessa recta levante-se-lhe uma perpendicular $h\,C$, ao meio da recta $A\,B$ levante-se-lhe uma perpendicular $h'\,C$, que se encontre n'um ponto C a outra, deste ponto como centro e raio $C\,B$ ou $C\,A$ descreva-se uma circumferencia que conterá a recta $A\,B$ como corda cinco vezes exactas.

Observação.— Cada um dos arcos $D\,E$, $E\,F$ é de 36.° porque a corda de cada um delles é egual a $D\,G$ que é o maior segmento do raio $B\,D$ dividido no ponto G em meio e extremo, como vê-se $B\,D : D\,G :: D\,G : G\,B$.

Determinou-se este meio $D\,G$ para obterem-se os dous quintos $D\,F = 72.°$ da semi-circumferencia $A\,P\,D$.

O angulo $D\,B\,F$ tem por medida 72.° o qual é supplemento do angulo $F\,B\,A$ esse tem por medida 108.° que é a medida de cada um angulo interno de um pentagono regular. Por isso as perpendiculares $h\,C$, $h'\,C$

pois que, a recta $A\,B$ é perpendicular ou tangente no ponto B extremo do raio $C\,B$ do circulo a que o arco $B\,D$ pertence. Portanto, o arco $B\,D$ resolve a questão.

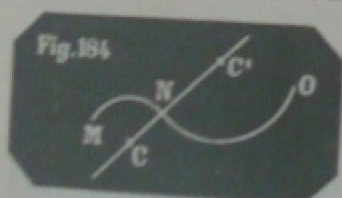
Ligar uma recta a uma curva. A recta que liga-se a um arco $B\,D$ de circulo é perpendicular ao raio $C\,B$ que passa no ponto em que o arco e a recta ligam-se.

Problema.— Ligar a um arco de circulo dado $B\,D$ (a mesma figura) no seu extremo B uma recta.

Levante-se ao raio $C\,B$, que toca no ponto B do arco $B\,D$ uma perpendicular $B\,A$. Essa recta $B\,A$ ligar-se-ha ao arco dado $B\,D$ no ponto dado B.

Um arco de circulo $M\,N$ que liga-se ao outro $N\,O$ (fig. 184) tem o centro sobre o raio $C\,N$ que toca no ponto de ligação N ou em algum ponto C' do prolongamento desse raio $C\,N$ em qualquer dos sentidos.

Problema.—Dado um arco de circulo $M\,N$ (fig. 184) ligal-o no extremo N a outro arco que tenha a concavidade voltada para parte opposta á do arco dado.

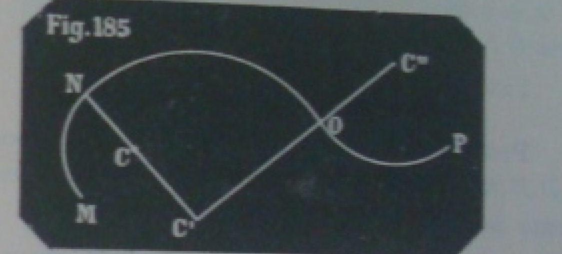


Do centro C do arco $M\,N$ dado ao seu extremo N, trace-se o raio $C\,N$ e prolongue-se-o indefinidamente, nesse prolongamento marque-se um ponto C' desse ponto, como centro e raio, $C'\,N$ trace-se um arco $N\,O$. Fica resolvido o problema. A curva $M\,N\,O$, satisfaz a questão.

Sobre estas propriedades baseam-se os traçados das ovaes, dos arcos em aza de cesto, etc.

Problema.— Construir uma curva composta de tres arcos de circulo voltados para diversos lados, sendo os raios de diversas grandezas.

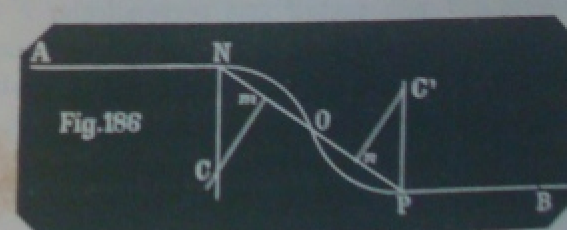
Trace-se uma qualquer recta $C\,N$ (fig. 185) do extremo C dessa recta como centro e raio $C\,N$ trace-se um arco $M\,N$; prolongue-se o raio $N\,C$ uma qualquer porção, seja a porção $C\,C'$ do ponto C' como centro e raio $C'\,N$,



trace-se um arco $N\,O$, pelo extremo O desse arco trace-se e prolongue-se o raio $C'\,O$ até C'' desse ponto como centro e raio $C''\,O$ trace-se um arco $O\,P$.

A curva $M\,N\,O\,P$ satisfaz a questão.

Problema.— Dadas duas rectas parallelas $A\,N$ e $P\,B$ (fig. 186) ligal-as pelos extremos N e P por uma curva de dous centros.



Levante-se á recta $A\ N$ pelo extremo N uma perpendicular $N\ C$, á recta $P\ B$ pelo extremo P levante-se uma perpendicular $P\ C'$ trace-se a recta $N\ P$ e divida-a ao meio no ponto O; ao meio de $N\ O$ trace-se uma perpendicular $n\ C$ que encontre $N\ C$ no ponto C; ao meio de $O\ P$ trace-se uma perpendicular $n\ C'$ que encontre $P\ C'$ no ponto C'.

Do ponto C como centro e raio $C\ N$, trace-se um arco $N\ O$, do ponto C' como centro e raio $C'\ P$, trace-se um arco $O\ P$.

Fica resolvido o problema.

Problema.— Dadas duas rectas convergentes $A\ B$ e $D\ E$ (fig. 187) ligal-as por um arco de circulo, sendo um ponto de ligação F dado na recta $A\ B$.

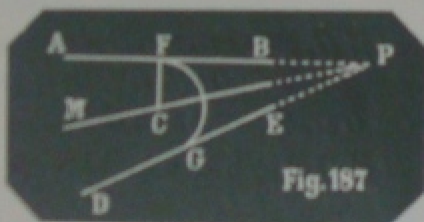


Fig. 187

Determine-se a bissectriz $M\ P$ do angulo $A\ P\ D$ que forma-se sendo as rectas $A\ B$ e $D\ E$ prolongadas, levante-se á recta $A\ B$ pelo ponto F uma perpendicular $F\ C$ que encontre a bissectriz no ponto C desse ponto como centro e raio $C\ F$ trace-se um arco $F\ G$ que ligar-se-ha ás duas rectas dadas.

Problema.— Dadas duas circumferencias de raios deseguaes, ligal-as por um arco de circulo.

Sejam as circumferencias de centros C e c (fig. 188). Em uma recta R' tomem-se $C'\ R'$ egual ao raio $C\ R$ e $c'\ R'$ egual ao raio $c\ R$ das circumferencias dadas; tome-se nessa recta além de $C'\ R'$, uma qualquer porção $R'\ P$ com a condição de ser ella maior ou egual a metade da distancia que separa as duas circumferencias.

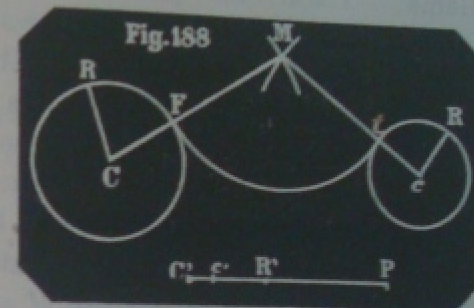


Fig. 188

Com um raio egual á recta $C'\ P$ e do centro C do circulo maior trace-se um arco; com um raio egual á recta $c'\ P$ e do centro c do circulo menor trace-se um arco que córte o primeiro no ponto M; desse ponto tracem-se rectas $M\ C$, $M\ c$ para os centros das circumferencias, e do ponto M como centro e raio $M\ F$ ou $M\ t$ trace-se um arco $F\ t$ que *resolve* o problema.

Espiral é uma linha curva plana composta de arcos de circulo que, cada um, cada vez mais se afasta do ponto inicial (fig. 189).

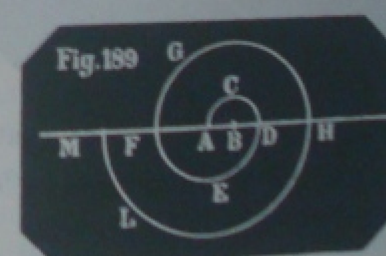


Fig. 189

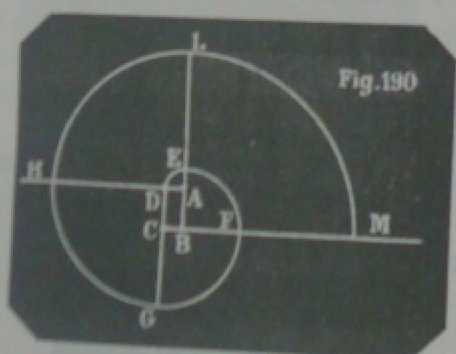
A espiral pode ter dous ou mais centros. Os pontos A e B são centros.

Chama-se espira a cada um arco de circulo de que a espiral se compõe. Os arcos $A\ C\ D$, $D\ E\ F$, $F\ G\ H$, etc. são espiras.

Problema. — Traçar uma espiral de dous centros.

Sejam A e B (a mesma figura) os centros dados. Trace-se por estes dous pontos A e B uma recta $A\ B$ prolongada nos dous extremos; descreva-se de um dos pontos B por exemplo, como centro e raio $B\ A$ uma semi-circumferencia $A\ C\ D$; em seguida do ponto A como centro e raio $A\ D$ descreva-se a semi-circumferencia $D\ E\ F$, do ponto B e raio $B\ F$ descreva-se a semi-circumferencia $F\ G\ H$, do ponto A e raio $A\ H$ outra $H\ L\ M$ e assim successivamente.

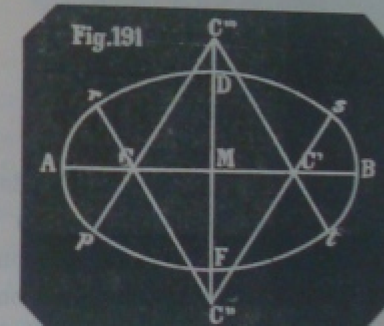
Problema.— Traçar uma espiral de quatro centros.



Sejam A, B, C e D (fig. 190) os quatro centros dados. Unam-se estes pontos com rectas taes que formem o quadrilatero $A\ B\ C\ D$, prolonguem-se os seus lados como se vê na figura.

Descreva-se de um dos pontos A, por exemplo, como centro e raio $A\ D$, um arco $D\ E$; em seguida do ponto B, como centro e raio $B\ E$, descreva-se um arco $E\ F$; do ponto C como centro e raio $C\ F$, descreva-se um arco $F\ G$; do ponto D e raio $D\ G$, descreva-se um arco $G\ H$; do ponto A e raio $A\ H$ descreva-se um arco $H\ L$; do ponto B e raio $B\ L$ descreva-se o arco $L\ M$, e assim por diante.

Problema.— Construir uma oval regular sendo dado o eixo maior $A\ B$ (fig. 191).



Levante-se ao meio M da recta dada $A\ B$ uma perpendicular, começando do ponto M marquem-se na recta $A\ B$ duas distancias eguaes quaesquer $M\ C$ e $M\ C'$; começando no mesmo ponto M marquem-se na perpendicular $C''\ C'''$ duas distancias eguaes quaesquer $M\ C'''$ e $M\ C''$.

Tracem-se do ponto C''' para os pontos C e C' as rectas $C'''\ C$ e $C'''\ C'$, tambem do ponto C'' tracem-se para os mesmos pontos C e C' as rectas $C''\ C$ e $C''\ C'$, prolonguem-se estas quatro rectas pelos extremos C e C. Tracem-se fazendo centro nos pontos C e C', com o raio

$C\,A$ os arcos $p\,A\,r$, $s\,B\,t$; fazendo centro no ponto C'' e C'' com o raio $C'\,r$; tracem-se os arcos $r\,D\,s$, $p\,F\,t$ que completarão a oval.

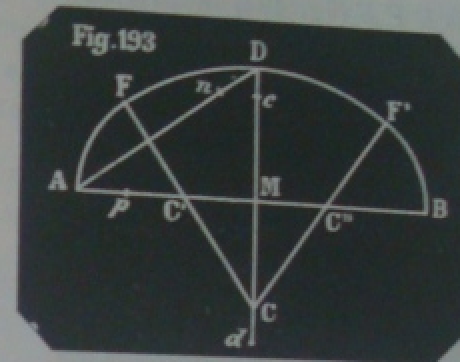
Problema. — Construir uma oval irregular sendo dado o raio $A\,M$ da sua semi-circumferencia (fig. 192).

Sobre a recta $A\,B$ dupla do raio $A\,M$ dado (fig. 192) trace-se uma circumferencia, pelo meio M da recta $A\,B$ trace-se-lhe uma perpendicular $D\,F$, dos pontos A e B para o ponto C em que a perpendicular encontra a circumferencia, tracem-se as rectas $A\,C\,r$, $B\,C\,p$, dos pontos A e B como centros e raio $A\,B$ descrevam-se os arcos $B\,r$, $A\,p$ do ponto C como centro e raio $C\,p$ ou $C\,r$ descreva-se o arco $p\,F\,r$ que completa a figura pedida.

Arcos abatidos (fig. 193) são os que têm os extremos ou pontos de nascença sobre a mesma horisontal $A\,B$ e a flecha ou altura $M\,D$ menor que a metade da distancia dos mesmos extremos A e B. A flecha é perpendicular ao meio da recta $A\,B$.

Os arcos abatidos são chamados, arcos **em aza de cesto**, quando são formados de diversos arcos de circulo.

Problema. — Construir um arco, em aza de cesto conhecendo-se a sua abertura ou os pontos de nascença e a sua flecha (a mesma figura).



Sejam $A\,B$ a abertura e $M\,D$ a flecha $M\,C$ o seu prolongamento.

Trace-se a recta $A\,D$; em $A\,M$ tome-se $M\,p$ egual a flecha $M\,D$; applique-se a differença $p\,A$ destas duas linhas na recta $A\,D$ começando do extremo D, a qual é egual $D\,n$, levante-se ao meio da recta $A\,n$ a perpendicular $F\,C$ que corte a recta $A\,B$ no ponto C' e encontra $D\,d$ no ponto C, marque-se o comprimento $M\,C''$ egual a $M\,C'$, trace-se a recta $C\,C''$ e prolongue-a para F'.

Descrevam-se com o centro em C' e raio $C'\,A$ um arco $A\,F$, com o centro em C'' com o mesmo raio, o arco $B\,F'$; com o centro em C e raio $C\,F$ ou $C\,F'$ o arco $F\,D\,F'$ que completará a curva.

Observação. — Si pelo lado opposto deste arco $A\,D\,B$ construir-se um outro egual a elle, ter-se-ha uma oval regular, da qual os dous eixos serão $A\,B$ e $D\,d$, os centros dos arcos serão C' e C'' dos dous arcos menores de raio $C'\,A$, os centros C e c os dous arcos maiores de raio $C\,F$.

Arcos aviajados são os formados de muitos arcos de circulo, do qual os extremos ou pontos de nascença não estão sobre a mesma horisontal.

O arco $B\,F\,E$ (fig. 194) é aviajado, composto do arco $E\,F$ de centro C e de raio $C\,E$, e do arco $F\,B$ de centro C' e de raio $C'\,B$; um ponto de nascença E existe na horisontal $E\,x$ e o outro B existe na horisontal $B\,y$.

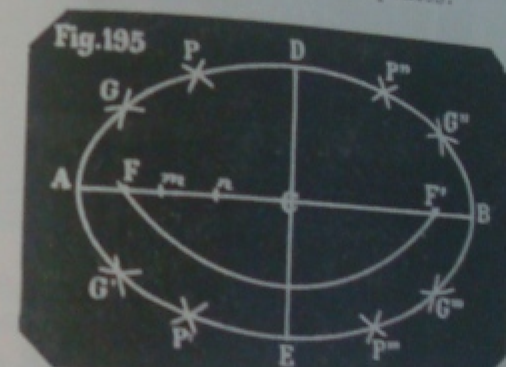
Problema. — Construir um arco aviajado conhecendo os pontos de nascença e as verticaes adjacentes aos pontos de nascença (a mesma figura).

Sejam B e E os pontos de nascença $B\,A$ e $E\,D$ as verticaes dadas. Tracem-se as horisontaes $E\,x$ e $B\,y$ e a recta $B\,E$, pelo ponto M meio dessa recta $B\,E$ trace-se a vertical $M\,F$ egual a $B\,M$ ou $M\,E$; do ponto F baixe-se uma perpendicular $F\,C$ à recta $B\,E$ a qual encontra as horisontaes $E\,x$ e $B\,y$ nos pontos C e C'.

Do ponto C e raio $C\,E$ trace-se o arco $E\,F$, do ponto C' e raio $C'\,B$ trace-se o arco $F\,B$ que formarão a curva.

Problema.—Conhecendo-se os eixos de uma ellipse descrevel-a com o auxilio dos raios vectores.

Sejam $A\,B$ e $D\,E$ (fig. 195) os eixos da ellipse pedida. Com o centro em um extremo D do eixo menor da ellipse e raio egual a $A\,C$ metade do eixo maior descreva-se um arco $F\,F''$ que corte o eixo $A\,B$ em dous pontos F e F', os quaes são os fócos da ellipse; tomem-se entre o centro C e um dos fócos F alguns pontos m, n escolhidos arbitrariamente; os comprimentos $m\,A$, e $m\,B$ são raios vectores de quatro pontos da ellipse, e os comprimentos $n\,A$, e $n\,B$ são raios vectores de outros quatro pontos.

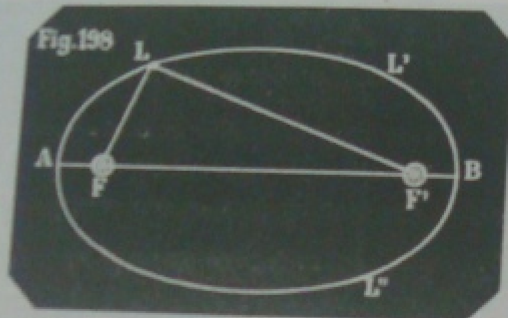


Do ponto F como centro e raio $m\,A$ descrevam-se dous pequenos arcos G, G' com o centro no outro ponto F' e com o outro raio $m\,B$ descrevam-se dous arcos que cortarão os dous primeiros nos pontos G e G'; com este mesmo raio $m\,B$, porém do ponto F descrevam-se dous pequenos arcos G'' e G''', com o centro no outro ponto F' e com o raio $m\,A$ descrevam-se dous arcos que cortarão os dous arcos anteriores nos pontos G'' e G'''.

Operando-se do mesmo modo com os raios $n\,A$ e $n\,B$ determinam mais quatro pontos P, P', P'' e P''' da ellipse.

Unindo-se por um traço continuo os pontos A, G, P, D, P'', G'', B, G'''.....formará a ellipse pedida.

Problema. — Conhecendo-se o eixo maior de uma ellipse descrevel-a por um traço continuo; com o auxilio de um fio egual ao eixo maior.



Seja AB (fig. 198) o eixo da ellipse pedida.

Marquem-se em AB para fócos dous pontos F e F' com a condição unica de ser AF egual a BF', prendam-se com tachinhas aos fócos os extremos de um fio flexivel que tenha o comprimento egual ao eixo dado AB, introduza-se um lapis entre a dobra L do fio FLF', conservando sempre o fio tenso, como vê-se na figura, faça-se escorregar por elle a ponta do lapis que vai traçando sobre a superficie desde o ponto A até o ponto B uma curva $ALL'B$.

Operando-se do mesmo modo do outro lado do eixo AB obtem-se outra curva $BL''A$ egual a primeira.

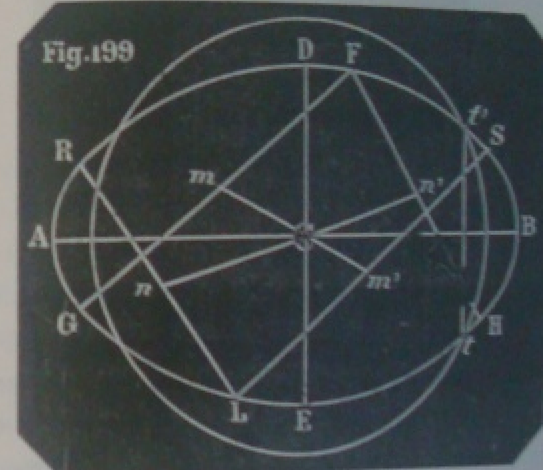
A ellipse $ALL'BL''A$ é a pedida.

Qualquer recta FG ou FH etc. (fig. 199) que tem os extremos na ellipse é uma corda da ellipse.

A recta mm' que divide ao meio duas cordas parallelas FG e SL passa pelo centro da ellipse.

Toda recta que passa pelo centro da ellipse e termina de um lado e outro na curva chama-se diametro da ellipse.

O ponto C em que uma recta mm', que divide ao meio duas cordas FG e SL parallelas, é cortada por outra recta nn', que tambem divide ao meio outras duas cordas FH e RL parallelas é sempre no centro C da ellipse.



Fundadas nestas propriedades pode-se sempre achar o centro de uma ellipse. Quanto aos eixos:

Achado o centro de uma ellipse facilmente determinam-se os eixos; o que se consegue traçando-se do centro C da ellipse uma circumferencia que a corte, e traçando-se uma corda tt' commum que ligam dous pontos consecutivos das intersecções da circumferencia com a ellipse; a perpendicular AB ao meio daquella corda tt' commum e limitada pela ellipse é um dos seus eixos; o outro é a perpendicular DE limitada pela ellipse e traçada ao meio daquelle eixo.

Problema. — Descrever por pontos uma parabola conhecendo-se o seu fóco e a sua directriz.

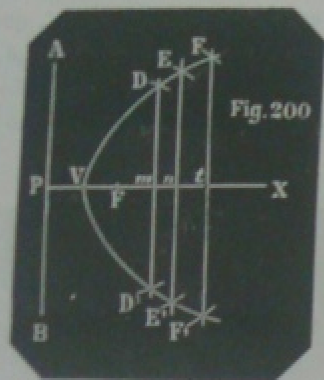


Fig. 200

Sejam a recta AB a directriz, e o ponto F o fóco conhecido (fig. 200).

Do fóco F á directriz AB baixe-se uma perpendicular FP sobre a directriz, a qual será o eixo da curva e o ponto v que divide ao meio o eixo FP será o vertice ; prolongue-se o eixo uma porção indefinida Fx, e nessa porção marquem-se alguns pontos m, n, t escolhidos a vontade, por estes pontos tracem-se parallelas DD' EE', FF' á directriz AB.

Do fóco F como centro e com o raio Pm tracem-se dous pequenos arcos que cortem a recta DD' nos pontos D e D'; do fóco F como centro e com o raio Pn tracem-se dous pequenos arcos que cortem a recta EE' nos pontos E e E'; e assim por diante.

Unindo os pontos F', E, D, V, D', E', F' por um traço continuo ter-se-ha a parabola pedida.

Problema. — Descrever por pontos uma hyperbole conhecendo-se seus fócos e seu eixo transverso.

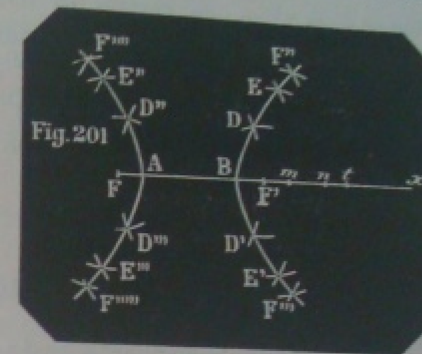


Fig. 201

Sejam F e F' os fócos dados e AB o eixo transverso (fig. 201). Prolongue-se a recta FF' que contém os fócos uma porção indefinida Fx e marquem-se neste prolongamento alguns pontos m, n, t escolhidos a vontade. Os comprimentos mB e mA são raios vectores de quatro pontos D, D', D'', D''' da hyperbole, os comprimentos nB e nA são de outros quatro pontos E, E', E'' E''', etc.

Construa-se com estes raios um ramo da hyperbole, seja o de vertice no ponto B.

Do fóco F' como centro e com o raio mB tracem-se dous pequenos arcos D e D', do outro fóco F como centro e com o outro raio mA tracem dous pequenos arcos que cortem os dous primeiros nos pontos D e D'; do fóco F' como centro e com o raio nB tracem-se dous arcos E e E', do outro fóco F como centro e com o raio nA tracem-se dous arcos que cortem estes dous ultimos nos pontos E e E', continuando do mesmo modo obtem-se os pontos F e F'.

Passa-se a traçar o outro ramo de vertice no ponto A.

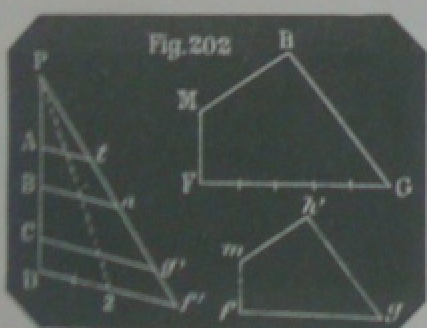
Do fóco F como centro e com o raio mB tracem-se dous arcos D' e D'' do outro fóco F' como centro e com o raio mA tracem-se dous arcos que cortem os dous primeiros nos pontos D' e D'' e assim continuando com outros raios obtem-se outros pontos E'' e E''', F''' e F''''.

Unindo-se os pontos pertencentes ao vertice B por um traço continuo e os pertencentes ao vertice A por outro ter-se-ha a hyperbole pedida.

ANGULO DE REDUCÇÃO OU DE AMPLIAÇÃO

O angulo de reducção ou de ampliação basêa-se nas propriedades da figura n. 72. O exemplo seguinte deriva-se da quarta propriedade daquella figura.

Problema. — Dada uma recta fg para homologa de um lado FG de uma figura $FG\ HM$ (fig. 202) tambem dada, construir uma outra que lhe seja semelhante.



Trace-se uma recta PD egual a recta FG, do extremo D d'aquella recta trace-se uma recta Df', em qualquer direção, egual a recta fg dada, trace-se do ponto P ao ponto f' uma recta Pf'.

Fica construido o angulo $D\ Pf$ de reducção.

Começando do ponto P da recta PD, marquem-se os comprimentos PC egual a GH; $PB = HM$; $PA = MF$; dos pontos C, B, A tracem-se as rectas Cg', Bh, At parallelas á recta Df.

As rectas Df, Cg', Bh, At são homologas ás rectas FG, GH, HM, MF da figura dada.

Com aquellas parallelas á Df construa-se sobre a recta fg dada uma figura $fgh'm$ semelhante á figura dada.

Se na solução do problema encontrasse-se na figura dada alguma recta maior que PD, prolongava-se esta e tambem Pf, applicava-se de P para além de D o comprimento maior encontrado, e no extremo desse comprimento traçava-se uma parallela a Df; essa parallela seria homologa a tal recta maior encontrada na figura dada.

Se a recta Df fosse maior que a recta PD, por outro modo: se a recta fg dada fosse maior que sua homologa FG da figura dada, o angulo que formasse seria de ampliação.

Se os lados da figura pedida fosse $\frac{2}{5}$ do da figura $FG\ HM$ dada; dividia-se a recta FG em 5 partes eguaes (tantas quantas indica o denominador da fracção) e começando do ponto D da recta Df', tomava-se um comprimento egual a 2 das partes da recta FG (tantas quantas indica o numerador da fracção) traçava uma recta $P\ 2$.

Ficaria formado um angulo $DP\ 2$; e usaria desse angulo do mesmo modo que usou-se do angulo DPf.
(Neste caso usa tambem de escala de desenho).

ESCALAS DO DESENHO

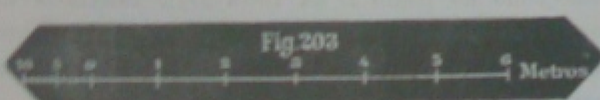
Escala é uma linha ou diversas parallelas que têm suas divisões proporcionaes as da medidas usuaes. O seu fim é para construir figuras semelhantes a um objecto ou a um desenho dado.

A escala metrica é a mais preferida:

Em duas figuras semelhantes, obtem-se a relação ou a razão de sua escala, dividindo uma de suas linhas por sua homologa, o quociente é a razão da escala.

CONSTRUCÇÃO DE UMA ESCALA DE UM CENTIMETRO POR METRO

Trace-se uma recta (fig. 203) marquem-se nella, começando-se do extremo á esquerda, diversas partes eguaes a um centimetro, a primeira á esquerda subdivida-se em dez millimetros; numerem-se estas partes, as subdivisões á esquerda, na ordem inversa como indica a figura, as divisões á direita na ordem natural como indica a figura, estas partes á direita representam metros.



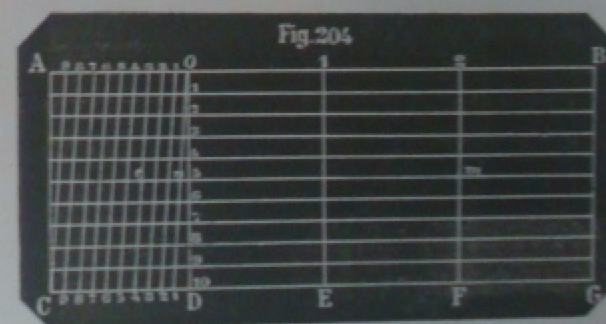
Escala de 0,m 01c por 1 Metro

Esta escala equivale a $\frac{1}{100}$, isto é, o metro real é cem vezes maior do que o representado na figura.

CONSTRUCÇÃO DE UMA ESCALA DE DOUS CENTIMETROS POR METRO

(Seja uma escala de muitas parallelas)

Trace-se uma recta AB (fig. 204) marquem-se nella, começando do ponto A diversas partes eguaes a dous centimetros, e numerem-as como indica a figura, levantem-se por estes pontos de divisões as perpendiculares $A\ C$, zero D, 1 E, 2 F, $B\ G$; marquem-se na recta zero D dez partes eguaes entre si e numerem-as da maneira indicada na figura 194, por estes pontos de divisões tracem-se parallelas a recta AB, sendo a ultima dellas a recta CDG; dividam-se a recta CD e a recta (zero A) em dez partes eguaes entre si: e numerem-as na ordem inversa como indica a figura; trace-se uma obliqua do ponto zero ao ponto 1, a esta obliqua (zero 1) tracem-lhe parallelas por outros pontos de divisões da recta zero A, sendo a ultima 9 C as quaes completarão a escala.



Escala de 0m, 02c por 1 Metro

A sua relação é $\frac{1}{50}$. O metro real é cincoenta vezes maior do que o representado na figura.

N. B. — No triangulo $DO1$ (D zero um) em que zero é o vertice, existem nove triangulos parciaes semelhantes ao total, a base parallela de cada um triangulo maior excede em uma unidade a base do triangulo menor immediato. A quantidade de unidades de cada base é indicada pelo algarismo collocado em cada uma das parallelas em que a base existe.

Querendo-se um comprimento que corresponda a 2 metros e 5 centimetros acha-se-o na quinta parallela á recta AB, o qual é o comprimento nm; e o comprimento tm corresponde 2 metros 3 decimetros e 5 centimetros. Nas escalas chama-se talão a reunião das subdivisões a esquerda, as divisões a direita chamam-se divisões principaes.