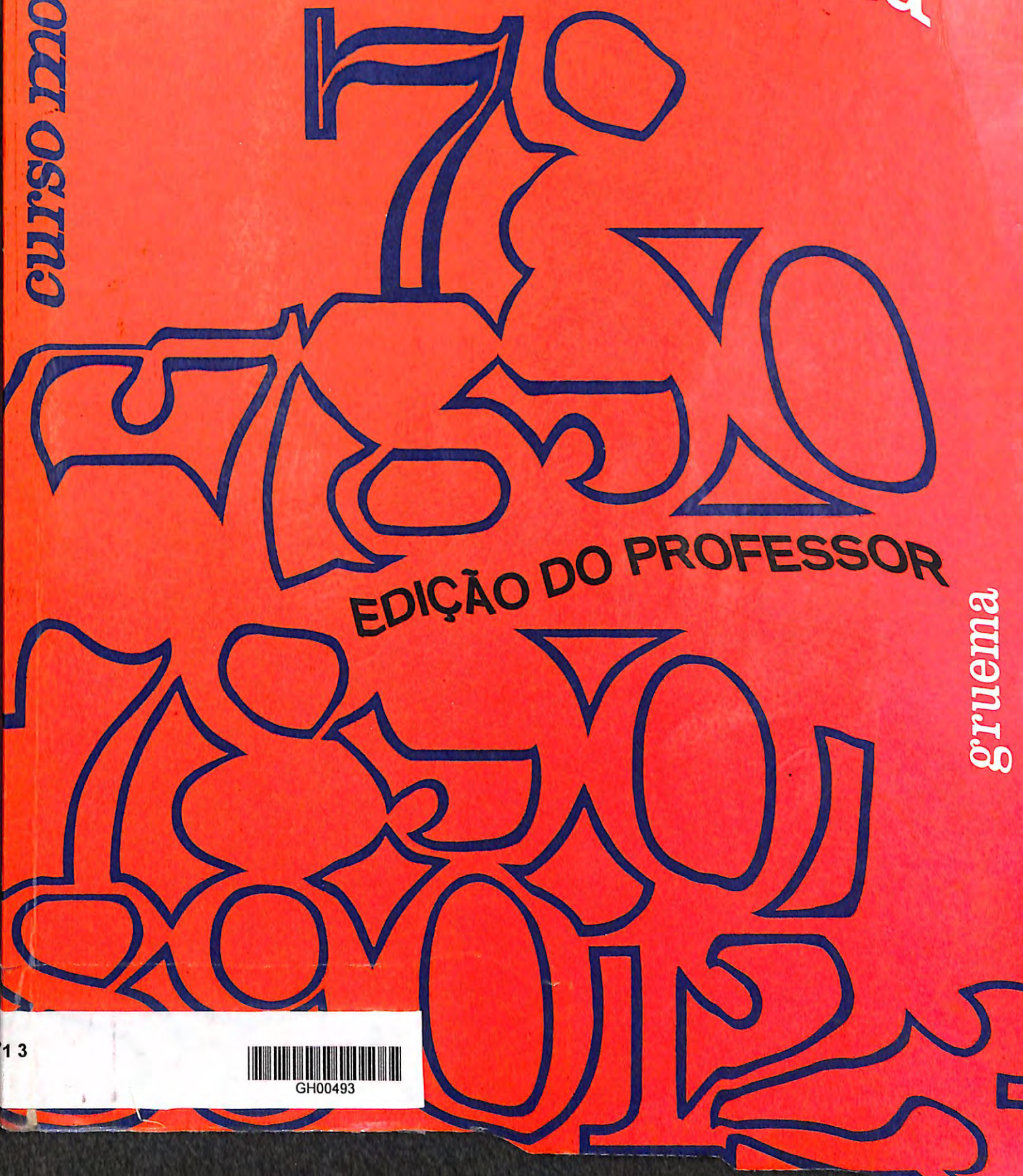


curso moderno

de matemática
para o ensino de 1º grau



EDIÇÃO DO PROFESSOR

gruema

13



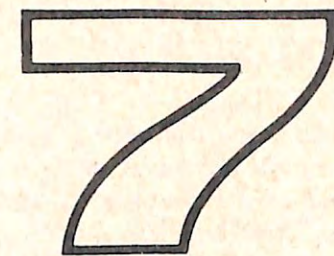
GH00493

GRUEMA
(Grupo de Ensino de Matemática Atualizada)

ANNA AVERBUCH
FRANCA COHEN GOTTLIEB
LUCÍLIA BECHARA SANCHEZ
MANHÚCIA PERELBERG LIBERMAN
(licenciadas em Matemática)

Supervisão de
L. H. JACY MONTEIRO
(da Universidade de São Paulo)

CURSO MODERNO DE
MATEMÁTICA
para o ensino de primeiro grau



COMPANHIA EDITORA NACIONAL

OBJETIVOS INSTRUCIONAIS

Relações

1. Construir a relação inversa de uma relação conhecida.
2. Efetuar, quando possível, a relação composta de duas relações dadas.
3. Reconhecer a não comutatividade da composição de relações.
4. Reconhecer que a composta de duas funções é uma função, e que a composta de duas bijeções é uma bijeção.

Observações de ordem didática

O professor deve lembrar que o livro se destina à 7.^a série do Curso Fundamental, razão por que apresentamos o assunto do capítulo de maneira mais intuitiva do que formal.

Grupos

1. Formalizar as propriedades de uma operação num conjunto, já estudadas nas 5.^a e 6.^a séries.
2. Reconhecer quando um conjunto, munido de uma operação, é um grupo, seja o conjunto finito ou infinito.

Observações de ordem didática

No capítulo em questão foi apresentado o grupo das permutações de três elementos. Não sendo, porém, de nosso interesse que o aluno memorize nomenclatura, não introduzimos a palavra "permutação", limitando-nos a considerá-la uma bijeção.

A formalização do conceito de grupo foi introduzida na 7.^a série do Curso Fundamental para facilitar a prática da resolução de equações. Esta prática constitui-se numa das ferramentas essenciais para a aplicação da Matemática a qualquer profissão.

Implicação e equivalência – Axiomas e Teoremas

1. Identificar uma implicação quando a premissa é verdadeira.
2. Reconhecer a equivalência como uma dupla implicação.
3. Compreender o que são Axiomas de uma Teoria.
4. Identificar a hipótese e a tese de um Teorema.
5. Entender o que é a demonstração de um Teorema.

Observações de ordem didática

Não introduzimos as tabelas de valores lógicos por não considerá-las acessíveis aos alunos desta faixa etária.

Usamos o método heurístico (processo da redescoberta) nas demonstrações simples para evitar que estas sejam impostas aos alunos ou apresentadas para memorização.

Paralelismo e direção

1. Reconhecer que a relação de paralelismo é uma relação de equivalência.
2. Escolher um sentido para uma reta, obtendo a noção de "precede" e "segue"
3. Identificar segmentos equi-polentes.
4. Construir o ponto médio de um segmento.
5. Traçar projeções, paralelas a uma direção dada, de pontos e de segmentos, para dividir um segmento em partes equi-polentes.
6. Graduar uma reta.

Observações de ordem didática

O professor deverá deter-se na divisão de um segmento em partes equi-polentes, por ser este conceito fundamental na introdução do conceito de número real, bem como de grande aplicação na vida prática.

Números reais

1. Comparar racionais sob a forma decimal.
2. Identificar decimais ilimitados periódicos e não periódicos.
3. Representar os números reais sobre a reta, graduando-a.
4. Identificar a abscissa de um ponto sobre a reta graduada.
5. Construir um ponto cuja abscissa seja a soma das abscissas de dois pontos dados.
6. Identificar o grupo aditivo dos números reais.
7. Determinar a medida de um segmento e a distância de dois pontos.
8. Reconhecer a existência do número real que seja produto de dois reais.
9. Identificar o grupo multiplicativo dos reais diferentes de zero.
10. Reconhecer potências de reais como produtos de fatores iguais.
11. Aplicar as propriedades dos grupos para a introdução da subtração e da divisão de números reais.

Observações de ordem didática

Preferimos não introduzir na 7.^a série do Curso Fundamental a técnica operatória da adição e da multiplicação em \mathbb{R} (cálculo com radicais), deixando-a para a 8.^a série.

O estudo dos números reais está ligado estreitamente à reta numerada, possibilitando a representação gráfica de funções polinomiais, bem como de soluções de sistemas de equações de duas incógnitas. Procuramos evitar uma confusão muitas vezes constatada entre um conjunto denso e um conjunto contínuo. O fato de o conjunto dos racionais ser denso não autoriza o aluno a considerá-lo como uma representação de todos os pontos da reta, que constituem um conjunto contínuo.

A introdução do conjunto \mathbb{R} nos permitiu, ainda, estudar o cálculo literal nos reais, evitando assim repetições enfadonhas.

Cálculo literal

1. Descobrir regras práticas para efetuar produtos notáveis.
2. Reconhecer os produtos notáveis para efetuar a fatoração.
3. Aplicar a fatoração à simplificação, multiplicação e divisão de frações literais.

Observações de ordem didática

O capítulo considerado nada mais é do que a aplicação de propriedades operacionais já conhecidas. Desde a 5.^a série os alunos se habituaram a efetuar operações com expressões literais simples. Na 7.^a série eles já são capazes de manipular expressões um pouco mais complexas.

Função polinomial

1. Reconhecer uma função polinomial.
2. Representar graficamente, no plano cartesiano, funções lineares e funções afins.
3. Resolver graficamente sistemas de duas equações do 1.^o grau com duas variáveis.
4. Resolver algebricamente sistemas de duas equações do 1.^o grau com duas variáveis.

Observações de ordem didática

O professor notará que neste capítulo não abordamos as operações com polinômios, pois elas não passam de casos particulares de operações com expressões literais, já estudadas. O aluno deverá reconhecer que todo polinômio é uma expressão literal, mas nem toda expressão literal é um polinômio.

Procuramos dar maior ênfase à função polinomial do que ao polinômio em si, pois observamos que as funções se constituem num dos tópicos da Matemática que mais larga aplicação têm em outras áreas.

Circunferência

1. Reconhecer a posição relativa de duas circunferências.
2. Reconhecer a posição relativa de uma reta e de uma circunferência.
3. Construir circunferências tangentes ou secantes.
4. Relacionar a medida dos raios, a posição dos centros e a posição relativa de duas circunferências.

Simetria

1. Reconhecer e construir pontos simétricos em relação a uma reta.
2. Determinar o eixo de simetria de um segmento.
3. Determinar o simétrico de uma figura plana em relação a um eixo.
4. Determinar o eixo de simetria de figuras planas.
5. Identificar os invariantes de uma simetria.
6. Reconhecer e construir a mediatriz como eixo de simetria de um segmento e a bissetriz como eixo de simetria de um ângulo.
7. Identificar e aplicar as propriedades da mediatriz e da bissetriz.
8. Reconhecer e construir as medianas de um triângulo.
9. Construir perpendiculares a uma reta, utilizando simetria.

Congruência

1. Estabelecer correspondências para identificar congruências.
2. Reconhecer e aplicar congruência de polígonos.
3. Reconhecer e aplicar os casos de congruência de triângulos.
4. Provar, utilizando os casos de congruência de triângulos, as relações entre elementos de triângulos e quadriláteros.
5. Conhecer e aplicar as relações entre os ângulos formados por paralelas com transversais.
6. Conhecer e aplicar a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo.

Observações de ordem didática

O estudo da simetria apresentado no livro tem dois objetivos:

a) formativo: desenvolver o domínio do espaço ligado aos movimentos de uma figura plana no espaço;

b) informativo: estudar a geometria através de transformações geométricas, fazendo assim, a integração com a linguagem utilizada em álgebra.

O estudo da simetria, além de enriquecer, facilita o estudo de congruência.

O estudo da simetria deve ser iniciado com observações do espaço e atividades concretas como:

a) Com um espelho ou com 2 espelhos em ângulo ou paralelo, observar como as imagens das letras do alfabeto ou de outras figuras se refletem.

b) Tentar desenhar a imagem de uma letra no espelho sem o espelho e em seguida colocar o espelho para verificar se o desenho está correto.

c) Descobrir simetria nos objetos da sala de aula, por exemplo, ou em desenhos, cartazes, etc.

SUGESTÕES DE QUESTÕES PARA PROVAS (por capítulos)

Relações

1) Dados:

$$A = \{a, b, c, d\}$$

$$B = \{5, 6, 7, 8\}$$

$$R = \{(a, 5), (b, 6), (b, 7)\}$$

a) Complete:

$$R^{-1} = \{(5, a), (6, b), (7, b)\}$$

$$R \circ R^{-1} = \{(5, 5), (6, 6), (7, 7)\}$$

$$R^{-1} \circ R = \{(a, a), (b, b)\}$$

b) Trace no diagrama:

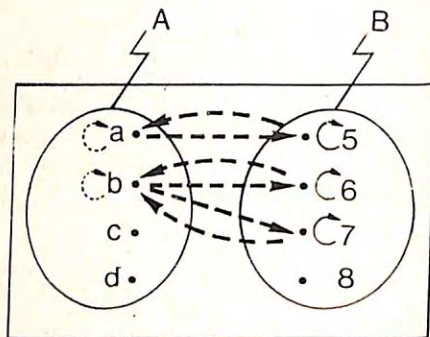
em verde as setas que representam R

em azul as setas que representam R^{-1}

em marrom as setas que representam $R \circ R^{-1}$

em laranja as setas que representam $R^{-1} \circ R$

c) Assinale com V ou F: $R \circ R^{-1} = R^{-1} \circ R$ (F)



2) Dados:

$$C = \{\text{Belém, Teresina, Manaus, Goiânia}\}$$

$$E = \{\text{Amazonas, Pará, Goiás, Sergipe}\}$$

a) Represente os elementos de C e de E pelas suas primeiras letras (em minúsculo):

$$C = \{b, t, m, g\}$$

$$E = \{a, p, g, s\}$$

b) Represente no diagrama os elementos de C e de E.

c) Trace em verde, no diagrama, as setas que representam a relação S de C em E, definida por:

"x é a capital de y"

d) Trace em laranja, no diagrama, as setas que representam S^{-1} .

e) Qual a sentença que define S^{-1} ? y tem por capital x

f) Complete:

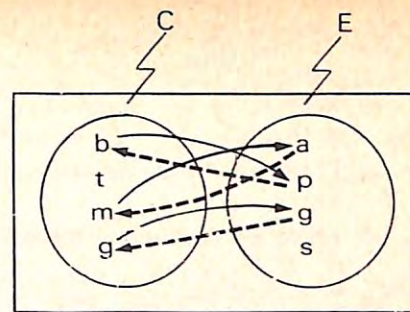
$$S = \{(b, p), (m, a), (g, g)\}$$

$$S^{-1} = \{(p, b), (a, m), (g, g)\}$$

$$S \circ S^{-1} = \{(p, p), (a, a), (g, g)\}$$

$$S^{-1} \circ S = \{(b, b), (m, m), (g, g)\}$$

g) Assinale com V ou F: $S \circ S^{-1} = S^{-1} \circ S$ (F)



3) Sejam os conjuntos

$$A = \{11, 14, 17, 20, 21\}$$

$$B = \{15, 18, 21, 24, 25\}$$

$$C = \{5, 6, 7, 8\}$$

e as relações:

M de A em B definida por:

$$x \mapsto x + 4$$

R de B em C definida por:

$$x \mapsto \frac{x}{3}$$

a) Represente no diagrama os elementos de A, B e C.

b) Trace em azul, no diagrama, as setas que representam $M \circ R$.

c) Trace em marrom, no diagrama, as setas que representam $R \circ M$.

d) M é uma função? *sim*

e) R é uma função? *não*

f) $R \circ M$ é uma função? *não*

4) Dados os conjuntos

$$A = \{6, 15, 21, 0\}$$

$$B = \{2, 5, 7, 0\}$$

$$C = \{4, 10, 14, 0\}$$

e as relações:

T de A em B definida por:

"x é o triplo de y"

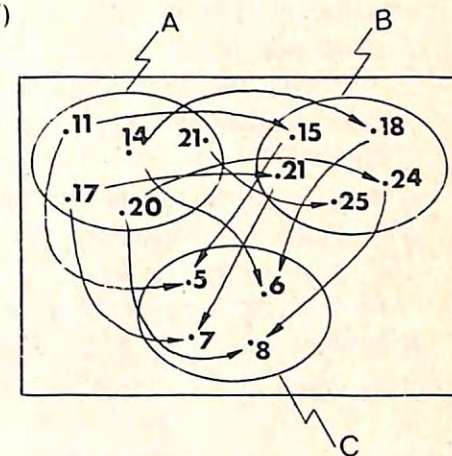
D de B em C definida por:

"x tem por dobro y"

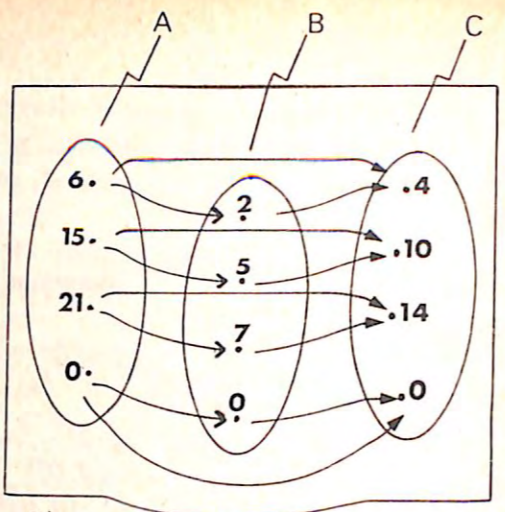
a) Complete: $T = \{(6, 2), (15, 5), (21, 7), (0, 0)\}$

$$D = \{(2, 4), (5, 10), (7, 14), (0, 0)\}$$

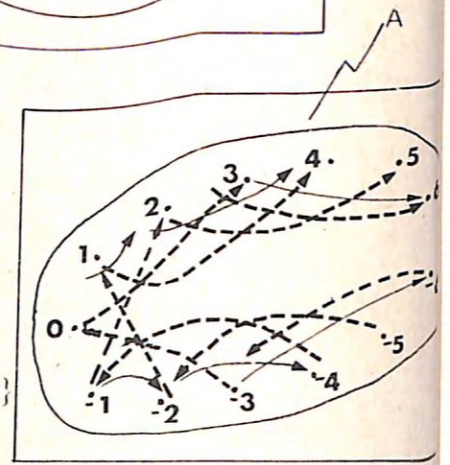
$$T \circ D = \emptyset$$



- b) Represente no diagrama os elementos de A, B e C.
- c) Trace em verde as setas que representam $T \circ D$.
- d) Trace em laranja as setas que representam $D \circ T$.
- e) T é uma bijeção? *sim*
- f) D é uma bijeção? *sim*
- g) $D \circ T$ é uma bijeção? *sim*



- 5) Dado o conjunto $A = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 5, -5, 6, -6\}$ considere as relações sobre A:
- R definida por $x \mapsto 2x$
 - S definida por $x \mapsto x + 3$
- a) Trace no diagrama, em verde, as setas que representam R.
 - b) Trace em preto as setas que representam S.
 - c) Complete por enumeração
 $S \circ R = \{(0, 3), (1, 5), (-1, +1), (-2, -1), (-3, -3)\}$
 $R \circ S = \{(0, 5), (-2, 2), (-4, -2), (-6, -6)\}$
 - d) Assinale com V ou F: $S \circ R = R \circ S$ (F)



Grupos

- 1) Seja o conjunto $A = \{\square, \Delta, \blacksquare, \blacktriangle\}$ e a operação * que é associativa em A e definida pela tábua.
- a) A tem elemento neutro em relação à operação *? *sim*
 - b) Em caso afirmativo, qual é? \square
 - c) Qual o simétrico de \square ? \square
de Δ ? Δ
de \blacksquare ? \blacksquare
de \blacktriangle ? \blacktriangle
 - d) $(A, *)$ é um grupo? *sim*
- 2) Seja o conjunto $L = \{b, o, n, i, t, a\}$ e a operação Δ , que é associativa e definida pela tábua ao lado.
- a) L tem elemento neutro em relação a Δ ? *sim*
 - b) Em caso afirmativo, qual? *o*
 - c) Qual o simétrico de b? *não há*
de o? *o*
de n? *não há*
de i? *não há*
de t? *não há*
de a? *a*
 - d) (L, Δ) é um grupo? *não*

*	\square	Δ	\blacksquare	\blacktriangle
\square	\square	Δ	\blacksquare	\blacktriangle
Δ	Δ	\square	\blacktriangle	\blacksquare
\blacksquare	\blacksquare	\blacktriangle	\square	Δ
\blacktriangle	\blacktriangle	\blacksquare	Δ	\square

Δ	b	o	n	i	t	a
b	b	b	b	b	b	b
o	b	o	n	i	t	a
n	b	n	t	b	n	t
i	b	i	b	i	b	i
t	b	t	n	b	t	n
a	b	a	t	i	n	o

- 3) Seja o conjunto $T = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ é múltiplo de } 3\}$
 $(T, +)$ é grupo? *sim*

Implicação, equivalência, axiomas e teoremas

- 1) Considere o conjunto $A = \{2, 4, 5, 7\}$ e as sentenças $p: y < 4$ e $q: y < 8$.
- a) Substitua nas sentenças abertas a letra y pelos elementos de A, e escreva V ou F ao lado das sentenças obtidas:

$y \in A$	sentença p	V ou F
	sentença q	
2	$2 < 4$	V
	$2 < 8$	V
4	$4 < 4$	F
	$4 < 8$	V
5	$5 < 4$	F
	$5 < 8$	V
7	$7 < 4$	F
	$7 < 8$	V

- b) Em quais dos casos acima poderíamos escrever:
 $p \Rightarrow q?$ para $y = 2$
 $y = 4$
 $y = 5$
 $y = 7$

- 2) Assinale com V ou F (Universo \mathbb{Z}):

- a) $x < 7 \Rightarrow x < 8$ (V)
 $x < 7 \Rightarrow x < 2$ (F)
 $x < 8 \Rightarrow x < -1$ (F)
 $x < -1 \Rightarrow x < 0$ (V)
- b) $x + 4 = 3 \Rightarrow x = -1$ (V)
 $3x < 15 \Rightarrow x < 5$ (V)
 $x = 2 \Rightarrow \frac{x}{2} = 1$ (V)
 $x + 4 = 3 \Rightarrow x = 7$ (F)
 $\frac{x}{4} = 0 \Rightarrow x = 0$ (V)
- c) $x + 1 > 3 \Leftrightarrow x > 2$ (V)
 $1 - x > 3 \Leftrightarrow x > 2$ (F)
 $1 - x > 3 \Leftrightarrow x < 2$ (F)
 $1 - x > 3 \Leftrightarrow x < -2$ (V)

3) Resolva em \mathbb{Q} as equações por meio de sentenças equivalentes e dê o conjunto-verdade.

a) $\frac{2x+1}{3} = \frac{3x-4}{2} \quad V = \frac{14}{5}$

b) $\frac{x}{5} - \frac{2x+1}{2} = 4 \quad V = -\frac{45}{8}$

c) $2(x-1) - 3(x+4) < 15 \quad V = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > -29\}$

d) $\frac{2x-1}{4} - \frac{3x-1}{2} < -\frac{1}{3} \quad V = \left\{x \in \mathbb{Q} \mid x > \frac{1}{6}\right\}$

4) Complete o quadro.

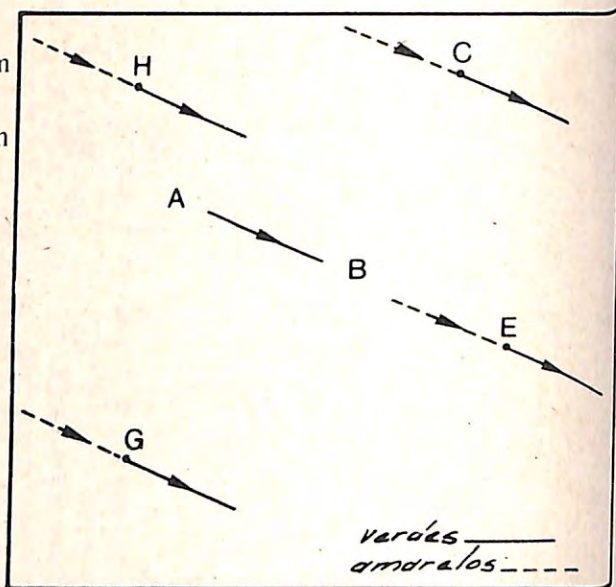
Teorema	Hipótese	Tese
$\left. \begin{matrix} X \subset Y \\ Y \subset X \end{matrix} \right\} \Rightarrow X = Y$	$\begin{matrix} X \subset Y \\ Y \subset X \end{matrix}$	$X = Y$
$\left. \begin{matrix} a \text{ é múltiplo de } 3 \\ a \text{ é múltiplo de } 5 \end{matrix} \right\} \Rightarrow a \text{ é múltiplo de } 15$	$\begin{matrix} a \text{ é múltiplo de } 3 \\ a \text{ é múltiplo de } 5 \end{matrix}$	$a \text{ é múltiplo de } 15$
$\left. \begin{matrix} \text{Antônio é pai de João} \\ \text{João é pai de Alberto} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \text{Antônio é avô de Alberto}$	$\begin{matrix} \text{Antônio é pai de João} \\ \text{João é pai de Alberto} \end{matrix}$	$\text{Antônio é avô de Alberto}$
Hoje vou à praia porque quando há sol vou à praia e hoje há sol.	Quando há sol vou à praia e hoje há sol	Hoje vou à praia

Paralelismo e direção

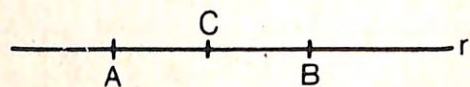
1) Com o auxílio de régua e esquadro trace:

a) segmentos verdes equípolentes a \overrightarrow{AB} com origens em C, E, H, G.

b) segmentos amarelos equípolentes a \overrightarrow{AB} com extremidades em C, E, H, G.



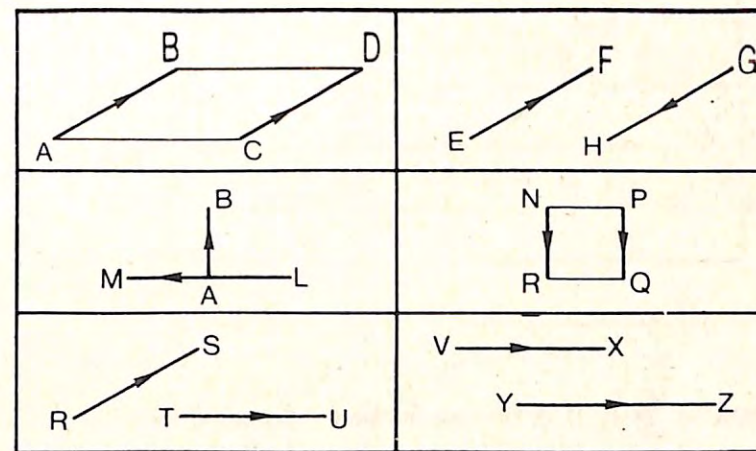
2) Desenhe uma reta r e os pontos A, B, C de r de modo que "A precede B" e "B segue C".



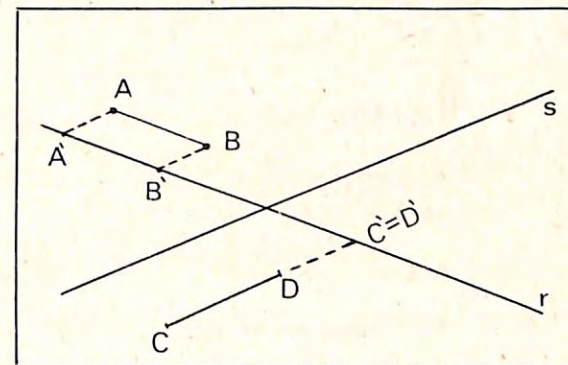
3) a) Em cada quadro trace, quando possível, os paralelogramos que se obtêm ligando respectivamente as origens e as extremidades dos pares de segmentos orientados.

b) Assinale os pares que permitem construir paralelogramo:

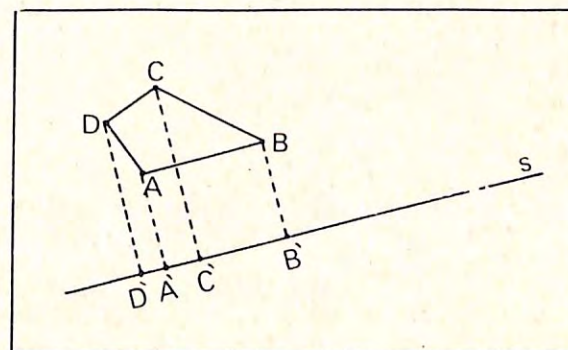
- \overline{AB} e \overline{CD} (X) \overline{NR} e \overline{PQ} (X) \overline{VX} e \overline{YZ} ()
 \overline{EF} e \overline{GH} () \overline{RS} e \overline{TU} () \overline{IJ} e \overline{LM} ()



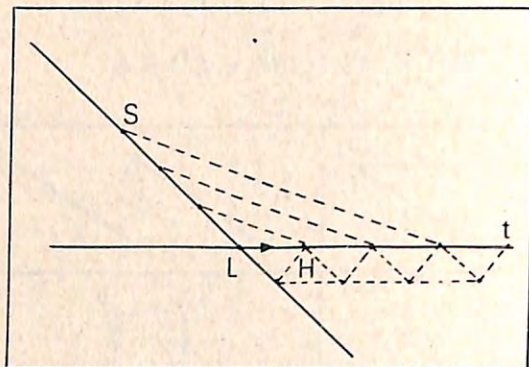
4. Determine as projeções de \overline{AB} e \overline{CD} paralelamente a s sobre r.



5. Projete ortogonalmente sobre s o quadrilátero ABCD.



6. a) Marque sobre t três segmentos consecutivos equípolentes a \overline{LH} .
- b) Divida \overline{LS} em três segmentos equípolentes.



- 7) Dados os pontos A, B, C, D, E de uma mesma reta, tais que:

$$a(A) = -3; a(B) = 1.5; a(C) = 3; a(D) = 2.1; a(E) = -1$$

complete:

- a) $a(A) - a(E) = -3 - (-1) = -2$
 b) $a(E) - a(A) = -1 - (-3) = +2$
 c) $m(\overline{AE}) = 2$
 d) $|a(B) - a(A)| = |1.5 - (-3)| = |4.5|$
 e) $a(C) - a(D) = 3 - 2.1 = 0.9$
 f) $m(\overline{AB}) = 4.5$
 g) $m(\overline{AC}) = 6$
 h) $m(\overline{DC}) = 0.9$

Números reais

- 1) Complete com $>$, $<$ ou $=$:
- | | | |
|--------|---|---------|
| 3.4759 | < | 3.4761 |
| 2.36 | = | 2.3600 |
| 0.34 | > | 0.33473 |
| 0.213 | < | 0.214 |
| 321 | > | 3.210 |

- 2) Assinale com V ou F:

- | | | |
|--|---------------------------------------|---------------------------------------|
| a) $-2 \in \mathbb{Z}$ (V) | $-2 \in \mathbb{N}$ (F) | $-2 \in \mathbb{R}$ (V) |
| $0 \in \mathbb{Z}$ (V) | $0.44... \in \mathbb{Z}$ (F) | $0.44... \in \mathbb{R}$ (V) |
| $\frac{4}{3} \in \mathbb{Z}$ (F) | $\frac{4}{3} \in \mathbb{Q}$ (V) | $\frac{4}{3} \in \mathbb{R}$ (V) |
| b) $\mathbb{Z}_+ \subset \mathbb{R}_+$ (V) | $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}_-$ (F) | $\mathbb{R}^* \subset \mathbb{R}$ (V) |

- 3) Trabalhando em \mathbb{Q} , dê o conjunto-verdade das equações:

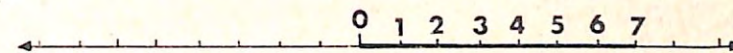
a) $x^2 = 729$ $V = \{+27, -27\}$
 b) $9x^2 = 144$ $V = \{+4, -4\}$

- 4) Trabalhando em \mathbb{R} , dê o conjunto-verdade das equações:

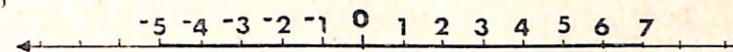
a) $x^2 = 6.76$ $V = \{+2.6; -2.6\}$
 b) $x^2 = 0.81$ $V = \{+0.9; -0.9\}$

- 5) Assinale em azul, nas retas graduadas ao lado, os conjuntos indicados:

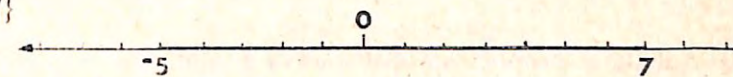
a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid -5 \leq x \leq 7\}$



b) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -5 \leq x \leq 7\}$



c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leq x \leq 7\}$



- 6) Aplicando as propriedades da adição em \mathbb{R} , simplifique as expressões:

a) $(\sqrt{2} + \sqrt{5}) + (-\sqrt{2}) = \sqrt{5}$
 b) $2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + (-2\sqrt{3}) = -3\sqrt{3}$

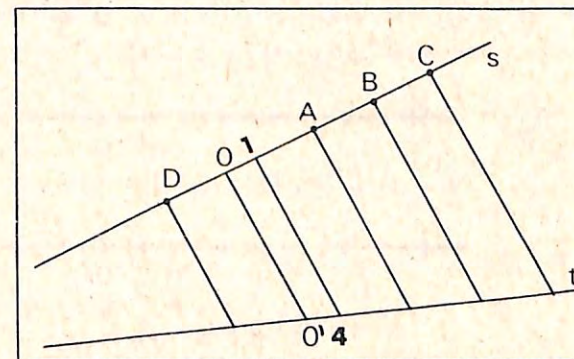
- 7) Complete, a fim de tornar verdadeiras as sentenças:

a) $\sqrt{5} + 3 + (-\sqrt{5}) = 3$
 b) $\sqrt{2} - 3 + (-\sqrt{2} + 3) = 0$
 c) $2\sqrt{2} + (-3\sqrt{3}) + 3\sqrt{3} = 2\sqrt{2}$

- 8) Calcule em \mathbb{R} o conjunto-verdade das equações:

a) $3 + x = \sqrt{3}$ $V = \{\sqrt{3} - 3\}$
 b) $0.31 + y = -0.024$ $V = \{-0.334\}$

- 9) a) Dada a reta graduada s e seus pontos A, B, C e D, projete-os paralelamente a OO' sobre a reta t .



b) Complete o quadro de acordo com o item a.

x	$4x$
0	0
1	4
-2	-8
0.5	2
$\frac{4}{3}$	$\frac{16}{3}$
$-\frac{3}{4}$	-3

10) Aplique a propriedade distributiva e complete:

a) $3(\sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{7}) = 3\sqrt{2} + 3\sqrt{5} - 3\sqrt{7}$

b) $2(\sqrt{2} - \frac{1}{2}) = 2\sqrt{2} - 1$

c) $a(\sqrt{2} - 1) = a\sqrt{2} - a$

11) Coloque o fator comum em evidência, usando a propriedade distributiva. Reduza os termos semelhantes, quando possível.

a) $2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = \sqrt{2}(2 + 3 - 4) = \sqrt{2}$

b) $2x - 4x + 8x = x(2 - 4 + 8) = 6x$

c) $\frac{x}{3} + \frac{2x}{3} - \frac{5x}{3} = \frac{x}{3}(1 + 2 - 5) = -\frac{2x}{3}$

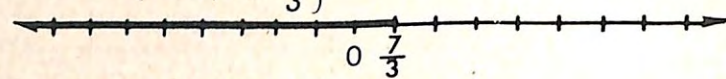
d) $x - \frac{x}{2} + \frac{x}{4} = x(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}) = \frac{3}{4}x$

e) $x\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}(x - 1)$

12) Trabalhando em \mathbb{R} , resolva as inequações e represente os conjuntos-solução nas retas reais.

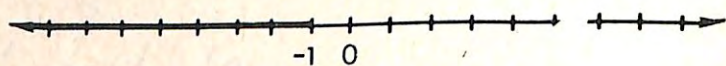
a) $3x \leq 7$

$$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{7}{3}\}$$



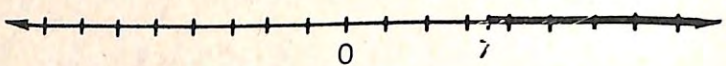
b) $3x - 1 \geq 4x$

$$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1\}$$



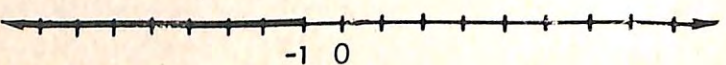
c) $\frac{2x+1}{3} \geq 5$

$$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 7\}$$



d) $\frac{2x+1}{3} - \frac{x-2}{4} \leq 5$

$$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -7\}$$



Cálculo literal

1) Complete os quadros ($x \neq 0$)

a)

Cálculos	Propriedades
$x \cdot 15 \cdot \frac{1}{x} =$	comutativa e associativa
$= \left(x \cdot \frac{1}{x}\right) 15 =$	
$= 1 \cdot 15 =$	
$= 15$	

b)

Cálculos	Propriedades
$\frac{1}{x} \cdot a \cdot x =$	comutativa e associativa
$= \left(\frac{1}{x} \cdot x\right) \cdot a =$	
$= 1 \cdot a =$	
$= a$	

2) Coloque o fator comum em evidência:

a) $5x + 15x - 20x = x(5 + 15 - 20) = 0 \cdot x = 0$ f) $30xy + 180x^2 + 60xyz = 30x(y + 6x + 2yz)$

b) $\frac{2x}{3} + \frac{7y}{3} + \frac{5z}{3} = \frac{1}{3}(2x + 7y + 5z)$ g) $\frac{3}{4}ax + \frac{9}{16}a^2x + \frac{5}{12}ax^2 = \frac{ax}{4}\left(3 + \frac{9}{4}a + \frac{5}{3}x\right)$

c) $\frac{7x}{5} + \frac{x}{15} + \frac{3x}{20} = \frac{1}{5}\left(7x + \frac{x}{3} + \frac{3x}{4}\right)$ h) $\frac{a}{8}\sqrt{7} + \frac{a^2}{16}\sqrt{7} + \frac{a^3}{24}\sqrt{7} = \frac{a\sqrt{7}}{8}\left(1 + \frac{a}{2} + \frac{a^2}{3}\right)$

d) $15a^2bx + 2abx^2 = abx(15a + 2x)$ i) $\frac{3}{8}a^2bc + \frac{1}{4}ab^2c + \frac{1}{8}abc = \frac{1}{4}abc\left(\frac{3a}{2} + b + \frac{1}{2}\right)$

e) $3ab + 4a^2bc + 5ax = a(3b + 4abc + 5x)$ j) $xy + x^2y + xy^2 = xy(1 + x + y)$

3) Efetue:

a) $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$

i) $(x + 3)(x - 3) = x^2 - 9$

b) $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

j) $(x + 2)(x - 2) = x^2 - 4$

c) $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$

l) $\left(\frac{x}{2} - 1\right)\left(\frac{x}{2} + 1\right) = \frac{x^2}{4} - 1$

d) $(x + 3y)^2 = x^2 + 6xy + 9y^2$

m) $\left(\frac{xy}{2} + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{xy}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{x^2y^2}{4} - \frac{1}{9}$

e) $(4x + 2y)^2 = 16x^2 + 16xy + 4y^2$

n) $(x + 1)(x + 2) = x^2 + 3x + 2$

f) $(4xy - 7x)^2 = 16x^2y^2 - 56x^2y + 49x^2$

o) $(x + 1)(x - 2) = x^2 - x - 2$

g) $(3x + 2)^2 = 9x^2 + 12x + 4$

p) $(x + 4)(x + 7) = x^2 + 11x + 28$

h) $(3x - 5y)^2 = 9x^2 - 30xy + 25y^2$

q) $(x - 3)(x - 1) = x^2 - 4x + 3$

1) Fatore as expressões:

a) $a^2 + 6a + 9 = (a + 3)^2$

b) $4x^2 - 9y^2 = (2x + 3y)(2x - 3y)$

c) $m^2 - 14m + 49 = (m - 7)^2$

d) $x^2 - \frac{9}{4} = \left(x - \frac{3}{2}\right) \left(x + \frac{3}{2}\right)$

e) $4y^2 - \frac{x^6}{9} = \left(2y - \frac{x^3}{3}\right) \left(2y + \frac{x^3}{3}\right)$

f) $a^6 - b^6 = (a^3 - b^3)(a^3 + b^3)$

g) $x^2 + 36 - 12x = (x - 6)^2$

h) $25x^2 - 10x + 1 = (5x - 1)^2$

i) $a^2 + 7a + 12 = (a + 4)(a + 3)$

j) $b^2 - 7b + 12 = (b - 4)(b - 3)$

l) $x^2 + x - 12 = (x + 4)(x - 3)$

m) $y^2 - y - 12 = (y - 4)(y + 3)$

n) $m^2 + 8m + 16 = (m + 4)^2$

o) $m^2 - 8m + 16 = (m - 4)^2$

p) $m^2 + 10m + 16 = (m + 8)(m + 2)$

q) $m^2 - 10m + 16 = (m - 8)(m - 2)$

r) $m^2 + 6m - 16 = (m + 8)(m - 2)$

s) $m^2 - 15m - 16 = (m - 16)(m + 1)$

2) Ponha antes em evidência o fator comum e depois fatore, se possível:

a) $36 + 24a + 4a^2 = 4(3 + a)^2$

b) $15ab - 3a + 6a^2 = 3a(5b - 1 + 2a)$

c) $45a^2 - 20 = 5(3a - 2)(3a + 2)$

d) $45a^2 - 20a = 5a(9a - 4)$

e) $2x^2 + 16x + 32 = 2(x + 4)^2$

f) $2x^2 - 32 = 2(x + 4)(x - 4)$

g) $m^2n^4 - m^4n^2 = m^2n^2(n - m)(n + m)$

h) $\frac{m^2}{3} - \frac{n^2}{3} = \frac{1}{3}(m - n)(m + n)$

i) $\frac{2x^2}{3} + \frac{4ax}{3} + \frac{2a^2}{3} = \frac{2}{3}(x + a)^2$

j) $\frac{x^2}{4} - \frac{ax}{2} + \frac{a^2}{4} = \left(\frac{x}{2} - \frac{a}{2}\right)^2$

3) Fatore ao máximo e reduza os termos semelhantes, quando possível:

a) $(x + 1)^2 - (x + 5)^2 = [(x + 1) - (x + 5)][(x + 1) + (x + 5)] = -4(2x + 6)$

b) $a^8 - b^8 = (a^4 - b^4)(a^4 + b^4) = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4)$

c) $(m + 4)^2 - (m - 4)^2 = [(m + 4) + (m - 4)][(m + 4) - (m - 4)] = 16m$

d) $(3 - 4x)^2 - (3 + 4x)^2 = [(3 - 4x) - (3 + 4x)][(3 - 4x) + (3 + 4x)] = -24x$

4) Simplifique, quando possível, as frações nas quais admitimos que os denominadores não sejam nulos:

a) $\frac{x^2 - y^2}{2x - 2y} = \frac{(x + y)(x - y)}{2(x - y)} = \frac{x + y}{2}$

b) $\frac{5x - 5y}{x^2 - 10x + 25} = \frac{5(x - y)}{(x - 5)^2}$

c) $\frac{15x^2}{12x^7} = \frac{5}{4x^5}$

d) $\frac{5x - 5y}{5x^2} = \frac{5(x - y)}{5x^2} = \frac{x - y}{x^2}$

e) $\frac{x^2 + x - 20}{x^2 + 9x + 20} = \frac{(x + 5)(x - 4)}{(x + 5)(x + 4)} = \frac{x - 4}{x + 4}$

5) Efetue os cálculos indicados entre as frações cujos denominadores são, por hipótese, não nulos:

a) $\frac{2b}{25a} \cdot \frac{5a^2}{9b} = \frac{2a}{45}$

b) $\frac{5a}{9x^2} \cdot \frac{12x}{10a^2} = \frac{2}{3ax}$

c) $\frac{x^2 - 4}{x + 2} \cdot \frac{x^2 + 4}{x - 2} = x^2 + 4$

d) $\frac{2x + 10}{2x + 4} \cdot \frac{3x + 6}{3x + 15} = 1$

e) $\frac{4a - 4}{24a} \cdot \frac{6a}{a^2 - 1} = \frac{1}{a + 1}$

f) $\frac{15a}{13b^2} \cdot \frac{20a^2}{39b^3} = \frac{9b}{4a}$

g) $\frac{a^2 - b^2}{2a + 2b} \cdot \frac{a^2 - 2ab + b^2}{6a - 6b} = 3$

h) $\frac{x^2 - x}{2x^2 + 6x} \cdot \frac{5x^2 - 5x}{2x + 6} = \frac{1}{5x}$

Função polinomial em \mathbb{R}

1) Considere o sistema de eixos coordenados ao lado e os conjuntos $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

a) Represente em verde os pontos que representam a relação de A em B :

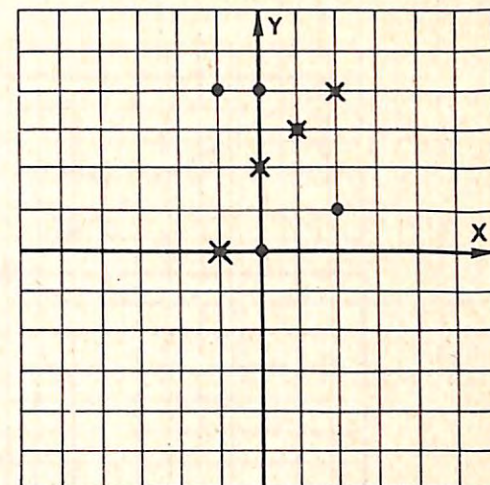
$R = \{(0, 0), (0, 4), (2, 1), (1, 3), (-1, 4)\}$

b) Represente em azul os pontos que representam a relação de A em B :

$S = \{(0, 2), (1, 3), (2, 4), (-1, 0)\}$

c) R é uma função? **não**

d) S é uma função? **sim**



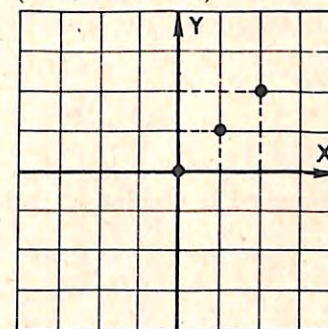
2) Sejam os conjuntos $A = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3\}$ e $B = \{0, 1, -1, 2, -2\}$.

Considere a relação T de A em B representada no sistema de eixos coordenados ao lado.

a) Complete pela enumeração de seus elementos:

$T = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2)\}$

b) T é uma função? **não**



3) Dada a função monomial em \mathbb{R} : $f(x) = -4x^3$

a) Qual o coeficiente do monômio que define f ? **-4**

b) Qual o grau de f ? **3.º**

c) Calcule: $f(0) = 0$

$f(1) = -4$

$f(-1) = +4$

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

$f(3) = -108$

$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{-4}{27}$

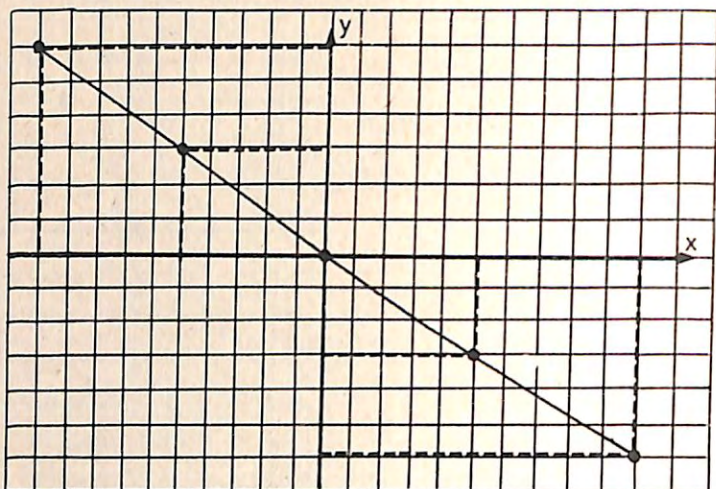
4) Seja a função m em \mathbb{R} definida por: $m(x) = -\frac{3x}{5}$

a) Qual o grau de m ? **1.º**

b) Complete o quadro:

x	0	5	-5	10	-10
$m(x)$	0	-3	3	-6	6

c) Esboce, no sistema de eixos coordenados abaixo, o gráfico cartesiano de m .



5) Dadas as funções em \mathbb{R} definidas pelas sentenças abaixo:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 & m(x) &= -x^2 \\ g(x) &= -3 & p(x) &= +5 \\ h(x) &= +4x \end{aligned}$$

a) Complete o quadro ao lado:

Função	Grau	Coefficiente
f	2.º	2
g	0	-3
h	1.º	4
m	2.º	-1
p	0	5

b) Escreva sob a forma reduzida a sentença que define:

$$s(x) = f(x) + g(x) + h(x) + m(x) + p(x) = x^2 + 4x + 2$$

c) Qual o grau do polinômio que define $s(x)$? 2.º

d) Ordene o polinômio que define $s(x)$ pelos expoentes decrescentes de x .

$$s(x) = x^2 + 4x + 2$$

e) Complete o quadro:

x	-1	2	-0.5	0
$s(x)$	-1	14	0,25	2

6) Dadas as funções em \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x - 4 \\ g(x) &= 2x \\ h(x) &= -4 \\ m(x) &= 4x^2 - 16x + 16 \end{aligned}$$

a) Quais são funções afins? $f(x)$ e $g(x)$

b) Lembrando que dizer que h é definida por

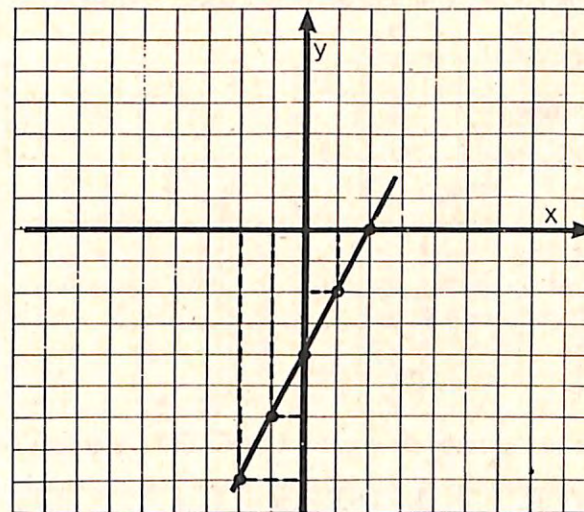
$$h(x) = -4$$

significa dizer que todo x real tem, pela h , a imagem -4 , esboce ao lado o gráfico da função $h(x) = -4$.

c) Complete o quadro para $f(x) = 2x - 4$:

x	0	1	-1	2	-2
$f(x)$	-4	-2	-6	0	-8

d) Esboce abaixo o gráfico de $f(x)$.



Sistemas de equações

1) Sejam as funções f e g em \mathbb{R} definidas pelas sentenças abaixo:

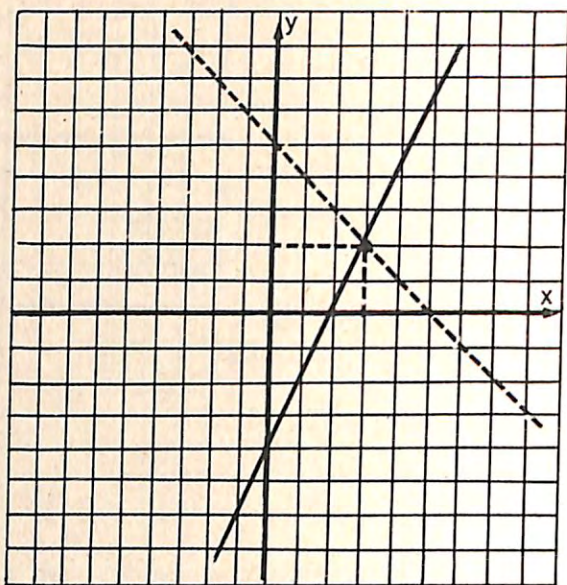
$$f(x) = 2x - 4 \quad g(x) = 5 - x$$

a) Complete os quadros:

x	$f(x)$
0	-4
1	-2
-2	-8

x	$g(x)$
0	5
1	4
-2	7

b) Represente no mesmo sistema de eixos a f (em azul) e a g (em verde).



c) Quais as coordenadas do ponto que pertence a f e a g ? $(3, 2)$

2) Sejam as funções h e m em \mathbb{R} definidas pelas sentenças abaixo:

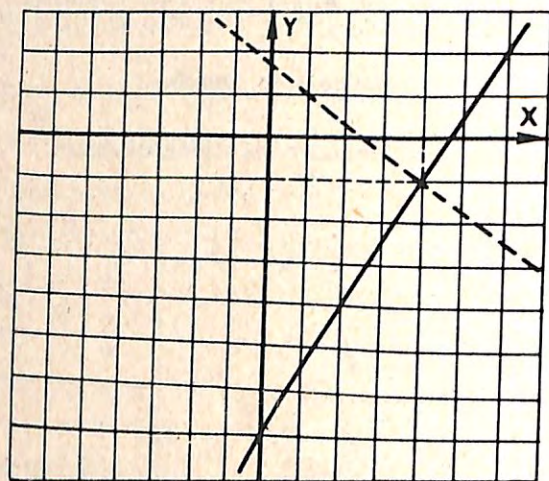
$$h(x) = \frac{3x}{2} - 7 \quad m(x) = \frac{5-2x}{3}$$

a) Complete os quadros:

x	$h(x)$
0	-7
2	-4
-2	-10

x	$m(x)$
1	1
-0,5	2
-2	3

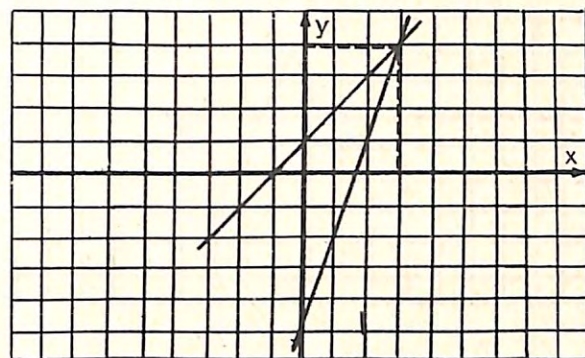
b) Represente no mesmo sistema de eixos a h (em azul) e a m (em verde).



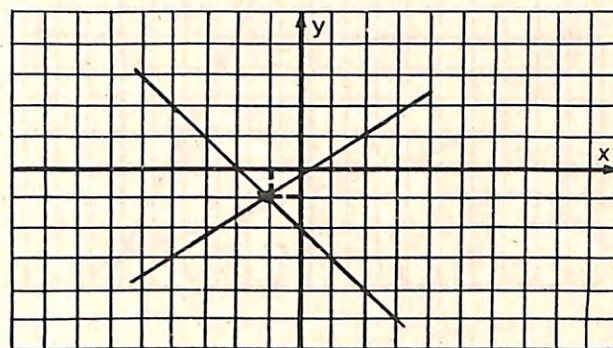
c) Quais as coordenadas do ponto que pertence a h e a m ? $(4, -1)$

3) a) Resolva os seguintes sistemas em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e represente num sistema de eixos coordenados os gráficos das duas funções em cada sistema:

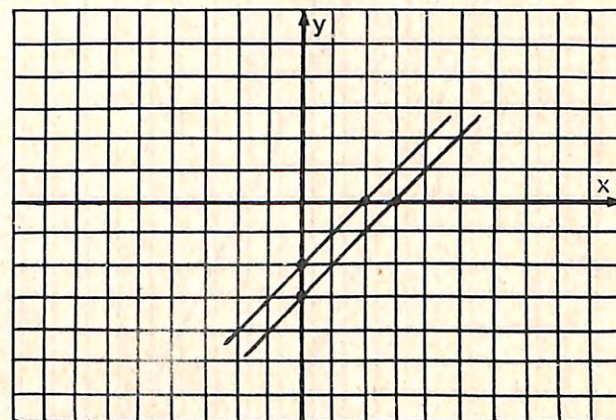
Sistema a $\begin{cases} y = 3x - 5 \\ y = x + 1 \end{cases} \quad V = \{(3, 4)\}$



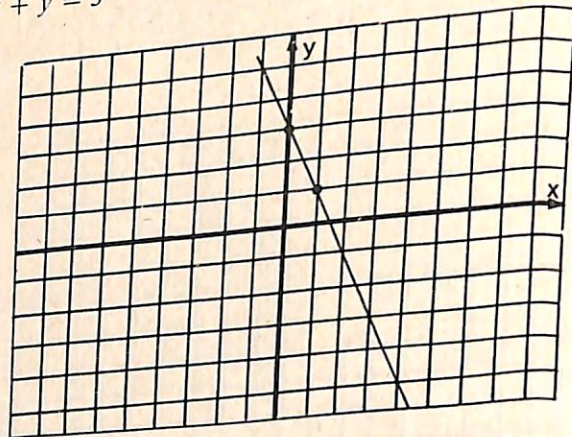
Sistema b $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x + y = -2 \end{cases} \quad V = \{(-1, -1)\}$



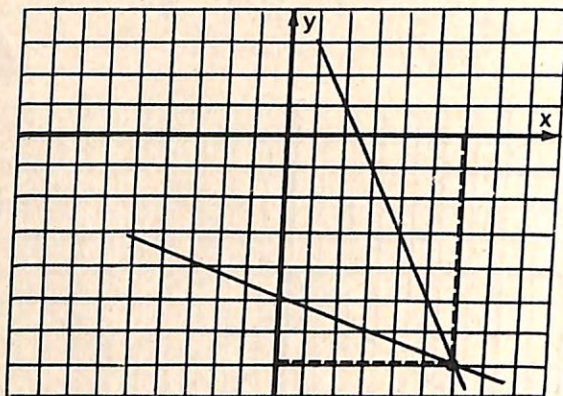
Sistema c $\begin{cases} x - y = 2 \\ x - y = 3 \end{cases} \quad V = \emptyset$



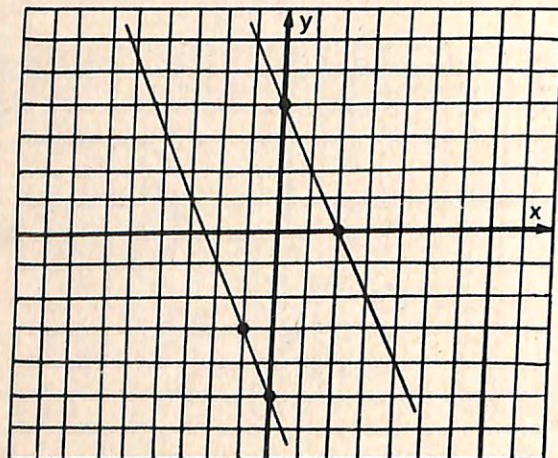
Sistema $d \begin{cases} 4x + 2y = 6 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \quad V = \{x \in \mathbb{R} \mid y = 3 - 2x\}$



Sistema $e \begin{cases} x - 3y = 15 \\ 2x + y = 5 \end{cases} \quad V = \{(6, -7)\}$



Sistema $f \begin{cases} 2x + y + 5 = 0 \\ 4x = 8 - 2y \end{cases} \quad V = \emptyset$

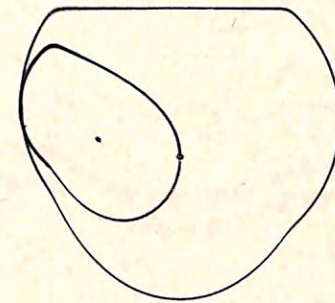


b) Assinale com um X, no quadro, qual o tipo da solução de cada sistema.

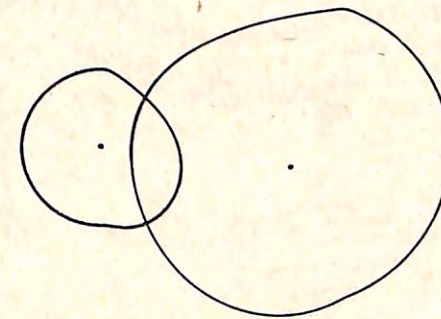
Sistema	Uma solução	Nenhuma solução	Infinitas soluções
a	x		
b	x		
c		x	
d			x
e	x		
f		x	

Circunferência e Simetria

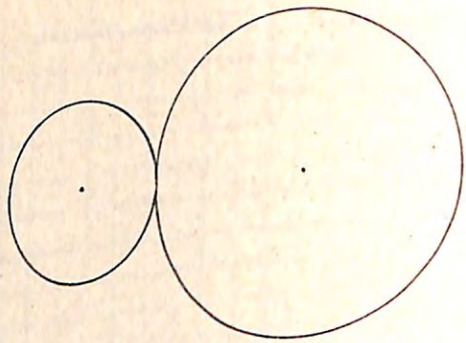
- 1) Desenhe duas circunferências de raios 1 cm e 2 cm tais que:
 a) as circunferências sejam tangentes internas.



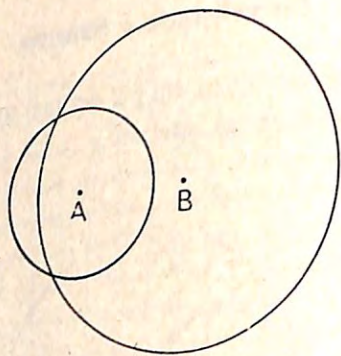
- b) as circunferências sejam secantes.



c) as circunferências sejam tangentes externas.



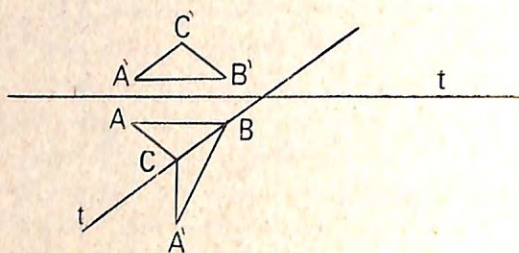
- 2) a) Trace duas circunferências de centros A e B de modo que a intersecção seja 2 pontos e tal que A esteja no interior da circunferência de centro B .
 b) Dizemos que estas duas circunferências são *secantes*.



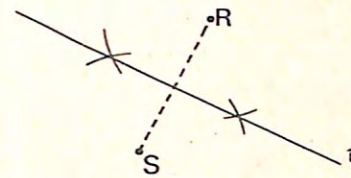
- 3) Sabendo que (A, r_1) e (B, r_2) são os centros e as medidas dos raios de duas circunferências secantes em P_1 e P_2 , complete com o símbolo de uma relação, a fim de tornar verdadeiras as sentenças.

$$\begin{aligned} AB &< r_1 + r_2 \\ AP_1 &= AP_2 \\ \overline{P_1P_2} &\perp \overline{AB} \\ \overline{P_1P_2} \cap \overline{AB} &\neq \emptyset \end{aligned}$$

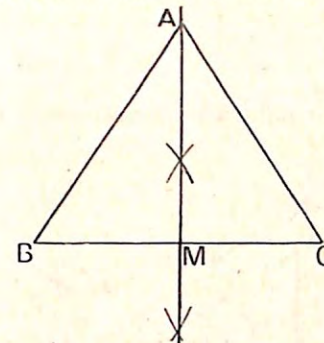
- 4) Desenhe um triângulo ABC . Trace uma reta t paralela a um de seus lados e o simétrico deste triângulo em relação à reta t .
 Existem muitas soluções. O desenho apresenta duas:
 $t \parallel \overline{AB}$ e $t \parallel \overline{BC}$



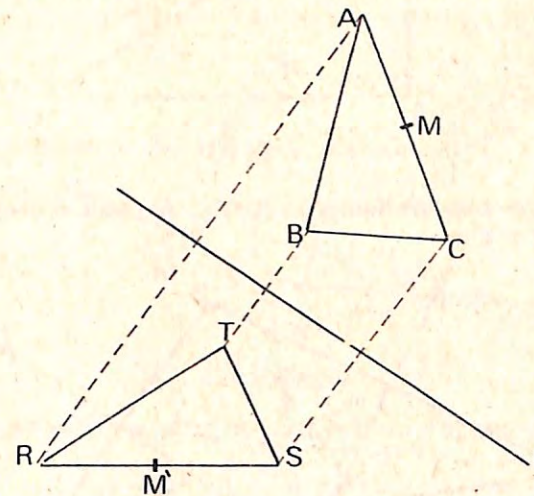
- 5) Trace uma reta t em relação à qual os pontos R e S sejam simétricos.



- 6) Sabendo que $\triangle APB$ é isósceles, determine o ponto médio M de \overline{BC} utilizando apenas um compasso.



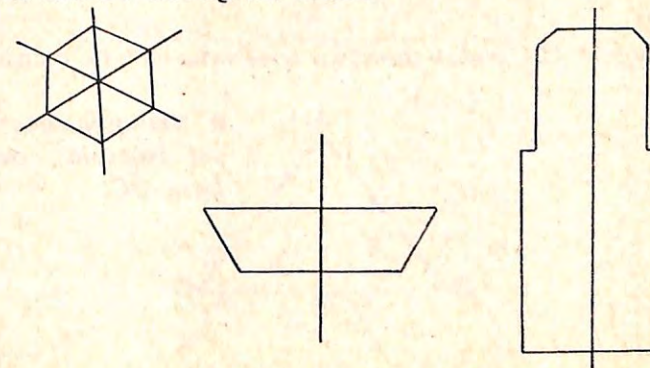
- 7) a) Desenhe o $\triangle RTS$ simétrico do $\triangle ABC$ em relação à reta r .



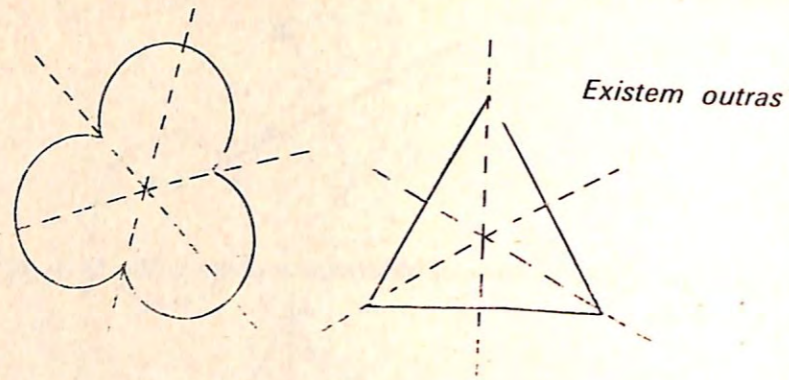
- b) Sabendo que $AM = MC$ e que M' é o simétrico de M , o que você pode concluir?

$$M' \in \overline{RS} \quad RM' = M'S$$

- 8) Trace os eixos de simetria das figuras abaixo.

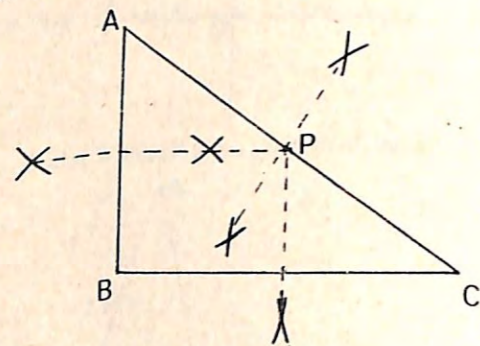


9) Desenhe uma figura com 3 eixos de simetria.

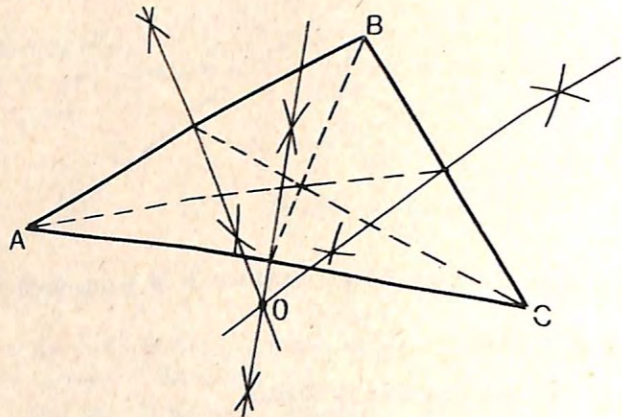


10) Não considerando as estrelas e a faixa branca, quantos eixos de simetria tem a bandeira brasileira? *dois*

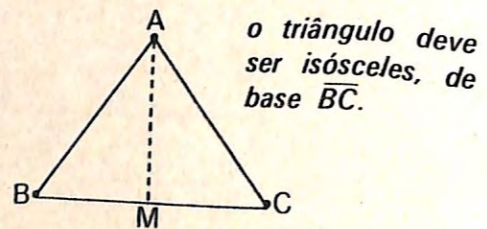
11) Trace as mediatrizes do $\triangle ABC$.



12) Desenhe as mediatrizes e as medianas do $\triangle ABC$. Assinale o centro O da circunferência que passa por A , B e C .

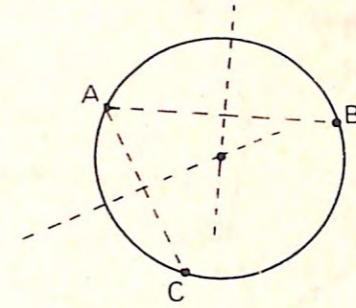


13) Desenhe um triângulo ABC onde a mediatriz relativa ao lado \overline{BC} coincide com a mediana.



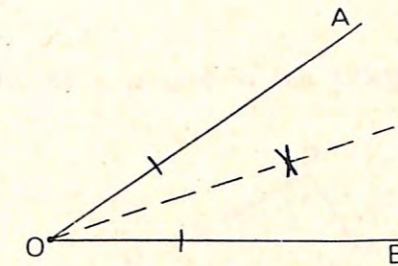
o triângulo deve ser isósceles, de base \overline{BC} .

14) Trace uma circunferência que passe por A , B , C .

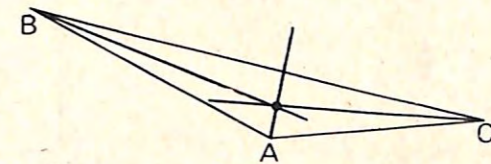


15) a) Desenhe um ângulo e o seu eixo de simetria.

b) Dê outro nome ao eixo de simetria do ângulo. *Bissetriz*



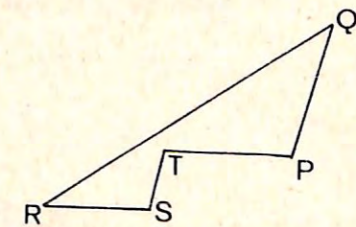
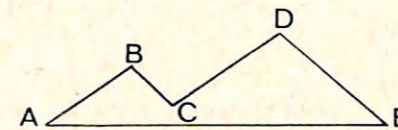
16) Desenhe as três bissetrizes de um triângulo obtusângulo.



Congruência

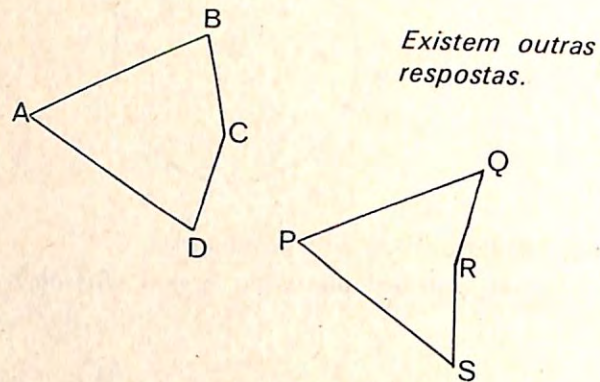
1) Estabeleça uma correspondência entre os vértices dos polígonos ao lado a fim de verificar a congruência.

- | | |
|-------------------|-------------------|
| $A \rightarrow R$ | $D \rightarrow P$ |
| $B \rightarrow S$ | $E \rightarrow Q$ |
| $C \rightarrow T$ | |



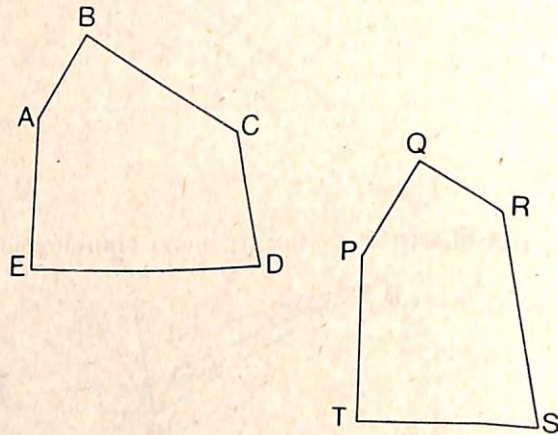
2) Desenhe um quadrilátero PQRS não congruente ao quadrilátero ABCD tal que

$$\begin{aligned} \overline{PQ} &\cong \overline{AB} & \overline{RS} &\cong \overline{CD} \\ \overline{QR} &\cong \overline{BC} & \overline{SP} &\cong \overline{DA} \end{aligned}$$



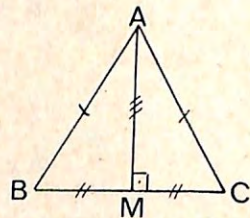
3) Desenhe um pentágono PQRST não congruente a ABCDE tal que

$$\begin{aligned} \hat{A} &\cong \hat{P} & \hat{D} &\cong \hat{S} \\ \hat{B} &\cong \hat{Q} & \hat{E} &\cong \hat{T} \\ \hat{C} &\cong \hat{R} & & \end{aligned}$$

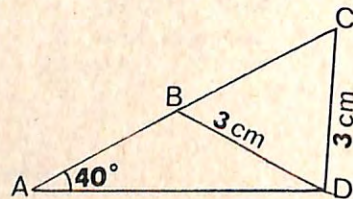


4) Entre os triângulos abaixo, alguns são congruentes. Indique-os e estabeleça a correspondência que determina a congruência, completando com o caso a que correspondem.

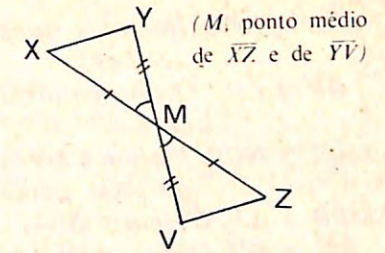
I. $\triangle AMB \cong \triangle AMC$ (LLL)



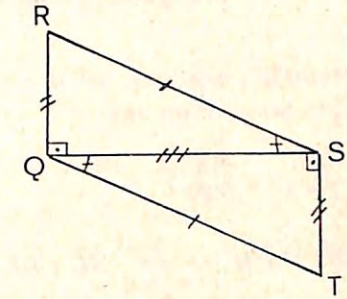
II. $\triangle ADB \cong \triangle ADC$



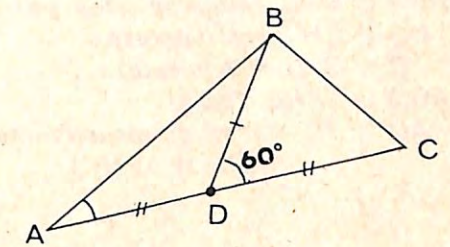
III. $\triangle XYM \cong \triangle ZVM$ (LAL)



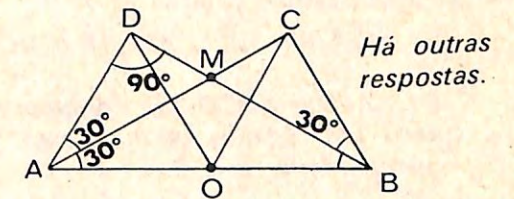
IV. $\triangle QRS \cong \triangle STQ$ (LAL)



V. $\triangle ADB \cong \triangle BDC$

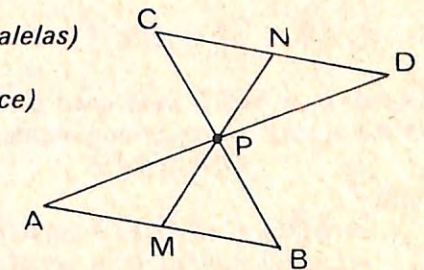


VI. $\triangle ABC \cong \triangle BAD$ (ALA)
 $\triangle AMD \cong \triangle BMC$ (ALA)
 $\triangle AOD \cong \triangle BOC$ (LLL)



5) Na figura abaixo, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$. P é ponto médio de \overline{AD} . \overline{MN} é o segmento que passa por P e intercepta \overline{AB} em M e \overline{CD} em N.
 a) Prove que $\triangle APB \cong \triangle DPC$.

$$\begin{aligned} \triangle APB &\cong \triangle DPC \\ \hat{A} &\cong \hat{D} \text{ (alternos internos de retas paralelas)} \\ \overline{AP} &\cong \overline{DP} \text{ (ponto médio por hipótese)} \\ \hat{APB} &\cong \hat{CPD} \text{ (ângulos opostos pelo vértice)} \end{aligned}$$



b) Demonstre que P é ponto médio de \overline{MN} .

$$\widehat{MPB} \cong \widehat{NPC} \text{ (ângulos opostos pelo vértice)}$$

$$\overline{BP} \cong \overline{CP} \text{ (lados correspondentes dos } \triangle APB \cong \triangle DPC \text{)}$$

$$\widehat{MBP} \cong \widehat{NCP} \text{ (ângulos alternos internos de retas paralelas)}$$

$$\triangle MPB \cong \triangle NPC \text{ (caso ALA)}$$

$$\overline{MP} \cong \overline{NP} \text{ (lados correspondentes em triângulos congruentes)}$$

6) Em um triângulo isósceles, um dos ângulos mede o dobro do outro. Quais as medidas dos ângulos deste triângulo?

$$\begin{array}{ccc} 45^\circ & 45^\circ & 90^\circ \text{ ou} \\ 36^\circ & 72^\circ & 72^\circ \end{array}$$

7) Dados: $\overline{DG} \cong \overline{CH}$, $\widehat{D} \cong \widehat{C}$, $\overline{AG} \perp \overline{DK}$, $\overline{BH} \perp \overline{CK}$. Demonstre que $\overline{AD} \cong \overline{BC}$.

$$\widehat{DGA} \cong \widehat{BHC} \text{ (ângulos retos por hipótese)}$$

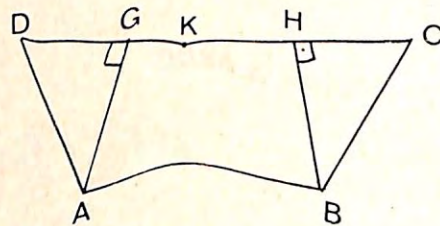
$$\overline{DG} \cong \overline{CH} \text{ (por hipótese)}$$

$$\widehat{D} \cong \widehat{C} \text{ (por hipótese)}$$

$$\triangle AGD \cong \triangle BHC \text{ (ALA)}$$

$$\overline{AD} \cong \overline{BC} \text{ (lados correspondentes)}$$

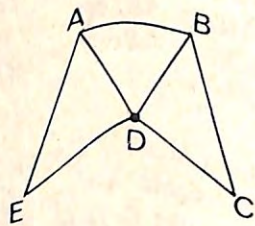
$$\triangle AGD \cong \triangle BHC$$



8) Na figura abaixo temos:

a) Se $\overline{AE} \cong \overline{BC}$, $\overline{AD} \cong \overline{BD}$, $\overline{DE} \cong \overline{DC}$, demonstre que $\widehat{E} \cong \widehat{C}$.

Os $\triangle AED$ e $\triangle BCD$ são congruentes pelo caso LLL (dados da hipótese). Conseqüentemente $\widehat{E} \cong \widehat{C}$.



b) Se $\overline{AE} \cong \overline{BC}$, $\overline{AD} \cong \overline{BD}$, $\widehat{E} \cong \widehat{C}$, demonstre que $\widehat{BDE} \cong \widehat{ADC}$.

Os $\triangle AED \cong \triangle BCD$ pelo caso LAL (dados da hipótese). Conseqüentemente

$$\widehat{EDA} \cong \widehat{CDB}$$

Como

$$m(\widehat{BDE}) = m(\widehat{ADE}) + m(\widehat{ADB})$$

$$m(\widehat{ADC}) = m(\widehat{BDC}) + m(\widehat{ADB})$$

e $m(\widehat{ADE}) = m(\widehat{BDC})$ (ângulos correspondentes em triângulos congruentes)

$$m(\widehat{BDE}) = m(\widehat{ADC}) \text{ (soma de parcelas iguais)}$$

c) Se $\widehat{E} \cong \widehat{C}$, $\overline{ED} \cong \overline{CD}$ e $\widehat{BDE} \cong \widehat{ADC}$, será que $\overline{AE} \cong \overline{BC}$? *sim* Justifique.

$$\widehat{E} \cong \widehat{C} \text{ (por hipótese)}$$

$$\overline{ED} \cong \overline{CD} \text{ (por hipótese)}$$

$$m(\widehat{BDE}) = m(\widehat{BDA}) + m(\widehat{ADE}) \text{ então } m(\widehat{ADE}) = m(\widehat{BDE}) - m(\widehat{BDA})$$

$$m(\widehat{ADC}) = m(\widehat{ADB}) + m(\widehat{BDC}) \text{ então } m(\widehat{BDC}) = m(\widehat{ADC}) - m(\widehat{ADB})$$

$$m(\widehat{ADE}) = m(\widehat{BDC}) \text{ (diferença de quantidades iguais)}$$

$$\triangle AED \cong \triangle BCD \text{ (caso ALA)}$$

$$\overline{AE} \cong \overline{BC} \text{ (lados correspondentes em triângulos congruentes.)}$$

GRUEMA
(Grupo de Ensino de Matemática Atualizada)

ANNA AVERBUCH
FRANCA COHEN GOTTLIEB
LUCÍLIA BECHARA SANCHEZ
MANHÚCIA PERELBERG LIBERMAN
(licenciadas em Matemática)

Supervisão de
L. H. JACY MONTEIRO
(da Universidade de São Paulo)

CURSO MODERNO DE
MATEMÁTICA

para o ensino de primeiro grau

Da mesma coleção:

*Curso moderno de Matemática
para a escola elementar*

- Vol. 1 — 1.^a série
- Vol. 2 — 2.^a série
- Vol. 3 — 3.^a série
- Vol. 4 — 4.^a série
- Vol. 5 — 5.^a série
- Vol. 6 — 6.^a série
- Vol. 7 — 7.^a série
- Vol. 8 — 8.^a série

Capa e ilustrações de
M. Teresa Ayoub Jorge
e
Regina B. Tracanella

3.^a Edição

Direitos reservados
COMPANHIA EDITORA NACIONAL
Rua dos Gusmões, 639
01212 — SÃO PAULO, SP

1977
Impresso no Brasil

ÍNDICE

Relações	1
Composição de Relações	
Grupos	11
Implicação e Equivalência	18
Axiomas e Teoremas	
Paralelismo e Direção	30
Comparação de Racionais sob a Forma Decimal	53
Números Reais	58
Grupo $(\mathbb{R}, +)$	
Grupo (\mathbb{R}^*, \times)	
Cálculo Literal	86
Produtos Notáveis	
Fatoração	
Função Polinomial em \mathbb{R}	106
Sistemas de Equações	125
Circunferência	138
Simetria	143
Congruência	168
Congruência de polígonos	
Congruência de triângulos	

RELAÇÕES

RELAÇÃO INVERSA

Grupo I - Exercícios Preliminares

1) Considere os conjuntos

$$A = \{\text{escola, livro, caderno, papel}\}$$

$$B = \{\text{papéis, livros, lápis, cadernos}\}$$

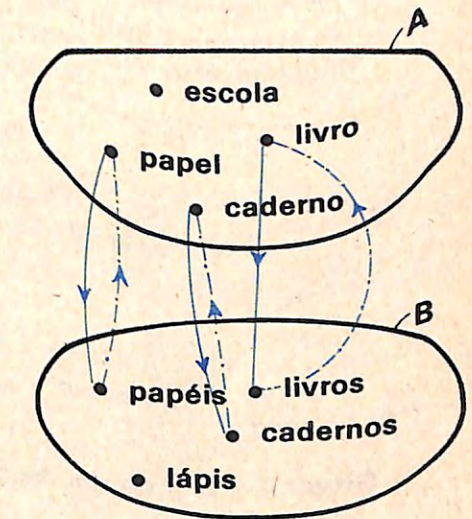
a) No diagrama, trace em vermelho as flechas que representam a relação P de A em B definida por:
"a cada palavra associe seu plural"

b) No diagrama, trace em preto as flechas que representam a relação de B em A definida por:
"a cada palavra associe seu singular"
e indicada por P^{-1}

c) Complete:

$$P = \{(\text{livro, livros}), (\text{papel, papéis}), (\text{caderno, cadernos})\}$$

$$P^{-1} = \{(\text{cadernos, caderno}), (\text{papéis, papel}), (\text{livros, livro})\}$$

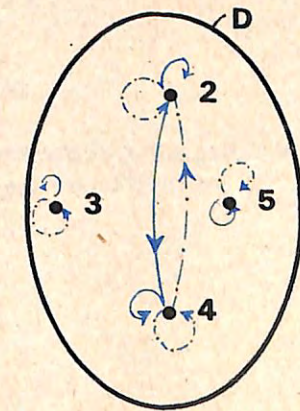


2) Considere o conjunto

$$D = \{2, 3, 4, 5\}$$

a) No diagrama, trace em azul as flechas que representam a relação S sobre D definida por:
"x é múltiplo de y"

b) No diagrama, trace em laranja as flechas que representam a relação S^{-1} sobre D definida por:
"x é divisor de y"



c) Complete pela enumeração:

$$S = \{(2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (4,2)\}$$

$$S^{-1} = \{(2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (2,4)\}$$

Você observou que:

No exercício 1, para cada flecha vermelha de P existe uma preta de P^{-1} em sentido inverso. No exercício 2, para cada flecha azul de S existe uma flecha laranja de S^{-1} em sentido inverso.

DE UM MODO GERAL

Seja uma relação R representada por flechas. A relação que se obtém invertendo o sentido das flechas é a inversa da relação R .

Anote:

Indicamos a relação inversa da relação R por R^{-1} .

Grupo II – Exercícios de Aplicação

1) Seja P um conjunto de pessoas e R a relação sobre P definida por: "x é pai de y".

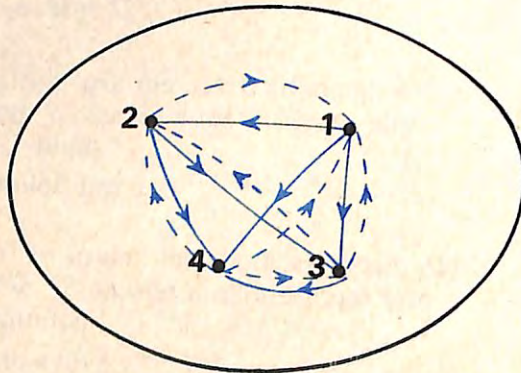
Complete:

A R^{-1} é definida por: "x é filho ou filha de y"

2) Qual é a inversa da relação definida por: "x é o quintuplo de y"? "x é a quinta parte de y"

3) Qual é a inversa da relação definida por: "x é o cubo de y"? "x é a raiz cúbica de y"

4) a) No diagrama, represente por flechas vermelhas a relação M sobre A definida por: "x < y"



b) No mesmo diagrama, represente por flechas verdes a relação M^{-1} sobre A .
c) Qual a sentença que define M^{-1} ?

$$x > y$$

5) Coloque V ou F:

- a) Se $(a, b) \in R$ então $(b, a) \in R^{-1}$ (V)
b) Se $(a, a) \in R$ então $(a, a) \in R^{-1}$ (F)

6) Complete:

- a) Se $S \subset A \times B$ então $S^{-1} \subset B \times A$
b) Se $P \subset A \times A$ então $P^{-1} \subset A \times A$

COMPOSIÇÃO DE RELAÇÕES

Grupo III – Exercícios Preliminares

1) Sejam os conjuntos de pessoas:

$$A = \{a, b, c, d\}$$

$$B = \{e, f, g, h\}$$

$$C = \{i, j, k, m\}$$

e as relações:

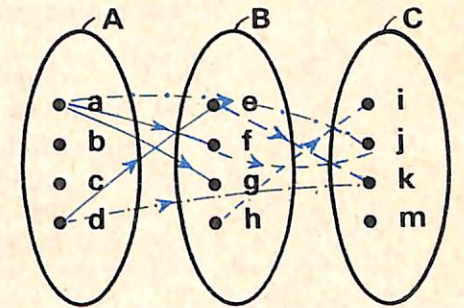
I de A em B definida por:

"x é irmão de y"

P de B em C definida por:

"x é pai de y"

de acordo com o diagrama ao lado.



a) Trace em preto, no diagrama, as flechas que representam a relação T de A em C :

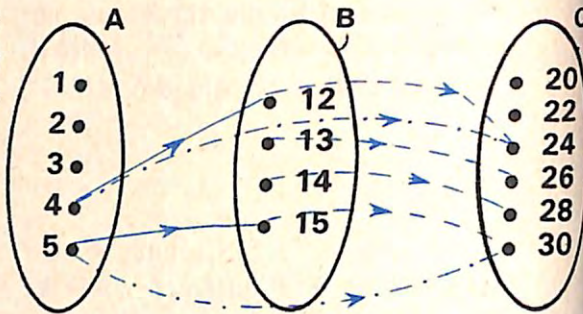
$$T = \{(a, j), (d, k), (c, i)\}$$

b) Qual a sentença que define a relação T ?

"x é tio de y"

O aluno deve ser informado das flechas contínuas e tracejadas que determinam as relações I e P, sem o que é impossível resolver o exercício

2) Sejam os conjuntos:
 $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \leq 5\}$
 $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 11 < x \leq 15\}$
 $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é par e } 20 \leq x \leq 30\}$
 e as relações:
 T de A em B definida por:
 $x \mapsto 3x$
 D de B em C definida por:
 $x \mapsto 2x$



a) Complete:

$$T = \{(4, 12), (5, 15)\}$$

$$D = \{(12, 24), (13, 26), (14, 28), (15, 30)\}$$

b) Trace, no diagrama, as flechas que representam T e D .

c) Trace, no diagrama, as flechas que representam a relação S de A em C definida por:
 $x \mapsto 6x$

Você observou que:

No exercício 1, f é imagem de a pela I
 j é imagem de f pela P
 logo, j é imagem de a pela T
 O mesmo se observa de d para k e de c para i .
 No exercício 2, 12 é imagem de 4 pela T
 24 é imagem de 12 pela D
 logo, 24 é imagem de 4 pela S
 O mesmo se observa de 5 para 30.

Anote:

Dizemos que:
 No exercício 1, T é a relação composta de P com I e escrevemos:
 $T = P \circ I$
 No exercício 2, S é a relação composta de D com T e escrevemos:
 $S = D \circ T$

DE UM MODO GERAL

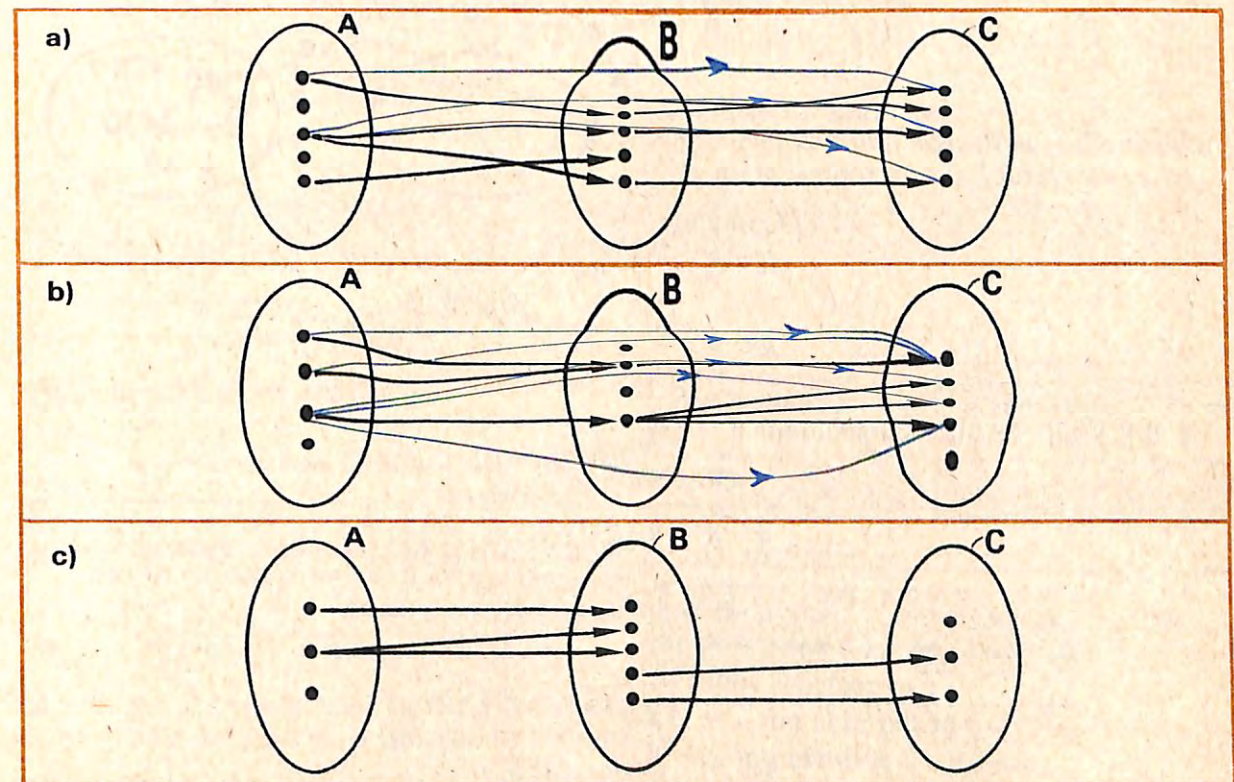
Dados os conjuntos A , B e C e as relações R de A em B e S de B em C , construímos uma relação T associando um elemento a de A com um elemento c de C quando existe b , tal que $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in S$.
 A relação T é denominada relação composta de S e R e indicamos:
 $T = S \circ R$

Atenção:

- 1) Os conjuntos A , B e C não são necessariamente diferentes nem disjuntos.
- 2) Na anotação $T = S \circ R$, aplica-se em primeiro lugar a relação da direita e depois a da esquerda.

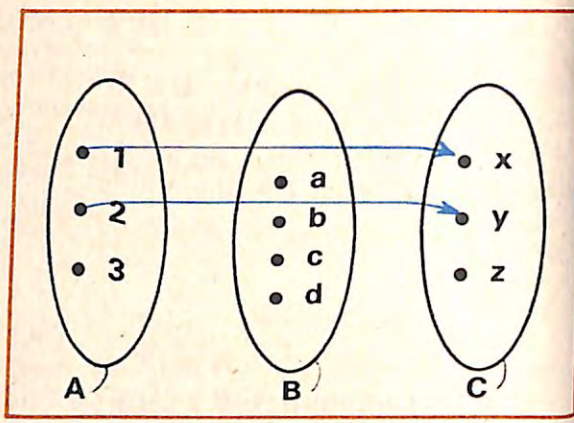
Grupo IV - Exercícios de Aplicação

- 1) Considere os conjuntos dos diagramas a), b) e c) e as relações neles representadas. Trace as flechas que representam as relações compostas.



O professor mostra aos alunos que nem sempre é possível encontrar a composta de duas funções. Para os alunos concluir que a composta não existe quando o conjunto de chegada da primeira coincide com o conjunto de partida da segunda.

2) Dados:
 $A = \{1, 2, 3\}$
 $B = \{a, b, c, d\}$
 $C = \{x, y, z\}$
 $M = \{(1, a), (2, b), (2, c), (3, c)\}$
 $N = \{(a, x), (b, y), (d, z)\}$



a) Trace em vermelho, no diagrama, as flechas que representam $M \circ N$.
 b) Trace em verde, no diagrama, as flechas que representam $N \circ M$.

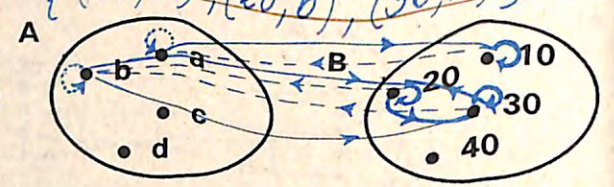
impossível

c) Complete:
 $M \circ N = \{(1, x), (2, y)\}$
 $N \circ M =$

impossível
 $\{(1, x), (2, y)\}$

3) Dados:
 $A = \{a, b, c, d\}$
 $B = \{10, 20, 30, 40\}$
 $R = \{(a, 10), (b, 20), (c, 30)\}$

a) Complete:
 $R^{-1} = \{(10, a), (20, b), (30, c)\}$



b) Trace no diagrama, em vermelho, as flechas que representam R e, em verde, as que representam R^{-1} .

c) Complete:
 $R \circ R^{-1} = \{(10, 10), (20, 20), (30, 30), (20, 30), (30, 20)\}$
 $R^{-1} \circ R = \{(a, a), (b, b)\}$

d) Trace no diagrama acima, em azul, as flechas que representam $R \circ R^{-1}$ e, em preto, as que representam $R^{-1} \circ R$.

Observe que:

$R \circ R^{-1} \neq R^{-1} \circ R$

4) Seja
 $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é par e } n \leq 18\}$
 e as relações sobre A :
 M definida por $x \mapsto 3x$
 N definida por $x \mapsto \frac{x}{2}$

O professor orientará o aluno para que, no quadro I, faça primeiro as flechas vermelhas e depois as verdes; no quadro II, primeiro as flechas azuis e depois as laranjas.

a) Trace em vermelho, nos diagramas dos quadros I e II, as flechas que representam a relação M .

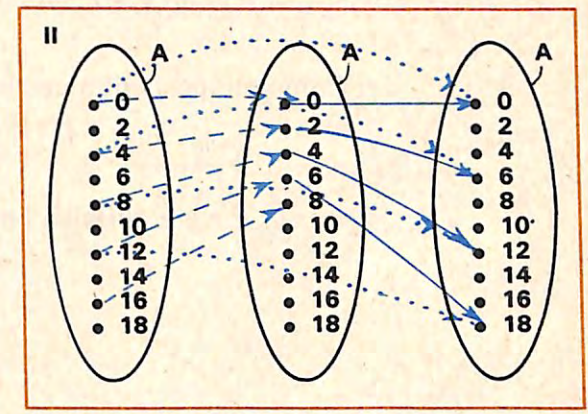
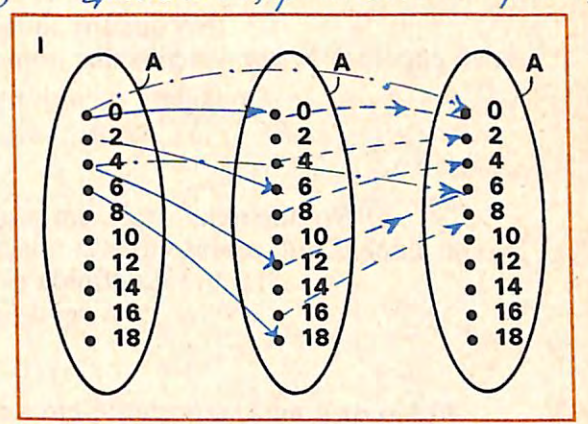
b) Trace em verde, nos diagramas dos quadros I e II, as flechas que representam a relação N .

c) Trace no quadro I, em azul, as flechas que representam $N \circ M$. (preste atenção: uma flecha vermelha seguida de uma verde)

d) Trace no quadro II, em laranja, as flechas que representam $M \circ N$. (preste atenção: uma flecha verde seguida de uma vermelha)

e) Complete:

$N \circ M = \{(0, 0), (4, 6)\}$
 $M \circ N = \{(0, 0), (4, 6), (8, 12), (12, 18)\}$



DE UM MODO GERAL

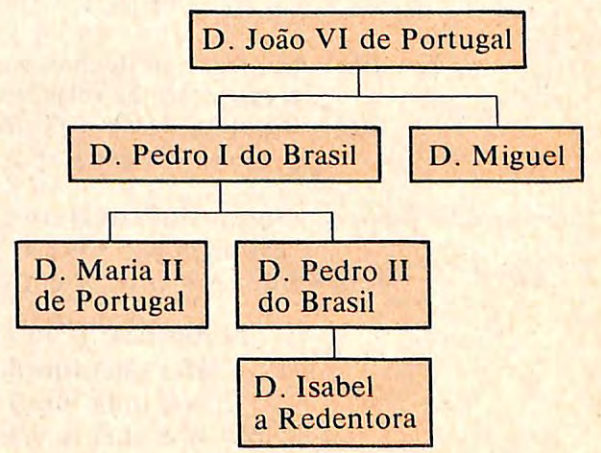
Dadas duas relações R e S sobre um mesmo conjunto A , quase sempre $R \circ S \neq S \circ R$.

5) Você sabe o que é um árvore genealógica?

É um diagrama que indica as relações de parentesco.

As pessoas cujos nomes estão embaixo são filhas das pessoas cujos nomes estão imediatamente acima.

Observe a árvore genealógica de uma parte da dinastia de Orléans e Bragança.

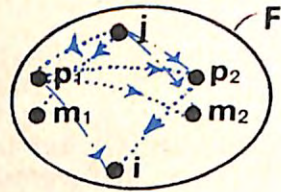


No quadro ao lado
você encontra as abreviações dos nomes.
Considere o conjunto:

$$F = \{j, p_1, p_2, m_1, m_2, i\}$$

Nome	Símbolo
D. João VI	j
D. Pedro I	p ₁
D. Miguel	m ₁
D. Maria II	m ₂
D. Pedro II	p ₂
D. Isabel	i

a) No diagrama, trace em preto as flechas que representam a relação P sobre F definida por: "x é pai de y"



b) No diagrama, represente em azul a relação $P \circ P$ sobre F

c) Complete pela enumeração:
 $P \circ P =$

$\{(j, p_2), (j, m_2), (p_2, i)\}$

d) $P \circ P$ é definida por:

"x é avô de y"

6) Você lembra que uma relação R de A em B é uma função quando: cada elemento de A tem uma e uma só imagem em B pela R .

Dados:

$$A = \{4, 2, 6\}$$

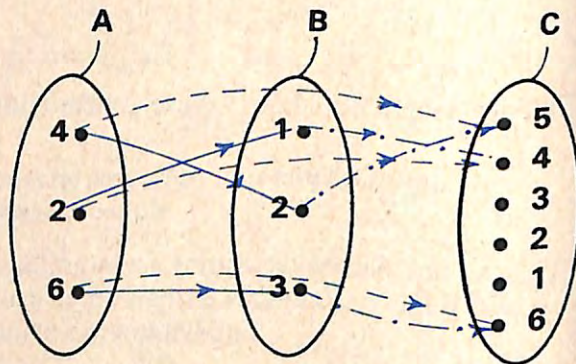
$$B = \{1, 2, 3\}$$

$$C = \{5, 4, 3, 2, 1, 6\}$$

a) No diagrama, trace as flechas que representam as relações: (em vermelho) M de A em B , definida por $x \mapsto \frac{x}{2}$

(em azul) N de B em C ,

definida por $x \mapsto x + 3$
(em verde) $N \circ M$ de A em C



b) Assinale V ou F:

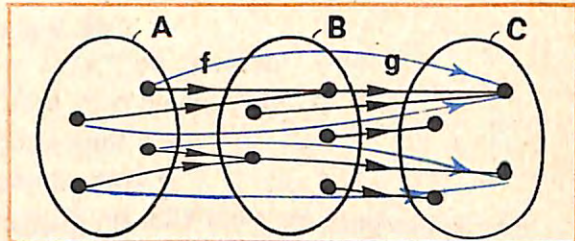
M é uma função (V)

N é uma função (V)

$N \circ M$ é uma função (V)

7) Considere as relações representadas através das flechas.

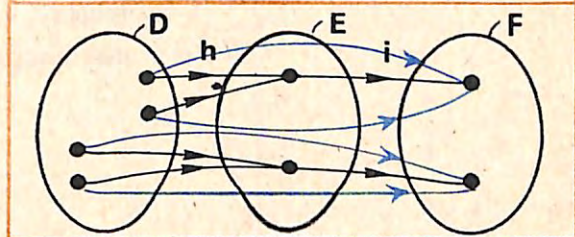
a) Construa, por meio de flechas coloridas, as relações compostas.



b) A relação f de A em B é função? *Sim*

A relação g de B em C é função? *Sim*

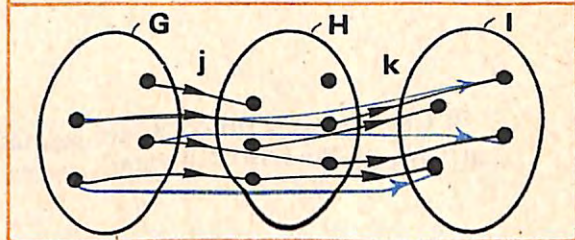
A composta $g \circ f$ é função? *Sim*



c) A relação h de D em E é função? *Sim*

A relação i de E em F é função? *Sim*

A composta $i \circ h$ é função? *Sim*



d) A relação j de G em H é função? *Sim*

A relação k de H em I é função? *não*

A composta $k \circ j$ é função? *não*

e) Tente construir uma composta de duas funções que não seja função.

DE UM MODO GERAL

A composta de duas funções é uma função.

8) Você lembra que uma função f de A em B é uma bijeção quando: cada elemento de B é imagem de um e um só elemento de A pela f .

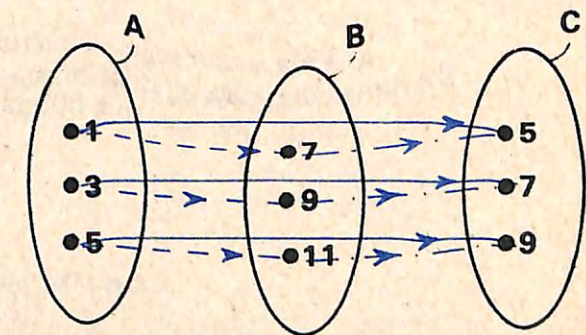
Dados:

$$A = \{1, 3, 5\}$$

$$B = \{7, 11, 9\}$$

$$C = \{9, 5, 7\}$$

Represente no diagrama, por meio de flechas de cores diferentes, as funções: R de A em B definida por " $x \mapsto x + 6$ "



S de B em C
definida por " $x \mapsto x - 2$ "

a) Assinale com V ou F :

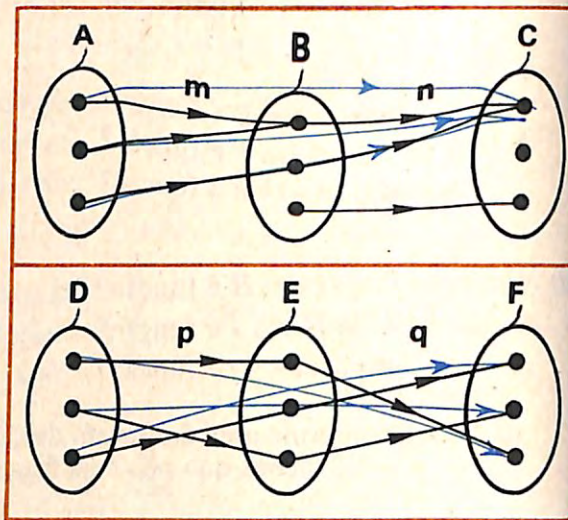
R é uma bijeção (V)

S é uma bijeção (V)

b) Represente em vermelho no diagrama a composta $S \circ R$.

c) $S \circ R$ é uma bijeção?

Sim



9) Considere as funções representadas através de flechas no diagrama ao lado.

a) Construa as compostas por flechas coloridas.

b) A função m de A em B é bijeção?

não

A função n de B em C é bijeção?

não

A composta $n \circ m$ é bijeção?

não

c) A função p de D em E é bijeção?

Sim

A função q de E em F é bijeção?

Sim

A composta $q \circ p$ é bijeção?

Sim

d) Veja se consegue construir uma composta de duas bijeções que não seja bijeção.

DE UM MODO GERAL

A composta de duas bijeções é uma bijeção.

GRUPOS

Grupo I – Exercício Preliminar

Considere o conjunto
 $A = \{e, a, b, c\}$

*	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

a) Complete:

$e * b =$ b

$b * e =$ b

$e * a =$ a

$a * e =$ a

$e * c =$ c

$c * e =$ c

$e * e =$ e

b) A operação $*$ tem o elemento neutro?

Sim

c) Qual?

e

d) Observando a Tábua você sabe responder se $*$ é comutativa?

Sim

e) Sabendo que $*$ é associativa, complete:

$(b * a) * c =$ e

$b * (a * c) =$ e

$a * (a * c) =$ c

$(a * a) * c =$ c

$e * (b * c) =$ a

$(e * b) * c =$ a

f) Complete:

$e * e =$ e então o simétrico de e é e

$a * a =$ e então o simétrico de a é a

$b * b =$ e então o simétrico de b é c

$c * c =$ e então o simétrico de c é b

Você observou que:

A operação $*$ definida em A é: comutativa e associativa.
Ela tem elemento neutro e todo elemento tem simétrico.

DE UM MODO GERAL

Dado um conjunto X e uma operação $*$ em X , dizemos que $(X, *)$ é um grupo.
 Se $*$ é associativa e $*$ tem elemento neutro, todo elemento de X tem simétrico.
 Se, ainda, $*$ é comutativa, dizemos que: $(X, *)$ é um grupo comutativo.

Grupo II - Exercícios de Aplicação

1) Seja o conjunto $G = \{g, r, u, e, m, a\}$ e a operação associativa \oplus , definida pela Tábua.

\oplus	g	r	u	e	m	a
g	g	r	u	e	m	a
r	u	e	m	a	g	r
u	e	m	a	g	r	u
e	m	a	g	r	u	e
m	a	g	r	u	e	m
a	g	r	u	e	m	a

a) Complete:

- $a \oplus m = m$
- $a \oplus e = e$
- $m \oplus a = m$
- $e \oplus a = e$

b) Observe a Tábua e responda:

- A operação \oplus tem elemento neutro? Sim, é o elemento a
- Em relação a \oplus qual o simétrico de g ? m
- de r ? e
- de u ? u
- de e ? r
- de m ? g
- de a ? a

c) (G, \oplus) é um grupo? Sim

2) No mesmo conjunto G , considere a operação associativa \otimes , definida pela Tábua.

Observe a tábua e responda:

a) A operação \otimes tem elemento neutro?

Sim

b) Qual?

e

\otimes	g	r	u	e	m	a
g	g	g	g	g	g	g
r	g	r	u	e	m	a
u	g	u	m	g	u	m
e	g	e	g	e	g	e
m	g	m	u	g	m	u
a	g	a	m	e	u	r

c) Em relação a \otimes , qual o simétrico de r ?

de a ? a

de g ? não tem

de u ? não tem

d) (G, \otimes) é um grupo?

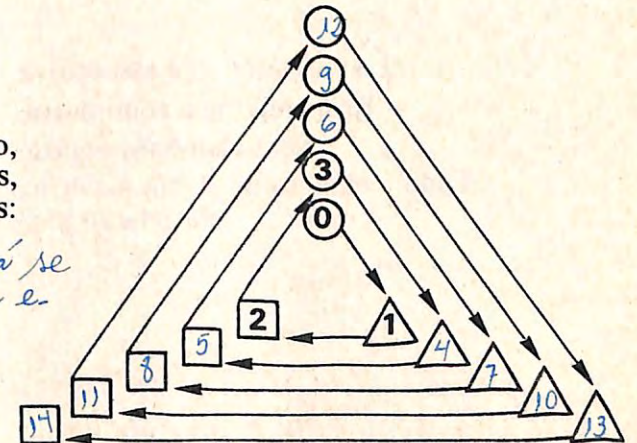
não

3) Lembre as propriedades dos conjuntos numéricos que você conhece e responda:

- a) $(\mathbb{N}, +)$ é grupo? não
- b) (\mathbb{N}, \times) é grupo? não
- c) $(\mathbb{Z}, +)$ é grupo? sim
- d) (\mathbb{Z}, \times) é grupo? não
- e) $(\mathbb{Q}, +)$ é grupo? sim
- f) (\mathbb{Q}, \times) é grupo? não
- g) (\mathbb{Q}^*, \times) é grupo? sim

4) a) Na figura ao lado, complete com os números naturais, seguindo as setas:

O professor julgou se a turma é capaz de fazer os exercícios 4, 5 e 6

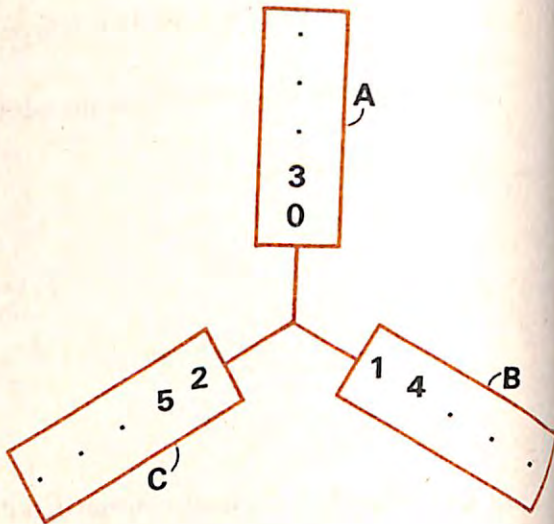


b) Agora não há setas, mas você pode imaginar que o esquema continua o mesmo. Na figura ao lado você vê a partição de \mathbb{N} que foi construída:

$$P = \{A, B, C\}$$

Complete com A, B ou C

- | | |
|-------------------|---------------------|
| $9 \in$ <u>A</u> | $300 \in$ <u>A</u> |
| $16 \in$ <u>B</u> | $1500 \in$ <u>A</u> |
| $18 \in$ <u>A</u> | $3845 \in$ <u>C</u> |
| $26 \in$ <u>C</u> | $4003 \in$ <u>B</u> |



zero
um
dois

d) Seja a operação \oplus em P definida da seguinte maneira: para calcular, por exemplo, $A \oplus B$ considere um elemento de A (por exemplo 15) e um elemento de B (por exemplo 22).

\oplus	A	B	C
A	A	B	C
B	B	C	A
C	C	A	B

Efetue $15 + 22 = 37$
Verifique que $37 \in B$;
então $A \oplus B = B$

Deste modo, complete a tábua.

e) A operação \oplus é associativa.

Responda: \oplus é comutativa?

Tem elemento neutro?

Todo elemento de P tem simétrico em relação a \oplus ?

f) (P, \oplus) é um grupo?

Sim
Sim (é o elemento A)
Sim

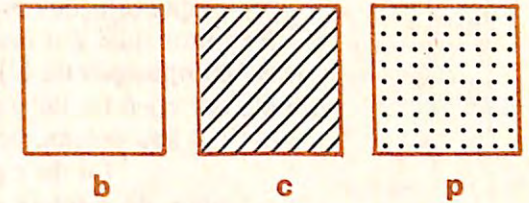
Sim

5) Considere 3 cubos coloridos numa caixa, esquematizados como na figura ao lado.

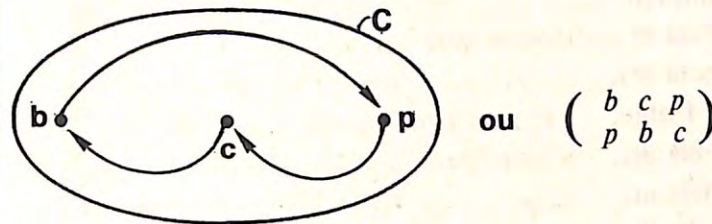


Damos nomes aos cubos. Modifiquemos agora a posição dos cubos na caixa, movendo-os.

Façamos passar o cubo b para o lugar do cubo p , o cubo c para o lugar do cubo b , e o cubo p para o lugar do cubo c .



Este movimento se indica:

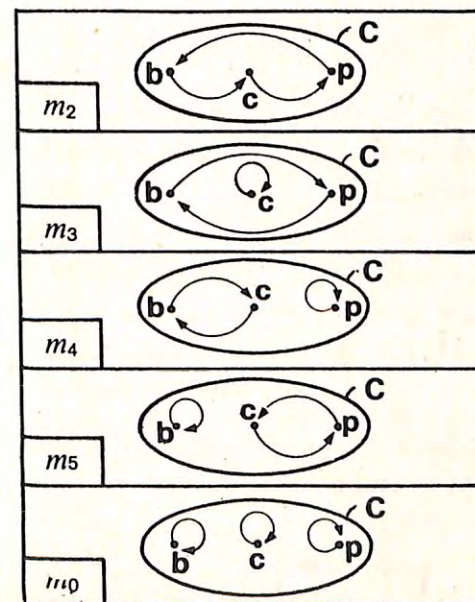


Chamemos esta modificação de m_1 .

No conjunto $C = \{b, c, p\}$, m_1 é a bijeção representada pelo diagrama acima.

a) Complete: $m_1 = \begin{pmatrix} b & c & p \\ p & b & c \end{pmatrix}$

b) Observe os diagramas abaixo e complete:



$$m_2 = \begin{pmatrix} b & c & p \\ c & p & b \end{pmatrix}$$

$$m_3 = \begin{pmatrix} b & c & p \\ p & c & b \end{pmatrix}$$

$$m_4 = \begin{pmatrix} b & c & p \\ c & b & p \end{pmatrix}$$

$$m_5 = \begin{pmatrix} b & c & p \\ b & p & c \end{pmatrix}$$

$$m_0 = \begin{pmatrix} b & c & p \\ b & c & p \end{pmatrix}$$

6) Considere o conjunto das bijeções do exercício 5.

$B = \{m_0, m_1, m_2, m_3, m_4, m_5\}$
Se você fez a m_4 e o seu colega efetuou a seguir a m_1 vocês efetuaram a composição das bijeções m_1 e m_4 .

Vejamos qual é o resultado dessa composição de bijeções:

Pela m_4 você foi de b para c , e seu colega, pela m_1 , foi de c para b .

Então, de b foi-se para b .

a) Complete:

Pela m_4 , c passa para b
e, pela m_1 , b passa para p
Então, c passou para p
Pela m_4 , p passa para p
e, pela m_1 , p passa para c
Então, p passou para c

$$m_1 \circ m_4 = \begin{pmatrix} b & c & p \\ b & p & c \end{pmatrix} = m_5$$

b) Efetue: $m_2 \circ m_0$

Complete: b passa para b , e b passa para c ; então, b passou para c .
 c passa para c , e c passa para p ; então, c passou para p .
 p passa para p , e p passa para b ; então, p passou para b .

$$m_2 \circ m_0 = \begin{pmatrix} b & c & p \\ c & p & b \end{pmatrix} = m_2$$

c) Complete a tabela da operação \circ em B . (Observe que na coluna à esquerda está a bijeção que é aplicada em 2.º lugar.)

\circ	m_0	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5
m_0	m_0	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5
m_1	m_1	m_2	m_0	m_4	m_5	m_3
m_2	m_2	m_0	m_1	m_5	m_3	m_4
m_3	m_3	m_5	m_4	m_0	m_2	m_1
m_4	m_4	m_3	m_5	m_1	m_0	m_2
m_5	m_5	m_4	m_3	m_2	m_1	m_0

d) Observe a tabela que você completou e responda:

\circ é comutativa em B ? não
A operação \circ tem elemento neutro? m_0
Qual? m_0

e) Complete: pela \circ , o simétrico de m_0 é m_0
de m_1 é m_2
de m_2 é m_1
de m_3 é m_3
de m_4 é m_4
de m_5 é m_5

f) Você sabe que a operação \circ em B é associativa. Então responda:
 (B, \circ) é um grupo? Sim
 (B, \circ) é um grupo comutativo? não

IMPLICAÇÃO E EQUIVALÊNCIA

Grupo I – Exercício Preliminar

Considere o conjunto:
 $A = \{1, 3, 5, 7\}$
 e as sentenças abertas:
 $p: x < 4$
 $q: x < 6$

$x \in A$	Sentença p	V ou F
	Sentença q	
1	$1 < 4$	V
	$1 < 6$	V
3	$3 < 4$	V
	$3 < 6$	V
5	$5 < 4$	F
	$5 < 6$	V
7	$7 < 4$	F
	$7 < 6$	F

a) Substitua nas sentenças abertas a letra x pelos elementos de A , e escreva V ou F ao lado das sentenças obtidas.

b) Quais os elementos de A que tornam p e q verdadeiras? 1 e 3

c) Qual o elemento de A que torna p falsa e q verdadeira? 5

d) Qual o elemento de A que torna p e q falsas? 7

e) Há em A elementos que tornam p verdadeira e q falsa? não

f) Se o conjunto considerado fosse \mathbb{N} , você conseguiria encontrar números naturais que substituídos em p e q tornassem p verdadeira e q falsa? não

Você observou que:

$Não$ existe, em A , elemento que torne p verdadeira e q falsa. Em \mathbb{N} você também não conseguiu achar elementos nestas condições.

Dizemos que:

Linguagem corrente
 $x < 4$ implica $x < 6$

Linguagem Matemática
 $x < 4 \Rightarrow x < 6$

DE UM MODO GERAL

Se p e q são duas sentenças abertas com a mesma variável e se a variável pode tomar valores dentro de um conjunto X , dizer que p implica q ou $p \Rightarrow q$ significa que: todos os elementos de X que tornam p verdadeira tornam também q verdadeira, isto é, o conjunto-verdade de p está contido no conjunto-verdade de q .

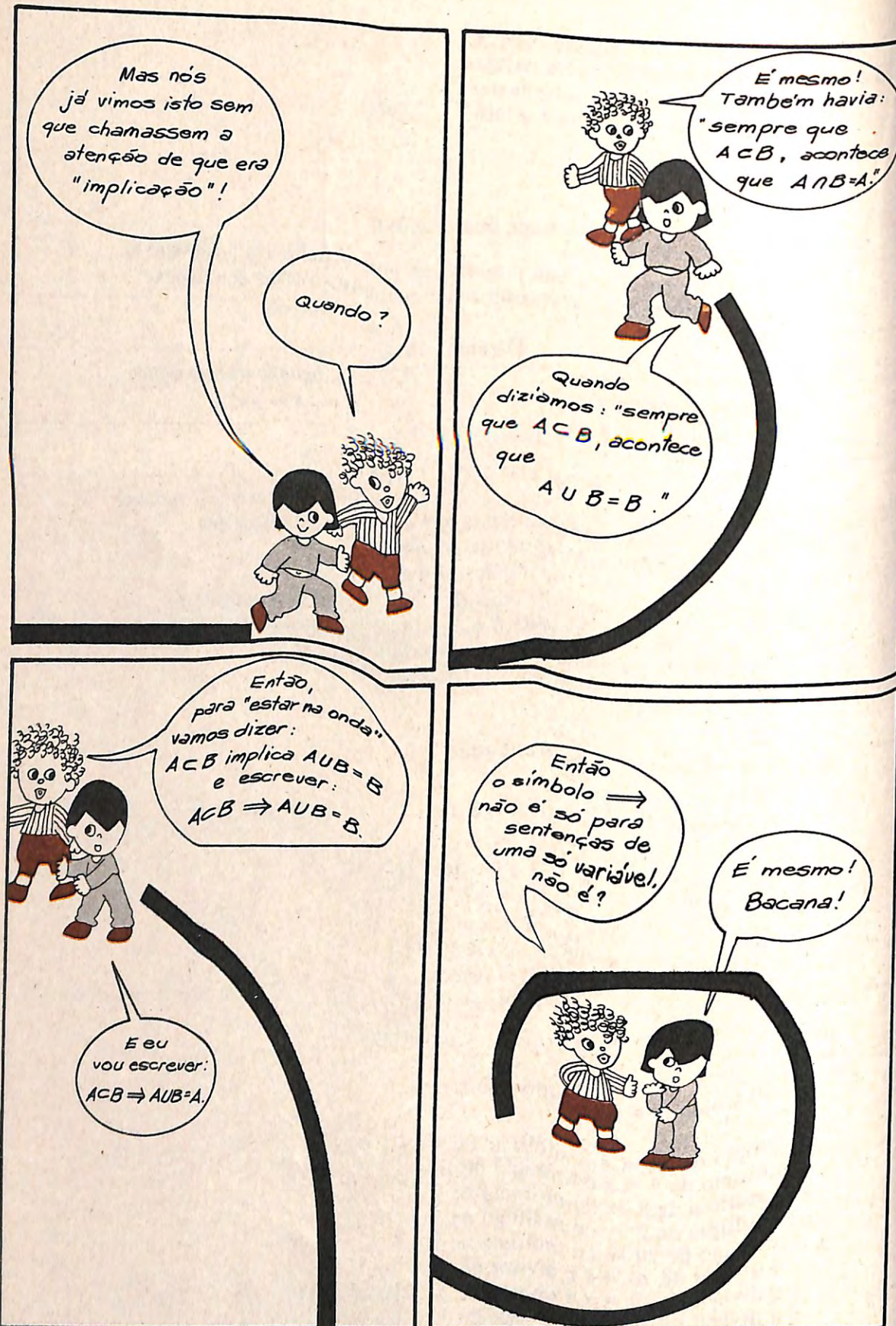
Grupo II – Exercícios de Aplicação

1) Coloque V ou F (universo \mathbb{Z}):

- $x = 7 \Rightarrow x + 3 = 10$ (V)
- $x < 5 \Rightarrow x - 1 < 4$ (V)
- $x + 2 = 3 \Rightarrow x = 5$ (F)
- $x < 5 \Rightarrow x < 10$ (V)
- $x < 10 \Rightarrow x < 5$ (F)
- $x + 3 = 10 \Rightarrow x = 7$ (V)

2) Coloque V ou F (universo \mathbb{N}):

- x é múltiplo de 10 $\Rightarrow x$ é múltiplo de 5 (V)
- x é múltiplo de 5 $\Rightarrow x$ é múltiplo de 10 (F)
- x é múltiplo de 5 $\Rightarrow x$ é múltiplo de 2 (F)
- x é múltiplo de 2 $\Rightarrow x$ é múltiplo de 5 (F)
- x é múltiplo de 20 $\Rightarrow x$ é múltiplo de 5 (V)
- x é divisor de 20 $\Rightarrow x$ é divisor de 10 (F)
- x é divisor de 10 $\Rightarrow x$ é divisor de 20 (V)
- x é divisor de 20 $\Rightarrow x$ é divisor de 40 (V)



3) Sendo a, b, c, d elementos de \mathbb{Q} , assinale com V ou F :

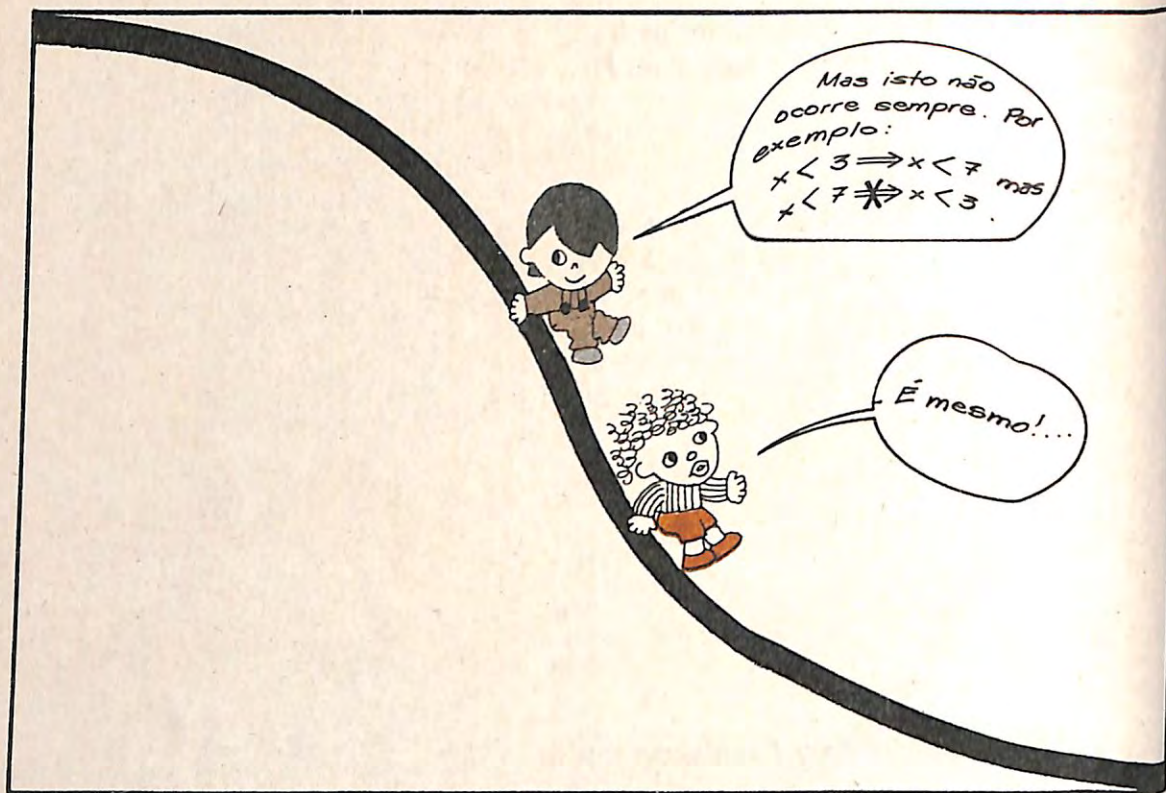
$$\begin{aligned}
 a = b &\Rightarrow a + c = b + c && (V) \\
 a < b &\Rightarrow a + c = b + c && (F) \\
 a < b &\Rightarrow ac < bc && (F) \\
 a + b = c &\Rightarrow a = b - c && (F) \\
 a + b = c &\Rightarrow a = c - b && (V) \\
 \frac{a}{b} = \frac{c}{d} &\Rightarrow ad = bc && (V)
 \end{aligned}$$

4) Assinale V ou F (universo \mathbb{Z}):

$$\begin{aligned}
 x \text{ é divisor de } 15 &\Rightarrow x \text{ é divisor de } 5 && (F) \\
 x \text{ é divisor de } 5 &\Rightarrow x \text{ é divisor de } 15 && (V) \\
 x \text{ é múltiplo de } 9 &\Rightarrow x \text{ é múltiplo de } 3 && (V) \\
 x \text{ é múltiplo de } 3 &\Rightarrow x \text{ é múltiplo de } 9 && (F) \\
 x = 7 &\Rightarrow x + 3 = 10 && (V) \\
 x + 3 = 10 &\Rightarrow x = 7 && (V) \\
 \frac{x}{3} = -4 &\Rightarrow x = -12 && (V) \\
 x = -12 &\Rightarrow \frac{x}{3} = -4 && (V)
 \end{aligned}$$

Você observou que:

$x = 7 \Rightarrow x + 3 = 10$	e	$x + 3 = 10 \Rightarrow x = 7$
$\frac{x}{3} = -4 \Rightarrow x = -12$	e	$x = -12 \Rightarrow \frac{x}{3} = -4$



Dizemos que:

Linguagem corrente
 $x = 7$ é equivalente a $x + 3 = 10$
 $\frac{x}{3} = -4$ é equivalente a $x = -12$

Linguagem Matemática
 $x = 7 \Leftrightarrow x - 3 = +10$
 $\frac{x}{3} = -4 \Leftrightarrow x = -12$

DE UM MODO GERAL

Se a sentença p implica a sentença q e a sentença q implica p , então p é equivalente a q .

Se $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow p$ então $p \Leftrightarrow q$

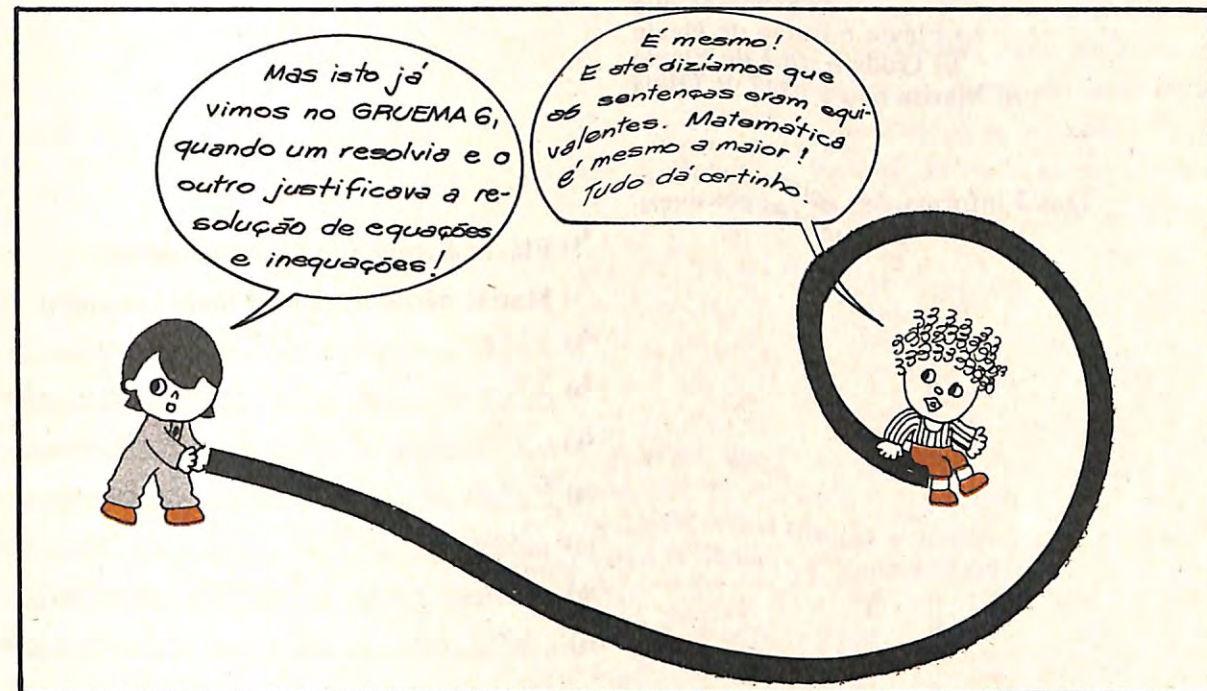
5) Assinale com V ou F (universo \mathbb{Z}):

- $x = 3 \Leftrightarrow 3 = x$ (V)
- $x = 3 \Leftrightarrow -x = -3$ (V)
- $x < 5 \Leftrightarrow 5 < x$ (F)
- $x < 5 \Leftrightarrow 5 > x$ (V)
- $x < 5 \Leftrightarrow -x < -5$ (F)
- $x < 5 \Leftrightarrow -5 < -x$ (V)

6) Assinale com V ou F (universo \mathbb{Q}):

a) $\frac{x}{2} + 3 = 7 \Leftrightarrow x + 6 = 14$ (V)
 $x + 6 = 14 \Leftrightarrow x = 8$ (V)

b) $2x + 3 = 5x - 1 \Leftrightarrow 2x - 5x = -1 - 3$ (V)
 $2x - 5x = -1 - 3 \Leftrightarrow -3x = -4$ (V)
 $-3x = -4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$ (V)



7) Resolva, em \mathbb{Q} , as equações e as inequações por meio de sentenças equivalentes:

- a) $3x + 1 = 5x + 2 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ $V = \{-\frac{1}{2}\}$
- b) $5x + 10 = 5(x + 2) \Leftrightarrow 0x = 0$ $V = \mathbb{Q}$
- c) $\frac{3x - 5}{2} - \frac{x - 1}{5} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{33}{13}$ $V = \{\frac{33}{13}\}$
- d) $2x - 1 < 5x + 3 \Leftrightarrow x > -\frac{4}{3}$ $V = \{x \in \mathbb{Q} | x > -\frac{4}{3}\}$
- e) $\frac{3x + 1}{4} - \frac{2x + 5}{6} < 3 \Leftrightarrow x < \frac{43}{5}$ $V = \{x \in \mathbb{Q} | x < \frac{43}{5}\}$
- f) $4(x - 2) + 5 > 2(3x - 1) \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}$ $V = \{x \in \mathbb{Q} | x < -\frac{1}{2}\}$
- g) $3x + 4 \leq 5(x + 1) - 1 \Leftrightarrow x \geq 0$ $V = \{x \in \mathbb{Q} | x \geq 0\}$

AXIOMAS E TEOREMAS

Grupo III – Exercícios Preliminares

1) Considere 4 crianças:
Marisa, Gilda, Flávio, Décio.

a) Sabemos que:

- i_1) Flávio é irmão de Décio.
- i_2) Gilda é irmã de Flávio.
- i_3) Marisa não é irmã de Gilda.

Das 3 informações acima deduza as
9 sentenças possíveis:

- i_4) Flávio é irmão de Gilda (modelo)
- i_5) Marisa não é irmã de Flávio (modelo)
- i_6) Décio é irmão de Flávio
- i_7) Flávio não é irmão de Marisa
- i_8) Gilda não é irmã de Marisa
- i_9) Gilda é irmã de Décio
- i_{10}) Décio é irmão de Gilda
- i_{11}) Marisa não é irmã de Décio
- i_{12}) Décio não é irmão de Marisa

Você observou que:

As 3 informações i_1, i_2, i_3 são suficientes para concluir i_4 até i_{12} ; portanto, descrevem a situação.

Dizemos que:

i_1, i_2, i_3 são *axiomas*. As nove restantes são *conseqüências*.

b) Suponha que as informações tivessem sido:

- j_1) Décio é irmão de Gilda.
- j_2) Décio é irmão de Flávio.
- j_3) Marisa não é irmã de Flávio.

Você encontra estas sentenças entre
as 9 que escreveu? _____

Com as informações j_1, j_2, j_3 você pode
obter 9 conclusões. Quais são?

Flávio é irmão de Décio
Gilda é irmã de Décio
Gilda é irmã de Flávio
Marisa não é irmã de Gilda
Flávio é irmão de Gilda
Flávio não é irmão de Marisa
Gilda não é irmã de Marisa
Décio não é irmão de Marisa
Marisa não é irmã de Décio

Você observou que:

As informações j_1, j_2, j_3 descrevem a mesma situação.
 j_1, j_2, j_3 são *axiomas*. As nove restantes são *conseqüências*.

Anote:

Os axiomas de uma teoria não são invariáveis. Podem ser escolhidos adequadamente desde que descrevam a mesma situação.

2) Considere as sentenças:
Décio não é irmão de Marisa.
Gilda é irmã de Décio.
Flávio é irmão de Décio.

a) Com estas três informações
você consegue tirar as mesmas
conclusões do exercício 1?

Sim

b) As 3 sentenças são axiomas da situação do exercício 1? sim

3) Veja agora as sentenças:
Marisa não é irmã de Décio.
Marisa não é irmã de Flávio.
Gilda é irmã de Flávio.

a) Com as três sentenças acima ficou descrita a situação do exercício 1? não

b) As três sentenças dadas são axiomas da situação do exercício 1? não

Considere a sentença:

“Flávio é irmão de Gilda” “implica” “Gilda é irmã de Flávio”

Em linguagem Matemática:

Flávio é irmão de Gilda \Rightarrow Gilda é irmã de Flávio
 \downarrow \downarrow
 (afirmação) (conclusão da afirmação anterior)

Anote:

A sentença formada por afirmações seguidas de uma conclusão chama-se *teorema*.
 As afirmações (que são ponto de partida) de um teorema chamam-se *hipóteses* do teorema.
 A conclusão chama-se *tese* do teorema.

Você observou que:

No teorema:

Flávio é irmão de Gilda \Rightarrow Gilda é irmã de Flávio
 é a hipótese é a tese

No teorema:

Flávio é irmão de Décio
 e
 Marisa não é irmã de Décio \Rightarrow Marisa não é irmã de Flávio
 \downarrow \downarrow
 é a hipótese (afirmações) é a tese (conclusão)

Grupo IV – Exercícios de Aplicação

1) Complete o quadro:

Teorema	Hipótese	Tese
$X \subset Y \Rightarrow X \cup Y = Y$	$X \subset Y$	$X \cup Y = Y$
$X \subset Y \Rightarrow X \cap Y = X$	$X \subset Y$	$X \cap Y = X$
$X \subset Y \Rightarrow n(X) \leq n(Y)$	$X \subset Y$	$n(X) \leq n(Y)$
$a + b = c \Rightarrow a = c - b$	$a + b = c$	$a = c - b$
$a \cdot b = c \Rightarrow a = c \div b$	$a \cdot b = c$	$a = c \div b$
$a \text{ é par} \Rightarrow a \text{ é múltiplo de } 2$	$a \text{ é par}$	$a \text{ é múltiplo de } 2$
$a \text{ é múltiplo de } 2$ $a \text{ é múltiplo de } 3$ $\left. \vphantom{\begin{matrix} a \text{ é múltiplo de } 2 \\ a \text{ é múltiplo de } 3 \end{matrix}} \right\} a \text{ é múltiplo de } 6$	$a \text{ é múltiplo de } 2$ $a \text{ é múltiplo de } 3$	$a \text{ é múltiplo de } 6$
As lojas fecham aos feriados 15 de novembro é feriado $\left. \vphantom{\begin{matrix} \text{As lojas fecham aos feriados} \\ 15 \text{ de novembro é feriado} \end{matrix}} \right\}$ Em 15 de novembro as lojas estão fechadas	as lojas fecham aos feriados 15 de novembro é feriado	Em 15 de novembro as lojas estão fechadas
Todo peixe vive na água Tainha é um peixe $\left. \vphantom{\begin{matrix} \text{Todo peixe vive na água} \\ \text{Tainha é um peixe} \end{matrix}} \right\}$ Tainha vive na água	Todo peixe vive na água Tainha é um peixe	Tainha vive na água

2) Considere o teorema:
Se a e b são naturais ímpares,
então $a + b$ é um natural par.

a) Qual a hipótese do teorema? a e b são naturais ímpares

b) Qual a tese do teorema? $a + b$ é um natural par

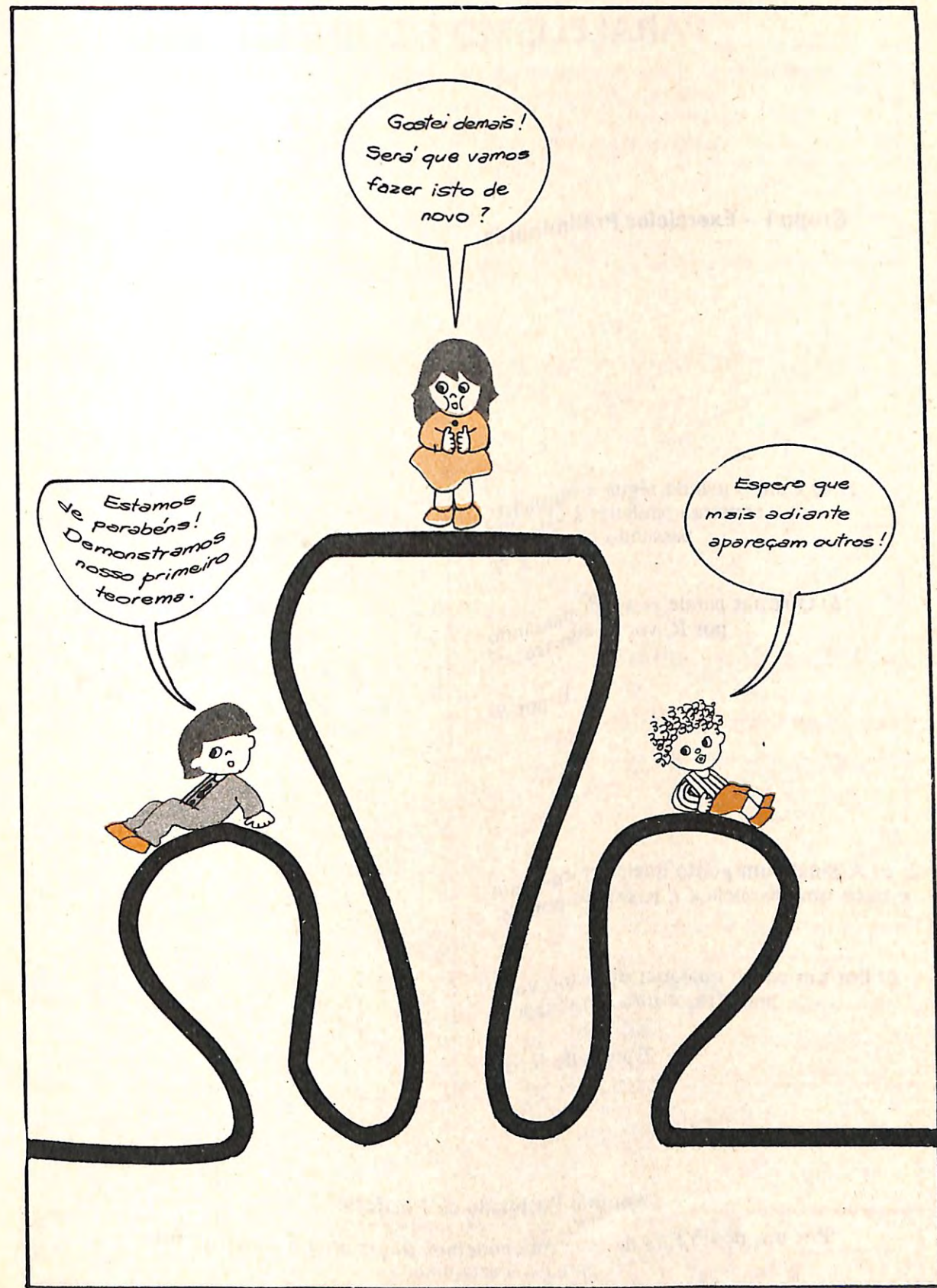
c) Vamos usar um *raciocínio* para,
da hipótese, chegar à tese.

Complete o quadro:

Afirmações	Justificativas
$a = 2m + 1$	por hipótese
$b = 2p + 1$	por hipótese
$a + b = 2m + 1 + b$	aplicação do princípio aditivo
$a + b = 2m + 1 + 2p + 1$	substituição de b por seu valor
$a + b = 2m + 2p + 1 + 1$	<i>prop. comut. da adição em \mathbb{N}</i>
$a + b = 2m + 2p + 2$	efetuamos a soma
$a + b = 2(m + p + 1)$	<i>prop. distributiva da mult. e aplicação da relação α adição em \mathbb{N}</i>
$m + p + 1 \in \mathbb{N}$	<i>a adição é operação em \mathbb{N}</i>
$m + p + 1 = c$	nova denominação
$2c$ é par	definição de número par
$a + b = 2c$	tese

Anote:

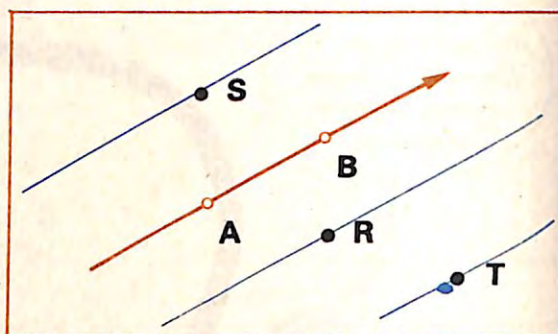
O *raciocínio* que nos permite chegar da hipótese à tese de um teorema chama-se *demonstração do teorema*.



PARALELISMO E DIREÇÃO

Grupo I - Exercícios Preliminares

1) a) Com o uso de régua e esquadro, construa paralelas à reta \overleftrightarrow{AB} , passando por R, S, T .



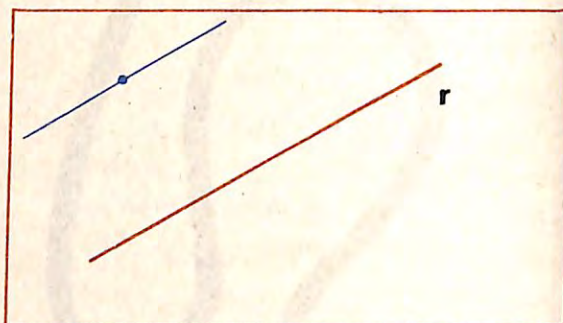
b) Quantas paralelas a \overleftrightarrow{AB} , passando por R , você pode traçar?

uma

E por S ?

uma

2) a) Assinale um ponto qualquer do plano e trace uma paralela a r , passando por ele.



b) Por um ponto qualquer do plano você pode traçar uma paralela a r ?

sim

E mais de uma?

não

Anote o Postulado de Euclides:

“Por um ponto fora de uma reta podemos traçar uma e somente uma paralela à reta dada”.

Lembre que:

A relação de paralelismo é uma relação de equivalência e, portanto, determina classes de equivalência no conjunto de retas de um plano. Cada classe de equivalência determina uma *direção*, que é, por definição, a direção das retas que pertencem à classe.

Anote:

Todas as retas paralelas têm a mesma direção.

Grupo II - Exercícios de Aplicação

1) Na figura ao lado:

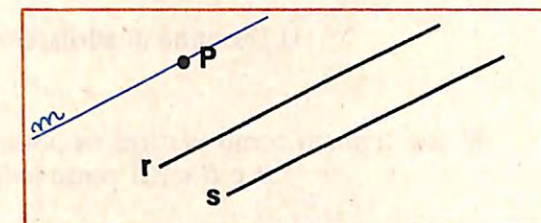
$r \parallel s$

$P \notin s, P \notin r$

a) Trace por P uma paralela m à reta r .

b) m é paralela a s ?

sim



2) Na figura ao lado:

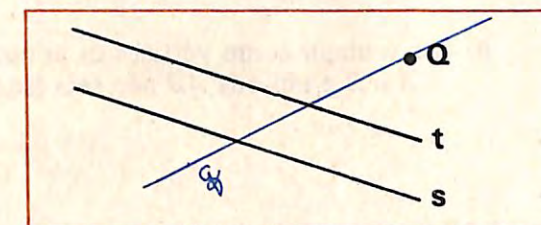
$t \parallel s$

$Q \notin t, Q \notin s$

a) Trace por Q uma reta q não paralela a t .

b) q é paralela a s ?

não

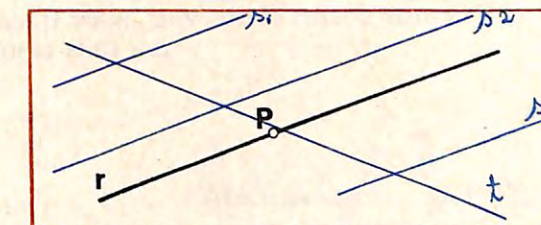


3) a) Trace três retas, s_1, s_2, s_3 , paralelas a r , e por P de r uma reta qualquer t diferente de r .

b) t encontra s_1, s_2, s_3 ?

sim

c) Complete:



Afirmações	Justificativas
$s_1 \parallel r, s_2 \parallel r, s_3 \parallel r$	por construção
$P \notin s_1, P \notin s_2, P \notin s_3$	por construção
por P só existe uma reta paralela a s_1, s_2, s_3	postulado de <u>Euclides</u>
r é a reta por P , paralela a s_1, s_2, s_3	por construção
$t \neq r$	<i>por construção</i>
$t \times s_1, t \times s_2, t \times s_3$	postulado de <u>Euclides</u>

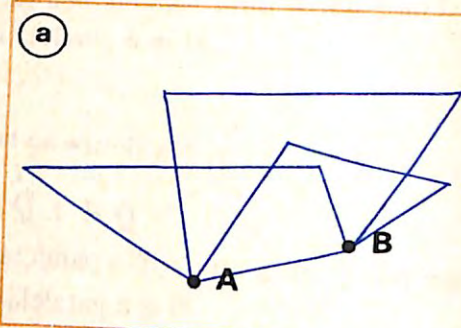
Você provou o teorema:

Se $r \parallel s$ e t intercepta r , então t intercepta s .

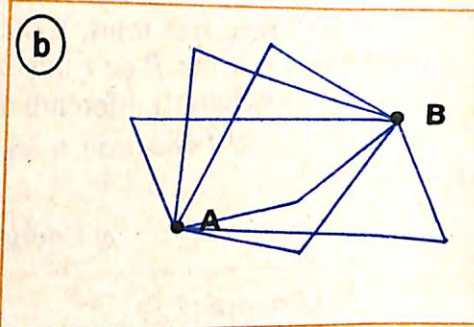
Grupo III – Exercícios Preliminares

1) Desenhe quadriláteros:

a) que tenham como vértices os pontos A e B e \overline{AB} como lado.



b) que tenham como vértices os pontos A e B e em que \overline{AB} não seja lado.



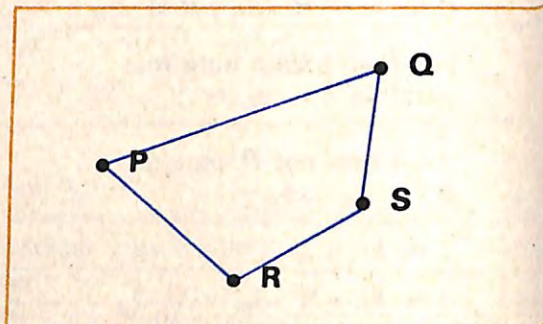
c) Quantos quadriláteros você pode traçar em cada caso?

(a) uma infinidade

(b) uma infinidade

2) a) Dados 4 pontos não alinhados, três a três, quantos quadriláteros você pode traçar que tenham estes pontos como vértices?

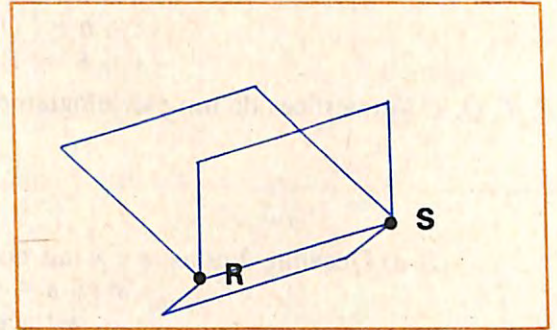
um



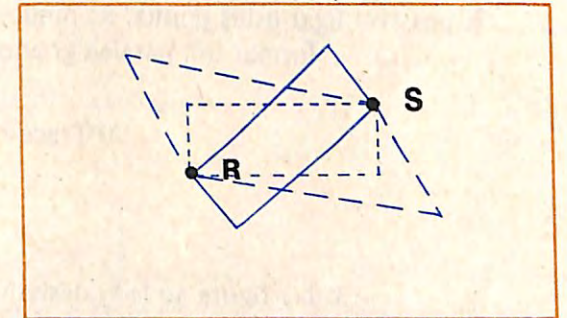
b) Trace-os.

3) Desenhe, em cada caso, vários quadriláteros tais que:

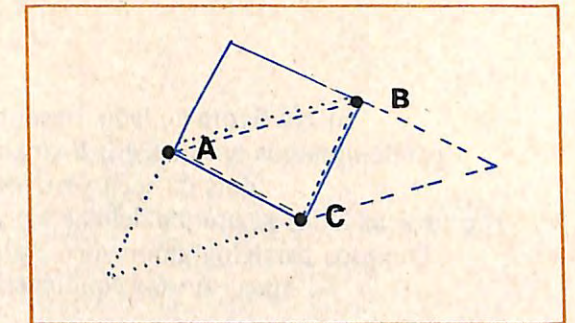
a) R e S sejam seus vértices, \overline{RS} seja um de seus lados e seus lados opostos sejam paralelos.



b) R e S sejam seus vértices, \overline{RS} não seja um de seus lados e seus lados opostos sejam paralelos.



4) Desenhe quadriláteros que tenham como vértices A , B e C e de lados opostos paralelos.



Quantos quadriláteros você pode traçar?

três

Anote:

Dizemos que quatro pontos não alinhados A, B, C, D determinam um paralelogramo quando os pares de lados opostos são respectivamente paralelos.
 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ e $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$

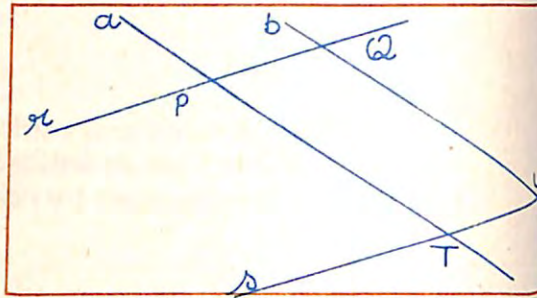
Grupo IV – Exercícios de Aplicação

1) Desenhe $r // s$, $a // b$ tais que:

$$\begin{aligned} r \cap a &= \{P\} \\ s \cap a &= \{T\} \\ r \cap b &= \{Q\} \\ s \cap b &= \{U\} \end{aligned}$$

P, T, Q, U são vértices de um paralelogramo?

Sim



2) a) Desenhe 2 retas m e n tais que

$$m \cap n = \emptyset$$

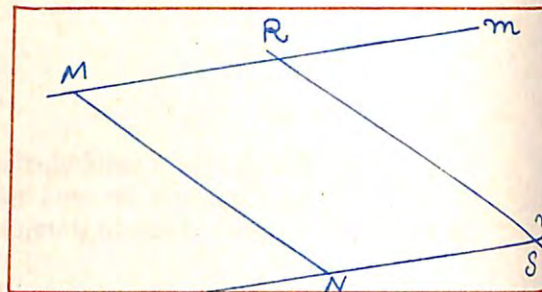
e trace:

$$\overline{MR} \subset m \text{ e } \overline{NS} \subset n \text{ tais que } \overline{MR} \text{ seja congruente a } \overline{NS}.$$

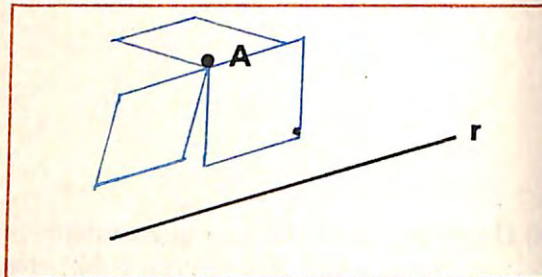
É possível ligar estes pontos de modo a formar um paralelogramo?

Sim

b) Trace-o.

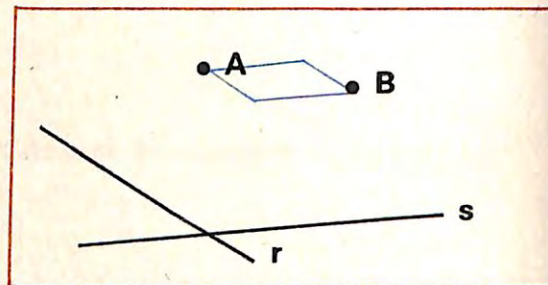


3) Na figura ao lado desenhe paralelogramos em que A seja um dos vértices, e um dos lados seja paralelo a r .



4) Na figura ao lado, desenhe paralelogramos em que A e B sejam dois de seus vértices, e os seus lados sejam paralelos a r e s . Quantos paralelogramos você pode traçar nestas condições?

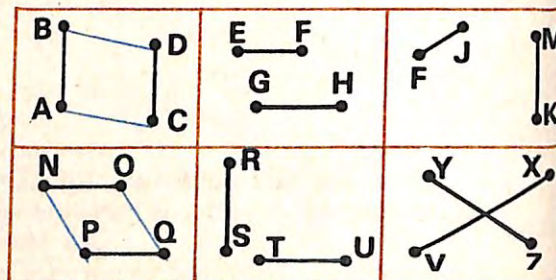
Um



5) No quadro ao lado, são dados pares de segmentos. Desenhe, quando possível, paralelogramos que tenham estes segmentos por lados.

Nomeie-os:

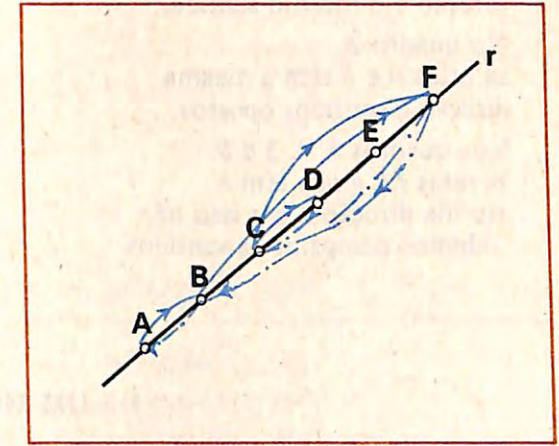
ABCD e NOPQ



Grupo V – Exercício Preliminar

Dados os pontos alinhados A, B, C, D, E, F , da reta r :

- trace flechas vermelhas do primeiro para o segundo elemento dos pares ordenados: $(A, B), (C, D), (C, F), (B, F)$
- trace flechas azuis do primeiro para o segundo elemento dos pares ordenados: $(B, A), (D, C), (F, C), (F, B)$



Você observou que:

Todas as flechas vermelhas têm o mesmo sentido e todas as flechas azuis têm o mesmo sentido, porém as flechas vermelhas e azuis têm sentidos contrários.

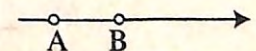
DE UM MODO GERAL

Dados dois pontos distintos A e B de uma reta, podemos ordená-los de duas maneiras: (A, B) ou (B, A) .

A cada uma destas ordens chamamos de *sentido da reta*. A um dos sentidos damos o nome de *sentido positivo* e ao outro *sentido negativo*.

Anote:

Se orientamos a reta \overleftrightarrow{AB} no sentido de A para B , dizemos que: “ A precede B ” ou “ B segue A ” e representamos: \overrightarrow{AB}

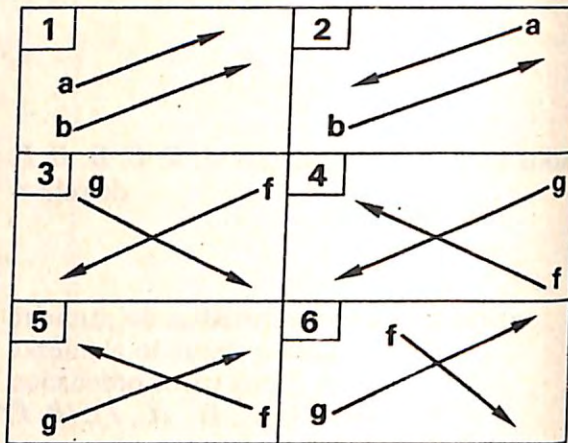


Anote:

No quadro 1:
as retas a e b têm a mesma
direção e o mesmo sentido.

No quadro 2:
as retas a e b têm a mesma
direção e sentidos opostos.

Nos quadros 3, 4, 5 e 6:
as retas f e g não têm a
mesma direção e por isso não
podemos comparar os sentidos.



DE UM MODO GERAL

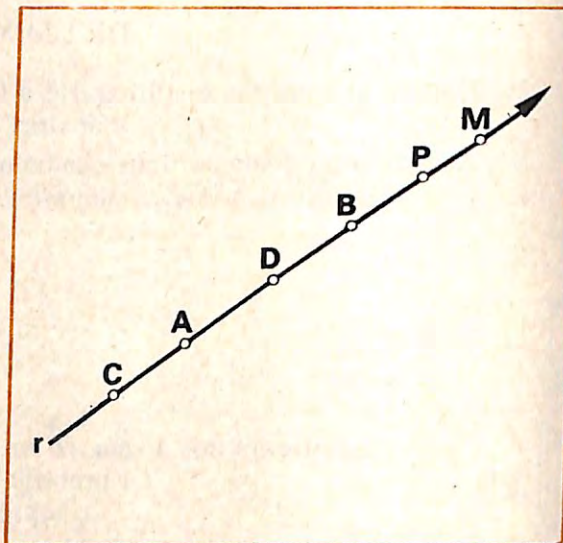
Dadas duas retas orientadas, só podemos comparar os seus sentidos se elas
tiverem a mesma direção.

Grupo VI – Exercícios de Aplicação

1) a) A reta r está orientada no sentido
indicado pela flecha.

Complete com “precede” ou “segue”,
de acordo com a figura.

- A precede B
B segue A
C precede D
D precede P
C precede P
D segue A



Anote:

Qualquer que seja o ponto A , dizemos que “ A precede A ” ou “ A segue A ”.

2) Complete:

Numa reta orientada,
se “ A precede B ” e “ B precede C ”,
então:
se “ R segue S ” e “ S segue T ”,
então:
se “ M precede P ”, então:

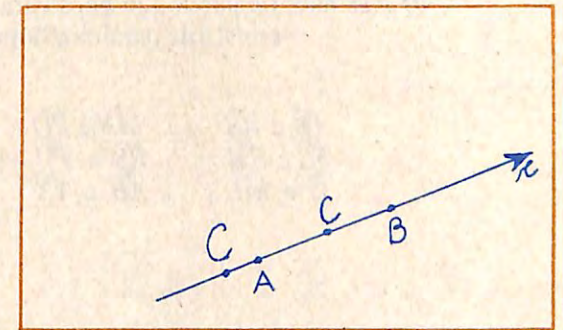
“ A precede C ”
“ R segue T ”
“ P segue M ”

3) A relação “precede” (ou “segue”)

- é reflexiva?
é simétrica?
é anti-simétrica?
é transitiva?

sim
não
sim
sim

4) a) Desenhe numa reta r os pontos A, B, C
de modo que “ A precede B ” e “ B segue C ”.

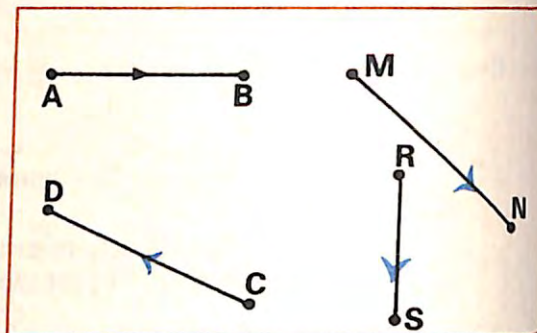


b) Quais as possíveis posições de C
em relação a A ?

C segue A ou
C precede A

Grupo VII – Exercícios Preliminares

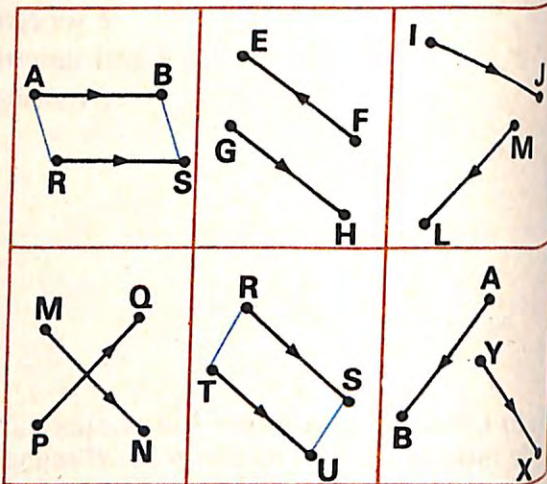
1) No quadro ao lado, a flecha do segmento \overrightarrow{AB} indica que o segmento está orientado no sentido de A para B , ou seja, que A é a origem e B é a extremidade. Coloque flechas para orientar os segmentos \overrightarrow{MN} , \overrightarrow{CD} , \overrightarrow{RS} de modo que a primeira letra indique a origem.



Anote:

Quando um segmento está orientado de A para B , usamos a representação \overrightarrow{AB} .

2) a) Em cada quadro, trace, quando possível, os paralelogramos que se obtêm ligando, respectivamente, as origens e as extremidades dos pares de segmentos.



b) Assinale os pares que permitiram construir paralelogramos

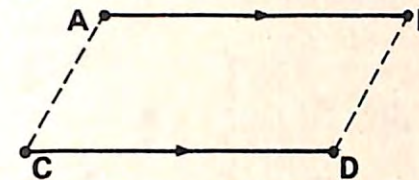
\overrightarrow{AB} e \overrightarrow{RS} (x) \overrightarrow{MN} e \overrightarrow{PQ} ()
 \overrightarrow{FE} e \overrightarrow{GH} () \overrightarrow{RS} e \overrightarrow{TU} (x)
 \overrightarrow{IJ} e \overrightarrow{ML} () \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{YX} ()

Você observou que:

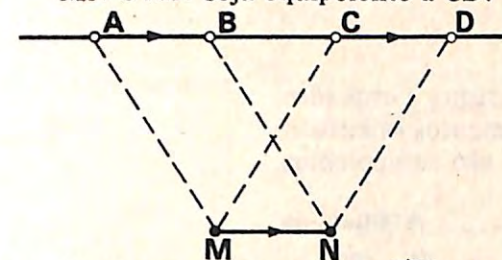
Dados dois segmentos orientados, às vezes é possível construir um paralelogramo unindo, respectivamente, as origens e as extremidades dos segmentos.

Anote:

a) Dois segmentos orientados \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{CD} são chamados equípolos quando \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{CD} , \overrightarrow{AC} e \overrightarrow{BD} determinam um paralelogramo.



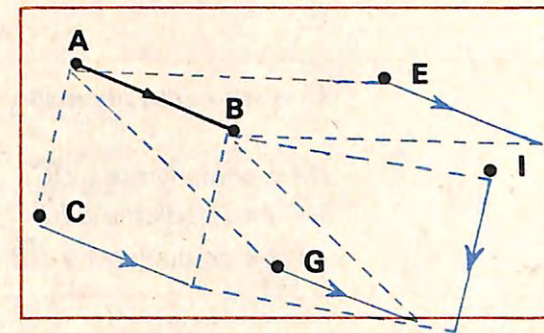
b) No caso dos segmentos serem colineares, diremos que \overrightarrow{AB} é equípolo a \overrightarrow{CD} se pudermos traçar um segmento orientado \overrightarrow{MN} tal que \overrightarrow{AB} seja equípolo a \overrightarrow{MN} e \overrightarrow{MN} seja equípolo a \overrightarrow{CD} .



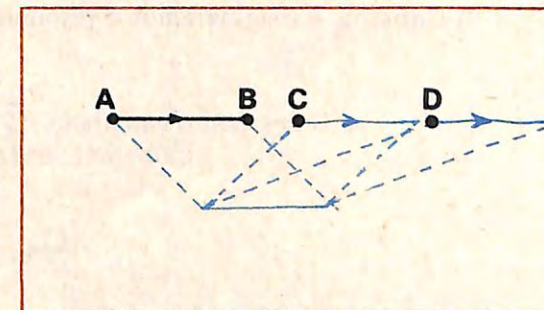
c) Se A coincide com B , o segmento orientado \overrightarrow{AB} é chamado *segmento nulo*. Todos os segmentos nulos são equípolos.

Grupo VIII – Exercícios de Aplicação

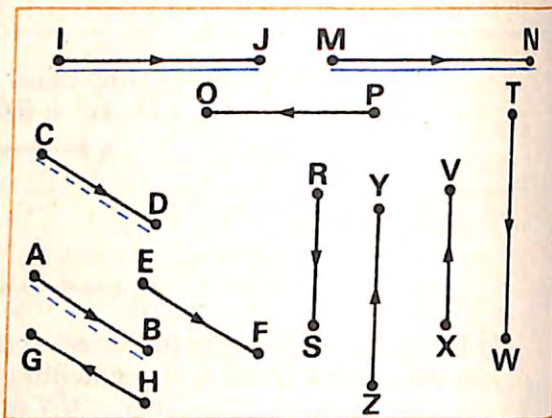
1) Com o uso de régua e esquadro, trace segmentos equípolos a \overrightarrow{AB} , com origens em C, E, I, G .



2) Trace segmentos equípolos a \overrightarrow{AB} , com origem em C ou D .



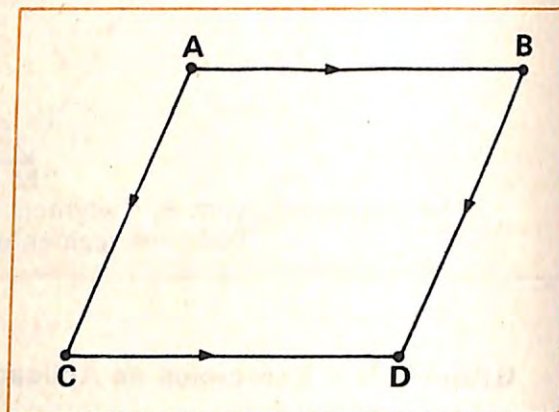
3) Pinte com a mesma cor os pares de segmentos equipolentes da figura ao lado.



4) Verifique (usando régua e esquadro) quais dos pares de segmentos orientados são equipolentes.

Assinale-os:

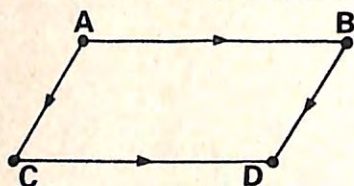
- \vec{AB} e \vec{CD} (X)
- \vec{AB} e \vec{DC} ()
- \vec{AC} e \vec{BD} (X)
- \vec{BA} e \vec{CD} ()
- \vec{BA} e \vec{DC} (X)
- \vec{AC} e \vec{DB} ()
- \vec{AD} e \vec{BC} ()
- \vec{CA} e \vec{DB} ()



Anote:

Se o segmento orientado \vec{AB} é equipolente a \vec{CD} , então:

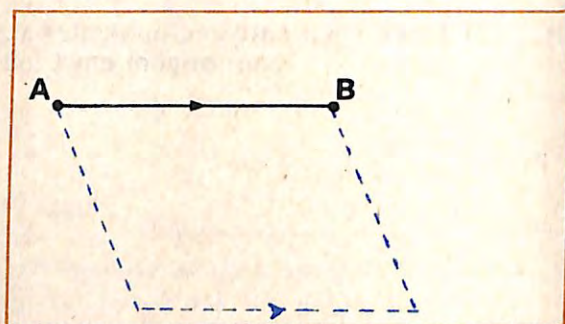
- \vec{BA} é equipolente a \vec{DC} ,
- \vec{AC} é equipolente a \vec{BD}
- e \vec{CA} é equipolente a \vec{DB}



5) Construa paralelogramos e responda:

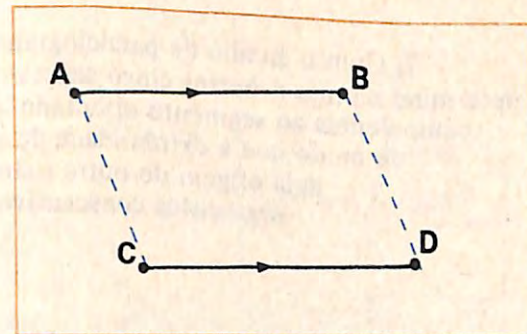
a) O segmento orientado \vec{AB} é equipolente a \vec{AB} ?

Sim



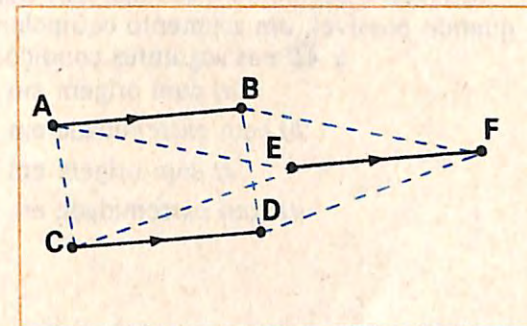
b) Dado \vec{AB} equipolente a \vec{CD} , \vec{CD} é equipolente a \vec{AB} ?

Sim



c) Dados \vec{AB} equipolente a \vec{CD} e \vec{CD} equipolente a \vec{EF} , podemos dizer que o segmento \vec{AB} é equipolente a \vec{EF} ?

Sim



Observe que:

\vec{AB} é equipolente a \vec{AB}
 \vec{AB} é equipolente a \vec{CD} e \vec{CD} é equipolente a \vec{EF}
 \vec{AB} é equipolente a \vec{CD} , \vec{CD} é equipolente a \vec{EF} e \vec{AB} é equipolente a \vec{EF} .

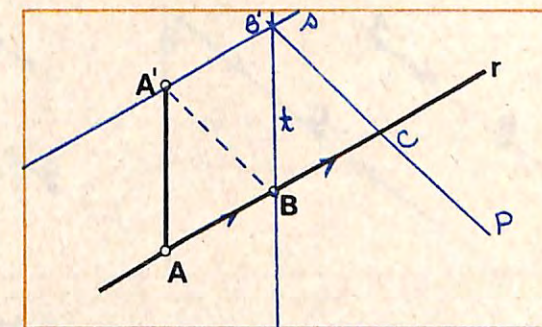
Você pode concluir que:

A relação de equipolência é reflexiva, simétrica e transitiva, ou seja, uma relação de equivalência.

6) Na figura ao lado, trace: por A' a reta s , paralela a r ; por B a reta t , paralela a AA' ; chame $\{B'\} = t \cap s$. Trace por B' a paralela p a $A'B$; chame $\{C\} = p \cap r$.

Continue esta construção. Você pode afirmar que \vec{AB} , \vec{BC} , \vec{CD} , etc., são equipolentes?

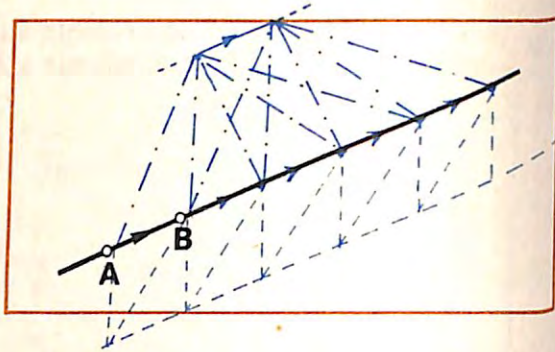
Justifique.



Sim

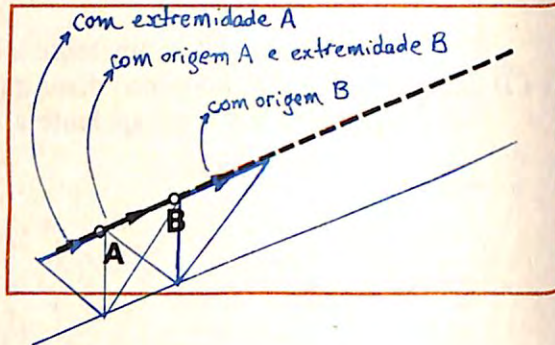
Transitiva da equipolência

7) Com o auxílio de paralelogramos, determine na reta r outros cinco segmentos equipolentes ao segmento orientado \vec{AB} , de modo que a extremidade de um seja origem do outro (isto é, segmentos consecutivos).



8) Dado o segmento orientado \vec{AB} , trace, quando possível, um segmento equipolente a \vec{AB} nas seguintes condições:

- com origem em A.
- com extremidade em A.
- com origem em B.
- com extremidade em B.



9) Em cada quadro, determine os pontos X, Y de modo que os segmentos orientados \vec{CX} , \vec{AB} , \vec{YC} sejam equipolentes, construindo paralelogramos.

Anote:

Se \vec{AB} é equipolente a \vec{BC} , então $B \in \vec{AC}$.
B é chamado o ponto médio do segmento \vec{AC} .

10) Em cada quadro, com o auxílio de paralelogramos, determine segmentos orientados onde B seja o ponto médio e A uma das extremidades.

Grupo IX – Exercício Preliminar

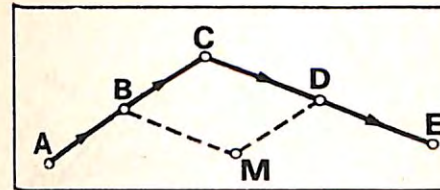
Acompanhe a demonstração e complete, sabendo que:

$$\vec{AB} \equiv \vec{BC}$$

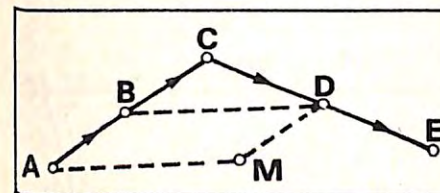
$$\vec{CD} \equiv \vec{DE}$$

$$\vec{BM} \text{ é paralela a } \vec{CD}$$

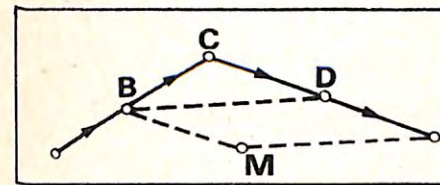
$$\vec{DM} \text{ é paralela a } \vec{CB}$$



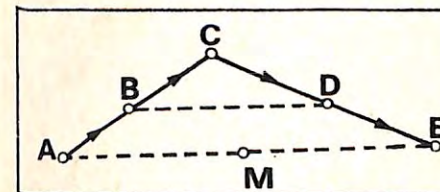
Afirmações	Justificativas
$\vec{BC} = \vec{AB}$	por hipótese
$\vec{BC} = \vec{MD}$	lados opostos de um paralelogramo
$\vec{AB} = \vec{MD}$	$\vec{AB} \equiv \vec{BC}$ (transitividade)
$\vec{CD} = \vec{DE}$	por hipótese
$\vec{CD} = \vec{BM}$	lados opostos de um paralelogramo
$\vec{DE} = \vec{BM}$	$\vec{CD} \equiv \vec{DE}$ (transitividade)



$\vec{BD} = \vec{AM}$	$\vec{AB} \equiv \vec{MD}$
-----------------------	----------------------------

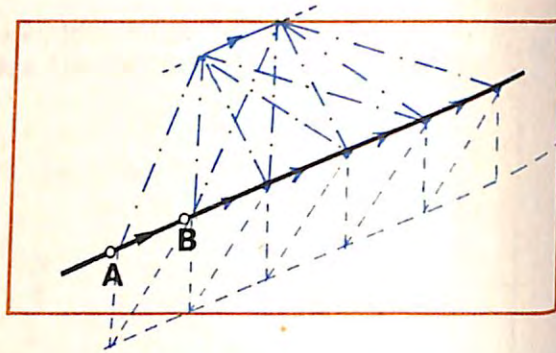


$\vec{BD} = \vec{ME}$	$\vec{DE} \equiv \vec{BM}$
-----------------------	----------------------------



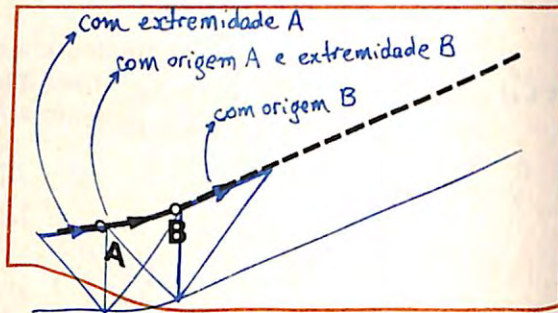
$\vec{AM} = \vec{ME}$	transitividade
M é ponto médio de \vec{AE}	$\vec{AM} \equiv \vec{ME}$
$\vec{BD} \parallel \vec{AE}$	lados opostos de um paralelogramo

7) Com o auxílio de paralelogramos, determine na reta r outros cinco segmentos eqüipolentes ao segmento orientado \overrightarrow{AB} , de modo que a extremidade de um seja origem do outro (isto é, segmentos consecutivos).

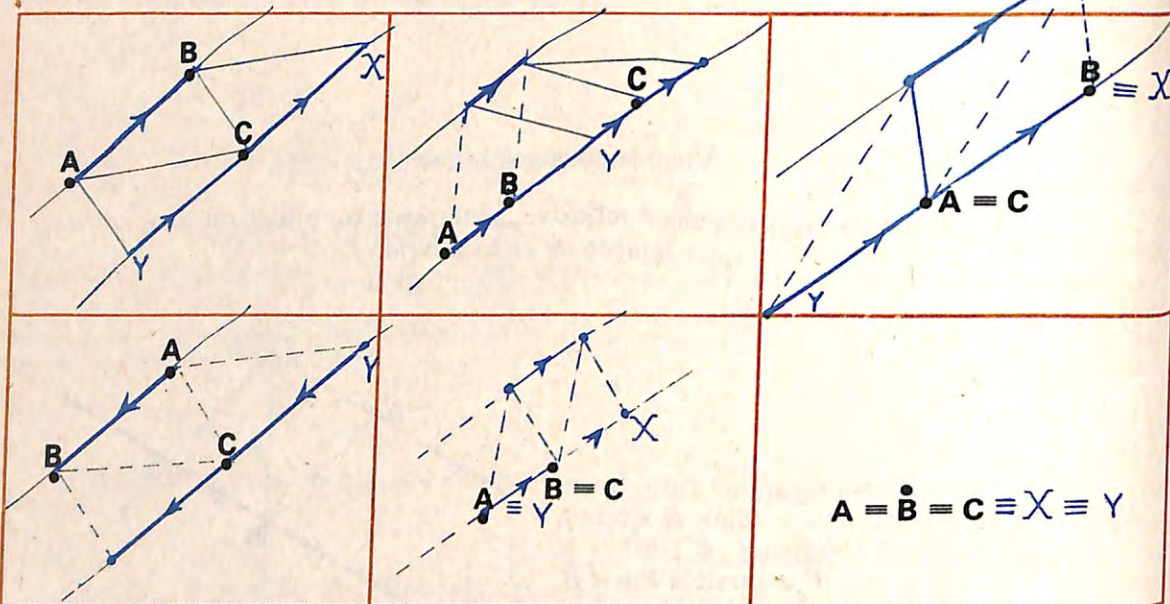


8) Dado o segmento orientado \overrightarrow{AB} , trace, quando possível, um segmento eqüipolente a \overrightarrow{AB} nas seguintes condições:

- com origem em A.
- com extremidade em A.
- com origem em B.
- com extremidade em B.



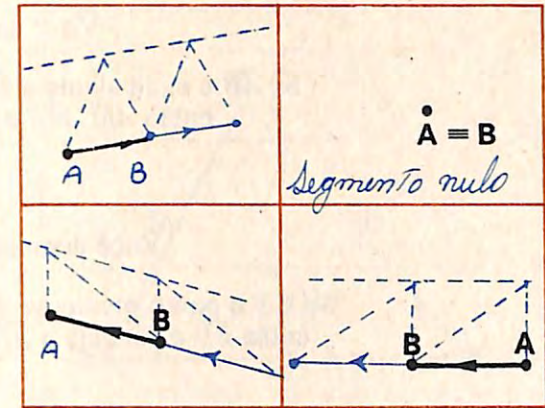
9) Em cada quadro, determine os pontos X, Y de modo que os segmentos orientados \overrightarrow{CX} , \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{YC} sejam eqüipolentes, construindo paralelogramos.



Anote:

Se \overrightarrow{AB} é eqüipolente a \overrightarrow{BC} , então $B \in \overrightarrow{AC}$.
B é chamado o ponto médio do segmento \overrightarrow{AC} .

10) Em cada quadro, com o auxílio de paralelogramos, determine segmentos orientados onde B seja o ponto médio e A uma das extremidades.



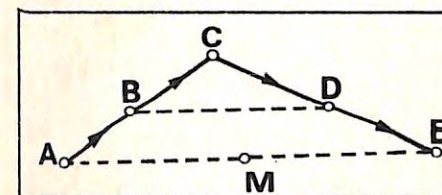
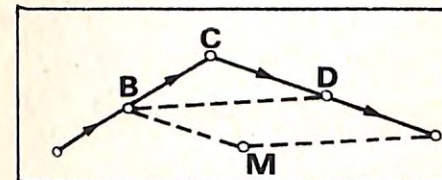
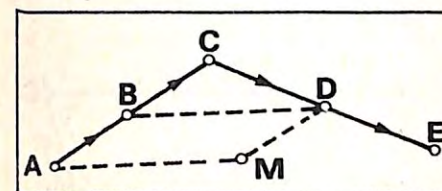
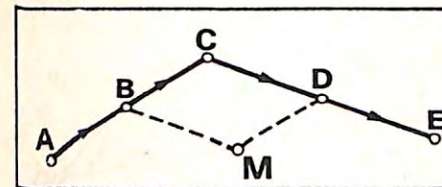
Grupo IX – Exercício Preliminar

Acompanhe a demonstração e complete, sabendo que:

$$\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{CD} \equiv \overrightarrow{DE}$$

\overrightarrow{BM} é paralela a \overrightarrow{CD}
 \overrightarrow{DM} é paralela a \overrightarrow{CB}



Afirmações	Justificativas
$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}$	por hipótese
$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{MD}$	lados opostos de um paralelogramo
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MD}$	$\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{BC}$ (transitividade)
$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DE}$	por hipótese
$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BM}$	lados opostos de um paralelogramo
$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BM}$	$\overrightarrow{CD} \equiv \overrightarrow{DE}$ (transitividade)

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AM}$	$\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{MD}$
---	--

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{ME}$	$\overrightarrow{DE} \equiv \overrightarrow{BM}$
---	--

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{ME}$	transitividade
M é ponto médio de \overrightarrow{AE}	$\overrightarrow{AM} \equiv \overrightarrow{ME}$
$\overrightarrow{BD} \parallel \overrightarrow{AE}$	lados opostos de um paralelogramo

Você descobriu que:

Se \overline{AB} é equipolente a \overline{BC} e \overline{CD} é equipolente a \overline{DE} ,
então \overline{AM} , \overline{ME} e \overline{BD} são equipolentes.

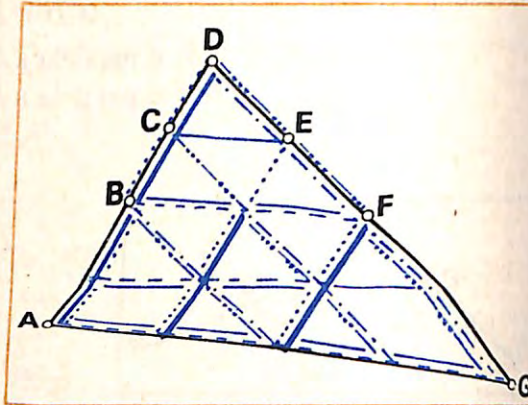
Você demonstrou o teorema:

"Se B é o ponto médio de \overline{AC} e D é o ponto médio de \overline{CE} ,
então \overline{BD} é paralelo a \overline{AE} e M é ponto médio de \overline{AE} ."

Obs.: Não foram desenhados todos os segmentos equipolentes por impossibilidade de graficar.

Grupo X - Exercícios de Aplicação

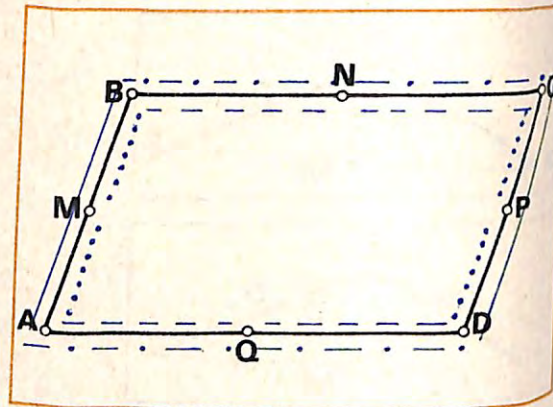
1) Na figura ao lado,
 B é o ponto médio de \overline{AD}
 C é o ponto médio de \overline{BD}
 F é o ponto médio de \overline{DG}
 E é o ponto médio de \overline{DF}



- a) Cubra com a mesma cor segmentos equipolentes.
b) Seria possível traçar outros segmentos equipolentes?

sim

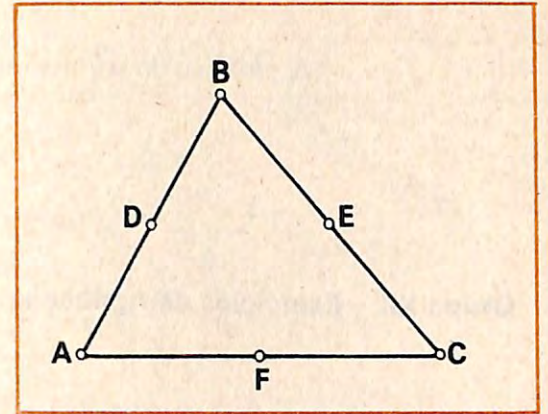
2) Na figura ao lado,
 M, N, P e Q são pontos médios dos lados do paralelogramo $ABCD$.



- a) Cubra com a mesma cor os segmentos equipolentes.
b) Seria possível traçar outros segmentos equipolentes?

sim

3) Dado o triângulo ABC , onde
 D é o ponto médio de \overline{AB}
 E é o ponto médio de \overline{BC}
 F é o ponto médio de \overline{CA}



o que se pode dizer sobre \overline{DE} e \overline{AC} ?

$\overline{DE} \parallel \overline{AC}$

\overline{DF} e \overline{BC} ?

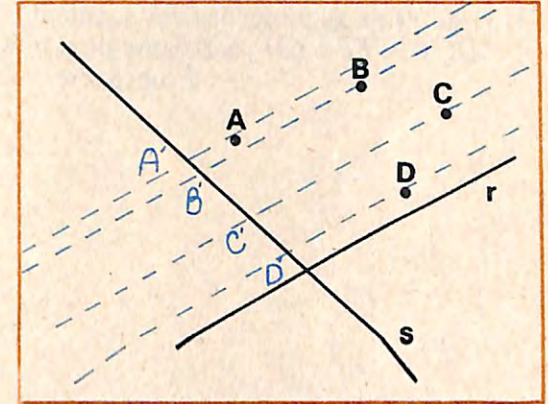
$\overline{DF} \parallel \overline{BC}$

\overline{FE} e \overline{AB} ?

$\overline{FE} \parallel \overline{AB}$

Grupo XI - Exercícios Preliminares

1) Trace, pelos pontos A, B, C, D , paralelas à reta r e chame de A', B', C', D' as intersecções destas paralelas com a reta s .



Anote:

A', B', C', D' são chamadas projeções de A, B, C, D sobre a reta s paralelamente a r .

2) Determine as projeções de M, U, P, Q, R e T paralelamente a s sobre r .

