

Diorges Evandro Guessi

**ANÁLISE DE LAJES MACIÇAS EM CONCRETO ARMADO
COM PLASTIFICAÇÃO**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do Grau de Mestre em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Daniel Domingues Loriggio, Dr.

Florianópolis
2017

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Guessi, Diorges Evandro
Análise de Lajes Maciças em Concreto Armado com
Plastificação / Diorges Evandro Guessi ;
orientador, Daniel Domingues Loriggio, 2017.
164 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de
Santa Catarina, Centro Tecnológico, Programa de Pós
Graduação em Engenharia Civil, Florianópolis, 2017.

Inclui referências.

1. Engenharia Civil. 2. Análise de lajes em
concreto armado. 3. Plastificação dos apoios. 4.
Redistribuição de esforços. 5. Continuidade de lajes.
I. Loriggio, Daniel Domingues. II. Universidade
Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação
em Engenharia Civil. III. Título.

Diorges Evandro Guessi

ANÁLISE DE LAJES MACIÇAS EM CONCRETO ARMADO COM PLASTIFICAÇÃO

Esta Dissertação foi julgada adequada para obtenção do Título de Mestre, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Santa Catarina.

Florianópolis, 22 de março de 2017.

Prof. Glicério Trichês, Dr.
Coordenador do Curso

Banca Examinadora:

Prof. Daniel Domingues Loriggio, Dr.
Orientador
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Narbal Ataliba Marcellino, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Roberto Caldas de Andrade Pinto, PhD.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Roberto Chust Carvalho, Dr.
Universidade Federal de São Carlos

Dedico este trabalho à minha esposa,
Léia, e à minha filha, Laura.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, que iluminou o meu caminho durante esta caminhada.

Aos professores Daniel Domingues Loriggio e Narbal Ataliba Marcellino pelas orientações, motivações e pelos incentivos durante suas aulas para eu continuar meus estudos.

Aos professores e funcionários do curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFSC que contribuíram direta ou indiretamente no desenvolvimento deste trabalho.

À minha esposa, Léia, que muito me dá força e coragem, apoiando sempre minhas decisões.

Aos meus irmãos e demais familiares pela disposição em me ajudar a qualquer momento e situação.

À minha mãe, Maria, pelo seu carinho e amor incondicional dedicado a nós, seus filhos.

RESUMO

Projetos estruturais de lajes em concreto armado normalmente são elaborados com base em análises lineares, por meio de modelos numéricos computacionais, que podem causar concentrações dos esforços em determinadas regiões da estrutura. Nessas análises lineares, considera-se apenas o comportamento elástico linear da estrutura, não se levando em consideração o possível comportamento plástico das seções transversais de lajes. Neste trabalho apresentam-se diversos estudos, como em relação à influência do tipo de malha na modelagem das lajes nas concentrações dos esforços; comparativos entre os modelos computacionais, de dois programas comerciais EBERICK e SAP2000; e quanto à forma de plastificação nos apoios de continuidade de lajes. Foram feitas várias análises de modelos plastificados e de variação da extensão da plastificação, comparando-os com pico de momento obtido das análises elásticas de modelos numéricos, e com os valores dos esforços obtidos manualmente e abaixo destes. Também, analisou-se um pavimento com vários pontos de concentrações de esforços, disponibilizado no manual de utilização do programa EBERICK. Por fim, propõem-se procedimentos fundamentados com aplicação em projetos de estruturas de modo a minimizar o efeito das concentrações de esforços que podem surgir nas modelagens computacionais.

Palavras-chave: Análise de lajes em concreto armado. Plastificação dos apoios. Redistribuição de esforços.

ABSTRACT

Structural designs of slabs in reinforced concrete usually are elaborated based on linear analyzes, by numerical computational models, that can cause concentrations of the efforts in certain regions of the structure. In these linear analyzes, only the linear elastic behavior of the structure is considered, not taking into account the possible plastic behavior of the cross sections of slabs. In this work several studies are presented, such as in relation to the influence of the mesh type on the slab modeling in the concentrations of the efforts; Comparisons between the computational models of two EBERICK and SAP2000 commercial programs; And as to the form of plastification in the supports of continuity of slabs. Several analyze of plastified models and variations of the plastification extension were made, comparing them with the peak of moment obtained from the elastic analyzes of numerical models, and with the values of the efforts obtained manually and below these. Also, a pavement with several points of concentration of effort was analyzed, available in the user manual of the EBERICK program. Finally, it is proposed to propose procedures based on the design of structures in order to minimize the effect of the concentration of efforts that can arise in computational modeling.

Keywords: Analysis of slabs in reinforced concrete. Lamination of supports. Redistribution of efforts.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Laje retangular com apoios simples nos quatro lados.....	31
Figura 2 – Momentos principais em uma placa quadrada com carga central.....	31
Figura 3 – Momentos volventes (kNm/m) em uma placa quadrada simplesmente apoiada com carga central (SAP2000-AG).....	32
Figura 4 – Armadura para os momentos volventes nos cantos.	33
Figura 5 – Modelagem de grelha.....	34
Figura 6 – Graus de liberdade de um nó de grelha.....	35
Figura 7 – Tipos de carga sobre elementos da grelha equivalente.	35
Figura 8 – Malha de Elementos Finitos.....	39
Figura 9 – Exemplo de Elementos Finitos para análise bidimensional.	39
Figura 10 – Detalhe de elemento finito retangular com representação dos graus de liberdade em um nó.....	40
Figura 11 – Exemplo de configurações possíveis.	43
Figura 12 – Representação dos tipos de apoio.	44
Figura 13 – Tipos de lajes em função dos vínculos nas bordas.....	45
Figura 14 – Momentos Negativos em lajes isoladas.	46
Figura 15 – Vão livre e vão teórico.....	47
Figura 16 – Notação das tabelas de CZERNY.....	48
Figura 17 – Seção resistente das vigas levando em conta a laje.....	50
Figura 18 – Largura de mesa colaborante.	51
Figura 19 – Distância entre pontos de momento fletor nulo.	52
Figura 20 – Torção de equilíbrio, viga em balanço com carregamento excêntrico.	53
Figura 21 – Exemplo de torção de compatibilidade de laje com a viga de apoio.....	53
Figura 22 – Aproximação em apoios extremos.....	55
Figura 23 – Visão do pórtico tridimensional com as vinculações de pilares extremos e intermediários.....	55
Figura 24 – Concentração de esforços devido a apoio direto da laje sobre o pilar.	56
Figura 25 – Momento Negativo no interior de uma laje com canto vivo.	57
Figura 26 – Redistribuição do momento máximo sobre uma largura w	58
Figura 27 – Diagrama Momento Fletor - Curvatura de seção fissurada.	59
Figura 28 – Momento de plastificação conforme taxa de armadura.	60

Figura 29 – Momento de plastificação para taxa de armadura $A_s = 4,89$ cm^2	62
Figura 30 – Diagrama momento fletor - curvatura (bilinear).....	64
Figura 31 – Diagrama momento - curvatura de cálculo.....	65
Figura 32 – Configuração para aplicação de taxa de armadura em percentual.....	66
Figura 33 – Acesso configurações gerais Grelha não linear.	67
Figura 34 – Acesso comandos para aplicar plastificação.....	68
Figura 35 – Indicação no croqui de plastificação engaste (continuidade das lajes) e apoios.	69
Figura 36 – Indicação de barras da grelha equivalente apoiadas diretamente sobre pilares.	69
Figura 37 – Exemplo de porcentagem a plastificar no engaste, continuidade entre lajes – EBERICK V9.....	70
Figura 38 – Exemplo de planilha de cálculo da linha neutra e área de aço continuidade lajes.....	71
Figura 39 – Sequência de comandos para inserir rótula em um elemento de barra (SAP2000).....	73
Figura 40 – Comandos para aplicar momento de plastificação em uma barra e nó da grelha (SAP2000).....	74
Figura 41– Plastificação de pico de momento negativo na continuidade de Lajes (SAP2000).....	75
Figura 42 – Planta de Fôrma Pavimento 1 – Adaptado (CARVALHO,1994).....	77
Figura 43 – Tipos de Lajes.....	79
Figura 44 – Momentos Fletores de cálculo para lajes isoladas e compatibilizados, Modelo 1 – Tabela (BARES).....	80
Figura 45 – Momentos Fletores de cálculo para lajes isoladas e compatibilizados, Modelo 1 – Tabela (CZERNY).....	81
Figura 46 – Momentos negativos e positivos das lajes Modelo 2 (SAP2000-AG).	82
Figura 47 – Momentos negativos e positivos das lajes Modelo 2 (SAP2000-EF).....	83
Figura 48 – Momento de dimensionamento na direção “y” Modelo 2 (SAP2000-EF).....	85
Figura 49 – Momentos negativos e positivos das lajes Modelo 3.C1 (SAP2000-AG).	86
Figura 50 – Momentos negativos e positivos das lajes Modelo 3.C1 (EBERICK).....	87
Figura 51 – Momentos negativos e positivos das lajes Modelo 3.C1 (SAP2000 – EF).....	87

Figura 52 – Imagem ampliada encontro das lajes Modelo 3.C1 (SAP2000 - EF).....	88
Figura 53 – Detalhe das barras da grelha equivalente (Modelo 3 - Caso 1).....	90
Figura 54 – Momentos de dimensionamento das Lajes (Modelo 3 - Caso 1 - EBERICK).....	92
Figura 55 – Momento de dimensionamento das Lajes (Modelo 3 - Caso 2 - EBERICK).....	93
Figura 56 – Armadura continuidade das lajes (Modelo 3 - Caso 1 - EBERICK).....	94
Figura 57 – Configuração das bitolas das lajes.....	95
Figura 58 – Planilha de cálculo da linha neutra e área de aço continuidade lajes L1/L2 (V5B).....	96
Figura 59 – Limites de domínio de deformação na continuidade entre as lajes L1/L2.....	96
Figura 60 – Desenho esquemático de torção em viga.....	100
Figura 61 – Planilha de cálculo linha neutra e área de aço continuidade lajes L2/L3 (V5A).....	108
Figura 62 – Planilha de cálculo linha neutra e área de aço continuidade lajes L1/L2 (V5B).....	109
Figura 63 – Planilha de cálculo linha neutra e área de aço continuidade lajes: L2/L3 (V5A); L1/L2(V5B).....	111
Figura 64 – Detalhamento Armadura positiva e negativa Modelo 1 (Tabela).....	114
Figura 65 – Detalhamento Armadura positiva e negativa Modelo 7 ($x/d=0,45$).....	114
Figura 66– Detalhamento Armadura positiva e negativa linha neutra $x/d=0,35$	115
Figura 67 – Detalhamento Armadura positiva e negativa Modelo 9 ($x/d = 0,25$).....	115
Figura 68 – Variação do Momento de plastificação com linha neutra em $x/d \rightarrow 0,25; 0,35; 0,45; 0,697$	117
Figura 69 – Planta de Fôrma Pavimento 2 – Tutorial EBERICK (2004).....	118
Figura 70 – Esquema estrutural lajes isoladas - Pavimento 2.....	121
Figura 71 – Encontro das Lajes L3/ L5/ L7 e L5/L4 do MODELO 1- Pav. 2.....	123
Figura 72 – Resultados dos Momentos encontro das Lajes L3/ L5/ L7 e L5/L4 – Pavimento 2 – EF.....	124

Figura 73 – Momentos na continuidade das Lajes vigas V2, V3, V4, V6 e V7 (Mod. 2 – Pav. 2).....	126
Figura 74 – Momentos na continuidade das Lajes vigas V9, V12, V13 e V14(Mod. 2 – Pavt. 2).	127
Figura 75 – Dimensionamento elástico continuidade das Lajes – EBERICK – Pavimento 2.	128
Figura 76 – Engaste e Apoio a Plastificar – EBERICK – Pav. 2.....	129
Figura 77 – Grelha 3D SAP2000 – Pontos de concentração de esforços continuidade lajes – Pavimento 2.....	130
Figura 78 – Grelha 3D EBERICK – Pontos de concentração de esforços continuidade lajes – Pavimento 2.....	131
Figura 79 – Negativos a plastificar continuidade lajes EBERICK – Pav. 2.	132
Figura 80 – Momentos na continuidade das Lajes vigas V4, V7, V12 e V14(Mod. 3 – Pav. 2).	133
Figura 81 – Dimensionamento plástico continuidade das Lajes – EBERICK – Pav. 2.	134
Figura 82 – Dimensionamento elástico armadura positiva das Lajes – EBERICK – Pav. 2.	136
Figura 83 – Dimensionamento plástico armadura positiva das Lajes – EBERICK – Pavimento 2.	137
Figura 84 – Momentos positivos e negativos EBERICK e SAP2000 das lajes L9 e L10 – Pav. 2.....	138
Figura 85 – Armação positiva das lajes Pavimento 2 – Modelo 1 (EBERICK).....	140
Figura 86 – Armação negativa das lajes Pavimento 2 – Modelo 1 (EBERICK).....	141
Figura 87 – Armação positiva das lajes Pavimento 2 – Modelo 2 (EBERICK).....	142
Figura 88 – Armação negativa das lajes Pavimento 2 – Modelo 2 (EBERICK).....	143
Figura 89 – Armação positiva das lajes Pavimento 2 – Modelo 3 (EBERICK).....	144
Figura 90 – Armação negativa das lajes Pavimento 2 – Modelo 3 (EBERICK).....	145

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Momento Fletor Solicitante Característico (BARES).....	80
Tabela 2 – Momento Fletor Solicitante Característico (CZERNY).....	81
Tabela 3 – Comparativo de momentos positivos não compatibilizados Modelo 1 – Tabelas (kNm/m).....	84
Tabela 4 – Momentos positivos de alguns modelos EBERICK (kNm/m).	112
Tabela 5 – Taxas de Armadura Continuidade entre lajes (cm ² /m).....	116
Tabela 6 – Tipos de lajes e cargas do Pavimento 2.....	119
Tabela 7 – Comparativo entre resultados de lajes isoladas modelos numéricos e com auxílio de tabelas Pav. 2.....	122
Tabela 8 – Comparativo de resultados, momentos negativos Modelo 2 – Elástico e Modelo 3 – Plástico, Pavt. 2.....	135
Tabela 9 – Comparativo resultados de momentos positivos Modelo 2 – Elástico e Modelo 3 – Plástico, Pavt. 2.....	137
Tabela 10 – Resultados de momentos positivos Modelo 2 – Elástico e Modelo 3 – Plástico, Pavt. 2.....	139
Tabela 11 – Taxa de armadura negativa adotada nos Modelos 1, 2 e 3.	146
Tabela 12 – Taxa de armadura positiva adotada nos Modelos 1, 2 e 3.	147

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Momentos não compatibilizado continuidade LAJES – (VIGA-V5) Modelo 2.....	83
Gráfico 2 – Momentos não compatibilizado continuidade LAJES – (VIGA-V2) Modelo 2.....	84
Gráfico 3 – Momentos na continuidade das Lajes sobre a viga V5 (Caso 1- malha 25x25cm).....	88
Gráfico 4 – Momentos na continuidade das Lajes sobre a viga V5 (Caso 2 – malha 50x50cm).....	89
Gráfico 5 – Momentos na continuidade L1/L3 sobre a viga V2 (Modelo 3 – Caso 1).	91
Gráfico 6 – Momentos na continuidade das Lajes sobre a viga V5 (Modelo 4 – Caso 1).....	98
Gráfico 7 – Momentos na continuidade das Lajes sobre a viga V5 (Modelo 4 – Caso 2).....	99
Gráfico 8 – Momentos na continuidade das Lajes sobre a viga V5 (Modelo 5 – Ponto).	101
Gráfico 9 – Momentos na continuidade das Lajes sobre a viga V5 (Modelo 6A – 50cm).....	102
Gráfico 10 – Momentos na continuidade das Lajes sobre a viga V5 (Modelo 6B – 100 cm).	103
Gráfico 11 – Momentos na continuidade das Lajes sobre a viga V5 (Modelo 6C).....	104
Gráfico 12 – Momentos na continuidade das Lajes sobre a viga V5 (Modelo 6D).....	105
Gráfico 13 – Momentos na continuidade das Lajes sobre a viga V5 (Modelo 7).....	106
Gráfico 14 – Momentos na continuidade das Lajes sobre a viga V5 (Modelo 8).....	107
Gráfico 15 – Momentos na continuidade das Lajes sobre a viga V5 (Modelo 9).....	110
Gráfico 16 – Momentos na continuidade das Lajes L1/L3 sobre a viga V5 (Modelo 10).....	113

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	23
1.1	JUSTIFICATIVA	24
1.2	OBJETIVOS.....	25
1.2.1	Objetivo Geral	25
1.2.2	Objetivos Específicos.....	25
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	27
2.1	TEORIA DAS PLACAS	27
2.1.1	Teoria das placas em regime elástico	27
2.1.2	Equação diferencial da placa.....	27
2.1.3	Momentos Volventes	30
2.2	Analogia de grelha.....	34
2.3	Método dos Elementos Finitos	38
2.4	Teoria das linhas de plastificação.....	41
2.5	Modelagem de painéis de lajes.....	43
2.5.1	Tipologia Adotada	43
2.5.2	Modelos com auxílio de tabelas.....	44
2.5.3	Modelos computacionais	49
2.5.4	Largura colaborante da Laje.....	50
2.5.5	Rigidez à torção das vigas de apoio das lajes	52
2.5.6	Vinculação de vigas com os pilares	54
2.6	Concentração e Redistribuição de esforços	56
2.7	Análise não linear	61
3	MATERIAIS E MÉTODOS	63
3.1	EBERICK.....	63
3.2	SAP2000.....	72
3.3	Pavimentos Adotados e Resultados	76
3.3.1	Pavimento 1.....	76
3.3.2	Pavimento 2.....	118
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	149

4.1	CONSIDERAÇÕES FINAIS	149
4.2	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	150
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	151
	APÊNDICE A – Acréscimo da taxa de armadura negativa	
	Incluindo os momentos volventes.....	155
	Pavimento 1.....	155
	Pavimento 2.....	156
	ANEXO A – Tabelas de BARES.....	157
	ANEXO B – Tabelas de CZERNY	162

1 INTRODUÇÃO

Normalmente os projetos estruturais têm como base, uma análise elástica linear, na qual os resultados dos esforços atuantes nas lajes e nos demais elementos que compõem a estrutura são utilizados para o cálculo e o dimensionamento de suas peças. Esses projetos atualmente são fundamentados, na grande maioria, em modelos computacionais, que podem causar concentrações de esforços em determinados pontos, principalmente nas lajes, provocando picos de momento, tornando o cálculo e o dimensionamento das peças estruturais pouco econômicos.

As análises estruturais com base no comportamento elástico linear – principalmente em lajes em que não se considera o comportamento plástico das seções transversais – têm nos casos mais usuais bons resultados, desde que não haja bordas reentrantes nas lajes e em suas vigas de contorno. Em casos de reentrâncias das bordas ou de lajes apoiando-se diretamente sobre os pilares, podem ocorrer elevadas concentrações de momentos, que em geral são negativos.

Durante muitos anos, os cálculos estruturais de lajes maciças em concreto armado eram manuais e auxiliados por tabelas. Esses cálculos apresentavam e ainda apresentam resultados que podem ser usados. Hoje eles servem de auxílio ao Engenheiro Estrutural, para que tenha uma noção de ordem de grandeza dos esforços obtidos por meio dos métodos computacionais, já que essas soluções podem distanciar-se muito do comportamento real da estrutura por eventuais pontos que podem surgir às concentrações de esforços. Por outro lado, um dimensionamento com o método das charneiras plásticas ou teoria das linhas de ruptura obtém resultados no dimensionamento plástico para modelos regulares, porém necessita de estudos de várias configurações, com ruínas diversas – fato que tem dificultado sua inserção computacional.

Atualmente alguns *softwares* comerciais destinados ao cálculo de estruturas em concreto armado possibilitam aos usuários a consideração de plastificação nas regiões de apoio. Na prática esse recurso é muitas vezes ignorado, seja por desconhecimento da ferramenta e de suas utilidades ou pelo fato de ser mais ágil, em uma primeira análise, dimensionar as peças estruturais no regime elástico. As concentrações elevadas de esforços podem surgir em pequenos trechos da estrutura, e o dimensionamento usando-se esses picos de momentos onera o modelo de estrutura adotado.

No dimensionamento plástico, sem dúvida há economia significativa em relação ao dimensionamento elástico linear, como no caso da teoria das linhas de ruptura, porém maiores cuidados devem ser tomados quanto à verificação no Estado Limite de Serviço e quanto à ductilidade das peças, para atender às prescrições normativas.

1.1 JUSTIFICATIVA

Os sistemas computacionais surgiram para auxiliar os engenheiros no cálculo de estruturas, e hoje seus avanços são consideráveis. Em modelos mais refinados podem ser obtidos resultados muito próximos ao comportamento real da estrutura. As soluções numéricas, como por exemplo, o Método de Elementos Finitos ou processo de Analogia de Grelha, implantadas em sistemas computacionais, obtêm-se os esforços e deslocamentos em estruturas mais complexas. Esses esforços e deslocamentos podem estar coerentes ou não. Uma leitura dos resultados de forma equivocada induz a projetos estruturais onerosos em vários casos, mesmo que a favor da segurança. Em outros, por resultarem subdimensionados, podem até levar a estrutura ao colapso.

Os cálculos estruturais manuais de lajes, aplicados durante muito tempo com auxílio de tabelas e ábacos, hoje podem, servir para validação dos modelos computacionais. Ainda existem várias obras antigas, com suas estruturas calculadas de forma manual, que permanecem em bom estado. Enquanto os modelos computacionais, com estruturas em três dimensões, mesmo com uma avaliação integrada entre os elementos estruturais, com melhor precisão nas soluções, dependendo da forma como são feitas as leituras, dos modelos estruturais numéricos, podem apresentar resultados coerentes ou não. É necessária então uma leitura mais cuidadosa pelo projetista estrutural quanto aos resultados obtidos.

Devido ao constante avanço tecnológico, os cálculos estruturais com simulações numéricas em modelos computacionais são amplamente aplicados hoje. E nesse contexto, de forma geral, as estruturas exigem um refinamento melhor das análises, principalmente a análise não linear, minimizando e redistribuindo os esforços onde surgem concentrações elevadas destes, em pontos específicos das estruturas em concreto armado e sempre a favor da segurança e com economicidade.

Pretende-se expor estudos e proposições de soluções nas análises não lineares de alguns modelos estruturais que apresentam concentrações de esforços na continuidade entre lajes, bem como

procedimentos que possam ser empregados em projetos estruturais com dimensionamentos mais econômicos e a favor da segurança. Principalmente em lajes maciças, com indicações em especial aos projetistas de estruturas de concreto armado.

1.2 OBJETIVOS

Diante do possível surgimento de concentrações de esforços em pontos de continuidade entre lajes de concreto armado, esta pesquisa tem os objetivos descritos a seguir.

1.2.1 Objetivo Geral

O objetivo geral desta pesquisa tem como base estudos quanto ao comportamento e dimensionamento das lajes maciças em concreto armado, fazendo uso de modelos computacionais, com plastificação de regiões variáveis onde há concentrações de esforços na continuidade dessas lajes.

1.2.2 Objetivos Específicos

- Estudar e analisar as concentrações de esforços;
- Analisar e estudar o efeito da modelagem nas concentrações de esforços;
- Estudos quanto aos recursos existentes nos programas computacionais para plastificação;
- Estudos e verificações dos métodos para reduzir os picos de momentos fletores nas malhas de maneira a dimensionar os elementos estruturais com uma análise não linear;
- Estudos do comportamento de dois pavimentos didáticos;
- Proposição de soluções para esses casos em projetos estruturais usuais.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 TEORIA DAS PLACAS

2.1.1 Teoria das placas em regime elástico

Define-se placa como um elemento estrutural plano, laminar e simétrico em relação ao seu plano médio. As placas geralmente são posicionadas na horizontal, com uma dimensão bem menor que suas outras duas, sendo essa menor dimensão denominada altura “h” ou espessura da placa, onde a grande maioria das lajes finas estão incluídas.

Sua principal função é receber cargas perpendiculares à superfície, podendo ser equipamentos, pessoas, carros, etc. Essas cargas atuantes nas placas em concreto armado são transmitidas aos respectivos apoios, que podem ser alvenarias, vigas ou diretamente sobre os pilares. A partir destes, o carregamento é transferido para as fundações, que por sua vez o transmitem ao solo.

A teoria das placas delgadas ou de Kirchhoff encontra-se com mais detalhes em TIMOSHENKO (1959). Dentro dos princípios da elasticidade, essa teoria, com base nas equações de equilíbrio e compatibilidade de deslocamentos de um elemento infinitesimal, pode apresentar soluções, e com as operações matemáticas obtém-se a equação fundamental de Sophie-Lagrange, que rege o problema de placas submetidas a uma carga unitária “p”, distribuída uniformemente.

Neste trabalho serão apresentados de forma sucinta os fundamentos da teoria das placas e noções sobre os principais processos de cálculo.

2.1.2 Equação diferencial da placa

A teoria das placas delgadas ou de Kirchhoff tem como base a teoria da elasticidade, devendo-se considerar algumas hipóteses simplificadoras, admitindo-se que: o material da placa é homogêneo e isotrópico, com comportamento elástico linear, obedecendo à lei de Hooke; as deflexões são pequenas em relação à espessura da placa; as tensões normais à superfície média são desprezíveis em relação às demais tensões; a altura “h” da laje é pequena e constante, em relação às demais dimensões; pontos da superfície média após a deformação encontram-se sobre retas perpendiculares à superfície média deformada; os deslocamentos são muito pequenos em relação à espessura “h”, podendo ser desprezada sua influência no estudo das condições de

equilíbrio do elemento da placa.

Conforme CARVALHO (2007), propondo facilitar a aplicação das condições de contorno para obtenção dos esforços, podem ser feitas outras considerações:

- Que os esforços nos apoios, ou seja, nas vigas de contorno, sejam unicamente por meio de forças verticais às placas, não tendo transmissão de momentos de torção para as vigas;
- As ações das placas nas vigas são uniformemente distribuídas, sem variações bruscas no carregamento, e não há transmissão de carga diretamente para os pilares; as cargas nas placas são transferidas para as vigas e estas, então, transferem-nas para os pilares, que por sua vez transferem essas cargas para a fundação;
- Para os apoios das placas, as vigas de contorno são consideradas apoios indeslocáveis na direção vertical;
- A rotação das placas no contorno é considerada livre, quando apoio simples, ou totalmente impedida, quando engastada.

Partindo das equações de equilíbrio, das leis constitutivas do material e das relações entre os deslocamentos e as deformações, fazendo-se as operações matemáticas, obtém-se a equação fundamental que rege o problema das placas, uma equação diferencial de quarta ordem, junto com as condições de contorno submetidas a uma carga $p(x,y)$, denominada equação de Sophie-Lagrange, conforme:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = - \frac{p(x,y)}{D} \quad (1)$$

Em que:

w – deslocamento vertical;

x,y – coordenadas de um ponto genérico da placa;

p – intensidade da carga atuante.

$$D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \quad (2)$$

Sendo:

D – rigidez à flexão da placa;

E – módulo de deformação longitudinal do concreto;

ν – Coeficiente de Poisson.

Em uma placa delgada, com as cargas normais ao seu plano, os deslocamentos verticais w podem ser definidos por meio da função $w(x,y)$ dos pontos (x,y) do plano médio dela, admitindo-se, portanto, que os pontos do referido plano médio só sofrem deslocamentos verticais e que retas normais ao plano médio permanecem normais à superfície média deslocada.

Então é possível expressar as tensões e os esforços que aparecem na placa em função dos deslocamentos verticais w , conforme:

$$m_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (3)$$

$$m_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (4)$$

$$m_{xy} = -D(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (5)$$

$$V_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (6)$$

$$V_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (7)$$

Sendo:

m_x = momento fletor na direção x (em torno do eixo y) por unidade de comprimento;

m_y = momento fletor na direção y (em torno do eixo x) por unidade de comprimento;

m_{xy} = momento torsor por unidade de comprimento;

V_x = esforço cortante na direção x por unidade de comprimento;

V_y = esforço cortante na direção y por unidade de comprimento.

Na maioria dos casos as obtenções dos momentos fletores em lajes de concreto armado pela teoria da elasticidade manualmente seriam de muito trabalho, sendo necessário optar, nos casos mais gerais, por

expansões de séries de Fourier, como a solução de Lévy e Navier, ou por métodos numéricos para resolver a Equação (1), como elementos finitos.

A Equação (1) é uma equação diferencial de quarta ordem, na qual a solução consiste em encontrar uma expressão para a placa deformada que satisfaça ao mesmo tempo as condições de contorno e a equação diferencial da superfície. Para lajes retangulares com relação entre os lados menor que 2, existem diversas tabelas que podem ser usadas. Dentre elas as de CZERNY (1976) e as de BARES (1972).

Essas tabelas geralmente auxiliam nos cálculos de placas com apoios livres, simples ou engastados. Porém esses apoios são considerados indeslocáveis, e a flexibilidade das vigas é desprezada, além de não haver transferência dos momentos de torção das placas para as vigas, podendo causar discrepância entre os resultados.

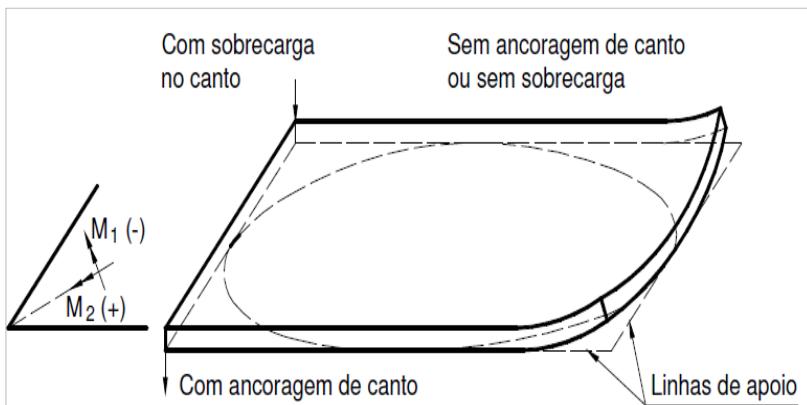
A obtenção dos esforços por meio de cálculos manuais para estruturas mais complexas é muito trabalhosa e demanda um tempo maior para alcance dos resultados.

Porém, o uso de métodos numéricos em sistemas computacionais para cálculo de estruturas avançou consideravelmente nos últimos tempos, sendo possível, por meio desses métodos, obter resultados de esforços e deslocamentos e considerar os deslocamentos verticais dos apoios, fazendo cálculos de lajes de diversos formatos, de condições de contorno e estruturas mais complexas. Assim, são mais aplicáveis do que os processos manuais, uma vez que nas tabelas, além de considerarem os apoios indeslocáveis, os momentos de torção das placas não são levados em conta.

2.1.3 Momentos Volventes

Em Lajes retangulares com cantos apoiados existe a tendência de levantamento de suas extremidades quando submetidas a carregamento no centro, conforme Figura 1.

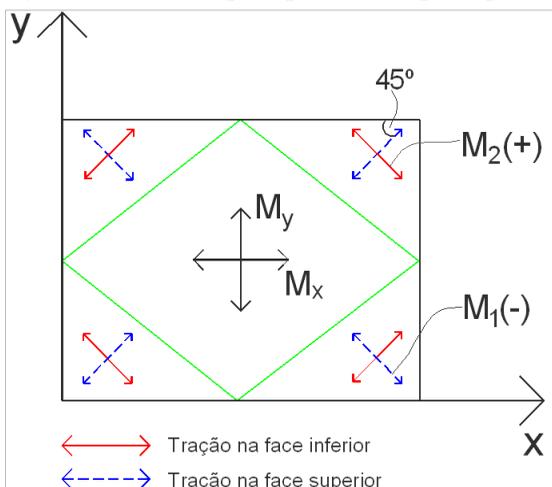
Figura 1 – Laje retangular com apoios simples nos quatro lados.



Fonte: (BASTOS, 2015).

Quando essas lajes estão vinculadas em suas bordas, nas vigas ou pilares de canto, o levantamento fica impedido pelos apoios de bordas, surgindo, nos cantos, momentos fletores negativos, que causam tração no lado superior da laje na direção da diagonal, e positivos, na direção perpendicular à diagonal, que causam tração no lado inferior da laje, conforme Figura 2.

Figura 2 – Momentos principais em uma placa quadrada com carga central.

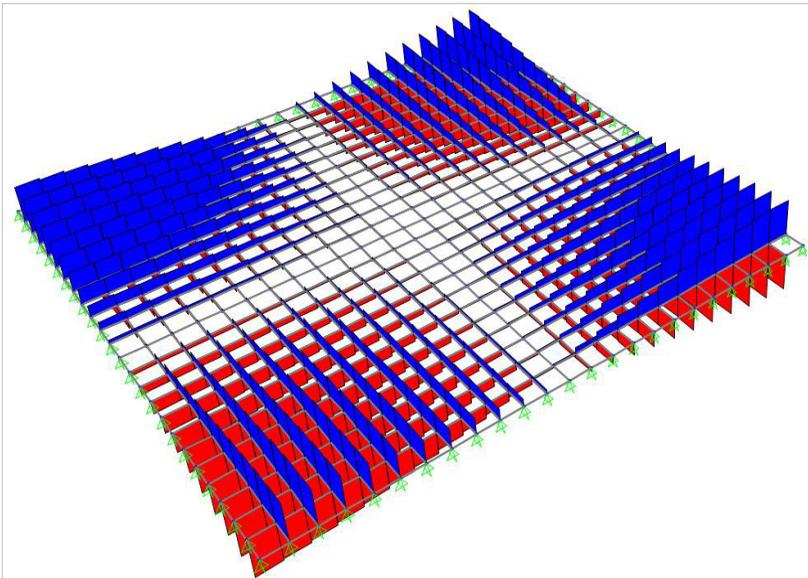


Fonte: Adaptado de Araújo (2003).

Esses momentos nos cantos são principais, devido aos momentos volventes elevados nessa região. A

Figura 3 ilustra os momentos torsores ao longo de uma laje simplesmente apoiada em suas bordas, onde estes momentos são máximos nos cantos próximo aos apoios.

Figura 3 – Momentos volventes (kNm/m) em uma placa quadrada simplesmente apoiada com carga central (SAP2000-AG).



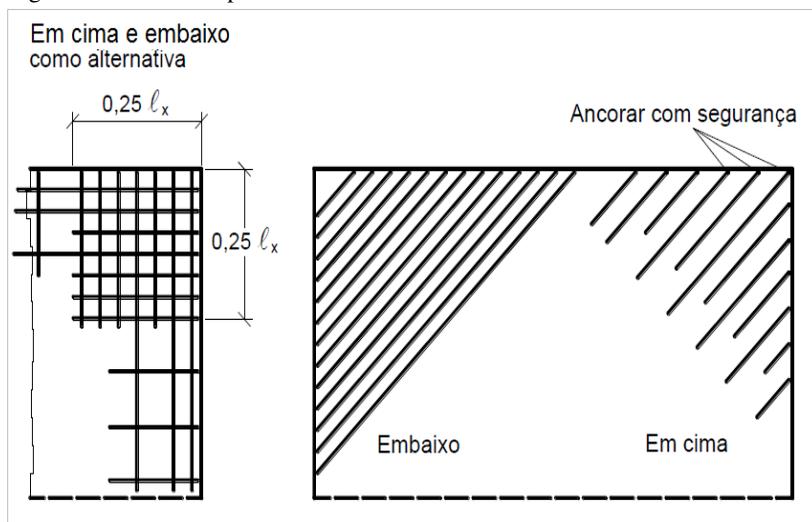
Fonte: O autor.

No canto onde os momentos torsores são máximos, os momentos fletores são mínimos, enquanto no meio da laje os momentos torsores são mínimos e os fletores são máximos.

De acordo com ARAÚJO (2003), nos cantos de uma laje quadrada simplesmente apoiada com carga uniforme é necessário prever uma armadura superior para absorver o momento torsor da face superior dessa laje, sendo colocadas nela, convenientemente, as armaduras. A

Figura 4 mostra uma alternativa que pode ser adotada para distribuição das armaduras dos momentos volventes.

Figura 4 – Armadura para os momentos volventes nos cantos.



Fonte: (BASTOS, 2015).

No dimensionamento de lajes em concreto armado, para armadura de flexão, é importante conhecer os momentos principais que ocorrem na laje. Existem vários procedimentos para correção desses momentos fletores contabilizando os momentos volventes.

Segundo PARSEKIAN (1996), a partir de valores de momentos fletores e volventes (M_x , M_y e M_{xy}), pode-se calcular os valores dos momentos principais e acomodar as armaduras, seguindo as direções principais dos momentos. Porém essa maneira não é muito prática, e além de ser ineficiente, sendo que em cada ponto das lajes existem duas direções principais perpendiculares diferentes. Parte desse momento volvente é absorvida pelo concreto, sendo necessário conhecimento de qual a máxima tensão de cisalhamento de torção a ser resistido pelo concreto.

Um dos procedimentos desenvolvidos e usados em alguns programas comerciais, nos elementos em que predominem os esforços de flexão, considerando os momentos torsores, é o método de WOOD e ARMER (1968), que contabiliza os momentos volventes no dimensionamento da armadura nas direções principais, a partir do equilíbrio dos esforços na placa.

O método desenvolvido por Wood e Armer consiste em obter o momento equivalente, considerando o momento tursor e definindo um

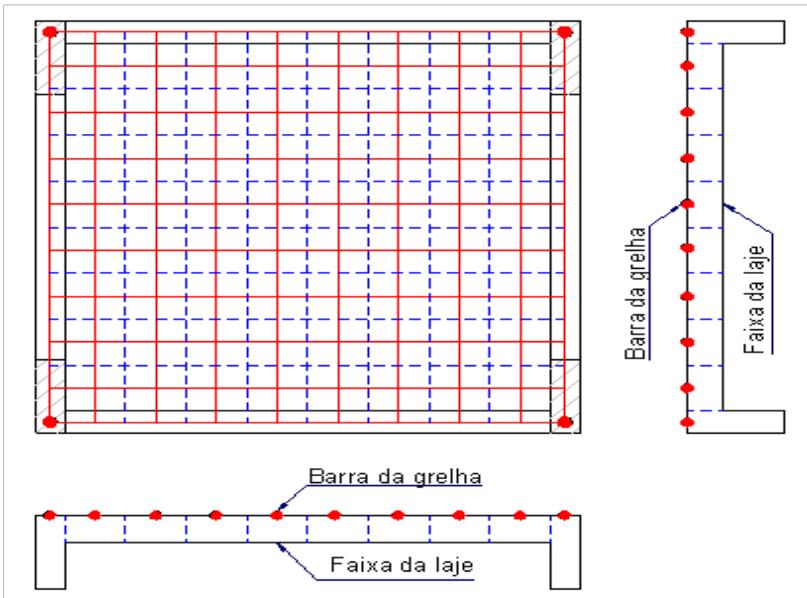
momento equivalente nas direções principais x e y . Dessa forma, obtêm-se os momentos fletores equivalentes, para os quais serão calculadas as armaduras em cada uma das direções.

Assim o momento equivalente é formado de maneira simplificada pelo momento fletor atuante, acrescido do módulo do momento torsor. Esse método é eficaz na contabilização dos esforços, chegando-se a momentos equivalentes que contemplam o efeito de torção da laje.

2.2 ANALOGIA DE GRELHA

O processo de analogia de grelha consiste em um procedimento de cálculo dos esforços e deslocamentos em lajes ou pavimentos de edifícios. O procedimento de análise de pavimentos ou lajes por analogia de grelha parte do pressuposto de subdivisões dos elementos estruturais em faixas de elementos de barra, cujas propriedades físicas e geométricas passam a ser representadas por meio de um reticulado de barras que compõem a grelha conforme Figura 5.

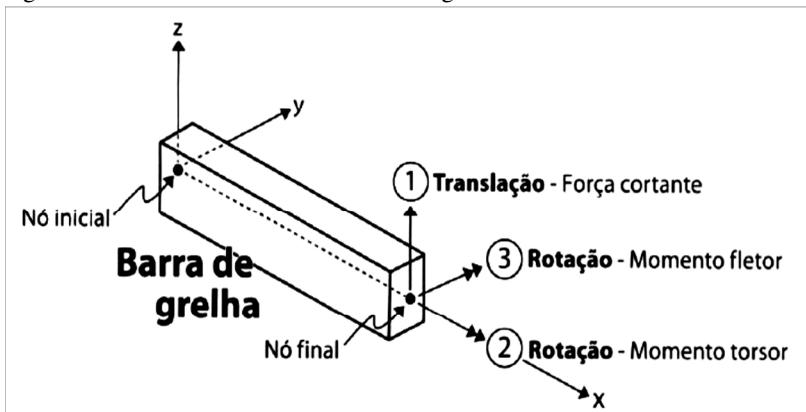
Figura 5 – Modelagem de grelha.



Fonte: (EBERICK, 2014).

Em cada intersecção entre as barras define-se um nó com três graus de liberdade, um de translação na direção do eixo z e dois de rotações, um em torno do eixo x e outro em torno do eixo y , conforme Figura 6.

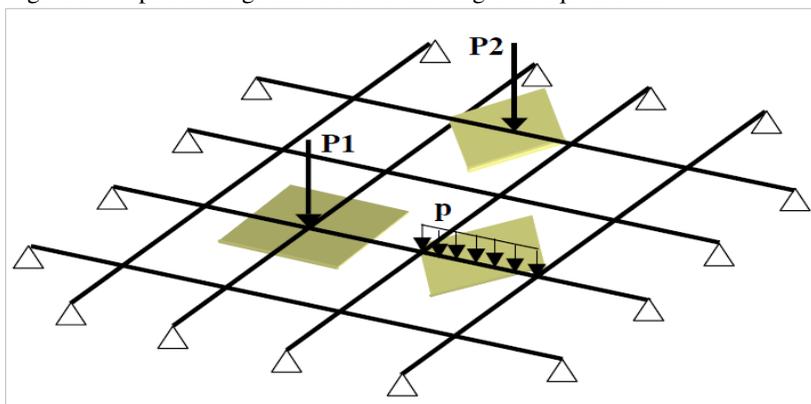
Figura 6 – Graus de liberdade de um nó de grelha.



Fonte: (KIMURA, 2007).

As cargas são distribuídas sobre as placas, podendo ficar divididas nas barras da grelha equivalente, conforme área de influência de cada parcela, ou uniformemente distribuídas ao longo dos elementos, ou ainda ficar concentradas nos nós ou sobre a barra, conforme Figura 7.

Figura 7 – Tipos de carga sobre elementos da grelha equivalente.



Fonte: (HENNRICH, 2003).

Considerando as rigidezes à torção e à flexão da placa, sendo sistemas estruturais diferentes, devido às suas características, são tratadas como rigidezes concentradas nas barras da grelha equivalente. Então essas rigidezes devem ter valores que, quando a estrutura real e a grelha equivalente estão submetidas ao mesmo carregamento, as duas estruturas se deformam de maneira idêntica e com os mesmos esforços internos.

Os esforços que atuam no modelo de grelha são proporcionais às rigidezes à flexão EI e à torção GJ_t , correspondentes das barras, que na matriz dessas barras equivalem aos parâmetros de rigidez. O módulo de elasticidade transversal G está relacionado com o módulo de elasticidade longitudinal E e com o coeficiente de Poisson ν . Para materiais isotrópicos homogêneos, a lei de Hooke generalizada possui apenas as seguintes constantes elásticas: E , ν e G . O módulo de elasticidade transversal é dado por:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \quad (8)$$

Segundo a NBR 6118:2014, o valor é de 0,2 para o coeficiente de Poisson e para o módulo de elasticidade transversal G_c igual à seguinte equação:

$$G_c = 0,4 \cdot E_{CS} \quad (9)$$

Outro parâmetro necessário para calcular a rigidez à torção de uma seção transversal de uma barra é o momento de inércia polar ou de torção, denominado aqui como J_t .

As barras da grelha com seção retangular e respectiva largura igual à largura das faixas e altura igual à espessura da placa, no caso das lajes, com os demais elementos estruturais mantendo suas respectivas dimensões. O momento de inércia à torção pode ser calculado conforme:

$$J_t = \beta \cdot h \cdot b^3 \quad (10)$$

Sendo:

$$\beta = \frac{1}{3} - \left(0,21 \frac{b}{h}\right) \cdot \left(1 - \frac{b^4}{12h^4}\right) \quad (11)$$

Em que:

b = menor dimensão da seção transversal;

h = maior dimensão da seção transversal.

Para situações em que as faixas possuem largura maior que a altura, o valor **b** será igual à espessura da faixa, e **h**, igual à largura da faixa. Quando as faixas passam a ter uma largura menor que a espessura da placa, essa situação inverte-se, o que, no presente trabalho, não ocorrerá.

Em função das mais variadas formas, condições de apoio e dimensões da laje original, é difícil estabelecer regras mais rigorosas para adequar uma malha melhor ao modelo. Entretanto, utilizando malhas com espaçamentos adequados e definindo as rigidezes de forma adequada, é possível obter valores razoáveis para os deslocamentos e esforços do pavimento.

Devido à grande sensibilidade no parâmetro de rigidez à torção, as análises por meio da Analogia de grelha, na prática, em vez de usarem a inércia à torção da barra da grelha na Equação (10), devido ao fato de a rigidez total à torção da placa não ser linear e diminuir significativamente para malhas pouco espaçadas, utiliza-se um fator proporcional à inércia à flexão para obter a inércia à torção, conforme:

$$J_t = \alpha \cdot I \quad (12)$$

Em que:

J_t = momento de inércia polar ou de torção da seção transversal;

α = coeficiente de ajuste da relação **J_t** e **I**;

I = momento de inércia da seção transversal.

No GAP (Grupo de Análise e projeto de Estruturas) da Universidade Federal de Santa Catarina, com alguns trabalhos desenvolvidos em nível de mestrado – entre eles COELHO (2000) e

STRAMANDINOLI (2003) –, estudou-se a influência do coeficiente “ α ” nos esforços e deslocamento das lajes, chegando-se à conclusão de que se pode considerar a inércia à torção como sendo o dobro da inércia à flexão.

Importante salientar que MONTROYA (1973) e HAMBLY (1976) já haviam sugerido modelar a placa como uma grelha, sendo possível substituí-la por uma malha de vigas nas duas direções, e a cada viga se atribui a inércia à flexão da faixa correspondente e a inércia à torção igual ao dobro de sua inércia à flexão.

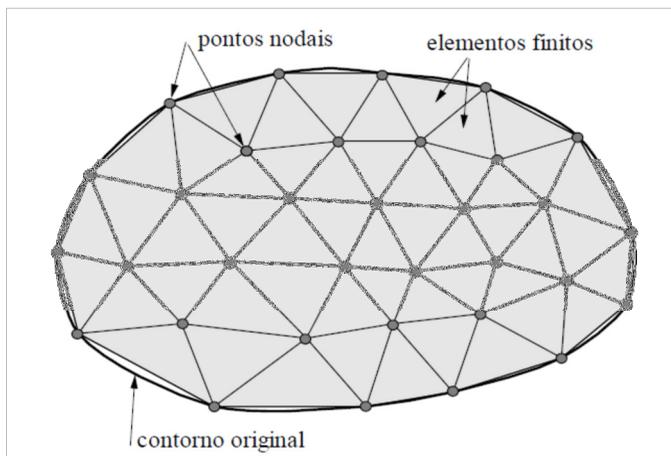
2.3 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é um dos métodos numéricos usados para resolver equações diferenciais. Teve sua origem na área da mecânica estrutural, expandindo para outras áreas da mecânica dos sólidos, transferência de calor, dinâmica dos fluidos e eletromagnetismo. Atualmente é reconhecido como uma poderosa ferramenta, podendo ser considerado um dos melhores métodos de análise estrutural, permitindo obter soluções para estruturas com geometrias irregulares e condições de contorno de forma mais abrangente. O método consiste em discretizar ou dividir a estrutura em partes ou elementos menores, denominados elementos finitos, em que as forças de ligação são consideradas concentradas entre os elementos.

Os elementos que compõem a estrutura podem ser um sistema estrutural reticulado, com uma estrutura formada por barras conectadas em suas extremidades com elementos nodais, ou um sistema contínuo, em que a estrutura é um corpo não dividido em sua extensão, sendo subdividido artificialmente por uma malha conectada entre si com elementos nodais, conforme Figura 8. Quanto maiores as subdivisões, melhores serão os resultados.

Mas um número muito elevado de elementos pode depender muito tempo na solução dos problemas e na obtenção dos resultados. Mesmo utilizando-se computadores mais modernos, seria necessário um maior tempo de resposta.

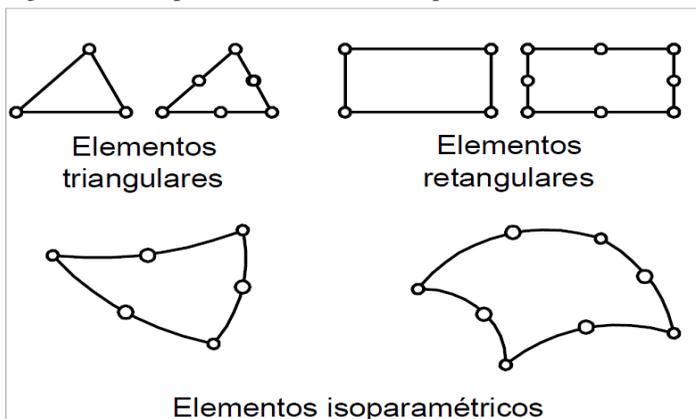
Figura 8 – Malha de Elementos Finitos.



Fonte: (SOUZA, 2003).

Segundo LA ROVERE (2002), o método dos elementos finitos consiste em dividir o domínio de integração do problema em um número discreto de regiões pequenas de dimensões finitas, denominadas elementos finitos. A Figura 9 apresenta alguns elementos finitos que, no caso bidimensional de placas e chapas, podem ser empregados.

Figura 9 – Exemplo de Elementos Finitos para análise bidimensional.

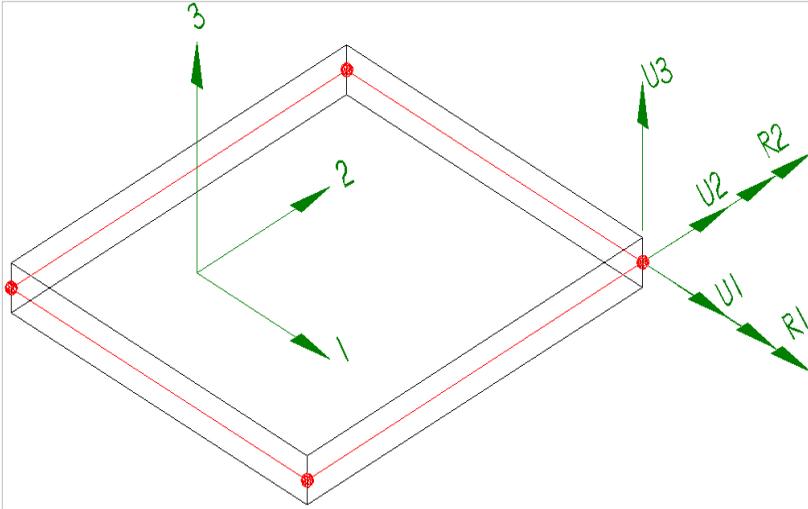


Fonte: (ARAÚJO, 2003).

Os elementos de placas possuem, em geral, de três a quatro nós, dependendo do formato das subdivisões das malhas. Em cada nó têm-se

cinco graus de liberdade, três de translação U_1 , U_2 e U_3 e dois de rotações R_1 e R_2 , conforme Figura 10.

Figura 10 – Detalhe de elemento finito retangular com representação dos graus de liberdade em um nó.



Fonte: Adaptado de HERNÁNDEZ.

Cada elemento finito está dimensionalmente estável, com cargas aplicadas de forma independente, perpendiculares ao plano ou nó de cada elemento. O comportamento de um elemento de placa é definido praticamente pelo número e posicionamento dos nós e pelo número de graus de liberdade por nó. O mesmo elemento finito com a mesma forma e o mesmo número de nós pode ser utilizado com diferentes graus de liberdade, dependendo da dimensão e do tipo do problema em questão.

Em problemas de mecânica dos sólidos, no caso de análise de tensões, os graus de liberdade dos nós correspondem aos possíveis movimentos que estes podem sofrer. Um exemplo de análise de tensão em um meio tridimensional apresenta três graus de liberdade por nó, ou seja, três de translação. Porém, em um caso plano, existem dois graus de liberdade por nó, ou seja, dois de translação. Esses movimentos ou deslocamentos dos nós são as incógnitas principais da análise.

A idealização do sistema estrutural das placas com subdivisões em elementos finitos tem solução mais complexa, devido à não existência física dos elementos com as ligações discretizadas. A

estrutura deve ser decomposta em elementos que passam a entrar em contato entre si nos nós, para obtenção dos esforços e deslocamentos, que serão, nesse caso, de maneira aproximada, convergindo para solução exata conforme o número de divisões de elementos.

2.4 TEORIA DAS LINHAS DE PLASTIFICAÇÃO

A teoria das linhas de ruptura, ou método das charneiras plásticas, surgiu por volta de 1930, sendo os momentos nas linhas de plastificação considerados momentos últimos plásticos a que a seção de concreto armado resiste. Essa teoria considera o equilíbrio da laje no momento que antecede a ruína, ou seja, no estado limite último.

O método das charneiras plásticas é um método de análise estrutural plástica em que a não linearidade dos materiais pode ser considerada, desde que eles tenham um comportamento rígido-plástico perfeito ou elasto-plástico perfeito que permita avaliar a carga de ruína de lajes de concreto armado, sendo as lajes com pequenas taxas de armadura, possibilitando uma elevada capacidade de rotações plásticas.

O método consiste em admitir que sob uma ação da carga de ruptura as lajes são particionadas em painéis girando em torno de linhas nas quais atuam momentos a que a laje resiste na ruptura, segundo a direção normal a essas linhas. Logo, sendo conhecida a posição das linhas de ruptura, a relação entre o momento de ruptura e a carga última da laje é obtida estabelecendo-se as condições de equilíbrio estático nos painéis limitados pelas linhas de ruptura e pelo contorno da laje.

As condições de contorno podem ser feitas através dos princípios dos trabalhos virtuais, estabelecendo a igualdade entre o trabalho da carga última e o trabalho dos momentos ao longo das linhas de ruptura para uma deformação atribuída à laje na ruptura. Essa deformação se realiza como se houvesse rótulas ou charneiras ao longo das linhas de ruptura. Na configuração de ruptura a laje forma um mecanismo ou cadeia cinemática.

O método não permite analisar o comportamento da laje nas condições de utilização, o que é uma das desvantagens em relação à teoria das placas no regime elástico. Além disso, faz-se necessário preestabelecer relações entre os momentos de ruína. Caso essas relações sejam muito diferentes daquelas obtidas pela teoria da elasticidade, o comportamento da laje sob as cargas de utilização será insatisfatório. Porém, atualmente, alguns resultados dessa teoria ainda são bastante empregados, principalmente para o cálculo das reações de apoio nas lajes.

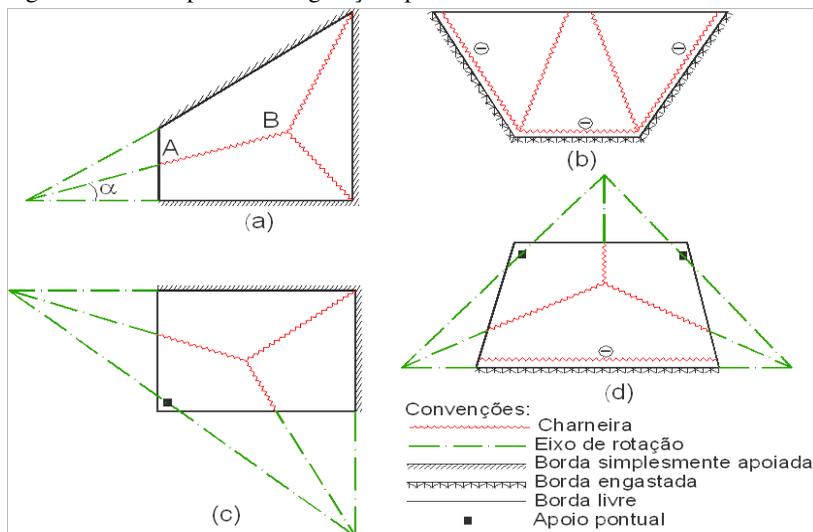
Segundo LORIGGIO et. al. (2013), para determinação da carga última, um dos primeiros passos seria determinar um padrão para as linhas de ruptura fazendo uso de algumas regras:

- As linhas de plastificação devem ser linhas retas, formando eixos de rotação para o movimento do segmento plano em um mecanismo de colapso;
- Nos apoios das placas que atuarão como eixos de rotação, caso um lado seja engastado, nesse apoio pode se formar uma linha de plastificação;
- Por compatibilidade de deformação, uma linha de plastificação deverá passar pela intersecção do eixo de rotação de segmentos adjacentes da laje;
- Poderá existir mais de uma família de linhas de ruptura para uma laje em particular devido ao fato de que os padrões de plastificação contêm dimensões desconhecidas;
- Se o padrão crítico não for considerado, a carga última estará contra a segurança. Nesse caso o projetista deve ter certeza de que todos os padrões de linhas de ruptura tenham sido considerados, já que o padrão correto é aquele que resultará na menor carga última;
- A carga última pode ser obtida por meio de um padrão de linhas de ruptura, podendo ser usado o princípio dos trabalhos virtuais ou as equações de equilíbrio.

Para uma escolha correta da posição das linhas de ruptura, e uma menor carga, faz-se necessário analisar todas as configurações possíveis para as charneiras plásticas.

Segundo PINHEIRO (1980), para cada caso existe um conjunto de configurações possíveis, para encontrar o momento de plastificação.

Figura 11 – Exemplo de configurações possíveis.



Fonte: Adaptado de Pinheiro (1980).

Na primeira charneira, do lado esquerdo da Figura 11, as configurações possíveis dependem do ângulo α , que define a direção da charneira AB, e também do ponto B, onde ocorre a divisão em duas charneiras.

2.5 MODELAGEM DE PAINÉIS DE LAJES

2.5.1 Tipologia Adotada

As lajes são elementos estruturais planos, geralmente horizontais, com duas dimensões muito maiores que a terceira. A principal função das lajes é receber os carregamentos atuantes sobre elas, provenientes do uso, tais como pessoas, equipamentos, etc. Geralmente essas cargas são perpendiculares ao plano da laje. Além da carga permanente, recebem as ações de uso, que podem ser distribuídas sobre uma área, distribuídas linearmente ou concentradas. Com as reações, podem ser transferidas para as vigas de apoio nas bordas da laje.

As lajes maciças no Brasil, apoiadas em suas bordas, variam de 7 cm a 15 cm. A NBR 6118:2014 especifica que nas lajes maciças devem ser respeitados limites mínimos para a espessura, e seguem algumas espessuras mínimas:

- a. 7 cm para cobertura não em balanço;
- b. 8 cm para lajes de piso não em balanço;
- c. 10 cm para lajes em balanço;
- d. 10 cm para lajes que suportem veículos de peso total menor ou igual a 30 kN;
- e. 12 cm para lajes que suportem veículos de peso total maior que 30 kN.

No presente trabalho adotam-se lajes maciças apoiadas em vigas, sendo esse tipo de laje bastante aplicado e comum em construções variadas, como edifícios de múltiplos andares, obras de grande porte, indústrias, hospitais, pontes, etc. As lajes maciças têm em sua composição concreto contendo armaduras longitudinais de flexão e eventualmente armaduras transversais. Seus apoios em geral são vigas ou paredes ao longo das bordas, mas existem aquelas que têm algumas de suas bordas livres ou apoiando-se diretamente sobre os pilares.

2.5.2 Modelos com auxílio de tabelas

O uso de tabelas para obter os esforços de flexão ou deslocamentos nas lajes faz uma idealização teórica dos apoios de borda. Considera-se borda simplesmente apoiada quando não há continuidade entre lajes; já as bordas engastadas são as que apresentam continuidade entre as lajes. A borda livre é caracterizada por não ter apoio, apresentando deslocamentos verticais, enquanto nos outros dois tipos de vinculação não há deslocamentos verticais. Nas bordas engastadas, além de impedirem os deslocamentos, as rotações também são impedidas, como no caso de lajes que apresentam continuidade, sendo o engastamento destas promovido pela laje adjacente, conforme simbologia apresentada na Figura 12.

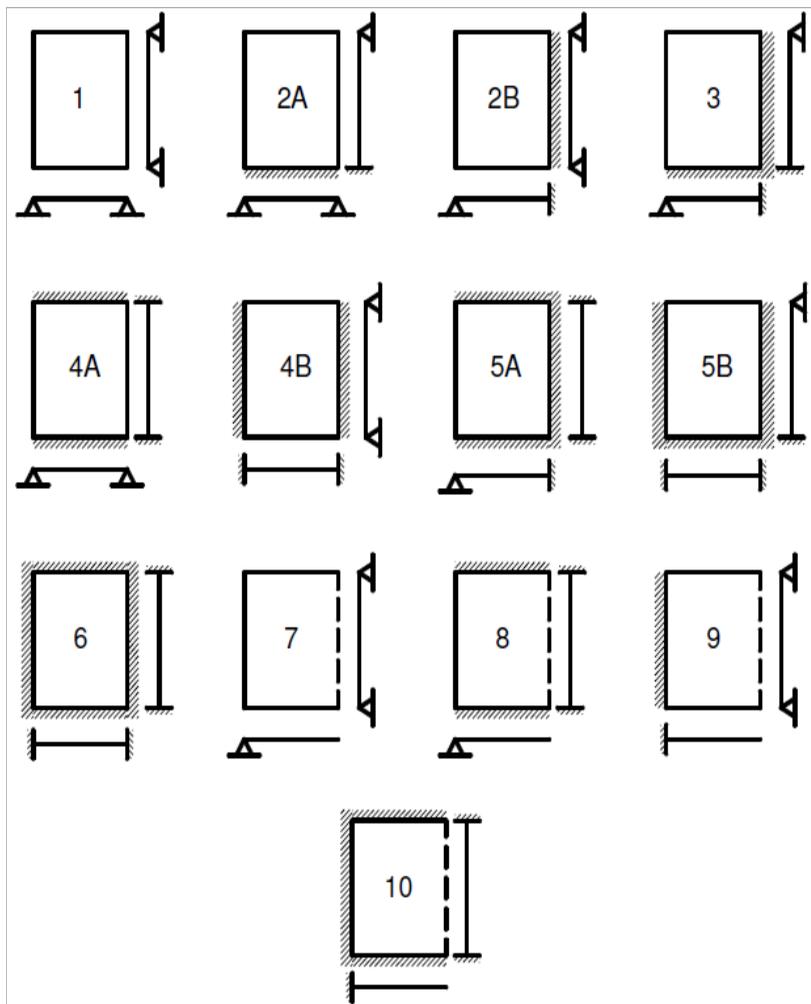
Figura 12 – Representação dos tipos de apoio.

Borda livre	Borda simplesmente apoiada	Borda engastada
-----	—————	// // // // //

Fonte: (LIBÂNIO, 2007).

Existem várias combinações possíveis de vínculos para as quatro bordas de lajes retangulares. Elas recebem números que diferenciam as combinações de vínculos nas bordas, como indicado na Figura 13.

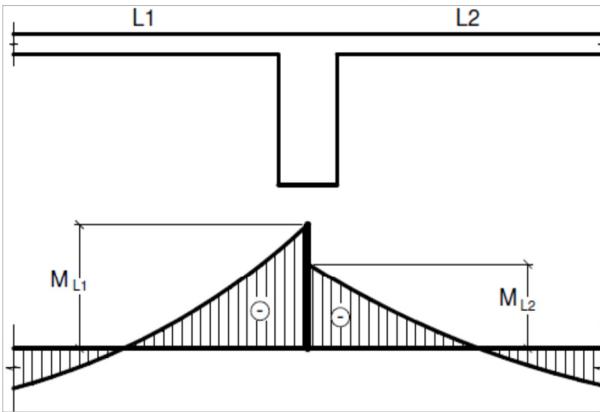
Figura 13 – Tipos de lajes em função dos vínculos nas bordas.



Fonte: (BASTOS, 2015).

Nos apoios intermediários das lajes, surgem nos engastes momentos fletores negativos, devido à continuidade das lajes, e estes, quando se consideram as lajes isoladas umas das outras, em muitos casos são diferentes entre si, devido ao cálculo isolado, conforme Figura 14.

Figura 14 – Momentos Negativos em lajes isoladas.



Fonte: (BASTOS, 2015).

A NBR 6118:2014 permite que seja feita uma compatibilização dos momentos fletores negativos quando há predominância de cargas permanentes. As lajes vizinhas podem ser consideradas isoladas, compatibilizando momentos sobre os apoios de forma aproximada.

Um processo de compatibilização, em que o momento fletor negativo X é compatibilizado com os momentos M_{L1} e M_{L2} pode ser adotado, conforme Equação (13).

$$X \geq \begin{cases} 0,8 \cdot M_{L1} \\ \frac{M_{L1} + M_{L2}}{2} \text{ com } M_{L1} \geq M_{L2} \end{cases} \quad (13)$$

Faz-se necessário corrigir e aumentar os momentos positivos nas duas direções, com a variação dos momentos, conforme Equação (14) e Equação (15). Essa correção somente será realizada se o momento positivo sofrer acréscimo, caso contrário permanece inalterado. A variação de momentos corresponde à metade do valor da diferença entre o momento compatibilizado X e o momento negativo da laje, calculando-se isoladamente M_{L1} ou M_{L2} , sendo:

$$\Delta M_{L1} = \left(\frac{M_{L1} - X}{2} \right) \rightarrow \text{para } L1 \quad (14)$$

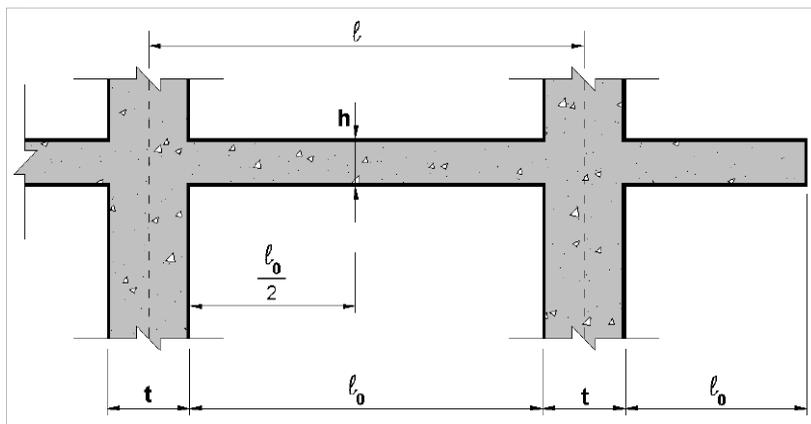
$$\Delta M_{L2} = \left(\frac{M_{L2} - X}{2} \right) \rightarrow \text{para } L2 \quad (15)$$

No cálculo de lajes isoladas com auxílio de tabelas, a primeira etapa consiste em determinar os vãos livres l_0 , os vãos teóricos l e a relação entre os vãos teóricos.

O vão livre é a distância entre as faces dos apoios. No caso de balanços, é a distância da extremidade livre até a face do apoio, enquanto o vão teórico, conforme NBR 6118:2014, é definido como sendo a distância entre os centros dos apoios.

É usual considerar os vãos teóricos até os eixos dos apoios, conforme Figura 15.

Figura 15 – Vão livre e vão teórico.



Fonte: (BASTOS, 2015).

Conhecidos os vãos teóricos, considera-se l_x o menor vão, l_y o maior e $\lambda = l_y/l_x$ a relação entre os vãos. Conforme o valor de λ , é usual classificar as lajes em:

- $\lambda \leq 2 \rightarrow$ laje armada em duas direções;
- $\lambda > 2 \rightarrow$ laje armada em uma direção.

A solução da equação geral das placas Equação (1) é uma tarefa muito complexa, que motivou diversos autores a produzirem tabelas para auxiliar nos cálculos de momentos fletores e das flechas para casos específicos de apoios e carregamentos.

Nas tabelas de BARES, os momentos fletores, negativos ou positivos, são calculados pela Equação (16).

$$M = \mu \cdot \frac{pl_x^2}{100} \quad (16)$$

Em que:

M = momento fletor (kN.m/m)

μ = coeficiente tabelado, de acordo com cada tipo de laje em função de $\lambda=l_y/l_x$, sendo:

μ_x e μ_y = coeficientes para cálculo dos momentos fletores positivos atuantes nas direções paralelas a l_x e l_y , respectivamente;

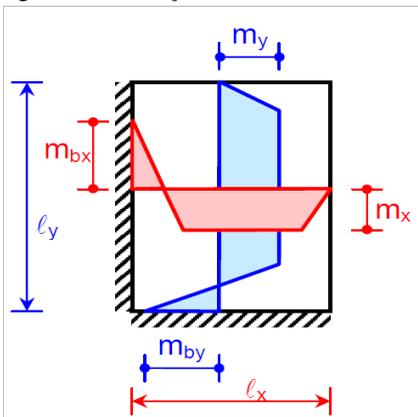
μ'_x e μ'_y = coeficientes para cálculo dos momentos fletores negativos atuantes nas bordas perpendiculares às direções l_x e l_y , respectivamente;

p = valor da carga uniforme ou triangular (que não é o caso) atuante na laje (kN/m²);

l_x = sempre menor vão da laje (m).

As tabelas de CZERNY atendem a várias condições de contorno e carga da estrutura para lajes retangulares. O cálculo dos momentos fletores usando essas tabelas é realizado por meio das expressões das equações 17 a 20, sendo l_x sempre o menor vão da laje, seguindo a notação da Figura 16.

Figura 16 – Notação das tabelas de CZERNY.



Fonte: (MARINO, 2006).

$$m_x = \frac{pl_x^2}{\alpha_x} \quad (17)$$

$$m_{bx} = \frac{pl_x^2}{\beta_x} \quad (18)$$

$$m_y = \frac{pl_y^2}{\alpha_y} \quad (19)$$

$$m_{by} = \frac{pl_y^2}{\beta_y} \quad (20)$$

Em que:

l_x = menor vão;

l_y = maior vão;

m_x = momento fletor positivo na direção x (em torno do eixo y) por unidade de comprimento;

m_y = momento fletor positivo na direção y (em torno do eixo x) por unidade de comprimento;

m_{bx} = momento fletor negativo (borda) na direção x (em torno do eixo y) por unidade de comprimento;

m_{by} = momento fletor negativo (borda) na direção y (em torno do eixo x) por unidade de comprimento;

p = carga uniformemente distribuída em toda a laje;

α_x = coeficiente para definição do momento fletor positivo na direção x;

α_y = coeficiente para definição do momento fletor positivo na direção y;

β_x = coeficiente para definição do momento fletor negativo (borda) na direção x;

β_y = coeficiente para definição do momento fletor negativo (borda) na direção y.

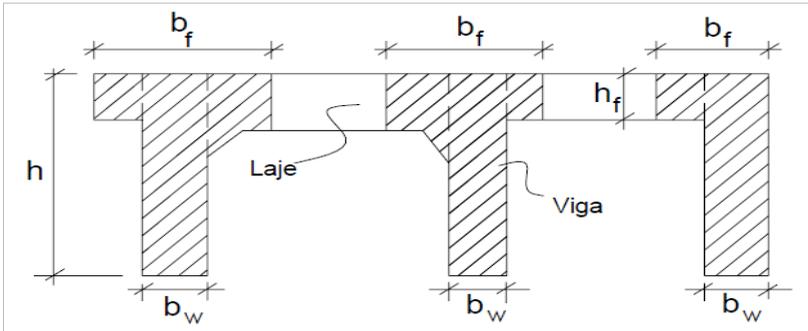
2.5.3 Modelos computacionais

Na modelagem computacional, aplicou-se no pórtico tridimensional, à largura colaborante das lajes nas vigas, para os casos de influência da rigidez à flexão e rigidez à torção, incluindo a vinculação dos pilares de extremidade e intermediários, considerando metade do comprimento do vão superior e metade do inferior em cada pilar.

2.5.4 Largura colaborante da Laje

As vigas de estrutura, ao se deformarem, levam junto um trecho da laje. Em virtude desse fato, considera-se parte da laje como fazendo parte da viga, tendo uma fração da laje solidária com a viga não mais retangular, e sim em forma de T para as vigas centrais e L invertido para as de canto, conforme Figura 17.

Figura 17 – Seção resistente das vigas levando em conta a laje.

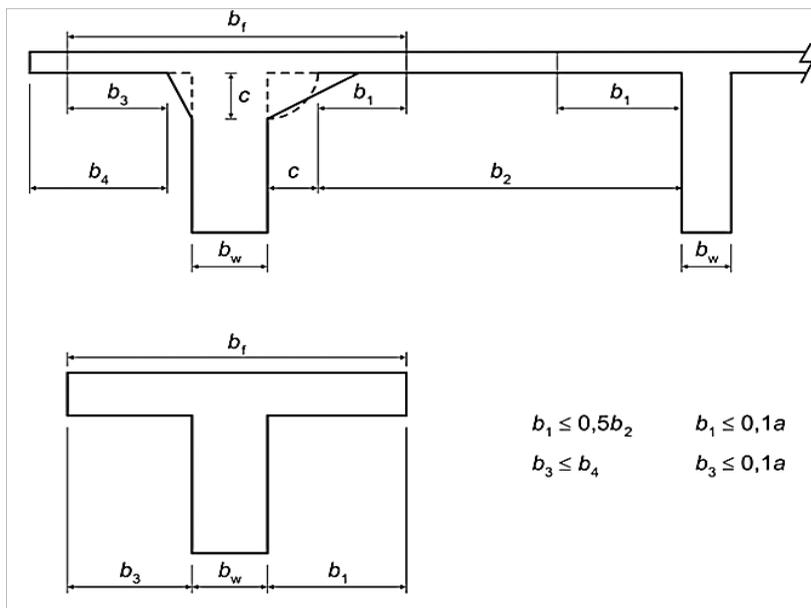


Fonte: (DUMÊT, 2008).

Nas vigas em **L**, quando os planos de ação das forças verticais não coincidem com o plano principal de inércia, há uma inclinação da linha neutra, com uma tendência para flexão em dois planos, vertical e horizontal, sendo necessário abordar o problema como flexão oblíqua, o que não se aplica no presente trabalho.

No caso de vigas contínuas, permite-se calcular com uma largura colaborante única para todas as seções, inclusive nos apoios com momentos negativos, desde que essa largura seja calculada a partir do trecho de momentos positivos onde a largura resulte em mínima, devendo ser respeitados os limites **b₁** e **b₃**, conforme indicado na Figura 18.

Figura 18 – Largura de mesa colaborante.



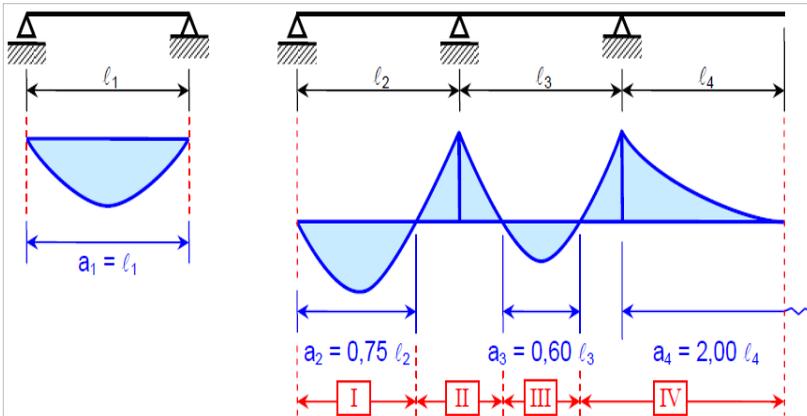
Fonte: (NBR 6118:2003).

Segundo NBR 6118:2014, a largura colaborante b_f da laje associada à viga deve ser igual à largura da viga b_w acrescida em 10% no máximo da distância “ a ” entre pontos de momento fletor nulo, para cada lado da viga em que houver laje colaborante. A distância “ a ” pode ser estimada em função do comprimento “ l ” do tramo considerado, conforme a seguir:

- viga simplesmente apoiada..... $a = 1,00l$
- tramo com momento em uma só extremidade..... $a = 0,75l$
- tramo com momentos nas duas extremidades..... $a = 0,60l$
- tramo em balanço..... $a = 2,00l$

O esquema da Figura 19 mostra os valores simplificados de “ a ”, conforme estabelecidos pela norma.

Figura 19 – Distância entre pontos de momento fletor nulo.



Fonte: (MARINO, 2015).

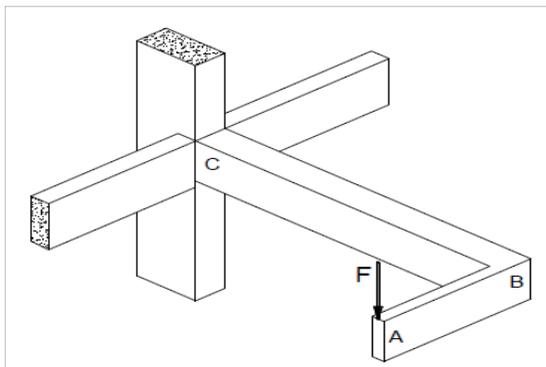
Alternativamente, o cômputo da distância “*a*” pode ser feito ou verificado mediante exame dos diagramas de momentos fletores na estrutura.

No presente trabalho, as distâncias estimadas de “*a*” entre pontos de momento fletor nulo, adotadas em alguns modelos no SAP2000, aplicaram-se àquelas apresentadas no esquema da Figura 19. Enquanto no EBERICK, o programa gerou automaticamente as distâncias “*a*” entre pontos de momento fletor nulo.

2.5.5 Rigidez à torção das vigas de apoio das lajes

Nas estruturas de concreto armado a torção pode ocorrer de duas formas: a torção de equilíbrio e a de compatibilidade. Na torção de equilíbrio, o momento torsor deve ser obrigatoriamente considerado, pois ele é necessário ao equilíbrio da estrutura, conforme Figura 20.

Figura 20 – Torção de equilíbrio, viga em balanço com carregamento excêntrico.



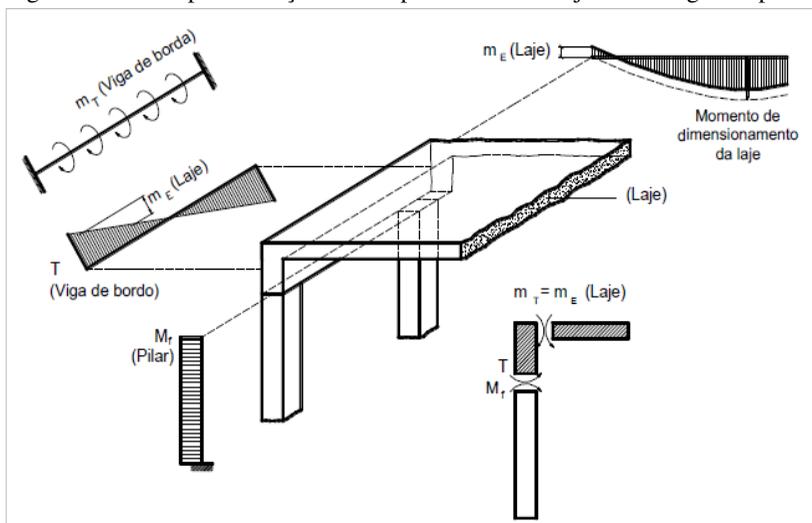
Fonte: (BASTOS, 2015).

A torção de compatibilidade, por sua vez, surge quando há um impedimento à deformação.

A

Figura 21, a seguir, apresenta uma laje que termina em uma viga de borda que, ao tentar girar, aplica um momento torsor na viga, a qual tende a girar também, sendo impedida pela rigidez à flexão dos pilares, surgindo momentos torsores nas vigas e momentos fletores nos pilares.

Figura 21 – Exemplo de torção de compatibilidade de laje com a viga de apoio.



Fonte: (BASTOS, 2015).

Para LEONHARDT e MÖNNIG (2008), a rigidez à torção de uma viga no Estádio II tende a diminuir muito quando comparada com a rigidez à flexão, sendo os momentos torsores de compatibilidade reduzidos significativamente na passagem para o estado fissurado, podendo até, no dimensionamento das vigas, esses momentos torsores serem desprezados.

A NBR 6118:2014 indica que quando a torção não for necessária ao equilíbrio, como no caso da torção de compatibilidade, é possível desprezá-la, desde que o elemento estrutural tenha a adequada capacidade de adaptação plástica e que todos os outros esforços sejam calculados sem considerar os efeitos por ela provocados. Essa colocação tenta diferenciar a torção de equilíbrio da de compatibilidade: enquanto a primeira é essencial ao equilíbrio da estrutura, a segunda é oriunda apenas da compatibilidade entre as deformações dos elementos e, portanto, pode ser redistribuída pela estrutura sem prejuízo ao equilíbrio estático.

De maneira aproximada a norma permite reduzir a rigidez à torção das vigas por fissuração, utilizando-se 15% da rigidez elástica, exceto para os elementos estruturais com protensão limitada ou completa (classes 2 ou 3).

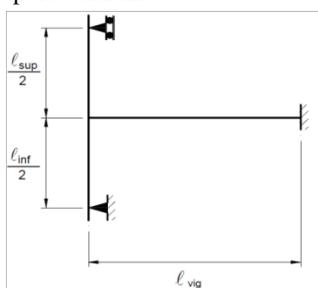
Com base nessas revisões bibliográficas e recomendações normativas, é possível, então, reduzir a 15% ou até mesmo tornar nulo o valor da rigidez à torção a ser utilizado nos modelos. Neste trabalho serão adotados tais parâmetros, pelo fato de que as rigidezes à torção dos modelos estruturais adotados se enquadram nas torções de compatibilidade.

2.5.6 Vinculação de vigas com os pilares

Segundo a NBR 6118:2014, em estruturas usuais de edifícios, no caso clássico de vigas contínuas, estas podem ser consideradas simplesmente apoiadas nos pilares para o estudo das cargas verticais, observando-se algumas correções adicionais. A norma permite alternativamente que o modelo de viga contínua seja melhorado, considerando-se a solidariedade dos pilares com a viga, mediante a introdução da rigidez à flexão dos pilares extremos e intermediários.

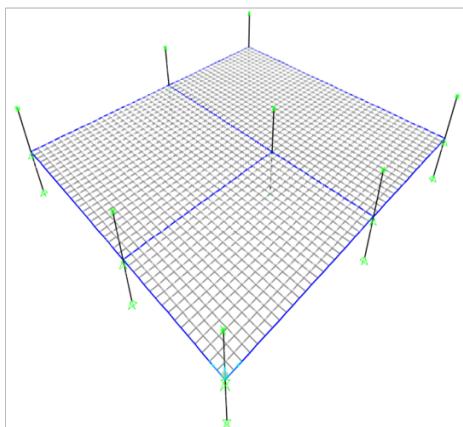
Em relação aos apoios extremos e intermediários, no presente trabalho será adotado, para vinculação entre vigas e pilares, o modelo proposto pela norma NBR 6118:2014, simulando metade do comprimento do vão superior e inferior em cada pilar, conforme Figura 22.

Figura 22 – Aproximação em apoios extremos.



Fonte: (BASTOS, 2015).

Figura 23 – Visão do pórtico tridimensional com as vinculações de pilares extremos e intermediários.



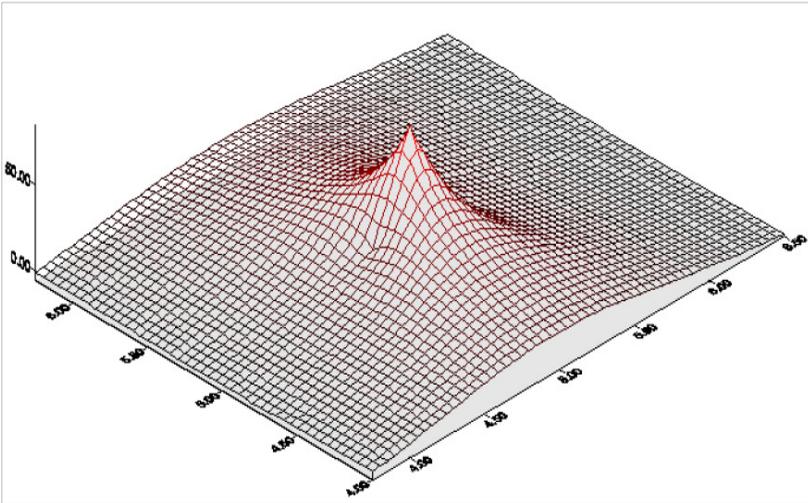
Fonte: O autor.

A solidariedade dos pilares nas vigas, em determinados modelos deste trabalho, será feita com a inclusão da rigidez à flexão dos pilares extremos e intermediários de acordo com a Figura 22, seguindo as proposições da NBR 6118:2014.

2.6 CONCENTRAÇÃO E REDISTRIBUIÇÃO DE ESFORÇOS

Nos painéis de lajes, a aplicação de modelos estruturais com análises elásticas lineares proporciona bons resultados em casos usuais nos quais as vigas possuem uma rigidez muito mais alta que as lajes e estas não têm irregularidades significativas no seu contorno. Em outros casos, o modelo elástico linear pode conduzir a valores elevados de momento fletor, geralmente negativos e em pontos localizados. Um exemplo a citar ocorre em uma laje apoiada diretamente sobre um pilar, no qual existe uma concentração de esforços muito grande nessa região, conforme Figura 24.

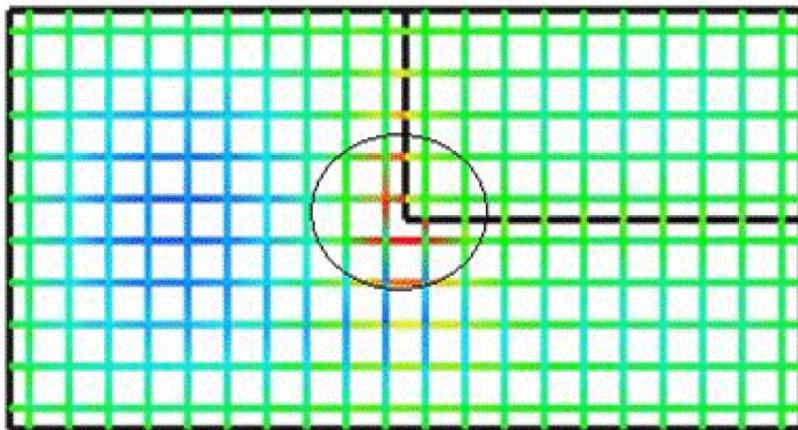
Figura 24 – Concentração de esforços devido a apoio direto da laje sobre o pilar.



Fonte: (PUEL, 2009).

Caso semelhante pode ocorrer em situações aparentemente simples de projeto, como em lajes com contornos irregulares, a exemplo daquelas com cantos “vivos”, podendo apresentar momentos negativos relevantes, conforme Figura 25.

Figura 25 – Momento Negativo no interior de uma laje com canto vivo.



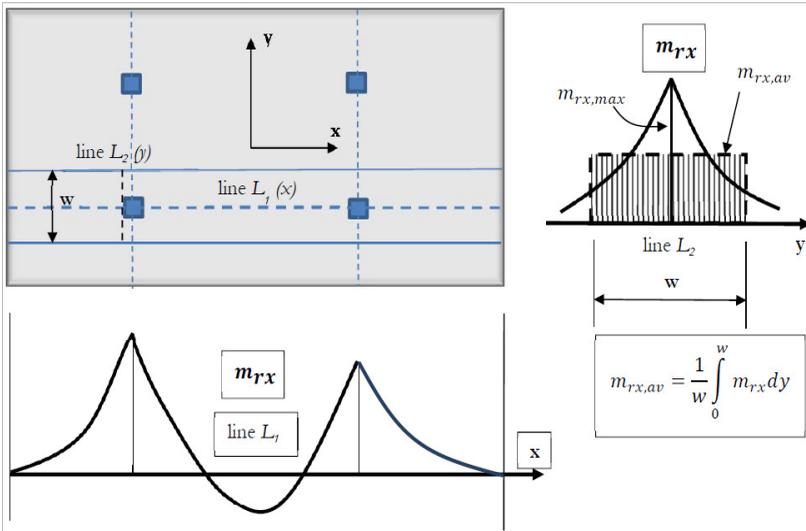
Fonte: (EBERICK, 2014).

A Figura 25 apresenta os momentos no interior de uma laje com uma “quina” ou canto “vivo”, onde há perturbações na grelha equivalente, provocando picos de momentos negativos, conforme cor em vermelho.

Para LIM (2013), em estruturas de concreto armado, normalmente as concentrações de esforços levam a fissurar a região afetada e, em consequência disso, há uma redistribuição. A análise estrutural pode considerar certa redistribuição desses momentos de pico e observar devidamente as exigências de ductilidade.

Conforme PACOSTE et. al. (2012), a redistribuição dos esforços em placas apoiadas em pilares acontece devido à capacidade de redistribuição plástica em estruturas de concreto armado. Os esforços podem ser redistribuídos em certa largura w , e o valor médio do momento $m_{rx,av}$ poderá ser usado como momento de cálculo, o qual fica no interior da largura de distribuição hachurada, conforme exemplo ilustrativo representado na Figura 26.

Figura 26 – Redistribuição do momento máximo sobre uma largura w .



Fonte: (PACOSTE et. al., 2012).

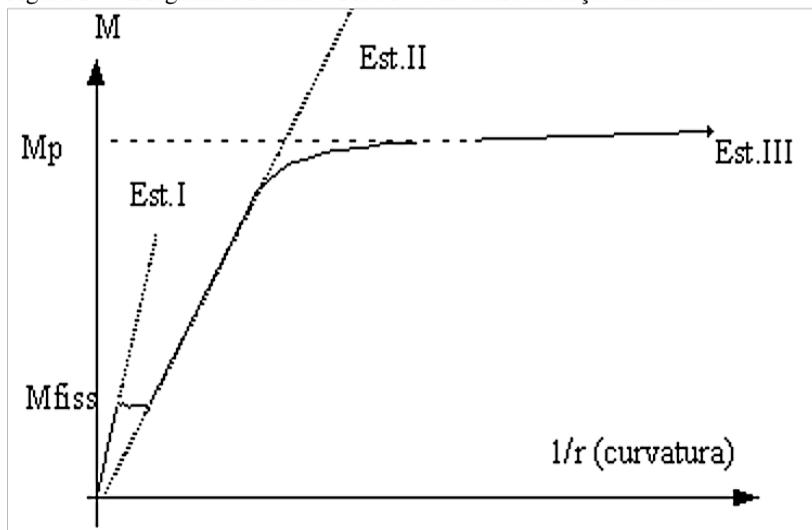
O exemplo da Figura 26 mostra uma laje plana suportada por quatro pilares ligados monoliticamente à laje. O diagrama da parte esquerda inferior representa a variação de momento ao longo da linha L_1 numa direção paralela à de momento – nesse caso, direção x . O diagrama superior à direita dessa mesma figura mostra a distribuição de momento $m_{rx,av}$ ao longo da linha L_2 de comprimento w no eixo y e ortogonal à direção do pico de momento da linha L_1 . A distribuição do momento m_{rx} ao longo da linha L_2 é substituída por uma distribuição constante com valor médio $m_{rx,av}$ calculado de acordo com a equação da Figura 26. Nessa equação a integral será o momento médio $m_{rx,av}$ sobre uma faixa de largura w . Esse procedimento de média de momento na faixa de largura w visa distribuir uniformemente os momentos dentro da limitação da faixa e considera a redistribuição sempre numa direção normal à do pico de momento.

Segundo PACOSTE et. al. (2012), no dimensionamento de faixas de lajes com redistribuição plástica dos picos de momento, quando adotados valores de momento de plastificação abaixo do pico, faz-se necessário ter cuidado quanto às fases de plastificação e de ruína das lajes.

Para LORIGGIO (2013), as fases de plastificação e de ruína possuem comportamentos distintos daqueles descritos no regime elástico. O estudo da fase de plastificação se caracteriza como bem mais complexo, pois existem zonas plastificadas, zonas fissuradas e zonas que ainda estão no regime elástico, podendo ser feitos estudos aproximados, por meio de métodos numéricos que consigam modelar a não linearidade física do material. Já a fase de ruína pode ser estudada por meio da Teoria das Charneiras Plásticas, que tem única preocupação com a fase de ruína, sem considerar o comportamento das lajes nas fases anteriores.

A Figura 27 mostra as fases de comportamento das estruturas de concreto armado por meio do diagrama momento-curvatura de uma seção transversal de peças submetidas à flexão simples.

Figura 27 – Diagrama Momento Fletor - Curvatura de seção fissurada.



Fonte: (LORIGGIO, 2013).

O diagrama representa o comportamento da peça nos Estádios I, II e III. Quando os momentos são menores que o de fissuração da peça, o comportamento é praticamente elástico, sendo possível representar a fase pelo modelo do Estádio I, supondo que os materiais trabalham elasticamente, inclusive o concreto submetido à tração. Após o momento de fissuração, o comportamento é bem representado pelo modelo do Estádio II, no qual se admitem comportamentos elásticos

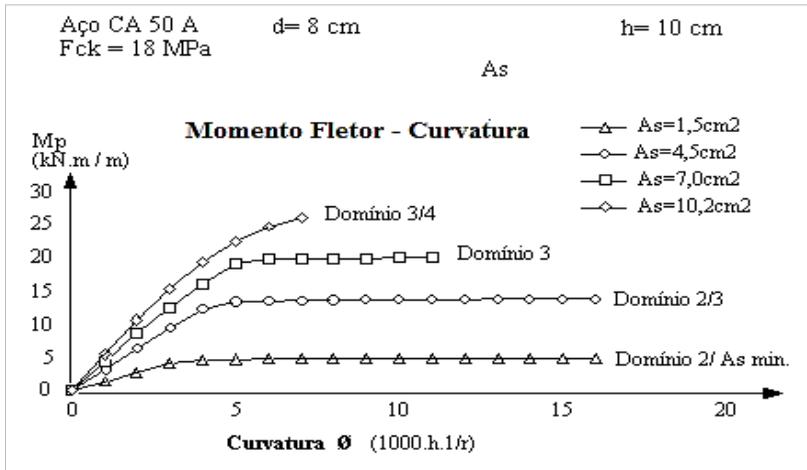
para o aço e o concreto. Nessas fases iniciais, são comumente adotados valores de serviço para os materiais e incluída a contribuição do concreto entre fissuras, que faz com que a peça tenha um comportamento intermediário entre o modelo do Estádio I e o do II.

A partir de certa curvatura, o momento permanece praticamente constante, com valor muito próximo do momento último da seção, surgindo então o momento de plastificação M_p . Nessa fase a preocupação passa a ser com a capacidade portante máxima da peça e a redistribuição dos esforços, sendo usual adotar os valores de cálculo dos materiais.

Importante destacar, conforme mencionado por Pacoste et. al. (2012), que a redistribuição dos esforços nas lajes acontece devido à capacidade de redistribuição plástica em estruturas de concreto armado.

A Figura 28, a seguir, apresenta a variação da taxa de armadura para uma peça de uma mesma seção transversal, no diagrama momento-curvatura.

Figura 28 – Momento de plastificação conforme taxa de armadura.



Fonte: (LORIGGIO, 2013).

Por meio do diagrama da Figura 28, ao se aumentar a taxa de armadura, maior será a área de concreto comprimido. Em consequência disso a ductilidade diminui. LORIGGIO (2013) mostra que a ductilidade de uma peça de concreto armado submetida à flexão simples pode ser medida pelo comprimento do patamar de plastificação, apresentado no

diagrama da Figura 28. Para flexão simples, a posição relativa da linha neutra x/d menor geralmente leva a seções mais dúcteis.

Conforme LORIGGIO (2013), existe uma grande faixa de dimensionamento de lajes no domínio 2 e parte no domínio 3, onde essas lajes possuem um comportamento plástico bem definido, sendo elas suficientemente dúcteis para que possa ser feito um dimensionamento plástico. Tais dimensionamentos têm como base os Teoremas da Análise Limite da Teoria Geral da Plasticidade. No entanto, as normas atuais exigem que seja verificada a ductilidade para níveis de deformações plásticas de projeto.

2.7 ANÁLISE NÃO LINEAR

Antes de comentar sobre a Análise não linear, ressalta-se a importância de falar sobre os diferentes processos de análise das estruturas em concreto armado. É possível que a análise seja: linear, linear com redistribuição, plástica, análise através de modelos físicos e, por fim, análise não linear. O que se diferencia em cada procedimento é o comportamento admitido para os materiais constituintes da estrutura.

Em uma análise linear, admite-se o comportamento elástico linear do material, considerando-se, nesse caso, a elasticidade do material, proporcional ao carregamento. Nesse tipo de análise não há necessidade de se conhecer a armadura da peça estrutural, já que o dimensionamento é feito por meio dos resultados elásticos lineares.

Para uma análise elástica com redistribuição, parte dos esforços nas peças estruturais com elevadas concentrações de esforços é redistribuída para demais elementos da estrutura, desde que as condições de equilíbrio e de ductilidade sejam satisfeitas.

A análise plástica consiste em considerar as não linearidades, admitindo que os materiais tenham o comportamento rígido-plástico perfeito ou elasto-plástico perfeito. Esse tipo de análise é válido apenas para o ELU.

Em relação à análise de modelos físicos, esta consiste em determinar o comportamento estrutural a partir de ensaios de modelos físicos concretos, considerando os critérios de semelhança mecânica.

Já para a análise não linear o comportamento não linear dos materiais é levado em consideração, e nesse tipo de análise toda a geometria da estrutura e todas as armaduras devem ser conhecidas para que as análises possam ser feitas, considerando que a resposta da estrutura dependerá de como ela foi armada. Segundo a NBR 6118:2014, as condições de equilíbrio, compatibilidade e

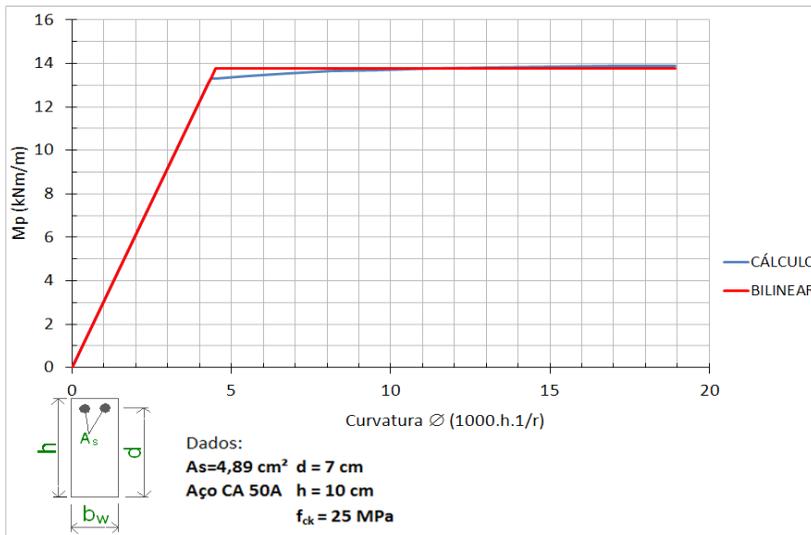
ductilidade devem ser necessariamente satisfeitas.

A análise não linear pode ser aplicada tanto nas verificações do estado limite último como no estado limite de serviço. Geralmente é feita por programa computacional que utiliza métodos numéricos.

As análises não lineares são geralmente iterativas, complexas e requerem dos computadores tempos de processamento mais elevados. Nesse tipo de análise, não é válida a superposição de efeitos.

Ainda hoje, as análises não lineares são pouco aplicadas pelos calculistas. No entanto, quando possível, essas análises podem ser aplicadas, principalmente em casos usuais de estruturas de concreto armado, em que o diagrama momento-curvatura bilinear para peças sem esforços axiais representa muito bem o seu comportamento estrutural, conforme Figura 29.

Figura 29 – Momento de plastificação para taxa de armadura $A_s = 4,89 \text{ cm}^2$.



Fonte: O autor.

O momento-curvatura da Figura 29 pode ser representado pelo diagrama bilinear, pois esse diagrama tem seu comportamento muito próximo ao de cálculo e com um patamar de escoamento bem definido. Outro fator a se considerar em uma análise não linear seria a variação da taxa de armadura, de forma a se obter momentos de plastificação maiores ou menores, conforme o caso.

3 MATERIAIS E MÉTODOS

3.1 EBERICK

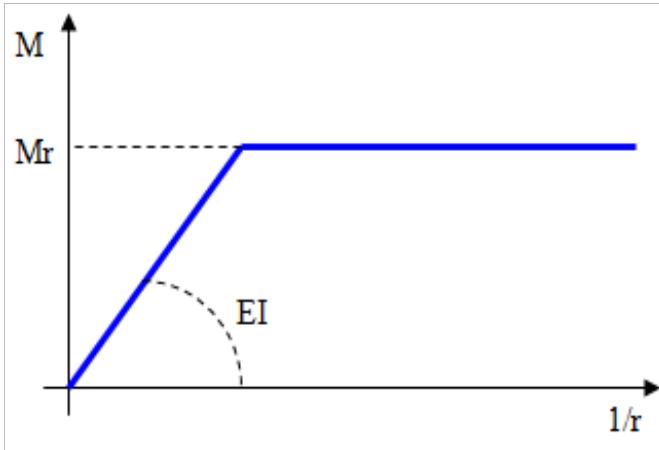
O software EBERICK V9 é um programa auxiliar para projetos de estruturas em concreto armado, moldado no local ou pré-moldado. Ele abrange as etapas de lançamento, análise da estrutura, dimensionamento e detalhamento final dos elementos. Possui um sistema gráfico de entrada de dados associado à análise da estrutura com um modelo de pórtico tridimensional, além de diversos recursos de dimensionamento e detalhamento dos elementos, em conformidade com a NBR 6118:2014, e uma visualização tridimensional da estrutura.

O programa efetua uma análise linear conforme preconiza o item 14.5.2 da NBR 6118:2014, admitindo que o material tenha um comportamento elástico linear nos materiais envolvidos. Os resultados de uma análise linear são usualmente empregados para a verificação de Estados Limites de Serviço. Esses resultados podem ser usados nas verificações do Estado Limite Último, mesmo com elevadas tensões, e do dimensionamento admitindo a plastificação dos materiais, desde que seja garantida a ductilidade mínima das peças.

O EBERICK possui um módulo adicional para plastificação dos apoios e continuidade das lajes, em que os esforços atuantes serão obtidos considerando uma redistribuição, gerando uma análise não linear da grelha equivalente. Para a continuidade entre as lajes, o programa oferece a possibilidade de inserir trechos de plastificação, sendo geradas automaticamente rótulas plásticas nas extremidades das barras. Esses trechos são definidos pelo usuário, limitando a taxa de armadura, e o sistema gera o momento plástico ou momento limite para aquela região, podendo assim diminuir a concentração de esforços na continuidade de lajes ou minimizar os “picos” de momentos em regiões de elevada rigidez ou de reentrância de lajes, como os que ocorrem em cantos vivos, que dentro de determinados limites de redistribuição geram economia de armadura mantendo a segurança da estrutura.

O EBERICK adota para lajes o modelo bilinear, com o comportamento linear da peça até um determinado valor de momento fletor. Ao atingir esse valor de momento, denominado pelo programa como momento resistente ou momento de plastificação M_r , o momento se mantém constante para qualquer valor de curvatura, conforme Figura 30.

Figura 30 – Diagrama momento fletor - curvatura (bilinear)



Fonte: (EBERICK, 2014).

Assim, no presente trabalho será adotada a nomenclatura **M_p** para o momento resistente ou momento de plastificação. O EBERICK adota, por meio de um modelo não linear, a utilização desse diagrama momento-curvatura bilinear para as seções das barras da grelha equivalente.

O processo é iterativo, depois de informados no sistema quais os apoios e as continuidades entre lajes a plastificar. O programa funciona da seguinte maneira:

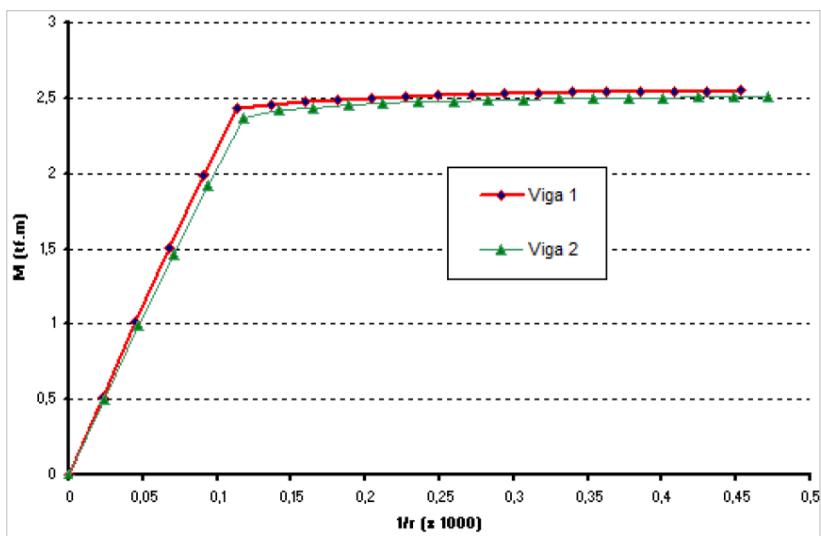
- Calcula um momento de plastificação para cada barra do modelo;
- Efetua a análise linear em cada barra, supondo o comportamento linear do trecho no diagrama;
- Para cada barra é verificado se o momento fletor negativo é maior que o momento de plastificação;
- Nas barras com momento maior que o limite, aplica-se uma rótula plástica, sendo que o momento fletor negativo é mantido constante em uma das extremidades da barra, com momento igual ao de plastificação;
- Para cada barra é verificado novamente se o momento fletor negativo é maior que o momento de plastificação, o que é possível ocorrer, devido à redistribuição dos esforços;
- Se alguma barra apresentar momento maior que o limite, é aplicada uma nova rótula plástica, continuando o processo

iterativamente até que se obtenha a convergência ou que seja alcançado o número de iterações limite, predefinido pelo usuário.

O EBERICK aplica apenas a plastificação dos momentos negativos, visto que, segundo AltoQi (2014), para fins de projeto essa é uma abordagem que leva às distribuições mais adequadas de armadura.

O momento de plastificação adotado pelo programa baseia-se na montagem dos diagramas momento-curvatura das seções transversais de vigas sem cargas axiais e segue uma determinada tipologia, conforme Figura 31, muito aplicada para representar a não linearidade física em uma análise estrutural.

Figura 31 – Diagrama momento - curvatura de cálculo.



Fonte: (EBERICK, 2014).

No diagrama momento-curvatura apresentado na Figura 31, as duas vigas possuem um patamar de escoamento bem definido. E, por simplificação, no EBERICK é desprezada a inclinação do patamar de escoamento, considerando o momento de plastificação igual ao momento último resistente da seção.

Durante a fase de análise estrutural a armadura não é conhecida, o que impede a montagem do diagrama momento-curvatura de cálculo. O programa, de forma indireta, adota o diagrama como sendo bilinear, solicitando ao usuário a informação da taxa de armadura máxima e qual

a redistribuição máxima em percentual que deverá ser colocada na seção. Com isso, informará o momento máximo resistente ou o momento de plastificação da barra, conforme Figura 32.

Figura 32 – Configuração para aplicação de taxa de armadura em percentual.

The image shows a software dialog box titled "Modelo" with several configuration sections:

- Geral:**
 - Viga sem rigidez (bordo de laje)
 - Mesa na laje
- Rigidez à torção (viga):**
 - Adotar configuração
 - Redução à torção: 85 %
- Continuidade de lajes (trecho):** (highlighted with a red box)
 - Utilizar análise com plastificação
 - Adotar limites configurados
 - Redistribuição máxima: 50 %
 - Aplicar para taxas de armadura maiores que: 0.98079 %
 - Momento de plastificação:
 - Direita: 23.72 kN.m
 - Esquerda: 23.72 kN.m
- Vínculo (trecho):**
 - Permitir redução na rigidez diferente da configurada
 - Vínculo inicial: Engastar
 - Redução na rigidez: 0 %
 - Vínculo final: Engastar
 - Redução na rigidez: 0 %

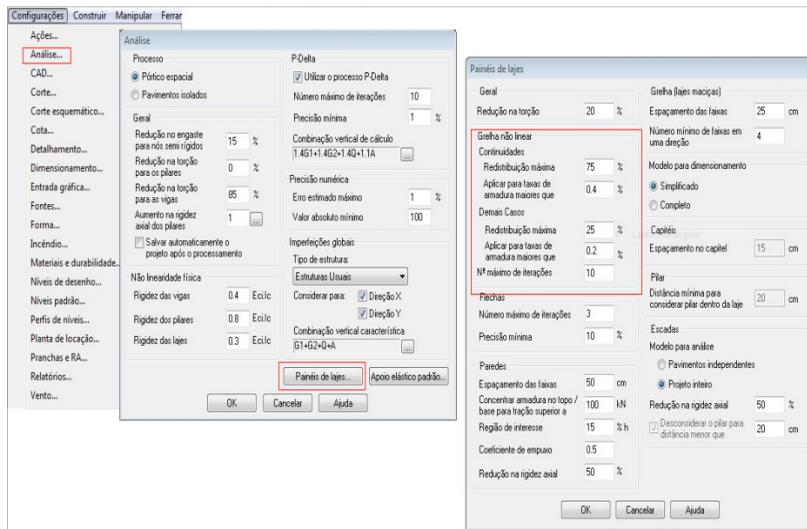
Buttons at the bottom: OK, Cancelar, Ajuda.

Fonte: (EBERICK, 2014).

Com base nessa informação, é calculada a armadura de flexão máxima em cada barra da grelha, obtendo-se o momento resistente da seção e se definindo dessa forma, o momento de plastificação e o valor do momento resistente. Nessa mesma janela é inserido qual deverá ser a redistribuição máxima na continuidade das lajes.

O acesso ao módulo de plastificação pode ser feito por meio da aba Configurações/Análise, botão “Painéis de lajes”, conforme apresentado na Figura 33.

Figura 33 – Acesso configurações gerais Grelha não linear.

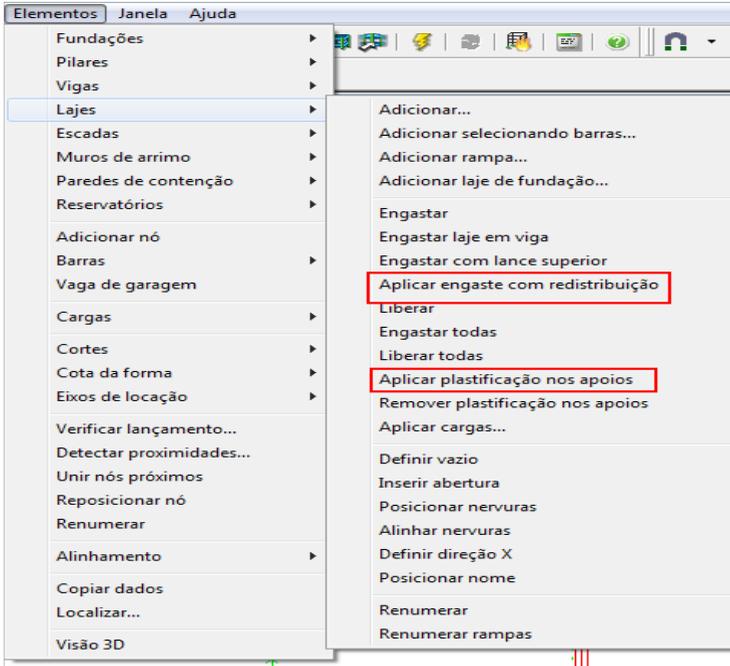


Fonte: (EBERICK, 2014).

Conforme Figura 33, nessa aba definem-se os parâmetros gerais dos painéis de lajes no programa, tanto para continuidades e demais casos para apoios. Caso seja ativada essa opção em alguma laje, utilizando análise com plastificação e adotando os limites configurados, o programa aplica a plastificação da laje. É possível também nessa janela configurar a redistribuição máxima e a taxa de armadura, ambas em porcentagem e definindo o momento de plastificação.

A Figura 34 mostra o caminho para aplicar engaste com redistribuição e/ou plastificação nos apoios, selecionando no croqui quais as lajes a plastificar em seus apoios e/ou engastes, conforme o caso.

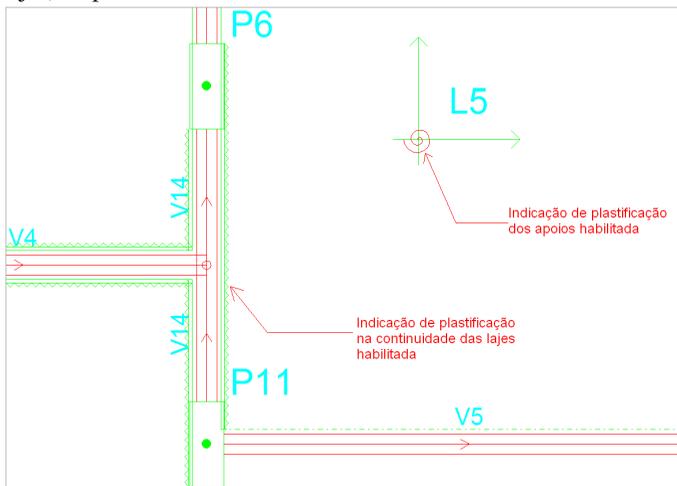
Figura 34 – Acesso comandos para aplicar plastificação.



Fonte: (EBERICK, 2014).

Outra maneira de aplicar a plastificação das lajes seria diretamente no croqui, com “duplo clique” sobre a continuidade das lajes para engaste e/ou sobre a laje para apoios das barras da grelha equivalente, conforme Figura 35.

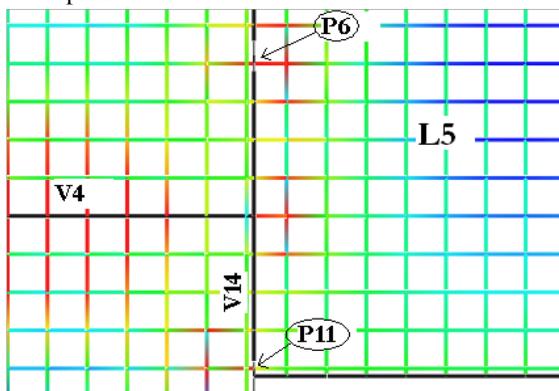
Figura 35 – Indicação no croqui de plastificação engaste (continuidade das lajes) e apoios.



Fonte: O autor.

O EBERICK considera engaste ou continuidade da laje as barras da grelha equivalente entre lajes adjacentes sobre as vigas. Isso ocorre quando os coeficientes internos do programa estão configurados para a grelha como barras engastadas nas vigas. Enquanto isso, para os demais casos, na configuração geral o programa entende como apoio das barras aquelas apoiadas em um pilar, por exemplo, conforme Figura 36.

Figura 36 – Indicação de barras da grelha equivalente apoiadas diretamente sobre pilares.

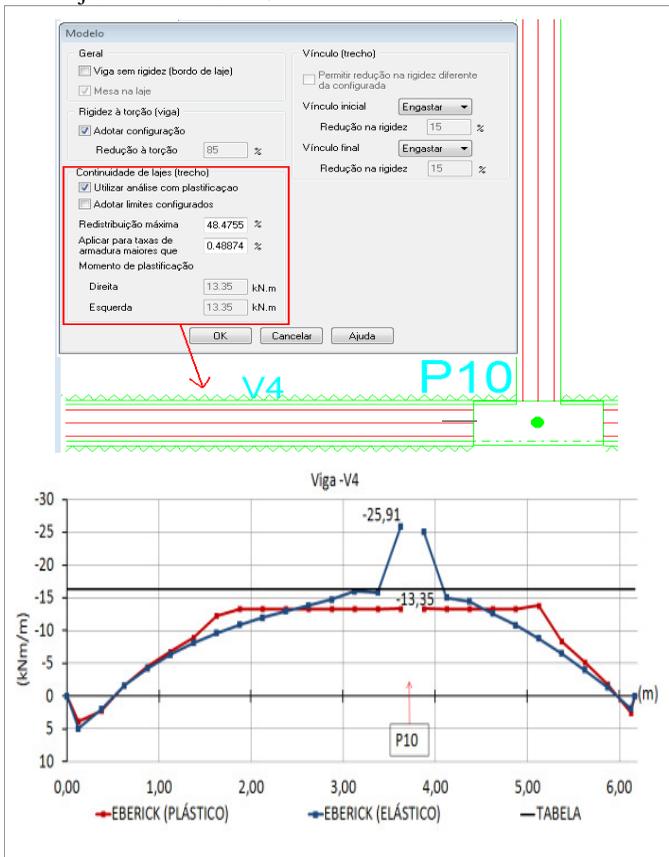


Fonte: O autor.

A aplicação de engaste com redistribuição plastifica trechos de momentos entre duas lajes com continuidade. A plastificação nos apoios plastifica as barras da grelha que estão ligadas diretamente nos pilares, como ocorreu nos pilares P6 e P11 apresentados na Figura 36.

Para facilitar e selecionar qual a continuidade e/ou apoio de laje a receber plastificação, aplica-se “duplo clique” sobre o engaste ou diretamente na laje, conforme o caso, configurando quanto redistribuir dos momentos e qual a taxa de armadura, ambos em porcentagem para igualar ou chegar próximo ao momento de plastificação, conforme exemplo da Figura 37.

Figura 37 – Exemplo de porcentagem a plastificar no engaste, continuidade entre lajes – EBERICK V9.

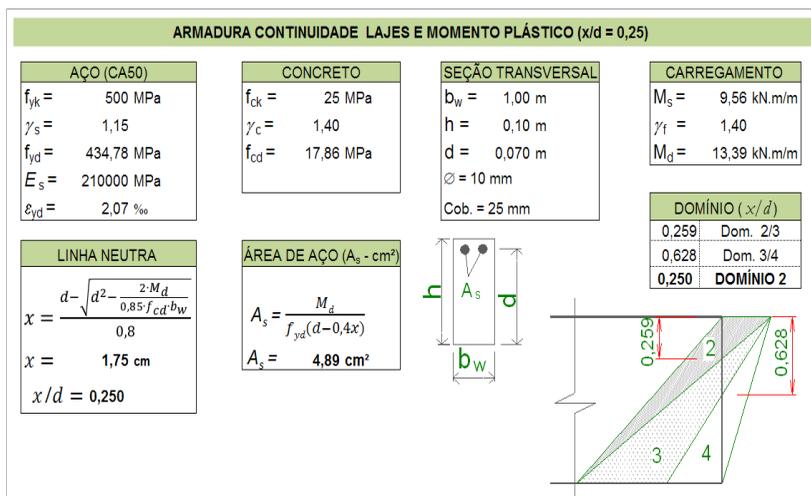


Fonte: O autor.

O gráfico na Figura 37 apresenta os momentos negativos da continuidade entre duas lajes, antes e depois da plastificação. A mesma figura mostra a configuração adotada no EBERICK a plastificar na V4A, antes do P10, com redistribuição máxima de aproximadamente de 48,47% aplicada para taxas de armaduras maiores que 0,489%, conforme o pico de momento apresentado em uma análise elástica, para atingir valores de momento próximos aos de plastificação.

Quanto à definição do valor do momento de plastificação, elaborou-se uma planilha eletrônica, conforme Figura 38, fixando a posição da linha neutra e variando o momento característico em cada caso.

Figura 38 – Exemplo de planilha de cálculo da linha neutra e área de aço continuidade lajes.



Fonte: O autor.

Dessa forma, obtém-se o momento de cálculo resistente ou de plastificação da laje, que nesse exemplo foi de $M_p = -13,39 \text{ kNm/m}$ com uma boa ductilidade no domínio 2 e com a posição da linha neutra fixada em $x/d = 0,250$, o que atenderia às prescrições da NBR 6118:2014 quanto à ductilidade e à posição da linha neutra. Em outros casos, para se obter a taxa de armadura a ser inserida em porcentagem no EBERICK, apenas informava-se o momento de plastificação.

A busca do momento de plastificação desejado poderia ser feita diretamente no programa por tentativas, até atingir o valor pretendido, variando a taxa de armadura em porcentagem. Isso, porém, demandaria um certo tempo, pois o programa não tem o inverso, no qual se informa o momento de plastificação e se obtém a taxa de armadura a ser fixada na seção transversal da laje.

O exemplo apresentado na Figura 37 foi aplicado nos estudos do presente trabalho e seus resultados serão reapresentados, mais adiante. Esse exemplo serve também para ilustrar como configurar o EBERICK, usando o módulo adicional de plastificação na continuidade das lajes.

3.2SAP2000

O SAP2000 é um programa integrado para análises estruturais tridimensionais estáticas e dinâmicas, por elementos finitos e dimensionamento de estruturas. Possui uma única interface, onde é feita a criação, modificação do modelo, execução das análises e o dimensionamento das estruturas.

O sistema possui vários tipos de elementos estruturais, podendo ser citados:

- Elemento de barra que usa a formulação tridimensional de vigas e colunas, o qual inclui os efeitos de flexão biaxial, torção, deformação axial e deformações biaxiais. Esse tipo de elemento é aplicado à modelagem de pórticos planos e tridimensionais, treliças planas e tridimensionais, grelhas planas;
- Elemento de casca, usado para modelar estruturas planas ou tridimensionais assumindo o comportamento de casca, membrana ou placas. Esse elemento serve para modelar estruturas como cascas tridimensionais, reservatórios e cúpulas, além de estruturas de placas, tais como lajes de piso e estrutura de membrana.

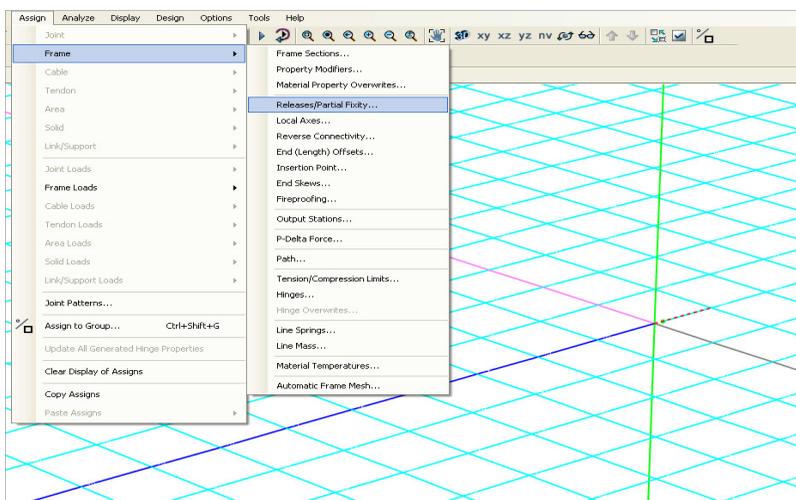
Tanto para os elementos de barra quanto para os de casca, cada um possui seu próprio sistema de coordenadas, de definição das propriedades do material e direções das cargas, além de interpretação dos resultados. Os elementos podem ser carregados por gravidade e cargas uniformes em qualquer direção, por pressões em qualquer face, além de cargas devido a variações de temperatura.

No programa, quando usados elementos de barra em grelhas planas, permite-se rotular e limitar os esforços nas barras. Esse método,

embora não seja o principal adotado no programa para plastificar apoios de continuidade das placas, foi o que melhor se adequou à situação, porque na ausência da armadura e do dimensionamento dos elementos estruturais dos modelos elásticos lineares é permitido no SAP2000, de forma análoga ao EBERICK, limitar os momentos na continuidade de lajes e minimizar os “picos” de esforços em regiões de elevada rigidez ou de reentrância em lajes, como os que ocorrem em cantos vivos, redistribuindo os esforços na grelha equivalente.

A plastificação dos apoios de continuidade no programa SAP2000 consiste em selecionar a barra ou as barras a serem plastificadas de acordo com o modelo adotado e picos de momentos em cada caso para redistribuição dos esforços na grelha equivalente, rotulando suas extremidades. A Figura 39 apresenta a sequência de comandos para rotular a extremidade de uma barra selecionada.

Figura 39 – Sequência de comandos para inserir rótula em um elemento de barra (SAP2000).

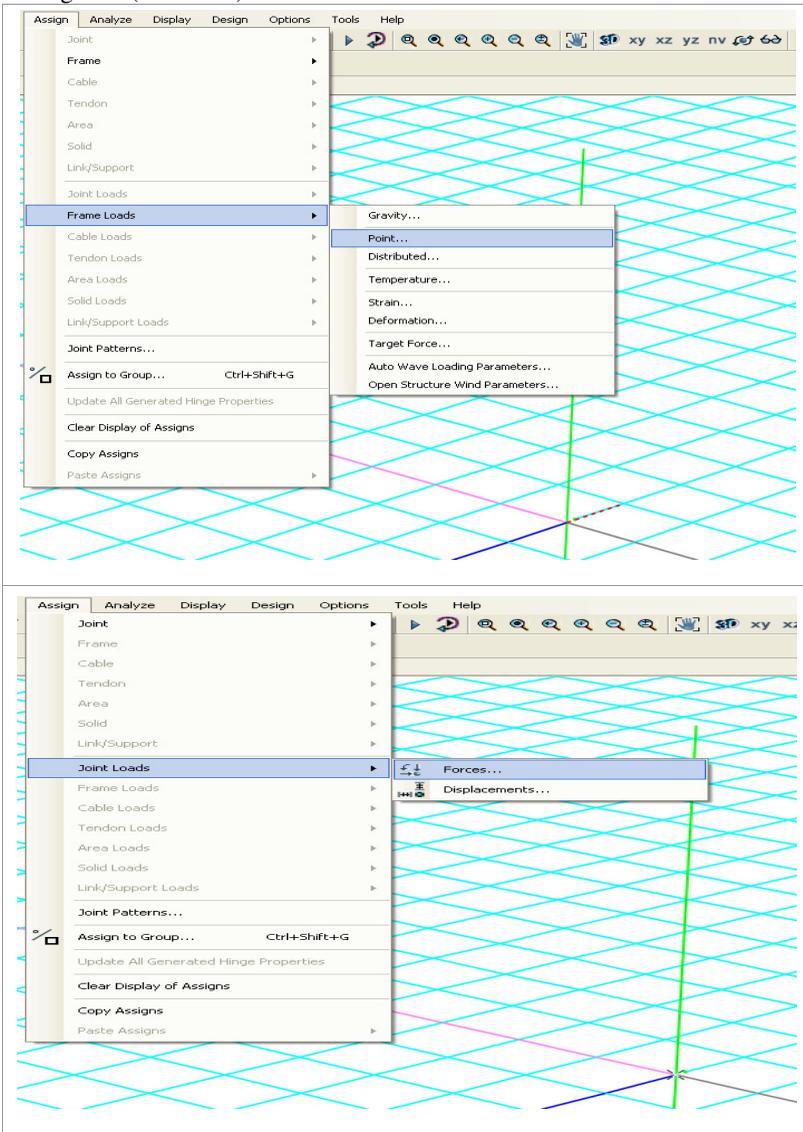


Fonte: O autor.

Depois de inserida a rótula ou as rótulas plásticas, deve-se selecionar as barras aplicando o momento de plastificação em suas extremidades, e para equilíbrio dos esforços é necessário aplicar o mesmo momento de plastificação com sentido contrário sobre o nó de apoio da barra rotulada.

A Figura 40 mostra a sequência de comandos para aplicar momento de plastificação na extremidade de um elemento de barra e nó.

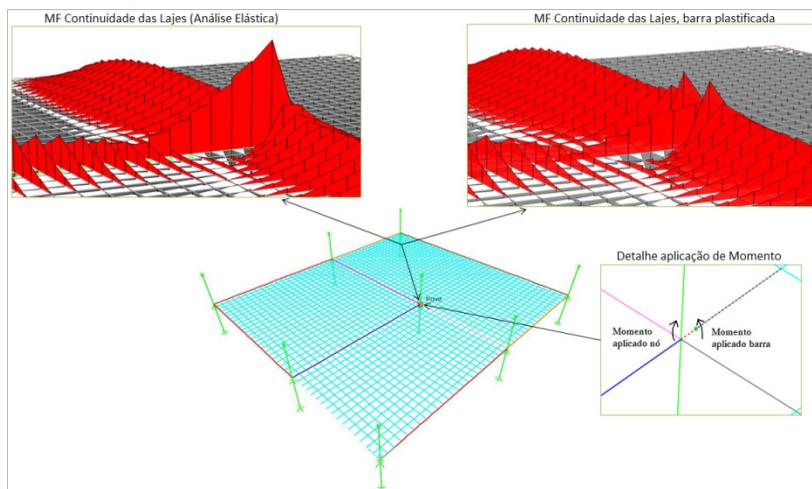
Figura 40 – Comandos para aplicar momento de plastificação em uma barra e nó da grelha (SAP2000).



Fonte: O autor.

Após aplicar o momento de plastificação na barra e nó, que nesse caso foi em apenas uma barra, pode-se rodar a estrutura obtendo-se os resultados com a redistribuição dos esforços, conforme Figura 41.

Figura 41– Plastificação de pico de momento negativo na continuidade de Lajes (SAP2000).



Fonte: O autor.

A Figura 41 apresenta os resultados da limitação dos esforços em apenas uma barra da grelha equivalente. Após a plastificação do ponto de maior concentração de esforços, é possível observar que ocorreu a redistribuição para as barras adjacentes, numa direção perpendicular à do pico de momento.

Os modelos construídos no SAP2000 do presente trabalho foram com elementos de barra, por analogia de grelha para a malha das lajes, e representação dos pilares e vigas. Enquanto outros modelos são construídos por elementos finitos, as lajes foram modeladas por elementos de casca, e as vigas e os pilares foram representados por elementos reticulados.

No modelamento de lajes por analogia de grelha, quando adotados os espaçamentos coerentes da malha ou grelha equivalente e os ajustes necessários dos coeficientes, são fornecidos bons resultados. Adotou-se nesta pesquisa o processo de analogia de grelha, tanto para as análises elásticas como para as análises com plastificação dos apoios, além do método por elementos finitos nas análises elásticas para

comparar com os resultados obtidos pelo processo de analogia de grelha e os obtidos com auxílio de tabelas.

3.3 PAVIMENTOS ADOTADOS E RESULTADOS

Neste trabalho foram adotados dois pavimentos com formatos distintos, que apresentam quantidades diferentes de pontos de concentração dos esforços. Em ambos, aplicaram-se as mesmas características quanto à agressividade ambiental, ao tipo de material e à classe de concreto.

A classe de agressividade ambiental adotada foi II, de cobrimento nominal de 25 mm, sem considerar a possível redução do cobrimento onde existem os revestimentos finais secos, brita nº 2 e concreto C25.

No Pavimento 1, há apenas um ponto de concentração de esforços. Enquanto para o Pavimento 2 há vários pontos de concentração de esforços.

Neste trabalho, para as análises comparativas com lajes isoladas entre os modelos numéricos e modelos com auxílio de tabelas, foram utilizadas as tabelas de BARES e CZERNY. Para os modelos numéricos considerando todos os elementos estruturais trabalhando de forma integrada, utilizaram-se as tabelas de BARES com os momentos fletores compatibilizados.

3.3.1 Pavimento 1

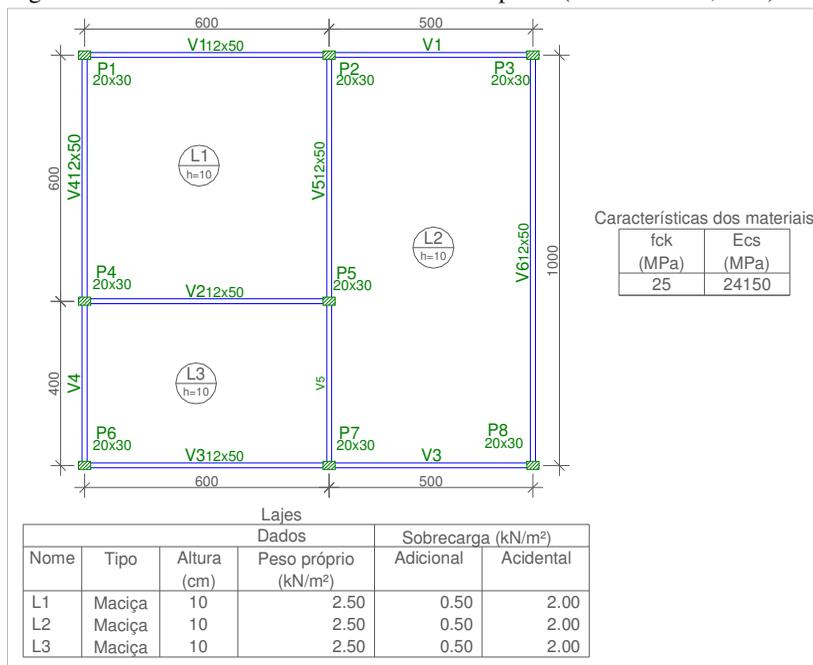
A análise no comportamento dos esforços nas lajes desse pavimento segue as características de modelamento de grelha plana, comparando os modelos com outros procedimentos de cálculos, como o manual auxiliado por tabelas. Um dos fatores de grande influência nos processos manuais é que as lajes são calculadas de forma isolada, de apoios indeslocáveis e com impedimento ao giro. Mas a estrutura trabalha de forma integrada entre seus elementos estruturais, e ao se considerar essa integralidade, com análise por métodos mais refinados como elementos finitos e analogia de grelha, além de todos os elementos estruturais atuando na estrutura, podem surgir as concentrações de esforços, não observadas no cálculo manual.

O Pavimento 1 do presente trabalho evidencia muito bem a concentração de esforços em uma determinada região da estrutura. Trata-se de um pavimento didático com a finalidade de estudos, validação de teorias e fonte de pesquisas, simulando uma eventual estrutura com a qual o engenheiro calculista pode se deparar em seu dia

a dia de trabalho. Ele foi inicialmente usado por MAZZILLI (1988), BARBOZA (1992), CARVALHO (1994) e REIS (2007). No presente estudo foram adotadas algumas alterações de parâmetros, necessárias para análise, verificação dos esforços e plastificação dos apoios de continuidade das lajes.

O pavimento contém três lajes, seis vigas e oito pilares, com as respectivas cargas atuantes na estrutura e f_{ck} , conforme Figura 42.

Figura 42 – Planta de Fôrma Pavimento 1 – Adaptado (CARVALHO,1994).



Fonte: O autor.

Nos estudos das concentrações de esforços das lajes dessa estrutura, serão verificados e analisados alguns modelos, sendo eles:

1. Cálculo manual das lajes com auxílio de tabelas;
2. Lajes isoladas por modelos numéricos;
3. Painel de Lajes com apoios indeslocáveis verticalmente;
4. Avaliar o efeito da modelagem nas concentrações de esforços;
5. Plastificando apenas onde a concentração de momento é maior;
6. Plastificando trechos de tamanhos variáveis nos apoios, de

- extensão maior que as regiões das concentrações de esforços;
7. Plastificando todo o apoio de continuidade;
 8. Plastificando com valores do Modelo 1 (Tabela).
 9. Plastificando com valores abaixo do Modelo 1 (Tabela);
 10. Estudo da redistribuição e efeito nos momentos positivos.

Os modelos desse pavimento contribuem para estudar os efeitos da influência da malha, do efeito da modelagem, do tamanho dos trechos plastificados, do valor adotado para o momento de plastificação, da redistribuição dos momentos negativos e seu efeito nos momentos positivos.

3.3.1.1 Modelo 1 – Cálculo das lajes com auxílio de tabelas

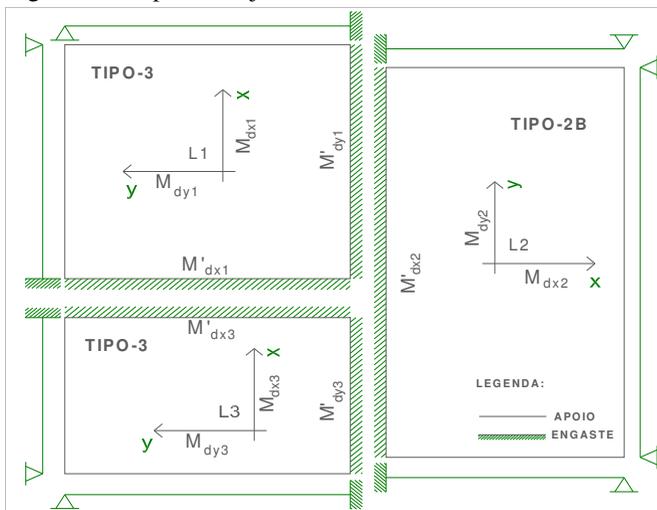
Esse modelo serve de base para comparações com modelos mais refinados. Vale considerar que se trata de um modelo tradicional, usado durante muito tempo antes das tecnologias mais avançadas, mas podendo ainda hoje fornecer parâmetros para validação dos modelos computacionais.

Segundo CARVALHO (2007), o processo de cálculo de placa por séries é bastante adequado para a confecção de quadros ou tabelas, possibilitando determinar momentos fletores máximos e flechas a partir da geometria e de condições de vinculação da placa. Para esses casos as lajes são consideradas individualmente, conforme sua vinculação de apoio, podendo ser simplesmente apoiadas, engastadas ou livres.

Nesse modelo foram usadas as tabelas desenvolvidas por BARES (1972), adaptadas por PINHEIRO (1994) e CZERNY (1976), apresentadas em anexo.

A Figura 43 apresenta o esquema estrutural das lajes, consideradas isoladas. As lajes L1 e L3 possuem duas bordas adjacentes engastadas e as outras duas simplesmente apoiadas, enquanto a laje L2 está engastada em um dos lados maiores e com apoio simples nos demais apoios.

Figura 43 – Tipos de Lajes.



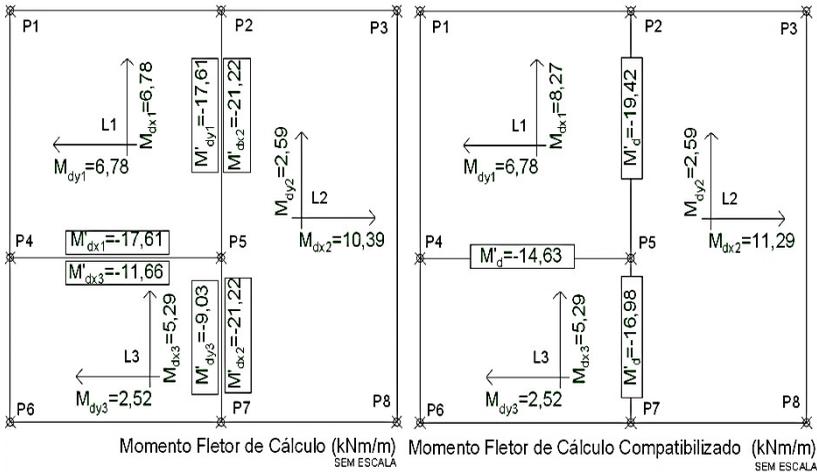
Fonte: O Autor.

Tabela 1 – Momento Fletor Solicitante Característico (BARES).

L/AJE	l_x m	λ	p kN/m ²	μ_x	μ'_x	μ_y	μ'_y	M_x kNm	M'_x kNm	M_y kNm	M'_y kNm
L1	6,00	1,00	5,00	2,69	6,99	2,69	6,99	4,84	-12,58	4,84	-12,58
L2	5,00	2,00	5,00	5,94	12,13	1,48	-	7,42	-15,16	1,85	-
L3	4,00	1,50	5,00	4,73	10,41	2,25	8,06	3,78	-8,33	1,80	-6,45

Fonte: O autor.

Figura 44 – Momentos Fletores de cálculo para lajes isoladas e compatibilizados, Modelo 1 – Tabela (BARES).



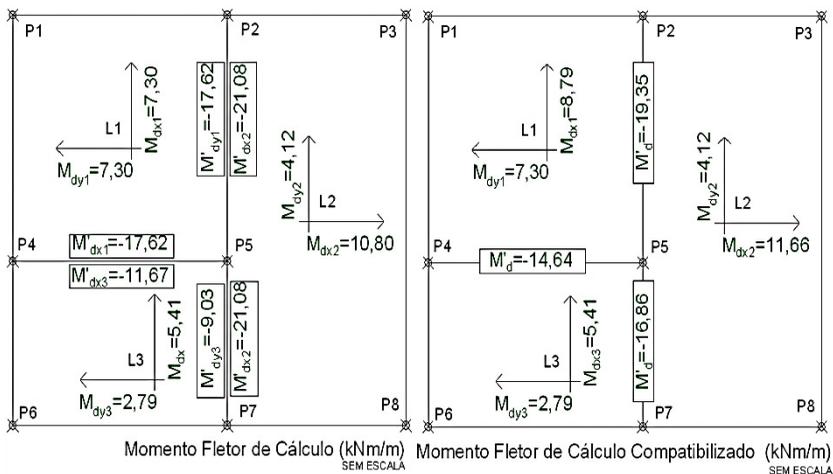
Fonte: O autor

Tabela 2 – Momento Fleter Solicitante Característico (CZERNY).

LAJE	l_x m	λ	p kN/m ²	α_x	β_x	α_y	β_y	M_x kNm	M'_x kNm	M_y kNm	M'_y kNm
L1	6,00	1,00	5,00	34,50	14,30	34,50	14,30	5,21	-12,59	5,21	-12,59
L2	5,00	2,00	5,00	16,20	8,30	42,50	-	7,71	-15,06	2,94	-
L3	4,00	1,50	5,00	20,70	9,60	40,20	12,40	3,86	-8,33	1,99	-6,45

Fonte: O autor.

Figura 45 – Momentos Fletores de cálculo para lajes isoladas e compatibilizados, Modelo 1 – Tabela (CZERNY).



Fonte: O autor.

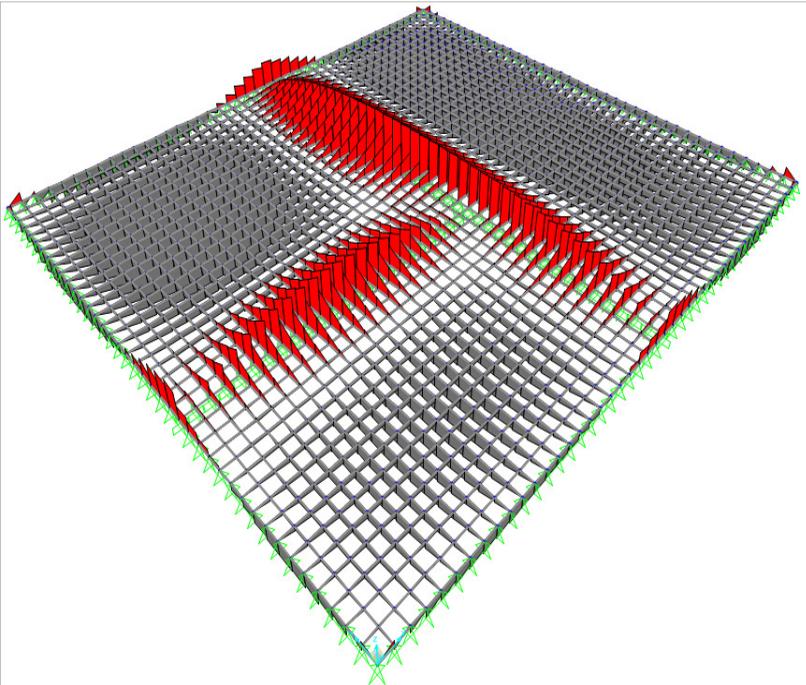
3.3.1.2 Modelo 2 – Lajes isoladas por modelos numéricos

Para auxiliar e validar os resultados dos esforços de cálculo das lajes e compará-los com os momentos obtidos auxiliados por tabelas, modelaram-se as lajes com analogia de grelha e elementos finitos no SAP2000 com as seguintes características:

- Lajes particionadas por analogia de grelha e elementos finitos com malha coincidente (25x25cm);
- Rigidez à torção da grelha equivalente $J_t=2I$ para analogia de grelha;
- Vigas de apoio indelocáveis verticalmente e ao giro, simulando engastes para as bordas das lajes.

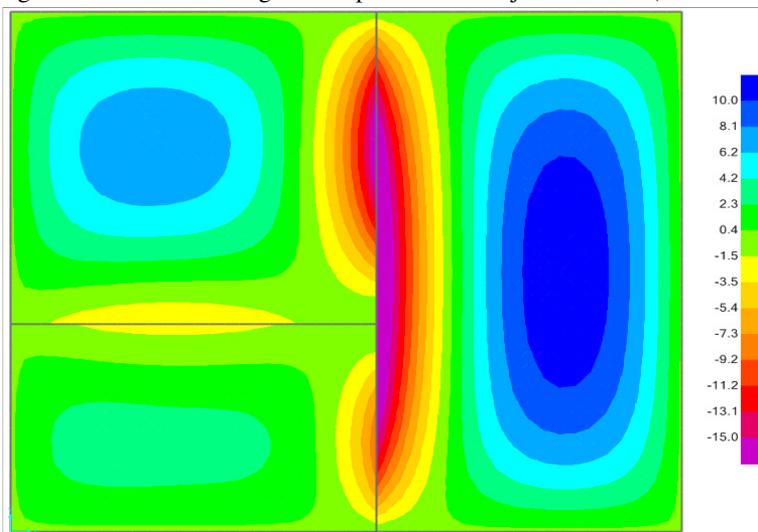
A Figura 46 e a Figura 47 apresentam o comportamento das lajes para o Modelo 2, aplicado no programa SAP2000 por analogia de grelha e elementos finitos.

Figura 46 – Momentos negativos e positivos das lajes Modelo 2 (SAP2000-AG).



Fonte: O autor.

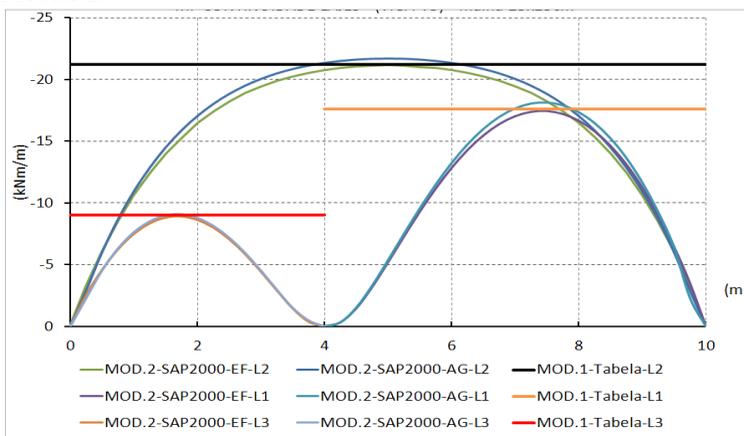
Figura 47 – Momentos negativos e positivos das lajes Modelo 2 (SAP2000-EF).



Fonte: O autor.

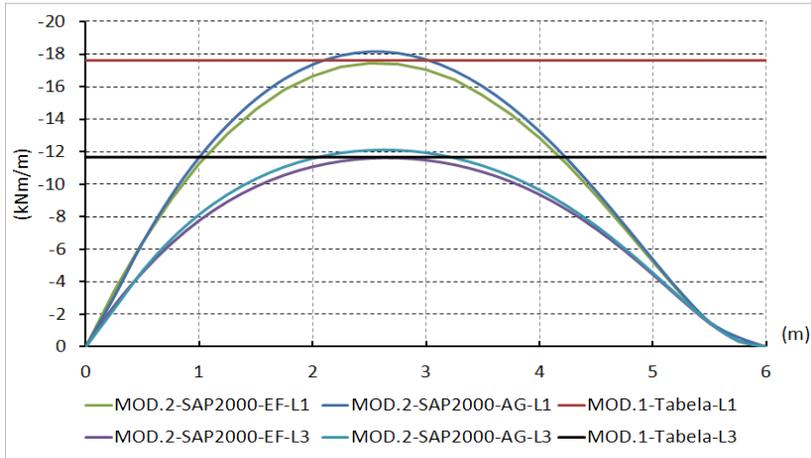
Foram comparados os resultados obtidos pelo SAP2000 de curvas parabólicas com os resultados obtidos auxiliados por tabelas de BARES, que fornecem apenas o momento máximo negativo da continuidade das lajes, conforme gráficos 1 e 2.

Gráfico 1 – Momentos não compatibilizado continuidade LAJES – (VIGA-V5) Modelo 2.



Fonte: O autor.

Gráfico 2 – Momentos não compatibilizado continuidade LAJES – (VIGA-V2) Modelo 2.



Fonte: O autor.

Os resultados apresentados nos gráficos 1 e 2, não mostram diferenças significativas para os momentos negativos máximos entre o modelo 1, com valores obtidos auxiliados por tabelas, e o modelo 2, de lajes isoladas simuladas por modelos numéricos.

Já nos resultados dos momentos positivos há diferenças significativas, conforme mostra a Tabela 3.

Tabela 3 – Comparativo de momentos positivos não compatibilizados Modelo 1 – Tabelas (kNm/m).

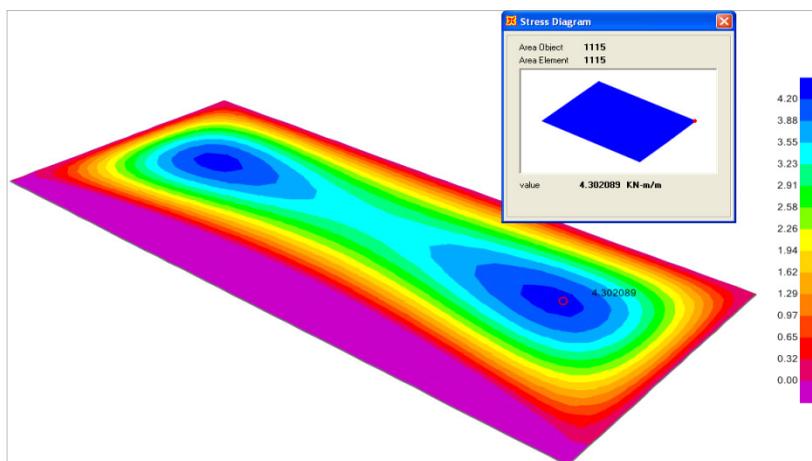
LAJES	MODELO	M_{dx}	DIF % EF	M_{dy}	DIF % EF
L1	EF	7,69	-	7,69	-
	AG	7,11	-7,54	7,11	-7,54
	BARES	6,78	-11,83	6,78	-11,83
	CZERNY	7,30	-5,07	7,30	-5,07
L2	EF	11,56	-	4,30	-
	AG	11,77	1,78	3,70	-13,95
	BARES	10,39	-10,12	2,59	-39,77
L3	CZERNY	10,80	-6,57	4,12	-4,19
	EF	5,97	-	2,97	-
	AG	5,63	-5,69	2,59	-12,79
	BARES	5,29	-11,39	2,52	-15,15
	CZERNY	5,41	-9,38	2,79	-6,06

Fonte: O autor.

A maior diferença percentual ocorreu na laje L2 para M_{dy} , sendo aproximadamente $-39,77\%$ menor para os valores obtidos por meio das tabelas de BARES quando comparados aos valores alcançados por meio de elementos finitos. Os valores obtidos por meio das tabelas de CZERNY para a laje L2, quando comparados com os resultados alcançados por métodos numéricos, mostram diferenças menores, em torno de $-4,19\%$.

A diferença nos resultados dos momentos positivos pode ser explicada pela distribuição de momentos mostrada na Figura 48.

Figura 48 – Momento de dimensionamento na direção “y” Modelo 2 (SAP2000-EF).



Fonte: O autor.

Na Figura 48, pode-se observar que o momento de dimensionamento na direção “y” não está exatamente no meio do vão. Isso mostra que o uso das tabelas de BARES começa a fornecer resultados conflitantes com os obtidos por simulações numéricas. Esses conflitos se iniciam em lajes onde a proporção l_y/l_x for maior ou igual a dois.

3.3.1.3 Modelo 3 – Pannel de Lajes com apoios indeslocáveis verticalmente

Nesse modelo, que analisa o comportamento conjunto das lajes apoiadas em vigas indeslocáveis, foram usados os seguintes parâmetros:

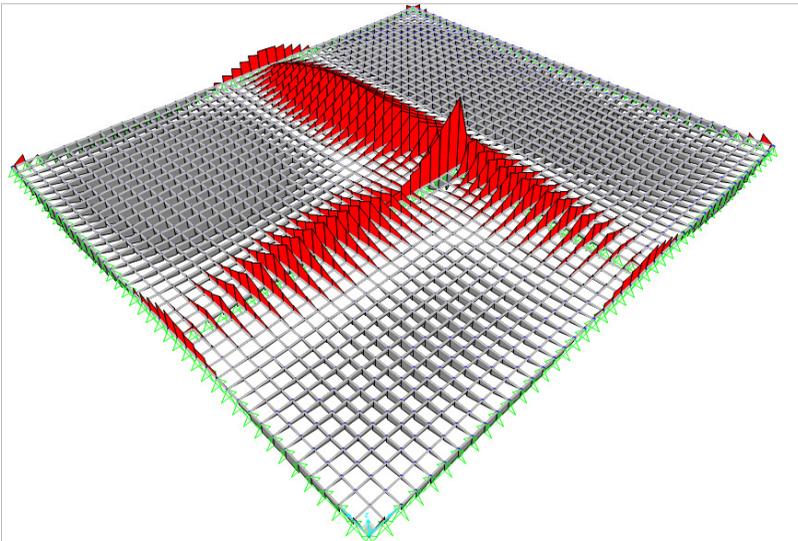
- Lajes particionadas por analogia de grelha e elementos finitos com malha coincidente;
- Rigidez à torção da grelha equivalente $J_t=2I$ para analogia de grelha;
- Vigas de contorno e continuidade das lajes indeslocáveis verticalmente com rigidez à torção nula.

Para simular a indeslocabilidade dos apoios no EBERICK, as vigas foram modeladas com grande altura, de 12 x 200 cm.

Considerando o possível efeito da malha nos picos de tensões com malhas coincidentes, foram criados dois casos: O Caso 1, com espaçamento da malha de 25 x 25 cm, e o Caso 2, com espaçamento da malha de 50 x 50 cm.

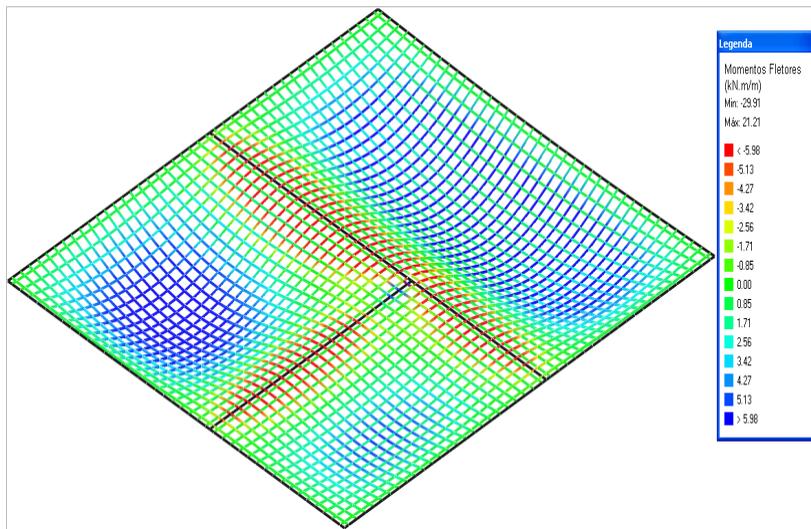
As Figuras 49 a 52 ilustram os resultados obtidos nos programas SAP2000 e EBERICK para o Caso 1, com malha espaçada em 25 x 25 cm, dando destaque à concentração de esforços.

Figura 49 – Momentos negativos e positivos das lajes Modelo 3.C1 (SAP2000-AG).



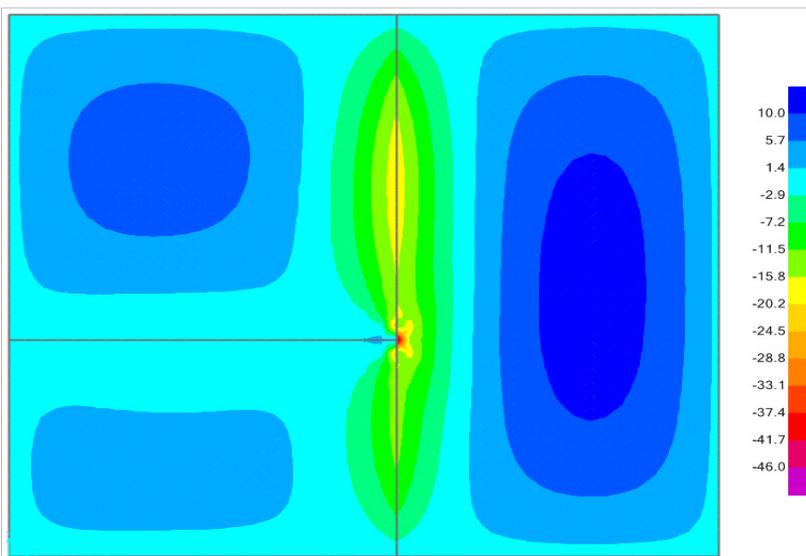
Fonte: O autor.

Figura 50 – Momentos negativos e positivos das lajes Modelo 3.C1 (EBERICK).



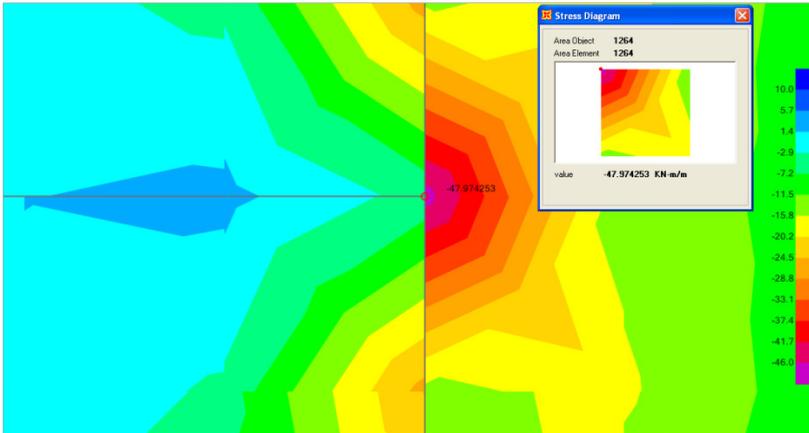
Fonte: O autor.

Figura 51 – Momentos negativos e positivos das lajes Modelo 3.C1 (SAP2000 – EF).



Fonte: O autor.

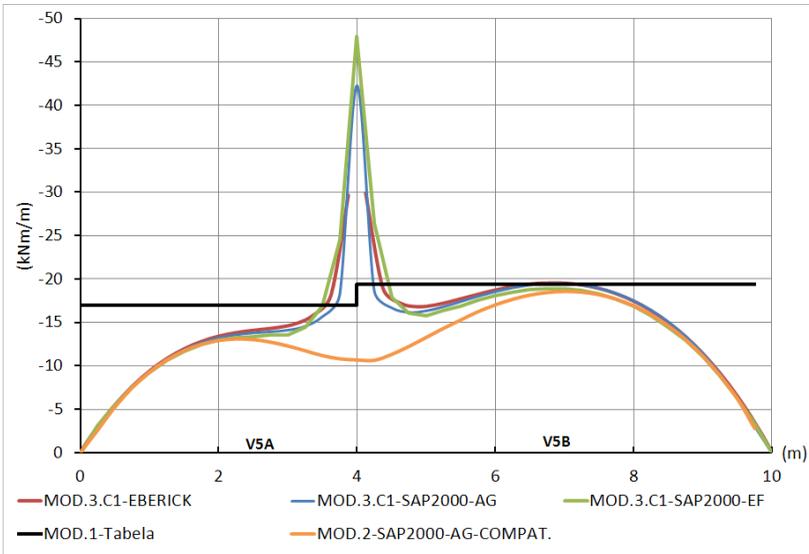
Figura 52 – Imagem ampliada encontro das lajes Modelo 3.C1 (SAP2000 - EF).



Fonte: O autor.

O Gráfico 3 apresenta os resultados para os momentos negativos na continuidade das lajes ao longo da viga V5 para o Caso 1.

Gráfico 3 – Momentos na continuidade das Lajes sobre a viga V5 (Caso 1-malha 25x25cm).



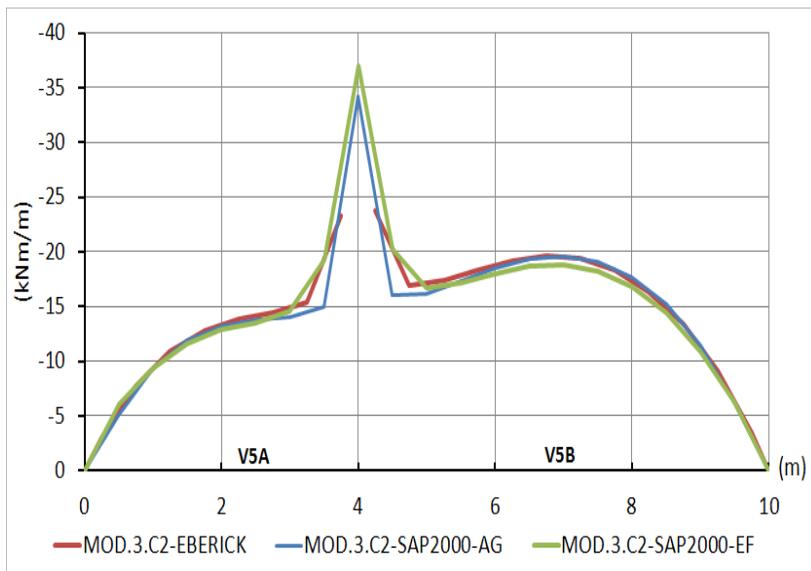
Fonte: O autor.

Os resultados, apresentados no Gráfico 3, mostram a tendência da concentração de esforços no ponto de encontro das três lajes, que gerou um pico de momento sobre o pilar P5, devido à grande rigidez dessa região. Nesse mesmo gráfico foram lançados os momentos de cálculo compatibilizados obtidos pela média simples entre barras ao longo da viga V5, do Modelo 2 usado no SAP2000 por Analogia de Grelha, para cálculo de lajes isoladas por modelos numéricos.

Nota-se que o uso da analogia de grelha para os momentos obtidos por técnica manual de compatibilização apresenta bons resultados se comparados aos momentos compatibilizados usando as tabelas de BARES. No entanto, quando se faz uma análise mais refinada, considerando o giro das lajes nos apoios de continuidade, aparecem as concentrações de esforços, desconsideradas nas teorias clássicas.

O Gráfico 4 apresenta os resultados para os momentos negativos de continuidade das lajes ao longo da viga V5 para o Caso 2, com malha espaçada em 50 x 50 cm.

Gráfico 4 – Momentos na continuidade das Lajes sobre a viga V5 (Caso 2 – malha 50x50cm).



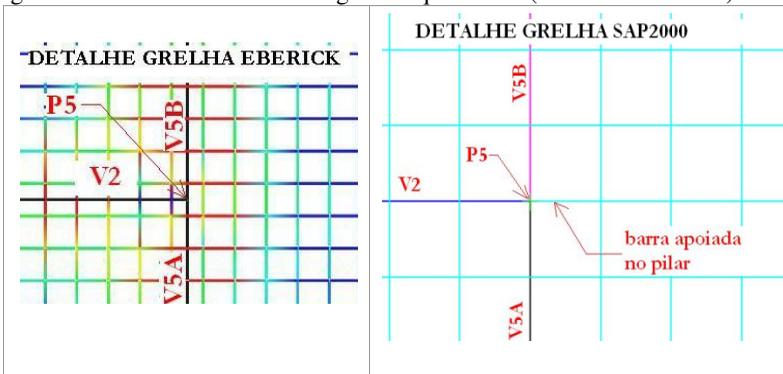
Fonte: O autor.

No Gráfico 4, a concentração dos esforços para o Caso 2, com malha de 50 x 50 cm, diminuiu em relação ao Caso 1, com malha de 25 x 25 cm. Diante dessa comprovação, entende-se que, ao se alterar a malha os esforços se modificam também, sendo possível afirmar que, com o refinamento da malha, maiores serão as concentrações dos esforços, tendendo a valores muito altos para malhas muito finas.

Teoricamente, quando não é feita qualquer plastificação da estrutura em questão, o dimensionamento segue com os picos de momentos que, portanto, são afetados também pelo tamanho da malha, podendo até as concentrações de esforços não aparecerem, devido ao tipo de malha adotada.

O EBERICK, nos dois casos para o dimensionamento, adotou os momentos menores que o pico, revelado pelo programa SAP2000, conforme Gráfico 3 e Gráfico 4. Esse fato ocorreu porque nenhuma barra da grelha equivalente coincidiu sobre o ponto de concentração de esforços, conforme apresentado na Figura 53.

Figura 53 – Detalhe das barras da grelha equivalente (Modelo 3 - Caso 1).



Fonte: O autor.

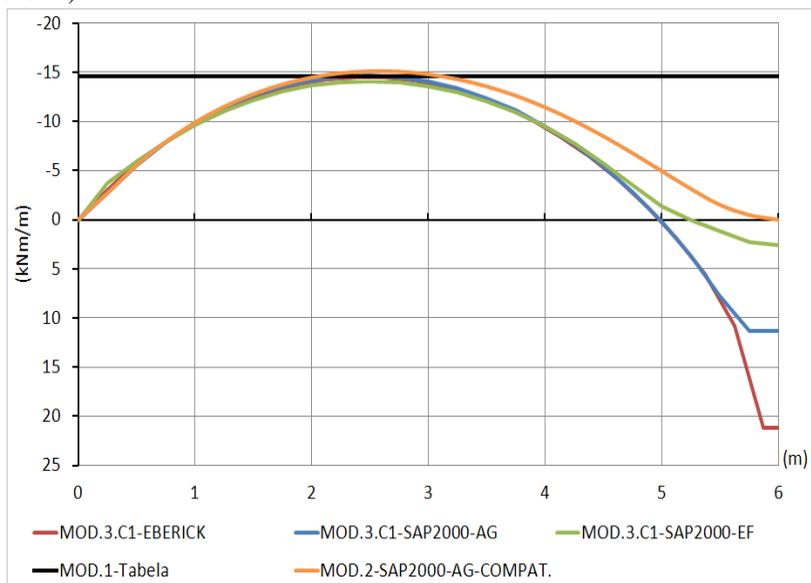
No entanto, para o SAP2000, uma das barras da grelha ficou exatamente sobre o ponto de concentração de esforços, apoiada no pilar P5.

A Figura 53 mostra o detalhe de uma das barras apoiada no pilar P5 da grelha equivalente usada no SAP2000. A mesma figura apresenta as barras com os picos de esforços, usadas para o dimensionamento no EBERICK, próximas ao pilar P5, apoiadas sobre a V5A e V5B. Lembrando que o pico de momento capturado no EBERICK não está exatamente no ponto de concentração de esforços, e sim, próximo,

mascarando os resultados ainda maiores evidenciados pelo SAP2000.

Para a continuidade entre as lajes L1/L3 sobre a viga V2, no momento negativo de dimensionamento não há diferenças quando considerado o valor máximo do Modelo 3 e comparado com o Modelo 1 - Tabela compatibilizado, conforme Gráfico 5.

Gráfico 5 – Momentos na continuidade L1/L3 sobre a viga V2 (Modelo 3 – Caso 1).

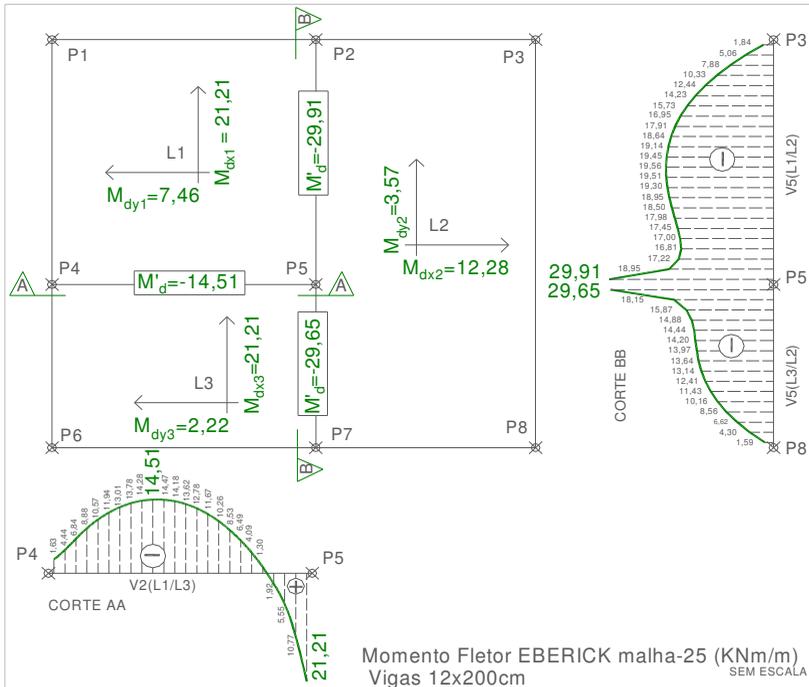


Fonte: O autor.

O Gráfico 5 mostra os momentos negativos na continuidade entre as lajes L1 e L3 para modelos numéricos com lajes isoladas e momentos compatibilizados, apresenta seus resultados plotados e forma uma curva parabólica com valor máximo próximo aos valores obtidos com auxílio de tabelas. No entanto, ao melhorar o modelo, com todos os elementos que compõem a estrutura e liberado o giro das lajes, surgiram picos de momentos positivos.

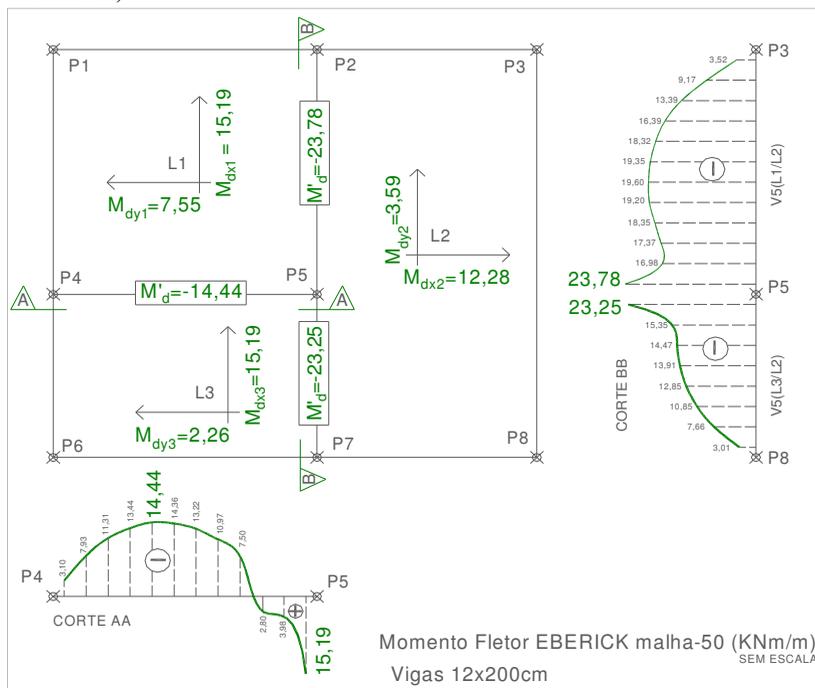
Embora os momentos negativos de dimensionamento não sofressem mudanças significativas entre os diversos modelos numéricos, melhores análises nos momentos positivos são necessárias, pois o EBERICK, no Caso 1 e no Caso 2, para armadura positiva no meio do vão, adotou os picos de momentos na grelha equivalente próximos ao pilar P5 tanto para a laje L1 quanto para a L3, conforme apresentado na Figura 54 e na Figura 55.

Figura 54 – Momentos de dimensionamento das Lajes (Modelo 3 - Caso 1 - EBERICK).



Fonte: O autor.

Figura 55 – Momento de dimensionamento das Lajes (Modelo 3 - Caso 2 - EBERICK).



Fonte: O autor.

Os momentos negativos de dimensionamento na continuidade das lajes L1/L2 e L2/L3 mostrados na Figura 54 e na Figura 55 são os picos de momentos obtidos pela perturbação na malha, próximos ao ponto de singularidade e não exatamente no ponto sobre o pilar P5, cerca de 12,50 cm para cada lado do pilar.

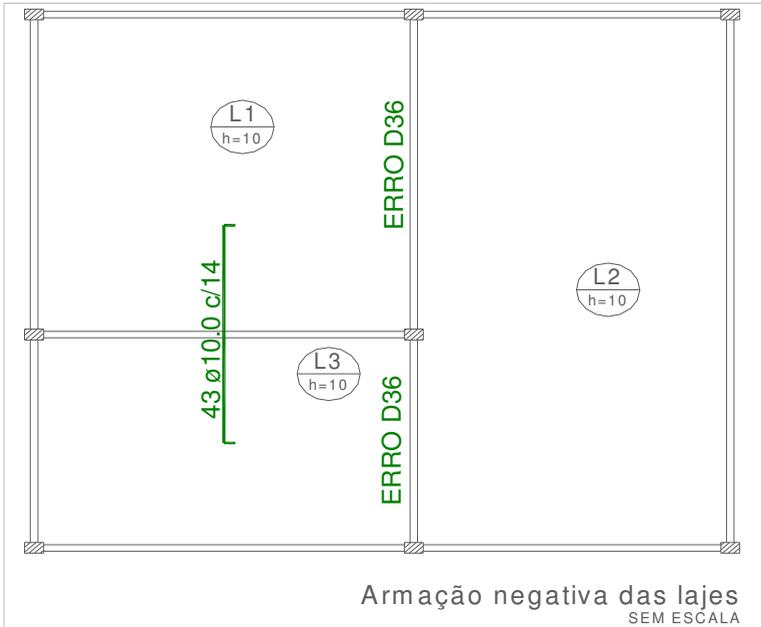
Já os momentos positivos de dimensionamento das lajes L1 e L3 não são aqueles obtidos no meio das lajes, como seria o esperado. O programa adotou os picos de momentos positivos provocados pela concentração de esforços, próximos ao pilar P5, conforme CORTE AA, apresentado na Figura 54 e na Figura 55.

Conforme mencionado anteriormente, ao se aumentar o espaçamento da malha, reduz-se a concentração dos esforços, porém estas permanecem encobertas, falseando os resultados. Desnecessário mostrar o dimensionamento para o Modelo 3 – Caso 2, pois malhas de 50 x 50 cm mascaram os resultados da concentração de esforços.

Será apresentado apenas o dimensionamento no EBERICK para o Modelo 3 – Caso 1, de malha 25 x 25 cm, que, apesar de não usar o momento da concentração dos esforços no apoio da grelha sobre o pilar P5, evidenciado pelo programa SAP2000, são os picos de momentos da continuidade entre lajes.

As armaduras obtidas no dimensionamento no programa EBERICK para o Modelo 3 – Caso 1 (malha de 25 x 25 cm) estão na Figura 56.

Figura 56 – Armadura continuidade das lajes (Modelo 3 - Caso 1 - EBERICK).



Fonte: O autor.

Os resultados da Figura 56 mostram que a continuidade entre as lajes L1/L2 e L2/L3 não foi dimensionada pelo EBERICK, apresentando o seguinte erro:

Erro D36 - Erro na armadura negativa:

Este erro ocorre quando todas as bitolas configuradas apresentam algum erro de dimensionamento (espaçamento, CG da armadura, etc...) para a armadura negativa. (EBERICK, 2014).

Solução:

- Analisar os erros de cada bitola e suas possíveis soluções;
- Configurar outras bitolas para o cálculo das lajes, acessando a configuração Materiais e Durabilidade-Bitolas. (EBERICK, 2014).

Ao analisar os erros apresentados para cada bitola da Figura 57, a seguir, e as possíveis soluções sugeridas pelo programa, como adotar outras bitolas de cálculo para as lajes.

Figura 57 – Configuração das bitolas das lajes.

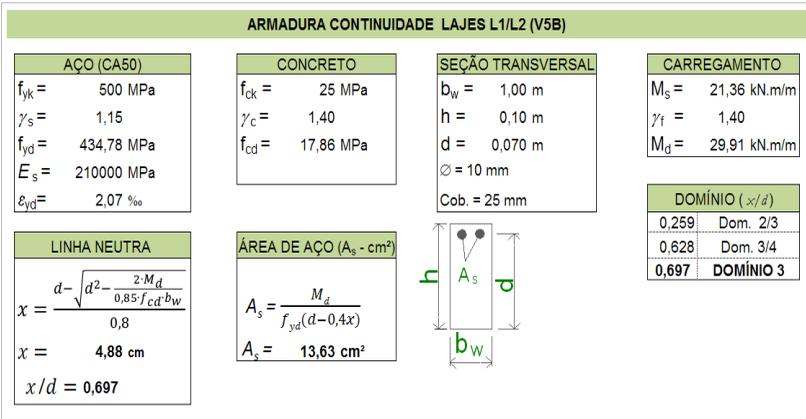
Longitudinais		Transversais	
<input type="checkbox"/>	3.2	<input type="checkbox"/>	7.0
<input type="checkbox"/>	3.4	<input checked="" type="checkbox"/>	8.0
<input type="checkbox"/>	4.0	<input checked="" type="checkbox"/>	10.0
<input checked="" type="checkbox"/>	4.2	<input checked="" type="checkbox"/>	12.5
<input type="checkbox"/>	4.6	<input checked="" type="checkbox"/>	16.0
<input checked="" type="checkbox"/>	5.0	<input type="checkbox"/>	20.0
<input type="checkbox"/>	6.0	<input type="checkbox"/>	22.2
<input checked="" type="checkbox"/>	6.3	<input checked="" type="checkbox"/>	25.0

Fonte: O autor.

Concluiu-se que, mesmo alterando as bitolas das lajes, a densidade de armadura na continuidade das lajes L1/L2 e L2/L3 continua alta, impossibilitando o cálculo e o detalhamento dessas continuidades entre lajes.

Para a continuidade das lajes L1/L2 em questão do Modelo 3 - Caso 1, elaborou-se uma planilha eletrônica, conforme Figura 58, a qual apresenta a posição da linha neutra com armadura \varnothing 10 mm e cobrimento de 2,5 cm, de acordo com as características de agressividade do ambiente, do concreto, do aço, dimensão da seção transversal e carregamento.

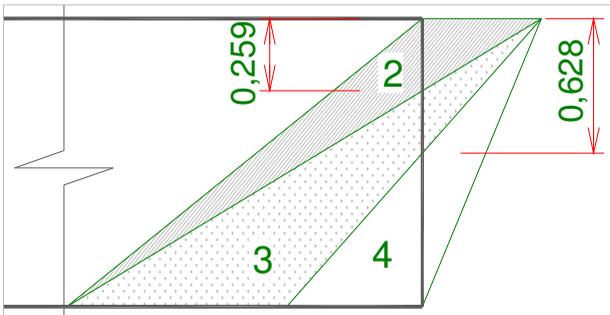
Figura 58 – Planilha de cálculo da linha neutra e área de aço continuidade lajes L1/L2 (V5B).



Fonte: O autor.

A Figura 59 apresenta o limite da linha neutra entre os domínios 2/3 e 3/4 da continuidade entre as lajes L1/L2 caso o dimensionamento ocorresse com as alterações sugeridas pelo programa em uma análise elástica.

Figura 59 – Limites de domínio de deformação na continuidade entre as lajes L1/L2.



Fonte: O autor.

A posição da linha em $x/d = 0,697$ para continuidade das lajes L1/L2 pertenceria ao domínio 4 de deformação, com a seção superarmada e ruptura à compressão do concreto e o aço sem escoamento. Essas lajes dimensionadas em uma análise elástica linear, nesse domínio de deformação, poderiam ser, em caso de uma eventual

sobrecarga imprevista, encaminhadas para uma ruptura frágil, sem aviso prévio, com rompimento brusco do concreto, sem esgotar toda a capacidade resistente da armadura.

A NBR 6118:2014 prescreve que, para um adequado comportamento dúctil em vigas e lajes, a posição da linha neutra para concreto com $f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$ deverá ser limitada em $x/d \leq 0,45$, e nessa situação ficou em $x/d = 0,697$, muito maior do que o sugerido pela norma, sem qualquer patamar de ductilidade. O que não atenderia a uma eventual redistribuição de esforços, por estar superarmada.

3.3.1.4 Modelo 4 – Avaliação do efeito da modelagem nas concentrações de esforços

Nesse modelo, que analisa o comportamento conjunto das lajes apoiadas em vigas deslocáveis, foram usados os seguintes parâmetros:

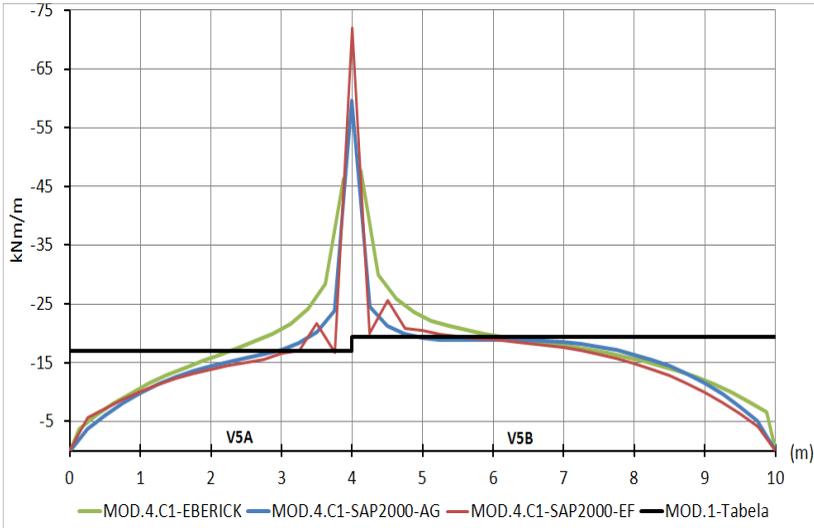
- Lajes particionadas por analogia de grelha e elementos finitos com malha coincidente (25 x 25 cm);
- Rigidez à torção da grelha equivalente $J_t=2I$.

Segundo REIS (2007), na modelagem de estruturas é necessário avaliar algumas variáveis que podem modificar os resultados dos esforços, entre elas a rigidez à torção e a rigidez à flexão nos apoios das lajes.

Então, nesse modelo será avaliada a influência da deslocabilidade das vigas de apoio e a rigidez à torção destas, e para isso foram criados dois casos.

Para o Caso 1, foi analisada a influência da rigidez à flexão e rigidez nula à torção das vigas de apoio das lajes. Sendo as vigas com dimensões de 12 x 50 cm, deslocáveis verticalmente e considerando a mesa colaborante das lajes, conforme prescrições normativas da NBR 6118:2014.

Gráfico 6 – Momentos na continuidade das Lajes sobre a viga V5 (Modelo 4 – Caso 1).

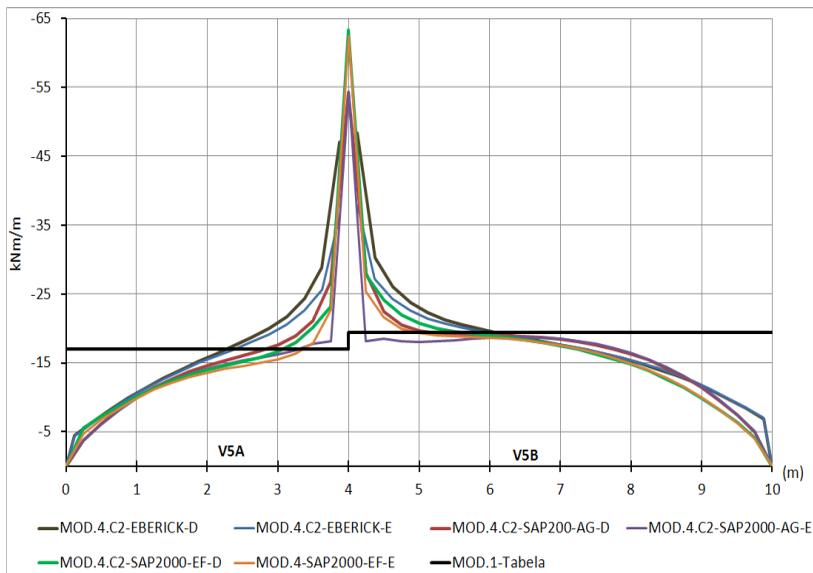


Fonte: O autor.

Analisando o Gráfico 6, verificou-se que a influência da deslocabilidade das vigas de apoio sobre os momentos negativos ao longo da viga V5 foi muito pequena, porém, na região próxima ao pilar P5, ponto de singularidade, os momentos aumentaram consideravelmente devido aos apoios flexíveis desse modelo. Então, ao considerar apoios flexíveis e rigidez nula à torção, houve aumento dos picos de momento em relação ao Modelo 3, que não considerava a deslocabilidade dos apoios, apenas a rotação na continuidade das lajes.

Para o Caso 2, analisou-se o comportamento das lajes quanto à influência da flexão e a rigidez à torção das vigas de apoio, sendo as vigas modeladas com dimensões de 12 x 50 cm, com 15% de torção e deslocáveis verticalmente, considerando também a mesa colaborante das lajes. O Gráfico 7 mostra o comportamento das lajes ao longo da viga V5.

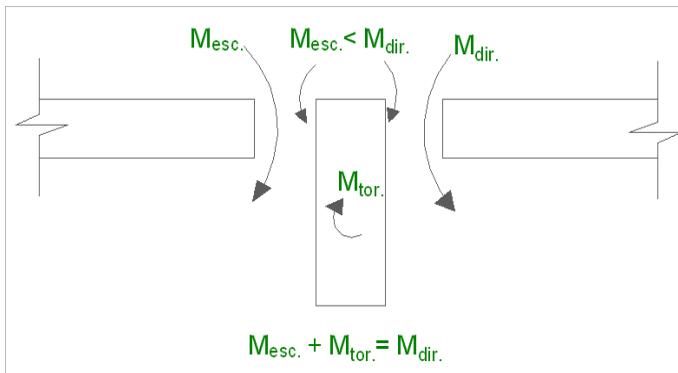
Gráfico 7 – Momentos na continuidade das Lajes sobre a viga V5 (Modelo 4 – Caso 2).



Fonte: O autor.

Analisando o comportamento da continuidade das lajes L1/L2 e L2/L3 ao longo da viga V5 por meio do Gráfico 7, verifica-se em cada modelo e programa, que os momentos analisados pela direita são ligeiramente maiores do que os da esquerda. Isso ocorre porque na modelagem foram considerados 15% da torção nas vigas de apoio, e parte do momento à esquerda é absorvido pelas vigas de apoio, conforme desenho esquemático da Figura 60.

Figura 60 – Desenho esquemático de torção em viga.



Fonte: O autor.

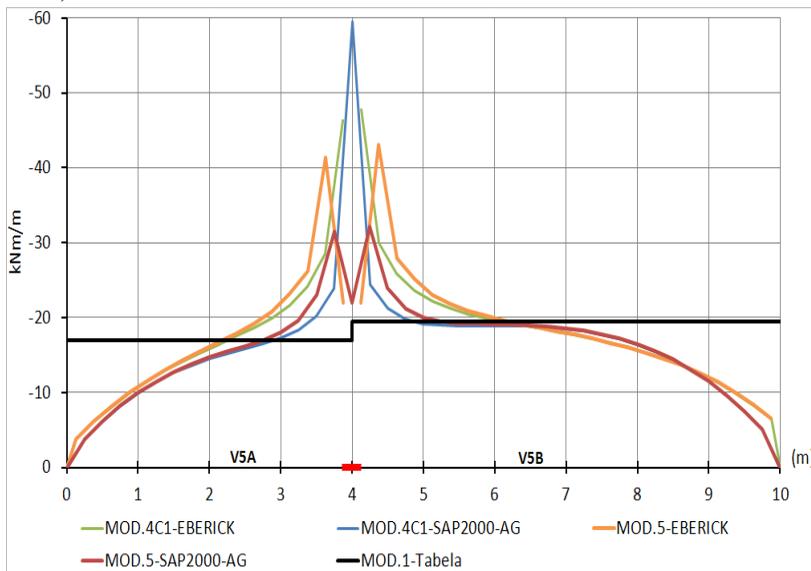
Na região próxima ao pilar P5, mesmo que partes dos momentos tenham sido absorvidas pela viga de apoio e os picos de momentos diminuam em relação ao Caso 1, os mesmos continuam altos, e entende-se que as concentrações de esforços sofrem pouca influência devido à torção e à flexão dos apoios das lajes. É possível perceber, por meio dos gráficos, que os momentos a partir das regiões um pouco mais distantes, cerca de dois metros do pilar P5, não sofreram alterações, permanecendo os valores abaixo do Modelo 1 compatibilizado. É importante ressaltar que essa distância serve de parâmetro para entender qual será a extensão do apoio a ser plastificado.

3.3.1.5 Modelo 5 – Plastificando apenas onde a concentração de momento é maior

Nesse modelo pretende-se analisar o efeito da plastificação no ponto de singularidade, encontro da grelha equivalente com o pilar P5. O modelo elástico linear adotado para fazer a plastificação foi o Modelo 4 – Caso 1, que desconsidera a torção de compatibilidade dos apoios de borda das lajes e considera sua flexibilidade.

Plastificando apenas a região do pico de momento, com uma taxa máxima de armadura $A_s = 8,80 \text{ cm}^2/\text{m}$ – parâmetro importante para a plastificação no EBERICK –, atingindo o momento de plastificação igual a $M_p = -21,95 \text{ kNm/m}$, e a posição da linha neutra em $x/d = 0,45$, têm-se a redistribuição do pico de momento conforme apresentado no Gráfico 8.

Gráfico 8 – Momentos na continuidade das Lajes sobre a viga V5 (Modelo 5 – Ponto).



Fonte: O autor.

O Gráfico 8 mostra a redistribuição do pico de momento somente no ponto de maior concentração dos esforços. A plastificação dos apoios, nos programas EBERICK e SAP2000, particionou o pico em momentos menores, redistribuindo-os para as barras adjacentes da grelha equivalente. Nesse caso, a plastificação ocorreu na direção normal do momento máximo e com boa parte da concentração dos esforços dissipada para as barras adjacentes da grelha. A partir desses resultados verifica-se que é necessário aumentar a extensão da plastificação.

3.3.1.6 Modelo 6 – Plastificando trechos de tamanhos variáveis na continuidade das lajes

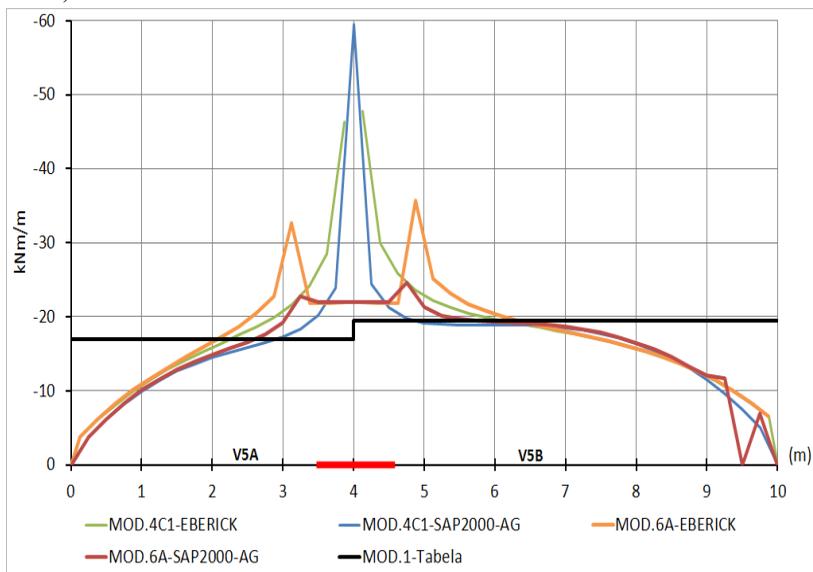
Nesse modelo foi verificado o comportamento da plastificação e concentração dos esforços em trechos variáveis nos apoios de continuidade das lajes, nos programas EBERICK e SAP2000. O modelo elástico linear adotado para fazer a plastificação foi o Modelo 4 – Caso 1, que desconsidera a torção de compatibilidade e considera a flexibilidade dos apoios das lajes.

Para melhores análises na plastificação de trechos com tamanhos variáveis na continuidade das lajes, foi mantida a mesma configuração do Modelo 5 quanto à taxa máxima de armadura $A_s = 8,80 \text{ cm}^2/\text{m}$, momento de plastificação igual a $M_p = -21,95 \text{ kNm/m}$ e a posição da linha neutra em $x/d = 0,45$. Foi modificada a extensão da plastificação nos apoios de continuidade das lajes sobre a V5, porque plastificar apenas o ponto de maior concentração dos esforços não solucionou o problema.

3.3.1.7 Modelo 6A – Plastificação de 50 cm para cada lado do pilar P5

Foi analisado, nesse modelo, o efeito da plastificação em 50 cm para cada lado do pilar P5 ao longo da viga V5. Os resultados estão plotados no Gráfico 9.

Gráfico 9 – Momentos na continuidade das Lajes sobre a viga V5 (Modelo 6A – 50cm).



Fonte: O autor.

O Gráfico 9 mostra que, limitando o momento de plastificação em $M_p = -21,95 \text{ kNm/m}$, os dois programas redistribuíram o pico de momento em 50 cm para cada lado do pilar P5, ficando constantes nessa

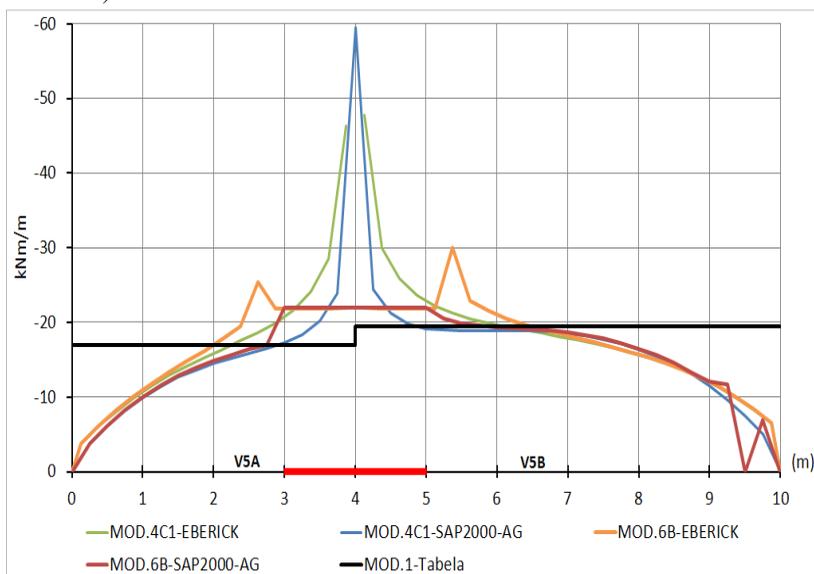
região, tanto para o programa EBERICK como para o SAP2000. Porém, logo que terminou a extensão da plastificação, tem-se ainda concentração de esforços menor que a inicial, devido à redistribuição, mas ainda alta no EBERICK e menores no SAP2000.

É necessário aumentar a extensão do trecho de plastificação, pois o objetivo desse modelo é plastificar os apoios de continuidade com momentos iguais a $M_p = -21,95 \text{ kNm/m}$ e redistribuir os momentos que estão acima desse valor.

3.3.1.8 Modelo 6B – Plastificação de 100 cm para cada lado do pilar P5

Nesse modelo foi analisado o efeito da plastificação em 100 cm para cada lado do pilar P5 ao longo da viga V5. Os resultados estão apresentados no Gráfico 10.

Gráfico 10 – Momentos na continuidade das Lajes sobre a viga V5 (Modelo 6B – 100 cm).



Fonte: O autor.

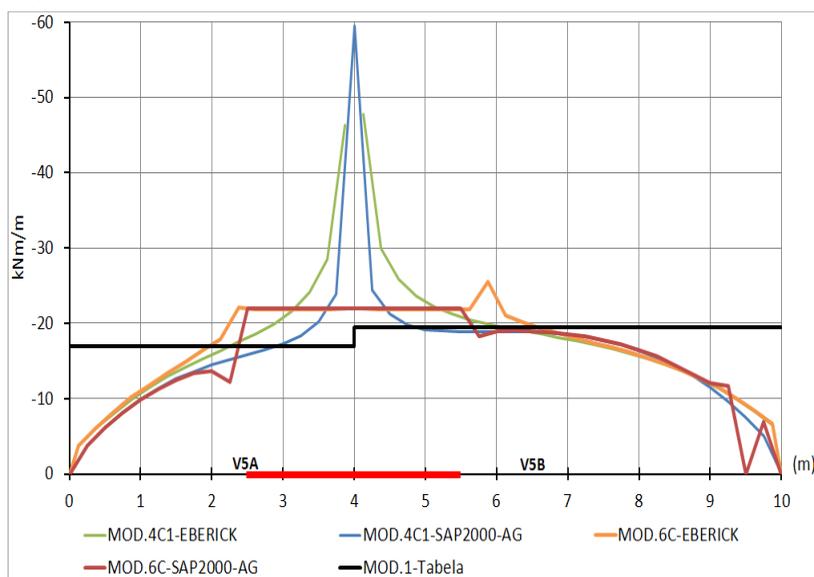
Por meio do Gráfico 10, pode-se concluir que, ao longo de aproximadamente 1,0 m do lado da viga V5A, a redistribuição dos esforços do pico ficou uniformizada, e os momentos obtidos nessa

região apresentaram valores idênticos aos definidos como momento de plastificação $M_p = -21,95 \text{ kNm/m}$. Para o SAP2000 a extensão da plastificação poderia ficar com esse tamanho, pois não há momentos maiores do que aqueles definidos como limites e todos ficaram menores que o momento plástico. Já o EBERICK continua apresentando picos de momento logo que termina a região plastificada. Nesse caso ainda é necessário aumentar o trecho de plastificação para uniformização dos momentos limite, próximos ao definido como momento resistente ou de plastificação.

3.3.1.9 Modelo 6C – Plastificação de 150 cm para cada lado do pilar P5

Nesse modelo foi analisado o efeito da plastificação em 150 cm para cada lado do pilar P5 ao longo da viga V5. Os resultados estão apresentados no Gráfico 11.

Gráfico 11 – Momentos na continuidade das Lajes sobre a viga V5 (Modelo 6C).



Fonte: O autor.

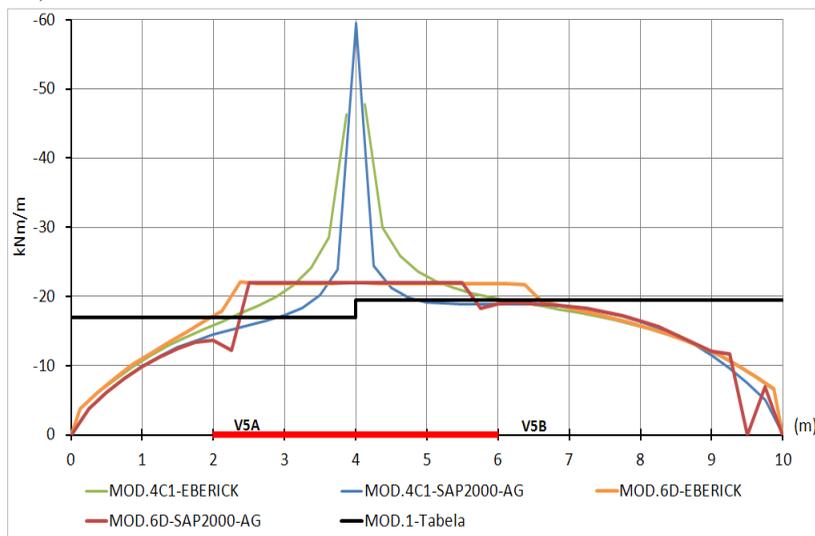
Na plastificação dos apoios ao longo de 1,50 m sobre a viga V5A, a partir do pilar P5, os momentos ficaram uniformes e de valor

aproximado em torno de $-21,95 \text{ kNm/m}$, definido como momento de plastificação em ambos os programas. A extensão da plastificação dos apoios de continuidade das lajes L2/L3 sobre a V5A pode, parar com essa extensão, pelo fato de que os esforços estão muito próximos ao momento de plastificação. Quanto à extensão de 1,50 m sobre a V5B, logo que termina o trecho da plastificação no EBERICK, ainda apresenta concentrações de esforços bem menores do que aquelas do modelo elástico linear, Modelo 4 – Caso 1. Mas, ainda faz-se necessária maior extensão de plastificação apenas para o EBERICK, sendo dispensada para o SAP2000, pelo simples fato de que depois de 1,0 m, conforme Modelo 6B, não há esforços maiores aos definidos como limite.

3.3.1.10 Modelo 6D – Plastificação de 200 cm para cada lado do pilar P5

Nesse modelo verificou-se o efeito da plastificação ao longo de 200 cm para cada lado do pilar P5 no apoio de continuidade das lajes sobre a viga V5. Os resultados estão apresentados no Gráfico 12.

Gráfico 12 – Momentos na continuidade das Lajes sobre a viga V5 (Modelo 6D).



Fonte: O autor.

Analisando o Gráfico 12, verifica-se, nessa situação, que não seria necessário a plastificação se estender em dois metros para cada lado do pilar P5. Isso porque a partir de 1,50 m sobre a viga V5A os momentos são menores e não permanecem iguais a $-21,95$ kNm/m. Esse fato já foi apresentado no Modelo 6B, para o programa SAP2000, e Modelo 6C em ambos os programas. Na V5B, a partir de 1,50 m ainda se tinha a necessidade de plastificar uma extensão maior que o Modelo 6C para o programa EBERICK, podendo, então, permanecer a plastificação em 2,0 m, pois os momentos após essa extensão ficam menores do que o de plastificação, e as taxas de armaduras são menores do que aquelas configuradas inicialmente para o programa EBERICK.

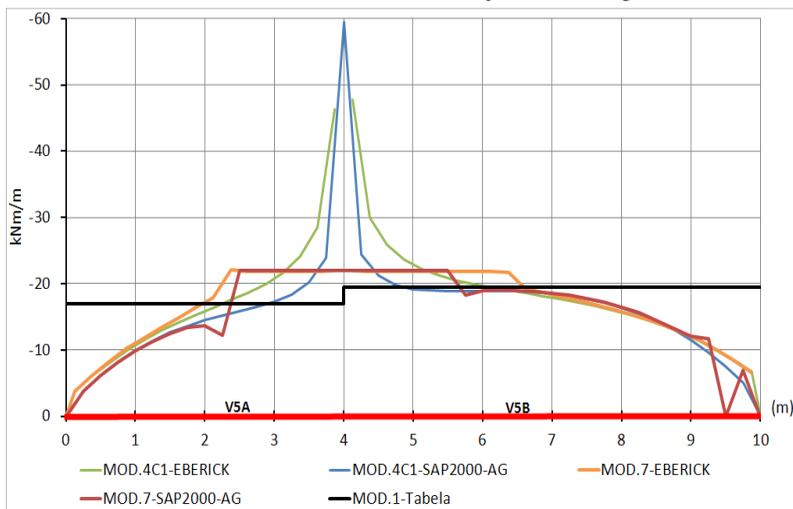
3.3.1.11 Modelo 7 – Plastificando todo o apoio de continuidade

Nesse modelo será verificado o efeito da plastificação ao longo de todo o apoio de continuidade das lajes sobre a viga V5 por meio dos programas EBERICK e SAP2000.

Os parâmetros adotados quanto à taxa de armadura, e conseqüentemente ao limite do momento de plastificação e à posição da linha neutra, serão os mesmos apresentados nos modelos 5 e 6.

Os resultados de momentos na continuidade das lajes ao longo da viga V5 desse modelo estão apresentados no Gráfico 13.

Gráfico 13 – Momentos na continuidade das Lajes sobre a viga V5 (Modelo 7).



Fonte: O autor.

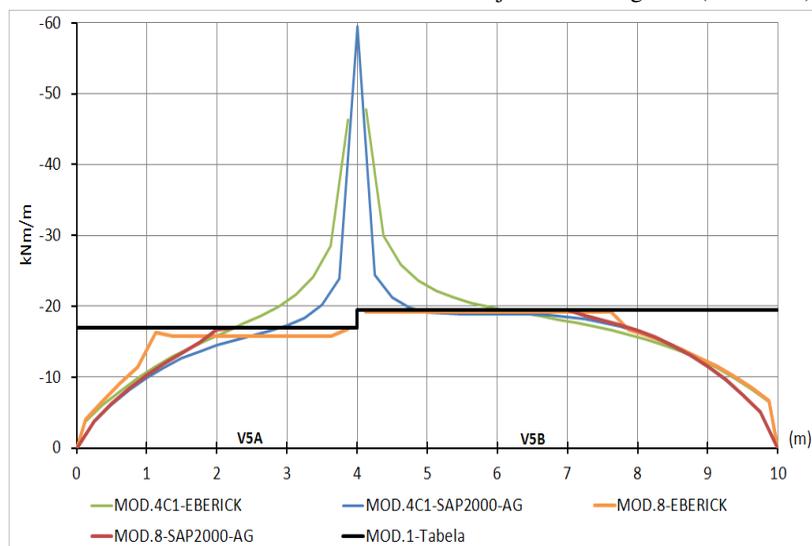
Por meio do Gráfico 13, chega-se ao entendimento de que a plastificação não se alterou em relação aos modelos 6C e 6D, confirmando-se as análises dos referidos modelos anteriores de que não é necessária a extensão da plastificação em todo o apoio de continuidade das lajes sobre a viga V5, podendo ser plastificado o apoio de continuidade em uma extensão de 1,50 m para cada lado do pilar P5 no programa SAP2000 e de dois metros para o programa EBERICK.

3.3.1.12 Modelo 8 – Plastificando com os valores do Modelo 1 (Tabela)

Nesse modelo será analisado o efeito da plastificação usando os valores de momentos negativos do Modelo 1 – Tabela, ao longo de todo o apoio de continuidade das lajes sobre a viga V5 por meio dos programas EBERICK e SAP2000.

Os valores obtidos após plastificação de todo o apoio com valores de momento de plastificação idênticos aos obtidos por meio das tabelas de BARES, compatibilizados nos programas para os apoios de continuidade nas lajes ao longo da viga V5, estão apresentados no Gráfico 14.

Gráfico 14 – Momentos na continuidade das Lajes sobre a viga V5 (Modelo 8).



Fonte: O autor.

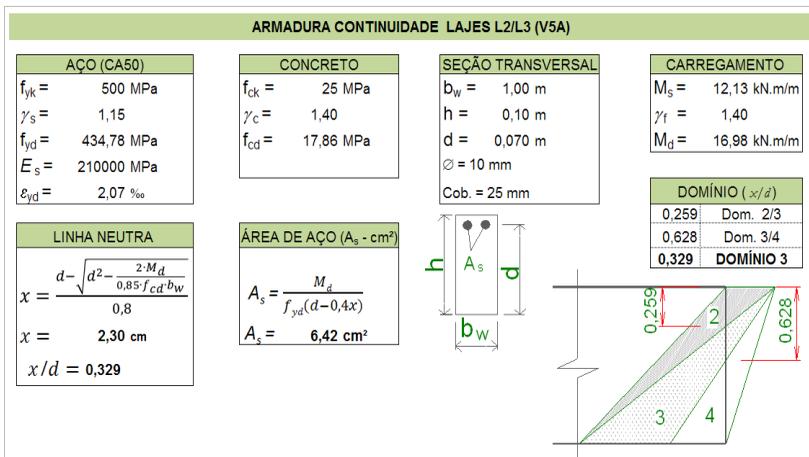
Os momentos obtidos em ambos os programas estão iguais ou bem próximos aos valores alcançados com auxílio de tabelas no Modelo 1 compatibilizados.

A NBR 6118:2014 estabelece limites para redistribuição de momentos e condições de ductilidade de elementos estruturais, com limites dados em função da linha neutra no ELU, e quanto menor for x/d maior será a capacidade de rotação e ductilidade.

A norma permite que seja adotada redistribuição fora dos limites estabelecidos, desde que a estrutura seja calculada mediante o emprego de análise não linear ou de análise plástica, com verificação explícita da capacidade de rotação das rótulas plásticas. Essa verificação explícita é dispensada desde que a posição da linha neutra seja limitada em $x/d \leq 0,25$, se $f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$, o que se aplica nesse caso.

Verificando as prescrições normativas para os apoios de continuidade das lajes sobre a viga V5A, elaborou-se uma planilha eletrônica, conforme Figura 61, para calcular a posição da linha neutra com $\varnothing 10 \text{ mm}$ e o cobrimento de 2,5 cm, de acordo com as características de agressividade do ambiente, do concreto, do aço, dimensão da seção transversal e momento de plastificação.

Figura 61 – Planilha de cálculo linha neutra e área de aço continuidade lajes L2/L3 (V5A).



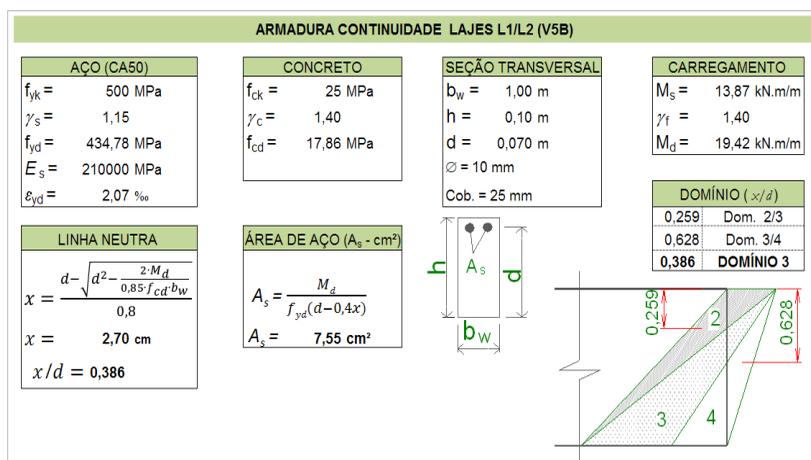
Fonte: O autor.

Com a posição da linha neutra em aproximadamente $x/d = 0,329$, a continuidade das lajes L2/L3 apresenta uma boa ductilidade,

pertencendo ao domínio 3 de deformação, e a seção subarmada com o concreto tendo esgotado sua capacidade resistente e o aço possuindo ainda uma boa reserva de capacidade resistente. Porém, a NBR 6118:2014 recomenda a verificação explícita da capacidade de rotação das rótulas plásticas.

Verificando as prescrições normativas para os apoios de continuidade das lajes sobre a viga V5B, fazendo uso da mesma planilha eletrônica, alterando os dados quanto ao momento de dimensionamento para obter a taxa de armadura e posição da linha neutra, tem-se os resultados apresentados na Figura 62.

Figura 62 – Planilha de cálculo linha neutra e área de aço continuidade lajes L1/L2 (V5B).



Fonte: O autor.

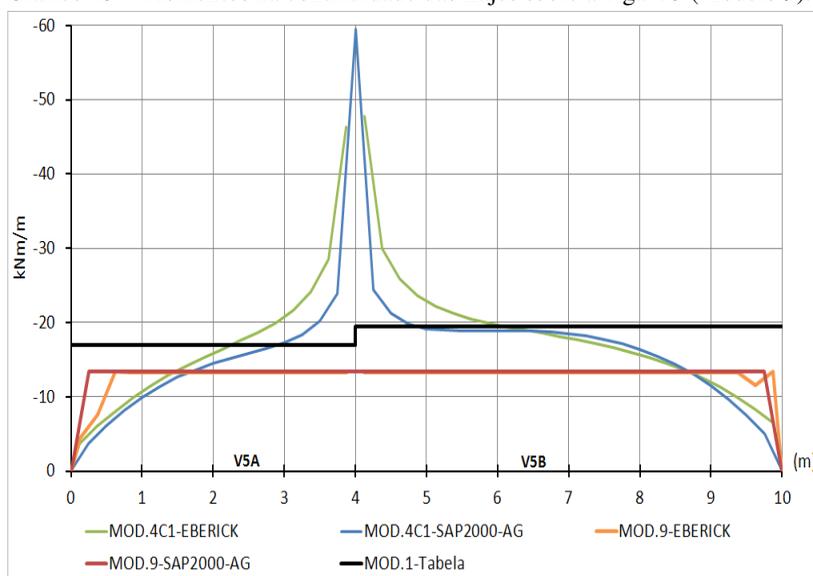
Para a posição da linha neutra em aproximadamente $x/d = 0,386$, a continuidade das lajes pertenceria ao domínio 3 de deformação, a seção subarmada com o concreto tendo esgotado sua capacidade resistente e o aço possuindo ainda uma boa reserva de capacidade resistente. Nesse caso, a laje possui uma boa ductilidade, no entanto a norma recomenda, quando a estrutura for calculada mediante o emprego de análises não lineares ou de análises plásticas, que deve ser feita a verificação explícita da capacidade de rotação das rótulas plásticas, sendo essa verificação dispensada se a posição da linha neutra for limitada em $x/d \leq 0,25$, se $f_{ck} \leq 50$ MPa.

3.3.1.13 Modelo 9 – Plastificando com valores abaixo do Modelo 1 (Tabela)

Nesse modelo será analisado o efeito da plastificação usando os valores dos momentos negativos inferiores ao Modelo 1 – Tabela, ao longo de todo o apoio de continuidade das lajes sobre a viga V5, por meio dos programas EBERICK e SAP2000.

Os resultados de momentos na continuidade das lajes ao longo da viga V5 estão apresentados no Gráfico 15.

Gráfico 15 – Momentos na continuidade das Lajes sobre a viga V5 (Modelo 9).



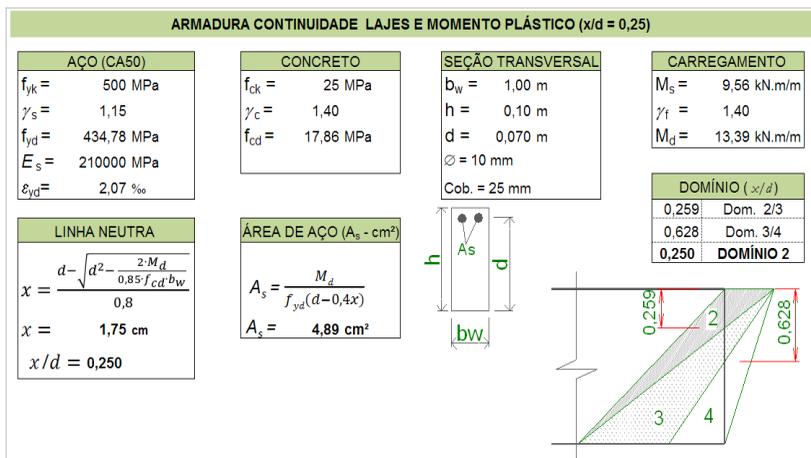
Fonte: O autor.

Conforme Gráfico 15, o momento de plastificação obtido, uniformemente distribuído ao longo da viga V5, foi de $M_p = -13,39 \text{ kNm/m}$, ficando bem abaixo dos valores obtidos no Modelo 1 – Tabela compatibilizados.

Verificando-se a posição da linha neutra na continuidade das lajes sobre a viga V5, foi montada uma planilha eletrônica, aplicada também para encontrar a taxa de armadura aproximada que produz o momento de plastificação $M_p = -13,39 \text{ kNm/m}$, conforme Figura 63, com $\varnothing 10 \text{ mm}$ e o cobrimento de 2,5 cm, de acordo com as características de agressividade do ambiente, do concreto, do aço, dimensão da seção

transversal e momento de plastificação.

Figura 63 – Planilha de cálculo linha neutra e área de aço continuidade lajes: L2/L3 (V5A); L1/L2(V5B).



Fonte: O autor.

Observa-se a posição da linha neutra aproximadamente em $x/d=0,25$ na continuidade dessas lajes, pertencendo ao domínio 2 de deformação, com a seção subarmada, o concreto tendo esgotado sua capacidade resistente e o aço possuindo ainda uma boa reserva de capacidade resistente. Caso essas lajes fossem dimensionadas nesse domínio, possuiriam uma boa ductilidade e atenderiam às prescrições normativas da NBR 6118:2014, dispensando a verificação explícita da capacidade de rotação das rótulas plásticas e atendendo muito bem este caso quanto ao equilíbrio dos esforços, à ductilidade e às lajes armadas corretamente.

3.3.1.14 Modelo 10 – Estudo da redistribuição e do efeito nos momentos positivos

Pretende-se aqui desenvolver um estudo sobre o efeito da redistribuição nos momentos positivos nas lajes em análise por meio de comparações entre os resultados obtidos em cada modelo, conforme Tabela 4.

Tabela 4 – Momentos positivos de alguns modelos EBERICK (kNm/m).

MODELOS														
LAJES	1(TABELA)		4C1		5(Pico)		6A(50cm)		6B(100cm)		6C(150cm)		6D(200cm)	
	M _{dx}	M _{dy}												
L1	6,78	6,78	17,64	7,71	10,83	7,90	7,78	7,72	7,77	7,73	7,77	7,73	7,77	7,73
L2	10,39	2,59	10,77	5,83	11,00	5,88	10,94	5,92	10,97	5,94	10,98	5,94	10,98	5,94
L3	5,29	2,52	17,59	3,96	10,84	4,01	7,61	4,01	7,31	4,02	7,30	4,02	7,30	4,02

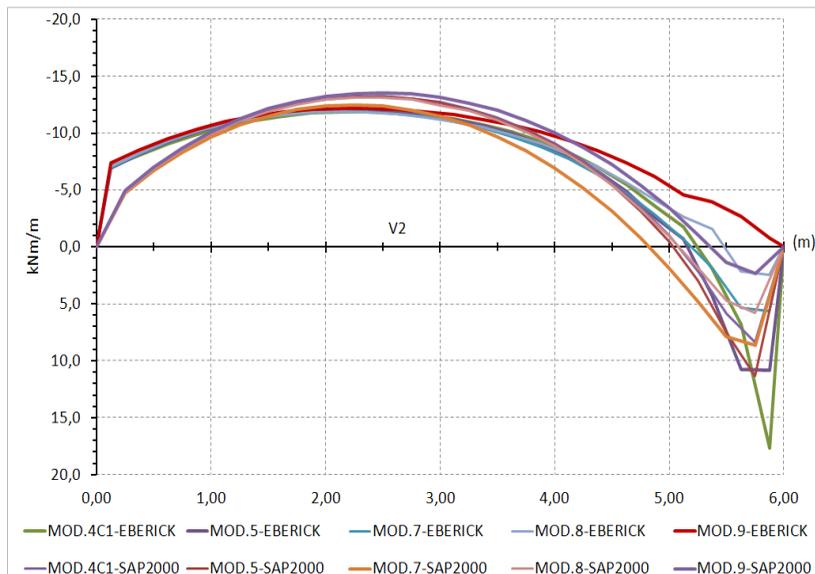
MODELOS						
LAJES	7(Apoio)		8(TAB.)		9(abaixo TAB.)	
	M _{dx}	M _{dy}	M _{dx}	M _{dy}	M _{dx}	M _{dy}
L1	7,89	7,94	7,88	7,97	8,44	8,13
L2	11,27	6,01	11,80	6,19	12,99	6,52
L3	5,65	4,08	4,56	4,09	4,57	4,16

Fonte: O autor.

Analisando a Tabela 4, verifica-se que os momentos de dimensionamento entre os modelos 6A, 6B, 6C e 6D pouco se alteraram com a plastificação do apoio de continuidade das lajes sobre a viga V5, podendo ser melhor representados pelo modelo 7.

Os momentos de dimensionamento M_{dx} das lajes L1 e L3 do Modelo 4C1 sem redistribuição estavam sendo influenciados pela concentração dos esforços. Para melhor análise dos resultados de momentos na continuidade entre essas lajes ao longo da viga V2 dos modelos 4C1, 5, 7, 8 e 9, esses resultados estão apresentados no Gráfico 16.

Gráfico 16 – Momentos na continuidade das Lajes L1/L3 sobre a viga V5 (Modelo 10).



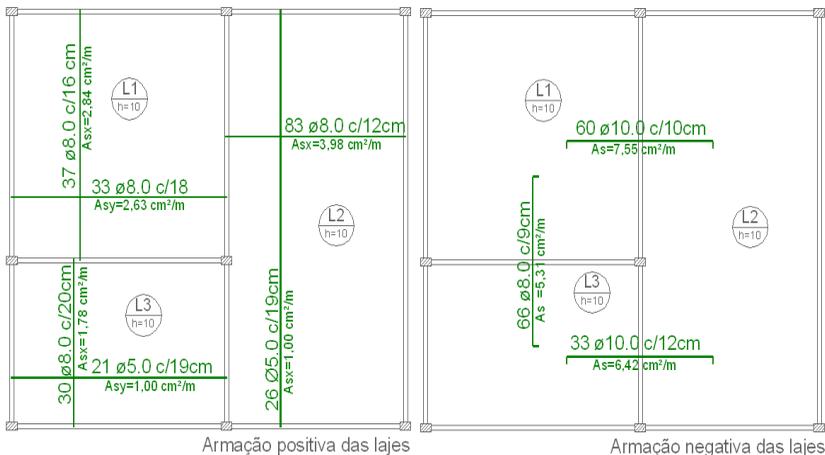
Fonte: O autor.

Os resultados de momentos positivos apresentados Gráfico 16 e usados no dimensionamento das lajes L1 e L2 deixaram de ser influenciados pela concentração de esforços nas proximidades do pilar P5, conforme se modificavam a extensão e o momento de plastificação. Com isso os momentos positivos de dimensionamento dessas lajes mudaram para aqueles obtidos no meio das lajes e, conseqüentemente, reduzindo as taxas de armadura.

3.3.1.15 Detalhamento Armaduras Pavimento 1

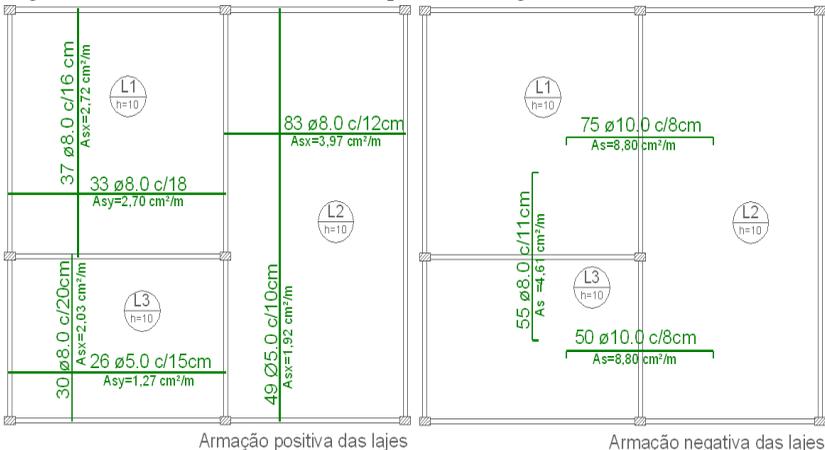
As figuras a seguir apresentam o detalhamento das armaduras de alguns modelos para o Pavimento 1.

Figura 64 – Detalhamento Armadura positiva e negativa Modelo 1 (Tabela).



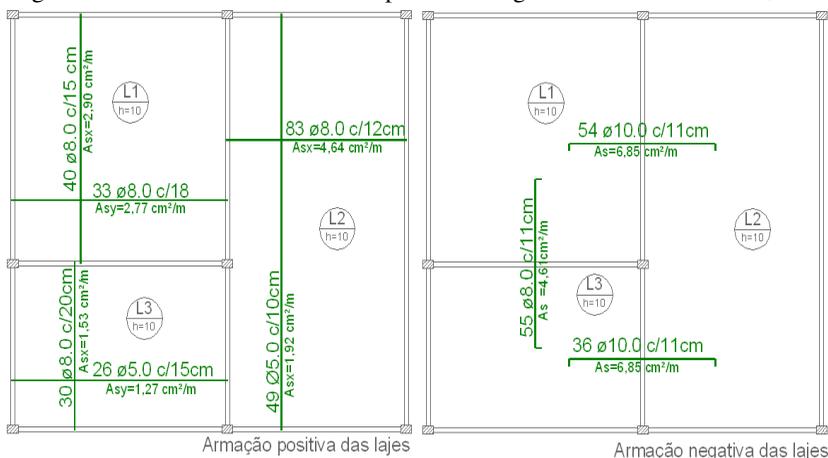
Fonte: O autor.

Figura 65 – Detalhamento Armadura positiva e negativa Modelo 7 ($x/d=0,45$).



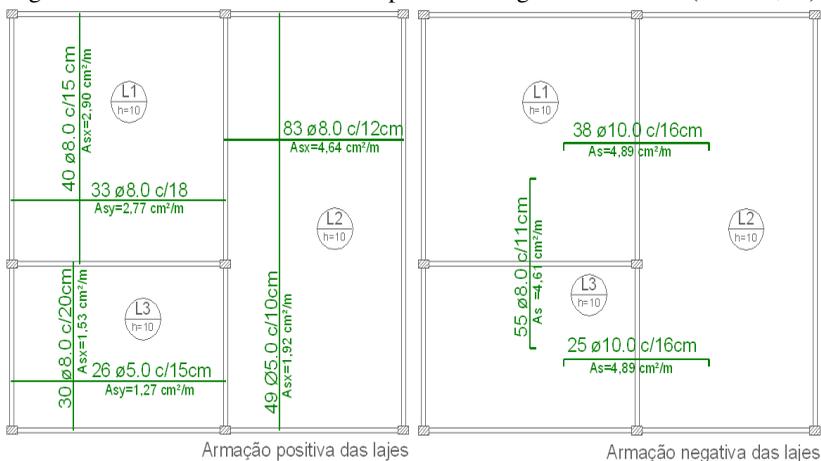
Fonte: O autor.

Figura 66– Detalhamento Armadura positiva e negativa linha neutra $x/d=0,35$.



Fonte: O autor.

Figura 67 – Detalhamento Armadura positiva e negativa Modelo 9 ($x/d = 0,25$).



Fonte: O autor.

Analisando as figuras 64 a 67 nota-se que o detalhamento das armaduras positivas pouco se alterou. Mesmo com grandes plastificações e redistribuições dos momentos negativos nos apoios de continuidade entre lajes, as taxas de armadura positivas calculadas, quando comparadas entre si, mantiveram-se constantes e aumentaram muito pouco, exceto a taxa de armadura “ A_{sy} ” da laje L2 do Modelo 1 quando comparada aos modelos mais refinados, que por apresentar

conflitos na obtenção dos esforços por meio de tabelas, já mencionados anteriormente, ficou muito abaixo dos modelos calculados pelo EBERICK.

No detalhamento das armaduras negativas, há diferenças significativas se compararmos os modelos de cálculo obtidos por meio de tabelas e modelo elástico aos modelos com plastificação e posição da linha neutra limitada em $x/d = 0,45$; $x/d = 0,35$; $x/d = 0,25$ nos apoios entre as lajes L1/L2 e L2/L3. Na continuidade entre as lajes L1/L3, ocorreu apenas uma redistribuição de momentos positivos, pois o programa não foi configurado para esse fim.

Tabela 5 – Taxas de Armadura Continuidade entre lajes (cm²/m).

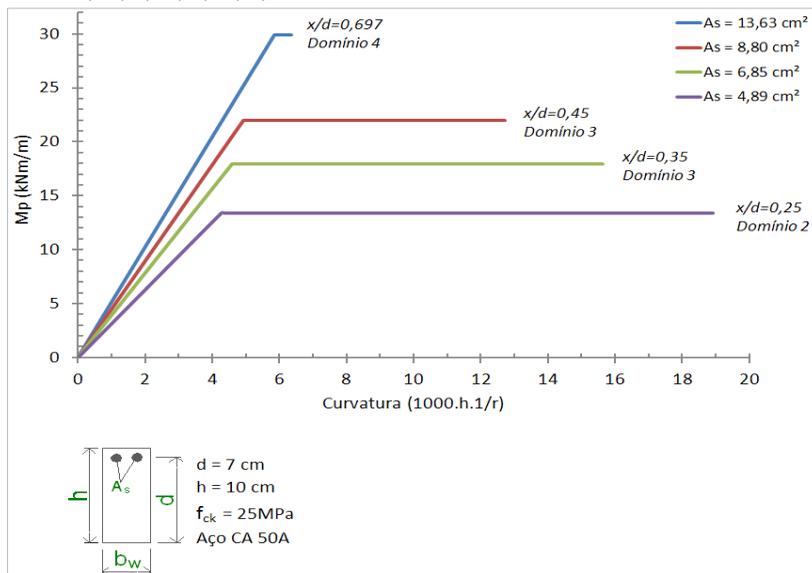
Cont. Lajes	Taxas de armadura cm ² /m				
	Mod. 1 Tabela	Mod. 3 Caso 1	Mod. 7 $x/d = 0,45$	$x/d = 0,35$	Mod. 9 $x/d = 0,25$
L1/L2	7,55	13,63	8,80	6,85	4,89
L2/L3	6,42	13,63	8,80	6,85	4,89

Fonte: O autor.

A Tabela 5 apresenta as taxas de armadura de alguns modelos e posição da linha neutra. Conforme eram feitas as plastificações e redistribuições dos esforços, as regiões plastificadas se tornavam mais dúcteis, devido às reduções das taxas de armaduras, principalmente aquelas em que a posição relativa da linha neutra ficou limitada em $x/d = 0,25$.

O detalhamento das armaduras positivas e negativas para as lajes do Pavimento 1 com diferentes posições da linha neutra mostra que é possível a plastificação dos apoios sem perda de equilíbrio e ductilidade e com as lajes estando armadas corretamente. Caso o projetista decidisse calcular e detalhar as armaduras, com uma análise não linear plastificando os apoios de continuidade das lajes dessa estrutura que apresentava elevadas concentrações de esforços na análise elástica linear, elas estariam bastante dúcteis e com uma boa curvatura plástica, conforme Figura 68.

Figura 68 – Variação do Momento de plastificação com linha neutra em $x/d \rightarrow 0,25; 0,35; 0,45; 0,697$.



Fonte: O autor.

A Figura 68 apresenta a variação do momento de plastificação conforme as taxas de armadura e posições da linha neutra desde a análise elástica linear em $x/d=0,697$, que nesse caso o programa EBERICK não dimensionou devido à elevada taxa de armadura e ao x/d muito elevado e praticamente sem capacidade de rotação, até posições da linha neutra limitada em $0,45; 0,35; 0,25$ de plastificações dos apoios com valores de momentos próximos e menores do que aqueles obtidos com auxílio de tabelas. Essas limitações da linha neutra e taxas de armaduras fazem com que as lajes apresentem uma boa curvatura plástica e, caso fossem dimensionadas no domínio 2 com x/d em $0,25$, ou no domínio 3 com x/d em $0,35$, ou ainda limite permitido do domínio 3 em $x/d=0,45$, as lajes estariam subarmadas em condições mais adequadas da posição da linha neutra, garantindo boas condições de ductilidade, em equilíbrio e armadas corretamente. Além de serem conduzidas, em um caso excepcional, de condição adversa de carregamento para uma ruptura com aviso prévio, com armadura escoando antes do rompimento do concreto, mostrando um quadro visível de deterioração das lajes.

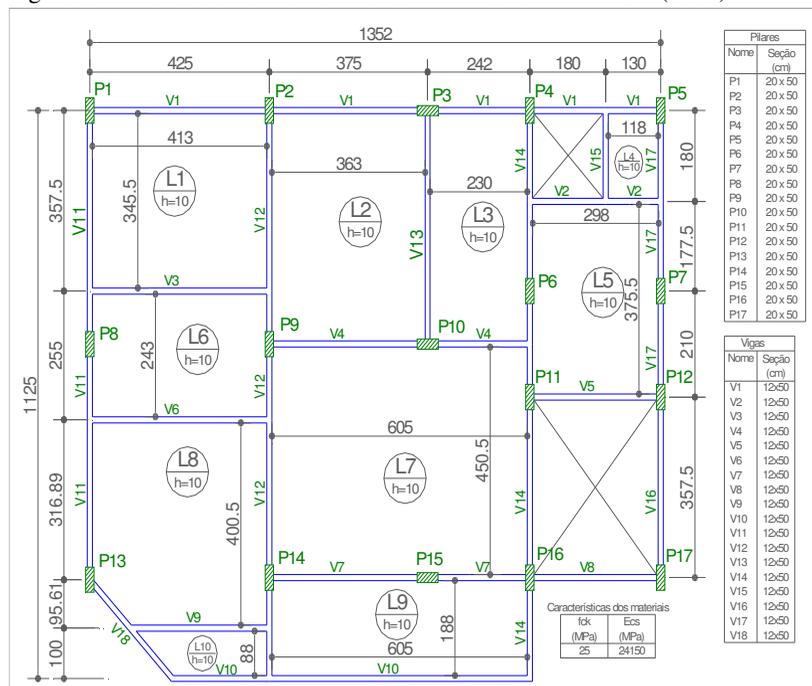
3.3.2 Pavimento 2

No Pavimento 1, analisou-se o comportamento de uma estrutura que apresentava apenas um ponto de concentração dos esforços, gerando picos de momentos negativos e positivos que influenciavam no dimensionamento das lajes. No Pavimento 2, seguindo as características de modelamento por analogia de grelha, aplicaram-se os conhecimentos adquiridos nos estudos do Pavimento 1.

O Pavimento 2 é o mesmo usado no tutorial do programa EBERICK, em que foram feitas algumas alterações necessárias nas características do material e carga atuante na estrutura.

Esse pavimento contém nove lajes, dezoito vigas e dezessete pilares, com as respectivas cargas, f_{ck} e dimensão do agregado graúdo, conforme Figura 69.

Figura 69 – Planta de Fôrma Pavimento 2 – Tutorial EBERICK (2004).



Fonte: O autor.

Tabela 6 – Tipos de lajes e cargas do Pavimento 2.

Nome	Dados		Sobrecarga (kN/m ²)		
	Tipo	Altura (cm)	Peso próprio (kN/m ²)	Adicional	Acidental
L1	Maciça	10	2.50	3.37	2.00
L2	Maciça	10	2.50	1.50	2.00
L3	Maciça	10	2.50	3.97	2.00
L4	Maciça	10	2.50	1.50	2.00
L5	Maciça	10	2.50	1.50	2.00
L6	Maciça	10	2.50	4.78	2.00
L7	Maciça	10	2.50	3.87	2.00
L8	Maciça	10	2.50	1.50	2.00
L9	Maciça	10	2.50	1.50	2.00
L10	Maciça	10	2.50	1.50	2.00

Fonte: O autor.

Os estudos das concentrações de esforços nas lajes desse Pavimento 2 serão:

1. Cálculo das lajes com auxílio de tabelas;
2. Esforços das lajes em uma análise elástica nos programas EBERICK e SAP2000;
3. Plastificação dos apoios de continuidade, nos programas EBERICK e SAP2000;
4. Estudo da redistribuição com efeito nos momentos positivos.

Nos modelos 2, 3 e 4, para melhor representar os esforços, foram adotados os seguintes parâmetros:

- Lajes particionadas por analogia de grelha, de malha (25x25cm) coincidente;
- Mesma malha para ambos os programas;
- Rigidez à torção da grelha equivalente $J_t=2I$;
- Vigas de contorno e de continuidade deslocável verticalmente, com rigidez à torção nula.

Os modelos desse pavimento têm como base os estudos realizados no pavimento 1, aplicando-os em uma estrutura mais complexa e utilizando as ferramentas disponíveis nos programas SAP2000 e EBERICK, ambos por analogia de grelha, quanto à plastificação dos apoios para um pavimento didático disponibilizado no manual de utilização do programa EBERICK.

3.3.2.1 Modelo 1 – Cálculo das lajes com auxílio de tabelas

Nesse modelo serão analisados os resultados dos momentos de cálculo não compatibilizados das lajes com auxílio de tabelas de CZERNY e BARES, comparando os resultados obtidos entre si.

Para auxiliar e validar os resultados dos esforços de cálculo das lajes, e comparando com os obtidos por tabelas, modelaram-se as lajes com analogia de grelha e elementos finitos no SAP2000, com as seguintes características:

- Lajes particionadas por analogia de grelha e elementos finitos com malha coincidente (25 x 25 cm);
- Rigidez à torção da grelha equivalente $J_t=2I$;
- Vigas de contorno e continuidade das lajes, indeslocáveis verticalmente com rigidez à torção nula;
- Vigas de continuidade consideradas como apoios perfeitos engastados.

A Figura 70 apresenta o esquema estrutural das lajes, sendo elas consideradas isoladas, e os momentos fletores obtidos com auxílio das tabelas de CZERNY e BARES.

3.3.2.1.1 Comparativo de resultados obtidos com auxílio de tabelas e por lajes isoladas em modelos numéricos

Na Tabela 7 são apresentados os resultados de momentos obtidos por meio de tabelas sem compatibilização e por lajes isoladas em modelos numéricos, usando analogia de grelha e elementos finitos para comparar os valores obtidos do Modelo 1 por elementos finitos.

Tabela 7 – Comparativo entre resultados de lajes isoladas modelos numéricos e com auxílio de tabelas Pav. 2.

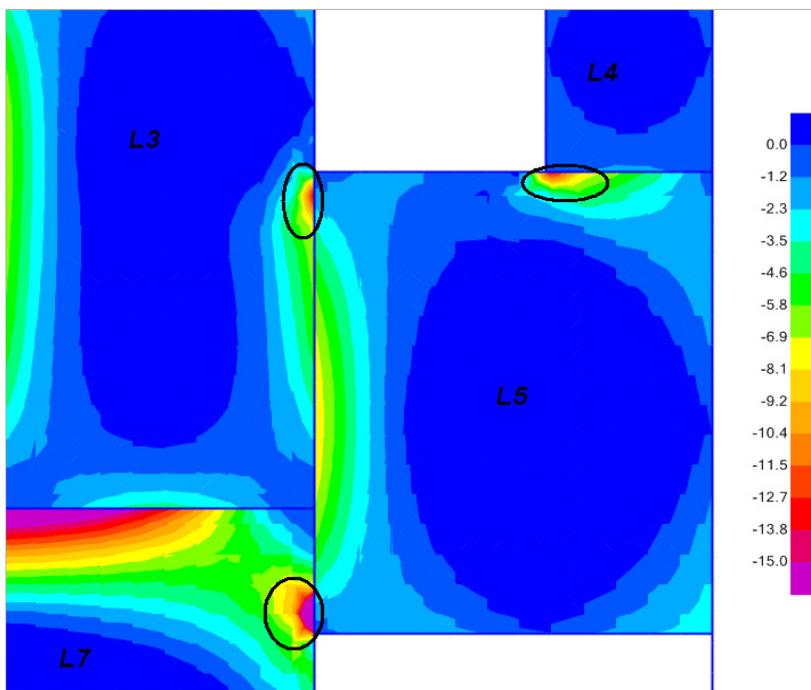
LAJES	Modelo 1	M _{dx}	DIF % EF	M' _{dx}	DIF % EF	M _{dy}	DIF % EF	M' _{dy}	DIF % EF
L1	EF	6,04	-	-12,74	-	4,53	-	-11,27	-
	AG	5,42	-10,26	-12,16	-4,55	3,74	-17,44	-10,82	-3,99
	BARES	5,40	-10,60	-12,89	1,18	3,93	-13,25	-11,39	1,06
	CZERNY	5,60	-7,28	-12,91	1,33	4,41	-2,65	-11,40	1,15
L2	EF	4,31	-	-9,27	-	2,54	-	-7,21	-
	AG	3,88	-9,98	-8,77	-5,39	2,09	-17,72	-6,75	-6,38
	BARES	4,14	-3,94	-9,39	1,29	2,21	-12,99	-7,36	2,08
	CZERNY	4,27	-0,93	-9,37	1,08	2,67	5,12	-7,31	1,39
L3	EF	4,65	-	-8,52	-	1,84	-	-5,87	-
	AG	4,33	-6,88	-8,18	-3,99	1,60	-13,04	-5,59	-4,77
	BARES	4,10	-11,83	-8,60	0,94	1,22	-33,70	-6,02	2,56
	CZERNY	4,22	-9,25	-8,67	1,76	1,83	-0,54	-4,22	-28,11
L4	EF	0,93	-	-	-	0,66	-	-1,57	-
	AG	0,85	-8,60	-	-	0,59	-10,61	-1,58	0,64
	BARES	0,86	-7,53	-	-	0,60	1,69	-1,65	5,10
	CZERNY	0,89	-4,30	-	-	0,65	8,33	-1,66	5,73
L5	EF	3,97	-	-8,11	-	2,57	-	-	-
	AG	3,53	-11,08	-7,80	-3,82	2,04	-20,62	-	-
	BARES	3,98	0,25	-8,80	8,51	2,24	-12,84	-	-
	CZERNY	4,09	3,02	-8,83	8,88	2,48	-3,50	-	-
L6	EF	3,56	-	-7,24	-	1,59	-	-4,94	-
	AG	3,12	-12,36	-7,04	-2,76	1,44	-9,43	-4,77	-3,44
	BARES	3,49	-1,97	-7,32	1,10	1,04	-34,59	-6,55	32,59
	CZERNY	3,65	2,53	-7,30	0,83	1,78	11,95	-5,09	3,04
L7	EF	9,46	-	-20,01	-	3,97	-	-15,08	-
	AG	7,50	-20,72	-19,16	-4,25	3,64	-8,31	-14,30	-5,17
	BARES	8,36	-11,63	-20,34	1,65	4,59	15,62	-15,28	1,33
	CZERNY	9,53	0,74	-20,43	2,10	5,55	39,80	-15,18	0,66
L8	EF	4,36	-	-10,09	-	3,52	-	-8,57	-
	AG	3,74	-14,22	-9,32	-7,63	2,91	-17,33	-8,06	-5,95
	BARES	3,19	-26,83	-8,70	-13,78	2,61	-10,31	-7,27	-15,17
	CZERNY	3,31	-24,08	-7,77	-22,99	2,73	4,60	-7,31	-14,70
L9	EF	2,57	-	-4,48	-	0,89	-	-2,84	-
	AG	2,30	-10,51	-4,22	-5,80	0,77	-13,48	-2,69	-5,28
	BARES	2,56	-0,39	-4,55	1,56	0,58	-34,83	-2,59	-8,80
	CZERNY	2,56	-0,39	-4,55	1,56	0,90	1,12	-3,03	6,69
L10	EF	0,64	-	-1,06	-	0,60	-	-1,06	-
	AG	0,62	-3,13	-1,06	-	0,14	-76,67	-0,66	-37,74
	BARES	0,42	-34,38	-0,92	-13,21	0,21	-65,00	-0,73	-31,13
	CZERNY	0,42	-34,38	-0,93	-12,26	0,23	-61,67	-0,73	-31,13

Fonte: O autor.

A Figura 71 apresenta o esquema estrutural com simplificações de cálculo manual para lajes isoladas com auxílio de tabelas, sendo apoios simples às bordas da laje L5 com a L3, da laje L5 com a L7 e da laje L4 com a L5.

Em uma análise um pouco mais refinada no SAP2000, em que os apoios das lajes são considerados indeslocáveis e o giro é impedido nos trechos com continuidade com outras lajes, obtém-se novos resultados, conforme mostra a Figura 72.

Figura 72 – Resultados dos Momentos encontro das Lajes L3/ L5/ L7 e L5/L4 – Pavimento 2 – EF.



Fonte: O autor.

Observa-se, na Figura 72, devido ao fato de as lajes possuírem lados parcialmente apoiados e parcialmente com continuidade, que surgem concentrações de esforços na mudança de vinculação. Os vazios reentrantes nas lajes L4 e L5, L3 e L5, L7 e L5 influenciaram no surgimento das concentrações dos esforços e picos de momentos nos encontros dessas lajes. Isso prova que o uso de tabelas auxilia muito nas

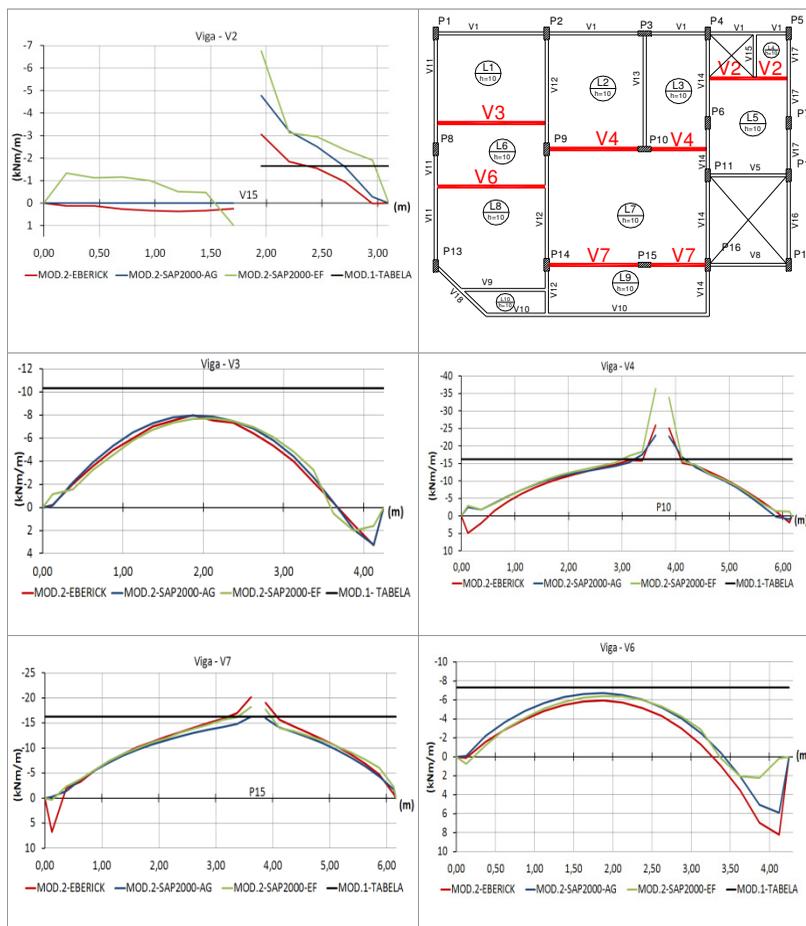
comparações dos resultados, mas os valores que elas apresentam não podem ser tomados como absolutos.

Em uma análise integrada da estrutura, tem-se a continuidade entre lajes, além de outros parâmetros que podem ser aplicados nesse modelo numérico e não foram, devido às simplificações de cálculo adotadas para obtenção dos resultados próximos àqueles obtidos com auxílio de tabelas. Essas simplificações, de maneira geral, mascaram os resultados e não mostram as eventuais concentrações de esforços que podem surgir na estrutura.

3.3.2.2 Modelo 2 – Esforços das lajes em uma análise elástica linear nos programas EBERICK e SAP2000

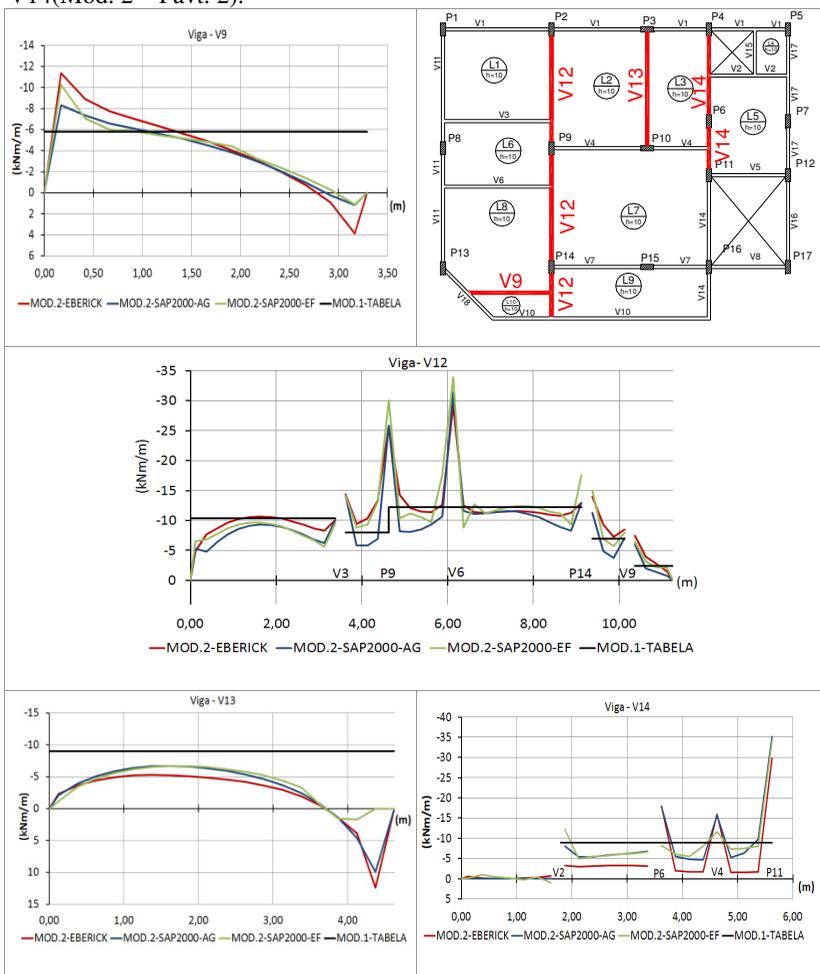
A Figura 73 e a Figura 74, apresentam os momentos fletores obtidos nos programas EBERICK e SAP2000, na continuidade das lajes em uma análise elástica do Pavimento 2.

Figura 73 – Momentos na continuidade das Lajes vigas V2, V3, V4, V6 e V7 (Mod. 2 – Pav. 2).



Fonte: O autor.

Figura 74 – Momentos na continuidade das Lajes vigas V9, V12, V13 e V14 (Mod. 2 – Pavt. 2).



Fonte: O autor.

Os gráficos da Figura 73 e da Figura 74, mostram várias concentrações de esforços, em vários pontos do Pavimento 2, com picos de momentos negativos na continuidade das lajes, sobre as vigas V2, V4, V7, V12 e V14. Esses picos de momentos têm valores idênticos nos dois programas, tanto para o EBERICK como para o SAP2000. Isso ocorreu porque a malha adotada é a mesma para ambos. Caso fosse adotado apenas o mesmo espaçamento da malha em ambos os

programas, poderia acontecer situação idêntica à que ocorreu no Pavimento 1, onde o SAP2000 evidenciaria o pico de momento ainda maior que o apresentado para o dimensionamento no EBERICK. A existência de lacunas nos gráficos de momentos de continuidade dessas lajes não apresenta qualquer barra da grelha equivalente, exatamente sobre o elemento estrutural em questão. Analisando com mais acuidade os gráficos, é possível perceber uma tendência em aumentar os valores de momentos na continuidade das lajes sobre as vigas na região próxima aos apoios intermediários. Os gráficos mostram também perturbações nos momentos positivos, que interferem no dimensionamento das lajes, como os apresentados nas vigas V3, V4, V6, V7 e V9.

Muitas dessas perturbações da grelha equivalente, com picos de momentos, principalmente negativos, não permitem o dimensionamento em uma análise elástica, devido a concentrações de esforços. Na Figura 75, apresentam-se os resultados para o dimensionamento elástico, da continuidade das lajes, no programa EBERICK.

Figura 75 – Dimensionamento elástico continuidade das Lajes – EBERICK – Pavimento 2.

Viga	Trecho	Laje 1	Laje 2	Md (kN.m/m)	Armadura	Status	
1	V3	1	L1	L6	-3.76	ø 6.3 c/20	calculado
2	V12	6	L1	L2	-10.73	ø 10.0 c/20	calculado
3	V12	5	L2	L6	-25.75	Erro D36	Erro
4	V4	1	L2	L7	-25.91	Erro D36	Erro
5	V13	1	L2	L3	-5.30	ø 6.3 c/17	calculado
6	V14	5	L3	L5	-3.55	ø 10.0 c/11	calculado
7	V4	2	L3	L7	-25.09	Erro D36	Erro
8	V14	4	L3	L5	-17.91	ø 10.0 c/11	calculado
9	V2	2	L4	L5	-3.06	ø 6.3 c/20	calculado
10	V14	3	L5	L7	-29.86	Erro D36	Erro
11	V6	1	L6	L8	-5.91	ø 6.3 c/15	calculado
12	V12	4	L6	L7	-29.23	Erro D36	Erro
13	V12	3	L7	L8	-29.23	Erro D36	Erro
14	V7	1	L7	L9	-20.14	ø 12.5 c/15	calculado
15	V7	2	L7	L9	-19.08	ø 12.5 c/15	calculado
16	V9	1	L8	L10	-11.52	ø 10.0 c/19	calculado
17	V12	2	L8	L9	-13.93	ø 6.3 c/6	calculado
18	V12	1	L9	L10	-7.61	ø 8.0 c/19	calculado
19							
20							
21							
22							

Fonte: O autor

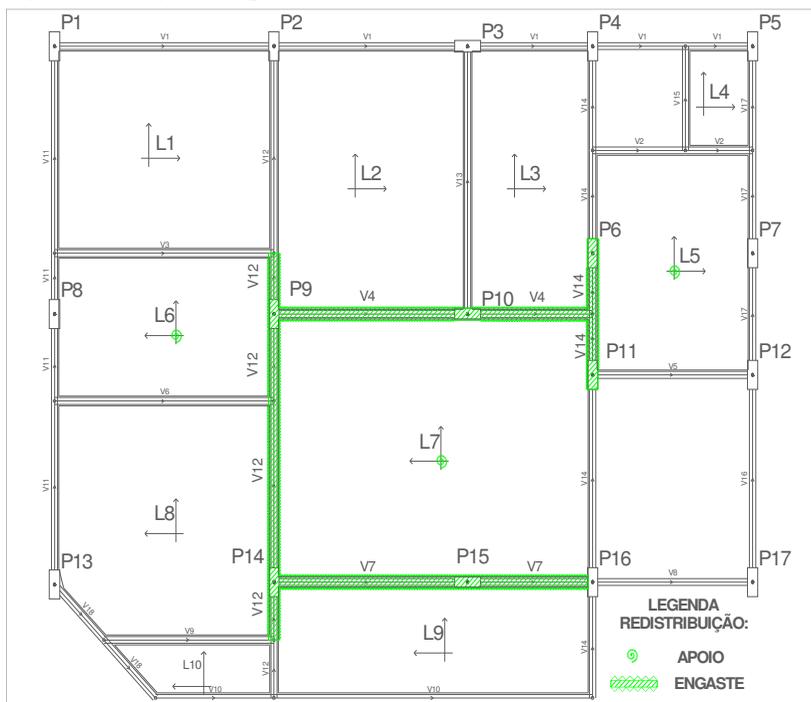
O “ErroD36 – Erro na armadura negativa” da Figura 75 também foi apresentado para o Pavimento 1. O EBERICK justifica esse erro, em que todas as bitolas configuradas nesses casos apresentam algum erro de dimensionamento para armadura negativa, tais como espaçamento e centro de gravidade da armadura. A solução apresentada pelo programa

seria analisar os erros de cada bitola com suas respectivas soluções, configurar outras bitolas. Essas possíveis soluções são pouco viáveis no caso de grandes concentrações de esforços, pois a laje, tendo uma taxa elevada de armadura, estando no domínio 4 de deformação e com uma ruptura frágil, rompendo bruscamente o concreto sem que toda capacidade resistente da armadura tenha se esgotado, teria seu dimensionamento em uma análise elástica inviabilizado.

Na continuidade entre essas lajes, em situação de “ErroD36” e com elevada concentração de esforços, pretende-se plastificar os apoios de continuidade e consequentemente redistribuir os esforços, garantindo condições adequadas de ductilidade e equilíbrio da estrutura.

Limitou-se a posição da linha neutra em $x/d=0,25$ com uma taxa de armadura $T=0,489\%$ para um momento de plastificação $M_p=-13,35\text{ kNm/m}$ na continuidade das lajes e redistribuindo todos os momentos superiores ao de plastificação, conforme apoios de continuidade em destaque na Figura 76.

Figura 76 – Engaste e Apoio a Plastificar – EBERICK – Pav. 2.

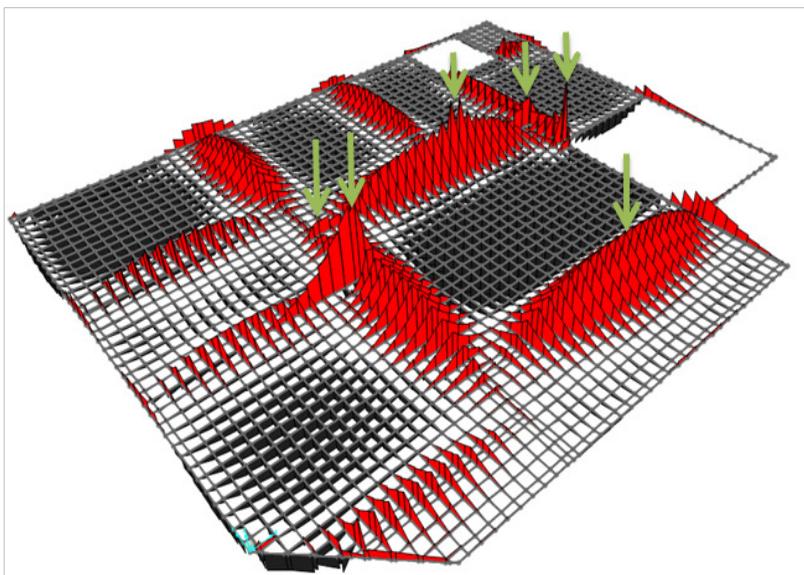


Fonte: O autor.

Nos demais apoios de continuidade, mesmo havendo uma perturbação na grelha equivalente, provocada pela concentração de esforços, o dimensionamento no modelo elástico atende às prescrições normativas, com os esforços atuantes em equilíbrio, e essas lajes estariam dimensionadas e armadas corretamente.

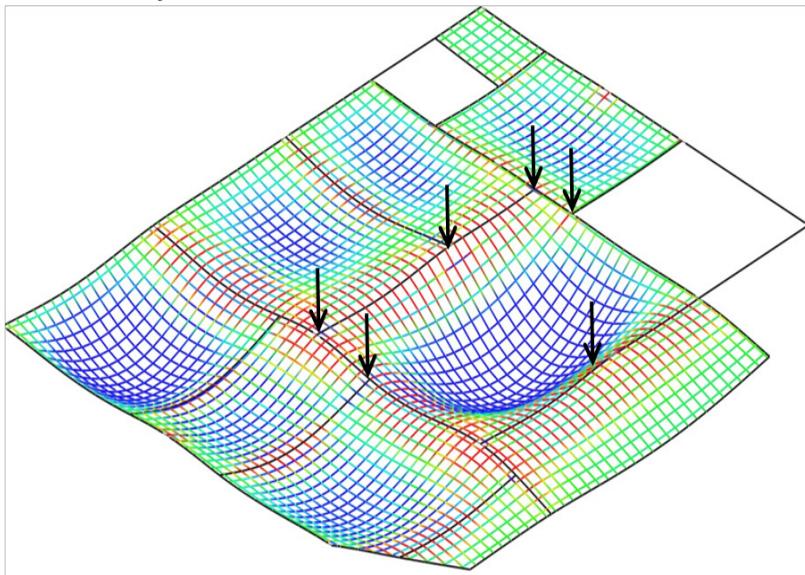
A Figura 77 e a Figura 78 mostram os pontos de concentração dos esforços na continuidade das lajes a analisar nos programas EBERICK e SAP2000.

Figura 77 – Grelha 3D SAP2000 – Pontos de concentração de esforços continuidade lajes – Pavimento 2.



Fonte: O autor.

Figura 78 – Grelha 3D EBERICK – Pontos de concentração de esforços continuidade lajes – Pavimento 2.



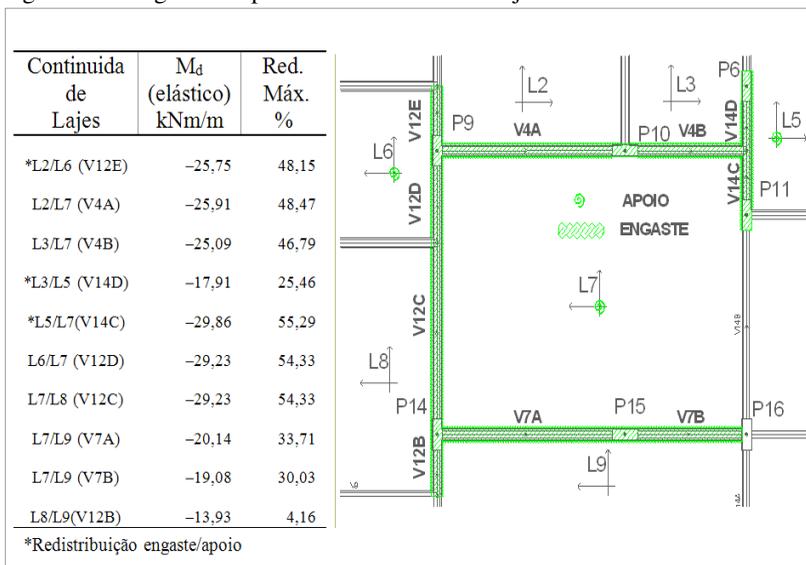
Fonte: O autor.

3.3.2.3 Modelo 3 – Plastificação dos apoios de continuidade nos programas EBERICK e SAP2000

Nesse modelo serão plastificados os apoios de continuidade do Pavimento 2, que apresentou várias concentrações de esforços, conforme Modelo 2.

A configuração do programa EBERICK na plastificação dos picos de momento com taxas de armadura acima de $T = 0,489\%$ e com momento de plastificação aproximado de valor igual a $M_p = -13,35 \text{ kNm/m}$ está apresentada na Figura 79.

Figura 79 – Negativos a plastificar continuidade lajes EBERICK – Pav. 2.



Fonte: O autor.

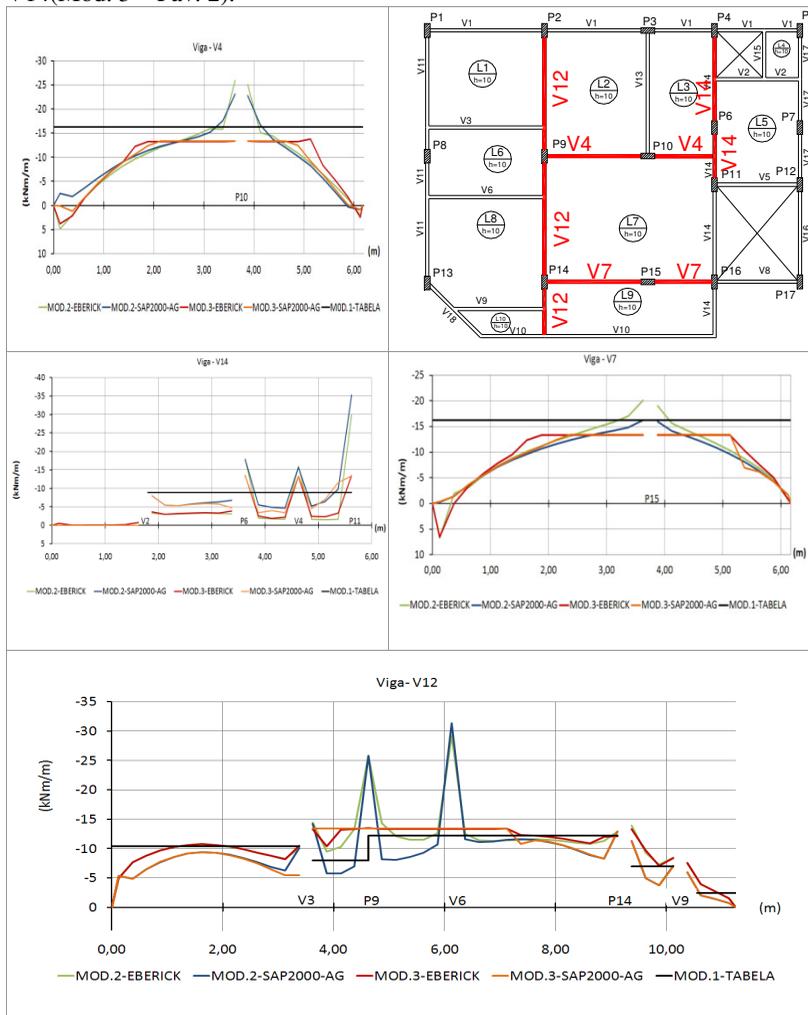
A Figura 79 mostra os apoios de continuidade a plastificar nas lajes e a porcentagem de quanto redistribuir dos momentos da análise elástica para atingir o momento de plastificação.

Além de selecionar os apoios de continuidade das lajes para redistribuir os esforços, é necessário selecionar as lajes L5, L6 e L7, aplicando redistribuição nos apoios, porque há barras da grelha equivalente nessas lajes apoiando-se diretamente sobre os pilares P6, P9 e P11, interferindo diretamente na plastificação dos apoios de continuidade das lajes.

Para o programa SAP2000, rotularam-se as extremidades das barras da grelha equivalente ao longo dos apoios, limitando o momento de plastificação $M_p = -13,39 \text{ kNm/m}$ e equilibrando os esforços com inserção de momentos de mesmo valor e sentido contrário sobre os nós de apoio das barras rotuladas na continuidade das lajes a plastificar.

Os resultados obtidos após a plastificação dos apoios de continuidade das lajes estão apresentados na Figura 80.

Figura 80 – Momentos na continuidade das Lajes vigas V4, V7, V12 e V14 (Mod. 3 – Pav. 2).



Fonte: O autor.

Após plastificação dos apoios de continuidade das lajes que apresentavam picos de momentos, os esforços foram redistribuídos ao longo dos apoios, obtendo momentos muito próximos ao de plastificação.

Dessa forma, no EBERICK foi possível o dimensionamento de todas as continuidades de lajes do Pavimento 2, conforme Figura 81.

Figura 81 – Dimensionamento plástico continuidade das Lajes – EBERICK – Pav. 2.

Viga	Trecho	Laje 1	Laje 2	Md (kN.m/m)	Armadura	Status
1 V3	1	L1	L6	-3,87	ø 6,3 c/20	calculado
2 V12	6	L1	L2	-10,75	ø 10,0 c/20	calculado
3 V12	5	L2	L6	-13,53	ø 10,0 c/15	calculado
4 V4	1	L2	L7	-13,35	ø 10,0 c/16	calculado
5 V13	1	L2	L3	-5,20	ø 6,3 c/18	calculado
6 V14	5	L3	L5	-3,90	ø 10,0 c/16	calculado
7 V4	2	L3	L7	-13,82	ø 8,0 c/10	calculado
8 V14	4	L3	L5	-13,30	ø 10,0 c/16	calculado
9 V2	2	L4	L5	-3,64	ø 6,3 c/20	calculado
10 V14	3	L5	L7	-13,74	ø 8,0 c/10	calculado
11 V6	1	L6	L8	-5,98	ø 6,3 c/15	calculado
12 V12	4	L6	L7	-13,35	ø 10,0 c/16	calculado
13 V12	3	L7	L8	-13,39	ø 10,0 c/16	calculado
14 V7	1	L7	L9	-13,35	ø 6,0 c/10	calculado
15 V7	2	L7	L9	-13,35	ø 8,0 c/10	calculado
16 V9	1	L8	L10	-11,41	ø 10,0 c/19	calculado
17 V12	2	L8	L9	-13,30	ø 10,0 c/16	calculado
18 V12	1	L9	L10	-7,53	ø 8,0 c/19	calculado
19						
20						
21						
22						

Fonte: O autor.

O dimensionamento elástico da continuidade entre lajes do Pavimento 2 não foi muito bem-sucedido. Algumas lajes apresentaram picos de momentos, e o programa EBERICK enunciou mensagem de erro nos apoios de continuidade dessas lajes. Após plastificação dos apoios de continuidade de tais lajes, os picos de momentos foram redistribuídos, tornando possível a obtenção de momentos que atendessem de forma satisfatória, as condições de equilíbrio, armação correta, e garantia quanto à ductilidade das lajes.

A Tabela 8 mostra o comparativo entre os momentos obtidos em uma análise elástica linear nas continuidades que apresentavam picos e após plastificação dos apoios.

Tabela 8 – Comparativo de resultados, momentos negativos Modelo 2 – Elástico e Modelo 3 – Plástico, Pavt. 2.

Cont. Lajes	Modelo 2 - Elástico				Modelo 3 - Plástico				Red %
	M _d (elástico) kNm/m	Linha Neutra (x/d)	Taxa Armadura cm ² /m	Dom.	M _d (plástico) kNm/m	Linha Neutra (x/d)	Taxa Armadura cm ² /m	Dom.	
L2/L6(V12E)	-25,75	0,557	10,88	3	-13,53	0,253	4,95	2	47,46
L2/L7 (V4A)	-25,91	0,562	10,98	3	-13,35	0,249	4,87	2	48,47
L3/L7 (V4B)	-25,09	0,537	10,50	3	-13,82	0,259	5,07	2/3	44,92
L3/L5 (V14D)	-17,91	0,350	6,84	3	-13,30	0,248	4,85	2	25,74
L5/L7 (V14C)	-29,86	0,695	13,59	4	-13,74	0,257	5,03	2	53,98
L6/L7 (V12D)	-29,23	0,672	13,13	4	-13,35	0,249	4,87	2	54,33
L7/L8 (V12C)	-29,23	0,672	13,13	4	-13,39	0,250	4,89	2	54,19
L7/L9 (V7A)	-20,14	0,404	7,89	3	-13,35	0,249	4,87	2	33,71
L7/L9 (V7B)	-19,08	0,378	7,38	3	-13,35	0,249	4,87	2	30,03
L8/L9 (V12B)	-13,93	0,261	5,11	3	-13,30	0,248	4,85	2	4,52

Fonte: O autor.

As redistribuições foram aparentemente altas quando comparadas aos momentos de dimensionamento em uma análise elástica, mas essas redistribuições são necessárias para diminuir as elevadas concentrações de esforços que ocorreram em determinadas regiões das lajes desse Pavimento.

Quanto ao percentual de redistribuição na continuidade das lajes L2/L6, L3/L7 e L5/L7, os resultados obtidos ficaram um pouco menores do que aqueles configurados inicialmente, fazendo com que a posição da linha neutra x/d ficasse pouco acima do limite estabelecido pela NBR 6118:2014, que dispensa a verificação explícita da capacidade de rotação das rótulas plásticas desde que a posição da linha neutra seja limitada em $x/d \leq 0,25$. No caso em questão, pode-se dispensar a verificação explícita da capacidade de rotação das rótulas, pois as diferenças não são significativas. Essas pequenas diferenças nos momentos de plastificação podem surgir, desde espaçamentos da armadura um pouco menor ou até mesmo devido às bitolas adotadas, que fazem com que a taxa de armadura tenha uma pequena variação e, conseqüentemente, o momento de plastificação sofra uma pequena variação, sempre a favor da segurança. Essas variações pouco influenciam na ductilidade das lajes, pois as diferenças são menores que cinco por cento.

3.3.2.4 Modelo 4 – Estudos da redistribuição com efeito nos momentos positivos

A Figura 82 apresenta os momentos positivos do programa EBERICK e dimensionamento elástico para o Pavimento 2.

Figura 82 – Dimensionamento elástico armadura positiva das Lajes – EBERICK – Pav. 2.

Lajes do Pavimento Tipo						
	Nome	Mdx (kN.m/m)	Mdy (kN.m/m)	Armadura X		Armadura Y
1	L1	6.16	6.00	ø 6.3 c/15	▼	ø 6.3 c/14
2	L2	12.41	4.91	ø 10.0 c/17	▼	ø 6.3 c/16
3	L3	12.40	2.17	ø 10.0 c/17	▼	ø 5.0 c/21
4	L4	1.01	0.50	ø 5.0 c/19	▼	ø 5.0 c/19
5	L5	4.09	1.76	ø 5.0 c/17	▼	ø 5.0 c/19
6	L6	8.21	4.86	ø 8.0 c/17	▼	ø 6.3 c/17
7	L7	9.62	3.73	ø 8.0 c/15	▼	ø 6.3 c/20
8	L8	8.21	5.36	ø 8.0 c/17	▼	ø 6.3 c/15
9	L9	6.69	1.32	ø 8.0 c/20	▼	ø 5.0 c/21
10	L10	3.88	1.44	ø 5.0 c/18	▼	ø 5.0 c/19

Fonte: O autor.

Na Figura 82 nota-se que alguns valores de momentos são idênticos, não por coincidência, mas por sofrerem influência das regiões de concentrações de esforços, e as lajes desses momentos idênticos possuem continuidade entre elas. Tais momentos positivos de dimensionamento são das lajes L2 e L3, próximos ao pilar P10, enquanto para continuidade das lajes L6 e L8 é aquele próximo ao encontro da viga V6 com a V12.

Os gráficos do Modelo 2, na Figura 73 e na Figura 74, mostram muito bem os pontos de concentrações de esforços que estão influenciando os momentos positivos, principalmente os gráficos de momentos na continuidade das lajes sobre a viga V9 para a laje L10, a viga V7 para a laje L9, a viga V6 para as lajes L2 e L3 e a viga V4 para a laje L2, enquanto as lajes L1, L4, L5 e L7 não sofreram influência de qualquer região de concentração de esforços no dimensionamento das armaduras positivas.

Após plastificação dos apoios de continuidade, as concentrações de esforços influenciando os positivos reduziram, conforme Figura 83.

Figura 83 – Dimensionamento plástico armadura positiva das Lajes – EBERICK – Pavimento 2.

Lajes do Pavimento Tipo						
	Nome	Mdx (kN.m/m)	Mdy (kN.m/m)	Armadura X		Armadura Y
1	L1	6.18	5.96	ø 6.3 c/15	▼	ø 6.3 c/14
2	L2	5.81	3.82	ø 6.3 c/16	▼	ø 6.3 c/20
3	L3	5.81	2.56	ø 6.3 c/16	▼	ø 5.0 c/19
4	L4	0.98	0.49	ø 5.0 c/19	▼	ø 5.0 c/19
5	L5	4.26	1.65	ø 6.3 c/20	▼	ø 5.0 c/19
6	L6	7.76	4.82	ø 6.3 c/11	▼	ø 6.3 c/17
7	L7	10.16	4.46	ø 8.0 c/14	▼	ø 5.0 c/14
8	L8	7.76	5.32	ø 6.3 c/11	▼	ø 5.0 c/12
9	L9	6.37	1.51	ø 6.3 c/14	▼	ø 5.0 c/19
10	L10	3.79	1.43	ø 5.0 c/19	▼	ø 5.0 c/19

Fonte: O autor.

A plastificação dos apoios e a consequente redistribuição dos esforços surtiram maior efeito nos momentos positivos das lajes L2 e L3, porém, ainda sendo influenciados pelas regiões de concentrações de esforços. A

Tabela 9 apresenta comparações do efeito da redistribuição dos esforços nos momentos positivos.

Tabela 9 – Comparativo resultados de momentos positivos Modelo 2 —Elástico e Modelo 3 – Plástico, Pavt. 2.

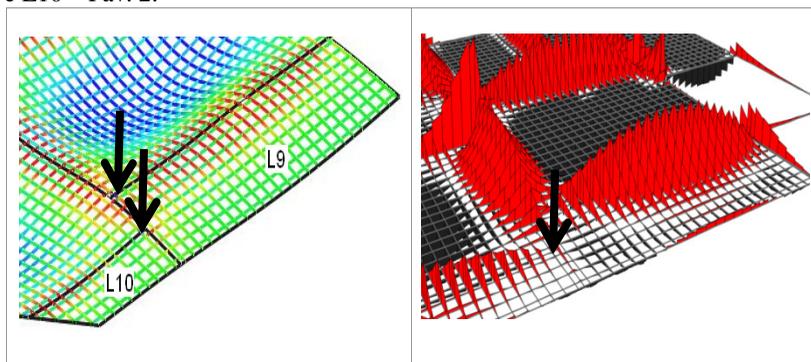
Lajes	Modelo 2 ELÁSTICO		Modelo 3 PLÁSTICO		DIFERENÇA %	
	Mdx	Mdy	Mdx	Mdy	Mdx	Mdy
L1	6,16	6,00	6,18	5,96	0,32	-0,67
L2	12,41	4,91	5,81	3,82	-53,18	-22,20
L3	12,40	2,17	5,81	2,56	-53,15	17,97
L4	1,01	0,50	0,98	0,49	-2,97	-2,00
L5	4,09	1,76	4,26	1,65	4,16	-6,25
L6	8,21	4,86	7,76	4,82	-5,48	-0,82
L7	9,62	3,73	10,16	4,46	5,61	19,57
L8	8,21	5,36	7,76	5,32	-5,48	-0,75
L9	6,69	1,32	6,37	1,51	-4,78	14,39
L10	3,88	1,44	3,79	1,43	-2,32	-0,69

Fonte: O autor.

Analisando os resultados da Tabela 9, nota-se que o efeito da redistribuição dos esforços foi maior que 50% nas lajes L2 e L3. Aparentemente uma redistribuição significativa, mas ela ocorre devido ao ajustamento da malha com a plastificação dos apoios de continuidade das lajes. Em outras lajes os efeitos das redistribuições nos positivos não foram significativos, e ainda assim continuam sendo influenciados pelas concentrações de esforços.

A Figura 84 mostra a indicação dos pontos de concentração de esforços que estão influenciando o dimensionamento dos momentos positivos das lajes L9 e L10 no programa EBERICK. A mesma figura apresenta os momentos para essas lajes no SAP2000.

Figura 84 – Momentos positivos e negativos EBERICK e SAP2000 das lajes L9 e L10 – Pav. 2.



Fonte: O autor.

Os momentos positivos de dimensionamento, principalmente para o EBERICK, são maiores que o SAP2000, porque a influência da concentração dos esforços e a perturbação na grelha equivalente no EBERICK são maiores.

Na versão V9 do programa EBERICK, não há possibilidades de plastificação dos momentos positivos, apenas dos negativos. Então, frente a isso, analisando o comportamento da malha no SAP2000, notam-se as diferenças de resultados entre os dois programas, conforme Tabela 10.

Tabela 10 – Resultados de momentos positivos Modelo 2 – Elástico e Modelo 3 – Plástico, Pavt. 2

Lajes	Modelo 2 - ELÁSTICO				Modelo 3 - PLÁSTICO			
	EBERICK		SAP2000		EBERICK		SAP2000	
	M_{dx}	M_{dy}	M_{dx}	M_{dy}	M_{dx}	M_{dy}	M_{dx}	M_{dy}
L2	12,41	4,91	13,19	2,63	5,81	3,82	8,45	3,15
L3	12,40	2,17	13,19	1,91	5,81	2,56	8,45	1,92
L6	8,21	4,86	7,92	4,92	7,76	4,82	7,06	4,70
L8	8,21	5,36	7,92	5,03	7,76	5,32	7,06	4,80
L9	6,69	1,32	0,50	0,73	6,37	1,51	0,53	0,80
L10	3,88	1,44	2,35	0,80	3,79	1,43	1,15	0,76

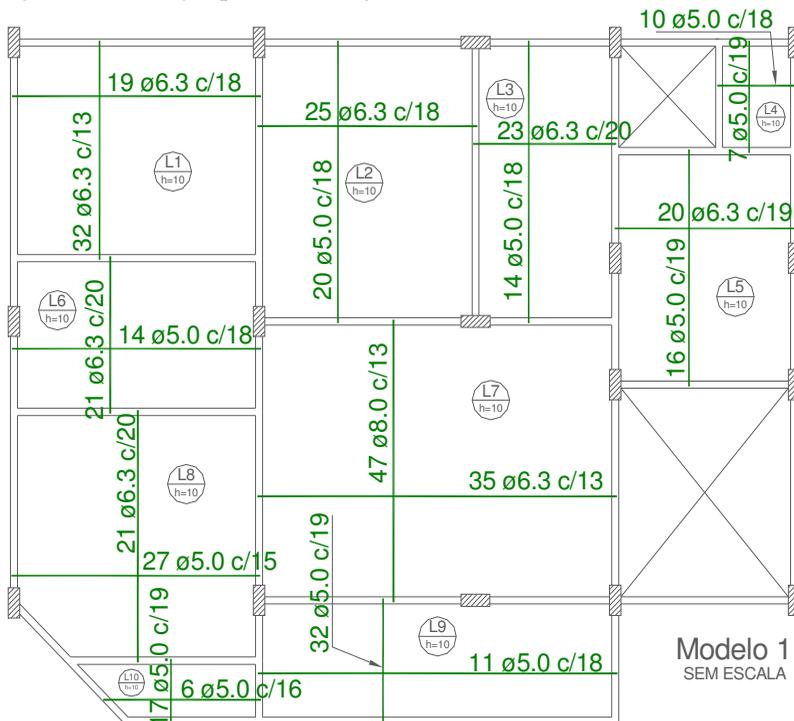
Fonte: O autor.

Existem poucas diferenças, nas lajes analisadas, entre os programas EBERICK e SAP2000, sendo a maior delas nos resultados das lajes L9 e L10 para M_{dx} . O EBERICK, no dimensionamento, usou o momento positivo da região próxima ao pilar P14 da direção “x” da laje L9, sendo que no SAP2000 aparentemente não existe essa concentração de esforços. E na laje L10, apesar de os dois programas apresentarem resultados com influência das concentrações de esforços, o EBERICK trouxe, na região de continuidade próxima ao encontro das vigas V9 e V12 entre as lajes L8/L10, resultados ainda maiores nesta laje quando comparados com o SAP2000. Tais resultados para os momentos positivos na direção “x” do EBERICK não refletem um dimensionamento mais econômico, visto que os momentos nesse caso, estão sendo influenciados por regiões de concentrações de esforços e podem ser redistribuídos, desde que o programa permita esse tipo de redistribuição.

3.3.2.5 Detalhamento de Armaduras para o Pavimento 2

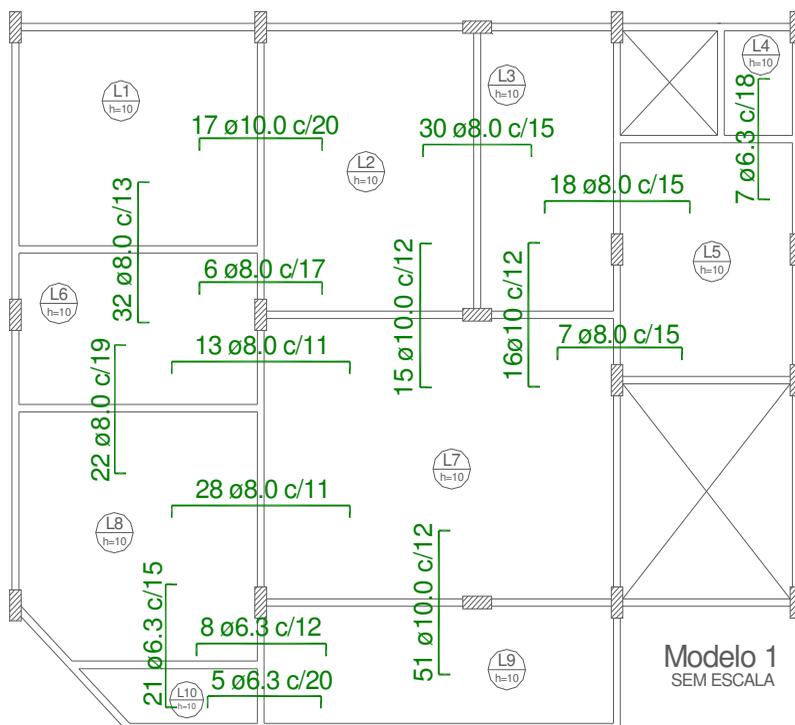
As figuras a seguir apresentam o detalhamento das armaduras dos Modelos 1, 2 e 3 para o Pavimento 2.

Figura 85 – Armação positiva das lajes Pavimento 2 – Modelo 1 (EBERICK).



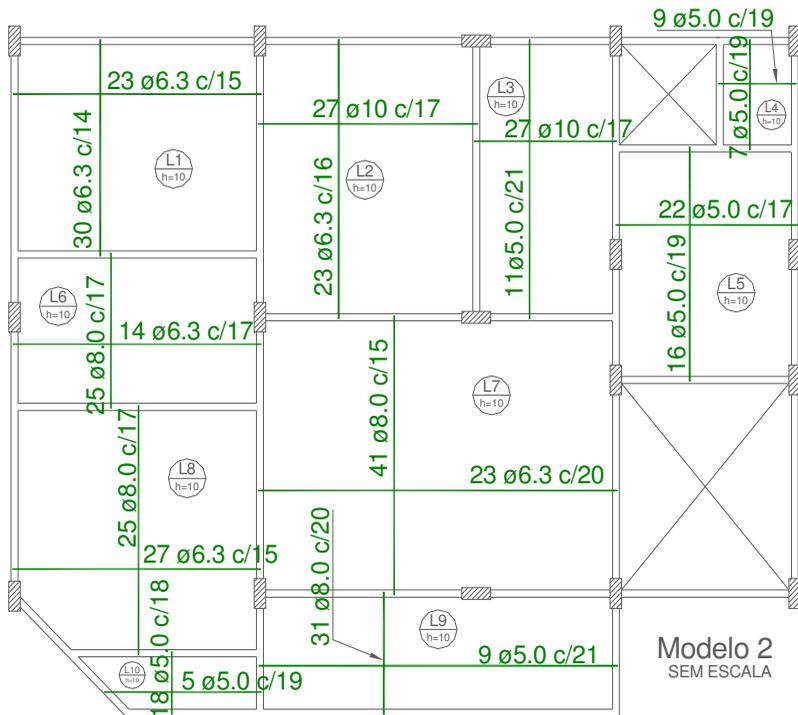
Fonte: O autor.

Figura 86 – Armação negativa das lajes Pavimento 2 – Modelo 1 (EBERICK).



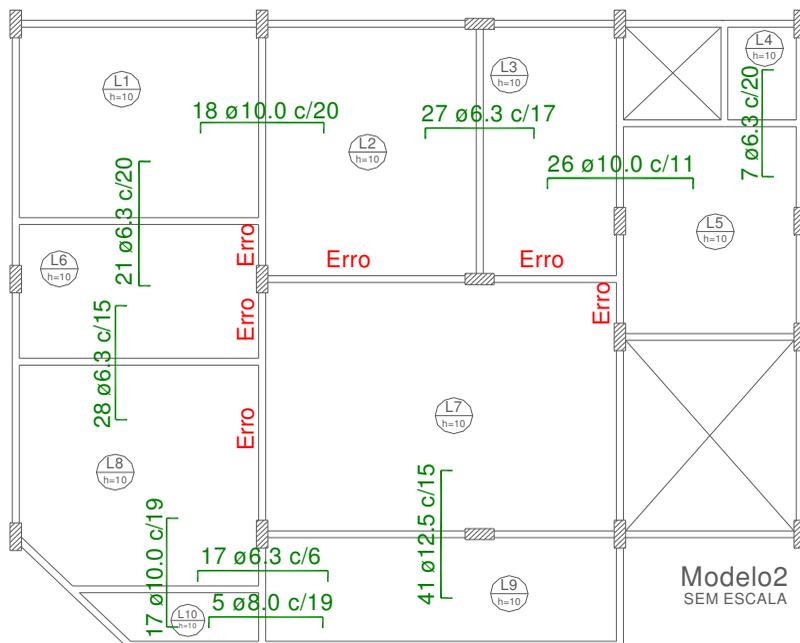
Fonte: O autor.

Figura 87 – Armadura positiva das lajes Pavimento 2 – Modelo 2 (EBERICK).



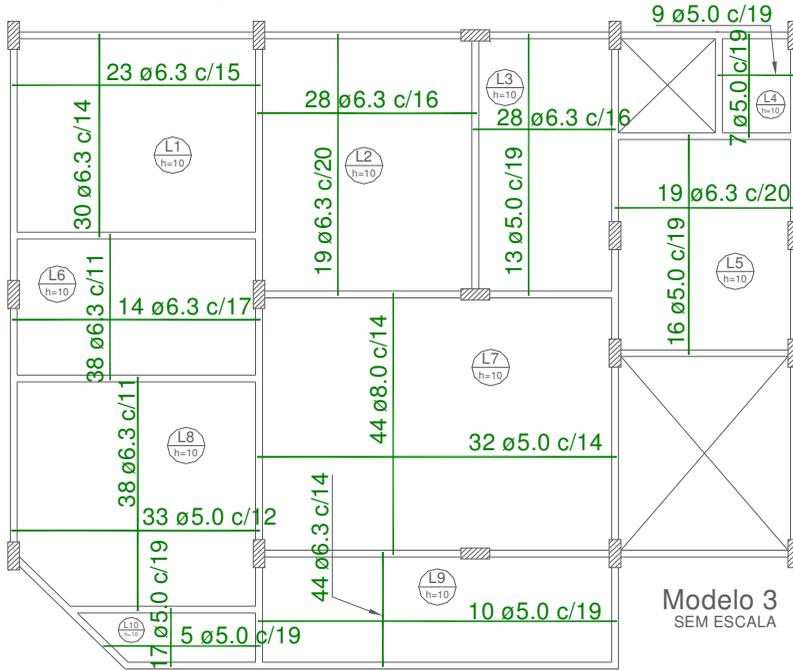
Fonte: O autor.

Figura 88 – Armação negativa das lajes Pavimento 2 – Modelo 2 (EBERICK).



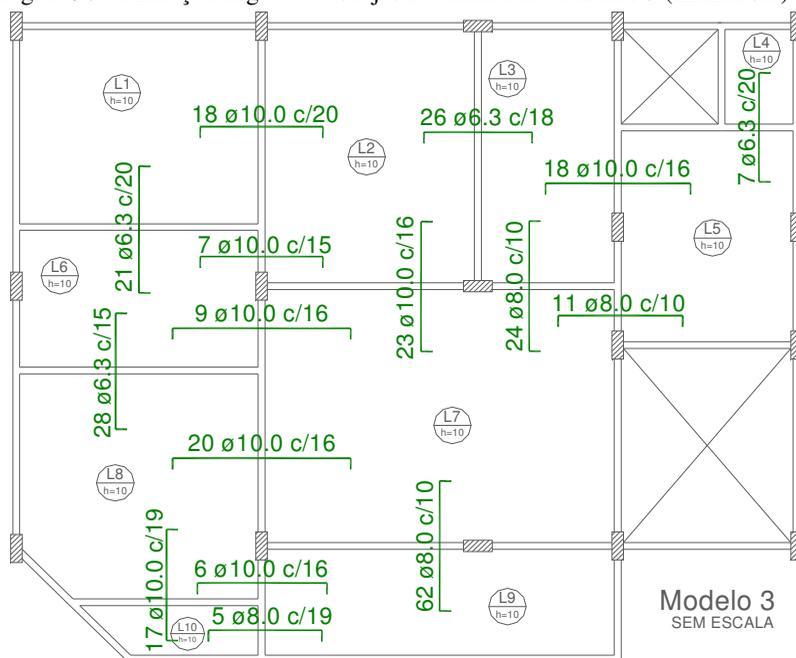
Fonte: O autor.

Figura 89 – Armação positiva das lajes Pavimento 2 – Modelo 3 (EBERICK).



Fonte: O autor.

Figura 90 – Armação negativa das lajes Pavimento 2 – Modelo 3 (EBERICK).



Fonte: O autor.

As figuras 85 a 90 apresentam o detalhamento das armaduras adotadas, positivas e negativas, de alguns dos modelos do Pavimento 2. O detalhamento do Modelo 1 corresponde àquelas em que o dimensionamento foi feito com auxílio de tabelas. No detalhamento do Modelo 2, tem-se aquelas com uso do programa EBERICK em uma análise elástica e com algumas continuidades entre lajes não dimensionadas e detalhadas, conforme Figura 88, devido a concentrações de esforços. Enquanto o detalhamento do Modelo 3 diz respeito às armaduras após plastificação dos apoios.

As maiores reduções ocorreram nas taxas das armaduras negativas, quando comparadas as do Modelo 3 com as do Modelo 2. A Tabela 11 mostra as taxas de armaduras negativas adotadas para os modelos 1, 2 e 3.

Tabela 11 – Taxa de armadura negativa adotada nos Modelos 1, 2 e 3.

Taxa de Armadura Negativa Adotada cm^2/m			
Cont. Lajes	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3
	A_s	A_s	A_s
L1/L6	3,78	1,56	1,56
L1/L2	3,73	3,93	3,93
*L2/L6	2,87	11,35	4,95
*L2/L7	6,49	11,45	4,91
L2/L3	3,26	1,83	1,73
L3/L5	3,20	7,14	4,91
L3/L7	6,49	10,49	4,98
L4/L5	1,68	1,56	1,56
*L5/L7	3,35	13,79	5,03
L6/L8	2,60	2,08	2,08
*L6/L7	4,36	13,59	4,91
*L7/L8	4,50	13,59	4,91
L7/L9	6,49	8,18	5,03
L8/L10	1,99	4,13	4,13
L8/L9	2,49	5,20	4,91
L9/L10	1,56	2,65	2,65

Nota: * Armadura negativa não detalhada no Modelo 2.

Fonte: O autor.

O dimensionamento e o detalhamento da continuidade das lajes L2/L6, L2/L7, L5/L7, L6/L7 e L7/L8 no EBERICK para o Modelo 2 elástico linear não foram possíveis, por apresentarem concentrações de esforços e elevadas taxas de armadura para seu dimensionamento em uma análise elástica. Com a plastificação dos apoios no Modelo 3, foi possível dimensionar e detalhar todas as continuidades entre lajes. Sem alterar a classe de concreto e altura das lajes, as peças ficaram mais dúcteis, mantidas as condições de equilíbrio e armadas corretamente.

A Tabela 12 mostra as taxas adotadas para o detalhamento das armaduras positivas do Pavimento 2.

Tabela 12 – Taxa de armadura positiva adotada nos Modelos 1, 2 e 3.

Lajes	Taxa de Armadura Positiva Adotada cm^2/m					
	Modelo 1		Modelo 2		Modelo 3	
	A_{sx}	A_{sy}	A_{sx}	A_{sy}	A_{sx}	A_{sy}
L1	2,35	1,66	2,23	2,06	2,08	2,23
L2	1,68	1,05	4,62	1,95	1,95	1,38
L3	1,55	1,13	4,62	0,93	1,95	1,03
L4	1,96	1,05	1,03	1,03	1,03	1,03
L5	1,61	1,01	1,15	1,03	1,56	1,03
L6	1,54	1,08	2,96	1,83	2,83	1,83
L7	3,83	2,36	3,35	1,56	3,59	1,40
L8	1,54	1,29	2,96	2,08	2,83	1,64
L9	1,02	1,08	2,27	0,90	2,23	1,03
L10	1,01	1,18	1,09	1,03	1,03	1,03

Fonte: O autor.

As maiores taxas de armadura positivas apresentadas na Tabela 12 são justamente no Modelo 2 do EBERICK para uma análise elástica. Elas estão elevadas porque os momentos positivos de algumas dessas lajes sofrem influência da concentração de esforços. Após a plastificação dos apoios, as taxas de armaduras positivas do Modelo 3 reduziram, em relação ao Modelo 2, principalmente nas lajes L2 e L3, que reduziram suas taxas de armadura acima de 55%. Outro detalhe importante seria o relativo às taxas das lajes L6 e L8, que estão altas quando comparadas com as do Modelo 1 (compatibilizado). Esse fato ocorre porque nessas lajes os momentos positivos do Modelo 3 continuam sendo influenciados pela concentração de esforços.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

4.1 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foram desenvolvidos diversos estudos quanto ao comportamento e o dimensionamento de lajes maciças em concreto armado com métodos clássicos, auxiliados por tabelas, e métodos mais refinados, como analogia de grelha e elementos finitos, realizando análises elásticas e análises não lineares com plastificação de apoios de continuidade entre lajes.

Com modelos computacionais, especificamente em painéis de lajes, obtêm-se bons resultados em uma análise elástica linear, desde que não existam irregularidades de bordas de apoio, de lajes apoiadas diretamente sobre pilares ou de reentrâncias em suas extremidades. Caso contrário, podem ocorrer concentrações de esforços em pequenos trechos dessas lajes, dependendo de diversos fatores, induzindo, em alguns casos, o dimensionamento de peças superarmadas, como ocorreu nos dois pavimentos didáticos analisados.

Ao estudar e analisar o efeito da modelagem nas concentrações de esforços, foi verificado que os picos de momento podem ficar maiores, menores ou até mesmo aparentemente não existirem, devido ao mascaramento da malha. Em malhas mais espaçadas, fica mais difícil revelar as concentrações dos esforços. Para malhas mais refinadas, elas podem ser maiores e evidenciadas. Em alguns casos também as concentrações de esforços não são evidenciadas devido ao fato de a barra da grelha ou a extremidade do elemento finito não se apoiarem diretamente sobre o ponto de singularidade. Então, a revelação desse ponto, mesmo que ele exista na estrutura, dependerá muito do espaçamento da malha ou se há elemento da grelha se apoiando ou não nele.

Para os estudos quanto à plastificação dos apoios, foram usados dois softwares comerciais: EBERICK e SAP2000. No EBERICK se fixava a taxa de armadura, limitando a linha neutra e o momento resistente ou de plastificação, induzindo as redistribuições dos esforços em determinados pontos na continuidade das lajes. Enquanto no SAP2000, para auxiliar as análises do EBERICK, sem armar a estrutura, foram apresentados modelos com inserção de rótulas plásticas limitando os esforços com momento de plastificação nas extremidades das barras e de mesmo momento com sentido contrário sobre os nós da grelha equivalente, nas regiões de apoios plastificados. A inserção dessas

rótulas implicou uma redistribuição dos esforços de uma análise elástica linear nos pontos plastificados.

Variando os trechos de plastificação, percebeu-se que plastifica apenas os esforços no ponto de maior concentração não seria suficiente para redistribuir todo o pico de momento, sendo necessários trechos maiores de plastificação para atingir a uniformização de momentos próximos ao definido como limite ou de plastificação.

Armar a estrutura adotando modelos numéricos computacionais com plastificação dos apoios de continuidade de lajes maciças seria um bom procedimento de minimização nas concentrações de esforços que podem ocorrer em pequenos trechos da estrutura.

Por meio dos estudos e resultados desenvolvidos ao longo desta pesquisa, chega-se à conclusão de que, para os dois pavimentos utilizados e seus respectivos modelos analisados, obtiveram-se bons resultados e mais econômicos com o uso da plastificação quando comparados com os resultados obtidos em uma análise elástica linear, tendo em vista que com o programa EBERICK não se conseguiu fazer o dimensionamento e o detalhamento de algumas lajes no modelo elástico, devido às concentrações de esforços muito elevadas. Já nas análises considerando as plastificações dos apoios de continuidade, além de dimensioná-las, foi possível tornar essas lajes bastante dúcteis em suas continuidades e mantê-las em equilíbrio e armadas corretamente.

4.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Para continuidade deste trabalho, sugere-se:

- Estudar as rotações plásticas em ambos os pavimentos desta pesquisa;
- Explorar mais as ferramentas disponíveis no programa SAP2000 quanto à plastificação dos apoios de continuidade entre lajes, trabalhando com o concreto Armado;
- Explorar mais as ferramentas disponíveis no programa EBERICK quanto aos esforços cortantes, deslocamentos e momentos volventes nas lajes plastificadas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BIBLIOGRAFIA UTILIZADA

ARAÚJO, José Milton de. **Curso de Concreto Armado**. Vol.1 e 2. Rio Grande: Dunas, 2003.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto - Procedimento**. Rio de Janeiro, 2014.

BASTOS, Paulo Sérgio dos Santos. **Notas de aula Estruturas de Concreto I**. Departamento de Engenharia Civil. Universidade Estadual Paulista. Bauru, 2015.

CARVALHO, Roberto Chust; FIGUEIREDO FILHO, Jason Rodrigues de. **Cálculo e Detalhamento de estruturas usuais de concreto armado segundo a NBR 6118:2003**. 3. Ed. São Carlos: UFSCar, 2007.

COELHO, Jano d' Araújo. **Modelagem de lajes de concreto armado por analogia de grelha**. Dissertação de Mestrado. Florianópolis, 2000.

DUMÊT, Tatiana Bittencourt. **Notas de Aula Estruturas de Concreto Armado I**. Departamento de Construção e Estruturas. Universidade Federal da Bahia. Bahia, 2008.

GONZALEZ, Rogério L. M. **Análise de lajes pela Teoria das Charneiras Plásticas e comparação de custos entre lajes maciças e lajes treliçadas**. Dissertação de Mestrado. Escola de Engenharia de São Carlos. Universidade de São Paulo, 1997.

HENNRICHS, Carlos A.. **Estudo sobre a modelagem de lajes planas de concreto armado**. Dissertação de Mestrado. UFSC. Florianópolis, 2003.

HERNÁNDEZ, Eliud. **Manual de Aplicación del Programa SAP2000 V14**.

KIMURA, Alio. **Informática aplicada em estruturas de concreto armado: cálculo de edifícios com uso de sistemas computacionais**. Editora PINI Ltda. São Paulo, 2007.

LA ROVERE, Henriette Lebre. **Notas de Aula Elementos finitos.** UFSC. Florianópolis, 2002.

LIM, Songly. **Redistribution of force concentrations in reinforced concrete cantilever slab using 3D non-linear FE analyses.** Masters dissertation. Chalmers University of Technology. Department of Civil and Environmental Engineering. Göteborg, Sweden 2013.

LEONHARDT, F. **Construções de concreto.** Vol. 1. Interciência, Rio de Janeiro, 2008.

LORIGGIO, Daniel D. et al. **Análise de lajes pelo método das charneiras plásticas.** Artigos técnicos do site www.altoqi.com.br, 2013.

LORIGGIO, Daniel D. **Dimensionamento elástico e plástico de lajes.** Artigos técnicos do site www.altoqi.com.br, 2013.

MARINO, M. A. **Notas de Aula de Concreto Armado.** Departamento de Construção Civil. Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2015.

MILLS, H. B., ARMER, G. S. T., WOOD, R. H. **The reinforcement of slabs in accordance with a pre-determined field of moments – Correspondence.** Concrete, the journal of the concrete society, vol. 2, no. 8, 1968, pp. 319-320.

MONTOYA, J.; MESENGUER, A. G.; CABRE, F. M. **Hormigon Armado.** Editorial Gustavo Gili, S.A. Barcelona, 1973.

PACOSTE, Costin. et. al. **Recommendations for finite element analysis for the design of concrete slabs.** Chalmers University of Technology. Department of Civil and Environmental Engineering. Stockholm, Sweden 2012.

PINHEIRO, Libânio M. **Notas de Aula Fundamento do Concreto e Projeto de Edifícios.** Universidade Federal de São Paulo. Escola de Engenharia de São Carlos. Universidade de São Paulo, 2007.

PINHEIRO, Libânio M. **Charneiras Plásticas em lajes com forma de T estudo experimental.** Dissertação de Mestrado. Escola de Engenharia de São Carlos. Universidade de São Paulo, 1980.

PUEL, André. **Modelagem de lajes planas simétricas e assimétricas em concreto armado – Análise integrada laje x pilar**. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Santa Catarina, 2009. 152 páginas.

REIS, Eduardo Martins dos. **Análise de pavimentos de edifícios utilizando a Analogia de Grelha**. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, 2007.

ROCHA, A. M. **Novo curso prático de concreto armado**. Vol. 1. Editora Científica, Rio de Janeiro, 1972.

SOUZA, Remo M. **Notas de Aula Método dos Elementos Finitos**. Departamento de Engenharia Civil. Universidade Federal do Pará. Belém, 2003.

STRAMANDINOLI, J. S. B. **Contribuições à análise de lajes nervuradas por analogia de grelha**. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Santa Catarina, UFSC. Florianópolis, 2003.

SUSSEKIND, J. C. **Curso de Concreto Armado**. vol.I e II. 4ª Ed. São Paulo: Globo, 1991.

TIMOSHENKO, S.P. e Woinowsky-Krieger, S. **Theory of plates and shells**. McGraw-Hill. Kogakusha Ltda, 1959.

BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

ALVES FILHO, A. **Elementos finitos – a base da tecnologia CAE**. São Paulo – SP, 2000.

BARBOZA, A. S. R. **Contribuição à análise estrutural de sistemas lajes-vigas de concreto armado mediante analogia de grelha**. São Carlos. Dissertação (mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1992.

BUCHAIM, R. **A Influência da Não-Linearidade Física do Concreto Armado na Rigidez à Flexão e na Capacidade de Rotação Plástica**. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. São Paulo, 2001.

CAMPOS FILHO, Américo. **Notas de Aula Projeto de Lajes Maciças de Concreto Armado**. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Departamento de Engenharia Civil. Porto Alegre, 2014.

CARVALHO, R. C. **Análise não linear de pavimentos de edifícios de concreto através da analogia de grelha**. Tese (doutorado). Escola de Engenharia de São Carlos, SP. São Carlos, 1994.

COSTA, Flávio de O.; DIEGUEZ, Adriana B. **Notas de Aula Concreto Armado II**. Departamento de Estruturas. Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 2004.

LORIGGIO, D. D. **Notas de aula de Análise Computacional de Estruturas**. Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, 2015.

LORIGGIO, D. D. **Notas de aula de Concreto Armado I**. Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, 2015.

LORIGGIO, D. D. **Notas de aula de Instabilidade de Estruturas**. Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, 2014.

MARCELINO, Narbal A. **Notas de Aula de Estruturas de Concreto. Universidade Federal de Santa Catarina**. Florianópolis, 2010.

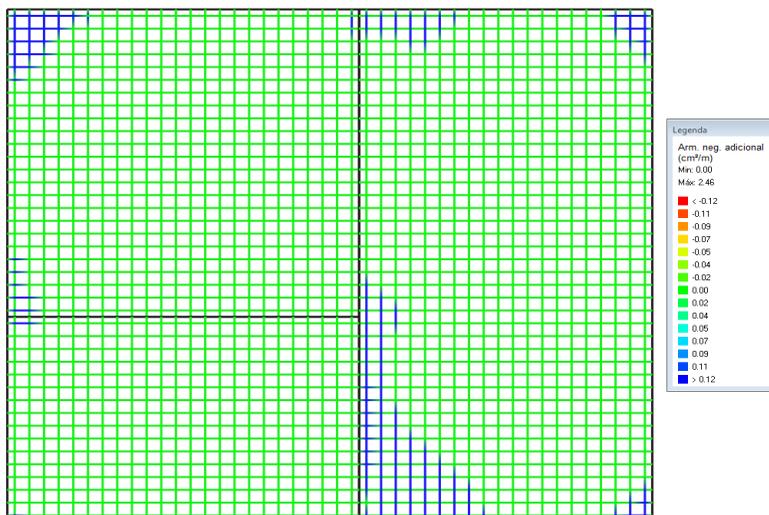
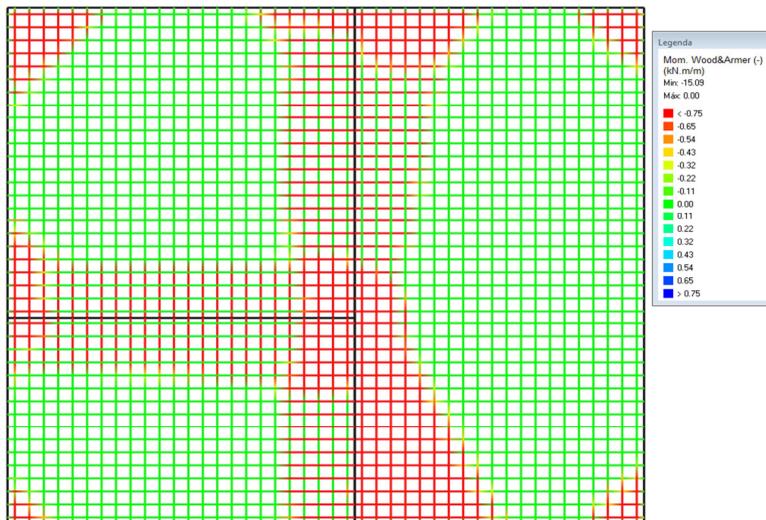
MAZZILLI, A. R. P. (1988). **Influência da flexibilidade das vigas de apoio no cálculo de estruturas de edifícios**. São Carlos. Dissertação (mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

PINTO, Roberto Caldas de A. **Notas de Aula de Estudos Avançados em Estruturas de Concreto Armado**. Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, 2014.

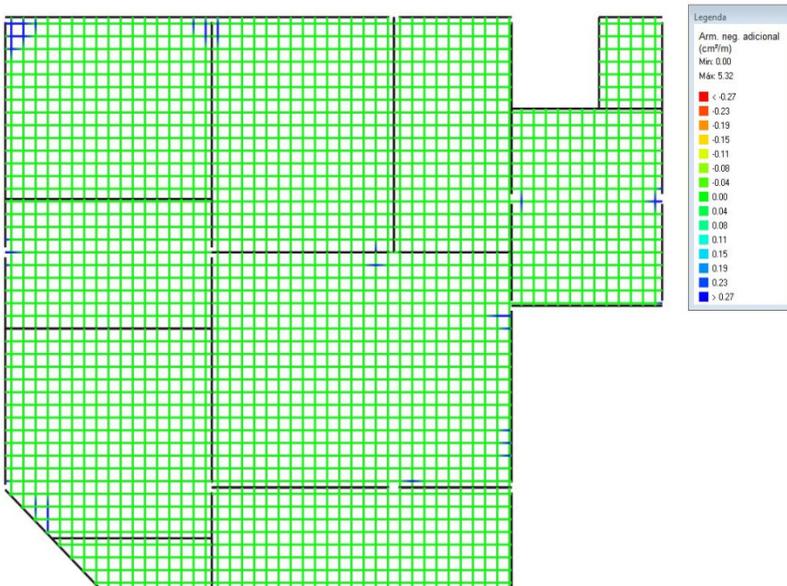
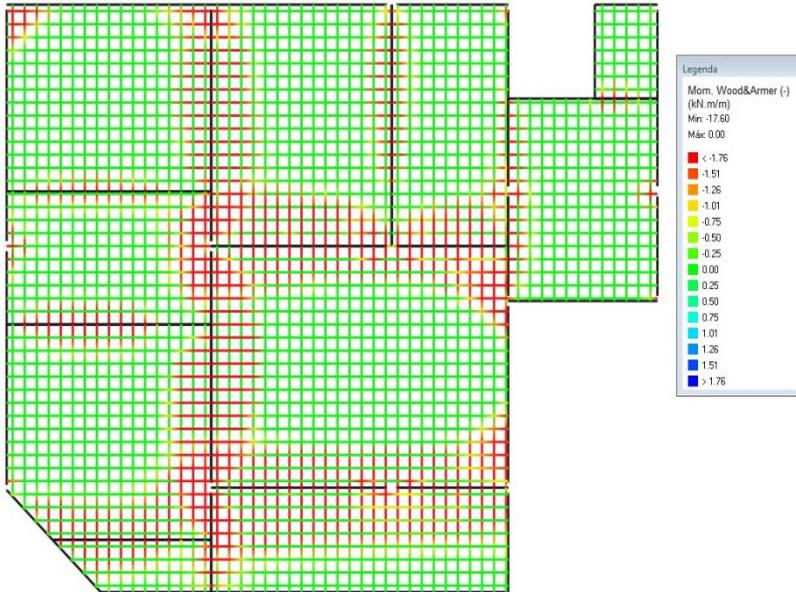
STRAMANDINOLI, R. S. B. **Modelos de Elementos Finitos para Análise Não Linear Física e Geométrica de Vigas e Pórticos Planos de Concreto Armado**. Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, 2007.

APÊNDICE A – Acréscimo da taxa de armadura negativa Incluindo os momentos volventes

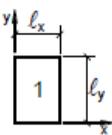
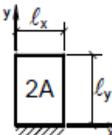
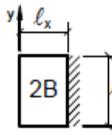
PAVIMENTO 1



PAVIMENTO 2



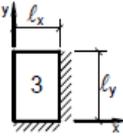
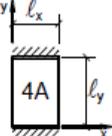
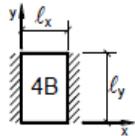
ANEXO A – Tabelas de BARES

Tabela A-8									
MOMENTOS FLETORES EM LAJES COM CARGA UNIFORME									
Tipo									Tipo
	$\lambda = \frac{l_y}{l_x}$	μ_x	μ_y	μ_x	μ_y	μ'_y	μ_x	μ'_x	
1,00	4,23	4,23	2,91	3,54	8,40	3,54	8,40	2,91	1,00
1,05	4,62	4,25	3,26	3,64	8,79	3,77	8,79	2,84	1,05
1,10	5,00	4,27	3,61	3,74	9,18	3,99	9,17	2,76	1,10
1,15	5,38	4,25	3,98	3,80	9,53	4,19	9,49	2,68	1,15
1,20	5,75	4,22	4,35	3,86	9,88	4,38	9,80	2,59	1,20
1,25	6,10	4,17	4,72	3,89	10,16	4,55	10,06	2,51	1,25
1,30	6,44	4,12	5,09	3,92	10,41	4,71	10,32	2,42	1,30
1,35	6,77	4,06	5,44	3,93	10,64	4,86	10,54	2,34	1,35
1,40	7,10	4,00	5,79	3,94	10,86	5,00	10,75	2,25	1,40
1,45	7,41	3,95	6,12	3,91	11,05	5,12	10,92	2,19	1,45
1,50	7,72	3,89	6,45	3,88	11,23	5,24	11,09	2,12	1,50
1,55	7,99	3,82	6,76	3,85	11,39	5,34	11,23	2,04	1,55
1,60	8,26	3,74	7,07	3,81	11,55	5,44	11,36	1,95	1,60
1,65	8,50	3,66	7,28	3,78	11,67	5,53	11,48	1,87	1,65
1,70	8,74	3,58	7,49	3,74	11,79	5,61	11,60	1,79	1,70
1,75	8,95	3,53	7,53	3,69	11,88	5,68	11,72	1,74	1,75
1,80	9,16	3,47	7,56	3,63	11,96	5,75	11,84	1,68	1,80
1,85	9,35	3,38	8,10	3,58	12,05	5,81	11,94	1,67	1,85
1,90	9,54	3,29	8,63	3,53	12,14	5,86	12,03	1,59	1,90
1,95	9,73	3,23	8,86	3,45	12,17	5,90	12,08	1,54	1,95
2,00	9,91	3,16	9,08	3,36	12,20	5,94	12,13	1,48	2,00
> 2,00	12,50	3,16	12,50	3,36	12,20	7,03	12,50	1,48	> 2,00

Valores extraídos de BARES e adaptada por PINHEIRO (1994).

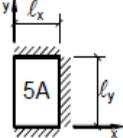
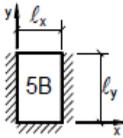
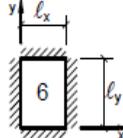
$M = \mu \frac{p \cdot l_x^2}{100}$ $p =$ carga uniforme $l_x =$ menor vão

Tabela A-9
MOMENTOS FLETORES EM LAJES COM CARGA UNIFORME

Tipo											Tipo
	$\lambda = \frac{l_y}{l_x}$	μ_x	μ'_x	μ_y	μ'_y	μ_x	μ_y	μ'_y	μ_x	μ'_x	
1,00	2,69	6,99	2,69	6,99	2,01	3,09	6,99	3,09	6,99	2,01	1,00
1,05	2,94	7,43	2,68	7,18	2,32	3,23	7,43	3,22	7,20	1,92	1,05
1,10	3,19	7,87	2,67	7,36	2,63	3,36	7,87	3,35	7,41	1,83	1,10
1,15	3,42	8,28	2,65	7,50	2,93	3,46	8,26	3,46	7,56	1,73	1,15
1,20	3,65	8,69	2,62	7,63	3,22	3,56	8,65	3,57	7,70	1,63	1,20
1,25	3,86	9,03	2,56	7,72	3,63	3,64	9,03	3,66	7,82	1,56	1,25
1,30	4,06	9,37	2,50	7,81	3,99	3,72	9,33	3,74	7,93	1,49	1,30
1,35	4,24	9,65	2,45	7,88	4,34	3,77	9,69	3,80	8,02	1,41	1,35
1,40	4,42	9,93	2,39	7,94	4,69	3,82	10,00	3,86	8,11	1,33	1,40
1,45	4,58	10,17	2,32	8,00	5,03	3,86	10,25	3,91	8,13	1,26	1,45
1,50	4,73	10,41	2,25	8,06	5,37	3,90	10,49	3,96	8,15	1,19	1,50
1,55	4,86	10,62	2,16	8,09	5,70	3,90	10,70	4,00	8,20	1,14	1,55
1,60	4,99	10,82	2,07	8,12	6,03	3,89	10,91	4,04	8,25	1,08	1,60
1,65	5,10	10,99	1,99	8,14	6,35	3,85	11,08	4,07	8,28	1,03	1,65
1,70	5,21	11,16	1,91	8,15	6,67	3,81	11,24	4,10	8,30	0,98	1,70
1,75	5,31	11,30	1,85	8,16	6,97	3,79	11,39	4,12	8,31	0,95	1,75
1,80	5,40	11,43	1,78	8,17	7,27	3,76	11,53	4,14	8,32	0,91	1,80
1,85	5,48	11,55	1,72	8,17	7,55	3,72	11,65	4,15	8,33	0,87	1,85
1,90	5,56	11,67	1,66	8,18	7,82	3,67	11,77	4,16	8,33	0,83	1,90
1,95	5,63	11,78	1,63	8,19	8,09	3,60	11,83	4,16	8,33	0,80	1,95
2,00	5,70	11,89	1,60	8,20	8,35	3,52	11,88	4,17	8,33	0,76	2,00
> 2,00	7,03	12,50	1,60	8,20	12,50	3,52	11,88	4,17	8,33	0,76	> 2,00

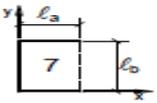
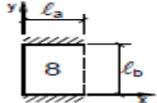
Valores extraídos de BARES e adaptada por PINHEIRO (1994).

$M = \mu \frac{p l_x^2}{100}$ $p =$ carga uniforme $l_x =$ menor vão

Tabela A-10													
MOMENTOS FLETORES EM LAJES COM CARGA UNIFORME													
Tipo													Tipo
	$\lambda = \frac{l_y}{l_x}$	μ_x	μ'_x	μ_y	μ'_y	μ_x	μ'_x	μ_y	μ'_y	μ_x	μ'_x	μ_y	
1,00	2,02	5,46	2,52	6,17	2,52	6,17	2,02	5,46	2,02	5,15	2,02	5,15	1,00
1,05	2,27	5,98	2,56	6,46	2,70	6,47	1,97	5,56	2,22	5,50	2,00	5,29	1,05
1,10	2,52	6,50	2,60	6,75	2,87	6,76	1,91	5,65	2,42	5,85	1,98	5,43	1,10
1,15	2,76	7,11	2,63	6,97	3,02	6,99	1,84	5,70	2,65	6,14	1,94	5,51	1,15
1,20	3,00	7,72	2,65	7,19	3,16	7,22	1,77	5,75	2,87	6,43	1,89	5,59	1,20
1,25	3,23	8,31	2,64	7,36	3,28	7,40	1,70	5,75	2,97	6,67	1,83	5,64	1,25
1,30	3,45	8,89	2,61	7,51	3,40	7,57	1,62	5,76	3,06	6,90	1,77	5,68	1,30
1,35	3,66	9,44	2,57	7,63	3,50	7,70	1,55	5,75	3,19	7,09	1,71	5,69	1,35
1,40	3,86	9,98	2,53	7,74	3,59	7,82	1,47	5,74	3,32	7,28	1,65	5,70	1,40
1,45	4,05	10,51	2,48	7,83	3,67	7,91	1,41	5,73	3,43	7,43	1,57	5,71	1,45
1,50	4,23	11,03	2,43	7,91	3,74	8,00	1,35	5,72	3,53	7,57	1,49	5,72	1,50
1,55	4,39	11,54	2,39	7,98	3,80	8,07	1,29	5,69	3,61	7,68	1,43	5,72	1,55
1,60	4,55	12,04	2,34	8,02	3,86	8,14	1,23	5,66	3,69	7,79	1,36	5,72	1,60
1,65	4,70	12,53	2,28	8,03	3,91	8,20	1,18	5,62	3,76	7,88	1,29	5,72	1,65
1,70	4,84	13,01	2,22	8,10	3,95	8,25	1,13	5,58	3,83	7,97	1,21	5,72	1,70
1,75	4,97	13,48	2,15	8,13	3,99	8,30	1,07	5,56	3,88	8,05	1,17	5,72	1,75
1,80	5,10	13,94	2,08	8,17	4,02	8,34	1,00	5,54	3,92	8,12	1,13	5,72	1,80
1,85	5,20	14,39	2,02	8,16	4,05	8,38	0,97	5,55	3,96	8,18	1,07	5,72	1,85
1,90	5,30	14,83	1,96	8,14	4,08	8,42	0,94	5,56	3,99	8,24	1,01	5,72	1,90
1,95	5,40	15,26	1,88	8,13	4,10	8,45	0,91	5,60	4,02	8,29	0,99	5,72	1,95
2,00	5,50	15,68	1,80	8,12	4,12	8,47	0,88	5,64	4,05	8,33	0,96	5,72	2,00
> 2,00	7,03	12,50	1,80	8,12	4,17	8,33	0,88	5,64	4,17	8,33	0,96	5,72	> 2,00

Valores extraídos de BARES e adaptada por PINHEIRO (1994).

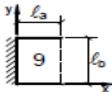
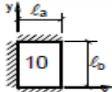
$M = \mu \frac{p \ell_x^2}{100}$ $p =$ carga uniforme $\ell_x =$ menor vão

Tabela A.11									
MOMENTOS FLETORES EM LAJES COM CARGA UNIFORME									
Tipo							Tipo		
	$\gamma = \frac{\ell_a}{\ell_b}$	μ_x	μ_y	μ_{yb}	μ_x	μ_y	μ_{yb}	μ'_y	μ'_{yb}
0,30	11,33	15,89	28,44	10,44	14,22	25,55	41,89	77,00	0,30
0,35	10,63	15,60	27,19	8,85	12,86	22,37	35,69	62,94	0,35
0,40	9,94	15,31	25,94	7,25	11,50	19,19	29,50	48,88	0,40
0,45	9,13	14,48	24,47	6,22	10,39	16,82	25,89	41,36	0,45
0,50	8,32	13,64	23,00	5,20	9,28	14,44	22,28	33,84	0,50
0,55	7,58	12,95	21,56	4,57	8,35	12,82	19,64	28,76	0,55
0,60	6,83	12,25	20,11	3,94	7,42	11,19	17,00	23,67	0,60
0,65	6,21	11,59	18,71	3,46	6,76	9,94	15,26	20,55	0,65
0,70	5,59	10,92	17,31	2,98	6,10	8,69	13,51	17,43	0,70
0,75	5,09	10,24	15,86	2,61	5,54	7,77	12,28	15,38	0,75
0,80	4,59	9,55	14,41	2,23	4,98	6,84	11,05	13,33	0,80
0,85	4,16	9,09	13,61	1,96	4,65	6,15	10,12	11,91	0,85
0,90	3,73	8,63	12,80	1,68	4,31	5,46	9,19	10,49	0,90
0,95	3,39	8,14	11,94	1,47	3,97	4,96	8,45	9,49	0,95
1,00	3,05	7,64	11,08	1,26	3,62	4,45	7,71	8,48	1,00
1,05	3,05	7,94	11,31	1,23	3,68	4,45	7,80	8,48	1,05
1,10	3,06	8,24	11,55	1,19	3,74	4,46	7,88	8,47	1,10
1,15	3,06	8,53	11,78	1,16	3,80	4,47	7,97	8,46	1,15
1,20	3,07	8,83	12,01	1,12	3,86	4,47	8,05	8,46	1,20
1,25	3,03	9,01	12,12	1,09	3,90	4,47	8,09	8,46	1,25
1,30	3,00	9,19	12,22	1,06	3,93	4,47	8,13	8,46	1,30
1,35	2,97	9,38	12,33	1,03	3,97	4,48	8,17	8,46	1,35
1,40	2,94	9,56	12,43	0,99	4,01	4,48	8,20	8,45	1,40
1,45	2,91	9,74	12,54	0,96	4,05	4,49	8,24	8,45	1,45
1,50	2,88	9,92	12,64	0,92	4,08	4,49	8,28	8,45	1,50
1,55	2,84	10,04	12,69	0,90	4,09	4,49	8,29	8,45	1,55
1,60	2,81	10,16	12,74	0,88	4,10	4,49	8,29	8,45	1,60
1,65	2,77	10,29	12,80	0,86	4,11	4,49	8,30	8,45	1,65
1,70	2,74	10,41	12,85	0,84	4,12	4,49	8,30	8,45	1,70
1,75	2,70	10,53	12,90	0,82	4,13	4,50	8,31	8,45	1,75
1,80	2,66	10,65	12,95	0,80	4,13	4,50	8,31	8,45	1,80
1,85	2,63	10,77	13,00	0,78	4,14	4,50	8,32	8,45	1,85
1,90	2,59	10,90	13,06	0,76	4,15	4,50	8,32	8,45	1,90
1,95	2,56	11,02	13,11	0,74	4,16	4,50	8,33	8,45	1,95
2,00	2,52	11,14	13,16	0,72	4,17	4,50	8,33	8,45	2,00
> 2,00	2,52	12,50	13,16	0,72	4,17	4,50	8,33	8,45	> 2,00

Valores extraídos de BARES e adaptada por PINHEIRO (1994)

$M = \mu \frac{p \ell^2}{100}$ $p =$ carga uniforme $\ell =$ menor valor entre ℓ_a e ℓ_b

$M_b =$ momento ao longo da borda livre

Tabela A-12											
MOMENTOS FLETORES EM LAJES COM CARGA UNIFORME											
Tipo											Tipo
	$\gamma = \frac{l_a}{l_b}$	μ_x	μ'_x	μ_y	μ_{yb}	μ_x	μ'_x	μ_y	μ_{yb}	μ'_y	
< 0,30	-12,50	50,00	0,78	6,22	-12,5	50,00	2,11	8,67	14,56	37,00	< 0,30
0,30	-7,33	43,08	0,78	6,22	-4,89	38,33	2,11	8,67	14,56	37,00	0,30
0,35	-5,17	39,98	1,89	7,89	-2,57	33,08	3,18	9,74	14,84	35,53	0,35
0,40	-3,00	36,87	3,00	9,56	-0,25	27,83	4,25	10,81	15,13	34,06	0,40
0,45	-1,78	33,89	3,62	10,54	0,54	23,94	4,53	10,77	14,26	31,21	0,45
0,50	-0,56	30,91	4,24	11,52	1,32	20,04	4,80	10,72	13,40	28,36	0,50
0,55	0,25	28,02	4,62	11,82	1,62	17,40	4,86	9,99	12,48	25,26	0,55
0,60	1,06	25,13	5,00	12,11	1,92	14,76	4,92	9,25	11,56	22,17	0,60
0,65	1,47	22,90	5,25	12,12	1,91	12,91	4,68	8,55	10,81	19,63	0,65
0,70	1,88	20,66	5,49	12,12	1,90	11,06	4,43	7,84	10,06	17,08	0,70
0,75	2,06	18,84	5,61	11,81	1,82	9,86	4,14	7,15	9,42	15,17	0,75
0,80	2,23	17,02	5,72	11,50	1,73	8,65	3,86	6,45	8,77	13,25	0,80
0,85	2,26	15,59	5,66	11,05	1,64	7,78	3,59	5,86	8,19	11,87	0,85
0,90	2,28	14,16	5,60	10,59	1,54	6,91	3,33	5,26	7,60	10,49	0,90
0,95	2,25	12,99	5,48	10,07	1,40	6,25	3,11	4,81	7,12	9,50	0,95
1,00	2,21	11,82	5,36	9,55	1,25	5,59	2,88	4,35	6,64	8,51	1,00
1,05	2,33	11,91	5,72	9,91	1,25	5,59	2,98	4,37	6,82	8,50	1,05
1,10	2,45	12,00	6,08	10,27	1,24	5,58	3,08	4,39	6,99	8,50	1,10
1,15	2,57	12,08	6,44	10,62	1,24	5,58	3,18	4,41	7,17	8,49	1,15
1,20	2,69	12,17	6,80	10,98	1,24	5,57	3,27	4,43	7,34	8,48	1,20
1,25	2,67	12,20	7,09	11,20	1,20	5,57	3,34	4,44	7,44	8,48	1,25
1,30	2,64	12,22	7,37	11,42	1,17	5,57	3,41	4,45	7,54	8,47	1,30
1,35	2,62	12,25	7,55	11,64	1,14	5,57	3,49	4,46	7,64	8,47	1,35
1,40	2,59	12,28	7,93	11,85	1,11	5,58	3,56	4,47	7,73	8,47	1,40
1,45	2,57	12,31	8,22	12,07	1,09	5,58	3,63	4,48	7,83	8,46	1,45
1,50	2,54	12,33	8,50	12,29	1,06	5,58	3,70	4,49	7,93	8,46	1,50
1,55	2,56	12,35	8,68	12,37	1,04	5,58	3,74	4,49	7,97	8,46	1,55
1,60	2,58	12,36	8,86	12,45	1,01	5,58	3,77	4,49	8,00	8,46	1,60
1,65	2,59	12,38	9,04	12,53	0,99	5,57	3,81	4,49	8,04	8,46	1,65
1,70	2,61	12,39	9,22	12,61	0,97	5,57	3,84	4,49	8,08	8,46	1,70
1,75	2,63	12,41	9,41	12,68	0,95	5,57	3,88	4,50	8,12	8,46	1,75
1,80	2,65	12,42	9,59	12,76	0,93	5,57	3,92	4,50	8,15	8,45	1,80
1,85	2,67	12,44	9,76	12,84	0,91	5,57	3,95	4,50	8,19	8,45	1,85
1,90	2,68	12,45	9,94	12,92	0,88	5,56	3,99	4,50	8,23	8,45	1,90
1,95	2,70	12,47	10,13	13,00	0,86	5,56	4,02	4,50	8,26	8,45	1,95
2,00	2,72	12,48	10,31	13,08	0,84	5,56	4,06	4,50	8,30	8,45	2,00
> 2,00	2,72	12,48	12,50	13,08	0,84	5,56	4,17	4,50	8,33	8,45	> 2,00

Valores extraídos de BARES e adaptada por PINHEIRO (1994)

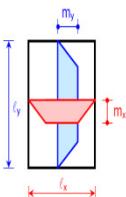
$M = \mu \frac{p \ell^2}{100}$ $p =$ carga uniforme $\ell =$ menor valor entre ℓ_a e ℓ_b

$M_b =$ momento ao longo da borda livre

ANEXO B – Tabelas de CZERNY

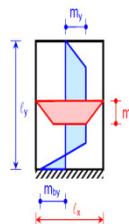
Quatro bordas com apoios simples

l_y/l_x	α_x	α_y	β_x	β_y	α_a
1,00	22,7	22,7			21,4
1,05	20,8	22,5			19,4
1,10	19,3	22,3			17,8
1,15	18,1	22,3			16,5
1,20	16,9	22,3			15,4
1,25	15,9	22,4			14,3
1,30	15,2	22,7			13,6
1,35	14,4	22,9			12,9
1,40	13,8	23,1			12,3
1,45	13,2	23,3			11,7
1,50	12,7	23,5			11,2
1,55	12,3	23,5			10,8
1,60	11,9	23,5			10,4
1,65	11,5	23,5			10,1
1,70	11,2	23,5			9,8
1,75	10,8	23,5			9,5
1,80	10,7	23,5			9,3
1,85	10,4	23,5			9,1
1,90	10,2	23,5			8,9
1,95	10,1	23,5			8,7
2,00	9,9	23,5			8,6
>2	8,0	23,5			6,7



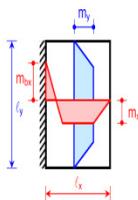
Três bordas com apoios simples e um engaste em l_x

l_y/l_x	α_x	α_y	β_x	β_y	α_a
1,00	32,4	26,5		11,9	31,2
1,05	29,2	25,0		11,3	27,8
1,10	26,1	24,4		10,9	24,7
1,15	23,7	23,9		10,4	22,3
1,20	22,0	23,8		10,1	20,3
1,25	20,2	23,6		9,8	18,7
1,30	19,0	23,7		9,6	17,3
1,35	17,8	23,7		9,3	16,1
1,40	16,6	23,8		9,2	15,1
1,45	15,6	23,9		9,0	14,2
1,50	15,1	24,0		8,9	13,5
1,55	14,3	24,0		8,8	12,8
1,60	13,8	24,0		8,7	12,2
1,65	13,2	24,0		8,6	11,7
1,70	12,8	24,0		8,5	11,2
1,75	12,3	24,0		8,45	10,8
1,80	12,0	24,0		8,4	10,5
1,85	11,5	24,0		8,35	10,1
1,90	11,3	24,0		8,3	9,9
1,95	10,9	24,0		8,25	9,6
2,00	10,8	24,0		8,2	9,4
>2	8,0	24,0		8,0	6,7



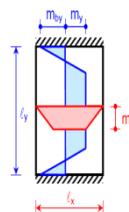
Três bordas com apoios simples e um engaste em l_y

l_y/l_x	α_x	α_y	β_x	β_y	α_a
1,00	26,5	32,4	11,9		31,2
1,05	25,7	33,3	11,3		29,2
1,10	24,4	33,9	10,9		27,4
1,15	23,3	34,5	10,5		26,0
1,20	22,3	34,9	10,2		24,8
1,25	21,4	35,2	9,9		23,8
1,30	20,7	35,4	9,7		22,9
1,35	20,1	37,8	9,4		22,1
1,40	19,7	39,9	9,3		21,5
1,45	19,2	41,1	9,1		20,9
1,50	18,8	42,5	9,0		20,4
1,55	18,3	42,5	8,9		20,0
1,60	17,8	42,5	8,8		19,6
1,65	17,5	42,5	8,7		19,3
1,70	17,2	42,5	8,6		19,0
1,75	17,0	42,5	8,5		18,7
1,80	16,8	42,5	8,4		18,5
1,85	16,5	42,5	8,3		18,3
1,90	16,4	42,5	8,3		18,1
1,95	16,3	42,5	8,3		18,0
2,00	16,2	42,5	8,3		17,8
>2	14,2	42,5	8,0		16,7



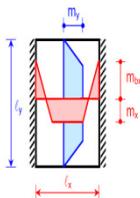
Duas bordas com apoios simples e dois engastes em l_x

l_y/l_x	α_x	α_y	β_x	β_y	α_a
1,00	46,1	31,6		14,3	45,3
1,05	39,9	29,8		13,4	39,2
1,10	36,0	28,8		12,7	34,4
1,15	31,9	27,9		12,0	30,4
1,20	29,0	26,9		11,5	27,2
1,25	26,2	26,1		11,1	24,5
1,30	24,1	25,6		10,7	22,3
1,35	22,1	25,1		10,3	20,4
1,40	20,6	24,8		10,0	18,8
1,45	19,3	24,6		9,75	17,5
1,50	18,1	24,4		9,5	16,3
1,55	17,0	24,3		9,3	15,3
1,60	16,2	24,3		9,2	14,4
1,65	15,4	24,3		9,05	13,7
1,70	14,7	24,3		8,9	13,0
1,75	14,0	24,3		8,8	12,4
1,80	13,5	24,3		8,7	11,9
1,85	13,0	24,3		8,6	11,4
1,90	12,6	24,3		8,5	11,0
1,95	12,1	24,3		8,4	10,6
2,00	11,8	24,3		8,4	10,3
>2	8,0	24,3		8,0	6,7

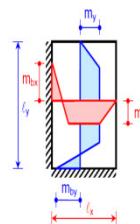


Duas bordas com apoios simples e dois engastes em ℓ_y

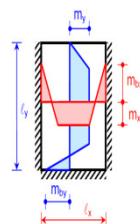
ℓ_x/ℓ_y	α_x	α_y	β_x	β_y	α_a
1.00	31.6	46.1	14.3		45.3
1.05	29.9	46.4	13.8		43.2
1.10	29.0	47.2	13.5		41.5
1.15	28.0	47.7	13.2		40.1
1.20	27.2	48.1	13.0		39.0
1.25	26.4	48.2	12.7		37.9
1.30	25.8	48.1	12.6		37.2
1.35	25.3	47.9	12.4		36.5
1.40	24.8	47.8	12.3		36.0
1.45	24.4	47.7	12.2		35.6
1.50	24.2	47.6	12.2		35.1
1.55	24.0	47.6	12.1		34.7
1.60	24.0	47.6	12.0		34.5
1.65	24.0	47.6	12.0		34.2
1.70	24.0	47.4	12.0		33.9
1.75	24.0	47.3	12.0		33.8
1.80	24.0	47.2	12.0		33.7
1.85	24.0	47.1	12.0		33.6
1.90	24.0	47.1	12.0		33.5
1.95	24.0	47.1	12.0		33.4
2.00	24.0	47.0	12.0		33.3
>2	24.0	47.0	12.0		32.0

Duas bordas com apoios simples, um engaste em ℓ_x e outro em ℓ_y

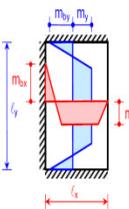
ℓ_x/ℓ_y	α_x	α_y	β_x	β_y	α_a
1.00	34.5	34.5	14.3	14.3	41.3
1.05	32.1	33.7	13.3	13.8	37.1
1.10	30.1	33.9	12.7	13.6	34.5
1.15	28.0	33.9	12.0	13.3	31.7
1.20	26.4	34.0	11.5	13.1	29.9
1.25	24.9	34.4	11.1	12.9	28.2
1.30	23.8	35.0	10.7	12.8	26.8
1.35	23.0	36.6	10.3	12.7	25.5
1.40	22.2	37.8	10.0	12.6	24.5
1.45	21.4	39.1	9.8	12.5	23.5
1.50	20.7	40.2	9.6	12.4	22.7
1.55	20.2	40.2	9.4	12.3	22.1
1.60	19.7	40.2	9.2	12.3	21.5
1.65	19.2	40.2	9.1	12.2	21.0
1.70	18.8	40.2	8.9	12.2	20.5
1.75	18.4	40.2	8.8	12.2	20.1
1.80	18.1	40.2	8.7	12.2	19.7
1.85	17.8	40.2	8.6	12.2	19.4
1.90	17.5	40.2	8.5	12.2	19.0
1.95	17.2	40.2	8.4	12.2	18.8
2.00	17.1	40.2	8.4	12.2	18.5
>2	14.2	40.2	8.0	12.0	16.7

Três bordas engastadas e um apoio simples em ℓ_x

ℓ_x/ℓ_y	α_x	α_y	β_x	β_y	α_a
1.00	38.1	44.6	16.2	18.3	55.4
1.05	35.5	44.8	15.3	17.9	51.6
1.10	33.7	45.7	14.8	17.7	48.7
1.15	32.0	47.1	14.2	17.6	46.1
1.20	30.7	47.8	13.9	17.5	44.1
1.25	29.5	47.7	13.5	17.5	42.5
1.30	28.4	47.7	13.2	17.5	41.2
1.35	27.6	47.9	12.9	17.5	39.9
1.40	26.8	48.1	12.7	17.5	38.9
1.45	26.2	48.3	12.6	17.5	38.0
1.50	25.7	48.7	12.5	17.5	37.2
1.55	25.2	49.0	12.4	17.5	36.5
1.60	24.8	49.4	12.3	17.5	36.0
1.65	24.5	49.8	12.2	17.5	35.4
1.70	24.2	50.2	12.2	17.5	35.0
1.75	24.0	50.7	12.1	17.5	34.6
1.80	24.0	51.3	12.1	17.5	34.4
1.85	24.0	52.0	12.0	17.5	34.2
1.90	24.0	52.6	12.0	17.5	33.9
1.95	24.0	53.4	12.0	17.5	33.8
2.00	24.0	54.1	12.0	17.5	33.7
>2	24.0	54.0	12.0	17.5	32.0

Três bordas engastadas e um apoio simples em ℓ_y

ℓ_x/ℓ_y	α_x	α_y	β_x	β_y	α_a
1.00	44.6	38.1	18.3	16.2	55.4
1.05	41.7	37.3	16.6	15.4	49.1
1.10	38.1	36.7	15.4	14.6	44.1
1.15	34.9	36.4	14.4	14.3	40.1
1.20	32.1	36.2	13.5	13.9	36.7
1.25	29.8	36.1	12.7	13.5	33.8
1.30	28.0	36.2	12.2	13.3	31.7
1.35	26.4	36.6	11.6	13.1	29.7
1.40	25.2	37.0	11.2	13.0	28.1
1.45	24.0	37.5	10.9	12.8	26.6
1.50	23.1	38.3	10.6	12.7	25.5
1.55	22.3	39.3	10.3	12.6	24.5
1.60	21.7	40.3	10.1	12.6	23.6
1.65	21.1	41.4	9.9	12.5	22.8
1.70	20.4	42.7	9.7	12.5	22.1
1.75	20.0	43.8	9.5	12.4	21.5
1.80	19.5	44.8	9.4	12.4	21.0
1.85	19.1	45.9	9.2	12.3	20.5
1.90	18.7	46.7	9.0	12.3	20.1
1.95	18.4	47.7	8.9	12.3	19.7
2.00	18.0	48.6	8.8	12.3	19.3
>2	14.2	48.6	8.0	12.0	16.7



Quatro bordas engastadas

l_y/l_x	α_x	α_y	β_x	β_y	α_3
1,00	47,3	47,3	19,4	19,4	68,5
1,05	43,1	47,3	18,2	18,8	62,4
1,10	40,0	47,8	17,1	18,4	57,6
1,15	37,3	48,3	16,3	18,1	53,4
1,20	35,2	49,3	15,5	17,9	50,3
1,25	33,4	50,5	14,9	17,7	47,6
1,30	31,8	51,7	14,5	17,6	45,3
1,35	30,7	53,3	14,0	17,5	43,4
1,40	29,6	54,8	13,7	17,5	42,0
1,45	28,6	56,4	13,4	17,5	40,5
1,50	27,8	57,3	13,2	17,5	39,5
1,55	27,2	57,6	13,0	17,5	38,4
1,60	26,6	57,8	12,8	17,5	37,6
1,65	26,1	57,9	12,7	17,5	36,9
1,70	25,5	57,8	12,5	17,5	36,3
1,75	25,1	57,7	12,4	17,5	35,8
1,80	24,8	57,6	12,3	17,5	35,4
1,85	24,5	57,5	12,2	17,5	35,1
1,90	24,2	57,4	12,1	17,5	34,7
1,95	24,0	57,2	12,0	17,5	33,8
2,00	24,0	57,1	12,0	17,5	34,5
>2	24,0	57,0	12,0	17,5	34,3

